OPPGAVER UKE 8-9, STA-1001 2024

Fra læreboka og oppgavene under:

5.9, 5.18, 5.22, 5.32, 5.52, 5.71, A1, A2, A3, A4.

Andre oppgaver:

1

For geometrisk fordeling har at

$$f(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

a) Vis at den kumulative fordelingsfunksjonen $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^{x} f(k)$ blir

$$F(x) = 1 - (1-p)^x, \quad x = 1, 2, \ldots$$

Hint: "Noen rekker" fra Tablle- og formelsamlinga.

b) Vis at for positivt heiltall x_0 har vi at

$$P(X = x_0 + x \,|\, X > x_0) = P(X = x)$$

Ser du hvorfor dette tolkes som at fordelinga er "minneløs".

2*

Ola samler på spillerkort av fotballspillere (fotballkort). Korta kjøper han ett og ett av gangen, men de er innpakka så han veit ikke på forhand om det er et kort han allerede har eller ikke.
Vi går ut fra at alle korta han kjøper er fra en spesiell serie med 10 ulike spillerkort, at det i hvert kjøp er lik sannsynlighet for alle de 10 ulike spillerkorta, og at resultata av kortkjøpa er uavhengige.
Ola ønsker seg framfor alt ett bestemt spillerkort (vi kaller han spiller A). La X være antall kort han må kjøpe til han får dette kortet.

a) Forklar hvorfor antakelsene til geometrisk fordeling er oppfylt.
Hva er sannsynligheten for at han får spillerkortet på det fjerde kjøpet?
Om han ikke fikk spillerkortet på det første kjøpet, hva er sannslynligheten for at han skal få det på det femte?

Vi vil se litt på en teoretisk egenskap ved geometrisk fordeling. Vi antar i b) at antall kjøpte kort følger geometrisk fordeling med generell sannsynlighet p.

b) Bruk punktsannsynligheten til geometrisk fordeling til å vise at

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

La oss nå tenke oss at det er to spillerkort (spiller A og B) Ola spesielt ønsker seg, og at han kjøper kort til han har fått begge. La X være antall kjøp til han får det første av disse spillerkorta, og la Y være antall kjøp etter han fikk det første til han får det andre. La T være hvor mange kort han må kjøpe totalt for å få disse to spillerkorta:

$$T = X + Y$$

c) Argumentér kort for hvorfor X og Y er uavhengige, og hva som blir fordeling for hver enkelt.
Bruk kjente formler for forventning og varians i geometrisk fordeling til å finne forventning og varians til T.

La oss nå tenke oss at Ola ikke kan kjøpe ett og ett kort, men pakker av n = 20 kort av gangen, forutsetningene er ellers de samme som før. Han kjøper ei slik pakke.

d) Hva er fordelinga for antallet kort i pakka som er med spiller A?
Hva er sansynligheten for at Ola får minst ett kort med spiller A i pakka?

e) Hva er forventa antall ulike spillerkort i pakka? (Hint: Indikatorvariabler for hvert spillerkort.)

3 (utfordrende)

I et finalespill skal lag A og B spille en 2 av 3-serie eller en 3 av 5-serie. Anta uavhengige kamper, og at lag A har 55% sannsynlighet for å vinne hver kamp.

a) Hvilken type serie bør lag A håpe blir valgt?

b) Gitt at det velges en 3 av 5-serie, hva er sannsynligheten for at det blei spilt akkurat 4 kamper? (Serien avsluttes når ett lag har vunnet 3 kamper.)

c) Gitt at det i en 3 av 5-serie blei spilt akkurat 4 kamper, hva er sannsynligheten for at det var lag A som vant serien

4

La X angi antall jordskjelv som inntreffer et sted over en tidsperiode av lengde t. Vi antar at X er Poisson-fordelt med rate $\lambda = 7$ per år.

a) Finn sannsynligheten for akkurat 7 jordskjelv i løpet av 1 år.
Finn sannsynligheten for at det kom minst 3 jordskjelv på 1/2 år.

b) Hva må λ være for at det skal være en sannsynlighet på over 50% for minst 1 jordskjelv i løpet av 3 måneder?

Oppgaver merka med “*” vil komme på obligatorisk øving.