

ANALISI ARMONICA

I procedimenti per la soluzione delle equazioni differenziali lineari e tempoinvarianti, basati in particolare sulla trasformazione di Laplace, hanno come obiettivo la deduzione della risposta dei sistemi a segnali canonici, come il gradino, oppure, più in generale, a qualunque segnale di ingresso. Questa procedura di analisi viene comunemente detta analisi nel dominio del tempo. Un metodo classico per l'analisi di sistemi di controllo nel dominio del tempo è il luogo delle radici.

All'analisi nel dominio del tempo dei sistemi di controllo lineari e tempoinvarianti si affianca l'analisi nel dominio della frequenza, detta anche analisi armonica, che si basa su un diverso modello matematico dei sistemi lineari: si tratta della cosiddetta funzione di risposta armonica.

La funzione di risposta armonica costituisce una rappresentazione dei sistemi lineari tempoinvarianti strettamente legata alla funzione di trasferimento e pertanto equivalente alla rappresentazione secondo le equazioni differenziali qualora si considerino sistemi inizialmente in quiete. Il vantaggio principale di tale approccio è l'attitudine della funzione di risposta armonica ad essere rilevata sperimentalmente.

In altre parole, la funzione di risposta armonica rappresenta, rispetto all'equazione differenziale, un modello matematico di più agevole identificazione a partire dai dati sperimentali.

FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA

La definizione della funzione di risposta armonica si fonda su una proprietà caratteristica dei sistemi lineari stazionari. Consideriamo un sistema lineare stazionario asintoticamente stabile cui è applicato un ingresso sinusoidale

$$x(t) = X \sin(\omega t).$$

Se il sistema è asintoticamente stabile, come si dimostra nel seguito (Teorema della funzione di risposta armonica) è facile verificare grazie alla teoria dei modi di sistema che la sua uscita a regime (cioè la risposta del sistema a transitorio esaurito) varia anch'essa con legge sinusoidale caratterizzata dalla stessa pulsazione ω dell'ingresso e può quindi essere espressa con la relazione

$$y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)).$$

Questa espressione mostra che l'ampiezza dell'uscita e l'angolo di fase rispetto all'ingresso sono, in generale, funzioni della pulsazione ω del segnale di ingresso applicato.

Si definisce, allora, funzione di risposta armonica la funzione $F(\omega)$, di variabile reale positiva ω ed a valori complessi, avente come modulo il rapporto $Y(\omega)/X$ e come argomento l'angolo $\varphi(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} (\cos(\varphi(\omega)) + j\sin(\varphi(\omega))).$$

Questa funzione, in virtù della linearità del sistema, è indipendente dall'ampiezza X del segnale in ingresso e dipende solo dalla sua pulsazione ω .

La funzione di risposta armonica descrive completamente il comportamento del sistema in condizione di regime (periodico) alle varie frequenze (ovviamente è $0 \leq \omega < \infty$). Infatti si ha dalla relazione precedente:

$$|F(\omega)| = \frac{Y(\omega)}{X},$$

$$\angle F(\omega) = \varphi(\omega)$$

e quindi la generica risposta in regime sinusoidale si esprime anche come segue:

$$y(t) = |F(\omega)| X \sin(\omega t + \angle F(\omega)).$$

Pertanto, come la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema permette di calcolare la risposta forzata del sistema al generico ingresso, per l'espressione precedente anche la funzione di risposta armonica $F(\omega)$ ha tale ruolo per quanto attiene la risposta in regime permanente e dunque costituisce un modello alternativo del sistema alla funzione di trasferimento.

TEOREMA DELLA FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA

Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta e asintoticamente stabile soggetto a una eccitazione pulsionale $x(t) = X \sin(\omega t)$ presenta a regime una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell'ingresso, che si scrive

$$y(t) = |F(\omega)| X \sin(\omega t + \angle F(\omega)),$$

dove $F(\omega)$ indica la funzione di risposta armonica del sistema. Inoltre la funzione di risposta armonica del sistema $F(\omega)$ è legata alla funzione di trasferimento $G(s)$ dalla relazione:

$$F(\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega).$$

Dimostriamo il teorema.

