Solução de Sistemas Algébricos Lineares

Métodos Diretos

Prof. Yuri Dumaresq Sobral

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

2025

De uma a várias equações...

Já aprendemos como resolver uma equação algébrica usando técnicas de processos iterativos.

Agora, queremos aprender como resolver um sistema de equações algébricas acopladas do tipo

$$\begin{cases} \sin(z) + \sqrt{x} - y = 10 \\ 4\log(z) - \dfrac{1}{x} + y^2 = 3 \\ 3z^{\frac{3}{2}} + \mathrm{e}^{-x} + \cos(2\pi y) = 0 \end{cases}$$

Problemas como este podem ser muito difíceis de resolver...
Vamos começar com um problema mais simples...

Sistemas de equações lineares

Vamos começar resolvendo sistemas de equações lineares!

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sabemos que este sistema pode ser reescrito em uma forma matricial da seguinte forma:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Em que cada um dos termos é dado por:

Sistema de equações lineares

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- A é a matriz dos coeficientes, de ordem $m \times n$
- $\mathbf{x}$ é o vetor das incógnitas, de ordem n
- $\mathbf{b}$ é o vetor solução, de ordem m

Propriedades básicas de matrizes

Vamos assumir familiaridade com álgebra matricial corriqueira dos cursos de 2º grau, isto é, vamos assumir que todos sabem:

- somar matrizes e multiplicar matrizes por números;
- multiplicar matrizes (cuidado com os índices!):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2\ell} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{n\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1\ell} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2\ell} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{m\ell} \end{bmatrix}$$

em que cada elemento da matriz resultante é dado por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Propriedades básicas de matrizes

- que o produto de matrizes NÃO é comutativo, $AB \neq BA$;

- que a matriz transposta é definida como $[A^T] = a_{ij}^T = a_{ji}$;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m1} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- que matrizes são chamadas de quadradas quando $m = n$, e que a chamamos de matriz de ordem n;

- que Matriz identidade é aquela que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, isto é, apenas os elementos da diagonal principal são não-nulos;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades básicas de matrizes

• que matriz inversa de uma matriz quadrada A, chamada de A^{-1}, é tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I;$$

• que uma matriz singular é aquela que não possui inversa e que isto acontece quando $\det A = 0$.

Todas estas propriedades vão ser importantes para desenvolvermos um algoritmo para resolver um sistema linear, pois o computador vai manipular as matrizes que o representam!

ATENÇÃO:

Vamos assumir, daqui para frente, que A será uma matriz quadrada de ordem n e $\det A \neq 0$, para que os sistemas sejam possíveis e determinados.

O método mais elementar...

Conhecemos *vários* métodos (analíticos) para resolver sistemas lineares, mas a maioria deles só é adequados para sistemas pequenos!

O método mais simples que conhecemos para sistemas um pouco maiores é a eliminação gaussiana, que é um método naturalmente computacional!

A eliminação gaussiana consiste em manipular o sistema de forma a isolar uma variável e depois, por substituição, encontrar as outras variáveis.

Podemos fazer todas estas operações elementares na matriz que representa o sistema!

Eliminação gaussiana

As operações elementares:

- Troca de linhas dentro da mesma matriz;
- Multiplicação de uma linha por um número ($\neq 0$);
- Substituição de uma linha pela sua soma com uma combinação linear doutras linhas da matriz;
- Substituição de uma coluna da matriz pela sua soma com uma combinação linear de outras colunas da matriz;

...não alteram a solução do sistema!

Vamos relembrar este método com um exemplo!

Eliminação gaussiana

Resolver por eliminação gaussiana o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] = M$$

M é a matriz aumentada do sistema.

Passo 1 Eliminar o termo na variável x_1 da segunda equação. Para isto, vamos modificar a linha 2 de M usando a linha 1 para que apareça um 0 na sua primeira coluna:

$$\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1$$

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad M_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Eliminação gaussiana

Passo 2 Eliminar o termo na variável x_1 da terceira equação.
Modificar a linha 3 de M_1 usando a linha 1 para que apareça um 0 na sua primeira coluna:

$$\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 1\ell_1$$

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad M_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Com estes dois passos, eliminamos a variável x_1 da segunda e da terceira equações!

Vamos agora eliminar a variável x_2 da terceira equação!

Eliminação gaussiana

Passo 3 Eliminar o termo na variável x_2 da terceira equação. Modificar a linha 3 de M_2 usando a linha 2 para que apareça um 0 na sua segunda coluna:

$$\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \left(-\frac{1}{2}\right)\ell_1$$

$$M_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad M_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

Agora temos um sistema bem simples para resolver!

