

Zadanie 1

Wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennej losowej $N(0, 1)$ używając zmiennych $U(0, 1)$ oraz

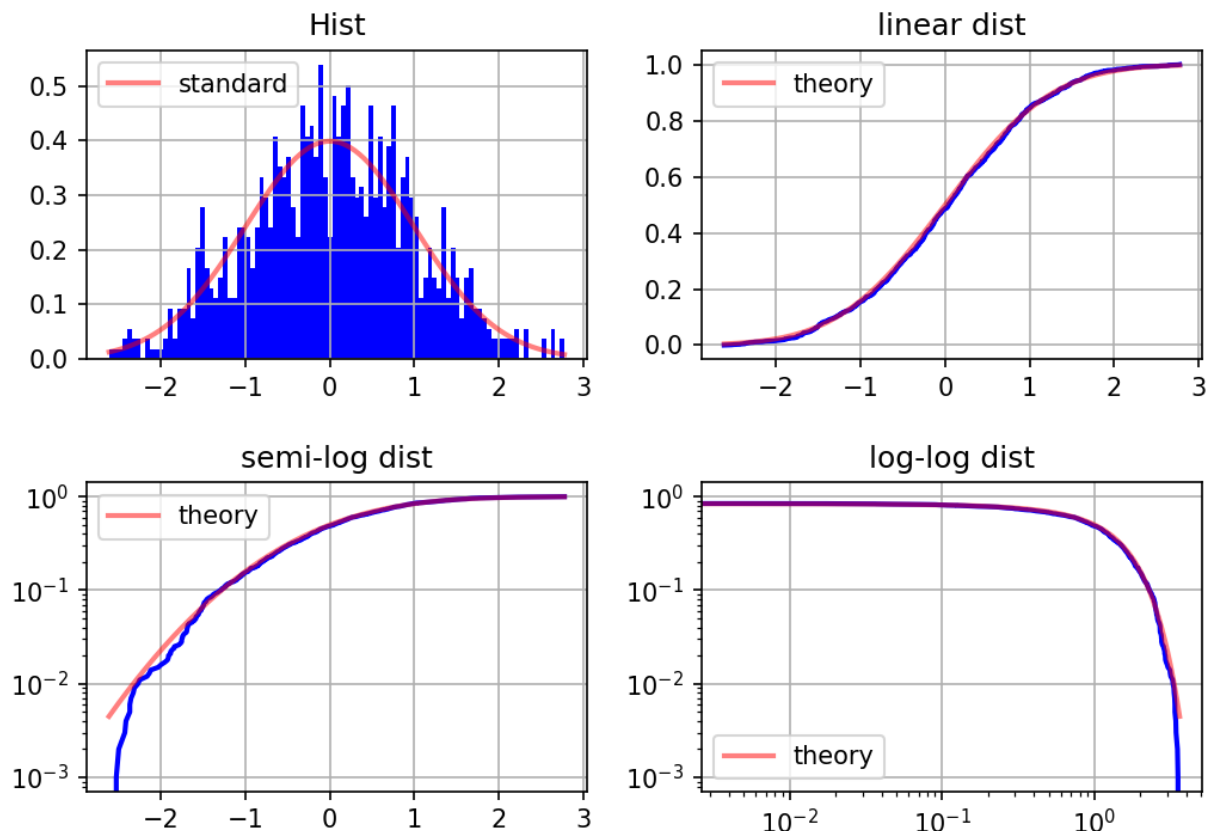
- (a) regułę tuzina ('rule of the dozen'),
- (b) metodę odwrócenia dystrybucyjności ('inverse transform'),
- (c) metodę Boxa-Mullera.

Następnie narysuj (wskazówki w pliku Ogony.pdf):

- i) histogramy,
- ii) empiryczne dystrybucyjności w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej, oraz porównaj z rozkładem $N(0, 1)$.

Rozwiązanie:*a) reguła tuzina*

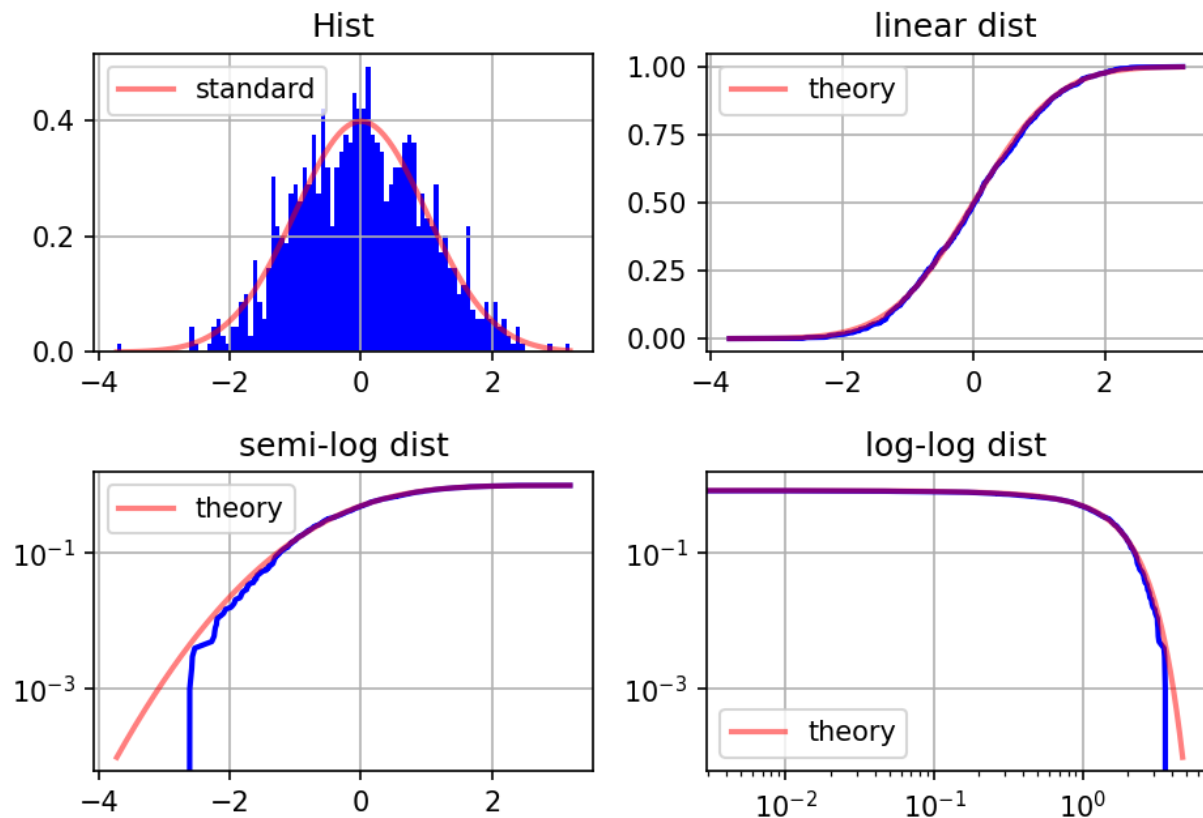
Wyznaczenie polegało na obliczeniu sumy 12 losowych liczb z przedziału (0:1) i odjęciu od niej średniej rozkładu jednostajnego (w tym wypadku równe 6) powstało 1000 próbek rozkładu normalnego. Poniżej wykres histogramu oraz empiryczne dystrybucyjności w skali liniowej, semi-logarytmicznej i podwójnie logarytmicznej:



b) metoda odwracania dystrybuanty

1000 próbek stworzone za pomocą odwracania dystrybuanty 1000 próbek rozkładu jednostajnego (0,1) posortowane, użyta została funkcja w pythonie `ndtri(value)`;
Wynikowe wykresy:

Inverse Transform



c) metoda Boxa-Mullera

za pomocą metody Boxa-Mullera utworzone zostały dwa skorelowane ze sobą zbiory próbek z rozkładem normalnym:

$$Z_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2)$$

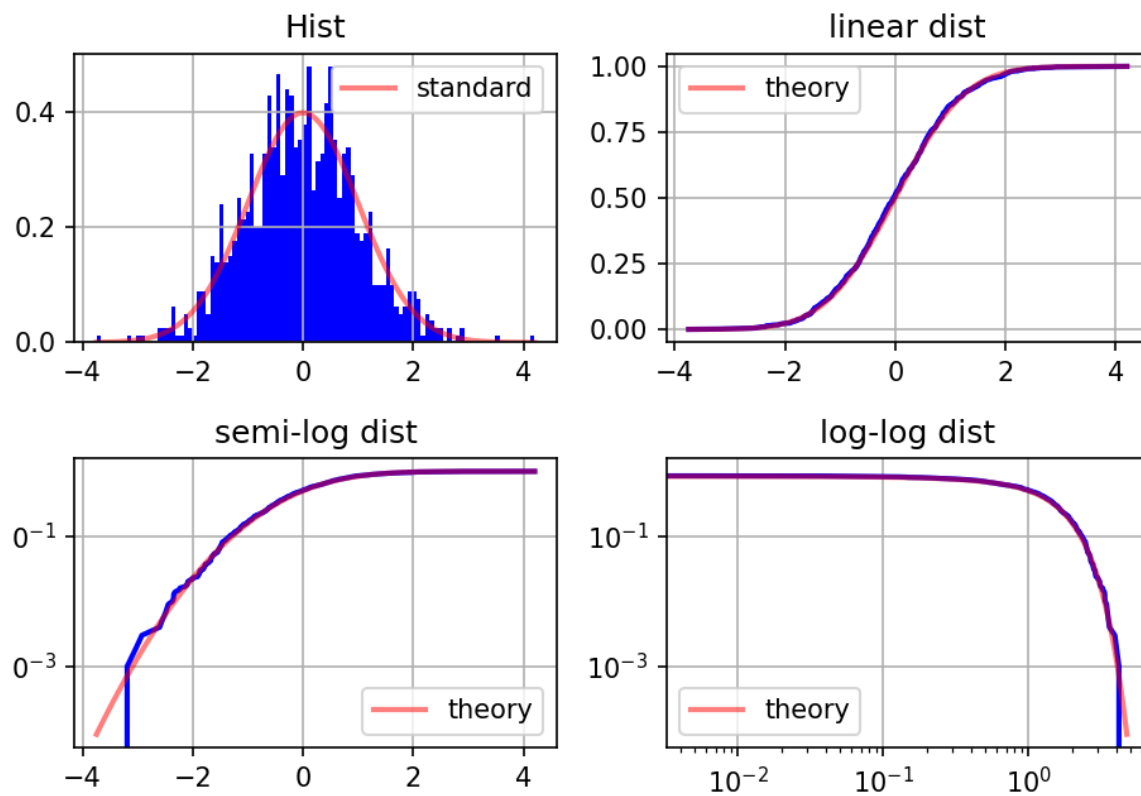
$$Z_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

