NOME : Rafaelle Arruda

Professor : Antonio Neri Disciplina : Calculo II

Lista 5

pg 166.

7- Seja $Z = e^y \phi(x-y)$, em que ϕ é uma função diferencial de uma variavel real. Mostre que $\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y}$

* Vamos considerar a derivada parcial:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial(e^y \phi(x-y))}{\partial x}$$

* Consideramos que:

$$\frac{\partial(\phi(x-y))}{\partial x} = 1 \rightarrow \frac{\partial(e^y \phi(x-y))}{\partial x} = \frac{\partial(e^y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\phi(x-y))}{\partial x} = e^y \cdot 1 = e^y$$

* lembrando que quando fizermos a derivada em x o e^y é considerado uma constante.

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial(e^y \phi(x-y))}{\partial y}$$

* lembrando que para derivada parcial em y teremos duas funções se multiplicando e aplicamos a regra do produto.

$$\frac{\partial(\phi(x-y))}{\partial y} = 1 \rightarrow \frac{\partial(e^y \phi(x-y))}{\partial y} = \frac{\partial(e^y)}{\partial y} \phi(x-y) \cdot e^y \frac{\partial(\phi(x-y))}{\partial y}$$

$$e^y \cdot \phi(x,y) + e^y \cdot (-1) = e^y \phi(x-y) - e^y$$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

* Agora somando as duas derivadas parciais:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^y + e^y \phi(x-y) - e^y \phi(x-y)$$

8- Seja $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável de uma variável real e seja $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\phi\left(\frac{x}{y}\right)$, mostre que $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$.

* Derivada parcial em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)\,\phi\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

* Usando regra da cadeia

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2+y)\,\phi' \cdot \frac{1}{y}$$

* Com a regra, ficará da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \phi\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{y} = \frac{\phi'}{y}$$

* Derivada parcial em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+y^2)\,\phi\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

* Usando a regra anteriormente para x, usaremos no y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2+y^2)\,\phi'\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

* Com a regra, onde a ultimo termo apareceu de:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = x \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}{\partial y} = x\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

* Agora vamos calcular, substituindo as derivadas que calculamos.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\left(2x\,\phi + (x^2+y^2)\,\phi'\,\frac{1}{y}\right) + y\left(2y\,\phi + (x^2+y^2)\,\phi'\left(-\frac{x}{y}\right)\right) =$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2\,\phi\,(x^2+y^2)\,\phi'\,\frac{x}{y} + 2y^2\,\phi - (x^2+y^2)\,\phi'\,\frac{x}{y} =$$

* Percebemos que o segundo e o quarto são iguais, então eles se cancelam, assim fica nosso calculo:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2\phi + 2y^2\,\phi = 2\,(x^2+y^2)\,\phi$$

* Observe o termo assim, esta multiplicando por 2 e reconhendo a expresão, então, concluimos que finalmente mostramos que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f \quad //$$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

Exercícios 10.2

1- calcule derivadas parciais.

a) $f(x,y,z) = x\, e^{x-y-z}$

*calculando derivada de x, assim

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x e^{z-y-z}\right] = x \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{z-y-z}\right] + e^{z-y-x} \frac{\partial}{\partial x}[x]$$

Dai,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -x e^{z-y-z} + 0 = x e^{z-y-z}$$

* calculando derivada de z

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[x e^{z-y-z}\right] = x \frac{\partial}{\partial z}\left[e^{z-y-z}\right] + e^{z-y-z} \frac{\partial}{\partial z}[x]$$

Dai,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = -x e^{z-y-z} + 0 = -x e^{z-y-z}$$

Concluimos que:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = e^{z-y-z}(x+1)$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -x e^{z-y-z}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = -x e^{z-y-z}$$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

b) $w = x^2 \arcsin \cancel{y/z} \; y/z$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x \ \text{ARCSIN}\left(\frac{t}{z}\right) =$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x^2 \ |z|}{2\sqrt{z^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x^2 \cdot y}{|z| \sqrt{z^2 - y^2}}$$

c) $w = \dfrac{x \cdot y \cdot z}{x + y + z}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x \cdot y(x+z)}{(x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x \cdot y(x+y)}{(x+y+z)^2}$$

d) $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z \cos(x^2 + y^2 + z^2)$$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

e) $s = f(x, y, z, w)$ dada por $s = xw \ln(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$.

$$\frac{\partial s}{\partial x} = w\left(\frac{2x^2}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} + \ln(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)\right)$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{2xyw}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = w \frac{2 \cdot xzw}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial w} = x\left(\frac{2w^2}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} + \ln(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)\right)$$