Eliminação gaussiana

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 - x_3 = 3 \\ \phantom{x_1 + 2x_2 -{}} \frac{5}{2}x_3 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes do sistema agora é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = U$$

...que é uma matriz TRIANGULAR SUPERIOR, isto é, seus elementos u_{ij} são sempre nulos quando $i > j$.

Eliminação gaussiana

Portanto, a eliminação gaussiana constrói matrizes triangulares superiores se tudo der certo.

Os elementos da diagonal da matriz M_k, construída no k-ésimo passo do processo de eliminação gaussiana são muito importantes... note que:

$$\ell_p^k \leftarrow \ell_p^k - \lambda_{pq}^k \ell_q^k,$$

$$\lambda_{pq}^k = \frac{m_{pq}^k}{m_{qq}^k}.$$

Estes elementos m_{qq}^k são chamados de pivôs do processo no passo k e são cruciais na construção da matriz triangular superior resultante.

Eliminação gaussiana

Além disto, agora vemos que algumas coisas podem dar errado no processo. Os pivôs não podem ser nulos!

Se os pivôs forem nulos, por enquanto, não podemos proceder com o método. Mais para frente vamos aprender a resolver este problema.

Vamos montar um algoritmo para realizar a eliminação gaussiana:

Faça $j = 1 \to n$
  Se $m_{jj} = 0$, pare!
  Senão, então
    Faça $i = j + 1 \to n$
$$\lambda_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_{jj}}$$
$$\ell_i \leftarrow \ell_i - \lambda_{ij}\ell_j$$
Termine.

O novo sistema envolvendo a matriz U pode ser facilmente resolvido por substituição reversa:

$$x_n = \frac{b_n}{p_n},$$

$$x_i = \frac{1}{p_i}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k\right),\ \ i = n-1 \to 1.$$

Ou seja, percorremos a matriz de baixo para cima (por isto substituição reversa!) encontrando cada uma das incógnitas!

Vamos, agora, tentar interpretar melhor as operações elementares que usamos no método eliminação gaussiana.

Eliminação gaussiana

Cada operação elementar do tipo $\ell_i \leftarrow \ell_i - \lambda_{ij}\ell_j$ pode ser interpretada... por uma matriz!

Considere uma matriz A e uma matriz E:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando dá o produto EA?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - 2a_{11} & a_{22} - 2a_{12} & a_{23} - 2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Eliminação gaussiana

Então, conseguimos representar a operação elementar de combinação linear de linhas com uma matriz! A matriz E é chamada de matriz elementar e é dada por:

$$\ell_p \leftarrow \ell_p + \lambda_{pq}\ell_q \quad \leftrightarrow \quad [E]_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \ \ \text{(na diagonal)} \\ \lambda_{pq} \ \text{em} & i = p, \ j = q \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$$

Para o nosso sistema do exemplo, temos três matrizes elementares:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação gaussiana

De forma que o processo que descrevemos em detalhe da eliminação gaussiana pode ser escrito de forma bem compacta como:

$$E_3 E_2 E_1 A = U$$

Atenção: a primeira operação é representada por E_1, a matriz que fica mais próxima de A pela esquerda.

Note que as matrizes elementares são inversíveis, pois $\det E_k \neq 0$. Então, a partir da matriz U, podemos recuperar a matriz A simplesmente fazendo:

$$E_3 E_2 E_1 A = U \;\Leftrightarrow\; A = (E_3 E_2 E_1)^{-1} U = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} U$$

Mas quem são estas matrizes inversas?

Eliminação gaussiana

Note que estas matrizes são muito fáceis de serem invertidas!

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_1^{-1} = L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pois } L_1 E_1 = I.$$

Portanto, para inverter uma matriz elementar E basta trocar $-\lambda_{pq}$ por λ_{pq}. A inversa nada mais é que uma nova matriz elementar para desfazer a combinação linear que foi feita por E. Portanto:

$$\left(E_3 E_2 E_1\right)^{-1} = L_1 L_2 L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 L_2 L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = L$$

Fatoração LU

A matriz L é uma matriz TRIANGULAR INFERIOR em que todos os elementos da diagonal são 1.

Os elementos que aparecem abaixo da diagonal são os λ_{ij} que apareceram na eliminação gaussiana!