$$X = [Z_1, Z_2]$$

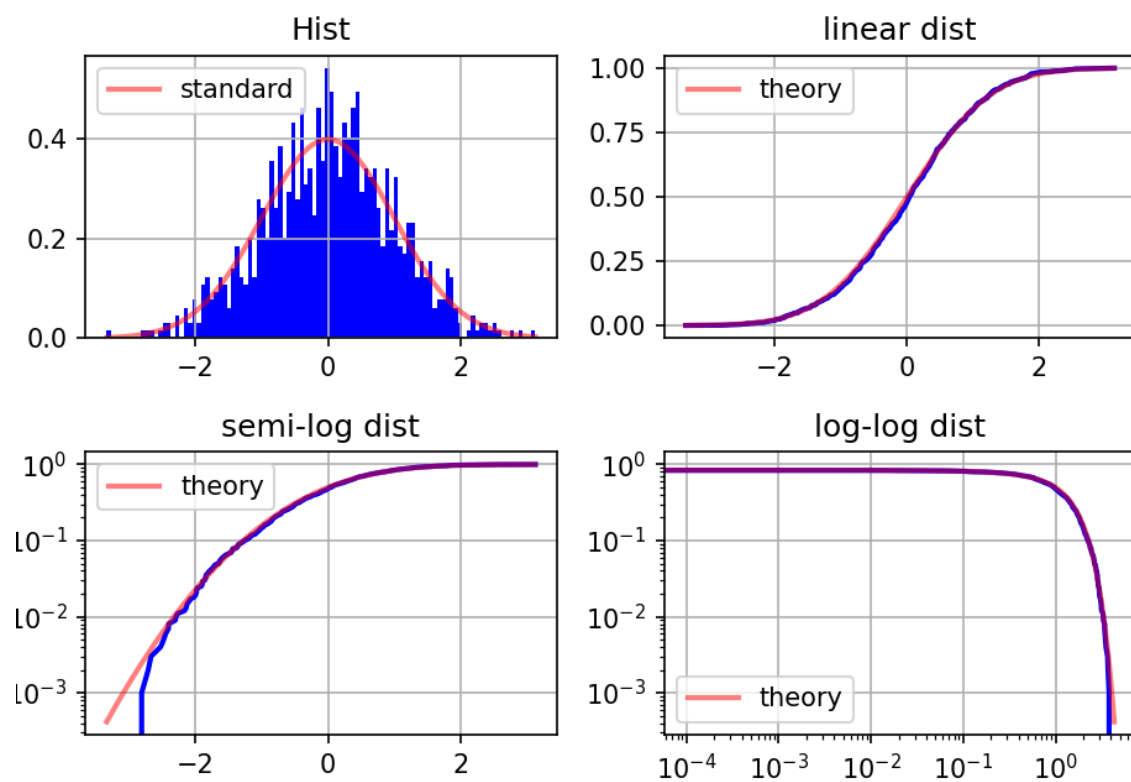
,gdzie $U_1, U_2 \sim \mathbb{U}(0, 1)$

Wykresy dla obu zbiorów wyglądają następująco:

Box-Muller set1



Box-Muller set2



Zadanie 2

Korzystając z 1000 elementowej próbki $U(0, 1)$, wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennych losowych (odwrotną dystrybucję rozkładu wbudowaną w pakiet Matlab/Python możesz wykorzystać jedynie do generowania rozkładu normalnego):

- (a) log normalnej,
- (b) Pareto,
- (c) wykładniczej. Następnie narysuj:
 - i) histogramy,
 - ii) empiryczne dystrybuanty w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej.

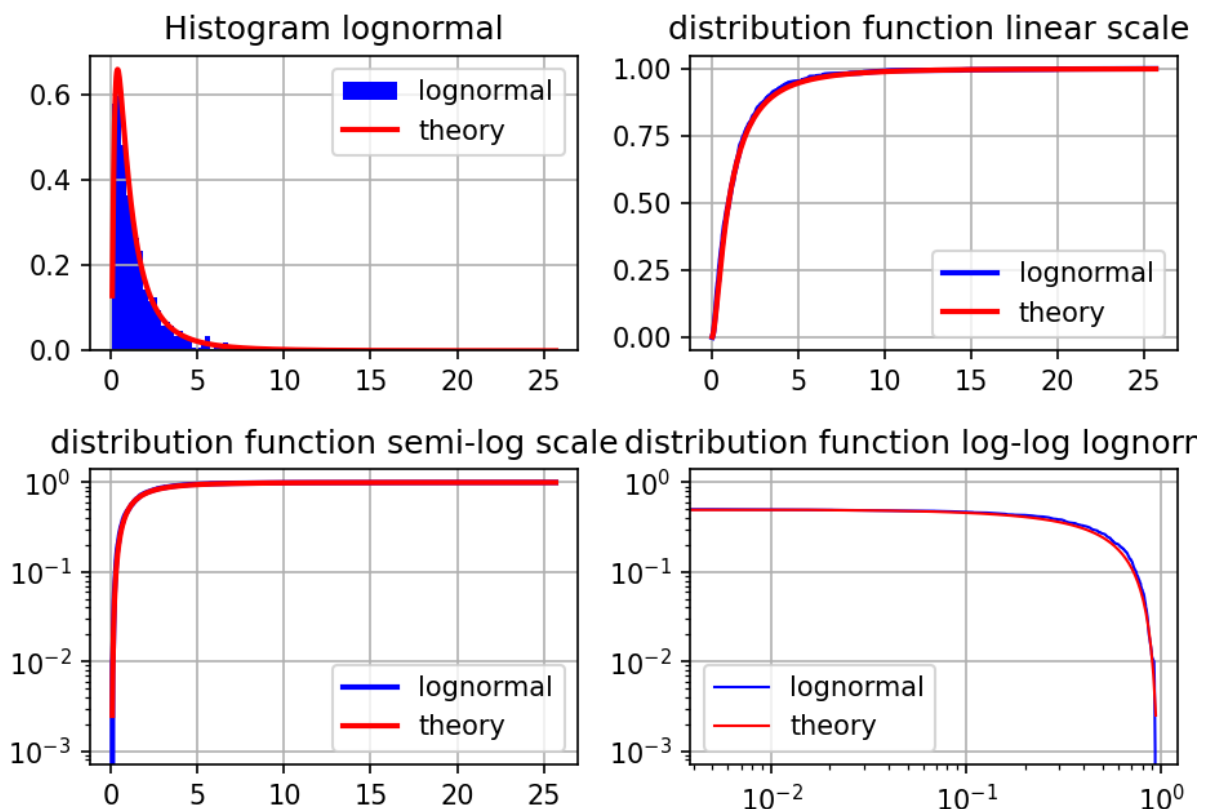
Rozwiązanie:

a) log normalnej

wzór użyty został $Y = e^X, X \sim N(\mu, \sigma^2)$

użyłem funkcji `ndtri(x)` do wyznaczenia X z $U(0,1)$, która odtwarza x według krzywej Gaussa. wykresy wyglądają następująco:

lognormal



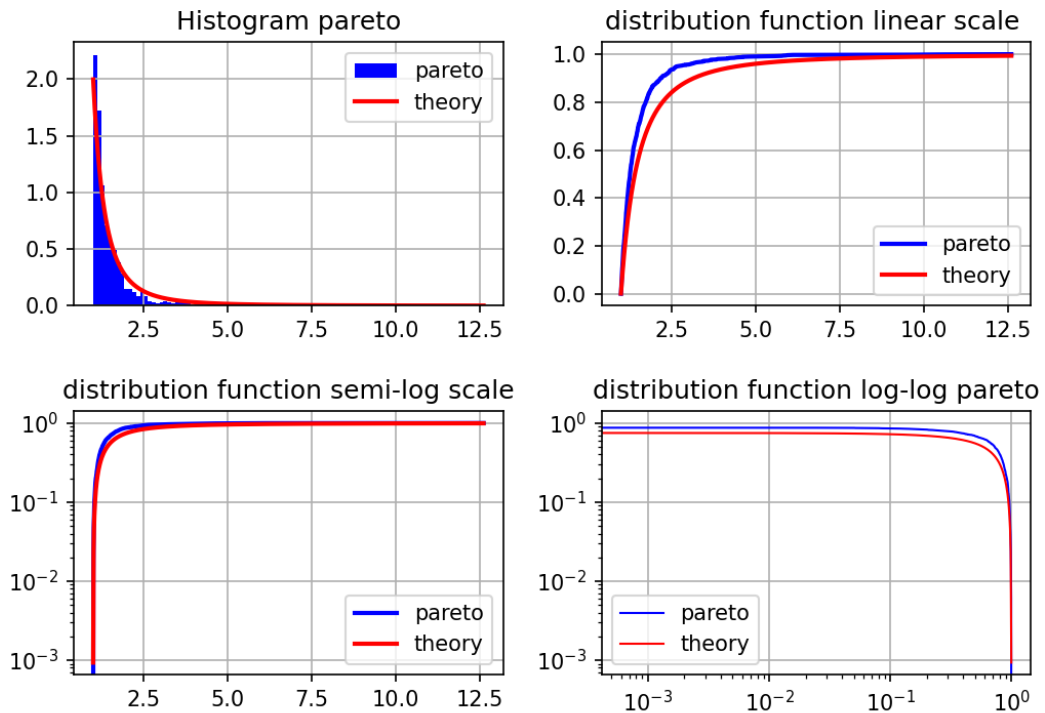
b) pareto

wzór na wyliczenie zmiennych losowych metodą pareto:

$$Y = \lambda U^{\frac{-1}{\alpha}} \sim \text{Pareto}(\lambda, \alpha)$$

, gdzie $\lambda = 1$ a $\alpha = 3$

czyli parametry dla rozkładu normalnego



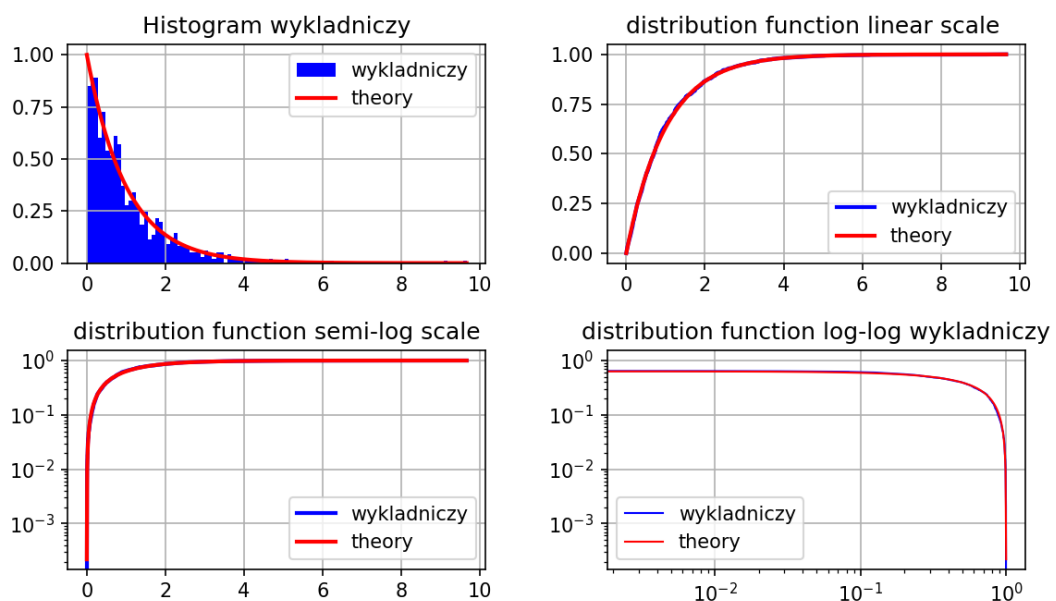
c)wykładniczy

Skorzystano ze wzoru:

$$Y = -\frac{1}{\beta} \log(U) \sim \text{Exp}(\beta)$$

z Beta = 1

Wynikowe wykresy wyglądają następująco:



Zadanie 3

Korzystając z 1000 zmiennych $U(0, 1)$ i metody MC oblicz przybliżoną wartość całki z funkcji $f(x) = x^2 + x$ na przedziale $[1, 3]$. Wyznacz 95% przedziały ufności (CI) otrzymanej aproksymacji całki. Jaki jest dokładny wynik całkowania?

Rozwiązanie:

Definite integral

$$\int_1^3 (x^2 + x) dx = \frac{38}{3} \approx 12.667$$

Korzystając z programu Wolfram alpha obliczona została całka dla przedziału $[1,3]$. Program polega na stworzeniu 1000 zmiennych losowych zakresu $x [1,3]$ i 1000 zmiennych losowych z zakresu $y [0,12]$ (y_{max}) i policzenie 1000 pól prostokątów, jeśli wysokość prostokąta była większa niż losowy y , to prostokąt wrzucany był do tablicy tych prostokątów mieszczących się pod funkcją. Następnie ich stosunek pomnożony przez maksymalny prostokąt dawał nam wynik przybliżonej całki.

