Cálculo Numérico

Solução de Sistemas de Equações Lineares - Fatoração LU

A. Escreva um programa para resolver os sistemas lineares abaixo. Em alguns casos, a matriz dos coeficientes do sistema não será regular e será necessário realizar algumas permutações de linhas. Note que é fácil verificar se seu resultado está correto com uma simples substituição dos valores encontrados.

1. $\begin{cases} 4x - y + z = 8 \\ 2x + 5y + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 1.5y + 3z = 1 \\ -x + 2z = 3 \\ 4x - 4.5y + 5z = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + w = 2 \\ 2x + y + -z + w = 1 \\ -x + 2y + 3z - z = 4 \\ 3x - y - z + 2w = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

B. Escreva um programa para encontrar a fatoração LU das matrizes abaixo. Note que, para algumas destas matrizes, será necessário fazer um pivoteamento parcial.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} \pi & -e & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \pi^2 & e & -e^2 & \frac{3}{7} \\ \sqrt{5} & -\sqrt{6} & 1 & -\sqrt{2} \\ \pi^3 & e^2 & -\sqrt{7} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 10 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

C. Escreva um programa para determinar a fatoração LU de uma matriz A, de tamanho $N \times N$, que tem todos seus elementos identicamente nulos, exceto os elementos da diagonal principal, que são todos iguais a 2, e os elementos das duas sub-diagonais (as duas diagonais imediatamente abaixo da diagonal principal) e das duas super-diagonais (as duas diagonais imediatamente acima da diagonal principal) iguais a -1. Posteriormente, usando o resultado da fatoração LU, resolva os sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para:

1. $N = 5,\ \mathbf{b} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$
2. $N = 9,\ \mathbf{b} = [1\ 2\ 3\ 4\ \cdots\ 8\ 9]^T$
3. $N = 22,\ \mathbf{b} = [2\ 2\ 2\ \cdots\ 2\ 2]^T$
4. $N = 150,\ \mathbf{b} = [2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ \cdots\ 2\ 1]^T$

D. (Matriz Inversa) Uma maneira de determinarmos a matriz inversa de uma matriz A, $N \times N$, é usarmos sua fatoração LU para resolvermos N sistemas do tipo $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$, com $\mathbf{e}_i = [0\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 1\ 0\ \cdots 0]^T$ o vetor elementar que tem todas suas componentes nulas, exceto sua i-ésima componente, que é igual a 1. Desta forma, cada um dos vetores $\mathbf{x}_i$ encontrados como solução do sistema representa a i-ésima coluna da matriz inversa de A.

1. Escreva um programa para calcular a inversa de uma matriz $N \times N$ com base no algoritmo da fatoração LU.

2. Determine as inversas das matrizes da questão C.

3. Resolva os sistemas da questão A determinando a matriz inversa, isto é, para cada um dos sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, determine A^{-1} e encontre a solução com sendo $x = A^{-1}\mathbf{b}$.

E. (Determinantes) O determinante de uma matriz $A = [a_{11}]$, isto é, uma matriz 1×1, é definido como $|A| = \det(A) = a_{11}$. Para uma matriz $N \times N$, o determinante pode ser calculado pela operação:

$$|A| = \det(A) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

para qualquer escolha de i, e em que M_{ij} é o determinante da submatriz $N-1 \times N-1$ obtida a partir da eliminanção da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz A. Note que este procedimento é bem definido, pois quando aplicado recursivamente, levará ao cálculo de vários determinantes de matrizes 1×1. O problema de implementar-se esta operação computacionalmente é que ela é muito cara, necessitando $O(N!)$ operações para determinar $|A|$. Sabemos, porém, que o determinante tem propriedades bastante úteis. Primeiro, se fizermos uma operação $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ numa matriz A, o seu determinante permanence inalterado. Segundo, se fizermos uma permuta de linhas $L_i \leftrightarrow L_j$ na matriz A, seu determinante é multiplicado por -1. Além disto, se A for uma matriz triangular superior, inferior ou mesmo diagonal, seu determinante é dado simplesmente por

$$|A| = \prod_{i=1}^{N} a_{ii}.$$

Desta forma, se conseguirmos encontrar uma matriz triangular superior pelo método do escalonamento (o que será sempre possível desde que $|A| \neq 0$), conseguiremos determinar seu determinante facilmente. Com base nestas informações, escreva um programa para calcular o determinante de uma matriz $N \times N$. Mostre que:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 39.$$

Posteriormente, determine o determinante das matrizes da questão B.

F. Suponha que o sistema abaixo seja definido em termos de um parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 4x + 6y + 8z = 5 \\ 6x + \alpha y + 10z = 5 \end{cases}$$

1. Para que valores de α o sistema acima admite uma única solução?

2. Para que valores de α não será necessário fazer um pivoteamento durante a eliminação gaussiana?

3. Escolha um valor de α e resolva o sistema por fatoração LU.