



# Heston Model

Modello a volatilità stocastica: analisi analitica e numerica

Esame di Sistemi Complessi

Daniele Maria Di Nosse

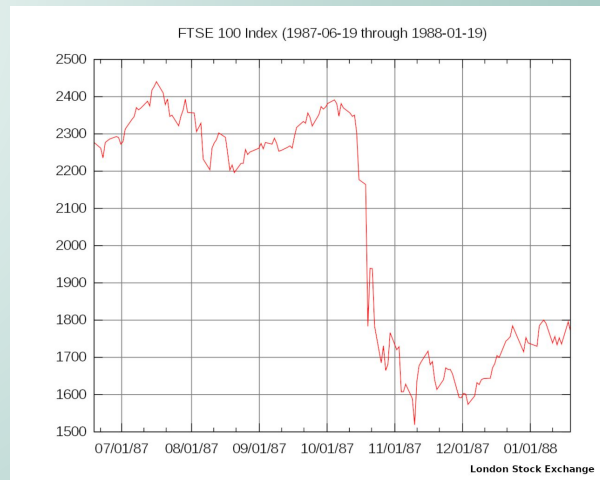
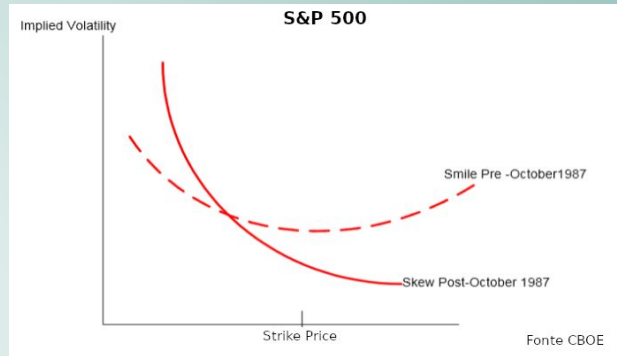
Anno accademico 2020/2021

# Struttura della trattazione

- Motivazioni
- Descrizione del modello
- Closed-form solution per il prezzo di un'opzione
- Risoluzione numerica e confronto con la Black-Scholes-Merton
- Determinazione del prezzo di un'opzione tramite Monte Carlo

# Motivazioni - Perché un nuovo modello?

- Crash finanziario dell'Ottobre del 1987: i limiti della BSM si evidenziano sempre più.
- Le assunzioni di volatilità costante e distribuzione normale dei ritorni devono essere sanate in qualche modo. Alcuni tentativi precedenti al modello di Steven Heston (1993):
  - Volatilità Stocastica: Hull e White (1987), Scott (1987), Wiggins (1987), Chensey e Scott (1989), Stein e Stein (1991).
  - Introduzione a mano di correzioni nella distribuzione dei ritorni
- Nel modello di Heston queste proprietà emergono naturalmente dall'effetto dei parametri.
- Il prezzo di un'opzione è dato da una forma chiusa analitica, come avviene anche per la BSM.
- E' il primo esempio in cui viene utilizzata fortemente la funzione caratteristica: non c'è bisogno di conoscere la distribuzione dei ritorni, ma solo la sua CF.



# Descrizione del modello

- Lo stock price segue un moto geometrico browniano, mentre la varianza è descritta da uno square root process

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{2,t} \\ \langle dW_{1,t}dW_{2,t} \rangle = \rho \end{cases}$$

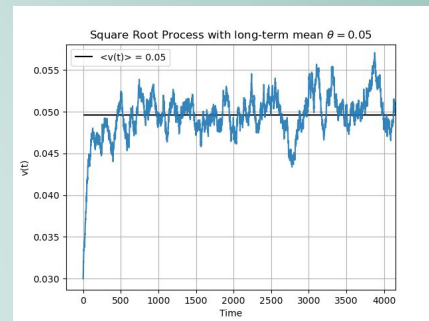
$\mu$  è il drift dello stock price

$\kappa > 0$  è la velocità con cui la varianza tende al suo valor medio

$\theta > 0$  la media a lungo termine della varianza

$\sigma > 0$  la volatilità della volatilità

$\rho \in [-1,1]$  è la correlazione fra i due processi di Wiener



- Per  $\kappa, \theta \gg 0$  il processo della varianza è autoregressivo, tendendo nel tempo alla media a lungo termine.
- Si può dimostrare che se  $2\kappa\theta > \sigma^2, v_0 > 0$  (Condizione di Feller), il drift è abbastanza grande da non permettere alla varianza di assumere valori negativi.
- Il processo stocastico della varianza deriva da un processo di Ornstein-Uhlenbeck

$$d\sqrt{v_t} = -\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_{2,t} \xrightarrow{It\hat{o}} dv_t = (-2\beta v_t + \delta^2)dt + 2\delta\sqrt{v_t}dW_{2,t} \quad \text{definendo} \quad \begin{cases} \kappa = 2\beta \\ \theta = \frac{\delta^2}{2\beta} \\ \sigma = 2\delta \end{cases}$$

# Modello - Risk-neutral measures

- I due processi sono ancora espressi sotto la cosiddetta misura fisica.
- Il prezzo di un derivato è dato dal valore di aspettazione, scontato, sotto una probabilità equivalente di martingala.
- Considerando il seguente risultato (Girsanov's Theorem):

Sia  $\gamma(t) : 0 \leq t \leq T$  un processo misurabile che soddisfa la condizione di Novikov

$$E \left[ e^{\frac{1}{2} \int_0^T \gamma(t)^2 dt} \right] < \infty$$

Siano poi definiti due processi  $L(t) : 0 \leq t \leq T$  e  $W^\mu : 0 \leq t \leq T$  tali che

$$L(t) = \exp \left( - \int_0^t \gamma(t') dW(t') - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma(t')^2 dt' \right) \qquad W^\mu(t) = W(t) + \int_0^t \gamma(t') dt'$$

dove  $W(t)$  è un processo di Wiener rispetto ad una certa misura  $\nu$ . Allora,  $L(t)$  è una martingala e  $W^\mu$  è anch'esso un processo di Wiener sotto la misura equivalente di probabilità  $\mu$  tale che la sua derivata di Radon Nikodým è

$$\frac{d\mu}{d\nu} = L(t)$$



# Modello - Risk-neutral measure per $[S(t), v(t)]$

- Scontando il prezzo dell'asset

$$\tilde{S}(t) := \frac{S(t)}{B(t)} = S(t)e^{-rt}$$

dove  $B(t)$  è il numerario  $dB = rB(t)dt, \quad B(0) = 1$

- Applicando Ito

$$d\tilde{S} = \tilde{S}(t) [(\mu - r) dt + \sqrt{v_t} dW_1(t)]$$

- Dall'applicazione del teorema di Girsanov in 2 dimensioni:

$$\begin{cases} dW_{1,t} = dW_{1,t}^\mu - \gamma_{1,t} dt \\ dW_{2,t} = dW_{2,t}^\mu - \gamma_{2,t} dt \end{cases} \implies \begin{cases} d\tilde{S}_t = (\mu - r - \sqrt{v_t}\gamma_{1,t})\tilde{S}_t dt + \sqrt{v_t}\tilde{S}_t dW_{1,t}^\mu \\ dv_t = (\kappa(\theta - v_t) - \sigma\sqrt{v_t}\gamma_{2,t})dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{2,t}^\mu \end{cases}$$

- Imponendo il drift in  $d\tilde{S}$  nullo, si ottiene che

$$\gamma_{1,t} = \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}}$$

# Modello - Risk-neutral measure per $[S(t), v(t)]$

- Heston propone un'ulteriore costruzione per fissare la misura equivalente

$$\gamma_{2,t} = \frac{\lambda \sqrt{v_t}}{\sigma}$$

dove  $\lambda$  è una costante.

