Foglio 6

Daniele Falanga

Esercizio 1

Dimostrazione a pagina 170

Esercizio 2

Calcolo le probabilità singole, tramite il principio di enumerazione. Denotando con X_i, il probabilità che esca un transistor rotto al lancio k-esimo:

$$\begin{aligned}
&P(X=1) = \frac{3}{10} \\
&P(X=2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \\
&P(X=3) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{8} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

e cosi via fino ad $P(X = 7)$ dove la probabilità è la stessa fino a 10 visto che stiamo pescando sicuramente un transistor rotto.
Calcolata la distribuzione di probabilità, si usa la formula del valore atteso:

$$E[X] = \sum_{1}^{10} i \cdot P(X = i)$$

Esercizio 3

Punto 1:
Siano X e Y due variabili aleatorie. Se X è una variabile aleatoria certa, ovvero $X = c$ per un qualche $c \in R$, allora la sua funzione di distribuzione di probabilità è:

$$P(X = c) = 1$$

La funzione di distribuzione congiunta di X e Y è:

$$P(X = c, Y = y) = P(X = c)P(Y = y|X = c)$$

Poiché X è certa, la probabilità che X assuma il valore c è 1. Inoltre, la probabilità che Y assuma il valore y dato che X ha assunto il valore c è la stessa che Y assuma il valore y indipendentemente dal valore di X. Pertanto, abbiamo:

$$P(X = c, Y = y) = 1 \cdot P(Y = y)$$

Questo significa che la distribuzione di probabilità di Y è la stessa sia che X sia certa sia che X assuma un valore diverso da c. Pertanto, X e Y sono indipendenti.

Punto 2:
Essendo binarie si ha:

$$X = \begin{cases} 1 \rightarrow E[X = p(x = 1 = \frac{1}{2}) \\ 0 \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1 \rightarrow E[X = p(x = 1 = \frac{1}{2}) \\ 0 \end{cases}$$

Una condizione di indipendenza di variabili aleatorie è la seguente:

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$$

Questa condizione è possibile sfruttarla all'interno della dimostrazione:

$$\begin{cases} \quad Cov(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Utilizzo una distribuzione geometrica:

1. La probabilità richiesta:

$$P(T = 3, X = 5) = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{2}{27}$$

2. La distribuzione:

$$P(T = k) = \frac{2}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}$$

3. La distribuzione di X:
$$P(X = i) = \frac{1}{6}$$

4. Se gli eventi sono indipendenti, la congiunta deve essere uguale al prodotto delle marginali:
$$P(T = 3, X = 5) = P(T = 3) \cdot P(X = 5) = \left(\frac{4}{6}\right)^2 \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{81} \neq \frac{2}{27} \quad \text{punto 1}$$

Esercizio 5

Utilizzo 6 variabili aleatorie, X_i con $i = 1, 2, 3 \ldots, 6$ per rappresentare il lancio i-esimo:

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= \frac{6}{6} \quad \text{Ho tutte le facce disponibili} \\
P(X = 2) &= \frac{5}{6} \quad \text{Ne ho una di meno} \\
P(X = 3) &= \frac{4}{6} \quad \text{e cosi via} \\
P(X = 4) &= \frac{3}{6} \\
P(X = 5) &= \frac{2}{6} \\
P(X = 6) &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Essendo ogni lancio indipendente uso la variabile geometrica

Esercizio 6: <u>Non so se è giusto</u>

$$E[X] = \sum_{j=2}^{n+n} (\sum_{i=1}^{n} f(i) \cdot \sum_{i=1}^{n} g(i)) \tag{1}$$
$$E[X^2] = \sum_{j=2}^{n+n} (\sum_{i=1}^{n} f(i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} g(i)^2) \tag{2}$$
$$E[X]^2 = (\sum_{j=2}^{n+n} (\sum_{i=1}^{n} f(i) \cdot \sum_{i=1}^{n} g(i)))^2 \tag{3}$$
$$Var(X) = \sum_{j=2}^{n+n} (\sum_{i=1}^{n} f(i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} g(i)^2) - (\sum_{j=2}^{n+n} (\sum_{i=1}^{n} f(i) \cdot \sum_{i=1}^{n} g(i)))^2 \tag{4}$$