13.007298322496137
11.825711060178069 13.903552712719975

Rys. Zrzut ekranu obrazujący przykładowy wynik przybliżona całka i przedziały ufności.

Przedziały ufności dla estymatora obliczone zostały za pomocą danego wzoru

$$CI = \left[\hat{Y} - 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{1000}}, \hat{Y} + 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{1000}} \right]$$

$$\hat{Y} = \text{mean}(Y)$$

$$\hat{\sigma} = \text{std}(Y)$$

$\text{mean}()$ == średnia

$\text{std}()$ == odchylenie standardowe

Y = zbiór wartości funkcji $X^2 + X$

Podsumowując, metoda Monte Carlo odpowiednio przybliżyła całkę, wynik znajduje się w połowie zakresu ufności.

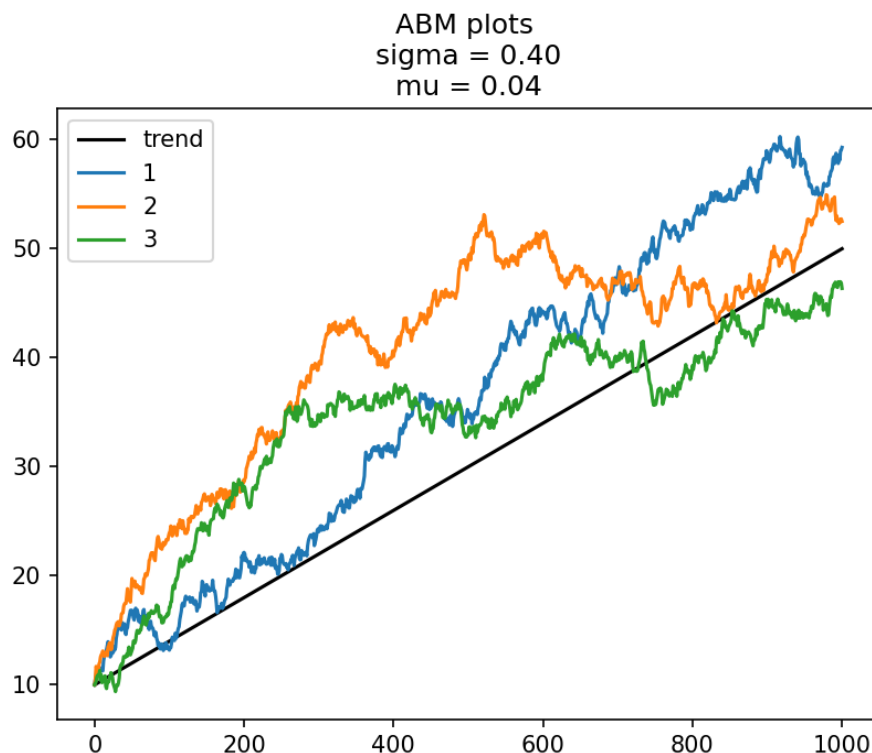
Zadanie 4

Wygeneruj 3 niezależne trajektorie arytmetycznego ruchu Browna (ABM): $dX = \mu dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu dt$.

Rozwiązanie:

```
data = [value0]
for i in range(1000):
    start = data[i] + dt*mu + sigma*np.random.normal(0, dt)
```

Za pomocą obliczenia kolejnych punktów trajektorii do różnicy dodając wcześniejszą wartość otrzymujemy podany wykres z trzema próbami:



Wniosek:

Arytmetyczny ruch Browna tworzy trajektorię prowadzoną wzdłuż trendu, każde wykonanie jest inne, zazwyczaj wartości na początku mają za dużą różnicę, ale potem utrzymują tempo wzrostu trendu

Zadanie 5

Wygeneruj 3 niezależne trajektorie geometrycznego ruchu Browna (GBM): $dX = \mu X dt + \sigma X dB$.

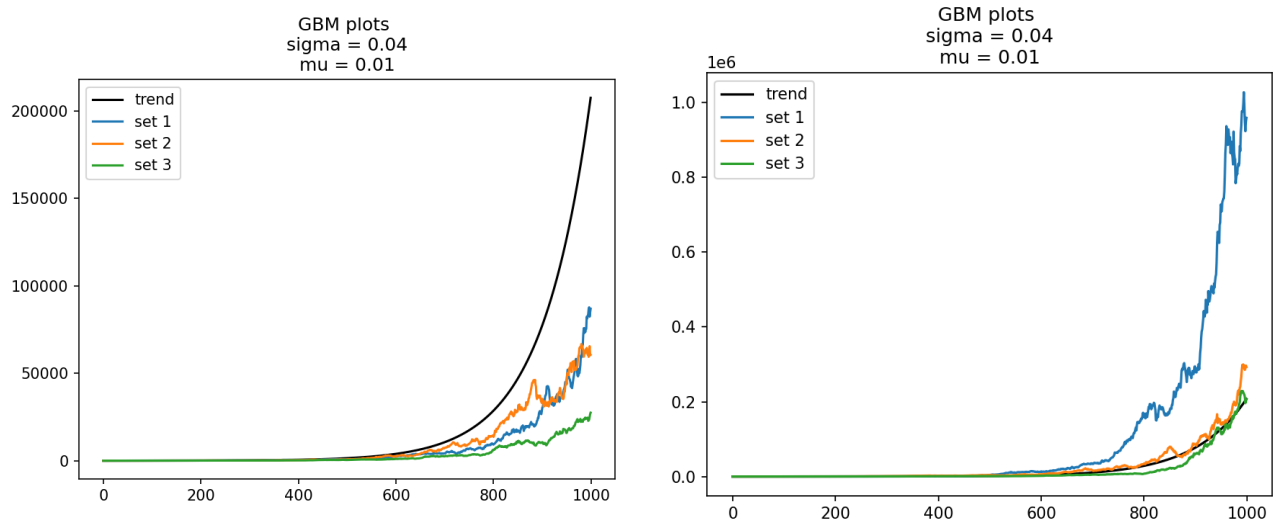
Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.01$, $\sigma = 0.04$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu X dt$.