- Di conseguenza, i processi sotto la misura equivalente di martingala sono i seguenti

$$\begin{cases} d\tilde{S}_t = \sqrt{v_t} \tilde{S}_t dW_{1,t}^\mu \\ dv_t = \kappa^*(\theta^* - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}^\mu \end{cases} \xrightarrow{It\hat{o}} \begin{cases} dS = S_t(rdt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}^\mu) \\ dv_t = \kappa^*(\theta^* - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}^\mu \end{cases}$$

dove  $\kappa^* = \kappa + \lambda, \quad \theta^* = \frac{\kappa\theta}{(\kappa + \lambda)}$

- Siccome  $\lambda$  rientra in queste definizioni, nella stima dei parametri del modello (fatta in base ai valori del mercato), si può bypassare valutando direttamente  $\kappa^*, \theta^*$ .

# Prezzo di un'opzione - relazione “à la Black-Scholes”

- Nel modello di Heston il prezzo di un'opzione è dato da una relazione molto simile a quella che si ottiene nel modello di Black-Scholes-Merton.
- Considerando ad esempio una call con asset avente spot price  $S_t$ , strike price  $K$  e tempo alla scadenza  $\tau = T - t$ , si ha che

$$C(K) = e^{-r\tau} E^\mu [(S_T - K) \mathbf{1}_{S_T > K}] = e^{-r\tau} E^\mu [S_T \mathbf{1}_{S_T > K}] - K e^{-r\tau} E^\mu [\mathbf{1}_{S_T > K}]$$

$$\implies C(K) = S_t P_1 - K e^{-r\tau} P_2$$

- Nel modello BSM:

$$C_{BSM} = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r\tau} \Phi(d_2)$$

- Bisogna giustificare l'implicazione finale.



# Prezzo di un'opzione - relazione "à la Black-Scholes"

- $P_1$  e  $P_2$  rappresentano entrambi la probabilità condizionata al valore  $S_t$  che l'opzione scada in-the-money, ovvero quando  $S_T > K$ , ma sono espresse sotto una misura diversa.
- $P_2 = E^\mu [\mathbf{1}_{S_T > K}]$  è valutata rispetto alla misura che rende il processo dello stock price una martingala.
- Per quanto riguarda l'altro termine c'è bisogno di un ulteriore cambiamento di misura. Si consideri la derivata Radon-Nikodym

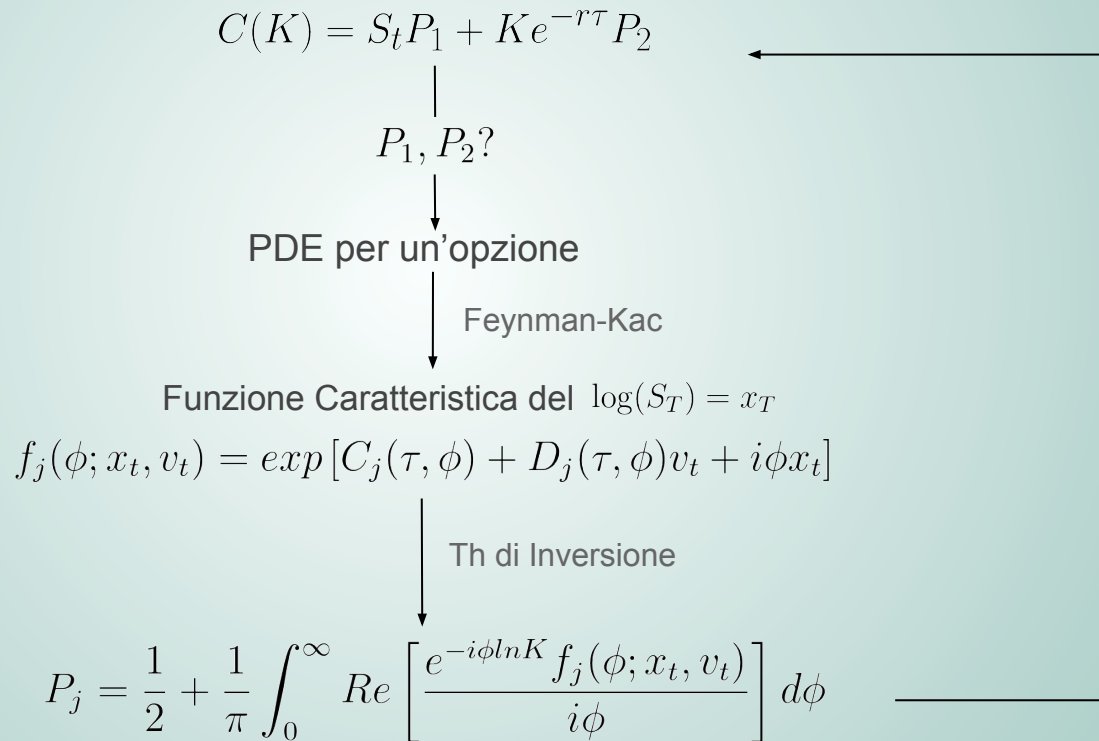
$$\frac{d\mu}{d\eta} = \frac{B_T}{B_t} \frac{S_t}{S_T} = \frac{e^{\int_0^T r du}}{e^{\int_0^t r du}} \frac{S_t}{S_T} = e^{r(T-t)} \frac{S_t}{S_T} = \frac{E^\mu[S_T]}{S_T}$$

- Di conseguenza

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)} E^\mu [S_T \mathbf{1}_{S_T > K}] &\rightarrow \frac{B_t}{B_T} E^\mu [S_T \mathbf{1}_{S_T > K}] = E^\mu \left[ \frac{B_t}{B_T} S_T \mathbf{1}_{S_T > K} \right] = \\ S_t E^\mu \left[ \frac{B_t}{B_T} \frac{S_T}{S_t} \mathbf{1}_{S_T > K} \right] &= S_t E^\eta \left[ \frac{d\eta}{d\mu} \frac{d\mu}{d\eta} \mathbf{1}_{S_T > K} \right] = S_t P_1 \end{aligned}$$

# Prezzo di una call - Sommario del procedimento

- L'espressione analitica per il prezzo di una call comporta un quantitativo di calcoli non indifferente, ma concettualmente i punti importanti non sono molti.



