Demana
Waits
Foley
Kennedy

Pré-cálculo

Companion Website

PEARSON
Addison Wesley

Pré-cálculo

[Cálculo]

Com o objetivo de garantir o sucesso do estudante no estudo de cálculo, *Pré-cálculo* coloca-o novamente em contato com os temas fundamentais da matemática — como funções e equações de primeiro e segundo graus —, testando e reforçando seus conhecimentos e preparando-o para o estudo das derivadas, das integrais e de outros tópicos de cálculo.

Baseada nas necessidades dos estudantes brasileiros, esta obra possui técnicas didáticas que mostram ao estudante as situações nas quais poderá utilizar as matérias estudadas, o que fortalece o processo de ensino e aprendizagem. Mesclando a teoria com exemplos, problemas resolvidos, destaques ao longo de todo o texto e seções de exercícios ao final de cada capítulo (a maioria com resposta), o livro equilibra os métodos algébrico, numérico, gráfico e verbal na resolução de problemas, partindo de uma abordagem que segue quatro etapas: o entendimento do problema, o desenvolvimento do modelo matemático, a resolução por meio do modelo escolhido e a interpretação da solução.

Estruturado de modo a se tornar mais desafiador a cada capítulo, *Pré-cálculo* apresenta, em seu último capítulo, os conceitos básicos do cálculo, preparando os estudantes dos cursos de administração, economia e ciências contábeis — entre outros cursos das áreas humanas e exatas — para iniciar seus estudos de cálculo com muito mais facilidade.

www.aw.com/demana_br
O site de apoio oferece: para professores, apresentações em PowerPoint; para estudantes, exercícios adicionais de múltipla escolha.

Companion Website

PEARSON
Addison Wesley

www.pearson.com.br

Diretor editorial: Roger Trimer
Gerente editorial: Sabrina Cairo
Supervisor de produção editorial: Marcelo Françozo
Editora sênior: Tatiana Pavanelli Valsi
Editores: Henrique Zanardi de Sá e Josie Rogero
Preparação: Carla Montagner
Revisão: Arlete Sousa e Marina Nogueira
Índice: Renata Siqueira Campos
Capa: Rafael Mazzo (sobre o projeto original de Suzanne Heiser)
Foto de capa e abertura de partes: © Royalty-Free/Corbis
Editoração eletrônica e diagramação: ERJ Composição Editorial

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

cálculo / Franklin D. Demana...[et al.] ;
dução técnica Eliana Crepaldi Yazawa e Aldy
rnandes da Silva. — São Paulo : Addison Wesley, 2009.

utros autores: Bert K. Waits, Gregory D.
y, Daniel Kennedy
tulo original: Precalculus
BN 978-85-88639-37-9

Álgebra 2. Matemática 3. Trigonometria
emana, Franklin D.,1938-. II. Waits, Bert K..
Foley, Gregory D.. IV. Kennedy, Daniel.

CDD-516.24

Índices para catálogo sistemático:
1. Pré-cálculo : Matemática 516.24

2008
Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil Ltda.,
uma empresa do grupo Pearson Education
Av. Ermano Marchetti, 1435
CEP: 05038-001 – São Paulo – SP
Tel.: (11) 2178-8686 Fax: (11) 2178-8688

Sumário

Prefácio

Embora muita atenção tem sido dada à estrutura dos cursos de cálculo na última década, pou tem se falado a respeito do pré-calculo.

Esta edição de *Pré-cálculo*, a fim de atender às necessidades do público brasileiro, foi tot mente adaptada e estruturada com o objetivo de fornecer ferramentas básicas a alunos que inicia os estudos de cálculo diferencial e integral, por meio de definições abordadas de maneira intuiti e sem se apegar aos desenvolvimentos tradicionais.

A interpretação de gráficos e sua utilização ao resolver exercícios é uma característica pred minante em todo o livro cuja elaboração, preocupou-se em unir a álgebra das funções com as idéi intuitivas, a partir da visualização gráfica.

Nossa abordagem

Uma das principais características dessa obra é o equilíbrio entre os métodos algébrico, num rico, gráfico e verbal, quando da resolução dos problemas. Por exemplo: obtemos soluções gra camente quando esse é o método mais apropriado a ser usado ou usamos os métodos numéricos gráficos quando a álgebra é difícil de ser usada. Guiamos o aluno de forma que ele use um méto para resolver uma questão e, depois, usamos outras técnicas para confirmar suas soluçõe Acreditamos que, além de saber usar esses métodos, o aluno precisa entender todo o problema após isso, decidir qual deles usará.

Ao longo de todo o livro, exemplos e exercícios fazem com que o aluno entenda o problem desenvolva um modelo matemático, encontre uma solução, confirme-a e interprete-a. Além disso, aluno aprende a analisar e modelar dados, representá-los graficamente para, então, interpretá-lo Tabelas auxiliam os alunos a construírem a conexão entre números e gráficos, além de permitire que todos os métodos de resolução sejam reconhecidos.

Outro aspecto importante desse livro é que ele auxilia os alunos a compreenderem todo o voc bulário das funções.

Com esse perfil de texto, o aluno é, a todo momento, convidado a interpretar e a tirar concl sões do que está sendo feito.

Nossa estrutura

Como não poderia deixar de ser, o Capítulo 1 tem um aspecto introdutório no qual se trata d conjuntos numéricos, enfatizando o conjunto dos números reais, suas operações e suas propriedade

No Capítulo 2, apresenta-se a parte de manipulação algébrica, destacando o uso da potenciação radiciação, seguida da definição de polinômios e técnicas de fatoração que se destacam no Capítulo

O Capítulo 4 desenvolve problemas com expressões fracionárias; o 5, o estudo das equaçõe o 6, o estudo das inequações; e o 7 introduz toda a noção de função e sua linguagem, além de apr sentar muitos exemplos.

A partir do Capítulo 8, inicia-se a apresentação dos principais aspectos das funções do primei e segundo graus, que é desenvolvido até o Capítulo 14, passando por funções potência, funções pol nomiais, funções exponenciais, funções logarítmicas, funções compostas e funções inversas, co

Com o objetivo de apresentar os primeiros tópicos dessa área das ciências exatas, o Capítulo
ta tópicos essenciais relacionados à derivada e à integral de função.

Como muitos alunos das mais diversas áreas do conhecimento podem utilizar esse livro, os apên-
trazem matrizes e sistemas, análise combinatória, noções de trigonometria e estudo de cônicas.

ssos recursos didáticos

Com o objetivo de tornar o livro ainda mais didático, além de um texto simples e de fácil com-
nsão, alguns recursos gráficos fazem com que os alunos saibam que tipo de informação está
transmitida.

EXEMPLO 1 Análise formas decimais de números racionais

Determine a forma decimal de 1/16, 55/27, e 1/17.

SOLUÇÃO

$$\frac{1}{16} = 0{,}0625 \quad \text{e} \quad \frac{55}{27} = 2{,}037037037\ldots$$

É correto dizer que $1/17 \cong 0{,}0588235294$. O símbolo $\cong$ significa "é aproximadamente igual a". Neste caso, pelo fato de o número ser racional, ele possui um bloco que repete infinitamente, e como esse bloco possui muitos dígitos, o resultado não deixa evidente que bloco é esse para que se escreva com a notação da barra sobre o mesmo. Por essa razão, utilizamos o símbolo $\cong$.

Os exemplos — por exemplo — são acompanhados de um fio lateral até que eles sejam concluí-
quando esse mesmo fio passa para direção horizontal. Definições e explicações especiais tam-
receberam diferentes destaques a fim de facilitar o processo de ensino/aprendizagem. Além disso,
s com dicas estão distribuídas por todo o texto com informações adicionais sobre o assunto que
sendo tratado.

DEFINIÇÃO Raiz *n*-ésima de um número real

Sejam n um número inteiro maior que 1 e a e b números reais.

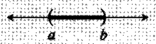
1. Se $b^n = a$, então b é uma **raiz *n*-ésima** de a.
2. Se a tem uma raiz n-ésima, então a **principal raiz *n*-ésima** de a é aquela com o mesmo sinal de a.

A principal raiz n-ésima de a é denotada pela **expressão com o radical** $\sqrt[n]{a}$. O inteiro positivo n é o **índice** do radical e a é o **radicando**.

Ainda, cada capítulo termina com uma lista de exercícios bastante diversificada, que envolvem
tões abertas, questões de múltipla escolha e questões de verdadeiro ou falso. Alguns capítulos
sentam exercícios para uma revisão rápida de tópicos essenciais antes de partir para os exercí-
de fixação. Reforçando, os exercícios procuram testar a manipulação algébrica e analítica dos
s, a conexão da álgebra com a geometria, a interpretação dos gráficos, a representação gráfica
nérica das funções e a análise dos dados. Permite-se, ainda, que o aluno utilize recursos tecno-
os, como calculadoras que tenham recursos gráficos.

rvalos limitados de números reais

n a e b números reais com $a < b$.

ção de rvalo	Tipo de intervalo	Notação de desigualdade	Representação gráfica
b]	Fechado	$a \leq x \leq b$	

NOTAÇÃO DE INTERVALO COM $\pm\infty$

Como $-\infty$ não é número real, usamos, por exemplo $]-\infty, 2[$, em vez de $[-\infty, 2[$ para descrever $x < 2$. Da mesma maneira, usamos $[-1, +\infty[$, em vez de $[-1, +\infty]$ para descrever $x \geq -1$.

Material adicional

Companion Website

No site de apoio deste livro (www.aw.com/demana_br), professores e estudantes têm acesso a materiais adicionais que facilitam tanto a exposição das aulas como o processo de aprendizagem.

- *Para o professor*: apresentações em PowerPoint.

Esses materiais são de uso exclusivo dos professores e estão protegidos por senha. Para ter acesso a eles, os professores que adotam o livro devem entrar em contato com seu representante Pearson ou enviar um e-mail para universitarios@pearsoned.com.

- *Para o estudante*: exercícios adicionais

Agradecimentos

Gostaríamos de expressar nossa gratidão aos revisores técnicos que nos proporcionaram comentários, opiniões e sugestões de valor inestimável. Agradecimentos especiais são devidos a nossa consultora, Cynthia Schimek, *Secondary Mathematics Curriculum Specialist,* Katy Independent School District, Texas, por sua orientação e valiosas sugestões para esta edição.

Judy Ackerman
Montgomery College

Ignacio Alarcon
Santa Barbara City College

Ray Barton
Olympus High School

Nicholas G. Belloit
Florida Community College at Jacksonville

Margaret A. Blumberg
University of Southwestern Louisiana

Ray Cannon
Baylor University

Marilyn P. Carlson
Arizona State University

Edward Champy
Northern Essex Community College

Janis M. Cimperman
Saint Cloud State University

Wil Clarke
La Sierra University

Marilyn Cobb
Lake Travis High School

Donna Costello
Plano Senior High School

Gerry Cox
Lake Michigan College

Deborah A. Crocker
Appalachian State University

Marian J. Ellison
University of Wisconsin — Stout

Donna H. Foss
University of Central Arkansas

Betty Givan
Eastern Kentucky University

Brian Gray
Howard Community College

Daniel Harned
Michigan State University

Vahack Haroutunian
Fresno City College

Celeste Hernandez
Richland College

Rich Hoelter
Raritan Valley Community College

Dwight H. Horan
Wentworth Institute of Technology

Margaret Hovde
Grossmont College

Miles Hubbard
Saint Cloud State University

Sally Jackman
Richland College

T. J. Johnson
Hendrickson High School

Stephen C. King
University of South Carolina — Aiken

Jeanne Kirk
William Howard Taft High School

Georgianna Klein
Grand Valley State University

Deborah L. Kruschwitz-List
University of Wisconsin — Stout

Carlton A. Lane
Hillsborough Community College

James Larson
Lake Michigan University

Edward D. Laughbaum
Columbus State Community College

Ron Marshall
Western Carolina University

Janet Martin
Lubbock High School

Beverly K. Michael
University of Pittsburgh

Paul Mlakar
St. Mark's School of Texas

John W. Petro
Western Michigan University

Cynthia M. Piez
University of Idaho

Debra Poese
Montgomery College

Jack Porter
University of Kansas

nio R. Quesada
Jniversity of Akron

y Risser
West Senior High

nas H. Rousseau
College

d K. Ruch
Houston State
versity

Saks
hoga Community
lege

Mary Margaret Shoaf-Grubbs
College of New Rochelle

Malcolm Soule
California State University, Northridge

Sandy Spears
Jefferson Community College

Shirley R. Stavros
Saint Cloud State University

Stuart Thomas
University of Oregon

Janina Udrys
Schoolcraft College

Mary Voxman
University of Idaho

Eddie Warren
University of Texas at Arlington

Steven J. Wilson
Johnson County Community College

Gordon Woodward
University of Nebraska

Cathleen Zucco-Teveloff
Trinity College

Expressamos agradecimentos especiais a Chris Brueningsen, Linda Antinone e Bill Bower por rabalho nos projetos dos capítulos. Também gostaríamos de agradecer Perian Herring, Frank ell e Tom Wegleitner pela meticulosa precisão na verificação do texto. Somos gratos a Nesbitt phics, que realizou um trabalho incrível na diagramação e revisão e especificamente a Kathy h e Harry Druding pelo excelente trabalho na coordenação de todo o processo de produção. Por nossos agradecimentos à notável e profissional equipe da Addison-Wesley, pelos conselhos e o na revisão do texto, em particular Anne Kelly, Becky Anderson, Greg Tobin, Rich Williams, Heyden, Gary Schwartz, Marnie Greenhut, Joanne Ha, Karen Wernholm, Jeffrey Holcomb, para Atkinson, Evelyn Beaton, Beth Anderson, Maureen McLaughlin e Michelle Murray. adecimentos específicos são devidos a Elka Block, que nos ajudou incansavelmente ao longo do nvolvimento e produção deste livro.

— F. D. D.
— B. K. W.
— G. D. F.
— D. K.

Parte 1

Introdução

Capítulo 1

Conjuntos numéricos e os números reais

Representação dos números reais

Objetivos de aprendizagem

- Representação dos números reais.
- A ordem na reta e a notação de intervalo.
- Propriedades básicas da álgebra.
- Potenciação com expoentes inteiros.
- Notação científica.

Estes tópicos são fundamentais no estudo da matemática e ciência como um todo.

Um **número real** é qualquer número que pode ser escrito na forma decimal. Números reais são representados por símbolos, como -8, 0, 1,75, 2,333..., $0,\overline{36}$, 8/5, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{16}$, e e π.

O conjunto dos números reais contém vários subconjuntos importantes:

Conjunto dos **números naturais**: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto dos **números inteiros**: $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto dos **números racionais** (cujos elementos descreveremos a seguir)

Conjunto dos **números irracionais**

As chaves { } são utilizadas para descrever conjuntos com seus **elementos**.

Um **número racional** é qualquer número que pode ser escrito como uma razão a/b de dois números inteiros, onde $b \neq 0$. Podemos usar a **notação de conjunto com propriedade** para descrever os números racionais:

$$\left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \text{ são inteiros, e } b \neq 0 \right\}$$

A barra vertical que segue $\frac{a}{b}$ é lida como "tal que".

A forma decimal de um número racional pode ter uma quantidade finita de casas após a vírgula, como $7/4 = 1,75$, ou não, como podemos ver em $4/11 = 0,363636\ldots = 0,\overline{36}$. A barra sobre o 36 indica quais dígitos se repetem. Um número real é **irracional** se não for racional. A forma decimal de um número irracional não possui bloco de dígitos que se repete infinitamente. Por exem-plo, $\sqrt{3} = 1,7320508\ldots$ e $\pi = 3,14159265\ldots$

EXEMPLO 1 Análise das formas decimais de números racionais

Determine a forma decimal de 1/16, 55/27, e 1/17.

SOLUÇÃO

$$\frac{1}{16} = 0,0625 \quad \text{e} \quad \frac{55}{27} = 2,037037037\ldots$$

É correto dizer que $1/17 \cong 0,0588235294$. O símbolo $\cong$ significa "é aproximadamente igual a". Neste caso, pelo fato de o número ser racional, ele possui um bloco que repete infinitamente, e como esse bloco possui muitos dígitos, o resultado não deixa evidente que bloco é esse para que se escreva com a notação da barra sobre o mesmo. Por essa razão, utilizamos o símbolo $\cong$.

Para representar os números reais, começamos com uma reta horizontal e marcamos o número real zero com o valor 0, a **origem**. **Números positivos** estão à direita da origem e **números negativos**, à esquerda, como mostrados na Figura 1.1.

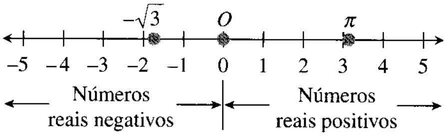


Figura 1.1 A reta de números reais.

Todo número real corresponde a um e somente um valor na reta real e todo valor na reta real corresponde a um e somente um número real. Entre dois números reais na reta existem infinitos números reais.

O número associado ao ponto é **a coordenada do ponto**. Ao longo do texto seguiremos a convenção de usar o número real para as duas situações, tanto para o nome do ponto como para sua coordenada.

A ordem na reta e a notação de intervalo

O conjunto dos números reais é **ordenado**. Isso significa que podemos comparar quaisquer dois números reais que não são iguais usando desigualdades; podemos dizer que um é "menor que" ou "maior que" o outro.

Ordem dos números reais

Sejam a e b dois números reais quaisquer.

Símbolo	Definição	Leitura
$a > b$	$a - b$ é positivo	a é maior que b
$a < b$	$a - b$ é negativo	a é menor que b
$a \geq b$	$a - b$ é positivo ou zero	a é maior ou igual a b
$a \leq b$	$a - b$ é negativo ou zero	a é menor ou igual a b

Os símbolos $>$, $<$, $\geq$ e $\leq$ são **símbolos de desigualdade.**

Geometricamente, $a > b$ significa que a está à direita de b (de modo equivalente, b está à esquerda de a) na reta dos números reais.

Podemos comparar dois números reais quaisquer devido à seguinte propriedade importante desses números.

Lei da Tricotomia

Sejam a e b dois números reais quaisquer. Somente uma das seguintes expressões é verdadeira:

$$a < b, \quad a = b \quad \text{ou} \quad a > b$$

Desigualdades podem ser usadas para descrever **intervalos** de números reais, como ilustrado no Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Interpretação das desigualdades

Descreva e represente graficamente os intervalos de números reais para as desigualdades.

(a) $x < 3$ **(b)** $-1 < x \leq 4$

SOLUÇÃO

(a) A desigualdade $x < 3$ descreve todos os números reais menores que 3 (Figura 1.2a).

(b) A *dupla desigualdade* $-1 < x \leq 4$ representa todos os números reais entre -1 e 4, excluindo -1 e incluindo 4 (Figura 1.2b).

EXEMPLO 3 Descrição das desigualdades

Escreva os intervalos de números reais usando desigualdade e represente graficamente.
(a) Os números reais entre -4 e $-0{,}5$.
(b) Os números reais maiores ou iguais a zero.

SOLUÇÃO

(a) $-4 < x < -0{,}5$ (Figura 1.2c).
(b) $x \geq 0$ (Figura 1.2d).

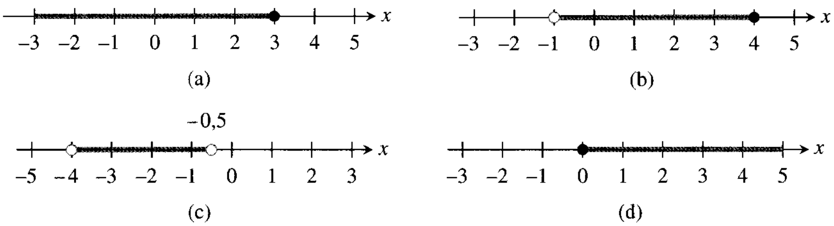


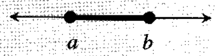
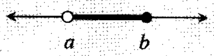
Figura 1.2 Nas representações gráficas das desigualdades, bolas vazias correspondem a $<$ e $>$ e bolas cheias a $\leq$ e $\geq$.

Como foi mostrado no Exemplo 2, desigualdades definem *intervalos* sobre a reta real. Nós usamos a notação exemplificada por [2, 5] para descrever um *intervalo limitado* que representa o conjunto $\{x \in R \mid 2 \leq x \leq 5\}$. Além de limitado, esse intervalo é **fechado** porque contém os extremos 2 e 5. Existem quatro tipos de **intervalos limitados**.

Intervalos limitados de números reais

Sejam a e b números reais com $a < b$.

Notação de intervalo	Tipo de intervalo	Notação de desigualdade	Representação gráfica
$[a, b]$	Fechado	$a \leq x \leq b$	

Notação de intervalo	Tipo de intervalo	Notação de desigualdade	Representação gráfica
$]a, b[$	Aberto	$a < x < b$	
$[a, b[$	Fechado à esquerda e aberto à direita	$a \leq x < b$	
$]a, b]$	Aberto à esquerda e fechado à direita	$a < x \leq b$	

Os números a e b são os **extremos** de cada intervalo.

NOTAÇÃO DE INTERVALO COM $\pm\infty$

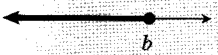
Como $-\infty$ não é número real, usamos, por exemplo $]-\infty, 2[$, em vez de $[-\infty, 2[$ para descrever $x < 2$. Da mesma maneira, usamos $[-1, +\infty[$, em vez de $[-1, +\infty]$ para descrever $x \geq -1$.

O intervalo de números reais determinado pela desigualdade $x < 2$ pode ser descrito pelo *intervalo infinito* $]-\infty, 2[$. Este intervalo é **aberto**, pois não contém seu extremo 2.

Usamos a notação de intervalo $]-\infty, +\infty[$ para representar todo o conjunto dos números reais. Os símbolos $-\infty$ (*infinito negativo*) e $+\infty$ (*infinito positivo*) nos permitem usar a notação de intervalo para intervalos não limitados e *não* são números reais. Existem quatro tipos de **intervalos não limitados** (ou intervalos infinitos).

Intervalos não limitados de números reais

Sejam a e b números reais.

Notação de intervalo	Tipo de intervalo	Notação de desigualdade	Representação gráfica
$[a, +\infty[$	Fechado	$x \geq a$	
$]a, +\infty[$	Aberto	$x > a$	
$]-\infty, b]$	Fechado	$x \leq b$	
$]-\infty, b[$	Aberto	$x < b$	

Cada intervalo tem exatamente um extremo que é a ou b.

EXEMPLO 4 Conversão entre intervalos e desigualdades

Converta a notação de intervalo para desigualdade ou vice-versa. Encontre os extremos e verifique se o intervalo é limitado, seu tipo e a representação gráfica.

(a) $[-6, 3[$ **(b)** $]-\infty, -1[$ **(c)** $-2 \leq x \leq 3$

SOLUÇÃO

(a) O intervalo $[-6, 3[$ corresponde a $-6 \leq x < 3$, é limitado e é do tipo fechado à esquerda e aberto à direita (veja a Figura 1.3a). Os extremos são -6 e 3.

(b) O intervalo $]-\infty, -1[$ corresponde a $x < -1$, não é limitado e é aberto (veja a Figura 1.3b). O extremo é somente -1.

(c) A desigualdade $-2 \leq x \leq 3$ corresponde a um intervalo fechado e limitado, dado por $[-2, 3]$ (veja a Figura 1.3c). Os extremos são -2 e 3.

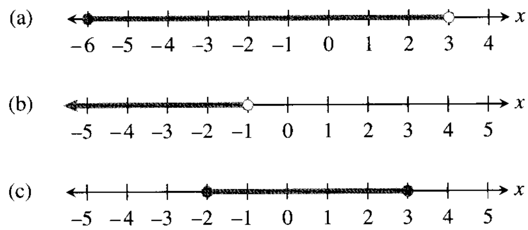


Figura 1.3 Representações gráficas dos intervalos de números reais do Exemplo 4.

Propriedades básicas da álgebra

A álgebra envolve o uso de letras e outros símbolos para representar números reais. Uma **variável** é uma letra ou símbolo (por exemplo, x, y, t, θ) que representa um número real não específico. Uma **constante** é uma letra ou símbolo (por exemplo, -2, 0, $\sqrt{3}$, π) que representa um número real específico. Uma **expressão algébrica** é a combinação de variáveis e constantes envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potências e raízes.

Apresentamos algumas das propriedades das operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão, representadas pelos símbolos $+$, $-$, $\times$ (ou $\cdot$) e $\div$ (ou /), respectivamente. Adição e multiplicação são as operações primárias. Subtração e divisão são definidas em termos da adição e multiplicação.

Subtração: $a - b = a + (-b)$

Divisão: $\dfrac{a}{b} = a \cdot \left(\dfrac{1}{b}\right)$, $b \neq 0$

Nas duas definições, $-b$ é a **inversa aditiva** ou **oposto** de b, e $1/b$ é a **inversa multiplicativa** ou **recíproca** de b. As inversas aditivas nem sempre são números negativos. A inversa aditiva de 5 é o número negativo -5. Porém, a inversa aditiva de -3 é o número positivo 3.

As seguintes propriedades são válidas para números reais, variáveis e expressões algébricas.

SUBTRAÇÃO *VERSUS* NÚMEROS NEGATIVOS

Em muitas calculadoras existem duas teclas "$-$", uma para subtração e outra para números negativos ou opostos.

Propriedades da álgebra

Sejam u, v e w números reais, variáveis ou expressões algébricas.

1. Propriedade comutativa
Adição: $u + v = v + u$
Multiplicação: $uv = vu$

2. Propriedade associativa
Adição:
$(u + v) + w = u + (v + w)$
Multiplicação: $(uv)w = u(vw)$

3. Propriedade do elemento neutro
Adição: $u + 0 = u$
Multiplicação: $u \cdot 1 = u$

4. Propriedade do elemento inverso
Adição: $u + (-u) = 0$
Multiplicação: $u \cdot \frac{1}{u} = 1, u \neq 0$

5. Propriedade distributiva
Multiplicação com relação à adição:
$u(v + w) = uv + uw$
$(u + v)w = uw + vw$

Multiplicação com relação à subtração:
$u(v - w) = uv - uw$
$(u - v)w = uw - vw$

O lado esquerdo das equações na propriedade distributiva mostra a **forma fatorada** das expressões algébricas e o lado direito mostra a **forma expandida**.

EXEMPLO 5 Uso da propriedade distributiva

(a) Escreva a forma expandida de $(a + 2)x$.
(b) Escreva a forma fatorada de $3y - by$.

SOLUÇÃO

(a) $(a + 2)x = ax + 2x$ **(b)** $3y - by = (3 - b)y$

Eis algumas propriedades da inversa aditiva, juntamente com exemplos que ajudam a ilustrar seus significados.

Propriedades da inversa aditiva

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas.

Propriedade	Exemplo
1. $-(-u) = u$	$-(-3) = 3$
2. $(-u)v = u(-v) = -(uv)$	$(-4)3 = 4(-3) = -(4 \cdot 3) = -12$
3. $(-u)(-v) = uv$	$(-6)(-7) = 6 \cdot 7 = 42$
4. $(-1)u = -u$	$(-1)5 = -5$
5. $-(u + v) = (-u) + (-v)$	$-(7 + 9) = (-7) + (-9) = -16$

Potenciação com expoentes inteiros

A notação exponencial é usada para diminuir/encurtar produtos de fatores que se repetem. Vejamos:

$$(-3)(-3)(-3)(-3) = (-3)^4 \quad \text{e} \quad (2x+1)(2x+1) = (2x+1)^2$$

Notação exponencial

Sejam a um número real, uma variável ou uma expressão algébrica e n um número inteiro positivo. Então,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}},$$

onde n é o **expoente**, a é a **base** e a^n é a **n-ésima potência de** a (lê-se "a elevado a n").

As duas expressões exponenciais do Exemplo 6 têm o mesmo valor, porém com diferentes bases.

EXEMPLO 6 Identificação da base

(a) Em $(-3)^5$, a base é -3.

(b) Em -3^5, a base é 3.

Eis as propriedades básicas de potenciação, juntamente com exemplos que auxiliam na compreensão dos seus significados.

Propriedades de potenciação

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas e m e n números inteiros. Todas as bases são consideradas diferentes de zero.

Propriedade	Exemplo
1. $u^m u^n = u^{m+n}$	$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
2. $\dfrac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$	$\dfrac{x^9}{x^4} = x^{9-4} = x^5$
3. $u^0 = 1$	$8^0 = 1$
4. $u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$	$y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$
5. $(uv)^m = u^m v^m$	$(2z)^5 = 2^5 z^5 = 32z^5$
6. $(u^m)^n = u^{mn}$	$(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$
7. $\left(\dfrac{u}{v}\right)^m = \dfrac{u^m}{v^m}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^7 = \dfrac{a^7}{b^7}$

EXEMPLO 7 Simplificação de expressões envolvendo potências

(a) $(2ab^3)(5a^2b^5) = 10(aa^2)(b^3b^5) = 10a^3b^8$

(b) $\dfrac{u^2v^{-2}}{u^{-1}v^3} = \dfrac{u^2u^1}{v^2v^3} = \dfrac{u^3}{v^5}$

(c) $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{-3} = \dfrac{(x^2)^{-3}}{2^{-3}} = \dfrac{x^{-6}}{2^{-3}} = \dfrac{2^3}{x^6} = \dfrac{8}{x^6}$

Notação científica

Todo número positivo pode ser escrito em **notação científica**:

$$c \times 10^m, \text{ onde } 1 \leq c < 10 \text{ e } m \text{ é um inteiro.}$$

Esta notação auxilia quando temos números muito grandes ou muito pequenos e utilizamos potências de 10.

Por exemplo, a distância entre a Terra e o Sol é de, aproximadamente, 149.597.870,691 quilômetros. Em notação científica,

$$149.597.870{,}691 \text{ km} \cong 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}$$

O *expoente positivo* 8 indica que, ao mover a vírgula do número decimal 8 casas para a direita, temos a forma original do número.

A massa de uma molécula de oxigênio é de aproximadamente

$$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 053 \text{ gramas.}$$

Em notação científica,

$$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 053 \text{ g} = 5{,}3 \times 10^{-23} \text{ g.}$$

O *expoente negativo* -23 indica que, ao mover a vírgula do número decimal 23 casas para a esquerda, temos a forma original do número.

EXEMPLO 8 Conversão da notação científica

(a) $2{,}375 \times 10^8 = 237.500.000$

(b) $0{,}000000349 = 3{,}49 \times 10^{-7}$

EXEMPLO 9 Uso da notação científica

Simplifique $\dfrac{(370.000)(4.500.000.000)^*}{18.000}$

SOLUÇÃO

$$\frac{(370.000)(4.500.000.000)}{18.000} = \frac{(3{,}7 \times 10^5)(4{,}5 \times 10^9)}{1{,}8 \times 10^4}$$

* Vale observar que os parênteses serviram apenas para separar os números que são valores altos. (N.T.)

$$= \frac{(3{,}7)\,(4{,}5)}{1{,}8} \times 10^{5+9-4}$$
$$= 9{,}25 \times 10^{10}$$
$$= 92.500.000.000$$

Revisão Rápida

1. Cite os números inteiros positivos entre -3 e 7.
2. Cite os números inteiros entre -3 e 7.
3. Cite todos os números inteiros negativos maiores que -4.
4. Cite todos os números inteiros positivos menores que 5.

Nos exercícios 5 e 6, use calculadora para desenvolver a expressão. Deixe o resultado com duas casas após a vírgula.

5. (a) $4(-3{,}1)^3 - (-4{,}2)^5$ **(b)** $\dfrac{2(-5{,}5) - 6}{7{,}4 - 3{,}8}$

6. (a) $5[3(-1{,}1)^2 - 4(-0{,}5)^3]$ **(b)** $5^{-2} + 2^{-4}$

Nos exercícios 7 e 8, calcule o valor da expressão algébrica para os valores das variáveis dadas.

7. $x^3 - 2x + 1$, $x = -2$ e $x = 1{,}5$
8. $a^2 + ab + b^2$, $a = -3$ e $b = 2$

Exercícios

Nos exercícios 1 a 4, encontre a forma decimal para o número racional. Verifique se tem finitas ou infinitas casas após a vírgula.

1. $-37/8$
2. $15/99$
3. $-13/6$
4. $5/37$

Nos exercícios 5 a 10, descreva e represente graficamente o intervalo de números reais.

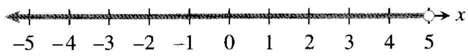
5. $x \leq 2$
6. $-2 \leq x < 5$
7. $]-\infty, 7[$
8. $[-3, 3]$
9. x é negativo.
10. x é maior ou igual a 2 e menor ou igual a 6.

Nos exercícios 11 a 16, use desigualdade para descrever o intervalo de números reais.

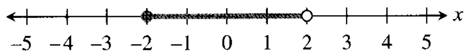
11. $[-1, 1[$

12. $]-\infty, 4]$

13.



14.



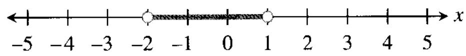
15. x está entre -1 e 2.
16. x é maior ou igual a 5.

Nos exercícios 17 a 22, use notação de intervalo para descrever o intervalo de números reais.

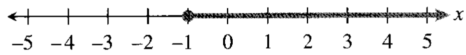
17. $x > -3$

18. $-7 < x < -2$

19.



20.



21. x é maior que -3 e menor ou igual a 4.

22. x é positivo.

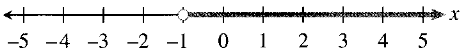
Nos exercícios 23 a 28, descreva o intervalo de números reais.

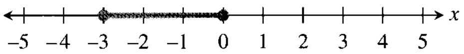
23. $4 < x \leq 9$

24. $x \geq -1$

25. $[-3, +\infty[$

26. $]-5, 7[$

27. 

28. 

Nos exercícios 29 a 32, converta para notação com desigualdade. Encontre os extremos, verifique se o intervalo é limitado ou não, e seu tipo.

29. $]-3, 4]$

30. $]-3, -1[$

31. $]-\infty, 5[$

32. $[-6, \infty[$

Nos exercícios 33 a 36, use tanto desigualdade como notação de intervalo para descrever o conjunto de números. Escreva o significado de quaisquer variáveis que você usar.

33. Bill tem pelo menos 29 anos.

34. Nenhum item na loja custa mais de R$ 2,00.

35. O preço do litro de gasolina varia de R$ 2,20 a R$ 2,90.

36. A taxa de juros ficará entre 2% e 6,5%.

Nos exercícios 37 a 40, use a propriedade distributiva para escrever a forma fatorada ou a forma expandida da expressão dada.

37. $a(x^2 + b)$

38. $(y - z^3)c$

39. $ax^2 + dx^2$

40. $a^3z + a^3w$

Nos exercícios 41 e 42, encontre a inversa aditiva dos números.

41. $6 - \pi$

42. -7

Nos exercícios 43 e 44, identifique a base da potência.

43. -5^2

44. $(-2)^7$

Nos exercícios 45 a 50, simplifique a expressão. Suponha que as variáveis nos denominadores sejam diferentes de zero.

45. $\dfrac{x^4y^3}{x^2y^5}$

46. $\dfrac{(3x^2)^2y^4}{3y^2}$

47. $\left(\dfrac{4}{x^2}\right)^2$

48. $\left(\dfrac{2}{xy}\right)^{-3}$

49. $\dfrac{(x^{-3}y^2)^{-4}}{(y^6x^{-4})^{-2}}$

50. $\left(\dfrac{4a^3b}{a^2b^3}\right)\left(\dfrac{3b^2}{2a^2b^4}\right)$

Nos exercícios 51 e 52, escreva o número em notação científica.

51. A distância média de Júpiter até o Sol é de aproximadamente 1780.000.000 quilômetros.

52. A carga elétrica, em Coulombs, de um elétron é de aproximadamente −0,0000 0000000000000016.

Nos exercícios 53 a 56, escreva o número na forma original.

53. $3{,}33 \times 10^{-8}$

54. $6{,}73 \times 10^{11}$

55. A distância que a luz viaja em um ano (*um ano-luz*) é aproximadamente $9{,}5 \cdot 10^{12}$ quilômetros.

56. A massa de um nêutron é aproximadamente $1{,}6747 \times 10^{-24}$ gramas.

Nos exercícios 57 e 58, use notação científica para simplificar.

57. $\dfrac{(1{,}35 \times 10^{-7})(2{,}41 \times 10^{8})}{1{,}25 \times 10^{9}}$

58. $\dfrac{(3{,}7 \times 10^{-7})(4{,}3 \times 10^{6})}{2{,}5 \times 10^{7}}$

59. Para inteiros positivos m e n, nós podemos usar a definição para mostrar que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

(a) Examine a equação $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para $n = 0$ e explique por que é razoável definir $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.

(b) Examine a equação $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para $n = -m$ e explique por que é razoável definir $a^{-m} = 1/a^m$ para $a \neq 0$.

60. Verdadeiro ou falso A inversa aditiva de um número real precisa ser negativa. Justifique sua resposta.

61. Verdadeiro ou falso A recíproca de um número real positivo precisa ser menor que 1. Justifique sua resposta.

62. Qual das seguintes desigualdades corresponde ao intervalo $[-2, 1[$?

(a) $x \leq -2$ **(b)** $-2 \leq x \leq 1$

(c) $-2 < x < 1$ **(d)** $-2 < x \leq 1$

(e) $-2 \leq x < 1$

63. Qual é o valor de $(-2)^4$?

(a) 16 **(b)** 8

(c) 6 **(d)** -8

(e) -16

64. Qual é a base da potência -7^2?

(a) -7 **(b)** 7

(c) -2 **(d)** 2

(e) 1

65. Qual das seguintes alternativas é a forma simplificada de $\frac{x^6}{x^2}$, $x \neq 0$?

(a) x^{-4} **(b)** x^2

(c) x^3 **(d)** x^4

(e) x^8

A **magnitude** de um número real é sua distância da origem.

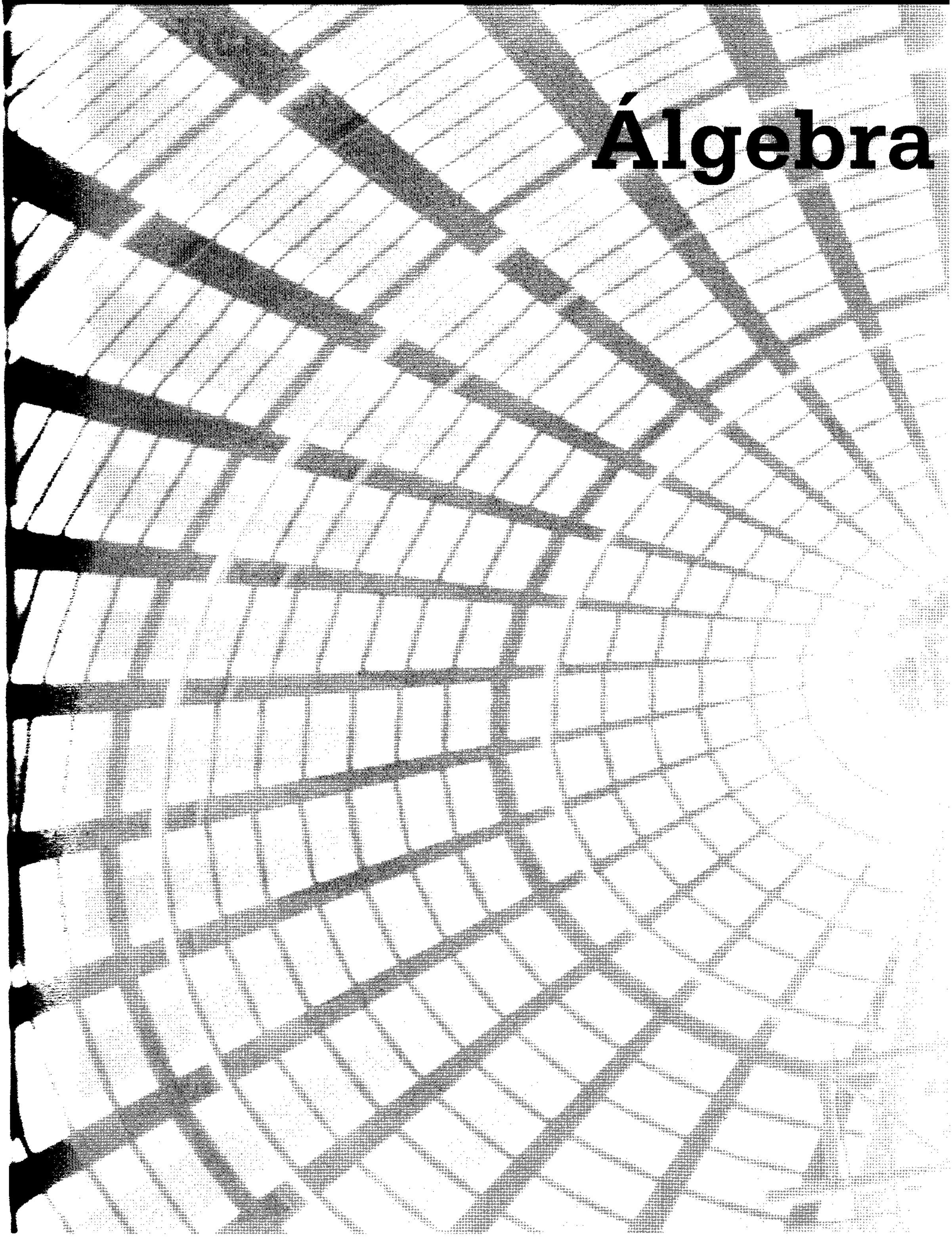
66. Cite todos os números reais cujas magnitudes são menores que 7.

67. Cite todos os números naturais cujas magnitudes são menores que 7.

68. Cite todos os números inteiros cujas magnitudes são menores que 7.

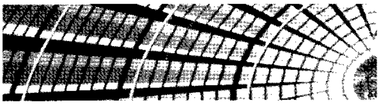
Parte 2

Álgebra



Capítulo **2**

Radiciação e potenciação



Radicais

Se $b^2 = a$, então b é a **raiz quadrada** de a. Por exemplo, 2 e -2 são raízes quadradas de 4 porque $2^2 = (-2)^2 = 4$. Da mesma maneira, se $b^3 = a$ então b é a **raiz cúbica** de a. Por exemplo, 2 é a raiz cúbica de 8 porque $2^3 = 8$.

Objetivos de aprendizagem

- Radicais.
- Simplificação de expressões com radicais.
- Racionalização.
- Potenciação com expoentes racionais.

DEFINIÇÃO Raiz n-ésima de um número real

Sejam n um número inteiro maior que 1 e a e b números reais.

1. Se $b^n = a$, então b é uma **raiz n-ésima** de a.

2. Se a tem uma raiz n-ésima, então a **principal raiz n-ésima** de a é aquela com o mesmo sinal de a.

A principal raiz n-ésima de a é denotada pela **expressão com o radical** $\sqrt[n]{a}$. O inteiro positivo n é o **índice** do radical e a é o **radicando**.

Todo número real tem exatamente uma *raiz n-ésima* real quando n é ímpar. Por exemplo, 2 é a única raiz cúbica real de 8. Quando n é par, números reais positivos têm duas *raízes n-ésimas* reais e números reais negativos não têm raízes n-ésimas reais. Por exemplo, $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ e -16 não tem raiz quarta real. A *principal* raiz quarta de 16 é 2.

Quando $n = 2$, uma notação especial é usada para raízes. Omitimos o índice e escrevemos $\sqrt{a}$ em vez de $\sqrt[2]{a}$. Se a é um número real positivo e n um inteiro par positivo, suas duas raízes n-ésimas são denotadas por $\sqrt[n]{a}$ e $-\sqrt[n]{a}$.

EXEMPLO 1 Verificação das raízes n-ésimas principais

(a) $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$.

(b) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$ porque $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8}$.

(c) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}} = -\dfrac{3}{2}$ porque $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3 = -\dfrac{27}{8}$.

(d) $\sqrt[4]{-625}$ não é um número real porque o índice 4 é par e o radicando -625 é negativo (*não* existe número real cuja quarta potência seja negativa).

Eis algumas propriedades de radicais, juntamente com exemplos que auxiliam a ilustrar seu significado.

Propriedades dos radicais

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas e m e n números positivos inteiros maiores que 1. Vamos supor que todas as raízes sejam números reais e todos os denominadores não sejam zero.

Propriedade	**Exemplo**
1. $\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$	$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}$	$\dfrac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{96}{6}} = \sqrt[4]{16} = 2$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[m \cdot n]{u}$	$\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2 \cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$
4. $(\sqrt[n]{u})^n = u$	$(\sqrt[4]{5})^4 = 5$
5. $\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$	$\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
6. $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} \lvert u \rvert \text{ para } n \text{ par} \\ u \text{ para } n \text{ ímpar} \end{cases}$	$\sqrt{(-6)^2} = \lvert -6 \rvert = 6$; $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$

Simplificação de expressões com radicais

Muitas técnicas de simplificação de raízes de números reais não são mais usadas, devido à utilização das calculadoras. No entanto, vamos mostrar com exemplos o que podemos fazer em casos sem o uso delas.

EXEMPLO 2 Remoção de fatores dos radicandos

(a) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{16 \cdot 5}$
$= \sqrt[4]{2^4 \cdot 5}$
$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5}$
$= 2\sqrt[4]{5}$

(b) $\sqrt{18x^5} = \sqrt{9x^4 \cdot 2x}$
$= \sqrt{(3x^2)^2 \cdot 2x}$
$= 3x^2\sqrt{2x}$

(c) $\sqrt[4]{x^4y^4} = \sqrt[4]{(xy)^4}$
$= \lvert xy \rvert$

(d) $\sqrt[3]{-24y^6} = \sqrt[3]{(-2y^2)^3 \cdot 3}$
$= -2y^2\sqrt[3]{3}$

Racionalização

O processo de reescrever frações contendo radicais de modo que o denominador fique sem esses radicais é **a racionalização.** Quando o denominador tem a forma $\sqrt[n]{u^k}$, multiplicando numerador e denominador por $\sqrt[n]{u^{n-k}}$ poderemos eliminar o radical do denominador, pois

$$\sqrt[n]{u^k} \cdot \sqrt[n]{u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^k \cdot u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^{k+n-k}} = \sqrt[n]{u^n} = u.$$

O Exemplo 3 ilustra o processo.

EXEMPLO 3 Racionalização

(a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{|x|}$

(c) $\sqrt[5]{\dfrac{x^2}{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{\sqrt[5]{y^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{y}$

Potenciação com expoentes racionais

Sabemos como manipular expressões exponenciais com expoentes inteiros. Por exemplo, $x^3 \cdot x^4 = x^7$, $(x^3)^2 = x^6$, $x^5/x^2 = x^3$, $x^{-2} = 1/x^2$, e assim por diante. Mas os expoentes podem ser também números racionais. Como deveríamos definir, por exemplo, $x^{1/2}$? Para começar, podemos supor que as mesmas regras que aplicamos para expoentes inteiros também se aplicam para expoentes racionais.

DEFINIÇÃO Expoentes racionais

Seja u um número real, variável ou expressão algébrica e n um inteiro maior que 1. Então

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}.$$

Se m é um inteiro positivo, m/n está na forma reduzida e todas as raízes são números reais, então

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m \qquad \text{e} \qquad u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}.$$

O numerador de um expoente racional é a *potência* para a qual a base está elevada e o denominador é o indíce da *raiz*. A fração m/n precisa estar na forma reduzida, pois, caso contrário, isso pode ocasionar algum problema de definição. Vejamos:

$$u^{2/3} = (\sqrt[3]{u})^2$$

e esta expressão está definida para todo número u real, mas

$$u^{4/6} = (\sqrt[6]{u})^4$$

está definida somente para $u \geq 0$.

EXEMPLO 4 Conversão de radicais para potências e vice-versa

(a) $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{3/2}$

(b) $3x\sqrt[5]{x^2} = 3x \cdot x^{2/5} = 3x^{7/5}$

(c) $x^{2/3}y^{1/3} = (x^2y)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2y}$

(d) $z^{-3/2} = \dfrac{1}{z^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{z^3}}$

Uma expressão envolvendo potências está *simplificada* se cada fator aparece somente uma vez e todos os expoentes são positivos.

EXEMPLO 5 Simplificação de expressões com potências

(a) $(x^2y^9)^{1/3}(xy^2) = (x^{2/3}y^3)(xy^2) = x^{5/3}y^5$

(b) $\left(\dfrac{3x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{2x^{-1/2}}{y^{2/5}}\right) = \dfrac{6x^{1/6}}{y^{9/10}}$

O Exemplo 6 sugere como simplificar uma soma ou diferença de radicais.

EXEMPLO 6 Simplificação de expressões com radicais

(a)
$$\begin{aligned} 2\sqrt{80} - \sqrt{125} &= 2\sqrt{16 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5} \\ &= 8\sqrt{5} - 5\sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2y} - \sqrt{y^3} &= \sqrt{(2x)^2y} - \sqrt{y^2y} \\ &= 2|x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{y} \\ &= (2|x| - |y|)\sqrt{y} \end{aligned}$$

Eis um resumo dos procedimentos usados para *simplificar expressões* envolvendo radicais.

Simplificação de expressões com radicais

1. Remover fatores dos radicais (Exemplo 2).
2. Eliminar radicais dos denominadores e denominadores dos radicandos (Exemplo 3).
3. Combinar somas e diferenças dos radicais, se possível (Exemplo 6).

Exercícios

Nos exercícios 1 a 6, encontre as raízes reais indicadas.

1. Raiz quadrada de 81.

2. Raiz quarta de 81.

3. Raiz cúbica de 64.

4. Raiz quinta de 243.

5. Raiz quadrada de 16/9.

6. Raiz cúbica de $-27/8$.

Nos exercícios 7 a 12, calcule a expressão sem usar uma calculadora.

7. $\sqrt{144}$ **8.** $\sqrt{-16}$

9. $\sqrt[3]{-216}$ **10.** $\sqrt[3]{216}$

11. $\sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}}$ **12.** $\sqrt{\dfrac{64}{25}}$

Nos exercícios 13 a 22, use uma calculadora para encontrar o valor da expressão.

13. $\sqrt[4]{256}$ **14.** $\sqrt[5]{3125}$

15. $\sqrt[3]{15{,}625}$ **16.** $\sqrt{12{,}25}$

17. $81^{3/2}$ **18.** $16^{5/4}$

19. $32^{-2/5}$ **20.** $27^{-4/3}$

21. $\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{-1/3}$ **22.** $\left(-\dfrac{125}{64}\right)^{-1/3}$

Nos exercícios 23 a 32, simplifique removendo fatores do radicando.

23. $\sqrt{288}$ **24.** $\sqrt[3]{500}$

25. $\sqrt[3]{-250}$ **26.** $\sqrt[4]{192}$

27. $\sqrt{2x^3y^4}$ **28.** $\sqrt[3]{-27x^3y^6}$

29. $\sqrt[4]{3x^8y^6}$ **30.** $\sqrt[3]{8x^6y^4}$

31. $\sqrt[5]{96x^{10}}$ **32.** $\sqrt{108x^4y^9}$

Nos exercícios 33 a 38, racionalize o denominador.

33. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$ **34.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

35. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ **36.** $\dfrac{2}{\sqrt[4]{y}}$

37. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y}}$ **38.** $\sqrt[5]{\dfrac{a^3}{b^2}}$

Nos exercícios 39 a 42, converta para a forma exponencial (forma de potência).

39. $\sqrt[3]{(a+2b)^2}$ **40.** $\sqrt[5]{x^2y^3}$

41. $2x\sqrt[3]{x^2y}$ **42.** $xy\sqrt[4]{xy^3}$

Nos exercícios 43 a 46, converta para a forma radical.

43. $a^{3/4}b^{1/4}$ **44.** $x^{2/3}y^{1/3}$

45. $x^{-5/3}$ **46.** $(xy)^{-3/4}$

Nos exercícios 47 a 52, escreva usando um radical simples.

47. $\sqrt{\sqrt{2x}}$ **48.** $\sqrt{\sqrt[3]{3x^2}}$

49. $\sqrt[4]{\sqrt{xy}}$ **50.** $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$

51. $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}$ **52.** $\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}$

Nos exercícios 53 a 60, simplifique as expressões exponenciais.

53. $\dfrac{a^{3/5}a^{1/3}}{a^{3/2}}$ **54.** $(x^2y^4)^{1/2}$

55. $(a^{5/3}b^{3/4})(3a^{1/3}b^{5/4})$ **56.** $\left(\dfrac{x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)^6$

57. $\left(\dfrac{-8x^6}{y^{-3}}\right)^{2/3}$ **58.** $\dfrac{(p^2q^4)^{1/2}}{(27q^3p^6)^{1/3}}$

59. $\dfrac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^2)^{-1/2}}$ **60.** $\left(\dfrac{2x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)\left(\dfrac{3x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)$

Nos exercícios 61 a 70, simplifique as expressões radicais.

61. $\sqrt{9x^{-6}y^4}$ **62.** $\sqrt{16y^8z^{-2}}$

63. $\sqrt[4]{\dfrac{3x^8y^2}{8x^2}}$ **64.** $\sqrt[5]{\dfrac{4x^6y}{9x^3}}$

65. $\sqrt[3]{\dfrac{4x^2}{y^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{y}}$ **66.** $\sqrt[5]{9ab^6} \cdot \sqrt[5]{27a^2b^{-1}}$

67. $3\sqrt{48} - 2\sqrt{108}$ **68.** $2\sqrt{175} - 4\sqrt{28}$

69. $\sqrt{x^3} - \sqrt{4xy^2}$ **70.** $\sqrt{18x^2y} + \sqrt{2y^3}$

Nos exercícios 71 a 78, substitua ○ por <, = ou > para tornar a expressão verdadeira.

71. $\sqrt{2+6} \bigcirc \sqrt{2} + \sqrt{6}$

72. $\sqrt{4} + \sqrt{9} \bigcirc \sqrt{4+9}$

73. $(3^{-2})^{-1/2} \bigcirc 3$ **74.** $(2^{-3})^{1/3} \bigcirc 2$

75. $\sqrt[4]{(-2)^4} \bigcirc -2$ **76.** $\sqrt[3]{(-2)^3} \bigcirc -2$

77. $2^{2/3} \bigcirc 3^{3/4}$ **78.** $4^{-2/3} \bigcirc 3^{-3/4}$

79. O tempo t (em segundos) que uma pedra leva para cair de uma distância d (em metros) é aproximadamente $t = 0{,}45 \cdot \sqrt{d}$. Quanto tempo uma pedra leva para cair de uma distância de 200 metros?

Polinômios e fatoração

Objetivos de aprendizagem

- Adição, subtração e multiplicação de polinômios.
- Produtos notáveis.
- Fatoração de polinômios usando produtos notáveis.
- Fatoração de trinômios.
- Fatoração por agrupamento.

Adição, subtração e multiplicação de polinômios

Um **polinômio em x** é qualquer expressão que pode ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e $a_n \neq 0$. Os números $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são números reais chamados **coeficientes**. O **grau do polinômio** é n e o **coeficiente principal** é o número real a_n.

Polinômios com um, dois, três termos são **monômios**, **binômios** e **trinômios**, respectivamente. Um polinômio escrito com as potências de x na *ordem decrescente* está na **forma padrão**.

Para adicionar ou subtrair polinômios, nós adicionamos ou subtraímos *termos semelhantes* usando a propriedade distributiva. Termos dos polinômios que têm a mesma variável, cada uma elevada à mesma potência, são **termos semelhantes**.

EXEMPLO 1 Adição e subtração de polinômios

(a) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) + (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

(b) $(4x^2 + 3x - 4) - (2x^3 + x^2 - x + 2)$

SOLUÇÃO

(a) Agrupamos termos semelhantes e então os combinamos, como segue:

$$\begin{aligned} &(2x^3 + x^3) + (-3x^2 + 2x^2) + (4x + (-5x)) + (-1 + 3) \\ &= 3x^3 - x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

(b) Agrupamos termos semelhantes e então os combinamos, como segue:

$$\begin{aligned} &(0 - 2x^3) + (4x^2 - x^2) + (3x - (-x)) + (-4 - 2) \\ &= -2x^3 + 3x^2 + 4x - 6 \end{aligned}$$

Para **expandir o produto** de dois polinômios, nós usamos a propriedade distributiva, por exemplo:

$$\begin{aligned} (3x + 2)(4x - 5) &= \\ &= 3x(4x - 5) + 2(4x - 5) \\ &= (3x)(4x) - (3x)(5) + (2)(4x) - (2)(5) \\ &= \underbrace{12x^2}_{\text{produto dos primeiros termos}} - \underbrace{15x}_{\text{produto dos termos externos}} + \underbrace{8x}_{\text{produto dos termos internos}} - \underbrace{10}_{\text{produto dos últimos termos}} \end{aligned}$$

Os produtos dos termos externos e internos são termos semelhantes e podem ser adicionados como na expressão a seguir:

$$(3x + 2)(4x - 5) = 12x^2 - 7x - 10$$

A multiplicação de dois polinômios requer a multiplicação de cada termo de um polinômio por todos os termos do outro. Uma maneira conveniente de desenvolver o produto é organizar os polinômios na forma-padrão, um sobre o outro, de modo que os termos iguais fiquem alinhados verticalmente, como no Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Multiplicação de polinômios na forma vertical

Escreva $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)$ na forma-padrão.

SOLUÇÃO

$$\begin{array}{lllll}
x^2 & -4x & +3 & & \\
x^2 & +4x & +5 & & \\
\hline
x^4 - 4x^3 + 3x^2 & & & & \\
\quad 4x^3 - 16x^2 + 12x & & & & \\
\qquad\quad 5x^2 - 20x + 15 & & & & \\
\hline
x^4 + 0x^3 - 8x^2 - 8x + 15 & & & &
\end{array}$$

Assim,

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5) = x^4 - 8x^2 - 8x + 15$$

Produtos notáveis

Alguns produtos são úteis quando, por exemplo, precisamos fatorar polinômios. Eis uma lista de alguns produtos notáveis.

Alguns produtos notáveis

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas.

1. **Produto de uma soma e uma diferença:** $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$
2. **Quadrado de uma soma de dois termos:** $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$
3. **Quadrado de uma diferença de dois termos:** $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$
4. **Cubo de uma soma de dois termos:** $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
5. **Cubo de uma diferença de dois termos:** $(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$

EXEMPLO 3 Uso dos produtos notáveis

Faça a expansão dos produtos:

(a) $(3x + 8)(3x - 8) = (3x)^2 - 8^2$
$= 9x^2 - 64$

(b) $(5y - 4)^2 = (5y)^2 - 2(5y)(4) + 4^2$
$= 25y^2 - 40y + 16$

(c) $(2x - 3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3y)$
$+ 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3$
$= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

Fatoração de polinômios usando produtos notáveis

Quando escrevemos um polinômio como um produto de dois ou mais **fatores polinomiais,** estamos **fatorando um polinômio**. Um polinômio que não pode ser fatorado usando coeficientes inteiros é um **polinômio irredutível**.

Um polinômio está **fatorado completamente** se estiver escrito como um produto de seus fatores irredutíveis. Por exemplo,

$$2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4)$$

e

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$

estão fatorados completamente (pode ser mostrado que $x^2 + 1$ é irredutível). Mas,

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$$

não está fatorado completamente porque $(x^2 - 9)$ *não é* irredutível. De fato,

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

e

$$x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3).$$

Agora o polinômio está fatorado completamente.

O primeiro passo na fatoração de um polinômio é remover e colocar em evidência fatores comuns de seus termos usando a propriedade distributiva, como no Exemplo 4.

EXEMPLO 4 Colocação dos fatores comuns em evidência

(a) $2x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(x^2 + x - 3)$

(b) $u^3v + uv^3 = uv(u^2 + v^2)$

Reconhecer a forma expandida dos cinco produtos notáveis citados nos ajudará a fatorar uma expressão algébrica. A forma mais fácil de identificar é a diferença de dois quadrados.

EXEMPLO 5 Fatoração da diferença de dois quadrados

(a) $25x^2 - 36 = (5x)^2 - 6^2$
$= (5x + 6)(5x - 6)$

(b) $4x^2 - (y + 3)^2 = (2x)^2 - (y + 3)^2$
$= [2x + (y + 3)][2x - (y + 3)]$
$= (2x + y + 3)(2x - y - 3)$

Um trinômio quadrado perfeito é o quadrado de um binômio e tem uma das duas formas mostradas aqui. O primeiro e o último termo são quadrados de u e v e o termo central é duas vezes o produto de u e v. Os sinais da operação antes do termo central e no binômio são os mesmos.

EXEMPLO 6 Fatoração de trinômios quadrados perfeitos

(a) $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2(3x)(1) + 1^2$
$= (3x + 1)^2$

(b) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$
$= (2x - 3y)^2$

Observe agora a soma e a diferença de dois cubos (mais dois casos de produtos notáveis).

Mesmos sinais

$$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$$

Sinais opostos

Mesmos sinais

$$u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$$

Sinais opostos

EXEMPLO 7 Fatoração da soma e da diferença de dois cubos

(a) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3$
$= (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

(b) $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3$
$= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

Fatoração de trinômios

Fatorar o trinômio $ax^2 + bx + c$ como um produto de binômios com coeficientes inteiros requer fatorar os inteiros a e c.

Fatores de a

$$ax^2 + bx + c = (\square x + \square)(\square x + \square)$$

Fatores de c

Pelo fato de o número de fatores de a e c ser finito, podemos listar todos os possíveis fatores binomiais, isto é, os possíveis fatores formados pela soma de dois monômios. Então, iniciamos checando cada possibilidade até encontrarmos um par que funcione (se nenhum par funciona, então o trinômio é irredutível), como no Exemplo 8.

EXEMPLO 8 Fatoração de um trinômio com coeficiente principal igual a 1

Fatore $x^2 + 5x - 14$.

SOLUÇÃO

O único par de fatores do coeficiente principal é 1 e 1. Os pares de fatores de 14 são 1 e 14, como também 2 e 7. Eis as quatro possíveis fatorações do trinômio:

$$(x + 1)(x - 14) \qquad (x - 1)(x + 14)$$
$$(x + 2)(x - 7) \qquad (x - 2)(x + 7)$$

Ao comparar a soma dos produtos dos termos externos e internos da forma fatorada com o termo central do trinômio, vemos que o correto é:

$$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$$

Com a prática você verá que não é necessário listar todos os possíveis fatores binomiais. Muitas vezes, podemos testar as possibilidades mentalmente.

EXEMPLO 9 Fatoração de um trinômio com coeficiente principal diferente de 1

Fatore $35x^2 - x - 12$.

SOLUÇÃO

Os pares de fatores do coeficiente principal são 1 e 35, como também 5 e 7. Os pares de fatores de 12 são 1 e 12, 2 e 6, como também 3 e 4. As possíveis fatorações precisam ser da forma:

$$(x - *)(35x + ?) \qquad (x + *)(35x - ?)$$
$$(5x - *)(7x + ?) \qquad (5x + *)(7x - ?)$$

onde * e ? são um dos pares de fatores de 12. Como os dois fatores binomiais têm sinais opostos, existem seis possibilidades para cada uma das quatro formas, um total de 24 possibilidades ao todo. Se você tentar, mental e sistematicamente, deverá encontrar que

$$35x^2 - x - 12 = (5x - 3)(7x + 4)$$

Para fatorar o trinômio, uma outra opção é utilizar o seguinte resultado:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

com x_1 e x_2 soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$ (veremos a resolução dessa equação posteriormente).

Podemos estender a técnica dos Exemplos 8 e 9 para trinômios com duas variáveis como temos no Exemplo 10.

EXEMPLO 10 Fatoração de trinômios em *x* e *y*

Fatore $3x^2 - 7xy + 2y^2$.

SOLUÇÃO

A única maneira de obter $-7xy$ como o termo central é com $3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - ?y)(x - ?y)$.

Os sinais nos binômios precisam ser negativos porque o coeficiente de y^2 é positivo e o coeficiente do termo central é negativo. Conferindo as duas possibilidades, $(3x - y)(x - 2y)$ e $(3x - 2y)(x - y)$, temos que

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - y)(x - 2y)$$

Fatoração por agrupamento

Note que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Se um polinômio com quatro termos é o produto de dois binômios, podemos agrupar os termos para fatorar. Para isso, utilizamos a fatoração colocando o termo comum em evidência duas vezes.

EXEMPLO 11 Fatoração por agrupamento

(a) $3x^3 + x^2 - 6x - 2$

$$= (3x^3 + x^2) - (6x + 2)$$
$$= x^2(3x + 1) - 2(3x + 1)$$
$$= (3x + 1)(x^2 - 2)$$

(b) $2ac - 2ad + bc - bd$

$$= (2ac - 2ad) + (bc - bd)$$
$$= 2a(c - d) + b(c - d)$$
$$= (c - d)(2a + b)$$

Eis uma lista com algumas orientações para fatorar polinômios.

Fatoração de polinômios

1. Observar os fatores comuns.
2. Observar as formas especiais dos polinômios.
3. Usar pares de fatores.
4. Se existirem quatro termos, tentar agrupá-los.

Algumas fórmulas importantes de álgebra

Potências

Se todas as bases são diferentes de zero:

$u^m u^n = u^{m+n}$ $\qquad \dfrac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$

$u^0 = 1$ $\qquad u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$

$(uv)^m = u^m v^m$ $\qquad (u^m)^n = u^{mn}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)^m = \dfrac{u^m}{v^m}$

Radicais e expoentes racionais

Se todas as raízes são números reais:

$\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$ $\qquad \sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}\ (v \neq 0)$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[mn]{u}$ $\qquad (\sqrt[n]{u})^n = u$

$\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$ $\qquad \sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & n \text{ par} \\ u & n \text{ ímpar} \end{cases}$

$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}$ $\qquad u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m$

$u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$

Produtos notáveis e fatoração de polinômios

$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$

$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$

$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$

$(u + v)(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3$

$(u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 - v^3$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 4, escreva o polinômio na forma-padrão e verifique seu grau.

1. $2x - 1 + 3x^2$ **2.** $x^2 - 2x - 2x^3 + 1$

3. $1 - x^7$ **4.** $x^2 - x^4 + x - 3$

Nos exercícios 5 a 8, verifique se a expressão é um polinômio.

5. $x^3 - 2x^2 + x^{-1}$ **6.** $\dfrac{2x-4}{x}$

7. $(x^2 + x + 1)^2$ **8.** $1 - 3x + x^4$

Nos exercícios 9 a 18, simplifique a expressão. Escreva sua resposta na forma-padrão.

9. $(x^2 - 3x + 7) + (3x^2 + 5x - 3)$

10. $(-3x^2 - 5) - (x^2 + 7x + 12)$

11. $(4x^3 - x^2 + 3x) - (x^3 + 12x - 3)$

12. $-(y^2 + 2y - 3) + (5y^2 + 3y + 4)$

13. $2x(x^2 - x + 3)$ **14.** $y^2(2y^2 + 3y - 4)$

15. $-3u(4u - 1)$ **16.** $-4v(2 - 3v^3)$

17. $(2 - x - 3x^2)(5x)$ **18.** $(1 - x^2 + x^4)(2x)$

Nos exercícios 19 a 40, faça a expansão do produto. Use alinhamento vertical nos exercícios 33 e 34.

19. $(x - 2)(x + 5)$ **20.** $(2x + 3)(4x + 1)$

21. $(3x - 5)(x + 2)$ **22.** $(2x - 3)(2x + 3)$

23. $(3x - y)(3x + y)$ **24.** $(3 - 5x)^2$

25. $(3x + 4y)^2$ **26.** $(x - 1)^3$

27. $(2u - v)^3$ **28.** $(u + 3v)^3$

29. $(2x^3 - 3y)(2x^3 + 3y)$ **30.** $(5x^3 - 1)^2$

31. $(x^2 - 2x + 3)(x + 4)$

32. $(x^2 + 3x - 2)(x - 3)$

33. $(x^2 + x - 3)(x^2 + x + 1)$

34. $(2x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 2)$

35. $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

36. $(x^{1/2} - y^{1/2})(x^{1/2} + y^{1/2})$

37. $(\sqrt{u} + \sqrt{v})(\sqrt{u} - \sqrt{v})$

38. $(x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3})$

39. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

40. $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

Nos exercícios 41 a 44, fatore colocando o fator comum em evidência.

41. $5x - 15$ **42.** $5x^3 - 20x$

43. $yz^3 - 3yz^2 + 2yz$ **44.** $2x(x + 3) - 5(x + 3)$

Nos exercícios 45 a 48, fatore as diferenças de dois quadrados.

45. $z^2 - 49$ **46.** $9y^2 - 16$

47. $64 - 25y^2$ **48.** $16 - (x + 2)^2$

Nos exercícios 49 a 52, fatore o trinômio quadrado perfeito.

49. $y^2 + 8y + 16$ **50.** $36y^2 + 12y + 1$

51. $4z^2 - 4z + 1$ **52.** $9z^2 - 24z + 16$

Nos exercícios 53 a 58, fatore a soma ou a diferença de dois cubos.

53. $y^3 - 8$ **54.** $z^3 + 64$

55. $27y^3 - 8$ **56.** $64z^3 + 27$

57. $1 - x^3$ **58.** $27 - y^3$

Nos exercícios 59 a 68, fatore o trinômio.

59. $x^2 + 9x + 14$ **60.** $y^2 - 11y + 30$

61. $z^2 - 5z - 24$ **62.** $6t^2 + 5t + 1$

63. $14u^2 - 33u - 5$ **64.** $10v^2 + 23v + 12$

65. $12x^2 + 11x - 15$ **66.** $2x^2 - 3xy + y^2$

67. $6x^2 + 11xy - 10y^2$ **68.** $15x^2 + 29xy - 14y^2$

Nos exercícios 69 a 74, fatore por agrupamento.

69. $x^3 - 4x^2 + 5x - 20$

70. $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

71. $x^6 - 3x^4 + x^2 - 3$

72. $x^6 + 2x^4 + x^2 + 2$

73. $2ac + 6ad - bc - 3bd$

74. $3uw + 12uz - 2vw - 8vz$

Nos exercícios 75 a 90, fatore completamente.

75. $x^3 + x$ **76.** $4y^3 - 20y^2 + 25y$

77. $18y^3 + 48y^2 + 32y$ **78.** $2x^3 - 16x^2 + 14x$

79. $16y - y^3$

80. $3x^4 + 24x$

81. $5y + 3y^2 - 2y^3$

82. $z - 8z^4$

83. $2(5x + 1)^2 - 18$

84. $5(2x - 3)^2 - 20$

85. $12x^2 + 22x - 20$

86. $3x^2 + 13xy - 10y^2$

87. $2ac - 2bd + 4ad - bc$

88. $6ac - 2bd + 4bc - 3ad$

89. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

90. $x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x$

91. Mostre que o agrupamento

$$(2ac + bc) - (2ad + bd)$$

leva à mesma fatoração como no Exemplo 11b. Explique por que a terceira possibilidade,

$$(2ac - bd) + (-2ad + bc)$$

não leva a uma fatoração.

Capítulo 4

Expressões fracionárias

Objetivos de aprendizagem

- Domínio de uma expressão algébrica.
- Simplificação de expressões racionais.
- Operações com expressões racionais.
- Expressões racionais compostas.

Domínio de uma expressão algébrica

Um quociente de duas expressões algébricas, além de ser outra expressão algébrica, é uma **expressão fracionária** ou simplesmente uma fração. Se o quociente pode ser escrito como a razão de dois polinômios, então a expressão fracionária é uma **expressão racional**. A seguir temos um exemplo de cada uma dessas expressões:

$$\frac{x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \frac{2x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x - 3}$$

Vemos que o primeiro exemplo é uma expressão fracionária, mas não é uma expressão racional. O segundo é tanto uma expressão fracionária como racional.

Diferentemente dos polinômios que são definidos para todos os números reais, algumas expressões algébricas não são definidas para alguns números reais. O conjunto dos números reais para os quais uma expressão algébrica é definida é o **domínio da expressão algébrica**.

EXEMPLO 1 Verificação do domínio de expressões algébricas

(a) $3x^2 - x + 5$ **(b)** $\sqrt{x - 1}$ **(c)** $\dfrac{x}{x - 2}$

SOLUÇÃO

(a) O domínio de $3x^2 - x + 5$, como de qualquer polinômio, é o conjunto de todos os números reais.

(b) Como a raiz quadrada está definida para números reais não-negativos, então devemos ter $x - 1 \geq 0$, isto é, $x \geq 1$. Em notação de intervalo, o domínio é $[1, +\infty[$.

(c) Como não existe divisão por zero, então devemos ter $x - 2 \neq 0$, isto é, $x \neq 2$. O domínio é todo o conjunto dos números reais, com exceção do 2.

Simplificação de expressões racionais

Sejam u, v e z números reais, variáveis ou expressões algébricas. Podemos escrever expressões racionais na forma mais simples usando

$$\frac{uz}{vz} = \frac{u}{v}$$

contanto que z seja diferente de zero. Isto requer uma fatoração do numerador e denominador em fatores primos. Quando todos os fatores comuns do numerador e denominador forem removidos, a expressão racional (ou número racional) está na **forma reduzida**.

EXEMPLO 2 Simplificação de expressões racionais

Escreva $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ na forma reduzida. Verifique o domínio

SOLUÇÃO

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{x}{x+3}, \quad x \neq 3 \text{ e } x \neq -3$$

Vemos que x não pode ser -3, mas incluímos a condição $x \neq 3$ porque 3 não está no domínio da expressão racional original. Dessa forma, não deve estar também no domínio da expressão racional final, que é o conjunto dos números reais, exceto 3 e -3.

Duas expressões racionais são **equivalentes** se elas têm o mesmo domínio e os mesmos valores para todos os números no domínio. A forma reduzida de uma expressão racional precisa ter o mesmo domínio que a expressão racional original. Esta é a razão que nos levou a adicionar a restrição $x \neq 3$ para a forma reduzida no Exemplo 2.

Operações com expressões racionais

Duas frações são **iguais**, $\dfrac{u}{v} = \dfrac{z}{w}$ se, e somente se, $uw = vz$.

Operações com frações

Sejam u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas. Todos os denominadores são considerados como diferentes de zero.

Operação	**Exemplo**
1. $\dfrac{u}{v} + \dfrac{w}{v} = \dfrac{u+w}{v}$	$\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{2+5}{3} = \dfrac{7}{3}$
2. $\dfrac{u}{v} + \dfrac{w}{z} = \dfrac{uz+vw}{vz}$	$\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{22}{15}$
3. $\dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{w}{z} = \dfrac{uw}{vz}$	$\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$
4. $\dfrac{u}{v} \div \dfrac{w}{z} = \dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{z}{w} = \dfrac{uz}{vw}$	$\dfrac{2}{3} \div \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

5. Para subtração, substitua "+" por "−" em 1 e 2.

EXEMPLO 3 Multiplicação e divisão de expressões racionais

(a) $\dfrac{(2x^2 + 11x - 21)}{(x^3 + 2x^2 + 4x)} \cdot \dfrac{(x^3 - 8)}{(x^2 + 5x - 14)}$

$$= \frac{(2x-3)\cancel{(x+7)}}{x\cancel{(x^2+2x+4)}} \cdot \frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x^2+2x+4)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+7)}} = \frac{2x-3}{x}, \quad x \neq 2, \quad x \neq -7, \quad x \neq 0$$

(b) $\dfrac{(x^3+1)}{(x^2-x-2)} \div \dfrac{(x^2-x+1)}{(x^2-4x+4)}$

$$= \frac{(x^3+1)(x^2-4x+4)}{(x^2-x-2)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x^2-x+1)}(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}\cancel{(x^2-x+1)}}$$

$$= x-2, \quad x \neq -1, \quad x \neq 2$$

EXEMPLO 4 Soma de expressões racionais

$$\frac{x}{3x-2} + \frac{3}{x-5} = \frac{x(x-5)+3(3x-2)}{(3x-2)(x-5)}$$

$$= \frac{x^2-5x+9x-6}{(3x-2)(x-5)}$$

$$= \frac{x^2+4x-6}{(3x-2)(x-5)}$$

OBSERVE UM EXEMPLO

Vale observar que a expressão x^2+4x-6 é um polinômio primo; não é possível fatorá-lo.

Se os denominadores das frações têm fatores comuns, então podemos encontrar o mínimo múltiplo comum desses polinômios. O **mínimo múltiplo comum** é o produto de todos os fatores primos nos denominadores, onde cada fator está elevado à maior potência encontrada em qualquer um dos denominadores.

EXEMPLO 5 Redução ao mesmo denominador (mínimo múltiplo comum)

Escreva a seguinte expressão como uma fração na forma reduzida

$$\frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2-4}$$

SOLUÇÃO

Os denominadores fatorados são $x(x-2)$, x e $(x-2)(x+2)$, respectivamente. O menor denominador comum é $x\,(x-2)(x+2)$.

$$\frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2-4}$$

$$= \frac{2}{x(x-2)} + \frac{1}{x} - \frac{3}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} - \frac{3x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2(x+2)+(x-2)(x+2)-3x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2x + 4 + x^2 - 4 - 3x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2 - x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x(x-1)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}, \quad x \neq 0,\ x \neq -2 \text{ e } x \neq 2$$

Expressões racionais compostas

Às vezes uma expressão algébrica complicada precisa ser transformada anteriormente para uma forma mais fácil de ser trabalhada. Uma **fração composta** (às vezes chamada **fração complexa**), na qual os numeradores e denominadores podem eles mesmos conter frações, é tal como no exemplo a seguir. Uma maneira de simplificar uma fração composta é escrever numerador e denominador como frações simples e, então, inverter e multiplicar. Se a fração toma a forma de uma expressão racional, então escrevemos a expressão na forma reduzida ou na forma mais simples.

EXEMPLO 6 Simplificação de uma fração composta

$$\frac{3 - \dfrac{7}{x+2}}{1 - \dfrac{1}{x-3}} = \frac{\dfrac{3(x+2) - 7}{x+2}}{\dfrac{(x-3) - 1}{x-3}}$$

$$= \frac{\dfrac{3x - 1}{x+2}}{\dfrac{x-4}{x-3}}$$

$$= \frac{(3x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}, \quad x \neq 3,\ x \neq -2 \text{ e } x \neq 4$$

Uma segunda maneira de simplificar uma fração composta é multiplicar o numerador e o denominador pelo mínimo múltiplo comum de todas as frações existentes na expressão, como ilustrado no Exemplo 7.

EXEMPLO 7 Simplificação de outra fração composta

Use o mínimo múltiplo comum para simplificar a fração composta

$$\frac{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$$

SOLUÇÃO

O menor denominador comum das quatro frações no numerador e denominador é a^2b^2.

$$\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)a^2b^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)a^2b^2}$$

$$=\frac{b^2-a^2}{ab^2-a^2b}$$

$$=\frac{(b+a)(b-a)}{ab(b-a)}$$

$$=\frac{b+a}{ab},\quad a\neq b$$

Exercícios

Nos exercícios 1 a 8, reescreva como uma única fração.

1. $\frac{5}{9}+\frac{10}{9}$ **2.** $\frac{17}{32}-\frac{9}{32}$

3. $\frac{20}{21}\cdot\frac{9}{22}$ **4.** $\frac{33}{25}\cdot\frac{20}{77}$

5. $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$ **6.** $\frac{9}{4}\div\frac{15}{10}$

7. $\frac{1}{14}+\frac{4}{15}-\frac{5}{21}$ **8.** $\frac{1}{6}+\frac{6}{35}-\frac{4}{15}$

Nos exercícios 9 a 18, encontre o domínio da expressão algébrica. Os exercícios 15 e 16 trazem restrição da expressão racional original.

9. $5x^2-3x-7$ **10.** $2x-5$

11. $\sqrt{x-4}$ **12.** $\frac{2}{\sqrt{x+3}}$

13. $\frac{2x+1}{x^2+3x}$ **14.** $\frac{x^2-2}{x^2-4}$

15. $\frac{x}{x-1},\quad x\neq 2$ **16.** $\frac{3x-1}{x-2},\quad x\neq 0$

17. x^2+x^{-1} **18.** $x(x+1)^{-2}$

Nos exercícios 19 a 26, encontre o numerador ou o denominador que está faltando, de modo que as duas expressões racionais sejam equivalentes.

19. $\frac{2}{3x}=\frac{?}{12x^3}$ **20.** $\frac{5}{2y}=\frac{15y}{?}$

21. $\frac{x-4}{x}=\frac{x^2-4x}{?}$ **22.** $\frac{x}{x+2}=\frac{?}{x^2-4}$

23. $\frac{x+3}{x-2}=\frac{?}{x^2+2x-8}$

24. $\frac{x-4}{x+5}=\frac{x^2-x-12}{?}$

25. $\frac{x^2-3x}{?}=\frac{x-3}{x^2+2x}$

26. $\frac{?}{x^2-9}=\frac{x^2+x-6}{x-3}$

Nos exercícios 27 a 32, considere a fração original e sua forma reduzida do exemplo especificado. Explique por que a restrição dada é necessária na forma reduzida.

27. Exemplo 3a, $x\neq 2$, $x\neq -7$.

28. Exemplo 3b, $x\neq -1$, $x\neq 2$.

29. Exemplo 4, nenhum.

30. Exemplo 5, $x\neq 0$.

31. Exemplo 6, $x\neq 3$.

32. Exemplo 7, $a\neq b$.

Nos exercícios 33 a 44, escreva a expressão na forma reduzida.

33. $\frac{18x^3}{15x}$ **34.** $\frac{75y^2}{9y^4}$

35. $\frac{x^3}{x^2-2x}$ **36.** $\frac{2y^2+6y}{4y+12}$

37. $\frac{z^2-3z}{9-z^2}$ **38.** $\frac{x^2+6x+9}{x^2-x-12}$

39. $\frac{y^2-y-30}{y^2-3y-18}$ **40.** $\frac{y^3+4y^2-21y}{y^2-49}$

41. $\frac{8z^3-1}{2z^2+5z-3}$ **42.** $\frac{2z^3+6z^2+18z}{z^3-27}$

43. $\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^3+2x^2}$ **44.** $\frac{y^2+3y}{y^3+3y^2-5y-15}$

Nos exercícios 45 a 62, simplifique.

45. $\dfrac{3}{x-1} \cdot \dfrac{x^2-1}{9}$

46. $\dfrac{x+3}{7} \cdot \dfrac{14}{2x+6}$

47. $\dfrac{x+3}{x-1} \cdot \dfrac{1-x}{x^2-9}$

48. $\dfrac{18x^2-3x}{3xy} \cdot \dfrac{12y^2}{6x-1}$

49. $\dfrac{x^3-1}{2x^2} \cdot \dfrac{4x}{x^2+x+1}$

50. $\dfrac{y^3+2y^2+4y}{y^3+2y^2} \cdot \dfrac{y^2-4}{y^3-8}$

51. $\dfrac{2y^2+9y-5}{y^2-25} \cdot \dfrac{y-5}{2y^2-y}$

52. $\dfrac{y^2+8y+16}{3y^2-y-2} \cdot \dfrac{3y^2+2y}{y+4}$

53. $\dfrac{1}{2x} \div \dfrac{1}{4}$

54. $\dfrac{4x}{y} \div \dfrac{8y}{x}$

55. $\dfrac{x^2-3x}{14y} \div \dfrac{2xy}{3y^2}$

56. $\dfrac{7x-7y}{4y} \div \dfrac{14x-14y}{3y}$

57. $\dfrac{\dfrac{2x^2y}{(x-3)^2}}{\dfrac{8xy}{x-3}}$

58. $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2}{2xy}}{\dfrac{y^2-x^2}{4x^2y}}$

59. $\dfrac{2x+1}{x+5} - \dfrac{3}{x+5}$

60. $\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{x+1}{x-2}$

61. $\dfrac{3}{x^2+3x} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2-9}$

62. $\dfrac{5}{x^2+x-6} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{4}{x^2-4}$

Nos exercícios 63 a 70, simplifique a fração composta.

63. $\dfrac{\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}}$

64. $\dfrac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}}$

65. $\dfrac{2x + \dfrac{13x-3}{x-4}}{2x + \dfrac{x+3}{x-4}}$

66. $\dfrac{2 - \dfrac{13}{x+5}}{2 + \dfrac{3}{x-3}}$

67. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

68. $\dfrac{\dfrac{x+h}{x+h+2} - \dfrac{x}{x+2}}{h}$

69. $\dfrac{\dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$

70. $\dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{\dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b}}$

Nos exercícios 71 a 74, escreva com expoentes positivos e simplifique.

71. $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(x+y)^{-1}$

72. $\dfrac{(x+y)^{-1}}{(x-y)^{-1}}$

73. $x^{-1} + y^{-1}$

74. $(x^{-1} + y^{-1})^{-1}$

Equações

Objetivos de aprendizagem

- Definição e propriedades.
- Resolução de equações.
- Equações lineares com uma variável.
- Solução de equações por meio de gráficos.
- Solução de equações quadráticas.
- Resoluções aproximadas das equações por meio de gráfico.

Esses tópicos suprem alguns fundamentos das técnicas de álgebra, além de mostrar a utilidade das representações gráficas para resolver equações.

Definição e propriedades

Uma **equação** é uma afirmativa de igualdade entre duas expressões. Eis algumas propriedades de igualdade que usamos para resolver equações algebricamente.

Propriedades

Sejam u, v, w, e z números reais, variáveis ou expressões algébricas.

1. Reflexiva	$u = u$
2. Simétrica	Se $u = v$ então $v = u$.
3. Transitiva	Se $u = v$ e $v = w$ então $u = w$.
4. Adição	Se $u = v$ e $w = z$ então $u + w = v + z$.
5. Multiplicação	Se $u = v$ e $w = z$ então $u \cdot w = v \cdot z$.

Resolução de equações

Uma **solução de uma equação em x** é um valor de x para o qual a equação é verdadeira. **Resolver uma equação em x** significa encontrar todos os valores de x para os quais a equação é verdadeira, isto é, encontrar todas as soluções da equação.

EXEMPLO 1 Verificação de uma solução

Prove que $x = -2$ é uma solução da equação $x^3 - x + 6 = 0$.

SOLUÇÃO

$$(-2)^3 - (-2) + 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$-8 + 2 + 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

Equações lineares com uma variável

A equação mais básica na álgebra é uma *equação linear*.

DEFINIÇÃO Equação linear em x

Uma **equação linear em x** é aquela que pode ser escrita na forma

$$ax + b = 0$$

onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

A equação $2z - 4 = 0$ é linear na variável z. A equação $3u^2 - 12 = 0$ *não* é linear na variável u. Uma equação linear em uma variável tem, exatamente, uma solução. Nós resolvemos uma equação desse tipo transformando-a numa *equação equivalente* cuja solução é óbvia. Duas ou mais equações são **equivalentes** se elas têm as mesmas soluções. Por exemplo, as equações $2z - 4 = 0$, $2z = 4$ e $z = 2$ são todas equivalentes. Aqui temos operações que produzem equações equivalentes.

Operações para equações equivalentes

Uma equação equivalente é obtida se uma ou mais das seguintes operações são aplicadas.

Operação	Equação dada	Equação equivalente
1. Combinar termos semelhantes, simplificar frações e remover símbolos por meio de agrupamento.	$2x + x = \frac{3}{9}$	$3x = \frac{1}{3}$
2. Aplicar a mesma operação em ambos os lados.		
(a) Adicionar (-3).	$x + 3 = 7$	$x = 4$
(b) Subtrair $(2x)$.	$5x = 2x + 4$	$3x = 4$
(c) Multiplicar por uma constante diferente de zero (1/3).	$3x = 12$	$x = 4$
(d) Dividir por uma constante diferente de zero (3).	$3x = 12$	$x = 4$

Os próximos dois exemplos ilustram como usar equações equivalentes para resolver equações lineares.

EXEMPLO 2 Resolução de uma equação linear

Resolva $2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$. É possível conferir o resultado com uma calculadora.

SOLUÇÃO

$$2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$$
$$4x - 6 + 3x + 3 = 5x + 2$$
$$7x - 3 = 5x + 2$$
$$2x = 5$$
$$x = 2{,}5$$

Para conferir o nosso desenvolvimento algébrico, podemos usar uma calculadora para substituir x por 2,5 na equação original. É possível concluir que os dois lados da equação são iguais.

Se uma equação envolve frações, encontramos o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações e multiplicamos ambos os lados por esse valor encontrado. O Exemplo 3 ilustra isso.

EXEMPLO 3 Resolvendo uma equação linear que envolve frações

Resolva $\frac{5y-2}{8} = 2 + \frac{y}{4}$.

SOLUÇÃO

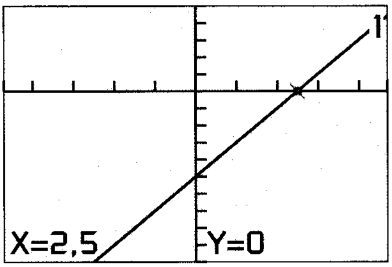
Os denominadores são 8, 1 e 4. O mínimo múltiplo comum é 8.

$$\begin{aligned}
\frac{5y-2}{8} &= 2 + \frac{y}{4} \\
8\left(\frac{5y-2}{8}\right) &= 8\left(2 + \frac{y}{4}\right) \\
8 \cdot \frac{5y-2}{8} &= 8 \cdot 2 + 8 \cdot \frac{y}{4} \\
5y - 2 &= 16 + 2y \\
5y &= 18 + 2y \\
3y &= 18 \\
y &= 6
\end{aligned}$$

Agora você pode conferir o resultado usando lápis e papel ou uma calculadora.

Solução de equações por meio de gráficos

O gráfico da equação $y = 2x - 5$ pode ser usado para resolver a equação $2x - 5 = 0$ (em x). Podemos mostrar que $x = 5/2$ é a solução de $2x - 5 = 0$. Portanto, o par ordenado $(5/2, 0)$ é a solução de $y = 2x - 5$. A Figura 5.1 confirma isso, pois sugere que o ponto por onde a reta intercepta o eixo x seja o par ordenado $(5/2, 0)$.



[−4,7; 4,7] por [−10, 5]

Figura 5.1 Gráfico de $y = 2x - 5$.

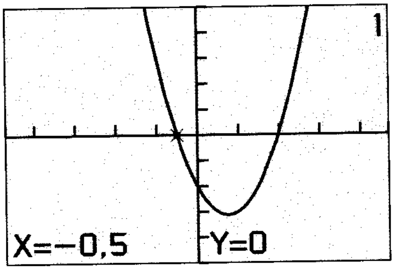
Uma maneira de resolver uma equação graficamente é encontrar os valores de x por onde a reta intercepta o eixo horizontal x. Esses valores de x podem ser chamados de raízes. Existem muitas técnicas gráficas que podem ser usadas para encontrar esses valores.

EXEMPLO 4 Resolução gráfica e algébrica

Resolva a equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$ gráfica e algebricamente.

SOLUÇÃO

Solução gráfica Encontrar os valores por onde o gráfico de $y = 2x^2 - 3x - 2$ intercepta o eixo x (Figura 5.2). Usamos o gráfico para ver que $(-0{,}5;\ 0)$ e $(2,\ 0)$ são pontos do gráfico que estão no eixo x. Assim, as soluções desta equação são $x = -0{,}5$ e $x = 2$. Respostas obtidas graficamente são realmente aproximações, embora em geral elas sejam aproximações muito boas.



$[-4{,}7;\ 4{,}7]$ por $[-5,\ 5]$

Figura 5.2 O gráfico de $y = 2x^2 - 3x - 2$ (Exemplo 4).

Solução algébrica Neste caso, podemos fatorar para encontrar valores exatos.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 2) = 0$$

Podemos concluir que

$$2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0$$

ou seja,

$$x = -1/2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

Assim, $x = -1/2$ e $x = 2$ são as soluções exatas da equação original.

O procedimento dado pela solução algébrica usada no Exemplo 4 é um caso especial da seguinte propriedade importante.

Propriedade do fator zero

Sejam a e b números reais.

Se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

Solução de equações quadráticas

Equações lineares $(ax + b = 0)$ e *equações quadráticas* são dois membros da família de *equações polinomiais*.

DEFINIÇÃO Equação quadrática em x

Uma **equação quadrática em x** é aquela que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

Revisamos uma das técnicas algébricas básicas para resolver equações quadráticas. Uma técnica algébrica que já foi usada no Exemplo 1 é a *fatoração*.

Equações quadráticas da forma $(ax + b)^2 = c$ são fáceis de resolver, como ilustraremos no Exemplo 5.

EXEMPLO 5 Solução por meio de raízes quadradas

Resolva $(2x - 1)^2 = 9$ algebricamente.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 &= 9\\ 2x - 1 &= \pm 3\\ 2x = 4 \quad &\text{ou} \quad 2x = -2\\ x = 2 \quad &\text{ou} \quad x = -1\end{aligned}$$

A técnica do Exemplo 5 é mais geral do que pensamos, pois toda equação quadrática pode ser escrita na forma $(x + b)^2 = c$. O procedimento que precisamos executar é o de *completar o quadrado*.

UTILIZAMOS O SEGUINTE RESULTADO

Se $t^2 = k > 0$, então $t = \sqrt{k}$ ou $t = -\sqrt{k}$.

Completando o quadrado

Para resolver $x^2 + bx = c$ por meio do procedimento de **completar o quadrado**, adicionamos $(b/2)^2$ em ambos os lados da equação e fatoramos o lado esquerdo da nova equação.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$

Para resolver a equação quadrática completando o quadrado, nós simplesmente dividimos ambos os lados pelo coeficiente de x^2 e completamos o quadrado, como ilustrado no Exemplo 6.

EXEMPLO 6 Resolução pelo procedimento de completar o quadrado

Resolva $4x^2 - 20x + 17 = 0$ pelo procedimento de completar o quadrado.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}4x^2 - 20x + 17 &= 0\\ x^2 - 5x + \frac{17}{4} &= 0\\ x^2 - 5x &= -\frac{17}{4}\end{aligned}$$

Completando o quadrado na equação:

$$x^2 - 5x + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{17}{4} + \left(-\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 2$$

$$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{2}$$

$x = \dfrac{5}{2} + \sqrt{2} \cong 3{,}91$ ou $x \cong \dfrac{5}{2} - \sqrt{2} \cong 1{,}09$

O procedimento do Exemplo 6 pode ser aplicado para a equação quadrática geral $ax^2 + bx + c = 0$ para construir a fórmula a seguir.

Fórmula quadrática (conhecida como Fórmula de Bhaskara)

As soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, são dadas pela **fórmula**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXEMPLO 7 Resolução usando a fórmula quadrática (de Bhaskara)

Resolva a equação $3x^2 - 6x = 5$.

SOLUÇÃO

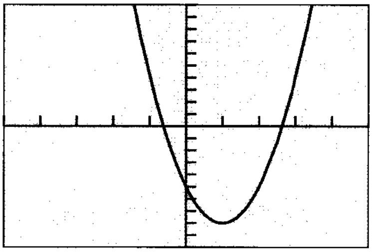
Em primeiro lugar, subtraímos 5 em ambos os lados da equação para colocar na forma $ax^2 + bx + c = 0$: $3x^2 - 6x - 5 = 0$. Podemos observar que $a = 3$, $b = -6$ e $c = -5$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{96}}{6}$$

$x = \dfrac{6 + \sqrt{96}}{6} \cong 2{,}63$ ou $x = \dfrac{6 - \sqrt{96}}{6} \cong -0{,}63$



[−5, 5] por [−10, 10]

Figura 5.3 O gráfico de $y = 3x^2 - 6x - 5$.

O gráfico de $y = 3x^2 - 6x - 5$ na Figura 5.3 mostra que os valores por onde passa no eixo x são aproximadamente $-0{,}63$ e $2{,}63$.

Resolução algébrica de equações quadráticas

Existem quatro caminhos básicos para resolver equações quadráticas algebricamente.

1. **Fatoração** (veja o Exemplo 4)
2. **Extração de raízes quadradas** (veja o Exemplo 5)
3. **Procedimento de completar o quadrado** (veja o Exemplo 6)
4. **Uso da fórmula quadrática (conhecida como fórmula de Bhaskara)** (veja o Exemplo 7)

Soluções aproximadas das equações por meio de gráfico

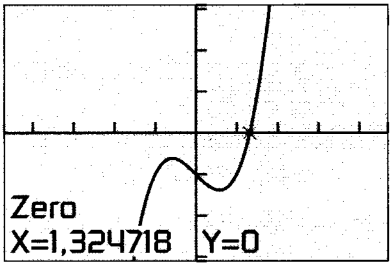
A solução da equação $x^3 - x - 1 = 0$ é o valor de x que faz o valor de $y = x^3 - x - 1$ igual a zero. O Exemplo 8 ilustra a construção de gráfico em calculadora adequada para encontrar tais valores de x.

EXEMPLO 8 Resolução gráfica

Resolva a equação $x^3 - x - 1 = 0$ graficamente.

SOLUÇÃO

A Figura 5.4 sugere que $x = 1{,}324718$ é a solução que procuramos.



[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]

Figura 5.4 O gráfico de $y = x^3 - x - 1$

Quando resolvemos equações graficamente, usamos soluções aproximadas e não soluções exatas. Usaremos o seguinte critério sobre aproximação.

Critério sobre soluções aproximadas

Nas aplicações, devemos aproximar para um valor que seja razoável para o contexto do problema. Em quaisquer outras situações, devemos aproximar a variável com pelo menos duas casas decimais após a vírgula.

Com esse critério sobre aproximações, poderíamos, então, concluir a solução encontrada no Exemplo 8 como aproximadamente 1,32.

Às vezes, podemos reescrever uma equação e resolvê-la graficamente por meio da identificação dos *pontos de intersecção* de dois gráficos. Um ponto (a, b) é um **ponto da intersecção** se ele pertence, por exemplo, aos dois gráficos envolvidos.

Ilustraremos esse procedimento com a equação do valor absoluto no Exemplo 9.

EXEMPLO 9 Resolução pelo encontro das intersecções (em gráficos)

Resolva a equação $|2x - 1| = 6$.

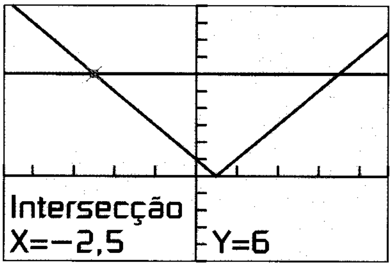
SOLUÇÃO

A Figura 5.5 sugere que o gráfico de $y = |2x - 1|$ em forma de "V" intersecciona duas vezes o gráfico da linha horizontal $y = 6$. Os dois pontos da intersecção têm as coordenadas $(-2{,}5; 6)$ e $(3{,}5; 6)$. Isso significa que a equação original tem duas soluções: $-2{,}5$ e $3{,}5$.

Podemos usar a álgebra para encontrar as soluções exatas. Os números reais que têm valor absoluto igual a 6 são -6 e 6. Assim, se $|2x - 1| = 6$, então

$$2x - 1 = 6 \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = -6$$

$$x = \frac{7}{2} = 3{,}5 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{2} = -2{,}5$$



$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-5, 10]$

Figura 5.5 Os gráficos de $y = |2x - 1|$ e $y = 6$

REVISÃO RÁPIDA

Nos exercícios 1 e 2, simplifique a expressão combinando termos equivalentes.

1. $2x + 5x + 7 + y - 3x + 4y + 2$

2. $4 + 2x - 3z + 5y - x + 2y - z - 2$

Nos exercícios 3 e 4, use a propriedade distributiva para expandir os produtos. Simplifique a expressão resultante combinando termos semelhantes.

3. $3(2x - y) + 4(y - x) + x + y$

4. $5(2x + y - 1) + 4(y - 3x + 2) + 1$

Nos exercícios 5 a 10, reduza as frações ao mesmo denominador para operar com as frações. Simplifique a fração resultante.

5. $\dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{y}$

6. $\dfrac{1}{y - 1} + \dfrac{3}{y - 2}$

7. $2 + \dfrac{1}{x}$

8. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - x$

9. $\dfrac{x + 4}{2} + \dfrac{3x - 1}{5}$

10. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4}$

Nos exercícios 11 a 14, faça a expansão do produto.

11. $(3x - 4)^2$ **12.** $(2x + 3)^2$

13. $(2x + 1)(3x - 5)$ **14.** $(3y - 1)(5y + 4)$

Nos exercícios 15 a 18, fatore completamente.

15. $25x^2 - 20x + 4$ **16.** $15x^3 - 22x^2 + 8x$

17. $3x^3 + x^2 - 15x - 5$ **18.** $y^4 - 13y^2 + 36$

Nos exercícios 19 e 20, opere com as frações e reduza a fração resultante para termos de expoentes mais baixos.

19. $\dfrac{x}{2x+1} - \dfrac{2}{x+3}$ **20.** $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6} - \dfrac{3x+11}{x^2-x-6}$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 4, encontre quais valores de x são soluções da equação.

1. $2x^2 + 5x = 3$

(a) $x = -3$ **(b)** $x = -\dfrac{1}{2}$ **(c)** $x = \dfrac{1}{2}$

2. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{x}{3}$

(a) $x = -1$ **(b)** $x = 0$ **(c)** $x = 1$

3. $\sqrt{1 - x^2} + 2 = 3$

(a) $x = -2$ **(b)** $x = 0$ **(c)** $x = 2$

4. $(x - 2)^{1/3} = 2$

(a) $x = -6$ **(b)** $x = 8$ **(c)** $x = 10$

Nos exercícios 5 a 10, determine se a equação é linear em x.

5. $5 - 3x = 0$ **6.** $5 = 10/2$

7. $x + 3 = x - 5$ **8.** $x - 3 = x^2$

9. $2\sqrt{x} + 5 = 10$ **10.** $x + \dfrac{1}{x} = 1$

Nos exercícios 11 a 24, resolva a equação.

11. $3x = 24$ **12.** $4x = -16$

13. $3t - 4 = 8$ **14.** $2t - 9 = 3$

15. $2x - 3 = 4x - 5$ **16.** $4 - 2x = 3x - 6$

17. $4 - 3y = 2(y + 4)$ **18.** $4(y - 2) = 5y$

19. $\dfrac{1}{2}x = \dfrac{7}{8}$ **20.** $\dfrac{2}{3}x = \dfrac{4}{5}$

21. $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} = 1$ **22.** $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4} = 1$

23. $2(3 - 4z) - 5(2z + 3) = z - 17$

24. $3(5z - 3) - 4(2z + 1) = 5z - 2$

Nos exercícios 25 a 28, resolva a equação. Você pode conferir sua resposta com uma calculadora que tenha recurso gráfico.

25. $\dfrac{2x-3}{4} + 5 = 3x$ **26.** $2x - 4 = \dfrac{4x-5}{3}$

27. $\dfrac{t+5}{8} - \dfrac{t-2}{2} = \dfrac{1}{3}$ **28.** $\dfrac{t-1}{3} + \dfrac{t+5}{4} = \dfrac{1}{2}$

29. Explique como a segunda equação foi obtida da primeira.

$$x - 3 = 2x + 3, \quad 2x - 6 = 4x + 6$$

30. Explique como a segunda equação foi obtida da primeira.

$$2x - 1 = 2x - 4, \quad x - \frac{1}{2} = x - 2$$

31. Determine se as duas equações são equivalentes.

(a) $3x = 6x + 9, \quad x = 2x + 9$

(b) $6x + 2 = 4x + 10, \quad 3x + 1 = 2x + 5$

32. Determine se as duas equações são equivalentes.

(a) $3x + 2 = 5x - 7, \quad -2x + 2 = -7$

(b) $2x + 5 = x - 7, \quad 2x = x - 7$

33. Múltipla escolha Qual das seguintes equações é equivalente à equação $3x + 5 = 2x + 1$?

(a) $3x = 2x$ **(b)** $3x = 2x + 4$

(c) $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2} = x + 1$ **(d)** $3x + 6 = 2x$

(e) $3x = 2x - 4$

34. Múltipla escolha Em qual das seguintes alternativas temos a solução da equação $x(x + 1) = 0$?

(a) $x = 0$ ou $x = -1$ **(b)** $x = 0$ ou $x = 1$

(c) somente $x = -1$ **(d)** somente $x = 0$

(e) somente $x = 1$

35. Múltipla escolha Em qual das seguintes alternativas temos uma equação equivalente à equação

$$\frac{2x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$$

e que esteja sem frações?

(a) $2x + 1 = x - 1$ **(b)** $8x + 6 = 3x - 4$

(c) $4x + 3 = \frac{3}{2}x - 2$ **(d)** $4x + 3 = 3x - 4$

(e) $4x + 6 = 3x - 4$

36. Perímetro de um retângulo A fórmula para o perímetro P de um retângulo é

$$P = 2(b + h)$$

onde b é a medida da base e h, a medida da altura.

Resolva essa equação isolando h.

37. Área de um trapézio A fórmula para a área A de um trapézio é

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

onde b_1 e b_2 são medidas das bases e h é a medida da altura.

Resolva essa equação isolando b_1.

38. Volume de uma esfera A fórmula para o volume V de uma esfera é

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

onde r é o raio.

Resolva essa equação isolando r.

39. Celsius e Fahrenheit A fórmula para temperatura Celsius (C) em termos de temperatura Fahrenheit (F) é

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Resolva essa equação isolando F.

Nos exercícios 40 a 45, resolva a equação graficamente encontrando os valores que interceptam o eixo horizontal x.

40. $x^2 - x - 20 = 0$ **41.** $2x^2 + 5x - 3 = 0$

42. $4x^2 - 8x + 3 = 0$ **43.** $x^2 - 8x = -15$

44. $x(3x - 7) = 6$ **45.** $x(3x + 11) = 20$

Nos exercícios 46 a 51, resolva a equação extraindo as raízes quadradas.

46. $4x^2 = 25$ **47.** $2(x - 5)^2 = 17$

48. $3(x + 4)^2 = 8$ **49.** $4(u + 1)^2 = 18$

50. $2y^2 - 8 = 6 - 2y^2$ **51.** $(2x + 3)^2 = 169$

Nos exercícios 52 a 57, resolva a equação completando o quadrado.

52. $x^2 + 6x = 7$ **53.** $x^2 + 5x - 9 = 0$

54. $x^2 - 7x + \frac{5}{4} = 0$ **55.** $4 - 6x = x^2$

56. $2x^2 - 7x + 9 = (x - 3)(x + 1) + 3x$

57. $3x^2 - 6x - 7 = x^2 + 3x - x(x + 1) + 3$

Nos exercícios 58 a 63, resolva a equação usando a fórmula de Bhaskara.

58. $x^2 + 8x - 2 = 0$ **59.** $2x^2 - 3x + 1 = 0$

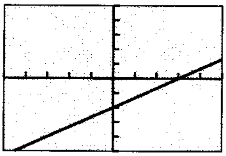
60. $3x + 4 = x^2$ **61.** $x^2 - 5 = \sqrt{3}x$

62. $x(x + 5) = 12$

63. $x^2 - 2x + 6 = 2x^2 - 6x - 26$

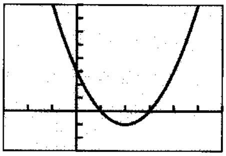
Nos exercícios 64 a 67, estime os valores por onde os gráficos interceptam os eixos x e y:

64.



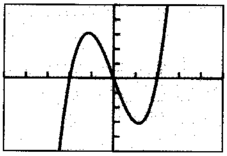
$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

65.



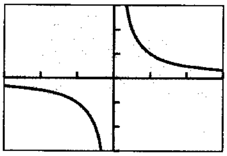
$[-3, 6]$ por $[-3, 8]$

66.



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

67.



$[-3, 3]$ por $[-3, 3]$

Nos exercícios 68 a 73, resolva a equação graficamente encontrando intersecções. Confirme sua resposta algebricamente.

68. $|t - 8| = 2$

69. $|x + 1| = 4$

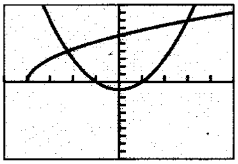
70. $|2x + 5| = 7$

71. $|3 - 5x| = 4$

72. $|2x - 3| = x^2$

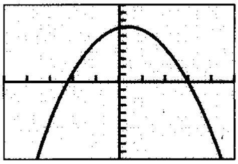
73. $|x + 1| = 2x - 3$

74. Interpretando gráficos Os gráficos a seguir podem ser usados para resolver a equação $3\sqrt{x + 4} = x^2 - 1$ graficamente.



$[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

(a)



$[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

(b)

(a) O gráfico em (a) ilustra o método da intersecção. Identifique as duas equações que estão representadas.

(b) O gráfico em (b) ilustra o método de analisar onde o gráfico intercepta o eixo horizontal x.

(c) Como estão os pontos de intersecção em (a) relacionados com os valores por onde o gráfico intercepta o eixo horizontal x em (b)?

Nos exercícios 75 a 84, use o método que você escolher para resolver a equação.

75. $x^2 + x - 2 = 0$

76. $x^2 - 3x = 12 - 3(x - 2)$

77. $|2x - 1| = 5$

78. $x + 2 - 2\sqrt{x + 3} = 0$

79. $x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$

80. $x^3 - 4x + 2 = 0$

81. $|x^2 + 4x - 1| = 7$

82. $|x + 5| = |x - 3|$

83. $|0{,}5x + 3| = x^2 - 4$

84. $\sqrt{x + 7} = -x^2 + 5$

85. Discriminante de uma expressão quadrática O radicando $b^2 - 4ac$ na fórmula quadrática é chamado de **discriminante** do polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$, porque ele pode ser utilizado para descrever a origem dos zeros (ou raízes).

(a) Se $b^2 - 4ac > 0$, o que você pode dizer sobre os zeros (raízes) do polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$? Explique sua resposta.

(b) Se $b^2 - 4ac = 0$, o que você pode dizer sobre os zeros (raízes) do polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$? Explique sua resposta.

(c) Se $b^2 - 4ac < 0$, o que você pode dizer sobre os zeros (raízes) do polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$? Explique sua resposta.

86. Discriminante de uma expressão quadrática Use a informação que você aprendeu no exercício anterior para criar um polinômio quadrático com os seguintes números de zeros (ou raízes). Justifique sua resposta graficamente.

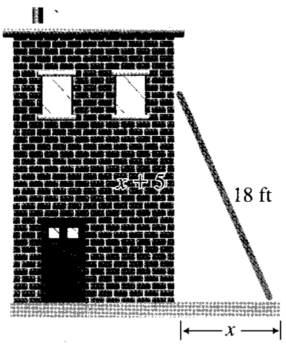
(a) Dois zeros (ou duas raízes) reais.

(b) Exatamente um zero (ou uma raiz) real.

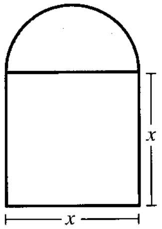
(c) Nenhum zero (ou raiz) real.

87. Tamanho de um campo de futebol (as medidas estão em jardas (yd), sendo que 1 m equivale a 1,0936 yd) Vários jogos da Copa do Mundo de 1994 ocorreram no estádio da Universidade de Stanford na Califórnia. O campo está 30 yd mais longo do que é sua largura e a área do campo é de 8800 yd^2. Quais são as dimensões deste campo de futebol?

88. Comprimento de uma escada (a medida está em pés (ft), sendo que 1 m equivale a 3,2808 ft) John sabe por experiência que sua escada de 18 ft fica estável quando a distância do chão até o topo dela é de 5 ft a mais que a distância da construção até a base da escada (como vemos na figura). Nesta posição, qual a altura que a escada alcança na construção?



89. Dimensões de uma janela (a medida está em pés (ft), sendo que 1 m equivale a 3,2808 ft) Essa janela tem a forma de um quadrado com um semicírculo sobre ele. Encontre as dimensões da janela se a área total do quadrado e do semicírculo é dada por 200 ft^2.



90. Verdadeiro ou falso Se o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ intercepta o eixo horizontal x em 2, então 2 é a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Justifique a sua resposta.

91. Verdadeiro ou falso Se $2x^2 = 18$, então x precisa ser igual a 3. Justifique a sua resposta.

92. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas é a solução da equação $x(x - 3) = 0$?

(a) Somente $x = 3$.

(b) Somente $x = -3$.

(c) $x = 0$ e $x = -3$.

(d) $x = 0$ e $x = 3$.

(e) Não existem soluções.

93. Múltipla escolha Qual dos seguintes substitutos para ? faz $x^2 - 5x + ?$ ser um quadrado perfeito?

(a) $-\dfrac{5}{2}$ **(b)** $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2$

(c) $(-5)^2$ **(d)** $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2$

(e) -6

94. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas são as soluções da equação $2x^2 - 3x - 1 = 0$?

(a) $\dfrac{3}{4} \pm \sqrt{17}$ **(b)** $\dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

(c) $\dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ **(d)** $\dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

(e) $\dfrac{3 \pm 1}{4}$

95. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas são as soluções da equação $|x - 1| = -3$?

(a) Somente $x = 4$ **(b)** Somente $x = -2$

(c) Somente $x = 2$ **(d)** $x = 4$ e $x = -2$

(e) Não existem soluções.

96. Dedução da fórmula quadrática ou de Bhaskara Siga esses passos de completar o quadrado para resolver $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

(a) Subtraia c de ambos os lados da equação original e divida ambos os lados da equação resultante por a para obter

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

(b) Adicione o quadrado da metade do coeficiente de x em (a) em ambos os lados e simplifique para obter

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

(c) Extraia raízes quadradas em (b) e isole x para obter a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

97. Considere a equação $|x^2 - 4| = c$.

(a) Encontre o valor de c para o qual esta equação tenha quatro soluções. (Existem vários valores com essas condições.)

(b) Encontre o valor de c para o qual esta equação tenha três soluções. (Existe somente um valor com essas condições.)

(c) Encontre o valor de c para o qual esta equação tenha duas soluções. (Existem vários valores com essas condições.)

(d) Encontre o valor de c para o qual esta equação não tenha soluções. (Existem vários valores com essas condições.)

(e) Existem outros possíveis números de soluções desta equação? Explique.

98. Somas e produtos das soluções de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ Suponha que temos $b^2 - 4ac > 0$.

(a) Mostre que a soma das duas soluções desta equação é $-(b/a)$.

(b) Mostre que o produto das duas soluções desta equação é c/a.

99. Continuação do exercício anterior A equação $2x^2 + bx + c = 0$ tem duas soluções x_1 e x_2. Se $x_1 + x_2 = 5$ e $x_1 \cdot x_2 = 3$, encontre as duas soluções

Inequações

Objetivos de aprendizagem

- Inequações lineares com uma variável.
- Solução de inequações com valor absoluto.
- Solução de inequações quadráticas.
- Aproximação de soluções para inequações.

Esses tópicos suprem alguns fundamentos das técnicas de álgebra, além de mostrar a utilidade das representações gráficas para resolver inequações.

Inequações lineares com uma variável

Usamos desigualdades para descrever, por exemplo, a ordem dos números sobre a reta dos números reais.

DEFINIÇÃO Inequação linear em x

Uma **inequação linear em x** pode ser escrita na forma

$$ax + b < 0, ax + b \leq 0, ax + b > 0 \text{ ou } ax + b \geq 0$$

onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

Resolver uma inequação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira. Uma **solução de uma inequação em x** é um valor de x que satisfaz isso. O conjunto de todas as soluções de uma inequação é o que chamamos de **conjunto solução**. **Resolvemos uma inequação** encontrando seu conjunto solução. Eis uma lista de propriedades que usamos para resolver inequações.

Propriedades das inequações

Sejam u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas e c um número real.

1. Transitiva Se $u < v$ e $v < w$ então $u < w$.

2. Adição Se $u < v$, então $u + w < v + w$.
Se $u < v$ e $w < z$ então $u + w < v + z$.

3. Multiplicação Se $u < v$ e $c > 0$ então $uc < vc$.
Se $u < v$ e $c < 0$ então $uc > vc$.

As propriedades acima são verdadeiras se o símbolo $<$ é substituído por $\leq$. Existem propriedades similares para $>$ e $\geq$.

A multiplicação (ou divisão) de uma inequação por um número positivo preserva a desigualdade. A multiplicação (ou divisão) de uma inequação por um número negativo inverte a desigualdade.

O conjunto das soluções de uma inequação linear com uma variável forma um intervalo de números reais. Tal como com equações lineares, podemos resolver uma inequação transformando-a em *inequação equivalente* cujas soluções são óbvias. Duas ou mais inequações são **equivalentes** se elas têm o mesmo conjunto solução.

As propriedades citadas das inequações descrevem operações que transformam uma inequação em uma equivalente.

EXEMPLO 1 Resolução de uma inequação linear

Resolva $3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} 3(x-1)+2 &\leq 5x+6 \\ 3x-3+2 &\leq 5x+6 && \text{Propriedade distributiva} \\ 3x-1 &\leq 5x+6 && \text{Simplificação} \\ 3x &\leq 5x+7 && \text{Adição de 1} \\ -2x &\leq 7 && \text{Subtração de } 5x \\ \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2x) &\geq \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 7 && \text{Multiplicação por } -1/2 \text{ (desigualdade inverte)} \\ x &\geq -3{,}5 \end{aligned}$$

O conjunto solução da desigualdade é o conjunto de todos os números reais maiores ou iguais a $-3{,}5$. Em notação de intervalo, o conjunto solução é $[-3{,}5, +\infty[$.

Pelo fato do conjunto solução de uma inequação linear ser um intervalo de números reais, podemos apresentar o conjunto solução por meio da representação gráfica da reta real, como mostrado no Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Resolução de uma inequação linear e representação gráfica do conjunto solução

Resolva a inequação e represente graficamente seu conjunto solução.

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$$

SOLUÇÃO

O mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações é 12.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{1}{2} &> \frac{x}{4}+\frac{1}{3} \\ 12\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right) &> 12\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{3}\right) && \text{Multiplicando pelo mínimo múltiplo comum 12} \\ 4x+6 &> 3x+4 && \text{Simplificando} \\ x+6 &> 4 && \text{Subtraindo por } 3x \\ x &> -2 && \text{Subtraindo por 6} \end{aligned}$$

O conjunto solução é o intervalo $]-2, +\infty[$. Sua representação gráfica é mostrada a seguir.

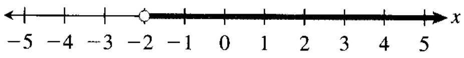


Figura 6.1 O gráfico do conjunto solução da inequação no Exemplo 2.

Às vezes duas inequações são combinadas em uma **inequação dupla**, cujo conjunto solução é a desigualdade dupla com x isolado como o termo central. O Exemplo 3 ilustra isso.

EXEMPLO 3 Resolução de uma inequação dupla

Resolva a inequação e represente graficamente seu conjunto solução.

$$-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} -3 &< \frac{2x+5}{3} \leq 5 & \\ -9 &< 2x + 5 \leq 15 & \text{Multiplicação por 3} \\ -14 &< 2x \leq 10 & \text{Subtração por 5} \\ -7 &< x \leq 5 & \text{Divisão por 2} \end{aligned}$$

O conjunto solução é o conjunto de todos os números reais maiores que -7 e menores ou iguais a 5. Em notação de intervalo, a solução é o conjunto $]-7, 5]$. Sua representação gráfica é mostrada a seguir.

