

## Teoria dei Segnali

**DISCLAIMER:** Nell'anno accademico 2003/2004 alcuni studenti hanno compilato queste dispense che ricalcano le linee essenziali di quanto insegnato nel corso. Tali dispense sono disponibili sul sito del corso in formato elettronico pdf. Si noti che:

- queste dispense non sono i testi ufficiali del corso stesso; i testi ufficiali sono indicati qui sotto e coincidono con quelli riportati sulla guida dello studente
- il contenuto delle dispense non è esaustivo di quanto trattato nel corso
- il contenuto non è stato rivisto né corretto dal docente e dunque può contenere un numero elevato di errori/ inesattezze e/o errate interpretazioni di quanto esposto dal docente in aula

Le dispense sono dunque da intendersi come un possibile ausilio per gli studenti per seguire più agevolmente quanto trattato in aula, ma a rischio e pericolo e sotto la responsabilità degli studenti stessi.

I testi ufficiali del corso sono:

Letizia Lo Presti, Fabio Neri: L'analisi dei segnali, CLUT.

Letizia Lo Presti, Fabio Neri: Introduzione ai processi casuali, CLUT.

# Indice

<b>I</b>	<b>Analisi dei segnali e Trasformata di Fourier</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Introduzione ai segnali</b>	<b>11</b>
1.1	Che cos'è un segnale . . . . .	11
1.2	Alcuni segnali notevoli . . . . .	11
1.2.1	Funzione porta . . . . .	11
1.2.2	Funzione triangolo . . . . .	12
1.2.3	Delta di Dirac . . . . .	13
1.2.4	Soluzione di integrali con la delta di Dirac . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Spazi lineari</b>	<b>17</b>
2.1	Richiami di algebra dei vettori . . . . .	17
2.1.1	Descrizione di vettori rispetto ad una base . . . . .	18
2.2	Spazi di segnali . . . . .	19
2.3	Operazioni vettoriali sui segnali . . . . .	19
2.4	Rappresentazione di un segnale tramite una base . . . . .	21
2.5	Serie di Fourier . . . . .	23
2.5.1	Proprietà dei coefficienti di Fourier . . . . .	26
2.5.2	Interpretazione dei coefficienti di Fourier . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Trasformata di Fourier</b>	<b>29</b>
3.1	Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	30
3.1.1	Linearità . . . . .	32
3.1.2	Scalamento nel tempo . . . . .	32
3.1.3	Ritardo nel tempo . . . . .	33
3.1.4	Modulazione in frequenza . . . . .	34
3.1.5	Trasformata di Fourier del complesso coniugato . . . . .	35
3.1.6	Derivazione nel tempo . . . . .	35
3.2	Segnali ad energia infinita . . . . .	36
3.3	Invertibilità della trasformata di Fourier . . . . .	38
3.4	Trasformata di Fourier e prodotto scalare . . . . .	39
3.5	Simmetria della trasformata di Fourier . . . . .	40
3.6	Banda e supporto . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Cenni sulla trasformata di Laplace</b>	<b>45</b>
<b>II</b>	<b>Sistemi lineari</b>	<b>47</b>
<b>5</b>	<b>Sistemi Lineari Tempo Invarianti</b>	<b>49</b>
5.1	Sistemi lineari (L) . . . . .	49
5.2	Sistemi Tempo Invarianti (TI) . . . . .	51

<b>6</b>	<b>Integrale di convoluzione</b>	<b>53</b>
6.1	Funzione di trasferimento e risposta all'impulso di un sistema LTI . . . . .	53
6.2	Interpretazione dell'integrale di convoluzione . . . . .	54
6.3	Trasformata di Fourier della convoluzione . . . . .	55
6.4	Proprietà della convoluzione . . . . .	56
6.5	Cascata di sistemi lineari . . . . .	60
6.5.1	Proprietà dei sistemi LTI . . . . .	60
6.6	Stabilità BIBO . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Segnali Periodici</b>	<b>63</b>
7.1	Media temporale su un intervallo . . . . .	63
7.2	Trasformata di Fourier di un segnale periodico . . . . .	64
7.3	Il Teorema del campionamento . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Caratterizzazione energetica dei segnali</b>	<b>69</b>
8.1	Spettro di energia . . . . .	69
8.2	Funzione di autocorrelazione . . . . .	69
8.3	Funzione di mutua correlazione . . . . .	71
8.4	Segnali periodici . . . . .	72
8.4.1	Spettro di potenza . . . . .	72
8.4.2	Funzione di autocorrelazione . . . . .	72
<b>III</b>	<b>Statistica delle variabili aleatorie e dei processi casuali</b>	<b>75</b>
<b>9</b>	<b>Probabilità</b>	<b>77</b>
9.1	Probabilità Condizionata . . . . .	79
9.2	Teorema della probabilità totale . . . . .	79
9.3	Variabili casuali . . . . .	81
9.4	Distribuzione cumulativa . . . . .	82
9.5	Coppie di variabili casuali . . . . .	82
9.5.1	Densità di probabilità condizionata . . . . .	82
<b>10</b>	<b>Medie e valori attesi</b>	<b>83</b>
10.1	Momenti non centrali . . . . .	83
10.2	Momenti centrali . . . . .	83
10.3	Generalizzazione del valore atteso . . . . .	85
10.4	Momenti congiunti . . . . .	85
10.5	Momenti congiunti centrali . . . . .	86
10.6	Media condizionata . . . . .	86
10.7	Coefficiente di correlazione . . . . .	86
<b>11</b>	<b>Processi casuali</b>	<b>87</b>
11.1	Momenti principali di un processo casuale . . . . .	89
11.2	Processi quasi determinati . . . . .	91
11.3	Stazionarietà di un processo casuale . . . . .	92
11.4	Autocorrelazione dei processi WSS . . . . .	93
<b>12</b>	<b>Processi casuali filtrati</b>	<b>95</b>
12.1	Momenti dei processi filtrati . . . . .	95
12.2	Rumore gaussiano bianco . . . . .	97
12.3	Combinazione di processi casuali . . . . .	97

---

<b>13</b>	<b>Caratterizzazione energetica di processi casuali</b>	<b>99</b>
13.1	Spettro di energia di processi filtrati . . . . .	99
13.2	Energia e potenza di processi casuali WSS . . . . .	100
<b>14</b>	<b>Ergodicità</b>	<b>101</b>
14.1	Rumore gaussiano bianco . . . . .	102
14.2	Rumore bianco filtrato . . . . .	102
<b>15</b>	<b>Esercizi riassuntivi sui processi casuali filtrati</b>	<b>103</b>



# Elenco delle figure

1.1	Funzione porta . . . . .	12
1.2	Funzione triangolo . . . . .	13
2.1	Approssimazione di un segnale . . . . .	22
2.2	Approssimazione di un segnale in serie di Fourier . . . . .	25
3.1	Trasformata di Fourier della porta . . . . .	37
5.1	Sistemi tempo-invarianti . . . . .	51
7.1	Spettro a righe . . . . .	65
7.2	Segnale sinusoidale campionato . . . . .	68
9.1	Densità di probabilità congiunta . . . . .	82
11.1	Esercizio 43 . . . . .	88

**DISCLAIMER:** Nell'anno accademico 2003/2004 alcuni studenti hanno compilato queste dispense che ricalcano le linee essenziali di quanto insegnato nel corso. Tali dispense sono disponibili sul sito del corso in formato elettronico pdf. Si noti che:

- queste dispense non sono i testi ufficiali del corso stesso; i testi ufficiali sono indicati qui sotto e coincidono con quelli riportati sulla guida dello studente
- il contenuto delle dispense non è esaustivo di quanto trattato nel corso
- il contenuto non è stato rivisto né corretto dal docente e dunque può contenere un numero elevato di errori/ inesattezze e/o errate interpretazioni di quanto esposto dal docente in aula

Le dispense sono dunque da intendersi come un possibile ausilio per gli studenti per seguire più agevolmente quanto trattato in aula, ma a rischio e pericolo e sotto la responsabilità degli studenti stessi.

I testi ufficiali del corso sono:

Letizia Lo Presti, Fabio Neri: L'analisi dei segnali, CLUT.

Letizia Lo Presti, Fabio Neri: Introduzione ai processi casuali, CLUT.



## Parte I

# Analisi dei segnali e Trasformata di Fourier



# Capitolo 1

## Introduzione ai segnali

### 1.1 Che cos'è un segnale

Nelle applicazioni elettroniche, si dice “segnale” una funzione del tempo del tipo  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ . In generale, un segnale può avere qualsiasi forma d'onda. Un segnale rappresenta l'evolversi nel tempo di una grandezza, fisica o matematica: ad esempio, l'applicazione forse più comprensibile a tutti è quella della trattazione del suono. In questo caso, il segnale può esprimere il valore della pressione sonora in funzione del tempo, oppure può indicare una qualsiasi altra grandezza da cui dipenda la produzione dell'effetto sonoro studiato (ad esempio, la tensione tra due precisi morsetti dell'altoparlante).

In generale, il segnale può avere qualsiasi caratteristica riguardo a continuità, derivabilità, dominio, codominio e simili proprietà. Come abbiamo detto, però, un segnale rappresenta spesso una grandezza fisica, quindi i segnali che studieremo godranno spesso di proprietà che ne semplificheranno lo studio. Tratteremo comunque il caso generale, indicando di volta in volta se utilizzeremo precise convenzioni.

### 1.2 Alcuni segnali notevoli

Prima di iniziare ad analizzare i segnali in generale, è opportuno definire alcune particolari funzioni che incontreremo molto spesso. Queste sono: la funzione *porta*, la funzione *triangolo* e la *delta di Dirac* ( $\delta(t)$ ).

#### 1.2.1 Funzione porta

La funzione porta è così definita:

$$p_D(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{D}{2} \\ 1 & |t| \leq \frac{D}{2} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Si tratta di una funzione discontinua il cui grafico è riportato in figura 1.1.

Più in generale, si considera la porta traslata:

$$p_D(t - t_0) = \begin{cases} 0 & |t - t_0| > \frac{D}{2} \\ 1 & |t - t_0| \leq \frac{D}{2} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

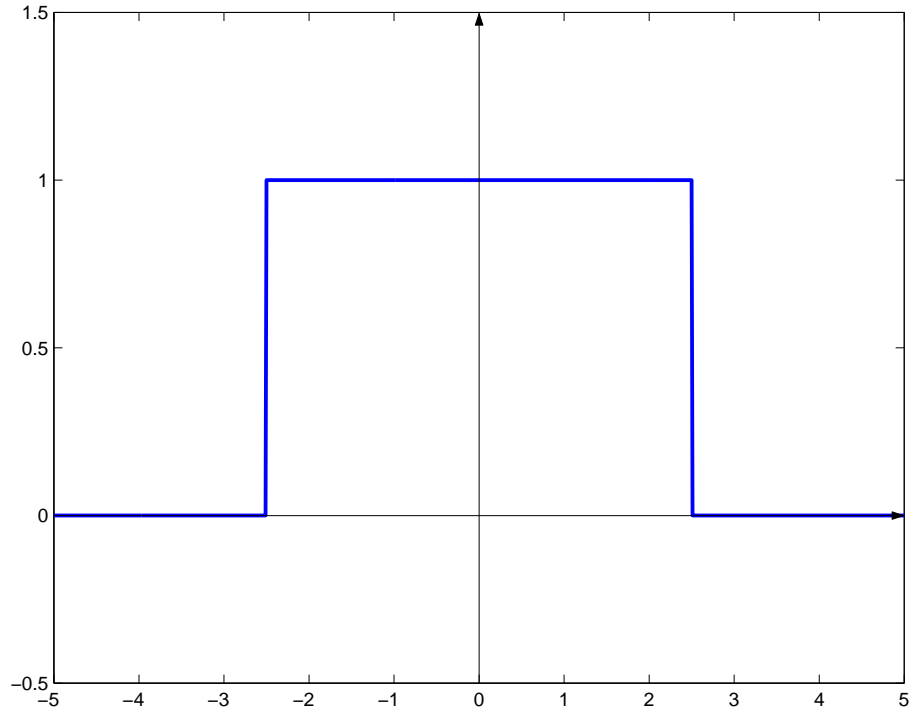


Figura 1.1: Grafico della funzione porta  $p_{5/2}(t)$ .

Da questa definizione notiamo come il parametro  $D$ , detto *durata* della porta, rappresenti la “lunghezza” del supporto<sup>1</sup> della funzione, mentre  $t_0$  indica il punto centrale della porta. Come è naturale pensare, la scrittura  $Ap_D(t)$  indica una porta centrata nell’origine di durata  $D$  la cui ampiezza è pari ad  $A$ .

Un caso particolare di porta è quello del *rettangolo causale*<sup>2</sup>, indicato spesso con  $r_D(t)$ . Si tratta di una porta che inizia nell’origine, anziché essere simmetrica rispetto all’asse delle ordinate. Si può scrivere:

$$r_D(t) = p_D\left(t - \frac{D}{2}\right).$$

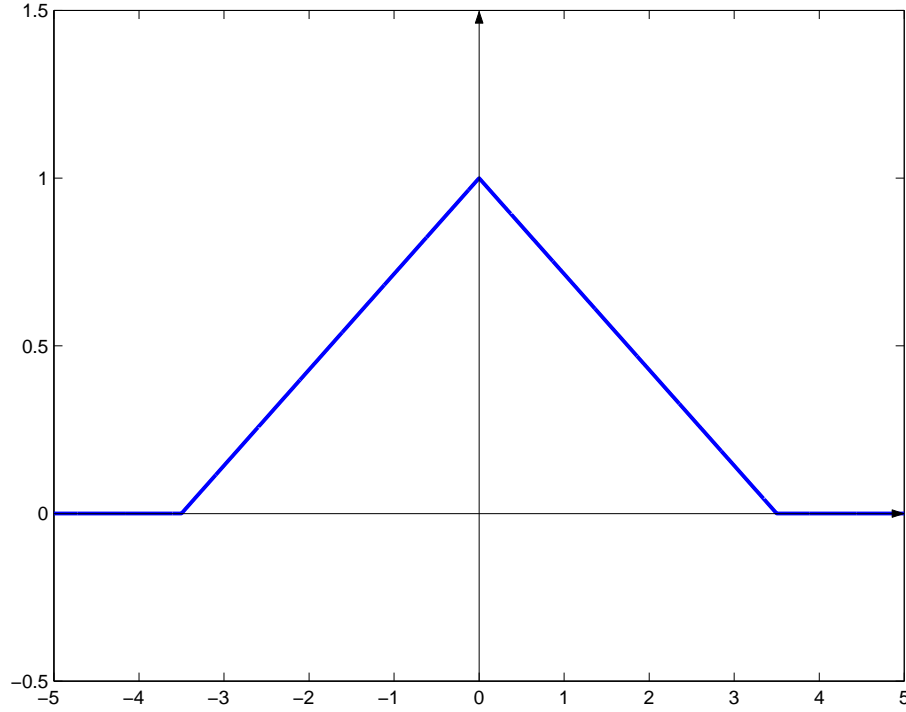
### 1.2.2 Funzione triangolo

La funzione triangolo è così definita:

$$Tri_D(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{D}{2} \\ \frac{t}{D/2} + 1 & -\frac{D}{2} \leq t < 0 \\ 1 - \frac{t}{D/2} & 0 \leq t < \frac{D}{2} \\ 0 & t \geq \frac{D}{2} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

<sup>1</sup>Si chiama *supporto* l’insieme dei punti in cui una funzione non è nulla. Il concetto, molto intuitivo, di lunghezza del supporto (o di un insieme compatto di punti) diventa ancor più evidente pensando al grafico della porta: si tratta della distanza tra gli estremi dell’insieme stesso.

<sup>2</sup>Sul concetto di causalità si tornerà più avanti (cfr. 6.2).

Figura 1.2: Grafico della funzione triangolo  $Tri_7(t)$ .

Si tratta di una funzione continua in ogni suo punto, ma non derivabile nell'origine, in  $x_1 = -D/2$  e in  $x_2 = D/2$ . Il suo grafico è riportato in figura 1.2: è un triangolo di base  $D$  e altezza unitaria. Come per la porta, è possibile definire un triangolo traslato  $Tri_D(t - t_0)$  che ha il vertice nell'istante di tempo  $t_0$ , e una forma amplificata del segnale, indicata con  $A \cdot Tri_D(t)$ , che è ridimensionata verticalmente in modo da avere altezza  $A$ . Un caso particolare di triangolo amplificato è quello del triangolo equilatero  $D \cdot Tri_{2D}(t)$ .

### 1.2.3 Delta di Dirac

La delta di Dirac è una funzione molto particolare. Essa infatti non ha una descrizione analitica, ma viene definita attraverso le sue proprietà. La sua caratteristica principale è la capacità di estrarre da un integrale il valore della funzione integranda in un punto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad (1.2.4)$$

dove  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  è una funzione che esiste nel punto  $x_0$ . In particolare, se applichiamo questa proprietà alla funzione che vale 1 su tutto  $\mathbb{R}$ , otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1.$$

La delta di Dirac viene rappresentata con una freccia di altezza unitaria centrata nel punto in cui il suo argomento si annulla. Il supporto della delta è costituito da un solo punto, dove essa vale infinito. Si dice quindi che, integrando su tutto l'asse reale, i contributi di tutti i punti diversi da quello della delta diventano trascurabili rispetto al valore della funzione nel punto, che quindi

diventa pari al valore stesso dell'integrale.

Tale comportamento può essere meglio compreso se cerchiamo di capire come si può arrivare alla delta di Dirac. Consideriamo allora una funzione porta *normalizzata*, cioè una porta la cui ampiezza è inversamente proporzionale alla durata. Abbiamo dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} p_T(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = \frac{1}{T} T = 1 \quad \forall T \in \mathbb{R},$$

come era necessario che fosse per ottenere una delta. Perché valga la proprietà (1.2.4), studiamo il comportamento della porta normalizzata per  $T \rightarrow 0$ ; abbiamo infatti stabilito che  $T$  sia la durata della porta, cioè la lunghezza del suo supporto, e quindi vogliamo avvicinarci alla situazione della delta, che ha supporto di lunghezza nulla.

$$\lim_{T \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{T} p_T(t) dt = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

Siamo giunti ad un punto morto: il primo fattore tende ad infinito, mentre il secondo tende a zero (integrale su intervallo di ampiezza nulla). Cerchiamo allora di risolvere il problema pensando al concetto di integrazione: integrare su tutto l'asse reale una funzione  $f(t)$  significa sommare tutti gli infiniti contributi dati dal valore della funzione in ciascun punto. Moltiplicando una funzione per una porta normalizzata, sopprimiamo la forma d'onda in tutto l'intervallo in cui la porta vale zero, e la scaliamo in altezza per tutta la durata della porta. Se ora questa durata fosse dimezzata, avremmo una forma d'onda alta il doppio rispetto alla precedente, ma ristretta ad un intervallo più corto. Se poi considerassimo una durata infinitesima della porta, arriveremmo ad una situazione estrema in cui la funzione integranda sarebbe nulla su tutto l'asse reale, tranne che nell'origine, dove avrebbe valore infinito. Quindi, l'unico contributo utile sarebbe quello di  $f(0)$ , e otterremmo:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{T} p_T(t) dt = f(0),$$

che è il risultato a cui volevamo arrivare. Possiamo quindi affermare:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} p_T(t) = \delta(t),$$

ricordando però che il “limite” dell'espressione appena scritta non è il limite nel senso delle funzioni, ma piuttosto indica il comportamento di una famiglia di funzioni al variare di un certo parametro. In realtà, questa non è la definizione rigorosa della delta di Dirac, che, come abbiamo detto è definita tramite le sue proprietà. In effetti, esistono infinite altre famiglie di funzioni che, per certi valori di un parametro, assumono comportamenti simili a quello della delta di Dirac: un esempio che dovrebbe essere noto è quella della funzione gaussiana, tale per cui:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} = \delta(t).$$

### 1.2.4 Soluzione di integrali con la delta di Dirac

La delta di Dirac rende molto semplice la soluzione degli integrali in cui essa compaia, in quanto non è necessario ricercare la primitiva della funzione integranda (cosa che, a volte, è notevolmente complicata). Basterà infatti valutare la funzione stessa nel punto in cui l'argomento della delta si annulla, come risulta dalla proprietà (1.2.4). Tuttavia, spesso la presenza di più funzioni delta, che possono anche avere argomenti completamente diversi, potrebbe generare confusione. Ecco allora un modo semplice per risolvere un integrale del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-h) dt.$$

1. Per prima cosa, si individua la variabile di integrazione (nel nostro esempio,  $t$ );
2. poi si trova il valore della variabile di integrazione per cui l'argomento della delta si annulla (nel nostro caso, avremmo  $t - h = 0$  e quindi  $t = h$ );
3. infine si valuta la funzione integranda nel punto appena trovato (trovando cioè  $f(t)|_{t=h}$ ).

Questo metodo di soluzione permette di “semplificare” un integrale con la delta. Nel caso si dovesse risolvere:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-f)\delta(f-f_0)dt df,$$

potremmo prima integrare in  $t$  e poi in  $f$ , ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(f)\delta(f-f_0)df = x(f_0).$$

In definitiva, la delta di Dirac svolge la stessa funzione della *delta di Kronecker*, di cui è l'equivalente per gli integrali. La delta di Kronecker, definita come

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases},$$

viene utilizzata nelle sommatorie per estrarre un singolo elemento  $m$ . Infatti:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta_{nm} = a_m.$$

Useremo molto spesso le proprietà di queste due funzioni per semplificare alcuni calcoli.

**Esercizio 13** Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi f_0 t) \delta(t - t_0) dt$$

*Soluzione*

Per il calcolo dell'integrale basta semplicemente sostituire a  $t$  il valore di  $t$  che annulla la delta, in questo caso  $t = t_0$ ; il risultato è quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi f_0 t) \delta(t - t_0) dt = \sin(2\pi f_0 t_0)$$

■





## Capitolo 2

# Spazi lineari

**Definizione 2.1** Si dice **spazio lineare** o **vettoriale** un insieme di elementi, detti **vettori**, all'interno del quale è possibile definire le operazioni di somma e moltiplicazione per scalare con le seguenti proprietà :

- $x + y = y + x$  (proprietà commutativa della somma);
- $x + (y + z) = (x + y) + z$  (proprietà associativa della somma);
- $x + 0 = x$  (esistenza dell'elemento neutro per la somma (vettore nullo));
- $x + (-x) = 0$  (esistenza e unicità del vettore opposto);
- $\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$  (proprietà associativa della moltiplicazione per scalare);
- $1x = x$  (esistenza dell'elemento neutro per la moltiplicazione per scalare);
- $0x = 0$  (esistenza dell'elemento assorbente per la moltiplicazione per scalare);
- $(\alpha + \beta)(x + y) = \alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y$  (proprietà distributiva della moltiplicazione per scalare);

dove  $x, y, z$  sono elementi dello spazio vettoriale, mentre  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  sono detti scalari.

### 2.1 Richiami di algebra dei vettori

Dalla definizione di spazio lineare, risulta evidente che un semplice esempio è quello dei vettori intesi in senso geometrico. Infatti  $\mathbb{C}^n$  e il suo sottoinsieme  $\mathbb{R}^n$  sono spazi lineari vettoriali, in quanto è noto che valgono le proprietà appena elencate per i loro elementi. Ad essi ci riferiremo per richiamare i concetti di *prodotto scalare*, *norma* e *base*.

**Definizione 2.2** Siano  $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{C}^n$  due vettori. Indichiamo con  $v_i$  l'elemento  $i$ -esimo di  $\underline{v}$ . Si dice **prodotto scalare** di due vettori il numero reale così definito:

$$\underline{v} \circ \underline{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i^*$$

Probabilmente, si ricorda la definizione geometrica di prodotto scalare data da  $\underline{v} \circ \underline{w} = |\underline{v}| |\underline{w}| \cos \vartheta$ , dove  $\vartheta$  è l'angolo compreso tra i due vettori. Le due definizioni sono equivalenti, ma utilizzando la prima sarà più agevole generalizzare il concetto in seguito.

Il prodotto scalare gode di alcune proprietà:

- $(\underline{v} + \underline{w}) \circ \underline{z} = \underline{v} \circ \underline{z} + \underline{w} \circ \underline{z}$  (proprietà distributiva);

- $\sum_{i=1}^n a_i \underline{v}_i \sum_{k=1}^n b_k \underline{w}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i b_k^* \underline{v}_i \circ \underline{w}_k$  (proprietà di linearità);

dove  $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{C}^n$  e  $a, b \in \mathbb{C}$ .

**Definizione 2.3** Sia  $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$  un vettore. Si definisce **norma** del vettore  $\underline{v}$  un numero reale positivo così definito:

$$\|\underline{v}\| = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Geometricamente, si noterà che la norma di un vettore è il valore della sua lunghezza (*modulo*). Se calcoliamo il prodotto scalare di un vettore con se stesso, otteniamo:

$$\underline{v} \circ \underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i v_i^* = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = \|\underline{v}\|^2$$

Definiamo ora una classe particolare di vettori.

**Definizione 2.4** Sia  $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$  un vettore. Esso si dice **versore** se e solo se esso ha norma unitaria.

Ci è ora possibile arrivare a uno dei concetti fondamentali di questa prima parte.

**Definizione 2.5** Sia  $\{\underline{u}_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathbb{C}^n$  un insieme di  $n$  vettori. Esso si dice **base di  $\mathbb{C}^n$**  se e solo se vale:

$$\underline{u}_a \circ \underline{u}_b = \delta_{ab},$$

cioè se i vettori che lo compongono sono ortogonali tra di loro e hanno tutti norma unitaria.

È possibile comprendere meglio l'espressione appena scritta se si ricorda che due vettori si dicono ortogonali quando il loro prodotto scalare è nullo; geometricamente, essi definiscono un angolo retto. Se quindi consideriamo due vettori distinti di una base, il loro prodotto scalare sarà nullo, mentre se consideriamo il prodotto scalare di un vettore per se stesso ne otterremo la norma al quadrato, cioè 1 (avendo richiesto che tutti i vettori di una base siano versori). Un insieme i cui elementi godano di queste proprietà viene anche detto *ortonormale*.

### 2.1.1 Descrizione di vettori rispetto ad una base

Cerchiamo ora di capire come sfruttare il concetto di base di uno spazio lineare. Consideriamo un vettore  $\underline{v}$  e una base  $\{\underline{u}_i\}$ ; supponiamo di lavorare in  $\mathbb{R}^3$ , quindi la nostra base sarà composta da tre versori. Come dovrebbe essere ben noto, una base (la più semplice) di  $\mathbb{R}^3$  è quella costituita dai vettori  $\hat{i} = [1, 0, 0]$ ,  $\hat{j} = [0, 1, 0]$  e  $\hat{k} = [0, 0, 1]$ ; è possibile scrivere un generico vettore  $\underline{v} = [v_1, v_2, v_3]$  come combinazione lineare dei tre versori della base:

$$\underline{v} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}.$$

Ricordiamo che le componenti del vettore sono il prodotto scalare tra il vettore stesso e il corrispondente versore, ad esempio:  $v_1 = \underline{v} \circ \hat{i}$ ; geometricamente, significa che  $v_1$  è la proiezione di  $\underline{v}$  su  $\hat{i}$ . Ciò che è interessante per la nostra trattazione è che queste considerazioni si possono applicare a qualsiasi base ortonormale: è cioè possibile scrivere:

$$\underline{v} = a_1 \underline{u}_1 + a_2 \underline{u}_2 + a_3 \underline{u}_3,$$

con

$$a_i = \underline{v} \circ \underline{u}_i.$$

Se fissiamo una base di  $\mathbb{R}^3$  (ma questo vale in generale per qualsiasi spazio lineare), possiamo dunque indicare in modo univoco un vettore con i suoi coefficienti  $a_i$ , scrivendo  $\underline{v} = [a_1, a_2, a_3]$ ; del resto è ciò che già facevamo quando indicavamo un vettore per mezzo delle sue componenti cartesiane (riferite cioè ai versori  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ).

## 2.2 Spazi di segnali

I concetti appena richiamati trovano la loro più naturale applicazione nella geometria, quindi nei vettori di  $\mathbb{R}^3$ . Tuttavia, abbiamo visto all'inizio del capitolo che esiste un'ampia classe di spazi lineari accomunati soltanto dalle proprietà elencate a pag. 17. In realtà, si possono definire vettori (intesi come elementi di uno spazio lineare) molti “oggetti” anche assai diversi tra loro. Un vettore può essere un qualcosa anche molto distante dal concetto di segmento che normalmente viene associato a questo nome, purché con esso si possano definire operazioni di somma e di prodotto per scalare tali da soddisfare le proprietà degli spazi lineari. Un esempio di questa estensione è quello degli *spazi di segnali*.

Abbiamo già visto che cosa si intende per segnale. Come è possibile estendere agli spazi di segnali le operazioni appena viste per i vettori geometrici? In realtà, ciò non è difficile, dal punto di vista matematico; la difficoltà maggiore di questo salto concettuale sta forse nella capacità di astrazione che esso richiede. Per fare un esempio, il prodotto scalare tra due vettori è qualcosa che riusciamo ad immaginare, che riusciamo a “vedere”; invece il prodotto scalare tra due segnali sarà un oggetto completamente astratto, un valore che apparentemente non avrà nessuna relazione con i due segnali considerati. Tuttavia, l'analogia con i vettori geometrici ci sarà di grande aiuto per rendere facilmente comprensibili certi risultati che altrimenti risulterebbero ostici.

## 2.3 Operazioni vettoriali sui segnali

Come per i vettori, iniziamo dal prodotto scalare.

**Definizione 2.6** Si dice **prodotto scalare** tra due segnali  $v(t)$  e  $w(t)$  il seguente integrale:

$$v(t) \circ w(t) = (v(t), w(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)w^*(t)dt. \quad (2.3.1)$$

Nel caso i due segnali assumano soltanto valori reali, tale integrale si riduce ovviamente al seguente:

$$(v(t), w(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)w(t)dt.$$

**Osservazione** Il prodotto scalare può anche essere definito solo su un intervallo  $I = [t_0, t_1]$ :

$$(v(t), w(t))_I = \int_I v(t)w^*(t)dt.$$

Cerchiamo di comprendere il passaggio dai vettori ai segnali. Immaginiamo il segnale  $v(t)$  come un vettore di infinite entrate, corrispondenti ai valori assunti dalla funzione  $v$  in punti separati da intervalli infinitesimi. La serie che definisce il prodotto scalare diventa dunque un integrale, cioè una sommatoria continua di infiniti numeri. Rimane invece invariato ciò che viene sommato, cioè il prodotto tra un segnale e il complesso coniugato dell'altro.

