LEGENDA

1. Insiemi e numeri complessi
    - Minorante e maggiorante
    - Insieme limitato
    - Insieme illimitato
    - Massimo e minimo
    - **1 =** Unicità del minimo
    - Intervallo
    - Operazioni tra insiemi
    - Estremo superiore e inferiore
    - **2 =** inf (a, b) = a $\wedge$ sup (a, b) = b
    - Densità di **Q** in **R** e di **R \ Q** in **R**
    - El. Neutro e simmetrico in **C**
    - Rappresentazione cartesiana di un numero complesso
    - Modulo di un numero complesso
    - Complesso coniugato
    - Rappresentazione polare
    - Argomento e argomento principale
    - Prodotto in forma polare
    - Potenza (Formula di De Moivre)
    - Forma esponenziale (Formula di Eulero)
    - Radice n-esima di un numero complesso
    - Oss. sulla forma esponenziale
    - Oss. sul modulo
    - Disuguaglianza triangolare
2. Funzioni
    - Immagine di una funzione
    - Controimmagine di una funzione
    - Suriettività
    - Iniettività
    - Biettività o invertibilità
    - Funzione inversa
    - Restrizione dell'insieme di partenza
    - Funzione composta
    - Invertibilità di una funzione
    - **3 =** $f\ invertibile\ \leftrightarrow f\ bigettiva$
    - Operazioni tra funzioni
    - Tipi di funzione
    - Funzione potenza
    - Monomio di una variabile
    - Polinomio
    - Funzione lineare e affine
    - Zeri di una funzione
    - Reciproco di una funzione
    - Rapporto tra funzioni
    - Funzione razionale
    - Funzione pari
    - Funzione dispari
    - Funzione periodica
    - Monotonia
    - **4 =** $f\ strett.monotona \rightarrow f\ ingettiva$
    - **5 =** $f, g\ monotone \rightarrow f + g\ monotona$
    - $f, g\ monotone\ con\ stesso\ tipo \rightarrow fg\ monotona$
    - **6 =** $f\ monotona \rightarrow \frac{1}{f}\ monotona\ con\ tipo\ opposto$
    - **7 =** $f\ strett.monotona \rightarrow f^{-1}\ strett.monotona$

- **8 =** Monotonia f. composte
- Successioni
- Successione estratta o sottosuccessione
- Monotonia nelle successioni
- Maggiorante di una funzione
- Minorante di una funzione
- Funzione limitata
- Relazione d'ordine tra funzioni
- Modulo di una funzione
- Massimo di una funzione
- Massimo forte
- Massimo relativo o locale
- Inf e sup di una funzione
- Intorno
- P.to di accumulazione
- P.to isolato
- $+\infty\ p.to\ di\ acc.in\ I = (a, +\infty)\ con\ a \in \boldsymbol{R}$

3. Limiti
   - Definizione algebrica
   - Continuità
   - Oss. sulla continuità
   - f continua in un insieme
   - Limiti nelle successioni
   - **9 =** $\{x_n\}\ monotona \rightarrow\ \exists\ \lim_n x_n = sup\ (x_n)\ \in \overline{\boldsymbol{R}}$
   - Convergenza e divergenza nelle successioni
   - Convergenza e divergenza nelle funzioni
   - Infiniti e infinitesimi
   - Teorema ponte
   - $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ usando il th. Ponte
   - Limite da dx e sx
   - P.to di acc. a dx e sx
   - Oss. sui limiti da dx e sx
   - **10 =** $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l\ \leftrightarrow\ \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \wedge \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$
   - **11 =** $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \sup f(x)$
   - Corollario
   - **12 =** Th. della permanenza del segno (con limite)
   - **13 =** Th. della permanenza del segno (con f. continua)
   - **14 =** Conseguenza del th. di permanenza del segno
   - Operazione tra limiti
   - **15 =** Teorema degli zeri
   - Oss. th. degli zeri
   - **16 =** Conseguenze th. degli zeri
   - Oss. sul corollario
   - **17 =** Th. dei valori intermedi
   - **18 =** Th. di Weierstrass
   - Th. valori intermedi + Th. di Weierstrass
   - Funzioni elementari
   - Funzioni trigonometriche (e inverse)
   - Funzioni iperboliche (e inverse)
   - **19 =** Th. di unicità del limite
   - Rapporto tra limiti
   - $\lim_{x\to x_0} f(x) = l^-,\ \lim_{x\to x_0} f(x) = l^+$
   - **20 =** Th. del doppio confronto
   - **21 =** Th. del confronto
   - **22 =** $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = 0\ \leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$

- Prodotto tra 1/∞ e limitato
- **23 =** Th. limite di funzioni composte
- **24 =** Th. continuità di f. composte da f. continue
- Punti di discontinuità
- Eliminazione p.ti di discontinuità di 3° specie
- Asintoti
- Oss. sugli asintoti nelle funzioni simmetriche
- Simboli di Landau
- Funzioni asintotiche
- Limiti notevoli

4. Derivate
    - Funzione dotata di derivata in x_0
    - $f'_-(x) \neq f'_+(x) \rightarrow \nexists f'(x)$
    - $f'_-(x) = f'_+(x) \rightarrow \exists f'(x)$
    - Miglior approssimazione lineare in un punto
    - **25 =** $f\ derivabile\ in\ x_0 \leftrightarrow f\ ha\ miglior\ appr. lineare\ in\ x_0$
    - Oss. sulla miglior approssimazione lineare
    - **26 =** $f\ derivabile \rightarrow f\ continua$
    - **27 =** $f\ derivabile\ a\ dx\ e\ sx \rightarrow f\ continua$
    - P.ti non derivabili
    - Regole di derivazione
    - **28 =** Derivata di f. composta
    - **29 =** Derivata della f. inversa
    - Punto stazionario
    - **30 =** Th. di Fermat
    - **31 =** Th. di Rolle
    - **32 =** Th. di Cauchy
    - **33 =** Th. di Lagrange
    - **34 =** Corollario
    - **35 =** Caratterizzazione della monotonia mediante il segno della derivata
    - **36 =** $f'(x) > 0 \rightarrow f\ strett. crescente$
5. Integrali indefiniti
    - Primitiva di una funzione
    - **37 =** Le primitive di f distano di una costante
    - **38 =** Linearità dell'integrale indefinito
    - **39 =** Integrazione per parti
    - **40 =** Integrazione per sostituzione
6. Derivate seconde + De L'Hopital
    - **41 =** Th. di De L'Hopital
    - Applicazioni del th. di De L'Hopital
    - **42 =** $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = l \rightarrow \exists f'(x) = l$
    - Convessità
    - **43 =** Conseguenze della convessità
    - **44 =** $\exists f'(x_0) \rightarrow \exists f''(x_0) \in \boldsymbol{R}$
    - **45 =** $f\ convessa \leftrightarrow f'' > 0$
    - P.to di flesso
    - **46 =** $x_0\ p.to\ di\ flesso \rightarrow f''(x_0) = 0$
    - Tipi di p.ti di flesso
    - Derivate elementari
7. Serie di Taylor
    - Formula di Taylor
    - **47 =** $P_n(x_0) = f(x_0),\ P'_n(x_0) = f'(x_0) \dots P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$
    - **48 =** $f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$
    - **49 =** Caratterizzazione p.to estremale tramite $f^{(n)}$
    - Polinomio di McLaurin

8. Integrale di Riemann
    - Somma inferiore e superiore
    - Oss. sugli inf e sup
    - **50 =** Relazione tra s ed S
    - Integrabilità secondo Riemann
    - Integrale f. costante
    - $Continuit$à $\rightarrow Integrabilit$à
    - Ampiezza di una suddivisione
    - **51 =** $f\ crescente \rightarrow f\ integrabile$
    - Proprietà integrale di Riemann
    - Media integrale
    - **52 =** Th. fondamentale del Calcolo integrale
    - Integrazione per parti
    - Integrazione per sostituzione
    - Oss. sulla simmetria
    - **53 =** Continuità f. integrale

- MINORANTE E MAGGIORANTE

m MINORANTE di A, $A \neq \emptyset$ se $\forall a \in A: \ m \leq a$

M MAGGIORANTE di A, $A \neq \emptyset$ se $\forall a \in A: \ M \geq a$

- INSIEME LIMITATO

$$A \subset \mathbb{R} \text{ LIMITATO } \iff \begin{cases} \forall a \in A \ \exists M \in \mathbb{R} \ \ni' \ M \geq a & \to \text{LIM. SUP. (ESISTE MAGGIORANTE)} \\ \forall a \in A \ \exists m \in \mathbb{R} \ \ni' \ m \leq a & \to \text{LIM INF (ESISTE MINORANTE)} \end{cases}$$

- INSIEME ILLIMITATO

$$A \subset \mathbb{R} \text{ ILLIMITATO } \iff \begin{array}{l} \forall a \in A \ \nexists M \in \mathbb{R} \ \ni' \ M \geq a \quad \vee \\ \forall a \in A \ \nexists m \in \mathbb{R} \ \ni' \ m \leq a \end{array}$$

- MASSIMO E MINIMO

m MINIMO di A, $A \neq \emptyset$ se $\exists m \in A \ \ni' \ \forall a \in A: \ m \leq a$

M MASSIMO di A, $A \neq \emptyset$ se $\exists M \in A \ \ni' \ \forall a \in A: \ M \geq a$

1 = UNICITÀ DEL MINIMO

<u>DIM</u> per assurdo

$\exists \, {m_1 \atop m_2} \in A$ con $m_1 \neq m_2$, ${m_1 \atop m_2}$ minimi

quindi

$$\begin{cases} \forall a \in A: \ m_1 \leq a \\ \forall a \in A: \ m_2 \leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \leq m_2 \\ m_2 \leq m_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{m_1 = m_2 \ !}$$

- INTERVALLO

Sia $I \subset \mathbb{R}$, I è intervallo se

$\forall x, y \in I, x \leq y : \forall c \in \mathbb{R}$ t.c. $x \leq c \leq y \Rightarrow c \in I$

- OPERAZIONE TRA INSIEMI

  - UNIONE $\cup$ $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
  - INTERSEZIONE $\cap$ $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
  - ESCLUSIONE $\setminus$ $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

- ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

$A \subset \mathbb{R}$, A limitato inf / {sup}

$\mathbb{R} \ni \lambda = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : \lambda \leq a \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} \in A \text{ t.c. } \bar{a} < \lambda + \varepsilon \end{cases}$

$\mathbb{R} \ni \Lambda = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : \Lambda \geq a \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} \in A \text{ t.c. } \bar{a} > \Lambda - \varepsilon \end{cases}$

2 = $\inf (a,b) = a$, $\sup (a,b) = b$

SFRUTTO:
- DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$
E DI $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

- $\forall x \in (a,b) : x \leq b$ (b è MAGGIORANTE)
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $\bar{x} > b - \varepsilon$

quindi:
- se $a < b - \varepsilon < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $b - \varepsilon < \underset{\bar{x}}{c} < b$
- se $b - \varepsilon < a \Rightarrow b - \varepsilon < a < \bar{x} \Rightarrow \bar{x} > b - \varepsilon$

- DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$ E DI $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$.

$\forall {}^{x}_{y} \in \mathbb{R}$ con $x < y$ $\exists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $x < q < y$

$\forall {}^{x}_{y} \in \mathbb{R}$ con $x < y$ $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ t.c. $x < r < y$

1 - NUMERI COMPLESSI

$z = a + ib$, $i = \sqrt{-1}$

$i \notin \mathbb{R}$ perché non rispetta 2 sue proprietà:

1) $\forall {}^{a}_{b} \in \mathbb{R}$, $a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

2) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$

$\mathbb{C}$ ~~è~~ forma un campo, i 2 gruppi abeliani sono:

1) $(\mathbb{C}, +)$: $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$:

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

2) $(\mathbb{C}, \cdot)$: $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$:

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

$(0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0)$

$(0,1) = 0 + i1$, $(-1,0) = -1 + 0i$

$(0,1)^2 = (-1, 0) \Rightarrow i^2 = -1$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo.

- EL. NEUTRO E SIMMETRICO IN $\mathbb{C}$

In $(\mathbb{C}, +)$:

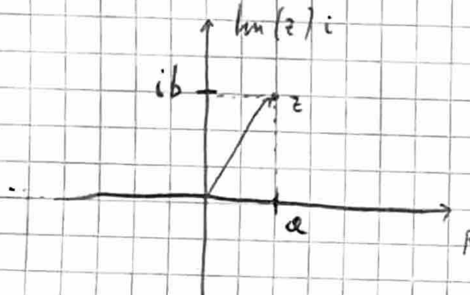
- $(0,0)$ el. neutro
- $(-a,-b)$ simmetrico di (a,b) OPPOSTO

In $(\mathbb{C}, \cdot)$:

- $(1,0)$ el neutro
- $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ simmetrico di (a,b) INVERSO / RECIPROCO

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$$

- RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DI UN NUMERO COMPLESSO



$z = a+ib$

$Re(z) = a$

$Im(z) = b$

$z \; (Re(z), Im(z))$

- MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO

$z = a+ib \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z|$ in $\mathbb{C}$ estende $|x|$ in $\mathbb{R}$

- COMPLESSO CONIUGATO

$z = a + ib \qquad \bar{z} := a - ib$

$Im(\bar{z}) = - Im(z)$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \qquad [Re(z) + i\, Im(z)][Re(\bar{z}) + i\, Im(\bar{z})] =$

$= Re(z) Re(\bar{z}) + i\, Re(z) Im(\bar{z}) + i\, Re(\bar{z}) Im(z) +$

$+ i^2 Im(z) Im(\bar{z}) \qquad \underline{\underline{Re(\bar{z}) = Re(z) \quad Im(\bar{z}) = -Im(z)}}$

$\Rightarrow Re^2(z) - \cancel{i\, Re(z) Im(z)} + \cancel{i\, Re(z) Im(z)} -$

$- Im^2(z)\, i^2 \Rightarrow Re^2(z) + Im^2(z)$

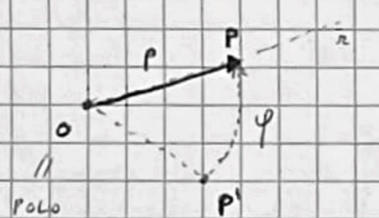
PROPRIETÀ

$\forall \begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix} \in \mathbb{C}: \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$\forall z \in \mathbb{C}: \quad \bar{\bar{z}} = z$