# Prezzo di una call - Dalla CF a $P_j$

- Si parte dalla determinazione della PDE del modello di Heston.
- La strategia è simile a quella utilizzata nel modello di Black-Scholes-Merton, dove si utilizza un underlying ed un derivato per ottenere un portfolio risk-less.
- Nel modello di Heston bisogna considerare un derivato aggiuntivo per compensare la stocasticità della volatilità.
- Se  $V = V(S, v, t)$  è un'opzione,  $\Delta, \psi$  frazioni rispettivamente dell'underlying e di un'ulteriore opzione  $U = U(S, v, t)$  il valore del portfolio è

$$\Pi = V + \Delta S + \psi U$$

- Differenziando

$$d\Pi = dV + \Delta dS + \psi dU$$

# Prezzo di una call - Dalla CF a $P_j$

- Quindi, seguendo lo stesso ragionamento usato per la BSM:

1. Formula di Ito 2D per  $O = V, U$

$$dO = \left[ \frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 O}{\partial v^2} + \sigma\rho vS \frac{\partial^2 O}{\partial S \partial v} \right] dt + \frac{\partial O}{\partial S} dS + \frac{\partial O}{\partial v} dv$$

2. Si sostituisce all'interno di  $d\Pi$
3. Si valutano i parametri di hedge imponendo nulle le fluttuazioni dovute alle variazioni dello spot price e della volatilità.
4. L'assenza di arbitraggio implica infine che  $d\Pi = r\Pi dt = r(V + \Delta S + \psi U)dt$

$$\begin{aligned}
 d\Pi = & \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \sigma\rho vS \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} \right] dt \\
 & + \psi \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \sigma\rho vS \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} \right] dt \\
 & + \underbrace{\left[ \frac{\partial V}{\partial S} + \psi \frac{\partial U}{\partial S} + \Delta \right]}_{=0} dS + \underbrace{\left[ \frac{\partial V}{\partial v} + \psi \frac{\partial U}{\partial v} \right]}_{=0} dv
 \end{aligned}
 \longrightarrow
 \begin{cases}
 \Delta = -\psi \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S} \\
 \psi = -\frac{\partial V}{\partial v} / \frac{\partial U}{\partial v}
 \end{cases}$$

Parametri di Hedging

# Prezzo di una call - Dalla CF a $P_j$

- Si giunge ad un'equazione in cui al primo membro compare solo  $V$  ed al secondo solo  $U$ , quindi entrambi sono esprimibili come una  $f(S, v, t) \stackrel{\text{Heston}(1993)}{=} -\kappa(\theta - v) + \lambda v$
- Si giunge infine alla PDE per il prezzo dell'opzione  $U$  utilizzata per l'hedging sulla volatilità

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U - rU = 0 \quad \text{dove} \quad \mathcal{A} = rS \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2}{\partial S \partial v}$$

- La prima riga in  $\mathcal{A}$  (generatore del modello di Heston) rappresenta il generatore della BSM con  $\sigma_{BSM} = \sqrt{v}$  mentre il secondo pezzo è quello che introduce la volatilità stocastica.
- Condizioni al contorno per una call Europea:

$$U(S, v, T) = \max(0, S - K), \quad U(0, v, t) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial S}(\infty, v, t) = 1, \quad U(S, \infty, t) = S$$

# Prezzo di una call - Dalla CF a $P_j$

- Inserendo nella PDE del modello di Heston l'espressione per la call già ricavata, è possibile ottenere la PDE per le due probabilità  $P_j$  che verrà poi utilizzata per ricavare la funzione caratteristica per  $x_T = \ln S_T$ .

- Heston postulò una forma log-normale per tale la f.c. del logaritmo del prezzo

$$f_j(\phi; x_t, v_t) = \exp(C_j(\tau, \phi)) + D_j(\tau, \phi)v_t + i\phi x_t \quad \text{tale che} \quad f_j(\phi; x_T, v_T) = \exp(i\phi x_T)$$

- L'idea è che dopo aver valutato i coefficienti  $C_j, D_j$ , tramite il teorema di inversione di Gil-Pelaez è possibile ricavare le due probabilità che la call sia in-the-money

$$P_j = \int_{\log K}^{\infty} pdf(x_T) dx_T \quad \longrightarrow \quad P_j = \Pr(\ln S_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x, v)}{i\phi} \right] d\phi$$

- L'ultima cosa che resta da fare è determinare quindi i coefficienti.



# Prezzo di una call - Dalla CF a $P_j$

- Un'applicazione del teorema di Feynman-Kac in due dimensioni mostra come la funzione caratteristica rispetta la stessa PDE ricavata precedentemente.
- Si consideri il processo bivariato  $\vec{X}_t = (\ln S_t, v_t)$  e la PDE

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \tilde{\mathcal{A}}f = 0 \\ f(T, \vec{x}) = \Phi(\vec{x}) \end{cases}$$

- Il teorema di Feynman-Kac afferma che

$$f(t, \vec{x}) = \mathbf{E} \left[ \Phi(\vec{x}_T) | \vec{X}_t = \vec{x} \right]$$

- Scegliendo  $\Phi(\vec{x}) = e^{i\phi \ln S_t}$  si ottiene proprio la funzione caratteristica.
- Manipolando la PDE per la funzione caratteristica si ottengono i due coefficienti  $C_j, D_j$  tramite le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial D_j}{\partial \tau} = \rho \sigma i \phi D_j - \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 D_j^2 + u_j i \phi - b_j D_j \\ \frac{\partial C_j}{\partial \tau} = r i \phi + a D_j \end{cases}$$

$$D_j(0, \phi) = C_j(0, \phi) = 0 \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \\ u_2 &= -\frac{1}{2} \\ a &= \kappa \theta \\ b_1 &= \kappa + \lambda - \rho \sigma \\ b_2 &= \kappa + \lambda \end{aligned}$$

# Prezzo di una call - Dalla CF a $P_j$

- La prima è un'equazione di Riccati che risolta restituisce

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right)$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}$$

- Di conseguenza è possibile ora integrare anche la seconda equazione, ottenendo

$$C_j = ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2\ln \left( \frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right]$$

- Ottenute queste due espressioni è possibile sostituirle all'interno del prezzo della Call e risolverla numericamente. La formulazione originale di Heston è così terminata.

# BSM come caso particolare

- La BSM può essere ricavata come un caso particolare del modello di Heston.
- Ponendo  $\sigma = 0, \theta = v_0$  si ottiene una volatilità deterministica e costante nel tempo.
- Considerando il generatore del modello di Heston, si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = rS \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} \\ + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2}{\partial S \partial v} \end{aligned} \longrightarrow \mathcal{A} = rS \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{2} v_0 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}$$

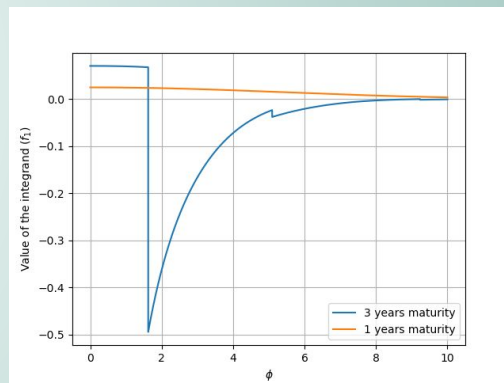
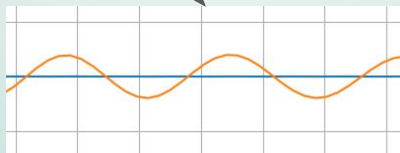
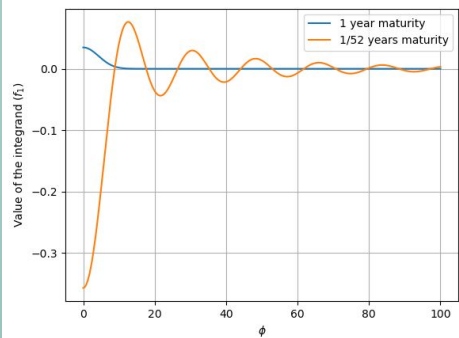
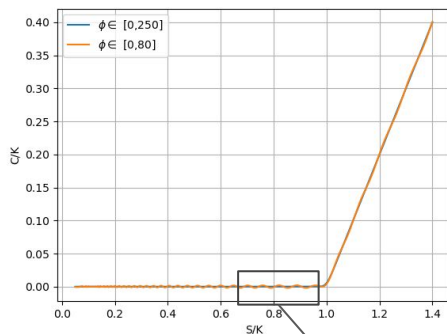
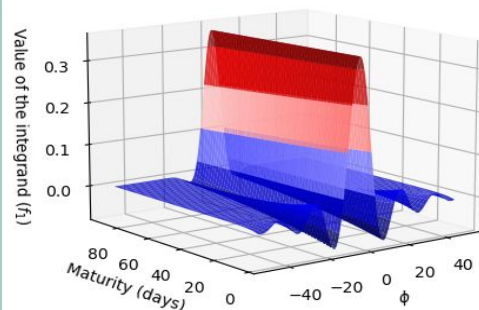
- Quindi il prezzo di una call generato da un modello di Heston con  $\sigma = 0, \theta = v_0$ , corrisponde al medesimo prezzo ottenuto dalla BSM avente una volatilità pari a  $\sigma_{BSM} = \sqrt{v_0}$
- Si ha comunque che per l'implementazione della BSM come caso particolare del modello di Heston bisogna partire dalle equazioni per  $C_j, D_j$  e risolverle con le suddette condizioni, siccome una sostituzione diretta implicherebbe una divisione per zero.

