Corso di Laurea a Distanza in Ingegneria Elettrica
Corso di Comunicazioni Elettriche

Analisi dei segnali

A.A. 2004-05

Alberto Perotti

DELEN-DAUIN

Segnali continui e discreti

- Un **segnale tempo-continuo** è rappresentato con una funzione reale o complessa del tempo $x(t)$, definita su un intervallo $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$.
- Un **segnale tempo-discreto** è rappresentato con una funzione reale o complessa di indice $x[n]$, definita su un intervallo $[n_1, n_2] \subseteq \mathbb{Z}$.
- In seguito, considereremo segnali continui nel tempo.

Segnali periodici

- Un segnale tempo-continuo si dice **periodico** se esiste un valore $T \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$x(t) = x(t+T) \qquad (*)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

- Il minimo valore positivo di T per cui vale la (*) è chiamato **periodo del segnale**.

L'impulso ideale

- Un segnale di notevole interesse è l'**impulso ideale**, o **funzione *delta* di Dirac**:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \text{indefinita}, & t = 0 \end{cases}$$

- Proprietà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) = 1$$

Sviluppo in serie di segnali periodici

- Sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo T.
- Tale segnale può essere espresso in serie di Fourier come

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n \, e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

dove i coefficienti μ_n sono dati dalla seguente relazione

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi\frac{n}{T}t} dt$$

Trasformata di Fourier

- Dato il segnale $x(t)$, si definisce la **trasformata di Fourier** del segnale come

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- e si indica con $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$
- La **trasformata inversa** è definita nel seguente modo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

e si indica con $x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)]$

Trasformata di Fourier – proprietà (I)

- Dato il segnale $y(t) = x(-t)$, la sua trasformata di Fourier vale
$$Y(f) = X(-f)$$
- Dato il segnale $y(t) = x^*(t)$, la sua trasformata di Fourier vale
$$Y(f) = X^*(-f)$$
- Dato il segnale $z(t) = ax(t) + by(t)$, la sua trasformata di Fourier vale
$$Z(f) = aX(f) + bY(f)$$

Trasformata di Fourier – proprietà (II)

- Dato il segnale $y(t) = x(t - \theta)$, la sua trasformata di Fourier vale
$$Y(f) = X(f)e^{-j2\pi f\theta}$$
- Dato il segnale $y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t}$, la sua trasformata di Fourier vale
$$Y(f) = X(f - f_0)$$
- Dato il segnale $x(t)$, con trasformata di Fourier $X(f)$, si ha
$$\mathcal{F}^{-1}[x(-f)] = X(t)$$

Trasformata di Fourier – proprietà (III)

- Parità
  - Sia $x(t)$ un segnale reale.
  - Valgono le seguenti proprietà:
    - $\mathrm{Re}\{X(f)\}$ è pari, cioè $\mathrm{Re}\{X(f)\} = \mathrm{Re}\{X(-f)\}$
    - $\mathrm{Im}\{X(f)\}$ è dispari, cioè $\mathrm{Im}\{X(f)\} = -\mathrm{Im}\{X(-f)\}$
    - $|X(f)|$ è pari
    - $\arg\{X(f)\}$ è dispari

Trasformata di Fourier – proprietà (IV)

- Convoluzione
  - Sia

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

  - Allora

$$Z(f) = X(f)Y(f)$$

Trasformata di Fourier – esempi (I)

- Dato il segnale $x(t)$ = A $p_{T_0}(t)$, la porta simmetrica di durata T_0, si calcola la sua trasformata di Fourier applicando la definizione:

$$
\begin{aligned}
X(f) &= A\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j2\pi ft}dt \\
&= A\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi ft)dt - jA\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi ft)dt \\
&= A\frac{\sin(\pi f T_0)}{\pi f}
\end{aligned}
$$

Trasformata di Fourier – esempi (II)

- Dato il segnale $x(t) = \delta(t)$, la sua trasformata di Fourier vale

$$X(f) = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

- Infatti

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= e^{-j2\pi ft}|_{t=0} = 1
\end{aligned}
$$

Trasformata di Fourier – esempi (III)

- Dato il segnale $x(t) = \sum_i \delta(t - iT)$ (treno di delta) la sua trasformata di Fourier vale

$$X(f) = \frac{1}{T}\sum_i \delta(f - i/T)$$

- Si tratta di un segnale periodico, quindi lo **spettro** è **a righe**, cioè è costituito da una sommatoria di impulsi.
- Infatti, calcolando i coefficenti della *serie* di Fourier, si ottiene

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{T}$$

Trasformata di Fourier – esempi (IV)

- Dato il segnale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ la sua trasformata di Fourier vale

$$X(f) = \frac{A}{2}[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

- Calcoliamo i coefficenti della *serie* di Fourier:

$$\mu_1 = \mu_{-1} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 t)e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{A}{2}$$

$$\mu_i = 0, \forall i \neq \pm 1$$

Trasformata di Fourier – esempi (V)

