

RELAZIONE ESAME Daniele Cecca MAT. 718588

DESCRIZIONE FORMALE DELLA MACCHINA DI TURING

Sia data la seguente macchina di Turing a 3 nastri M , $M = \{Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, q_f\}$ dove:

- $Q = \{q_0, \dots, q_{30}\}$
- $\Gamma = \{ (), 0, 1, 2, 3 = M \square \}$
- $\Sigma = \{ (), 0, 1, 2, 3 = M \}$
- $q_0 = q_0$
- $q_f = q_{25}$ and q_{28}

ALGORITMO

Data una stringa in input del tipo $M(A, B, C, D)$ sul nastro T_1 , dove A, B, C, D sono dei numeri binari effettuo le seguenti operazioni $|A-B| + |A-C| = D$, se effettivamente il risultato sarà uguale a D restituisco **1** altrimenti **2**.

Considero la prima porzione dell'operazione da effettuare : $|A-B|$

Scandisco la stringa in input su T_1 mediante gli stati q_0, q_1, q_2 e mi fermo sul secondo ',' che viene sostituito dal simbolo \square che funge da delimitatore.

Sempre mediante gli stati q_1, q_2 copio A e B in T_2 e T_3 .

A questo punto passo in q_3 dove effettua l'operazione modulo:

1. Se $|A| < |B|$ allora vado nello stato q_5 dove mi riporto all'inizio di B (quindi sul T_3) e in seguito passo nello stato q_7 dove effettuo lo scambio e mi riporto all'inizio di A e B
2. Se $|A| > |B|$ allora vado nello stato q_4 che mi riporta all'inizio di A e B
3. Se $|A| = |B|$ allora vado nello stato q_6 dove avrò i seguenti casi:
 - 1) $A > B$ rimango nello stato q_6 e confrontando bit a bit e alla fine mi riporto all'inizio di A e B
 - 2) $A < B$ se il bit confrontato di B è 1 e quello di A è 0 o viceversa vado in q_8 che mi riporta in q_7 dove avviene lo scambio

Dopo aver effettuato il modulo vado in q_{10} dove inizio l'operazione di sottrazione. Nel caso in cui la macchina si trovi in una situazione dove serve il riporto, tale situazione è gestita dallo stato q_{11} . Man mano che l'operazione di sottrazione viene svolta ripulisco il nastro T_3 mentre sul nastro T_2 sarà scritto il risultato.

Effettuata la sottrazione copio il risultato dopo il simbolo $=$ mediante gli stati q_9, q_{12} :

- lo stato **q9** permette di saltare tutti i simboli dell'input per poter arrivare alla cella dopo =
Inoltre, passando allo stato **q9** ritrasformo ',' in =
- lo stato **q12** permette effettivamente di scrivere il risultato e di ripulire **T2**

Arrivato a questo punto la prima parte dell'operazione **|A-B|** è stata effettuata e ritorno all'inizio di **T1** mediante **q13**.

Passo alla seconda parte dell'operazione **|A-C|**.

Scandisco la stringa in input su **T1** mediante gli stati **q14 q15 q2** e mi fermo sul terzo ',' che viene sostituito dal simbolo \square che funge da delimitatore.

Sempre mediante gli stati **q14 q2** copio **A** e **B** in **T2** e **T3**.

Da **q2** vado in **q3** e si ripete l'algoritmo precedente fino ad arrivare in **q12** in quanto non ci servirà questa volta salvare il risultato dopo =.

Anche la seconda parte **|A-C|** è stata terminata.

Ora eseguo la seguente operazione **|A-B|+|A-C|**

Da **q12** vado in **q17** che mi permette di spostarmi all'inizio di **A** in **T2**

Poi da **q17** vado in **q18**, che mi permette di ricopiarmi il risultato **|A-B|** salvato precedentemente su **T1** in **T3**

Vado in **q19** che permette di posizionarmi prima dell' = e poi vado da **q19** in **q3'**.

Da **q3'** inizio la somma, nel caso in cui si verifichi una situazione dove bisogna effettuare il riporto, tale situazione è gestita da **q4'**. Man man che viene effettuata la somma su **T1**, **T3** viene ripulito.

Terminata questa terza parte **|A-B|+|A-C|** passo al confronto finale ossia **|A-B|+|A-C|=D**

Da **q31** passo a **q29** che elimina gli 0 iniziali sul risultato precedente (es 0001=1, 000=0).

In seguito passo in **q30** poi in **q20** e da **q20** in **q21**, tali stati servono per spostarmi dall'inizio di **D**

In **q21** confronto bit a bit **D** in **T1** con il risultato in **T2** e avrò i seguenti casi:

1. Se $D = \text{risultato}$ vado in **q24** che mi porta al simbolo = e poi in **q25** restituisco **1**
2. Se $D \neq \text{risultato}$ vado in **q26** che mi porta al simbolo = e poi vado in **q28** restituisco **2**

COMPLESSITÀ

Considerando il caso ipotetico dove $|A|=|B|$ ma $B > A$ e $|A|=|C|$ ma $C > A$ e $|D| = |C|$. Per facilitare i conti considero la stringa in input di lunghezza n composta dai solo numeri **A B C D**

Per la prima parte dell'operazione **|A-B|** avrò la seguente complessità:

Per copiare **A** e **B** su **T2** e **T3** la macchina impiegherà una complessità pari a $\frac{n}{2}$ passi mentre per effettuare l'operazione di modulo quindi l'operazione di confronto e di scambio impiega $\frac{n}{2}$ passi

Per effettuare l'operazione di sottrazione impiegherà $\frac{n}{4}$ passi, mentre per poi spostarsi alla fine della stringa in input e copiare il risultato impiegherà $\frac{3n}{4}$ passi .

Quindi avrà complessità per la prima parte dell'operazione **$O(n)$**

Per la seconda parte dell'operazione **$|A-C|$** il risultato sarà molto simile quindi avrò complessità **$O(n)$**

Anche per la terza **$|A-B|+|A-C|$** e quarta parte **$|A-B|+|A-C| = D$** dell'operazione il risultato sarà molto simile quindi avremo che la complessità totale sarà

$$O(n) + O(n) + O(n) + O(n) = O(4n) = O(n)$$

Poiché stiamo lavorando su una macchina di Turing multi-nastro la complessità su una macchina di Turing a singolo nastro equivalente sarebbe **$O(n^2)$** .