08/05/2019

Nome: Rafaella Larissa de Arruda

7º Trabalho

1- Mostrar que se os conjuntos A e B são enumeráveis, então A ∪ B, então $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \times B$ são enumeraveis.

1) Mostrar que $A \cup B$ é enumeravel.

Como A é enumerável existe $f: A \to \mathbb{N}$ injetora e como existe um função $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{pares}$, $g(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. g é bijetora pois para todo $2n$ existe um n de modo que $g(n) = 2n$ e $g(n) = g(m)$ se, e somente se, $2n = 2m \leftrightarrow n = m$. Portanto existe uma $h_1 = g \circ f$ injetora. Como B é enumeravel então existe uma $f: B \to \mathbb{N}$ injetora e como existe uma função $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_i$, onde $\mathbb{N}_i$ são os naturais impares $g(n) = 2n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. g é bijetora porque para todo $2n+1$ existe n de modo que $g(n) = 2n+1$ e $g(n) = g(m)$ se, e somente se $2n+1 = 2m+1 \leftrightarrow n = m$. Assim existe uma $h_2 = g \circ f$, sendo h_2 injetora. Sendo

$$f: (A \cup B) \to (\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i),\ f(x) = \begin{cases} h_1 & \text{se } x \in A \\ h_2 & \text{se } x \in B \end{cases}$$

Como $\mathbb{N}_i \cup \mathbb{N}_p = \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ é enumeravel então $A \cup B$ também é enumeravel.

2) Mostrar que $A \cap B$ é enumeravel

Para isso será necessario mostrar que o subconjunto $C = A \cap B$ é enumeravel. Como A e B são enumeravel então existe f_1 e f_2 bijetoras de modo que $f_1: \mathbb{N} \to A$ e $f_2: \mathbb{N} \to B$. tomando $C \subset A$ e $C \subset B$ com $C = A \setminus \{a_1, a_2 \dots\}$ ou $C = B \setminus \{b_1, b_2 \dots b_i\}$ e $Y = \mathbb{N} \setminus \{n_1, \dots n_i\}$

Assim tem-se $g: Y \to C$ é bijetora e como $Y \subset \mathbb{N}$ é enumeravel consequentemente existe $h: \mathbb{N} \to Y$ bijetora.

Fazendo $g \circ h: \mathbb{N} \to C$ é bijetora consequentemente C é enumeravel.

37 mostrar $A \times B$ é enumerável

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$

Existem f_1 e f_2 injetivas de modo que $f_1: A \to \mathbb{N}$ e $f_2: B \to \mathbb{N}$

Assim construindo um função $g: A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $g(a,b) = (f_1(a), f_2(b))$ é injetiva, assim sabendo que se a imagem $g(a,b)$ é enumerável e $g(a,b)$ é injetiva basta provar que o domínio de $g(a,b)$ é enumerável.