Sia dunque un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta con poli tutti a parte reale negativa. Applichiamo in ingresso il segnale $x(t) = X \sin(\omega t)$. La sua trasformata di Laplace è:

$$X(s) = X \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Supponendo che il sistema parta da una condizione iniziale di quiete, la risposta del sistema a tale ingresso è una risposta forzata, la cui trasformata di Laplace vale

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s) \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{X\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}.$$

Evidentemente i poli della funzione $Y(s)$ sono gli stessi poli della funzione di trasferimento $G(s)$, oltre a quelli corrispondenti al segnale di ingresso, che sono $p_1 = j\omega$ e $p_2 = -j\omega$. Dunque l'espansione in fratti semplici di $Y(s)$ si può esprimere in modo compatto come segue:

$$Y(s) = Y_0(s) + \frac{K_1}{(s - j\omega)} + \frac{K_2}{(s + j\omega)}$$

dove il termine $Y_0(s)$ è una funzione razionale fratta che congloba tutti i fratti semplici relativi ai poli di $G(s)$ ed ha dunque a numeratore tutti e soli i poli di $G(s)$, che sono per ipotesi posizionati nel semipiano sinistro del piano di Gauss (il sistema è asintoticamente stabile).

Effettuando l'antitrasformazione, ai poli di $G(s)$ corrispondono modi tutti convergenti (poiché il sistema è asintoticamente stabile e quindi essi si trovano tutti nel semipiano sinistro del piano di Gauss), dunque si ottiene una funzione convergente a zero (transitorio) $y_0(t)$, mentre gli altri termini corrispondono ad una funzione permanente $y_P(t)$. In generale, dunque, si ha:

$$y(t) = y_0(t) + y_P(t) = y_0(t) + K_1 e^{j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t}$$

in cui K_1 è il residuo corrispondente al polo $p_1=j\omega$ e K_2 corrisponde a $p_2=-j\omega$. Quindi:

$$K_1 = [Y(s)(s - j\omega)]_{s=j\omega} = \left[G(s) \frac{X\omega}{(s + j\omega)} \right]_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{X}{2j}$$

$$K_2 = [Y(s)(s + j\omega)]_{s=-j\omega} = K_1^* = G(-j\omega) \frac{X}{-2j}$$

Ricordando la proprietà della trasformata di Laplace secondo cui $F(s^*)=F^*(s)$, possiamo scrivere che

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \Rightarrow G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)}$$

dove ovviamente $\angle G(j\omega)$ è l'argomento di $G(j\omega)$, mentre $|G(j\omega)|$ è il suo modulo.

Quindi possiamo esprimere la $y(t)$ come segue:

$$y(t) = y_0(t) + \frac{X}{2j} |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} - \frac{X}{2j} |G(j\omega)| e^{-j(\omega t + \angle G(j\omega))} =$$

$$= y_0(t) + |G(j\omega)| X \frac{e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} - e^{-j(\omega t + \angle G(j\omega))}}{2j}$$

Poiché il sistema è per ipotesi asintoticamente stabile, possiamo trascurare il termine transitorio $y_0(t)$ nell'ipotesi di considerare t sufficientemente elevato:

$$\begin{aligned} y(t) &\cong |G(j\omega)| X \frac{e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} - e^{-j(\omega t + \angle G(j\omega))}}{2j} = \\ &= |G(j\omega)| X \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \end{aligned}$$

In altre parole l'uscita in regime periodico del sistema si scrive nella forma generale:

$$y(t) = |F(\omega)| X \sin(\omega t + \angle F(\omega)),$$

dove $F(\omega)$ è la funzione di risposta armonica.

Possiamo allora concludere dalle due precedenti relazioni che risulta:

$$|F(\omega)| = |G(j\omega)|, \quad \angle F(\omega) = \angle G(j\omega)$$

ovvero

$$F(\omega) = G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}.$$

In definitiva la risposta a regime del sistema all'ingresso sinusoidale

$$x(t) = X \sin(\omega t)$$

vale

$$y(t) = |G(j\omega)| X \sin(\omega t + \angle(G(j\omega))).$$

Osserviamo che è possibile analogamente dimostrare che, più in generale, un sistema asintoticamente stabile con funzione di trasferimento razionale fratta $G(s)$ risponde ad un ingresso del tipo

