LEGENDA

1. Relazioni
    - Definizione
    - Postulato
    - Teorema
    - Relazione d'equivalenza
    - Relazione d'ordine
    - Relazione funzionale

2. Funzioni
    - Iniettività
    - Suriettività
    - Biettività
    - Invertibilità
    - Composizione tra funzioni

3. Matrici
    - Matrici uguali
    - Matrice trasposta
    - Matrice simmetrica
    - Matrice antisimmetrica
    - Diagonale principale
    - Diagonale secondaria
    - Matrice nulla
    - Matrice identica
    - Sottomatrice
    - Minore complementare
    - Somma tra matrici
    - Prodotto per scalare
    - Prodotto righe per colonne
    - Matrice invertibile
    - Unicità matrice invertibile

4. Determinante
    - Cofattore
    - Matrice aggiunta
    - Primo th. di Laplace
    - Secondo th. di Laplace
    - $|A^T| = |A|$
    - Th. di Binet
    - Matrici singolari
    - Combinazione lineare
    - Matrice triangolare
    - Matrice diagonale
    - Matrice scalare
    - Una matrice è invertibile se non singolare
    - Matrici permutabili
    - Matrice di permutazione
    - Matrici ortogonali

5. Rango
    - Minore fondamentale
    - Orlato
    - Th. degli orlati

6. Eq. Lineari
    - Eq. lineari ad una incognita
    - Unicità soluzione lineare
    - Eq. lineari a due incognite
    - Eq. lineari omogenee
    - Eq. lineari ad n incognite
    - Eq. lineari equivalenti
    - Cosa rappresenta un'eq. lineare in R^n
    - Verifica equivalenza usando il rango

7. Sistemi Lineari
    - Matrice dei coeff.
    - Matrice completa
    - Eq. linearmente dipendente dal sistema
    - Sistemi equivalenti
    - Th. di Rouché-Capelli
    - Sistema di Cramer
    - Un sistema di Cramer ha una singola soluzione
    - Regola di Cramer
    - Sistemi non di Cramer
    - Sistemi lineari omogenei
    - Cosa rappresenta un sistema lineare?

8. Strutture algebriche
    - Operazione binaria interna
    - Gruppo
    - Gruppo abeliano
    - Campo

9. Spazi vettoriali
    - Vettori linearmente dipendenti
    - Vettori linearmente indipendenti
    - Base di uno spazio vettoriale
    - Legame tra due basi
    - Ogni base ha lo stesso numero di elementi
    - Dimensione
    - Metodo degli scarti successivi
    - Completamento della base

10. Sottospazi vettoriali
    - Verifica del sottospazio
    - Sottospazio notevoli
    - Intersezione tra sottospazi
    - Unione tra sottospazi
    - Sottospazio somma
    - Spazi supplementari
    - Relazione di Grassmann

11. Applicazione lineare
    - Endomorfismo
    - Isomorfismo
    - Rappresentazione matriciale

- Proprietà delle appl. Lineari
- Ker(f)
- Im(f)
- Un'appl. Lineare trasforma sottospazi in sottospazi
- $f \ ingettiva \leftrightarrow Ker(f) = \{\overline{0}\}$
- $f \ ingettiva \ \leftrightarrow f \ conserva \ la \ lin. indipendenza$
- Teorema del rango
- Generatori di Im(f)
- Th. di esistenza e unicità

12. Vettori liberi

- Relazione di equipollenza
- Classe di equipollenza
- Lunghezza del vettore
- Vettore applicato
- Prodotto per scalare
- Vettori liberi nel piano
- Vettori liberi nello spazio
- Lineare dipendenza

13. Prodotto tra vettori

- Prodotto scalare
- Prodotto vettoriale
- Prodotto misto

14. Autovalori

- Intersezione tra due autospazi è sempre banale
- Matrici simili
- Matrice diagonalizzabile
- Autovalori per una matrice
- Polinomio caratteristico
- Matrici simili hanno stesso polinomio caratteristico
- Molteplicità algebrica
- Molteplicità geometrica

15. Geometria

- Riferimento cartesiano
- Nella retta
- Punto medio
- Punto simmetrico
- Nel piano
- Nello spazio
- Eq. parametrica della retta nello spazio
- Allineamento di tre punti
- Eq. della retta sotto forma di rapporti uguali
- Parametri direttori
- Rappresentazione della retta nel piano
- Intersezioni e parallelismo tra due rette di un piano
- Fascio proprio di rette

- Rette perpendicolari
- Distanze nel piano
- Coniche
- Equazioni di un piano
- Intersezioni e parallelismo tra piano
- Fasci propri e impropri di piani
- Intersezione tra piano e retta
- Rette complanari e sghembe
- Angoli tra rette nello spazio e tra piani
- Distanza nello spazio
- Minima distanza e retta di minima distanza

- DEFINIZIONE Nome assegnato ad un certo oggetto od una certa situazione

- POSTULATO Nome dato ad un'affermazione che non ha bisogno di essere dimostrata poiché regola

- THEOREMA Affermazione che necessita di dimostrazione perché conseguenza dell'ipotesi.

- RELAZIONE D'EQUIVALENZA $(=)$

$A \neq \phi \; , \; R \subseteq A \times A \; \ni$

1) $aRb \iff bRa$ ~~rifl~~ simmetrica

2) $\forall a \in A : aRa$ riflessiva

3) $aRb \wedge bRc \implies aRc$ transitiva

$[a] := \{ x \in A \mid aRx \}$

$\swarrow$

classe di equivalenza (es. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4} \dots \frac{k}{2k}$)

Insieme quoziente $A \setminus R := \{ [a] \text{ classe d'eq.} \}$

Se $aRb \implies [a] = [b]$

$\bigcup_{[x] \in A \setminus R} [x] = A \qquad \phi \in A \setminus R$

- RELAZIONE D'ORDINE $(\leq)$ $A \neq \phi \; , \; R \subseteq A \times A \; \ni$

1) $\forall a \in A \implies aRa$ riflessiva

2) $aRb \wedge bRa \implies a = b$ antisimmetrica

3) $aRb \wedge bRc \implies aRc$ transitiva

- RELAZIONE FUNZIONALE

$(A, B) \neq (\emptyset, \emptyset)$, $R \subseteq A \times B$ $\ni'$

$\forall x \in A : \exists! \, y \in B \ni' xRy$

$A \neq \emptyset \land B \neq \emptyset$

- FUNZIONI

$f = (A, B, R)$ terna ordinata

$f : A \to B$, $R \subseteq A \times B$ $\ni'$

$\forall x \in A : \exists! \, y \in B \ni' xRy$

$f(x) = y$ L'IMMAGINE

UNA CONTROIMMAGINE

- INIETTIVITÀ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- SURIETTIVITÀ $\forall y \in B \; \exists \, x \in A \ni' y = f(x)$

- BIIETTIVITÀ $\forall y \in B \; \exists! \, x \in A \ni' y = f(x)$

- INVERTIBILITÀ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$

con $f = f(x) \land f^{-1} = f^{-1}(x)$

- COMPOSIZIONE TRA FUNZIONI

$(A, B, C) \neq (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$A \neq \emptyset$
$B \neq \emptyset$
$C \neq \emptyset$

$f : A \to B$

$g : B \to C$

$g \circ f : A \to C$ con $g \circ f := g(f(x))$

$g \circ f \neq f \circ g$ NON COMMUTATIVA

$g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$ ASSOCIATIVA

$f \circ f^{-1} = id_A : A \to A$ dove $\forall z \in A : id_A(z) = z$

- MATRICI

Una matrice è una tabella $m \times n$ (con m ed n numeri naturali > 0) di $m \times n$ numeri reali, disposti su m righe ed n colonne.

in generale appartengono ad un campo qualsiasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \text{ con } \begin{matrix} i \in \{1 \dots m\} \\ j \in \{1 \dots n\} \end{matrix}$$

Se $m = n \Rightarrow A$ è matrice quadrata

Se $m \neq n \Rightarrow A$ è matrice rettangolare

- MATRICI UGUALI Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$, $A = B \Leftrightarrow$

$\forall i = 1 \dots m \quad \forall j = 1 \dots n : a_{ij} = b_{ij}$

- MATRICE TRASPOSTA Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $\exists A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$ t.c.

$\forall i = 1 \dots m \quad \forall j = 1 \dots n : a_{ij} = t_{ji} \quad (t \in A^T)$

$(A^T)^T = A$

- MATRICE SIMMETRICA Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,m}$, se

$\forall i,j \in \{1 \dots m\} : a_{ij} = a_{ji}$, A è detta simmetrica

Se A è simmetrica $\Rightarrow A = A^T \wedge A^T = A$

Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \neq n \Rightarrow A$ non può essere simmetrica

- <u>MATRICE ANTISIMMETRICA</u> Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, se $\forall i, j \in \{1 \dots n\}$ $a_{ij} = -a_{ji}$ $\Rightarrow$ A è antisimmetrica

$\exists$ el diagonale principale d_k ~~...~~ $\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A non può essere ~~d~~antisimmetrica

- <u>DIAGONALE PRINCIPALE</u> È la n-upla di elementi con indici uguali $(a_{11}, a_{22} \dots a_{nn})$

- <u>DIAGONALE SECONDARIA</u> È la n-upla di elementi la cui somma ~~fa~~ $n+1$ $(a_{1,n}, a_{2,n-1} \dots a_{n1})$

- <u>MATRICE NULLA</u> Matrice cui tutti gli elementi sono uguali a 0. $O_{m,n} \in \mathbb{R}^{m,n}$:
$\forall i \in \{1 \dots m\} \forall j \in \{1 \dots n\}$ $a_{ij} = 0$

- <u>MATRICE IDENTICA</u> Id_n una matrice dove
$$\forall i,j \in \{1 \dots n\} : a_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i=j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}$$

- <u>SOTTO MATRICE</u> Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, togliendo ad A h righe e k colonne si ottiene una matrice $A' = (a'_{ij}) \in \mathbb{R}^{m-h,n-k}$ chiamata matrice estratta o sottomatrice.
Se $m-h = n-k$ la sottomatrice viene detta minore estratto.

- <u>MINORE COMPLEMENTARE</u> Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, M_{ij} è il minore estratto da A togliendo la riga i e la colonna j.
$M_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$.

- OPERAZIONI TRA MATRICI

$A+B$ si chiama somma tra matrici.

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$

- ADDIZIONE

La somma verifica alcune proprietà:

1) $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n} : (A+B)+C = A+(B+C)$
2) $\exists O_{m,n} \in \mathbb{R}^{m,n}$ t.c. $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} : A + O_{m,n} = A$
3) $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} : \exists B \in \mathbb{R}^{m,n}$ t.c. $A+B = O_{m,n}$
4) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} : A+B = B+A$

Soddisfa, quindi, la proprietà associativa, l'esistenza dell'elemento neutro, l'opposto e la proprietà commutativa.

La matrice opposta è unica per ogni matrice:
Supponiamo esista $\underbrace{C \neq B}$ con B e C matrici opposte di A:

$$\underline{C} = C + O_{m,n} = C + (A+B) = (C+A)+B = O_{m,n} + B = \underline{B}$$

da cui deriva $C = B$ quindi, per assurdo, abbiamo dimostrato l'unicità della matrice opposta denotata come $-A$.

