

## DIAGRAMMI DI BODE

Abbiamo visto che la funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  di un sistema lineare tempoinvariante con funzione di trasferimento razionale fratta  $G(s)$  è legata a quest'ultima dalla relazione:

$$F(\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega).$$

I diagrammi di Bode di un sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  razionale fratta rappresentano graficamente il modulo e la fase della funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$ , che è una funzione a valori complessi della pulsazione  $\omega$ :

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg(G(j\omega))}$$

L'analisi in frequenza di un sistema, ed in particolare l'analisi per mezzo dei diagrammi di Bode di un sistema, si effettua ponendo la sua funzione di trasferimento  $G(s)$ , e conseguentemente la funzione di risposta armonica associata, in forma delle costanti di tempo.

Supponendo che la funzione di trasferimento  $G(s)$  da analizzare presenti  $\mu$  poli nell'origine,  $v$  poli reali e  $w$  coppie di poli complessi coniugati, con  $p$  zeri reali e  $q$  coppie di zeri complessi coniugati, essa si può scrivere nella forma in costanti di tempo come segue:

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q \left( \frac{s^2}{\omega_{nh}^2} + \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} s + 1 \right)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w \left( \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} + \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} s + 1 \right)}.$$

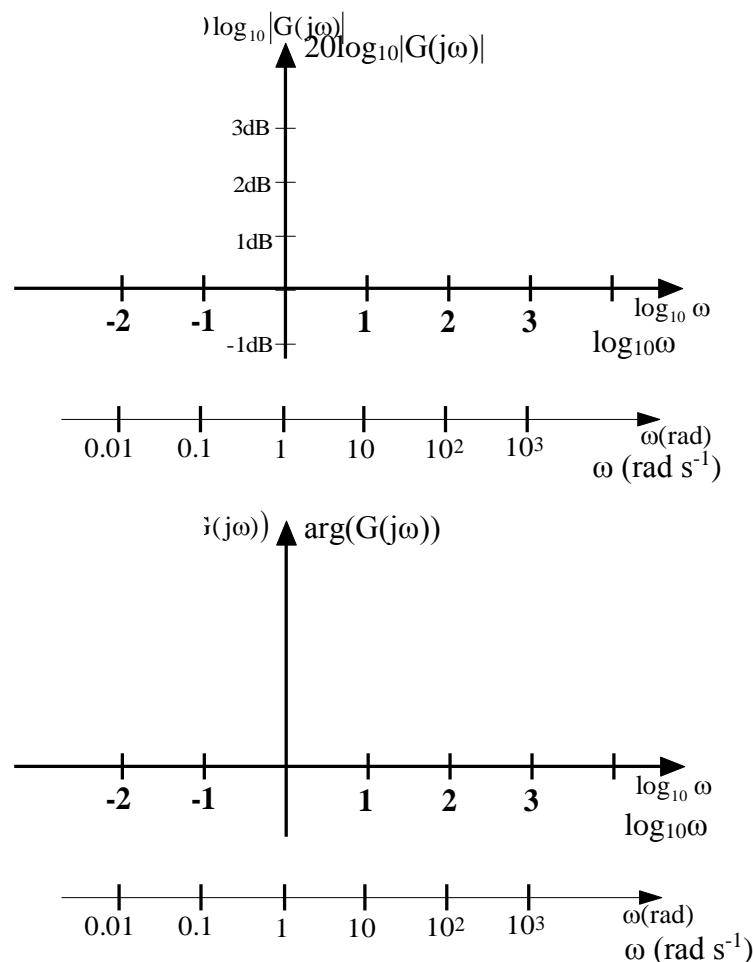
La generica funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$  è dunque nella forma:

$$G(j\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + jT_j \omega) \prod_{h=1}^q \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right)}{(j\omega)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + jT_i \omega) \prod_{k=1}^w \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right)}.$$

Come anticipato, i diagrammi di Bode si costruiscono rappresentando in due grafici differenti in funzione della pulsazione  $\omega$  rispettivamente il modulo e l'argomento della funzione di risposta armonica, con le seguenti convenzioni.

In entrambi i diagrammi di Bode (delle ampiezze e delle fasi) sull'asse delle ascisse non viene direttamente riportata la pulsazione  $\omega$ , bensì la quantità  $\log_{10}\omega$ . In questo modo l'asse delle ascisse viene suddiviso in decadi: gli estremi di una decade sono due valori di pulsazione di cui quello finale è pari a 10 volte quello iniziale. Si osserva che, nonostante la scala usata per le ascisse sia quella logaritmica, i valori numerici riportati sono quelli effettivi della pulsazione  $\omega$  espressa in radianti, in modo da facilitare la lettura del diagramma.

Per quanto riguarda l'asse delle ordinate, nel diagramma dei moduli non viene riportato direttamente il modulo  $|G(j\omega)|$ , bensì la quantità  $20\log_{10}|G(j\omega)|$ , ossia il modulo di  $G(j\omega)$  espresso in dB (decibel). Nel diagramma delle fasi viene riportata direttamente la fase  $\arg(G(j\omega))$  espressa in gradi o radianti.



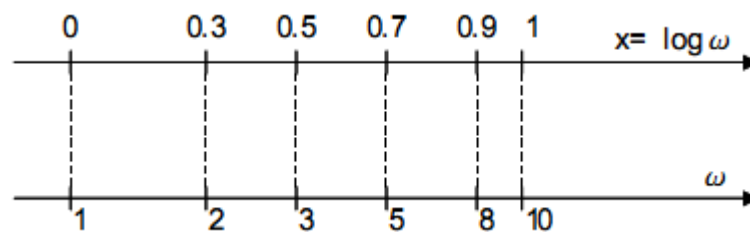
Per il disegno qualitativo dei diagrammi conviene memorizzare alcuni valori:

$$\log_{10} 2 \approx 0.3$$

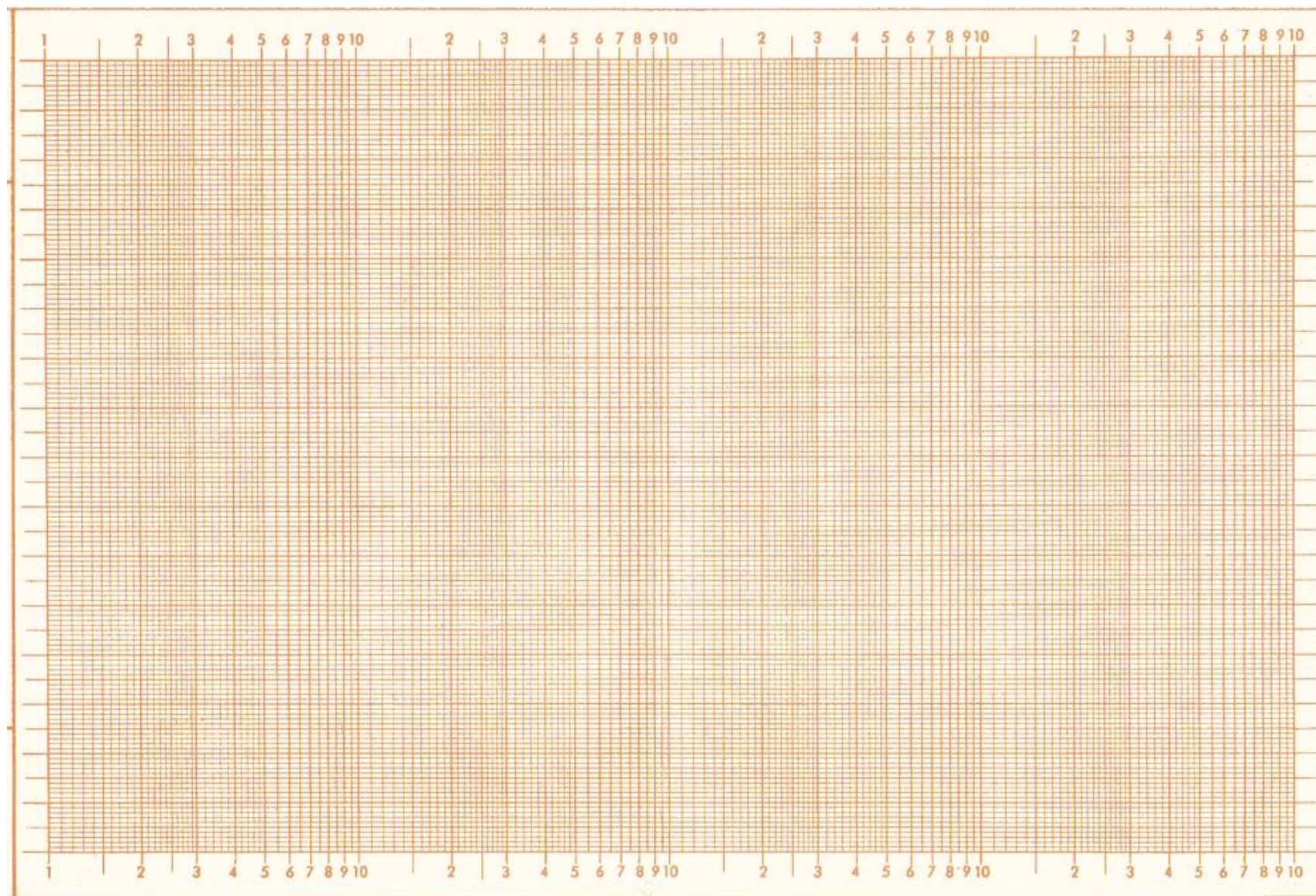
Quindi la pulsazione  $2 \text{ rad s}^{-1}$  si troverà in scala logaritmica ad un terzo nel segmento della prima decade  $1\text{-}10 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$\log_{10} 5 \approx 0.7$$

Quindi la pulsazione  $5 \text{ rad s}^{-1}$  si troverà in scala logaritmica a due terzi nel segmento della prima decade  $1\text{-}10 \text{ rad s}^{-1}$ .



Nella pagina seguente vediamo un esempio di carta millimetrata semilogaritmica.



Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.



Per quanto riguarda la rappresentazione in decibel dei diagrammi di Bode delle ampiezze, osserviamo poi che il decibel è l'unità logaritmica convenzionale che normalmente si impiega per esprimere quantità positive, tipicamente il guadagno di amplificatori. Si ha:

$$A_{\text{db}} = 20 \log_{10} A$$

Alcune conversioni di uso frequente sono le seguenti:

Le decadi		$A > 1$	
⋮	⋮	$\sqrt{2}$	3 db
10000	80 db	2	6 db
1000	60 db	5	14 db
100	40 db	20	26 db
10	20 db	50	34 db
1	0 db	$A < 1$	
0.1	-20 db	$1/\sqrt{2}$	-3 db
0.01	-40 db	$1/2$	-6 db
0.001	-60 db	$1/5$	-14 db
0.0001	-80 db	$1/20$	-26 db
⋮	⋮	$1/50$	-34 db

Inoltre, poiché il decibel è una unità logaritmica, un raddoppio (dimezzamento) del modulo effettivo corrisponde a un aumento di 6 dB (riduzione di - 6dB) di quello asintotico, mentre una moltiplicazione per 10 (divisione per 10) corrisponde a un aumento di 20 dB (riduzione di -20 dB) di quello asintotico.

Ancora, è possibile utilizzare valori notevoli in dB per determinare il valore di in decibel di altri elementi. Ad esempio:

$$|4|_{\text{dB}} = |2 \cdot 2|_{\text{dB}} = |2|_{\text{dB}} + |2|_{\text{dB}} = 6\text{dB} + 6\text{dB} = 12\text{dB}$$

$$|25|_{\text{dB}} = |100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|_{\text{dB}} = |100|_{\text{dB}} - |2|_{\text{dB}} - |2|_{\text{dB}} = 40\text{dB} - 6\text{dB} - 6\text{dB} = 28\text{dB}$$

Osserviamo che, nel caso di diagrammi di Bode delle ampiezze, un diagramma (o una parte di diagramma) rappresentato da una curva disposta al di sopra dell'asse delle ascisse (o asse a 0 dB) corrisponde a un diagramma in cui  $20\log_{10}|G(j\omega)| > 0$ , ovvero  $|G(j\omega)| > 1$  e quindi ad un intervallo di pulsazioni in cui il sistema amplifica a regime l'ampiezza dei segnali in ingresso: per il teorema della funzione di risposta armonica, infatti, la risposta in regime sinusoidale ad un segnale periodico di ampiezza  $X$  nell'intervallo in questione ha una ampiezza data dall'ampiezza  $X$  di tale segnale periodico moltiplicata per il valore del modulo  $|G(j\omega)|$  ed è dunque maggiore di  $X$ .

Ragionando analogamente si deduce che un diagramma (o una parte di diagramma) di Bode delle ampiezze rappresentato da una curva disposta al di sotto dell'asse a 0 dB corrisponde ad un diagramma in cui sia  $20\log_{10}|G(j\omega)| < 0$ , ovvero  $|G(j\omega)| < 1$  e quindi ad un intervallo di pulsazioni in cui il sistema attenua i segnali in ingresso.

Inoltre osserviamo che, nel caso di diagrammi di Bode delle fasi, un diagramma (o una parte di diagramma) rappresentato da una curva disposta al di sopra dell'asse delle ascisse (o asse a 0 rad) corrisponde ad un diagramma in cui sia  $\arg(G(j\omega)) > 0$  e quindi ad un intervallo di pulsazioni in cui il sistema sfasa con un anticipo di fase a regime la fase dei segnali in ingresso: per il teorema della funzione di risposta armonica, infatti, la risposta in regime sinusoidale ad un segnale periodico di ampiezza  $X$  nell'intervallo in questione ha una fase pari alla fase iniziale  $\varphi_0$  di tale segnale periodico sommata al valore della fase  $\arg(G(j\omega))$  ed è dunque maggiore di  $\varphi_0$ .

Ragionando analogamente si deduce che un diagramma (o una parte di diagramma) di Bode delle fasi rappresentato da una curva disposta al di sotto dell'asse a 0 rad corrisponde ad un diagramma in cui sia  $\arg(G(j\omega)) < 0$  e quindi ad un intervallo di pulsazioni in cui il sistema fornisce un ritardo di fase ai segnali in ingresso.

I vantaggi che si ottengono utilizzando la scala semilogaritmica sono i seguenti.

In primo luogo è possibile rappresentare in dettaglio grandezze che variano rispetto a intervalli di pulsazione  $\omega$  ampi: infatti generalmente il modulo della funzione di risposta armonica, all'aumentare della pulsazione, tende a diminuire (sistemi passabasso).

In secondo luogo è possibile considerare una funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$  come la cascata di diversi sistemi elementari, cioè come il prodotto delle funzioni di risposta armonica dei singoli sistemi.

Conseguentemente, il diagramma di Bode dei moduli di una qualsiasi funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$  si ottiene eseguendo il prodotto delle ampiezze, ovvero calcolando la somma dei moduli dei contributi elementari espressi in valori logaritmici (ovvero in dB):

$$|G(j\omega)| = K \frac{\prod_{j=1}^p |1 + jT_j\omega| \prod_{h=1}^q \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right|}{|j\omega|^\mu \prod_{i=1}^v |1 + jT_i\omega| \prod_{k=1}^w \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right|} \Rightarrow$$

$$20\log_{10} |G(j\omega)| = 20\log_{10} |K| + \sum_{j=1}^p 20\log_{10} |1 + jT_j\omega| + \sum_{h=1}^q 20\log_{10} \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right|$$

$$- 20\log_{10} |j\omega|^\mu - \sum_{i=1}^v 20\log_{10} |1 + jT_i\omega| - \sum_{k=1}^w 20\log_{10} \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right|.$$

Pertanto si ha:

$$|G(j\omega)|_{dB} = |K|_{dB} + \sum_{j=1}^p |1 + jT_j\omega|_{dB} + \sum_{h=1}^q \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right|_{dB} +$$

$$- |j\omega|^\mu_{dB} - \sum_{i=1}^v |1 + jT_i\omega|_{dB} - \sum_{k=1}^w \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right|_{dB}$$

Analogamente, il diagramma di Bode delle fasi di una qualsiasi funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$  si ottiene eseguendo la somma delle fasi dei contributi elementari:

$$\angle G(j\omega) = \angle(K) + \sum_{j=1}^p \angle(1 + jT_j\omega) + \sum_{h=1}^q \angle \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right) +$$

$$- \angle(j\omega^\mu) - \sum_{i=1}^v \angle(1 + jT_i\omega) - \sum_{k=1}^w \angle \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right)$$

In definitiva, i diagrammi di Bode di un qualsiasi sistema lineare tempoinvariante si ottengono sommando i contributi elementari che compongono la funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$ :

$$G(j\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + jT_j\omega) \prod_{h=1}^q \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right)}{(j\omega)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + jT_i\omega) \prod_{k=1}^w \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right)}.$$

Nella precedente espressione della generica funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$  si individuano in definitiva i seguenti contributi elementari:

$$\begin{aligned} & K \\ & (j\omega)^{-\mu} \\ & (1 + j\omega T)^{\pm 1} \\ & \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^{\pm 1} \end{aligned}.$$

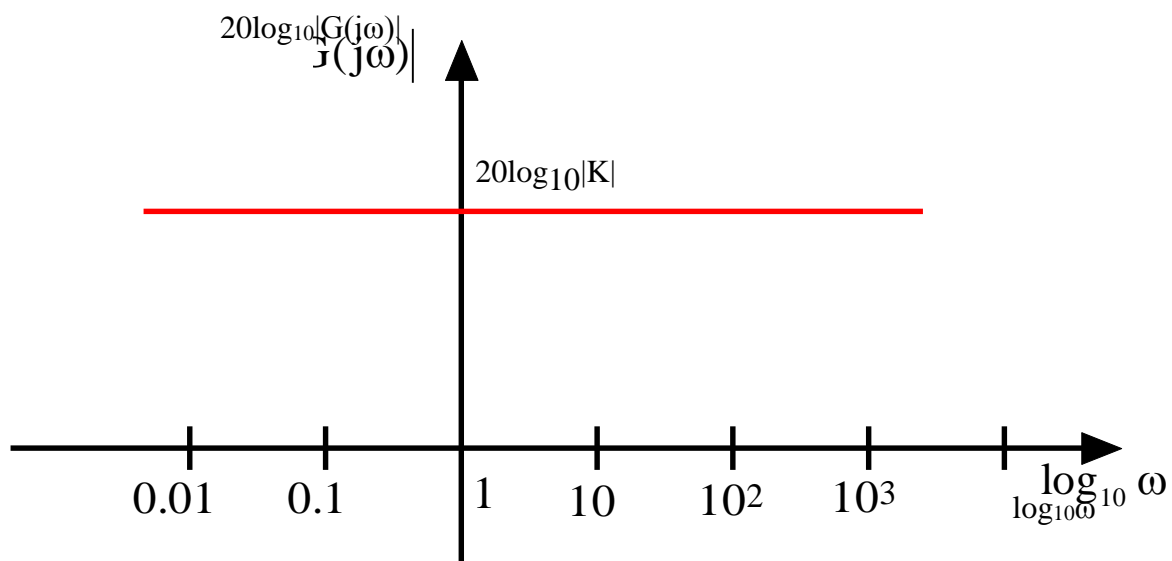
Nel seguito prendiamo in esame i diagrammi di Bode di tali contributi elementari, che vengono poi opportunamente sommati per la costruzione del diagramma di Bode di un sistema qualsiasi.



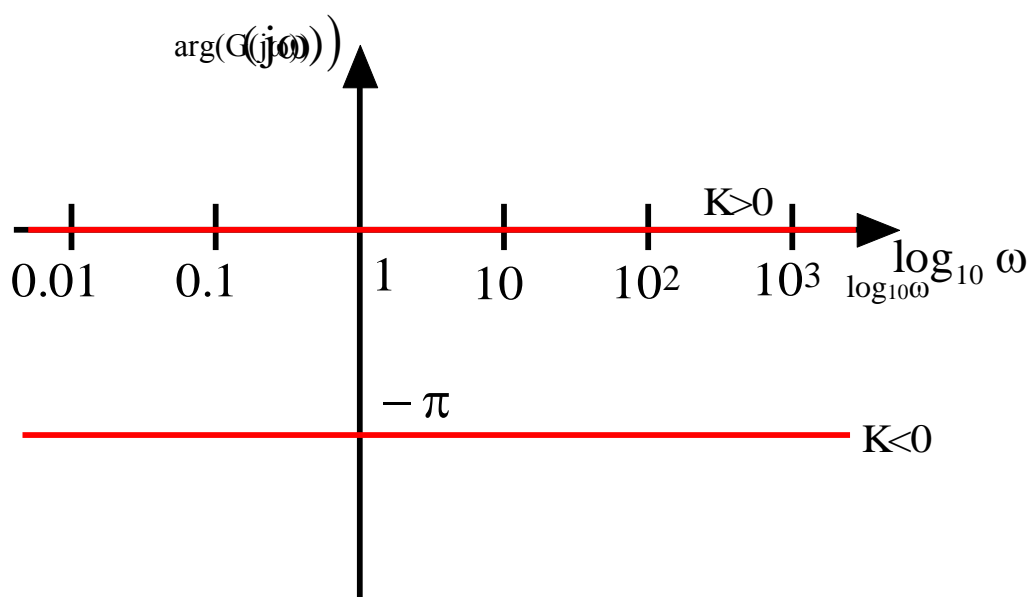
## SISTEMA ELEMENTARE $G(j\omega)=K$ (COSTANTE DI GUADAGNO)

La prima funzione elementare è  $G(j\omega) = K$ .

Questa funzione ha modulo pari a  $|K|$  indipendente da  $\omega$ , quindi il diagramma dei moduli è una retta orizzontale corrispondente al valore  $|G(j\omega)| = 20\log_{10}|K|$ . Pertanto tale retta è disposta al di sopra (sotto) dell'asse delle ascisse se  $|K|>1$  ovvero il guadagno è un'amplificazione ( $|K|<1$  ovvero il guadagno è un'attenuazione), mentre coincide con la retta a 0 dB nei casi  $K=\pm 1$ .



Inoltre la fase del sistema dipende dal segno di  $K$ : se  $K$  è positivo la fase è 0, mentre se  $K$  è negativo la fase è  $-\pi$ .



## ESEMPIO

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento

$$G(s) = -0.1.$$

Si ha:

$$G(j\omega) = -0.1$$

La funzione di risposta armonica è costituita dalla funzione elementare guadagno.

Vediamo il diagramma di Bode dei moduli. Il modulo della funzione vale:

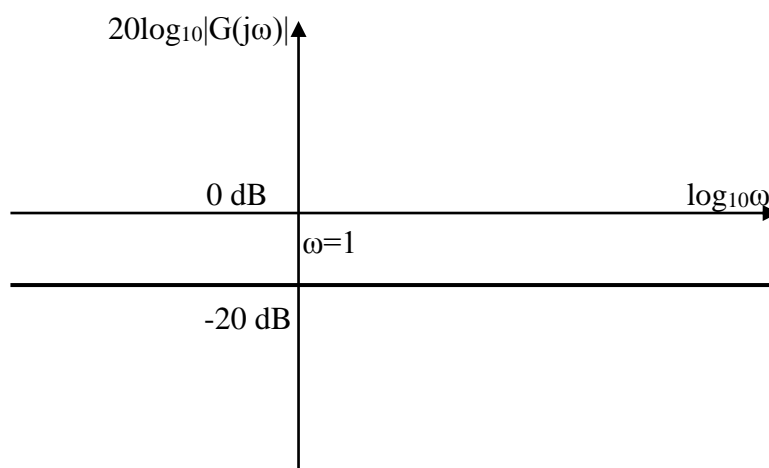
$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}|-0.1| = 20\log_{10}10^{-1} = -20\text{dB}$$

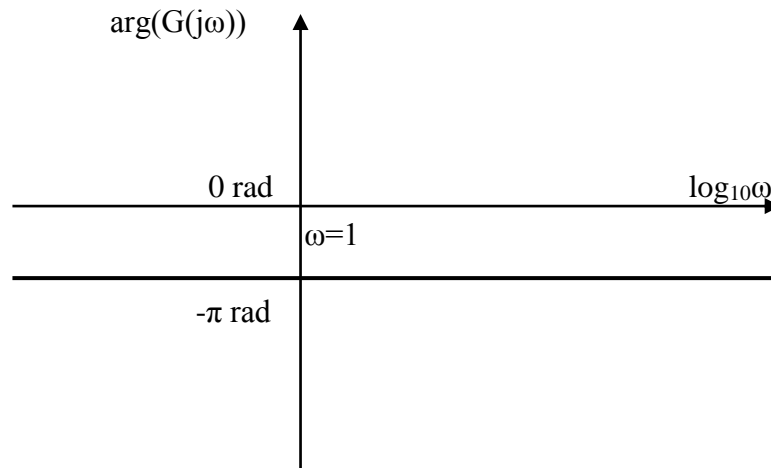
quindi il diagramma dei moduli è la retta orizzontale di valore -20dB a tutte le pulsazioni (il sistema attenua a tutte le pulsazioni).

Vediamo ora il diagramma di Bode delle fasi. L'argomento della funzione vale:

$$\arg G(j\omega) = \arg(-0.1) = -\pi$$

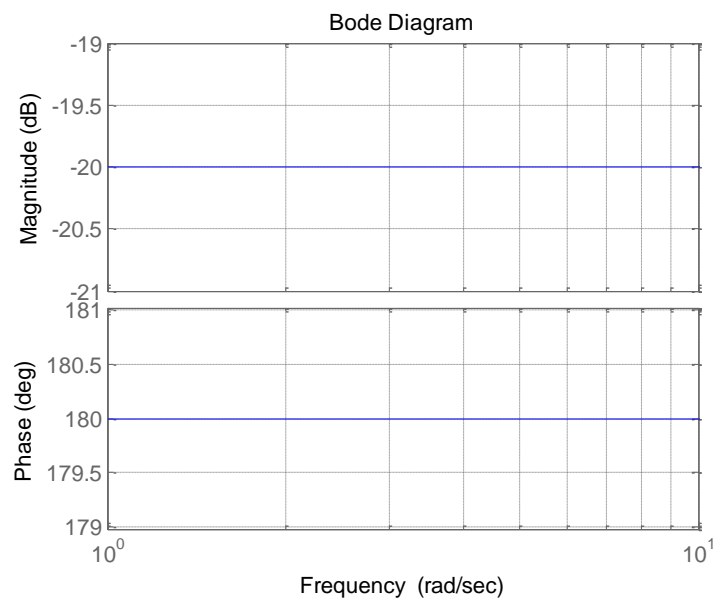
quindi il diagramma delle fasi è la retta orizzontale di valore  $-\pi$  a tutte le pulsazioni (il sistema ritarda la fase a tutte le pulsazioni).





