GABARITO DA PROVA DE DISCRETA

Questão 1 usamos uma tabela verdade para ambos os itens. Como a maioria fez uso de duas tabelas verdade e as comparou, eu vou fazer diferente. Vou usar o conceito de tautologia, mostrando que

$$\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P) \vee (\sim Q)$$ é uma tautologia.

P	Q	$\sim$ (2)	$(P \wedge Q)$ (1)	$\leftrightarrow$	$(\sim P)$ (3)	$\vee$ (5)	$(\sim Q)$ (4)
v	v	f	v	v	f	f	f
v	f	v	f	v	f	v	v
f	v	v	f	v	v	v	f
f	f	v	f	v	v	v	v

O outro item é semelhante.

Questão 2: Aqui, temos uma questão de igualdade de conjuntos que poderia ser verdadeira ou falsa.

$(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \cup C)$. A diferença de conjuntos costuma não ter as boas propriedades que encontramos nas outras operações. Minha primeira tentativa seria testar alguns casos para verificar rapidamente se a igualdade seria falsa

Vejamos: se $A = \{a,b\}$, $B = \{c,d\}$ e $C = \{e,f\}$ então $(A \setminus B) = \{a,b\}$ e

$$(A \setminus B) \cup C = \{a,b\} \cup \{e,f\} = \{a,b,e,f\}$$

Por outro lado, $B \cup C = \{c,d\} \cup \{e,f\} = \{c,d,e,f\}$

e $A \setminus (B \cup C) = \{a,b\} \setminus \{c,d,e,f\} = \{a,b\}$.

E com isto, temos um contraexemplo para provar que a igualdade é falsa!

Questão 3 Se x^3 é irracional, então x é irracional.

$$P \to Q$$

(a) Negação: Quase ninguém lembrou que $\sim(P \to Q) \equiv P \wedge (\sim Q)$.

"x^3 é irracional e x não é irracional"

Recíproca: $Q \to P$.

"Se x é irracional, então x^3 é irracional."

Inversa: $\sim P \to \sim Q$

"Se x^3 não é irracional, então x não é irracional"

Contrapositiva: $\sim Q \to \sim P$

"Se x não é irracional então x^3 não é irracional"

(3b) A recíproca e a inversa, ambas equivalentes, são falsas. Basta encontrar um contraexemplo para a recíproca.

"Se x é irracional, então x^3 é irracional"

Ora, $x = \sqrt[3]{5}$ é irracional, mas

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5,$$ que não é irracional!

(3c) <u>bônus:</u>

Se x não é irracional, então x é racional. Logo existem inteiros a e b com $b \neq 0$ tais que $x = \frac{a}{b}$. Daí

$$x^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}.$$ Como $a^3 \in \mathbb{Z}$, $b^3 \in \mathbb{Z}$ e $b^3 \neq 0$, então

<u>x^3 não é irracional</u>.

Questão 4

(I) $[-1,1]$ é equipotente ao intervalo $[0,1]$

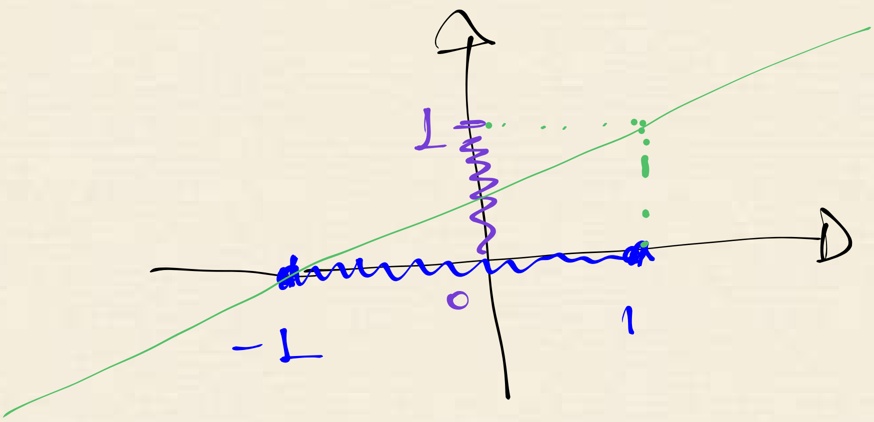
a) Vamos construir uma função afim que passa por $(-1,0)$ e por $(1,1)$.

b) Vamos restringir esta função ao intervalo fechado $[-1,1]$ e mostrar que esta restrição é bijetora