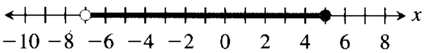


Figura 6.2 O gráfico do conjunto solução da inequação dupla no Exemplo 3.

Solução de inequações com valor absoluto

Eis duas regras básicas que aplicamos para resolver inequações com valor absoluto.

Solução de inequações com valor absoluto

Seja u uma expressão algébrica em x e a um número real com $a \geq 0$.

1. Se $|u| < a$, então u está no intervalo $]-a, a[$, isto é,

$$|u| < a \quad \text{se e somente se} \quad -a < u < a.$$

2. Se $|u| > a$, então u está no intervalo $]-\infty, -a[$ ou $]a, +\infty[$, isto é,

$$|u| > a \quad \text{se e somente se} \quad u < -a \text{ ou } u > a.$$

As desigualdades $<$ e $>$ podem ser substituídas por $\leq$ e $\geq$, respectivamente. Veja a Figura 6.3.

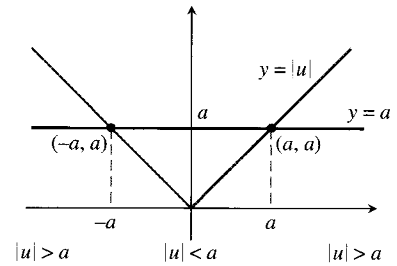


Figura 6.3 Gráficos de $y = a$ e $y = |u|$.

A solução de $|u| < a$ está representada pela parte do eixo horizontal correspondente à região onde os valores x dos pontos do gráfico de $y = |u|$ está abaixo do gráfico de $y = a$. A solução de $|u| > a$ está representada pela parte do eixo horizontal correspondente à região onde os valores x dos pontos do gráfico de $y = |u|$ está acima do gráfico de $y = a$.

EXEMPLO 4 Resolução de uma inequação com valor absoluto

Resolva $|x - 4| < 8$.

SOLUÇÃO

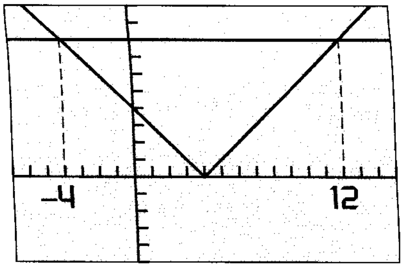
$$|x - 4| < 8$$

$$-8 < x - 4 < 8 \qquad \text{Inequação dupla equivalente}$$

$$-4 < x < 12 \qquad \text{Adição de 4}$$

A solução é dada pelo intervalo $]-4, 12[$.

A Figura 6.4 mostra que os pontos sobre o gráfico de $y = |x - 4|$ que estão abaixo do gráfico de $y = 8$ são aqueles em que os valores de x estão entre -4 e 12.



[−7, 15] por [−5, 10]

Figura 6.4 Os gráficos de $y = |x - 4|$ e $y = 8$.

EXEMPLO 5 Resolução de uma outra inequação com valor absoluto

Resolva $|3x - 2| \geq 5$.

SOLUÇÃO

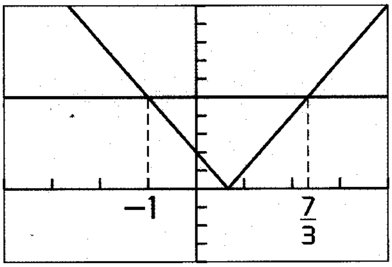
A solução desta inequação com valor absoluto consiste nas soluções das duas desigualdades.

$$\begin{aligned} 3x - 2 &\leq -5 \quad \text{ou} \quad 3x - 2 \geq 5 & \\ 3x &\leq -3 \quad \text{ou} \quad 3x \geq 7 & \text{Adição de 2} \\ x &\leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{7}{3} & \text{Divisão por} \end{aligned}$$

A solução consiste em todos os números que estão em um ou em outro dos dois intervalos $]-\infty, -1]$ é $[7/3, +\infty[$, a qual pode ser escrita como $]-\infty, -1] \cup [7/3, +\infty[$. A notação "$\cup$" é lida como "união."

A Figura 6.5 mostra que os pontos do gráfico de $y = |3x - 2|$ que estão acima ou sobre os pontos do gráfico de $y = 5$ são tais que os valores de x são menores ou iguais a -1, como também são maiores ou iguais a $7/3$.

Uma observação: a união de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A, a B ou a ambos.



$[-4, 4]$ por $[-4, 10]$

Figura 6.5 Gráficos de $y = |3x - 2|$ e $y = 5$.

Solução de inequações quadráticas

Para resolver uma inequação quadrática tal como $x^2 - x - 12 > 0$, iniciamos resolvendo a correspondente equação quadrática $x^2 - x - 12 = 0$. Então, determinamos os valores de x para os quais o gráfico de $y = x^2 - x - 12$ está acima do eixo horizontal x (pelo fato de a desigualdade ser "maior que zero").

EXEMPLO 6 Resolução de uma inequação quadrática

Resolva $x^2 - x - 12 > 0$.

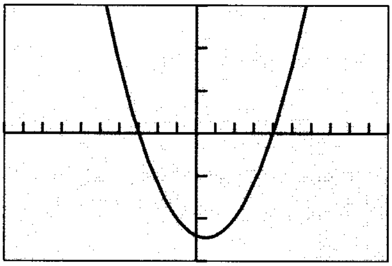
SOLUÇÃO

Em primeiro lugar, resolvemos a equação correspondente $x^2 - x - 12 = 0$.

$$\begin{gathered} x^2 - x - 12 = 0 \\ (x - 4)(x + 3) = 0 \\ x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0 \\ x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -3 \end{gathered}$$

As soluções da equação do segundo grau são -3 e 4, porém, essas não são as soluções da inequação original porque $0 > 0$ é falso. A Figura 6.6 mostra que os pontos sobre o gráfico de $y = x^2 - x - 12$ que estão acima do eixo horizontal x são tais que os valores de x estão à esquerda de -3 ou à direita de 4.

A solução da inequação original é $]-\infty, -3[\cup]4, +\infty[$.



[−10, 10] por [−15, 15]

Figura 6.6 O gráfico de $y = x^2 - x - 12$ que cruza o eixo x em $x = -3$ e $x = 4$.

No Exemplo 7, a inequação quadrática envolve o símbolo $\leq$. Neste caso, as soluções da correspondente equação quadrática são também soluções da inequação.

EXEMPLO 7 Resolução de uma inequação quadrática

Resolva $2x^2 + 3x \leq 20$.

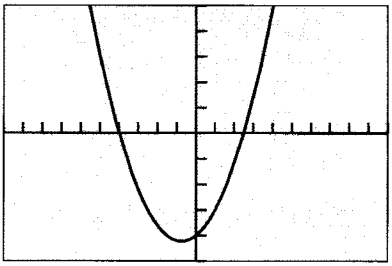
SOLUÇÃO

Em primeiro lugar, subtraímos 20 dos dois lados da inequação para obter $2x^2 + 3x - 20 \leq 0$. Depois, resolvemos a correspondente equação quadrática $2x^2 + 3x - 20 = 0$.

$$2x^2 + 3x - 20 = 0$$
$$(x + 4)(2x - 5) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = 0$$
$$x = -4 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2}$$

As soluções da correspondente equação quadrática são -4 e $5/2 = 2{,}5$. Você pode verificar que são também soluções da inequação.

A Figura 6.7 mostra que os pontos do gráfico de $y = 2x^2 + 3x - 20$ que estão abaixo do eixo horizontal x são tais que os valores de x estão entre -4 e 2,5. A solução da inequação original é dada pelo intervalo $[-4; 2{,}5]$. Usamos o intervalo fechado, pois -4 e 2,5 são também soluções da inequação.



[−10, 10] por [−25, 25]

Figura 6.7 O gráfico de $y = 2x^2 + 3x - 20$ cuja parte que está abaixo do eixo x são pontos tais que os respectivos valores de x obedecem à inequação dupla $-4 < x < 2{,}5$.

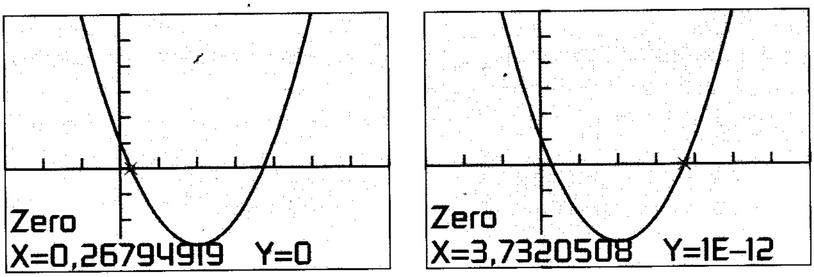
Pode ocorrer do extremo de algum intervalo não ser um número inteiro. Caso isso ocorra, podemos deixar na forma fracionária ou aproximar o valor utilizando decimal com duas casas após a vírgula.

EXEMPLO 8 Resolução (somente) gráfica de uma inequação quadrática

Resolva $x^2 - 4x + 1 \geq 0$ graficamente.

SOLUÇÃO

Podemos utilizar os gráficos de $y = x^2 - 4x + 1$ na Figura 6.8 para verificar que as soluções da equação $x^2 - 4x + 1 = 0$ são aproximadamente 0,27 e 3,73. Assim, a solução da inequação original é $]-\infty; 0{,}27] \cup [3{,}73; +\infty[$. Usamos os intervalos fechado à direita no primeiro caso e fechado à esquerda no segundo porque as soluções da equação quadrática são soluções da inequação, embora tenhamos usado aproximação para seus valores.



$[-3, 7]$ por $[-4, 6]$ $[-3, 7]$ por $[-4, 6]$

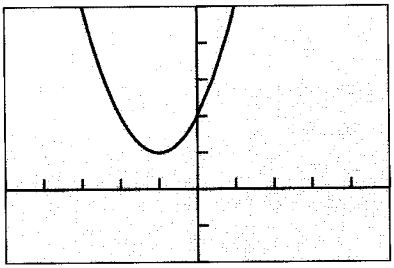
Figura 6.8 Esta figura sugere que $y = x^2 - 4x + 1$ é zero para $x \cong 0{,}27$ e $x \cong 3{,}73$.

EXEMPLO 9 Inequação quadrática sem solução

Resolva $x^2 + 2x + 2 < 0$.

SOLUÇÃO

A Figura 6.9 mostra que o gráfico de $y = x^2 + 2x + 2$ está acima do eixo horizontal x para todos os valores de x. Assim, a inequação $x^2 + 2x + 2 < 0$ *não* tem solução. Ela é dada por um conjunto vazio.



$[-5, 5]$ por $[-2, 5]$

Figura 6.9 Os valores de $y = x^2 + 2x + 2$ não são negativos.

A Figura 6.9 mostra que as soluções da inequação $x^2 + 2x + 2 > 0$ são todos os números reais. Além de todas essas possibilidades, uma inequação quadrática pode ter exatamente uma solução.

Aproximação de soluções para inequações

Para resolver uma inequação tal como no Exemplo 10, estimamos as raízes do correspondente gráfico. Então, determinamos os valores de x para os quais o gráfico está acima ou sobre o eixo horizontal x.

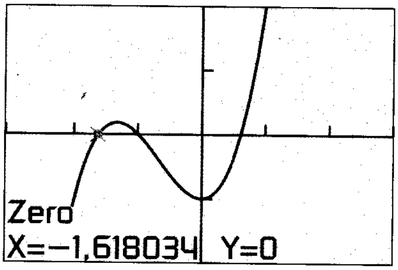
EXEMPLO 10 Resolução de uma inequação cúbica

Resolva $x^3 + 2x^2 - 1 \geq 0$ graficamente.

SOLUÇÃO

Podemos usar o gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ como na Figura 6.10 para mostrar que as soluções da correspondente equação $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ são aproximadamente $-1{,}62$, -1 e $0{,}62$. Os pontos do gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ que estão sobre e acima do eixo horizontal x são aqueles cujos valores x estão entre $-1{,}62$ e -1 (incluindo os extremos), como também a direita de $0{,}62$ (incluindo o extremo também).

A solução da inequação é $[-1{,}62; -1] \cup [0{,}62; +\infty[$. Vale observar que as soluções da equação também fazem parte das soluções da inequação.



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

Figura 6.10 O gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ apresenta os pontos que estão acima do eixo horizontal x com seus valores de x entre dois números negativos ou à direita de um número positivo.

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 a 3, resolva as equações ou inequações.

1. $-7 < 2x - 3 < 7$

2. $5x - 2 \geq 7x + 4$

3. $|x + 2| = 3$

Nos exercícios 4 a 6, fatore a expressão completamente.

4. $4x^2 - 9$

5. $x^3 - 4x$

6. $9x^2 - 16y^2$

Nos exercícios 7 e 8, simplifique a fração com termos de menores expoentes.

7. $\dfrac{z^2 - 25}{z^2 - 5z}$

8. $\dfrac{x^2 + 2x - 35}{x^2 - 10x + 25}$

Nos exercícios 9 e 10, faça a soma das frações e simplifique-as.

9. $\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{x + 1}{3x - 4}$

10. $\dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 2} + \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 4, encontre quais valores de x são soluções da inequação.

1. $2x - 3 < 7$

(a) $x = 0$ **(b)** $x = 5$ **(c)** $x = 6$

2. $3x - 4 \geq 5$

(a) $x = 0$ **(b)** $x = 3$ **(c)** $x = 4$

3. $-1 < 4x - 1 \leq 11$

(a) $x = 0$ **(b)** $x = 2$ **(c)** $x = 3$

4. $-3 \leq 1 - 2x \leq 3$

(a) $x = -1$ **(b)** $x = 0$ **(c)** $x = 2$

Nos exercícios 5 a 12, resolva a inequação e represente o conjunto solução graficamente na reta real.

5. $x - 4 < 2$ **6.** $x + 3 > 5$

7. $2x - 1 \leq 4x + 3$ **8.** $3x - 1 \geq 6x + 8$

9. $2 \leq x + 6 < 9$ **10.** $-1 \leq 3x - 2 < 7$

11. $2(5 - 3x) + 3(2x - 1) \leq 2x + 1$

12. $4(1 - x) + 5(1 + x) > 3x - 1$

Nos exercícios 13 a 24, resolva a inequação.

13. $\dfrac{5x + 7}{4} \leq -3$ **14.** $\dfrac{3x - 2}{5} > -1$

15. $4 \geq \dfrac{2y - 5}{3} \geq -2$ **16.** $1 > \dfrac{3y - 1}{4} > -1$

17. $0 \leq 2z + 5 < 8$ **18.** $-6 < 5t - 1 < 0$

19. $\dfrac{x - 5}{4} + \dfrac{3 - 2x}{3} < -2$

20. $\dfrac{3 - x}{2} + \dfrac{5x - 2}{3} < -1$

21. $\dfrac{2y - 3}{2} + \dfrac{3y - 1}{5} < y - 1$

22. $\dfrac{3 - 4y}{6} - \dfrac{2y - 3}{8} \geq 2 - y$

23. $\dfrac{1}{2}(x - 4) - 2x \leq 5(3 - x)$

24. $\dfrac{1}{2}(x + 3) + 2(x - 4) < \dfrac{1}{3}(x - 3)$

25. Verdadeiro ou falso Analise a desigualdade $-6 > -2$ e verifique se é verdadeira ou falsa. Justifique a sua resposta.

26. Verdadeiro ou falso Analise a desigualdade $2 \leq \dfrac{6}{3}$ e verifique se é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

Nos exercícios 27 a 34, resolva as inequações algebricamente. Escreva a solução com a notação de intervalo e faça a representação gráfica na reta real.

27. $|x + 4| \geq 5$ **28.** $|2x - 1| > 3{,}6$

29. $|x - 3| < 2$ **30.** $|x + 3| \leq 5$

31. $|4 - 3x| - 2 < 4$ **32.** $|3 - 2x| + 2 > 5$

33. $\left|\dfrac{x + 2}{3}\right| \geq 3$ **34.** $\left|\dfrac{x - 5}{4}\right| \leq 6$

Nos exercícios 35 a 42, resolva as inequações. Inicie resolvendo as correspondentes equações.

35. $2x^2 + 17x + 21 \leq 0$ **36.** $6x^2 - 13x + 6 \geq 0$

37. $2x^2 + 7x > 15$ **38.** $4x^2 + 2 < 9x$

39. $2 - 5x - 3x^2 < 0$ **40.** $21 + 4x - x^2 > 0$

41. $x^3 - x \geq 0$ **42.** $x^3 - x^2 - 30x \leq 0$

Nos exercícios 43 a 52, resolva as inequações graficamente.

43. $x^2 - 4x < 1$ **44.** $12x^2 - 25x + 12 \geq 0$

45. $6x^2 - 5x - 4 > 0$ **46.** $4x^2 - 1 \leq 0$

47. $9x^2 + 12x - 1 \geq 0$ **48.** $4x^2 - 12x + 7 < 0$

49. $4x^2 + 1 > 4x$ **50.** $x^2 + 9 \leq 6x$

51. $x^2 - 8x + 16 < 0$ **52.** $9x^2 + 12x + 4 \geq 0$

Nos exercícios 53 a 56, resolva as inequações cúbicas graficamente.

53. $3x^3 - 12x + 2 \geq 0$ **54.** $8x - 2x^3 - 1 < 0$

55. $2x^3 + 2x > 5$ **56.** $4 \leq 2x^3 + 8x$

57. Dê um exemplo de uma inequação quadrática com a solução indicada para cada caso.

(a) Todos os números reais.

(b) Nenhuma solução.

(c) Exatamente uma solução.

(d) $[-2, 5]$

(e) $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

(f) $]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$

58. Uma pessoa quer dirigir 105 km em não mais que duas horas. Qual é a menor velocidade média necessária para manter enquanto dirige?

59. Considere a coleção de todos os retângulos que tem um comprimento 2 cm menor que duas vezes sua largura.

(a) Encontre as possíveis larguras (em centímetros) desses retângulos se seus perímetros são menores que 200 cm.

(b) Encontre as possíveis larguras (em centímetros) desses retângulos se suas áreas são menores ou iguais a 1.200 centímetros quadrados.

60. Para um certo gás, $P = 400/V$, onde P é pressão e V é volume. Se $20 \leq V \leq 40$, qual a correspondente variação para P?

61. Verdadeiro ou falso A inequação com valor absoluto $|x - a| < b$, onde a e b são números reais, sempre tem ao menos uma solução. Justifique sua resposta.

62. Verdadeiro ou falso Todo número real é a solução da inequação com valor absoluto $|x - a| \geq 0$, em que a é um número real. Justifique sua resposta.

63. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas é a solução da inequação $|x - 2| < 3$?

(a) $x = -1$ ou $x = 5$ **(b)** $[-1, 5]$

(c) $[-1, 5]$ **(d)** $]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$

(e) $]-1, 5[$

64. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas é a solução da inequação $x^2 - 2x + 2 \geq 0$?

(a) $[0, 2]$ **(b)** $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

(c) $[-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

(d) Todos os números reais.

(e) Não existe solução.

65. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas é a solução da inequação $x^2 > x$?

(a) $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ **(b)** $]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$

(c) $]1, \infty[$ **(d)** $]0, +\infty[$

(e) Não existe solução.

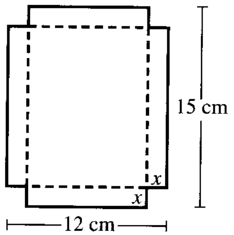
66. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas é a solução da inequação $x^2 \leq 1$?

(a) $]-\infty, 1]$ **(b)** $]-1, 1[$

(c) $[1, +\infty[$ **(d)** $[-1, 1]$

(e) Não existe solução.

67. Construindo uma caixa sem tampa Uma caixa aberta é formada por um retângulo sem pequenos quadrados nos cantos, de modo que seja feita dobra nos pontilhados.



(a) Qual o valor de x para que a caixa tenha um volume de 125 centímetros cúbicos?

(b) Qual o valor de x para que a caixa tenha um volume maior que 125 centímetros cúbicos?

Nos exercícios 68 e 69, use uma combinação de técnicas algébrica e gráfica para resolver as inequações.

68. $|2x^2 + 7x - 15| < 10$

69. $|2x^2 + 3x - 20| \geq 10$

Parte 3

Funções

Capítulo 7

Funções e suas propriedades

Objetivos de aprendizagem

- Definição de função e notação.
- Domínio e imagem.
- Continuidade de uma função.
- Funções crescentes e decrescentes.
- Funções limitadas.
- Extremos local e absoluto.
- Simetria.
- Assíntotas.
- Comportamento da função nas extremidades do eixo horizontal.

Os assuntos funções e gráficos formam a base para entender a matemática e as aplicações matemáticas que podem ser vistas em várias áreas do conhecimento.

Definição de função e notação

A matemática e suas aplicações estão repletas de exemplos de fórmulas com as quais as variáveis quantitativas estão relacionadas. Tanto a linguagem como a notação de funções são adequadas para trabalhar com tal ferramenta.

DEFINIÇÃO Função, conjunto domínio (ou simplesmente domínio) e conjunto imagem (ou simplesmente imagem)

Uma função de um conjunto A em um conjunto B é uma lei que associa para todo elemento em A um único elemento em B. O conjunto A é o **domínio** da função e o conjunto B de todos os valores produzidos com essa associação é o conjunto **imagem**. O que pode ocorrer é a função estar definida como sendo de um conjunto A em um conjunto C, de modo que esse conjunto C não seja o conjunto imagem, e sim um conjunto que contém a imagem. Neste caso, esse conjunto C é conhecido como contradomínio. Neste texto, falaremos da função definida de um conjunto em outro, sendo o segundo considerado o conjunto imagem.

Existem várias maneiras de observar funções. Uma das mais intuitivas é a idéia de uma "máquina" (veja a Figura 7.1), na qual valores x do domínio são colocados dentro da própria máquina (que faz papel da função) para produzir valores y da imagem. Para indicar que y vem de uma função que atua sobre x, usamos a **notação de função** de Euler dada por $y = f(x)$ (podemos ler como "**y igual a f de x**" ou "**o valor de f em x**"). Aqui, x é a **variável independente** e $y = f(x)$ é a **variável dependente**.

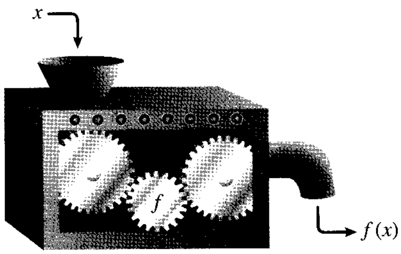


Figura 7.1 Um diagrama de uma "máquina" para compreender função.

Uma função pode também ser vista como uma relação dos elementos do domínio com os elementos da imagem. A Figura 7.2(a) mostra uma função que relaciona elementos do domínio X com os elementos da imagem Y. A Figura 7.2(b) mostra uma outra relação, mas *esta não é de uma função*, uma vez que a regra de que o elemento x_1 associa a um *único* elemento de Y não ocorre.

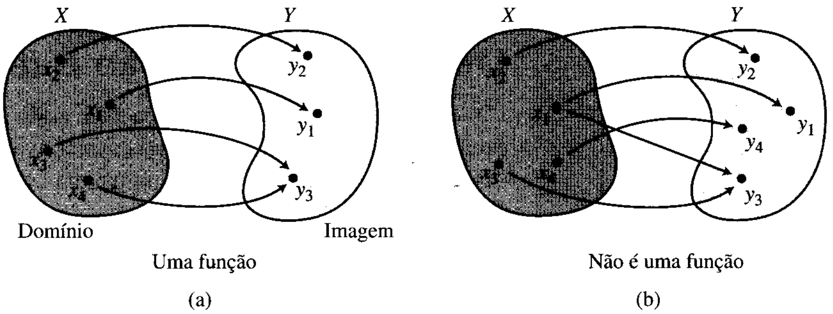


Figura 7.2 O diagrama em (a) retrata uma relação de X em Y, que é uma função. O diagrama em (b) retrata uma relação de X em Y, que não é uma função.

A unicidade do valor da imagem é muito importante para estudarmos o seu comportamento. Saber que $f(2) = 8$ e, posteriormente, verificar que $f(2) = 4$ é uma contradição. O que acontece é que jamais teremos uma função definida por uma fórmula ambígua como $f(x) = 3x \pm 2$.

EXEMPLO 1 Verificação se é ou não uma função

A fórmula $y = x^2$ define y como uma função de x?

SOLUÇÃO

Sim, y é uma função de x. De fato, podemos escrever a fórmula com a notação $f(x) = x^2$. Quando um número x é substituído na função, o quadrado de x será o resultado e não existe ambigüidade quanto ao que significa o quadrado de x.

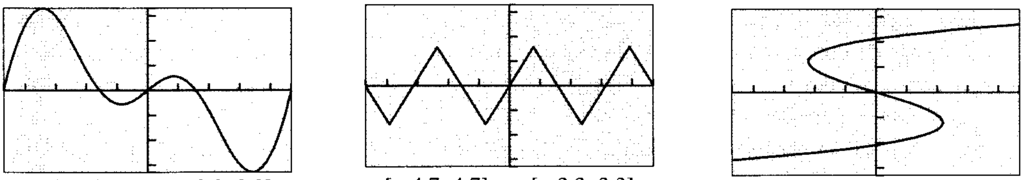
Uma outra forma de observar funções é graficamente. O **gráfico da função $y = f(x)$** é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$, com x pertencente ao domínio de f. Podemos visualizar os valores do domínio sobre o eixo horizontal x, como também os valores da imagem sobre o eixo vertical y, tomando como referência os pares ordenados (x, y) do gráfico de $y = f(x)$.

EXEMPLO 2 Verificação se é ou não uma função

Dos três gráficos mostrados na Figura 7.3, qual *não* é gráfico de uma função? Como você pode explicar?

SOLUÇÃO

O gráfico em (c) não é gráfico de uma função. Por exemplo, existem três pontos no gráfico com a coordenada $x = 0$, de modo que não existe um *único* valor de y para esse valor $x = 0$. Podemos verificar que isso ocorre para outros valores de x (aproximadamente entre -2 e 2). Os outros dois gráficos não apresentam esse problema, já que nenhuma linha vertical (imaginária) cruza o gráfico em mais de um ponto. Gráficos que passam por esse *teste da linha vertical* são gráficos de funções.



[−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3]
(a)

[−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3]
(b)

[−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3]
(c)

Figura 7.3 Um destes não é gráfico de função (Exemplo 2).

Teste da linha vertical

Um gráfico (conjunto de pontos (x, y)) no plano cartesiano define y como uma função de x se e somente se nenhuma linha vertical (nem que seja imaginária) cruza o gráfico em mais de um ponto.

Domínio e imagem

Uma função pode ser definida algebricamente por meio da regra (ou lei) em termos da variável x do domínio. A regra, no entanto, não nos fornece todas as informações sem que seja definido o domínio.

Por exemplo, podemos definir o volume de uma esfera como uma função do seu raio, pela fórmula

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (Observe que temos "}V\text{ de }r\text{" e não "}V \cdot r\text{")}$$

Essa *fórmula* está definida para todos os números reais, mas a *função* volume não está definida para valores negativos de r. Assim, se a nossa intenção é estudar a função volume, podemos restringir o domínio para todo $r \geq 0$.

Observação

A menos que tenhamos um modelo (como o volume citado agora) que necessita de um domínio restrito, assumiremos que o domínio de uma função definida por uma expressão algébrica é o mesmo que o domínio da própria expressão algébrica.

EXEMPLO 3 Verificação do domínio de uma função

Encontre o domínio de cada função:

(a) $f(x) = \sqrt{x + 3}$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 5}$

(c) $A(s) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} s^2$, onde $A(s)$ é a área de um triângulo eqüilátero com lados de comprimento s.

SOLUÇÃO

Solução algébrica

(a) A expressão dentro do radical não pode ser negativa. Como devemos ter $x + 3 \geq 0$, então $x \geq -3$. O domínio de f é o intervalo $[-3, +\infty[$.

(b) A expressão dentro do radical não pode ser negativa; portanto, $x \geq 0$. Também, o denominador de uma fração não pode ser zero; portanto, $x \neq 5$. O domínio de g é o intervalo $[0, +\infty[$ com o número 5 removido, o qual podemos escrever como a *união* de dois intervalos, da seguinte maneira: $[0, 5[\cup]5, +\infty[$.

(c) A expressão algébrica tem como domínio todos os números reais, mas pelo que a função representa, s não pode ser negativo. O domínio de A é o intervalo $[0, +\infty[$.

Suporte gráfico

Podemos justificar algebricamente nossas respostas em (a) e (b) a seguir. Uma calculadora que faz gráfico ou um software não fornece pontos com valores de x impossíveis de efetuar contas.

(a) Observe que o gráfico de $y = \sqrt{x + 3}$ (veja a Figura 7.4a) mostra pontos somente para $x \geq -3$, como era esperado.

(b) O gráfico de $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 5}$ (veja a Figura 7.4b) mostra pontos somente para $x \geq 0$, como era esperado, mas mostra uma reta vertical que corta o eixo x em $x = 5$. Esta reta não faz parte da representação gráfica, é apenas uma maneira de mostrar que o 5 não está no domínio.

(c) O gráfico de $y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s^2$ (veja a Figura 7.4c) mostra o domínio não restrito da expressão algébrica: conjunto de todos os números reais. Essa é a conclusão a que chegamos somente observando a função e o que ela significa, pois até então podemos não saber que s é o comprimento do lado do triângulo

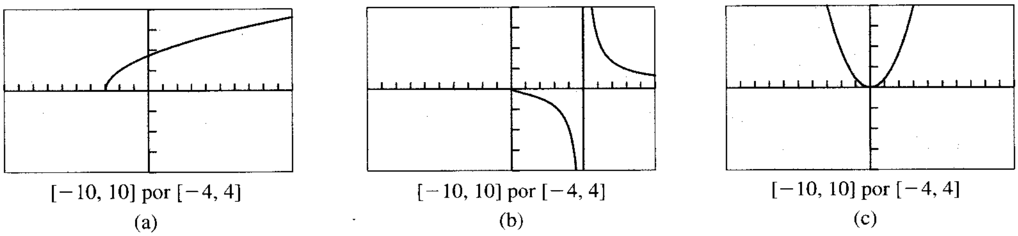


Figura 7.4 Gráficos das funções do Exemplo 3.

Encontrar algebricamente a imagem de uma função é muitas vezes mais árduo que encontrar o domínio, embora, graficamente, as identificações de domínio e imagem sejam similares. Para encontrar o *domínio,* olhamos para os *valores no eixo horizontal x,* que são as primeiras coordenadas dos pontos do gráfico; para encontrar a *imagem,* olhamos para os *valores no eixo vertical y,* que são as segundas coordenadas dos pontos do gráfico. Podemos utilizar os recursos algébricos e gráficos novamente.

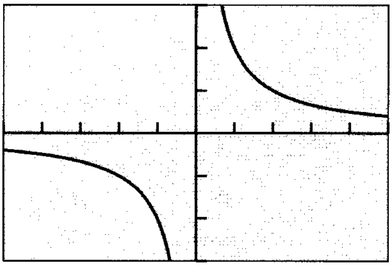
EXEMPLO 4 Verificação da imagem de uma função

Encontre a imagem da função $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

SOLUÇÃO

Solução gráfica

O gráfico de $y = \dfrac{2}{x}$ está mostrado na Figura 7.5.



$[-5, 5]$ por $[-3, 3]$

Figura 7.5 O gráfico de $y = \dfrac{2}{x}$.

O gráfico não está definido para $x = 0$, o que já era previsto uma vez que o denominador da função não pode ser 0. Vemos também que a imagem é o conjunto de todos os números reais diferentes de zero.

Solução algébrica

Confirmamos que 0 não está na imagem ao tentar resolver $\dfrac{2}{x} = 0$. (A proposta é verificar se existe algum valor de x tal que $\dfrac{2}{x}$ seja 0.)

$$\frac{2}{x} = 0$$
$$2 = 0 \cdot x$$
$$2 = 0$$

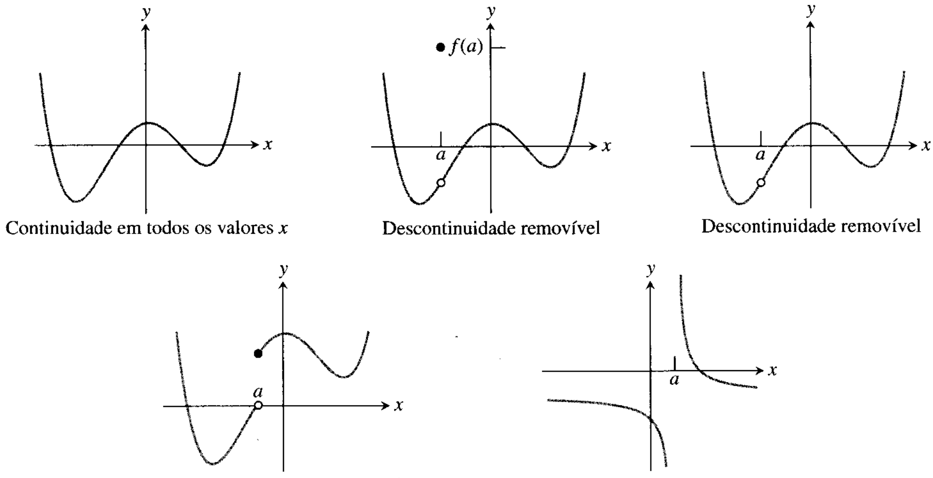
Como a equação $2 = 0$ não é verdade, $\dfrac{2}{x} = 0$ não tem solução e, assim, $y = 0$ não está na imagem. Mas como sabemos que todos os outros números reais estão na imagem? Seja k um outro número real qualquer (diferente de zero) e vamos resolver $\dfrac{2}{x} = k$:

$$\frac{2}{x} = k$$
$$2 = k \cdot x$$
$$x = \frac{2}{k}$$

Como podemos ver, não existe problema em encontrar valores de x (que depende de k) e a imagem é, de fato, dada por $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Continuidade de uma função

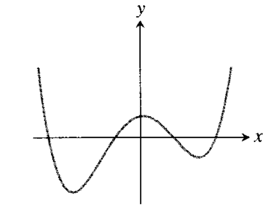
Uma das mais importantes propriedades da maioria das funções que modelam o comportamento de ocorrências do mundo real é o fato de elas serem *contínuas*. Graficamente falando, uma função é contínua num ponto se o gráfico não apresenta falha (do tipo "quebra", "pulo"...) naquele ponto. Podemos ilustrar o conceito com poucos gráficos (veja a Figura 7.6):



Continuidade em todos os valores x — Descontinuidade removível — Descontinuidade removível — Descontinuidade de pulo (ou salto) — Descontinuidade infinita

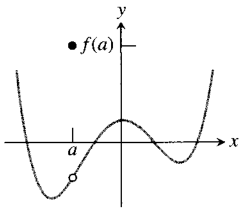
Figura 7.6 Alguns casos de pontos de descontinuidade.

Vamos observar cada caso individualmente.



Continuidade em todos os valores x

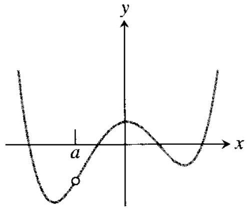
Este gráfico é contínuo em todo x. Note que o gráfico não tem quebra. Isso significa que, se estamos estudando o comportamento da função f para valores de x próximos a qualquer número real a, podemos assegurar que os valores $f(x)$ estarão próximos a $f(a)$.



Descontinuidade removível

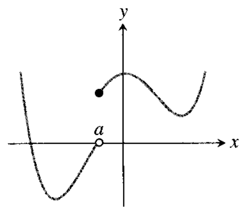
Este gráfico é contínuo exceto para o "buraco" em $x = a$. Se estamos estudando o comportamento desta função f para valores de x próximos de a, *não* podemos assegurar que os valores $f(x)$ estarão próximos a $f(a)$. Neste caso, $f(x)$ é menor que $f(a)$ para x próximo de a.

Isso é chamado de **descontinuidade removível** porque o gráfico pode ser "remendado" (ou "consertado") redefinindo $f(a)$.



Descontinuidade removível

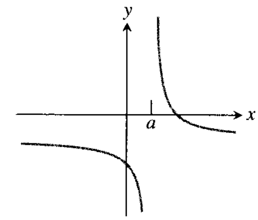
Este gráfico tem também uma **descontinuidade removível** em $x = a$. Se estamos estudando o comportamento desta função f para valores de x próximos de a, continuamos sem poder assegurar que os valores $f(x)$ estarão próximos a $f(a)$ porque, neste caso, $f(a)$ não existe. É removível porque poderíamos definir $f(a)$ completando o "buraco" e fazer f contínua em a.



Descontinuidade de pulo (ou salto)

Aqui está uma descontinuidade que não é removível. É uma **descontinuidade de pulo** porque existe mais que um "buraco" em $x = a$; existe um *pulo* (ou *salto*) nos valores da função que fazem o espaço impossível de completar com um simples ponto $(a, f(a))$.

Esta é uma função com uma **descontinuidade infinita** em $x = a$. Não é possível fazer nada do que citamos anteriormente.



Descontinuidade infinita

O simples conceito geométrico de um gráfico que não esteja "quebrado" em um ponto $(a, f(a))$ é uma daquelas noções visuais difíceis para explicar cuidadosamente na linguagem algébrica. A principal idéia é perceber que os pontos $(x, f(x))$ estão sobre o gráfico da função e se aproximam de $(a, f(a))$, por qualquer um dos lados, sem, necessariamente, atingir $(a, f(a))$. Uma função é **contínua em** $x = a$ se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Uma função f é **descontínua em** $x = a$ se não é contínua em $x = a$.

EXEMPLO 5 Verificação de pontos de descontinuidade

Analise os gráficos e verifique qual das seguintes figuras mostra funções que são descontínuas em $x = 2$. Qualquer descontinuidade é do tipo removível?

SOLUÇÃO

A Figura 7.7 mostra uma função que não está definida em $x = 2$ e, portanto, não é contínua para este valor. A descontinuidade em $x = 2$ não é removível (é do tipo descontinuidade infinita).

O gráfico da Figura 7.8 é de uma função do segundo grau cuja representação é uma parábola, um gráfico que não tem "quebra" porque seu domínio inclui todos os números reais. É contínua para todo x.

O gráfico da Figura 7.9 é de uma função que não está definida em $x = 2$ e assim não é contínua para este valor. O gráfico parece uma reta, que é a representação de uma função do primeiro grau, dada por $y = x + 2$, com exceção que existe um "buraco" no local do ponto (2, 4). Esta é uma descontinuidade removível.

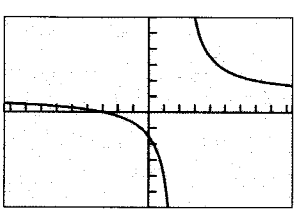

$[-9{,}4; 9{,}4]$ por $[-6, 6]$

Figura 7.7 $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

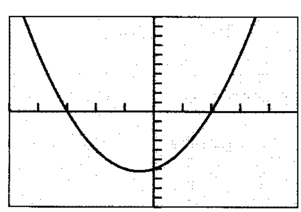

$[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

Figura 7.8 $g(x) = (x + 3)(x - 2)$

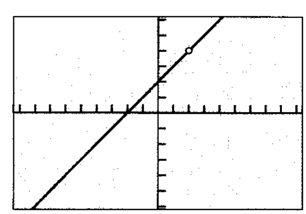

$[-9{,}4; 9{,}4]$ por $[-6{,}2; 6{,}2]$

Figura 7.9 $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Funções crescentes e decrescentes

Um outro conceito de função que é fácil de entender graficamente é a propriedade de ser crescente, decrescente ou constante sobre um intervalo. Ilustramos o conceito com poucos gráficos (veja a Figura 7.10):

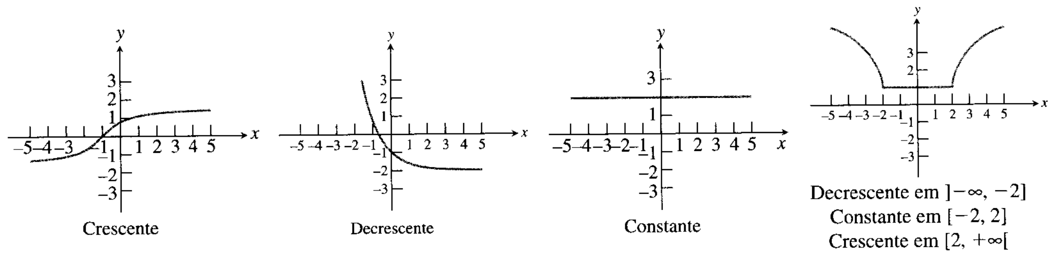


Figura 7.10 Exemplos de funções crescente, decrescente ou constante sobre um intervalo.

Vejamos alguns casos com números.

1. Das três tabelas de dados numéricos abaixo, qual poderia ser modelada por uma função que seja (a) crescente, (b) decrescente ou (c) constante?

X	$Y1$
−2	12
−1	12
0	12
1	12
3	12
7	12

X	$Y2$
−2	3
−1	1
0	0
1	−2
3	−6
7	−12

X	$Y3$
−2	−5
−1	−3
0	−1
1	1
3	4
7	10

2. $\triangle Y1$ significa a *variação* nos valores de $Y1$ quando os valores de X variam de modo crescente. Na mudança de $Y1 = a$ para $Y1 = b$, a variação é $\triangle Y1 = b - a$. O mesmo ocorre com os valores de $Y2$ e $Y3$.

X move para	$\triangle X$	$\triangle Y1$
−2 para −1	1	0
−1 para 0	1	0
0 para 1	1	0
1 para 3	2	0
3 para 7	4	0

X move para	$\triangle X$	$\triangle Y2$
−2 para −1	1	−2
−1 para 0	1	−1
0 para 1	1	−2
1 para 3	2	−4
3 para 7	4	−6

X move para	$\triangle X$	$\triangle Y3$
−2 para −1	1	2
−1 para 0	1	2
0 para 1	1	2
1 para 3	2	3
3 para 7	4	6

3. Quando a função é constante, o quociente $\triangle Y/\triangle X$ é 0.
Quando a função é decrescente, o quociente $\triangle Y/\triangle X$ é negativo.
Quando a função é crescente, o quociente $\triangle Y/\triangle X$ é positivo.

Essa análise feita dos quocientes $\triangle Y/\triangle X$ pode nos ajudar a compreender a seguinte definição:

DEFINIÇÃO Funções crescente, decrescente e constante sobre um intervalo

Uma função f é **crescente** sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação positiva em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$). Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio f, dizemos que a função é estritamente crescente.

Uma função f é **decrescente** sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação negativa em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$). Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio f, dizemos que a função é estritamente decrescente.

Uma função f é **constante** sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação nula em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$)

EXEMPLO 6 Análise do comportamento de uma função crescente/decrescente

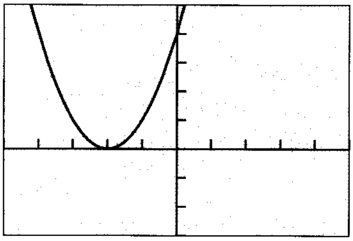
Para cada função, verifique os intervalos nos quais ela é crescente, como também decrescente.

(a) $f(x) = (x + 2)^2$ **(b)** $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

SOLUÇÃO

Solução gráfica

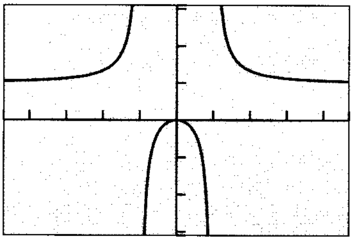
(a) Vemos no gráfico da Figura 7.11 que f é decrescente sobre o intervalo $]-\infty, -2]$ e crescente sobre o intervalo $[-2, +\infty[$ (observe que incluímos -2 nos dois intervalos; isso não acarreta contradição porque falamos de funções crescente ou decrescente sobre *intervalos* e -2 não é um intervalo).



$[-5, 5]$ por $[-3, 5]$

Figura 7.11 A função $f(x) = (x + 2)^2$

(b) Vemos no gráfico da Figura 7.12 que g é crescente sobre o intervalo $]-\infty, -1[$, crescente novamente sobre $]-1, 0]$, decrescente sobre $[0, 1[$ e decrescente novamente sobre o intervalo $]1, +\infty[$.



$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$

Figura 7.12 A função $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Vale observar que fizemos algumas suposições sobre os gráficos. Como sabemos que os gráficos não retornam ao eixo x em algum lugar que não aparece nas representações? Desenvolveremos algumas maneiras para responder a questão, porém, a teoria a esse respeito é estudada em cálculo.

Funções limitadas

O conceito de *função limitada* é simples de entender tanto gráfica como algebricamente. Veremos a definição algébrica após introduzirmos o conceito com alguns gráficos típicos (veja a Figura 7.13).

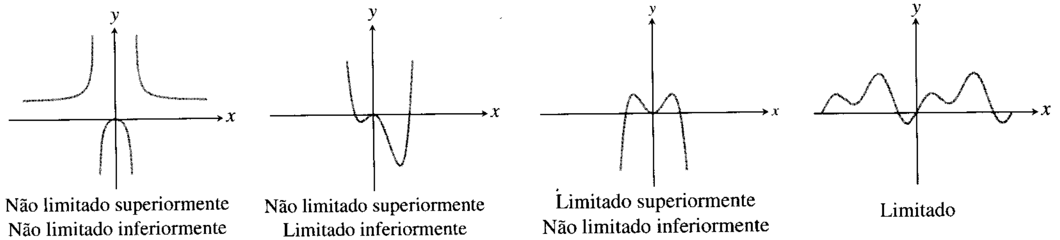


Figura 7.13 Alguns exemplos de gráficos limitados e não limitados superior e inferiormente.

DEFINIÇÃO Limite inferior e limite superior da função e função limitada

Uma função f é **limitada inferiormente** se existe algum número b que seja menor ou igual a todo número da imagem de f. Qualquer que seja o número b, este é chamado de **limite inferior** de f.
Uma função f é **limitada superiormente** se existe algum número B que seja maior ou igual a todo número da imagem de f. Qualquer que seja o número B, este é chamado de **limite superior** de f.
Uma função f é **limitada** se é limitada das duas formas, superior e inferiormente.

Podemos estender a definição anterior para a idéia de **limitação da função para x em um intervalo**, restringindo o domínio no intervalo de interesse. Por exemplo, a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é limitada superiormente sobre o intervalo $]-\infty, 0[$ e limitada inferiormente sobre o intervalo $]0, +\infty[$.

EXEMPLO 7 Verificação do limite de função

Identifique se cada função é limitada inferiormente, limitada superiormente ou limitada.

(a) $w(x) = 3x^2 - 4$ **(b)** $p(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

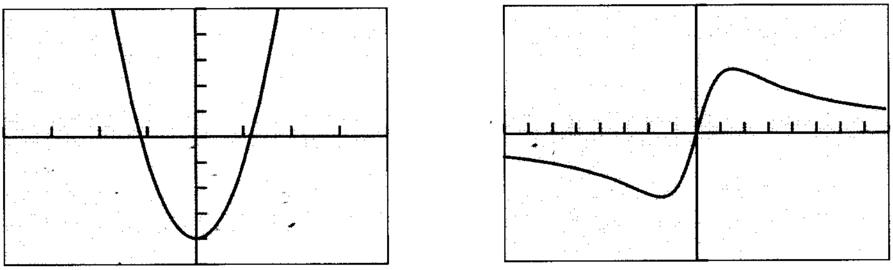
SOLUÇÃO

Solução gráfica
Os dois gráficos são demonstrados na Figura 7.14. Podemos verificar que w é uma função limitada inferiormente e que p é uma função limitada.

Verificação
Podemos confirmar que w é uma função limitada inferiormente encontrando o limite inferior como se segue:

$$
\begin{aligned}
x^2 &\geq 0 \\
3x^2 &\geq 0 \\
3x^2 - 4 &\geq 0 - 4 \\
3x^2 - 4 &\geq -4
\end{aligned}
$$

Assim, -4 é o limite inferior para $w(x) = 3x^2 - 4$.
Deixamos a verificação que p é uma função limitada como um exercício.



$[-4, 4]$ por $[-5, 5]$
(a)

$[-8, 8]$ por $[-1, 1]$
(b)

Figura 7.14 Os gráficos para o Exemplo 7. Quais são limitados e quais são esses limites?

Extremos local e absoluto

Muitos gráficos são caracterizados pelos "altos e baixos" quando mudam o comportamento de crescimento para decrescimento e vice-versa. Os valores extremos da função (ou *extremo local*) podem ser caracterizados como *máximo local* ou *mínimo local*. A distinção pode ser verificada facilmente pelo gráfico. A Figura 7.15 mostra um gráfico com três extremos locais: máximo local nos pontos P e R, além de mínimo local em Q.

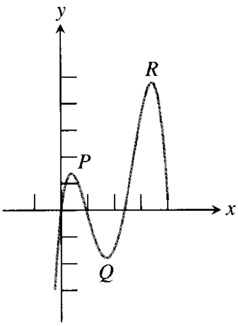


Figura 7.15

Este é um outro conceito mais fácil de ver graficamente do que descrever algebricamente. Observe que um máximo local não tem que ser o valor máximo de uma função; ele precisa ser somente um valor máximo da função para x pertencente a *algum* intervalo pequeno.

Já mencionamos que o melhor método para analisar comportamento crescente e decrescente envolve ferramentas de cálculo. O mesmo vale para extremos locais. É suficiente compreendermos esses conceitos por meio do gráfico, embora uma confirmação algébrica poderá ser necessária quando aprendermos mais sobre funções específicas.

DEFINIÇÃO Extremos local e absoluto

Um **máximo local** de uma função f é o valor $f(c)$ que é maior ou igual a todos os valores da imagem de f sobre algum intervalo aberto contendo c. Se $f(c)$ é maior ou igual a todos os valores da imagem de f, então $f(c)$ é o **valor máximo** (ou **máximo absoluto**) de f.

Um **mínimo local** de uma função f é o valor $f(c)$ que é menor ou igual a todos os valores da imagem de f sobre algum intervalo aberto contendo c. Se $f(c)$ é menor ou igual a todos os valores da imagem de f, então $f(c)$ é o **valor mínimo** (ou **mínimo absoluto**) de f.

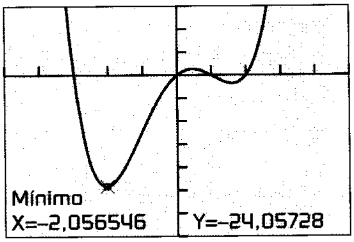
Extremos locais são chamados também de **extremos relativos**.

EXEMPLO 8 Identificação de extremos locais

Verifique se $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$ tem máximo local ou mínimo local. Caso isso ocorra, encon tre cada valor máximo ou mínimo local, além do valor de x para o qual isso ocorre.

SOLUÇÃO

O gráfico de $y = x^4 - 7x^2 + 6x$ (veja a Figura 7.16) sugere que existem dois valores mínimo locais e um valor máximo local. Usamos uma calculadora que faz gráfico para aproximarmos mínimo local como $-24{,}06$ (o qual ocorre quando temos $x \cong -2{,}06$) e $-1{,}77$ (o qual ocorr quando temos $x \cong 1{,}60$). De maneira similar, identificamos o máximo local como aproximad mente 1,32 (o qual ocorre quando $x \cong 0{,}46$).



[−5, 5] por [−35, 15]

(a)

Figura 7.16 O gráfico de $y = x^4 - 7x^2 + 6x$.

Simetria

Simetria, em matemática, pode ser caracterizada numérica e algebricamente. Observarem três tipos particulares de simetria, sendo que cada qual pode ser compreendido facilmente de u gráfico, uma tabela de valores ou uma fórmula algébrica, uma vez conhecido o que se deve obse var. Ilustraremos as simetrias das três maneiras, para compreendermos a simetria gráfica, numéri e algébrica.

Simetria com relação ao eixo vertical Y

EXEMPLO: $F(X) = X^2$

Graficamente

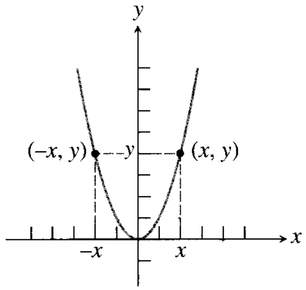


Figura 7.17 O gráfico parece o mesmo quando olhamos do lado esquerdo e direito do eixo vertical y.

Numericamente

x	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
1	1
2	4
3	9

Algebricamente

Para todos os valores x do domínio de f temos $f(-x) = f(x)$. Funções com esta propriedade (por exemplo, x^n com n um número par) são funções **pares**.

Simetria com relação ao eixo horizontal X

EXEMPLO: $X = Y^2$

Graficamente

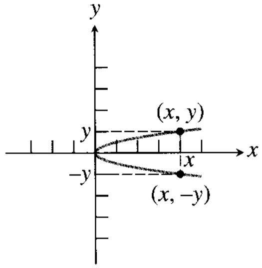


Figura 7.18 O gráfico parece o mesmo quando olhamos acima e abaixo do eixo horizontal x.

Numericamente

x	y
9	-3
4	-2
1	-1
1	1
4	2
9	3

Algebricamente

Gráficos com este tipo de simetria não são de funções, mas podemos dizer que $(x, -y)$ está sobre o gráfico quando (x, y) também está.

Simetria com relação à origem

EXEMPLO: $F(X) = X^3$

Graficamente

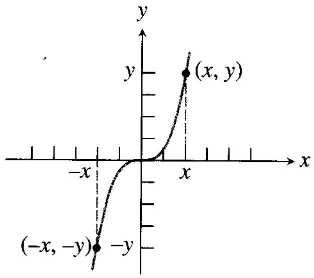


Figura 7.19 O gráfico parece o mesmo quando olhamos tanto seu lado esquerdo para baixo, como seu lado direito para cima.

Numericamente

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
1	1
2	8
3	27

Algebricamente

Para todos os valores x do domínio de f, temos $f(-x) = -f(x)$. Funções com esta propriedade (por exemplo, x^n com n um número ímpar) são funções **ímpares**.

EXEMPLO 9 Análise de funções pela simetria

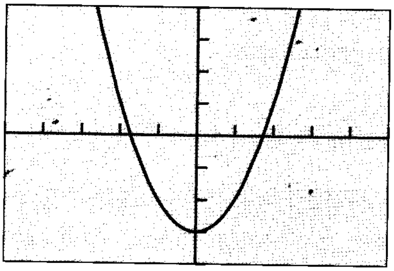
Verifique se cada uma das funções é par, ímpar ou nenhum desses casos.

(a) $f(x) = x^2 - 3$ **(b)** $g(x) = x^2 - 2x - 2$ **(c)** $h(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

SOLUÇÃO

(a) Solução gráfica

A solução gráfica é demonstrada na Figura 7.21.



[–5, 5] por [–4, 4]

Figura 7.20 Este gráfico parece ser simétrico com relação ao eixo vertical y, assim podemos supor que f é uma função par.

Confirmação algébrica

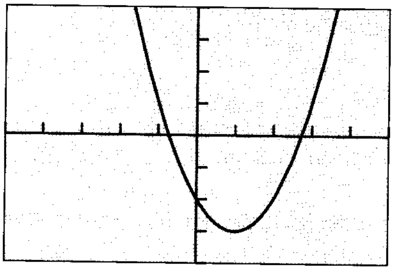
Precisamos verificar que $f(-x) = f(x)$ para todos os valores x do domínio de f.

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$$

Desde que isso seja verdade para todo x, a função f é de fato par.

(b) Solução gráfica

A solução gráfica é demonstrada na Figura 7.22.



[−5, 5] por [−4, 4]

Figura 7.21 Este gráfico não parece ser simétrico com relação ao eixo vertical y ou com a origem, assim podemos supor que g não é uma função par nem ímpar.

Confirmação algébrica

Precisamos verificar que

$$g(-x) \neq g(x) \text{ e } g(-x) \neq -g(x)$$

$$g(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 2 = x^2 + 2x - 2$$

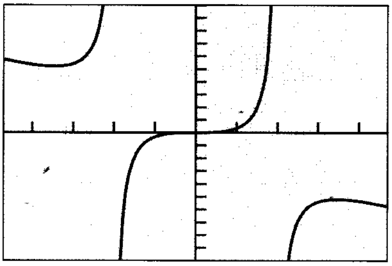
$$g(x) = x^2 - 2x - 2$$

$$-g(x) = -x^2 + 2x + 2$$

Assim, $g(-x) \neq g(x)$ e $g(-x) \neq -g(x)$.
Concluímos que g não é nem par nem ímpar.

(c) Solução gráfica

A solução gráfica é demonstrada na Figura 7.23.



[−4,7; 4,7] por [−10, 10]

Figura 7.22 Este gráfico parece ser simétrico com relação à origem, assim podemos supor que h é uma função ímpar.

Confirmação algébrica

Precisamos verificar que

$$h(-x) = -h(x)$$

para todos os valores x do domínio de h.

$$h(-x) = \frac{(-x)^3}{4 - (-x)^2} = \frac{-x^3}{4 - x^2} = -h(x)$$

Desde que isso seja verdade para todo x, exceto ± 2 (os quais não estão no domínio de h), a função h é ímpar.

Assíntotas

Considere o gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x^2}{4 - x^2}$ na Figura 7.23.

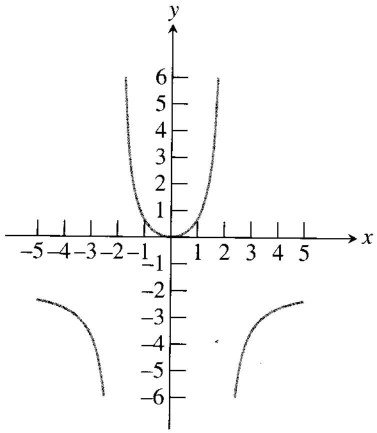


Figura 7.23 O gráfico de $f(x) = \dfrac{2x^2}{4 - x^2}$.

O gráfico parece ficar cada vez mais próximo da reta horizontal $y = -2$, quando observamos a parte abaixo. Chamamos esta reta de *assíntota horizontal*. De maneira similar, o gráfico parece ficar cada vez mais próximo tanto da reta vertical $x = -2$ como da reta $x = 2$. Chamamos estas retas de *assíntotas verticais*. Se traçarmos as assíntotas na Figura 7.23, então poderemos observar que formam uma barreira, como também o comportamento limite do gráfico. (Veja a Figura 7.24.)

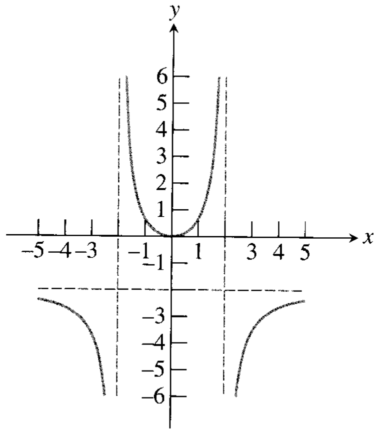


Figura 7.24 O gráfico de $f(x) = \dfrac{2x^2}{4 - x^2}$ com as assíntotas mostradas pelas retas tracejadas.

Desde que as assíntotas também descrevam o comportamento do gráfico nas suas extremidades tanto horizontal como vertical, a definição de uma assíntota pode ser estabelecida com a notação de limite. Nesta definição, note que $x \to a_-$ significa "x se aproxima de a pela esquerda", enquanto $x \to a_+$ significa "x se aproxima de a pela direita". Limite de função será abordado no Capítulo 15. Por ora, usaremos a notação para explicar sobre o comportamento da função nesse caso específico.

DEFINIÇÃO Assíntotas horizontal e vertical

A reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se $f(x)$ se aproxima do limite b quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$.
Na notação de limite:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

A reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se $f(x)$ tende a $+\infty$ ou $-\infty$ quando x se aproxima de a tanto pela esquerda como pela direita.
Na notação de limite:

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a_+} f(x) = \pm\infty$$

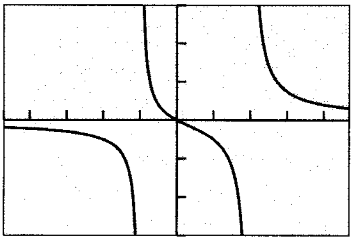
EXEMPLO 10 Identificação das assíntotas de um gráfico

Identifique as assíntotas, seja horizontal ou vertical, do gráfico de $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$.

SOLUÇÃO

O quociente $\dfrac{x}{x^2 - x - 2} = \dfrac{x}{(x + 1)(x - 2)}$ não está definido em $x = -1$ e $x = 2$, fazendo com que estes sejam os valores por onde teremos as assíntotas verticais. O gráfico da Figura 7.25 dá esse suporte, mostrando as assíntotas verticais em $x = -1$ e $x = 2$.

Para valores altos de x, o numerador (que já é um número grande) fica menor que o denominador (que é o *produto de dois* números grandes), sugerindo que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(x + 1)(x - 2)} = 0$. Isso indica uma assíntota horizontal em $y = 0$. O gráfico (veja a Figura 7.25) dá esse suporte, mostrando uma assíntota horizontal em $y = 0$ quando $x \to +\infty$. De maneira similar, podemos concluir que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{(x + 1)(x - 2)} = -0 = 0$, indicando a mesma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$.



[−4,7; 4,7] por [−3, 3]

Figura 7.25 O gráfico de $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$.

Comportamento da função nas extremidades do eixo horizontal

Uma assíntota horizontal, isto é, para valores de x que tendem a $+\infty$ ou $-\infty$, mostra como a função se comporta para valores de x nos extremos do eixo horizontal. Nem todos os gráficos se aproximam de retas nessas condições (para valores de x nos extremos do eixo horizontal), mas é útil sabermos o que ocorre além do que estamos visualizando.

EXEMPLO 11 Análise de funções por meio do comportamento nos extremos do eixo horizontal

Associe cada função a um gráfico da Figura 7.26 considerando o comportamento nos extremos do eixo horizontal. Todos os gráficos são mostrados com as mesmas dimensões.

(a) $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$ **(b)** $y = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$ **(c)** $y = \dfrac{3x^3}{x^2+1}$ **(d)** $y = \dfrac{3x^4}{x^2+1}$

SOLUÇÃO

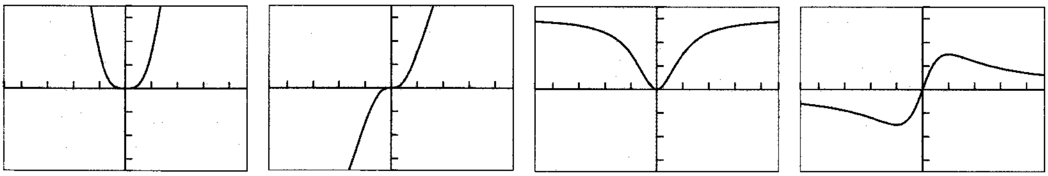
Quando x assume um valor muito grande, o denominador $x^2 + 1$ em cada uma dessas funções assume quase o mesmo valor de x^2. Se trocarmos $x^2 + 1$ em cada denominador por x^2 e simplificarmos as frações, teremos funções mais simples:

(a) $y = \dfrac{3}{x}$ (fica próximo de 0 quando x é grande) **(b)** $y = 3$

(c) $y = 3x$ **(d)** $y = 3x^2$

Para valores de x nos extremos do eixo horizontal, temos que:

- $y = \dfrac{3}{x}$ tende a 0_1, o que nos permite associar (a) com (iv)
- $y = 3$ mantém esse comportamento constante, o que nos permite associar (b) com (iii);
- $y = 3x$ tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$, e tende para $-\infty$, quando x tende a $-\infty$, o que nos permite associar (c) com (ii)
- $y = 3x^2$ tende para $+\infty$ quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$, o que nos permite associar (d) com i.



$[-4,7; 4,7]$ por $[-3,5; 3,5]$ (i) $[-4,7; 4,7]$ por $[-3,5; 3,5]$ (ii) $[-4,7; 4,7]$ por $[-3,5; 3,5]$ (iii) $[-4,7; 4,7]$ por $[-3,5; 3,5]$ (iv)

Figura 7.26 Gráficos do Exemplo 11.

Para funções mais complicadas, nos contentamos em saber se o comportamento nos extremos do eixo horizontal é limitado ou não limitado em qualquer direção.

REVISÃO RÁPIDA

Nos exercícios 1 a 4, resolva a equação ou inequação.

1. $x^2 - 16 = 0$

2. $9 - x^2 = 0$

3. $x - 10 < 0$

4. $5 - x \leq 0$

Nos exercícios 5 a 10, encontre algebricamente todos os valores de x para os quais a expressão algébrica *não* está definida.

5. $\dfrac{x}{x - 16}$

6. $\dfrac{x}{x^2 - 16}$

7. $\sqrt{x - 16}$

8. $\dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - 1}$

9. $\dfrac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{3 - x}}$

10. $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 4, determine se a fórmula define y como uma função de x. Caso a resposta seja não, justifique.

1. $y = \sqrt{x - 4}$

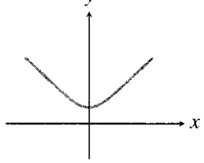
2. $y = x^2 \pm 3$

3. $x = 2y^2$

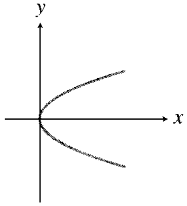
4. $x = 12 - y$

Nos exercícios 5 a 8, use o teste da reta vertical para determinar se a curva é o gráfico de uma função.

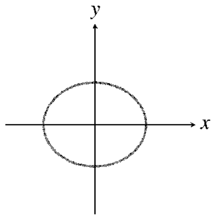
5.



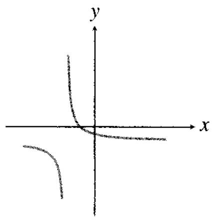
6.



7.



8.



Nos exercícios 9 a 16, encontre o domínio da função algebricamente e verifique sua conclusão graficamente.

9. $f(x) = x^2 + 4$

10. $h(x) = \dfrac{5}{x - 3}$

11. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{(x + 3)(x - 1)}$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x - 3}$

13. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x}$

14. $h(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 3}$

15. $h(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x}}{(x + 1)(x^2 + 1)}$

16. $f(x) = \sqrt{x^4 - 16x^2}$

Nos exercícios 17 a 20, encontre a imagem da função.

17. $f(x) = 10 - x^2$

18. $g(x) = 5 + \sqrt{4 - x}$

19. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

20. $g(x) = \dfrac{3 + x^2}{4 - x^2}$

Nos exercícios 21 a 24, faça o gráfico de cada função e conclua se ela tem ou não um ponto de descontinuidade em $x = 0$. Se existe uma descontinuidade, verifique se é removível ou não removível.

21. $g(x) = \dfrac{3}{x}$

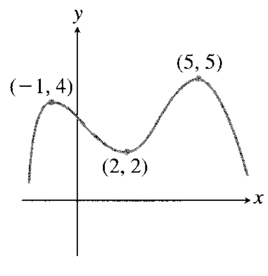
22. $h(x) = \dfrac{x^3 + x}{x}$

23. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

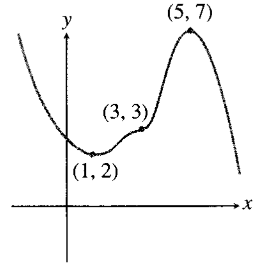
24. $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

Nos exercícios 25 a 28, conclua se cada ponto identificado no gráfico é um mínimo local, um máximo local ou nenhum dos dois casos. Identifique os intervalos nos quais temos a função crescente ou decrescente.

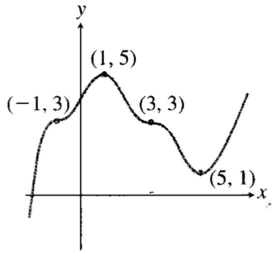
25.



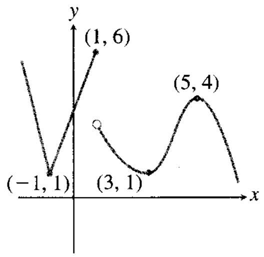
26.



27.



28.



Nos exercícios 29 a 34, faça o gráfico de cada função e identifique os intervalos nos quais temos a função crescente, decrescente ou constante.

29. $f(x) = |x + 2| - 1$

30. $f(x) = |x + 1| + |x - 1| - 3$

31. $g(x) = |x + 2| + |x - 1| - 2$

32. $h(x) = 0{,}5(x + 2)^2 - 1$

33. $g(x) = 3 - (x - 1)^2$

34. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Nos exercícios 35 a 40, determine se a função é limitada superiormente, limitada inferiormente ou limitada sobre o seu domínio.

35. $y = 32$ **36.** $y = 2 - x^2$

37. $y = 2^x$ **38.** $y = 2^{-x}$

39. $y = \sqrt{1 - x^2}$ **40.** $y = x - x^3$

Nos exercícios 41 a 46, a sugestão é analisar o gráfico que pode ser feito utilizando uma calculadora com esse recurso. Se possível, encontrar todos os máximos locais, os mínimos locais e os valores de x para os quais isso ocorre. Você pode concluir os valores aproximando com duas casas decimais após a vírgula.

41. $f(x) = 4 - x + x^2$ **42.** $g(x) = x^3 - 4x + 1$

43. $h(x) = -x^3 + 2x - 3$ **44.** $f(x) = (x + 3)(x - 1)^2$

45. $h(x) = x^2\sqrt{x + 4}$ **46.** $g(x) = x|2x + 5|$

Nos exercícios 47 a 54, verifique se a função é ímpar, par ou nenhum dos dois casos. Verifique sua conclusão graficamente e confirme-a algebricamente.

47. $f(x) = 2x^4$ **48.** $g(x) = x^3$

49. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ **50.** $g(x) = \dfrac{3}{1 + x^2}$

51. $f(x) = -x^2 + 0{,}03x + 5$ **52.** $f(x) = x^3 + 0{,}04x^2 + 3$

53. $g(x) = 2x^3 - 3x$ **54.** $h(x) = \dfrac{1}{x}$

Nos exercícios 55 a 62, use o método de sua escolha para encontrar todas as assíntotas horizontal e vertical da função.

55. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ **56.** $q(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

57. $g(x) = \dfrac{x + 2}{3 - x}$ **58.** $q(x) = 1{,}5^x$

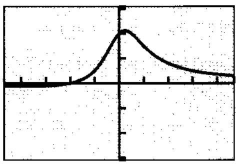
59. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$ **60.** $p(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

61. $g(x) = \dfrac{4x - 4}{x^3 - 8}$ **62.** $h(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4}$

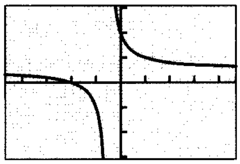
Nos exercícios 63 a 66, associe cada função ao gráfico correspondente, considerando o comportamento nos extremos do eixo horizontal e as assíntotas. Todos os gráficos são mostrados com as mesmas dimensões.

63. $y = \dfrac{x + 2}{2x + 1}$ **64.** $y = \dfrac{x^2 + 2}{2x + 1}$

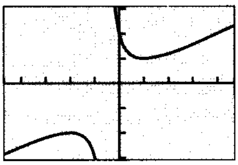
65. $y = \dfrac{x + 2}{2x^2 + 1}$ **66.** $y = \dfrac{x^3 + 2}{2x^2 + 1}$


$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$

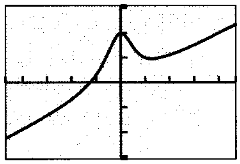
(a)


$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$

(b)


$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$

(c)


$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$

(d)

67. Um gráfico pode cruzar sua própria assíntota? A origem grega da palavra "assíntota" significa "sem encontro", o que mostra que os gráficos tendem a se aproximar, mas não encontrar suas assíntotas. Quais das seguintes funções têm gráficos que podem interseccionar suas assíntotas horizontais?

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(c) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$

68. Um gráfico pode ter duas assíntotas horizontais? Embora muitos gráficos tenham no máximo uma assíntota horizontal, é possível para um gráfico ter mais do que uma. Quais das seguintes funções têm gráficos com mais de uma assíntota horizontal?

(a) $f(x) = \dfrac{|x^3 + 1|}{8 - x^3}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{|x - 1|}{x^2 - 4}$

(c) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

69. Um gráfico pode interseccionar sua própria assíntota vertical?

Seja a função $f(x) = \dfrac{x - |x|}{x^2} + 1$. Se possível, construa o gráfico dessa função.

(a) O gráfico desta função não intersecciona sua assíntota vertical. Explique por que isso não ocorre.

(b) Mostre como você pode adicionar um único ponto no gráfico de f e obter um gráfico que interseccione sua assíntota vertical.

(c) O gráfico em (b) é de uma função?

70. Explique por que um gráfico não pode ter mais do que duas assíntotas horizontais.

71. Verdadeiro ou falso O gráfico de uma função f é definido como o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ onde x está no domínio de f. Justifique sua resposta.

72. Verdadeiro ou falso Uma relação que é simétrica com relação ao eixo x não pode ser uma função. Justifique sua resposta.

73. Múltipla escolha Qual função é contínua?

(a) Número de crianças inscritas em uma escola particular como uma função do tempo.

(b) Temperatura externa como uma função do tempo.

(c) Custo para postar uma carta como uma função do seu peso.

(d) Preço de uma ação em função do tempo.

(e) Número de bebidas não-alcoólicas vendidas como uma função da temperatura externa.

74. Múltipla escolha Qual das funções *não* é contínua?

(a) Sua altitude como uma função do tempo enquanto viaja voando de um lugar para outro.

(b) Tempo de viagem de um lugar para outro como uma função da velocidade da viagem.

(c) Número de bolas que podem ser colocadas até preenchimento total de uma caixa como uma função do raio das bolas.

(d) Área de um círculo como uma função do raio.

(e) Peso de um bebê como uma função do tempo após seu nascimento.

75. Função decrescente Qual das funções é decrescente?

(a) Temperatura externa como uma função do tempo.

(b) A média do índice Dow Jones como uma função do tempo.

(c) A pressão do ar na atmosfera terrestre como uma função da altitude.

(d) População mundial desde 1900 como uma função do tempo.

(e) Pressão da água no oceano como uma função da profundidade.

76. Crescente ou decrescente Qual das funções não pode ser classificada como crescente ou decrescente?

(a) O peso de um bloco de chumbo como uma função do volume.

(b) A altura de uma bola que foi lançada para cima como uma função do tempo.

(c) O tempo de viagem de um lugar para outro como uma função da velocidade da viagem.

(d) A área de um quadrado como uma função do comprimento do lado.

(e) O peso de um pêndulo balançando em função do tempo.

77. Você pode mostrar algebricamente agora que $p(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ é limitada.

(a) Faça o gráfico da função e encontre o menor valor inteiro de k que parece ser um limite superior.

(b) Verifique que $\dfrac{x}{1 + x^2} < k$ provando a inequação equivalente $kx^2 - x + k > 0$.

(Você pode resolver a equação para mostrar que não existe solução real.)

(c) Do gráfico, encontre o menor valor inteiro de k que parece ser um limite inferior.

(d) Verifique $\dfrac{x}{1 + x^2} > k$ provando a inequação equivalente $kx^2 - x + k < 0$.

78. Considere a tabela com valores X e Y:

X	Y
60	0,00
65	1,00
70	2,05
75	2,57
80	3,00
85	3,36
90	3,69
95	4,00
100	4,28

Considerando Y como uma função de X, ela é crescente, decrescente, constante ou nenhuma das situações?

79. Esboce um gráfico de uma função f com domínio como o conjunto de todos os números reais que satisfazem todas as condições que estão a seguir:

(a) f é contínua para todo x;

(b) f é crescente nos intervalos $]-\infty, 0]$ e $[3, 5]$;

(c) f é decrescente nos intervalos $[0, 3]$ e $[5, +\infty[$;

(d) $f(0) = f(5) = 2$;

(e) $f(3) = 0$.

80. Esboce um gráfico de uma função f com domínio como o conjunto de todos os números reais que satisfazem todas as condições que estão a seguir:

(a) f é decrescente nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$;

(b) f tem um ponto não removível de descontinuidade em $x = 0$;

(c) f tem uma assíntota horizontal em $y = 1$;

(d) $f(0) = 0$;

(e) f tem uma assíntota vertical em $x = 0$.

81. Esboce um gráfico de uma função f com domínio como o conjunto de todos os números reais que satisfazem todas as condições que estão a seguir:

(a) f é contínua para todo x;

(b) f é uma função par;

(c) f é crescente no intervalo $[0, 2]$ e decrescente no intervalo $[2, +\infty[$;

(d) $f(2) = 3$.

82. Uma função que é limitada superiormente tem um número infinito de limites superiores, mas existe sempre um *menor limite superior*, isto é, um limite superior que é o menor de todos os outros. Este menor dos limites superiores poderia ou não estar na imagem de f. Para cada função a seguir, encontre o menor dos limites superiores e conclua se está ou não na imagem da função.

(a) $f(x) = 2 - 0{,}8x^2$

(b) $g(x) = \dfrac{3x^2}{3 + x^2}$

(c) $h(x) = \dfrac{1 - x}{x^2}$

(d) $q(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2x + 1}$

83. Uma função contínua f tem como domínio o conjunto de todos os números reais. Se $f(-1) = 5$ e $f(1) = -5$, explique por que f precisa ter pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 1]$ (isto generaliza uma propriedade de função contínua conhecida, no cálculo, como Teorema do Valor Intermediário).

84. Mostre que o gráfico de toda função ímpar, com domínio como sendo todos os números reais, necessariamente passa pela origem.

85. Se possível, analise o gráfico da função $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ no intervalo $[-6, 6]$ por $[-2, 2]$.

(a) Qual é a aparente assíntota horizontal do gráfico?

(b) Baseado no gráfico, conclua qual é a aparente imagem de f.

(c) Mostre algebricamente que $-1 \leq \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} < 1{,}5$ para todo x, confirmando assim sua suposição no item (b).

Capítulo 8

Funções do primeiro e segundo graus

Objetivos de aprendizagem

- Função polinomial.
- Funções do primeiro grau e seus gráficos.
- Funções do segundo grau e seus gráficos.

Muitos problemas econômicos e da área de negócios são modelados por funções do primeiro grau. Funções do segundo grau e funções polinomiais de graus mais altos são utilizadas também para modelar algumas aplicações, por exemplo, na área industrial.

Função polinomial

Funções polinomiais estão entre as mais familiares de todas as funções.

DEFINIÇÃO Função polinomial

Seja n um número inteiro não negativo e sejam $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$ números reais com $a_n \neq 0$. A função dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

é uma **função polinomial de grau n**. O **coeficiente principal** é a_n.

A função zero dada por $f(x) = 0$ é uma função polinomial. Ela não tem grau nem coeficiente principal.

Funções polinomiais são definidas e contínuas sobre todos os números reais. É importante reconhecer se a função é polinomial.

EXEMPLO 1 Verificação se as funções são polinomiais

Quais dos seguintes exemplos são funções polinomiais? Para aqueles que são funções polinomiais, defina o grau e o coeficiente principal. Para os que não são, justifique.

(a) $f(x) = 4x^3 - 5x - \dfrac{1}{2}$ **(b)** $g(x) = 6x^{-4} + 7$

(c) $h(x) = \sqrt{9x^4 + 16x^2}$ **(d)** $k(x) = 15x - 2x^4$

SOLUÇÃO

(a) f é uma função polinomial de grau 3 e com coeficiente principal 4.
(b) g não é uma função polinomial por causa do expoente -4.
(c) h não é uma função polinomial porque ela não pode ser simplificada na forma polinomial. Observe que $\sqrt{9x^4 + 16x^2} \neq 3x^2 + 4x$.
(d) k é uma função polinomial de grau 4 e com coeficiente principal -2.

A função zero e todas as funções constantes são polinomiais. Algumas outras funções familiares são também polinomiais, como mostradas a seguir.

Funções polinomiais de grau indefinido ou de grau baixo

Nome	**Forma**	**Grau**
Função zero	$f(x) = 0$	Indefinido
Função constante	$f(x) = a \ (a \neq 0)$	0
Função do primeiro grau	$f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$	1
Função do segundo grau	fsxd 5 ax2 1 bx 1 c sa fi 0d	2

Funções do primeiro grau e seus gráficos

Uma **função do primeiro grau** é uma função polinomial de grau 1, e, assim, tem a forma

$$f(x) = ax + b, \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são constantes e } a \neq 0$$

Se em vez de a utilizarmos m como o coeficiente principal e considerarmos a notação $y = f(x)$, então essa equação passa a ser familiar, pois representa uma reta inclinada dada por:

$$y = mx + b$$

O coeficiente angular m de uma reta não vertical que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado por $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

A equação da reta que passa pelo ponto $(x_1\ y_1)$ e tem coeficiente angular m é $y - y_1 = m(x - x_1)$. Essa é a *equação geral da reta.*

Retas verticais não são gráficos de funções porque elas falham no teste da linha vertical. Uma reta no plano cartesiano é o gráfico de uma função do primeiro grau se, e somente se, ela é uma **reta inclinada** ou uma reta horizontal.

EXEMPLO 2 Verificação da lei de uma função do primeiro grau

Encontre a lei para a função do primeiro grau f tal que $f(-1) = 2$ e $f(3) = -2$.

SOLUÇÃO

Solução algébrica

Queremos encontrar uma reta que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(3, -2)$. O coeficiente angular é

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{3 - (-1)} = \frac{-4}{4} = -1$$

Usando este valor m e as coordenadas de $(-1, 2)$, a equação é dada por:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= -1(x - (-1)) \\ y - 2 &= -x - 1 \\ y &= -x + 1 \end{aligned}$$

Convertendo para a notação de função, temos a lei procurada:

$$f(x) = -x + 1$$

Suporte gráfico

Podemos fazer o gráfico de $y = -x + 1$ e observar que este inclui os pontos $(-1, 2)$ e $(3, -2)$. (Veja Figura 8.1.)

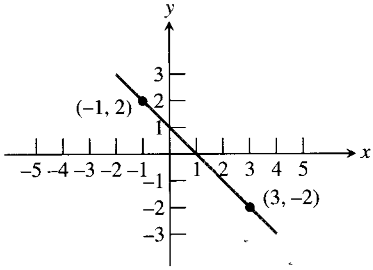


Figura 8.1 O gráfico de $y = -x + 1$ passa por $(-1, 2)$ e $(3, -2)$.

Confirmação numérica

Usando $f(x) = -x + 1$, provamos que $f(-1) = 2$ e $f(3) = -2$:

$$f(-1) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2 \text{ e } f(3) = -3 + 1 = -2$$

A **taxa média de variação** de uma função $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$, com $a \neq b$ é

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Trataremos desse assunto no Capítulo 15.

A função do primeiro grau definido para todos os números reais tem uma taxa média de variação constante, diferente de zero, entre quaisquer dois pontos sobre seu gráfico.

Quando a função está definida para valores de x que sejam maiores ou iguais a zero, então podemos dizer que o valor inicial da função é dado por $f(0)$. Neste caso, se $f(0) = b$, então o início do gráfico está no ponto $(0, b)$, localizado no eixo vertical y.

Pelo fato de a taxa média de variação de uma função do primeiro grau ser constante, ela é chamada simplesmente de **taxa de variação** da função do primeiro grau. O coeficiente angular m na fórmula $f(x) = mx + b$ é a taxa de variação da função do primeiro grau.

Resumo do que aprendemos sobre funções do primeiro grau

Características de uma função do primeiro grau

	Caracterização
Definição	polinomial de grau 1
Algébrico	$f(x) = mx + b \ (m \neq 0)$
Gráfico	reta inclinada com coeficiente angular m e intersecção no eixo y dado por b
Analítico	função com taxa de variação m constante diferente de zero: f é crescente se $m > 0$, e decrescente se $m < 0$

Funções do segundo grau e seus gráficos

Uma **função do segundo grau** (também conhecida como função quadrática) é uma função polinomial de grau 2 da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais e $a \neq 0$.

Veremos que o gráfico de toda função do segundo grau é uma parábola de concavidade para cima ou para baixo. Isto porque o gráfico de qualquer função do segundo grau pode ser obtido do gráfico da função $f(x) = x^2$ por uma seqüência de translações, reflexões, "esticamentos" e "encolhimentos".

EXEMPLO 3 Transformação da função $f(x) = x^2$

Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = x^2$ em um gráfico da função dada. Esboce o gráfico manualmente.

(a) $g(x) = -(1/2)x^2 + 3$ **(b)** $h(x) = 3(x + 2)^2 - 1$

SOLUÇÃO

(a) O gráfico de $g(x) = -(1/2)x^2 + 3$ é obtido "encolhendo" verticalmente o gráfico de $f(x) = x^2$ por meio da multiplicação pelo fator 1/2, refletindo o gráfico resultante com relação ao eixo horizontal x e transladando o gráfico refletido três unidades de medida para cima. Veja a Figura 8.2(a).

(b) O gráfico de $h(x) = 3(x + 2)^2 - 1$ é obtido "esticando" verticalmente o gráfico de $f(x) = x^2$ por meio da multiplicação pelo fator 3 e transladando o gráfico resultante duas unidades para a esquerda e uma unidade para baixo. Veja a Figura 8.2(b).

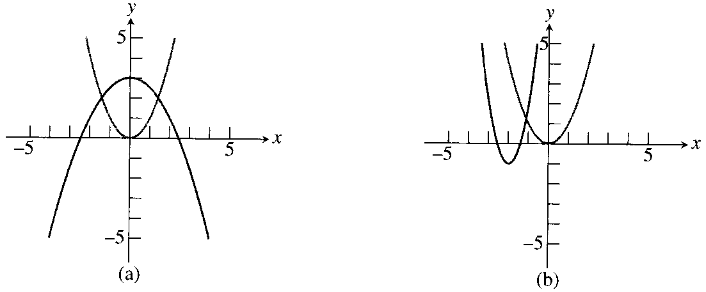


Figura 8.2 O gráfico de $f(x) = x^2$ mostrado com (a) $g(x) = -(1/2)x^2 + 3$ e (b) $h(x) = 3(x + 2)^2 - 1$.

O gráfico de $f(x) = ax^2$, com $a > 0$, é uma parábola com concavidade para cima. Quando $a < 0$, o gráfico é uma parábola com concavidade para baixo. Independentemente do sinal de a, o eixo vertical y é a reta de simetria para o gráfico de $f(x) = ax^2$. A reta de simetria para uma parábola é seu **eixo de simetria**. O ponto sobre a parábola que cruza seu eixo de simetria é o **vértice** da parábola. Pelo fato de uma função do segundo grau ser sempre uma parábola com concavidade para cima ou para baixo, seu vértice é sempre o ponto mais baixo ou o ponto mais alto da parábola. O vértice de $f(x) = ax^2$ é sempre a origem, como pode ser visto na Figura 8.3.

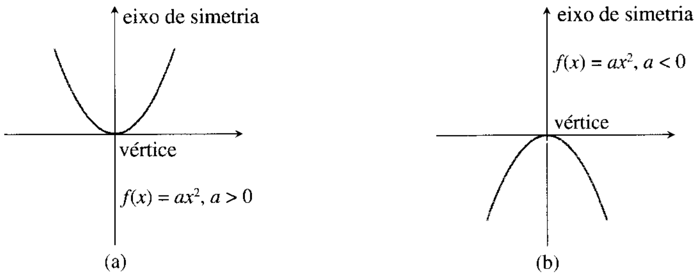


Figura 8.3 O gráfico de $f(x) = ax^2$ para (a) $a > 0$ e (b) $a < 0$.

Expandindo $f(x) = a(x - h)^2 + k$ e comparando os coeficientes resultantes com a **forma quadrática padrão** $ax^2 + bx + c$, onde os expoentes de x são organizados em ordem decrescente, podemos obter fórmula para h e k.

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - h)^2 + k \\ &= a(x^2 - 2hx + h^2) + k \\ &= ax^2 + (-2ah)x + (ah^2 + k) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Como $b = -2ah$ e $c = ah^2 + k$ na última linha desenvolvida anteriormente, temos que $h = -b/2a$ e $k = c - ah^2$. Usando essas fórmulas, então qualquer função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita na forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Essa é a *forma canônica* para uma função do segundo grau, o que torna fácil a identificação do vértice e o eixo de simetria do gráfico da função.

Forma canônica de uma função do segundo grau

Qualquer função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, pode ser escrita na **forma canônica**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

O gráfico de f é uma parábola com vértice (h, k) e eixo de simetria $x = h$, onde $h = -b/2a$ e $k = c - ah^2$. Se $a > 0$, então a parábola tem concavidade para cima; se $a < 0$, então a parábola tem concavidade para baixo (veja a Figura 8.4).

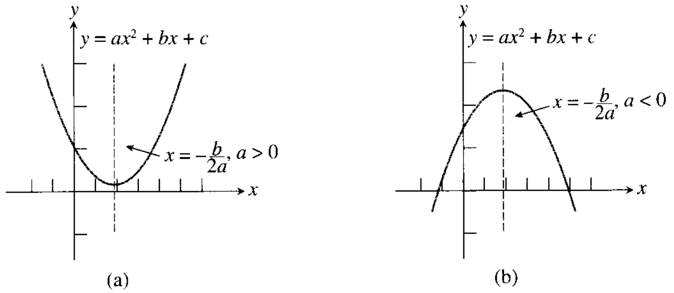


Figura 8.4 O vértice está em $x = -b/2a$, cujo valor descreve o eixo de simetria.

O valor de k também é conhecido como $\dfrac{-(b^2 + 4ac)}{2a}$

EXEMPLO 4 Verificação do vértice e do eixo de simetria de uma função do segundo grau

Use a forma canônica de uma função do segundo grau para encontrar o vértice e o eixo de simetria do gráfico de $f(x) = 6x - 3x^2 - 5$. Reescreva a equação na forma canônica.

SOLUÇÃO

A forma polinomial padrão de f é $f(x) = -3x^2 + 6x - 5$.

Assim, $a = -3$, $b = 6$ e $c = -5$, e as coordenadas do vértice são

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-3)} = 1 \text{ e}$$

$$k = f(h) = f(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 5 = -2$$

$k = f(h)$, pois é a segunda coordenada de um ponto cuja primeira coordenada é h.
A equação do eixo de simetria é $x = 1$, o vértice é $(1, -2)$ e a forma canônica de f é

$$f(x) = -3(x - 1)^2 + (-2)$$

EXEMPLO 5 Uso de álgebra para descrever o gráfico de uma função do segundo grau

Utilize o recurso de completar o quadrado de uma expressão algébrica para descrever o gráfico de $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$. Confira sua resposta graficamente.

SOLUÇÃO

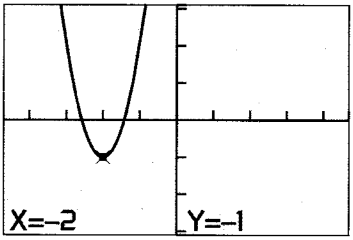
Solução algébrica

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 + 12x + 11 \\
&= 3(x^2 + 4x) + 11 \\
&= 3(x^2 + 4x + (\ ) - (\ )) + 11 \\
&= 3(x^2 + 4x + (2^2) - (2^2)) + 11 \\
&= 3(x^2 + 4x + 4) - 3(4) + 11 \\
&= 3(x + 2)^2 - 1
\end{aligned}$$

O gráfico de f é uma parábola de concavidade para cima com vértice $(-2, -1)$, eixo de simetria $x = -2$ e que cruza o eixo x nos valores dados aproximadamente por $-2{,}577$ e $-1{,}423$. Os valores exatos das raízes são $x = -2 \pm \sqrt{3}/3$.

Solução gráfica

O gráfico na Figura 8.5 mostra esses resultados.



[–4,7; 4,7] por [–3,1; 3,1]

Figura 8.5 Os gráficos de $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$ e $f(x) = 3(x + 2)^2 - 1$ são os mesmos.

Resumo do que aprendemos sobre funções do segundo grau

Características de uma função do segundo grau

	Caracterização
Definição	polinomial de grau 2
Algébrico	$f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $a(x - h)^2 + k$ $(a \neq 0)$
Gráfico	parábola com vértice (h, k) e eixo de simetria $x = h$; a concavidade é para cima se $a > 0$, e para baixo se $a < 0$; o valor onde corta o eixo vertical y é a intersecção $y = f(0) = c$, e as raízes são os valores que passam pelo eixo horizontal x, que são $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 e 2, escreva na forma da equação geral da reta, sendo que para cada caso a reta tem coeficiente angular m e cruza o eixo vertical y em b.

1. $m = 8, \quad b = 3{,}6$ **2.** $m = -1{,}8, \quad b = -2$

Nos exercícios 3 e 4, escreva uma equação para a reta que contém os pontos dados. Represente, graficamente, a reta com os pontos.

3. $(-2, 4)$ e $(3, 1)$ **4.** $(1, 5)$ e $(-2, -3)$

Nos exercícios 5 a 8, faça a expansão de cada expressão.

5. $(x + 3)^2$ **6.** $(x - 4)^2$

7. $3(x - 6)^2$ **8.** $-3(x + 7)^2$

Nos exercícios 9 e 10, fatore o trinômio.

9. $2x^2 - 4x + 2$ **10.** $3x^2 + 12x + 12$

Podemos nos referir ao quadrante I do plano cartesiano quando $x > 0$ e $y > 0$; ao quadrante II, quando $x < 0$ e $y > 0$; ao quadrante III, quando $x < 0$ e $y < 0$; e ao quadrante IV, quando $x > 0$ e $y < 0$.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 6, determine quais são funções polinomiais. Para aquelas que são, identifique o grau e o coeficiente principal. Para as que não são, justifique.

1. $f(x) = 3x^{-5} + 17$ **2.** $f(x) = -9 + 2x$

3. $f(x) = 2x^5 - \frac{1}{2}x + 9$ **4.** $f(x) = 13$

5. $h(x) = \sqrt[3]{27x^3 + 8x^6}$ **6.** $k(x) = 4x - 5x^2$

Nos exercícios 7 a 12, escreva uma equação para a função do primeiro grau f satisfazendo as condições dadas. Represente as funções graficamente.

7. $f(-5) = -1$ e $f(2) = 4$

8. $f(-3) = 5$ e $f(6) = -2$

9. $f(-4) = 6$ e $f(-1) = 2$

10. $f(1) = 2$ e $f(5) = 7$

11. $f(0) = 3$ e $f(3) = 0$

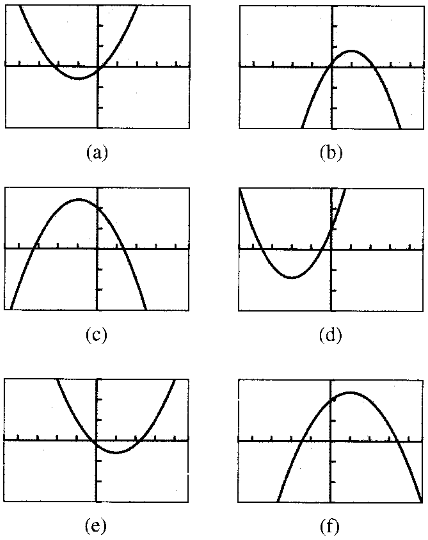
12. $f(-4) = 0$ e $f(0) = 2$

Nos exercícios 13 a 18, associe um gráfico a uma função. Explique sobre a sua escolha.

13. $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$ **14.** $f(x) = 3(x + 2)^2 - 7$

15. $f(x) = 4 - 3(x - 1)^2$ **16.** $f(x) = 12 - 2(x - 1)^2$

17. $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$ **18.** $f(x) = 12 - 2(x + 1)^2$



Nos exercícios 19 a 22, descreva como transformar o gráfico de $f(x) = x^2$ no gráfico das funções dadas. Faça o esboço de cada gráfico.

19. $g(x) = (x - 3)^2 - 2$ **20.** $h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

21. $g(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$ **22.** $h(x) = -3x^2 + 2$

Nos exercícios 23 a 26, encontre o vértice e o eixo de simetria do gráfico de cada função.

23. $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$

24. $g(x) = -3(x + 2)^2 - 1$

25. $f(x) = 5(x - 1)^2 - 7$

26. $g(x) = 2(x - \sqrt{3})^2 + 4$

Nos exercícios 27 a 32, encontre o vértice e o eixo de simetria do gráfico de cada função. Reescreva a função na forma canônica.

27. $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$

28. $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$

29. $f(x) = 8x - x^2 + 3$

30. $f(x) = 6 - 2x + 4x^2$

31. $g(x) = 5x^2 + 4 - 6x$

32. $h(x) = -2x^2 - 7x - 4$

Nos exercícios 33 a 38, use o recurso de completar o quadrado de uma expressão algébrica para descrever o gráfico de cada função. Prove suas respostas graficamente.

33. $f(x) = x^2 - 4x + 6$

34. $g(x) = x^2 - 6x + 12$

35. $f(x) = 10 - 16x - x^2$

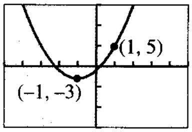
36. $h(x) = 8 + 2x - x^2$

37. $f(x) = 2x^2 + 6x + 7$

38. $g(x) = 5x^2 - 25x + 12$

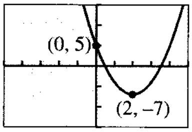
Nos exercícios 39 a 42, escreva uma equação para cada parábola, usando o fato de um dos pontos do gráfico ser o vértice.

39.



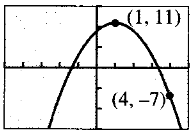
[–5, 5] por [–15, 15]

40.



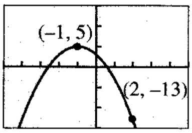
[–5, 5] por [–15, 15]

41.



[–5, 5] por [–15, 15]

42.



[–5, 5] por [–15, 15]

Nos exercícios 43 e 44, escreva uma equação para a função do segundo grau cujo gráfico contém o vértice e o ponto dados.

43. Vértice (1, 3) e ponto (0, 5).

44. Vértice (−2, −5) e ponto (−4, −27).

45. Uma pequena empresa fabrica bonecas e semanalmente possui um custo fixo de R$ 350,00. Se o custo para o material é de R$ 4,70 por boneca e seu custo total na semana é uma média de R$ 500,00, quantas bonecas essa pequena empresa produz por semana?

46. Entre todos os retângulos cujos perímetros são iguais a 100 metros, encontre as dimensões do que tem a área máxima.

47. O preço p por unidade de um produto quando x unidades (em milhares) são produzidas é modelado pela função

$$preço = p = 12 - 0{,}025x$$

A receita (em milhões de reais) é o produto do preço por unidade pela quantidade (em milhares) vendida. Isto é,

$$\text{receita} = xp = x\,(12 - 0{,}025x)$$

(a) Represente graficamente a receita para uma produção de 0 a 100.000 unidades.

(b) Quantas unidades deveriam ser produzidas se a receita total é de R$ 1.000.000,00?

48. Uma imobiliária possui 1.600 unidades de imóveis para alugar, das quais 800 estão alugadas por R$ 300,00 por mês. Uma pesquisa de mercado indica que, para cada diminuição de R$ 5,00 no valor do aluguel mensal, isso resulta em 20 novos contratos.

(a) Encontre a função receita que modela o total arrecadado, onde x é o número de descontos de R$ 5,00 no aluguel mensal.

(b) Represente graficamente a receita para valores de aluguel entre R$ 175,00 e R$ 300,00 (isto é, para $0 \leq x \leq 25$), que mostra um máximo para a receita.

(c) Qual valor de aluguel permite que a imobiliária tenha receita mensal máxima?

Nos exercícios 49 e 50, complete a análise para cada função dada.

49. Analisando uma função Complete:

A função $f(x) = x$ chamada função identidade.

Domínio:

Imagem:

Continuidade:

Comportamento crescente/decrescente:

Simetria:

Limite:

Extremo local:

Assíntotas horizontais:

Assíntotas verticais:

Comportamento nos extremos do domínio:

50. Analisando uma função Complete:

A função do segundo grau $f(x) = x^2$.

Domínio:

Imagem:

Continuidade:

Comportamento crescente/decrescente:

Simetria:

Limite:

Extremo local:

Assíntotas horizontais:

Assíntotas verticais:

Comportamento nos extremos do domínio:

51. Verdadeiro ou falso O valor inicial de $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ é 0. Justifique sua resposta.

52. Verdadeiro ou falso O gráfico da função $f(x) = x^2 - x + 1$ não tem raiz, isto é, não passa pelo eixo horizontal x. Justifique sua resposta.

Nos exercícios 53 e 54, considere $f(x) = mx + b$, $f(-2) = 3$ e $f(4) = 1$.

53. Múltipla escolha Qual é o valor de m?

(a) 3 **(b)** −3 **(c)** −1 **(d)** 1/3 **(e)** −1/3

54. Múltipla escolha Qual é o valor de b?

(a) 4 **(b)** 11/3 **(c)** 7/3 **(d)** 1 **(e)** −1/3

Nos exercícios 55 e 56, seja $f(x) = 2(x + 3)^2 - 5$.

55. Múltipla escolha Qual é o eixo de simetria do gráfico de f?

(a) $x = 3$ **(b)** $x = -3$ **(c)** $y = 5$
(d) $y = -5$ **(e)** $y = 0$

56. Múltipla escolha Qual é o vértice de f?

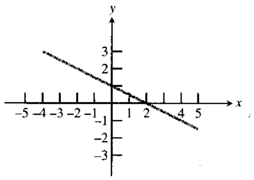
(a) (0,0) **(b)** (3,5) **(c)** (3,−5)
(d) (−3,5) **(e)** (−3,−5)

57. Identifique gráficos de funções do primeiro grau

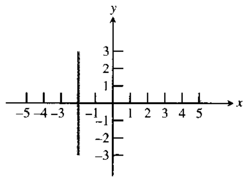
(a) Quais das representações gráficas de retas são gráficos de funções do primeiro grau? Justifique sua resposta.

(b) Quais das representações gráficas de retas são gráficos de funções? Justifique sua resposta.

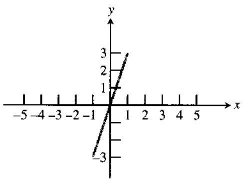
(c) Quais das representações gráficas de retas não são gráficos de funções? Justifique sua resposta.



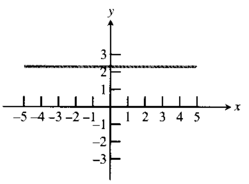
(i)



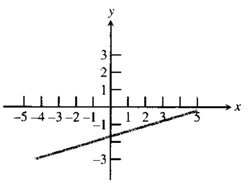
(ii)



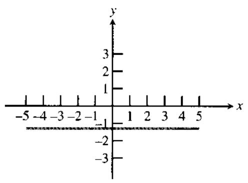
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

58. Seja $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x + 2$, $h(x) = 7x - 3$, $k(x) = mx + b$ e $l(x) = x^3$.

(a) Calcule a taxa média de variação de f de $x = 1$ a $x = 3$.

(b) Calcule a taxa média de variação de f de $x = 2$ a $x = 5$.

(c) Calcule a taxa média de variação de f de $x = a$ a $x = c$.

(d) Calcule a taxa média de variação de g de $x = 1$ a $x = 3$.

(e) Calcule a taxa média de variação de g de $x = 1$ a $x = 4$.

(f) Calcule a taxa média de variação de g de $x = a$ a $x = c$.

(g) Calcule a taxa média de variação de h de $x = a$ a $x = c$.

(h) Calcule a taxa média de variação de k de $x = a$ a $x = c$.

(i) Calcule a taxa média de variação de l de $x = a$ a $x = c$.

59. Suponha que $b^2 - 4ac > 0$ para a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

(a) Mostre que a soma das duas soluções desta equação é $-b/a$.

(b) Mostre que o produto das duas soluções desta equação é c/a.

60. Prove que o eixo de simetria do gráfico de $f(x) = (x - a)(x - b)$ é $x = (a + b)/2$, onde a e b são números reais.

61. Identifique o vértice do gráfico de $f(x) = (x - a)(x - b)$ é $x = a + b/2$, onde a e b são quaisquer números reais.

62. Prove que se x_1 e x_2 são números reais e são as raízes da função do segundo grau dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, então o eixo de simetria do gráfico de f é $x = (x_1 + x_2)/2$.

Capítulo 9

Funções potência

Objetivos de aprendizagem

- Definição.
- Funções monomiais e seus gráficos.
- Gráficos de funções potência.

As funções potência podem descrever as relações proporcionais existentes, por exemplo, na geometria, química e física.

Definição

Funções potência formam uma importante família de funções pela sua própria estrutura, além de fazerem parte de outras funções.

DEFINIÇÃO Função potência

Qualquer função que pode ser escrita na forma

$$f(x) = k \cdot x^a,$$

onde k e a são constantes diferentes de zero, é uma **função potência**. A constante a é a **potência** (ou o **expoente**) e k *é a* **constante de variação** ou **constante de proporção**. Nós dizemos que $f(x)$ **varia como** a *a-ésima* potência de x ou que $f(x)$ **é proporcional à** *a-ésima* potência de x.

Em geral, se $y = f(x)$ varia como uma potência constante de x, então y é uma função potência de x. Muitas das fórmulas mais comuns de geometria e ciência são funções potência.

Nome	Fórmula	Potência ou expoente	Constante de variação
Comprimento da circunferência	$C = 2\pi r$	1	2π
Área de um círculo	$A = \pi r^2$	2	π
Força da gravidade	$F = k/d^2$	-2	k
Lei de Boyle	$V = k/P$	-1	k

Estes quatro modelos de funções potência envolvem relações que podem ser expressas na linguagem de *variação e proporção*:

- O comprimento da circunferência varia diretamente com o seu raio.
- A área dentro de um círculo é diretamente proporcional ao quadrado do seu raio.
- A força de gravidade agindo sobre um objeto é inversamente proporcional ao quadrado da distância do objeto ao centro da Terra.
- A lei de Boyle afirma que o volume de um gás armazenado (em uma temperatura constante) varia inversamente com relação à pressão aplicada.

As fórmulas de função potência com potências positivas (expoentes positivos) são exemplos de **variação direta**, e fórmulas de função potência com potências negativas (expoentes negativos) são exemplos de **variação inversa**. A menos que a palavra *inversamente* esteja incluída em um exemplo de variação, ela é assumida como direta, como no caso que veremos a seguir.

EXEMPLO 1 Análise de funções potência

Verifique a potência (ou o expoente) e a constante de variação para cada função, represente-a graficamente e analise-a.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

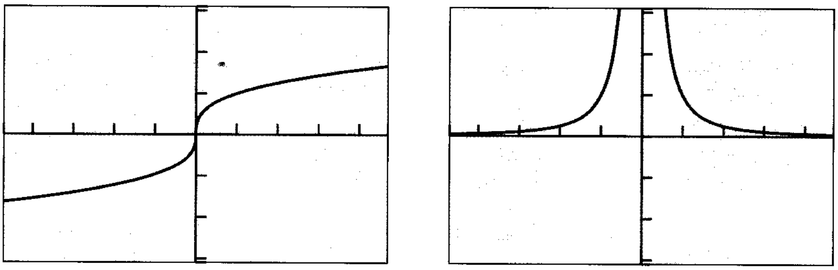
SOLUÇÃO

(a) Como $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} = 1 \cdot x^{1/3}$, então seu expoente é 1/3 e sua constante de variação é 1. O gráfico de f é demonstrado na Figura 9.1(a).

Domínio: conjunto de todos os números reais
Imagem: conjunto de todos os números reais
É contínua
É crescente para todo x
É simétrica com relação à origem (uma função ímpar)
Não é limitada nem superior nem inferiormente
Não tem extremo local
Não tem assíntotas
Comportamento nos extremos do domínio: $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$
Fato interessante: a função raiz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é a inversa da função cúbica.

(b) Como $g(x) = 1/x^2 = x^{-2} = 1 \cdot x^{-2}$, então seu expoente é -2 e sua constante de variação é 1. O gráfico de g é demonstrado na Figura 9.1(b).

Domínio: $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
Imagem: $]0, +\infty[$
É contínua sobre seu domínio. É descontínua em $x = 0$
É crescente sobre $]-\infty, 0[$. É decrescente sobre $]0, +\infty[$
É simétrica com relação ao eixo y (uma função par)
É limitada inferior, mas não superiormente
Não tem extremo local
Assíntota horizontal $y = 0$. Assíntota vertical: $x = 0$
Comportamento nos extremos do domínio: $\lim_{x\to-\infty} (1/x^2) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} (1/x^2) = 0$
Fato interessante: $g(x) = 1/x^2$ é a base das *leis científicas com inverso de um quadrado*, como é o princípio gravitacional com quadrado inverso dado por $F = k/d^2$, mencionado anteriormente. Assim, $g(x) = 1/x^2$ é chamada às vezes de função do quadrado inverso, mas *não* é a inversa da função quadrática e sim sua inversa *multiplicativa*.



[–4,7; 4,7] por [–3,1; 3,1]
(a)

[–4,7; 4,7] por [–3,1; 3,1]
(b)

Figura 9.1 Os gráficos de (a) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ e (b) $g(x) = 1/x^2 = x^{-2}$.

Funções monomiais e seus gráficos

Uma função polinomial de um termo é uma função potência que é também chamada de uma *função monomial.*

DEFINIÇÃO Função monomial

Qualquer função que pode ser escrita como

$$f(x) = k \quad \text{ou} \quad f(x) = k \cdot x^n$$

onde k é uma constante e n é um inteiro positivo, é uma **função monomial**.

Assim, a função zero e as funções constantes são funções monomiais, mas a função monomial mais típica é uma função potência com um expoente inteiro positivo, o qual é o grau do monômio. As funções básicas x, x^2 e x^3 são funções monomiais típicas. É importante entender os gráficos das funções monomiais, porque toda função polinomial é uma função monomial ou uma soma de funções monomiais.

Vamos analisar a função cúbica

$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$

Domínio: conjunto de todos os números reais

Imagem: conjunto de todos os números reais

É contínua

É crescente para todo x

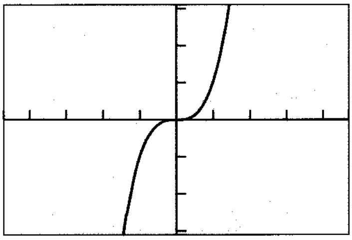
É simétrica com relação à origem (uma função ímpar)

Não é limitada nem superior nem inferiormente

Não tem extremo local

Não tem assíntotas nem horizontais nem verticais

Comportamento nos extremos do domínio: $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$



[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]

Figura 9.2 O gráfico de $f(x) = x^3$.

EXEMPLO 2 Representação gráfica de funções monomiais

Descreva como obter o gráfico de cada função dada do gráfico de $g(x) = x^n$ (observe que o valor do expoente é mantido). Você pode esboçar o gráfico e conferir com uma calculadora apropriada.

(a) $f(x) = 2x^3$ **(b)** $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^4$

SOLUÇÃO

(a) Obtemos o gráfico de $f(x) = 2x^3$ "esticando" verticalmente o gráfico de $g(x) = x^3$ por meio da multiplicação pelo fator 2. Ambas são funções ímpares. Veja a Figura 9.3(a).

(b) Obtemos o gráfico de $f(x) = -(2/3)x^4$ "encolhendo" verticalmente o gráfico de $g(x) = x^4$ por meio da multiplicação pelo fator 2/3 e, então, refletindo com relação ao eixo x (devido ao sinal negativo). Ambas são funções pares. Veja a Figura 9.3(b).

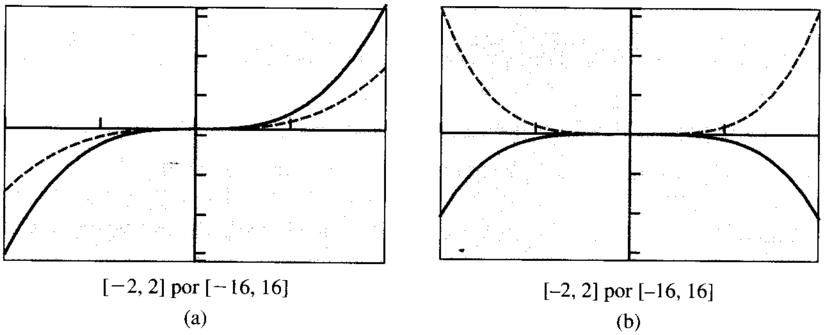


Figura 9.3 Os gráficos de (a) $f(x) = 2x^3$ com função monomial básica $g(x) = x^3$ e (b) $f(x) = -(2/3)x^4$ com função monomial básica $g(x) = x^4$.

Gráficos de funções potência

Os gráficos na Figura 9.4 representam as quatro formas que são possíveis para funções potência em geral, tais como $f(x) = k \cdot x^a$ para $x \geq 0$. O gráfico de f sempre contém o ponto $(1, k)$. As funções que apresentam expoentes positivos também passam pelo ponto (0, 0). Aquelas com expoentes negativos são assintóticas para os dois eixos, isto é, não cruzam nenhum deles.

Quando $k > 0$, temos o gráfico no primeiro quadrante, mas quando $k < 0$ o gráfico está no quarto quadrante.

Em geral, para qualquer função potência $f(x) = k \cdot x^a$, uma das três situações seguintes ocorre quando $x < 0$.

- f é indefinida para $x < 0$, como no caso para $f(x) = x^{1/2}$ e $f(x) = x^{\pi}$.
- f é uma função par, assim f é simétrica com relação ao eixo vertical y, como no caso para $f(x) = x^{-2}$ e $f(x) = x^{2/3}$.
- f é uma função ímpar, assim f é simétrica com relação à origem, como no caso para $f(x) = x^{-1}$ e $f(x) = x^{7/3}$.

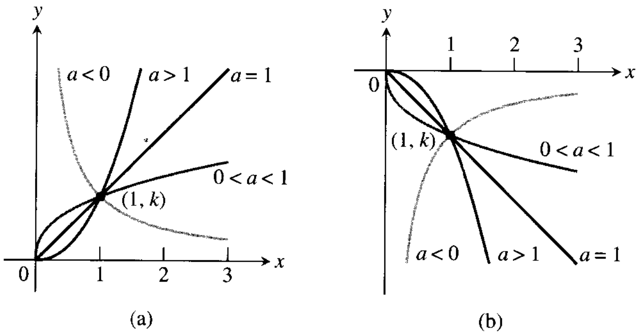


Figura 9.4 Os gráficos de $f(x) = k \cdot x^a$ para $x \geq 0$. (a) $k > 0$, (b) $k < 0$.

O próximo exemplo ilustra o processo em dois passos para a representação gráfica da função potência.

EXEMPLO 3 Representação gráfica de funções potências da forma $f(x) = k \cdot x^a$

Encontre os valores das constantes k e a. Descreva a parte da curva que está no primeiro ou no quarto quadrante. Determine se f é par, ímpar ou indefinida para $x < 0$. Descreva o restante da curva nos demais quadrantes. Esboce o gráfico para verificar a descrição.

(a) $f(x) = 2x^{-3}$ **(b)** $f(x) = -0{,}4x^{1{,}5}$ **(c)** $f(x) = -x^{0{,}4}$

SOLUÇÃO

(a) Como $k = 2$ é positivo e $a = -3$ é negativo, então o gráfico passa pelo par ordenado $(1, 2)$ e é assintótico em ambos os eixos. O gráfico é de uma função decrescente no primeiro quadrante. A função f é ímpar porque

$$f(-x) = 2(-x)^{-3} = \frac{2}{(-x)^3} = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3} = -f(x)$$

Assim, o gráfico é simétriço com relação à origem. O gráfico na Figura 9.5(a) nos orienta sobre todos os aspectos dessa descrição.

(b) Como $k = -0{,}4$ é negativo e $a = 1{,}5 > 1$, então o gráfico contém o par ordenado $(0, 0)$ e passa pelo par ordenado $(1; -0{,}4)$. O gráfico é de uma função decrescente no quarto quadrante. A função f não está definida para $x < 0$ porque

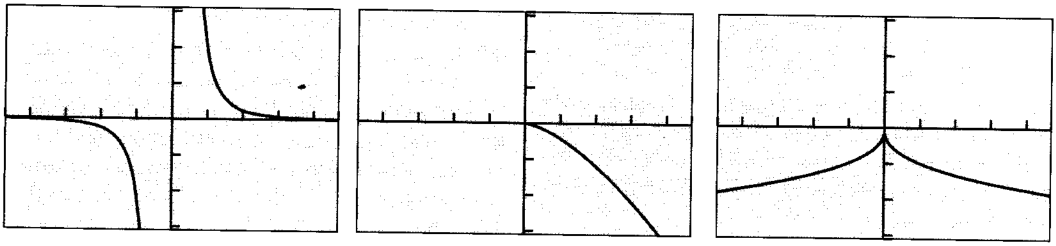
$$f(x) = -0{,}4x^{1{,}5} = -\frac{2}{5}x^{3/2} = -\frac{2}{5}(\sqrt{x})^3$$

e a função raiz quadrada não está definida para $x < 0$. Assim, o gráfico de f não tem pontos no segundo e terceiro quadrantes. O gráfico na Figura 9.5(b) nos orienta sobre todos os aspectos dessa descrição.

(c) Como $k = -1$ é negativo e $0 < a < 1$, então o gráfico contém o par ordenado $(0, 0)$ e passa pelo par ordenado $(1, -1)$. O gráfico é de uma função decrescente no quarto quadrante. A função f é par porque

$$\begin{aligned} f(-x) &= -(-x)^{0{,}4} = -(-x)^{2/5} = -(\sqrt[5]{-x})^2 = -(-\sqrt[5]{x})^2 \\ &= -(\sqrt[5]{x})^2 = -x^{0{,}4} = f(x) \end{aligned}$$

Assim, o gráfico de f é simétrico com relação ao eixo vertical y. O gráfico na Figura 9.5(c) confirma a descrição.



$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$
(a)

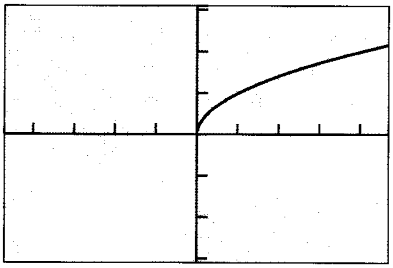
$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$
(b)

$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$
(c)

Figura 9.5 Os gráficos de (a) $f(x) = 2x^{-3}$, (b) $f(x) = -0{,}4x^{1{,}5}$ e (c) $f(x) = -x^{0{,}4}$.

Vamos analisar a função raiz quadrada

$f(x) = \sqrt{x},\ x \geqslant 0$
Domínio: $[0, +\infty[$
Imagem: $[0, +\infty[$
É contínua sobre $[0, +\infty[$
É crescente sobre $[0, +\infty[$
Não apresenta simetria
Limitada inferiormente, mas não superiormente
Mínimo local em $x = 0$
Não tem assíntotas nem horizontais nem verticais
Comportamento nos extremos do domínio: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

Figura 9.6 O gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$.