Nelle figure precedenti sono rappresentati i diagrammi di Bode del sistema.

Nella figura seguente, inoltre, sono rappresentati i diagrammi di Bode del sistema ottenuti in ambiente Matlab. Si osservi che il diagramma di Bode delle fasi rappresentato è una retta di valore costante  $+180^\circ$ , che naturalmente corrisponde ad una fase di  $\pm\pi$  rad.



## SISTEMA ELEMENTARE $G(j\omega)=(j\omega)^{-\mu}$ (UNO O PIÙ POLI NELL'ORIGINE)

La seconda funzione elementare è  $G(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^{\mu}}$ , corrispondente a uno o più poli nulli nella funzione di trasferimento del sistema.

Il modulo di questa funzione vale:

$$|G(j\omega)| = |(j\omega)^{-\mu}| = \omega^{-\mu} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega^{-\mu} = -20\mu \log_{10} \omega.$$

Poiché in ascissa viene riportata la quantità  $\log_{10}\omega$ , il modulo è rappresentato da una retta passante per l'origine e di pendenza  $-20\mu$  dB/decade dipendente dal valore di  $\mu$ .

In particolare, per un sistema con un unico polo nell'origine ( $\mu=1$ ) si ha

$$G(j\omega) = (j\omega)^{-1}.$$

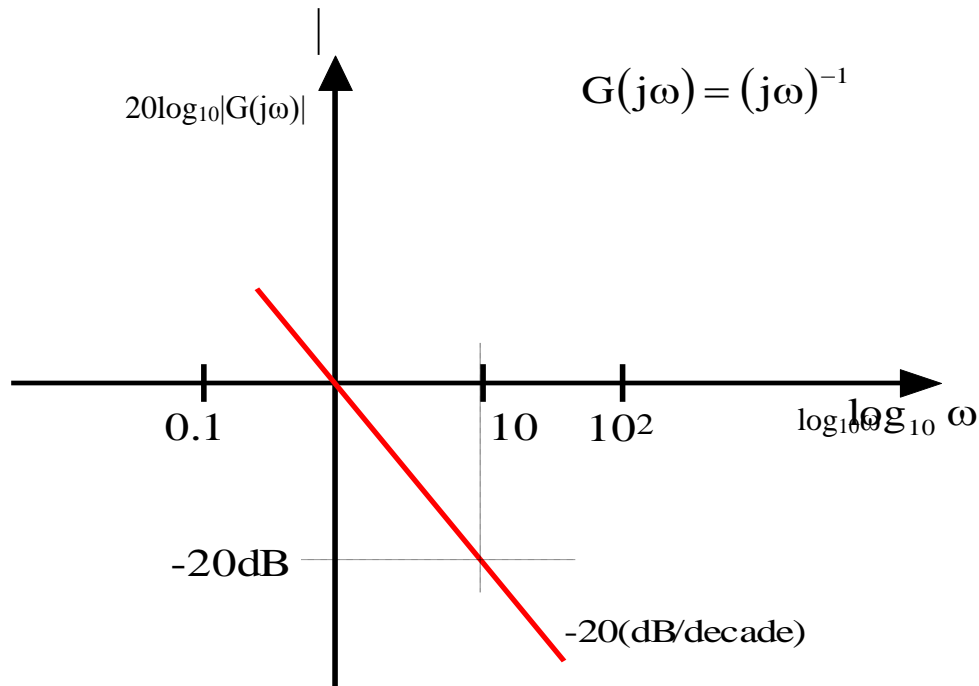
In questo caso il modulo in dB è  $|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \omega$ , corrispondente ad una retta passante per l'origine di pendenza  $-20$  dB/decade poiché la scala verticale dei moduli è misurata in decibel. Osserviamo che, se la scala verticale fosse semplicemente logaritmica (senza il 20), la pendenza sarebbe  $-1$ .

Infatti si ha per  $\mu=1$ :

$$|G(j1)| = |(j1)^{-1}| = 1 \Rightarrow |G(j1)|_{dB} = 0dB$$

$$|G(j10)| = |(j10)^{-1}| = \frac{1}{10} \Rightarrow |G(j10)|_{dB} = -20dB$$

pertanto la pendenza della retta passante per l'origine vale  $-20$  dB/decade.



Osserviamo che una decade è definita come un intervallo di pulsazioni il cui rapporto sia dieci. Analogamente, è possibile definire una ottava come un intervallo di pulsazioni in rapporto doppio. Ad esempio, l'intervallo  $1 \text{ rad s}^{-1} - 2 \text{ rad s}^{-1}$  è una ottava.

Poiché il modulo della funzione di risposta armonica contenente un polo nell'origine vale

$$|G(j\omega)| = |(j\omega)^{-\mu}| = \omega^{-\mu} \Rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10} \omega^{-\mu} = -20\mu \log_{10} \omega$$

e risulta per  $\mu=1$

$$|G(j1)| = |(j1)^{-1}| = 1 \Rightarrow |G(j1)|_{\text{dB}} = 0\text{dB}$$

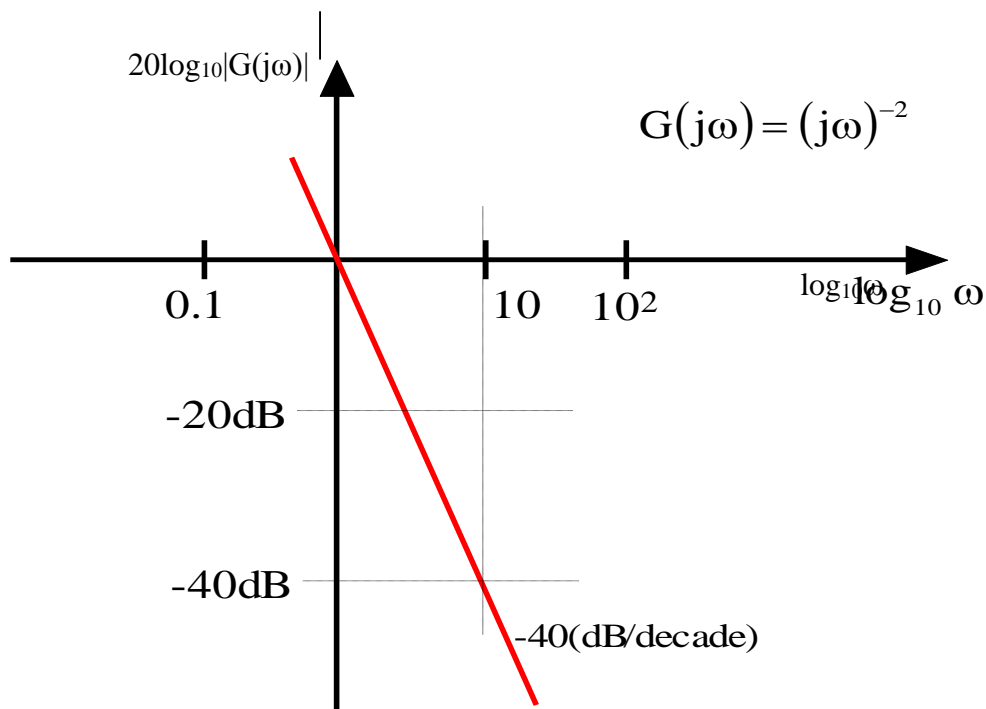
$$|G(j2)| = |(j2)^{-1}| = \frac{1}{2} \Rightarrow |G(j2)|_{\text{dB}} = -6\text{dB}$$

si conclude che la pendenza della retta è pari a -20 dB/decade o a -6 dB/ottava.

Nel caso di un sistema con due poli nell'origine ( $\mu=2$ ) si ha

$$G(j\omega) = (j\omega)^{-2}.$$

In questo caso il modulo in dB è  $|G(j\omega)|_{dB} = -40 \log_{10} \omega$ , corrispondente ad una retta passante per l'origine di pendenza -40 dB/decade (-12 dB/ottava).



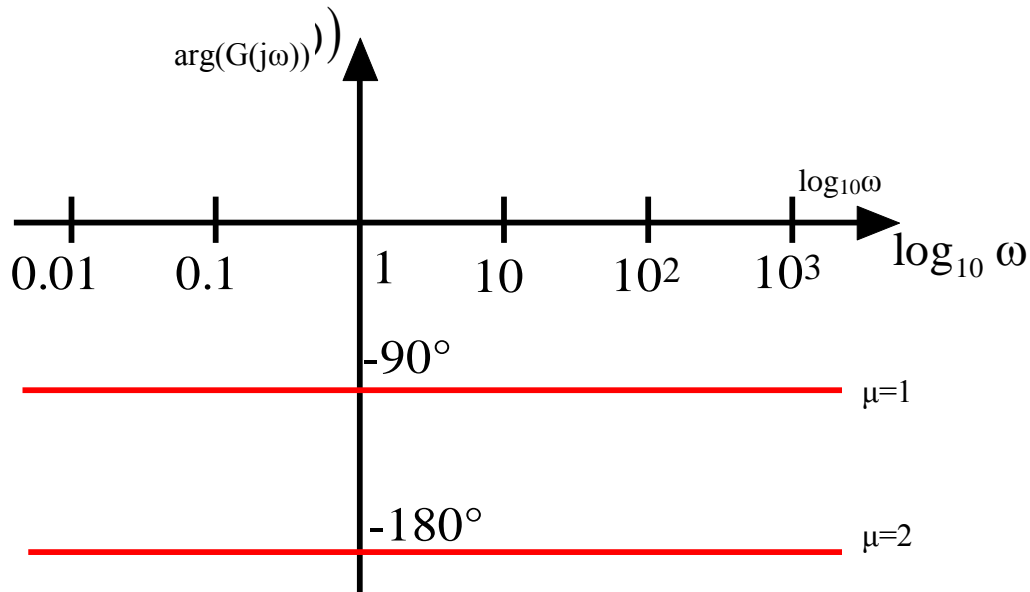
In generale, aumentando il numero  $\mu$  dei poli nell'origine la pendenza della retta passante per l'origine che rappresenta il diagramma delle ampiezze di  $G(j\omega) = (j\omega)^{-\mu}$  aumenta di 20 dB/decade per ogni aumento unitario di  $\mu$ .

Passiamo ora al diagramma delle fasi della funzione  $G(j\omega) = (j\omega)^{-\mu}$ . Si ha:

$$\arg G(j\omega) = \arg[(j\omega)^{-\mu}] = \arg\left[\frac{1}{(j\omega)^\mu}\right] = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \mu=1 \\ -\pi & \mu=2 \\ -\mu\frac{\pi}{2} & \mu>2 \end{cases}.$$



Avendo una quantità puramente immaginaria a denominatore, l'argomento è un multiplo intero  $-\pi/2$ , per cui abbiamo nel diagramma delle fasi una retta orizzontale.



### ESEMPIO

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s^2}.$$

Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)^2}$$

Pertanto la funzione di risposta armonica è costituita da una funzione elementare guadagno e da una funzione elementare polo doppio nell'origine.

Vediamo il diagramma di Bode dei moduli. Il modulo della funzione vale:

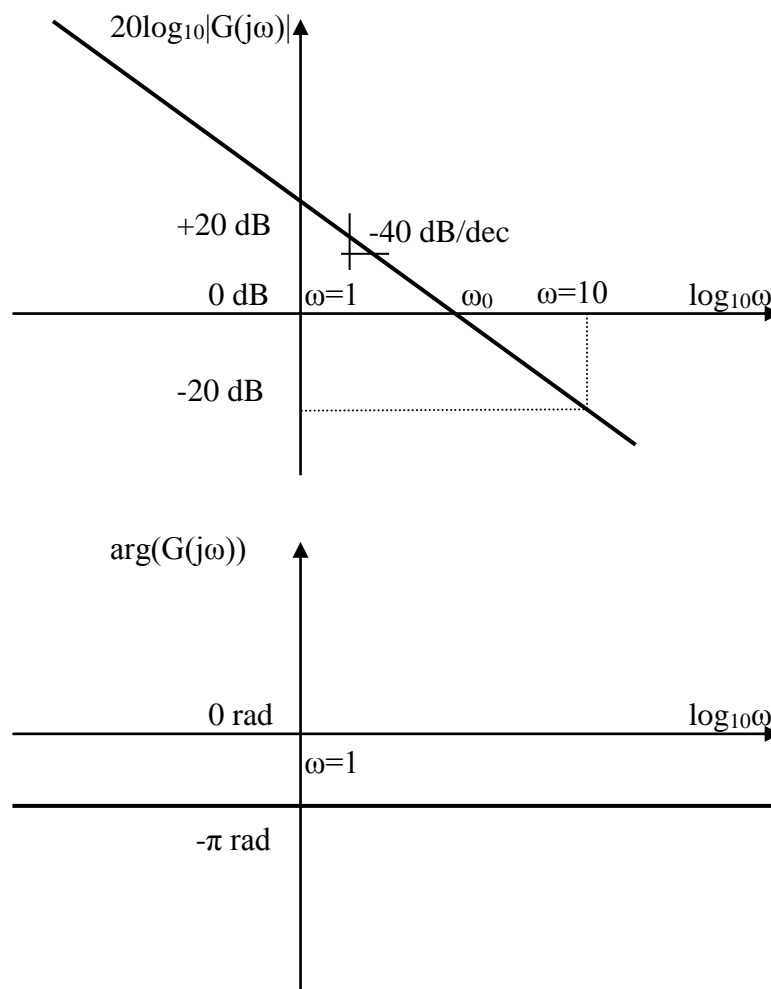
$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{10}{(j\omega)^2}\right| = 20\text{dB} + 20\log_{10}\left|\frac{1}{(j\omega)^2}\right|$$

quindi il diagramma dei moduli è quello di un polo doppio nell'origine sommato ad un contributo di 20 dB, ovvero traslato verso l'alto di 20 dB. Pertanto il sistema amplifica per segnali aventi pulsazione inferiori ad un certo valore  $\omega_0$  compreso tra 1 e 10 rad/s e attenua per pulsazioni maggiori.

Vediamo ora il diagramma di Bode delle fasi. L'argomento della funzione vale:

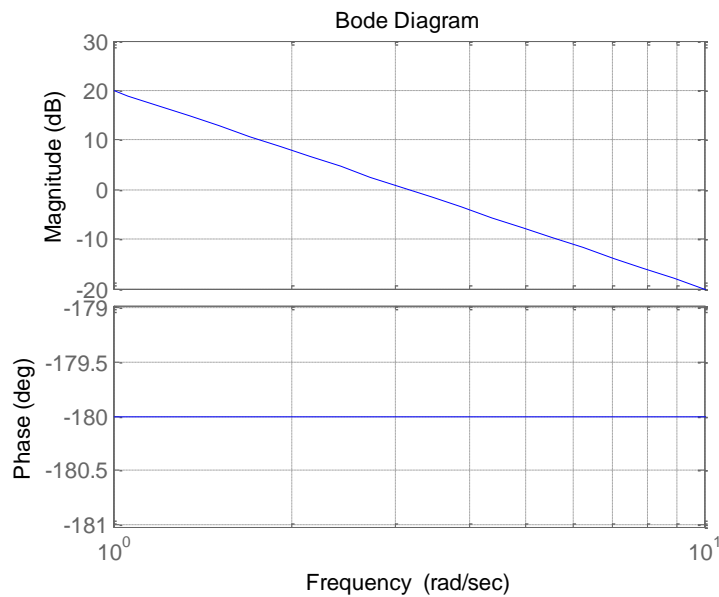
$$\arg G(j\omega) = \arg\left(\frac{10}{(j\omega)^2}\right) = 0 + \arg\left(\frac{1}{(j\omega)^2}\right) = 0 - \pi = -\pi$$

pertanto l'unico contributo al diagramma delle fasi è dato dal sistema elementare avente polo doppio nell'origine. Quindi il diagramma di Bode delle fasi è la retta orizzontale di valore  $-\pi$  a tutte le pulsazioni (il sistema ritarda la fase a tutte le pulsazioni).



Nelle figure precedenti sono rappresentati i diagrammi di Bode del sistema.

Nella figura successiva, inoltre, sono rappresentati i diagrammi di Bode del sistema ottenuti in ambiente Matlab. Si osservi che in questo caso il diagramma di Bode delle fasi rappresentato è una retta di valore costante  $-180^\circ$ , che corrisponde alla fase di  $-\pi$  rad.



**SISTEMA ELEMENTARE  $G(j\omega)=(1+j\omega T)^{-1}$   
(POLO REALE A FASE MINIMA)**

Consideriamo ora la funzione di risposta armonica con  $T>0$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T)},$$

corrispondente ad un polo reale negativo disposto in  $-1/T$ . Il modulo della funzione è

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

La funzione da riportare sul diagramma dei moduli è dunque:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = \\ &= -20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -10 \log_{10} (1 + \omega^2 T^2) \end{aligned}$$

Per determinare l'andamento di questa funzione in funzione di  $\omega$  possiamo osservare quello che accade per  $\omega$  molto piccolo e per  $\omega$  molto grande.

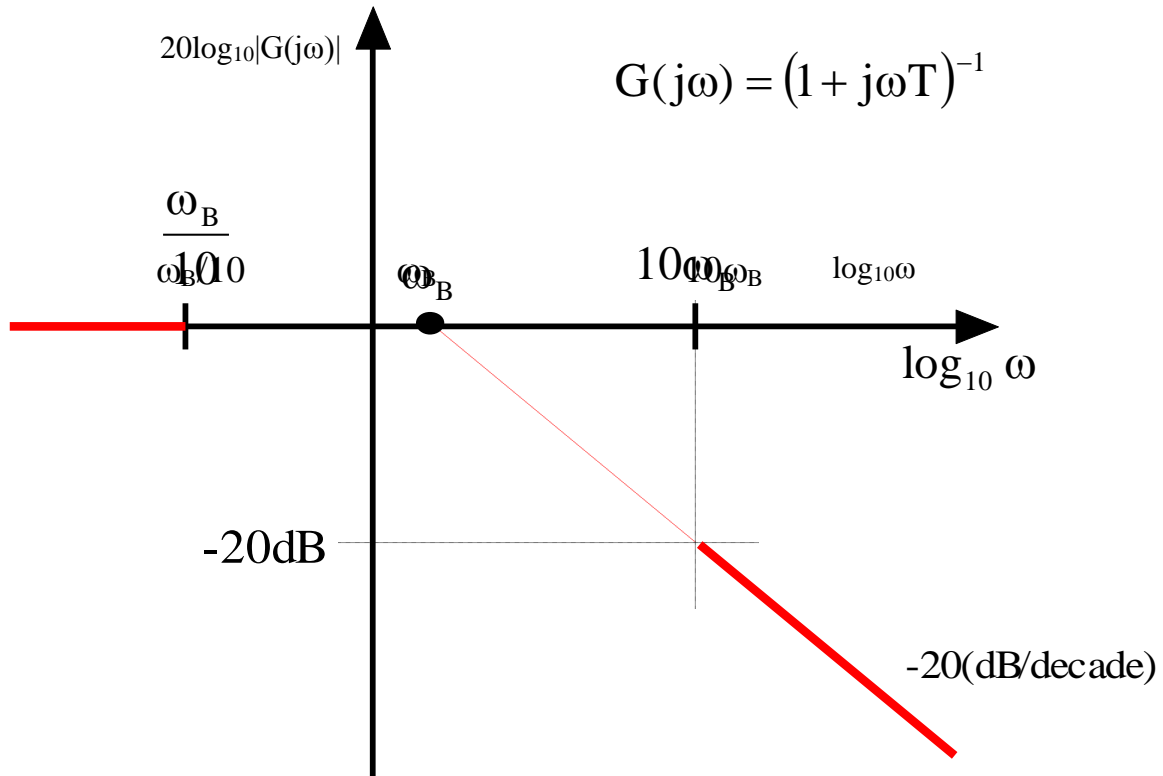
$$\text{Se } \omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \cong -10 \log_{10} 1 = 0(\text{dB}).$$

$$\text{Se } \omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \cong -20 \log_{10} \omega T = -20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_B} = -20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_B.$$

Detta quindi  $\omega_B = \frac{1}{T}$  la pulsazione di break (o di rottura), si osserva che l'andamento di  $|G(j\omega)|_{dB}$  è una retta coincidente con l'asse orizzontale per  $\omega \ll \omega_B$ , mentre per  $\omega \gg \omega_B$  è una retta passante per il punto  $(0, \omega_B)$  con pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$ .

In particolare, si può assumere che  $\omega \ll \omega_B$  indichi le pulsazioni poste una decade al di sotto di  $\omega_B$  e  $\omega \gg \omega_B$  indichi le pulsazioni poste una decade al di sopra di  $\omega_B$ .

Possiamo così tracciare il diagramma dei moduli da  $-\infty$  (cioè  $\omega=0$ ) fino a una decade prima di  $\omega_B$  e da una decade dopo  $\omega_B$  fino a  $+\infty$  (cioè  $\omega=+\infty$ ).



Per l'andamento del diagramma nell'intorno di  $\omega_B$ , ossia tra  $\omega_B/10$  e  $10\omega_B$ , si potrebbe calcolare  $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$  in corrispondenza di tre o quattro punti nell'intervallo considerato e interpolare i valori ottenuti al fine di raccordare i due tratti estremi.

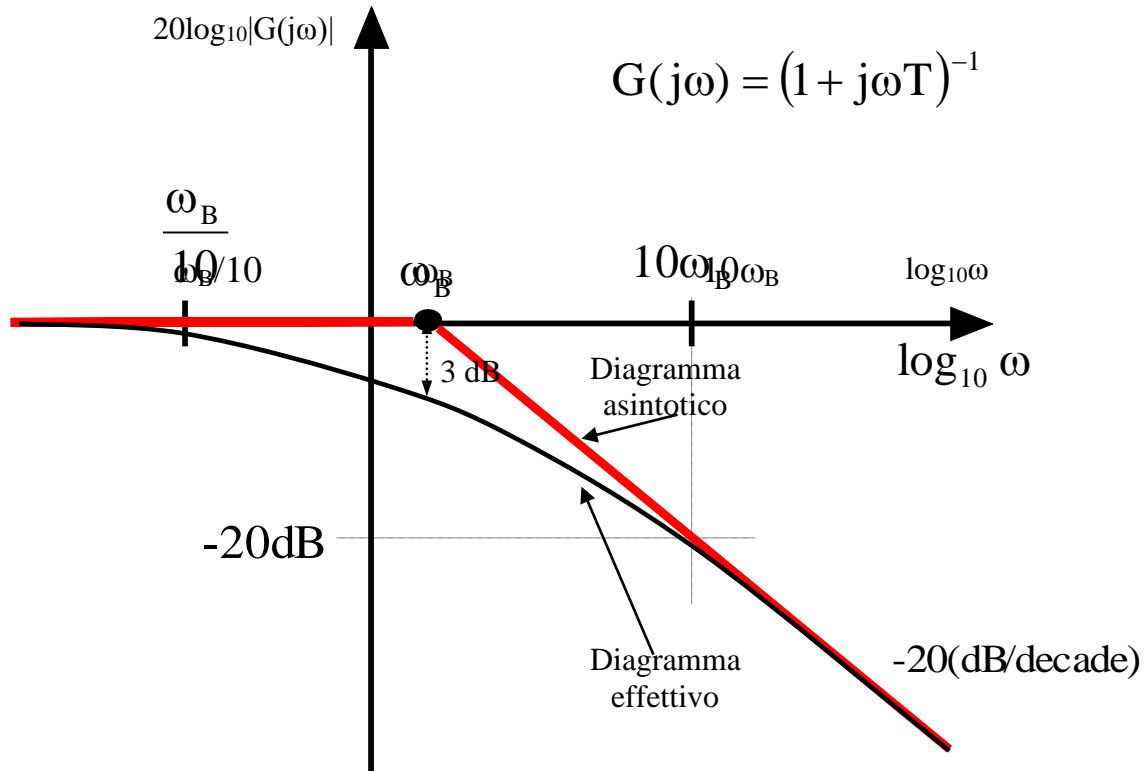
Un secondo metodo, più approssimato del precedente ma molto più semplice, consiste nel costruire il *diagramma asintotico*, semplicemente prolungando i due tratti estremi fino a congiungersi in  $\omega_B$ .

Si ottiene in tal modo un diagramma approssimato, che approssima molto bene (come si può verificare analiticamente) il diagramma reale delle ampiezze. In particolare è possibile mostrare che l'errore massimo si ha alla pulsazione, dove risulta  $\omega = \omega_B$  e

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -10\log_{10} 2 \cong -3.0103 \text{ dB},$$

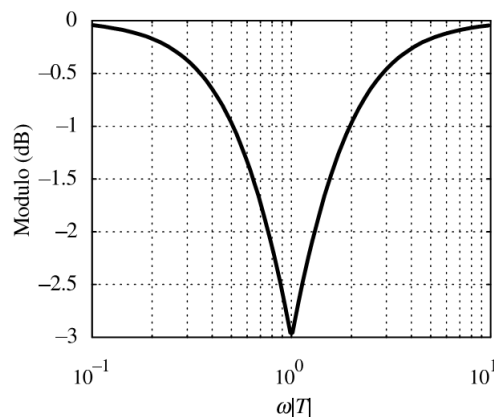
pertanto la massima deviazione tra il diagramma di Bode dei moduli effettivo e quello asintotico è pari a 3 dB.

La figura successiva riporta entrambi i diagrammi di Bode delle ampiezze, effettivo e asintotico, del sistema.