# Nota sul comportamento dell'integranda

- Nell'ottica di un calcolo numerico, bisogna badare bene ad alcuni andamenti della funzione integranda

$$\text{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x.v)}{i\phi} \right]$$

1. Non definita nello zero
2. Oscillazioni
3. Possibilità di discontinuità

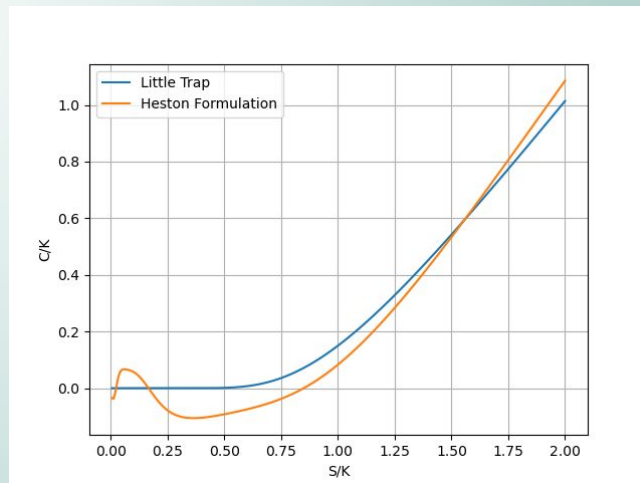
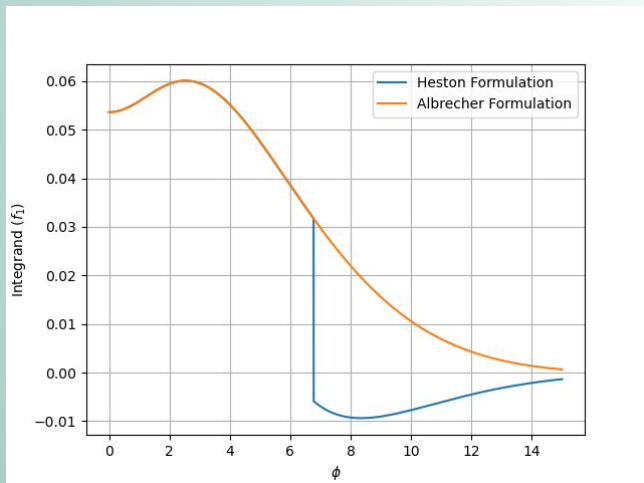


# Sanare le discontinuità - Little Heston Trap

- Come spiega Albrecher et al. (2007), è possibile modificare leggermente la funzione caratteristica per ottenerne una equivalente ma con un comportamento nettamente migliore.
- Per quanto riguarda  $D_j$ , si moltiplica e divide per un fattore esponenziale  $e^{-d_j\tau}$ , mentre  $C_j$  viene semplicemente riarrangiata

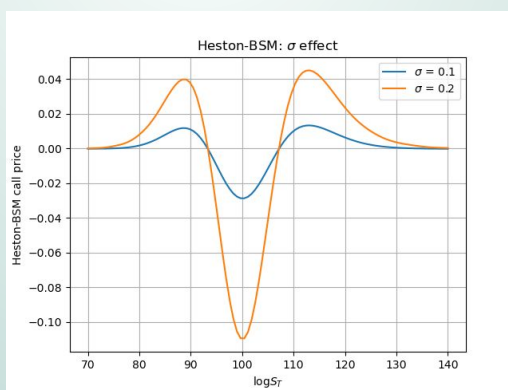
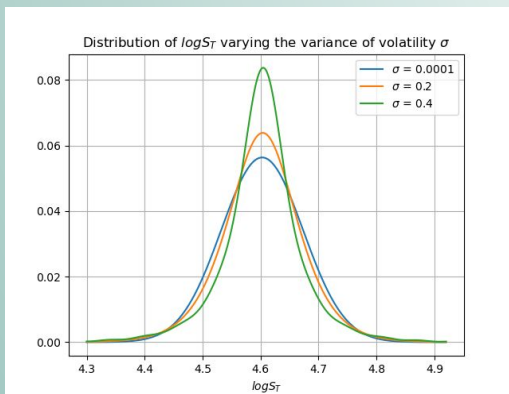
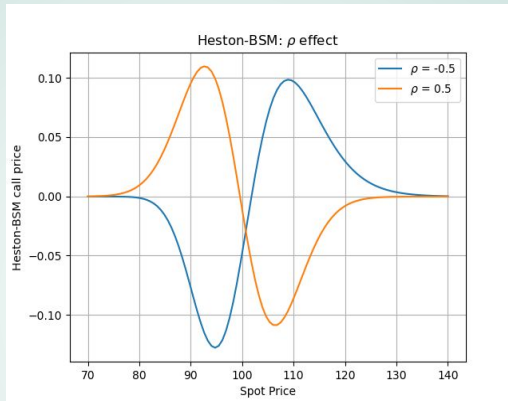
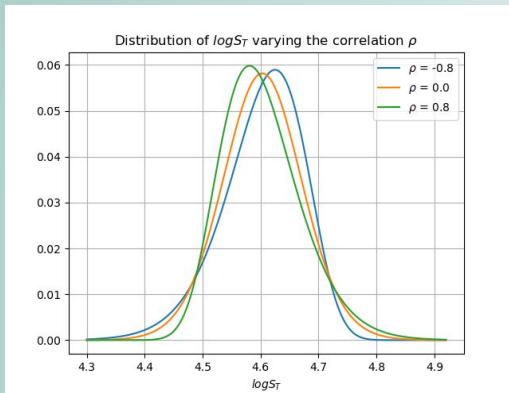
$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j^{-1}e^{d_j\tau}} \right)$$

$$C_j = ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma i\phi - d_j)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g_j^{-1}e^{d_j\tau}}{1 - g_j^{-1}} \right) \right]$$



# Effetti dei parametri - Distribuzione del $\log(S_T)$

- $\rho$  controlla l'asimmetria della distribuzione del logaritmo dello stock price alla scadenza, mentre  $\sigma$  controlla la curtosi



