Pi Monte Carlo Simulation using Gaussian Distribution

Daniele Di Spirito, 21 maggio 2025

Genero un insieme di punti $P_i(x_i, y_i)$ usando una coppia di variabili aleatorie indipendenti descritte dalla stessa legge $X, Y \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ con μ valore atteso e σ^2 varianza.

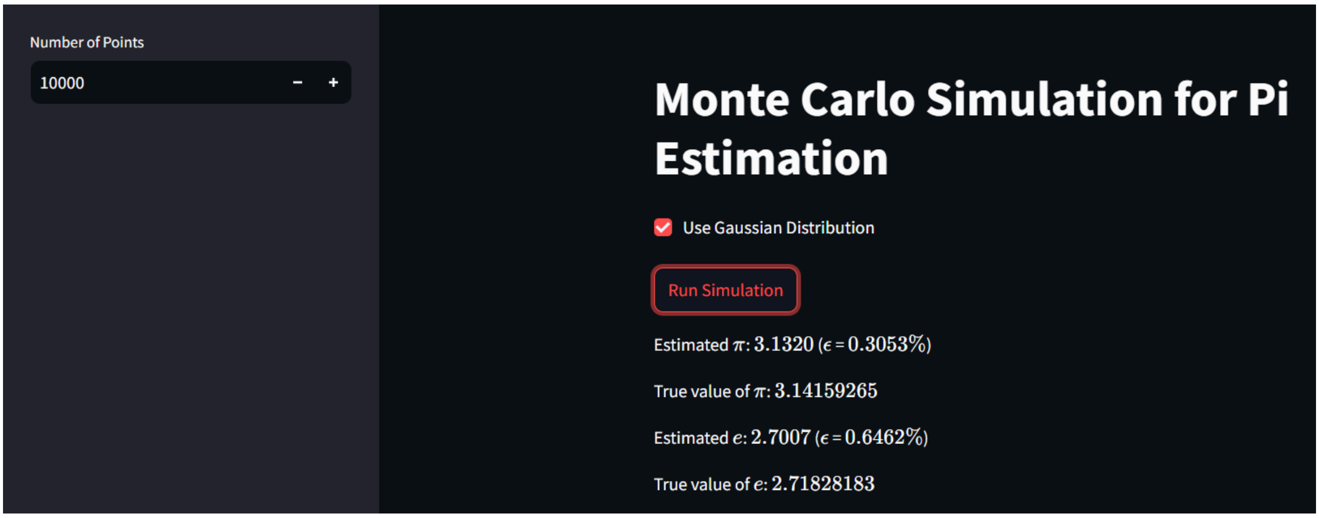
È possibile ricavare il valore di π con una simulazione di Monte Carlo?

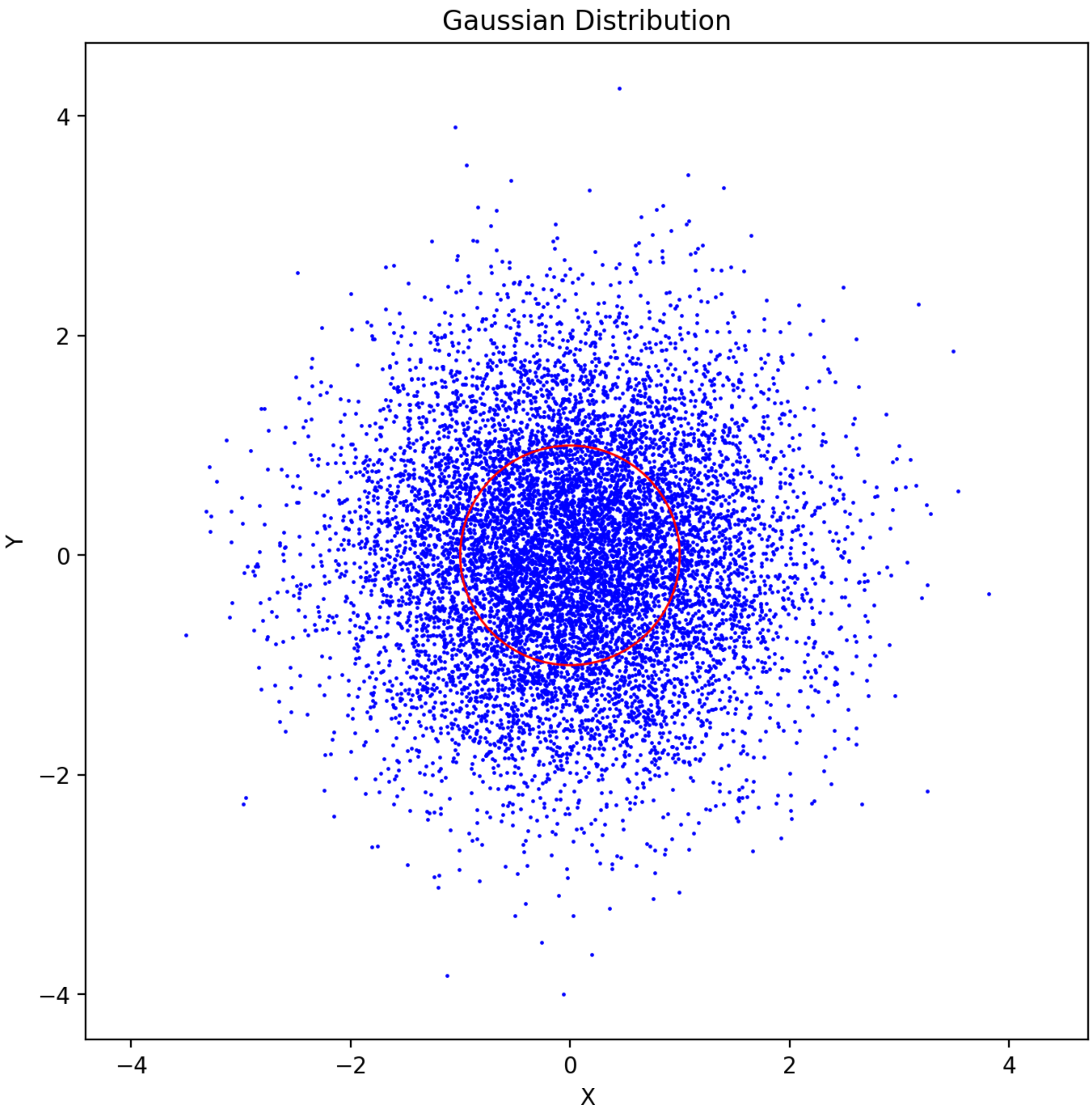
Questa domanda non sorge casualmente ma vien fuori come considerazione di una simulazione in $Python3$.

Di seguito è mostrato lo snippet del codice e l'output nella simulazione realizzata con Streamlit.

```python
from random import gauss

def distance(P, Q):
    return ((P[0] - Q[0]) ** 2 + (P[1] - Q[1]) ** 2) ** 0.5

def estimate_pi(points):
    global num_points
    in_circle = 0
    for P in points:
        if distance(P, (0, 0)) < 1:
            in_circle += 1
    pi = 8 * in_circle / num_points
    return pi

num_points = ... # INPUT

points = [
    (gauss(0, 1), gauss(0, 1)) for _ in range(num_points)
]
```

```
estimated_pi = estimate_pi(points)
```





```
Altri risultati:
Estimated pi = 3.1848 (error = 1.3753%)
Estimated pi = 3.1296 (error = 0.3817%)
Estimated pi = 3.1056 (error = 1.1457%)
Estimated pi = 3.1648 (error = 0.7387%)
Estimated pi = 3.1304 (error = 0.3563%)
Estimated pi = 3.2048 (error = 2.0120%)
Estimated pi = 3.2296 (error = 2.8014%)
Estimated pi = 3.0872 (error = 1.7314%)
```

Da questa simulazione (accompagnata da altri risultati per far sì che non sia semplice casualità) è possibile constatare che $\mathbb{P}(\{X^2+Y^2 \leq 1\}) = p \approx \frac{\pi}{8}$

Proviamo a dimostrare matematicamente se $p = \frac{\pi}{8}$.

Th. Sia $X \sim N(0, \sigma^2)$ una variabile aleatoria descritta dalla legge normale con media nulla.
$\Rightarrow X^2 \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$

Dim. Partiamo dal calcolo della funzione cumulativa per poi sfruttare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale $F'_X(x) = f_X(x)$.

$$F_{X^2}(x) = \mathbb{P}(\{X^2 < x\}) = \mathbb{P}(\{|X| < \sqrt{x}\}) = \mathbb{P}(\{-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\})$$

Sfruttiamo la simmetria con l'asse y

$$\mathbb{P}(\{-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\}) = 2 \cdot \mathbb{P}(\{X < \sqrt{x}\})$$

Passiamo da $X \sim N(0, \sigma^2)$ a $Z \sim N(0, 1)$ dividendo per la dev. st. σ

$$2 \cdot \mathbb{P}(\{X < \sqrt{x}\}) = 2 \cdot \mathbb{P}\left(\left\{Z < \frac{\sqrt{x}}{\sigma}\right\}\right)$$

$$2 \cdot \mathbb{P}\left(\left\{Z < \frac{\sqrt{x}}{\sigma}\right\}\right) = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{x}/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Faccio una sostituzione di variabili per trovarmi come estremo di integrazione superiore la x in purezza. $s = t^2\sigma^2 \Rightarrow dt = \frac{1}{2t\sigma^2} ds = \frac{\sigma}{2\sigma^2\sqrt{s}} ds$

$$2 \cdot \int_0^{\sqrt{x}/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \cdot \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{2\sigma^2\sqrt{s}} \cdot \exp(-\frac{s}{2\sigma^2})\, ds$$

Calcolo la derivata per trovare $f_{X^2}(x)$

$$f_{X^2}(x) = F'_{X^2}(x) = \frac{d}{dx}[\, 2 \cdot \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{2\sigma^2\sqrt{s}} \cdot \exp(-\frac{s}{2\sigma^2})\, ds\,] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2\sigma}}$$

Notiamo che è molto simile ad una legge Gamma la cui f.d.p. è

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \;\; X \sim Gamma(\alpha > 0, \lambda > 0)$$

Ponendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$ abbiamo trovato i parametri della legge Gamma che dimostrano il teorema esplicitato sopra (conoscendo $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).

Th. Siano $X \sim Gamma(\alpha_X, \lambda)$ e $Y \sim Gamma(\alpha_Y, \lambda)$ con $\alpha_X > 0$, $\alpha_Y > 0$ e $\lambda > 0$.
$\Rightarrow X + Y \sim Gamma(\alpha_X + \alpha_Y, \lambda)$

A questo punto conosciamo la legge di $X^2 + Y^2 = Z$.

$$X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$Y \sim N(0,1) \Rightarrow Y^2 \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$X^2 \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \wedge Y^2 \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^2 + Y^2 \sim Gamma\left(1\;, \;\frac{1}{2}\right) = Exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}(\{X^2 + Y^2 \leq 1\}) = \mathbb{P}(\{Z \leq 1\}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = p \approx 0.3934693402873666$$

Da cui è possibile calcolare $8p \approx 3.1477547222989326$.
Questo valore confermabile con uno script in $Python3$

```python
import scipy.stats as st
p = st.expon.cdf(1, scale=2)
print(8*p)
```

Il valore di π è molto simile ($\approx 3.141592653589793$) con un errore relativo

$$\epsilon_r = |\frac{\pi - 8p}{\pi}| \approx 0.1961447\%$$

Considerazioni finali

1. Questa simulazione può essere usata per trovare il valore del numero di Nepero e sfruttando l'equazione

$$p = 1 - e^{-1/2} \Rightarrow e = \frac{1}{(1-p)^2}$$

2. Da questa peculiare proprietà è possibile trovare un legame tra π e e.

$$\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 1$$

```python
from math import pi, exp

print(pi/8 + exp(-1/2)) # 0.9992297414113576
```

Clicca qui (il link è temporaneo e potrebbe essere non disponibile) per effettuare una simulazione di Monte Carlo.

Grazie per la visione.