Foglio 5

Daniele Falanga

Esercizio 1

Dati gli eventi:

- A pernice colpita da Alice
- B pernice colpito da Bob
- E pernice colpito da entrambi
- F pernice colpito da una freccia

1. Non dando il numero di tentativi posso utilizzare la proprietà delle variabili indipendenti:
$$P(E) = P(A) \cdot P(B) = 1/3 \cdot 1/2 = \frac{1}{12}$$

2. Posso usare il complemento:
$$\begin{aligned}
P(F) &= 1 - [P(A^c) \cdot P(B^c)] = \\
P(F) &= 1 - \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right] = \\
P(F) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. Uso la formula di Bayes:
$$\begin{cases}
P(A|F) = \frac{P(A) \cdot P(F|A)}{P(F)} = \frac{4}{9} \\
\\
P(F|A) = \frac{P(F) \cap P(A)}{P(F)} = \frac{2}{3}
\end{cases}$$

Esercizio 2

Esercizio 3

Il problema può essere modellato come una serie di Bernoulliane di probabilità di successo p. Considerando ogni esperimento come una variabile aleatoria a se stante $X_1, X_2, \dots X_n$.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la prova i-esima ha successo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In maniera compatta la singola distribuzione assume la forma:

$$P(X_i = k) = p^k(1-p)^{1-k} \quad \text{k = 0,1}$$

Sfruttando l'indipendenza, la distribuzione assume la forma:

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n|p) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ & = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \dots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} \\ & = p^{\sum_i x_i}(1-p)^{n-\sum_i x_i} \end{aligned}$$

Per determinare p che massimizzi si prendono i logaritmi:

$$\log f(x_1, x_2, \dots, x_n|p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log p + \left(n - \sum_{i=1}^{n}\right) \log(1-p)$$

Derivando rispetto a p ed uguagliando a 0 l'espressione si ottiene:

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n}\right)$$

da cui

$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{Stimatore di massima verosimiglianza cercato}$$

Esercizio 4

1. La distribuzione di X:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}$$

2. Il valore atteso:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} i\frac{1}{6}$$

3. Data la seguente formula di Varianza:

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$
$$Var(X) = 2.91$$

Esercizio 5

1. La distribuzione di X:

$$P(X = 1) = \frac{11}{36}$$
$$P(X = 2) = \frac{9}{36}$$
$$P(X = 3) = \frac{7}{36}$$
$$P(X = 4) = \frac{5}{36}$$
$$P(X = 5) = \frac{3}{36}$$
$$P(X = 6) = \frac{1}{36}$$

2. Il valore atteso:

$$E[X] = 2.36$$

Esercizio 6

1. Ogni domanda è una prova ripetuta. Le prove sono 10, per passare il test con 18 bisogna rispondere bene a 7 domande (7 successi) e rispondere male a 3(3 fallimenti), quindi, si usa la variabile binomiale:

$$P(X = 18) = \binom{10}{7} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.30$$

2. Il valore atteso:

$$E[X] = np = 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 0.25\%$$

3. La varianza:

$$Var[X] = np(1 - p) = 0.25\% \cdot \frac{3}{4}$$