Foglio 7

Daniele Falanga

Esercizio 1

1. La distribuzione del tempo di rottura del circuito in serie è dato dal componente che si rompe per primo:

$$T_{ser} = min(T_1, \dots, T_k)$$

2. La distribuzione del tempo di rottura del circuito è dato dalla somma di tutti i componenti:

$$T_{par} = \sum_{i}^{k} T_i$$

Esercizio 2

Assumendo che su una popolazione di cento persone, in media $\lambda = 2$, sono mancini, per calcolare la probabilità che almeno 3 siano mancini:

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$P(X \geq 3) = 1 - (\frac{2^0}{1}e^{-2} + \frac{2}{1}e^{-2} + \frac{2^2}{2}e^{-2}) =$$
$$P(X \geq 3) = 1 - 5e^{-2} = 0.32 = 32\%$$

Esercizio 3

Date le seguenti variabili aleatorie:

- Y = y numero di mail spam
- Z = z numero di mail non spam
- X = y+z numero di mail totale in arrivo

La funzione di massa di probabilità congiunta:

$$P(Y = y, Z = z) = P(Y = y, X = y + z)$$
$$P(Y = y, X = y + z) = P(Y = y|X = y + z) \cdot P(X)$$

Modello le due probabilità in questo modo:

- $P(Y, y|X = y+z) = \binom{y+z}{y} \cdot p^y \cdot (1-p)^{y-z}$: numero di modi possibili di scegliere y mail dalle y+z in arrivo per le rispettive probabilità
- $P(X = y + z) = \frac{\lambda^{y+z}}{(y+z)!} e^{\lambda}$

Sostituendo:

$$P(Y = y, X = y + z) = P(Y = y|X = y + z) \cdot P(X) =$$
$$\binom{y+z}{y} \cdot p^y \cdot (1-p)^{y-z} \cdot \frac{\lambda^{y+z}}{(y+z)!} e^{\lambda} =$$
$$\frac{(y+z)!}{y!z!} p^y (1-p)^z \cdot \frac{\lambda^y \lambda^z}{(y+z)!} e^{\lambda p(1-p)} =$$
$$\frac{(\lambda p)^y}{y!} e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^z}{z!} e^{-\lambda(1-p)}$$

Le distribuzioni marginali:

$$P(N_1 = y) = \sum_{z=0}^{\infty} P(P(Y = y, X = y + z)) =$$
$$\frac{(\lambda p)^y}{y!} e^{-\lambda p} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^z}{z!} e^{-\lambda(1-p)} =$$
$$\frac{(\lambda p)^y}{y!} e^{-\lambda p} \quad \text{La sommatoria è funzione di massa di una Poisson, quindi uguale ad 1}$$

Analogamente:

$$
\begin{aligned}
&P(N_2 = z) = \sum_{y=0}^{\infty} P(P(Y = y, X = y + z)) = \\
&\frac{(\lambda(1-p))^z}{z!} e^{-\lambda(1-p)} \sum_{y=0}^{\infty} = \frac{(\lambda p)^y}{y!} e^{-\lambda p} \\
&\frac{(\lambda(1-p))^z}{z!} e^{-\lambda(1-p)}
\end{aligned}
$$

Esendo le marginali, il prodotto delle congiunte, le variabili sono indipendenti

Esercizio 4

Scrivendo le variabili in questo modo:

- X = numero medio lanci effettuati
- Y = numero di teste ottenute
- Z = numero di croci ottenute

Modellando come l'esercizio 3 si risolve in modo analogo

Esercizio 5

Il processo in questione può essere descritto da una variabile geometrica, dove non teniamo conto della la probabilità che il primo successo (o evento in generale) richieda l'esecuzione di k prove indipendenti, bensi che il primo fallimento richieda l'esecuzione di k prove indipendenti. Nel processo in questione però si tratta del lancio della moneta, quindi la probabilità di successo e di fallimento, sono analoghe, quindi la distribuzione rimane la medesima:

1. La distribuzione:
$$P(X = k) = p(1-p)^k$$

2. Il valore atteso:
$$E[X] = \frac{1}{p} = 2$$

3. La varianza:
$$Var(X) = \frac{q}{p^2} = 6$$

Esercizio 6