- Dato il segnale $x(t)$ = A sin(2 πf_0 t) la sua trasformata di Fourier vale

$$X(f) = \frac{A}{2}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

- Calcoliamo i coefficenti della *serie* di Fourier:

$$\mu_1 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{A}{2}$$

$$\mu_{-1} = -\mu_1$$

$$\mu_i = 0, \forall i \neq \pm 1$$

Spettro di segnali periodici

- Lo spettro di un segnale periodico è **a righe**, cioè è costituito da una sommatoria di impulsi ideali.
- Infatti, trasformando la serie di Fourier di un segnale periodico $x(t)$, si ottiene

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n \, \delta(f - n/T)$$

Energia di un segnale

- L'energia di un segnale definito su un intervallo $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$ è definita come

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

- Se l'integrale converge, il segnale è **a energia finita**.

Energia di un segnale (cont.)

- Se $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ è la trasformata di Fourier di $x(t)$, allora vale la seguente relazione (**uguaglianza di Parseval**):

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Potenza media di un segnale

- Per segnali ad energia infinita (ad esempio, segnali periodici), si adotta la seguente definizione di **potenza media**:

$$P_x = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |x(t)|^2 dt$$

- Per segnali periodici si ha

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

dove T è il periodo del segnale.

Spettro di energia

- Per segnali ad energia finita si adotta la seguente definizione di **spettro di energia**:

$$S_x(f) = |X(f)|^2$$

- Applicando l'uguaglianza di Parseval, l'energia del segnale può essere ottenuta come

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

Funzione di autocorrelazione

- La funzione di autocorrelazione è definita come

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(t)dt$$

- È possibile dimostrare che

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[S_x(f)\right]$$

Spettro di potenza

- Per segnali ad energia infinita e potenza media finita si definisce lo spettro di potenza $G_x(f)$, funzione con la seguente proprietà:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)df$$

- La funzione $$G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mu_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$ soddisfa questa condizione.

Sistemi lineari tempo-invarianti

- Un sistema lineare tempo-invariante (LTI) è un sistema che opera una trasformazione M del segnale in ingresso $x(t)$:

$$y(t) = M[x(t)]$$

  dove $y(t)$ indica il segnale d'usicta del sistema.
- Linearità:

$$M[ax_1(t) + bx_2(t)] = aM[x_1(t)] + bM[x_2(t)]$$

- Tempo-invarianza:

$$M[x(t)] = y(t) \iff M[x(t-\tau)] = y(t-\tau)$$

Sistemi lineari tempo-invarianti (cont.)

- Un sistema lineare tempo-invariante (LTI) è caratterizzato dalla sua **risposta all'impulso** $h(t)$, funzione che descrive il comportamento nel dominio del tempo del sistema:

$$h(t) = M[\delta(t)]$$

  dove M indica la trasformazione operata dal sistema.
- Si tratta dell'uscita del sistema in corrispondenza ad un ingresso $x(t) = \delta(t)$.

Sistemi lineari tempo-invarianti (cont.)

- Alternativamente, un sistema lineare tempo-invariante (LTI) può essere caratterizzato dalla sua **funzione di trasferimento**

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$$

che descrive il comportamento nel dominio della frequenza.

- Significato: se l'ingresso è un segnale monocromatico, cioè una sinusiode complessa a frequenza f_0:
$x(t) = \exp(j\,2\,\pi f_0\,t)$, l'uscita vale
$y(t) = H(f_0)\exp(j\,2\,\pi f_0\,t)$

Sistemi lineari tempo-invarianti (cont.)

- La risposta del sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$ ad un ingresso $x(t)$ sono le seguenti
  - Nel dominio del tempo

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du$$

  - Nel dominio della frequenza

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

dove $Y(f) = \mathcal{F}[y(t)]$

Spettro di energia di un segnale filtrato

- Dato un segnale a energia finita $x(t)$, lo spettro di energia del segnale ottenuto filtrando $x(t)$ con un sistema LTI con funzione di trasferimento $H(f)$ è

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$$

- Se invece $x(t)$ è un segnale a potenza media finita, si ha

$$G_y(f) = G_x(f)|H(f)|^2$$

Esercizio 1

- Sia $x(t) = A[\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)]$.
- Calcolare la sua trasformata di Fourier.

Esercizio 1 (cont.)

- Si tratta di un segnale periodico di periodo $1/f_0$, quindi il suo spettro è a righe.
- La trasformata di $x(t) = A[\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)]$ è

$$X(f) = A\delta(f - f_0)$$

Esercizio 2

- Calcolare il seguente prodotto di convoluzione

$$y(t) = x(t) * \delta(t)$$

- Sfruttando il risultato ottenuto, calcolare l'uscita di un sistema LTI con $h(t) = G\delta(t)$ corrispondente all'ingresso

$$x(t) = Ae^{-(x-3)^2/2}$$

Esercizio 2 (cont.)

