FASIT OPPGAVER UKE 8-9, STA-1001 2024

5.9

Antar uavhengighet, og har da at X (antall "blowout") er binomisk fordelt med $n = 15$ og $p = 0.025$.

a) $P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2) \overset{\text{tab.}}{=} 0.943 - 0.236 = 0.707$

b) $P(X < 4) = P(X \leq 3) \overset{\text{tab.}}{=} 0.461$

c) $P(X > 5) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \overset{\text{tab.}}{=} 1 - 0.852 = 0.148$

5.18

a) $E(X) = np = \frac{15}{4} = 3.75$

b) $Var(X) = np(1-p) = \frac{45}{16}$

5.22

Antar uavhengighet mellom fargene for de $n = 8$ marsvina i kullet får, og har da at antallet røde (x_1) , svarte (x_2) og hvite (x_3) er multinomisk fordelt med sannsynligheter henholdsvis $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.25$ og $p_3 = 0.25$.
$P(X_1 = 5, X_2 = 2, X_3 = 1) = \binom{8}{5,2,1} \cdot 0.5^5 \cdot 0.25^2 \cdot 0.25^1 = 168 \cdot 0.000488 = 0.082$

5.32

X = antall defekte blant de uttrukne.
Hypergeometrisk fordeling med $N = 10$, $k = 4$ og $n = 3$.

a) $P(X = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{10-4}{3-0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6} = 0.167$

b) $P(X \leq 2) \quad = \quad 1 - P(X = 3) = 1 - \frac{\binom{4}{3}\binom{10-4}{3-3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$

5.52

X = antall forsøk til 2 mus har fått smitten.
Antar uavhengighet, og har da negativ-binomisk fordeling med $k = 2$ og $p = 1/6$.

$P(X = 7) = \binom{7-1}{2-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{7-2} = 6 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5^5}{6^5} = 0.067$

5.71

X = antall feil i 5mm kopperledning.
X er Poisson-fordelt med $\mu = \lambda t = 1.2 \cdot 5 = 6$
$P(X = 0) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} = e^{-6} = 0.0025$

$E(X) = \mu = 6$

A1

a)
$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{k=1}^{x}p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{x}(1-p)^{k}=p\cdot\frac{1-(1-p)^x}{1-(1-p)}=1-(1-p)^x,\ x=1,2\ldots$$

b)
$$\begin{aligned}P(X=x_0+x\,|\,X>x_0) &= \frac{P(X=x_0+x\cap X>x_0)}{P(X>x_0)}=\frac{P(X=x_0+x)}{1-P(X\le x_0)}=\frac{P(X=x_0+x)}{1-F(x_0)}\\ &= \frac{(1-p)^{x_0+x-1}\cdot p}{[1-1+(1-p)^{x_0}]}=(1-p)^{x-1}p=P(X=x)\end{aligned}$$

Man begynner essensielt "på nytt" etter at en får vite at det ikke var noen suksesser på de x_0 første delforsøka. Så sannsynligheten for at en skal trenge x delforsøk i tillegg til de x_0 er den samme som sannsynligheten for å trenge x delforsøk fra start.

A3

a) La X være antall kamper A vinner i 2 av 3, $X\sim\text{binom}(n=3,p=0.55)$:
$P(\text{A vinner})=P(X=2)+P(X=3)=\binom{3}{2}0.55^2\cdot0.45^1=\binom{3}{3}0.55^3\cdot0.45^0=0.575$

La Y være antall kamper A vinner i 3 av 5, $Y\sim\text{binom}(n=5,p=0.55)$:
$P(\text{A vinner})=P(Y=3)+P(Y=4)+P(Y=5)=\binom{3}{2}0.55^2\cdot0.45^1=\binom{3}{3}0.55^3\cdot0.45^0=0.593$

b) La $N=$ antall kamper. Bruker negativ binomisk fordeling:
$$\begin{aligned}P(N=4) &= P(N=4\cap\text{A vant})+P(N=4\cap\text{B vant})\\ &= \binom{4-1}{3-2}0.55^3\cdot0.45^1+\binom{4-1}{3-2}0.45^3\cdot0.55^1=0.225+0.150=0.375\end{aligned}$$

c) $P(\text{A vant}\mid N=4)=\frac{P(N=4\cap\text{A vant})}{P(N=4)}=\frac{0.225}{0.375}=0.599$

A4

a) $X\sim\text{Poisson}(\mu=7\cdot1)=\text{Poisson}(7)$.
$Y\sim\text{Poisson}(\mu=7\cdot0.5)=\text{Poisson}(3.5)$.
$$\begin{aligned}P(X=7) &= \frac{e^{-7\cdot1}(7\cdot1)^7}{7!}=0.1490\\ P(Y\ge3) &= 1-P(Y\le2)\overset{\text{tabell}}{=}1-0.3208=0.6792\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}P(X\ge1) &= 1-P(X=0)=1-\frac{e^{-\lambda\cdot0.25}(\lambda\cdot0.25)^0}{0!}=1-e^{-\lambda/4}\\ 1-e^{-\lambda/4} &\ge 0.5\\ \lambda &> -4\ln(0.5)=4\ln(2)=2.77\end{aligned}$$