Assim, note que podemos reescrever a matriz dos coeficientes A como:

$$A = IA = L_1 E_1 A = L_1 I E_1 A = L_1 L_2 E_2 E_1 A = L_1 L_2 I E_2 E_1 A =$$

$$= L_1 L_2 L_3 E_3 E_2 E_1 A = \underbrace{L_1 L_2 L_3}_{=L} \underbrace{E_3 E_2 E_1 A}_{=U} = LU$$

Acabamos de fatorar a matriz dos coeficientes $A = LU$. Esta é a chamada FATORAÇÃO LU de A.

Fatoração LU

Portanto, ao final da FATORAÇÃO LU, teremos $A = LU$, com:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1,1} & \lambda_{n-1,2} & \lambda_{n-1,3} & \cdots & 1 & 0 \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \lambda_{n,3} & \cdots & \lambda_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} p_1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1,n} \\ 0 & p_2 & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2,n} \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

Note que aqui assumimos que a matriz A admite uma fatoração LU. Se isto for verdade, dizemos que A é regular. Para isto precisamos que $p_i \neq 0, \ \forall i$.

Porém, qual é a vantagem de termos a matriz A forma fatorada?

Porque assim fica muito fácil resolver um sistema linear repetidas vezes!

Fatoração LU

Note que:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow LU\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow L(U\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} L\mathbf{c} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{c} \end{cases}$$

Transformamos um sistema linear cheio (em que a matriz A tem vários elementos não-nulos acima e abaixo da diagonal) em dois sistemas triangulares!

O sistema envolvendo a matriz L pode ser facilmente resolvido por substituição direta:

$$c_1 = b_1 \ , \quad c_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} c_k, \ \ i = 2 \to n$$

O sistema envolvendo a matriz U pode ser facilmente resolvido por substituição reversa, como já vimos na eliminação gaussiana.

Fatoração LU

Vemos, portanto, que a fatoração LU pode ser uma ferramenta vantajosa para resolver vários sistemas lineares associados à mesma matriz de coeficientes A.

Por exemplo, para calcularmos a inversa da própria matriz A, podemos pensar em resolver:

$$AA^{-1} = I \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i \ , \quad i = 1 \to n$$

com

$$I = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \quad e \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

Note que apesar de resolvermos n sistemas, a fatoração LU da matriz A somente precisa ser calculada uma vez.

Em sistemas muito grandes, o custo principal virá da fatoração LU (pode ser muito grande!), e a solução dos sistemas terá um custo marginal.

Até agora, assumimos que A é uma matriz regular. Mas o que fazer se, durante a fatoração LU da matriz A aparecer um pivô nulo?

Neste caso, precisamos introduzir uma nova operação elementar em nosso algoritmo de eliminação gaussiana: o pivoteamento.

Pivoteamento

Esta operação consiste em trocar linhas de posição para que troquemos o pivô nulo por um outro pivô não-nulo. Ou seja, fazemos uma permuta de linhas.

Se numa linha $i = k$ aparecer $p_k = 0$, então devemos buscar nas linhas $k + 1 \to n$ uma linha qualquer m em que $p_m \neq 0$.

Posteriormente, fazemos:

$$\ell_k \leftarrow \ell_m \quad e \quad \ell_m \leftarrow \ell_k$$

Atenção na hora de programar este passo, para não perder a linha k e terminar com uma matriz com as linhas ℓ_k e ℓ_m idênticas!

Pivoteamento

Vamos ver um exemplo:

$$\begin{cases} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Temos um pivô nulo já na primeira linha. Então, fazemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

E, depois desta permuta, seguimos com a eliminação gaussiana normalmente...

Pivoteamento

Será que conseguimos representar a operação de permuta de linhas de uma forma matricial? SIM!

Seja a matriz identidade I representada por:

$$I = \begin{bmatrix} - & \mathbf{e}_1 & - \\ - & \mathbf{e}_2 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & \mathbf{e}_k & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & \mathbf{e}_n & - \end{bmatrix}$$

Uma permutação das linhas da matriz identidade gerará uma matriz de permutação, P:

Pivoteamento

$$P = \begin{bmatrix} - & \mathbf{e}_1 & - \\ - & \mathbf{e}_k & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & \mathbf{e}_2 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & \mathbf{e}_n & - \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{l} \ell_2 \leftarrow \ell_k \\ \ell_k \leftarrow \ell_2 \end{array}$$

Esta matriz de permutação faz a permutação das linhas $i = 2$ e $i = k$.

Exemplo anterior:

$$PM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Pivoteamento

Propriedades:

- Uma matriz identidade de ordem n admite $n!$ matrizes de permutação diferentes.
- Produtos de matrizes de permutação são matrizes de permutação.
- Pela não-comutatividade do produto, $P_1 P_2 \neq P_2 P_1$ para quaisquer duas matrizes de permutação.
- Matrizes de permutação têm determinante igual a $+1$ ou -1.