È facile notare che esso mantiene la fondamentale proprietà di linearità che caratterizza il prodotto scalare tra vettori:

$$\begin{aligned} \left( \sum_n a_n v_n(t), \sum_m b_m w_m(t) \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n a_n v_n(t) \left( \sum_m b_m w_m(t) \right)^* dt = \\ &= \sum_n \sum_m a_n b_m^* \int_{-\infty}^{+\infty} v_n(t) w_m^*(t) dt = \\ &= \sum_n \sum_m a_n b_m^* (v_n(t), w_m(t)). \end{aligned}$$

**Definizione 2.7** Si dice **norma** di un segnale  $v(t)$  la radice quadrata del prodotto scalare del segnale per se stesso:

$$\|v(t)\| = \sqrt{(v(t), v(t))} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt}.$$

**Definizione 2.8** Si dice **energia** di un segnale  $v(t)$  il quadrato della sua norma:

$$\mathcal{E}\{v(t)\} = \|v(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt. \quad (2.3.2)$$

**Osservazione** Come per il prodotto scalare, norma ed energia possono essere valutati su intervalli limitati.

L'energia di un segnale coincide spesso con l'energia fisica che viene dispersa dal segnale, a meno eventualmente di qualche fattore moltiplicativo.

**Esercizio 13** Si consideri un segnale  $x(t)$  ad energia finita pari ad  $\mathcal{E}\{x\}$ . Sia dato il segnale  $y = \sqrt{2}x(t/2)$ . Quanto vale  $\mathcal{E}\{y(t)\}$ ?

*Soluzione*

Si applica la definizione di energia, ovvero si fa l'integrale del segnale  $y(t)$  al quadrato:

$$\mathcal{E}\{y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sqrt{2}x\left(\frac{t}{2}\right) \right]^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \left[ x\left(\frac{t}{2}\right) \right]^2 dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ x\left(\frac{t}{2}\right) \right]^2 dt.$$

Applico una sostituzione, ovvero  $t/2 = \vartheta$  e  $dt = 2d\vartheta$ :

$$\mathcal{E}\{y\} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(\vartheta) 2d\vartheta$$

Perciò si ricava che:

$$\mathcal{E}\{y\} = 4 \mathcal{E}\{x\}$$

■

Possiamo ora definire la base di segnali.

**Definizione 2.9** Si dice **base di segnali** un insieme ortonormale  $\{u_n(t)\}$  di segnali, tale cioè che valga:

$$(u_i(t), u_j(t)) = \delta_{ij}.$$

I segnali di una base devono dunque essere ortogonali fra di loro (cioè il loro prodotto scalare deve essere nullo) e avere tutti norma unitaria.

**Esercizio 4** Si considerino 10 segnali  $u_n(t) = A_n \cos(2\pi n t/T + \phi)$ ,  $1 \leq n \leq 10$ , nell'intervallo temporale  $[0, T]$ , con  $T$  e  $\phi$  costanti positive finite. Affinché i segnali siano ortonormali che condizioni devono soddisfare queste costanti?

*Soluzione*

Inizio considerando due segnali e ne calcolo l'integrale tra 0 e T:

$$\begin{aligned} (u_n(t), u_m(t)) &= \int_0^T u_n(t) u_m(t) dt = \int_0^T A_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n t + \phi\right) + A_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} m t + \phi\right) dt = \\ &= A_n A_m \left[ \int_0^T \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} n t + \phi + \frac{2\pi}{T} m t + \phi\right) dt + \int_0^T \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} m t + \phi - \frac{2\pi}{T} m t - \phi\right) dt \right] = \\ &= A_n A_m \left[ \int_0^T \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} [n + m] t + 2\phi\right) dt + \int_0^T \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} [n - m] t + 2\phi\right) dt \right] \end{aligned}$$

Da quest'ultimo passaggio si nota che il primo integrale si annulla nell'intervallo  $[0, T]$ ; il secondo integrale dà 1 se  $n = m$  ed è nullo se  $n \neq m$ .

Perciò considero il caso  $n = m$ :

$$A_n^2 = \frac{1}{2} \int_0^T 1 \, dt = (u_n(t) u_n(t)) = \|u_n\|^2 = 1$$

$$A_n^2 \frac{1}{2} T = 1 \quad A_n = \sqrt{\frac{2}{T}}$$

Questo è quindi il valore di  $A_n$  che deve essere utilizzato per soddisfare la condizione di ortonormalità. La  $\phi$  invece non ha alcun peso sul risultato, perciò si deduce che il suo valore è arbitrario. ■

## 2.4 Rappresentazione di un segnale tramite una base

Vogliamo vedere se sia possibile definire le componenti di un segnale rispetto ad una base fissata, così come accadeva per un vettore. Ci aspettiamo che la risposta sia affermativa, in quanto, se ciò è possibile per uno spazio lineare, dovrebbe esserlo anche per quello dei segnali; potremmo allora procedere per analogia.

Fissata una base  $\{u_i(t)\}$  composta da  $n$  segnali, potremmo scrivere:

$$v(t) = \sum_{i=1}^n v_i u_i(t),$$

per opportuni coefficienti  $v_i$  definiti come:

$$v_i = (v(t), u_i(t)).$$

Eventualmente, il nostro segnale potrebbe richiedere infiniti versori, ed essere rappresentato con una serie, anziché con una somma finita.

Torniamo a pensare ai segnali come vettori algebrici: se consideriamo il prodotto scalare tra due vettori che hanno infinite entrate, esso converge? In simboli, ci chiediamo se converga la serie

$$\underline{v} \circ \underline{w} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n w_n^*.$$

In generale, niente ci assicura che essa converga. Si può però dimostrare che, se i quadrati delle norme dei due vettori sono entrambi finiti, allora la serie converge.

Consideriamo ancora la base di segnali  $\{u_i(t)\}$  e il segnale  $v(t)$ . Ciascun versore della base soddisfa l'ipotesi appena imposta, avendo norma unitaria; dobbiamo però imporre anche che l'energia del segnale  $v(t)$  sia finita. In tal caso, il prodotto scalare tra il segnale e un versore della base convergerà ad un numero finito, e quindi sarà possibile scrivere  $v(t)$  come combinazione lineare dei vettori della base.

D'ora in poi, ci occuperemo di segnali a energia finita, a meno che non sia indicato diversamente. In tal caso, potremo sempre "scomporre" il segnale nelle sue componenti; va comunque ricordato che ciò può accadere anche per alcuni segnali a energia infinita. Questo caso sarà analizzato più avanti. Procediamo ora con un esempio.

**Esempio** Sia data una base di quattro segnali  $u_n(t)$  definiti come segue:

$$u_n(t) = p_1 \left( t - \frac{1}{2} - n \right),$$

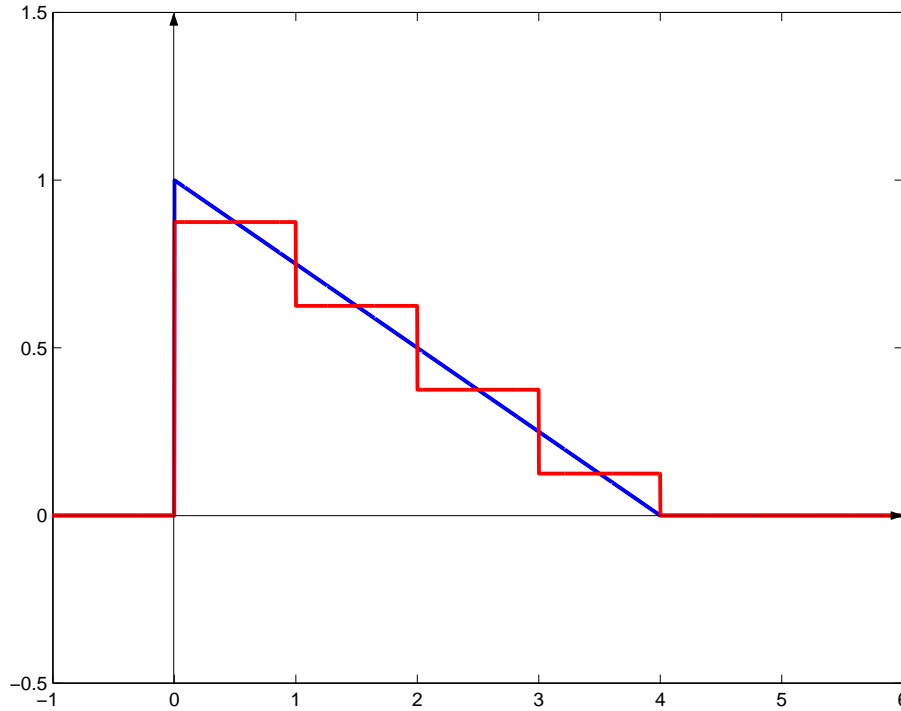


Figura 2.1: Grafico dell'approssimazione del segnale  $v(t)$  con una base di porte.

con  $n \in [0; 3]$ . Essa è costituita da quattro porte di durata unitaria, affiancate l'una all'altra a partire dall'origine. Cerchiamo di trovare le componenti del segnale  $v(t) = 1 - t/4$ , con  $t \in [0; 4]$ , rispetto alla base assegnata. Secondo la definizione, sarà:

$$v_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)u_1^*(t)dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{4}\right) dt = \frac{7}{8}$$

Completando gli altri semplici calcoli, risulta:

$$v_n = \left\{ \frac{7}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right\}$$

$$v_{app}(t) = \frac{7}{8}p_1\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{8}p_1\left(t - \frac{1}{2} - 1\right) + \frac{3}{8}p_1\left(t - \frac{1}{2} - 2\right) + \frac{1}{8}p_1\left(t - \frac{1}{2} - 3\right),$$

Come è possibile vedere dal grafico riportato in figura 2.1, i due segnali non sono affatto coincidenti: questo accade perché la base data è inadeguata al segnale da rappresentare. In realtà ciò non è del tutto corretto, in quanto sarebbe stato possibile rappresentare il segnale come combinazione lineare di un numero infinito di porte aventi durata infinitesima. Tuttavia, l'aver scelto un numero finito  $N$  di versori ci porta ad ottenere un segnale  $v_{app}(t)$  e un errore  $v_{err}(t) = v(t) - v_{app}(t)$ :

$$v(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} v_i u_i(t) \quad v_{app}(t) = \sum_{i=1}^N v_i u_i(t) \quad v_{err}(t) = \sum_{i=N}^{+\infty} v_i u_i(t)$$

È possibile valutare l'errore in vari modi, al fine di stabilire se la rappresentazione che abbiamo ottenuto sia soddisfacente. Il sistema che adotteremo è quello della valutazione dell'energia: vorremo cioè che l'energia dell'errore tenda a zero. In questo modo, avendo  $\mathcal{E}\{v(t)\} =$

$\mathcal{E}\{v_{app}(t)\} + \mathcal{E}\{v_{err}(t)\}$  (come è facile vedere ricorrendo alla definizione di energia), l'energia del segnale approssimato tenderà all'energia del segnale originale.

Calcoliamo dunque l'energia di  $v(t)$  e di  $v_{app}(t)$  per valutarne la differenza:

$$\mathcal{E}\{v(t)\} = \int_0^4 \left|1 - \frac{t}{4}\right|^2 dt = \int_0^4 \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{16}\right) dt = \frac{4}{3}$$

$$\mathcal{E}\{v_{app}(t)\} = \int_0^4 |v_{app}(t)|^2 dt = \frac{63}{48}.$$

Come si può vedere, lo scarto di energia è di  $1/48$ , pari al 2,083%. Nonostante il segnale abbia sostanzialmente cambiato forma d'onda, dal punto di vista energetico l'approssimazione che otteniamo non è rozza come ci aspettavamo. ■

**Osservazione** Può essere interessante notare che l'approssimazione di un segnale e l'errore dell'approssimazione sono ortogonali. Infatti:

$$\begin{aligned} (v_{err}(t), v_{app}(t)) &= \int_I \sum_{n=N}^{+\infty} v_n u_n(t) \left( \sum_{m=1}^N v_m u_m(t) \right)^* dt = \\ &= \int_I \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{m=1}^N v_n v_m^* u_n(t) u_m^*(t) dt = \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{m=1}^N v_n v_m^* (u_n(t), u_m(t)) = \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{m=1}^N v_n v_m^* \delta_{nm} = 0 \end{aligned}$$

## 2.5 Serie di Fourier

Abbiamo parlato della necessità di utilizzare basi composte da infiniti segnali al fine di ottenere una riproduzione perfetta di un segnale dato. Tali basi prendono il nome di **basi complete**.

Come abbiamo visto dall'esempio precedente, una base può non essere adatta a rappresentare fedelmente un certo segnale. Ci si può chiedere se esista allora una base tale che qualsiasi segnale  $v(t)$  possa essere scritto come combinazione lineare dei suoi segnali: tale base esiste, e si tratta dalla **base di Fourier**. Essa è così definita<sup>1</sup>:

$$u_n(t) = e^{j2\pi nt/T} \frac{1}{\sqrt{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \right]. \quad (2.5.1)$$

In breve, ciascun versore è un esponenziale complesso moltiplicato per un fattore di normalizzazione; la seconda eguaglianza discende dall'espressione trigonometrica dell'esponenziale complesso (*formula di Eulero*). Lasciamo allo studente il compito di verificare che questo insieme di segnali è ortonormale. Si può dimostrare (ma non lo faremo in questa sede) che qualsiasi segnale a energia finita può essere scritto come serie di Fourier, utilizzando la base appena descritta.

Spesso useremo per comodità dei coefficienti leggermente diversi da quelli considerati finora. Scriveremo:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n u_n(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j2\pi nt/T} \\ v_n &= (v(t), u_n(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) u_n^*(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j2\pi nt/T} dt = \frac{\mu_n}{\sqrt{T}}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Indicheremo con  $j$  l'unità immaginaria  $j^2 = -1$ , secondo l'uso diffuso in ingegneria; in questo modo si eviteranno confusioni con la lettera  $i$ , utilizzata in matematica pura, che viene in genere riservata ad altre variabili.

I coefficienti  $\mu_n$ , per così dire, “inglobano” il fattore di normalizzazione dell’esponenziale di Fourier. Tale correzione può sembrare superflua, ma vedremo che ci risulterà comoda per trattare con alcune delle grandezze che abbiamo definito.

**Esempio** Consideriamo una porta di ampiezza unitaria e durata  $D$ , centrata nell’origine; calcoliamone lo sviluppo in serie di Fourier  $p_D(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n u_n(t)$ .

$$\begin{aligned} x_n &= (p_D(t), u_n(t)) = \int_{-D/2}^{D/2} 1 \cdot \frac{e^{-j2\pi nt/T}}{\sqrt{T}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{-1}{j2\pi n/T} \left[ e^{-j2\pi nt/T} \right]_{-D/2}^{D/2} = \frac{1}{2j} \frac{1}{\pi n/\sqrt{T}} \left( -e^{-j\pi n D/T} + e^{j\pi n D/T} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{\pi n D}{T}}{\pi n} \sqrt{T}. \end{aligned}$$

Nel caso  $n = 0$ , l’espressione precedente ci porterebbe ad una forma indeterminata. Possiamo procedere per sostituzione:

$$x_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_D(t) \frac{e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}}{\sqrt{T}} dt \Big|_{n=0} = \int_{-D/2}^{D/2} \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{D}{\sqrt{T}}.$$

Il grafico 2.2 riporta in blu la forma d’onda della porta, mentre in rosso viene disegnato l’andamento della serie di Fourier quando la si tronca ai primi  $N$  termini.

Come si può ben vedere, la serie di Fourier approssima efficacemente il segnale già con  $N$  relativamente basso, nonostante la funzione che vogliamo rappresentare sia abbastanza “brutta”, essendo discontinua in due punti. È interessante notare che è possibile scrivere in serie di Fourier qualsiasi segnale, anche se apparentemente non ha niente a che fare con una combinazione lineare di seni e coseni. ■

**Esercizio 2** Calcolare l’energia del segnale:

$$x(t) = \cos(2\pi f_o t) + 2\sin(4\pi f_o t) + \sqrt{2}\cos(8\pi f_o t),$$

definito nell’intervallo  $[0, T]$ , con  $f_o = \frac{1}{T}$ .

*Suggerimento:* sviluppare il segnale in serie di Fourier.

*Soluzione*

L’esercizio può esser risolto in due modi:

- Applicando direttamente la formula dell’energia di un segnale:

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Purtroppo questo metodo risulterebbe troppo complesso e lungo, perciò è preferibile evitarlo

- Sviluppando il segnale con la serie di Fourier e elevando al quadrato i termini. Successivamente si fa la somma di tali valori e si ottiene così l’energia del segnale

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = (x(t), x(t)) = \sum_n |x_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2$$

Utilizzando le formule di Eulero per il seno ed il coseno:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{1}{2} e^{j\alpha} + \frac{1}{2} e^{-j\alpha} \\ \sin(\alpha) &= \frac{1}{2j} e^{j\alpha} - \frac{1}{2j} e^{-j\alpha} \end{aligned}$$



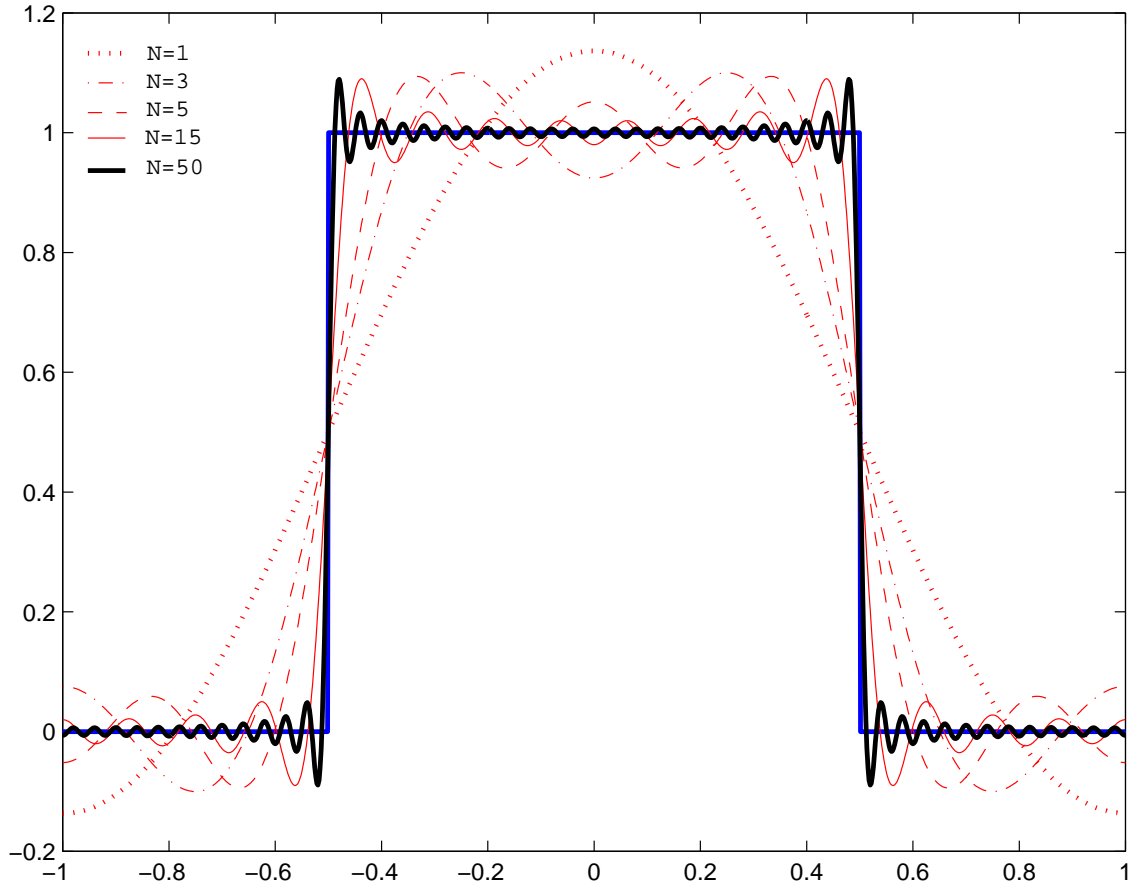


Figura 2.2: Grafico dell'approssimazione della porta con la serie di Fourier troncata ai primi  $N$  termini.

Si sviluppa la  $x(t)$ :

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} + 2 \left[ \frac{1}{2j} e^{j4\pi f_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j4\pi f_0 t} \right] + \sqrt{2} \left[ \frac{1}{2} e^{j8\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j8\pi f_0 t} \right].$$

Raggruppando i termini si ottiene:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0 & \mu_1 &= \mu_{-1} = \frac{1}{2} \\ \mu_3 &= \mu_{-3} = 0 & \mu_4 &= \mu_{-4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

**NOT APPROVED**

Ora non rimane altro che fare la somma del quadrato di ciascun termine preso in valore assoluto:

$$T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2 = T \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{7}{2} T.$$

■

**Esercizio 3** Siano dati i segnali:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t) + 2 \sin(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 t) + 2 \sin(8\pi f_0 t)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t) - \sin(2\pi f_0 t) - \frac{1}{3} \cos(4\pi f_0 t),$$

definiti nell'intervallo  $[0, T]$ , con  $f_0 = \frac{1}{T}$ . Calcolare il prodotto scalare fra le due funzioni.

*Soluzione*

I passaggi iniziali sono simili a quelli dell'esercizio precedente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{j} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{-j} e^{-j2\pi f_0 t} + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{j4\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j4\pi f_0 t} + \frac{1}{j} e^{j8\pi f_0 t} + \frac{1}{-j} e^{-j8\pi f_0 t} \\ y(t) &= -\frac{1}{4} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{4} e^{-j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2j} e^{-j2\pi f_0 t} - \frac{1}{6} e^{j4\pi f_0 t} - \frac{1}{6} e^{-j4\pi f_0 t} \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini delle due funzioni si ha:

$$\begin{aligned} \mu_{x_0} &= 0 & \mu_{y_0} &= 0 \\ \mu_{x_1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{j} & \mu_{y_1} &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2j} \\ \mu_{x_{-1}} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{j} & \mu_{y_{-1}} &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2j} \\ \mu_{x_2} &= \frac{1}{2} & \mu_{y_2} &= \frac{1}{6} \\ \mu_{x_{-2}} &= \frac{1}{2} & \mu_{y_{-2}} &= -\frac{1}{6} \\ \mu_{x_3} &= \mu_{x_{-3}} = 0 \\ \mu_{x_4} &= -\mu_{x_{-4}} = \frac{1}{j} \end{aligned}$$

Ora applichiamo la regola del prodotto scalare, ovvero:

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n y_n^*) T \\ (x(t), y(t)) &= T \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{j} \right) \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2j} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{j} \right) \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{2j} \right) + \left( -\frac{1}{12} \right) + \left( -\frac{1}{12} \right) \right] = \frac{31}{24} T. \end{aligned}$$

■

### 2.5.1 Proprietà dei coefficienti di Fourier

Consideriamo un segnale  $s(t)$  a energia finita: esso avrà uno sviluppo in serie di Fourier del tipo:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n t/T} \frac{1}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j2\pi n t/T}.$$

Indichiamo ora qualche proprietà particolare dei coefficienti di Fourier.

**Teorema 2.1** Sia  $s(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un segnale reale a energia finita. Allora, valgono le seguenti relazioni:

$$c_n = c_{-n}^*, \quad \mu_n = \mu_{-n}^*. \quad (2.5.2)$$

**Dimostrazione** Ricordando la relazione che intercorre tra  $c_n$  e  $\mu_n = c_n \sqrt{T}$ , basterà dimostrare una delle due relazioni perché anche l'altra risulti giustificata. Per semplicità, dimostreremo il teorema sui coefficienti normalizzati. Per definizione:

$$\mu_n = \frac{1}{T} \int_I s(t) e^{-j2\pi n t/T} dt = \frac{1}{T} \int_I s(t) \cos(-2\pi n t/T) dt + j \frac{1}{T} \int_I s(t) \sin(-2\pi n t/T) dt;$$

analogamente:

$$\mu_{-n} = \frac{1}{T} \int_I s(t) \cos(2\pi nt/T) dt + j \frac{1}{T} \int_I s(t) \sin(2\pi nt/T) dt.$$

Il teorema discende dalle relazioni trigonometriche  $\cos(-x) = \cos(x)$  e  $\sin(-x) = -\sin(x)$ : le parti reali sono uguali, mentre le parti immaginarie sono opposte, il che coincide con la definizione di complesso coniugato.

c.v.d. ■

Notiamo che quando parliamo di segnali reali non imponiamo nessuna restrizione al loro dominio, che può essere l'insieme dei numeri complessi; richiediamo soltanto che i valori che essi assumono, e cioè il loro codominio, siano reali.

Questo teorema ci permette di rendere più veloce il calcolo dei coefficienti, in quanto ci basterà trovare solo quelli con  $n \geq 0$ , completando la lista con i relativi complessi coniugati. Abbiamo anche un efficace sistema di controllo per verificare l'esattezza dei nostri conti.

Vogliamo vedere se sia possibile facilitarci anche altre operazioni, in particolare il prodotto scalare.

**Teorema 2.2** *Siano  $x(t)$  e  $y(t)$  due segnali a energia finita. Siano  $x_n, \mu_n$  i coefficienti della serie di Fourier per  $x(t)$  e  $y_n, \nu_n$  i coefficienti per  $y(t)$ . Vale la seguente formula:*

$$(x(t), y(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_n^* = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \nu_n^*. \quad (2.5.3)$$

**Dimostrazione**

Dalla proprietà di linearità del prodotto scalare discende:

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n u_n(t), \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_m u_m(t) \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_n y_m^* (u_n(t), u_m(t)) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_n y_m^* \delta_{nm} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_n^* = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \nu_n^* \end{aligned}$$

c.v.d. ■

**Corollario 2.2.1** *Sia  $x(t)$  un segnale a energia finita. Vale:*

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2. \quad (2.5.4)$$

**Dimostrazione**

Dal Teorema precedente risulta:

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = (x(t), x(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n x_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2.$$

Analogamente, si può ottenere l'espressione con i coefficienti normalizzati  $\mu_n$ .

c.v.d. ■

**Osservazione** Le formule (2.5.3) e (2.5.4) valgono per i coefficienti dello sviluppo rispetto a una qualsiasi base completa di segnali, non soltanto per la base di Fourier. In generale, laddove venga richiesta una base completa, d'ora in poi si utilizzerà la base di Fourier.

Queste proprietà ci permettono di introdurre un'ulteriore semplificazione. Consideriamo due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  entrambi reali; ricordando che  $z + z^* = 2\Re\{z\}$ , avremo:

$$(x(t), y(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_n^* = x_0 y_0^* + \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n y_n^* + x_{-n} y_{-n}^*) = x_0 y_0^* + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re\{x_n y_n^*\}.$$

### 2.5.2 Interpretazione dei coefficienti di Fourier

Nella definizione di  $u_n(t)$  compare un esponente piuttosto particolare; cerchiamo di analizzarlo per comprendere se i coefficienti della serie di Fourier possano avere un significato fisico. A tal fine, utilizziamo la formula di Eulero:

$$u_n(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right).$$

L'esponenziale complesso, come dimostra il suo sviluppo in seni e coseni, è l'oscillatore per eccellenza. Chiamiamo  $\phi$  la *pulsazione* che lo caratterizza nella base di Fourier:

$$\phi = \frac{2\pi}{T}n.$$

Ricordando che la pulsazione è pari alla frequenza moltiplicata per  $2\pi$ , otteniamo:

$$f_n = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{n}{T}.$$

Il nome di frequenza è in effetti appropriato, in quanto essa risulta pari ad un rapporto tra un numero puro ed il periodo  $T$ , che si misura in secondi:  $f_n$  si misura dunque in *Hertz* ( $\text{Hz}=\text{s}^{-1}$ ). Ciascuno dei segnali che compongono la base di Fourier rappresenta dunque un'oscillazione ad una precisa frequenza  $f_n$ , direttamente proporzionale a  $n$ ; quindi, il coefficiente  $c_n$  (o equivalentemente  $\mu_n = c_n/\sqrt{T}$ ) rappresenta il “peso” della frequenza  $n$ -esima per il segnale considerato. In altre parole, possiamo dire che il grafico di  $|c_n|$  in funzione di  $n$  è lo *spettro in frequenza* del segnale. Questa applicazione fisica rende la serie di Fourier (e la trasformata di Fourier, che verrà introdotta poco più avanti) molto adatta per lo studio di segnali audio, in quanto è possibile scomporre un suono nelle sue componenti in frequenza proprio attraverso questi semplici strumenti.

## Capitolo 3

# Trasformata di Fourier

Consideriamo un segnale  $v(t) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  a energia finita. Esiste allora il suo sviluppo in serie di Fourier:

$$v(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j2\pi f_n t}, \quad (3.0.1)$$

dove  $f_n = \frac{n}{T}$ , secondo la definizione di frequenza appena introdotta, e con

$$\mu_n = (v(t), u_n(t)) = \int_{-T/2}^{T/2} v(t) e^{-j2\pi f_n t} dt.$$

Sappiamo che i coefficienti  $\mu_n$  rappresentano il contenuto in frequenza del segnale  $v(t)$  a certe frequenze uniformemente distribuite sull'asse reale. In particolare, tra il valore di  $f_n$  e quello del successivo  $f_{n+1}$  c'è un intervallo  $\Delta f$  che vale

$$\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T}.$$

Se sostituiamo questa relazione nella (3.0.1), otteniamo:

$$v(t) = \Delta f \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j2\pi f_n t}. \quad (3.0.2)$$

Ci chiediamo se sia possibile infittire la partizione dell'asse delle frequenze, al fine di ottenere un'informazione maggiore sullo spettro del segnale. Facciamo un esempio concreto per renderci conto del problema: poniamo  $T = 1$  s;  $\Delta f$  sarà dunque pari a 1 Hz. Calcolando lo sviluppo in serie di Fourier, sapremo che nel segnale  $v(t)$  l'armonica corrispondente a 440 Hz viene moltiplicata per un coefficiente  $a$  e quella con frequenza 441 Hz per un coefficiente  $b$ ; se però volessimo conoscere la componente relativa alla frequenza di 440,5 Hz, non potremmo risolvere il problema.

