LEGENDA

1. CORRENTE CONTINUA

- Nozioni importanti
- Bipoli
- Generatori
- Bipoli reali e ideali
- Bipoli lineari
- Gen. Dipendenti
- Cortocircuito e circuito aperto
- Resistenza
- Legge di Ohm
- Leggi di Kirchhoff
- Bipoli equivalenti
- Conduttanza
- Partitore di tensione
- Partitore di corrente
- Rendimento
- Passivazione
- Trasformatore gen. Reali
- Semplificazioni ai gen. Dip.
- Indicatori
- Resistenze stella-triangolo
- Th. di Tellegen
- PSE
- Prevalenza
- Th. di Millman
- Th. di Thevenin
- Th. di Norton
- Th. massimo trasferimento di potenza
- Condensatore
- Induttore
- Circuiti del primo ordine
    - Circuito RC
    - Circuito RL
- Circuiti del secondo ordine
    - Sovra smorzamento
    - Smorzamento critico
    - Sotto smorzamento

2. CORRENTE ALTERNATA

- Impedenza
- Triangolo delle impedenze
- Ammettenza
- Potenze
- Triangolo delle potenze
- Valore efficace
- Principio di conservazione della potenza
- Th. di Boucherot
- Th. massimo trasferimento di potenza attiva
- Rifasamento
    - Metodo delle potenze
    - Metodo delle impedenze
- Risonanza RLC serie
- Risonanza RLC parallelo puro
- Risonanza RLC parallelo non puro
- Campana di risonanza
- Frequenza di taglio
- Fattore di qualità
- Filtri
- Autoinduzione
- Mutua induzione
- Collegamento induttori accoppiati
- Energia di mutuo accoppiamento
- Leggi di Kirchhoff Magnetiche
- Formule per nuclei ferromagnetici
- Trasformatore
- Trasformatore ideale
- Anti-trasformatore
- Trifase

NOZIONI IMPORTANTI

- principio di conservazione della carica

La carica elettrica non si può creare o distruggere, solo trasferire.

- $i = \frac{dq}{dt}$ $\quad j = \frac{di}{dS}$ $\quad \xrightarrow{x} \equiv \xleftarrow{-x}$

- Esistono 2 tipi di corrente

• STAZIONARIA (regime stazionario)

• ALTERNATA (regime sinusoidale)

- La tensione è la differenza di potenziale

Anche la tensione può essere continua o alternata.

- $P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = V \cdot i \quad [V \cdot A = W]$

$1\,W = \frac{1\,J}{1\,s}$

La potenza ha un segno e dipende dalla convenzione

• convenzione del generatore $\Rightarrow$ $P<0$ assorbita, $P>0$ generata

• convenzione dell'utilizzatore $\Rightarrow$ $P<0$ generata, $P>0$ assorbita

- principio di conservazione dell'energia

La somma algebrica di tutte le potenze del circuito è nulla.

- circuito elettrico a parametri concentrati PC

È a PC se $\lambda_{min} >>> D_{max}$ $\quad (\lambda_{min} \geq 10\, D_{max})$

$\lambda = c/f \qquad D \rightarrow$ dimensioni circuito

BIPOLI

Sono elementi circuitali con 2 morsetti (terminali)

BIPOLI → ATTIVI gen. potenza (ATTIVI → non lineari)

BIPOLI → PASSIVI dissipano/assorbono potenza (PASSIVI → lineari)

GENERATORI

Sono bipoli attivi. Possono essere indipendenti o dipendenti da parametri nel circuito.

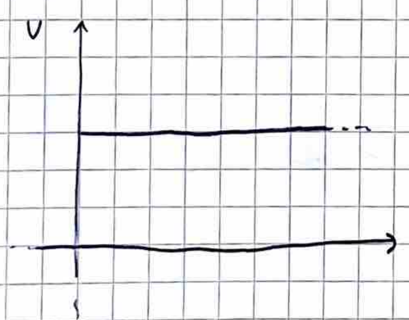
BIPOLI REALI E IDEALI

I bipoli possono essere reali o ideali.
Sono reali se hanno resistenza interna in serie e/o parallelo.
Sono ideali se presenti senza alcuna resistenza interna.

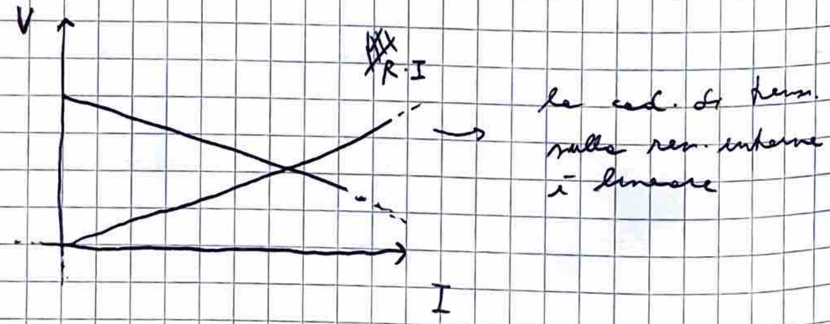
BIPOLI LINEARI

I bipoli sono lineari se è rappresentabile come una retta passante per l'origine prendendo 2 caratteristiche fisiche circuitali come assi.

In gen. ~~tutti~~ ideali non sono lineari.
Quelli reali sì



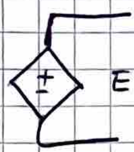
gen tensione ideale

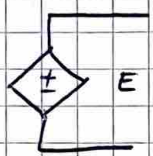


gen tensione reale

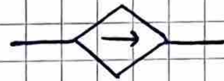
GEN. DIPENDENTI

$[S = \frac{1}{\Omega}]$

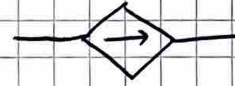
 $E = E_0 v$

 $E = R_0 i$

$I = E_0 v$



$I = I_0 v$



GTCT GTCC GCCT GCCC

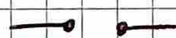
Generatore di Tensione/Corrente Controllato da Tensione/Corrente

Sono tutti bipoli lineari e passivi

CORTO CIRCUITO + CIRCUITO APERTO

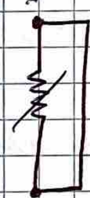
CORTOCIRCUITO

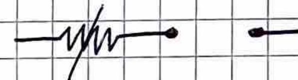
$V \to 0$
$R \to 0$



CIRCUITO APERTO

$I \to 0$
$R \to \infty$



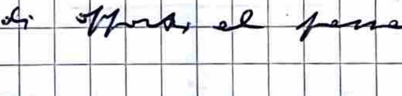


Tutto ciò che è in parallelo ad un corto circuito o in serie ad un circuito aperto può essere eliminato.

RESISTENZA

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

$[\Omega]$



Il resistore ha la caratteristica di opporsi al passaggio della corrente.

Legge di Ohm $R = \frac{V}{I}$ $(V = R \cdot I)$

Deriva direttamente dalla proporzionalità lineare e diretta tra V e I.

Deriva dalla linearità del resistore.

LEGGI DI KIRCHHOFF

Definizioni

- Un ramo è un bipolo
- Un nodo è un p.to di interconnessione di 2 o più bipoli
- Una maglia è un percorso chiuso che si ottiene partendo da un nodo A di partenza e tornando su di esso attraversando i nodi una sola volta.
- Una maglia è ind. se contiene un nodo non contenuto in altre maglie
- Un nodo è degenere se collega solo 2 rami.

Dati b rami, l maglie ind. ed n nodi la legge fondamentale dei circuiti elettrici dice che

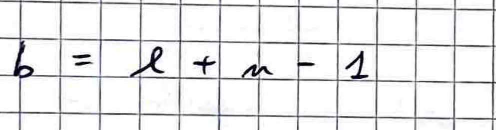
$$b = l + n - 1$$

LKC Per qualsiasi nodo la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti

LKT Per qualsiasi maglia la somma delle tensioni è nulla.

BIPOLI EQUIVALENTI

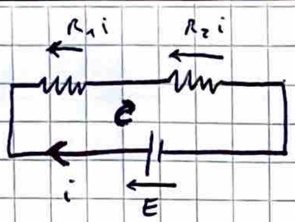
Serie 2 bipoli sono in serie se attraversati dalla stessa corrente



Per LKC $i_1 = i_2$

R_1 ed R_2 sono in serie.

Sono in serie se condividono in maniera esclusiva un nodo.

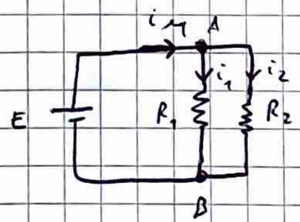


$$E - R_1 i - R_2 i = 0 \quad \text{per LKT}$$

$$E = i\,(R_1 + R_2) = i\,R_{eq}$$

$$R_{eq} = \sum_i R_i$$

Parallelo: 2 bipoli sono in parallelo se ai loro capi insiste la stessa tensione



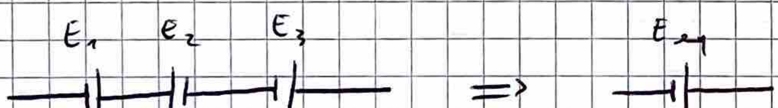
$$E = R_1 \cdot i_1 = R_2 i_2$$

$$i_1 = \frac{E}{R_1} \qquad i_2 = \frac{E}{R_2}$$

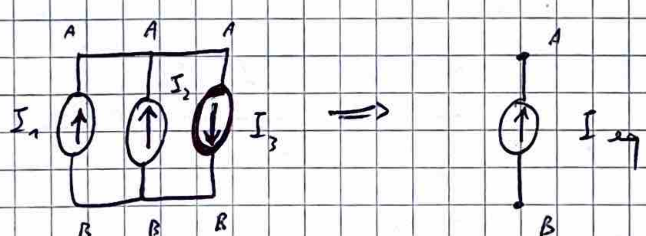
$$i_{eq} = i_1 + i_2 = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = E\,\frac{1}{R_{eq}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Sono in parallelo se sono collegati tra le stesse coppie di nodi.



$$E_{eq} = E_1 - E_2 + E_3$$



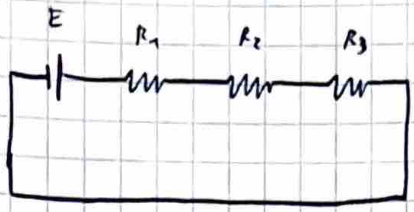
$$I_{eq} = I_1 + I_2 - I_3$$

Conduttanza $\quad G = \dfrac{1}{R}$

$$R_1 \,//\, R_2 \,//\, R_3 \,//\, \dots \,//\, R_n \Rightarrow G_{eq} = \sum_i G_i$$

$$R_{eq} = G_{eq}^{-1}$$

Partitore di tensione



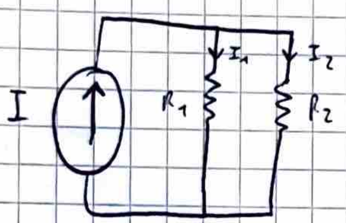
LKT $E - R_1 i - R_2 i - R_3 i = 0$

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$V_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} E$$

$$V_n = R_n i = \frac{R_n}{\sum_i R_i} E$$

Partitore di corrente



LKC $I_1 + I_2 = I$

$R_1 I_1 = R_2 I_2$

$$R_1 \cancel{I} I_1 = R_2 (I - I_1)$$

$$\Rightarrow I_1 (R_1 + R_2) = R_2 I \Rightarrow I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

In generale $I_n = \dfrac{G_n}{\cancel{G_n} \sum_i G_i} I$

RENDIMENTO

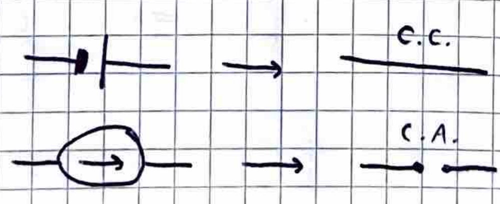
Il gen. ha un rendimento $\eta = \dfrac{P_e}{P_g} = \dfrac{-V_{AB} I}{-E I} = 1 - \dfrac{R_i I}{E}$

$\eta = 1$ nei gen. ideali dove $R_i = 0$

Nei gen. reali di corrente $\eta = 1 \iff R_i \to \infty$

R_i // (↑) mentre R_i (+) ⊣⊢

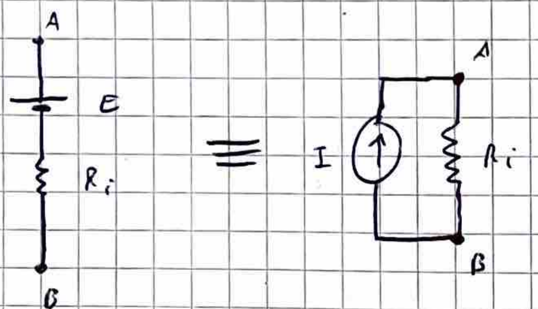
PASSIVAZIONE



$V = 0$

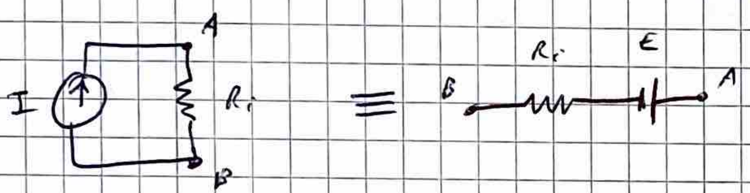
$I = 0$

TRASFORMATORE GEN. REALI



con $I = \frac{E}{R_i}$

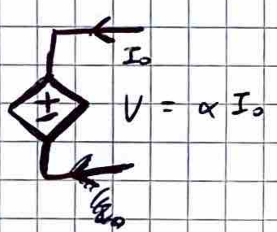
Usando il procedimento inverso per tornare allo stato precedente senza variazioni



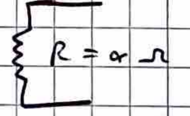
con $E = I R_i$

Non è applicabile a gen. ideali.

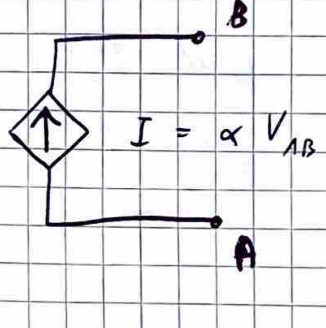
SEMPLIFICAZIONI AI GEN. DIP.



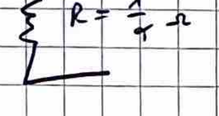
$R = \frac{V}{I} = \frac{\alpha I_0}{I_0} = \alpha$ GTCC



> 0



$R = \frac{V}{I} = \frac{V_{AB}}{\alpha V_{AB}} = \alpha^{-1}$ GCCT

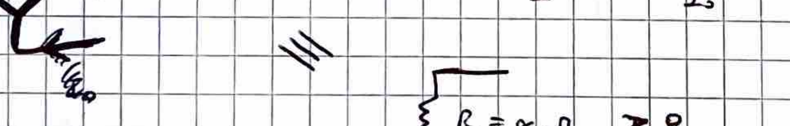


> 0

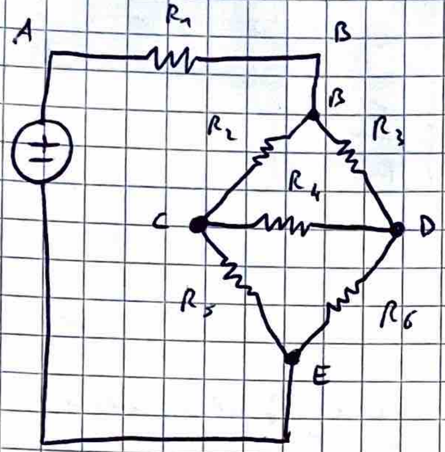
INDICATORI

voltmetro

amperometro



RESISTENZE STELLA – TRIANGOLO



Y

I resistori sono a stella quando hanno un nodo in comune

Δ

I resistori sono a triangolo quando hanno un nodo in comune a 2 a 2.

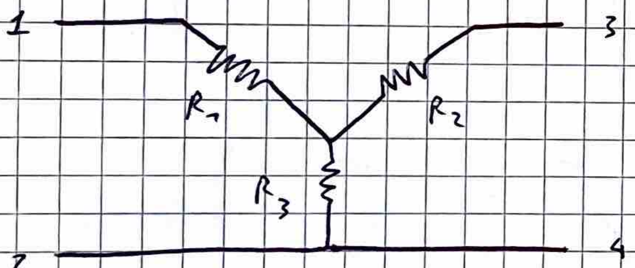
R_1, R_2 ed R_3 sono a stella (nodo in comune B)

R_2, R_4, R_5 + R_3, R_4, R_6 sono a stella (C + D)

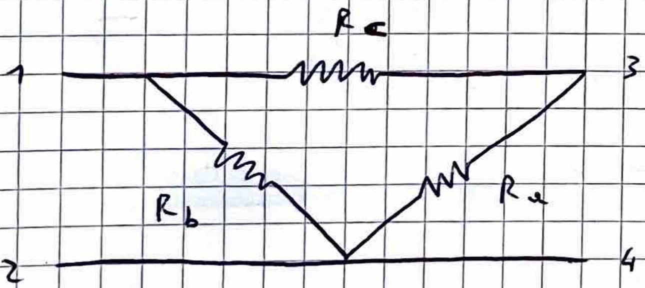
R_2, R_3, R_4 sono a triangolo (C, B, D)

R_4, R_5, R_6 sono a triangolo (C, D, E)

Δ → Y



$$R_{1,2} = R_1 + R_3$$
$$R_{1,3} = R_1 + R_2$$
$$R_{3,4} = R_2 + R_3$$



$$R_{1,2} = (R_a + R_c) \,//\, R_b$$
$$R_{1,3} = (R_b + R_a) \,//\, R_c$$
$$R_{3,4} = (R_b + R_c) \,//\, R_a$$

$$R_{1,2}(Y) = R_{1,2}(\Delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 + R_3 = \frac{(R_a + R_c) R_b}{R_a + R_c + R_b} \quad (1)$$

$$R_1 + R_2 = \frac{(R_a + R_b) R_c}{R_a + R_c + R_b} \quad (2)$$

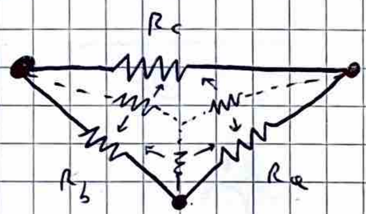
$$R_2 + R_3 = \frac{(R_b + R_c) R_a}{R_a + R_c + R_b} \quad (3)$$

Per trovare solo R_1 faccio $\underbrace{② - ③}_{R_1 - R_3}$ + ① → $2R_1$

$$\cancel{2}R_1 = \frac{(R_a+R_b)R_c}{R} - \frac{(R_b+R_c)R_a}{R} + \frac{(R_a+R_c)R_b}{R} =$$

$$= \frac{\cancel{R_aR_c} + R_bR_c - \cancel{R_bR_a} - \cancel{R_cR_a} + \cancel{R_aR_b} + R_bR_c}{\cancel{2}\,R} = \cancel{2}\,\frac{R_bR_c}{R_a+R_b+R_c}$$

$$R_1 = \frac{R_bR_c}{R_a+R_b+R_c} \qquad R_2 = \frac{R_aR_c}{R_a+R_b+R_c} \qquad R_3 = \frac{R_aR_b}{R_a+R_b+R_c}$$



$$\boxed{R_n = \frac{R_{adiacenti}}{\sum_i R_i}}$$ Δ → Y

$$R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 = \frac{R_aR_bR_c^2 + R_aR_b^2R_c + R_a^2R_bR_c}{(R_a+R_b+R_c)^2} =$$

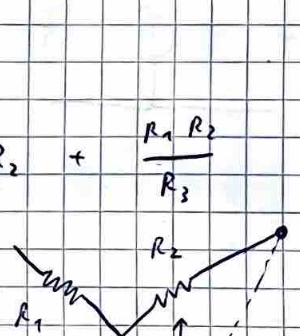
<u>Y → Δ</u>

$$= \frac{R_aR_bR_c\,\cancel{(R_a+R_b+R_c)}}{(R_a+R_b+R_c)^{\cancel{2}}} = \frac{R_aR_bR_c}{R_a+R_b+R_c}$$ ④

$$\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1} = \frac{R_a\cancel{R_b}\cancel{R_c}}{\cancel{R_a+R_b+R_c}} \cdot \frac{\cancel{R_a+R_b+R_c}}{\cancel{R_b}\cancel{R_c}}$$

$$\Rightarrow \quad R_a = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}$$

$$R_b = R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2} \qquad R_c = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$



$$\boxed{R_n = \sum R_{adiacenti} + \frac{\prod R_{adiacenti}}{R_{opposta}}}$$

Y → Δ

Th. di Tellegen

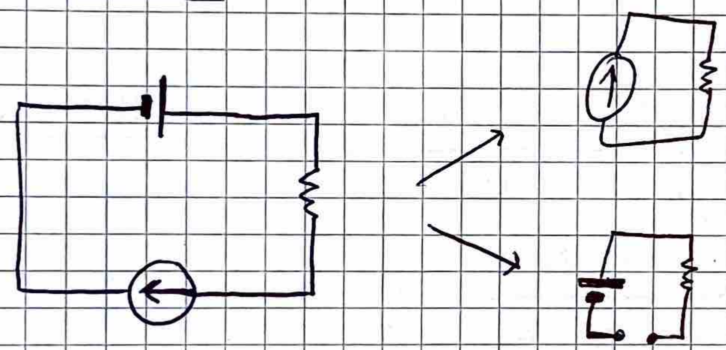
La somma delle potenze di ogni singolo ramo è nulla.

Principio di Sovrapposizione degli effetti PSE

Consiste nel spegnere tutti i gen ind. eccetto uno. Calcolare l'effetto di ogni singolo componente e infine sommare gli effetti. Vale solo per caratteristiche lineari.

$$P = RI^2 \neq R(I'^2 + I''^2)$$

Prevalenza

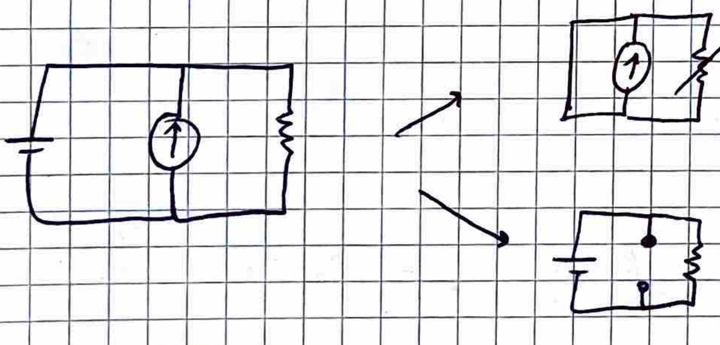


$I'_R = I_g$

$I''_R = 0$

$\Rightarrow I = I_g$

(→) ha prevalenza con tutte le componenti in serie.

