OBLIGATORISK INNLEVERING 2, STA-1001 2024

12-03-2024

Innholdsfortegnelse

OBLIGATORISK INNLEVERING 2, STA-1001 2024

INNLEVERINGSFRIST TIRSDAG 12/3 KL 23:59

Oppgavene er fra kapittel 4 - 7. Øvinga leveres som pdf i Canvas.

1

De stokastiske variablene X og Y har simultan sannsynlighetstetthet

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{y}e^{-xy}, & 0 < x < \infty,\ 1 < y < 4. \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Vis at fordelinga for Y (marginalfordeling) har sannsynlighetstetthet

$$h(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, 1 < y < 4.$$

```python
from IPython.display import display
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y')
oppgave1a = sp.integrate((1/2)*sp.sqrt(y)*sp.exp(-x*y), (x, 0, sp.oo))
display(oppgave1a)
```

$$\begin{cases} \frac{0.5}{\sqrt{y}} & \text{for}\ |\arg{(y)}| < \frac{\pi}{2} \\ \int\limits_0^\infty 0.5\sqrt{y}e^{-xy}\, dx & \text{otherwise} \end{cases}$$

Utregning

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{y}\, e^{-xy}, & 0<x<\infty,\ 1<y<4 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = e^{kx} \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{k}\cdot e^{kx} + C}$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{1}{2}\sqrt{y}\, e^{-xy}\, dx$$

$$\int_0^\infty e^{-xy}\, dx = \left[-\frac{1}{y} e^{-xy}\right]_{x=0}^{x=\infty} = -\frac{1}{y}e^{-\infty y} - \left(-\frac{1}{y} e^{-0y}\right) \Rightarrow 0 - \left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}$$

$$\underline{\underline{f_Y(y) = \frac{1}{2}\sqrt{y}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}},\quad 1<y<4}}$$

2 Def 4.1

$$\boxed{f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + C}$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$E(Y) = \int_1^4 y \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) dy \Rightarrow \int_1^4 \frac{y}{2\sqrt{y}}\, dy \Rightarrow \int_1^4 \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}}\, dy$$

$$E(Y) = \frac12 \int_1^4 y^{\frac12}\, dy = \frac12\left[\frac23 y^{\frac32}\right]_{y=1}^{y=4} \Rightarrow \frac12\left[\frac23\left(4^{\frac32}\right) - \frac23\left(1^{\frac32}\right)\right] \Rightarrow \frac12\left[\frac23\left(\sqrt{4^3}\right) - \frac23(1)\right]$$