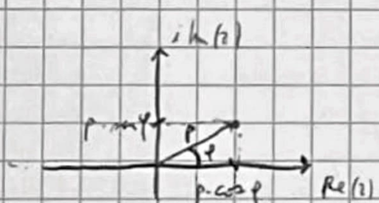
- RAPPRESENTAZIONE POLARE



$P \in \mathcal{P} \setminus \{0\} \mapsto (\overset{\text{rho}}{\rho}, \overset{\text{phi}}{\varphi})$

dove $\rho := \overline{OP} > 0$

e $\varphi \in (-\pi, \pi]$



$z = \rho \cos\varphi + i \rho \sin\varphi =$

$= \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \sqrt{\rho^2}\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} =$$
$$= \sqrt{\rho^2}\sqrt{1} = |\rho| = \rho$$

$$\begin{cases} \rho\cos\varphi = x \\ \rho\sin\varphi = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = x/\cos\varphi \\ \rho = y/\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\varphi = y/x$$

$$\varphi = \arctan(y/x)$$

$$\varphi = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x=0 \land y>0 \\ -\pi/2 & \text{se } x=0 \land y<0 \\ \arctan(y/x) & \text{se } x>0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{se } x<0 \end{cases}$$

- ARGOMENTO E ARGOMENTO PRINCIPALE

Ogni num complesso ha un argomento (escluso lo 0) che è l'angolo che si forma e si ottiene dall'arctan $\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$.

$$z = (\rho, Arg(z) + 2k\pi)$$

$Arg(z)$ è l'argomento principale $\in (-\pi, \pi]$

$$arg(z) = Arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- PRODOTTO IN FORMA POLARE (O TRIGONOMETRICA

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \left[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \right] =$$

$$= \rho_1\rho_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right)$$

$$z_1 / z_2 = (\rho_1/\rho_2) \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

- POTENZA (FORMULA DI DE MOIVRE)

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z^n = \rho^n \left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \right)$$

- FORMA ESPONENZIALE (FORMULA DI EULERO)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

IDENTITÀ DI EULERO

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1 \Rightarrow \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} : |e^{i\varphi}| = 1$$

- RADICE N-ESIMA DI UN NUMERO COMPLESSO

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n} \right) \right)$$

con $K = 0, 1, 2, \ldots n-1$

- OSS. SULLA FORMA ESPONENZIALE

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (\forall \theta \in (-\pi, \pi])$$

$K e^{i\theta}$ rappresenta tutti i numeri complessi,

$K = |z|$, $\theta = Arg(z)$

$$K = e^{\ln K} \longrightarrow K e^{i\theta} = e^{\ln K} e^{i\theta} = e^{\ln K + i\theta} = e^{n + i\theta}$$

$n e^{i\theta}$ con $n < 0$ non è forma esponenziale!

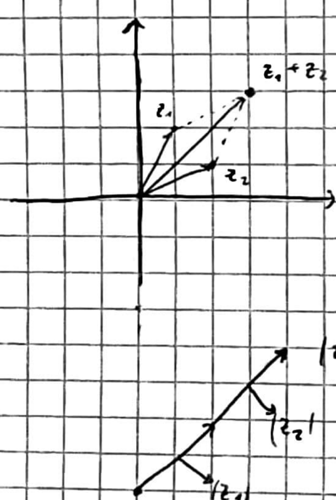
$n > 0$ perché $n = |z|$

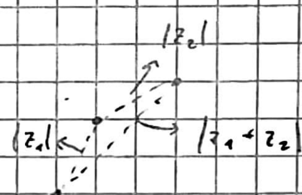
- OSS. SUL MODULO

$$\forall \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \in \mathbb{C} \quad |z_1 z_2| = |z_1| \, |z_2|$$

- DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\forall \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \in \mathbb{C} \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



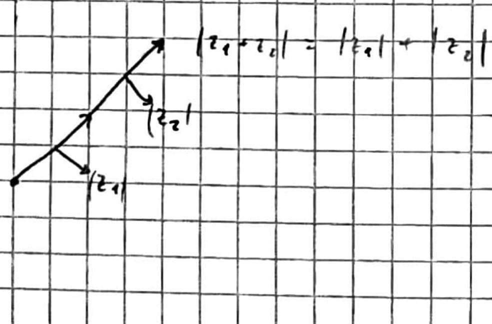


$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$

$|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$

se $z_1 = K z_2$ con $K \in \mathbb{R}$

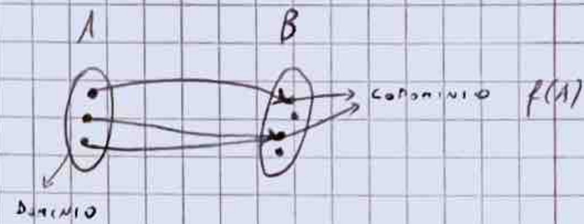
(z_1 ha stesso arg. di z_2)



2 - FUNZIONI

$$A \xrightarrow[\text{FUNZIONALE}]{\text{LEGGE}} B$$

INSIEME DI PARTENZA (DOMINIO) — INSIEME DI ARRIVO



$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad y = f(x)$, $x \in A$, $y \in \mathbb{R}$

VAR. DIP. — VAR. INDIPENDENTE

- IMMAGINE DI UNA FUNZIONE

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge B \subset A$

si chiama immagine mediante f di B

$$\mathbb{R} \supset f(B) := \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in B \text{ t.c. } y = f(x) \}$$

$f(A) = \operatorname{Im} f$ (immagine della f = codominio)

- CONTRO IMMAGINE DI UNA FUNZIONE

Sia $f : A \to C \wedge B \subset C$

$$A \supset f^{-1}(B) := \{ x \in A \mid f(x) \in B \}$$

Se $f(x) = b \Rightarrow x \in f^{-1}(b)$

Se f NON INIETTIVA (es. $y = x^2$)

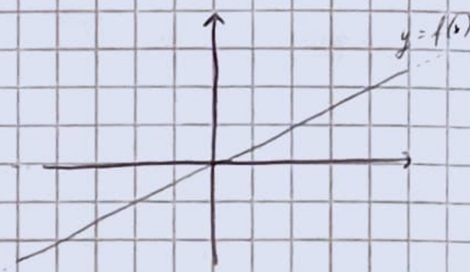
$f^{-1}(x)$ NON È UN SINGLETON

<u>Es.</u> $f^{-1}(1) = \{1, -1\}$

- SURIETTIVITÀ

Sia $f: A \to B$

f è SURIETTIVA se $f(A) = B$



<u>OSS.</u>

Una f può diventare suriettiva modificandone l'insieme di arrivo

$f^{\#}: A \to f(A)$ è suriettiva

(restrizione del codominio)

- INIETTIVITÀ

Sia $f: A \to B$ QUESTE 3 DEF. SONO EQUIVALENTI

f è INIETTIVA se:

1) $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
2) $\forall b \in f(A) \; \exists! \, \bar{x} \in A \ni' f(\bar{x}) = b$
3) $\forall b \in f(A): f^{-1}(b)$ è un singleton HA UN SOLO ELEMENTO

- BIIETTIVITÀ O INVERTIBILITÀ

Sia $f: A \to B$

f è BIIETTIVA o INVERTIBILE se

$$\forall b \in f(A) \; \exists! \, \bar{x} \in A \ni' f(\bar{x}) = b \; \wedge \; f(A) = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall b \in B \; \exists! \, \bar{x} \in A \ni' f(\bar{x}) = b$$

- FUNZIONE INVERSA

Sia $f : A \to B$, f INVERTIBILE

$\exists! f^{-1} : B \to A$, $f^{-1}(x) = y \in A \ni' f(y) = x$

- RESTRIZIONE INSIEME DI PARTENZA

Sia $f : A \to B$, $C \subset A$

$\exists\ f_{|_C} : C \to B \ni' f_{|_C}(x) = f(x) \quad \forall x \in C$

$f_{|_C}$ è detta restrizione di f in C

- FUNZIONE COMPOSTA

Sia $f : A \to B$, $g : C \to D$, $f(A) \subset C$

$g \circ f : A \to D \ni' (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$

$g(f(x)) \in D$

Es. $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^3$

$g \circ f = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^3$

$f \circ g = f(g(x)) = f(x^3) = x^3 + 1$

$g \circ f \neq f \circ g$

$(\mathbb{R}[x], \circ)$ è una legge di comp. interna
(è un gruppo non abeliano)

- ASSOCIATIVA
  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- NON COMMUTATIVA
  $g \circ f \neq f \circ g$
- EL NEUTRO $f(x) = x$
- SIMMETRICO
  $g \circ g^{-1} = x$

- INVERTIBILITÀ DI UNA FUNZIONE

Sia $f : A \rightarrow B$

f è INVERTIBILE se $\exists f^{-1}$ (ammette un'inversa)

$\exists g : B \rightarrow A \ni' g \circ f = i_A \wedge f \circ g = i_B$

$$\underset{A \to A}{g(f(x)) = x} \quad \wedge \quad \underset{B \to B}{f(g(x)) = x}$$

3 = f È INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ f È BIGETTIVA

$f(x) = b \Leftrightarrow x = f^{-1}(b)$ perché

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(b)$

$x = f^{-1}(b)$

- OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Sia $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}) := \{ f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funzione} \}, A \subset \mathbb{R}$

$\mathcal{F}$ è l'insieme di tutte le f. in $\mathbb{R}$

- $f_1 + f_2 \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$

  $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

- $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$

  $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \, f_2(x)$

- TIPI DI FUNZIONE

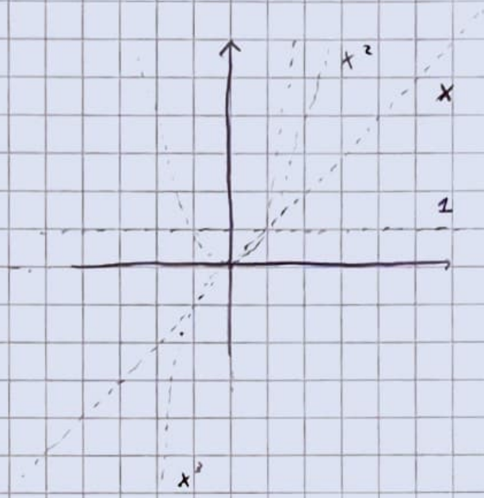
$f: A \to B$ è COSTANTE se $x \in A \mapsto \bar{b} \in B$

$f: A \to B$ è IDENTITÀ se $x \in A \mapsto x \in A$

COSTANTE $f(x) = K$, $K \in \mathbb{R}$

IDENTITÀ $f(x) = x$

- FUNZIONE POTENZA $f(x) = x^{n \in \mathbb{N}}$



$n = 0$: $f(x) = 1$ COSTANTE

$n = 1$: $f(x) = x$ IDENTITÀ

$n = 2$: $f(x) = x^2$ PARABOLA

$n = 3$: $f(x) = x^3$

...

- MONOMIO DI 1 VARIABILE

$x \in \mathbb{R} \mapsto a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

- POLINOMIO

$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n =$

$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_i x^i \to$ NOTAZIONE DI EINSTEIN

Se $a_n \neq 0$, n è il grado di p

- F. LINEARI E AFFINI

$f(x) = \cancel{ax}\ ax$ è LINEARE $\nearrow$ ADDITIVA : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$f(x) = ax + K$, $K \neq 0$ è AFFINE

- ZERI DI UNA FUNZIONE

$f: A \to \mathbb{R}$

$Z_f := \{ x \in A \mid f(x) = 0 \}$

- RECIPROCO DI UNA FUNZIONE

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \setminus Z_f := \{ x \in A \mid f(x) \neq 0 \}$

$1/f : A \setminus Z_f \to \mathbb{R}$, $(1/f)(x) = 1/f(x)$

- RAPPORTO TRA FUNZIONI

$f_1, f_2 \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$

$\frac{f_1}{f_2} : A \setminus Z_{f_2} \to \mathbb{R}$ $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

$f_1/f_2 := f_1 \ 1/f_2$

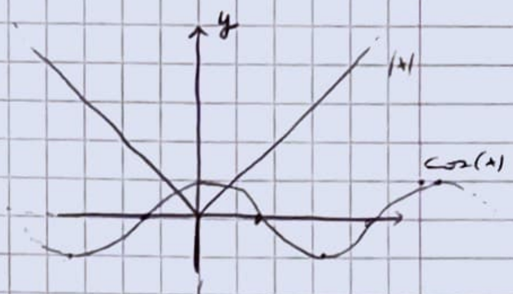
- FUNZIONE RAZIONALE

$f : \mathbb{R} \setminus Z_{p_2} \to \mathbb{R}$, $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$

- FUNZIONE PARI

$f: A \to \mathbb{R}$, $\forall x \in A$ ~~im~~ $-x \in A$

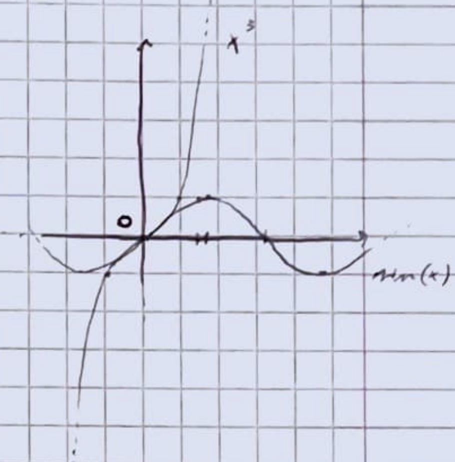
$f(-x) = f(x)$



- FUNZIONE DISPARI

$f: A \to \mathbb{R}$, $\forall x \in A : -x \in A$

$f(-x) = -f(x) \lor f(x) = -f(-x)$

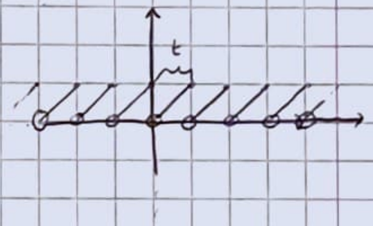


- FUNZIONE PERIODICA

$f: A \to \mathbb{R}$

$\exists\, t > 0 \ni' \forall x \in A : x + t \in A$

$f(x) = f(x + k\underbrace{t}_{\text{periodo}}) \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in A$



- MONOTONIA

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset A$

- f è CRESCENTE in B se:
  $\forall \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in B$, con $x_1 \leq x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$
- f è STRETT. CRESCENTE in B se:
  $\forall \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in B$, con $x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$
- f è DECRESCENTE in B se:
  $\forall \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in B$, con $x_1 < x_2$: $f(x_1) \geq f(x_2)$

4 = f STRETT. MONOTONA $\Rightarrow$ f. INIETTIVA

IPOTESI : $f : A \to \mathbb{R}$, $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x_1 \lneq x_2$: $f(x_1) \neq f(x_2)$

TESI : $f : A \to \mathbb{R}$, $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) \neq f(x_2)$

DIM. : $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$

5 = $\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}$ MONOTONE (STESSO TIPO) $\Rightarrow$ $f+g$ MONOTONA

IPOTESI : $f : A \to \mathbb{R}$, $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$

$g : A \to \mathbb{R}$, $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x_1 < x_2$: $g(x_1) \leq g(x_2)$

TESI : $f+g : A \to \mathbb{R}$, $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x_1 < x_2$: $(f+g)(x_1) \leq (f+g)(x_2)$

DIM. $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2) \wedge g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow$

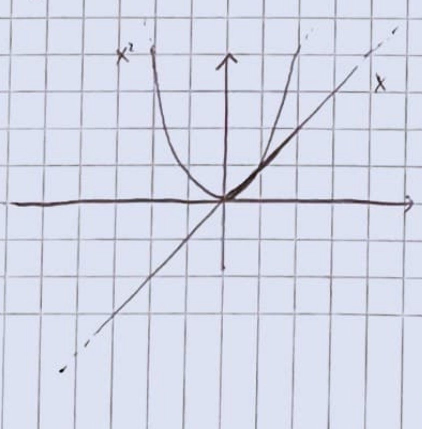
$\Rightarrow \forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x < x_2$: $(f+g)(x_1) \leq (f+g)(x_2)$

(Dimostrazione analoga per $f+g$ STR. MONOTONA se almeno una delle 2 lo è)

- $\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}$ MONOTONE (STESSO TIPO) , $\begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix} \geq 0 \; \forall x$ $\Rightarrow$ fg MONOTONA

PROPOSIZIONE : Siano $\begin{matrix} f : A \to \mathbb{R} \\ g : B \to \mathbb{R} \end{matrix}$, $A \cap B \neq \emptyset$, $\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}$ MONOTONE , $\begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix} > 0 \quad \forall x \in A \cap B \Rightarrow fg$ MONOTONA



$x^2 |_{[0,+\infty)}$ CRESCENTE

$x \cdot x$
CRESC. CRESC.