Rozwiązanie:

Podobnie jak w poprzednim zadaniu

```
data.append(data[i] + dt*mu*data[i] + sigma*np.random.normal(0, dt)*data[i])
```

Do różnicy według GBM dodawana jest poprzednia wartość, co generują nam trajektorie według GBM:



Powyżej dołączone zostały 2 wywołania programu przedstawiające 3 trajektorie według GBM, można zauważyć, że im większa wartość różnicy, tym większa różnica co do trendu. Każde wywołanie funkcji rysuje inny wykres, zdarzają się też takie bardzo zbliżone do trendu. (prawy wykres)

Zadanie 6

Dla wartości indeksu DJIA policz zwroty logarytmiczne $z_t = \ln(x_t+1/x_t)$. Następnie dla zwrotów narysuj:

- histogram,
- empiryczną dystrybucję w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej, oraz porównaj z rozkładem normalnym o średniej i wariancji wyestymowanych z danych.

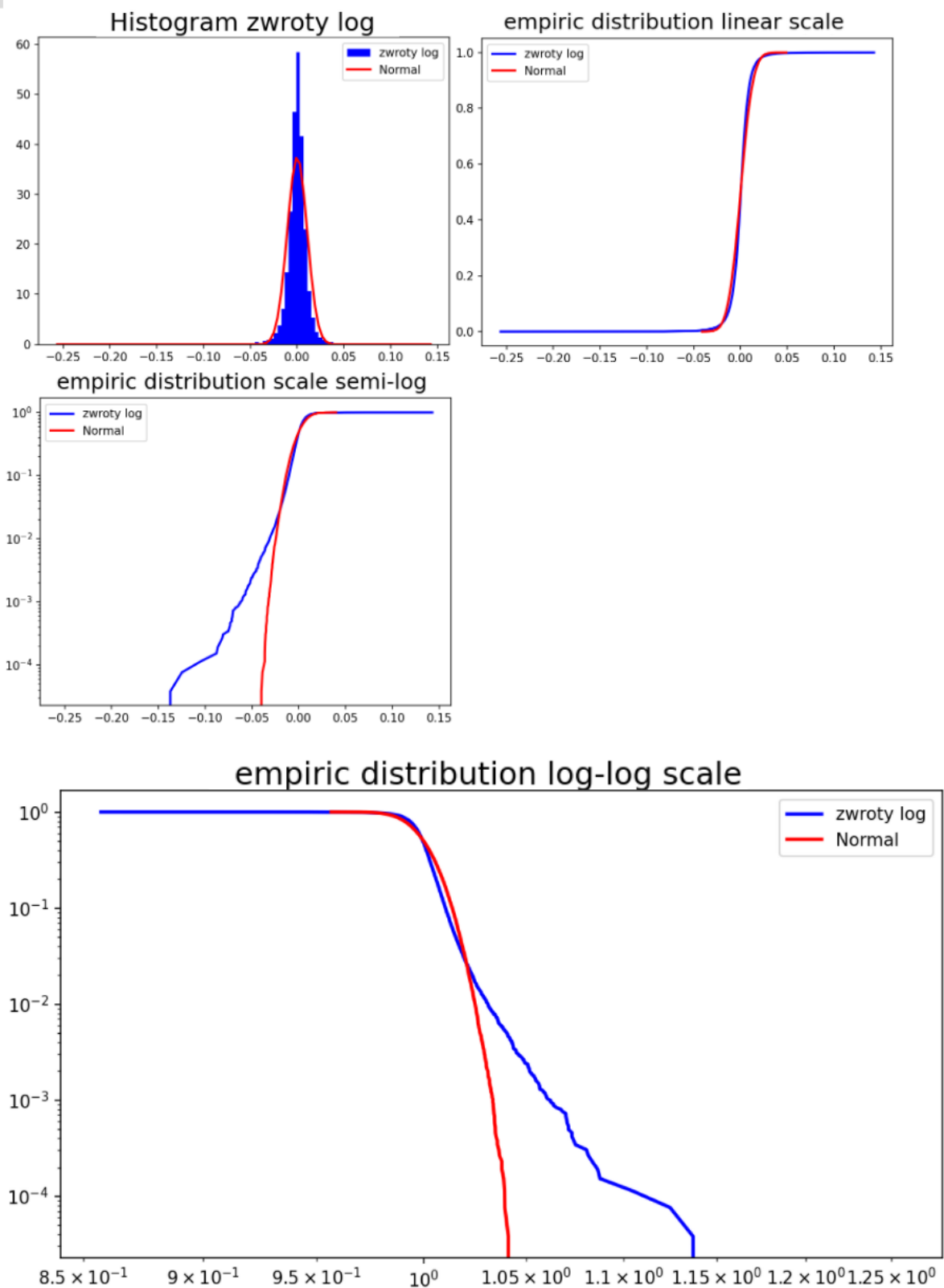
Rozwiązanie:

Program początkowo liczy zwroty logarytmiczne, oblicza ich średnią i wariancję z wyestymowanych danych i rysuje histogram i empiryczną dystrybucję porównując do rozkładu normalnego o średniej i wariancji obliczonej na początku.

```
av = np.average(z1)
var = np.var(z1)
print(var, av)
plots(z1, av, var, 'zwroty log')
```



```
PS C:\Users\dlra\PycharmProjects\modelowaniestochastyczne\lista1> python ddzad6.py
0.00011329320672807495 0.0001793069622043652
```