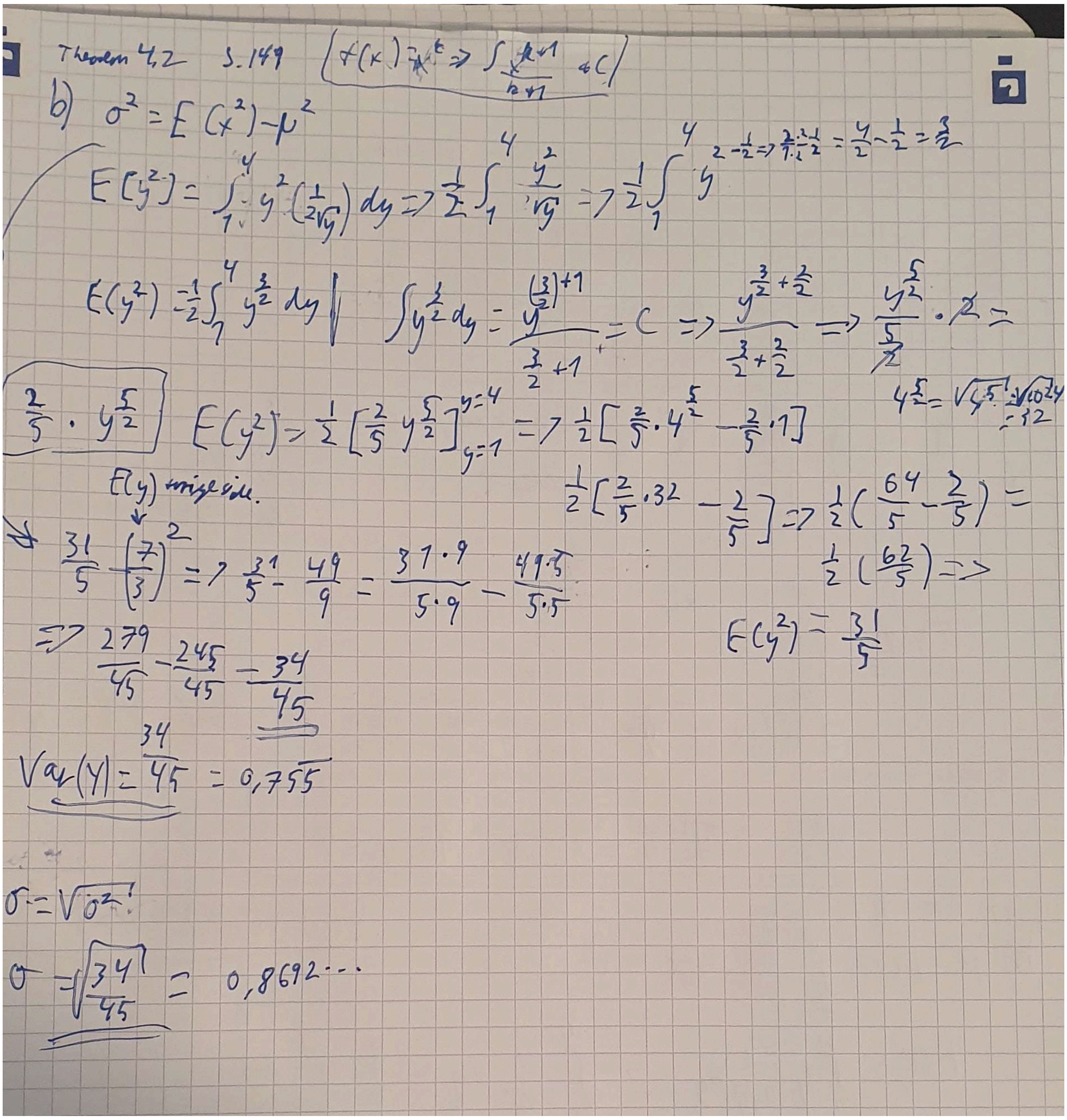
$$E(Y) = \frac12\left[\frac23(8) - \frac23\right] \Rightarrow \frac12\left[\frac{16}{3} - \frac23\right] \Rightarrow \frac12\cdot\frac{14}{3} = \frac73 = \underline{\underline{2{,}33\overline{3}}}$$

b) Finn forventningsverdi, varians og standardavvik for Y.

```
# Beregner E(Y)
E_Y = sp.integrate(y * oppgave1a, (y, 1, 4))

# Beregner E(Y^2)
E_Y2 = sp.integrate(y**2 * oppgave1a, (y, 1, 4))

# Beregner variansen for Y
var = E_Y2 - E_Y**2
```

```
# Beregner standardavviket for Y
std = sp.sqrt(var)

print(f"Forventningsverdien er {round(E_Y, 2)}\nVariansen er {round(var, 2)} \nStandarda
```

```
Forventningsverdien er 2.33
Variansen er 0.76
Standardavviket er 0.87.
```



Theorem 4.2 s.149 $\left(f(x) = x^k \Rightarrow \int \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \right)$

b) $\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$

$E[y^2] = \int_1^4 y^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) dy \Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{y^2}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^4 y^{2-\frac{1}{2}}$ $\quad 2-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\cdot 2-1}{1\cdot 2} = \frac{4}{2}-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$E(y^2) = \frac{1}{2}\int_1^4 y^{\frac{3}{2}}\, dy$ $\quad \int y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{y^{(\frac{3}{2})+1}}{\frac{3}{2}+1} + C \Rightarrow \frac{y^{\frac{3}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{3}{2}+\frac{2}{2}} \Rightarrow \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{\cancel{2}}} \cdot \cancel{2} =$

$\boxed{\frac{2}{5} \cdot y^{\frac{5}{2}}}$ $\quad E(y^2) \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}}\right]_{y=1}^{y=4} \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\cdot 4^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}\cdot 1\right]$ $\quad 4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5} = \sqrt{1024} = 32$

$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{5}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{64}{5} - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{62}{5}\right) \Rightarrow$

$E(y^2) = \frac{31}{5}$

E(y) forrige side.

