Avaliação de Matemática Discreta

1ª QUESTÃO

(1 ponto) Prove que as Leis de DeMorgan para proposições são logicamente equivalentes:

$\sim(P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q)$.

$\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q)$.

2ª QUESTÃO

(1 ponto) Verifique se $(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \cup C)$. Se for, dê uma prova. Se não, dê um contra-exemplo.

3ª QUESTÃO

Considere a proposição " Se x^3 é irracional, então x é irracional."

(a) (0,8) Escreva a negação, a recíproca, a inversa e a contrapositiva desta proposição.

(b) (1,2) Encontre contra-exemplos que mostrem que a recíproca e a inversa da proposição considerada é falsa.

(c) (bônus) Prove que esta proposição é verdadeira, usando a contra-positiva.

4ª QUESTÃO

Prove que o intervalo fechado $[-1, 1]$ é equipotente a $I\!R$. DICA: Você pode seguir o roteiro abaixo, cujos itens independem entre si. Se seguir, a pontuação se distribui como segue ao lado. Em todo caso, a demonstração completa vale 4 pontos.

I) Prove que $[-1, 1]$ é equipotente ao intervalo $[0, 1]$. (2 pontos)

II) A seguir, prove que os intervalos $[0, 1]$ e $(0, 1)$ são equipotentes. (0,5 ponto)

III) Então mostre que $(0, 1)$ é equipotente a $I\!R$ usando uma certa função vista em sala. (1,0 ponto)

IV) Conclua o argumento usando adequadamente o fato (assuma que é verdadeiro) de que a composição de bijeções é bijeção. (0,5 ponto)

V) (bonus) Alternativamente, prove que qualquer intervalo fechado é equipotente a $I\!R$.

5ª QUESTÃO

(a) (1 ponto) Mostre por indução: $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ para todo $n \geqslant 1$

(b) (1 ponto) Mostre por indução: $n! > n^4$ para todo número natural $n \geqslant 7$.

(c) (bônus) Prove por indução, a generalização da 1ª QUESTÃO:
Para todo $n \in I\!N$, $\sim(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \equiv (\sim P_1) \vee (\sim P_2) \vee \cdots \vee (\sim P_n)$.

6ª QUESTÃO

(1 ponto) Seja S a relação no conjunto dos números reais $I\!R$ tal que "$(x, y) \in S$ quando $|x - y| < 1$". Verifique se S é uma relação de equivalência em $I\!R$.

Erickson G. Nulle