$\boxed{a}$ Uma função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ com

$f(x) = ax+b$ cujo gráfico passa pelos pontos $(-1,0)$ e $(1,1)$ deve satisfazer

$$f(-1)=0 \quad e \quad f(1)=1.$$



Como $f(-1) = a(-1) + b = 0$ então

$-a + b = 0$, e então $\boxed{a = b}$

Como $f(1) = a(1) + b = 1$ então

$a + b = 1$ e então

$a + a = 1$. Logo $\boxed{a = b = 1/2}$

$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ é a regra da função que restringiremos.

b Perceba que se $x \in [-1, 1]$ então

$-1 \leq x \leq 1$. Neste caso

$-1 \leq x$ e $x \leq 1$. Multiplicando por $1/2$ ambos os lados. Depois somando $\frac{1}{2}$...

$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x$ e $\frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}$

$0 \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq 1$, ou seja

$0 \leq f(x)$ e $f(x) \leq 1$. Logo

$f(x) \in [0, 1]$ o que garante que se f for restrita ao intervalo $[-1, 1]$ então a imagem fica contida no intervalo $[0,1]$.

Portanto

$$g : [-1,1] \to [0,1]$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ é}$$

uma função bem-definida.

Vamos mostrar que g é bijetora:

* <u>g é injetora:</u>

$$g(a) = g(b) \Rightarrow \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b \Rightarrow a = b //$$

* <u>g é sobrejetora:</u> se $y \in [0,1]$, tome

$\underline{x = 2y - 1}$. Perceba que

se $y \in [0,1]$ então

$$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow$$
$$2.0 \leq 2y \leq 2.1 \Rightarrow$$
$$-1 \leq 2y - 1 \leq 2.1 - 1 \Rightarrow$$
$$-1 \leq 2y - 1 \leq 1 \Rightarrow$$
$$-1 \leq x \leq 1$$, ou seja, x está no

RASCUNHO

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$$

$$\underline{x = 2y - 1}$$

domínio de g. Mais que isso,

$$g(x) = g(2y-1) = \frac{1}{2}(2y-1) + \frac{1}{2}$$

$$= y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = y.$$

Logo g é sobrejetora.

Assim fica verificado que g é bijetora e portanto $[-1,1]$ e $[0,1]$ são equipotentes.

(4 II) São equipotentes os intervalos $[0,1]$ e $]0,1[$ (vou usar esta notação para intervalo aberto)

Esta não era uma questão fácil. É por isso que a prova valia mais que 10 e este item valia só 0,5.

Mas ele é importante do ponto de vista da construção do resto do exercício. E serve como oportunidade de aprender algo novo. Se você leu este texto, me mande um email pra eu saber que você estudou. Quem sabe isso vale um bônus na Rec...

Uma possível bijeção entre $[0,1]$ e $]0,1[$ é a função

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow]0,1[$$

$$x \longmapsto \varphi(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{n+2} & \text{se } x = \dfrac{1}{n} \text{ para algum natural } n \\ x & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

É óbvio que se $n \in \mathbb{N}$ então $\dfrac{1}{n+2}$ está no intervalo $]0,1[$.

Como $\varphi(0) = \dfrac{1}{2}$ e $\varphi(1) = \varphi\left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$

então $\varphi([0,1]) \subset (0,1)$.

Vamos provar que φ é bijetora.

* φ é INJETORA! Vamos separar em casos.

(a) Se $a=0$ e $b=\frac{1}{n}$ para algum $n\in\mathbb{N}^*$

$\varphi(a)=\frac{1}{2}$ e $\varphi(b)=\frac{1}{n+2}$. Assim

$\varphi(a)$ não pode ser igual a $\varphi(b)$

pois ~~se~~ se fosse, $\frac{1}{2}=\frac{1}{n+2}$ e $\underline{n=0}$.

(b) Se $a=0$ e $b\neq\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\varphi(a)=\frac{1}{2}$ e $\varphi(b)=b$. Mas

$\varphi(a)=\varphi(b)$ nos conduziria a

dizer que $b=1/2$, o que

contradiz o caso

(c) Se $a=\frac{1}{n}$ para algum $n\in\mathbb{N}^*$ e

se $b\neq\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, então $\varphi(a)=\frac{1}{n+2}$ e

$\varphi(b)=b\neq\frac{1}{n+2}$ por hipótese

Logo, só restam os casos em que a e b são do mesmo tipo:

(d) Se $a = \frac{1}{n}$ e $b = \frac{1}{m}$, teremos

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \frac{1}{n+2} = \frac{1}{m+2} \Rightarrow n = m$$

$$\Rightarrow a = b \,//$$

(e) Se $a \neq \frac{1}{n}$ e $b \neq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Neste caso $\varphi(a) = a$ e $\varphi(b) = b$.

Logo $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b \,//$

e φ é injetora.

* φ é sobrejetora.

Seja $y \in]0,1[$

$\boxed{\bullet \text{ Se } y = \frac{1}{n},}$ com:

$\to n = 2$: $y = \frac{1}{2}$ é imagem de $x = 0$.

$\to n > 2$: $n = 2 + t$ com $t > 0$ e

$y = \frac{1}{n} = \frac{1}{2+t}$. Assim, $x = \frac{1}{t} \in]0,1[$

é tal que $\underline{\varphi(x)} = \varphi\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t+2} = y$.

$\boxed{\bullet \text{ Se } y \neq \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*}$, então $x = y$ é imagem de y.

Como isto esgota todas as possibilidades em $]0,1[$, então φ é sobrejetora //

4 III Que $]0,1[$ e $\mathbb{R}$ são equipotentes, vimos em sala. É só

lembrar que $\mathbb{R}$ e $]-1,1[$ são equipotentes e que $]-1,1[$ e $]0,1[$ também.

4 IV Agora, basta recordar o exercício que afirmava que a equipotência é transitiva (você fez isso provando que composição de bijeções é bijeção)

$[-1,1]$ é equipotente a $[0,1]$

$[0,1]$ é equipotente a $]0,1[$

$]0,1[$ é equipotente a $]-1,1[$

$]-1,1[$ é equipotente a $\mathbb{R}$. Logo

$[-1,1]$ é equipotente a $\mathbb{R}$ //

Questão 5 a

$$1+8+27+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aqui, uma coisa que facilita a vida é lembrar de GAUSS, que somou de 1 até 100 em poucos minutos. Falamos disso em sala e eu fiz por indução a prova de que

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

E nosso problema original acima se torna:

$$1+8+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

PASSO BASE: se $n=1$, então $\underline{n^3=1}$

e $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1(2)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1.$

PASSO DE INDUÇÃO:

Hipótese:

$$1+8+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

Tese:

$$1+8+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right)^2$$

Da hipótese, somando a ambos os lados a parcela $(k+1)^3$ temos

$$\overline{1+8+\cdots+k^3}+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)(k+1)^2=$$

$$\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)(k+1)^2}{4}=$$

$$\frac{[k^2+4(k+1)](k+1)^2}{4}=\frac{(k^2+4k+4)(k+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+2)^2(k+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2} =$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right]^2$$

Assim, as duas "pontas" da linha acima garantem a tese.

15b

5b $n! > n^4 \quad \forall n \geq 7.$

PASSO BASE $n=7 \Rightarrow$

$n! = 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 42 \cdot 20 \cdot 6 = 5040$
$n^4 = 7^4 = 7.7.7.7 = 49.49 = 2401$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times 42 \\ \hline 240 \\ 480 \\ \hline 5040 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array}$$

Daí $n! = 5040 > 2401 = n^4$

PASSO DE INDUÇÃO:

Hipótese: $k! > k^4$

Tese: $(k+1)! > (k+1)^4$

Aqui, vou usar uma abordagem diferente. Vou descrever o pensamento e depois escrevo a demonstração limpa

Percebe que podemos multiplicar a hipótese de indução por $k+1$.

(*) $(k+1) \cdot k^4 < k! \cdot (k+1)$ e isso nos dará

$(k+1)k^4 < (k+1)!$ Mas precisamos de $(k+1)^4$ menor que $(k+1)!$

desse modo, se conseguíssemos provar que

$(k+1)^4$ é menor que $(k+1)k^4$, poderíamos usar transitividade.

Vamos analisar $(k+1)^4$ e $(k+1)\cdot k^4$

Um jeito de saber se um número é menor que outro é analisando o quociente entre eles. Assim (não sabemos ainda!)

se $(k+1)^4 < (k+1)k^4$, deveria acontecer também

$$\frac{(k+1)^4}{(k+1)k^4} < 1 \text{, ou ainda,}$$

$$\frac{(k+1)^3}{k^4} < 1. \text{ Como isto significa}$$

$$\frac{k^3+3k^2+3k+1}{k^4} = \frac{1}{k} + \frac{3}{k^2} + \frac{3}{k^3} + \frac{1}{k^4} < 1,$$

Só precisaríamos fazer cada parcela "perder para $\frac{1}{4}$.

Mas isto é razoável pois $\underline{k \geq 7!!!}$.