$\frac{31}{5} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{31}{5} - \frac{49}{9} = \frac{31\cdot 9}{5\cdot 9} - \frac{49\cdot 5}{9\cdot 5}$

$\Rightarrow \frac{279}{45} - \frac{245}{45} = \frac{34}{45}$

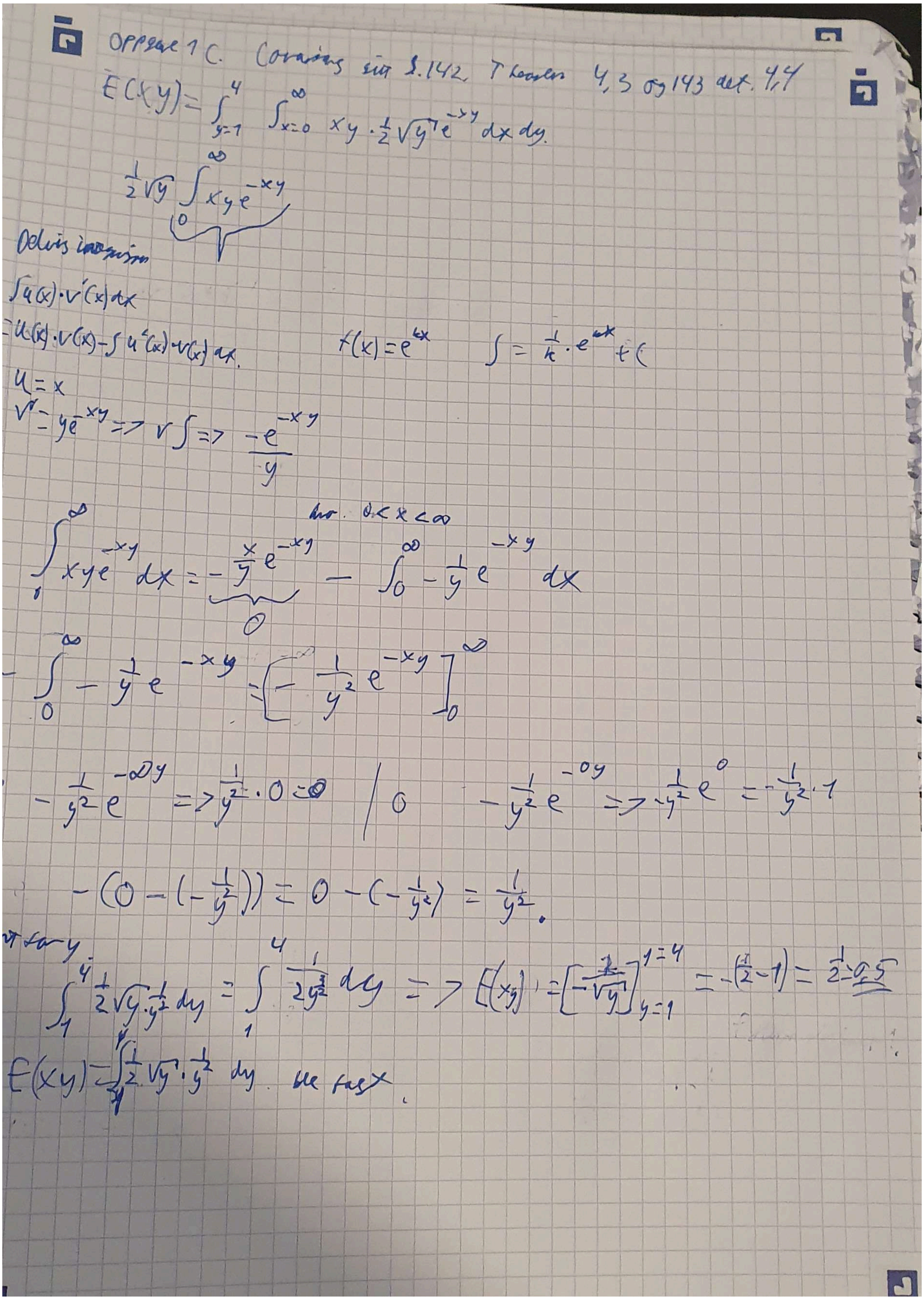
$Var(Y) = \frac{34}{45} = 0{,}755$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{34}{45}} = 0{,}8692\ldots$

c) Bruk den simultane sannsynlighetstettheten til å finne $E(XY)$ og $E(X)$.

