

Nome: Rafaela Larissa de Almeida

### 7º trabalho

1- Mostrar que se os conjuntos  $A$  e  $B$  são enumeráveis, então  $A \cup B$ , então  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  e  $A \times B$  são enumeráveis.

1ª Mostrar que  $A \cup B$  é enumerável.

Como  $A$  é enumerável existe  $f: A \rightarrow \mathbb{N}$  injetora e como existe um função  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_{\text{pares}}$ ,  $g(n) = 2n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $g$  é bijetora pois para todo  $2n$  existe um  $n$  de modo que  $g(n) = 2n$  e  $g(n) = g(m)$  se, e somente se,  $2n = 2m \Leftrightarrow n = m$ . Portanto existe uma  $h_1 = g \circ f$  injetora. Como  $B$  é enumerável então existe uma  $f: B \rightarrow \mathbb{N}$  injetora e como existe uma função  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_i$ , onde  $\mathbb{N}_i$  são os naturais ímpares  $g(n) = 2n+1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $g$  é bijetora porque para todo  $2n+1$  existe  $n$  de modo que  $g(n) = 2n+1$  e  $g(n) = g(m)$  se, e somente se  $2n+1 = 2m+1 \Leftrightarrow n = m$ . Assim existe uma  $h_2 = g \circ f$ , sendo  $h_2$  injetora. Sendo  $f: (A \cup B) \rightarrow (\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i)$ ,  $f(x) = \begin{cases} h_1 & \text{se } x \in A \\ h_2 & \text{se } x \in B \end{cases}$

Como  $\mathbb{N}_i \cup \mathbb{N}_p = \mathbb{N}$  e  $\mathbb{N}$  é enumerável então  $A \cup B$  também é enumerável.

2ª Mostrar que  $A \cap B$  é enumerável

Para isso será necessário mostrar que o subconjunto  $C = A \cap B$  é enumerável. Como  $A$  e  $B$  são enumeráveis então existe  $f_1$  e  $f_2$  bijetoras de modo que  $f_1: \mathbb{N} \rightarrow A$  e  $f_2: \mathbb{N} \rightarrow B$ . tomando  $C \subset A$  e  $C \subset B$  com  $C = A \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$  ou  $C = B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_i\}$  e  $Y = \mathbb{N} \setminus \{n_1, \dots, n_i\}$

Assim tem-se  $g: Y \rightarrow C$  é bijetora e como  $Y \subset \mathbb{N}$  é enumerável consequentemente existe  $h: \mathbb{N} \rightarrow Y$  bijetora.

Fazendo  $g \circ h: \mathbb{N} \rightarrow C$  é bijetora consequentemente  $C$  é enumerável.

14/01/20

3) mostrar  $A \times B$  é enumerável

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Existem  $f_1$  e  $f_2$  injetivas de modo que  $f_1: A \rightarrow \mathbb{N}$  e  $f_2: B \rightarrow \mathbb{N}$

Aísim construído uma função  $g: A \times B \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $g(a, b) = (f_1(a), f_2(b))$  é injetiva, assim sabendo que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável e  $g(a, b)$  é injetiva basta provar que o domínio de  $g(a, b)$  é enumerável.

Seja  $\{a_1, a_2, \dots\}$  e  $\{b_1, b_2, \dots\}$  enumerações de  $A$  e  $B$  respectivamente.

Então  $g(a_i, b_j) = (f_1(a_i), f_2(b_j)) = (i, j)$  para todo  $i, j \in \mathbb{N}$ .

Logo, a imagem de  $g$  contém todos os pares  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Como  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável, a imagem de  $g$  também é enumerável.

Portanto,  $A \times B$  é enumerável.

Assim, concluímos que o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Isso pode ser generalizado para um número finito de conjuntos enumeráveis.

Por exemplo, se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são conjuntos enumeráveis, então  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  é enumerável.

Essa propriedade é fundamental na teoria da contagem e na teoria dos conjuntos.

Em resumo, mostramos que o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Isso é feito construindo uma função injetiva para  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  e usando o fato de que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável.

Portanto, a afirmação é verdadeira.

Assim, concluímos a demonstração.

Isso completa a prova de que  $A \times B$  é enumerável.

Portanto, a resposta é afirmativa.

Em outras palavras, o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Isso é uma consequência direta da enumerabilidade de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Logo, a afirmação é verdadeira.

Assim, concluímos a demonstração.

Isso completa a prova de que  $A \times B$  é enumerável.

Portanto, a resposta é afirmativa.

Em outras palavras, o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Isso é uma consequência direta da enumerabilidade de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .