LEGENDA

1. Introduzione

- Cos'è un sistema
- Orientamento del modello
- Segnale
- Riferimento
- Controllo ad anello aperto
- Controllo ad anello chiuso
- Retroazione
- Schema a blocchi di un sistema di controllo
- Tassonometria dei sistemi
    - statico
    - dinamico
    - causali
    - non causali
    - tempo invarianti
    - tempo varianti
    - lineare
    - non lineare
    - tempo continuo
    - tempo discreto
- PSE
- Risposta libera
- Risposta forzata

2. SEGNALI CAUSALI

- Segnali canonici
    - Impulso di durata finita
    - Delta di Dirac
    - Gradino unitario
    - Rampa unitaria
    - Rampa parabolica
- Relazione tra segnali canonici
- Risposta all'impulso
- Integrale di convoluzione

3. TRASFORMATA DI LAPLACE

- Proprietà della trasformata
- Esempi di trasformata
- Th. valor finale
- Th. valor iniziale
- Trasformata della convoluzione
- Trovare G(s) senza conoscere g(t)
- Proprietà FDT
- Poli e zeri
- Rappresentazione della f.d.t.
- Mappa poli-zeri
- Velocità del sistema
- Antitrasformata di Laplace
- Calcolo di k_i
- Caso di poli complessi coniugati
- Poli con molteplicità > 1
- Calcolare la risposta forzata a δ(t) conoscendo G(s)
- Th. dei residui
- Schema a blocchi

4. SISTEMI DI PRIMO/SECONDO ORDINE

- Sistema del primo ordine
- Analisi sistema primo ordine privo di zeri
- Analisi della risposta
- Tempo di assestamento
- Tempo di salita
- Tempo di ritardo
- Risposta alla rampa
- Sistemi del primo ordine con uno zero
- Sistema del secondo ordine
- Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine privo di zeri
- Inviluppi
- Massimi e minimi locali
- Tempo di picco
- Tempo di salita
- Tempo di assestamento
- Luoghi a δ e ω_n costante
- Massima sovraelongazione percentuale
- Sistemi del secondo ordine con uno zero

5. STABILITÀ

- Semplicemente stabile
- Asintoticamente stabile
- Instabile
- Classificazione della stabilità in base ai poli di G(s)
- Analisi stabilità sistema ad anello chiuso
- Lemma di Routh
- Criterio di Routh-Hurwitz
- Th. Routh-Hurwitz
- Stabilità di un sistema con parametri

6. ERRORI E DISTURBI

- Precisione di sistemi di controllo a regime permanente
- Errore di posizione
- Errore di velocità
- Errore di accelerazione
- Errore a regime permanente nei sistemi di controllo a retroazione unitaria
- Reiezione dei disturbi a regime
- Disturbi sul ramo di retroazione
- Tecnica di precompensazione dei disturbi
- Sensibilità alle variazioni parametriche

7. LUOGO DELLE RADICI

- Regola delle fasi
- Eq. di taratura
- Regole di Evans

Cos'è un SISTEMA?

È un complesso di parti collegate tra di loro opportunamente dove è possibile distinguere delle grandezze soggette a variazioni nel tempo (dette variabili)

Orientamento del modello $\quad \text{CAUSE} \rightrightarrows \boxed{\text{SISTEMA}} \rightrightarrows \text{EFFETTI}$

Si parla di ORIENTAMENTO di un modello quando avviene la determinazione delle cause e degli effetti di un sistema.

Le cause si dicono INGRESSI $u_i(t)$
Gli effetti si dicono USCITE $y_i(t)$

Gli ingressi possono essere:
- manipolabili $u_i(t)$
- non manipolabili (disturbi) $d_i(t)$

Segnale È una funzione che esprime il valore di una variabile assunto nel tempo.

$f: T \to \mathbb{R}$

Riferimento Esprime il segnale voluto come uscita.
È un segnale che esprime l'andamento desiderato di $y(t)$
Se $r_i(t)$ è una costante si parla di SETPOINT

Obiettivo del controllo: Progettare un ~~uscita~~ sistema che garantisca che ciascuna uscita $y_i(t)$ insegua il riferimento $r_i(t)$ indipendentemente dai disturbi $d_i(t)$.

Ci sono 2 sottoproblemi sulle quali si basa l'automazione:

1. inseguimento del riferimento;
2. reiezione dei disturbi.

Idealmente $y(t) = K_c\, r(t)$ e $e(t) = 0$ $\forall t$

K_c è la costante di proporzione, $e(t)$ è il segnale dell'errore

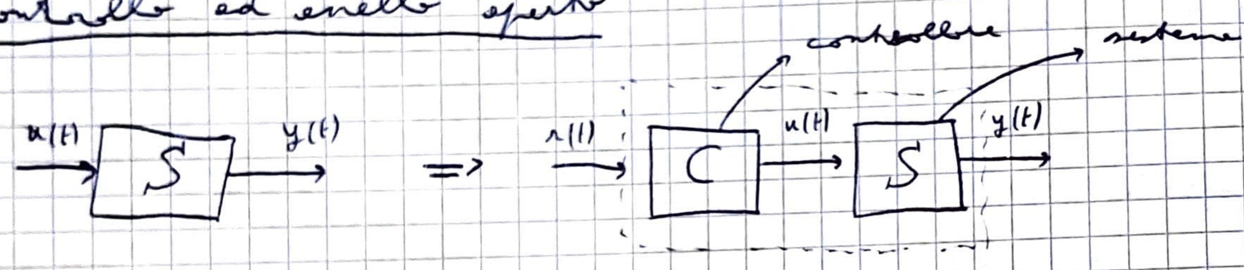
$$e(t) := K_c\, r(t) - y(t)$$

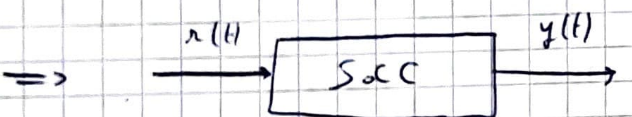
Se $e(t) = 0$ il problema è risolto.

Se il ref. è costante (caso del SETPOINT) si parla di problema di regolazione.

Se il ref. è variabile si parla di controllo.

Controllo ad anello aperto

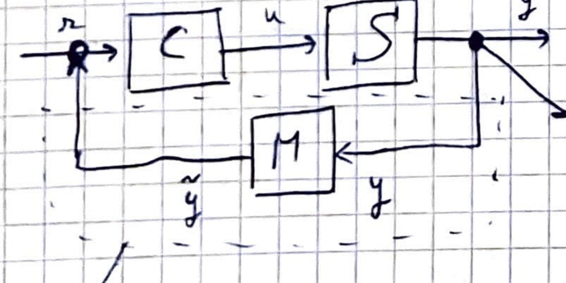




SoC = sistema di controllo

L'anello aperto ha poco controllo del sistema.
Viene dato un obiettivo e conoscendo lo stato iniziale possiamo risolvere il problema solo ed esclusivamente in assenza di disturbi.

Controllo ad anello chiuso



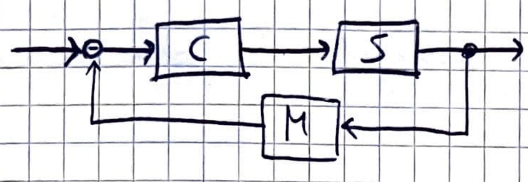
p.to di prelievo

M è il sensore

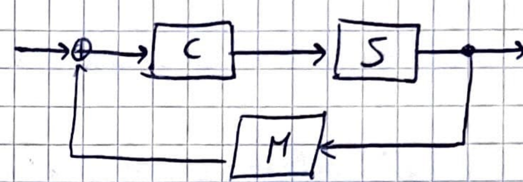
ramo di retroazione
(catena)

Retroazione

Un sistema ad anello chiuso può essere a retroazione negativa (positiva) se interrompendo l'anello in qualunque p.to e inserendo una perturbazione a valle dell'interruttore, questa ritorna a monte dell'interruzione con segno contrario (stesso segno)



RETROAZIONE NEGATIVA



RETROAZIONE POSITIVA

Es 1 $T = 26°C$ $\quad \bar{T} = 25°C$ $\quad e = 1°C \Rightarrow u = -1°C$ abbassa (1)

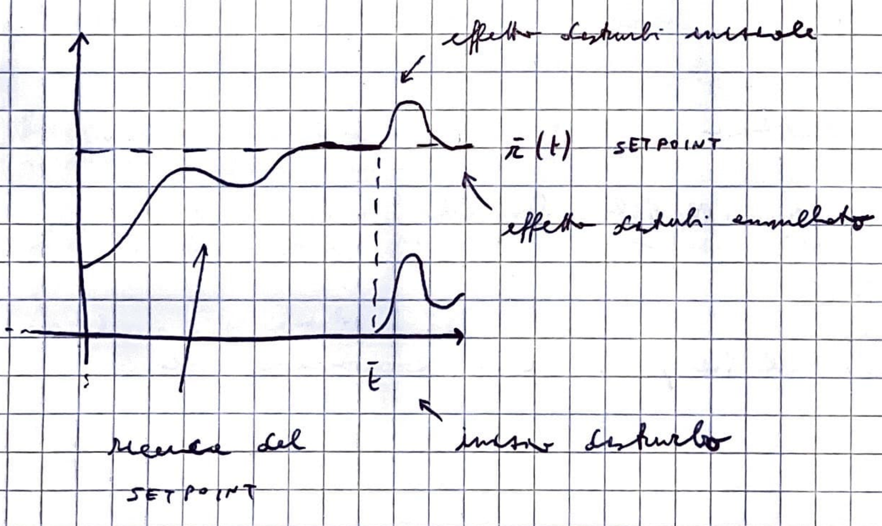
$T = 24°C$ $\quad \bar{T} = 25°C$ $\quad e = -1°C \Rightarrow u = 1°C$ alza (1)

Questa è la retroazione negativa dove $u = -e$

Es 2 $T = 26°C$ $\quad \bar{T} = 25°C$ $\quad e = 1°C \Rightarrow u = 1°C$ alza (1)

$T = 24°C$ $\quad \bar{T} = 25°C$ $\quad e = -1°C \Rightarrow u = -1°C$ abbassa (1)

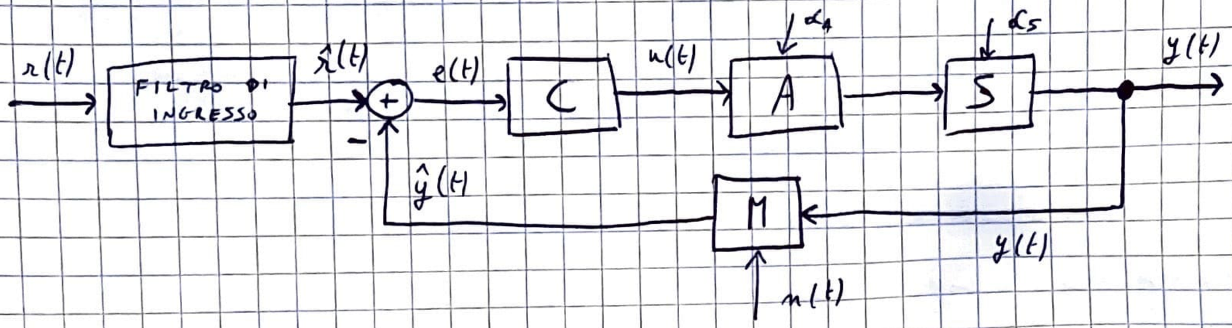
Questa è la retroazione positiva dove $u = e$



→ Non sarebbe possibile senza l'anello chiuso

La retroazione è usata ovunque. Basta avere un sensore per avere retroazione (a patto che venga progettato)

Schema a blocchi di un sistema di controllo



⊕ è il nodo sommatore.

$\hat{y}(t)$ è la stima dell'uscita (quella misurata tramite sensori)

$\hat{r}(t)$ è il riferimento scalato

d_A è il disturbo che agisce sull'attuatore

d_S è il disturbo che agisce nel sistema

$n(t)$ è il disturbo sulle misure "rumore" (noise)

ATTUATORE + SISTEMA = IMPIANTO (PLANT)

Tassonometria dei sistemi

- STATICO se la sua uscita al tempo $\bar{t}$ dipende solo dall'ingresso al tempo $\bar{t}$

- DINAMICO se non è statico
Sono dinamici i sistemi modellabili tramite relazioni integro-differenziabili.
Per conoscere l'uscita al tempo $\bar{t}$ devi conoscere le condizioni iniziali.

- CAUSALI se l'uscita al tempo $\bar{t}$ non dipende da valori futuri dell'ingresso. C'è un nesso di causa-effetto.

- NON CAUSALI se non sono causali.

- TEMPO-INVARIANTI se e solo se l'uscita prodotta dal sistema in risposta ad un ingresso $\bar{u}$ ritardato di $\tau > 0$ secondi è pari all'uscita senza ritardo all'ingresso $\bar{u}$.
Indica che il sistema non dipende dal momento in cui viene utilizzato e/o dalle condizioni o eventi precedenti.

- TEMPO-VARIANTE se non è tempo-invariante

- LINEARE se vale il PSE
- NON LINEARE se non vale il PSE

- TEMPO CONTINUO se t varia con continuità ($t \in \mathbb{R}$)
- TEMPO DISCRETO se t varia in un insieme con relazione $t = k t_0$ con $k \in \mathbb{N}$ (t_0 tempo di campionamento)

Principio di sovrapposizione degli effetti (PSE)

Applico separatamente $u_i(t)$ ingressi e produco $y_i(t)$ uscite.
Fisso n costanti k_i.
Applicando $u(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(t)$ risulta che l'uscita $y(t)$ sarà pari a $\sum_{i=1}^{n} k_i y_i(t)$.

Vale solo per sistemi lineari

Risposta libera e forzata

Le soluzioni di un'eq. differenziale $y(t)$ si può scindere in 2 contributi:

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

$y_\ell(t)$ è la risposta libera ($u(t) = 0$)
$y_f(t)$ è la risposta forzata (C.I. nulle)
y è la risposta completa.