$x^2 |_{(-\infty, 0]}$ DECRESC.

C = crescente   + = $f(x) > 0$
D = decrescente   − = $f(x) < 0$

f	g	fg
C+	C+	C+
C−	C−	D+
D+	D+	D+
D−	D−	C+

<u>OSS</u>

$$\overset{\nearrow}{x} \cdot \overset{\searrow}{(-x)} = \overset{\substack{<0 \;|\; >0 \\ \nearrow \;\; \searrow}}{-x^2}$$

$$\overset{\nearrow}{x} \cdot \overset{\nearrow}{x} = x^2 \quad \overset{>0}{\nearrow} \quad \overset{<0}{\searrow}$$

$$\overset{\searrow}{(-x)}\,\overset{\searrow}{(-x)} = x^2 \quad \overset{>0}{\nearrow} \quad \overset{<0}{\searrow}$$

6 = f MONOTONA $\Rightarrow$ $1/f$ MONOTONA DI TIPO OPPOSTO

IPOTESI $f : A \to \mathbb{R}$, $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$

TESI $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A \setminus Z_f$: $(1/f)(x_1) \geq (1/f)(x_2)$ con $x_1 < x_2$

DIM : $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A \setminus Z_f$, $x_1 < x_2$: $1/f(x_1) \geq 1/f(x_2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A \setminus Z_f$, $x_1 < x_2$: $(1/f)(x_1) \geq (1/f)(x_2)$

7 = f STRETT. MONOTONA $\Rightarrow$ f^{-1} STRETT. MONOTONA CON STESSO TIPO

IPOTESI : $f : A \to \mathbb{R}$, $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in A$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$

TESI : $f^{-1} : f(A) \to A$, $\forall \, {}^{x_1}_{x_2} \in f(A)$, $x_1 < x_2$: $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$

DIM. PER ASSURDO:

$\exists \, {}^{x_1}_{x_2} \in f(A)$, $x_1 < x_2 \ni' f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2)$ $\Rightarrow$ f^{-1} è INIETTIVA

$\Rightarrow \exists \, {}^{x_1}_{x_2} \in f(A)$, $x_1 < x_2 \ni' f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(x_1) > \in A > f^{-1}(x_2)$ quindi

$f(f^{-1}(x_1)) > f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow \boxed{x_1 > x_2}$!

8 = MONOTONIA F. COMPOSTE

PROP.

$f : A \to B$

$g : C \to D$

$f(A) \subset C$

f	g	$f \circ g$	$g \circ f$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

IPOTESI $\quad \forall \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in A \, , \; x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$ DECR.

$\forall \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in C \, , \; x_1 < x_2 : g(x_1) \leq g(x_2)$ CR.

TESI $\quad \forall \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in A \, , \; x_1 < x_2 : g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$

DIM $\quad \forall \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in A \, , \; x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1) \in f(A) \subset C \supset f(A) \ni f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in C \, , \; x_1 \geq x_2 : g(\cancel{f}(x_1\cancel{)}) \geq g(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$

- SUCCESSIONE

Una successione è una f. con variabile discreta ($\in \mathbb{N} \vee \in N \subset \mathbb{N}$)

- $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \mapsto a_n \in \mathbb{R}$
- $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ - $(a_n)_{n \geq n_0}$ - a_n

1) $n \in \mathbb{N} \mapsto i^n \in \mathbb{C}$
2) $n \in \mathbb{N} \mapsto n \in \mathbb{N}$

insieme d'arrivo $B \subseteq \mathbb{C}$

① e ② sono succ. numeriche

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ ha come immagine l'insieme A

$A = \{ x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N}^* \ni' x = 1 - \frac{1}{n} \} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \dots \}$

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ è la restrizione in $\mathbb{N}$ di:

$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\cos(n\pi)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\{\sin(n\pi)\}_{n \in \mathbb{N}} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

- SUCCESSIONE ESTRATTA O SOTTOSUCCESSIONE

$(a_n)_{n \in N \subseteq \mathbb{N}}$ è una successione

$(a_n)_{n \in S \subsetneq N \subset \mathbb{N}}$ con $S \neq \emptyset$ è una successione estratta
che $(a_n)_{n \in N}$ (o sottosuccessione)

- MONOTONIA NELLE SUCCESSIONI

$(a_i)_{n \geq n_0}$ è monotona crescente se

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \leq n_1 \leq n_2$: $a_{n_1} \leq a_{n_2}$

Basta dire che:

$\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$: $a_n \leq a_{n+1}$

- MAGGIORANTE DI UNA FUNZIONE

$f: A \to \mathbb{R}$, M è maggiorante per f se

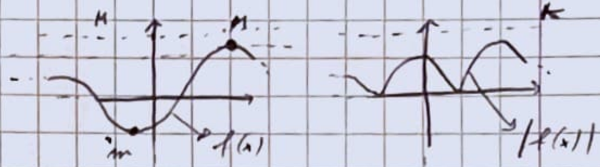
$\forall x \in A : M \geq f(x) \iff \forall y \in f(A) : M \geq y$

- MINORANTE DI UNA FUNZIONE

$f: A \to \mathbb{R}$, m è minorante per f se

$\forall x \in A : m \leq f(x) \iff \forall y \in f(A) : m \leq y$

- FUNZIONE LIMITATA



$f: A \to \mathbb{R}$ è limitata se

$\exists\, {}^{M}_{m} \in \mathbb{R} \ni' \forall x \in A : m \leq f(x) \leq M$ o

$\exists\, K \in \mathbb{R}^{+} \ni' \forall x \in A : |f(x)| \leq K$

- RELAZIONE DI ORDINE TRA F.

$f: A \to \mathbb{R}$
$g: A \to \mathbb{R}$, $f \leq g := \forall x \in A : f(x) \leq g(x)$

- MODULO DI UNA FUNZIONE

$f: A \to \mathbb{R}$

$|f|: A \to [0, +\infty)$ $\quad |f|(x) := |f(x)| \quad \forall x \in A$

- MASSIMO DI UNA FUNZIONE

$f: A \to \mathbb{R}$

$\exists\, \underbrace{x_M}_{\text{P.TO DI MASSIMO}} \in A \ni' \forall x \in A : \overbrace{f(x_M)}^{\text{VALORE DI MASSIMO}} \geq f(x)$

- MASSIMO FORTE

$\exists!\, x_M \in A \ni' \forall x \in A \setminus \{x_M\} : f(x_M) > f(x)$

- MASSIMO RELATIVO O LOCALE

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $\delta > 0$

x_0 è p.to di massimo relativo se

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $f(x_0) \geq f(x)$

- INF E SUP DI UNA FUNZIONE

$f: A \to \mathbb{R}$

$$\Lambda = \sup f \iff \begin{cases} \forall x \in A : f(x) \leq \Lambda \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists \bar{x} \in A \ni' f(\bar{x}) > \Lambda - \varepsilon \end{cases}$$

$$\lambda = \inf f \iff \begin{cases} \forall x \in A : f(x) \geq \lambda \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists \bar{x} \in A \ni' f(\bar{x}) < \lambda + \varepsilon \end{cases}$$

- INTORNO

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{I}(x_0) := \{ I \subset \mathbb{R} \mid \exists \delta > 0 \ni' I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \}$

$\mathcal{I}(+\infty) := \{ I \subset \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R} \ni' I = (a, +\infty) \}$

$\mathcal{I}(-\infty) := \{ I \subset \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R} \ni' I = (-\infty, a) \}$

- P.TO DI ACCUMULAZIONE

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è p.to di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}$ se

$\forall V \in \mathcal{I}(x_0) : V \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

$D(A) := \{ x \in \mathbb{R} \mid x$ è p.to di accumulazione $\}$

- P.TO ISOLATO

$x_0 \in \mathbb{R}$ è p.to isolato in $A \subset \mathbb{R}$ se

$\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $U \cap A \setminus \{x_0\} = \emptyset$

$x_0 \notin D(A)$

c = $+\infty$ P.TO DI ACCUMULAZIONE IN UN INSIEME ILL. SUP.

IPOTESI: $A = (a, +\infty)$

TESI: $\forall\, U \in \mathcal{I}(+\infty) : U \cap A \setminus \{+\infty\} \neq \emptyset$

DIM: $\forall\, U \in \mathcal{I}(+\infty) : U \cap A \setminus \{+\infty\} \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, U = (b, +\infty)$ con $b \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow (b, +\infty) \cap (a, +\infty) \setminus \{+\infty\} \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\Rightarrow (b, +\infty) \cap (a, +\infty) = \begin{cases} (a, +\infty) & \text{se } a \geq b \\ (b, +\infty) & \text{se } b > a \end{cases}$$

Sia $c = \begin{cases} a & \text{se } a \geq b \\ b & \text{se } b > a \end{cases}$, $(c, +\infty) \neq \emptyset$

3 — **LIMITI**

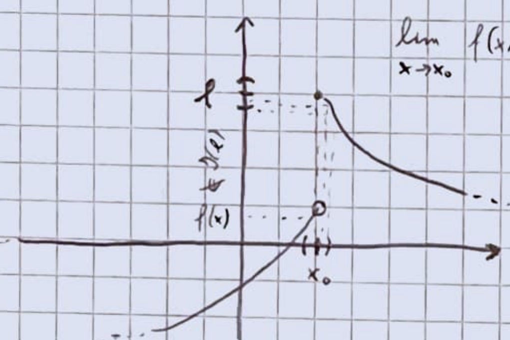
$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$ e $l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ o $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$ se e solo se

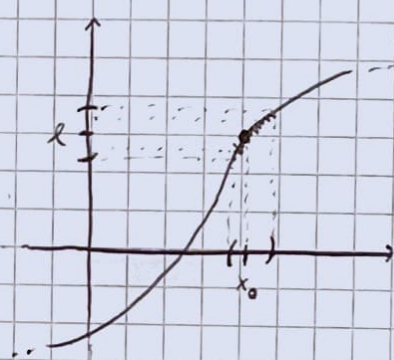
$\forall V \in \mathcal{I}(l) \ \exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$:

$f(x) \in V$

$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq l$



$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$



esistono solo intorni dx

Ogni $f(x) \in V \quad \forall x \in U$

DEFINIZIONE CON INTERVALLI (ALGEBRICA)

— $x_0 \in D(A)$, $l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$:

$f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

con ε raggio intorno di l , δ raggio intorno di x_0

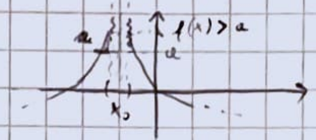
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta$:

$|f(x) - l| < \varepsilon$

- $x_0 \in D(A) \cap \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta_a > 0 \ni' \forall x \in A,\ 0 \neq |x - x_0| < \delta_a$:

$f(x) > a$



- $x_0 \in D(A) \cap \mathbb{R}$, $\ell = -\infty$

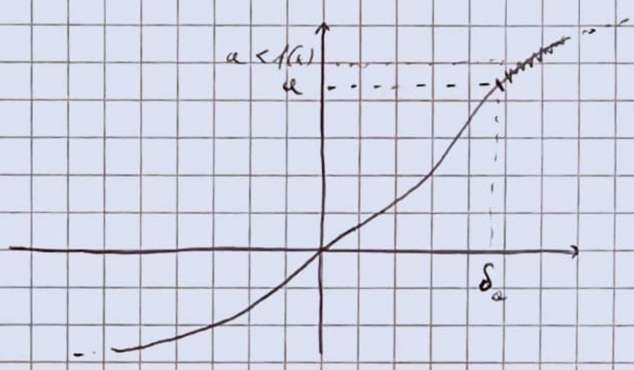
$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta_a > 0 \ni' \forall x \in A,\ 0 \neq |x - x_0| < \delta_a$:

$f(x) < a$

- $x_0 \in D(A)$, $x_0 = +\infty$, $\ell = +\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta_a \in \mathbb{R} \ni' \forall x \in A,\ x > \delta_a$:

$f(x) > a$



- $x_0 \in D(A)$, $x_0 = -\infty$, $\ell = -\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta_a \in \mathbb{R} \ni' \forall x \in A,\ x < \delta_a$:

$f(x) < a$

- $x_0 \in D(A)$, $x_0 = +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon \in \mathbb{R} \ni' \forall x \in A,\ x > \delta$:

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$

- CONTINUITÀ

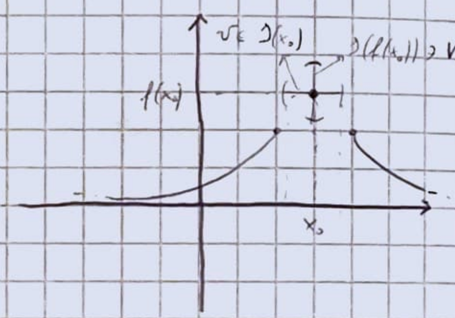
$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

f è continua in x_0 se

$\forall V \in \mathcal{I}(f(x_0))\ \exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U:$
$f(x) \in V$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \ni' \forall x \in A, \ |x - x_0| < \delta_\varepsilon :$
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- OSSERVAZIONI SULLA CONTINUITÀ



1. UN P.TO ISOLATO È CONTINUO

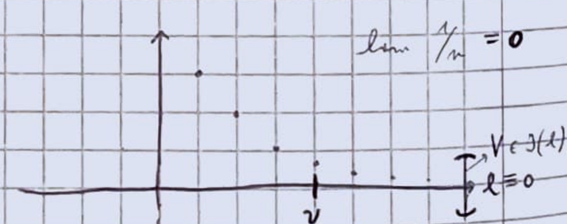
2. Se $x_0 \in D(A)$ e f continua in $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- f CONTINUA IN UN INSIEME

$f: A \to \mathbb{R}$, $B \subset A$

f continua in $B \Leftrightarrow f$ continua in $x \quad \forall x \in B$

- LIMITI NELLE SUCCESSIONI



$\lim x_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$\forall V \in \mathcal{I}(\ell)\ \exists \nu \in \mathbb{N} \ni' \forall n \geq \nu:$
$x_n \in V$ (cioè $x_n \in V$ sussiste definitivamente)

$9 = \{x_n\}$ MONOTONA $\Rightarrow \exists \lim x_n = \underset{(\inf)}{\sup}(x_n) \in \overline{\mathbb{R}}$

IPOTESI: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$

TESI:

- $\sup(x_n) = +\infty$ $\cancel{\forall \lim |x_n| = +\infty}$

$\left.\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ni' \cancel{\forall n \geq \nu}: x_\nu > a \right] \to \sup x_n = +\infty$

DIM. $\left.\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ni' \underbrace{\forall n > \nu}_{\text{CRESCENTE}}: \underbrace{x_n \geq x_\nu}_{} > a \right] \to \lim x_n = +\infty$

- $\sup(x_n) = \Lambda \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ni' \cancel{\forall n \geq \nu}: \Lambda \geq x_\nu \geq \Lambda - \varepsilon$ $\to \sup x_n = \Lambda \in \mathbb{R}$

DIM. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ni' \forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{n > \nu}_{\text{CRESCENTE}}: \Lambda \geq \underbrace{x_n \geq x_\nu}_{} \geq \Lambda - \varepsilon$ $\to \lim x_n = \Lambda$

- CONVERGENZA E DIVERGENZA NELLE SUCCESSIONI

$\lim x_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow x_n$ converge in l

$\lim x_n \in \{+\infty, -\infty\} \Rightarrow x_n$ diverge a $\pm$ inf.

- CONVERGENZA E DIVERGENZA NELLE FUNZIONI

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è CONVERGENTE in x_0

$= \pm\infty \Rightarrow f$ è DIVERGENTE in x_0

- INFINITO E INFINITESIMO

$\lim_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow f$ è un infinito per x_0

$\lim_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} f(x) = 0 \Rightarrow f$ è un infinitesimo per x_0

- TEOREMA PONTE

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff$

$\iff \forall (x_n)_{n \geq n_0} \subset A \ni' x_n \longrightarrow x_0 : \{f(x_n)\} \to l$

- NON ESISTENZA DI $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen}(x)$ USANDO IL TEOREMA PONTE

Prendo 2 successioni che tendono a $-\infty$

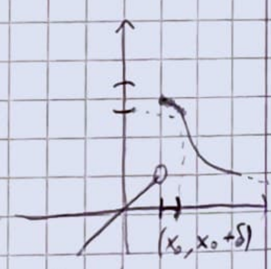
$x_n^{(1)} = (-n\pi)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad x_n^{(1)} \to -\infty$

$x_n^{(2)} = (\pi/2 - 2n\pi)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad x_n^{(2)} \to -\infty$

$\operatorname{sen}(x_n^{(1)}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad \operatorname{sen}(x_n^{(1)}) \neq \operatorname{sen}(x_n^{(2)}) \Rightarrow$

$\operatorname{sen}(x_n^{(2)}) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen}(x)$

- LIMITE DA DX E DA SX



$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D^+(A)$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ se

$\forall V \in \mathcal{I}(l) \ \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A,$

$x \in (x_0, x_0 + \delta) : f(x) \in V$

- P. TO DI ACCUMULAZIONE A DX O A SX

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è p.to di accumulazione a dx se

$\forall \delta > 0 : (x_0, x_0 + \delta) \cap A \neq \emptyset$

cioè $\forall U \in \mathcal{J}^+(x_0) : A \cap U \neq \emptyset$ $\Rightarrow x_0 \in D^+(A)$

$\mathcal{J}^+(x_0) := \{ I \subset \mathbb{R} \mid \exists \delta > 0 \ni' I = (x_0, x_0 + \delta) \}$

$\mathcal{J}^-(x_0) := \{ I \subset \mathbb{R} \mid \exists \delta > 0 \ni' I = (x_0 - \delta, x_0) \}$

- OSSERVAZIONI SUI LIMITI DA DX O DA SX

Se $x_0 \in D^+(A) \setminus D^-(A)$:

$\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\exists \lim_{x \to x_0^+} = \lim_{x \to x_0}$

10 = $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff \begin{matrix} \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \\ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \end{matrix} l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ IPOTESI: $\forall \cancel{U \in \mathcal{J}(l)}\ \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A,$

$0 \neq |x - x_0| < \delta : |f(x) - l| < \varepsilon$

TESI: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A, x_0 \in (x_0, x_0 + \delta):$

$|f(x) - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A, x_0 \in (x_0 - \delta, x_0):$

$|f(x) - l| < \varepsilon$

DIM: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$

$x \neq x_0 : |f(x) - l| < \varepsilon$

quindi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A, x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup$

$(x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - l| < \varepsilon$

11 = $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup f(x) \,/\, \inf f(x)$

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, f monotone in A, $x_0 \in D^+(A) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x \in A \cap (x_0, +\infty)} f(x) \quad \left[= \sup_{x \in A \cap (x_0, +\infty)} f(x) \right]$$ monotone decrescente

monotone crescente

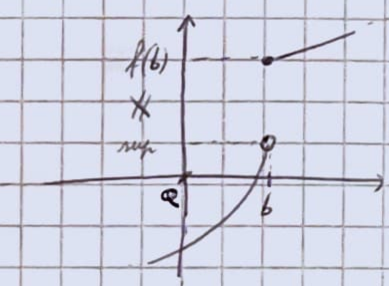
$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in A \cap (-\infty, x_0)} f(x) \quad \left[= \inf_{x \in A \cap (-\infty, x_0)} f(x) \right]$$ monotone decrescente

- COROLLARIO

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f monotone crescente in (a, b)

$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf f(x)$

$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup f(x)$



$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \neq \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(a)$$

$$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x) \neq \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(b)$$

12 = TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO (f. CON LIMITE)

IPOTESI) $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow$

TESI $\Rightarrow \exists U \in I(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\} : f(x) > 0$

DIMOSTRAZIONE:

$\forall V \in I(l) \ \exists U \in I(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}:$
$f(x) \in V$

Prendo $V \subset (0, +\infty)$ essendo $l > 0$ quindi
$\exists \varepsilon > 0 \ni' \forall x \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) : x > 0$

quindi $\exists U \in I(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}:$
$f(x) \in V \Rightarrow f(x) > 0$

13 = TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO (f. CONTINUA)

IPOTESI) $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, $f(x_0) > 0$, $f \in C^0(\{x_0\})$

TESI $\Rightarrow \exists U \in I(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U : f(x) > 0$

DIMOSTRAZIONE

$\forall V \in I(f(x_0)) \ \exists U \in I(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U:$
$f(x) \in V$

Prendo $V \in (0, +\infty)$ quindi
$\exists U \in I(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U : f(x) \in V \Rightarrow f(x) > 0$

14 = CONSEGUENZA DEL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

IPOTESI) $\begin{matrix} f : I \to \mathbb{R} \\ g : I \to \mathbb{R} \end{matrix}$, $x_0 \in \mathring{I}$, $f(x) < g(x) \quad \forall x \in U \in \mathcal{I}(x_0)$

$\downarrow$

$\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in I \cap U :$
$f(x) < g(x)$

TESI $\Rightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \ , \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_g$$

Per assurdo $l_f > l_g \Rightarrow l_f - l_g > 0$

$$h(x) := f(x) - g(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) > 0 \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in I \cap U \setminus \{x_0\}.$$

$$h(x) > 0 \Rightarrow \boxed{f(x) > g(x)} \ !$$

– OPERAZIONE TRA LIMITI

$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix} : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, $\exists \begin{matrix} \lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \in \overline{\mathbb{R}} \\ \lim_{x \to x_0} g(x) = l_g \in \overline{\mathbb{R}} \end{matrix}$

allora: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = l_f + l_g \in \overline{\mathbb{R}}$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = l_f\, l_g \in \overline{\mathbb{R}}$

$+$	$+\infty$	$-\infty$	0	$l \in \mathbb{R}^*$
$+\infty$	$+\infty$	[]	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	[]	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	$-\infty$	0	l
$l \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	l	l

$\cdot$	$+\infty$	$-\infty$	0	$l \in \mathbb{R}^*_+$	$l \in \mathbb{R}^*_-$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	[]	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	[]	$-\infty$	$+\infty$
0	[]	[]	0	0	0
$l \in \mathbb{R}^*_+$	$+\infty$	$-\infty$	0	l	l
$l \in \mathbb{R}^*_-$	$-\infty$	$+\infty$	0	l	l

[]
$\downarrow$
FORMA INDETERM.

15 = TEOREMA DEGLI ZERI

IPOTESI: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^0([a, b])$, $f(a) f(b) < 0$

TESI: $\exists\, x_0 \in (a, b) \ni' f(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE CON METODO DI BISEZIONE

$a = a_0$, $b = b_0$, $c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$

Se $f(c_0) = 0$, $x_0 = c_0$

Se $f(c_0) \neq 0$:

- se $f(a_0) f(c_0) < 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_0 \\ b_1 = c_0 \end{cases}$, $c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$
- se $f(c_0) f(b_0) < 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = c_0 \\ b_1 = b_0 \end{cases}$

Si creano 2 successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ limitate con $a \leq a_n < b \wedge a < b_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ è crescente, $\{b_n\}$ è decrescente

$\{a_n\}$ crescente perché $a_n \leq a_{n+1}$ perché

$a_{n+1} = a_n \vee a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ con $b_n > a_n$

quindi $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > \frac{\cancel{2} a_n}{\cancel{2}} = a_n$

$\{b_n\}$ decrescente perché $b_n \geq b_{n+1}$ perché

$b_{n+1} = b_n \vee b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ con $b_n > a_n$

quindi $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{\cancel{2} b_n}{\cancel{2}} = b_n$

La successione $\{b_n - a_n\} = \left\{\frac{b-a}{2^n}\right\}$

$\lim \frac{b-a}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim b_n - a_n = 0$

$b_n \to l_2$, $a_n \to l_1$

$l_2 - l_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow l_2 = l_1$

Sia $x_0 := l_1 = l_2$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ [f è continua]

Utilizzando il teorema ponte

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longrightarrow \begin{array}{l} f(a_n) \to f(x_0) \\ f(b_n) \to f(x_0) \end{array}$

$f(a_n)\, f(b_n) < 0 \Rightarrow f(x_0)\, f(x_0) \leq 0$

sfruttando il teorema della permanenza del segno

$[f(x_0)]^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$

- OSSERVAZIONI SUL TEOREMA DEGLI ZERI

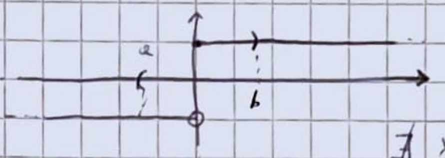
1) Se $f : A \to \mathbb{R}$, A insieme e
$\exists\ [a, b] \subset A$ t.c. $f(a)\, f(b) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) = 0$

2) Ci consente di stabilire se $f(x)$ ha zeri ($f(x) = 0$ ha soluzioni)

3) Analogamente ci consente di stabilire se $f(x) = g(x)$ ha soluzioni $\left(h(x) := f(x) - g(x) \,,\; h(x) = 0 \right)$

4) Tutte le ipotesi sono necessarie

Es. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



$f(a)f(b) < 0$

$\nexists\, x_0 \in (a,b) \ni f(x_0) = 0$

16 = COROLLARIO DEL TH. DEGLI ZERI

(IPOTESI) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in C^0((a,b))$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Se $\exists \lim_{x \to a} f(x) = l_a \;\wedge\; \exists \lim_{x \to b} f(x) = l_b \;\wedge$

$l_a l_b < 0$

TESI $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) \ni f(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE

INUTILE $\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \to a^+} f(x) = l_a \Rightarrow \exists\, V_a \in I^+(a) \ni \\ \forall x \in V_a \cap (a,b) : f(x) \in V_{l_a} \in I(l_a) \end{array} \right.$

$l_a l_b < 0 \Rightarrow \exists \begin{array}{l} V_a \in I^+(a) \\ V_b \in I^-(b) \end{array} \ni \forall \begin{array}{l} x_a \in V_a \cap (a,b) \\ x_b \in V_b \cap (a,b) \end{array} : f(x_a) f(x_b) < 0$

Prendendo $\bar{x}_a \in V_a \cap (a,b)$ posso applicare il th
$\bar{x}_b \in V_b \cap (a,b)$

degli zeri alla f. $f|_{[\bar{x}_a, \bar{x}_b]}$ dove $f|_{[\bar{x}_a, \bar{x}_b]} \in C^0([\bar{x}_a, \bar{x}_b])$

e $f(\bar{x}_a) f(\bar{x}_b) < 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in (\bar{x}_a, \bar{x}_b) \ni f(x_0) = 0$

$\left((\bar{x}_a, \bar{x}_b) \subset (a,b) \right)$

OSSERVAZIONI SUL COROLLARIO

Vale anche per intervalli del tipo $[a,b)$, $[a,b]$, $(a,b]$

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to b} f(x) < 0 \quad (\text{essendo } f \in C^0((a,b]))$$

17 = TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

IPOTESI: $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(A)$, $I \subset A$, I intervallo