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi_0)$$

con una risposta a regime del tipo

$$y(t) = |G(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi_0 + \angle(G(j\omega))).$$

Analogamente, è possibile dimostrare che un sistema asintoticamente stabile con funzione di trasferimento razionale fratta $G(s)$ risponde ad un ingresso del tipo

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi_0)$$

con una risposta a regime del tipo

$$y(t) = |G(j\omega)| X \cos(\omega t + \varphi_0 + \angle(G(j\omega))).$$

Utilizzando l'analisi di Fourier (che va oltre i contenuti del presente corso) è possibile dimostrare che qualsiasi segnale periodico $f(t)$ di periodo T può essere espresso come una combinazione lineare di segnali sinusoidali (dette armoniche) mediante la serie di Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t)) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Ovvero nella forma trigonometrica

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{r_n \cos(\omega_0 n t + \varphi_n)}_{\text{armoniche}}$$

Il risultato della scomposizione in armoniche di un segnale periodico viene di solito rappresentato graficamente mediante due grafici, detti rispettivamente spettro delle ampiezze e spettro delle fasi. Nello spettro delle ampiezze si rappresenta in ordinata l'ampiezza delle diverse armoniche del segnale in funzione della loro frequenza (rappresentata in ascissa); analogamente lo spettro delle fasi rappresenta la fase delle diverse armoniche del segnale in funzione della loro frequenza.

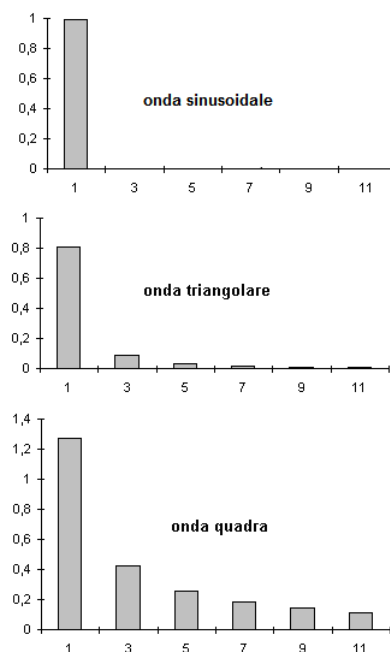
Nel caso di un segnale sinusoidale, lo spettro in frequenza è rappresentato da un singoletto in corrispondenza della pulsazione del segnale, sia in ampiezza che in fase.

Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, che è valido grazie alla linearità del sistema, studiamo unicamente la risposta in regime permanente a segnali sinusoidali: la risposta a un qualsiasi segnale periodico si ottiene semplicemente sovrapponendo le diverse risposte alle singole armoniche componenti.

Nel caso di segnale periodico, quindi, lo spettro del segnale è rappresentato dalla sovrapposizione delle armoniche, che per definizione hanno solo frequenze multiple intere di quella del segnale. Pertanto per un segnale periodico gli spettri delle ampiezze e delle fasi sono grafici discontinui, rappresentati per mezzo di righe. Ciascuna riga dello spettro rappresenta una armonica del segnale.

Intuitivamente, maggiore è il numero di righe e maggiore è la loro ampiezza, più la forma d'onda del segnale periodico differisce da quella di una semplice senoide. Viceversa, se lo spettro contiene la fondamentale e poche altre armoniche di piccola ampiezza, allora la forma d'onda del segnale sarà quasi sinusoidale. Ad esempio non è difficile intuire che, a parità di ampiezza e di periodo del segnale, lo spettro di un'onda quadra contiene più armoniche e di maggiore ampiezza rispetto allo spettro di un'onda triangolare.

La figura seguente mostra il confronto fra lo spettro delle ampiezze di un'onda sinusoidale, un'onda quadra e un'onda triangolare:



Infine, nel caso l'ingresso al sistema non sia periodico, si può ricorrere alla trasformata di Fourier, con cui è possibile dimostrare che un segnale periodico è

scomponibile nella sovrapposizione di una infinità non numerabile di componenti sinusoidali ancora dette armoniche. In questo caso lo spettro (in ampiezza e in fase) del segnale sarà continuo. Ancora, comunque, per il principio di sovrapposizione degli effetti, ha senso studiare l'effetto sul sistema di una singola armonica.

