Cálculo Numérico

Notas de aula - Aproximação de Funções e Interpolação

Prof. Yuri Dumaresq Sobral

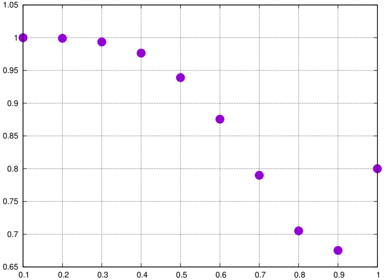
Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

2025

Aproximação de funções

Suponha que tenhamos um conjunto de dados (pares ordenados) obtidos de um determinado experimento.

t_i	y_i
t_1	y_1
t_2	y_2
t_3	y_3
$\vdots$	$\vdots$
t_{n+1}	y_{n+1}

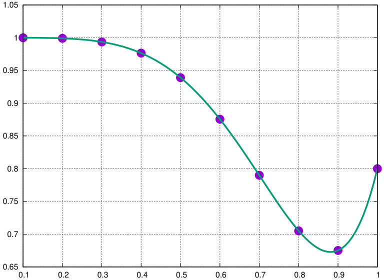


Será que podemos encontrar uma função que represente bem este conjunto de $n+1$ pontos? Antes de tudo, precisamos definir o que é representar bem este conjunto de pontos!

Aproximação de funções

Suponha que tenhamos um conjunto de dados (pares ordenados) obtidos de um determinado experimento.

t_i	y_i
t_1	y_1
t_2	y_2
t_3	y_3
$\vdots$	$\vdots$
t_{n+1}	y_{n+1}



Será que podemos encontrar uma função que represente bem este conjunto de $n+1$ pontos? Antes de tudo, precisamos definir o que é representar bem este conjunto de pontos!

Aproximação de funções

- Existem várias possibilidades para representar bem um conjunto de pontos! E existem diversas maneiras de construir funções que aproximem um conjunto de pontos!

- A área da matemática que estuda estas possibilidades é a Teoria de Aproximações. É uma área que orbita entre a matemática pura e a matemática aplicada.

- Neste primeiro momento, vamos pensar no caso mais simples: representar bem significa que a função construída para aproximar o conjunto de pontos valha exatamente y_i para os valores de $t = t_i$.

- Neste caso, o problema de aproximação do conjunto de pontos se chama de problema de interpolação! A função construída é chamada de função interpoladora do conjunto de pontos.

Aproximação de funções

- Além disto, vamos considerar uma maneira simples para construir a função que aproxima o conjunto de pontos:

$$y(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t) + \ldots + \alpha_{n+1}\phi_{n+1}(t),$$

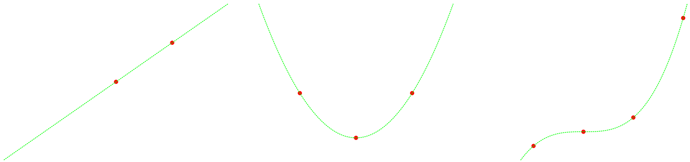
 com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ constantes e $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+1}$ funções previamente escolhidas.

- Desta forma, construímos uma aproximação linear para a função interpoladora: uma combinação linear uma das funções $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+1}$ e queremos que esta combinação satisfaça $y(t_i) = y_i$.
- O problema de interpolação se resume, portanto, a encontrar as constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ para uma dada escolha de funções $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+1}$ tal que $y(t_i) = y_i$.
- Normalmente escolhemos funções $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+1}$ simples, fáceis de manusear... Por exemplo, polinômios! Polinômio interpolador!

Polinômio interpolador

O polinômio interpolador, então, é o polinômio tem a importante propriedade de passar exatamente em todos os pontos (t_i, y_i)!

Exemplos: Polinômios interpoladores



2 pontos
linear

3 pontos
quadrático

4 pontos
cúbico

Polinômio interpolador

Então, vamos considerar que tenhamos um conjunto de $n+1$ pontos (t_i, y_i), $i = 1 \ldots n+1$, e que queiramos encontrar um polinômio interpolador do tipo

$$y(t) = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot t + \alpha_3 \cdot t^2 + \cdots + \alpha_{n+1} \cdot t^n,$$

tal que $y(t_i) = y_i$, isto é, tal que ele passe por todos os $n+1$ pontos conhecidos. Para isto, tomando cada ponto da tabela, temos que:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 t_1 + \alpha_3 t_1^2 + \cdots + \alpha_{n+1} t_1^n, \\ y_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 t_2^2 + \cdots + \alpha_{n+1} t_2^n, \\ &\vdots \\ y_{n+1} &= \alpha_1 + \alpha_2 t_{n+1} + \alpha_3 t_{n+1}^2 + \cdots + \alpha_{n+1} t_{n+1}^n, \end{aligned}$$

que são $n+1$ equações que têm, como incógnitas, as $n+1$ constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$! É um sistema linear do tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$!

