LEGENDA

1. Onde elettromagnetiche

- Operatori differenziali
- Th. della divergenza
- Th. di Stokes
- Eq. di Maxwell
- Dielettrici
- Fenomeni oscillatori
- Fenomeni ondulatori
- Analisi di Fourier
- Fronte d'onda
- Onde sferiche
- Onde sonore
- Sovrapposizione di onde
- Ampiezza massima di un'onda stazionaria
- Ampiezza minima di un'onda stazionaria
- Orecchio umano
- Effetto Doppler
- Effetto Doppler usato dagli autovelox
- Eco Doppler
- Onde elettromagnetiche
- Proprietà onde EM
- Onde di propagazione generale
- Onde piane
- Onde nei dielettrici
- Vettore di Poynting
- Tipi di Onde EM
- Produzione di Onde EM
- Polarizzazione delle Onde EM
- Lamine polarizzatrici

2. Riflessione e rifrazione

- Riflessione
- Rifrazione
- Condizioni di raccordo
- Angolo limite
- Energia
- Caso di incidenza normale
- Angolo di Brewster
- Passaggio nei materiali
- Principio di Fermat
- Attraversamento di lamina piana
- Effetti visivi della rifrazione
- Angolo di deviazione

3. Ottica Geometrica

- Elemento ottico
- Specchio concavo
- Specchio convesso
- Convenzione dei segni
- Costruzione dell'immagine
- Ingrandimento trasversale
- Specchio piano
- Diottro
- Costruzione dell'immagine
- Diottri piani
- Lenti
- Lente sottile
- Classificazione lenti
- Lente convergente
- Lente divergente
- Costruzione dell'immagine
- Ingrandimento
- Sistema di lenti
- Occhio
- Immagini reali e virtuali

4. Interferenza e diffrazione

- Interferenza
- Esperimento di Young
- Sorgenti incoerenti
- Effetto cromatico
- Lamina sottile
- Cuneo sottile
- Anelli di Newton
- Interferenza N sorgenti
- Caratteristiche
- Diffrazione
- Diffrazione Fraunhofer fenditura singola
- Diffrazione da apertura circolare
- Criterio di Rayleigh
- Interferenza e diffrazione
- Nel caso di N sorgenti

5. Formule utili

OPERATORI DIFFERENZIALI

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una f. scalare ($n = 3$ caso speciale)

$$\vec{\nabla} f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{u}_z \in \mathbb{R}^n$$

op. nabla $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ con $n = 3$

Sia $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una f. vettoriale (campo) [$n = 3$]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \in \mathbb{R} \text{ scalare}$$

div $\vec{F}$ divergenza

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

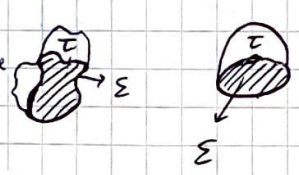
rot $\vec{F}$ rotore

Th. della DIVERGENZA

$$\oint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_\tau (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, d\tau$$

superficie chiusa

volume racchiuso dalla sup. Σ

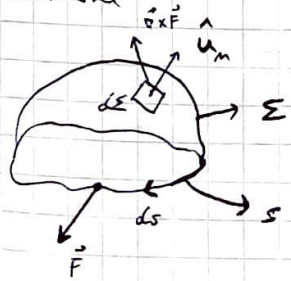


Th. di STOKES

$$\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, d\vec{\Sigma}$$

circuitazione

superficie



$\vec{\nabla} \times \nabla f$ rot (grad f) $\in \mathbb{R}^3$

$\vec{\nabla} \cdot \nabla f$ div (grad f) $\in \mathbb{R}$

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})$ div (rot F) $\in \mathbb{R}$

$\nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$ grad (div F) $\in \mathbb{R}^3$

$\vec{\nabla} \times \overbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})}^{\in \mathbb{R}}$ non ha senso

$\nabla \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{F})}_{\mathbb{R}^n \to \boxed{\mathbb{R}^n}}$ non ha senso

$\vec{\nabla} \cdot \nabla f = \nabla^2 f$ Laplaciano

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= 0 \end{aligned}\right] \text{IMPORTANTI}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

Eq. di Maxwell

Campo elettrostatico CONSERVATIVO $\longrightarrow \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = 0$

$$\oint_S \bar{E}\, d\bar{s} = \int_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, d\vec{\Sigma} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Legge di Gauss $\phi_E = \oint_\Sigma \bar{E}\, d\bar{\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_\tau \rho\, d\tau$

$$\oint_\Sigma \vec{E}\, d\vec{\Sigma} = \int_\tau (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, d\tau = \int_{\tau'} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau' \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Non esistono monopoli magnetici $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Legge di Ampere $\oint_S \bar{B}\, d\bar{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int_\Sigma \vec{j}\, d\vec{\Sigma}$

$$\oint_S \bar{B}\, d\bar{s} = \int_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{B})\, d\vec{\Sigma} = \int_\Sigma \mu_0 \vec{j}\, d\vec{\Sigma} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

In condizioni stazionarie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Legge di Faraday - Lenz $\mathcal{E}_i = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \bar{B}\, d\bar{\Sigma}$

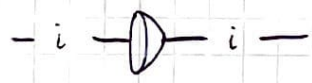
$$\| $$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \bar{B}\, d\bar{\Sigma} = -\int_\Sigma \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\, d\bar{\Sigma} \qquad \oint_S \bar{E}_i\, d\bar{s} = \int_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, d\bar{\Sigma}$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma (\vec{\nabla} \times \bar{E})\, d\Sigma = \int_\Sigma -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\, d\bar{\Sigma} \Rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

In cond. stazionarie $\oint_\Sigma \vec{j}\, d\bar{\Sigma} = 0$

In cond. non stazionarie $\oint_\Sigma \vec{j}\, d\vec{\Sigma} = -\frac{dq}{dt}$ eq. di continuità



STAZIONARIA

NON STAZIONARIA

$i \neq i'$

$i' = i + i_s'$ spost.

$$i_s = \oint_\Sigma \vec{J}_s \, d\vec{\Sigma} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

corrente di spostamento

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}}_{J_s}$$

$\vec{J}$: densità di corrente stazionaria

J_s: densità corrente di spostamento

Nuova legge di Ampere $\oint_s \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 (i + i_s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

In condizioni non stazionarie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \varepsilon_0 \right)$$

Dielettrici = Materiali non conduttori

$\Delta V < \Delta V_0 \rightarrow$ dip nel vuoto

con il dielettrico

$$k = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} > 1$$

COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA (PERMITTIVITÀ ELETTRICA)

$$\Delta E = E_0 - E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{k \varepsilon_0} = \frac{k-1}{k} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\chi}{\chi + 1} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, \quad \chi = k - 1$$

E_0 — SUSCETTIVITÀ ELETTRICA

$$\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 \cdot k = \varepsilon$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (k-1) \vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$ vettore polarizzazione

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (\chi + 1) \vec{E} = \varepsilon_0 k \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$ INDUZIONE DIELETTRICA

$$\Delta B = B_0 - B_0 = (k_m - 1) B_0 = \chi_m B_0$$

k_m PERMITTIVITÀ MAGNETICA

χ_m SUSCETTIVITÀ MAGNETICA

$$\vec{M} = \chi_m n i$$ CAMPO DI MAGNETIZZAZIONE

$$\vec{H} = n i$$ CAMPO MAGNETICO ESTERNO

$$k_m = \frac{B}{B_0} < 1$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\chi_m + 1) \vec{H} = \mu_0 k_m \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_\ell \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

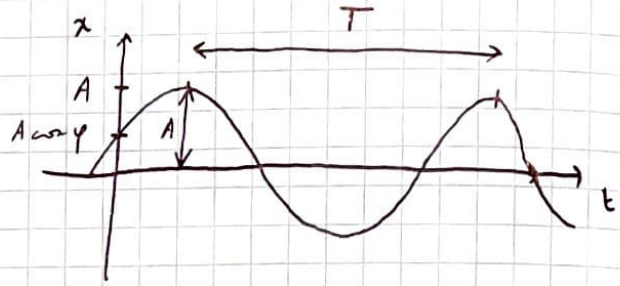
Fenomeni Oscillatori

Oscillazione = Un movimento periodico di un sistema attorno ad una posizione di equilibrio.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = T^{-1} = \frac{1}{T} \quad [Hz]$$



OSCILLAZIONE ARMONICA SEMPLICE

Es moto armonico semplice $\quad -kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\underset{v(t)}{\underset{\parallel}{x'(t)}} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \qquad \underset{a(t)}{\underset{\parallel}{x''(t)}} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad a(t) = -\omega^2 x(t)$$

L'energia nel moto armonico semplice senza smorzamento è costante $E = E_p + E_k$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega^2 = k/m$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \qquad E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} k A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \underbrace{m\omega^2}_{k} A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \left[\operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right] = \frac{1}{2} k A^2$$

PSE vale ✓

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ x_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = A \cos(\omega t + \psi)$$

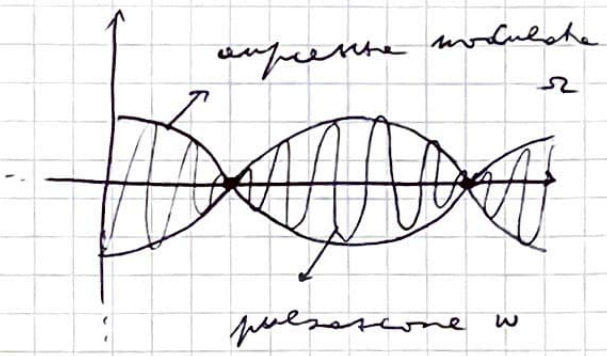
$$\text{con } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos\varphi}$$

teo. di Carnot

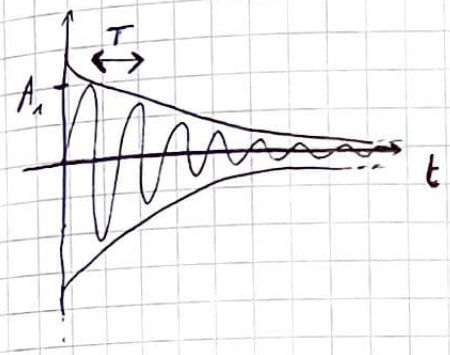
Più generalmente $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$
$+ A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) =$

$$= 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) = 2A \cos \Omega t \cos \omega t$$

con $\Omega = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ e $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$



Con smorzamento $f_{att} = -\lambda v$



$A_2 < A_1 \qquad A_i < A_{i-1} \quad \forall i > 0$

$$-Kx - \lambda v = ma \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0$$

Definendo il coeff. di smorz. $\gamma = \dfrac{\lambda}{2m} \implies$

$$\implies \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t}$$

$\Delta > 0 \quad (\gamma^2 > \omega_0^2) \qquad x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t}\right)$

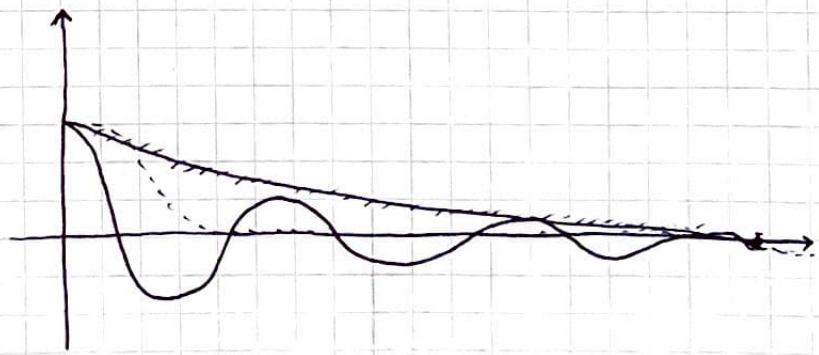
$\Delta = 0 \quad (\gamma^2 = \omega_0^2) \qquad x(t) = A e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t)$

$\Delta < 0 \quad (\gamma^2 < \omega_0^2) \qquad x(t) = A e^{-\gamma t} \cos\left[\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right) t + \psi\right]$

$\Delta > 0$ SMORZAMENTO FORTE

$\Delta = 0$ SMORZAMENTO CRITICO

$\Delta < 0$ SMORZAMENTO DEBOLE



Fenomeni Ondulatori

Sono perturbazioni prodotte da una sorgente caratterizzate da una propagazione di energia meccanica e q.tà di moto senza trasferimento di materia.

Sono caratterizzate dall'eq. $y(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$

con
- k num. d'onda
- ω freq. angolare
- φ sfasamento iniziale

Ci sono 2 tipi di onde:

- MECCANICHE → si propagano solo in mezzi materiali
- ELETTROMAGNETICHE → si propagano anche nel vuoto

Le onde si distinguono anche per la direzione di propagazione:

- LONGITUDINALI ⟷ vibrazione ⟷ propagazione
- TRASVERSALI ↕ vibrazione ⟷ propagazione

- UNIDIMENSIONALI propagazione lungo una retta
- BIDIMENSIONALI propagazione in un piano
- TRIDIMENSIONALE propagazione nello spazio

Tutti i fen. ondulatori soddisfano l'eq. di D'Alembert.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$ con ξ perturbazione del p.to materiale

v: velocità di propagazione dell'onda nel mezzo

Unica soluzione dell'eq. diff. è $\xi(x \pm vt)$

La verifica è banale ponendo $u = x - vt$

$$\frac{\partial \xi(x-vt)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u} \underbrace{\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{1} = \xi'(u)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x-vt)}{\partial^2 x} = \frac{\partial \xi'(u)}{\partial x} = \frac{\partial \xi'(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \xi''(u)$$

$$\frac{\partial \xi(x-vt)}{\partial t} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial t} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \xi'(u)\cdot(-v) = -v\,\xi'(u)$$

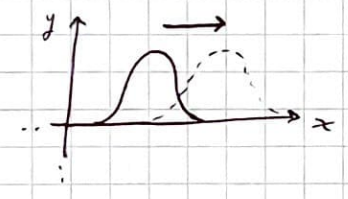
$$\frac{\partial^2 \xi(x-vt)}{\partial^2 t} = \frac{\partial \xi'(u)\cdot(-v)}{\partial t} = -v\,\frac{\partial \xi'(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = (-v)^2\,\xi''(u) =$$

$$= v^2\,\underbrace{\xi''(u)}_{=\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

quindi $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial^2 t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$

Le onde possono essere:

PROGRESSIVE



RUGRUSSIVE

$v_x = \dfrac{dx}{dt}$ <u>velocità di propagazione</u> dell'onda

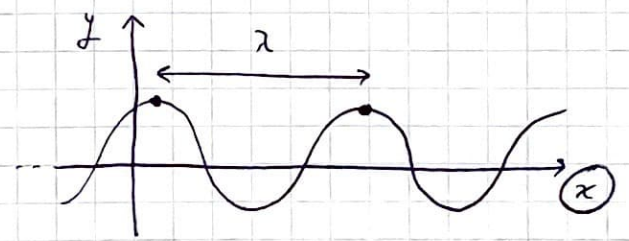
$v_\xi = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}$ <u>velocità di oscillazione</u> delle particelle di mezzo

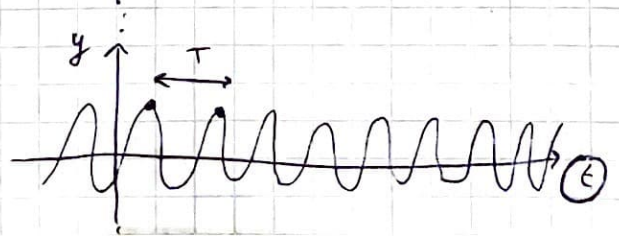
Vale anche qui il PSE (principio di sovrapposizione degli effetti) $\xi(x,t) = a\,\xi_1(x,t) + b\,\xi_2(x,t)$

Definiamo k come n. d'onda $k = \dfrac{\omega}{v}$ $\left(k = \dfrac{2\pi}{\lambda}\right)$

$v = \dfrac{\omega}{k}$ $\quad \lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

vel. propag. $\quad$ lunghezza d'onda $\quad$ periodo





$\Rightarrow \lambda = vT \quad , \quad v = \lambda f$

Analisi di Fourier

« Ogni ~~funzione~~ segnale in funzione del tempo può essere rappresentato come somma di seni aventi ampiezze e frequenze diverse »

$$\sigma = \sum_i A_i \sin(w_i t + \varphi_i)$$

segnale

Qui dettagliatamente una generica funzione f periodica è rappresentabile come

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \operatorname{sen} m w t + b_m \cos m w t \right)$$

con a_0 valor medio della funzione nel periodo e a_m e b_m calcolati così:

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} m w t \, dt \quad , \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos m w t \, dt$$

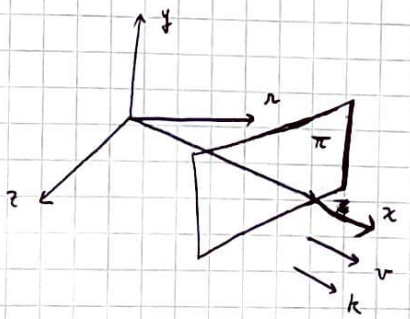
Fronte d'onda

È il luogo dei p.ti caratterizzati dal medesimo stato di vibrazione

$$\vec{K} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{x}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = Kx$$

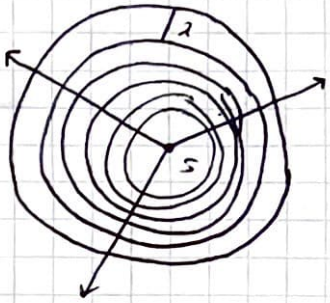
$$\vec{K} \parallel \vec{v} \perp \pi$$



Eq. di d'Alembert nello spazio $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 t} = v^2 (\nabla^2 \xi)$$

Onde sferiche



ampiezza massima

$$\xi(r,t) = A(r) \sin(kr - \omega t)$$

con r distanza da S sorgente

L'intensità varia al variare di r

$$I(r) = C\,A(r)^2 \qquad \left(I = \frac{P}{\Sigma} = \frac{\text{potenza}}{\text{superficie}} \text{ in generale} \right)$$

C → velocità della luce

$$P_m = I\,\Sigma = C\,A(r)^2\, 4\pi r^2 = \text{costante} \implies A(r) \propto \frac{1}{r}$$

$$A(r) = \frac{\xi_0}{r} \implies \xi(r,t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr - \omega t)$$

$$I(r) = C\,A(r)^2 = \frac{I_0}{r^2} = \frac{\xi_0^2}{r^2}$$

Onde sonore

Onde meccaniche, non si propagano nel vuoto.

$$v_s = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

β → modulo di compressione [Pa]

ρ → densità volumica [kg/m^3]

v_s → velocità del suono

Nell'aria v_s è di $330 \div 340$ m/s

Dipende da sia dal materiale (mezzo) che dalla temperatura.

Es v_s in aria 0°C = 331 m/s

v_s in aria 20°C = 343 m/s

L'orecchio non è un recettore lineare bensì logaritmico

$$dB = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

I_0 → soglia di udibilità dell'orecchio

$$I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$$

Es $I = 10^{-6}\ W/m^2 \implies dB = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \cdot 6 = 60$

Il livello sonoro non dipende dalla frequenza (che, invece, determina se il suono sarà acuto o grave)

Sovrapposizione di onde

$$\xi_1(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$\xi_2(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

CASO DI ONDE (SOLO) SFASATE

$$\xi_s(x,t) = \xi_1 + \xi_2 = \xi_{0s} \sin(kx - \omega t + \psi)$$

Ricordiamo che $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

abbiamo $\xi_1 + \xi_2 = \xi_0\left[\sin(kx-\omega t) + \sin(kx - \omega t + \delta)\right] =$

$$= \xi_0\left(2\cos\frac{\delta}{2}\sin\frac{2kx - 2\omega t + \delta}{2}\right) \quad \text{cioè}$$

$$\xi_s(x,t) = \underbrace{2\xi_0\cos\frac{\delta}{2}}_{\xi_{0s}}\sin\left(kx - \omega t + \underbrace{\frac{\delta}{2}}_{\psi}\right)$$

$$I = C\,A(x)^2 = C\cdot 4\xi_0^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = \underbrace{C\xi_0^2}_{I_0}\cdot 4\cos^2\frac{\delta}{2} =$$
$$= 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2}$$

$$I_0 = C\,A(x)^2 = C\cdot\xi_0^2$$

Se $\frac{\delta}{2} = m\pi$ con $m \in \mathbb{N} \Rightarrow |I| = 4|I_0|$

Se $\frac{\delta}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ con $m \in \mathbb{N} \Rightarrow I = 0$

CASO DI ONDE CON AMPIEZZA ~~DIVERSA~~ UGUALE E FREQUENZA DIVERSA

$$\xi_1(x,t) = \xi_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$\xi_2(x,t) = \xi_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\xi_s(x,t) = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_0\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin(k_m x - \omega_m t)$$

media

con $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta w = w_1 - w_2$, $k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $w_m = \frac{w_1 + w_2}{2}$

$$A(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta w}{2} t\right)$$

L'ampiezza varia sia nello spazio che nel tempo

La velocità di propagazione dell'onda è $v_g = \frac{\Delta w}{\Delta k}$

Pensiamo ad un osservatore a distanza fissa $x = L$

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} L - \frac{\Delta w}{2} t\right) \operatorname{sen}\left(k_m L - w_m t\right)$$

Ponendo $\frac{\Delta k}{2} L = \varphi$ e $k_m L = \psi$

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\varphi - \frac{\Delta w}{2} t\right) \operatorname{sen}\left(\psi - w_m t\right)$$

Caso particolare : $\xi_1(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}(kx - wt)$

$\xi_2(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}(kx + wt)$

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \underbrace{\cos(wt)}\,\underbrace{\operatorname{sen}(kx)} \qquad \Delta k = 0 \ , \ w_m = 0$$

onde stazionarie <u>OS</u>

<u>Ampiezza massima di un onda st.</u>

$$2\xi_0 \operatorname{sen}(kx) = 2\xi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \xi(x,t)$$

$$\xi'(x) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = 0 \iff \frac{2\pi}{\lambda} x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

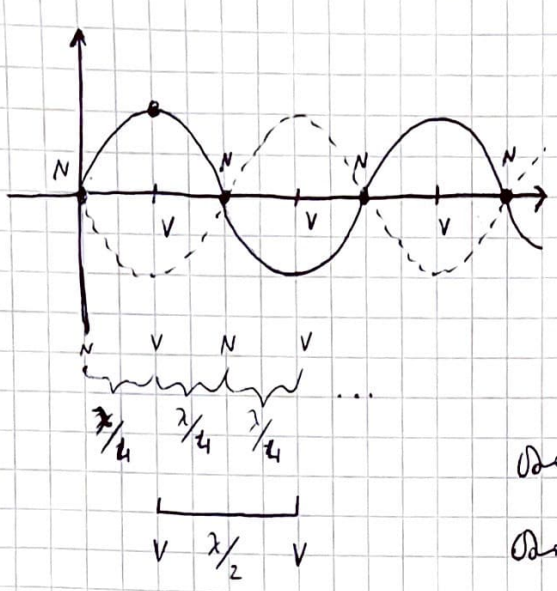
$$\Rightarrow x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad \text{con } m = 0, 1, 2 \ldots \quad \text{AMPIEZZA MASSIMA}$$

<u>Ampiezza minima di un onda stazionaria</u>

$$2\xi_0 \operatorname{sen}(kx) = 2\xi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \xi(x,t)$$

$$\xi^*(x) = 2\xi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = 0 \iff \frac{2\pi}{\lambda} x = m\pi$$

$$\Rightarrow x = m\frac{\lambda}{2} \quad \text{con } m = 0, 1, 2 \ldots \quad \text{AMPIEZZA MINIMA}$$



N nodi

V ventri

onde stazionarie

Distanza tra nodi $\frac{\lambda}{2}$

Distanza tra ventri $\lambda/2$

Distanza tra nodi e ventri $\lambda/4$

Ampiezza minima $x = m\frac{\lambda}{2}$

Ampiezza massima $x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$

Supponiamo che gli estremi della corda siano fissi $\left(\xi(x=0) = 0 \wedge \xi(x=L) = 0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ gli estremi sono dei nodi $x = m\frac{\lambda}{2}$

Se $m = 1$ $L = \frac{\lambda}{2}$

In generale $L = m\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2L}{m}$ con $m \geq 1$

$\lambda = \frac{2L}{m} \longrightarrow$ c'è una lunghezza d'onda per ogni m

$$f_i = \frac{v}{\lambda_i} = \frac{v \cdot \overset{i}{\cancel{m}}}{2L} = \frac{v}{2L} \cdot i$$

f_1 (con $m = 1$) è detta frequenza fondamentale (prima armonica)

$f_2 = 2 \cdot f_1$ (seconda armonica)

$f_n = n \cdot f_1$ (n-esima armonica)

frequenze armoniche

Orecchio umano

La sua sensibilità varia dai 20 Hz a 20.000 Hz

Sotto i 20 Hz ci sono gli infrasuoni, sopra i 20k Hz ci sono gli ultrasuoni.

La lunghezza d'onda varia a 17.2 m a 1.72 cm

(ricordiamo che $\lambda = \frac{v}{f}$)

Nel canale uditivo si producono onde stazionarie

con $\lambda_m = \frac{4L}{2m+1}$ $(m = 0, 1, 2 \ldots)$

Effetto Doppler

Consiste nella variazione apparente della frequenza di un'onda percepita da un osservatore in movimento rispetto alla sorgente.

OSSERVATORE

$((\cdot))$ $\quad$ $f' = f$ $\quad$ $((\cdot))$ $\rightarrow$ $f' \neq f$

SORGENTE $\quad$ percepita $\quad$ effettiva

Caso 1 $\Rightarrow$ La sorgente si avvicina all'osservatore

$$\underset{\text{percepita}}{\lambda'} = \lambda - v_{sorg} T = \frac{v_{onda}}{f} - \frac{v_{sorg}}{f} = \frac{v_{onda} - v_{sorg}}{f}$$

$$f' = \frac{v_{onda}}{\lambda'} = f\left(\frac{v_{onda}}{v_{onda} - v_{sorg}}\right) = f \frac{1}{1 - \frac{v_{sorg}}{v_{onda}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f' = f \frac{1}{\underbrace{1 - \frac{v_{sorg}}{v_{onda}}}_{<1}} \quad (f' > f)$$

Caso 2 $\Rightarrow$ La sorgente si allontana dall'osservatore

$$\lambda' = \lambda + v_{sorg} T = \frac{v_{onda} + v_{sorg}}{f}$$

$$f' = \frac{v_{onda}}{\lambda'} = f \frac{v_{onda}}{v_{onda} + v_{sorg}} = f \left(\frac{1}{1 + \frac{v_{sorg}}{v_{onda}}} \right)$$

$$f' = f \left(\frac{1}{\underbrace{1 + \frac{v_{sorg}}{v_{onda}}}_{>1}} \right) \qquad f' < f$$

Generalmente $\quad f' = f \dfrac{1}{1 \pm \frac{v_{sorg}}{v_{onda}}}$ $\quad$ + allontanamento, − avvicinamento

sorgente in movimento

Caso 3 $\Rightarrow$ L'osservatore si allontana dalla sorgente

$$v_r = v_{onda} - v_{oss}$$

$$N = \frac{v_r \Delta t}{\lambda} \Rightarrow f' = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v_r}{\lambda} = \frac{v_{onda} - v_{oss}}{v_{onda}} \cdot f$$

num. fronti incontrati

$$\Rightarrow f' = f \left(1 - \frac{v_{oss}}{v_{onda}} \right) \qquad [f' < f]$$

Caso 4 $\Rightarrow$ L'osservatore si avvicina alla sorgente

$$v_r = v_{onda} + v_{oss}$$

$$N = \frac{v_r \Delta t}{\lambda} \Rightarrow f' = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v_r}{\lambda} = \frac{v_r \cdot f}{v_{onda}} = \frac{v_{onda} + v_{oss}}{v_{onda}} f$$

$$\Rightarrow f' = f \left(1 + \frac{v_{oss}}{v_{onda}} \right) \qquad [f' > f]$$

Caso 5 $\Rightarrow$ Sia sorgente che oss. si muovono

$$f' = f\left(\frac{v_{onda} \pm v_{oss}}{v_{onda} \mp v_{sorg}}\right)$$

$+/-$ avvicinamento

$-/+$ allontanamento

Dove viene usato l'effetto Doppler?

Negli autovelox, in meteorologia, nei sensori antiintrusione...

Effetto Doppler per gli autovelox

$$f' = f\left(\frac{\overset{\text{luce}}{c} - \overset{\text{macchina}}{v_m}}{c}\right) = f\left(1 - \frac{v_m}{c}\right)$$

f emessa

f' riflessa

f'' misurata

$$f'' = f' \frac{1}{1 + \frac{v_m}{c}}$$

$$f'' = f \frac{1 - \frac{v_m}{c}}{1 + \frac{v_m}{c}} = f \frac{\left(1 - \frac{v_m}{c}\right)^2}{1 - \frac{v_m^2}{c^2}} \simeq$$

$\left(\frac{v_m}{c}\right)^2 \ll 1$

$$\approx f\left(1 - \frac{v_m}{c}\right)^2 \approx$$

$$\approx f\left(1 - \frac{2 v_m}{c}\right) \approx f - \frac{2 v_m}{\lambda}$$

$$\Delta f = |f'' - f| = \left|-\frac{2 v_m}{\lambda}\right| \Rightarrow v_m = \frac{1}{2} \lambda \Delta f$$

velocità della macchina calcolata.

Δf $\downarrow$ differenza tra frequenza emessa e freq. misurata

$\Delta f > 0$ avvicinamento

$\Delta f < 0$ allontanamento

Eco Doppler Effetto Doppler utilizzato nell'ecografia per rilevare il movimento e la velocità degli oggetti in movimento (es. flusso del sangue)

Onde elettromagnetiche

Sfruttando l'eq. di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}}_{c^2 \Leftarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}} \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

Vale per ogni componente

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_x \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_y \qquad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_z$$

In maniera analoga si ottiene $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B}$

(anche questo vale per ogni componente B_x, B_y e B_z)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

Le eq. $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 \vec{E}$ e $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla} \vec{B}$ hanno

come soluzione

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \wedge \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

con $\vec{k} = k_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y + k_z \hat{u}_z$ e $c = \dfrac{\omega}{|\vec{k}|} = \dfrac{\omega}{k}$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 E_x \iff \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)$$

e come soluzione $E_x = E_{0x} \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} =$

$$= E_{0x} \, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

Assumiamo che $\vec{E} = E_x \hat{u}_x + E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=0} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = i k_x E_x + i k_y E_y + i k_z E_z$$

quindi $i k_x E_x + i k_y E_y + i k_z E_z = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow i(\vec{k}\cdot\vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E} = 0$$

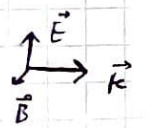
In maniera analoga $\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$

$$\left.\begin{aligned}
(\vec{\nabla}\times\vec{E})_x &= -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_x \Rightarrow i k_y E_z - i k_z E_y = i\omega B_x \\
(\vec{\nabla}\times\vec{E})_y &= -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_y \Rightarrow i k_z E_x - i k_x E_z = i\omega B_y \\
(\vec{\nabla}\times\vec{E})_z &= -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_z \Rightarrow i k_x E_y - i k_y E_z = i\omega B_z
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} \Rightarrow kE = \omega B \Rightarrow E = \frac{\omega}{k} B$$

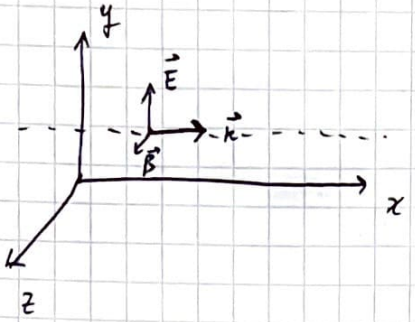
$$\Rightarrow E = cB \quad \wedge \quad \vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \quad (\text{poiché perpendicolari})$$

$\vec{E} \perp \vec{B}$



$\longrightarrow$ propagazione

$\vec{E} \times \vec{B}$ indica la direzione di propagazione



$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) \Rightarrow$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\omega} \left[\vec{k} (\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{k})}_{=0} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} E^2 = \frac{1}{\omega} E^2 k \hat{u}_k = \boxed{\frac{E^2}{c}} \hat{u}_k$$

$$\frac{E \cdot E}{c} = \frac{E \cdot B c}{c} = EB$$

dir. di propagazione

Proprietà onde EM

1. $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si propagano alla velocità della luce
2. $B = E/c \iff E = Bc$
3. $\vec{E} \perp \vec{B}$
4. $\vec{E} \times \vec{B}$ fornisce il verso di propagazione $\hat{u}_k$