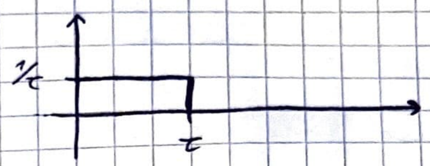
Segnale causale

È causale se $x(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$

Segnali canonici

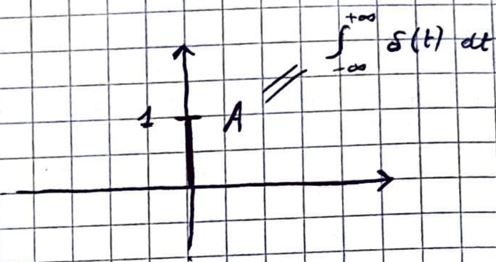
- IMPULSO DI DURATA FINITA

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1/\tau & 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(t)\, dt = 1$$

- DELTA DI DIRAC



$$\delta(t) \triangleq \lim_{\tau \to 0} p_\tau(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Proprietà:

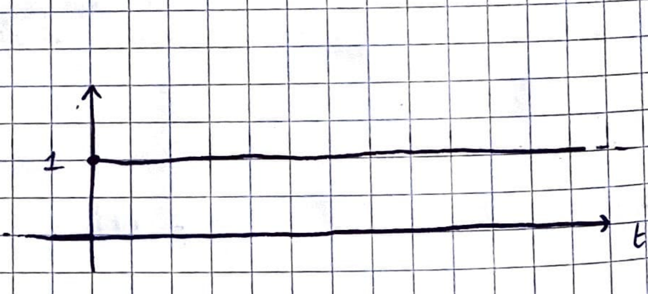
1. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\, dt = 1$ (Misura)
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, f(t)\, dt = f(\tau)$ (Campionamento)

Dim $\quad \delta(t-\tau)\, f(t) = \delta(t-\tau)\, f(\tau)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, f(\tau)\, dt = f(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, dt = f(\tau)$$

- GRADINO UNITARIO

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Qualsiasi ingresso costante a tratti può essere espresso come comb. lineare di segnali a gradino opportunamente ritardati nel tempo.

$$P_\tau(t) = 1(t) \cdot \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau}\, 1(t-\tau)$$

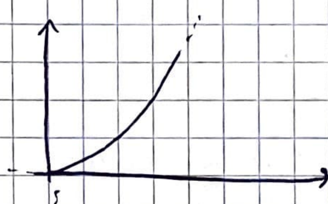
- RAMPA UNITARIA

$$f(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = t \cdot 1(t)$$

- RAMPA PARABOLICA

$$f(t) = \begin{cases} t^2/2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$f(t) = \frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$$

Relazioni tra segnali canonici

$$\delta \underset{d/dt}{\overset{\int}{\rightleftarrows}} 1(t) \underset{d/dt}{\overset{\int}{\rightleftarrows}} t \cdot 1(t) \underset{d/dt}{\overset{\int}{\rightleftarrows}} \frac{t^2}{2}\, 1(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\bar{t}>0} \delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0^-} \delta(t)\, dt + \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt + \int_{0^+}^{\bar{t}} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\bar{t}<0} \delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\bar{t}} \delta(t)\, dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\bar{t}} \delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \bar{t} \geq 0 \\ 0 & \bar{t} < 0 \end{cases} = 1(\bar{t})$$

$$\int_{-\infty}^{\bar{t}} 1(t)\, dt = \begin{cases} \bar{t} & \bar{t} \geq 0 \\ 0 & \bar{t} < 0 \end{cases} = \bar{t} \cdot 1(\bar{t})$$

$$\int_{-\infty}^{\bar{t}} t \cdot 1(t)\, dt = \frac{\bar{t}^2}{2} \cdot 1(\bar{t})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{t^2}{2} \cdot 1(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{t^2}{2} & t \geq 0 \\ \frac{d}{dt}\, 0 & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = t \cdot 1(t)$$

$$\frac{d}{dt}\, t \cdot 1(t) = 1(t) \qquad \frac{d}{dt}\, 1(t) \triangleq \delta(t)$$

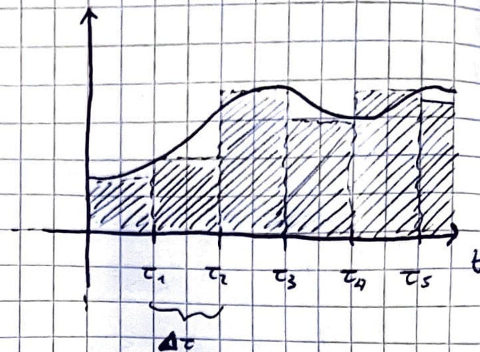
La derivata generalizzata di $1(t)$ è $\delta(t)$

Risposta all'impulso

$g(t)$ è la risposta forzata di un sistema LTI a $\delta(t)$.
$g(t)$ è chiamata risposta all'impulso

Integrale di convoluzione

Approssimo $u(t)$ con un segnale costante a tratti espresso come somma di impulsi.



$$u(t) = \sum_i P_{\Delta\tau}(t-\tau_i)\, u(\tau_i)\, \Delta\tau$$

$$u(t) = \sum_i \begin{cases} \frac{1}{\cancel{\Delta\tau}} u_i(\tau_i) \cancel{\Delta\tau} & t \in [\tau_i, \underbrace{\tau_{i+1}}_{\tau_i+\Delta\tau}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} u(\tau_i) \left[1(t-\tau_i) - 1(t-\tau_{i+1}) \right]$$

Se $\Delta\tau \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta\tau}\left(1(t-\tau_i) - 1(t-\tau_{i+1})\right) = \delta(t-\tau_i)\Delta\tau$

Se $g(t)$ è la risposta a $\delta(t)$

$\Rightarrow \Delta\tau\, g(t-\tau_i)$ è la risposta a $\Delta\tau\, \delta(t-\tau_i)$

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} u(\tau_i)\left[1(t-\tau_i) - 1(t-\tau_{i+1})\right] \xlongequal{\Delta\tau \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} u(\tau_i)\, \delta(t-\tau_i)\Delta\tau$$

Per il PSE $y_f(t) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} g(t-\tau_i)\, u(\tau_i)\, \Delta\tau$

Visto che $\Delta\tau \to 0 \Rightarrow n \to \infty \Rightarrow \sum_0^{\infty} \to \int_0^{+\infty}$

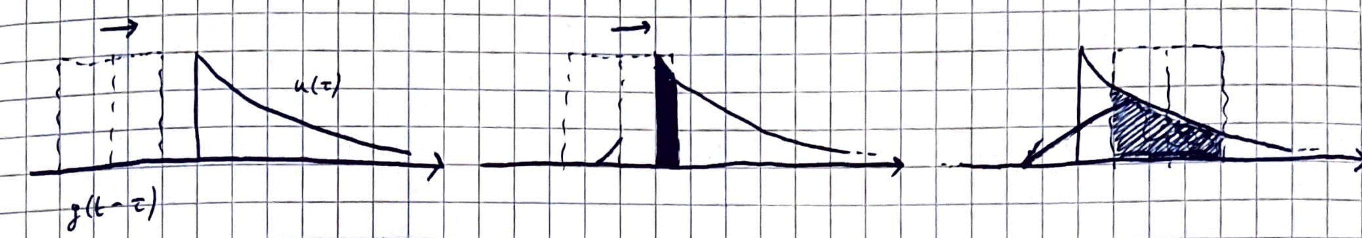
$$y_f(t) = \int_0^{\infty} u(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = u(t) * g(t) = g(t) * u(t)$$

OPERATORE CONVOLUZIONE

$$= \int_0^t u(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau + \int_t^{\infty} u(\tau)\, \underbrace{g(t-\tau)}_{g(x<0)=0}\, d\tau$$

La convoluzione corrisponde al prodotto tra segnali.

$$y_f(t) = \int_0^t u(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$



Trasformata di Laplace

$\int_0^\infty$

L'operatore "Trasformata unilatera di Laplace" è una trasformazione che associa ad una funzione causale $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $F(s): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$ con $e^{-st} \to 0$

quando $t \to \infty$ $\quad (s \in \mathbb{C},\ s = \sigma + j\omega)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, \delta(t)\, dt = e^{-s0} = e^{0} = 1$$

sfruttando la proprietà del campionamento $\delta(t) = \delta(t-0)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \Delta(s) = 1$$

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, 1(t)\, dt = -\frac{1}{s}\int_0^{\infty} -s\, e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{s}(0-1) = 1/s$$ (solo se $\mathrm{Re}(s) > 0$)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} = \lim_{t\to\infty} \cancel{e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t}}$$

$$|e^{-st}| = |e^{-\sigma t}|\,|e^{-j\omega t}| = |e^{-\sigma t}| = \begin{cases} 0 & \sigma > 0 \\ 1 & \sigma = 0 \\ \infty & \sigma < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s} \quad \forall\, s = \sigma + j\omega \ ;\ \sigma > 0$$

Proprietà della Trasformata

1. Linearità

$$\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \beta \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

Dim viene dalla linearità dell'integrale

2. $$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Dim $$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t-\tau)\, e^{-st}\, dt \overset{\substack{dT = dt \\ T = t-\tau}}{=\!=\!=} \int_{0^- -\tau}^{\infty} f(T)\, e^{-s(T+\tau)}\, dT =$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(T)\, e^{-s\tau} e^{-sT}\, dT = e^{-s\tau} \int_{0}^{\infty} f(T)\, e^{-sT}\, dT = e^{-s\tau} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

3. $$\mathcal{L}\{f(t)\, e^{at}\} = F(s-a)$$

Dim $$\mathcal{L}\{f(t)\, e^{at}\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{at} e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-(s-a)t}\, dt =$$

$$\overset{z = s-a}{=\!=\!=} \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt = F(z) = F(s-a)$$

4. $$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Dim $$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = F(s)$$

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t)\, dt =$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, (-t)\, e^{-st}\, dt = -\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\}$$

$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$, si continua per induzione

5. $$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-)$$

Se C.I. sono tutte nulle $\mathcal{L}\left\{\dfrac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s)$

6. $$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

Esempi di trasformate

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\,1(t)\} = \frac{1}{s}\Big|_{s+a} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{t\cdot 1(t)\} = \frac{d}{ds}\,\frac{1}{s}\,(-1)^1 = -\left(-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\cdot 1(t)\right\} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\,\frac{1}{s}\,(-1)^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{s^3} = \frac{1}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(\omega t)\,1(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\,1(t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2j}\,\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\,1(t)\} - \frac{1}{2j}\,\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\,1(t)\} =$$

$$= \frac{1}{2j}\,\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j}\,\frac{1}{s+j\omega} = \frac{1}{2j}\left(\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\,1(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\,1(t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\,1(t)\} + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\,1(t)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-\omega j} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+j\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Th. valor finale

Sia $f(t)$ un segnale causale al quale è associato $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

Se $\exists \lim_{t\to\infty} f(t) \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

e $\nexists$ $sF(s)$ ha tutte le singolarità nel semipiano sinistro ($\mathrm{Re}(s) < 0$) (singolarità sono i valori di s per cui $sF(s) \to \infty$)

$\Vert$ poli

Th. valor iniziale

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Trasformata della convoluzione

$$h(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{0^-}^{t} f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau$$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau \right] e^{-st}\, dt =$$

$$= F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

So che $y_f(t) = g(t) * u(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) \qquad \xrightarrow{U(s)} \boxed{G(s)} \xrightarrow{Y(s)}$$

Trovare $G(s)$ senza conoscere $g(t)$

1) $G(s) = \dfrac{Y_f(s)}{U(s)}$

2) Conoscendo il modello matematico del sistema

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u(t) \quad \text{con} \quad \underbrace{n \geq m}_{\text{sistema causale}} \wedge \; a_i, b_i \in \mathbb{R} \;\; \forall i$$

Applico Laplace $\mathcal{L}\{\}$

$$\mathcal{L}\left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) \right\} = \mathcal{L}\left\{ \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u(t) \right\}$$

C.I. nulle

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i\, \mathcal{L}\{D^i y(t)\} = \sum_{i=0}^{m} b_i\, \mathcal{L}\{D^i u(t)\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{d^{i-j-1}}{dt^{i-j-1}} y(0^-)\, s^j \right) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i\, U(s)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{n} a_i s^i \right]}_{\substack{\text{pol. di grado } n \\ a(s)}} Y(s) - \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} a_i \frac{d^{i-j-1}}{dt^{i-j-1}} y(0^-)\, s^j \right]}_{\substack{\text{pol. di grado } n-1 \\ c(s)}} = \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right]}_{\substack{\text{polinomio di grado } m \\ b(s)}} U(s)$$

$$\Longrightarrow \quad a(s)\,Y(s) - c(s) = b(s)\,U(s)$$

$$\Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{b(s)\,U(s) + c(s)}{a(s)} = \underbrace{\frac{b(s)}{a(s)}\,U(s)}_{Y_f(s)} + \underbrace{\frac{c(s)}{a(s)}}_{Y_l(s)}$$

funzione di trasferimento

$$\left.\begin{aligned} Y_f(s) &= \frac{b(s)}{a(s)}\,U(s) \\ Y_f(s) &= G(s)\cdot U(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Es $\quad 2\,\frac{d^3y}{dt^3} + 3\,\frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\frac{dy}{dt} - y = 3\,\frac{du}{dt} - 5u$

$$G(s) = \frac{3s - 5}{2s^3 + 3s^2 + 2s - 1}$$

Proprietà FDT

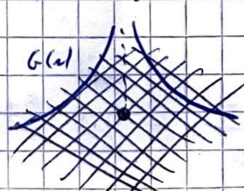
1. Funzione razionale fratta
2. $G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)} \quad \wedge \quad G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$
3. $G(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ Trasformata della risposta all'impulso $\delta(t)$

Può essere : $\quad (m = \deg(b(s)),\ n = \deg(a(s)))$

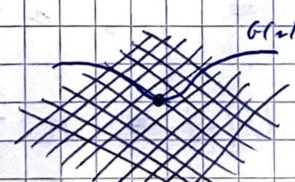
- propria $m = n$ $\quad$ Es $\frac{s^2+2s+2}{s^2+3}$ $\quad m=2,\ n=2$
- strett. propria $m < n$ $\quad$ Es $\frac{s-1}{s^4+3}$ $\quad m=1,\ n=4$
- impropria $m > n$ (non causale quindi) $\quad$ Es $\frac{s^2}{s-1}$ $\quad m=2,\ n=1$

POLI E ZERI

- Poli: tutte le n radici complesse di $a(s)$ dove $|G(s)| \to \infty$
- Zeri: tutte le m radici complesse di $b(s)$ dove $|G(s)| = 0$



POLO



ZERO

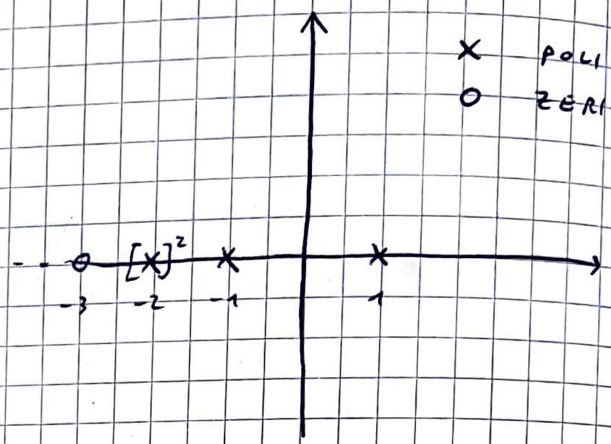
Rappresentazione delle f.d.t.

rappresentazione poli-zeri

1. $G(s) = \dfrac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}$

2. $G(s) = \dfrac{\prod s - z_i}{\prod s - p_i} \cdot \dfrac{b_m}{a_n} = k_0 \dfrac{\prod s - z_i}{\prod s - p_i}$ con $k_0 = \dfrac{b_m}{a_n}$

Mappa poli-zeri



$$G(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s+1)(s+2)^2}$$

Il grafico esprime $\dfrac{G(s)}{k_0}$ e non $G(s)$.

$$G(s) = k_0 \frac{\prod s - z_i}{\prod s - p_i} = k_0 \frac{\prod (-z_i)}{\prod (-p_i)} \frac{\prod 1 - \frac{s}{z_i}}{\prod 1 - \frac{s}{p_i}} = k_1 \frac{\prod 1 + \tau_{z_i} s}{\prod 1 + \tau_{p_i} s}$$

$k_1 = k_0 \dfrac{\prod (-z_i)}{\prod (-p_i)}$, $\tau_{z_i} = -\dfrac{1}{z_i}$, $\tau_{p_i} = -\dfrac{1}{p_i}$

$\downarrow$

guadagno statico del sistema

costanti di tempo $[s]$

Osservo che $G(0) = k_1 \dfrac{\prod 1 + \tau_z s}{\prod 1 + \tau_p s} = k_1 \dfrac{\prod 1}{\prod 1} = k_1$

Considero un ingresso a gradino $u(t) = M \cdot 1(t)$

$\Rightarrow U(s) = \dfrac{M}{s}$

$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s Y(s) = \lim_{s \to 0} s\, G(s) \cdot U(s) = \lim_{s \to 0} M \cdot G(s)$

$\Rightarrow y(\infty) = M\, G(s \to 0) = M \cdot k_1$

Calcolo $u(\infty) = \lim_{s \to 0} s U(s) = M$

$Y(0) = G(0)\, U(0) = M \dfrac{k_1}{s} = G(0) \dfrac{u(\infty)}{\cancel{s}} = \overset{u(\infty)}{M} \dfrac{\overset{G(0)}{k_1}}{\cancel{s}}$

$Y(0) = G(0)\,U(0) \Rightarrow \cancel{y(\infty) = g(\infty)\,u(\infty)}$

$$\Rightarrow G(0) = \frac{Y(0)}{U(0)} = \frac{\frac{1}{s}\,y(\infty)}{\frac{1}{s}\,u(\infty)} = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} = k_1$$

$$K_1 = G(0) = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}$$ **GUADAGNO STATICO**

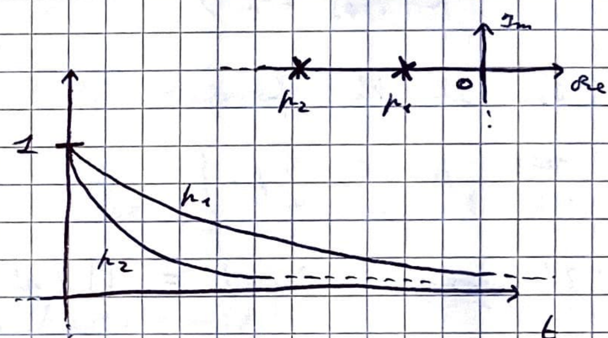
K_1 è il rapporto tra valor finale dell'uscita e valor finale dell'ingresso

Se $K_1 > 1$ l'uscita sarà amplificata $(y(\infty) > u(\infty))$

Se $K_1 < 1$ l'uscita sarà attenuata $(y(\infty) < u(\infty))$

Velocità del sistema

Più il polo è lontano dall'asse immaginario, più veloce sarà il sistema a portarsi in regime.



Antitrasformata di Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

$$Y(s) = \frac{b}{a}\,U(s) + \frac{c}{a}$$

Essendo $U(s)$ una f. razionale fratta $Y(s)$ sarà lo stesso.

$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\}$ con $N(s)$, $D(s)$ polinomi in s

$Y(s)$ può essere propria o strett. propria

- $Y(s)$ propria

$$Y(s) = q_0 + \frac{R(s)}{D(s)} \Rightarrow y(t) = q_0\,\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(s)}{D(s)}\right\}$$

$\frac{R(s)}{D(s)}$ è strett. propria $\deg R(s) < \deg D(s)$

• $Y(s)$ strett. propria

Rendo $D(s)$ monico ($D(s) = s^{l} + d_{l-1} s^{l-1} + \dots + d_1 s + d_0$)
raccogliendo il coeff. della var. con grado maggiore.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

→ 1° caso: $D(s)$ ha radici tutte distinte
→ 2° caso: $D(s)$ ha radici multiple

<u>1° caso</u> $D(s) = \prod_i s - p_i$

$$F(s) = \frac{N(s)}{\prod s - p_i} = \sum_i^{l} \frac{k_i}{s - p_i} \quad \text{con } k_i \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \sum_{i=1}^{l} \frac{k_i}{s - p_i} \right\} = \sum_{i=1}^{l} k_i \, \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s - p_i} \right\} = \left[\sum_{i=1}^{l} k_i \, e^{p_i t} \right] 1(t)$$

Per il th. fondamentale dell'algebra se $p_i \in \mathbb{C} \Rightarrow$
$\Rightarrow p_i^* \in \{p_i\}_i$

<u>2° caso</u> $D(s) = \prod_i (s - p_i)^{r_i}$ con $\sum_i r_i = l$

$$F(s) = \frac{N(s)}{\prod (s - p_i)^{r_i}} = \sum_{i=1}^{j} \frac{k_i}{(s - p_i)^{r_i}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \sum_{i=1}^{j} \frac{k_i}{(s - p_i)^{r_i}} \right\} = \left[\sum_{i=1}^{j} k_i \frac{t^{r_i - 1}}{(r_i - 1)!} e^{p_i t} \right] 1(t)$$

<u>Calcolo di k_i</u>

$$F(s) = \frac{N(s)}{\prod s - p_i} = \sum_i \frac{k_i}{s - p_i} = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_l}{s - p_l}$$

$$(s - p_1) F(s) = \cancel{(s - p_1)} \frac{k_1}{\cancel{s - p_1}} + (s - p_1) \frac{k_2}{s - p_2} + \dots$$

$$F(p_1)(s - p_1) = k_1 + (s - p_1) \frac{k_2}{s - p_2} \Big|_{s = p_1} + \dots$$

$$F(s)(s - p_1) \Big|_{s = p_i} = k_i$$

Caso di poli complessi coniugati

$$F(s) = \frac{N(s)}{\hat{D}(s)\left[(s-\sigma)^2+\omega^2\right]} = \frac{k_1}{s-\sigma-j\omega} + \frac{k_2}{s-\sigma+j\omega} + \sum_i \frac{k_i}{s-p_i}$$

$$\Rightarrow \quad k_1 = \bar{k}_2 \quad \text{perché} \quad p_1 = \bar{p}_2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{s-\sigma-j\omega}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_2}{s-\sigma+j\omega}\right\} =$$

$$k_1 = u + jv = \bar{k}_2$$

$$= \left[(u+jv)\,e^{(\sigma+j\omega)t} + (u-jv)\,e^{(\sigma-j\omega)t}\right] 1(t) =$$

$$= u\,e^{\sigma t}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right) + jv\,e^{\sigma t}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right) =$$

$$= 2u\,e^{\sigma t}\cos(\omega t) + 2j^2 v\,e^{\sigma t}\,\text{sen}(\omega t) =$$

$$= 2\,e^{\sigma t}\left(u\cos\omega t - v\,\text{sen}\,\omega t\right) 1(t) =$$

$$= e^{\sigma t}\left(2u\cos\omega t - 2v\,\text{sen}\,\omega t\right) 1(t) \;*$$

$*$ Dimostro che $A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t = R\cos(\omega t - \varphi)$

$$\cos(\omega t-\varphi) = \cos(\omega t)\cos(\varphi) + \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}(\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad R\cos\varphi\cos\omega t + R\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = R\cos\varphi \\ B = R\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{A^2+B^2} \\ B/A = \tan\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{A^2+B^2} \\ \varphi = \text{arctg}(B/A) \end{cases}$$

$$A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\omega t - \text{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)\right)$$

$$2e^{\sigma t}\left(u\cos\omega t - v\,\text{sen}\,\omega t\right) = 2e^{\sigma t}\,|k|\cos(\omega t+\varphi_k)$$

Poli con molteplicità > 1

$$F(s) = \frac{k_{i1}}{(s-p_i)^{r_i}} + \frac{k_{i2}}{(s-p_i)^{r_i-1}} + \dots + \frac{k_{ir_i}}{s-p_i} + \dots$$

$$F(s)\cdot(s-p_i)^{r_i}\Big|_{s=p_i} = k_{i1}$$

$$\frac{d}{ds}\left\{F(s)\,(s-p_i)^{r_i}\right\} = k_{i1} + (s-p_i)\,k_{i2} + \dots$$

$$\frac{d}{ds} F(s)(s-p_i)^{r_i} \Big|_{s=p_i} = K_{i2} + 0 + \dots + 0 = K_{i2}$$

$$K_{ij} = \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} F(s)(s-p_i)^{r_i} \Big|_{s=p_i} \cdot \frac{1}{(j-1)!}$$

<u>Calcolare la risposta forzata all'impulso $\delta(t)$ conoscendo $G(s)$</u>

$y(t) = \frac{d}{dt} y_1(t)$

$y(t)$ risposta all'impulso $\delta(t)$
$y_1(t)$ risposta al gradino $1(t)$

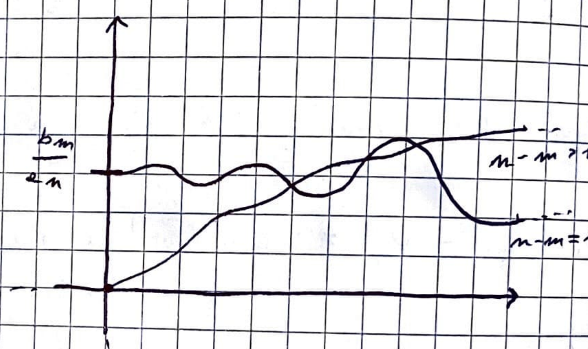
Per la linearità la risposta all' ~~gradino~~ impulso è la derivata della risposta al gradino.

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t)\} = G(s)$$

(con $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$)

<u>Th. dei residui</u>

$$\sum_{i=1}^{l} K_i = \begin{cases} 0 & n-m > 1 \\ \frac{b_m}{a_n} & n-m = 1 \end{cases}$$



$$y(0) = \sum_{i=1}^{l} K_i$$

$$K_i \triangleq K_{i r_i}$$

<u>Es</u>

$$\frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{K_{31}}{(s-p_3)^3} + \frac{K_{32}}{(s-p_3)^2} + \frac{K_{33}}{s-p_3}$$

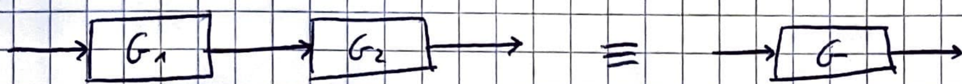
$$K_1 + K_2 + K_{33} = 0$$

SCHEMA A BLOCCHI

- Nodo sommatore

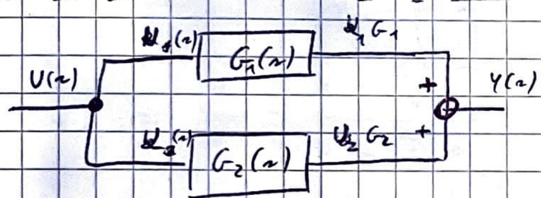
$$E(s) = R(s) - Y(s)\,H(s)$$

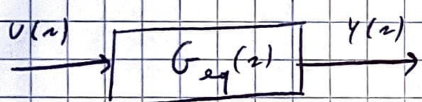
- Blocchi in serie



$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

- Blocchi in parallelo





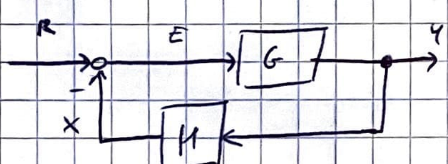
$$U(s) = U_1 = U_2$$

$$Y(s) = Y_1 + Y_2 = U_1 G_1 + U_2 G_2$$

$$= U\,(G_1 + G_2) = U(s)\,G_{eq}(s)$$

$$G_{eq}(s) = \sum_i G_i(s)$$

- Retroazione



$$Y(s) = E(s) \cdot G(s) =$$

$$= [R(s) - X(s)]\,G(s) =$$

$$= [R(s) - Y(s)\,H(s)]\,G(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) + Y(s)\,H(s)\,G(s) = R(s)\,G(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)\,[1 + H(s)\,G(s)] = R(s)\,G(s)$$

