Foglio 7

Daniele Falanga

Esercizio 1

1. La distribuzione del tempo di rottura del circuito in serie è dato dal componente che si rompe per primo:

$$T_{ser} = min(T_1, \dots, T_k)$$

2. La distribuzione del tempo di rottura del circuito è dato dalla somma di tutti i componenti:

$$T_{par} = \sum_{i}^{k} T_i$$

Esercizio 2

Assumendo che su una popolazione di cento persone, in media $\lambda = 2$, sono mancini, per calcolare la probabilità che almeno 3 siano mancini:

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$P(X \geq 3) = 1 - (\frac{2^0}{1}e^{-2} + \frac{2}{1}e^{-2} + \frac{2^2}{2}e^{-2}) =$$
$$P(X \geq 3) = 1 - 5e^{-2} = 0.32 = 32\%$$

Esercizio 3

Si utilizza la formula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$
$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Sostituendo in questo modo:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(Y = y, Z = z) \\ P(A|B) = P(Y = y|X = x + z) \\ P(B) = P(X = x + z) \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}
&P(Y = y, Z = z) = P(Y = y|X = x + z) \cdot P(X = x + z) = \\
&\frac{X^{y+z}}{(y+z)!}e^{-x} \cdot \binom{y+z}{y} p^y (1-p)^z = \\
&e^{-x}\frac{Xy+z}{(y+z)!} \cdot \frac{(y+z)!}{y!z!} p^y (1-p)^z = \\
&e^{-Xp-(1-p)}\frac{X^y}{y!}p^y\frac{X^z}{z!}(1-p)^z = \\
&\underbrace{e^{-Xp}\frac{(Xp)^y}{y!}}_{Y \approx Poiss(Xp)} \cdot \underbrace{e^{X(1-p)}\frac{(X(1-p))^z}{z!}}_{Y \approx Poiss(X(1-p))}
\end{aligned}$$

L'intersezione di due eventi indipendenti è la loro moltiplicazione e quindi, i due eventi sono indipendenti.

Esercizio 4

Scrivendo le variabili in questo modo:

- X = numero medio lanci effettuati
- Y = numero di teste ottenute
- Z = numero di croci ottenute

Modellando come l'esercizio 3 si risolve in modo analogo

Esercizio 5

Il processo in questione può essere descritto da una variabile geometrica, dove non teniamo conto della la probabilità che il primo successo (o evento in generale) richieda l'esecuzione di k prove indipendenti, bensi che il primo fallimento richieda l'esecuzione di k prove indipendenti. Nel processo in questione però si tratta del lancio della moneta, quindi la probabilità di successo e di fallimento, sono analoghe, quindi la distribuzione rimane la medesima:

1. La distribuzione:
$$P(X = k) = p(1 - p)^k$$
2. Il valore atteso:
$$E[X] = \frac{1}{p} = 2$$
3. La varianza:
$$Var(X) = \frac{q}{p^2} = 6$$

Esercizio 6