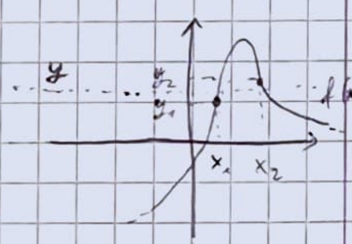
TESI: $f(I)$ intervallo $\iff \forall y_1, y_2 \in f(I) : \forall y \in (y_1, y_2) : y \in f(I)$

Di conseguenza $\exists\, \bar{x} \in I \ni' f(\bar{x}) = y \quad \forall y \in f(I)$

DIMOSTRAZIONE

$y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$, $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2 \ni' f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$

Supponiamo che $x_1 < x_2$

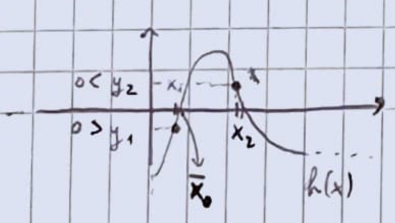


$[x_1, x_2] \in I$

Prendo $y \in f(I)$ con $y_1 < y < y_2$

$h(x) := f(x) - \cancel{k}y$, $h(x) \in C^0([x_1, x_2])$ perché $f(x) \in C^0([x_1, x_2]) \ni \cancel{k}y$

$h(x_1) = \cancel{k}y_1 - y < 0$
$h(x_2) = y_2 - y > 0$ $\Rightarrow h(x_1)\, h(x_2) < 0 \Rightarrow$



$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in (x_1, x_2) \subset I \ni'$

$h(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) - y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = y$

18 = TEOREMA DI WEIERSTRASS

IPOTESI: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^0([a,b])$

TESI: f ha min e max $\Rightarrow \exists \begin{smallmatrix} \max f \\ \min f \end{smallmatrix} \in \mathbb{R}$

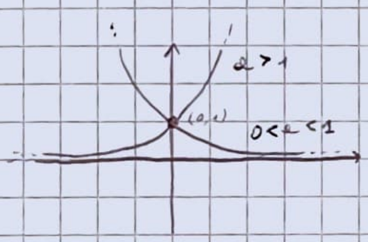
- TH. VALORI INTERMEDI + TH. WEIERSTRASS

IPOTESI: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^0([a,b])$

TESI: $f([a,b]) = [m, M]$ con $\begin{matrix} m = \min f \\ M = \max f \end{matrix}$

- FUNZIONI ELEMENTARI

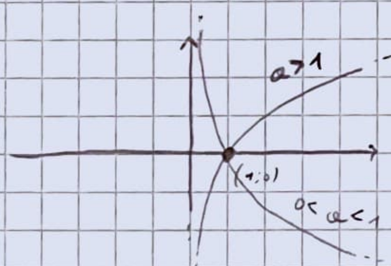
- AFFINE $f(x) = ax + b$
- LINEARE $f(x) = ax$
- POTENZA $f(x) = x^n$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$
- ESPONENZIALI $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



dom: $\mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*_+$

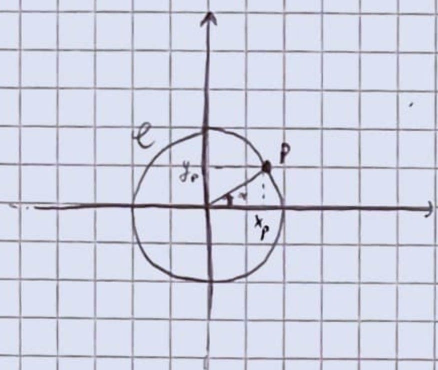
- LOGARITMICHE $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$



dom: $x > 0$

$f(\mathbb{R}^*_+) = \mathbb{R}$

- TRIGONOMETRICHE



$P(\cos\alpha, \ \mathrm{sen}\,\alpha)$

$\mathcal{C}: \ y^2 + x^2 = 1$

$C_{\mathcal{C}}(0,0) \ , \ r_{\mathcal{C}} = 1$

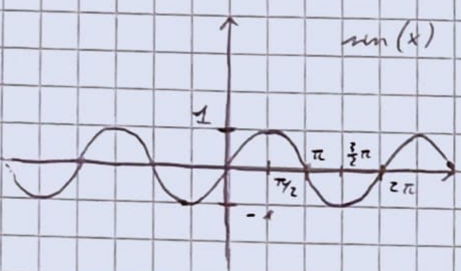
- prima identità fondamentale

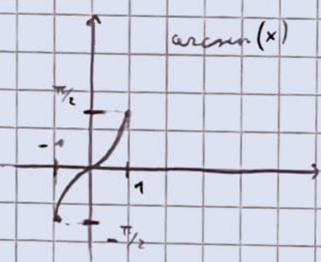
$\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = 1 \ \Leftarrow \ x^2 + y^2 = 1 \quad \forall \, {x \atop y} \in \mathcal{C}$

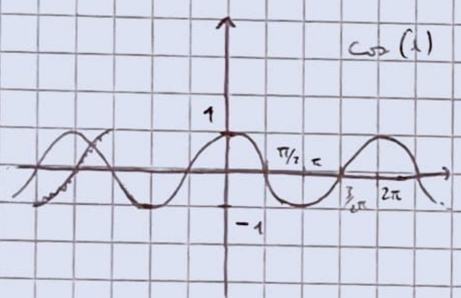
- seconda identità fondamentale

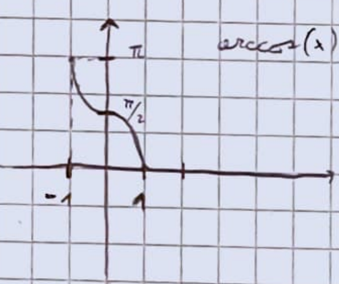
$tg\,\alpha = \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

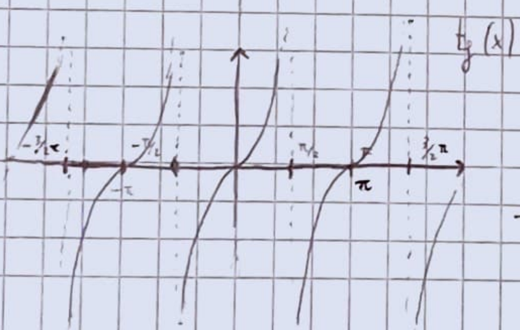
- TRIG. INVERSE

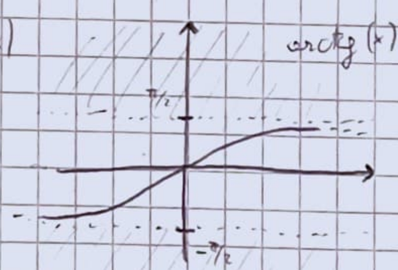




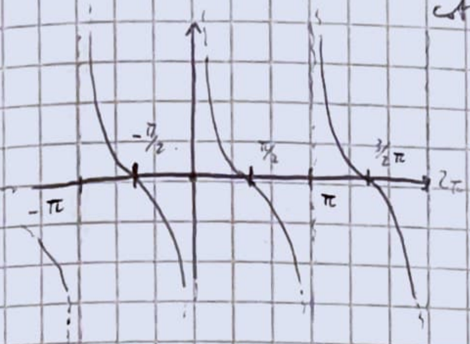




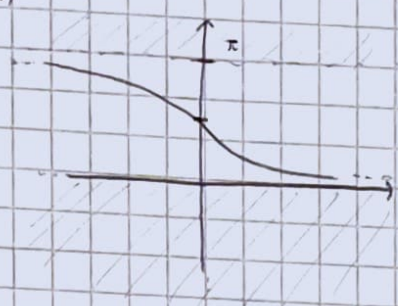




cot(x)



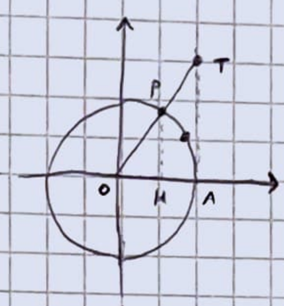
arccot(x)



ANGOLI NOTEVOLI

- $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$

TANGENTE



tutti gli angoli uguali

$\overline{OPH}$ e $\overline{OTA}$ sono simili

quindi $\frac{\overline{HP}}{\overline{HO}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{OA}}$ cioè $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\overline{TA}}{1}$

cioè $\overline{TA} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = tg(x)$

- IPERBOLICHE

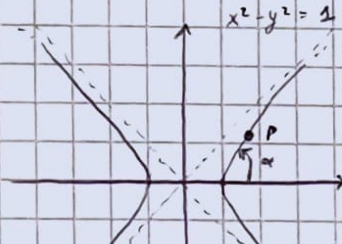
$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

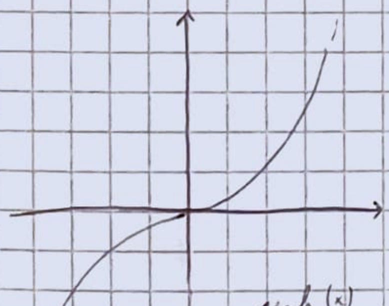
$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh(-x) = \overset{-\sinh}{\cancel{\cosh}}(x)$, $\cosh(-x) = \cosh x$

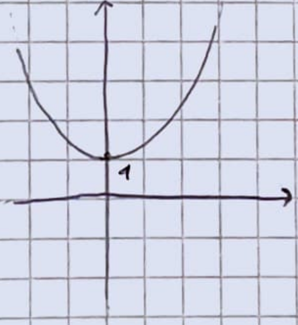
$\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}: \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$





sinh(x)



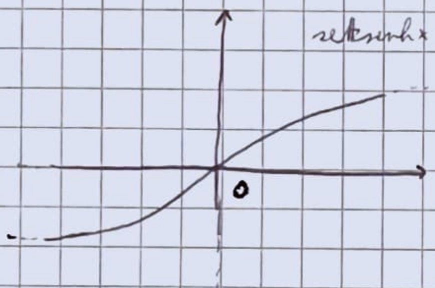
- IPERBOLICHE INVERSE

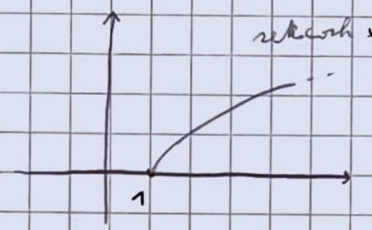
$\sinh^{-1} x$ — SETTORE SENO IPERBOLICO

$$\sinh x = y \iff y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \leftarrow \text{settsenh } x$$

$$\cosh x = y \iff y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \leftarrow \text{settcosh } x$$

$\to \cosh^{-1} x$





13 = TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

$$f: A \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in D(A), \quad \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \cancel{\in \overline{\mathbb{R}}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

$\Rightarrow$ l è UNICO

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

Per assurdo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \neq l_2$

Allora $\forall V_1 \in \mathcal{I}(l_1) \; \exists U_1 \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U_1 \setminus \{x_0\}:$
$f(x) \in V_1$

e $\forall V_2 \in \mathcal{I}(l_2) \; \exists U_2 \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U_2 \setminus \{x_0\}:$
$f(x) \in V_2$

quindi $\exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}:$
$f(x) \begin{smallmatrix} \in V_1 \\ \in V_2 \end{smallmatrix} \Rightarrow f(x) \in V = V_1 \cap V_2 = \boxed{\emptyset}$!

con $U = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ (2 intorni sono 1 contenuto nell'altro per forza)

- RAPPORTO TRA LIMITI

$f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$, $Z_{f_2} = \{ x \in A \mid f_2(x) = 0 \}$

$\frac{f_1}{f_2} : A \setminus Z_{f_2} \to \mathbb{R}$, $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

$$x_0 \in D(A \setminus Z_{f_2}) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim_{x \to x_0} f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

/	$+\infty$	$-\infty$	0	l^+	l^-
$+\infty$	[]	[]	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	[]	[]	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	[]	0	0
l^+	0	0	$\pm\infty$	l^+	l^-
l^-	0	0	$\pm\infty$	l^-	l^+

[] $\Rightarrow$ FORME INDETERMINATE

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+$ / $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$

Si dice che f tende ad l per eccesso se

$\forall V \in \mathcal{I}(l) \ \exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$:
$f(x) \in V \cap (l, +\infty)$

Si dice che f tende ad l per difetto se

$\forall V \in \mathcal{I}(l) \ \exists U \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$:
$f(x) \in V \cap (-\infty, l)$

20 = TEOREMA DEL DOPPIO CONFRONTO

$f: A \to \mathbb{R}$

$g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$

$h: A \to \mathbb{R}$

$\exists\ U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $f \leq g \leq h \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

DIMOSTRAZIONE

$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \overline{U} \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $\forall x \in \overline{U} \cap A \setminus \{x_0\}$

$|g(x) - l| < \varepsilon$

Fisso $\overline{\varepsilon} > 0$ t.c.

$\exists\ U_f \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $\forall x \in U_f \cap A \setminus \{x_0\} : |f(x) - l| < \overline{\varepsilon}$

$\exists\ U_h \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $\forall x \in U_h \cap A \setminus \{x_0\} : |h(x) - l| < \overline{\varepsilon}$

Se $\overline{U} := U_f \cap U_h \in \mathcal{I}(x_0)$ abbiamo che

$\exists\ \overline{U} \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $\forall x \in \overline{U} \cap A \setminus \{x_0\}$:

$|f(x) - l| < \overline{\varepsilon} \ \wedge\ |h(x) - l| < \overline{\varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow l - \overline{\varepsilon} < f(x) < l + \overline{\varepsilon} \ \wedge\ l - \overline{\varepsilon} < h(x) < l + \overline{\varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow l - \overline{\varepsilon} < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \overline{\varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow l - \overline{\varepsilon} < g(x) < l + \overline{\varepsilon} \Longrightarrow |g(x) - l| < \overline{\varepsilon}$

21 = TEOREMA DEL CONFRONTO

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$

$\exists\, U \in I(x_0) \ni' f \le g \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

22 = $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

DIMOSTRAZIONE

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A, \ |x - x_0| < \delta :$

$|f(x) - \underset{\ell}{0}| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A, \ |x - x_0| < \delta :$

$||f(x)| - 0| < \varepsilon$

$|f(x)| = ||f(x)||$

- PRODOTTO TRA INF. E LIMITATO

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0$

23 = TH. LIMITE F. COMPOSTE

$f: A \to \mathbb{R}$
$g: B \to \mathbb{R}$, $f(A) \subset B$

$x_0 \in D(A)$, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$
$l \in D(B)$, $\exists \lim_{y \to l} g(y) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$

$\exists\ U_1 \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in U_1 \cap A \setminus \{x_0\} : f(x) \neq l$
$(\text{o } g \in C^0(B))$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g \circ f = l_1$

DIMOSTRAZIONE

$\forall V \in \mathcal{I}(l_1)\ \exists\ U \in \mathcal{I}(x_0) \ni'$
$\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\} : g(f(x)) \in \cancel{l_1} V$

Fisso $\overline{V} \in \mathcal{I}(l_1) \ni'$
$\exists\ W_V \in \mathcal{I}(l) \ni' \forall y \in W_V \cap B \setminus \{x_0\} : g(y) \in \overline{V}$
$\exists\ U_W \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in U_W \cap A \setminus \{x_0\} : f(x) \in W_V$
quindi $\forall x \in U_W \cap A \setminus \{x_0\} : g(f(x)) \in \overline{V}$
ma se g non è continua $f(x) \neq l$ quindi $x \in U_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in U_W \cap U_1 \cap A \setminus \{x_0\} : g(f(x)) \in \overline{V}$

24 = TH. CONTINUITÀ DI F. COMPOSTA DA F CONTINUE

$$\begin{aligned} f &: A \to \mathbb{R} \\ g &: B \to \mathbb{R} \end{aligned}, \quad f(A) \subseteq B, \quad f \in C^0(A), \quad g \in C^0(B)$$

$$\Rightarrow \quad g \circ f \in C^0(A)$$

Caso più generale:

$$C \subset A, \quad f \in C^0(C), \quad g \in C^0(f(C)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g \circ f \in C^0(C)$$

- P.TI DI DISCONTINUITÀ

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, $x_0 \in A$

1) x_0 p.to di discontinuità A SALTO (di I specie)

$$x_0 \in D^+(A) \cap D^-(A) \quad \wedge \quad \begin{aligned} &\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l^+ \\ &\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l^- \end{aligned} \in \mathbb{R}$$

con $l^+ \neq l^-$, salto $\sigma = |l^+ - l^-|$

2) x_0 p.to di discontinuità di II specie

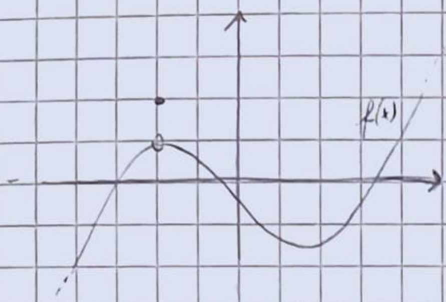
$$x_0 \in D(A), \quad \lim_{x \to x_0^-} = \begin{cases} \nexists \\ \pm\infty \end{cases} \vee \lim_{x \to x_0^+} = \begin{cases} \nexists \\ \pm\infty \end{cases}$$

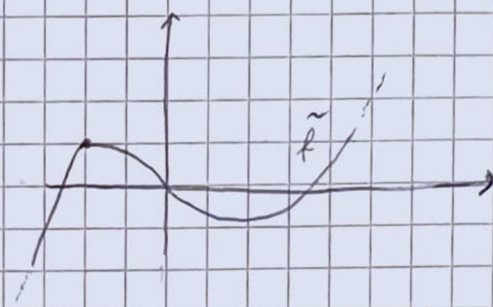
3) x_0 p.to di discontinuità di III specie (ELIMINABILE)

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \neq f(x_0)$$

- ELIMINAZIONE P.TO DI DISCONTINUITÀ DI 3° SPECIE

$\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$, $\tilde{f} := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$





- ASINTOTI

- ASINTOTO VERTICALE

La retta $x = x_0$ è asintoto verticale se

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

- ASINTOTO ORIZZONTALE

La retta $y = q \in \mathbb{R}$ è asintoto orizzontale se

$\exists \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = q \in \mathbb{R}$

- ASINTOTO OBLIQUO

La retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo se

$\exists \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx - q = 0$ con $m \neq 0$, $m, q \in \mathbb{R}$

$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$

- OSSERVAZIONE SUGLI ASINTOTI NELLE F. SIMMETRICHE

1) $f(-x) = f(x) \Rightarrow f.$ PARI $\qquad y = -mx + q$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(-x)}{x} \overset{y=-x}{=\!=} \lim_{y\to-\infty} -\frac{f(y)}{y} = -m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + mx = \lim_{x\to+\infty} f(-x) + mx \overset{y=-x}{=\!=} \lim_{y\to-\infty} f(y) - my = q$$

2) $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f.$ DISPARI $\qquad y = mx - q$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-f(-x)}{x} \overset{y=-x}{=\!=} \lim_{y\to-\infty} \frac{f(y)}{y} = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} -(f(-x) + mx) \overset{y=-x}{=\!=} \lim_{x\to-\infty} -(f(y) - my) = -q$$

- SIMBOLI DI LANDAU

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$ $\wedge$ $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = o(1)$ cioè $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0$

$g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$ $\wedge$ $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$\Rightarrow f(x) = o(g(x))$ cioè $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow g(x) = o(f(x))$

Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = O(g(x))$

Se $f(x) = O(g(x)) \wedge f(x) \neq o(g(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = O(f(x))$

- FUNZIONI ASINTOTICHE

$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix} : A \to \mathbb{R} \ , \ x_0 \in D(A)$

$f \sim g$ se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$f \sim g \iff g \sim f$

- LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \lim_{x \to +\infty} x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{x^n} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) =$

$= \lim_{x \to +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = x^n a_n$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + 1/x\right)^x = e$
- $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} \overset{y = 1/x}{=\!=} \lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + 1/x\right)^x = e$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e \quad \forall a > 0, a \neq 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{1/x} \overset{y = 1/x}{=\!=}$

$= \lim_{y \to \pm\infty} \log_a \left(1 + 1/y\right)^y = \lim_{y \to \pm\infty} \log_a e = \log_a e$

- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} \underset{x = \log_a(y+1)}{\overset{y = a^x - 1}{=\!=}} \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} = \lim_{y \to 0} \left(\frac{\log_a(y+1)}{y} \right)^{-1} =$

$= \lim_{y \to 0} \frac{1}{\log_a e} = \log a$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha \log(1+x)} \cdot \underbrace{\frac{\alpha \log(1+x)}{x}}_{\to 1} =$$

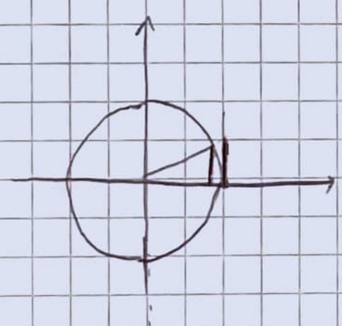
$$= \lim_{x\to 0} \alpha \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha \log(1+x)} \xrightarrow[\cancel{x \to}]{y = (1+x)^\alpha - 1} \lim_{y\to 0} \alpha \underbrace{\frac{y}{\cancel{\alpha} \log(1+y)}}_{\to 1} = \alpha$$

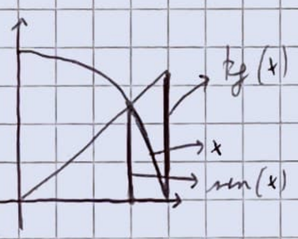
$\alpha \log(1+x) = \log(1+y)$ perché

$y + 1 = (1+x)^\alpha \Rightarrow \log(1+y) = \alpha \log(1+x)$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Notiamo che $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-x}$ così $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è pari.





$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg}(x)$

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg}(x) \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

$$x < \operatorname{tg}(x) \Rightarrow x < \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \Rightarrow \cos x < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

quindi $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ (utilizzo th doppio confronto)

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} \cdot \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \cdot x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} \underset{x = \sin y}{\overset{y = \arcsin x}{=}} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{\sin y} = 1^{-1} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} \underset{x = \operatorname{tg} y}{\overset{y = \operatorname{arctg} x}{=}} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{\operatorname{tg} y} = 1^{-1} = 1$

4 - DERIVATA

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo

$x_0 \in \mathring{I}$, $h \in \mathbb{R}$, $h \sim 0$, $x_0 + h \in I$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ RAPPORTO INCREMENTALE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f è derivabile in $x_0 \in \mathring{I}$ se $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \dot{f}(x_0)$$

- F. DOTATA DI DERIVATA IN x_0

f è dotata di derivata in $x_0 \in \mathring{I}$ se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$$

f dotata di derivata $\Rightarrow$ f non derivabile

- $f'_+(x) \neq f'_-(x) \Rightarrow \nexists f'(x)$

Se $\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$ $\wedge$

$\exists \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$ $\wedge$

$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

$\Rightarrow \nexists f'(x_0)$

- $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow \exists f'(x_0)$

In maniera analoga se $\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$

$\exists \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$

e $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow \exists f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

- MIGLIOR APPROSSIMAZIONE LINEARE IN UN P.TO

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in \mathring{I}$

$\exists\, a_{x_0} \in \mathbb{R} \ni' f(x_0+h) = f(x_0) + a_{x_0} h + o(h) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) - a_{x_0} h = o(h) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-a_{x_0}h}{h} = 0$

25 = f derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ ha miglior appr. lineare in x_0

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$

f derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ ha miglior appr. lin. e $a_{x_0} = f'(x_0)$

DIMOSTRAZIONE $\Rightarrow \Leftarrow$

$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-a_{x_0}h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{a_{x_0}h}{h} =$

$= f'(x_0) - a_{x_0} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = a_{x_0}$

DIMOSTRAZIONE $\Longrightarrow$

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = a$$

$$\Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - a = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{h} = 0$$

a quindi è a_{x_0} così $a_{x_0} = f'(x_0)$

- OSSERVAZIONI SULLA MIGLIOR APPROSSIMAZIONE LINEARE

f ha miglior approssimazione lineare in x_0 se

$\cancel{\exists}\ \exists\ f'(x_0) \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$

così
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) - [f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)] \approx 0$$

$y = f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$ è la miglior approssimazione lineare della funzione f in x_0

26 = f DERIVABILE $\Rightarrow$ f CONTINUA

$f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$

f derivabile in x_0 $\Rightarrow$ $f \in C^0(\{x_0\})$

DIMOSTRAZIONE

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = o(x - x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$$

- $o(x - x_0) \Rightarrow \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \to 0$ se $x \to x_0$ $\Rightarrow o(x - x_0) = 0$
- $f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow x - x_0 \to 0 \Rightarrow f'(x_0)(x - x_0) = 0$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

27 = f DERIVABILE A DX E SX $\Rightarrow$ f CONTINUA

$f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

f derivabile a $\begin{matrix} dx \\ sx \end{matrix}$ in x_0 $\Rightarrow$ $f \in C^0(\{x_0\})$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) - f(x_0) - f'_+(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \Rightarrow$$

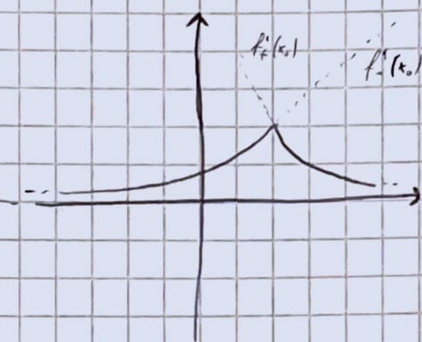
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) - f(x_0) = \underbrace{o(x - x_0)}_{0} + \underbrace{f'_+(x_0)(x - x_0)}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Analogamente $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ $\nearrow$

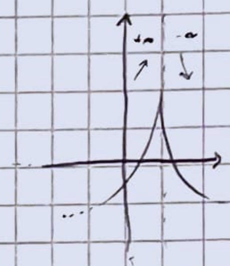
- **PTI NON DERIVABILI**

1) P.TO ANGOLOSO



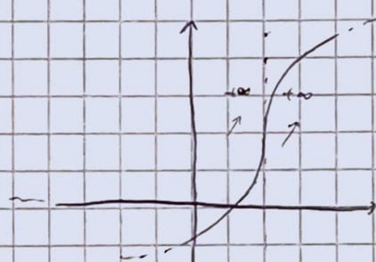
- $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$
- $\exists f'_+(x_0) \wedge \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$
- $\exists f'_-(x_0) \wedge \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

2) P.TO CUSPIDALE O CUSPIDE



$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty = -\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

3) P.TO DI FLESSO VERTICALE



$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$$

f dotata di derivata in x_0

- **REGOLE DI DERIVAZIONE**

Additività : $D(f+g) = D(f) + D(g)$

Linearità : $D(K \cdot f) = K \cdot D(f)$

SOMMA) $D(f+g)(x_0) = D(f)(x_0) + D(g)(x_0)$ perché

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}} = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} + \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}$$

$\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \to f'(x_0)$

$\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}} \to g'(x_0)$

$\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}} \to (f+g)'(x_0)$

PRODOTTO) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$

REGOLA DI LIEBNEITZ

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\left[g(x) - g(x_0)\right]}{x-x_0} + \frac{g(x_0)\left[f(x) - f(x_0)\right]}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0) =$$

$$= f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

QUOZIENTE) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$

- $\exists\ f', g' \Rightarrow \exists\ (fg)'$

Non è vero il contrario

Es. $\nexists\ (\sqrt{x})'(0)$, $\exists\ (x)'(0)$ ma $\exists\ (x\sqrt{x})'(0)$

28 = DERIVATA DI F. COMPOSTA

$f : I \to \mathbb{R}$

$g : J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$, $x_0 \in I$, $\exists \, f'(x_0), g'(x_0)$

$\Rightarrow$ $(g \circ f)$ è derivabile in x_0

$$D(g \circ f)(x_0) = D(g(f(x_0))) \cdot D f(x_0)$$

DIMOSTRAZIONE (IPOTESI AGGIUNTIVA: $\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0) \ \forall x \in U \setminus \{x_0\} : f(x) \neq f(x_0)$)

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

29 = DERIVATA DELLA F. INVERSA

$f : I \to \mathbb{R}$, f invertibile ($\exists\, f^{-1} \ni' f^{-1}(f(x)) = x \wedge f(f^{-1}(x)) = x$)

$x_0 \in I$, $f \in C^0(I)$, $\exists\, f'(x_0) \neq 0$

$f^{-1} : f(I) \to I$, $f^{-1} \in C^0(f(I))$

$\Rightarrow$ f^{-1} derivabile in $f(x_0)$ $\wedge$ $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$

DIM.: $$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = 1/f'(x_0)$$

- PUNTO STAZIONARIO

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $\exists f'(x_0)$

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ è p.to stazionario

- PUNTO CRITICO

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

x_0 è p.to critico se $\begin{cases} f'(x_0) = 0 & \text{(p.to stazionario)} \\ \nexists f'(x_0) \end{cases}$