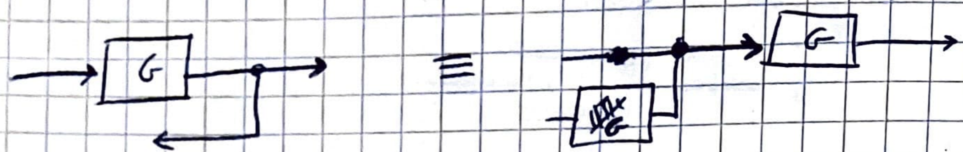
$$\Rightarrow Y(s) = R(s)\,\frac{G(s)}{1 + H(s)\,G(s)} = R(s)\,G_{eq}(s)$$

$$\Rightarrow G_{eq}(s) = \frac{G(s)}{1 \pm H(s)\,G(s)}$$

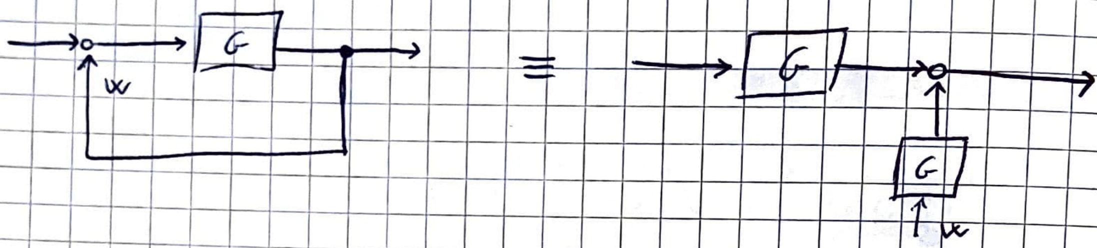
$\pm$ → retroazione negativa
→ retroazione positiva

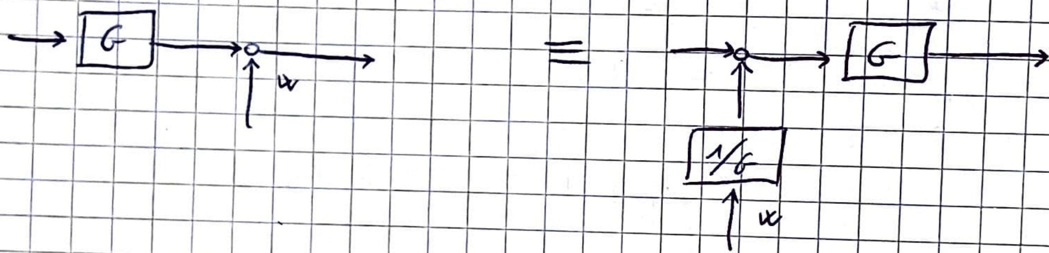
con $G(s)$ f.d.t. sul ramo diretto
$H(s)$ f.d.t. sul ramo di retroazione

Spostamento dei p.ti di prelievo

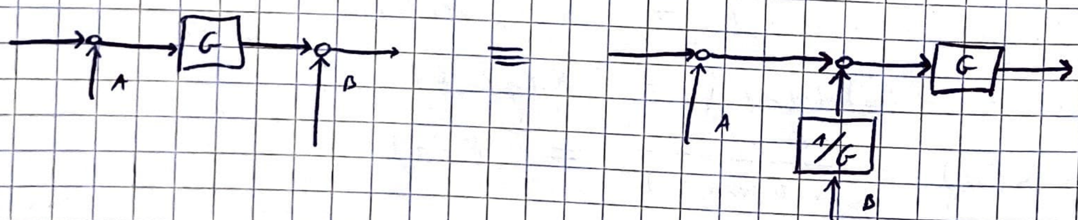


Spostamento nodi sommatori





Scambio di nodi sommatori



SISTEMI DEL PRIMO ORDINE $\quad n = 1$

$$a_1 y' + a_0 y = b_1 u' + b_0 u \quad , \quad a_1 \neq 0$$

Risposta forzata (C.I. nulle) $\Rightarrow$ $a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_1 s U(s) + b_0 U(s)$

$$\Rightarrow \quad Y(s)\,[a_1 s + a_0] = U(s)\,[b_1 s + b_0]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{b_1}{a_1} \frac{s + \frac{b_0}{b_1}}{s + \frac{a_0}{a_1}}$$

$$-\frac{a_0}{a_1} = p \quad , \quad -\frac{b_0}{b_1} = z$$

Se $b_1 = 0 \iff$ non ci sono zeri

$$K_0 = \frac{b_1}{a_1} \Rightarrow G(s) = K_0 \frac{s - z}{s - p}$$

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} s}{1 + \frac{a_1}{a_0} s} \longrightarrow G(0) = \frac{b_0}{a_0} = K_1 \quad \text{guadagno statico}$$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} \quad , \quad \alpha\tau = \frac{b_1}{b_0} \Rightarrow \alpha\tau = \alpha\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{b_1 a_0}{b_0 a_1} = \left(-\frac{1}{z}\right)(-p) = \frac{p}{z}$$

$$G(s) = K_1 \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \qquad \text{f.d.t. sist. primo ordine}$$

Se $b_1 = 0 \Rightarrow$ sist. primo ordine privo di zeri

$$G(s) = K_1 \frac{1}{1 + \tau s} \qquad (\alpha = 0)$$

Analisi sist. 1° ordine privi di zeri $(\alpha = 0)$

$$Y_f(s) = \frac{G(s)}{s} = K \frac{1}{s(1 + \tau s)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{1 + \tau s}$$

$$y_f(t) = \left(K_1 + K_2 \cancel{\tfrac{1}{\tau}} e^{-t/\tau}\right) 1(t) = \left(K - K e^{-t/\tau}\right) 1(t)$$

$K_1 = K$, $K_2 = -K$ per il 2.d.R.

$y_f(t) = k\left(1 - e^{-t/\tau}\right) 1(t)$

1) $\tau > 0 \Rightarrow p < 0$: $y_f(\infty) = k$

2) $\tau < 0 \Rightarrow p > 0$: $y_f(\infty) = \begin{cases} -\infty & k>0 \\ +\infty & k<0 \end{cases}$ DIVERGE

3) $\tau \to \infty \Rightarrow p \to 0$:

$a_1 y' + a_0 y = b_0 u$, $p = -\frac{a_0}{a_1}$, $p \to 0 \Rightarrow a_0 \to 0$

$\Rightarrow a_1 y' = b_0 u \Rightarrow G(s) = \frac{b_0}{a_1 s} = \frac{b_0}{a_1} \frac{1}{s} = k \frac{1}{s}$

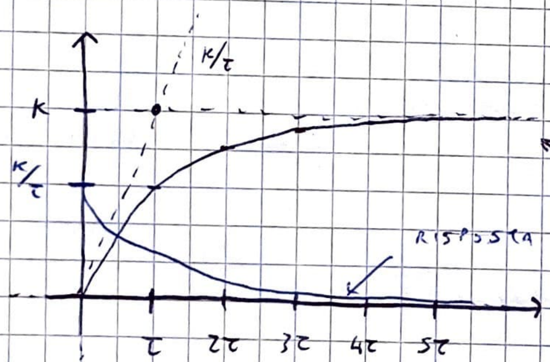
$y_f(t) = k\, t \cdot 1(t) \quad \left(Y(s) = k \frac{1}{s^2} \right)$

Analisi della risposta ($\tau > 0$)

$y(0) = 0$ $\qquad y(\tau) = 0.63\,k \qquad y(3\tau) = 0.95\,k$

$y(\infty) = k = G(0)$ $\qquad y(2\tau) = 0.86\,k \qquad y(5\tau) \approx k$

$\nexists\ \bar{t}$ t.c. $y(\bar{t}) \geq y(\infty) = k$ $\qquad$ f. monotona crescente con asintoto $y = k$



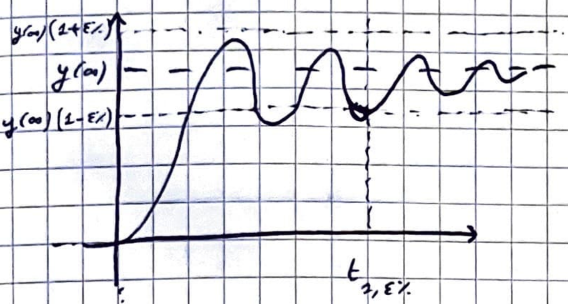
$\frac{dy(t)}{dt} = g(t)$ RISPOSTA ALL' ~~GRADINO~~ IMPULSO

$g(t) = k\, e^{-t/\tau} \frac{1}{\tau} = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau}\, 1(t)$

k/τ è la risposta all'impulso $\delta(t)$ in $t = 0$

Tempo di assestamento $t_{s,\varepsilon\%}$ (settling time)

$$\exists\ t_{s,\varepsilon\%} \text{ t.c. } \forall\ t > t_{s,\varepsilon\%} : |y(t) - y(\infty)| < \varepsilon\% \cdot y(\infty)$$



$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{100}\right) y(\infty) \le y(t) \le \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) y(\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{y(t)}{y(\infty)} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{100}$$

$$\Rightarrow y(t) \ge k\left(1 - \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{k}\left(\cancel{1} - e^{-t/\tau}\right) 1(t) \ge \cancel{k}\left(\cancel{1} - \frac{\varepsilon}{100}\right) \cancel{1(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-t/\tau} \le \frac{\varepsilon}{100} \Rightarrow t/\tau \ge -\log\frac{\varepsilon}{100}$$

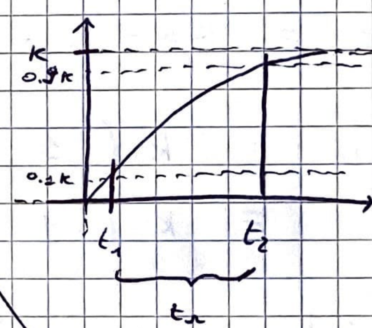
$$\Rightarrow t \ge -\tau \log\frac{\varepsilon}{100}$$

$$t_{s,\varepsilon\%} = \tau\left(-\log\frac{\varepsilon}{100}\right) \longrightarrow \text{sist. primo ordine senza zeri}$$

Tempo di salita t_r (rise time)

$$t_r = t_2 - t_1 = t_{s,10\%} - t_{s,90\%} \simeq 2.2\tau$$

Tempo per passare da 10% al 90%



Tempo di ritardo t_d (delay time)

$$t_d = t_{s,50\%} = -\tau \log 0.5 \simeq 0.7\tau \rightarrow \text{sist. primo ordine senza zeri}$$

Risposta alla rampa $r(t) = t \cdot 1(t)$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k}{1+\tau s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{k}{\tau} \frac{1}{s^2(s + 1/\tau)} =$$

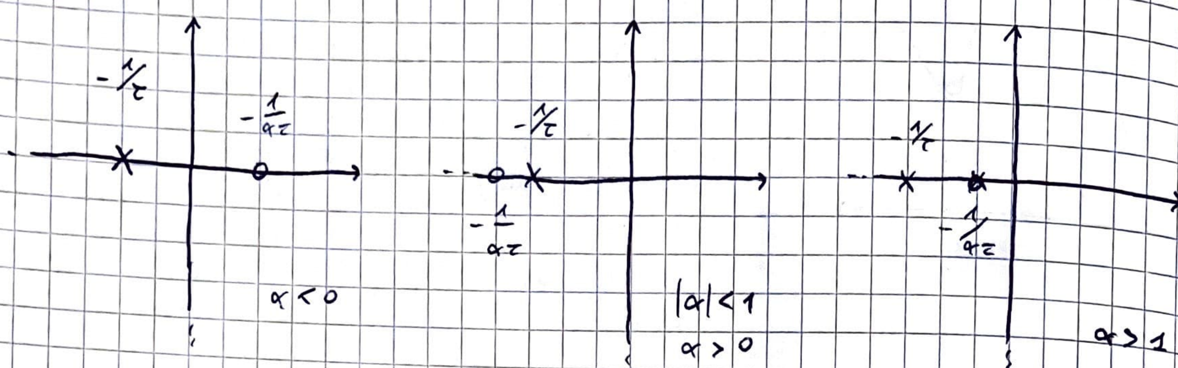
$$= \frac{k_{11}}{s^2} + \frac{k_{12}}{s} + \frac{k_{21}}{s + 1/\tau}$$

$$y_r(t) = kt \cdot 1(t) - k\tau 1(t) + k\tau e^{-t/\tau} 1(t) =$$

$$= k\left[t - \tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right] 1(t)$$

Sistemi del primo ordine con uno zero

$$G(s) = K\,\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\,, \quad z = -\frac{1}{\alpha\tau}\,, \quad p = -\frac{1}{\tau}$$



$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{G(s)}{s} = K\alpha\,\frac{s+\frac{1}{\alpha\tau}}{s+\frac{1}{\tau}}\cdot 1/s =$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1/\tau}$$

$$K_1 = G(0) = K \qquad\qquad K_1 + K_2 = \frac{b_m}{a_n} = K\alpha$$

$$K_2 = K\alpha - K = K(\alpha - 1)$$

$$y(t) = K\left(1 + (\alpha-1)\,e^{-t/\tau}\right) 1(t) =$$

$$= K\left(1 - (1-\alpha)\,e^{-t/\tau}\right) 1(t)$$

$$y(\infty) = K \qquad \forall\,\alpha\,,\ \tau > 0$$

$$y(0_+) = K\alpha$$

Determino la risposta all' ~~gradino~~ impulso $g(t)$

$$g(t) = \frac{d}{dt}\,y(t) = \frac{K}{\tau}(1-\alpha)\,e^{-t/\tau}\,1(t) + K\alpha\,\delta(t)$$

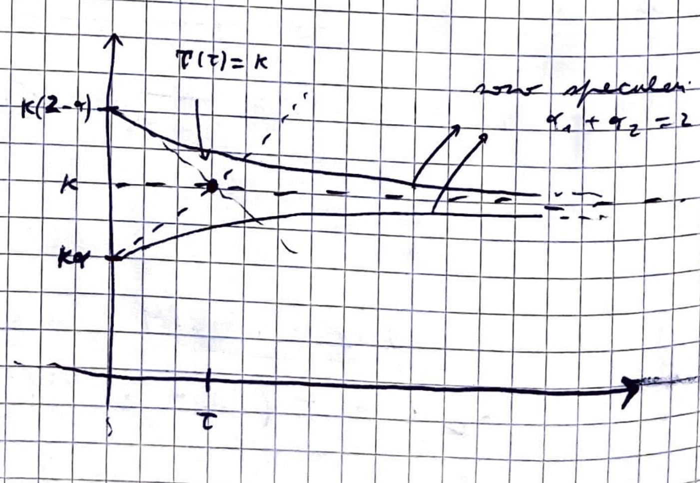
$$g(0_+) = \frac{K}{\tau}(1-\alpha)$$

$$T(t) = K\alpha + \frac{K}{\tau}(1-\alpha)\,t$$

$$T(\tau) = K\alpha + \frac{K}{\cancel{\tau}}(1-\alpha)\,\cancel{\tau} =$$

$$= K(\alpha + 1 - \alpha) =$$

$$= K$$



$t_{s,\varepsilon\%} = -\tau \log \frac{\varepsilon}{100} + \tau \log |1-\alpha|$

Se $\log |1-\alpha| > 0 \Rightarrow$ lo zero rallenta il sistema

$\log |1-\alpha| > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-\alpha > 1 \\ 1-\alpha < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ \alpha > 2 \end{cases}$

Per $\alpha \in (0,2)$ lo zero velocizza l'assestamento.

SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

Senza zeri $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$

Forma canonica $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot K$

$G(0) = K$

Al variare di δ e ω_n cambia la posizione dei 2 poli.

- δ è il fattore di smorzamento [1] adim.
- ω_n è la pulsazione naturale [rad/s]

Calcolo i poli di $G(s) \Rightarrow s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

$\Rightarrow p_{1,2} = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$

In base al segno di $\delta^2 - 1$ abbiamo:

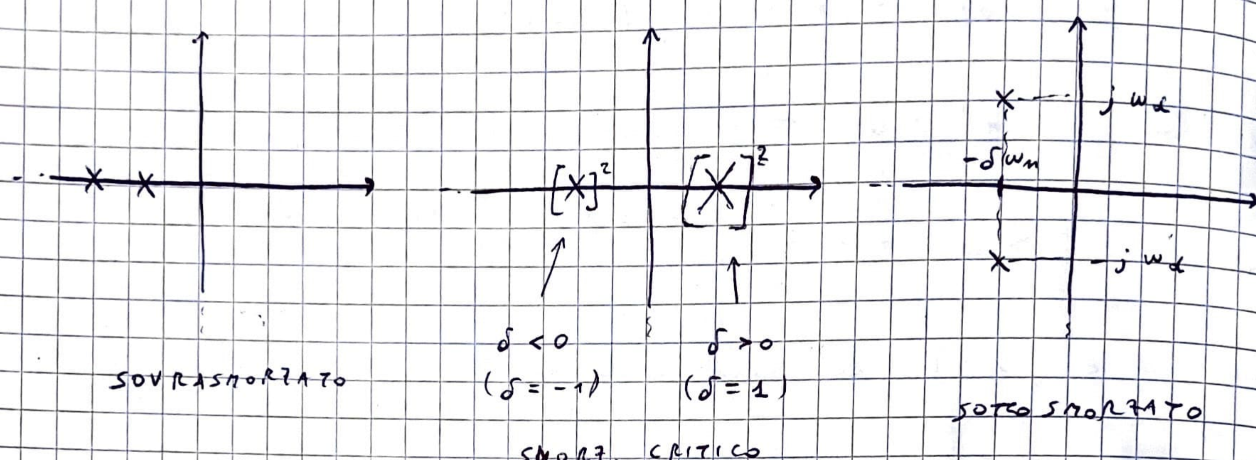
1. SOVRASMORZATO $\delta^2 > 1 \Rightarrow |\delta| > 1$

2. SMORZAMENTO CRITICO $\delta^2 = 1 \Rightarrow |\delta| = 1$

3. SOTTOSMORZATO $\delta^2 < 1 \Rightarrow |\delta| < 1$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$ pulsazione smorzata $(\omega_d < \omega_n)$

presente nei sist. sottosmorzati.



Il sist. del secondo ordine si ottiene come

- serie di 2 sist. del primo ord. privi di zeri con τ (cost. di tempo) diversi
  (sistema sovrasmorzato)
- serie di 2 sist. del primo ord. privi di zeri con τ uguali
  (sistema con smorzamento critico)
- retroazione con ramo diretto pari ad una serie di 2 sistemi del primo ordine privi di zeri
  (sistema sottosmorzato)

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{1+\tau_1 s}} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{1+\tau_2 s}} \longrightarrow Y(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} = \frac{1}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1+\tau_2)s + 1} =$$

$$= \frac{1}{\tau_1\tau_2} \frac{1}{s^2 + \frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}s + \frac{1}{\tau_1\tau_2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

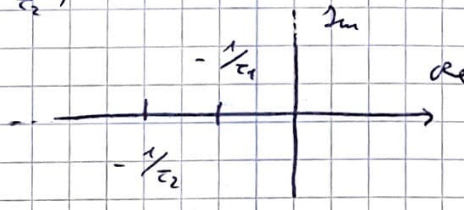
$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\dfrac{1}{\tau_1\tau_2}} \\ 2\delta\omega_n = \dfrac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2} \end{cases} \Rightarrow \delta = \frac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

Risposta al gradino di un sist. del 2° ord. privi di zeri

- SOVRASMORZATO

$$G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} = \frac{1}{\tau_1\tau_2}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)\left(s+\frac{1}{\tau_2}\right)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+\frac{1}{\tau_1}} + \frac{K_3}{s+\frac{1}{\tau_2}}$$



$\tau_1 > \tau_2 > 0$

$$K_1 = G(0) = 1$$

$$K_2 = -\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1} < 0$$

$$K_3 = \frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2} > 0$$

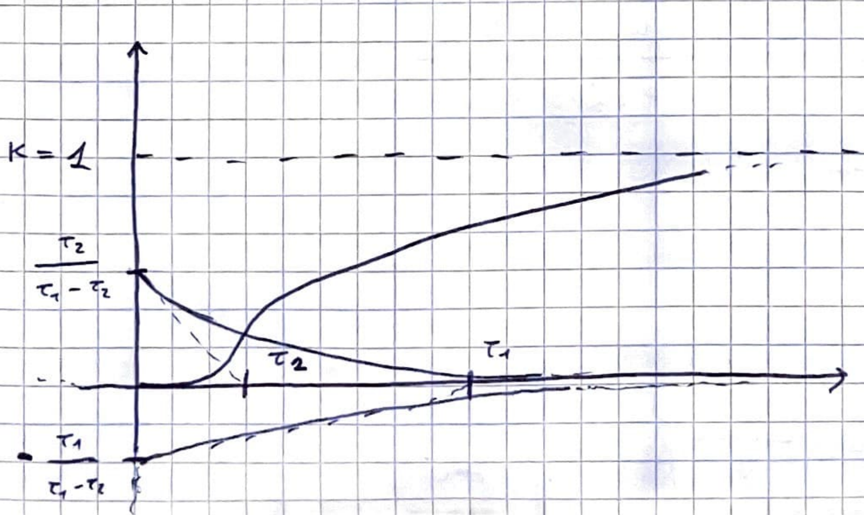
$$y(t) = \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_2}\right]1(t)$$

$$y(0_+) = 0$$

Valuto $g(t) = \frac{d}{dt}y(t)$

$$g(t) = \frac{1}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_1} - \frac{1}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_2} = \frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right)$$

Somma algebrica delle 3 funzioni



$$y_1(t) = 1(t)$$
$$y_2(t) = -\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_1}\cdot 1(t)$$
$$y_3(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_2}\cdot 1(t)$$

FORMA A SIGMOIDE

- SMORZAMENTO CRITICO

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+\omega_n)^2} + \frac{K_{22}}{s+\omega_n}$$

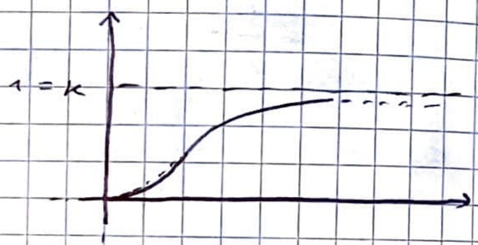
$K_1 = G(0) = 1 \implies K_{22} = -1$ per il t.d.R.

$K_{21} = -\omega_n$

$$y(t) = \left[1 - e^{-\omega_n t}(\omega_n t + 1)\right] 1(t)$$

$y(0_+) = 0 \quad , \quad y'(0_+) = 0$

Con $\omega_n > 0$



- SOTTO SMORZATI

$$p_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_d$$

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{\delta^2\omega_n^2 + \omega_d^2} = |\omega_n| = \omega_n$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}{\delta\omega_n} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

$$\theta = \arccos\delta = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-\delta^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n\delta)^2 + \omega_d^2}\,\frac{1}{s} =$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{\alpha s + \beta}{(s+\delta\omega_n)^2 + \omega_d}$$

$K_1 = G(0) = 1$

$$\alpha s + \beta \Big|_{s=-\delta\omega_n + j\omega_d} = \frac{\omega_n^2}{s}\Big|_{s=-\delta\omega_n + j\omega_d}$$

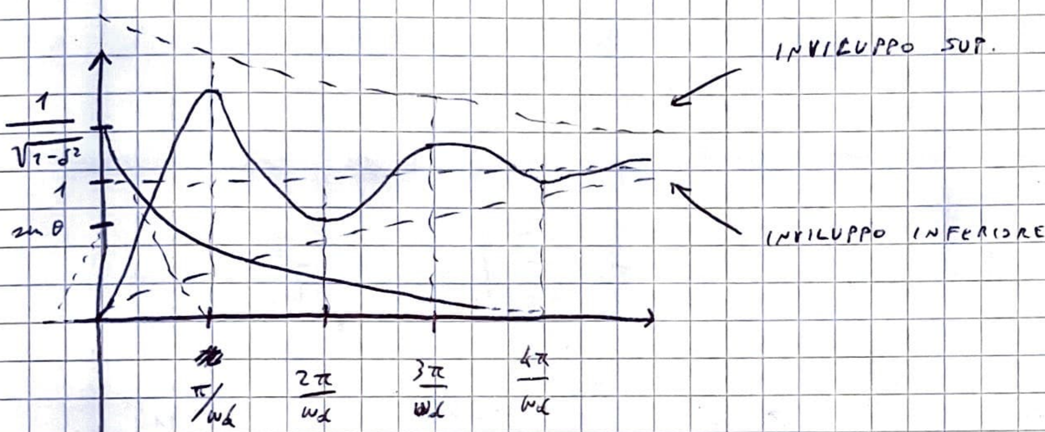
$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha \delta \omega_n + \beta = -\delta \omega_n \\ j \omega_d \alpha = -j \omega_d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \delta \omega_n \end{cases}$$

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta \omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \theta) \right] 1(t)$$

Se $\delta = 0 \Rightarrow$ $y(t) = \left[1 - \operatorname{sen}\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right)\right] 1(t) =$

$$= \left[1 - \cos(\omega_n t) \right] 1(t)$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 1 \quad , \quad y(0_+) = 1 - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1-\delta^2}} = 0$$



I max e minimi si trovano a $k \frac{\pi}{\omega_d}$

Inviluppi

$$\left| \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t + \theta) \right| = |y(t) - 1| = |1 - y(t)|$$

$$\left| \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \right| \cdot \underbrace{|\operatorname{sen}(\omega_d t + \theta)|}_{\leq 1} \leq \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$y \in \left[1 - \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} , 1 + \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \right]$$

Tocca gli inviluppi quando $|\operatorname{sen}(\omega_d t + \theta)| = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega_d t + \theta = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi \Rightarrow \bar{t} = \frac{\pi(k + 1/2) - \theta}{\omega_d} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Massimi e minimi locali

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\delta\omega_n t} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}}\left(\underbrace{\delta}_{\cos\theta} \sin(\omega_d t + \theta) - \underbrace{\sqrt{1-\delta^2}}_{\sin\theta} \cos(\omega_d t + \theta)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_d t \cancel{+\theta} \cancel{-\theta}) = 0 \Rightarrow$$

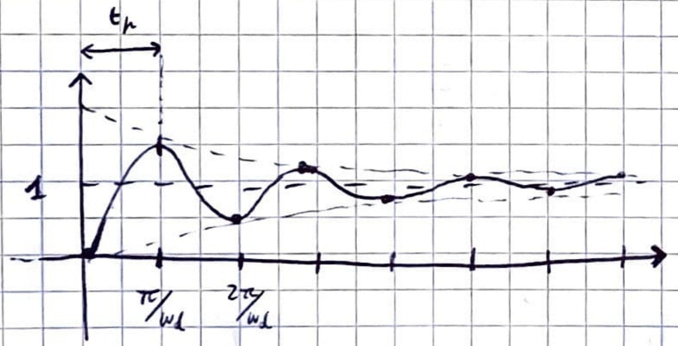
$$\Rightarrow \sin(\omega_d t) = 0 \Rightarrow \omega_d t = k\pi$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \frac{k\pi}{\omega_d}$$

Tempo di picco (peak time)

$$t_p = t_{max} - t_0 = \left.\frac{k\pi}{\omega_d}\right|_{k=1} - \left.\frac{k\pi}{\omega_d}\right|_{k=0} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$t_1 \leq t_3 \Leftrightarrow e^{-\delta\omega_n t_1} > e^{-\delta\omega_n t_3} \Rightarrow MAX_{k=1} > MAX_{k=3}$$



Tutti i sist. del secondo ord. hanno $y(0_+) = y'(0_+) = 0$

Tempo di salita (rise time)

Differentemente dal tempo di salita nei sist. del 1° ordine t_r è il tempo minimo che ci mette il sistema a raggiungere $y(\infty)$

$$|t_r - t_p| = \frac{\theta}{\omega_d} \quad (t_r < t_p)$$

$$y(t_r) = y(\infty) = 1$$

$$1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 1$$

$$\Rightarrow \omega_d t_r + \theta = (k) \pi \Rightarrow t_r = \frac{k\pi - \theta}{\omega_d}$$

Tempo di assestamento $t_{a,\varepsilon\%}$

$$1 + \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} = \underset{\downarrow\, 1}{y(\infty)}\left[1+\frac{\varepsilon}{100}\right] \Rightarrow \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{\varepsilon}{100}$$

considero gli inviluppi

$$\Rightarrow -\delta\omega_n t = \log\frac{\varepsilon\sqrt{1-\delta^2}}{100}$$

$$\Rightarrow t_{a,\varepsilon\%} = -\frac{\log\frac{\varepsilon\sqrt{1-\delta^2}}{100}}{\delta\omega_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{a,\varepsilon\%} = -\tau\log\frac{\varepsilon\sqrt{1-\delta^2}}{100}, \quad \tau = \frac{1}{\delta\omega_n}$$

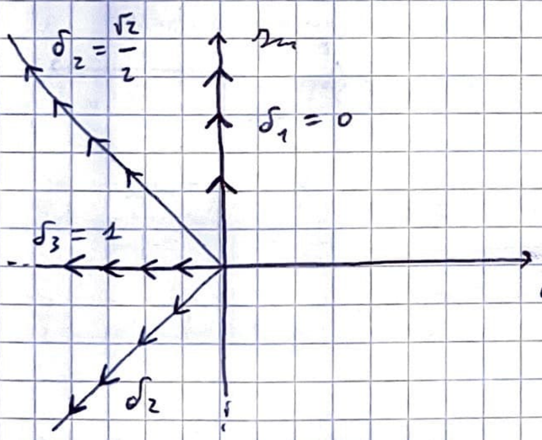
Se $\delta \ll 1 \Rightarrow t_{a,\varepsilon\%} \approx -\tau\log\frac{\varepsilon}{100} = -\frac{1}{\delta\omega_n}\log\frac{\varepsilon}{100}$

Ricorda che $\delta\omega_n = Re(p)$, $\omega_d = Im(p)$

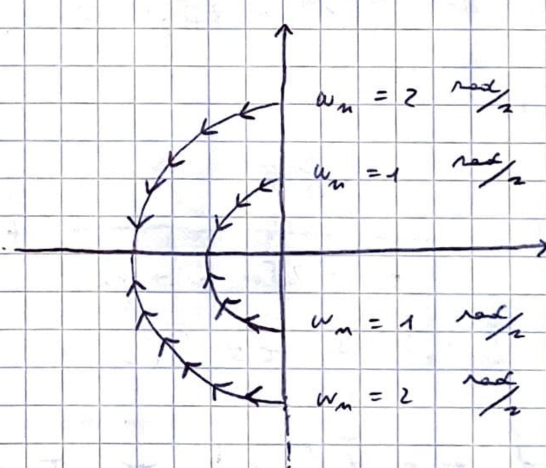
In base alla posizione dei poli posso calcolare i tempi di salita, di picco, min e max etc.

