DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

16 / 05 / 2021

Nome: RAFAELLE ARRUDA

Professor: Neri

Disciplina: Calculo 2

Lista 10

Apenas resoluções dos exercicios do capitulo 10 ate 16.

- Capitulo 10.1, exercicios 10.1

6- $pV = nRT \Rightarrow p = nR\frac{T}{V}$

* n, R e T são constante e derivando em V.

$$\frac{\partial p}{\partial V} = nRT\,\frac{\partial}{\partial V}\cdot\left(\frac{1}{V}\right) = nRT\left(-\frac{1}{V^2}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{-nRT}{V^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nR}{V}\cdot\frac{\partial}{\partial T}(T) = \frac{nR}{V}$$

* olhando assim, podemos ver o n, R e V como constantes e derivando em relação ao T.

10- Seja a equação $xyz + z^3 = x$, derivando em relação a x (mantendo y constante):

$$xy\,\frac{\partial z}{\partial x} + yz + 3z^2\,\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(xy + 3z^2\right) = 1 - yz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - yz}{xy + 3z^2}$$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

* Derivando em relação a y (olhando para x como constante):

$$xy \frac{\partial z}{\partial y} + xz + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(xy + 3z^2) = -xz$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy + 3z^2}$$

13- Sejam $w = xy + z^4$, $z(1,1) = 1$ e $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 4$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y + 4z^3 \frac{\partial z}{\partial x}$$, daí

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

15- Seja $f(x,y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t^2}\, dt$. Considerando $F(t) = e^{-t^2}$ e

$u(x,y) = x^2 + y^2$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{u(x,y)} F(t)\, dt\right) = F(u) \frac{\partial u}{\partial x}$$ e portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = 2x\, e^{-(x^2+y^2)^2}.$$

SD

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

Analogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F(u)\,\frac{\partial u}{\partial y}, \text{ ou seja, } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\,e^{-(x^2+y^2)^2}.$$

- Capítulo 11.4, exercício 11.4

6- $P = \frac{V^2}{R}$, temos $\Delta P \cong dP$.

$$dP = \frac{2\,VR\,dV - V^2\,dR}{R^2}$$

$dV = -0{,}2$ volt e
$dR = 0{,}01$ ohm

* Substituindo:

$$dP = \frac{2 \cdot 100 \cdot 10 \cdot (-0{,}2) - 10^4 \cdot 0{,}01}{10^2} = -5, \text{ logo } \Delta P = -5\,W$$

- Capítulo 11.5, exercício 11.5

8- Seja $f(x,y) = xy$.
$\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, é diferenciável e sua imagem está contida na curva de nível $f(x,y) = 2$. Assim, para todo t em I, temos $x(t)\,y(t) = 2$

* Derivando em relação a t, resulta:

$$x'(t)\,y(t) + x(t)\,y'(t) = 0, \text{ ou seja}$$

$$(y(t), x(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$$

SD

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

* Portanto para todo t em I,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

* Imagem da curva $\gamma(t) = \left(t, \frac{2}{t}\right)$, $t > 0$, está contida na curva de nível $xy = 2$.

— Capítulo 12.1, exercício 12.1

31 - Suponha f diferenciável no aberto A e homogênea de grau λ, Tem-se:

$$f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x, y)$$

* Derivando em relação a x os dois membros:

$$t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad (t > 0)$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda - 1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Portanto, $\frac{\partial f}{\partial x}$ é função homogênea de grau $\lambda - 1$.

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

— Capítulo 12.2, exercício 12.2

4 - $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde $y = y(x)$ e $F(u,v)$ são diferenciável.

*Derivando em relação a x:

$$\frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}\left[F(x^2+y, y^2)\right]$$, ou seja,

$$1 = \frac{\partial F}{\partial u}(x^2+y, y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}(x^2+y, y^2)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$1 = \frac{\partial F}{\partial u}(x^2+y, y^2)\left[2x + \frac{dy}{dx}\right] + \frac{\partial F}{\partial v}(x^2+y, y^2)\, 2y\frac{dy}{dx}$$

$$1 - 2x\frac{\partial F}{\partial u}(x^2+y, y^2) = \left[\frac{\partial F}{\partial u}(x^2+y, y^2) + 2y\frac{\partial F}{\partial v}(x^2+y, y^2)\right]\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x\frac{\partial F}{\partial u}(x^2+y, y^2)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x^2+y, y^2) + 2y\frac{\partial F}{\partial v}(x^2+y, y^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)}{\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + 2y\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)}$$, $u = x^2 + y$ e $v = y^2$.

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

- Capitulo 13.4, exercicios 13.4.

7 - $T(x,y,z) = 16 - 2x^2 - y^2$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e
$\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t))$.

$\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \longleftrightarrow (x'(t), y'(t)) = (-4x(t), -2y(t))$
$\dot{x} = -4x \longleftrightarrow x(t) = k_1 e^{-4t}$ e
$\dot{y} = -2y \longleftrightarrow y(t) = k_2 e^{2t}$

De $x(0)=1$ e $y(0)=2$ segue $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$
logo $x(t) = e^{-4t}$ e $y(t) = 2e^{-2t}$, $t \geq 0$.

9 - Sejam $\gamma(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, f(x_0 + at, y_0 + bt))$ e
$(x_0, y_0) = (1,2)$

Então $\gamma(t) = (1 + 2t, 2 + t, f(1+2t, 2+t))$.
$\gamma(0) = (1, 2, f(1,2)) = (1, 2, 2)$
$\gamma'(0) = (a, b, \frac{\partial f}{\partial u}(1,2))$, com $(a,b) \to$ unitario

$\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = (2,1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ então

$\gamma'(0) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\right)$

* A tangente em $\gamma(0)$ é a reta procurada

$$(x,y,z) = (1,2,2) + \lambda\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}, \text{ ou}$$

$$(x,y,z) = (1,2,2) + \lambda\,(2,1,5).$$