Hva blir kovariansen mellom X og Y?



Oppgave 1C. Covariance side 3.142, Theorem 4,3 og 143 def. 4,4

$$E(XY) = \int_{y=1}^{4} \int_{x=0}^{\infty} xy \cdot \frac{1}{2}\sqrt{y}\, e^{-xy}\, dx\, dy.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{y} \int_0^{\infty} xy e^{-xy}$$

Delvis integrasjon

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

$$= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx. \qquad f(x) = e^{kx} \qquad \int = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C$$

$u = x$

$$v' = ye^{-xy} \Rightarrow v \int \Rightarrow \frac{-e^{-xy}}{y}$$

hvor $0 < x < \infty$

$$\int_0^{\infty} xye^{-xy}\, dx = \underbrace{-\frac{x}{y} e^{-xy}}_{0} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{y} e^{-xy}\, dx$$

$$-\int_0^{\infty} -\frac{1}{y} e^{-xy} = \left[-\frac{1}{y^2} e^{-xy}\right]_0^{\infty}$$

$$-\frac{1}{y^2} e^{-\infty y} \Rightarrow \frac{1}{y^2} \cdot 0 = 0 \quad \Big| \quad 0 \quad -\frac{1}{y^2} e^{-0y} \Rightarrow -\frac{1}{y^2} e^{0} = -\frac{1}{y^2} \cdot 1$$

$$-\left(0 - \left(-\frac{1}{y^2}\right)\right) = 0 - \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y^2}.$$

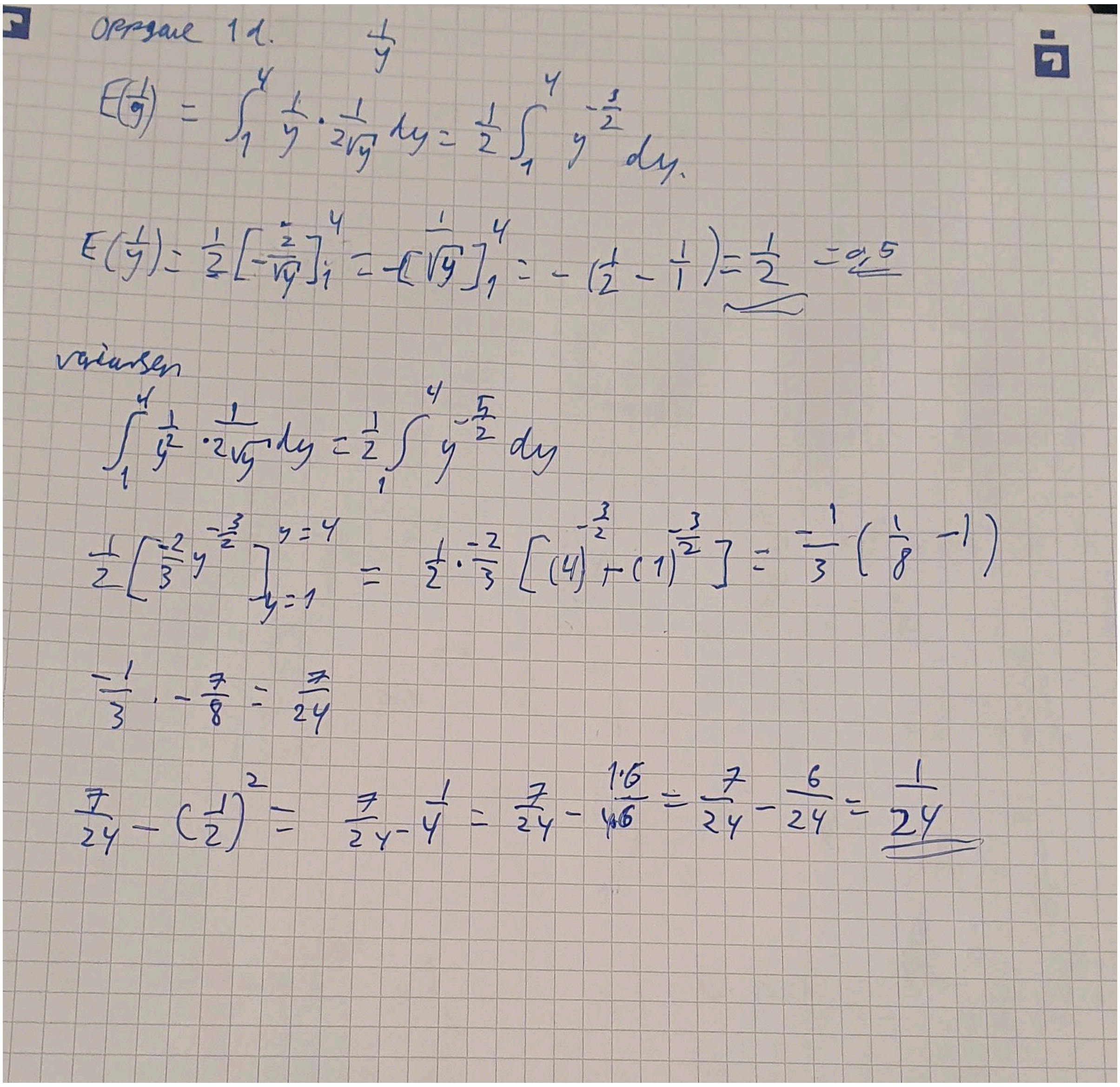
for y:

$$\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{y} \cdot \frac{1}{y^2}\, dy = \int_1^4 \frac{1}{2y^{3/2}}\, dy \Rightarrow E(XY) = \left[-\frac{1}{\sqrt{y}}\right]_{y=1}^{y=4} = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$E(XY) = \int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{y} \cdot \frac{1}{y^2}\, dy$$ ble feil

Vi er interessert i den stokastiske variabelen $1/Y$.

d) Finn forventningsverdi og varians for $1/Y$.



Oppgave 1d. $\frac{1}{y}$

$$E\left(\frac{1}{y}\right) = \int_1^4 \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy = \frac{1}{2} \int_1^4 y^{-\frac{3}{2}}\, dy.$$

$$E\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\sqrt{y}}\right]_1^4 = -\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]_1^4 = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2} = 0.5$$

varianse

$$\int_1^4 \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy = \frac{1}{2} \int_1^4 y^{-\frac{5}{2}}\, dy$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{3} y^{-\frac{3}{2}}\right]_{y=1}^{y=4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3}\left[(4)^{-\frac{3}{2}} - (1)^{-\frac{3}{2}}\right] = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{8} - 1\right)$$

$$\frac{-1}{3} \cdot -\frac{7}{8} = \frac{7}{24}$$

$$\frac{7}{24} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{24} - \frac{1}{4} = \frac{7}{24} - \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{7}{24} - \frac{6}{24} = \frac{1}{24}$$

2

Ola samler på spillerkort av fotballspillere (fotballkort). Korta kjøper han ett og ett av gangen, men de er innpakka så han veit ikke på forhand om det er et kort han allerede har eller ikke. Vi går ut fra at alle korta han kjøper er fra en spesiell serie med 10 ulike spillerkort, at det i hvert kjøp er lik sannsynlighet for alle de 10 ulike spillerkorta, og at resultata av kortkjøpa er uavhengige. Ola ønsker seg framfor alt ett bestemt spillerkort (vi kaller han spiller A). La X være antall kort han må kjøpe til han får dette kortet.

a1) Forklar hvorfor antakelsene til geometrisk fordeling er oppfylt.

Det er en konstant sannsynlighet for suksess på hvert forsøk.

Forsøkene er uavhengige av hverandre. utfallet av et kjøp ikke påvirker utfallet av de neste.