Osserviamo poi che è intuitivamente facile spiegare (semplicemente sostituendo $s=j\omega$) che, come tra la trasformata di Laplace $X(s)$ dell'ingresso $x(t)$ di un sistema di funzione di trasferimento $G(s)$ e la trasformata $Y(s)$ dell'uscita $y(t)$ vale la relazione:

$$Y(s)=G(s)X(s)$$

detti $X(j\omega)$ e $Y(j\omega)$ rispettivamente gli spettri (complessi che conglobano sia lo spettro in ampiezza che quello in fase) dei segnali in ingresso e uscita, vale la relazione:

$$Y(j\omega)=G(j\omega)X(j\omega)$$

essendo $G(j\omega)$ la funzione di risposta armonica del sistema.

Si noti poi che la funzione di risposta armonica si può definire anche per sistemi semplicemente stabili e instabili. Tuttavia, in caso di sistemi instabili essa non ha significato fisico né risulta misurabile sperimentalmente. Nel caso di sistemi semplicemente stabili, essa ha significato fisico ed è misurabile sperimentalmente solo se si considerano pulsazioni ω diverse da quelle dei poli immaginari puri, cui corrispondono modi del sistema limitati ma non convergenti a zero.

Ricordando che la funzione di trasferimento $G(s)$ è in corrispondenza biunivoca con la sua antitrasformata di Laplace, ossia la risposta all'impulso $g(t)$, possiamo affermare che la risposta all'impulso $g(t)$ di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta armonica $G(j\omega)$. Infatti si ha:

$$F(\omega) = G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)|_{s=j\omega}.$$

Si può dimostrare facilmente anche il contrario, ossia che la risposta armonica di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta all'impulso. Infatti:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} G(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{G(j\omega)}_{F(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

Si osserva che la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$, essendo una funzione di variabile reale positiva ω e a valori complessi, ha due rappresentazioni possibili, ossia la notazione trigonometrica, basata sulla rappresentazione in modulo e fase:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle(G(j\omega))}$$

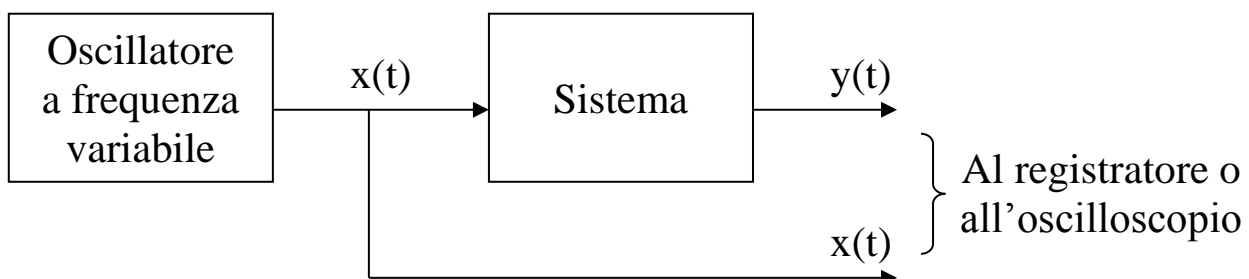
e la notazione cartesiana, basata sulla parte reale e parte immaginaria:

$$G(j\omega) = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}.$$

La rappresentazione in modulo e fase della funzione di risposta armonica si effettua con i diagrammi di Bode, mentre la rappresentazione di parte reale e immaginaria si effettua con i diagrammi polari, detti anche di Nyquist.

RILEVAZIONE SPERIMENTALE DELLA FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA $G(j\omega)$

Il teorema della funzione di risposta armonica suggerisce la possibilità di determinare sperimentalmente “per punti” la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema asintoticamente stabile.