30 = TEOREMA DI FERMAT

$f: A \to \mathbb{R}$, $I \subset A$, I intervallo

$x_0 \in \mathring{I}$, $\exists f'(x_0)$

x_0 estremale

$\Rightarrow x_0$ p.to stazionario (critico)

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

$f'(x_0) \neq 0$:

1) se $f'(x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_0), & x > x_0 \\ f(x) < f(x_0), & x < x_0 \end{cases}$

quindi $\cancel{f(x_0)}$ x_0 non è p.to di massimo o minimo

2) se $f'(x_0) < 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_0), & x < x_0 \\ f(x) < f(x_0), & x > x_0 \end{cases}$

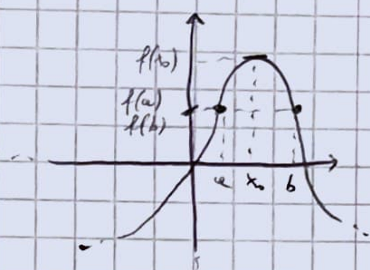
quindi x_0 non è p.to di massimo o minimo

31 = TEOREMA DI ROLLE

$f: A \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset A$, $f \in C^0([a, b])$,

$\exists f'(x) \ \forall x \in (a, b)$, $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \ni f'(x_0) = 0$



DIMOSTRAZIONE

* $f([a,b])$ limitata e continua

$\Rightarrow f([a, b]) = [m, M]$ usando il th. di Weierstrass e il th. dei valori intermedi

1) Se $f(a) = m$ e $f(b) = M$
$ = M \qquad\qquad = m$

$f([a, b]) = \{x \in \mathbb{R} : m \leq x \leq M\} = \{x \in \mathbb{R} : m = x = M\}$

quindi $f([a, b]) = K \Rightarrow$

$\Rightarrow f'([a, x]) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

2) In caso non affermativo ci sarà per forza un punto estremale quindi $x_0 \in (a, b)$ quindi
$\exists x_0 \in (a, b) \ni f'(x_0) = 0$

32 = TEOREMA DI CAUCHY

$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix} : A \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset A$, $\begin{matrix} f \\ g \end{matrix} \in C^0([a,b])$

$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}$ derivabili in (a,b), $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ t.c. } \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DIMOSTRAZIONE

$$h(x) := [g(b)-g(a)]f(x) - [f(b)-f(a)]g(x)$$

$h \in C^0([a,b])$, derivabile in (a,b)

$$h(a) = g(b)f(a) - \cancel{g(a)f(a)} - f(b)g(a) + \cancel{f(a)g(a)} =$$
$$= f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

$$h(b) = \cancel{g(b)f(b)} - g(a)f(b) - \cancel{f(b)g(b)} + f(a)g(b) =$$
$$= f(a)g(b) - g(a)f(b)$$

$h(a) = h(b)$ quindi possiamo sfruttare il Th. di Rolle

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ t.c. } h'(c) = 0$$

quindi

$$f'(c)[g(b)-g(a)] = g'(c)[f(b)-f(a)]$$

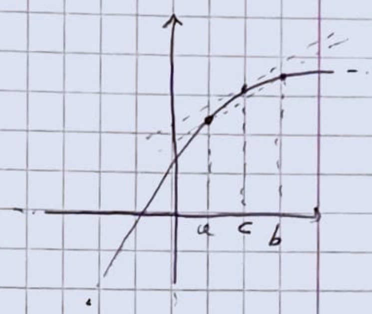
$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

33 = TEOREMA DI LAGRANGE

$f: A \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset A$, $f \in C^0([a,b])$,

f derivabile in (a,b),

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \ni' \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$



DIMOSTRAZIONE

Applico il th. di Cauchy con $g(x) = x$.

$$\exists\, c \in (a,b) \ni' \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \ni' \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

OSSERVAZIONE

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$: coeff. angolare della retta secante

34 = COROLLARIO $\{ f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x) = k \}$

$f: A \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset A$, $\exists\, f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow f(x) = k$

DIMOSTRAZIONE

$x_1 \in [a,b] \ni x$, $x_1 \neq x$

1) $x < x_1 \Rightarrow [x, x_1] \subset [a,b] \Rightarrow \exists\, c \in (x, x_1) \ni' f'(c) = \dfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1 - x}$

quindi $\dfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x)$

2) $x > x_1 \Rightarrow [x_1, x] \subset [a, b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x) \ni' f'(c) = \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(x_1)$

Quindi $\forall x, x_1 \in [a, b]$, $x \neq x_1$: $f(x) = f(x_1)$

35 = CARATTERIZZAZIONE DELLA MONOTONIA MEDIANTE SEGNO DERIVATA

$f : A \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset A$, $f \in C^0([a, b])$

f derivabile in (a, b)

f monotone crescente su $[a, b]$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

DIMOSTRAZIONE $\Rightarrow$ PER ASSURDO

$\exists\, x_0 \in (a, b) \ni' f'(x) < 0$

$\Rightarrow \exists\, V \in I(x_0) \subset (a, b) \ni' \forall x \in V \setminus \{x_0\}$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_0), & x < x_0 \\ f(x) < f(x_0), & x > x_0 \end{cases}$$

Quindi $\exists\, V \in I(x_0) \subset (a, b)$ $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$:

1) se $x < x_0$: $f(x) > f(x_0)$

2) se $x > x_0$: $f(x) < f(x_0)$

Cioè $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \leq x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ non è vera

DIMOSTRAZIONE $\Leftarrow$

$\forall \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in [a, b]$, $x_1 \leq x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$

Prendo $x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1, x_2] \subset [a, b]$

$\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2) \ni' f'(c)(\cancel{b-a}\; x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$

$f'(c) \geq 0$, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

36 $=$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strett. crescente

DIMOSTRAZIONE

$\forall \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in [a, b]$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$

Prendo $\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \in [a, b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1, x_2] \subset [a, b]$

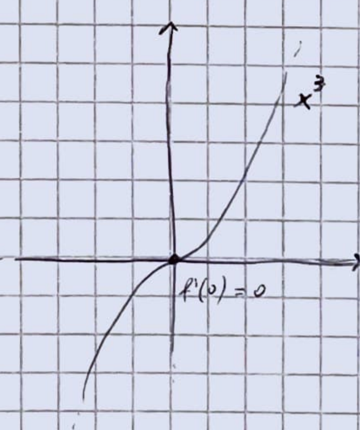
$\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2) \ni' f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$

$\Rightarrow f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- OSSERVAZIONE

f strett. crescente $\not\Rightarrow f'(x) > 0$



__Es.__ x^3 strett. crescente in $\mathbb{R}$

$D(x^3) > 0 \Rightarrow 3x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$

5 - PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE

$f : I \to \mathbb{R}$, F è una qualunque primitiva di f se

$F : I \to \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

$$\int \underbrace{f(x)\,dx}_{\text{f.ne integranda}} := \left\{ F : I \to \mathbb{R} \mid F'(x) = f(x) \ \forall x \in I \right\}$$

37 = LE PRIMITIVE DISTANO DI UNA COSTANTE

Se $\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix} : I \to \mathbb{R}$, $\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix}$ primitive di f $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \, c \in \mathbb{R}$ t.c. $F_1 - F_2 = c$

DIMOSTRAZIONE

$H(x) := F_1(x) - F_2(x)$, $H(x)$ derivabile in I

$H'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$H'(x) = 0 \iff H(x) = c$ costante

38 = LINEARITÀ INTEGRALE INDEFINITO

$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix} : I \to \mathbb{R}$, $\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}$ ammettono primitive

$\forall \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \in \mathbb{R} \quad \int \left(\alpha f + \beta g \right)(x) \, dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

DIMOSTRAZIONE $\left(F'(x) = f(x) , \ G'(x) = g(x) \right)$

$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$

- REGOLE DI INTEGRAZIONE

39 = 1) Integrazione per parti

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

che deriva da:

$$[f(x)\, g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

$$\Rightarrow \int [f(x) g(x)]' = \int f'(x) g(x) + f(x) g'(x)\, dx$$

$$\Rightarrow f(x)\, g(x) = \int f'(x) g(x)\, dx + \int f(x) g'(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$$

40 = 2) Integrazione per sostituzione

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))$$

che deriva da:

$$F'(g(x)) = f(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{perché}$$
$$F'(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\int f(g(x))\, \underbrace{\boxed{g'(x)\, dx}}_{dy} \overset{y = g(x)}{=\!=} \int f(y)\, dy =$$

$$= F(y) + c = F(g(x)) + c$$

41 = TEOREMA DI DE L'HOPITAL

$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix} : (a, b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}$ derivabili in (a, b) , $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \in \{0, \pm\infty\}$

$\exists\, U \in \mathcal{I}^+(a)$ t.c. $\forall x \in U \cap (a, b) : g'(x) \neq 0$

$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \begin{cases} g(x) \neq 0 \\ \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo $\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}$ infinitesimi per $x \to a^+$

$\tilde{f} : [a, b) \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) , & x \in (a, b) \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$

$\tilde{g} : [a, b) \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) , & x \in (a, b) \\ g & \text{se } x = a \end{cases}$

$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}$ derivabili $\Rightarrow$ $\begin{matrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{matrix}$ derivabili

$\begin{matrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{matrix} \in C^0([a, c])$ con $a < c < b$

So che $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, c)$ con $c \gtrsim a$

Posso applicare il Th. di Cauchy in $[a, x]$

$\Rightarrow \exists\, \xi(x) \in (a, x)$ t.c. $\frac{\tilde{f}'(\xi(x))}{\tilde{g}'(\xi(x))} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)}$ 0

$\Rightarrow \frac{\tilde{f}'(\xi(x))}{\tilde{g}'(\xi(x))} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$

Essendo continue so che

$$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

quindi $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \underset{y = \xi(x)}{=} \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \ell$

- APPLICAZIONI DEL TH. DI DE L'HOPITAL

$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \Rightarrow \exists f'(x_0) = \ell$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{1} = \lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0) = \ell$$

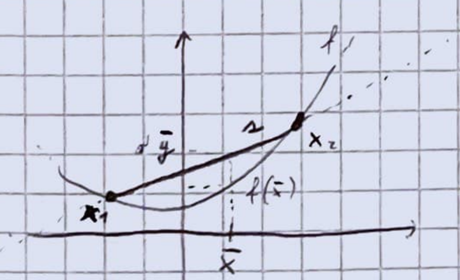
- CONVESSITÀ

$d : \lambda \in [0,1] \mapsto x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ con $x_1 < x_2$

$d([0,1]) = [x_1, x_2]$

$d(\lambda) = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) = x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_1 =$

$= (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2$



$s : \frac{y - f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$

$s : y = f(x_1) + (x - x_1)\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right)$

Nelle f. convesse $f(\bar{x}) \leq \bar{y} = r(\bar{x})$

$$r: x \longmapsto f(x_1) + (x - x_1)\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right)$$

$$\bar{x} \in [x_1, x_2] \Longrightarrow \exists\, d^{-1}(\bar{x}) = \bar{\lambda}$$

$$\bar{x} = \cancel{(1-\bar{\lambda})}\, x_1 + \bar{\lambda}(x_2 - x_1)$$

$$\bar{x} - x_1 = \bar{\lambda}(x_2 - x_1)$$

$$r(\bar{x}) = f(x_1) + \bar{\lambda}\,\cancel{(x_2 - x_1)}\,\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\cancel{x_2 - x_1}}$$

$$= f(x_1) + \bar{\lambda}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) =$$

$$= (1-\bar{\lambda}) f(x_1) + \bar{\lambda} f(x_2)$$

quindi $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$

Nelle f. concave $f(\bar{x}) \geq r(\bar{x})$ quindi

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

43 = CONSEGUENZE CONVESSITÀ

Se $f: I \to \mathbb{R}$ è convessa

$\Rightarrow$ 1) $\forall x \in \mathring{I}: \exists f'_+(x) \in \mathbb{R} \wedge \exists f'_-(x) \in \mathbb{R}$

2) $\forall x \in \mathring{I}: f'_+(x) \geq f'_-(x)$

3) $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ sono crescenti

44 = Se $\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists f''(x_0) \in \mathbb{R}$

$f: I \to \mathbb{R}$, derivabile in $J \subset I$, J intervallo

$f': J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$

f' derivabile $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$

$l = (f')'(x_0) = f''(x_0) = D^2 f(x_0) = \ddot{f}(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$

- C^0, C^1, C^n, C^∞

$C^0(J) := \{ f: J \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}$

$C^1(J) := \{ f: J \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile in } J,\ f' \in C^0(J) \}$

$C^2(J) := \{ f: J \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile 2 volte in } J,$
$f'' \in C^0(J),\ f' \in C^1(J) \}$

$C^n(J) := \{ f: J \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile n volte in } J,$
$f^{(n)} \in C^0(J),\ f^{(n-1)} \in C^1(J) \ldots f' \in C^{n-1}(J) \}$

$C^\infty(J) := \{ f: J \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile } \infty \text{ volte in } J,$
$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)} \in C^0(J) \}$

oss. Se $f \in C^n(I) \Rightarrow f \in C^{n-1}(I), C^{n-2}(I) \ldots C^0(I)$

oss. $C^\infty \underset{\neq}{\subset} C^n \underset{\neq}{\subset} C^{n-1} \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} C^1 \underset{\neq}{\subset} C^0$

45 = f CONVESSA $\iff$ $f'' > 0$

$\Rightarrow$ DIMOSTRAZIONE

f è convessa $\iff$ f' è crescente

f' è crescente $\Rightarrow (f')' > 0 \Rightarrow f'' > 0$

- P.TO DI FLESSO

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ è p.to di flesso se

f è strett. convessa / concava in $I^-(x_0) \cap (a,b)$ e/o

è strett. concava / convessa in $I^+(x_0) \cap (a,b)$.