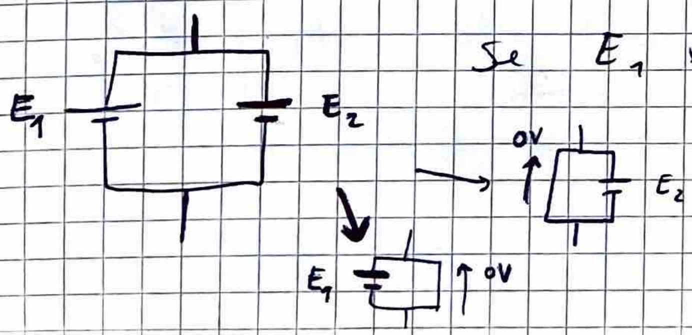


$I'_R = 0$

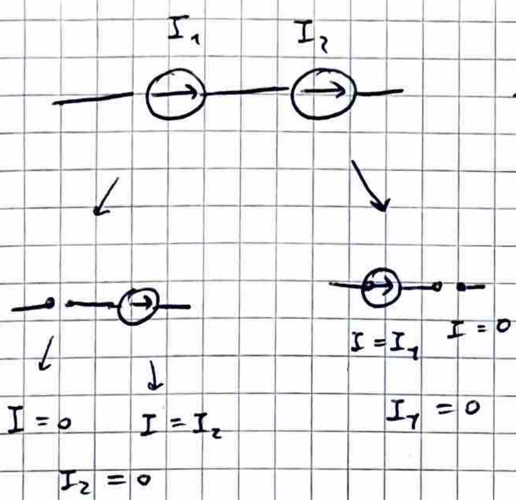
$I''_R = \frac{E}{R}$

$\Rightarrow I = \frac{E}{R}$

-|⊢ ha prevalenza con tutti i bipoli in parallelo.



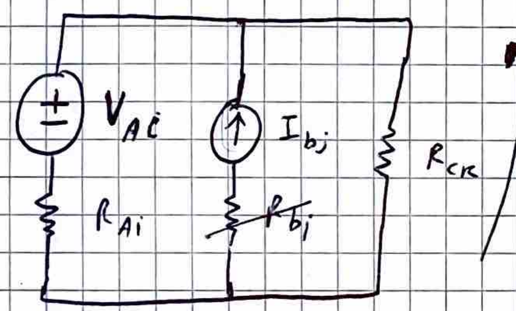
Se $E_1 \neq E_2 \neq 0$ è un assurdo fisico.



Se $I_1, I_2 \neq 0$ è un assurdo fisico

Con il PSE è dimostrabile sia la prevalenza che gli assurdi fisici.

Th. di Millman

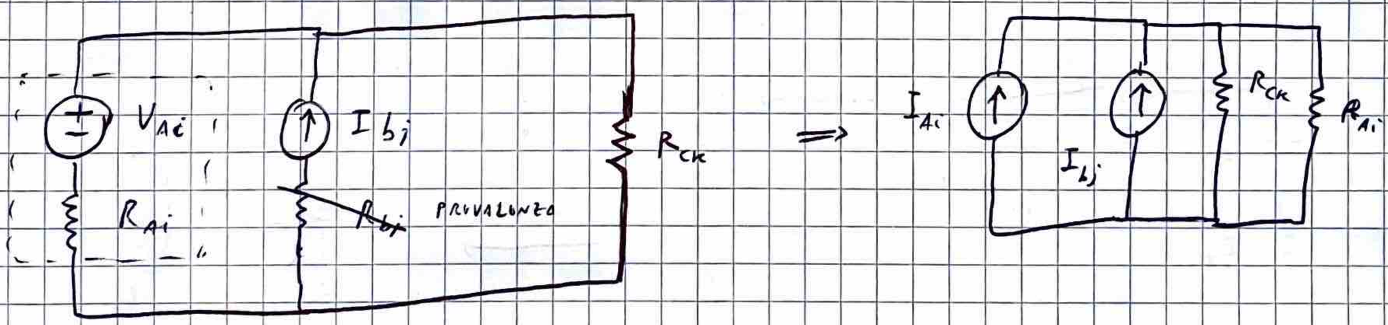


$V_o = R_o I_o$

$$I_o = \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + I_{bj}$$

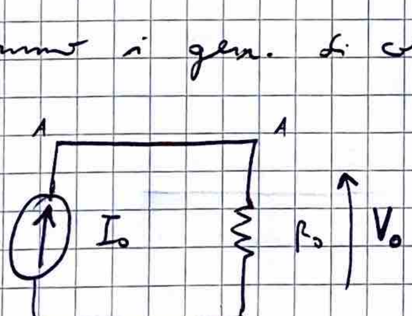
$$R_o = \frac{1}{1/R_{Ai} + 1/R_{CK}}$$

Dim. Trasformo il gen. di ~~tensione~~ tensione in uno di corrente



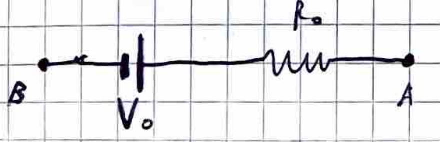
con $\cancel{A} I_{Ai} = \frac{E_{Ai}}{R_{Ai}}$

Sommo i gen. di corrente in parallelo e trovo R_{eq}



$$I_o = I_{Ai} + I_{bj} = \frac{E_{Ai}}{R_{Ai}} + I_{bj}$$

$$R_o = \frac{1}{1/R_{CK} + 1/R_{Ai}}$$



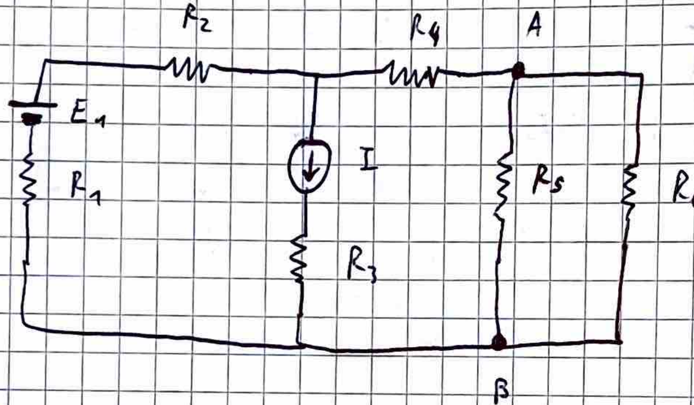
$$V_o = I_o R_o$$

Th di Thevenin

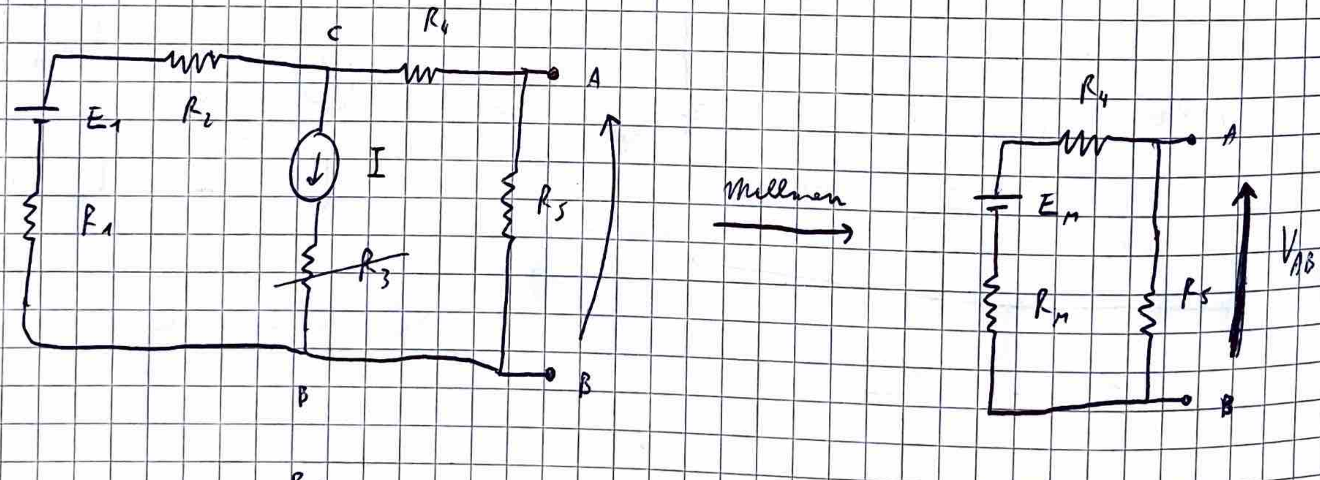
Requisiti della rete:

- comunque complessa
- tempo-invariante
- lineare
- univoca
- no legami con grandezze elettriche esterne alla rete
- accessibile da 2 morsetti

Es



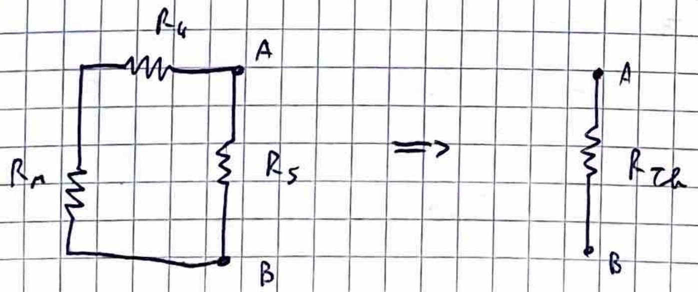
Stacco R_6



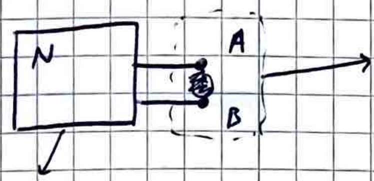
$$V_{AB} = \frac{R_5}{R_M + R_4 + R_5} E = E_{Th}$$

Passivo ogni gen.

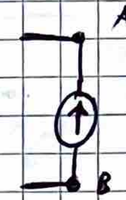
$$R_{Th} = \frac{(R_4 + R_M) R_5}{R_4 + R_M + R_5}$$



Dim

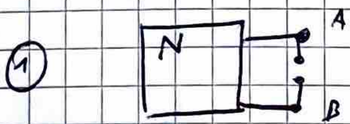


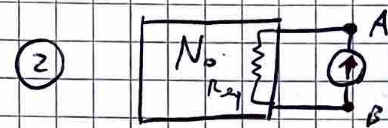
Applico un gen di corrente tra A e B



blackbox

Uso il PSE





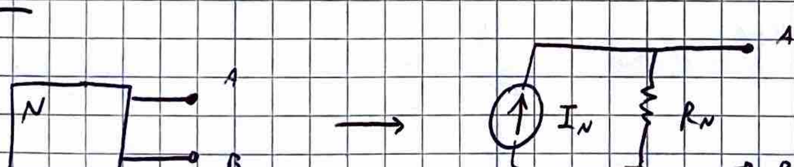
$$V'_{AB} = V_{AB0} \qquad V''_{AB} = R_{eq} I$$

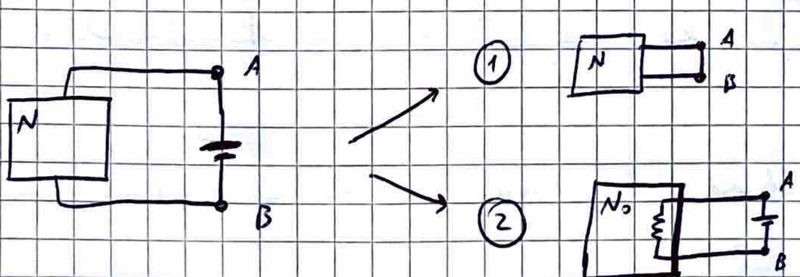
$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = V_{Th} + R_{Th} I$$

Th. di Norton

Stesse ipotesi del th. di Thevenin

Dim



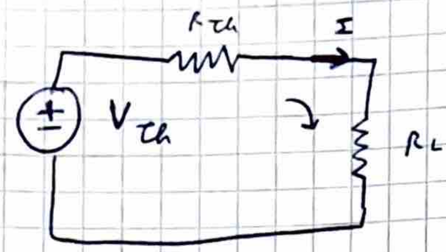


$$I' = I_{cc} = I_N$$

$$I'' = \frac{E}{R_{eq}} \quad // \quad R_N$$

$$I = I' + I'' = I_N - \frac{E}{R_N}$$

Th. massimo trasferimento di potenza



$$P = R_L I^2$$

$$I = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L}$$

Se $R_L = 0 \Rightarrow P \to 0$, se $R_L \to \infty \Rightarrow P_L \to 0$

$$P = R_L \frac{V_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{V_{th}^2 (R_{th} + R_L)^2 - R_L V_{th}^2 (2R_{th} + 2R_L)}{(R_{th} + R_L)^4} =$$

$$= \frac{(R_{th}^2 - R_L^2) V_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^4} = \frac{(R_{th} - R_L) V_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^3} = 0$$

$\iff R_{th} = R_L$ (condizione max. trasferimento)

$\eta = 0.5$ quando $\frac{R_L}{R_{th}} = 1$

CONDENSATORE

È un bipolo passivo conservativo con la capacità di trattenere le cariche.
La carica del condensatore termina appena viene raggiunta la stessa ddp tra le 2 facce.

$$q = CV \quad [C = F \cdot V] \Rightarrow \left[F = \frac{C}{V}\right]$$

$$\frac{dq}{dt} = i = \frac{d}{dt} CV \Rightarrow \underbrace{i = C \frac{dV}{dt}}_{\text{lineare}}$$

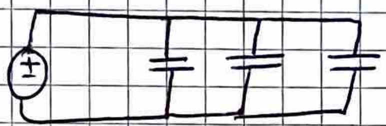
in DC $\left(\frac{dV}{dt} = 0\right)$

$$P = V \cdot i = V \cdot C \frac{dV}{dt}$$

$$W = \int_{-\infty}^{t} P \, dt = \int_{-\infty}^{t} C V \frac{dV}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = \int_{0}^{V(t)} C V \, dV = \frac{1}{2} C V^2$$

$$W = \int_{t}^{\infty} P \, dt = \int_{t}^{\infty} C V \frac{dV}{dt} dt = \int_{V(t)}^{0} C V \, dV = -\frac{1}{2} C V^2$$

Parallelo



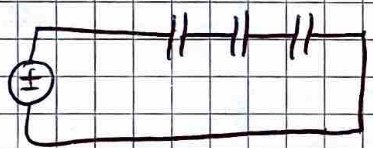
$$i_{eq} = i_1 + i_2 + i_3$$

$$i_1 = C_1 \frac{dV}{dt} \qquad i_2 = C_2 \frac{dV}{dt} \qquad i_3 = C_3 \frac{dV}{dt} \qquad \text{con } \frac{dV}{dt} \text{ uguale}$$

$$i_{eq} = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{dV}{dt} = C_{eq} \frac{dV}{dt}$$

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

Serie



$$i_{eq} = C_1 \frac{dV_1}{dt} = C_2 \frac{dV_2}{dt} = C_3 \frac{dV_3}{dt}$$

$$V = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{t} i \, dt + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^{t} i \, dt + \frac{1}{C_3} \int_{-\infty}^{t} i \, dt \overset{\sum_i^3 V_i(t_0)}{=}$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int_{-\infty}^{t} i \, dt + V_{eq}(t_0)$$

$$\text{con } \frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad \text{e} \quad V_{eq}(t_0) = \sum_i V_i(t_0)$$

INDUTTORE

È un bipolo costituito da un filo conduttore avvolto in più spire. passivo conservativo

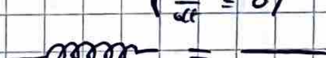
Conserva energia all'interno del proprio campo magn.

$$\underbrace{V = L \frac{di}{dt}}_{\text{lineare}} \qquad \text{con } L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \qquad [H = \frac{A}{m}]$$

N → num. spire

$\mathcal{R}$ → riluttanza

$\left(\frac{di}{dt} = 0\right)$



c.c.

in D.C.

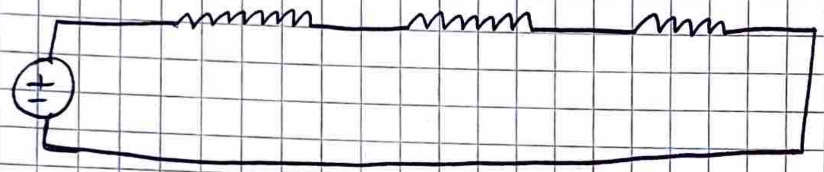
$$V = L \frac{di}{dt} \Rightarrow i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} V\, dt = \int_{t_0}^{t} V\, dt + i(t_0)$$

$$P = Vi = L \frac{di}{dt} \cdot i$$

$$W = \int_{-\infty}^{t} P\, dt = \int_{-\infty}^{t} L i \frac{di}{dt}\, dt = \int_{0}^{i(t)} L i\, di =$$

$$= \frac{1}{2} L i^2$$

$$W = \int_{t}^{\infty} P\, dt = \dots = -\frac{1}{2} L i^2$$

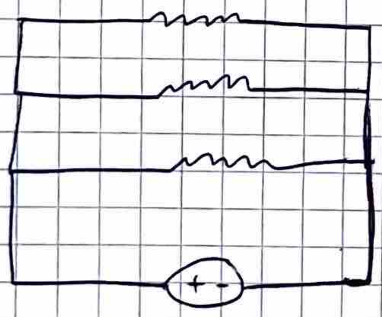


Serie

$$V_1 = L_1 \frac{di}{dt} \qquad V_2 = L_2 \frac{di}{dt} \qquad V_3 = L \frac{di}{dt}$$

$$V_{eq} = (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = \sum_i L_i$$



Parallelo

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = L_3 \frac{di_3}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} V\, dt + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} V\, dt + \frac{1}{L_3}\int_{t_0}^{t} V\, dt$$

$$+ i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)$$

$$i = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} V\, dt + i_{eq}(t_0) \quad \text{con} \quad \frac{1}{L_{eq}} = \sum_i \frac{1}{L_i}$$

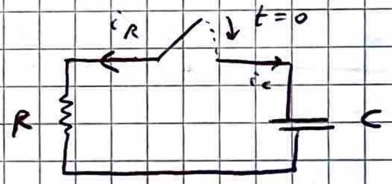
CIRCUITI DEL PRIMO ORDINE

L'ordine del circuito è dato dal n. di bipoli reattivi (RL e RC)
Per risolvere un circuito di n-esimo ordine bisogna risolvere un'eq. diff di ordine n.
Ci sono 2 tipi di risposte:
- libera / naturale
- forzata
C'è la risposta completa (libera + forzata)

CIRCUITO RC

- Risposta naturale (no gen ind.)

$$i_c = C \frac{dV}{dt} \qquad V_c = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

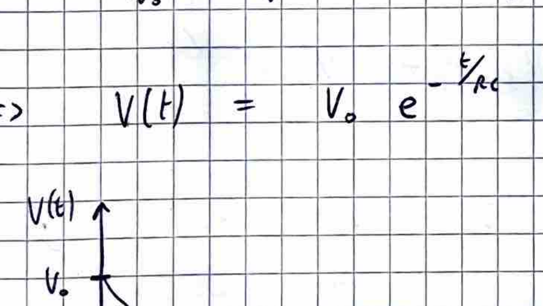


Chiudiamo T in $t = 0$

$$\overbrace{\frac{V}{R}}^{i_R} + \overbrace{C \frac{dV}{dt}}^{i_c} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} + \frac{dt}{RC} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0}^{v(t)} \frac{dV}{V} = - \int_0^t \frac{1}{RC} dt \Rightarrow \log \frac{V(t)}{V_0} = - \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow V(t) = V_0 e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = RC$$



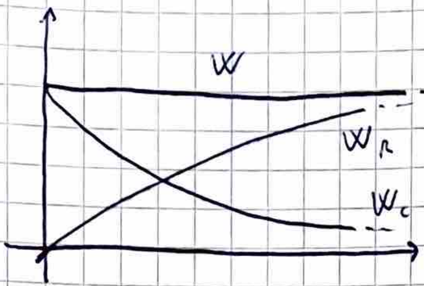
$$V(\tau) = 0.368 \, V_0$$

$$V(2\tau) = 0.135 \, V_0$$

$$V(5\tau) = 0.00674 \, V_0$$

$$W_c(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 e^{-2t/\tau}$$

$$W_R = \int_0^t P_R \, dt = \int_0^t \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right)$$

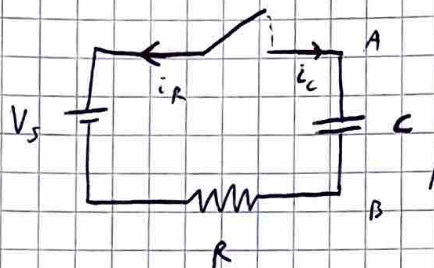


$$W = W_C + W_R = \frac{1}{2} C V_0^2$$

$$W_C = \frac{1}{2} C V_0^2 e^{-2t/\tau}$$

$$W_R = \frac{1}{2} C V_0^2 (1 - e^{-2t/\tau})$$

- Risposta forzata ~~completa~~ (C.I. nulle $V_0 = 0$)



$$i_C = C \frac{dV}{dt} \qquad V_C = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

$$V_{AB} = V_S + R i_R \Rightarrow i_R = \frac{V_{AB} - V_S}{R}$$

$$\frac{V_{AB} - V_S}{R} + C \frac{dV}{dt} = 0 \qquad (i_R + i_C = 0)$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V_{AB} - V_S} = - \frac{dt}{RC} \Rightarrow \int_{V_0}^{V(t)} \frac{dV}{V_{AB} - V_S} = \int_0^t - \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \log \frac{V(t) - V_S}{V_0 - V_S} = - \frac{t}{RC} \Rightarrow$$

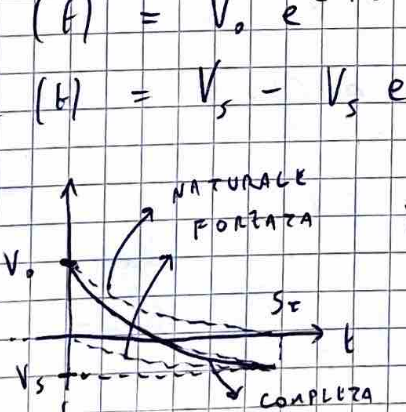
$$\Rightarrow V(t) = V_S + (V_0 - V_S) e^{-t/\tau}$$

