Cálculo Numérico

Ajuste de Curvas e Polinômio Interpolador

A. Determine um ajuste polinomial para os dados abaixo. Em cada caso, encontre um ajuste linear e um quadrático e mais outros dois ajustes com o grau de sua escolha (trace os pontos e tente, por inspeção, escolher o grau que se ajustaria melhor a eles). Determine, para cada caso, os erros $||\mathbf{e}|| = ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$ e escolha, dentre os ajustes encontrados, qual seria o melhor.

1.

t	y
0.03	6.45
0.42	6.35
0.76	8.76
0.68	10.06
0.93	13.63
1.21	27.37
1.54	31.67
1.41	41.29

2.

t	y
0.04	5.21
0.47	6.61
0.59	6.82
0.71	9.10
1.13	10.22
1.02	10.16
1.33	9.63
1.78	0.42
1.90	1.19
1.82	-9.62
2.36	-12.46
2.49	-13.36
2.63	-6.15
2.90	-8.49
3.05	-14.86

3.

t	y
2.01	-1.40
2.08	-1.61
2.53	-1.83
2.75	-2.05
2.69	-2.26
3.13	-2.48
3.14	-2.69
3.57	-2.89
3.42	-3.10
3.71	-3.30
3.92	-3.51
4.25	-3.71

4.

t	y
0.15	0.40
0.25	0.93
0.61	1.07
0.82	1.24
1.28	0.79
1.71	-0.15
1.89	-0.84
2.17	-1.20
2.56	-1.17
2.77	-1.16
3.04	-0.59

Respostas parciais (formato: $y = \alpha_1 + \beta_1 t$ e $y = \alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2$)

1. $\alpha_1 = -2.0419102; \beta_1 = 23.197031;\ \alpha_2 = 5.8076067; \beta_2 = -6.2676334;\ \gamma_2 = 18.070734$
2. $\alpha_1 = 13.242018; \beta_1 = -8.4314737;\ \alpha_2 = 8.3251009; \beta_2 = 0.67548656;\ \gamma_2 = -2.8424881$
3. $\alpha_1 = 0.69754916; \beta_1 = -1.0537795;\ \alpha_2 = 0.60612136; \beta_2 = -0.99138319;\ \gamma_2 = -1.01277679 \cdot 10^{-2}$
4. $\alpha_1 = 1.2076042; \beta_1 = -0.80948675;\ \alpha_2 = 1.1898305; \beta_2 = -0.77186853;\ \gamma_2 = -1.21097956 \cdot 10^{-2}$

B. Considere que você tenha as medições experimentais do decaimento de um isótopo radioativo, isto é, para cada tempo t_i, você tenha a medida da massa m_i do isótopo. Responda as questões abaixo:

1. Sabendo que o decaimento radioativo é modelado por uma equação do tipo $\dfrac{dm}{dt} = \alpha m$, com $\alpha < 0$, determine a solução exata deste problema para a condição inicial $m(0) = m_0$.
2. Transforme a solução da equação acima em um polinômio linear usando o logaritmo.
3. Com os valores apresentados abaixo, determine a quantidade de isótopo no momento inicial do experimento e determine sua taxa de decaimento α. Para tal, você deve gerar um ajuste linear com base no procedimento sugerido no item anterior.

t (horas)	0.43	1.20	1.68	1.91	2.69	2.93	3.58	3.87	4.36	5.22
m (kg)	7.15	4.72	3.27	2.37	1.63	1.18	0.96	0.54	0.11	0.29

4. Com base no ajuste acima, determine a meia-vida deste isótopo e compare-a com o valor teórico. (Lembrete: meia-vida é o tempo necessário para a amostra inicial se reduzir pela metade.)

C. Considere o conjunto de medidas abaixo e responda os ítens abaixo:

t	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	1.30	2.72	4.98	3.12	1.37

1. Determine o polinômio interpolador $p(t)$ deste conjunto de pontos usando um programa computacional (por exemplo, o mesmo utilizado na questão A) e trace seu resultado. Verifique que, de fato, o polinômio obtido seja o polinômio interpolador, isto é, que $p(t_i) = y_i$.

2. Calcule computacionalmente os polinômios interpoladores dos cinco conjuntos de dados $y_{(k)}$, e trace seu resultado.

t	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$y_{(1)}$	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$y_{(2)}$	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
$y_{(3)}$	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
$y_{(4)}$	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
$y_{(5)}$	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

3. Construa analiticamente os cinco polinômios de Lagrange $L_i(t)$ para os pontos t_i acima. Note que os polinômios devem ser de grau 4. Compare seus resultados com os obtidos computacionamente no item anterior.

4. Determine analiticamente, a partir dos polinômios de Lagrange, a expressão para o polinômio interpolador do conjunto de medidas inicial e compare seu resultado com o polinômio obtido no item 1.

D. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ em $x \in [-3, 3]$ e responda os ítens abaixo:

1. Construa uma amostra de 3 pontos equidistantes no intervalo $[-3, 3]$ e avalie a função $f(x)$ nestes pontos. Com os pontos que você encontrou, determine o polinômio interpolador de $f(x)$ e também um ajuste polinomial de grau 2. O que acontece neste caso.

2. Construa, agora, amostras maiores de pontos equidistantes no intervalo $[-3, 3]$, isto é, considere agora amostras com $5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$ pontos. Para cada caso, determine o polinômio interpolador de $f(x)$. O que acontece com o polinômio interpolador nas extremidades do intervalo? Por que escolher uma quantidade par de pontos não seria recomendado?

3. Obtenha, para cada conjunto de pontos, um ajuste polinomial quadrático (e, eventualmente, um outro que você julgar adequado). Qual das aproximações parece aproximar melhor a função $f(x)$?

E. Considere que queiramos ajustar, a partir de α, β e γ, o conjunto de pontos abaixo com uma função do tipo $a(x) = \alpha t^2 + \beta \mathrm{e}^t + \gamma \sin(2t)$. Monte o problema de ajuste a ser resolvido, determinando a matriz A. Resolva o problema de minimização do erro quadrático e determine as constantes α, β e γ. Determine, também o erro para este ajuste. Faça um ajuste polinomial quadrático e compare seus resultados.

t	-2.14	-1.37	-1.07	-0.42	-0.08	0.41	0.93	1.41	2.01	2.32	2.86	3.43	4.07	4.54
y	7.33	3.91	0.63	-0.05	1.11	2.93	3.39	2.92	2.52	3.85	6.15	11.66	14.86	17.89