- PRODOTTO CON SCALARE

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $h \in \mathbb{R}$ scalare.

$$hA = (h\, a_{ij})$$

Soddisfa alcune proprietà:

1) $\forall h \in \mathbb{R} \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} : h(A+B) = hA + hB$

2) $\forall h, k \in \mathbb{R} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n} : (h+k)A = hA + kA$

3) $\forall h, k \in \mathbb{R} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n} : (h \cdot k) \cdot A = h(k \cdot A)$

4) $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} : 1 \cdot A = A$

che sono: distributiva rispetto alla somma di matrici, distributiva rispetto alla somma di scalari, omogeneità ed esistenza dell'el. "neutro".

Ah non ha significato quindi non c'è proprietà commutativa. Non esiste un vero e proprio el. neutro quindi non esiste un simmetrico.

- PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Siano $A \in (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{n,q}$

$A \cdot B = AB = (c_{ik}) \in \mathbb{R}^{m,q}$:

$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}$

Proprietà:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A(B \cdot C)$ ASSOCIATIVA

2) $A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

3) $(A+B)C = A \cdot C + B \cdot C$

$\}$ DISTRIBUTIVA

4) $h(A \cdot B) = (h \cdot A)B = A(hB)$

5) $(A \cdot B)^T = B^T A^T$

6) $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} : A \cdot I_n = A \wedge I_m \cdot A = A$

- **MATRICE INVERTIBILE** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ è invertibile se $\exists\, B \in \mathbb{R}^{n,n}$: $AB = I_n \wedge BA = I_n$

B è detta (se esiste) A^{-1}

1 = **UNICITÀ MATRICE INVERSA**

Per assurdo supponiamo ci siano 2 matrici inverse di A (matrice invertibile di ordine n) : $B \wedge C$.

$B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C = C$

$B = C$ quindi devono necessariamente coincidere.

- **DETERMINANTE**

È un numero reale associato alla matrice.
Può essere calcolato esclusivamente nelle matrici quadrate.

Se $A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = a_{11}$

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Per $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con $n \geq 3$ si usa il metodo di Laplace (per $n = 3$ anche quello di Sarrus è molto utilizzato)

La formula generale per il calcolo del determinante è:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

$(-1)^{ij} \det(M_{ij}) = A_{ij}$ detto complemento algebrico dell'elemento a_{ij} quindi:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Si può anche fissare i quindi

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

- COFATTORE di a_{ij} è $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$

- MATRICE AGGIUNTA $Agg(A) \in \mathbb{R}^{n,n}$,

$Agg(A) = (A_{ji})$ → ji e non ij

- PRIMO TH. DI LAPLACE $|A|$ è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di ~~una~~ una qualsiasi riga / colonna per i propri complem. algebrici.

$$|A| = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} \quad \forall j \in \{1..n\}$$
$$|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} \quad \forall i \in \{1..n\}$$

- SECONDO TH. DI LAPLACE La somma dei prodotti degli elementi di una qualsiasi riga / colonna per i complementari algebrici di un'altra riga / col. è sempre nulla.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0 \quad \forall \, k \in \{1 \dots n\}, \; j \neq k \quad \wedge$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{hj} = 0 \quad \forall \, h \in \{1 \dots n\}, \; i \neq h$$

2 = $\underline{|A^T| = |A|}$ (si dimostra notando che il calcolo del det. di A^T sviluppato sulla prima riga coincide con quello sviluppato sulla prima colonna in A)

- Scambiando 2 righe o 2 colonne si ha che
$|A'| = -|A|$
(Se scambiamo 2 righe uguali $\Rightarrow |A| = 0$) $\nearrow$ $A' = A$ e $|A'| = -|A| \Rightarrow$ $\Rightarrow |A| = 0$

- $\underline{\text{TH. DI BINET}}$ $\quad |AB| = |A| \cdot |B|$

Proprietà del determinante:

1) $$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \dots & b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} h \cdot a_{11} & h a_{12} & \dots & h a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sono dette proprietà di multilinearità
(Se c'è una riga / colonna composta solo da 0 allora $|A| = 0$)

$$\begin{vmatrix} ha & hb & \dots & hn \\ a & b & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} a & b & n \\ a & b & n \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \nearrow \begin{matrix} (a \; b \; n) \\ (a \; b \; n) \end{matrix} \text{ uguali} \Rightarrow h \begin{vmatrix} a & b & n \\ a & b & n \\ \dots \end{vmatrix} = 0$$

quando ci sono $\dfrac{\text{righe}}{\text{colonne}}$ proporzionali.

- **MATRICI SINGOLARI** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ sono singolari o degeneri se $|A| = 0$
Se $|A| \neq 0$ A è non singolare.

- **COMBINAZIONE LINEARE** Una riga/col è comb. lineare di altre righe/col. se si ottiene dalla somma di quelle righe moltiplicate per vari coefficienti. Se una riga/colonna è combinazione lin. allora è lin dipendente.

$\exists\ h_1, h_2 \dots h_{m-1} \in \mathbb{R}$:

$$a_{m,1} = h_1 a_{11} + h_2 a_{21} + h_3 a_{31} + \dots + h_{m-1} a_{m-1,1}$$
$$a_{m,2} = h_1 a_{12} + h_2 a_{22} + h_3 a_{32} + \dots + h_{m-1} a_{m-1,2}$$
$$\dots$$
$$a_{m,n} = h_1 a_{1n} + h_2 a_{2n} + h_3 a_{3n} + \dots + h_{n-1} a_{m-1,n}$$

$\Rightarrow$ la riga m è combinazione lineare.

Possiamo riassumere molte proprietà in un semplice teorema:

- Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è singolare se $\exists$ riga/col combinazione lineare di altre righe/colonne.

- **MATRICE TRIANGOLARE** bassa $\Rightarrow a_{ij} = 0$ se $i < j$
alta $\Rightarrow a_{ij} = 0$ se $i > j$

bassa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

alta

- MATRICE DIAGONALE $\quad a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

triangolare bassa $\wedge$
triangolare alta

- MATRICE SCALARE $\quad \forall\, i,j \in \{1 \dots n\} : a_{ij} = k \,,\ i = j$

$$\begin{pmatrix} K & 1 & -1 \\ 2 & K & 2 \\ 3 & 0 & K \end{pmatrix}$$

Tutti gli elementi sulla diag. princip.
sono uguali tra loro

3 = Una matrice è invertibile se $\det A \neq 0$

Se $A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$

$\det(I_n) = 1 = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ quindi

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$I_n = \frac{1}{|A|}(A \cdot A_{gg} A) \text{ perché}$$

$$A \cdot A_{gg} A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}$$

quindi $I_n = \left(\frac{1}{|A|} A_{gg} A\right) \cdot A \neq \wedge \ I_n = \underset{A^{-1}}{B}\, A \iff$

$$\iff B = \frac{1}{|A|} A_{gg} A$$

- A invertibile, B invertibile $\Rightarrow AB$ invert.

Dal Th. di Binet $\Rightarrow |A| \cdot |B| = |AB|$ e

$|A| \neq 0 \wedge |B| \neq 0$ quindi $|AB| \neq 0$

- $GL(n, \mathbb{R})$ è il gruppo lineare generale,

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \text{ è invertibile} \}$$

Proprietà:

1) $\forall A, B, C \in GL(n, \mathbb{R}) : A(BC) = (AB)C$ — ass.
2) $\forall A \in GL(n, \mathbb{R}) : I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$ — el. neutro
3) $\forall A \in GL(n, \mathbb{R}) \; \exists A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$ t.c. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ — simmetrico.

Non vale la proprietà commutativa.

- <u>MATRICI PERMUTABILI</u> $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ sono perm. se $AB = BA$.

$O_{n,n}$ e I_n sono permutabili con qualsiasi matrice.
A e A^{-1} sono permutabili tra loro.

- <u>MATRICE DI PERMUTAZIONE</u> $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ che ha un solo elemento $= 1$ per ogni riga / colonna.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 1} \end{pmatrix} \quad \text{con } |P| = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 1} \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A \cancel{P} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- <u>MATRICI ORTOGONALI</u> $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonale se

$$A A^T = A^T A = I_n$$

A ortogonale $\Rightarrow$ ($A^T = A^{-1}$ $\Leftrightarrow$ A invertibile)

- $\det(A) = 1 \lor \det(A) = -1$ $\overset{\Leftarrow}{\cancel{\Leftrightarrow}}$ A ortogonale

$A \cdot A^T = I_n \Rightarrow |A|\,|A^T| = |I_n| \Rightarrow$
$\Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \cancel{\pm} 1 \lor |A| = -1$

- A ortogonale $\Leftrightarrow$

1) $\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 = 1 \quad \forall\, i \in \{1 \dots n\}$

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, a_{kj} = 0 \quad \forall\, i, k \in \{1 \dots n\}, \quad i \neq k$

(vale anche ~~f~~ per le colonne)

~~A~~ Esempi di matrici ortogonali sono quelle di permutazione e $\begin{pmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$

- $O(n, \mathbb{R})$ è il sottogruppo ortogonale

$O(n, \mathbb{R}) := \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \text{ ortogonale} \}$

- RANGO È l'ordine massimo di minori non singolari estratti da A

$A = O_{m,n} \Rightarrow r(A) = 0$ per convenzione.

- MINORE FONDAMENTALE Uno dei minori che determina il rango di A.
($|M| \neq 0 \land M \in \mathbb{R}^{n,n}$ con $n = r(A)$)

- **ORLATO** Sia M minore di $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, Or è un orlato di M se ad M, matrice di ordine p, aggiungiamo una qualsiasi altra riga e una qualsiasi altra colonna di A.

- **TEOREMA DEGLI ORLATI** $r(A) = p \iff$

1) $\exists\, M$ minore estratto di A di ordine p con $|M| \neq 0$
2) $\forall\, O$ orlato di M : $|O| = 0$

- **MATRICI CON PARAMETRO**

Una matrice contenente uno o più parametri indica una infinità di matrici, a seconda dei valori dati ai parametri.

- **EQ. LINEARI AD 1 INCOGNITA**

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid ax = b \} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

Se $a = 0$:
- $b = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$
- $b \neq 0 \Rightarrow S = \emptyset$

Se $a \neq 0 \Rightarrow \exists\, a^{-1} = \frac{1}{a} \wedge x = a^{-1} b$

quindi $S = \{ a^{-1} b \}$

- **UNICITÀ SOLUZIONE LINEARE** Siano $x_1, x_2 \in S$

$$a x_1 = a x_2 \Rightarrow a(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

- EQ. LINEARI A ~~D~~ 2 INCOGNITE

$S = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \}$

Se $(a_1, a_2) = (0, 0)$ $\nearrow$ $b = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}^2$; $\searrow$ $b \neq 0 \Rightarrow S = \emptyset$

Se $a_1 \neq 0$: $x_2 = h_2$

$a_1 x_1 + a_2 h_2 = b \Rightarrow x_1 = a_1^{-1} (b - a_2 h_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_1 = \{ (a_1^{-1} (b - a_2 h_2), h_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

Se $a_2 \neq 0$: $x_1 = K_1$

$a_1 K_1 + a_2 x_2 = b \Rightarrow x_2 = a_2^{-1} (b - a_1 K_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_2 = \{ (K_1, a_2^{-1} (b - a_1 K_1)) \in \mathbb{R}^2 \}$

- $S_1 = S_2 \Leftrightarrow S_1 \subseteq S_2 \wedge S_2 \subseteq S_1$

Prendo $(a_1^{-1} (b - a_2 h_2), h_2) \in S_1$

Pongo $K_1 = a_1^{-1} (b - a_2 h_2)$

$\underline{x_2} = a_2^{-1} (b - a_1 K_1) = a_2^{-1} (b - a_1 a_1^{-1} (b - a_2 h_2)) =$

$= a_2^{-1} (b - b + a_2 h_2) = a_2^{-1} a_2 h_2 = \underline{h_2}$

- EQ. LINEARE OMOGENEA

Se $b = 0$; in $S = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \}$

1 - $(0, 0) \in S$ (soluzione banale)

2 - $(y_1, y_2) \in S \wedge (z_1, z_2) \in S \Rightarrow (y_1 + z_1, y_2 + z_2) \in S$

3 - $(y_1, y_2) \in S \Rightarrow h (y_1, y_2) \in S$

$\searrow (h y_1, h y_2)$

2) $a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0 \wedge a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$

$\Rightarrow a_1(y_1+z_1) + a_2(y_2+z_2) = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_1 z_1 + a_2 z_2 = (a_1 y_1 + a_2 y_2) + (a_1 z_1 + a_2 z_2) = 0 + 0 = 0$

3) $a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0 \wedge h \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow a_1(h y_1) + a_2(h y_2) = h a_1 y_1 + h a_2 y_2 = h(a_1 y_1 + a_2 y_2) = h \cdot 0 = 0$

- EQ. LINEARI IN n INCOGNITE

$S = \{(x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b\}$

Se $(a_1, a_2 \dots a_n) = (0, 0 \dots 0)$: $b = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}^n$; $b \neq 0 \Rightarrow S = \emptyset$

Se $(a_1, a_2 \dots a_n) \neq (0, 0 \dots 0)$:

Sia $a_m \neq 0$:

$x_m = a_m^{-1}(b - \overbrace{a_1 k_1 - a_2 k_2 - \dots - a_n k_n}^{\sum_{i \in N} a_i k_i})$ $\quad N = \{N_n - \{m\}\}$

Verifichiamo sia soluzione:

$a_m \overbrace{a_m^{-1}(b - a_1 k_1 - a_2 k_2 - \dots - a_n k_n)}^{x_m} + a_1 k_1 + \dots + a_n k_n = b - a_1 k_1 + a_1 k_1 - a_2 k_2 + a_2 k_2 + \dots = b$

quindi $S = \{(k_1, k_2 \dots \overbrace{\quad}^{a_m^{-1}(b - a_1 k_1 - a_2 k_2 - \dots - a_n k_n)}, \dots k_n) \in \mathbb{R}^n\}$

Le soluzioni sono ∞^{n-1} (infinite soluzioni che dipendono da $n-1$ parametri)

4 = EQ. LINEARI EQUIVALENTI

$S_1 = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = c\}$

$S_2 = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n = d\}$

$S_1 = S_2 \iff$ sono proporzionali:

$\exists\, h \in \mathbb{R}^* \ni b_1 = h a_1,\ b_2 = h a_2, \dots b_n = h a_n,\ d = hc$

$\Leftarrow)$ Se $(u_1, u_2, \dots u_n) \in S_1$:

$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = c \Rightarrow$

$\Rightarrow h(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) = hc \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n = d$ quindi

$(u_1, u_2, \dots u_n) \in S_2$

Se $(v_1, v_2, \dots v_n) \in S_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{h^{-1}}\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n = d \Rightarrow$

$\Rightarrow h^{-1}(b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n) = h^{-1} d \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = c$ quindi

$(v_1, v_2 \dots v_n) \in S_1$

$\Rightarrow)$ $h = \frac{d}{c} \Rightarrow d = hc$ (nel caso di eq. non omogenee)

$a_1 \neq 0 \Rightarrow b_1 \neq 0$

Pongo $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow a_1 x_1 = c \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1^{-1} c, 0, 0 \dots 0) \in S_1 \cap S_2$

quindi $b_1 (a_1^{-1} c) = d = hc \Rightarrow h = a_1^{-1} b_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1 = h a_1$

Questo ragionamento è applicabile prendendo qualsiasi indice $j \in \{1 \dots n\}$ t.c. $a_j \neq 0 \wedge b_j \neq 0$

Nel caso delle eq. omogenee.

Se $a_1 \neq 0 \Rightarrow b_1 \neq 0$

~~Per assurdo~~ Se $b_1 = 0$ $(1, 0, 0, 0 \dots 0) \in S_2$

e quindi anche $a_1 \cdot 1 + a_2 0 + \dots + a_n 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 0$

Possiamo applicare lo stesso ragionamento per qualsiasi indice $j \in \{1 \dots n\}$ t.c. $a_j \neq 0 \wedge b_j \neq 0$

Possiamo trasformare un'equazione lineare omogenea a n incognite in una non omogenea ad $n-1$ incognite con termine noto a_j o b_j t.c. $a_j \neq 0 \wedge b_j \neq 0$

$$S_1 = \{(x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

diventa

$$S_1' = \{(x_1, x_2, \dots x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{n-1} x_{n-1} = -a_n\}$$

assegnando ad x_n il valore 1.

P.S. Questo caso non va bene se $a_n \wedge b_n$ non gli unici coeff. non nulli.

In questo caso abbiamo $a_n x_n = 0 \wedge b_n x_n = 0$ con $a_n \neq 0 \wedge b_n \neq 0$ quindi

$h = a_n b_n^{-1}$.

- COSA RAPPRESENTA UN'EQ. LINEARE IN $\mathbb{R}^n$?

Rappresenta un iperpiano nello spazio geometrico di dim n. Nel piano un iperpiano è una retta (∞^1), nello spazio un piano (∞^2), in 4 dim uno spazio geometrico (∞^3) etc.

- VERIFICA EQUIVALENZA USANDO IL RANGO

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & b \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & d \end{pmatrix}$ matrice $2 \times (n+1)$ avente per 1° riga i coeff. della prima eq. e per 2ª riga i coeff. della seconda eq.

Se $r(M) = 1$ (≤ 1 $\begin{cases} =1 \\ =0 \end{cases}$ $(S_1 = \mathbb{R}^n \wedge S_2 = \mathbb{R}^n \Rightarrow S_1 = S_2)$)

la prima riga è proporzionale alla seconda.

- SISTEMI LINEARI è formato da $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ eq. lineari.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove la/le soluzioni (l'insieme delle soluzioni) è l'intersezione tra l'insiemi di soluzione di tutte le m eq. lineari.

- MATRICE DEI COEFF. (INCOMPLETA)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ di tipo $m \times n$

MATRICE COMPLETA

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \text{di tipo } m \times (n+1)$$

Ad ogni sistema si può associare la sua matrice incompleta e completa.

Sia A matrice incompleta,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$ il sistema può essere scritto in forma matriciale $A \cdot X = B$

EQ. LINEARMENTE DIP. DAL SISTEMA

$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = d$ è lin. dipendente dal sistema se $\forall i \in \{1 \dots n\}$

$\exists (h_i)_{i \in \{1 \dots m\}}$ t.c. $c_i = h_1 a_{1i} + h_2 a_{2i} + \dots + h_m a_{mi} \wedge$

$\wedge \; d = h_1 b_1 + h_2 b_2 + \dots + h_m b_m$

SISTEMI EQ.

2 sistemi sono eq. se i rispettivi insiemi di soluzione coincidono.

TH. 2 sistemi sono eq. se ~~e~~ e solo se ciascuna eq. del primo sistema dip. linearmente dalle eq. del secondo e viceversa.

- TH. DI ROUCHÉ - CAPELLI

1) Condizione necessaria e suff. affinché un sistema sia compatibile è che $r(A) = r(\bar{A})$.

2) Un sistema compatibile ammette un'unica soluzione se n (numero di incognite) $= p$ ($r(A) = r(\bar{A})$).
Se $p < n$ il sistema ammette ∞^{n-p} soluzioni.

- SISTEMA DI CRAMER — Un sistema lineare di n eq. lineari in n incognite con $|A| \neq 0$.

- TH UN SISTEMA È DI CRAMER $\Longleftrightarrow$ S singleton

Dem) $|A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = n$

$r(\bar{A}) \geq r(A) \wedge r(\bar{A}) \leq n \Rightarrow$

$\Rightarrow r(\bar{A}) = n = r(A) \Rightarrow r(A) = r(\bar{A})$

$p = r(A) \Rightarrow n = p \Rightarrow$ ammette un'unica soluzione.

- REGOLA DI CRAMER

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{2n} \\ b_m & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{2n} \\ a_{m1} & b_m & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \dots$$

- SISTEMI NON DI CRAMER

Per risolvere un sistema lineare non di Cramer bisogna subito appl. il Th. di Rouché-Capelli.
Se $p = r(A) = r(\bar{A})$ e $p < n$ (con $p = n$ il sistema è di Cramer) bisogna trovare un

dei minori estratti M con $|M| \neq 0$ che determinano il rango delle 2 matrici.

Bisogna risolvere il nuovo sistema con solo le righe prese in considerazione da M (questo sistema sarà equivalente a quello dato inizialmente).

Bisogna trasformare le $n-p$ incognite in parametri e le incognite che verranno trasformate sono quelle delle colonne escluse.

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 2x + y + \frac{7}{10}z = 20 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7/10 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 2 & 1 & 7/10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = r(\bar{A}) = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad |M| = -1 \neq 0$$

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 2x + y + \frac{7}{10}z = 20 \end{cases} \qquad z = h$$

colonna 3ª non utilizz.

il nuovo sistema ha prima e seconda riga (che sono le uniche quindi i 2 sistemi sono identici)

$$\begin{cases} x + y = 20 - h \\ 2x + y = 20 - \frac{7}{10}h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3/10\, h \\ y = 20 - h - 3/10\, h \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \quad // = // \quad 3/10\, h$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3/10\, h \\ y = 20 - 13/10\, h \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\tfrac{3}{10}h, 20 - \tfrac{13}{10}h, h \right) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- SISTEMI LINEARI OMOGENEI

È un sistema lineare composto esclusivamente da eq. lineari omogenee.

Come anche l'eq. lineari omogenee:
- ammette sempre $(0, 0, \dots 0)$
- Se $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ soluzioni $\Rightarrow$ $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ soluzione
- Se $\bar{v}_1$ soluzione $\Rightarrow$ $h\,\bar{v}_1$ soluzione

- Se il sistema di Cramer è omogeneo avrà come unica soluzione quella banale.
Se $r(A) < n \iff$ il sistema ammette altre soluzioni oltre a quella banale.

- TH. Preso un sistema con m eq. lineari ed $m+1$ incognite con $r(A) = m$, una sua soluzione è (ATTENZIONE AI SEGNI ALTERNI)

$$\left(+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,m+1} \\ a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m,m+1} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1,m+1} \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{m,m+1} \end{vmatrix}, \dots \right.$$

$$\left. \dots \pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \right) = (c_1, -c_2, c_3 \dots \pm c_{m+1})$$

in base ad $m \bmod 2$

$$S = \{ (h c_1, -h c_2 \dots \pm h c_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \}$$

- COSA RAPPRESENTA UN SISTEMA LINEARE?

Rappresenta l'intersezione tra gli iperpiani

- STRUTTURE ALGEBRICHE

- OPERAZIONE BINARIA (INTERNA)

Sia G insieme non vuoto, si chiama ω una funzione $\omega: G \times G \to G$.
La coppia (G, ω) si chiama struttura algebrica ed il valore che assume $\omega(a, b)$ si denota con $a \omega b$ (composto di a, b mediante ω).

- GRUPPO Sia (G, ω) strut. algebrica, (G, ω) è un gruppo se verifica 3 proprietà:

1) $\forall (a, b, c) \in G^3 : (a \omega b) \omega c = a \omega (b \omega c)$
2) $\exists\, e \in G$ t.c. $\forall a \in G : a \omega e = a \wedge e \omega a = a$
3) $\forall a \in G \ \exists\, a' \in G$ t.c. $a \omega a' = e \wedge a' \omega a = e$

1) proprietà associativa, 2) elemento neutro
3) simmetrico

- GRUPPO ABELIANO Sia (G, ω) un gruppo, (G, ω) è abeliano (o commutativo) se:

$\forall (a, b) \in G^2 : a \omega b = b \omega a$

- ESEMPI DI GRUPPI (E CONTROESEMPI)

escluso lo 0

$(\mathbb{N}^*, +)$ non è un gruppo (non esistono el. simmetrici)
$(\mathbb{Z}, \cdot)$ non è un gruppo (non esistono el. simmetrici)

escluso l'1

$(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sono gruppi abeliani
$(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$ non lo sono perché
0 non ha simmetrico (inverso) ma lo sono
$(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
Nella somma l'elemento neutro è 0 e
il simmetrico è $-a$ (elemento opposto).
Nel prodotto l'elemento neutro è 1 e
il simmetrico è a^{-1} (elemento inverso).
$(\mathrm{Sym}(E), \circ)$ è un gruppo non abeliano.
$\mathrm{Sym}(E)$ è l'insieme di tutte le f. biiettive.
E è un gruppo di f. contenente la f. identità
$x \in \mathbb{R} \mapsto x$ (il neutro di $\circ$)
Il simmetrico è f^{-1} (che esiste sempre nelle f. biiettive).

- CAMPO Sia K insieme non vuoto dotato di 2 operazioni binarie (di solito + e $\cdot$);
la terna ordinata $(K, +, \cdot)$ è un campo (o corpo commutativo) se verifica 3 proprietà:

1) $(K, +)$ è un gruppo abeliano
2) $(K, \cdot)$ è un gruppo abeliano
3) $\forall (a, b, c) \in K^3 : a(b+c) = ab + ac$
(proprietà distributiva)

Es $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

- **SPAZI VETTORIALI**

Siano $(K, +, \cdot)$ un campo, $(V, +)$ un gruppo abeliano; si dice che V è spazio vettoriale sul campo K se è definita un'applicazione $\cdot : K \times V \to V$ che verifica:

1) $\forall (\bar{u}, \bar{v}) \in V^2, \forall a \in K: a(\bar{v} + \bar{u}) = a\bar{v} + a\bar{u}$
2) $\forall (a, b) \in K^2, \forall \bar{v} \in V: (a+b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$
3) $\forall (a, b) \in K^2, \forall \bar{v} \in V: (a \cdot b) \cdot \bar{v} = a \cdot (b \cdot \bar{v})$
4) $\forall \bar{v} \in V: 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

Gli elementi di V si chiamano vettori, gli elementi di K si chiamano scalari.

Sussistono altre proprietà:

1) $\forall \bar{v} \in V: 0 \cdot \bar{v} = \bar{0}$
2) $\forall k \in K: k \cdot \bar{0} = \bar{0}$
3) $k \cdot \bar{v} = \bar{0} \iff k = 0 \vee \bar{v} = \bar{0}$
4) $\forall \bar{v} \in V: (-1)\bar{v} = -\bar{v}$
5) $\forall k \in K, \forall \bar{v} \in V: (-k)\bar{v} = -(k \cdot \bar{v})$

- VETTORI LINEARMENTE DIP. Sia $\{\bar{v}_i\}_i$ vettore $\forall i \in \{1..n\}$

$\bar{v}_1, \bar{v}_2 \ldots \bar{v}_n$ si dicono lin. dipendenti se $\exists (a_1, a_2 \ldots a_n) \neq \bar{0}_n \ni' a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \ldots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}$

Es. $\{(2,3,5), (1,3,9), (1,0,-4)\}$ sono lin. dip.

$$1(2,3,5) + (-1)(1,3,9) + (-1)(1,0,-4) = (0,0,0)$$

- VETTORI LIN. INDIP. Siano $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n$ n vettori elementi di V; essi sono lin. indip. se

$a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_n \bar{v}_n = \bar{0} \iff a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

$\bar{w}$ dipende linearmente da $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$ se

$\bar{w} = a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_n \bar{v}_n$

Questo significa che $\bar{w}, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$ sono lin. dip. tra loro perché

$a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_n \bar{v}_n \overbrace{- 1 \bar{w}}^{a_{\bar{w}}} = \bar{0}$

- BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale e siano $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$ suoi elementi; questi vettori formano una base di $V(K)$ se:

1) sono lin. indipendenti
2) sono generatori (ogni $\bar{v} \in \bar{V}$ è comb. lineare di questi vettori)

Sia $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n\}$ una base di V, allora ogni vettore si esprime come comb. lin. di questi vettori ed i coeff. di tale comb. lin. sono chiamati componenti del vettore rispetto alla base $\mathcal{B}$.

LEGAME TRA 2 BASI Siano $\mathcal{B}_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \dots \bar{u}_n\}$ basi di V allora si ha che:

$$\bar{u}_1 = a_{11}\bar{v}_1 + a_{21}\bar{v}_2 + a_{31}\bar{v}_3 + \dots + a_{n1}\bar{v}_n$$
$$\bar{u}_2 = a_{12}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + a_{32}\bar{v}_3 + \dots + a_{n2}\bar{v}_n$$
$$\bar{u}_n = a_{1n}\bar{v}_1 + a_{2n}\bar{v}_2 + a_{3n}\bar{v}_3 + \dots + a_{nn}\bar{v}_n$$

e, viceversa:

$$\bar{v}_1 = b_{11}\bar{u}_1 + b_{21}\bar{u}_2 + \dots + b_{n1}\bar{u}_n$$
$$\bar{v}_2 = b_{12}\bar{u}_1 + b_{22}\bar{u}_2 + \dots + b_{n2}\bar{u}_n$$
$$\bar{v}_n = b_{1n}\bar{u}_1 + b_{2n}\bar{u}_2 + \dots + b_{nn}\bar{u}_n$$

Si ottengono ~~2~~ 2 matrici quadrate

$$A = (a_{ij})_{\substack{i \\ j} \in \{1 \dots n\}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{i \\ j} \in \{1 \dots n\}}$$

Le relazioni precedenti si possono scrivere come

$$A^t \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{pmatrix} \wedge B^t \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$$

Da qui si dimostra che A e B sono una l'inversa dell'altra:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = A^t B^t \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^t B^t = I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BA = I_n \Rightarrow AB = I_n$$

Da una base quindi si può passare ad un'altra moltiplicando la base nota per una qualsiasi matrice invertibile.
Il n. di basi di uno spazio vett. corrisponde al numero di matrici invertibili con coeff. nel campo K. Nel caso dei campi infiniti allora ci saranno infinite basi.

- Ogni base ha lo stesso n. di elementi

Siano $\mathcal{B}_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2 \ldots \bar{v}_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_n\}$

$\bar{x} \in V$ è espresso rispetto alle 2 basi come

$$\bar{x} = x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + \ldots + x_n \bar{v}_n$$

$$\bar{x} = y_1 \bar{u}_1 + y_2 \bar{u}_2 + \ldots + y_n \bar{u}_n$$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= y_1 \bar{u}_1 + y_2 \bar{u}_2 + \ldots y_n \bar{u}_n = \\
&= y_1 (a_{11} \bar{v}_1 + a_{21} \bar{v}_2 + \ldots + a_{n1} \bar{v}_n) + \\
&+ y_2 (a_{12} \bar{v}_1 + a_{22} \bar{v}_2 + \ldots + a_{n2} \bar{v}_n) + \\
&\ldots + y_n (a_{1n} \bar{v}_1 + a_{2n} \bar{v}_2 + \ldots + a_{nn} \bar{v}_n) = \\
&= \bar{v}_1 (y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + \ldots + y_n a_{1n}) + \\
&+ \bar{v}_2 (y_1 a_{21} + y_2 a_{22} + \ldots + y_n a_{2n}) + \\
&+ \ldots + \bar{v}_n (y_1 a_{n1} + y_2 a_{n2} + \ldots + y_n a_{nn})
\end{aligned}$$

quindi (~~g~~ sfruttando l'unicità delle componenti):

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + \ldots + y_n a_{1n} \\
&\ldots \\
x_n &= y_1 a_{n1} + y_2 a_{n2} + \ldots + y_n a_{nn}
\end{aligned}$$

Che può essere espresso come

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dalla relazione $A^t \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \dots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \dots \\ \bar{w}_n \end{pmatrix}$ si deduce che il n. di elementi delle basi debba essere lo stesso per qualsiasi base.

- DIMENSIONE Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale (con K un campo ~~generalmente~~ finitamente generato) si chiama dim V il n. di vettori che forma una base qualsiasi di V.

1) La dim. di V rappresenta il n. massimo di vett. linearmente indipendenti.

2) La dim. di V rappresenta il n. minimo di vett. che generano V.

- METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI Siano $v_1, v_2 \dots v_n$, $n \geq 1$ vettori non nulli che generano l'intero spazio vett. V. Se questi sono lin. indip. formano la base $\mathcal{B}$. Se non lo sono bisognerà scartare quelli che impediscono la lin. dipendenza. Scartando vett. lin. dip. da un'insieme di vett. generatori, il nuovo insieme di ~~generatori~~ vettori sarà comunque generatore.

Dim) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_r$ vett. generatori di V

$\bar{w} \in V$, $\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_r\bar{v}_r$

$\bar{v}_1 = ~~a~~ h_2\bar{v}_2 + \dots + h_r\bar{v}_r$

$\bar{w} = a_1(h_2\bar{v}_2 + \dots + h_r\bar{v}_r)\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_r\bar{v}_r$

$\bar{w} = (a_1 h_2 + ~~t~~ a_2)\bar{v}_2 + \dots + (a_1 h_r + a_r)\bar{v}_r$

- **COMPLETAMENTO DELLA BASE** Se $\dim V = n < +\infty$ e sono noti r vettori lin. ind. con $r < n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ $n-r$ vettori in V che insieme agli r vettori formano una base di V.

Dim) Siano $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \dots \bar{u}_r$ lin. ind. e $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n$ vettori di una base di V.

$\bar{u}_1, \bar{u}_2 \dots \bar{u}_r, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$ formano un sistema di generatori ma sono lin. dipendenti quindi bisogna applicare il metodo ~~dello~~ degli scarti successivi.

- **SOTTO SPAZI VETTORIALI**

Sia W un sottoinsieme non vuoto dello spazio vettoriale V sul campo K; si dice che W è sottospazio di V se W ~~rispetto~~ è spazio vettoriale sul campo K rispetto alle "stesse" operazioni che rendono V spazio vett. (si indica $W \leq V$)

- VERIFICA DEL SOTTOSPAZIO Condizione necessaria e sufficiente affinché W sia sottospazio vett. è che sussistano le proprietà di chiusura:

1) $\forall (w_1, w_2) \in W^2 : w_1 + w_2 \in W$
2) $\forall w \in W, \forall k \in K : kw \in W$

Dalla seconda proprietà consegue che il vettore nullo $\bar{o}$ deve essere presente in ogni spazio vettoriale (con $k = 0$)

- SOTTOSPAZI NOTEVOLI Sia V spazio vettoriale:
V e $\{\bar{o}\}$ sono sottospazi vettoriali.
Questi son detti impropri.
$\{\bar{o}\}$ è chiamato sottospazio banale.