Se facciamo tendere  $T$  ad infinito,  $\Delta f \rightarrow 0$ ; la variabile discreta  $f_n$  tende quindi a diventare una variabile continua, che chiamiamo semplicemente  $f$ . La serie diventa quindi una sommatoria di infiniti termini separati da intervalli infinitesimi: diventa cioè un integrale. Scriviamo dunque:

$$\mu_f = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt = \mu(f) \quad (3.0.3)$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(f) e^{j2\pi f t} df \quad (3.0.4)$$

$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{X(f)}$
$p_\tau(t)$	$\frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f}$
$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j2\pi f}$
$Tri_\tau(t)$	$\left( \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} \right)^2 \frac{1}{\tau}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-2\pi^2 f^2 \sigma^2}$

Tabella 3.1: Alcuni segnali notevoli e la loro trasformata di Fourier.

L'espressione (3.0.3) è la definizione della **trasformata di Fourier** del segnale  $v(t)$ , mentre la (3.0.4) è l'**antitrasformata di Fourier**. In simboli:

$$\mu(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} \qquad v(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mu(f)\}.$$

Per convenzione si usa la lettera maiuscola per indicare la trasformata di Fourier, ad esempio  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ .

La tabella 3 riporta alcune funzioni e le loro trasformate di Fourier. Il concetto di trasformata di Fourier richiede un notevole sforzo al fine di dimostrarne l'esistenza, l'unicità o l'effettiva corrispondenza tra  $x(t)$  e  $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\}$ ; tuttavia noi non ci soffermeremo su questi aspetti, che sono invece argomento centrale dei corsi di Analisi Matematica. Abbiamo preferito privilegiare in questa sede la facilità di comprensione, scegliendo un'esposizione più intuitiva rispetto al rigoroso processo matematico.

### 3.1 Proprietà della trasformata di Fourier

Restringiamo la nostra analisi al caso di segnali reali. Sotto questa condizione, la trasformata di Fourier gode di alcune interessanti proprietà.

**Teorema 3.1** *Sia  $s(t) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$  un segnale reale, e sia  $S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\}$ . Valgono le tre seguenti relazioni:*

$$S(f) = S^*(-f) \tag{3.1.1}$$

$$|S(f)| = |S(-f)| \tag{3.1.2}$$

$$\angle S(f) = -\angle S(-f), \tag{3.1.3}$$

*cioè il modulo della trasformata è pari, mentre la sua fase è dispari.*

#### Dimostrazione

Per prima cosa dimostreremo (3.1.1). Sarà sufficiente ricorrere alla definizione:

$$\begin{aligned} S(-f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{j2\pi ft} dt = \\ &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \right)^* = \\ &= S^*(f), \end{aligned}$$

dal momento che  $s(t) = s^*(t)$  essendo un segnale reale. A questo punto non è difficile dimostrare la (3.1.2):

$$|S(-f)| = |S^*(f)| = |S(f)|.$$

Per dimostrare la (3.1.3), scriviamo  $S(f)$  in coordinate polari:

$$S(f) = |S(f)| e^{j\angle S(f)} = |S(-f)| e^{j\angle S(f)};$$

la seconda disuguaglianza discende dalla parità del modulo della trasformata espressa dalla (3.1.2). Scriviamo ora un'espressione analoga di  $S^*(-f)$ :

$$S^*(-f) = \left( |S(-f)| e^{j\angle S(-f)} \right)^* = |S(-f)| e^{-j\angle S(-f)} = |S(f)| e^{-j\angle S(-f)}.$$

Ma abbiamo dimostrato che  $S(f) = S^*(-f)$ ; eguagliando le due espressioni otteniamo:

$$\angle S(f) = -\angle S(-f).$$

c.v.d. ■

**Corollario 3.1.1** *Dalla (3.1.1) discende che la parte reale della trasformata di Fourier di un segnale reale  $s(t)$  è pari, mentre quella immaginaria è dispari.*

$$\begin{aligned}\Re\{S(f)\} &= \Re\{S(-f)\} \\ \Im\{S(f)\} &= -\Im\{S(-f)\}\end{aligned}$$

Queste prime proprietà ricordano molto da vicino le proprietà dei coefficienti della serie di Fourier, di cui in effetti la trasformata di Fourier è un'estensione concettuale. Le particolarità di simmetria della trasformata rispetto all'asse delle ordinate fanno sì che si possa semplificare di molto l'analisi dei segnali; per esempio, un'immagine familiare a molti è quella dello spettro di una canzone memorizzata in un file *.wav*. Il grafico del modulo della trasformata o dei coefficienti di Fourier si estende infatti anche nel campo delle frequenze negative; tuttavia, possiamo disegnarne soltanto la parte con  $f > 0$ , proprio per via della parità di  $|S(f)|$ .

Enunciamo ora un teorema particolarmente importante.

**Teorema 3.2** *Sia  $s(t) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  un segnale reale. Valgono le seguenti affermazioni:*

1. se  $s(t)$  è pari,  $S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\}$  è reale e pari;
2. se  $s(t)$  è dispari,  $S(f)$  è immaginaria pura e dispari.

Non scenderemo nei dettagli della dimostrazione, che non presenta particolari difficoltà. Osserviamo solo che, tramite la formula di Eulero, possiamo scrivere:

$$\mathcal{F}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt = S_{\Re}(f) + jS_{\Im}(f).$$

Se il segnale da trasformare fosse pari, nel primo integrale avremmo una funzione integranda pari, essendo il prodotto di due funzioni entrambe pari, mentre nel secondo avremmo una funzione dispari. Ricordando che l'integrale di una funzione dispari tra estremi simmetrici rispetto all'origine è nullo, si vede che sopravvive solo  $S_{\Re}(f)$ . Al contrario, se  $s(t)$  fosse dispari sarebbe il primo integrale ad annullarsi, e quindi  $S(f)$  sarebbe immaginaria pura.

**Esercizio 9** È dato il segnale:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-t^2}$$

Come risulta essere la sua trasformata di Fourier?

*Soluzione*

Si ricorda che:

- se  $f(x) = f(-x)$  allora  $f(x)$  è una funzione pari
- se  $f(x) = -f(-x)$  allora  $f(x)$  è una funzione dispari

Si deduce facilmente che  $x(t)$  è una funzione dispari. Per il Teorema appena esposto, la trasformata di Fourier di  $x(t)$  sarà immaginaria pura e dispari. ■

**Esercizio 10** È dato il segnale:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) t e^{-|t|}$$

Come risulta essere la sua trasformata di Fourier?

*Soluzione*

L'esercizio è molto simile a quello precedente. Il segnale  $x(t)$  risulta essere reale pari, quindi il Teorema precedente ci dice che la trasformata di Fourier di  $x(t)$  è reale e pari. ■

### 3.1.1 Linearità

Ci soffermiamo ora brevemente sulle principali operazioni di manipolazione dei segnali. Per prima cosa, notiamo che la trasformata di Fourier gode delle proprietà di linearità che abbiamo già incontrato più volte. Per rendersene conto, è sufficiente pensare alla definizione: essendo l'integrale un operatore lineare, anche la trasformata di Fourier lo è. Possiamo quindi scrivere:

$$\mathcal{F}\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{x(t)\} + \beta \mathcal{F}\{y(t)\} \quad (3.1.4)$$

Questa proprietà viene utilizzata nei processi di amplificazione di un segnale. A livello concettuale, per amplificare un suono possiamo aumentare l'ampiezza della sua forma d'onda nel tempo, oppure moltiplicare per un coefficiente tutte le sue componenti in frequenza. È quello che succede ad esempio con l'amplificazione digitale su computer, dal momento che i suoni vengono memorizzati attraverso metodi che sfruttano la scomposizione del segnale nelle sue componenti in frequenza.

### 3.1.2 Scalamento nel tempo

**Teorema 3.3** Sia  $x(t)$  un segnale che ammette trasformata di Fourier  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ . Allora:

$$\mathcal{F}\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right). \quad (3.1.5)$$

**Dimostrazione** Distinguiamo il caso di  $\alpha$  positivo da quello di  $\alpha$  negativo. Per  $\alpha > 0$  abbiamo:

$$\mathcal{F}\{x(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta) e^{-j2\pi f \vartheta / \alpha} \frac{1}{\alpha} d\vartheta = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right),$$

per mezzo del cambio di variabili  $\vartheta = \alpha t$ . Per  $\alpha < 0$  possiamo scrivere  $\alpha = -|\alpha|$ , e quindi abbiamo:

$$\mathcal{F}\{x(-|\alpha|t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-|\alpha|t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{+\infty}^{-\infty} x(\vartheta) e^{-j2\pi f \vartheta / -|\alpha|} \left(-\frac{1}{|\alpha|}\right) d\vartheta = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

Per unificare i due casi possiamo dunque adottare la scrittura:

$$\mathcal{F}\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

c.v.d. ■

Lo scalamento nel tempo ha quindi due conseguenze sulla trasformata di Fourier. Innanzitutto riduce l'ampiezza del segnale in frequenza di un fattore  $|\alpha|$ . In secondo luogo, se chiamiamo *banda* il supporto della trasformata, essa risulta ampliata  $\alpha$  volte: ciò significa che il nostro segnale raggiunge



una frequenza maggiore o minore a seconda del valore di  $\alpha$ . Per avere un'idea di che cosa significhi, basta pensare a cosa succede quando “comprimiamo” una canzone di 3 minuti in 1 minuto e mezzo ( $\alpha = 2$ ): essa viene riprodotta più acuta, cioè a frequenza maggiore. Se invece rallentiamo un suono, esso ci sembrerà più grave.

Un caso particolare di scalamento è l'*inversione*, cioè la riproduzione di un segnale in senso inverso, per rimanere nel campo dell'applicazione audio. Si tratta infatti di uno scalamento con  $\alpha = -1$ :

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-f), \quad (3.1.6)$$

$$\text{se } x(t) \in \mathbb{R} \implies \mathcal{F}\{x(-t)\} = X^*(f).$$

Se consideriamo  $|X(f)|$ , è evidente che per segnali reali l'inversione non modifica lo spettro del segnale; questo trova ancora riscontro nella realtà, in quanto, intuitivamente, un suono riprodotto al contrario non cambia il suo contenuto in frequenza.

**Esercizio 8** È dato il segnale  $y(t) = x(2t)$ , dove  $x(t)$  è un segnale reale a banda limitata. Confrontare la banda e l'energia del segnale  $y(t)$  con quella del segnale  $x(t)$ .

*Soluzione*

Per la proprietà di scalamento si ha:

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(2t)\} = \frac{1}{2}X\left(\frac{f}{2}\right).$$

Da questa formula si può notare che  $y(t)$  è a banda limitata maggiore di quella di  $x(t)$ , per l'esattezza larga il doppio.

Rimane ora da calcolare l'energia di  $y(t)$ :

$$\mathcal{E}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(2t)|^2 dt$$

Applicando la sostituzione  $\vartheta = 2t$  e  $dt = d\vartheta / 2$  all'integrale si ottiene:

$$\mathcal{E}\{y(t)\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\vartheta)|^2 d\vartheta = \frac{1}{2} \mathcal{E}\{x(t)\}.$$

Da quest'ultimo integrale si osserva che l'energia di  $y(t)$  è minore rispetto a quella di  $x(t)$ . ■

### 3.1.3 Ritardo nel tempo

Applicare ad un segnale  $x(t)$  un ritardo  $T$  nel tempo significa considerare il segnale  $x(t - T)$ .

**Teorema 3.4** Sia  $x(t)$  un segnale che ammette trasformata di Fourier  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ . Allora:

$$\mathcal{F}\{x(t - T)\} = X(f) e^{-j2\pi fT}. \quad (3.1.7)$$

**Dimostrazione** Applicando la definizione di trasformata di Fourier e ponendo  $\vartheta = t - T$  abbiamo:

$$\mathcal{F}\{x(t - T)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - T) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta) e^{-j2\pi f(\vartheta + T)} d\vartheta = e^{-j2\pi fT} \mathcal{F}\{x(\vartheta)\}.$$

c.v.d. ■

La proprietà dimostrata coincide con quello che ci aspetteremmo: infatti ritardare un segnale sonoro non significa alterarne le componenti in frequenza (il suono prodotto è sempre lo stesso), ma solo cambiarne la fase. È facile vedere che si ha

$$|\mathcal{F}\{x(t - T)\}| = |X(f) e^{-j2\pi fT}| = |X(f)|,$$

$$\angle \mathcal{F} \{x(t - T)\} = \angle X(f) + \angle e^{-j2\pi fT} = \angle X(f) - j2\pi fT.$$

Come si vedrà in corsi successivi, un amplificatore ideale deve avere un'amplificazione con modulo costante (almeno nella banda passante) e sfasamento lineare rispetto alla frequenza; ciò corrisponde alle relazioni precedenti. Infatti, un amplificatore ideale applica al segnale soltanto un ritardo temporale (oltre, naturalmente, ad un fattore moltiplicativo).

**Esercizio 7** Sia data la seguente trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F} \{e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{a + j2\pi f}, \quad \text{con } a > 0$$

Calcolare:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{j2\pi fT}}{a + j2\pi(f - f_0)} \right\} = x(t).$$

*Soluzione*

Per la proprietà di modulazione della trasformata di Fourier il segnale richiesto è:

$$x(t) = e^{-a(t+T)} u(t + T).$$

■

### 3.1.4 Modulazione in frequenza

La modulazione in frequenza è la traslazione del segnale in frequenza. Vogliamo cioè sapere cosa succede se consideriamo  $X(f - F)$  e la antitrasformiamo; percorriamo cioè il percorso inverso rispetto al ritardo nel tempo.

**Teorema 3.5** Sia  $x(t)$  un segnale che ammette trasformata di Fourier  $X(f) = \mathcal{F} \{x(t)\}$ . Allora:

$$\mathcal{F} \{x(t) e^{j2\pi Ft}\} = X(f - F). \quad (3.1.8)$$

**Dimostrazione** La dimostrazione della proprietà di modulazione è del tutto analoga alla precedente:

$$\mathcal{F} \{x(t) e^{j2\pi Ft}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-F)t} dt = X(f - F).$$

c.v.d. ■

Osserviamo come tra le due proprietà di traslazione in tempo e in frequenza ci sia una certa simmetria: traslare un segnale in un dominio significa moltiplicarlo per un esponenziale complesso nell'altro. In effetti, le due proprietà sono identiche, a meno del segno dell'esponente; vedremo più avanti altre importanti proprietà di simmetria della trasformata di Fourier.

La proprietà di modulazione è estremamente importante nel campo delle telecomunicazioni via radio. Per poter inviare più segnali tramite un solo canale è infatti necessario che le bande di ciascun segnale non si sovrappongano; in caso contrario si otterrebbe la somma dei segnali trasmessi, dalla quale non si riuscirebbe a risalire alla trasmissione originale.

Si osservi però che lo spettro che otteniamo nell'espressione (3.1.8) non è pari; questo accade perché il segnale  $x(t) e^{j2\pi Ft}$  non è reale. Nella pratica non è possibile utilizzare segnali complessi; si usa dunque la moltiplicazione per un coseno di frequenza  $F$ . Si ottiene:

$$\mathcal{F} \{x(t) \cos 2\pi Ft\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} x(t) e^{j2\pi Ft} \right\} + \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} x(t) e^{-j2\pi Ft} \right\} = \frac{1}{2} X(f - F) + \frac{1}{2} X(f + F).$$

Lo spettro di frequenza viene cioè "sdoppiato" in due spettri identici, dei quali uno viene traslato a sinistra di  $F$  e l'altro a destra della stessa quantità.

**Esercizio 6** Sia data la seguente trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a + j2\pi f}, \quad \text{con } a > 0$$

Calcolare:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a + j2\pi f}\right\} = x(t).$$

*Soluzione*

Per la proprietà di modulazione della trasformata di Fourier la funzione richiesta è semplicemente:

$$x(t) = e^{-at} u(t) e^{j2\pi f_0 t}.$$

■

### 3.1.5 Trasformata di Fourier del complesso coniugato

Se il segnale  $x(t)$  è un segnale complesso, ci chiediamo quale sia la trasformata di Fourier del suo complesso coniugato  $x^*(t)$ .

**Teorema 3.6** Sia  $x(t)$  un segnale che ammette trasformata di Fourier  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ . Allora:

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-f). \quad (3.1.9)$$

**Dimostrazione** Procediamo “al contrario”, partendo dal membro di destra per arrivare a quello di sinistra.

$$X^*(-f) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j2\pi(-f)t} dt = \mathcal{F}\{x^*(t)\}.$$

c.v.d. ■

Non utilizzeremo spesso questa proprietà, dal momento che d’ora in poi ci occuperemo per lo più di segnali reali.

### 3.1.6 Derivazione nel tempo

La trasformata di Fourier ha un’importante proprietà rispetto all’operazione di derivazione.

**Teorema 3.7** Sia  $x(t)$  un segnale che ammette trasformata di Fourier  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ . Allora:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = X(f)j2\pi f. \quad (3.1.10)$$

**Dimostrazione** Ricordando la definizione di antitrasformata, possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right].$$

Sia la derivazione sia l’integrazione sono operazioni lineari, inoltre esse riguardano due diverse variabili (infatti stiamo integrando in  $f$  e derivando su  $t$ ): è quindi possibile scambiarne l’ordine. Inoltre,  $X(f)$  non dipende da  $t$ , e quindi possiamo escluderla dalla derivazione come se fosse una costante. L’espressione precedente diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) j2\pi f e^{j2\pi f t} df = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)j2\pi f\}.$$

A questo punto è sufficiente trasformare entrambi i membri per ottenere l’espressione cercata:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = X(f)j2\pi f.$$

c.v.d. ■

In pratica la trasformata di Fourier ci permette di trasformare l'operazione di derivazione in una ben più semplice moltiplicazione. Questa proprietà è particolarmente utile nella risoluzione di equazioni differenziali: si consideri ad esempio l'equazione:

$$x(t)'' + 3x(t) = y(t).$$

Applicando la trasformata di Fourier (o la più utilizzata trasformata di Laplace, che gode di una proprietà del tutto analoga) si ottiene un'equazione lineare in  $X(f)$ :

$$(j2\pi f)^2 X(f) + 3X(f) = -4\pi^2 f^2 X(f) + 3X(f) = Y(f),$$

dalla quale si può ottenere l'espressione di  $X(f)$ ; è infine sufficiente antitrasformare quest'ultima per risalire a  $x(t)$ . Ecco quindi che con questi nuovi strumenti è possibile risolvere un'equazione differenziale (il che, in generale, è difficile) riducendola ad una ben più semplice equazione algebrica, a patto di saper trasformare e antitrasformare tutte le funzioni che compaiono nell'equazione.

## 3.2 Segnali ad energia infinita

All'inizio di questo capitolo abbiamo esteso il concetto di *serie* di Fourier arrivando a definire la *trasformata* di Fourier. La stretta relazione fra le due forme ci porta a pensare che entrambe abbiano le stesse "richieste": appare cioè chiaro, almeno intuitivamente, che tutte le funzioni che potevano essere scritte in serie di Fourier ammettano anche una trasformata. In effetti, la serie di Fourier era applicabile a qualsiasi segnale  $x(t)$  a energia finita, e finora abbiamo considerato anche per la trasformazione soltanto segnali con  $\mathcal{E}\{x(t)\} < \infty$ .

Tuttavia, la trasformazione di Fourier è uno strumento ben più potente della serie. Vedremo infatti, pur senza dimostrarlo, che è possibile trasformare segnali ad energia infinita, come costanti o gradini unilateri. Iniziamo questo studio dalla funzione più "strana" che abbiamo visto finora, la delta di Dirac. In effetti, la sua trasformata è estremamente facile da calcolare:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1. \quad (3.2.1)$$

Se si pensa al significato fisico della trasformata di Fourier, questo risultato è sorprendente. Infatti un segnale che è nullo ovunque tranne che in un punto ha uno spettro in frequenza costante, cioè è composto dalla somma di tutte le sinusoidi prese tutte con la stessa ampiezza unitaria.

Ci potremmo chiedere che cosa succederebbe se facessimo l'applicazione inversa, se cioè considerassimo solo la sinusoide a frequenza nulla con ampiezza infinita. Se la frequenza della sinusoide fosse nulla, allora si tratterebbe di una costante. Quello che abbiamo fatto corrisponde a cercare l'antitrasformata di Fourier della delta di Dirac; vediamo che cosa otterremmo con la definizione di antitrasformata:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi t \cdot 0} = 1. \quad (3.2.2)$$

Potremmo quindi dire che l'antitrasformata della delta sia 1, o, in altre parole, che la trasformata di 1 sia la delta. Cerchiamo tuttavia di verificare questo risultato percorrendo un'altra via, più rigorosa: vediamo dunque la funzione costante di valore 1 come un'estensione della porta:

$$1 = \lim_{T \rightarrow \infty} p_T(t). \quad (3.2.3)$$

Dalla tabella 3 possiamo ricavare l'espressione della trasformata di Fourier della porta. Se applichiamo dunque ad entrambi i membri della (3.2.3) la trasformazione, possiamo scrivere:

$$\mathcal{F}\{1\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi f T}{\pi f}.$$

Il grafico della trasformata della porta è riportato in figura 3.2. Come si può vedere, si tratta di un'oscillazione pari smorzata verso  $|f|$  grande; in particolare, nell'origine assume il valore  $T$ . Al variare di  $T$ , la curva diventa più stretta e più alta nell'origine, mentre l'oscillazione rimane limitata dalla curva  $1/\pi f$ . Intuitivamente, sembrerebbe che questa funzione tenda ad assumere valore infinitamente grande nell'origine e nullo altrove, per  $T \rightarrow \infty$ . Questo ricorda il comportamento della delta di Dirac, ma per stabilire una corrispondenza tra le due forme dobbiamo verificare che abbiano le stesse proprietà.

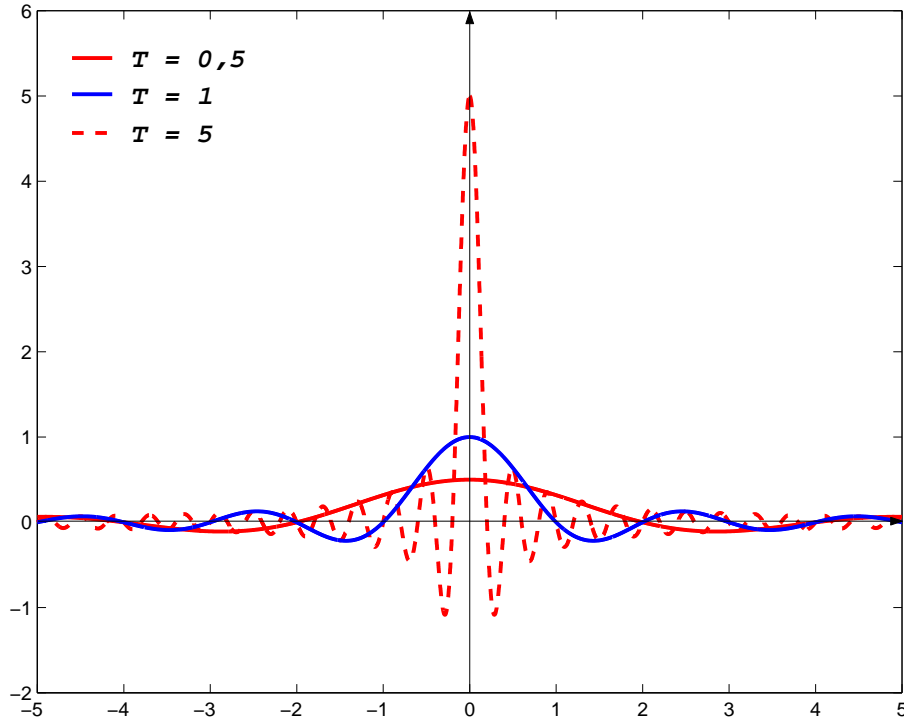


Figura 3.1: Grafico della trasformata di Fourier della porta  $\frac{\sin \pi f T}{\pi f}$ , con alcuni valori del parametro  $T$ .

Affinché valga la proprietà fondamentale della delta di Dirac (1.2.4), è necessario che l'integrale su tutto l'insieme delle frequenze della trasformata della porta valga 1. Ponendo  $\vartheta = \pi f T$  abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi f T}{\pi f} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta/T} \frac{1}{\pi T} d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} d\vartheta = A \quad \forall T,$$

cioè l'area sottesa assume un valore costante che non dipende dall'ampiezza della porta  $T$ , come avevamo già visto nel caso della *porta normalizzata* (cfr. 1.2.3). Si può dimostrare che la costante  $A$  vale esattamente 1, e che, più in generale, vale esattamente la relazione (1.2.4). Quindi possiamo scrivere:

$$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f). \quad (3.2.4)$$

Questo risultato ci permette di ottenerne un altro di fondamentale importanza. Applichiamo alla relazione appena dimostrata la proprietà di modulazione:

$$\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \mathcal{F}\{1\}(f - f_0) = \delta(f - f_0).$$

Questo ci permette di enunciare una regola di integrazione che ha carattere assolutamente generale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j2\pi \tau (x - x_0)} d\tau = \delta(x - x_0). \quad (3.2.5)$$

Si noti l'importanza della regola illustrata: finora infatti non eravamo in grado di integrare un esponenziale complesso, mentre ora abbiamo una semplice formula che può essere utilizzata in qualsiasi caso. Si noti anche che non è rilevante il segno dell'esponente: infatti l'uno o l'altro caso discendono dalla modulazione della trasformata o dell'antitrasformata di Fourier, come è facile verificare.

L'aver scoperto la trasformata di Fourier di una costante ci mette nelle condizioni di formalizzare la trasformazione del coseno e del seno:

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\} = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2};$$

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right\} = -j\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + j\frac{1}{2}\delta(f + f_0).$$

Possiamo anche determinare la trasformata della funzione segno:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases},$$

$$\mathcal{F}\{\text{sign}(t)\} = -\int_{-\infty}^0 e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{j\pi f},$$

e quella del gradino unilatero:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = \frac{1}{2}\text{sign}(t) + \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\text{sign}(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{1\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}.$$

### 3.3 Invertibilità della trasformata di Fourier

Finora abbiamo sempre assunto che la trasformata di Fourier sia invertibile. In altre parole, abbiamo sempre considerato valida la coppia di relazioni:

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Cerchiamo ora di dimostrare che ciò è vero, dimostriamo cioè che  $s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\}$  esiste sempre. Procediamo dalla definizione di antitrasformata di Fourier e applichiamo l'unica ipotesi, cioè  $S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df = \iint_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} e^{j2\pi ft} d\tau df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f(t-\tau)} df \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = s(t), \end{aligned}$$

ricordando che è possibile scambiare l'ordine dell'integrazione negli integrali multipli. Risulta quindi dimostrata l'invertibilità dell'operazione di trasformazione.

### 3.4 Trasformata di Fourier e prodotto scalare

Consideriamo i versori della base di Fourier. Se facciamo il prodotto scalare tra due di questi versori otteniamo:

$$(u_n(t), u_m(t)) = \delta_{nm}.$$

Se però considerassimo i due segnali senza il fattore di normalizzazione, avremmo:

$$(e^{j2\pi f_n t}, e^{j2\pi f_m t}) = \delta_{nm}T.$$

Facciamo un analogo prodotto scalare con gli esponenziali non normalizzati che compaiono nell'espressione della trasformata di Fourier:

$$(e^{j2\pi f_1 t}, e^{j2\pi f_2 t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f_1 - f_2)t} dt = \delta(f_1 - f_2) = \delta(f_2 - f_1).$$

Cerchiamo una corrispondenza tra i due risultati. Passare dalla serie alla trasformata di Fourier significa far tendere  $T$  ad infinito: tenendo presente ciò, si vede che i due risultati vengono a coincidere. Infatti, la delta di Kronecker viene ad avere supporto nullo (per definizione) e ampiezza  $T \rightarrow \infty$  (perché è moltiplicata appunto per  $T$ ), il che coincide con la rappresentazione della delta di Dirac.

Consideriamo inoltre una delle proprietà della serie di Fourier, espressa dalla (2.5.3):

$$(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_n^*;$$

potremmo pensare di riproporre questa equivalenza in termini di trasformata di Fourier, passando da una somma discreta a un integrale continuo. Ci chiediamo cioè se valga:

$$(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df.$$

**Teorema 3.8** *Siano  $x(t), y(t)$  due segnali che ammettono trasformata di Fourier rispettivamente  $X(f), Y(f)$ . Vale la seguente relazione:*

$$(x(t), y(t)) = (X(f), Y(f)).$$

**Dimostrazione**

Come prima, utilizzeremo la definizione di trasformata:

$$\begin{aligned} (X(f), Y(f)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta) e^{-j2\pi f\vartheta} d\vartheta \right] \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right]^* df = \\ &= \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta)y^*(\tau) e^{-j2\pi f(\vartheta - \tau)} d\vartheta d\tau df = \\ &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta)y^*(\tau)\delta(\vartheta - \tau) d\vartheta d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta)y^*(\vartheta) d\vartheta = (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

La tesi risulta dimostrata.

c.v.d. ■

Ciò significa che, allo scopo di determinare il prodotto scalare di due segnali, possiamo svolgere l'operazione indifferentemente nel dominio del tempo o in quello della frequenza. Inoltre, il teorema 3.8 ha un corollario:

**Corollario 3.8.1** Sia  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ . Vale la seguente relazione:

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \mathcal{E}\{X(f)\}.$$

La dimostrazione è immediata e quindi viene tralasciata. Questo risultato, sebbene molto intuitivo, è molto importante. Significa che l'energia di un segnale rimane invariata sia che lo guardiamo nel tempo sia che lo guardiamo in frequenza. Possiamo quindi concepire l'esistenza del segnale  $x$  indipendentemente dalla sua rappresentazione nell'uno o nell'altro dominio; addirittura, lo possiamo concepire indipendentemente da una qualsiasi rappresentazione analitica (anche se questo, ovviamente, non ci permetterebbe di svolgere alcuna analisi su di esso...).

Aldilà di considerazioni ontologiche sull'essenza dei segnali, possiamo comunque notare che non ci occorre conoscere la forma d'onda del segnale per valutarne l'energia. Questo ci tornerà utile nei capitoli successivi, quando analizzeremo processi casuali, cioè segnali non determinati di cui non conosciamo l'evoluzione nel tempo.

### 3.5 Simmetria della trasformata di Fourier

L'analogia tra la trasformata e l'antitrasformata di Fourier porta ad una notevole proprietà. Essa è espressa dal seguente Teorema.