Luoghi a δ e ω_n costante

δ cost.



ω_n cost.



$\delta_1 = \arccos\theta_1 = 0$

$\theta_1 = \pi/2$

$\delta_3 = 1 = \cos\theta_3$

$\theta_3 = 0$

$\delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\theta_2$

$\theta_2 = \pi/4$

Massima sovraelongazione percentuale $M_{p\%}$

$$M_{p\%} = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100$$

con $y(\infty)$ valore a valle, $y(t_p)$ massimo assoluto

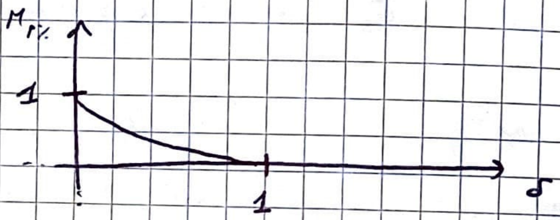
$$y(t_p) = y\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n \frac{\pi}{\omega_d}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega_d} + \theta\right) =$$

$$= 1 - e^{-\frac{\delta\omega_n}{\omega_d}\pi} \frac{-\sin\theta}{\sqrt{1-\delta^2}} = 1 + e^{-\cot(\theta)\cdot\pi}$$

$$M_{p\%} = \frac{1 + e^{-\cot\theta\cdot\pi} - 1}{1} \cdot 100 = 100\, e^{-\cot\theta\cdot\pi}$$

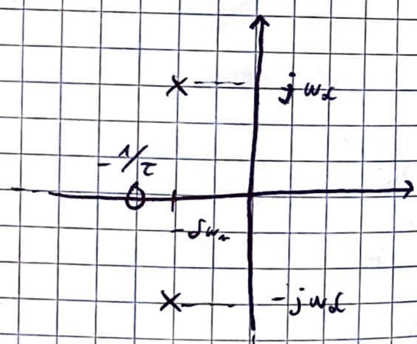
$M_{p\%} = 100\%$ per $\delta = 0$

$M_{p\%} \to 0$ per $\delta \to 1$



Sistemi del secondo ord. con uno zero

$$G(s) = \frac{\omega_n^2 (1 + \tau s)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$



$$G(0) = 1 = k$$

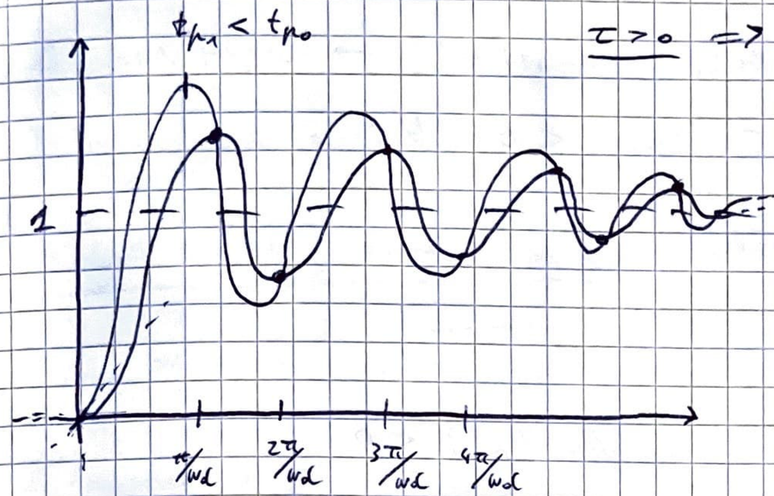
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\tau s\, \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \bar{G}(s) + \tau s\, \bar{G}(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tau s\, \bar{Y}(s)\} = \tau \frac{d\bar{y}}{dt} = \tau\, \bar{y}'(t)$$

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tau\, \bar{y}'(t)$$

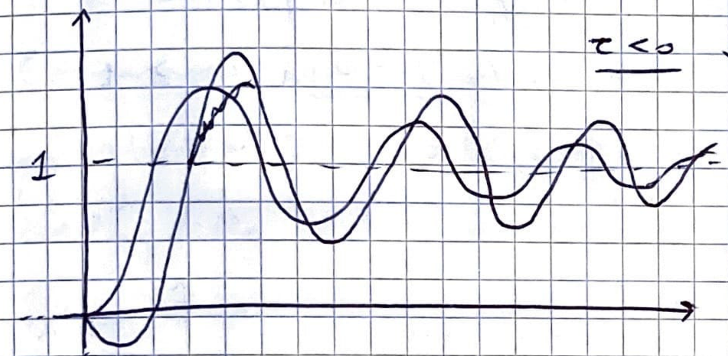
Più grande è τ più sarà influenzato dallo zero il sistema. (Più grande è τ, più vicino a 0 è z)



$\tau > 0 \Rightarrow z < 0$

NOTA:

- parte con pendenza pos.
- $M_{p\%1} > M_{p\%0}$
- $t_{p1} < t_{p0}$
- $y_1(t) = y_0(t)$ quando $t = \frac{k\pi}{\omega_d}$
- $t_{s,\varepsilon\%}$ aumenta



$\tau < 0 \Rightarrow z > 0$

$y_1(0_+) < 0$ e c'è una sottoelongazione

STABILITÀ

$u(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

tutti i segnali a supporto lim.

Un sistema è:

1) semplicemente stabile se $\forall\, u(t) \in S_\ell \;\; \exists\, M_y > 0$ t.c. $|y(t)| \le M_y \;\; \forall\, t$

2) asintoticamente stabile se $\begin{cases} \text{è sempl. stabile} \\ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \end{cases}$

3) instabile se esistono C.I. t.c. l'uscita $y(t)$ diverge

Trovo l'espansione in fratti semplici di $Y_\ell(s)$

$$Y_\ell(s) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n-1} s^j D^{(i-j-1)} y(0) \right) \left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i \right)^{-1} = \frac{N(s)}{a(s)} \Rightarrow \frac{b(s)}{G(s)}$$

$$\Rightarrow y_\ell(t) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{r_i} R_{ij} t^{r_i - j} e^{p_i t} \quad \text{con } R_{ij} = \frac{k_{ij}}{(r_i - j)!}$$

$$\Rightarrow y_\ell(t) = \sum_{i=1}^{\ell} m_i(t) e^{p_i t} \quad \text{con } m_i(t) = \sum_{j=1}^{r_i} R_{ij}\, r_{i-j}$$

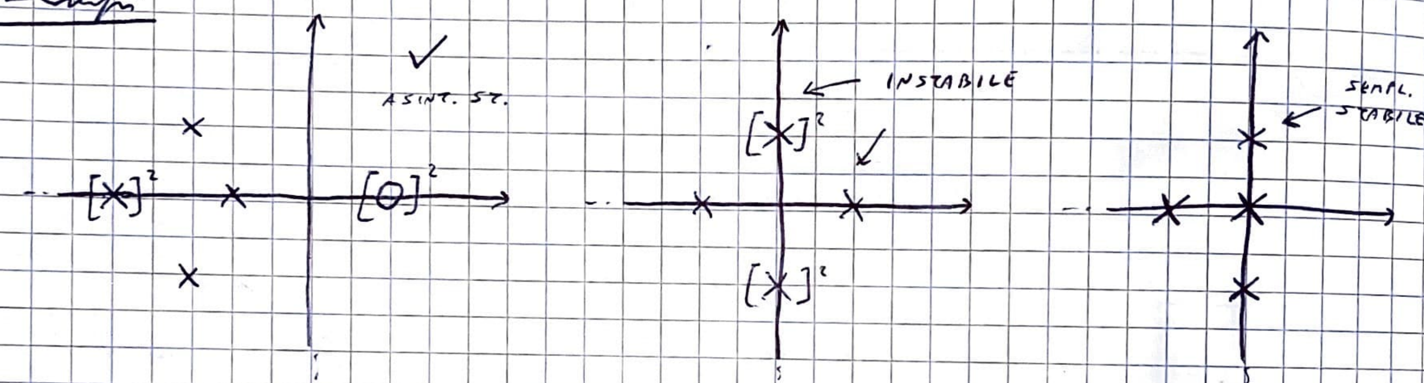
Affinché y_ℓ sia asint. stabile $m_i(t)\, e^{p_i t} \to 0 \quad \forall i$

cioè $e^{p_i t} \to 0 \Rightarrow \text{Re}(p_i) < 0 \quad \forall i$

<u>Classificazione della stabilità di un sistema LTI in base ai poli di $G(s)$</u>

1. Sist. ASINT. STABILE $\iff \forall i \quad \text{Re}(p_i) < 0$
2. Sist. INSTABILE $\iff \exists\, p \in \{p_i\}_i \ni' \text{Re}(p) > 0 \ \vee$
   $\exists\, i \ni' \text{Re}(p_i) = 0 \wedge r_i \geq 1$
3. Sist. SEMPL. STABILE $\iff \forall i \quad \text{Re}(p_i) < 0 \ \vee \left(\text{Re}(p_i) = 0 \wedge r_i = 1\right)$

<u>Esempi</u>



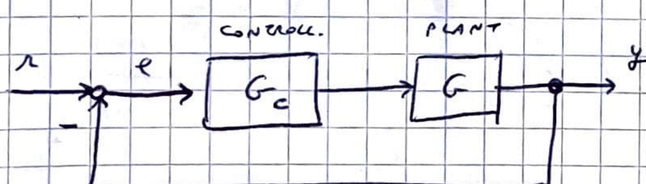
Stabilità <u>BIBO</u> (Bounded Input Bounded Output)

$\Rightarrow \forall\ u(t)$ lim. in ampiezza $\exists\ y(t)$ lim. in amp.

Un sistema è stabile BIBO $\iff g(t) \to 0$

Stabilità BIBO = Sist. asint. stabile.

<u>Analisi stabilità sist. ad anello chiuso</u>



$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = k\, \frac{\prod_{i=1}^{m} s - z_i}{\prod_{i=1}^{n} s - p_i}$$

$$G_o(s) = \frac{G_c(s) \cdot G(s)}{1 + G_c(s)\, G(s)} = \frac{\frac{b_c(s)}{a_c(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}}{1 + \frac{b_c(s)}{a_c(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}} = \frac{b_c(s) \cdot b(s)}{a_c(s)\, a(s) + b_c(s)\, b(s)}$$

ZERI DI $G(s)$

La retroazione non sposta gli zeri, sposta i poli.

I nuovi poli sono le sol. dell'eq. caratteristica $a_0(s) = 0$

$a_0(s)$ è il pol. caratteristico

$$a_0(s) = a(s)\, a_c(s) + b_\varepsilon(s)\, b_c(s) = 0$$

Lemma di Routh

NON SUFFICIENTE

Condizione necessaria per la stabilità asintotica di un sistema LTI è che il pol. caratteristico abbia tutti i coeff. dello stesso segno e non nulli.
Negando l'affermazione precedente troviamo una condizione sufficiente: affinché il sist. non sia asint. stabile basta un coeff. nullo o discorde dagli altri.

Criterio di Routh - Hurwitz

n	a_n	a_{n-2}	...	a_0	0
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	...	0	0
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	...	0	0
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	...	0	0
$\vdots$	...	...	...	...	...
1	...	...	0	0	0
0	...	0	0	0	0

$$a_0(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$b_{n-2} = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}}{b_{n-2}} \qquad c_{n-5} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix}}{b_{n-2}}$$

La prima colonna è chiamata seq. di Routh.

$$S_{routh} = (a_n, a_{n-1}, b_{n-2}, c_{n-3}, d_{n-4}, \dots y_1, z_0)$$

Th. Routh - Hurwitz

Per ogni variazione di segno nella seq. di Routh corrisponde una radice di $a_0(s)$ a parte reale pos.
Per ogni permanenza di segno corrisponde una radice a parte reale negativa.

$h_3 < 0$ $\quad$ $h_5 > 0$

Ex $\quad S = (3, -3, 4, 5, -1, 3)$

$h_1 > 0$ $\quad$ $h_2 > 0$ $\quad$ $h_4 > 0$

Ci sono 4 poli positivi ed 1 negativo.

Un sistema LTI è asintoticamente stabile se ogni el. della sequenza di Routh ha sempre lo stesso segno.

Se il primo el. di una riga è nullo posso sostituire a 0 $\varepsilon > 0$ e calcolare i termini della riga successiva senza dividere per l'el. pivotale e sostituendo ε con 0.

Se ho frazioni posso moltiplicare tutta la riga per un numero reale positivo.

Posso sommare una riga per se stessa traslata di h posizioni e moltiplicata per $(-1)^h$

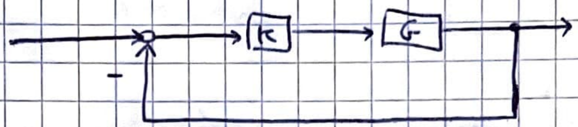
Se ho una riga tutta nulla questa sarà per forza in posizioni dispari (se fosse in pos. pari ho $a_0 = 0$ e quindi posso raccogliere s e fare Routh su $F(s) = \frac{a(s)}{s}$)

Posso sostituire l'eq. della riga sopra con $p(s) \overset{s=z^2}{=} p(z)$, calcolarne la derivata in z e mettere i coeff. nella riga tutta nulla.