Casi di propagazione semplice (su un solo asse)

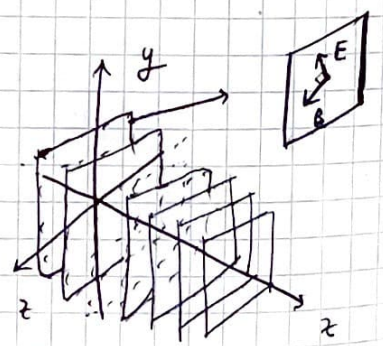
asse x $\quad \vec{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_y \,, \quad \vec{B} = B_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_z$

Onde di propagazione generale [Onde piane]

Propagazione nell'asse x

Campo elettrico nel piano y-z

Campo magnetico nel piano y-z



$$\vec{E} = E_{0y} e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_y + E_{0z} e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_z$$

$$\vec{B} = B_{0y} e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_y + B_{0z} e^{i(kx - \omega t)} \hat{u}_z$$

Ricordando che $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$ e che $\vec{k} = k\,\hat{u}_z$

si ottiene che $-kE_z = \omega B_y \wedge kE_y = \omega B_z$ cioè

$$B_y = -\frac{E_z}{c}, \quad B_z = \frac{E_y}{c} \quad (E_z = -B_y c, \; E_y = B_z c)$$

ovvero $\vec{B} = \hat{u}_z \frac{E_y}{c} - \frac{E_z}{c}\hat{u}_y \quad (\vec{E} = \hat{u}_y B_z c - B_y c\,\hat{u}_z)$

$$\vec{E} = (0, B_z c, -B_y c) \vee \vec{B} = \left(0, -\frac{E_z}{c}, \frac{E_y}{c}\right)$$

$$\vec{B} = (0, B_y, B_z) \qquad \vec{E} = (0, B_z c, -B_y c)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = B_y B_z c - B_z B_y c = 0 \quad \checkmark$$

$$\vec{E} = c \cdot \vec{B}$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & B_z c & -B_y c \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = (B_z \cdot B_z c + B_y B_y c)\,\hat{u}_x =$$

$$= c\,(B_y^2 + B_z^2)\,\hat{u}_x = c B^2 \hat{u}_x = (cB \cdot B)\hat{u}_x = \left(\cancel{c}\frac{E}{\cancel{c}} \cdot B\right)\hat{u}_x = (E \cdot B)\,\hat{u}_x$$

$$= \frac{E^2}{c}\,\hat{u}_x \rightarrow \text{der. di propagazione}$$

<u>Onde nei dielettrici</u>

L'unica eq. di Maxwell che cambia è $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

con $\mu\varepsilon = \frac{1}{v^2} \quad \left(\Leftarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot c\right)$

velocità di propagazione $v < c$

Nella maggior parte dei mezzi ordinari $\mu_r = 1$ quindi

$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = n \rightarrow$ indice di rifrazione del mezzo

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega \rightarrow$ impedenza nel vuoto

$Z = \frac{Z_0}{n} \rightarrow$ impedenza nel mezzo

Vettore di Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} E B \, \hat{u}_k$$

$$\vec{S} \parallel \hat{u}_k \parallel \vec{k}$$

$|\vec{S}| = \frac{EB}{\mu_0}$ → energia elettromagnetica che passa in un secondo per ogni metro quadro

Le onde EM trasportano energia e non solo. Esse riescono a trasportare q.tà di moto esercitando una pressione di "radiazione".

$p_{rad} = \frac{I}{c}$ ← onda completamente assorbita

Se, invece, l'onda è totalmente riflessa $p_{rad} = \frac{2I}{c}$

Invece $p_{rad} \in \left(\frac{I}{c}, \frac{2I}{c} \right)$ se l'onda è in parte riflessa e in parte assorbita. → $p_{rad} = \frac{I}{c}(1 + \mu_r)$ → coeff. riflem.

Se l'onda forma un angolo $\theta > 0$ con la normale alla superficie Σ

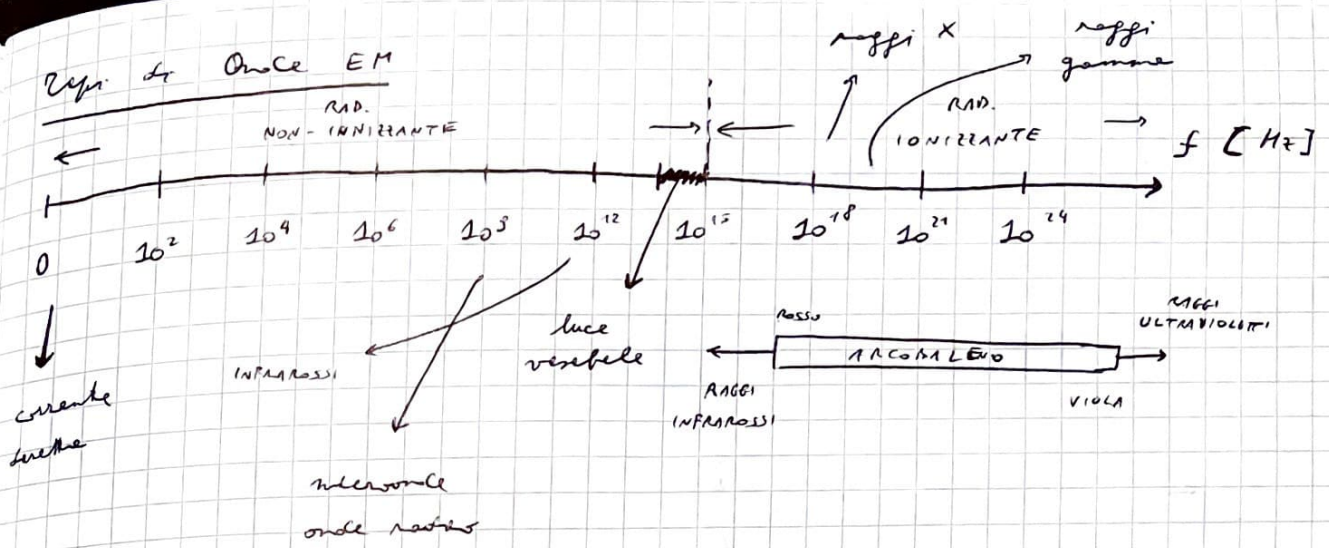
μ_r = percentuale di riflessione

$$\underbrace{p_{rad} = \frac{I}{c} \cdot \cos^2\theta}_{\text{assorbimento}} \quad \vee \quad \underbrace{p_{rad} = \frac{2I}{c} \cos^2\theta}_{\text{riflessione}}$$

Ricordo che $I = \frac{P}{\Sigma}$ e $I = \frac{1}{2} \varepsilon c E^2$

ε → $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m permittività del vuoto

Tipi di Onde EM



ROSSO	780 - 622 nm
ARANCIONE	622 - 597 nm
GIALLO	~597 - ~577 nm
VERDE	~577 - ~492 nm
AZZURRO	~492 - ~455 nm
VIOLETTO	455 - 380 nm

λ

I colori che vediamo sono la sovrapposizione delle onde EM riflesse dal materiale dell'oggetto.
Il nero assorbe tutto.
Il bianco riflette tutto.

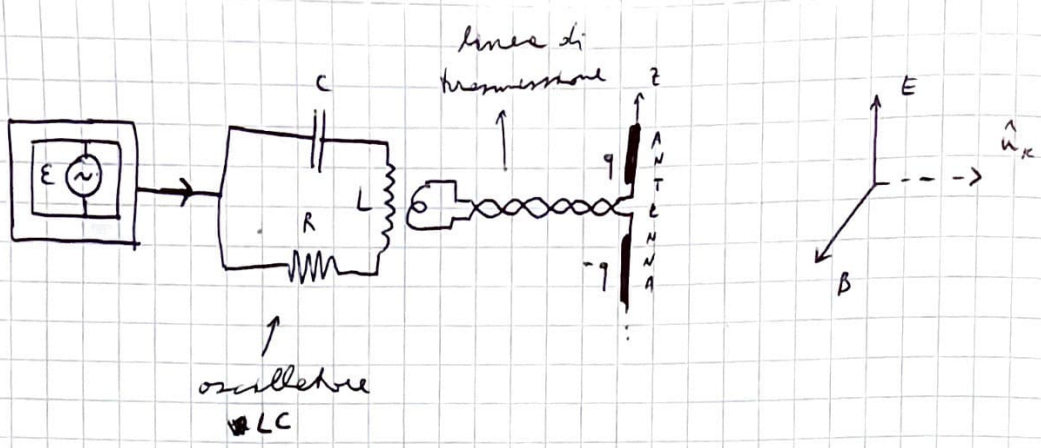
Produzione di onde EM

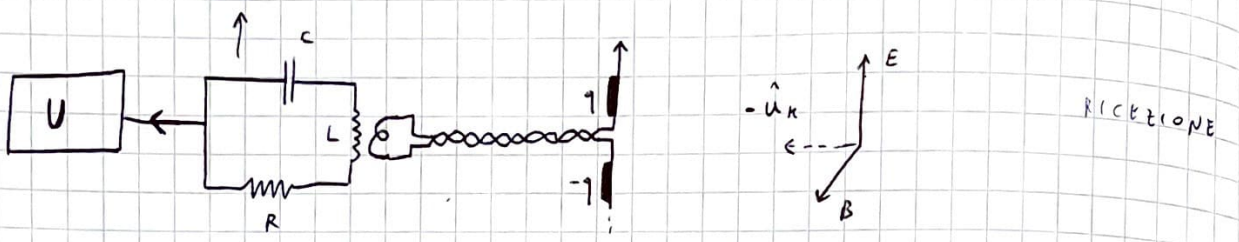
L'oscillazione di 2 cariche con segno opposto produce una perturbazione delle linee di campo che si propaga nello spazio.

La coppia di cariche elettriche (detto dipolo oscillante) oscillanti è chiamata "antenna"

Si produce un campo elettrico E per presenza di cariche elettriche; si produce un campo magnetico per presenza di cariche elettriche in movimento.

Per produrre un'onda EM si utilizza un circuito RLC (e ricevere)





Il campo elettrico generato dall'antenna è un'onda sferica

$$E = E_\theta = \frac{p_0 \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\omega^2}{r} \operatorname{sen}(kz - \omega t)$$ ← a grande distanza dal dipolo ($r \gg \lambda \gg z$)

$E \propto \frac{1}{r}$ come quasi sempre per le onde sferiche

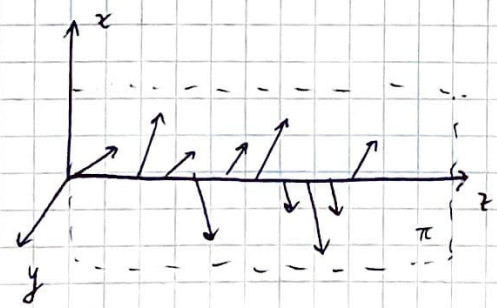
$E = 0$ per $\theta = k\pi$ con $k = 0, 1 \ldots$

(il campo non c'è lungo l'asse del dipolo)

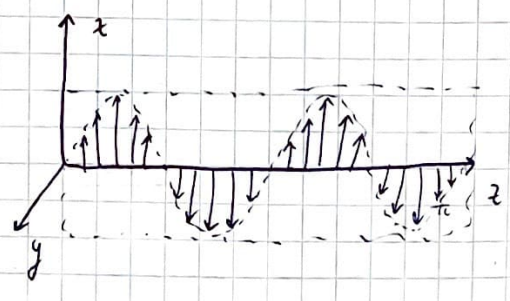
L'intensità è calcolabile con la formula $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$

La potenza vale $P = \frac{8\pi}{3} I_0$ $\left(P = \int_\Sigma I(r,\theta)\, d\Sigma \right)$

<u>Polarizzazione delle onde EM</u>



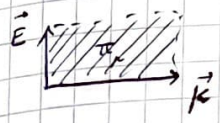
Onda piana non polarizzata



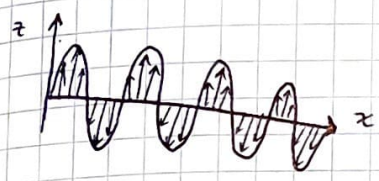
Onda piana polarizzata rettilineamente

Polarizzazione rettilinea

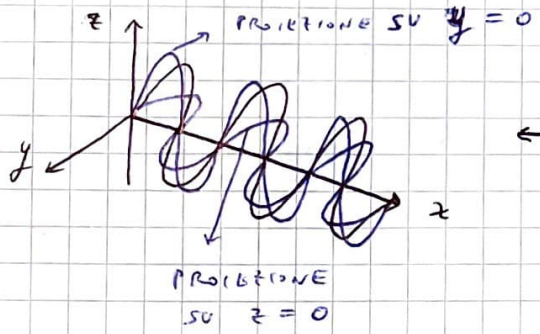
$\hat{u}_p = \hat{u}_E$ ← direzione di polarizzazione



← piano di propagazione



un un passo

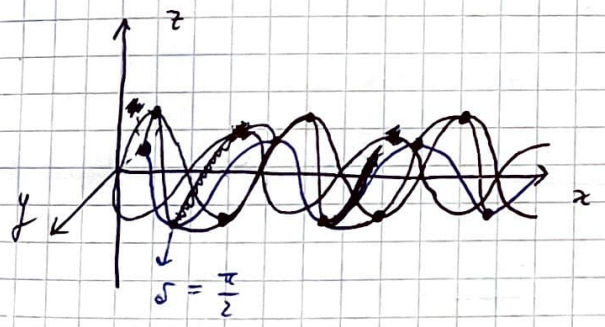


← onda polarizzata su 2 componenti

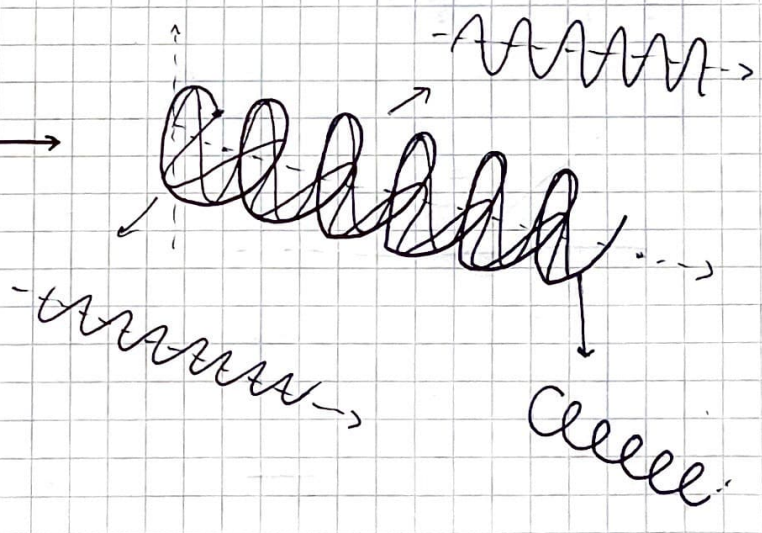
In generale
$$E_y(z,t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta)$$
$$E_z(z,t) = E_{0z} \cos(kz - \omega t)$$

Se $\delta = k\pi$ si ha una polarizzazione rettilinea

Se $\delta = \frac{2k+1}{2}\pi$ si ha una polarizzazione circolare



→

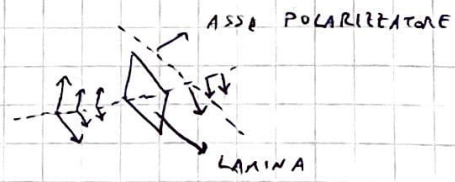


Nella pol. circolare

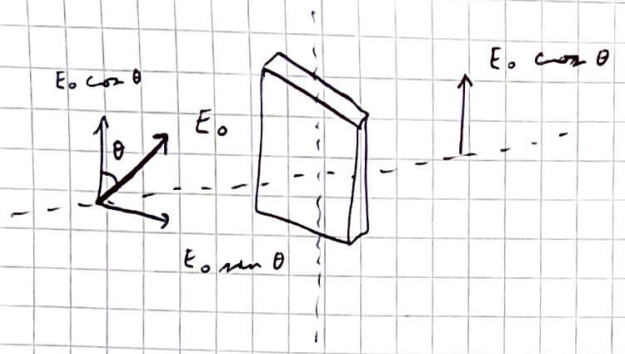
$$\frac{E_y^2}{E_0^2} + \frac{E_z^2}{E_0^2} = 1$$

Nelle onde non polarizzate δ è variabile.

Lamine polarizzatrici



Trasmettono solo la componente lungo la direzione dell'asse ottico.



Viene trasmessa solo la componente parallela all'asse polarizzatore.

$I' = I_0 \cos^2\theta$ (Legge di Malus)

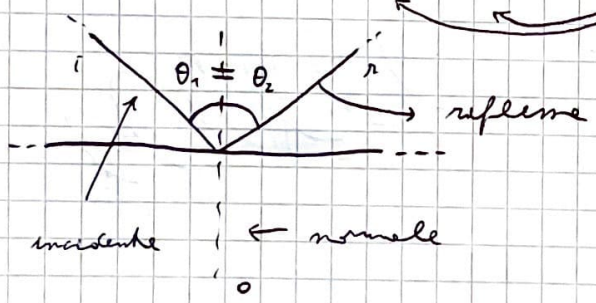
↑ cambia l'intensità trasmessa.

$I' = I_0/2$ nel caso di radiazione non polarizzata.

Su questo effetto si basa il 3D. (occhiali 3D)

RIFLESSIONE E RIFRAZIONE

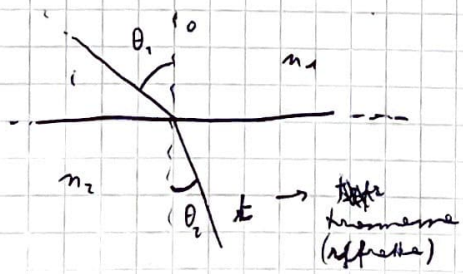
- Riflessione → avviene all'interno dello stesso materiale ($n_1 = n_2$) indice di riflessione



1ª legge $\theta_1 = \theta_2$

2ª legge i, r e o sono complanari

- Rifrazione → avviene quando l'onda cambia mezzo di trasmissione ($n_1 \neq n_2$)



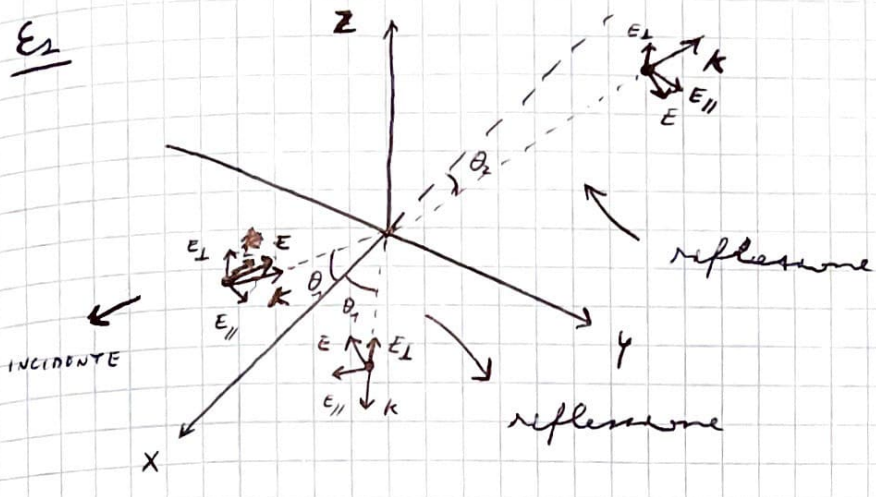
LEGGI DI SNELL

1ª legge $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

2ª legge i, t, o complanari

$n = \frac{c}{v}$ ($n \geq 1$ $\forall$ materiale)

Es



$$k_{i,y} = k_{r,y} \Rightarrow k_i \sin\alpha = k_r \sin\beta \Rightarrow \frac{\omega}{c} n_1 \sin\alpha = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta$$ Legge di Snell per riflessione

$$k_{i,y} = k_{t,y} \Rightarrow k_i \sin\alpha = k_t \sin\beta \Rightarrow \frac{\omega}{c} n_1 \sin\alpha = \frac{\omega}{c} n_2 \sin\beta$$

$$\Rightarrow n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

Legge di Snell per la refrazione

Condizioni di raccordo

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \Rightarrow \frac{D_{1\parallel}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\parallel}}{\varepsilon_2}$$

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp}$$

$$H_{1\parallel} = H_{2\parallel} \Rightarrow \frac{B_{1\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_{2\parallel}}{\mu_2}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \Rightarrow \mu_1 H_{1\perp} = \mu_2 H_{2\perp}$$

Ricordiamo che

$$D = \varepsilon E$$

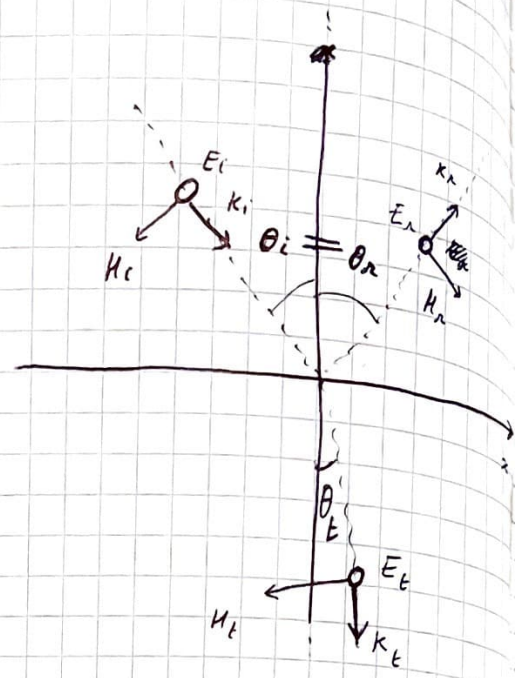
$$B = \mu H$$

Possiamo esaminare 2 tipi di polarizzazioni:

- σ (S) ortogonale al piano di incidenza
- π (P) parallelo al piano di incidenza.

Da qui usando le formule di raccordo di E e B nel passaggio da un materiale con indice di rifrazione n_1 ad uno con indice di refrazione $n_2 \neq n_1$.

Nel caso di polarizzazione σ rispetto ad E:



$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$

$$E_i + E_r = E_t$$

$$H_{1\parallel} = H_{2\parallel}$$

$$H_i' + H_r' = H_t'$$

$$-H_i \cos\theta_i + H_r \cos\theta_r = -H_t \cos\theta_t$$

$\theta_i = \theta_r$

$$\Rightarrow \quad H_r - H_i = -H_t \underbrace{\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}}_{\chi}$$

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{E}{\mu v} = \frac{E\sqrt{\varepsilon\mu}}{\mu} = E\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = E\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0\underbrace{\mu_r}_{=1}}} = E\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}_{\frac{1}{Z_0}}\underbrace{\sqrt{\varepsilon_r}}_{n} = \frac{n}{Z_0}$$

$$\Rightarrow \quad H = E\frac{n}{Z_0}$$

$$H_r - H_i = -\chi H_t \Rightarrow \frac{E_r}{Z_0}n_1 - \frac{E_i}{Z_0}n_1 = -\chi\frac{E_t}{Z_0}n_2$$

$$\Rightarrow \quad E_r - E_i = -\chi E_t \underbrace{\frac{n_2}{n_1}}_{\eta}$$

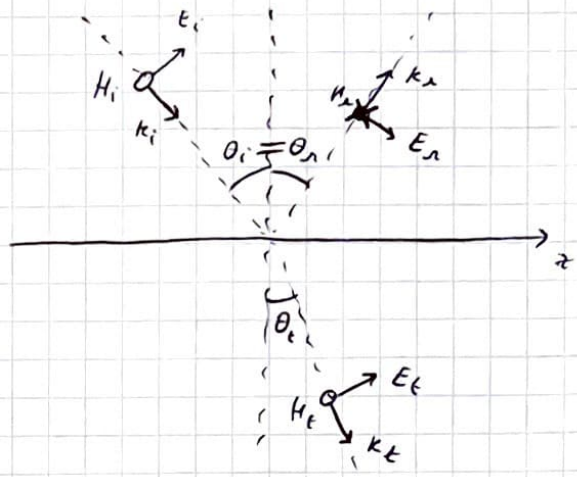
$$\Rightarrow \begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ E_i - E_r = \chi\eta E_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_r = \dfrac{1-\eta\chi}{1+\eta\chi}E_i \\ E_t = \dfrac{2}{1+\eta\chi}E_i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_\sigma = \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{1-\eta\chi}{1+\eta\chi} \\ t_\sigma = \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{2}{1+\eta\chi} \end{cases} \quad \text{con } \eta = \frac{n_2}{n_1} \wedge \chi = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

r_σ è il coeff. di riflessione per pol. σ

t_σ è il coeff. di trasmissione per pol. σ

Nel caso di polarizzazione π rispetto ad E:



$$H_{1\parallel} = H_{2\parallel}$$

$$H_i - H_r = H_t$$

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$

$$E_i \cos\theta_i + E_r \cos\theta_r = E_t \cos\theta_t$$

$$\Rightarrow \quad E_i + E_r = E_t \chi \quad \nearrow \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

$$H = \frac{E}{Z_0} n \quad \text{come visto nella prec. dimostrazione}$$

$$E_i \frac{n_1}{Z_0} - E_r \frac{n_1}{Z_0} = E_t \frac{n_2}{Z_0} \Rightarrow E_i - E_r = \eta E_t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_i + E_r = \chi E_t \\ E_i - E_r = \eta E_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_r = \dfrac{\chi - \eta}{\chi + \eta} E_i \\ E_t = \dfrac{2}{\chi + \eta} E_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_\pi = \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{\chi - \eta}{\chi + \eta} \\ t_\pi = \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{2}{\chi + \eta} \end{cases} \quad \text{con } \eta = \frac{n_2}{n_1} \text{ e } \chi = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

r_π è il coeff. di riflessione per pol π

t_π è il coeff. di trasmissione per pol π

<u>Angolo limite</u> Esiste θ_0 detto "angolo limite" con

$$\theta_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad \text{con } n_1 > n_2 .$$

Se si forma un angolo $\theta > \theta_0$ non ci sarà trasmissione ma solo riflessione.

$n_1 \leftarrow$ SORGENTE
$n_2 \leftarrow$ DESTINAZIONE

Se $n_1 < n_2$ non esiste un angolo limite.

$\forall\, \theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ è disponibile per la rifrazione.

t_σ e t_π sono sempre positivi

r_σ e r_π sono sempre positivi quando $n_1 > n_2$, sempre negativi quando $n_1 < n_2$

r e t sono chiamati <u>COEFF. DI FRESNEL</u>

<u>Energia</u> $\quad W = I \cdot \Sigma_0 \cos\theta \qquad \left(I = \frac{1}{2} \varepsilon v E^2 \right)$ $\quad v \to \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$, $\varepsilon \to \varepsilon_r \varepsilon_0$

$$\left.\begin{aligned}
W_i &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}}_{v} \underbrace{\varepsilon_1 \varepsilon_0}_{\varepsilon} |E_i|^2 \cdot \Sigma_0 \cos\theta_i \\
W_r &= \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \varepsilon_1 \varepsilon_0 |E_r|^2 \cdot \Sigma_0 \cos\theta_i \\
W_t &= \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} \varepsilon_2 \varepsilon_0 |E_t|^2 \cdot \Sigma_0 \cos\theta_t
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_\sigma = \dfrac{W_r}{W_i} = \dfrac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = r_\sigma^2 \\ T_\sigma = \dfrac{W_t}{W_i} = \dfrac{|E_t|^2}{|E_i|^2} \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\, \chi = \eta \chi t_\sigma^2 \end{cases} \qquad \left(\begin{aligned} R_\pi &= r_\pi^2 \\ T_\pi &= \eta \chi t_\pi^2 \end{aligned} \right.$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = \eta$$

$$R_\sigma + T_\sigma = 1 \quad \forall$$

$$r_\sigma^2 + \eta \chi t_\sigma^2 = 1 \Rightarrow \frac{(1-\eta\chi)^2}{(1+\eta\chi)^2} + \eta\chi \frac{4}{(1+\eta\chi)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\eta\chi)^2 + 4\eta\chi = (1+\eta\chi)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\eta\chi + 4\eta\chi = 2\eta\chi \quad \checkmark$$

<u>Caso di incidenza normale</u>

Non è più definibile il piano di incidenza π

$$r_\sigma = \frac{1-\eta\chi}{1+\eta\chi} \qquad t_\sigma = \frac{2}{1+\eta\chi}$$

con $\chi = 1$

$$r_\pi = \frac{\chi - \eta}{\chi + \eta} \qquad t_\pi = \frac{2}{\chi + \eta}$$

perché $\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0 \implies \chi = 1$

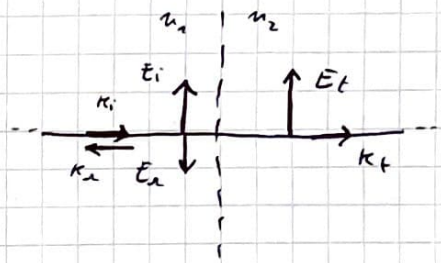
$$r_\sigma = \frac{1-\eta}{1+\eta} \qquad t_\sigma = \frac{2}{1+\eta} \qquad r_\sigma = r_\pi$$

$$r_\pi = \frac{1-\eta}{1+\eta} \qquad t_\pi = \frac{2}{1+\eta} \qquad t_\sigma = t_\pi$$

σ e π coincidono

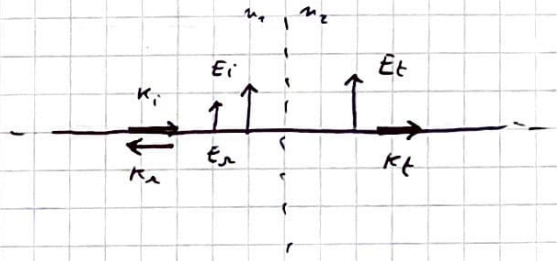
Se $n_1 < n_2$ (aria → vetro)

$r_\sigma < 0 \qquad t_\sigma > 0 \ \forall$



Se $n_1 > n_2$ (vetro → aria)

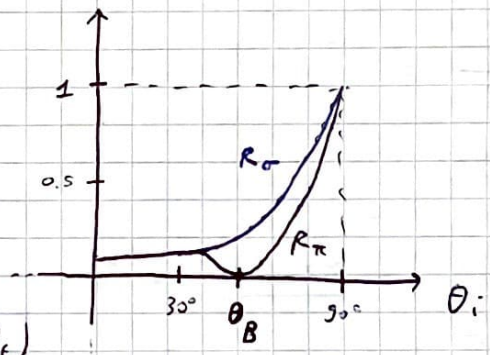
$r_\sigma > 0 \qquad t_\sigma > 0 \ \forall$



Angolo di Brewster

$\exists\ \theta_B \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$R_\pi = 0$



$$R_\pi = r_\pi^2 = \frac{tg^2(\theta_i - \theta_t)}{tg^2(\theta_i + \theta_t)}$$

Se $\theta_i + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow R_\pi = 0 \implies r_\pi^2 = 0 \implies r_\pi = 0$

$\implies \underline{E_r = 0}$

non c'è <u>riflessione</u>

Calcoliamo θ_B

$$\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\sin\theta_B}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_B)} = \frac{\sin\theta_B}{\cos\theta_B} = tg\,\theta_B$$

Snell

$$\implies tg\,\theta_B = \eta \implies \theta_B = arctg\,\eta$$

L'angolo di Brewster e l'angolo critico / limite

$$\theta_B = \operatorname{arctg} \eta \quad \wedge \quad \theta_0 = \arcsin \eta$$

sono angoli particolari dove c'è totale rifrazione o totale riflessione (cioè $r_\pi(\theta = \theta_B) = 0 \wedge t_\pi(\theta = \theta_0) = 0$)

Con $\theta_i = \theta_B$ non c'è riflessione

Con $\theta_i \geq \theta_0$ non c'è rifrazione.

