Trasformata T

$\mathcal{T}\{\cdot\}$ è una trasformata che rende una funzione sinusoidale $\cos(\omega t + \varphi)$ una funzione dipendente esclusivamente dal suo periodo T (quindi anche dalla sua pulsazione angolare ω) $\tau(T)$ (con $\tau(T) : \mathbb{R}^+ \cup \{e, \infty\} \to \mathbb{T}$ con $\mathbb{T}$ insieme non noto e irrilevante ed e elemento neutro del lcm) tale che:

$$\mathcal{T}\{A\cos(\omega t + \varphi)\} = \tau\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \tau(T) \qquad \forall\ (A, \omega, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

$\tau(T)$ è una funzione non nota (ed è irrilevante conoscerla) che ha come definizione

$$\tau(T_1) + \tau(T_2) = \tau\left(\operatorname{lcm}\left(T_1, T_2\right)\right)$$

È possibile esclusivamente sommare valori tra loro in $\mathbb{T}$ [operazione chiusa] (e, di conseguenza, moltiplicare per scalari interi positivi).

Non ha alcun senso moltiplicare uno scalare $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
Nella stessa maniera non ha alcun senso moltiplicare elementi di $\mathbb{T}$ tra loro o con elementi di altri insiemi.

$\mathcal{T}$ gode di linearità sul semianello $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ per la definizione stessa di $\tau(T)$.

Si può estendere il concetto direttamente su una funzione periodica f qualsiasi con periodo T.

$$\mathcal{T}\{f(t)\} = \tau(T) \iff f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{D}_f$$

Per definizione $\mathcal{T}\{k\} \triangleq \tau(e)$ con $e \notin \mathbb{R}$ elemento neutro del lcm che consente a $\mathcal{T}$ di essere un operatore lineare. *(Si veda in seguito la sua trattazione)*

Si ricorda al lettore che l'argomento di $\mathcal{T}$ deve essere una funzione periodica. Se così non fosse per definizione $\mathcal{T}\{f_a\} = \tau(\infty)$ con f_a funzione aperiodica.

Proprietà di $\mathcal{T}$

1. *Linearità*

$$\mathcal{T}\{f+g\} = \mathcal{T}\{f\} + \mathcal{T}\{g\}$$
$$\mathcal{T}\{nf\} = n\mathcal{T}\{f\}$$

Dim. (1)

Poiché la somma di 2 funzioni periodiche con periodo T_1 e T_2 ha come periodo $\text{lcm}(T_1, T_2)$

$$\mathcal{T}\{f_1 + f_2\} = \tau(\text{lcm}(T_1, T_2)) = \tau(T_1) + \tau(T_2) = \mathcal{T}\{f_1\} + \mathcal{T}\{f_2\}$$

Per la definizione stessa di $\tau(T)$.

Dim. (2)

Poiché la somma di n funzioni periodiche con stesso periodo T ha come periodo $\text{lcm}(T_1, T_2, \ldots, T_n) = T$

$$\mathcal{T}\{nf\} = \tau(\text{lcm}(T_1, T_2, \ldots T_n)) = \tau(T_1) + \tau(T_2) + \cdots + \tau(T_n) =$$
$$= \tau(T) + \tau(T) + \cdots + \tau(T) = n\tau(T) = n\mathcal{T}\{f\}$$

2. *Neutralità della replicazione (prodotto con numeri naturali)*

$$\mathcal{T}\{nf\} = \mathcal{T}\{f\}$$

Sfruttando la linearità di $\mathcal{T}$ sappiamo che $\mathcal{T}\{nf\} = n\mathcal{T}\{f\}$ ma sappiamo anche che $\mathcal{T}\{nf\} = \tau(\text{lcm}(T_1, T_2, \ldots T_n)) = \tau(T) = \mathcal{T}\{f\}$ con $T_i = T_j \;\; \forall\, {}^{i}_{j} \in \{1 \ldots n\}$

3. *Indipendenza dalla fase*

$$\mathcal{T}\{A\cos(\omega t + \varphi)\} = \mathcal{T}\{A\cos(\omega t)\} = \tau(T)$$

4. *Indipendenza dal tipo di funzione sinusoidale*

$$\mathcal{T}\{A\sin(\omega t + \varphi)\} = \mathcal{T}\left\{A\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \tau(T)$$

5. *Indipendenza dal segno*

$$\mathcal{T}\{-A\cos(\omega t+\varphi)\} = \mathcal{T}\{A\cos(\omega t+\varphi+\pi)\} = \tau(T)$$
$$\mathcal{T}\{-A\sin(\omega t+\varphi)\} = \mathcal{T}\{A\sin(\omega t+\varphi+\pi)\} = \tau(T)$$