- Per rendere valida la comparazione bisogna eguagliare la volatilità della BSM con il momento secondo della distribuzione del  $\log(S_T)$  generata dal modello di Heston.

$$K = 100; r = 0.0; v_0 = 0.01$$

$$\kappa = 2; \theta = 0.01; \tau = 0.5$$

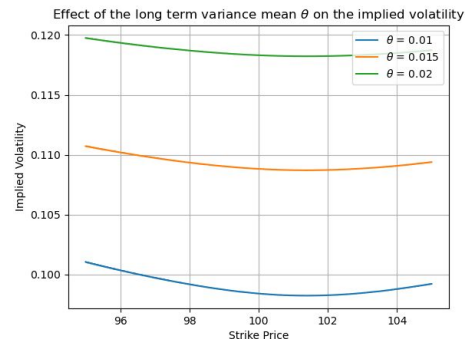
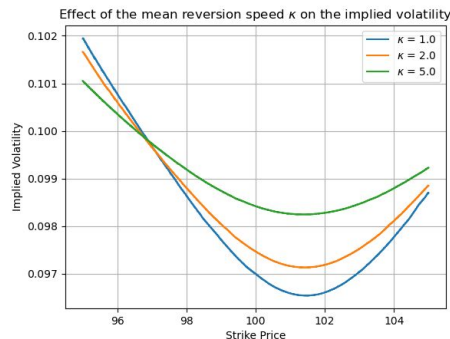
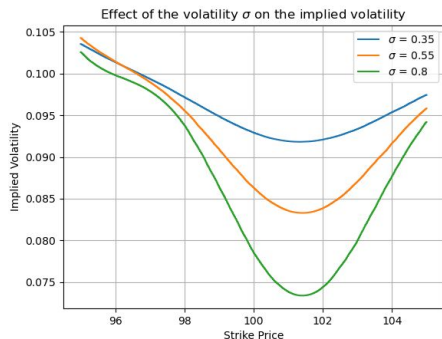
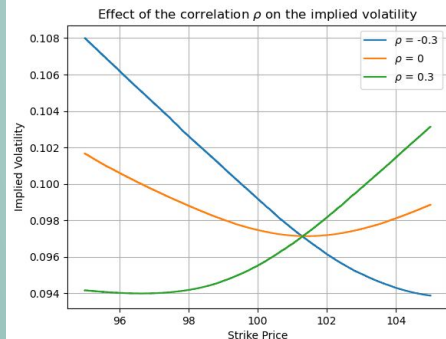
$$\rho = \begin{cases} -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{cases} \quad ; \quad \sigma = \begin{cases} \sqrt{2} * 0.0710 \\ \sqrt{2} * 0.0704 \\ \sqrt{2} * 0.0707 \end{cases}$$



# Effetti dei parametri - Volatility smiles

- A differenza della BSM dove la volatilità è costante, il modello di Heston è capace di riprodurre dei volatility smiles, andamenti che si riscontrano nei mercati reali.
- Anche in questo caso, i parametri del modello influenzano le caratteristiche delle curve della volatilità implicita.
- Per determinare tali andamenti sono stati generati un certo numero di prezzi per una call con Heston al variare dello strike price e, tramite la BSM, utilizzando un metodo di bisezione, se n'è valutata la volatilità implicita.

$$S = 100; r = 0.05; \tau = 0.25; \kappa = 2; \theta = 0.01; v_0 = 0.01; \sigma = 0.2; \rho = 0;$$



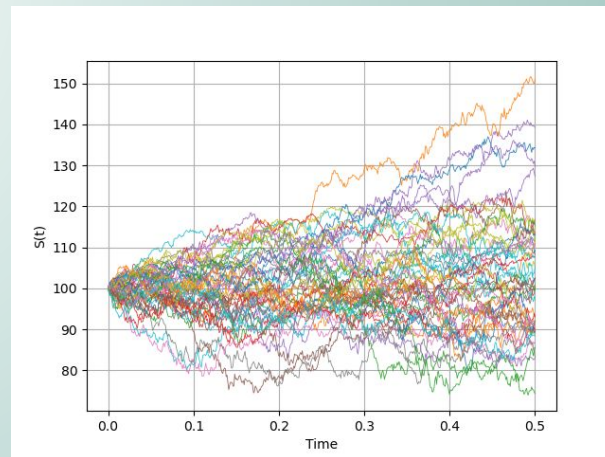
# Simulazioni Monte Carlo

- Oltre all'approccio analitico (numerico solamente nella parte del calcolo degli integrali) utilizzato finora, è possibile procedere direttamente tramite delle simulazioni Monte Carlo per ottenere il prezzo di un'opzione.
- Tale strada bypassa totalmente tutta la trattazione matematica, focalizzandosi esclusivamente sulla simulazione processo bivariato di Heston

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t} \end{cases}$$

- L'idea è di generare N cammini per lo stock price e la volatilità in un certo intervallo temporale  $[0, T]$ , utilizzare l'ultimo valore dello stock price per ogni cammino per calcolare il prezzo di una call e mediare su tutti i cammini.

$$C(K) = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(0, S_T - K)$$



# Simulazioni Monte Carlo - Schemi

- Gli schemi di simulazione da usare possono essere quelli classici (Eulero, Milstein ecc.) o schemi appositamente costruiti.
- Gli schemi classici restituiscono a volte valori della varianza negativi. Si risolve con: Full Truncation o Reflection.
- La maggior parte dei metodi richiede l'utilizzo di una decomposizione di Cholesky per riflettere la dipendenza dei due processi di Wiener nei numeri random utilizzati.

$$\begin{cases} Z_v \sim N(0, 1) \\ Z_s = \rho Z_v + \sqrt{1 - \rho^2} Z, \quad Z \sim N(0, 1) \end{cases}$$

- Scelte effettuate  $O(dt)$ :
  - Eulero
  - Milstein
  - Transformed Volatility (Zhu, 2010)
- In tutte le simulazioni effettuate, il numero di iterazioni è di 25000 con 200 step temporali per ognuna, mentre i valori dei parametri sono

$$K = 90; r = 0.03; q = 0.02; \kappa = 6.2; \sigma = 0.5; \rho = -0.7; \theta = 0.06; \lambda = 0; \tau = 0.25$$

- Il prezzo della call ottenuto tramite la soluzione “analitica” è pari a 11.208 \$

# Simulazioni Monte Carlo - Eulero

- Punto di partenza per tutti gli schemi di integrazione

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \implies X_{t+dt} = X_t + \int_t^{t+dt} \mu(X_u)du + \int_t^{t+dt} \sigma(X_u)dW_u$$

- Nel caso di Eulero si considerano i coefficienti di drift e di diffusione costanti nell'intervallo  $dt$  e si sfrutta il fatto che  $\int_t^{t+dt} dW$  e  $\sqrt{dt}Z$  sono distribuiti nello stesso modo ( $Z$  variabile gaussiana standard).

$$\begin{cases} \int_t^{t+dt} \mu(X_u)du = \mu(X_t)dt \\ \int_t^{t+dt} \sigma(X_u)dW_u = \sigma(X_t)\Delta W = \sigma(X_t)\sqrt{dt}Z \end{cases}$$