Il diagramma della funzione errore, ovvero della differenza in Decibel tra il diagramma di Bode asintotico e quello effettivo è riportato nella figura successiva, che mostra come il massimo di tale funzione si ottenga proprio nella pulsazione di break associata al polo.

diagramma dell'errore  $E_c(\omega)$





Passiamo ora al diagramma delle fasi della funzione  $G(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T)}$ . Si ha:

$$\arg G(j\omega) = \arg \left[ \frac{1}{1 + j\omega T} \right] = -\arctg(\omega T)$$

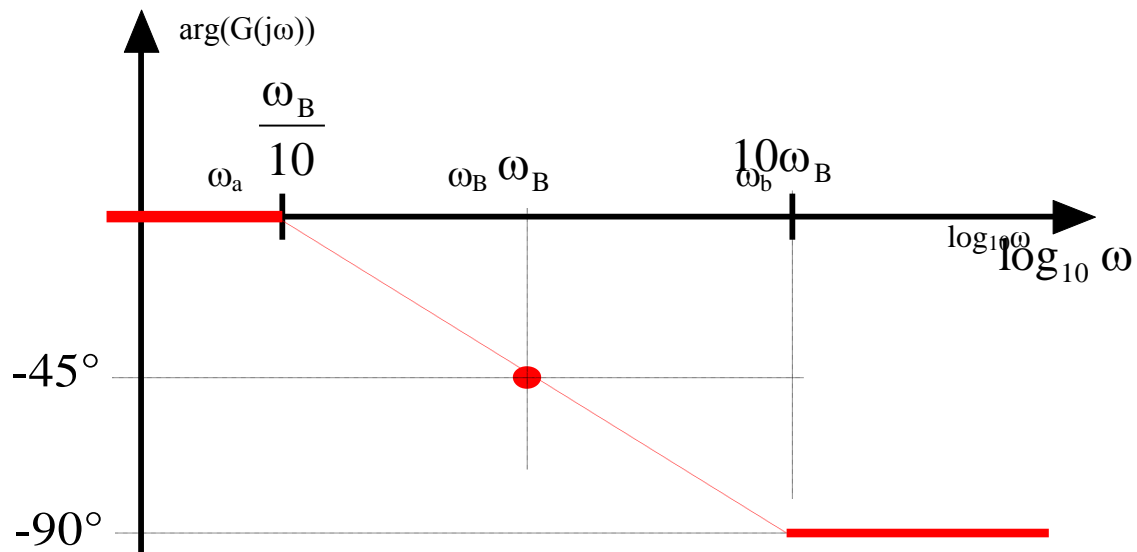
Dobbiamo dunque diagrammare la funzione  $-\arctg(\omega T)$ .

Osserviamo preliminarmente che esistono diversi metodi in letteratura per determinare il diagramma di Bode asintotico delle fasi. Tali metodi si differenziano per la relativa precisione. Nel seguito utilizziamo il metodo che individua tre componenti del diagramma di Bode asintotico: quella in bassa frequenza, quella in alta frequenza e quella data dalla retta tangente alle pulsazioni intermedie. Due altri metodi molto popolari sono la tecnica che utilizza le sole approssimazioni in bassa e alta frequenza (fornendo un diagramma delle fasi a gradini) e quella che definisce le pulsazioni di break delle fasi pari alle pulsazioni a distanza (inferiore e superiore) di una decade dalla pulsazione di break delle ampiezze.

Analizziamo dunque l'andamento asintotico del diagramma di Bode delle fasi. Si ha:

$$\begin{aligned} \text{per } \omega \ll \omega_B &\rightarrow \arg G(j\omega) \cong \arg \frac{1}{1 + j0} = 0 \\ \text{per } \omega = \omega_B &\rightarrow \arg G(j\omega) \cong \arg \frac{1}{1 + j1} = -\arctg(1) = -45^\circ \\ \text{per } \omega \gg \omega_B &\rightarrow \arg G(j\omega) \cong \arg \frac{1}{+j\omega T} = -90^\circ \end{aligned}$$

In base a questi risultati, possiamo tracciare una parte del diagramma delle fasi qualitativo, in cui indichiamo con  $\omega_a$  e  $\omega_b$  gli estremi di validità di tale approssimazione.



Per quanto riguarda l'andamento del diagramma nell'intorno della pulsazione di break  $\omega_B = \frac{1}{T}$ , approssimiamo il diagramma delle fasi con un segmento di pendenza pari alla tangente nel punto  $(\omega_B, -45^\circ)$ .

Calcoliamo quindi tale pendenza, che vale:

$$\begin{aligned} \frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)} \Big|_{\omega=\omega_B} &= \frac{d}{d(\log_{10} \omega)} [-\arctg(\omega T)] \Big|_{\omega=\omega_B} = \\ &= \frac{d}{d\omega} [-\arctg(\omega T)] \frac{d\omega}{d(\log_{10} \omega)} \Big|_{\omega=\omega_B} \end{aligned}$$

Si ha:

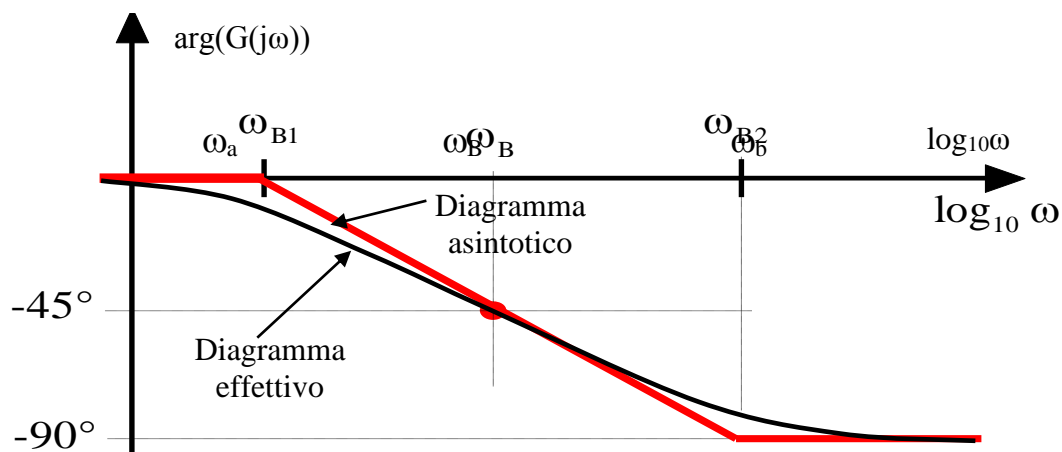
$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d(\log_{10} \omega)} &= \frac{d(10^{\log_{10} \omega})}{d(\log_{10} \omega)} = \frac{d(10^x)}{dx} = 10^x \log_e 10 \text{ con } x = \log_{10} \omega, \text{ ovvero} \\ \frac{d\omega}{d(\log_{10} \omega)} &= 10^{\log_{10} \omega} \log_e 10 = \omega \log_e 10. \end{aligned}$$

Quindi

$$\left. \frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)} \right|_{\omega=\omega_B} = -\frac{T}{1+\omega^2 T^2} \omega \log_e 10 \bigg|_{\omega=\omega_B} = -\frac{\log_e 10}{2} = -\frac{2.3}{2} = -1.15.$$

Pertanto l'approssimazione del diagramma di Bode delle fasi alle pulsazioni intermedie è data da una retta di pendenza  $-1.15$  rad/decade e passante per il punto  $(\omega_B, -\pi/4)$  che interseca l'asse delle ascisse in una pulsazione  $\omega_a$  e la retta a  $-\pi/2$  ad una pulsazione  $\omega_b$ . Ne consegue che  $\omega_a$  e  $\omega_b$  sono le pulsazioni di break delle fasi.

Il diagramma asintotico completo è quindi quello riportato di seguito, dove  $\omega_a$  e  $\omega_b$  indicano le pulsazioni alle quali avviene l'intersezione dei tre segmenti che lo compongono, ossia la retta a  $0^\circ$  per pulsazioni inferiori a  $\omega_a$ , la retta a  $-90^\circ$  per pulsazioni superiori a  $\omega_b$  e la retta di pendenza  $-1.15$  rad/decade passante per il punto  $(\omega_B, -\pi/4)$  per pulsazioni intermedie.



In particolare, conoscendo la pendenza del segmento passante per il punto  $(\omega_B, -45^\circ)$  possiamo individuare i punti  $\omega_a$  e  $\omega_b$  in cui il diagramma di Bode delle fasi è discontinuo.

Poiché il segmento passa per i punti  $(\omega_a, 0)$ ,  $(\omega_B, -45^\circ)$  e  $(\omega_b, -90^\circ)$  con pendenza  $-1.15$  rad/decade, si ha:

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{\log_{10} \omega_B - \log_{10} \omega_a} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\log_{10} \omega_b - \log_{10} \omega_B} = 1.15 \rightarrow$$

$$\rightarrow \log_{10} \frac{\omega_B}{\omega_a} = \log_{10} \frac{\omega_b}{\omega_B} = \frac{\pi}{4 \cdot 1.15} \simeq 0.683 \rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_B} = 10^{0.683} \simeq 4.81$$

Pertanto si ha:

$$\omega_a \simeq \frac{\omega_B}{4.81}, \omega_b \simeq 4.81\omega_B.$$

Spesso si pone comunque per semplicità:

$$\omega_a \simeq \frac{\omega_B}{5}, \omega_b \simeq 5\omega_B.$$

Tale relazione fondamentale è detta regola del 4.81 (o del 5): essa consente di tracciare il diagramma delle fasi semplicemente conoscendo la pulsazione  $\omega_B$ .

Infatti, nota la pulsazione di break  $\omega_B$ , dividendo tale pulsazione per 4.81 (o per 5, in prima approssimazione) si individua il punto  $\omega_a$  in cui il diagramma delle fasi interseca l'asse delle ascisse e fino al quale il diagramma è costituito dalla retta orizzontale di ordinata  $0^\circ$ . Analogamente, moltiplicando la pulsazione  $\omega_B$  per 4.81 (o per 5) si ottiene  $\omega_b$ , pulsazione a partire dalla quale il diagramma ha una fase pari asintoticamente a  $-90^\circ$ . Tra i valori  $\omega_a$  e  $\omega_b$  il diagramma è costituito da un segmento di pendenza  $-1.15$  rad/decade e che assume nella pulsazione di break fase pari a  $-45^\circ$ .

Infine, osserviamo che l'approssimazione alle pulsazioni intermedie del diagramma di Bode delle fasi è una funzione definita come segue:

$$f(\omega) = -\frac{\log_e 10}{2} \log_{10} \frac{\omega}{\omega_a} \simeq -1.15 \log_{10} \frac{4.81\omega}{\omega_B}$$

che assume infatti valore nullo un  $\omega_a$ :

$$f(\omega_a) = -\frac{\log_e 10}{2} \log_{10} \frac{\omega_a}{\omega_a} = -\frac{\log_e 10}{2} \log_{10} 1 = 0 \text{ rad}$$

mentre assume infatti valore  $-\pi/4$  in  $\omega_B$ :

$$f(\omega_B) = -\frac{\log_e 10}{2} \log_{10} \frac{\omega_B}{\omega_a} = -\frac{\log_e 10}{2} \log_{10} 4.81 = -\frac{\log_e 10}{2} \log_{10} 10^{\frac{4 \frac{\log_e 10}{2}}{2}} = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

e infine

$$f(\omega_b) = -\frac{\log_e 10}{2} \log_{10} \frac{\omega_b}{\omega_a} = -\frac{\log_e 10}{2} \log_{10} (4.81)^2 = -2 \frac{\log_e 10}{2} \log_{10} 10^{\frac{4 \frac{\log_e 10}{2}}{2}} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

### ESEMPIO

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s(1 + 0.1s)}.$$

Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1 + 0.1j\omega)}.$$

Pertanto la funzione di risposta armonica è costituita da una funzione elementare guadagno, da una funzione elementare polo semplice nell'origine e da una funzione elementare polo semplice a fase minima.

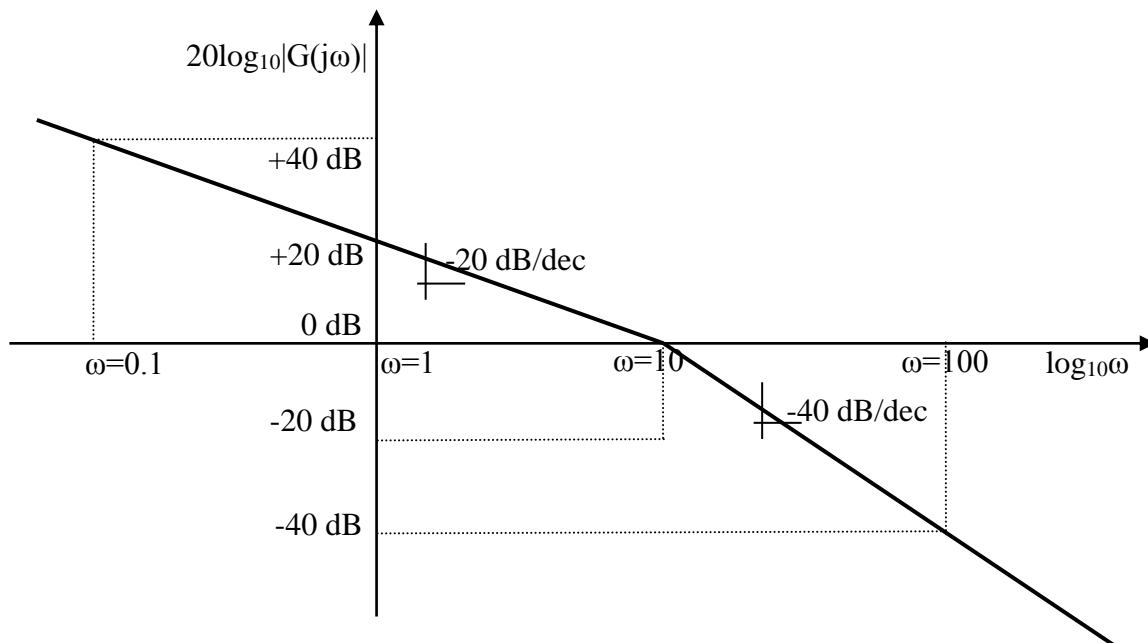
Vediamo il diagramma di Bode dei moduli. Il modulo della funzione vale:

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{10}{(j\omega)(1 + j0.1\omega)} \right| = 20 \log_{10} \frac{10}{\omega \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}}}$$

quindi il diagramma dei moduli è quello di un polo semplice nell'origine sommato ad un contributo costante di  $20\log_{10}10=20$  dB (ovvero traslato verso l'alto di 20 dB) e ad un terzo contributo pari a quello di un polo semplice disposto in -10 e quindi con pulsazione di break  $\omega_B=10$  rad/sec (e costante di tempo pari a 0.1 secondi).

Pertanto nel diagramma di Bode asintotico dei moduli per pulsazioni inferiori a  $\omega_B$  il terzo contributo è influente (essendo pari sempre a 0 dB) ed esso interviene solo a partire da pulsazioni maggiori (contribuendo con una pendenza di -20 dB/dec). In definitiva per  $\omega < 10$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico dei moduli è una retta di pendenza -20 dB/dec che interseca l'asse delle ordinate a +20 dB, mentre per  $\omega > 10$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico dei moduli è una retta di pendenza -40 dB/dec che interseca l'asse delle ascisse proprio nel valore 10 rad/sec.

Nella figura seguente è rappresentato il diagramma di Bode asintotico delle ampiezze del sistema.



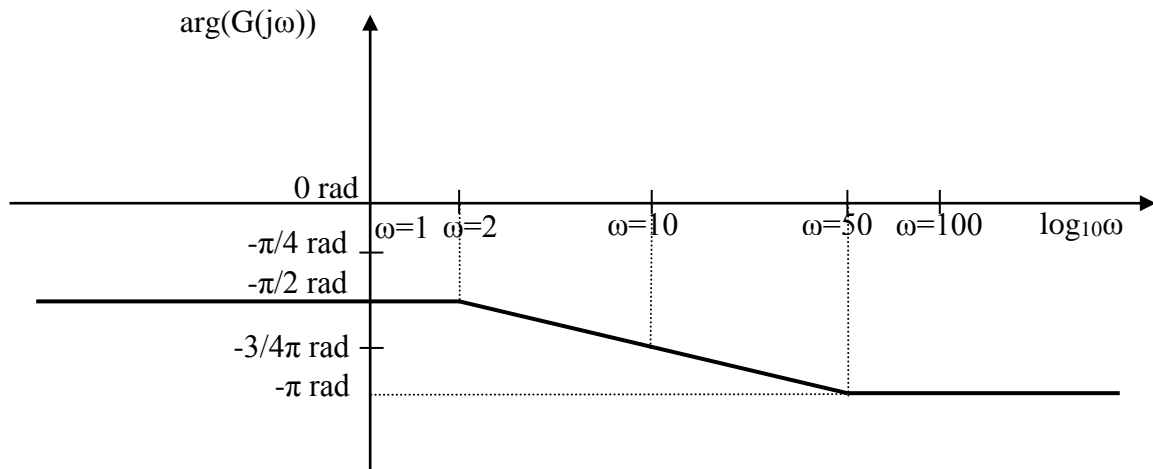
Vediamo ora il diagramma di Bode delle fasi. L'argomento della funzione vale:

$$\arg G(j\omega) = \arg\left(\frac{10}{j\omega(1+j0.1\omega)}\right) = \arg(10) - \frac{\pi}{2} - \arctg(0.1\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg(0.1\omega)$$

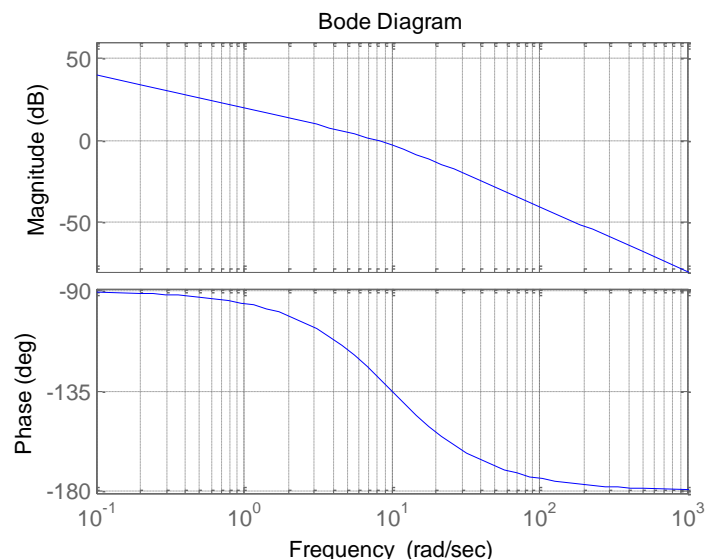
pertanto il diagramma asintotico delle fasi coincide con quello di un polo semplice disposto in -10, quindi con pulsazione di break  $\omega_B=10$  rad/sec e costante di tempo pari a 0.1 secondi, traslato di  $-\pi/2$ .



Nella figura seguente è rappresentato il diagramma di Bode asintotico delle fasi del sistema, tracciato utilizzando la regola del 5.



Nella figura successiva sono rappresentati i diagrammi di Bode del sistema ottenuti in ambiente Matlab. Si osservi che in questo caso i diagrammi di Bode rappresentati sono entrambi quelli effettivi.



**ESEMPIO**

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici della funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{0.12}{j\omega(1 + j20\omega)}.$$

La funzione di risposta armonica è costituita dalle seguenti funzioni elementari:

$$G_1(j\omega) = 0.12, \quad G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad \text{e} \quad G_3(j\omega) = \frac{1}{1 + j20\omega}.$$

Vediamo il diagramma di Bode dei moduli. Il modulo della funzione vale:

$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{0.12}{(j\omega)(1 + j20\omega)}\right| = 20\log_{10}\frac{0.12}{\omega\sqrt{1 + 400\omega^2}}$$

L'unica pulsazione di break è quella della terza funzione elementare e vale  $\omega_B = 1/T = 0.05$ . Pertanto, per tutte le pulsazioni inferiori a tale pulsazione di break, ovvero per  $\omega < \omega_B$ , il terzo contributo è trascurabile e si ha:

$$|G(j\omega)| \cong \frac{0.12}{\omega},$$

da cui

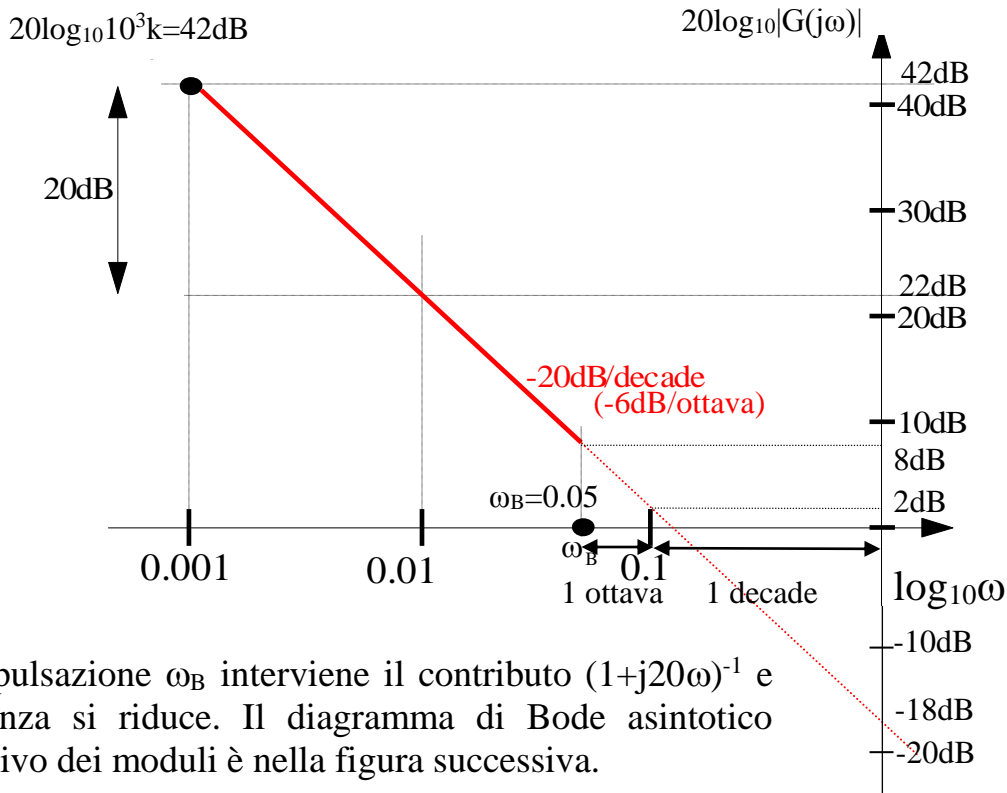
$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong 20\log_{10}\frac{0.12}{\omega},$$

quindi per tali pulsazioni il diagramma dei moduli è la retta a -20dB/decade traslata di  $20\log_{10}k \approx -18$  dB (con  $k=0.12$ ), che nell'origine degli assi ( $\omega=1$ ) vale proprio:

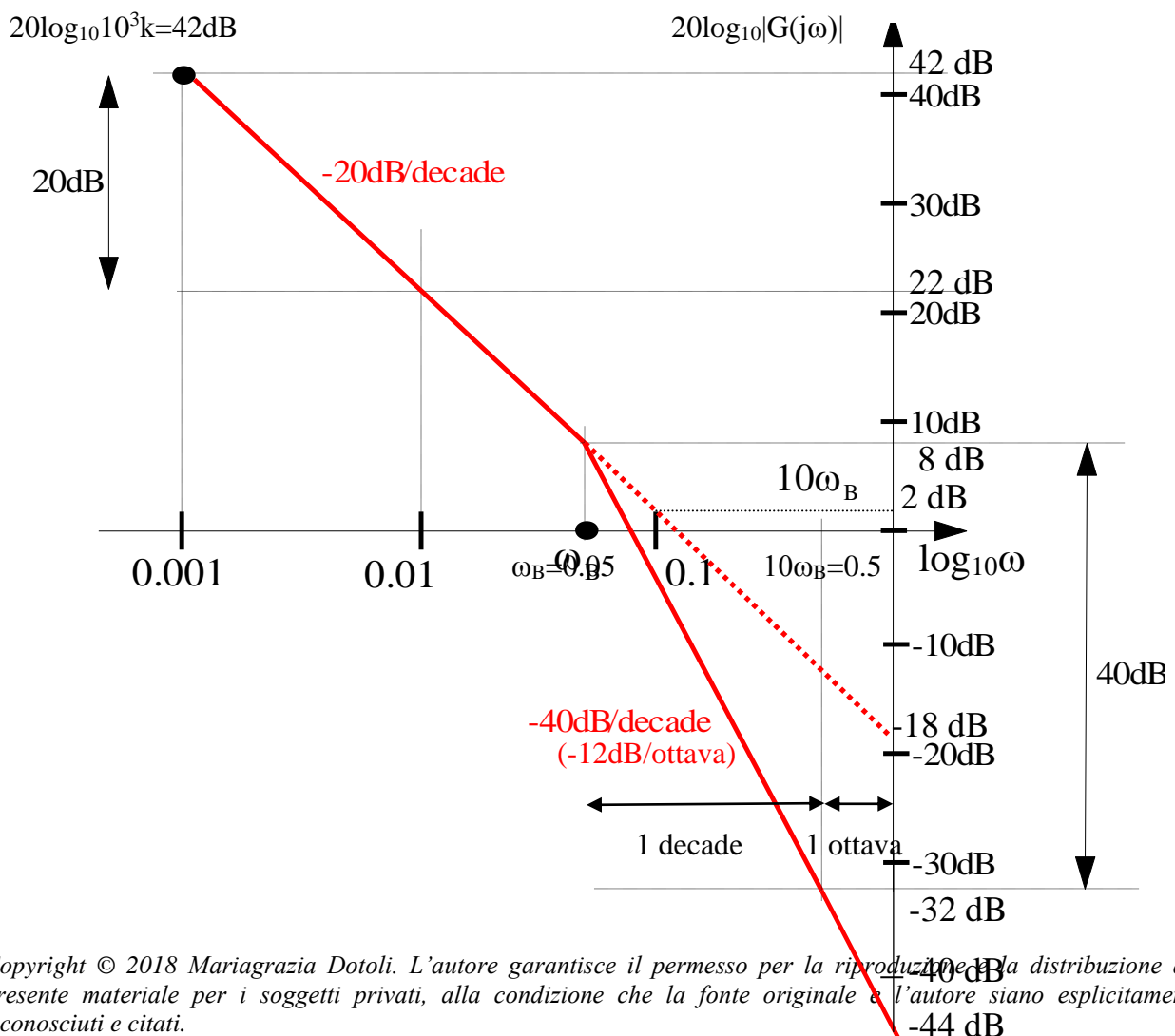
$$|G(j\omega)|_{\text{dB}}\Big|_{\omega=1} = 20\log_{10}k = 20\log_{10}0.12 \approx -18\text{dB}$$

mentre per  $\omega=0.001$  vale:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}}\Big|_{\omega=1} = 20\log_{10}10^3k = 20\log_{10}120 \approx +42\text{dB}.$$



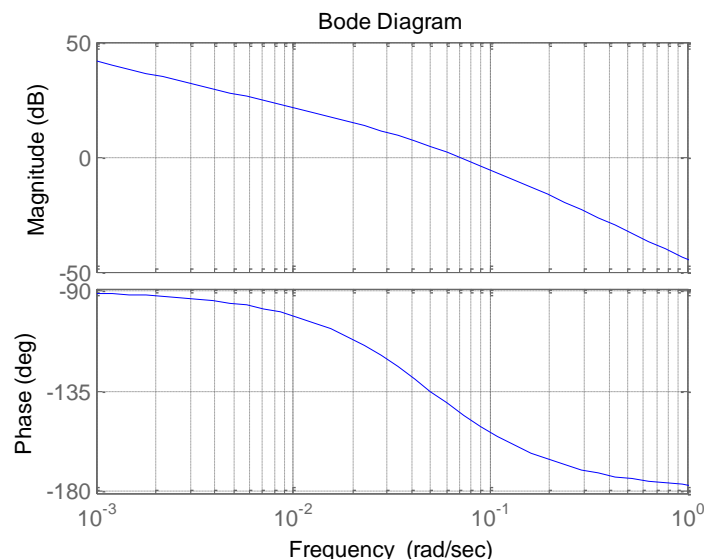
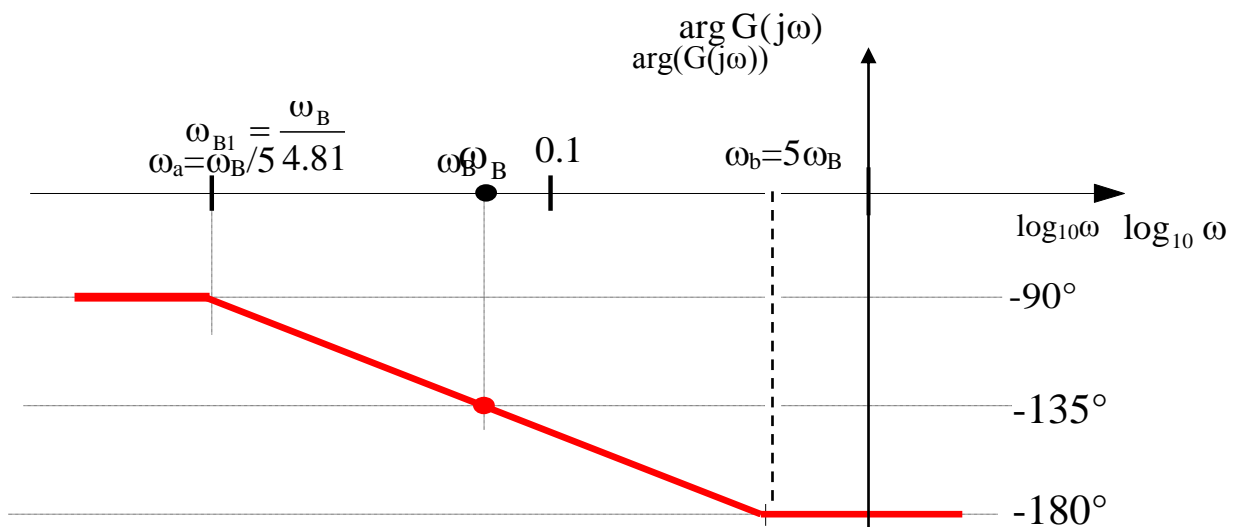
Oltre la pulsazione  $\omega_B$  interviene il contributo  $(1+j20\omega)^{-1}$  e la pendenza si riduce. Il diagramma di Bode asintotico complessivo dei moduli è nella figura successiva.