REVISÃO RÁPIDA

Nos exercícios 1 a 6, escreva as seguintes expressões usando somente expoentes inteiros positivos.

1. $x^{2/3}$ **2.** $p^{5/2}$ **3.** d^{-2}
4. x^{-7} **5.** $q^{-4/5}$ **6.** $m^{-1,5}$

Nos exercícios 7 a 10, escreva as seguintes expressões na forma $k \cdot x^a$ usando um único número racional para o expoente a.

7. $\sqrt{9x^3}$ **8.** $\sqrt[3]{8x^5}$ **9.** $\sqrt[3]{\dfrac{5}{x^4}}$ **10.** $\dfrac{4x}{\sqrt{32x^3}}$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 10, determine se a função é uma função potência, dado que c, g, k e π representam constantes. Para aquelas que são funções potência, verifique o expoente e a constante de variação.

1. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^5$ **2.** $f(x) = 9x^{5/3}$
3. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **4.** $f(x) = 13$
5. $E(m) = mc^2$ **6.** $KE(v) = \dfrac{1}{2}kv^5$
7. $d = \dfrac{1}{2}gt^2$ **8.** $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$
9. $I = \dfrac{k}{d^2}$ **10.** $F(a) = m \cdot a$

Nos exercícios 11 a 16, determine se a função é dada por um monômio, dado que l e π representam constantes. Para aquelas que são funções monomiais, verifique o grau e o coeficiente principal. Para aquelas que não são, justifique.

11. $f(x) = -4$ **12.** $f(x) = 3x^{-5}$
13. $y = -6x^7$ **14.** $y = -2 \cdot 5^x$
15. $S = 4\pi r^2$ **16.** $A = lw$

Nos exercícios 17 a 22, escreva os problemas como uma equação com função potência. Utilize k como a constante de variação se nenhuma é dada.

17. A área A de um triângulo eqüilátero varia diretamente com o quadrado do comprimento s dos seus lados.

18. O volume V de um cilindro circular com peso fixado é proporcional ao quadrado do seu raio r.

19. A corrente I em um circuito elétrico é inversamente proporcional à resistência R, com constante de variação V.

20. A lei de Charles (conhecida como lei de Gay-Lussac) diz que o volume V de um gás ideal, à pressão constante, varia diretamente com a temperatura absoluta T.

21. A energia E produzida em uma reação nuclear é proporcional à massa m, com a constante de variação sendo c^2, o quadrado da velocidade da luz.

22. A velocidade p de um objeto em queda livre que foi lançado varia com a raiz quadrada da distância percorrida d, com a constante de variação $k = \sqrt{2g}$.

Nos exercícios 23 a 25, escreva uma sentença que expresse o que ocorre na fórmula, usando a linguagem de variação ou proporção.

23. $w = mg$, onde w e m são o peso e a massa de um objeto, respectivamente; g é a constante de aceleração devido à gravidade.

24. $C = \pi D$, onde C e D representam o comprimento e o diâmetro de um círculo, respectivamente, e π é a constante.

25. $d = p^2/2g$, onde d é a distância percorrida de um objeto lançado em queda livre, p é a velocidade do objeto e g é a constante de aceleração devido à gravidade.

Nos exercícios 26 a 29, verifique a potência e a constante de variação para a função, esboce-a graficamente e faça uma análise completa.

26. $f(x) = 2x^4$ **27.** $f(x) = -3x^3$

28. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{x}$ **29.** $f(x) = -2x^{-3}$

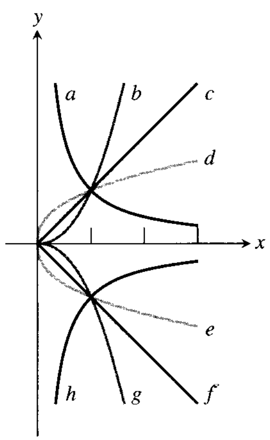
Nos exercícios 30 a 35, descreva como obter o gráfico da função monomial dada do gráfico de $g(x) = x^n$ com o mesmo expoente n. Verifique se a função é par ou ímpar. Esboce o gráfico e, caso queira, verifique-o com uma calculadora adequada.

30. $f(x) = \frac{2}{3}x^4$ **31.** $f(x) = 5x^3$

32. $f(x) = -1{,}5x^5$ **33.** $f(x) = -2x^6$

34. $f(x) = \frac{1}{4}x^8$ **35.** $f(x) = \frac{1}{8}x^7$

Nos exercícios 36 a 41, associe cada função a uma das curvas no gráfico.



36. $f(x) = -\frac{2}{3}x^4$ **37.** $f(x) = \frac{1}{2}x^{-5}$

38. $f(x) = 2x^{1/4}$ **39.** $f(x) = -x^{5/3}$

40. $f(x) = -2x^{-2}$ **41.** $f(x) = 1{,}7x^{2/3}$

Nos exercícios 42 a 47, verifique os valores das constantes k e a para a função $f(x) = k \cdot x^a$. Descreva a parte da curva que pertence ao primeiro e ao quarto quadrantes. Determine se f é par, ímpar ou indefinida para $x < 0$. Descreva a parte restante da curva. Esboce graficamente a função para verificar os itens da descrição.

42. $f(x) = 3x^{1/4}$ **43.** $f(x) = -4x^{2/3}$

44. $f(x) = -2x^{4/3}$ **45.** $f(x) = \frac{2}{5}x^{5/2}$

46. $f(x) = \frac{1}{2}x^{-3}$ **47.** $f(x) = -x^{-4}$

Nos exercícios 48 e 49, os valores são dados para y como uma função potência de x. Escreva uma equação potência e verifique seu expoente e a constante de variação.

48.

x	2	4	6	8	10
y	2	0,5	0,222...	0,125	0,08

49.

x	1	4	9	16	25
y	−2	−4	−6	−8	−10

50. Se n é um número inteiro, $n \geq 1$, prove que $f(x) = x^n$ é uma função ímpar se n é ímpar e é uma função par se n é par.

51. Verdadeiro ou falso A função $f(x) = x^{-2/3}$ é par. Justifique sua resposta.

52. Verdadeiro ou falso O gráfico da função $f(x) = x^{1/3}$ é simétrica com relação ao eixo vertical y. Justifique sua resposta.

Nos exercícios 53 a 56, resolva o problema sem usar calculadora.

53. Múltipla escolha Seja $f(x) = 2x^{-1/2}$. Qual é o valor de $f(4)$?

(a) 1 **(b)** −1 **(c)** $2\sqrt{2}$

(d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(e)** 4

54. Múltipla escolha Seja $f(x) = -3x^{-1/3}$. Qual das alternativas é verdadeira?

(a) $f(0) = 0$ **(b)** $f(-1) = -3$ **(c)** $f(1) = 1$

(d) $f(3) = 3$ **(e)** $f(0)$ é indefinido

55. Múltipla escolha Seja $f(x) = x^{2/3}$. Qual das alternativas é verdadeira?

(a) f é uma função ímpar.

(b) f é uma função par.

(c) f não é uma função par nem uma função ímpar.

(d) O gráfico de f é simétrico com relação ao eixo horizontal x.

(e) O gráfico de f é simétrico com relação à origem.

56. Múltipla escolha Qual dos seguintes conjuntos é o domínio da função $f(x) = x^{3/2}$?

(a) Conjunto de todos os números reais.

(b) $[0, +\infty[$ **(c)** $]0, +\infty[$

(d) $]-\infty, 0[$ **(e)** $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

57. Prove que $g(x) = 1/f(x)$ é par se e somente se $f(x)$ for par e que $g(x) = 1/f(x)$ é ímpar se e somente se $f(x)$ for ímpar.

58. Use os resultados do exercício anterior para provar que $g(x) = x^{-a}$ é par se e somente se $f(x) = x^a$ for par e que $g(x) = x^{-a}$ é ímpar se e somente se $f(x) = x^a$ for ímpar.

Capítulo 10

Funções polinomiais

Objetivos de aprendizagem

- Gráficos de funções polinomiais.
- Comportamento das funções polinomiais nos extremos do domínio.
- Raízes das funções polinomiais.
- Divisão longa e o algoritmo da divisão.
- Teorema do resto e Teorema de D'Alembert.
- Divisão de polinômios pelo método de Briot Ruffini.
- Teorema das raízes racionais.
- Limites superior e inferior das raízes de uma função polinomial.

Esses tópicos são importantes quando fazemos modelagem de problemas e podem ser usados para melhorar as aproximações de funções mais complicadas.

Gráficos de funções polinomiais

Já vimos que uma função polinomial de grau zero é uma função constante e o gráfico é uma reta horizontal paralela ao eixo x. Uma função polinomial de grau 1 é uma função do primeiro grau, seu gráfico é uma reta inclinada. Uma função polinomial de grau 2 é uma função do segundo grau, seu gráfico é uma parábola.

Vamos considerar agora funções polinomiais de graus mais altos. Estas incluem as **funções cúbicas** (polinomiais de grau 3) e **funções quárticas** (polinomiais de grau 4). Já vimos que uma função polinomial de grau n pode ser escrita na forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ com } a_n \neq 0$$

Eis algumas definições importantes associadas às funções polinomiais e a essa equação.

DEFINIÇÃO O vocabulário dos polinômios

- Cada monômio na soma $(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}, \cdots, a_0)$ é um **termo** do polinômio.
- Uma função polinomial escrita nesta forma, com termos apresentando graus decrescentes, está escrita na **forma-padrão**.
- As constantes $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ são os **coeficientes** do polinômio.
- O termo $a_n x^n$ é o **termo principal** e a_0 é o termo constante.

No Exemplo 1, veremos que o termo constante a_0 de uma função polinomial p é tanto o valor inicial da função $p(0)$, como o valor por onde o gráfico corta o eixo vertical y (este último também é chamado de intercepto).

EXEMPLO 1 Transformações no gráfico das funções monomiais

Descreva como transformar o gráfico de uma função monomial $f(x) = a_n x^n$ em um gráfico da função dada. Esboce o gráfico transformado e verifique a resposta, se possível, em calculadora com esse recurso. Calcule a localização do intercepto (valor por onde o gráfico passa no eixo vertical y) até mesmo como forma de conferir o gráfico transformado.

(a) $g(x) = 4(x + 1)^3$ **(b)** $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$

SOLUÇÃO

(a) Você pode obter o gráfico de $g(x) = 4(x + 1)^3$ apenas transladando o gráfico de $f(x) = 4x^3$ uma unidade para a esquerda, como mostrado na Figura 10.1(a). O intercepto do gráfico de g é $g(0) = 4(0 + 1)^3$, que coincide com o valor observado no gráfico transformado.

(b) Você pode obter o gráfico de $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$ apenas transladando o gráfico de $f(x) = -x^4$ duas unidades para a direita e cinco unidades para cima, como mostrado na Figura 10.1(b). O intercepto do gráfico de h é $h(0) = -(0 - 2)^4 + 5 = -16 + 5 = -11$, que coincide com o valor observado no gráfico transformado.

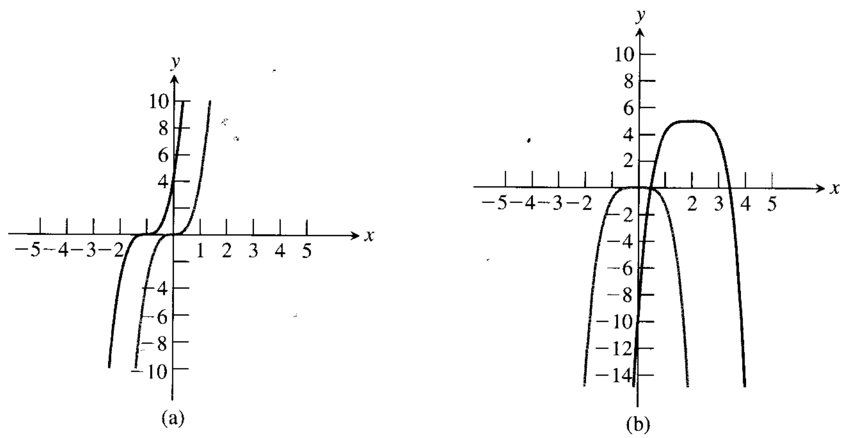


Figura 10.1 (a) Os gráficos de $g(x) = 4(x + 1)^3$ e $f(x) = 4x^3$. (b) Os gráficos de $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$ e $f(x) = -x^4$.

O Exemplo 2 mostra o que pode acontecer quando funções monomiais são combinadas para obter funções polinomiais. Os polinômios resultantes *não* são meras translações de funções monomiais.

EXEMPLO 2 Combinações de gráficos de funções monomiais

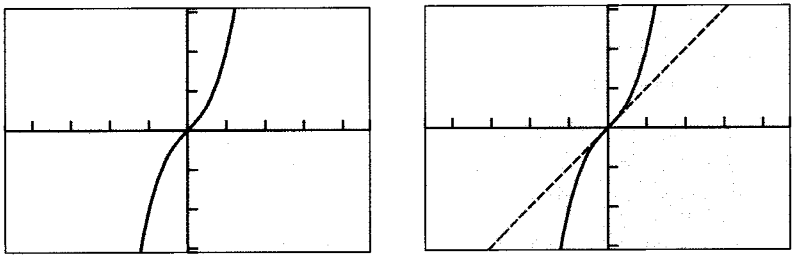
Represente graficamente a função polinomial, localize seus extremos e raízes e explique como está relacionada com as funções monomiais utilizadas para a sua construção.

(a) $f(x) = x^3 + x$ **(b)** $g(x) = x^3 - x$

SOLUÇÃO

(a) O gráfico de $f(x) = x^3 + x$ é demonstrado na Figura 10.2(a). A função f é crescente sobre $]-\infty, +\infty[$ e não possui extremos (nem valor máximo nem valor mínimo). A função fatorada é $f(x) = x(x^2 + 1)$ e possui raiz em $x = 0$.

A forma geral do gráfico é muito parecida com o gráfico de seu termo principal que é x^3, mas, próxima da origem, a função f se comporta como o outro termo dado por x, como vemos na Figura 10.2(b). A função f é ímpar, assim como cada parcela, isto é, cada monômio.

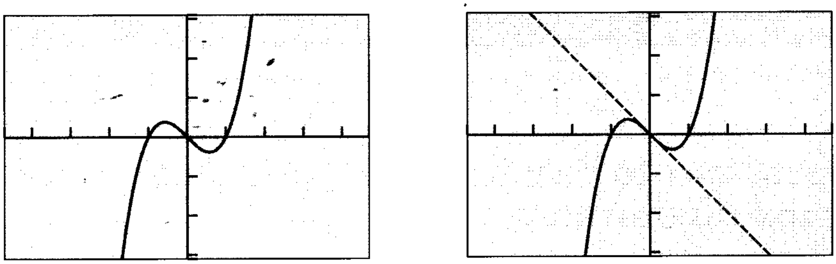


$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$
(a)

$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$
(b)

Figura 10.2 O gráfico de $f(x) = x^3 + x$ (a) sozinha e (b) com a função $y = x$.

(b) O gráfico de $g(x) = x^3 - x$ é demonstrado na Figura 10.3(a). A função g tem um máximo local dado por $\cong 0{,}38$ quando $x \cong -0{,}58$ e um mínimo local dado por $\cong -0{,}38$ quando $x \cong 0{,}58$. A função fatorada é $g(x) = x(x + 1)(x - 1)$ e tem raízes em $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. A forma geral do gráfico é muito parecida com o gráfico do seu termo principal, que é x^3, mas, próxima da origem, a função g se comporta como o outro termo dado por $-x$, como vemos na Figura 10.3(b). A função g é ímpar, assim como cada parcela, isto é, cada monômio.

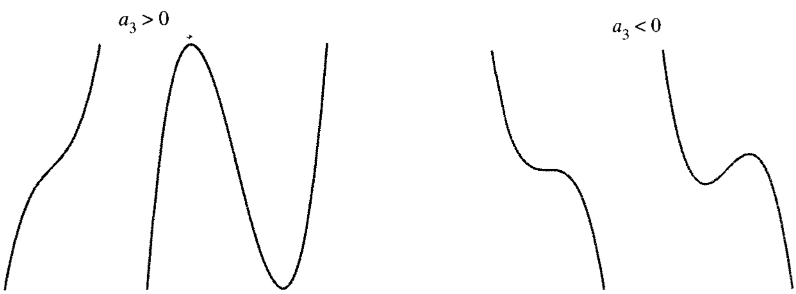


$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$
(a)

$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$
(b)

Figura 10.3 O gráfico de $g(x) = x^3 - x$ (a) sozinha e (b) com a função $y = -x$.

Toda função polinomial está definida e é contínua para todos os números reais. Além de os gráficos serem sem quebra, pulo nem buraco, eles também não têm "bicos". Gráficos típicos de funções cúbicas e quárticas são demonstrados nas Figuras 10.4 e 10.5.



(a)

(b)

Figura 10.4 Gráficos de quatro funções cúbicas típicas: (a) dois com coeficiente principal positivo e (b) dois com coeficiente principal negativo.

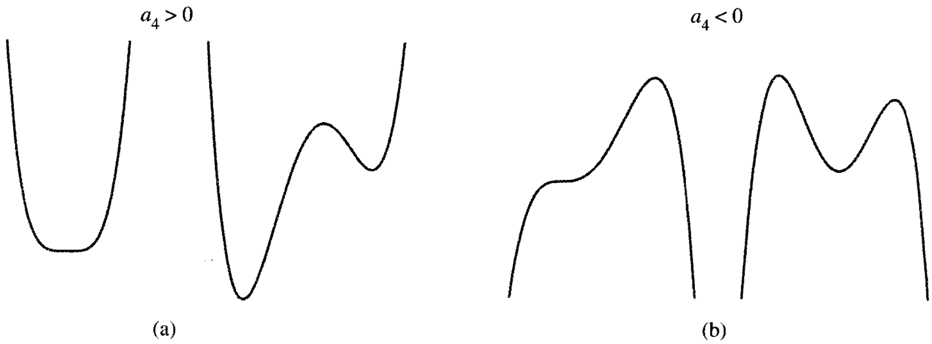


Figura 10.5 Gráficos de quatro funções quárticas típicas: (a) dois com coeficiente principal positivo e (b) dois com coeficiente principal negativo.

Imagine retas horizontais passando através dos gráficos nas Figuras 10.4 e 10.5, como se fossem o eixo horizontal x. Cada intersecção corresponde a uma raiz da função. Podemos concluir que funções cúbicas têm, no máximo, três raízes e as funções quárticas têm, no máximo, quatro raízes. As funções cúbicas apresentam, no máximo, dois extremos locais, e funções quárticas, três extremos locais. Estas observações generalizam o resultado:

TEOREMA Extremos locais e raízes de funções polinomiais

Uma função polinomial de grau n tem, no máximo, $n - 1$ extremos locais e no máximo n raízes.

Comportamento das funções polinomiais nos extremos do domínio

Uma característica importante das funções polinomiais é o seu comportamento nos extremos do domínio. Esse comportamento está intimamente relacionado com o comportamento do termo principal. Analisaremos isso no Exemplo 3.

EXEMPLO 3 Comparação dos gráficos de um polinômio e do seu termo principal

Vamos comparar os gráficos das funções $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ e $g(x) = x^3$ que estão no mesmo plano cartesiano, porém em escalas diferentes. Podemos observá-los a seguir:

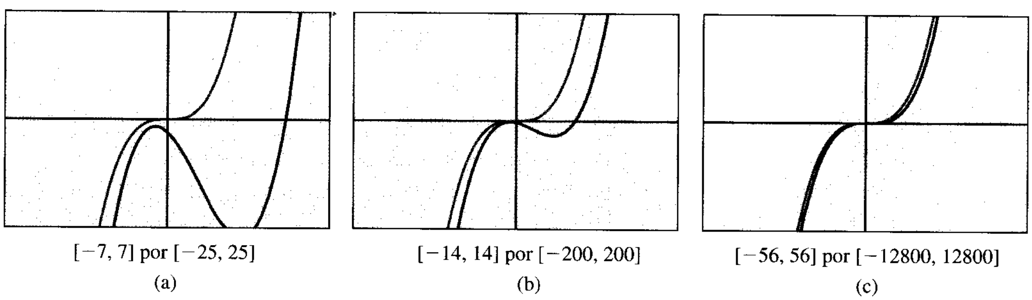


Figura 10.6 Gráficos das funções $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ e $g(x) = x^3$ que estão no mesmo plano cartesiano e em escalas diferentes.

SOLUÇÃO

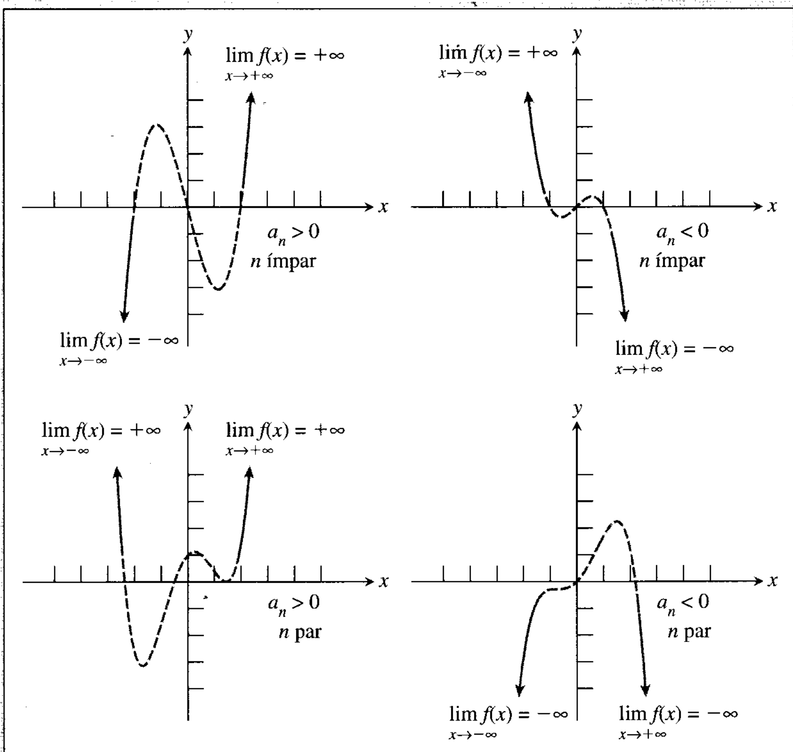
A Figura 10.6 mostra os gráficos das funções citadas em dimensões cada vez maiores. Percebemos que os gráficos vão ficando cada vez mais parecidos. Logo, as conclusões são:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

Esse Exemplo 3 mostra algo verdadeiro para todos os polinômios: *em escalas suficientemente grandes, o gráfico de um polinômio e o gráfico do seu termo principal parecem ser idênticos*. Isto significa que o termo principal *domina* o comportamento do polinômio quando $|x| \to +\infty$. Baseados nesse fato, existem quatro padrões possíveis nos extremos do domínio de uma função polinomial. O expoente e o coeficiente do termo principal nos indicam qual padrão ocorre.

Teste do termo principal para comportamento das funções polinomiais nos extremos do domínio

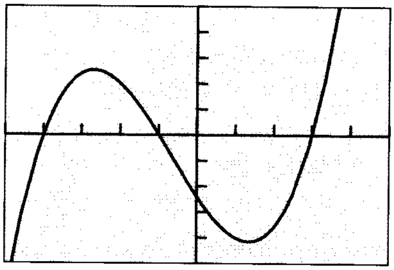
Para qualquer função polinomial $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ são determinados pelo grau n do polinômio e seu coeficiente principal a_n.



EXEMPLO 4 Análise das funções polinomiais nos extremos do domínio

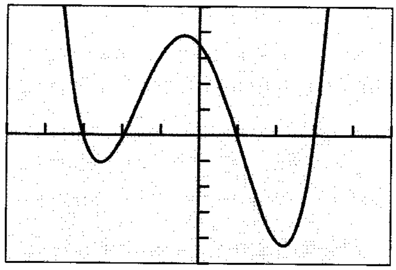
Descreva o comportamento das funções polinomiais nos extremos do domínio:

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ **(b)** $g(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 35$



[-5, 5] por [-25, 25]

(a)



[-5, 5] por [-50, 50]

(b)

Figura 10.7 (a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ e (b) $g(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 35$.

SOLUÇÃO

(a) O gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ é demonstrado na Figura 10.7(a). A função f tem dois extremos locais e três raízes, que é o número máximo possível para esse polinômio. Os limites são $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

(b) O gráfico de $g(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 35$ é demonstrado na Figura 10.7(b). A função g tem três extremos locais e quatro raízes, que é o número máximo possível para esse polinômio. Os limites são $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^4 = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^4 = +\infty$.

Raízes das funções polinomiais

Sabemos que encontrar as raízes de uma função f é equivalente a encontrar os valores de x por onde o gráfico de $y = f(x)$ passa no eixo horizontal x, que são as soluções da equação $f(x) = 0$. Uma idéia é fatorar a função polinomial, como veremos a seguir.

EXEMPLO 5 Raízes de uma função polinomial

Encontre as raízes da função $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.

SOLUÇÃO

Solução algébrica

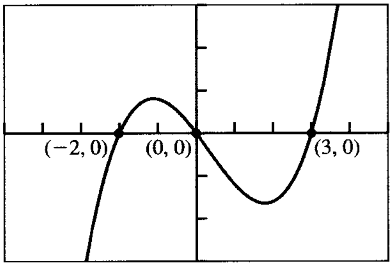
Resolvemos a equação $f(x) = 0$ fatorando:

$$\begin{gathered} x^3 - x^2 - 6x = 0 \\ x(x^2 - x - 6) = 0 \\ x(x-3)(x+2) = 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{gathered}$$

As raízes de f são 0, 3 e -2.

Solução gráfica

Você pode usar uma calculadora com esse recurso ou esboçar manualmente. Confira na Figura 10.8.



[−5, 5] por [−15, 15]

Figura 10.8 O gráfico de $y = x^3 - x^2 - 6x$.

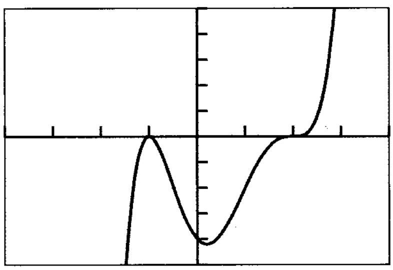
Do Exemplo 5, vemos que se uma função polinomial f é apresentada na forma fatorada, cada fator $(x - k)$ corresponde a uma raiz $x = k$, e se k é um número real, então o par ordenado $(k, 0)$ é um ponto por onde o gráfico passa no eixo horizontal x.

Quando o fator é repetido, como na função $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$, dizemos que a função polinomial tem uma *raiz repetida*. A função f tem duas raízes repetidas. Pelo fato de o fator $x - 2$ ocorrer três vezes, então 2 é uma raiz de *multiplicidade* 3. De maneira similar, -1 é uma raiz de multiplicidade 2. A definição seguinte generaliza esse conceito.

DEFINIÇÃO Multiplicidade de uma raiz de uma função polinomial

Se f é uma função polinomial e $(x - c)^m$ é um fator de f, mas $(x - c)^{m+1}$ não é, então c é uma raiz de **multiplicidade m** de f.

Uma raiz de multiplicidade $m \geq 2$ é uma **raiz repetida**. Observe na Figura 10.9 que o gráfico de $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$ *encosta* no eixo horizontal x no par ordenado $(-1, 0)$ e cruza o mesmo eixo no par ordenado $(2, 0)$. Isto também pode ser generalizado.



[−4, 4] por [−10, 10]

Figura 10.9 O gráfico de $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$.

Raízes de multiplicidade ímpar e par

Se uma função polinomial f tem uma raiz real c de multiplicidade ímpar, então o gráfico de f cruza o eixo horizontal x em $(c, 0)$ e o valor de f muda de sinal em $x = c$.

Se uma função polinomial f tem uma raiz real c de multiplicidade par, então o gráfico de f não cruza o eixo horizontal x em $(c, 0)$ e o valor de f não muda de sinal em $x = c$.

No Exemplo 5, nenhuma das raízes é repetida. Em virtude disso, cada raiz tem multiplicidade 1 (que é ímpar), o gráfico da função polinomial cruza o eixo horizontal x e tem mudança de sinal em todas as raízes (Figura 10.8). Saber onde o gráfico cruza e onde ele não cruza o eixo horizontal x é importante no momento de esboçar gráficos e resolver inequações.

EXEMPLO 6 Esboço do gráfico de um polinômio fatorado

Verifique o grau e relacione as raízes da função $f(x) = (x + 2)^3(x - 1)^2$. Verifique a multiplicidade de cada raiz e se o gráfico cruza o eixo horizontal x na raiz analisada. Esboce o gráfico da função.

SOLUÇÃO

O grau de f é 5 e as raízes são $x = -2$ e $x = 1$. O gráfico cruza o eixo x em $x = -2$, pois a multiplicidade é 3 (que é ímpar). O gráfico não cruza o eixo x em $x = 1$, pois a multiplicidade é 2 (que é par). Observe que os valores de f são positivos para $x > 1$, como também para $-2 < x < 1$; agora, para $x < -2$ os valores de f são negativos. Você pode conferir o esboço do gráfico na Figura 10.10.

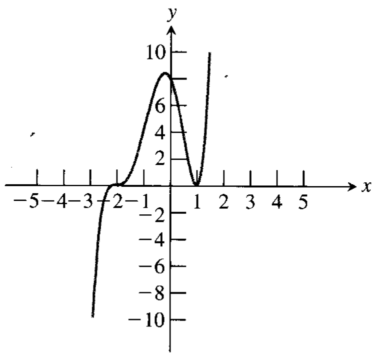


Figura 10.10 O gráfico de $f(x) = (x + 2)^3(x - 1)^2$.

O *Teorema do valor intermediário* nos diz que a mudança de sinal da função implica a existência de raiz real dessa função.

TEOREMA Teorema do valor intermediário

Se a e b são números reais com $a < b$ e se f é contínua no intervalo $[a, b]$, então f assume todos os valores reais entre $f(a)$ e $f(b)$. Em outras palavras, se y_0 está entre $f(a)$ e $f(b)$, então $y_0 = f(c)$ para algum número c em $[a, b]$.

Em particular, se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos (isto é, um é positivo e o outro é negativo), então $f(c) = 0$ para algum número c em $[a, b]$. Veja a Figura 10.11.

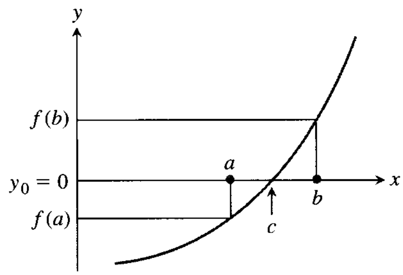


Figura 10.11 Se $f(a) < 0 < f(b)$, então existe uma raiz $x = c$ entre a e b.

EXEMPLO 7 Uso do Teorema do valor intermediário

Explique por que uma função polinomial de grau ímpar tem ao menos uma raiz real.

SOLUÇÃO

Seja f uma função polinomial de grau ímpar. Como o grau é ímpar, o teste do termo principal nos diz que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Assim, existem números reais a e b com $a < b$ e tais que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos. Pelo fato de toda função polinomial ser definida e contínua para todos os números reais, f é contínua também no intervalo $[a, b]$. Portanto, pelo Teorema do valor intermediário, $f(c) = 0$ para algum número c em $[a, b]$ e, assim, c é uma raiz real de f.

Divisão longa e o algoritmo da divisão

Ao fatorar um polinômio, descobrimos suas raízes e características da representação gráfica. Veremos uma maneira de fatorar polinômio utilizando a divisão de polinômios, bastante semelhante à divisão de números inteiros. Observe os exemplos a seguir:

$$
\begin{array}{r|l}
3587 & 32 \\ \cline{2-2}
-\underline{32} & 112 \\
387 & \\
-\underline{32} & \\
67 & \\
-\underline{64} & \\
3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
 & 3x^3 + 5x^2 + 8x + 7 & 3x + 2 \\ \cline{3-3}
1x^2 \cdot (3x + 2) \rightarrow & -3x^3 - 2x^2 & x^2 + x + 2 \\ \cline{2-2}
 & 3x^2 + 8x + 7 & \\
 & -3x^2 - 2x & \\ \cline{2-2}
 & 6x + 7 & \\
 & -6x - 4 & \\ \cline{2-2}
 & 3 &
\end{array}
$$

A divisão, seja de um número inteiro ou de um polinômio, envolve um *dividendo* dividido por um *divisor* para obter um *quociente* e um *resto*. Podemos verificar e resumir nosso resultado com uma equação da forma

$$\text{(Divisor)(Quociente)} + \text{Resto} = \text{Dividendo}$$

Das divisões longas expostas, são verdades:

$$32 \cdot 112 + 3 = 3587 \qquad (3x + 2)(x^2 + x + 2) + 3 = 3x^3 + 5x^2 + 8x + 7$$

Vejamos o *algoritmo da divisão*:

Algoritmo da divisão para polinômios

Sejam $f(x)$ e $d(x)$ polinômios com o grau de f maior ou igual ao grau de d, com $d(x) \neq 0$. Existem os únicos polinômios $q(x)$ e $r(x)$, os quais chamados de **quociente** e **resto**, tais que

$$f(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

onde ou $r(x) = 0$, ou o grau de r é menor que o grau de d.

A função $f(x)$ no algoritmo da divisão é o **dividendo** e $d(x)$ é o **divisor**. Se $r(x) = 0$, então dizemos que $d(x)$ **divide exatamente** $f(x)$.

A equação dada no algoritmo da divisão pode ser escrita na *forma de fração* como

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

pois $d(x) \cdot q(x) + r(x) = f(x)$.

EXEMPLO 8 Uso da divisão longa com polinômios

Use a divisão longa para encontrar o quociente e o resto quando $2x^4 - x^3 - 2$ é dividido por $2x^2 + x + 1$. Escreva com a notação do algoritmo da divisão e na forma de fração.

SOLUÇÃO

Vamos considerar $2x^4 - x^3 - 2$ como $2x^4 - x^3 + 0x^2 + 0x - 2$.

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - x^3 + 0x^2 + 0x - 2 & 2x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - x^3 - x^2 \qquad\qquad & x^2 - x \\ \cline{1-1}
-2x^3 - x^2 + 0x - 2 & \\
+2x^3 + x^2 + x \quad\; & \\ \cline{1-1}
x - 2 &
\end{array}$$

O algoritmo da divisão produz a forma polinomial

$$2x^4 - x^3 - 2 = (2x^2 + x + 1)(x^2 - x) + (x - 2)$$

Na forma de fração, temos:

$$\frac{2x^4 - x^3 - 2}{2x^2 + x + 1} = x^2 - x + \frac{x - 2}{2x^2 + x + 1}$$

Teorema do resto e Teorema de D'Alembert

Um importante caso especial do algoritmo da divisão ocorre quando o divisor é da forma $d(x) = x - k$, onde k é um número real. Pelo fato de o grau de $d(x) = x - k$ ser 1, o resto é um número real. Assim, obtemos o resumo simplificado do algoritmo da divisão:

$$f(x) = (x - k) \cdot q(x) + r$$

Veja que se colocarmos k no lugar de x, então:

$$f(k) = (k - k) \cdot q(k) + r = 0 \cdot q(k) + r = 0 + r = r$$

onde r é o resto.

TEOREMA Teorema do resto

Se um polinômio $f(x)$ é dividido por $x - k$, então o resto é $r = f(k)$.

EXEMPLO 9 Uso do Teorema do resto

Encontre o resto quando $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$ é dividido por

(a) $x - 2$ **(b)** $x + 1$ **(c)** $x + 4$

SOLUÇÃO

(a) Podemos encontrar o resto sem usar a divisão longa, mas sim o Teorema do resto com $k = 2$:

$$r = f(2) = 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 20 = 12 + 14 - 20 = 6$$

(b) $r = f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) - 20 = 3 - 7 - 20 = -24$

(c) $r = f(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 20 = 48 - 28 - 20 = 0$

INTERPRETAÇÃO DO CASO QUANDO O RESTO É ZERO

Como em (c) o resto é 0, $x + 4$ divide $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$. Dessa forma, $x + 4$ é um fator de $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$, -4 é uma solução de $3x^2 + 7x - 20 = 0$, e -4 é um valor do eixo horizontal x por onde o gráfico de $y = 3x^2 + 7x - 20$ passa. Podemos chegar a essa conclusão sem dividir, fatorar ou esboçar o gráfico.

TEOREMA Teorema de D'Alembert

Uma função polinomial $f(x)$ tem um fator $x - k$ se e somente se $f(k) = 0$ (é o mesmo que a divisão de $f(x)$ por $x - k$ é exata se e somente se $f(k) = 0$).

Aplicando as idéias do Teorema de D'Alembert no Exemplo 9, podemos fatorar $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$ dividindo pelo fator $x + 4$.

$$\begin{array}{rl|l}
& 3x^2 + 7x - 20 & x + 4 \\
\cline{3-3}
& -3x^2 - 12x & 3x - 5 \\
\cline{2-2}
& -5x - 20 & \\
& +5x + 20 & \\
\cline{2-2}
& 0 &
\end{array}$$

Assim, $f(x) = 3x^2 + 7x - 20 = (x + 4)(3x - 5)$.

Resultados para funções polinomiais

Para uma função polinomial f e um número real k, as afirmações são equivalentes:

1. $x = k$ é uma solução da equação $f(x) = 0$.

2. k é uma raiz da função f.

3. k é um valor por onde o gráfico passa no eixo horizontal x.

4. $x - k$ é um fator de $f(x)$.

Divisão de polinômios pelo método de Briot Ruffini

Continuamos com o importante caso especial de divisão de polinômio com o divisor $x - k$. O Teorema do resto nos dá uma maneira de encontrar o resto sem a técnica da divisão longa. Este método mais curto para a divisão de um polinômio pelo divisor $x - k$ é chamado método de **Briot Ruffini**.

Divisão longa

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\,3x^2 & -\,5x & -\,12 & x-3 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +\,6x^2 & & & 2x^2+3x+4 \\ \cline{1-4}
 & 3x^2 & -\,5x & -\,12 & \\
 & -3x^2 & +\,9x & & \\ \cline{2-4}
 & & 4x & -\,12 & \\
 & & -4x & +\,12 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Briot Ruffini

O esquema inicial é

$$\begin{array}{c|c}
 & \text{coeficientes do polinômio} \\ \hline
k &
\end{array}$$

Repetimos o coeficiente do termo de maior grau embaixo dele mesmo. Multiplicamos esse número pelo k e somamos com o próximo coeficiente da primeira linha; o resultado fica embaixo desse próximo coeficiente. Fazemos repetidamente isto até o final:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -3 & -5 & -12 \\ \hline
3 & 2 & 3 & 4 & 0
\end{array}$$

Observe que os coeficientes obtidos na segunda linha do esquema são os coeficientes da expressão do quociente obtida da divisão longa e o último algarismo na linha é o resto. Logo,

$$2x^3 - 3x^2 - 5x - 12 = (2x^2 + 3x + 4)(x - 3)$$

Teorema das raízes racionais

As raízes reais das funções polinomiais são **raízes racionais** – raízes que são números racionais – ou **raízes irracionais** – raízes que são números irracionais. Por exemplo,

$$f(x) = 4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$$

tem as raízes racionais $-3/2$ e $3/2$. Outro caso:

$$f(x) = x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

tem as raízes irracionais $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

TEOREMA Teorema das raízes racionais

Suponha f uma função polinomial de grau $n \geq 1$ da forma

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

com todos os coeficientes como números inteiros e $a_0 \neq 0$. Se $x = p/q$ é uma raiz racional de f, onde p e q são primos entre si, então:

- p é um fator inteiro do termo independente a_0; e
- q é um fator inteiro do coeficiente principal a_n.

EXEMPLO 10 Análise das raízes da função

Encontre as raízes racionais de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

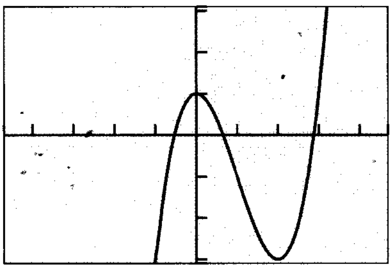
SOLUÇÃO

Como o coeficiente principal e o termo independente são ambos iguais a 1, de acordo com o Teorema das raízes racionais, as raízes que f pode ter são 1 e -1. Podemos verificar se são raízes de f:

$$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 1 = -1 \neq 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -3 \neq 0$$

Assim, f não tem raízes racionais. Logo, suas raízes, caso existam, são irracionais. A Figura 10.12 mostra que existem três raízes e a nossa conclusão é que elas são irracionais.



[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]

Figura 10.12 O gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Vimos no Exemplo 10 apenas dois valores candidatos a serem raízes racionais do polinômio. Às vezes, esse número é maior, como veremos no Exemplo 11.

EXEMPLO 11 Análise das raízes da função

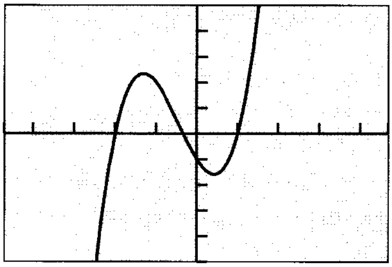
Encontre as raízes racionais de $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

SOLUÇÃO

Como o coeficiente principal é 3 e o termo independente é -2, pelo Teorema das raízes racionais, temos vários candidatos para serem essas raízes. Os candidatos são:

$$\frac{\text{Fatores de } -2}{\text{Fatores de } 3} : \frac{\pm 1, \pm 2}{\pm 1, \pm 3} : \pm 1, \pm 2, \pm 1/3, \pm 2/3$$

A Figura 10.13 sugere, entre todos os valores candidatos, as raízes 1, -2 e, possivelmente, $-1/3$ ou $-2/3$.



$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-10, 10]$

Figura 10.13 O gráfico da função $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

Vejamos pelo método de Briot Ruffini se 1 é raiz de f.

	3	4	−5	−2
1	3	7	2	0

Como o último número na segunda linha é 0, então $x - 1$ é um fator de $f(x)$ e 1 é uma raiz de f. Pelo algoritmo da divisão e usando fatoração, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2 \\ &= (x - 1)(3x^2 + 7x + 2) \\ &= (x - 1)(3x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

Assim, as raízes racionais de f são 1, $-1/3$ e -2.

Limites superior e inferior das raízes de uma função polinomial

Um número k é um **limite superior para raízes reais** de f se $f(x)$ nunca é zero quando x é maior que k. De outra forma, um número k é um **limite inferior para raízes reais** de f se $f(x)$ nunca é zero quando x é menor que k. Assim, se c é um limite inferior e d é um limite superior para as raízes reais de uma função f, então todas as raízes reais de f precisam estar no intervalo $[c, d]$. A Figura 10.14 ilustra essa situação.

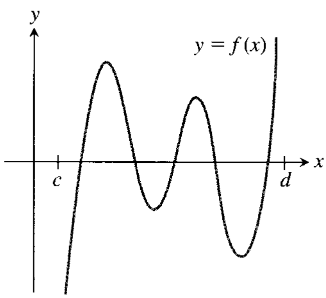


Figura 10.14 c é um limite inferior e d é um limite superior para as raízes reais de f.

Teste dos limites superior e inferior de raízes reais

Seja f uma função polinomial de grau $n \geq 1$ com um coeficiente principal positivo. Suponha $f(x)$ dividido por $x - k$, usando o método de Briot Ruffini.

- Se $k \geq 0$ e todo número na segunda linha é não negativo (positivo ou zero), então k é um *limite superior* para as raízes reais de f.
- Se $k \leq 0$ e os números na segunda linha são alternadamente não negativos e não positivos, então k é um *limite inferior* para as raízes reais de f.

EXEMPLO 12 Verificação dos limites das raízes reais de uma função

Prove que todas as raízes reais de $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 14x + 8$ pertencem ao intervalo $[-2, 5]$.

SOLUÇÃO

Precisamos provar que 5 é um limite superior e -2 é um limite inferior para as raízes reais de f. A função f tem um coeficiente principal positivo, assim, podemos aplicar o Teste dos limites superior e inferior de raízes reais e usar o método de Briot Ruffini.

	2	−7	−8	14	8
5	2	3	7	49	253

	2	−7	−8	14	8
−2	2	−11	14	−14	36

Como a segunda linha na primeira divisão consiste em todos os números não negativos, então 5 é um limite superior. Como a segunda linha na segunda divisão consiste em números alternando o sinal, então -2 é um limite inferior. Todas as raízes reais de f precisam estar no intervalo fechado $[-2, 5]$.

Veremos a seguir quais são essas raízes.

EXEMPLO 13 Cálculo das raízes reais de uma função polinomial

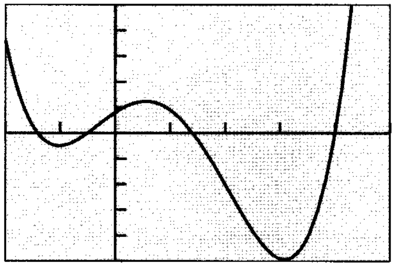
Encontre todas as raízes reais de $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 14x + 8$.

SOLUÇÃO

Do Exemplo 12, sabemos que todas as raízes reais de f estão no intervalo fechado $[-2, 5]$. Usando o Teorema das raízes racionais, temos:

$$\frac{\text{Fatores de 8}}{\text{Fatores de 2}} : \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8}{\pm 1, \pm 2} : \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 1/2$$

Podemos comparar esses valores, que são candidatos, com os valores do gráfico por onde a curva passa no eixo horizontal x (Figura 10.15).



$[-2, 5]$ por $[-50, 50]$

Figura 10.15 O gráfico de $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 14x + 8$.

Os valores que parecem ser raízes são 4 e $-1/2$.
Aplicando o método de Briot Ruffini para 4, temos:

	2	−7	−8	14	8
4	2	1	−4	−2	0

Assim, $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 14x + 8 = (x - 4)(2x^3 + x^2 - 4x - 2)$.
Vamos aplicar o método novamente para $-1/2$.

	2	1	−4	−2
−1/2	2	0	−4	0

Dessa forma,

$$f(x) = (x - 4)(2x^3 + x^2 - 4x - 2) = (x - 4)\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4) =$$

$$= 2(x - 4)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2) = (x - 4)(2x + 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

Assim, as raízes de f são os números racionais 4 e $-1/2$ e os números irracionais $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

Uma função polinomial não pode ter mais raízes reais que o seu grau, mas pode ter menos. Quando uma função polinomial tem menos raízes reais que seu grau, o Teste dos limites superior e inferior de raízes reais nos auxilia para saber se encontramos todas elas.

EXEMPLO 14 Cálculo das raízes reais de uma função polinomial

Prove que todas as raízes reais de $f(x) = 10x^5 - 3x^2 + x - 6$ pertencem ao intervalo $[0, 1]$.

SOLUÇÃO

Precisamos provar que 1 é o limite superior e 0 é o limite inferior para todas as raízes reais de f. A função f tem um coeficiente principal positivo e assim vamos usar a divisão pelo método de Briot Ruffini e o Teste dos limites superior e inferior de raízes reais.

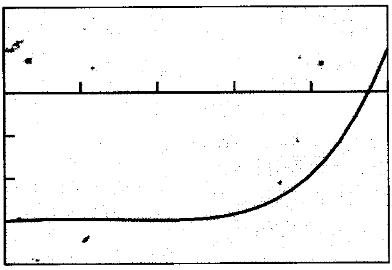
	10	0	0	−3	1	−6
1	10	10	10	7	8	2

	10	0	0	−3	1	−6
0	10	0	0	−3	1	−6

Na primeira divisão, a segunda linha tem somente números não negativos; logo, 1 é o limite superior das raízes. Na segunda divisão, a segunda linha tem números alternados positivos e negativos; logo, 0 é o limite inferior das raízes. Todas as raízes reais de f pertencem ao intervalo fechado $[0, 1]$. Pelo Teste das raízes racionais:

$$\frac{\text{Fatores de } -6}{\text{Fatores de } 10} : \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6}{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10} : \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{6}{5}, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{3}{10}$$

Podemos comparar esses valores, que são candidatos, com os valores do gráfico por onde a curva passa no eixo horizontal x (Figura 10.16).



[0, 1] por [−8, 4]

Figura 10.16 O gráfico de $y = 10x^5 - 3x^2 + x - 6$.

A nossa conclusão é que f não tem raízes racionais. Podemos verificar também que f muda de sinal sobre o intervalo $[0{,}8; 1]$ e isso mostra que existe uma raiz real nesse intervalo (pelo Teorema do valor intermediário), que, no caso, é uma raiz irracional.

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 a 4, reescreva a expressão como um polinômio na forma-padrão.

1. $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 7x}{x}$

2. $\dfrac{2x^3 - 5x^2 - 6x}{2x}$

3. $\dfrac{x^4 - 3x^2 + 7x^5}{x^2}$

4. $\dfrac{6x^4 - 2x^3 + 7x^2}{3x^2}$

Nos exercícios 5 a 16, fatore o polinômio em fatores lineares.

5. $x^3 - 4x$

6. $6x^2 - 54$

7. $4x^2 + 8x - 60$

8. $15x^3 - 22x^2 + 8x$

9. $x^3 + 2x^2 - x - 2$

10. $x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x$

11. $x^2 - x - 12$

12. $x^2 - 11x + 28$

13. $3x^2 - 11x + 6$

14. $6x^2 - 5x + 1$

15. $3x^3 - 5x^2 + 2x$

16. $6x^3 - 22x^2 + 12x$

Nos exercícios 17 a 20, escreva apenas a solução da equação (você pode resolver sem escrever).

17. $x(x - 1) = 0$

18. $x(x + 2)(x - 5) = 0$

19. $(x + 6)^3(x + 3)(x - 1{,}5) = 0$

20. $(x + 6)^2(x + 4)^4(x - 5)^3 = 0$

Exercícios

Nos exercícios 1 a 6, descreva como transformar o gráfico de uma função monomial $f(x) = x^n$ em um gráfico da função polinomial dada. Você pode esboçar o gráfico da função ou utilizar uma calculadora apropriada. Verifique onde o gráfico passa no eixo vertical y (o intercepto).

1. $g(x) = 2(x - 3)^3$

2. $g(x) = -(x + 5)^3$

3. $g(x) = -1/2\,(x + 1)^3 + 2$

4. $g(x) = 2/3\,(x - 3)^3 + 1$

5. $g(x) = -2(x + 2)^4 - 3$

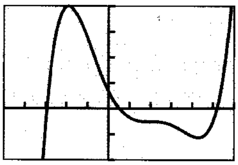
6. $g(x) = 3(x - 1)^4 - 2$

Nos exercícios 7 e 8, esboce o gráfico da função polinomial e localize seus extremos locais e raízes.

7. $f(x) = -x^4 + 2x$

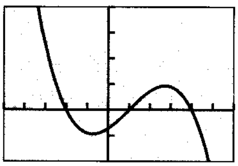
8. $g(x) = 2x^4 - 5x^2$

Nos exercícios 9 a 12, associe a função polinomial a seu gráfico. Explique a sua escolha.



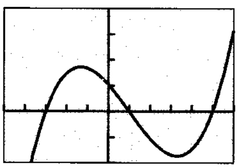
$[-5, 6]$ por $[-200, 400]$

(a)



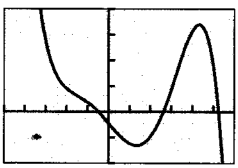
$[-5, 6]$ por $[-200, 400]$

(b)



$[-5, 6]$ por $[-200, 400]$

(c)



$[-5, 6]$ por $[-200, 400]$

(d)

9. $f(x) = 7x^3 - 21x^2 - 91x + 104$

10. $f(x) = -9x^3 + 27x^2 + 54x - 73$

11. $f(x) = x^5 - 8x^4 + 9x^3 + 58x^2 - 164x + 69$

12. $f(x) = -x^5 + 3x^4 + 16x^3 - 2x^2 - 95x - 44$

Nos exercícios 13 a 20, esboce o gráfico da função de modo que seja possível visualizar seus extremos e raízes. Descreva o comportamento da função nos extremos do domínio.

13. $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$

14. $f(x) = (2x - 3)(4 - x)(x + 1)$

15. $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 31x - 70$

16. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 41x + 42$

17. $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)(x - 3)$

18. $f(x) = (2x + 1)(x - 4)^3$

19. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 14x + 41$

20. $f(x) = -3x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 5x + 19$

Nos exercícios 21 a 24, descreva o comportamento da função polinomial nos extremos do domínio usando $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

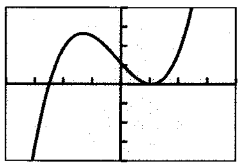
21. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 3$

22. $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 4x + 3$

23. $f(x) = 7x^2 - x^3 + 3x - 4$

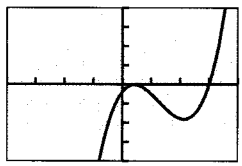
24. $f(x) = x^3 - x^4 + 3x^2 - 2x + 7$

Nos exercícios 25 a 28, associe a função polinomial a seu gráfico. Dê o valor aproximado das raízes da função. Use calculadora como recurso gráfico.



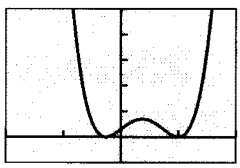
$[-4, 4]$ por $[-200, 200]$

(a)



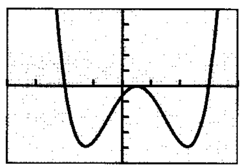
$[-4, 4]$ por $[-200, 200]$

(b)



$[-2, 2]$ por $[-10, 50]$

(c)



$[-4, 4]$ por $[-50, 50]$

(d)

25. $f(x) = 20x^3 + 8x^2 - 83x + 55$

26. $f(x) = 35x^3 - 134x^2 + 93x - 18$

27. $f(x) = 44x^4 - 65x^3 + x^2 + 17x + 3$

28. $f(x) = 4x^4 - 8x^3 - 19x^2 + 23x - 6$

Nos exercícios 29 a 34, encontre as raízes da função algebricamente.

29. $f(x) = x^2 + 2x - 8$

30. $f(x) = 3x^2 + 4x - 4$

31. $f(x) = 9x^2 - 3x - 2$

32. $f(x) = x^3 - 25x$

33. $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x$

34. $f(x) = 5x^3 - 5x^2 - 10x$

Nos exercícios 35 a 38, verifique o grau e as raízes da função polinomial. Verifique a multiplicidade de cada raiz e se o gráfico cruza ou não o eixo x no valor analisado. Você pode esboçar o gráfico da função polinomial.

35. $f(x) = x(x - 3)^2$

36. $f(x) = -x^3(x - 2)$

37. $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2$

38. $f(x) = 7(x - 3)^2(x + 5)^4$

Nos exercícios 39 a 42, encontre as raízes da função algébrica ou graficamente (com uma calculadora apropriada).

39. $f(x) = x^3 - 36x$

40. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 109x - 110$

41. $f(x) = x^3 - 7x^2 - 49x + 55$

42. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 44x + 96$

Nos exercícios 43 a 46, encontre algebricamente uma função cúbica com as raízes dadas. Você pode conferir a função obtida esboçando o gráfico manualmente ou com uma calculadora apropriada.

43. $3, -4, 6$ **44.** $-2, 3, -5$

45. $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 4$ **46.** $1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$

Nos exercícios 47 e 48, explique por que a função tem no mínimo uma raiz real.

47. $f(x) = x^7 + x + 100$

48. $f(x) = x^9 - x + 50$

49. Economistas determinaram que as funções receita total e custo total referentes ao período de um ano de uma pequena empresa são dadas, respectivamente, por $R(x) = 0{,}0125x^2 + 412x$ e $C(x) = 12.225 + 0{,}00135x^3$, onde x é o número de clientes.

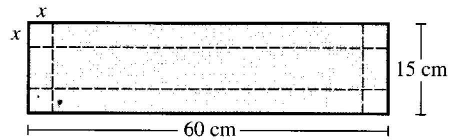
(a) Quantos clientes são necessários para que exista lucro na pequena empresa?

(b) Quantos clientes são necessários para que haja um lucro anual de R$ 60.000,00?

50. Uma caixa sem tampa será feita apenas removendo um quadrado de tamanho x dos cantos de uma peça de papelão, com medidas 15 cm por 60 cm.

(a) Mostre que o volume da caixa é dado por $V(x) = x(60 - 2x)(15 - 2x)$.

(b) Determine o valor de x de modo que o volume da caixa seja de no mínimo 450 cm³.



51. Quadrados de tamanho x são removidos de uma peça de papelão de 10 cm por 25 cm, para obter uma caixa sem tampa. Determine todos os valores de x tais que o volume da caixa resultante seja de no mínimo 175 cm³.

52. A função $V(x) = 2666x - 210x^2 + 4x^3$ representa o volume de uma caixa que foi feita removendo quadrados de tamanho x de cada canto de uma peça retangular. Quais valores são possíveis para x?

53. Verdadeiro ou falso O gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 2$ cruza o eixo horizontal x entre $x = 1$ e $x = 2$. Justifique sua resposta.

54. Verdadeiro ou falso Se o gráfico de $g(x) = (x + a)^2$ é obtido transladando o gráfico de $f(x) = x^2$ para a direita, então a precisa ser positivo. Justifique sua resposta.

Nos exercícios 55 e 56, resolva o problema sem usar uma calculadora.

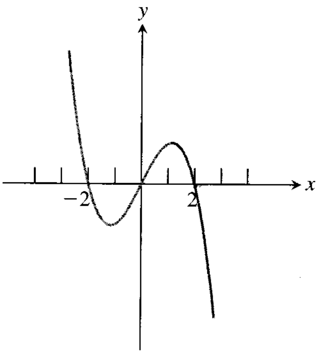
55. Múltipla escolha Qual é o valor por onde o gráfico de $f(x) = 2(x - 1)^3 + 5$ passa no eixo vertical y?

(a) 7 **(b)** 5 **(c)** 3
(d) 2 **(e)** 1

56. Múltipla escolha Qual é a multiplicidade da raiz $x = 2$ em $f(x) = (x - 2)^2(x + 2)^3(x + 3)^7$?

(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 3
(d) 5 **(e)** 7

57. Múltipla escolha O gráfico a seguir é de qual função?



(a) $f(x) = -x(x + 2)(2 - x)$

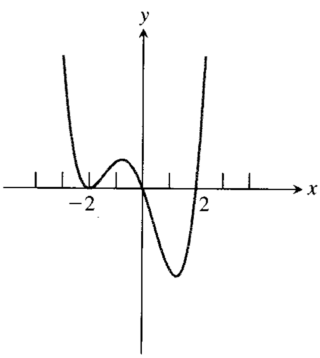
(b) $f(x) = -x(x + 2)(x - 2)$

(c) $f(x) = -x^2(x + 2)(x - 2)$

(d) $f(x) = -x(x + 2)^2(x - 2)$

(e) $f(x) = -x(x + 2)(x - 2)^2$

58. Múltipla escolha O gráfico a seguir é de qual função?



(a) $f(x) = x(x + 2)^2(x - 2)$

(b) $f(x) = x(x + 2)^2(2 - x)$

(c) $f(x) = x^2(x + 2)(x - 2)$

(d) $f(x) = x(x + 2)(x - 2)^2$

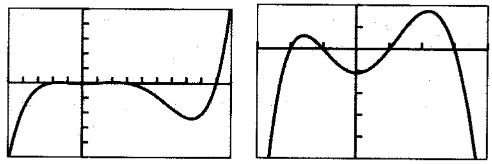
(e) $f(x) = x^2(x + 2)(x - 2)^2$

Nos exercícios 59 e 60, a mesma função é representada graficamente em escalas diferentes.

59. Descreva por que cada representação da função

$$f(x) = x^5 - 10x^4 + 2x^3 + 64x^2 - 3x - 55$$

pode ser considerada inadequada.



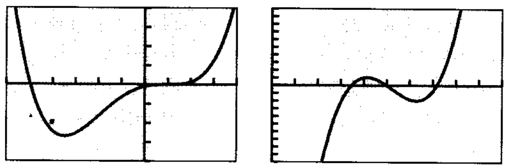
[−5, 10] por [−7500, 7500]
(a)

[−3, 4] por [−250, 100]
(b)

60. Descreva por que cada representação da função

$$f(x) = 10x^4 + 19x^3 - 121x^2 + 143x - 51$$

pode ser considerada inadequada.



[−6, 4] por [−2000, 2000]
(a)

[0,5; 1,5] por [−1, 1]
(b)

Nos exercícios 61 a 66, divida $f(x)$ por $d(x)$ e escreva novamente a função como conseqüência do algoritmo da divisão e também na forma de fração.

61. $f(x) = x^2 - 2x + 3$; $d(x) = x - 1$

62. $f(x) = x^3 - 1$; $d(x) = x + 1$

63. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 7x - 9$; $d(x) = x + 3$

64. $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 2x - 1$; $d(x) = 2x + 1$

65. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6$;
$d(x) = x^2 + 2x - 1$

66. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5$;
$d(x) = x^2 + 1$

Nos exercícios 67 a 72, faça a divisão pelo método de Briot Ruffini e escreva a função na forma de fração.

67. $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x + 1}$

68. $\dfrac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

69. $\dfrac{9x^3 + 7x^2 - 3x}{x - 10}$

70. $\dfrac{3x^4 + x^3 - 4x^2 + 9x - 3}{x + 5}$

71. $\dfrac{5x^4 - 3x + 1}{4 - x}$

72. $\dfrac{x^8 - 1}{x + 2}$

Nos exercícios 73 a 78, use o Teorema do resto para encontrar o valor do resto quando $f(x)$ está dividido por $x - k$.

73. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1; k = 2$

74. $f(x) = x^4 - 5; k = 1$

75. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1; k = -3$

76. $f(x) = x^3 - 3x + 4; k = -2$

77. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7; k = 2$

78. $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 20x + 3; k = -1$

Nos exercícios 79 a 84, use o Teorema de D'Alembert para determinar se o primeiro polinômio é um fator do segundo polinômio.

79. $x - 1; x^3 - x^2 + x - 1$

80. $x - 3; x^3 - x^2 - x - 15$

81. $x - 2; x^3 + 3x - 4$

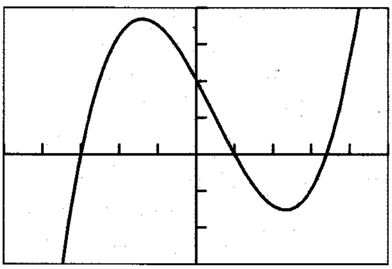
82. $x - 2; x^3 - 3x - 2$

83. $x + 2; 4x^3 + 9x^2 - 3x - 10$

84. $x + 1; 2x^{10} - x^9 + x^8 + x^7 + 2x^6 - 3$

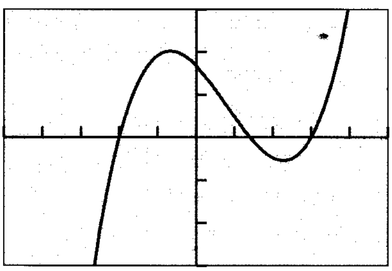
Nos exercícios 85 e 86, use o gráfico para deduzir possíveis fatores lineares de $f(x)$. Fatore a função com auxílio do método de Briot Ruffini.

85. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 - 49x + 51$



$[-5, 5]$ por $[-75, 100]$

86. $f(x) = 5x^3 - 12x^2 - 23x + 42$



$[-5, 5]$ por $[-75, 75]$

Nos exercícios 87 a 90, encontre a função polinomial com coeficiente principal 2 e com as raízes e grau dados.

87. Grau 3, com -2, 1 e 4 como raízes.

88. Grau 3, com -1, 3 e -5 como raízes.

89. Grau 3, com 2, 1/2 e 3/2 como raízes.

90. Grau 4, com -3, -1, 0 e 5/2 como raízes.

Nos exercícios 91 e 92, usando somente métodos algébricos, encontre a função cúbica com os valores dados nas tabelas.

91.

x	-4	0	3	5
$f(x)$	0	180	0	0

92.

x	-2	-1	1	5
$f(x)$	0	24	0	0

Nos exercícios 93 a 96, use o Teorema das raízes racionais para escrever uma lista de todas as raízes racionais candidatas.

93. $f(x) = 6x^3 - 5x - 1$

94. $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 14$

95. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 9x + 9$

96. $f(x) = 6x^4 - x^3 - 6x^2 - x - 12$

Nos exercícios 97 a 100, use a divisão pelo método de Briot Ruffini para provar que k é um limite superior para as raízes reais da função f.

97. $k = 3; f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

98. $k = 5; f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 5x - 1$

99. $k = 2; f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x - 12$

100. $k = 3; f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 9x + 2$

Nos exercícios 101 a 104, use a divisão pelo método de Briot Ruffini para provar que k é um limite inferior para as raízes reais da função f.

101. $k = -1; f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 3$

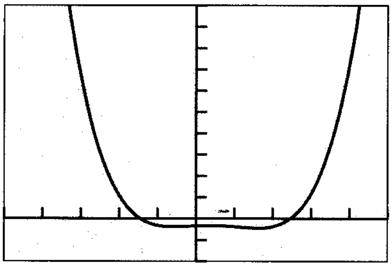
102. $k = -3; f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 5$

103. $k = 0; f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

104. $k = -4; f(x) = 3x^3 - x^2 - 5x - 3$

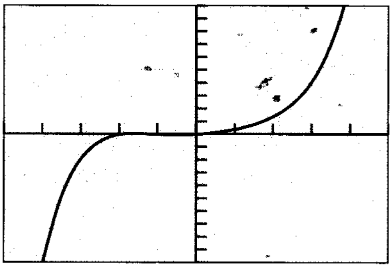
Nos exercícios 105 a 108, use o Teste dos limites superior e inferior das raízes para decidir se existem raízes reais para a função, que estejam fora da região do gráfico que está exposta.

105. $f(x) = 6x^4 - 11x^3 - 7x^2 + 8x - 34$



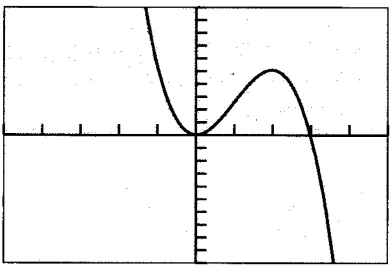
$[-5, 5]$ por $[-200, 1000]$

106. $f(x) = x^5 - x^4 + 21x^2 + 19x - 3$



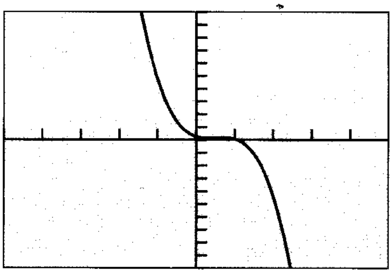
$[-5, 5]$ por $[-1000, 1000]$

107. $f(x) = x^5 - 4x^4 - 129x^3 + 396x^2 - 8x + 3$



$[-5, 5]$ por $[-1000, 1000]$

108. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 141x^3 + 216x^2 - 91x + 25$



$[-5, 5]$ por $[-1000, 1000]$

Nos exercícios 109 a 116, encontre todas as raízes reais da função (e seus valores exatos) se possível. Analise cada raiz se é racional ou irracional.

109. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$

110. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$

111. $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 6$

112. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4$

113. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x + 8$

114. $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10$

115. $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

116. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 2$

117. Encontre o resto quando $x^{40} - 3$ está dividido por $x + 1$.

118. Encontre o resto quando $x^{63} - 17$ está dividido por $x - 1$.

119. Seja $f(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 13x + 38$.

(a) Use o teste dos limites superior e inferior das raízes para provar que todas as raízes reais de f pertencem ao intervalo $[-5, 4]$.

(b) Encontre todas as raízes racionais de f.

(c) Fatore $f(x)$ usando as raízes racionais encontradas em (b).

(d) Aproxime todas as raízes irracionais de f.

(e) Faça a divisão pelo método de Briot Ruffini com as raízes irracionais do item (d) para continuar a fatoração de $f(x)$ até ficar como em (c).

120. Verdadeiro ou falso A função polinomial $f(x)$ tem um fator $x + 2$ se e somente se $f(2) = 0$. Justifique sua resposta.

121. Verdadeiro ou falso Se $f(x) = (x - 1)(2x^2 - x + 1) + 3$, então quando $f(x)$ é dividido por $x - 1$ o resto é 3. Justifique sua resposta.

122. Múltipla escolha Seja f uma função polinomial com $f(3) = 0$. Qual das seguintes afirmativas não é verdadeira?

(a) $x + 3$ é um fator de $f(x)$.

(b) $x - 3$ é um fator de $f(x)$.

(c) $x = 3$ é uma raiz de $f(x)$.

(d) 3 corta o eixo horizontal x em 3.

(e) O resto quando $f(x)$ é dividido por $x - 3$ é zero.

123. Múltipla escolha Seja $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$. Qual das seguintes alternativas não tem uma possível raiz racional de f?

(a) -3 **(b)** -1 **(c)** 1

(d) $1/2$ **(e)** $2/3$

124. Múltipla escolha Seja $f(x) = (x + 2)(x^2 + x - 1) - 3$. Qual das seguintes alternativas não é verdadeira?

(a) Quando $f(x)$ é dividido por $x + 2$, o resto é -3.

(b) Quando $f(x)$ é dividido por $x - 2$, o resto é -3.

(c) Quando $f(x)$ é dividido por $x^2 + x - 1$, o resto é -3.

(d) $x + 2$ não é um fator de $f(x)$.

(e) $f(x)$ não é completamente divisível por $x + 2$.

125. Múltipla escolha Seja $f(x) = (x^2 + 1)(x - 2) + 7$. Qual das seguintes alternativas não é verdadeira?

(a) Quando $f(x)$ é dividido por $x^2 + 1$, o resto é 7.

(b) Quando $f(x)$ é dividido por $x - 2$, o resto é 7.

(c) $f(2) = 7$.

(d) $f(0) = 5$.

(e) f não tem uma raiz real.

Funções exponenciais

Objetivos de aprendizagem

- Gráficos de funções exponenciais.
- A base da função dada pelo número e.
- Funções de crescimento e decaimento logístico.
- Taxa percentual constante e funções exponenciais.
- Modelos de crescimento e decaimento exponencial.

Funções exponenciais modelam muitos padrões de crescimento, incluindo o crescimento de populações humanas e animais.

Gráficos de funções exponenciais

Cada uma das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ envolve uma base e uma potência, porém com características que destacaremos:

- Para $f(x) = x^2$, a base é a variável x e o expoente é a constante 2; f é tanto uma *função potência* como uma função monomial conhecida.
- Para $g(x) = 2^x$, a base é a constante 2 e o expoente é a variável x; g é uma *função exponencial*. Veja a Figura 11.1.

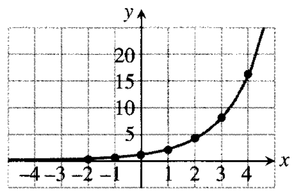


Figura 11.1 Esboço de $g(x) = 2^x$.

DEFINIÇÃO Funções exponenciais

Sejam a e b constantes reais, uma **função exponencial** em x é uma função que pode ser escrita na forma

$$f(x) = a \cdot b^x$$

onde a é diferente de zero, b é positivo e $b \neq 1$. A constante a é o *valor* de f quando $x = 0$ e b é a **base**.

Funções exponenciais estão definidas e são contínuas para todos os números reais. É importante reconhecer se uma função é, de fato, uma função exponencial.

EXEMPLO 1 Identificação de funções exponenciais

(a) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial, com um valor a igual a 1 e base igual a 3.

(b) $g(x) = 6x^{-4}$ *não* é uma função exponencial porque a base x é uma variável e o expoente é uma constante; g é uma função potência.

(c) $h(x) = -2 \cdot 1{,}5^x$ é uma função exponencial, com um valor a igual a -2 e base igual a 1,5.

(d) $k(x) = 7 \cdot 2^{-x}$ é uma função exponencial, com um valor a igual a 7 e base igual a 1/2, pois $2^{-x} = (2^{-1})^x = (1/2)^x$.

(e) $q(x) = 5 \cdot 6^{\pi}$ *não* é uma função exponencial porque o expoente π é uma constante; q é uma função constante.

EXEMPLO 2 Cálculo dos valores de uma função exponencial para alguns números racionais

Para $f(x) = 2^x$, temos:

(a) $f(4) = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

(b) $f(0) = 2^0 = 1$

(c) $f(-3) = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

(d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2^{1/2} = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

(e) $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 2^{-3/2} = \dfrac{1}{2^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = 0{,}35355\ldots$

Não existe propriedade de potenciação para expressar o valor de uma função exponencial quando o expoente é *irracional.* Por exemplo, se $f(x) = 2^x$, então $f(\pi) = 2^\pi$, porém o que 2^π significa? O que podemos fazer são apenas aproximações, como mostra a Tabela 11.1:

Tabela 11.1 Valores de $f(x) = 2^x$ para números racionais aproximando π por 3,14159265...

x	3	3,1	3,14	3,141	3,1415	3,14159
2^x	8	8,5. . .	8,81. . .	8,821. . .	8,8244. . .	8,82496. . .

EXEMPLO 3 Identificação da lei de uma função exponencial a partir de alguns valores tabelados

Determine fórmulas para as funções exponenciais g e h, cujos valores são dados na Tabela 11.2.

Tabela 11.2 Alguns valores para duas funções exponenciais

x	$g(x)$		$h(x)$	
-2	4/9		128	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
-1	4/3		32	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
0	4		8	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
1	12		2	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
2	36		1/2	

SOLUÇÃO

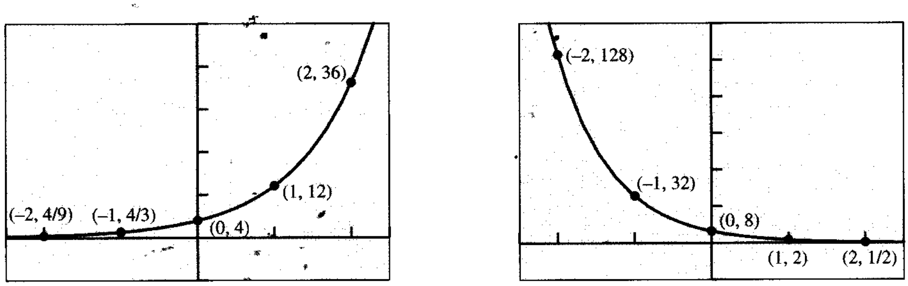
Como g é uma função exponencial, então $g(x) = a \cdot b^x$. Como $g(0) = 4$, então o valor de a é igual a 4. Como $g(1) = 4 \cdot b^1 = 12$, então a base b é igual a 3. Assim,

$$g(x) = 4 \cdot 3^x$$

Como h é uma função exponencial, então $h(x) = a \cdot b^x$. Como $h(0) = 8$, então o valor de a é igual a 8. Como $h(1) = 8 \cdot b^1 = 2$, então a base b é igual a 1/4. Assim,

$$h(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

A Figura 11.2 mostra os gráficos dessas funções, e os pontos destacados são os pares ordenados mostrados na Tabela 11.2.



[−2,5; 2,5] por [−10, 50]
(a)

[−2,5; 2,5] por [−25, 150]
(b)

Figura 11.2 Gráficos de (a) $g(x) = 4 \cdot 3^x$ e (b) $h(x) = 8 \cdot (1/4)^x$.

Na Tabela 11.2 podemos verificar que os valores da função $g(x)$ crescem com fator de multiplicação igual a 3 e os da função $h(x)$ decrescem com fator de multiplicação igual a 1/4. Além disso, a variação dos valores de x é de uma unidade e o fator de multiplicação é a base da função exponencial. Este padrão generaliza todas as funções exponenciais, como vemos na Tabela 11.3.

Tabela 11.3 Valores para uma função exponencial $f(x) = a \cdot b^x$

x	$a \times b^x$	
-2	ab^{-2}	$\times b$
-1	ab^{-1}	$\times b$
0	a	$\times b$
1	ab	$\times b$
2	ab^2	

Na Tabela 11.3 vemos que, quando x cresce uma unidade, o valor da função é multiplicado pela base b. Essa relação acarreta na seguinte *fórmula recursiva*.

Crescimento e decrescimento exponencial

Para qualquer função exponencial $f(x) = a \cdot b^x$ e qualquer número real x,

$$f(x + 1) = b \cdot f(x)$$

Se $a > 0$ e $b > 1$, então a função f é crescente e é uma **função de crescimento exponencial**. A base b é o seu **fator de crescimento**.

Se $a > 0$ e $b < 1$, então a função f é decrescente e é uma **função de decaimento exponencial**. A base b é o seu **fator de decaimento**.

No Exemplo 3, g é uma função de crescimento exponencial e h é uma função de decaimento exponencial. Quando x cresce por 1, $g(x) = 4 \cdot 3^x$ cresce pelo fator 3 e $h(x) = 8 \cdot (1/4)^x$ decresce pelo fator 1/4. A base de uma função exponencial nos diz se a função é crescente ou decrescente.

Vamos resumir o que aprendemos sobre funções exponenciais com um valor de a igual a 1.

Funções exponenciais $f(x) = b^x$

Domínio: conjunto de todos os números reais
Imagem: $]0, +\infty[$
É contínua
Não é simétrica: não é função par, não é função ímpar
Limitada inferiormente, mas não superiormente
Não tem extremos locais
Assíntota horizontal: $y = 0$
Não tem assíntotas verticais
Se $b > 1$ (veja a Figura 11.3a), então
- f é uma função crescente,
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Se $0 < b < 1$ (veja a Figura 11.3b), então
- f é uma função decrescente,
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

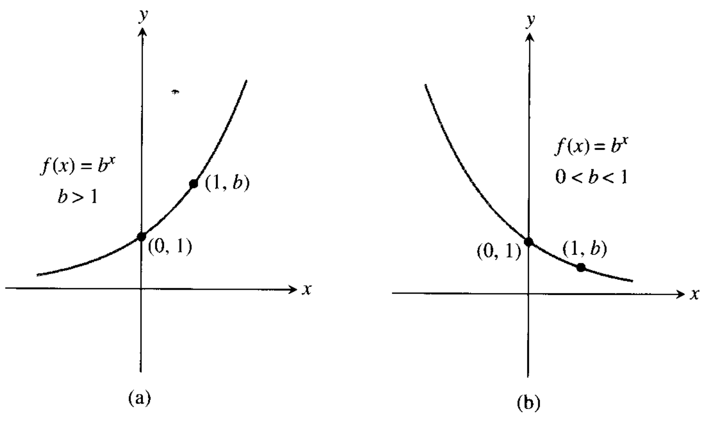


Figura 11.3 Gráficos de $f(x) = b^x$ para (a) $b > 1$ e (b) $0 < b < 1$.

Observe o que podemos fazer também com as funções exponenciais.

EXEMPLO 4 Transformação de funções exponenciais

Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = 2^x$ no gráfico da função dada.

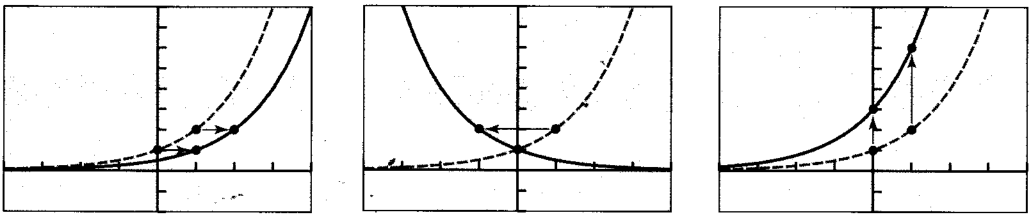
(a) $g(x) = 2^{x-1}$ **(b)** $h(x) = 2^{-x}$ **(c)** $k(x) = 3 \cdot 2^x$

SOLUÇÃO

(a) O gráfico de $g(x) = 2^{x-1}$ é obtido transladando o gráfico de $f(x) = 2^x$ uma unidade para a direita (Figura 11.4a).

(b) Podemos obter o gráfico de $h(x) = 2^{-x}$ refletindo o gráfico de $f(x) = 2^x$ com relação ao eixo vertical y (Figura 11.4b). Como $2^{-x} = (2^{-1})^x = (1/2)^x$, então podemos pensar em h como uma função exponencial com um valor de a igual a 1 e uma base igual a 1/2.

(c) Podemos obter o gráfico de $k(x) = 3 \cdot 2^x$ esticando verticalmente o gráfico de $f(x) = 2^x$ pelo fator 3 (Figura 11.4c).



[−4, 4] por [−2, 8]
(a)

[−4, 4] por [−2, 8]
(b)

[−4, 4] por [−2, 8]
(c)

Figura 11.4 O gráfico de $f(x) = 2^x$ com (a) $g(x) = 2^{x-1}$, (b) $h(x) = 2^{-x}$ e (c) $k(x) = 3 \cdot 2^x$.

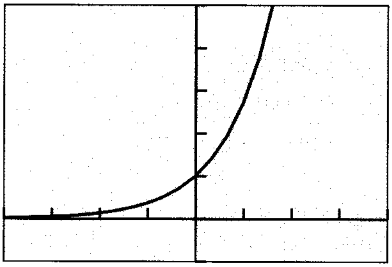
A base da função dada pelo número e

A função $f(x) = e^x$ é uma função de crescimento exponencial.

Vamos fazer um resumo também para essa função exponencial.

Função exponencial $f(x) = e^x$

Domínio: conjunto de todos os números reais
Imagem: $]0, +\infty[$
É contínua
É crescente para todo valor de x do domínio
Não é simétrica
Limitada inferiormente, mas não superiormente
Não tem extremos locais
Assíntota horizontal: $y = 0$
Não tem assíntotas verticais
Comportamento nos extremos do domínio: $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



[−4, 4] por [−1, 5]

Figura 11.5 O gráfico de $f(x) = e^x$.

Como $f(x) = e^x$ é crescente, então é uma função de crescimento exponencial; logo $e > 1$. Mas o que é o número e?

A letra e é a inicial do último nome de Leonhard Euler (1707-1783), que foi quem introduziu a notação. Como $f(x) = e^x$ tem propriedades especiais de cálculo que simplificam muitas contas, então e é a *base natural* da função exponencial, que é chamada de *função exponencial natural.*

DEFINIÇÃO A base natural e

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Não podemos calcular o número irracional e diretamente, mas usando esta definição podemos obter, sucessivamente, aproximações cada vez melhores para e, como mostrado na Tabela 11.4.

Tabela 11.4 Aproximações para a base natural e

x	1	10	100	1000	10.000	100.000
$(1 + 1/x)^x$	2	2,5...	2,70...	2,716...	2,7181...	2,71826...

Em geral, estamos mais interessados na função exponencial $f(x) = e^x$ e variações desta função do que no número irracional e. De fato, *qualquer* função exponencial pode ser expressa em termos da base natural e.

TEOREMA Funções exponenciais e a base e

Qualquer função exponencial $f(x) = a \cdot b^x$ pode ser reescrita como

$$f(x) = a \cdot e^{kx}$$

para uma constante k sendo um número real apropriadamente escolhido.
Se $a > 0$ e $k > 0$, então $f(x) = a \cdot e^{kx}$ é uma função de crescimento exponencial (veja a Figura 11.6a).
Se $a > 0$ e $k < 0$, então $f(x) = a \cdot e^{kx}$ é uma função de decaimento exponencial (veja a Figura 11.6b).

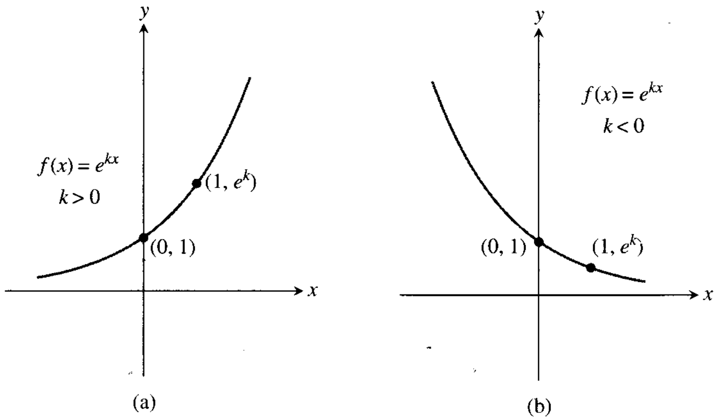


Figura 11.6 Gráficos de $f(x) = e^{kx}$ para (a) $k > 0$ e (b) $k < 0$.

EXEMPLO 5 Transformação de funções exponenciais

Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = e^x$ no gráfico da função dada.

(a) $g(x) = e^{2x}$ **(b)** $h(x) = e^{-x}$ **(c)** $k(x) = 3e^x$

SOLUÇÃO

(a) O gráfico de $g(x) = e^{2x}$ é obtido encolhendo horizontalmente o gráfico de $f(x) = e^x$ por meio do fator 2 (Figura 11.7a).

(b) Podemos obter o gráfico de $h(x) = e^{-x}$ refletindo o gráfico de $f(x) = e^x$ com relação ao eixo vertical y (Figura 11.7b).

(c) Podemos obter o gráfico de $k(x) = 3 \cdot e^x$ esticando verticalmente o gráfico de $f(x) = e^x$ pelo fator 3 (Figura 11.7c).

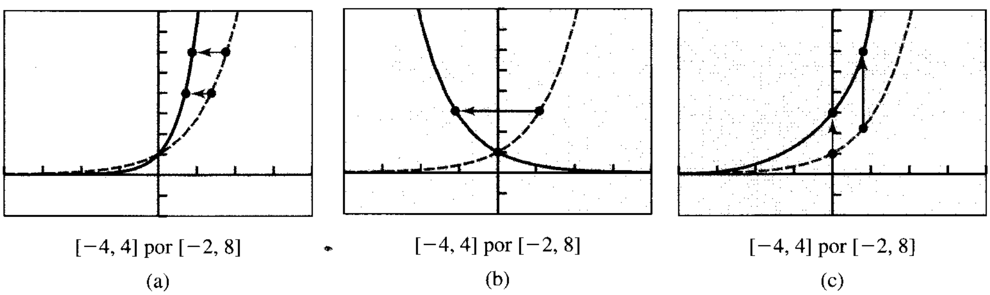


Figura 11.7 O gráfico de $f(x) = e^x$ com (a) $g(x) = e^{2x}$, (b) $h(x) = e^{-x}$ e (c) $k(x) = 3e^x$.

Funções de crescimento logístico

Uma função de crescimento logístico mostra seu comportamento a uma taxa crescente e não é limitada superiormente. A limitação acaba existindo por razões de capacidade física ou de volume máximo. Com isso, devido às situações reais, a função de crescimento é limitada tanto inferior como superiormente por assíntotas horizontais.

DEFINIÇÃO Funções de crescimento logístico

Sejam a, b, c e k constantes positivas, com b < 1. Uma **função de crescimento logístico** em x é uma função que pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot b^x} \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-kx}}$$

onde a constante c é o **limite de crescimento.**

Se $b > 1$ ou $k < 0$, então as fórmulas serão de **funções de decaimento logístico.**

As funções de crescimento logístico têm comportamento nos extremos do domínio (conjunto dos números reais), dado por:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = c$$

onde c é o limite de crescimento.

Taxa percentual constante e funções exponenciais

Suponha que uma população está se modificando a uma **taxa percentual constante** r, onde r é a taxa percentual da mudança em forma decimal. A população então segue o padrão mostrado:

Tempo em anos	População
0	$P(0) = P_0 =$ população inicial
1	$P(1) = P_0 + P_0 r = P_0(1 + r)$
2	$P(2) = P(1) \cdot (1 + r) = P_0(1 + r)^2$
3	$P(3) = P(2) \cdot (1 + r) = P_0(1 + r)^3$
⋮	⋮
t	$P(t) = P_0(1 + r)^t$

Assim, nesse caso, a população é expressa como uma função exponencial do tempo.

Modelo de crescimento exponencial de uma população

Se uma população P está se modificando a uma taxa percentual constante r a cada ano, então

$$P(t) = P_0(1 + r)^t$$

onde P_0 é a população inicial, r é expresso como um número decimal e t é o tempo em anos.

Por um lado, se $r > 0$, então $P(t)$ é uma função de crescimento exponencial, e seu *fator de crescimento* é a base da função exponencial, dada por $1 + r$.

Por outro lado, se $r < 0$, então a base $1 + r < 1$, $P(t)$ é uma função de decaimento exponencial, e $1 + r$ é o *fator de decaimento* para a população.

EXEMPLO 6 Verificação das taxas de crescimento e decaimento

Conclua se o modelo da população é uma função de crescimento ou decaimento exponencial e encontre a taxa percentual constante de crescimento ou decaimento.

(a) São José: $P(t) = 782.248 \cdot 1{,}0136^t$

(b) Detroit: $P(t) = 1.203.368 \cdot 0{,}9858^t$

SOLUÇÃO

(a) Como $1 + r = 1{,}0136$, então $r = 0{,}0136 > 0$. Assim, P é uma função de crescimento exponencial com a taxa de crescimento de 1,36%.

(b) Como $1 + r = 0{,}9858$, então $r = -0{,}0142 < 0$. Assim, P é uma função de decaimento exponencial com a taxa de decaimento de 1,42%.

EXEMPLO 7 Identificação da lei de função exponencial

Determine a função exponencial com valor inicial igual a 12 e taxa de crescimento de 8% ao ano.

SOLUÇÃO

Como $P_0 = 12$ e $r = 8\% = 0{,}08$, então a função $P(t) = 12(1 + 0{,}08)^t$ ou $P(t) = 12 \cdot 1{,}08^t$. Poderíamos escrever esta função como $f(x) = 12 \cdot 1{,}08^x$, onde x representa o tempo.

Modelos de crescimento e decaimento exponencial

Os modelos de crescimento e decaimento exponencial são usados para populações, por exemplo, de animais, bactérias e átomos radioativos. Esses modelos se aplicam em qualquer situação na qual o crescimento ou decrescimento é proporcional ao tamanho atual da quantidade de interesse.

EXEMPLO 8 Modelagem do crescimento de bactérias

Suponha uma cultura de 100 bactérias localizadas num objeto, de modo que o número de bactérias dobra a cada hora. Conclua quando esse número chegará em 350.000 unidades.

SOLUÇÃO

Modelo

$$
\begin{array}{ll}
200 = 100 \cdot 2 & \text{Total de bactérias após 1 hora} \\
400 = 100 \cdot 2^2 & \text{Total de bactérias após 2 horas} \\
800 = 100 \cdot 2^3 & \text{Total de bactérias após 3 horas} \\
\vdots & \\
P(t) = 100 \cdot 2^t & \text{Total de bactérias após } t \text{ horas}
\end{array}
$$

Assim, a função $P(t) = 100 \cdot 2^t$ representa a população de bactérias t horas após a verificação inicial no objeto.

Solução gráfica

A Figura 11.8 mostra que a função da população intersecciona $y = 350.000$ quando $t \cong 11{,}77$.

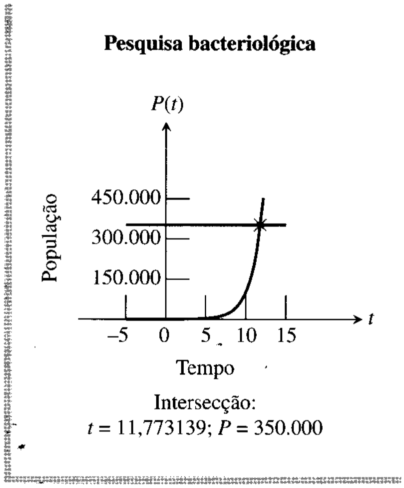


Figura 11.8 Crescimento exponencial de uma população de bactérias.

INTERPRETAÇÃO

A população de bactérias será de 350.000 em, aproximadamente, 11 horas e 46 minutos.

As funções de decaimento exponencial modelam a quantidade de uma substância radioativa presente em uma amostra. O número de átomos de um elemento específico que se modifica de um estado radioativo para um estado não radioativo é uma fração fixada por unidade de tempo. O processo é chamado de **decaimento radioativo**, e o tempo que ele leva para que metade da amostra mude de estado é chamado de **meia-vida** da substância radioativa.

EXEMPLO 9 Modelagem do decaimento radioativo

Suponha que a meia-vida de uma certa substância radioativa é de 20 dias e que existem 5 gramas presentes inicialmente. Encontre o tempo até existir 1 grama da substância.

SOLUÇÃO

Modelo

Se t é o tempo em dias, o tempo de meias-vidas será $t/20$.

$$\frac{5}{2} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{20/20} \qquad \text{Gramas após 20 dias}$$

$$\frac{5}{4} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{40/20} \qquad \text{Gramas após } 2 \cdot 20 = 40 \text{ dias}$$

$$\vdots$$

$$f(t) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20} \qquad \text{Gramas após } t \text{ dias}$$

Assim, a função $f(t) = 5 \cdot 0{,}5^{t/20}$ modela a massa, em gramas, da substância radioativa no tempo t.

Solução gráfica

A Figura 11.9 mostra que o gráfico de $f(t) = 5 \cdot 0{,}5^{t/20}$ intersecciona $y = 1$ quando $t \cong 46{,}44$.

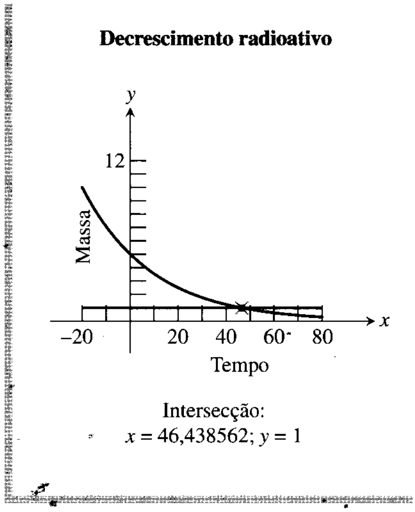


Figura 11.9 Decaimento radioativo.

INTERPRETAÇÃO

Existirá 1 grama da substância radioativa após, aproximadamente, 46,44 dias, ou seja, cerca de 46 dias e 11 horas.

REVISÃO RÁPIDA

Nos exercícios 1 a 4, desenvolva a expressão sem usar a calculadora.

1. $\sqrt[3]{-216}$ **2.** $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$

3. $27^{2/3}$ **4.** $4^{5/2}$

Nos exercícios 5 a 8, reescreva a expressão usando um único expoente positivo.

5. $(2^{-3})^4$ **6.** $(3^4)^{-2}$

7. $(a^{-2})^3$ **8.** $(b^{-3})^{-5}$

Nos exercícios 9 e 10, converta a porcentagem para a forma decimal ou a decimal em uma porcentagem.

9. 15% **10.** 0,04

11. Mostre como aumentar 23 em 7% usando uma simples multiplicação.

12. Mostre como diminuir 52 em 4% usando uma simples multiplicação.

Nos exercícios 13 e 14, resolva a equação algebricamente.

13. $40 \cdot b^2 = 160$ **14.** $243 \cdot b^3 = 9$

Nos exercícios 15 a 18, resolva a equação numericamente.

15. $782b^6 = 838$ **16.** $93b^5 = 521$

17. $672b^4 = 91$ **18.** $127b^7 = 56$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 6, identifique as funções exponenciais. Para aquelas que são funções exponenciais da forma $f(x) = ab^x$ determine o valor de a e o valor da base b. Para aquelas que não são, explique por que não.

1. $y = x^8$

2. $y = 3^x$

3. $y = 5^x$

4. $y = 4^2$

5. $y = x^{\sqrt{x}}$

6. $y = x^{1,3}$

Nos exercícios 7 a 10, calcule o valor exato da função para o valor de x dado.

7. $f(x) = 3 \cdot 5^x$ para $x = 0$

8. $f(x) = 6 \cdot 3^x$ para $x = -2$

9. $f(x) = -2 \cdot 3^x$ para $x = 1/3$

10. $f(x) = 8 \cdot 4^x$ para $x = -3/2$

Nos exercícios 11 e 12, determine uma fórmula para a função exponencial cujos valores são dados na Tabela 11.5.

11. $f(x)$

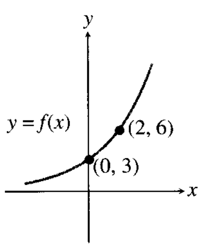
12. $g(x)$

Tabela 11.5 Valores para duas funções exponenciais

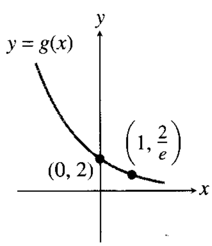
x	$f(x)$	$g(x)$
-2	6	108
-1	3	36
0	3/2	12
1	3/4	4
2	3/8	4/3

Nos exercícios 13 e 14, determine uma fórmula para a função exponencial, cujo gráfico é demonstrado na figura.

13. $f(x)$



14. $g(x)$



Nos exercícios 15 a 24, descreva como transformar o gráfico de f no gráfico de g.

15. $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-3}$

16. $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x+4}$

17. $f(x) = 4^x$, $g(x) = 4^{-x}$

18. $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{5-x}$

19. $f(x) = 0{,}5^x$, $g(x) = 3 \cdot 0{,}5^x + 4$

20. $f(x) = 0{,}6^x$, $g(x) = 2 \cdot 0{,}6^{3x}$

21. $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-2x}$

22. $f(x) = e^x$, $g(x) = -e^{-3x}$

23. $f(x) = e^x$, $g(x) = 2e^{3-3x}$

24. $f(x) = e^x$, $g(x) = 3e^{2x} - 1$

Nos exercícios 25 a 30, **(a)** associe a função dada a seu gráfico; **(b)** explique como fazer a escolha.

25. $y = 3^x$

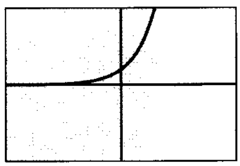
26. $y = 2^{-x}$

27. $y = -2^x$

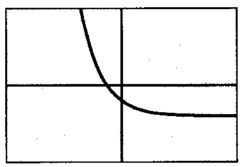
28. $y = -0{,}5^x$

29. $y = 3^{-x} - 2$

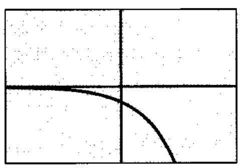
30. $y = 1{,}5^x - 2$



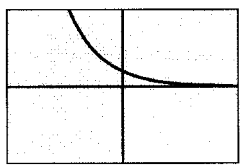
(a)



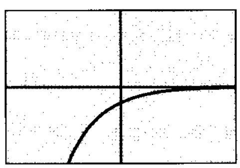
(b)



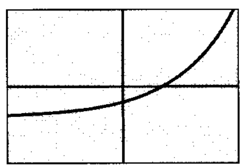
(c)



(d)



(e)



(f)

Nos exercícios 31 a 34, verifique se a função é de crescimento ou de decaimento exponencial; descreva o comportamento de cada função nos extremos do domínio (aqui usamos limite de função).

31. $f(x) = 3^{-2x}$

32. $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

33. $f(x) = 0{,}5^x$

34. $f(x) = 0{,}75^{-x}$

Nos exercícios 35 a 38, resolva cada desigualdade graficamente.

35. $9^x < 4^x$

36. $6^{-x} > 8^{-x}$

37. $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x$

38. $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Nos exercícios 39 e 40, use as propriedades de potenciação para provar que duas das três funções exponenciais dadas são idênticas.

39. (a) $y_1 = 3^{2x+4}$

(b) $y_2 = 3^{2x} + 4$

(c) $y_3 = 9^{x+2}$

40. (a) $y_1 = 4^{3x-2}$

(b) $y_2 = 2(2^{3x-2})$

(c) $y_3 = 2^{3x-1}$

Nos exercícios 41 a 44, você pode usar uma calculadora como suporte para fazer gráficos. Encontre o valor por onde o gráfico passa no eixo vertical y e as assíntotas horizontais.

41. $f(x) = \dfrac{12}{1 + 2 \cdot 0{,}8^x}$

42. $f(x) = \dfrac{18}{1 + 5 \cdot 0{,}2^x}$

43. $f(x) = \dfrac{16}{1 + 3e^{-2x}}$

44. $g(x) = \dfrac{9}{1 + 2e^{-x}}$

Nos exercícios 45 a 50, esboce o gráfico da função e analise domínio, imagem, continuidade, crescimento/decrescimento, extremos, assíntotas e comportamento nos extremos do domínio.

45. $f(x) = 3 \cdot 2^x$

46. $f(x) = 4 \cdot 0{,}5^x$

47. $f(x) = 4 \cdot e^{3x}$

48. $f(x) = 5 \cdot e^{-x}$

49. $f(x) = \dfrac{5}{1 + 4 \cdot e^{-2x}}$

50. $f(x) = \dfrac{6}{1 + 2 \cdot e^{-x}}$

Tabela 11.6 População de duas cidades norte-americanas

Cidade	População em 1990	População em 2000
Austin, Texas	465.622	656.562
Columbus, Ohio	632.910	711.265

Fonte: *World Almanac and Book of Facts 2005.*

51. A população de Ohio pode ser modelada por $P(t) = 12{,}79/(1 + 2{,}402 \cdot e^{-0{,}0309t})$, onde P é a população em milhões de pessoas e t é o número de anos desde 1900. Baseado nesse modelo, quando a população de Ohio foi de 10 milhões?

52. A população de Nova York pode ser modelada por

$$P(t) = \frac{19{,}875}{1 + 57{,}993 \cdot e^{-0{,}035005t}}$$

onde P é a população em milhões de pessoas e t é o número de anos desde 1800. Baseado nesse modelo:

(a) Qual foi a população de Nova York em 1850?

(b) Qual será a população em 2010?

(c) Qual é a população máxima sustentável de Nova York (limite para crescimento)?

53. O número B de bactérias num dado local após t horas é dada por

$$B = 100 \cdot e^{0{,}693t}$$

(a) Qual foi o número inicial de bactérias presentes?

(b) Quantas bactérias estão presentes após 6 horas?

54. Verdadeiro ou falso Toda função exponencial é estritamente crescente. Justifique sua resposta.

55. Múltipla escolha Qual das seguintes funções é exponencial?

(a) $f(x) = a^2$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = x^{2/3}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(e) $f(x) = 8^x$

56. Múltipla escolha Qual é o ponto que todas as funções da forma $f(x) = b^x$ ($b > 0$) têm em comum?

(a) (1, 1)

(b) (1, 0)

(c) (0, 1)

(d) (0, 0)

(e) (−1, −1)

57. Múltipla escolha O fator de crescimento para $f(x) = 4 \cdot 3^x$ é

(a) 3 **(b)** 4 **(c)** 12

(d) 64 **(e)** 81

58. Múltipla escolha Para $x > 0$, qual das seguintes alternativas é **verdadeira**?

(a) $3^x > 4^x$ **(b)** $7^x > 5^x$

(c) $(1/6)^x > (1/2)^x$ **(d)** $9^{-x} > 8^{-x}$

(e) $0{,}17^x > 0{,}32^x$

Nos exercícios 59 a 64, verifique se a função é de crescimento ou decaimento exponencial e encontre a taxa percentual constante de crescimento ou decaimento.

59. $P(t) = 3{,}5 \cdot 1{,}09^t$ **60.** $P(t) = 4{,}3 \cdot 1{,}018^t$

61. $f(x) = 78{,}963 \cdot 0{,}968^x$ **62.** $f(x) = 5607 \cdot 0{,}9968^x$

63. $g(t) = 247 \cdot 2^t$ **64.** $g(t) = 43 \cdot 0{,}05^t$

Nos exercícios 65 a 76, determine a função exponencial que satisfaz as condições dadas.

65. Valor inicial igual a 5, crescente com taxa de 17% ao ano.

66. Valor inicial igual a 52, crescente com taxa de 2,3% ao dia.

67. Valor inicial igual a 16, decrescente com taxa de 50% ao mês.

68. Valor inicial igual a 5, decrescente com taxa de 0,59% por semana.

69. Valor inicial da população igual a 28.900, decrescente com taxa de 2,6% ao ano.

70. Valor inicial da população igual a 502.000, crescente com taxa de 1,7% ao ano.

71. Valor inicial do comprimento igual a 18 cm, crescendo a uma taxa de 5,2% por semana.

72. Valor inicial da massa igual a 15 gramas, decrescente a uma taxa de 4,6% ao dia.

73. Valor inicial da massa igual a 0,6 grama, dobrando a cada 3 dias.

74. Valor inicial da população igual a 250, dobrando a cada 7,5 horas.

75. Valor inicial da massa igual a 592 gramas, caindo pela metade a cada 6 anos.

76. Valor inicial da massa igual a 17 gramas, caindo pela metade a cada 32 horas.

Nos exercícios 77 e 78, determine uma fórmula para a função exponencial cujos valores são dados na Tabela 11.7.

77. $f(x)$

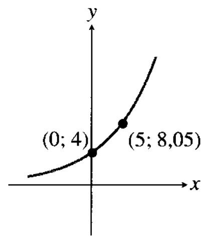
78. $g(x)$

Tabela 11.7 Valores para duas funções exponenciais

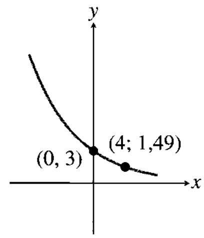
x	$f(x)$	$g(x)$
−2	1,472	−9,0625
−1	1,84	−7,25
0	2,3	−5,8
1	2,875	−4,64
2	3,59375	−3,7123

Nos exercícios 79 e 80, determine uma fórmula para a função exponencial cujo gráfico é demonstrado na figura.

79.



80.



Nos exercícios 81 a 84, encontre a função logística que satisfaz as condições dadas.

81. $f(0) = 10$, limite para crescimento igual a 40, passando através de (1, 20).

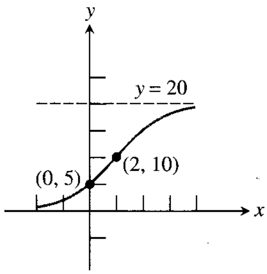
82. $f(0) = 12$, limite para crescimento igual a 60, passando através de (1, 24).

83. $f(0) = 16$, população máxima sustentável igual a 128, passando através de (5, 32).

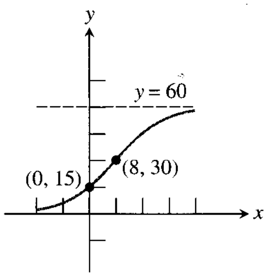
84. $f(0) = 5$, limite para altura igual a 30, passando através de (3, 15).

Nos exercícios 85 e 86, determine uma função para a função logística cujo gráfico é mostrado na figura.

85.



86.



87. Em 2000, a população de Jacksonville era de 736.000 e crescia a uma taxa de 1,49% ao ano. A essa taxa, quando a população será de 1 milhão?

88. Em 2000, a população de Las Vegas era de 478.000 e está crescendo a uma taxa de 6,28% ao ano. A essa taxa, quando a população será de 1 milhão?

89. A população de Smallville no ano de 1890 era igual a 6.250. Suponha que a população cresceu a uma taxa de 2,75% ao ano.

(a) Estime a população em 1915 e 1940.

(b) Estime quando a população alcançará 50.000.

90. A população de River City no ano de 1910 era igual a 4.200. Suponha que a população cresce a uma taxa de 2,25% ao ano.

(a) Estime a população em 1930 e 1945.

(b) Estime quando a população alcançará 20.000.

91. A meia-vida de uma certa substância radioativa é igual a 14 dias. Existem 6,6 gramas presentes inicialmente.

(a) Expresse a quantia da substância remanescente como uma função do tempo t.

(b) Quando existirá menos de 1 grama?

92. A meia-vida de uma certa substância radioativa é igual a 65 dias. Existem 3,5 gramas presentes inicialmente.

(a) Expresse a quantia da substância remanescente como uma função do tempo t.

(b) Quando existirá menos de 1 grama?

93. O número B de bactérias em um local após t horas é dado por

$$B = 100 \cdot e^{0,693t}$$

Quando o número de bactérias será 200? Estime o tempo para dobrar a quantia de bactérias.

94. **Verdadeiro ou falso** Se a taxa percentual constante de uma função exponencial é negativa, então a base da função é negativa. Justifique a sua resposta.

95. **Múltipla escolha** Qual é a taxa percentual de crescimento constante de $P(t) = 1{,}23 \cdot 1{,}049^t$?

(a) 49% **(b)** 23% **(c)** 4,9%
(d) 2,3% **(e)** 1,23%

96. **Múltipla escolha** Qual é a taxa percentual de decaimento constante de $P(t) = 22{,}7 \cdot 0{,}834^t$?

(a) 22,7% **(b)** 16,6% **(c)** 8,34%
(d) 2,27% **(e)** 0,834%

97. **Múltipla escolha** Uma única célula de ameba duplica a cada 4 horas. Quanto tempo uma célula de ameba levará para produzir uma população de 1.000?

(a) 10 dias **(b)** 20 dias **(c)** 30 dias
(d) 40 dias **(e)** 50 dias

Capítulo 12

Funções logarítmicas

Objetivos de aprendizagem

- Inversas das funções exponenciais.
- Logaritmos com base 10.
- Logaritmos com base e.
- Propriedade dos logaritmos.
- Mudança de base.
- Gráficos de funções logarítmicas.
- Resolução de equações exponenciais.
- Resolução de equações logarítmicas.
- Ordens de grandeza (ou magnitude) e modelos logarítmicos.

Funções logarítmicas são usadas em muitas aplicações, por isso iniciamos com toda a parte de fundamentação, além de aplicações de logaritmos, que são baseadas, também, nas propriedades.

Inversas das funções exponenciais

Apesar de as funções inversas serem objetos de estudo do Capítulo 11, podemos compreender as primeiras idéias por meio das funções logarítmicas.

Uma função exponencial $f(x) = b^x$ tem uma inversa que também é função. Essa inversa é a **função logarítmica de base b**, denotada por $\log_b x$, isto é, se $f(x) = b^x$ com $b > 0$ e $b \neq 1$, então $f^{-1}(x) = \log_b x$. Veja a Figura 12.1.

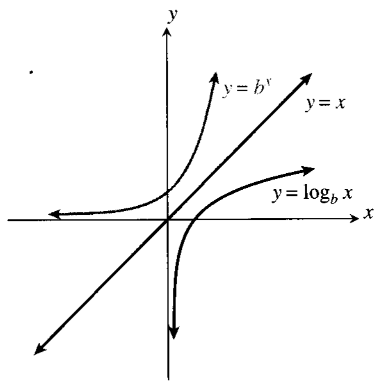


Figura 12.1 A função exponencial e sua inversa, que é a função logarítmica (no caso de função crescente).

Esta transformação nos diz que um *logaritmo está vinculado a uma potência, ou seja, é um expoente da potência*. Com isso, podemos desenvolver expressões logarítmicas usando nossos conhecimentos sobre potenciação.

Transformação entre a forma logarítmica e a forma exponencial

Se $x > 0$ e $0 < b \neq 1$, então

$$y = \log_b(x) \text{ se e somente se } b^y = x.$$

EXEMPLO 1 Cálculo de logaritmos

(a) $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

(b) $\log_2 \sqrt{3} = 1/2$ porque $3^{1/2} = \sqrt{3}$

(c) $\log_5 1/25 = -2$ porque $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

(d) $\log_4 1 = 0$ porque $4^0 = 1$

(e) $\log_7 7 = 1$ porque $7^1 = 7$

Podemos generalizar os resultados observados no Exemplo 1.

Propriedades básicas de logaritmos

Para $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ e y um número real qualquer,

- $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$
- $\log_b b^y = y$ porque $b^y = b^y$
- $b^{\log_b x} = x$ porque $\log_b x = \log_b x$

Vale observar que, em geral, nas situações práticas, as bases dos logaritmos são quase sempre maiores que 1.

Essas propriedades nos dão suporte para calcular logaritmos e algumas expressões exponenciais. Temos, a seguir, exemplos que já apareceram no Exemplo 1, mas agora com destaque para algumas das propriedades listadas anteriormente.

EXEMPLO 2 Cálculo de logaritmos

(a) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(b) $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{1/2} = 1/2$

(c) $6^{\log_6 11} = 11$

Como já citamos, as funções logarítmicas são inversas das funções exponenciais. Com as propriedades citadas, podemos mais tranqüilamente compreender os cálculos apresentados na Tabela 12.1, tanto para a $f(x) = 2^x$ como para $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

Tabela 12.1 Uma função exponencial e sua inversa

x	$f(x) = 2^x$	x	$f^{-1}(x) = \log_2 x$
-3	1/8	1/8	-3
-2	1/4	1/4	-2
-1	1/2	1/2	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

Logaritmos com base 10

Quando a base do logaritmo é 10, não precisamos escrever o número e denotamos a função logarítmica por $f(x) = \log x$. Lembre-se de que essa função é a inversa da função exponencial $f(x) = 10^x$. Assim,

$$y = \log x \text{ se e somente se } 10^y = x.$$

Podemos obter resultados para logaritmos com base 10.

Propriedades básicas para logaritmos com base 10

Sejam x e y números reais, sendo que x é maior que 0.

- $\log 1 = 0$ porque $10^0 = 1$
- $\log 10 = 1$ porque $10^1 = 10$
- $\log 10^y = y$ porque $10^y = 10^y$
- $10^{\log x} = x$ porque $\log x = \log x$

Com mais essas propriedades, podemos calcular outros logaritmos e expressões exponenciais com base 10.

EXEMPLO 3 Cálculo de logaritmos com base 10

(a) $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$ porque $10^2 = 100$

(b) $\log \sqrt[5]{10} = \log 10^{1/5} = \dfrac{1}{5}$

(c) $\log \dfrac{1}{1000} = \log \dfrac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3$

(d) $10^{\log 6} = 6$

Transformar uma forma logarítmica em uma forma exponencial muitas vezes já é suficiente para resolver uma equação envolvendo funções logarítmicas.

EXEMPLO 4 Resolução de equações logarítmicas

Resolva cada equação transformando para a forma exponencial.

(a) $\log x = 3$ **(b)** $\log_2 x = 5$

SOLUÇÃO

(a) Transformando para a forma exponencial, temos $x = 10^3 = 1.000$.

(b) Transformando para a forma exponencial, temos $x = 2^5 = 32$.

Logaritmos com base e

Logaritmos com base e são chamados de **logaritmos naturais**. Muitas vezes utilizamos apenas a notação "ln" para denotar o logaritmo natural. Assim, a função logarítmica natural é $f(x) = \log_e x = \ln x$. Essa função é a inversa da função exponencial $f(x) = e^x$. Assim,

$$y = \ln x \text{ se e somente se } e^y = x.$$

Podemos obter resultados para logaritmos com base e.

Propriedades básicas para logaritmos com base e (logaritmos naturais)

Sejam x e y números reais, sendo que x é maior que 0.

- $\ln 1 = 0$ porque $e^0 = 1$
- $\ln e = 1$ porque $e^1 = e$
- $\ln e^y = y$ porque $e^y = e^y$
- $e^{\ln x} = x$ porque $\ln x = \ln x$

Usando a definição de logaritmo natural ou essas propriedades, podemos calcular expressões envolvendo a base natural e.

EXEMPLO 5 Cálculo de logaritmos com base e

(a) $\ln \sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = 1/2$ porque $e^{1/2} = \sqrt{e}$

(b) $\ln e^5 = \log_e e^5 = 5$

(c) $e^{\ln 4} = 4$

Propriedades dos logaritmos

As propriedades são muito úteis tanto na resolução de equações logarítmicas como para modelagem de problemas.

Propriedades dos logaritmos

Sejam b, R e S números reais positivos com $b \neq 1$ e c um número real qualquer.

Regra do produto: $\log_b (RS) = \log_b R + \log_b S$

Regra do quociente: $\log_b \dfrac{R}{S} = \log_b R - \log_b S$

Regra da potência: $\log_b R^c = c \log_b R$

A propriedade de mudança de base será tratada na próxima seção.

As propriedades de potenciação listadas a seguir são fundamentais para essas três propriedades de logaritmos. Por enquanto, a primeira propriedade de potenciação é a que dá suporte para a regra do produto, que provaremos a seguir.

Sejam b, x e y números reais com $b > 0$.

1. $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ **2.** $\dfrac{b^x}{by} = b^{x-y}$ **3.** $(b^x)^y = b^{xy}$

EXEMPLO 6 Demonstração da regra do produto para logaritmos

Provar que $\log_b (RS) = \log_b R + \log_b S$.

SOLUÇÃO

Sejam $x = \log_b R$ e $y = \log_b S$. As respectivas expressões com potenciação são $b^x = R$ e $b^y = S$. Portanto,

$$\begin{aligned} RS &= b^x \cdot b^y \\ &= b^{x+y} \\ \log_b (RS) &= x + y \\ &= \log_b R + \log_b S \end{aligned}$$

Quando resolvemos equações que envolvem logaritmos, muitas vezes, precisamos reescrever expressões usando suas propriedades. Algumas vezes, precisamos expandir, em outras, condensar até onde for possível. Os próximos exemplos mostram como as propriedades de logaritmos podem ser usadas para mudar a forma das expressões envolvendo logaritmos.

EXEMPLO 7 Expansão do logaritmo de um produto

Supondo que x e y são positivos, use as propriedades de logaritmos para escrever $\log (8xy^4)$ como uma soma de logaritmos ou múltiplo de logaritmos.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \log (8xy^4) &= \log 8 + \log x + \log y^4 \\ &= \log 2^3 + \log x + \log y^4 \\ &= 3 \log 2 + \log x + 4 \log y \end{aligned}$$

EXEMPLO 8 Expansão do logaritmo de um quociente

Supondo que x é positivo, use as propriedades de logaritmos para escrever $\ln (\sqrt{x^2 + 5}/x)$ como uma soma ou diferença de logaritmos, ou mesmo como um múltiplo de logaritmos.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} &= \ln \frac{(x^2+5)^{1/2}}{x} \\ &= \ln (x^2+5)^{1/2} - \ln x \\ &= \frac{1}{2} \ln (x^2+5) - \ln x \end{aligned}$$

EXEMPLO 9 Notação de logaritmo

Supondo que x e y são positivos, escreva $\ln x^5 - 2 \cdot \ln (xy)$ como um único logaritmo.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\ln x^5 - 2\ln (xy) &= \ln x^5 - \ln (xy)^2\\ &= \ln x^5 - \ln (x^2y^2)\\ &= \ln \frac{x^5}{x^2y^2}\\ &= \ln \frac{x^3}{y^2}\end{aligned}$$

Mudança de base

Quando trabalhamos com uma expressão logarítmica com uma base que não seja adequada para o momento, é possível modificar a expressão em um quociente de logaritmos com uma base diferente. Por exemplo, é difícil desenvolver $\log_4 7$ porque 7 não é uma potência de 4 e não existe a tecla com "$\log_4$" na calculadora.

Podemos trabalhar com este problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned}y &= \log_4 7\\ 4^y &= 7\\ \ln 4^y &= \ln 7\\ y\ln 4 &= \ln 7\\ y &= \frac{\ln 7}{\ln 4}\end{aligned}$$

Para finalizar, podemos utilizar uma calculadora e, assim, $\log_4 7 = \dfrac{\ln 7}{\ln 4} \cong 1{,}4037$.

Podemos generalizar o resultado obtido após aplicar o logaritmo em ambos os lados da expressão, como a fórmula de mudança de base.

Fórmula de mudança de base para logaritmos

Para números reais positivos a, b e x com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, temos

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

As calculadoras têm, em geral, duas teclas para logaritmo que são "LOG" e "LN", as quais correspondem às bases 10 e e, respectivamente. Assim, utilizamos a fórmula de mudança de base com uma das formas:

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} \quad \text{ou} \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

EXEMPLO 10 Desenvolvimento do logaritmo por meio da mudança de base

(a) $\log_3 16 = \dfrac{\ln 16}{\ln 3} = 2{,}523\ldots \cong 2{,}52$

(b) $\log_6 10 = \dfrac{\log 10}{\log 6} = \dfrac{1}{\log 6} = 1{,}285\ldots \cong 1{,}29$

(c) $\log_{1/2} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln(1/2)} = \dfrac{\ln 2}{\ln 1 - \ln 2} = \dfrac{\ln 2}{-\ln 2} = -1$

Gráficos de funções logarítmicas

Vamos listar agora as propriedades da função logarítmica natural $f(x) = \ln x$.

Domínio: $]0, +\infty[$
Imagem: $\mathbb{R}$
É contínua em $]0, +\infty[$
É crescente em $]0, +\infty[$
Não é simétrica
Não é limitada nem inferior nem superiormente
Não tem extremos locais
Não tem assíntotas horizontais
Assíntota vertical é em $x = 0$
Comportamento no extremo do domínio: $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Qualquer função logarítmica $f(x) = \log_b x$ com $b > 1$ tem o mesmo domínio, imagem, continuidade, comportamento crescente, ausência de simetria e outras características, como vimos na função $f(x) = \ln x$. O gráfico e comportamento de $f(x) = \ln x$ é típico das funções logarítmicas mais usadas.

A Figura 12.2(a) a seguir mostra que os gráficos de $y = \ln x$ e $y = e^x$ são simétricos com relação à reta $y = x$. A Figura 12.2(b) mostra que os gráficos de $y = \log x$ e $y = 10^x$ também são simétricos com relação à mesma reta $y = x$.

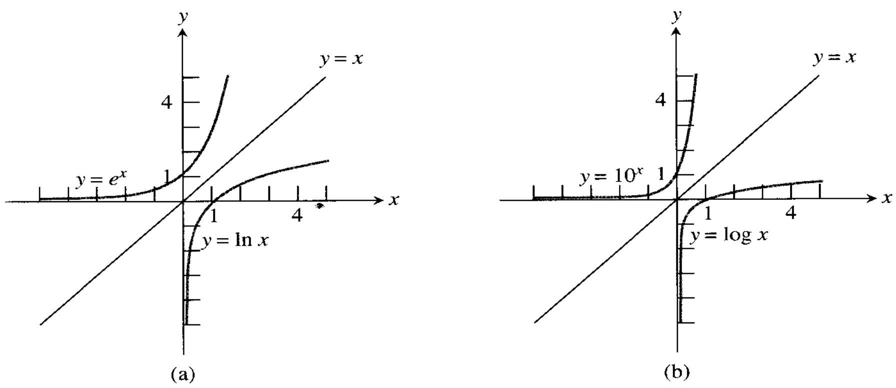
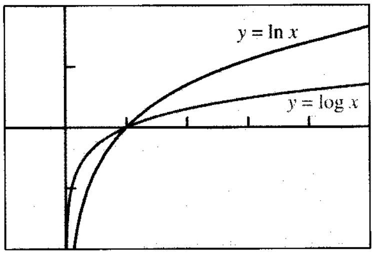


Figura 12.2 Funções logarítmicas e exponenciais como funções inversas.

A Figura 12.3 mostra a comparação entre os gráficos de $y = \log x$ e $y = \ln x$.



[–1, 5] por [–2, 2]

Figura 12.3 Os gráficos de $y = \log x$ e $y = \ln x$.

Vejamos agora alguns casos de transformações geométricas das funções logarítmicas.

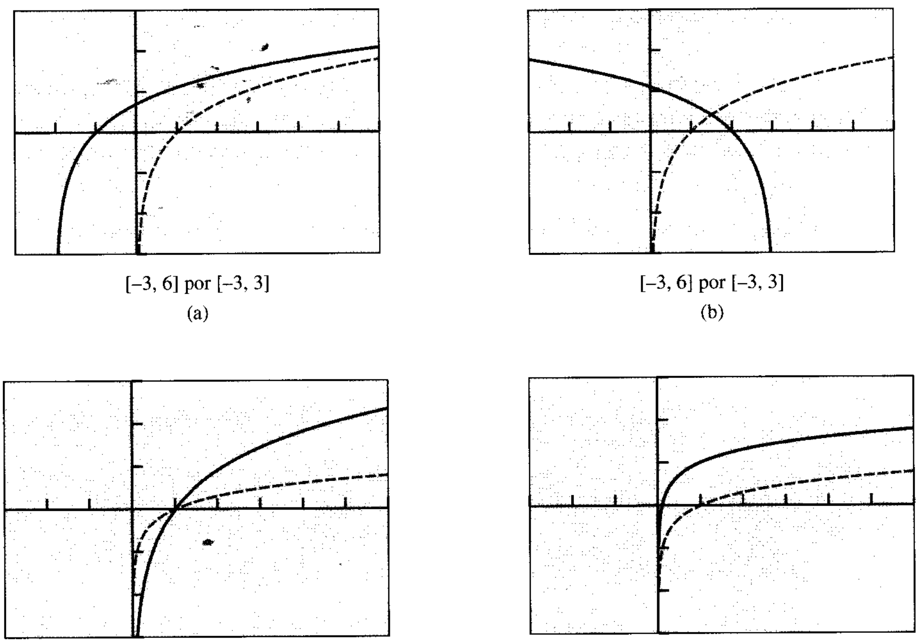
EXEMPLO 11 Transformação dos gráficos de funções logarítmicas

Descreva como transformar o gráfico de $y = \ln x$ ou $y = \log x$ em um gráfico da função dada.

(a) $g(x) = \ln (x + 2)$ **(b)** $h(x) = \ln (3 - x)$

(c) $g(x) = 3 \log x$ **(d)** $h(x) = 1 + \log x$

SOLUÇÃO



[–3, 6] por [–3, 3]
(a)

[–3, 6] por [–3, 3]
(b)

[–3, 6] por [–3, 3]
(c)

[–3, 6] por [–3, 3]
(d)

Figura 12.4

(a) O gráfico de $g(x) = \ln (x + 2)$ é obtido transladando o gráfico de $y = \ln x$ duas unidades para a esquerda. Veja a Figura 12.4(a).

(b) $h(x) = \ln(3 - x) = \ln[-(x - 3)]$. Assim, obtemos o gráfico de $h(x) = \ln(3 - x)$ do gráfico de $y = \ln x$ aplicando, nessa ordem, uma reflexão com relação ao eixo vertical y seguida de uma transladação de três unidades para a direita. Veja a Figura 12.4(b).

(c) O gráfico de $g(x) = 3 \log x$ é obtido esticando verticalmente o gráfico de $f(x) = \log x$ pela multiplicação dos valores de y pelo fator 3. Veja a Figura 12.4(c).

(d) Podemos obter o gráfico de $h(x) = 1 + \log x$ do gráfico de $f(x) = \log x$ transladando uma unidade para cima. Veja a Figura 12.4(d).

Usando a fórmula de mudança de base, podemos reescrever qualquer função logarítmica $g(x) = \log_b x$ como

$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{1}{\ln b} \ln x$$

Assim, toda função logarítmica é uma constante multiplicada pela função logaritmo natural dada por $f(x) = \ln x$. Se a base é $b > 1$, então o gráfico de $g(x) = \log_b x$ é obtido esticando ou encolhendo o gráfico de $f(x) = \ln x$ com a multiplicação pelo fator $1/\ln b$. Se $0 < b < 1$ é necessário, também, uma reflexão do gráfico com relação ao eixo x.

EXEMPLO 12 Esboço do gráfico das funções logarítmicas

Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = \ln x$ em um gráfico da função dada. Você pode esboçar o gráfico ou conferir com uma calculadora com esse recurso.

(a) $g(x) = \log_5 x$

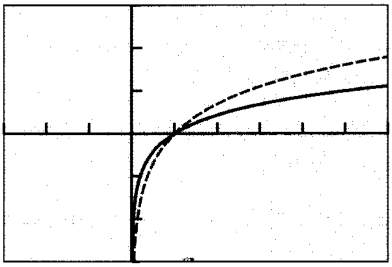
(b) $h(x) = \log_{1/4} x$

SOLUÇÃO

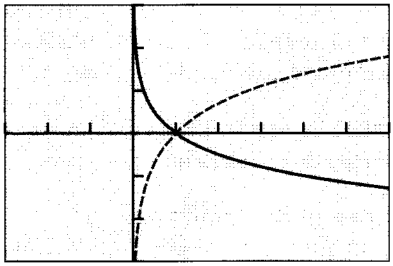
(a) Como $g(x) = \log_5 x = \dfrac{\ln x}{\ln 5}$, então o gráfico é obtido esticando verticalmente o gráfico de $f(x) = \ln x$ por meio do fator $\dfrac{1}{\ln 5} \cong 0{,}62$. Veja a Figura 12.5(a).

(b) $$h(x) = \log_{1/4} x = \frac{\ln x}{\ln 1/4} = \frac{\ln x}{\ln 1 - \ln 4} = \frac{\ln x}{-\ln 4} = -\frac{1}{\ln 4} \ln x$$

Assim, podemos obter o gráfico de h do gráfico de $f(x) = \ln x$ aplicando, na ordem, uma reflexão com relação ao eixo x e esticando verticalmente pelo fator $1/\ln 4 \cong 0{,}72$. Veja a Figura 12.5(b).



[–3, 6] por [–3, 3]
(a)



[–3, 6] por [–3, 3]
(b)

Figura 12.5

Podemos generalizar o Exemplo 12(b) da seguinte maneira: se $b > 1$, então $0 < 1/b < 1$ e $\log_{1/b} x = -\log_b x$.

Encerramos esta seção analisando a função logarítmica $f(x) = \log_b x$, com $b > 1$. Já falamos sobre essa função quando analisamos a função $f(x) = \ln x$ no início desta seção.

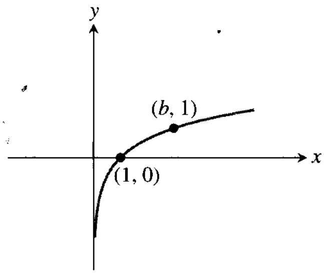


Figura 12.6 $f(x) = \log_b x$, com $b > 1$.

Domínio: $]0, +\infty[$
Imagem: $\mathbb{R}$
É contínua em $]0, +\infty[$
É crescente em $]0, +\infty[$
Não é simétrica (não é uma função par, nem ímpar)
Não é limitada nem inferior, nem superiormente
Não tem extremos locais
Não tem assíntotas horizontais
Assíntota vertical é em $x = 0$
Comportamento no extremo do domínio: $\lim_{x \to +\infty} \log_b x = +\infty$

Resolução de equações exponenciais

As propriedades descritas a seguir, partindo das funções exponencial e logarítmica, são muito úteis para resolver equações.

Propriedades

Para qualquer função exponencial $f(x) = b^x$:

- Se $b^u = b^v$, então $u = v$.

Para qualquer função logarítmica $f(x) = \log_b x$:

- Se $\log_b u = \log_b v$, então $u = v$.

Os exemplos a seguir mostram a utilização dessas propriedades.

EXEMPLO 13 Resolução algébrica de uma equação exponencial

Resolva $20(1/2)^{x/3} = 5$.

SOLUÇÃO

$$20\left(\frac{1}{2}\right)^{x/3} = 5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x/3} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{x}{3} = 2$$

$$x = 6$$

Resolução de equações logarítmicas

Quando as equações logarítmicas são resolvidas algebricamente, é importante verificar o domínio de cada expressão na equação, para que não haja perda nem acréscimo de soluções no desenvolvimento.

EXEMPLO 14 Resolução de uma equação logarítmica

Resolva $\log x^2 = 2$.

SOLUÇÃO

Podemos usar a propriedade citada anteriormente.

$$\log x^2 = 2$$

$$\log x^2 = \log 10^2$$

$$x^2 = 10^2$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10 \quad \text{ou} \quad x = -10$$

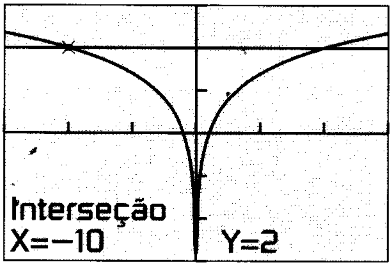
Podemos mudar a equação da forma logarítmica para a forma exponencial.

$$\log x^2 = 2$$
$$x^2 = 10^2$$
$$x^2 = 100$$
$$x = 10 \quad \text{ou} \quad x = -10$$

Observe que usando a propriedade da potência, acabamos concluindo um resultado incorreto.

$$\log x^2 = 2$$
$$2 \log x = 2$$
$$\log x = 1$$
$$x = 10$$

Vendo a Figura 12.7, é verdade que os gráficos de $f(x) = \log x^2$ e $y = 2$ se interseccionam quando $x = -10$ e quando $x = 10$.



[–15, 15] por [–3, 3]

Figura 12.7 Gráficos de $f(x) = \log x^2$ e $y = 2$.

Os métodos 1 e 2 estão corretos. O método 3 falhou porque o domínio de $\log x^2$ é o conjunto de todos os números reais diferentes de zero, mas o domínio de $\log x$ é o conjunto dos números reais positivos diferentes de zero. A solução correta inclui 10 e -10 na resposta, pois os dois valores fazem a equação original ser verdadeira.

O método 3 violou um detalhe da regra da potência para logaritmos, pois $\log_b R^c = c \log_b R$ somente quando *R é positivo*. Na expressão $\log x^2$, vemos que x pode ser positivo ou negativo. Devido à manipulação algébrica de uma equação logarítmica, podemos obter expressões com diferentes domínios e é por isso que a resolução gráfica está menos sujeita a erros.

Ordens de grandeza (ou magnitude) e modelos logarítmicos

O logaritmo na base 10 de uma quantidade positiva é sua **ordem de grandeza** (ou **ordem de magnitude**).

Ordens de grandeza (ou ordens de magnitude) podem ser usadas para comparar quaisquer quantidades:

- Um quilômetro é 3 ordens de grandeza maior que um metro.
- Um cavalo pesando 400 kg é 4 ordens de grandeza mais pesado que um rato pesando 40 g.

Ordens de grandeza são usadas para comparar, por exemplo, a força dos terremotos e a acidez de um líquido, como veremos a seguir.

A grandeza R de um terremoto, medido pela *escala Richter*, é $R = \log \frac{a}{T} + B$, onde a é a amplitude (em micrômetros, μm) do movimento vertical do solo que é informado num sismógrafo, T é o período do abalo sísmico em segundos e B é a amplitude do abalo sísmico com distância crescente partindo do epicentro do terremoto.

EXEMPLO 15 Comparação das intensidades de terremotos

Quanto mais forte foi o terremoto de 2001 em Gujarat na Índia ($R_1 = 7{,}9$) com relação ao de 1999 em Atenas, na Grécia ($R_2 = 5{,}9$)?

SOLUÇÃO

Sejam a_1 a amplitude do terremoto de Gujarat e a_2 a amplitude do terremoto de Atenas. Assim:

$$R_1 = \log\frac{a_1}{T} + B = 7{,}9$$

$$R_2 = \log\frac{a_2}{T} + B = 5{,}9$$

$$\left(\log\frac{a_1}{T} + B\right) - \left(\log\frac{a_2}{T} + B\right) = R_1 - R_2$$

$$\log\frac{a_1}{T} - \log\frac{a_2}{T} = 7{,}9 - 5{,}9$$

$$\log\frac{a_1}{a_2} = 2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = 10^2 = 100$$

Podemos concluir que o terremoto de Gujarat foi 100 vezes mais forte que o de Atenas.

Em Química, a acidez de uma solução líquida é medida pela concentração de íons de hidrogênio na solução (a unidade de medida, a título de informação, é de "moles por litro"). A concentração de hidrogênio é denotada por $[H^+]$. Como tais concentrações geralmente envolvem expoentes *negativos* de 10, ordens de grandeza *negativas* são usadas para comparar níveis de acidez. A medida de acidez usada é **pH** e é o oposto do logaritmo na base 10 da concentração de hidrogênio:

$$\text{pH} = -\log\,[H^+]$$

Soluções mais ácidas têm concentrações de íons de hidrogênio mais altos e valores de pH mais baixos.

EXEMPLO 16 Comparação da acidez química

Temos vinagres com pH de 2,4 e recipientes com bicarbonato de sódio cujo pH é 8,4.

(a) Quais são as concentrações de íons de hidrogênio?

(b) Quantas vezes a concentração de íons de hidrogênio do vinagre é maior que do bicarbonato de sódio?

(c) Que ordem de grandeza difere um produto do outro?

SOLUÇÃO

(a) Vinagre
$$-\log[H^+] = 2{,}4$$
$$\log[H^+] = -2{,}4$$
$$[H^+] = 10^{-2,4} \cong 3{,}98 \times 10^{-3} \text{ moles por litro}$$

Bicarbonato de sódio
$$-\log[H^+] = 8{,}4$$
$$\log[H^+] = -8{,}4$$
$$[H^+] = 10^{-8,4} \cong 3{,}98 \times 10^{-9} \text{ moles por litro}$$

(b)
$$\frac{[H^+] \text{ de vinagre}}{[H^+] \text{ de bicarbonato de sódio}} = \frac{10^{-2,4}}{10^{-8,4}} = 10^{(-2,4)-(-8,4)} = 10^6$$

(c) A concentração de íons de hidrogênio do vinagre tem sua ordem de grandeza 6 vezes maior que a do bicarbonato de sódio, exatamente a diferença entre os níveis de pH.

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 a 10, calcule o valor da expressão sem usar a calculadora.

1. 5^{-2}

2. 10^{-3}

3. $\frac{4^0}{5}$

4. $\frac{1^0}{2}$

5. $\frac{8^{11}}{2^{28}}$

6. $\frac{9^{13}}{27^8}$

7. $\log 10^2$

8. $\ln e^3$

9. $\ln e^{-2}$

10. $\log 10^{-3}$

Nos exercícios 11 a 14, reescreva a expressão como uma potência com expoente racional.

11. $\sqrt{5}$

12. $\sqrt[3]{10}$

13. $\frac{1}{\sqrt{e}}$

14. $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

Nos exercícios 15 a 20, simplifique a expressão.

15. $\frac{x^5y^{-2}}{x^2y^{-4}}$

16. $\frac{u^{-3}v^7}{u^{-2}v^2}$

17. $(x^6y^{-2})^{1/2}$

18. $(x^{-8}y^{12})^{3/4}$

19. $\frac{(u^2v^{-4})^{1/2}}{(27u^6v^{-6})^{1/3}}$

20. $\frac{(x^{-2}y^3)^{-2}}{(x^3y^{-2})^{-3}}$

Nos exercícios 21 e 22, escreva o número em notação científica (potência de base 10).

21. A distância média de Júpiter até o Sol é aproximadamente 778.300.000 quilômetros.

22. Um núcleo atômico tem um diâmetro de aproximadamente 0,000000000000001 metro.

Nos exercícios 23 e 24, escreva o número na forma original.

23. O número de Avogadro é aproximadamente $6{,}02 \times 10^{23}$.

24. A massa atômica é aproximadamente $1{,}66 \times 10^{-27}$ quilos.

Nos exercícios 25 e 26, use a notação científica para simplificar a expressão; deixe sua resposta em notação científica.

25. (186.000)(31.000.000)

26. $\dfrac{0{,}0000008}{0{,}000005}$

Exercícios

Nos exercícios 1 a 18, calcule os logaritmos sem usar calculadora.

1. $\log_4 4$

2. $\log_6 1$

3. $\log_2 32$

4. $\log_3 81$

5. $\log_5 \sqrt[3]{25}$

6. $\log_6 \dfrac{1}{\sqrt[5]{36}}$

7. $\log 10^3$

8. $\log 10.000$

9. $\log 100.000$

10. $\log 10^{-4}$

11. $\log \sqrt[3]{10}$

12. $\log \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$

13. $\ln e^3$

14. $\ln e^{-4}$

15. $\ln \dfrac{1}{e}$

16. $\ln 1$

17. $\ln \sqrt[4]{e}$

18. $\ln \dfrac{1}{\sqrt{e^7}}$

Nos exercícios 19 a 24, calcule o valor exato da expressão sem usar calculadora.

19. $7^{\log_7 3}$

20. $5^{\log_5 8}$

21. $10^{\log(0,5)}$

22. $10^{\log 14}$

23. $e^{\ln 6}$

24. $e^{\ln(1/5)}$

Nos exercícios 25 a 32, use uma calculadora para resolver o logaritmo, caso ele esteja definido, e faça a conferência usando expressão exponencial.

25. $\log 9{,}43$

26. $\log 0{,}908$

27. $\log(-14)$

28. $\log(-5{,}14)$

29. $\ln 4{,}05$

30. $\ln 0{,}733$

31. $\ln(-0{,}49)$

32. $\ln(-3{,}3)$

Nos exercícios 33 a 36, resolva a equação modificando-a para uma forma exponencial.

33. $\log x = 2$

34. $\log x = 4$

35. $\log x = -1$

36. $\log x = -3$

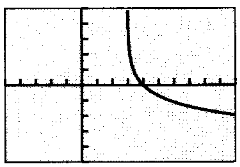
Nos exercícios 37 a 40, associe a função a seu gráfico.

37. $f(x) = \log(1 - x)$

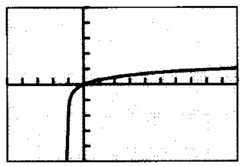
38. $f(x) = \log(x + 1)$

39. $f(x) = -\ln(x - 3)$

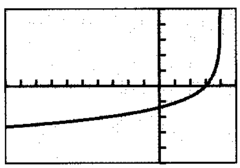
40. $f(x) = -\ln(4 - x)$



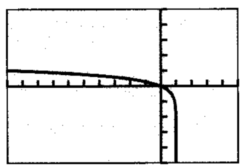
(a)



(b)



(c)



(d)

Nos exercícios 41 a 46, descreva como transformar o gráfico de $y = \ln x$ no gráfico da função dada. Você pode fazer o esboço do gráfico ou utilizar uma calculadora com esse recurso.

41. $f(x) = \ln(x + 3)$

42. $f(x) = \ln(x) + 2$

43. $f(x) = \ln(-x) + 3$

44. $f(x) = \ln(-x) - 2$

45. $f(x) = \ln(2 - x)$

46. $f(x) = \ln(5 - x)$

Nos exercícios 47 a 52, descreva como transformar o gráfico de $y = \log x$ no gráfico da função dada. Você pode fazer o esboço do gráfico ou utilizar uma calculadora com esse recurso.

47. $f(x) = -1 + \log(x)$

48. $f(x) = \log(x - 3)$

49. $f(x) = -2\log(-x)$

50. $f(x) = -3\log(-x)$

51. $f(x) = 2\log(3 - x) - 1$

52. $f(x) = -3\log(1 - x) + 1$

Nos exercícios 53 a 58, esboce o gráfico da função e analise seu domínio, sua imagem, a continuidade, o comportamento de crescimento/decrescimento, se é limitada, se tem extremos, a simetria, as assíntotas e o comportamento nos extremos do domínio.

53. $f(x) = \log(x - 2)$ **54.** $f(x) = \ln(x + 1)$

55. $f(x) = -\ln(x - 1)$ **56.** $f(x) = -\log(x + 2)$

57. $f(x) = 3\log(x) - 1$

58. $f(x) = 5\ln(2 - x) - 3$

59. Múltipla escolha Qual é o valor aproximado do logaritmo de 2?

(a) 0,10523 **(b)** 0,20000

(c) 0,30103 **(d)** 0,69315

(e) 3,32193

60. Múltipla escolha Qual afirmativa é **falsa**?

(a) $\log 5 = 2{,}5 \log 2$ **(b)** $\log 5 = 1 - \log 2$

(c) $\log 5 > \log 2$ **(d)** $\log 5 < \log 10$

(e) $\log 5 = \log 10 - \log 2$

61. Múltipla escolha Qual afirmativa é **falsa** sobre $y = \ln x$?

(a) É crescente sobre o seu domínio.

(b) É simétrica com relação à origem.

(c) É contínua sobre o seu domínio.

(d) É limitada.

(e) Tem uma assíntota vertical.

62. Múltipla escolha Qual das seguintes funções é a inversa de $f(x) = 2 \cdot 3^x$? (Estudaremos mais sobre isso no Capítulo 14).

(a) $f^{-1}(x) = \log_3(x/2)$ **(b)** $f^{-1}(x) = \log_2(x/3)$

(c) $f^{-1}(x) = 2\log_3(x)$ **(d)** $f^{-1}(x) = 3\log_2(x)$

(e) $f^{-1}(x) = 0{,}5\log_3(x)$

Nos exercícios 63 e 64 descreva, para cada função, o domínio, a imagem, o valor do intercepto (valor onde o gráfico passa no eixo vertical), além de uma análise a respeito da existência de assíntota.

63. $f(x) = \log_3 x$

64. $f(x) = \log_{1/3} x$

65. Encontre o número $b > 1$ de modo que os gráficos de $f(x) = b^x$ e sua inversa $f^{-1}(x) = \log_b x$ tenham exatamente um ponto de intersecção. Qual é o ponto que é comum aos dois gráficos?

66. Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = \ln x$ no gráfico de $g(x) = \log_{1/e} x$.

67. Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = \log x$ no gráfico de $g(x) = \log_{0,1} x$.

Nos exercícios 68 a 79, assumindo que x e y são números positivos, use as propriedades de logaritmos para escrever a expressão como uma soma ou diferença de logaritmos, ou como um múltiplo de logaritmos.

68. $\ln 8x$ **69.** $\ln 9y$

70. $\log \frac{3}{x}$ **71.** $\log \frac{2}{y}$

72. $\log_2 y^5$ **73.** $\log_2 x^{-2}$

74. $\log x^3y^2$ **75.** $\log xy^3$

76. $\ln \frac{x^2}{y^3}$ **77.** $\log 1000x^4$

78. $\log \sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ **79** $\ln \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$

Nos exercícios 80 a 89, assumindo que x, y e z são números positivos, use as propriedades de logaritmos para escrever a expressão como um único logaritmo.

80. $\log x + \log y$ **81.** $\log x + \log 5$

82. $\ln y - \ln 3$ **83.** $\ln x - \ln y$

84. $\frac{1}{3}\log x$ **85.** $\frac{1}{5}\log z$

86. $2\ln x + 3\ln y$ **87.** $4\log y - \log z$

88. $4\log(xy) - 3\log(yz)$

89. $3\ln(x^3y) + 2\ln(yz^2)$

Nos exercícios 90 a 95, use a fórmula de mudança de base e sua calculadora para encontrar o valor de cada logaritmo.

90. $\log_2 7$ **91.** $\log_5 19$

92. $\log_8 175$ **93.** $\log_{12} 259$

94. $\log_{0,5} 12$ **95.** $\log_{0,2} 29$

Nos exercícios 96 a 99, escreva a expressão usando somente logaritmos naturais.

96. $\log_3 x$ **97.** $\log_7 x$

98. $\log_2 (a + b)$ **99.** $\log_5 (c - d)$

Nos exercícios 100 a 103, escreva a expressão usando somente logaritmo de base 10.

100. $\log_2 x$ **101.** $\log_4 x$

102. $\log_{1/2} (x + y)$ **103.** $\log_{1/3} (x - y)$

104. Prove a regra do quociente dos logaritmos.

105. Prove a regra do produto dos logaritmos.

Nos exercícios 106 a 109, descreva como transformar o gráfico de $g(x) = \ln x$ no gráfico da função dada. Você pode fazer o esboço do gráfico ou utilizar uma calculadora com esse recurso.

106. $f(x) = \log_4 x$ **107.** $f(x) = \log_7 x$

108. $f(x) = \log_{1/3} x$ **109.** $f(x) = \log_{1/5} x$

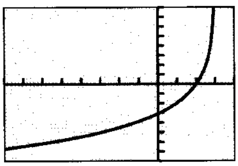
Nos exercícios 110 a 113, associe cada função a seu gráfico.

110. $f(x) = \log_4 (2 - x)$

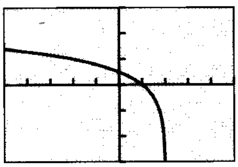
111. $f(x) = \log_6 (x - 3)$

112. $f(x) = \log_{0,5} (x - 2)$

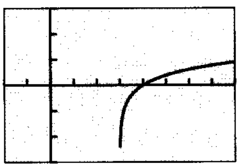
113. $f(x) = \log_{0,7} (3 - x)$



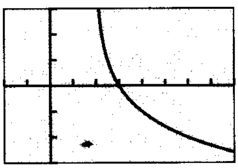
(a)



(b)



(c)



(d)

Nos exercícios 114 a 117, esboce o gráfico da função e analise seu domínio, sua imagem, a continuidade, o comportamento de crescimento/decrescimento, as assíntotas e o comportamento nos extremos do domínio.

114. $f(x) = \log_2 (8x)$ **115.** $f(x) = \log_{1/3} (9x)$

116. $f(x) = \log (x^2)$ **117.** $f(x) = \ln (x^3)$

118. Verdadeiro ou falso O logaritmo do produto de dois números positivos é a soma dos logaritmos dos números. Justifique sua resposta.

119. Verdadeiro ou falso O logaritmo de um número positivo é positivo. Justifique sua resposta.

120. Múltipla escolha $\log 12 =$

(a) $3 \log 4$ **(b)** $\log 3 + \log 4$

(c) $4 \log 3$ **(d)** $\log 3 \cdot \log 4$

(e) $2 \log 6$

121. Múltipla escolha $\log_9 64 =$

(a) $5 \log_3 2$ **(b)** $(\log_3 8)^2$

(c) $(\ln 64)/(\ln 9)$ **(d)** $2 \log_9 32$

(e) $(\log 64)/9$

122. Múltipla escolha $\ln x^5 =$

(a) $5 \ln x$ **(b)** $2 \ln x^3$

(c) $x \ln 5$ **(d)** $3 \ln x^2$

(e) $\ln x^2 \cdot \ln x^3$

123. Múltipla escolha $\log_{1/2} x^2 =$

(a) $-2 \log_2 x$ **(b)** $2 \log_2 x$

(c) $-0,5 \log_2 x$ **(d)** $0,5 \log_2 x$

(e) $-2 \log_2 |x|$

124. Sejam $a = \log 2$ e $b = \log 3$. É verdade que $\log 6 = a + b$. Liste os logaritmos na base 10 de todos os números inteiros positivos menores que 100 que podem ser expressos em termos de a e b, escrevendo equações tais como $\log 6 = a + b$ para cada caso.

125. Resolva $\ln x > \sqrt[3]{x}$.

126. Resolva $1,2^x \leq \log_{1,2} x$.

127. Compare os domínios das funções presentes em cada item a seguir.

(a) $f(x) = 2 \ln x + \ln (x - 3)$ e $g(x) = \ln x^2(x - 3)$

(b) $f(x) = \ln (x + 5) - \ln (x - 5)$ e $g(x) = \ln \dfrac{x + 5}{x - 5}$

(c) $f(x) = \log (x + 3)^2$ e $g(x) = 2 \log (x + 3)$

128. Prove a fórmula de mudança de base dos logaritmos.

129. Use uma calculadora para resolver os logaritmos (pode deixar com cinco casas após a vírgula), onde alguns itens exemplificam as propriedades citadas:

(a) $\log(2 \cdot 4) = \log 2 + \log 4$

(b) $\log\left(\frac{8}{2}\right) = \log 8 - \log 2$

(c) $\log 2^3 = 3 \cdot \log 2$

(d) $\log 5$ (use o fato de que $5 = 10/2$)

(e) $\log 16$ (use 16 como potência de base 2)

(f) $\log 40$

130. Das oito expressões a seguir, verifique quais são verdadeiras e quais são falsas.

(a) $\ln(x + 2) = \ln x + \ln 2$

(b) $\log_3(7x) = 7 \log_3 x$

(c) $\log_2(5x) = \log_2 5 + \log_2 x$

(d) $\ln \frac{x}{5} = \ln x - \ln 5$

(e) $\log \frac{x}{4} = \frac{\log x}{\log 4}$

(f) $\log_4 x^3 = 3 \log_4 x$

(g) $\log_5 x^2 = (\log_5 x)(\log_5 x)$

(h) $\log|4x| = \log 4 + \log|x|$

Nos exercícios 131 a 140, encontre algebricamente a solução exata e verifique o resultado substituindo na equação original.

131. $36\left(\frac{1}{3}\right)^{x/5} = 4$

132. $32\left(\frac{1}{4}\right)^{x/3} = 2$

133. $2 \cdot 5^{x/4} = 250$

134. $3 \cdot 4^{x/2} = 96$

135. $2(10^{-x/3}) = 20$

136. $3(5^{-x/4}) = 15$

137. $\log x = 4$

138. $\log_2 x = 5$

139. $\log_4(x - 5) = -1$

140. $\log_4(1 - x) = 1$

Nos exercícios 141 a 148, resolva cada equação algebricamente. Você pode obter uma aproximação para a solução e checar pela substituição na equação original.

141. $1{,}06^x = 4{,}1$

142. $0{,}98^x = 1{,}6$

143. $50e^{0{,}035x} = 200$

144. $80e^{0{,}045x} = 240$

145. $3 + 2e^{-x} = 6$

146. $7 - 3e^{-x} = 2$

147. $3\ln(x - 3) + 4 = 5$

148. $3 - \log(x + 2)$

Nos exercícios 149 a 154, verifique o domínio de cada função. Depois associe cada uma a seu gráfico.

149. $f(x) = \log[x(x + 1)]$

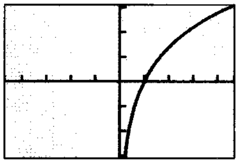
150. $g(x) = \log x + \log(x + 1)$

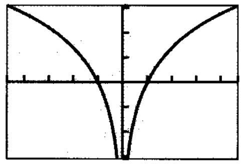
151. $f(x) = \ln \frac{x}{x + 1}$

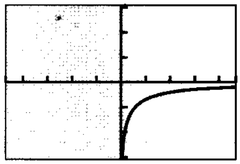
152. $g(x) = \ln x - \ln(x + 1)$

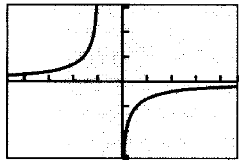
153. $f(x) = 2 \ln x$

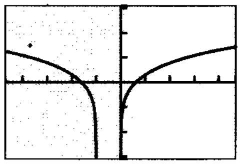
154. $g(x) = \ln x^2$

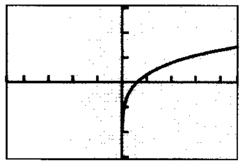

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)

Nos exercícios 155 a 167, resolva cada equação.

155. $\log x^2 = 6$

156. $\ln x^2 = 4$

157. $\log x^4 = 2$

158. $\frac{2^x - 2^{-x}}{3} = 4$

159. $\frac{2^x + 2^{-x}}{2} = 3$

160. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 4$

161. $2e^{2x} + 5e^x - 3 = 0$

162. $\frac{500}{1 + 25e^{0{,}3x}} = 200$

163. $\frac{400}{1 + 95e^{-0{,}6x}} = 150$

164. $\frac{1}{2}\ln(x + 3) - \ln x = 0$

165. $\log x - \frac{1}{2}\log(x + 4) = 1$

166. $\ln(x - 3) + \ln(x + 4) = 3 \ln 2$

167. $\log(x - 2) + \log(x + 5) = 2 \log 3$

Nos exercícios 168 a 171, determine quantas ordens de grandeza uma quantidade difere da outra.

168. R\$ 100.000.000.000,00 e R\$ 0,10.

169. Um canário pesando 20 gramas e uma galinha pesando 2 quilos.

170. Um terremoto com 7 pontos na escala Richter e outro com 5,5 pontos.

171. Um suco de limão com pH = 2,3 e uma cerveja com pH = 4,1.

172. Quantas vezes o terremoto da Cidade do México em 1978 (R = 7,9) foi mais forte que o terremoto de Los Angeles em 1994 (R = 6,6)?

173. Quantas vezes o terremoto de Kobe, Japão, em 1995 (R = 7,2) foi mais forte que o terremoto de Los Angeles em 1994 (R = 6,6)?

174. O pH da água com gás é 3,9 e o pH do amoníaco é 11,9.

(a) Quais são as concentrações de íons de hidrogênio?

(b) Quantas vezes a concentração de íons de hidrogênio da água com gás é maior que a do amoníaco?

(c) Que ordem de grandeza difere um produto do outro?

175. O pH do ácido do estômago é aproximadamente 2 e o pH do sangue é 7,4.

(a) Quais são as concentrações de íons de hidrogênio?

(b) Quantas vezes a concentração de íons de hidrogênio do ácido do estômago é maior que a do sangue?

(c) Que ordem de grandeza difere um produto do outro?

176. Verdadeiro ou falso A ordem de grandeza de um número positivo é seu logaritmo natural. Justifique sua resposta.

177. Múltipla escolha Resolva $2^{3x-1} = 32$.

(a) $x = 1$ **(b)** $x = 2$ **(c)** $x = 4$

(d) $x = 11$ **(e)** $x = 13$

178. Múltipla escolha Resolva $\ln x = -1$.

(a) $x = -1$ **(b)** $x = 1/e$ **(c)** $x = 1$

(d) $x = e$ **(e)** Não há solução possível.

179. Múltipla escolha Quantas vezes foi mais forte o terremoto em Arequipa (Peru) em 2001 (8,1 na escala Richter) com relação ao terremoto na Província Takhar (Afeganistão) em 1998 (6,1 na escala Richter)?

(a) 2 **(b)** 6,1 **(c)** 8,1

(d) 14,2 **(e)** 100

180. Prove que se $u/v = 10^n$ para $u > 0$ e $v > 0$, então $\log u - \log v = n$. Explique como este resultado relaciona a potência de 10 com a ordem de grandeza.

Nos exercícios 181 a 186, resolva a equação ou a inequação.

181. $e^x + x = 5$

182. $e^{2x} - 8x + 1 = 0$

183. $e^x < 5 + \ln x$

184. $\ln |x| - e^{2x} \geq 3$

185. $2 \log x - 4 \log 3 > 0$

186. $2 \log (x + 1) - 2 \log 6 < 0$

Nos exercícios 187 a seguir, vamos utilizar o conceito, $M = C(1 + i)^n$, onde C é o capital (representa o valor inicial), M é o montante (representa o valor futuro), i é a taxa de juros no período de interesse e n é a quantidade de períodos (referentes à taxa de juros) que ocorrem no prazo de uma aplicação financeira (vamos supor que a capitalização em um período seja calculada a partir do valor obtido no período imediatamente anterior).

187. Um valor inicial de R$ 500,00 será aplicado a uma taxa de juros anual de 7%. Qual será o investimento dez anos mais tarde?

188. Um valor inicial de R$ 500,00 será aplicado a uma taxa de juros anual. Qual deve ser a taxa de juros para que o valor inicial dobre em dez anos?

189. Um investimento de R$ 2.300,00 ocorre a uma taxa de juros de 9% ao trimestre. Qual deve ser o prazo da aplicação para que esse investimento atinja o valor de R$ 4.150,00?

190. Um valor inicial de R$ 1.250,00 será aplicado a uma taxa de juros bimestral de 2,5%. Qual será o investimento um ano e meio mais tarde?

191. Qual valor deve ser investido a uma taxa de juros de 1,2% ao mês, para obter, ao final de um semestre e meio, o montante de R$ 3.500,00?

192. Um valor inicial de R$ 2.350,00 será aplicado a uma taxa de juros semestral. Qual deve ser a taxa de juros para que o valor inicial atinja R$ 3.200,00 em dois anos?

193. Um investimento de R$ 8.700,00 ocorre a uma taxa de juros de 3% ao mês. Qual deve ser o prazo da aplicação para que esse investimento atinja o valor de R$ 11.000,00?

Capítulo 13

Funções compostas

Objetivos de aprendizagem

- Operações com funções.
- Composição de funções.
- Relações e funções definidas implicitamente.

Muitas funções que estudamos e trabalhamos nas aplicações podem ser criadas modificando ou combinando outras funções.

Operações com funções

Uma maneira de construir novas funções é aplicar as operações usuais (adição, subtração, multiplicação e divisão) usando a seguinte definição.

DEFINIÇÃO Soma, diferença, produto e quociente de funções

Sejam f e g duas funções com domínios que possuem valores comuns. Então, para todos os valores de x na intersecção desses domínios, as combinações algébricas de f e g são definidas pelas seguintes regras:

Soma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferença: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Produto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$

Quociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, desde que $g(x) \neq 0$

Em cada caso, o domínio da nova função consiste em todos os números que pertencem ao domínio de f e ao domínio de g. Como vemos, as raízes da função do denominador são excluídas do domínio do quociente.

EXEMPLO 1 Definições algébricas de novas funções

Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$

Encontre fórmulas para as funções $f+g, f-g, fg, f/g, gg$. Descreva o domínio de cada uma.

SOLUÇÃO

O domínio de f é o conjunto de todos os números reais e o domínio de g pode ser representado pelo intervalo $[-1, +\infty[$. Como eles se sobrepõem, então a intersecção desses conjuntos resulta no conjunto dado pelo intervalo $[-1, +\infty[$. Assim:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x+1}$ com domínio $[-1, +\infty[$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$ com domínio $[-1, +\infty[$

$(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2\sqrt{x+1}$ com domínio $[-1, +\infty[$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ com domínio $]-1, +\infty[$

$(gg)(x) = g(x)g(x) = (\sqrt{x+1})^2$ com domínio $[-1, +\infty[$

Note que podemos expressar $(gg)(x)$ simplesmente por $x + 1$. Essa simplificação não muda o fato de que o domínio de $(gg)(x)$ é o intervalo $[-1, +\infty[$. A função $x + 1$, fora desse contexto, tem como domínio o conjunto dos números reais. Sob essas circunstâncias a função $(gg)(x)$ é o produto de duas funções com domínio restrito.

Composição de funções

Existem situações em que uma função não é construída combinando operações entre duas funções; uma função pode ser construída aplicando as leis envolvidas, primeiro uma e depois a outra. Esta operação para combinar funções, que não está baseada nas operações numéricas, é chamada de *composição de função.*

DEFINIÇÃO Composição de funções

Sejam f e g duas funções tais que o domínio de f intersecciona com a imagem de g. A **composição f de g**, denotada por $f \circ g$, é definida pela regra:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ consiste em todos os valores de x que estão no domínio de g e cujo valor $g(x)$ encontra-se no domínio de f. Veja a Figura 13.1.

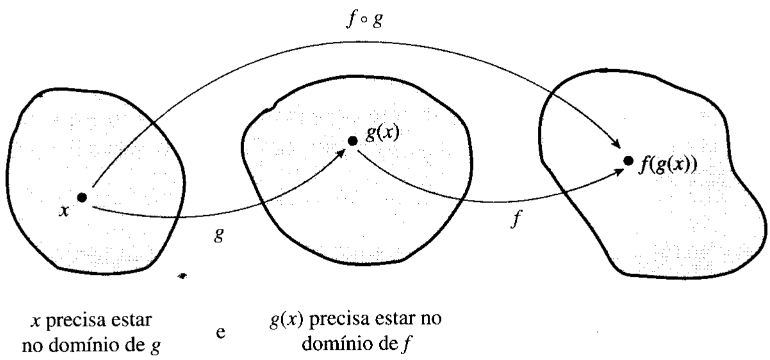


Figura 13.1 Na composição $f \circ g$, primeiro é aplicada a função g e depois a f.

A composição g de f, denotada por $g \circ f$, é definida de maneira similar. Em muitos casos, $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções diferentes. Na linguagem técnica, dizemos que "a composição de funções não é comutativa".

EXEMPLO 2 Composição de funções

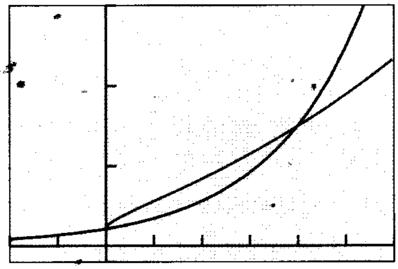
Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre as funções $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$. Verifique se essas funções não são as mesmas.

SOLUÇÃO

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = \sqrt{e^x}$

Uma forma de verificar que essas funções não são as mesmas é concluindo que não têm domínios iguais: $f \circ g$ é definida somente para $x \geq 0$, enquanto $g \circ f$ é definida para todos os números reais. Poderíamos também considerar seus gráficos (Figura 13.2) que interseccionam apenas em $x = 0$ e $x = 4$.



[−2, 6] por [−1, 15]

Figura 13.2 Os gráficos de $y = e^{\sqrt{x}}$ e $y = \sqrt{e^x}$ não são os mesmos.

Para finalizar, os gráficos sugerem uma verificação numérica: vamos citar um valor de x para o qual $f(g(x))$ e $g(f(x))$ têm valores diferentes. Podemos verificar isso, por exemplo, para $x = 1$: $f(g(1)) = e$ e $g(f(1)) = \sqrt{e}$. O gráfico nos ajuda a fazer a escolha adequada de x, pois escolher $x = 0$ e $x = 4$, levaria à conclusão que elas são iguais.

EXEMPLO 3 Verificação do domínio de funções compostas

Sejam $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre os domínios das funções compostas

(a) $g \circ f$ **(b)** $f \circ g$

SOLUÇÃO

(a) Comporemos as funções na ordem especificada:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

Para x estar no domínio de $g \circ f$, primeiro deve-se analisar a função $f(x) = x^2 - 1$. Neste caso, x pode ser qualquer número real. Como depois é calculada a raiz quadrada desse resultado, então $x^2 - 1$ pode ter apenas valores não negativos. Portanto, o domínio de $g \circ f$ consiste em todos os números reais para os quais $x^2 - 1 \geq 0$, isto é, o conjunto $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

(b) Novamente, comporemos as funções na ordem especificada: $(f \circ g)\, x = f(g(x)) = (\sqrt{x}\,)^2 - 1$. Para x estar no domínio de $f \circ g$, primeiro deve-se analisar a função $g(x) = \sqrt{x}$. Neste caso, x deve ser qualquer número real não negativo. Como depois é calculado o quadrado desse resultado e subtraído o valor 1, então o próprio resultado de $\sqrt{x}$ pode ser qualquer número real. Portanto, o domínio d $f \circ g$ consiste em todos os números do conjunto $[0, +\infty[$.

Nos exemplos 2 e 3, vimos que duas funções foram *compostas* para formar uma nova função. Existem momentos em que precisamos do processo inverso. Isso significa que podemos ter a necessidade de, partindo de uma função, encontrar aquelas que, ao serem compostas, resultam na que temos.

EXEMPLO 4 Decomposição de funções

Para cada função h, encontre as funções f e g, tais que $h(x) = f(g(x))$

(a) $h(x) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 4$

(b) $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

SOLUÇÃO

(a) Podemos observar que h é uma função quadrática em função de $x + 1$. As funções procuradas são $f(x) = x^2 - 3x + 4$ e $g(x) = x + 1$. Conferindo:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 4$$

(b) Podemos observar que h é a raiz quadrada da função $x^3 + 1$. As funções procuradas são $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^3 + 1$. Conferindo:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^3 + 1) = \sqrt{x^3 + 1}$$

Muitas vezes existe mais de uma maneira para decompor uma função. Por exemplo, uma alternativa para decompor $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ no Exemplo 4(b) é fazer $f(x) = \sqrt{x + 1}$ e $g(x) = x^3$. De fato, $h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt{x^3 + 1}$.

Relações e funções definidas implicitamente

O termo geral que relaciona as variáveis dos pares ordenados (x, y) é uma **relação**. Se ocorrer de existir um *único* valor de y para cada valor de x, então a relação também é uma função e seu gráfico satisfaz o teste da linha vertical (Capítulo 7). No caso da equação de um círculo definida, por exemplo, por $x^2 + y^2 = 4$, os pares ordenados $(0, 2)$ e $(0, -2)$ satisfazem a lei da relação; assim, y não é uma função de x.

EXEMPLO 5 Verificação de pares ordenados de uma relação

Determine quais dos pares ordenados dados por $(2, -5)$, $(1, 3)$ e $(2, 1)$ estão na relação definida por $x^2y + y^2 = 5$. A relação é uma função?

SOLUÇÃO

Nós simplesmente substituímos os valores das coordenadas x e y dos pares ordenados em $x^2y + y^2$ e vemos se o resultado é 5.

$(2, -5)$: $(2)^2(-5) + (-5)^2 = 5$

$(1, 3)$: $(1)^2(3) + (3)^2 = 12 \neq 5$

$(2, 1)$: $(2)^2(1) + (1)^2 = 5$

Assim, $(2, -5)$ e $(2, 1)$ estão na relação, mas $(1, 3)$ não está.
Como a relação está satisfeita para pares ordenados com diferentes valores de y, porém para o mesmo valor de x, a relação não pode ser uma função.

Seja novamente a equação do círculo dada por $x^2 + y^2 = 4$. Essa equação não define uma função, porém podemos reescrever e finalizar em duas equações, de modo que cada uma delas *seja* uma função:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = +\sqrt{4 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{4 - x^2}$$

Os gráficos dessas duas funções são, respectivamente, os semicírculos superior e inferior do círculo da Figura 13.3. Eles são mostrados na Figura 13.4. Desde que os pares ordenados dessas funções satisfaçam a equação $x^2 + y^2 = 4$, dizemos que a relação dada pela equação define duas funções **implicitamente**.

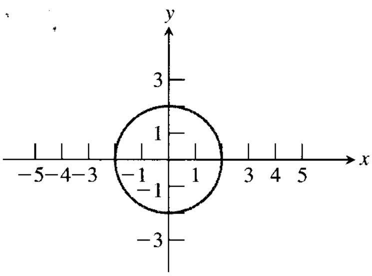


Figura 13.3 Círculo de raio 2 centralizado na origem (0,0), com equação $x^2 + y^2 = 4$.

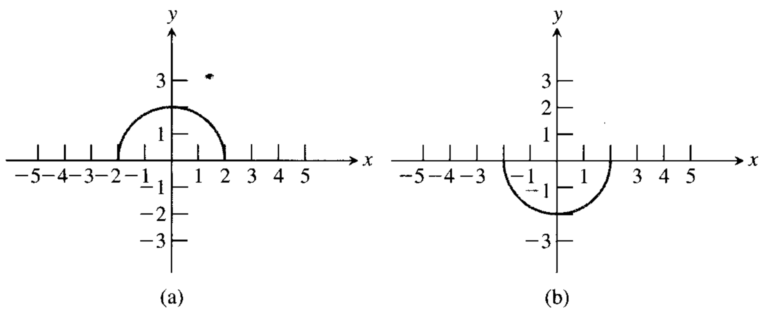


Figura 13.4 Os gráficos de (a) $y = +\sqrt{4 - x^2}$ e (b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

EXEMPLO 6 Uso das funções definidas implicitamente

Descreva o gráfico da relação $x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO

Observe que a expressão do lado esquerdo da equação pode ser fatorada. Isto permite que a equação seja escrita como duas funções definidas implicitamente, como se seguem:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

$$(x + y)^2 = 1$$

$$x + y = \pm 1$$

$$x + y = 1 \text{ ou } x + y = -1$$

$$y = -x + 1 \text{ ou } y = -x - 1$$

O gráfico consiste em duas retas paralelas (Figura 13.5), cada um referente a uma função definida implicitamente.

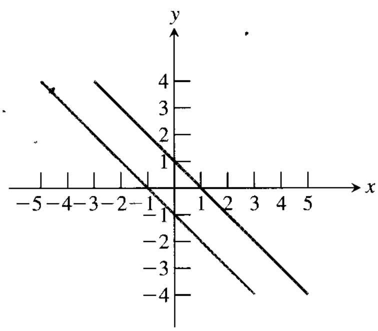


Figura 13.5 O gráfico da relação $x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 a 10, encontre o domínio de cada função e o expresse com a notação de intervalo.

1. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 3}$

2. $g(x) = \ln(x - 1)$

3. $f(t) = \sqrt{5 - t}$

4. $g(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x - 1}}$

5. $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

6. $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$

7. $f(t) = \dfrac{t + 5}{t^2 + 1}$

8. $g(t) = \ln(|t|)$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

10. $g(x) = 2$

Exercícios

Nos exercícios 1 a 3, encontre as fórmulas para as funções $f + g$, $f - g$ e fg. Dê o domínio de cada uma delas.

1. $f(x) = 2x - 1$; $g(x) = x^2$

2. $f(x) = (x - 1)^2$; $g(x) = 3 - x$

3. $f(x) = \sqrt{x + 5}$; $g(x) = |x + 3|$

Nos exercícios 4 a 9, encontre as fórmulas para as funções f/g e g/f. Dê o domínio de cada uma delas.

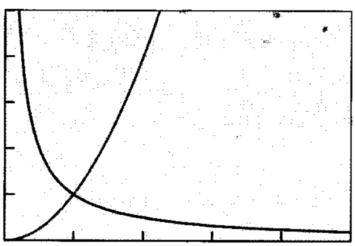
4. $f(x) = \sqrt{x + 3}$; $g(x) = x^2$

5. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = \sqrt{x + 4}$

6. $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

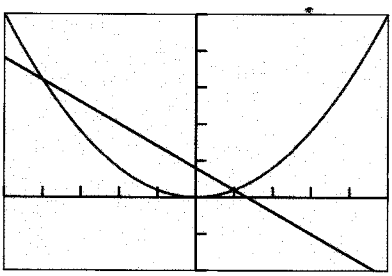
7. $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

8. $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1/x$ são mostradas no gráfico a seguir. Esboce o gráfico da soma $(f + g)(x)$ manualmente ou com uma calculadora que tenha esse recurso.



[0, 5] por [0, 5]

9. $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4 - 3x$ são mostradas no gráfico a seguir. Esboce o gráfico da diferença $(f - g)(x)$ manualmente ou com uma calculadora que tenha esse recurso.



[−5, 5] por [−10, 25]

Nos exercícios 10 a 13, encontre $(f \circ g)(3)$ e $(g \circ f)(-2)$.

10. $f(x) = 2x - 3$; $g(x) = x + 1$

11. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = 2x - 3$

12. $f(x) = x^2 + 4$; $g(x) = \sqrt{x + 1}$

13. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$; $g(x) = 9 - x^2$

Nos exercícios 14 a 21, encontre $f(g(x))$ e $g(f(x))$. Verifique o domínio de cada função.

14. $f(x) = 3x + 2$; $g(x) = x - 1$

15. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

16. $f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = \sqrt{x + 1}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$; $g(x) = \sqrt{x}$

18. $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

19. $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{2x}$; $g(x) = \dfrac{1}{3x}$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

Nos exercícios 22 a 26, encontre $f(x)$ e $g(x)$, de modo que a função possa ser escrita como $y = f(g(x))$ (pode existir mais de uma maneira de decomposição da função).

22. $y = \sqrt{x^2 - 5x}$

23. $y = (x^3 + 1)^2$

24. $y = |3x - 2|$

25. $y = \dfrac{1}{x^3 - 5x + 3}$

26. $y = (x - 3)^5 + 2$

27. Quais pares ordenados entre (1, 1), (4, −2) e (3, −1) satisfazem a relação dada por $3x + 4y = 5$?

28. Quais pares ordenados entre (5,1), (3,4) e (0, −5) satisfazem a relação dada por $x^2 + y^2 = 25$?

Nos exercícios 29 a 36, encontre duas funções definidas implicitamente, partindo da relação dada.

29. $x^2 + y^2 = 25$

30. $x + y^2 = 25$

31. $x^2 - y^2 = 25$

32. $3x^2 - y^2 = 25$

33. $x + |y| = 1$

34. $x - |y| = 1$

35. $y^2 = x^2$

36. $y^2 = x$

37. Verdadeiro ou falso O domínio da função quociente $(f/g)(x)$ (que significa $f(x)/g(x)$ consiste em todos os números que pertencem aos dois domínios, que são os de f e de g. Justifique sua resposta.

38. Verdadeiro ou falso O domínio da função produto $(fg)(x)$ (que significa $f(x)g(x)$ consiste em todos os números que pertencem ao domínio de f ou ao de g. Justifique sua resposta.

39. Múltipla escolha Suponha f e g funções que possuem como domínio o conjunto de todos os números reais. Qual das seguintes alternativas *não é* necessariamente verdadeira?

(a) $(f + g)(x) = (g + f)(x)$

(b) $(fg)(x) = (gf)(x)$

(c) $f(g(x)) = g(f(x))$

(d) $(f - g)(x) = -(g - f)(x)$

(e) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

40. Múltipla escolha Se $f(x) = x - 7$ e $g(x) = \sqrt{4 - x}$, então qual é o domínio da função f/g?

(a) $]-\infty, 4[$ **(b)** $]-\infty, 4]$ **(c)** $]4, \infty[$

(d) $[4, \infty[$ **(e)** $]4, 7[\cup]7, +\infty[$

41. Múltipla escolha Se $f(x) = x^2 + 1$, então $(f \circ f)(x) =$

(a) $2x^2 + 2$ **(b)** $2x^2 + 1$ **(c)** $x^4 + 1$

(d) $x^4 + 2x^2 + 1$ **(e)** $x^4 + 2x^2 + 2$

42. Múltipla escolha Qual das seguintes relações define a função $y = |x|$ implicitamente?

(a) $y = x$ **(b)** $y^2 = x^2$ **(c)** $y^3 = x^3$

(d) $x^2 + y^2 = 1$ **(e)** $x = |y|$

43. Associe cada função f a uma função g como também a um domínio D, tal que tenhamos $(f \circ g)(x) = x^2$ com domínio D.

f	g	D
e^x	$\sqrt{2 - x}$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$(x^2 + 2)^2$	$x + 1$	$]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$
$(x^2 - 2)^2$	$2 \ln x$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{(x - 1)^2}$	$\dfrac{1}{x - 1}$	$[2, +\infty[$
$x^2 - 2x + 1$	$\sqrt{x - 2}$	$]-\infty, 2]$
$\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)^2$	$\dfrac{x + 1}{x}$	$]-\infty, +\infty[$

44. Seja $f(x) = x^2 + 1$. Encontre uma função g tal que:

(a) $(fg)(x) = x^4 - 1$ **(b)** $(f + g)(x) = 3x^2$

(c) $(f/g)(x) = 1$ **(d)** $f(g(x)) = 9x^4 + 1$

(e) $g(f(x)) = 9x^4 + 1$

Capítulo 14

Funções inversas

Objetivos de aprendizagem

- Relações definidas parametricamente.
- Relações inversas e funções inversas.

Algumas funções e gráficos podem ser definidos parametricamente, enquanto alguns outros podem ser entendidos como inversas das funções que já conhecemos.

Relações definidas parametricamente

Uma maneira de definir funções, ou de forma mais generalizada, relações, é definir *os dois* elementos do par ordenado (x, y) em termos de outra variável t, chamada de **parâmetro**. Ilustraremos com um exemplo.

EXEMPLO 1 • Definição de uma função parametricamente

Considere o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) definidos pelas equações

$$x = t + 1$$
$$y = t^2 + 2t$$

onde t é um número real qualquer.

(a) Encontre os pontos determinados por $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ e 3.

(b) Encontre uma relação algébrica entre x e y (isto é chamado muitas vezes de "eliminação do parâmetro"). Temos y como uma função de x?

(c) Esboce o gráfico da relação no plano cartesiano.

SOLUÇÃO

(a) Substitua cada valor de t nas fórmulas que definem x e y para encontrar o ponto que esse valor de t determina parametricamente.

t	$x = t + 1$	$y = t^2 + 2t$	(x, y)
-3	-2	3	$(-2, 3)$
-2	-1	0	$(-1, 0)$
-1	0	-1	$(0, -1)$
0	1	0	$(1, 0)$
1	2	3	$(2, 3)$
2	3	8	$(3, 8)$
3	4	15	$(4, 15)$

(b) Podemos encontrar a relação entre x e y algebricamente pelo método da substituição. Podemos começar com t em termos de x para obtermos $t = x - 1$. Substituir na expressão $y = t^2 + 2t$.

$$y = t^2 + 2t$$
$$y = (x - 1)^2 + 2(x - 1)$$
$$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2$$
$$= x^2 - 1$$

Isso é consistente com os pares ordenados que já havíamos encontrado na tabela. Como t varia em todo o conjunto dos números reais, obteremos todos os pares ordenados da relação $y = x^2 - 1$, o que faz de fato y ser definido como função de x.

(c) Desde que a relação definida parametricamente consista em todos os pares ordenados na relação, podemos obter o gráfico esboçando a parábola, como na Figura 14.1.

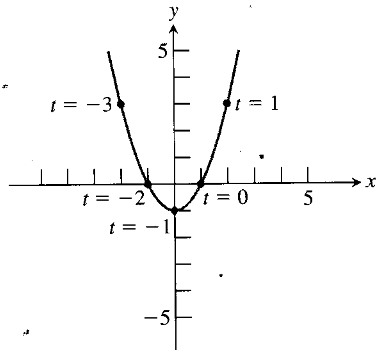


Figura 14.1 Gráfico de $y = x^2 - 1$.

EXEMPLO 2 Definição de uma função parametricamente

Considere o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) definidos pelas equações

$$x = t^2 + 2t$$
$$y = t + 1$$

onde t é um número real qualquer.

(a) Encontre os pontos determinados por $t = -3, 2, -1, 0, 1, 2$ e 3.

(b) Esboce o gráfico da relação no plano cartesiano.

(c) y é uma função de x?

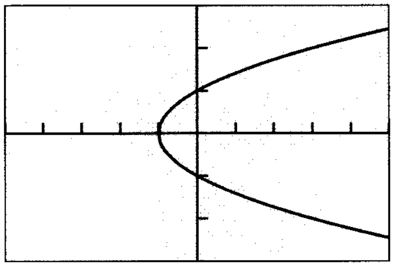
(d) Encontre uma relação algébrica entre x e y.

SOLUÇÃO

(a) Substitua cada valor de t nas fórmulas que definem x e y para encontrar o ponto que esse valor de t determina parametricamente.

t	(x, y)
-3	$(3, -2)$
-2	$(0, -1)$
-1	$(-1, 0)$
0	$(0, 1)$
1	$(3, 2)$
2	$(8, 3)$
3	$(15, 4)$

(b) Podemos obter o gráfico manualmente ou conferi-lo na Figura 14.2.



$[-5, 5]$ por $[-3, 3]$

Figura 14.2 Gráfico de uma parábola no modo paramétrico.

(c) y não é uma função de x. No item (a) já vemos que existem pares ordenados diferentes com valores de x iguais; além disso, no item (b) vemos que o gráfico falha no teste da linha vertical (como vimos no Capítulo 7).

(d) De forma análoga ao que foi feito no Exemplo 1, temos $x = y^2 - 1$.

Relações inversas e funções inversas

O que acontece quando invertemos as coordenadas de todos os pares ordenados na relação? Obviamente obtemos outra relação, já que existe um outro conjunto de pares ordenados; mas qual semelhança observamos com a relação original? Se a relação original é uma função, a nova relação também será uma função?

Podemos ter idéia do que ocorre analisando os exemplos 1 e 2. Os pares ordenados no Exemplo 2 podem ser obtidos simplesmente invertendo as coordenadas dos pares ordenados no Exemplo 1 (isso porque as definições de x e y estão trocadas nos dois exemplos). Dizemos que a relação no Exemplo 2 é a *relação inversa* da relação no Exemplo 1.

DEFINIÇÃO Relação inversa

O par ordenado (a, b) pertence a uma relação se e somente se o par ordenado (b, a) está na **relação inversa**.

Estudaremos a conexão entre uma relação e sua inversa. Teremos interesse em analisar relações inversas e o que ocorre para serem *funções*. Observe que o gráfico da relação inversa no Exemplo 2 falha no teste da linha vertical (visto no Capítulo 7) e, portanto, não é o gráfico de uma função. A questão que temos é: podemos predizer esta falha apenas considerando o gráfico da relação original? A Figura 14.3 sugere que sim.

O gráfico da inversa na Figura 14.3(b) falha no teste da linha vertical porque temos dois valores diferentes de y para o mesmo valor de x. Isto é uma conseqüência direta do fato de que a relação original na Figura 14.3(a) possui dois valores diferentes de x com o mesmo valor de y. O gráfico da inversa falha no teste da linha *vertical* precisamente porque o gráfico original falha no teste da linha *horizontal* (apesar de esse "teste" não ter sido citado anteriormente, ele tem as mesmas idéias do teste da linha vertical, do qual falaremos a respeito logo a seguir). Isto nos dá um teste para relações cujas inversas são funções.

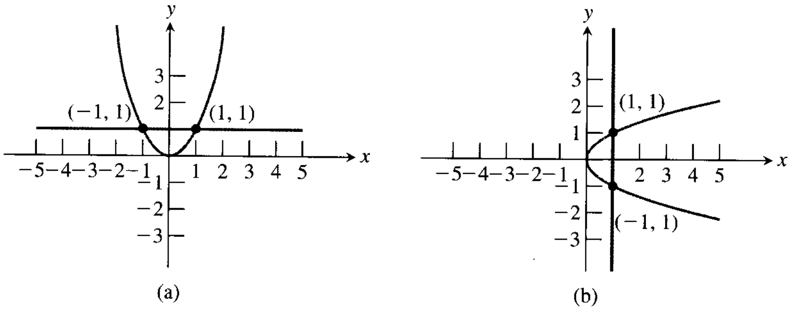


Figura 14.3 (a) Relação original e o teste da linha horizontal. (b) Relação inversa e o teste da linha vertical.

Teste da linha horizontal

A inversa de uma relação é uma função se e somente se cada linha horizontal intersecciona o gráfico da relação original no máximo em um ponto.

EXEMPLO 3 Aplicação do teste da linha horizontal

Quais dos gráficos de (1) a (4) na Figura 14.4 são gráficos de

(a) relações que são funções?

(b) relações que têm inversas que são funções?

SOLUÇÃO

(a) Os gráficos (1) e (4) são gráficos de funções porque satisfazem o teste da linha vertical. Já os gráficos (2) e (3) não são gráficos de funções porque falham no teste da linha vertical.

(b) Os gráficos (1) e (2) são gráficos de relações cujas inversas são funções porque satisfazem o teste da linha horizontal. Os gráficos (3) e (4) falham no teste da linha horizontal, assim suas relações inversas não são funções.

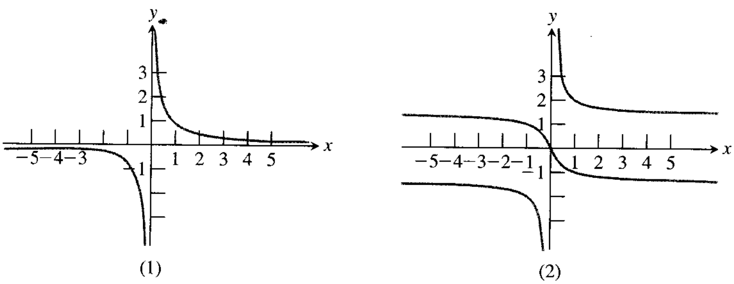
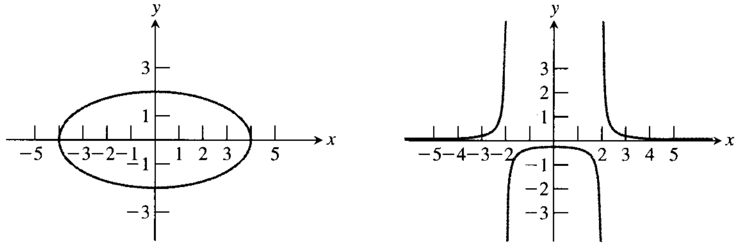


Figura 14.4 Gráficos do Exemplo 3.



(3) (4)

Figura 14.4 Gráficos do Exemplo 3.

Uma *função* cuja inversa é uma função tem o gráfico que satisfaz tanto o teste da linha horizontal como o teste da linha vertical [tal como o Gráfico (1) do Exemplo 3]. Tal função é **bijetora,** desde que todo x seja a primeira coordenada de um único y e todo y seja a única segunda coordenada de um único x.

DEFINIÇÃO Função inversa

Se f é uma função bijetora com domínio A e imagem B, então a **função inversa de** f, denotada por f^{-1}, é a função com domínio B e imagem A definida por

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{se e somente se} \quad f(a) = b$$

O que é uma função bijetora

Para definirmos isso, daremos outras definições antes.

Uma função f de A em B é **injetora** se quaisquer dois elementos distintos do domínio de f (que é o conjunto A) possuem imagens diferentes em B.

Uma função f de A em B é **sobrejetora** se seu conjunto imagem for igual ao seu contradomínio, isto é, se seu conjunto imagem resultar em todo o conjunto B (B é o contradomínio).

Uma função f de A em B é **bijetora** se for injetora e sobrejetora.

CUIDADO SOBRE A NOTAÇÃO DE FUNÇÃO

O símbolo f^{-1} deve ser lido como "função inversa" e jamais deve ser confundido com a recíproca de f. Se f é uma função, o símbolo f^{-1} pode somente significar a inversa de f. A recíproca de f deve ser escrita como $1/f$.

EXEMPLO 4 Verificação da função inversa algebricamente

Encontre uma equação para $f^{-1}(x)$ se $f(x) = x/(x + 1)$

SOLUÇÃO

O gráfico de f na Figura 14.5 sugere que f seja bijetora. A função original satisfaz a equação $y = x/(x + 1)$. Se, de fato, f é bijetora, então a inversa f^{-1} irá satisfazer a equação $x = y/(y + 1)$ (observe que apenas trocamos x por y e y por x).

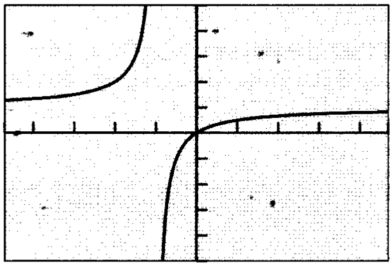
Se resolvermos esta nova equação escrevendo y em função de x, então teremos uma fórmula para $f^{-1}(x)$:

$$x = \frac{y}{y+1}$$

$$x(y + 1) = y$$

$$xy + x = y$$
$$xy - y = -x$$
$$y(x - 1) = -x$$
$$y = \frac{-x}{x - 1}$$
$$y = \frac{x}{1 - x}$$

Portanto, $f^{-1}(x) = x/(1 - x)$.



[−4,7; 4,7] por [−5, 5]

Figura 14.5 O gráfico de $f(x) = x/(x + 1)$.

Muitas funções não são bijetoras e, assim, não têm funções inversas. O último exemplo mostrou uma maneira de encontrar a função inversa; porém, dependendo do caso, o desenvolvimento algébrico pode tornar-se difícil. O que ocorre é que acabamos encontrando poucas inversas dessa forma.

É possível usar o gráfico de f para produzir um gráfico de f^{-1} sem nenhum desenvolvimento algébrico, bastando utilizar a seguinte propriedade geométrica: os pontos (a, b) e (b, a) são simétricos no plano cartesiano com relação à reta $y = x$. Os pontos (a, b) e (b, a) são **reflexões** um do outro com relação à reta $y = x$.

EXEMPLO 5 Verificação da função inversa graficamente

O gráfico de uma função $y = f(x)$ é demonstrado na Figura 14.6. Esboce o gráfico da função $y = f^{-1}(x)$. Podemos dizer que f é uma função bijetora?

SOLUÇÃO

Observe que não precisamos encontrar uma fórmula para $f^{-1}(x)$. Tudo o que precisamos para fazer isso é encontrar a reflexão do gráfico dado com relação à reta $y = x$. Isso pode ser feito geometricamente.

Imagine um espelho ao longo da reta $y = x$ e desenhe a reflexão do gráfico dado no espelho (veja a Figura 14.7).

Uma outra maneira para visualizar esse processo é imaginar o gráfico desenhado numa janela de vidro. Imagine esse vidro girando ao redor da reta $y = x$, de modo que os valores *positivos* de x ocupem os lugares dos valores *positivos* de y. O gráfico de f então passará a ser o gráfico de f^{-1}. Desde que a inversa de f tenha um gráfico que satisfaça os testes da linha vertical e da linha horizontal, f é uma função bijetora.

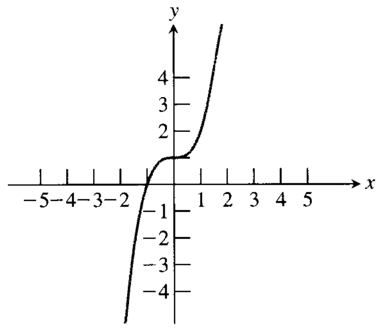


Figura 14.6 O gráfico de uma função bijetora.

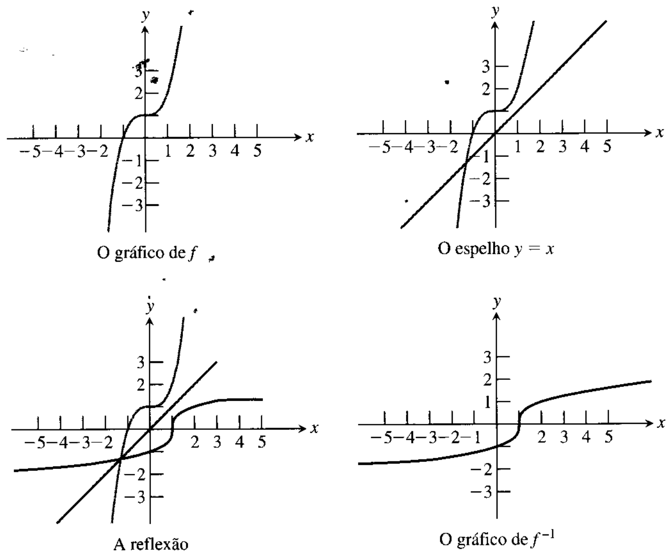


Figura 14.7 Reflexão do gráfico com relação à reta $y = x$.

Existe uma conexão natural entre inversas e composição de funções e isso dá uma idéia do que uma inversa faz: desfaz a ação da função original.

A regra da composição para função inversa

Uma função f é bijetora com função inversa g se e somente se:
$f(g(x)) = x$ para todo x no domínio da função g, e
$g(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f.

EXEMPLO 6 Verificação de funções inversas

Mostre algebricamente que $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ são funções inversas.

SOLUÇÃO

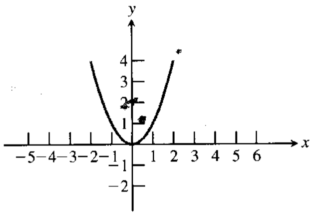
Vamos usar a regra citada anteriormente

$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

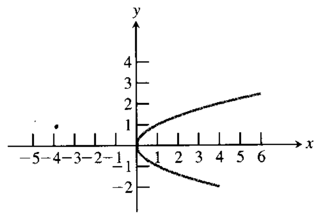
$$g(f(x)) = g(x^3+1) = \sqrt[3]{(x^3+1)-1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Desde que essas equações sejam verdadeiras para todo x, a regra garante que f e g são inversas. Saiba que essas funções têm como gráficos os utilizados no Exemplo 5.

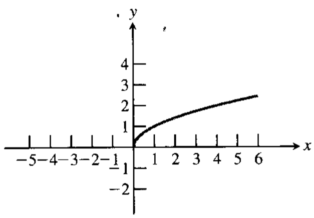
Algumas funções são importantes de modo que precisamos estudar suas inversas, mesmo não sendo funções bijetoras. Um bom exemplo é a função da raiz quadrada, que é a "inversa" da função quadrática. A inversa não dá a função quadrática *completa*, pois se for dessa forma, ela falha no teste da linha horizontal. A Figura 14.8 mostra que a função $y = \sqrt{x}$ é realmente a inversa de $y = x^2$ com um "domínio restrito", isto é, definida somente para $x \geq 0$.



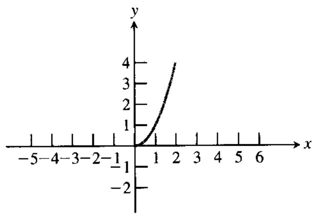
O gráfico de $y = x^2$ (não é bijetora)



A relação inversa de $y = x^2$ (não é uma função)



O gráfico de $y = \sqrt{x}$ (é uma função)



O gráfico da função cuja inversa é $y = \sqrt{x}$

Figura 14.8 A função $y = x^2$ com domínio não restrito e também restrito.

A questão do domínio adiciona um refinamento para o método algébrico, que está resumido a seguir:

Como encontrar uma função inversa algebricamente

Dada uma fórmula para uma função f, proceda da seguinte maneira para encontrá-la:

1. Determine que existe uma função f^{-1} verificando que f é bijetora. Estabeleça restrições sobre o domínio de f, de modo que ela seja bijetora.
2. Troque x e y na fórmula $y = f(x)$.
3. Resolva isolando y para obter $y = f^{-1}(x)$. Veja que o domínio de f^{-1} é uma conseqüência do primeiro procedimento.

EXEMPLO 7 Verificação de uma função inversa

Mostre que $f(x) = \sqrt{x+3}$ tem uma função inversa e encontre uma regra para $f^{-1}(x)$. Estabeleça quaisquer restrições sobre os domínios de f e de f^{-1}.

SOLUÇÃO

O gráfico de f satisfaz o teste da linha horizontal, assim f tem uma função inversa (Figura 14.9). Observe que f tem domínio $[-3, +\infty[$ e imagem $[0, +\infty[$.
Para encontrar f^{-1}, escrevemos

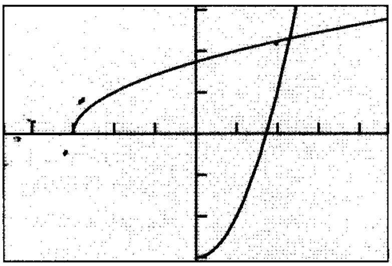
$$y = \sqrt{x+3} \qquad \text{onde } x \geq -3, y \geq 0$$

$$x = \sqrt{y+3} \qquad \text{onde } y \geq -3, x \geq 0$$

$$x^2 = y + 3 \qquad \text{onde } y \geq -3, x \geq 0$$

$$y = x^2 - 3 \qquad \text{onde } y \geq -3, x \geq 0$$

Assim, $f^{-1}(x) = x^2 - 3$ com um domínio restrito dado por $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ (foi herdado da imagem da função f). A Figura 14.9 mostra as duas funções.



[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]

Figura 14.9 O gráfico de $f(x) = \sqrt{x+3}$ e sua inversa.

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 a 10, resolva a equação para y.

1. $x = 3y - 6$

2. $x = 0{,}5y + 1$

3. $x = y^2 + 4$

4. $x = y^2 - 6$

5. $x = \dfrac{y-2}{y+3}$

6. $x = \dfrac{3y-1}{y+2}$

7. $x = \dfrac{2y+1}{y-4}$

8. $x = \dfrac{4y+3}{3y-1}$

9. $x = \sqrt{y+3}$, $y \geq -3$

10. $x = \sqrt{y-2}$, $y \geq 2$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 4, encontre o par (x, y) para o valor do parâmetro.

1. $x = 3t$ e $y = t^2 + 5$ para $t = 2$

2. $x = 5t - 7$ e $y = 17 - 3t$ para $t = -2$

3. $x = t^3 - 4t$ e $y = \sqrt{t + 1}$ para $t = 3$

4. $x = |t + 3|$ e $y = 1/t$ para $t = -8$

Nos exercícios 5 a 8:

(a) Encontre os pontos determinados por $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ e 3.

(b) Encontre uma relação algébrica entre x e y e determine se as equações paramétricas determinam y como uma função de x.

(c) Esboce o gráfico no plano cartesiano.

5. $x = 2t$ e $y = 3t - 1$

6. $x = t + 1$ e $y = t^2 - 2t$

7. $x = t^2$ e $y = t - 2$

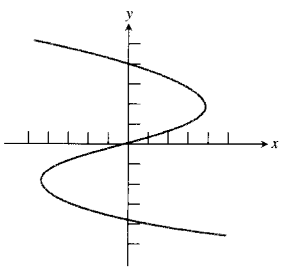
8. $x = \sqrt{t}$ e $y = 2t - 5$

Nos exercícios 9 a 12 são mostrados os gráficos de relações.

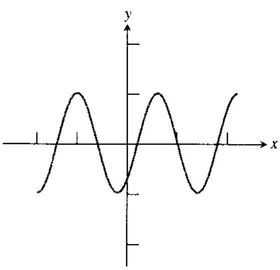
(a) A relação é uma função?

(b) A relação tem uma inversa que é uma função?

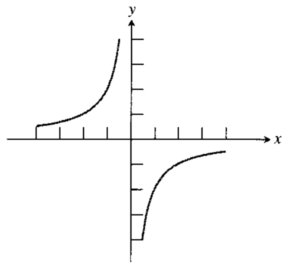
9.



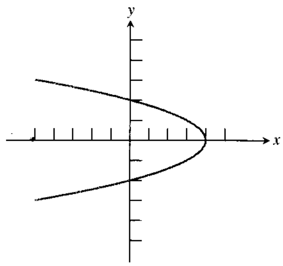
10.



11.



12.



Nos exercícios 13 a 22, encontre uma fórmula para $f^{-1}(x)$. Dê o domínio de f^{-1}, incluindo todas as restrições herdadas de f.

13. $f(x) = 3x - 6$

14. $f(x) = 2x + 5$

15. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$

16. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

17. $f(x) = \sqrt{x - 3}$

18. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

19. $f(x) = x^3$

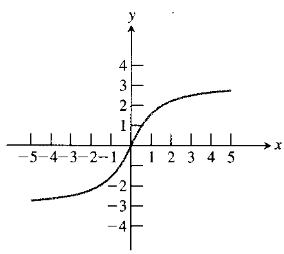
20. $f(x) = x^3 + 5$

21. $f(x) = \sqrt[3]{x + 5}$

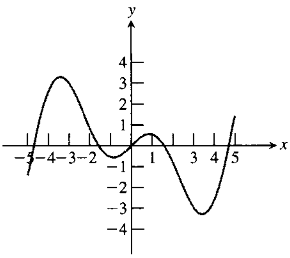
22. $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

Nos exercícios 23 a 26, determine se a função é bijetora. Se for, esboce o gráfico da função inversa.

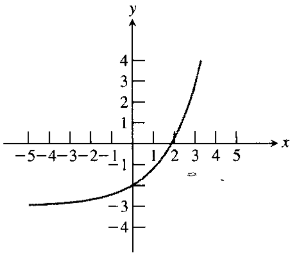
23.



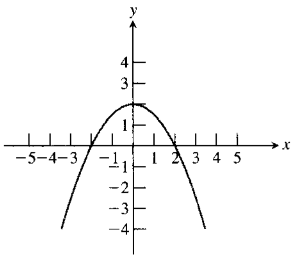
24.



25.



26.



Nos exercícios 27 a 32, confirme que f e g são inversas mostrando que $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$.

27. $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = \dfrac{x + 2}{3}$

28. $f(x) = \dfrac{x + 3}{4}$ e $g(x) = 4x - 3$

29. $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

30. $f(x) = \dfrac{7}{x}$ e $g(x) = \dfrac{7}{x}$

31. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

32. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$ e $g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$

33. A fórmula para converter a temperatura Celsius x em temperatura Kelvin é $k(x) = x + 273{,}16$. A fórmula para converter a temperatura Fahrenheit x em temperatura Celsius é $c(x) = \dfrac{5(x - 32)}{9}$.

(a) Encontre uma fórmula para $c^{-1}(x)$. Para que é usada essa fórmula?

(b) Encontre $(k \circ c)(x)$. Para que é usada essa fórmula?

34. Verdadeiro ou falso Se f é uma função bijetora com domínio A e imagem B, então f^{-1} é uma função bijetora com domínio B e imagem A. Justifique sua resposta.

35. Múltipla escolha Qual par ordenado está na *inversa* da relação dada por $x^2y + 5y = 9$?

(a) $(2, 1)$ **(b)** $(-2, 1)$ **(c)** $(-1, 2)$
(d) $(2, -1)$ **(e)** $(1, -2)$

36. Múltipla escolha Qual par ordenado não está na *inversa* da relação dada por $xy^2 - 3x = 12$?

(a) $(0, -4)$ **(b)** $(4, 1)$ **(c)** $(3, 2)$
(d) $(2, 12)$ **(e)** $(1, -6)$

37. Múltipla escolha Qual função é a *inversa* da função $f(x) = 3x - 2$?

(a) $g(x) = \dfrac{x}{3} + 2$

(b) $g(x) = 2 - 3x$

(c) $g(x) = \dfrac{x + 2}{3}$

(d) $g(x) = \dfrac{x - 3}{2}$

(e) $g(x) = \dfrac{x - 2}{3}$

38. Múltipla escolha Qual função é a *inversa* da função $f(x) = x^3 + 1$?

(a) $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

(b) $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$

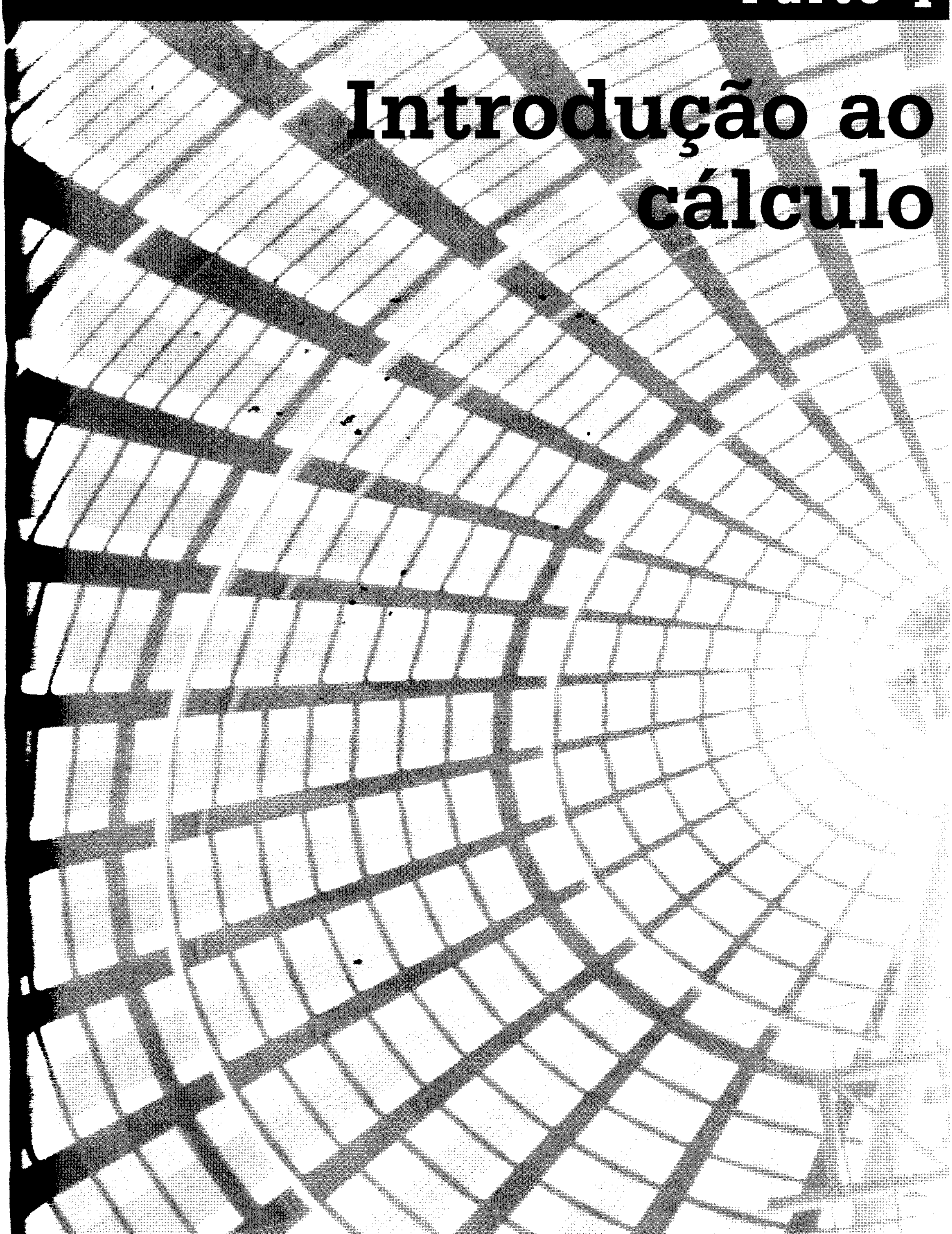
(c) $g(x) = x^3 - 1$

(d) $g(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

(e) $g(x) = 1 - x^3$

Parte 4

Introdução ao cálculo



Capítulo 15

Derivada e integral de uma função

Objetivos de aprendizagem

- Velocidade média e velocidade instantânea.
- Retas tangentes a um gráfico.
- A derivada.
- Regras de derivação.
- Introdução à integral de uma função.
- A integral definida e indefinida.
- Regras de integração.

A derivada de uma função nos permite analisar taxas de variação, as quais são fundamentais para entender conceitos em áreas como física, economia, engenharia. A integral de uma função nos permite fazer muitas aplicações em várias áreas da ciência. Daremos uma noção bastante introdutória para esse assunto muito importante.

Velocidade média e velocidade instantânea

Velocidade média é o valor da variação da posição de um objeto (ou dizemos variação do espaço percorrido) dividido pelo valor da variação do tempo, como podemos ver no Exemplo 1.

EXEMPLO 1 Cálculo da velocidade média

Um automóvel viaja 200 quilômetros em 2 horas e 30 minutos. Qual é a velocidade média desse automóvel após transcorrido esse tempo?

SOLUÇÃO

A velocidade média é o valor da variação da posição (200 quilômetros) dividido pelo valor da variação do tempo (2,5 horas). Se denotarmos a posição por s e o tempo por t, temos:

Velocidade média =

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200 \text{ quilômetros}}{2{,}5 \text{ horas}} = 80 \text{ quilômetros por hora}$$

Note que a velocidade média não nos diz o quão rápido o automóvel está viajando em um momento qualquer durante o intervalo de tempo. Ele poderia ter caminhado a uma velocidade constante de 80 quilômetros por hora durante todo o tempo ou poderia ter aumentado a velocidade, como também ter diminuído ou até parado momentaneamente várias vezes durante a viagem. Veremos a seguir o conceito de velocidade instantânea.

EXEMPLO 2 Cálculo da velocidade instantânea

Uma bola desce uma rampa tal que sua distância s do topo da rampa após t segundos é exatamente t^2 centímetros. Qual é sua velocidade instantânea após t segundos?

SOLUÇÃO

Poderíamos tentar responder essa questão calculando a velocidade média sobre intervalos de tempo cada vez menores.

Sobre o intervalo [3; 3,1]:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(3{,}1)^2 - 3^2}{3{,}1 - 3} = \frac{0{,}61}{0{,}1} = 6{,}1 \text{ centímetros por segundo}$$

Sobre o intervalo [3; 3,05]:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(3{,}05)^2 - 3^2}{3{,}05 - 3} = \frac{0{,}3025}{0{,}05} = 6{,}05 \text{ centímetros por segundo}$$

Continuando esse processo, poderíamos eventualmente concluir que a **velocidade instantânea** é de 6 centímetros por segundo.

Portanto, podemos ver *diretamente* o que está acontecendo com o quociente (que resulta na velocidade média) por meio do que chamamos de *limite* da velocidade média sobre o intervalo [3, t] quando t se aproxima de 3 (esse limite estuda a tendência da velocidade média na medida que t se aproxima de 3).

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 3} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{t\to 3} \frac{t^2 - 3^2}{t - 3} \\ &= \lim_{t\to 3} \frac{(t+3)(t-3)}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3} (t+3) \cdot \frac{t-3}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3} (t+3) \qquad \text{.Desde que temos } t \neq 3, \text{ então } \frac{t-3}{t-3} = 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Note que t *não é igual a 3,* mas está se *aproximando* de 3 como um limite, o que nos permite fazer o cancelamento no Exemplo 2. Se t fosse igual a 3, o desenvolvimento feito nos levaria a uma conclusão incorreta, que é a de que $0/0 = 6$. A diferença entre igualar a 3 e se aproximar de 3 como um limite é sutil, mas faz toda a diferença algebricamente.

Não é simples a definição algébrica formal de um limite. Temos utilizado a idéia intuitiva (desde o Capítulo 7) e podemos usar o seguinte resultado, digamos *informal.*

DEFINIÇÃO Limite em *a*

Quando escrevemos "$\lim_{x\to a} f(x) = L$", temos de fato que $f(x)$ se aproxima de L na medida em que x se aproxima de a.

Retas tangentes a um gráfico

Observe a Figura 15.1 a seguir. Se ligarmos os pontos (1,1) e (2,4) com uma reta, construiremos então uma *reta secante* ao gráfico. Podemos encontrar a tangente do ângulo que essa reta forma com o eixo horizontal x, ou seja, podemos encontrar a inclinação da reta (esse ângulo é definido da reta, no sentido horário, até o eixo horizontal x). Observe que essa conta pode ser feita com o cálculo da velocidade média da bola no intervalo de tempo [1, 2].

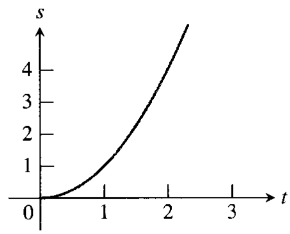


Figura 15.1 O gráfico de $s = t^2$ mostra a distância s percorrida pela bola na rampa (como no Exemplo 2) como uma função do tempo transcorrido t.

Essa conclusão é importante. Se $(a,s(a))$ e $(b,s(b))$ são dois pontos do gráfico, então a *velocidade média* sobre o intervalo $[a,b]$ pode ser interpretada como a *inclinação* da reta contendo esses dois pontos. De fato, designamos as quantidades com os símbolos $\Delta s/\Delta t$.

EXEMPLO 3 Cálculo da inclinação de uma reta tangente

Use limites para encontrar a inclinação da reta tangente ao gráfico de $s = t^2$ no ponto $(1,1)$.

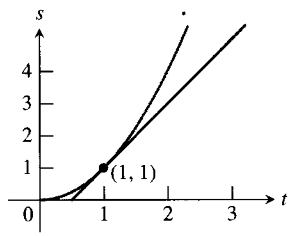


Figura 15.2 A reta tangente ao gráfico de $s = t^2$ no ponto $(1,1)$.

SOLUÇÃO

Usaremos as mesmas idéias já utilizadas no Exemplo 2.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{t\to 1} \frac{t^2 - 1^2}{t - 1} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{(t+1)(t-1)}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} (t+1) \cdot \frac{t-1}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} (t+1) && \text{Desde que temos } t \neq 1\text{, então } \frac{t-1}{t-1} = 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Se compararmos os exemplos 2 e 3, veremos que os métodos, tanto para resolver o problema da reta tangente como para resolver o problema da velocidade instantânea, são os mesmos.

A derivada

Se $y = f(x)$ é uma função *qualquer*, então podemos dizer como y varia quando x varia.

DEFINIÇÃO Taxa média de variação

Se $y = f(x)$, então a **taxa média de variação** de y com relação a x sobre o intervalo $[a, b]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricamente, esta é a inclinação da **reta secante** que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Usando limites, podemos desenvolver a definição para a taxa *instantânea* de y com relação a x no valor de $x = a$. Esta taxa de variação instantânea é chamada de *derivada*, ou seja, derivada da função $y = f(x)$ quando $x = a$.

DEFINIÇÃO Derivada em um ponto

A **derivada da função f em $x = a$**, denotada por $f'(a)$ (lê-se 'f linha de a') pode ser definida através do limite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que o limite exista.

Geometricamente, representa a inclinação da **reta tangente** ao gráfico de f e que passa pelo ponto $(a, f(a))$.

Se considerarmos $x = a + h$, então fazer x se aproximar de a é o mesmo que fazer h tender a 0.

DEFINIÇÃO Derivada em um ponto

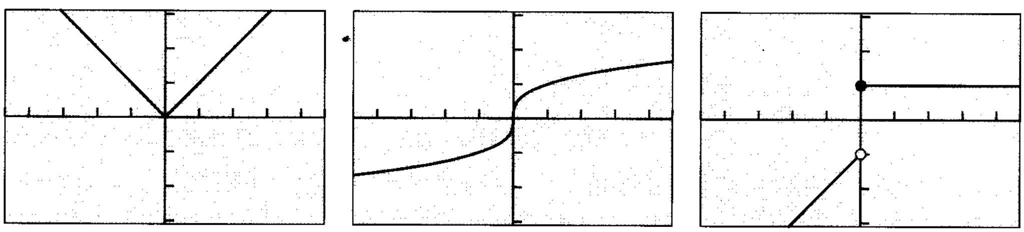
A **derivada da função f em $x = a$**, denotada por $f'(a)$ (lê-se 'f linha de a') é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

desde que o limite exista.

Pelo fato de a derivada de uma função em um ponto poder ser vista geometricamente como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ passando pelo próprio ponto, a derivada pode não existir, uma vez que essa reta tangente pode não estar bem definida.

A Figura 15.3 mostra três casos para os quais $f(0)$ existe, mas $f'(0)$ não.



[–4,7; 4,7] por [–3,1; 3,1]
(a)
$f(x) = |x|$ tem um gráfico com inclinação não definida em $x = 0$.

[–4,7; 4,7] por [–3,1; 3,1]
(b)
$f(x) = \sqrt[3]{x}$ tem um gráfico com uma reta tangente vertical em $x = 0$.

[–4,7; 4,7] por [–3,1; 3,1]
(c)
$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

Figura 15.3 Exemplos de funções definidas em $x = 0$, mas sem a derivada em $x = 0$.

EXEMPLO 4 Cálculo da derivada em um ponto

Encontrar $f'(4)$ se $f(x) = 2x^2 - 3$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(4+h)^2 - 3 - (2 \cdot 4^2 - 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(16 + 8h + h^2) - 32}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16h + 2h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (16 + 2h) \qquad \frac{h}{h} = 1, \text{ desde } h \neq 0 \\ &= 16 \end{aligned}$$

A derivada também pode ser definida como uma função de x. Essa função, chamada função derivada, tem como o domínio o conjunto de todos os valores do domínio de f, para os quais f tem derivada, isto é, f é diferenciável. A função f' pode ser definida adaptando a definição que já vimos para $x = a$.

DEFINIÇÃO Derivada de uma função $f(x)$

Se $y = f(x)$, então a **derivada da função f com relação a x** é a função f', cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para todos os valores de x onde o limite existe.

O Exemplo 5 nos informa sobre a notação que podemos encontrar quando o assunto é a derivada de uma função.

EXEMPLO 5 Cálculo da derivada de uma função (com apresentação de outra notação)

(a) Encontre $f'(x)$ se $f(x) = x^2$, isto é, encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = x^2$.

(b) Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, isto é, encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = \dfrac{1}{x}$.

SOLUÇÃO

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) \qquad \frac{h}{h} = 1, \text{ desde que } h \neq 0$$

$$= 2x$$

Assim, $f'(x) = 2x$, isto é, $\dfrac{dy}{dx} = 2x$

(b)
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{x(x+h)} \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{x^2}.$$

Assim, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$, isto é, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{x^2}$.

Regras de derivação

Já estudamos como funciona a derivada de uma função pela definição. No entanto, vale informar que existem regras de derivação de função cujo objetivo é tornar mais fácil todo o procedimento desenvolvido aqui. Todos os resultados podem ser demonstrados, porém citaremos somente algumas funções seguidas das respectivas derivadas.

Função constante:

$f(x) = k$

$f'(x) = 0$

Função potência:

$f(x) = x^\alpha$, e α uma constante

$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1} \cdot x^{n-1}$

Função soma:

$f(x) = u(x) + v(x)$

$f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Função diferença:

$f(x) = u(x) - v(x)$

$f'(x) = u'(x) - v'(x)$

Função produto:

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Função produto com um dos fatores constante (dizemos constante multiplicada por função):

$f(x) = k \cdot v(x)$

$f'(x) = k \cdot v'(x)$

Função quociente:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)},\ v(x) \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Função exponencial:

$$f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 0 \ e \ a \neq 1$$
$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Função logarítmica:

$$f(x) = \log_a x, x \in \,]0, +\infty[\,, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Introdução à integral de uma função

Com as informações da velocidade de um objeto e do tempo transcorrido, podemos calcular a distância percorrida. Os exemplos a seguir mostram isso.

EXEMPLO 6 Cálculo da distância percorrida (com uma velocidade constante)

Um automóvel viaja a uma velocidade constante de 80 km/h durante 2 horas e 30 minutos. Qual é a distância percorrida pelo automóvel?

SOLUÇÃO

$$\text{Distância} = \text{Velocidade} \cdot \text{tempo} = 80 \cdot 2{,}5 = 200 \text{ quilômetros}$$

EXEMPLO 7 Cálculo da distância percorrida (com uma velocidade média)

Um automóvel viaja a uma velocidade média de 80 km/h durante 2 horas e 30 minutos. Qual é a distância percorrida pelo automóvel?

SOLUÇÃO

$$\Delta s = \text{Velocidade média} \cdot \Delta t = 80 \cdot 2{,}5 = 200 \text{ quilômetros}$$

Vemos que, dada a velocidade média sobre um intervalo de tempo, podemos facilmente encontrar a distância percorrida. Mas suponha que temos uma função velocidade $v\ (t)$ que nos fornece a velocidade instantânea como uma função variando com relação ao tempo: como podemos usar a função que dá a velocidade instantânea para encontrar a distância percorrida no intervalo de tempo?

Observe a Figura 15.4. Vemos que a área do retângulo sombreado resulta no mesmo valor obtido com a multiplicação entre a distância percorrida e o tempo transcorrido.

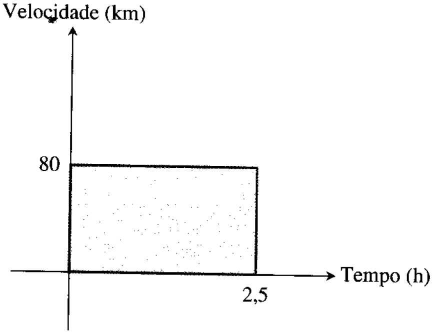


Figura 15.4 Velocidade constante do Exemplo 1 em função do tempo.

Agora suponha que a função velocidade varia constantemente como uma função do tempo, como mostrado na Figura 15.5.

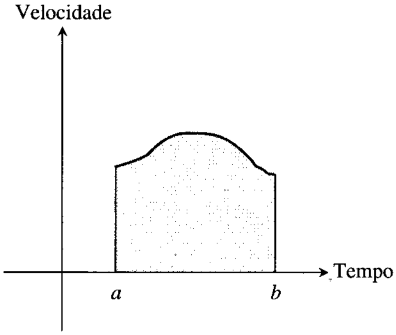


Figura 15.5 Velocidade variando no intervalo de tempo $[a, b]$.

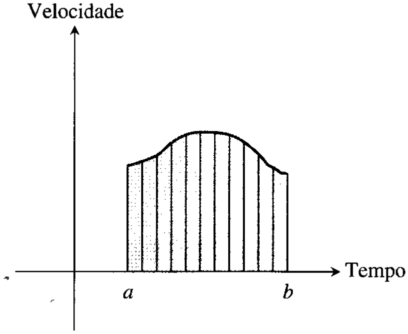


Figura 15.6 A região sob a curva partida em fatias.

De modo análogo, seria a área sob a curva entre os valores a e b o valor da distância percorrida? A resposta é sim. A idéia dessa definição é partir o intervalo de tempo em muitos pequenos intervalos, cada um com uma velocidade praticamente constante, de tão estreito que é esse intervalo. Cada fatia, por ser estreita, parece um retângulo. Veja a Figura 15.6.

A soma das áreas desses retângulos, apresentada na Figura 15.6, resulta, então, num valor aproximado da área sob a curva e acima do eixo horizontal. Vejamos o Exemplo 8.

EXEMPLO 8 Cálculo aproximado da área com retângulos

Use os seis retângulos na Figura 15.7 para aproximar a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2$ sobre o intervalo $[0,3]$.

SOLUÇÃO

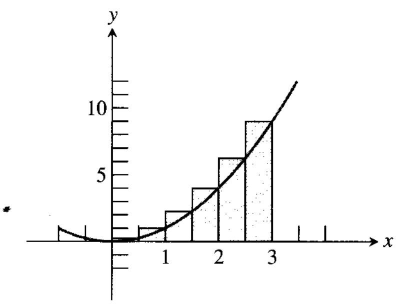


Figura 15.7 Parte do gráfico de $f(x) = x^2$ com a área sob a curva partida em aproximadamente seis retângulos.

A base de cada retângulo é 1/2. A altura é determinada pela função aplicada no valor do extremo direito de cada intervalo no eixo x. As áreas dos seis retângulos e a área total estão calculadas na tabela a seguir.

Subintervalo	Base do retângulo	Altura do retângulo	Área do retângulo
[0, 1/2]	1/2	$f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4$	$(1/2)(1/4) = 0{,}125$
[1/2, 1]	1/2	$f(1) = (1)^2 = 1$	$(1/2)(1) = 0{,}500$
[1, 3/2]	1/2	$f(3/2) = (3/2)^2 = 9/4$	$(1/2)(9/4) = 1{,}125$
[3/2, 2]	1/2	$f(2) = (2)^2 = 4$	$(1/2)(4) = 2{,}000$
[2, 5/2]	1/2	$f(5/2) = (5/2)^2 = 25/4$	$(1/2)(25/4) = 3{,}125$
[5/2, 3]	1/2	$f(3) = (3)^2 = 9$	$(1/2)(9) = 4{,}500$
		Área total:	11,375

Os seis retângulos resultam em aproximadamente 11,375 unidades quadradas para a área sob a curva de 0 até 3.

Vale observar que, pelo fato de termos considerado o valor de x que está no extremo direito de cada subintervalo, então superestimamos a área sob a curva citada. Se tivéssemos considerado o valor de x que está no extremo esquerdo de cada subintervalo, então teríamos subestimado esse valor de área, como vemos na Figura 15.8.

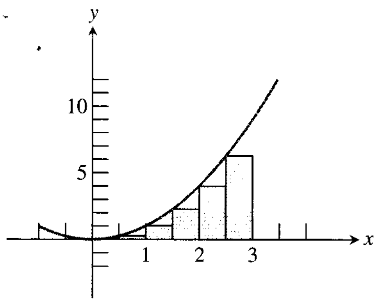


Figura 15.8 As alturas dos retângulos são determinadas pela função aplicada nos valores extremos à *esquerda* de cada subintervalo.

Nesse caso, a área resulta em aproximadamente 6,875 unidades quadradas. A média entre as duas aproximações é de 9,125 unidades quadradas, que é uma boa estimativa para a verdadeira área de 9 unidades quadradas (esse resultado 9 é obtido com ferramentas do próprio cálculo diferencial e integral).

Se continuássemos nesse processo de partir em retângulos cada vez mais estreitos, poderíamos passar de um número finito de retângulos (cuja soma das áreas resulta num valor aproximado da área sob a curva) para infinitos retângulos (cuja soma das áreas resulta no valor exato da área sob a curva). Isto dá o suporte para a definição da integral de uma função.

A integral definida e indefinida

Seja uma função contínua $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Escolha um valor qualquer x_1 no primeiro subintervalo, x_2 no segundo e assim por diante. Calcule $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots f(x_n)$, multiplique cada valor por Δx e faça a soma dos produtos. A notação da soma dos produtos é

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

O *limite* dessa soma quando n tende para $+\infty$ é a solução do problema da área, e também a solução para o problema da distância percorrida. Esse limite, caso exista, é chamado de *integral definida*.

OBSERVAÇÃO

A soma da forma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, onde x_1 está no primeiro subintervalo, x_2 está no segundo e assim por diante, é chamada soma de Riemann, em homenagem a Georg Riemman (1826-1866), que determinou as funções para as quais tais somas têm limite quando n tende para $+\infty$.

DEFINIÇÃO Integral definida

Seja f uma função definida sobre o intervalo $[a,b]$ e seja $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ como definida anteriormente. A integral definida de f sobre $[a,b]$ denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$ é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

desde que o limite exista. Se o limite existe, então dizemos que f é **integrável** sobre $[a, b]$.

SOBRE A NOTAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA

A notação se iguala com a notação sigma da soma para a qual o limite é aplicado. O 'Σ' no limite se transforma no estilizado 'S' para 'soma'. O 'Δx' torna-se 'dx' e '$f(x_i)$' torna-se simplesmente '$f(x)$', afinal estamos somando todos os valores $f(x)$ pertencentes ao intervalo, sendo desnecessários então os subscritos.

Uma definição informal para limite no infinito é

DEFINIÇÃO Limite no infinito

Quando escrevemos '$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$', isso significa que $f(x)$ fica cada vez mais próximo de L, na medida em que x assume valores arbitrariamente grandes.

Os exemplos a seguir utilizarão recursos da geometria para cálculo das áreas de figuras geométricas.

EXEMPLO 9 Cálculo de uma integral

Calcule $\int_1^5 2x\,dx$.

SOLUÇÃO

Essa integral será a área sob a reta que é o gráfico de $y = 2x$ sobre o intervalo $[1, 5]$. O gráfico na Figura 15.9 mostra que esta é a área de um trapézio. Assim

$$\int_1^5 2x\,dx = 4\left(\frac{2\cdot 1 + 2\cdot 5}{2}\right) = 24$$

EXEMPLO 10 Cálculo de uma integral

Suponha uma bola rolando e descendo uma rampa, tal que sua velocidade após t segundos é sempre $2t$ centímetros por segundo. Qual a distância que ela percorrerá nos três primeiros segundos?

SOLUÇÃO

A distância percorrida será a mesma que a área sob o gráfico da velocidade $v(t) = 2t$, sobre o intervalo $[0,3]$. O gráfico é mostrado na Figura 15.10. Desde que a região seja triangular, podemos encontrar a área $\dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{3 \cdot 6}{2}$. A distância percorrida nos três primeiros segundos, portanto, é de nove centímetros.

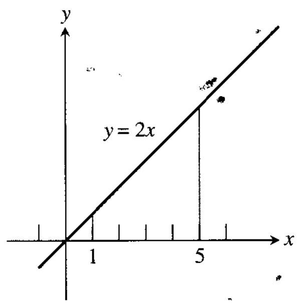


Figura 15.9

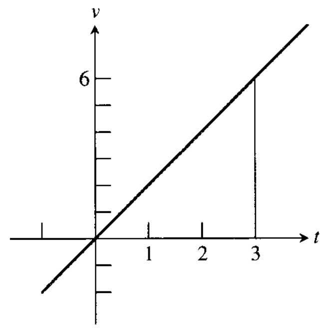


Figura 15.10

Podemos definir a integral de uma função $f(x)$ sem especificar qual é o intervalo de x que estamos considerando. O resultado disso é uma função, chamada primitiva, adicionada de uma constante C.

DEFINIÇÃO Integral indefinida

Seja f uma função. A integral indefinida de f denotada por $\int f(x)\,dx$ é dada por

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

de modo que a derivada de $F(x) + C$ seja $f(x)$.

Regras de integração

Já vimos como funciona a integral de uma função pela definição. No entanto, vale informar que existem regras de integração de função, cujo objetivo é tornar mais fácil todo o procedimento desenvolvido aqui (o intuito é o mesmo das regras de derivação). Todos os resultados podem ser demonstrados, porém citaremos somente alguns casos de integral de função, seguidos dos respectivos resultados. Observe que todas as regras aparecem com uma parcela C do lado direito; essa parcela representa uma constante qualquer, cuja derivada é 0.

Iniciaremos citando as propriedades de integrais indefinidas, ou seja, propriedades das integrais sem determinação do intervalo real que esteja fazendo referência.

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$$

$$\int (k \cdot f(x))\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$

Algumas regras:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ para } n \neq -1$$

$$\int k\, dx = k \cdot x + C$$

$$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 e 2, encontre a inclinação da reta determinada pelos pontos.

1. $(-2, 3), (5, -1)$

2. $(-3, -1), (3, 3)$

Nos exercícios 3 a 5, escreva uma equação para a reta especificada.

3. Passa por $(-2, 3)$ com inclinação $= 3/2$

4. Passa por $(1, 6)$ e $(4, -1)$

5. Passa por $(1, 4)$ e é paralela a $y = (3/4)x + 2$

Nos exercícios 6 a 9, simplifique a expressão supondo que h seja diferente de 0.

6. $\dfrac{(2 + h)^2 - 4}{h}$

7. $\dfrac{(3 + h)^2 + 3 + h - 12}{h}$

8. $\dfrac{1/(2 + h) - 1/2}{h}$

9. $\dfrac{1/(x + h) - 1/x}{h}$

Nos exercícios 10 e 11, liste os elementos da seqüência:

10. $a_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}k\right)^2$ para $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10$

11. $a_k = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{4}k\right)^2$ para $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10$

Nos exercícios 12 a 15, encontre a soma.

12. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}(k+1)$

13. $\sum_{k=1}^{n} (k+1)$

14. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}(k+1)^2$

15. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}k^2$

16. Um caminhão viaja a uma velocidade média de 85 quilômetros por hora durante 4 horas. Qual a distância percorrida?

17. Uma bomba de água funciona durante duas horas e sua vazão tem capacidade para encher 5 galões por minuto. Quantos galões ela consegue encher após o período de duas horas?

18. Um país tem uma densidade populacional de 560 pessoas por quilômetro quadrado em uma área de 90.000 quilômetros quadrados. Qual é a população do país?

Exercícios

1. Uma ciclista viaja 21 quilômetros em 1 hora e 45 minutos. Qual é a velocidade média dessa ciclista durante todo esse intervalo de tempo?

2. Um automóvel viaja 540 quilômetros em 4 horas e 30 minutos. Qual é a velocidade média desse automóvel durante todo esse intervalo de tempo?

Nos exercícios 3 a 6, a posição de um objeto no tempo t é dada por $s(t)$. Encontre a velocidade instantânea no valor indicado de t.

3. $s(t) = 3t - 5$ em $t = 4$

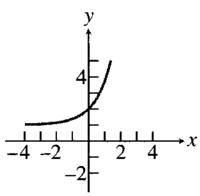
4. $s(t) = \frac{2}{t+1}$ em $t = 2$

5. $s(t) = at^2 + 5$ em $t = 2$

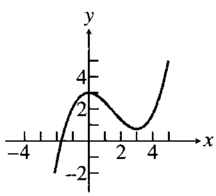
6. $s(t) = \sqrt{t+1}$ em $t = 1$

Nos exercícios 7 a 10, use o gráfico para estimar a inclinação da reta tangente ao gráfico, caso ela exista, no ponto com valor x dado.

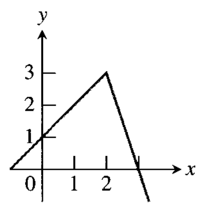
7. $x = 0$



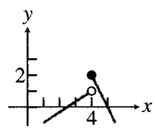
8. $x = 1$



9. $x = 2$



10. $x = 4$



Nos exercícios 11 a 14, use a definição com limite para encontrar:

(a) a inclinação da reta que tangencia o gráfico da função no ponto com o valor de x dado;

(b) a equação da reta tangente que passa pelo ponto;

(c) o esboço do gráfico da curva próximo ao ponto dado.

11. $f(x) = 2x^2$ em $x = -1$

12. $f(x) = 2x - x^2$ em $x = 2$

13. $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ em $x = 2$

14. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ em $x = 1$

Nos exercícios 15 a 20, encontre a derivada, caso ela exista, da função no valor de x especificado.

15. $f(x) = 1 - x^2$ em $x = 2$

16. $f(x) = 2x + 1/2\,x^2$ em $x = 2$

17. $f(x) = 3x^2 + 2$ em $x = -2$

18. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ em $x = 1$

19. $f(x) = |x + 2|$ em $x = -2$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ em $x = -1$

Nos exercícios 21 a 24, encontre a derivada de f.

21. $f(x) = 2 - 3x$ **22.** $f(x) = 2 - 3x^2$

23. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ **24.** $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

Nos exercícios 25 a 28, esboce um possível gráfico para uma função que tem as propriedades descritas.

25. O domínio de f é $[0,5]$ e a derivada em $x = 2$ é 3.

26. O domínio de f é $[0,5]$ e a derivada é 0 em $x = 2$ é $x = 4$.

27. O domínio de f é $[0,5]$ e a derivada em $x = 2$ não está definida.

28. O domínio de f é $[0,5]$, f não é decrescente em $[0,5]$ e a derivada em $x = 2$ é 0.

29. Explique por que você pode encontrar a derivada de $f(x) = ax + b$ sem fazer cálculo algum. Qual é a $f'(x)$?

30. Use a *primeira* definição de derivada em um ponto para expressar a derivada de $f(x) = |x|$ em $x = 0$ como um limite. Então, explique por que o limite não existe.

31. Verdadeiro ou falso Se a derivada da função f existe em $x = a$, então a derivada é igual à inclinação da reta tangente em $x = a$. Justifique sua resposta.

32. Múltipla escolha Se $f(x) = x^2 + 3x - 4$, então encontre $f'(x)$.

(a) $x^2 + 3$ **(b)** $x^2 - 4$ **(c)** $2x - 1$

(d) $2x + 3$ **(e)** $2x - 3$

33. Múltipla escolha Se $f(x) = 5x - 3x^2$, então encontre $f'(x)$.

(a) $5 - 6x$ **(b)** $5 - 3x$ **(c)** $5x - 6$

(d) $10x - 3$ **(e)** $5x - 6x^2$

34. Múltipla escolha Se $f(x) = x^3$, então encontre a derivada de f em $x = 2$.

(a) 3 **(b)** 6 **(c)** 12

(d) 18 **(e)** Não existe

35. Múltipla escolha Se $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$, então encontre a derivada de f em $x = 1$.

