Compressão Fractal de Imagens

Bruno Silvério de Freitas

Mestrado em Tecnologia
Universidade Estadual de Campinas
IA898 - Processamento de Imagens

12 de Setembro de 2018

Agenda

Introdução

A compressão de imagens trata do problema de reduzir a quantidade de dados necessária para representar uma imagem digital. A base do processo de redução é a remoção de dados redundantes. Do ponto de vista matemático, isto corresponde transformar uma matriz de pixels de duas dimensões num conjunto de dados estatisticamente descorrelacionados. (GONZALEZ e WOODS, 2000)

Compressão de Imagens

Com perdas

- JPEG/JFIF
- Wavelet
- Fractal

Sem perdas

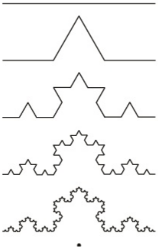
- LZW (variação de LZ78)
- JPEG2000

Fractais

O matemático Benoit B. Mandelbrot foi quem introduziu o termo “fractal”(do latim fractus, que significa quebra), criando uma área na geometria que propõe estudar fenômenos na natureza que apresentam propriedades de auto-similaridade e mesma características independente da escala.

Fonte: *[SILVA, 2008].*

Figura: Triângulo de Sierpinski.

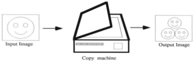


Fonte: *[SILVA, 2008].*

Figura: Curva de Koch (Floco de Neve)

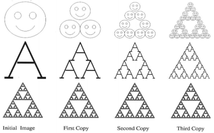
Compressão Fractal de Imagens

Fisher foi um dos primeiros a reconhecer o potencial de fractal para a compressão de imagens. Para exemplificar a ideia de uma maneira simples, uma imagem passa várias vezes por uma fotocopiadora, e a cada vez é reduzida pela metade e gerada cópias. A imagem de saída tem a característica de ser contrativa, ou seja, dois pontos tem menor distância em relação a imagem de entrada.



Fonte: *[FISHER, 1995].*

Figura: Exemplo de fotocopiadora de fisher.



Fonte: *[FISHER, 1995].*

Figura: Primeiras 3 cópias geradas pela fotocopiadora para 3 imagens diferentes.

Compressão Fractal de Imagens

A Compressão Fractal é composta por um conjunto de conceitos:

- Teorema da Contração
- Teorema da Colagem
- Transformações Afins
- Sistema de Funções Iterativas

A codificação fractal de imagens consiste em representar os blocos da imagem através de coeficientes de transformações contrativas, explorando o conceito de auto-similaridade. Assim, nesse tipo de codificação, ao invés de armazenar/transmitir os blocos da imagem como uma coleção de pixels, somente são enviados/armazenados os coeficientes dessas transformações. [CRUZ, 2008]

Teoremas

Contratividade

Seja (X, d) um espaço métrico completo, onde d é a métrica associada que mede a distância entre os elementos do espaço X. Então, o espaço dos fractais $(H(X), h)$ é o espaço dos subconjuntos compactos e não-vazios do espaço X, sendo também um espaço métrico completo.

Seja também $\{\omega_n : X \rightarrow X, n = 1, 2, ..., N\}$ um conjunto de mapeamentos contrativos neste espaço, e portanto, em $(H(X), h)$ (onde h é a métrica de Hausdorff). O fator de contrativo de ω_n é dado por s_n para cada n. Definindo $W : H(X) \rightarrow H(X)$

Teorema

Colagem

O Teorema diz que uma imagem semelhante e reduzida é obtida a partir da cobertura da imagem inicial (semente) com cópias reduzidas. Quanto menor os espaços vazios, maior será a semelhança com a imagem original. Assim, pode-se definir o número de cópias que atendam ao critério de cobertura da imagem. Para cada cópia é definida uma transformação que indicará o local e como essa cópia estará posicionada no espaço X. Onde A é o atrator do IFS, expressada pela equação:

$$h(A, A_f) \leq \frac{1}{1-s} h(A, W(A)) \tag{1}$$

IFS (Iterated Function Systems)

Barnsley e Sloan foram os primeiros a aplicar os conceitos de fractal em compressão de imagem no final da década de 80.