Vediamo ora il diagramma di Bode asintotico delle fasi. L'argomento della funzione vale:

$$\arg G(j\omega) = \arg\left(\frac{0.12}{j\omega} \frac{1}{(1 + j20\omega)}\right) = \arg(0.12) - \frac{\pi}{2} - \arctg(20\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg(20\omega).$$

Quindi il diagramma asintotico delle fasi coincide con quello di un polo disposto in  $-1/T = -1/20 = -0.05$  traslato di  $-\pi/2$ .



Nella figura precedente sono rappresentati i diagrammi di Bode del sistema ottenuti in Matlab: in questo caso i diagrammi di Bode sono entrambi quelli effettivi.

**ESEMPIO**

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.1s)}.$$

Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}.$$

Pertanto la funzione di risposta armonica è costituita da una prima funzione elementare con polo semplice a fase minima in -1 e pulsazione di break  $\omega_1=1$  rad/sec e da una seconda funzione elementare con polo semplice a fase minima in -10 e pulsazione di break  $\omega_2=10$  rad/sec.

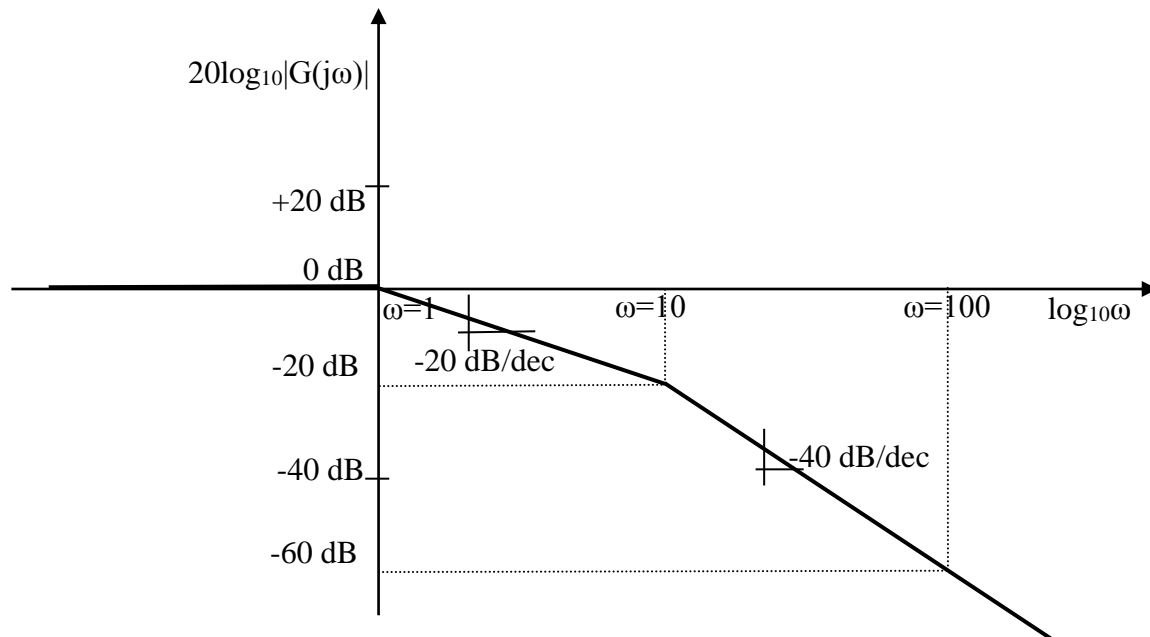
Vediamo il diagramma di Bode dei moduli. Il modulo della funzione vale:

$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{(1+j\omega)(1+j0.1\omega)}\right| = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{100}}}.$$

Pertanto nel diagramma di Bode asintotico dei moduli per pulsazioni inferiori a  $\omega_2$  il secondo termine elementare è ininfluenza (avendo modulo pari sempre a 0 dB), mentre esso interviene a partire da pulsazioni maggiori (contribuendo con una pendenza di -20 dB/dec).

In definitiva per  $\omega < 10$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico dei moduli è quello del polo con pulsazione di break  $\omega_1=1$  rad/sec (ovvero è pari a 0 dB sino a  $\omega_1$  ed è una retta di pendenza -20 dB/dec che interseca l'asse delle ascisse in  $\omega_1$  e giunge sino ad un'ordinata di -20 dB una decade dopo, ovvero proprio in  $\omega_2$ ), mentre per  $\omega > 10$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico dei moduli è una retta di pendenza -40 dB/dec che quindi giunge sino ad un'ordinata di -60 dB una decade dopo, ovvero nel valore 100 rad/sec.

Nella figura seguente è rappresentato il diagramma di Bode asintotico complessivo delle ampiezze del sistema.



Vediamo ora il diagramma di Bode delle fasi. L'argomento della funzione vale:

$$\arg G(j\omega) = \arg \left( \frac{1}{(1 + j\omega)(1 + j0.1\omega)} \right) = -\arctg(\omega) - \arctg(0.1\omega).$$

Il primo contributo è caratterizzato dalle pulsazioni di break (ottenute con la regola del 4.81 approssimata)  $\omega_{1a}=0.2$  rad/sec e  $\omega_{1b}=5$  rad/sec, mentre il secondo contributo è caratterizzato dalle pulsazioni di break (ottenute con la regola del 4.81 approssimata)  $\omega_{2a}=2$  rad/sec e  $\omega_{2b}=50$  rad/sec.

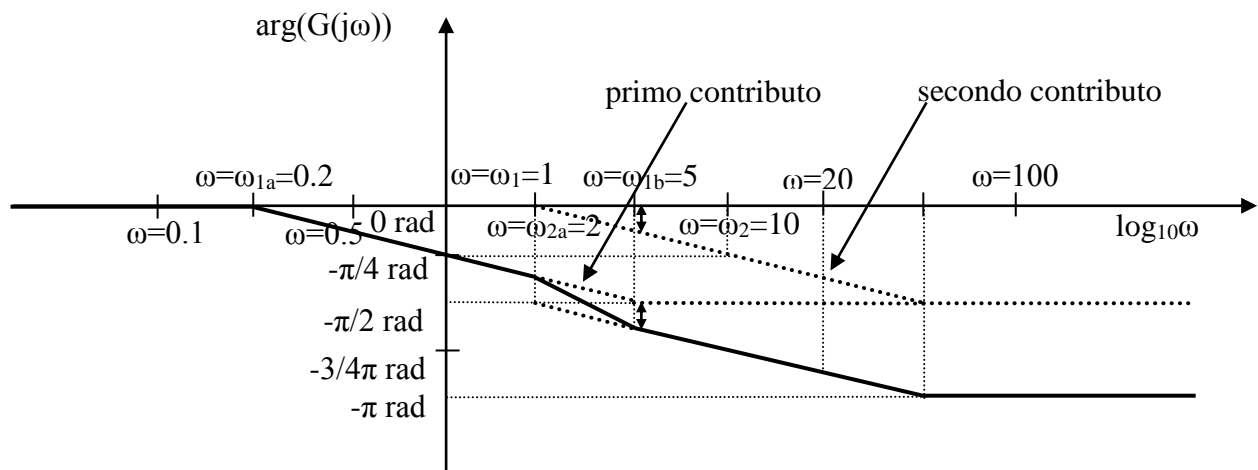
Pertanto nel diagramma di Bode asintotico delle fasi per pulsazioni inferiori a  $\omega_{2a}$  il secondo contributo è ininfluenza (essendo pari sempre a 0 rad) ed esso interviene solo a partire da pulsazioni maggiori (contribuendo con una fase complessiva alle alte pulsazioni di  $-\pi/2$  rad).

In definitiva per  $\omega < \omega_{2a}=2$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico delle fasi è dato unicamente dal primo contributo (ovvero è pari a 0 rad sino a  $\omega_{1a}=0.2$  rad/sec ed è una retta di pendenza negativa che interseca l'asse delle ascisse in  $\omega_{1a}$  e giunge sino ad un'ordinata di  $-\pi/4$  rad in  $\omega_1$  e di  $-\pi/2$  rad in  $\omega_{1b}$ ); quindi per  $\omega_{2a}=2$  rad/sec  $< \omega < \omega_{1b}=5$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico dei moduli è dato dalla somma dei due contributi e dunque è una retta di pendenza doppia che giunge in  $\omega_{1b}$  sino ad un'ordinata data dalla somma di  $-\pi/2$  rad (dovuti al primo contributo) e del valore di ordinata del secondo contributo in tale ascissa  $\omega_{1b}$ ; per  $\omega_{1b}=5$

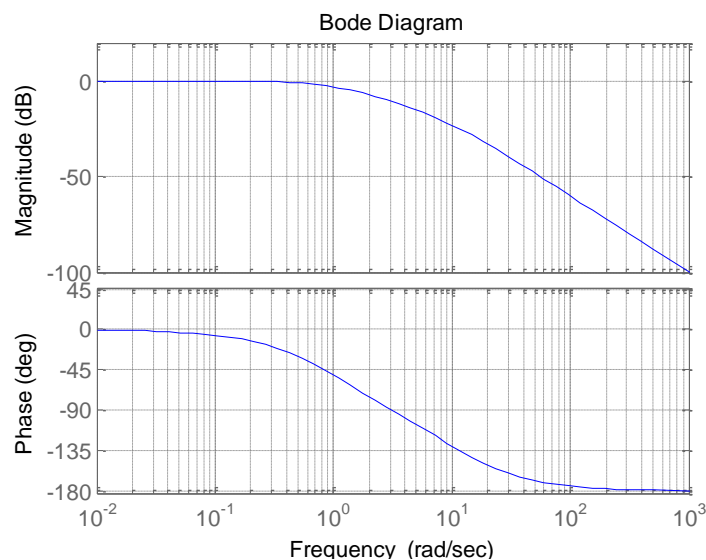


rad/sec  $< \omega < \omega_{2b} = 50$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico delle fasi è dato unicamente dal secondo contributo traslato di  $-\pi/2$  rad (ovvero è una retta di pendenza negativa che giunge sino ad un'ordinata di  $-\pi$  rad in  $\omega_{2b}$ ); per  $\omega > \omega_{2b} = 50$  rad/sec il diagramma continua con valore di ordinata invariata e pari a  $-\pi$  rad.

Nella figura seguente è rappresentato il diagramma di Bode asintotico delle fasi del sistema.



Nella figura successiva sono rappresentati i diagrammi di Bode del sistema ottenuti in ambiente Matlab. Si osservi che in questo caso i diagrammi di Bode rappresentati sono entrambi quelli effettivi.



## SISTEMA ELEMENTARE $G(j\omega)=(1+j\omega T)$ (ZERO REALE A FASE MINIMA)

Consideriamo ora la funzione di risposta armonica con  $T>0$

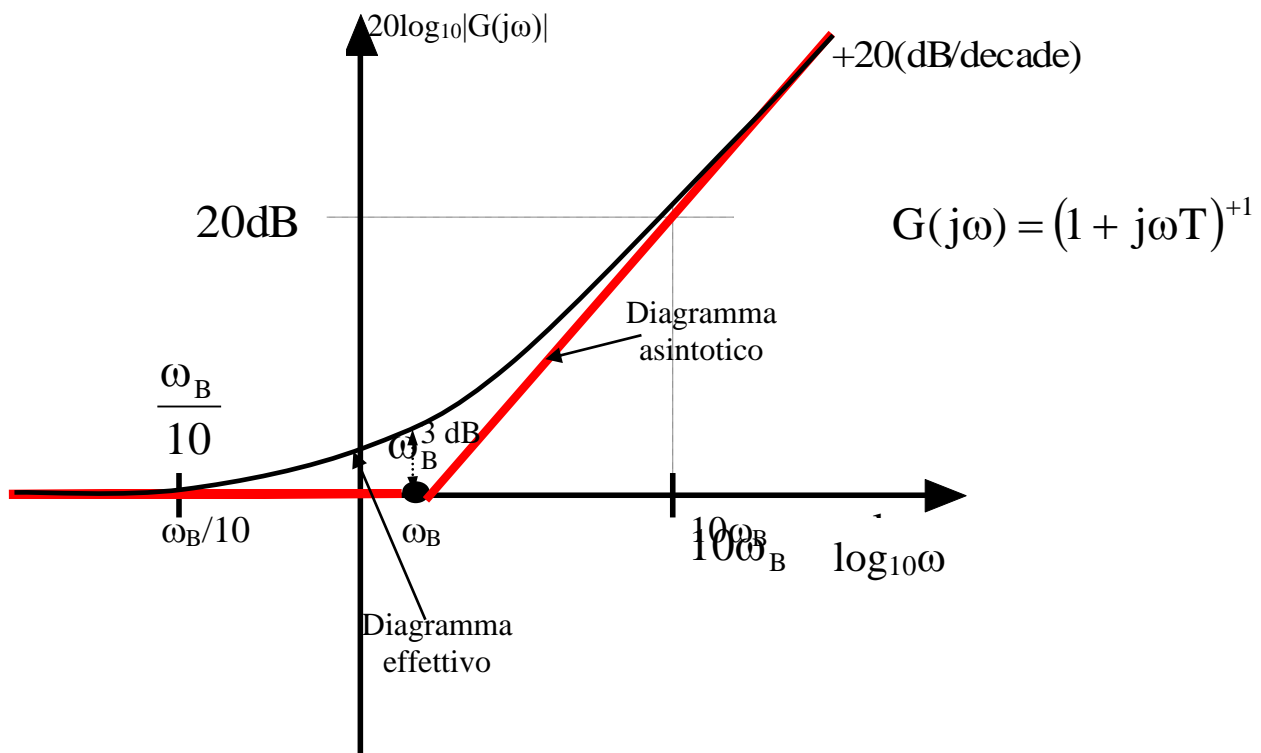
$$G(j\omega) = (1 + j\omega T),$$

corrispondente ad uno zero reale negativo. Il modulo della funzione è

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20\log_{10}|1 + j\omega T| = 20\log_{10}\sqrt{1 + \omega^2 T^2} = \\ &= 20\log_{10}\sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 10\log_{10}(1 + \omega^2 T^2) \end{aligned}$$

quindi il diagramma del modulo di questa funzione si ottiene semplicemente ribaltando rispetto all'asse delle ascisse quello di  $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$ .

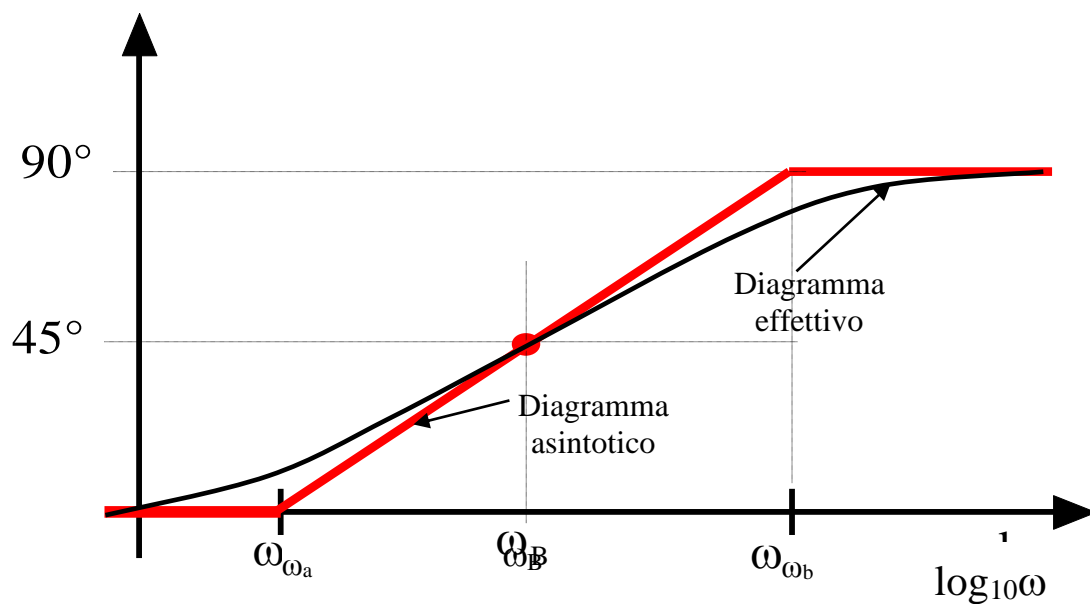
In altre parole, rispetto al caso precedente le ampiezze in dB sono positive. Abbiamo quindi i seguenti diagrammi asintotico ed effettivo, con un errore massimo di 3 dB nella pulsazione di break dello zero.



Passiamo ora al diagramma delle fasi. Si ha:

$$\arg G(j\omega) = \arg[1 + j\omega T] = \arctg(\omega T)$$

Rispetto al caso precedente del polo a fase minima le fasi in gradi sono positive, dunque il diagramma delle fasi si ottiene semplicemente ribaltando rispetto all'asse delle ascisse quello di  $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$ . Abbiamo quindi i seguenti diagrammi asintotico (ottenuto con la regola del 4.81) ed effettivo.



**SISTEMA ELEMENTARE  $G(j\omega) = (1 - j\omega T)^{-1}$   
(POLO REALE A FASE NON MINIMA)**

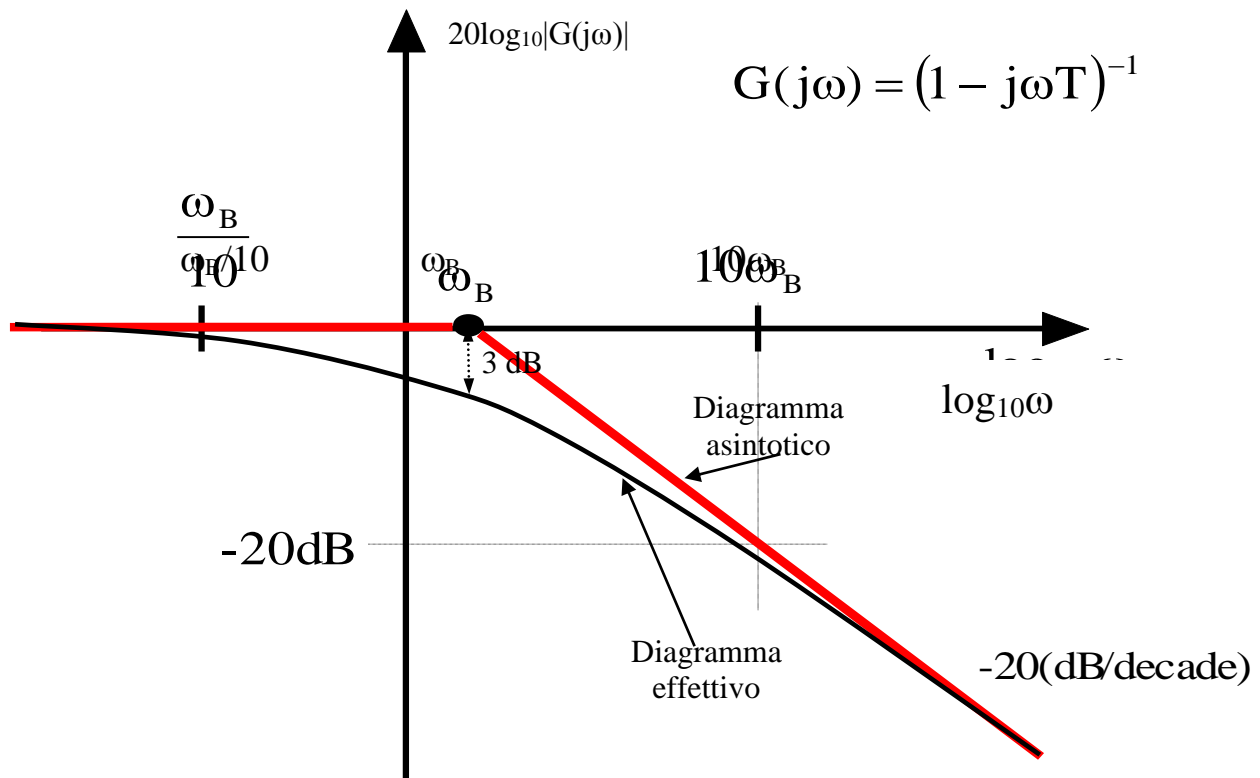
Consideriamo ora la funzione di risposta armonica con  $T > 0$ :

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 - j\omega T)}$$

corrispondente ad un polo reale positivo. Il modulo della funzione è

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 - j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

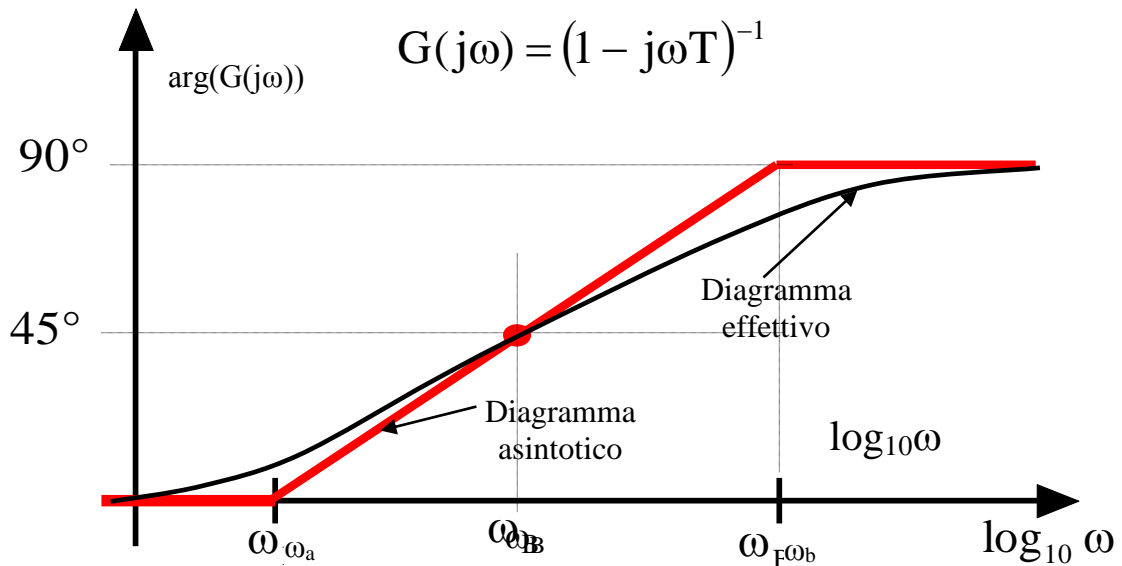
che coincide con il modulo della funzione di risposta armonica relativa ad un polo a fase minima. Quindi anche i diagrammi di Bode delle due funzioni, rispettivamente asintotici ed effettivi, coincidono.



Passiamo ora al diagramma delle fasi. Si ha:

$$\arg G(j\omega) = -\arg[1 - j\omega T] = \arctg(\omega T)$$

che coincide con la fase della funzione di risposta armonica con zero a fase minima. Abbiamo quindi i seguenti diagrammi asintotico ed effettivo.



**SISTEMA ELEMENTARE  $G(j\omega)=(1-j\omega T)$   
(ZERO REALE A FASE NON MINIMA)**

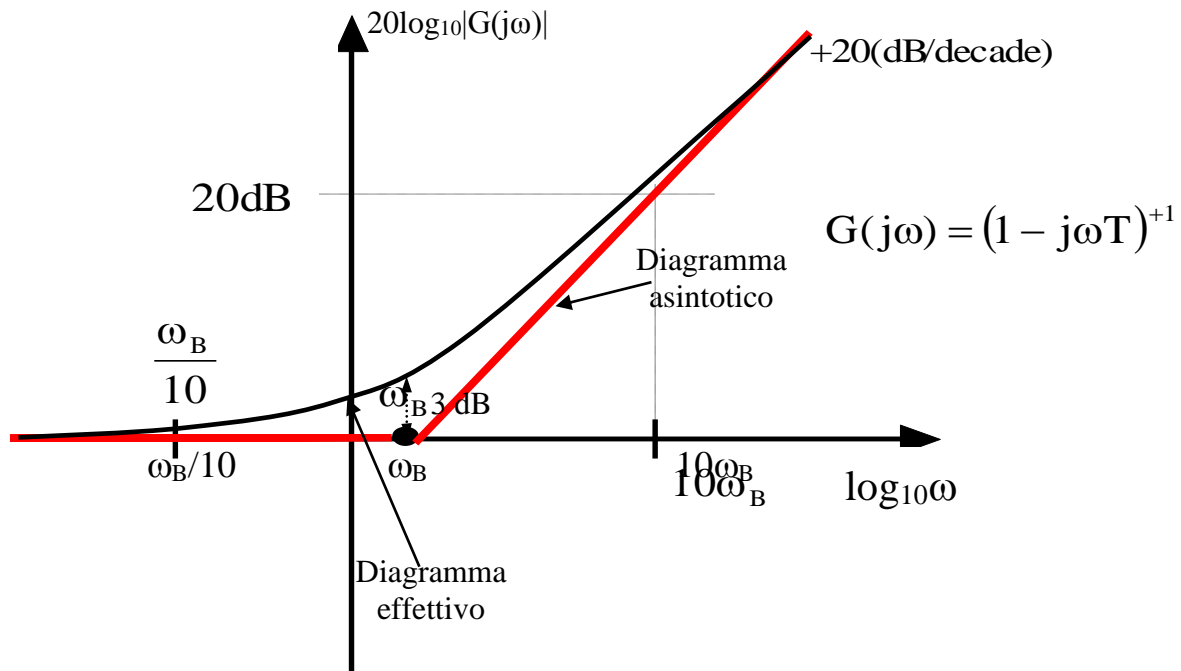
Consideriamo ora la funzione di risposta armonica con  $T>0$ :

$$G(j\omega) = 1 - j\omega T,$$

corrispondente ad uno zero reale positivo. Il modulo della funzione è

$$|G(j\omega)| = |1 - j\omega T| = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

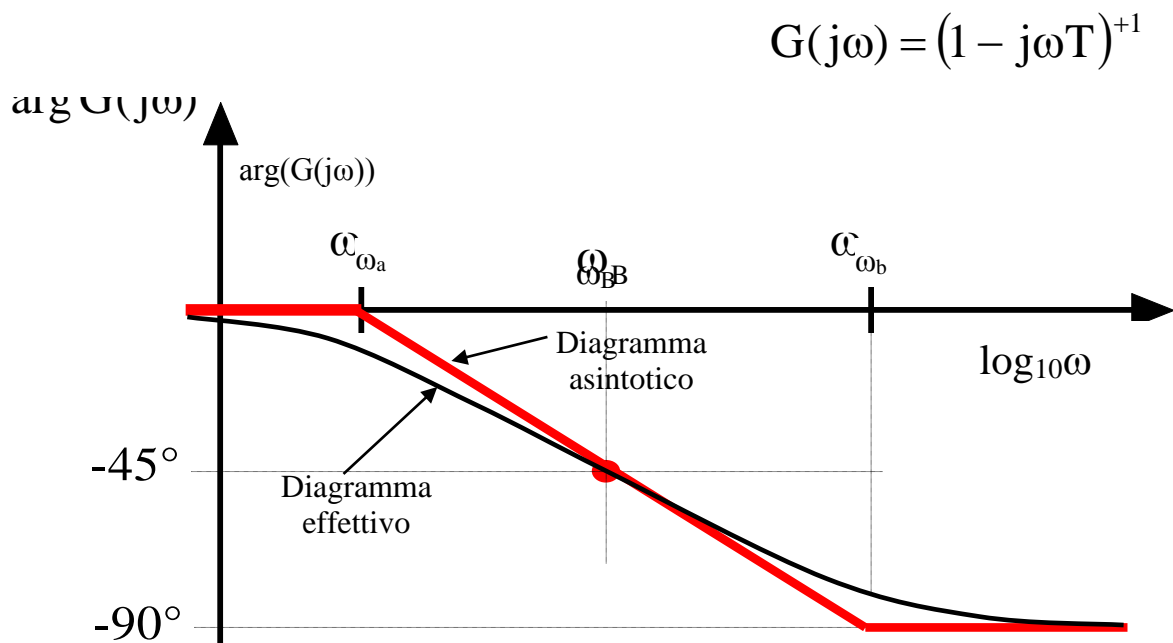
che coincide con il modulo della funzione di risposta armonica relativa ad uno zero a fase minima. Quindi anche i diagrammi asintotico ed effettivo coincidono.



Passiamo ora al diagramma delle fasi. Si ha:

$$\arg G(j\omega) = \arg[1 - j\omega T] = -\arctg(\omega T)$$

che coincide con la fase della funzione di risposta armonica con polo a fase minima. Abbiamo quindi i seguenti diagrammi asintotico ed effettivo.



In conclusione, una funzione elementare che presenta un polo o uno zero reale ha un diagramma di Bode asintotico dei moduli costituito dalla semiretta orizzontale a 0 dB fino alla pulsazione di break, la quale è pari all'inverso della costante di tempo in modulo, e da una retta a pendenza -20 dB/decade nel caso di un polo, e +20 dB/decade nel caso di uno zero.

Inoltre, una funzione elementare che presenta un polo o uno zero reale ha un diagramma di Bode asintotico delle fasi che è una spezzata. Esso è dato da una semiretta orizzontale di ordinata 0° fino alla prima pulsazione ottenuta da quella di break con la regola del 4.81 (5), da una retta orizzontale di ordinata -90° per poli a fase minima e zeri a fase non minima (+90° per poli a fase non minima e zeri a fase minima), e dal segmento congiungente le due pulsazioni ottenute con la regola del 4.81 (5), il quale ha pendenza negativa nel primo caso e positiva nel secondo.

### ESEMPIO (RETE RITARDATRICE)

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \quad \text{con } \tau=0.1 \text{ e } \alpha=0.1.$$

La funzione di risposta armonica associata vale:

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\alpha\tau\omega}{1 + j\tau\omega}.$$

La funzione di risposta armonica è costituita dalle seguenti funzioni elementari:

$$G_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega} \quad \text{e} \quad G_2(j\omega) = 1 + j\alpha\tau\omega.$$

Vediamo il diagramma di Bode dei moduli. Il modulo della funzione vale:

$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{1 + j\alpha\tau\omega}{1 + j\tau\omega}\right| = 20\log_{10}\frac{\sqrt{1 + \alpha^2\tau^2\omega^2}}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}.$$

Si hanno due pulsazioni di break, quella del primo contributo, pari a  $\omega_1 = \frac{1}{\tau} = 10$  e quella del secondo contributo, che vale  $\omega_2 = \frac{1}{\alpha\tau} > \omega_1$ , da cui  $\omega_2 = 100$ .

Non essendoci poli nell'origine ed essendo il guadagno unitario, il diagramma di Bode asintotico dei moduli vale 0 dB fino alla prima pulsazione di break  $\omega_1 = \frac{1}{\tau} = 10$ . Da questa pulsazione in poi il diagramma procede con pendenza di -20 dB/decade sino alla successiva ed ultima pulsazione di break  $\omega_2 = 100$ , dove l'ampiezza vale -20 dB. Da questo punto in poi il diagramma asintotico rimane costante al valore di  $20\log_{10}\alpha = -20$  dB. Infatti il modulo della funzione di risposta armonica per pulsazioni  $\omega \rightarrow \infty$  vale proprio  $\alpha$ .

Passiamo al diagramma di Bode delle fasi. La fase della funzione vale:

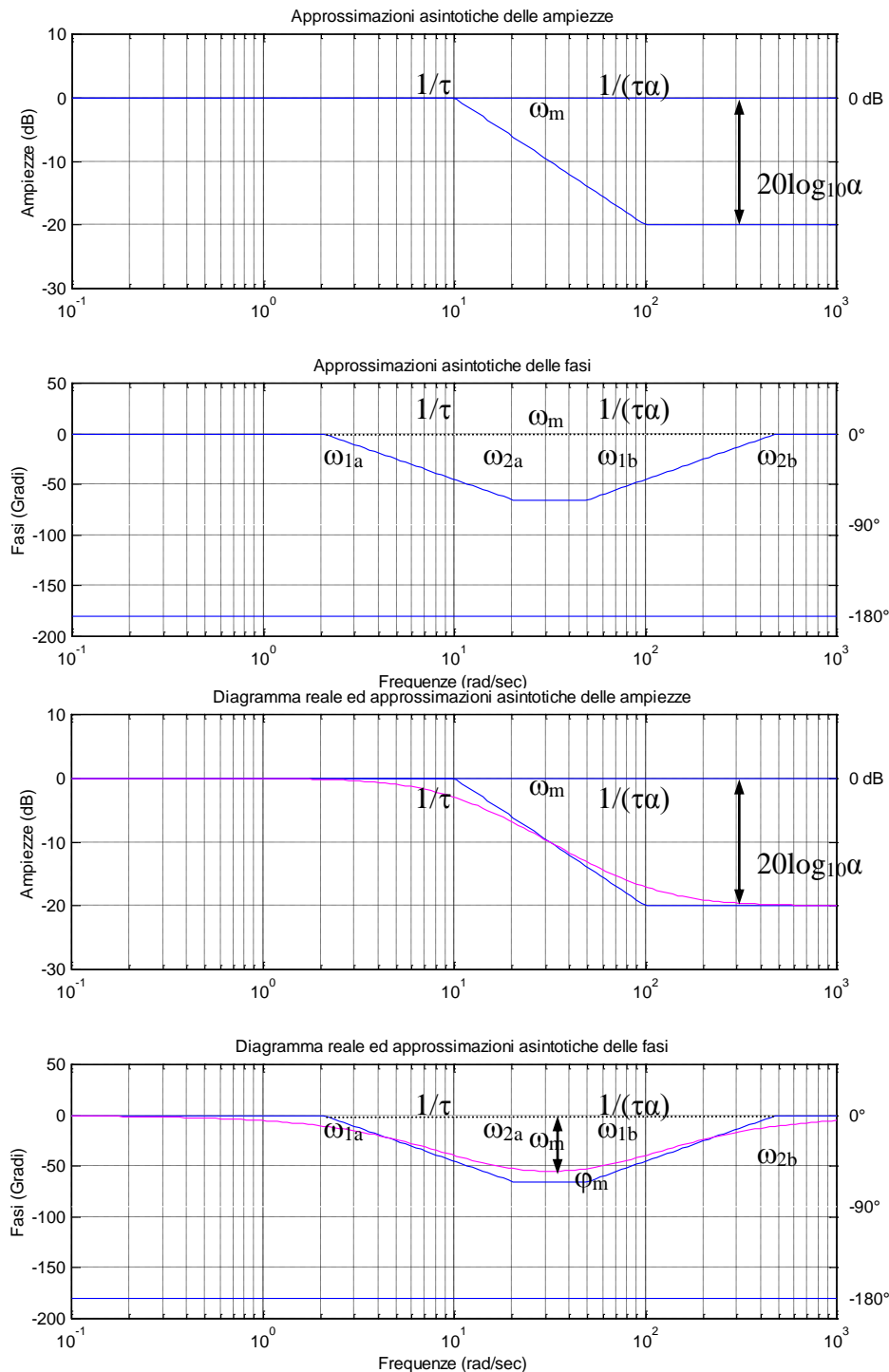
$$\arg(G(j\omega)) = \arg\left(\frac{1 + j\alpha\tau\omega}{1 + j\tau\omega}\right) = \arctg(\alpha\tau\omega) - \arctg(\tau\omega).$$

Si hanno quattro pulsazioni di break: quelle del primo contributo, pari a  $\omega_{1a} = \frac{1}{4.81\tau}$  e  $\omega_{1b} = \frac{4.81}{\tau}$ , e quelle del secondo contributo, che valgono  $\omega_{2a} = \frac{1}{4.81\alpha\tau}$  e  $\omega_{2b} = \frac{4.81}{\alpha\tau}$ . Con  $\alpha = 0.1$  e  $\tau = 0.1$  si ha:  $\omega_{1a} \approx 2.079$ ,  $\omega_{1b} = 48.1$ ,  $\omega_{2a} \approx 20.79$  e  $\omega_{2b} = 481$ .

Non essendoci poli nell'origine ed essendo il guadagno positivo, il diagramma di Bode asintotico delle fasi vale  $0^\circ$  fino alla prima pulsazione di break  $\omega_{1a} \approx 2.079$ . Da questa pulsazione in poi il diagramma procede con andamento monotono decrescente per via dell'influenza del polo, passando per  $-45^\circ$  in  $\omega_1 = \frac{1}{\tau}$  sino alla successiva pulsazione di break  $\omega_{2a} \approx 20.79$ , dove interviene il contributo dello zero. Perciò da questo punto il diagramma asintotico rimane costante, sino alla seconda pulsazione di break associata al polo  $\omega_{1b} = 48.1$ . Da questo punto in poi termina la variazione del contributo di fase del polo e il diagramma ha fase crescente, sino all'ultima pulsazione di break delle fasi  $\omega_{2b} = 481$ . Da questo



punto in poi il diagramma procede con fase  $0^\circ$ . Infatti la fase della funzione di risposta armonica per pulsazioni  $\omega \rightarrow \infty$  è nulla.



Le figure precedenti riportano sia il diagramma dei moduli che quello delle fasi asintotico e reale, tracciati con il software di calcolo Matlab per  $\alpha=0.1$  e  $\tau=0.1$ .

In definitiva la rete ritardatrice presenta sempre un ritardo di fase, da cui il suo nome. Il ritardo massimo  $\varphi_m$ , inferiore in modulo a  $90^\circ$ , si ha nella media geometrica tra il polo e lo zero:

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}.$$

Calcoliamo ora il ritardo massimo:

$$\begin{aligned} G(j\omega_m) &= \frac{1 + j\alpha\tau\omega_m}{1 + j\tau\omega_m} = \frac{1 + j\alpha\tau \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}}{1 + j\tau \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}} = \frac{1 + j\sqrt{\alpha}}{1 + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \frac{(1 + j\sqrt{\alpha})\left(1 - j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)}{1 + \frac{1}{\alpha}} = \\ &= \frac{1 - j\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + j\sqrt{\alpha} + 1}{1 + \frac{1}{\alpha}} = \frac{2 + j\left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)}{1 + \frac{1}{\alpha}} = \frac{2 + j\sqrt{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{1 + \frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\varphi_m = \angle G(j\omega_m) = \arctg \frac{\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)}{2\alpha}$$

da cui si ottiene

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{(\alpha - 1)}{2\sqrt{\alpha}}$$

con  $-\pi/2 < \varphi_m < 0$  e quindi  $\sin \varphi_m < 0$  e  $\cos \varphi_m > 0$ . Perciò

$$\frac{\sin \varphi_m}{\cos \varphi_m} = \frac{(\alpha - 1)}{2\sqrt{\alpha}}$$

da cui si ha

$$\frac{\sin \varphi_m}{\sqrt{1 - (\sin \varphi_m)^2}} = \frac{(\alpha - 1)}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Quindi risulta

$$\frac{\sin^2 \varphi_m}{1 - \sin^2 \varphi_m} = \frac{(\alpha - 1)^2}{4\alpha}$$

ovvero

$$(4\alpha + (\alpha - 1)^2) \sin^2 \varphi_m = (\alpha - 1)^2$$

per cui si ha

$$\sin^2 \varphi_m = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha + 1)^2}$$

ed in definitiva, trattandosi di un ritardo (ossia di una fase negativa), risulta:

$$\varphi_m = -\arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

### **ESEMPIO (RETE ANTICIPATRICE)**

Tracciare i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento

$$G(s) = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \text{ con } \tau=0.1 \text{ e } \alpha=0.1.$$

La funzione di risposta armonica associata vale:

$$G(j\omega) = \alpha \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}.$$

La funzione di risposta armonica è costituita dalle seguenti funzioni elementari:

$$G_1(j\omega) = \alpha, \quad G_2(j\omega) = 1 + j\tau\omega \quad \text{e} \quad G_3(j\omega) = \frac{1}{1 + j\alpha\tau\omega}.$$

Vediamo il diagramma di Bode dei moduli. Il modulo della funzione vale:

$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\alpha \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}\right| = 20\log_{10}\alpha \frac{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2\tau^2\omega^2}}.$$

Il primo contributo fornisce in termini di fase un valore in dB negativo pari a  $-20\log_{10}\frac{1}{\alpha}$ , essendo  $0 < \alpha < 1$ . In particolare, per  $\alpha=0.1$  tale contributo vale -20 dB.

Si hanno poi due pulsazioni di break dei moduli: quella del secondo contributo, pari a  $\omega_1 = \frac{1}{\tau}$  e quella del terzo contributo, che vale  $\omega_2 = \frac{1}{\alpha\tau} > \omega_1$ . Per  $\alpha=0.1$  e  $\tau=0.1$  si ha  $\omega_1=10$  e  $\omega_2=100$ .

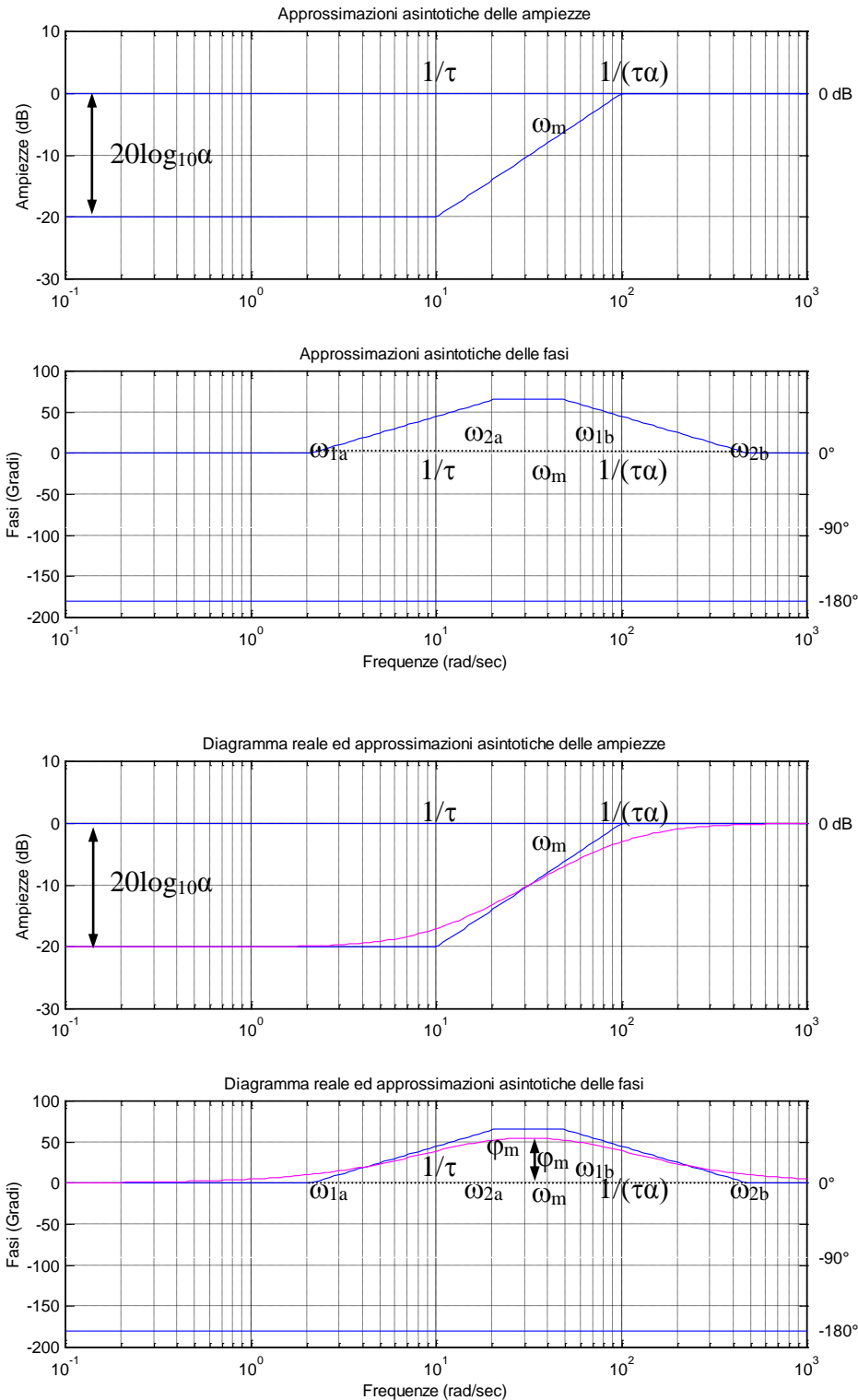
Non essendoci poli nell'origine ed essendo il guadagno pari ad  $\alpha=0.1$ , con  $20\log_{10}\alpha=-20\text{dB}$ , il diagramma di Bode asintotico dei moduli vale -20 dB fino alla prima pulsazione di break  $\omega_1 = \frac{1}{\tau} = 10$ . Da questa pulsazione in poi il diagramma procede con pendenza di +20 dB/decade per la presenza dello zero, sino alla successiva ed ultima pulsazione di break  $\omega_{B2}=100$ , dove l'ampiezza vale 0 dB. Da questo punto in poi il diagramma asintotico, per via del contributo del polo, rimane costante a 0 dB. Infatti il modulo della funzione di risposta armonica per pulsazioni  $\omega \rightarrow \infty$  vale proprio 1.

Passiamo al diagramma di Bode delle fasi. La fase della funzione vale:

$$\arg(G(j\omega)) = \arg\left(\alpha \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}\right) = \arctg(\tau\omega) - \arctg(\alpha\tau\omega).$$

Si hanno quattro pulsazioni di break delle fasi: quelle del primo contributo, pari a  $\omega_{1a} = \frac{1}{4.81\tau}$  e  $\omega_{1b} = \frac{4.81}{\tau}$ , e quelle del secondo contributo, che valgono

$\omega_{2a} = \frac{1}{4.81\alpha\tau}$  e  $\omega_{2b} = \frac{4.81}{\alpha\tau}$ . Con  $\alpha=0.1$  e  $\tau=0.1$  si ha:  $\omega_{1a} \approx 2.079$ ,  $\omega_{1b} = 48.1$ ,  $\omega_{2a} \approx 20.79$  e  $\omega_{2b} = 481$ .



Le figure precedenti riportano sia il diagramma dei moduli che quello delle fasi asintotico e reale, tracciati con il software di calcolo Matlab per  $\alpha=0.1$  e  $\tau=0.1$ .

Non essendoci poli nell'origine ed essendo il guadagno positivo, il diagramma di Bode asintotico delle fasi vale  $0^\circ$  fino alla prima pulsazione di break  $\omega_{1a} \approx 2.079$ . Da questa pulsazione in poi il diagramma procede con andamento monotono crescente per via dell'influenza dello zero, passando per  $+45^\circ$  in  $\omega_1 = \frac{1}{\tau}$  sino alla successiva pulsazione di break  $\omega_{2a} \approx 20.79$ , dove interviene il contributo del polo. Perciò da questo punto il diagramma asintotico rimane costante, sino alla seconda pulsazione di break associata allo zero  $\omega_{1b} = 48.1$ . Da questo punto in poi termina la variazione del contributo di fase dello zero e il diagramma ha fase decrescente, sino all'ultima pulsazione di break delle fasi  $\omega_{2b} = 481$ . Da questo punto in poi il diagramma procede con fase  $0^\circ$ . Infatti la fase della funzione di risposta armonica per pulsazioni  $\omega \rightarrow \infty$  è nulla.