- La convoluzione di un qualsiasi segnale con un impulso ideale lascia invariato il segnale:

$$y(t) = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

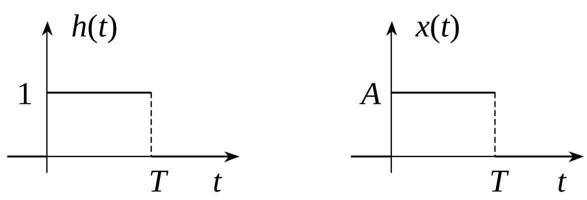
- Si ottiene

$$y(t) = GAe^{-(x-3)^2/2}$$

cioè il coefficiente G può essere interpretato come un guadagno.

Esercizio 3

- Dato un sistema lineare definito dalla risposta all'impulso $h(t) = p_T(t - T/2)$, calcolare la risposta all'ingresso $x(t) = A\, p_T(t - T/2)$.



Esercizio 3 (cont.)

- La risposta $y(t)$ è calcolabile mediante convoluzione tra $h(t)$ e $x(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

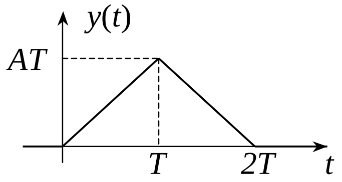
- A tal fine, si distinguono i seguenti casi:
  – Per $t \leq 0$ o $t \geq 2T$, si ha $y(t) = 0$.

Esercizio 3 (cont.)

- Per $0 \leq t \leq T$, si ha $y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = At$

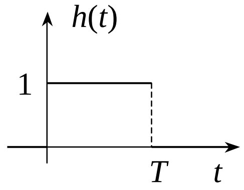
- Per $T \leq t \leq 2T$, si ha

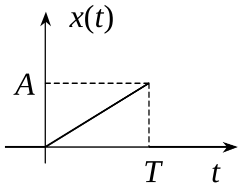
$$y(t) = \int_{t-T}^{T} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 2A(T-t)$$



Esercizio 4

- Dato un sistema lineare definito dalla risposta all'impulso $h(t) = p_T(t - T/2)$, calcolare la risposta all'ingresso $x(t) = A/T\, t\, p_T(t - T/2)$.





Esercizio 4 (cont.)

- La risposta $y(t)$ è calcolabile mediante convoluzione tra $h(t)$ e $x(t)$:

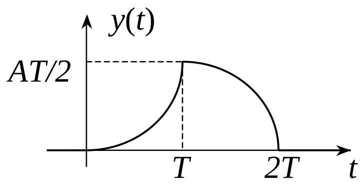
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- A tal fine, si distinguono i seguenti casi:
  - Per $t \leq 0$ o $t \geq 2T$, si ha $y(t) = 0$.

Esercizio 4 (cont.)

- Per $0 \le t \le T$, si ha $y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{At^2}{2T}$
- Per $T \le t \le 2T$, si ha

$$y(t) = \int_{t-T}^{T} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{A(2Tt - t^2)}{2T}$$



Esercizio 5

- È dato il segnale $x(t) = p_T(t-2T) + 0.5\, p_T(t-3T)$
- Calcolare la sua trasformata di Fourier.
- Si tratta di un segnale a energia finita o a potenza media finita?
- In accordo con la risposta data alla domanda precedente, calcolare la sua energia o potenza media.

Esercizio 5 (cont.)

- La trasformata di Fourier del segnale vale

$$X(f) = \frac{\sin(\pi f t)}{\pi f} e^{-j4\pi f T} + 0.5 \frac{\sin(\pi f t)}{\pi f} e^{-j6\pi f T}$$

- Si tratta di un segnale a energia finita, quindi

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 1.25T$$

Esercizio 6

- È dato il segnale

$$x(t) = 10\cos(2\pi f_1 t) + 7\cos(2\pi f_2 t)$$

con f_1 = 10 kHz e f_2 = 15 kHz, è inviato in ingresso ad un sistema lineare tempo-invariante avente risposta all'impulso

$$h(t) = p_T(t)$$

con $T = 10^{-4}$ s.

- Calcolare lo spettro di potenza del segnale d'uscita.

Riferimenti bibliografici

[1] G. Prati, Videocorso "Teoria dei Segnali"

[2] R. Gaudino, *Appunti sulle esercitazioni relative alla Teoria dei Segnali*, http://corsiadistanza.polito.it/corsi/pdf/04AJYCC/ Comunicaz_elettr_richiami.pdf

[3] L. Lo Presti, F. Neri, *L'Analisi dei Segnali*, CLUT, Torino, 1992