Portanto, para encontrarmos o polinômio interpolador

$$y(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \cdots + \alpha_{n+1} t^n,$$

resolvermos o sistema linear

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & \cdots & t_2^n \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & \cdots & t_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_{n+1}^2 & t_{n+1}^3 & \cdots & t_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

O vetor das incógnitas $\mathbf{x} = [\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_{n+1}]^T$, solução deste sistema, denota o polinômio interpolador através de seus coeficientes!

A matriz A para este sistema será dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & \cdots & t_2^n \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & \cdots & t_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & t_{n+1}^3 & \cdots & t_{n+1}^n \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \quad \text{Matriz de Vandermonde}$$

O vetor $\mathbf{b}$ é o vetor coluna dado por $\mathbf{b} = [y_1 \;\; y_2 \;\; \cdots \;\; y_{n+1}]^T$.

Portanto, se tivermos $n+1$ pontos (t_i, y_i), com $t_i \neq t_j \; \forall i, j$, sempre encontraremos um único polinômio interpolador de grau menor ou igual a n tal que $y(t_i) = y_i \; \forall i = 1, \ldots, n+1$.

Note que o grau pode ser $\leq n$ pois é possível que alguns α_i, em particular α_n, α_{n+1}, etc., sejam nulos.

Exemplo: Vamos calcular o polinômio interpolador de $y(t) = e^t$ a partir de 3 pontos:

t	0	0.5	1
y	1	$\sqrt{e}$	e

Queremos encontrar $y(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$. Então:

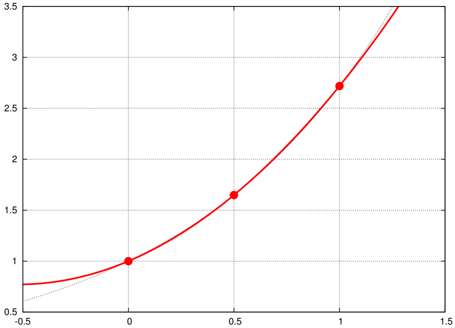
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1/2 & (1/2)^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{e} \\ e \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema, encontramos

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0.876603, \quad \gamma = 0.841679$$

Polinômio interpolador

O resultado num gráfico é o seguinte:



Note que o polinômio interpolador (em vermelho) representa bem a função nas vizinhanças dos pontos, mas já se distancia da função longe dos pontos conhecidos.

Polinômio interpolador

Há uma maneira mais elegante de obtermos o polinômio interpolador de um conjunto de $n+1$ pontos (t_i, y_i).

Note que podemos reescrever o vetor **b** em termos de uma combinação linear dos vetores da base canônica:

$$\mathbf{b} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 + \cdots + y_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}.$$

Assim, podemos pensar em resolver $n+1$ sistemas lineares do tipo:

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & \cdots & t_2^n \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & \cdots & t_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 & \cdots & t_i^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & t_{n+1}^3 & \cdots & t_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \alpha_3^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_i^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_{n+1}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Polinômio interpolador

Note que $\mathbf{x}_i = [\alpha_1^{(i)} \quad \alpha_2^{(i)} \quad \cdots \quad \alpha_{n+1}^{(i)}]^T$ são os coeficientes do polinômio interpolador que "*interpola*" o vetor da base $\mathbf{e}_i$. Assim, o polinômio interpolador elementar do vetor da base $\mathbf{e}_i$ é:

$$\mathbf{x}_i \quad \leftrightarrow \quad y_i(t) = \alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} t + \alpha_3^{(i)} t^2 + \cdots + \alpha_{n+1}^{(i)} t^n$$

Agora, voltando ao sistema original, note que:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 + \cdots + y_{n+1}\mathbf{e}_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\mathbf{x} = y_1 A\mathbf{x}_1 + y_2 A\mathbf{x}_2 + y_3 A\mathbf{x}_3 + \cdots + y_{n+1} A\mathbf{x}_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\mathbf{x} = A\Big(y_1\mathbf{x}_1 + y_2\mathbf{x}_2 + y_3\mathbf{x}_3 + \cdots + y_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}\Big)$$

Portanto:

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{x}_1 + y_2\mathbf{x}_2 + y_3\mathbf{x}_3 + \cdots + y_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}$$

Ou, na notação polinomial:

$$y(t) = y_1 p_1(t) + y_2 p_2(t) + y_3 p_3(t) + \cdots + y_{n+1} p_{n+1}(t)$$

Será que conseguimos representar explicitamente cada um dos $p_i(t)$? SIM! Vamos ver um exemplo para um conjunto de 3 pontos: (t_1, y_1), (t_2, y_2), (t_3, y_3).

