

Foglio 4

Daniele Falanga

Esercizio 1

1. Denominando con F l'evento che il prodotto sia difettoso, utilizzando il teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned}P(F) &= P(A) \cdot P(F|A) + P(B) \cdot P(F|B) + P(C) \cdot P(F|C) = \\P(F) &= 0.40 \cdot 0.02 + 0.10 \cdot 0.03 + 0.50 \cdot 0.04 = \\P(F) &= 0.031 = 3.1\%\end{aligned}$$

2. Utilizzando il teorema di Bayes per tutte e 3 le macchine:

$$\begin{aligned}P(A|F) &= \frac{P(A)P(F|A)}{P(F)} = (0.40 \cdot 0.02) = 0.031 = 0.25 \\P(B|F) &= \frac{P(B)P(F|B)}{P(F)} = (0.10 \cdot 0.03) = 0.031 = 0.09 \\P(C|F) &= \frac{P(C)P(F|C)}{P(F)} = (0.50 \cdot 0.04) = 0.031 = 0.64\end{aligned}$$

Esercizio 2

Il testo fornisce i seguenti parametri:

- T_1 = trasmesso 1
- T_0 = trasmesso 0
- R_1 = ricevuto 1
- R_0 = ricevuto 0
- $P(T_1) = 0.55$
- $P(T_0) = 0.45$
- $P(R_1|T_1) = 0.91$
- $P(R_0|T_0) = 0.94$

1. Teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned}P(R_1) &= P(T_1) \cdot P(R_1|T_1) + P(T_0)P(R_1^c|T_0) = \\&= (0.55 \cdot 0.91) + (0.45 \cdot 0.09) = 0.54\end{aligned}$$

2. uguale:

$$\begin{aligned}P(R_0) &= P(T_0) \cdot P(R_0|T_0) + P(T_1)P(R_0^c|T_1) = \\&= (0.45 \cdot 0.94) + (0.55 \cdot 0.06) = 0.45\end{aligned}$$

3. Formula di Bayes:

$$P(T_1|R_1) = \frac{P(T_1) \cdot P(R_1|T_1)}{P(R_1)} = 0.93$$

4. Formula di Bayes:

$$P(T_0|R_0) = \frac{P(T_0) \cdot P(R_0|T_0)}{P(R_0)} = 0.92$$

5. La probabilità dell'errore di trasmissione:

$$\begin{aligned}P(E) &= P(T_1) \cdot P(R_0|T_1) + P(T_0) \cdot P(R_1|T_0) = \\&= (0.55 \cdot 0.06) + (0.45 \cdot 0.09) =\end{aligned}$$

Esercizio 3

1. Utilizzo il modello di variabile aleatoria geometrica:

$$P(X = 5) = \left(\frac{18}{37}\right) \left(1 - \frac{18}{37}\right)^4$$

2. Variabile binomiale:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) \rightarrow$$

$$P(Y < 2) = p_0 + p_1 = \binom{10}{0} \left(\frac{18}{37}\right)^0 \left(\frac{19}{37}\right)^{10} + \binom{10}{1} \left(\frac{18}{37}\right)^1 \left(\frac{19}{37}\right)^9$$

3. Ipotizzando di vincere 2 euro a partita:

$$P(Z = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{18}{37}\right)^6 \left(\frac{19}{37}\right)^4$$

Esercizio 4

1. La formula in questione rappresenta n estrazioni da un'urna con reinserimento, contenente N palline nere e B bianche. Al primo membro le estrazioni sono divise:

$$\begin{aligned} \binom{B}{k} &\rightarrow \text{numero di palline bianche con k-estrazioni} \\ \binom{N}{n-k} &\rightarrow \text{numero di palline nere su n-k estrazioni} \end{aligned}$$

Al secondo membro le estrazioni sono unite

2. La probabilità richiesta può essere calcolata tramite distribuzione binomiale. Denoto con T il numero di teste dei primi n lanci

$$P(X = T) = \binom{n}{T} \left(\frac{1}{2}\right)^T \left(\frac{1}{2}\right)^{n-T}$$

Esercizio 5

Denotando con $p_1 = 1/2, p_2 = 0, p_3 = 1$ le probabilità che esca testa testa al lancio della moneta:

1. Avendo 6 casi totale e 3 teste:

$$P(T) = \frac{6}{3} = \frac{1}{2}$$

2. Al secondo lancio:

$$P(C) = \frac{1}{4}$$

3. al terzo lancio:

$$P(T) = \frac{3}{4}$$

Esercizio 6