**Teorema 3.9** Sia  $a(t)$  un segnale qualsiasi. Supponiamo che esso ammetta trasformata di Fourier, e che sia  $b(f) = \mathcal{F}\{a(t)\}$ . Allora, l'antitrasformata di  $a$  è espressa da  $b$  con l'argomento cambiato di segno:

$$\mathcal{F}^{-1}\{a(f)\} = b(-t). \quad (3.5.1)$$

**Dimostrazione** Per dimostrare la (3.5.1) basta ricorrere alla definizione di antitrasformata:

$$\mathcal{F}^{-1}\{a(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\vartheta) e^{-j2\pi \vartheta(-t)} d\vartheta;$$

d'altronde,

$$b(f) = \mathcal{F}\{a(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\vartheta) e^{-j2\pi f\vartheta} d\vartheta.$$

Confrontando le due espressioni, si ottiene:

$$\mathcal{F}^{-1}\{a(f)\} = b(-t).$$

c.v.d. ■

Questo Teorema ha due chiavi di lettura principali:

1. la trasformata e l'antitrasformata di una funzione sono uguali, a meno del segno dell'argomento;
2. una funzione e la sua trasformata seconda (cioè la trasformata della trasformata) sono uguali, a meno del segno dell'argomento.

In particolare, dal punto 2. possiamo ricavare che la trasformata (o l'antitrasformata) quarta di una funzione è uguale alla funzione stessa.

**Esempio** Consideriamo la porta di durata  $T$ . Sappiamo che

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = \frac{\sin \pi f T}{\pi f};$$

Dal Teorema precedente risulta:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(-\pi t T)}{-\pi t}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\sin \pi t T}{\pi t}\right\} = p_T(t).$$



Analogamente:

$$\mathcal{F} \{u(t) e^{-at}\} = \frac{1}{a + j2\pi f};$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{a - j2\pi f} \right\} = u(f) e^{-af}.$$

■

## 3.6 Banda e supporto

Enunciamo ancora una proprietà della trasformata di Fourier, la cui importanza è forse più “filosofica” che puramente matematica.

**Teorema 3.10** *La trasformata di Fourier di un segnale a supporto limitato nel tempo ha supporto illimitato in frequenza.*

*Invece, se la trasformata di Fourier di un segnale ha supporto limitato in frequenza, allora il segnale ha supporto illimitato nel tempo.*

Tralasciamo la dimostrazione per niente ovvia di questo Teorema. Cerchiamo però di capire bene che cosa esso ci dice: se il supporto del segnale in uno dei due domini è limitato, allora necessariamente nell’altro dominio esso ha supporto illimitato, cioè è diverso da zero su tutto l’asse reale (escluse intersezioni locali in corrispondenza degli zeri). Dobbiamo fare attenzione a non “invertire” il Teorema: in generale non è vero che se un segnale ha supporto illimitato in un dominio, esso ha supporto limitato nell’altro.

Pensiamo a che cosa ciò significhi riprendendo l’esempio della porta: si tratta di una funzione che nel tempo ha supporto limitato, mentre in frequenza si estende su tutto l’asse reale. Supponiamo di rendere la trasformata della porta a supporto limitato: consideriamo cioè la funzione:

$$Q_D(f) = \begin{cases} \frac{\sin \pi f D}{\pi f} & |f| < K \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Per il Teorema precedente, essa ammette un’antitrasformata a supporto illimitato. Per immaginare la forma d’onda di  $\mathcal{F}^{-1} \{Q_D(f)\}$  ricordiamo che troncare la trasformata di Fourier al punto  $K$  equivale a considerare la somma parziale della serie di Fourier troncata al  $K$ -esimo termine (ovviamente, per  $K \in \mathbb{N}$ ). Quello che otteniamo è quindi l’oscillazione riportata in figura 2.2: come vediamo, essa ha supporto illimitato.

Ciò che facciamo quando memorizziamo un suono (ad esempio, una canzone) in formato digitale è riassumibile come segue: per prima cosa si calcolano le componenti in frequenza del segnale, dopodiché le si memorizzano con una certa precisione finita predeterminata. Ecco cosa si intende quando si indica che una canzone è registrata a 32 bit: significa che ciascuna singola componente in frequenza viene registrata con una stringa di 32 bit. Tuttavia, una canzone è chiaramente un segnale che inizia e finisce, cioè è un segnale a supporto limitato; ciò significa che la sua banda è infinita. Quindi per registrare fedelmente un suono dovremmo registrare infiniti numeri ad infinite frequenze. Questo dovrebbe stupire: significa infatti che anche quando parliamo, o quando emettiamo un qualsiasi suono, stiamo generando oscillazioni su tutto l’asse delle frequenze, quindi produciamo oltre alle onde sonore anche frequenze nel campo delle onde radio, o della luce visibile, o dei raggi X, fino alle frequenze infinite dei raggi cosmici. Dovrebbe però essere chiaro che questi contributi sono infinitesimi, e quindi tali emissioni sono praticamente trascurabili.

Questa osservazione, oltre al fatto che a noi interessa registrare soltanto ciò che il nostro orecchio può percepire, fa sì che si tronchi lo spettro di frequenza ad una banda opportuna: ad esempio, nelle comunicazioni telefoniche tale frequenza di taglio è di 4 KHz, mentre nei sistemi audio ad alta fedeltà si arriva ai 20 KHz per ridurre la distorsione<sup>1</sup>. Otteniamo quindi uno spettro in frequen-

<sup>1</sup>Si vedrà successivamente, affrontando il problema del campionamento, che in realtà le frequenze di taglio sono leggermente più elevate.

za con supporto limitato, a cui corrisponde, per il Teorema precedente, un segnale con supporto illimitato nel tempo. Lo abbiamo visto bene con l'esempio della porta. Questo però non sembra fisicamente possibile: significa che, quando premo il tasto che avvia la riproduzione, il suono “sta già oscillando”. Si tratterebbe infatti di un suono che esiste da meno infinito a infinito, cioè dall'inizio alla fine dei tempi. Questo fatto, che può apparire un “trucchetto” ingannevole, è in realtà rigorosamente dimostrato (è un Teorema), e mette in discussione il nesso causa-effetto, un problema non indifferente in campo di filosofia della scienza.

Torniamo ad occuparci di problemi più comuni ed enunciamo un ultimo risultato, che lega la regolarità di una forma d'onda alla banda del suo spettro.

**Teorema 3.11** *Sia  $x(t)$  una funzione di classe  $\mathcal{C}^n$ , tale cioè che le sue prime  $n$  derivate siano continue. Allora, la sua trasformata di Fourier decresce per  $|f| \rightarrow \infty$  come  $\frac{1}{|f|^{n+2}}$ .*

Ciò significa che più una funzione è “liscia”, più velocemente il suo spettro va a zero. Dalla tabella 3 si può verificare quanto appena enunciato: la funzione triangolare è di classe  $\mathcal{C}^1$ , e la sua trasformata va come  $1/f^3$ ; la gaussiana, che è di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , ammette invece una trasformata che è ancora una gaussiana, e quindi decresce come un esponenziale, più velocemente di qualsiasi potenza di  $f$ . Di contro, la porta, che è discontinua (il che, convenzionalmente, si indica dicendo che è di classe  $\mathcal{C}^{-1}$ ), ha una trasformata che decresce come  $1/f$ , e quindi molto più lentamente rispetto alle altre. Sapere quanto velocemente uno spettro si azzeri ci è utile per sapere quale banda abbia un contenuto in frequenza sufficientemente basso da non provocare distorsioni qualora la tronchiamo. Si può infatti vedere che, a parità di  $N$ , la somma parziale della serie di Fourier troncata ai primi  $N$  termini di una gaussiana approssima la funzione originale molto meglio di quanto accada con il triangolo, che a sua volta è approssimato meglio della porta.

**Esercizio 11** Sia dato il segnale  $x(t)$  e la sua trasformata di Fourier  $X(f)$ . Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- A. Se  $x(t)$  ha supporto limitato,  $X(f)$  ha supporto limitato
- B. Se  $x(t)$  ha supporto illimitato,  $X(f)$  ha sempre supporto limitato
- C. La trasformata di Fourier di  $x(-t)$  vale  $X(-f)$
- D. La trasformata di Fourier di  $x^*(t)$  vale  $X^*(f)$
- E. La trasformata di Fourier di  $x(at)$  vale  $|a| X(f/a)$
- F. Se  $x(t)$  è reale e dispari,  $X(f)$  è reale pari

#### Soluzione

Le prime due affermazioni si possono subito scartare poichè per definizione la trasformata di Fourier di un segnale a supporto limitato nel tempo è a supporto illimitato in frequenza.

Per la terza affermazione si deve ricordare la proprietà d'inversione della trasformata:

$$\mathcal{F}\{X(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right);$$

ponendo  $a = 1$  si ottiene

$$\mathcal{F}\{X(-t)\} = \frac{1}{|-1|} X\left(-\frac{f}{1}\right) = X(-f).$$

Perciò l'affermazione C risulta essere vera.

La quarta affermazione è sbagliata perchè  $\mathcal{F}\{x^*(t)\}$  vale  $X^*(-f)$  e non  $X^*(f)$ .

La quinta affermazione è sbagliata perché per la proprietà di scalamento si ha:

$$\mathcal{F}\{X(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad \text{con } a < 0$$

e non:

$$\mathcal{F}\{X(at)\} = |a| X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Anche l'ultima affermazione risulta sbagliata, perchè se  $x(t)$  è reale e dispari, allora  $X(f)$  è immaginaria dispari. ■



## Capitolo 4

# Cenni sulla trasformata di Laplace

Trattiamo brevemente una trasformazione simile a quella di Fourier: la trasformata di Laplace. Essa viene largamente utilizzata nelle applicazioni ingegneristiche, quindi è opportuno che si accenni alle sue proprietà, e alle relazioni che intercorrono tra la due trasformazioni.

La Trasformata di Laplace di una funzione  $x(t)$  è definita come:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (4.0.1)$$

Come si vede, la definizione di  $\mathcal{L}\{x(t)\}$  ricorda molto da vicino quella di  $\mathcal{F}\{x(t)\}$ . Molto meno simili sono invece le espressioni dell'antitrasformata:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(s) e^{st} ds;$$

per trovare l'antitrasformata di Laplace è infatti necessario integrare lungo un cammino particolare, cioè lungo la retta del piano complesso definita da  $\Re\{x\} = \sigma_0$ , dove  $\sigma_0$  è scelto in modo che tutti i poli (cioè gli zeri del denominatore) di  $X(s)$  stiano alla sua sinistra.

Comunque, le due forme appaiono abbastanza simili: in entrambi i casi si tratta infatti di integrare  $x(t)$  dopo averlo moltiplicato per un esponenziale. Verrebbe quasi da pensare che, in generale, si possa ottenere la trasformata di Fourier sostituendo nell'espressione della trasformata di Laplace  $s = j2\pi f$ :

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \Big|_{s=j2\pi f}. \quad (4.0.2)$$

In effetti, alcune delle trasformate che già conosciamo sembrano confermare questa ipotesi. Ad esempio:

$$\mathcal{L}\{e^{-|a|t}u(t)\} = \frac{1}{s + |a|}; \quad \mathcal{F}\{e^{-|a|t}u(t)\} = \frac{1}{|a| + j2\pi f}.$$

In realtà questo non è vero in generale. Si può dimostrare che la (4.0.2) vale se e solo se il luogo di punti  $s = j2\pi f$ , cioè l'asse immaginario, è compreso nella regione di convergenza di  $X(s)$  (cioè la regione del piano complesso per la quale l'integrale di Laplace converge). Quindi è possibile usare questa relazione se tutti i poli di  $X(s)$  hanno parte reale negativa, cioè stanno nella parte sinistra del piano complesso.

Negli altri casi, compresi quelli in cui l'asse immaginario si trovi sul bordo del dominio di  $X(s)$ , la corrispondenza non sussiste:

$$\mathcal{L}\{e^{|a|t}u(t)\} = \frac{1}{s - |a|}; \quad \mathcal{F}\{e^{|a|t}u(t)\} = \frac{1}{|a| + j2\pi f}.$$

In particolare, si può vedere che in situazioni “di confine” come quella del gradino (il cui polo si trova nell’origine, come si può dedurre dall’espressione della sua trasformata di Laplace) le due trasformate differiscono per lo più per la presenza di una o più funzioni delta:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}; \quad \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}.$$

Parte II

**Sistemi lineari**





## Capitolo 5

# Sistemi Lineari Tempo Invarianti

Un sistema è un operatore che applica una trasformazione  $S$  ad un certo numero  $N$  di ingressi  $x_n(t)$ , restituendo un certo numero  $M$  di uscite  $y_m(t)$ . In generale, gli ingressi e le uscite possono essere una qualsiasi funzione del tempo (costanti, treni di impulsi, o forme d'onda qualsiasi). Noi ci occuperemo soltanto di sistemi con un ingresso e un uscita, che indicheremo rispettivamente  $x(t)$  e  $y(t) = S\{x(t)\}$ .

### 5.1 Sistemi lineari (L)

**Definizione 5.1** Un sistema si dice **lineare** se:

$$S\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n(t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S\{x_n(t)\} \quad (5.1.1)$$

**Teorema 5.1** Se un sistema è lineare, allora vale:

$$S\{0\} = 0 \quad (5.1.2)$$

**Dimostrazione** Supponiamo per assurdo che  $S$  sia lineare e  $S\{0\} = cost \neq 0$  allora:

$$S\{0 + 0\} = S\{0\} = cost.$$

Ma varrebbe anche:

$$S\{0 + 0\} = S\{0\} + S\{0\} = 2cost.$$

Questo è assurdo; quindi l'ipotesi che  $S$  sia lineare risulta sbagliata.

c.v.d. ■

Consideriamo per esempio il sistema:

$$y(t) = 5 + x(t);$$

se si impone l'ingresso  $x(t)$  pari al segnale nullo, otteniamo:

$$s\{0\} = 5 + 0.$$

Abbiamo in uscita un segnale  $y(t) = 5$ , quindi il sistema  $y(t) = 5 + x(t)$  non è lineare. Consideriamo ora il sistema  $y(t) = x^2(t)$  e imponiamo nuovamente l'ingresso  $x(t) = 0$ :

$$y(t) = S\{0\} = 0.$$

Ciò non implica però che il sistema sia lineare; se infatti applichiamo le definizioni di linearità otteniamo il risultato opposto. Dobbiamo infatti verificare che il sistema applicato ad una somma di segnali dia la stessa uscita della somma dei sistemi applicati ai singoli segnali. In simboli:

$$S\{x_1(t) + x_2(t)\} = S\{x_1(t)\} + S\{x_2(t)\}.$$

In realtà abbiamo:

$$S\{x_1(t) + x_2(t)\} = (x_1(t) + x_2(t))^2 = x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t) \neq x_1^2(t) + x_2^2(t) = S\{x_1(t)\} + S\{x_2(t)\}.$$

Questi due esempi mostrano che la (5.1.2) è una condizione necessaria ma non sufficiente per stabilire la linearità di un sistema. Alcuni esempi di sistemi lineari sono:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

Al contrario esempi di sistemi sicuramente non lineari sono:

$$y(t) = x^3(t)$$

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

$$y(t) = 2x(t) + \cos(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^T \sqrt{x(t)} dt$$

Vediamo ora altre caratteristiche che un sistema può assumere.

**Definizione 5.2** Un sistema viene detto **senza memoria** se l'uscita al tempo  $t$  dipende solo dall'ingresso al tempo  $t$ .

Ad esempio  $y(t) = 5x(t)$  è un sistema senza memoria, in quanto per determinare l'uscita in un istante  $t$  è necessario conoscere soltanto l'ingresso nel corrispondente istante  $t$ .

**Definizione 5.3** Un sistema viene invece detto **con memoria** se l'uscita al tempo  $t$  dipende dall'ingresso che si ha in uno o più istanti  $t_k \neq t$ .

Ad esempio il sistema  $y(t) = 4x(t - t_0)$ , secondo la nostra definizione, è un sistema con memoria, in quanto deve “ricordarsi” i valori che  $x(t)$  ha assunto negli ultimi  $t_0$  secondi. Questo sistema, che viene chiamato *ritardatore*, viene a volte considerato senza memoria, perché l'uscita dipende dall'ingresso in un solo istante di tempo; tuttavia, se dovessimo realizzarlo materialmente, avremmo bisogno di memorizzare in qualche modo l'ingresso per un certo periodo di tempo. Preferiamo quindi considerare un concetto di “memoria” più aderente all'aspetto tecnico e pratico.

Il tipico esempio di sistema con memoria è l'operatore di integrazione. In particolare, un sistema può avere memoria infinita, come quello definito come segue (che nella pratica è però irrealizzabile):

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

Figura 5.1: Schema a blocchi di un sistema tempo-invariante: le due uscite devono coincidere.

## 5.2 Sistemi Tempo Invarianti (TI)

**Definizione 5.4** Dato un sistema  $y(t) = S\{x(t)\}$ , esso si dice **tempo-invariante (TI)** se:

$$S\{x(t - T)\} = y(t - T)$$

Possiamo dedurre da questa definizione che un sistema risulta tempo-invariante se i due schemi a blocchi di figura 5.1 sono equivalenti, danno cioè la stessa uscita per ogni ingresso  $x(t)$ . Proviamo a verificare la tempo-invarianza di  $y(t) = x^2(t)$ , seguendo gli schemi a blocchi appena visti.

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{S} x^2(t) \xrightarrow{T} x^2(t - T), \\ x(t) &\xrightarrow{T} x(t - T) \xrightarrow{S} x^2(t - T). \end{aligned}$$

Come possiamo vedere i risultati ottenuti sono equivalenti, quindi il sistema che abbiamo considerato è tempo invariante (TI).

Applichiamo ora lo stesso metodo al sistema  $y(t) = x(t)u(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{S} x(t)u(t) \xrightarrow{T} x(t - T)u(t - T), \\ x(t) &\xrightarrow{T} x(t - T) \xrightarrow{S} x(t - T)u(t). \end{aligned}$$

In questo caso i risultati sono differenti; quindi si può concludere con certezza che il sistema non è TI. Esistono però dei casi, come quello che affronteremo ora, nei quali non si può verificare immediatamente la tempo-invarianza.

Consideriamo il sistema definito da  $y(t) = \int_{t-T_0}^t x(\tau)d\tau$ ; operando sempre nello stesso modo abbiamo:

$$\begin{aligned} x(\tau) &\xrightarrow{S} \int_{t-T_0}^t x(\tau)d\tau \xrightarrow{T} \int_{t-T-T_0}^{t-T} x(\tau)d\tau, \\ x(\tau) &\xrightarrow{T} x(\tau - T) \xrightarrow{S} \int_{t-T_0}^t x(\tau - T)d\tau. \end{aligned}$$

Apparentemente avremmo trovato un sistema non TI. Ma se poniamo  $\vartheta = \tau - T$  troviamo

$$\int_{t-T_0}^t x(\tau - T)d\tau \xrightarrow{\vartheta=\tau-T} \int_{t-T-T_0}^{t-T} x(\vartheta)d\vartheta,$$

che è esattamente identico al primo risultato trovato. In questo caso perciò il sistema considerato è TI. Situazione di questo genere si verificano abbastanza spesso quando si lavora con gli integrali; in generale è però sufficiente operare un opportuno cambio di variabili.



## Capitolo 6

# Integrale di convoluzione

### 6.1 Funzione di trasferimento e risposta all'impulso di un sistema LTI

Il problema che ci poniamo ora è quello di trovare una formula che legghi il segnale di uscita  $y(t)$  di un sistema LTI con il segnale di ingresso  $x(t)$ . Indichiamo con:

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

una trasformazione LTI sul segnale  $x(t)$ , definito come:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

Per le note proprietà della delta, si può facilmente verificare l'identità appena scritta. Possiamo scrivere il segnale di uscita come:

$$y(t) = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}$$

Dato che sia l'operatore  $\mathcal{L}$  sia l'operatore di integrazione sono lineari, possiamo scambiarne l'ordine e riscrivere il segnale di uscita  $y(t)$  nella forma:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

perché  $x(\tau)$  non varia col tempo, e quindi per  $\mathcal{L}$  è una costante. Possiamo quindi definire la **risposta all'impulso** del sistema, che scriviamo come:

$$h(t) = \mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\},$$

avendo posto che il sistema fosse TI. Inoltre

$$h(t-\tau) = \mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\};$$

sostituendo nell'espressione del segnale di uscita troviamo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Questa relazione molto importante prende il nome di **integrale** o **prodotto di convoluzione** e viene indicato nel seguente modo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (6.1.1)$$

Ogni sistema LTI è quindi completamente caratterizzato dalla sua risposta all'impulso, cioè dall'espressione dell'uscita quando all'ingresso viene posto un impulso  $\delta(t)$ .

**Teorema 6.1** *L'integrale di convoluzione gode della proprietà commutativa; vale cioè:*

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t).$$

**Dimostrazione** Sostituendo nella (6.1.1)  $\vartheta = t - \tau$  otteniamo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \xrightarrow{\vartheta=t-\tau} - \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-\vartheta)h(\vartheta)d\vartheta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\vartheta)h(\vartheta)d\vartheta = h(t) * x(t), \end{aligned}$$

quindi  $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$ .

c.v.d. ■

**Esercizio 14** Si calcoli il seguente prodotto di convoluzione:

$$\sin(2\pi f_0 t) * \delta(t - t_0)$$

*Soluzione*

Chiamiamo  $\sin(2\pi f_0 t) = x_1(t)$  e  $\delta(t - t_0) = x_2(t)$ . Il prodotto di convoluzione risulta per definizione:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

Applicandolo ora alle due funzioni del testo:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi f_0 \tau) \delta(t-\tau-t_0) d\tau$$

Ora risolviamo l'integrale nella maniera standard degli integrali con delta di Dirac; si mette in evidenza  $\tau$ :

$$t - \tau - t_0 = 0 \quad \tau = t - t_0$$

Il risultato è quindi:

$$x_1(t) * x_2(t) = \sin[2\pi f_0(t - t_0)].$$

■

## 6.2 Interpretazione dell'integrale di convoluzione

Cerchiamo di dare un'interpretazione al risultato che abbiamo ottenuto nel paragrafo precedente. Spezzando infatti la (6.1.1) in due termini e sostituendo  $\vartheta = t - \tau$  troviamo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 x(t-\vartheta)h(\vartheta)d\vartheta + \int_0^{+\infty} x(t-\vartheta)h(\vartheta)d\vartheta.$$

Possiamo dire che  $y(t)$  è la somma di due contributi:

$$y_p(t) = \int_0^{+\infty} x(t-\vartheta)h(\vartheta)d\vartheta.$$

e

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^0 x(t - \vartheta)h(\vartheta)d\vartheta = \int_0^{+\infty} x(t + \vartheta)h(-\vartheta)d\vartheta,$$

Si può osservare che il primo di questi due contributi tiene conto di tutti i valori che il segnale ha assunto fino all'istante in cui lo stiamo analizzando; il secondo integrale è invece sensibile a tutti i valori che il segnale assumerà in un tempo successivo rispetto all'istante in cui lo stiamo analizzando. Possiamo allora definire il concetto di causalità di un sistema:

**Definizione 6.1** *Un sistema è detto **causale** se l'uscita al tempo  $t_0$  dipende dall'ingresso per  $t \leq t_0$  per qualunque valore di  $t_0$ .*

Quindi un sistema LTI è causale se e solo se  $y_f(t) = 0$ , cioè se e solo se la sua risposta all'impulso  $h(t)$  è nulla per  $t < 0$ .

Il concetto di causalità si riferisce al fatto che un sistema reale non può conoscere i valori che il suo ingresso assumerà nel futuro; questo perché tutti gli oggetti reali sono sottoposti al nesso di causa-effetto. In altri termini, avere  $h(t) = 0$  per  $t < 0$  significa che il sistema non reagisce prima che gli venga fornita un'eccitazione, ma solo dopo (o tutt'al più a partire da quello stesso istante).

## 6.3 Trasformata di Fourier della convoluzione

Proviamo ora ad applicare la trasformata di Fourier all'integrale di convoluzione, quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta)h(t - \vartheta)d\vartheta\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{x(\vartheta)h(t - \vartheta)\}d\vartheta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta)h(t - \vartheta) e^{-j2\pi f t} dt d\vartheta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \vartheta) e^{-j2\pi f t} dt \right] d\vartheta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta) \mathcal{F}\{h(t - \vartheta)\} d\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta) H(f) e^{-j2\pi f \vartheta} d\vartheta = \\ &= H(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta) e^{-j2\pi f \vartheta} d\vartheta = H(f) X(f). \end{aligned}$$

Abbiamo trovato un risultato molto importante:

$$\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = H(f)X(f) \quad (6.3.1)$$

cioè la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione è il prodotto ordinario delle trasformate di Fourier. Proviamo a calcolare invece la trasformata di Fourier del prodotto ordinario:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f_1) e^{j2\pi f_1 t} df_1 \right] \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X_2(f_2) e^{j2\pi f_2 t} df_2 \right] e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} X_1(f_1)X_2(f_2) e^{j2\pi(f_1+f_2-f)t} dt = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} X_1(f_1)X_2(f_2)\delta(f_1+f_2-f)df_2df_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f_1)X_2(f-f_1)df_1 = X_1(f_1) * X_2(f_2). \end{aligned}$$

Abbiamo trovato che la convoluzione di due segnali in frequenza corrisponde alla trasformata di Fourier del loro prodotto nel dominio del tempo:

$$\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = X_1(f) * X_2(f). \quad (6.3.2)$$

Per riassumere, abbiamo ancora una volta trovato una proprietà di simmetria della trasformata di Fourier: il prodotto ordinario in uno dei due domini (tempo o frequenza) è il prodotto di convoluzione nell'altro.

**Esercizio 16** Il segnale  $x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - iT)$ , con  $\alpha_i$  costanti note,  $r(t)$  segnale che vale  $1/T$  per  $t \in [0, T]$  e 0 altrove, viene posta all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso  $h(t)$  che vale  $-1$  per  $t \in [0, T]$ ,  $1$  per  $t \in [T, 2T]$  e 0 altrove. Sia  $y(t)$  il segnale in uscita. Quanto vale  $y(kT)$ ?

*Soluzione*

L'uscita  $y(t)$  è data dal prodotto di convoluzione tra  $x(t)$  e  $h(t)$ , perciò:

$$y(t) = \left[ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - iT) \right] * h(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i [r(t - iT) * h(t)]$$

Considerando la funzione  $w(t) = r(t) * h(t)$  si ha che  $w(t - T) = r(t - T) * h(t)$ . Sostituendo questa funzione nell'espressione della  $y(t)$  si ha:

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i w(t - iT)$$

Ora si scrive la  $y(kT)$  e ponendo alcuni valori a  $k$  ed a  $i$  si osserva cosa accade alla funzione:

$$y(kT) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i w(kT - iT) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i w[(k - i)T]$$

- con  $k = 10$ ,  $i = 100$  si ha  $w(-90T) = 0$  poichè il supporto è  $3T$
- con  $k = 10$ ,  $i = 10$  si ha  $w(0T) = 0$
- con  $k = 10$ ,  $i = 9$  si ha  $w(1T) = -1$
- con  $k = 10$ ,  $i = 8$  si ha  $w(2T) = 1$
- con  $k = 10$ ,  $i = 7$  si ha  $w(3T) = 0$
- con  $k = 10$ ,  $n < 7$  si ha  $w(nT) = 0$

Da questo si può capire che l'uscita è:

$$y(kT) = \alpha_{k-1} w(kT - T[k-1]) + \alpha_{k-2} w([k-k+2]T)$$

e si ricava:

$$y(kT) = -\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$$

■

## 6.4 Proprietà della convoluzione

La convoluzione gode di alcune proprietà che enunciamo senza dimostrare. La prima riguarda il concetto intuitivo di lunghezza di supporto di cui avevamo già parlato nella sezione 1.2.1.

**Teorema 6.2** Siano  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  due segnali aventi supporto lungo rispettivamente  $L_1$  e  $L_2$ . Allora, la loro convoluzione  $x_1(t) * x_2(t)$  ha supporto lungo  $L_1 + L_2$ .

La seconda invece riguarda l'inizio del supporto, cioè il primo istante di tempo in cui il segnale è diverso da zero.



**Teorema 6.3** Siano  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  due segnali il cui supporto inizia rispettivamente in  $t = I_1$  e  $t = I_2$ . Allora, il supporto della loro convoluzione inizia in  $t = I_1 + I_2$ .

**Esercizio 15** Il segnale  $P_T(t - T/2)$  è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso  $h(t) = te^{(-t)}u(t)$ , producendo all'uscita un segnale  $y(t)$ . Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- A.  $y(t)$  non è a supporto limitato
- B.  $y(t)$  assume valori positivi e negativi
- C.  $y(t)$  è reale, né pari, né dispari
- D.  $Y(f)$  ha modulo pari e fase dispari
- E.  $y(t)$  è nulla per  $t < 0$

*Soluzione*

La risposta A è vera poiché l'uscita  $y(t)$  a supporto illimitato in quanto il risultato di un'operazione tra una funzione illimitata con una a supporto illimitato ( $h(t)$ ).

La risposta C è vera; infatti, se svolgiamo i calcoli per la verifica dell'affermazione, si osserva che la  $y(t)$  non è né pari, né dispari.

Il modulo della  $Y(f)$  è pari mentre la fase è dispari, perciò la risposta D è vera.

Per la risposta E si ipotizza di considerare il punto  $0^-$  e considero la funzione  $y(t)$  in questo punto la funzione vale zero, come in tutti gli altri punti che lo precedono, perciò anche questa risposta è vera.

Per esclusione rimane la risposta B che è sicuramente falsa: infatti, i due segnali coinvolti sono positivi, e quindi la loro convoluzione non può dare valori negativi. ■

**Esercizio 18** Sia dato un sistema LTI la cui risposta all'impulso vale:  $h(t) = \delta(t) + Tri_T(t - T)$ . All'ingresso di questo sistema viene posto il segnale  $x(t) = p_T(t - \frac{T}{2})$ . La funzione  $p_T(t)$  vale 1 per  $|t| < \frac{T}{2}$  e zero altrove. La funzione  $Tri_T(t)$  vale  $1 - \frac{|t|}{T}$  per  $|t| < T$  e zero altrove. La risposta del sistema all'ingresso  $x(t)$  è denominata  $y(t)$ . Dire quali delle seguenti affermazioni è **VERA**:

- $y(t)$  è causale e nulla per  $t > 3T$ .
- $y(t)$  non è causale ed è nulla per  $t > 2T$ .
- $y(t)$  è causale e non è nulla per  $t > 4T$ .
- $y(t)$  non è causale e non è nulla per  $t > 2T$ .

**NOT APPROVED**

*Soluzione*

L'uscita del sistema è causale; infatti il supporto di  $x(t)$  inizia nell'origine, come quello di  $h(t)$ . Inoltre, la porta è larga  $T$ , il triangolo  $T/2$ , e  $h(t)$  ha supporto lungo  $\frac{3}{2}T$ ; sommando le lunghezze dei due supporti abbiamo la durata dell'uscita cioè  $\frac{5}{2}T$ , perciò l'affermazione vera è la prima. ■

**Esercizio 19** Sia dato un sistema LTI. Al suo ingresso vengono posti i segnali  $x_1(t)$  ed  $x_2(t)$ , che forniscono rispettivamente le uscite  $y_1(t)$  ed  $y_2(t)$ . Calcolare l'uscita  $y(t)$  del medesimo sistema quando all'ingresso venga posto il segnale  $x(t) = 3x_1(t - 2) + 4jx_2(t - \frac{1}{2})$ .

*Soluzione*

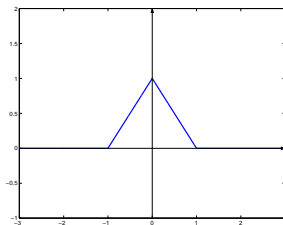
Essendo il sistema LTI, basta applicarne le proprietà di linearità. Si ha di conseguenza:

$$y(t) = 3y_1(t - 2) + 4jy_2\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

■

**Esercizio 17** Sia  $x(t)$  l'ingresso di tre trasformazioni lineari e tempo-invarianti, ognuna caratterizzata da una risposta all'impulso  $h_i(t)$ . Sia  $y_i(t)$  l'uscita corrispondente. Si consideri

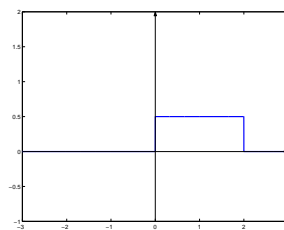
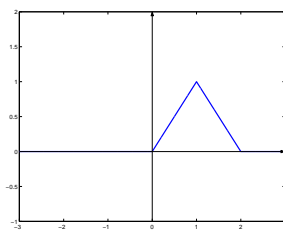
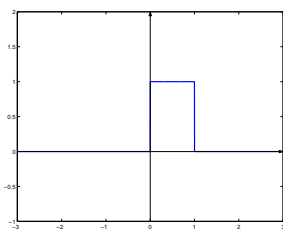
$$x = \begin{cases} 1 - |t| & -1 < t < +1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$h_1 = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$h_2 = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$h_3 = \begin{cases} 1/2 & 0 < t < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



### Soluzione

Osserviamo che per ciascuno dei tre sistemi l'uscita massima si ha quando la sovrapposizione tra le forme d'onda è massima. Nel primo sistema, questo si ottiene con  $t = 1/2$ :

$$y_{M1} = \int_0^{1/2} (t + 1/2) dt + \int_{1/2}^1 (-t + 3/2) dt = \frac{3}{4}.$$

Nel secondo sistema, scegliamo  $t = 1$ :

$$y_{M2} = \int_0^1 t^2 d\tau + \int_1^2 (2 - t)^2 dt = \frac{2}{3};$$

infine, nel terzo sistema il massimo si trova in  $t = 1$ :

$$y_{M3} = \int_0^1 \frac{1}{2} t dt + \int_1^2 \frac{1}{2} (2 - t) dt = \frac{1}{2}.$$

È facile vedere che l'uscita massima si ha col primo sistema. ■

**Esercizio 20** È data la seguente trasformazione:

$$y(t) = \int_a^t [b + d \cdot x(\tau)] d\tau + c \cos(2\pi f_0 t)$$

Per quali valori dei parametri  $a, b, c$  e  $d$  tale trasformazione è lineare e tempo-invariante?

*Soluzione*

Ricordando che la condizione necessaria ma non sufficiente per la linearità è che ad ingresso nullo  $x(t) = 0$  corrisponde uscita nulla, questo implica che  $d$  può assumere qualsiasi valore, mentre bisogna imporre  $c = b = 0$ .

$$y(t) = \int_a^t b \, d\tau + \int_a^t d \cdot 0 \, d\tau + c \cos(2\pi f_0 t) = 0$$

Il sistema deve anche essere TI:

$$y(t) = \int_a^t d \cdot x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_a^t d \cdot x(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad y(t-T) = \int_a^{t-T} d \cdot x(\tau) d\tau. \quad (6.4.1)$$

$$x(t) \quad \Rightarrow \quad x(t-T) \quad \Rightarrow \quad y'(t) = \int_a^{t-T} d \cdot x(\tau-T) d\tau;$$

sostituendo  $\vartheta = \tau - T$  si ottiene:

$$y'(t) = \int_{a-T}^{t-T} d \cdot x(\vartheta) d\vartheta \quad (6.4.2)$$

Perché i due integrali (6.4.1) e (6.4.2) siano uguali bisogna imporre  $a = -\infty$ . ■

**Esercizio 22** Discutere linearità e invarianza temporale del sistema specificato dalla seguente relazione tra entrata e uscita:

$$y(t) = 4 + e^{x(t)}.$$

*Soluzione*

Imponendo  $x(t) = 0$  l'uscita che si ottiene non è nulla  $y(t) = 5$ , il sistema non è quindi lineare. Bisogna ora verificare la sua tempo-invarianza.

$$\begin{aligned} y(t-T) &= 4 + e^{x(t-T)}; \\ y_1(t) &= 4 + e^{x(t-T)}. \end{aligned}$$

Il sistema risulta TI. ■

**Esercizio 23** Discutere il seguente sistema:

$$y(t) = \int_{t-4T}^t x(\vartheta) \cos(2\pi\vartheta) d\vartheta.$$

*Soluzione*

Il sistema è caratterizzato da un integrale il quale è lineare per definizione; bisogna verificare se è TI:

$$y(t) = \int_{t-4T}^t x(\vartheta) \cos(2\pi\vartheta) d\vartheta \quad \Rightarrow \quad y(t-t_0) = \int_{t-4T-t_0}^{t-t_0} x(\vartheta) \cos(2\pi\vartheta) d\vartheta. \quad (6.4.3)$$

$$x(t) \quad \Rightarrow \quad x(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = \int_{t-4T}^t x(\vartheta-t_0) \cos(2\pi\vartheta) d\vartheta.$$

Sostituendo  $\tau = \vartheta - t_0$  si ottiene:

$$y_1(t) = \int_{t-4T-t_0}^{t-t_0} x(\tau) \cos(2\pi(\tau+t_0)) d\tau. \quad (6.4.4)$$

I due integrali (6.4.3) ed (6.4.4) risultano diversi perciò non è verificata la TI. ■

**Esercizio 26** Sia dato il sistema:

$$y(t) = x(t - 3T) + \int_{-\infty}^{t-T} x(\tau - 2T) d\tau;$$

si esprima l'uscita ritardata di un tempo  $\vartheta$ .

*Soluzione*

L'esercizio richiede semplicemente di scrivere  $y(t - \vartheta)$ ; si ottiene:

$$y(t - \vartheta) = x(t - 3T - \vartheta) + \int_{-\infty}^{t-T-\vartheta} x(\tau - 2T) d\tau$$

■

**Esercizio 27** Sia dato un sistema LTI. Quando al suo ingresso viene posto il segnale  $x(t) = \delta(t)$ , l'uscita vale  $y(t) = e^{-t}u(t)$ . Quanto vale l'uscita quando all'ingresso del medesimo sistema viene posto il segnale  $x(t) = e^{j2\pi t}$ ?

*Soluzione*

L'uscita  $y(t) = e^{-t}u(t)$  è la risposta all'impulso, applicando la trasformata di Fourier si trova  $H(f)$ :

$$H(f) = \mathcal{F} \{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{1 + j2\pi f}.$$

L'uscita richiesta viene calcolata come  $y(t) = \mathcal{F}^{-1} \{Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1} \{X(f)H(f)\}$ :

$$y(t) = \frac{e^{j2\pi t}}{1 + j2\pi f}.$$

■

## 6.5 Cascata di sistemi lineari

**Definizione 6.2** Si parla di **connessione in cascata** di due o più sistemi quando l'uscita del primo viene posta all'ingresso dei successivi.

Mettendo in cascata  $N$  sistemi LTI otteniamo ancora un sistema LTI; in particolare si ha:

$$Y(f) = X(f)H_1(f)H_2(f)\dots H_N(f) = X(f) \prod_{i=1}^N H_i(f),$$

dove  $y(t)$  è il segnale in uscita dall'ultimo sistema, e  $h_i(t)$  è la risposta all'impulso dell' $i$ -esimo sistema. Dato che il prodotto gode della proprietà commutativa si nota che l'ordine in cui vengono applicati i sistemi non ha importanza. Analogamente, osservando la cascata di sistemi nel dominio del tempo si ottiene lo stesso risultato, dato che anche la convoluzione gode della proprietà commutativa.

### 6.5.1 Proprietà dei sistemi LTI

Poniamo ora all'ingresso di un sistema LTI il segnale  $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$  e calcoliamo la trasformata di Fourier dell'uscita:

$$\mathcal{F} \{y(t)\} = \mathcal{F} \{x(t) * h(t)\} = \mathcal{F} \{h(t) * e^{j2\pi f_0 t}\} = H(f) \mathcal{F} \{e^{j2\pi f_0 t}\} = H(f) \delta(f - f_0)$$

Quindi possiamo anche scrivere  $Y(f) = H(f_0)\delta(f - f_0)$ ; ritornando nel dominio del tempo, applicando cioè l'antitrasformata di Fourier, abbiamo  $y(t) = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$ .

Siamo giunti alla conclusione che, ponendo all'ingresso di un sistema LTI un esponenziale complesso, cioè una frequenza "pura", all'uscita abbiamo ancora la stessa frequenza. Con questo importante risultato troviamo che i sistemi lineari tempo invarianti non creano nuove frequenze, tutt'al più le possono moltiplicare per delle costanti.

Un tipico esempio di sistemi LTI sono i circuiti RLC. È facile verificare che nei circuiti elettrici ideali (cioè privi di rumore) non si ottengono frequenze diverse da quelle date all'ingresso; è comunque possibile che esse vengano sopprese (cioè moltiplicate per zero).

## 6.6 Stabilità BIBO

Tra le varie possibili definizioni di stabilità prendiamo ora in considerazione quella BIBO (acronimo di *Bounded Input Bounded Output*).

**Definizione 6.3** *Un sistema LTI è **stabile BIBO** se, dato in ingresso un segnale  $x(t)$  tale che  $|x(t)| < A \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , allora l'uscita  $y(t)$  è tale che  $|y(t)| < B \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .*

**Teorema 6.4** *Dato un sistema con risposta all'impulso  $h(t)$ , questo risulta stabile BIBO se e solo se l'integrale della sua risposta all'impulso risulta finito:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < C < \infty$$

**Dimostrazione** Dimostriamo innanzitutto che se il sistema è stabile BIBO vale la tesi del teorema:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vartheta)h(t - \vartheta)d\vartheta \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\vartheta)h(t - \vartheta)| d\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\vartheta)| |h(t - \vartheta)| d\vartheta \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} A |h(t - \vartheta)| d\vartheta. \end{aligned}$$

Se il sistema è stabile BIBO,  $|y(t)|$  dev'essere finito; perché ciò sia vero, è evidente che l'integrale di  $h(t)$  dev'essere finito. D'altro canto, resta facilmente dimostrata anche l'implicazione inversa.

c.v.d. ■

Se accade questo il sistema è stabile BIBO. È inoltre necessario (ma non sufficiente) che  $|H(f)| < \infty$  a qualsiasi valore di frequenza.

Al contrario, un sistema è certamente stabile BIBO se la trasformata di Laplace della sua risposta all'impulso ha poli unicamente nella parte sinistra del piano complesso ( $\Re\{s\} < 0$ ).



## Capitolo 7

# Segnali Periodici

**Definizione 7.1** *Un segnale si dice **periodico** di periodo  $T$  se:*

$$y(t - T) = y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se consideriamo il segnale su un solo periodo non lo chiameremo più  $x(t)$  ma  $x_T(t)$ , dove  $T$  indica sempre il periodo. Il segnale periodico può infatti essere visto come una successione di periodi:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - nT) \quad (7.0.1)$$

Possiamo già affermare che in generale un segnale periodico può avere energia finita su un periodo, ma infinita se guardiamo tutto l'asse dei tempi. Basti pensare al segnale periodico per eccellenza, la sinusoide, la cui energia complessiva è data dalla somma infinita dei valori finiti dell'energia di ciascun periodo.

### 7.1 Media temporale su un intervallo

**Definizione 7.2** *Si dice **media temporale** su di un intervallo il seguente valore:*

$$\langle w(t) \rangle_{[t_0, t_1]} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} w(t) dt.$$

Partendo invece dal concetto di **potenza istantanea**<sup>1</sup>  $P_x(t) = |x(t)|^2$ , definiamo la **potenza media** di un segnale:

$$\langle P_x(t) \rangle_{t_0, t_1} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} P_x(t) dt.$$

Essendo inoltre:

$$\mathcal{E} \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) dt,$$

è chiaro che in un segnale periodico la potenza media si calcola conoscendo l'energia del segnale in un solo periodo:

$$\overline{P_x} = \langle P_x \rangle = \frac{\mathcal{E} \{x_T(t)\}}{T}.$$

---

<sup>1</sup>La definizione di potenza istantanea discende da quella di energia, secondo la relazione fisica  $P = dE/dt$ .

## 7.2 Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Come è noto un segnale periodico può essere sviluppato in serie di Fourier. Partendo da tale sviluppo calcoliamo la trasformata di Fourier dei segnali periodici:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j \frac{2\pi}{T} n t}.$$

Considerando la stessa funzione dopo un periodo  $T$  abbiamo:

$$y(t - T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j \frac{2\pi}{T} n (t-T)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j \frac{2\pi}{T} n t} e^{-j \frac{2\pi}{T} n T};$$

ma  $e^{-j \frac{2\pi}{T} n T}$  è una funzione circolare che se calcolata su un intero periodo, come in questo caso, risulta pari ad 1, quindi abbiamo:

$$y(t - T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j \frac{2\pi}{T} n t} e^{-j 2n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j \frac{2\pi}{T} n t} = y(t)$$

Troviamo perciò che per esprimere un segnale periodico basta sviluppare un solo periodo in serie di Fourier.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{y(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j \frac{2\pi}{T} n t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \mathcal{F}\left\{e^{j \frac{2\pi}{T} n t}\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{X_{tr}\left(\frac{n}{T}\right)}{T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{tr}(n f_0) \delta(f - n f_0), \end{aligned}$$

con  $f_0 = 1/T$ . Riportando il risultato trovato su un grafico si può notare che lo spettro risulta essere formato solamente da righe. Siamo giunti quindi ad un importante risultato: lo spettro di potenza di un qualunque segnale periodico è a righe (figura 7.1). Cerchiamo adesso di calcolare la Trasformata di Fourier del segnale formato da un treno di Delta.

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT).$$

Lo possiamo scrivere come:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{\delta_{tr}}(t - nT),$$

dove  $x_{\delta_{tr}}(t) = \delta(t)$ . Allora,

$$X_\delta(f) = \mathcal{F}\{x_\delta(t)\} = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{\delta_{tr}}(n f_0) \delta(f - f_0) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0);$$

questo perché

$$X_{\delta_{tr}}(n f_0) = \mathcal{F}\{x_{\delta_{tr}}(t)\} = 1.$$



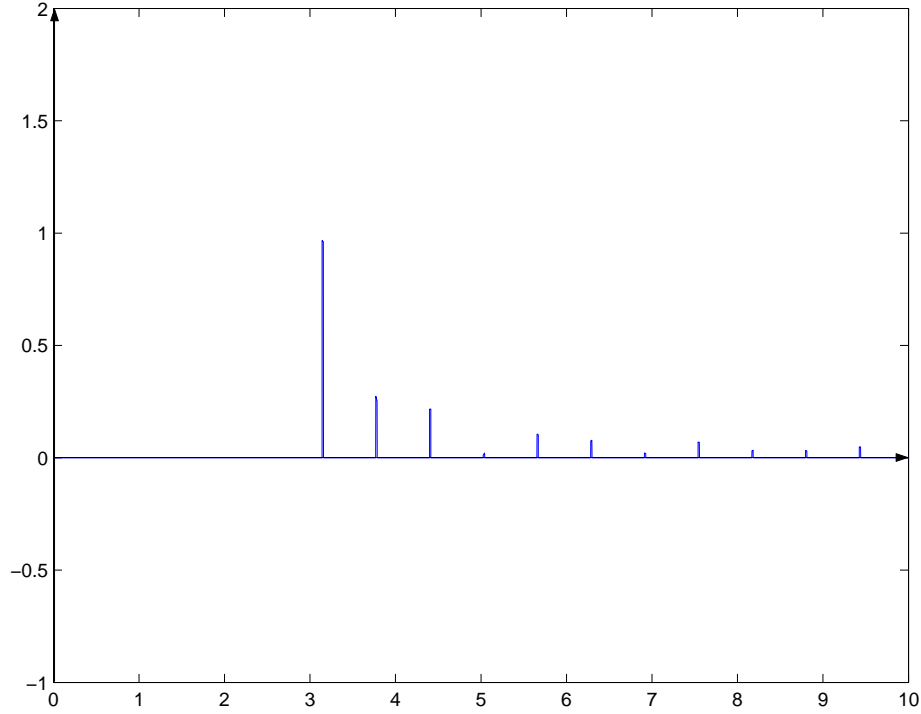


Figura 7.1: Configurazione a righe dello spettro di un segnale periodico  $x(t)$ . La prima frequenza con componente non nulla viene detta *fondamentale* o *portante*, le altre sono le *armoniche*.

**Esercizio 28** Sia dato il segnale:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-nT)} u(t-nT);$$

Il segnale  $x(t)$  viene posto in ingresso ad un sistema LTI che ha come funzione di trasferimento  $H(f) = TP_{\frac{1}{T}}(f-f_0)$ , con  $f_0 = \frac{10}{T}$ . Calcolare l'uscita  $y(t)$  del sistema LTI. Nota: il segnale  $P_b(f)$  vale 1 per  $f \in [\frac{-b}{2}, \frac{b}{2}]$  e zero altrove.

*Soluzione*

Innanzitutto scriviamo il segnale dato come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(t-nT) \quad \text{con} \quad w(t) = e^{-t} u(t).$$

Trasformiamo utilizzando la regola dei segnali periodici:

$$X(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(nf_0) \delta(f - nf_0),$$

essendo:

$$W(f) = \mathcal{F}\{u(t)e^{-t}\} = \frac{1}{1+j2\pi f}, \quad f_0 = \frac{1}{T}.$$

Sostituendo:

$$X(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+j2\pi n f_0} \delta(f - n f_0)$$

L'uscita è  $Y(f) = X(f)H(f)$ ; la funzione di trasferimento è semplicemente una porta che lascia passare solo una parte del segnale  $X(f)$  (si comporta cioè come un filtro passa banda).

$$Y(f) = X(f)H(f) = H(10f_0)X(10f_0) = \frac{1}{f_0} \frac{1}{1 + j20\pi f_0} \delta(f - 10f_0) = \frac{1}{1 + j20\pi f_0} \delta(f - 10f_0).$$

Si ottiene

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \frac{e^{j20\pi f_0 t}}{1 + j20\pi f_0}.$$

■

**Esercizio 29** Si consideri il segnale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{\frac{1}{2}}(t - k)$$

dove il segnale  $P_{\frac{1}{2}}(t)$  vale 1 per  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$  e zero altrove. Il segnale  $x(t)$  viene immesso in un filtro lineare con funzione di trasferimento:

$$W(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Quanto vale l'uscita del filtro,  $y(t)$ , per  $t=0$ ?

*Soluzione*

Secondo la regola di trasformazione dei segnali periodici, definendo  $m(t)$  il segnale troncato ad un periodo, si ottiene:

$$X(f) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(kf_0) \delta(f - kf_0) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi k f_0 \frac{1}{2})}{\pi f_0 k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi k \frac{1}{2})}{\pi k}.$$

L'uscita del sistema avrà spettro di ampiezza:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{-\sin(\pi)}{-2\pi} \delta(f + 2) + \frac{-\sin(\frac{\pi}{2})}{-\pi} \delta(f + 1) + \frac{-\sin(0)}{0} \delta(0) + \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\pi} \delta(f - 1) + \frac{\sin(\pi)}{2\pi} \delta(f - 2) = \\ &= \frac{1}{\pi} \delta(f - 1) + \frac{1}{\pi} \delta(f - 1) + \frac{1}{\pi} \delta(f + 1) \frac{1}{2} \delta(f). \end{aligned}$$

A questo punto è sufficiente antitrasformare:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{y(f)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{j2\pi t} + \frac{1}{\pi} e^{-j2\pi t} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(2\pi t).$$

Il problema ci chiede infine di valutare l'uscita al tempo  $t = 0$ :

$$y(t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}.$$

■

## 7.3 Il Teorema del campionamento

Supponiamo di avere un segnale  $x(t)$  continuo nel tempo e di compiere la seguente operazione.

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

Troviamo un impulso nel punto  $t_0$  di valore pari a quello che assume il segnale  $x(t)$ . Se ora invece di considerare un solo impulso, facciamo la convoluzione tra il segnale  $x(t)$  ed un treno di Delta otteniamo:

$$x_c(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nt_c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_c) \delta(t - nt_c).$$

Abbiamo quindi un segnale discreto nel tempo, formato da impulsi equidistanti tra loro, la cui ampiezza segue fedelmente quella del segnale di partenza. Questa operazione prende il nome di **campionamento di un segnale**. Osserviamo anche cosa succede nel dominio della frequenza, calcolando la trasformata di Fourier del segnale campionato:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x_c(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_c)\delta(t - nt_c)\right\} \\ &= X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0 \delta(f - nf_0) \\ &= f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_0).\end{aligned}$$

Si può facilmente vedere che lo spettro in frequenza del segnale campionato è formato da copie dello spettro del segnale  $x(t)$  attorno alle frequenze multiple di quella di campionamento. Questo comporta che per riottenere il segnale di partenza basta applicare un filtro Passa-Basso di banda pari a quella del segnale  $x(t)$ . Questo però introduce una difficoltà: infatti, dal momento che i filtri reali hanno una funzione di trasferimento trapezoidale anziché rettangolare (come assumiamo quando utilizziamo la porta), utilizzando esattamente  $f_c$  come frequenza di taglio del filtro rischiamo di non riuscire ad isolare adeguatamente lo spettro del segnale in banda base. Questo fenomeno prende il nome di *aliasing*. Al fine di evitarlo si usano due filtri: uno prima del campionamento, per tagliare le frequenze indesiderate, l'altro dopo il campionamento, per isolare una sola copia dello spettro. Possiamo quindi enunciare il teorema del campionamento (per un approfondimento si rimanda all'esercizio 34).

**Teorema 7.1** *Si consideri il segnale reale  $x(t)$ . Lo si faccia passare in un filtro Passa-Basso con frequenza di taglio  $f_0$ , dopodiché lo si campioni con frequenza di campionamento  $f_1$ . Allora, per ricostruire il segnale  $x(t)$  è sufficiente filtrare il segnale campionato con un Passa-Basso con frequenza di taglio  $f_0$ , purché sia soddisfatta la seguente condizione:*

$$f_0 \geq 2B = 2f_1,$$

dove  $B$  è la larghezza di banda del segnale  $x(t)$ .

Il teorema del campionamento è di fondamentale importanza, in quanto afferma che per trasmettere tutta l'informazione contenuta in un segnale è sufficiente trasmetterne dei campioni equispaziati nel tempo. Ciò significa che una forma d'onda può essere adeguatamente rappresentata da una serie di numeri, il che rende possibile le applicazioni digitali su cui si basa la moderna tecnologia audio-video.

**Esercizio 34** Un segnale  $x(t)$  viene posto in ingresso ad un sistema LTI la cui funzione di trasferimento  $H_0(f)$  è diversa da zero per  $f \in [-f_0, f_0]$  ed è zero altrove. Sia  $v(t)$  l'uscita di tale sistema. Si ricava successivamente un segnale  $w(t)$  come segue:

$$w(t) = v(t) \frac{1}{f_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{n}{f_1}).$$

Infine, il segnale  $w(t)$  viene fatto transitare attraverso un sistema LTI con funzione di trasferimento  $H_2(f) = 1$  per  $f \in [-f_2, f_2]$  e zero altrove, ottenendo in uscita il segnale  $y(t)$ . Che relazione si deve porre tra i valori di  $f_0$ ,  $f_1$  e  $f_2$ ?

*Soluzione*

Il lato teorico della convoluzione del segnale col treno di Delta è già stato trattato nel testo. Vediamo

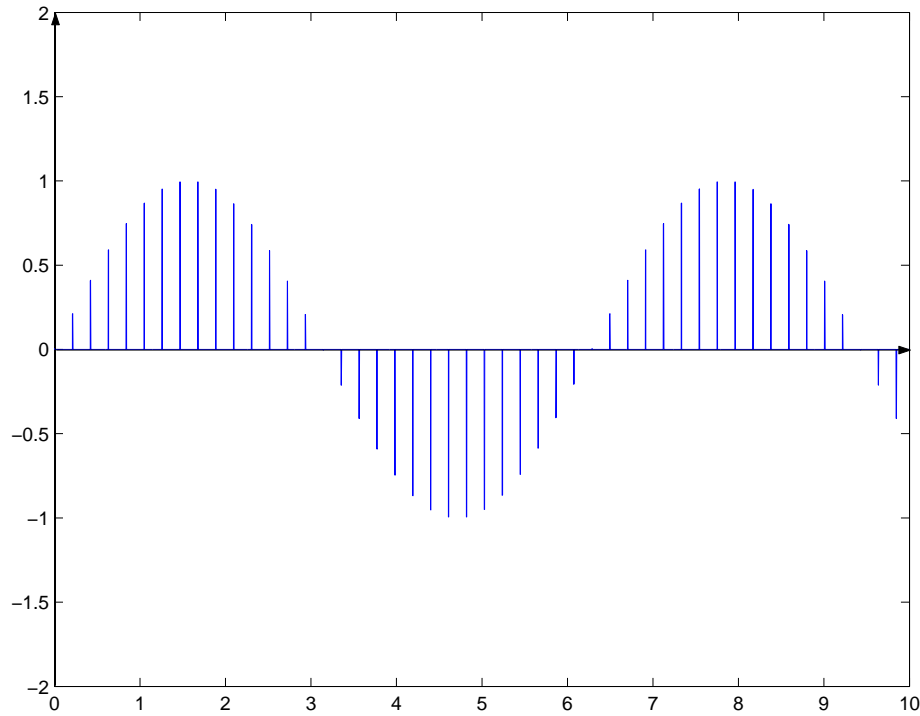


Figura 7.2: Esempio di campionamento di un segnale sinusoidale.

brevemente soltanto i problemi che nascono nel trattare il segnale in modo da poterlo campionare nella maniera migliore possibile.

Come è stato detto nel testo, il campionamento vero e proprio dà origine a infinite copie spettrali del segnale, traslate in frequenza di una quantità  $f_c$  pari alla frequenza di campionamento (nel nostro caso,  $f_1$ ). Tuttavia, se il segnale ha banda  $B > f_c$ , allora queste copie si sovrappongono, dando luogo ad uno spettro che, nelle code, è in realtà la somma di due spettri. Si introduce cioè una distorsione nel segnale, nota come *aliasing*. Per evitare questo problema, si filtra precedentemente il segnale da campionare con un passabasso con frequenza di taglio  $f_0 < 2f_c$ ; in questo modo, si perde una parte dello spettro del segnale, ma si evita la distorsione dovuta al campionamento pur senza cambiare la frequenza di campionamento. Un'altra soluzione, che è preferibile laddove non si voglia perdere parte dello spettro del segnale, è quella di scegliere una frequenza di campionamento più alta: ciò significa “allontanare” le copie spettrali generate. Infine, si filtra il segnale campionato con un passabasso di frequenza  $f_2 = B$ , dove  $B$  è la banda del segnale. È bene osservare che, mentre in via teorica sarebbe possibile scegliere  $f_2 = f_c$ , in realtà i filtri reali hanno una funzione di trasferimento di forma trapezoidale; quindi si sceglie una frequenza di taglio più bassa, in modo da escludere decisamente le copie spettrali successive.

In conclusione, la risposta alla domanda dell'Esercizio è porre  $f_1 \geq 2f_0$ , e  $f_0 = f_2$ . ■

## Capitolo 8

# Caratterizzazione energetica dei segnali

### 8.1 Spettro di energia

In questo paragrafo viene introdotto il concetto di spettro di energia. Consideriamo le componenti in frequenza  $X(f)$  del segnale  $x(t)$  ad energia finita.

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

**Definizione 8.1** Si definisce **spettro di energia**  $S_X$  del segnale  $x(t)$  la funzione così definita:

$$S_x(f) = |X(f)|^2,$$

dove  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ .

In altre parole,  $S_x(f)$  rappresenta il contenuto di energia del segnale  $x(t)$  ad ogni frequenza  $f$ , nel senso che, se integrato su tutto l'asse reale, restituisce il valore dell'energia.

### 8.2 Funzione di autocorrelazione

**Definizione 8.2** Si definisce  $R_x(\tau)$  come l'antitrasformata di Fourier dello spettro di energia  $S_x(f)$ :

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\}.$$

Si ha quindi:

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df.$$

Dalla definizione sappiamo che  $S_x(f)$  è uguale a  $|X(f)|^2$ :

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df;$$

sostituiamo ora  $|X(f)|^2$  con  $X(f)X^*(f)$  e poi inseriamo le loro espressioni come integrale di Fourier.

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(f)e^{j2\pi f\tau}df = \iint_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)e^{-j2\pi ft_1}dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t_2)e^{j2\pi ft_2}dt_2 e^{j2\pi f\tau}df = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)x^*(t_2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t_2-t_1+\tau)}df dt_1 dt_2 = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)x^*(t_2)\delta(t_2-t_1+\tau)dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

La Delta di Dirac ha come argomento  $t_2 - t_1 + \tau$ ; otteniamo così due possibili soluzioni:

1. possiamo integrare in  $t_1$ : da  $t_2 - t_1 + \tau = 0$  otteniamo  $t_1 = t_2 + \tau$ , quindi

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_2 + \tau)x^*(t_2)dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt;$$

2. possiamo invece integrare in  $t_2$ : da  $t_2 - t_1 + \tau = 0$  otteniamo  $t_2 = t_1 - \tau$ , da cui

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)x^*(t_1 - \tau)dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt.$$

Abbiamo quindi due risultati assolutamente equivalenti, che ci permettono di riformulare la definizione di autocorrelazione.

**Definizione 8.3** Si definisce **funzione di autocorrelazione**  $R_x(\tau)$  del segnale  $x(t)$  il seguente integrale:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt = \quad (8.2.1)$$

$$= (x(t), x(t - \tau)) = (x(t + \tau), x(t)). \quad (8.2.2)$$

Naturalmente, dato che d'ora in poi ci occuperemo quasi esclusivamente di segnali reali, potremo tralasciare il coniugio sul secondo termine dell'integrale.

Per studiare alcune proprietà dell'autocorrelazione bisogna richiamare la *disuguaglianza di Schwartz* così definita:

$$|\underline{v} \circ \underline{w}| \leq \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|.$$

Dalla disuguaglianza di Schwartz si ricava:

$$\frac{|\underline{v} \circ \underline{w}|}{\|\underline{v}\| \|\underline{w}\|} \leq 1.$$

Togliendo il modulo al numeratore

$$-1 \leq \frac{\underline{v} \circ \underline{w}}{\|\underline{v}\| \|\underline{w}\|} \leq 1;$$

se i due vettori  $\underline{v}, \underline{w}$  sono diversi da zero vale

$$\cos \vartheta = \frac{\underline{v} \circ \underline{w}}{\|\underline{v}\| \|\underline{w}\|},$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo compreso tra i due vettori. Si ottiene:

$$\underline{v} \circ \underline{w} = \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \cos \vartheta,$$

da cui

$$|\underline{v} \circ \underline{w}| = \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| |\cos \vartheta|.$$

Il prodotto scalare è massimo quando i due vettori sono paralleli cioè quando  $\cos \vartheta = 1$ ; in generale lo sono quando  $\underline{v} = a\underline{w}$ .

Applichiamo lo stesso concetto ai segnali:

$$R_x(\tau) = (x(t), x(t - \tau)).$$

Quindi

$$|R_x(\tau)| = |(x(t), x(t - \tau))| \leq \|x(t)\| \|x(t - \tau)\|. \quad (8.2.3)$$

La norma di  $x(t - \tau)$  si calcola come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)x^*(t - \tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt;$$

Le due norme che compaiono nella (8.2.3) risultano quindi uguali. Quindi:

$$R_x(\tau) \leq \|x(t)\| \|x(t - \tau)\| = \|x(t)\| \|x(t)\| = \|x(t)\|^2 = (x(t), x(t)) = R_x(\tau) \Big|_{\tau=0}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che il massimo per l'autocorrelazione si ottiene nell'origine. Inoltre, se il segnale  $x(t)$  è reale l'autocorrelazione risulterà pari e reale:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t - \tau)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t + \tau)dt = R_x(-\tau) \end{aligned}$$

### 8.3 Funzione di mutua correlazione

Il concetto di correlazione si può estendere anche a due segnali.

**Definizione 8.4** Si definisce **funzione di mutua correlazione** tra due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  la funzione  $R_{xy}(\tau)$  così definita:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt = (x(t), y(t - \tau)).$$

Valgono anche in queste condizioni le proprietà della funzione di autocorrelazione; quindi la mutua correlazione può anche essere scritta come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)y^*(t)dt,$$

come è facile verificare operando un semplice cambio di variabili; inoltre anche  $R_{xy}$  è pari e ha il massimo nell'origine, dove equivale al prodotto scalare tra i due segnali:

$$R_{xy}(\tau) \Big|_{\tau=0} = (x(t), y(t)).$$

In questo caso lo spettro di energia  $S_{xy}(f)$  risulta il prodotto delle componenti in frequenza  $X(f), Y(f)$  dei due segnali:

$$S_{xy}(f) = X(f)Y^*(f) = \mathcal{F} \{R_{xy}(\tau)\}.$$

**Esercizio 32** Sono dati due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$ .  $x(t)$  vale 1 per  $|t| < 0.5$ , e 0 altrove.  $y(t)$  vale  $t$  per  $1 < t < 2$ , 0 altrove. La funzione di mutua correlazione  $R_{xy}(\tau)$  ha un massimo per quale valore di  $\tau$ ?

*Soluzione*

Il massimo si ha quando le due figure sono completamente sovrapposte, cioè quando  $\tau = -1$ . ■

## 8.4 Segnali periodici

### 8.4.1 Spettro di potenza

I segnali periodici sono caratterizzati da energia infinita, in quanto essa è pari alla somma infinita di valori finiti che rappresentano l'energia su un singolo periodo. Per questo, non è significativo caratterizzare un segnale periodico tramite la sua energia; si usa invece la **potenza media** del segnale così definita:

$$\overline{P}_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \langle P_x(t) \rangle_{[-\infty, +\infty]}.$$

Si tratta in pratica di considerare l'energia su un intervallo di ampiezza  $T$  centrato rispetto all'origine, e dividerla per l'ampiezza stessa  $T$ . Come per i segnali ad energia finita anche con i segnali periodici bisogna definire lo *spettro di potenza del segnale*  $G_x(f)$  come distribuzione in frequenza della potenza media; varrà la seguente relazione:

$$\overline{P}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df,$$

che discende dal concetto stesso di spettro.

### 8.4.2 Funzione di autocorrelazione

**Definizione 8.5** Si definisce **funzione di autocorrelazione**  $\Phi_x(\tau)$  del segnale periodico  $x(t)$  il seguente limite:

$$\Phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t-\tau) dt.$$

La definizione data ricorda molto da vicino la funzione di autocorrelazione per segnali qualsiasi, con la differenza che l'integrale viene valutato su un intervallo di ampiezza non infinita ma tendente ad infinito; inoltre, tale integrale viene ancora compensato dal fattore  $1/T$ . Come nel caso generale, vale anche per i segnali periodici la seguente relazione, che enunciamo senza dimostrare:

$$G_x(f) = \mathcal{F}\{\Phi_x(\tau)\}.$$

**Esercizio 33** Sia dato un segnale  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - nT)$  dove  $r(t) = e^{\frac{-t^2}{(2T^2)}}$ . Trovare la funzione di autocorrelazione di  $x(t)$ , ovvero  $\Phi_x(\tau)$ .

*Soluzione*

Calcoliamo la  $R(f)$ :

$$\mathcal{F}\{r(t)\} = \sqrt{2\pi T^2} e^{-2\pi^2 f^2 T^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\mu_n = \frac{R(\frac{n}{T})}{T} = \frac{1}{T} \sqrt{2\pi T^2} e^{-2\pi^2 \frac{n^2}{T^2} T^2} = \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 n^2};$$

la funzione di autocorrelazione può essere scritta come:

$$\Phi_x(\tau) = \sum |u_n|^2 e^{-j2\pi \frac{\tau}{T} n};$$

quindi risulta:

$$\Phi_x(\tau) = \sum 2\pi e^{-4\pi^2 n^2} e^{-j\frac{2\pi}{T} n\tau}.$$



■

**Esercizio 30** Il segnale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{\frac{1}{2}}(t-k)$$

viene filtrato con un passabasso ideale la cui funzione di trasferimento vale 1 per  $|f| < B = \frac{3}{2T}$  e zero altrove. Quanto vale la potenza del segnale in uscita dal filtro?

*Soluzione*

Ricordando le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} |Y(f)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df \\ G_y(f) &= \mathcal{F} \{ \Phi_y(\tau) \} \\ \Phi_y(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n|^2 e^{j \frac{2\pi n \tau}{T}} \\ G_y(f) &= \sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n|^2 \delta \left( f - \frac{n}{T} \right) \\ \mu_n &= \frac{W(\frac{n}{T})}{T}, \end{aligned}$$

e considerando che, nel nostro caso,  $W(t)$  è uguale a:

$$W(t) = e^{\frac{|t|}{T}}.$$

abbiamo  $W(\frac{n}{T})$  pari a:

$$W\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{\frac{1}{T} + \frac{j2\pi n}{T}} + \frac{1}{\frac{1}{T} - \frac{j2\pi n}{T}} = T \frac{2}{1 + 4\pi^2 n^2}.$$

Il nostro segnale  $X(f)$  viene filtrato tramite  $H(f)$  che fa passare solo alcune frequenze:

$$Y(f) = P_{\frac{3T}{2}}(f) \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{1 + 4\pi^2 n^2} T \delta \left( f - \frac{n}{T} \right).$$

Sviluppando la sommatoria e “filtrando” il segnale otteniamo:

$$Y(f) = \frac{2}{1 + 4\pi^2} \delta \left( f - \frac{1}{T} \right) + \frac{2}{1 + 4\pi^2} \delta \left( f + \frac{1}{T} \right) + 2\delta(f);$$

essendo

$$\mu_n = \frac{W(\frac{n}{T})}{T} = \frac{2}{1 + 4\pi^2 n^2},$$

possiamo scrivere

$$G_y(f) = \left| \frac{2}{1 + 4\pi^2 n^2} \right|^2 \delta \left( f + \frac{1}{T} \right) + \left| \frac{2}{1 + 4\pi^2 n^2} \right|^2 \delta \left( f - \frac{1}{T} \right) + 4\delta(f).$$

La potenza del segnale in uscita dal filtro risulta essere:

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = 4 + \frac{8}{(1 + 4\pi^2)^2}$$

■



## Parte III

# Statistica delle variabili aleatorie e dei processi casuali



## Capitolo 9

# Probabilità

Ci occupiamo ora di variabili aleatorie, cioè variabili di cui a priori non conosciamo il valore. Lo studio di queste grandezze è reso possibile dal fatto che possiamo conoscerne una *distribuzione di probabilità*. Chiariamo il concetto con un esempio: se lanciamo un dado a sei facce, supponendo che il dado non sia truccato avremo la stessa probabilità di ottenere uno dei sei numeri. In sostanza, non possiamo dire prima di lanciare il dado il risultato che otterremo, ma possiamo sapere che uno qualsiasi dei sei numeri avrà la stessa probabilità di uscire di tutti gli altri.

In generale, le variabili aleatorie sono il risultato di un *esperimento casuale*, cioè un processo non deterministico. Si definisce  $S$  lo spazio di tutti i possibili risultati (eventi) di un esperimento casuale. Le caratteristiche degli elementi di  $S$  dipenderanno dal tipo di esperimento; in generale, essi potrebbero appartenere a  $\mathbb{R}$  o a un qualsiasi spazio  $\mathbb{R}^n$ , o ancora essere complessi.

Prima di proseguire con altri concetti è consigliabile richiamare gli operatori usati nelle operazioni fra insiemi.

OPERATORE LOGICO	OPERAZIONE NEGLI INSIEMI
oppure	$\cup$ (Unione)
e	$\cap$ (Intersezione)

Godono delle seguenti proprietà:

Commutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

La probabilità che avvenga un evento  $x$  in un determinato spazio  $S$  viene definita come:

**Definizione 9.1** Si dice **probabilità** di un evento  $x \in S$  il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero totale di casi che possono verificarsi; essa viene indicata con  $P(x)$ .

Naturalmente  $P(S) = 1$ , cioè la probabilità totale dello spazio di eventi è unitaria. Lo stesso vale per la probabilità di un evento certo; al contrario, se un evento è impossibile, la sua probabilità è nulla:  $P(0) = 0$ .

Se consideriamo inoltre il complemento  $\bar{x}$  dell'evento, cioè tutti i casi in cui l'evento non avviene, otteniamo chiaramente:

$$P(\bar{x}) = 1 - P(x).$$

La seguente figura rappresenta due insiemi disgiunti, cioè due insiemi che non posseggono elementi in comune:

Tale caratteristica semplifica l'espressione della probabilità dell'unione e dell'intersezione dei due insiemi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

$$P(A \cap B) = 0.$$

Se invece i due insiemi risultano congiunti, si ha:

Dobbiamo in questo caso distinguere tra coppie di insiemi *statisticamente indipendenti* e coppie di insiemi tra loro correlate. Due eventi si dicono statisticamente indipendenti se e solo se la realizzazione di uno non influisce sulla probabilità dell'altro. In questo caso si ha:

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad (9.0.1)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(C).$$

## 9.1 Probabilità Condizionata

**Definizione 9.2** Si definisce **probabilità condizionata** la probabilità che avvenga l'evento  $A$  essendosi certamente verificato l'evento  $B$  e si indica con:

$$P(A|B).$$

Se ad esempio consideriamo il lancio di due dadi, e chiamiamo  $B$  l'evento “esce 3 sul primo dado” e  $A$  l'evento “esce 3 sul primo dado e 4 sul secondo”, la probabilità  $P(A|B)$  vale  $1/6$ , anziché  $1/36$ . In pratica, lo spazio di eventi con probabilità unitaria non è più tutto  $S$ , ma si restringe al solo  $B$ . In generale, la probabilità condizionata segue la seguente legge:

**Teorema 9.1 (di Bayes)** Siano  $A, B \in S$  due eventi con probabilità rispettivamente  $P(A), P(B)$ . Allora vale:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Se imponiamo:

$$P(A|B) = 1,$$

allora

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Da questa formula si può ricavare che:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

che a differenza della (9.0.1) è sempre valida sia che gli eventi siano statisticamente indipendenti sia che non lo siano.

## 9.2 Teorema della probabilità totale

Lo spazio degli eventi  $S$  viene diviso in  $N$  insiemi, come mostrato in figura. Tutti questi insiemi sono statisticamente indipendenti.

Chiaramente vale:

$$\bigcup_{n=1}^N A_n = S.$$

Essendo statisticamente indipendenti vale anche:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j;$$

se  $B$  è un insieme di  $S$ , vale quindi:

$$P(B) = \sum_{n=1}^N P(B|A_n)P(A_n) = \sum_{n=1}^N P(B \cap A_n).$$

**Esempio**

- $S$  è lo spazio di probabilità di un dado:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Calcolare la probabilità  $P(x)$  che esca un determinato numero.

$$P(x) = \frac{(\text{Il numero che ci interessa è solo uno})}{(\text{Il numero di eventi che possono avvenire è sei})} = \frac{1}{6}$$

Calcolare la probabilità che esca un numero pari:

$$P(x) = \frac{(2, 4, 6)}{(1, 2, 3, 4, 5, 6)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Lanciamo due dadi e verifichiamo la probabilità che esca una determinata combinazione:

- $A = \{1\}$  con il lancio del primo dado,
- $B = \{5\}$  con il lancio del secondo dado.

Come prima cosa calcoliamo le probabilità dei due lanci.

$$P(A) = P\{P[1, 1], P[1, 2], P[1, 3], P[1, 4], P[1, 5], P[1, 6]\} = 6 \frac{1}{36} = \frac{1}{6};$$

$$P(B) = P\{P[5, 1], P[5, 2], P[5, 3], P[5, 4], P[5, 5], P[5, 6]\} = 6 \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

I due eventi sono statisticamente indipendenti perciò possiamo calcolare la probabilità servendoci della formula semplificata:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36.$$

Per verificare il risultato possiamo fare il calcolo tramite la formula generale.

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B),$$



$$P(A|B) = \frac{1}{6},$$

$$P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{36}.$$

Da questo semplice esercizio si può osservare che, se gli eventi sono S.I., vale la seguente affermazione:

$$P(A|B) = P(A).$$

■

### 9.3 Variabili casuali

Nello studio di variabili casuali lo spazio  $S$  di probabilità coincide con l'asse reale; normalmente si indica con  $\xi$  una variabile casuale.

Un esempio di variabile casuale è la misura di una temperatura.

Vogliamo ora cercare di descrivere la distribuzione di probabilità della variabile  $\xi$  con una funzione tale che il suo integrale in un intervallo ci dia la probabilità che  $\xi$  assuma valori compresi in quell'intervallo. Questo equivale a richiedere che la funzione cercata sia la derivata della probabilità:

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dP}{dx} = f_{\xi}(x)$$

**Definizione 9.3** Si definisce **densità di probabilità**  $f_{\xi}(x)$ , la funzione che rappresenta la probabilità in un intervallo.

Ad esempio la variabile  $\xi$  può avere probabilità costante di cadere in un certo intervallo; in questo caso si parla di distribuzione di probabilità uniforme e la sua densità di probabilità è del tipo:

$$f_{\xi}(x) = P_a(x - \mu_x) \frac{1}{a},$$

dove  $a$  è l'ampiezza dell'intervallo di valori, mentre  $\mu_x$  è la media, cioè il valore centrale dell'intervallo. Tutte le densità di probabilità sono positive e il loro integrale su tutto l'asse reale vale uno. Ad esempio, la densità di probabilità di una distribuzione uniforme su un intervallo di ampiezza  $a$  centrata sul valor medio  $\mu$  è data da  $f_{\xi}(x) = \frac{1}{a} p_a(x - \mu)$ ; la funzione porta è moltiplicata per  $\frac{1}{a}$  per normalizzarla, in modo che risulti  $\int_{\mathbb{R}} f_{\xi}(x) dx = 1$ .

Figura 9.1: Densità di probabilità congiunta di 2 variabili come descritto nel testo.

## 9.4 Distribuzione cumulativa

**Definizione 9.4** Si definisce *distribuzione cumulativa* la funzione integrale della densità di probabilità.

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(\vartheta) d\vartheta = P(\xi \in [-\infty, x])$$

La distribuzione cumulativa ha le seguenti caratteristiche:

$$F_{\xi}(x) \geq 0, \quad F_{\xi}(x) \leq 1, \quad F_{\xi}(\infty) = 1.$$

## 9.5 Coppie di variabili casuali

Trattando con sistemi reali, il più delle volte ci si trova a dover studiare numerose variabili casuali, che talvolta interagiscono tra di loro. Il caso più semplice è che le due variabili siano statisticamente indipendenti: consideriamo ad esempio che  $\xi$  rappresenti il lancio di un dado e  $\eta$  il lancio di un secondo dado. In tal caso, se vogliamo una funzione  $f_{\xi\eta}(x, y)$  che rappresenti la *densità di probabilità congiunta* delle due variabili, cioè la probabilità che contemporaneamente siano verificate entrambe le seguenti condizioni:

$$\xi = x, \eta = y,$$

sarà sufficiente moltiplicare le densità di probabilità delle due variabili considerate singolarmente; infatti siamo nella situazione di valutare la probabilità che due eventi statisticamente indipendenti accadano contemporaneamente. Quindi

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y). \quad (9.5.1)$$

Tuttavia, accade spesso che le due variabili da studiare non siano S.I.. In tal caso, la densità di probabilità congiunta sarà un'espressione che in generale non ha niente a che fare con le due densità delle singole variabili. Per fare un esempio, le due variabili possono essere le coordinate di un corpo nello spazio bidimensionale. Se, per qualche motivo, ci fossero tre punti in cui è più probabile che il corpo si trovi, allora avremmo che la densità  $f_{\xi\eta}$  è data dalla combinazione lineare di tre gaussiane (assumendo che la distribuzione intorno a quei punti sia gaussiana). Il grafico di una funzione come quella descritta è riportato in figura 9.1.

### 9.5.1 Densità di probabilità condizionata

Anche nel caso di una coppia di variabili casuali possiamo studiare la probabilità condizionata. In questo caso possiamo definire una funzione di densità di probabilità condizionata, secondo una formula del tutto analoga al teorema di Bayes esposto nel paragrafo 9.1:

$$f_{\xi\eta}(x|y) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)} \quad (9.5.2)$$

Si può facilmente verificare che se e solo se  $\xi$  ed  $\eta$  sono statisticamente indipendenti la (9.5.2) diventa:

$$f_{\xi\eta}(x|y) = \frac{f_{\xi}(x) f_{\eta}(y)}{f_{\eta}(y)} = f_{\xi}(x).$$

## Capitolo 10

# Medie e valori attesi

### 10.1 Momenti non centrali

**Definizione 10.1** Si dice **momento non centrale** di ordine  $n$  rispetto ad una variabile casuale  $\xi$  con densità di probabilità  $f_\xi(x)$  il seguente integrale:

$$E_\xi \{\xi^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\xi(x) dx.$$

L'operatore  $E$  che compare nella definizione va sotto il nome di **valore atteso**.

Tra i momenti non centrali, quello senz'altro più importante è quello del primo ordine, chiamato anche media.

**Definizione 10.2** Si dice **media** di una variabile casuale  $\xi$  con densità di probabilità  $f_\xi(x)$  il seguente integrale:

$$\mu_\xi = E \{\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx.$$

Spesso si parla di valore atteso di una variabile casuale riferendosi esclusivamente alla media. La media così definita coincide col concetto intuitivo di media con valore più comunemente assunto da una variabile casuale, e, in questo senso, atteso come risultato dell'esperimento casuale. Questa definizione coincide anche con la più nota media aritmetica:

$$\bar{\mu}_\xi = \frac{\sum_{n=0}^N \xi_n}{N},$$

dove  $N$  è il numero di valori considerati. La differenza principale sta nella presenza dell'integrale invece della sommatoria discreta, giustificata dal passaggio dal campo del discreto al continuo.

Dalla definizione data, è facile vedere che l'operatore di valore atteso è lineare, in quanto definito come integrale.

### 10.2 Momenti centrali

Se volessimo studiare quanto una variabile casuale rimane vicina alla sua media, potremmo calcolare il valore atteso della differenza  $\xi - \mu$ , anziché semplicemente di  $\xi$ . In questo caso si parla di **momento centrale** rispetto alla media.

**Definizione 10.3** Si dice **momento centrale** di ordine  $n$  rispetto ad una variabile casuale  $\xi$  con densità di probabilità  $f_\xi(x)$  il seguente valore atteso:

$$E\{(\xi - \mu_\xi)^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_\xi)^n f_\xi(x) dx,$$

dove  $\mu_\xi$  è la media  $E\{\xi\}$ .

Anche in questo caso esiste un momento più importante degli altri; si tratta della **varianza**, definita come momento centrale del secondo ordine. Dalla definizione, si nota che la varianza è l'integrale della densità di probabilità moltiplicata per la distanza al quadrato (quindi senza segno) dalla media:

$$\sigma_\xi^2 = E\{(\xi - \mu_\xi)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_\xi)^2 f_\xi(x) dx.$$

**Esempio** Calcoliamo la varianza di una variabile casuale con densità di probabilità uniforme.

La densità di probabilità  $f_\xi(x)$  è data da:

$$f_\xi(x) = P_a(x - u_\xi) \frac{1}{a}.$$

Basta ora applicare la definizione:

$$E\{(\xi - \mu_\xi)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_\xi)^2 f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_\xi)^2 \frac{1}{a} P_a(x - \mu_\xi) dx$$

Ponendo  $\vartheta = x - \mu_\xi$  si ottiene:

$$E\{(\xi - \mu_\xi)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta^2 \frac{1}{a} P_a(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \vartheta^2 d\vartheta = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} \vartheta^2 d\vartheta = \frac{2}{a} \left[ \frac{\vartheta^3}{3} \right]_0^{a/2} = a^2/12.$$

■

**Esercizio 35** Sia data una coppia di variabili casuali  $\xi$  ed  $\eta$ . La loro densità di probabilità congiunta vale:

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^6 \delta(x - n) \frac{1}{a} p_a(y - b).$$

Calcolare  $E\{\xi\eta\}$  sapendo che  $a = 2, b = 1/2$ .

*Soluzione*

L'esercizio può essere risolto in due modi. Il metodo standard è quello che vale in qualsiasi occasione: basta

ricorrere alla definizione di valore atteso:

$$\begin{aligned}
 E\{\xi\eta\} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} xy f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy = \iint_{-\infty}^{+\infty} xy \frac{1}{6} \sum_{n=1}^6 \delta(x-n) \frac{1}{a} p_a(y-b) dx dy = \\
 &= \frac{1}{6a} \sum_{n=1}^6 \iint_{-\infty}^{+\infty} xy \delta(x-n) p_a(y-b) dx dy = \frac{1}{6a} \sum_{n=1}^6 \int_{-\infty}^{+\infty} xy \delta(x-n) p_a(y-b) dy = \\
 &= \frac{1}{6a} \sum_{n=1}^6 \int_{-\infty}^{+\infty} n y p_a(y-b) dy = \frac{1}{6a} \sum_{n=1}^6 \int_{b-a/2}^{b+a/2} n y dy = \\
 &= \frac{1}{6a} \sum_{n=1}^6 n \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{b-a/2}^{b+a/2};
 \end{aligned}$$

sostituendo i valori di  $a$  e  $b$  forniti dal testo, si ottiene:

$$E\{\xi\eta\} = \frac{7}{4}.$$

Tuttavia è possibile giungere a questo risultato in un altro modo. Osserviamo che la densità di probabilità congiunta fattorizza in due termini, dei quali uno dipende solo da  $x$  e l'altro solo da  $y$ . Quindi le due variabili sono statisticamente indipendenti; questo ci permette di scrivere:

$$E\{\xi\eta\} = E\{\xi\}E\{\eta\}.$$

Osserviamo ora le due probabilità disgiunte. Da esse si nota che  $\xi$  assume una distribuzione discreta, mentre  $\eta$  ha una distribuzione uniforme. Si è già mostrato che la media di una distribuzione discreta è la media aritmetica dei valori che essa assume, mentre la media di una distribuzione uniforme è pari al valore su cui la distribuzione è centrata. Quindi abbiamo:

$$E\{\xi\eta\} = \frac{7}{2} b = \frac{7}{4}.$$

■

## 10.3 Generalizzazione del valore atteso

In generale, il valore atteso può essere usato anche per calcolare momenti non standard. La definizione più ampia del valore atteso è la seguente:

$$E_{\xi,\eta}\{g(\xi,\eta)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{\xi,\eta}(x,y) dx dy,$$

dove si è supposto che  $g$  fosse una funzione di due variabili, e che ciascuna di queste due variabili fosse casuale.

## 10.4 Momenti congiunti

Il momento congiunto di ordine  $n$  di due variabili casuali  $\xi$  ed  $\eta$  con densità di probabilità congiunta  $f_{\xi\eta}(x,y)$  è definita come segue:

$$E\{\xi^n \eta^n\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} x^n y^n f_{\xi\eta}(x,y) dx dy.$$

La *media congiunta* si ottiene ponendo  $n = 1$ :

$$\mu_{\xi\eta} = E\{\xi\eta\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} xy f_{\xi\eta}(x,y) dx dy.$$

Se le due variabili sono statisticamente indipendenti vale la (9.5.1); quindi si ha:

$$E\{\xi\eta\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\eta}(y) dy = \mu_{\xi} \mu_{\eta} = E\{\xi\} E\{\eta\}.$$

## 10.5 Momenti congiunti centrali

Lo stesso discorso si ripropone per i momenti congiunti *non centrali* di ordine  $n$ :

$$E\{(\xi - \mu_\xi)^n(\eta - \mu_\eta)^n\} = \int \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_\xi)^n (y - \mu_\eta)^n f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy,$$

dove  $\mu_\xi$  e  $\mu_\eta$  sono rispettivamente i valori attesi (medie) delle due variabili coinvolte. Anche in questo caso si definisce la varianza come l'ordine centrale di ordine  $n = 2$ .

## 10.6 Media condizionata

La media condizionata di due variabili è definita come segue:

$$E_{\xi|\eta}\{g(\xi, \eta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, h) f_{\xi\eta}(x|y) dx. \quad (10.6.1)$$

Si ha:

$$E_{\xi\eta}\{g(\xi, \eta)\} = E_\xi\{E_{\eta|\xi}\{g(\xi, \eta)\}\} = E_\eta\{E_{\xi|\eta}\{g(\xi, \eta)\}\};$$

da cui, osservando che la media condizionata è una funzione di una sola variabile,

$$\begin{aligned} E_{\xi\eta}\{g(\xi, \eta)\} &= E_\eta\{E_{\xi|\eta}\{g(\xi, \eta)\}\} = E_\eta\{w(\eta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(y) f_\eta(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{\xi\eta}(x|y) dx dy = \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_\eta(y) f_{\xi\eta}(x|y) dx dy \end{aligned}$$

Se le due variabili sono statisticamente indipendenti il prodotto  $f_\eta(y) f_{\xi\eta}(x|y)$  è uguale a  $f_\xi(x) f_\eta(y)$ ; inoltre, supponendo che  $g(x, y) = g_1(x) g_2(y)$ , si ricava

$$\begin{aligned} E_{\xi\eta}\{g(\xi, \eta)\} &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_\xi(x) f_\eta(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) f_\xi(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(y) f_\eta(y) dy = E_\xi\{g_1(x)\} E_\eta\{g_2(x)\}. \end{aligned}$$

## 10.7 Coefficiente di correlazione

**Definizione 10.4** Si definisce **coefficiente di correlazione**  $\rho_{\xi\eta}$  il seguente numero:

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{E_{\xi\mu}\{(\xi - \mu_\xi)(\eta - \mu_\eta)\}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$

Il coefficiente di correlazione è compreso tra  $-1$  ed  $1$ , a causa della presenza del fattore  $\frac{1}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$  che normalizza.

Se  $\xi$  ed  $\eta$  sono statisticamente indipendenti si ha:

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{E_\xi\{(\xi - \mu_\xi)\} E_\eta\{(\eta - \mu_\eta)\}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$

Si ottiene  $\rho_{\xi\eta} = 0$ ; la dimostrazione è semplice e può essere svolta per esercizio.

# Capitolo 11

## Processi casuali

**Definizione 11.1** Si dice **processo casuale**  $X(t)$  un evento che produce un segnale la cui forma d'onda ed espressione non è determinata, ma può variare secondo una certa distribuzione di probabilità. Uno specifico segnale prodotto da un processo casuale viene detto **realizzazione del processo casuale**, e si indica con  $X(t; \sigma_0)$ , dove  $\sigma_0$  non è un parametro, ma una semplice etichetta.

Un esempio di processo casuale può essere l'evoluzione della temperatura rilevata a intervalli regolari per un mese o un anno in uno stesso posto: infatti non viene generato un solo valore, ma una serie di valori associati a momenti diversi.

Abbiamo due possibili modi di studiare un processo casuale: il primo è quello di cercare la probabilità che venga generata una precisa forma d'onda. Questa via non è però facilmente percorribile, in quanto le forme d'onda che possono essere realizzate sono infinite e difficilmente si può prevedere l'uscita dell'una o dell'altra.

