UCM

Nei Modelli a componenti non osservabili (Unobserved Components Model, UCM), una serie storica è descritta come la somma di componenti non direttamente osservabili. La forma tipica di un UCM è la seguente:

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \gamma_t + \varepsilon_t$$

Dove:
y_t è la serie storica
μ_t è la componente chiamata trend
ψ_t è la componente chiamata ciclo
γ_t è la componente chiamata stagionalità
ε_t è l'errore di osservazione ed è un white noise (media 0 e varianza σ_ε^2)

Trend

Negli UCM la componente Trend è responsabile delle variazioni della media del processo nel lungo periodo. Un modo semplice per modellare il trend di una serie storica è la retta:

$$\mu_t = \alpha + \beta t$$

La retta può essere scritta in modo incrementale come:

$$\mu_0 = \alpha$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta$$

Per rendere stocastica la retta aggiungiamo all'equazione un white noise η_t (media 0 e varianza σ_η^2)

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta + \eta_t$$

In questo processo il coefficiente β non evolve e μ_t risulta essere un Random Walk con Drift. Un modello di trend più flessibile in cui il coefficiente angolare evolve è il Local Linear Trend:

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t$$

β_t evolve come un Random Walk.

Casi particolari:

- Se $var(\eta_t) = 0$ e $var(\zeta_t) = 0$ allora la retta è una retta deterministica
- Se $var(\eta_t) = 0$ allora μ_t è un Random Walk Integrato
- Se $var(\zeta_t) = 0$ allora μ_t è un Random Walk con Drift

Local linear Trend in forma state space

Equazione di transizione:

$$\begin{bmatrix}\mu_{t+1}\\ \beta_{t+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_t\\ \beta_t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\eta_t\\ \zeta_t\end{bmatrix}$$

Con la matrice di varianze e covarianze degli errori:

$$Q = \begin{bmatrix}\sigma_\eta^2 & 0\\ 0 & \sigma_\zeta^2\end{bmatrix}$$

Equazione di stato:

$$y_t = [1\ 0]\begin{bmatrix}\mu_t\\ \beta_t\end{bmatrix} + \epsilon_t$$

$$H = \sigma_\epsilon^2$$

$$a_{1|0} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$P_{1|0} = \begin{bmatrix}\infty & 0\\ 0 & \infty\end{bmatrix}$$

Random Walk con drift in forma state space

$$T = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad Z = [1\ 0] \quad Q = \begin{bmatrix}\sigma_n^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad H = \sigma_\epsilon^2$$

Random Walk con drift in forma state space

$$T = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad Z = [1\ 0] \quad Q = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma_\zeta^2\end{bmatrix} \quad H = \sigma_\epsilon^2$$

Trend lineare in forma state space

$$T = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad Z = [1\ 0] \quad Q = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad H = \sigma_\epsilon^2$$

Ciclo

Per modellare un fenomeno ciclico utilizziamo una sinusoide:

$$f(t) = Rcos(\phi + \lambda t)$$

Dato che il coseno è una funzione periodica di periodo 2π la funzione $f(t)$ ha periodo $\frac{2\pi}{\lambda}$.
Possiamo scrivere la $f(t)$ anche in questa forma:

$$f(t) = Acos(\lambda t) + Bsen(\lambda t)$$

Dove:

$$A = Rcos(\phi) \qquad B = -Rsen(\phi)$$

Possiamo scrivere $f(t)$ in forma incrementale:

$$\begin{bmatrix} f_t \\ f_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\lambda & sen\lambda \\ -sen\lambda & cos\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{t-1} \\ f_{t-1}^* \end{bmatrix}$$

Per rendere stocastica la $f(t)$ aggiungiamo due processi White Noise.

$$\begin{bmatrix} \varphi_t \\ \varphi_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\lambda & sen\lambda \\ -sen\lambda & cos\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{t-1} \\ \varphi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t \\ k_t^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_t \\ k_t^* \end{bmatrix} \sim WN(0;\ \sigma_k^2)$$

