LEGENDA

1. Integrali impropri (o generalizzati)
    - Convergenza e divergenza
    - Integrazione a valor principale
    - Oss. su integrazione a V.P.
    - Esempi fondamentali
    - Oss. sulla divergenza basata sugli asintoti orizzontali
    - **1 =** $f(x) \geq 0 \rightarrow F(x)\ crescente\ monotona$
    - **2 =** Th. del confronto
    - **3 =** Th. del confronto asintotico
    - Confronto con il valore assoluto
    - f assolutamente integrabile
2. Funzioni a più variabili
    - Topologia euclidea
    - Proprietà distanza
    - Intorno sferico o palla di x_0
    - Oss. sulla distanza
    - P.to di accumulazione
    - Palla bucata
    - Limite
    - Caratterizzazione del lim. in una f a valori vettoriali
    - Convergenza e divergenza
    - Continuità
    - P.to isolato
    - Continuità nei limiti
    - Teorema ponte
    - Oss. e appl. sull'esistenza di un limite
    - Funzioni omogenee
    - Continuità funzioni composte
    - Proiezione canonica
    - Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz
    - Th. doppio confronto
    - $|f(x)| \xrightarrow{x \to x_0} 0 \leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$
    - Insieme aperto
    - Insieme chiuso
    - Non aperto ↛ chiuso
    - Frontiera o bordo
    - Chiusura di un insieme
    - Insieme limitato
    - Massimo e minimo
    - Insieme compatto
    - Th. sulla compattezza (Insieme compatto ⇔ Insieme sequenzialmente compatto)
    - **4 =** Th. di Weierstrass
    - **5 =** Una f continua trasforma compatto in compatto
    - $B\ aperto/chiuso \rightarrow f^{-1}(B)\ aperto/chiuso$
    - Unioni e intersezioni tra insiemi aperti/chiusi
    - Insieme convesso
    - Insieme connesso per archi
    - $Convesso \rightarrow Connesso\ per\ archi$
    - **6 =** Th. degli zeri per R^n
    - f trasforma connessa in connessa
3. Rapporto incrementale
    - Gradiente
    - Jacobiano e matrice jacobiana
    - Differenziabilità

- Miglior approssimazione lineare
- **7 =** $Differenziabilit\grave{a} \rightarrow Continuit\grave{a}$
- Cos'è la mappa lineare L_{x_0}
- **8 =** $Differenziabilit\grave{a} \rightarrow \ \exists J_f \wedge A_{x_0} = J_f(x_0)$
- **9 =** $Differenziabilit\grave{a} \rightarrow f\ ha\ tutte\ le\ derivate\ direzionali$
- Th. del differenziale
- Corollario
- Differenziale
- Derivate f. composte
- Corollario
- Curva di livello
- **10 =** Ortogonalità tra gradiente e tangente
- **11 =** Direzione di massima crescita
- Massimo/minimo locale di una funzione
- **12 =** Th. di Fermat
- P.to critico singolare
- **13 =** Th. di Lagrange
- Localmente Lipschitziana
- Derivata seconda direzionale
- Derivata seconda parziale
- Hessiano
- Th. di Schwartz
- Corollario
- Classi C
- Forma quadratica
- Segno di una forma quadratica
- Scorciatoia per il segno di una forma quadratica
- Forma lineare o forma differenziale
- **14 =** Differenziabilità in x_0 2 volte
- Formula di Taylor di ordine 2 per f a più variabili
- **15 =** Condizione sufficiente perché un punto critico sia di estremo locale
- Condizione necessaria perché un punto critico sia di estremo locale

4. Integrale di Riemann a più variabili
   - Suddivisione
   - Somma inferiore/superiore
   - F. integrabile
   - Integrale doppio di funzioni costanti
   - $Continuit\grave{a} \rightarrow Integrabilit\grave{a}$
   - Caratterizzazione integrabilità funzione def. su rettangoli
   - Formula di riduzione
   - Scambio dell'ordine di integrazione
   - F. a var. separabili
   - **16 =** Trasformazione f a var. separabili
   - $Integrabilit\grave{a}\ in\ \Omega\ c\ R\ rettangolo$
   - Insieme misurabile con misura 0
   - Insieme trascurabile
   - **17 =** Il grafico di una funzione è trascurabile
   - **18 =** $\Omega\ misurabile \leftrightarrow \partial\Omega\ trascurabile$
   - Caratteristica di Ω
   - Media integrale
   - Linearità integrale
   - $\Gamma\ trascurabile\ c\ \Omega \rightarrow (\Omega) \int f = (\Omega \backslash \Gamma) \int f$
   - Corollario
   - Funzione generalmente continua
   - Generalmente continua e limitata
   - Domini normali (o semplici)
   - **19 =** $\Omega\ normale \rightarrow \Omega\ misurabile$

- **20 =** Formula di riduzione su domini normali
- Formula del cambio di variabile
- $\chi\ trasforma\ misurabili\ in\ misurabili$
- Scelta di χ partendo da ψ = χ^{-1}
- **21 =** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

5. Eq. differenziali
    - Laplaciano di f
    - ODE (Eq. Diff. Ordinarie)
    - ODE autonoma
    - ODE canonica o normale
    - ODE omogenea
    - ODE lineare
    - f localmente lipschitziana
    - Th. di Cauchy di esistenza e unicità locale
    - Th. di Peano
    - f sublineare
    - Eq. a var. separabili
    - Soluzioni singolari
    - Eq. lineari di ordine 1
    - Eq. lineari di ordine 2
    - Eq. lineari di ordine 2 con coeff. Costanti
    - Metodo di variazione delle costanti
    - Metodo di similarità
6. Serie numeriche
    - Serie geometriche
    - **22 =** Criterio dell'integrale
    - Serie armonica generalizzata
    - **23 =** Criterio del confronto
    - **24 =** Criterio del confronto asintotico
    - **25 =** Criterio degli infinitesimi
    - **26 =** Criterio del rapporto
    - **27 =** Criterio delle radici
    - $Convergenza\ assoluta \rightarrow convergenza$
    - Linearità op. di serie
    - Serie a segni alterni
    - Criterio di Leibnitz
    - Serie di Mengoli

- INTEGRALI IMPROPRI (O GENERALIZZATI)

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \wedge \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \wedge \int_a^{a+h} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

$f \in \mathcal{R}([a, \omega]) \quad \forall \omega > a$

f si dice integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$ se

$$\exists \lim_{\omega \to +\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

- CONVERGENZA E DIVERGENZA

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{w \to +\infty} \int_a^w f(x)\,dx \in \mathbb{R} \quad \text{converge}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{w \to +\infty} \int_a^w f(x)\,dx = \pm\infty \quad \text{diverge}$$

Se $f: [a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{w \to b^-} \int_a^w f(x)\,dx$

$(a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{w \to a^+} \int_w^b f(x)\,dx$

Se $f: (a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{w \to a^+} \int_w^b f(x)\,dx + \lim_{w \to b^-} \int_a^w f(x)\,dx$

- INTEGRAZIONE A VALOR PRINCIPALE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 \quad \text{se} \quad f(-x) = -f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{w \to -\infty} \int_w^0 f(x)\,dx + \lim_{w \to +\infty} \int_0^w f(x)\,dx$$

Questo è il calcolo dell'integrale improprio ($\notin \mathbb{R}$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{w \to +\infty} \int_{-w}^{w} f(x)\,dx = 0 \in \mathbb{R}$$

Questo è il calcolo a valor principale (un singolo lim)

- TH. (OSS. SU INTEGRAZIONE A V.P.)

Se f è integrabile in senso improprio

$\Rightarrow$ f è integrabile a valor principale

$\not\Leftarrow$ Es. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ con $f(-x) = -f(x)$

- ESEMPI FONDAMENTALI

1) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & 0 < \alpha \le 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \quad , \alpha > 0$$

DIM.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{w \to +\infty} \int_1^w \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \left(x^{1-\alpha} \right) \Big|_1^w =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \left(w^{1-\alpha} - 1 \right) \quad \text{con} \quad \begin{matrix} w^{1-\alpha} = 0 \text{ se } \alpha > 1 \\ w^{1-\alpha} = +\infty \text{ se } 0 < \alpha < 1 \end{matrix}$$

2) $$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha \ge 1 \\ \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad , \begin{matrix} \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ +\infty > b > a > 0 \end{matrix}$$

DIM. $$\lim_{w \to a^+} \frac{1}{1-\alpha} (x-a)^{1-\alpha} \Big|_w^b = \lim_{w \to a^+} \frac{1}{1-\alpha} \left[(b-a)^{1-\alpha} - (w-a)^{1-\alpha} \right] =$$

$$\text{con} \quad \begin{matrix} w - a \to 0 \\ b - a \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} +\infty \text{ se } \alpha > 1 \\ 0 \text{ se } 0 < \alpha < 1 \end{matrix} \leftarrow (w-a)^{1-\alpha}$$

3) $$\int_a^b \frac{1}{x-a} dx = \log(x-a) \Big|_{w \to a^+}^b = \underbrace{\log(b-a)}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\log(w-a)}_{-\infty} = +\infty$$

- OSSERVAZIONE SULLA DIVERGENZA BASATA SUGLI ASINTOTI ORIZZONTALI

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge se } \lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left(\int_{-\infty}^a f(x) dx \text{ diverge se } \lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right)$$

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, $\int_a^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow l = 0$

1 = $f(x) \geq 0 \Rightarrow F(x)$ crescente monotone

Hp) $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $x_0 \in [a,b]$

$\exists [c,d] \subset [a,b]$ t.c. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [c,d]$

Th) $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du$ monotone crescente

Dim) Vogliamo dimostrare che

$\forall \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \in [c,d] ; x_1 \leq x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$

$$F(x_2) = \int_{x_0}^{x_2} f(u)\,du = \int_{x_0}^{x_1} f(u)\,du + \int_{x_1}^{x_2} f(u)\,du =$$

$$= F(x_1) + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(u)\,du}_{\geq 0} \geq F(x_1)$$

2 = TH. DEL CONFRONTO

Hp) $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\exists\, b > a$ t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x)$

$g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad \begin{matrix} f \\ g \end{matrix} \in \mathcal{R}([a,c]) \quad \forall c > a$

Th) Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \pm\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \pm\infty$

Dim) 1) $F_a(x)$ monotone crescente $\forall x \in [b, +\infty)$

$\exists \lim_{x \to +\infty} F_a(x) = \sup F_a(x)$

Se $x > b$: $F_a(x) = \int_a^b f(x)\,dx + \overbrace{\int_b^x f(x)\,dx}^{F_b(x)}$

$G_a(x) = \int_a^b g(x)\,dx + G_b(x)$

In $[b, +\infty)$ $f \leq g \Rightarrow F_b \leq G_b \in \mathbb{R}$

$0 \leq F_b \leq G_b \in \mathbb{R} \Rightarrow F_b \in \mathbb{R}$

$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ perché f è limitata $(f \in \mathcal{R}([a,c]))$

$$F_a(x) = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{F_b(x)}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow F_a(x) \in \mathbb{R}$$

3 = TH. CONFRONTO ASINTOTICO

Hp) $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{R}([a,c])$ $\forall c > a$

$f, g > 0$ def. per $x \to +\infty$, $f \sim g$ per $x \to +\infty$

Th) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ha lo stesso carattere di $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

Dim) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ t.c. \ \forall x > \delta > a : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \varepsilon$

Fisso $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x)$$

Se $g(x)$ converge $\Rightarrow f(x)$ deve convergere

Se $g(x)$ diverge $\Rightarrow f(x)$ deve divergere

$(+\infty \leq f(x) \leq +\infty \Rightarrow f(x) = +\infty)$

- oss. $f \sim kg$, $k \in \mathbb{R}^*$ fa comunque valere il Th.