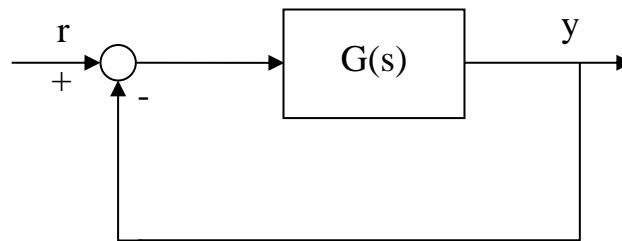
La procedura sperimentale si articola nei seguenti passi:

1. Si applica al sistema in prova il segnale di ingresso $x(t) = X_0 \sin(\omega_0 t)$ con ampiezza $X_0 > 0$ e pulsazione ω_0 .
2. Si lascia trascorrere un conveniente tempo di assestamento, dopo il quale si registra la risposta forzata, che ha l'andamento di regime $y(t) = Y_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$.
3. Si determina il modulo della funzione di risposta armonica alla pulsazione ω_0 :
$$|G(j\omega_0)| = \frac{Y_0}{X_0}.$$
4. Si determina la fase della funzione di risposta armonica alla pulsazione ω_0 :
$$\arg(G(j\omega_0)) = \varphi_0.$$
5. Si ripete il procedimento dei punti 1-4 per tutte le pulsazioni ω_0 di interesse.

ESEMPIO

Per il sistema in figura, supposto $G(s) = \frac{5}{s(s+1)}$, determinare, se esiste, la risposta regime nei seguenti due casi:

1. l'ingresso sia $r_1(t) = 3 \cdot \sin(2t+1)$;
2. l'ingresso sia $r_2(t) = 5 \cdot \cos(4t+2)$.



Il sistema complessivo ha funzione di trasferimento:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{5}{s^2 + s + 5}$$

pertanto per il lemma di Routh esso è asintoticamente stabile. Dunque vale il teorema della funzione di risposta armonica ed esiste la risposta a regime a un ingresso periodico in entrambi i casi considerati. Calcoliamo la funzione di risposta armonica del sistema, che si scrive:

$$G_0(j\omega) = G_0(s)|_{s=j\omega} = \frac{5}{s^2 + s + 5}|_{s=j\omega} = \frac{5}{5 - \omega^2 + j\omega}.$$

Pertanto si ha:

$$|G_0(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + \omega^2}}, \quad \angle G_0(j\omega) = -\angle(5 - \omega^2 + j\omega).$$

Dunque si ha:

$$\begin{aligned}
 y_{1\infty}(t) &= |G_0(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi_0 + \angle(G_0(j\omega))) = \\
 &= |G_0(j2)| 3 \sin(2t + 1 + \angle(G_0(j2))) = \frac{15}{\sqrt{(5-2^2)^2 + 2^2}} \sin(2t + 1 - \angle(5-2^2 + j2)) = \\
 &= \frac{15}{\sqrt{5}} \sin(2t + 1 - \angle(1 + j2)) = 3\sqrt{5} \sin(2t + 1 - \arctg(2))
 \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene:

$$\begin{aligned}
 y_{2\infty}(t) &= |G_0(j\omega)| X \cos(\omega t + \varphi_0 + \angle(G_0(j\omega))) = \\
 &= |G_0(j4)| 5 \cos(4t + 2 + \angle(G_0(j4))) = \frac{25}{\sqrt{(5-4^2)^2 + 4^2}} \cos(4t + 2 - \angle(5-4^2 + j4)) = \\
 &= \frac{25}{\sqrt{137}} \cos(4t + 2 - \angle(-11 + j4)) = \frac{25}{\sqrt{137}} \cos\left(4t + 2 - \left(\pi - \arctg\left(\frac{4}{11}\right)\right)\right)
 \end{aligned}$$

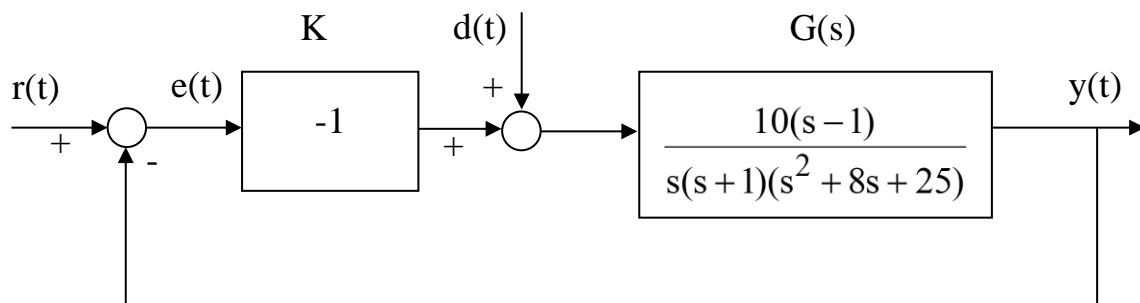
ESEMPIO

Per il sistema in figura determinare l'errore a regime $e_{\infty}(t)$ che si ha quando sul sistema agiscono contemporaneamente l'ingresso