(a) $-\frac{1}{4}$ **(b)** $\frac{1}{4}$ **(c)** $-\frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{2}$ **(e)** Não existe

36. Derive as funções a seguir pelas regras de derivação:

36.1 $f(x) = x$ **36.2** $f(x) = x^5$

36.13 $f(x) = \sqrt{x}$ **36.4** $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

36.5 $f(x) = \sqrt[6]{x}$ **36.6** $f(x) = x^{-3}$

36.7 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **36.8** $f(x) = 3x^2$

36.9 $f(x) = 5\sqrt{x}$ **36.10** $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$

36.11 $f(x) = \dfrac{-5}{x^9}$ **36.12** $f(x) = -5x^7$

36.13 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[5]{x}}$ **36.14** $f(x) = 10x^4 - 5x^2$

36.15 $f(x) = 4x^3 + 5x$

36.16 $f(x) = 4x^3 + 6x + 1000$

36.17 $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 6x^2 + 1$

36.18 $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2}{8}$

36.19 $f(x) = \dfrac{x^5}{4}$ **36.20** $f(x) = x^2 - \dfrac{10}{x^2}$

36.21 $f(x) = x^3 + \dfrac{15}{x}$

36.22 $f(x) = 4x^3 \cdot (5x^4 - 6)$

36.23 $f(x) = \sqrt{x} \cdot (5x^4 - 6)$

36.24 $f(x) = (4x^3 - 5)(x^2 + 6)$

36.25 $f(x) = \sqrt[5]{x} \cdot (x^3 + x)$

36.26 $f(x) = (x + 1)(1 - x)$

36.27 $f(x) = \dfrac{x^3}{2 + x^2}$ **36.28** $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{3x^2 + 1}$

36.29 $f(x) = \dfrac{-10}{x + 4}$ **36.30** $f(x) = \dfrac{2x}{x + 10}$

36.31 $f(x) = \dfrac{x}{1 + 2x}$ **36.32** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

36.33 $f(x) = \dfrac{-6}{4x + 3}$ **36.34** $f(x) = \dfrac{10}{2 - x}$

Nos exercícios 37 a 41, explique como representar o problema como uma questão de cálculo de área e então resolva-o.

37. Um trem viaja a 120 quilômetros por hora durante 3 horas. Qual a distância percorrida?

38. Uma bomba de água funciona durante uma hora e meia e sua vazão tem capacidade para encher 15 galões por minuto. Quantos galões ela consegue encher após o período de uma hora e meia?

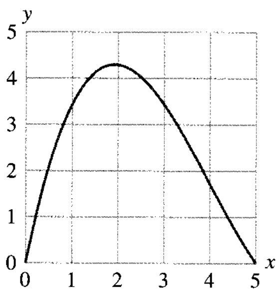
39. Uma cidade tem uma densidade populacional de 650 pessoas por quilômetro quadrado em uma área de 49 quilômetros quadrados. Qual é a população da cidade?

40. Um avião viaja a uma velocidade média de 640 quilômetros por hora durante 3 horas e 24 minutos. Qual a distância percorrida pelo avião?

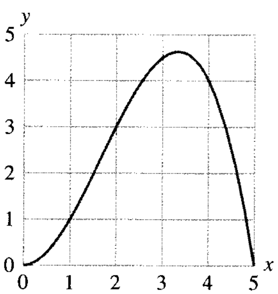
41. Um trem viaja a uma velocidade média de 38 quilômetros por hora durante 4 horas e 50 minutos. Qual a distância percorrida pelo trem?

Nos exercícios 42 a 45, estime a área da região acima do eixo horizontal x e sob o gráfico da função de $x = 0$ até $x = 5$.

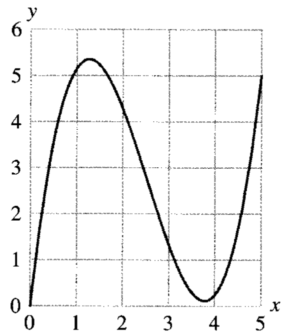
42.



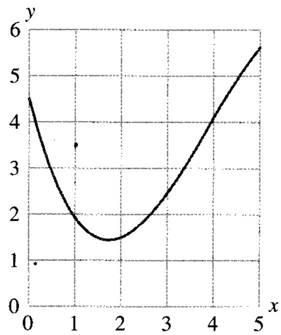
43.



44.

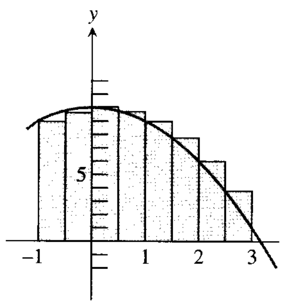


45.

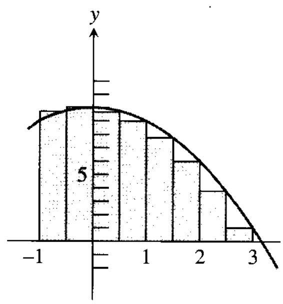


Nos exercícios 46 e 47, use os 8 retângulos mostrados para aproximar a área da região abaixo do gráfico de $f(x) = 10 - x^2$ sobre o intervalo $[-1,3]$.

46.



47.



Nos exercícios 48 a 51, divida o intervalo dado no número indicado de subintervalos.

48. $[0, 2]$; 4

49. $[0, 2]$; 8

50. $[1, 4]$; 6

51. $[1, 5]$; 8

Nos exercícios 52 a 57, encontre a integral definida através do cálculo da área.

52. $\int_3^7 5\, dx$

53. $\int_{-1}^4 6\, dx$

54. $\int_0^5 3x\, dx$

55. $\int_1^7 0{,}5x\, dx$

56. $\int_1^4 (x + 3)\, dx$

57. $\int_1^4 (3x - 2)\, dx$

58. Suponha que uma bola é lançada do alto de uma torre e sua velocidade após t segundos é sempre $32t$ centímetros por segundo. Qual a distância que ela cairá nos primeiros 2 segundos?

59. Verdadeiro ou falso A afirmação $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ assume valores arbitrariamente grandes quando x se aproxima de L.

Pode ser mostrado que a área da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, o eixo x e a reta $x = 9$ é 18. Use este fato nos exercícios 60 a 63 para escolher a resposta correta. Não use calculadora.

60. Múltipla escolha $\int_0^9 2\sqrt{x}\, dx$

(a) 36 **(b)** 27 **(c)** 18 **(d)** 9 **(e)** 6

61. Múltipla escolha $\int_0^9 \left(\sqrt{x} + 5\right) dx$

(a) 14 **(b)** 23 **(c)** 33 **(d)** 45 **(e)** 63

62. Múltipla escolha $\int_5^{14} \left(\sqrt{x - 5}\right) dx$

(a) 9 **(b)** 13 **(c)** 18 **(d)** 23 **(e)** 28

63. Múltipla escolha $\int_0^3 \sqrt{3x}\, dx$

(a) 54 **(b)** 18 **(c)** 9 **(d)** 6 **(e)** 3

64. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 2 \\ x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de f. Determine seu domínio e sua imagem.

(b) Você poderia definir a área sob f de $x = 0$ até $x = 4$? Faz diferença se a função não tem valor em $x = 2$?

65. Integre as funções a seguir pelas regras:

(a) $\int 2x^3\, dx$

(b) $\int (4x^2 - 3x + 5)\, dx$

(c) $\int \left(\frac{x^4 + 5}{x}\right) dx$

(d) $\int (x^5 - 2x)\, dx$

(e) $\int (7 - x)\, dx$

(f) $\int (2x^3 - 5x^2 - 6x + 7)\, dx$

(g) $\int \sqrt{x}\, dx$

(h) $\int x^{-3}\, dx$

(i) $\int (5x + \sqrt{x})\, dx$

(j) $\int (4e^x - x + 3)\, dx$

(k) $\int 4^x\, dx$

(l) $\int (3^x - e^x)\, dx$

Apêndice A

Sistemas e matrizes

Objetivos de aprendizagem

- Sistemas de duas equações: solução pelo método da substituição.
- O método da adição (ou do cancelamento).
- Caso de aplicação.
- Matrizes.
- Soma e subtração de matrizes.
- Multiplicação de matrizes.
- Matriz identidade e matriz inversa.
- Determinante de uma matriz quadrada.

Muitas aplicações em negócios e ciências podem ser modeladas usando sistemas de equações. A álgebra de matrizes fornece uma poderosa técnica para manipular grandes conjuntos de dados e resolver problemas relacionados à modelagem por matrizes.

Sistemas de duas equações: solução pelo método da substituição

Vejamos um exemplo de um sistema de duas equações lineares com duas variáveis x e y:

$$2x - y = 10$$
$$3x + 2y = 1$$

Uma **solução de um sistema** de duas equações com duas variáveis é um par ordenado de números reais que satisfaz cada uma das equações. Por exemplo, o par ordenado $(3, -4)$ é uma solução do sistema acima. Substituindo $x = 3$ e $y = -4$ em cada equação, obtemos:

$$2x - y = 2(3) - (-4) = 6 + 4 = 10$$
$$3x + 2y = 3(3) + 2(-4) = 9 - 8 = 1$$

Assim, ambas as equações estão satisfeitas.

Resolvemos o sistema de equações quando encontramos todas as suas soluções. No Exemplo 1, usamos o método da substituição para ver que $(3, -4)$ é a única solução deste sistema.

EXEMPLO 1 Método da substituição

Resolva o sistema

$$2x - y = 10$$
$$3x + 2y = 1$$

SOLUÇÃO

Solução algébrica

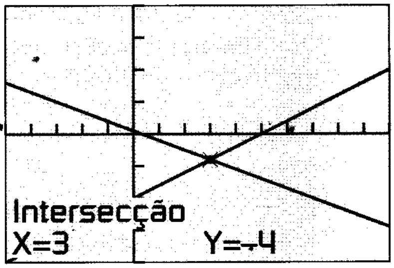
Podemos escolher uma das equações e, em seguida, uma das variáveis para isolar. Segue uma sugestão que é o isolamento de y na primeira equação: $y = 2x - 10$. Aplicamos essa expressão, então, na segunda equação:

$$3x + 2y = 1$$
$$3x + 2(2x - 10) = 1$$
$$3x + 4x - 20 = 1$$
$$7x = 21$$
$$x = 3$$

Substituindo $x = 3$ na primeira equação que ficou com o y isolado, temos: $y = 2x - 10 = 2 \cdot 3 - 10 = -4$

Suporte gráfico

Vejamos o gráfico:



[–5, 10] por [–20, 20]

Figura A.1 Intersecção das retas $y = 2x - 10$ e $y = -1{,}5x + 0{,}5$ no ponto (3, − 4).

Como primeira equação é $2x - y = 10$, então podemos considerar $y = 2x - 10$; no caso da segunda, a equação é de $3x + 2y = 1$ e, isolando y, temos $y = -1{,}5x + 0{,}5$.
O gráfico de cada equação é uma reta. A Figura A.1 mostra que as duas retas se interseccionam no ponto $(3, -4)$.

Interpretação

A solução do sistema é $x = 3$ e $y = -4$, ou o par ordenado $(3, -4)$.

Algumas vezes, o método da substituição pode ser aplicado quando as equações no sistema não são lineares, como ilustrado no Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Resolução de um sistema não-linear pelo método da substituição

Encontre as dimensões de um jardim retangular que tem perímetro 100 metros e área de 300 m^2.

SOLUÇÃO

Solução algébrica

Temos, a seguir, o modelo matemático.
Sejam x e y os comprimentos dos lados adjacentes do jardim. São verdadeiras as equações:

$$2x + 2y = 100$$
$$xy = 300$$

Podemos resolver a primeira equação isolando y, isto é, fazendo $y = 50 - x$. Ao substituir essa expressão na segunda equação:

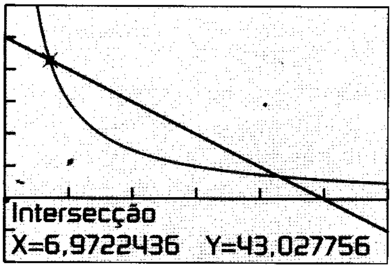
$$xy = 300$$
$$x(50 - x) = 300$$
$$50x - x^2 = 300$$
$$x^2 - 50x + 300 = 0$$
$$x = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(300)}}{2}$$
$$x = 6{,}972\ldots \quad \text{ou} \quad x = 43{,}027\ldots$$

Ao substituir os valores de x na primeira equação, que ficou com o y isolado, temos:

$$y = 50 - x = 43{,}027\ldots \quad \text{ou} \quad y = 50 - x = 6{,}972\ldots, \text{ respectivamente}$$

Suporte gráfico

Vejamos o gráfico:



[0, 60] por [–20, 60]

Figura A.2 Gráficos de $y = 50 - x$ e $y = 300/x$ no primeiro quadrante (afinal, x e y são comprimentos).

A Figura A.2 mostra que os gráficos de $y = 50 - x$ e $y = 300/x$ têm dois pontos de interseção.

Interpretação

Os dois pares ordenados (6,972...; 43,027...) e (43,027...; 6,972...) produzem o mesmo retângulo cujas dimensões são aproximadamente 7 m por 43 m.

EXEMPLO 3 Resolução algébrica de um sistema não-linear

Resolva o sistema

$$y = x^3 - 6x$$
$$y = 3x$$

Se você quiser, pode verificar a solução graficamente.

SOLUÇÃO

Substituindo o valor de y da primeira equação na segunda, temos:

$$x^3 - 6x = 3x$$
$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x-3)(x+3)=0$$

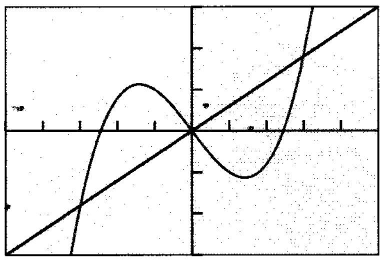
$$x=0,\ x=3,\ x=-3$$

Ao substituir os valores de x em uma das equações, por exemplo, na segunda, temos:

$$y=0,\ y=9,\ y=-9$$

Suporte gráfico

Vejamos o gráfico:



[–5, 5] por [–15, 15]

Figura A.3 Os gráficos de $y = x^3 - 6x$ e $y = 3x$ possuem três pontos de intersecção.

O gráfico das duas equações na Figura A.3 sugere que as três soluções encontradas algebricamente estão corretas.

O sistema de equações possui três soluções: (–3, –9), (0, 0) e (3, 9).

O método da adição (ou do cancelamento)

Considere um sistema de duas equações lineares em x e y. Para **resolvê-las por cancelamento,** devemos reescrever as duas equações como duas equações equivalentes, tal que uma das variáveis tenha coeficientes com sinais opostos. O próximo passo é somar as duas equações para eliminar esta variável.

EXEMPLO 4 Método da adição (ou do cancelamento)

Resolva o sistema

$$2x+3y=5$$

$$-3x+5y=21$$

SOLUÇÃO

Solução algébrica

Multiplique a primeira equação por 3 e a segunda por 2:

$$6x+9y=15$$

$$-6x+10y=42$$

Então, some as duas equações para eliminar a variável x:

$$19y=57$$

$$y=3$$

Substitua $y = 3$ em qualquer uma das duas equações originais para encontrar que $x = -2$.

A solução do sistema original é $(-2, 3)$.

EXEMPLO 5 Caso sem solução

Resolva o sistema

$$x - 3y = -2$$
$$2x - 6y = 4$$

SOLUÇÃO

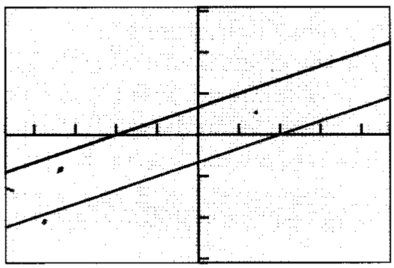
Solução algébrica

Podemos usar o método da adição (cancelamento):
Multiplique a primeira equação por -2: $-2x + 6y = 4$
Some com a segunda equação: $2x - 6y = 4$
O resultado é: $0 = 8$. Essa expressão *não* é verdadeira, quaisquer que sejam os valores de x e y. Logo, o sistema não tem solução.

Suporte gráfico

Da primeira equação, $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; da segunda, $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

Vejamos o gráfico:



[–4,7; 4,7] por [–3,1; 3,1]

Figura A.4 Gráficos de $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ e $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

A Figura A.4 sugere que as duas retas, que são os gráficos das duas equações no sistema, são paralelas.
As duas retas possuem o mesmo coeficiente angular e são, portanto, paralelas.

Uma maneira fácil para determinar *o número de soluções* de um sistema de duas equações lineares com duas variáveis é olhar para os gráficos das duas retas. Existem três possibilidades: as duas retas podem ter intersecção num único ponto, produzindo exatamente *uma* solução, como nos exemplos 1 e 4; as duas retas podem ser paralelas, *não* tendo solução, como no Exemplo 5; as duas retas podem ser as mesmas, produzindo infinitas soluções, como ilustrado no Exemplo 6.

EXEMPLO 6 Caso com infinitas soluções

Resolva o sistema

$$4x - 5y = 2$$
$$-12x + 15y = -6$$

SOLUÇÃO

Multiplique a primeira equação por 3: $12x - 15y = 6$
Some com a segunda equação: $-12x + 15y = -6$

O resultado é: $0 = 0$

A última equação é verdadeira para todos os valores de x e y. Portanto, todo par ordenado que satisfaça uma das equações satisfaz, então, a outra equação também. Assim, o sistema tem infinitas soluções.

Outra forma de verificar que existem infinitas soluções é resolver cada equação isolando y. Assim, ambas as equações resultam em:

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}$$

Numa representação gráfica, concluímos que as duas retas são as mesmas.

Caso de aplicação

Em geral, a quantidade x de oferta de uma produção aumenta se for possível aumentar o preço p de cada produto. Assim, quando uma variável aumenta, então a outra também aumenta. Na economia, é comum colocar os valores de x no eixo horizontal e p no eixo vertical. De acordo com essa prática, escreveremos $p = f(x)$ para a **função oferta**.

Porém, a quantidade x da demanda de um produto diminui quando o preço p de cada produto aumenta. Assim, quando uma variável aumenta, então a outra diminui. Novamente, economistas assumem x (demanda) no eixo horizontal e p (preço) no eixo vertical, embora seja possível p ser a variável dependente. De acordo com essa prática, escreveremos $p = g(x)$ para a **função demanda**.

Finalmente, um ponto onde a curva da oferta e a curva da demanda se interseccionam é um **ponto de equilíbrio**. O preço correspondente é o **preço de equilíbrio**.

EXEMPLO 7 Cálculo do preço de equilíbrio

Uma empresa de calçados determinou que a produção e o preço de um novo tênis devem ser obtidos do ponto de equilíbrio do sistema de equações:

Demanda: $p = 160 - 5x$
Oferta: $p = 35 + 20x$

O valor de x pode ser interpretado como milhões de pares de tênis. Encontre o ponto de equilíbrio.

SOLUÇÃO

Usaremos o método da substituição para resolver o sistema.

$$160 - 5x = 35 + 20x$$
$$25x = 125$$
$$x = 5$$

Substitua este valor de x na função demanda, por exemplo, e encontre p.

$$p = 160 - 5x$$
$$p = 160 - 5(5) = 135$$

O ponto de equilíbrio é (5,135). O preço de equilíbrio é de 135 unidades monetárias, ou seja, **o** preço para o qual oferta e demanda serão iguais a 5 milhões de pares de tênis.

Matrizes

Uma *matriz* é uma tabela retangular de números. As matrizes fornecem uma forma eficiente tanto para resolver sistemas de equações lineares como para armazenar dados.

DEFINIÇÃO Matriz

Sejam m e n números inteiros positivos. Uma **matriz m x n** (lê-se: matriz m por n) é uma tabela retangular de m linhas e n colunas de números reais.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Usaremos também a notação compacta $[a_{ij}]$ para representar toda esta matriz.

Cada **elemento** ou **entrada** a_{ij} da matriz usa a notação de *duplo índice*. O da **linha** é o primeiro índice i, e o da **coluna** é o segundo índice j. O elemento a_{ij} está na i-ésima linha e j-ésima coluna. Em geral, a **ordem de uma matriz m x n** é simplesmente definida por m x n. Se $m = n$, a matriz é uma **matriz quadrada**. Além disso, duas **matrizes são iguais** se possuem a mesma ordem e os mesmos elementos correspondentes.

EXEMPLO 8 Determinação da ordem de uma matriz

(a) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ tem ordem 2×3.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ tem ordem 4×2.

(c) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ tem ordem 3×3 e é uma matriz quadrada.

Soma e subtração de matrizes

Somamos ou subtraímos duas matrizes de mesma ordem pela soma ou subtração de seus elementos correspondentes. Matrizes de ordens diferentes *não* podem ser somadas ou subtraídas.

DEFINIÇÃO Soma e subtração de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de ordem $m \times n$.

1. A **soma** $A + B$ é a matriz $m \times n$ dada por $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

2. A **subtração** $A - B$ é a matriz $m \times n$ dada por $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$.

EXEMPLO 9 Soma e subtração de matrizes

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Encontre $A + B$ e $A - B$.

SOLUÇÃO

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Quando trabalhamos com matrizes, os números reais são chamados de **escalares**. O produto de um número real k e uma matriz $m \times n$ dada por $n\,A = [a_{ij}]$ é a matriz $m \times n$

$$kA = [ka_{ij}]$$

A matriz é um **múltiplo escalar de** A.

EXEMPLO 10 Multiplicação de uma matriz por um escalar

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $k = 3$. Encontre kA.

$$kA = 3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

As matrizes possuem muitas propriedades inerentes aos números reais. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$ qualquer. A matriz $m \times n$ dada por $O = [0]$ consistindo inteiramente em zeros é **a matriz nula** porque $A + O = A$. Em outras palavras, O é a matriz **identidade aditiva** para o conjunto de todas as matrizes $m \times n$. A matriz m x n dada por $B = [-a_{ij}]$ é formada pelos *valores opostos* dos elementos de A e é denominada **matriz oposta** de A, pois $A + B = O$. A matriz oposta também pode ser escrita como $B = -A$.

Tal como com números reais,

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}] = [a_{ij} + (-b_{ij})] = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = A + (-B)$$

Multiplicação de matrizes

Para fazer o *produto* AB de duas matrizes, o número de colunas da matriz A (que é a primeira) deve ser igual ao número de linhas da matriz B (que é a segunda). Cada elemento *cij* do produto é obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma linha i de A pelo correspondente elemento de uma coluna j de B.

DEFINIÇÃO Multiplicação de matrizes

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times r$ e $B = [b_{ij}]$ uma matriz de ordem $r \times n$. O **produto** $AB = [c_{ij}]$ é a matriz $m \times n$ onde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ir} \cdot b_{rj}$$

A forma para entender como encontrar o produto de duas matrizes quaisquer é primeiro considerar o produto de uma matriz $A = [a_{1j}]$ de ordem $1 \times r$ com uma matriz $B = [b_{j1}]$ de ordem $r \times 1$. De acordo com a definição, $AB = [c_{11}]$ é uma matriz 1×1, onde $c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \ldots + a_{1r}\, b_{r1}$. Por exemplo, o produto AB de uma matriz A de ordem 1×3 e uma matriz B de ordem 3×1, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

é

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = [1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6] = [32]$$

Então, o ij-ésimo elemento do produto AB de uma matriz $m \times r$ com uma matriz $r \times n$ é o produto da i-ésima linha de A, considerada uma matriz $1 \times r$, com a j-ésima coluna de B, considerada uma matriz $r \times 1$, como ilustrado no Exemplo 11.

EXEMPLO 11 Multiplicação de duas matrizes

Encontre, se possível, o produto AB onde

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO

(a) Como o número de colunas de A é 3 e o número de linhas de B é 3, então o produto AB está definido. O produto $AB = [c_{ij}]$ é uma matriz 2×2 onde

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = -1$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 = -6$$

$$c_{21} = [0 \quad 1 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$c_{22} = [0 \quad 1 \quad 2]\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 2$$

Então, $AB = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) Como o número de colunas de A é 3 e o número de linhas de B é 2, então o produto AB ***não*** está definido.

Matriz identidade e matriz inversa

A matriz $n \times n$ dada por I_n formada com 1 na diagonal principal (mais alta na esquerda e mais baixa na direita) e 0 nos demais elementos é a **matriz identidade de ordem $n \times n$**.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Por exemplo,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $n \times n$ qualquer, podemos provar (nos exercícios finais) que

$$AI_n = I_nA = A$$

isto é, I_n é a **identidade multiplicativa** para o conjunto de matrizes $n \times n$.

Se a é um número real diferente de 0, então $a^{-1} = 1/a$ é a inversa multiplicativa de a, ou seja, $aa^{-1} = a(1/a) = 1$. A definição de *inversa multiplicativa* de uma matriz quadrada é similar.

DEFINIÇÃO Inversa de uma matriz quadrada

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Se existe uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

então B é a **inversa** da matriz A. Escrevemos $B = A^{-1}$ (lê-se: inversa de A).

Veremos agora que nem toda matriz quadrada (Exemplo 13) tem uma inversa. Se uma matriz quadrada A tem uma inversa, então A é **não-singular**. Se A não tem inversa, então A é **singular**.

EXEMPLO 12 Verificação de matrizes inversas

Prove que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

são matrizes inversas.

SOLUÇÃO

Observe que

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Assim, $B = A^{-1}$ e $A = B^{-1}$.

EXEMPLO 13 Caso de uma matriz que não tem inversa

Prove que a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é singular, isto é, que não tem inversa.

SOLUÇÃO

Suponha que A tenha uma inversa dada por $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Então, $AB = I_2$.

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6x + 3z & 6y + 3w \\ 2x + z & 2y + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando as duas matrizes, obtemos:

$$6x + 3z = 1 \qquad 6y + 3w = 0$$
$$2x + z = 0 \qquad 2y + w = 1$$

Multiplicando ambos os lados da equação $2x + z = 0$ por 3, teremos $6x + 3z = 0$. Não existem valores para x e z para o qual o valor de $6x + 3z$ seja ao mesmo tempo 0 e 1. Isso é uma contradição. Logo, a conclusão é que A não tem inversa.

Determinante de uma matriz quadrada

O número $ad - bc$ é o **determinante** da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e é denotado por

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Para o cálculo desse determinante, basta multiplicar os números da diagonal principal e subtrair a multiplicação dos números da diagonal secundária (aquela que a parte mais alta está no lado direito e a mais baixa, no esquerdo).

Para definir o determinante de uma matriz quadrada de ordem superior, precisamos introduzir o conceito de *menor complementar* e de *co-fatores*, associados aos elementos de uma matriz quadrada. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. O **menor complementar** M_{ij} correspondente ao elemento a_{ij} é o determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtido da retirada da linha e coluna contendo a_{ij}. O **co-fator** correspondente a a_{ij} é $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

DEFINIÇÃO Determinante de uma matriz quadrada

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n \times n$ ($n > 2$). O determinante de A, denotado por det A ou $|A|$, é a soma dos elementos de uma linha qualquer ou de uma coluna qualquer, multiplicados pelos seus respectivos co-fatores. Por exemplo, expandindo para a i-ésima linha, temos

$$\det A = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

Costumamos considerar $i = 1$, ou seja, fazer os cálculos a partir dos elementos da primeira linha. Mas isso não é regra. Veja que, a seguir, partiremos da segunda linha.

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz 3×3, então, usando a definição de determinante aplicado, por exemplo, à segunda linha, obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= a_{21}(-1)^3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{23}(-1)^5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \\
&\quad - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})
\end{aligned}$$

O determinante de uma matriz 3×3 envolve três determinantes de matrizes 2×2, o determinante de uma matriz 4×4 envolve quatro determinantes de matrizes 3×3 e assim por diante.

TEOREMA Inversa de matrizes $n \times n$

Uma matriz A $n \times n$ tem uma inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Existe uma maneira simples de determinar se uma matriz 2×2 tem uma inversa.

Inversa de uma matriz 2 x 2

Se $ad - bc \neq 0$, então

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Existem fórmulas complicadas para encontrar inversas de matrizes não-singulares de ordem 3×3 ou superior.

Para o caso da matriz 3×3, basta encontrar a matriz dos cofatores e construir a matriz transposta dessa dos cofatores. Para isso, a primeira linha da matriz dos cofatores passa a ser a primeira coluna da matriz transposta, a segunda linha da matriz dos cofatores passa a ser a segunda coluna da matriz transposta e assim por diante.

Uma matriz A^T é a transposta de A se a primeira linha de A é a primeira linha de A^T, a segunda linha de A é a segunda linha de A^T e assim por diante.

EXEMPLO 14 Encontrando inversa de matrizes

Determine se as matrizes abaixo têm uma inversa. Se existir, encontre–a.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO

(a) Vejamos que $\det A = ad - bc = 3 \bullet 2 - 1 \bullet 4 = 2 \neq 0$ e, portanto, concluímos que A tem uma inversa. Usando a fórmula para a inversa de uma matriz 2×2, obtemos

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -2 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

Você pode verificar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$

(b) Você pode verificar que $\det B = -10 \neq 0$ e

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Logo, $B^{-1}B = BB^{-1} = I_3$

Listaremos agora algumas propriedades importantes de matrizes.

Propriedades de matrizes

Sejam A, B e C matrizes que possuem ordens tais que as operações soma, diferença e produto possam ser definidas.

1. Propriedade comutativa
Adição:
$A + B = B + A$

Multiplicação: Em geral, não é verdade

2. Propriedade associativa
Adição:
$(A + B) + C = A + (B + C)$
Multiplicação:
$(AB)C = A(BC)$

3. Propriedade do elemento neutro
Adição: $A + O = A$
Multiplicação (ordem de $A = n \times n$ e a identidade é multiplicativa):
$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

4. Propriedade do elemento oposto
Adição: $A + (-A) = O$
Multiplicação: (ordem de A é $n \times n$):
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n, \quad |A| \neq 0$

5. Propriedade distributiva
Multiplicação com relação à adição
$A(B + C) = AB + AC$
$(A + B)C = AC + AB$

Multiplicação com relação à subtração
$A(B - C) = AB - AC$
$(A - B)C = AC - AB$

Exercícios

Nos exercícios 1 e 2, resolva a equação para que y fique escrita em termos de x.

1. $2x + 3y = 5$ **2.** $xy + x = 4$

Nos exercícios 3 a 6, resolva a equação algebricamente.

3. $3x^2 - x - 2 = 0$ **4.** $2x^2 + 5x - 10 = 0$

5. $x^3 = 4x$ **6.** $x^3 + x^2 = 6x$

7. Escreva uma equação para a reta que passa pelo par ordenado $(-1, 2)$ e que seja paralela à reta $4x + 5y = 2$.

8. Escreva uma equação equivalente a $2x + 3y = 5$ com coeficiente de x igual a -4.

9. Encontre graficamente os pontos de intersecção dos gráficos de $y = 3x$ e $y = x^3 - 6x$.

Nos exercícios 10 e 11, determine se o par ordenado é uma solução do sistema.

10. $5x - 2y = 8$
$2x - 3y = 1$

(a) $(0, 4)$ **(b)** $(2, 1)$ **(c)** $(-2, -9)$

11. $y = x^2 - 6x + 5$
$y = 2x - 7$

(a) $(2, -3)$ **(b)** $(1, -5)$ **(c)** $(6, 5)$

Nos exercícios 12 a 21, resolva o sistema pelo método da substituição.

12. $x + 2y = 5$
$y = -2$

13. $x = 3$
$x - y = 20$

14. $3x + y = 20$
$x - 2y = 10$

15. $2x - 3y = -23$
$x + y = 0$

16. $2x - 3y = -7$
$4x + 5y = 8$

17. $3x + 2y = -5$
$2x - 5y = -16$

18. $x - 3y = 6$
$-2x + 6y = 4$

19. $3x - y = -2$
$-9x + 3y = 6$

20. $y = x^2$
$y - 9 = 0$

21. $x = y + 3$
$x - y^2 = 3y$

Nos exercícios 22 a 27, resolva o sistema algebricamente. O resultado pode ser verificado graficamente.

22. $y = 6x^2$
$7x + y = 3$

23. $y = 2x^2 + x$
$2x + y = 20$

24. $y = x^3 - x^2$
$y = 2x^2$

25. $y = x^3 + x^2$
$y = -x^2$

26. $x^2 + y^2 = 9$
$x - 3y = -1$

27. $x^2 + y^2 = 16$
$4x + 7y = 13$

Nos exercícios 28 a 35, resolva o sistema pelo método da adição (cancelamento).

28. $x - y = 10$
$x + y = 6$

29. $2x + y = 10$
$x - 2y = -5$

30. $3x - 2y = 8$
$5x + 4y = 28$

31. $4x - 5y = -23$
$3x + 4y = 6$

32. $2x - 4y = -10$
$-3x + 6y = -21$

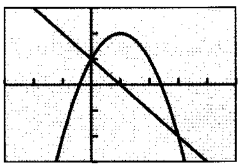
33. $2x - 4y = 8$
$-x + 2y = -4$

34. $2x - 3y = 5$
$-6x + 9y = -15$

35. $2x - y = 3$
$-4x + 2y = 5$

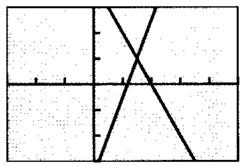
Nos exercícios 36 a 39, use o gráfico para encontrar as soluções do sistema.

36. $y = 1 + 2x - x^2$
$y = 1 - x$



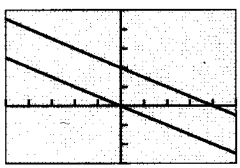
[–3, 5] por [–3, 3]

37. $6x - 2y = 7$
$2x + y = 4$



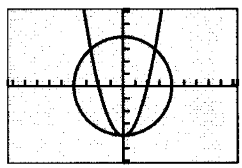
[–3, 5] por [–3, 3]

38. $x + 2y = 0$
$0{,}5x + y = 2$



[–5, 5] por [–3, 5]

39. $x^2 + y^2 = 16$
$y + 4 = x^2$



[–9,4; 9,4] por [–6,2; 6,2]

Nos exercícios 40 a 43, use gráficos que você pode esboçar para determinar o número de soluções que o sistema possui.

40. $3x + 5y = 7$
$4x - 2y = -3$

41. $3x - 9y = 6$
$2x - 6y = 1$

42. $2x - 4y = 6$
$3x - 6y = 9$

43. $x - 7y = 9$
$3x + 4y = 1$

Nos exercícios 44 e 45, encontre o ponto de equilíbrio para as funções de demanda e oferta.

44. $p = 200 - 15x$
$p = 50 + 25x$

45. $p = 15 - \dfrac{7}{100}x$
$p = 2 + \dfrac{3}{100}x$

46. Encontre as dimensões de um retângulo com um perímetro de 200 metros e uma área de 500 m^2.

47. Determine a e b tal que o gráfico de $y = ax+b$ contém os pontos $(-1,4)$ e $(2,6)$.

48. Determine a e b tal que o gráfico de $ax + by = 8$ contém os pontos $(2, -1)$ e $(-4, -6)$.

49. Uma vendedora possui dois possíveis planos para pagamento.

Plano A: 300 unidades monetárias por semana mais 5% do valor das vendas.

Plano B: 600 unidades monetárias por semana mais 1% do valor das vendas.

Qual o valor das vendas que resulta na mesma quantia total nos dois planos?

50. Verdadeiro ou falso Sejam a e b números reais. O seguinte sistema tem exatamente duas soluções:

$2x + 5y = a$

$3x - 4y = b$

Justifique sua resposta.

Nos exercícios 51 a 54, resolva o problema sem usar calculadora.

51. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas é a solução do sistema $2x - 3y = 12$?
$x + 2y = -1$

(a) $(-3, 1)$ **(b)** $(-1, 0)$ **(c)** $(3, -2)$
(d) $(3, 2)$ **(e)** $(6, 0)$

52. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas não pode ser o número de soluções de um sistema de duas equações com duas variáveis cujos gráficos são um círculo e uma parábola?

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 2 **(d)** 3 **(e)** 5

53. Qual das seguintes alternativas não pode ser o número de soluções de um sistema de duas equações com duas variáveis cujos gráficos são parábolas?

(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 4
(d) 5 **(e)** Infinitas

54. Qual das seguintes alternativas é o número de soluções de um sistema de duas equações lineares com duas variáveis se a equação resultante após usar a eliminação corretamente é $4 = 4$?

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 2
(d) 3 **(e)** Infinitas

Nos exercícios 55 a 60, determine a ordem da matriz e indique se é uma matriz quadrada.

55. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **56.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

57. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **58.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

59. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **60.** $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 61 a 64, identifique os elementos especificados na seguinte matriz.

a_{33}

61. a_{13} **62.** a_{24} **63.** a_{32} **64.** a_{33}

Nos exercícios 65 a 70, encontre **(a)** $A + B$, **(b)** $A - B$, **(c)** $3A$ e **(d)** $2A - 3B$.

65. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

66. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

67. $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

68. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

69. $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

70. $A = [-1 \quad -2 \quad 0 \quad 3]$ e $B = [1 \quad 2 \quad -2 \quad 0]$

Nos exercícios 71 a 76, use a definição de multiplicação de matrizes para encontrar **(a)** AB, **(b)** BA.

71. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

72. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

73. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

74. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

75. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

76. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 77 a 82, encontre **(a)** AB e **(b)** BA ou responda que o produto não está definido.

77. $A = [2 \quad -1 \quad 3]$ $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

78. $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ $B = [-1 \quad 2 \quad 4]$

79. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = [-3 \quad 5]$

80. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

81. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

82. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 83 a 86, encontre a e b.

83. $\begin{bmatrix} a & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & b \end{bmatrix}$

84. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

85. $\begin{bmatrix} 2 & a-1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ b+2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

86. $\begin{bmatrix} a+3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & b-1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 87 e 88, verifique se as matrizes são inversas uma com relação a outra.

87. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}$

88. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & -0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & -1{,}25 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 89 a 92, encontre a inversa da matriz se existir ou responda que a inversa não existe.

89. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

90. $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$

91. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

92. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 93 e 94, use a definição para calcular o determinante da matriz.

93. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ **94.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 95 e 96, encontre a matriz X.

95. $3X + A = B$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

96. $2X + A = B$, onde $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

97. Uma empresa possui duas fábricas que produzem três artigos. O número de unidades do artigo i produzido na fábrica j em uma semana é representado por a_{ij} na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 120 & 70 \\ 150 & 110 \\ 80 & 160 \end{bmatrix}$$

Se a produção cresce 10%, escreva a nova produção na matriz B. Como B está relacionado com A?

98. Uma empresa vende quatro modelos de um produto em três lojas. O estoque da loja i para o modelo j é a matriz:

$$S = \begin{bmatrix} 16 & 10 & 8 & 12 \\ 12 & 0 & 10 & 4 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

O preço no atacado do modelo i é p_{i1} e o preço no varejo do modelo i é p_{i2}, dados na matriz

$$P = \begin{bmatrix} \$180 & \$269{,}99 \\ \$275 & \$399{,}99 \\ \$355 & \$499{,}99 \\ \$590 & \$799{,}99 \end{bmatrix}$$

(a) Determine o produto SP.

(b) O que a matriz SP representa?

99. Uma empresa vende quatro produtos. O preço do produto tipo j está representado por a_{1j} na matriz

$$A = [\$398 \quad \$598 \quad \$798 \quad \$998]$$

O número de produtos vendidos tipo j está representado por b_{1j} na matriz

$$B = [35 \quad 25 \quad 20 \quad 10]$$

O custo para produzir o produto tipo j está representado por c_{1j} na matriz

$$C = [\$199 \quad \$268 \quad \$500 \quad \$670]$$

(a) Escreva uma matriz-produto que forneça a receita total obtida com as vendas dos produtos.

(b) Escreva uma expressão usando matrizes que forneça o lucro obtido com as vendas dos produtos.

100. Sejam A, B e C matrizes que possuem ordens tais que a soma, a diferença e o produto possam ser definidos. Prove que as seguintes propriedades são verdadeiras.

(a) $A + B = B + A$

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(c) $A(B + C) = AB + AC$

(d) $(A - B)C = AC - BC$

101. Sejam A e B matrizes $m \times n$ e c e d escalares. Prove que as seguintes propriedades são verdadeiras.

(a) $c(A + B) = cA + cB$

(b) $(c + d)A = cA + dA$

(c) $c(dA) = (cd)A$

(d) $1 \cdot A = A$

102. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Prove que $AI_n = I_nA = A$.

Nos exercícios 103 a 106, resolva o problema sem usar a calculadora.

103. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas é igual ao determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}?$$

(a) 4 **(b)** -4 **(c)** 10 **(d)** -10 **(e)** -14

104. Múltipla escolha Seja A uma matriz de ordem 3×2 e B uma matriz de ordem 2×4. Qual das seguintes alternativas fornece a ordem do produto AB?

(a) 2×2 **(b)** 3×4 **(c)** 4×3 **(d)** 6×8

(e) O produto não está definido.

105. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$?

(a) $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

106. Múltipla escolha Qual das seguintes alternativas é o valor de a_{13} na matriz $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$?

(a) -7 **(b)** 7 **(c)** -3 **(d)** 3 **(e)** 10

Análise combinatória e teorema binomial

Objetivos de aprendizagem

- Características do discreto e do contínuo.
- A importância da contagem.
- Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem.
- Permutações.
- Combinações.
- Quantidade de subconjuntos de um conjunto.
- Coeficiente binomial.
- Triângulo de Pascal.
- O teorema binomial.

Técnicas de contagem são úteis e facilitam as contas por meio das fórmulas. O teorema binomial é uma maneira de estudar as combinações, que podem ser aplicadas em outras áreas do conhecimento.

Características do discreto e do contínuo

Um ponto não tem comprimento nem largura. Porém, um intervalo de números na reta real (que representa o conjunto dos números reais) já possui comprimento e uma infinidade de números reais. Essas características já distinguem o que é *discreto* do que é *contínuo*. Estudaremos técnicas de contagem para o caso discreto.

A importância da contagem

Vamos iniciar com um exemplo.

EXEMPLO 1 Colocação de três objetos em ordem

De quantas maneiras diferentes podemos organizar três objetos distintos em ordem?

SOLUÇÃO

Não é difícil listar todas as possibilidades. Se chamarmos os objetos por A, B e C, então as diferentes ordens são: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA. Uma boa maneira de visualizar essas seis maneiras é com um *diagrama em árvore*, como na Figura B.1. Podemos observar, partindo da esquerda, que temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ "galhos" ou seis caminhos levando para resultados com ordens diferentes das letras.

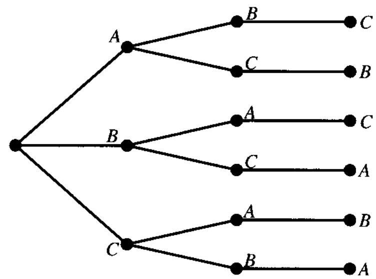


Figura B.1 Um diagrama em árvore para ordenar as letras A, B e C.

Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem

Das idéias do diagrama em árvore citado anteriormente, imagine como ficaria um diagrama para as letras *ABCDE*. Não é necessário ver o diagrama para concluir que ele terá $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ caminhos ou "galhos". O diagrama em árvore é uma visualização geométrica de um princípio fundamental da contagem, conhecido também como *princípio da multiplicação.*

Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem

Se um procedimento P tem uma seqüência de estágios $S_1, S_2, \ldots, S_n$ e se

$$S_1 \text{ ocorre de } r_1 \text{ maneiras,}$$
$$S_2 \text{ ocorre de } r_2 \text{ maneiras,}$$
$$\vdots$$
$$S_n \text{ ocorre de } r_n \text{ maneiras,}$$

então o número de maneiras que o procedimento P pode ocorrer é o produto

$$r_1 r_2 \cdots r_n$$

EXEMPLO 2 Problema de contagem

As placas dos veículos possuem três letras e quatro dígitos. Encontre o número possível de placas que podemos formar:

(a) caso não haja restrição alguma quanto ao uso das letras e números;

(b) caso letras e números não possam ser repetidos.

SOLUÇÃO

(a) Como não há restrição alguma quanto ao uso das letras e números, então temos 26 possíveis letras para cada uma das três escolhas, além de 10 possíveis dígitos para cada uma das quatro posições numéricas. Pelo princípio da multiplicação, podemos obter placas de $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175.760.000$ maneiras.

(b) Caso letras e números não possam ser repetidos, então temos 26 possíveis escolhas para a primeira letra, 25 para a segunda e 24 possíveis escolhas para a terceira letra, além de 10 possíveis escolhas para o primeiro dígito, 9 para o segundo, 8 para o terceiro e 7 possíveis escolhas para o quarto dígito. Pelo princípio da multiplicação, podemos obter placas de $26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78.624.000$ maneiras.

Permutações

Uma importante aplicação do princípio da multiplicação é contar o número de maneiras que um conjunto de n objetos pode ser organizado em ordem. Cada resultado é chamado de uma **permutação** do conjunto. O Exemplo 1 mostrou que existem $3! = 6$ permutações de um conjunto de três elementos distintos.

FATORIAIS

Se n é um número inteiro positivo, então o símbolo $n!$ (lê-se "n fatorial") representa o produto $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$. Também definimos $0! = 1$.

Permutações de um conjunto com n elementos

Existem $n!$ permutações de um conjunto com n elementos.

Usualmente, os elementos de um conjunto são distintos uns dos outros, mas podemos adequar nossa contagem quando eles não são, como vemos no Exemplo 3.

EXEMPLO 3 Permutações com elementos repetidos

Conte o número de diferentes "palavras" que podem ser formadas com as 9 letras de cada palavra a seguir (colocamos aspas anteriormente para que não haja preocupação caso a palavra formada não tenha sentido).

(a) DRAGONFLY **(b)** BUTTERFLY **(c)** BUMBLEBEE

SOLUÇÃO

(a) Cada permutação das 9 letras forma uma palavra diferente. Existem $9! = 362.880$ permutações.

(b) Existem também 9! permutações destas letras, mas uma simples permutação de duas letras T não resulta em uma nova palavra. Corrigimos a contagem dividindo por 2!. Existem, então, $9!/2! = 181.440$ permutações *distintas* das letras da palavra BUTTERFLY.

(c) Novamente, existem 9! permutações, mas uma permutação entre as três letras B ou com as três letras E não resulta em uma nova palavra. Para corrigir, dividimos por 3! duas vezes. Existem, então, $\dfrac{9!}{3!3!} = 10.080$ permutações distintas das letras da palavra BUMBLEBEE.

Permutações distintas

Existem $n!$ permutações distintas de um conjunto de n elementos distintos. Se o conjunto de n elementos possui n_1 elementos de um primeiro tipo, n_2 elementos de um segundo tipo e assim por diante, com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, então o número de permutações distintas entre os n elementos é

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

Em muitos problemas de contagem estamos interessados em usar n objetos para preencher, digamos, r espaços em ordem, onde $r < n$. São chamadas de **permutações de n objetos tomados r a r**, ou simplesmente, **arranjos**.

O primeiro espaço tem n maneiras, o segundo tem $n-1$ maneiras, e assim por diante; até o r-ésimo espaço que tem $n-(r-1)$ maneiras. Pelo princípio da multiplicação, podemos preencher os r espaços de $n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ maneiras. Essa expressão pode ser escrita de forma mais compacta, como $\frac{n!}{(n-r)!}$.

Fórmula para contagem das permutações ou fórmula do arranjo

O número de permutações de n objetos tomados r a r é denotado por $A_{n,r}$ (ou ${}_nP_r$) e é dado por

$${}_nP_r = A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ para } 0 \leq r \leq n$$

Se $r > n$, então $A_{n,r} = 0$

Note que ${}_nP_n = n!/(n-n)! = n!/0! = n!/1 = n!$, que coincide com o que já vimos com relação ao número de permutações de um conjunto completo de n objetos. Esta é a razão de definirmos $0!$ por 1.

EXEMPLO 4 Cálculo das permutações ou arranjos

Calcule cada expressão sem usar calculadora.

(a) ${}_6P_4$ **(b)** ${}_{11}P_3$ **(c)** ${}_nP_3$

SOLUÇÃO

(a) Pela fórmula, ${}_6P_4 = 6!/(6-4)! = 6!/2! = (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!)/2! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

(b) Podemos aplicar o princípio da multiplicação diretamente; como temos 11 objetos e 3 espaços para preencher, então

$${}_{11}P_3 = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$$

(c) Podemos aplicar novamente o princípio da multiplicação; como temos n objetos e 3 espaços para preencher, então, assumindo $n \geq 3$,

$${}_nP_3 = n(n-1)(n-2)$$

Combinações

Quando contamos as permutações de n objetos tomados r a r, consideramos diferentes ordenações de um mesmo conjunto de r objetos selecionados como sendo diferentes permutações. Em muitas aplicações, estamos interessados nas maneiras de *selecionar* os r objetos, independentemente da ordem em que estão organizados. Essas seleções em que a ordem não é importante são chamadas de **combinações de n objetos tomados r a r**.

Fórmula para contagem das combinações

O número de combinações de n objetos tomados r a r é denotado por ${}_nC_r$, $C_{n,r}$ ou $\binom{n}{r}$ e é dado por

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ para } 0 \leq r \leq n$$

Se $r > n$, então ${}_nC_r = 0$

Podemos verificar a fórmula ${}_nC_r$ e o princípio da multiplicação. Desde que toda permutação possa ser pensada como uma seleção *desordenada* de r objetos *seguidos* de uma ordem particular dos objetos selecionados, o princípio da multiplicação resulta em ${}_nP_r = {}_nC_r \cdot r!$.

Portanto

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{1}{r!} \cdot \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

EXEMPLO 5 Distinção entre combinações e permutações

Em cada uma dessas situações, conclui-se que estão sendo descritas permutações (ordenadas ou simplesmente descritos arranjos) ou combinações (desordenadas).

(a) Um presidente, um vice-presidente e um secretário são escolhidos dentre 25 pessoas.

(b) Uma cozinheira escolhe 5 batatas de uma sacola com 12 para preparar uma salada de batatas.

(c) Um professor organiza seus 22 alunos numa sala com 30 lugares.

SOLUÇÃO

(a) Permutação. A ordem é importante, devido ao cargo de cada pessoa.

(b) Combinação. A salada é a mesma, não importando a ordem em que as batatas são escolhidas.

(c) Permutação. Uma ordem diferente dos estudantes nos mesmos assentos resulta numa diferente organização na sala.

Sabemos o que está sendo contado. Os números das possíveis escolhas das situações anteriores são: (a) ${}_{25}P_3 = 13.800$, (b) ${}_{12}C_5 = 792$, (c) ${}_{30}P_{22} \cong 6{,}5787 \times 10^{27}$

Quantidade de subconjuntos de um conjunto

Iniciaremos com um exemplo.

EXEMPLO 6 Aplicação

Uma pizzaria possui 10 tipos de ingredientes para montar pizzas. Quantas pizzas diferentes podem ser montadas em cada caso?

(a) Podemos escolher quaisquer 3 tipos de ingredientes.

(b) Podemos escolher qualquer quantidade de ingredientes.

SOLUÇÃO

(a) Como a ordem dos ingredientes não é importante, afinal, são 3 ingredientes, e qualquer que seja a ordem em que são colocados a pizza é a mesma, então o número de possíveis pizzas é

$${}_{10}C_3 = \binom{10}{3} = 120$$

(b) Uma primeira idéia é somar todos os valores obtidos a partir de ${}_{10}C_r = \binom{10}{r}$ para r de 1 até 10.

Outra idéia é pensar que podemos colocar os 10 ingredientes numa seqüência e, para cada um, optar entre sim (colocar na pizza) ou não (não colocar na pizza), isto é, cada ingrediente tem dois possíveis resultados. Pelo princípio da multiplicação, o número de tais seqüências diferentes é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1.024$ possíveis pizzas.

Fórmula para contagem da quantidade de subconjuntos de um conjunto

Existem 2^n subconjuntos de um conjunto com n objetos (incluindo o conjunto vazio e o conjunto com todos os objetos).

EXEMPLO 7 Aplicação

Uma lanchonete divulga que possui 256 maneiras de montar sanduíches, com os ingredientes que o cliente preferir. Quantos ingredientes existem disponíveis?

SOLUÇÃO

Precisamos resolver a equação $2^n = 256$ e descobrir o n. Usaremos logaritmo.

$$2^n = 256$$
$$\log 2^n = \log 256$$
$$n \log 2 = \log 256$$
$$n = \frac{\log 256}{\log 2}$$
$$n = 8$$

Existem, portanto, 8 ingredientes possíveis para escolha.

Coeficiente binomial

Se você expandir $(a + b)^n$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5, aqui estão os resultados:

$$(a + b)^0 = 1$$
$$(a + b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$
$$(a + b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$
$$(a + b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$
$$(a + b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$
$$(a + b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$

Você pode observar os padrões e predizer qual a expansão de $(a + b)^6$?

Você pode predizer o seguinte:

1. Os expoentes de a decrescerão de 6 até 0, diminuindo de um em um.
2. Os expoentes de b crescerão de 0 até 6, aumentando de um em um.
3. Os primeiros dois coeficientes serão 1 e 6.
4. Os dois últimos coeficientes serão 6 e 1.

Os coeficientes binomiais na expansão de $(a + b)^n$ são os valores de ${}_nC_r = C_{n,r} = \binom{n}{r}$ para $r = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

A expansão de

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ fatores}}$$

consiste em todos os possíveis produtos que podemos formar com as letras, no caso a e b. O número de maneiras para formar o produto $a^r b^{n-r}$ é exatamente o mesmo número de maneiras para escolher r fatores para serem expoentes de a e, conseqüentemente, complementá-lo com relação a n, para serem os expoentes de b. Esse número de maneiras é ${}_nC_r = C_{n,r} = \binom{n}{r}$. A expansão de $(a + b)^n$ será definida quando tratarmos de teorema binomial.

DEFINIÇÃO Coeficiente binomial

O coeficiente binomial que aparece na expansão de $(a + b)^n$ são os valores de ${}_nC_r = C_{n,r} = \binom{n}{r}$ para $r = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$.
A notação clássica para ${}_nC_r = C_{n,r}$, especialmente no contexto de coeficiente binomial, é $\binom{n}{r}$.

Triângulo de Pascal

Observe o desenvolvimento que fizemos no início, colocando as expansões de $(a + b)^n$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5. Se eliminarmos os símbolos da adição e as potências das variáveis a e b na forma triangular, deixando apenas os coeficientes, é possível montar:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \vdots & & & & \ddots &
\end{array}
$$

É chamado de **triângulo de Pascal** em homenagem a Blaise Pascal (1623-1662), que o usou em seu trabalho, mas não foi quem o descobriu. Esse resultado já havia aparecido em textos chineses, no século XIV.

EXEMPLO 8 O triângulo de Pascal

Mostre como a linha 5 do triângulo de Pascal pode ser usada para obter a linha 6 e usar a informação para escrever a expansão de $(x + y)^6$.

SOLUÇÃO

Os números nas extremidades são iguais a 1. Cada número entre eles é a soma dos dois números acima. Assim, a linha 6 pode ser obtida da linha 5, como segue:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
\text{Linha 5} & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
 & & & \searrow\!\!+\!\!\swarrow & & \searrow\!\!+\!\!\swarrow & & \searrow\!\!+\!\!\swarrow & & \searrow\!\!+\!\!\swarrow & & \searrow\!\!+\!\!\swarrow & & \\
\text{Linha 6} & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Estes são os coeficientes binomiais para $(x + y)^6$ e, assim,

$$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

EXEMPLO 9 Cálculo dos coeficientes binomiais

Encontre o coeficiente de x^{10} na expansão de $(x + 2)^{15}$.

SOLUÇÃO

O termo da expansão necessário é ${}_{15}C_{10}x^{10}2^5$, isto é:

$$\frac{15!}{10!5!} \cdot 2^5 \cdot x^{10} = 3.003 \cdot 32 \cdot x^{10} = 96096 \cdot x^{10}$$

O coeficiente de x^{10} é 96096.

O teorema binomial

O teorema binomial

Para qualquer inteiro positivo n,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

onde

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Esse resultado também é conhecido como binômio de Newton.

EXEMPLO 10 Expansão de um binômio

Expanda $(2x - y^2)^4$.

SOLUÇÃO

Usamos o teorema binomial para expandir $(a + b)^4$, onde $a = 2x$ e $b = -y^2$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\begin{aligned}(2x - y^2)^4 &= (2x)^4 + 4(2x)^3(-y^2) + 6(2x)^2(-y^2)^2 \\ &\quad + 4(2x)(-y^2)^3 + (-y^2)^4 \\ &= 16x^4 - 32x^3y^2 + 24x^2y^4 - 8xy^6 + y^8\end{aligned}$$

Exercícios

Nos exercícios 1 a 4, conte o número de maneiras que cada procedimento pode ser feito.

1. Alinhar 3 pessoas para uma fotografia.
2. Priorizar 4 tarefas pendentes do mais ao menos importante.
3. Organizar 5 livros da esquerda para a direita em uma estante.
4. Premiar do primeiro ao quinto lugar os cinco primeiros cachorros de um concurso.
5. Existem 3 rodovias da cidade A até a cidade B e 4 rodovias da cidade B até a cidade C. Quantos caminhos diferentes existem da cidade A até C, passando por B?

Desenvolva cada expressão dos exercícios 6 a 11:

6. $4!$
7. ${}_6P_2$
8. ${}_{10}C_7$
9. $(3!)(0!)$
10. ${}_9P_2$
11. ${}_{10}C_3$

12. Suponha que dois dados, um vermelho e um verde, são jogados. Quantos resultados possíveis existem para esse par de dados?

13. Quantas seqüências diferentes de caras e coroas existem se uma moeda é lançada 10 vezes?

14. Uma pessoa tem dinheiro para comprar apenas 3 dos 48 CDs, disponíveis para compra. De quantas maneiras diferentes essa pessoa pode fazer sua escolha?

15. Uma moeda é lançada 20 vezes e as seqüências de caras e coroas são registradas. De todas as possíveis seqüências, quantas têm exatamente 7 caras?

16. Uma pessoa entrevistou 8 pessoas para 3 funções idênticas. Quantos grupos diferentes de 3 funcionários essa pessoa consegue montar?

17. Um professor aplica 20 questões para seus alunos, das quais poderão selecionar 8 para serem respondidas. De quantas maneiras o aluno pode selecionar as questões?

18. Uma cliente pretende comer um prato com salada. Se existem 9 ingredientes para compor uma salada, quantos pratos essa cliente consegue montar?

19. O dono de uma pizzaria pretende divulgar que possui mais de 4000 diferentes tipos de pizzas com ingredientes a escolher. Qual o número mínimo de ingredientes que esse dono precisa ter disponível?

20. Um subconjunto do conjunto A é chamado *próprio* se não é o vazio nem ele todo. Quantos subconjuntos próprios um conjunto com n elementos possui?

21. Quantos gabaritos diferentes são possíveis para 10 questões do tipo Verdadeiro ou Falso?

22. Quantos gabaritos diferentes são possíveis de 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada?

23. Verdadeiro ou falso Se a e b são números inteiros positivos tais que

$a + b = n$, então $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$. Justifique sua resposta.

24. Verdadeiro ou falso Se a, b e n são números inteiros, tais que $a < b < n$, então $\binom{n}{a} < \binom{n}{b}$. Justifique sua resposta.

25. Uma opção de refeição é composta de uma entrada, duas saladas e uma sobremesa. Se existem disponíveis quatro entradas, seis saladas e seis sobremesas, então de quantas maneiras diferentes podemos compor uma refeição?

(a) 16

(b) 25

(c) 144

(d) 360

(e) 720

26. Supondo que r e n são números inteiros positivos com $r < n$, qual dos seguintes números *não* é igual a 1?

(a) $(n - n)!$

(b) ${}_nP_n$

(c) ${}_nC_n$

(d) $\binom{n}{n}$

(e) $\binom{n}{r} \div \binom{n}{n-r}$

Nos exercícios 27 a 36, use a propriedade distributiva para expandir o binômio.

27. $(x + y)^2$

28. $(a + b)^2$

29. $(5x - y)^2$

30. $(a - 3b)^2$

31. $(3s + 2t)^2$

32. $(3p - 4q)^2$

33. $(u + v)^3$

34. $(b - c)^3$

35. $(2x - 3y)^3$

36. $(4m + 3n)^3$

Nos exercícios 37 a 44, expanda o binômio usando o triângulo de Pascal para encontrar os coeficientes.

37. $(a + b)^4$

38. $(a + b)^6$

39. $(x + y)^7$

40. $(x + y)^{10}$

41. $(x + y)^3$

42. $(x + y)^5$

43. $(p + q)^8$

44. $(p + q)^9$

Nos exercícios 45 a 48, desenvolva a expressão pela definição.

45. $\binom{9}{2}$

46. $\binom{15}{11}$

47. $\binom{166}{166}$

48. $\binom{166}{0}$

Nos exercícios 49 a 52, encontre o coeficiente do termo dado na expansão binomial.

49. termo $x^{11}y^3$, $(x + y)^{14}$

50. termo x^5y^8, $(x + y)^{13}$

51. termo x^4, $(x - 2)^{12}$

52. termo x^7, $(x - 3)^{11}$

Nos exercícios 53 a 56, use o teorema binomial para encontrar a expansão polinomial para a função:

53. $f(x) = (x - 2)^5$

54. $g(x) = (x + 3)^6$

55. $h(x) = (2x - 1)^7$

56. $f(x) = (3x + 4)^5$

Nos exercícios 57 a 62 use o teorema binomial para expandir cada expressão.

57. $(2x + y)^4$

58. $(2y - 3x)^5$

59. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6$

60. $(\sqrt{x} + \sqrt{3})^4$

61. $(x^{-2} + 3)^5$

62. $(a - b^{-3})^7$

63. Prove que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ para todos os inteiros $n \geq 1$.

64. Prove que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ para todos os inteiros $n \geq r \geq 0$.

65. Use a fórmula $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ para provar que $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

66. Encontre um contra-exemplo para mostrar que cada resultado a seguir é *falso*.

(a) $(n + m)! = n! + m!$

(b) $(nm)! = n!m!$

67. Prove que $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$ para todos os inteiros $n \geq 2$.

68. Prove que $\binom{n}{n-2} + \binom{n+1}{n-1} = n^2$ para todos os inteiros $n \geq 2$.

69. Verdadeiro ou falso Os coeficientes na expansão polinomial de $(x - y)^{50}$ alternam de sinal. Justifique sua resposta.

70. Verdadeiro ou falso A soma de qualquer linha do triângulo de Pascal é um número par e inteiro. Justifique sua resposta.

71. Múltipla escolha Qual é o coeficiente de x^4 na expansão de $(2x + 1)^8$?

(a) 16

(b) 256

(c) 1.120

(d) 1.680

(e) 26.680

72. Múltipla escolha Qual dos seguintes números *não* aparece na linha 10 do triângulo de Pascal?

(a) 1

(b) 5

(c) 10

(d) 120

(e) 252

73. Múltipla escolha A *soma* dos coeficientes de $(3x - 2y)^{10}$ é

(a) 1

(b) 1.024

(c) 58.025

(d) 59.049

(e) 9.765.625

74. Múltipla escolha $(x + y)^3 + (x - y)^3 =$

(a) 0

(b) $2x^3$

(c) $2x^3 - 2y^3$

(d) $2x^3 + 6xy^2$

(e) $6x^2y + 2y^3$

Apêndice C

Noções de trigonometria e funções trigonométricas

Objetivos de aprendizagem

- Graus e radianos.
- Comprimento de arco.
- Algumas medidas trigonométricas.
- O círculo trigonométrico.
- Algumas funções trigonométricas.

Os ângulos são os elementos do domínio das funções trigonométricas. Daremos as noções essenciais para possíveis aplicações.

Graus e radianos

O **grau** é representado pelo símbolo "°" e é o ângulo cuja medida é igual a 1/180 de um ângulo raso. O **radiano** é um ângulo central quando um arco de comprimento r tem a mesma medida do raio do círculo, no qual está inserido.

EXEMPLO 1 Graus e radianos

(a) Quantos radianos existem em 90 graus?

(b) Quantos graus existem em $\pi/3$ radianos?

(c) Encontrar o comprimento de um arco interceptado por um ângulo central de 1/2 radiano em um círculo com raio de 5 polegadas.

(d) Encontre a medida em radianos de um ângulo central que intercepta um arco de comprimento s em um círculo de raio r.

SOLUÇÃO

(a) Desde que π radianos e 180° representam o mesmo ângulo, podemos usar o fator de conversão (π radianos)/(180°) = 1 para converter graus em radianos.

$$90°\left(\frac{\pi \text{ radianos}}{180°}\right) = \frac{90\pi}{180} \text{ radianos} = \frac{\pi}{2} \text{ radianos}$$

(b) Nesse caso, usamos o fator de conversão (180°)/(π radianos) = 1 para converter radianos em graus:

$$\left(\frac{\pi}{3} \text{ radianos}\right)\left(\frac{180°}{\pi \text{ radianos}}\right) = \frac{180°}{3} = 60°$$

(c) Um ângulo central de 1 radiano intercepta um arco de comprimento de um raio, que é de 5 polegadas. Portanto, o ângulo central de 1/2 radiano intercepta um arco de comprimento de 1/2 raio, isto é, de 2,5 polegadas.

(d) Podemos resolver esse problema com raios:

$$\frac{x \text{ radianos}}{s \text{ unidades}} = \frac{1 \text{ radiano}}{r \text{ unidades}}$$

$$xr = s$$

$$x = \frac{s}{r}$$

Conversão de grau-radiano

Para converter radianos em graus, multiplicamos por $\dfrac{180°}{\pi \text{ radianos}}$.

Para converter graus em radianos, multiplicamos por $\dfrac{\pi \text{ radianos}}{180°}$.

Comprimento de arco

Como um ângulo central de um radiano sempre intercepta um arco de comprimento um radiano, é verdade que um ângulo central de θ radianos em um círculo de raio r intercepta um arco de comprimento θr.

Fórmula do comprimento do arco (medida em radianos)

Se θ é um ângulo central em um círculo de raio r e se **θ é medido em radianos**, então o comprimento s do arco interceptado é dado por

$$s = r\theta$$

Fórmula do comprimento do arco (medida em graus)

Se θ é um ângulo central em um círculo de raio r e se **θ é medido em graus**, então o comprimento s do arco interceptado é dado por

$$s = \frac{\pi r \theta}{180}$$

EXEMPLO 2 Perímetro de uma fatia de pizza

Encontre o perímetro de uma fatia de pizza de ângulo central igual a 60°, sendo que a pizza tem raio de 7 polegadas.

SOLUÇÃO

O perímetro é 7 polegadas + 7 polegadas + s polegadas (como se vê na Figura C.1), em que s é o comprimento do arco da pizza. Pela fórmula de comprimento do arco:

$$s = \frac{\pi(7)(60)}{180} = \frac{7\pi}{3} \cong 7{,}3$$

O perímetro é de aproximadamente 21 polegadas.

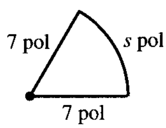


Figura C.1 O pedaço de pizza do exemplo.

Algumas medidas trigonométricas

Seja o triângulo (retângulo, pois a medida entre os catetos é de 90°) determinado pelos vértices ABC, como na Figura C.2.

$$\textbf{seno}\ (\theta) = \text{sen}\ \theta = \frac{\text{medida do lado (ou cateto) oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\textbf{cosseno}\ (\theta) = \cos\theta = \frac{\text{medida do lado (ou cateto) adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\textbf{tangente}\ (\theta) = \text{tg}\ \theta = \frac{\text{medida do lado (ou cateto) oposto}}{\text{medida do lado (ou cateto) adjacente}}$$

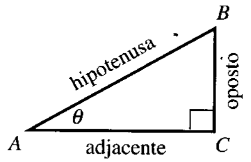


Figura C.2 Triângulo de vértices *ABC* e medidas trigonométricas do ângulo θ.

EXEMPLO 3 Cálculo de medidas trigonométricas para ângulo de 45°

Encontre os valores do seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°.

SOLUÇÃO

Suponha um triângulo com dois dos três lados iguais (*triângulo isósceles*) com dois ângulos internos de 45° e um com 90°.

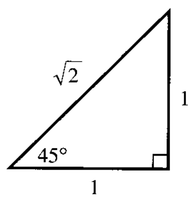


Figura C.3 Triângulo retângulo isósceles.

Aplicando as definições, temos:

$$\text{sen}\ 45^\circ = \frac{\text{medida do lado (ou cateto) oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{medida do lado (ou cateto) adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\ 45^\circ = \frac{\text{medida do lado (ou cateto) oposto}}{\text{medida do lado (ou cateto) adjacente}} = \frac{1}{1} = 1$$

EXEMPLO 4 Cálculo de medidas trigonométricas para ângulo de 30°

Encontre os valores do seno, do cosseno e da tangente do ângulo de 30°.

SOLUÇÃO

Suponha um triângulo retângulo com ângulos internos com valores de 30°, 60° e 90°.

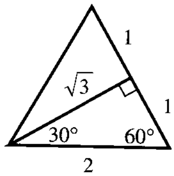


Figura C.4 Triângulo obtido de um triângulo eqüilátero de lado 2.

Aplicando as definições, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\text{medida do lado (ou cateto) oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\text{medida do lado (ou cateto) adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

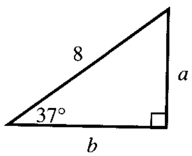
$$\text{tg } 30° = \frac{\text{medida do lado (ou cateto) oposto}}{\text{medida do lado (ou cateto) adjacente}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

EXEMPLO 5 Aplicação

Um triângulo retângulo com hipotenusa de medida 8 possui um ângulo interno de 37°. Encontre as medidas dos outros dois ângulos e dos outros dois lados.

SOLUÇÃO

Desde que o triângulo é retângulo, então um dos outros dois ângulos é de 90° e o outro é de $180° - 90° - 37° = 53°$.



$$\text{sen } 37° = \frac{a}{8} \qquad \text{e} \qquad \cos 37° = \frac{b}{8}$$

$$a = 8 \text{ sen } 37° \qquad b = 8 \cos 37°$$

$$a \cong 4{,}81 \qquad b \cong 6{,}39$$

DEFINIÇÃO Funções trigonométricas de qualquer ângulo

Seja θ um ângulo qualquer na posição padrão (determinado do eixo horizontal x no sentido anti-horário) e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre o lado que determina a abertura do ângulo (que não seja a origem). Se r denota a distância de $P(x, y)$ até a origem, isto é, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, então

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \text{tg } \theta = \frac{y}{x} \ (x \neq 0)$$

EXEMPLO 6 Cálculo do seno, do cosseno e da tangente para 315°

Calcule os valores do seno, do cosseno e da tangente do ângulo de 315°.

SOLUÇÃO

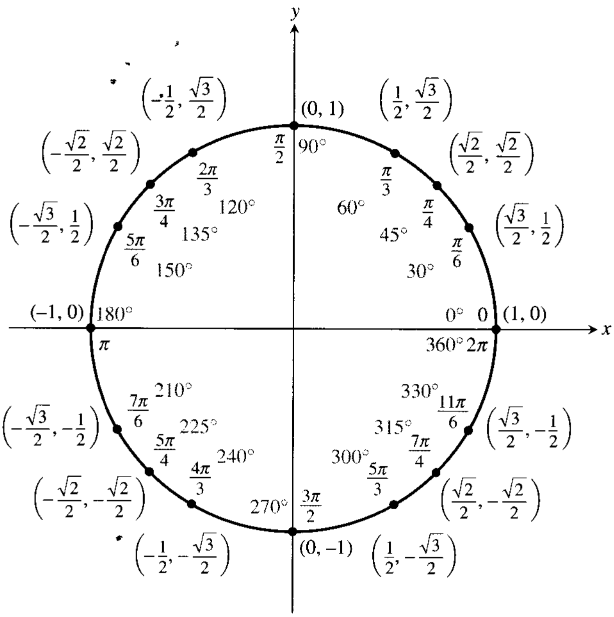
Supondo que o ângulo está na sua posição padrão, um par ordenado que está no segmento que o limita é $(1, -1)$. Logo, se $x = 1$ e $y = -1$, então $r = \sqrt{2}$ é:

$$\text{sen } 315° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{tg } 315° = \frac{-1}{1} = -1$$

Aqui utilizamos o fato de que, se um triângulo retângulo tem medida dos catetos dados por a e b, e a medida da hipotenusa igual a c, então é verdade que $a^2 + b^2 = c^2$ (conhecido como Teorema de Pitágoras).

O círculo trigonométrico

Temos a seguir o círculo de raio 1; o eixo horizontal x fornece a medida do seno do ângulo formado partindo do 0 no sentido anti-horário, e o eixo vertical y fornece a medida do cosseno do mesmo ângulo.



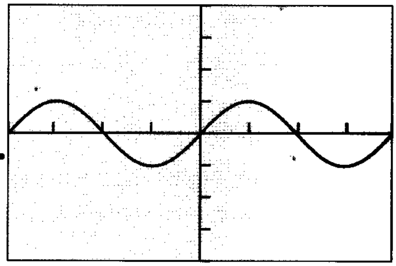
É verdade que: $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1^2 = 1$ (conseqüência do Teorema de Pitágoras).

Algumas funções trigonométricas

A função seno (Figura C.5):

$f(x) = \text{sen } x$
Domínio: conjunto de todos os números reais.
Imagem: $[-1, 1]$.

A função é contínua.
É alternadamente crescente e decrescente. É periódica de período 2π (o comportamento da função é repetitivo para cada intervalo de comprimento 2π no eixo horizontal).
É simétrica com relação à origem (é uma função ímpar).
É limitada.
O máximo absoluto é 1.
O mínimo absoluto é -1.
Não tem assíntotas horizontais.
Não tem assíntotas verticais.
Comportamento nos extremos do domínio: $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ e $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} x$ não existem. Os valores da função oscilam de -1 até 1.

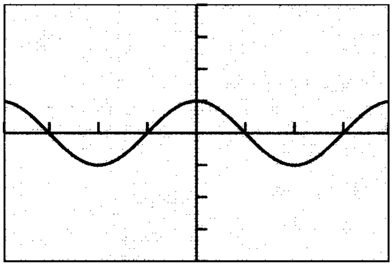


$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

Figura C.5

A função cosseno (Figura C.6):

$f(x) = \cos x$
Domínio: conjunto de todos os números reais.
Imagem: $[-1, 1]$.
A função é contínua.
É alternadamente crescente e decrescente. É periódica de período 2π (o comportamento da função é repetitivo para cada intervalo de comprimento 2π no eixo horizontal).
É simétrica com relação ao eixo vertical y (é uma função par).
É limitada.
O máximo absoluto é 1.
O mínimo absoluto é -1.
Não tem assíntotas horizontais.
Não tem assíntotas verticais.
Comportamento nos extremos do domínio: $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ e $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ não existem. Os valores da função oscilam de -1 até 1.



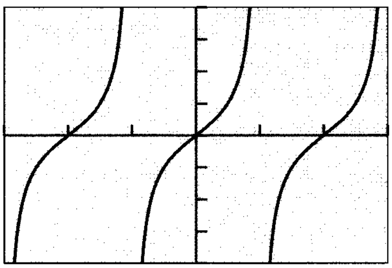
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

Figura C.6

A função tangente (Figura C.7):

$$f(x) = \text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

Domínio: conjunto dos números reais sem os múltiplos ímpares de $\pi/2$.
Imagem: conjunto de todos os números reais.
A função é contínua sobre o seu domínio.
É crescente em cada intervalo do domínio.
É simétrica com relação à origem (é uma função ímpar).
Não é limitada superior nem inferiormente.
Não tem extremos locais.
Não tem assíntotas horizontais.
As assíntotas verticais são da forma $x = k \cdot (\pi/2)$ para todo k ímpar.
Comportamento nos extremos do domínio: $\lim_{x\to+\infty} \text{tg}\, x$ e $\lim_{x\to-\infty} \text{tg}\, x$ não existem. Os valores da função oscilam no intervalo $]-\infty, +\infty[$.



$[-3\pi/2, 3\pi/2]$ por $[-4, 4]$

Figura C.7

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 8, converta de radianos para graus.

1. $\pi/6$

2. $\pi/4$

3. $\pi/10$

4. $3\pi/5$

5. $7\pi/9$

6. $13\pi/20$

7. 2

8. 1,3

Nos exercícios 9 a 12, use as fórmulas para cálculo do comprimento do arco para completar com as informações que estão faltando.

[s	r	θ]
9. ?	1 cm	70 rad
10. 2,5 cm	?	$\pi/3$ rad

11.	3 m	1 m	?
12.	40 cm	?	20°

13. Múltipla escolha Qual é a medida em radianos de um ângulo de x graus?

(a) πx **(b)** $x/180$

(c) $\pi x/180$ **(d)** $180x/\pi$

(e) $180/x\pi$

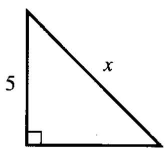
14. Múltipla escolha Se o perímetro de um setor é 4 vezes seu raio, então a medida em radianos do ângulo central do setor é

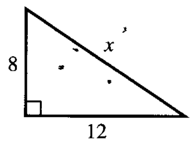
(a) 2 **(b)** 4

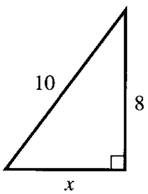
(c) $2/\pi$ **(d)** $4/\pi$

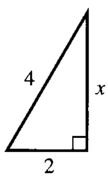
(e) impossível determinar sem saber o raio.

O Teorema de Pitágoras diz que, em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Entende-se hipotenusa como o lado oposto ao ângulo de 90°. Nos exercícios 15 a 18, use esse teorema para encontrar x.

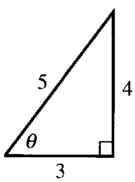
15.


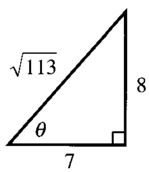
16.


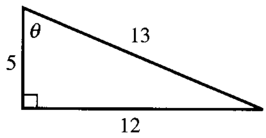
17.


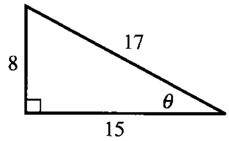
18.


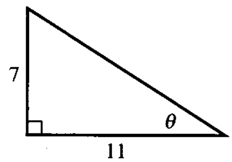
Nos exercícios 19 a 26, encontre o valor do seno, do cosseno e da tangente do ângulo θ.

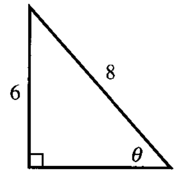
19.


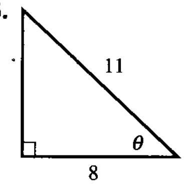
20.


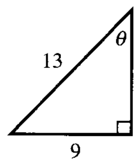
21.


22.


23.


24.


25.


26.


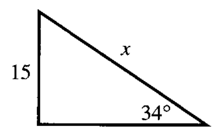
Nos exercícios 27 a 32, encontre as outras medidas dos ângulos que faltam (sabemos calcular seno, cosseno e tangente).

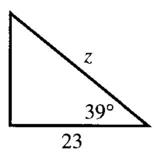
27. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{7}$ **28.** $\text{sen}\,\theta = \dfrac{2}{3}$

29. $\cos\theta = \dfrac{5}{11}$ **30.** $\cos\theta = \dfrac{5}{8}$

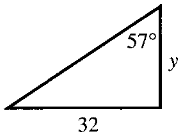
31. $\text{tg}\,\theta = \dfrac{5}{9}$ **32.** $\text{tg}\,\theta = \dfrac{12}{13}$

Nos exercícios 33 a 38, encontre o valor da variável indicada.

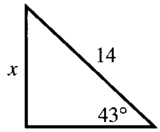
33.


34.


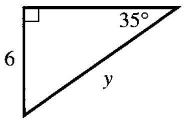
35.



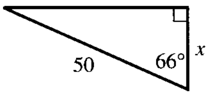
36.



37.



38.



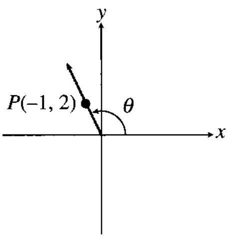
Nos exercícios 39 a 42, dê o valor do ângulo θ em graus.

39. $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ **40.** $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$

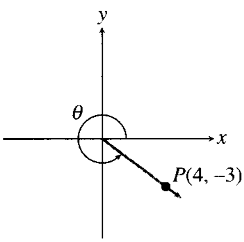
41. $\theta = \dfrac{25\pi}{4}$ **42.** $\theta = \dfrac{16\pi}{3}$

Nos exercícios 43 a 46, calcule o seno, o cosseno e a tangente do ângulo.

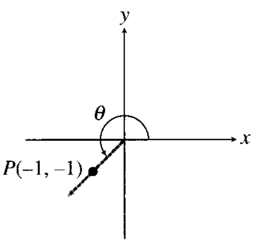
43.



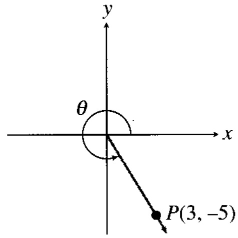
44.



45.



46.



Nos exercícios 47 a 52, o ponto P está na reta que determina a abertura do ângulo. Encontre o seno, o cosseno e a tangente do ângulo θ.

47. $P(3,4)$ **48.** $P(-4,-6)$

49. $P(0,5)$ **50.** $P(-3,0)$

51. $P(5,-2)$ **52.** $P(22,-22)$

Nos exercícios 53 a 58, encontre sen θ, cos θ e tg θ para o ângulo dado.

53. $-450°$ **54.** $-270°$

55. 7π **56.** $\dfrac{11\pi}{2}$

57. $-\dfrac{7\pi}{2}$ **58.** -4π

59. Encontre cos θ se sen $\theta = \dfrac{1}{4}$ e tg $\theta < 0$.

60. Encontre tg θ se sen $\theta = -\dfrac{2}{5}$ e cos $\theta > 0$.

61. Verdadeiro ou falso Se θ é um ângulo na posição-padrão determinado pelo ponto $(8,-6)$, então sen $\theta = -0{,}6$. Justifique sua resposta.

62. Múltipla escolha

Se cos $\theta = -\dfrac{5}{13}$ e tg $\theta > 0$, então sen $\theta =$

(a) $-\dfrac{12}{13}$ **(b)** $-\dfrac{5}{12}$ **(c)** $\dfrac{5}{13}$

(d) $\dfrac{5}{12}$ **(e)** $\dfrac{12}{13}$

Nos exercícios 63 a 68, identifique os valores máximos e mínimos e as raízes da função no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

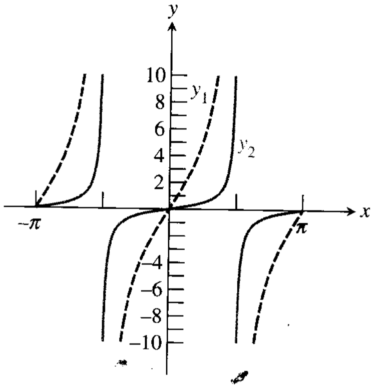
63. $y = 2 \text{ sen } x$ **64.** $y = 3\cos\dfrac{x}{2}$

65. $y = \cos 2x$ **66.** $y = \dfrac{1}{2}\text{ sen } x$

67. $y = -\cos 2x$ **68.** $y = -2 \text{ sen } x$

No Exercício 69, identifique o gráfico de cada função.

69. Gráficos de dois períodos de 0,5 tg x e 5 tg x são mostrados.



No Exercício 70, analise a função quanto ao domínio, imagem, continuidade, comportamento crescente ou decrescente, se é limitada, se é simétrica, analise extremos, assíntotas e comportamento nos extremos do domínio.

70. $f(x) = \text{tg}\,\dfrac{x}{2}$

Apêndice **D**

Secções cônicas

Objetivos de aprendizagem

- Secções cônicas.
- Geometria de uma parábola.
- Translações de parábolas.
- Geometria de uma elipse.
- Translações de elipses.
- Geometria de uma hipérbole.
- Translações de hipérboles.

Vale observar que secções cônicas regem percursos de objetos movendo em um campo gravitacional. Elipses são os caminhos de planetas e cometas ao redor do sol ou de luas ao redor dos planetas. As hipérboles são as cônicas menos conhecidas, mas são usadas em astronomia, ótica e navegação.

Secções cônicas

Imagine duas retas que não são perpendiculares interseccionando no ponto V. Se fixarmos uma das retas como um *eixo* e fizermos uma rotação com a outra ao redor desse eixo, então podemos obter um **cone circular reto** com **vértice V**, como ilustrado na Figura D.1. Note que V divide o cone em duas partes, chamadas **folhas**.

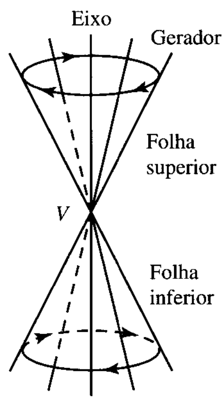


Figura D.1 Um cone circular reto (com duas folhas).

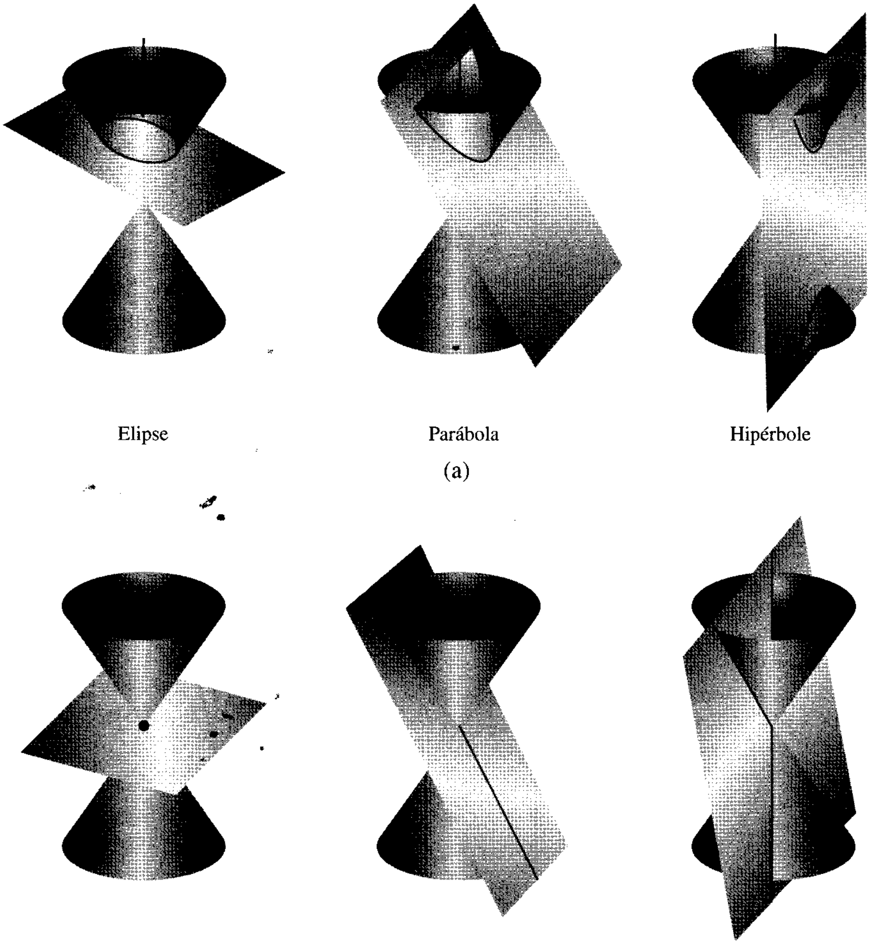
Uma **seccção cônica** (ou **cônica**) é a intersecção de um plano com um cone circular reto. As três secções cônicas básicas são a *parábola*, a *elipse* e a *hipérbole* (Figura D.2a).

Algumas secções cônicas atípicas, conhecidas como **secções cônicas degeneradas**, são mostradas na Figura D.2(b).

As secções cônicas podem ser definidas algebricamente como gráficos de **equações do segundo grau (quadráticas) em duas variáveis**, isto é, equações da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde A, B e C não são todos iguais a 0.



Elipse | Parábola | Hipérbole

(a)

Ponto: plano através da vértice do cone | Reta: o plano é tangente ao cone | Intersecionando com retas

(b)

Figura D.2 (a) Três tipos de secções cônicas e (b) três secções cônicas degeneradas.

Vale lembrar que a distância entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) no plano é dada por $\sqrt{(x - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Usaremos esse conceito durante este capítulo.

Geometria de uma parábola

Já estudamos que o gráfico de uma função do segundo grau (quadrática) é uma parábola de concavidade para cima ou para baixo. Vamos investigar as propriedades geométricas de parábolas.

DEFINIÇÃO Parábola

Uma **parábola** é o conjunto de todos os pontos em um plano que são eqüidistantes de uma reta fixa (a **diretriz**) e um ponto fixo (o **foco**) no plano (Figura D.3).

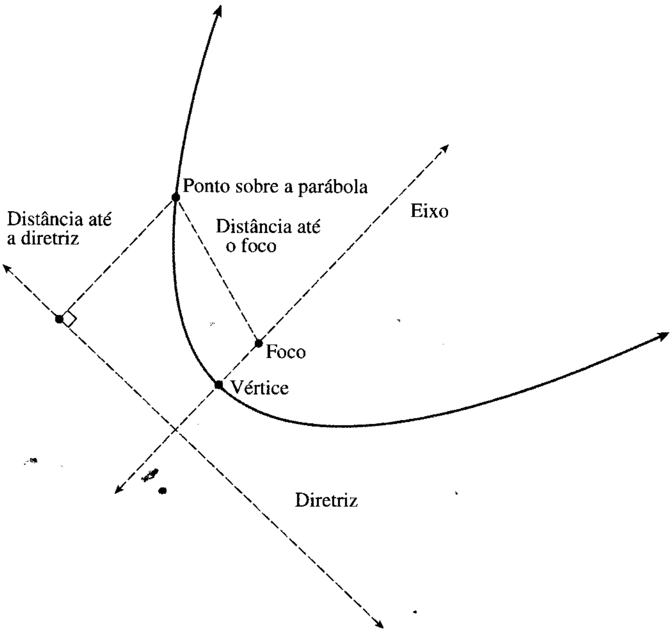


Figura D.3 Estrutura de uma parábola.

Podemos mostrar que uma equação para a parábola com foco $(0, p)$ e diretriz $y = -p$ é $x^2 = 4py$ (veja a Figura D.4).

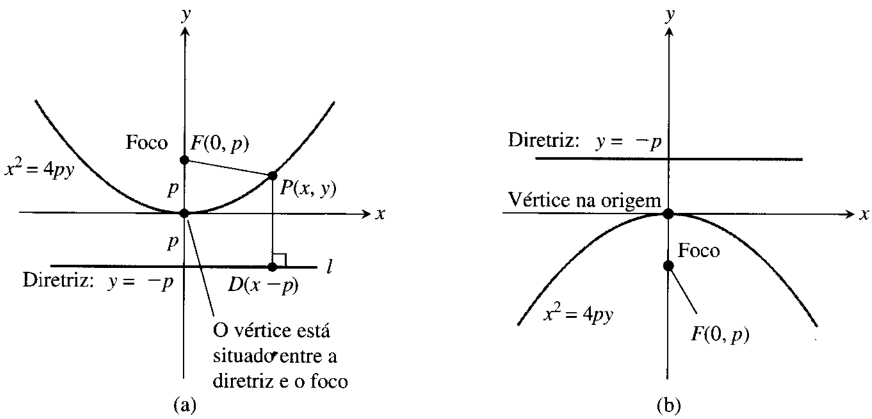


Figura D.4 Gráficos de $x^2 = 4py$ com (a) $p > 0$ e (b) $p < 0$.

Precisamos mostrar que o ponto $P(x, y)$, que é eqüidistante de $F(0, p)$ e da reta $y = -p$, satisfaz a equação $x^2 = 4py$, e também mostrar que um ponto que satisfaz $x^2 = 4py$ é eqüidistante de $F(0, p)$ e a reta $y = -p$.

Seja $P(x, y)$ um ponto eqüidistante de $F(0, p)$ e a reta $y = -p$. Note que

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \text{distância de } P(x, y) \text{ até } F(0, p) \text{ e}$$

$$\sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \text{distância de } P(x, y) \text{ até } y = -p$$

Igualando essas distâncias e extraindo a raiz quadrada:

$$(x - 0)^2 + (y - p)^2 = (x - x)^2 + (y - (-p))^2$$
$$x^2 + (y - p)^2 = 0 + (y + p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

Percorrendo os passos anteriores ao contrário, vemos que uma solução (x, y) de $x^2 = 4py$ é eqüidistante de $F(0, p)$ e a reta $y = -p$.

A equação $x^2 = 4py$ está na **forma padrão** da equação que descreve uma parábola de concavidade para cima ou para baixo com vértice na origem. Se $p > 0$, então a parábola tem concavidade para cima; se $p < 0$, então p tem concavidade para baixo. Uma forma algébrica alternativa de tal parábola é $y = ax^2$, onde $a = 1/(4p)$. Assim, o gráfico de $x^2 = 4py$ é também o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$.

Quando a equação de uma parábola de concavidade para cima ou para baixo é escrita como $x^2 = 4py$, então o valor p é interpretado como o **comprimento do foco** da parábola — a distância *direta* do vértice ao foco da parábola. O valor $|4p|$ é a **largura do foco** da parábola — o comprimento do segmento com extremos na parábola que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo.

Parábolas com concavidade para a direita ou para a esquerda são *relações inversas* de parábolas com concavidade para cima ou para baixo. Assim, equações de parábolas com vértice (0, 0) que se abrem para a direita ou para a esquerda têm a forma padrão $y^2 = 4px$. Se $p > 0$, então a parábola se abre para a direita, e se $p < 0$, então a parábola se abre para a esquerda (veja a Figura D.6).

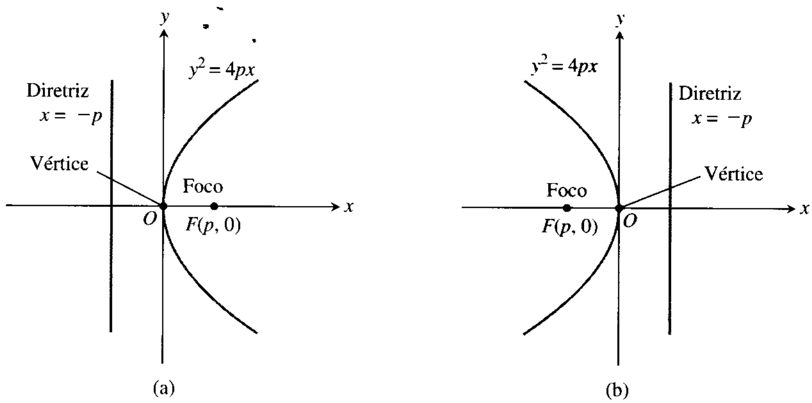


Figura D.5 Gráficos de $y^2 = 4px$ com (a) $p > 0$ e (b) $p < 0$.

Parábolas com vértice (0, 0)

• **Equação-padrão**	$x^2 = 4py$	$y^2 = 4px$
• **Concavidade**	para cima ou para baixo	para a direita ou para a esquerda
• **Foco**	$(0, p)$	$(p, 0)$
• **Diretriz**	$y = -p$	$x = -p$
• **Eixo**	eixo y	eixo x
• **Comprimento do foco**	p	p
• **Largura do foco**	$\|4p\|$	$\|4p\|$

EXEMPLO 1 Verificação do foco, a diretriz e a largura do foco

Encontre o foco, a diretriz e a largura do foco da parábola $y = -x^2/2$.

SOLUÇÃO

Multiplicando ambos os lados da equação por -2, temos a forma-padrão $x^2 = -2y$. O coeficiente de y é $4p = -2$ e $p = -1/2$. Assim, o foco é $(0, p) = (0, -1/2)$. Como $-p = -(-1/2) = 1/2$, então a diretriz é a reta $y = 1/2$. A largura do foco é $|4p| = |-2| = 2$.

EXEMPLO 2 Verificação da equação de uma parábola

Encontre uma equação na forma-padrão para a parábola cuja diretriz é a reta $x = 2$ e cujo foco é o ponto $(-2, 0)$.

SOLUÇÃO

Como a diretriz é $x = 2$ e o foco é $(-2, 0)$, então o comprimento do foco é $p = -2$ e a parábola tem concavidade para a esquerda. A equação da parábola na forma-padrão é $y^2 = 4px$, ou, mais especificamente, $y^2 = -8x$.

Translações de parábolas

Quando a parábola com a equação $x^2 = 4py$ ou $y^2 = 4px$ é transladada horizontalmente por h unidades e verticalmente por k unidades, então o vértice da parábola se move do ponto (0, 0) para o ponto (h, k) (veja a Figura D.6). Tal translação não muda o comprimento nem a largura do foco e o tipo de concavidade da parábola.

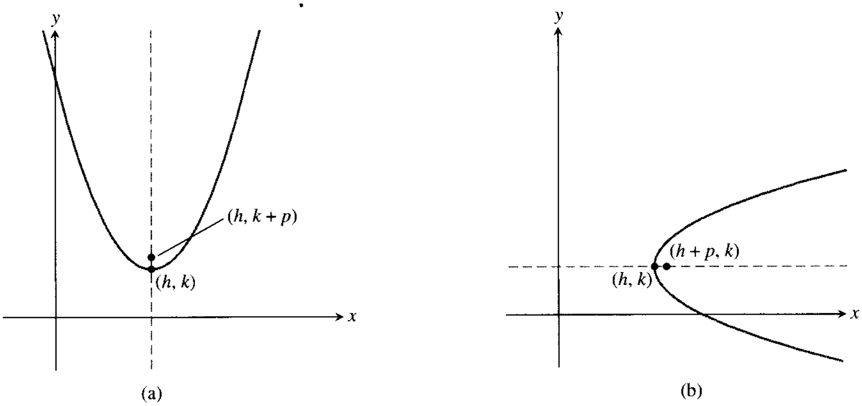


Figura D.6 Parábolas com vértice (h, k) e foco sobre (a) $x = h$ e (b) $y = k$.

Parábolas com vértice (h, k)

• **Equação-padrão**	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
• **Concavidade**	para cima ou para baixo	para a direita ou para a esquerda
• **Foco**	$(h, k+p)$	$(h+p, k)$
• **Diretriz**	$y = k - p$	$x = h - p$
• **Eixo**	$x = h$	$y = k$
• **Comprimento do foco**	p	p
• **Largura do foco**	$\|4p\|$	$\|4p\|$

EXEMPLO 3 Verificação da equação de uma parábola

Encontrar a forma-padrão da equação para a parábola com vértice (3, 4) e foco (5, 4).

SOLUÇÃO

O eixo da parábola é a reta passando pelo vértice (3, 4) e o foco (5, 4). Esta é a reta $y = 4$. Assim, a equação tem a forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Como o vértice $(h, k) = (3, 4)$, $h = 3$ e $k = 4$. A distância direta do vértice (3, 4) ao foco (5, 4) é $p = 5 - 3 = 2$; assim, $4p = 8$.

A equação é

$$(y - 4)^2 = 8(x - 3)$$

EXEMPLO 4 A forma-padrão de uma parábola e pontos importantes

Prove que o gráfico de $y^2 - 6x + 2y + 13 = 0$ é uma parábola e encontre o vértice, o foco e a diretriz.

SOLUÇÃO

Como esta equação é quadrática para a variável y, completamos o quadrado com relação a y para obter a forma-padrão:

$$\begin{aligned} y^2 - 6x + 2y + 13 &= 0 \\ y^2 + 2y &= 6x - 13 \\ y^2 + 2y + 1 &= 6x - 13 + 1 \\ (y + 1)^2 &= 6x - 12 \\ (y + 1)^2 &= 6(x - 2) \end{aligned}$$

Esta equação está na forma-padrão $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, onde $h = 2$, $k = -1$ e $p = 6/4 = 1{,}5$. Assim:

- o vértice (h, k) é $(2, -1)$;
- o foco $(h + p, k)$ é $(3{,}5; -1) = (7/2, -1)$;
- a diretriz $x = h - p$ é $x = 0{,}5$ ou $x = 1/2$.

Elipses

Geometria de uma elipse

Quando um plano intersecciona uma folha de um cilindro reto e forma uma curva fechada, a curva é uma elipse.

DEFINIÇÃO Elipse

Uma **elipse** é o conjunto de todos os pontos em um plano cujas distâncias de dois pontos fixados no plano têm uma soma com resultado constante. Os pontos fixados são os **focos** da elipse. A reta que passa pelos focos é o **eixo focal**. O ponto localizado no eixo focal que é o ponto médio entre os focos é o **centro**. Os pontos onde a elipse intersecciona seus eixos são os **vértices** da elipse (veja a Figura D.7).

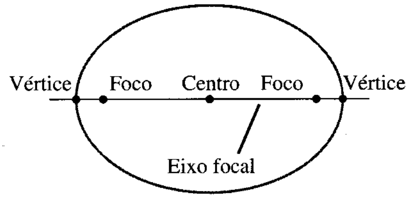


Figura D.7 Pontos sobre o eixo focal de uma elipse.

A Figura D.8 mostra um ponto $P(x, y)$ de uma elipse. Os pontos fixados F_1 e F_2 são os focos da elipse e as distâncias cuja soma é constante são d_1 e d_2.

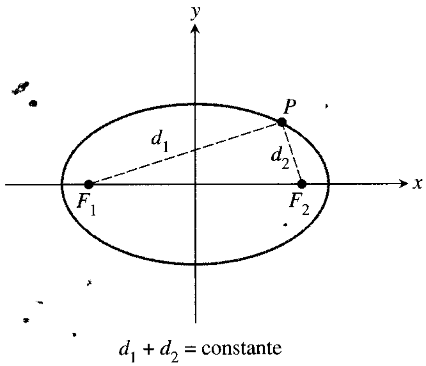


Figura D.8 Estrutura de uma elipse.

Podemos usar a definição para concluir uma equação para uma elipse. Para algumas constantes a e c com $a > c \geq 0$, seja $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ sendo os focos (veja a Figura D.9). Então, uma elipse é definida pelo conjunto de pontos $P(x, y)$ tais que

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

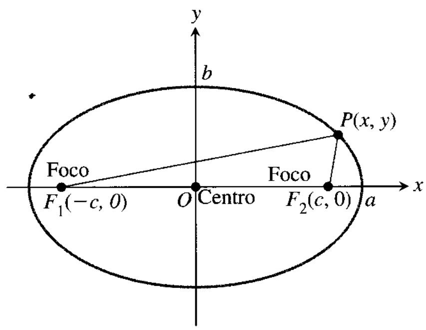


Figura D.9 A elipse definida por $PF_1 + PF_2 = 2a$, que é o gráfico de $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Usando a fórmula da distância, a equação é

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Considerando $b^2=a^2-c^2$, temos

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

que é usualmente escrita como

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Um ponto $P(x, y)$ satisfaz a última equação se e somente se o ponto pertence a uma elipse definida por $PF_1+PF_2=2a$, desde que $a>c\geq 0$ e $b^2=a^2-c^2$.

A equação $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ é a **forma-padrão** da equação de uma elipse centralizada na origem dos eixos e com o eixo horizontal x como o eixo focal. Uma elipse centralizada na origem com o eixo vertical y como seu eixo focal é a *inversa* de $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ e, assim, tem uma equação da forma

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

O comprimento do eixo maior é $2a$ e o do eixo menor é $2b$. O número a é o **semi-eixo maior da elipse** e b é o **semi-eixo menor da elipse**.

OBSERVAÇÃO

Um comentário sobre a palavra eixo: o eixo focal é uma reta; agora, semi-eixo menor ou semi-eixo maior são números.

Elipses com centro em (0, 0)

• **Equação-padrão**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$
• **Eixo focal**	eixo horizontal x	eixo vertical y
• **Focos**	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
• **Vértices**	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
• **Semi-eixo maior**	a	a
• **Semi-eixo menor**	b	b
• **Teorema de Pitágoras**	$a^2=b^2+c^2$	$a^2=b^2+c^2$

Veja a Figura D.10.

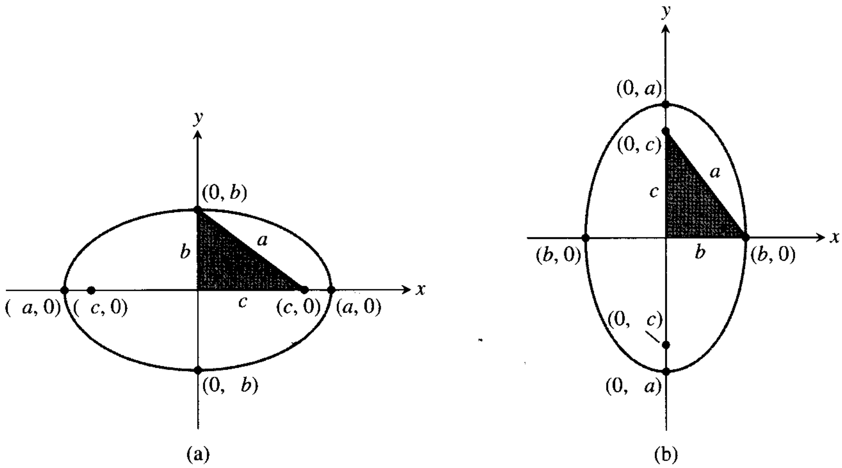


Figura D.10 Elipses centralizadas na origem com focos no (a) eixo x e no (b) eixo y.

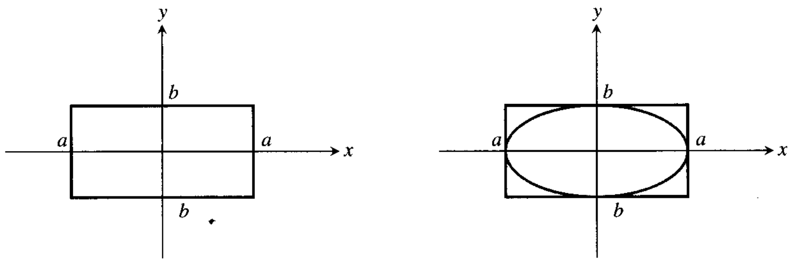
EXEMPLO 5 Verificação dos vértices e dos focos de uma elipse

Encontre os vértices e os focos da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

SOLUÇÃO

Dividindo ambos os lados da equação por 36, temos a forma-padrão $x^2/9 + y^2/4 = 1$. Como o maior número está no denominador de x^2, então o eixo focal é o eixo horizontal x. Assim, $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ e $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$. Assim, os vértices são $(\pm 3, 0)$ e os focos são $(\pm\sqrt{5}, 0)$.

Uma elipse centralizada na origem com seu eixo focal sobre um dos eixos, x ou y, é simétrica com relação à origem em ambos os eixos. Tanto é que ela pode ser esboçada desenhando um *retângulo como guia* centralizado na origem e com os lados paralelos aos eixos. Logo, a elipse pode ser desenhada dentro do retângulo, como temos a seguir.



Para esboçar a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$:

1. Encontre os valores $\pm a$ no eixo x e os valores $\pm b$ no eixo y e faça o desenho do retângulo.
2. Insira uma elipse que tangencia o retângulo nos pares $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$.

Translações de elipses

Quando uma elipse com centro (0, 0) é transladada horizontalmente por h unidades e verticalmente por k unidades, o seu centro move de (0, 0) para (h, k), como mostra a Figura D.11. Tal translação não modifica o comprimento dos eixos, tanto o maior como o menor.

Elipses com centro em (h, k)

• **Equação padrão**	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
• **Eixo focal**	$y = k$	$x = h$
• **Focos**	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
• **Vértices**	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
• **Semi-eixo maior**	a	a
• **Semi-eixo menor**	b	b
• **Teorema de Pitágoras**	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$

Veja a Figura D.11.

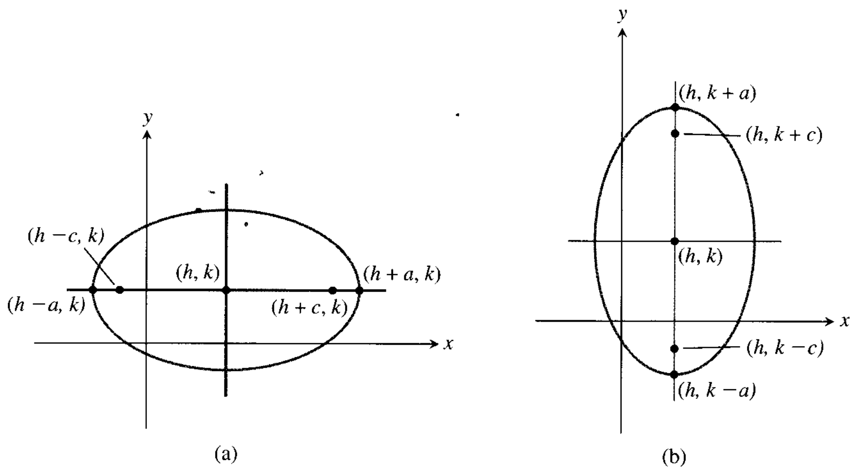


Figura D.11 Elipses com centro em (h, k) e focos sobre (a) $y = k$ e (b) $x = h$.

EXEMPLO 6 Verificação da equação de uma elipse

Encontre a forma-padrão da equação para a elipse cujo eixo maior tem os extremos com coordenadas $(-2, -1)$ e $(8, -1)$ e cujo eixo menor tem comprimento 8.

SOLUÇÃO

A Figura D.12 mostra os extremos do eixo maior, o eixo menor e o centro da elipse. A equação-padrão desta elipse tem a forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

onde o centro (h, k) está no par ordenado $(3, -1)$ do eixo maior. O semi-eixo maior e o semi-eixo menor são, respectivamente,

$$a = \frac{8-(-2)}{2} = 5 \quad \text{e} \quad b = \frac{8}{2} = 4$$

Assim, a equação que procuramos é

$$\frac{(x-3)^2}{5^2}+\frac{(y-(-1))^2}{4^2}=1$$
$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

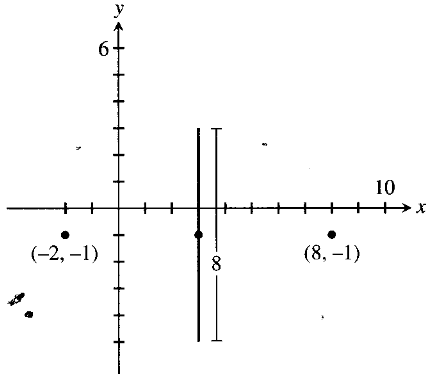


Figura D.12 Dados do Exemplo 6.

EXEMPLO 7 A forma-padrão de uma elipse e pontos importantes

Encontre o centro, os vértices e os focos da elipse

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{49}=1$$

SOLUÇÃO

A equação-padrão desta elipse tem a forma

$$\frac{(y-5)^2}{49}+\frac{(x+2)^2}{9}=1$$

O centro (h, k) é $(-2, 5)$. Como o semi-eixo maior $a=\sqrt{49}=7$, então os vértices $(h, k \pm a)$ são

$$(h, k+a)=(-2, 5+7)=(-2, 12) \text{ e}$$
$$(h, k-a)=(-2, 5-7)=(-2, -2)$$

Como

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{49-9}=\sqrt{40}$$

então os focos $(h, k \pm c)$ são $(-2, 5 \pm \sqrt{40})$, ou aproximadamente $(-2; 11,32)$ e $(-2; -1,32)$.

DEFINIÇÃO Excentricidade de uma elipse

A **excentricidade** de uma elipse é

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

onde a é o semi-eixo maior, b é o semi-eixo menor e c é a distância do centro da elipse até seus focos.

Essa medida verifica o grau de "achatamento" de uma elipse.

Hipérboles

Geometria de uma hipérbole

Quando um plano intersecciona as duas folhas de um cilindro reto, a intersecção é uma hipérbole.

DEFINIÇÃO Hipérbole

Uma **hipérbole** é o conjunto de todos os pontos em um plano cujas distâncias de dois pontos fixados no plano têm uma *diferença* com resultado constante. Os pontos fixados são os **focos** da hipérbole. A reta que passa pelos focos é o **eixo focal**. O ponto localizado no eixo focal, que é o ponto médio entre os focos, é o **centro**. Os pontos onde a hipérbole intersecciona seus eixo focal são os **vértices** da hipérbole (veja a Figura D.13).

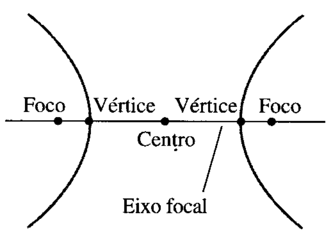


Figura D.13 Pontos sobre o eixo focal de uma hipérbole.

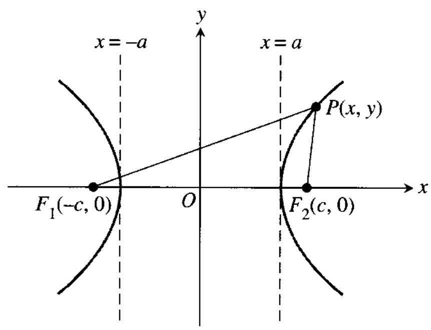


Figura D.14 Estrutura de uma hipérbole.

A Figura D.14 mostra uma hipérbole centralizada na origem com seu eixo focal sobre o eixo horizontal x. Os vértices estão em $(-a, 0)$ e $(a, 0)$, onde a é alguma constante positiva. Os pontos fixados $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ são os focos da hipérbole, com $c > a$.

Note que a hipérbole tem duas curvas separadas, que podemos chamar de *braços*. Para um ponto $P(x, y)$ sobre um dos lados da hipérbole, no caso, direito, temos $PF_1 - PF_2 = 2a$. Sobre o lado esquerdo, temos $PF_2 - PF_1 = 2a$. Combinando essas duas equações, temos

$$PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

Usando a fórmula da distância, a equação é

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$\mp a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

Fazendo $b^2=c^2-a^2$, temos

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

o qual é usualmente escrito como

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Como esses passos podem ser revertidos, um ponto $P(x, y)$ satisfaz essa última equação se e somente se o ponto pertence a uma hipérbole definida por $PF_1 - PF_2 = \pm 2a$; isso, desde que $c > a > 0$ e $b^2 = c^2 - a^2$.

A equação $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ é a **forma-padrão** da equação de uma hipérbole centralizada na origem com o eixo horizontal x como seu eixo focal. Uma hipérbole centralizada na origem com o eixo vertical y como seu eixo focal é a *relação inversa* de $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e tem uma equação da forma

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Como com outras cônicas, um segmento de reta com extremos na hipérbole é um **raio** da hipérbole. O raio pertencente ao eixo focal conectando os vértices é o **eixo transverso** da hipérbole. O comprimento do eixo transverso é $2a$. O segmento de reta de comprimento $2b$ que é perpendicular ao eixo focal e que tem o centro da hipérbole como seu ponto médio é o **eixo não transverso** da hipérbole. O número a é o **semi-eixo transverso** e b é o **semi-eixo não transverso**.

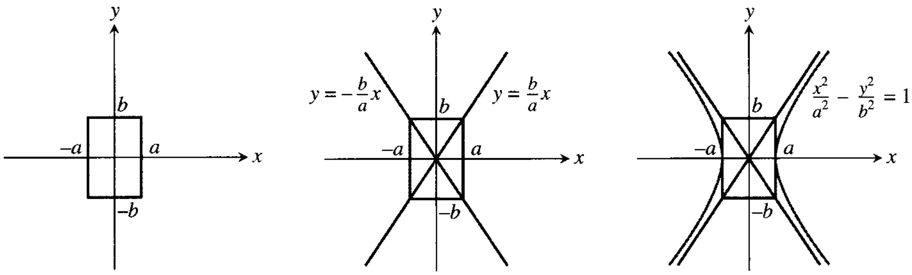
A hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

tem duas *assíntotas*. Essas assíntotas são retas inclinadas que podem ser encontradas trocando o valor 1 no lado direito por 0:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}_{\text{hipérbole}} \Rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0}_{\text{trocar 1 por 0}} \Rightarrow \underbrace{y=\pm\frac{b}{a}x}_{\text{assíntotas}}$$

Uma hipérbole centralizada na origem com seu eixo focal sendo um dos eixos coordenados é simétrica com relação à origem e aos dois eixos coordenados. Tal hipérbole pode ser esboçada desenhando um retângulo centralizado na origem com seus lados paralelos aos eixos coordenados, seguido pelos desenhos das assíntotas pelos seus cantos opostos e finalmente esboçando a hipérbole usando o retângulo central e as assíntotas como guias. Logo, a hipérbole pode ser desenhada dentro do retângulo, como temos a seguir.



Para esboçar a hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$:

1. Esboce os segmentos de reta em $x = \pm a$ e $y = \pm b$ e complete o retângulo que esses segmentos determinam.
2. Esboce as assíntotas fazendo as diagonais do retângulo.
3. Use o retângulo e as assíntotas para guiar seu desenho.

Hipérboles com centro em (0, 0)

• **Equação-padrão**	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$
• **Eixo focal**	eixo horizontal x	eixo vertical y
• **Focos**	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
• **Vértices**	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
• **Semi-eixo transverso**	a	a
• **Semi-eixo não transverso**	b	b
• **Teorema de Pitágoras**	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
• **Assíntotas**	$y = \pm \dfrac{b}{a}x$	$y = \pm \dfrac{a}{b}x$

Veja a Figura D.15.

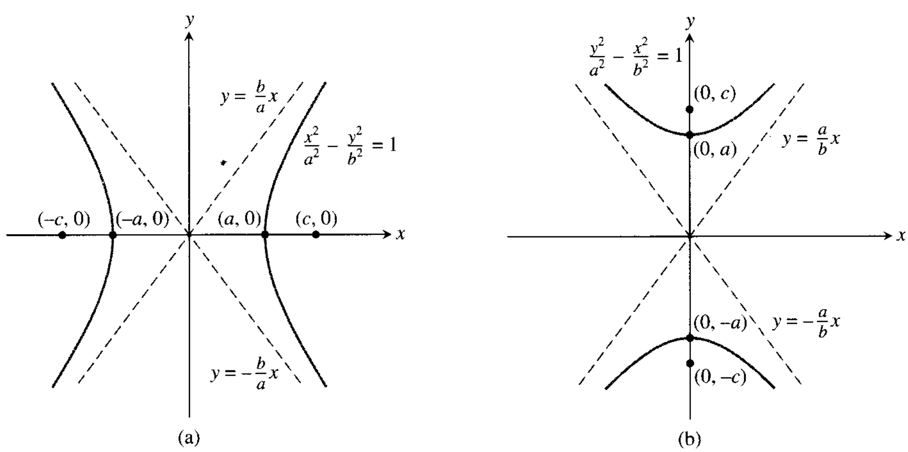


Figura D.15 Hipérboles centralizadas na origem com focos sobre o (a) eixo horizontal x e o (b) eixo vertical y.

EXEMPLO 8 Verificação dos vértices e dos focos de uma hipérbole

Encontre os vértices e os focos da hipérbole $4x^2 - 9y^2 = 36$.

SOLUÇÃO

Dividindo ambos os lados da equação por 36, temos a forma-padrão $x^2/9 - y^2/4 = 1$. Assim, $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, e $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$. Assim, os vértices são $(\pm 3, 0)$ e os focos são $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

Translações de hipérboles

Quando uma hipérbole com centro (0, 0) é transladada horizontalmente por h unidades e verticalmente por k unidades, o centro da hipérbole move de (0, 0) para (h, k), como mostrado na Figura D.16. Tal translação não modifica o comprimento dos eixos transverso e não transverso.