Stabilità di un sistema con parametri

Affronto questa parte con esempi pratici.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



$$G_0(s) = \frac{KG}{1+KG} = \frac{K}{s(s+1)(s+2)+K} = \frac{K}{s^3+3s^2+2s+K} = a_0(s)$$

$$a_0(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

3	1	2	0
2	3	k	0
1	6−k	0	
0	K		

$$b = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k \end{vmatrix}}{3} = \frac{6-k}{3}$$

$\xleftarrow{\cdot 3} \quad \longrightarrow \quad b' = 6 - k$

$$S = (1,\ 3,\ 6-k,\ K)$$

K	< 0	0 – 6	> 6
3	−	−	−
2	P	P	P
1	P	P	V
0	V	P	V
	instabile con 1 polo positivo	STABILE	instabile con 2 poli pos.

È stabile se $K \in (0, 6)$

Vedo i valori 0 e 6:

$K = 0 \Rightarrow a_0(s) = s^3 + 3s^2 + 2s$
$= s(s^2 + 3s + 2) = s(s+2)(s+1)$ sempl. stabile

$K = 6 \Longrightarrow a_0(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 6$

3	1	2
2	3	6
1	$\cancel{0}$ 3	0
0	6	

$h(s) = 3s^2 + 6$

$p(z) = 3z + 6 = 0 \longrightarrow z = -2$

$p'(z) = 3 \quad \Rightarrow p = \pm j\sqrt{2}$

sempl. stabile (tutte permanenze ma el. nullo in S quindi non è asint. stabile)

Precisione di sistemi di controllo a regime permanente

assumo che il sist. sia asint. stabile.

Suppongo un sist. con retroazione unitaria $H(s) = 1$

Valuto l'errore a regime $e(\infty) = \lim_{s \to 0} s E(s)$

$$Y(s) = G(s)\,E(s) \Rightarrow E(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$$

$$Y(s) = G_0(s)\,R(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

I poli di $E(s)$ sono gli stessi di $G_0(s)$ + quelli di $R(s)$

$E(s)$ è instabile se $G_0(s)$ è instabile.

Definisco 3 errori:

- errore di posizione $r(t) = 1(t)$ e_p
- errore di velocità $r(t) = t \cdot 1(t)$ e_v
- errore di accelerazione $r(t) = \frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$ e_a

Errore di posizione e_p

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s E(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+G(s)} R(s) = \frac{1}{1+G(s)} \triangleq K_p$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = G(0) \quad \text{costante di posizione}$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} \quad \left(= \frac{1}{1+K_p H(s)} \right)$$

Se $\mu = 0$ (μ è il tipo del sistema: il num. di poli nell'origine di $G(s)$) $G(0) \in \mathbb{R}$

Se $\mu \geq 1$ $G(0) = \lim_{s \to 0} k \frac{\prod_i (s - z_i)}{s \prod_i (s - p_i)} = \infty$

Quindi $K_p \to \infty \Rightarrow e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} \to 0$

$$e_s(\infty) = \begin{cases} \frac{1}{1+K_p G(0)} & \mu = 0 \\ 0 & \mu \geq 1 \end{cases} \quad \text{quando} \quad r(t) = 1(t)$$

Errore di velocità e_v

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s^2}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

$$K_v \triangleq \lim_{s \to 0} sG(s)$$

$$e(\infty) = \frac{\cancel{1}}{e_v} = \frac{1}{K_v}$$

$$e(\infty) = \frac{1}{\bar{G}(0)} \in \mathbb{R}$$

Se $\mu = 0$: $K_v = 0 \Rightarrow e_s(\infty) \to \infty$

Se $\mu = 1$: $K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s} \bar{G}_0(s) = \bar{G}(0) \in \mathbb{R}$

Se $\mu \geq 2$: $K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s^2} \bar{G}(s) = \infty \Rightarrow e(\infty) \to 0$

$$e(\infty) = \begin{cases} \infty & \mu = 0 \\ 1/\bar{G}(0) & \mu = 1 \\ 0 & \mu \geq 2 \end{cases}$$

Errore di accelerazione e_a

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s^3}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

$$K_a \triangleq \lim_{s \to 0} s^2 G(s) \qquad e(\infty) = \frac{1}{K_a}$$

$\mu = 0 \Rightarrow K_a = 0 \Rightarrow e(\infty) \to \infty$

$\mu = 1 \Rightarrow K_a = 0 \Rightarrow e(\infty) \to \infty$

$\mu = 2 \Rightarrow K_a = \bar{G}(0) \Rightarrow e(\infty) = \frac{1}{\bar{G}(0)} \in \mathbb{R}$

$\mu \geq 3 \Rightarrow K_a \to \infty \Rightarrow e(\infty) \to 0$

$e \backslash \mu$	0	1	2	3
e_r	$\frac{1}{1+G_0}$	0	0	0
e_v	∞	$\frac{1}{G(0)}$	0	0
e_a	∞	∞	$\frac{1}{G(0)}$	0

Errore a regime permanente nei sist. di controllo a retr. unit.

Tipicamente $H(s)$ è di tipo 0

$\Rightarrow$ $H(0)$ è il guad. statico

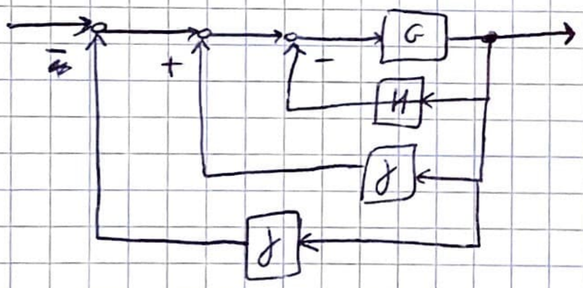
$$\hat{y}(\infty) = H(0) \cdot y(\infty) \Rightarrow H(0) = \gamma$$

$$e(t) = r(t) - \gamma y(t)$$

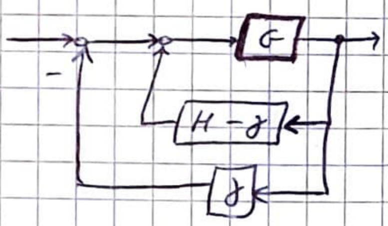
$$e(t) = 0 \Rightarrow y(t) = \frac{r(t)}{\gamma}$$

$$G_{eq}(s) = \frac{\gamma G(s)}{1 + G(s)[H(s) - \gamma]}$$

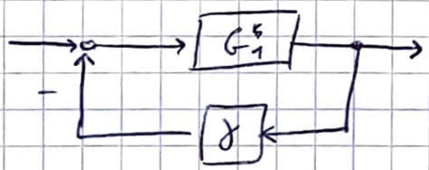
Dim



$\Rightarrow$

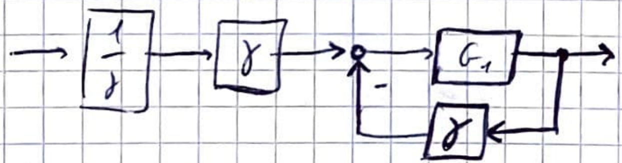


$\Rightarrow$



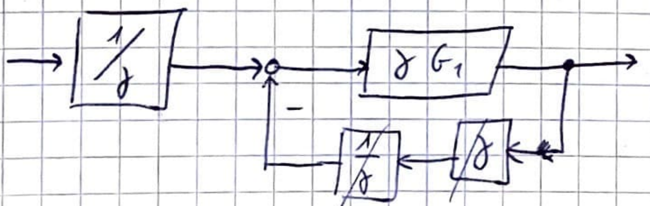
con $G_1^* = \dfrac{G}{1 + G(H - \gamma)}$

$\Rightarrow$

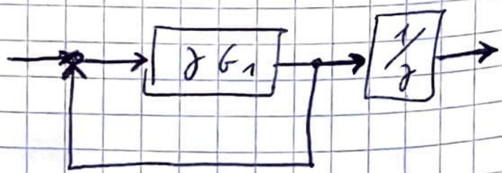


$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

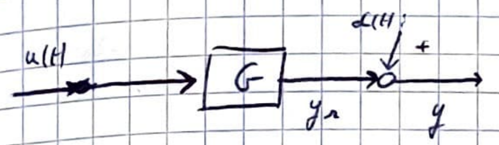


$\Rightarrow$



Reiezione dei disturbi a regime

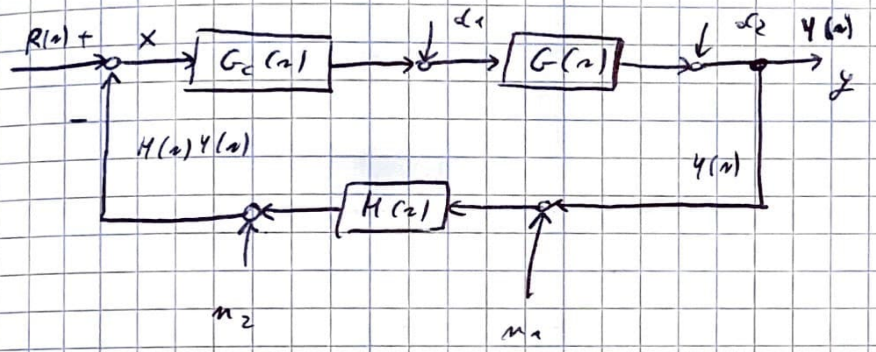
Un sistema ad anello aperto non può reiettare disturbi.



$$y(t) = y_r(t) + d(t)$$

Se $d(t) = 1(t) \Rightarrow y(\infty) = y_r(\infty) + 1$

Non posso reiettare nessun disturbo ad da fuori dell'anello di controllo.



Uso il PSE.

Trovo $Y_{d_1}(s) \Rightarrow \left(\left(R(s) - Y(s)H(s)\right) G_c(s) + D_1(s)\right) G(s) = Y(s)$

$\Rightarrow \cancel{D(s) G(s) = Y(s)\left[1 + D(s) H(s)\right]}$

$\Rightarrow Y(s) = \left[X(s)\, G_c(s) + D(s)\right] G(s)$

$\Rightarrow Y(s) = \left[\left(R(s) - H(s) Y(s)\right) G_c(s) + D(s)\right] G(s)$

$\Rightarrow Y(s) = R(s)\, G_c(s)\, G(s) - H(s)\, Y(s)\, G_c(s)\, G(s) + D(s)\, G(s)$

$\Rightarrow Y(s)\left(1 + H(s)\, G_c(s)\, G(s)\right) = \underbrace{\cancel{R(s)\, G_c(s)\, G(s)}}_{0}\ D(s)\, G(s)$

$\Rightarrow G_d(s) = \dfrac{Y(s)}{D(s)} =$

$$= \frac{G(s)}{1 + H(s)\, G(s)\, G_c(s)} \longrightarrow$$ $a_c(s)$ deve avere tutti i poli nel semipiano aperto di ~~sx~~

Trovo $Y_r(s) = \dfrac{G_c\, G}{1 + H\, G_c\, G}$ $\qquad Y_{d_1}(s)$ deve essere asint. stabile.

Considero $D_1(s) = \dfrac{1}{s^k}$ con $k \geq 1$

Analizzo per ogni k quando riesco a reiettare $d_1(t)$.

$(k = 1)$ $\qquad D_1(s) = \dfrac{1}{s}$ $\qquad d_1(t) = 1(t)$

$$y_{d_1}(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)G_c(s)}\,\frac{1}{\cancel{s}}$$

Ipotesi un polo di $G(s)$ nell'origine

$$y_{d_1}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{\overset{\to\infty}{G(s)}}{1 + H(s)G_c(s)\cdot \underbrace{G(s)}_{\to\infty}} = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{G(s)}}{H(s)\cancel{G(s)}G_c(s)} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{H(0)G_c(0)}} \quad \lim_{s\to 0} \frac{1}{H(s)G_c(s)}$$

Ipotesi H di tipo 0 $(\mu_H = 0)$

$$y_{d_1}(\infty) = \frac{1}{H(0)} \lim_{s\to 0} \frac{1}{G_c(s)}$$

Se $G_c(s)$ è di tipo 0 $\qquad y_{d_1}(\infty) = \dfrac{1}{H(0)\cdot G_c(0)} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Se $G_c(s)$ è di tipo 0, $d_1(t)$ non è reiettabile.

Se $G_c(s)$ è di tipo 1 $\qquad y_{d_1}(\infty) = 0$

$\Rightarrow$ Se $G_c(s)$ è di tipo 1, $1(t)$ è reiettabile.

In generale: Se $d_1(t)$ è di tipo k $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ è reiettabile solo se $\underbrace{G_c(s)}_{\text{f.d.t a monte}}$ è di tipo $\bar{k} \geq k$

Trovo ora $Y_{d_2}(s) = D_2(s) \cdot \dfrac{1}{1 + HG_cG}$

cioè $G_{d_2}(s) = \dfrac{1}{1 + H(s)\cdot G(s)\cdot G_c(s)}$

$$y_{d_2}(\infty) = G_{d_2}(s \to 0) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + H(s)G(s)G_c(s)}$$

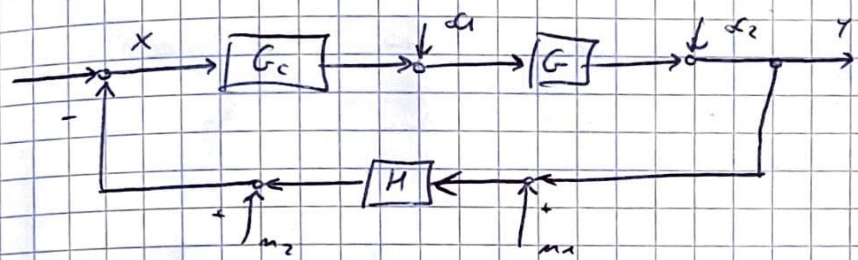
$y_{d_2}(\infty) \to 0 \iff G(s) \overset{*}{\text{o}} G_c(s)$ ha almeno un polo nell'origine.