Fisso $\varepsilon = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} g(x) < f(x) < \frac{3k}{2} g(x)$

Se $\frac{f}{g} < 0$ il Th. continua a valere

CONFRONTO CON IL VALORE ASSOLUTO

Hp) $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}([a, c]) \ \forall c > a$

Th) Se $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \in \mathbb{R} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \in \mathbb{R}$

f ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE

Se $\int_a |f| \in \mathcal{R}(A)$ $\quad (f \in \mathcal{R}(A) \vee f \notin \mathcal{R}(A))$

f è ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE

FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $f(\overbrace{x, y, \dots z}^{n}) = (f_1, f_2 \dots f_m)$

f è un campo vettoriale se $m > 1$

f è a valori scalari se $m = 1$

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ si dice curva

TOPOLOGIA EUCLIDEA

Basata sulla distanza euclidea

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_1^i - x_2^i)^2} = \sqrt{(x_1^1 - x_2^1)^2 + \dots + (x_1^n - x_2^n)^2}$$

$$d(v_1, v_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- PROPRIETÀ DISTANZA

- $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1) \geq 0$ COMMUTATIVA + NON NEGATIVA
- $d(v_1, v_2) = 0 \iff v_1 = v_2$
- $d(v_1, v_2) \leq d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2)$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$|\bar{v}| = d(v, 0) = \sqrt{(\bar{v}^1)^2 + (\bar{v}^2)^2 + \dots + (\bar{v}^n)^2}$$

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\Sigma\, x_1^i - x_2^i} = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

- INTORNO SFERICO O PALLA DI x_0

$$B(x_0, \delta) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < \delta \}$$

$$\partial B(x_0, \delta) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| = \delta \}$$

- OSSERVAZIONE SULLA DISTANZA

Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $|x_1 - x_2| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1 \dots n\} \quad |x_1^i - x_2^i| < \varepsilon$$

dim) Supponiamo che $|x_1^i - x_2^i| < \varepsilon/\sqrt{n} < \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1^i - x_2^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_1^i - x_2^i)^2} < \varepsilon \quad \forall i$$

visto che $(x_1^i - x_2^i)^2$ è positivo o nullo

$$|x_1^i - x_2^i|^2 = (x_1^i - x_2^i)^2$$

$$(x_1^i - x_2^i)^2 < \varepsilon^2/n$$

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_1^i - x_2^i)^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^2/n} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} \cdot n} = |\varepsilon| = \varepsilon$$

- PTO DI ACCUMULAZIONE

$D(A) := \{ x \in \mathbb{R}^n : x$ pto di accumulazione di $A \}$

$x_0 \in D(A) \iff \forall \delta > 0 \ni B(x_0, \delta) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

- PALLA BUCATA

$B'(x_0, \delta) = B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

- LIMITE

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\substack{n \geq 2 \\ m \geq 1}$, $x_0 \in D(A)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se:

$\forall V \in \mathcal{I}(\ell) \ \exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$:
$f(x) \in V$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni \forall x \in B'(x_0, \delta) \cap A$:
$f(x) \in B'(\ell, \varepsilon)$

- CARATTERIZZAZIONE DEL LIM. IN UNA f A VALORI VETTORIALI

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = (\ell^1, \ell^2, \ell^3 \dots \ell^m)$

$\iff \exists \lim_{x \to x_0} f^j(x) = \ell^j \quad \forall j \in \{1 .. m\}$

- CONVERGENZA E DIVERGENZA

$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$

$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\} : f(x) > a$

$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\} : f(x) < a$

$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} -\infty$

CONTINUITÀ

f è continua se

$\forall V \in \mathcal{I}(f(x_0))\ \exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni \forall x \in U \cap A:$

$f(x) \in V$

F. GENERALMENTE CONTINUA

f è gen. continua su I se $\exists\, n \in \mathbb{R}$ numero di discontinuità

P.TO ISOLATO

x_0 è p.to isolato se $x_0 \notin D(A)$ cioè

$\exists\, \delta > 0 \ni B(x_0, \delta) \cap A = \{x_0\}$

$\ni B'(x_0, \delta) \cap A = \emptyset$

CONTINUITÀ NEI LIMITI

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \to x_0} f^j(x) = f^j(x_0) \quad \forall j \in \{1 \dots m\}$$

TEOREMA PONTE

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x_0 \in D(A)$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^m \iff \forall \{a_n\} \subset A \subset \mathbb{R}^n \ni$$

$$a_n \to x_n : f(a_n) \to l$$

OSSERVAZIONE E APPLICAZIONE SULL'ESISTENZA DI UN LIMITE

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^n \iff$$

$$\iff \forall B \subset A \ni x_0 \in D(B) : \lim_{x \to x_0} f|_B(x_0) = l$$

Es $f(x, y)$ in $B \subset A \Rightarrow f(x, y_0 + m(x - x_0))$

$\mathbb{R}^n$

retta del tipo $y = y_0 + m(x - x_0)$

- ## FUNZIONI OMOGENEE

f è omogenea di grado N se

$f(\lambda x_1, \lambda x_2 \dots \lambda x_n) = \lambda^N f(x_1, x_2 \dots x_n)$

OSS $f(\lambda x, \lambda y \dots) = f(x, y \dots) = \lambda^{\overset{\text{grado}}{0}}(f(x, y \dots))$

- ## CONTINUITÀ FUNZIONI COMPOSTE

Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(A) \subset B$

$g : B \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

e $f \in C^0(\overset{x_0}{\cancel{A}})$ $\wedge$ $g \in C^0(\cancel{B}\, f(x_0))$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ continua in x_0

OSS. $g \circ f \in C^0(\cancel{B}A) \iff g \circ f \in C^0(\{x_0\})$ $\forall x_0 \in A$

- ## PROIEZIONE CANONICA

$P_j : (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto x_j \in \mathbb{R}$

OSS P_j è CONTINUA se f è continua

$f \in C^0(\{x_0\}) \Rightarrow f^j \in C^0(\{x_0\})$

Dim) $|x^j - x_0^j| \le |x - x_0|$

$x - x_0 \to 0$ perché $f \in C^0(\{x_0\})$

$0 \le |x^j - x_0^j| \le \underbrace{0}_{|x - x_0|} \Rightarrow x^j \to x_0^j$

- DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY - SCHWARTZ

$$\forall \, x, y \in \mathbb{R}^n \quad |x \cdot y| \leq |x|\,|y|$$

perché $x \cdot y = |x|\,|y| \cos\theta \leq |x|\,|y|$

visto che $\cos\theta \leq 1 \quad \forall\, \theta \in (-\pi, \pi]$

- TH. DOPPIO CONFRONTO

$$f, g, h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathcal{D}(A)$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R} \quad \wedge$$

$$\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}:$$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

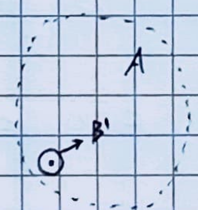
$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

- $|f(x)| \xrightarrow{x_0} 0 \iff f(x) \xrightarrow{x_0} 0$

Si può dimostrare prendendo $f(x) = 0$ e $h(x) \to 0$ in $U \in \mathcal{I}(x_0)$ con $f(x) \leq |g(x)| \leq h(x)$

- INSIEME APERTO $(\mathring{A} = A)$

$A \subset \mathbb{R}^n$ si dice aperto se $\mathring{A} = A$

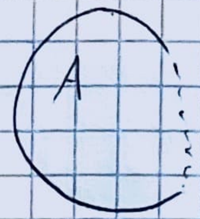


$$\forall x \in A \ \exists\, \delta > 0 \ni' B'(x, \delta) \subset A$$

- INSIEME CHIUSO $(\bar{A} = A)$

$A \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto $(\partial A \subset A)$

- NON APERTO $\not\Rightarrow$ CHIUSO



A in figura non è né aperto né chiuso

$[a, b)$ ha le stesse caratteristiche

- FRONTIERA O BORDO

$A \subset \mathbb{R}^n$, x_0 p.to di frontiera se x_0 non è interno né ad A né ad $\mathbb{R}^n \setminus A$.

$\partial A := \{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ p.to di frontiera} \}$

x_0 p.to di frontiera se

$$\forall \delta > 0 : B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset \ \wedge$$
$$B(x_0, \delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

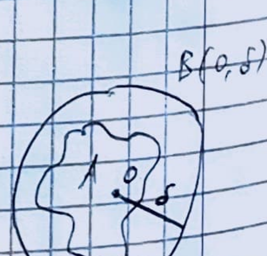
- CHIUSURA DI UN INSIEME

$\bar{A}$ è la chiusura di A

$\bar{A} = A \cup \partial A$

$\bar{A} = A \iff A$ è chiuso (quindi $\partial A \subset A$)

$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$



- INSIEME LIMITATO

A limitato se $\exists\, \delta > 0 \ni' B(0, \delta) \supset A$

- MASSIMO E MINIMO

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

M è massimo se $f(M) \geq f(x) \quad \forall x \in A$

m è minimo se $f(m) \leq f(x) \quad \forall x \in A$

- INSIEME COMPATTO

$A \subset \mathbb{R}^n$ compatto $\iff$ A chiuso e limitato

OSS. $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono gli unici insiemi che sono sia aperti che chiusi.

$\emptyset$ è compatto, $\mathbb{R}^n$ no perché $\mathbb{R}^n$ non è lim.

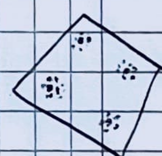
- TH. COMPATTEZZA $\iff$ COMPATTEZZA SEQUENZIALE

indici $\{1, 2, 5, 7, 10, 13 \ldots\}$

$A \subset \mathbb{R}^n$ compatto $\iff$ $\forall (a_n) \subset A \ \exists \, n_k \subset \mathbb{N}, \ n_k < n_{k+1}$

$\ni' \ a_{n_k} \to \bar{x} \in A$ → sequenzialmente compatto

4 = TH. WEIERSTRASS



Hp) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A compatto, $f \in C^0(A)$

Th) f ha min e max

Dim) Nel caso del minimo

$f(A)$ ha minimo $\iff$ $\inf(f(A)) \in f(A)$

Se $f \in C^0(A)$ $\inf(f(A)) \neq -\infty$, $(\in \mathbb{R})$

$\inf(f(A)) = \lambda \in \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N} \ \exists \, a_n \in A \ \ni' \ f(a_n) < \lambda + \overset{\varepsilon}{\boxed{1/n}} \ \wedge \ \lambda \leq f(a_n)$

$\lambda \leq f(e_n) \leq \lambda + 1/n$

$\lambda \to \lambda \ , \ \lambda + 1/n \to \lambda$ per $n \to +\infty$

$\lambda \leq f(e_n) \leq \lambda$ per $n \to \infty$

quindi $f(e_n) \to \lambda$ ($\lambda = \inf(f(A))$)

A è compatto $\Longrightarrow$ A è sequenzialmente compatto

quindi $\exists (n_k) \in \mathbb{N}$, $n_k < n_{k+1}$ $\ni'$ $e_{n_k} \to \bar{x} \in A$

