Revisão de Probabilidade e Estatística

- Teoria Geral de Probabilidades
  - conceitos básicos
  - probabilidade condicional
  - eventos independentes
  - Teorema da Probabilidade Total
  - Teorema de Bayes

- Estatística
  - médias/mediana/moda, desvio padrão, variância, covariância, correlação, quartis, percentis
  - variáveis aleatórias

Revisão de Probabilidade e Estatística

- Distribuições de Probabilidade
  - discretas
    - geométrica /hipergeométrica
    - binomial
    - Poisson
  - contínuas
    - uniforme
    - exponencial
    - normal
- Teorema Central do Limite ou Teorema do Limite Central

Revisão de Probabilidade e Estatística

1. Elementos de Probabilidade - Conceitos Básicos

1.1 Experimento Aleatório

Um experimento é dito **aleatório** quando o seu resultado não for previsível no sentido comum antes de sua realização, ou seja, é um experimento cujos resultados estão sujeitos unicamente ao acaso

1.2 Espaço Amostral (S)

É o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.2 Espaço Amostral (S)

Exemplos:

(1) Jogue um dado comum e observe o número mostrado na face voltada pra cima

$S = \{1,2,3,4,5,6]$

(2) Jogue uma moeda quatro vezes e observe o número de caras obtido

$S = \{0,1,2,3,4\}$

(3) Uma lâmpada é fabricada e em seguida ensaiada. Observe sua duração de vida

$S = \{t \in R \mid t >= 0\}$

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.2 Espaço Amostral (S)

Exemplos:

(4) Observe o tempo de espera de uma pessoa numa fila de ônibus

$$S = \{t \in R \mid t >= 0\}$$

(5) Peças são fabricadas até que 10 peças perfeitas sejam produzidas. O número total de peças é observado

$$S = \{10, 11, 12, \ldots\}$$

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.2 Espaço Amostral (S)

Um espaço amostral pode ser:

- Finito – se tem um número finito de elementos. Exemplos (1) e (2) acima.
- Infinito Enumerável – se tem tantos elementos quanto o conjunto dos números naturais. Exemplo (5) acima.
- Infinito Não-enumerável – se tem tantos elementos quanto um determinado segmento do eixo Ox, tal como $0<=x<=1$. Exemplos (3) e (4) acima.

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.3 Evento

É qualquer subconjunto de um espaço amostral

a. Evento União: $A \cup B$
b. Evento Interseção: $A \cap B$
c. Evento Complementar: A' ou A^c
d. Evento Diferença: $A-B$

1.3.1 Eventos Mutuamente Exclusivos

Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos (ou disjuntos) quando não podem ocorrer simultaneamente, i.e, se a interseção deles for o conjunto vazio

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.4 Enfoque Estatístico de Probabilidade

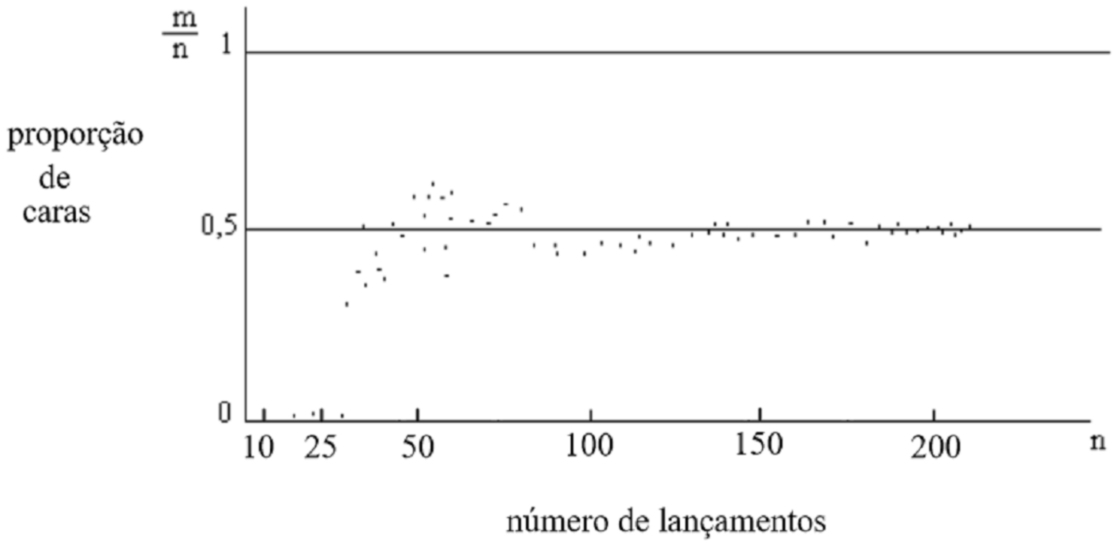
- Se repetirmos um experimento aleatório n vezes, em certo número m de vezes ocorrerá o evento E; m é a frequência com que ocorre o evento E e m/n é a frequência relativa de ocorrência de E
- P(E), probabilidade do evento, é o valor limite da frequência relativa m/n para uma sequência muito grande de realizações do experimento ($n \to \infty$)

