Cálculo Numérico

Métodos Iterativos para Sistemas Não-Lineares

A. Em alguns casos, é possível transformar um sistema não-linear em um processo iterativo vetorial que possua, como ponto fixo assintoticamente estável, a solução do sistema. Em geral, a maneira mais fácil de realizar esta construção é tentando construir provessos iterativos que sejam contrações.

1. Considere o sistema dado por

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) &= \dfrac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2+0.1)^2 + \sin(x_3) &= -1.06 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 &= \dfrac{3-10\pi}{3} \end{cases}.$$

   Mostre que ele pode se reescrito da forma

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n),$$

   com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e com a função $\mathbf{g} = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x}))$, com suas componentes determinadas isolando-se x_i na i-ésima do sistema.

2. Inicialmente, precisamos mostrar que, $\mathbf{g} : \Omega \to \Omega$, com $\Omega \subset I\!R^3$. Vamos tomar

$$\Omega = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1].$$

   Mostre que $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \Omega \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$.

3. Agora, precisamos mostrar que existe uma constante $0 < \sigma < 1$ tal que $|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})| \leq \sigma|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$. Um resultado alternativo, e mais fácil de ser determinado, para alguns casos de contrações, é que $\mathbf{g}$ é uma contração se

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq \kappa \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

   com $\kappa < 1$. Mostre que, para o sistema acima, $\kappa \approx 0.281$ e, portanto, $\mathbf{g}$ é uma contração.

4. Implemente o processo iterativo definido por $\mathbf{g}$ e mostre que, com chute inicial $(0.1, 0.1, 0.1)$, o sistema converge para o ponto fixo $\mathbf{x}^* \approx (0.5, 0.00\ldots, -0.52\ldots)$.

5. Implemente, no seu algoritmo, uma abordagem de Gauss-Seidel no processo iterativo, isto é, use os valores conhecidos de x_i^n para calcular as valores de $x_j^n, \quad \forall j > i$. Você percebe uma aceleração da convergência?

6. Repita o procedimento para o sistema

$$\begin{cases} 5x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) &= 0 \end{cases},$$

   que tem uma solução nas vizinhanças de $(0.25, 0.25)$.

B. Resolva os seguintes sistemas de equações não-lineares usando o método de Newton-Raphson para sistemas. O chute inicial $\mathbf{x}^0$ é dado em alguns casos. Lembre-se que você deve escolher um método para a solução do sistema linear que aparecerá no procedimento. Teste diferentes escolhas e compare a eficiência global de cada processo.

1. $\begin{cases} 4x^2 - 20x + \dfrac{1}{4}y^2 = -8 \\ \dfrac{1}{2}xy^2 - 2x - 5y = -8 \\ \mathbf{x}^0 = [0\ 0]^T \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - \cos(xy) = \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 625y^2 + 2y = 1 \\ \mathrm{e}^{-xy} + 20z + \dfrac{10}{3}\pi = 1 \\ \mathbf{x}^0 = [0\ 0\ 0]^T \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 3 \\ x^2 - y^2 = 2 \\ \text{Todas as soluções} \end{cases}$

Teste a sensibilidade da solução à condição inicial. É possível encontrar um chute inicial que leve a outras soluções dos sistemas 1 a 3?

C. Seja resolver o sistema $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ do exercício **A** por meio do algoritmo de descida mais íngrime,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \alpha_n \mathbf{d}_n,$$

em que α_n é o tamanho do passo que se dá na direção $\mathbf{d}_n$ no passo $n+1$. Para implementar este algoritmo, vamos considerar que começamos do chute inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$.

1. Mostre que, definindo a função

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} \Big(f_i(\mathbf{x})\Big)^2,$$

temos que $g(\mathbf{x}_0) \approx 111.975\ldots$. Além disto, mostre que

$$\nabla g(\mathbf{x}) = 2\Big(\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})\Big)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

e que, portanto

$$\mathbf{d}_0 = -\frac{\nabla g(\mathbf{x}_0)}{|\nabla g(\mathbf{x}_0)|} \approx (-0.0214\ldots, -0.0193\ldots, 0.9995\ldots).$$

2. Suponha que você defina $\alpha_n = \alpha = 10^{-5}$ constante. Faça 20 iterações deste método e determine a aproximação que você encontrou. Compare-a com o resultado obtido no exercício **A**.

3. Vamos utilizar uma maneira mais adequada para determinar α_n. Mostre que, para o primeiro passo, podemos realizar a busca na linha no intervalo $[0, 1]$. Para isto, verifique que $g(\mathbf{x}_0) < g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_0)$. Em seguida, construa o polinômio $p(\alpha)$ que interpola os pontos $(0, g(\mathbf{x}_0))$, $(0.5, g(\mathbf{x}_0 + 0.5\mathbf{d}_0))$ e $(1, g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_0))$, e mostre que $\alpha_0 \approx 0.5229\ldots$, o ponto de mínimo do polinômio interpolador, é tal que $g(\mathbf{x}_0 + \alpha_0\mathbf{d}_0) < g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_0)$. Assim, determine o valor de $\mathbf{x}_1$. Compare o valor de $\mathbf{x}_1$ com o valor de $\mathbf{x}_{20}$ obtido no item anterior.

4. Realize novas iterações do método, e mostre que são necessárias cerca de 70 iterações para encontrar a solução do sistema com precisão de 10^{-2}.

5. Considere realizar apenas 4 iterações do método da descida mais íngrime e, com o resultado obtido, usar o método de Newton-Raphson para calcular a solução. Com quantas iterações você encotraria a solução com a mesma precisão acima?

6. Resolva os sistemas da questão **B** pelo método da descida mais íngrime.