$f(e_{n_k}) \longrightarrow f(\bar{x})$

$f(e_n) \to \lambda \Rightarrow f(e_{n_k}) \to \lambda = f(\bar{x})$

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

5 $\equiv$ UNA f CONTINUA TRASFORMA COMPATTO IN COMPATTO

Hp) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(A)$

$K \subset A$, K compatto

Th) $f(K)$ compatto

Dim) $\forall\ y_n \subset f(K)$ $\exists (n_k) \subset \mathbb{N}$, $n_k < n_{k+1}$ $\ni'$

$y_{n_k} \to \bar{y} \in f(K)$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ $\exists\ x_n \in K$ $\ni'$ $f(x_n) = y_n$

$(x_n) \subset K \Rightarrow \exists (n_k) \subset \mathbb{N}$, $n_k < n_{k+1}$ $\ni'$

$x_{n_k} \to \bar{x} \in K$

$f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, $f(x_{n_k}) \to f(\bar{x}) = \bar{y}$

$f(\bar{x}) \in f(K)$

- $f^{-1}(B)$ aperto (chiuso) $\Leftarrow$ B aperto (chiuso)

Hp) $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^0(\text{dom } f)$

Th) $\forall B \subset \mathbb{R}^m$, B aperto : $f^{-1}(B) \subset A \subset \mathbb{R}^n$ aperto

$\forall B \subset \mathbb{R}^m$, B chiuso : $f^{-1}(B) \subset A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso

- UNIONI E INTERSEZIONI TRA INSIEMI APERTI / CHIUSI

1) ~~Sia~~ $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $\forall \alpha \in I$; A_α aperto

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ è aperto

$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ è aperto $\Leftrightarrow$ (A_α) è una succ. finita

2) Sia $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $\forall \alpha \in I$; A_α chiuso

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ è chiuso $\Leftrightarrow$ (A_α) è una succ. finita

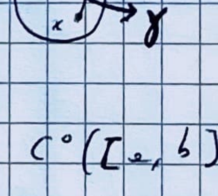
$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ è chiuso

- INSIEME CONVESSO

$A \subset \mathbb{R}^n$ si dice convesso se

$\forall \, {}^{x}_{y} \in A \quad \forall \lambda \in [0,1] : (1-\lambda)x + \lambda y \in A$

- INSIEME CONNESSO PER ARCHI



$A \subset \mathbb{R}^n$ connesso per archi se

$\forall \, {}^{x}_{y} \in A \;\; \exists \, \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ con $\gamma \in C^0([a,b])$ t.c.

$\gamma(a) = x \wedge \gamma(b) = y$ e $\gamma([a,b]) \subset A$

= CONVESSO $\Rightarrow$ CONNESSO PER ARCHI

$\exists\ \gamma : [0,1] \to (1-\gamma)x + \gamma y$ t.c.

$\gamma(0) = x \wedge \gamma(1) = y \wedge \gamma([0,1]) \subset A$

6 = TH. DEGLI ZERI PER $\mathbb{R}^n$

Hp) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(A)$, $C \subset A$

C connesso per archi

$x, y \in C$, $f(x) f(y) < 0$

Th) $\exists\ z \in C$ t.c. $f(z) = 0$

Dim) C connesso $\Rightarrow \exists\ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$,

$\gamma \in C^0([a,b])$ t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y \wedge \gamma([a,b]) \subset C$

Considero $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$

$f(\gamma(a)) = f(x)$

$f(\gamma(b)) = f(y)$, $f(\gamma(a)) \cdot f(\gamma(b)) < 0$

$\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $f(\gamma(c)) = 0$ per il Th. degli zeri in $\mathbb{R}^1$.

$\exists$ quindi $z = \gamma(c)$, $z \in C$

- f TRASFORMA CONNESSA IN CONNESSA

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^0(A)$

$\forall\ C \subset A$ connesso per archi

$\Rightarrow f(C)$ connesso per archi.

- RAPPORTO INCREMENTALE

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, v versore

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = l \in \mathbb{R}^m$$

l è derivata direzionale nella direzione v.
Se v è una componente della base canonica l è una derivata parziale.

- GRADIENTE

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0) \dots \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

con $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- JACOBIANO E MATR. JACOBIANA

$$J_f(x_0) = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}}_{n}\right\} m \quad \text{con } f: A \subset \mathbb{R}^{\boxed{n}} \to \mathbb{R}^{\boxed{m}}$$

$|J_f(x_0)|$ è lo jacobiano (solo se $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

- DIFFERENZIABILITÀ

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$

f è differenziabile in x_0 se

$$\exists \, L_{x_0} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \ni \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - L_{x_0}(\bar{x} - \bar{x}_0)}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} = \bar{0}$$

mappa lineare

f differenziabile in x_0 $\iff$ $\forall i \in \{1 \dots m\}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^i(x) - f^i(x_0) - L^i_{x_0}(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

- MIGLIOR APPROSSIMAZIONE LINEARE

f differenziabile $\iff$ f ha miglior approssimazione lin.

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

7 = DIFFERENZIABILE $\Rightarrow$ CONTINUA

Hp) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$

f differenziabile in x_0

Th) f continua in x_0

Dim) x_0 interno $\Rightarrow$ x_0 p.to accumulazione

$f \in C^0(\{x_0\}) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f(x) - f(x_0) = L_{x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$

$L_{x_0}(x - x_0) \to 0$

$o(\|x - x_0\|) \to 0$ per $x \to x_0$

$f(x) - f(x_0) \to 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \to f(x_0)}$

- COS'È LA MAPPA LINEARE L_{x_0}

$L_{x_0}(x - x_0) = A_{x_0} \cdot \overbrace{(x - x_0)}^{\text{vet. colonne}}$ con $A_{x_0} \in M(m, n)$

prod. righe x colonne

Dimostriamo che $A_{x_0} = J_{x_0}$.

8 = DIFFERENZIABILITÀ $\Rightarrow \exists J_f \wedge A_{x_0} = J_f(x_0)$

Hp) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$

f differenziabile

Th) $\exists J_f(x_0) \wedge L_{x_0}(x-x_0) = A_{x_0} J_f(x_0) \cdot (x-x_0)$

Dim) f diff. $\Rightarrow f^i$ è diff. $\forall i \in \{1 .. m\}$

Fissiamo $i \in \{1 .. m\}$, $j \in \{1 .. n\}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^i(x) - f^i(x_0) - L^i_{x_0}(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^i(x_0+h) - f^i(x_0) - L^i_{x_0}(h)}{|h|} = 0$$

Sia $h = te_j \Rightarrow |h| = |te_j| = |t||e_j| = |t|$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f^i(x_0+te_j) - f^i(x_0) - L^i_{x_0}(te_j)}{|t|} = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f^i(x_0+te_j) - f^i(x_0) - L^i_{x_0}(te_j)}{|t|} \right| = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f^i(x_0+te_j) - f^i(x_0) - L^i_{x_0}(te_j)|}{\underbrace{||t||}_{=|t|}} = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f^i(x_0+te_j) - f^i(x_0) - L^i_{x_0}(te_j)}{t} \right| = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f^i(x_0+te_j) - f^i(x_0) - L^i_{x_0}(te_j)}{t} = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f^i(x_0+te_j) - f^i(x_0)}{t} - \frac{tL^i_{x_0}(e_j)}{t} = 0$$

$$\underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{f^i(x_0+te_j) - f^i(x_0)}{t}}_{} = L^i_{x_0}(e_j) = a^i_j$$

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) = a^i_j \Rightarrow J_f(x_0) = A_{x_0}$$

$\exists$ = DIFFERENZIABILITÀ $\Rightarrow$ f HA TUTTE LE DER. DIREZIONALI

Hp.) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$, f differenziabile

Th.) f ha tutte le der. direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = L_{x_0}(v) = J_f(x_0) \cdot v$$

Dim) Sia $v \in \mathbb{R}^n$ versore, $\|v\| = 1$

$$h = tv \Rightarrow |h| = |t||v| = |t|$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L_{x_0}(tv)}{|t|} = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = L_{x_0}(v) \quad \text{cioè}$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = L_{x_0}(v) = J_f(x_0) \cdot v$$

- OSS. In $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$J_f(x_0) = \nabla f(x_0)$ quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f \cdot v$

$$\nabla f(x_0) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \cdot v^i$$

$\exists$ = TEOREMA DEL DIFFERENZIALE

Hp.) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$

$\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $\forall x \in U \ \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \ \forall i \in \{1 \dots m\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x_i}(x), \frac{\partial f^2}{\partial x_i}(x) \dots \frac{\partial f^m}{\partial x_i}(x) \right)$$

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_i}(x) \right)_{i \in \{1 \dots m\}} \quad \text{continue in } x_0$$

Th.) f differenziabile in x_0

- COROLLARIO

Se f ha derivate parziali e ogni derivata parziale è continua

$\Longrightarrow$ f è differenziabile

- DIFFERENZIALE

Miglior appr. lineare : $x_0 \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x_0) + J_f(x_0)(x - x_0)$

Differenziale : $h \in \mathbb{R}^n \mapsto J_f(x_0)(h)$

- DERIVATE F. COMPOSTE

$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix} : \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \subset \mathbb{R}^{n/m} \to \mathbb{R}^{m/k}$, $f(A) \subset B$

$x_0 \in \mathring{A}$, $f(x_0) \in \mathring{B}$

f diff. in x_0, g diff. in $f(x_0)$

$\Longrightarrow$ $g \circ f$ diff. in x_0

$\Longrightarrow$ $J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \times J_f(x_0)$

- COROLLARIO

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$

Se $t_0 \in I$ e γ è derivabile in t_0, $\gamma(t_0) \in \mathring{A}$,

f diff. in $\gamma(t_0)$

$\Longrightarrow$ $f \circ \gamma$ è derivabile in t_0

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \times \gamma'(t_0)$$

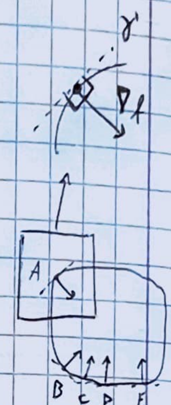
- CURVA DI LIVELLO

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

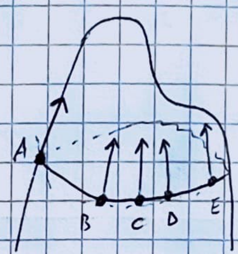
$c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{c\}) \subset A$ è curva di livello c di f

- OSSERVAZIONI Se $c \notin Im\, f \Rightarrow f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$

- NOTAZIONI $f^c = f^{-1}((-\infty, c])$
  $f_c = f^{-1}([c, +\infty))$



10 = ORTOGONALITÀ TRA GRADIENTE E TANGENTE



$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A = \mathring{A}$

$c \in \mathbb{R} \ni' f^{-1}(\{c\}) \neq \emptyset$

$\exists\, \gamma : I \to A \ni' \gamma(I) \subset f^{-1}(\{c\})$

Sia $x_0 \in f^{-1}(\{c\}) \cap \gamma(I)$,

f diff. in x_0, $\nabla f(x_0) \neq \bar{0}$

Sia $t_0 \in I \ni' \gamma(t_0) = x_0$

$\Rightarrow \nabla f(x_0) \perp \gamma'(t_0)$

Dim) $(f \circ \gamma)(t) = c \quad \forall t \in I$ quindi

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \bar{0} = \nabla f(x_0) \cdot \gamma'(t_0)$$

11 = DIREZIONE DI MASSIMA CRESCITA

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$, f diff. in x_0

$\nabla f(x_0) \neq \bar{0}$ per supposizione

$\dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ è la dir. di massima crescita per f.

