Processi ARMA e ARIMA

Una serie storica è una sequenza di variabili casuali indicizzate con il tempo:

$$\{y_t\}$$

Altra definizione:

Una serie storica $y_1, y_2, \dots, y_n$ è una realizzazione finita di un processo stocastico $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$

Una serie storica può essere stazionaria con due tipi di stazionarietà.

La stazionarietà **forte** implica che:

$$(y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tk}) \cong (y_{t1+h}, y_{t2+h}, \dots, y_{tk+h})$$

Assumendo che il simbolo ≅ significhi "con uguale distribuzione di probabilità".
Questo vale per qualsiasi k e per qualsiasi k-upla.

La stazionarietà **debole** implica che:

- $\mathrm{E}(y_t) = \mu$
- $Var(y_t) = \gamma_0 < \infty$ $non\ dipende\ dal\ tempo$
- $Cov(y_t, y_{t-h}) = \gamma_h$ $non\ dipende\ dal\ tempo$

La stazionarietà forte congiuntamente all'esistenza della varianza implica stazionarietà debole. In un processo gaussiano i due tipi di stazionarietà coincidono.

White noise

Il white noise è un processo stazionario con stazionarietà debole:

$$\{\epsilon_t\}$$

Ha:
- $E(\epsilon_t) = 0$
- $Var(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$
- $Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-h}) = 0 \qquad \forall h \neq 0$

Processo MA(q)

Processo Moving Average di ordine q:

$$y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$y_{t-1} = \epsilon_{t-1} + \theta_1\epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q-1}$$

$y_t\ e\ y_{t-1}\ sono\ autocorrelate.$ Tuttavia, la funzione di autocorrelazione si annulla se $h > q$.

Per ottenere una media non nulla si aggiunge μ

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q}$$

Dove

$$E(y_t) = \mu$$

Un processo MA(q) per cui l'equazione caratteristica:

$$1 + \theta_1 x^1 + \cdots + \theta_q x^q = 0$$

Ha solo soluzioni esterne al cerchio unitario (ossia |x| > 1 se x è soluzione dell'equazione caratteristica) è rappresentabile come un processo autoregressivo:

$$y_t = k + \psi_1 y_{t-1} + \psi_2 y_{t-2} + \cdots + \epsilon_t$$

Processi AR(p)

Un processo autoregressivo AR(p) è definito come:

$$y_t = k + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

Il processo AR(p) è stazionario se nell'equazione caratteristica

$$1 - \phi_1 x^1 + \cdots + \phi_q x^q = 0$$

Tutte le soluzioni sono esterne al cerchio unitario. Ad esempio per un AR(1):

$$y_t = k + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

L'equazione caratteristica è $\quad 1 - \phi x = 0$
Otteniamo che $\quad x = \frac{1}{\phi}$

E dunque AR(1) è stazionario se $|\phi| < 1$.
Se

$$|\phi| = 1$$

Allora il processo è non stazionario e si chiama Random Walk:

Random walk: $y_t = y_{t-1} + \epsilon$

Random walk con drift: $y_t = k + y_{t-1} + \epsilon$

Integrazione

Dato l'operatore differenza Δ tale che:

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

Diciamo che

Un processo Z_t è integrato di ordine *d* se Z_t non è stazionario, $\Delta^{d-1}Z$ non è stazionario mentre $\Delta^d Z$ è stazionario.

Un processo integrato di ordine 1 →$I(1)$ è un processo non stazionario ma la cui differenza prima è stazionaria →$I(0)$

Riprendiamo un AR(p):
se ho *d* soluzioni x=1 e le altre (p-d) soluzioni sono |x| > 1 il processo è integrato di ordine d:

$$\Delta^{\mathrm{d}} y_t = AR(p-d)\ stazionario$$

ARMA e ARIMA

- ARMA(p, q)

$$y_t = k + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

- ARIMA(p, d ,q)

$$\Delta^d y_t = k + \phi_1 \Delta^d y_{t-1} + \cdots + \phi_p \Delta^d y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

ARIMA stagionali

Un modello ARMA stagionale è definito come segue:

$$y_t = k + \phi_1 y_{t-1s} + \cdots + \phi_p y_{t-ps} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1s} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-qs}$$

Se dopo d differenze Δ^d il processo ARMA stagionale è stazionario, allora esso è un modello ARIMA STAGIONALE anche indicato come:

$$SARIMA(p, d, q)_s$$