Per rendere stazionario il ciclo moltiplico la matrice di rotazione per ρ compreso tra 0 e 1.

$$\begin{bmatrix} \varphi_t \\ \varphi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} cos\lambda & sen\lambda \\ -sen\lambda & cos\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{t-1} \\ \varphi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t \\ k_t^* \end{bmatrix}$$

Ciclo stocastico in forma State Space

$$\begin{bmatrix} \varphi_t \\ \varphi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} cos\lambda & sen\lambda \\ -sen\lambda & cos\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{t-1} \\ \varphi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t \\ k_t^* \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_k^2 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 \end{bmatrix}$$

Equazione di stato:

$$y_t = [1\ 0]\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} + \epsilon_t$$

$$H = \sigma_\epsilon^2$$

$$a_{1|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{1|0} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_k^2}{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_k^2}{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

Stagionalità

La componente stagionalità può essere descritta in modo deterministico come una funzione periodica di periodo *s* a somma nulla:

sia s = 12

$$\gamma_t = -\gamma_{t-1} - \gamma_{t-2} - \cdots - \gamma_{t-(s-1=11)}$$

Possiamo rendere la componente stagionalità stocastica in due modi differenti.

1) Stagionalità a dummy stocastiche:

$$\gamma_t = -\gamma_{t-1} - \gamma_{t-2} - \cdots - \gamma_{t-(s-1=11)} + \omega_t$$

Abbiamo aggiunto un processo white noise.

2) Stagionalità trigonometrica stocastica:

$$\gamma_t = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor} a_j \cos\left(\frac{2\pi}{s}jt\right) + b_j \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{s}jt\right)$$

Aggiungiamo due processi white noise:

$$\begin{bmatrix} \gamma_t^{(j)} \\ \gamma_t^{*(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{2\pi}{s}j\right) & sen\left(\frac{2\pi}{s}j\right) \\ -sen\left(\frac{2\pi}{s}j\right) & cos\left(\frac{2\pi}{s}j\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{t-1}^{(j)} \\ \gamma_{t-1}^{*(j)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{t-1}^{(j)} \\ \omega_{t-1}^{*(j)} \end{bmatrix}$$

Stagionalità in forma State Space

1) Dummy stocastiche:

Poniamo s= 4

La dimensione del vettore di stato è s-1 ossia 3.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{t+1} \\ \gamma_{t+1}^1 \\ \gamma_{t+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_t \\ \gamma_t^1 \\ \gamma_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y_t = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} \gamma_t \\ \gamma_t^1 \\ \gamma_t^2 \end{bmatrix} + \epsilon_t$$

$$H = \sigma_\epsilon^2$$

2) Stagionalità trigonometrica stocastica

$$\begin{bmatrix} \gamma_{t+1}^{(1)} \\ \gamma_{t+1}^{*(1)} \\ \gamma_{t+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\lambda_1 & sen\lambda_1 & 0 \\ -sen\lambda_1 & cos\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & cos\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_t \\ \gamma_t^{*(1)} \\ \gamma_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_t^1 \\ \omega_t^{*(1)} \\ \omega_t^{(2)} \end{bmatrix}$$

Dove:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{4} \qquad \lambda_2 = \frac{2\pi}{2}$$

E quindi:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\pi \quad \lambda_2 = \pi$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$y_t = [1\ 0\ 1] \begin{bmatrix} \gamma_t^{(1)} \\ \gamma_t^{*(1)} \\ \gamma_t^{(2)} \end{bmatrix} + \epsilon_t$$

$$H = \sigma_\epsilon^2$$

$$a_{1|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{1|0} = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \end{bmatrix}$$

Regressori Dummy

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \gamma_t + \delta^T x_t + \varepsilon_t$$

La x può assumere valori differenti in base alla situazione:

Additive outlier:

$$\begin{cases} 1 & t = t_0 \\ 0 & t \,!= t_0 \end{cases}$$

Temporary change:

$$\begin{cases} 1 & t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Level Shift:

$$\begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

Slope Shift:

$$\begin{cases} t - t_0 + 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$