Se K è campo infinito l'unico ~~campo~~ sottospazio con un numero finito di elementi è $\{\bar{o}\}$.

Se $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \dots \bar{w}_n$ sono lin. ind. in W lo sono anche in V. Da quest'osservazione deriva che ~~$\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots \bar{w}_n$ sono lin. ind. anche~~
$\dim W \leq \dim V$ ($\dim W = \dim V \iff W = V$)

- $\dim \{\bar{o}\} = 0$ per convenzione (0 è il n. max di vettori indipendenti)

- INTERSEZIONE TRA SOTTOSPAZI Siano U e W sottospazi di V; $U \cap W$ è sottospazio di V.

L'intersezione tra U e W non può essere l'insieme vuoto e $\{\bar{o}\} \subset U \cap W$ sempre.
Se $U \cap W = \{\bar{o}\}$, i 2 insiemi hanno intersezione banale (sono detti "disgiunti")

- UNIONE TRA SOTTOSPAZI Siano U e W sottospazi di V; $U \cup W$ è sottospazio $\Leftrightarrow$
$U \subseteq W \vee W \subseteq U$.
Se non è vero questo, $U \cup W$ non verifica mai la prima proprietà di chiusura.

- SOTTOSPAZIO SOMMA Siano U e W sottospazi di V

$$U + W := \{ \bar{x} \in V \mid \exists \bar{u} \in U, \exists \bar{w} \in W \ni' \bar{x} = \bar{u} + \bar{w} \}$$

è sottospazio di V.

Se $U \cap W = \{\bar{o}\}$ la somma è detta diretta e si denota con $U \oplus W$

In $U + W$:

$\bar{x} \in U + W \Leftrightarrow \exists \bar{u} \in U \ \exists \bar{w} \in W \ni' \bar{x} = \bar{u} + \bar{w}$

$\bar{x} \in U + W \Leftrightarrow \exists \bar{u}' \in U \ \exists \bar{w}' \in W \ni' \bar{x} = \bar{u}' + \bar{w}'$

con $\bar{u} \neq \bar{u}' \wedge \bar{w} \neq \bar{w}'$

In $U \oplus W$:

$$\bar{x} = \bar{u} + \bar{w} = \bar{u}' + \bar{w}' \Rightarrow \bar{u} = \bar{u}' \wedge \bar{w} = \bar{w}'$$

- SPAZI SUPPLEMENTARI U e W sono sottospazi supplementari (o complementari) se $U \oplus W = V$
Dato U sottospazio, W t.c. $U \oplus W = V$ non è unico.

- $L(v_1, v_2 \dots v_n) = \{ \bar{x} \in V \mid \exists (a_1, a_2, \dots a_n) \in K^n$ t.c. $\bar{x} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n \}$ è sottospazio di V.
È chiamato sottospazio generato da $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$.

- RELAZIONE DI GRASSMAN Siano U e W sottospazi di dimensione finita di $V(K)$

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$$

deriva dalla prima essendo $\dim(\{\bar{0}\}) = 0$

- APPLICAZIONE LINEARE
Siano U e V spazi vettoriali dello stesso campo K; si dice che appl. lineare $f: V \to U$ è lineare (o omomorfismo) se

1) $\forall (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in V^2 : f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2)$
2) $\forall \bar{v} \in V, \forall k \in K : f(k\bar{v}) = k f(\bar{v})$

Si dice che l'appl. conserva le 2 op. di spazio vettoriale.

- ENDOMORFISMO f appl. lineare è endomorf. se $V = U$

- ISOMORFISMO f appl. lineare è isomorfismo se è biiettiva.

Es. $f(\bar{x}) = \bar{0}_U$ è appl. lineare

$f(\bar{x}) = \bar{u}$, $\bar{u} \neq \bar{0}_U$ non è lineare.

$f : (x_1, x_2 \dots x_n) \in K^n \mapsto (x_1, x_2 \dots x_n) \in K^{1,n}$

è appl. lineare e, precisamente, isomorfismo.

- RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE

Ogni matrice $A = (a_{ij})$ di tipo $m \times n$ definisce un'applicazione $f : K^n \to K^m$

$\forall \; \bar{x} = (x_1, x_2 \dots x_n) \in K^n$:

$f(\bar{x}) = (y_1, y_2 \dots y_m) = \bar{y} \in K^m$ dove

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$$

$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n$$

$$y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n$$

Siano $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$

$Y = A \cdot X$ (analogo ad $y = f(x)$)

- PROPRIETÀ DELLE APPL. LINEARI

1) $f(\bar{0}_V) = \bar{0}_U$
2) $\forall \bar{v} \in V : f(-\bar{v}) = -f(\bar{v})$
3) Se $\bar{w} = a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \ldots + a_n \bar{v}_n \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\bar{w}) = a_1 f(\bar{v}_1) + a_2 f(\bar{v}_2) + \ldots + a_n f(\bar{v}_n)$
4) Se $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \ldots \bar{v}_n$ sono lin. ~~ind.~~ dip. $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(\bar{v}_1), f(\bar{v}_2) \ldots f(\bar{v}_n)$ sono lin. dip.
cioè "un'appl. lineare conserva la lineare dipendenza". (Non vale per l'indipendenza)

OSS. Se $\dim(V) > \dim(U)$ allora i vettori indipendenti di una base di V diventano lin. dipendenti in U.

- KER $\operatorname{Ker}(f) = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{0}_U \}$
- IMMAGINE $\operatorname{Im}(f) = \{ \bar{u} \in U \mid \exists\, \bar{v} \in V \ni' f(\bar{v}) = \bar{u} \}$

$\underset{\text{nucleo}}{\operatorname{Ker}(f)} \leq V \quad \wedge \quad \underset{\text{immagine}}{\operatorname{Im}(f)} \leq U$

- UN'APPL. LIN. TRASFORMA SOTTOSPAZI IN SOTTOSPAZI

Siano V' e U' sottospazi di V e U;

$f^{-1}(U') = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) \in U' \}$
$f(V') = \{ \bar{u} \in U \mid \exists\, \bar{v} \in V \ni' f(\bar{v}) = \bar{u} \}$

$f^{-1}(U') \leq V \quad \wedge \quad f(V') \leq U$

- f INIETTIVA $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{\bar{0}_V\}$

$\Rightarrow$) Sia $\bar{v} \in \ker f$
Sappiamo che $\bar{0}_V \in \ker f$ sempre perché
$f(\bar{0}_V) = \bar{0}_V$ in ogni appl. lineare.
Sappiamo che $f(\bar{v}) = \bar{0}_V$ e che f è iniettiva
quindi $f(\bar{v}_1) = f(\bar{v}_2) \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_2$ cioè
$f(\bar{v}) = f(\bar{0}_V) = \bar{0}_V \Rightarrow \bar{v} = \bar{0}_V$

$\Leftarrow$) Siano $\bar{v}, \bar{w} \in V$ t.c. $f(\bar{v}) = f(\bar{w})$
$f(\bar{v}) - f(\bar{w}) = \bar{0}_V \Rightarrow f(\bar{v} - \bar{w}) = \bar{0}_V \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{v} - \bar{w} \in \ker f$
Sappiamo che $\bar{0}_V$ è l'unico elemento di $\ker f$
quindi $\bar{v} - \bar{w} = \bar{0}_V \Rightarrow \bar{v} = \bar{w}$ quindi
$f(\bar{v}) = f(\bar{w}) \Rightarrow \bar{v} = \bar{w}$

- f INIETTIVA $\Longleftrightarrow$ f CONSERVA LA LIN. IND.

$\Rightarrow$) Siano $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$ vettori lin. ind. vogliamo
dimostrare che $f(\bar{v}_1), f(\bar{v}_2) \dots f(\bar{v}_n)$ sono lin. ind.
cioè che $a_1 f(\bar{v}_1) + a_2 f(\bar{v}_2) + \dots + a_n f(\bar{v}_n) = \bar{0}_V \Rightarrow$
$\Rightarrow f(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n f\bar{v}_n) = \bar{0}_V$ cioè
$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n \in \ker f$ che è composto
solo da $\bar{0}_V$ quindi $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}_V$
cioè $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

$\Leftarrow$) $f(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n) = \bar{0}_U$, $\bar{v} \in \ker f$, $\bar{v} \neq \bar{0}_V$
$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{v} \neq \bar{0}_V$ quindi non lin. ind.

- TEOREMA DEL RANGO O DELLE DIMENSIONI

$$\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

- GENERATORI DI $\operatorname{Im}(f)$

Siano $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$ vettori di una base $\mathcal{B}$ di V
$f(\bar{v}_1), f(\bar{v}_2) \dots f(\bar{v}_n)$ formano sempre un sistema di generatori di $\operatorname{Im}(f)$.
Preso $\bar{u} = f(\bar{v})$, $f\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n$ quindi
$\bar{u} = f(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n) = a_1 f(\bar{v}_1) + a_2 f(\bar{v}_2) + \dots$

- TH. ESISTENZA E UNICITÀ Per definire un'appl. lin. $f: V \to U$ è suff. e necessario conoscere i trasformati dei vettori di una base $\mathcal{B}_V$ di V.

Dim) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n\} = \mathcal{B}_V$
$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n$
$f(\bar{w}) = a_1 f(\bar{v}_1) + a_2 f(\bar{v}_2) + \dots + a_n f(\bar{v}_n)$

- $\operatorname{Im} f = L(f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2) \dots f(\bar{e}_n)) =$
$= \{ a f(\bar{e}_1) + b f(\bar{e}_2) + \dots + n f(\bar{e}_n) \in \mathbb{R}^n \}$
con $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n\}$ base canonica.

- DA f A A_f

$f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = (y_1, y_2 \dots y_m)$
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$

$y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n$

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ di tipo } m \times n$$

$A_f \cdot X = Y$ $\quad$ $m \cdot n \times n \cdot 1 \quad m \cdot 1$

$\cancel{X \cdot A}$ $\quad$ $(1 \cdot m \times m \times n \to \cancel{1 \cdot m})$

- VETTORI LIBERI

Scelti 2 punti A e B della retta r, $\overrightarrow{AB}$ si chiama segmento orientato avente come primo estremo A e secondo B.
L'insieme di tutti i segmenti orientati della retta r si denota con S_1

- RELAZIONE DI EQUIPOLLENZA Siano AB e CD segmenti orientati; AB ~ CD (sono equipollenti) se accade UNO di questi fatti:

•) $A = B \wedge C = D$
•) $A \neq B \wedge C \neq D$ ma
- $\|AB\| = \|CD\|$ (stesso modulo);
- hanno lo stesso verso;
- hanno la stessa direzione;

È una relazione di equivalenza.

- **CLASSE DI EQUIPOLLENZA** È l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti della retta r. Costituiscono l'insieme quoziente $V_1 = S_1 / \sim$ e si chiamano vettori liberi di r.

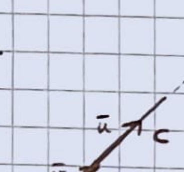
- **LUNGHEZZA DEL VETTORE** Sia $\bar{v} \in V_1$ vettore libero di V_1, $\|\bar{v}\|$ indica la lunghezza di $\bar{v}$

- Sia Q un punto su r e AB un segmento orientato rappresentante del vettore libero di r, allora è unico ed esiste sempre il segmento PQ rappresentante alla classe di equipollenza.