Dim) $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v = |\nabla f(x_0)| \cdot |v| \cdot \cos\theta$

che ha massimo in $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2\pi k$

(cioè $v \parallel \nabla f$ quindi $v = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

- MASSIMO / MINIMO LOCALE DI UNA FUNZIONE

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

x_0 min locale se

$\exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in U \cap A : f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$

x_0 max locale se

$\exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in U \cap A$: $f(x) \leq f(x_0)$

quindi $f(x_0) - f(x) \geq 0$

12 = TH. DI FERMAT

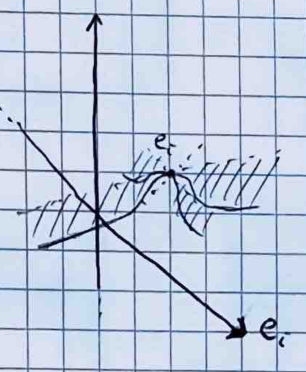
$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$, f derivabile in x_0

x_0 p.to estremale $\Rightarrow \nabla f(x_0) = \bar{0}$

Dim) Prendo n rette del tipo

$r_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto x_0 + te_1$

$r_n : t \in \mathbb{R} \mapsto x_0 + te_n$



Sia $\varepsilon > 0 \ni' B(x_0, \varepsilon) \subset A$

$\exists \delta > 0 \ni' \forall t \in (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} : r_i(t) \in B(x_0, \varepsilon) \ \forall i$

x_0 estremo locale in $f \Rightarrow x_0$ estremo locale in $f_{|r_i}$ quando $t = 0$

$$\left(f \circ r_i \big|_{(-\delta,\delta)}\right)'(0) = 0 = \nabla f(r_i(0)) \cdot r_i'(0)$$

$$\left(f \circ r_i \big|_{(-\delta,\delta)}\right)'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f \circ r_i(0+h) - f \circ r_i(0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial e_i}(0) = 0$$

$$\forall i \in \{1..n\}$$

- P.TO CRITICO SINGOLARE

x_0 è p.to critico per f se $J_f(x_0) = \bar{0}$

(più precisamente quando J_f è singolare)

13 = TH. DI LAGRANGE

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A convesso

f differenziabile, $A = \mathring{A}$, $S(x,y): \lambda \in [0,1] \mapsto (1-\lambda)x + \lambda y$

$\forall \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \in A : \exists\, \xi \in S(x,y) \subset A \ni'$

$f(y) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot (y-x)$

Dim) $f \circ S : [0,1] \to \mathbb{R}$ è derivabile in $[0,1]$ perché

f è diff. ed S è derivabile.

$S'(\lambda) = -x + y = y - x \quad \forall \lambda \in [0,1]$

Dal th. di Lagrange ho che

$\exists\, \theta \in (0,1) \ni' (f \circ S)(1) - (f \circ S)(0) = (f \circ S)'(\theta) \cdot (1-0)$

quindi $f(y) - f(x) = \nabla f(S(\theta)) \cdot S'(\theta) =$

$= \nabla f(\underbrace{S(\theta)}_{\xi}) \cdot (y - x)$

- LOCALMENTE LIPSCHITZIANA

Una f è localmente lipsch. se $\exists\, L > 0 \ni'$

$|f(y) - f(x)| \leq L\, |y - x|$

- DERIVATA SECONDA DIREZIONALE

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathring{A}$, $|v| = |w| = 1$

$\exists\, \delta > 0 \ni' \forall x \in B(x_0, \delta) \subset A \quad \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x)$

Se $\exists \lim_{t \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0 + tw) - \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)}{t} = l \in \mathbb{R}^m$

f ha derivata direzionale di ordine 2 rispetto ai versori $\bar{v}$ e $\bar{w}$

- DERIVATA SECONDA PARZIALE

Siano $i, j \in \{1 \dots n\}$, se $\exists \lim \frac{\partial}{\partial e_j}\left(\frac{\partial f}{\partial e_i}\right)(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_j e_i}$ (?)

si dice che f è derivabile 2 volte parzialmente rispetto a e_i ed e_j

- HESSIANO

Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$, f ha tutte le der. parziali del secondo ordine in x_0.

$$Hes_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \dots & f_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

- TM. DI SCHWARTZ

Siano $f_{x_i x_j}$ e $f_{x_j x_i}$ ben definite in un intorno di x_0

$(\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' x \in U \mapsto f_{x_i x_j}(x) \in \mathbb{R} \wedge f_{x_j x_i}(x) \in \mathbb{R})$

e siano continue $\Rightarrow$ $\boxed{f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)}$

$\left(\begin{matrix} f_{x_i x_j} \\ f_{x_j x_i} \end{matrix} \in C^0(\{x_0\})\right)$

- COROLLARIO

Sia $f \in C^2(A, \mathbb{R}) \Rightarrow f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i} \quad \forall\, i, j \in \{1 \dots n\}$

- CLASSI C

$$C^0(A, \mathbb{R}^m) := \{ f : A \to \mathbb{R}^m : \forall j \in \{1 \dots m\}$$

f^j è continua $\}$

$$C^n(A, \mathbb{R}^m) := \{ f : A \to \mathbb{R}^m : \forall j \in \{1 \dots m\}$$

f^j ha tutte le derivate parziali

di ordine n continue $\}$

$$C^\infty(A) \subsetneq C^{k+1}(A) \subsetneq C^k(A) \subsetneq C^{k-1}(A) \subsetneq C^0(A)$$

- OSS. Se $f \in C^2(A)$ Hess_f è simmetrica

- FORMA QUADRATICA

$$q(a, b, c) = h_1 a^2 + h_2 ab + h_3 ac + h_4 b^2 + h_5 ba + h_6 bc +$$
$$+ h_7 c^2 + h_8 ca + h_9 cb$$

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_5 & h_4 & h_6 \\ h_8 & h_9 & h_7 \end{pmatrix} = A \quad \wedge \quad q(a, b, c) = (a, b, c) \cdot A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Una forma quadratica è un polinomio omogeneo di grado 2.

$$q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$$
$$q(v) = v \cdot A v$$

SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA

Sia q una forma quadratica, $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

q è def. POSITIVA se $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : q(v) > 0$

è def. SEMIDEFINITA POSITIVA se $\forall v \in \mathbb{R}^n : q(v) \geq 0$

Se q $\exists$ $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ t.c. $q(v_1) > 0$ $\wedge$ $q(v_2) < 0$

q è INDEFINITA

OSS. Prendo $\partial B(\bar{0}, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$

∂B è compatto quindi ha min e max.

Prendo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\frac{v}{|v|} \in S^n(1) = \partial B(\bar{0}, 1)$

$\Rightarrow q(v) = q\left(|v| \cdot \frac{v}{|v|}\right) = |v|^2 q\left(\frac{v}{|v|}\right)$

Visto che $|v|^2 > 0$ sempre, il segno di $q(v)$ dipende

esclusivamente da $q\left(\frac{v}{|v|}\right)$

Se $q\left(\frac{v}{|v|}\right)$ è min e $q\left(\frac{v}{|v|}\right) > 0 \Rightarrow q$ è DEFINITA POSITIVA

Se $q\left(\frac{v}{|v|}\right)$ è max e $q\left(\frac{v}{|v|}\right) < 0 \Rightarrow q$ è DEFINITA NEGATIVA

SCORCIATOIA PER IL SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA

Sia $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$

Dividiamo per x se $x \neq 0$ $\vee$ per y se $y \neq 0$.

Supponiamo che $y \neq 0$:

$q(x,y) = y^2 \left(a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c \right)$ $\quad t = x/y$

$q(x,y) = y^2 (at^2 + bt + c)$

Se $at^2 + bt + c$
- $> 0 \Rightarrow q$ è def. pos.
- $\geq 0 \Rightarrow$ semidef pos.
- $\leq 0 \Rightarrow$ semidef neg.
- $< 0 \Rightarrow$ definita neg.

$$A_q = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

Se $a > 0 \wedge \Delta < 0 \Rightarrow q > 0 \quad \forall$

$$|A_q| = ac - \frac{b^2}{4} = -\frac{1}{4}(b^2 - 4ac) = -\frac{1}{4}\Delta$$

Se $|A_q| > 0 \Rightarrow \Delta < 0$

In definitiva:

$|A| > 0, \; a > 0 \Rightarrow$ POSITIVA

$|A| = 0, \; a > 0 \Rightarrow$ SEMI POSITIVA

$|A| = 0, \; a < 0 \Rightarrow$ SEMI NEGATIVA

$|A| > 0, \; a < 0 \Rightarrow$ NEGATIVA

$|A| < 0 \Rightarrow$ INDEFINITO

- FORMA LINEARE o FORMA DIFFERENZIALE

insieme delle leggi lineari da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

La funzione $x \in A \mapsto w(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dove

$$w(h) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) h^i$$

è una forma lineare di coeff. a_i

14 = DIFFERENZIABILITÀ IN x_0 2 VOLTE

f è diff. 2 volte in x_0 se

1) f è differenziabile

2) $$\lim_{h \to 0} \frac{df(x_0+h) - df(x_0) - L_{x_0}(h)}{|h|} = 0$$

Sia f diff. 2 volte in x_0, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$

$$\Rightarrow \forall x \in A: f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) +$$
$$+ \frac{1}{2} \mathrm{Hess}_f(x_0) \cdot (x - x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$$

quindi per $x \to x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}\,\text{Hess}_f(x_0)(x-x_0)(x-x_0)}{|x - x_0|^2} \longrightarrow 0$$

Dim) $x_0 \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0$ t.c. $B(x_0, \delta) \subset A$

Prendo h t.c. $|h| < \delta$

$\forall h \in B(x_0, \delta)$ consideriamo $v := \frac{h}{|h|}$ e

$\gamma : t \in [0, |h|] \mapsto x_0 + tv$

cosicché $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(|h|) = x_0 + h$

$g = f \circ \gamma$ è derivabile (entrambe le f. sono differenziabili) in $[0, |h|]$

$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot v$

$f \in C^2(\underbrace{U}_{= B(x_0,\delta)}) \Rightarrow g$ derivabile 2 volte

$$g''(t) = J_{\nabla f}(\gamma(t))\, \gamma'(t) \cdot v =$$
$$= \text{Hess}_f(\gamma(t)) \cdot v \cdot v$$

$\forall t \in [0, |h|]$: $g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2} g''(0) t^2 + o(t^2)$

per $t = |h|$: $g(|h|) = g(0) + g'(0)|h| + \frac{1}{2} g''(0)|h|^2 + o(|h|^2)$

quindi $f(\gamma(h)) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot \frac{h}{|h|}|h| +$
$+ \frac{1}{2}\,\text{Hess}_f(x_0)\frac{h}{|h|}\frac{h}{|h|}|h|^2 + o(|h|^2)$

- FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE 2 PER f. A PIÙ VARIABILI

$$P_n(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) + o((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)$$

15 = CONDIZIONI SUFFICIENTE PERCHÉ UN PUNTO CRITICO SIA DI ESTREMO LOCALE

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$, $f \in C^2(U)$,

x_0 stazionario ($\nabla f(x_0) = \bar{0}$)

Se la forma quadratica $h \in \mathbb{R}^n \mapsto Hess_f(x_0) \cdot h \cdot h$ è

1) def. positivamente $\Rightarrow$ x_0 min. locale forte

2) def. negativamente $\Rightarrow$ x_0 max. locale forte

3) indefinita $\Rightarrow$ x_0 non è estremale (di sella)

Dim. $\frac{1}{2}$) $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} H_f(x_0)(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2)$

Suppongo $x \neq x_0$:

$$\underbrace{|x - x_0|^2}_{>0} \left[\frac{1}{2} H_f(x_0) \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \frac{x - x_0}{|x - x_0|} + \underbrace{\frac{o(|x - x_0|^2)}{|x - x_0|^2}}_{\to 0} \right]$$

>0

Se $H_f(x_0)\, h\, h$ è def. positivamente allora

$$\geq \underbrace{|x - x_0|^2}_{>0} \left[\frac{1}{2} \underbrace{\min_{v \in S^n(1)} H_f(x_0)\, v\, v}_{>0} + \underbrace{\frac{o(|x - x_0|^2)}{|x - x_0|^2}}_{\to 0} \right]$$

Se $H_f(x_0)\, h\, h$ è def. negativamente allora

$$\leq \underbrace{|x - x_0|^2}_{>0} \left[\frac{1}{2} \underbrace{\max_{v \in S^n(1)} H_f(x_0)\, v\, v}_{<0} + \underbrace{\frac{o(|x - x_0|^2)}{|x - x_0|^2}}_{\to 0} \right]$$

Se $x \to x_0$: $\frac{1}{2} \min H_f(x_0)\, v\, v + \frac{o(|x - x_0|^2)}{|x - x_0|^2} =$

$\longrightarrow \frac{1}{2} \lambda_1(x_0) + 0 > 0$

Per il Th. della permanenza del segno:

$\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \frac{1}{2} \lambda_1(x_0) + \frac{o(|x - x_0|^2)}{|x - x_0|^2} > 0 \quad \forall x \in V \subset A$

Se $x \to x_0$: $\frac{1}{2} \max H_f(x_0) v v + \frac{o(|x-x_0|^2)}{|x-x_0|^2} =$

$\to \frac{1}{2} \lambda_n (x_0) + 0 < 0$

Per il Th. della permanenza del segno :

$\exists V \in I(x_0) \ni' \frac{1}{2} \lambda_n (x_0) + \frac{o(|x-x_0|^2)}{|x-x_0|^2} < 0 \quad \forall x \in V \subset A$

Dim 3) $\exists \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \ni' H_f(x_0) v_1 v_1 > 0 \ \wedge$

$H_f(x_0) v_2 v_2 < 0$

Considero λv_1 con $\lambda \sim 0$

$\lambda^2 H_f(x_0) v_1 v_1 > 0$

Considero λv_2 con $\lambda \sim 0$

$\lambda^2 H_f(x_0) v_2 v_2 < 0$

$f(x_0 + \lambda v_1) - f(x_0) > 0$

$f(x_0 + \lambda v_2) - f(x_0) < 0$ se $\lambda \sim 0$

quindi x_0 non è né di max né di min.

CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÉ UN PUNTO CRITICO SIA DI ESTREMO LOCALE

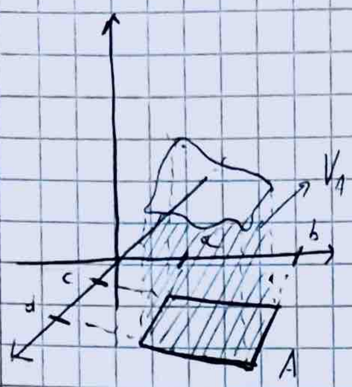
$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$, $f \in C^2(V)$ con

$V \in I(x_0)$, x_0 stazionario $(\nabla f(x_0) = \bar{0})$

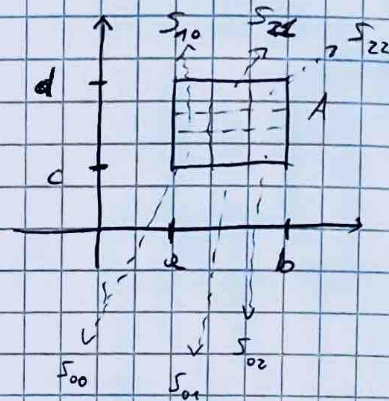
Allora:

- Se x_0 è max locale $\Rightarrow h \in \mathbb{R}^n \mapsto H_f(x_0) v v$ è semidefinita negativamente
- Se x_0 è min locale $\Rightarrow h \in \mathbb{R}^n \mapsto H_f(x_0) v v$ è semidefinita positivamente

- INTEGRALE DI RIEMANN A PIÙ VARIABILI



$\int_A f(x,y)\,dx\,dy$ rappresenta il volume del cilindroide



$A = [a,b] \times [c,d]$

- SUDDIVISIONE

D si definisce suddivisione di A se $D = D_1 \times D_2$ con $D_1 \in \mathcal{D}([a,b]) \wedge D_2 \in \mathcal{D}([c,d])$

$a_{ij} = [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$

- SOMMA INFERIORE / SUPERIORE

$$s(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\,(s_{i+1}-s_i)\,(t_{j+1}-t_j)$$

$$S(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\,(s_{i+1}-s_i)\,(t_{j+1}-t_j)$$

- PROP $\forall\, D_1, D_2 \in \mathcal{D}(A) : s(f,D_1) \leq S(f,D_2)$

- F. INTEGRABILE

$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q \subset A$, Q rettangolo

$f_{|Q}$ limitata

f è integrabile (secondo Riemann) su Q se

$\inf B \equiv \sup A$ con

$B := \{ S(f, D) \ \forall D \in \mathcal{D}(Q) \}$

$A := \{ s(f, D) \ \forall D \in \mathcal{D}(Q) \}$

$$\int_Q f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dx\, dy = \inf B = \sup A$$

- INTEGRALE DOPPIO DI FUNZIONI COSTANTI

$$\int_Q K \, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d K \, dx\, dy = K(b-a)(d-c)$$

con $Q = [a,b] \times [c,d]$

- CONTINUITÀ $\Rightarrow$ INTEGRABILITÀ

Se $f \in C^0(A)$, $Q \subset A$

$\Rightarrow$ f è integrabile in Q

- CARATTERIZZAZIONE INTEGRABILITÀ FUNZIONE DEF SU RETTANGOLO

$f \in \mathcal{R}(Q) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists D \in \mathcal{D}(Q) \ni'$

$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$

- FORMULA DI RIDUZIONE

$f \in \mathcal{R}(Q)$ ($\underset{Q}{\Rightarrow}$ limitata)

1) Se $\forall x \in [a,b]$: $\int_c^d f(x,y)\, dy$ è integrabile

$\Rightarrow$ $x \in [a,b] \mapsto \int_c^d f(x,y)\, dy$ è integrabile e

$$\int_Q f = \int_a^b \int_c^d f \, dx\, dy$$

2) Se $\forall y \in [c,d]$: $\int_a^b f(x,y)\,dx$ è integrabile

$\Rightarrow$ $y \in [c,d] \mapsto \int_a^b f(x,y)\,dx$ è integrabile e

$$\int_Q f = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

- SCAMBIO DELL'ORDINE DI INTEGRAZIONE (o "DI INVERSIONE")

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

- F. A VAR. SEPARABILI

$f(x,y)$ si dice a var. separabili se

$\exists \begin{array}{l} g : [a,b] \to \mathbb{R} \\ h : [c,d] \to \mathbb{R} \end{array}$ t.c. $f(x,y) = g(x)\,h(y)$

16 = TRASFORMAZIONE F. A VAR. SEPARABILI

Se f è a var. sep. con $f(x,y) = g(x)\,h(y)$

$f : Q \to \mathbb{R}$, $g \in C^0([a,b])$, $h \in C^0([c,d])$

$\Rightarrow f \in C^0(Q) \wedge \int_c^d\int_a^b f = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy$

Dim) $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b g(x)\,h(y)\,dx\,dy =$

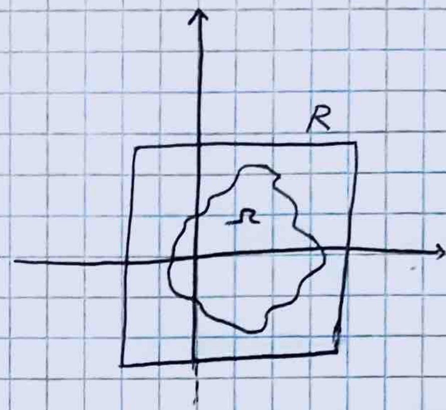
$= \int_c^d \left(h(y) \int_a^b g(x)\,dx \right) dy =$

$= \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$

- INTEGRABILITÀ IN $\Omega \subset R$ RETTANGOLO

f è integrabile in Ω se

$\forall$ R rettangolo t.c. $\Omega \subset R$



$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x,y) & \forall (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti } (R \setminus \Omega) \end{cases}$$

$\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$

$$\int_\Omega f := \int_\Omega \tilde{f} + \int_{R \setminus \Omega} \tilde{f} = \int_\Omega \tilde{f}$$

L'integrazione è indipendente da R

- INSIEME MISURABILE CON MISURA 0

$\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile ~~e~~ con misura 0 se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (R_i)_{i \in \{1..n\}}$ t.c. $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i \quad \wedge$

$$\sum_{i=1}^{n} |R_i| \leq \varepsilon$$

- INSIEME TRASCURABILE

Γ è trascurabile se $|\Gamma| = 0$.

Ogni segmento è trascurabile.

Ogni insieme finito di punti è trascurabile.

17 = IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE È TRASCURABILE

Hp) $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{R}([a,b])$

G_h grafico della funzione

Th) G_h è trascurabile

Dim) G_h è trascurabile se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{R_i\}_{i \in \{1..n\}} \ni' \ G_h \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i \ \wedge$

$\sum_{i=1}^{n} |R_i| < \varepsilon$

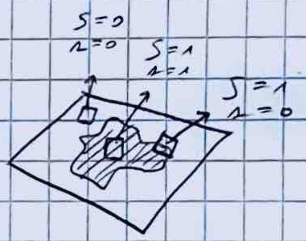
h è integrabile quando

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \in \mathcal{D}([a,b]) \ni'$

$S(h, D) - s(h, D) < \varepsilon$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) - m_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$



18 = Ω misurabile $\Leftrightarrow$ $\partial\Omega$ trascurabile

Dim) Ω misurabile $\Leftrightarrow$ $\mathbb{1}_\Omega$ è integrabile $\forall R \supset \Omega$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \in \mathcal{D}(Q) \ni' S(\mathbb{1}_\Omega, D) - s(\mathbb{1}_\Omega, D) < \varepsilon$

$S(\mathbb{1}_\Omega, D) - s(\mathbb{1}_\Omega, D) = \sum_{ij} (M_{ij} - m_{ij}) |e_{ij}| < \varepsilon$

1 solo nel bordo

- CARATTERISTICA DI Ω

$\mathbb{1}_\Omega$ è la caratteristica di Ω

$\mathbb{1}_\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\mathbb{1}_\Omega (x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\int_\Omega 1 = \int_R \mathbb{1}_\Omega \quad \forall R \supset \Omega \qquad \int_R \mathbb{1}_\Omega = |\Omega|$

misura di Ω

- **PROP.** $(\Omega_i)_{i \in \{1..n\}}$ misurabili $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \wedge \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$ sono misurabili