Con $V_0 = 0 \Rightarrow V_F(t) = V_S - V_S e^{-t/\tau}$

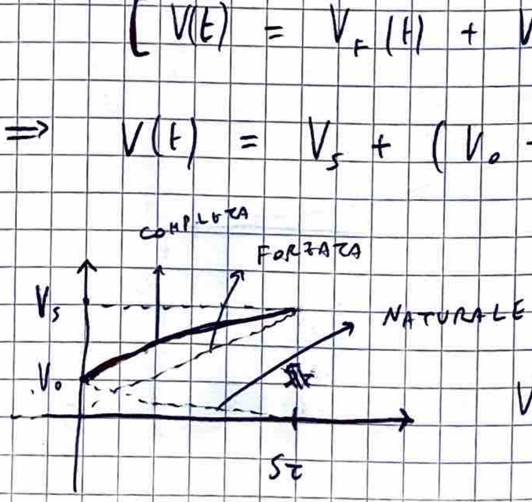
- Risposta completa

$$[V(t) = V_F(t) + V_N(t)]$$

$$V_N(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$
$$V_F(t) = V_S - V_S e^{-t/\tau}$$
$$\Rightarrow V(t) = V_S + (V_0 - V_S) e^{-t/\tau}$$



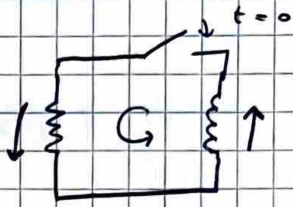
$V_0 > V_S$



$V_0 < V_S$

CIRCUITO RL

- Risposta naturale (no gen ind)



$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \qquad i_L = \frac{1}{L}\int V_L \, dt$$

$$V_R + V_L = 0 \Rightarrow Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow \int_{i_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt$$

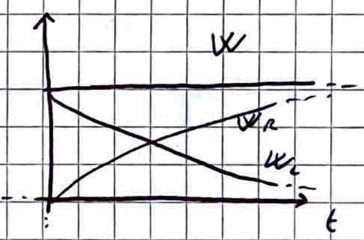
$$\Rightarrow \log \frac{i(t)}{i_0} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_N(t) = i_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

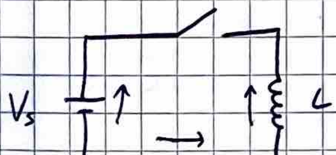
$$W_L = \frac{1}{2}Li_0^2 = \frac{1}{2}L i_0^2 e^{-2t/\tau}$$

$$W_R = \int_0^t P\,dt = \int R i_0^2 e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2}Li_0^2\left(1 - e^{-2t/\tau}\right)$$

$$W = W_L + W_R = \frac{1}{2}Li_0^2$$



- Risposta forzata



$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

$$V_R + V_L - V_s = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} - V_s = 0 \Rightarrow \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i - \frac{V_s}{R} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di}{i - V_s/R} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow \int_{i_0=0}^{i(t)} \frac{di}{i - V_s/R} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt$$

$$\Rightarrow \log \frac{i(t) - V_s/R}{i_0 - V_s/R} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow$$

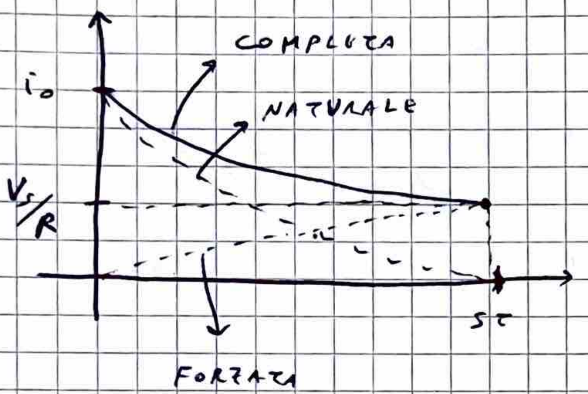
$$\Rightarrow i_F(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

- Risposta completa

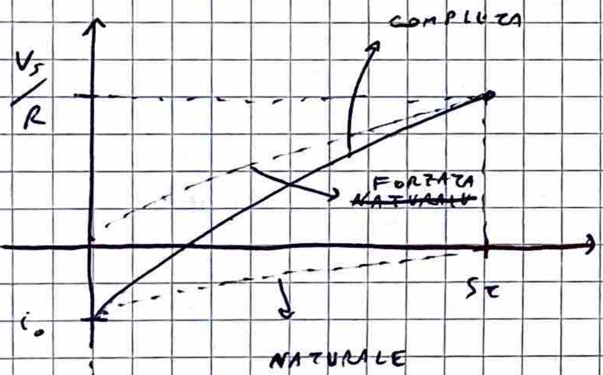
$$i_N(t) = i_0 e^{-t/\tau}$$

$$i_F(t) = \frac{V_s}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(i_0 - \frac{V_s}{R}\right) e^{-t/\tau}$$



$i_0 > V_s/R$



$i_0 < V_s/R$

$$i(t) = i_\infty + (i_0 - i_\infty) e^{-t/\tau}$$

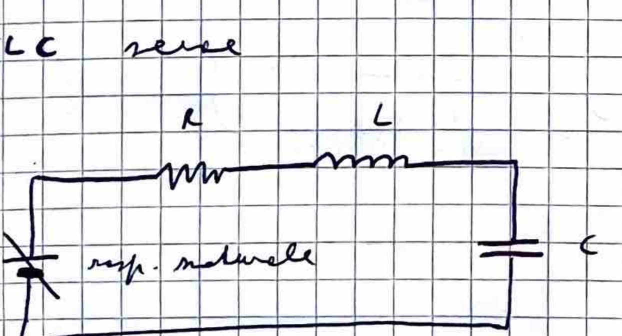
$$V(t) = V_\infty + (V_0 - V_\infty) e^{-t/\tau}$$

RL $\quad \tau = \frac{L}{R}$

RC $\quad \tau = RC$

CIRCUITI DEL SECONDO ORDINE

RLC serie



$i_L(0) = i_0 \qquad V(0) = V_0$

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0$$

$\alpha = \frac{R}{2L}$ smorzamento $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ freq. oscillazione (risonanza)

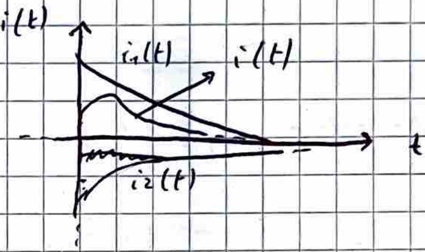
Se $\alpha > \omega_0 \rightarrow s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ SOVRASMORZAMENTO

Se $\alpha = \omega_0 \rightarrow s_1 = s_2 \in \mathbb{R}$ SMORZAMENTO CRITICO

Se $\alpha < \omega_0 \rightarrow s_1, s_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ SOTTOSMORZAMENTO

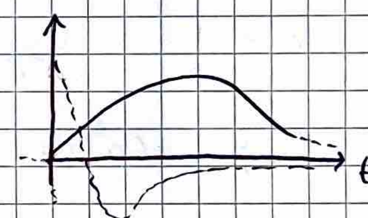
Sovrasmorzamento

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



Smorzamento critico

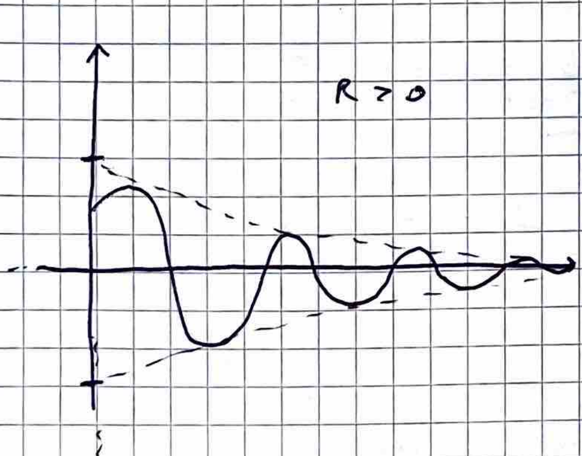
$$i = (A_1 t + A_2)\, e^{-\alpha t}$$

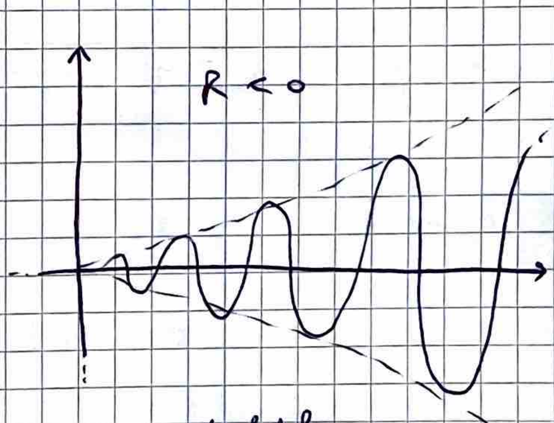


Sottosmorzamento

$$i = e^{-\alpha t} \left[B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \operatorname{sen}(\omega_d t) \right]$$

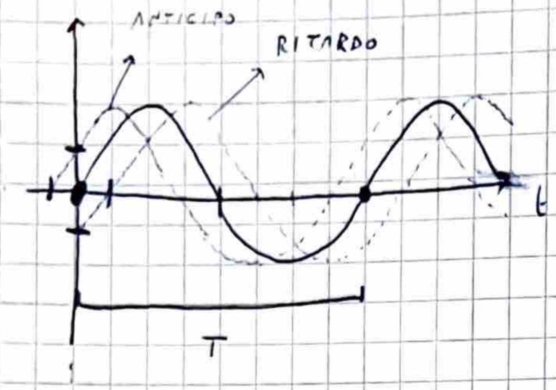
con $B_1 = A_1 + A_2$ e $B_2 = j\,(A_1 - A_2)$





instabile

CORRENTE ALTERNATA



$$V(t) = V_{MAX} \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = i_{MAX} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i)$$

$$f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

in anticipo $\varphi_x > 0$ in ritardo $\varphi < 0$

In Italia $f = 50\ Hz \Rightarrow \omega = 314\ rad/s$

$V_{MAX} = 220\ V \qquad V_{eff} = \frac{V_{MAX}}{\sqrt{2}} = 155{,}5\ V$

In USA $f = 60\ Hz \Rightarrow \omega = 377\ rad/s$

$V_{MAX} = 110\ V \qquad V_{eff} = \frac{V_{MAX}}{\sqrt{2}} = 77.8\ V$

<u>Werner</u>

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$z = x + jy \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$z = r \angle \theta \qquad z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle(\theta_1 + \theta_2)$

$z_1 / z_2 = r_1 / r_2 \angle(\theta_1 - \theta_2)$

Il fasore è un vettore rotante immortalato in un tempo $\bar{t}$
È un num. complesso che descrive ampiezza e fase.

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) \Rightarrow \dot{V} = V_M \angle \varphi_v$$

$\dot V_R = R\dot I \qquad (\varphi_V = \varphi_I)$

$\dot V_L = j\omega L \dot I \qquad (\varphi_V = \varphi_I + \frac{\pi}{2})$

$\dot V_C = -\frac{j}{\omega C}\dot I \qquad (\varphi_V = \varphi_I - \frac{\pi}{2})$

Impedenze

$$-\dot E + R\dot I + j\omega L\dot I - \frac{j}{\omega C}\dot I = 0 \qquad \underline{LKT}$$

$$\Rightarrow \quad \dot E = \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right)\dot I$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot E}{\dot I} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \bar Z \xrightarrow{} \text{IMPEDENZA} \quad \in \mathbb{C}$$

REATTANZA

$$\bar Z = R + jX \quad \text{con} \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \in \mathbb{R}$$

$$\bar Z = \bar Z_R + \bar Z_L + \bar Z_C$$

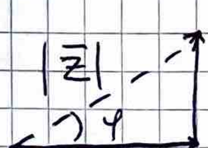
capacitiva

$$\bar Z_R = R \qquad \bar Z_L = j\omega L \qquad \bar Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

$$X_{\cancel{R}} = X_L - X_C \quad , \quad X_L = \cancel{j}\,\omega L \quad , \quad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

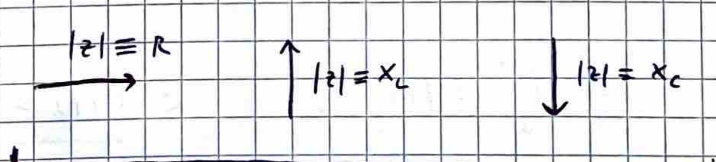
resistiva — induttiva — capacitiva

TRIANGOLO DELLE IMPEDENZE

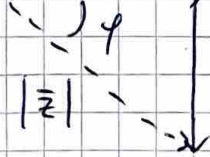


$X \quad (X_L > X_C \Rightarrow X > 0) \qquad RL$ — IMPEDENZA OHMICO-INDUTTIVA

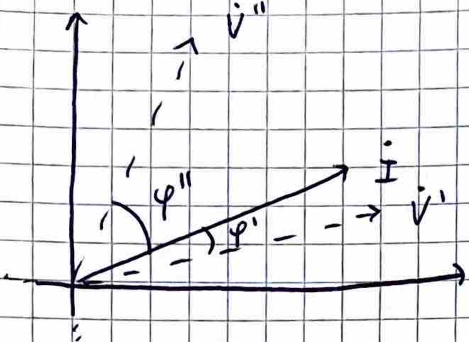
$$|\bar Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$



TRIANGOLI DEGENERI



$X \quad (X_L < X_C \Rightarrow X < 0) \qquad RC$ — IMPEDENZA OHMICO-CAPACITIVA



$\varphi'' > 0 \implies X > 0$ RL

$\varphi' < 0 \implies X < 0$ RC

__Ammettenza__ $\bar{Y} = \dfrac{1}{\bar{Z}} = \dfrac{1}{R + jX} = \dfrac{R - jX}{R^2 + X^2} = \dfrac{R - jX}{|\bar{Z}|^2} = \dfrac{\overline{\bar{Z}}}{|\bar{Z}|^2}$

$\bar{Y} = G + jB$

conduttanza

suscettanza

$G = \dfrac{R}{R^2 + X^2}$ $B = \dfrac{-jX}{R^2 + X^2}$

__Potenze__

1. ISTANTANEA $p(t) = v(t) \cdot i(t) = \overbrace{\frac{1}{2} V_M I_M \cos \Delta\varphi}^{\text{ATTIVA}} - \overbrace{\frac{1}{2} V_M I_M \cos \Omega}^{\text{FLUTTUANTE}}$

con $\Omega = 2\omega t + \Delta\varphi \longrightarrow \Delta\varphi = \varphi_v - \varphi_i$

$\varphi = \varphi_v + \varphi_i$

2. FLUTTUANTE $P_f(t) = -\frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + \Delta\varphi)$

$\cos(2\omega t + \varphi) = \cos 2\omega t \cos\varphi - \text{sen}\, 2\omega t\, \text{sen}\,\varphi$

$$P(t) = \underbrace{\frac{1}{2} V_M I_M \cos \Delta\varphi - \frac{1}{2} V_M I_M \cos 2\omega t \cos\varphi}_{\text{POTENZA ATTIVA ISTANTANEA}} + \underbrace{\frac{1}{2} V_M I_M\, \text{sen}\, 2\omega t\, \text{sen}\,\varphi}_{\text{REATTIVA ISTANTANEA}}$$

3. ATTIVA ISTANTANEA $P_A(t) = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\Delta\varphi - \frac{1}{2} V_M I_M \cos 2\omega t \cos\varphi$

4. REATTIVA ISTANTANEA $P_R(t) = \frac{1}{2} V_M I_M\, \text{sen}\, 2\omega t\, \text{sen}\,\varphi$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\Delta\varphi$$

5. ATTIVA $P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\Delta\varphi$

6. REATTIVA $Q = \frac{1}{2} V_M I_M\, \text{sen}\,\varphi = \max P_R(t)$

7. APPARENTE $S = \frac{1}{2} I_M V_M = \max P_f(t)$

8. COMPLESSA $P_c = P + jQ$ $\quad (|P_c| = S)$

9. FATTORE DI POTENZA $f.d.p. = \frac{P}{S} = \cos \Delta\varphi$

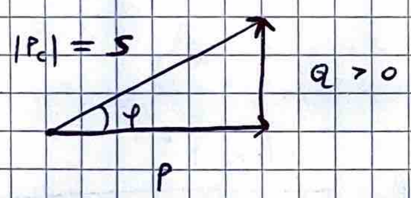
Ricapitolando:

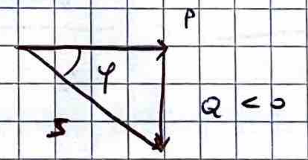
$$P(t) = P + P_f(t)$$
$$P(t) = P_a(t) + P_R(t)$$
$$P = \langle P_a(t) \rangle$$
$$Q = \max P_R(t)$$
$$S = \max P_f(t) = |P_c|$$
$$P_c = P + jQ$$
$$f.d.p. = \cos \Delta\varphi = \frac{P}{S}$$

$\Delta\varphi = \varphi$ perché $\varphi_I = 0$

$\varphi_V - \varphi_I = \varphi_V + \varphi_I$

Triangolo delle potenze





Valore efficace

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \, dt} \qquad \text{ROOT MEAN SQUARE}$$

$$= \frac{I_M}{\sqrt{2}} \qquad \left(V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \right)$$

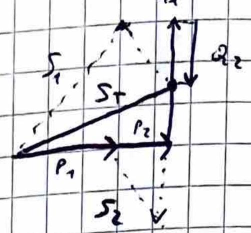
Principio di conservazione delle potenze

$\Sigma P = 0$ $\qquad$ Somma delle potenze ATTIVE / REATTIVE / COMPLESSE nulla

$\Sigma Q = 0$

$\Sigma P_c = 0 \quad (\Sigma S \neq 0)$

Th di Boucherot



$$P_T = P_1 + P_2 + P_3$$

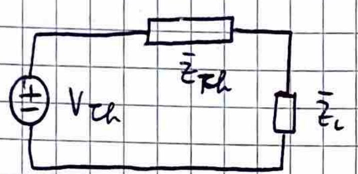
$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$

$$S_T = S_1 + S_2 + S_3 \iff \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$$

Se $\varphi_1 \neq \varphi_2 \qquad S_T \neq S_1 + S_2$

Th. massimo trasferimento di potenza attiva



$$\bar{Z}_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$$

$$\bar{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$P = \frac{1}{2} R_L |\dot{I}|^2$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_{Th}}{(R_{Th} + R_L) + j(X_{Th} + X_L)} = \frac{\dot{V}_{Th}}{\bar{Z}_{Th} + \bar{Z}_L}$$

$$P = \frac{1}{2} R_L \left(\frac{\dot{V}_{Th}}{\sqrt{(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2}} \right)^2 = \frac{1}{2} R_L \frac{|\dot{V}_{Th}|^2}{(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = 0 \implies -\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} R_L \frac{|V_{Th}|^2 \cancel{2}(X_{Th} + X_L)}{[(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2]^2} = 0$$

$$\implies X_{Th} = -X_L$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0 \implies \frac{1}{2} \frac{|\dot{V}_{Th}|^2 [(R_{Th}+R_L)^2 + \cancel{(X_{Th}+X_L)^2}] - \cancel{\tfrac{1}{2}} R_L |V_{Th}|^2 \cancel{2} (R_{Th}+R_L)}{[(R_{Th}+R_L)^2 + \cancel{(X_{Th}+X_L)^2}]^2} = 0$$

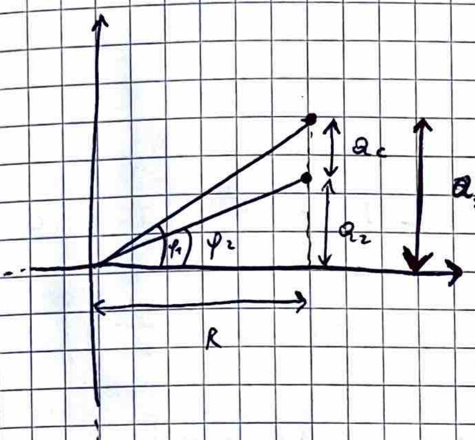
$$\implies \frac{1}{2} \frac{|V_{Th}|^2 (R_{Th} + \cancel{R_L} - \cancel{2}R_L)}{(R_{Th}+R_L)^{\cancel{4}3}} = 0 \implies R_{Th} = R_L$$

$$R_{Th} = R_L \wedge X_{Th} = -X_L \implies \bar{Z}_{Th} = \bar{Z}_L^*$$

Rifasamento

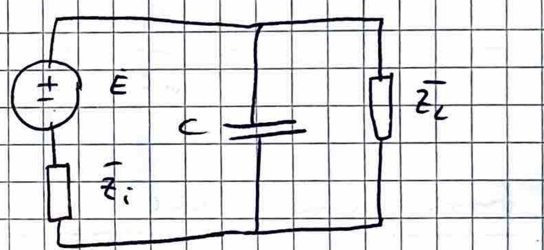
Avviene inserendo un condensatore in serie o parallelo che consente di cambiare la fase tra le componenti. In parallelo è impossibile staccare e attaccare senza interrompere il circuito.

Metodo delle potenze



$$Q_c = Q_1 - Q_2 =$$
$$= P(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2)$$
$$Q_c = \frac{|V_{eff}|^2}{X_c} = \omega C |V_{eff}|^2$$
$$\Longrightarrow C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2)}{\omega |V_{eff}|^2}$$

Metodo delle impedenze



$$\bar Z_L = R + j\omega L$$
$$\bar Z_c = -j/\omega C$$
$$\bar Z_{eq} = \frac{\bar Z_L \bar Z_c}{\bar Z_L + \bar Z_c} = \frac{-j\frac{R}{\omega C} + \frac{L}{C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} =$$
$$= \frac{\left(-\frac{jR}{\omega C} + \frac{L}{C}\right)\left(R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{-j\frac{R^2}{\omega C} + \cancel{\frac{LR}{C}} - \cancel{\frac{LR}{C}} - j\frac{\omega L^2}{C} - \frac{R}{\omega^2 C^2} + j\frac{L}{\omega C^2}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\operatorname{Im}\{\bar Z_{eq}\}}{\operatorname{Re}\{\bar Z_{eq}\}} = \frac{-\frac{R^2}{\omega C} - \frac{\omega L^2}{C} + \frac{L}{\omega C^2}}{-\frac{R}{\omega^2 C^2}} =$$
$$= \frac{-R^2 C - \omega^2 L^2 C + L}{\cancel{\omega C^2}\left(-\frac{R}{\omega^2 \cancel{C^2}}\right)} = \frac{\omega\left(L - R^2 C - \omega^2 L^2 C\right)}{R}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{\omega C}{R} \cdot \underbrace{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)}_{|Z|^2} + \frac{\omega L}{R} \rightarrow \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{X_L}{R_L}$$

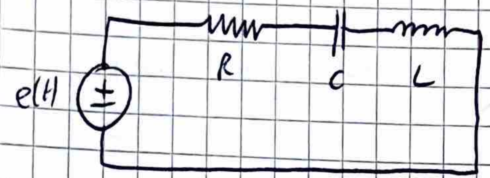
$$tg(\varphi_2) - tg(\varphi_1) = -\frac{\omega C}{R}\cdot|Z|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_2 = C\,\frac{\omega|Z|^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{R(tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_2)}{\omega|Z|^2}$$

Si può usare solo se a dx o sx di A-B non ci sono gen. indip./dip.