A pergunta que devemos fazer agora é: será que sempre conseguiremos encontrar n pivôs não-nulos para realizar a eliminação gaussiana numa matriz A? A resposta é a seguinte:

Pivoteamento

Teorema: Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes condições são equivalentes:

1. A não é singular.
2. A tem n pivôs não-nulos.
3. Existe uma matriz P tal que $PA = LU$.

Portanto, se um sistema de n equações lineares admitir uma solução única, seremos capazes de resolvê-lo por eliminação gaussiana/fatoração LU. Isto é:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad PA\mathbf{x} = P\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad LU\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{b}} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{c} \end{cases}$$

onde $\tilde{\mathbf{b}} = P\mathbf{b}$ é o vetor solução permutado.

Pivoteamento

A partir deste ponto, usamos normalmente as substituições direta e reversa para resolver os dois sistemas triangulares resultantes.

O algoritmo para a eliminação gaussiana com pivoteamento é o seguinte:

Faça $j = 1 \to n$
  Se $m_{jj} = 0$, então
    Se $m_{kj} \neq 0$ para algum k, permute as linhas j e k
    Senão, A é singular! Pare!
  Faça $i = j + 1 \to n$
    $\lambda_{ij} = \dfrac{m_{ij}}{m_{jj}}$
    $\ell_i \leftarrow \ell_i - \lambda_{ij}\ell_j$
Termine.

Pivoteamento

A estratégia para construir as matrizes L e P durante o processo de eliminação gaussiana é p seguinte:

1. Comecar com $P = L = I$;
2. Preencher L com os λ_{ij} à medida em que forem sendo calculados;
3. Havendo uma permutação em A, a mesma permutação deve ser feita em P e nos elementos abaixo da diagonal de L.

Exemplo: Encontre a fatoração LU da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ -3 & -5 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Fatoração LU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ -3 & -5 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ -3 & -5 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$\neq 0$ ✓

1º $\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \underbrace{\left(\frac{2}{1}\right)}_{=\lambda_{21}} \ell_1$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 2:

$$\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \underbrace{\left(\frac{-3}{1}\right)}_{= \lambda_{31}} \ell_1$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 3 :

$$\ell_4 \leftarrow \ell_4 - \left(\frac{-1}{1}\right) \ell_1$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 4

$$
\begin{array}{cccc}
 & j & & \\
\end{array}
$$

$$
A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}
$$

Pepino! $m_{22} = 0$!!

$\Rightarrow$ precisamos fazer uma permutação!

$l_3 \leftarrow l_2$

$l_2 \leftarrow l_1$

$$
A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}
$$

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Pasul 5:

$m_{22} \neq 0$ ✓

$$\underline{\underline{A_4}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$l_4 \leftarrow l_4 - \left(\frac{4}{1}\right) \underline{\underline{l_2}}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 6:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$m_{33} = 0$

– precisamos fazer uma permutação!

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$l_3 \leftarrow l_4$

$l_4 \leftarrow l_3$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivoteamento

Resultado:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Atenção: A matriz P deverá ser aplicada sempre ao novo vetor $\mathbf{b}$ toda vez em que um novo sistema for resolvido.

O pivoteamento que foi discutido até o presente momento é chamado normalmente de pivoteamento simples.

Pivoteamento

Este tipo de pivoteamento pode levar a erros de aritmética computacional muito grandes se o pivô de uma coluna for muito pequeno em comparação com os demais elementos da coluna.

Uma primeira solução é buscar não apenas o primeiro elemento não-nulo de uma coluna na hora de fazer o pivoteamento, mas sim aquele que for o maior de todos.

De fato, esta operação pode ser feita sempre, mesmo quando o pivô de uma coluna não seja nulo!

Esta estratégia se chama pivoteamento parcial.

Pivoteamento

É possível, também, combinarmos o pivoteamento parcial com técnicas mais sofisticadas de buscas pelo maior elemento que possa assumir a posição de pivô de uma coluna em outras colunas.

Esta estratégia é chamada de pivoteamento total e já requer um algoritmo bem mais sofisticado.

Técnicas deste estilo são utilizadas nas rotinas disponíveis em pacotes de álgebra linear disponíveis gratuitamente (por exemplo, LAPACK).

A eliminação gaussiana com pivoteamento total funciona relativamente bem para matrizes não-singulares, mas se tornam inadequados quando as matrizes são quase singulares (aquelas cujo determinante é não-nulo, mas muito pequeno). Precisamos de outras técnicas para resolver sistemas com este tipo de matrizes...