O primeiro polinômio $p_1(t)$ será dado pela solução do sistema:

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver este sistema pela Regra de Cramer:

Polinômio interpolador

$$\alpha_1^{(1)} = \underbrace{\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 0 & t_2 & t_2^2 \\ 0 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix}}}_{=\det A} = \frac{t_2 t_3^2 - t_3 t_2^2}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & t_1^2 \\ 1 & 0 & t_2^2 \\ 1 & 0 & t_3^2 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{-(t_3^2 - t_2^2)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

$$\alpha_3^{(1)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & t_1 & 1 \\ 1 & t_2 & 0 \\ 1 & t_3 & 0 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{t_3 - t_2}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

Assim, temos que $p_1(t) = \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} t + \alpha_3^{(1)} t^2$ é dado por:

$$p_1(t) = \frac{t_2 t_3^2 - t_3 t_2^2 - (t_3^2 - t_2^2)t + (t_3 - t_2)t^2}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} =$$

$$= \frac{(t_3 - t_2)\Big(t_2 t_3 - (t_3 + t_2)t + t^2\Big)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} = \frac{(t - t_2)(t - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}.$$

Similarmente, seguindo o mesmo procedimento, obtemos os polinômios $p_2(t) = \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} t + \alpha_3^{(2)} t^2$ e $p_3(t) = \alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)} t + \alpha_3^{(3)} t^2$:

$$p_2(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} \qquad p_3(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

De uma maneira geral, para um conjunto de $n+1$ pontos, os $n+1$ polinômios $p_i(t)$ são dados por:

$$p_i(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots(t-t_{n+1})}{(t_i-t_1)(t_i-t_2)(t_i-t_3)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_{n+1})},$$

$$i = 1, \ldots, n+1$$

Ou ainda, de uma maneira mais compacta:

$$p_i(t) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n+1 \\ k \neq i}} \frac{t - t_k}{t_i - t_k} = \mathcal{L}_i(t)$$

POLINÔMIOS DE LAGRANGE

Polinômio interpolador

Com os polinômios de Lagrange, construimos o polinômio interpolador de Lagrange, $p(t)$, para um conjunto de $n+1$ pontos, como:

$$p(t) = y_1\mathcal{L}_1(t) + y_2\mathcal{L}_2(t) + \cdots + y_{n+1}\mathcal{L}_{n+1}(t).$$

Note que os polinômios de Lagrange têm uma propriedade muito interessante:

$$\mathcal{L}_i(t) = \begin{cases} 1, & t = t_i \\ 0, & t = t_k, \quad \forall k \neq i \end{cases}$$

Portanto, os polinômios de Lagrange têm uma característica similar aos vetores da base canônica de $I\!R^{n+1}$. Assim, fica claro perceber que $p(t_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n+1$.

Exemplo: Vamos re-calcular o polinômio interpolador de $y(t) = e^t$ a partir de 3 pontos:

t	0	0.5	1
y	1	$\sqrt{e}$	e

Queremos encontrar $p(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ agora escrito da forma $p(t) = y_1\mathcal{L}_1(t) + y_2\mathcal{L}_2(t) + y_3\mathcal{L}_3(t)$. Então:

$$\mathcal{L}_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} = \frac{(t-{}^1\!/_2)(t-1)}{(0-{}^1\!/_2)(0-1)} = 2t^2 - 3t + 1$$

$$\mathcal{L}_2(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} = \frac{(t-0)(t-1)}{({}^1\!/_2-0)({}^1\!/_2-1)} = -4t^2 + 4t$$

Polinômio interpolador

$$\mathcal{L}_3(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} = \frac{(t-0)(t-{}^1\!/_2)}{(1-0)(1-{}^1\!/_2)} = 2t^2 - t$$

Assim, o polinômio interpolador de e^t em $[0,1]$ é dado por:

$$p(t) = y_1\mathcal{L}_1(t) + y_2\mathcal{L}_2(t) + y_3\mathcal{L}_3(t) \Leftrightarrow$$

$$p(t) = 1(2t^2 - 3t + 1) + \sqrt{e}(-4t^2 + 4t) + e(2t^2 - t) \Leftrightarrow$$

$$p(t) = 1 + 0.876603t + 0.841679t^2. \quad \text{(as before)}$$

Atenção: o polinômio interpolador é único! Que bom que encontramos o mesmo resultado anterior!

Polinômio interpolador

- Os polinômios de Lagrange são muito úteis em vários aspectos teóricos da Teoria de Aproximações, pois facilitam a análise e a construção de provas para argumentos complicados!
- Há, porém, diversos tipos de polinômios que podem ser utilizados na construção de polinômios interpoladores, como os polinômios de Chebychev, Legendre, Hermite, Laguerre, etc... A escolha dos polinômios a serem utilizados depende do caso particular.
- Há escolhas mais adequadas para o uso computacional de polinômios interpoladores. Por exemplo, os polinômios:

$$
\begin{aligned}
\phi_1(t) &= 1 \\
\phi_2(t) &= (t - t_1) \\
\phi_3(t) &= (t - t_1)(t - t_2) \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
\phi_n(t) &= (t - t_1)(t - t_2)\dots(t - t_{n-1}) \\
\phi_{n+1}(t) &= (t - t_1)(t - t_2)\dots(t - t_n)
\end{aligned}
$$

Polinômio interpolador

... podem ser utilizados para construir um polinômio interpolador do tipo:

$$y(t)=\alpha_1+\alpha_2(t-t_1)+\alpha_3(t-t_1)(t-t_2)+\cdots+\alpha_{n+1}(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_n).$$

- Estes polinômios são chamados de uma família triangular de polinômios.
- A vantagem destes polinômios é que a determinação dos coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ é feita de maneira bem simples, já que $\phi_i(t_j) = 0, \;\; i > j$:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & \alpha_1 \\ y_2 & = & \alpha_1 + \alpha_2(t_2 - t_1) \\ y_3 & = & \alpha_1 + \alpha_2(t_3 - t_1) + \alpha_3(t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Polinômio interpolador

- Isto é, a matriz A do sistema linear é triangular inferior e o sistema pode ser facilmente resolvido pelo algoritmo de substituição direta:

$$\alpha_1 = y_1, \quad \alpha_i = \frac{y_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k \left(\prod_{\ell=1}^{k-1} (t_i - t_\ell) \right)}{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{i-1} (t_i - t_\ell)}, i = 2 \to n+1.$$

- Apesar da fórmula grande, este método é fácil de implementar! Não precisamos de um processo iterativo para resolver o sistema linear, independente do tamanho do conjunto de pontos!

Polinômio interpolador

Agora que já sabemos bastante sobre como calcular o polinômio interpolador de um conjunto de dados, podemos nos perguntar sobre a qualidade da aproximação que fizemos, isto é, vale à pena interpolar uma função por um polinômio?

De fato, a resposta para esta pergunta é um resultado é muito importante, chamado de Teorema da Aproximação de Weistrass:

Teorema: Dada uma $f(t)$ contínua em $[a, b]$, então existe, para todo $\varepsilon > 0$, um polinômio $P(t)$ tal que $|f(t) - P(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in [a, b]$.

Ou seja, este teorema nos diz que é possível aproximar qualquer função contínua por um polinômio! Mas não nos diz qual é este polinômio. Podemos construir um polinômio ruim escolhendo mal o que queremos dizer por representar bem o conjunto de pontos...

E qual é o erro desta aproximação? Suponha que $f(t)$ seja uma função da qual conhecemos apenas $n+1$ pontos no intervalo $[a, b]$. Faz sentido usar o polinômio interpolador $y(t)$ para estimar $f(t)$ para valores de t fora do conjunto de pontos? Neste caso, podemos mostrar que:

$$f(t) = p(t) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!}(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)\cdots(t-t_{n+1}),$$

em que $\xi(t) \in (a, b)$.

Esta fórmula do erro da aproximação de $f(t)$ por $p(t)$ não é de uso muito prático, pois tanto $f(t)$ e $\xi(t)$ são normalmente desconhecidos, mas fornece ela estimativas teóricas essenciais para a teoria de aproximações.

Mas ela já nos diz que se os $n+1$ pontos t_i forem igualmente espaçados, $t_{i+1} = t_i + h$, então podemos mostrar que

$$f(t) = p(t) + \mathcal{O}(h^{n+1}).$$

Voltemos ao exemplo anterior. Como conhecemos $f(t) = e^t$, qual será o erro máximo cometido se assumirmos $e^t = y(t)$ com $t \in [0, 1]$? Pela fórmula do erro, temos que:

$$E(t) = \frac{f^{(3)}(\xi(t))}{3!}(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) \Leftrightarrow$$

$$E(t) = \frac{e^{\xi(t)}}{3!}(t - 0)(t - 1/2)(t - 1) = \frac{e^{\xi(t)}}{3!}\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right)$$

Portanto, podemos encontrar uma cota máxima para o erro fazendo:

$$|E(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} \left| \frac{e^{\xi(t)}}{3!}\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right) \right| \leq$$

$$\leq \max_{t\in[0,1]} \left| \frac{e^{\xi(t)}}{3!} \right| \max_{t\in[0,1]} \left| \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{e}{6}\left\{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\right\}$$

$$|E(t)| \leq 0{,}021797233$$