Foglio 7

Daniele Falanga

Esercizio 1

Esercizio 2

Assumendo che su una popolazione di cento persone, in media $\lambda = 2$, sono mancini, per calcolare la probabilità che almeno 3 siano mancini:

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$P(X \geq 3) = 1 - (\frac{2^0}{1}e^{-2} + \frac{2}{1}e^{-2} + \frac{2^2}{2}e^{-2}) =$$
$$P(X \geq 3) = 1 - 5e^{-2} = 0.32 = 32\%$$

Esercizio 3

Date le seguenti variabili aleatorie:

- Y = y numero di mail spam
- Z = z numero di mail non spam
- X = y+z numero di mail totale in arrivo

La funzione di massa di probabilità congiunta:

$$P(Y=y, Z=z) = P(Y=y, X=y+z)$$
$$P(Y=y, X=y+z) = P(Y=y|X=y+z) \cdot P(X)$$

Modello le due probabilità in questo modo:

- $P(Y, y|X=y+z) = \binom{y+z}{y} \cdot p^y \cdot (1-p)^{y-z}$: numero di modi possibili di scegliere y mail dalle y+z in arrivo per le rispettive probabilità
- $P(X=y+z) = \frac{\lambda^{y+z}}{(y+z)!}e^{-\lambda}$

Sostituendo:

$$P(Y=y, X=y+z) = P(Y=y|X=y+z) \cdot P(X) =$$
$$\binom{y+z}{y} \cdot p^y \cdot (1-p)^{y-z} \cdot \frac{\lambda^{y+z}}{(y+z)!}e^{-\lambda} =$$
$$\frac{(y+z)!}{y!z!}p^y(1-p)^z \cdot \frac{\lambda^y\lambda^z}{(y+z)!}e^{\lambda p(1-p)} =$$
$$\frac{(\lambda p)^y}{y!}e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^z}{z!}e^{-\lambda(1-p)}$$

Le distribuzioni marginali:

$$P(N_1=y) = \sum_{z=0}^{\infty} P(P(Y=y, X=y+z)) =$$
$$\frac{(\lambda p)^y}{y!}e^{-\lambda p}\sum_{z=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^z}{z!}e^{-\lambda(1-p)} =$$
$$\frac{(\lambda p)^y}{y!}e^{-\lambda p} \quad \text{La sommatoria è funzione di massa di una Poisson, quindi uguale ad 1}$$

Analogamente:

$$P(N_2 = z) = \sum_{y=0}^{\infty} P(P(Y = y, X = y + z)) =$$
$$\frac{(\lambda(1-p))^z}{z!} e^{-\lambda(1-p)} \sum_{y=0}^{\infty} = \frac{(\lambda p)^y}{y!} e^{-\lambda p}$$
$$\frac{(\lambda(1-p))^z}{z!} e^{-\lambda(1-p)}$$

Esendo le marginali, il prodotto delle congiunte, le variabili sono indipendenti

Esercizio 4

Scrivendo le variabili in questo modo:

- X = numero medio lanci effettuati
- Y = numero di teste ottenute
- Z = numero di croci ottenute

Modellando come l'esercizio 3 si risolve in modo analogo

Esercizio 5

Modellando come segue:

$$X = \text{numero consecutivo di risultati al k-esimo lancio}$$
$$p = \text{numero di teste consecutive}$$
$$1 - p = \text{numero di croci consecutive}$$

Essendo eventi disgiunti, la distribuzione si può modellare come segue:

$$P(X = k) = p^k \cdot (1 - p) + (1 - p)^k \cdot p$$

Il valore atteso:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p^i(1 - p) + \sum_{i=0}^{\infty} i(1 - p)^i p =$$
$$(1 - p) \sum_{i=0}^{\infty} ip^{i+1-1} + \sum_{i=0}^{\infty} i(1 - p)^{i-1+1} =$$
$$(1 - p)p \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dp} p^i + p(1 - p) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dp}(-(1 - p^i)) =$$
$$(1 - p)p \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{1 - p} \right) + p(1 - p) \cdot \frac{d}{dp} \left(- \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i \right) =$$
$$\frac{(1 - p)}{(1 - p)^2} p + \frac{p(1 - p)}{p} = \frac{p}{1 - p} + \frac{1 - p}{p}$$

la Varianza:

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 =$$

dove:

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 p^i(1 - p) + \sum_{i=0}^{\infty} i^2(1 - p)^i p =$$
$$(1 - p)p \frac{d}{dp} \left(\sum_{i=0}^{\infty} ip^i \right) + p(1 - p) \frac{d}{dp} \left(- \sum_{i=0}^{\infty} i(1 - p)^i \right) =$$
$$(1 - p)p \frac{p}{(1 - p)^2} + p(1 - p) \frac{d}{dp} \left(- \frac{(1 - p)}{p^2} \right) =$$
$$\frac{p^2}{1 - p} + \frac{(1 - p)(2 - p)}{p^2}$$

Quindi:

$$Var(X) = \frac{p^2}{1 - p} + \frac{(1 - p)(2 - p)}{p^2} - \left(\frac{2p^2 + 1 - 2p}{(1 - p)p} \right)^2$$

Esercizio 6

Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev:

$$\begin{cases} P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \\ P(|\frac{S_n}{n} - p| < \delta) \geq 0.95 \end{cases}$$

Mettendo a confronto si ha:

$$\begin{cases} X = \frac{S_n}{n} \\ \mu = p \\ k\sigma = \delta \implies k = \frac{\delta}{\sqrt[2]{\frac{p(1-p)}{n}}} \\ Var(X) = Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2} Var(S_n) = \frac{np(1-p)}{n^2} \quad \text{Essendo X una binomiale} \\ Dev(X) = \sqrt[2]{\frac{p(1-p)}{n}} = \sigma \end{cases}$$

Devo trovare il numero di lanci n affinché il tutto sia maggiore di 0.95, quindi:

$$1 - \frac{1}{k^2} \geq 0.95$$

$$0.05 \geq \frac{1}{k^2}$$

$$k^2 \geq \sqrt{\frac{1}{0.05}} = \sqrt{20}$$

Sostituisco l'espressione di k trovata prima

$$\frac{\delta}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq \sqrt{20}$$

$$n \geq \frac{20 \cdot p(1-p)}{\delta^2}$$