Trasformata di Laplace

Daniele Di Spirito

Sistemi dinamici a tempo continuo

I sistemi dinamici a tempo continuo sono spesso descritti da **equazioni differenziali**.
Risolvere queste equazioni direttamente nel dominio del tempo può essere complesso ma la trasformata di Laplace semplifica radicalmente il processo di risoluzione convertendo le derivate in termini algebrici, passando dal dominio reale a quello complesso.

Analizzeremo la trasformata di Laplace per i segnali canonici. Conviene prima farne un elenco riassuntivo.

Segnali canonici

1. Gradino Unitario

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

2. Rampa Unitaria

$$t \cdot 1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

3. Rampa parabolica

$$\frac{t^2}{2} \cdot 1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & t \geq 0 \end{cases}$$

4. Funzione Impulso P

$$P_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & t \in [0, \tau] \\ 0 & t \in T \setminus [0, \tau] \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_\tau(t) = 1 \quad \forall\, \tau$$

5. Delta di Dirac δ

$$\delta(t) \triangleq \lim_{\tau \to 0} P_\tau(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Correlazione tra i segnali canonici

$$\frac{d}{dt}[\frac{t^2}{2} \cdot 1(t)] = t \cdot 1(t) \Leftrightarrow \int_{0^-}^{t} \tau \cdot 1(\tau) = \frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$$

$$\frac{d}{dt}[t \cdot 1(t)] = 1(t) \Leftrightarrow \int_{0^-}^{t} 1(\tau) = t \cdot 1(t)$$

$$\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t) \Leftrightarrow \int_{0^-}^{t} \delta(\tau) = 1(t)$$

Trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \triangleq \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Trasformata per i segnali canonici e proprietà

Delta di Dirac $\delta(t)$

Sfruttiamo la proprietà del delta di Dirac $\delta(t)$ tale che

$$\int_{0^-}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t-\tau)\, dt = f(\tau)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0-}^{+\infty} e^{-st}\delta(t)\, dt = e^{-s\cdot 0} = 1$$

Gradino Unitario $1(t)$

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s} \quad \forall \sigma \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\sigma) > 0$$

Proprietà

1. $\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \beta \mathcal{L}\{f_2(t)\}$ ***Linearità***
2. $\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau}\mathcal{L}\{f(t)\}$
3. $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)\ con\, F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
4. $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}$

Trovo gli altri segnali usando le proprietà

Rampa Unitaria $t \cdot 1(t)$

Tramite la proprietà 4 possiamo trovare la trasformata della rampa unitaria e di quella parabolica.

$$\mathcal{L}\{t \cdot 1(t)\} = \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{1(t)\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Rampa parabolica $\frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$

$$\mathcal{L}\{\frac{t^2}{2} \cdot 1(t)\} = (-1)^2 \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3}$$

In generale ricaviamo una quinta proprietà

$$\mathcal{L}\{t^n 1(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Trasformata di $\sin(\omega t) \cdot 1(t)$

Sappiamo che

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{\omega jt} - e^{-\omega jt}}{2j}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{\omega jt}\} - \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{-\omega jt}\} = \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{\omega jt} \cdot 1(t)\} - \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{-\omega jt} \cdot 1(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{e^{\omega jt} \cdot 1(t)\} = s^{-1}|_{s-\omega j} = \frac{1}{s - \omega j}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\omega jt} \cdot 1(t)\} = s^{-1}|_{s+\omega j} = \frac{1}{s + \omega j}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{\omega jt}\} - \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{-\omega jt}\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - \omega j} - \frac{1}{s + \omega j}\right) = \frac{1}{2j}\frac{2\omega j}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Trasformata di $\cos(\omega t) \cdot 1(t)$

Sappiamo che

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{\omega jt} + e^{-\omega jt}}{2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\omega jt}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-\omega jt}\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\omega jt} \cdot 1(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-\omega jt} \cdot 1(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{e^{\omega jt} \cdot 1(t)\} = \frac{1}{s - \omega j}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\omega jt} \cdot 1(t)\} = \frac{1}{s + \omega j}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\omega jt}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-\omega jt}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - \omega j} + \frac{1}{s + \omega j}\right) = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Trasformata di Laplace per derivate

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1}f^{(i)}(0)$$

che con condizioni iniziali **CI** nulle diventa semplicemente

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Sapendo che $\delta(t) = \frac{d}{dt}1(t)$ possiamo verificare questa proprietà

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = s \cdot \mathcal{L}\{1(t)\} = s \cdot \frac{1}{s} = 1$$

Trasformata dell'integrale

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Esempio pratico

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \delta(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \frac{1}{s}$$

Teorema del valore iniziale

Hp Sia $f(t)$ un segnale causale t.c. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.
Th

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$$

Teorema del valore finale

Hp Sia $f(t)$ un segnale causale t.c. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.
Th

$$\exists \lim_{t\to\infty} f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$$

Convoluzione

La convoluzione (o prodotto di convoluzione) [$*$] è un operatore matematico che permette di effettuare un prodotto tra segnali.

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Convoluzione con le Trasformate

Per le trasformate la convoluzione diventa molto più semplice.

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$$