Il modo alternativo è quello di considerare un istante di tempo  $t_0$  e studiare la distribuzione di probabilità di  $X(t; \sigma_0)$ ; in questo caso, si riduce lo studio del processo casuale all'analisi di una variabile aleatoria, cosa che sappiamo affrontare. Tale distribuzione di probabilità viene indicata con  $f_{X(t_0)}(x)$ ; se si conosce tale funzione per ogni istante  $t_0$ , allora si ha la **densità di probabilità del primo ordine**  $f_{X(t)}(x)$ , spesso indicata con  $f_X(x; t)$ , dove  $x$  è una variabile di servizio usata per esprimere la densità di probabilità, mentre  $t$  è la variabile che compare nell'espressione del processo.

Se volessimo conoscere la relazione tra la probabilità in un istante  $t_1$  e in un istante  $t_2$ , avremmo bisogno di conoscere la **densità di probabilità congiunta del secondo ordine**  $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) = f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$ . In generale si potrà definire la densità di probabilità dell' $n$ -esimo ordine, cioè la relazione tra le probabilità valutate in  $n$  istanti di tempo diversi. Ci si potrebbe chiedere se il valore in ciascun istante sia statisticamente indipendente da quello di altri istanti; in questo caso, le relative densità di probabilità potrebbero fattorizzare, e si potrebbe scrivere per l' $n$ -esimo ordine:

$$f_X(\underline{x}; \underline{t}) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i). \quad (11.0.1)$$

Per risolvere il problema riprendiamo l'esempio della temperatura. Supponiamo di voler tracciare l'andamento della temperatura in un mese abbastanza caldo; presumibilmente, i valori rilevati saranno compresi tra i 25 e i 35 gradi centigradi, ma non si possono escludere casi più caldi o più freddi; ciò significa che la densità di probabilità del primo ordine avrà un andamento gaussiano, con valor medio di circa 30 gradi. Per fissare le idee, supponiamo che il giorno 10 si sia registrata una temperatura di 28 gradi; se i valori rilevati in tempi diversi fossero statisticamente indipendenti, dovremmo trarre la conclusione che il giorno 11 potremo avere qualsiasi valore di temperatura, anche molto distante da quello del giorno precedente. Tuttavia, si può supporre che la temperatura reale non si discosterà molto da quei 28 gradi; potremmo ad esempio dire che in un giorno si possa

avere uno sbalzo di  $\pm 5$  gradi.

È chiaro che i due eventi sono in qualche modo correlati: il valore assunto da una variabile casuale influenza la distribuzione dell'altra. Del resto, cerchiamo di capire se esistano processi i cui punti siano statisticamente indipendenti cercando di tradurre questa condizione in un'altra proprietà equivalente più facilmente verificabile. Se consideriamo intervalli di tempo più ristretti, ad esempio un'ora, tra una rilevazione e la successiva, la possibilità di scarto passa verosimilmente a non più di un grado in più o in meno; se consideriamo un rilevamento al minuto, le variazioni non potranno essere maggiori di decimi, se non centesimi, di grado. Dunque, se diminuisce l'intervallo di tempo, diminuisce l'intervallo di valori dell'ordinata; questa condizione è quella che si impone per definire la continuità analitica di una funzione. In altre parole, un processo che generi forme d'onda continue è tale per cui i suoi punti *non* sono statisticamente indipendenti.

In conclusione, l'espressione (11.0.1), che ci avrebbe notevolmente semplificato la vita, non è applicabile nei casi di nostro interesse.

**Esercizio 43** Si consideri un processo casuale  $X(t)$  con densità di probabilità del primo ordine pari a:

$$f_X(x; t) = \frac{1}{2 + |t|} p_{2+|t|}(x),$$

dove  $p_y(x)$  vale 1 per  $|x| < y/2$  e zero altrove. Quale dei seguenti segnali (figura 11.1) non può essere una realizzazione di  $X(t)$ ?

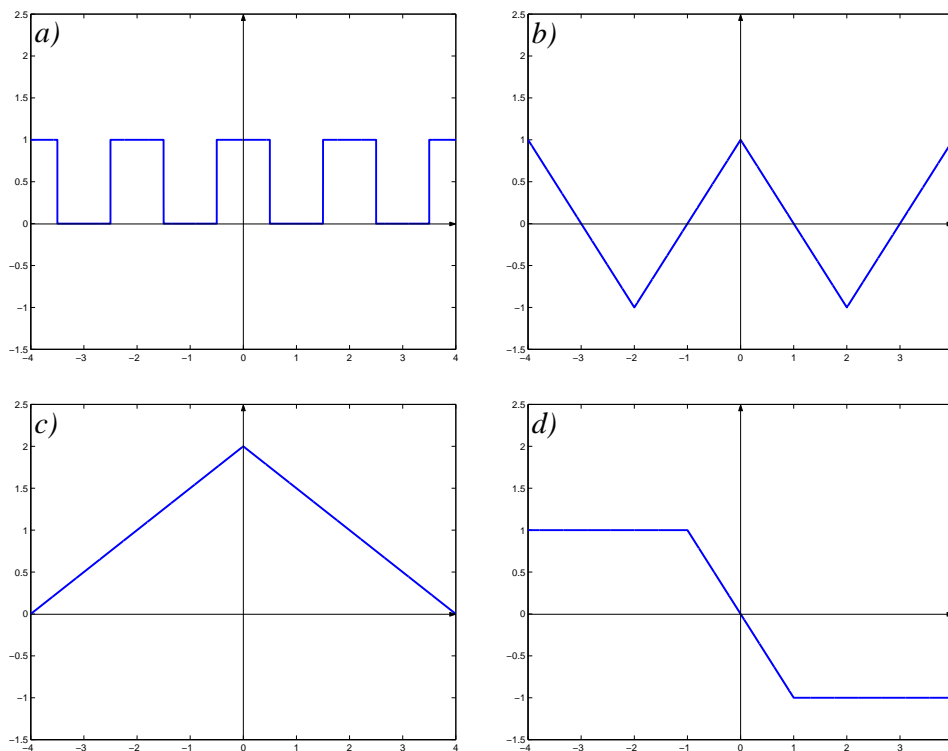


Figura 11.1: Possibili realizzazioni del processo dell'esercizio 43.

#### Soluzione

La densità di probabilità mostra che  $X(t)$  assume una distribuzione uniforme su un intervallo di valori la cui ampiezza varia linearmente con  $|t|$ . In particolare, si può definire una regione di possibili valori di  $X(t)$



compresa tra le due rette  $1 + |t|$  e  $-1 - |t|$ . In generale, infatti, valutare la funzione  $f_X(x; t)$  in un istante  $t = t_0$  vuol dire stabilire quali valori potranno essere assunti dal processo casuale nell'istante  $t_0$ ; nel nostro caso, per  $t = 0$ , si ha  $f_X(x; 0) = \frac{1}{2}p_2(x)$ , quindi il processo può assumere valori compresi tra -1 e 1. Si nota che l'unico segnale tra quelli proposti che non soddisfa tale condizione è il segnale  $c$ ), che nell'istante considerato vale 2. ■

## 11.1 Momenti principali di un processo casuale

Come avevamo già fatto con le variabili casuali, definiamo ora i *momenti* di un processo casuale. Introduciamo per prima cosa l'estensione di un concetto già noto:

**Definizione 11.2** Si dice *valore atteso* o *media* di un processo casuale  $X(t)$  con densità di probabilità del primo ordine  $f_X(x; t)$  il seguente integrale:

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x; t) dx.$$

**Osservazione** Più in generale, se volessimo calcolare la media di un processo definito come  $Y(t) = g[X(t)]$ , conoscendo  $f_X(x; t)$  ed essendo  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione determinata, avremmo:

$$E\{Y(t)\} = E\{g[X(t)]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x; t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y; t) dy.$$

In generale, i momenti del tipo  $E\{X(t)^n\}$  si dicono *momenti non centrali di ordine n-esimo*, mentre quelli del tipo  $E\{[X(t) - \mu_X]^n\}$ , dove  $\mu_X = E\{X(t)\}$ , si dicono *momenti centrali di ordine n-esimo*. Di essi, il più importante è la varianza:

$$\sigma_X^2 = E\{[X(t) - \mu_X]^2\} = E\{X(t)^2\} - \mu_X^2,$$

secondo le note proprietà di linearità del valore atteso (cfr. 10.1). È importante notare che in generale la media e la varianza di un processo casuale sono funzioni del tempo. Parleremo più avanti dei processi i cui momenti sono costanti rispetto a  $t$ .

**Esercizio 44** Si consideri un processo casuale  $X(t)$  con densità di probabilità del primo ordine pari a:

$$f_X(x; t) = \frac{1}{a} p_a(x) u(t) + \frac{1}{2a} p_{2a}(x) u(-t),$$

dove  $p_y(x)$  vale 1 per  $|x| < y/2$  e zero altrove. Quanto valgono la media e la varianza di  $X(t)$ ?

*Soluzione*

È sufficiente applicare le definizioni appena date:

$$\begin{aligned} \mu_X &= E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x; t) dx = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{x}{a} u(t) dx + \int_{-a}^a \frac{x}{2a} u(-t) dx = 0; \\ \sigma_X^2 &= E\{X^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{a} p_a(x) u(t) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2a} p_{2a}(x) u(-t) dx = \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{x^2}{a} u(t) dx + \int_{-a}^a \frac{x^2}{2a} u(-t) dx = \frac{1}{a} \frac{a^3}{12} u(t) + \frac{1}{2a} \frac{2a^3}{3} u(-t) = \\ &= \frac{a^2}{12} [u(t) + 4u(-t)] = \frac{a^2}{12} [1 - u(-t) + 4u(-t)] = \frac{a^2}{12} [1 + 3u(-t)]. \end{aligned}$$

■

Per il secondo ordine, nel caso dei processi casuali possiamo definire altre grandezze.

**Definizione 11.3** Si dice **correlazione** del processo casuale  $X(t)$  la funzione  $\rho_X$  definita come segue:

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{E\{X(t_1)X(t_2)\} - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}.$$

Questa funzione in qualche modo rappresenta quanto stretta sia la dipendenza tra i vari istanti di tempo. Infatti, consideriamo i due casi estremi: se tutti i punti della realizzazione del processo fossero statisticamente indipendenti, avremmo:

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\} - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} = 0,$$

cioè

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \rho_X(t_1, t_2) = 0.$$

Se invece ciò non fosse vero (cioè se la curva generata fosse continua, per i motivi che abbiamo già esposto), non si potrebbe scomporre il valore atteso a numeratore; potremmo però scrivere:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \rho_X(t_1, t_2) = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \frac{E\{X(t_1)X(t_2)\} - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} = \frac{E\{X(t_2)^2\} - \mu_X^2(t_2)}{\sigma_X^2(t_2)} = 1.$$

**Definizione 11.4** Si dice **autocorrelazione** di un processo casuale  $X(t)$  la funzione  $R_X$  così definita:

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}.$$

**Definizione 11.5** Si dice **covarianza** di un processo casuale  $X(t)$  la funzione  $k_X$  così definita:

$$k_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2).$$

Si ha:

$$\sigma_X^2(t) = k_X(t, t).$$

**Esercizio 36** Portare avanti il più possibile il calcolo della media:

$$M(t, \tau) = E\{X(t)Y(t)X(t-\tau)\cos(\Theta(t)) + X(t)Y(t)Y(t+\tau)\sin(\Phi(t))\}$$

sapendo che:

- $X(t)$  e  $Y(t)$  sono processi reali, WSS, indipendenti fra loro e con media rispettivamente  $\mu_x$  e  $\mu_y$ ;
- $\Theta(t)$  è un processo casuale a media nulla statisticamente indipendente da  $X(t)$  ma non indipendente da  $Y(t)$ ;
- $\Phi(t)$  è un processo casuale a media nulla statisticamente indipendente da  $X(t)$  e  $Y(t)$ .

*Soluzione*

Quello che l'esercizio ci chiede è di applicare, laddove ciò sia possibile, le proprietà del valore atteso, in modo da semplificare al massimo l'espressione data. Notiamo allora che possiamo sfruttare la proprietà di linearità del valore atteso; inoltre, tenendo conto delle indipendenze dichiarate tra i vari processi, possiamo scrivere:

$$M(t, \tau) = E\{X(t)X(t-\tau)\}E\{Y(t)\cos(\Theta(t))\} + E\{X(t)\}E\{Y(t)Y(t+\tau)\}E\{\sin(\Phi(t))\} = \quad (11.1.1)$$

$$= R_X(\tau)E\{Y(t)\cos(\Theta(t))\} + \mu_x R_Y(\tau)E\{\sin(\Phi(t))\}. \quad (11.1.2)$$

Non è possibile semplificare ulteriormente la media di  $Y(t) \cos(\Theta(t))$ , in quanto il processo  $\Theta(t)$  non è indipendente da  $Y(t)$ ; non possiamo neanche calcolare il valore atteso di  $\sin(\Phi(t))$ , poiché non conosciamo la distribuzione di probabilità del processo  $\Phi(t)$ . La (11.1.1) è quindi la massima semplificazione possibile. ■

**Esercizio 37** Portare avanti il più possibile il calcolo della media:

$$M(t, \tau) = E \{X(t + \tau)Y(t)X(t - \tau) \sin(\Theta(t)) + X(t)X(t + \tau)Y(t + \tau) \cos(\Phi(t))\}$$

sapendo che:

- $X(t)$  ed  $Y(t)$  sono processi reali, WSS, indipendenti fra loro e con media rispettivamente  $\mu_X$  e  $\mu_Y$ ;
- $\Theta(t)$  è un processo casuale uniformemente distribuito fra  $[-\pi/2, \pi/2]$ , statisticamente indipendente da  $X(t)$  ma non indipendente da  $Y(t)$ ;
- $\Phi(t)$  è un processo casuale uniformemente distribuito fra  $[-\pi/2, \pi/2]$ , statisticamente indipendente da  $X(t)$  e da  $Y(t)$ .

*Soluzione*

Questo esercizio è analogo al precedente. Scriviamo:

$$\begin{aligned} M(t, \tau) &= E \{X(t + \tau)Y(t)X(t - \tau) \sin(\Theta(t))\} + E \{X(t)X(t + \tau)Y(t + \tau) \cos(\Phi(t))\} = \\ &= R_X(2\tau)E \{Y(t) \sin(\Theta(t))\} + R_X(\tau)\mu_Y E \{\cos(\Phi(t))\}. \end{aligned}$$

Come prima, non possiamo semplificare il termine  $E \{Y(t) \sin(\Theta(t))\}$ , in quanto  $\Theta(t)$  non è statisticamente indipendente da  $Y(t)$ , e dovremmo quindi conoscere la loro probabilità congiunta. Invece, il processo  $\Phi(t)$  è indipendente da entrambi gli altri due processi casuali, e quindi possiamo fattorizzarne la media. Inoltre, il testo ce ne fornisce le caratteristiche statistiche; è possibile calcolare esplicitamente quel valore atteso:

$$\begin{aligned} E \{\cos(\Phi(t))\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \phi f_{\Phi}(\phi) d\phi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \phi p_{\pi}(\phi) \frac{1}{\pi} d\phi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Quindi la forma semplificata è la seguente:

$$M(t, \tau) = R_X(2\tau)E \{Y(t) \sin(\Theta(t))\} + R_X(\tau)\mu_Y \frac{2}{\pi}. \quad \blacksquare$$

## 11.2 Processi quasi determinati

Una classe particolare di processi casuali è quella dei *processi quasi determinati*. Si tratta di forme d'onda generate da una funzione determinata, al cui interno compaiono come parametri una o più variabili casuali. Ad esempio, il processo  $X(t) = \sin(\omega t)$ , dove  $\omega$  è una variabile aleatoria con distribuzione (per esempio) gaussiana, è un processo quasi determinato.

In questi casi particolari, i momenti possono essere calcolati come nel caso di variabili casuali singole, come mostra il seguente esercizio.

**Esercizio 42** Sia dato il processo casuale  $X(t) = r_T(t - \xi)$ , con  $\xi$  variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo  $[0, T]$ , e  $r(t)$  impulso rettangolare, causale, di ampiezza unitaria e durata  $T$ . Si valuti la media  $m_X = E \{X(t)\}$ . Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

- $m_X(t) = 1 \quad \forall t$ ;
- $m_X(t) = 0 \quad \forall t$ ;
- $m_X(t)$  dipende dal tempo, e in particolare  $m_X(T) = 1$ ;
- $m_X(t)$  dipende dal tempo, e in particolare  $m_X(t) = 0 \quad \forall t > T$ ;

- nessuna delle precedenti.

#### Soluzione

Il processo in analisi è *quasi determinato*, nel senso che è un segnale ben definito all'interno del quale uno o più parametri dipendono da variabili aleatorie; per l'esattezza, si tratta di un rettangolo il cui istante centrale può variare casualmente tra 0 e  $T$ . Si può quindi utilizzare la definizione di media statistica o valore atteso:

$$E\{X(t)\} = E\{r_T(t - \xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} r_T(t - x) p_T\left(x - \frac{T}{2}\right) \frac{1}{T} dx = \frac{1}{T} \int_0^T r_T(t - x) dx;$$

considerando che  $r_T(t - x) \neq 0$  se e solo se  $t - T \leq x \leq t$ , si ottiene:

$$m_x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t}{T} & 0 < t \leq T \\ 2 - \frac{t}{T} & T < t \leq 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases} = \text{Tri}_{2T}(t - T).$$

In particolare, si osserva che  $m_x(T) = 1$ . ■

## 11.3 Stazionarietà di un processo casuale

Abbiamo detto prima che i momenti di un processo casuale in generale dipendono dal tempo. Tuttavia, in certi casi particolari, tale dipendenza viene meno; in tal caso si parla di **processo stazionario**. Una definizione più precisa è la seguente:

**Definizione 11.6** *Un processo casuale  $X(t)$  si dice **stazionario** dell' $N$ -esimo ordine se e solo se la sua distribuzione di probabilità dell' $N$ -esimo ordine può essere scritta come*

$$f_X(x_1, \dots, x_N; t_1 - t_2, \dots, t_{N-1} - t_N).$$

In generale, si può dire che non è la scelta di un preciso istante di tempo a condizionare la probabilità, ma la distanza tra i due istanti scelti. Diminuisce cioè il grado di libertà del processo stesso.

Scendendo più nel dettaglio, diremo che un processo  $X(t)$  è:

- *stazionario del primo ordine* se la sua densità di probabilità del primo ordine non dipende dal tempo, cioè se  $f_X(x; t) = f_X(x)$ ;
- *stazionario per la media* se la media è una costante rispetto al tempo, cioè se  $\mu_X(t) = \mu_X$ ;
- analogamente, *stazionario per la varianza* se la varianza è una costante rispetto al tempo, cioè se  $\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$ ;
- *stazionario del secondo ordine* se è stazionario del primo ordine e la sua densità di probabilità del secondo ordine non dipende dalla scelta dei due istanti di tempo, ma solo dalla loro differenza; cioè se  $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; \tau)$ , con  $\tau = t_2 - t_1$ ;
- *stazionario per l'autocorrelazione* se la sua funzione di autocorrelazione dipende solo dalla differenza tra i due istanti di tempo, cioè se  $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$ , con  $\tau = t_1, t_2$ .

Viste queste definizioni, possiamo porre un altro concetto di stazionarietà.

**Definizione 11.7** *Un processo casuale si dice **stazionario in senso lato** o **WSS** (wide sense stationary) se e solo se esso è stazionario per la media e per l'autocorrelazione.*

È chiaro che se un processo è stazionario del secondo ordine, allora è anche WSS; infatti un tale processo è sicuramente stazionario per l'autocorrelazione. Non è sempre vero il contrario, in quanto può accadere che un processo stazionario per l'autocorrelazione non sia stazionario del secondo ordine.

Un concetto ancora più restrittivo è quello di stazionarietà in senso stretto.

**Definizione 11.8** *Un processo casuale si dice **stazionario in senso stretto** o **SSS** (strict sense stationary) se e solo se esso è WSS e la sua densità di probabilità del primo ordine è gaussiana.*

Chiaramente, dalla stessa definizione si vede facilmente che processi SSS sono anche WSS, mentre non è vera l'implicazione inversa.

## 11.4 Autocorrelazione dei processi WSS

Consideriamo un processo casuale  $X(t)$  WSS; per definizione, esso è stazionario per l'autocorrelazione. Possiamo scrivere:

$$R_X(\tau) = E\{X(t_1)X(t_1 - \tau)\} = E\{X(t_2 + \tau)X(\tau)\};$$

è chiaro che i due argomenti del valore atteso possono essere scambiati con la proprietà commutativa; per convincersene basta operare un cambio di variabili del tipo  $\vartheta = t - \tau$ . In pratica otteniamo:

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t - \tau)\} = E\{X(t)X(t + \tau)\} = R_X(-\tau).$$

Abbiamo mostrato quindi che la funzione di autocorrelazione di un processo WSS è pari, così come avevamo trovato per l'autocorrelazione di due variabili casuali. In quel caso, avevamo anche trovato dei limiti a questa funzione (valeva infatti  $|R_\xi(\tau)| \leq R_\xi(0)$ ); vediamo se riusciamo a fare altrettanto con i processi WSS. Consideriamo il processo  $Y(t) = X(t) \pm X(t - \tau)$ ; si tratta di un segnale artefatto costruito sul processo  $X(t)$  che vogliamo analizzare. Avremo (grazie alla proprietà di stazionarietà di  $X(t)$ ):

$$\begin{aligned} E\{Y^2(t)\} &= E\{X^2(t) + X^2(t - \tau) \pm 2X(t)X(t - \tau)\} = \\ &= E\{X^2(t)\} + E\{X^2(t - \tau)\} \pm 2E\{X(t)X(t - \tau)\} = \\ &= R_X(0) + R_X(0) \pm 2R_X(\tau) = 2R_X(0) \pm 2R_X(\tau). \end{aligned}$$

Il valore atteso che abbiamo calcolato dev'essere senz'altro positivo, perché è la media di un segnale sempre positivo in quanto ottenuto come elevamento al quadrato di  $Y(t)$ . Quindi si ricava:

$$2R_X(0) \pm 2R_X(\tau) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mp R_X(\tau) \leq R_X(0),$$

cioè

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0),$$

come nel caso già analizzato in precedenza.

Notiamo che anche nello studio dei segnali determinati abbiamo parlato del concetto di funzione di autocorrelazione, utilizzando una scrittura del tutto analoga a quella dell'autocorrelazione statistica, nonostante la diversità formale e concettuale. Infatti, ora stiamo parlando di processi casuali, mentre l'autocorrelazione introdotta nel paragrafo 8.2 era riferita a segnali che di casuale non dovevano avere niente. Richiamiamo tuttavia le due definizioni (nel caso statistico consideriamo un processo WSS, e assumiamo che entrambi i segnali siano determinati):

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t - \tau)dt, \\ R_X(\tau) &= E\{X(t)X(t + \tau)\}. \end{aligned}$$

Osserviamo che le differenze nella definizione sono dettate quasi esclusivamente dall'indeterminazione del processo casuale: infatti il valore atteso non è altro che un integrale, nel quale però compare un termine assente nel caso determinato, cioè la densità di probabilità, assolutamente priva di senso quando si tratta di segnali non statistici. L'analogia tra le due funzioni è evidente anche da un altro caso di somiglianza nelle notazioni:

$$\begin{aligned}R_x(0) &= \mathcal{E} \{x(t)\}, \\R_X(0) &= E \{X^2(t)\}.\end{aligned}$$

Non si devono certo confondere i concetti di energia e di valore atteso; tuttavia è interessante notare come concetti che possiamo considerare paralleli (con le dovute distinzioni) siano espressi con notazioni molto simili.

## Capitolo 12

# Processi casuali filtrati

Si parla di processi casuale filtrati quando un processo casuale viene posto all'ingresso di un sistema, che dà in uscita un segnale  $Y(t)$ . Tuttavia in generale non è sempre detto che  $Y(t)$  sia anch'esso un processo casuale. Si pone la seguente definizione:

**Definizione 12.1** *Sia  $X(t)$  un processo casuale. Esso viene posto all'ingresso di un sistema che dà in uscita  $Y(t) = S\{X(t)\}$ .  $Y(t)$  si definisce **processo casuale filtrato** se e solo se*

$$Y(t; \sigma_0) = S\{X(t; \sigma_0)\}.$$

Vale il seguente teorema, che non dimostriamo.

**Teorema 12.1** *Dato un sistema LTI  $S$  con risposta all'impulso  $h(t)$  ed un processo casuale  $X(t)$  che viene posto al suo ingresso, allora l'uscita  $Y(t) = S\{X(t)\}$  è un processo casuale, cioè l'integrale di convoluzione*

$$Y(t; \sigma_0) = X(t; \sigma_0) * h(t)$$

*converge, se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:*

1. *il sistema è stabile BIBO;*
2. *il processo  $X(t)$  è tale che  $|\mu_X(t)| \leq M < \infty$  e  $|\sigma_X(t)| \leq S < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .*

### 12.1 Momenti dei processi filtrati

Anche assumendo che un sistema dia in uscita un processo casuale, ancora non possiamo dire niente sulla distribuzione di probabilità dell'uscita. Tuttavia possiamo tirare qualche conclusione sulla media e sull'autocorrelazione dell'uscita, note le rispettive proprietà dell'ingresso.

**Teorema 12.2** *Sia  $X(t)$  un processo casuale che viene posto all'ingresso di un sistema con risposta all'impulso  $h(t)$ . Sia  $Y(t)$  l'uscita di tale sistema. Allora, si ha:*

$$\mu_Y(t) = \mu_X(t) * h(t), \quad (12.1.1)$$

*dove  $\mu_X(t) = E\{X(t)\}$ . Se il processo  $X(t)$  è WSS, allora si ha:*

$$\mu_Y = \mu_X H(0), \quad (12.1.2)$$

*con  $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ .*

**Dimostrazione**

Dimostriamo prima il caso generale espresso dalla (12.1.1). Si ha:

$$\begin{aligned}\mu_Y(t) &= E\{X(t) * h(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\vartheta)h(t-\vartheta)d\vartheta\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E\{X(\vartheta)\}h(t+\vartheta)d\vartheta = \mu_X(t) * h(t).\end{aligned}$$

Per ricavare la (12.1.2) è sufficiente ricordare che la media di un processo WSS è una costante rispetto al tempo, e quindi può essere portata fuori dall'integrale:

$$\mu_Y(t) = \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)d\vartheta = \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta) e^{-j2\pi f t} d\vartheta \Big|_{f=0} = H(0)\mu_X \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

c.v.d. ■

Cerchiamo un risultato analogo anche per la funzione di autocorrelazione.

**Teorema 12.3** *Sia  $X(t)$  un processo casuale che viene posto all'ingresso di un sistema con risposta all'impulso  $h(t)$ . Sia  $Y(t)$  l'uscita di tale sistema. Allora, si ha:*

$$R_Y(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta_1)h(\vartheta_2)R_X(t_1 - \vartheta_1, t_2 - \vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2, \quad (12.1.3)$$

dove  $R_X(t_1, t_2)$  è l'autocorrelazione di  $X(t)$ . Se il processo  $X(t)$  è WSS, allora si ha:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau), \quad (12.1.4)$$

con  $R_h(\tau)$  funzione di autocorrelazione della risposta all'impulso.

Prima di dimostrare il teorema, facciamo notare che la risposta all'impulso in generale è un segnale determinato, quindi  $R_h$  è definita come autocorrelazione in senso determinato, non statistico. Si faccia attenzione a non confondere i due concetti.

**Dimostrazione**

Come prima iniziamo a dimostrare il caso generale espresso dalla (12.1.3). Si ha:

$$\begin{aligned}R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta_1)X(t_1 - \vartheta_1)d\vartheta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta_2)X(t_2 - \vartheta_2)d\vartheta_2\right\} = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta_1)h(\vartheta_2)E\{X(t_1 - \vartheta_1)X(t_2 - \vartheta_2)\}d\vartheta_1 d\vartheta_2 = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta_1)h(\vartheta_2)R_X(t_1 - \vartheta_1, t_2 - \vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2.\end{aligned}$$

L'espressione dell'autocorrelazione dell'uscita risulta notevolmente semplificata se il processo in ingresso è WSS. Ponendo  $\tau = t_1 - t_2$  si ha:

$$\begin{aligned}R_Y(t_1, t_2) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta_1)h(\vartheta_2)E\{X(t_1 - \vartheta_1)X(t_2 - \vartheta_2)\}d\vartheta_1 d\vartheta_2 = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta_1)h(\vartheta_2)R_X(t_1 - \vartheta_1 - t_2 + \vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2 = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta_2 + \vartheta)h(\vartheta_2)R_X(\tau - \vartheta)d\vartheta d\vartheta_2,\end{aligned}$$

avendo sostituito  $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$ . Integrando ora in  $d\vartheta_2$  si ottiene:

$$\begin{aligned}R_Y(t_1, t_1 - \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau - \vartheta)[h(\vartheta) * h(\vartheta)]d\vartheta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau - \vartheta)R_h(\vartheta)d\vartheta = R_X(\tau) * R_h(\tau) \quad \forall t_1 \in \mathbb{R},\end{aligned}$$



come espresso dalla (12.1.4). Si nota in particolare che la dipendenza da  $t_1$  viene meno, quindi  $R_Y$  può essere scritta come funzione della sola variabile  $\tau$ .

c.v.d. ■

In particolare, possiamo ora enunciare il seguente teorema:

**Teorema 12.4** *Sia  $X(t)$  un processo casuale che viene posto all'ingresso di un sistema con risposta all'impulso  $h(t)$ . Sia  $Y(t)$  l'uscita di tale sistema. Allora,  $Y(t)$  è WSS se  $X(t)$  è WSS.*

**Dimostrazione** Dai teoremi precedenti, in particolare dalle espressioni (12.1.2) e (12.1.4), si nota che  $Y(t)$  risulta stazionario per la media e per l'autocorrelazione, e quindi stazionario in senso lato.

c.v.d. ■

Enunciamo infine quest'ultimo teorema:

**Teorema 12.5** *Sia  $X(t)$  un processo casuale che viene posto all'ingresso di un sistema con risposta all'impulso  $h(t)$ . Sia  $Y(t)$  l'uscita di tale sistema. Allora, se  $X(t)$  è gaussiano, anche  $Y(t)$  lo è.*

**Corollario 12.5.1** *Se  $X(t)$  è SSS, anche  $Y(t)$  lo è.*

## 12.2 Rumore gaussiano bianco

Si indica con  $N(t)$  un particolare processo casuale, noto come *rumore gaussiano bianco*. Esso ha densità di probabilità gaussiana, media nulla e funzione di autocorrelazione così definita:

$$R_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

La particolarità del rumore bianco viene proprio da questa definizione. Si tratta infatti di un processo che è “correlato a se stesso” soltanto quando  $\tau = 0$ ; se invece lo si trasla anche di un intervallo infinitesimo, esso perde ogni correlazione, cioè è discontinuo in ogni punto. Per tali caratteristiche esso viene usato per modellizzare il rumore nei circuiti elettrici. Vedremo più avanti un'altra importante proprietà di tale rumore.

## 12.3 Combinazione di processi casuali

La combinazione di variabili aleatorie gode di alcune interessanti proprietà. In particolare, se si definisce  $\rho = \xi + \eta$ , si ha che la densità di probabilità  $f_\rho(x)$  è definita come il prodotto di convoluzione tra le due densità.

La relazione tra gli addendi e la combinazione risulta ancora più stretta nel caso le variabili coinvolte abbiano una distribuzione gaussiana. Se sia  $\xi$  sia  $\eta$  sono infatti gaussiane, anche  $\rho$  lo è, e questo vero per una qualsiasi combinazione lineare di un numero finito di variabili gaussiane. Si hanno le seguenti relazioni:

$$\rho = \sum_{n=1}^N a_n \xi_n,$$

$$\mu_\rho = \sum_{n=1}^N a_n \mu_{\xi_n} \quad \sigma_\rho^2 = \sum_{n=1}^N a_n^2 \sigma_{\xi_n}^2.$$

Se due variabili sono statisticamente indipendenti, allora il loro coefficiente di correlazione è nullo; l'implicazione inversa è vera solo se le due variabili sono anche gaussiane.

Vogliamo vedere se esistano simili relazioni anche per i processi casuali. Consideriamo due processi  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  statisticamente indipendenti di cui sono note la media e l'autocorrelazione (che,

essendo i due processi del tutto generici, sono rispettivamente funzioni di una e di due varibili), e definiamo un processo  $Y(t) = X_1(t) + X_2(t)$ . Avremo:

$$\mu_Y(t) = E \{X_1(t) + X_2(t)\} = \mu_{X_1}(t) + \mu_{X_2}(t),$$

come facilissimo vedere. Inoltre,

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E \{(X_1(t_1) + X_2(t_1))(X_1(t_2) + X_2(t_2))\} = \\ &= E \{X_1(t_1)X_1(t_2)\} + E \{X_1(t_1)X_2(t_2)\} + E \{X_2(t_1)X_1(t_2)\} + E \{X_2(t_1)X_2(t_2)\} = \\ &= R_{X_1}(t_1, t_2) + R_{X_2}(t_1, t_2) + \mu_{X_1}(t_1)\mu_{X_2}(t_2) + \mu_{X_1}(t_2) + \mu_{X_2}(t_2). \end{aligned}$$

## Capitolo 13

# Caratterizzazione energetica di processi casuali

Come nel caso dei segnali determinati, dato un processo  $X(t)$  stazionario in senso lato si definisce la **densità spettrale di potenza**  $S_X(f)$  come trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione:

$$S_X(f) = \mathcal{F} \{R_X(\tau)\}.$$

Notiamo che tale definizione è applicabile solo ai processi WSS, altrimenti l'autocorrelazione sarebbe una funzione di due variabili. La proprietà principale dello spettro di potenza è la seguente:

$$R_X(0) = E \{X^2(t)\} = \mathcal{F}^{-1} \{S_X(f)\} \Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df;$$

per questo motivo esso viene anche chiamato **spettro del valor quadratico medio**, dato che ne rappresenta appunto una distribuzione in frequenza.

Si osservi che ancora una volta si instaura un parallelismo tra le definizioni per i segnali determinati e quelle per i segnali casuali. Nel primo caso, però, l'integrale dello spettro di potenza era esattamente l'energia del segnale, e non chiaramente un valore atteso.

### 13.1 Spettro di energia di processi filtrati

**Teorema 13.1** *Sia  $X(t)$  un processo casuale WSS con autocorrelazione  $R_X(\tau)$  e densità spettrale di potenza  $S_X(f)$ . Sia  $Y(t)$  il processo che si ottiene in uscita da un sistema LTI con funzione di trasferimento  $H(f)$  al cui ingresso si è posto  $X(t)$ . Allora, vale la seguente relazione:*

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2.$$

**Dimostrazione** Ricordando la relazione (12.1.4), si ottiene:

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \mathcal{F} \{R_Y(\tau)\} = \mathcal{F} \{R_X(\tau) * R_h(\tau)\} = \mathcal{F} \{R_X(\tau)\} \mathcal{F} \{R_h(\tau)\} = \\ &= S_X(f) |H(f)|^2. \end{aligned}$$

c.v.d. ■

**Esempio** Consideriamo un processo  $X(t)$  WSS che viene fatto passare attraverso un sistema LTI con funzione di trasferimento  $H(f) = p_{2B}(f - f_0)$ . Se chiamiamo  $Y(t)$  il processo che otteniamo all'uscita del sistema (lasciamo allo studente il compito di verificare che si tratta effettivamente di un processo) avremo:

$$S_Y(f) = S_X(f) p_{2B}(f - f_0).$$

Calcoliamo ora il valor quadratico medio di  $Y(t)$ :

$$E \{Y(t)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df = \int_{f_0-B}^{f_0+B} S_X(f) df.$$

Il valor quadratico medio deve però essere sempre positivo; possiamo scrivere:

$$\int_{f_0-B}^{f_0+B} S_X(f) df \approx 2BS_X(f_0) \quad \text{per } B \rightarrow 0;$$

quindi:

$$S_X(f) \geq 0$$

in generale. ■

**Esercizio 45** Un processo casuale  $X(t)$ , a media nulla e stazionario in senso lato, ha una funzione di autocorrelazione  $R_X(\tau) = e^{-\tau^2}$ . Tale processo passa attraverso un filtro passabasso ideale, la cui funzione di trasferimento vale 1 per  $|f| < B$  e zero altrove. Sia  $Y(t)$  il processo in uscita dal filtro. Si valuti la varianza  $\sigma_Y^2$  di  $Y(t)$ .

*Soluzione*

Per risolvere l'esercizio è sufficiente ricordare le caratteristiche dei processi casuali che vengono prodotti dai sistemi lineari tempo-invarianti. In particolare, si ha  $\sigma_Y^2 = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df$ , dove  $S_Y(f) = \mathcal{F} \{R_Y(\tau)\} = S_X(f) |H(f)|^2$  è la densità spettrale del valor quadratico medio. Si ricava:

$$S_Y(f) = S_X(f) p_{2B}(f) = \mathcal{F} \{e^{-\tau^2}\} p_{2B}(f) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2} p_{2B}(f);$$

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2} p_{2B}(f) df = \sqrt{\pi} \int_{-B}^B e^{-\pi^2 f^2} df = \text{erf}(\pi B).$$

■

## 13.2 Energia e potenza di processi casuali WSS

**Definizione 13.1** Si definisce **energia** di una realizzazione  $\sigma_0$  del processo casuale  $X(t)$  il seguente integrale:

$$\mathcal{E} \{X(t; \sigma_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t; \sigma_0)|^2 dt.$$

Riflettiamo un attimo sulle forme d'onda prodotte da un processo casuale. Se tutte le realizzazioni di un processo andassero a zero all'infinito, la varianza sarebbe nulla. Questo caso, che pure dovrebbe essere studiato in una trattazione "analitica" del problema, è però privo di interesse pratico; quindi, almeno nei casi con cui ci troveremo a che fare, l'integrale che abbiamo scritto non convergerà, cioè le realizzazioni di un processo casuale hanno energia infinita. Consideriamo allora una classe particolare di questi segnali, cioè quelli a *potenza media finita*. Si pongono le seguenti definizioni, analoghe a quelle per segnali determinati:

$$\Phi_X(\tau; \sigma_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t; \sigma_0) X^*(t - \tau; \sigma_0) dt,$$

e la sua trasformata di Fourier

$$G_X(f; \sigma_0) = \mathcal{F} \{\Phi_X(\tau)\}.$$

Se fosse possibile conoscere questa funzione per ogni realizzazione, avremmo lo spettro di potenza  $G_X(f)$  del processo  $X(t)$ . Si faccia attenzione a non confondere la terminologia usata per l'autocorrelazione  $\Phi$  e lo spettro di potenza  $G$ , che sono in un certo senso delle "medie temporali", con quella delle funzioni omonime  $R$  e  $S$ , che sono invece legate alle proprietà statistiche del processo.

## Capitolo 14

# Ergodicità

**Definizione 14.1** *Un processo casuale si dice **ergodico** se tutte le medie statistiche coincidono con le medie temporali su qualsiasi realizzazione.*

Ad esempio, se consideriamo un processo  $X(t)$ , possiamo porre le seguenti definizioni di media statistica:

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\}$$

e di media temporale:

$$\langle X(t; \sigma_0) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t; \sigma_0) dt;$$

questo processo sarà *ergodico per la media* se

$$\mu_X(t) = \langle X(t; \sigma_0) \rangle \quad \forall \sigma_0.$$

Analogamente, un processo è ergodico per l'autocorrelazione se vale:

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t-\tau)\} = \langle X(t; \sigma_0)X(t-\tau; \sigma_0) \rangle = \Phi_X(\tau; \sigma_0) \quad \forall \sigma_0, \tau.$$

Prima di proseguire, richiamiamo la definizione di *covarianza* per un processo WSS:

$$k_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X(t)\mu_X(t-\tau).$$

I processi gaussiani sono una classe particolare di processi casuali anche riguardo all'ergodicità. Vale infatti il seguente teorema:

**Teorema 14.1** *Sia  $X(t)$  un processo casuale gaussiano. Allora, se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |k_X(\tau)| d\tau < \infty,$$

*$X(t)$  è ergodico per qualsiasi media.*

La condizione posta dal teorema richiede che la covarianza tenda a zero verso infinito, e ciò implica che, se  $\tau$  è sufficientemente grande, i campioni di  $X(t)$  prelevati in due istanti  $t$  e  $t + \tau$  siano completamente scorrelati. Per i processi gaussiani, ciò significa anche che i due campioni sono statisticamente indipendenti.

Come si può facilmente intuire, se un processo è ergodico per l'autocorrelazione valgono le seguenti relazioni:

$$R_X(\tau) = \Phi_X(\tau; \sigma_0) \quad \forall \sigma_0,$$

e applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri:

$$S_X(f) = G_X(f; \sigma_0) \quad \forall \sigma_0.$$

Allora si ha anche:

$$E \{X^2(t)\} = R_X(0) = \Phi_X(0; \sigma_0) = \overline{P} \{X(t; \sigma_0)\}.$$

## 14.1 Rumore gaussiano bianco

Riprendiamo il processo  $N(t)$  di cui avevamo già parlato nel paragrafo 12.2. Ora possiamo dire qualcosa di più su questo processo.

Ne ricordiamo brevemente le proprietà : si tratta di un processo gaussiano stazionario in senso stretto (SSS), con media nulla e funzione di autocorrelazione  $R_N(\tau) = N_0/2 \delta(\tau)$ . Si ottiene  $k_N(\tau) = R_N(\tau)$ , il cui integrale su tutto l'asse reale è pari a  $N_0/2$ ; quindi il rumore bianco è ergodico. Inoltre, la sua varianza è infinita:  $\sigma_N^2 = R_N(0) = \infty$ .

Studiamo ora questo processo con uno dei nuovi strumenti che abbiamo introdotto nelle ultime pagine. Il suo spettro di potenza è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione:

$$G_N(f) = S_N(f) = \mathcal{F} \{R_N(\tau)\} = \frac{N_0}{2}.$$

Lo spettro di potenza del rumore bianco è piatto sull'asse delle frequenze, cioè “disturba” allo stesso modo tutte le frequenze di un segnale a cui si sovrapponga. Ecco perché esso viene definito “bianco”: infatti il colore bianco dato dalla somma di tutte le frequenze del campo visibile. I risultati sperimentali hanno dimostrato che il rumore generato da un circuito elettrico o elettronico è effettivamente bianco fino a frequenze di circa 100 GHz, e quindi il processo  $N(t)$  è un modello sufficientemente preciso entro questo ampio campo di applicazione. Si è visto che a frequenze superiori di 100 GHz il rumore reale decresce in maniera esponenziale, ma questo riguarda soltanto un ristretto campo di applicazioni (come, ad esempio, le trasmissioni in fibra ottica).

## 14.2 Rumore bianco filtrato

Se poniamo il processo  $N(t)$  all'ingresso di un sistema LTI, in uscita otteniamo un processo  $Y(t)$  che è anch'esso SSS. In particolare si hanno le seguenti relazioni:

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2} R_h(\tau);$$

per quanto riguarda la media si ha:

$$E \{Y(t)\} = E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} N(\vartheta) h(t - \vartheta) d\vartheta \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \vartheta) E \{N(\vartheta)\} d\vartheta = 0.$$

La condizione di ergodicità è ancora rispettata, dal momento che  $k_Y(\tau) = R_Y(\tau)$  e che l'integrale di  $R_h$  converge se il sistema è stabile BIBO (condizione necessaria perché esso presenti in uscita un processo casuale).

## Capitolo 15

# Esercizi riassuntivi sui processi casuali filtrati

**Esercizio 46** Sia data una coppia di processi gaussiani bianchi,  $N_1(t)$  ed  $N_2(t)$ , statisticamente indipendenti e con densità spettrale di potenza  $G_{N_1}(f) = G_{N_2}(f) = N_0/2$ . Da essi viene ricavato un processo  $Y(t)$  come segue:

$$Y(t) = \left[ \frac{1}{2}N_1(t) + \frac{3}{4}N_2(t) \right] * h(t),$$

dove  $h(t) = e^{-t}u(t)$ . Calcolare media e varianza di  $Y(t)$ .

*Soluzione*

La media di  $Y(t)$  è nulla, come è facile verificare:

$$E\{Y(t)\} = E\left\{ \frac{1}{2}N_1(t) + \frac{3}{4}N_2(t) \right\} * h(t) = 0 * h(t) = 0,$$

essendo  $E\{N_1(t)\} = E\{N_2(t)\} = 0$  in quanto processi bianchi, ed essendo gli operatori di valore atteso e di convoluzione entrambi lineari. Per quanto riguarda la varianza, sfruttiamo ancora le proprietà di linearità; definiamo  $N(t) = \frac{1}{2}N_1(t) + \frac{3}{4}N_2(t)$  e calcoliamo:

$$\begin{aligned} R_N(\tau) &= E\left\{ \frac{1}{4}N_1(t)N_1(t-\tau) + \frac{3}{8}N_1(t)N_2(t-\tau) + \frac{3}{8}N_2(t)N_1(t-\tau) + \frac{9}{16}N_2(t)N_2(t-\tau) \right\} = \\ &= E\left\{ \frac{1}{4}N_1(t)N_1(t-\tau) \right\} + E\left\{ \frac{3}{8}N_1(t)N_2(t-\tau) + \frac{3}{8}N_2(t)N_1(t-\tau) \right\} + E\left\{ \frac{9}{16}N_2(t)N_2(t-\tau) \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{N_0}{2} \delta(\tau) + \frac{9}{16} \frac{N_0}{2} \delta(\tau) = \frac{13}{32} N_0 \delta(\tau), \end{aligned}$$

essendo i due processi statisticamente indipendenti e a media nulla. Avremo quindi:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= R_Y(0) = \left[ R_N(\tau) * R_h(\tau) \right] \Big|_{\tau=0} = \frac{13}{32} N_0 R_h(0) = \frac{13}{32} N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = \\ &= \frac{13}{32} N_0 \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{N_0}{2} \frac{13}{32}, \end{aligned}$$

che è il risultato cercato. ■

**Esercizio 47** Sia data una coppia di processi gaussiani stazionari statisticamente indipendenti,  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$ , con media nulla e densità spettrale di potenza  $G_{X_1}(f) = G_{X_2}(f) = P_B(f)$ . Da essi viene ricavato un processo  $Y(t)$  come segue:

$$Y(t) = \left[ \frac{1}{2}X_1(t) + \frac{1}{3}X_2(t) \right] * h(t),$$

dove  $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = P_{B/2}(f)$ . Calcolare media e varianza di  $Y(t)$ .

*Soluzione*

L'esercizio è analogo al precedente. La media è nulla:

$$E\{Y(t)\} = E\left\{\frac{1}{2}X_1(t) + \frac{1}{3}X_2(t)\right\} * h(t) = 0 * h(t) = 0;$$

per la varianza procediamo ancora come prima, definendo  $X(t) = \frac{1}{2}X_1(t) + \frac{1}{3}X_2(t)$ :

$$R_X(\tau) = \frac{1}{4}R_{X_1}(\tau) + \frac{1}{9}R_{X_2}(\tau);$$

inoltre, essendo i due processi statisticamente indipendenti e a media nulla, si ha:

$$S_Y(f) = G_Y(f) = \frac{1}{4}G_{X_1}(f) + \frac{1}{9}G_{X_2}(f) = \frac{13}{36}P_B(f).$$

Quindi si ricava:

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} G_Y(f)df = \\ &= \frac{13}{36} \int_{-\infty}^{+\infty} P_B(f) |H(f)|^2 df = \frac{13}{36} \int_{-B/2}^{B/2} P_{B/2}(f)df = \frac{13}{72}B.\end{aligned}$$

■

**Esercizio 48** Un rumore gaussiano bianco, con densità spettrale di potenza pari a  $N_0/2$ , stazionario a media nulla  $N(t)$  è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso  $h_1(t)$ . Il processo  $Y(t)$  che si ottiene in uscita viene posto all'ingresso di un altro sistema LTI con risposta all'impulso  $h_2(t)$ , producendo in uscita il processo  $Z(t)$ .  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$  sono due segnali rettangolari di durata  $T$  e ampiezza unitaria, non nulli nell'intervallo  $[0, T]$ . Calcolare il valore atteso  $E\{Z(t)Y(t)\}$ .

*Soluzione*

Il valore atteso richiesto non è altro che la funzione di mutua correlazione dei due processi valutata in due istanti di tempo coincidenti. Nel caso generale, chiamando  $h(t) = h_1(t) = h_2(t)$ , si ha:

$$\begin{aligned}R_{ZY}(t_1, t_2) &= E\{Z(t_1)Y(t_2)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)Y(t_1 - \vartheta)d\vartheta Y(t_2)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)E\{Y(t_2)Y(t_1 - \vartheta)\}d\vartheta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)R_Y(t_1 - t_2 - \vartheta)d\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)R_Y(\tau - \vartheta)d\vartheta = R_Y(\tau) * h(\tau),\end{aligned}$$

avendo posto  $\tau = t_1 - t_2$ . A noi interessa tale risultato per  $t_1 = t_2 = t$ , cioè per  $\tau = 0$ . Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned}E\{Z(t)Y(t)\} &= R_{ZY}(t, t) = R_Y(0) * h(0) = \left(\frac{N_0}{2}\delta(t) * R_h(t) * h(t)\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \left(\frac{N_0}{2}R_h(t) * h(t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_h(t)h(-t)dt;\end{aligned}$$

ricordando che  $R_h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)h(\tau - t)d\tau = T \cdot \text{Tri}_{2T}(t)$ , si ottiene infine:

$$E\{Z(t)Y(t)\} = \int_{-T}^0 (t + T)dt = \frac{N_0}{2}T^2.$$

■

**Esercizio 49** Si consideri un processo casuale  $N(t)$  gaussiano bianco all'ingresso di un sistema LTI, la cui risposta all'impulso  $h(t)$  è nulla al di fuori dell'intervallo  $[0, T]$  e vale  $1 - t/T$  nell'intervallo  $[0, T]$ . L'uscita del sistema,  $Y(t)$ , viene campionata nei due istanti  $t_1$  e  $t_2$ . Le due variabili casuali che si ottengono vengono sommate producendo la variabile casuale  $Z = Y(t_1) + 2Y(t_2)$ . La varianza di  $Z$ :



- è minima se  $|t_1 - t_2| > T$ ;
- è minima se  $|t_1 - t_2| > T/2$ ;
- non dipende da  $t_1$  e  $t_2$ , perché  $Y(t)$  è un processo WSS;
- è minima se  $|t_1 - t_2| < T$ ;
- è minima se  $t_1 = t_2$ .

### Soluzione

La risposta all'impulso del sistema considerato è un segmento di retta che passa da 1 all'istante  $t = 0$  e da 0 all'istante  $t = T$ . Detto questo, ricordando che per i processi WSS filtrati si ha  $\mu_Y = \mu_n H(0)$ , e considerando che il processo  $N(t)$  è a media nulla, si ottiene  $\mu_Y = 0$ . Quindi si ha:

$$E\{Z\} = E\{Y(t_1)\} + 2E\{Y(t_2)\} = 0.$$

La varianza richiesta vale:

$$\sigma_Z^2 = E\{Z^2\} = E\{Y^2(t_1) + 4Y(t_1)Y(t_2) + 4Y^2(t_2)\} = R_Y(0) + 4R_Y(t_1 - t_2) + 4R_Y(0);$$

volendo trovare il minimo di  $\sigma_Z^2$ , basterà trovare il minimo del solo termine  $R_Y(t_1 - t_2)$ , essendo  $R_Y(0)$  una costante. Ponendo  $\tau = t_1 - t_2$  si ha:

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{2} R_h(\tau);$$

utilizzando la definizione di autocorrelazione per i processi determinati si ottiene infine:

$$R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)h(t - \tau)dt.$$

Dato che la funzione  $h(t)$  è sempre positiva, il minimo dell'autocorrelazione vale zero e lo si ottiene quando  $|\tau| \geq T$ ; quindi la varianza è minima per  $|t_1 - t_2| \geq T$ . ■

**Esercizio 50** Un rumore gaussiano bianco  $N(t)$  con  $S_N(f) = N_0/2$  è posto in ingresso ad un sistema LTI la cui risposta all'impulso è  $h(t) = \sin(\pi t/T)p_{3T}(t - 3T/2)$ , dove  $p_x(y)$  vale 1 per  $|y| < x/2$  e zero altrove. Sia  $Y(t)$  l'uscita del sistema LTI. Quanto vale il coefficiente di correlazione tra  $Y(t_1)$  e  $Y(t_2)$ , con  $t_1 = 5T$  e  $t_2 = 9T$ ?

### Soluzione

Come nell'esercizio precedente, utilizziamo la proprietà dei processi WSS filtrati per scrivere  $R_Y(\tau) = N_0/2 R_h(\tau)$ . L'esercizio ci richiede di calcolare  $R_Y(t_1, t_2)$ , che è pari a  $R_Y(\tau)$  con  $\tau = t_1 - t_2 = 4T$  essendo il processo stazionario in senso lato. Quindi si ha:

$$R_Y(4T) = \frac{N_0}{2} R_h(4T) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)h(t - 4T)dt = 0$$

avendo  $h(t)$  supporto lungo  $3T$ . ■

**Esercizio 51** Si considerino un processo casuale  $X(t)$  stazionario del primo ordine con densità di probabilità uniforme nell'intervallo  $[-1, 1]$ , e la variabile casuale

$$\eta = \int_0^2 X(\vartheta)d\vartheta.$$

Si indichi con  $f_\eta(y)$  la densità di probabilità di  $\eta$ . Descrivere il supporto di  $f_\eta$ .

### Soluzione

Il fatto che  $X(t)$  abbia densità di probabilità uniforme in  $[-1, 1]$  significa che tutte le sue realizzazioni sono comprese in una striscia orizzontale di ampiezza 2 centrata sull'asse dei tempi. Avremo quindi una realizzazione "massima" che darà  $\eta_M = \int_0^2 1d\vartheta = 2$  e una realizzazione "minima" che genererà invece  $\eta_m = \int_0^2 (-1)d\vartheta = -2$ . Senz'altro, l'integrale che definisce  $\eta$  non potrà mai essere maggiore di 2 o minore

di  $-2$ ; quindi  $f_\eta(y)$  è nulla per  $|y| > 2$ .

Si noti che non possiamo comunque dire niente riguardo alla densità di probabilità di  $\eta$  nell'intervallo  $[-2, 2]$ . ■

**Esercizio 52** Sia dato il processo  $X(t) = \xi Z(t)$ , dove  $Z(t)$  è un processo gaussiano, stazionario in senso stretto, ergodico, a media nulla e varianza unitaria, e  $\xi$  è una variabile casuale discreta che può assumere i valori  $-1$  ed  $1$  equiprobabilmente.  $Z(t)$  e  $\xi$  sono statisticamente indipendenti. Il processo  $X(t)$  è ergodico per media e valor quadratico medio?

*Soluzione*

Innanzitutto esplicitiamo la densità di probabilità di  $\xi$ :

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}\delta(x+1) + \frac{1}{2}\delta(x-1).$$

A questo punto, per verificare l'ergodicità di  $X(t)$ , dobbiamo vedere se valgono per ogni  $\sigma_0$  le seguenti condizioni:

$$E\{X(t)\} = \langle X(t; \sigma_0) \rangle \quad \text{e} \quad E\{X^2(t)\} = \langle X^2(t; \sigma_0) \rangle.$$

Procediamo quindi a calcolare ciascuno di questi termini.

$$E\{X(t)\} = E\{\xi Z(t)\} = E\{\xi\} E\{Z(t)\} = 0;$$

$$E\{X^2(t)\} = E\{\xi^2\} E\{Z^2(t)\} = 1 \cdot 1 = 1.$$

La media temporale vale:

$$\langle X(t; \sigma_0) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t; \sigma_0) dt;$$

consideriamo una precisa realizzazione  $X(t; \sigma_0) = aZ(t; \sigma_0)$ , dove  $a$  è una costante, un numero fissato che può valere  $1$  o  $-1$  ma che comunque è "scelto" e quindi non più casuale:

$$\langle X(t; \sigma_0) \rangle = a \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} Z(t; \sigma_0) dt = a \langle Z(t; \sigma_0) \rangle = a\mu_Z = 0$$

per ogni  $\sigma_0$ , essendo  $Z(t)$  ergodico. Quindi  $X(t)$  è ergodico per la media. Procediamo analogamente per la varianza:

$$\begin{aligned} \langle X^2(t; \sigma_0) \rangle &= \langle a^2 Z^2(t; \sigma_0) \rangle = a^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} Z^2(t; \sigma_0) dt = \\ &= a^2 \langle Z^2(t; \sigma_0) \rangle = a^2 \sigma_Z^2 = a^2 = 1 \end{aligned}$$

per ogni  $\sigma_0$ ; quindi  $X(t)$  è ergodico anche per il valor quadratico medio. ■

**Esercizio 54** Sia dato il processo  $X(t)$ , gaussiano, stazionario in senso stretto, ergodico, a media nulla e con autocorrelazione  $R_X(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau}$ . Tale processo viene posto in ingresso ad un sistema LTI con risposta all'impulso  $h(t) = e^{-t}u(t)$ . Sia  $Y(t)$  il processo in uscita dal sistema LTI. Calcolare lo spettro di potenza di  $Y(t)$ .

*Soluzione*

Dal momento che il processo  $X(t)$  è definito come ergodico, si ha  $G_X(f) = S_X(f)$ . Basta quindi ricordare le proprietà dei processi WSS filtrati:

$$G_Y(f) = G_X(f) |H(f)|^2 = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} \left| \frac{1}{1+j2\pi f} \right|^2 = p_1(f) \frac{1}{1+4\pi^2 f^2}.$$

■

**Esercizio 55** Sia dato il processo casuale  $X(t)$  gaussiano stazionario, con valore medio  $\mu_X = 1$ , varianza  $\sigma_X^2 = 1$ , e densità spettrale di potenza  $S_X(f) = K p_{2B}(f) + A \delta(f)$ , con  $K$  e  $A$  costanti reali strettamente positive. Trovare, se possibile, una relazione tra  $A$ ,  $B$ , e  $K$ .

*Soluzione*

L'unica cosa che conosciamo del processo  $X(t)$  che ci permetta di porre una relazione è il valor quadratico medio:

$$E \{X^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = \mu_X^2 + \sigma_X^2 = 2;$$

otteniamo quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = A + 2KB = 2.$$

■

**Esercizio 56** Si consideri un processo casuale  $X(t)$  del tipo

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n r(t - nT_b) + N(t),$$

dove le  $\alpha_n$  sono variabili casuali indipendenti che assumono con uguale probabilità i valori 1 e 0,  $r(t)$  è un impulso rettangolare causale di durata  $T_b$  e ampiezza unitaria e  $N(t)$  è un rumore gaussiano indipendente dalle  $\alpha_n$  con densità spettrale di potenza  $S_N(f)$  pari a  $N_0/2$  su una banda  $[-B, B]$  e zero altrove. Calcolare il valore quadratico medio di  $X(T_b/2)$ .

*Soluzione*

Si ha:

$$\begin{aligned} E \left\{ X^2 \left( \frac{T_b}{2} \right) \right\} &= E \left\{ \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n r \left[ T_b \left( \frac{1}{2} - n \right) \right] + N \left( \frac{T_b}{2} \right) \right)^2 \right\} = E \left\{ \left[ \alpha_0 r \left( \frac{T_b}{2} \right) + N \left( \frac{T_b}{2} \right) \right]^2 \right\} = \\ &= E \{ \alpha_0 \} + E \left\{ N^2 \left( \frac{T_b}{2} \right) \right\} + 2E \{ \alpha_0 \} E \left\{ N \left( \frac{T_b}{2} \right) \right\}; \end{aligned}$$

infatti,  $r \left[ T_b \left( \frac{1}{2} - n \right) \right]$  è diverso da zero solo per  $n = 0$ , quando assume valore unitario. Il valor quadratico medio di  $\alpha_n$  è pari a  $1/2$ ; rimane da calcolare il valor quadratico medio di  $N(T_b/2)$ : ricordando che

$$E \{Y^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df,$$

si ottiene:

$$E \left\{ N^2 \left( \frac{T_b}{2} \right) \right\} = \int_{-B}^{+B} \frac{N_0}{2} df = BN_0;$$

la media di  $N(T_b/2)$  è invece nulla. Si ha quindi:

$$E \left\{ X^2 \left( \frac{T_b}{2} \right) \right\} = \frac{1}{2} + N_0B.$$

■