Foglio 8

Daniele Falanga

Esercizio 1

1. Per il primo punto:

$$P(C) = \underbrace{P(AC)}_{\text{Collegamento diretto}} + \underbrace{P(AB)P(CB)}_{\text{Andando a B e poi a C da B}}$$

   Essendo i collegamenti per C, passando per B, indipendenti l'un l'altro, si molitiplicano le probabilità

2. Per il secondo, se si elimina la possibilitò di andare a C, per arrivare a B ci sta una possibilità di $\frac{1}{2}$

Esercizio 2

Il calcolo della distribuzione segue questo schema, dette n, u, d, il numero di pick di batterie, nuove, usate e difettose:

$$P(X = n, Y = u) = \frac{\binom{3}{n}\binom{2}{u}\binom{2}{d}}{\binom{7}{3}} \quad \text{Dove: } n + u + d = 3$$

La distribuzione congiunta e le relative marginali:

	0	1	2	3	m
0	0	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	0	$\frac{4}{35}$
1	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$	0	$\frac{18}{35}$
2	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	0	$\frac{12}{35}$
3	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$\frac{1}{35}$
m	$\frac{10}{35}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{5}{35}$	0	1

Utilizzando la relazione dell'indipendenza di variabili aleatorie:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Noto che non è rispettata e quindi, le variabili sono dipendenti. La varianza:

$$Covar(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = -0.17$$

Per il punto 3 faccio la somma delle probabilità:

$$P(F) = P(3, 0) + P(2, 1) + P(1, 2) = \frac{10}{35}$$

Esercizio 3

$$\begin{cases} X = \text{num. comp sottoposti al controllo} \\ Y = \text{num. comp non funzionanti} \\ Z = \text{num. comp scartati dopo il controllo} \end{cases}$$

Entrambe le 3 variabili possono essere modellate come una distribuzione binomiale per cui:

$$X = bin(n, \alpha)$$
$$X = bin(n, p)$$
$$X = bin(n, ?)$$

Avendo tutte una distribuzione binomiale:

$$X_i \to \begin{cases} 1 & \text{se componente i-esimo è sottoposto al controllo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Y_i \to \begin{cases} 1 & \text{se componente i-esimo è è difettoso} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Z_i \to \begin{cases} 1 & \text{se componente i-esimo è scartato dopo il controllo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dobbiamo calcolare ora:

$$P(Z_i = 1) = P(Z_i = 1, Y_i = 1) =$$
$$P(Z_i = 1, Y_i = 1|X_i = 1) + \underbrace{P(Z_i = 1, Y_i = 1|X_i = 0)}_{0} =$$
$$P(Z_i = 1, X_i = 1|Y_i = 1) \cdot P(X_i = 1) =$$
$$P(Z_i = 1|X_i = 1 \cap Y_i = 1) \cdot P(Y_i = 1) \cdot P(X_i = 1|Y_i = 1) = 1 \cdot p \cdot \alpha$$

Avendo calcolato la probabilità che un componente singolo sugli n complessivi sia scartato posso affermare che:

$$Z = bin(n, p\alpha)$$

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot (\alpha p)^k \cdot (1 - \alpha p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Il punto 2:
K scartati, n-k sono i componenti messi in commercio, e di questi, i sono i difettosi. La variabile aleatoria V indica i componenti difettosi tra gli n-k componenti messi in commercio:

$$P(V = i) = \binom{n-k}{i} p^i \cdot (1 - p)^{n-k-i}$$

Esercizio 4

La distribuzione segue una multinomiale:

	0	1	2	Y
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$
1	$\frac{4}{36}$	$\frac{12}{36}$	0	$\frac{16}{36}$
2	$\frac{4}{36}$	0	0	$\frac{4}{36}$
X	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{9}{36}$	1

La distribuzione di Z:

$$P(Z=0) = P(R=0, V=0) = \frac{1}{36}$$
$$P(Z=1) = P(R=0, V=1) + P(R=1, V=0) + P(R=1, V=1) = \frac{22}{36}$$
$$P(Z=2) = P(R=0, V=2) + P(R=2, V=0) = \frac{13}{36}$$

Il calcolo della varianza:

$$E[Z] = \frac{4}{3}$$
$$E[Z^2] = \frac{74}{36}$$
$$Var(Z) = \frac{5}{18}$$

Esercizio 5

Calcolo le distribuzioni marginali:

$$P(Z=0) = P(X=0, Y, 0) + P(X=0, Y, 1) + P(X=1, Y, 1) = p^2 + (1-p)^2 + p(1-p)$$
$$P(Z=1) = P(X=1, Y, 0) = p(1-p)$$
$$P(W=0) = P(X=1, Y, 1) = p^2$$
$$P(W=1) = P(X=0, Y, 0) + P(X=0, Y, 1) + P(X=1, Y, 0) = (1-p)^2 + 2p(1-p)$$

Le congiunte:

$$P(X=0, Y=0) = p^2$$
$$P(X=1, Y=0) = 0$$
$$P(X=0, Y=1) = (1-p)^2 + (1-p)p$$
$$P(X=1, Y=1) = p(1-p)$$

Eseguendo il prodotto delle marginali ed uguagliando il prodotto alle rispettive congiunte, si nota che le variabili sono indipendenti quando $p=0$

Esercizio 6