In definitiva la rete anticipatrice presenta sempre un anticipo di fase, da cui il suo nome. L'anticipo massimo  $\varphi_m$ , inferiore a  $90^\circ$ , si ha nella media geometrica tra lo zero e il polo:

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}.$$

Calcoliamo ora l'anticipo massimo:

$$\begin{aligned} G(j\omega_m) &= \alpha \frac{1 + j\tau\omega_m}{1 + j\alpha\tau\omega_m} = \alpha \frac{1 + j\tau \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}}{1 + j\alpha\tau \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}} = \frac{1 + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\sqrt{\alpha}} = \frac{\left(1 + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)(1 - j\sqrt{\alpha})}{1 + \alpha} = \\ &= \frac{1 - j\sqrt{\alpha} + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + 1}{1 + \alpha} = \frac{2 - j\left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)}{1 + \alpha} = \frac{2 - j\sqrt{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{1 + \alpha}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\varphi_m = \angle G(j\omega_m) = \arctg \frac{\sqrt{\alpha}(1 - \alpha)}{2\alpha}$$

da cui si ha

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{(1-\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}$$

con  $0 < \varphi_m < \pi/2$  e quindi  $\sin \varphi_m > 0$  e  $\cos \varphi_m > 0$ . Perciò risulta

$$\frac{\sin \varphi_m}{\cos \varphi_m} = \frac{(1-\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}$$

da cui si ha

$$\frac{\sin \varphi_m}{\sqrt{1 - (\sin \varphi_m)^2}} = \frac{(1-\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Quindi risulta

$$\frac{\sin^2 \varphi_m}{1 - \sin^2 \varphi_m} = \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}$$

ovvero

$$\left(4\alpha + (\alpha - 1)^2\right) \sin^2 \varphi_m = (1-\alpha)^2$$

per cui si ha

$$\sin^2 \varphi_m = \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}$$

ed in definitiva, trattandosi di un anticipo (ossia di una fase positiva), si ottiene:

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

### ESEMPIO (RETE RITARDO-ANTICIPO)

Tracciare i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \frac{\tau_1}{\alpha} s)(1 + \alpha \tau_2 s)} \quad \text{con } \alpha=0.5, \tau_1=0.5, \tau_2=0.1.$$

La funzione di risposta armonica associata vale:

$$G(j\omega) = \frac{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}{(1 + \frac{\tau_1}{\alpha} j\omega)(1 + \alpha \tau_2 j\omega)}.$$

La funzione di risposta armonica è costituita dalle seguenti funzioni elementari:

$$G_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\tau_1}{\alpha}\omega}, \quad G_2(j\omega) = 1 + j\tau_1\omega, \quad G_3(j\omega) = 1 + j\tau_2\omega \quad \text{e} \quad G_4(j\omega) = \frac{1}{1 + j\alpha\tau_2\omega},$$

cui corrispondono quattro pulsazioni di break dei moduli:  $\omega_1 = \frac{\alpha}{\tau_1}$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{\tau_1}$ ,  $\omega_3 = \frac{1}{\tau_2}$

e  $\omega_4 = \frac{1}{\alpha\tau_2}$ . Poiché  $\alpha=0.5$ ,  $\tau_1=0.5$ ,  $\tau_2=0.1$ , si ha  $\omega_1=1$ ,  $\omega_2=2$ ,  $\omega_3=10$  e  $\omega_4=20$ .

Non essendoci poli nell'origine ed essendo il guadagno unitario, il diagramma di Bode asintotico dei moduli vale 0 dB fino alla prima pulsazione di break  $\omega_1=1$ . Da questa pulsazione in poi il diagramma procede con pendenza di -20 dB/decade sino alla successiva pulsazione di break  $\omega_2=2$ , dove l'ampiezza vale -6 dB, poiché tra le due pulsazioni intercorre una ottava e la pendenza di -20 dB/decade corrisponde alla pendenza di -6 dB/ottava. Da questo punto il diagramma asintotico rimane costante fino alla successiva pulsazione di break  $\omega_3=10$ , dove interviene il secondo zero. Quindi il diagramma procede con pendenza di +20 dB/decade, sino all'ultima pulsazione di break  $\omega_4=20$ , dovuta al polo, in cui il diagramma rimane a 0 dB, poiché il modulo della funzione di risposta armonica per pulsazioni  $\omega \rightarrow \infty$  vale proprio 1.

Passiamo al diagramma di Bode delle fasi. La fase della funzione vale:



$$\begin{aligned}\arg(G(j\omega)) &= \arg\left(\frac{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}{(1 + \frac{\tau_1}{\alpha} j\omega)(1 + \alpha \tau_2 j\omega)}\right) = \\ &= \arctg(\tau_1 \omega) + \arctg(\tau_2 \omega) - \arctg\left(\frac{\tau_1 \omega}{\alpha}\right) - \arctg(\alpha \tau_2 \omega)\end{aligned}$$

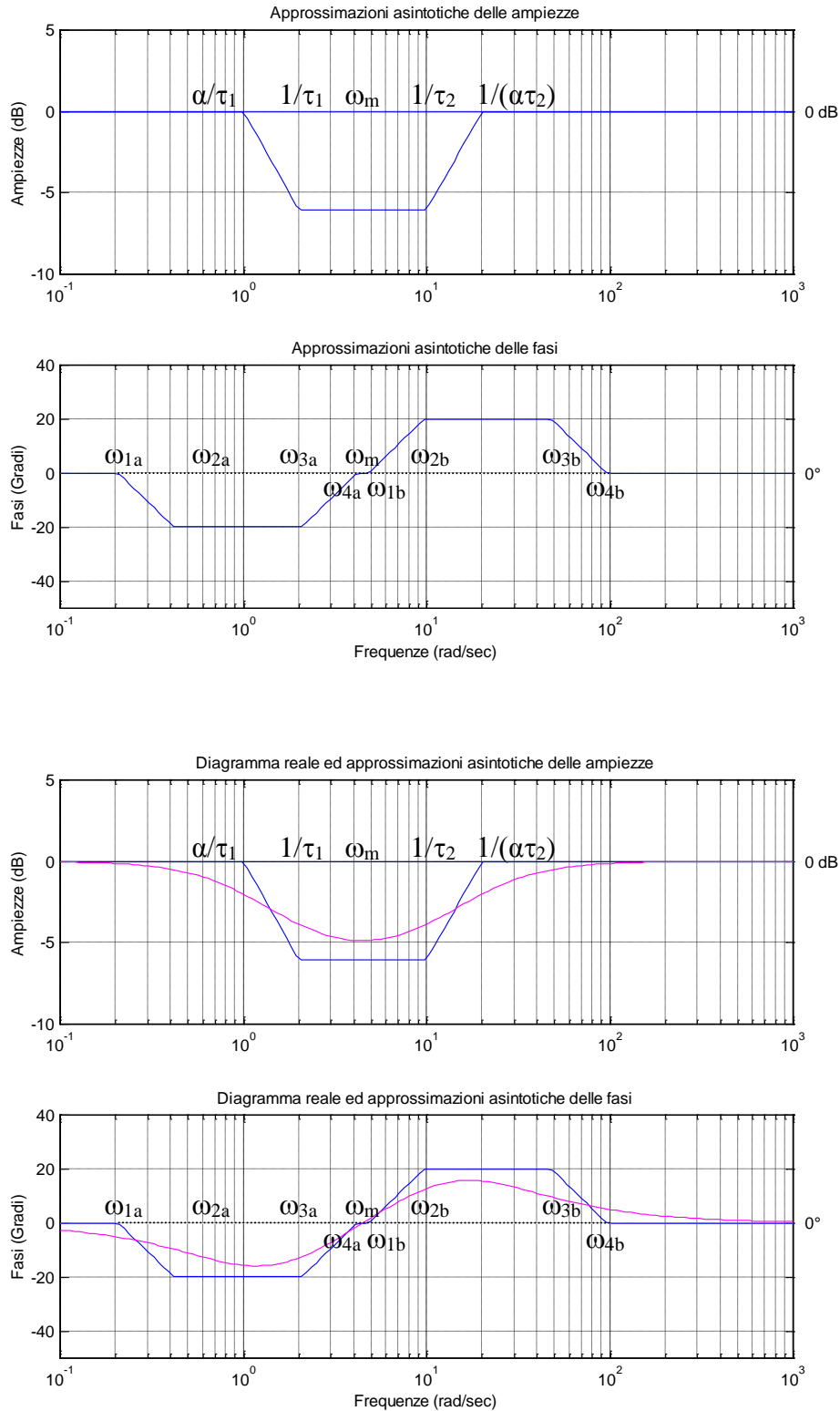
Si hanno quindi otto pulsazioni di break delle fasi: quelle del primo contributo dato dal primo polo, pari a  $\omega_{1a} = \frac{\alpha}{4.81\tau_1}$  e  $\omega_{1b} = \frac{4.81\alpha}{\tau_1}$ , quelle del secondo contributo dato dal primo zero, che valgono  $\omega_{2a} = \frac{1}{4.81\tau_1}$  e  $\omega_{2b} = \frac{4.81}{\tau_1}$ , quelle del secondo zero, date da  $\omega_{3a} = \frac{1}{4.81\tau_2}$  e  $\omega_{3b} = \frac{4.81}{\tau_2}$  e quelle del secondo polo, che sono  $\omega_{4a} = \frac{1}{4.81\alpha\tau_2}$  e  $\omega_{4b} = \frac{4.81}{\alpha\tau_2}$ . In particolare, con  $\alpha=0.5$ ,  $\tau_1=0.5$  e  $\tau_2=0.1$  si ha:  $\omega_{1a} \approx 0.2079$ ,  $\omega_{1b} = 4.81$ ,  $\omega_{2a} \approx 0.4158$ ,  $\omega_{2b} = 9.62$ ,  $\omega_{3a} \approx 2.0790$ ,  $\omega_{3b} = 48.1$ ,  $\omega_{4a} \approx 4.158$ ,  $\omega_{4b} = 96.2$ .

Non essendoci poli nell'origine ed essendo il guadagno positivo, il diagramma di Bode asintotico delle fasi vale  $0^\circ$  fino alla prima pulsazione di break  $\omega_{1a} \approx 0.2079$ . Da questa pulsazione in poi il diagramma procede come quello di una rete ritardatrice. In particolare, nella pulsazione media geometrica tra i due zeri

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \frac{1}{\sqrt{0.05}} \approx 4.47 \text{ rad/sec}$$

la fase è nulla. Da questo punto in poi termina il contributo della ritardatrice e comincia quello dell'anticipatrice, sino all'ultima pulsazione di break delle fasi  $\omega_{4b} = 96.2$ . Oltre tale punto il diagramma procede con fase  $0^\circ$ . Infatti la fase della funzione di risposta armonica per pulsazioni  $\omega \rightarrow \infty$  è nulla.

Le figure successive riportano sia il diagramma dei moduli che quello delle fasi asintotico e reale, tracciati con il software di calcolo Matlab.



**ESEMPIO**

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{30}{(1 - 0.5s)(1 + 0.1s)}.$$

Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{30}{(1 - 0.5j\omega)(1 + 0.1j\omega)}.$$

Pertanto la funzione di risposta armonica è costituita da un guadagno elementare pari a  $20\log_{10}30 \approx +30$  dB, da una seconda funzione elementare polo semplice a fase non minima in  $+2$  con pulsazione di break  $\omega_1=2$  rad/sec e da una terza funzione elementare polo semplice a fase minima in  $-10$  con pulsazione di break  $\omega_2=10$  rad/sec.

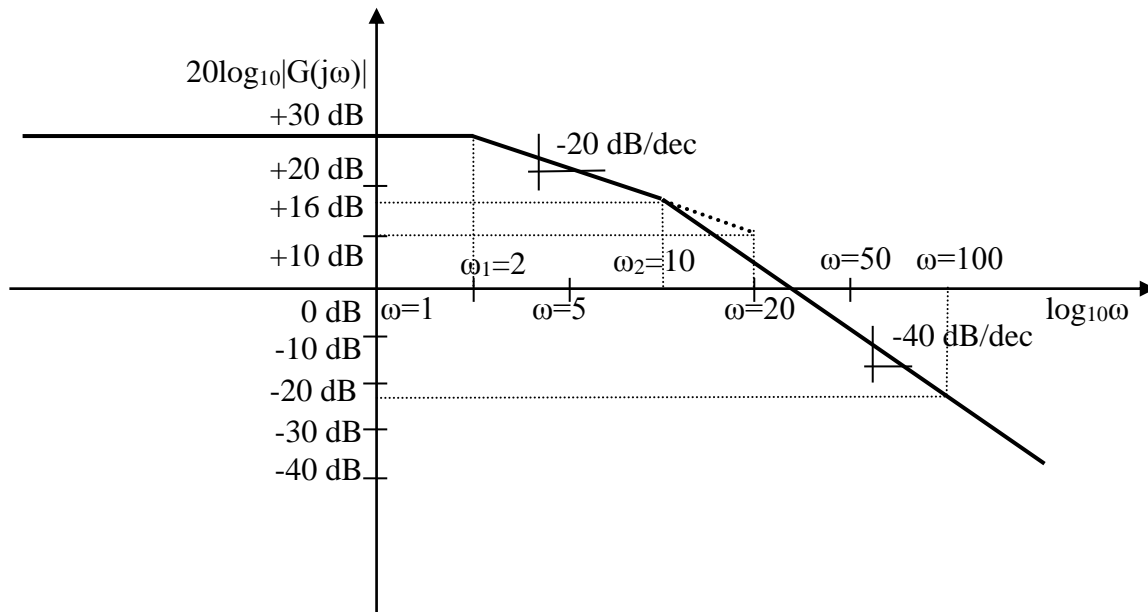
Vediamo il diagramma di Bode dei moduli. Il modulo della funzione vale:

$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{30}{(1 - 0.5j\omega)(1 + j0.1\omega)}\right| = 20\log_{10}\frac{30}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4}}\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}}}.$$

Pertanto nel diagramma di Bode asintotico dei moduli per pulsazioni inferiori a  $\omega_2$  il contributo del polo a fase minima è influente (avendo modulo pari sempre a 0 dB per tali pulsazioni) ed esso interviene solo a partire da pulsazioni maggiori (contribuendo con una pendenza di -20 dB/dec).

In definitiva per  $\omega < 10$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico dei moduli è quello del polo con pulsazione di break  $\omega_1=1$  rad/sec traslato del contributo di 30 dB dovuto al guadagno (ovvero è pari a 30 dB sino a  $\omega_1$  e da tale pulsazione è una retta di pendenza -20 dB/dec che giungerebbe sino ad un'ordinata di 10 dB una decade dopo, ovvero in  $\omega=20$  rad/sec, e quindi giunge ad un'ordinata di 16 dB in  $\omega_2=10$  rad/sec essendo questa pulsazione una ottava prima dei 20 rad/sec); inoltre per  $\omega > 10$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico dei moduli è una retta di pendenza -40 dB/dec che quindi giunge sino ad un'ordinata di -24 dB una decade dopo, ovvero nel valore  $\omega=100$  rad/sec.

Nella figura seguente è rappresentato il diagramma di Bode asintotico delle ampiezze del sistema.



Vediamo ora il diagramma di Bode delle fasi. L'argomento della funzione vale:

$$\arg G(j\omega) = \arg \left( \frac{30}{(1 - 0.5j\omega)(1 + j0.1\omega)} \right) = +\arctg(0.5\omega) - \arctg(0.1\omega).$$

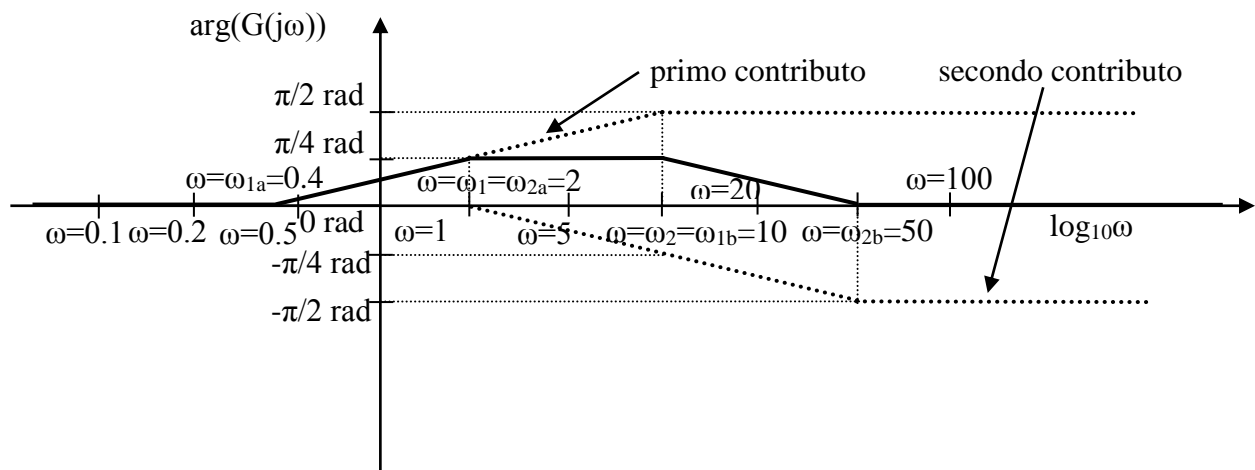
Il primo contributo è caratterizzato dalle pulsazioni di break (ottenute con la regola del 4.81 approssimata)  $\omega_{1a}=0.4$  rad/sec e  $\omega_{1b}=10$  rad/sec, mentre il secondo contributo è caratterizzato dalle pulsazioni di break (ottenute con la regola del 4.81 approssimata)  $\omega_{2a}=2$  rad/sec e  $\omega_{2b}=50$  rad/sec.

Pertanto nel diagramma di Bode asintotico delle fasi per pulsazioni inferiori a  $\omega_{2a}$  il secondo contributo è influente (essendo pari sempre a 0 rad) ed esso interviene solo a partire da pulsazioni maggiori (contribuendo con una fase complessiva alle alte pulsazioni di  $-\pi/2$  rad).

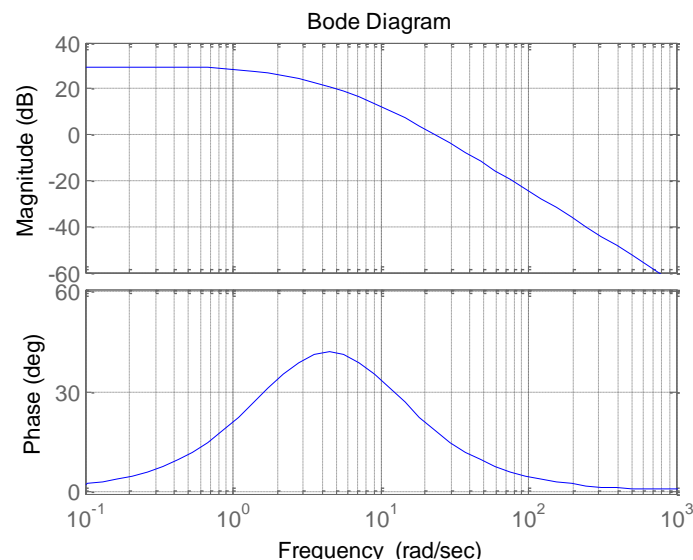
In definitiva per  $\omega < \omega_{2a}=2$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico delle fasi è dato unicamente dal primo contributo (ovvero è pari a 0 rad sino a  $\omega_{1a}=0.4$  rad/sec ed è una retta di pendenza positiva che interseca l'asse delle ascisse in  $\omega_{1a}$  e giunge sino ad un'ordinata di  $+\pi/4$  rad in  $\omega_1$  e di  $+\pi/2$  rad in  $\omega_{1b}$ ); quindi per  $\omega_{2a}=2$  rad/sec  $< \omega < \omega_{1b}=10$  rad/sec il diagramma di Bode asintotico dei moduli è dato dai due contributi e dunque è una retta orizzontale avente un'ordinata di  $+\pi/4$  rad; per  $\omega_{1b}=10$

$\text{rad/sec} < \omega < \omega_{2b} = 50 \text{ rad/sec}$  il diagramma di Bode asintotico delle fasi è dato unicamente dal secondo contributo traslato di  $+\pi/2 \text{ rad}$  (ovvero è una retta di pendenza negativa che giunge sino ad un'ordinata di  $0 \text{ rad}$  in  $\omega_{2b}$ ); per  $\omega > \omega_{2b} = 50 \text{ rad/sec}$  il diagramma continua con valore di ordinata invariata e pari a  $0 \text{ rad}$ .

Nella figura seguente è rappresentato il diagramma di Bode asintotico delle fasi del sistema.



Nella figura successiva sono rappresentati i diagrammi di Bode del sistema ottenuti in ambiente Matlab. Si osservi che in questo caso i diagrammi di Bode rappresentati sono entrambi quelli effettivi.



$$\text{SISTEMA ELEMENTARE } G(j\omega) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^{-1} \quad \text{CON } 0 \leq \delta < 1$$

**(POLI COMPLESSI E CONIUGATI A FASE MINIMA)**

Consideriamo ora la funzione di risposta armonica

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)}, \quad \text{con } 0 \leq \delta < 1 \text{ e } \omega_n > 0,$$

corrispondente ad una coppia di poli complessi e coniugati a parte reale negativa.

Il modulo della funzione è:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^2}}$$

La funzione da riportare sul diagramma dei moduli è dunque:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega} \right| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^2}} = \\ &= -20 \log_{10} \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^2} = -10 \log_{10} \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^2 \right) \end{aligned}$$

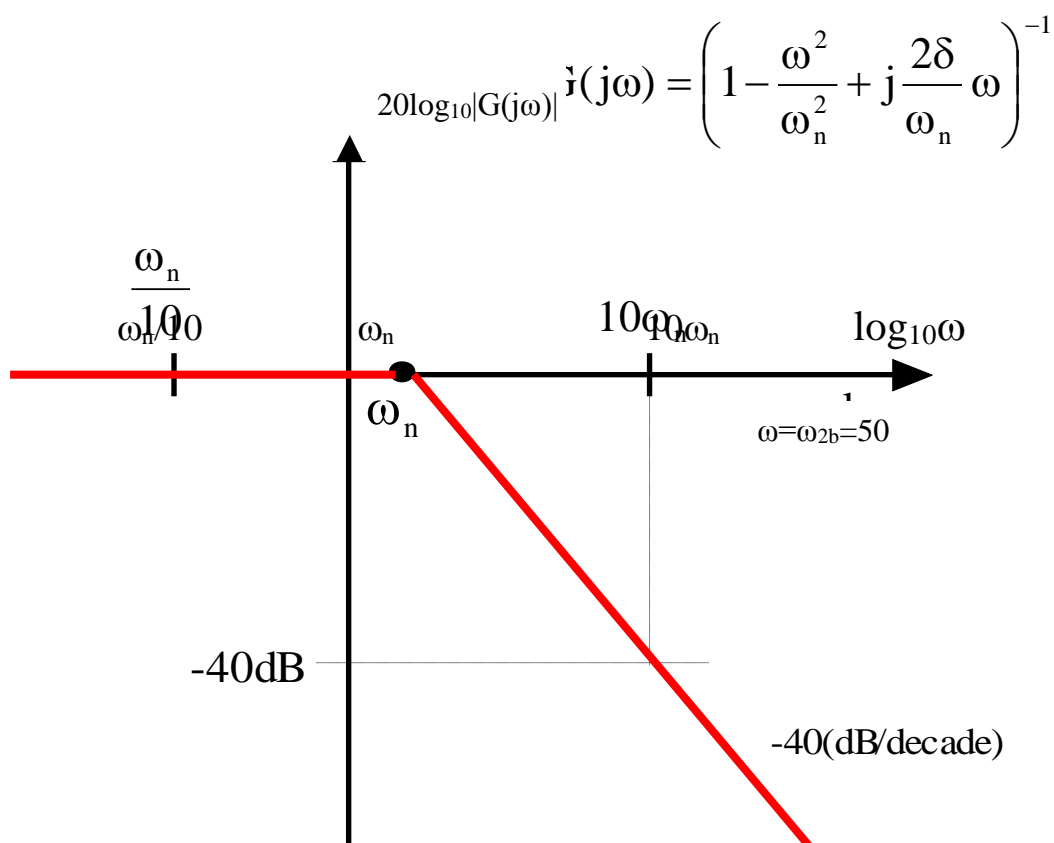
Per determinare l'andamento di questa funzione rispetto a  $\log_{10} \omega$  possiamo osservare quello che accade per  $\omega$  molto piccolo e per  $\omega$  molto grande.

$$\text{Se } \omega \ll \omega_n \rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong -10 \log_{10} 1 = 0(\text{dB}).$$

$$\text{Se } \omega \gg \omega_n \rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong -10 \log_{10} \left( \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 = -40 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n}.$$

Detta quindi  $\omega_n$  la pulsazione di break (o di rottura), si osserva che l'andamento di  $|G(j\omega)|_{dB}$  è una retta coincidente con l'asse orizzontale per  $\omega \ll \omega_n$ , mentre per  $\omega \gg \omega_n$  è una retta passante per il punto  $(0, \omega_n)$  con pendenza di -40 dB/decade. Il diagramma asintotico dei moduli si ottiene dunque semplicemente prolungando i due tratti estremi fino a congiungersi in  $\omega_n$ , come abbiamo visto per poli e zeri semplici.

Il diagramma asintotico è riportato nella figura successiva.



Si ottiene in tal modo un diagramma approssimato, che approssima il diagramma reale delle ampiezze. Tuttavia la bontà dell'approssimazione dipende dal valore del coefficiente di smorzamento dei poli.

Infatti il modulo effettivo nella pulsazione di break vale

$$\omega = \omega_n \rightarrow |G(j\omega_n)|_{\text{dB}} = -10\log_{10}(2\delta)^2 = 20\log_{10}\frac{1}{2\delta}$$

e quindi tale modulo e il corrispondente errore commesso alla pulsazione di break con il diagramma di Bode asintotico delle ampiezze dipendono dal coefficiente di smorzamento dei poli, essendo tanto più elevati quanto minore è il coefficiente di smorzamento  $\delta$ .

In particolare, per  $\delta = 1$  si ha:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}\frac{1}{2} = -20\log_{10} 2 \cong -6.0206 \text{ dB}.$$

Infatti per tale valore del coefficiente di smorzamento i poli sono reali coincidenti di valore pari all'opposto della pulsazione naturale. Pertanto il diagramma di Bode dei moduli coincide con quello ottenuto nel caso di polo a fase minima doppio con pulsazione di break pari alla pulsazione naturale, quindi presenta un errore massimo in corrispondenza della pulsazione di break pari a due volte 3dB, ovvero a 6 dB.

Invece, per  $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  si ha:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} = -10\log_{10} 2 \cong -3.0103 \text{ dB}.$$

Per tale valore del coefficiente di smorzamento, dunque, il valore dell'errore commesso nella pulsazione naturale si dimezza.

Inoltre, per  $\delta = \frac{1}{2}$  si ha:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10} 1 = 0 \text{ dB}.$$

Per tale valore del coefficiente di smorzamento, dunque, l'errore commesso confondendo il diagramma di Bode effettivo e quello asintotico nella pulsazione naturale è zero.

Ancora, per  $\delta = \frac{1}{4}$  si ha:



$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10} 2 \cong -6 \text{ dB}.$$

Si osserva che diminuendo ancora il coefficiente di smorzamento l'errore nella pulsazione di break aumenta notevolmente, sino al caso limite  $\delta = 0$  in cui risulta:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}(+\infty) = +\infty \text{ dB}.$$

Oltre al fatto che per piccoli valori del coefficiente di smorzamento  $\delta$  il diagramma asintotico si discosta molto da quello effettivo, si riscontra poi che esso non è molto fedele a quest'ultimo, perché non per tutti i valori di  $\delta$  nell'intervallo  $[0,1]$  il diagramma effettivo dei moduli è decrescente, anzi questo può presentare un massimo.

