Previsore ottimo

Siano $Y, X_1, \dots, X_m$ variabili aleatorie con varianza finita. Chiamiamo $\hat{Y}$ la previsione di Y ottenuta dalla funzione $p(X_1, \dots, X_m)$. Chiamiamo Previsore Ottimo la funzione p che minimizza il valore atteso della funzione di perdita applicata all'errore di previsione, ossia:

$$\hat{y} = \arg\min \mathbb{E}\, \ell(Y - \hat{Y})$$

Nel caso in cui la funzione di perdita sia quadratica, ossia $\ell(e) = e^2$ la funzione p che minimizza il valore atteso della funzione di perdita applicata all'errore di previsione è il valore atteso condizionato:

$$\mathbb{E}(Y|X_1, \dots, X_m)$$

Nel caso in cui la funzione di perdita sia $\ell(e) = |e|$, la funzione che minimizza il valore atteso della funzione di costo applicata all'errore di previsione è la mediana condizionata:

$$\hat{Y} = \text{mediana}(Y|X_1, \dots, X_m)$$

Proprietà del valore atteso condizionato:

Siano X, Y, Z variabili casuali e supponiamo che $g()$ sia una funzione misurabile di X e che $\mathbb{E}(X)$ esiste.

- Linearità
  - $\mathbb{E}[aY + bZ + c|X] = a\mathbb{E}(y|x) + b\mathbb{E}(Z|x) + c$
- Ortogonalità degli errori di previsione rispetto a $g(X)$
  - $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X))g(X)] = 0$
- Se X e Y sono indipendenti allora:
  - $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$
- Legge delle aspettative iterate:
  - $\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(Yg(X)|X) = \mathbb{E}(Y|X)g(X)$
- $Var(Y) = \mathbb{E}[var(Y|X)] + var\,[\mathbb{E}(Y|X)]$

Previsore Lineare Ottimo

Se nel problema di previsione statistica suppongo che $p(X_1, \dots, X_m)$ sia lineare e quindi:

$$p(X_1, \dots, X_m) = b_0 + b_1 X_1 + \dots + b_m X_m$$

Se scelgo una funzione di perdita quadratica $\ell(e) = e^2$

$$\hat{Y}_{lin} = \mu_Y + \Sigma_{XY} + \Sigma_{XY}^{-1}(X - \mu_X)$$

Proprietà del previsore lineare ottimo:

1. Correttezza: $\mathbb{E}(Y - p(Y|X) = 0$
2. Ortogonalità rispetto all'errore di previsione $\mathbb{E}[(Y - P(Y|X))X] = 0$
3. MSE lineare: $\Sigma_{YY} = \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}$
4. Linearità: $p[aY + bZ + c|X] = ap(Y|X) + bp(Z|X) + c$
5. Legge delle proiezioni iterate: $p[Y|X] = p[.\, p[Y|Z, X] \;\; |X]$

Il previsore lineare ottimo è anche previsore ottimo quando $(Y, X_1, \dots, X_m) \sim N(\mu, \Sigma)$
Allora:

$$\mathbb{E}(Y|X) = \mu_y + \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}(X - \mu_x)$$