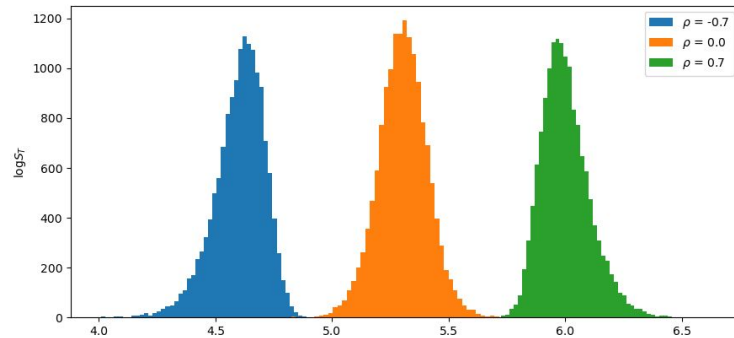
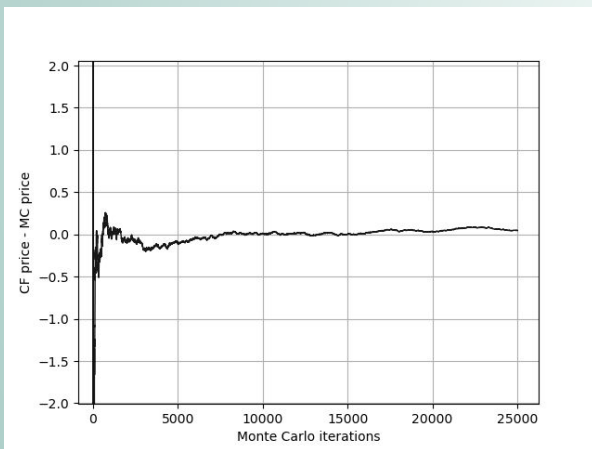
- Di conseguenza si ottiene

$$X_{t+dt} = X_t + \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)\sqrt{dt}Z$$

# Simulazioni Monte Carlo - Eulero

$$v_{t+dt} = v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_v$$
$$S_{t+dt} = S_t \exp\left(\left(r - q - \frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_s\right)$$

Valore stimato: 11.162\$  
Standard Error: 0.053\$  
Numero varianze negative: 6



# Simulazioni Monte Carlo - Milstein

- L'idea è di espandere i coefficienti di drift e di diffusione tramite la formula di Ito, inserirli nella soluzione formale e approssimare tramite Eulero.

$$\begin{cases} \mu_s = \mu_t + \int_t^s (\mu'_u \mu_u + \frac{1}{2} \mu''_u \sigma_u^2) du + \int_t^s (\mu'_u \sigma_u) dW_u \\ \sigma_s = \sigma_t + \int_t^s (\sigma'_u \mu_u + \frac{1}{2} \sigma''_u \sigma_u^2) du + \int_t^s (\sigma'_u \sigma_u) dW_u \end{cases}$$

- Conservando solo i termini  $O(dt)$

$$X_{t+dt} = X_t + \mu_t \int_t^{t+dt} ds + \sigma_t \int_t^{t+dt} dW_s + \int_t^{t+dt} \int_t^s \sigma'_u \sigma_u dW_u dW_s$$

- Approssimando l'ultimo integrale con Eulero, si ottiene

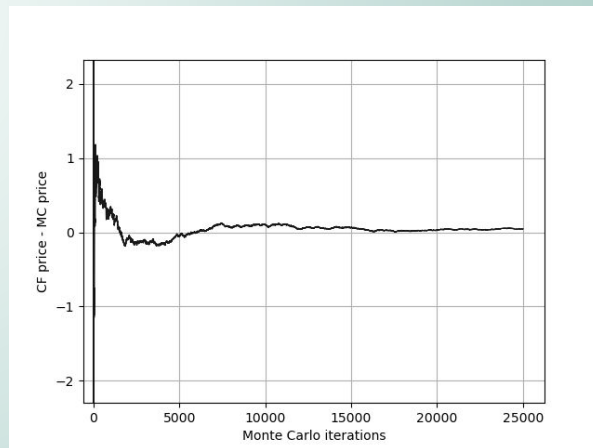
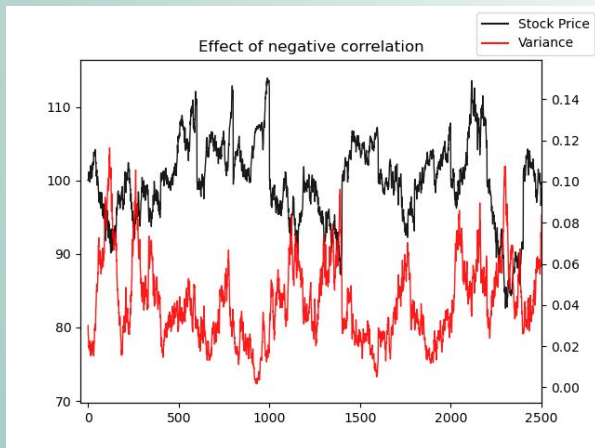
$$\begin{aligned} \int_t^{t+dt} \int_t^s \sigma'_u \sigma_u dW_u dW_s &\approx \sigma'_t \sigma_t \int_t^{t+dt} \int_t^s dW_s dW_t = \\ \sigma'_t \sigma_t \int_t^{t+dt} (W_s - W_t) dW_s &= \sigma'_t \sigma_t \frac{1}{2} (\Delta W^2 - dt) \end{aligned} \longrightarrow X_{t+dt} = X_t + \mu_t dt + \sigma_t \sqrt{dt} Z + \frac{1}{2} \sigma'_t \sigma_t dt (Z^2 - 1)$$



# Simulazioni Monte Carlo - Milstein

$$v_{t+dt} = v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_v + \frac{1}{4}\sigma^2dt(Z_v^2 - 1)$$
$$S_{t+dt} = S_t \exp\left(\left(r - q - \frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_s\right)$$

Valore stimato: 11.206\$  
Standard Error: 0.053\$  
Numero varianze negative: 0



# Simulazioni Monte Carlo - Transformed Volatility

- Uno dei modi più semplici per evitare valori negativi per la volatilità è simulare  $\sqrt{(v_t)}$  in luogo di  $v_t$
- Dalla formula di Ito si ottiene

$$d\sqrt{v_t} = \frac{1}{2}\kappa \left[ \left( \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa} \right) \sqrt{v_t}^{-1} - \sqrt{v_t} \right] dt + \frac{1}{2}\sigma dW_{2,t}$$

che può essere discretizzato, insieme al processo per lo stock price, tramite uno schema alla Eulero.

$$\begin{aligned}\sqrt{v_{t+dt}} &= \sqrt{v_t} + \frac{1}{2}\kappa \left[ \left( \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa} \right) \sqrt{v_t}^{-1} - \sqrt{v_t} \right] dt + \frac{1}{2}\sigma \sqrt{v_t} \sqrt{dt} Z_v \\ S_{t+dt} &= S_t \exp \left( \left( r - q - \frac{1}{2}v_t \right) dt + \sqrt{v_t} \sqrt{dt} Z_s \right)\end{aligned}$$

- La varianza a lungo termine  $\theta_v = \left( \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa} \right) \sqrt{v_t}^{-1}$  risulta stocastica tramite un termine  $\sqrt{v_t}^{-1}$  che presenta una dinamica molto variabile che la discretizzazione tramite Eulero non riesce a captare.
- Zhu (2010) propone un'approssimazione al valore di  $\theta_v$  capace di sanare tale problema

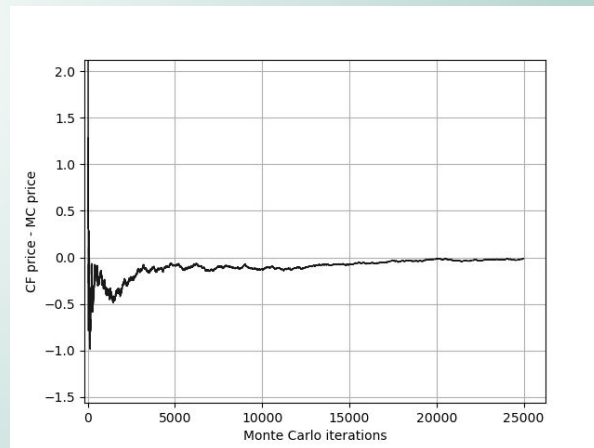
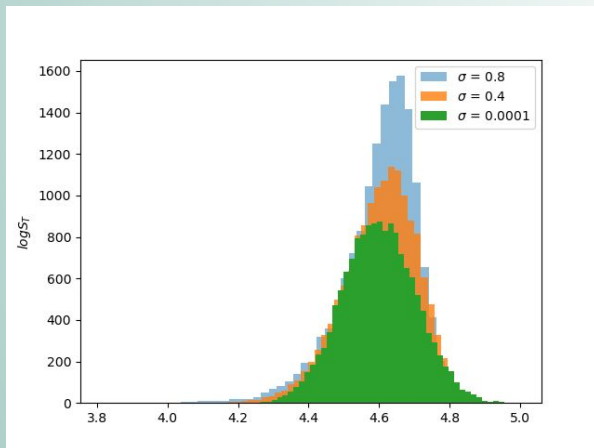
$$\theta_v^* = \frac{\beta - \sqrt{v_t} e^{-\frac{1}{2}\kappa\Delta}}{1 - e^{-\frac{1}{2}\kappa\Delta}}$$

$$\beta = \sqrt{\max(0, \mathbf{E}[v(t + \Delta t)] - \mathbf{Var}[\sqrt{v(t + \Delta t)}])}$$

# Simulazioni Monte Carlo - Transformed Volatility

$$\sqrt{v_{t+dt}} = \sqrt{v_t} + \frac{1}{2}\kappa[(\theta_v^* - \sqrt{v_t})dt] + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_v$$
$$S_{t+dt} = S_t \exp\left(\left(r - q - \frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_s\right)$$

Valore stimato: 11.215\$  
Standard Error: 0.054\$  
Numero varianze negative: 0



# Bibliografia

- Rouah, F. (2013), The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C#. John Wiley & Sons, Inc.
- Wang, H. (2013), Montecarlo simulation with applications to finance, Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series
- Heston, S.L. (1993). “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options.” Review of Financial Studies
- Zhu, J. (2010). Applications of Fourier Transform to Smile Modeling: Theory and Implementation. Second Edition. New York, NY: Springer
- Papanicolaou, A. (2019), Introduction to Stochastic Differential Equations (SDEs) for Finance, Department of Finance and Risk Engineering Tandon School of Engineering New York University
- Crisóstomo R., An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab

# Appendice - Ottenimento delle probabilità $P_j$ e della pdf

$\Phi(u)$  funzione caratteristica per  $\log(S_T)$  valutata in  $u$ ;  $f(x)$  pdf di  $x = \log(S_T)$ ;  $k = \log(K)$


$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \Phi(u) du$$

$$\Rightarrow P(\log S_T > k) = \int_k^{\infty} f(x) dx = \int_k^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \Phi(u) du \right] dx =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u) \frac{e^{-iuk}}{iu} du}_{\text{PI dispari e PR pari}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u) \frac{e^{-i \log R}}{iu} du}_{=-1/2}$$

$$\Rightarrow P(\ln S_t > k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} \left[ \frac{\Phi(u) e^{-iuk}}{iu} \right] du$$

Si può invertire  
l'ordine di  
integrazione



Per ottenere la pdf il procedimento è analogo, ma si considera la funzione cumulativa espressa in funzione dell'antitrasformata di Fourier della funzione caratteristica, dopodiché si deriva e si ottiene la pdf.

## DECOMPOSIZIONE DI CHOLESKY, PERCHÉ?

Il punto è che ho due processi di Wiener  $W_1$  e  $W_2$  che sono correlati fra loro, ovvero ho un vettore normale multivariato

$$\begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix} \text{ T.c. } \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \text{ Matrice di covarianza}$$

Il problema che mi pongo è: Come vedo e simulo un processo di questo tipo? Cioè, come faccio a generare due numeri random, gaussiani, tali che abbiano una certa correlazione  $\rho$  fra loro?

Utilizzo il fatto che, se  $Z$  è un vettore normale standard, allora posso generare un vettore normale multivariato prendendo una predunque matrice  $A$  dx  $d$

Multivariato = le componenti sono correlate  
Normale Standard = mean 0, var 1

$$X = \mu + AZ$$

$X$  ha media  $\mu$  e matrice di covarianza  $AA^T$ .

$X$  gode il ruolo di  $\begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mu=0$ , e lo genero facilmente tramite due numeri random pescati in  $N(0,1)$ . Devo solo trovare una matrice  $A$  tale che  $AA^T = \Sigma$

Un modo semplice per farlo è utilizzare la decomposizione di Cholesky di una matrice quadrata nel prodotto di una matrice triangolare inferiore  $A$  e le sue trasposte (suppongo tutte le matrici reali):

$$\Sigma = AA^T \text{ che è proprio quello che mi serve!}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & A_{dd} & \\ A_{d1} & \dots & & A_{dd} \end{pmatrix}$$

In generale

$$A_{11} = \sqrt{\Sigma_{11}}; \quad A_{j1} = \frac{\Sigma_{j1}}{A_{11}} \quad j \geq 2$$

$$A_{ii} = \sqrt{\Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}^2}; \quad A_{ji} = \frac{\Sigma_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{jk} A_{ik}}{A_{ii}} \quad j \geq i \geq 2$$

Nel caso specifico

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} = AA^T = \Sigma$$

Quindi:

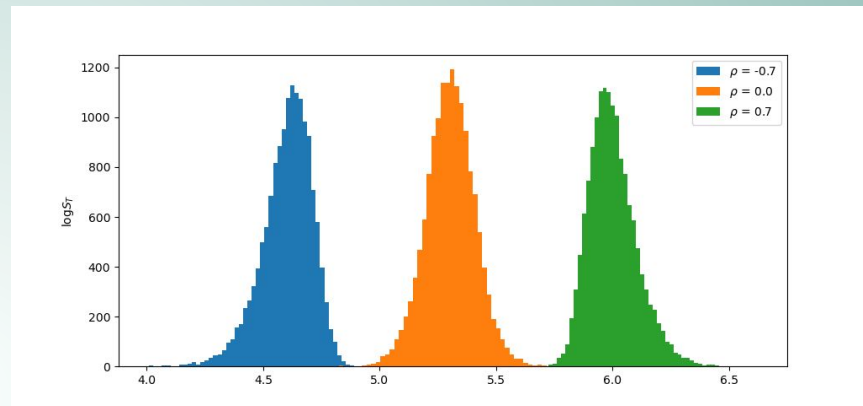
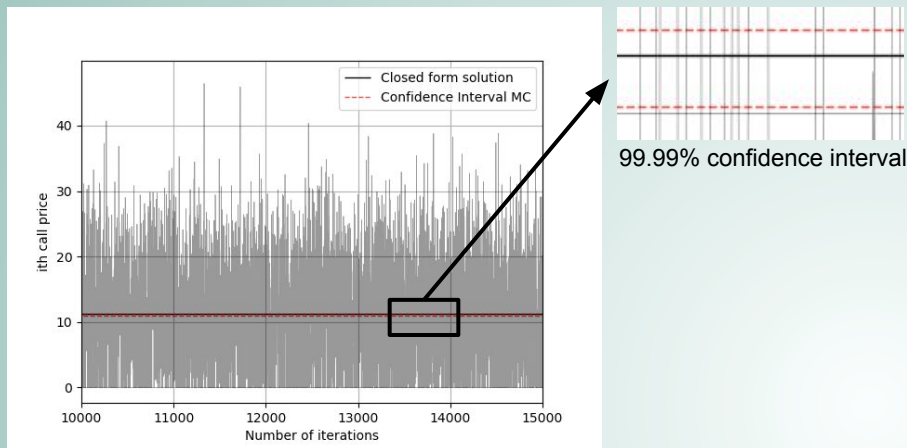
$$\begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2 \end{pmatrix}$$



$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa + \lambda$$

# Simulazioni Monte Carlo - Eulero



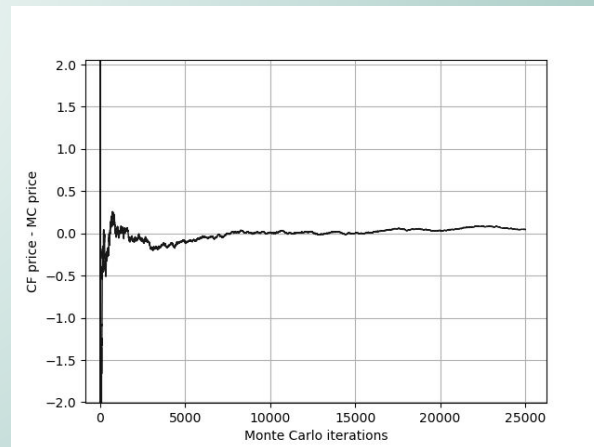
Valore stimato: 11.162

Standard Error: 0.053

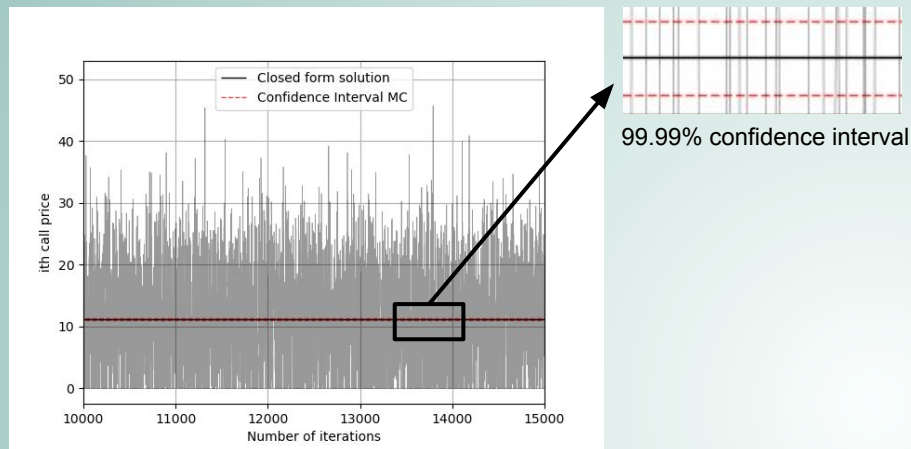
Numero varianze negative: 6

$$v_{t+dt} = v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_v$$

$$S_{t+dt} = S_t \exp \left( \left( r - q - \frac{1}{2}v_t \right) dt + \sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_s \right)$$



# Simulazioni Monte Carlo - Milstein



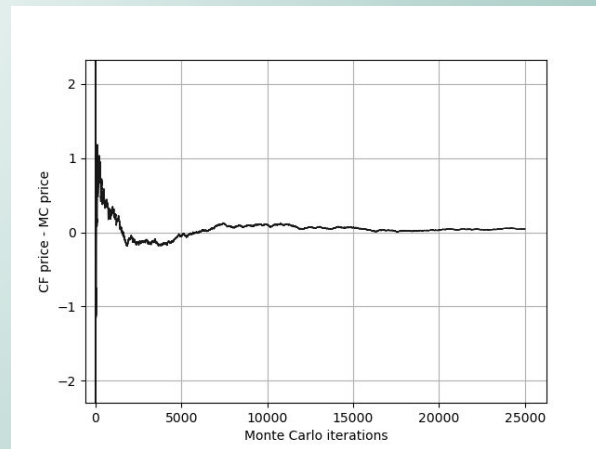
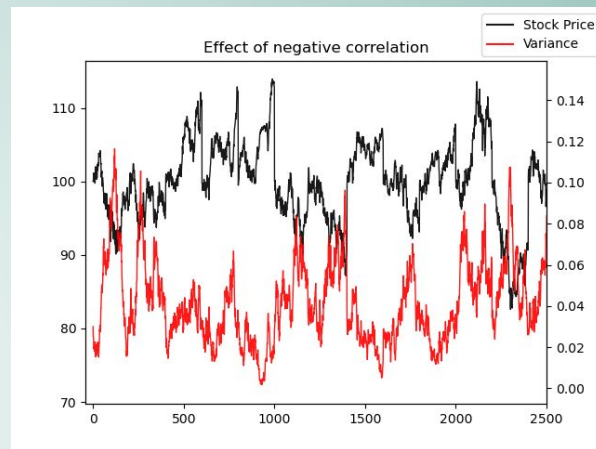
Valore stimato: 11.206

Standard Error: 0.053

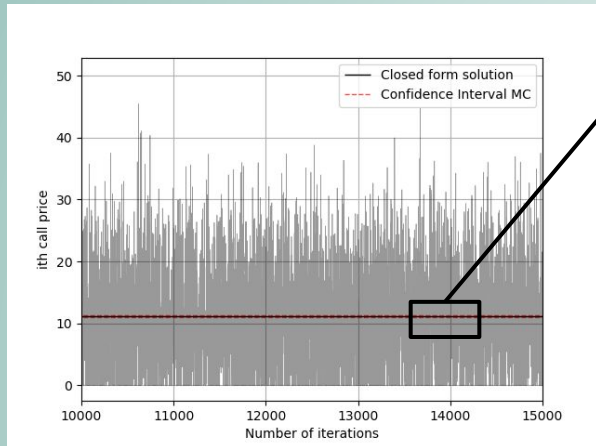
Numero varianze negative: 0

$$v_{t+dt} = v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_v + \frac{1}{4}\sigma^2dt(Z_v^2 - 1)$$

$$S_{t+dt} = S_t \exp\left((r - q - \frac{1}{2}v_t)dt + \sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_s\right)$$



# Simulazioni Monte Carlo - Transformed Volatility



Valore stimato: 11.215

Standard Error: 0.054

Numero varianze negative: 0

$$\sqrt{v_{t+dt}} = \sqrt{v_t} + \frac{1}{2}\kappa[(\theta_v^* - \sqrt{v_t})dt] + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_v$$

$$S_{t+dt} = S_t \exp\left(\left(r - q - \frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_s\right)$$

