Dimostrazione antitrasformata coppia di poli complessi e coniugati

Data come antitrasformata di una coppia di poli complessi e coniugati la seguente funzione $f(t)$

$$(1) \quad f(t) = e^{\sigma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

Possiamo affermare e dimostrare che essa è uguale a

$$(2) \quad f_2(t) = Re^{\sigma t}\cos(\omega t - \varphi)$$

Per semplicità dimostriamo che

$$\frac{f(t)}{e^{\sigma t}} = g(t) = g_2(t) = \frac{f_2(t)}{e^{\sigma t}}$$

Procediamo a ritroso partendo dall'equazione **(2)**.

Utilizziamo la regola di riscrittura per somma algebrica degli angoli nel coseno.

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

Sappiamo che

$$g(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = R\cos(\varphi)\cos(\omega t) + R\sin(\varphi)\sin(\omega t) = g_2(t)$$

quindi

$$\begin{cases} R\cos(\varphi) = A \\ R\sin(\varphi) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\varphi = \frac{B}{A} \\ R^2 = A^2 + B^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \\ R = \sqrt{A^2 + B^2} \end{cases}$$

$$Re^{\sigma t}\cos(\omega t - \varphi) = \sqrt{A^2 + B^2}\, e^{\sigma t}\cos\left(\omega t - \arctan\frac{B}{A}\right)$$

Nel caso specifico dell'antitrasformata di numeri complessi coniugati abbiamo che

$$e^{\sigma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = 2e^{\sigma t}(u\cos\omega t - v\sin\omega t)$$

Cioè $A = 2u$ e $B = -2v$ con u e v che indicano la parte reale $\mathrm{Re}(z)$ e immaginaria $Im(z)$ del numero complesso z.

Concludiamo, dunque, che

$$2e^{\sigma t}(u\cos\omega t - v\sin\omega t) = 2\sqrt{u^2+v^2}\,e^{\sigma t}\cos\left(\omega t + \arctan\frac{v}{u}\right)$$

Riconosciamo che $\sqrt{u^2+v^2} = |z|$ e $\arctan\frac{v}{u} = \theta_z$ con $|z|$ e θ_z modulo e fase del numero complesso.

$$f(t) = 2\,|z|\,e^{\sigma t}\cos\left(\omega t + \theta_z\right)$$

A questo punto possiamo dimostrare che la scelta di ω (quale parte immaginaria prendere tra quella positiva e quella negativa) non varia l'espressione di $f(t)$.
Se z è coefficiente di $\sigma + \omega j$ e sappiamo che $\bar{z}$ deve essere coefficiente per $\sigma - \omega j$ possiamo verificarne la veridicità tramite le due proprietà $cos(-x) = cos(x)$ e $|\bar{z}| = |z|$.

$$f_{\sigma+\omega j}(t) = 2\,|z|\,e^{\sigma t}\cos\left(\omega t + \theta\right) = f_{\sigma-\omega j}(t) = 2\,|\bar{z}|\,e^{\sigma t}\cos\left(-\omega t - \theta\right)$$