# Análisis Numérico

*Tarea 3: Solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)*

## Modelo matemático del chapoteo del café

El derramar el café al caminar es un problema bastante común que se puede explicar a través de la oscilación de líquidos en un recipiente, la cual puede modelarse como un péndulo con excitación paramétrica donde el caminar de la persona que lleva la taza introduce perturbaciones en las direcciones horizontal y vertical. Para analizar su dinámica, se describe el siguiente modelo matemático y ecuaciones diferenciales que la explican.

En primer lugar, se asume que el café en la taza se comporta como un fluido en un recipiente cilíndrico y dicha oscilación se modela como un péndulo de longitud variable y pivote móvil, es decir que el punto de soporte del péndulo no está fijo, sino que se mueve en el espacio. Para el correspondiente análisis, considere las siguientes variables y parámetros:

- $r(t)$: es la longitud del péndulo en función del tiempo debido al movimiento de la taza.
- $m$: masa del café
- $g$: acelaración gravitacional
- $x_0(t), \dot{x}_0(t)$: posición horizontal del pivote de la taza y aceleración horizontal.
- $z_0(t), \dot{z}_0(t)$: posición vertical del pivote de la taza y aceleración vertical.
- $\theta(t)$: ángulo de oscilación del líquido respecto a la vertical
- $\dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$: velocidad y aceleración angular respectivamente.

## Lagrangiano $L$

En el contexto del modelo del péndulo que describe el chapoteo del café en una taza, el Lagrangiano $L$ es una función matemática que encapsula toda la información dinámica del sistema. Es muy importante, pues a partir de ella se obtendrán las ecuaciones de movimiento usando las ecuaciones de Lagrange. El lagrangiano $L$ describe la dinámica del sistema considerando la energía cinética y potencial:

$$L = T - V \tag{1}$$

donde

- Energía cinética ($T$) está dada por:

$$T = \frac{m}{2}[(\dot{x}_0 - \ddot{x}_0)^2 + (\dot{z}_0 + \ddot{z}_0)^2] \tag{2}$$

- Energía potencial ($V$) está dada por:

$$V = mg(z + z_0) \tag{3}$$

Al sustituir las posiciones del péndulo en coordenadas cartesianas:

$$x = r(t)sin\theta, \quad z = -r(t)cos\theta$$

Para calcular (2), es decir, la energía cinética ($T$) se deben hallar las derivadas de $x$ y $z$:

$$\dot{x} = \dot{r}sin\theta + r\dot{\theta}cos\theta, \quad \dot{z} = -\dot{r}cos\theta + r\dot{\theta}sin\theta$$

Sustituyendo $\dot{x}$ y $\dot{z}$ en (2) resulta:

$$T = \frac{m}{2}[(\dot{r}sin\theta + r\dot{\theta}cos\theta - \ddot{x}_0)^2 + (-\dot{r}cos\theta + r\dot{\theta}sin\theta + z_0)^2]$$

Por su parte, se reescribe la energía potencial $V$, al reemplazar en $z$ en (3):

$$V = mg(-r(t)cos\theta + z_0)$$

Y así, el lagrangiano quedaría:

$$L = \frac{m}{2}[(\dot{r}sin\theta + r\dot{\theta}cos\theta - \ddot{x}_0)^2 + (-\dot{r}cos\theta + r\dot{\theta}sin\theta + z_0)^2] - mg(-r(t)cos\theta + z_0) \tag{4}$$

# Ecuaciones de movimiento

A partir del Lagrangiano, se pueden derivar las ecuaciones de Lagrange, estas son las ecuaciones de movimiento del sistema. Las ecuaciones de Lagrange se deducen de:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{5}$$

Para hallar las derivadas parciales correspondiente es necesario notar que $\frac{\partial V}{\partial \dot{\theta}} = 0$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}$
Y así, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$. Además, $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) = m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})$.