O IFS é um sistema de funções iterativas onde cópias da imagem original são obtidas por meio da aplicação de contração.

Se baseia no teorema da colagem e contrativo onde pode-se obter uma imagem semelhante a original através de cópias de menor escala, sendo que o melhor resultado depende do quanto essas cópias conseguem cobrir o maior espaço da imagem inicial.

IFS (Iterated Function Systems)

Uma transformação pode ser representada pela equação:

$$\omega_i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, \ldots, n \quad (2)$$

Assim, a coleção de transformações contrativas (operador Hutchinson) realizadas no sistema de funções iterativas é dado pela equação:

$$W(X) = \cup_{n=1}^{N} \omega_n(X) \quad (3)$$

IFS (Iterated Function Systems)

Dizemos que h é uma contração se 0 < s < 1 (fator de contração), representada pela expressão:

$$h(W(x), W(y)) \leq s.h(x, y) \tag{4}$$

A existência e unicidade do ponto fixo, Af ∈ H(X), chamado de atrator da IFS, é dado pela aplicação do teorema do ponto fixo de mapas contrativos, que leva a [CRUZ, 2008]:

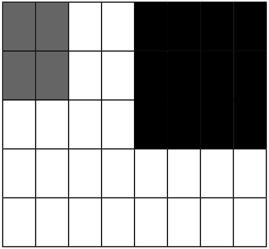
$$X_f = \lim_{n \to \infty} W^{on}(X), \forall X \in \mathscr{H}(\boldsymbol{X}) \tag{5}$$

A distância entre um dado A∈ H(X) e o atrator A_f obedece à inequação:

$$h(A, A_f) \leq \frac{1}{1-s} h(A, W(A)) \tag{6}$$

PIFS (Partitioned Iterated Function System)

Em 1992 [JACQUIN, 1992], introduz o conceito de partições para a aplicação de compressão fractal em imagens reais. O PIFS é caracterizado por mapear áreas menores da imagem (*range-blocks*) em relação a áreas maiores (*domain-blocks*) no sistema de funções de iteração diferentemente do que ocorre no IFS que parte-se de uma imagem semente.



PIFS (Partitioned Iterated Function System)

$$\omega_i \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \\ o_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

Onde $\{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i\}$ define a transformação geométrica; s_i determina o contraste e o_i o brilho.

Transformações afins $(0, -1) * (0, 90, 180, 270)$ e fazendo ajuste de brilho e contraste.

Cada vez que é encontrada uma igualdade, guarda-se a localização do bloco domínio e a transformação associada ao bloco onde ocorreu a igualdade.

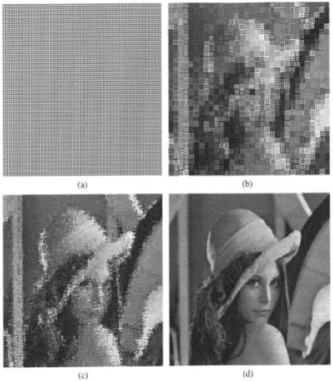
$\omega_i : D_i \rightarrow R_i$

Codificação PIFS

- Particiona uma imagem em domain-block e range-blocks;
- Escolha do tamanho de range-blocks menores que cobrem toda a imagem (representam a imagem);
- Escolha do tamanho de domain-blocks maiores (não necessitam cobrir toda a imagem);
- Reduz os domain-blocks para o tamanho de range e aplica as transformações afins ω_i;
- Utiliza-se métrica para estimar a similaridade entre o domain e o range. (Exemplo: RMS);
- Aguardamos os coeficientes da transformação e o domain para cada range.