- **VETTORE APPLICATO** Si chiama vettore applicato una coppia ordinata $(A, \bar{v})$ avente come prima componente un punto su una retta $\nparallel r$ e come seconda componente il vettore $\bar{v}$ di V_1.

$(V_1, +)$ è una struttura algebrica di gruppo abeliano.

$\bar{v} + \bar{u}$



$\bar{v} = \overline{AB}$ e $\bar{u} = \overline{BC}$ $\rightarrow$ $\bar{v} + \bar{u} = \overline{AC}$

- **PRODOTTO PER SCALARE** Soddisfa le seguenti pr.

1) $\forall\ \bar{v}, \bar{u} \in V_1,\ \forall\ h \in \mathbb{R}:\ h(\bar{v} + \bar{u}) = h\bar{v} + h\bar{u}$

2) $\forall\ h, k \in \mathbb{R},\ \forall\ v \in V_1:\ (h + k)\bar{v} = h\bar{v} + k\bar{v}$

3) $\forall\, h,k \in \mathbb{R},\ \forall\, v \in V_1 : h(k \cdot \bar{v}) = (hk)\,\bar{v}$

4) $\forall\, v \in V_1 : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

- V_1 è spazio vettoriale di dim 1

$(V_1, +)$ gruppo abeliano e $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ campo reale

V_1 spazio vettoriale perché soddisfa:

1) $\forall\, \bar{v}, \bar{u} \in V_1,\ \forall\, h \in \mathbb{R} : h(\bar{v} + \bar{u}) = h\bar{v} + h\bar{u}$
2) $\forall\, h,k \in \mathbb{R},\ \forall\, \bar{v} \in V_1 : (h+k)\bar{v} = h\bar{v} + k\bar{v}$
3) $\forall\, h,k \in \mathbb{R},\ \forall\, \bar{v} \in V_1 : h(k\bar{v}) = (hk)\bar{v}$
4) $\forall\, \bar{v} \in V_1 : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

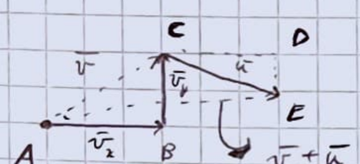
- VETTORI LIBERI NEL PIANO

L'insieme di tutti i segmenti orientati su un piano π si denota con S_2.

2 segmenti AB e CD sono equipollenti se:

1) $A = B \wedge C = D$
2) $A \neq B$ e
   - $\|AB\| = \|CD\|$
   - le rette AB e CD sono parallele
   - il verso di $\bar{AB}$ è lo stesso di quello di $\bar{CD}$.

- V_2 è spazio vettoriale di dim 2



$$\bar{v} = \|\bar{v}_x\|\,(1,0) + \|\bar{v}_y\|\,(0,1)$$

- VETTORI LIBERI NELLO SPAZIO

L'insieme di tutti i segmenti orientati nello spazio Σ si denota con S_3.

La relazione di equipollenza rimane invariata a quella inerente il piano.

- V_3 è uno spazio vettoriale di dim 3

$$\forall \bar{x} \in V_3 : \exists (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 \ni' \bar{x} = h_1 \bar{v} + h_2 \bar{u} + h_3 \bar{w}.$$

Come nelle altre figure geometriche l'importante è che $\bar{v}$, $\bar{u}$ e $\bar{w}$ siano lin. indipendenti.

- LIN. ~~IN~~DIPENDENZA

Nella retta l'unico vettore lin. dip. è il vettore $\bar{o}$

Nel piano 2 vettori sono lin. dip se paralleli

Nello spazio 3 vettori sono lin dip se complanari.

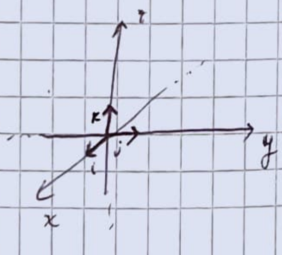
$\mathcal{B}_1 = \{\bar{v}\} \ni' \bar{v} \neq \bar{o}$

$\mathcal{B}_2 = \{\bar{v}, \bar{u}\} \ni' \bar{v} \nparallel \bar{u}$

$\mathcal{B}_3 = \{\bar{v}, \bar{u}, \bar{w}\} \ni' \bar{v}, \bar{u}, \bar{w}$ non complanari

Di solito vengono scelte delle basi contenenti vettori ortonormali (ortogonali tra loro e con norma 1)

$\mathcal{B}_3 = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ con $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$



$\mathcal{B}_1 = \{\bar{v}\}$

$\forall \bar{x} \in V_1 : \exists h \in \mathbb{R} \ni' h\bar{v} = \bar{x}$

Dim) $h = \pm \frac{\|\bar{x}\|}{\|\bar{v}\|}$

$\mathcal{B}_2 = \{\bar{v}, \bar{u}\}$

$\forall \bar{x} \in V_2 \ \exists (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \ni' h_1\bar{v} + h_2\bar{u} = \bar{x}$

$h_1\bar{v} + h_2\bar{u} = \bar{0}$ con $(h_1, h_2) \neq (0,0)$

$\bar{v} = \underbrace{-\frac{h_2}{h_1}}\bar{u} \iff \bar{v}$ e $\bar{u}$ paralleli.

- PRODOTTI TRA VETTORI

Si denota con $\widehat{\bar{v}\bar{u}}$ l'angolo ~~tra~~ $\overbrace{\text{convesso}}^{0 \leq \theta \leq \pi}$ determinato dai rappresentanti dei 2 vettori applicati nello stesso punto.

- PRODOTTO SCALARE Si chiama prodotto scalare il numero reale denotato con $\bar{v} \cdot \bar{u}$ (o solo $\bar{v}\bar{u}$) dove

$\bar{v} \cdot \bar{u} = \|\bar{v}\| \, \|\bar{u}\| \cos \widehat{\bar{v}\bar{u}}$.

Se $\|\bar{v}\| = \|\bar{u}\| = 1$ allora $\bar{v} \cdot \bar{u}$ indica $\cos(\widehat{\bar{v}\bar{u}})$

Se $\|\bar{v}\| = 1$, $\bar{v} \cdot \bar{u}$ indica la proiezione di un rappresentante di $\bar{u}$ sulla retta di $\bar{v}$.

Se $\bar{v} = \bar{0} \vee \bar{u} = \bar{0}$, $\bar{v} \cdot \bar{u} = \bar{0}$ per convenzione

$\bar{v} \cdot \bar{u} = 0$, $\{\bar{v}, \bar{u}\} \neq \{\bar{0}\} \Rightarrow \bar{v}$ e $\bar{u}$ sono ortogonali (perpendicolari)

Proprietà:

1) $\forall\ \bar{v}, \bar{u} \in V_3 : \ \bar{v} \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot \bar{v}$

2) $\forall\ \bar{v}, \bar{u}, w \in V_3 : \ \bar{v}(\bar{u} + \bar{w}) = \bar{v}\bar{u} + \bar{v}\bar{w}$

3) $\forall\ \bar{v}, \bar{u} \in V_3,\ \forall\ h \in \mathbb{R} : \ h(\bar{v}\bar{u}) = (h\bar{v})\bar{u}$

4) $\forall\ \bar{v} \in V_3 : \ \bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$

5) $\forall\ \bar{v} \in V_3 : \ \bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \iff \bar{v} = 0$

Siano $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ versori ortogonali a 2 a 2;

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$$

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Siano $\bar{v} = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j} + v_3 \bar{k}$

$\bar{u} = u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j} + u_3 \bar{k}$

$$\begin{aligned} \bar{v}\bar{u} &= v_1 u_1 \overline{ii} + v_1 u_2 \overline{ij} + v_1 u_3 \overline{ik} + \\ &+ v_2 u_1 \overline{ji} + v_2 u_2 \overline{jj} + v_2 u_3 \overline{jk} + \\ &+ v_3 u_1 \overline{ki} + v_3 u_2 \overline{kj} + v_3 u_3 \overline{kk} = \\ &= v_1 u_1 \bar{i}^2 + v_2 u_2 \bar{j}^2 + v_3 u_3 \bar{k}^2 \end{aligned}$$ quindi

$$\overline{vu} = \sum_{n=1}^{3} v_n u_n$$

$$\overline{v \cdot v} = \|v\| \cdot \|v\| \cdot \cos 0 = \|v\|^2 \ \wedge$$

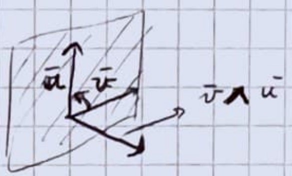
$$\overline{vv} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$ quindi

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

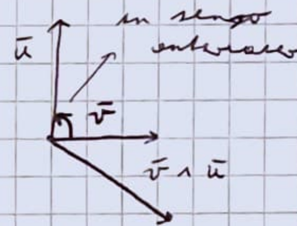
$$\text{vers } \bar{v} = \frac{1}{\|v\|} \cdot \bar{v}$$ (versore di $\bar{v}$)

$$\cos \widehat{\bar v \bar u} = \frac{\bar v \, \bar u}{\|v\| \, \|u\|} = \frac{v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

- PRODOTTO VETTORIALE Si chiama prodotto vettoriale tra $\bar v$ e $\bar u$ vettori non nulli e si denota con $\bar v \wedge \bar u$ il vettore che:



1) ha per modulo $\|v\| \cdot \|u\| \cdot \operatorname{sen}(\widehat{\bar v \bar u})$
2) per direzione la direzione ortogonale ai due vettori $\bar v$ e $\bar u$
3) per verso quello secondo cui il secondo ~~vett~~ estremo del vettore $\bar v \wedge \bar u$ vede ruotare il vettore $\bar v$ verso il vettore $\bar u$ in senso antiorario con un angolo convesso.



$\bar v \wedge \bar u = \bar 0 \iff$

1) $\bar v$ è vettore nullo
2) $\bar u$ è vettore nullo
3) $\bar v \parallel \bar u$

Proprietà

proprietà anticommutativa

1) $\forall \bar v, \bar u \in V_3 : \bar v \wedge \bar u = -\bar u \wedge \bar v$

distributiva

2) $\forall \bar v, \bar u, \bar w \in V_3 : \bar v \wedge (\bar u + \bar w) = \bar v \wedge \bar u + \bar v \wedge \bar w$
3) $\forall \bar v, \bar u \in V_3, \forall h \in \mathbb{R} : h(\bar v \wedge \bar u) = (h \bar v) \wedge \bar u$

omogeneità

In generale $(\bar v \wedge \bar u) \wedge \bar w \neq \bar v \wedge (\bar u \wedge \bar w)$

$$\bar i \wedge \bar i = \bar j \wedge \bar j = \bar k \wedge \bar k = 0$$

$$\bar i \wedge \bar j = \bar k \, , \quad \bar j \wedge \bar k = \bar i \, , \quad \bar k \wedge \bar i = \bar j$$

$$\bar j \wedge \bar i = -\bar k \, , \quad \bar k \wedge \bar j = -\bar i \, , \quad \bar i \wedge \bar k = -\bar j$$

$$\bar v \wedge \bar u = (u_3 v_2 - u_2 v_3)\bar i - (u_3 v_1 - u_1 v_3)\bar j + (u_2 v_1 - u_1 v_2)\bar k$$

$$\bar v \wedge \bar u = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

- PRODOTTO MISTO Si definisce prodotto misto tra tre vettori liberi $\bar v, \bar u, \bar w$ dello spazio V_3 il numero reale $\bar v \cdot \bar u \wedge \bar w$ che corrisponde al determinante della matrice M con

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad \text{quindi}$$

$$\bar v \cdot \bar u \wedge \bar w = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- AUTOVALORI

Si dice che uno scalare $\lambda \in K$ è un autovalore per un endomorfismo $f: V \to V$ se ~~esiste~~
$\exists \; \bar v \in V^* \ni' f(\bar v) = \lambda \bar v$.
$\bar v$ è detto autovettore.
L'autospazio è l'insieme di tutti i vettori per cui $f(\bar v) = \lambda \bar v$. ($\bar o \in V_\lambda$ ma $\bar o$ non è autovettore)
$$V_\lambda = \{ \bar v \in V \mid f(\bar v) = \lambda \bar v \}$$

V_λ è un sottospazio di V.
Contiene sempre $\bar{0}$ e verifica le proprietà di chiusura.