Effettuiamo la derivata del modulo  $|G(j\omega)|$  e verifichiamo se si annulla per qualche valore della pulsazione: se ciò accade il modulo effettivo della funzione di risposta armonica presenta un massimo (il modulo è una funzione sempre positiva e dunque il minimo è zero, valore che si ottiene in bassa frequenza). Osserviamo inoltre che determinare il massimo del diagramma ragionando sul modulo effettivo o sul modulo in dB è equivalente, poiché il logaritmo è una funzione monotona, dunque le due funzioni presentano lo stesso eventuale massimo. Si ha:

$$\frac{d(|G(j\omega)|)}{d\omega} = -\frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n}\omega\right)^2} \cdot \frac{\cancel{2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) \cdot \left(-2\frac{\omega}{\omega_n^2}\right) + \cancel{2}\left(\frac{2\delta}{\omega_n}\omega\right) \cdot \frac{2\delta}{\omega_n}}{\cancel{2}\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n}\omega\right)^2}}$$

quindi

$$\frac{d(|G(j\omega)|)}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow -2\omega\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + (2\delta)^2\omega = 0$$

ed escludendo il caso  $\omega=0$  si ha, dopo semplici passaggi:

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\delta^2.$$

In definitiva, la funzione effettiva  $|G(j\omega)|_{dB}$  presenta un massimo alla pulsazione

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}.$$

Si osserva che tale pulsazione, in cui si ha un massimo del modulo della funzione di risposta armonica, detta pulsazione di risonanza, esiste solo per  $0 \leq \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . In particolare, sostituendo il valore della pulsazione di risonanza nell'espressione del modulo si ottiene il valore del cosiddetto picco di risonanza (l'ampiezza del massimo modulo):

$$\begin{aligned} M_R = |G(j\omega_R)| &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_R^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n} \omega_R\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\delta^2)\right)^2 + \left(2\delta\sqrt{1 - 2\delta^2}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2(1 - 2\delta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{4\delta^2 - 4\delta^4}} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}} \end{aligned}$$

che in dB vale

$$M_{RdB} = -20 \log_{10} \left( 2\delta\sqrt{1 - \delta^2} \right).$$

Quindi per  $0 \leq \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$  il diagramma asintotico e quello effettivo sono piuttosto diversi, e il massimo errore si ottiene proprio nella pulsazione di risonanza  $\omega_R$ . Evidentemente, al diminuire di  $\delta$ , tale punto di massimo si approssima al valore  $\omega_n$ , confermando una volta di più la differenza tra il diagramma reale e quello asintotico. In particolare, per  $\delta=0$  (poli immaginari puri) si ha:

$$\omega_R = \omega_n, \quad M_R = +\infty.$$

Possiamo allora affermare quanto segue: se  $0 \leq \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , la funzione  $|G(j\omega)|_{dB}$  presenta un andamento reale diverso (anche notevolmente, se  $\delta$  è molto piccolo) da quello asintotico, quindi quest'ultimo va corretto, utilizzando il picco e la pulsazione di risonanza effettivi. Se invece risulta  $\delta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , allora la funzione  $|G(j\omega)|_{dB}$  non presenta un massimo e il diagramma asintotico è accettabile (in quanto  $|G(j\omega)|_{dB}$  presenta un andamento monotono decrescente come il diagramma asintotico), con un errore compreso tra 3 dB (per  $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ) e 6 dB (per  $\delta=1$ ).

Evidentemente, qualora il picco di risonanza sia presente, ossia per  $0 \leq \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , il diagramma reale, avendo un massimo, presenta anche una intersezione con l'asse delle pulsazioni per un valore  $\omega_0$  detto pulsazione di crossover delle ampiezze. Si ha infatti:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 0 \Leftrightarrow |G(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow |G(j\omega)| = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n}\omega\right)^2 = 1$$

ovvero per

$$1 + \frac{\omega^4}{\omega_n^4} + (4\delta^2 - 2)\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1$$

da cui

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^4} (\omega^2 + 4\delta^2 - 2\omega_n^2) = 0$$

ed escludendo il caso  $\omega=0$  si ha il seguente valore dell'intersezione del diagramma effettivo dei moduli con l'asse delle ascisse:

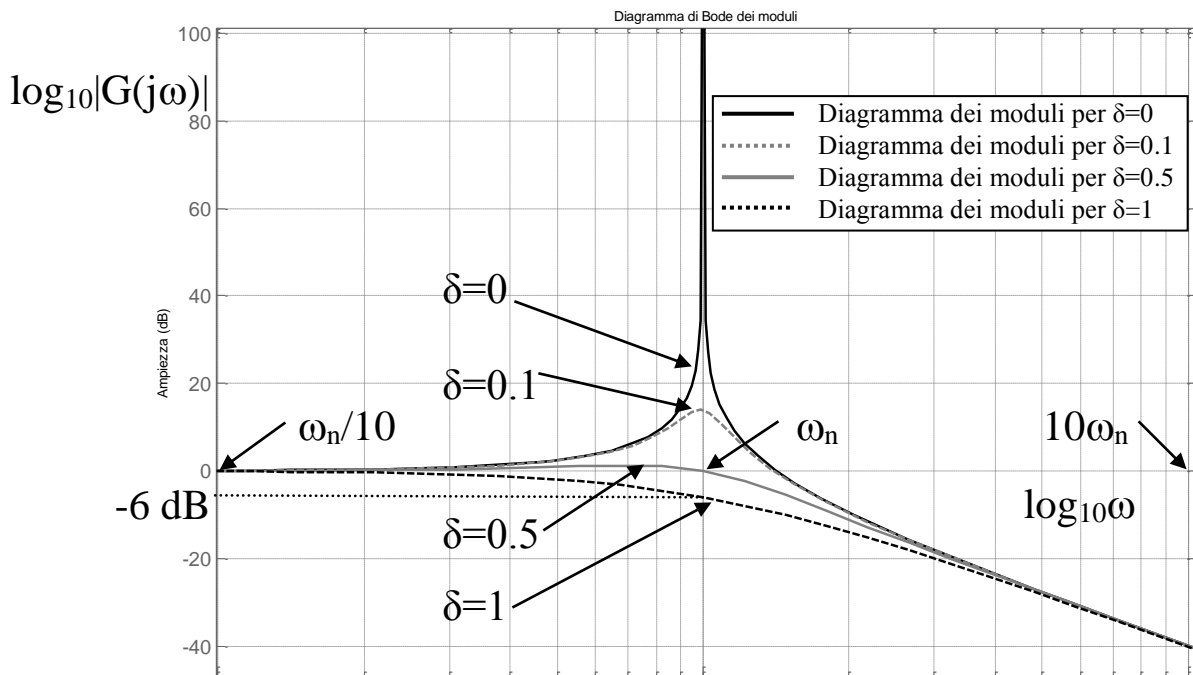
$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{2(1 - 2\delta^2)}.$$

Si ha quindi:

$\omega_0 > \omega_n$  (pulsazione di crossover dopo la pulsazione di break) se  $\delta < 0.5$

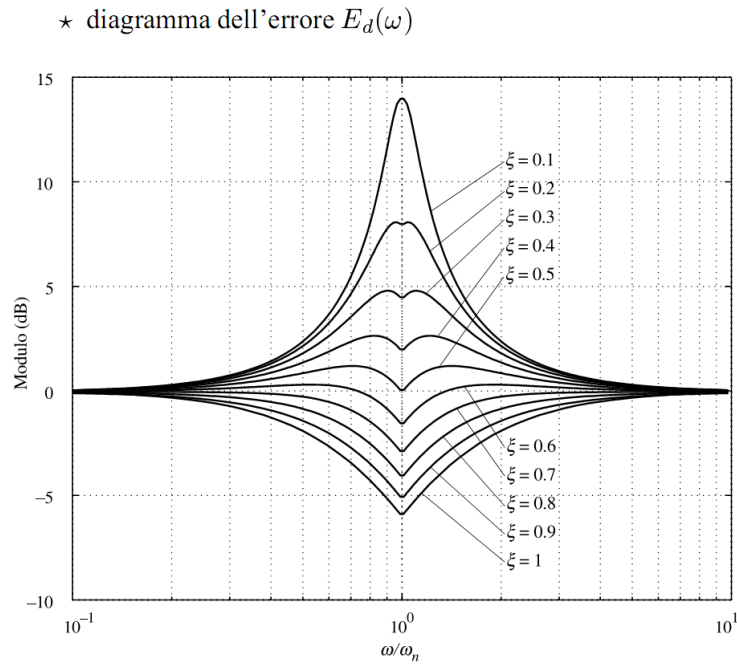
$\omega_0 = \omega_n$  (pulsazione di crossover e di break coincidenti) se  $\delta = 0.5$

$\omega_0 < \omega_n$  (pulsazione di crossover prima della pulsazione di break) se  $\delta > 0.5$ .



Riportiamo, in conclusione, nella figura precedente l'andamento della funzione  $|G(j\omega)|_{dB}$  per diversi valori del coefficiente di smorzamento  $\delta$ .

Il diagramma della funzione errore, ovvero della differenza in Decibel tra il diagramma di Bode asintotico e quello effettivo è riportato nella figura successiva, che mostra come il massimo/minimo di tale funzione si ottenga proprio nella pulsazione di break associata al polo e dipenda dal coefficiente di smorzamento (rappresentato in figura con la lettera  $\zeta$ ).



Passiamo a esaminare il diagramma di Bode delle fasi della funzione

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)}, \text{ con } 0 \leq \delta < 1 \text{ e } \omega_n > 0,$$

corrispondente ad una coppia di poli complessi e coniugati a parte reale negativa.

Si ha:

$$\arg G(j\omega) = \arg \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta\omega}{\omega_n}}.$$

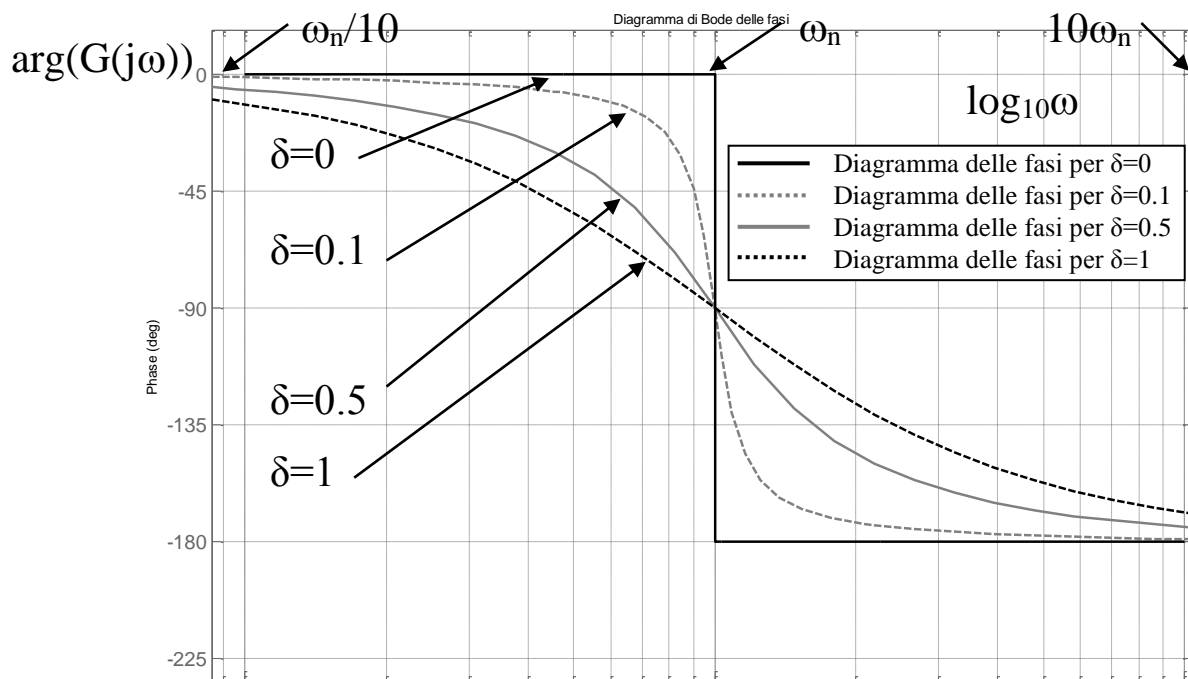
Anche la fase è quindi una funzione, oltre che della pulsazione, del coefficiente di smorzamento  $\delta$ , nonché della pulsazione naturale  $\omega_n$ . Quindi, supponendo fissata la pulsazione naturale  $\omega_n$ , si ottiene una famiglia di curve al variare di  $\delta$ . In particolare, fissata  $\omega_n$  calcoliamo  $\arg G(j\omega)$  in alcuni punti notevoli. Si ha:

$$\omega \ll \omega_n \rightarrow \arg G(j\omega) \cong -\arg \frac{1}{1 + j0} = 0^\circ;$$

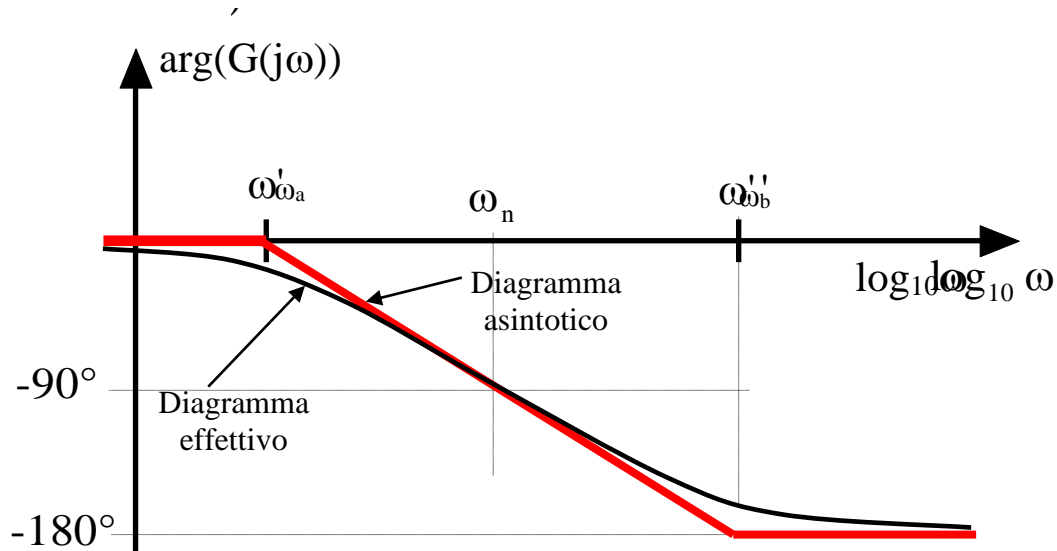
$$\omega = \omega_n \rightarrow \arg G(j\omega_n) = \arg \frac{1}{0 + j2\delta} = -\arg(j2\delta) = -90^\circ$$

$$\omega \gg \omega_n \rightarrow \arg G(j\omega) \cong \arg \frac{1}{-\frac{\omega_n^2}{\omega^2}} = \arg \left( -\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \right) = -180^\circ$$

Il corrispondente diagramma di Bode delle fasi effettivo, al variare del coefficiente di smorzamento  $\delta$ , è fatto come nella figura seguente.



Ragionando come nel caso di un polo semplice negativo, è possibile dunque costruire il diagramma di Bode asintotico delle fasi.



Infatti per determinare l'andamento del diagramma di Bode delle fasi asintotico nell'intorno della pulsazione naturale  $\omega_n$ , basta osservare che, al diminuire di  $\delta$ , le curve diventano più ripide nell'intorno della pulsazione naturale. Approssimiamo quindi il diagramma delle fasi con un segmento di pendenza pari alla tangente nel punto  $(\omega_n, -90^\circ)$ .

Calcoliamo quindi tale pendenza, che vale:

$$\begin{aligned} \frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)} \Big|_{\omega=\omega_n} &= \frac{d}{d(\log_{10} \omega)} \left[ -\arctg \left( \frac{\frac{2\delta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \right] \Big|_{\omega=\omega_n} = \\ &= \frac{d}{d\omega} \left[ -\arctg \left( \frac{\frac{2\delta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \right] \frac{d(10^{\log_{10} \omega})}{d(\log_{10} \omega)} \Big|_{\omega=\omega_n} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{1}{1 + \left( \frac{\frac{2\delta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)^2} \cdot \frac{\frac{2\delta}{\omega_n} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) - \frac{2\delta\omega}{\omega_n} \left( -\frac{2\omega}{\omega_n^2} \right)}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2} 10^{\log_{10} \omega} \cdot \log_e 10 \quad \Bigg|_{\omega=\omega_n} = \\
 &= - \frac{2\delta(\omega_n^2 - \omega^2) + 4\delta\omega^2}{\omega_n^3 \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{2\delta\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)} \omega \log_e 10 \quad \Bigg|_{\omega=\omega_n} = \\
 &= - \frac{2\delta(\omega_n^2 + \omega^2)}{\omega_n^3 \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{2\delta\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)} \omega \log_e 10 \quad \Bigg|_{\omega=\omega_n} = -\frac{1}{\delta} 2.3 = -2 \frac{1.15}{\delta}
 \end{aligned}$$

Poiché il segmento cercato passa per i punti  $(\omega_a, 0)$ ,  $(\omega_n, -90^\circ)$  e  $(\omega_b, -180^\circ)$  con pendenza  $-2.3/\delta$  rad/decade, si ha:

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{\pi}{2}}{\log_{10} \omega_n - \log_{10} \omega_a} &= \frac{\frac{\pi}{2}}{\log_{10} \omega_b - \log_{10} \omega_n} = \frac{2 \cdot 1.15}{\delta} \rightarrow \\
 \rightarrow \log_{10} \frac{\omega_n}{\omega_a} &= \log_{10} \frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{\pi\delta}{4 \cdot 1.15} = 0.683 \cdot \delta \rightarrow \frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = 10^{0.683 \cdot \delta} = 4.81^\delta
 \end{aligned}$$

Tale relazione fondamentale è detta la regola del 4.81 modificata, per il fatto che il valore notevole 4.81 è elevato al valore del coefficiente di smorzamento.



In definitiva, nota la pulsazione di break  $\omega_n$ , dividendo il valore di tale pulsazione per  $4.81^\delta$  si individua il punto  $\omega_a$  in cui il diagramma interseca l'asse delle ascisse. Analogamente, moltiplicando tale pulsazione per  $4.81^\delta$  si ottiene  $\omega_b$ , pulsazione a partire dalla quale il diagramma ha una fase pari asintoticamente a  $-180^\circ$ . Tra i valori  $\omega_a$  e  $\omega_b$  il diagramma è costituito da un segmento di pendenza  $-2.3/\delta$  e assume nella pulsazione di break fase pari a  $-90^\circ$ .

$$\text{SISTEMA ELEMENTARE } G(j\omega) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^1 \quad \text{CON } 0 \leq \delta < 1 \text{ E } \omega_n > 0$$

**(ZERI COMPLESSI E CONIUGATI A FASE MINIMA) – SISTEMA**

$$\text{ELEMENTARE } G(j\omega) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^1 \quad \text{CON } -1 < \delta \leq 0 \text{ E } \omega_n > 0 \text{ (ZERI}$$

**COMPLESSI E CONIUGATI A FASE NON MINIMA); SISTEMA**

$$\text{ELEMENTARE } G(j\omega) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^{-1} \quad \text{CON } -1 < \delta \leq 0 \text{ E } \omega_n > 0$$

**(POLI COMPLESSI E CONIUGATI A FASE NON MINIMA)**

Ragionando in modo del tutto analogo al caso di una funzione elementare contenente un polo o uno zero reale, si possono dedurre, a partire dai diagrammi di Bode della funzione elementare con due poli complessi e coniugati a parte reale negativa ( $0 \leq \delta < 1$ ) quelli relativi a due poli complessi e coniugati a parte reale positiva ( $-1 < \delta \leq 0$ ), a due zeri complessi e coniugati a parte reale negativa ( $0 \leq \delta < 1$ ), nonché a due zeri complessi e coniugati a parte reale positiva ( $-1 < \delta \leq 0$ ).

In conclusione, una coppia di poli o di zeri complessi e coniugati ha un diagramma di Bode dei moduli dato dalla semiretta orizzontale a 0 dB fino alla pulsazione naturale, e da una retta a pendenza -40 dB/decade nel caso di poli, e +40 dB/decade nel caso di zeri. Tale diagramma asintotico è accettabile per valori del coefficiente di smorzamento superiori a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , mentre va corretto considerando la presenza del picco di risonanza per valori inferiori.

Inoltre, una coppia di poli o di zeri complessi e coniugati ha un diagramma di Bode delle fasi che è una spezzata. Esso è dato da una semiretta orizzontale a  $0^\circ$  fino alla prima pulsazione ottenuta da quella naturale con la regola del 4.81 modificata, una

retta orizzontale a  $-180^\circ$  per poli a fase minima e zeri a fase non minima ( $+180^\circ$  per poli a fase non minima e zeri a fase minima), e dal segmento congiungente le due pulsazioni ottenute con la regola del 4.81 modificata, avente pendenza negativa nel primo caso e positiva nel secondo.

### ESEMPIO

Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{4(1 + j0.5\omega)}{j\omega(1 + j2\omega)(1 - \frac{\omega^2}{64} + j\frac{0.4\omega}{8})}.$$

La funzione di risposta armonica è costituita dalle seguenti funzioni elementari:

$$G_1(j\omega) = 4, \quad G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega}, \quad G_3(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\omega}, \quad G_4(j\omega) = (1 + j0.5\omega) \text{ e}$$

$$G_5(j\omega) = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{64} + j\frac{0.4\omega}{8})},$$

cui corrispondono tre pulsazioni di break dei moduli, pari a  $\omega_1 = \frac{1}{2} = 0.5$  rad/sec,  $\omega_2 = \frac{1}{0.5} = 2$  rad/sec, e  $\omega_3 = \omega_n = 8$  rad/sec, dove l'ultima pulsazione di break è pari alla pulsazione naturale dei poli complessi e coniugati presenti a denominatore, ai quali è anche associato un coefficiente di smorzamento  $\delta=0.2$ .

Il diagramma di Bode delle ampiezze inizia come una retta di pendenza  $-20$  dB/decade, per via del polo nell'origine, che interseca l'asse delle ordinate nel valore  $20\log_{10}4=12$  dB e quindi assume ordinata  $12 \text{ dB} + 20 \text{ dB} = 32 \text{ dB}$  in  $\omega=0.1$  rad/sec, ovvero una decade prima, nonché ordinata  $12 \text{ dB} + 6 \text{ dB} = 18 \text{ dB}$  in  $\omega=0.5$  rad/sec, ovvero un'ottava prima.

Dopo la prima pulsazione di break  $\omega_1 = \frac{1}{2} = 0.5$  rad/sec, in cui interviene il polo a fase minima, la pendenza diventa pari a  $-40 \text{ dB/decade} = -12 \text{ dB/ottava}$  sino alla

pulsazione dello zero a fase minima  $\omega_2 = \frac{1}{0.5} = 2$  rad/sec, dopo la quale la pendenza ritorna pari a -20 dB/decade=-6 dB/ottava. Osserviamo che la pulsazione dello zero  $\omega_2 = \frac{1}{0.5} = 2$  rad/sec si trova due ottave dopo la prima pulsazione di break  $\omega_1 = \frac{1}{2} = 0.5$  rad/sec, pertanto il diagramma di Bode in tale pulsazione giunge ad un valore di ordinata 18dB-24dB=-6 dB circa.

Dopo la seconda pulsazione di break  $\omega_2 = \frac{1}{0.5} = 2$  rad/sec, in cui interviene lo zero a fase minima, la pendenza ritorna pari a -20 dB/decade=-6 dB/ottava sino alla pulsazione naturale dei poli  $\omega_3 = \omega_n = 8$  rad/sec. Questa si trova due ottave dopo, pertanto il diagramma di Bode in tale pulsazione avrà ordinata -6dB-12dB=-18 dB circa.

A partire dalla terza pulsazione di break  $\omega_3 = \omega_n = 8$  rad/sec intervengono i due poli complessi e coniugati e la pendenza si riduce sino a -60 dB/decade, quindi il nuovo segmento rettilineo rappresentativo del diagramma giungerà in  $\omega=80$  rad/sec a -18dB-60dB=-78 dB circa.

Osserviamo che, poiché è presente nella funzione da analizzare una coppia di poli complessi con coefficiente di smorzamento  $\delta=0.2$  che ricade nell'intervallo  $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ , il diagramma asintotico dei moduli e quello effettivo sono piuttosto diversi e il primo va corretto tenendo conto della presenza della pulsazione di risonanza  $\omega_R$ . Infatti, la funzione  $|G_5(j\omega)|_{dB}$  presenta un massimo alla pulsazione

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} = 8\sqrt{1 - 2(0.2)^2} \approx 8 \text{ rad/sec}$$

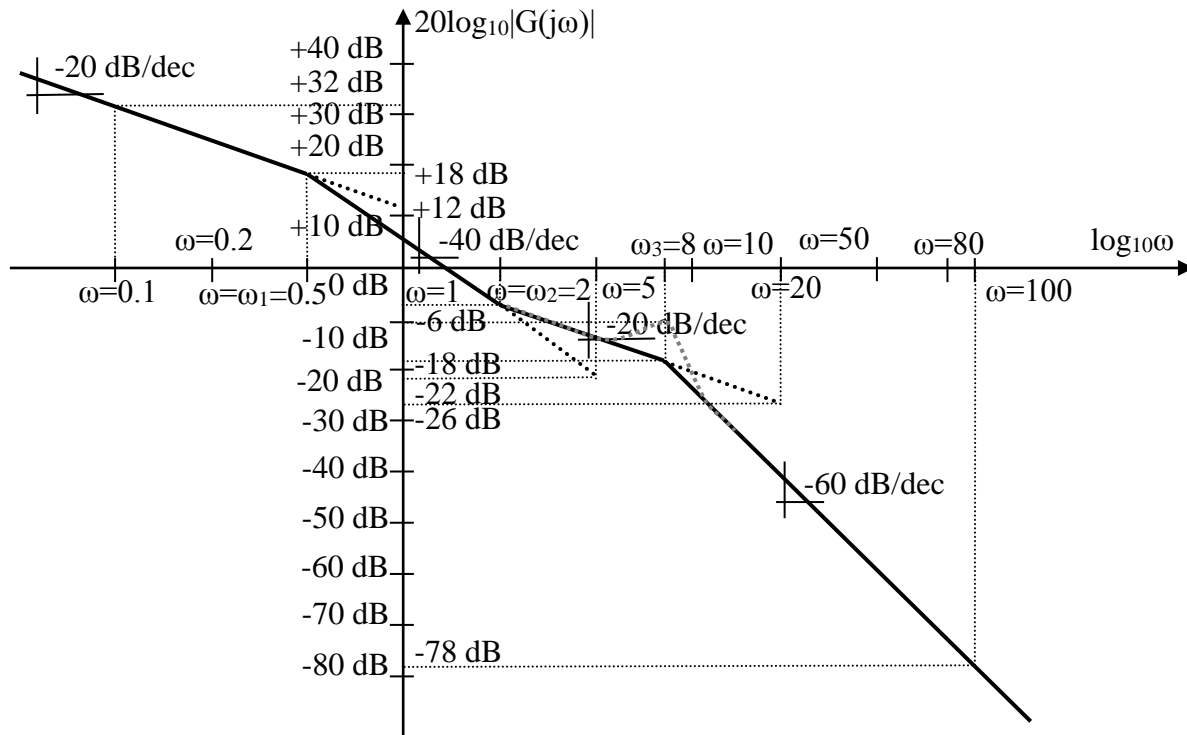
e tale massimo, detto picco di risonanza vale

$$M_R = |G_5(j\omega_R)| = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{1}{0.4\sqrt{1 - (0.2)^2}} \approx 2.55$$

che in dB vale

$$M_{RdB} = 20 \log_{10} 2.55 \approx 8 \text{ dB.}$$

Nella figura seguente è rappresentato il diagramma di Bode asintotico delle ampiezze del sistema, corretto nell'intorno della pulsazione di risonanza con il suddetto valore del picco di risonanza (la correzione è rappresentata con una linea tratteggiata di colore grigio).



Passiamo al diagramma di Bode delle fasi. La fase della funzione vale:

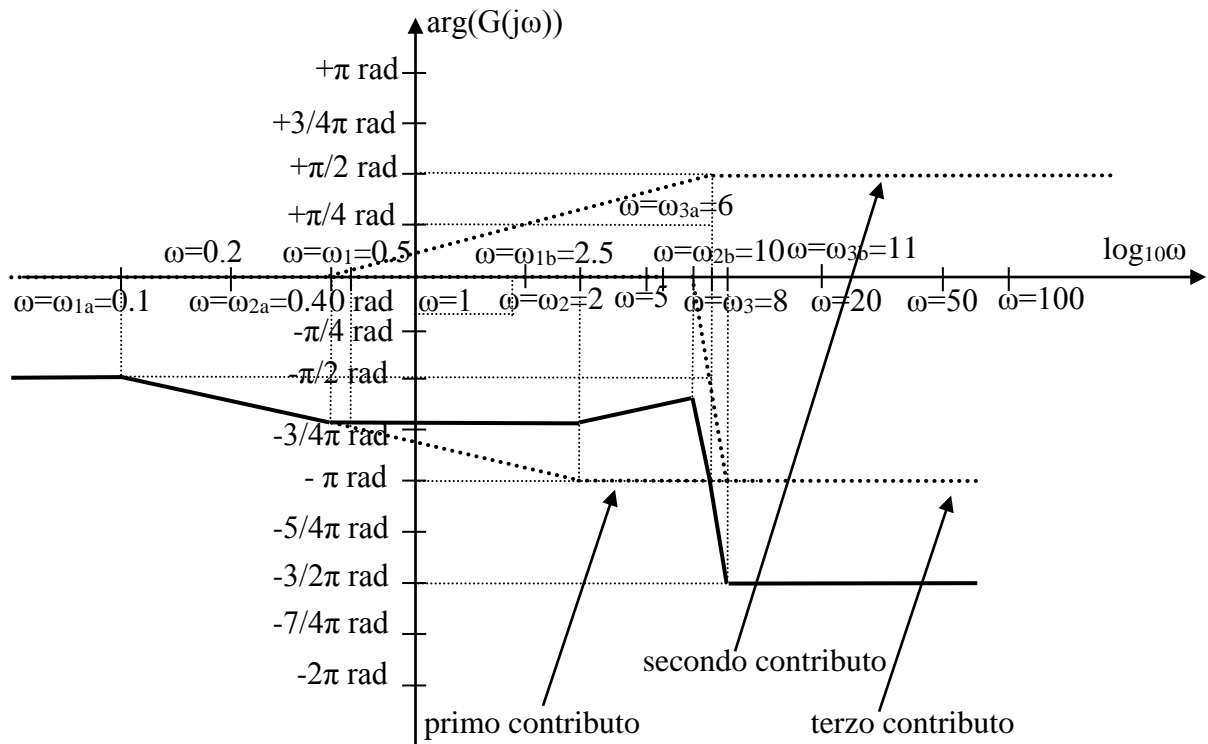
$$\begin{aligned} \arg(G(j\omega)) &= \arg\left(\frac{4(1 + j0.5\omega)}{j\omega(1 + j2\omega)(1 - \frac{\omega^2}{64} + j\frac{0.4\omega}{8})}\right) = \\ &= -\frac{\pi}{2} - \arctg(2\omega) + \arctg(0.5\omega) + \arg\left(\frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{64} + j\frac{0.4\omega}{8})}\right). \end{aligned}$$

Si hanno quindi sei pulsazioni di break delle fasi: quelle del primo polo, pari a  $\omega_{1a} \approx 0.1 \text{ rad/sec}$  e  $\omega_{1b} \approx 2.5 \text{ rad/sec}$ , quelle associate allo zero, che valgono

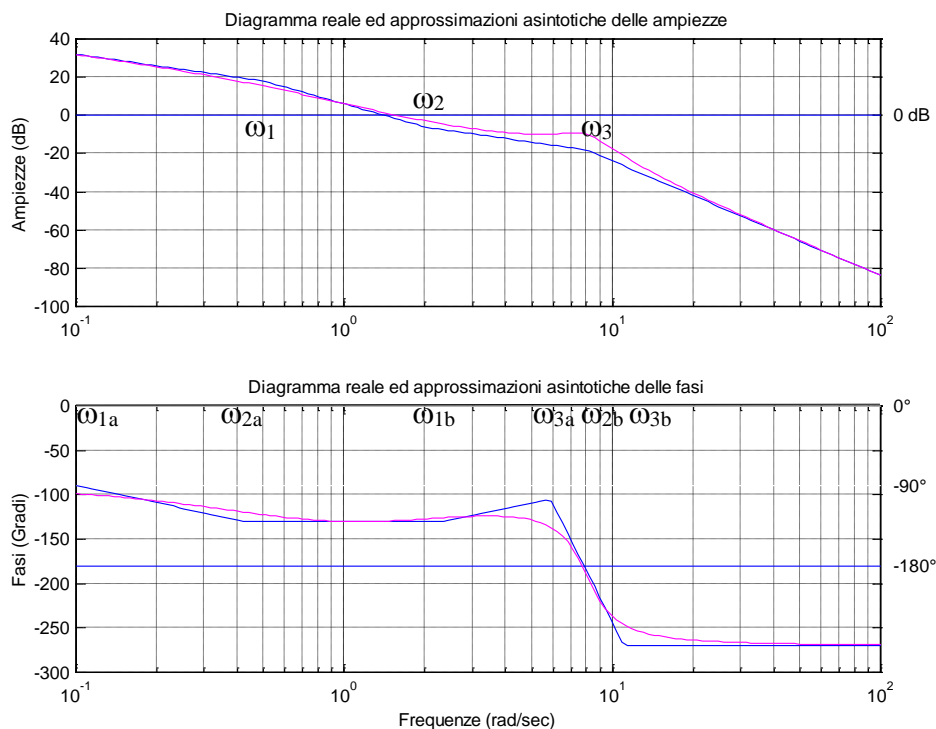
$\omega_{2a} \approx 0.4$  rad/sec e  $\omega_{2b} \approx 10$  rad/sec e quelle relative ai poli complessi e coniugati, date da  $\omega_{3a} = \frac{8}{4.81^{0.2}} \approx 6$  rad/sec e  $\omega_{3b} = 4.81^{0.2} \cdot 8 \approx 11$  rad/sec.

Il diagramma di Bode delle fasi inizia con un primo contributo che parte da  $-90^\circ$ , per via del polo nell'origine, ed ha tale ordinata fino alla pulsazione di break  $\omega_{1a} \approx 0.1$  rad/sec, in cui interviene il polo a fase minima. La pendenza diventa negativa e le fasi, passando per  $-135^\circ$  nella pulsazione di break del polo  $\omega_1 = \frac{1}{2} = 0.5$  rad/sec, decrescono sino alla prima pulsazione di break di fase dello zero  $\omega_{2a} \approx 0.4$  rad/sec, dopo la quale la fase rimane costante poiché interviene il secondo contributo, che è anticipativo, dello zero a fase minima. L'andamento è invariato sino alla pulsazione  $\omega_{1b} \approx 2.5$  rad/sec, in cui termina l'intervento del polo a fase minima e la pendenza cresce per la presenza dello zero, sino alla pulsazione  $\omega_{3a} = \frac{8}{4.81^{0.2}} \approx 6$  rad/sec. A questo punto interviene un terzo contributo dovuto ai poli complessi e coniugati e la pendenza diviene negativa, sino alla pulsazione  $\omega_{2b} \approx 10$  rad/sec. Da questo punto in poi resta attivo il solo contributo dei poli complessi e quindi la pendenza del diagramma è ancora più negativa rispetto al caso precedente. La fase decresce sino alla pulsazione  $\omega_{3b} = 4.81^{0.2} \cdot 8 \approx 11$  rad/sec, in cui termina di variare anche il terzo contributo in fase e la fase rimane fissa a  $-270^\circ$ .

Nella figura seguente è rappresentato il diagramma di Bode asintotico delle fasi del sistema.



Nella figura successiva sono rappresentati i diagrammi di Bode del sistema ottenuti in ambiente Matlab. Si osservi che in questo caso i diagrammi di Bode rappresentati sono sia quelli asintotici che quelli effettivi.



**ESEMPIO**

Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{2(-\omega^2 + 0.2j\omega + 9)}{(1 + j0.2\omega)^3}.$$

Riportiamo preliminarmente la funzione in forma di costanti di tempo:

$$G(j\omega) = \frac{18 \left( 1 - \frac{\omega^2}{9} + j2 \frac{0.1}{3} \omega \right)}{(1 + j0.2\omega)^3}.$$

La funzione di risposta armonica è costituita dalle seguenti funzioni elementari:

$$G_1(j\omega) = 18, \quad G_2(j\omega) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{9} + j2 \frac{0.1}{3} \omega \right) \quad \text{e} \quad G_3(j\omega) = \frac{1}{(1 + j0.2\omega)^3},$$

cui corrispondono due pulsazioni di break delle ampiezze, pari a  $\omega_1 = 3$  rad/sec e  $\omega_2 = 1/0.2 = 5$  rad/sec, dove la prima è pari alla pulsazione naturale degli zeri complessi e coniugati a fase minima presenti a numeratore, ai quali è anche associato un coefficiente di smorzamento  $\delta = 0.1/3 \approx 0.033$ , mentre la seconda è la pulsazione di break del polo triplo a fase minima disposto in -5.

Il diagramma di Bode delle ampiezze inizia come una retta di pendenza nulla e di ordinata  $20\log_{10}18 = 25$  dB sino alla prima pulsazione di break.

Dopo la prima pulsazione di break  $\omega_1 = 3$  rad/sec, in cui intervengono gli zeri complessi a fase minima, la pendenza diventa pari a +40 dB/decade = +12 dB/ottava sino alla pulsazione del polo triplo a fase minima  $\omega_2 = 1/0.2 = 5$  rad/sec.

Costruendo questo primo contributo del diagramma osserviamo che l'ordinata del diagramma nella pulsazione del polo triplo a fase minima  $\omega_2 = 1/0.2 = 5$  rad/sec vale +33 dB circa. Pertanto nella pulsazione di break  $\omega = 5 \times 10 = 50$  rad/sec, che si trova una decade dopo, il diagramma di Bode ha ordinata +33dB-20dB = +13 dB circa.

Il secondo contributo interviene dopo la pulsazione del polo triplo a fase minima  $\omega_2=1/0.2=5$  rad/sec: successivamente a tale pulsazione la pendenza diventa pari a -20 dB/decade=-6 dB/ottava.

Osserviamo che, poiché è presente nella funzione da analizzare una coppia di zeri complessi con coefficiente di smorzamento  $\delta=0.03$  che ricade nell'intervallo  $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ , il diagramma asintotico e quello effettivo sono piuttosto diversi e il primo va corretto tenendo conto della presenza della pulsazione di risonanza  $\omega_R$ . Infatti, la funzione  $|G_2(j\omega)|_{dB}$  presenta un minimo alla pulsazione

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} = 3\sqrt{1 - 2(0.03)^2} \approx 3 \text{ rad/sec}$$

e tale minimo, detto picco di risonanza vale

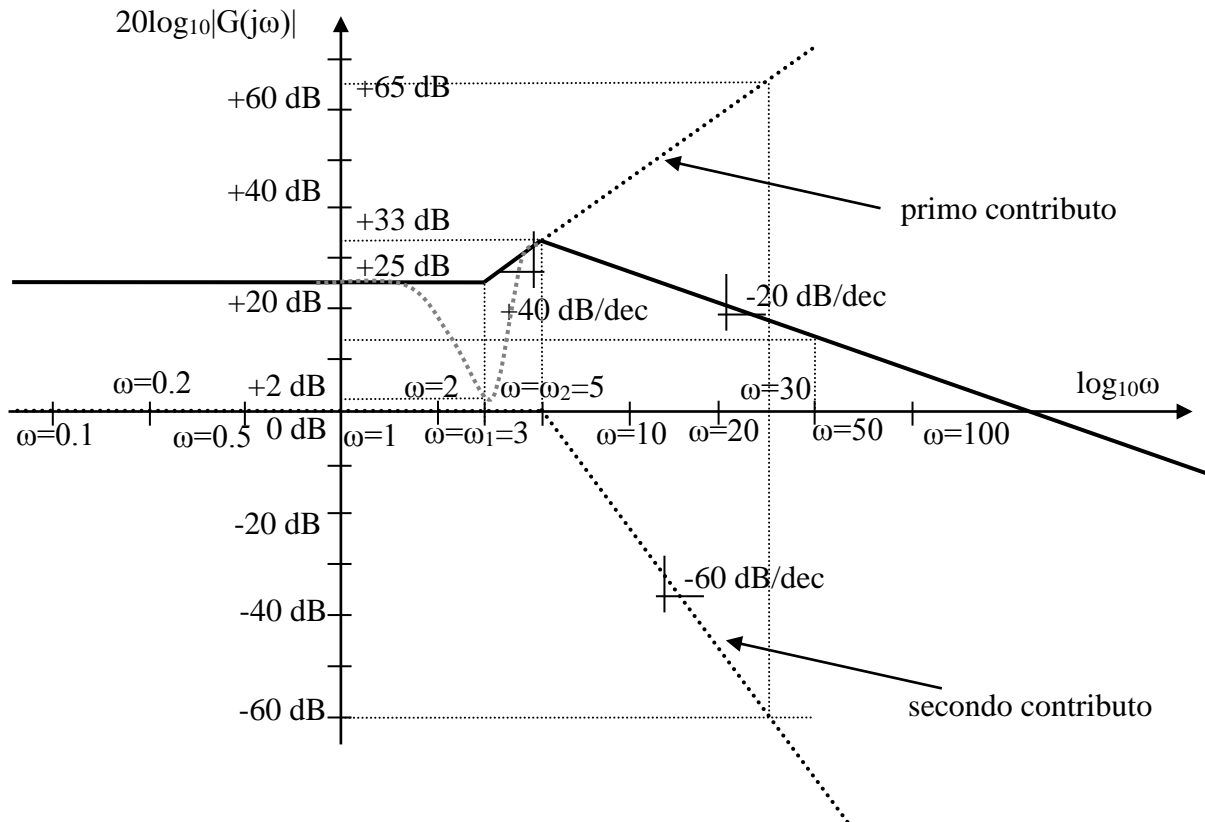
$$M_R = |G_2(j\omega_R)| = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{1}{0.06\sqrt{1-(0.03)^2}} \approx 15$$

che in dB vale

$$M_{RdB} = 20\log_{10} 15 \approx 23 \text{ dB}.$$

Nella figura seguente è rappresentato il diagramma di Bode asintotico delle ampiezze del sistema, corretto nell'intorno della pulsazione di risonanza con il suddetto valore del picco di risonanza (la correzione è rappresentata con una linea tratteggiata di colore grigio).





Passiamo al diagramma di Bode delle fasi. La fase della funzione vale:

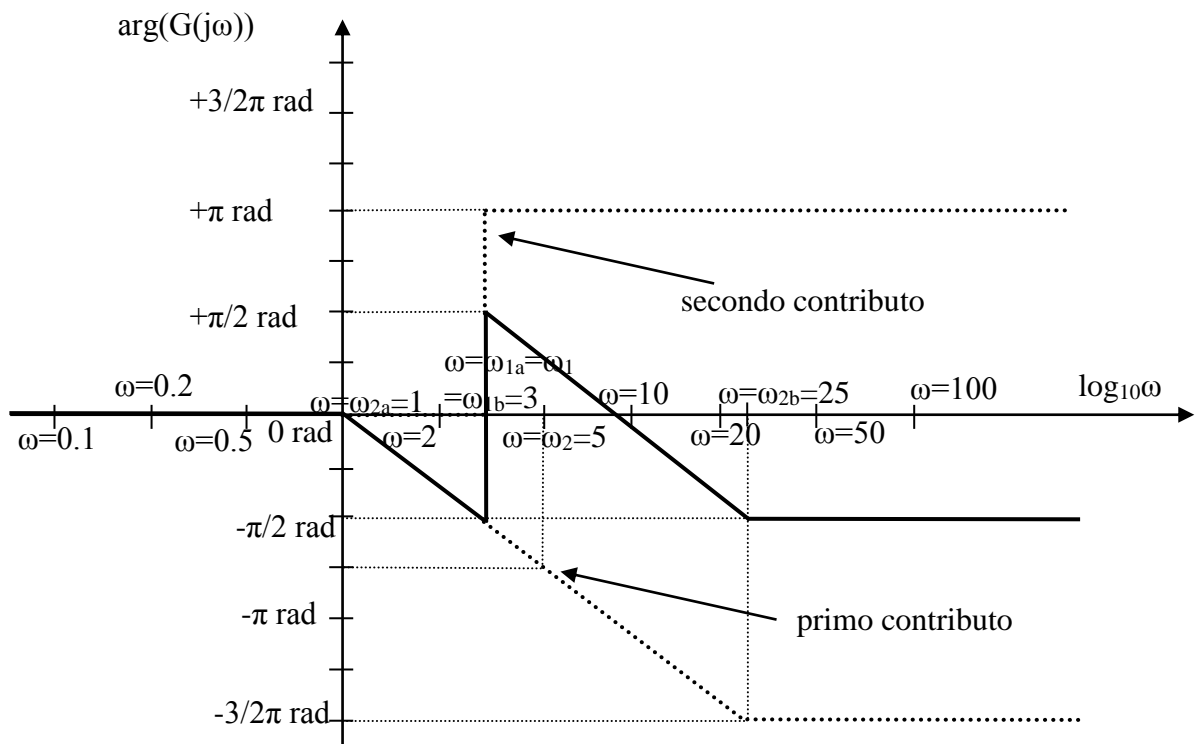
$$\arg(G(j\omega)) = \arg \left( \frac{18 \left( 1 - \frac{\omega^2}{9} + j2 \frac{0.1}{3} \omega \right)}{(1 + j0.2\omega)^3} \right) = -3 \arctg(0.2\omega) + \arg \left( 1 - \frac{\omega^2}{9} + j2 \frac{0.1}{3} \omega \right).$$

Si hanno quindi quattro pulsazioni di break delle fasi, quelle degli zeri, praticamente coincidenti e pari a  $\omega_{1a} = \frac{3}{4.81^{0.03}} \approx \omega_{1b} = 4.81^{0.03} \cdot 3 \approx 3$  rad/sec, e quelle associate al polo triplo date da  $\omega_{2a} \approx 1$  rad/sec e  $\omega_{2b} \approx 25$  rad/sec.

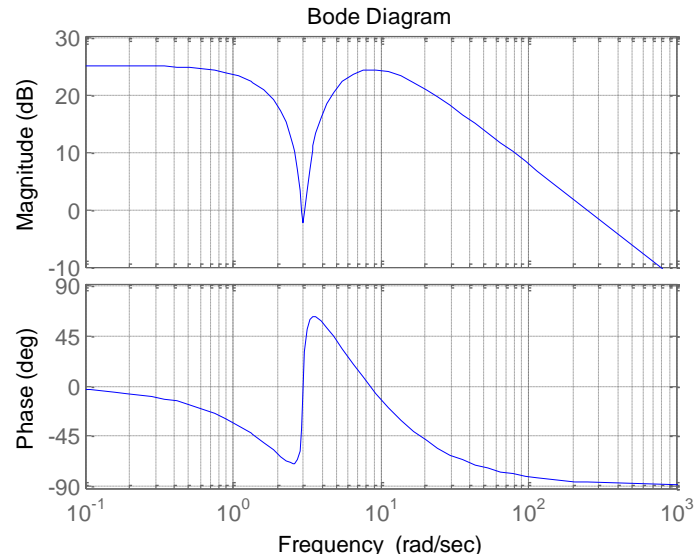
Il diagramma di Bode delle fasi inizia dunque con un primo contributo che parte da  $0^\circ$  ed ha tale ordinata fino alla pulsazione di break  $\omega_{2a} \approx 1$  rad/sec, in cui interviene il polo triplo a fase minima e la pendenza diventa negativa: le fasi, passando per  $-135^\circ$  nella pulsazione di break del polo  $\omega_2 = 5$  rad/sec, decrescono.

In realtà tale andamento è valido solo sino alla pulsazione  $\omega_{1a} = \omega_1 = \omega_{1b} \approx 3$  rad/sec, in cui interviene il secondo contributo dovuto agli zeri complessi e coniugati e nel quale, tracciando il diagramma, si legge che esso assume una ordinata di circa  $-90^\circ$ . L'effetto di tale secondo contributo è semplicemente quello di sfasare la fase di  $+180^\circ$  a partire da tale pulsazione. Pertanto, dopo tale gradino positivo di fase a questa pulsazione, la fase, riprendendo a variare da  $-90^\circ + 180^\circ = +90^\circ$ , continua a decrescere sino alla pulsazione  $\omega_{2b} \approx 25$  rad/sec. A tale pulsazione la fase assume il valore finale di  $-270^\circ + 180^\circ = -90^\circ$  che tiene conto dei due contributi complessivi. Per pulsazioni maggiori la fase rimane costante a  $-90^\circ$ .

Nella figura seguente è rappresentato il diagramma di Bode asintotico delle fasi del sistema.



Nella figura successiva sono rappresentati i diagrammi di Bode del sistema ottenuti in ambiente Matlab. Si osservi che in questo caso i diagrammi di Bode rappresentati sono solo quelli effettivi.



## DIAGRAMMI DI BODE DEL RITARDO PURO

Analizziamo ora il caso della funzione di trasferimento associata a un ritardo puro di valore  $\tau > 0$ , che sappiamo valere:

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

e quindi corrisponde a una funzione di risposta armonica

$$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

avente modulo unitario:

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\tau\omega}| = 1$$

ovvero modulo pari a 0 decibel e fase monotona decrescente

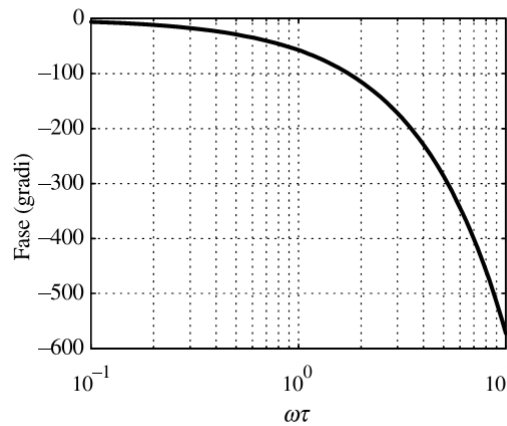
$$\arg G(j\omega) = \arg(e^{-j\tau\omega}) = -\tau\omega$$

che si rappresenta in scala logaritmica come

$$\arg G(j\omega) = \arg(e^{-j\tau\omega}) = -\tau 10^{\log 10 \omega}$$

che è quindi una funzione esponenziale decrescente che, a partire dal valore 0 rad assunto per pulsazione nulla, giunge al valore  $-\infty$  rad per pulsazione infinita. Il diagramma delle fasi è rappresentato in figura.

diagramma della fase



## DIAGRAMMI DI BODE DI SISTEMI A FASE MINIMA

Completiamo l'argomento osservando che, nel caso il sistema sia a fase minima, ovvero tutti i poli e zeri siano disposti nel semipiano sinistro e non vi siano ritardi puri, allora il diagramma di Bode delle fasi è univocamente determinabile a partire dal solo diagramma delle ampiezze (infatti ad ogni cambio di pendenza corrisponde un polo se si tratta di una riduzione e uno zero se si tratta di un aumento cui corrispondono dei ritardi di fase nel primo caso e degli anticipi nel secondo), che è quindi sufficiente per fornire informazioni complete sul sistema.

### Approfondimenti consigliati:

**Capitolo 3 ed esercizi del testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004.**

**Capitolo 6 del testo A. V. Papadopoulos, M. Prandini, Fondamenti di Automatica. Esercizi, Pearson, 2016.**

**Capitolo 9 del testo M. Dotoli, M. P. Fanti, MATLAB – Guida al Laboratorio di Automatica, Città Studi, 2008.**