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.4 Enfoque Estatístico de Probabilidade

Considere o experimento aleatório de jogar uma moeda honesta e observar o resultado que ocorre. À medida que forem realizados os lançamentos da moeda, a proporção de caras se aproxima de $\frac{1}{2}$, para o evento E={número de caras}.



Revisão de Probabilidade e Estatística

1.5 Enfoque Clássico

Seja ε um experimento aleatório e S um espaço amostral associado a ε. Suponha que S seja finito e que todos os resultados de S sejam igualmente prováveis. Considere um evento A de S, então se n_s e n_a são, respectivamente, o número de elementos de S e o número de elementos de A, a probabilidade de ocorrência do evento A, P(A), é o número real definido por:

$$P(A) = n_a / n_s$$

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.5 Enfoque Clássico

OBS.:

1) Dizemos que o espaço amostral $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$ é equiprovável quando qualquer elemento s_i de S tem a mesma chance de ocorrência quando o experimento é realizado

$P(s_i) = 1/k$

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.6 Enfoque Axiomático

Seja e um experimento aleatório e S um espaço associado a ε. A cada evento A de S associamos um número real $P(A)$ denominado probabilidade de A, que obedece aos seguintes axiomas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo A
- $P(S) = 1$
- Se A e B são mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.7 Regra de Adição

- Sejam A e B eventos quaisquer de S, então:

$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

- Se A e B forem eventos disjuntos, então

$P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

Revisão de Probabilidade e Estatística

Exemplo:

A tabela a seguir apresenta dados relativos à distribuição de sexo e alfabetização em habitantes de Sergipe com idade entre 20 e 24 anos.

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	56.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Revisão de Probabilidade e Estatística

Um jovem entre 20 e 24 anos é escolhido ao acaso em Sergipe. Qual é a probabilidade de o jovem escolhido ser alfabetizado ou ser do sexo masculino ?

Sejam os eventos:
M – jovem sorteado é do sexo masculino
A - jovem sorteado é alfabetizado

P(MUA) = no. de elementos em (MUA)/no. de elementos de S

P(MUA) = 85881+48249-39577/101850 = 0,928

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.8 Probabilidade Condicional

Em muitas vezes o fato de ficarmos sabendo que certo evento ocorreu faz com que se modifique a probabilidade que atribuímos a outro evento. Por exemplo, a probabilidade de tirar o número 2 no lançamento de um dado é reforçada quando se sabe que um número par saiu.

Assim, sendo A e B eventos, define-se a probabilidade condicionada do evento A dado que B ocorreu (a probabilidade de A sabendo que B ocorreu) por

$$P(A|B)$$

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.9 Regra do Produto

Sejam dois eventos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. A probabilidade de A e B ocorrerem simultaneamente é igual ao produto da probabilidade de um dos eventos pela probabilidade condicionada do outro:

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B|A)$$

ou $$P(A \cap B) = P(B)\,.\,P(A|B)$$

assim temos $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$

ou $$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$$

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.10 Eventos Independentes

Se a ocorrência do evento *A* não modificar a probabilidade de ocorrência do evento B, dizemos que *A* e B são eventos <u>independentes</u>.

Como $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$,

$$\text{logo } P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$

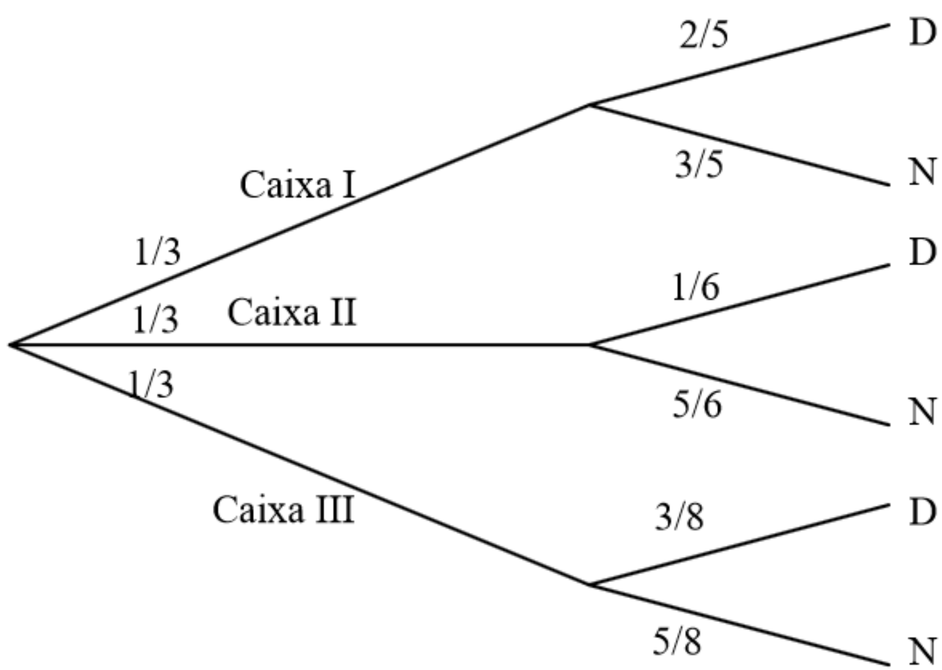
Revisão de Probabilidade e Estatística

1.10 Árvore de probabilidades

São dadas três caixas como segue:

- Caixa I contém 10 lâmpadas, das quais 4 são defeituosas
- Caixa II contém 6 lâmpadas, das quais 1 é defeituosa
- Caixa III contém 8 lâmpadas, das quais 3 são defeituosas

Selecionamos uma caixa aleatoriamente e então retiramos uma lâmpada, também aleatoriamente. Qual é a probabilidade de a lâmpada ser defeituosa ?



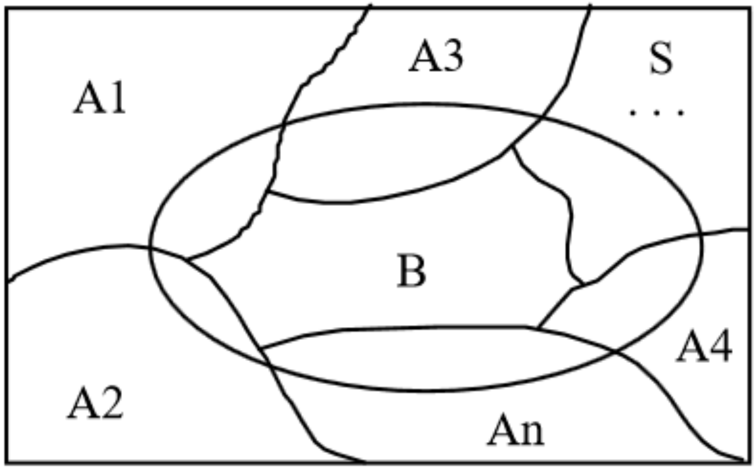
Revisão de Probabilidade e Estatística

1.10 Teorema da Probabilidade Total

Suponha que os eventos A_1, A_2, ..., A_n constituem uma partição do espaço amostral S, ou seja, os eventos A_i são mutuamente exclusivos e exaustivos (sua união é S). Se B é um outro evento qualquer de S, então:

$$P(B) = P(A_1) \,.\, P(B|\, A_1) + P(A_2) \,.\, P(B|\, A_2) + \ldots + P(A_n) \,.\, P(B|\, A_n)$$

Revisão de Probabilidade e Estatística



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B) \text{ e}$$

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)] =$$

$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) =$$

$$= P(A_1)\, P(B \mid A_1) + P(A_2)\, P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n)\, P(B \mid A_n) .$$

Revisão de Probabilidade e Estatística

1.11 Teorema de Bayes

Se os eventos A_1, A_2, ..., A_n constituem uma partição do espaço amostral S, onde $P(A_i) \neq 0$, $i = 1,2, ..., n$, então para qualquer evento B tal que $P(B) \neq 0$

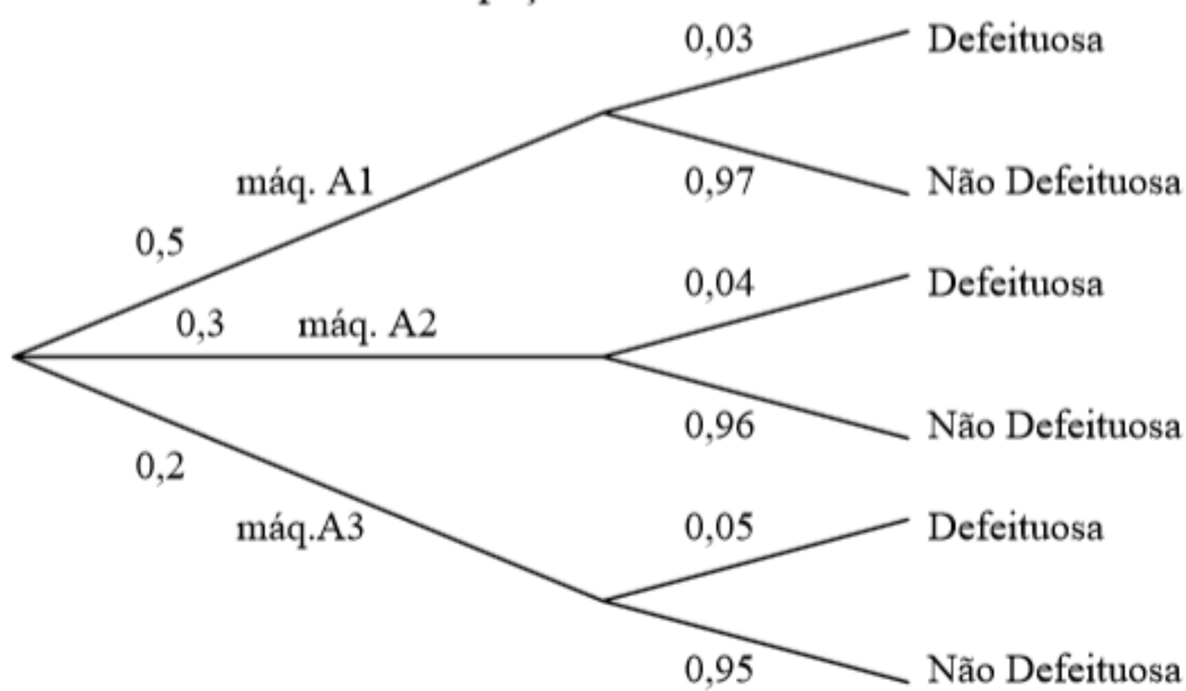
$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k).P(B \mid A_k)}{\sum_{i}^{k} P(A_i).P(B \mid A_i)}$$

Revisão de Probabilidade e Estatística

Exemplo

Três máquinas A_1 , A_2 e A_3 , produzem respectivamente 50% , 30% e 20% do total de peças de uma fábrica. As porcentagens de produção defeituosa destas máquinas são 3% , 4% e 5%. Se uma peça é selecionada aleatoriamente, qual a probabilidade dela ser defeituosa?

Sejam os eventos : A_1 : "a peça é fabricada pela máquina A_1"
A_2 : "a peça é fabricada pela máquina A_2"
A_3 : "a peça é fabricada pela máquina A_3"
B : "a peça é defeituosa".



Revisão de Probabilidade e Estatística

Exemplo

$P(B) = 0{,}037$

Suponha agora que a peça selecionada é defeituosa. Qual a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina A_1?

$$P(A_1|B) = P(A_1).P(B|\ A_1)/P(B) = 0{,}5 \times 0{,}03/0{,}037 = 0{,}405$$

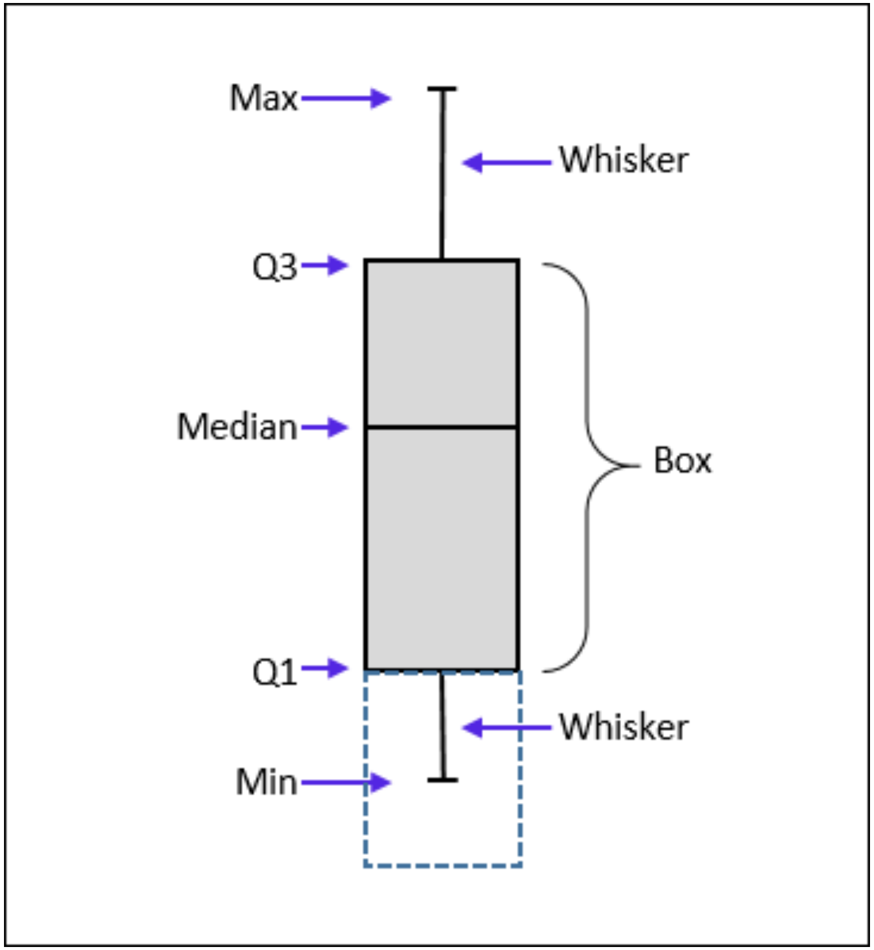
Revisão de Probabilidade e Estatística

Boxplot

- Gráfico construído com base no resumo dos cinco números:
  - Valor mínimo
  - Primeiro quartil (Q1)
  - Mediana (segundo quartil Q2)
  - Terceiro quartil (Q3)
  - Valor máximo
- Gráfico é formado por uma caixa construída paralelamente ao eixo da escala dos dados (pode ser horizontal ou vertical)
- Essa caixa vai desde o 1o. Quartil até o 3o. Quartil e nela traça-se uma linha na posição da mediana
- Essa caixa descreve os 50% centrais da distribuição dos dados
- No resumo dos 5 números, traça-se uma linha paralela à escala que vai de cada extremidade da caixa ao correspondente valor extremo dos dados

Revisão de Probabilidade e Estatística

Boxplot



Revisão de Probabilidade e Estatística

Boxplot

- Cálculo dos Quartis

    - Dividem o conjunto de dados em 4 partes
    - 25% dos dados são menores que Q1
    - 50% dos dados são menores que Q2
    - 75% dos dados são menores que Q3
    - Suponha os dados abaixo: