DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

Nome: Rafaelle Arruda

Professor: Neri

Disciplina: Calculo II

Lista 7

Exemplo 10, explicando o entendimento da resolução.

10- $F(r, \theta) = f(x, y)$ em que $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, sendo $f(x,y)$ uma função diferenciavel dada. Verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta).$$

* mudando o contexto, separando $f(x,y)$. Podemos fazer dessa maneira, substituindo $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$ na função $w = f(x, y)$, mostrando que $\frac{\partial f}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \operatorname{sen} \theta$ e

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \operatorname{sen} \theta + f_y \cos \theta.$$

* Note que $f_x = \cos(\theta) \cdot \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$ e $f_y = \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$

Assim concluimos.

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

Exercícios da pag 202.

1- Calcule $\frac{dz}{dt}$ pelos dois processos descritos no exemplo do livro.

a) $z = \text{sen}\, xy$, $x = 3t$ e $y = t^2$.

$z = \text{sen}(x.y) \xrightarrow{\text{substituindo}} z = \text{sen}(3t.t^2)$

$z = \text{sen}(3t^3)$

* Derivando

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\,\text{sen}(3t^3) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \cos(3t^3)\,\frac{d}{dt}(3t^3) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 9t^2\cos(3t^3)$$

* Vamos calcular as derivadas parciais.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,\text{sen}(x.y) = y\cos(x.y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,\text{sen}(xy) = x\cos(xy)$$

* Agora derivadas.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\,3t - 3 \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\,t^2 - 2t$$

* Juntando com a regra da cadeia

$$\frac{dx}{dt} = 3y\cos(x.y) + 2t\,x\cos(xy)$$

* substituindo x e y pela expressão em t:

$$\frac{dz}{dt} = 3(t^2)\cos(3t^3) + 2t(3t)\cos(3t^2)$$

Arrumando a expressão, resultará assim:

$$\frac{dz}{dt} = 9t^2\cos(3t^3)$$

//

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

b) $z = x^2 + 3y^2$, $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \cos t$.

$$z = x^2 + 3y^2 \xrightarrow{\text{substituindo}} z = \operatorname{sen}^2(t) + 3\cos^2(t)$$

* Derivando

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}^2(t) + 3\cos^2(t)\right)$$

* Separando o conjunto, iremos obter:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}^2(t)\right) + \frac{d}{dt}\left(3\cos^2(t)\right) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 2\cos(t)\cos(t) + 3\cos(t)(-\sin(t))$$

* Arrumando expressão, iremos ter:

$$\frac{dz}{dt} = -4\operatorname{sen}(t)\cos(t)$$

* Derivando pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3y^2) = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3y^2) = 6.y$$

* Juntando as expressões,

$$\frac{dz}{dt} = 2x\cos(t) - 6y\operatorname{sen}(t)$$

* Substituindo o x e y por t, iremos obter:

$$\frac{dz}{dt} = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t) - 6\cos(t)\operatorname{sen}(t)$$

* Concluindo o resultado desta expressão:

$$\frac{dz}{dt} = -4\operatorname{sen}(t)\cos(t)$$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ $x = \text{sen } 3t$ e $y = \cos 3t$.

* Derivadas parciais!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln(1 + x^2 + y^2) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x)$$

Derivando por partes

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \ln(1 + x^2 + y^2) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2y)$$

* Derivando por partes

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \text{sen}(3t) = 3\cos(3t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \cos(3t) = -3\,\text{sen}(3t)$$

* Juntando a expressões derivadas, vamo obter:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x)(3\cos(3t)) + \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2y)(-3\,\text{sen}(3t))$$

* Reduzindo a expressão

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6x\cos(3t) - 6y\,\text{sen}(3t)}{1 + x^2 + y^2}$$

* Substituindo x e y pela expressão em t:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6\,\text{sen}(3t)\cos(3t) - 6\cos(3t)\,\text{sen}(3t)}{1 + x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

//

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

3 - Expresse $\frac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de f, sendo

$z = f(x, y)$ e ?

a) $x = t^2$ e $y = 3t$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \qquad \frac{dx}{dt} = 2t \qquad \frac{dy}{dt} = 3$$

$$\frac{dz}{dt} = 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \Longrightarrow \frac{dz}{dt} = 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t) + 3\,\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t)$$

b) $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 2t$

$$\frac{dz}{dt}(t) = 3\cos(3t)\,\frac{\partial f}{\partial x}(\operatorname{sen}(3t), \cos(2t)) - 2\operatorname{sen}(2t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(\operatorname{sen}(3t), \cos(2t))$$

4 - Suponha que, para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$

$x = t^2$ e $y = 2t$, então $f(t^2, 2t) = t^2 \cdot t - 3 \cdot t$

* substituindo por x e y

$$f(x, y) = x \cdot \frac{y}{2} - 3 \cdot \frac{y}{2} \Longrightarrow f(x,y) = \frac{xy}{2} - \frac{3}{2}y$$

ORGANIZANDO FUNÇÃO!

* Derivando o x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}y$$

* Derivando f em relação a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

* Vamos calcular os valores das derivadas parciais no ponto (1,2)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 1$$

* Vamos ver com fica em relação a y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} x - \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{3}{2} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$$

Pag 247

Questao 5.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

* Com enunciado obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial g}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial g}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

* Agora, invocamos a solene definição de uma função classe C^2, tipo "Se g for de classe C^2, então a ordem das derivadas não afeta o resultado, ou seja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

1- Calcule todas as derivadas parciais de 2^a ordem.

c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2 + 2y^2 - 2x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2 + 2x^2 - 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \quad e$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}. \quad C$$

b) $z = e^{x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2 - y^2}(1 + 2x^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2 - y^2}(2y^2 - 1) \quad e$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy\, e^{x^2 - y^2}.$$

a) $f(x, y) = x^3 y^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2 y.$$

d) $g(x, y) = 4x^3 y^4 + y^3$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 24xy^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 48x^3 y^2 \quad e \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 48x^2 y^3.$$

Question 1- Verifique que $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, onde $z = (x+y)\, e^{x/y}$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-3xy - x^2}{y^3} e^{x/y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{3x^2 y + x^3}{y^4} e^{x/y}$.

Questão 2

↳ Não sei fazer

//

* No pdf do drive pag13 e pag9.

$\frac{df}{dt}$ $-9 \cos^2(t) \operatorname{sen}^2(t) + 3 \cos^3(t) + \operatorname{sen}^2(t) - \cos^2(t)$ *

$\frac{df}{dt}(t) = -9 \operatorname{sen}^2(t) \cos^2(t) + 3 \cos^4(t) - 1$ **

O que podemos perceber que no *, podemos derivar-lo igual [illegible] **, em questão de sinal esta certo.