- **OSS.** $\emptyset$ non è misurabile

- **PROP.** $|\Omega_1| + |\Omega_2| = |\Omega_1 \cup \Omega_2| + |\Omega_1 \cap \Omega_2|$
- **PROP.** Ω trascurabile $\Rightarrow \forall\, \Omega' \subset \Omega$ trascurabile
- **PROP.** $\forall\, \Omega$ misurabile

$$|\Omega| \inf_{x \in \Omega} f(x) \leq \int_\Omega f \leq \sup_{x \in \Omega} f(x) \cdot |\Omega|$$

- **MEDIA INTEGRALE**

$$M = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \quad \text{se } |\Omega| \neq 0$$

$$M = 0 \quad \text{se } |\Omega| = 0$$

* Se $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ e Ω è connesso per archi

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in \Omega \ni' f(\bar{x}) = \frac{\int_\Omega f}{|\Omega|}$

- **PROP.** $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, $f \overset{(\leq)}{\geq} 0 \Rightarrow \int_\Omega f \overset{(\leq)}{\geq} 0$

- **LINEARITÀ INTEGRALE**

$$\int_\Omega \alpha f + \beta g = \alpha \int_\Omega f + \beta \int_\Omega g$$

- **PROP.** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ misurabile, $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ misurabili

$\ni' \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \wedge |\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$, $f \in \mathcal{R}(\Omega)$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}(\Omega_1) \cap \mathcal{R}(\Omega_2) \wedge \int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$

- Γ trascurabile $\subset \Omega \Rightarrow \int_\Omega f = \int_{\Omega\setminus\Gamma} f$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω misurabile, $f \in \mathcal{R}(\Omega \setminus \Gamma)$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}(\Omega) \wedge \int_\Omega f = \int_{\Omega\setminus\Gamma} f$

- COROLLARIO

$f \in C^0(\Omega \setminus \Gamma)$ e limitata in Ω

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}(\Omega) \wedge \int_{\bar\Omega} f = \int_\Omega f$ con $\Omega = \bar\Omega \setminus \partial\Omega$

perché $\int_\Omega f = \int_{\bar\Omega} f - \underbrace{\int_{\partial\Omega} f}_{0} = \int_{\bar\Omega} f$

- FUNZIONE GENERALMENTE CONTINUA

Se $f \in C^0(\Omega \setminus \Gamma)$, f è generalmente continua in tutto Ω.

- GENERALMENTE CONTINUA E LIMITATA

f gen. continua e limitata $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(\Omega)$

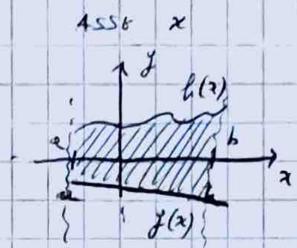
$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Omega \in \mathbb{R} \iff f : \Omega \to \mathbb{R}$ gen. continua in Ω

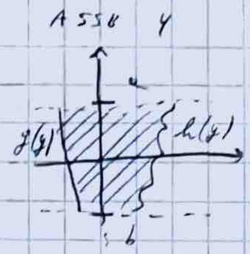
- DOMINI NORMALI (O SEMPLICI)

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse x se $\exists\, g, h \in C^0([a,b])$, $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \le h$ t.c.
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \wedge g(x) \le y \le h(x)\}$

Ω è normale rispetto all'asse y se
$\exists\, g, h \in C^0([a,b])$, $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \le h$ t.c.
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [a,b] \wedge g(y) \le x \le h(y)\}$

Esempi

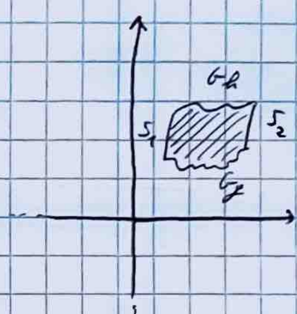




19 = ~~PROP~~ Ω NORMALE $\Rightarrow$ Ω MISURABILE

Dim) $\partial\Omega$ è unione di 4 insiemi trascurabili

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup G_h \cup G_g$$



$|\partial\Omega| = 0 \iff \Omega$ è misurabile

$$|\partial\Omega| = |S_1| + |S_2| + |G_h| + |G_g| - |S_1 \cap S_2 \cap G_h \cap G_g| = 0 + 0 + 0 + 0 - |\emptyset| = 0 - 0 = 0$$

20 = FORMULA DI RIDUZIONE SU DOMINI NORMALI

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ normale rispetto all'asse x

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \wedge g(x) \le y \le h(x)\}$$

Se $f \in C^0(\Omega)$ quindi $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ $\wedge$ f limitata

$$\int_\Omega f = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Dim) Prendo R rettangolo t.c. $\Omega \subset R$ e definisco

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è integrabile perché limitata e generalmente continua.

$R = [a,b] \times [c,d]$ con $d > \max h$ $\wedge$ $c < \min g$

$$\int_\Omega f = \int_R \tilde{f} = \int_a^b \int_c^d \tilde{f} = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \tilde{f} \quad \text{perché}$$

$$\int_c^d f = \underbrace{\int_c^{g(x)} f}_{0} + \int_{g(x)}^{h(x)} f + \underbrace{\int_{h(x)}^{d} f}_{0}$$

FORMULA DEL CAMBIO DI VARIABILE

Sia $\mathcal{X} : A \subset \mathbb{R}^2 \to B \subset \mathbb{R}^2$

$\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

$J_{\mathcal{X}}(u,v)$ indicata come $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

$\mathcal{X}$ deve avere matr. jacobiana quindi $\mathcal{X} \in C^1(A)$, biettiva e $\exists \Gamma$ trascurabile $\ni' \forall (u,v) \in A \setminus \Gamma$: $\det J \neq 0$

$\mathcal{X}$ TRASFORMA MISURABILI IN MISURABILI

Hp) $f : \Omega \subset B \to \mathbb{R}$, f limitata e $f \in C^0(\Omega)$

$\mathcal{X} : \Omega' \subset A \to B$, $\mathcal{X} \in C^1(\Omega')$, biettiva

e $\exists \Gamma$ trascurabile $\ni' \forall (u,v) \in A \setminus \Gamma$: $|J| \neq 0$

$\Omega = \mathcal{X}(\Omega')$

Ω misurabile $\Rightarrow$ Ω' misurabile

Th) $\displaystyle\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f \circ \mathcal{X}(u,v)\,|J_{\mathcal{X}}(u,v)|\,du\,dv$

SCELTA DI $\mathcal{X}$ PARTENDO DA $\mathcal{X}^{-1}$

$$\begin{cases} u = \psi_1(x,y) \\ v = \psi_2(x,y) \end{cases} \quad \text{con } \psi = \mathcal{X}^{-1}$$

$\psi \circ \mathcal{X} = i_A$ identità di A

$$J_{\psi \circ \mathcal{X}} = J_{\psi}(\mathcal{X}(u,v)) \cdot J_{\mathcal{X}}(u,v) = I$$

Per il Th. di Binet, $|J_{\psi \circ \mathcal{X}}| = |J_{\psi}(\mathcal{X}(u,v))| \cdot |J_{\mathcal{X}}(u,v)|$

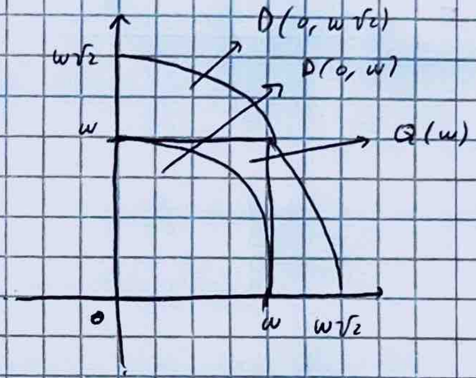
quindi $|J_{\mathcal{X}}(u,v)| = \dfrac{1}{|J_{\psi}(\psi(u,v))|}$

$$21 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Calcolo $\left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy =$

$$= \int_{[0,w]\times[0,w]} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \quad \text{con } w \to +\infty$$



$$\int_{D(0,w)} e^{-x^2-y^2} \le \int_{Q(w)} e^{-x^2-y^2} \le \int_{D(0,w\sqrt{2})} e^{-x^2-y^2}$$

$$\int_{D(0,w)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^w \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\Big|_0^w \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-w^2}-1\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-w^2}\right)$$

$$\int_{D(0,w\sqrt{2})} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{w\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\Big|_0^{w\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2w^2}-1\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2w^2}\right)$$

$$\left(1-e^{-w^2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} \xrightarrow{w\to+\infty} \frac{\pi}{4}$$

$$\left(1-e^{-2w^2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} \xrightarrow{w\to+\infty} \frac{\pi}{4}$$

quindi per il Th. del doppio confronto

$$\int_{Q(w)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4} \quad \text{per } w \to +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\sqrt{\iint_{Q(w)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy} = 2\sqrt{\frac{\pi}{4}} = 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

- EQ. DIFFERENZIALI (ODE)

- LAPLACIANO DI f

$\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2} \dots \partial_{x_n})$ è un campo di simboli

$\nabla \cdot \nabla f = \Delta f = \partial^2_{x_1} f + \partial^2_{x_2} f + \dots + \partial^2_{x_n} f$

laplaciano

- ODE (EQ. DIFF. ORDINARIE)

$$G(t, y(t), y'(t) \dots y^{(n)}(t)) = 0$$

$$y'(t) = f(t) \Rightarrow y = \int f(t)$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

$$y^{(n)}(t) = f(t) \Rightarrow n \int f(t)\, dt = y(t)$$

- $G(t, y, y' \dots y^{(n)})$ ha ordine n.

L'ordine di un'ODE è il massimo ordine delle derivate con cui appare y nella f.

- ODE AUTONOMA

Un'ODE è autonoma se t (var. indip.) non appare esplicitamente nell'eq.

- ODE CANONICA O NORMALE

Un'ODE è normale o canonica se

$$y^{(n)} = F(t, y, y' \dots y^{(n-1)})$$

- ODE OMOGENEA

Un'ODE è omogenea se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$G(\lambda t, \lambda y, \lambda y' \dots \lambda y^{(n)}) = \lambda G(t, \lambda, \lambda' \dots \lambda^{(n)})$$

- ODE LINEARE

Un'ODE è lineare se G è lineare rispetto a $y, y', y'' \dots y^{(n)}$

- F LOCALMENTE LIPSCHITZIANA

$F: I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ è localmente Lipschitziana rispetto ad y se $\forall K \in I \times \Omega \ \exists L_K \geq 0$ t.c.

$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in K: |F(t, y_2) - F(t, y_1)| \leq L_K |y_2 - y_1|$

OSS. F è localmente Lipschitziana se ha der. parziali rispetto a $y_1 \dots y_n$ e queste sono limitate almeno localmente.

- TH DI CAUCHY DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE

$y' = F(t, y)$, $F \in C^0(I \times \Omega)$ e loc. lipsch.