$f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2) = \lambda \bar{v}_1 + \lambda \bar{v}_2 = \lambda(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$
$k f(\bar{v}) = k\lambda \bar{v} = \lambda k \bar{v} = f(k\bar{v})$

$L(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n) \subseteq V_\lambda$ ~~...~~, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n \in V_\lambda$

0 può essere autovalore ed in questo caso
$\ker f \neq \{\bar{0}\}$ quindi f non è iniettiva.

Se v è un autovettore per un certo scalare
$\bar{v}$ ed $f(\bar{v})$ sono paralleli.

- $\underline{V_\lambda \cap V_\mu = \{\bar{0}_V\}}$

<u>Dim</u>) $\bar{v} \in V_\lambda \Rightarrow f(\bar{v}) = \lambda v$
$\bar{v} \in V_\mu \Rightarrow f(\bar{v}) = \mu v$ $\Rightarrow \lambda\bar{v} = \mu\bar{v} \Rightarrow$

contro le ipotesi

$\Rightarrow (\lambda - \mu)\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\lambda = \mu} \vee \boxed{\bar{v} = \bar{0}}$

$\bar{u} \in V_\lambda$, $\bar{w} \in V_\mu$ sono lin. indipendenti.
Se $a\bar{u} + b\bar{w} = \bar{0} \Rightarrow \bar{u} = (-b/a)\bar{w} \Rightarrow \bar{u} \in V_\mu$
$\left(f(-b/a\, \bar{w}) = \lambda(-b/a)\bar{w} = (-b/a)(\lambda \bar{w}) = -b/a\, f(\bar{w}) \right)$

- $\mathcal{B}_{V_\lambda} \cup \mathcal{B}_{V_\mu} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{V_\sigma}$ forma un sottoinsieme di vettori lin. indipendenti.

- **MATRICI SIMILI** Siano A e B matrici di $K^{n,n}$:
A e B sono matrici simili se
$\exists\, P \in K^{n,n},\ |P| \neq 0$ t.c. $B = P^{-1} A P$.

Conviene osservare che P non è unica.

La relazione di similitudine è una relazione di equivalenza.
La proprietà riflessiva si verifica usando P (matrice di passaggio) $= I_n$
$A = I_n^{-1} A I_n = I_n A I_n = A I_n = A$
La proprietà simmetrica invece si verifica così:
$B = P^{-1} A P \Rightarrow P \cdot B = P \cdot P^{-1} A P \Rightarrow P \cdot B = AP \Rightarrow$
$\Rightarrow P \cdot B \cdot P^{-1} = A \cdot P \cdot P^{-1} \Rightarrow P \cdot B \cdot P^{-1} = A$ e
$P' = P^{-1} \Rightarrow A = P'^{-1} B P'$.
Infine c'è la proprietà transitiva:
$B = P^{-1} A P \ \wedge\ C = Q^{-1} B Q$
$C = Q^{-1} B Q = Q^{-1} (P^{-1} A P) Q = (Q^{-1} P^{-1}) A (P \cdot Q)$ e
$S = P \cdot Q \Rightarrow C = S^{-1} A S$

A simile a $B \Rightarrow r(A) = r(B)$

- **MATRICE DIAGONALIZZABILE** Una matrice A è diagonalizzabile se simile ad una matrice diagonale.

- AUTOVALORI PER UNA MATRICE

Si dice che uno scalare λ è autovalore per una matrice di $K^{n,n}$ se.

$\exists\ X \in K^{n,1}$ non nulla t.c. $AX = \lambda X$

X è detto autovettore

V_λ è l'autospazio che contiene il vettore colonna nullo.

$V_\lambda \subseteq K^{n,1}$ poiché rispetta le 2 proprietà di chiusura:

1) $A(X+Y) = AX + AY = \lambda X + \lambda Y = \lambda(X+Y)$

2) $A(hX) = h(AX) = h(\lambda X) = \lambda(hX)$

$$AX = \lambda X \Rightarrow (A - \lambda I_n)X = O_{n,1}$$

- POLINOMIO CARATTERISTICO Si chiama polinomio caratteristico di una matrice A $|A - \lambda I_n|$.

Si chiama EQ. CARATTERISTICA l'equazione

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

Il polinomio sarà di grado n ed avrà $(-1)^n\lambda^n$ quindi avrà al massimo n soluzioni

Il polinomio sarà di tipo $(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \ldots + |A|$

- A e B simili $\Rightarrow$ stesso polinomio caratteristico

$$|B - \lambda I_n| = |P^{-1}AP - \lambda I_n| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_n P| =$$
$$= |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda I_n P| = |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| = |P^{-1}||A - \lambda I_n||P| =$$
$$= |A - \lambda I_n|$$

L'applicazione caratteristica di A è anche:

$$(-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n = 0_{n,n}$$

che può essere usata per trovare la matrice inversa:

$$A^{-1}\left((-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n\right) = \cancel{0_{n,n}}\, A^{-1} \cdot 0_{n,n}$$

~~da~~ quindi

$$\cancel{A}(-1)^n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_2 A^{\cancel{2}} + a_1 I_n + a_0 A^{-1} = 0_{n,n}$$

$$(-1)^n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_2 A + a_1 I_n = -a_0 A^{-1}$$

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)\left[(-1)^n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_2 A + a_1 I_n\right]$$

Supponiamo le proprietà degli autovalori / autospazi / autovettori:

1) $V_\mu \cap V_\lambda = \{\bar{0}_V\}$
2) $X \in V_\mu$, $Y \in V_\lambda \Rightarrow X$ e Y lin. ind.
3) $\bigcup_{\substack{i,\\ i \text{ è autovalore}}} B_{V_i}$ è un sottoinsieme di vettori lin. ind.

- MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA Sia A una matrice e λ suo autovalore; si chiama molteplicità alg. di λ la sua molteplicità nella soluzione dell'eq. car.

- MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA Sia A matrice e λ suo autovalore; si chiama molteplicità geom. di λ la dimensione del sottospazio V_λ.

$1 \leq \dim V_\lambda \leq m_a \lambda$, cioè la molteplicità algebrica è sempre maggiore a quella geometrica.

$$\dim V_\lambda = \overset{\text{ordine di } A}{n} - r(A - \lambda I_n)$$

- A è diagonalizzabile se e solo se

1) tutte le soluzioni sono autovalori ($\in \mathbb{K}$)
2) $\dim V_\lambda = m_a \lambda$ (molteplicità algebrica corrisponde a quella geometrica)

- Le matrici simmetriche reali sono sempre diagonalizzabili.

- 2 matrici sono simili se e solo se

1) hanno gli stessi autovalori
2) stessa molteplicità algebrica
3) stessa molteplicità geometrica

- A è diagonalizzabile se esiste una base formata solo da ~~autovalori~~ autovettori di $K^{n,1}$

- Se A diagonalizzabile, la matrice di passaggio è formata dalla base di $K^{n,1}$ formata dagli autovettori.

GEOMETRIA NELLO PIANO

- **RIFERIMENTO CARTESIANO**: Si chiama rif. cartesiano e si denota $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ una coppia ordinata costituita da un punto O detto origine e una base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale V_n.

- **NELLA RETTA**: Si chiama rif. cartesiano e si denota $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ una coppia ordinata costituita da un punto O detto origine e base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale V_1.

A ciascun punto viene associato un numero reale che è la componente del vettore OP rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$ ed è **chiamata** ascissa del punto (coordinata).

Sia $\bar{u}_1$ il vettore che forma la base $\mathcal{B}$;

$OA = x_1 \bar{u}_1$, $OB = x_2 \bar{u}_1$ dove x_1, x_2 sono le ascisse di OA e OB.

$AB = OB - OA = x_2 \bar{u}_1 - x_1 \bar{u}_1 = \bar{u}_1 (x_2 - x_1)$

- **PUNTO MEDIO**: Nella retta il punto medio $\overset{x}{M}$ tra 2 punti distinti $\underset{x_1}{A}$ e $\underset{x_2}{B}$ ha come ascissa $\frac{x_1 + x_2}{2}$

Dim) $x - x_1 = x_2 - x \Longrightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

- PUNTO SIMMETRICO Siano $\overset{x_1}{A}$ ed $\overset{x}{M}$ due punti della retta, il simmetrico $\underset{x_2}{B}$ di A rispetto ad M ha ascissa
$x_2 = 2x - x_1$

- NEL PIANO Si chiama riferimento cartesiano la coppia ordinata $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ che ha come ~~p~~ primo componente un punto O detto origine e $\mathcal{B}$ base dello spazio vettoriale V_2.
Ogni punto ha una coppia di numeri reali associati ad esso chiamati rispettivamente ascissa e ordinata.
Solitamente viene scelta la base canonica $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ ed in tal caso $\mathcal{R}$ è un riferimento metrico (o monometrico ortogonale).

$OA = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$, $OB = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$
$AB = OB - OA = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}$
Il punto medio M tra 2 punti A e B ha come coordinate $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
Si dimostra con $x - x_1 = x_2 - x$, $y - y_1 = y_2 - y$

- NELLO SPAZIO Si chiama rif. cartesiano nello spazio la coppia ordinata $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ costituita da un punto O detto origine e $\mathcal{B}$ una base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale V_3.

Ad ogni punto viene associata una terna ordinata di numeri reali (x, y, z) dove x è l'ascissa, y è l'ordinata e z è la quota.
Solitamente viene scelta come base di riferimento $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. In questo caso ~~tra~~ il rif. ~~base~~ è isometrico (o monometrico ortogonale).

$$OA = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k} \quad , \quad OB = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}$$

$$AB = OB - OA = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

Il punto medio M ha come coordinate la terna $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ che si possono dedurre da $x - x_1 = x_2 - x$, $y - y_1 = y_2 - y$, $z - z_1 = z_2 - z$.

EQ. PARAMETRICA DELLA RETTA NELLO SPAZIO

Si prende un punto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in r$ con direzione nota indicata da $\bar{v} = (l, m, n)$ che è parallelo alla retta r.
Le coordinate di $P \in r$ devono far sì che il vettore PP_0 sia parallelo alla retta r cioè $\exists\, t \in \mathbb{R} : PP_0 = t\bar{v}$ cioè

$$\begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases}$$

Questa eq. vale anche per spazi vettoriali V_n con $\dim V_n = n \geq 3$

- ALLINEAMENTO DI 3 PUNTI

Siano $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ e $C(x_3, y_3, z_3)$ 3 punti giacenti nello spazio; A, B e C sono allineati se i vettori rappresentanti sono paralleli cioè la matrice A ha rango 1.

$$r\begin{pmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 1$$

- EQ. DELLA RETTA SOTTO FORMA DI RAPPORTI UGUALI

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Se uno dei denominatori è nullo per convenzione $\frac{e - e_1}{e_2 - e_1}$ con $e_1 = e_2$ diventa $e_1 = e_2$ nella tripla equazione.

cioè $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases}$ dove $y_2 - y_1 = m$, $z_2 - z_1 = n$ $(x_2 - x_1 = l)$

- PARAMETRI DIRETTORI Si chiamano parametri direttori (o numeri direttori) le componenti di un vettore non nullo parallelo alla retta stessa.
Nel caso il vettore $\bar{v}$ sia un versore ($\|\bar{v}\| = 1$) i parametri direttori prendono il nome di COSENI DIRETTORI.
Questo perché

$$\bar{v} \cdot \bar{i} = \|\bar{v}\| \|\bar{i}\| \cos \widehat{\bar{v}\bar{i}} = \cos \widehat{\bar{v}\bar{i}}$$

$\bar{v} \cdot \bar{i} = l$ da cui segue che $l = \cos \widehat{\bar{v}\bar{i}}$

RAPPRESENTAZIONI DELLA RETTA NEL PIANO

$$\begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \end{cases} \Leftarrow \text{rappr. parametrica}$$

$$(t =) \; \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Leftarrow \text{rappr. mediante due rapporti uguali}$$

Se $m = 0 \Rightarrow y = y_0$

Se $l = 0 \Rightarrow x = x_0$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0$$ che

si riconduce alla forma $ax + by + c = 0$ → eq. implicita

$(a = m$, $b = -l$, $c = ly_0 - mx_0)$

Con $a = 1$, $b = 0$, $c = -x_0$ si ha $x - x_0 = 0$

Con $a = 0$, $b = 1$, $c = -y_0$ si ha $y - y_0 = 0$

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \rightarrow \text{eq. esplicita}$$

$-a/b$ è il coeff. angolare, $-c/b$ l'ascissa sull'asse x

Punto generico della retta: $P(x_0 + lt, \; y_0 + mt)$

Sia $\bar{n}(a, b) \perp r$, $P_0 \in r$:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ (cioè $\langle \bar{n}, \overline{PP_0} \rangle = 0$)

INTERSEZIONI E PARALLELISMO TRA 2 RETTE DI UN PIANO

Siano r ed s 2 rette giacenti nel piano π con

$r: ax + by + c = 0$, $s: a'x + b'y + c' = 0$

Il sistema $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ è un sistema di Cramer se e solo se $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$. In questo caso il sistema ammette un'unica soluzione e quindi le rette risultano incidenti.

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ allora:

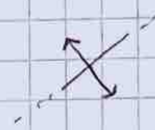
- $r\begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow r \parallel s$ e coincidenti $(r = s)$
- $r\begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow r \parallel s$ e distinte

In entrambi ~~i~~ casi $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow r \parallel s$

cioè $ax + by + c = 0 \parallel ax + by + k = 0$ con la stessa coppia di direzione $(-b, a)$. $\forall k \in \mathbb{R}$

- FASCIO PROPRIO DI RETTE È la rappresentazione simultanea di tutte le rette del piano passanti per il punto $P(x_0, y_0)$ del tipo

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ dove la scelta dei parametri direttori $(-b, a)$ [o $(b, -a)$]



con unica esclusione $(a, b) \neq (0, 0)$

che è equivalente ad $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ con $(l, m) = \begin{cases} (-b, a) \\ (b, -a) \end{cases}$

Si può usare anche la forma esplicita

$y - y_0 = m(x - x_0)$ che esclude le rette parallele all'asse delle ordinate.

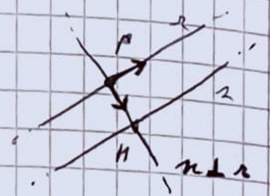
- **RETTE PERPENDICOLARI** Siano r ed s 2 rette ed $\bar{r}$ ed $\bar{s}$ parametri direttori; $r \perp s \iff \langle \bar{r}, \bar{s} \rangle = 0$

cioè $\bar{r} \cdot \bar{s} = \|\bar{r}\| \, \|\bar{s}\| \cdot \cos \widehat{rs} = 0$ o anche

$$l_r l_s + m_r m_s = 0$$

- **DISTANZE NEL PIANO** $d(A,B) = \|AB\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Questa formula può essere usata per calcolare la distanza tra 2 rette // ad esempio.



Siano P un punto $\in r$ ed (a,b) direttori di n allora

$$n: \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \end{cases}$$

Si sostituisce ad s l'eq. generica di $H \in n \cap s$

$(x_0 + at, \; y_0 + bt)$ quindi

$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$ e risolvo per trovare il valore di t

$$t_H = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

Si ottengono così le coordinate di $H \; (x_0 + at_H, \; y_0 + bt_H)$

$$d(P,H) = \sqrt{(x_0 + at_H - x_0)^2 + (y_0 + bt_H - y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 t_H^2 + b^2 t_H^2} = |t_H| \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{cioè}$$

$$\left| -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- CONICHE $ax^2 + byx + cy^2 + dx + ey + f = 0$

cioè $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$$

Es $y = ax^2 \Rightarrow ax^2 - y = 0$ corrisponde ad

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- EQUAZIONI DI UN PIANO

Per ricavare l'eq. di un piano possiamo immaginare di avere $P_0 \in \pi$ ad $\bar{n}$ t.c. $\bar{n} \perp \pi$

con $P \in \pi$ punto generale.

retta n rappresentata dal vettore $\bar{n}$

$\bar{n} \perp \pi \iff \bar{n} \perp \overline{PP_0}$ cioè

$\langle \bar{n}, \overline{PP_0} \rangle = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow ax + by + cz + d = 0$ dove $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

Avendo 3 punti A, B, C, $AB \wedge BC$ dà come risultato un vettore ortogonale al piano

- INTERSEZIONI E PARALLELISMO TRA PIANI

Siano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, $\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$

2 piani nello spazio allora

$r\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2 \iff \pi$ e π' incidenti

(l'intersezione è una retta ∞^1)

$$r\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1 \iff \pi \parallel \pi' \text{ e}$$

se $r\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1$ $\nearrow$ $\parallel$ e distinti

$\searrow$ $\parallel$ e coincidenti ~~congruenti~~

Una retta nello spazio può essere sempre rappresentata come l'intersezione tra 2 piani.
L'insieme di tutti i piani distinti contenenti una retta r si chiama fascio proprio di piani di asse r.
Una terna di direttori della retta è
$(bc' - b'c,\ a'c - ac',\ ab' - a'b)$
Il vettore $\bar{n}(a,b,c) \perp \pi$ e $\bar{n}'(a',b',c') \perp \pi' \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{n} \wedge \bar{n}' \parallel r$

- FASCI PROPRI E IMPROPRI DI PIANI

$r: \begin{cases} \pi \\ \pi' \end{cases}$ $\quad A_r = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$, $r(A_r) = 2$ cioè

$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$: $\lambda(ax+by+cz+d) + \mu(a'x+b'y+c'z+d') = 0$
è l'eq. del fascio proprio di piani che contiene r.
Se $P_1(x_1, y_1, z_1) \in r$ allora

$\lambda(ax_1 + by_1 + cz_1 + d) + \mu(a'x_1 + b'y_1 + c'z + d') = 0$

cioè $\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$

L'eq. può essere riscritta come

$$(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + (\lambda c + \mu c')z + (\lambda d + \mu d') = 0$$

$$\begin{cases} \lambda a + \mu a' = 0 \\ \lambda b + \mu b' = 0 \\ \lambda c + \mu c' = 0 \end{cases}$$

$\pi_{//} : ax + by + cz + k = 0$ è l'eq. del piano parallelo a π generico con $k \in \mathbb{R}$

- INTERSEZIONE TRA PIANO E RETTA

Siano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ piano e

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

$P \in r \cap \pi$ è un punto che soddisfa

$$a(x_0 + lt) + b(y_0 + mt) + c(z_0 + nt) + d = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (al + bm + cn)t + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{al + bm + cn} \quad \text{se } al + bm + cn \neq 0$$

Se $al + bm + cn = 0$:

1) se $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ allora $r \subset \pi$

2) se $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$ allora r e π sono distinti, non s'incontrano.

$$al + bm + cn = 0 \Leftrightarrow r // \pi$$

RETTE COMPLANARI E SGHEMBE

2 rette sono complanari se esiste un piano che le contenga. Se non esiste allora sono sghembe. Se 2 rette sono complanari possono essere incidenti o parallele.

Rette sghembe non hanno parametri direttori proporzionali.

2 rette sono complanari se $\bar{v} \cdot \bar{u} \wedge \bar{w} = 0$

2 rette sono sghembe se $\bar{v} \cdot \bar{u} \wedge \bar{w} \neq 0$

dove $\bar{v}$ è un rappresentante del segmento AB ($A \in r$, $B \in s$), $\bar{u}$ è un vettore parallelo alla retta r, $\bar{w}$ vettore parallelo alla retta s.

ANGOLI TRA RETTE NELLO SPAZIO E TRA PIANI

$\bar{n}$ parametri direttori di r

$\bar{n}'$ parametri direttori di s

$$\cos \widehat{rs} = \frac{\langle \bar{n}, \bar{n}' \rangle}{\|\bar{n}\| \, \|\bar{n}'\|}$$

Se $r \perp s \Rightarrow \bar{n} \perp \bar{n}' \Rightarrow \langle \bar{n}, \bar{n}' \rangle = 0$

$\pi : ax + by + cz + d = 0$ ha $\bar{n}(a,b,c)$ come parametro direttore del piano π.
(un vettore non nullo perpendicolare al piano π)

$$\cos \widehat{\pi\pi'} = \frac{\langle \bar{n}, \bar{n}' \rangle}{\|\bar{n}\| \, \|\bar{n}'\|} = 0 \iff \langle \bar{n}, \bar{n}' \rangle = 0$$

cioè $aa' + bb' + cc' = 0$

Una retta è parallela ad un piano se $\langle \bar{n}_r, \bar{n}_\pi \rangle = 0$

$$r \parallel \pi \iff \langle \bar{n}_r , \bar{n}_\pi \rangle = 0$$

cioè $al + bm + cn = 0$

$$r\begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1 \iff r \perp \pi$$

- DISTANZA NELLO SPAZIO

* per la distanza tra P e π.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

In maniera analoga alla distanza tra punto e retta nel piano possiamo trovare le formule*:

$P \in n^{\perp}_{r}$ cioè $P(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ deve soddisfare $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$ cioè $(a^2 + b^2 + c^2)t + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_H = - \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d(P, H) = \sqrt{(x_0 + at_H - x_0)^2 + (y_0 + bt_H - y_0)^2 + (z_0 + ct_H - z_0)^2} = |t_H| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = d(P, \pi)$$

- MINIMA DISTANZA E RETTA DI MINIMA DISTANZA TRA 2 RETTE SGHEMBE

L'insieme $D(r, s) = \{ d(P, Q) \in \mathbb{R} \mid P \in r \wedge Q \in s \}$ nel caso di $r // s$ ha solo un elemento.
Nel caso di r ed s sghembe ha infiniti elementi ed ha un minimo.
Si chiama minima distanza tra 2 rette r, s il minimo tra le distanze tra 2 punti $P \in r$ ed $Q \in s$ cioè $\min D(r, s)$.
La retta passante per questi 2 punti si chiama retta di minima distanza tra le 2 rette sghembe.

La retta di minima distanza è l'unica retta che interseca entrambe le rette r, s ed è ortogonale ad entrambe.