Elementi di probabilità

Daniele Falanga

1 Spazio degli esiti e degli eventi

Definizione 1.1 *Dato un esperimento di cui non si sa il risultato con certezza si definisce spazio degli esiti, l'insieme di tutti i risultati possibili.*

$$S(\Omega)$$

I sotto insiemi dello spazio degli esiti si dicono eventi. Un evento E è un insieme i cui elementi sono esiti possibili.

Due eventi E ed F godono delle proprietà degli insiemi:

- L'unione $E \cup F$ è definita come l'insieme degli esiti che stanno sia in E che in F, Perciò $E \cup F$ si verifica, se almeno almeno uno tra E ed F si verifica.
- l'intersezione $E \cap F$ è l'insieme formato dagli esiti che stanno sia E che in F

2 Diagrammi di Venn e algebra degli eventi

I diagrammi di Venn forniscono una rappresentazione grafica dello spazio degli esiti e degli eventi. Lo spazio degli esiti è rappresentato da un grande rettangolo, contenente gli eventi rappresentati, invece, da cerchi. Nella logica degli insieme valgono le seguenti regole:

- $E \cup F = F \cup E$
- $E \cap F = F \cap E$
- $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) \quad (E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ Associativa
- $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G) \quad (E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$ Distributiva

3 Assiomi della probabilità

Si associa ad ogni evento E dello spazio degli esiti Ω una probabilità che si denota con $P(E)$. Le probabilità di ogni evento devono rispettare i seguenti **assiomi**:

1. $0 \leq P(E) \leq 1 \quad$ (Assioma 1)
2. $P(\Omega) = 1 \quad$ (Assioma 2)
3. Data una serie di eventi mutuamente esclusivi, tali per cui la loro intersezione è nulla.
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \quad n = 1, 2, \ldots, \infty \quad \text{(Assioma 3)}$$

Dagli assiomi si deducono le seguenti proposizioni

Proposizione 3.1 *Per ogni evento $E \subseteq S$ vale la relazione.*

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

Proposizione 3.2 *Se E ed F sono due eventi qualsiasi, allora*

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Dimostrazione sul libro a pagina 69

La proposizione 3.2 è da non confondere con quella degli insiemi. Qui stiamo confrontando la probabilità degli eventi, non lo spazio degli eventi.

4 Spazio degli esiti equiprobabili

Per tutta una serie di esperimenti si assume che tutti gli esiti abbiano la stessa probabilità. La probabilità dell' evento in questo caso si scrive cosi:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \Longrightarrow P(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi totali}}$$

Quando bisogna calcolare il numero di permutazioni su un insieme di elementi devo fare il fattoriale:

$$n!$$

4.1 il coefficente binomiale

Se si vuole determinare il numero di diversi gruppi di r oggetti scegliendoli da un insieme n si usa il coefficente binomiale:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

5 Probabilità condizionata

È il caso in cui si vuole calcolare la probabilità di un evento F dopo essersi verificato l'evento E, e l'evento F, dipende in un certo senso da da E. Come esempio può prendere la probabilità che dato il lancio consecutivo di due dadi, si vuole calcolare la probabilità che la somma dei numeri sia 8 quando il numero del primo dado è 3. Il lancio del secondo dado dipende dal primo in questo caso. Il formule si può scrivere:

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

La spiegazione si rifa sempre a quella $\frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi favorevoli}}$ perchè dopo aver calcolato la probabilità dell'evento E, si vuole calcolare la probabilità dell'evento F che sicuramente sta nell'intersezione con F, perchè sono dipendenti. E il numero di casi totali ora diventa quello di E, non più tutto Ω.

6 Fattorizzazione di un evento e formula di Bayes

Siano E ed F due eventi qualsiasi. È possibile esprimerli come:

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$$

Siccome $(E \cap F)$ e $(E \cap F^c)$ sono eventi disgiunti, si ha per l'assioma 3:

$$\begin{aligned} P(E) = P((E \cap F)) + P((E \cap F^c)) = \\ P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) = \\ P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)] \end{aligned}$$

Questa espressione ci permette calcolare la probabilità di E a priori che F si verifichi o meno. È un formula molto utile quando abbiamo conoscenze parziali sul sistema e vogliamo calcolare la probabilità di un evento tenendo conto dei fattori che possono influenzarlo.

Teorema della probabilità totale Sia Ω lo spazio campionario di un esperimento, e $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, la famiglia degli esiti che compongono Ω. Inoltre gli eventi E devono essere:

- Tutti diversi dall'evento impossibile, e quindi nessuno di essi deve essere vuoto
- Devono essere a due e due disgiunti, quindi incompatibili tra di loro
- E la loro unione deve formare Ω

Fatte queste premesse, si enuncia il teorema

Teorema 6.1 (Teorema della probabilità totale) *La probabilità dell'evento F è uguale alla sommatoria tra il prodotto della probabilità dell'evento E i-esimo e la probabilità condizionata di F, rispetto l'evento E i-esimo.*

$$P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(F|E_i)$$

Formula di Bayes Permette di calcolare la probabilità condizionata di un evento, dato l'occorso di un altro evento correlato.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

la formula di Bayes ci permette di calcolare la probabilità di un evento A, sapendo che si è verificato l'evento B. Si basa sull'idea di invertire la condizionalità delle probabilità: partiamo dalla conoscenza di $P(B|A)$ e utilizziamo le probabilità marginali P(A) e P(B) per ottenere la probabilità inversa $P(A|B)$

7 Eventi Indipendendenti

Due eventi si dicono Indipendendenti se vale la seguente espressione:

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

3 eventi, E,F e G si dicono Indipendendenti se valgono tutte e quattro le seguenti equazioni:

- $P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F)P(G)$
- $P(E \cap F) = P(E)P(F)$
- $P(E \cap G) = P(E)P(G)$
- $P(F \cap G) = P(F)P(G)$