Generalizzando: Se $d_2(t)$ è di tipo k $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ è reiettabile se a monte di un f.d.t. di tipo $k' \geq k$

Solitamente il controllore ha tipo $\mu_c \geq \mu$, da tipo dell'attuatore perché "comanda" quelli successivi.

Disturbi sul ramo di retroazione



$$n_1 \quad Y_{n_1}(s) = \frac{G_c G H}{1 + G_c G H}$$

$$X(s) \cdot G_c G = Y \Rightarrow (\cancel{R(s)} - Y(s) \cdot H(s) - N_1(s) H(s))$$

$$\Rightarrow Y = -Y(s) H(s) G_c \cdot G - N_1(s) H(s) G G_c$$

$$\Rightarrow Y(1 + H G_c G) = - N_1 H G_c G$$

$$\Rightarrow Y_{n_1} = - N_1 \left(\frac{H G_c G}{1 + H G_c G} \right)$$

Se G_c e G devono reiettare d_1 e d_2 dovranno avere tipo $\mu \geq 1$ quindi a $s \to 0$ $|G_c G| >> 1$ $(G_c \cdot G \to \infty)$

$$Y_{n_1}(s) \approx - N_1 \Rightarrow y_{n_1}(t) \approx - n_1(t)$$

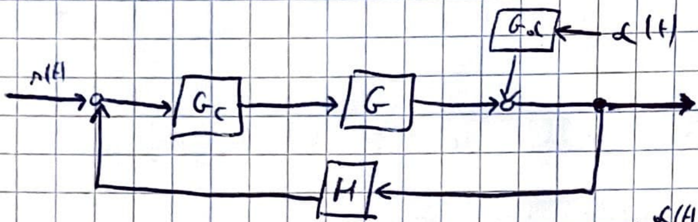
$\Rightarrow$ Il disturbo non si può reiettare.

Unica cosa che si può fare è progettare un ramo di retroazione che rende $n_1(t)$ piccolo.

$n_2(t)$ è fuori dal sistema ad anello chiuso.

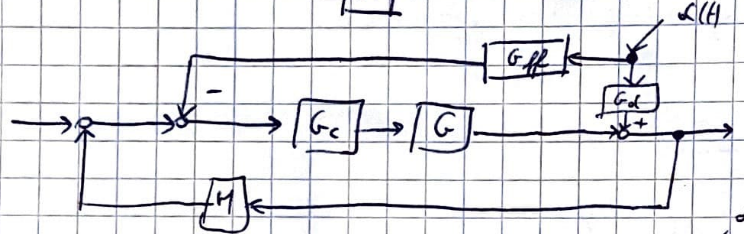
$\tilde{r}(t) = r(t) - n_2(t) \Rightarrow$ Non è reiettabile.

Tecnica di precompensazione dei disturbi



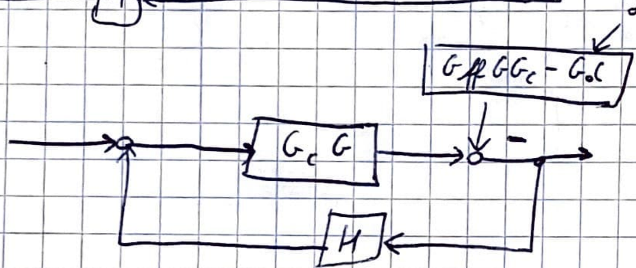
Se $G_d = 1 \Rightarrow d(t) = d_2(t)$

Se $G_d = G \Rightarrow d(t) = d_1(t)$



Progetto controllori che provano ad annullare d(t) prima che intervenga nel ramo diretto.

≡



Per annullare il disturbo $G_{ff} \, G \, G_c - G_d = 0$

$$\Rightarrow G_{ff} = \frac{G_d}{G \cdot G_c}$$

Ma probabilmente $G \cdot G_c$ al den. ha grado maggiore di G_d al den.

quindi G_{ff} sarebbe impropria (e quindi irrealizzabile)

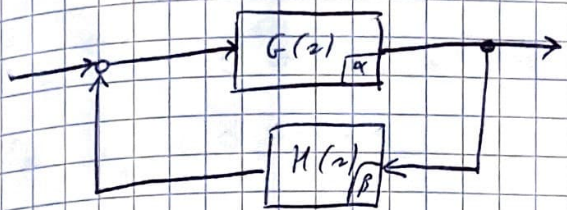
Es: $G_d = \frac{1}{s+p}$ $\quad G_c G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$

$$G_{ff} = \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}{(s+p)\,\omega_n^2}$$

$m = 2$ $\quad m > n$ $\quad$ IMPROPRIA

$n = 1$

Sensibilità alle variazioni parametriche



$G(s;\alpha)$

$H(s;\beta)$

Suppongo che il parametro abbia una certa precisione

$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ → variazione parametrica

α_0 ↙ val. nominale

Si dice sensibilità di $G(s)$ rispetto ad α la funzione

$$S^G_\alpha \triangleq \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta G / G}{\Delta\alpha / \alpha} = \frac{\partial G}{\partial \alpha} \cdot \frac{\alpha}{G}$$

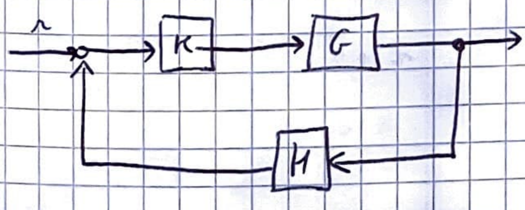
Es $G(s;\alpha) = \dfrac{1}{s+\alpha}$

$$S^G_\alpha = \frac{\partial G}{\partial \alpha} \cdot \frac{\alpha}{G} = -\frac{1}{(s+\alpha)^2} \frac{\alpha}{G} = -\frac{1}{(s+\alpha)^2} \cdot \frac{\alpha(s+\alpha)}{1} = -\frac{\alpha}{s+\alpha}$$

Regola della catena $\quad S^\beta_\alpha = S^\gamma_\alpha S^\beta_\gamma$

$$G(s;\alpha) \approx G(s;\alpha_0) + \Delta G(s) = G(s;\alpha_0) + \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha$$

Luogo delle radici



$$G_0(s) = \frac{K G(s)}{1 + K G(s) H(s)}$$

Studiamo l'eq. caratteristica, $e_0 = 1 + KGH = 0$

Si chiama luogo delle radici il luogo dei p.ti del piano complesso che risolvono l'eq. caratteristica

$1 + KGH = 1 + K L(s) = 0$ per tutti i valori positivi di K $(K \in \mathbb{R}^+)$

Il luogo dei p.ti che risolvono l'eq. caratteristica con $K \in \mathbb{R}^-$ è chiamato luogo delle radici complementari

Se $\bar{s} \in LdR_+ \Rightarrow \exists\ \bar{K} \in \mathbb{R}^+$ t.c. $a_0(\bar{s}) = 0$

Se $\bar{s} \in LdR_- \Rightarrow \exists\ \bar{K} \in \mathbb{R}^-$ t.c. $a_0(\bar{s}) = 0$

Considero $a_0(s) = 1 + KL(s) = 0 \Rightarrow L(s) = -\frac{1}{K}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |L(s)| = |1/K| & \leftarrow \text{eq. di taratura} \\ \measuredangle L(s) = \measuredangle -1/K & \leftarrow \text{regola delle fasi} \end{cases}$$

$\measuredangle L(s) = \measuredangle -1/K$

<u>Regola delle fasi</u>

$$\measuredangle L(s) = \measuredangle -1/K \Rightarrow \measuredangle L(s) = \begin{cases} (2\nu+1)\pi & K>0 \\ 2\nu\pi & K<0 \end{cases}$$

$$\measuredangle L(s) = \measuredangle \frac{\prod s - z_i}{\prod s - p_i} = \sum \measuredangle (s - z_i) - \sum \measuredangle (s - p_i)$$

$$= \begin{cases} (2\nu+1)\pi & K>0 & LdR_+ \\ 2\nu\pi & K<0 & LdR_- \end{cases} = \sum_i^m \varphi_i - \sum_i^n \theta_i$$

con $\varphi_i = \measuredangle(s - z_i) \wedge \theta_i = \measuredangle(s - p_i)$

<u>Es</u> $L(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$

$$\measuredangle L(s) = \measuredangle s+1 - \measuredangle s - \measuredangle s+2 = \begin{cases} (2\nu+1)\pi & K>0 \\ 2\nu\pi & K<0 \end{cases}$$

$\bar{s} = -1 + j$

$\bar{s} + 1 = \bar{s} - z_1$, $\bar{s} = \bar{s} - p_1$, $\bar{s} + 2 = \bar{s} - p_2$

$z_1 = -1$, $p_1 = 0$, $p_2 = -2$

$$\measuredangle L(\bar{s}) = \measuredangle_{-1+1}^{-1+j} - \measuredangle_{0}^{-1+j} - \measuredangle_{-2}^{-1+j} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$-\frac{\pi}{4} \neq (2\nu+1)\pi \;\wedge\; -\frac{\pi}{4} \neq 2\nu\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{z} \notin LdR_+ \;\wedge\; \bar{z} \notin LdR_-$

La regola delle fasi ~~...~~ rappresenta una verifica, non un modo per trovare le radici.

Eq. di Taratura

$$|K| = \frac{1}{|L(s)|} = \frac{\prod p_i}{\prod \chi_i} \quad \text{con} \quad p_i = |s - p_i| \;\wedge\; \chi_i = |s - z_i|$$

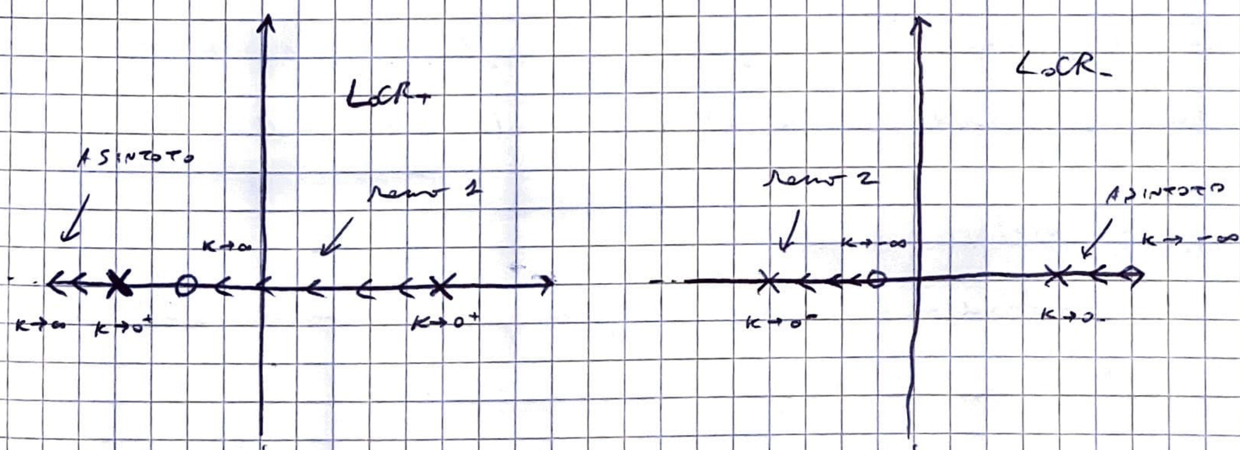
K aumenta allontanandosi dai poli e avvicinandosi agli zeri.

Regole di Evans

1. LdR sempre simmetrico rispetto all'asse reale
2. LdR ha num. di rami pari al num. di poli di $L(s)$
3. Ogni polo dà origine ad un ramo $(K \to 0)$ che o confluisce in uno zero o diverge.

Ce sono $n-m$ asintoti ed m rami confluiscono.

(n è il num. dei poli, m il num. degli zeri)



$$\lim_{s\to p} |L(s)| = \infty \qquad \lim_{s\to z} |L(s)| = 0$$

$$\Rightarrow |K| \to 0 \qquad \Rightarrow |K| \to \infty$$

4. Un p.to $s \in \mathbb{R}$ appartiene ad LdR$_+$ [LdR$_-$] se alla sua dx ci sono un numero dispari [pari] di poli o zeri.

La dim. viene dalla regola delle fasi.

In LdR$_+$ $\measuredangle \, k L(\bar{s}) = (2\nu + 1)\pi$

Le fasi per le coppie complesse di poli si annullano.

Per ogni polo sottraggo π, per ogni zero aggiungo π.

$m\pi - n\pi = (m-n)\pi$ con $m-n$ dispari $= 2\nu + 1$

Per LdR$_-$ $\measuredangle \, L(\bar{s}) = 2\nu\pi$ quindi i num. di poli e di zeri devono essere pari.

5. I rami che tendono all'infinito si ritrovano tutti in un p.to dell'asse reale σ detto centroide.

$$\sigma = \frac{\sum_i^n p_i - \sum_i^m z_i}{n - m}$$

Gli angoli degli asintoti si calcolano come

$$\theta_{a,\nu} = \begin{cases} (2\nu + 1)\pi \frac{1}{n-m} & \text{per } k > 0 \quad \text{LdR}_+ \\ 2\nu\pi \frac{1}{n-m} & \text{per } k < 0 \quad \text{LdR}_- \end{cases} \quad \text{con } \nu \in \mathbb{N}$$

6. Ci sono p.ti di confluenza e p.ti di emersione che sono le radici multiple di $e_0(s) = 1 + kL(s) = 0$

Si trovano risolvendo $a'(s)b(s) - a(s)b'(s) = 0$

con $L(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$

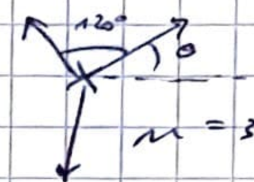
I p.ti di confluenza sono i p.ti dell'asse reale nel quale confluiscono 2 o più rami.

I p.ti di emersione sono i p.ti dell'asse reale dal quale emergono 2 o più rami.

7. Angolo di partenza di un ramo da un polo

$$\theta_{p,\nu} = \frac{1}{r}\left[\sum \angle (p - z_i) - \sum_{i \neq} \angle\, p - p_i + \underset{2\nu\pi}{(2\nu + 1)\pi} \right]$$

molteplicità



8. Angolo di arrivo negli zeri

$$\theta_{z,\nu} = \frac{1}{r}\left[\sum \angle (z - p_i) - \sum \angle (z - z_i) + \underset{2\nu\pi}{(2\nu + 1)\pi} \right]$$

9. LdR interseca l'asse immaginario per valori di K che annullano una riga dispari della tab. di Routh.