$$r(t) = 3 \cdot 1(t) + \cos(t)$$

e il disturbo

$$d(t) = 2 \cdot 1(t).$$



Il problema si risolve agevolmente applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Scomponendo l'ingresso nei due termini costante e sinusoidale

$$r(t)=r_1(t)+r_2(t)$$

con

$$r_1(t)=3 \cdot 1(t), r_2(t)=\cos(t)$$

si ha evidentemente a regime una uscita

$$y_{\infty}(t)=y_{d_{\infty}}(t)+y_{1_{\infty}}(t)+y_{2_{\infty}}(t)$$

e quindi un errore

$$e_{\infty}(t)=e_{d_{\infty}}(t)+e_{1_{\infty}}(t)+e_{2_{\infty}}(t).$$

Il sistema in anello chiuso con $K=-1$ è asintoticamente stabile. Infatti l'equazione caratteristica si scrive:

$$s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)=0, \text{ ossia } s^4+9s^3+33s^2+15s+10=0,$$

cui corrisponde la seguente tabella di Routh.

s^4	1	33	10
s^3	9	15	
s^2	282	90	
s^1	3420		
s^0	90		

In effetti nella prima colonna della tabella vi sono solo permanenze e il sistema è asintoticamente stabile. Possiamo dunque applicare sia il teorema del valore finale che il teorema della funzione di risposta armonica. In particolare, per il disturbo si ha un errore a regime:

$$\begin{aligned} e_{d_{\infty}}(t) &= -y_{d_{\infty}}(t) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y_d(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_d(s) \cdot D(s) = \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G(s)}{1+KG(s)} \cdot D(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)} \cdot \frac{2}{s} = \frac{10}{10} \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

Per l'ingresso costante si ha un errore a regime

$$e_{1\infty}(t) = 3 \cdot e_p = 3 \cdot \frac{1}{1+K_P}$$

con K_P costante di posizione del sistema, pari a

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} KG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} = \infty$$

da cui

$$e_{1\infty}(t) = 0$$

e infatti il sistema è di tipo 1.

Infine, per l'errore a regime dovuto alla componente sinusoidale dell'ingresso

$$r_2(t) = \cos(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

è possibile applicare due diversi metodi.

Un primo metodo consiste nel calcolare l'uscita a regime permanente dovuta all'ingresso sinusoidale $r_2(t)$ con il teorema della funzione di risposta armonica:

$$y_{2\infty}(t) = |G_0(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi_0 + \angle(G_0(j\omega)))$$

dove $X=1$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega=1$, ossia

$$y_{2\infty}(t) = |G_0(j1)| \sin\left(t + \frac{\pi}{2} + \angle(G_0(j1))\right).$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
 G_0(s) &= \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{\frac{-10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)}}{1+\frac{-10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)}} = \frac{-10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)} = \\
 &= \frac{-10s+10}{s^4+9s^3+33s^2+15s+10}
 \end{aligned}$$

e quindi

$$G_0(j\omega) = \frac{-10j\omega+10}{\omega^4-9j\omega^3-33\omega^2+15j\omega+10}.$$

Ne deriva che

$$\begin{aligned}
 G_0(j1) &= \frac{-10j+10}{1-9j-33+15j+10} = \frac{10-10j}{-22+6j} = \frac{5-5j}{-11+3j} = \frac{(5-5j)(-11-3j)}{(-11+3j)(-11-3j)} = \\
 &= \frac{5(1-j)(-11-3j)}{121+9} = \frac{(1-j)(-11-3j)}{26} = \frac{-14+8j}{26} = \frac{-7+4j}{13}
 \end{aligned}$$

e quindi

$$|G_0(j1)| = \frac{\sqrt{65}}{13}, \quad \angle G_0(j1) = \pi - \arctg \frac{4}{7}.$$

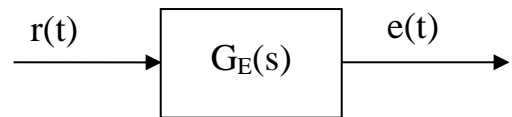
In definitiva si ha:

$$y_{2\infty}(t) = \frac{\sqrt{65}}{13} \sin\left(t + \frac{\pi}{2} + \pi - \arctg \frac{4}{7}\right) = \frac{\sqrt{65}}{13} \sin\left(t + \frac{3\pi}{2} - \arctg \frac{4}{7}\right).$$

Quindi l'errore in regime permanente rispetto all'ingresso sinusoidale $r_2(t)$ vale:

$$\begin{aligned}
e_{2\infty}(t) &= r_2(t) - y_2(t) = \cos(t) - \frac{\sqrt{65}}{13} \sin\left(t + \frac{3\pi}{2} - \arctg \frac{4}{7}\right) = \\
&= \cos(t) - \frac{\sqrt{65}}{13} \sin(t) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \arctg \frac{4}{7}\right) - \frac{\sqrt{65}}{13} \cos(t) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \arctg \frac{4}{7}\right) = \\
&= \cos(t) \left(1 - \frac{\sqrt{65}}{13} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \arctg \frac{4}{7}\right)\right) - \sin(t) \frac{\sqrt{65}}{13} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \arctg \frac{4}{7}\right) \cong \\
&\cong 1.54 \cos(t) + 0.31 \sin(t)
\end{aligned}$$

Un secondo metodo per il calcolo dell'errore a regime dovuto alla componente sinusoidale dell'ingresso $r_2(t)$ è il seguente. È sufficiente calcolare per il sistema in figura, avente funzione di trasferimento data da quella dell'errore



$$G_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + KG(s)} = \frac{s(s+1)(s^2 + 8s + 25)}{s^4 + 9s^3 + 33s^2 + 15s + 10},$$

la risposta a regime dovuta all'ingresso sinusoidale con il teorema della funzione di risposta armonica:

$$e_{2\infty}(t) = |G_E(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi_0 + \arg(G_E(j\omega)))$$

dove $X=1$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega=1$, ossia

$$e_{2\infty}(t) = |G_E(j1)| \sin\left(t + \frac{\pi}{2} + \angle(G_E(j1))\right).$$

Si ha:

$$G_E(j\omega) = G_E(s)|_{s=j\omega} = \frac{(j\omega)(j\omega+1)((j\omega)^2 + 8j\omega + 25)}{(j\omega)^4 + 9(j\omega)^3 + 33(j\omega)^2 + 15j\omega + 10}$$

e quindi si ottiene

$$\begin{aligned}
 G_E(j\omega) &= G_E(j\omega) = G_E(s)|_{s=j\omega} = \frac{j(1+j)(-1+8j+25)}{1-9j-33+15j+10} = \frac{(j-1)(24+8j)}{-22+6j} = \\
 &= \frac{(j-1)(12+4j)}{-11+3j} = \frac{-16+8j}{-11+3j} = \frac{(-16+8j)(-11-3j)}{121+9} = \frac{200-40j}{130} = \frac{20-4j}{13}
 \end{aligned}$$

da cui

$$|G_E(j\omega)| = \frac{\sqrt{416}}{13}, \quad \angle G_E(j\omega) = -\arctg \frac{4}{20} = -\arctg \frac{1}{5}$$

In conclusione, l'errore a regime di questa componente vale

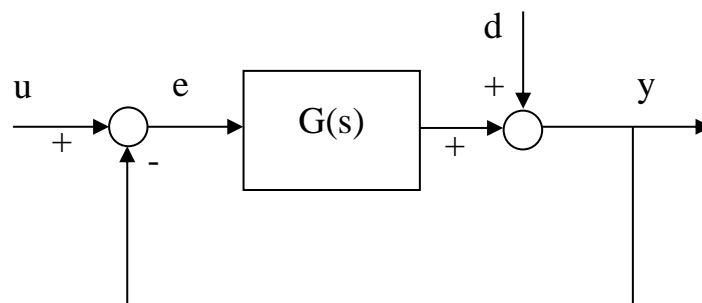
$$\begin{aligned}
 e_{2\infty}(t) &= \frac{\sqrt{416}}{13} \sin\left(t + \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{5}\right) = \\
 &= \frac{\sqrt{416}}{13} \sin(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{5}\right) + \frac{\sqrt{416}}{13} \cos(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{5}\right) \cong \\
 &\cong 1.54 \cos(t) + 0.31 \sin(t)
 \end{aligned}$$

che coincide con il risultato ottenuto con il primo metodo.