Además, $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mr(g + \ddot{z}_0)sin\theta - mr\ddot{x}_0cos\theta$. Reemplazando lo correspondiente en (5) y dividiendo entre $m$ se obtiene la ecuación diferencial del sistema

$$r^2\ddot{\theta} + r(g + \ddot{z}_0)sin\theta + r\ddot{x}_0cos\theta + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 \tag{6}$$

donde se observan los siguientes términos:

- $r^2\ddot{\theta}$: Es la inercia del péndulo y $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular.
- $r(g + \ddot{z}_0)sin\theta$: Es la fuerza restauradora debida a la gravedad y la aceleración vertical del pivote.
- $r\ddot{x}_0cos\theta$: Es la excitación directa debida a la aceleración horizontal del pivote.
- $2r\dot{r}\dot{\theta}$: Es un término de amortiguamiento o amplificación, según cómo varíe la longitud del péndulo.

Finalmente, esta ecuación describe el movimiento del péndulo, que en este caso es el líquido de la taza, donde se considera la excitación paramétrica (movimiento vertical) y la excitación directa (movimiento horizontal). Mediante esta ecuación se entiende cómo las oscilaciones del líquido podrían llevar al derrame del café al caminar.

# Estudio de pequeñas oscilaciones

El sistema del péndulo encontrado en la ecuación (6) es evidentemente no lineal por la presencia de términos como $sin\theta$ o $cos\theta$, por lo que se dificulta la solución analítica de la ecuación. En este tipo de sistemas físicos, el interés principal está en el comportamiento del sistema para **pequeñas oscilaciones**, esto pasa cuando $\theta$ es pequeño. Expandimos la serie de Taylor $\theta = 0$ y se obtiene:

$$r^2\ddot{\theta} + r(g + \ddot{z}_0)(\theta - \frac{\theta^3}{6}) + r\ddot{x}_0\frac{\theta^2}{2} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = -r\ddot{x}_0 \tag{7}$$

Esta ecuación tiene una forma similar a la ecuación de Mathieu (ecuación diferencial con coeficientes periódicos que aparece en sistemas con excitación paramétrica, como el caso del café cuando caminamos y movemos la taza) con términos no lineales, lo que sugiere la presencia de resonancias paramétricas y no linealidades cúbicas $\theta^3$ y cuadráticas $\theta^2$. Las resonancias paramétricas aparecen cuando un sistema oscila más y más porque la fuente de energía que lo excita cambia periódicamente en el tiempo; por ejemplo, al caminar la taza sube y baja ligeramente lo que ocasiona el aumento de oscilación del líquido y hace que el café chapotee cada vez más. De esta manera, la presencia de $(\theta^3)$ y $(\theta^2)$ hace que de alguna manera el sistema sea más complejo porque podría experimentar resonancias en múltiples frecuencias (y evitar el derrame es más complicado) y cambia la frecuencia de oscilación según la amplitud, es decir que no sólo depende de la frecuencia de la caminata sino también de la amplitud del movimiento de la mano.

# Deducción de la ecuación normalizada

Para facilitar el análisis matemático, hay que simplificar y normalizar la ecuación para que se asemeje a una Ecuación de Mathieu con no linealidades. Esta ecuación ya está ampliamente estudiada en matemáticas y física y puede brindar gran información sobre cómo un sistema con excitación paramétrica (el café en la taza para este caso) podría volverse inestable y oscilar violentamente. Suprimiendo la excitación horizontal $\ddot{x}_0$ la ecuación (7) se reescribe

$$r^2\ddot{\theta} + r(g + \ddot{z}_0)\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0.$$

Esto es válido porque de esta manera se halla una ecuación muy similar a la Mathieu, además, permite centrar el análisis en la resonancia paramétrica que es la causa principal del derrame. Para simplificar el análisis, se definen las siguientes variables adimensionales:

- **Tiempo normalizado**: $\tau = \omega_0 t, \quad \text{donde } \omega_0^2 = \frac{g}{r_0}$.
- **Desplazamiento angular normalizado**: $u = \theta$.
- **Excitación paramétrica relativa**: $\lambda = -\frac{\Delta z}{r_0}$.
- **Frecuencia de excitación normalizada**: $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.
- **Pequeño parámetro de perturbación**: $\varepsilon$ controla la intensidad de la excitación.

Dividiendo la ecuación original por $r$:

$$r\ddot{\theta} + (g + \ddot{z}_0)\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0.$$

Como $g/r \approx \omega_0^2$ y la excitación vertical $\ddot{z}_0$ es periódica se modela como sigue:

$$\ddot{z}_0 = \varepsilon\lambda\omega_0^2\cos(\Omega\tau).$$

Sustituyendo lo anterior resulta:

$$\ddot{u} + \left(\omega_0^2 + \varepsilon\lambda\omega_0^2\cos(\Omega\tau)\right)\left(u - \frac{u^3}{6}\right) = 0.$$

Factorizando $\omega_0^2$:

$$\ddot{u} + \omega_0^2\left(1 + \varepsilon\lambda\cos(\Omega\tau)\right)\left(u - \frac{u^3}{6}\right) = 0.$$

Finalmente, dividiendo todo por $\omega_0^2$, y por como se definió el tiempo normalizado la $\ddot{u}$ se transforma en $\frac{d^2u}{dt^2} = w_0^2\frac{d^2u}{d\tau^2}$ se obtiene la ecuación final normalizada:

$$\boxed{\ddot{u} + [1 + \varepsilon\lambda\Omega^2\cos(\Omega\tau)]\left(u - \frac{\varepsilon^2u^3}{6}\right) = 0.} \tag{8}$$

# Reescritura de ecuación (8) como EDO

Si queremos expresar la ecuación de segundo orden como una de primer orden, definamos $v = u'$. Esto nos deja con el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = v, \\ \frac{dv}{d\tau} = -[1 + \varepsilon\lambda\Omega^2\cos(\Omega\tau)]\left(u - \frac{\varepsilon^2u^3}{6}\right) \end{cases}$$

# Análisis del comportamiento según el movimiento del pivote

De acuerdo al documento estudiado [1], dependiendo del tipo de movimiento del pivote de la taza, se utilizan dos métodos matemáticos para estudiar la estabilidad y la resonancia. Estos métodos permiten encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales no lineales y analizar las condiciones en las que el café se derrama debido a la resonancia.

1. **Método de promediado**. Se usa cuando sólo hay **movimiento vertical** del pivote. La ecuación usada es:

$$\ddot{u} + [1 + \varepsilon\lambda\Omega^2\cos(\Omega\tau)]\left(u - \frac{\varepsilon^2u^3}{6}\right) = 0.$$

**Resultados**

Este método permite:

- Determinar la **estabilidad** de la solución sin necesidad de resolver la ecuación exacta.
- Identificar en qué condiciones la resonancia paramétrica hace que el café se derrame.

2. **Método de múltiples escalas**. Se usa cuando el pivote tiene movimiento **vertical y horizontal**. Cuando esto pasa la ecuación diferencial se modifica para incluir una excitación adicional:

$$\ddot{u} + \left[1 + \varepsilon\lambda_1\Omega^2\cos(\Omega\tau)\right]\left(u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right) - \varepsilon^2\lambda_2\Omega^2\cos(\Omega\tau)\frac{u^2}{2} = -\lambda_2\Omega^2\cos(\Omega\tau).$$

Este método se usa cuando la ecuación tiene **diferentes escalas de tiempo** y queremos separar sus efectos. En lugar de asumir que la solución depende solo de $\tau$, introducimos múltiples escalas de tiempo y se identifican las **frecuencias de resonancia** analizando en qué valores de $\Omega$ la oscilación se amplifica.

**Resultados**

El método muestra que el sistema puede resonar en $\Omega \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$. Esto significa que la taza de café es más propensa a derrames en estas frecuencias específicas.

# Referencias

[1] Guarín-Zapata, N. (2021). Sloshing in coffee as a pumped pendulum.