Forsøket blir gjentatt til første suksess

Det er to mulige utfall på hvert forsøk, enten får han kortet eller ikke.

a2) Hva er sannsynligheten for at han får spillerkortet på det fjerde kjøpet?

```
sjangse = 1/10
x_num = 4
q_num = 1-sjangse

oppgave_2_b = sjangse*q_num**(x_num-1)
oppgave_2_b
```

```
0.0729
```

a3) Dersom han ikke fikk spillerkortet på det første kjøpet, hva er sannsynligheten for at han skal få det på det femte?

det samme som i a3)

Vi vil se på det som en teoretisk egenskap ved geometrisk fordeling. Vi antar i b) at antall kjøpte kort følger geometrisk fordeling med generell sannsynlighet p.

b) Bruk punktsannsynligheten til geometrisk fordeling til å vise at

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Punktssannsynligheten til geometrisk fordeling er gitt ved $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ så forventningsverdien blir $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p$. summen av denne rekken er $E(X) = \frac{1}{p}$

La oss nå tenke oss at det er to spillkort (spiller A og B) Ola spesielt ønsker seg, og at han kjøper kort til han har fått begge. La X være antall kjøp til han får det første av disse spillerkorta, og la Y være antall kjøp etter han fikk det første til han får det andre. La T være hvor mange kort han må kjøpe totalt for å få disse to spillerkorta:

$$T = X + Y$$

c) Argumentér kort for hvorfor X og Y er uavhengige, og hva som blir fordeling for hver enkelt.

X og Y er uavhengige fordi utfallet av kjøpene som leder til det første ønskede kortet ikke påvirker utfallet av kjøpene etter det første ønskede kortet er oppnådd. Når Ola starter jakten på det andre kortet, resettes situasjonen til en ny geometrisk fordeling. Fordelingen av X starter med p=2/10 fordi det er to kort han ønsker seg, og for Y starter fordelingen med p=1/9 fordi det nå kun er ett kort han ønsker seg.

Bruk formler for forventning/varians i geometrisk fordeling til å finne forventning og varians til T.

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$E(T) = E(X) + E(Y)$ fordi $T = X + Y$ og X og Y er uavhengige. så $E(T) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$ setter inn for tall: $E(T) = \frac{1}{\frac{2}{2/10}} + \frac{1}{\frac{1}{9}} = 14$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

så $Var(T) = Var(X) + Var(Y)$ fordi X og Y er uavhengige. så $Var(T) = \frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2} = \frac{2(1-p)}{p^2}$. setter inn for tall: $Var(T) = \frac{(1-2/10)}{(2/10)^2} + \frac{1-\frac{1}{9}}{(\frac{1}{9})^2} = 92$

d) Argumenter for hva som er fordelinga for antallet kort i pakka som er med spiller A?

Fordelingen for antall kort i pakka er en binomisk fordeling med n=10 og p=1/10. Dette er fordi det er 10 kort i pakka og sannsynligheten for at et kort er spiller A er 1/10.

Hva er sansynligheten for at Ola får minst ett kort med spiller A i pakka?

```python
from scipy.stats import binom
n = 10
p = 1/10
k = 1
oppgave_2_d = 1 - binom.cdf(k-1, n, p)
oppgave_2_d
```

```
0.6513215599000001
```

e) Hva er forventa antall ulike spillerkort i pakka? (Hint: Indikatorvariabler for hvert spillerkort.)

Hvis vi går ut ifra at det er 10 kort i pakka så kan vi beregne forventet antall ulike spillerkort i pakka ved å summere sannsynligheten for at hvert kort blir valgt minst en gang $E(X) = 10 \cdot (1 - (9/10)^{10}) = 10 \cdot (1 - 0.3487) = 6.513$

$\frac{[illegible]}{24} - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{[illegible]}{24} - \frac{[illegible]}{4} = \frac{[illegible]}{24} - \frac{[illegible]}{16} = \frac{[illegible]}{24} - \frac{[illegible]}{24} = \underline{\underline{\frac{[illegible]}{24}}}$

Oppgave 2 a2) og 3 $\quad g(x;p) = pq^{x-1}$

$q = 1 - p$

$p = \frac{1}{10}$

$x = 4$

$$(0,1)(0,9)^4 = 0,0729 \text{ altså } 7,29\ \%$$

c) $Var(T) = Var(X) + Var(Y)$ $\qquad E(T) = \frac{1}{\frac{2}{10}} + \frac{1}{\frac{1}{9}} = \underline{14}$

$$Var(T) = \frac{1-0,2}{0,2^2} + \frac{1-\frac{1}{9}}{\left(\frac{1}{9}\right)^2} = \underline{92}$$

Så trenger i snitt 14 forsøk.

3

Vi definerer en enhet av en råvare (kan være gull, olje, korn, etc) som den mengden du får kjøpt for M NOK (det er ikke viktig hva M er). Du regner med at om du kjøper en enhet av vare A blir fortjenesta etter ett år normalfordelt med forventning $\mu A = 50$ NOK og standardavvik σ A $= 100$ NOK. Vi kaller fortjenesta X:

a) Om du kjøper en slik enhet av vare A hva blir sannsynligheten for

- at du ikke går med tap (det vil si får positiv fortjeneste)?

```python
from scipy.stats import norm


mu = 50
sigma = 100





1 - norm.cdf(0, mu, sigma)
```

```
0.6914624612740131
```

69.15%

- at du ikke går med tap og at fortjenesten er mindre enn 150?

```python
norm.cdf(150, mu, sigma) - norm.cdf(0, mu, sigma)
```

```
0.532807207342556
```

- at du får fortjeneste mindre enn 150, gitt at du ikke går med tap?

```python
(norm.cdf(150, mu, sigma) - norm.cdf(0, mu, sigma))/(1 - norm.cdf(0, mu, sigma))
```

```
0.7705511682598991
```

b) Finn fortjenesten som er slik at du er 80% sikker på å få en fortjeneste over dette.

```python
norm.ppf(0.80)*100+50
```

```
134.16212335729142
```

(I oppgave c) er fortsatt standardavviket 100 NOK.)

c) Hva må forventningsverdien være for å ha en sannsynlighet på 90% for ikke å gå med tap

```python
norm.ppf(0.9)*100
```

```
128.15515655446004
```

Oppgave 3. $\mu_A = 50$, $\sigma_A = 100$ X = forsinkelse

a)

i $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{0-50}{100} = -\frac{50}{100} \Rightarrow z = -0,5$

tabell

$= 1 - 0,3085 = 0,6915 \Rightarrow 69,15\%$

ii $\frac{150-50}{100} = \frac{-100}{100} = -1 \Rightarrow 0,8413 - 0,3085 = \underline{0,5328}$ $53,28\%$

iii $\frac{0,5328}{0,6915} = \underline{0,7705}$

b) $0,842 \cdot 100 + 50 = \underline{134,16}$

c) $1,282 \cdot 100 = \underline{128}$

4

Har brukt tiden min dårlig så når ikke å gjøre denne oppgaven før fristen

Vi definerer igjen en enhet av en vare som den mengden du får kjøpt for M NOK. Nå vil du kjøpe to varer, vare A og vare B, og du regner med at fortjenestene for en enhet etter ett år er respektive

$$X \sim N(\mu A, \sigma A) \quad \text{og} \quad Y \sim N(\mu B, \sigma B)$$

Vi antar og at X og Y er uavhengige

Vi vil se på total fortjeneste etter ett år om du til sammen har kjøpt for beløpet M , men bruker 30% på vare A og 70% på vare B, altså total fortjeneste gitt ved:

$$T = 0.3 \cdot X + 0.7 \cdot Y$$

I oppgave a) og b) går vi ut fra at μA = 50, μB = 50, σA = 100 og σB = 50.

a) Finn forventningsverdien og variansen til den totale fortjenesta.

Hva blir fordelinga til den totale fortjenesta?

b) Bruk fordelinga fra a) til å finne et 95% prediksjonsintervall for den totale fortjenesta.

Nå går vi ut fra at du vil kjøpe varer av type A og B slik at total forjeneste blir

$$T = aX + bY,$$

der $a + b = 1$ og a og b er ikke-negative.

Du ønsker å finne hva a (og b) må være for at variansen i fortjenesta skal bli minst mulig.

c) Hva blir uttrykket for variansen til T ?

Hva er den verdien av a (uttrykt ved σA og σB) som gjør variansen for fortjenesta minst mulig? Hva blir variansen til fortjenesta (uttrykt ved σA og σB) med denne verdian for A?

Frivillig: Anta igjen σA = 100, σB = 50, og lag en figur for variansen til T som funksjon av a.