Risonanza RLC serie



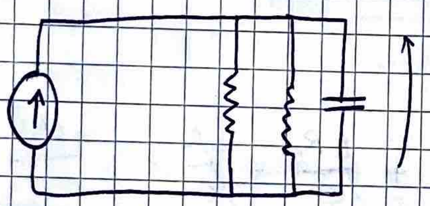
$$-\dot{E} + R\dot{I} + j\omega L\dot{I} - \frac{j}{\omega C}\cdot\dot{I} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{E} = \dot{I}\left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)$$

Condizione di risonanza $\rightarrow \dot{E} = R\dot{I} \quad (\Delta\varphi = 0)$

$$\Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Risonanza RLC parallelo puro

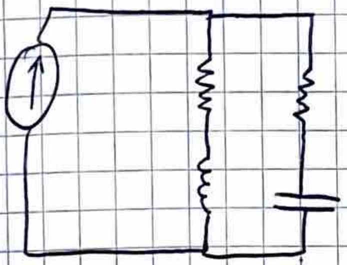


$$\bar{Y}_R = G = \frac{1}{R} \qquad \bar{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L} \qquad \bar{Y}_C = j\omega C$$

$$\bar{Y}_{TOT} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\omega C - \frac{1}{\omega L}}_{B = 0 \;\; (B = X^{-1})} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Risonanza RLC parallelo non puro



$$Z_1 = R_L + j\omega L$$

$$Z_2 = R_C - \frac{j}{\omega C}$$

$$\bar{Y}_{tot} = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C} =$$

$$= \frac{R_L - jX_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C + jX_C}{R_C^2 + X_C^2}$$

$$\mathrm{Im}\{\bar{Y}_{tot}\} = \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{X_C}{|Z_L|^2} - \frac{X_L}{|Z_C|^2} = 0 \Rightarrow X_C |Z_C|^2 = X_L |Z_L|^2$$

$$\Rightarrow \omega L \left(R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right) = \frac{1}{\omega C}\left(R_L^2 + (\omega L)^2\right)$$

$$\Rightarrow \omega^2 LC \left(R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) = R_L^2 + \omega^2 L^2 \Rightarrow$$

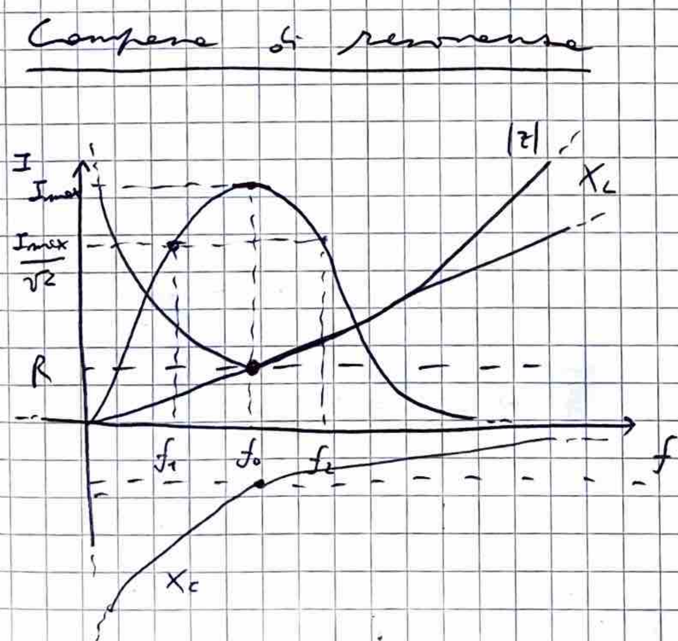
$$\Rightarrow \omega^2 LC R_C^2 + \frac{L}{C} = R_L^2 + \omega^2 L^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 L C^2 R_C^2 + L = R_L^2 C + \omega^2 L^2 C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 \left(L C^2 R_C^2 - L^2 C\right) = R_L^2 C - L$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{R_L^2 C - L}{L C^2 R_C^2 - L^2 C}} = \sqrt{\frac{R_L^2 C - L}{LC\left(R_C^2 C - L\right)}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Campana di risonanza



$f = f_0$ ~~no~~ sfasamento

$f < f_0$ RC

$f > f_0$ RL

In f_1 e f_2 $I = I_{max}/\sqrt{2}$

f_1 ed f_2 sono freq. di taglio.

Frequenze di taglio

f_1 ed f_2 sono le frequenze di taglio.

In f_1 ed f_2 $\quad |Z| = \sqrt{2} \cdot R$

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot R \Rightarrow R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 2R^2$$

$$\Rightarrow R = \pm \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

1) $R = -\omega L + \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega RC + \omega^2 LC - 1 = 0$

$$\Rightarrow \omega_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_1$$

2) $R = \omega L - \frac{1}{\omega C} \Rightarrow -\omega RC + \omega^2 LC - 1 = 0$

$$\Rightarrow \omega_{1,2} = \frac{RC \pm \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_2$$

$$\sqrt{\omega_1 \omega_2} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

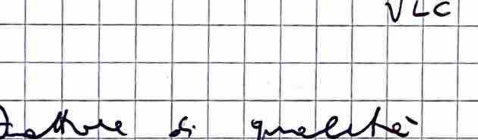
Fattore di qualità

$$Q = \frac{V_{L0}}{V_{R0}} = \frac{\omega_0 L I_0}{R \cdot I_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\sqrt{L}\sqrt{C}} \cdot \frac{\sqrt{L}}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Un circuito è considerabile buono per $Q > 10$

FILTRI

1) Passa basso ideale passivo



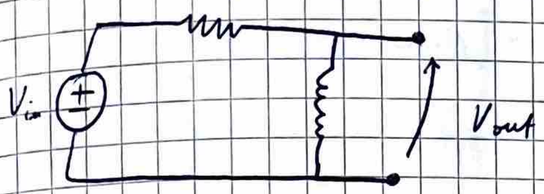
Lascia passare $f < f_2$

$f \to 0 \Rightarrow V_{out} \neq 0$

$f \to \infty \Rightarrow V_{out} = 0$

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}}$$

2) Passa alto ideale passivo



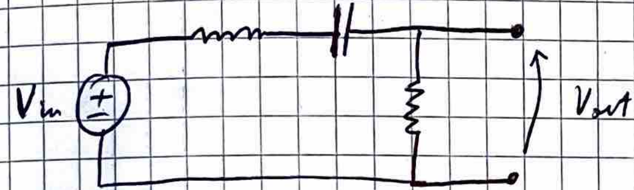
Lascia passare $f > f_1$

$f \to 0 \Rightarrow V_{out} = 0$

$f \to \infty \Rightarrow V_{out} \neq 0$

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

3) Passa banda

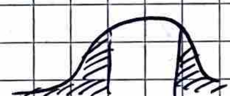


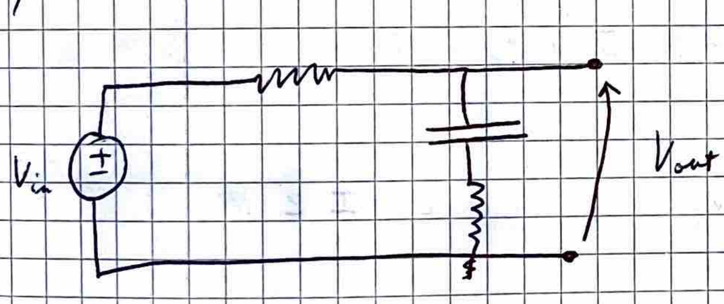
Lascia passare $f \approx f_0$

$f \to 0 \wedge f \to \infty \Rightarrow V_{out} = 0$

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}$$

4) Elimina banda



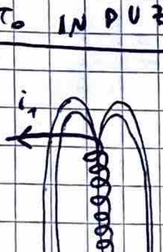


Lascia passare $f \neq f_0$

$f \to 0 \wedge f \to \infty \Rightarrow V_{out} \neq 0$

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

AUTO INDUZIONE



Legge di Hopkinson $\phi_{g1} = \frac{N_1 i_1}{R_1}$, $R_1 = \frac{l}{\mu S}$

$$v_{L1} = \frac{d\phi_{\Sigma 11}}{dt} = \frac{N_1^2}{R_1} \cdot \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di}{dt}$$

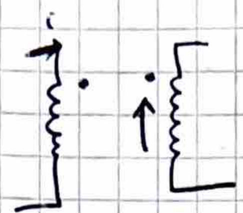
$$\phi_{\Sigma 11} = N_1 \phi_{g1} = \frac{N_1^2 i_1}{R_1}$$

$\Downarrow$

$$\dot{V}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_1$$

$$L_1 = \frac{d\phi_{\Sigma 11}}{d i_1} = \frac{N_1^2}{R_1}$$

MUTUA INDUZIONE



$$\phi_{f_1} = \frac{N_1 i_1}{R_1} \qquad \phi_{\Sigma_{12}} = N_2 \phi_{f_1} = \frac{N_1 N_2 i_1}{R_1}$$

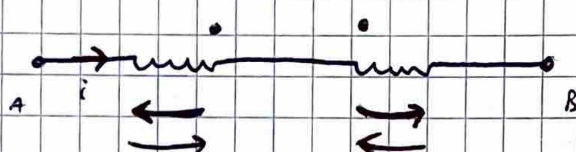
$$M_{21} = \frac{d\phi_{\Sigma_{12}}}{di_1} = k_{12} \frac{N_1 N_2}{R_1} \quad [H]$$

$$v_{M21} = \frac{d\phi_{\Sigma_{12}}}{dt} = k_{12} \frac{N_1 N_2}{R_1} \frac{di_1}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{V}_{M21} = j\omega M_{21} \dot{I} \qquad (M_{ij} = M_{ji})$$

Collegamento induttori accoppiati

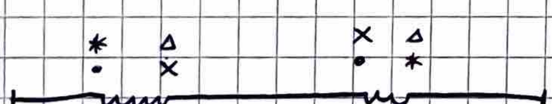
SERIE



$$V_{AB} = V_{L1} + V_{L2} \mp V_{M21} \mp V_{M12} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} +$$

