Modelli di variabili aleatorie

Daniele Falanga

1 Variabili aleatorie di Bernoulli e binomiali

Le variabili aleatorie di Bernoulli e binomiali caratterizzano tutta quella classe di esperimenti il cui esito può essere solo "successo" o "fallimento"

Definizione 1.1 (Bernoulli). *Una variabile aleatoria X si dice di Bernoulli se la sua funzione di massa di probabilità è del tipo:*

$$\begin{aligned} P(X=0) = & 1-p \\ P(X=1) = & p \end{aligned}$$

La variabile X di Bernoulli può assumere solo valori 0 e 1.
Il suo valore atteso è:

$$E[X] = p$$

Se invece si ripete l'esperimento n volte, indipendentemente dal risultato, Si usa la variabile binomiale e deve rispettare i seguenti requisiti:

- Il risultato dell' evento può essere solo positivo o negativo
- ciascun evento è indipendente dagli altri
- Il processo/variabile può assumere un determinato e fissato numero di valori
- La probabilità di di successo o fallimento di un evento è costante

Definizione 1.2 (binomiale). *La definizione alla base è analoga a quella di Bernoulli, con l'aggiunta dei parametri (n, p).*
La funzione di massa di probabilità è:

$$P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \qquad i = 0, 1 \ldots, n$$

Ogni successione con i successi e $n-i$ insuccessi ha probabilità $p^i(1-p)^{n-i}$, mentre il numero di queste successioni, pari al numero di combinazioni in cui può esssere svolto l'esperimento, è dato dal cofficente binomiale.

Il valore atteso di una binomiale:

$$E[X] = np$$

La Varianza:

$$Var(X) = np(1-p)$$

1.1 Distribuzioni multinomiali

La distribuzione multinomiale è una generalizzazione della distribuzione binomiale, dove si hanno piu gruppi di esperimenti. Un esempio è l'estrazione con reinserimento di tot palline (di 3 colori) da un urna.

$$P(n_1, \dots, n_s) = \binom{n}{n_1, \dots, n_s} = \prod_i p_i^{n_i}$$

Dove il vettore $n_1, \dots, n_s$ corrisponde al numero di successi dell'esperimento s-esimo.

2 Variabili aleatorie di Poisson

La distribuzione di Poisson è una distribuzione discreta che esprime la probabilità che per il numero di eventi che si verificano successivamente ed indipendentemente in un dato intervallo di tempo, sapendo che mediamente se ne verificano un numero λ a volte definito negli esercizi come il valore atteso.

Definizione 2.1. *La distribuzione di Poisson è data da:*

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \qquad\qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Il valore atteso di una variabile di Poisson:

$$E[X] = \lambda$$

la Varianza:

$$Var[Y] = \lambda$$

2.1 Variabile di Poisson come limite di binomiali

La variabile di Poisson può essere usata come limite di binomiali quando n è molto grande e p molto piccolo. Siccome λ è il valore medio, della variabile di Poisson, posso porre che $\lambda = np$ dove np è il valore atteso per una binomiale. Allora:

$$P(X = i) = \frac{n!}{(n-i)!i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} =$$
$$P(X = i) = \frac{n!}{(n-i)!n^i} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{(1 - \lambda/n)^n}{(1 - \lambda/n)^i} =$$

Con le supposizioni di prima valgono le seguenti approssimazioni:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda} \qquad \frac{n!}{(n-i)!n^i} \approx 1 \qquad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

e quindi:

$$P(X = i) \approx \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

3 Variabile Ipergeometrica

Una scatola contiene N batterie accettabili e M difettose. Si estraggono senza rimessa e in maniera casuale n batterie, dando pari probabilità a ciascuno degli $\binom{N+M}{n}$ sottoinsiemi possibili. Se denotiamo con X il numero di batterie accettabili contenute nel campione estratto, non è difficile convincersi che:

$$P(X = i) = \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n-i}}{\binom{N+M}{n}}$$

dove:

- $\binom{N+M}{n}$:numero di possibili estrazioni di n da N+M
- $\binom{N}{i}$ è il numero di possibili estrazioni di i elementi di N
- $\binom{M}{n-i}$ è il numero di possibili estrazioni dei restanti $n-i$ elementi tra gli M

Il valore atteso:
$$E[X] = n\frac{N}{N+M}$$

4 Variabile Geometrica

È una distribuzione di probabilità discreta sui numeri naturali, senza lo zero.
È la probabilità che un evento si verifichi al $k-esimo$ tentativo dopo $k-1$ fallimenti.

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Il valore atteso:
$$E[X] = \frac{1}{p}$$

La varianza:
$$Var[X] = \frac{q}{p^2}$$

la funzione di ripartizione:

$$P[X \leq k] = 1 - P[X \geq k+1] = 1 - q^k$$

Assenza di memoria
La distribuzione geometrica è una delle due variabili aleatorie con assenza di memoria,e l'unica discreta, cioè non ricorda i risultati precedenti. Questa proprietà afferma che la probabilità condizionata di una variabile aleatoria superi un certo valore, dato che sia già passato un certo lasso di tempo, non dipende da quanti eventi sono gia trascorsi. Nel caso delle variabili geometriche:

$$P(T = m+n|T > m) = P(T = n)$$

Dato che si sono gia verificati m eventi, la probabilità che $T = m+n$ è uguale a $P(T = n)$ perchè non dipende da nulla.

4.1 Distribuzione di Pascal e distribuzione binomiale negativa

La distribuzione di Pascal è una distribuzione di probabilità discreta con due parametri n, p che descrive il numero di fallimenti precedenti il successo n-esimo in processo di Bernoulli.

La probabilità che si verifichino esattamente k fallimenti prima di ottenere un totale di n successi è data dalla probabilità di ottenere un successo nella prova numero k+n e ti ottenere esattamente k fallimenti e n-1 nelle prove precedenti:

$$P(k) = \binom{k+n-1}{k} p^n q^k$$

Distribuzione binomiale negativa

$$P(k) = \binom{-n}{k} p^n (-q)^k$$