Foglio 8

Daniele Falanga

Esercizio 1

1. Per il primo punto:

$$P(C) = \underbrace{P(AC)}_{\text{Collegamento diretto}} + \underbrace{P(AB)P(BC)}_{\text{Andando a B e poi a C da B}}$$

   Essendo i collegamenti per C, passando per B, indipendenti l'un l'altro, si molitiplicano le probabilità

2. Per il secondo, se si elimina la possibilitò di andare a C, per arrivare a B ci sta una possibilità di $\frac{1}{2}$

Esercizio 2

Il calcolo della distribuzione segue questo schema, dette n, u, d, il numero di pick di batterie, nuove, usate e difettose:

$$P(X = n, Y = u) = \frac{\binom{3}{n}\binom{2}{u}\binom{2}{d}}{\binom{7}{3}} \quad \text{Dove: } n + u + d = 3$$

La distribuzione congiunta e le relative marginali:

	0	1	2	3	m
0	0	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	0	$\frac{4}{35}$
1	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$	0	$\frac{18}{35}$
2	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	0	$\frac{12}{35}$
3	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$\frac{1}{35}$
m	$\frac{10}{35}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{5}{35}$	0	1

Utilizzando la relazione dell'indipendenza di variabili aleatorie:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Noto che non è rispettata e quindi, le variabili sono dipendenti. La varianza:

$$Covar(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = -0.17$$

Per il punto 3 faccio la somma delle probabilità:

$$P(F) = P(3, 0) + P(2, 1) + P(1, 2) = \frac{10}{35}$$

Esercizio 3

$$\begin{cases} X = \text{num. comp sottoposti al controllo} \\ Y = \text{num. comp non funzionanti} \\ Z = \text{num. comp scartati dopo il controllo} \end{cases}$$

Entrambe le 3 variabili possono essere modellate come una distribuzione binomiale per cui:

$$X = bin(n, \alpha)$$
$$X = bin(n, p)$$
$$X = bin(n, ?)$$

Avendo tutte una distribuzione binomiale:

$$X_i \to \begin{cases} 1 & \text{se componente i-esimo è sottoposto al controllo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Y_i \to \begin{cases} 1 & \text{se componente i-esimo è è difettoso} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Z_i \to \begin{cases} 1 & \text{se componente i-esimo è scartato dopo il controllo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dobbiamo calcolare ora:

$$\begin{aligned}
&P(Z_i = 1) = P(Z_i = 1, Y_i = 1) = \\
&P(Z_i = 1, Y_i = 1 | X_i = 1) + \underbrace{P(Z_i = 1, Y_i = 1 | X_i = 0)}_{0} = \\
&P(Z_i = 1, X_i = 1 | Y_i = 1) \cdot P(X_i = 1) = \\
&P(Z_i = 1 | X_i = 1 \cap Y_i = 1) \cdot P(Y_i = 1) \cdot P(X_i = 1 | Y_i = 1) = 1 \cdot p \cdot \alpha
\end{aligned}$$

Avendo calcolato la probabilità che un componente singolo sugli n complessivi sia scartato posso affermare che:

$$Z = bin(n, p\alpha)$$

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot (\alpha p)^k \cdot (1 - \alpha p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Il punto 2:
K scartati, n-k sono i componenti messi in commercio, e di questi, i sono i difettosi. La variabile aleatoria V indica i componenti difettosi tra gli n-k componenti messi in commercio:

$$P(V = i) = \binom{n-k}{i} p^i \cdot (1 - p)^{n-k-i}$$

Esercizio 4

La distribuzione segue una multinomiale:

	0	1	2	Y
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$
1	$\frac{4}{36}$	$\frac{12}{36}$	0	$\frac{16}{36}$
2	$\frac{4}{36}$	0	0	$\frac{4}{36}$
X	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{9}{36}$	1

La distribuzione di Z:

$$P(Z = 0) = P(R = 0, V = 0) = \frac{1}{36}$$
$$P(Z = 1) = P(R = 0, V = 1) + P(R = 1, V = 0) + P(R = 1, V = 1) = \frac{22}{36}$$
$$P(Z = 2) = P(R = 0, V = 2) + P(R = 2, V = 0) = \frac{13}{36}$$

Il calcolo della varianza:

$$E[Z] = \frac{4}{3}$$
$$E[Z^2] = \frac{74}{36}$$
$$Var(Z) = \frac{5}{18}$$

Esercizio 5

Calcolo le distribuzioni marginali:

$P(Z = 0) = P(X = 0, Y, 0) + P(X = 0, Y, 1) + P(X = 1, Y, 1) = p^2 + (1 - p)^2 + p(1 - p)$
$P(Z = 1) = P(X = 1, Y, 0) = p(1 - p)$
$P(W = 0) = P(X = 1, Y, 1) = p^2$
$P(W = 1) = P(X = 0, Y, 0) + P(X = 0, Y, 1) + P(X = 1, Y, 0) = (1 - p)^2 + 2p(1 - p)$

Le congiunte:

$$P(X = 0, Y = 0) = p^2$$
$$P(X = 1, Y = 0) = 0$$
$$P(X = 0, Y = 1) = (1 - p)^2 + (1 - p)p$$
$$P(X = 1, Y = 1) = p(1 - p)$$

Eseguendo il prodotto delle marginali ed uguagliando il prodotto alle rispettive congiunte, si nota che le variabili sono indipendenti quando $p = 0$

Esercizio 6

B dichiara 1 con probabilità p, e 2 con probabilità 1-p.

$$X = \begin{cases} 1 \quad \text{se B indovina la scelta i di A} \\ 0 altrimenti \end{cases}$$

B- scelta i-esima di B con:

$$\begin{cases} P(B=1) = p \\ P(B=2) = 1-p \end{cases}$$

A- scrittura i-esimo numero su foglio $i = 1, 2$

1. Sapendo che $A = 1$ (A ha scritto 1), si hanno due scenari possibili: il primo, B indovina che A ha scritto 1 e quindi guadagna 1 euro.
   Il secondo che B non indovina e perde 0.75.
   Il guadagno medio:
   $E[B_1] = 1P(B = 1|A = 1) - 0.75P(B = 2|A = 1) = 1p - 0.75(1 - p) = 1.75p - 0.75$

2. Sapendo che $A = 2$ (A ha scritto 2). Primo caso: B indovina e guadagna un euro Secondo caso: B sbaglia e perde 0.75
   $E[B_2] = 1P(B = 2|A = 2) - 0.75P(B = 1|A = 2) = 2(1 - p) - 0.75p = 2 - 2.75p$

3. Risolvendo la seguente disequazione:
   $$1.75p - 0.75 \geq 2 - 2.75p =$$
   $$p \geq \frac{2.75}{4.50}$$
   Quindi si ha che la prima disequazione è maggiore della seconda se $p \geq 0.61$ e viceversa per la seconda. Quindi, la seconda disequazione viene massimizzata se $p = 0.61$ mentre nel secondo caso, la prima disequazione è piu piccola, e viene massimizzata sempre quando $p = 0.61$.

4. La perdita media nel primo caso:
   $$E[A_1] = 0.75P(A_2|B_1) - 1P(A_1|B_1) = 0.75 - 1.75q$$

5. La perdita media nel secondo caso:
   $$E[A_2] = 0.75P(A_1|B_2) - 2P(A_2|B_2) = 2.75q - 2$$

   Risolvendo in modo analogo a prima trovo che la q cercata è proprio uguale a $q = 0.61$ cioé lo stesso valore che massimizza il minimo dei guadagni di B, si può affermare che in tutti e due i casi il gioco è equilibrato.