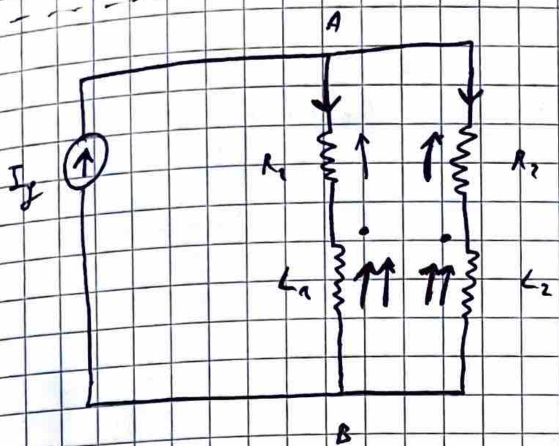
$$\mp M_{12} \frac{di}{dt} \mp M_{21} \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 \mp 2M_{12}) \frac{di}{dt}$$

$$V_{AB} = L_{eq} \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M_{12}$$



- • $L_1 + L_2 + 2M_{12}$
- * $L_1 + L_2 - 2M_{12}$
- × $L_1 + L_2 - 2M_{12}$
- Δ $L_1 + L_2 + 2M_{12}$

PARALLELO



$$\bar{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$$

$$\bar{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$$

$$\bar{Z}_M = j\omega M$$

$$\begin{cases} V_{AB} = \bar{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \bar{Z}_M \dot{I}_2 \\ V_{AB} = \bar{Z}_2 \dot{I}_2 \pm \bar{Z}_M \cdot \dot{I}_1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{Z}_1 & \pm\bar{Z}_M \\ \pm\bar{Z}_M & \bar{Z}_2 \end{vmatrix} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 - \bar{Z}_M^2$$

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} V_{AB} & \pm\bar{Z}_M \\ V_{AB} & \bar{Z}_2 \end{vmatrix} = V_{AB} \left(\bar{Z}_2 \mp \bar{Z}_M \right)$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} \bar{Z}_1 & V_{AB} \\ \pm\bar{Z}_M & V_{AB} \end{vmatrix} = V_{AB} \left(\bar{Z}_1 \mp \bar{Z}_M \right)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{V_{AB} \left(\bar{Z}_2 \mp \bar{Z}_M \right)}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 - \bar{Z}_M^2} \quad ; \quad \dot{I}_2 = \frac{V_{AB} \left(\bar{Z}_1 \mp \bar{Z}_M \right)}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 - \bar{Z}_M^2}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{V_{AB} \left(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \mp 2\bar{Z}_M \right)}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 - \bar{Z}_M^2}$$

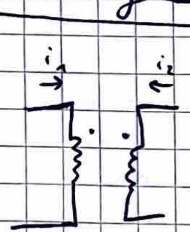
$$\bar{Z}_{eq} = \frac{V_{AB}}{\dot{I}} \Rightarrow \dot{I} = \frac{V_{AB}}{\bar{Z}_{eq}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 - \bar{Z}_M^2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 \mp 2\bar{Z}_M}$$

$-$ concordi

$+$ discordi

Energia accoppiamento mutuo



Usiamo il PSE

1) $i_1 = 0 \to I_1$, $i_2 = 0$ $\left(\frac{di_2}{dt} = 0 \right)$

$$V'_{L_1} = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad , \quad V'_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$V'_{M21} = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad , \quad V'_{M12} = M_{12} \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$P_1' = i_1 \cdot L_1 \frac{di_1}{dt} \qquad P_2' = M_{21} \frac{di_2}{dt} i_2 = 0$$

$$W_1' = \int_0^t P_1 \, dt = \int_0^t L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1 \, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

2) $i_1 = I_1 \left(\frac{di_1}{dt} = 0 \right) \qquad i_2 = 0 \rightarrow I_2$

$$V''_{L_1} = L_1 \frac{di_1}{dt} = 0 \qquad V''_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$V''_{M21} = M_{21} \frac{di_1}{dt} = 0 \qquad V''_{M12} = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$P_1'' = M_{12} \frac{di_2}{dt} \cdot I_1 \qquad P_2'' = L_2 \frac{di_2}{dt} i_2$$

$$W_1'' = \int_0^t M_{12} \frac{di_2}{dt} I_1 \, dt = \int_0^{I_2} M_{12} I_1 \, di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

$$W_2'' = \int_0^t L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 \, dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2 \, di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

Se parto con $i_2 = 0 \rightarrow I_2$ mentre $I_1 = 0$ e poi pongo $i_1 = 0 \rightarrow I_1$ mentre $i_2 = I_2$ ottengo che

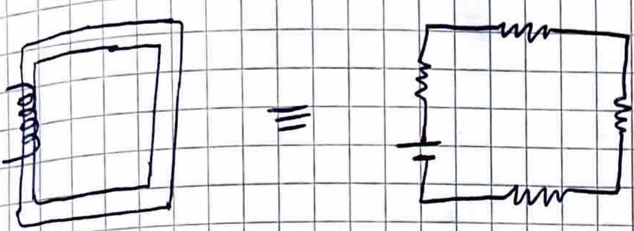
$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

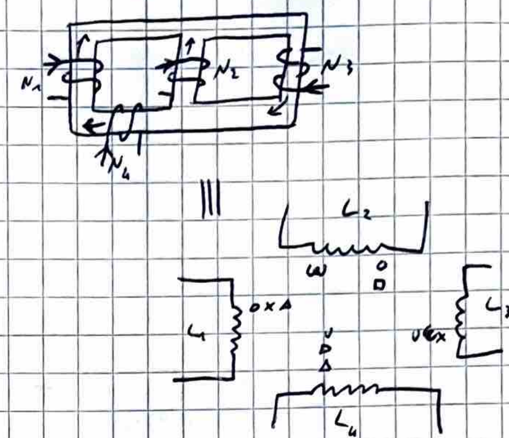
che deve essere per forza uguale quindi $M_{12} = M_{21}$

Leggi di Kirchhoff magnetiche

1. Somma dei flussi in un nodo è nulla
2. Somma delle tensioni magnetiche lungo un percorso chiuso (maglia) è uguale alla somma delle forze magnetomotrici presenti nel percorso.

Formule per i nuclei ferromagnetici





$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_{eq}} \qquad R = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$$

$$M_{12} = \alpha_{21} (1 - \underset{0}{\beta}) \frac{N_1 N_2}{R_{eq_1}}$$

$$M_{12} = k_{12} \sqrt{L_1 L_2} = k_{12} \frac{N_1 N_2}{\sqrt{R_{eq_1} R_{eq_2}}}$$

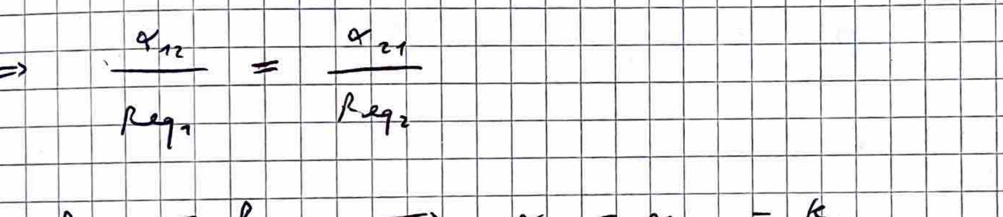
$$M_{12} = \alpha_{21} \frac{N_1 N_2}{R_{eq_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_{12}}{R_{eq_1}} = \frac{\alpha_{21}}{R_{eq_2}}$$

Se $R_{eq_1} = R_{eq_2} \Rightarrow \alpha_{12} = \alpha_{21} = k_{12}$

TRASFORMATORE

È un dispositivo elettromagnetico che sfrutta la mutua induzione per trasformare la tensione ai 2 terminali d'ingresso in una tensione a 2 terminali d'uscita.



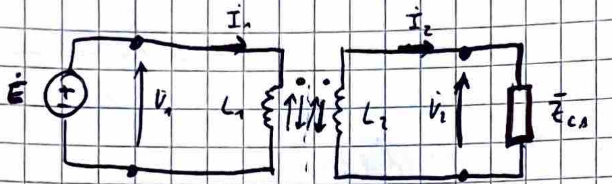
Impedenza d'ingresso $\quad \bar Z_{in} = \frac{\dot E}{\dot I}$

Risolvo il sistema a 2 LKT per avvolgimenti ed ottengo

$$\bar Z_{in} = R + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + \bar Z_{c1}}$$

Trasformatore ideale

Un trasformatore è ideale quando
- gli avvolgimenti hanno reattanze elevate ($L_1, L_2, M \to \infty$)
- sono privi di perdite ($R_1 = 0$ e $R_2 = 0$)
- l'accoppiamento è perfetto ($k_a = 1$)



$$\begin{cases} \dot V_1 = j\omega L_1 \dot I_1 - j\omega M \dot I_2 \\ \dot V_2 = -j\omega L_2 \dot I_2 + j\omega M \dot I_1 \end{cases}$$

$$\dot I_1 = \frac{\dot V_1 + j\omega M \dot I_2}{j\omega L_1} \qquad \dot V_2 = -j\omega L_2 \dot I_2 + \cancel{j\omega} M \frac{\dot V_1 + j\omega M \dot I_2}{\cancel{j\omega} L_1}$$

$$\dot V_2 = -j\omega L_2 \dot I_2 + \frac{M}{L_1}\dot V_1 + j\omega \frac{M^2}{L_1}\dot I_2 \xrightarrow{M = k\sqrt{L_1L_2} = \sqrt{L_1L_2}}$$

$$\Rightarrow \dot V_2 = \cancel{-j\omega L_2 \dot I_2} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\dot V_1 + \cancel{j\omega L_2 \dot I_2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\dot V_1$$

$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

$$L = \frac{N^2}{R_{eq}} \qquad \begin{cases} V_2 > V_1 & n > 1 & \text{ELEVATORE} \\ V_2 = V_1 & n = 1 & \text{ISOLAMENTO} \\ V_2 < V_1 & n < 1 & \text{RIDUTTORE} \end{cases}$$

$P_{in} = P_{out}$ (non ci sono perdite)

$$\Rightarrow \dot V_1 \dot I_1 = \dot V_2 \dot I_2 \Rightarrow \frac{\dot V_2}{\dot V_1} = \frac{\dot I_1}{\dot I_2} = n$$

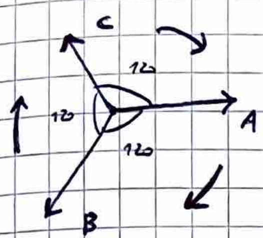
$$\bar Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_1 \cdot I_2 \cdot V_2}{I_1 \cdot I_2 \cdot V_2} = \frac{V_2}{I_2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \bar Z_{out}\cdot\frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar Z_{out} = n^2 \cdot \bar Z_{in} \Rightarrow \frac{Z_{out}}{Z_{in}} = n^2$$

Autotrasformatore

Nell'autotrasformatore il primario ed il secondario risiedono nello stesso avvolgimento.

Trifase



$$v_1 = V_M \operatorname{sen} \omega t$$

$$v_2 = V_M \operatorname{sen}\left(\omega t \mp \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_3 = V_M \operatorname{sen}\left(\omega t \mp \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$\dot{V}_p \angle 0 + V_p \angle -120 + V_p \angle 120 = V_p \left(1 + \cos 120° - \cancel{j \operatorname{sen} 120°} + \right.$$

$$\left. + \cos 120° + \cancel{j \operatorname{sen} 120°}\right) = V_p \left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{V}_{an} + \dot{V}_{bn} + \dot{V}_{cn} = 0 \quad , \quad |V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}| = V_p$$

$\downarrow$ tensione di fase

$$\dot{V}_{ab} = \dot{V}_{an} + \dot{V}_{nb} = \dot{V}_{an} - \dot{V}_{bn} =$$

$$= V_p \left(\frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\, V_p \angle 30°$$

$V_l = \sqrt{3}\, V_p \rightarrow$ tensione di fase (220 V)

$\uparrow$ tensione di linea (380 V)