Decodificação PIFS

- Um domain-block é selecionado e aplica-se uma subamostragem e uma transformação-afim ω_i;
- O resultado é copiado para a localização especificada da imagem que está sendo construída da decodificação;
- O processo se repete para os demais domain-blocks.



Fonte: *[FISHER, 1995].*

Figura: Decodificação fractal da imagem Lena: a) imagem inicial arbitrária; b) após a 1^a iteração; c) após a 2^a iteração; d) após a 10^a iteração.

Aplicação

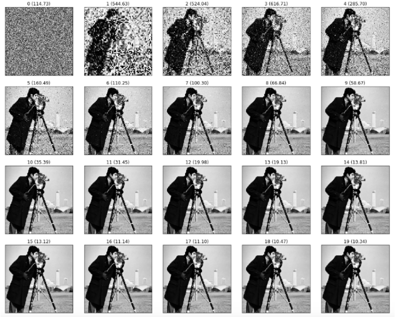


Figura: Decodificação usando *domain* 8x8 e *range* 4x4

Figura: Decodificação usando *domain* 16x16 e *range* 8x8

Métricas

Para avaliar o erro entre a imagem original e imagem decodificada utiliza-se a métrica de RAIZ DO ERRO MÉDIO QUADRÁTICO (RMSE) para cada iteração. Conforme equação:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(d_i - f_i)^2} \tag{8}$$

onde:

d = imagem original

f = imagem decodificada

Métricas

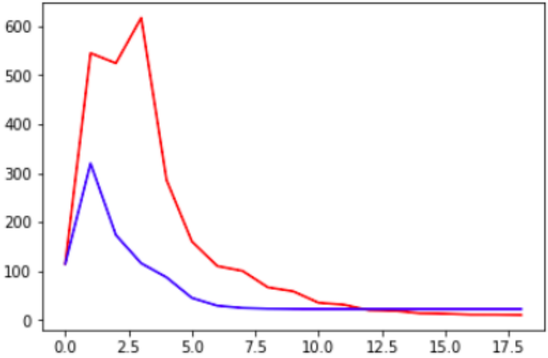


Figura: Erro X Iterações (Vermelha 8x8 — Azul 16x16)

Compressão Fractal Acelerada

- Diferentes técnicas tentam reduzir o tempo de processamento. A grande maioria está focada em aperfeiçoar a manipulação em *domain pool*.

- FISHER (1995) propões usar classificação dos blocos de domínio com relação a média e variância para cada um deles. Nesse processo, também é feita a classificação dos *range-blocks* com o objetivo de reduzir o número de comparações (*matching*)

Considerações Finais

- A compressão fractal pelo PFIS demonstrou uma elevada complexidade computacional para a codificação da imagem.

- Não há um conceito fechado sobre o melhor método aplicado a compressão. Algumas técnicas tenham minimizar o custo computacional, por exemplo, classificação de áreas usando diferentes formas como quadrado e triângulo.

- A definição do tamanho de *domain-blocks* pode contribuir para melhorar a performance do algoritmo.

Referências Bibliográficas

BARNSLEY, Michael F.; SLOAN, Alan D. A better way to compress images. Byte, v. 13, n. 1, p. 215-223, 1988.

CRUZ, Ana Lúcia Mendes et al. Codificação Fractal de Imagens. Revista Telecomunicações, v. 11, p.14-23, 2008.

FISHER, Y. Fractal image compression: theory and application. New York, NY: Springer, c1995., 1995. ISBN: 0387942114.

JACQUIN, Arnaud E. Image Coding Based on a Fractal Theory of Iterated Contractive Image Transformations". IEEE Transactions on Image Processing. vol. 01. no. 01. pp. 18-30, 1992.

SILVA, Sandreane Poliana. Comparação entre os métodos de compressão fractal e jpeg2000 em um sistema de reconhecimento de íris. 2008.