In definitiva si ha un errore complessivo a regime:

$$e_{\infty}(t) = e_{d\infty}(t) + e_{1\infty}(t) + e_{2\infty}(t) = 2 + 1.54 \cos(t) + 0.31 \sin(t).$$

ESEMPIO



Nel sistema in figura sia:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad d(t) = M \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

dove $M \in \mathbb{R}^+$, $\omega_0 \in [0, 2]$ e $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ sono costanti ignote. Detta $y_d(t)$ l'uscita a regime dovuta al solo disturbo, si vogliono calcolare i valori di M tali che sia:

$$|y_d(t)| \leq 1.$$

Il sistema in anello chiuso in assenza di disturbo ha funzione di trasferimento

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{s+2}$$

e quindi è asintoticamente stabile, avendo un unico polo in -2. Quindi è applicabile il teorema della funzione di risposta armonica.

La funzione di trasferimento dal disturbo all'uscita vale

$$G_d(s) = \frac{Y_d(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s+1}{s+2}$$

e quindi è asintoticamente stabile, avendo un unico polo in -2. Quindi l'uscita a regime dovuta al disturbo vale:

$$y_d(t) = |G_d(j\omega_0)| M \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \varphi_0 + \angle(G_d(j\omega_0))\right)$$

dove

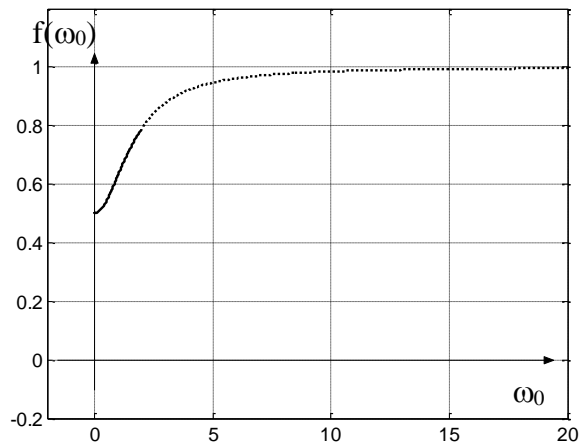
$$\omega_0 \in [0, 2], \quad G_d(j\omega_0) = \frac{j\omega_0 + 1}{j\omega_0 + 2} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + 1}{\omega_0^2 + 4}} \cdot e^{j\left(\arctg(\omega_0) - \arctg\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right)}.$$

Si richiede dunque

$$M \sqrt{\frac{\omega_0^2 + 1}{\omega_0^2 + 4}} \leq 1, \quad \text{con } \omega_0 \in [0, 2] \text{ qualsiasi.}$$

È facile dimostrare che la funzione di ω_0

$$f(\omega_0) = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + 1}{\omega_0^2 + 4}}$$



è sempre crescente per $\omega_0 \in [0, 2]$. Infatti essa ha derivata prima sempre positiva.

Quindi la condizione precedente diventa

$$M \cdot \max_{\omega_0 \in [0, 2]} \left(\sqrt{\frac{\omega_0^2 + 1}{\omega_0^2 + 4}} \right) \leq 1$$

o anche

$$M \cdot \left(\sqrt{\frac{2^2 + 1}{2^2 + 4}} \right) \leq 1$$

da cui

$$M \leq \sqrt{\frac{8}{5}} \approx 1.26 \Leftrightarrow M \in [0, 1.26].$$

Approfondimenti consigliati:

**Capitolo 3 ed esercizi del testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004.
Capitolo 6 del testo A. V. Papadopoulos, M. Prandini, Fondamenti di Automatica. Esercizi, Pearson, 2016.**