Assim podemos então começar a elaborar a demonstração:

"Observe que, como $k \geq 7$, então

$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{7} < \frac{1}{4}$. E também é verdade que

$$\frac{3}{k^2} < \frac{3}{7^2} < \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7^2} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} < \frac{1}{4}$$

E também é verdade que

$$\frac{3}{k^2} < \frac{3}{7^2} < \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7^2} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} < \frac{1}{4}.$$

Da mesma forma, é verdade que

$\frac{3}{k^3} < \frac{3}{k^2} < \frac{1}{4}$. Por fim,

$\frac{1}{k^4} < \frac{1}{k} < \frac{1}{4}$. Assim, sempre que $k \geq 7$

$$\frac{1}{k} + \frac{3}{k^2} + \frac{3}{k^3} + \frac{1}{k^4} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

somando as frações temos

$$\frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{k^4} < 1.$$ E assim

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 < k^4$$

$$(k+1)^3 < k^4 \quad \text{sempre que } k \geq 7$$

Multiplicando ambos os lados por $k+1$, temos $(k+1)^4 < k^4(k+1)$. Olhando a desigualdade em (*), concluímos que

$$(k+1)^4 < k^4(k+1) < (k+1)!$$

Como queríamos demonstrar

~~E~~ 5c Bônus: Sabemos que

$$\sim(P_1 \wedge P_2) \equiv (\sim P_1) \vee (\sim P_2)$$

Queremos demonstrar que se $n \geq 3$

$$\sim(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \equiv (\sim P_1) \vee (\sim P_2) \vee \dots \vee (\sim P_n)$$

Passo Base:

~~E~~ Se $n=3$, faça $P_1 \wedge P_2 \equiv Q$

$$\sim(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) = \sim(Q \wedge P_3)$$

(Lei de De Morgan) $\equiv \sim Q \vee (\sim P_3)$

$\equiv \sim(P_1 \wedge P_2) \vee (\sim P_3)$

(Lei de De Morgan) $\equiv (\sim P_1 \vee \sim P_2) \vee \sim P_3 = (\sim P_1) \vee (\sim P_2) \vee (\sim P_3)$

Passo de indução:

Hipótese: $\sim(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_k) \equiv (\sim P_1) \vee (\sim P_2) \vee \dots \vee (\sim P_k)$;

Tese: $\sim(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_k \wedge P_{k+1}) \equiv (\sim P_1) \vee (\sim P_2) \vee \dots \vee (\sim P_k) \vee (\sim P_{k+1})$

Faca

$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_k = Q$. ~~A tese então se~~

O lado esquerdo da tese se traduz em

$\sim(Q \wedge P_{k+1})$ que por De Morgan, é equivalente a

$(\sim Q) \vee (\sim P_{k+1})$. Mas $\sim Q = \sim(P_1 \wedge \dots \wedge P_k)$

que por hipótese de indução, é equivalente a

$(\sim P_1) \vee (\sim P_2) \vee \dots \vee \sim P_k$. Daí

$$\sim(P_1 \wedge \dots \wedge P_{k+1}) \equiv (\sim Q) \vee (\sim P_{k+1}) \equiv (\sim P_1) \vee \dots \vee (\sim P_k) \vee \sim P_{k+1}$$

//

Questão 6

"$(x,y) \in S \Leftrightarrow |x-y| < 1$" é relação de equivalência?

Será se for reflexiva, transitiva e simétrica.

* É reflexiva? se $a \in \mathbb{R}$, então

$|a-a| = 0 < 1$. Então $(a,a) \in S$ $\forall a \in \mathbb{R}$

É reflexiva!

* É simétrica?

Suponha que $(a,b) \in S$. Daí

$|a-b| < 1$. Mas $|a-b| = |b-a|$. Daí

$|b-a| < 1$ e portanto $(b,a) \in S$. É simétrica!

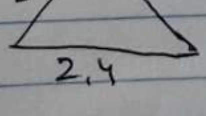
* É transitiva?

Suponha que $(a,b) \in S$ e $(b,c) \in S$.

Então

$|a-b| < 1$ e

$|b-c| < 1$. Mas não há nada que garanta que $|a-c| < 1$... Na realidade, um bom exemplo são os lados do triângulo



se $a = 1$

$b = 1{,}5$ então $|a-b| = |1-1{,}5| = 0{,}5 < 1$

e $c = 2{,}4$ $\quad |b-c| = |1{,}5-2{,}4| = 0{,}9 < 1$, mas

$|a-c| = |1-2{,}4| = 1{,}4 > 1$!

Então S não é Relação de equivalência.