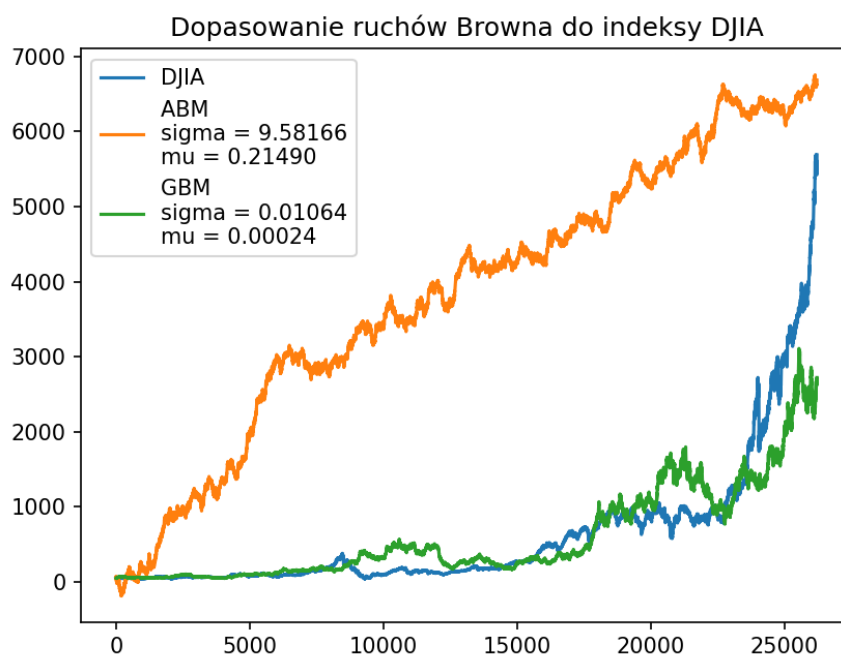
Wniosek. Widoczne odchylenia i zaburzenia dopiero podczas logarytmicznych skal

Zadanie 7

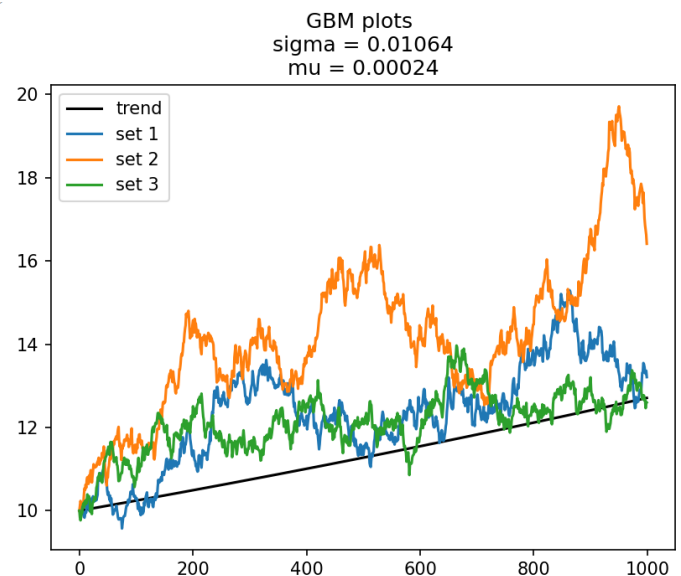
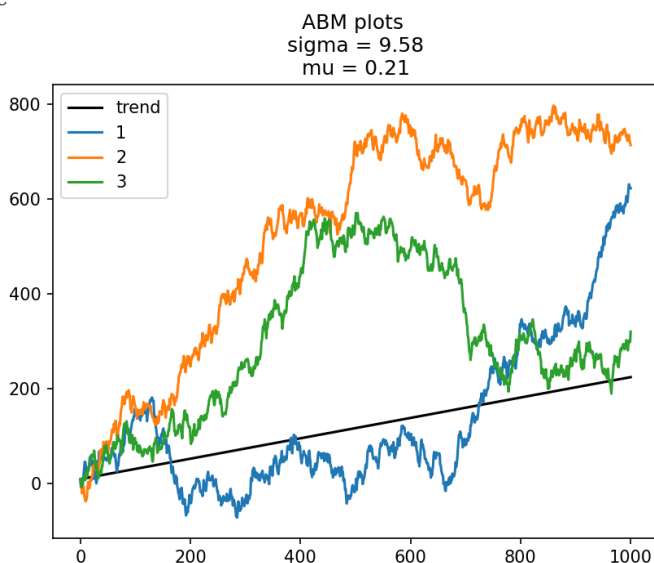
Dopasuj ABM do różnic szeregu, tj. $z_t = x_{t+1} - x_t$, i GBM do zwrotów (przyrostów logarytmicznych) indeksu DJIA. Powtórz zad. 4 i 5 dla tak wyestymowanych μ i σ . Przyjmij $dt = 1$. Zilustruj przykładowe realizacje dopasowanych ruchów Browna i porównaj je z historią indeksu DJIA (podobnie jak na slajdach dla indeksu S&P500).

Dopasowanie ABM i GBM do odpowiednio różnic szeregu i przyrostów logarytmicznych otrzymaliśmy następujące wykresy porównane z wykresem historii indeksu DJIA

	GBM	ABM:
sigma =	0.01064	9.58166
mu =	0.00024	0.21490



Następnie wyznaczone wartości sigma i mu wprowadzone zostały do algorytmu z zadania 4 i 5. Oto wywołanie:



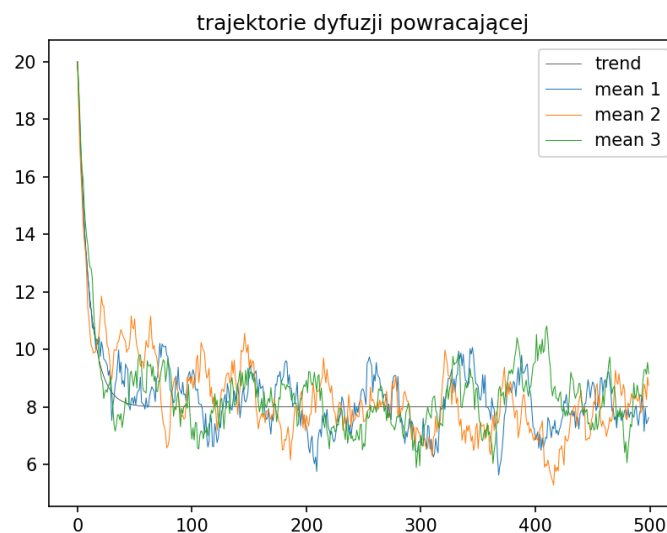
Zadanie 8

Wygeneruj 3 niezależne trajektorie dyfuzji powracającej do średniej: $dX = \alpha(\beta - X)dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 20$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 8$, $\sigma = 0.4$. Jaki jest poziom powracania do średniej? Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \alpha(\beta - X)dt$.

Rozwiązanie:

```
data = [20]
for i in range(1,size):
    data.append(data[i-1] +(alfa*(beta - data[i-1]) + sigma*np.random.normal(0, dt)))
return np.array(data)
```

Zastosowany wzór pozwolił stworzyć zbiór danych dla trajektorii dyfuzji powracającej do średniej, wykres wraz z trendem:



Wniosek:

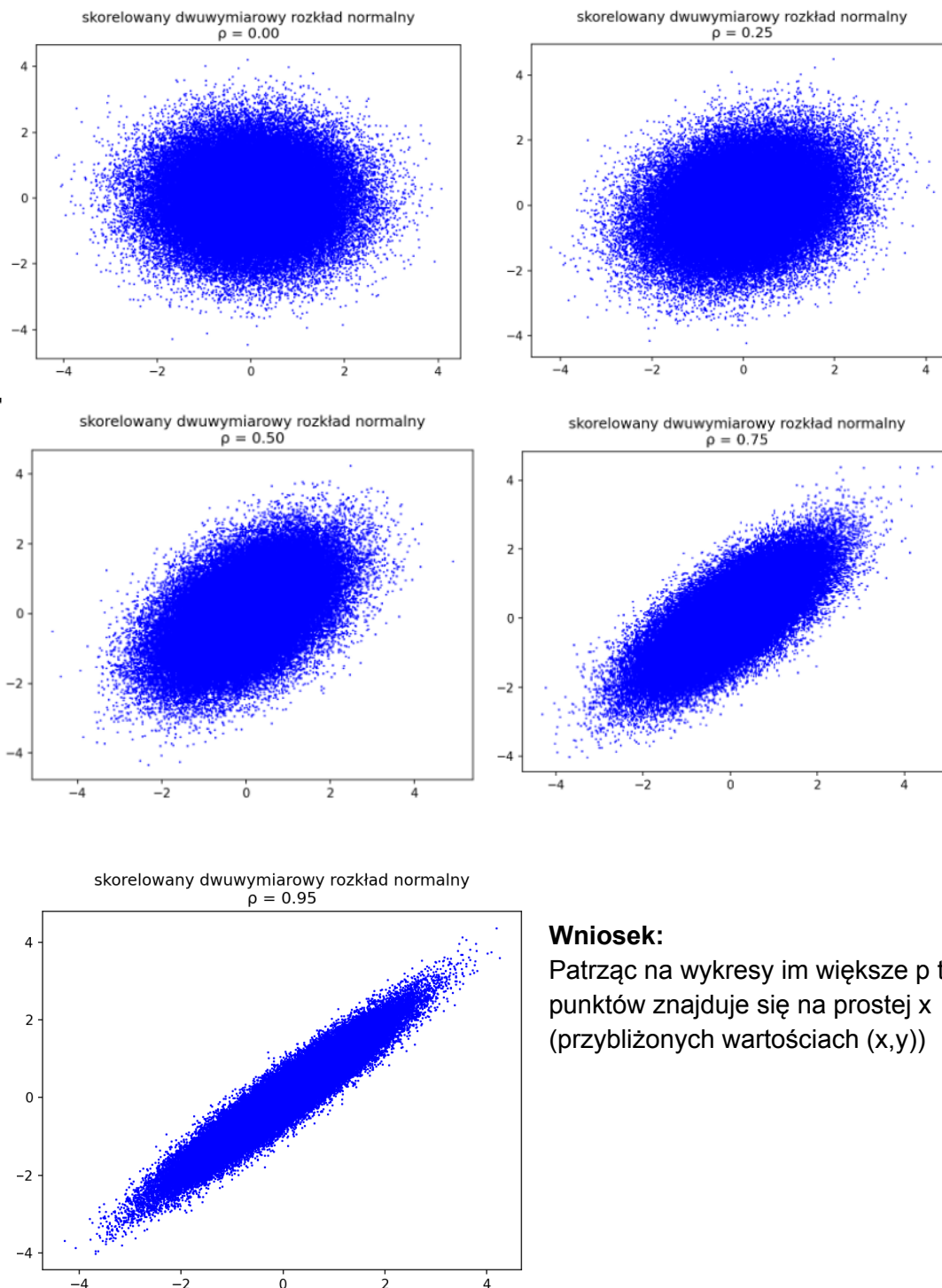
Widoczna jest oscylacja powracająca do trendu na poziomie wartości 8 na 3 podejściach.

Zadanie 9

Wygeneruj 10^5 elementowe skorelowane próbki o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym z macierzą kowariancji $\Sigma = [1, \rho; \rho, 1]$ dla $\rho = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95$. Narysuj scatterplot, np. w Matlabie `plot(x,y,'.')`. Jaki wpływ na otrzymany kształt ma ρ ?

Rozwiązanie:

Wykresy powstałe podczas tworzenia 100000 próbek skorelowanych o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym z macierzą kowariancji $[1, \rho; \rho, 1]$ dla zmiennego $\rho = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95]$ prezentują się następująco:



Wniosek:

Patrząc na wykresy im większe ρ tym więcej punktów znajduje się na prostej x (przybliżonych wartościach (x,y))

Zadanie 10

Wygeneruj 2 zależne trajektorie ABM: $dX = \mu dt + \sigma dB$,
z macierzą kowariancji przyrostów dB postaci $\varsigma = [1, \rho; \rho, 1]$.
Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$,
 $\rho = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95\}$. Narysuj je na jednym wykresie.

Rozwiązanie

Przedstawiona została grupa wykresów, która przedstawia zależne trajektorie w zależności od współczynnika ρ

Widać, że im większy współczynnik ρ tym bardziej niestabilne i zróżnicowane są trajektorie (patrz dla $\rho = 0.95$)

