Filter e Smoother

Sia $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$

Sia $\mathcal{P}$ una proiezione lineare. Chiamiamo:

- Previsione one step ahead:
  - $a_{t|t-1} \qquad \mathcal{P}(a_t | \mathcal{Y}_{t-1})\ \ con\ matrice\ var\ e\ covar\ P_{t|t-1}$
- Filter:
  - $a_{t|t} \qquad \mathcal{P}(a_t | \mathcal{Y}_t)\ \ con\ matrice\ var\ e\ covar\ P_{t|t}$
- Smoother:
  - $a_{t|n} \qquad \mathcal{P}(a_t | \mathcal{Y}_n)\ \ con\ matrice\ var\ e\ covar\ P_{t|n}$

Se assumiamo gaussianità utilizziamo il valore atteso condizionato.

Disturbance Smoother

Prendiamo la forma state space:

$$\begin{cases} y_t = Zt + \alpha t + \epsilon_t \\ a_{t+1} = T_t \alpha_t + \eta_t \end{cases}$$

Dove abbiamo ϵ_t errore di osservazione e η_t disturbi.

Abbiamo che la proiezione di ϵ_t è:

$\hat{\epsilon}_{t|n} \ = \ \mathcal{P}(\epsilon_t | \mathcal{Y}_n)$

E abbiamo le seguenti due matrici di varianza e covarianza:

$$V^{\epsilon}_{t|n} = \mathbb{E}\big(\epsilon_t - \hat{\epsilon}_{t|n}\big)\big(\epsilon_t - \hat{\epsilon}_{t|n}\big)^T$$
$$U^{\epsilon}_{t|n} = \mathbb{E}\big(\hat{\epsilon}_{t|n}\, \hat{\epsilon}_{t|n}\big)$$

Abbiamo che la proiezione di η_t è:

$\hat{\eta}_{t|n} \ = \ \mathcal{P}(\eta_t | \mathcal{Y}_n)$

E abbiamo le seguenti due matrici di varianza e covarianza:

$$V^{k}_{t|n} = \mathbb{E}\big(\eta_t - \hat{\eta}_{t|n}\big)\big(\eta_t - \hat{\eta}_{t|n}\big)^T$$
$$U^{k}_{t|n} = \mathbb{E}\big(\hat{\eta}_{t|n}\, \hat{\eta}_{t|n}\big)$$

Filtro di Kalman

Il filtro di Kalman è un algoritmo per calcolare la coppia $\{a_{t|t-1}, P_{t|t-1}\}$ partendo da $\{a_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1}\}$ e la coppia $\{a_{t|t}, P_{t|t}\}$ da $\{a_{t|t-1}, P_{t|t-1}\}$.

Dando un valore iniziale per $\{a_{1|0}, P_{1|0}\}$ possiamo calcolare in modo iterativo:

$$\{a_{1|0}, P_{1|0}\} \rightarrow \{a_{1|1}, P_{1|1}\} \rightarrow \{a_{2|1}, P_{2|1}\} \rightarrow \{a_{2|2}, P_{2|2}\} \rightarrow \cdots$$

Il filtro di Kalman fornisce inoltre la sequenza di innovazioni, ossia la sequenza di errori della predizione un passo in avanti con la relativa matrice di covarianza.

Se le osservazioni sono approssimativamente distribuite in modo normale, il filtro di Kalman permette di costruire la funzione di verosimiglianza. Innanzi tutto, utilizzando la definizione di densità condizionata, otteniamo:

$$f_\theta(y_t|y_{t-1}, \dots\ y_1)$$

Che rappresenta la densità della variabile $(Y_t|Y_{t-1} = y_{t-1}, \dots\ Y_1 = y_1)$ e il vettore dei parametri θ che è necessario per calcolare la densità.

Otteniamo la seguente funzione di verosimiglianza:

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^{n} f_\theta(y_t|y_{t-1}, \dots\ y_1)$$

Per motivi computazionali si utilizza spesso il logaritmo:

$$l(\theta) = \prod_{t=1}^{n} log f_\theta(y_t|y_{t-1}, \dots\ y_1)$$