<u>Passaggio nei materiali</u>

Le caratteristiche delle onde che cambiano da un materiale ad un altro sono:

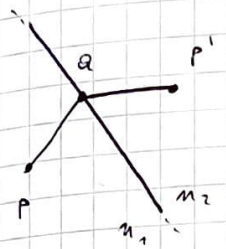
- $v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \dfrac{c}{n}$ $\qquad v_0 = c \qquad \dfrac{v}{v_0} = \dfrac{1}{n}$
- $k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{\omega}{c} n$ $\qquad k_0 = \dfrac{\omega}{c} \qquad \dfrac{k}{k_0} = n$
- $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi c}{\omega n}$ $\qquad \lambda_0 = \dfrac{2\pi c}{\omega} \qquad \dfrac{\lambda}{\lambda_0} = \dfrac{1}{n}$

f e ω $(= 2\pi f)$ rimangono invariati

$$f = \frac{v}{\lambda} = \underbrace{\cancel{v_0} \cdot \frac{v_0}{v} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0}}_{= f_0} = \frac{v}{\lambda} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = f$$

$$n = \frac{c}{v} = \frac{k}{k_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\varepsilon_r}$$

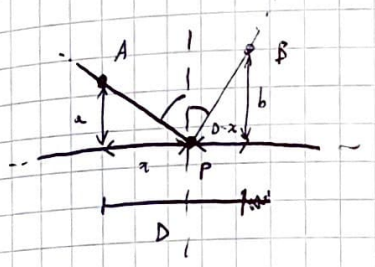
Principio di Fermat



Cammino geometrico $L_g = \overline{PQ} + \overline{QP'}$

Cammino ottico $L_o = \overline{PQ}\, n_1 + \overline{QP'}\, n_2$

- RIFLESSIONE



$$L = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(D-x)^2}$$

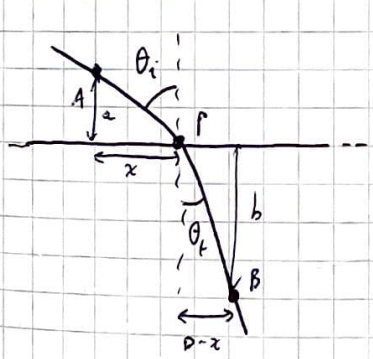
$$t = \frac{L}{c}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c}\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2c}\left(a^2+x^2\right)^{-1/2} \cdot 2x - \frac{1}{2c}\left[b^2+(D-x)^2\right]^{-1/2} \cdot 2(D-x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{D-x}{\sqrt{b^2+(D-x)^2}} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_i = \operatorname{sen}\theta_r \Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r}$$

✓

- RIFRAZIONE



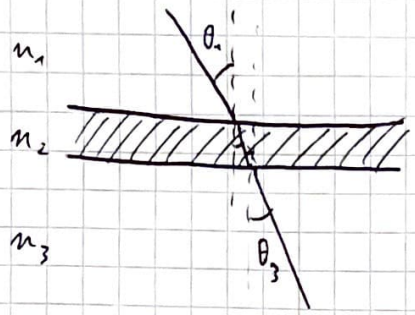
$$L = \overbrace{n_1\sqrt{a^2+x^2}}^{n_1 L_1} + \overbrace{n_2\sqrt{b^2+(D-x)^2}}^{n_2 L_2}$$

$$t = \frac{L}{c} = \frac{n_1 L_1}{c} + \frac{n_2 L_2}{c} = t_{AP} + t_{PB}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \Rightarrow n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = n_2 \frac{D-x}{\sqrt{b^2+(D-x)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t}$$ LEGGE DI SNELL ✓

Attraversamento di lastre piane



Se $n_1 = n_3$ (stesso materiale)

$\Rightarrow \theta_1 = \theta_3$

Dim $n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 =$

$= n_3 \operatorname{sen} \theta_3 \Rightarrow \cancel{n_1} \operatorname{sen} \theta_1 = \cancel{n_3} \operatorname{sen} \theta_3 \Rightarrow \theta_1 = \theta_3$

L'angolo con il quale è entrato il raggio sarà lo stesso con il quale esce.

Effetti visivi della refrazione

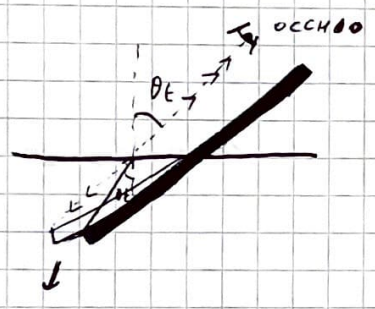


immagine che vediamo

L'immagine che vediamo è più vicina (ingrandita) e meno obliqua, come in figura.

Angolo di deviazione

Analizziamo un prisma.

In questo caso l'attraversamento di un oggetto porta ad una deviazione dell'onda perché cambiano il primo e il secondo normale ($o_1 \nparallel o_2$)

$$\delta = (i_1 - r_1) + (i_2 - r_2)$$

$$\alpha = \pi - \left[\left(\frac{\pi}{2} - r_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r_2\right) \right] = r_1 + r_2$$

$$\Rightarrow \delta = i_1 + i_2 - \alpha$$

$$\begin{cases} \delta = i_1 + i_2 - \alpha \\ \alpha = r_1 + r_2 \\ \operatorname{sen} i_1 = n \operatorname{sen} r_1 \\ n \operatorname{sen} r_2 = \operatorname{sen} i_2 \end{cases} \xRightarrow{\partial} \begin{cases} \dfrac{d\delta}{di_1} = 1 + \dfrac{di_1}{di_2} \\ dr_1 + dr_2 = 0 \quad (\alpha \text{ costante}) \\ \cos i_1 \, di_1 = n \cos r_1 \, dr_1 \\ n \cos r_2 \, dr_2 = \cos i_2 \, di_2 \end{cases}$$

Per trovare δ_{min} annulleremo $\dfrac{d\delta}{di_1} \Rightarrow \dfrac{di_1}{di_2} = -1$

Con alcuni passaggi geometrici arriveremo a

$$\operatorname{sen}^2 i_1 = \operatorname{sen}^2 i_2 \Rightarrow i_1 = i_2 = i$$

$$(r_1 = r_2 = r)$$

$$\begin{cases} \delta_{min} = 2i - \alpha \\ \alpha = 2r \end{cases}$$

$$n = \frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} r_1} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \frac{\delta_{min}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

OTTICA GEOMETRICA

Oggetto → corpo che emette luce propria o diffonde luce di un altro corpo.

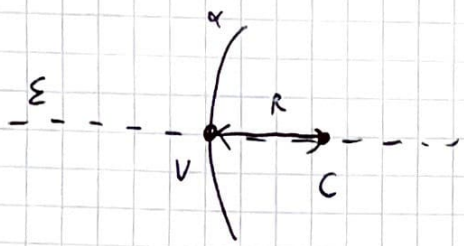
Strumento ottico → apparato che riflette o rifrange la luce emessa da un oggetto.

Immagine → luce emessa dall'oggetto trasformata da uno strumento ottico e raccolta su uno schermo

Ottica geometrica → materia che studia la formazione di immagini mediante strumenti ottici.

Nell'ottica geometrica non entra in gioco la natura ondulatoria della luce poiché la lunghezza d'onda è di molto inferiore alle superfici degli strumenti ottici.

Elemento Ottico



C centro

R raggio di curvatura

V intersezione tra asse α e superficie ε

↓

vertice

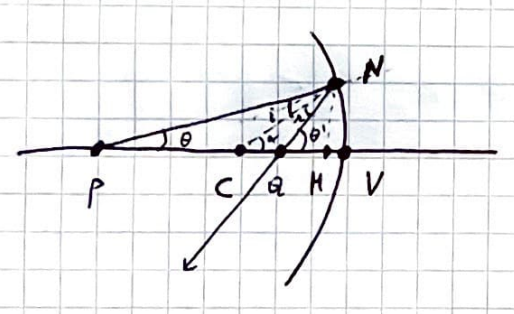
Una superficie che presenta solo riflessione è detta sup. catottrica (specchio)

Una superficie che presenta ~~solo~~ rifrazione è detta sup. dottrica (dottro)

Una <u>lente</u> è l'insieme di 2 dottri opportunamente disposti.

Un el. è stigmatico se trasforma un pto oggetto in un unico pto immagine

Specchio concavo



$$\theta + i = \alpha$$
$$\theta' = \alpha + r \quad \Longrightarrow \quad \theta + \theta' = 2\alpha$$
$$i = r = C\hat{N}Q$$

$y = NV \approx NH$ distanza trasversale

$p = PV \approx PH$ distanza dell'oggetto da V

$q = QV \approx QH$ distanza dell'immagine da V

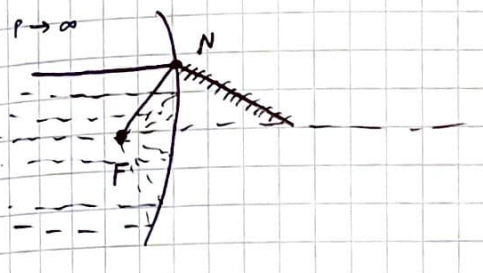
In ottica Gaussiana $HV \simeq 0$ quindi $\operatorname{tg}\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \theta$

$$tg\,\theta = \frac{NH}{PH} \qquad tg\,\theta' = \frac{NH}{QH} \qquad tg\,\alpha = \frac{NH}{CH}$$

$$\theta \approx tg\,\theta \approx \frac{y}{p} \qquad \theta' \approx tg\,\theta' \approx \frac{y}{q} \qquad \alpha \approx tg\,\alpha \approx \frac{y}{R}$$

$$\theta + \theta' = 2\alpha \implies \frac{y}{p} + \frac{y}{q} = \frac{2y}{R} \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

Specchio concavo: <u>FUOCO</u>



$$p \to \infty \implies p \to \infty \implies \frac{1}{p} \to 0$$

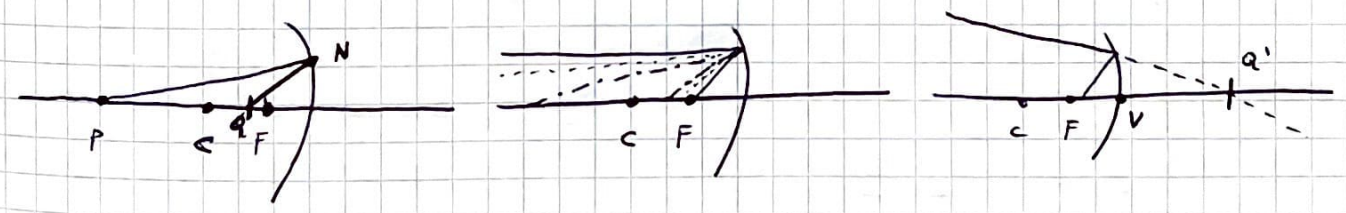
$$\frac{1}{p} + \underbrace{\frac{1}{q}}_{f} = \frac{2}{R} \implies f = \frac{R}{2}$$

Per il <u>principio di invertibilità del raggio luminoso</u> qualunque raggio che parte dal fuoco, dopo aver colpito lo specchio, viene riflesso parallelamente all'asse.

cambiando verso di percorrenza il percorso rimane invariato, sul percorso nel verso opposto ne identico

$$(p = f \implies q \to \infty)$$

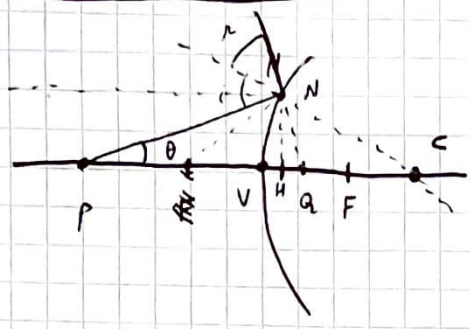
Se $P \in (F, V)$ i raggi divergeranno.



È il prolungamento del raggio ad intersecarsi con la superficie. Si parla in questo caso di <u>immagine virtuale</u>.

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

Specchio convesso



$$i = \theta + \alpha \qquad \theta' = r + \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \theta' - \theta = 2\alpha$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{NH}{PH} \qquad \operatorname{tg}\theta' = \frac{NH}{QH} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{NH}{CH}$$

$y = NH$
$p = PH$
$q = QH$

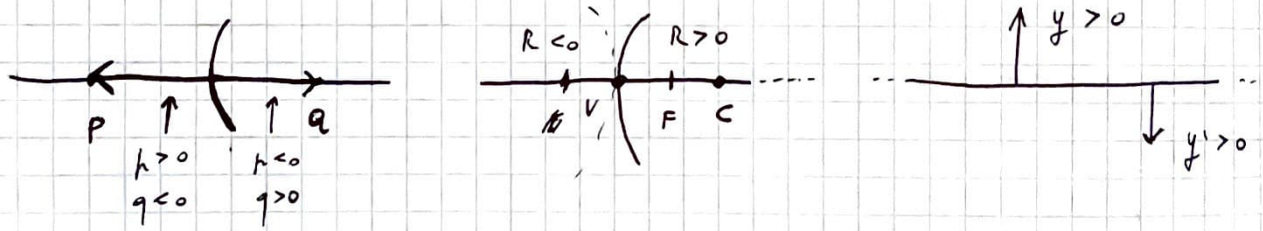
$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta \qquad \theta' \approx \operatorname{tg}\theta' \qquad \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{y}{q} - \frac{y}{p} = \frac{2y}{R} \Rightarrow \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{2}{R} \quad \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}\right)$$

$$p \to \infty \Rightarrow f = \frac{R}{2}$$

Nello specchio convesso l'immagine è sempre virtuale.

Convenzione dei segni

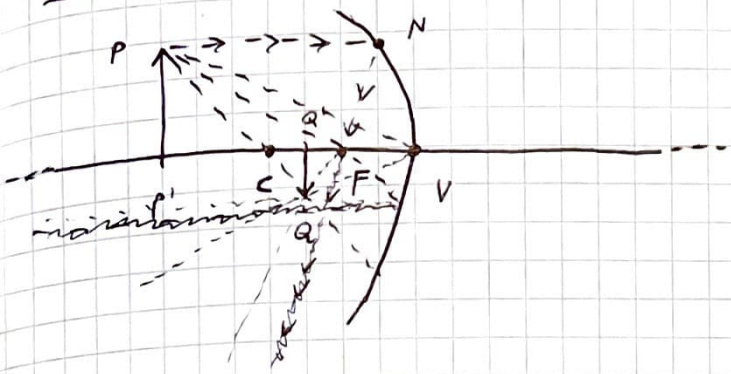


$$\frac{1}{|p|} + \frac{1}{|q|} = \frac{2}{|R|} \qquad \frac{1}{|p|} - \frac{1}{|q|} = \frac{2}{|R|} \qquad \frac{1}{|p|} - \frac{1}{|q|} = -\frac{2}{|R|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

CONCAVO CONVESSO PIANO

Costruzione dell'immagine



Ci sono 4 raggi notevoli

1. $P \to N \to F$
2. $P \to F \to \infty$
3. $P \to C$
4. $P \to V$

Dove si intersecano i 4 raggi notevoli si trova Q° (Q' è la proiezione sulla superficie).

Ingrandimento trasversale

$$I_y = \frac{y'}{y} = \frac{QQ'}{PP'}$$

$I_y > 1$ (immagine ingrandita)
$I_y < 1$ (immagine rimpicciolita)
$I_y = 1$ (immagine coincidente)

$$I_y = \frac{QQ'}{PP'} = \frac{CQ}{CP} = \frac{|R| - |q|}{p - |R|} = \frac{-R + q}{p + R} = -\frac{q}{p}\left(\frac{\frac{R}{q} - 1}{1 + \frac{R}{p}}\right)$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} \Longrightarrow \frac{R}{p} = \frac{R}{q} - 2 \Longrightarrow 1 + \frac{R}{p} = \frac{R}{q} - 1$$

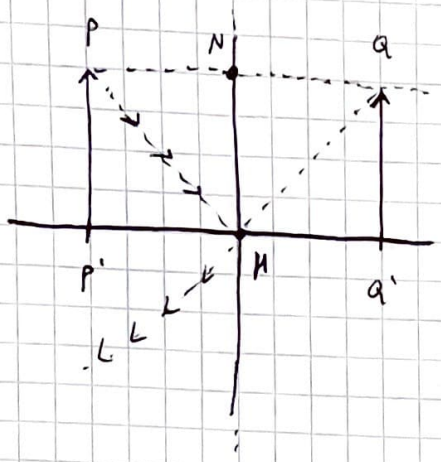
$$\Longrightarrow I_y = -\frac{q}{p} \cdot 1 = -\frac{q}{p}$$

$$I = -\frac{q}{p}$$

In questo caso $\begin{matrix} p > 0 \\ q < 0 \end{matrix} \Rightarrow I > 0$

Se $I > 0$ l'immagine è capovolta.
Se $I < 0$ l'immagine è diritta.

Specchio piano



Nello specchio piano $R \to \infty$

$(c \to \infty)$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} \to 0$$

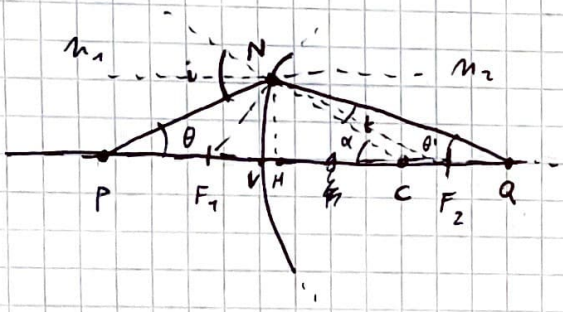
$$\Rightarrow \quad p = q$$

$$I = \frac{y'}{y} = -\frac{q}{p} = -1$$

L'immagine non viene ingrandita / rimpicciolita e $I \leq 0 \Rightarrow$ risulta diritta.

Dioptro

Costituito da 2 mezzi trasparenti con indice di rifrazione diversi $n_1 < n_2$



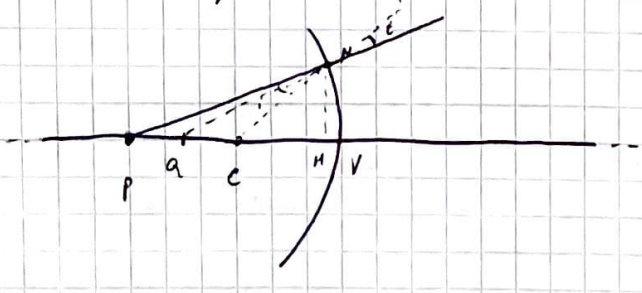
$$i = \theta + \alpha \qquad \alpha = \theta' + t$$

$$n_1 i = n_2 t \qquad n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} t$$

$$\Rightarrow \quad n_1(\alpha + \theta) = n_2(\alpha - \theta')$$

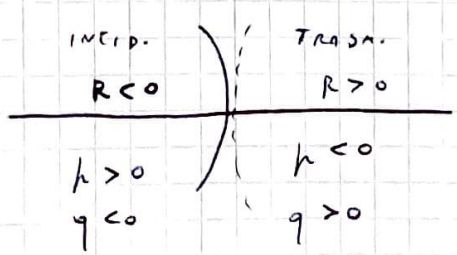
$$\Rightarrow \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

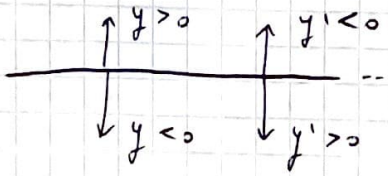
CONVESSO



$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = -\frac{n_2 - n_1}{R}$$

Convenzione dei segni





$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$ Eq. gen. convenzione segni

FUOCO $\quad p \to \infty \implies p \to \infty$

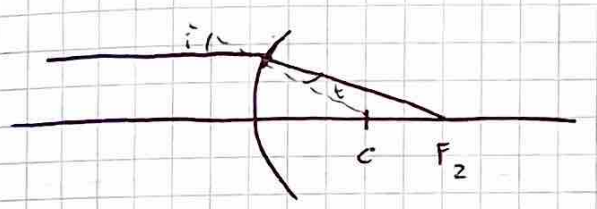
$$\frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \implies q = f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$

FUOCO POSTERIORE

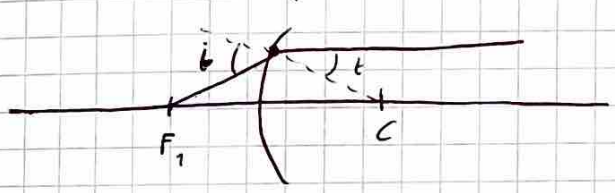
$Q \to \infty \implies q \to \infty$

$$\frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \implies p = f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$

FUOCO ANTERIORE

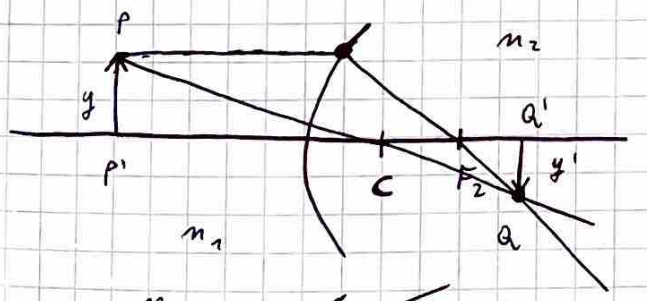


$p \to \infty$



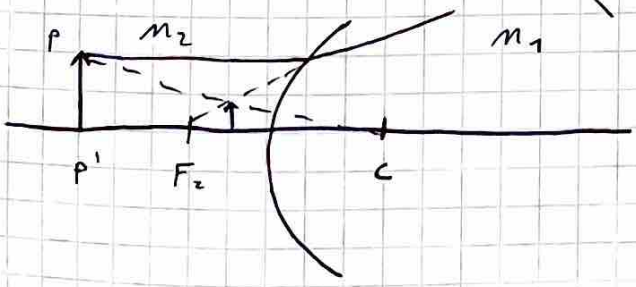
$q \to \infty$

Costruzione dell'immagine



$I = \frac{y'}{y} \gtrless 0 \to$ capovolte

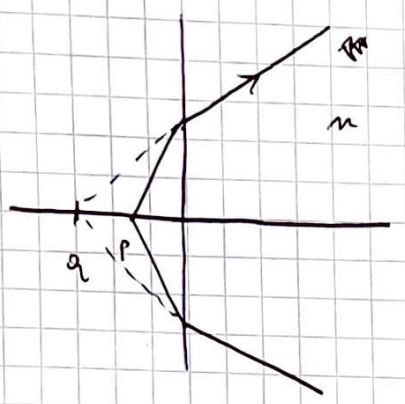
$(y > 0 \quad y' \gtrless 0$



$I \lessgtr 0 \quad \begin{pmatrix} y > 0 \\ y' < 0 \end{pmatrix}$

$$I = \frac{n_1 q}{n_2 p}$$

Dioptri piani



$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

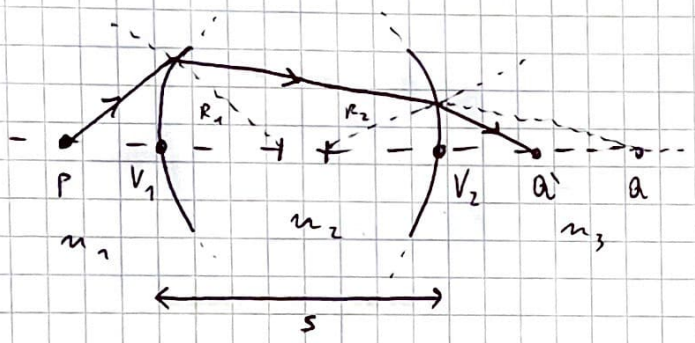
$$R \to \infty \implies \frac{n_1}{p} = -\frac{n_2}{q} \implies$$

$$\implies q = -\frac{n_2}{n_1} p$$

$$I = \frac{n_1 q}{n_2 p} = \frac{n_1 \left(-\frac{n_2}{n_1} p\right)}{n_2 p} = -1 < 0$$

Lenti

È l'insieme di 2 dioptri.



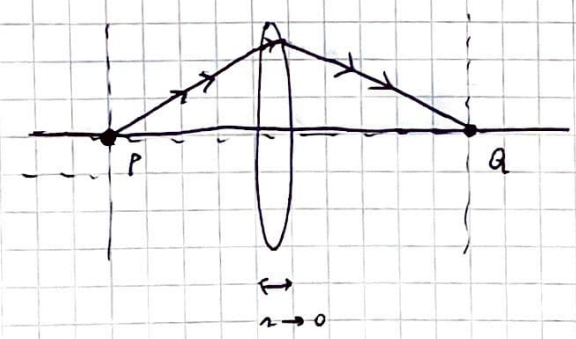
$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

$$\frac{n_2}{p_2} + \frac{n_3}{q_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_2}$$

$$p_2 = s - q_1$$

$$\xRightarrow{n_1 = n_3} \frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2 s}{q_1 (s - q_1)} + \frac{n_1}{q_2} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Sottile



$$s \to 0$$

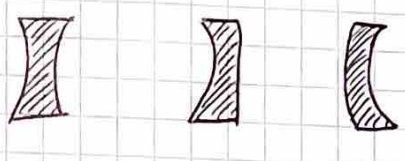
$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_1}{q_2} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$p_1 = p \quad \wedge \quad q_1 = q$$

$$\implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}$$

Classificazione lenti

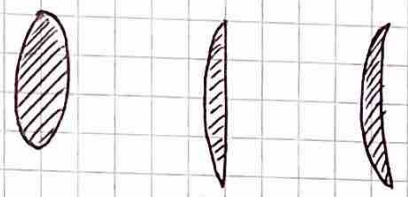
Divergenti



BICONCAVA — PIANO CONCAVO — MENISCO CONCAVO

$1/f < 0$

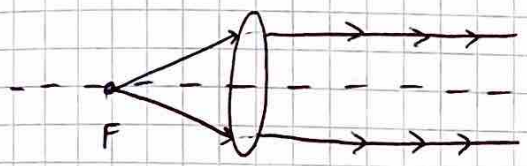
Convergenti



BICONVESSO — PIANO CONVESSO — MENISCO CONVESSO

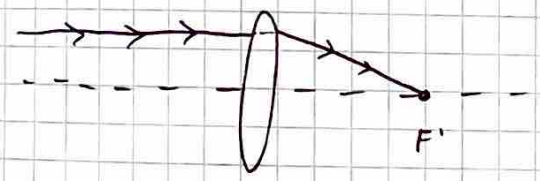
$1/f > 0$

Lente convergente



$q \to \infty \Rightarrow p = f$

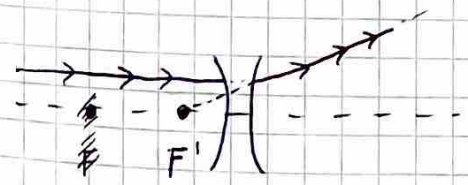
$q \to \infty \Rightarrow p = f$



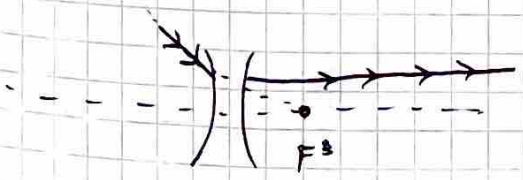
$p \to \infty \Rightarrow q = f$

$$1/p + 1/q = 1/f$$

Lente divergente



$p \to \infty \Rightarrow q = f$



$q \to \infty \Rightarrow p = f$

La distanza focale è sempre uguale

$$1/f = 1/f'$$

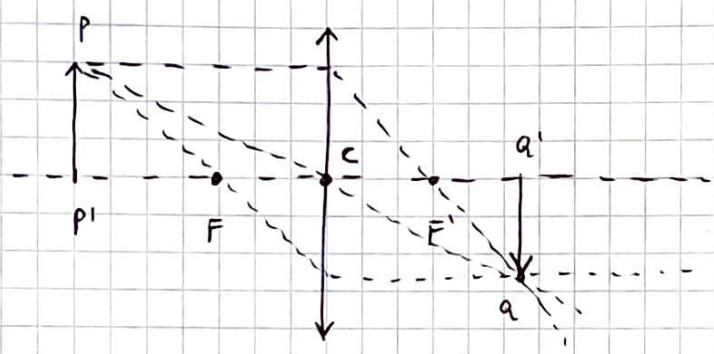
$1/f = P$ potenza (potere dioptrico)

È l'inverso della distanza focale.

Unità di misura D dioptrie $\left[D = \frac{1}{m} = m^{-1} \right]$

$P > 0$ per lenti convergenti.
$P < 0$ per lenti divergenti.

<u>Costruzione dell'immagine</u>



3 raggi sono

1. $P \rightarrow F'$ ✓
2. $P \rightarrow F$ opzionale
3. $P \rightarrow C$ ✓

immagine reale e capovolta

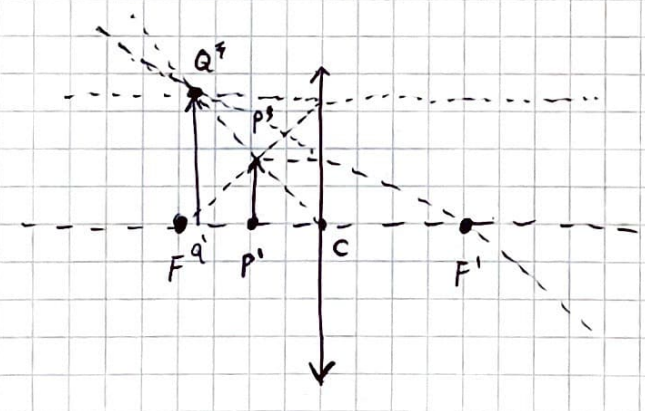


immagine virtuale e diretta

$P \in (F', C)$

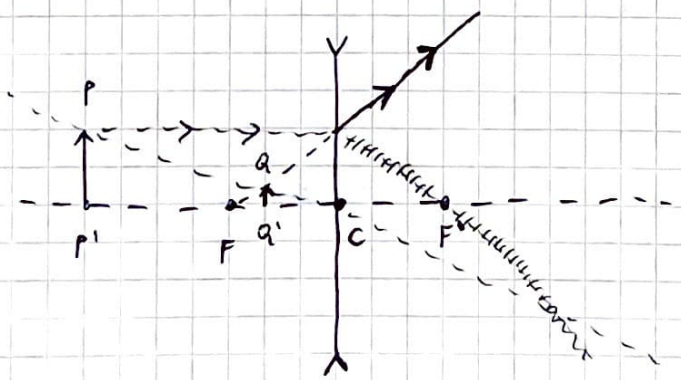
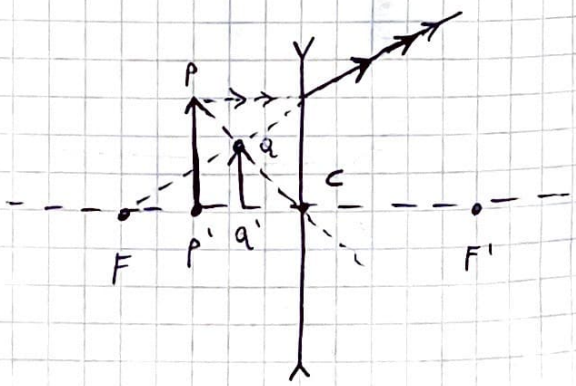


immagine virtuale e diretta



imm. virtuale e diretta

Ingrandimento

$$I = \frac{q}{p} = \frac{q-f}{q} = \frac{f}{p-f}$$

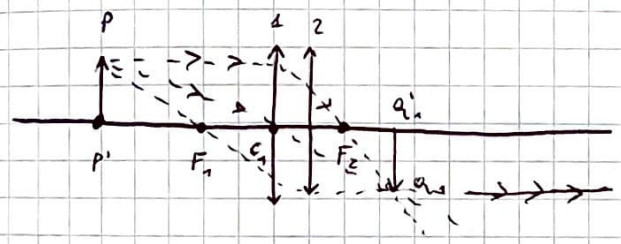
Sistema di lenti

$$\text{Oggetto}_1 \xrightarrow{\text{LENTE 1}} \text{Immagine}_1 = \text{Oggetto}_2 \xrightarrow{\text{LENTE 2}} \text{Immagine}_2$$

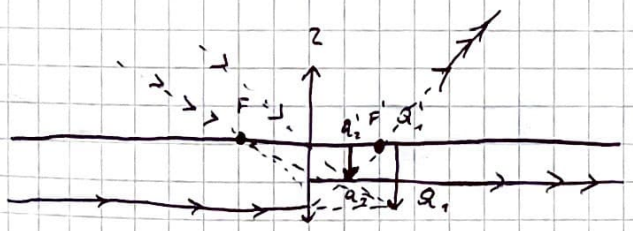
Si può dimostrare che $\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

$$P_{eq} = \sum_i P_i$$

Le lenti si dicono <u>ADDOSSATE</u> se la loro distanza è nulla o trascurabile.



Q_1 è un immagine virtuale che diventa oggetto virtuale per la lente 2



Q_2 è l'immagine finale.

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = -\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/p + 1/q_1 = 1/f_1 \\ 1/q - 1/q_1 = 1/f_2 \end{cases}$$

$$1/p + 1/q = 1/f_1 + 1/f_2$$

$$\Rightarrow 1/f = 1/f_1 + 1/f_2$$

Occhio

- coroide → assorbe la luce dispersa
- cornea → devia gran parte della luce
- umor acqueo → liquido tra cornea e cristallino ($n = 1.$
- pupilla → determina la quantità di luce che entra nell'occhio
- cristallino → lente biconvessa con $n \approx 1.42$
- umor vitreo → sostanza gelatinosa tra cristallino e retina ($n \approx 1.33$)

Potere dioptrico $P_D = 60\ D \Rightarrow f = \frac{1}{D} = 17$ mm

Immagini reali e virtuali

- SPECCHI $\quad 1/p - 1/q = -2/R$
  - piani → sempre virtuale, diritta, $I = -1$
  - concavi → REALE → $\boxed{|p| > f}$ IMM. CAPOVOLTA
    VIRTUALE → $p < f$ IMM. DRITTA
  - convessi → sempre virtuale, diritta, $|I| < 1$

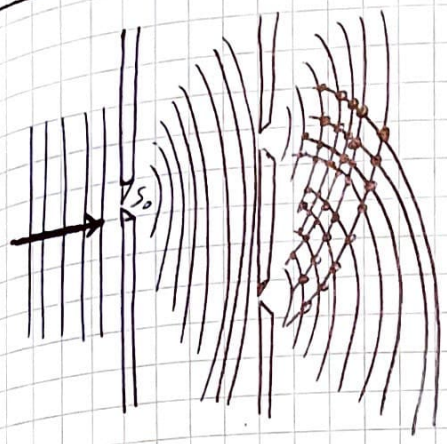
Negli specchi è reale se lo specchio è CONCAVO e $p > f$

- LENTI $\quad 1/p + 1/q = 1/f$
  - convergenti → REALE → $p > f \Rightarrow q > 0$
    VIRTUALE → $p < f \Rightarrow q < 0$
  - divergenti → sempre virtuale, ($q < 0$), diritta, $|I| < 1$
- DIOTTRI $\quad n_1/p + n_2/q = \frac{n_2 - n_1}{R}$

$q < 0$ → VIRTUALE

$q > 0$ → REALE

INTERFERENZA



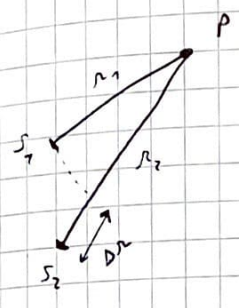
$$\vec{E}_1(r,t) = \frac{\vec{E_0}}{r} \operatorname{sen}(kr - \omega t + \phi_1)$$

$$\vec{E}_2(r,t) = \frac{\vec{E_0}}{r} \operatorname{sen}(kr - \omega t + \phi_2)$$

$$\delta = k(r_2 - r_1) + (\phi_2 - \phi_1)$$

differenza di fase

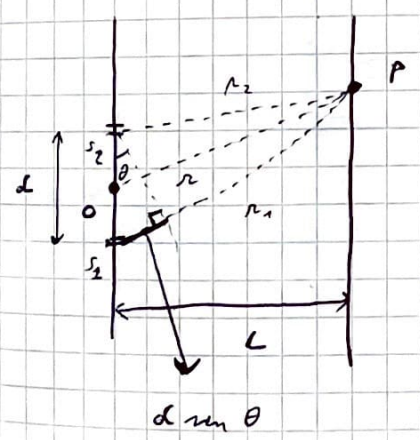
Se $\Delta\phi_0 = 0 \Rightarrow \delta = k(r_2 - r_1)$



Se $\frac{\partial\delta}{\partial t} = 0$ (costante nel tempo) le sorgenti si dicono coerenti.

$\frac{\partial\delta}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow$ sorgenti incoerenti

Esperimento di Young



Prendiamo 2 onde sferiche con stessa lunghezza d'onda ($\Rightarrow$ stessa k)

$$\vec{E}_1(r,t) = \frac{\vec{E_0}}{r} \operatorname{sen}(kr - \omega t)$$

$$\vec{E}_2(r,t) = \frac{\vec{E_0}}{r} \operatorname{sen}(kr - \omega t)$$

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1(r,t') + \vec{E}_2(r,t') = \frac{\vec{E_0}}{r_1} \operatorname{sen}(kr_1 - \omega t') + \frac{\vec{E_0}}{r_2} \operatorname{sen}(kr_2 - \omega t')$$

Poniamo $r \approx r_1 \approx r_2$

$$\vec{E}_P = \frac{\vec{E_0}}{r}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{kr_1 - \omega t' + kr_2 - \omega t'}{2}\right) \cos\left(\frac{kr_1 - \cancel{\omega t'} - kr_2 + \cancel{\omega t'}}{2}\right)\right]$$

sfruttando la formula di sovrapposizione

$$A\left[\operatorname{sen}(k_1 x_1 - \omega_1 t) + \operatorname{sen}(k_2 x_2 - \omega_2 t)\right] =$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \operatorname{sen}\left(k_m x - \omega_m t\right)$$

media

quindi

$$\vec{E}_p = 2\frac{\vec{E}_0}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{k(r_1+r_2)}{2} - \omega t'\right) \cos\left(\frac{k(r_1-r_2)}{2}\right)$$

$$\frac{r_1+r_2}{2} \simeq r \quad , \quad \delta = k(r_1 - r_2)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_p = 2\frac{\vec{E}_0}{r} \operatorname{sen}(kr - \omega t') \cos\frac{\delta}{2}$$

cioè $\quad \vec{E}_p = 2\frac{\vec{E}_0}{r} \cos\frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{sen}(kr - \omega t')$

$$\left(|\vec{E}_p| = 2\frac{E_0}{r} \cos\frac{\delta}{2} \right.$$

$$I = c\varepsilon_0 \langle E_p^2 \rangle = c\varepsilon_0 \left[2\frac{E_0}{r}\cos\frac{\delta}{2}\right]^2 \langle \operatorname{sen}^2(kr - \omega t') \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} 4 \frac{E_0^2}{r^2} \cos^2\frac{\delta}{2}\, c\varepsilon_0 = 4\frac{I_0}{r^2}\cos^2\frac{\delta}{2} \quad (I \propto \delta)$$

$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

$$r_1 - r_2 \simeq d \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$I = 4\frac{I_0}{r^2}\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \approx 4 I_0 \cos^2\frac{\delta}{2} =$$

$$= 4 I_0 \cos^2\left(\frac{k d \operatorname{sen}\theta}{2}\right) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right)$$

$$I_{max} = 4 I_0 \Longrightarrow \pi d \operatorname{sen}(\theta)\frac{1}{\lambda} = m\pi$$

$$I_{min} = 0 \Longrightarrow \pi d \operatorname{sen}(\theta)\frac{1}{\lambda} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

cioè $\quad d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad$ MAX

$\quad d \operatorname{sen}\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad$ MIN

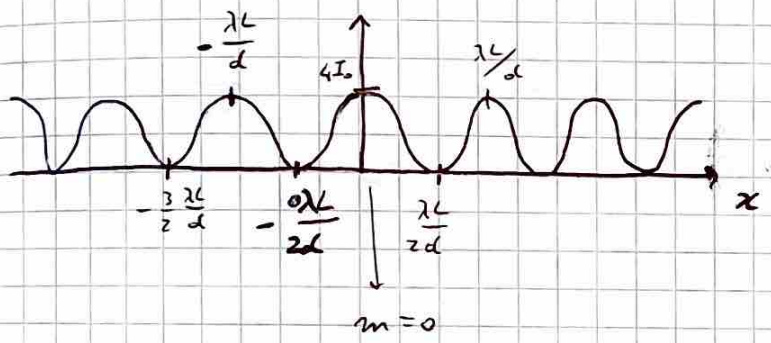
Se $L \gg d \implies \operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \theta = \frac{x}{L}$

$$I(x) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L} x\right)$$

quindi $\quad x_m = \frac{L}{d} m\lambda \implies \theta_m = \frac{x_m}{L} = \frac{\cancel{L}}{d} m\lambda \cdot \frac{1}{\cancel{L}}$

$\quad x_m = \frac{L}{d}\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \implies \theta_m = \frac{x_m}{L} = \frac{\cancel{L}\lambda}{d}\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\cancel{L}}$

$$\theta_m = \frac{\lambda}{d} m \qquad \theta_m = \frac{\lambda}{d}\left(m + \frac{1}{2}\right)$$



I passi $p_M = x_{M+1} - x_M = \frac{\lambda L}{d}$ sono la distanza tra 2 frange chiare (massimi)

Se le onde si propagano in un mezzo con indice di rifrazione n:

$$\delta = k n (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} n d \operatorname{sen}\theta$$

$$I(\theta) = 4 I_0 \cos^2\left(n \frac{\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right)$$

$$I(x) = 4 I_0 \cos^2\left(n \frac{\pi d x}{\lambda L}\right)$$

Sorgenti incoerenti

$$\delta = k(r_2 - r_2) + (\phi_2 - \phi_1) = k(r_2 - r_1) + \Delta\phi(t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_P = \left[2\frac{E_0}{r} \cos\left(\frac{\delta + \Delta\phi(t)}{2}\right)\right] \operatorname{sen}(kr - \omega t')$$

$$I = c\varepsilon_0 \langle E_P^2 \rangle = c\varepsilon_0 \left[2\frac{E_0}{r}\right]^2 \left\langle \cos^2\left(\frac{\delta + \Delta\phi(t)}{2}\right)\right\rangle \cdot$$

$$\cdot \langle \operatorname{sen}^2(kr - \omega t') \rangle = 2\cancel{\tfrac{1}{2}} c\varepsilon_0 \cancel{4} \frac{E_0^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 2\frac{I_0}{r^2}$$

$I = 2I_0 \frac{1}{r^2}$ costante e non dip. da x

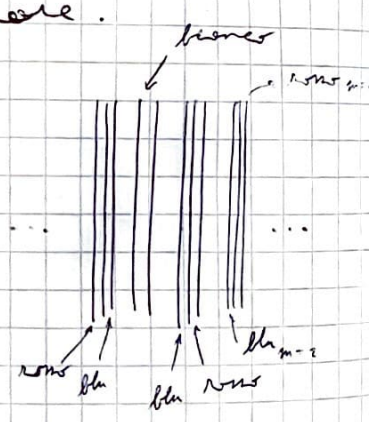
Effetto cromatico

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right) \propto \cos^2 \frac{\dots}{\lambda}$$

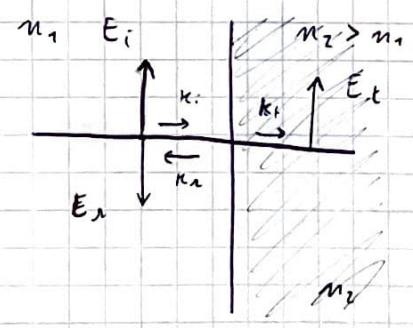
dipende da λ.

$x(\lambda) = m\frac{\lambda L}{d}$ cambia per ogni colore.

$x_{m=1\,\text{rosso}} \neq x_{m=1\,\text{blu}}$ etc.

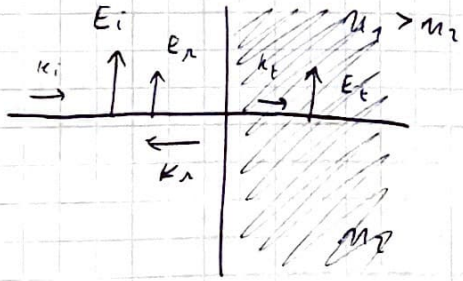


Lente sottile



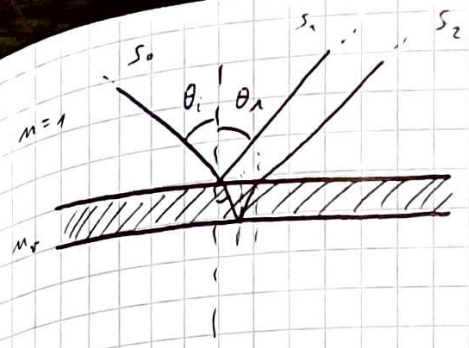
$r_\sigma < 0$ (sfasata π)

$t_\sigma > 0$ (in fase)



$r_\sigma > 0$

$t_\sigma > 0$ (in fase)



$$\delta = k(r_1 - r_2) + \Delta\phi(t)$$

$$\phi_1 = \phi_0 + \pi \qquad (n_r > 1)$$

$$\phi_2 = \phi_0$$

$$\phi_2 - \phi_1 = \phi_0 - (\phi_0 + \pi) = -\pi = \Delta\phi$$

$$\delta = k(r_2 - r_1) + \Delta\phi = k(2nd\cos\theta_r) - \pi =$$

$$= 2kd\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i} - \pi$$

Quando c'è incidenza normale $\theta_i = \theta_r = 0$

$$\delta = 2kdn - \pi = \frac{4\pi dn}{\lambda} - \pi$$

$$I = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2} = 4I_0\cos^2\left(\frac{4\pi dn}{\lambda} - \pi\right) =$$

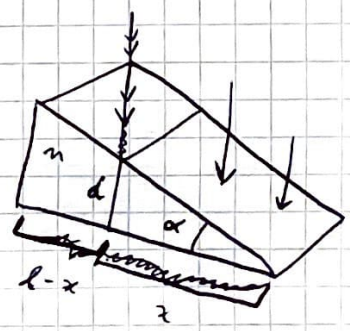
$$= 4I_0\left[-\cos\left(\frac{4\pi dn}{\lambda}\right)\right]^2 = 4I_0\cos^2\left(\frac{4\pi dn}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\delta}{2} = m\pi \qquad \text{INTERFERENZA COSTRUTTIVA}$$

$$\frac{\delta}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad \text{INTERFERENZA DISTRUTTIVA}$$

$$d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n} \quad \text{I.C.} \qquad d = m'\frac{\lambda}{2n} \quad \text{I.D.}$$

~~Allora~~ <u>Cuneo sottile</u>



Se $\alpha \approx 0$ allora

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{d}{x}$$

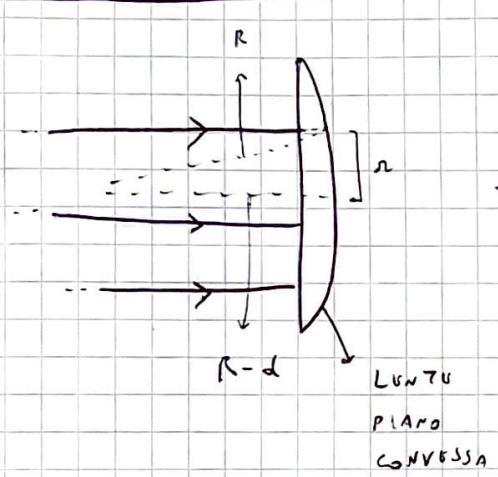
E trattiamo il cuneo come una lamina sottile

$$d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n} \Longrightarrow \alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2nx} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n\alpha} \quad \text{I.C.}$$

$$x = m'\frac{\lambda}{2n\alpha} \quad \text{I.D.}$$

Anelli di Newton



$$r^2 = R^2 - (R-d)^2 = -d^2 + 2Rd$$

$$\Longrightarrow \frac{r^2}{4R^2} = \frac{d}{2R} - \left(\frac{d}{2R}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$d << R \Longrightarrow \frac{r^2}{4R^2} = \frac{d}{2R}$$

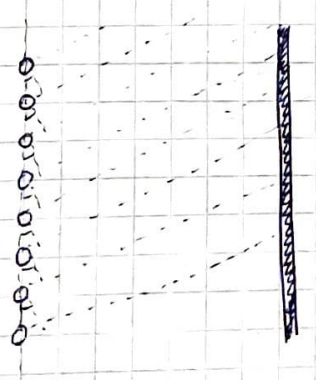
$$\Longrightarrow r^2 = 2Rd$$

Il sistema è simile al cuneo.

$$d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n} \Longrightarrow r^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{R\lambda}{n}$$

$$r = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)R\lambda} \quad \text{I.C.} \qquad r = \sqrt{m' R\lambda} \quad \text{I.D.}$$

Interferenza N sorgenti



$$\delta = k(r_i - r_{i+1}) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_i - r_{i+1})$$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

$$\vec{E}_p(r,t) = \vec{E}_1(r,t) + \vec{E}_2(r,t) + \dots + \vec{E}_N(r,t)$$

$$\vec{E}_p(r,t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(r,t) = \vec{E}_0 \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sen}(kr - \omega t + i\delta)$$

Troviamo i moduli:

$$E_0 = 2p \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \qquad E_p = 2p \operatorname{sen}\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_p = E_0 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)} \Rightarrow I_p = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

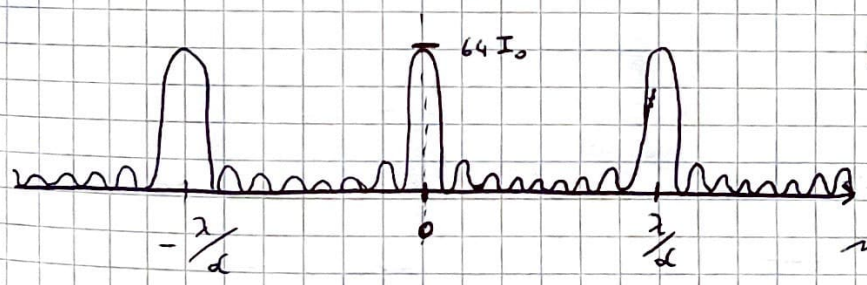
Calcoliamo δ: $\delta = k(r_i - r_{i+1}) = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta$

$$I_p(\theta) = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi N d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right)}\right]^2$$

Se $N = 2$:

$$I_p(\theta) = I_0 \frac{\left(2 \operatorname{sen}\frac{\delta}{2} \cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{\left(\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right)^2} = 4 I_0 \cos^2\frac{\delta}{2}$$

$N = 8$



I_{max} massimi principali

$$\lim_{\delta \to 0} I_0 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{N\delta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2}} = \lim_{\delta \to 0} I_0 \frac{\frac{N^2\delta^2}{4}}{\frac{\delta^2}{4}} = I_0 N^2$$

I massimi principali si hanno quando il sen. tende a 0

$$\Delta(\operatorname{sen}\theta)_{max} = \frac{\lambda}{d}$$

$$I_M = \lim_{\frac{\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta \to m\pi} I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{N\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\operatorname{sen}\theta\right)} = N^2 I_0$$

Il massimo si ha quando il num. tende a 0 (e il den. non è diverso da 0)

$$\sin^2\left(\frac{N\pi}{\lambda} d \sin\theta\right) \to 0 \implies \frac{N\pi}{\lambda} d \sin\theta \to 0$$

$$\sin\theta \cdot \frac{N\cancel{\pi}}{\lambda} d = m'\cancel{\pi} \implies \sin\theta = \frac{m'\lambda}{Nd}$$

Se $(\sin\theta)_{min} = (\sin\theta)_{max} \iff m'\frac{\lambda}{Nd} = m\frac{\lambda}{d} \implies$

$\implies m' = Nm$ $\quad$ m' non è un minimo ma un massimo.

I massimi secondari ci sono quando il num è 1.

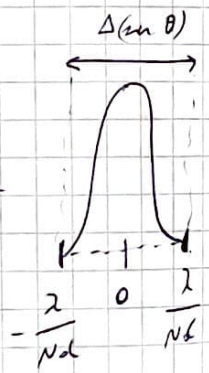
$$\sin^2\left(\frac{N\pi}{\lambda} d \sin\theta\right) = 1 \implies \frac{N\cancel{\pi}}{\cancel{\lambda}} d \sin\theta = \left(m'' + \frac{1}{2}\right)\cancel{\pi}\lambda$$

$$\implies \sin\theta = \left(m'' + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{Nd} \quad \text{con } m'' = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

$$I'' = \frac{I_0}{\sin^2\left(\left(m'' + \frac{1}{2}\right)\pi/N\right)} = \frac{I_M}{N^2 \sin^2\left(\left(m'' + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}\right)}$$

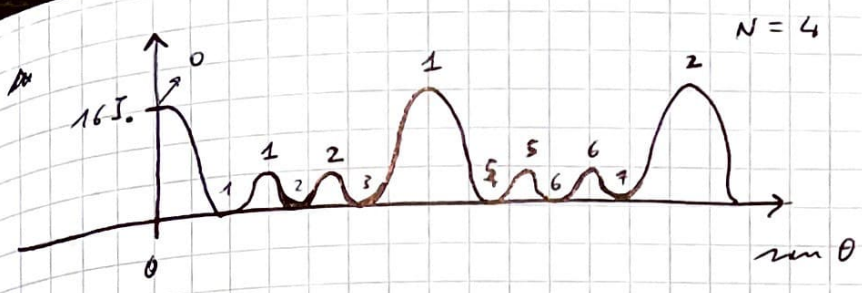
$$(\sin\theta)_{m'=1} = \frac{\lambda}{Nd} \qquad (\sin\theta)_{m'=-1} = -\frac{\lambda}{Nd}$$

$$\Delta(\sin\theta) = \frac{2\lambda}{Nd} \leftarrow \text{larghezza angolare dei massimi principali}$$



Caratteristiche

- $m = 0 \to$ massimo principale
- tra 2 max principali ci sono $N-2$ max sec.
- tra 2 max principali ci sono $N-1$ min.
- $I_{max\,pr.} = N^2 I_0$
- ampiezza angolare $\propto \frac{1}{N}$
- $I_{max\,sec} \propto \frac{1}{N^2} I_{max\,pr}$ $\quad (I_{max\,sec} \approx I_0)$



$$\max P = m \frac{\lambda}{d}$$

$$\max S = \left(m'' + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{Nd}$$

$$\min = m' \frac{\lambda}{Nd}$$

$\left[\frac{\lambda}{d}\right]$ sen θ	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$
(m) max P	0								1		
(m'') max S		0		1		2		3		4	
(m') min	0		1		2		3		4		5

$m' = 0$ e $m' = 4$ per i min non sono valori validi perché $m' = N m$ (m' multiplo di N)

$m'' = 0$ e $m'' = 3$, $m'' = 4$ non sono validi perché compresi tra il max principale ed il primo minimo (o tra l'ultimo minimo e il massimo principale).

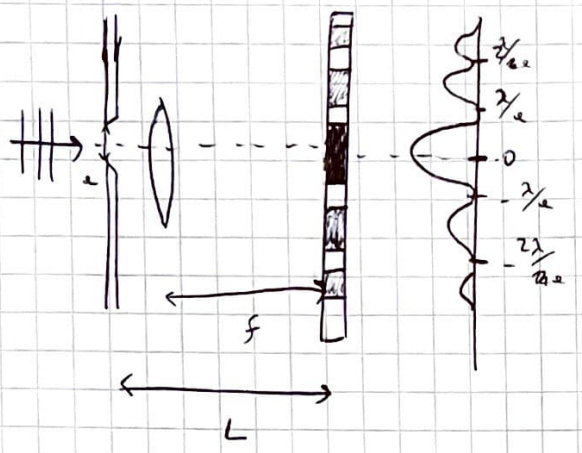
DIFFRAZIONE

La diffrazione è una particolare interferenza che avviene quando le dimensioni dell'ostacolo sono prossime alla lunghezza d'onda della radiazione.

Esistono 2 tipi di diffrazione:

- FRESNEL (campo vicino)
- FRAUNHOFER (campo lontano)

Diffrazione Fraunhofer fenditura singola



Divido la fenditura in N sorgenti

$$\Delta y = \frac{a}{N}$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta y \operatorname{sen}\theta \qquad \left[= k(y_i - y_{i+1})\right]$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta$$ è la diff. di fase totale

$$\left.\begin{aligned} E_p &= 2\rho \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \\ E_{max} &= \rho\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_p = 2\frac{E_{max}}{\alpha}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

$$E_p(\theta) = E_{max}\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = E_{max}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{\lambda}a\operatorname{sen}\theta}{\frac{\pi}{\lambda}a\operatorname{sen}\theta}$$

$$I_p(\theta) = I_{max}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}a\operatorname{sen}\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda}a\operatorname{sen}\theta}\right)^2$$

$$I_p = I_{max} \quad \text{se} \quad \frac{\pi}{\lambda}a\operatorname{sen}\theta \to 0$$

Questa condizione si realizza solo quando $\theta = 0$ e si parla di massimo centrale.

) minimi si hanno quando si annulla il numeratore.

$$\frac{\pi}{\lambda}a\operatorname{sen}\theta = m\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = m\frac{\lambda}{a} \quad \text{con } m = \pm 1, \pm 2$$

) massimi secondari si hanno quando il num = 1:

$$\frac{\pi}{\lambda}a\operatorname{sen}\theta = \left(m' + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \left(m' + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{a} \quad \text{con } m = 1, 2$$

$$\frac{I_p}{I_{max}} = \frac{1}{\pi^2 \left(m' + \frac{1}{2}\right)^2}$$

con $m' = 1$ $\quad I_{max\,p} = 0.045\, I_{max}$

La maggior parte della potenza si trova nella frangia centrale. ($\approx 80\%$)

$$\Delta(\operatorname{sen}\theta) = 2\frac{\lambda}{a} \Longrightarrow \Delta\theta = 2\frac{\lambda}{a\cos\theta} \xrightarrow{\theta \approx 0} \Delta\theta = 2\frac{\lambda}{a}$$

Diffrazione da apertura circolare

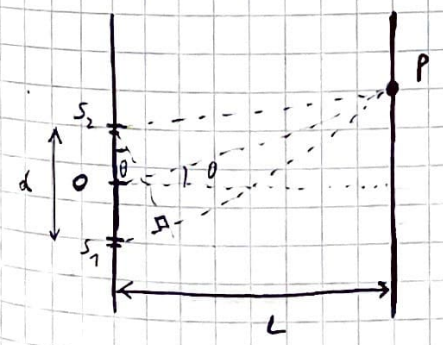
Primo minimo d'intensità $\operatorname{sen}\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$ → diametro

La larghezza angolare del massimo è $2\theta = \phi$

Criterio di Rayleigh

Due figure di diffrazione sono risolvibili se il massimo centrale di una cade sul primo zero dell'altra.

Interferenza e diffrazione (DOPPIA FENDITURA SOTTILE)



$$E_{p1}(\theta) = E_0 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta}$$

$$E_{p2}(\theta) = E_0 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta}$$

Uso Carnot:

$$E_p^2 = E_{p1}^2 + E_{p2}^2 - 2E_{p1}E_{p2}\cos(\pi - \delta) =$$

$$= E_{p1}^2 + E_{p2}^2 + 2E_{p1}E_{p2}\cos\delta$$

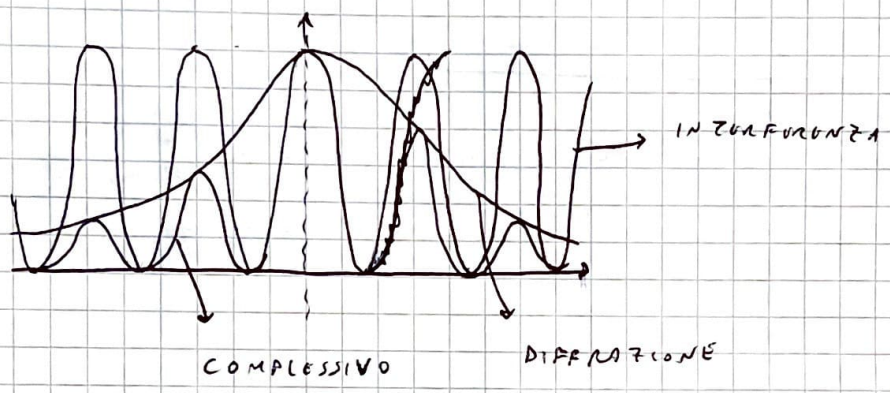
Con $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E^2$

$$I_p = 2 I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta} \right]^2 (1 + \cos\delta) = \underbrace{\overbrace{4 I_0}^{I_{max}}}_{N^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta} \right)^2 \cos^2$$

$$\delta = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} \quad , \quad I_{max} = N^2 I_0$$

$$I_p = I_{max} \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta} \right)^2}_{\text{FATTORE DI DIFFRAZIONE}} \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta\right)}_{\text{FATTORE DI INTERFERENZA}}$$

Es



$$\text{Max}_{int} \quad \sin\theta = m \frac{\lambda}{d}$$

$$\text{Min}_{diff} \quad \sin\theta = m' \frac{\lambda}{a}$$

Possiamo dire che sono visibili solo i massimi di interferenza prima del primo min. di diffrazione

$$\sin\theta = m \frac{\lambda}{d} < \frac{\lambda}{a} \implies m < \frac{d}{a}$$

Nel caso di N sorgenti

$$I_p = I_{max} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi N}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta\right)} \right)^2$$

fattore di diffrazione — fattore di interferenza

Anche qui $m < \frac{d}{a}$ è la condizione di visibilità.

EQ. D'ALEMBERT $\quad \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = 2\pi f \qquad v = \frac{\omega}{k}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \qquad T = \frac{1}{f} \qquad \left(k = \frac{\omega}{v}\right)$$

ONDE SONORE $\quad v_s = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$

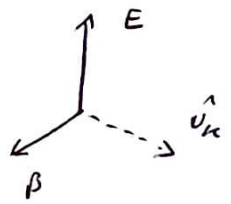
$$dB = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad I_0 \to 10^{-12} \qquad = (\log_{10} I + 12)\, 10$$

SOVRAPPOSIZIONE $\quad \xi = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \sin\left(k_m x - \omega_m t\right)$

EFFETTO DOPPLER $\quad f' = f \left(\dfrac{v_{onde} \pm v_{oss}}{v_{onde} \mp v_{sorg}}\right)$ $\uparrow$ AVV $\downarrow$ ALL

$$kE = \omega B \implies B = \frac{E}{c}$$

$$\bar{E} \times \bar{B} = \frac{E^2}{c} \hat{u}_k = EB\, \hat{u}_k$$



$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ ma $\mu_r = 1$ quasi sempre

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

$$S = \frac{EB}{\mu_0} \hat{u}_k = \frac{1}{\mu_0} (\bar{E} \times \bar{B})$$ VETTORE DI POYNTING

$$p_{rad} = \frac{I}{c} (1 + \eta)$$ con η rate di riflessione

$$I = \frac{P}{\Sigma} \qquad I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E^2$$ $\varepsilon_0 \to 8.85 \cdot 10^{-12}$

$$P = \frac{U}{\Delta t} \quad \left(= \frac{\partial U}{\partial t} \right)$$

POLARIZZAZIONE

POLARIZZ. $\qquad$ NON POLARIZZ.

$$\underbrace{I' = I \cos^2 \theta}_{\text{legge di Malus}} \qquad I' = \frac{I}{2}$$

SNELL $\quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

COEFF FRESNEL

$$r_\sigma = \frac{1 - \eta \chi}{1 + \eta \chi} \qquad r_\pi = \frac{\chi - \eta}{\chi + \eta}$$

$$\chi = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}, \quad \eta = \frac{n_2}{n_1} \qquad t_\sigma = \frac{2}{1 + \eta \chi} \qquad t_\pi = \frac{2}{\chi + \eta}$$

ANGOLO LIMITE $\quad \theta_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \eta$ $\quad$ TOT. RIFLESS.

ANGOLO DI BREWSTER $\quad \theta_B = \operatorname{arctg} \eta$ $\quad$ TOT. TRASM.

ANGOLO DI DEVIAZIONE $\quad \delta = i_1 + i_2 - \alpha$

SPECCHIO $\quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} \qquad I = -\frac{q}{p}$

DIOTTRO $\quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad I = \frac{n_1}{n_2} \frac{q}{p}$

LENTI $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \qquad I = \frac{q}{p}$

$$\delta = k (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

$$I_p(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right]^2 \xrightarrow{N=2} I_p(\theta) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \qquad \sin \theta = m' \frac{\lambda}{Nd} \qquad \sin \theta = \left(m'' + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{Nd}$$

MAX PRINC $\qquad$ MIN $\qquad$ MAX SEC.

DIFFRAZIONE $\quad I_p = I_{max} \left[\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta} \right]^2$

MASSIMO VISIBILE $\quad \operatorname{sen}\theta = 1 \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

INT + DIFF $\quad I_p = I_{max} \underbrace{\left(\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta} \right)^2}_{\text{DIFF.}} \underbrace{\left(\dfrac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{\lambda} N d \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta} \right)^2}_{\text{INT.}}$

$$\operatorname{sen}\theta = m \frac{\lambda}{d} < \frac{\lambda}{a}$$

$$\Rightarrow m < \frac{d}{a} \quad \text{(per essere visibile)}$$