6. *Indipendenza dal modulo*

$$\mathcal{T}\{A\cos(\omega t+\varphi)\} = \mathcal{T}\{\cos(\omega t+\varphi)\} = \tau(T)$$

7. *Indipendenza da offset costante*

$$\mathcal{T}\{A\cos(\omega t+\varphi)+k\} = \mathcal{T}\{A\cos(\omega t+\varphi)\} + \mathcal{T}\{k\} = \tau(T)+\tau(e) = \tau(T)$$

8. *Derivazione*

$$\mathcal{T}\{f(t)\} = \mathcal{T}\left\{\frac{d^{(i)}}{d^{(i)}t}f(t)\right\} \quad \forall\, i>0$$

Dovuto alla proprietà delle funzioni periodiche
$f(t+T)=f(t) \Rightarrow f'(t+T)=f'(t)$

Osservazioni

- Il periodo risultante della somma T_s è sempre maggiore o uguale dei periodi delle funzioni sinusoidali singole.

$$T_s = \operatorname{lcm}(T_1 \dots T_n) \geq T_i \quad \forall\, i \in \{1 \dots n\}$$

- Modulo, fase iniziale, segno e tipo di funzione non sono rilevanti nel calcolo del periodo della somma di funzioni periodiche.

Proprietà di $\tau(T)$

1. *Idempotenza rispetto alla replicazione*

$$n\tau(x) = \tau(x)$$

2. *Elemento neutro della somma*

$$\tau(x) + \tau(e) = \tau(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \cup \{e, \infty\}$$

3. *Assorbimento*

$$\tau(x) + \tau(nx) = \tau(nx)$$

4. *Commutatività*

$$\tau(x_1) + \tau(x_2) = \tau(\text{lcm}(x_1, x_2)) = \tau(\text{lcm}(x_2, x_1)) = \tau(x_2) + \tau(x_1)$$

5. *Associatività*

$$\tau(a) + [\tau(b) + \tau(c)] = \tau(a) + \tau(\text{lcm}(b, c)) = \tau(\text{lcm}(a, \text{lcm}(b, c))) =$$
$$= \tau(\text{lcm}(a, b, c)) = \tau(\text{lcm}(\text{lcm}(a, b), c)) = \tau(\text{lcm}(a, b)) + \tau(c) =$$
$$= [\tau(a) + \tau(b)] + \tau(c)$$

6. *Elemento assorbente della somma*

$$\tau(x) + \tau(\infty) = \tau(\infty) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{e, \infty\}$$

Proprietà di $\mathbb{T}$

1. $\mathbb{T}$ è un insieme definibile come

$$\mathbb{T} = \{\tau(T) : T \in \mathbb{R}^+ \cup \{e, \infty\}\}$$

2. $(\mathbb{T}, +)$ è un **monoide commutativo** con elemento neutro $\tau(e)$ ed elemento assorbente $\tau(\infty)$

Esempi

1. $$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\mathcal{T}\{\cos^2(x)\} = \mathcal{T}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{T}\left\{\frac{1}{2}\cos(2x)\right\} = \tau(e) + \tau(\pi) = \tau(\pi) \Rightarrow T = \pi$$

2. $$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\mathcal{T}\{\sin^2(x)\} = \mathcal{T}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{T}\left\{-\frac{1}{2}\cos(2x)\right\} = \tau(e) + \tau(\pi) = \tau(\pi) \Rightarrow T = \pi$$

3. $\mathcal{T}\{\cos^2(x) + \sin^2(x)\} = \mathcal{T}\{\cos^2(x)\} + \mathcal{T}\{\sin^2(x)\} = \tau(\pi) + \tau(\pi) = \tau(\pi)$

$$\mathcal{T}\{\cos^2(x) + \sin^2(x)\} = \mathcal{T}\{1\} = \tau(e) \neq \tau(\pi)$$

Non è un errore in quanto $\tau(e)$ si applica nel caso di funzioni costanti che non hanno un periodo definito. Il problema sorge quando si fanno altre somme.
Se ignoriamo l'identità goniometrica ci ritroveremo con $\tau(\pi)$ che sommato a $\tau(T)$ avrà come risultato $\tau(\mathrm{lcm}(\pi, T)) \geq \tau(T) = \tau(\mathrm{lcm}(e, T))$ trovando un periodo falsato (ancora valido ma non minimo) della funzione di cui calcoliamo la $\mathcal{T}$ trasformata.