$F: I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega = \mathring{\Omega}$, $t_0 \in I \wedge y_0 \in \Omega$

$y^{(t)} = f(t, y(t))$, $f: I_{\subseteq \mathbb{R}} \times \Omega_{\subseteq \mathbb{R}} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists! \ Y: I_0 \to \Omega$ t.c. $Y'(t) = F(t, Y(t))$

* (la soluzione esiste ed è unica quindi non è necessario provare altre soluzioni)

- TH. DI PEANO

$\begin{cases} y' = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ Se $F \in C^0(V)$ con $V \in \mathcal{I}((t_0, y_0))$

$\Rightarrow \exists\, y: I_0 \to \Omega$ t.c. $y' = F(t, y(t))$

$F \in C^1(I \times \Omega) \Rightarrow \begin{cases} F \in C^0(I \times \Omega) \\ F \text{ è loc. lipsch. rispetto ad } y \end{cases}$

- F SUBLINEARE

Se F è sublineare quindi

$\exists\, k: I \to \mathbb{R}$, $k \in C^0(I)$ t.c. $|F(t, y)| \leq k(t)(1 + |y|)$

$\Rightarrow \exists!\, y: I \to \mathbb{R}^n$ t.c. y risolve $\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

OSS. $|F(t, y)| \leq k(t)(1 + |y|)$ è soddisfatta se F è limitata ($\exists\, k \geq 0$ t.c. $|F(t, y)| \leq k$)

- EQ. A VAR SEPARABILI

$y' = f(t, y)$, f è a var. sep. se

$\exists\, h: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ t.c. $f(t, y) = h(t)\, g(y)$

Supponiamo che

$\left.\begin{matrix} g \in C^0(J) \\ h \in C^0(I) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \in C^0(I \times J)$

Se $g \in C^1(J) \Rightarrow f$ è loc. lip. rispetto ad y

$y'(t) = h(t)\, g(y(t))$

$y(t) \equiv y_0$ è soluzione

$y'(t) = 0 \iff h(t)\, g(y(t)) = h(t) \cdot 0 = 0 \iff$

$\iff g(y_0) = 0 \iff y \in Z_g$

- SOLUZIONI SINGOLARI

Sono le soluzioni costanti di costante un qualunque zero di g.
Sia $\tilde{y}$ soluzione non singolare allora

$$\int \frac{y'(t)\,dt}{g(y(t))} = \int h(t)\,dt$$

Siano H e G primitive di h e $1/g$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt = \int h(t)\,dt \Rightarrow \underbrace{G(y(t)) = H(t) + c}_{\text{FORMA IMPLICITA}}$$

quindi $\underbrace{y(t) = G^{-1}(H(t)+c)}_{\text{FORMA ESPLICITA}}$

- EQ. LINEARI DI ORDINE 1

$$y' = a(t)\,y + b(t) \qquad \overset{a}{b} \in C^0(J)$$

$$|f(t,y_2) - f(t,y_1)| \le L_k\,|y_2 - y_1|$$

$$|a(t)\,y_2 + \cancel{b(t)} - a(t)\,y_1 - \cancel{b(t)}| = |a(t)|\,|y_2 - y_1|$$

che è vera con $L_k = \max\limits_{(t,y)\in K} |a(t)|$

f sublineare se

$$\exists\, k: J \to \mathbb{R},\ k \in C^0(J) \ni' |f(t,y)| \le k(t)\,(1+|y|)$$

$$|a(t)\,y + b(t)| \le |a(t)\,y| + |b(t)|$$

con $k(t) := \max\limits_{t\in J}\{|a(t)|, |b(t)|\}$

con $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 2f & \text{se } f \ge g \\ \frac{1}{2}\cdot 2g & \text{se } g > f \end{cases}$

$$|a(t)\,y| + |b(t)| = |a(t)||y| + b(t) \le k(t)|y| + k(t) = k(t)(1+|y|)$$

quindi $\exists!\, y: J \to \mathbb{R} \ni' y' = f(t,y)$

$$\begin{cases} y' = a(t)\,y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$y' = a(t)\,y \Rightarrow \int \frac{y'}{y}\,dt = \int a(t)\,dt = A(t) + c$

$\Rightarrow \log|y(t)| = A(t) + c$

$|y(t)| = e^{A(t)} \cdot e^{c} > 0$

$y(t) = \pm e^{c}\, e^{A(t)} = c\, e^{A(t)}$

Sia $\tilde{y}$ soluzione di $y' = a(t)\,y + b(t)$

$\Rightarrow y' = a(t)\,y + b(t)$ è risolta da $y_0 + \tilde{y}$ con y_0 soluzione di $a(t)\,y = y'$

Dim) $Q := \{ y : y \text{ soluzione di } a(t)\,y = y' \}$

$H := \{ c\, e^{A(t)},\ c \in \mathbb{R} \}$

$Q = H + \tilde{y}$, $\overset{1}{\boxed{Q \subset H + \tilde{y}}} \wedge \overset{2}{\boxed{H + \tilde{y} \subset Q}}$

1) $y \in Q$, $y - \tilde{y} \in H \Rightarrow y = (y - \tilde{y}) + \tilde{y}$

$(y - \tilde{y})' = y' - \tilde{y}' = ay + \cancel{b} - a\tilde{y} - \cancel{b} = a(y - \tilde{y})$

quindi $(y - \tilde{y})' = a(t)\,(y - \tilde{y})$

2) $y_0 \in H$, $y := y_0 + \tilde{y}$

$y' = (y_0 + \tilde{y})' = y_0' + \tilde{y}' = a y_0 + a\tilde{y} + b$

$\tilde{y}(t) = e^{A(t)}\, c(t)$

$\tilde{y}'(t) = e^{A(t)}\, a(t)\, c(t) + e^{A(t)}\, c'(t)$

$\cancel{a(t)\, c(t)\, e^{A(t)}} + c'(t)\, e^{A(t)} = a\tilde{y} + b = \cancel{a(t)\, c(t)\, e^{A(t)}} + b(t)$

$c'(t)\, e^{A(t)} = b(t)$

$c'(t) = b(t)\, e^{-A(t)} \iff c(t) = \int e^{-A(t)}\, b(t)\, dt$

quindi $y(t) = c\, e^{A(t)} + e^{A(t)} \int e^{-A(t)}\, b(t)\, dt =$

$= e^{\int a(t)\,dt} \left(c + \int e^{-\int a(t)\,dt}\, b(t)\, dt \right)\ \forall c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = a y + b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau} ds \right)$$

$$y(t_0) = e^0 (y_0 + 0) = y_0$$

- EQ. LINEARI DI ORDINE 2

$$y'' = a(t) y' + b(t) y + c(t) \qquad a, b, c \in C^0(J)$$

$$Q = H + \tilde{y} \quad \text{con} \quad H := \{ y \mid y'' = a y' + b y \}$$

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0 \iff (c_1, c_2) = (0, 0)$$ quindi

y_1 e y_2 devono essere lin. indipendenti

$$\begin{cases} y'' = a y' + b y \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Per assurdo pongo y_1 e y_2 lin. dip. $(\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^* : c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0)$

$$0 = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' = c_1 (a y_1' + b y_1) + c_2 (a y_2' + b y_2) =$$

$$= a (c_1 y_1' + c_2 y_2') + b (c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

$\bar{y}$ soluzione di $\begin{cases} y'' = a y' + b y \\ y(t_0) = \bar{y} \\ y'(t_0) = \bar{y}' \end{cases}$

$$\bar{y} = \bar{y}(t_0)\, y_0 + \bar{y}'(t_0)\, y_1$$

$$\bar{y}(t_0) = \bar{y}(t_0)\, y_0(t_0) + y'(t_0)\, y_1(t_0) = \bar{y}(t_0)$$

$$\bar{y}'(t_0) = \bar{y}(t_0)\, y_0' + y'(t_0)\, y_1'$$

$$\begin{cases} \bar{y} = a \bar{y}' + b \bar{y} \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}(t_0) \\ \bar{y}'(t_0) = \bar{y}'(t_0) \end{cases}$$

(Queste eq. non hanno un metodo di risoluzione definito e rispetto a diff. delle eq. lineari di ordine 2 con coeff. costanti)

- EQ. LINEARI DI ORDINE 2 CON COEFF. COSTANTI

$y'' + ay' + by = c(t)$ con $a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in C^0(J)$

Consideriamo l'omogenea: $y'' + ay' + by = 0$

Imponendo $y(t) = e^{\lambda t}$ come soluzione

$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$

$\Rightarrow e^{\lambda t}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (eq. caratteristica)

1) $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ soluzioni $\in \mathbb{R}$

Soluzioni $\{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\}$

2) $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Poniamo $y_1 = e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = t e^{\lambda_1 t}$

$y_2' = e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}$

$y_2'' = \lambda e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 t e^{\lambda t}$

$y_2'' + ay_2' + by_2 = 0 \Rightarrow 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 t e^{\lambda t} + a e^{\lambda t} + a\lambda t e^{\lambda t} +$

$+ t e^{\lambda t} = t e^{\lambda t} \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=0} + e^{\lambda_1 t} \underbrace{(2\lambda + a)}_{=0} = 0$ $\left(\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{0}}{2},\ 2\lambda = -a\right)$

quindi

Soluzioni $\{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda t}\}$

Vedo che

-) $c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} = 0 \quad \forall t$

-) $\lambda_1 c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + c_2 \lambda_1 t e^{\lambda t} = 0 \quad \forall t$

Se $t = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \wedge c_2 = 0$

3) $\Delta < 0 \iff \begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix} \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

Sia $\lambda_1 = a + ib \Rightarrow \lambda_2 = a - ib$

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{at+ibt} = e^{at} \cdot e^{ibt}$

$y_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{at-ibt} = e^{at} \cdot e^{-ibt}$

$\overline{y_1} = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ (combinazione lineare con $(1/2, 1/2)$ di 2 soluzioni $\Rightarrow$ soluzione)

$\overline{y_2} = \dfrac{y_1 - y_2}{2i}$ (combinazione lineare con $(\frac{1}{2i}, -\frac{1}{2i})$ di 2 soluzioni $\Rightarrow$ soluzione)

FORMULE DI EULERO

$\overline{y_1} = \boxed{\dfrac{e^{at}(e^{ibt} + e^{-ibt})}{2}} = e^{at}\cos(bt)$ $\left(\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)$

$\overline{y_2} = \dfrac{e^{at}(e^{ibt} - e^{-ibt})}{2} = e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$ $\left(\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)$

- $c_1 e^{at}\cos bt + c_2 e^{at}\,\mathrm{sen}\,\beta t = 0 \quad \forall t$
- $a c_1 e^{at}\cos bt - c_1 e^{at}\,\mathrm{sen}\,bt + a c_2 e^{at}\,\mathrm{sen}\,bt +$
  $+ c_2 e^{at} \cos bt = 0 \quad \forall t$

Quindi con $t = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \wedge c_2 = 0$

Soluzioni $\{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : y(t) = e^{at}(c_1\cos(bt) + c_2\,\mathrm{sen}(bt))\}$

Prendiamo in considerazione l'eq. completa

Sia H l'insieme di tutte le soluzioni dell'eq. omogenea allora $y(t)$ è soluzione dell'eq completa se

$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \tilde{y}(t)$ con $\begin{matrix}y_1\\ y_2\end{matrix} \in H \wedge \tilde{y} \in A$

(con A insieme delle soluzioni di $y'' + ay' + by = c(t)$)

Per risolvere questo tipo di problema si possono usare 2 metodi:
- METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI
- SIMILARITÀ

- METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

$$\tilde{y}(t) = c_1(t)\, y_1 + c_2(t)\, y_2 \quad \text{con } \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \text{ lin. ind. } \in H$$

$$\begin{cases} c_1'(t)\, y_1(t) + c_2'(t)\, y_2(t) = 0 \\ c_1'(t)\, y_1'(t) + c_2'(t)\, y_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ c(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{w(t)} \qquad \text{con } \underbrace{w(t)}_{\text{wronskiano}} = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & c(t) \end{vmatrix}}{w(t)}$$

$$\text{e} \quad c_1(t) = \int \alpha(t)\, dt \ \wedge \ c_2(t) = \int \beta(t)\, dt$$

- METODO DI SIMILARITÀ

$$c(t) = e^{\alpha t}\left(p(t) \cos(\beta t) + q(t) \sin(\beta t) \right) \quad \text{con } \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} \in \mathbb{R}$$

o $c(t) = c_1(t) + c_2(t)$ con:

-) $\tilde{y}_1$ soluzione di $\mathcal{L}(\tilde{y}_1) = c_1$

-) $\tilde{y}_2$ soluzione di $\mathcal{L}(\tilde{y}_2) = c_2$

$$\mathcal{L}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = \mathcal{L}(\tilde{y}_1) + \mathcal{L}(\tilde{y}_2) = c_1 + c_2 = c$$

SERIE NUMERICHE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ successione che definisce la serie

$s_n := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ successione delle somme parziali

Se $\exists \lim s_n = l \in \mathbb{R}$ la serie converge

Una serie è una coppia di successioni

$\{ (a_n), (s_n) \}_{n \in \mathbb{N}}$

Modificando un numero finito di termini non si modifica il carattere della serie

$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$

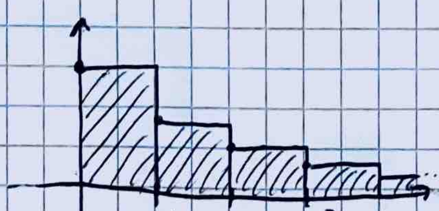
Se $\lim s_n = l \in \mathbb{R}$ allora $a_n \to 0$

dato che $a_n = s_n - s_{n-1}$ quindi

$\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = l - l = 0$

Se s_n non converge allora

- $s_n \to +\infty$ diverge positivamente
- $s_n \to -\infty$ diverge negativamente
- $\nexists \lim s_n$ è indeterminata



$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} a_k \, dx =$$

$$= \int_0^{n+\infty} f(x) \, dx \quad \text{con } f(x) = a_n$$

per $x \in [n, n+1)$

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n$ se $x \in [n, n+1)$

$\lim s_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

- SERIE GEOMETRICHE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \text{con } q \in \mathbb{R} \text{ chiamata "ragione"}$$

Se $q = 1 \Longrightarrow s_n \to +\infty$

Se $q \neq 1$:

$s_n = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n$

$q s_n = q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$

$$s_n = \frac{(1-q)\,s_n}{1-q} = \frac{s_n - q s_n}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Se $q \in (-1, 1)$:

$s_n \to \frac{1}{1-q}$ (perché $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$)

Se $q > 1$: $s_n \to +\infty$

Se $q \leq -1$: $\nexists \lim s_n$

$$\sum_{n=k_0}^{+\infty} q^n = q^{k_0} \sum_{n=k_0} q^{n-k_0} , \quad k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$s_n = \sum_{k=k_0}^{n} q^k = q^{k_0} \sum_{k=k_0}^{n} q^{k-k_0}$$

Con $\sum_n^{+\infty}$ allora (ponendo $h = n - k_0$)

$$q^{k_0} \sum_{n=k_0}^{+\infty} q^{n-k_0} = q^{k_0} \sum_{h=0}^{+\infty} q^h = q^{k_0} \frac{1}{1-q}$$

Sia $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 0 \Rightarrow s_n$ è monotona crescente

21 = CRITERIO DELL' INTEGRALE

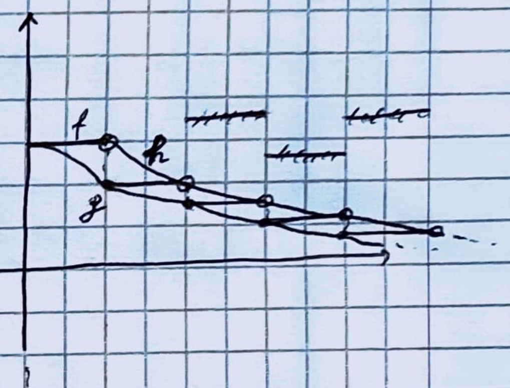
$\exists\ g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ decrescente, non negativa t.c.

$g(n) = a_n\ ,\ g \in C^0([0, +\infty))$

$\Rightarrow$ il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è lo stesso di $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$

Dim) $f(x) = a_n$ se $x \in [n, n+1)$

$h(x) = g(x-1)$



$$\int_0^n g(x)\,dx \le \int_0^n f(x)\,dx \le \int_0^n h(x)\,dx$$

$$\int_0^n h(x)\,dx = \int_1^n h(x)\,dx + a_0$$

$$\int_1^{+\infty} h(x)\,dx = \int_1^{+\infty} g(x-1)\,dx$$

$$\overset{x-1=y}{=} \int_0^{+\infty} g(y)\,dy$$

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx \le \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \le \int_0^{+\infty} \cancel{h}\, g(x)\,dx + a_0$$

- SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{con } \alpha > 0$$

Uso il criterio dell'integrale con

$g(x) = 1/x^\alpha\ ,\ g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \in \mathbb{R} & \alpha > 1 \\ +\infty & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

22 = CRITERIO DEL CONFRONTO

$\sum a_n$, $\sum b_n$, $a_n, b_n \geq 0$, $a_n \leq b_n$ $\forall n$

$\Rightarrow$ 1) $\sum b_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R}$

2) $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$

Dim) $s_n^a = \sum_0^n a_k$, $s_n^b = \sum_0^n b_k$

Poiché $a_n \leq b_n \Rightarrow s_n^a \leq s_n^b$

Se $s_n^a \to +\infty$, $+\infty \leq s_n^b \Rightarrow s_n^b \to +\infty$

Se $s_n^b \to l \in \mathbb{R}$, $0 \leq s_n^a \leq l \Rightarrow s_n^a \in [0, l] \in \mathbb{R}$

23 = CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$\sum a_n$, $\sum b_n$, $a_n, b_n \geq 0$, $a_n \sim b_n$

$\Rightarrow$ il carattere di $\sum a_n$ coincide con quello di $\sum b_n$

Dim) $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$ quindi

$\forall \varepsilon > 0$ $\left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| < \varepsilon$

Prendo $\varepsilon = 1/2 \Rightarrow \left| a_n/b_n - 1 \right| < 1/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1/2 < a_n/b_n < 3/2 \Rightarrow 1/2\, b_n < a_n < 3/2\, b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow 1/2\, s_n^b < s_n^a < 3/2\, s_n^b$

P.S. La dimostrazione vale anche per $a_n \sim k b_n$ o $b_n \sim k a_n$ con $k \in \mathbb{R}^*_+$

24 = CRITERIO DEGLI INFINITESIMI

$\sum a_n$, $a_n \geq 0 \ \forall n$

Considero $n^\alpha a_n$ con $\alpha > 1$

1) Se $n^\alpha a_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R}$

2) Se $n^\alpha a_n \to +\infty$ non possiamo concludere nulla

Considero $n^\alpha a_n$ con $\alpha \in (0,1]$

1) Se $n^\alpha a_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n \to +\infty$

2) Se $n^\alpha a_n \to 0$ non possiamo concludere nulla

Dim) $l \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R}$

$n^\alpha a_n < l + \varepsilon$ definitivamente se

$a_n < \frac{l+\varepsilon}{n^\alpha}$

Poiché $\sum (l+\varepsilon) \frac{1}{n^\alpha} = (l+\varepsilon) \sum 1/n^\alpha$ e

$\sum 1/n^\alpha \in \mathbb{R}$ se $\alpha > 1$

$\Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R}$ per il Th. del confronto

Dim) $l \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n \to +\infty$

$n^\alpha a_n > l - \varepsilon > 0$ definitivamente

$a_n > \frac{l-\varepsilon}{n^\alpha}$

$\sum (l-\varepsilon) 1/n^\alpha = (l-\varepsilon) \sum 1/n^\alpha$ e

$\sum 1/n^\alpha \to +\infty$ se $\alpha \in [0,1]$

$\Rightarrow \sum a_n \to +\infty$ per il Th. del confronto

25 = CRITERIO DEL RAPPORTO

$\sum a_n$, $a_n > 0$

Considero $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

1 - Se $\exists\, q \in (0,1)$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ allora $\sum a_n \in \mathbb{R}$

2 - Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ allora $\sum a_n = +\infty$

Dim) 1 Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow a_{n+1} \leq q\, a_n$

$a_1 \leq q\, a_0$, $a_2 \leq q\, a_1 \leq q^2 a_0$

$a_n \leq q^n a_0$

$q^n a_0$ converge perché serie algebrica con ragione $|q| < 1$

$\sum a_n \leq \sum q^n a_0 \in \mathbb{R}$ quindi

$\sum a_n \in \mathbb{R}$ per il Th. del confronto

2 Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

visto che $a_n > 0$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente $\Rightarrow \lim a_n = \sup a_n > 0$

quindi $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \to +\infty$

OSS. Se $\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \wedge l < 1$

$\Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R}$

26 = CRITERIO DELLE RADICI

$\sum a_n$, $a_n \geq 0$

Considero $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$

1) Se $\exists\, q \in (0,1) \ni \sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R}$

2) Se per infiniti indici $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n \to +\infty$

Dim) ① $\sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R}$

② $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1 \Rightarrow a_n \not\to 0$

$[(\Rightarrow \sum a_n \notin \mathbb{R}) \wedge a_n \geq 0] \Rightarrow \sum a_n \to +\infty$

OSS. Se $\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} l = 1 \Rightarrow \text{indeterminato} \\ l > 1 \Rightarrow \sum a_n \to +\infty \\ l < 1 \Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R} \end{cases}$

OSS. Se fallisce il criterio delle radice fallisce anche quello del rapporto.

- CONVERGENZA ASSOLUTA $\Rightarrow$ CONVERGENZA

Se $\sum |a_n| \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R}$

- LINEARITÀ OPERATORE DI SERIE

$\sum \alpha a_n + \beta b_n = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$

- SERIE A SEGNI ALTERNI

$\sum (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0$

$(-1)^n \equiv \cos(n\pi) \equiv \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) \equiv \ldots$

- CRITERIO DI LEIBNITZ

Se $\sum (-1)^n a_n$ serie a segni alterni

1) $a_n \to 0$

2) (a_n) è def. decrescente

$\Rightarrow$ la serie converge

- SERIE DI MENGOLI

$$\sum_{2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad , \quad b_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = b_{n-1} - b_n$$

$$s_2 = a_2 = b_1 - b_2$$

$$s_3 = a_3 + a_2 = b_2 - b_3 + b_1 - b_2 = b_1 - b_3$$

$$s_n = b_1 - b_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$$

$$\sum_{k_0+1}^{w=+\infty} a_w \quad , \quad a_n = b_{n-1} - b_n$$

$$s_{k_0+1} = a_{k_0+1} = b_{k_0} - b_{k_0+1}$$

$$s_{k_0+2} = a_{k_0+1} + a_{k_0+2} = b_{k_0} - b_{k_0+1} + b_{k_0+1} - b_{k_0+2}$$

$$s_{k_0+n} = b_{k_0} - b_{k_0+n}$$

Se $b_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow s_n \to b_{k_0} - l$