46 = x_0 P.TO DI FLESSO $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE

f' crescente a dx, decrescente a sinistra

$\Rightarrow f'$ avrà max in x_0 $\Rightarrow$ x_0 p.to estremale

$\Rightarrow$ Usando il Th. di Fermat $f''(x_0) = 0$

- TIPI DI PT. FLESSO

- TG. ORIZZONTALE se $f'(x_0) = 0$
- TG. VERTICALE se $f'(x_0) = \pm\infty$
- ASCENDENTE se $f'(x_0) > 0$
- DISCENDENTE se $f'(x_0) < 0$

- DERIVATE ELEMENTARI

1) POTENZA $D\,x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\alpha} - x^{\alpha}}{h} = \frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{\frac{h}{x}\cdot x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

2) $D\, a^{x} = a^{x} \log a$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^{x}}{h} = \lim_{h\to 0} a^{x}\left[\frac{a^{h}-1}{h}\right] = \lim_{h\to 0} a^{x} \log a$$

3) $D \log_a x = \frac{1}{x \log a}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \frac{\log_a\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) - \log_a x}{h} =$$

$$= \frac{\log_a\left(\frac{x\left(1+h/x\right)}{x}\right)}{h} = \frac{\log_a\left(1+h/x\right)}{\frac{h}{x}\cdot x} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \log a}$$

4) $D \operatorname{sen} x = \cos x$

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen} x\,\overbrace{(\cos h - 1)}^{\to 0}}{h} + \frac{\overbrace{\operatorname{sen} h}^{\to 1} \cos x}{h}$$

5) $D \cos x = -\operatorname{sen} x$

6) $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

7) $D \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{x^2+1}$ $\quad D \operatorname{arcctg} x = -\frac{1}{x^2+1}$

- # FORMULA DI TAYLOR

$$f: I \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathring{I}, \quad \exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I: f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

approssimazione lineare $= P_1(x)$

Analogamente, per f derivabile n volte:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$1 = \underline{P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n'(x_0) = f'(x_0) \quad \dots \quad \left(P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\right)}$$

DIM.

$$P_n(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x_0 - x_0)}_{0} + \dots = f(x_0)$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0) + f''(x_0)(x_0 - x_0) + \dots = f'(x_0)$$

$$P_n''(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right)_{x \neq x_0}\right)_{|x = x_0} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k (x - x_0)^{k-1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\, \cancel{k}}{\cancel{k} \cdot (k-1)!}(x - x_0)^{k-1}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right)_{|x = x_0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)\, \cancel{k}}{\cancel{k}(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+2)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \Big|_{x = x_0} = f''(x_0) + 0 + \dots = f''(x_0)$$

...

$2 = \underline{f(x) - P_n(x_0) = o((x-x_0)^n)}$

HP. $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivabile n volte in x_0

$\Rightarrow$ $f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$

cioè $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

DIM.

f derivabile n volte in x_0

$\Rightarrow$ $\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in V$ sono ben definite tutte le derivate di ordine $n-1, n-2, \ldots 2, 1$

cioè $\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in V \quad \exists\, f^{(k)}(x_0) \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \{1 .. n-1\}$

$g(x) := (x-x_0)^n$, $g'(x) = n(x-x_0)^{n-1}$ ...

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq x_0$

$g^{(k)}(x) \neq 0 \quad \forall x \neq x_0 \wedge \forall k \in \{1..n\}$

posso quindi applicare De L'Hopital

$\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - P_n'(x_0)}{n(x-x_0)^{n-1}}$

$\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1) \ldots 2 (x-x_0)}$

$P_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0)$

$= \lim_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n(n-1) \ldots 2 (x-x_0)} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}}_{\to f^{(n)}(x_0)} - f^{(n)} \cancel{f}(x_0) =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot 0 = 0$$

3 = CARATTERIZZAZIONE P.TO ESTREMALE TRAMITE $f^{(n)}$

HP) $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivabile n volte in x_0

Se $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ e $\left(f^{(i)}(x_0) = 0\right)_{i \in \{1 \dots n-1\}}$

- n dispari $\Rightarrow$ x_0 non è estremale
- n pari
  - > 0 x_0 minimo locale forte
  - < 0 x_0 massimo locale forte

DIM.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

$$f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x - x_0)} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Supponiamo che $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in J(x_0) \setminus \{x\}$

$$f(x) - f(x_0) > 0$$

$$f(x) - f(x_0) > \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

$$f(x) - f(x_0) > (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} \right]$$

Se n è pari $\Rightarrow (x - x_0)^n \geq 0$ (> 0 visto che $x \in J(x_0) \setminus \{x_0\}$)

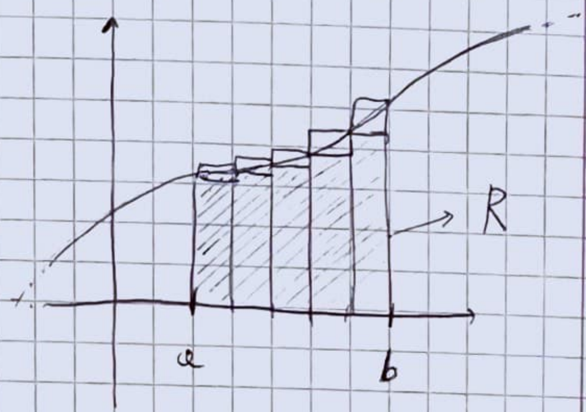
$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} \xrightarrow{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \to > 0$$

POLINOMIO DI MC LAURIN

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$f(x) = P_{n,0}(x) + o(x^n)$$

INTEGRALE DI RIEMANN



$R := \{(x,y) : x \in [a,b] \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$

R rettangoloide

$D([a,b]) := \{(t_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \forall i : t_i \in [a,b] \wedge t_0 < t_1 \ldots < t_n\}$

D suddivisione di $[a,b]$

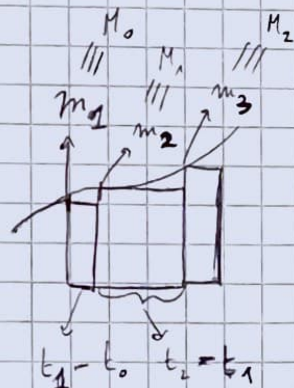
insieme delle parti

$\mathcal{D}([a,b]) := \{D \in \mathcal{P}([a,b]) \mid D$ è suddivisione di $[a,b]\}$

f limitata, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$m := \inf f$, $M := \sup f$

SOMMA INFERIORE E SUPERIORE



$$s(f,D) := \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$

$$S(f,D) := \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$$

- OSSERVAZIONE SUGLI INF e SUP

Se $A \subset B \subset \mathbb{R}$: $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

Se $A \subset B \subset C \subset \mathbb{R}$

$f(C) \subset \mathbb{R}$ $\qquad f(A) \subset f(B) \subset f(C) \subset \mathbb{R}$

dominio

quindi $\inf_{t \in A} f(t) = \inf f(A) \geq \inf f(B) = \inf_{t \in B} f(t)$

$M_i = \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} f(t) \leq \sup f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow M_i \in \mathbb{R}$

$m_i = \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} f(t) \geq \inf f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow m_i \in \mathbb{R}$

4 = RELAZIONE TRA s ED S

$\mathcal{Q} := \{ s(f, D) : D \in \mathcal{D}([a,b]) \} \subset \mathbb{R}$

$\mathcal{B} := \{ S(f, D) : D \in \mathcal{D}([a,b]) \} \subset \mathbb{R}$

1) PROP $\mathcal{Q} \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$

DIM. $\forall \mathcal{D}([a,b]) : [a,b] \subset \mathcal{D}([a,b])$

2) PROP. $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{B}$ sono separati

TESI $\forall_{y \in \mathcal{B}}^{x \in \mathcal{Q}} : x \leq y$

DIM $\bar{D} \in \mathcal{D}([a,b]) : s(f, \bar{D}) \leq S(f, \bar{D})$ poiché

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) \Leftarrow m_i \leq M_i \quad \forall i$$

cardinalità

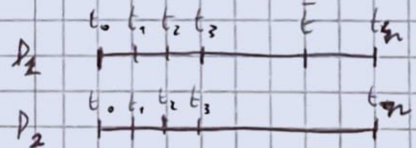
$D_1, D_2 \in \mathcal{D}([a,b])$ con $|D_1| \geq |D_2|$

(prendiamo il caso particolare $D_2 \subset D_1$)

$$s(f, D_2) \leq s(f, D_1) \leq S(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

$D_1 \in \mathcal{D}([a,b])$, $D_1 = D_2 \cup \{\bar{t}\}$

con $\bar{t} \in (a,b)$, $\bar{t} \notin D_1$



$$s(f, D_2) \leq s(f, D_1)$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} m_i (t_i - t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n_2} m_i (t_i - t_{i-1})$$

$$\cancel{m_0 (t_1 - t_0)} + \ldots + \bar{m} (\bar{t} - t_3) + m_n (t_n - \bar{t}) \geq$$
$$\cancel{m_0 (t_1 - t_0)} + \ldots + \bar{m}_n (t_n - t_3)$$

$$\bar{m} (\bar{t} - t_3) + (\bar{m}_n + (m_n - \bar{m})) (t_n - \bar{t}) \geq \bar{m}_n (t_n - t_3)$$

$$\bar{m} (\bar{t} - t_3) + \bar{m} (t_n - \bar{t}) + (m_n - \bar{m}) (t_n - \bar{t}) \geq$$
$$\bar{m}_n (t_n - t_3)$$

$$\cancel{\bar{m} (t_n - t_3)} + (m_n - \bar{m}) (t_n - \bar{t}) \geq \cancel{\bar{m} (t_n - t_3)}$$

$$\underbrace{(m_n - \bar{m})}_{>0} \underbrace{(t_n - \bar{t})}_{>0} \geq 0$$

perché $m_n = \inf\limits_{t \in [\bar{t}, t_n]} f(t)$, $\bar{m} = \inf\limits_{t \in [t_3, t_n]} f(t)$

$$\underbrace{[\bar{t}, t_n]}_{A} \subset \underbrace{[t_3, t_n]}_{B} \Rightarrow \inf_{t \in A} f(t) \geq \inf_{t \in B} f(t)$$

$$m_n \geq \bar{m}$$

- INTEGRABILITÀ (SECONDO RIEMANN)

$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ CONTIGUI ($\Leftrightarrow \sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}$)

$\Rightarrow$ f è INTEGRABILE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}$$

- INTEGRALE F. COSTANTE

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a) \quad \text{con } f(x) = c \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$$

* CONTINUITÀ $\Rightarrow$ INTEGRABILITÀ

$$f \in C^0([a,b]) \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$$

$\mathcal{R}([a,b]) := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ limitata e integrabile in $[a,b] \}$

- AMPIEZZA DI UNA SUDDIVISIONE

$D \in \mathcal{D}([a,b])$, $|D|$ è il massimo delle ampiezze.

$$|D| = \max_{i \in \{1..n\}} (t_i - t_{i-1})$$

oss $\forall \varepsilon > 0 \;\exists D \in \mathcal{D}([a,b]) \ni' |D| < \varepsilon$ $\left(\frac{b-a}{n} < \varepsilon \Rightarrow b-a < n\varepsilon \right)$

oss) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ contigui $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists \, {}^{y \in \mathcal{B}}_{x \in \mathcal{A}} \ni' y - x < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists \, {}^{D_1}_{D_2} \in \mathcal{D}([a,b]) \ni' S(f, D_1) - s(f, D_2) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists D \in \mathcal{D}([a,b]) \ni' S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$

quindi $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists D \in \mathcal{D}([a,b]) \ni' S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$

s = f CRESCENTE $\Rightarrow$ f INTEGRABILE

$\varepsilon > 0$, considero $\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

Prendo $D \in \mathcal{D}([a,b])$ t.c. $|D| < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$$

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

$\leq |D|$

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i) - f(t_{i-1})\big)(t_i - t_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i) - f(t_{i-1})\big) \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \big[f(t_i) - f(t_{i-1})\big] \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \left(\cancel{f(t_1)} - f(a) + f(t_2) - \cancel{f(t_1)} + \dots + f(b) \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \big(f(b) - f(a)\big) = \varepsilon \quad \text{quindi}$$

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$$

- PROPRIETÀ

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ ADDITIVITÀ

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

3) $f \leq g$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

in $[a,b]$

4) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

5) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

- **MEDIA INTEGRALE**

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \frac{1}{b-a} \leq M$$

$$f \in C^0([a,b]) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

grazie al Th. dei valori intermedi + Th. di Weierstrass

6 = **TH. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE**

Hp) $f \in C^0([a,b]) \subset R([a,b])$

$x_0 \in [a,b]$

$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du$ con $F_{x_0}: [a,b] \to \mathbb{R}$ f. integrale

di f nulla in x_0

Th) F derivabile $\wedge$ $F'(x) = f(x)$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(u)\,du - \int_{x_0}^{x} f(u)\,du}{h} =$$

$$= \frac{\int_{x_0}^{x} f(u)\,du + \int_{x_0}^{x+h} f(u)\,du - \int_{x_0}^{x} f(u)\,du}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(u)\,du}{h}$$

$$\exists\, c \in (x, x+h) \text{ t.c. } f(c) = \frac{\int_x^{x+h} f(u)\,du}{h}$$

$c \in (x, x+h) \Rightarrow c \to x$ se $h \to 0^+$

quindi $f(c) \to f(x) \Rightarrow f(x) \to \dfrac{\int_x^{x+h} f(u)\,du}{h} = F'(x)$

7 = COROLLARIO

Hp) $f \in C^0([a,b])$, $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ primitiva di f

Th) $\int_a^b f(u)\,du = G(b) - G(a) =: G(x)\Big|_a^b$

Dim) $F_a(x) = \int_a^x f(u)\,du$

$F_a(b) = \int_a^b f(u)\,du + c$

$F_a(a) = 0 + c$

$F_a(b) = \int_a^b f(u)\,du + F_a(a)$

- INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int_a^b f(u) g'(u)\,du = f(u) g(u)\Big|_a^b - \int_a^b f'(u) g(u)\,du$$

- INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(t))\, g'(t)\,dt$$

- OSSERVAZIONI SULLA SIMMETRIA

$\int_{-a}^{a} f(u)\,du = 2\int_0^a f(u)\,du$ se $f(-x) = f(x)$ pari

$\int_{-a}^{a} f(u)\,du = 0$ se $f(-x) = -f(x)$ dispari

DIM $\int_{-a}^{a} f(u)\,du = \int_{-a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(u)\,du =$

$= \int_{a}^{0} -f(-u) + \int_{0}^{a} f(u)\,du =$

$= -\int_{a}^{0} f(u) + \int_{0}^{a} f(u)\,du =$

$= 2\int_{0}^{a} f(u)\,du$

$$\int_{-a}^{a} f(u)\,du = \int_{a}^{0} -f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(u)\,du =$$

$$= \int_{a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du\,(1-1) = 0$$

8 = CONTINUITÀ F. INTEGRALE

Th) $F_{x_0} : [a,b] \to \mathbb{R} \in C^0([a,b])$

Dim) $\bar{x} \in [a,b]$

$$\lim_{x \to \bar{x}} F_{x_0}(x) - F_{x_0}(\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \bar{x}} \int_{x_0}^{x} f(u)\,du - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(u)\,du = \lim_{x \to \bar{x}} \int_{x}^{\bar{x}} f(u)\,du \to 0$$