Hipérboles com centro em (h, k)

• **Equação-padrão**	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
• **Eixo focal**	eixo horizontal x	eixo vertical y
• **Focos**	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
• **Vértices**	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
• **Semi-eixo transverso**	a	a
• **Semi-eixo não transverso**	b	b
• **Teorema de Pitágoras**	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
• **Assíntotas**	$y = \pm\dfrac{b}{a}(x-h) + k$	$y = \pm\dfrac{a}{b}(x-h) + k$

Veja a Figura D.16.

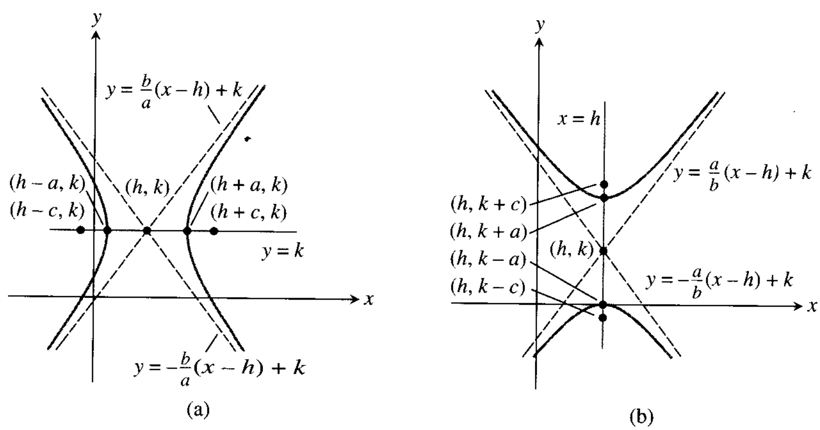


Figura D.16 Hipérboles com centro em (h, k) e focos sobre (a) $y = k$ e (b) $x = h$.

EXEMPLO 9 Verificação da equação de uma hipérbole

Encontre a forma-padrão da equação para a hipérbole cujo eixo transverso tem os extremos com coordenadas $(-2, -1)$ e $(8, -1)$ e cujo eixo não transverso tem comprimento 8.

SOLUÇÃO

A Figura D.17 mostra os extremos do eixo transverso, o eixo não transverso e o centro da hipérbole. A equação-padrão desta hipérbole tem a forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

onde o centro (h, k) está no par ordenado $(3, -1)$ do eixo transverso. O semi-eixo transverso e o semi-eixo não transverso são, respectivamente,

$$a = \frac{8-(-2)}{2} = 5 \quad \text{e} \quad b = \frac{8}{2} = 4$$

Assim, a equação que procuramos é

$$\frac{(x-3)^2}{5^2} - \frac{(y-(-1))^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1 \; .$$

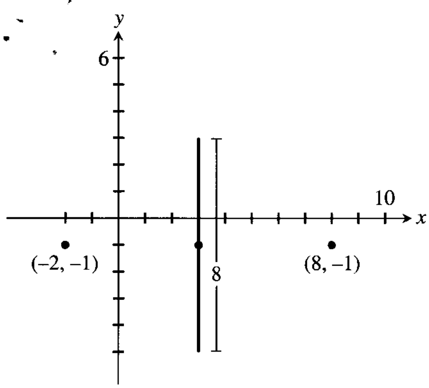


Figura D.17 Dados do Exemplo 9.

EXEMPLO 10 A forma-padrão de uma hipérbole e pontos importante

Encontrar o centro, os vértices e os focos da hipérbole

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{49} = 1$$

SOLUÇÃO

O centro (h, k) é $(-2, 5)$. Como o semi-eixo transverso $a = \sqrt{9} = 3$, então os vértices são

$$(h+a, k) = (-2+3, 5) = (1, 5) \quad \text{e}$$

$$(h-a, k) = (-2-3, 5) = (-5, 5)$$

Como $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$, então os focos $(h \pm c, k)$ são $(-2 \pm \sqrt{58}, 5)$, ou aproximadamente, $(5,62; 5)$ e $(-9,62; 5)$.

DEFINIÇÃO Excentricidade de uma hipérbole

A **excentricidade** de uma hipérbole é

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

onde a é o semi-eixo transverso, b é o semi-eixo não transverso e c é a distância do centro da hipérbole até seus focos.

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 a 6, encontre a distância entre os pontos dados.

1. $(-1, 3)$ e $(2, 5)$

2. $(2, -3)$ e (a, b)

3. $(-3, -2)$ e $(2, 4)$

4. $(-3, -4)$ e (a, b)

5. $(4, -3)$ e $(-7, -8)$

6. $(a, -3)$ e (b, c)

Nos exercícios 7 a 12, resolva para que y fique em função de x.

7. $2y^2 = 8x$

8. $3y^2 = 15x$

9. $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$

10. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

11. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

12. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

Nos exercícios 13 e 14, complete o quadrado para reescrever a equação na forma padrão.

13. $y = -x^2 + 2x - 7$

14. $y = 2x^2 + 6x - 5$

Nos exercícios 15 e 16, encontre o vértice e o eixo de simetria do gráfico de f.

15. $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$

16. $f(x) = -2x^2 + 12x + 1$

Nos exercícios 17 e 18, escreva uma equação para a função do segundo grau (ou quadrática) cujo gráfico tem os pontos a seguir:

17. Vértice $(-1, 3)$ e ponto $(0, 1)$

18. Vértice $(2, -5)$ e ponto $(5, 13)$

Nos exercícios 19 a 26, encontre o valor de x algebricamente.

19. $\sqrt{3x + 12} + \sqrt{3x - 8} = 10$

20. $\sqrt{6x + 12} - \sqrt{4x + 9} = 1$

21. $\sqrt{6x^2 + 12} + \sqrt{6x^2 + 1} = 11$

22. $\sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{3x^2 + 4} = 8$

23. $\sqrt{3x + 12} - \sqrt{3x - 8} = 10$

24. $\sqrt{4x + 12} - \sqrt{x + 8} = 1$

25. $\sqrt{6x^2 + 12} - \sqrt{6x^2 + 1} = 1$

26. $\sqrt{2x^2 + 12} - \sqrt{3x^2 + 4} = -8$

Nos exercícios 27 e 28, encontre as soluções exatas, completando o quadrado.

27. $2x^2 - 6x - 3 = 0$

28. $2x^2 + 4x - 5 = 0$

Nos exercícios 29 e 30, resolva o sistema de equações.

29. $c - a = 2$ e $c^2 - a^2 = 16a/3$

30. $c - a = 1$ e $c^2 - a^2 = 25a/12$

EXERCÍCIOS

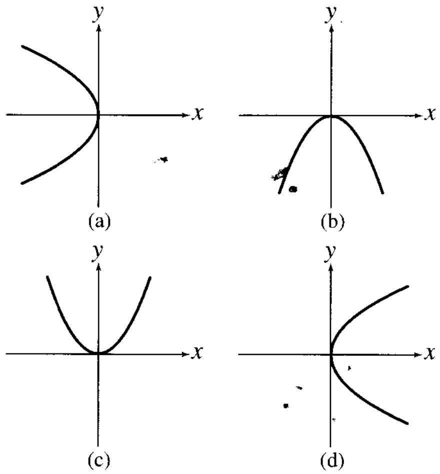
Nos exercícios 1 a 6, encontre vértice, foco, diretriz e largura focal da parábola.

1. $x^2 = 6y$ **2.** $y^2 = -8x$

3. $(y - 2)^2 = 4(x + 3)$ **4.** $(x + 4)^2 = -6(y + 1)$

5. $3x^2 = -4y$ **6.** $5y^2 = 16x$

Nos exercícios 7 a 10, relacione o gráfico com sua equação.



7. $x^2 = 3y$ **8.** $x^2 = -4y$

9. $y^2 = -5x$ **10.** $y^2 = 10x$

Nos exercícios 11 a 30, encontre uma equação na forma-padrão para a parábola que satisfaz as condições dadas.

11. Vértice $(0, 0)$, foco $(-3, 0)$

12. Vértice $(0, 0)$, foco $(0, 2)$

13. Vértice $(0, 0)$, diretriz $y = 4$

14. Vértice $(0, 0)$, diretriz $x = -2$

15. Foco $(0, 5)$, diretriz $y = -5$

16. Foco $(-4, 0)$, diretriz $x = 4$

17. Vértice $(0, 0)$, concavidade para a direita, largura focal $= 8$

18. Vértice $(0, 0)$, concavidade para a esquerda, largura focal $= 12$

19. Vértice $(0, 0)$, concavidade para baixo, largura focal $= 6$

20. Vértice $(0, 0)$, concavidade para cima, largura focal $= 3$

21. Foco $(-2, -4)$, vértice $(-4, -4)$

22. Foco $(-5, 3)$, vértice $(-5, 6)$

23. Foco $(3, 4)$, diretriz $y = 1$

24. Foco $(2, -3)$, diretriz $x = 5$

25. Vértice $(4, 3)$, diretriz $x = 6$

26. Vértice $(3, 5)$, diretriz $y = 7$

27. Vértice $(2, -1)$, concavidade para cima, largura focal $= 16$

28. Vértice $(-3, -3)$, concavidade para baixo, largura focal $= 20$

29. Vértice $(-1, -4)$, concavidade para a esquerda, largura focal $= 10$

30. Vértice $(2, 3)$, concavidade para a direita, largura focal $= 5$

Nos exercícios 31 a 36, esboce o gráfico de cada parábola.

31. $y^2 = -4x$ **32.** $x^2 = 8y$

33. $(x + 4)^2 = -12(y + 1)$ **34.** $(y + 2)^2 = -16(x + 3)$

35. $(y - 1)^2 = 8(x + 3)$ **36.** $(x - 5)^2 = 20(y + 2)$

Nos exercícios 37 a 48, esboce o gráfico de cada parábola, manualmente ou não.

37. $y = 4x^2$ **38.** $y = -\frac{1}{6}x^2$

39. $x = -8y^2$ **40.** $x = 2y^2$

41. $12(y + 1) = (x - 3)^2$ **42.** $6(y - 3) = (x + 1)^2$

43. $2 - y = 16(x - 3)^2$ **44.** $(x + 4)^2 = -6(y - 1)$

45. $(y + 3)^2 = 12(x - 2)$ **46.** $(y - 1)^2 = -4(x + 5)$

47. $(y + 2)^2 = -8(x + 1)$ **48.** $(y - 6)^2 = 16(x - 4)$

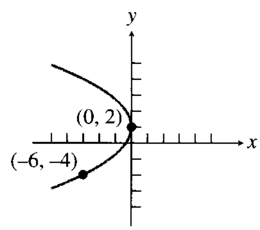
Nos exercícios 49 a 52, prove que o gráfico da equação é uma parábola e encontre vértice, foco e diretriz.

49. $x^2 + 2x - y + 3 = 0$ **50.** $3x^2 - 6x - 6y + 10 = 0$

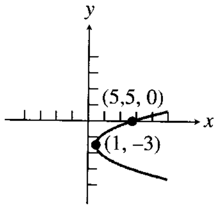
51. $y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$ **52.** $y^2 - 2y + 4x - 12 = 0$

Nos exercícios 53 a 56, escreva uma equação para a parábola.

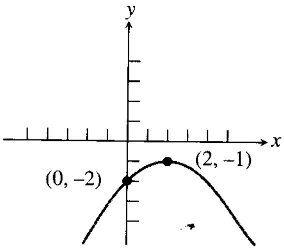
53.



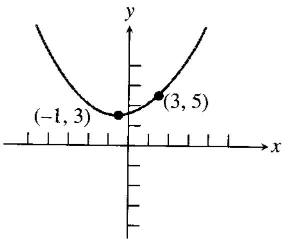
54.



55.



56.



57. Múltipla escolha Qual ponto todas as cônicas da forma $x^2 = 4py$ têm em comum?

(a) $(1, 1)$ **(b)** $(1, 0)$ **(c)** $(0, 1)$
(d) $(0, 0)$ **(e)** $(-1, -1)$

58. Múltipla escolha O foco de $y^2 = 12x$ é

(a) $(3, 3)$ **(b)** $(3, 0)$ **(c)** $(0, 3)$
(d) $(0, 0)$ **(e)** $(-3, -3)$

59. Múltipla escolha O vértice de $(y - 3)^2 = -8(x + 2)$ é

(a) $(3, -2)$ **(b)** $(-3, -2)$ **(c)** $(-3, 2)$
(d) $(-2, 3)$ **(e)** $(-2, -3)$

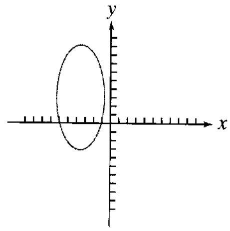
Nos exercícios 60 a 65, encontre os vértices e os focos da elipse.

60. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$ **61.** $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{21} = 1$

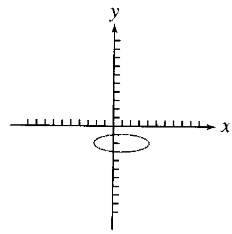
62. $\dfrac{y^2}{36} + \dfrac{x^2}{27} = 1$ **63.** $\dfrac{x^2}{11} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

64. $3x^2 + 4y^2 = 12$ **65.** $9x^2 + 4y^2 = 36$

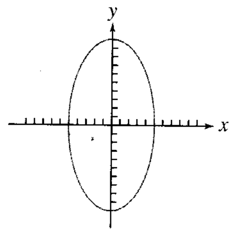
Nos exercícios 66 a 69, relacione o gráfico com sua equação.



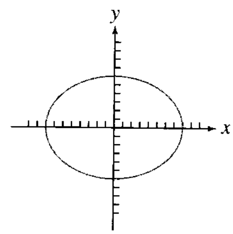
(a)



(b)



(c)



(d)

66. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **67.** $\dfrac{y^2}{36} + \dfrac{x^2}{9} = 1$

68. $\dfrac{(y-2)^2}{16} + \dfrac{(x+3)^2}{4} = 1$ **69.** $\dfrac{(x-1)^2}{11} + (y+2)^2 = 1$

Nos exercícios 70 a 75, esboce o gráfico da elipse.

70. $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ **71.** $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

72. $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$ **73.** $\dfrac{y^2}{49} + \dfrac{x^2}{25} = 1$

74. $\dfrac{(x+3)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ **75.** $\dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$

Nos exercícios 76 a 91, encontre uma equação na forma-padrão para a elipse que satisfaz as condições dadas.

76. O eixo maior tem comprimento 6 sobre o eixo y e o eixo menor tem comprimento 4.

77. O eixo maior tem comprimento 14 sobre o eixo x e o eixo menor tem comprimento 10.

78. Os focos são $(\pm 2, 0)$ e o eixo maior tem comprimento 10.

79. Os focos são $(0, \pm 3)$ e o eixo maior tem comprimento 10.

80. Os pontos nos extremos dos eixos são $(\pm 4, 0)$ e $(0, \pm 5)$.

81. Os pontos nos extremos dos eixos são $(\pm 7, 0)$ e $(0, \pm 4)$.

82. Os pontos nos extremos do eixo maior são $(0, \pm 6)$ e o eixo menor tem comprimento 8.

83. Os pontos nos extremos do eixo maior são $(\pm 5, 0)$ e o eixo menor tem comprimento 4.

84. Os pontos nos extremos do eixo menor são $(0, \pm 4)$ e o eixo maior tem comprimento 10.

85. Os pontos nos extremos do eixo menor são $(\pm 12, 0)$ e o eixo maior tem comprimento 26.

86. O eixo maior tem extremos $(1, -4)$ e $(1, 8)$ e o eixo menor tem comprimento 8.

87. O eixo maior tem extremos $(-2, -3)$ e $(-2, 7)$ e o eixo menor tem comprimento 4.

88. Os focos são $(1, -4)$ e $(5, -4)$; os extremos do eixo maior são $(0, -4)$ e $(6, -4)$.

89. Os focos são $(-2, 1)$ e $(-2, 5)$; os extremos do eixo maior são $(-2, -1)$ e $(-2, 7)$.

90. Os pontos nos extremos do eixo menor são $(3, -7)$ e $(3, 3)$; o eixo menor tem comprimento 6.

91. Os pontos nos extremos do eixo menor são $(-5, 2)$ e $(3, 2)$; o eixo menor tem comprimento 6.

Nos exercícios 92 a 95, encontre o centro, os vértices e os focos da elipse.

92. $\dfrac{(x+1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

93. $\dfrac{(x-3)^2}{11} + \dfrac{(y-5)^2}{7} = 1$

94. $\dfrac{(y+3)^2}{81} + \dfrac{(x-7)^2}{64} = 1$

95. $\dfrac{(y-1)^2}{25} + \dfrac{(x+2)^2}{16} = 1$

Nos exercícios 96 a 99, prove que o gráfico da equação é uma elipse e encontre os vértices, os focos e a excentricidade.

96. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$

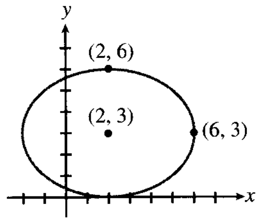
97. $3x^2 + 5y^2 - 12x + 30y + 42 = 0$

98. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$

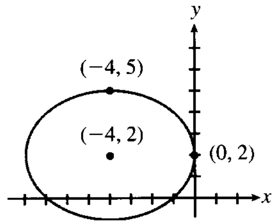
99. $4x^2 + y^2 - 32x + 16y + 124 = 0$

Nos exercícios 100 e 101, escreva uma equação para a elipse.

100.



101.



Nos exercícios 102 e 103, resolva o sistema de equações algebricamente e dê suporte a sua resposta graficamente.

102. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

$x^2 + y^2 = 4$

103. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$

$x - 3y = -3$

104. Verdadeiro ou falso A distância dos focos de uma elipse até o vértice mais próximo é $a(1+e)$, onde a é o semi-eixo maior e e é a excentricidade. Justifique sua resposta.

105. Verdadeiro ou falso A distância dos focos de uma elipse até os extremos do menor eixo é metade do comprimento do maior eixo. Justifique sua resposta.

106. Múltipla escolha Um foco de $x^2 + 4y^2 = 4$ é

(a) $(4, 0)$ **(b)** $(2, 0)$ **(c)** $(\sqrt{3}, 0)$
(d) $(\sqrt{2}, 0)$ **(e)** $(1, 0)$

107. Múltipla escolha O eixo focal de $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$ é

(a) $y = 1$ **(b)** $y = 2$ **(c)** $y = 3$
(d) $y = 4$ **(e)** $y = 5$

108. Múltipla escolha O centro de $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ é

(a) $(4, 2)$ **(b)** $(4, 3)$ **(c)** $(4, 4)$
(d) $(4, 5)$ **(e)** $(4, 6)$

109. Múltipla escolha O perímetro de um triângulo com um vértice sobre a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e os outros dois vértices sobre os focos da elipse deveria ser

(a) $a + b$ **(b)** $2a + 2b$ **(c)** $2a + 2c$

(d) $2b + 2c$ **(e)** $a + b + c$

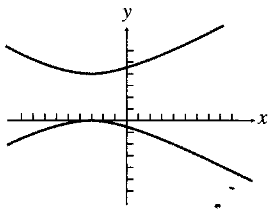
Nos exercícios 110 a 115, encontre os vértices e os focos da hipérbole.

110. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{7} = 1$ **111.** $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{21} = 1$

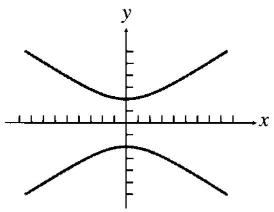
112. $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{13} = 1$ **113.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

114. $3x^2 - 4y^2 = 12$ **115.** $9x^2 - 4y^2 = 36$

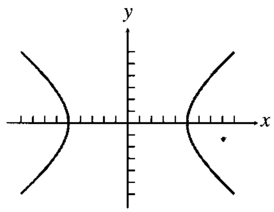
Nos exercícios 116 a 119, relacione o gráfico com sua equação.



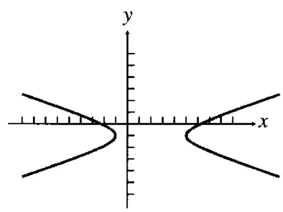
(a)



(b)



(c)



(d)

116. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

117. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

118. $\dfrac{(y-2)^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{16} = 1$

119. $\dfrac{(x-2)^2}{9} - (y+1)^2 = 1$

Nos exercícios 120 a 125, esboce o gráfico da hipérbole.

120. $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

121. $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{25} = 1$

122. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

123. $\dfrac{x^2}{169} - \dfrac{y^2}{144} = 1$

124. $\dfrac{(x+3)^2}{16} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

125. $\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$

Nos exercícios 126 a 141, encontre uma equação na forma padrão para a hipérbole que satisfaz as condições dadas.

126. Os focos são $(\pm 3, 0)$ e o eixo transverso tem comprimento 4.

127. Os focos são $(0, \pm 3)$ e o eixo transverso tem comprimento 4.

128. Os focos são $(0, \pm 15)$ e o eixo transverso tem comprimento 8.

129. Os focos são $(\pm 5, 0)$ e o eixo transverso tem comprimento 3.

130. Centro em $(0, 0)$, $a = 5$, $e = 2$, e o eixo focal é o horizontal.

131. Centro em $(0, 0)$, $a = 4$, $e = 3/2$ e o eixo focal é o vertical.

132. Centro em $(0, 0)$, $b = 5$, $e = 13/12$ e o eixo focal é o vertical.

133. Centro em $(0, 0)$, $c = 6$, $e = 2$ e o eixo focal é o horizontal.

134. Os pontos nos extremos do eixo transverso são $(2, 3)$ e $(2, -1)$, e o comprimento do eixo transverso é 6.

135. Os pontos nos extremos do eixo transverso são $(5, 3)$ e $(-7, 3)$, e o comprimento do eixo transverso é 10.

136. Os pontos nos extremos do eixo transverso são $(-1, 3)$ e $(5, 3)$, e a inclinação de uma assíntota é $4/3$.

137. Os pontos nos extremos do eixo transverso são $(-2, -2)$ e $(-2, 7)$, a inclinação de uma assíntota é $4/3$.

138. Os focos são $(-4, 2)$ e $(2, 2)$; os extremos do eixo transverso são $(-3, 2)$ e $(1, 2)$.

139. Os focos são $(-3, 11)$ e $(-3, 0)$; os extremos do eixo transverso são $(-3, -9)$ e $(-3, -2)$.

140. Centro em $(-3, 6)$, $a = 5$, $e = 2$ e o eixo focal é o vertical.

141. Centro em $(1, -4)$, $c = 6$, $e = 2$ e o eixo focal é o horizontal.

Nos exercícios 142 a 145, encontre o centro, os vértices e os focos da hipérbole.

142. $\dfrac{(x+1)^2}{144} - \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$

143. $\dfrac{(x+4)^2}{12} - \dfrac{(y+6)^2}{13} = 1$

144. $\dfrac{(y+3)^2}{64} - \dfrac{(x-2)^2}{81} = 1$

145. $\dfrac{(y-1)^2}{25} - \dfrac{(x+5)^2}{11} = 1$

Nos exercícios 146 a 149, esboce o gráfico da hipérbole e encontre seus vértices, focos e excentricidade.

146. $4(y-1)^2 - 9(x-3)^2 = 36$

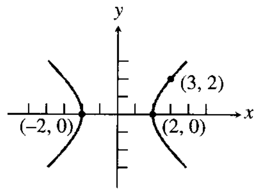
147. $4(x-2)^2 - 9(y+4)^2 = 1$

148. $9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0$

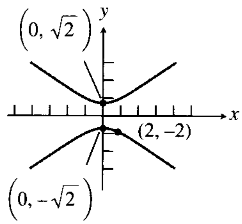
149. $25y^2 - 9x^2 - 50y - 54x - 281 = 0$

Nos exercícios 150 e 151, escreva uma equação para a hipérbole.

150.



151.



Nos exercícios 152 e 153, resolva o sistema de equações algebricamente e dê suporte à sua resposta graficamente.

152. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}y = -2$

153. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 9$

154. Verdadeiro ou falso A distância dos focos de uma hipérbole até o vértice mais próximo é $a(e - 1)$, onde a é o semi-eixo transverso e e é a excentricidade. Justifique sua resposta.

155. Verdadeiro ou falso O Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$ se aplica na hipérbole. Justifique sua resposta.

156. Múltipla escolha Um foco de $x^2 - 4y^2 = 4$ é

(a) $(4, 0)$ **(b)** $(\sqrt{5}, 0)$ **(c)** $(2, 0)$
(d) $(\sqrt{3}\ 0)$ **(e)** $(1, 0)$

157. Múltipla escolha O eixo focal de $\dfrac{(x+5)^2}{9} - \dfrac{(y-6)^2}{16} = 1$ é

(a) $y = 2$ **(b)** $y = 3$ **(c)** $y = 4$
(d) $y = 5$ **(e)** $y = 6$

158. Múltipla escolha O centro de $4x^2 - 12y^2 - 16x - 72y - 44 = 0$ é

(a) $(2, -2)$ **(b)** $(2, -3)$ **(c)** $(2, -4)$
(d) $(2, -5)$ **(e)** $(2, -6)$

159. Múltipla escolha As inclinações das assíntotas da hipérbole $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ são

(a) ± 1 **(b)** $\pm 3/2$ **(c)** $\pm\sqrt{3}/2$
(d) $\pm 2/3$ **(e)** $\pm 4/3$

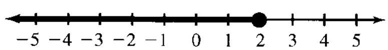
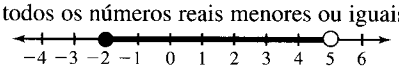
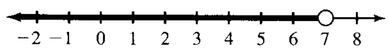
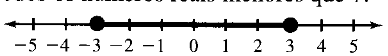
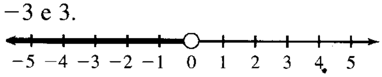
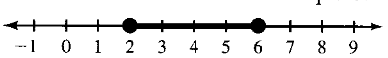
Respostas selecionadas

CAPÍTULO 1

Revisão rápida

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $\{-3, -2, -1\}$
4. $\{1, 2, 3, 4\}$
5. **(a)** 1187,75 **(b)** $-4{,}72$
6. **(a)** 20,65 **(b)** 0,10
7. $(-2)^3 - 2(-2) + 1 = -3$; $(1{,}5)^3 - 2(1{,}5) + 1 = 1{,}375$
8. $(-3)^2 + (-3)(2) + 2^2 = 7$

Exercícios

1. $-4{,}625$ (finitas)
2. $0{,}\overline{15}$ (infinitas)
3. $-2{,}1\overline{6}$ (infinitas)
4. $0{,}\overline{135}$ (infinitas)
5. 
todos os números reais menores ou iguais a 2.
6. 
todos os números reais entre -2 e 5, inclusive -2 e excluído 5.
7. 
todos os números reais menores que 7.
8. 
todos os números reais entre -3 e 3, incluindo -3 e 3.
9. 
todos os números reais menores que 0.
10. 
todos os números reais entre 2 e 6, incluindo 2 e 6.
11. $-1 \le x < 1$; todos os números entre -1 e 1, incluindo -1 e excluindo 1.
12. $-\infty < x \le 4$, ou $x \le 4$; todos os números menores ou iguais a 4.
13. $-\infty < x < 5$, ou $x < 5$; todos os números menores que 5.
14. $-2 \le x < 2$; todos os números entre -2 e 2, incluindo -2 e excluindo 2.
15. $-1 < x < 2$; todos os números entre -1 e 2, excluindo -1 e 2.
16. $5 \le x < \infty$, ou $x \ge 5$; todos os números maiores ou iguais a 5.
17. $]-3, +\infty[$; todos os números maiores que -3.
18. $]-7, -2[$; todos os números entre -7 e -2, excluindo -7 e -2.
19. $]-2, 1[$; todos os números entre -2 e 1, excluindo -2 e 1.
20. $[-1, +\infty[$; todos os números maiores ou iguais a -1.
21. $]-3, 4]$; todos os números entre -3 e 4, excluindo -3 e incluindo 4.
22. $]0, +\infty[$; todos os números maiores que 0.
23. Os números reais maiores que 4 e menores ou iguais a 9.
24. Os números reais maiores ou iguais a -1, ou os números reais que são pelo menos -1.
25. Os números reais maiores ou iguais a -3, ou os números reais que são pelo menos -3.
26. Os números reais entre -5 e 7, ou os números reais maiores que -5 e menores que 7.
27. Os números reais maiores que -1.
28. Os números reais entre -3 e 0 (inclusive), ou maiores ou iguais a -3 e menores ou iguais a 0.
29. $-3 < x \le 4$; extremos -3 e 4; limitado; aberto à esquerda e fechado à direita.
30. $-3 < x < -1$; extremos -3 e -1; limitado; aberto.
31. $x < 5$; extremo 5; não limitado; aberto.
32. $x \ge -6$; extremo -6; não limitado; fechado.
33. A idade de Bill deve ser maior ou igual a 29: $x \ge 29$ ou $[29, +\infty[$; x = idade de Bill.
34. Preço entre 0 e 2 (inclusive): $0 \le x \le 2$ ou $[0, 2]$; x = preço de um item.
35. Os preços estão entre R\$ 2,20 e R\$ 2,90 (inclusive): $2{,}20 \le x \le 2{,}90$ ou $[2{,}20, 2{,}90]$; x = R\$ por litro de gasolina.
36. A taxa ficará entre 0,02 e 0,065: $0{,}02 < x < 0{,}065$ ou $]0{,}2, 0{,}65[$; x = taxa de juros.
37. $a(x^2 + b) = a \cdot x^2 + a \cdot b = ax^2 + ab$
38. $(y - z^3)c = y \cdot c - z^3 \cdot c = yc - z^3c$

39. $ax^2 + dx^2 = a \cdot x^2 + d \cdot x^2 = (a + d)x^2$

40. $a^3z + a^3w = a^3 \cdot z + a^3 \cdot w = a^3(z + w)$

41. A inversa de $6 - \pi$, ou $-(6 - \pi) = -6 + \pi = \pi - 6$

42. A inversa de -7, ou $-(-7) = 7$

43. Em -5^2, a base é 5.

44. Em $(-2)^7$, a base é -2.

45. $\dfrac{x^2}{y^2}$

46. $\dfrac{(3x^2)^2y^4}{3y^2} = \dfrac{3^2(x^2)^2y^4}{3y^2} = \dfrac{9x^4y^4}{3y^2} = 3x^4y^2$

47. $\left(\dfrac{4}{x^2}\right)^2 = \dfrac{4^2}{(x^2)^2} = \dfrac{16}{x^4}$

48. $\left(\dfrac{2}{xy}\right)^{-3} = \left(\dfrac{xy}{2}\right)^3 = \dfrac{x^3y^3}{2^3} = \dfrac{x^3y^3}{8}$

49. $\dfrac{(x^{-3}y^2)^{-4}}{(y^6x^{-4})^{-2}} = \dfrac{x^{12}y^{-8}}{y^{-12}x^8} = \dfrac{x^4}{y^{-4}} = x^4y^4$

50. $\left(\dfrac{4a^3b}{a^2b^3}\right)\left(\dfrac{3b^2}{2a^2b^4}\right) = \left(\dfrac{4a}{b^2}\right)\left(\dfrac{3}{2a^2b^2}\right) = \dfrac{12a}{2a^2b^4} = \dfrac{6}{ab^4}$

51. $7{,}8 \times 10^8$

52. $-1{,}6 \times 10^{-19}$

53. 0,000 000 033 3

54. 673.000.000.000

55. 9.500.000.000.000

56. 0,000 000 000 000 000 000 000 001 674 7 (23 zeros entre o ponto decimal e 1).

57. $\dfrac{(1{,}35)(2{,}41) \times 10^{-7+8}}{1{,}25 \times 10^9} = \dfrac{3{,}2535 \times 10^1}{1{,}25 \times 10^9}$

$= \dfrac{3{,}2535}{1{,}25} \times 10^{1-9} = 2{,}6028 \times 10^{-8}$

58. $\dfrac{(3{,}7)(4{,}3) \times 10^{-7+6}}{2{,}5 \times 10^7} = \dfrac{15{,}91 \times 10^{-1}}{2{,}5 \times 10^7}$

$= \dfrac{15{,}91}{2{,}5} \times 10^{-1-7} = 6{,}364 \times 10^{-8}$

59. **(a)** Quando $n = 0$, a equação $a^ma^n = a^{m+n}$ torna-se $a^ma^0 = a^{m+0}$, isto é, $a^ma^0 = a^m$. Como $a \neq 0$, podemos dividir os dois lados da equação por a^m, portanto $a^0 = 1$.

(b) Quando $n = -m$, a equação $a^ma^n = a^{m+n}$ torna-se $a^ma^{-m} = a^{m+(-m)}$, isto é, $a^{m-m} = a^0$. Sabemos por (a) que $a^0 = 1$, Como $a \neq 0$, podemos dividir os dois lados da equação $a^ma^{-m} = 1$ por a^m. Portanto $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$.

60. Falso.

61. Falso.

62. O intervalo $[-2, 1[$ corresponde a $-2 \leq x < 1$. A resposta é E.

63. $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$. A resposta é A.

64. Em $-7^2 = -(7^2)$, a base é 7. A resposta é B.

65. $\dfrac{x^6}{x^2} = \dfrac{x^2 \cdot x^4}{x^2} = x^4$. A resposta é D.

66. Os números reais com magnitude menor que 7 são representados pelo intervalo $]-7, 7[$.

67. Os números naturais com magnitude menor que 7 são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

68. Os números inteiros com magnitude menor que 7 são $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

CAPÍTULO 2

Exercícios

1. $\sqrt{81} = 9$ ou -9, pois $81 = (\pm 9)^2$

2. $\sqrt[4]{81} = 3$ ou -3, pois $81 = (\pm 3)^4$

3. $\sqrt[3]{64} = 4$, pois $64 = 4^3$

4. $\sqrt[5]{243} = 3$, pois $243 = 3^5$

5. $\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$ ou $-\dfrac{4}{3}$, pois $\dfrac{16}{9} = \left(\pm\dfrac{4}{3}\right)^2$

6. $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}} = -\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = -\dfrac{3}{2}$, pois $\dfrac{-27}{8} = \left(\dfrac{-3}{2}\right)^3$

7. $\sqrt{144} = 12$, pois $12 \cdot 12 = 144$

8. Nenhum número real multiplicado por ele mesmo resulta em -16.

9. $\sqrt[3]{-216} = -6$, pois $(-6)^3 = -216$

10. $\sqrt[3]{216} = 6$, pois $6^3 = 216$

11. $\sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}} = -\dfrac{4}{3}$, pois $(-\dfrac{4}{3})^3 = -\dfrac{64}{27}$

12. $\sqrt{\dfrac{64}{25}} = \dfrac{8}{5}$, pois $8^2 = 64$ e $5^2 = 25$

13. 4

14. 5

15. $\dfrac{5}{2}$ ou 2,5

16. $\dfrac{7}{2}$ ou 3,5

17. 729

18. 32

19. $\frac{1}{4}$ ou 0,25

20. $\frac{1}{81}$ ou 0,012345679

21. -2

22. $-\frac{4}{5}$ ou $-0{,}8$

23. $\sqrt{288} = \sqrt{12^2 \cdot 2} = \sqrt{12^2} \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

24. $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{4} = 5\sqrt[4]{4}$

25. $\sqrt[3]{-250} = \sqrt[3]{(-5)^3 \cdot 2}$

$= \sqrt[3]{(-5)^3} \cdot \sqrt[3]{2} = -5\sqrt[3]{2}$

26. $\sqrt[4]{192} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 12} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{12} = 2\sqrt[4]{12}$

27. $\sqrt{2x^3y^4} = \sqrt{(xy^2)^2 \cdot 2x} =$

$= \sqrt{(xy^2)^2} \cdot \sqrt{2x} = |x|y^2\sqrt{2x}$

28. $\sqrt[3]{-27x^3y^6} = \sqrt[3]{(-3xy^2)^3} = -3xy^2$

29. $\sqrt[4]{3x^8y^6} = \sqrt[4]{(x^2y)^4 \cdot 3y^2} =$

$= \sqrt[4]{(x^2y)^4} \cdot \sqrt[4]{3y^2} = |x^2y|\sqrt[4]{3y^2} = x^2|y|\sqrt[4]{3y^2}$

30. $\sqrt[3]{8x^6y^4} = \sqrt[3]{(2x^2y)^3 \cdot y}$

$= \sqrt[3]{(2x^2y)^3} \cdot \sqrt[3]{y} = 2x^2y\sqrt[3]{y}$

31. $\sqrt[5]{96x^{10}} = \sqrt[5]{(2x^2)^5 \cdot 3} = \sqrt[5]{(2x^2)^5} \cdot \sqrt[5]{3}$

$= 2x^2\sqrt[5]{3}$

32. $\sqrt{108x^4y^9} = \sqrt{(6x^2y^4)^2 \cdot 3y}$

$= \sqrt{(6x^2y^4)^2} \cdot \sqrt{3y} = 6x^2y^4\sqrt{3y}$

33. $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$

34. $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

35. $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$

36. $\frac{2}{\sqrt[4]{y}} \cdot \frac{\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[4]{y^3}} = \frac{2\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[4]{y^4}} = \frac{2\sqrt[4]{y^3}}{y}$

37. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{y^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{y}$

38. $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{b^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^3b^3}}{\sqrt[5]{b^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^3b^3}}{b}$

39. $[(a + 2b)^2]^{1/3} = (a + 2b)^{2/3}$

40. $(x^2y^3)^{1/5} = (x^2)^{1/5}(y^3)^{1/5} = x^{2/5}y^{3/5}$

41. $2x(x^2y)^{1/3} = 2x(x^2)^{1/3}y^{1/3} = 2x^{3/3}x^{2/3}y^{1/3} = 2x^{5/3}y^{1/3}$

42. $xy(xy^3)^{1/4} = xyx^{1/4}(y^3)^{1/4} = x^{4/4}y^{4/4}x^{1/4}y^{3/4}$
$= x^{5/4}y^{7/4}$

43. $a^{3/4}b^{1/4} = \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^3b}$

44. $x^{2/3}y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2y}$

45. $x^{-5/3} = \sqrt[3]{x^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

46. $(xy)^{-3/4} = \sqrt[4]{x^{-3}y^{-3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3y^3}}$

47. $\sqrt{\sqrt{2x}} = [(2x)^{1/2}]^{1/2} = (2x)^{1/4} = \sqrt[4]{2x}$

48. $\sqrt{\sqrt[3]{3x^2}} = [(3x)^{1/3}]^{1/2} = (3x^2)^{1/6} = \sqrt[6]{3x^2}$

49. $\sqrt[4]{\sqrt{xy}} = [(xy)^{1/2}]^{1/4} = (xy)^{1/8} = \sqrt[8]{xy}$

50. $\sqrt[3]{\sqrt{ab}} = [(ab)^{1/2}]^{1/3} = (ab^{1/6} = \sqrt[6]{ab}$

51. $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a^{2/5}}{a^{1/3}} = a^{2/5-1/3} = a^{1/15} = \sqrt[15]{a}$

52. $\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2} = a^{1/2}a^{2/3} = a^{1/2+2/3} = a^{7/6}$

$= \sqrt[6]{a^7} = a\sqrt[6]{a}$

53. $a^{3/5}a^{1/3}a^{-3/2} = a^{3/5+1/3-3/2} = a^{-17/30} = \frac{1}{a^{17/30}}$

54. $\sqrt{x^2y^4} = \sqrt{(xy^2)^2} = |xy^2| = |x|y^2$

55. $(a^{5/3}\, b^{3/4})(3a^{1/3}\, b^{5/4}) = 3 \cdot a^{5/3}a^{1/3} \cdot b^{3/4}\, b^{5/4} =$
$3 \cdot a^{6/3} \cdot b^{8/4} = 3a^2b^2 \ (b \geq 0)$

56. $\left(\frac{x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)^6 = \frac{(x^{1/2})^6}{(y^{2/3})^6} = \frac{x^{6/2}}{y^{12/3}} = \frac{x^3}{y^4} \ (x \geq 0)$

57. $(\frac{-8x^6}{y^{-3}})^{2/3} = (-8x^6y^3)^{2/3} = (-8)^{2/3}(x^6)^{2/3}(y^3)^{2/3}$

$= [(-8)^2]^{1/3}x^{12/3}y^{6/3} = 64^{1/3}x^4y^2 = 4x^4y^2$

58. $\frac{(p^2q^4)^{1/2}}{(27q^3p^6)^{1/3}} = \frac{\sqrt{p^2q^4}}{\sqrt[3]{27q^3p^6}} = \frac{\sqrt{(pq^2)^2}}{\sqrt[3]{(3qp^2)^3}} = \frac{|pq^2|}{3qp^2}$

$= \frac{|p|q^2}{3qp^2} = \frac{q}{3|p|}$

59. $\frac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^2)^{-1/2}} = \frac{(x^6y^2)^{1/2}}{(x^9y^6)^{1/3}} = \frac{\sqrt{x^6y^2}}{\sqrt[3]{x^9y^2}} = \frac{|x^3y|}{x^3y^2}$

$= \frac{1}{|y|}\cdot\frac{|x|}{x} = \frac{|x|}{x|y|}$

60. $\left(\frac{2x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)\left(\frac{3x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right) = \frac{6x^{1/2-2/3}}{y^{2/3+1/2}} = \frac{6x^{-1/6}}{y^{7/6}} = \frac{6}{x^{1/6}y^{7/6}}$

61. $\sqrt{9x^{-6}y^4} = |3x^{-3}y^2| = 3y^2|x^{-3}| = \frac{3y^2}{|x^3|}$

62. $\sqrt{16y^8z^{-2}} = |4y^4z^{-1}| = 4y^4|z^{-1}| = \frac{4y^4}{|z|}$

63. $\sqrt[4]{\frac{3x^8y^2}{8x^2}} = \sqrt[4]{\frac{2\cdot 3x^8y^2}{2\cdot 8x^2}} = \frac{\sqrt[4]{6x^6y^2}}{2} = \frac{\sqrt[4]{6x^4x^2y^2}}{2}$

$= \frac{|x|\sqrt[4]{6x^2y^2}}{2}$

64. $\sqrt[5]{\frac{4x^6y}{9x^3}} = \sqrt[5]{\frac{27\cdot 4x^6y}{27\cdot 9x^3}} = \sqrt[5]{\frac{108x^6y}{3^5x^3}} = \frac{\sqrt[5]{108x^3y}}{3}$

65. $\sqrt[3]{\frac{4x^2}{y^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2x^2}{y}} = \sqrt[3]{\frac{(4x^2)(2x^2)}{(y^2)(y)}} = \sqrt[3]{\frac{8x^4}{y^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x^4}}{y}$

$= \frac{2x\sqrt[3]{x}}{y}$

66. $\sqrt[5]{9ab^6}\cdot\sqrt[5]{27a^2b^{-1}} = \sqrt[5]{(9ab^6)(27a^2b^{-1})}$

$= \sqrt[5]{243a^3b^5} = 3b\sqrt[5]{a^3}$

67. $3\sqrt{4^2\cdot 3} - 2\sqrt{6^2\cdot 3} = 3\cdot 4\sqrt{3} - 2\cdot 6\sqrt{3}$

$= 12\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 0$

68. $2\sqrt{5^2\cdot 7} - 4\sqrt{2^2\cdot 7} = 2\cdot 5\sqrt{7} - 4\cdot 2\sqrt{7}$

$= 10\sqrt{7} - 8\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

69. $\sqrt{x^2\cdot x} - \sqrt{(2y)^2\cdot x} = |x|\sqrt{x} - 2|y|\cdot\sqrt{x}$

$= (|x| - 2|y|)\sqrt{x} = (x - 2|y|)\sqrt{x}$ (como a raiz quadrada é indefinida quando $x < 0$).

70. $\sqrt{(3x)^2\cdot 2y} + \sqrt{y^2\cdot 2y}$

$= 3|x|\sqrt{2y} + |y|\cdot\sqrt{2y} =$

$(3|x| + |y|)\sqrt{2y} = (3|x| + y)\sqrt{2y}$ (como a raiz quadrada é indefinida quando $y < 0$).

71. $\sqrt{2+6} < \sqrt{2} + \sqrt{6}$ (2,828...< 3,863...)

72. $\sqrt{4} + \sqrt{9} > \sqrt{4+9}$ (5 > 3,605...)

73. $(3^{-2})^{-1/2} = 3$

74. $(2^{-3})^{1/3} < 2$ $\left(\frac{1}{2} < 2\right)$

75. $\sqrt[4]{(-2)^4} > -2$ $(2 > -2)$

76. $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

77. $2^{2/2} < 3^{3/4}$ (1,587... < 2,279...)

78. $4^{-2/3} < 3^{-3/4}$ (0,396... < 0,438...)

79. $t = 0{,}45\sqrt{200} = 4{,}5\sqrt{2} \approx 6{,}36$ s

CAPÍTULO 3

Exercícios

1. $3x^2 + 2x - 1$; grau 2.

2. $-2x^3 + x^2 - 2x + 1$; grau 3.

3. $-x^7 + 1$; grau 7.

4. $-x^4 + x^2 + x - 3$; grau 4.

5. Não, não pode haver um expoente negativo como x^{-1}.

6. Não, não pode haver uma variável no denominador.

7. Sim.

8. Sim.

9. $(x^2 - 3x + 7) + (3x^2 + 5x - 3 = (x^2 + 3x^2) + (-3x + 5x) + (7 - 3) = 4x^2 + 2x + 4$

10. $(-3x^2 - 5) + (-x^2 - 7x - 12) = (-3x^2 - x^2) - 7x + (-5 - 12) = -4x^2 - 7x - 17$

11. $(4x^3 - x^2 + 3x) + (-x^3 - 12x + 3) = (4x^3 - x^3) - x^2 + (3x - 12x) + 3 = 3x^3 - x^2 - 9x + 3$

12. $(-y^2 - 2y + 3) + (5y^2 + 3y + 4) = (-y^2 + 5y^2) + (-2y + 3y) + (3 + 4) = 4y^2 + y + 7$

13. $2x(x^2) - 2x(x) + 2x(3) = 2x^3 - 2x^2 + 6x$

14. $y^2(2y^2) + y^2(3y) - y^2(4) = 2y^4 + 3y^3 - 4y^2$

15. $(-3u)(4u) + (-3u)(-1) = -12u^2 + 3u$

16. $(-4v)(2) + (-4v)(-3v^3) = -8v + 12v^4 = 12v^4 - 8v$

17. $2(5x) - x(5x) - 3x^2(5x) = 10x - 5x^2 - 15x^3 = -15x^3 - 5x^2 + 10x$

18. $1(2x) - x^2(2x) + x^4(2x) = 2x - 2x^3 + 2x^5 = 2x^5 - 2x^3 + 2x$

19. $x(x + 5) - 2(x + 5) = (x)(x) + (x)(5) - (2)(x) - (2)(5) = x^2 + 5x - 2x - 10 = x^2 + 3x - 10$

20. $2x(4x + 1) + 3(4x + 1) = (2x)(4x) + (2x)(1) + (3)(4x) + (3)(1) = 8x^2 + 2x + 12x + 3 = 8x^2 + 14x + 3$

21. $3x(x + 2) - 5(x + 2) = (3x)(x) + (3x)(2) - (5)(x) - (5)(2) = 3x^2 + 6x - 5x - 10 = 3x^2 + x - 10$

22. $(2x)^2 - (3)^2 = 4x^2 - 9$

23. $(3x)^2 - (y)^2 = 9x^2 - y^2$

24. $(3)^2 - 2(3)(5x) + (5x)^2 = 9 - 30x + 25x^2 = 25x^2 - 30x + 9$

25. $(3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$

26. $(x)^3 - 3(x)^2(1) + 3(x)(1)^2 - (1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

27. $(2u)^3 - 3(2u)^2(v) + 3(2u)(v)^2 - (v)^3 = 8u^3 - 3v(4u^2) + 6uv^2 - v^3 = 8u^3 - 12u^2v + 6uv^2 - v^3$

28. $(u)^3 + 3(u)^2(3v) + 3(u)(3v)^2 + (3v)^3 = u^3 + 9u^2v + 3u(9v^2) + 27v^3 = u^3 + 9u^2v + 27uv^2 + 27v^3$

29. $(2x^3)^2 - (3y)^2 = 4x^6 - 9y^2$

30. $(5x^3)^2 - 2(5x^3)(1) + (1)^2 = 25x^6 - 10x^3 + 1$

31. $x^2(x + 4) - 2x(x + 4) + 3(x + 4) = (x^2)(x) + (x^2)(4) - (2x)(x) - (2x)(4) + (3)(x) + (3)(4) = x^3 + 4x^2 - 2x^2 - 8x + 3x + 12 = x^3 + 2x^2 - 5x + 12$

32. $x^2(x - 3) + 3x(x - 3) - 2(x - 3) = (x^2)(x) + (x^2)(-3) + (3x)(x) + (3x)(-3) - (2)(x) - (2)(-3) = x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 2x + 6 = x^3 - 11x + 6$

33. $x^2(x^2 + x + 1) + x(x^2 + x + 1) - 3(x^2 + x + 1) = (x^2)(x^2) + (x^2)(x) + (x^2)(1) + (x)(x^2) + (x)(x) + (x)(1) - (3)(x^2) - (3)(x) - (3)(1) = x^4 + x^3 + x^2 + x^3 + x^2 + x - 3x^2 - 3x - 3 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3$

34. $2x^2(x^2 - x + 2) - 3x(x^2 - x + 2) + 1(x^2 - x + 2) = (2x^2)(x^2) + (2x^2)(-x) + (2x^2)(2) - (3x)(x^2) - (3x)(-x) - (3x)(2) + (1)(x^2) + (1)(-x) + (1)(2) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x^3 + 3x^2 - 6x + x^2 - x + 2 = 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 2$

35. $(x^2) - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$

36. $(x^{1/2})^2 - (y^{1/2})^2 = x - y,\ x \geq 0$ e $y \geq 0$

37. $(\sqrt{u})^2 - (\sqrt{v})^2 = u - v,\ u \geq 0$ e $v \geq 0$

38. $(x^2)^2 - (\sqrt{3})^2 = x^4 - 3$

39. $x(x^2 + 2x + 4) - 2(x^2 + 2x + 4) = (x)(x^2) + (x)(2x) + (x)(4) - (2)(x^2) - (2)(2x) - (2)(4) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8$

40. $x(x^2 - x + 1) + 1(x^2 - x + 1) = (x)(x^2) + (x)(-x) + (x)(1) + (1)(x^2) + (1)(-x) + (1)(1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$

41. $5(x - 3)$

42. $5x(x^2 - 4)$

43. $yz(z^2 - 3z + 2)$

44. $(x + 3)(2x - 5)$

45. $z^2 - 7^2 = (z + 7)(z - 7)$

46. $(3y)^2 - 4^2 = (3y + 4)(3y - 4)$

47. $8^2 - (5y)^2 = (8 + 5y)(8 - 5y)$

48. $4^2 - (x + 2)^2 = [4 + (x + 2)][(4 - (x + 2)] = (6 + x)(2 - x)$

49. $y^2 + 2(y)(4) + 4^2 = (y + 4)^2$

50. $(6y)^2 + 2(6y)(1) + 1^2 = (6y + 1)^2$

51. $(2z)^2 - 2(2z)(1) + 1^2 = (2z - 1)^2$

52. $(3z)^2 - 2(3z)(4) + 4^2 = (3z - 4)^2$

53. $y^3 - 2^3 = (y - 2)[y^2 + (y)(2) + 2^2] = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)$

54. $z^3 + 4^3 = (z + 4)[z^2 - (z)(4) + 4^2] = (z + 4)(z^2 - 4z + 16)$

55. $(3y)^3 - 2^3 = (3y - 2)[(3y)^2 + (3y)(2) + 2^2] = (3y - 2)(9y^2 + 6y + 4)$

56. $(4z)^3 + 3^3 = (4z + 3)[(4z)^2 - (4z)(3) + 3^2] = (4z + 3)(16z^2 - 12z + 9)$

57. $1^3 - x^3 = (1 - x)[1^2 + (1)(x) + x^2] = (1 - x)(1 + x + x^2) = (1 - x)(1 + x + x^2)$

58. $3^3 - y^3 = (3 - y)[3^2 + (3)(y) + y^2] = (3 - y)(9 + 3y + y^2) = (3 - y)(9 + 3y + y^2)$

59. $(x + 2)(x + 7)$

60. $(y - 5)(y - 6)$

61. $(z - 8)(z + 3)$

62. $(2t + 1)(3t + 1)$

63. $(2u - 5)(7u + 1)$

64. $(2v + 3)(5v + 4)$

65. $(3x + 5)(4x - 3)$

66. $(x - y)(2x - y)$

67. $(2x + 5y)(3x - 2y)$

68. $(3x + 7y)(5x - 2y)$

69. $(x^3 - 4x^2) + (5x - 20) = x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(x^2 + 5)$

70. $(2x^3 - 3x^2) + (2x - 3) = x^2(2x - 3) + 1(2x - 3) = (2x - 3)(x^2 + 1)$

71. $(x^6 - 3x^4) + (x^2 - 3) = x^4(x^2 - 3) + 1(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(x^4 + 1)$

72. $(x^6 + 2x^4) + (x^2 + 2) = x^4(x^2 + 2) + 1(x^2 + 2) = (x^2 + 2)(x^4 + 1)$

73. $(2ac + 6ad) - (bc + 3bd) = 2a(c + 3d) - b(c + 3d) = (c + 3d)(2a - b)$

74. $(3uw + 12uz) - (2vw + 8vz) = 3u(w + 12z) - 2v(w + 4z) = (w+4z)(3u - 2v)$

75. $x(x^2 + 1)$

76. $y(4y^2 - 20y + 25) = y[(2y)^2 - 2(2y)(5) + 5^2] = y(2y - 5)^2$

77. $2y(9y^2 + 24y + 16) = 2y[(3y)^2 + 2(3y)(4) + 4^2] = 2y(3y + 4)^2$

78. $2x(x^2 - 8x + 7) = 2x(x - 1)(x - 7)$

79. $y(16 - y^2) = y(4^2 - y^2) = y(4 + y)(4 - y)$

80. $3x(x^3 + 8) = 3x(x^3 + 2^3) = 3x(x + 2)[x^2 - (x)(2) + 22] = 3x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

82. $z(1 - 8z^3) = z[1^3 (2z)^3] = z(1 - 2z)[1^2 + (1)(2z) + (2z)^2] = z(1 - 2z)(1 + 2z + 4z^2)$

81. $y(5 + 3y - 2y^2) = y(1 + y)(5 - 2y)$

83. $2[(5x + 1)^2 - 9] = 2[5x + 1)2 - 3^2] = 2[5x + 1) + 3][(5x + 1) - 3] = 2(5x + 4)(5x - 2)$

84. $5[2x - 3)^2 - 4] = 5[(2x - 3)^2 - 2^2] = 5[(2x - 3) + 2][(2x - 3) - 2] = 5(2x - 1)(2x - 5)$

85. $2(6x^2 + 11x - 10) = 2(2x + 5)(3x - 2)$

86. $(x + 5y)(3x - 2y)$

87. $(2ac + 4ad) - (2bd + bc) = 2a(c + 2d) - b(2d + c) = (c + 2d)(2a - b) = (2c - b)(c + 2d)$

88. $(6ac + 4bc) - (2bd + 3ad) = 2c(3a + 2b) - d(2b + 3a) = (3a + 2b)(2a - d)$

89. $(x^3 - 3x^2) - (4x - 12) = x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 2)(x - 2)$

90. $x(x^3 - 4x^2 - x + 4) = x(x - 1)(x^2 - 3x - 4) = x(x - 1)(x + 1)(x - 4)$

91. $(2ac + bc) - (2ad + bd) = c(2a + b) - d(2a + b) = (c - d)(2a + b)$.
Nenhum dos agrupamentos $(2ac - bd)$ e $(-2ad + bc)$ tem um fator comum para remover.

CAPÍTULO 4

Exercícios

1. $\frac{5}{9} + \frac{10}{9} = \frac{5 + 10}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

2. $\frac{17}{32} - \frac{9}{32} = \frac{17 - 9}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

3. $\frac{20}{21} \cdot \frac{9}{22} = \frac{20 \cdot 9}{21 \cdot 22} = \frac{180}{462} = \frac{30}{77}$

4. $\frac{33}{25} \cdot \frac{20}{77} = \frac{33 \cdot 20}{25 \cdot 77} = \frac{660}{1.925} = \frac{12}{35}$

5. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

6. $\frac{9}{4} \div \frac{15}{10} = \frac{9}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

7. O mínimo múltiplo comum dos denominadores é $2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 210$:

$$\frac{1}{14} + \frac{4}{15} - \frac{5}{21} = \frac{15}{210} + \frac{56}{210} - \frac{50}{210}$$
$$= \frac{15 + 56 - 50}{210} = \frac{21}{210} = \frac{1}{10}$$

8. O mínimo múltiplo comum dos denominadores é $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$:

$$\frac{1}{6} + \frac{6}{35} - \frac{4}{15} = \frac{35}{210} + \frac{36}{210} - \frac{56}{210}$$
$$= \frac{35 + 36 - 56}{210} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

9. Nenhum valor é restrito, assim o domínio são todos números reais.

10. Nenhum valor é restrito, assim o domínio são todos números reais.

11. O valor sob o radical deve ser não-negativo, assim $x - 4 \geq 0$, ou seja, $x \geq 4$: domínio é $[4, +\infty[$.

12. O valor sob o radical deve ser positivo, assim $x + 3 > 0$, ou seja, $x > -3$: domínio é $]-3, +\infty[$.

13. O denominador não pode ser 0, assim $x^2 + 3x \neq 0$ ou $x(x + 3) \neq 0$. Então, $x \neq 0$ e $x + 3 \neq 0$, ou seja, $x \neq 0$ e $x \neq -3$.

14. O denominador não pode ser 0, assim $x^2 - 4 \neq 0$ ou $(x + 2)(x - 2) \neq 0$. Então, $x + 2 \neq 0$ e $x - 2 \neq 0$, ou seja, $x \neq -2$ e $x \neq 2$.

15. O denominador não pode ser 0, assim $x - 1 \neq 0$ ou $x \neq 1$. Então $x \neq 2$ e $x \neq 1$.

16. O denominador não pode ser 0, assim $x - 2 \neq 0$ ou $x \neq 2$. Então $x \neq 2$ e $x \neq 0$.

17. $x^{-1} = 1/x$ e o denominador não pode ser 0, assim $x \neq 0$.

18. $x(x + 1)^{-2} = \frac{x}{(x + 1)^2}$ e o denominador não pode ser 0, assim $(x + 1)^2 \neq 0$ ou $x + 1 \neq 0$, ou seja, $x \neq -1$.

19. O denominador é $12x^3 = (3x)(4x^2)$, assim, o novo numerador é $2(4x^2) = 8x^2$.

20. O numerador é $15y = (5)(3y)$, assim, o novo denominador é $(2y)(3y) = 6y^2$.

21. O numerador é $x^2 - 4x = (x - 4)(x)$, assim, o novo denominador é $(x)(x) = x^2$.

22. O denominador é $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, assim, o novo numerador é $x(x - 2) = x^2 - 2x$.

23. O denominador é $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$, assim, o novo numerador é $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$.

24. O numerador é $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$, assim, o novo denominador é $(x + 5)(x + 3) = x^2 + 8x + 15$.

25. O numerador é $x^2 - 3x = x(x - 3)$, assim, o novo denominador é $x(x^2 + 2x)$ ou $x^3 + 2x^2$.

26. O denominador é $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, assim, o novo numerador é

$$(x + 3)(x^2 + x - 6) = x(x^2 + x - 6)$$
$$+ 3(x^2 + x - 6) = x^3 + x^2 - 6x + 3x^2$$
$$+ 3x - 18 = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$$

27. $(x - 2)(x + 7)$ cancela durante a simplificação; a restrição indica que os valores 2 e -7 não são válidos na expressão original.

28. $(x + 1)(x - 2)$ cancela durante a simplificação; a restrição indica que os valores -1 e 2 não são válidos na expressão original.

29. Nenhum fator foi removido da expressão; podemos ver pela inspeção que 2/3 e 5 não são válidos.

30. x cancela durante a simplificação; a restrição indica que 0 não era válido na expressão original.

31. $(x - 3)$ termina no numerador da expressão simplificada; a restrição lembra que começa no denominador, assim, 3 não é permitido.

32. Quando $a = b$ na origem, dividimos por 0; isso não é aparente na expressão simplificada, pois cancelamos um fator de $b - a$.

33. $\frac{3x(6x^2)}{3x(5)} = \frac{6x^2}{5}, x \neq 0$

34. $\frac{3y^2(25)}{3y^2(3y^2)} = \frac{25}{3y^2}$

35. $\frac{x(x^2)}{x(x - 2)} = \frac{x^2}{x - 2}, x \neq 0$

36. $\frac{2y(y + 3)}{4(y + 3)} = \frac{y}{2}, y \neq -3$

37. $\frac{z(z - 3)}{(3 - z)(3 + z)} = -\frac{z}{z + 3}, z \neq 3$

38. $\frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{x + 3}{x - 4}, x \neq -3$

39. $\dfrac{(y+5)(y-6)}{(y+3)(y-6)} = \dfrac{y+5}{y+3}, y \neq 6$

40. $\dfrac{y(y^2+4y-21)}{(y+7)(y-7)}$

$= \dfrac{y(y+7)(y-3)}{(y+7)(y-7)} = \dfrac{y(y-3)}{y-7}, y \neq -7$

41. $\dfrac{(2z)^3 - 1^3}{(z+3)(2z-1)}$

$= \dfrac{(2z-1)[(2z)^2+(2z)(1)+1^2]}{(z+3)(2z-1)}$

$= \dfrac{4z^2+2z+1}{z+3}, z \neq \dfrac{1}{2}$

42. $\dfrac{2z(z^2+3z+9)}{z^3-3^3}$

$= \dfrac{2z(z^2+3z+9)}{(z-3)[z^2+(z)(3)+3^2]} =$

$= \dfrac{2z(z^2+3z+9)}{(z-3)(z^2+3z+9)} = \dfrac{2z}{z-3}$

43. $\dfrac{(x^3+2x^2)-(3x+6)}{x^2(x+2)}$

$= \dfrac{x^2(x+2)-3(x+2)}{x^2(x+2)} = \dfrac{(x+2)(x^2-3)}{x^2(x+2)}$

$= \dfrac{x^2-3}{x^2}, x \neq -2$

44. $\dfrac{y(y+3)}{(y^3+3y^2)-(5y+15)}$

$= \dfrac{y(y+3)}{y^2(y+3)-5(y+3)} = \dfrac{y(y+3)}{(y+3)(y^2-5)}$

$= \dfrac{y}{y^2-5}, y \neq -3$

45. $\dfrac{1}{x-1} \cdot \dfrac{(x+1)(x-1)}{3} = \dfrac{x+1}{3}, x \neq 1$

46. $\dfrac{x+3}{7} \cdot \dfrac{14}{2(x+3)} = 1, x \neq -3$

47. $\dfrac{x+3}{x-1} \cdot \dfrac{-(x-1)}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{1}{x-3}, x \neq 1$ e $x \neq -3$

48. $\dfrac{3x(6x+1)}{3xy} \cdot \dfrac{12y^2}{6x-1} = 12y$

$x \neq 0, y \neq 0$ e $x \neq \dfrac{1}{6}$

49. $\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{2x^2} \cdot \dfrac{4x}{x^2+x+1} = \dfrac{2(x-1)}{x}$

50. $\dfrac{y(y^2+2y+4)}{y^2(y+2)} \cdot \dfrac{(y+2)(y-2)}{(y-2)(y^2+2y+4)} = \dfrac{1}{y}$,
$y \neq -2$ e $y \neq 2$

51. $\dfrac{(y+5)(2y-1)}{(y+5)(y-5)} \cdot \dfrac{y-5}{y(2y-1)} = \dfrac{1}{y}, y \neq 5, y \neq -5$
e $\neq \dfrac{1}{2}$

52. $\dfrac{(y+4)^2}{(3y+2)(y-1)} \cdot \dfrac{y(3y+2)}{y+4} = \dfrac{y(y+4)}{y+4}, y \neq -4$ e
$y \neq -\dfrac{2}{3}$

53. $\dfrac{1}{2x} \cdot \dfrac{4}{1} = \dfrac{2}{x}$

54. $\dfrac{4x}{y} \cdot \dfrac{x}{8y} = \dfrac{x^2}{2y^2}, x \neq 0$

55. $\dfrac{x(x-3)}{14y} \cdot \dfrac{3y^2}{2xy} = \dfrac{3(x-3)}{28}, x \neq y$ e $y \neq 0$

56. $\dfrac{7(x-y)}{14(x-y)} = \dfrac{3}{8}, x \neq y$ e $y \neq 0$

57. $\dfrac{2x^2y}{(x+3)^2} \cdot \dfrac{x-3}{8xy} = \dfrac{x}{4(x-3)}, x \neq 0$ e $y \neq 0$

58. $\dfrac{(x+y)(x-y)}{2xy} \cdot \dfrac{4x^2y}{(y+x)(y-x)} = -2x, x \neq 0,$
$y \neq 0, x \neq y$ e $x \neq -y$

59. $\dfrac{2x+1-3}{x+5} = \dfrac{2x-2}{x+5}$

60. $\dfrac{3+x+1}{x-2} = \dfrac{x+4}{x-2}$

61. $\dfrac{3}{x(x+3)} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{(x+3)(x-3)}$

$= \dfrac{3(x-3)}{x(x+3)(x-3)} - \dfrac{1(x+3)(x-3)}{x(x+3)(x-3)}$

$- \dfrac{6x}{x(x+3)(x-3)} = \dfrac{(3x-9)-(x^2-9)-(6x)}{x(x+3)(x-3)}$

$= \dfrac{-x^2-3x}{x(x+3)(x-3)} = \dfrac{x(x+3)}{x(x+3)(x-3)}$

$= -\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{3-x}, x \neq 0$ e $x \neq -3$

62. $\dfrac{5}{(x+3)(x-2)} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{4}{(x+2)(x-2)}$

$= \dfrac{5(x+2)}{(x+2)(x+3)(x-2)} - \dfrac{2(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x-2)}$

$+ \dfrac{4(x+3)}{(x+2)(x+3)(x-2)}$

$= \dfrac{(5x+10)-(2x^2+10x+12)+(4x+12)}{(x+2)(x+3)(x-2)}$

$= \dfrac{-2x^2-x+10}{(x+2)(x+3)(x-2)}$

$= \dfrac{(2x+5)(x-2)}{(x+2)(x+3)(x-2)}$

$= -\dfrac{2x-5}{(x+2)(x+3)}$

$= \dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}, x \neq 2$

63. $\dfrac{\dfrac{x^3-y^3}{x^2y^2}}{\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}} = \dfrac{x^2-y^3}{x^2j^2} \cdot \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{(x-y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$

$x \neq y,\ x \neq 0$ e $y \neq 0$

64. $\dfrac{\dfrac{y+x}{xy}}{\dfrac{y^2-x^2}{x^2y^2}} = \dfrac{y+x}{xy} \cdot \dfrac{x^2y^2}{y^2-x^2}$

$= \dfrac{xy(y+x)}{(y-x)(x+y)} = \dfrac{xy}{y-x}, x \neq -y, x \neq 0$ e $y \neq 0$

65. $\dfrac{\dfrac{2x(x-4)+13x-3}{x-4}}{\dfrac{2x(x-4)+x+3}{x-4}}$

$= \dfrac{2x^2+5x-3}{x-4} \cdot \dfrac{x-4}{2x^2-7x+3}$

$= \dfrac{(2x-1)(x+3)}{(2x-1)(x-3)}$

$= \dfrac{x+3}{x-3}, x \neq 4$ e $x \neq \dfrac{1}{2}$

66. $\dfrac{\dfrac{2(x+5)-13}{x+5}}{\dfrac{2(x-3)+3}{x-3}} = \dfrac{2x-3}{x+5} \cdot \dfrac{x-3}{2x-3} = \dfrac{x-3}{x+5},$

$x \neq 3$, e $x \neq \dfrac{3}{2}$

67. $\dfrac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} - \dfrac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{x^2(x+h)^2} \cdot \dfrac{1}{h}$

$= \dfrac{-2xh-h^2}{hx^2(x+h)^2} = \dfrac{-h(2x+h)}{hx^2(x+h)^2} = -\dfrac{2x+h}{x^2(x+h)^2}$,

$h \neq 0$.

68. $\dfrac{\dfrac{(x+h)(x+2)-x(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)}}{h}$

$= \dfrac{x^2+2x+hx+2h-x^2+hx-2x}{(x+h+2)(x+2)} \cdot \dfrac{1}{h}$

$= \dfrac{2h}{h(x+h+2)(x+2)} = \dfrac{2}{(x+h+2)(x+2)},$

$h \neq 0$

69. $\dfrac{\dfrac{b^2-a^2}{ab}}{\dfrac{b-a}{ab}} = \dfrac{(b+a)(b-a)}{ab} \cdot \dfrac{ab}{b-a} = b+a$

$= a+b, a \neq 0, b \neq 0$, e $a \neq 0$.

70. $\dfrac{\dfrac{b+a}{ab}}{\dfrac{b^2-a^2}{ab}} = \dfrac{b+a}{ab} \cdot \dfrac{ab}{(b+a)(b-a)} = \dfrac{1}{b-a},$

$a \neq 0, b \neq 0$, e $a \neq -b$.

71. $\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)\left(\dfrac{1}{x+y}\right) = \dfrac{1}{xy}, x \neq -y.$

72. $\dfrac{x-y}{x+y}, x \neq y.$

73. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{xy} + \dfrac{x}{xy} = \dfrac{x+y}{xy}$

74. $\dfrac{1}{x^{-1}+y^{-1}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = \dfrac{1}{\dfrac{y+x}{xy}} = \dfrac{xy}{y+x}, x \neq 0$, e $y \neq 0$

CAPÍTULO 5

Revisão rápida

1. $2x + 5x + 7 + y - 3x + 4y + 2 = (2x + 5x - 3x) + (y + 4y) + (7 + 2) = 4x + 5y + 9$

2. $4 + 2x - 3z + 5y - x + 2y - z - 2 = (2x - x) + (5x + 2y) + (-3z - z) + (4 - 2) = x + 7y - 4z + 2$

3. $3(2x - y) + 4(y - x) + x + y = 6x - 3y + 4y - 4x + x + y = 3x + 2y$

4. $5(2x + y - 1) + 4(y - 3x + 2) + 1 = 10x + 5y - 5y - 5 + 4y - 12x + 8 + 1 = -2x + 9y + 4$

5. $\dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{5}{y}$

6. $\dfrac{1}{y-1} + \dfrac{3}{y-2} = \dfrac{y-2}{(y-1)(y-2)} + \dfrac{3(y-1)}{(y-1)(y-2)}$

$= \dfrac{y - 2 + 3y - 3}{(y-1)(y-2)} = \dfrac{4y-5}{(y-1)(y-2)}$

7. $2 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x+1}{x}$

8. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - x = \dfrac{y}{xy} + \dfrac{x}{xy} - \dfrac{x^2y}{xy} = \dfrac{y + x - x^2y}{xy}$

9. $\dfrac{x+4}{2} + \dfrac{3x-1}{5} = \dfrac{5(x+4)}{10} + \dfrac{2(3x-1)}{10}$

$= \dfrac{5x + 20 + 6x - 2}{10} = \dfrac{11x+18}{10}$

10. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} = \dfrac{4x}{12} + \dfrac{3x}{12} = \dfrac{7x}{12}$

11. $(3x - 4)^2 = 9x^2 - 12x - 12x + 16 = 9x^2 - 24x + 16$

12. $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$

13. $(2x + 1)(3x - 5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5 = 6x^2 - 7x - 5$

14. $(3y - 1)(5y + 4) = 15y^2 + 12y - 5y - 4 = 15y^2 + 7y - 4$

15. $25x^2 - 20x + 4 = (5x - 2)(5x - 2) = (5x - 2)^2$

16. $15x^3 - 22x^2 + 8x = x(15x^2 - 22x + 8) = x(5x - 4)(3x - 2)$

17. $3x^3 + x^2 - 15x - 5 = x^2(3x + 1) - 5(3x + 1) = (3x + 1)(x^2 - 5)$

18. $y^4 - 13y^2 + 36 = (y^2 - 4)(y^2 - 9) = (y - 2)(y + 2)(y - 3)(y + 3)$

19. $\dfrac{x}{2x+1} - \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x(x+3)}{(2x+1)(x+3)}$

$- \dfrac{2(2x+1)}{(2x+1)(x+3)} = \dfrac{x^2 + 3x - 4x - 2}{(2x+1)(x+3)}$

$= \dfrac{x^2 - x - 2}{(2x+1)(x+3)} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{(2x+1)(x+3)}$

20. $\dfrac{x+1}{x^2-5x-6} - \dfrac{3x+11}{x^2-x-6} = \dfrac{x+1}{(x-3)(x-2)}$

$- \dfrac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-3)(x-2)(x+2)}$

$- \dfrac{(3x+11)(x-2)}{(x-3)(x-2)(x+2)}$

$= \dfrac{(x^2+3x+2) - (3x^2+5x-22)}{(x-3)(x-2)(x+2)}$

$= \dfrac{-2x^2 - 2x + 24}{(x-3)(x-2)(x+2)}$

$= \dfrac{-2(x^2 + x - 12)}{(x-3)(x-2)(x+2)}$

$\dfrac{-2(x+4)(x-3)}{(x-3)(x-2)(x+2)}$

$= \dfrac{-2(x+4)}{(x-2)(x+2)}$, se $x \neq 3$

Exercícios

1. **(a)** e **(c):** $2(-3)^2 + 5(-3) = 2(9) - 15 = 18 - 15 = 3$, e $2(1/2)^2 + 5(1/2) = 2(1/4) + 5/2 = 1/2 + 5/2 = 6/2 = 3$. Substituir $x = -1/2$ resulta -2 e não 3.

2. **(a):** $-1/2 + 1/6 = -3/6 + 1/6 = -2/6 = -1/3$ e $-1/3 = -1/3$. Ou multiplicando os dois lados por 6: $6(x/2) + 6(1/6) = 6(x/3)$, assim, $3x + 1 = 2x$. Subtraia $2x$ dos dois lados: $x + 1 = 0$. Subtraia 1 dos dois lados: $x = -1$.

3. **(b):** $\sqrt{1 - 0^2} + 2 = \sqrt{1} + 2 = 1 + 2 = 3$

Substituir $x = -2$ ou $x = 2$ resulta $\sqrt{1 - 4} + 2 = \sqrt{-3} + 2$, que é indefinido.

4. **(c):** $(10 - 2)^{1/3} = 8^{1/3} = 2$. Substituir $x = -6$ resulta -2 e não 2; substituir $x = 8$ resulta $6^{1/3} \cong 1{,}82$ e não 2.

5. Sim: $-3x + 5 = 0$.

6. Não. Não há variável x na equação.

7. Não. Subtrair x dos dois lados resulta $3 = -5$, que é falso e não contém a variável x.

8. Não. A maior potência de x é 2, assim, a equação é quadrática e não linear.

9. Não. A equação tem $\sqrt{x}$, assim, não é linear.

10. Não. A equação tem $1/x = x^{-1}$, assim não é linear.

11. $3x = 24$
$x = 8$

12. $4x = -16$
$x = -4$

13. $3t = 12$
$t = 4$

14. $2t = 12$
$t = 6$

15.
$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 4x - 5 \\ 2x &= 4x - 2 \\ -2x &= -2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} 4 - 2x &= 3x - 6 \\ -2x &= 3x - 10 \\ -5x &= -10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} 4 - 3y &= 2y + 8 \\ -3y &= 2y + 4 \\ -5y &= 4 \\ y &= -\frac{4}{5} = -0{,}8 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} 4y &= 5 + 8 \\ -y &= 8 \\ y &= -8 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{2}x\right) &= 2\left(\frac{7}{8}\right) \\ x &= \frac{7}{4} = 1{,}75 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} 3\left(\frac{2}{3}x\right) &= 3\left(\frac{4}{5}\right) \\ 2x &= \frac{12}{5} \\ x &= \frac{12}{10} \\ x &= \frac{6}{5} = 1{,}2 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) &= 2(1) \\ x + \frac{2}{3} &= 2 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} 3\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right) &= 3(1) \\ x + \frac{3}{4} &= 3 \\ x &= \frac{9}{4} = 2{,}25 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} 6 - 8z - 10z - 15 &= z - 17 \\ -18z - 9 &= z - 17 \\ -18z &= z - 8 \\ -19z &= -8 \\ z &= \frac{8}{19} \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} 15z - 9 - 8z - 4 &= 5z - 2 \\ 7z - 13 &= 5z - 2 \\ 7z &= 5z + 11 \\ 2z &= 11 \\ z &= \frac{11}{2} = 5{,}5 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} 4\left(\frac{2x - 3}{4} + 5\right) &= 4(3x) \\ 2x - 3 + 20 &= 12x \\ 2x + 17 &= 12x \\ 17 &= 10x \\ x &= \frac{17}{10} = 1{,}7 \end{aligned}$$

26. $3(2x-4) = 3\left(\frac{4x-5}{3}\right)$

$6x - 12 = 4x - 5$

$6x = 4x + 7$

$2x = 7$

$x = \frac{7}{2} = 3{,}5$

27. $24\left(\frac{t+5}{8} - \frac{t-2}{2}\right) = 24\left(\frac{1}{3}\right)$

$3(t+5) - 12(t-2) = 8$

$3t + 15 - 12t + 24 = 8$

$-9t + 39 = 8$

$-9t = -31$

$t = \frac{31}{9}$

28. $12\left(\frac{t-1}{3} + \frac{t+5}{4}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)$

$4(t-1) + 3(t+5) = 6$

$4t - 4 + 3t + 15 = 6$

$7t + 11 = 6$

$7t = -5$

$t = -\frac{5}{7}$

29. Multiplicar ambos os lados da primeira equação por 2.

30. Divida ambos os lados da primeira equação por 2.

31. **(a)** Não, elas têm soluções diferentes.

$3x = 6x + 9$	$x = 2x + 9$
$-3x = 9$	$-x = 9$
$x = -3$	$x = -9$

(b) Sim, a solução de ambas as equações é $x = 4$.

$6x + 2 = 4x + 10$	$3x + 1 = 3x + 5$
$6x = 4x + 8$	$3x = 2x + 4$
$2x = 8$	$x = 4$
$x = 4$	

32. **(a)** Sim, a solução de ambas as equações é $x = 9/2$.

$3x + 2 = 5x - 7$	$-2x + 2 = -7$
$3x = 5x - 9$	$-2x = -9$
$-2x = -9$	$x = \frac{9}{2}$
$x = \frac{9}{2}$	

(b) Não, elas têm soluções diferentes.

$2x + 5 = x - 7$	$2x = x - 7$
$2x = x - 12$	$x = -7$
$x = -12$	

33. $3x + 5 = 2x + 1$

Subtraindo 5 de cada lado resulta $3x = 2x - 4$.

A resposta é E.

34. $x(x+1) = 0$

$x = 0$ ou $x + 1 = 0$

$x = -1$

A resposta é A.

35. $\frac{2x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$

Multiplicando cada lado por 12 resulta $8x + 6 = 3x - 4$.

A resposta é B.

36. $P = 2(b+h)$

$\frac{1}{2}P = b + h$

$\frac{1}{2}P - b = h$

$h = \frac{1}{2}P - b = \frac{P - 2b}{2}$

37. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

$h(b_1 + b_2) = 2A$

$b_1 + b_2 = \frac{2A}{h}$

$b_1 = \frac{2A}{h} - b_2$

38. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{3}{4\pi}V = r^3$

$\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = r$

$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

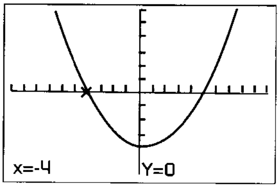
39. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

$\frac{9}{5}C = F - 32$

$\frac{9}{5}C + 32 = F$

$F = \frac{9}{5}C + 32$

40.



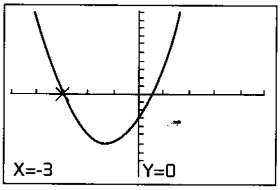
$x = -4$ ou $x = 5$

Os fatores do lado esquerdo para $(x + 4)(x - 5) = 0$:

$x + 4 = 0$ ou $x - 5 = 0$

$x = -4$ $\quad$ $x = 5$

41.



$[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

$x = -3$ ou $x = 0{,}5$.

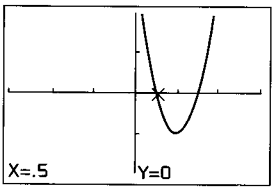
Os fatores do lado esquerdo para $(x + 3)(2x - 1) = 0$:

$x + 3 = 3$ ou $2x - 1 = 0$

$x = -3$ $\quad$ $2x = 1$

$x = 0{,}5$

42.



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

$x = 0{,}5$ ou $x = 1{,}5$.

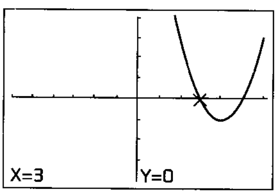
Os fatores do lado esquerdo para $(2x - 1)(2x - 3) = 0$:

$2x - 1 = 0$ ou $2x - 3 = 0$

$2x = 1$ $\quad$ $2x = 3$

$x = 0{,}5$ $\quad$ $x = 1{,}5$

43.



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

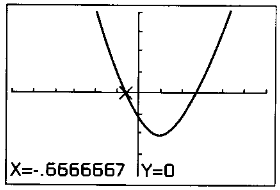
$x = 3$ ou $x = 5$

Reescreva como $x^2 - 8x + 15 = 0$; os fatores do lado esquerdo para $(x - 3)(x - 5) = 0$:

$x - 3 = 0$ ou $x - 5 = 0$

$x = 3$ $\quad$ $x = 5$

44.



$[-6, 6]$ por $[-20, 20]$

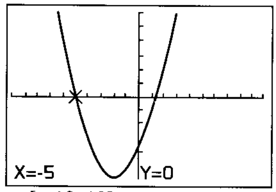
$x = -2/3$ ou $x = 3$.

Reescreva como $3x^2 - 7x - 6 = 0$; os fatores do lado esquerdo para $(3x + 2)(x - 3) = 0$:

$3x + 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$

$x = -\dfrac{2}{3}$ $\quad$ $x = 3$

45.



$[-10, 10]$ por $[-30, 30]$

$x = -5$ ou $x = 4/3$

Reescreva como $3x^2 + 11x - 20 = 0$; os fatores do lado esquerdo para $(3x - 4)(x + 5) = 0$:

$3x - 4 = 0$ ou $x + 5 = 0$

$x = \dfrac{4}{3}$ $\quad$ $x = -5$

46. Reescreva como $(2x)^2 = 5^2$; então $2x = \pm 5$, ou $x = \pm 5/2$.

47. Divida ambos os lados por 2 para obter $(x - 5)^2 = 8{,}5$. Então, $x - 5 = \pm\sqrt{8{,}5}$ e $x = 5 \pm \sqrt{8{,}5}$

48. Divida ambos os lados por 3 para obter $(x + 4)^2 = 8/3$. Então, $x + 4 = \pm\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ e $x = -4 \pm\sqrt{\dfrac{8}{3}}$.

49. Divida ambos os lados por 4 para obter $(u + 1)^2 = 4{,}5$. Então, $u + 1 = \pm\sqrt{4{,}5}$ e $u = -1 \pm\sqrt{4{,}5}$.

50. Adicionar $2y^2 + 8$ a ambos os lados resulta $4y^2 = 14$. Divida ambos os lados por 4 para obter $y^2 = 7/2$, assim $y = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

51. $2x + 3 = \pm 13$, assim $x = \dfrac{1}{2}(-3 \pm 13)$, resulta $x = -8$ ou $x = 5$.

52. $x^2 + 6x + 3^2 = 7 + 3^2$

$(x + 3)^2 = 16$

$x + 3 = \pm\sqrt{16}$

$x = -3 \pm 4$

$x = -7$ ou $x = 1$

53. $x^2 + 5x = 9$

$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 9 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$(x + 2,5)^2 = 9 + 6,25$

$x + 2,5 = \pm\sqrt{15,25}$

$x = -2,5 - \sqrt{15,25} \cong -6,41$ ou $x = -2,5 + \sqrt{15,25} \cong 1,41$

54. $x^2 - 7 = -\frac{5}{4}$

$x^2 - 7x + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = -\frac{5}{4} + \left(-\frac{7}{2}\right)^2$

$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 11$

$x - \frac{7}{2} = \pm\sqrt{11}$

$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{11}$

$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{11} \cong 0,18$ ou $x = \frac{-7}{2} + \sqrt{11} \cong 6,82$

55. $x^2 + 6x = 4$

$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 4 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$

$(x + 3)^2 = 4 + 9$

$x + 3 = \pm\sqrt{13}$

$x = -3 \pm \sqrt{13}$

$x = -3 - \sqrt{13} \cong -6,61$ ou $x = -3 + \sqrt{13} \cong 0,61$

56. $2x^2 - 7x + 9 = x^2 - 2x - 3 + 3x$

$2x^2 - 7x + 9 = x^2 + x - 3$

$x^2 - 8x = -12$

$x^2 - 8x + (-4)^2 = -12 + (-4)^2$

$(x - 4)^2 = 4$

$x - 4 = \pm 2$

$x = 4 \pm 2$

$x = 2$ ou $x = 6$

57. $3x^2 - 6x - 7 = x^2 + 3x - x^2 - x + 3$

$3x^2 - 8x = 10$

$x^2 - \frac{8}{3}x = \frac{10}{3}$

$x^2 - \frac{8}{3}x + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2$

$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} + \frac{16}{9}$

$x - \frac{4}{3} = \pm\sqrt{\frac{46}{9}}$

$x = \frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{46}$

$x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{46} \cong -0,93$ ou

$x = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{46} \cong 3,59$

58. $a = 1$, $b = 8$, e $c = -2$:

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{72}}{2}$

$= \frac{-8 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -4 \pm 3\sqrt{2}$

$x \cong -8,24$ ou $x \cong 0,24$

59. $a = 2$, b $= -3$, e $c = 1$:

$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$

60. $x^2 - 3x - 4 = 0$, assim, $a = 1$, $b = -3$, e $c = -4$:

$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x = -1$ ou $x = 4$

61. $x^2 - \sqrt{3}x - 5 = 0$, assim, $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ e $c = -5$:

$x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$

$= \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{23}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}\sqrt{23}$

$x \cong -1,53$ ou $x \cong 3,26$

62. $x^2 + 5x - 12 = 0$, assim, $a = 1$, $b = 5$ e $c = -12$:

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$

$= \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{73}}{2}$

$x \cong -6,77$ ou $x \cong 1,77$

63. $x^2 - 4x - 32 = 0$, assim, $a = 1$, $b = -4$, $c = -32$:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-32)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{144}}{2} = 2 \pm 6$$

$x = -4$ ou $x = 8$

64. Intercepta o eixo $x = 3$ e o eixo $y = -2$.

65. Intercepta o eixo $x = 1$ e 3, o eixo $y = 3$.

66. Intercepta o eixo $x = -2$, 0, 2 e o eixo $y = 0$.

67. Não intercepta o eixo x nem o eixo y.

68. Gráfico de $y = |x - 8|$ e $y = 2$, com soluções $t = 6$ ou $t = 10$.

69. Gráfico de $y = |x + 1|$ e $y = 4$, com soluções $x = -5$ ou $x = 3$.

70. Gráfico de $y = |2x + 5|$ e $y = 7$, com soluções $x = 1$ ou $x = -6$.

71. Gráfico de $y = |3 - 5x|$ e $y = 4$, com soluções $x = -1/5$ ou $x = 7/5$.

72. Gráfico de $y = |2x - 3|$ e $y = x^2$, com soluções $x = -3$ ou $x = 1$.

73. Gráfico de $y = |x + 1|$ e $y = 2x - 3$, com soluções $x = 4$.

74. **(a)** As duas funções são $y_1 = 3\sqrt{x + 4}$ (começando no eixo x) e $y_2 = x^2 - 1$.

(b) Este é o gráfico de $y = 3\sqrt{x} + 4 - x^2 + 1$.

(c) As coordenadas de x das intersecções na primeira figura são as mesmas das coordenadas de x onde o segundo gráfico cruza o eixo x.

75. Os fatores do lado esquerdo para $(x + 2)(x - 1) = 0$:

$x + 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$x = -2$ $\quad$ $x = 1$

76. O gráfico de $y = x^2 - 18$ intercepta o eixo x em $x \cong -4{,}24$ ou $x \cong 4{,}24$. Temos a contar

$x^2 - 3x = 12 - 3x + 6$

$x^2 - 18 = 0$

77. $2x - 1 = 5$ ou $2x - 1 = -5$

$2x = 6$ $\quad$ $2x = -4$

$x = 3$ $\quad$ $x = -2$

78. $x + 2 = 2\sqrt{x + 3}$

$x^2 + 4x + 4 = 4(x + 3)$

$x^2 = 8$

$x = -\sqrt{8}$ ou $x = \sqrt{8}$

$-\sqrt{8}$ é uma solução estranha, $x = \sqrt{8} \cong 2{,}83$.

79. Do gráfico de $y = x^3 + 4x^2 - 3x - 2$, as soluções da equação (que interceptam o x no gráfico) são $x \cong -4{,}56$, $x \cong -0{,}44$, $x = 1$.

80. Do gráfico de $y = x^3 - 4x + 2$, as soluções da equação (que interceptam x no gráfico) são $x \cong -2{,}21$, $x \cong -0{,}54$, $x \cong 1{,}68$.

81. $x^2 + 4x - 1 = 7$ ou $x^2 + 4x - 1 = -7$

$x^2 + 4x - 8 = 0$ $\quad$ $x^2 + 4x + 6 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 32}}{2}$ $\quad$ $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2}$

$x = -2 \pm 2\sqrt{3}$ $\quad$ sem soluções reais para esta equação.

sem soluções reais para esta equação.

82. Do gráfico de $y = |x + 5| - |x - 3|$, $y = 0$ quando $x = -1$.

83. Do gráfico de $y = |0{,}5x + 3|$ e $y = x^2 - 4$, temos $x \cong -2{,}41$ ou $x \cong 2{,}91$.

84. Do gráfico de $y = \sqrt{x + 7}$ e $y = -x^2 + 5$, temos $x \cong -1{,}64$ ou $x \cong 1{,}45$.

85. **(a)** Existem duas raízes distintas, pois $b^2 - 4ac > 0$ implica que $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ são 2 números reais distintos.

(b) Existe exatamente uma raiz, pois implica que $\pm\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, assim a raiz deve ser $x = -\dfrac{b}{a}$.

(c) Não existe raiz real, pois $b^2 - 4ac < 0$ implica que $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ não são números reais.

86. As respostas podem variar.

(a) $x^2 + 2x - 3$ tem discriminante $(2)^2 - 4(1)(-3) = 16$, assim tem duas raízes distintas. O gráfico (ou fatoração) mostra que as raízes estão em $x = -3$ e $x = 1$.

(b) $x^2 + 2x + 1$ tem discriminante $(2)^2 - 4(1)(1) = 0$, assim tem uma raiz. O gráfico (ou fatoração) mostra que a raiz está em $x = -1$.

(c) $x^2 + 2x + 2$ tem discriminante $(2)^2 - 4(1)(2) = -4$, assim, não tem raiz real. O gráfico está totalmente acima do eixo x.

87. Seja x a largura do campo (em *yd*), o comprimento é $x + 30$. Então, a área do campo tem largura de 80 *yd* e $80 + 30 = 110$ *yd* de comprimento.

$8800 = x(x + 30)$

$0 = x^2 + 30x - 8800$

$0 = (x + 110)(x - 80)$

$0 = x + 110$ ou $0 = x - 80$

$x = -110$ ou $x = 80$

88. Resolvendo $x^2 + (x + 5)^2 = 18^2$, ou $2x^2 + 10x - 299 = 0$, resulta $x \cong 9{,}98$ ou $x \cong -14{,}98$. A escada está cerca de $x + 5 \cong 14{,}98\ ft$ de altura na parede.

89. A área do quadrado é x^2. A área do semicírculo é $1/2\pi r^2 = 1/2\pi(1/2x)^2$, como o raio do semicírculo é $1/2x$. Então, $200 = x^2 + 1/2\pi(1/2x)^2$. Resolvendo (graficamente é mais fácil) resulta $x \cong 11{,}98$ ft (x deve ser positivo).

90. Verdadeiro.

91. Falso.

92. A resposta é D.

93. A resposta é B.

94. A resposta é B.

95. A resposta é E.

96. **(a)** $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

(b) $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

(c) $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

97. **(a)** $c = 2$

$|x^2 - 4| = 2 \Rightarrow x^2 - 4 = 2$ ou $x^2 - 4 = -2$

$x^2 = 6$ $\qquad$ $x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{6}$ $\qquad$ $x = \pm\sqrt{2}$

$|x^2 - 4| = 2$, $\{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{6}\}$.

(b) $c = 4$

$|x^2 - 4| = 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 4$ ou $x^2 - 4 = -4$

$x^2 = 8$ $\qquad$ $x^2 = 0$

$x = \pm\sqrt{8}$ $\qquad$ $x = 0$

(c) $c = 5$

$|x^2 - 4| = 5 \Rightarrow x^2 - 4 = 5$ ou $x^2 - 4 = -5$

$x^2 = 9$ $\qquad$ $x^2 = -1$

$x = \pm 3$ $\qquad$ sem solução

$|x^2 - 4| = 5$, $\{\pm 3\}$

(d) $c = -1$. O gráfico sugere $y = -1$ não intersecciona $y = |x^2 - 4|$. Como o valor absoluto nunca é negativo, $|x^2 - 4| = -1$ não tem soluções.

(e) Não existem outros possíveis números de soluções desta equação. Para qualquer , a solução envolve duas equações quadráticas, cada um pode ter nenhuma, uma ou duas soluções.

98. **(a)** $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

$$= \frac{-2b + \sqrt{D} - \sqrt{D}}{2a}$$

$$\frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

(b) $\frac{(-b + \sqrt{D})}{2a} \cdot \frac{(-b - \sqrt{D})}{2a}$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

99. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5$. Como $a = 2$, isso significa que $b = -10$.

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = 3$, como $a = 2$, isso significa que $c = 6$. As soluções são

$\frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{4}$, que se reduz

a $2{,}5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$, ou aproximadamente 0, 697 e 4,303.

CAPÍTULO 6

Revisão rápida

1. $-7 < 2x - 3 < 7$

$-4 < 2x < 10$

$-2 < x < 5$

2. $5x - 2 \geq 7x + 4$
$-2x \geq 6$
$x \leq -3$

3. $|x + 2| = 3$
$x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$
$x = 1$ ou $x = -5$

4. $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$

5. $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$

6. $9x^2 - 16y^2 = (3x - 4y)(3x + 4y)$

7. $\dfrac{z^2 - 25}{z^2 - 5z} = \dfrac{(z - 5)(z + 5)}{z(z - 5)} = \dfrac{z + 5}{z}$

8. $\dfrac{x^2 + 2x - 35}{x^2 - 10x + 25} = \dfrac{(x + 7)(x - 5)}{(x - 5)(x - 5)} = \dfrac{x + 7}{x - 5}$

9. $\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{x + 1}{3x - 4}$
$= \dfrac{x(3x - 4)}{(x - 1)(3x - 4)} + \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(3x - 4)}$
$= \dfrac{4x^2 - 4x - 1}{(x - 1)(3x - 4)}$

10. $\dfrac{2x - 1}{(x - 2)(x + 1)} + \dfrac{x - 3}{(x - 2)(x - 1)}$
$= \dfrac{(2x - 1)(x - 1) + (x - 3)(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)(x - 1)}$
$= \dfrac{(2x^2 - 3x + 1) + (x^2 - 2x - 3)}{(x - 2)(x + 1)(x - 1)}$
$= \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{(x - 2)(x + 1)(x - 1)}$
$= \dfrac{(3x + 1)(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)(x - 1)}$
$\dfrac{(3x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$, se $x \neq 2$.

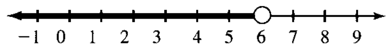
Exercícios

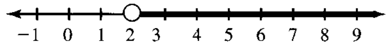
1. **(a)**: $2(0) - 3 = 0 - 3 = -3 < 7$. No entanto, substituindo $x = 5$ resulta 7 (não é menor que 7); substituindo $x = 6$ resulta 9.

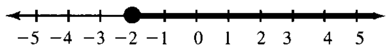
2. **(b)** e **(c)**: $3(3) - 4 = 9 - 4 = 5 \geq 5$ e $3(4) - 4 = 12 - 4 = 8 \geq 5$

3. **(b)** e **(c)**: $4(2) - 1 = 8 - 1 = 7$ e $-1 < 7 \leq 11$, e também $4(3) - 1 = 12 - 1 = 11$ e $-1 < 11 \leq 11$. No entanto, substituindo $x = 0$ resulta -1 (não é maior que -1).

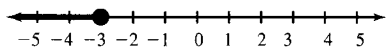
4. **(a)**, **(b)** e **(c)**: $1 - 2(-1) = 1 + 2 = 3$ e $-3 \leq 3 \leq 3$; $1 - 2(0) = 1 - 0 = 1$ e $-3 \leq 1 \leq 3$; $1 - 2(2) = 1 - 4 = -3$ e $-3 \leq -3 \leq 3$.

5. 

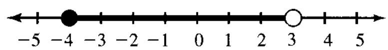
6. 

7. 

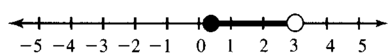
$2x - 1 \leq 4x + 3$
$2x \leq 4x + 4$
$-2x \leq 4$
$x \geq -2$

8. 

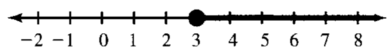
$3x - 1 \geq 6x + 8$
$3x \geq 6x + 9$
$-3x \geq 9$
$x \leq -3$

9. 

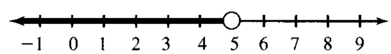
$2 \leq x + 6 < 9$
$-4 \leq x < 3$

10. 

$-1 \leq 3x - 2 < 7$
$1 \leq 3x < 9$
$\dfrac{1}{3} \leq x < 3$

11. 

$10 - 6x + 6x - 3 \leq 2x + 1$
$7 \leq 2x + 1$
$6 \leq 2x$
$3 \leq x$
$x \geq 3$

12. 

$4 - 4x + 5 + 5x > 3x - 1$
$9 + x > 3x - 1$
$10 + x > 3x$
$10 > 2x$
$5 > x$
$x < 5$

13. $4\left(\dfrac{5x + 7}{4}\right) \leq 4(-3)$
$5x + 7 \leq -12$
$5x \leq -19$
$x \leq -\dfrac{19}{5}$

14. $5\left(\dfrac{3x-2}{5}\right) > 5(-1)$

$3x - 2 > -5$
$3x > -3$
$x > -1$

15. $3(4) \geq 3\left(\dfrac{2y-5}{3}\right) \geq 3(-2)$

$12 \geq 2y - 5 \geq -6$
$17 \geq 2y \geq -1$
$\dfrac{17}{2} \geq y \geq -\dfrac{1}{2}$
$-\dfrac{1}{2} \leq y \leq \dfrac{17}{2}$

16. $4(1) > 4\left(\dfrac{3y-1}{4}\right) > 4(-1)$

$4 > 3y - 1 > -4$
$5 > 3y > -3$
$\dfrac{5}{3} > y > -1$
$-1 < y < \dfrac{5}{3}$

17. $0 \leq 2z + 5 < 8$
$-5 \leq 2z < 3$
$-\dfrac{5}{2} \leq z < \dfrac{3}{2}$

18. $-6 < 5t - 1 < 0$
$-5 < 5t < 1$
$-1 < t < \dfrac{1}{5}$

19. $12\left(\dfrac{x-5}{4} + \dfrac{3+2x}{3}\right) < 12(-2)$

$3(x-5) + 4(3-2x) < -24$
$3x - 15 + 12 - 8x < -24$
$-5x - 3 < -24$
$-5x < -21$
$x > \dfrac{21}{5}$

20. $6\left(\dfrac{3-x}{2} + \dfrac{5x-2}{3}\right) < 6(-1)$

$3(3-x) + 2(5x-2) < -6$
$9 - 3x + 10x - 4 < -6$
$7x + 5 < -6$
$7x < -11$
$x < -\dfrac{11}{7}$

21. $10\left(\dfrac{2y-3}{2} + \dfrac{3y-1}{5}\right) < 10(y-1)$

$5(2y-3) + 2(3y-1) < 10y - 10$
$10y - 15 + 6y - 2 < 10y - 10$
$16y - 17 < 10y - 10$
$16y < 10y + 7$
$6y < 7$
$y < \dfrac{7}{6}$

22. $24\left(\dfrac{3-4y}{6} - \dfrac{2y-3}{8}\right) \geq 24(2-y)$

$4(3-4y) - 3(2y-3) \geq 48 - 24y$
$12 - 16y - 6y + 9 \geq 48 - 24y$
$-22y + 21 \geq 48 - 24y$
$-22 \geq 27 - 24y$
$2y \geq 27$
$y \geq \dfrac{27}{2}$

23. $2\left[\dfrac{1}{2}(x-4) - 2x\right] \leq 2[5(3-x)]$

$x - 4 - 4x \leq 10(3-x)$
$-3x - 4 \leq 30 - 10x$
$-3x \leq 34 - 10x$
$7x \leq 34$
$x \leq \dfrac{34}{7}$

24. $6\left[\dfrac{1}{2}(x+3) + 2(x-4)\right] < 6\left[\dfrac{1}{3}(x-3)\right]$

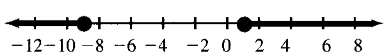
$3(x+3) + 12(x-4) < 2(x-3)$
$3x + 9 + 12x - 48 < 2x - 6$
$15x - 39 < 2x - 6$
$15x < 2x + 33$
$13x < 33$
$x < \dfrac{33}{13}$

25. Falso.

26. Verdadeiro.

27. $(-\infty, -9] \cup [1, +\infty)$:

$x + 4 \geq 5$ ou $x + 4 \leq -5$
$x \geq 1$ $\quad$ $x \leq -9$

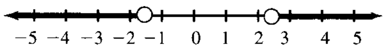


28. $]-\infty, -1{,}3[\ \cup\ ]2{,}3, \infty[$:

$2x - 1 > 3{,}6$ ou $2x - 1 < -3{,}6$

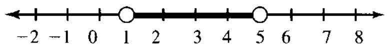
$2x > 4{,}6$ $\qquad 2x < -2{,}6$

$x > 2{,}3$ $\qquad x < -1{,}3$



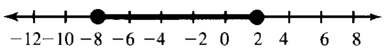
29. $]1, 5[$

$-2 < x - 3 < 2$ $\qquad 1 < x < 5$



30. $[-8, 2]$

$-5 \leq x + 3 < 5$ $\qquad -8 \leq x \leq 2$



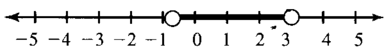
31. $\left]-\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right[$

$|4 - 3x| < 6$

$-6 < 4 - 3x < 6$

$-10 < -3x < 2$

$\dfrac{10}{3} > x > -\dfrac{2}{3}$



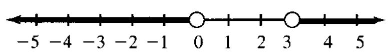
32. $]-\infty, 0[\ \cup\ ]3, +\infty[$

$|3 - 2x| > 3$

$3 - 2x > 3$ ou $3 - 2x < 3$

$-2x > 0$ $\qquad -2x < -6$

$x < 0$ $\qquad x > 3$

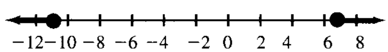


33. $]-\infty, -11]\cup[7, +\infty[$

$\dfrac{x+2}{3} \leq -3$ ou $\dfrac{x+2}{3} \geq 3$

$x + 2 \leq -9$ $\qquad x + 2 \geq 9$

$x \leq -11$ $\qquad x \geq 7$



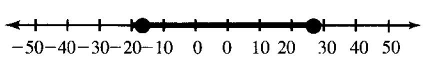
34. $[-19, 29]$

$$\left|\frac{x-5}{4}\right| \leq 6$$

$$-6 \leq \frac{x-5}{4} \leq 6$$

$$-24 \leq x - 5 \leq 24$$

$$-19 \leq x \leq 29$$



35. $2x^2 + 17x + 21 = 0$

$(2x + 3)(x + 7) = 0$

$2x + 3 = 0$ ou $x + 7 = 0$

$x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = -7$

O gráfico de $y = 2x^2 + 17x + 21$ está abaixo do eixo x para $-7 < x < -3/2$. Portanto, $[-7, -3/2]$ é a solução pois os extremos estão incluídos.

36. $6x^2 - 13x + 6 = 0$

$(2x - 3)(3x - 2) = 0$

$2x - 3 = 0$ ou $3x - 2 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = \dfrac{2}{3}$

O gráfico de $y = 6x^2 - 13x + 6$ está acima do eixo x para $x < 2/3$ e para $x > 3/2$. Portanto, $]-\infty, 2/3] \cup [3/2, +\infty[$ é a solução pois os extremos estão incluídos.

37. $2x^2 + 7x - 15 = 0$

$(2x - 3)(x + 5) = 0$

$2x - 3 = 0$ ou $x + 5 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = -5$

O gráfico de $y = 2x^2 + 7x - 15$ está acima do eixo x para $x < -5$ e para $x > 3/2$. Portanto, $]-\infty, -5[\ \cup\ ]3/2, +\infty[$ é a solução.

38. $4x^2 - 9x + 2 = 0$

$(4x - 1)(x - 2) = 0$

$4x - 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = \dfrac{1}{4}$ ou $x = 2$

O gráfico de $y = 4x^2 - 9x + 2$ está abaixo do eixo x para $1/4 < x < 2$. Portanto, $]1/4, 2[$ é a solução.

39. $2 - 5x - 3x^2 = 0$

$(2 + x)(1 - 3x) = 0$

$2 + x = 0$ ou $1 - 3x = 0$

$x = -2$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

O gráfico de $y = 2 - 5x - 3x^2$ está abaixo do eixo x para $x < -2$ e para $x > 1/3$. Portanto, $]-\infty, -2[\ \cup\ ]1/3, +\infty[$ é a solução.

40. $21 + 4x - x^2 = 0$
$(7 - x)(3 + x) = 0$
$7 - x = 0$ ou $3 + x = 0$
$x = 7$ ou $x = -3$
O gráfico de $y = 21 + 4x - x^2$ está acima do eixo x para $-3 < x < 7$. Portanto, $]-3, +7[$ é a solução, pois os extremos estão incluídos.

41. $x^3 - x = 0$
$x(x^2 - 1) = 0$
$x(x + 1)(x - 1) = 0$
$x = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$
$x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 1$
O gráfico de $y = x^3 - x$ está acima do eixo x para $x > 1$ e para $-1 < x < 0$. Portanto, $[-1, 0] \cup [1, +\infty[$ é a solução, pois os extremos estão incluídos.

42. $x^3 - x^2 - 30x = 0$
$x(x^2 - x - 30) = 0$
$x(x - 6)(x + 5) = 0$
$x = 0$ ou $x - 6 = 0$ ou $x + 5 = 0$
$x = 0$ ou $x = 6$ ou $x = -5$
O gráfico de $y = x^3 - x^2 - 30x$ está abaixo do eixo x para $x < -5$ e para $0 < x < 6$. Portanto, $]-\infty, -5] \cup [0, 6]$ é a solução, pois os extremos estão incluídos.

43. O gráfico de $y = x^2 - 4x - 1$ é zero para $x \cong -0{,}24$ e $x \cong 4{,}24$ e está abaixo do eixo x para $-0{,}24 < x < 4{,}24$. Portanto, $]-0{,}24; 4{,}24[$ é a solução aproximada.

44. O gráfico de $y = 12x^2 - 25x + 12$ é zero para $x = 4/3$ e $x = 3/4$ e está acima do eixo x para $x < 3/4$ e para $x > 4/3$. Portanto, $]-\infty, 3/4] \cup [4/3, +\infty[$ é a solução.

45. $6x^2 - 5x - 4 = 0$
$(3x - 4)(2x + 1) = 0$
$3x - 4 = 0$ ou $2x + 1 = 0$
$x = \dfrac{4}{3}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$
O gráfico de $y = 6x^2 - 5x - 4$ está acima do eixo x para $x < -1/2$ e para $x > 4/3$. Portanto, $]-\infty, -1/2[\cup]4/3, +\infty[$ é a solução.

46. $4x^2 - 1 = 0$
$(2x + 1)(2x - 1) = 0$
$2x + 1 = 0$ ou $2x - 1 = 0$
$x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{2}$
O gráfico de $y = 4x^2 - 1$ está abaixo do eixo x para $-1/2 < x < 1/2$. Portanto, $[-1/2, 1/2]$ é a solução, pois os extremos estão incluídos.

47. O gráfico de $y = 9x^2 + 12x - 1$ parece ser zero para $x \cong -1{,}41$ e $x \cong 0{,}08$ e está acima do eixo x para $x < -1{,}41$ e $x > 0{,}08$. Portanto, $]-\infty, -1{,}41] \cup [0{,}08, +\infty[$ é a solução aproximada, e os extremos estão incluídos.

48. O gráfico de $y = 4x^2 - 12x + 7$ parece ser zero para $x \cong 0{,}79$ e $x \cong 2{,}21$ e está abaixo do eixo x para $0{,}79 < x < 2{,}21$. Portanto, $]0{,}79, 2{,}21[$ é a solução aproximada.

49. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
$(2x - 1)(2x - 1) = 0$
$(2x - 1)^2 = 0$
$2x - 1 = 0$
$x = \dfrac{1}{2}$
O gráfico de $y = 4x^2 - 4x + 1$ está totalmente acima do eixo x, exceto em $x = 1/2$. Portanto, $]-\infty, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$ é a solução estabelecida.

50. $x^2 - 6x + 9 = 0$
$(x - 3)(x - 3) = 0$
$(x - 3)^2 = 0$
$x - 3 = 0$
$x = 3$
O gráfico de $y = x^2 - 6x + 9$ está totalmente acima do eixo x, exceto em $x = 3$. Portanto, $\{3\}$ é a solução estabelecida.

51. $x^2 - 8x + 16 = 0$
$(x - 4)(x - 4) = 0$
$(x - 4)^2 = 0$
$x - 4 = 0$
$x = 4$
O gráfico de $y = x^2 - 8x + 16$ está totalmente acima do eixo x, exceto em $x = 4$. Portanto, não há solução, isto é, a solução é dada por ϕ.

52. $9x^2 + 12x + 4 = 0$
$(3x + 2)(3x + 2) = 0$
$(3x + 2)^2 = 0$
$3x + 2 = 0$
$x = -\dfrac{2}{3}$
O gráfico de $y = 9x^2 + 12x + 4$ está totalmente acima do eixo x, exceto em $x = -2/3$. Portanto, todo número real satisfaz a inequação. A solução é $]-\infty, +\infty[$.

53. O gráfico de $y = 3x^3 - 12x + 2$ é zero para $x \cong -2{,}08$, $x \cong 0{,}17$ e $x \cong 1{,}91$ e está acima do eixo x para $-2{,}08 < x < 0{,}17$ e $x > 1{,}91$. Portanto, $[-2{,}08, 0{,}17] \cup [1{,}91, +\infty[$ é a solução aproximada.

54. O gráfico de $y = 8x - 2x^3 - 1$ é zero para $x \cong -2{,}06$, $x \cong 0{,}13$ e $x \cong 1{,}93$ e está abaixo do eixo x para $-2{,}06 < x < 0{,}13$ e $x > 1{,}93$. Portanto, $]-2{,}06; 0{,}13[\cup [1{,}93, +\infty[$ é a solução aproximada.

55. $2x^3 + 2x > 5$ é equivalente a $2x^3 + 2x - 5 > 0$. O gráfico de $y = 2x^3 + 2x - 5$ é zero para $x \cong 1{,}11$ e está acima do eixo x para $x > 1{,}11$. Assim, $]1{,}11; +\infty[$ é a solução aproximada.

56. $4 \leq 2x^3 + 8x$ é equivalente a $2x^3 + 8x - 4 \geq 0$. O gráfico de $y = 2x^3 + 8x - 4$ é zero para $x \cong 0{,}47$ e está acima do eixo x para $x > 0{,}47$. Assim, $[0{,}47, +\infty[$ é a solução aproximada.

57. As respostas podem variar. Algumas possibilidades são:

(a) $x^2 > 0$

(b) $x^2 + 1 < 0$

(c) $x^2 \leq 0$

(d) $(x + 2)(x - 5) \leq 0$

(e) $(x + 1)(x - 4) > 0$

(f) $x(x - 4) \geq 0$

58. Seja x a velocidade média; então $105 < 2x$. Resolvendo a equação resulta $x > 52{,}5$, assim, a menor velocidade média é 52,5 km/h.

59. **(a)** Seja $x > 0$ a largura de um retângulo então a altura é $2x - 2$ e o perímetro é $P = 2[x + (2x - 2)]$. Resolvendo $P < 200$ e $2x - 2 > 0$ resulta $1 \text{ cm} < x < 34 \text{ cm}$.

$$\begin{array}{rcl} 2[x + (2x - 2)] < 200 & \quad\text{e}\quad & 2x - 2 > 0 \\ 2(3x - 2) < 200 & & 2x < 2 \\ 6x - 4 < 200 & & x > 1 \\ 6x < 204 & & \\ x < 34 & & \end{array}$$

(b) A área é $A = x(2x - 2)$. Já sabemos que $x > 1$ da parte (a). Resolver $A \leq 1200$.

$$\begin{array}{c} x(2x - 2) = 1200 \\ 2x^2 - 2x - 1200 = 0 \\ x^2 - x - 600 = 0 \\ (x - 25)(x + 24) = 0 \\ x - 25 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 24 = 0 \\ x = 25 \quad \text{ou} \quad x = -24 \end{array}$$

O gráfico de $y = 2x^2 - 2x - 1200$ está abaixo do eixo x para $1 < x < 25$. Assim, $A \leq 1200$ quando x está no intervalo $]1, 25[$.

60. Substitua 20 e 40 na equação $P = 400/V$ para encontrar a imagem P:$P = 400/20$ e $P = 400/40 = 10$. A pressão pode variar de 10 a 20, ou $10 \leq P \leq 20$. De maneira alternativa, resolva graficamente: gráfico $y = 400/x$ em $[20, 40] \times [0, 30]$ e observe que todos os valores de y estão entre 10 e 20.

61. Falso.

62. Verdadeiro.

63. $|x - 2| < 3$

$-3 < x - 2 < 3$

$-1 < x < 5$

$]-1{,}5[$

A resposta é E.

64. O gráfico de $y = x^2 - 2x + 2$ está totalmente acima do eixo x, assim, $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ para todos os números reais de x. A resposta é D.

65. $x^2 > x$ é verdadeira para todo x negativo ou para $x > 1$. Assim, a solução é $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. A resposta é A.

66. $x^2 \leq 1$ implica $-1 \leq x \leq 1$, assim, a solução é $[-1, 1]$. A resposta é D.

67. **(a)** Os comprimentos dos lados da caixa são x, $12 - 2x$ e $15 - 2x$, assim o volume é $x(12 - 2x)(15 - 2x)$. Resolver $x(12 - 2x)(15 - 2x) = 125$, gráfico $y = x(12 - 2x)(15 - 2x)$ e $y = 125$ e encontrar onde os gráficos se interseccionam: $x \cong 0{,}94$ polegadas ou $x \cong 3{,}78$ polegadas.

(b) O gráfico de $y = x(12 - 2x)(15 - 2x)$ está acima do gráfico de $y = 125$ para $0{,}94 < y < 3{,}78$ (aproximadamente). Assim, escolhendo x no intervalo $]0{,}94; 3{,}78[$ resultará em uma caixa com o volume maior que 125 centímetros cúbicos.

68.

$2x^2 + 7x - 15 = 10$	ou	$2x^2 + 7x - 15 = -10$
$2x^2 + 7x - 25 = 0$		$2x^2 + 7x - 5 = 0$
O gráfico de $y = 2x^2 + 7x - 25$ parece ser zero para $x \cong -5{,}69$ e $x \cong 2{,}19$		O gráfico de $y = 2x^2 + 7x - 5$ parece ser zero para $x \cong -4{,}11$ e $x \cong 0{,}61$

Olhe para os gráficos de $y = |2x^2 + 7x - 15|$ e $y = 10$. O gráfico de $y = |2x^2 + 7x - 15|$ está abaixo do gráfico de $y = 10$ quando $-5{,}69 < x < -4{,}11$ e quando $0{,}61 < x < 2{,}19$. Portanto, $]-5{,}69, -4{,}11[\cup]0{,}61; 2{,}19[$ é a solução aproximada.

69. $2x^2 + 3x - 20 = 10$ ou $2x^2 + 3x - 20 = -10$

$2x^2 + 3x - 30 = 0$ $\quad$ $2x^2 + 3x - 10 = 0$

O gráfico de $y = 2x^2 + 3x - 30$ parece ser zero para $x \cong -4{,}69$ e $x \cong 3{,}19$ $\quad$ O gráfico de $y = 2x^2 + 3x - 10$ parece ser zero para $x \cong -3{,}11$ e $x \cong 1{,}61$

Olhe para os gráficos de $y = |2x^2 + 3x - 20|$ e $y = 10$. O gráfico de $y = |2x^2 + 7x - 20|$ está acima do gráfico de $y = 10$ quando $x < -4{,}69$; $-3{,}11 < x < 1{,}61$ e $x > 3{,}19$. Portanto, $]-\infty, -4{,}69] \cup [-3{,}11, 1{,}61] \cup [3{,}19; +\infty[$ é a solução aproximada, com os extremos incluídos.

CAPÍTULO 7

Revisão rápida

1. $x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$
$x = \pm 4$

2. $9 - x^2 = 0$
$9 = x^2$
$\pm 3 = x$

3. $x - 10 < 0$
$x < 10$

4. $5 - x \leq 0$
$-x \leq -5$
$x \geq 5$

5. Como vimos, o denominador de uma função não pode ser zero. Veremos quando isso ocorre.
$x - 16 = 0$
$x = 16$

6. $x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$
$x = \pm 4$

7. $x - 16 < 0$
$x < 16$

8. $x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$x = \pm 1$

9. $3 - x \leq 0$ e $x + 2 < 0$
$3 \leq x$ $\quad$ $x < -2$
$x < -2$ e $x \geq 3$

10. $x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$
$x = \pm 2$

Exercícios

1. Sim, $y = \sqrt{x - 4}$ é uma função de x, pois, quando o número é substituído por x, há no máximo um valor produzido para $\sqrt{x - 4}$.

2. Não, $y = x^2 \pm 3$ não é uma função de x, pois quando o número é substituído por x, y pode ser tanto 3 maior ou 3 menor que x^2.

3. Não, $x = 2y^2$ não determina y como uma função de x, pois, quando um número positivo é substituído por x, y pode ser $\sqrt{\frac{x}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{x}{2}}$.

4. Sim, $x = 12 - y$ determina y como uma função de x, pois, quando um número é substituído por x, há exatamente um número y que produz x quando subtraído por 12.

5. Sim.

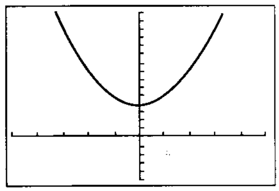
6. Não.

7. Não.

8. Sim.

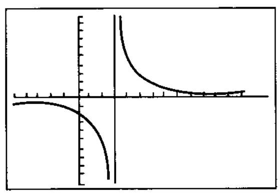
9.

Domínio: $]-\infty, +\infty[$.



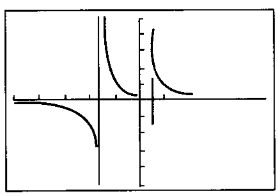
$[-5, 5]$ por $[-5, 15]$

10. Precisamos $x - 3 \neq 0$.
Domínio: $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$.



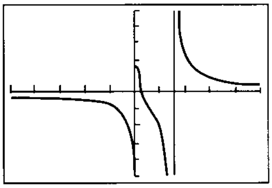
$[-5, 15]$ por $[-10, 10]$

11. Precisamos $x + 3 \neq 0$ e $x - 1 \neq 0$.
Domínio: $]-\infty, -3[\cup]-3, 1[\cup]1, +\infty[$.



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

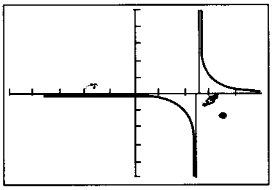
12. Precisamos $x \neq 0$ e $x - 3 \neq 0$.
Domínio: $]-\infty, 0[\cup]0, 3[\cup]3, +\infty[$.



[−10, 10] por [−10, 10]

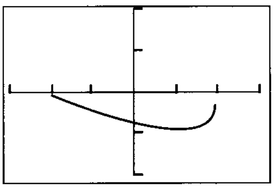
13. Note que $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x} = \dfrac{x}{x(x - 5)}$.

Como resultado, $x - 5 \neq 0$ e $x \neq 0$.
Domínio: $]-\infty, 0[\cup]0, 5[\cup]5, +\infty[$.



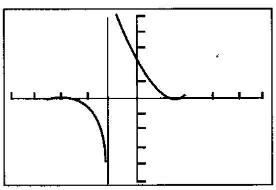
[−10, 10] por [−5, 5]

14. Precisamos $x - 3 \neq 0$ e $4 - x^2 \geq 0$. Isso significa que $x \neq 3$ e $x^2 \leq 4$, esta última implica que $-2 \leq x \leq 2$, assim, o domínio é $[-2, 2]$.



[−3, 3] por [−2, 2]

15. Precisamos $x + 1 \neq 0$, $x^2 + 1 \neq 0$ e $4 - x \geq 0$. O primeiro requisito significa $x \neq -1$, o segundo é verdadeiro para todo x, e o último significa $x \leq 4$. O domínio é $]-\infty, -1[\cup]-1, 4]$.

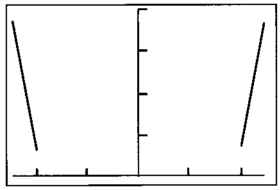


[−5, 5] por [−5, 5]

16. Precisamos

$$\begin{aligned} x^4 - 16x^2 &\geq 0 \\ x^2(x^2 - 16) &\geq 0 \\ x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 16 &\geq 0 \\ x^2 &\geq 16 \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x \geq 4, x &\leq -4 \end{aligned}$$

Domínio: $]-\infty, -4] \cup \{0\} \cup [4, +\infty[$.

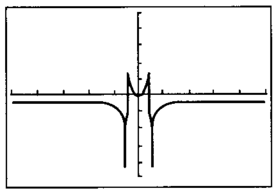


[−5, 5] por [0, 16]

17. $f(x) = 10 - x^2$ pode tomar qualquer valor negativo, pois x^2 é não-negativo, $f(x)$ não pode ser maior que 10. A variação é $]-\infty, 10]$.

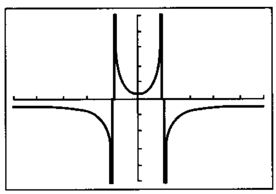
18. $g(x) = 5 + \sqrt{4 - x}$ pode tomar qualquer valor ≥ 5, mas como $\sqrt{4 - x}$ é não-negativo, $g(x)$ não pode ser menor que 5. A variação é $[5, +\infty[$.

19. A variação de uma função é encontrada mais facilmente pelo seu gráfico. Como mostra nosso gráfico, a variação de $f(x)$ é $]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$.



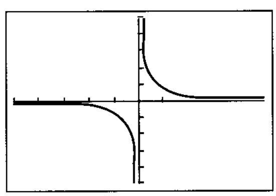
[−10, 10] por [−10, 10]

20. Como mostra nosso gráfico, a variação de $g(x)$ é $]-\infty, -1[\cup [0{,}75, +\infty[$.



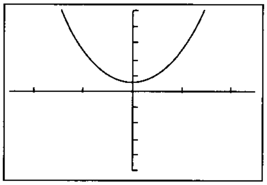
[−10, 10] por [−10, 10]

21. Sim, é não removível.



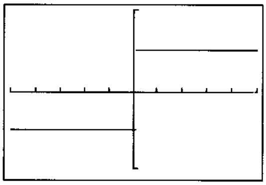
[−10, 10] por [−10, 10]

22. Sim, é removível.



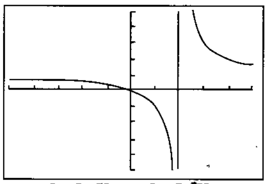
[−5, 5] por [−10, 10]

23. Sim, é não removível.



[−10, 10] por [−2, 2]

24. Sim, é não removível.



[−5, 5] por [−5, 5]

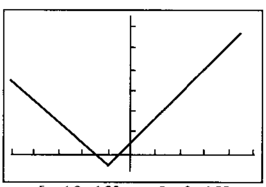
25. Máximo local em (−1, 4) e (5, 5), mínimo local em (2, 2). Função crescente em]− ∞, −1], decrescente em (1, 2), crescente em [2, 5] e decrescente em [5, +∞[.

26. Mínimo local em (1, 2), (3, 3) não é nenhum dos dois casos e (5, 7) é um máximo local. Função decrescente em]−∞, 1], crescente em [1, 5] e decrescente em [5, +∞[.

27. (−1, 3) e (3, 3) são nenhum dos dois casos.]1, 5[é o máximo local, e]5, 1[é um mínimo local. Função crescente em]−∞, 1], decrescente em [1, 5] e crescente em [5, +∞[.

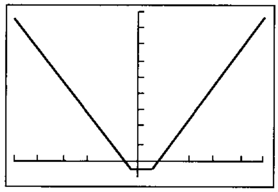
28. (−1, 1) e (3, 1) são mínimos locais, enquanto (1, 6) e (5, 4) são máximos locais. Função decrescente em]−∞, −1], crescente em [−1, 1], decrescente em]1, 3] e crescente em [3, 5] e decrescente em [5, +∞[.

29. Função decrescente em]−∞, −2], crescente em [−2, +∞[.



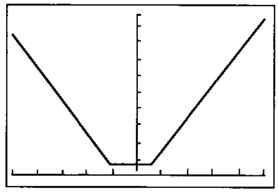
[−10, 10] por [−2, 18]

30. Função decrescente em]−∞, −1]; constante em [−1, 1]; crescente em [1, +∞[.



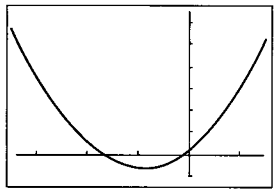
[−10, 10] por [−2, 18]

31. Função decrescente em]−∞, −2]; constante em [−2, 1]; crescente em [1, +∞[.



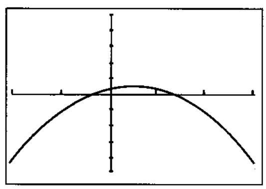
[−10, 10] por [0, 20]

32. Função decrescente em]−∞, −2]; crescente em [−2, +∞[.



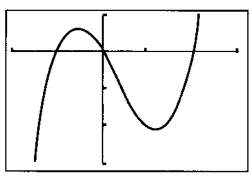
[−7, 3] por [−2, 13]

33. Função crescente em]−∞, −2]; decrescente em [1, +∞[.



[−4, 6] por [−25, 25]

34. Função crescente em]−∞, −0,5]; decrescente em [−0,5, 1,2], crescente em [1,2, +∞[. Os valores médios são aproximados − de fato estão entre −0,549 e 1,215. Os valores dados podem ser observados na janela decimal.



[−2, 3] por [−3, 1]

35. Funções constantes são sempre limitadas.

36. $x^2 > 0$

$-x^2 < 0$

$2 - x^2 < 2$

y é limitada superiormente por $y = 2$.

37. $2^x > 0$ para todo x, assim, y limitada inferiormente por $y = 0$.

38. $2^{-x} = 1/2^x$ para todo x, assim, y é limitada inferiormente por $y = 0$.

39. Como $y = \sqrt{1 - x^2}$ é sempre positivo, sabemos $y \geq 0$ para todo x. Precisamos verificar para uma função limitada superiormente:

$x^2 > 0$

$-x^2 < 0$

$1 - x^2 < 1$

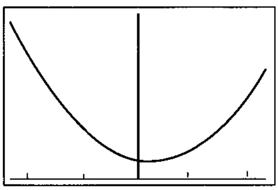
$\sqrt{1 - x^2} < \sqrt{1}$

$\sqrt{1 - x^2} < 1$

Assim, y é limitada por $y = 1$.

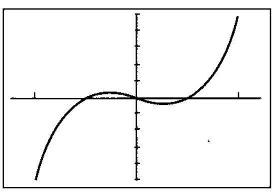
40. Não há restrições em x nem em x^3, assim, y não é limitada superior nem inferiormente.

41. f tem um mínimo local quando $x = 0{,}5$ e $y = 3{,}75$. Não tem máximo.



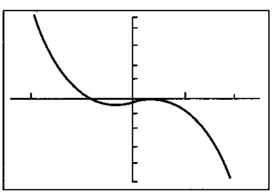
$[-5, 5]$ por $[0, 36]$

42. Máximo local: $y \cong 4{,}08$ em $x \cong -1{,}15$. Mínimo local: $y \cong -2{,}08$ em $x \cong 1{,}15$.



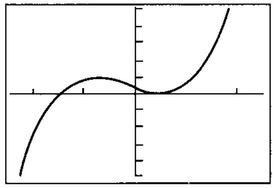
[5, 5] por [50, 50]

43. Mínimo local: $y \cong -4{,}09$ em $x \cong -0{,}82$. Máximo local: $y \cong -1{,}91$ em $x \cong 0{,}82$.



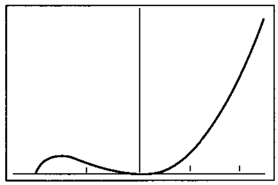
$[-5, 5]$ por $[-50, 50]$

44. Máximo local: $y \cong 9{,}48$ em $x \cong -1{,}67$. Mínimo local: $y = 0$ quando $x = 1$.



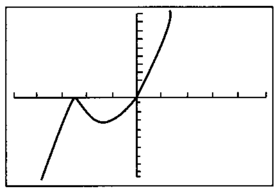
$[-5, 5]$ por $[-50, 50]$

45. Máximo local: $y \cong 9{,}168$ em $x \cong -3{,}20$. Mínimo local: $y = 0$ em $x = 0$ e $y = 0$ em $x = -4$.



$[-5, 5]$ por $[0, 80]$

46. Máximo local: $y = 0$ em $x \cong -2{,}5$. Mínimo local: $y \cong -3{,}13$ em $x = -1{,}25$.



$[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

47. A função é par: $f(-x) = 2(-x)^4 = 2x^4 = f(x)$

48. A função é ímpar: $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$

49. A função é par: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 2}$

$= \sqrt{x^2 + 2} = f(x)$

50. A função é par: $g(-x) = \dfrac{3}{1 + (-x)^2}$

$= \dfrac{3}{1 + x^2} = g(x)$

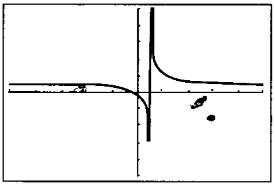
51. Nenhum dos dois casos: $f(-x) = -(-x)^2 + 0{,}03(-x) + 5 = -x^2 - 0{,}03x + 5$, que não é nem $f(x)$ nem $-f(x)$.

52. Nenhum dos dois casos: $f(-x) = (-x)^3 + 0{,}04(-x)^2 + 3 = -x^3 + 0{,}04x^2 + 3$, que não é nem $f(x)$ nem $-f(x)$.

53. A função é ímpar: $g(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x) = -2x^3 + 3x = -g(x)$

54. A função é ímpar: $h(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -h(x)$

55. O quociente $\dfrac{x}{x-1}$ é indefinido em $x = 1$, indicando que $x = 1$ é uma assíntota vertical. De maneira similar, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$, indicando uma assíntota horizontal em $y = 1$. O gráfico confirma essas assíntotas.

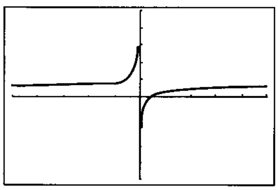


[−10, 10] por [−10, 10]

56. O quociente $\dfrac{x-1}{x}$ é indefinido em $x = 0$, indicando uma possível assíntota vertical em $x = 0$. De maneira similar,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} = 1,$$

indicando uma possível assíntota horizontal em $y = 1$. O gráfico confirma essas assíntotas.

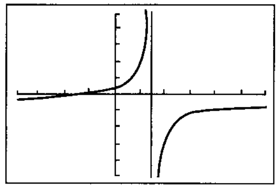


[−10, 10] por [−10, 10]

57. O quociente $\dfrac{x+2}{3-x}$ é indefinido em $x = 3$, indicando uma possível assíntota vertical em $x = 3$. De maneira similar,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{3-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{3-x} = -1,$$

indicando uma possível assíntota horizontal em $y = -1$. O gráfico confirma essas assíntotas.

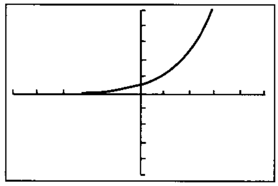


[−8, 12] por [−10, 10]

58. Como $g(x)$ é contínua em $-\infty < x < +\infty$, não esperamos uma assíntota vertical. Entretando,

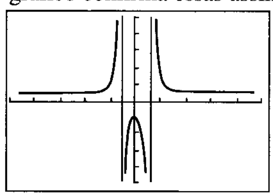
$$\lim_{x\to-\infty} 1{,}5^x = \lim_{x\to+\infty} 1{,}5^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1{,}5^x} = 0,$$

assim esperamos uma assíntota horizontal em $y = 0$. O gráfico confirma esta assíntota.



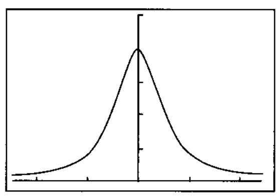
[−10, 10] por [−10, 10]

59. O quociente $\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$ é indefinido em $x = 1$ e $x = -1$. Esperamos duas assíntotas verticais. De maneira similar, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-1} = 1$, assim esperamos uma assíntota horizontal em $y = 1$. O gráfico confirma essas assíntotas.



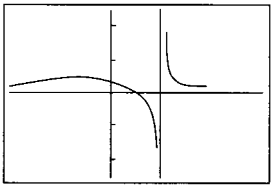
[−10, 10] por [−10, 10]

60. Notamos que $x^2 + 1 > 0$ para $-\infty < x < +\infty$, assim não esperamos uma assíntota vertical. Entretanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2+1} = 0$, assim esperamos uma assíntota horizontal em $y = 0$. O gráfico confirma essa assíntota.



[−5, 5] por [0, 5]

61. O quociente $\dfrac{4x-4}{x^3-8}$ não existe em $x = 2$, esperamos uma assíntota vertical. De maneira similar, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-4}{x^3+8} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-4}{x^3+8} = 0$, assim, esperamos uma assíntota horizontal em $y = 0$. O gráfico confirma essas assíntotas.



$[-4, 6]$ por $[-5, 5]$

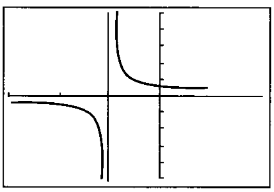
62. O quociente $\dfrac{2x-4}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$= \dfrac{2}{x+2}$

Como $x = 2$ é uma descontinuidade removível, esperamos uma assíntota vertical apenas em $x = -2$. De maneira similar,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-2} = 0,$$

assim, esperamos uma assíntota horizontal em $y = 0$. O gráfico confirma essas assíntotas.



$[-6, 4]$ por $[-10, 10]$

63. O denominador é zero quando $x = -1/2$, assim, há uma assíntota vertical em $x = -1/2$. Quando tende a $+\infty$ ou a $-\infty$, $\dfrac{x+2}{2x+1}$ se comporta mais como $\dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$, assim, há uma assíntota horizontal em $y = 1/2$. O gráfico correspondente é (b).

64. O denominador é zero quando $x = -1/2$, assim, há uma assíntota vertical em $x = -1/2$. Quando tende a $+\infty$ ou a $-\infty$, $\dfrac{x^2+2}{2x+1}$ se comporta mais como $\dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{x}{2}$, assim, $y = x/2$ é uma assíntota inclinada. O gráfico correspondente é (c).

65. O denominador não é zero, qualquer que seja o valor real de x; assim, não há uma assíntota vertical. Quando x é muito maior, $\dfrac{x+2}{2x^2+1}$ se comporta mais como $\dfrac{x}{2x^2} = \dfrac{1}{2x}$,

que para x tendendo a $+\infty$ ou a $-\infty$, $\dfrac{1}{2x}$ está perto de zero. Assim, há assíntota horizontal em $y = 0$. O gráfico correspondente é (a).

66. O denominador não é zero, qualquer que seja o valor real de x; assim, não há uma assíntota vertical. Quando x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$, $\dfrac{x^3+2}{2x^2+1}$

se comporta mais como $\dfrac{x^3}{2x^2} = \dfrac{x}{2}$, assim,

$y = x/2$ é uma assíntota inclinada. O gráfico correspondente é (d).

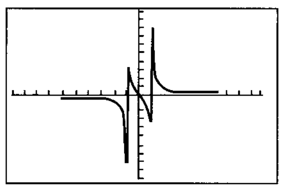
67. **(a)** Como $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$, esperamos uma assíntota horizontal em $y = 0$. Para encontrar onde a função cruza $y = 0$, resolvemos a equação, com $x \neq \pm 1$.

$$\frac{x}{x^2-1} = 0$$

$$x = 0 \cdot (x^2 - 1)$$

$$x = 0$$

O gráfico confirma que $f(x)$ intersecciona a assíntota horizontal em]0, 0[.



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

(b) Como $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$,

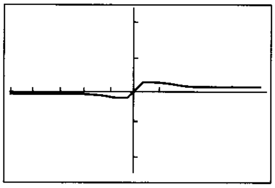
esperamos uma assíntota horizontal em $y = 0$. Para encontrar onde a função intersecciona $y = 0$, resolvemos a equação:

$$\frac{x}{x^2+1} = 0$$

$$x = 0 \cdot (x^2 + 1)$$

$$x = 0$$

O gráfico confirma que $g(x)$ intersecciona a assíntota horizontal em (0, 0).

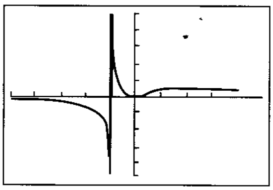


$[-10, 10]$ por $[-5, 5]$

(c) Como $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^3+1} = 0$, esperamos uma assíntota horizontal em $y = 0$. Para encontrar onde $h(x)$ cruza $y = 0$, resolvemos a equação, com $x \neq -1$:

$$\frac{x^2}{x^3+1} = 0$$
$$x^2 = 0 \cdot (x^3 + 1)$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

O gráfico confirma que $h(x)$ intersecciona a assíntota horizontal em]0, 0[.



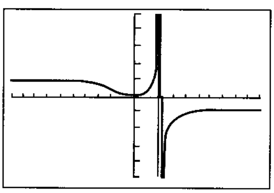
$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

68. Encontramos que **(a)** e **(c)** têm gráficos com mais de uma assíntota horizontal, como se segue:

(a) Para encontrar assíntotas horizontais, verificamos os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Sabemos também que o numerador $|x^3 + 1|$ é positivo para todo x, e que o denominador $8 - x^3$ é positivo para $x < 2$ e negativo para $x > 2$. Considerando essas duas afirmações, encontramos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x^3+1|}{8-x^3} = -1 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} \frac{|x^3+1|}{8-x^3} = 1$$

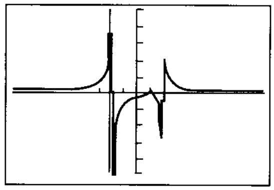
O gráfico confirma que temos assíntotas horizontais em $y = 1$ e $y = -1$.



$[-10, 10]$ por $[-5, 5]$

(b) Novamente, vemos que o numerador $|x - 1|$ é positivo para todo x. O denominador $x^2 - 4$ pode ser negativo somente quando $-2 < x < 2$; se $x < -2$ ou $x > 2$, $x^2 - 4$ será positivo. Como o denominador tem grau maior que o numerador:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x-1|}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x-1|}{x^2-4} = 0$, dando apenas uma assíntota horizontal em $y = 0$. O gráfico confirma essa assíntota.

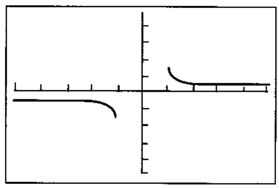


$[-5, 5]$ por $[-5, 15]$

(c) Como já demonstramos, precisamos de $x^2 - 4 > 0$, do contrário, a função não está definida dentro dos números reais. Como resultado, sabemos que o denominador $\sqrt{x^2-4}$ é sempre positivo, e que $h(x)$ está definido apenas no domínio $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.
Verificando os limites, encontramos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = 1 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = -1.$$

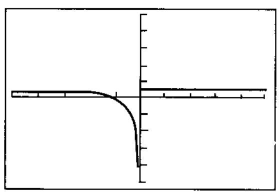
O gráfico confirma que temos assíntotas horizontais em $y = 1$ e $y = -1$.



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

69. (a) A assíntota vertical é em $x = 0$ e essa função é indefinida em $x = 0$ (pois o denominador não pode ser zero).

(b)



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

Acrescentar o ponto (0, 0).

(c) Sim.

70. As assíntotas horizontais são determinadas por dois limites, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Há no máximo dois números diferentes.

71. Verdadeiro.

72. Verdadeiro.

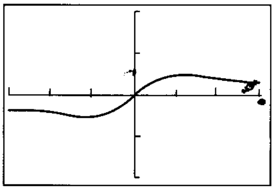
73. A resposta é B.

74. A resposta é C.

75. A resposta é C.

76. A resposta é E.

77. **(a)**



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

(b) $\dfrac{x}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow x < 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$

Mas o discriminante de $x^2 - x + 1$ é negativo (-3), assim, o gráfico nunca cruza o eixo x no intervalo $]0, +\infty[$.

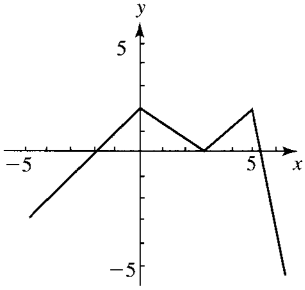
(c) $k = -1$

(d) $\dfrac{x}{1+x^2} > -1 \Leftrightarrow x > -1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0$

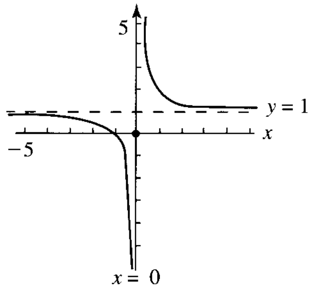
Mas o discriminante de $x^2 + x + 1$ é negativo (-3), assim, o gráfico nunca cruza o eixo x no intervalo $]-\infty, 0[$.

78. Crescente.

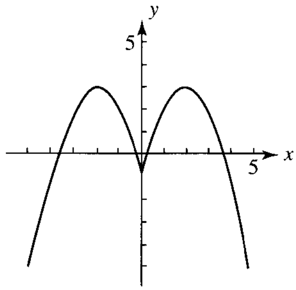
79. Um gráfico possível:



80. Um gráfico possível:



81. Um gráfico possível:



82. **(a)** $x^2 > 0$

$-0{,}8x^2 < 0$

$2 - 0{,}8x^2 < 2$

$f(x)$ é limitada superiormente por $y = 2$. Para determinar se $y = 2$ está no intervalo, devemos resolver a equação para x: $2 = 2 - 0{,}8x^2$

Como $f(x)$ existe em $x = 0$, então $y = 2$ está na imagem da função.

(b) $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2}{3+x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} 3 = 3$.

Assim, $g(x)$ é limitada por $y = 3$. No entanto, quando resolvemos para x, temos

$$3 = \frac{3x^2}{3+x^2}$$

$3(3 + x^2) = 3x^2$

$9 + 3x^2 = 3x^2$

$9 = 0$

Como $9 \neq 0$ então $y = 3$ não está na imagem da função $g(x)$.

(c) $h(x)$ não é limitada superiormente pois

$\lim_{x \to 0_-} h(x) = \lim_{x \to 0_+} h(x) = +\infty$.

(d)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{x^2 + 2x + 1} = 0$$

Assim: $g(x)$ é limitado por $y = 0$ quando x vai para $+\infty$ e $-\infty$.

(e) Sabemos que $(x + 1)^2 > 0$ para todo $x \neq -1$.

Assim, para $x > 0$ temos $\dfrac{4x}{x^2 + 2x + 1} > 0$

e para $x < 0$ (e $x \neq -1$) temos

$$\frac{4x}{x^2 + 2x + 1} < 0$$

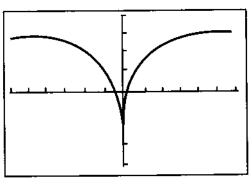
Essa segunda conclusão pode ser ignorada, pois estamos interessados no limite superior de $q(x)$.

Examinando o gráfico, vemos que $q(x)$ tem um limite superior em $y = 1$, que ocorre quando $x = 1$. O menor dos limites superiores de $q(x)$ é 1 e está na imagem.

83. Como o gráfico desce continuamente do ponto]−1, 5[para o ponto]1, −5[, ele deve cruzar o eixo x em algum ponto no caminho. O ponto de intersecção de x será uma raiz da função no intervalo $[-1, 1]$.

84. Como f é ímpar, $f(-x) = -f(x)$ para todo x. Em particular, $f(-0) = -f(0)$. Isto equivale a dizer que $f(0) = -f(0)$ e o único número igual a seu oposto é 0. Portanto, $f(0) = 0$, que significa que o gráfico deve passar pela origem.

85.



$[-6, 6]$ por $[-2, 2]$

(a) $y = 1{,}5$

(b) $[-1; 1{,}5]$

(c) $-1 \leq \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} \leq 1{,}5$

$$0 \leq 1 + \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} \leq 2{,}5$$

$0 \leq 2x^2 + 1 + 3x^2 - 1 \leq 5x^2 + 2{,}5$

$0 \leq 5x^2 \leq 5x^2 + 2{,}5$

Verdadeiro para todo x.

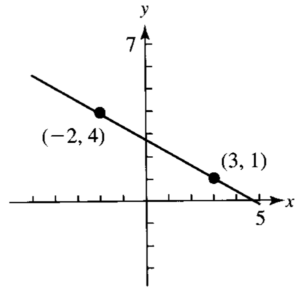
CAPÍTULO 8

Revisão rápida

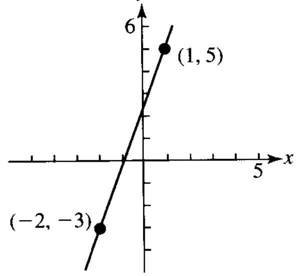
1. $y = 8x + 3{,}6$

2. $y = -1{,}8x - 2$

3. $y - 4 = -\dfrac{3}{5}(x + 2)$ ou $y = -0{,}6x + 2{,}8$



4. $y - 5 = \dfrac{8}{3}(x - 1)$ ou $y = \dfrac{8}{3}x + \dfrac{7}{3}$



5. $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9$
$= x^2 + 6x + 9$

6. $(x - 4)^2 = (x - 4)(x - 4) = x^2 - 4x - 4x + 16$
$= x^2 - 8x + 16$

7. $3(x - 6)^2 = 3(x - 6)(x - 6) = (3x - 18)(x - 6)$
$= 3x^2 - 18x - 18x + 108 = 3x^2 - 36x + 108$

8. $-3(x + 7)^2 = -3(x + 7)(x + 7)$
$= (-3x - 21)(x + 7)$
$= -3x^2 - 21x - 21x - 147$
$= -3x^2 - 42x - 147$

9. $2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1)$
$= 2(x - 1)(x - 1) = 2(x - 1)^2$

10. $3x^2 + 12x + 12 = 3(x^2 + 4x + 4)$
$= 3(x + 2)(x + 2) = 3(x + 2)^2$

Exercícios

1. Não é uma função polinomial, devido ao expoente -5.

2. Polinomial de grau 1 com coeficiente principal 2.

3. Polinomial de grau 5 com coeficiente principal 2.

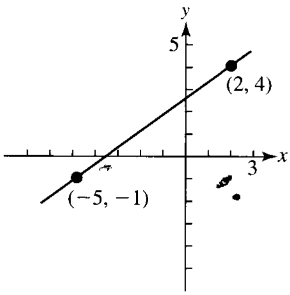
4. Polinomial de grau 0 com coeficiente principal 13.

5. Não é uma função polinomial, devido à raiz cúbica.

6. Polinomial de grau 2 com coeficiente principal -5.

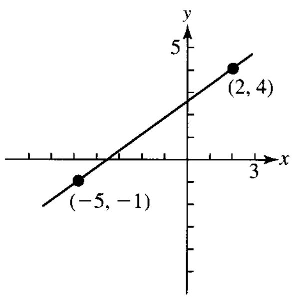
7. $m = \frac{5}{7}$ então $y - 4 = \frac{5}{7}(x - 2)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{7}x + \frac{18}{7}$



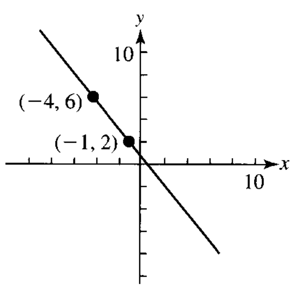
8. $m = -\frac{7}{9}$ então $y - 5 = -\frac{7}{9}(x + 3)$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{7}{9}x + \frac{8}{3}$



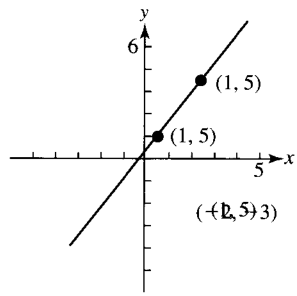
9. $m = -\frac{4}{3}$ então $y - 6 = -\frac{4}{3}(x + 4)$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

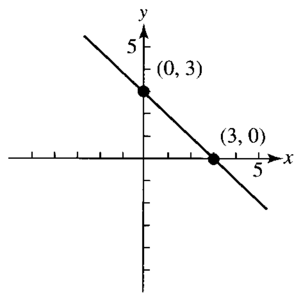


10. $m = \frac{5}{4}$ então $y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$

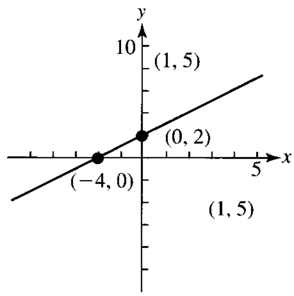


11. $m = -1$ então $y - 3 = -1(x - 0) \Rightarrow f(x) = -x + 3$



12. $m = \frac{1}{2}$ então $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 0)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + 2$



13. (a) — o vértice está em $(-1, -3)$, no quadrante III, eliminando tudo menos (a) e (d). Como $f(0) = -1$, deve ser (a).

14. (d) — o vértice está em $(-2, -7)$, no quadrante III, eliminando tudo menos (a) e (d). Como $f(0) = 5$, deve ser (d).

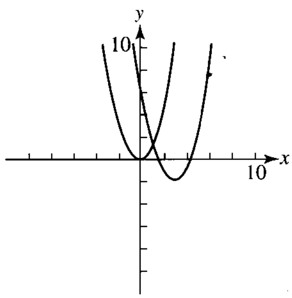
15. (b) — o vértice está no quadrante I, em $(1, 4)$, significando que deve ser ou (b) ou (f). Como $f(0)=1$, não pode ser (f): se o vértice em (f) é $(1, 4)$, então a intersecção com o eixo y seria entre $(0, 3)$. Deve ser (b).

16. (f) — o vértice está no quadrante I, em $(1, 12)$, significando que deve ser ou (b) ou (f). Como $f(0)=10$, não pode ser (b): se o vértice em (b) é $(1, 12)$, então a intersecção com o eixo y ocorre consideravelmente abaixo de $(0, 10)$. Deve ser (f).

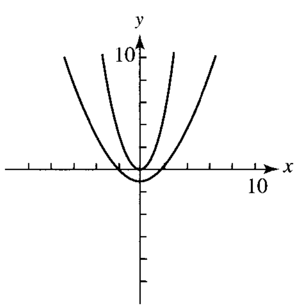
17. (e) — o vértice está em $(1, -3)$ no quadrante IV, assim, deve ser (e).

18. (c) — o vértice está em $(-1, 12)$ no quadrante II, e a parábola, com concavidade para baixo, assim, deve ser (c).

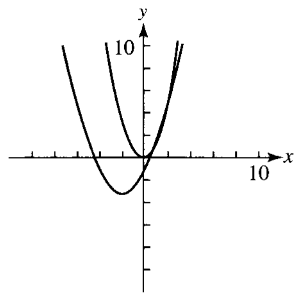
19. Translade o gráfico de $f(x) = x^2$ três unidades para a direita para obter o gráfico de $h(x) = (x - 3)^2$, e translade este gráfico duas unidades para baixo para obter o gráfico de $g(x)=(x - 3)^2 - 2$.



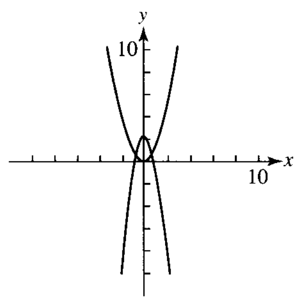
20. "Encolha" verticalmente o gráfico de $f(x) = x^2$ com o fator $\frac{1}{4}$ para obter o gráfico de $g(x)= \frac{1}{4}x^2$ e translade este gráfico uma unidade abaixo para obter o gráfico de $h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$.



21. Translade o gráfico de $f(x) = x^2$ duas unidades para a esquerda para obter o gráfico de $h(x) =(x + 2)^2$ "encolha" verticalmente este gráfico com o fator $\frac{1}{2}$ para obter o gráfico de $k(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2$; translade este gráfico três unidades para baixo para obter o gráfico de $g(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$.



22. "Estique" verticalmente o gráfico de $f(x) = x^2$ com o fator 3 para obter o gráfico de $g(x) = 3x^2$, considere o simétrico com relação ao eixo x para obter o gráfico de $k(x) = -3x^2$, e translade este gráfico 2 unidades para cima para obter o gráfico de $h(x) = -3x^2 + 2$.



23. Vértice: $(1, 5)$; eixo: $x = 1$.

24. Vértice: $(-2, -1)$; eixo: $x = -2$.

25. Vértice: $(1, -7)$; eixo: $x = 1$.

26. Vértice: $(\sqrt{3}, 4)$; eixo: $x = \sqrt{3}$.

27.
$$f(x) = 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x\right) - 4$$
$$= 3\left(x^2 + 2\cdot\frac{5}{6}x + \frac{25}{36}\right) - 4 - \frac{25}{12}$$
$$= 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{73}{12}$$

Vértice: $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{73}{12}\right)$; eixo: $x = -\frac{5}{6}$

28. $f(x) = -2\left(x^2 + \frac{7}{2}x\right) - 3$

$= -2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{7}{4}x + \frac{49}{16}\right) - 3 + \frac{49}{8}$

$= -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}x$

Vértice: $\left(\frac{7}{4}, \frac{25}{8}\right)$; eixo: $x = \frac{7}{4}$

29. $f(x) = -(x^2 - 8x) + 3$

$= -(x^2 - 2 \cdot 4x + 16) + 3 + 16$

$= -(x - 4)^2 + 19$

Vértice: (4, 19); eixo: $x = 4$

30. $f(x) = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 6$

$= 4\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right) + 6 - \frac{1}{4}$

$= 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{4}$

Vértice: $\left(\frac{1}{4}, \frac{23}{4}\right)$; eixo: $x = \frac{1}{4}$

31. $g(x) = 5\left(x^2 - \frac{6}{5}x\right) + 4$

$= 5\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{5}x + \frac{9}{25}\right) + 4 - \frac{9}{5}$

$= 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{11}{5}$

Vértice: $\left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$; eixo: $x = \frac{3}{5}$

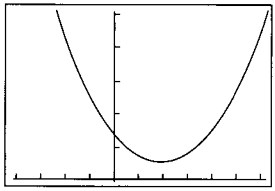
32. $h(x) = -2\left(x^2 + \frac{7}{2}x\right) - 4$

$= -2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{7}{4}x + \frac{49}{16}\right) - 4 + \frac{49}{8}$

$= -2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$

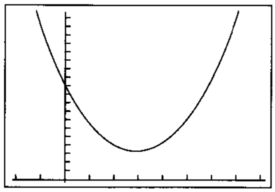
Vértice: $\left(-\frac{7}{4}, \frac{17}{8}\right)$; eixo: $x = -\frac{7}{4}$

33. $f(x) = (x^2 - 4x + 4) + 6 - 4 = (x - 2)^2 + 2$.
Vértice: (2, 2); eixo: $x = 2$; concavidade para cima; não intersecciona o eixo x.



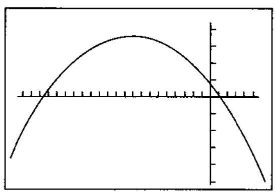
$[-4, 6]$ por $[0, 20]$

34. $g(x) = (x^2 - 6x + 9) + 12 - 9 = (x - 3)^2 + 3$.
Vértice: (3, 3); eixo: $x = 3$; concavidade para cima; não intersecciona o eixo x.



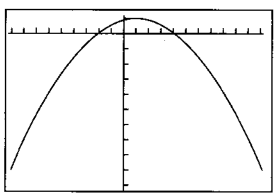
$[-4, 6]$ por $[0, 20]$

35. $f(x) = -(x^2 + 16x) + 10 = -(x^2 + 16x + 64) + 10 + 64 = -(x + 8)^2 + 74$.
Vértice: $(-8, 74)$; eixo: $x = -8$; concavidade para baixo; intersecciona o eixo x entre $-16{,}602$ e $0{,}602(-8 \pm \sqrt{74})$.



$[-20, 5]$ por $[-100, 100]$

36. $h(x) = -(x^2 - 2x) + 8 = -(x^2 - 2x + 1) + 8 + 1 = -(x - 1)^2 + 9$.
Vértice: (1, 9); eixo: $x = 1$; concavidade para baixo; intersecciona o eixo x em -2 e 4.



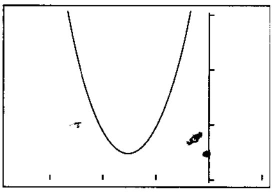
$[-9, 11]$ por $[-100, 10]$

37. $f(x) = 2(x^2 + 3x) + 7.$

$$= 2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + 7 - \frac{9}{2}$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

Vértice: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; eixo: $x = -\frac{3}{2}$; concavidade para cima; não intersecciona o eixo x e é "esticada" verticalmente pelo fator 2.



[−3,7; 1] por [2; 5,1]

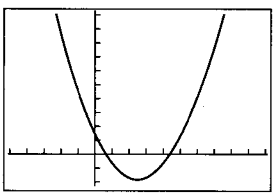
38. $g(x) = 5(x^2 - 5x) + 12$

$$= 5\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + 12 - \frac{125}{4}$$

$$= 5\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{77}{4}$$

Vértice: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{77}{4}\right)$; eixo: $x = \frac{5}{2}$; concavidade para cima; intersecciona o eixo x entre 0,538 e 4,462 $\left(\text{ou } \frac{5}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{385}\right)$ e é "esticada"

verticalmente pelo fator 5.



[−9, 11] por [−100, 10]

39. $h = -1$ e $k = -3$, assim $y = a(x + 1)^2 - 3$. Agora substitua $x = 1$, $y = 5$ para obter $5 = 4a - 3$, assim $a = 2$. A equação é: $y = 2(x + 1)^2 - 3$.

40. $h = 2$ e $k = -7$, assim $y = a(x - 2)^2 - 7$. Agora substitua $x = 0$, $y = 5$ para obter $5 = 4a - 7$, assim $a = 3$. A equação é: $y = 3(x - 2)^2 - 7$.

41. $h = 1$ e $k = 11$, assim $y = a(x - 1)^2 + 11$. Agora substitua $x = 4$, $y = -7$ para obter $-7 = 9a + 11$, assim $a = -2$. A equação é: $y = -2(x - 1)^2 + 11$.

42. $h = -1$ e $k=5$, assim $y = a(x + 1)^2 + 5$. Agora substitua $x =2$, $y = -13$ para obter $-13 = 9a + 5$, assim $a = -2$. A equação é: $y = -2(x + 1)^2 + 5$.

43. $h = 1$ e $k = 3$, assim $y = a(x - 1)^2 + 3$. Agora substitua $x = 0$, $y = 5$ para obter $5 = a + 3$, assim $a = 2$. A equação é: $y = 2(x - 1)^2 + 3$.

44. $h = -2$ e $k = -5$, assim $y = a(x + 2)^2 - 5$. Agora substitua $x = -4$, $y = -27$ para obter $-27 = 4a - 5$, assim $a = -\frac{11}{2}$. A equação é: $y = -\frac{11}{2}(x+2)^2 - 5$.

45. Seja x o número de bonecas produzidas semanalmente e y o custo médio semanal. Então $m = 4{,}70$, e $b = 350$, assim $y = 4{,}70x + 350$ para que tenhamos $500 = 4{,}70x + 350$ então $x = 32$; 32 bonecas são produzidas por semana.

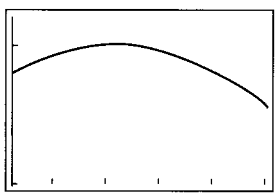
46. Se o comprimento é x, então a largura é $50 - x$, assim $A(x) = x(50 - x)$; a área máxima de 625 metros quadrados é obtida quando $x = 25$ (as dimensões são 25 metros × 25 metros).

47. **(a)** [0, 100] por [0, 1000] é uma possibilidade.

(b) Quando $x \cong 107{,}335$ ou $x \cong 372{,}665$ ou seja aproximadamente 107.335 unidades ou 372.665 unidades.

48. **(a)** $R(x) = (800 + 20x)(300 - 5x)$.

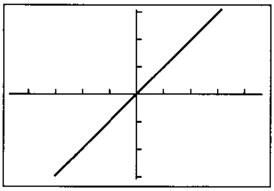
(b) [0, 25] por [200.000, 260.000] é uma possibilidade (mostrada).



[0, 25] por [200,00, 260,000]

(c) A receita mensal máxima — R$ 250.000 — é atingida quando $x = 10$, correspondendo ao aluguel de R$ 250 por mês.

49. A função identidade $f(x) = x$



$[-4,7; 4,7]$ por $[-3,1; 3,1]$

Domínio: $(-\infty, +\infty)$

Imagem: $(-\infty, +\infty)$

Continuidade: a função é contínua neste domínio

Comportamento crescente/decrescente:

É crescente para todo x

Simetria: é simétrica perto da origem

Limite: não é limitada

Extremo local: nenhum

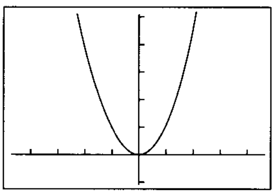
Assíntotas horizontais: nenhuma

Assíntotas verticais: nenhuma

Comportamento nos extremos do domínio:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

50. A função do segundo grau $f(x) = x^2$



$[-4,7; 4,7]$ por $[-1, 5]$

Domínio: $]-\infty, +\infty[$

Imagem: $[0, +\infty[$

Continuidade: a função é contínua neste domínio

Comportamento crescente/decrescente:

É crescente em $[0, +\infty[$, decrescente em $]-\infty, 0]$

Simetria: é simétrica perto do eixo y

Limite: é limitada inferiormente, mas não superiormente

Extremo local: valor mínimo de 0 em $x = 0$

Assíntotas horizontais: nenhuma

Assíntotas verticais: nenhuma

Comportamento nos extremos do domínio:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

51. Falso. Para $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$, o valor inicial é $f(0) = -3$.

52. Verdadeiro. Completando o quadrado, podemos reescrever $f(x)$ de modo que

$$f(x) = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Como $f(x) \geq \frac{3}{4}$, então $f(x) > 0$ para todo x.

53. $m = \dfrac{1-3}{4-(-2)} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$.

A resposta é E.

54. $f(x) = mx + b$

$$3 = -\frac{1}{3}(-2) + b$$

$$3 = \frac{2}{3} + b$$

$$b = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

A resposta é C.

55. O eixo de simetria ocorre verticalmente pelo vértice quando $x = -3$. A resposta é B.

56. O vértice é $(h, k) = (-3, -5)$. A resposta é E.

57. **(a)** Os gráficos (i), (iii) e (iv), (v) e (vi) sendo que (iv) e (vi) são gráficos de funções cons.tantes

(b) As que citamos no item anterior.

(c) (ii) não é uma função, pois um único valor de x (por exemplo, $x = -2$) resulta em muitos valores de y. De fato, há infinitos valores de y que são válidos para a equação $x = -2$.

58. **(a)** $\dfrac{f(3) - f(1)}{3-1} = \dfrac{9-1}{2} = 4$

(b) $\dfrac{f(5) - f(2)}{5-2} = \dfrac{25-4}{3} = 7$

(c) $\dfrac{f(c) - f(a)}{c-a} = \dfrac{c^2 - a^2}{c-a}$

$$= \frac{(c-a)(c+a)}{c-a} = c + a$$

(d) $\dfrac{g(3)-g(1)}{3-1}=\dfrac{11-5}{2}=3$

(e) $\dfrac{g(4)-g(1)}{4-1}=\dfrac{14-5}{3}=3$

(f) $\dfrac{g(c)-g(a)}{c-a}=\dfrac{(3c+2)-(3a+2)}{c-a}$

$=\dfrac{3c-3a}{c-a}=3$

(g) $\dfrac{h(c)-h(a)}{c-a}=\dfrac{(7c-3)-(7a-3)}{c-a}$

$=\dfrac{7c-7a}{c-a}=7$

(h) $\dfrac{k(c)-k(a)}{c-a}=\dfrac{(mc+b)-(ma+b)}{c-a}$

$=\dfrac{mc-ma}{c-a}=m$

(i) $\dfrac{l(c)-l(a)}{c-a}=\dfrac{c^3-a^3}{c-a}=\dfrac{-2b}{2a}=\dfrac{-b}{a}=-\dfrac{b}{a}$

$=\dfrac{(c-a)(c^2+ac+a^2)}{(c-a)}=c^2+ac+a^2$

59. **(a)** Se $ax^2+bx+c=0$, então

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pela fórmula quadrática. Assim, $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

e $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e

e $x_1+x_2=$

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{-2b}{2a}=\dfrac{-b}{a}=-\dfrac{b}{a}.$

(b) De maneira similar,

$x_1\cdot x_2=\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

$\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

$=\dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}.$

60. $f(x)=(x-a)(x-b)=x^2-bx-ax+ab$ $=x^2+(-a-b)x+ab$. Se usarmos a forma vértice da função quadrática, temos

$h=-\left(\dfrac{-a-b}{2}\right)=\dfrac{a+b}{2}.$

O eixo é $x=h=\dfrac{a+b}{2}$.

CAPÍTULO 9

Revisão Rápida

1. $\sqrt[3]{x^2}$
2. $\sqrt{p^5}$
3. $\dfrac{1}{d^2}$
4. $\dfrac{1}{x^7}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{q^4}}$
6. $\dfrac{1}{\sqrt{m^3}}$
7. $3x^{3/2}$
8. $2x^{5/3}$
9. $\cong 1{,}71x^{-4/3}$
10. $\cong 0{,}71x^{-1/2}$

Exercícios

1. potência $=5$, constante $=-\dfrac{1}{2}$.
2. potência $=\dfrac{5}{3}$, constante $=9$.
3. não é uma função potência.
4. potência $=0$, constante $=13$.
5. potência $=1$, constante $=c^2$.
6. potência $=5$, constante $=\dfrac{k}{2}$.
7. potência $=2$, constante $=\dfrac{g}{2}$.
8. potência $=3$, constante $=\dfrac{4\pi}{3}$.
9. potência $=-2$, constante $=k$.
10. potência $=1$, constante $=m$.
11. grau $=0$, coeficiente $=-4$.

12. não é uma função monomial; expoente negativo.

13. grau = 7, coeficiente = -6.

14. não é uma função monomial; a variável está no expoente.

15. grau = 2, coeficiente = 4π.

16. grau = 1, coeficiente = l.

17. $A = ks^2$.

18. $V = kr^2$.

19. $I = V/R$

20. $V = kT$

21. $E = mc^2$

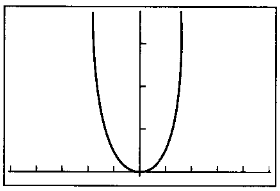
22. $p = \sqrt{2gd}$

23. O peso w de um objeto varia diretamente com sua massa m, com a constante de variação g.

24. A circunferência C de um círculo é proporcional ao seu diâmetro D, com a constante de variação π.

25. A distância d percorrida de um objeto lançado em queda livre varia diretamente com o quadrado de sua velocidade p, com a constante de variação $\dfrac{1}{2g}$.

26.

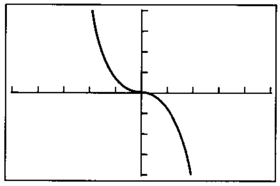


[−5,5] por [−1,49]

potência = 4, constante = 2
Domínio: $]-\infty, +\infty[$
Imagem: $[0, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: É decrescente em $]-\infty, 0[$. Crescente em $]0, +\infty[$
Simetria: par. É simétrica com relação ao eixo y
Limite: é limitada inferiormente, mas não superiormente
Extremo local: valor mínimo é $y = 0$ em $x = 0$
Assíntotas: nenhuma
Comportamento nos extremos do domínio:

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^4 = +\infty; \lim_{x\to+\infty} 2x^4 = +\infty.$$

27.

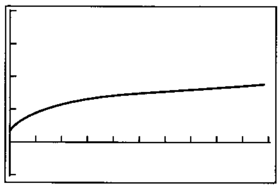


[−5,5] por [−20,20]

potência = 3, constante = -3
Domínio: $]-\infty, +\infty[$
Imagem: $]-\infty, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: é decrescente para todo x
Simetria: ímpar. É simétrica com relação à origem
Limite: não é limitada inferiormente, nem superiormente
Extremo local: nenhum
Assíntotas: nenhuma
Comportamento nos extremos do domínio:

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty, \lim_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty.$$

28.

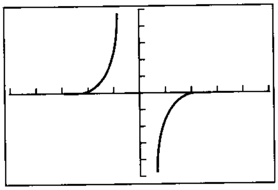


[−1,99] por [−1,4]

potência = $\dfrac{1}{4}$, constante = $\dfrac{1}{2}$
Domínio: $[0, +\infty[$
Imagem: $[0, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: é crescente em $[0, +\infty[$
Limite: é limitada inferiormente
Simetria: nem par nem ímpar
Extremo local: mínimo local em (0, 0)
Assíntotas: nenhuma
Comportamento nos extremos do domínio:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt[4]{x} = +\infty$$

29.



$[-5,5]$ por $[-5,5]$

potência $= -3$, constante $= -2$

Domínio: $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Imagem: $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Continuidade: a função é descontínua em $x = 0$

Comportamento crescente/decrescente: é crescente em $]-\infty, 0[$. É crescente em $]0, +\infty[$.

Simetria: ímpar. É simétrica com relação à origem

Limite: não é limitada superiormente, nem inferiormente

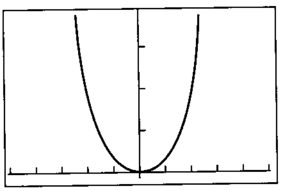
Extremo local: nenhum

Assíntotas: em $x = 0$ e $y = 0$

Comportamento nos extremos do domínio:

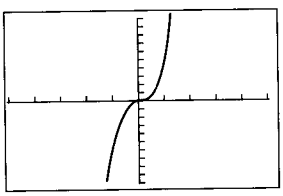
$$\lim_{x\to-\infty} -2x^3 = 0, \lim_{x\to+\infty} -2x^{-3} = 0$$

30. "Encolher" $y = x^4$ verticalmente através do fator $\frac{2}{3}$. Como $f(-x) = \frac{2}{3}(x - x)^4 = \frac{2}{3}x^4$, então f é par.



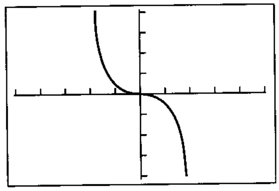
$[-5,5]$ por $[-1,19]$

31. "Esticar" $y = x^3$ verticalmente através do fator 5. Como $f(-x) = 5(-x)^3 = -5x^3 = -f(x)$, então f é ímpar.



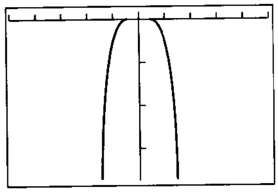
$[-5,5]$ por $[-20,20]$

32. "Esticar" $y = x^5$ verticalmente através do fator 1,5. Encontrar o gráfico simétrico com relação ao eixo x. Como $f(-x) = -1{,}5(-x)^5 = 1{,}5x^5 = -f(x)$, então f é ímpar.



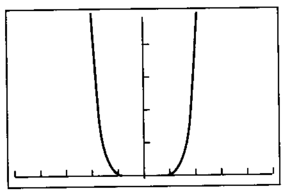
$[-5,5]$ por $[-20,20]$

33. "Esticar" $y = x^6$ verticalmente através do fator 2 Encontrar o gráfico simétrico com relação ao eixo x. Como $f(-x) = -2(-x)^6 = -2x^6 = f(x)$ então f é par.



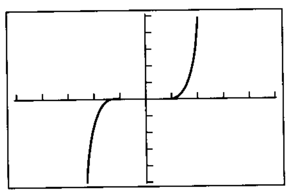
$[-5,5]$ por $[-19,1]$

34. "Encolher" $y = x^8$ verticalmente através do fator $\frac{1}{4}$. Como $f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^8 = \frac{1}{4}x^8 = f(x)$, então f é par.



$[-5,5]$ por $[-1,49]$

35. "Encolher" $y = x^7$ verticalmente através do fator $\frac{1}{8}$. Como $f(-x) = \frac{1}{8}(-x)^7 = -\frac{1}{8}x^7 = -f(x)$, então f é ímpar.



$[-5,5]$ por $[-50,50]$

36. (g)

37. (a)

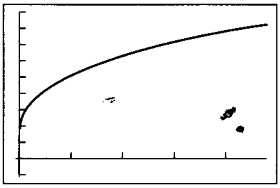
38. (d)

39. (g)

40. (h)

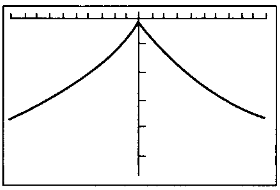
41. (d)

42. $k = 3$, $a = \frac{1}{4}$. No primeiro quadrante, a função é crescente e com a concavidade para baixo. A função é indefinida para $x < 0$.



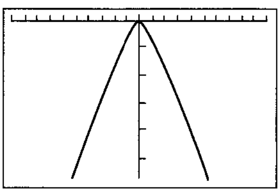
$[-1, 99]$ por $[-1, 10]$

43. $k = -4$, $a = \frac{2}{3}$. No quarto quadrante, a função é decrescente e com a concavidade para cima.
$f(-x) = -4(\sqrt[3]{(-x)^2}) = -4\sqrt[3]{x^2} = f(x)$, assim f é par.



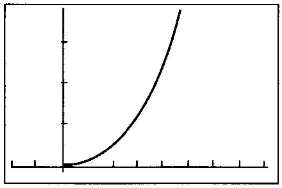
$[-10, 10]$ por $[-29, 1]$

44. $k = -2$, $a = \frac{4}{3}$. No quarto quadrante, a função é decrescente e com a concavidade para baixo.
$f(-x) = -2(\sqrt[3]{(-x)^4} = -2(\sqrt[3]{x^4}) = -2x^{4/3} = f(x)$, assim f é par.



$[-10, 10]$ por $[-29, 1]$

45. $k = \frac{2}{5}$, $a = \frac{5}{2}$. No primeiro quadrante, a função é crescente e com a concavidade para cima. A função é indefinida para $x < 0$.

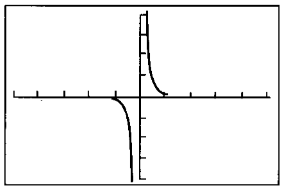


$[-2, 8]$ por $[-1\ 19]$

46. $k = \frac{1}{2}$, $a = -3$. No primeiro quadrante, a função é decrescente e com a concavidade para cima.

$f(-x) = \frac{1}{2}(-x) = \frac{1}{2(-x)^3} = -\frac{1}{2}x^{-3} =$

$-f(x)$, assim f é ímpar.

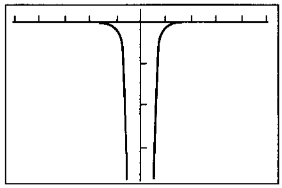


$[-5, 5]$ por $[-20, 20]$

47. $k = -1$, $a = -4$. No quarto quadrante, a função é crescente e com a concavidade para baixo.

$f(-x) = -(-x)^{-4} = -\frac{1}{(-x)^4} = -\frac{1}{x^4} =$

$x^{-4} = f(x)$, assim f é par.



$[-5, 5]$ por $[-19, 1]$

48. $y = \frac{8}{x^2}$, potência $= -2$, constante $= 8$.

49. $y = -2\sqrt{x}$, potência $= \frac{1}{2}$, constante $= -2$.

50. Dado que n é um número inteiro, $n \geq 1$:
Se n é ímpar, então $f(-x) = (-x)^n = -(x^n) = -f(x)$ e, assim, $f(x)$ é ímpar.
Se n é par, então $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$ e, assim, $f(x)$ é par.

51. Verdadeiro. Porque $f(-x) = (-x)^{-2/3}$ $= [(-x)^2]^{-1/3} = (x^2)^{-1/3} = x^{-2/3} = f(x)$

52. Falso. $f(-x) = (-x)^{-1/3} = -(x^{1/3}) = -f(x)$, e assim, a função é ímpar. Ela é simétrica com relação à origem, e não com relação ao eixo y.

53. $f(4) = 2(4)^{-1/2} = \frac{2}{4^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1.$
A resposta é A.

54. $f(0) = -3(0)^{-1/3} = -3 \cdot \frac{1}{0^{1/3}} = 3 \cdot \frac{1}{0}$
é indefinido. Vejamos: $f(-1) = -3(-1)^{-1/3} = -3(-1) = 3$, $f(1) = -3(1)^{-1/3} = -3(1) = -3$ e $f(3) = -3(3)^{-1/3} \cong 2{,}08$. A resposta é E.

55. $f(-x) = (-x)^{2/3} = [(-x)^2]^{1/3} = (x^2)^{1/3} = x^{2/3} = f(x)$. A função é par. A resposta é B.

56. $f(x) = x^{3/2} = (\sqrt{x})^3$ é definida para $x \geq 0$. A resposta é B.

57. Se f é par, então

$f(x) = f(-x)$; portanto $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(-x)}$, $(f(x) \neq 0)$.

Como $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(-x)} = g(-x)$, então g também é par.

Se g é par, então $g(x) = g(-x)$;

portanto $g(-x) = \frac{1}{f(-x)} = g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Como $\frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(x)}$ então $f(-x) = f(x)$ e f também é par.

Se f é ímpar, então

$f(x) = -f(x)$; portanto $\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)}$, $f(x) \neq 0$.

Como $g(x) = \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)} = -g(x)$, então g também é ímpar.

Se g é ímpar, então
$g(x) = g(-x)$;

portanto $g(-x) = \frac{1}{f(-x)} = -g(x) = -\frac{1}{f(x)}$.

Como $\frac{1}{f(-x)} = -\frac{1}{f(x)}$ então $f(-x) = -f(x)$ e f é ímpar.

58. Seja $g(x) = x^{-a}$ e $f(x) = x^a$. Então $g(x) = \frac{1}{x^a}$ $= 1/f(x)$. O exercício 57 mostra que $g(x)$ $= 1/f(x)$ é par se e somente se $f(x)$ é par e $g(x)$ $= 1/f(x)$ é ímpar se e somente se $f(x)$ é ímpar. Portanto, $g(x) = x^a$ é par se e somente se $f(x) = x^a$ é par, e $g(x) = x^{-a}$ é ímpar se e somente se $f(x) = x^a$ é ímpar.

CAPÍTULO 10

Revisão rápida

1. $x^2 - 4x + 7$

2. $x^2 - \frac{5}{2}x - 3$

3. $7x^3 + x^2 - 3$

4. $2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

5. $x(x^2 - 4) = x(x^2 - 2^2) = x(x + 2)(x - 2)$

6. $6(x^2 - 9) = 6(x^2 - 3^2) = 6(x + 3)(x - 3)$

7. $4(x^2 + 2x - 15) = 4(x + 5)(x - 3)$

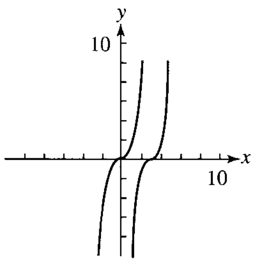
8. $x(15x^2 - 22x + 8) = x(3x - 2)(5x - 4)$

9. $(x^3 + 2x^2) - (x + 2) = x^2(x + 2) - 1(x + 2)$
$= (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$

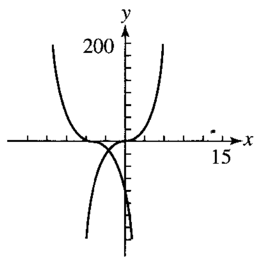
10. $x(x^3 + x^2 - 9x - 9)$
$= x[(x^3 + x^2) - (9x + 9)]$
$= x([x^2(x + 1) - 9(x + 1)]$
$= x(x + 1)(x^2 - 9) = x(x + 1)(x^2 - 3^2)$
$= x(x + 1)(x + 3)(x - 3)$

Exercícios

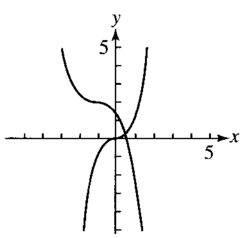
1. A partir de $y = x^3$, translade para a direita em 3 unidades e então "estique" verticalmente pelo fator 2. Intersecção com o eixo y: $(0, -54)$



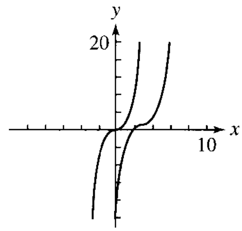
2. A partir de $y = x^3$, translade para a esquerda em 5 unidades e então encontre o gráfico simétrico com relação ao eixo x. Intersecção com o eixo y: $(0, -125)$



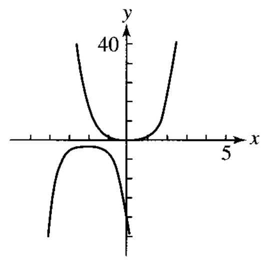
3. A partir de $y = x^3$, translade para a esquerda em 1 unidade, "encolha" verticalmente pelo fator $\frac{1}{2}$, encontre o gráfico simétrico com relação ao eixo x e então translade verticalmente para cima em 2 unidades. Intersecção com o eixo y: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$



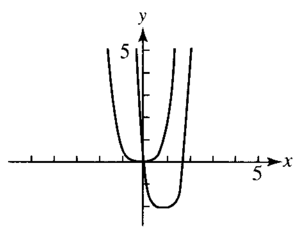
4. A partir de $y = x^3$, translade para a direita em 3 unidades, "encolha" verticalmente pelo fator $\frac{2}{3}$, translade verticalmente para cima em 1 unidade. Intersecção com o eixo y: $(0, -17)$



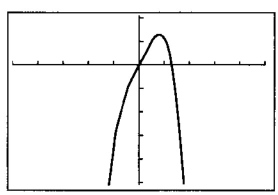
5. A partir de $y = x^4$, translade para a esquerda em 2 unidades, "estique" verticalmente pelo fator 2 e encontre o gráfico simétrico com relação ao eixo x e então translade verticalmente para baixo em 3 unidades. Intersecção com o eixo y: $(0, -35)$



6. A partir de $y = x^4$, translade para a direita em 1 unidade, "estique" verticalmente em 3 unidades e translade verticalmente para baixo em 2 unidades. Intersecção com o eixo y: $(0, 1)$

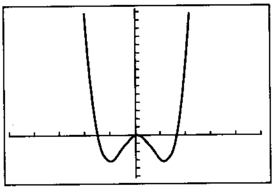


7. Máximo local: $\cong (0{,}79, 1{,}119)$, raízes: $x = 0$ e $x \cong 1{,}26$.



[–5, 5] por [–5, 2]

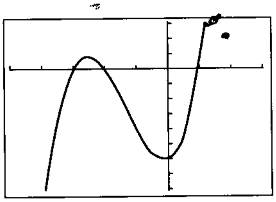
8. Máximo local em $(0, 0)$, mínimo local em $(1{,}12, -3{,}13)$ e $(-1{,}12, -3{,}13)$, raízes: $x = 0$ e $x \cong 1{,}58$, $x \cong -1{,}58$.



[–5, 5] por [–5, 15]

9. Função cúbica, coeficiente principal positivo. A resposta é (c).
10. Função cúbica, coeficiente principal negativo. A resposta é (b).
11. Maior do que cúbica, coeficiente principal positivo. A resposta é (a).
12. Maior do que cúbica, coeficiente principal negativo. A resposta é (d).

13.



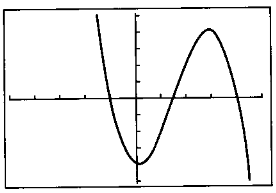
[–5, 3] por [–8, 3]

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

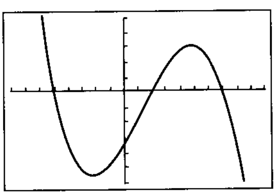
14. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$



[–5, 5] por [–15, 15]

15.

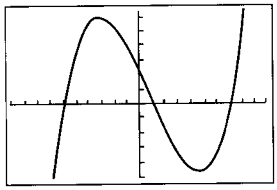


[−8, 10] por [−120, 100]

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

16.

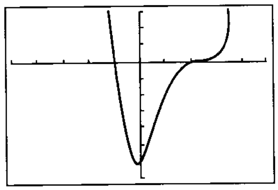


[−10, 10] por [−100, 130]

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

17.

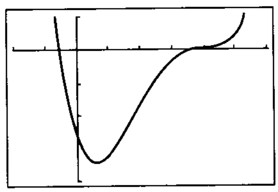


[−5, 5] por [−14, 6]

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

18.

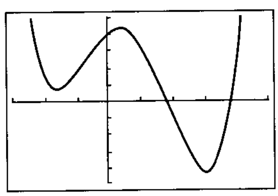


[−2, 6] por [−100, 25]

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

19.

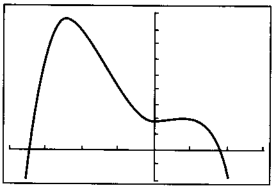


[−3, 5] por [−50, 50]

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

20.



$[-4, 3]$ por $[-20, 90]$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Para os números de 21 a 24, o comportamento nos extremos de um polinômio é regido pelo termo de grau mais elevado.

21. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

22. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

23. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

24. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

25. (a); Há 3 raízes: $-2{,}5$, 1 e 1,1.

26. (b); Há 3 raízes: 0,4, aproximadamente 0,429 (de fato, 3/7) e 3.

27. (c); Há 3 raízes: aproximadamente $-0{,}273$ (de fato, $-3/11$), $-0{,}25$ e 1.

28. (d); Há 3 raízes: -2, 0,5 e 3.

29. -4 e 2

30. -2 e 2/3

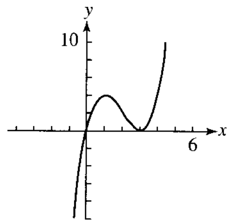
31. 2/3 e $-1/3$

32. 0, -5 e 5

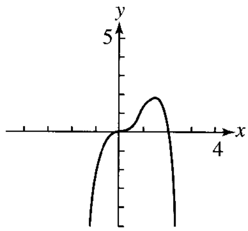
33. 0, $-2/3$ e 1

34. 0, -1 e 2

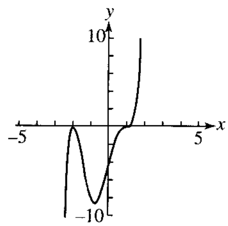
35. Grau 3; raízes: $x = 0$ (multiplicidade 1, gráfico intercepta o eixo x), $x = 3$ (multiplicidade 2, gráfico é uma tangente, isto é, apenas encosta em um ponto de com $x = 3$).



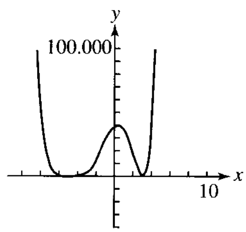
36. Grau 4; raízes: $x = 0$ (multiplicidade 3, gráfico intercepta o eixo x), $x = 2$ (multiplicidade 1, gráfico intercepta o eixo x).



37. Grau 5; raízes: $x = 1$ (multiplicidade 3, gráfico intercepta o eixo x), $x = -2$ (multiplicidade 2, gráfico é uma tangente).

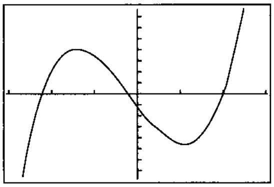


38. Grau 6; raízes: $x = 3$ (multiplicidade 2, gráfico é uma tangente), $x = -5$ (multiplicidade 4, gráfico é uma tangente).



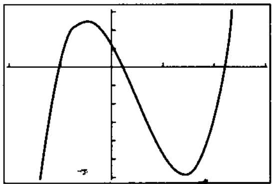
39. 0, -6 e 6. Algebricamente — fatorar x primeiro.

40. -11, -1 e 10. Graficamente. Equações cúbicas *podem* ser resolvidas algebricamente, mas os métodos são mais complicados do que com a fórmula quadrática.



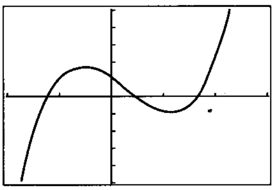
[−15, 15] por [−800, 800]

41. -5, -1 e 11. Graficamente.



[−10, 15] por [−300, 450]

42. -6, 2 e 8. Graficamente.



[−10, 15] por [−500, 500]

43. $f(x) = (x - 3)(x + 4)(x - 6)$
$= x^3 - 5x^2 - 18x + 72$

44. $f(x) = (x + 2)(x - 3)(x + 5)$

$= x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

45. $f(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 4)$

$= (x^2 - 3)(x - 4) = x^3 - 4x^2 - 3x + 12$

46. $f(x) = (x - 1)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$

$= (x - 1)[(x - 1)^2 - 2] = x^3 - 3x^2 + x + 1$

47. $f(x) = x^7 + x + 100$ tem termo principal ímpar, o que significa que em seu comportamento de extremos ele tende para $-\infty$ em um extremo, e para $+\infty$, em outro. Assim o gráfico deve interceptar o eixo x pelo menos uma vez, isto é, $f(x)$ assume ambos os valores, positivos e negativos, e pelo Teorema do Valor Intermediário, $f(x) = 0$ para algum x.

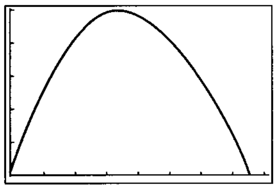
48. $f(x) = x^9 - x + 50$ tem termo principal ímpar, o que significa que em seu comportamento de extremos ele tende para $-\infty$ em um extremo, e para $+\infty$, em outro. Assim o gráfico deve interceptar o eixo x pelo menos uma vez, isto é, $f(x)$ assume ambos os valores, positivos e negativos, e pelo Teorema do Valor Intermediário, $f(x) = 0$ para algum x.

49. **(a)** $L(x) = R(x) - C(x)$ é positivo se $29{,}73 < x < 541{,}74$ (aprox.), assim são necessários entre 30 e 541 clientes.

(b) $L(x) = 60.000$ quando $x = 200{,}49$ ou $x = 429{,}73$. O número de 201 ou 429 clientes é necessário para um lucro anual um pouco acima de R$ 60.000; 200 ou 430 clientes para um rendimento um pouco menor que R$ 60.000.

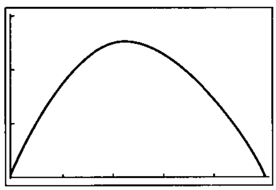
50. **(a)** A altura da caixa será x, a largura será $15 - 2x$ e o comprimento será $60 - 2x$.

(b) Qualquer valor de x entre aproximadamente 0,550 e 6,786 cm.



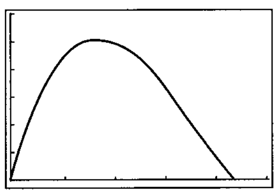
[0, 8] por [0, 1500]

51. O volume é $V(x) = x(10 - 2x)(25 - 2x)$; use qualquer x com $0 < x \leq 0{,}929$ ou $3{,}644 \leq x < 5$.



[0, 5] por [0, 300]

52. A função é positiva para $0 < x < 21{,}5$. (As dimensões dos lados do retângulo são de 43 e 62 unidades.)



[0, 25] por [0, 12.000]

53. Verdadeiro. Como f é contínua,
$f(1) = (1)^3 - (1)^2 - 2 = -2 < 0$ e
$f(2) = (2)^3 - (2)^2 - 2 = 2 > 0$, o Teorema do Valor Intermediário garante que o gráfico de f intercepta o eixo em algum ponto entre $x = 1$ e $x = 2$.

54. Falso. Se $a > 0$, o gráfico de $f(x) = (x + a)^2$ é obtido ao transferir o gráfico de $f(x) = x^2$ para a esquerda em a unidades. A transferência para direita corresponde a $a < 0$.

55. Quando $x = 0, f(x) = 2(x - 1)^3 + 5 = 2(-1)^3 + 5 = 3$. A resposta é C.

56. Em $f(x) = (x - 2)^2(x + 2)^3(x + 3)^7$, o fator $x - 2$ ocorre duas vezes. Assim $x = 2$ é uma raiz de multiplicidade 2 e a resposta é B.

57. O gráfico indica 3 raízes, cada uma de multiplicidade 1: $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$. O comportamento no extremo indica um coeficiente principal negativo. Assim $f(x) = -x(x + 2)(x - 2)$, e a resposta é B.

58. O gráfico indica 4 raízes: $x = -2$ (multiplicidade 2), $x = 0$ (multiplicidade 1) e $x = 2$ (multiplicidade 2). O comportamento no extremo indica um coeficiente principal positivo. Assim $f(x) = x(x + 2)^2(x - 2)$, e a resposta é A.

59. A representação (a) mostra o comportamento no extremo da função, mas não mostra o fato de que há 2 máximos locais e 1 mínimo local (e 4 intersecções no eixo x) entre -3 e 4. Eles são visíveis na representação (b), mas está faltando o mínimo próximo a $x = 7$, além da intersecção no eixo x próximo a $x = 9$. A representação (b) sugere um grau polinomial 4, e não 5.

60. O comportamento no extremo é visível na representação (a), mas não os detalhes do comportamento próximo a $x = 1$. A representação (b) mostra esses detalhes, mas há perda da informação do comportamento nos extremos.

61. $f(x) = (x - 1)^2 + 2; \dfrac{f(x)}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{2}{x - 1}$

62. $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1) - 2;$

$$\frac{f(x)}{x + 1} = x^2 - x + 1 - \frac{2}{x + 1}$$

63. $f(x) = (x^2 + x + 4)(x + 3) - 21;$

$$\frac{f(x)}{x + 3} = x^2 + x + 4 - \frac{21}{x + 3}$$

64. $f(x) = \left(2x^2 - 5x + \dfrac{7}{2}\right)(2x + 1) - \dfrac{9}{2};$

$$\frac{f(x)}{2x + 1} = 2x^2 - 5x + \frac{7}{2} - \frac{9/2}{2x + 1}$$

65.
$f(x) = (x^2 - 4x + 12)(x^2 + 2x - 1) - 32x + 18;$

$$\frac{f(x)}{x^2 + 2x - 1} = x^2 - 4x + 12 + \frac{-32x + 18}{x^2 + 2x - 1}$$

66. $f(x) = (x^2 - 3x + 5)(x^2 + 1);$

$$\frac{f(x)}{x^2 + 1} = x^2 - 3x + 5$$

67. $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x + 1} = x^2 - 6x + 9 + \dfrac{-11}{x + 1}$

68. $\dfrac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

$$= 2x^3 + x^2 + 10x + 27 + \frac{82}{x - 3}$$

69.

$$\frac{9x^3 + 7x^2 - 3x}{x - 10} = 9x^2 + 97x + 967 + \frac{9670}{x - 10}$$

70. $\dfrac{3x^4 + x^3 - 4x^2 + 9x - 3}{x + 5}$

$$= 3x^3 - 14x^2 + 66x - 321 + \frac{1.602}{x + 5}$$

71. $\dfrac{5x^4 - 3x + 1}{4 - x}$

$$= -5x^3 - 20x^2 - 80x - 317 + \frac{-1.269}{4 - x}$$

72. $\dfrac{x^8 - 1}{x + 2}$

$$= x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 64x - 128 + \frac{255}{x + 2}$$

73. O resto é $f(2) = 3$.

74. O resto é $f(1) = -4$.

75. O resto é $f(-3) = -43$.

76. O resto é $f(-2) = 2$.

77. O resto é $f(2) = 5$.

78. O resto é $f(-1) = 23$.

79. Sim: 1 é um zero do segundo polinômio.

80. Sim: 3 é um zero do segundo polinômio.

81. Não: quando $x = 2$, o segundo polinômio resulta em 10.

82. Sim: 2 é um zero do segundo polinômio.

83. Sim: -2 é um zero do segundo polinômio.

84. Não: quando $x - 1$, o segundo polinômio resulta em 2.

85. A partir do gráfico parece que $(x + 3)$ e $(x - 1)$ são fatores.

$$f(x) = (x + 3)(x - 1)(5x - 17)$$

86. A partir do gráfico parece que $(x + 2)$ e $(x - 3)$ são fatores.

$$f(x) = (x + 2)(x - 3)(5x - 7)$$

87.

$$2(x + 2)(x - 1)(x - 4) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$$

88.

$$2(x + 1)(x - 3)(x + 5) = 2x^3 + 6x^2 - 26x - 30$$

89. $2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}(x - 2)(2x - 1)(2x - 3)$$

$$= 2x^3 + -8x^2 + \frac{19}{2}x - 3$$

90. $2(x + 3)(x + 1)(x)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

$$= x(x + 3)(x + 1)(2x - 5)$$

$$= 2x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 15x$$

91. Como $f(-4) = f(3) = f(5) = 0$, então $(x + 4)$, $(x - 3)$ e $(x - 5)$ são fatores de f. Assim $f(x) = k(x + 4)(x - 3)(x - 5)$ para alguma constante k. Como $f(0) = 180$, devemos ter $k = 3$. Assim $f(x) = 3(x + 4)(x - 3)(x - 5)$.

92. Como $f(-2) = f(1) = f(5) = 0$ então $(x + 2)$, $(x - 1)$ e $(x - 5)$ são fatores de f. Assim $f(x) = k(x + 2)(x - 1)(x - 5)$ para alguma constante k.
Como $f(-1) = 24$, devemos ter $k = 2$, assim $f(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 5)$.

93. Raízes racionais possíveis:

$$\frac{\pm 1}{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6}, \text{ ou seja:}$$

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6}$$

94. Raízes racionais possíveis:

$$\frac{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 7,\ \pm 14}{\pm 1,\ \pm 3}, \text{ ou seja: } \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 7,$$

$$\pm 14,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{7}{3}\ \pm\frac{14}{3}$$

95. Raízes racionais possíveis: $\dfrac{\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9}{\pm 1,\ \pm 2}$,

ou seja: $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{9}{2}$

96. Raízes racionais possíveis:

$$\frac{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12}{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6}, \text{ ou seja:}$$

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12,\ \pm\frac{1}{2},$$

$$\pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{4}{3},\ \pm\frac{1}{6}$$

97. Última linha: 2 2 7 19
Como todos os números na última linha são ≥ 0 então 3 é um limite superior para raízes de f.

98. Última linha: 2 5 20 99
Como todos os números na última linha são ≥ 0, então 5 é um limite superior para raízes de $f(x)$.

99. Última linha: 1 1 3 7 2
Como todos os números na última linha são ≥ 0, então 2 é um limite superior para raízes de f.

100. Última linha: 4 6 11 42 128
Como todos os números na última linha são ≥ 0, então 3 é um limite superior para raízes de f.

101. Última linha: 3 -7 8 -5
Como todos os números na última linha alternam os sinais, então -1 é um limite inferior para raízes de f.

102. Última linha: 1 -1 5 -10
Como todos os números na última linha alternam os sinais, então -3 é um limite inferior para raízes de f.

103. Última linha: 1 -4 7 -2
Como todos os números na última linha alternam os sinais, então 0 é um limite inferior para raízes de f.

104. Última linha: 3 213 47 2191
Como todos os números na última linha alternam os sinais, então -4 é um limite inferior para raízes de f.

105. Pelo Teste dos limites superior e inferior das raízes, -5 é um limite inferior e 5 é um limite superior. Para -5 a última linha é:

Para -5 a última linha é:

6 −41 198 −982 4.876

Para 5 a última linha é:

6 19 88 448 2.206

106. Pelo Teste dos limites superior e inferior das raízes, -5 é um limite inferior e 5 é um limite superior. Para -5 a última linha é:

−6 30 −129 664 −3.323

Para 5 a última linha é:

1, −6, 30, 429, 664, −3324

107. Há raízes que não *são* mostradas (aprox. −11,002 e 12,003), pois −5 e 5 não são limites para raízes de f.
Para -5 a última linha é:

1 −9 −84 816 −4088 −20.443

Para 5 a última linha é:

1 1 −124 −224 −1128 −5637

108. Há raízes que não *são* mostradas (aprox. −8,036 e 9,038), pois −5 e 5 não são limites para raízes de f.
Para -5 a última linha é:

2 −15 −66 546 −2821 −14.130

Para 5 a última linha é:

2 5 −116 −364 −1911 −9530

109. Raízes racionais possíveis:

$$\frac{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6}{\pm 1,\ \pm 2}, \text{ ou}$$

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$. A única raiz racional é $\frac{3}{2}$. As raízes racionais são $\pm\sqrt{2}$

Pois para $x = 3/2$, a última linha por Briot Ruffini é

2 0 −4 0

110. Raízes racionais possíveis: ±1, ±3, ±9. A única raiz racional é −3. As raízes irracionais são $\pm\sqrt{3}$. Pois para x = −3, a última linha por Briot Ruffini é

1 0 −3 0

111. Raiz racional: −3. Raízes irracionais: $1 \pm \sqrt{3}$.
Para $x = -3$, a última linha por Briot Ruffini é

1 −2 −1 0

112. Raiz racional: 4. Raízes irracionais: $1 \pm \sqrt{2}$.
Para $x = 4$, a última linha por Briot Ruffini é

1 −2 −1 0

113. Raízes racionais: −1 e 4.
Raízes irracionais: $\pm\sqrt{2}$.
Para $x = -1$, a última linha por Briot Ruffini é

1 −4 −2 8 0

Para $x = 4$, a última linha por Briot Ruffini é

1 0 −2 0

114. Raízes racionais: −1 e 2.
Raízes irracionais: $\pm\sqrt{5}$.
Para $x = -1$, a última linha por Briot Ruffini é

1 −2 −5 10 0

Para $x = 2$, a última linha por Briot Ruffini é

1 0 −5 0

115. Raízes racionais: $-\frac{1}{2}$ e 4.
Raiz irracional: nenhuma.
Para $x = 4$ e $x = -1/2$, as últimas linhas por Briot Ruffini são, respectivamente:

2 1 2 1 0 e 2 0 2 0

116. Raiz racional: $\frac{2}{3}$. Raiz irracional: aproximadamente −0,6823.
Para $x = 2/3$, a última linha por Briot Ruffini é

3 0 3 3 0

117. $(-1)^{40} - 3 = -2$

118. $1^{63} - 17 = -16$

119. **(a)** Limite inferior: para $x = -5$, a última linha por Briot Ruffini é

1 −3 4 −33 203

Limite superior: para $x = 4$, a última linha por Briot Ruffini é

$$1 \quad 6 \quad 13 \quad 39 \quad 194$$

O Teste dos limites superior e inferior das raízes é provado, assim todas as raízes reais de f pertencem ao intervalo $[-5, 4]$.

(**b**) Raízes racionais de f possíveis:

$$\frac{\textit{Fatores de } 38 : \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 19, \ \pm 38}{\textit{Fatores de } 1 \qquad\qquad \pm 1}$$

O gráfico mostra que 2 é mais promissor, assim verificamos por Briot Ruffini e obtemos na última linha:

$$1 \quad 4 \quad -3 \quad -19 \quad 0$$

Usando o resto:

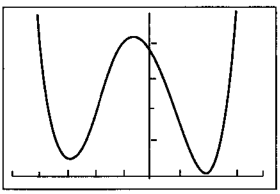
$f(-2) = 20 \neq 0$ $\qquad$ $f(-38) = 1.960.040$

$f(-1) = 39 \neq 0$ $\qquad$ $f(-38) = 2.178.540$

$f(1) = 17 \neq 0$ $\qquad$ $f(-19) = 112.917$

$f(19) = 139.859$

Como todas as raízes racionais possíveis além de 2 resultam em valores de função não zero, não há outras raízes racionais.



$[-5, 4]$ por $[-1, 49]$

(**c**) $f(x)\ (x - 2)\ (x^3 + 4x^2 - 3x - 19)$

(**d**) A partir do gráfico, descobrimos que uma raiz irracional de x é $x \cong 2{,}04$.

(**e**)

$$f(x) \approx (x - 2)(x - 2{,}04)(x^2 + 6{,}04x + 9{,}3216)$$

120. Falso. $x - a$ é um fator se, e somente se, $f(a) = 0$. Assim, $(x + 2)$ é um fator, se e somente se, $f(-2) = 0$.

121. Verdadeiro. Pelo teorema do resto, quando $f(x)$ é dividido por $x - 1$, o resto é $f(1)$, que é igual a 3.

122. A afirmação $f(3) = 0$ significa que $x + 3$ é uma raiz de $f(x)$ e que 3 é onde corta o eixo x do gráfico de $f(x)$. Assim $x - 3$ é um fator de $f(x)$, e quando $f(x)$ é dividido por $x - 3$ o resto é zero. A resposta é A.

123. Cada possível raiz racional, cada possível raiz racional de $f(x)$ deve ser um dos valores $\pm 1, \ \pm 3, \ \pm \frac{1}{2}, \ \pm \frac{3}{2}$. A resposta é E.

124. $f(x) = (x + 2)(x^2 + x - 1) - 3$ resulta em um resto de -3, quando é dividida por $x - 2$ ou $x^2 + x - 1$. Segue que $x + 2$ não é um fator de $f(x)$ e que $f(x)$ não é completamente divisível por $x + 2$. A resposta é B.

125. As respostas A a D podem ser verificadas como verdadeiras. Como $f(x)$ é uma função polinomial de grau ímpar, seu gráfico deve cruzar o eixo x em algum lugar. A resposta é E.

CAPÍTULO 11

Revisão rápida

1. $\sqrt[3]{-216} = -6$ pois $(-6)^3 = -216$
2. $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$ pois $5^3 = 125$ e $2^3 = 8$
3. $27^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 3^2 = 9$
4. $4^{5/2} = (2^2)^{5/2} = 2^5 = 32$
5. $\frac{1}{2^{12}}$
6. $\frac{1}{3^8}$
7. $\frac{1}{a^6}$
8. b^{15}
9. 0,15
10. 4%
11. (1,07)(23)
12. (0,96)(52)
13. $b^2 = \frac{160}{40} = 4$, portanto $b = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

14. $b^3 = \dfrac{9}{243}$, portanto $b = \sqrt[3]{\dfrac{9}{243}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$

15. $b = \sqrt[6]{\dfrac{838}{782}} \cong 1{,}01$

16. $b = \sqrt[5]{\dfrac{521}{93}} \cong 1{,}41$

17. $b = \sqrt[4]{\dfrac{91}{672}} \cong 0{,}61$

18. $b = \sqrt[7]{\dfrac{56}{127}} \cong 0{,}89$

Exercícios

1. Não é uma função exponencial, pois a base é variável e o expoente é constante. É uma função potência.

2. Função exponencial, com valor de a igual a 1 e valor da base igual a 3.

3. Função exponencial, com valor de a igual a 1 e valor da base igual a 5.

4. Não é uma função exponencial, pois o expoente é constante. É uma função constante.

5. Não é uma função exponencial, pois a base é variável.

6. Não é uma função exponencial, pois a base é variável. É uma função potência.

7. $f(0) = 3 \cdot 5^0 = 3 \cdot 1 = 3$

8. $f(-2) = 6 \cdot 3 - 2 = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

9. $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -2 \cdot 3^{1/3} = -2\sqrt[3]{3}$

10. $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 8 \cdot 4^{-3/2} = \dfrac{8}{(2^2)^{3/2}} = \dfrac{8}{2^3} = \dfrac{8}{8} = 1$

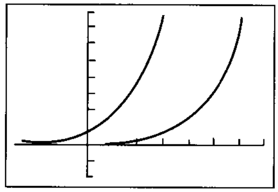
11. $f(x) = \dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

12. $g(x) = 12 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

13. $f(x) = 3 \cdot (\sqrt{2})^x = 3 \cdot 2^{x/2}$

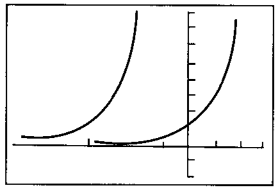
14. $g(x) = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{e}\right)^x = 2e^{-x}$

15. Translade $f(x) = 2^x$ por 3 unidades para a direita. De maneira alternativa, $g(x) = 2^{x-3} = 2^{-3} \cdot 2^x = \dfrac{1}{8} \cdot 2^x = \dfrac{1}{8} \cdot f(x)$. Pode ser obtida de $f(x)$ "encolhendo" verticalmente pelo fator $\dfrac{1}{8}$



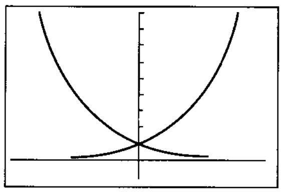
[−3, 7] por [−2, 8]

16. Translade $f(x) = 3^x$ por 4 unidades para a esquerda. De maneira alternativa, $g(x) = 3^{x+4} = 3^4 \cdot 3^x = 81 \cdot 3^x = 81 \cdot f(x)$. Pode ser obtida "esticando" verticalmente $f(x)$ pelo fator 81.



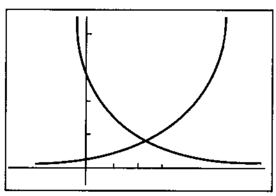
[−7, 3] por [−2, 8]

17. O gráfico de $g(x)$ é o simétrico de $f(x) = 4^x$ com relação ao eixo y.



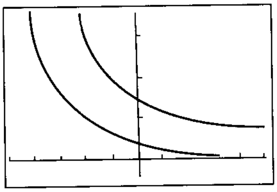
[−2, 2] por [−1, 9]

18. O gráfico de $g(x)$ é o simétrico de $f(x) = 2^x$ com relação ao eixo y e transladado 5 unidades para a direita.



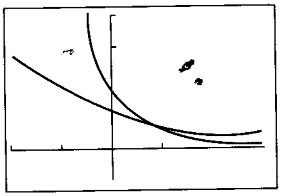
[−3, 7] por [−5, 45]

19. "Estique" verticalmente $f(x) = 0{,}5^x$ por um fator de 3 e translade 4 unidades para cima.



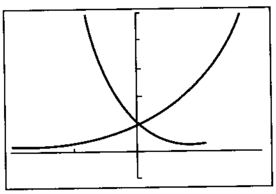
$[-5, 5]$ por $[-2, 18]$

20. "Estique" verticalmente $f(x) = 0{,}6^x$ por um fator de 2 e "encolha" horizontalmente por um fator de 3.



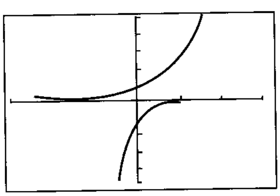
$[-2, 3]$ por $[-1, 4]$

21. O gráfico de $g(x)$ é o simétrico de $f(x) = e^x$ com relação ao eixo y e "encolhido" horizontalmente por um fator de 2.



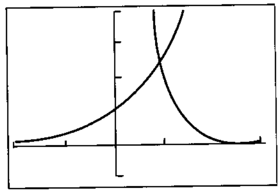
$[-2, 2]$ por $[-1, 5]$

22. O gráfico de $g(x)$ é o simétrico de $f(x) = e^x$ com relação aos eixos x e y e "encolhido" horizontalmente por um fator de 3.



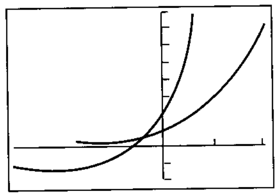
$[-3, 3]$ por $[-5, 5]$

23. O gráfico de $g(x)$ é o simétrico de $f(x) = e^x$ com relação ao eixo y e "encolhido" horizontalmente por um fator de 3; translade 1 unidade para a direita e "estique" verticalmente por um fator de 2.



$[-2, 3]$ por $[-1, 4]$

24. "Encolha" horizontalmente $f(x) = e^x$ por um fator de 2, "estique" verticalmente por um fator de 3 e translade para baixo 1 unidade.



$[-3, 3]$ por $[-2, 8]$

25. O gráfico (a) é o único gráfico formado e posicionado como o gráfico de $y = b^x$, $b > 1$.

26. O gráfico (d) é o simétrico de $y = 2^x$ com relação ao eixo y.

27. O gráfico (c) é o simétrico de $y = 2^x$ com relação ao eixo x.

28. O gráfico (e) é o simétrico de $y = 0{,}5^x$ com relação ao eixo x.

29. O gráfico (b) é o gráfico de $y = 3^{-x}$ transladado para baixo em 2 unidades.

30. O gráfico (f) é o gráfico de $y = 1{,}5^x$ transladado para baixo em 2 unidades.

31. Decaimento exponencial;

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0; \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

32. Decaimento exponencial;

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0; \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

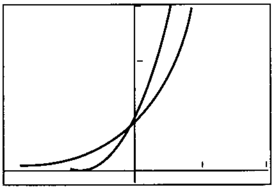
33. Decaimento exponencial;

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0; \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

34. Crescimento exponencial;

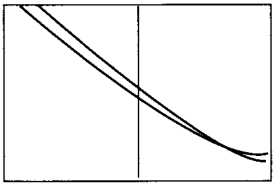
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

35. $x < 0$



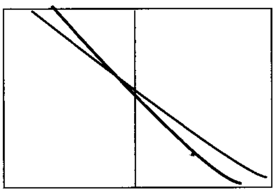
[−2, 2] por [−0,2; 3]

36. $x > 0$



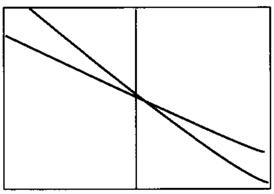
[−0,25; 0,25] por [0,5; 1,5]

37. $x < 0$



[−0,25; 0,25] por [0,75; 1,25]

38. $x > 0$

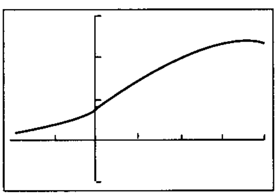


[−0,25; 0,25] por [0,75; 1,25]

39. $y_1 = y_3$, como $3^{2x+4} = 3^{2(x+2)} = (3^2)^{x+2} = 9^{x+2}$

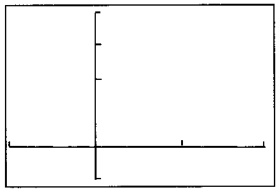
40. $y_2 = y_3$, como $2 \cdot 2^{3x-2} = 2^1 2^{3x-2} = 2^{1+3x-2}$ $= 2^{3x-1}$

41. Passa no eixo vertical y no par (0, 4). Assíntotas horizontais: $y = 0$, $y = 12$.



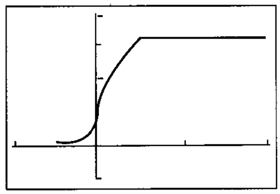
[−10, 20] por [−5, 15]

42. Passa no eixo vertical y no par (0, 3). Assíntotas horizontais: $y = 0$, $y = 18$.



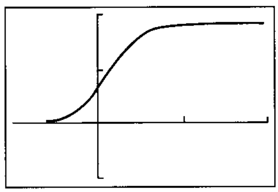
[−5, 10] por [−5, 20]

43. Passa no eixo vertical y no par (0, 4). Assíntotas horizontais: $y = 0$, $y = 16$.



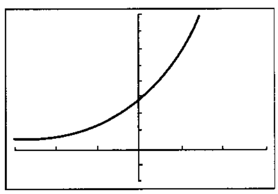
[−5, 10] por [−5, 20]

44. Passa no eixo vertical y no par (0, 3). Assíntotas horizontais: $y = 0$, $y = 9$.



[−5, 10] por [−5, 10]

45.



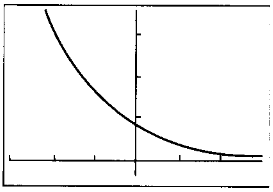
[−3, 3] por [−2, 8]

Domínio: $]-\infty, +\infty[$
Imagem: $]0, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: sempre crescente
Simetria: não é simétrica
Limite: limitada inferiormente por $y = 0$, que é também a única assíntota
Extremo local: nenhum

Assíntotas: $y = 0$
Comportamento nos extremos do domínio:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

46.

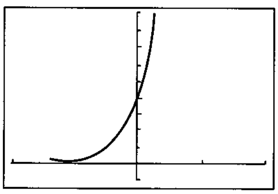


$[-3, 3]$ por $[-2, 18]$

Domínio: $]-\infty, +\infty[$
Imagem: $]0, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: sempre decrescente
Simetria: não é simétrica
Limite: limitada inferiormente por $y = 0$, que é também a única assíntota
Extremo local: nenhum
Assíntotas: $y = 0$
Comportamento nos extremos do domínio:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

47.

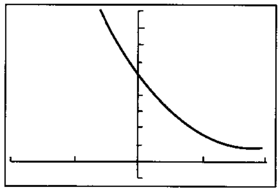


$[-2, 2]$ por $[-1, 9]$

Domínio: $]-\infty, +\infty[$
Imagem: $]0, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: sempre crescente
Simetria: não é simétrica
Limite: limitada inferiormente por $y = 0$, que é também a única assíntota
Extremo local: nenhum
Assíntotas: $y = 0$
Comportamento nos extremos do domínio:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

48.

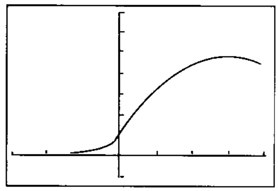


$[-2, 2]$ por $[-1, 9]$

Domínio: $]-\infty, +\infty[$
Imagem: $]0, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: sempre decrescente
Simetria: não é simétrica
Limite: limitada inferiormente por $y = 0$, que é também a única assíntota
Extremo local: nenhum
Assíntotas: $y = 0$
Comportamento nos extremos do domínio:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

49.

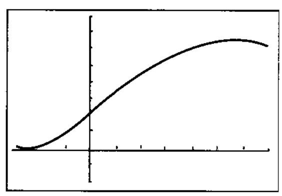


$[-3, 4]$ por $[-1, 7]$

Domínio: $]-\infty, +\infty[$
Imagem: $]0, 5[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: sempre crescente
Simetria: com relação ao par (0,69; 2,5)
Limite: limitada inferiormente por $y = 0$ e superiormente por $y = 5$; ambas são assíntotas
Extremo local: nenhum
Assíntotas: $y = 0$ e $y = 5$
Comportamento nos extremos do domínio:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5, \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

50.



$[-3, 7]$ por $[-2, 8]$

Domínio: $]-\infty, +\infty[$
Imagem: $]0, 6[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: sempre crescente
Simetria: com relação ao par (0,69; 3)
Limite: limitada inferiormente por $y = 0$ e superiormente por $y = 6$; ambas são assíntotas
Extremo local: nenhum
Assíntotas: $y = 0$ e $y = 6$
Comportamento nos extremos do domínio:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

51. Resolvendo graficamente, encontramos que a curva $y = \dfrac{12{,}79}{(1 + 2{,}402e^{-0{,}0309x})}$ intersecciona a linha $y = 10$ quando $t \cong 69{,}67$. A população de Ohio foi de 10 milhões em 1969.

52. **(a)** $P(50) = \dfrac{19{,}875}{1 + 57{,}993e^{-0{,}035005(50)}} \cong 1{,}794558$ ou 1.794.558 pessoas.

(b) $P(210) = \dfrac{19{,}875}{1 + 57{,}993e^{-0{,}035005(210)}}$

$\cong 19{,}161673$ ou 19.161.673 pessoas.

(c) $\lim_{x\to+\infty} P(t) = 19{,}875$ ou 19.875.000 pessoas.

53. **(a)** Quando $t = 0$, $B = 100$.
(b) Quando $t = 6$, $B \cong 6394$.

54. Falso.

55. Apenas 8^x tem a forma $a \cdot b^x$. A resposta é E.

56. Para $b > 0, f(0) = b^0 = 1$. A resposta é C.

57. O fator de crescimento de $f(x) = a \cdot b^x$ é a base b. A resposta é A.

58. Com $x > 0$, $a^x > b^x$ requer $a > b$ (independentemente se $x < 1$ ou $x > 1$). A resposta é B.

59. $r = 0{,}09$, assim, $P(t)$ é uma função de crescimento exponencial de 9%.

60. $r = 0{,}018$, assim, $P(t)$ é uma função de crescimento exponencial de 1,8%.

61. $r = -0{,}032$, assim, $f(x)$ é uma função de decaimento exponencial de 3,2%.

62. $r = -0{,}0032$, assim, $f(x)$ é uma função de decaimento exponencial de 0,32%.

63. $r = 1$, assim, $g(t)$ é uma função de crescimento exponencial de 100%.

64. $r = -0{,}95$, assim, $g(t)$ é uma função de decaimento exponencial de 95%.

65. $f(x) = 5 \cdot (1 + 0{,}17)^x = 5 \cdot 1{,}17^x (x = \text{anos})$.

66. $f(x) = 52 \cdot (1 + 0{,}023)^x = 52 \cdot 1{,}023^x$ (x = dias).

67. $f(x) = 16 \cdot (1 - 0{,}5)^x = 16 \cdot 0{,}5^x (x = \text{meses})$.

68. $f(x) = 5 \cdot (1 - 0{,}0059) = 5 \cdot 0{,}9941^x$ (x = semanas).

69. $f(x) = 28.900 \cdot (1 - 0{,}026)^x = 28.900 \cdot 0{,}974^x$ (x = anos).

70. $f(x) = 502.000 \cdot (1 + 0{,}017)x = 502.000 \cdot 1{,}017^x$ (x = anos).

71. $f(x) = 18 \cdot (1 + 0{,}052)^x = 18 \cdot 1{,}052^x$ (x = semanas).

72. $f(x) = 15 \cdot (1 - 0{,}046)^x = 15 \cdot 0{,}954^x (x = \text{dias})$.

73. $f(x) = 0{,}6 \cdot 2^{x/3} (x = \text{dias})$.

74. $f(x) = 250 \cdot 2^{x/7{,}5} = 250 \cdot 2^{x/15}$ (x = horas).

75. $f(x) = 592 \cdot 2^{-x/6}$ (x = anos).

76. $f(x) = 17 \cdot 2^{-x/32} (x = \text{horas})$.

77. $f(0) = 2{,}3 \cdot \dfrac{2{,}875}{2{,}3} = 1{,}25 = r + 1$, assim,

$f(x) = 2{,}3 \cdot 1{,}25^x$ (modelo de crescimento).

78. $g(0) = -5{,}8, \dfrac{-4{,}64}{-5{,}8} = 0{,}8 = r + 1$, assim

$g(x) = -5{,}8 \cdot (0{,}8)^x$ (modelo de decrescimento).

79. $f(0) = 4$, assim, $f(x) = 4 \cdot b^x$. Como $f(5) = 4 \cdot b^5 = 8{,}05, b^5 = \dfrac{8{,}05}{4}, b = \sqrt[5]{\dfrac{8{,}05}{4}} \cong 1{,}15$

$f(x) \cong 4 \cdot 1{,}15^x$.

80. $f(0) = 3$, assim, $f(x) = 3 \cdot b^x$. Como $f(4) = 3 \cdot b^4 = 1{,}49, b^4 = \dfrac{1{,}49}{3}, b = \sqrt[4]{\dfrac{1{,}49}{3}} \cong$

$0{,}84 \cdot f(x) \cong 3 \cdot 0{,}84^x$

81. $c = 40, a = 3$, assim, $f(1) = \dfrac{40}{1 + 3b} = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 + 60b = 40 \Rightarrow 60b = 20 \Rightarrow b = \dfrac{1}{3}$, assim,

$$f(x) = \frac{40}{1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x}$$

82. $c = 60$, $a = 4$, assim, $f(1) = \dfrac{60}{1 + 4b} = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 60 = 24 + 96b \Rightarrow 96b = 36 \Rightarrow b = \dfrac{3}{8}$, assim,

$$f(x) = \frac{60}{1 + 4\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^x}$$

83. $c = 128$, $a = 7$, assim, $f(5) = \dfrac{128}{1 + 7b^5} = 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow 128 = 32 + 224b^5 \Rightarrow 224b^5 = 96 \Rightarrow b^5 =$

$\dfrac{96}{224} \Rightarrow b = \sqrt[5]{\dfrac{96}{224}} \cong 0{,}844$, assim,

$$f(x) \cong \frac{128}{1+7\cdot 0{,}844^x}$$

84. $c = 30$, $a = 5$, assim, $f(3) = \dfrac{30}{1 + 5b^3} = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 30 = 15 + 75b^3 \Rightarrow 75b^3 = 15 \Rightarrow$

$b^3 = \dfrac{15}{75} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\dfrac{1}{5}} \cong 0{,}585$, assim,

$$f(x) \cong \frac{30}{1 + 5\cdot 0{,}585^x}$$

85. $c = 20$, $a = 3$, assim, $f(2) = \dfrac{20}{1 + 3b^2} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 = 10 + 30b^2 \Rightarrow 30b^2 = 10 \Rightarrow b^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \sqrt{\dfrac{1}{3}} \cong 0{,}58$, assim, $f(x) = \dfrac{20}{1 + 3\cdot 0{,}58^x}$

86. $c = 60$, $a = 3$, assim, $f(8) = \dfrac{60}{1 + 3b^8} = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 60 = 30 + 90b^8 \Rightarrow 90b^8 = 30 \Rightarrow b^8 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \sqrt[8]{\dfrac{1}{3}} \cong 0{,}87$, assim, $f(x) = \dfrac{60}{1 + 3\cdot 0{,}87^x}$

87. $P(t) = 736.000(1{,}0149)^t$; $P(t) = 1.000.000$ quando $t \cong 20{,}73$ anos, ou o ano de 2020.

88. $P(t) = 478.000(1{,}0628)^t$; $P(t) = 1.000.000$ quando $t \cong 12{,}12$ anos, ou o ano de 2012.

89. O modelo é $P(t) = 6.250(1{,}0275)^t$.

(a) Em 1915: cerca de $P(25) \cong 12.315$. Em 1940: cerca de $P(50) \cong 24.265$.

(b) $P(t)=50.000$ quando $t \cong 76{,}65$ anos após 1980 — em 1966.

90. O modelo é $P(t) = 4.200(1{,}0225)^t$.

(a) Em 1930: cerca de $P(20) \cong 6.554$. Em 1945: cerca de $P(35) \cong 9.151$.

(b) $P(t)=20.000$ quando $t \cong 70{,}14$ anos após 1910 — em 1980.

91. **(a)** $y = 6{,}6\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/14}$, onde t é o tempo em dias.

(b) Após 38,11 dias.

92. **(a)** $y = 3{,}5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/65}$, onde t é o tempo em dias.

(b) Após 117,48 dias.

93. Quando $t = 1$, $B \cong 200$ — a população duplica a cada hora.

94. Falso.

95. A base é $1{,}049 = 1 + 0{,}049$, assim, a taxa percentual de crescimento constante é $0{,}049 = 4{,}9\%$. A resposta é C.

96. A base é $0{,}834 = 1 - 0{,}166$, assim, a taxa percentual de decrescimento constante é $0{,}166 = 16{,}6\%$. A resposta é B.

97. O crescimento pode ser modelado como $P(t) = 1 \cdot 2^{t/4}$. Resolva $P(t) = 1.000$ para encontra $t \cong 39{,}86$. A resposta é D.

CAPÍTULO 12

Revisão rápida

1. $\dfrac{1}{25} = 0{,}04$

2. $\dfrac{1}{1000} = 0{,}001$

3. $\dfrac{1}{5} = 0{,}2$

4. $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$

5. $\dfrac{2^{33}}{2^{28}} = 2^5 = 32$

6. $\dfrac{3^{26}}{3^{24}} = 3^2 = 9$

7. $\log 10^2 = 2$

8. $\ln e^3 = 3$

9. $\ln e^{-2} = -2$

10. $\log 10^{-3} = -3$

11. $5^{1/2}$

12. $10^{1/3}$

13. $\left(\frac{1}{e}\right)^{1/2} = e^{-1/2}$

14. $\left(\frac{1}{e^2}\right)^{1/3} = e^{-2/3}$

15. $\frac{x^5y^{-2}}{x^2y^{-4}} = x^{5-2}y^{-2-(-4)} = x^3y^2$

16. $\frac{u^{-3}v^7}{u^{-2}v^2} = \frac{v^{7-2}}{u^{-2-(-3)}} = \frac{v^5}{u}$

17. $(x^6y^{-2})^{1/2} = (x^6)^{1/2}(y^{-2})^{1/2} = \frac{|x|^3}{|y|}$

18. $(x^{-8}y^{12})^{3/4} = (x^{-8})^{3/4}(y^{12})^{3/4} = \frac{|y|^9}{x^6}$

19. $\frac{(u^2v^{-4})^{1/2}}{(27u^6v^{-6})^{1/3}} = \frac{|u||v|^{-2}}{3u^2v^{-2}} = \frac{1}{3|u|}$

20. $\frac{(x^{-2}y^3)^{-2}}{(x^3y^{-2})^{-3}} = \frac{x^4y^{-6}}{x^{-9}y^6} = \frac{x^{13}}{y^{12}}$

21. $7{,}783 \times 10^8$ km

22. 1×10^{-15} m

23. 602.000.000.000.000.000.000.000

24. 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 66

25. $(1{,}86 \times 10^5)(3{,}1 \times 10^7) = (1{,}86)(3{,}1) \times 10^{5+7}$

$= 5{,}766 \times 10^{12}$

26. $\frac{8 \times 10^{-7}}{5 \times 10^{-6}} = \frac{8}{5} \times 10^{-7-(-6)} = 1{,}6 \times 10^{-1}$

Exercícios

1. $\log_4 4 = 1$ porque $4^1 = 4$

2. $\log_6 1 = 0$ porque $6^0 = 1$

3. $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

4. $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$

5. $\log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$ porque $5^{2/3} = \sqrt[3]{25}$

6. $\log_6 \frac{1}{\sqrt[5]{36}} = -\frac{2}{5}$ porque $6^{-2/5} = \frac{1}{6^{2/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{36}}$

7. $\log 10^3 = 3$

8. $\log 10.000 = \log 10^4 = 4$

9. $\log 100.000 = \log 10^5 = 5$

10. $\log 10^{-4} = -4$

11. $\log \sqrt[3]{10} = \log 10^{1/3} = \frac{1}{3}$

12. $\log \frac{1}{\sqrt{1000}} = \log 10^{-3/2} = \frac{-3}{2}$

13. $\ln e^3 = 3$

14. $\ln e^{-4} = -4$

15. $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$

16. $\ln 1 = \ln e^0 = 0$

17. $\ln \sqrt[4]{e} = \ln e^{1/4} = \frac{1}{4}$

18. $\ln \frac{1}{\sqrt{e^7}} = \ln e^{-7/2} = \frac{-7}{2}$

19. 3, porque $b^{\log_b 3} = 3$ para qualquer $b > 0$.

20. 8, porque $b^{\log_b 8} = 8$ para qualquer $b > 0$.

21. $10^{\log(0{,}5)} = 10^{\log_{10}(0{,}5)} = 0{,}5$

22. $10^{\log 14} = 10^{\log_{10} 14} = 14$

23. $e^{\ln 6} = e^{\log_e 6} = 6$

24. $e^{\ln(1/5)} = e^{\log_e(1/5)} = 1/5$

25. $\log 9{,}43 \cong 0{,}9745 \cong 0{,}975$ e $10^{0{,}09745} \cong 9{,}43$

26. $\log 0{,}908 \cong -0{,}042$ e $10^{-0{,}042} \cong 0{,}908$

27. $\log(-14)$ é indefinido porque $-14 < 0$

28. $\log(-5{,}14)$ é indefinido porque $-5{,}14 < 0$

29. $\ln 4{,}05 \cong 1{,}399$ e $e^{1{,}399} \cong 4{,}05$

30. $\ln 0{,}733 \cong -0{,}311$ e $e^{-0{,}311} \cong 0{,}733$

31. ln $(-0{,}49)$ é indefinido porque $-0{,}49 < 0$

32. ln $(-3{,}3)$ é indefinido porque $-3{,}3 < 0$

33. $x = 10^2 = 100$

34. $x = 10^4 = 10.000$

35. $x = 10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

36. $x = 10^{-3} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$

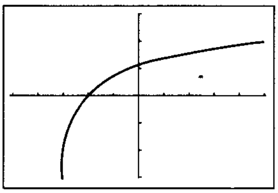
37. $f(x)$ é indefinida para $x > 1$. A resposta é (d).

38. $f(x)$ é indefinida para $x < -1$. a resposta é (b)

39. $f(x)$ é indefinida para $x < 3$. A resposta é (a).

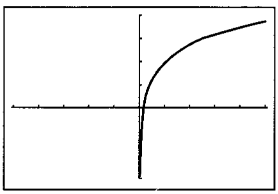
40. $f(x)$ é indefinida para $x > 4$. A resposta é (c).

41. Começar de $y = \ln x$: translade à esquerda 3 unidades.



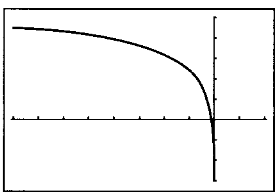
$[-5, 5]$ por $[-3, 3]$

42. Começar de $y = \ln x$: translade para cima 2 unidades.



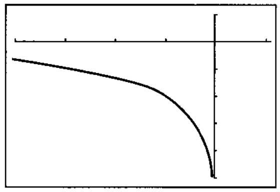
$[-5, 5]$ por $[-3, 4]$

43. Começar de $y = \ln x$: ache o gráfico simétrico com relação ao eixo y e translade para cima 3 unidades.



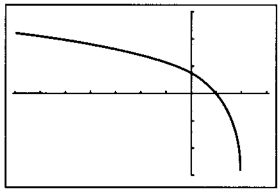
$[-4, 1]$ por $[-3, 5]$

44. Começar de $y = \ln x$: ache o gráfico simétrico com relação ao eixo y e translade à esquerda 2 unidades.



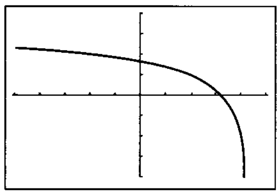
$[-4, 1]$ por $[-5, 1]$

45. Começar de $y = \ln x$: ache o gráfico simétrico com relação ao eixo y e translade à direita 2 unidades.



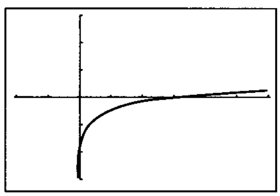
$[-7, 3]$ por $[-3, 3]$

46. Começar de $y = \ln x$: ache o gráfico simétrico com relação ao eixo y e translade à direita 5 unidades.



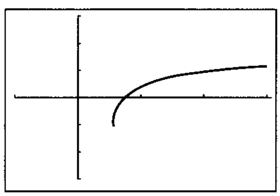
$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

47. Começar de $y = \log x$: translade para baixo 1 unidade.



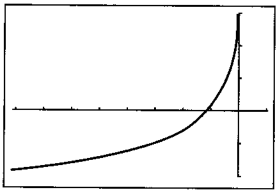
$[-5, 15]$ por $[-3, 3]$

48. Começar de $y = \log x$: translade à direita 3 unidades.



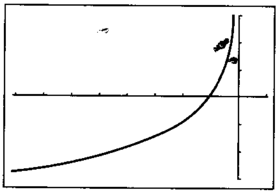
$[-5, 15]$ por $[-3, 3]$

49. Começar de $y = \log x$: ache o gráfico simétrico com relação aos eixos e "estique" verticalmente utilizando o fator 2.



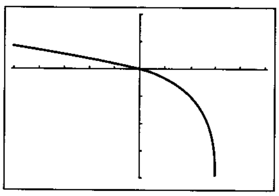
$[-8, 1]$ por $[-2, 3]$

50. Começar de $y = \log x$: ache o gráfico simétrico com relação aos eixos e "estique" verticalmente utilizando o fator 3.



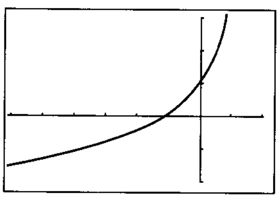
$[-8, 7]$ por $[-3, 3]$

51. Começar de $y = \log x$: ache o gráfico simétrico com relação ao eixo y, translade à direita 3 unidades, "estique" verticalmente utilizando o fator 2, translade para baixo 1 unidade.



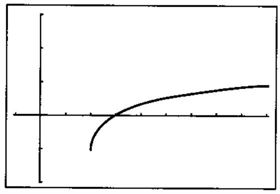
$[-5, 5]$ por $[-4, 2]$

52. Começar de $y = \log x$: ache o gráfico simétrico com relação aos eixos, translade à direita 1 unidade, "estique" verticalmente utilizando o fator 3, translade para cima 1 unidade.



$[-6, 2]$ por $[-2, 3]$

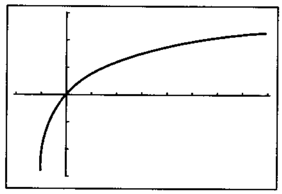
53.



$[-1, 9]$ por $[-3, 3]$

Domínio: $]2, +\infty[$
Imagem: $]-\infty, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: sempre crescente
Simetria: não é simétrica
Limite: não é limitada
Extremo local: nenhum
Assíntotas: em $x = 2$
Comportamento nos extremos do domínio:
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

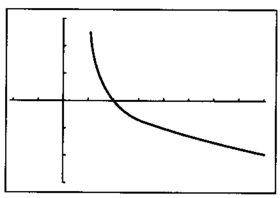
54.



$[-2, 8]$ por $[-3, 3]$

Domínio: $]-1, +\infty[$
Imagem: $]-\infty, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: sempre crescente
Simetria: não é simétrica
Limite: não é limitada
Extremo local: nenhum
Assíntotas: em $x = -1$
Comportamento nos extremos do domínio:
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

55.

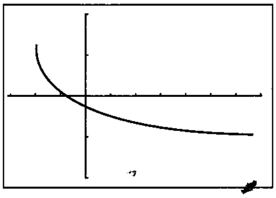


$[-2, 8]$ por $[-3, 3]$

Domínio: $]1, +\infty[$
Imagem: $]-\infty, +\infty[$

Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: decrescente neste domínio
Simetria: não é simétrica
Limite: não é limitada
Extremo local: nenhum
Assíntotas: em $x = 1$
Comportamento nos extremos do domínio:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

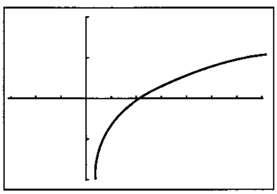
56.



$[-3, 7]$ por $[-2, 2]$

Domínio: $]-2, +\infty[$
Imagem: $]-\infty, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: decrescente neste domínio
Simetria: não é simétrica
Limite: não é limitada
Extremo local: nenhum
Assíntotas: em $x = -2$
Comportamento nos extremos do domínio:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

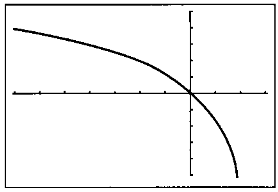
57.



$[-3, 7]$ por $[-3, 3]$

Domínio: $]0, +\infty[$
Imagem: $]-\infty, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente:
Crescente neste domínio
Simetria: não é simétrica
Limite: não é limitada
Extremo local: nenhum
Assíntotas: em $x = 0$
Comportamento nos extremos do domínio:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

58.



$[-7, 3{,}1]$ por $[-10, 10{,}2]$

Domínio: $]-\infty, 2[$
Imagem: $]-\infty, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: decrescente neste domínio
Simetria: não é simétrica
Limite: não é limitada
Extremo local: nenhum
Assíntotas: em $x = 2$
Comportamento nos extremos do domínio:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

59. $\log 2 \cong 0{,}30103$. A resposta é C.

60. $\log 5 \cong 0{,}699$ mas $2{,}5 \log 2 \cong 0{,}753$. A resposta é A.

61. O gráfico de $f(x) = \ln x$ está inteiramente à direita da origem. A resposta é B.

62. Para $f(x) = 2 \cdot 3^x$, $f^{-1}(x) = \log_3(x/2)$

Porque $f^{-1}(f(x)) = \log_3(2 \cdot 3^x/2)$

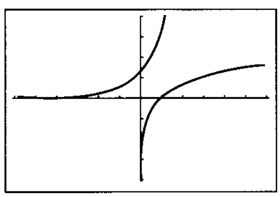
$= \log_3 3^x$

$= x$

A resposta é A.

63.

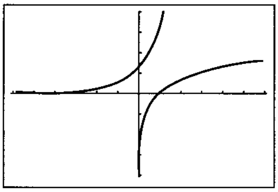
$f(x)$	3^x	$\log_3 x$
Domínio	$]-\infty, +\infty[$	$]0, +\infty[$
Imagem	$]0, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$
Intercepto	$(0, 1)$	$(1, 0)$
Assíntotas	$y = 0$	$x = 0$



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

64.

$f(x)$	5^x	$\log_5 x$
Domínio	$]-\infty, +\infty[$	$]0, +\infty[$
Imagem	$]0, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$
Intercepto	$(0, 1)$	$(1, 0)$
Assíntotas	$y = 0$	$x = 0$



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

65. $b = \sqrt[e]{e}$. O ponto que é comum a ambos os gráficos é (e, e).

66. Basta refletir com relação ao eixo x.

67. Basta refletir com relação ao eixo x.

68. $\ln 8x = \ln 8 + \ln x = 3\ln 2 + \ln x$

69. $\ln 9y = \ln 9 + \ln y = 2\ln 3 + \ln y$

70. $\log \dfrac{3}{x} = \log 3 - \log x$

71. $\log \dfrac{2}{y} = \log 2 - \log y$

72. $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$

73. $\log_2 x^{-2} = -2 \log_2 x$

74. $\log x^3y^2 = \log x^3 + \log y^2 = 3 \log x + 2 \log y$

75. $\log xy^3 = \log x + \log y^3 = \log x + 3 \log y$

76. $\ln \dfrac{x^2}{y^3} = \ln x^2 - \ln y^3 = 2\ln x - 3\ln y$

77. $\log 1000x^4 = \log 1000 + \log x^4 = 3 + 4 \log x$

78. $\log \sqrt[4]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{1}{4}(\log x - \log y) = \dfrac{1}{4}\log x - \dfrac{1}{4}\log y$

79. $\ln \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \dfrac{1}{3}(\ln x - \ln y) = \dfrac{1}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\ln y$

80. $\log x + \log y = \log xy$

81. $\log x + \log 5 = \log 5x$

82. $\ln y - \ln 3 = \ln (y/3)$

83. $\ln x - \ln y = \ln (x/y)$

84. $\dfrac{1}{3}\log x = \log x^{1/3} = \log \sqrt[3]{x}$

85. $\dfrac{1}{5}\log z = \log z^{1/5} = \log \sqrt[5]{z}$

86. $2\ln x + 3\ln y = \ln x^2 + \ln y^3 = \ln (x^2y^3)$

87. $4 \log y - \log z = \log y^4 - \log z = \log\left(\dfrac{y^4}{z}\right)$

88. $4 \log (xy) - 3 \log (yz) = \log (x^4y^4) - \log (y^3z^3)$

$= \log\left(\dfrac{x^4y^4}{y^3z^3}\right) = \log\left(\dfrac{x^4y}{z^3}\right)$

89. $3\ln (x^3y) + 2\ln(yz^2) = \ln (x^9y^3) + \ln(y^2z^4)$

$= \ln (x^9y^5z^4)$

90. $\dfrac{\ln 7}{\ln 2} \cong 2{,}8074$

91. $\dfrac{\ln 19}{\ln 5} \cong 1{,}8295$

92. $\dfrac{\ln 175}{\ln 8} \cong 2{,}4837$

93. $\dfrac{\ln 259}{\ln 12} \cong 2{,}2362$

94. $\dfrac{\ln 12}{\ln 0{,}5} = \dfrac{\ln 12}{\ln 2} \cong -3{,}5850$

95. $\dfrac{\ln 29}{\ln 0{,}2} = \dfrac{\ln 29}{\ln 5} \cong -2{,}0922$

96. $\log_3 x = \dfrac{\ln x}{\ln 3}$

97. $\log_7 x = \dfrac{\ln x}{\ln 7}$

98. $\log_2(a + b) = \dfrac{\ln (a + b)}{\ln 2}$

99. $\log_5(c - d) = \dfrac{\ln (c - d)}{\ln 5}$

100. $\log_2 x = \dfrac{\log x}{\log 2}$

101. $\log_4 x = \dfrac{\log x}{\log 4}$

102. $\log_{1/2}(x + y) = \dfrac{\log(x + y)}{\log(1/2)} = -\dfrac{\log(x + y)}{\log 2}$

103. $\log_{1/3}(x - y) = \dfrac{\log(x - y)}{\log(1/3)} = -\dfrac{\log(x - y)}{\log 3}$

104. $\dfrac{R}{S} = \dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

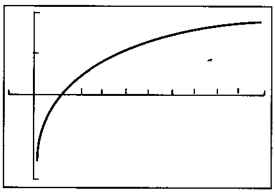
$\log_b(\dfrac{R}{S}) = \log_b b^{x-y} = x - y = \log_b R - \log_b S$

105. Seja $x = \log_b R$. Então $b^x = R$, assim

$R^c = (b^x)^c = b^{c \cdot x}$

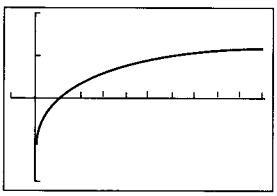
$\log_b R^c = \log_b b^{c \cdot x} = c \cdot x = c \log_b R$

106. Começar de $g(x) = \ln x$: "encolhe" verticalmente por um fator $1/\ln 4 \cong 0{,}72$.



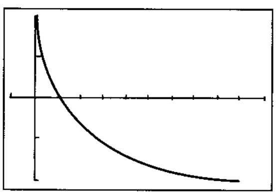
$[-1, 10]$ por $[-2, 2]$

107. Começar de $g(x) = \ln x$: "encolha" verticalmente por um fator $1/\ln 7 \cong 0{,}51$.



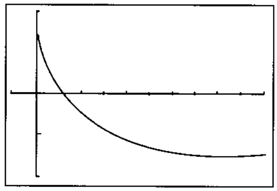
$[-1, 10]$ por $[-2, 2]$

108. Começar de $g(x) = \ln x$: ache o simétrico com relação ao eixo x, "encolha" verticalmente por um fator $1/\ln 3 \cong 0{,}91$.



$[-1, 10]$ por $[-2, 2]$

109. Começar de $g(x) = \ln x$: "encolha" verticalmente por um fator $1/\ln 5 \cong 0{,}62$.



$[-1, 10]$ por $[-2, 2]$

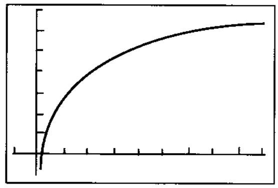
110. (b)

111. (c)

112. (d)

113. (a)

114.

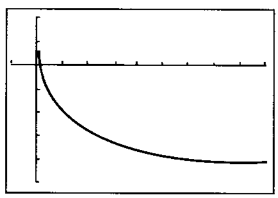


$[-1, 9]$ por $[-1, 7]$

Domínio: $]0, +\infty[$
Imagem: $]-\infty, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: sempre crescente
Assíntotas: em $x = 0$
Comportamento nos extremos do domínio:
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = \log_2(8x) = \dfrac{\ln(8x)}{\ln(2)}$

115.



$[-1, 9]$ por $[-5, 2]$

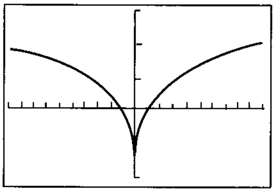
Domínio: $]0, +\infty[$
Imagem: $]-\infty, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua
Comportamento crescente/decrescente: sempre decrescente
Assíntotas: em $x = 0$

Comportamento nos extremos do domínio:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$f(x) = \log_{1/3}(9x) = \frac{\ln(9x)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$

116.



$[-10, 10]$ por $[-2, 3]$

Domínio: $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Imagem: $]-\infty, +\infty[$

Continuidade: a função é descontínua em $x = 0$

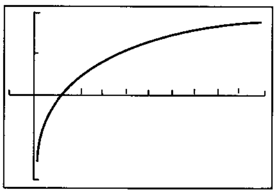
Comportamento crescente/decrescente: decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$; crescente no intervalo $]0, +\infty[$

Assíntotas: em $x = 0$

Comportamento nos extremos do domínio:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

117.



$[-1, 10]$ por $[-2, 2]$

Domínio: $]0, +\infty[$

Imagem: $]-\infty, +\infty[$

Continuidade: a função é contínua

Comportamento crescente/decrescente: sempre crescente

Assíntotas: em $x = 0$

Comportamento nos extremos do domínio:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

118. Verdadeiro.

119. Falso.

120. $\log 12 = \log(3 \cdot 4) = \log 3 + \log 4$ pela regra do produto. A resposta é B.

121. $\log_9 64 = (\ln 64) / (\ln 9)$ pela fórmula da mudança de base. A resposta é C.

122. $\ln x^5 = 5 \ln x$ pela regra da potência. A resposta é A.

123. $\log_{1/2} x^2 = 2 \log_{1/2} |x|$

$$= 2\frac{\ln|x|}{\ln(1/2)}$$

$$= 2\frac{\ln|x|}{\ln 1 - \ln 2}$$

$$= -2\frac{\ln|x|}{\ln 2}$$

$$= -2 \log_2 |x|$$

A resposta é E.

124. $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2$

$\log 6 = \log 2 + \log 3$

$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2$

$\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3$

$\log 12 = \log 3 + \log 4 = \log 3 + 2 \log 2$

$\log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2$

$\log 18 = \log 2 + \log 9 = \log 2 + 2 \log 3$

$\log 24 = \log 2 + \log 12 = 3 \log 2 + \log 3$

$\log 27 = \log 3^3 = 3 \log 3$

$\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2$

$\log 36 = \log 6 + \log 6 = 2 \log 2 + 2 \log 3$

$\log 48 = \log 4 + \log 12 = 4 \log 2 + \log 3$

$\log 54 = \log 2 + \log 27 = \log 2 + 3 \log 3$

$\log 72 = \log 8 + \log 9 = 3 \log 2 + 2 \log 3$

$\log 81 = \log 3^4 = 4 \log 3$

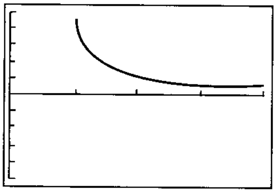
$\log 96 = \log(3 \cdot 32)$

$= \log 3 + \log 32 = \log 3 + 5 \log 2$

125. $\cong 6{,}41 < x < 93{,}35$

126. $\cong 1{,}26 \leq x \leq 14{,}77$

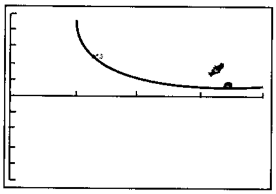
127. (a)



[0, 20] por [−2, 8]

Domínio de f e g: $]3, +\infty[$

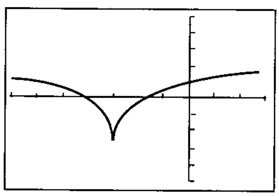
(b)



[0, 20] por [−2, 8]

Domínio de f e g: $]5, +\infty[$

(c)



[−7, 3] por [−5, 5]

Domínio de f: $]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$
Domínio de g: $]-3, +\infty[$

128. Lembre que $y = \log_a x$ pode ser escrito como $x = a^y$.

$$y = \log_a b$$

$$a^y = b$$

$$\log a^y = \log b$$

$$y \log a = \log b$$

$$y = \frac{\log b}{\log a} = \log_a b$$

129. (a) $\log (2 \cdot 4) \cong 0{,}90309$,

$\log 2 + \log 4 \cong 0{,}30103 + 0{,}60206 \cong 0{,}90309$

(b) $\log\left(\frac{8}{2}\right) \cong 0{,}60206$,

$\log 8 - \log 2 \cong 0{,}90309 - 0{,}30103$

$\cong 0{,}60206$

(c) $\log 2^3 \cong 0{,}90309$,

$3 \log 2 \cong 3(0{,}30103) \cong 0{,}90309$

(d) $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) \cong \log 10 - \log 2 \cong 1 - 0{,}30103$

$= 0{,}69897$

(e) $\log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 \approx 1{,}20412$

(f) $\log 40 = \log (4 \cdot 10) = \log 4 + \log 10 \approx 1{,}60206$

130.

(a) Falso

(b) Falso; $\log_3 (7x) = \log_3 7 + \log_3 x$

(c) Verdadeiro

(d) Verdadeiro

(e) Falso; $\frac{x}{4} = \log x - \log 4$

(f) Verdadeiro

(g) Falso; $\log_5 x^2 = \log_5 x + \log_5 x = 2 \log_5 x$

(h) Verdadeiro

131. $36\left(\frac{1}{3}\right)^{x/5} = 4$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x/5} = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x/5} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{x}{5} = 2$$

$$x = 10$$

132. $32\left(\frac{1}{4}\right)^{x/3} = 2$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x/3} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x/3} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\frac{x}{3} = 2$$

$$x = 6$$

133. $2 \cdot 5^{x/4} = 250$

$5^{x/4} = 125$

$5^{x/4} = 5^3$

$\frac{x}{4} = 3$

$x = 12$

134. $3 \cdot 4^{x/2} = 96$

$4^{x/2} = 32$

$4^{x/2} = 4^{5/2}$

$\frac{x}{2} = \frac{5}{2}$

$x = 5$

135. $10^{-x/3} = 10$, assim, $-x/3 = 1$,

e portanto $x = -3$.

136. $5^{-x/4} = 5$, assim, $-x/4 = 1$,

e portanto $x = -4$.

137. $x = 10^4 = 10.000$

138. $x = 2^5 = 32$

139. $x - 5 = 4^{-1}$, assim, $x = 5 + 4^{-1} = 5{,}25$.

140. $1 - x = 4^{-1}$, assim, $x = -3$.

141. $x = \dfrac{\ln 4{,}1}{\ln 1{,}06} = \log_{1{,}06} 4{,}1 \cong 24{,}2151$

142. $x = \dfrac{\ln 1{,}6}{\ln 0{,}98} = \log_{0{,}98} 1{,}6 \cong -23{,}2644$

143. $e^{0{,}035x} = 4$, assim, $0{,}035x = \ln 4$, e portanto

$x = \dfrac{1}{0{,}035} \ln 4 \cong 39{,}6084$.

144. $e^{0{,}045x} = 3$, assim, $0{,}045x = \ln 3$, e portanto

$x = \dfrac{1}{0{,}045} \ln 3 \cong 24{,}4136$.

145. $e^{-x} = \frac{3}{2}$, assim, $-x = \ln \frac{3}{2}$, e portanto

$x = -\ln \frac{3}{2} \cong -0{,}4055$.

146. $e^{-x} = \frac{5}{3}$, assim, $-x = \ln \frac{5}{3}$, e portanto

$x = -\ln \frac{5}{3} \cong -0{,}5108$.

147. $\ln (x - 3) = \frac{1}{3}$, assim, $x - 3 = e^{1/3}$,

e portanto $x = 3 + e^{1/3} \cong 4{,}3956$.

148. $\log(x + 2) = -2$, assim, $x + 2 = 10^{-2}$,

e portanto $x = -2 + 10^{-2} = -1{,}99$.

149. Devemos ter $x(x + 1) > 0$, assim,
$x < -1$ ou $x > 0$.

Domínio: $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$; gráfico (e).

150. Devemos ter $x > 0$ e $x + 1 > 0$, assim $x > 0$.

Domínio: $]0, +\infty[$; gráfico (f).

151. Devemos ter $\dfrac{x}{x+1} > 0$, assim
$x < -1$ ou $x > 0$.

Domínio: $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$; gráfico (d).

152. Devemos ter $x > 0$ e $x + 1 > 0$, assim
$x > 0$.

Domínio: $]0, +\infty[$; gráfico (c).

153. Devemos ter $x > 0$. Domínio: $]0, +\infty[$; gráfico (a).

154. Devemos ter $x^2 > 0$, assim $x \neq 0$.

Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$. Gráfico (b).

155. Escreva ambos os lados como potências de 10, deixando $10^{\log x^2} = 10^6$, ou $x^2 = 1.000.000$. Então $x = 1.000$ ou $x = -1.000$.

156. Escreva ambos os lados como potências de e, deixando $e^{\ln x^2} = e^4$, ou $x^2 = e^4$. Então $x = e^2 \cong 7{,}389$ ou $x = -e^2 \cong -7{,}389$.

157. Escreva ambos os lados como potências de 10, deixando $10^{\log x^4} = 10^2$, ou $x^4 = 100$. Então $x^2 = 10$ e $x = \pm\sqrt{10}$.

158. Multiplique ambos os lados por $3 \cdot 2^x$, deixando $(2^x)^2 - 1 = 12 \cdot 2^x$, ou $(2^x)^2 - 12 \cdot 2^x - 1 = 0$. Esta é quadrática em 2^x, deixando para

$$2^x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$$

Apenas $6 + \sqrt{37}$ é positivo, assim a única resposta é $x = \dfrac{\ln(6 + \sqrt{37})}{\ln 2} =$

$$= \log_2(6 + \sqrt{37}) \cong 3{,}5949\,.$$

159. Multiplique ambos os lados por $2 \cdot 2^x$, deixando $(2^x)^2 + 1 = 6 \cdot 2^x$, ou $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$. Esta é quadrática em 2^x, assim, $2^x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Então $x = \dfrac{\ln(3 \pm 2\sqrt{2})}{\ln 2} =$

$\log_2(3 \pm 2\sqrt{2}) \cong \pm 2{,}5431$.

160. Multiplique ambos os lados por $2e^x$, deixando $(e^x)^2 + 1 = 8e^x$, ou $(e^x)^2 - 8e^x + 1 = 0$. Esta é quadrática em e^x; assim:

$$e^x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

Então $x = \ln(4 \pm \sqrt{15}) \cong \pm 2{,}0634$.

161. Esta é quadrática em e^x, deixando para

$$e^x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

Desses dois números, apenas $\dfrac{-5 + 7}{4} = \dfrac{1}{2}$ é positiva, assim $x = \ln \dfrac{1}{2} \cong -0{,}6931$.

162. $\dfrac{500}{200} = 1 + 25e^{0,3x}$, assim, $e^{0,3x} = \dfrac{3}{50} = 0{,}06$,

e portanto $x = \dfrac{1}{0{,}3} \ln 0{,}06 \cong -9{,}3780$.

163. $\dfrac{400}{150} = 1 + 95e^{-0,6x}$, assim $e^{-0,6x} = \dfrac{1}{57}$,

e portanto $x = \dfrac{1}{-0{,}6} \ln \dfrac{1}{57} \cong 6{,}7384$.

164. Multiplique por 2, então combine os logaritmos para obter $\ln \dfrac{x + 3}{x^2} = 0$.

Então $\dfrac{x + 3}{x^2} = e^0 = 1$, assim $x + 3 = x^2$.

As soluções nesta equação quadrática são

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13} \cong 2{,}3028\,.$$

165. Multiplique por 2, então combine os logaritmos para obter $\log \dfrac{x^2}{x + 4} = 2$. Então

$\dfrac{x^2}{x + 4} = 10^2 = 100$, assim $x^2 = 100(x + 4)$.

As soluções nesta equação quadrática são

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10000 + 1600}}{2} = 50 \pm 10\sqrt{29}\,.$$

A equação original requer $x > 0$, assim $50 - 10\sqrt{29}$ não é válida, a única solução atual é $x = 50 + 10\sqrt{29} \cong 103{,}852$.

166. $\ln[(x - 3)(x + 4)] = 3 \ln 2$, assim $(x - 3)(x + 4) = 8$, ou seja, $x^2 + x - 20 = 0$. Fatorando $(x - 4)(x + 5) = 0$, assim $x = 4$ (uma solução real) ou $x = -5$ (não válida, visto que $x - 3$ e $x + 4$ devem ser positivos).

167. $\log[(x - 2)(x + 5)] = 2 \log 3$, assim $(x - 2)(x + 5) = 9$, ou $x^2 + 3x - 19 = 0$.

Então, $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 76}}{2} = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{85}$.

A solução real é $x = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{85} \approx 3{,}1098$; visto que $x - 2$ deve ser positivo, a outra solução algébrica, $x = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{85}$, é estranha.

168. R$ 100.000.000.000,00 é igual a $0{,}1 \cdot 10^{12}$. Os valores diferem por uma ordem de magnitude igual a 12.

169. Uma galinha pesando 2 quilos pesa 2.000, ou $2 \cdot 10^3$ gramas enquanto um canário pesando 20 gramas pesa $2 \cdot 10$ gramas. Eles diferem por uma ordem de magnitude de 2.

170. 7 – 5,5 = 1,5. Eles diferem por um ordem de magnitude de 1,5.

171. 4,1 – 2,3 = 1,8. Eles diferem por um ordem de magnitude de 1,8.

172. Supondo que T e B são os mesmos para os dois terremotos, temos que 7,9 = log a_1 – log $T + B$ e 6,6 = log a_2 – log $T + B$, assim 7,9 – 6,6 = 1,3 = log(a_1/a_2). Então $a_1/a_2 = 10^{1,3}$, assim $a_1 \cong 19{,}95a_2$ — a amplitude na Cidade do México foi quase 20 vezes maior.

173. Se T e B são os mesmos, temos que 7,2 = log a_1 – log $T + B$ e 6,6 = log a_2 – log $T + B$, assim 7,2 – 6,6 = 0,6 = log(a_1/a_2). Então $a_1/a_2 = 10^{0,6}$, assim $a_1 \cong 3{,}98a_2$ — a amplitude em Kobe foi quase 4 vezes mäior.

174. O pH da água com gás é 3,9 e o pH do amoníaco é 11,9.

(a) Água com gás: $-\log[H^+] = 3{,}9$

$$\log[H^+] = -3{,}9$$

$$[H^+] = 10^{-3,9} \cong 1{,}26 \times 10^{-4}$$

Amoníaco: $-\log[H^+] = 11{,}9$

$$\log[H^+] = -11{,}9$$

$$[H^+] = 10^{-11,9} \cong 1{,}26 \times 10^{-12}$$

(b) $$\frac{[H^+]\text{ da água com gás}}{[H^+]\text{ do amoníaco}} = \frac{10^{-3,9}}{10^{-11,9}} = 10^8$$

(c) Eles diferem por um ordem de magnitude de 8.

175. O pH do ácido do estômago é aproximadamente 2 e o pH do sangue é 7,4.

(a) Ácido do estômago: $-\log[H^+] = 2{,}0$

$$\log[H^+] = -2{,}0$$

$$[H^+] = 10^{-2,0} \approx 1 \times 10^{-2}$$

Sangue: $-\log[H^+] = 7{,}4$

$$\log[H^+] = -7{,}4$$

$$[H^+] = 10^{-7,4} \cong 3{,}98 \times 10^{-8}$$

(b)

$$\frac{[H^+]\text{ ácido do estômago}}{[H^+]\text{ sangue}} = \frac{10^{-2}}{10^{-7,4}} \cong 2{,}51 \times 10^5$$

(c) Eles diferem por um ordem de magnitude de 5,4.

176. Falso.

177. $2^{3x-1} = 32$

$$2^{3x-1} = 2^5$$

$$3x - 1 = 5$$

$$x = 2$$

A resposta é B.

178. $\ln x = -1$

$$e^{\ln x} = e^{-1}$$

$$x = \frac{1}{e}$$

A resposta é B.

179. $R_1 = \log\frac{a_1}{T} + B = 8{,}1$

$$R_2 = \log\frac{a_2}{T} + B = 6{,}1$$

Procuramos a relação amplitudes a_1/a_2.

$$\left(\log\frac{a_1}{T} + B\right) - \left(\log\frac{a_2}{T} + B\right) = R_1 - R_2$$

$$\log\frac{a_1}{T} - \log\frac{a_2}{T} = 8{,}1 - 6{,}1$$

$$\log\frac{a_1}{a_2} = 2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = 10^2 = 100$$

A resposta é E.

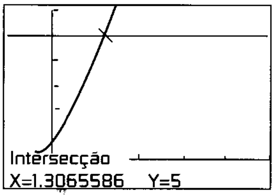
180. Seja $\frac{u}{v} = 10^n, u, v > 0$

$$\log\frac{u}{v} = \log 10^n$$

$$\log u - \log v = n$$

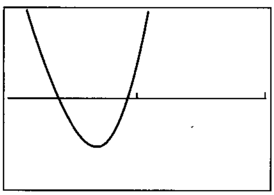
Para que a expressão inicial seja verdadeira, tanto u quanto v devem ser potências de 10, ou são escritas com a mesma constante a multiplicada pelas potências de 10 (i.e., ou $u = 10^k$ e $v = 10^m$ ou $u = a \cdot 10^k$ e $v = a \cdot 10^m$, onde a, k e m são constantes). Como resultado, u e v variam por uma ordem de magnitude n, isto é, u é n ordens de magnitude maior que v.

181. $x \cong 1{,}3066$



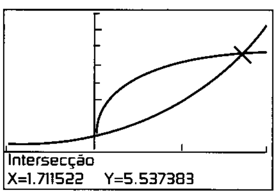
$[-1, 5]$ por $[-1, 6]$

182. $x \cong 0{,}4073$ ou $x \cong 0{,}9333$



$[0, 2]$ por $[-1, 1]$

183. $0 < x < 1{,}7115$



$[-1, 2]$ por $[-2, 8]$

184. $x \leq -20{,}0855$

185. $\log x - 2 \log 3 > 0$, assim $\log (x/9) > 0$.

Então $\dfrac{x}{9} > 10^0 = 1$, assim $x > 9$

186. $\log(x+1) - \log 6 < 0$, assim $\log \dfrac{x+1}{6} < 0$

Então $\dfrac{x+1}{6} < 10^0 = 1$, assim $x + 1 < 6$, ou $x < 5$

CAPÍTULO 13

Revisão rápida

1. $]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

2. $]1, +\infty[$

3. $]-\infty, 5[$

4. $]1/2, +\infty[$

5. $]1, +\infty[$

6. $(-1, 1[$

7. $]-\infty, +\infty[$

8. $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

9. $]-1, 1[$

10. $]-\infty, +\infty[$

Exercícios

1. $(f + g)(x) = 2x - 1 + x^2$;

$(f - g)(x) = 2x - 1 - x^2$;

$(fg)(x) = (2x - 1)(x^2) = 2x^3 - x^2$

Não há restrições em qualquer dos domínios; assim, todos os 3 domínios são dados por $[-\infty, +\infty]$.

2. $(f + g)(x) = (x - 1)^2 + 3 - x$
$= x^2 - 2x + 1 + 3 - x = x^2 - 3x + 4$;

$(f - g)(x) = (x - 1)^2 - 3 + x$
$= x^2 - 2x + 1 - 3 + x = x^2 - x - 2$;

$(fg)(x) = (x - 1)^2(3 - x) = (x^2 - 2x + 1)(3 - x)$
$= 3x^2 - x^3 - 6x + 2x^2 + 3 - x$
$= -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

Não há restrições em qualquer dos domínios; assim, todos os 3 domínios são $]-\infty, +\infty[$.

3. $(f + g)(x) = \sqrt{x + 5} + |x + 3|$

$(f - g)(x) = \sqrt{x + 5} - |x + 3|$

$(fg)(x) = \sqrt{x + 5}\,|x + 3|$

Todas as 3 expressões contêm $\sqrt{x + 5}$.
Devemos ter $x + 5 \geq 0$, isto é, e $x \geq -5$; todos os 3 domínios são $[-5, +\infty[$. Para $|x + 3|$, não existem restrições pois o valor de x pode ser qualquer número real.

4. $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x^2}$; $x + 3 \geq 0$ e $x \neq 0$, assim, o domínio é $[-3, 0[\cup]0, +\infty[$.

$(g/f)(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 3}}$; $x + 3 > 0$, assim, o domínio é $]-3, +\infty[$.

5. $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+4}}$. Devemos ter $x - 2 \geq 0$ e $x + 4 > 0$, assim, $x \geq 2$ e $x > -4$, ou seja, o domínio é $[2, +\infty[$.

$(g/f)(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-2}}$. Devemos ter $x + 4 \geq 0$ e $x - 2 > 0$, assim, $x \geq -4$ e $x > 2$, ou seja, o domínio é $]2, +\infty[$.

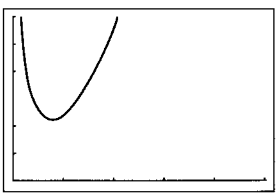
6. $(f/g)(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. O denominador não pode ser zero e o termo dentro da raiz quadrada deve ser positivo, assim, $1 - x^2 > 0$. Portanto, $x^2 < 1$, o que significa que $-1 < x < 1$. O domínio é $]-1, 1[$.

$(g/f)(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$. O termo sob a raiz quadrada deve ser não negativo, assim, $1 - x^2 \geq 0$ (ou $x^2 \leq 1$). O denominador não pode ser zero, assim, $x \neq 0$. Portanto $-1 \leq x < 0$ ou $0 < x \leq 1$. O domínio é $[-1, 0[\cup]0, 1]$.

7. $(f/g)(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. O denominador não pode ser zero, assim, $1 - x^3 \neq 0$ e $x^3 \neq 1$. Isso significa que $x \neq 1$. Não há restrições em x no numerador. O domínio é $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

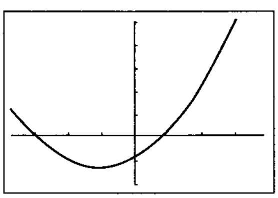
$(g/f)(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x^3}$. O denominador não pode ser zero, assim, $x^3 \neq 0$ e $x \neq 0$. Não há restrições em x no numerador. O domínio é $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

8.



$[0, 5]$ por $[0, 5]$

9.



$[-5, 5]$ por $[-10, 25]$

10. $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(4) = 5$;
$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(-7) = -6$

11. $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 8$;
$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(3) = 3$

12. $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(\sqrt{3+1}) = f(2) = 2^2 + 4 = 8$;
$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g((-2)^2 + 4) = g(8) = \sqrt{8+1} = 3$

13. $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(9 - 3^2) = f(0\ ) = f(0) = \dfrac{0}{0+1} = 0$;
$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g\left(\dfrac{-2}{-2+1}\right) = g(2) = 9 - 2^2 = 5$

14. $f(g(x)) = 3(x-1) + 2 = 3x - 3 + 2 = 3x - 1$. Como tanto f quanto g têm domínios $]-\infty, +\infty[$, o domínio de $f(g(x))$ é $]-\infty, +\infty[$.
$g(f(x)) = (3x + 2) - 1 = 3x + 1$; novamente, o domínio é $]-\infty, +\infty[$.

15. $f(g(x)) = \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{(x-1)^2} - 1$

O domínio de g é $]-\infty, [1 \cup]1, +\infty[$, enquanto o domínio de f é $]-\infty, +\infty[$; o domínio de $f(g(x))$ é $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

$g(f(x)) = \dfrac{1}{(x^2-1)-1} = \dfrac{1}{x^2-2}$

O domínio de f é $]-\infty, +\infty[$, enquanto o domínio g é $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, assim, $f(g(x))$ requer $f(x) \neq 1$. Isso significa que $x^2 - 1 \neq 1$, ou $x^2 \neq 2$, assim, o domínio de $g(f(x))$
$]-\infty, -\sqrt{2}[\cup] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup] \sqrt{2}, +\infty[$.

16. $f(g(x)) = (\sqrt{x+1})^2 - 2 = x + 1 - 2 = x - 1$.

O domínio de g é $[-1\ +\infty[$, enquanto o domínio de f é $]-\infty, +\infty[$, o domínio de $f(g(x))$ é, $[-1, +\infty[$.

$g(f(x)) = \sqrt{(x^2-2)+1} = \sqrt{x^2-1}$.

O domínio de f é $]-\infty, +\infty[$, enquanto o domínio de g é $[-1, +\infty)$, assim, $g(f(x))$ requer $f(x) \geq 1$.
Isso significa que $x^2 - 2 \geq -1$, ou $x^2 \geq 1$, que significa que $x \leq -1$ ou $x \geq 1$. Portanto, o domínio de $g(f(x))$ é $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

17. $f(g(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$. O domínio de g é $[0, +\infty[$ enquanto o domínio de f é $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, assim, $f(g(x))$ requer $x \geq 0$ e $g(x) \neq 1$, isto é, $x \geq 0$ e $x \neq 1$. O domínio de $f(g(x))$ é $[0, 1[\cup]1, +\infty[$.

$g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. O domínio de f é $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, enquanto o domínio g é $[0, +\infty[$, assim $g(f(x))$ requer $x \neq 1$ e $f(x) \geq 0$, ou seja, $x \neq 1$ e $\dfrac{1}{x-1} \geq 0$. Este último ocorre se $x - 1 > 0$, assim, o domínio de $g(f(x))$ é $]1, +\infty[$.

18. $f(g(x)) = f(\sqrt{1 - x^2}) = (\sqrt{1 - x^2})^2 = 1 - x^2$; o domínio é $[-1, 1]$.

$g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{1 - (x^2)^2} = \sqrt{1 - x^4}$; o domínio é $[-1, 1]$.

19. $f(g(x)) = f(\sqrt[3]{1 - x^3}) = (\sqrt[3]{1 - x^3})^3 = 1 - x^3$; o domínio é $]-\infty, +\infty[$.

$g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{1 - (x^3)^3} = \sqrt[3]{1 - x^9}$; o domínio é $]-\infty, +\infty[$.

20. $f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{3x}\right) = \dfrac{1}{2(1/3x)} = \dfrac{1}{2/3x} = \dfrac{3x}{2}$; o domínio é $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{2x}\right) = \dfrac{1}{3(1/2x)} = \dfrac{1}{3/2x} = \dfrac{2x}{3}$; o domínio é $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

21. $f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{(1/(x-1)) + 1} =$

$\dfrac{1}{(1 + (x-1))/(x-1)} = \dfrac{1}{x/(x-1)} = \dfrac{x-1}{x}$; o domínio são todos os reais exceto 0 e 1, ou seja, $]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

$g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{(1/(x+1)) - 1 =} =$

$\dfrac{1}{(1 + (x-1))/(x1)} = \dfrac{1}{x/(x+1)} = \dfrac{x+1}{x}$; o domínio são todos os reais exceto 0 e 1, ou seja, $]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

22. Uma possibilidade: $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 5x$.

23. Uma possibilidade: $f(x) = (x + 1)^2$ e $g(x) = x^3$.

24. Uma possibilidade: $f(x) = |x|$ e $g(x) = 3x - 2$.

25. Uma possibilidade: $f(x) = 1/x$ e $g(x) = x^3 - 5x + 3$.

26. Uma possibilidade: $f(x) = x^5 - 2$ e $g(x) = x - 3$.

27. $3(1) + 4(1) = 3 + 4 = 7 \neq 5$
$3(4) + 4(-2) = 12 - 8 = 4 \neq 5$
$3(3) + 4(-1) = 9 - 4 = 5$
A resposta é $(3, -1)$.

28. $(5)^2 + (1)^2 = 25 + 1 = 26 \neq 25$
$(3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$
$(0)^2 + (-5)^2 = 0 + 25 = 25$
A resposta é $(3,4)$ e $(0,-5)$.

29. $y^2 = 25 - x^2$, $y = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = -\sqrt{25 - x^2}$

30. $y^2 = 25 - x$, $y = \sqrt{25 - x}$ e $y = -\sqrt{25 - x}$

31. $y^2 = x^2 - 25$, $y = y = \sqrt{x^2 - 25}$ e $y = -\sqrt{x^2 - 25}$

32. $y^2 = 3x^2 - 25$, $y = \sqrt{3x^2 - 25}$ e $y = -\sqrt{3x^2 - 25}$

33. $x + |y| = 1 \Rightarrow |y| = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 1$ ou $y = -(-x + 1) \cdot y = 1 - x$ e $y = x - 1$

34. $x - |y| = 1 \Rightarrow |y| = x - 1 \Rightarrow y = x - 1$ ou $y = -(x - 1) = x + 1 \cdot y = x - 1$ e $y = 1 - x$

35. $y^2 = x^2 \Rightarrow y = x$ e $y = -x$ ou $y = |x|$ e $y = -|x|$

36. $y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$

37. Falso.

38. Falso.

39. A composição das funções não é necessariamente comutativa. A resposta é C.

40. $g(x) = \sqrt{4 - x}$ não pode ser igual a zero e o termo dentro da raiz quadrada deve ser positivo, assim, x pode ser qualquer número real menor que 4. A resposta é A.

41. $(f \circ f)(x) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$. A resposta é E.

42. $y = |x| \Rightarrow y = x$, $y = -x \Rightarrow x = -y$ ou $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$. A resposta é B.

43. Se $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2 \ln x$, então $f(g(x)) = f(2 \ln x) = e^{2 \ln x} = (e^{\ln x})^2 = x^2$. O domínio é $]0, +\infty[$. Se $f(x) = (x^2 + 2)^2$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$, então

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}) = ((\sqrt{x-2})^2 + 2)^2$$
$$= (x - 2 + 2)^2 = x^2.$$ O domínio é $[2, +\infty[$.

Se $f(x) = (x^2 - 2)^2$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$, então

$$f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = ((\sqrt{2-x})^2 - 2^2$$
$$= (2 - x - 2)^2 = x^2.$$ O domínio é $]-\infty, 2]$.

Se $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$,

então $f(g(x)) = f\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x} - 1\right)^2}$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{x+1-x}{x}\right)^2} = \frac{1}{\dfrac{1}{x^2}} = x^2.$$

O domínio é $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = x + 1$, então $f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1 = ((x + 1) - 1)^2$. O domínio é $]-\infty, +\infty[$.

Se $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$ e $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, então

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \left(\frac{\dfrac{1}{x-1} + 1}{\dfrac{1}{x-1}}\right) =$$

$$\left(\frac{\dfrac{1 + x - 1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}}\right)^2 = x^2.$$

O domínio é $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

f	g	D
e^x	$2 \ln x$	$]0, +\infty[$
$(x^2 + 2)^2$	$\sqrt{x-2}$	$[2, +\infty)$
$(x^2 - 2)^2$	$\sqrt{2-x}$	$]-\infty, 2]$
$\dfrac{1}{(x-1)^2}$	$\dfrac{x+1}{x}$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$x^2 - 2x + 1$	$x + 1$	$]-\infty, +\infty[$
$\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$	$\dfrac{1}{x-1}$	$]-\infty, 1[\cup]1, +\infty]$

44. (a) $(fg)(x) = x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = f(x) \cdot (x^2 - 1)$, portanto $g(x) = x^2 - 1$.

(b) $(f + g)(x) = 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - (x^2 + 1) = 2x^2 - 1 = g(x)$.

(c) $(f/g)(x) = 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$. Portanto $g(x) = x^2 + 1$.

(d) $f(g(x)) = 9x^4 + 1$ e $f(x) = x^2 + 1$. Se $g(x) = 3x^2$, então $f(g(x)) = f(3x^2) = (3x^2)^2 + 1 = 9x^4 + 1$.

(e) $g(f(x)) = 9x^4 + 1$ e $f(x) = x^2 + 1$. Então $g(x^2 + 1) = 9x^4 + 1 = 9((x^2 + 1) - 1)^2 + 1$, portanto $g(x) = 9(x - 1)^2 + 1$.

CAPÍTULO 14

Revisão rápida

1. $3y = x + 6$, assim, $y = \dfrac{x+6}{3} = \dfrac{1}{3}x + 2$

2. $0,5y = x - 1$, assim, $y = \dfrac{x-1}{0,5} 2x - 2$

3. $y^2 = x - 4$, assim, $y = \pm\sqrt{x-4}$

4. $y^2 = x - 6$, assim, $y = \pm\sqrt{x+6}$

5. $x(y + 3) = y - 2$

$xy + 3x = y - 2$

$xy - y = -3x - 2$

$y(x - 1) = -(3x + 2)$

$y = -\dfrac{3x+2}{x-1} = \dfrac{3x+2}{1-x}$

6. $x(y + 2) = 3y - 1$

$xy + 2x = 3y - 1$

$xy - 3y = -2x - 1$

$y(x - 3) = -(2x + 1)$

$y = -\dfrac{2x+1}{x-3} = \dfrac{2x+1}{3-x}$

7. $x(y - 4) = 2y + 1$

$xy - 4x = 2y + 1$

$xy - 2y = 4x + 1$

$y(x - 2) = 4x + 1$

$y = \dfrac{4x+1}{x-2}$

8. $x(3y - 1) = 4y + 3$

$3xy - x = 4y + 3$

$3xy - 4y = x + 3$

$y(3x - 4) = x + 3$

$y = \dfrac{x + 3}{3x - 4}$

9. $x = \sqrt{y + 3}, y \geq -3$[e $x \geq 0$]

$x^2 = y + 3, y \geq -3$, e $x \geq 0$

$y = x^2 - 3, y \geq -3$, e $x \geq 0$.

10. $x = \sqrt{y - 2}, y \geq 2$ [e $x \geq 0$]

$x^2 = y - 2, y \geq 2$, e $x \geq 0$

$y = x^2 + 2, y \geq 2$, e $x \geq 0$.

Exercícios

1. $x = 3(2) = 6, y = 2^2 + 5 = 9$. A resposta é (6, 9).

2. $x = 5(-2) - 7 = -17, y = 17 - 3(-2) = 23$. A resposta é (–17, 23).

3. $x = 3^3 - 4(3) = 15$, $y = \sqrt{3 + 1} = 2$. A resposta é (15, 2).

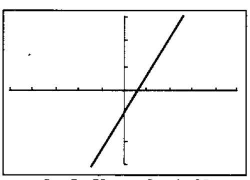
4. $x = |-8 + 3| = 5, y = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$. A resposta é $\left(5, -\dfrac{1}{8}\right)$

5. (a)

t	$(x, y) = (2t, 3t - 1)$
-3	$(-6, -10)$
-2	$(-4, -7)$
-1	$(-2, -4)$
0	$(0, -1)$
1	$(2, 2)$
2	$(4, 5)$
3	$(6, 8)$

(b) $t = \dfrac{x}{2},\ y = 3\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1 = 1{,}5x - 1$. Essa é uma função.

(c)



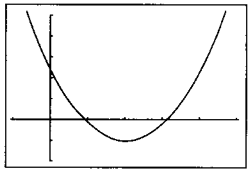
$[-5, 5]$ por $[-4, 3]$

6. (a)

t	$(x, y) = (t + 1, t^2 - 2t)$
-3	$(-2, -15)$
-2	$(-1, -8)$
-1	$(0, 3)$
0	$(1, 0)$
1	$(2, -1)$
2	$(3, 0)$
3	$(4, 3)$

(b) $t = x - 1, y = (x - 1)^2 - 2(x - 1) = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 3$
Essa é uma função.

(c)



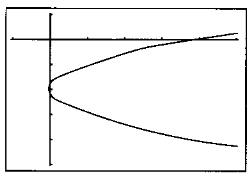
$[-1, 5]$ por $[-2, 6]$

7. (a)

t	$(x, y) = (t^2, t - 2)$
-3	$(9, -5)$
-2	$(4, -4)$
-1	$(1, -3)$
0	$(0, -2)$
1	$(1, -1)$
2	$(4, 0)$
3	$(9, 1)$

(b) $t = y + 2, x = (y + 2)^2$. Essa não é uma função.

(c)



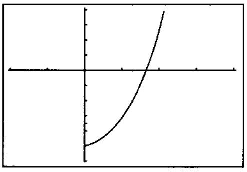
$[-1, 5]$ por $[-5, 1]$

8. (a)

t	$(x, y) = (\sqrt{t}, 2t - 5)$
-3	$\sqrt{-3}$ não está definida
-2	$\sqrt{-2}$ não está definida
-1	$\sqrt{-1}$ não está definida
0	$(0, -5)$
1	$(1, -3)$
2	$(\sqrt{2}, -1)$
3	$(\sqrt{3}, 1)$

(b) $t = x^2$, $y = 2x^2 - 5$. Essa é uma função.

(c)



$[-2, 4]$ por $[-6, 4]$

9. (a) Pelo teste da linha vertical, a relação não é uma função.
   (b) Pelo teste da linha horizontal, a inversa da relação é uma função.

10. (a) Pelo teste da linha vertical, a relação é uma função.
    (b) Pelo teste da linha horizontal, a inversa da relação não é uma função.

11. (a) Pelo teste da linha vertical, a relação é uma função.
    (b) Pelo teste da linha horizontal, a inversa da relação é uma função.

12. (a) Pelo teste da linha vertical, a relação não é uma função.
    (b) Pelo teste da linha horizontal, a inversa da relação é uma função.

13. $y = 3x - 6 \Rightarrow x = 3y - 6$

$$3y = x + 6$$

$$f^{-1}(x) = y = \frac{x+6}{3} = \frac{1}{3}x + 2;\ ]-\infty, +\infty[$$

14. $y = 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad x = 2y + 5$

$$2y = x - 5$$

$$f^{-1}(x) = y = \frac{x+5}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2};\ ]-\infty, +\infty[$$

15. $y = \dfrac{2x-3}{x+1} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2y-3}{y+1}$

$$x(y+1) = 2y - 3$$

$$xy + x = 2y - 3$$

$$xy - 2y = -x - 3$$

$$y(x+2) = -(x+3)$$

$$f^{-1}(x) = y = -\frac{(x+3)}{x-2} = \frac{x+3}{2-x};\ ]-\infty, 2[\ \cup\ ]2, +\infty[$$

16. $y = \dfrac{x+3}{x-2} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{y+3}{y-2}$

$$x(y-2) = y + 3$$

$$xy - 2x = y + 3$$

$$xy - y = 2x + 3$$

$$y(x-1) = 2x + 3$$

$$f^{-1}(x) = y = \frac{2x+3}{x-1};\ ]-\infty, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[$$

17. $y = \sqrt{x-3},\ x \geq 3,\ y \geq 0 \Rightarrow$

$x = \sqrt{y-3},\ x \geq 0,\ y \geq 3$

$x^2 = y - 3,\ x \geq 0,\ y \geq 3$

$f^{-1}(x) = y = x^2 + 3;\ [0, +\infty[$

18. $y = \sqrt{x+2},\ x \geq -2,\ y \geq 0 \Rightarrow$

$x = \sqrt{y+2},\ x \geq 0,\ y \geq -2$

$x^2 = y + 2, \quad x \geq 0,\ y \geq -2$

$f^{-1}(x) = y = x^2 - 2;\ [0, +\infty[$

19. $y = x^3 \Rightarrow \quad x = y^3$

$f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x};\ ]-\infty, +\infty[$

20. $y = x^3 + 5 \Rightarrow x = y^3 + 5$

$x - 5 = y^3$

$f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x-5};\ ]-\infty, +\infty[$

21. $y = \sqrt[3]{x+5} \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{y+5}$

$x^3 = y + 5$

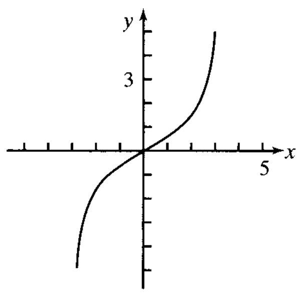
$f^{-1}(x) = y = x^3 - 5;\ ]-\infty, +\infty[$

22. $y = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{y-2}$

$x^3 = y - 2$

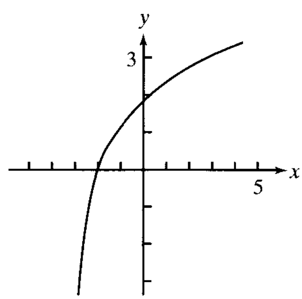
$f^{-1}(x) = y = x^3 + 2;\ ]-\infty, +\infty[$

23. Bijetora



24. Não é bijetora

25. Bijetora



26. Não é bijetora

27. $f(g(x)) = 3\left[\frac{1}{3}(x+2)\right] - 2 = x + 2 - 2 = x;$

$g(f(x)) = \frac{1}{3}[(3x-2)+2] = \frac{1}{3}(3x) = x$

28. $f(g(x)) = \frac{1}{4}[(4x-3)+3] = \frac{1}{4}(4x) = x;$

$g(f(x)) = 4\left[\frac{1}{4}(x+3)\right] - 3 = x + 3 - 3 = x$

29. $f(g(x)) = [(x-1)^{1/3}]^3 + 1 = (x-1)^1 + 1$

$= x - 1 + 1 = x;$

$g(f(x)) = [(x^3+1)-1]^{1/3} = (x^3)^{1/3} = x^1 = x$

30. $f(g(x)) = \dfrac{7}{\frac{7}{x}} = \frac{7}{1}\cdot\frac{x}{7} = x$

$g(f(x)) = \dfrac{7}{\frac{7}{x}} = \frac{7}{1}\cdot\frac{x}{7} = x$

31. $f(g(x)) = \dfrac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{1}{x-1}} = (x-1)\left(\frac{1}{x-1}+1\right)$

$= 1 + x - 1 = x;$

$g(f(x)) = \dfrac{1}{\frac{x+1}{x}-1} = \left(\dfrac{1}{\frac{x+1}{x}-1}\right)\cdot\frac{x}{x}$

$= \dfrac{x}{x+1-x} = \frac{x}{1} = x.$

32. $f(g(x)) = \dfrac{\frac{2x+3}{x-1}+3}{\frac{2x+3}{x-1}-2}$

$= \left(\dfrac{\frac{2x+3}{x-1}+3}{\frac{2x+3}{x-1}-2}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x-1}\right)$

$= \dfrac{2x+3+3(x-1)}{2x+3-2(x-1)} = \frac{5x}{5} = x;$

$g(f(x)) = \dfrac{2\left(\frac{x+3}{x-2}\right)+3}{\frac{x+3}{x-2}-1}$

$= \left[\dfrac{2\left(\frac{x+3}{x-2}\right)+3}{\frac{x+3}{x-2}-1}\right]\cdot\left(\frac{x-2}{x-2}\right)$

$= \dfrac{2(x+3)+3(x-2)}{x+3-(x-2)} = \frac{5x}{5} = x$

33. **(a)** $9c(x) = 5(x-32)$

$\frac{9}{5}c(x) = x - 32$

$\frac{9}{5}c(x) + 32 = x$

Nesse caso, $c(x)$ torna-se x, e x torna-se $c^{-1}(x)$ para a inversa. Assim, $c^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32$.
Isto converte a temperatura Celsius para temperatura Fahrenheit.

(b) $(k \circ c)(x) = k(c(x)) = k\left(\left(\frac{5}{9}(x-32)\right)\right)$

$\frac{5}{9}(x-32) + 273{,}16$

$= \frac{5}{9}x + 255{,}38$. Isso converte a temperatura Fahrenheit para temperatura Kelvin.

34. Verdadeiro.

35. A inversa da relação dada por $x^2y + 5y = 9$ é a relação dada por $y^2x + 5x = 9$.
$(1)^2(2) + 5(2) = 2 + 10 = 12 \neq 9$
$(1)^2(-2) + 5(-2) = -2 - 10 = -12 \neq 9$
$(2)^2(-1) + 5(-1) = -4 - 5 = -9 \neq 9$
$(-1)^2(2) + 5(2) = 2 + 10 = 12 \neq 9$
$(-2)^2(1) + 5(1) = 4 + 5 = 9$
A resposta é E.

36. A inversa da relação dada por $xy^2 - 3x = 12$ é a relação dada por $yx^2 - 3y = 12$.
$(-4)(0)^2 - 3(-4) = 0 + 12 = 12$
$(1)(4)^2 - 3(1) = 16 - 3 = 13 \neq 12$
$(2)(3)^2 - 3(2) = 18 - 6 = 12$
$(12)(2)^2 - 3(12) = 48 - 36 = 12$

$(-6)(1)^2 - 3(-6) = -6 + 18 = 12$
A resposta é B.

37. $f(x) = 3x - 2$
$y = 3x - 2$
A inversa da relação é
$x = 3y - 2$
$x + 2 = 3y$
$\frac{x+2}{3} = y$
$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$
A resposta é C.

38. $f(x) = x^3 + 1$
$y = x^3 + 1$
A inversa da relação é
$x = y^3 + 1$
$x - 1 = y^3$
$\sqrt[3]{x-1} = y$
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$
A resposta é A.

CAPÍTULO 15
Revisão rápida

1. $m = \frac{-1-3}{5-(-2)} = \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}$

2. $m = \frac{3-(-1)}{3-(-3)} = \frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

3. $y - 3 = \frac{3}{2}(x+2)$ ou $y = \frac{3}{2}x + 6$

4. $m = \frac{-1-6}{4-1} = \frac{-7}{3} = -\frac{7}{3}, y - 6 = -\frac{7}{3}(x-1)$

5. $y - 4 = \frac{3}{4}(x-1)$

6. $\frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = h + 4$

7. $\frac{9 + 6h + h^2 + 3 + h - 12}{h} = \frac{h^2 + 7h}{h} = h + 7$

8. $\frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{2-(2+h)}{2(2+h)} \cdot \frac{1}{h}$
$= \frac{-h}{h} \cdot \frac{1}{2(2+h)} = -\frac{1}{2(h+2)}$

9. $\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{x-(x+h)}{x(x+h)} \cdot \frac{1}{h}$
$= \frac{-h}{h} \cdot \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}$

10. $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}, 2, \frac{25}{8}, \frac{9}{2}, \frac{49}{8}, 8, \frac{81}{8}, \frac{25}{2}$

11. $\frac{81}{64}, \frac{25}{16}, \frac{121}{64}, \frac{9}{4}, \frac{169}{64}, \frac{49}{16}, \frac{225}{64}, 4, \frac{289}{64}, \frac{81}{16}$

12. $\frac{1}{2}[2 + 3 + 4 + 5 + 6$
$+ 7 + 8 + 9 + 10 + 11] = \frac{65}{2}$

13.
$$\begin{array}{ccccc} 2+3 & + & 4 + \ldots + n & & +(n+1) \\ +(n+1)+(n) & & +(n-1)+\ldots+3 & & +2 \\ \hline (n+3)+(n+3) & + & (n+3)+\ldots+(n+3) & & +(n+3) \end{array}$$

Portanto, $2\sum_{k=1}^{n}(k+1) = n(n+3)$ e
$\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{1}{2}n(n+3)$

14. $\frac{1}{2}[4 + 9 + \ldots + 121] = \frac{505}{2}$

15. $\frac{1}{2}[1 + 4 + 9 + \ldots + (n-1)^2 + n^2]$
$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

16. $85\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 4\text{ h} = 340\text{ km}$

17. $\left(\frac{5\text{gal}}{\text{mi}}\right)\left(120\text{mi}\right) = 600$ galões

18.
$\left(\frac{560\text{ pessoas}}{\text{km}^2}\right)(90.000\text{ km}^2) = 50.400.000$ pessoas

Exercícios

1. $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{21\text{ km}}{1{,}75\text{ horas}} = 12\text{ km/h}$

2. $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{540\text{ km}}{4{,}5\text{ horas}} = 120$ km por hora

3. $s'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(4+h) - s(4)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(h+4) - 5 - 7}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} 3 = 3$

4. $s'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(2+h) - s(2)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2}{h+2+1} - \dfrac{2}{3}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6 - 2(h+3)}{3(h+3)} \cdot \dfrac{1}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2h}{h} \cdot \dfrac{1}{3(h+3)}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2}{3(h+3)} = -\dfrac{2}{9}$

5. $s'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(2+h) - s(2)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a(h+2)^2 + 5 - (4a+5)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{ah^2 + 4ah}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} (ah + 4a) = 4a$

6. $s'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(1+h) - s(1)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h+2-2}{h(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

7. $\dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{3 - 2}{1} = 1$

8. $\dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \dfrac{1 - 2}{1} = -1$

9. Não é tangente.

10. Não é tangente.

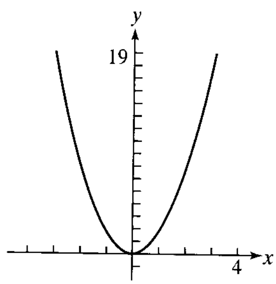
11. **(a)** $m = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(h-1)^2 - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2 - 4h + 2 - 2}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} (2h - 4) = -4$

(b) Como $(-1, f(-1)) = (-1{,}2)$ a equação da reta tangente é $y = 2 - 4(x+1)$, ou $y = -4x - 2$.

(c)



12. **(a)** $m = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

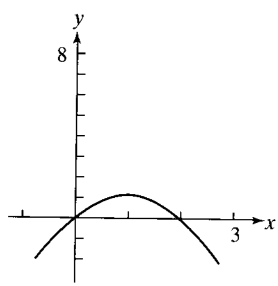
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(h+2) - (h+2)^2 - 0}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h + 4 - h^2 - 4h - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (-h - 2)$

$= -2$

(b) Como $(2, f(2)) = (2{,}0)$ a equação da reta tangente é $y = -2(x - 2)$.

(c)



13. $m = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

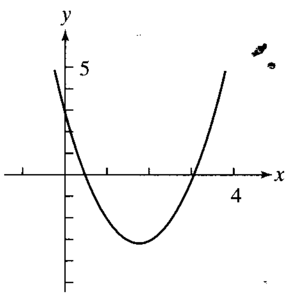
$= \lim_{h\to 0}\frac{2(h+2)^2 - 7(h+2) + 3 - (-3)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2 + 8h + 8 - 7h - 14 + 6}{h}$

$= \lim_{h\to 0}(2h + 1) = 1$

(b) Como $(2, f(2)) = (2, -3)$ a equação da reta tangente é $y + 3 = 1(x - 2)$, ou $y = x - 5$.

(c)



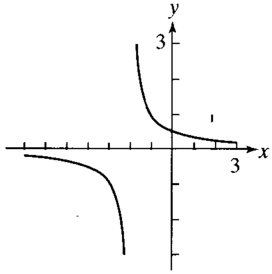
14. (a) $m = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h+1+2} - \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-(h+3)}{3(h+3)}\cdot\frac{1}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}\cdot\frac{1}{3(h+3)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{3(h+3)} = -\frac{1}{9}$

(b) Como $(1, f(1)) = (1, 1/3)$ a equação da reta tangente é $y - 1/3 = -1/9(x - 1)$.

(c)



15. $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1-(2+h)^2-(1-4)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{-h^2 - 4h - 4 + 4}{h}$

$= \lim_{h\to 0}(-h - 4) = -4$

16. $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2(2+h) + \frac{1}{2}(2+h)^2 - 4 - 2}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{4 + 2h + \frac{1}{2}h^2 + 2h + 2 - 6}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}h + 4\right) = 4$

17. $\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{3(h-2)^2 + 2 - (14)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{3h^2 - 12h + 12 - 12}{h}$

$= \lim_{h\to 0}(3h - 12) = -12$

18. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{(h+1)^2 - 3(h+1) + 1 - (-1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2 + 2h + 1 - 3h - 3 + 2}{h} = \lim_{h\to 0}(h - 1)$

$= -1$

19. $\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h-2+2| - 0}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$. Quando $h > 0$, $\frac{|h|}{h} = 1$ enquanto

para $h < 0$, $\frac{|h|}{h} = -1$

20. $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h-1+2} - \frac{1}{1}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-(h+1)}{h+1}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}\cdot\frac{1}{h+1}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h+1} = -1$$

21. $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2-3(x+h)-(2-3x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2-3x-3h-2+3x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-3h}{h} = -3$$

22. $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(2-3(x+h)^2)-(2-3x^2)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2-3x^2-6xh-3h^2-2+3x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-6xh-3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(-6x-3h) = -6x$$

23. $f'(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2+2(x+h)-1-(3x^2+2x-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2+2x+2h-1-3x^2-2x+1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2+2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(6x+3h+2) = 6x+2$$

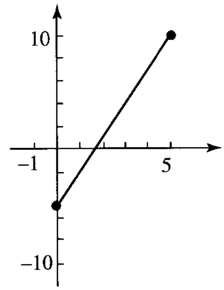
24. $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)-2}-\frac{1}{x-2}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x-2)-(x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)}\cdot\frac{1}{h}$$

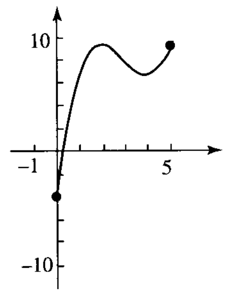
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}\cdot\frac{1}{(x+h-2)(x-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-2)(x-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

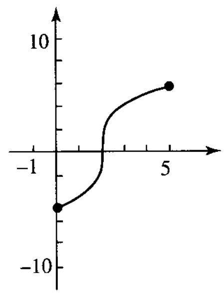
25. As respostas variarão. Uma possibilidade:



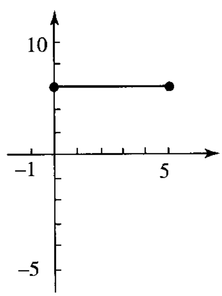
26. As respostas variarão. Uma possibilidade:



27. As respostas variarão. Uma possibilidade:



28. As respostas variarão. Uma possibilidade:



29. Como $f(x) = ax + b$ é uma função linear, a taxa de mudança de qualquer x é exatamente a inclinação da reta. Não é necessário cálculo, visto que é conhecido que a inclinação $a = f'(x)$.

30. $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{h\to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x} = \lim_{h\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

Olhando para as retas secantes, vemos que esse limite não existe. Se a reta secante é para a esquerda de $x = 0$, ela terá a inclinação $m = -1$, enquanto se é à direita de $x = 0$, terá a inclinação $m = 1$. Em $x = 0$, o gráfico da função não tem uma inclinação definida.

31. Verdadeiro. $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

32. $f'(x) = 2x + 3$. A resposta é D.

33. $f'(x) = 5 - 6x$. A resposta é A.

34. $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$. A resposta é C.

35. $f'(1) = \dfrac{-1}{(1 - 3)^2} = -\dfrac{1}{4}$. A resposta é A.

36.1. $f'(x) = 1$

36.2. $f'(x) = 5x^4$

36.3. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

36.4. $f'(x) = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

36.5. $f'(x) = \dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

36.6. $f'(x) = \dfrac{-3}{x^4}$

36.7. $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

36.8. $f'(x) = 6x$

36.9. $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

36.10. $f'(x) = \dfrac{-8}{x^3}$

36.11. $f'(x) = \dfrac{45}{x^{10}}$

36.12. $f'(x) = -38x^6$

36.13. $f'(x) = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$

36.14. $f'(x) = 40x^9 - 10x$

36.15. $f'(x) = 12x^2 + 5$

36.16. $f'(x) = 12x^2 + 6$

36.17. $f'(x) = x^2 - 12x$

36.18. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{8} - x$

36.19. $f'(x) = \dfrac{5x^4}{4}$

36.20. $f'(x) = 2x + \dfrac{20}{x^3}$

36.21. $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{15}{x^2}$

36.22. $f'(x) = 140x^6 - 72x^2$

36.23. $f'(x) = \dfrac{45x^3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

36.24. $f'(x) = 20x^4 + 72x^2 - 10x$

36.25. $f'(x) = \dfrac{16}{5}x^2\sqrt[5]{x} + \dfrac{6}{5}\sqrt[5]{x}$

36.26. $f'(x) = -2x$

36.27. $f'(x) = \dfrac{x^4 + 6x^2}{(2 + x^2)^2}$

36.28. $f'(x) = \dfrac{3x^4 + 3x^2 - 2x}{(3x^2 + 1)^2}$

36.29. $f'(x) = \dfrac{10}{(x + 4)^2}$

36.30. $f'(x) = \dfrac{20}{(x + 10)^2}$

36.31. $f'(x) = \dfrac{1}{(1 + 2x)^2}$

36.32. $f'(x) = \dfrac{-2}{(x - 1)^2}$

36.33. $f'(x) = \dfrac{24}{(4x + 3)^2}$

36.34. $f'(x) = \dfrac{10}{(2 - x)^2}$

37. Seja a reta $y = 120$ representando a situação. A área sob a reta é a distância percorrida, a área de um retângulo, dada por $(120)(3) = 360$ quilômetros.

38. Seja a reta $y = 15$ representando a situação. A área sob a reta é a quantidade de galões, a área de um retângulo dada por $15 \cdot 90 = 1.350$ galões.

39. Seja a reta $y = 650$ representando a situação. A área sob a reta é a população total, a área de um retângulo dada por $650 \cdot 49 = 31.850$ pessoas.

40. Seja a reta $y = 640$. A área sob a reta é a distância percorrida, é a área do retângulo dada por $640 \cdot 3{,}4 = 2.176$ km.

41. Seja a reta $y = 38$. A área sob a reta é a distância percorrida, é a área do retângulo dada por

$$38 \cdot \left(4 + \frac{5}{6}\right) = 116 \text{ km.}$$

42. $\sum_{K=1}^{5} 1 \cdot f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$

$$= 3\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + 0 = 13$$

43. $\sum_{K=1}^{5} 1 \cdot f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$

$$= 1 + 3 + 4\frac{1}{2} + 4 + 0 = 12\frac{1}{2}$$

44. $\sum_{K=1}^{5} 1 \cdot f(k) = f(0{,}5) + f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5)$

$+f(4{,}5) = 3{,}5 + 5{,}25 + 2{,}75 + 0{,}25 + 1{,}25 = 13$

(as respostas variarão)

45. $\sum_{K=1}^{5} 1 \cdot f(k) = f(0{,}5) + f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5)$

$+ f(4{,}5) = 3 + 1{,}5 + 1{,}75 + 3{,}25 + 5 = 14{,}5$

(as respostas variarão)

46. $\sum_{i=1}^{8} (10 - x_i^2)\Delta x_i$

$= (9 + 9{,}75 + 10 + 9{,}75 + 9 + 7{,}75 + 6 + 3{,}75)(0{,}5)$

$= 32{,}5$ unidades quadráticas

47. $\sum_{i=1}^{8} (10 - x_i^2)\Delta x_i$

$= (9{,}75 + 10 + 9{,}75 + 9 + 7{,}75 + 6 + 3{,}75 + 1)(0{,}5)$

$= 28{,}5$ unidades quadráticas

48. $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

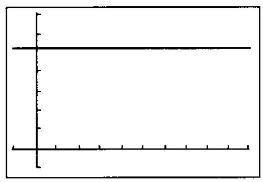
49. $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right],$

$\left[1, \frac{5}{4}\right], \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right], \left[\frac{7}{4}, 2\right]$

50. $\left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right], \left[2, \frac{5}{2}\right], \left[\frac{5}{2}, 3\right], \left[3, \frac{7}{2}\right], \left[\frac{7}{2}, 4\right]$

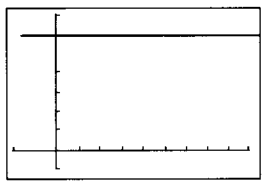
51. $\left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right], \left[2, \frac{5}{2}\right], \left[\frac{5}{2}, 3\right], \left[3, \frac{7}{2}\right], \left[\frac{7}{2}, 4\right], \left[4, \frac{9}{2}\right], \left[\frac{9}{2}, 5\right]$

52. $\int_3^7 5\, dx = 20$ (Retângulo com base 4 e altura 5).



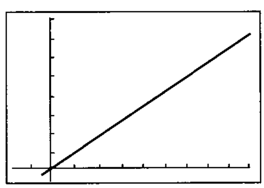
[−1, 10] por [−1, 7]

53. $\int_{-1}^4 6\, dx = 30$ (Retângulo com base 5 e altura 6).



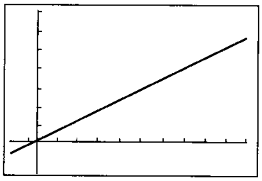
[−2, 10] por [−1, 7]

54. $\int_0^5 3x\, dx = 37{,}5$ (Triângulo com base 5 e altura 15).



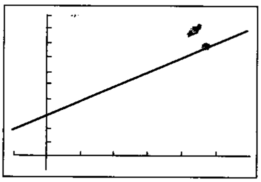
[−1, 6] por [−1, 20]

55. $\int_1^7 0{,}5x\,dx = 12$ (Trapézio com bases de 0,5 e 3,5 e altura 6).



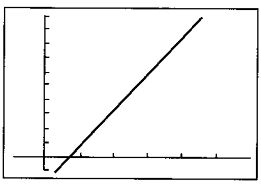
[−1, 8] por [−1, 5]

56. $\int_1^4 (x + 3)dx = 16{,}5$ (Trapézio com bases 4 e 7 e altura 3).



[−1, 6] por [−1, 12]

57. $\int_1^4 (3x - 2)dx = 16{,}5$ (Trapézio com bases 1 e 10 e altura 3).



[−1, 6] por [−1, 12]

58. A distância percorrida será a mesma que a área sob o gráfico da velocidade, $v(t) = 32t$, sobre o intervalo [0, 2]. A região triangular tem uma área de $A = 1/2(2)(64) = 64$. A bola cairá a 64 centímetros nos primeiros 2 segundos.

59. Falso. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

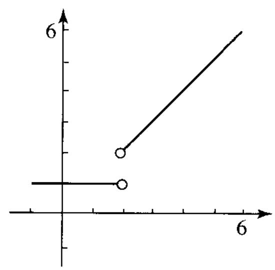
60. Como $y = 2\sqrt{x}$ representa uma extensão vertical por um fator de 2, a área sob a curva entre $x = 0$ e $x = 9$ é duplicada. A resposta é A.

61. Como $y = \sqrt{x + 5}$ representa uma extensão vertical por 5 unidades para cima, a área é aumentada pela contribuição de um retângulo 9 por 5 — uma área de 45 unidades quadráticas. A resposta é E.

62. $y = \sqrt{x - 5}$ é mudado 5 unidades à direita comparado com $y = \sqrt{x}$, mas os limites da integração são mudados 5 unidades à direita também, assim a área não muda. A resposta é C.

63. $y = \sqrt{3x}$ representa um "encolhimento" horizontal por um fator de $\frac{1}{3}$, e o intervalo de integração é 'encolhido' da mesma maneira. Assim, a nova área é $\frac{1}{3}$ da área antiga. A resposta é D.

64. **(a)**



Domínio: $]-\infty, 2[\ \cup\ ]2, +\infty[$

Imagem: $\{1\} \cup\ ]2, +\infty[$

(b) A área sob f de $x = 0$ para $x = 4$ é um retângulo de comprimento 2 e altura 1 e um trapezóide com bases 4 e 2 e altura 2. Não faz qualquer diferença que a função não tenha valor em $x = 2$.

65. **(a)** $\frac{x^4}{2} + c$

(b) $\frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + c$

(c) $\frac{x^4}{4} + 5 \cdot \ln|x| + c$

(d) $\frac{x^6}{6} - x^2 + c$

(e) $7x - \frac{x^2}{2} + c$

(f) $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - 3x^2 + 7x + c$

(g) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

(h) $\frac{-1}{2x^2} + c$

(i) $\dfrac{5x^2}{2} + \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

(j) $4e^x - \dfrac{x^2}{2} + 3x + c$

(k) $\dfrac{4^x}{\ln 4} + c$

(l) $\dfrac{3^x}{\ln 3} - e^x + c$

APÊNDICE A

Exercícios

1. $3y = 5 - 2x$

$y = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}x$

2. $x(y + 1) = 4$

$y + 1 = \dfrac{4}{x}, x \neq 0$

$y = \dfrac{4}{x} - 1$

3. $(3x + 2)(x - 1) = 0$

$3x + 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$3x = -2$ $\quad$ $x = 1$

$x = -\dfrac{2}{3}$

4. $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-10)}}{4}$

$= \dfrac{-5 \pm \sqrt{105}}{4}$

$x = \dfrac{-5 + \sqrt{105}}{4}$ ou $\dfrac{-5 - \sqrt{105}}{4}$

5. $x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0$

$x(x - 2)(x + 2) = 0$

$x = 0, x = 2, x = -2$

6. $x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x(x^2 + x - 6) = 0$

$x(x + 3)(x - 2) = 0$

$x = 0, x = -3, x = 2$

7. $m = -\dfrac{4}{5}$

$y - 2 = -\dfrac{4}{5}(x + 1)$

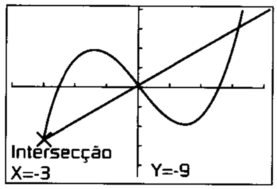
$y = -\dfrac{4}{5}x - \dfrac{4}{5} + 2$

$y = \dfrac{-4x + 6}{5}$

8. $-2(2x + 3y) = -2(5)$

$-4x - 6y = -10$

9.



$[-4, 4]$ por $[-15, 12]$

10. **(a)** Não: $5(0) - 2(4) \neq 8$

(b) Sim: $5(2) - 2(1) = 8$ e $2(2) - 3(1) = 1$

(c) Não: $2(-2) - 3(-9) \neq 1$

11. **(a)** Sim: $-3 = 2^2 - 6(2) + 5$ e $-3 = 2(2) - 7$

(b) Não: $-5 \neq 1^2 - 6(1) + 5$

(c) Sim: $5 = 6^2 - 6(6) + 5$ e $5 = 2(6) - 7$

12. $(x, y) = (9, -2)$: como $y = -2$, temos $x - 4 = 5$, portanto $x = 9$.

13. $(x, y) = (3, -17)$: como $x = 3$, temos $3 - y = 20$, portanto $y = -17$.

14. $(x, y) = \left(\dfrac{50}{7}, -\dfrac{10}{7}\right)$: $y = 20 - 3x$, assim

$x - 2(20 - 3x) = 10,$

$7x = 50$

$x = \dfrac{50}{7}.$

15. $(x, y) = \left(-\frac{23}{5}, \frac{23}{5}\right)$: $y = -x$,

assim $2x + 3x = -23$, ou $x = -\frac{23}{5}$.

16. $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$: $x = (3y - 7)/2$, assim,

$2(3y - 7) + 5y = 8$

$11y = 22$, assim, $y = 2$.

17. $(x, y) = (-3, 2)$: $x = (5y - 16)/2$,

assim, $1{,}5(5y - 16) + 2y = -5$

$9{,}5y = 19$,

assim, $y = 2$.

18. Sem solução: $x = 3y + 6$, assim $-2(3y + 6) + 6y = 4$, ou $-12 = 4$. Isso não é verdadeiro.

19. Há infinitas soluções:

$y = 3x + 2$,

assim, $-9x + 3(3x + 2) = 6$,

$6 = 6$ que é sempre verdadeiro.

20. $(x, y) = (\pm 3, 9)$; a segunda equação resulta $y = 9$, assim, $x^2 = 9$, ou $x \pm 3$.

21. $(x, y) = (0, -3)$ ou $(x, y) = (4, 1)$: Como $x = y + 3$, temos $y + 3 - y^2 = 3y$, ou $y^2 + 2y - 3 = 0$. Portanto, $y = -3$ ou $y = 1$.

22. $(x, y) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{2}\right)$

ou $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$:

$6x^2 + 7x - 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{1}{3}$.

Substitua esses valores em $y = 6x^2$.

23. $(x, y) = (-4{,}28)$ ou $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, 15\right)$:

$2x^2 + 3x - 20 = 0$

$x = -4$ ou $x = \frac{5}{2}$.

Substitua esses valores em $y = 2x^2 + x$.

24. $(x, y) = (0, 0)$ ou $(x, y) = (3, 18)$:

$3x^2 = x^3$,

$x = 0$ ou $x = 3$.

Substitua esses valores em $y = 2x^2$.

25. $(x, y) = (0, 0)$ ou $(x, y) = (-2, -4)$:

$x^3 + 2x^2 = 0$,

$x = 0$ ou $x = -2$.

Substitua esses valores em $y = -x^2$.

26. $(x, y) = \left(\frac{-1 + 3\sqrt{89}}{10}, \frac{3 + \sqrt{89}}{10}\right)$ e

$\left(\frac{-1 - 3\sqrt{89}}{10}, \frac{3 - \sqrt{89}}{10}\right)$:

$x - 3y = -1$,

$x = 3y + 1$.

Substitua $x = 3y + 1$ em

$x^2 + y^2 = 9$:

$(3y - 1)^2 + y^2 = 9$

$\Rightarrow 10y^2 - 6y - 8 = 0$.

Usando a fórmula quadrática,

encontramos que $y = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{10}$.

27. $(x, y) = \left(\frac{52 + 7\sqrt{871}}{65}, \frac{91 - 4\sqrt{871}}{65}\right) \cong$

$(3{,}98, -0{,}42)$ ou

$(x, y) = \left(\frac{52 - 7\sqrt{871}}{65}, \frac{91 + 4\sqrt{871}}{65}\right)$

$\cong (-2{,}38; 3{,}22)$:

$\frac{1}{16}(13 - 7y)^2 + y^2 = 16$,

$65y^2 - 182y - 87 = 0$.

$y = \frac{1}{65}(91 \pm 4\sqrt{871})$.

Substitua em $x = \frac{1}{4}(13 - 7y)$ para obter

$x = \frac{1}{65}(52 \pm 7\sqrt{871})$.

28. $(x, y) = (8, -2)$: somando as equações obtemos $2x = 16$, assim, $x = 8$. Substituir esse valor em qualquer equação para achar y.

29. $(x, y) = (3, 4)$: somando a primeira equação multiplicada por 2 com a segunda obtemos: $5x = 15$, assim, $x = 3$. Substituir esse valor em qualquer equação para achar y.

30. $(x, y) = (4, 2)$: somando a primeira equação multiplicada por 2 com a segunda obtemos: $11x = 44$, assim, $x = 44$. Substituir esse valor em qualquer equação para achar y.

31. $(x, y) = (-2, 3)$: somando a primeira equação multiplicada por 4 com a segunda multiplicada por 5 obtemos: $31x = -62$, assim, $x = -2$. Substituir esse valor em qualquer equação para achar y.

32. Sem solução: somando a primeira equação multiplicada por 3 com a segunda multiplicada por 2 obtemos $0 = -72$, o que é falso.

33. Há infinitas soluções, qualquer par

$$\left(x, \frac{1}{2}x - 2\right)$$

Ao somar a primeira equação com a segunda multiplicada por 2 obtemos $0 = 0$, que sempre é verdadeiro. Enquanto (x, y) satisfaz uma equação, também satisfaz a outra.

34. Há infinitas soluções, qualquer par

$$\left(x, \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right)$$

Somando a primeira equação multiplicada por 3 com a segunda obtemos $0 = 0$, que sempre é verdadeiro. Enquanto (x, y) satisfaz um equação, também satisfaz a outra.

35. Sem solução: somando a primeira equação multiplicada por 2 com a segunda obtemos $0 = 11$, o que é falso.

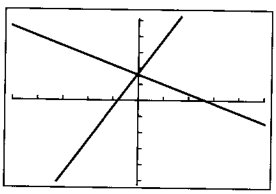
36. $(x, y) = (0, 1)$ ou $(x, y) = (3, -2)$

37. $(x, y) = (1{,}5; 1)$

38. Sem solução.

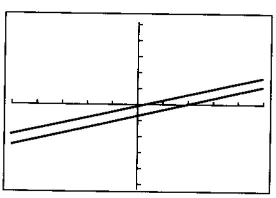
39. $(x, y) = (0, -4)$ ou $(x, y) = (\pm\sqrt{7}, 3) = (\pm 2{,}65; 3)$

40. Uma solução



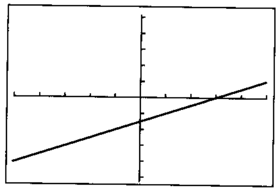
[–5, 5] por [–5, 5]

41. Sem solução



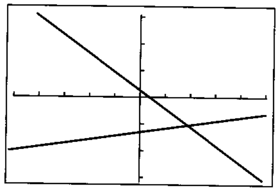
[–5, 5] por [–5, 5]

42. Infinitas soluções



[–5, 5] por [–5, 5]

43. Uma solução



[–4,7, 4,7] por [–3,1, 3,1]

44. $(x, p) = (3{,}75; 143{,}75)$: $200 - 15x = 50 + 25x$, assim $40x = 150$, ou seja, $x = 3{,}75$. Substituir esse valor em qualquer das duas equações para achar p.

45. $(x, p) = (130; 5{,}9)$: $15 - 0{,}07x = 2 + 0{,}03x$, assim $0{,}10x = 13$, ou seja, $x = 130$. Substituir esse valor em qualquer das duas equações para achar p.

46. $200 = 2(x + y)$ e $500 = xy$. Então, $y = 100 - x$, assim, $500 = x(100 - x)$, portanto $x = 50 \pm 20\sqrt{5}$ e $y = 50 \pm 20\sqrt{5}$. Ambas as respostas correspondem a um retângulo com dimensões aproximadas de 5,28 m × 94,72 m.

47. $4 = -a + b$ e $6 = 2a + b$, assim, $b = a + 4$ e $6 = 3a + 4$. Então, $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{14}{3}$.

48. $2a - b = 8$ e $-4a - 6b = 8$, assim, $b = 2a - 8$ e $8 = -4a - 6(2a - 8) = -16a + 48$. Então, $a = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$ e $b = -3$.

49. Seja $S(x)$ a renda da vendedora e x o total de unidades monetárias vendidas por semana:

Plano A: $S(x) = 300 + 0{,}05x$

Plano B: $S(x) = 600 + 0{,}01x$

Resolvendo essa equação, temos:

$$300 + 0{,}05x = 600 + 0{,}01x$$
$$+ 0{,}04x = 300$$
$$x = 7500$$

50. Falso.

51. Usando $(x, y) = (3, -2)$,

$2(3) - 3(-2) = 12$

$3 + 2(-2) = -1$

A resposta é C.

52. Uma parábola e um círculo podem interseccionar em pelo menos 4 lugares. A resposta é E.

53. Duas parábolas podem interseccionar em 0, 1, 2, 3 ou 4 lugares, ou infinitos lugares se as parábolas coincidem completamente. A resposta é D.

54. Quando o processo de solução leva a uma identidade (uma equação que é verdadeira para todo (x, y), o sistema original tem infinitas soluções. A resposta é E.

55. 2×3; não é quadrada.

56. 2×2; quadrada.

57. 3×2; não é quadrada

58. 1×3; não é quadrada.

59. 3×1; não é quadrada.

60. 1×1; quadrada.

61. $a_{13} = 3$

62. $a_{24} = -1$

63. $a_{32} = 4$

64. $a_{33} = -1$

65. **(a)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$

(d) $2A - 3B = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 4 & 22 \end{bmatrix}$

66. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 12 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $2A - 3B$

$= 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \\ 12 & -9 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -8 & -3 & 4 \\ 11 & 2 & -8 \\ -8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

67. **(a)** $\begin{bmatrix} 11 \\ -20 \\ -10 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $2A - 3B = 2\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -6 & 3 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 2 \\ 6 & -5 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$

68. **(a)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 15 & -6 & 9 & 3 \\ -3 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $2A - 3B = 2\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} -$

$3\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & -4 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} -$

$\begin{bmatrix} -6 & 9 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16 & -13 & 3 & 2 \\ -14 & 0 & 71 & 10 \end{bmatrix}$

69. **(a)** $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $2A - 3B = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix}$

70. **(a)** $[0 \quad 0 \quad -2 \quad 3]$

(b) $[-2 \quad -4 \quad 2 \quad 3]$

(c) $[-3 \quad -6 \quad 0 \quad 9]$

(d) $2A - 3B =$

$2[-1 \quad -2 \quad 0 \quad 3]$

$- 3[1 \quad 2 \quad -2 \quad 0]$

$= [-2 \quad -4 \quad 0 \quad 6]$

$- [3 \quad 6 \quad -6 \quad 0]$

$= [-5 \quad -10 \quad 6 \quad 6]$

71. **(a)** $AB = \begin{bmatrix} (2)(1) + (3)(-2) & (2)(-3) + (3)(-4) \\ (-1)(1) + (5)(-2) & (-1)(-3) + (5)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -18 \\ -11 & -17 \end{bmatrix}$

(b) $BA = \begin{bmatrix} (1)(2) + (-3)(-1) & (1)(3) + (-3)(5) \\ (-2)(2) + (-4)(-1) & (-2)(3) + (-4)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 0 & -26 \end{bmatrix}$

72. **(a)** $AB = \begin{bmatrix} (1)(5) + (-4)(-2) & (1)(1) + (-4)(-3) \\ (2)(5) + (6)(-2) & (2)(1) + (6)(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ -2 & -16 \end{bmatrix}$

(b) $BA = \begin{bmatrix} (5)(1) + (1)(2) & (5)(-4) + (1)(6) \\ (-2)(1) + (-3)(2) & (-2)(-4) + (-3)(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -14 \\ -8 & -10 \end{bmatrix}$

73. **(a)** $AB = \begin{bmatrix} (2)(1) + (0)(-3) + (1)(0) & (2)(2) + (0)(1) + (1)(-2) \\ (1)(1) + (4)(-3) + (-3)(0) & (1)(2) + (4)(1) + (-3)(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -11 & 12 \end{bmatrix}$

(b) $BA = \begin{bmatrix} (1)(2) + (2)(1) & (1)(0) + (2)(4) & (1)(1) + (2)(-3) \\ (-3)(2) + (1)(1) & (-3)(0) + (1)(4) & (-3)(1) + (1)(-3) \\ (0)(2) + (-2)(1) & (0)(0) + (-2)(4) & (0)(1) + (-2)(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -5 \\ -5 & 4 & -6 \\ -2 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

74. **(a)** $AB =$

$\begin{bmatrix} (1)(5) + (0)(0) + (-2)(-1) + (3)(4) & (1)(-1) + (0)(2) + (-2)(3) + (3)(2) \\ (2)(5) + (1)(0) + (4)(-1) + (-1)(4) & (2)(-1) + (1)(2) + (4)(3) + (-1)(2) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 19 & -1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

(b) $BA =$

$$\begin{bmatrix} (5)(1)+(-1)(2) & (5)(0)+(-1)(1) & (5)(-2)+(-1)(4) & (5)(3)+(-1)(-1) \\ (0)(1)+(2)(2) & (0)(0)+(2)(1) & (0)(-2)+(2)(4) & (0)(3)+(2)(-1) \\ (-1)(1)+(3)(2) & (-1)(0)+(3)(1) & (-1)(-2)+(3)(4) & (-1)(3)+(3)(-1) \\ (4)(1)+(2)(2) & (4)(0)+(2)(1) & (4)(-2)+(2)(4) & (4)(3)+(2)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -14 & 16 \\ 4 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 14 & -6 \\ 8 & 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

75. **(a)** $AB =$

$$\begin{bmatrix} (-1)(2)+(0)(-1)+(2)(4) & (-1)(1)+(0)(0)+(2)(-3) & (-1)(0)+(0)(2)+(2)(-1) \\ (4)(2)+(1)(-1)+(-1)(4) & (4)(1)+(1)(0)+(-1)(-3) & (4)(0)+(1)(2)+(-1)(-1) \\ (2)(2)+(0)(-1)+(1)(4) & (2)(1)+(0)(0)+(1)(-3) & (2)(0)+(0)(2)+(1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -7 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $BA =$

$$\begin{bmatrix} (2)(-1)+(1)(4)+(0)(2) & (2)(0)+(1)(1)+(0)(0) & (2)(2)+(1)(-1)+(0)(1) \\ (-1)(-1)+(0)(4)+(2)(2) & (-1)(0)+(0)(1)+(2)(0) & (-1)(2)+(0)(-1)+(2)(1) \\ (4)(-1)+(-3)(4)+(-1)(2) & (4)(0)+(-3)(1)+(-1)(0) & (4)(2)+(-3)(-1)+(-1)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ -18 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

76. **(a)** $AB =$

$$\begin{bmatrix} (-2)(4)+(3)(0)+(0)(-1) & (-2)(-1)+(3)(2)+(0)(3) & (-2)(2)+(3)(3)+(0)(-1) \\ (1)(4)+(-2)(0)+(4)(-1) & (1)(-1)+(-2)(2)+(4)(3) & (1)(2)+(-2)(3)+(4)(-1) \\ (3)(4)+(2)(0)+(1)(-1) & (3)(-1)+(2)(2)+(1)(3) & (3)(2)+(2)(3)+(1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 8 & 5 \\ 0 & 7 & -8 \\ 11 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

(b) $BA =$

$$\begin{bmatrix} (4)(-2)+(-1)(1)+(2)(3) & (4)(3)+(-1)(-2)+(2)(2) & (4)(0)+(-1)(4)+(2)(1) \\ (0)(-2)+(2)(1)+(3)(3) & (0)(3)+(2)(-2)+(3)(2) & (0)(0)+(2)(4)+(3)(1) \\ (-1)(-2)+(3)(1)+(-1)(3) & (-1)(3)+(3)(-2)+(-1)(2) & (-1)(0)+(3)(4)+(-1)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 18 & -2 \\ 11 & 2 & 11 \\ 2 & -11 & 11 \end{bmatrix}$$

77. **(a)** $AB =$
$[(2)(-5) + (-1)(4) + (3)(2)] = [-8]$

(b) $BA =$

$$\begin{bmatrix} (-5)(2) & (-5)(-1) & (-5)(3) \\ (4)(2) & (4)(-1) & (4)(3) \\ (2)(2) & (2)(-1) & (2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 & -15 \\ 8 & -4 & 12 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

78. **(a)** $AB =$

$$\begin{bmatrix} (-2)(-1) & (-2)(2) & (-2)(4) \\ (3)(-1) & (3)(2) & (3)(4) \\ (-4)(-1) & (-4)(2) & (-4)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 \\ -3 & 6 & 12 \\ 4 & -8 & -16 \end{bmatrix}$$

(b) $BA = [(-1)(-2) + (2)(3) + (4)(-4)] = [-8]$

79. **(a)** AB não é possível

(b) $BA = [(-3)(-1) + (5)(3) \quad (-3)(2) + (5)(4)] = [18 \ 14]$

80. **(a)** $AB =$

$$\begin{bmatrix} (-1)(5) + (3)(2) & (-1)(-6) + (3)(3) \\ (0)(5) + (1)(2) & (0)(-6) + (1)(3) \\ (1)(5) + (0)(2) & (1)(-6) + (0)(3) \\ (-3)(5) + (-1)(2) & (-3)(-6) + (-1)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 2 & 3 \\ 5 & -6 \\ -17 & 15 \end{bmatrix}$$

(b) $BA =$ não é possível.

81. **(a)** $AB =$

$$\begin{bmatrix} (-2)(4) + (3)(0) + (0)(-1) & (-2)(-1) + (3)(2) + (0)(3) & (-2)(2) + (3)(3) + (0)(-1) \\ (1)(4) + (-2)(0) + (4)(-1) & (1)(-1) + (-2)(2) + (4)(3) & (1)(2) + (-2)(3) + (4)(-1) \\ (3)(4) + (2)(0) + (1)(-1) & (3)(-1) + (2)(2) + (1)(3) & (3)(2) + (2)(3) + (1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $BA =$

$$\begin{bmatrix} (1)(0) + (2)(0) + (1)(1) & (1)(0) + (2)(1) + (1)(0) & (1)(1) + (2)(0) + (1)(0) \\ (2)(0) + (0)(0) + (1)(1) & (2)(0) + (0)(1) + (1)(0) & (2)(1) + (0)(0) + (1)(0) \\ (-1)(0) + (3)(0) + (4)(1) & (-1)(0) + (3)(1) + (4)(0) & (-1)(1) + (3)(0) + (4)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

82. **(a)** $AB =$

$$\begin{bmatrix} 0+0-3+0 & 0+0+2+0 & 0+0+1+0 & 0+0+3+0 \\ 0+2+0+0 & 0+1+0+0 & 0+0+0+0 & 0-1+0+0 \\ -1+0+0+0 & 2+0+0+0 & 3+0+0+0 & -4+0+0+0 \\ 0+0+0+4 & 0+0+0+0 & 0+0+0+2 & 0+0+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $BA =$

$$\begin{bmatrix} 0+0+3+0 & 0+2+0+0 & -1+0+0+0 & 0+0+0-4 \\ 0+0+0+0 & 0+1+0+0 & 2+0+0+0 & 0+0+0-1 \\ 0+0+1+0 & 0+2+0+0 & -3+0+0+0 & 0+0+0+3 \\ 0+0+2+0 & 0+0+0+0 & 4+0+0+0 & 0+0+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

83. $a = 5, b = 2$

84. $a = 3, b = -1$

85. $a = -2, b = 0$

86. $a = 1, b = 6$

87. $AB = \begin{bmatrix} (2)(0{,}8) + (1)(-0{,}6) & (2)(-0{,}2) + (1)(0{,}4) \\ (3)(0{,}8) + (4)(-0{,}6) & (3)(-0{,}2) + (4)(0{,}4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, BA

$= \begin{bmatrix} (0{,}8)(2) + (-0{,}2)(3) & (0{,}8)(1) + (-0{,}2)(4) \\ (-0{,}2)(2) + (0{,}4)(3) & (0{,}6)(1) + (-0{,}4)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, assim A e B são inversas.

88. $AB =$

$$\begin{bmatrix} (-2)(0) + (1)(0{,}25) + 3(0{,}25) & (-2)(1) + (1)(0{,}5) + (3)(0{,}5) & (-2)(-2) + (1)(-0{,}25) + (3)(-1{,}25) \\ (1)(0) + (2)(0{,}25) + (-2)(0{,}25) & (1)(1) + (2)(0{,}5) + (-2)(0{,}5) & (1)(-2) + (2)(-0{,}25) + (-2)(-1{,}25) \\ (0)(0) + (1)(0{,}25) + (-1)(0{,}25) & (0)(1) + (1)(0{,}5) + (-1)(0{,}5) & (0)(-2) + (1)(-0{,}25) + (-1)(-1{,}25) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$BA =$

$$\begin{bmatrix} (0)(-2) + (1)(1) + (-2)(0) & (0)(1) + (1)(2) + (-2)(1) & (0)(3) + (1)(-2) + (-2)(-1) \\ (0{,}25)(-2) + (0{,}5)(1) + (-0{,}25)(0) & (0{,}25)(1) + (0{,}5)(2) + (-0{,}25)(1) & (0{,}25)(3) + (0{,}5)(-2) + (-0{,}25)(-1) \\ (0{,}25)(-2) + (0{,}5)(1) + (-1{,}25)(0) & (0{,}25)(1) + (0{,}5)(2) + (-1{,}25)(1) & (0{,}25)(3) + (0{,}5)(-2) + (-1{,}25)(-1) \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, assim A e B são inversas.

89.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} - \frac{1}{(2)(2) - (2)(3)} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1{,}5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

90. Não existe inversa: o determinante é $(6)(5) - (10)(3) = 0$.

91. Não existe inversa: o determinante (encontrado com calculadora) é 0.

92. Usando calculadora:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 1{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & -0{,}75 \end{bmatrix}$$

Para confirmar, faça a multiplicação.

93. Use a linha 2 ou coluna 2 como possuem os maiores números de zeros. Usando a coluna 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ (0)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (3)(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (-1)(1 - 2) + 0 + (-3)(4 + 1)$

$= 1 + 0 - 15$

$= -14$

94. Use a linha 1 ou 4 ou coluna 2 ou 3 como possuem os maiores números de zeros. Usando a coluna 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (2)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= 2 \cdot \left[0 + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right]$$

$$-2\left[1(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0\right]$$

$= 2((-1)(3 - 0) + (1)(2 + 3)) - 2((1)$
$(-3 - 0))$

$=2(-3 + 5) - 2(-3)$

$= 4 + 6$

$= 10$

95. $3X = B - A$

$$X = \frac{B - A}{3} = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

96. $2X = B - A$

$$X = \frac{B - A}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

97.

$$B = \begin{bmatrix} 1{,}1 \cdot 120 & 1{,}1 \cdot 70 \\ 1{,}1 \cdot 150 & 1{,}1.110 \\ 1{,}1 \cdot 80 & 1{,}1 \cdot 160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 132 & 77 \\ 165 & 121 \\ 88 & 176 \end{bmatrix}$$

$B = 1{,}1A.$

98. (a)

$$SP = \begin{bmatrix} 16 & 10 & 8 & 12 \\ 12 & 0 & 10 & 14 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \$180 & \$269{,}99 \\ \$275 & \$399{,}99 \\ \$355 & \$499{,}99 \\ \$590 & \$799{,}99 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \$15.550 & \$21.919{,}54 \\ \$13.970 & \$11.439{,}74 \\ \$8.740 & \$12.279{,}76 \end{bmatrix}$$

(b) Os valores no atacado e no varejo de todo o estoque na loja i estão representados por a_{i1} e a_{i2}, respectivamente, na matriz SP.

99. (a) Receita total = soma de (preço cobrado)(número vendido)
$= AB^T$ ou BA^T

(b) Lucro = receita total − custo total
$= AB^T - CB^T$
$= (A - C)B^T$

100. Respostas variarão. Uma resposta possível é dada.

(a) $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}]$
$= B + A$

(b) $(A + B) + C = [a_{ij} + b_{ij}] + C$
$= [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]$
$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = A + [b_{ij}+c_{ij}]$
$= A + (B + C)$

(c) $A\,(B + C) = A\,[b_{ij} + c_{ij}] = \;= [\sum_k a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})]$
(seguindo as regras da multiplicação de matriz)

$= [\sum_k (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})]$

$= [\sum_k a_{ik}b_{kj} + \sum_k a_{ik}c_{kj}]$

$= [\sum_k a_{ik}b_{kj}] + [\sum_k a_{ik}c_{kj}] = AB + AC$

(d) $(A - B)C = [a_{ij} - b_{ij}]C = [\sum_k (a_{ik} - b_{ik})\, c_{ki})]$

$= [\sum_k (a_{ik}c_{ki} + b_{ik}c_{ki})]$

$= [\sum_k a_{ik}c_{ki} - \sum_k b_{ik}c_{ki}]$

$= [\sum_k a_{ik}c_{ki}] - [\sum_k b_{ik}c_{ki}] = AC - BC$

101. Respostas variarão. Uma resposta possível é dada.

(a) $c(A + B) = c[a_{ij} + b_{ij}] = [ca_{ij} + cb_{ij}] = cA + cB$

(b) $(c + d)A = (c + d)[a_{ij}] = c[a_{ij}] + d[a_{ij}]$

$= cA + dA$

(c) $c(dA) = c[da_{ij}] = [cda_{ij}] = cd[a_{ij}] = cdA$

(d) $1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}] = [a_{ij}] = A$

102.

$$AI_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \ldots + 0 \cdot a_{1n} & 0 \cdot a_{11} + a_{12} + 0 \cdot a_{13} + \ldots + 0 \cdot a_{1n} & \ldots & 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \ldots + a_{1n} \\ a_{21} + 0 \cdot a_{22} + \ldots + 0 \cdot a_{2n} & 0 \cdot a_{21} + a_{22} + 0 \cdot a_{23} + \ldots + 0 \cdot a_{2n} & \ldots & 0 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} + \ldots + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} + 0 \cdot a_{n2} + \ldots + 0 \cdot a_{nn} & 0 \cdot a_{n1} + a_{n2} + 0 \cdot a_{n3} + \ldots + 0 \cdot a_{nn} & \ldots & 0 \cdot a_{n1} + 0 \cdot a_{n2} + \ldots + a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A$$

. Podemos fazer o mesmo para $I_nA = A$.

103. $2(-1) - (-3)(4) = 10$. A resposta é C.

104. A matriz AB tem o mesmo número de linhas que A e o mesmo número de colunas que B. A resposta é B.

105. $$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(4) - 1(7)} \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A resposta é E.

106. O valor na linha 1, coluna 3 é 3. A resposta é D.

APÊNDICE B

Exercícios

1. Há 3 possibilidades para quem fica à esquerda e 2 possibilidades restantes para quem fica no meio, e uma possibilidade restante para quem fica à direita: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
2. Qualquer uma das 4 tarefas pode ser priorizada como a mais importante, e qualquer das 3 tarefas restantes pode ser como a menos; continuando com essa idéia: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
3. Qualquer um dos 5 livros pode ser colocado à esquerda, e qualquer dos 4 livros restantes pode ser próximo a ele; continuando com essa idéia: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
4. Qualquer um dos 5 cachorros pode receber o primeiro prêmio, e qualquer dos 4 cachorros restantes pode receber o segundo lugar: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
5. Há $3 \cdot 4 = 12$ possibilidades de caminhos. Nos 3 diagramas, $B1$ representa a primeira rodovia da cidade A para a cidade B etc.
6. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
7. $\dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 30$
8. $\dfrac{10!}{7!(10-7)!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$
9. $(3 \cdot 2 \cdot 1)(1) = 6$
10. $\dfrac{9!}{(9-2)!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 72$
11. $\dfrac{10!}{3!(10-3)!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3! \cdot 7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$
12. Há 6 possibilidades para o dado vermelho e 6 para o dado verde: $6 \cdot 6 = 36$.
13. Há 2 possibilidades para cada vez que a moeda for lançada: $2^{10} = 1.024$.
14. ${}_{48}C_3 = \dfrac{48!}{3!(48-3)!} = \dfrac{48!}{3!45!} = 17.296$
15. Escolhidas 7 seqüências de 20:

    ${}_{20}C_7 = \dfrac{20!}{7!(20-7)!} = \dfrac{20!}{7!13!} = 77.520$
16. ${}_{8}C_3 = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = \dfrac{8!}{3!5!} = 56$
17. ${}_{20}C_8 = \dfrac{20!}{8!(20-8)!} = \dfrac{20!}{8!12!} = 125.970$
18. $2^9 - 1 = 511$ (excluímos aqui o resultado possível de um conjunto vazio)
19. Como cada ingrediente pode ser incluído ou não, o número total de possibilidades com n ingredientes é 2^n. Como $2^{11} = 2.048$ é menor que 4000, mas $2^{12} = 4.096$ é maior que 4000, o dono da pizzaria oferece pelo menos 12 ingredientes.
20. Há 2^n subconjunto, dos quais $2^n - 2$ são subconjuntos próprios.
21. $2^{10} = 1.024$
22. $5^{10} = 9.765.625$
23. Verdadeiro.
24. Falso.
25. Há $\binom{6}{2} = 15$ combinações diferentes de vegetais.

    O número total é $4 \cdot 15 \cdot 6 = 360$. A resposta é D.
26. ${}_nP_n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$ A resposta é B.
27. $x^2 + 2xy + y^2$
28. $a^2 + 2ab + b^2$
29. $25x^2 - 10xy + y^2$
30. $a^2 - 6ab + 9b^2$
31. $9s^2 + 12st + 4t^2$
32. $9p^2 - 24pq + 16q^2$
33. $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
34. $b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$
35. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
36. $64m^3 + 144m^2n + 108mn^2 + 27n^3$
37. $(a + b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$

    $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
38. $(a + b)^6 = \binom{6}{0}a^6b^0 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 + \binom{6}{6}a^0b^6$

    $= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

39. $(x + y)^7 = \binom{7}{0}x^7y^0 + \binom{7}{1}x^6y^1 + \binom{7}{2}x^5y^2$
$+ \binom{7}{3}x^4y^3 + \binom{7}{4}x^3y^4 + \binom{7}{5}x^2y^5 + \binom{7}{6}x^1y^6$
$+ \binom{7}{7}x^0y^7$
$= x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3$
$+ 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$

40. $(x + y)^{10} = \binom{10}{0}x^{10}y^0 + \binom{10}{1}x^9y^1 + \binom{10}{2}$ x^8y^2
$+ \binom{10}{3}x^7y^3 + \binom{10}{4}x^6y^4$
$+ \binom{10}{5}x^5y^5 + \binom{10}{6}x^4y^6$
$+ \binom{10}{7}x^3y^7 + \binom{10}{8}x^2y^8$
$+ \binom{10}{9}x^1y^9 + \binom{10}{10}x^0y^{10}$
$= x^{10} + 10x^9y + 45x^8y^2 + 120x^7y^3 + 210x^6y^4$
$+ 252x^5y^5 + 210x^4y^6 + 120x^3y^7$
$+ 45x^2y^8 + 10xy^9 + y^{10}$

41. Use as entradas na linha 3 como coeficientes:
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

42. Use as entradas na linha 5 como coeficientes:
$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3$
$+ 5xy^4 + y^5$

43. Use as entradas na linha 8 como coeficientes:
$(p + q)^8 = p^8 + 8p^7q + 28p^6q^2 + 56p^5q^3$
$+ 70p^4q^4 + 56p^3q^5 + 28p^2q^6 + 8pq^7 + q^8$

44. Use as entradas na linha 9 como coeficientes:
$(p + q)^9 = p^9 + 9p^8q + 36p^7q^2 + 84p^6q^3$
$+ 126p^5q^4 + 126p^4q^5 + 84p^3q^6 + 36p^2q^7$
$+ 9pq^8 + q^9$

45. $\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$

46. $\binom{15}{11} = \frac{15!}{11!4!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1365$

47. $\binom{166}{166} = \frac{166!}{166!0!} = 1$

48. $\binom{166}{0} = \frac{166!}{0!166!} = 1$

49. $\binom{14}{3} = \binom{14}{11} = 364$

50. $\binom{13}{8} = \binom{13}{5} = 1287$

51. $(-2)^8\binom{12}{8} = (-2)^8\binom{12}{4} = 126.720$

52. $(-3)^4\binom{11}{4} = (-3)^4\binom{11}{7} = 26.730$

53. $f(x) = (x - 2)^5$
$= x^5 + 5x^4(-2) + 10x^3(-2)^2 + 10x^2(-2)^3$
$+ 5\text{x}(-2)^4 + (-2)^5$
$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

54. $g(x) = (x + 3)^6$
$= x^6 + 6x^5 \cdot 3 + 15x^4 \cdot 3^2 + 20x^3 \cdot 3^3$
$+ 15x^2 \cdot 3^4 + 6x \cdot 3^5 + 3^6$
$= x^6 + 18x^5 + 135x^4 + 540x^3 + 1215x^2$
$+ 1458x + 729$

55. $h(\text{x}) = (2x - 1)^7$
$= (2x)^7 + 7(2x)^6(-1) + 21(2x)^5(-1)^2$
$+ 35(2x)^4(-1)^3 + 35(2x)^3(-1)^4$
$+21(2x)^2(-1)^5 + 7(2x)(-1)^6 + (-1)^7$
$= 128x^7 - 448x^6 + 672x^5 - 560x^4 + 280x^3$
$- 84x^2 + 14x - 1$

56. $f(x) = (3x + 4)^5$
$= (3x)^5 + 5(3x)^4 \cdot 4 + 10(3x)^3 \cdot 4^2$
$+10(3x)^2 \cdot 4^3 + 5(3x) \cdot 4^4 + 4^5$
$= 243x^5 + 1620x^4 + 4320x^3 + 5760x^2 + 3840x$
$+ 1024$

57. $(2x + y)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3y + 6(2x)^2y^2$
$+ 4(2x)y^3 + y^4$
$= 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$

58. $(2y - 3x)^5 = (2y)^5 + 5(2y)^4(-3x)$
$+ 10(2y)^3(-3x)^2 + 10(2y)^2(-3x)^3$
$+ 5(2y)(-3x)^4 + (-3x)^5$
$= 32y^5 - 240y^4x + 720y^3x^2 - 1080y^2x^3$
$+ 810yx^4 - 243x^5$

59. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6 = (\sqrt{x})^6 + 6(\sqrt{x})^5(-\sqrt{y})$
$+15(\sqrt{x})^4 \cdot (-\sqrt{y})^2 + 20(\sqrt{x})^3(-\sqrt{y})^3$
$+ 15(\sqrt{x})^2(-\sqrt{y})^4$
$+ 6(\sqrt{x})(-\sqrt{y})^5 + (-\sqrt{y})^6$
$= x^3 - 6x^{5/2}y^{1/2} + 15x^2y - 20x^{3/2}y^{3/2}$
$+ 15xy^2 - 6x^{1/2}y^{5/2} + y^3$

60. $(\sqrt{x}+\sqrt{3})^4 = (\sqrt{x})^4 + 4(\sqrt{x})^3(\sqrt{3})$

$+6(\sqrt{x})^2 \cdot (\sqrt{3})^2$

$+ 4(\sqrt{x})(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^4$

$= x^2 + 4x\sqrt{3x} + 18x + 12\sqrt{3x} + 9$

61. $(x^{-2}+3)^5 = (x^{-2})^5 + 5(x^{-2})^4 \cdot 3 + 10(x^{-2})^3 \cdot 3^2$
$+ 10(x^{-2})^2 \cdot 3^3 + 5(x^{-2}) \cdot 3^4 + 3^5$
$= x^{-10} + 15x^{-8} + 90x^{-6} + 270x^{-4}$
$+ 405x^{-2} + 243$

62. $(a - b^{-3})^7 = a^7 + 7a^6(-b^{-3}) + 21a^5(-b^{-3})^2$
$+ 35a^4(-b^{-3})^3 + 35a^3(-b^{-3})^4$
$+ 21a^2(-b^{-3})^5 + 7a(-b^{-3})^6 + (-b^{-3})^7$
$= a^7 - 7a^6b^{-3} + 21a^5b^{-6} - 35a^4b^{-9}$
$+ 35a^3b^{-12} - 21a^2b^{-15} + 7ab^{-18} - b^{-21}$.

63. $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = n = \dfrac{n!}{(n-1)!1!}$

$= \dfrac{n!}{(n-1)![n-(n-1)]!} = \binom{n}{n-1}$

64. $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

$= \dfrac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \binom{n}{n-r}$

65. $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

$= \dfrac{(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!} + \dfrac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}$

$= \dfrac{r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!} + \dfrac{(n-1)!(n-1)}{r!(n-r)(n-r-1)!}$

$= \dfrac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} + \dfrac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$= \dfrac{(r+n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$= \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$

66. **(a)** Qualquer par (n, m) de inteiros não-negativos — com exceção de $(1, 1)$ — fornece um contra-exemplo. Por exemplo, $n = 2$ e $m = 3$: $(2 + 3)! = 5! = 120$, mas $2! + 3! = 2 + 6 = 8$.

(b) Qualquer par (n, m) de inteiros não-negativos — com exceção de $(0, 0)$ ou qualquer par $(1, m)$ ou $(n, 1)$ — fornece um contra-exemple. Por exemplo, $n = 2$ e $m = 3$: $(2 \cdot 3)! = 6! = 720$, mas $2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$.

67. $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} + \dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!}$

$= \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{(n+1)(n)}{2}$

$= \dfrac{n^2-n+n^2+n}{2} = n^2$

68. $\binom{n}{n-2} + \binom{n+1}{n-1} = \dfrac{n!}{(n-2)![n-(n-2)]!}$

$+ \dfrac{(n+1)!}{(n-1)![(n+1)-(n-1)]!}$

$= \dfrac{n!}{(n-2)!\,2!} + \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!}$

$= \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{(n+1)n}{2}$

$= \dfrac{n^2-n+n^2+n}{2} = n^2$

69. Verdadeiro.

70. Verdadeiro.

71. O quinto termo da expansão $\binom{8}{4}(2x)^4(1)^4 = 1120x^4$. A resposta é C.

72. Os dois menores números na linha 10 são 1 e 10. A resposta é B.

73. A soma dos coeficientes de $(3x - 2y)^{10}$ é a mesma que o valor de $(3x - 2y)^{10}$ quando $x = 1$ e $y = 1$. A resposta é A.

74. Os termos pares nas duas expressões são com sinais contrários e cancelados, enquanto os termos ímpares são idênticos e são somados. A resposta é D.

APÊNDICE C

Exercícios

1. $\dfrac{\pi}{6} \cdot \dfrac{180°}{\pi} = 30°$

2. $\dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{180°}{\pi} = 45°$

3. $\frac{\pi}{10} \cdot \frac{180°}{\pi} = 18°$

4. $\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180°}{\pi} = 108°$

5. $\frac{7\pi}{9} \cdot \frac{180°}{\pi} = 140°$

6. $\frac{13\pi}{20} \cdot \frac{180°}{\pi} = 117°$

7. $2 \cdot \frac{180°}{\pi} \cong 114{,}59°$

8. $1{,}3 \cdot \frac{180°}{\pi} \cong 74{,}48°$

9. $s = 70$ cm

10. $r = 7{,}5/\pi$ cm

11. $\theta = 3$ radianos

12. $r = \frac{360}{\pi}$ cm

13. $x° = x°\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \frac{\pi x}{180°}$. A resposta é C.

14. Se o perímetro é 4 vezes o raio, então o comprimento do arco é de 2 raios, o que implica um ângulo de 2 radianos. A resposta é A.

15. $x = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

16. $x = \sqrt{8^2 + 12^2} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$

17. $x = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

18. $x = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

19. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{4}{3}$

20. $\operatorname{sen}\theta = \frac{8}{\sqrt{113}}$, $\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{113}}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{8}{7}$

21. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{12}{5}$

22. $\operatorname{sen}\theta = \frac{8}{17}$, $\cos\theta = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{8}{15}$

23. O comprimento da hipotenusa é

$\sqrt{7^2 + 11^2} = \sqrt{170}$, logo

$\operatorname{sen}\theta = \frac{7}{\sqrt{170}}$, $\cos\theta = \frac{11}{\sqrt{170}}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{7}{11}$

24. O comprimento do lado adjacente é

$\sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, logo

$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{4}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$

25. O comprimento do lado oposto é

$\sqrt{11^2 - 8^2} = \sqrt{57}$, logo

$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{57}}{11}$, $\cos\theta = \frac{8}{11}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{57}}{8}$

26. O comprimento do lado adjacente é

$\sqrt{13^2 - 9^2} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$, logo

$\operatorname{sen}\theta = \frac{9}{13}$, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{22}}{13}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{9}{2\sqrt{22}}$

27. O triângulo retângulo tem hipotenusa com medida 7 e cateto oposto ao ângulo θ com medida 3. Assim, o cateto adjacente é

$\sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. As outras medidas são:

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{2\sqrt{10}}$

28. O triângulo retângulo tem hipotenusa com medida 3 e cateto oposto ao ângulo θ com medida 2. Assim, o cateto adjacente é

$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. As outras medidas são:

$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

29. O triângulo retângulo tem hipotenusa com medida 11 e cateto adjacente ao ângulo θ com medida 5. Assim, o cateto oposto é

$\sqrt{11^2 - 5^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$. As outras medidas

são: $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{6}}{11}$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{4\sqrt{6}}{5}$

30. O triângulo retângulo tem hipotenusa com medida 8 e cateto adjacente ao ângulo θ com medida 5. Assim, o cateto oposto é

$\sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$. As outras medidas são:

$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{39}}{8}$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{39}}{5}$

31. O triângulo retângulo tem cateto oposto ao ângulo θ igual a 5 e cateto adjacente igual a 9. Assim, a medida da hipotenusa é $\sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106}$. As outras medidas são:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{5}{\sqrt{106}} \text{ e } \cos\theta = \frac{9}{\sqrt{106}}$$

32. O triângulo retângulo tem cateto oposto ao ângulo θ igual a 12 e cateto adjacente igual a 13. Assim, a medida da hipotenusa é $\sqrt{12^2 + 13^2} = \sqrt{313}$. As outras medidas são:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{12}{\sqrt{313}} \text{ e } \cos\theta = \frac{13}{\sqrt{313}}$$

33. $x = \dfrac{15}{\text{sen } 34°} \cong 26{,}82$

34. $z = \dfrac{23}{\cos 39°} \cong 29{,}60$

35. $y = \dfrac{32}{\text{tg } 57°} \cong 20{,}78$

36. $x = 14 \text{ sen } 43° \cong 9{,}55$

37. $y = 6/\text{sen } 35° \cong 10{,}46$

38. $x = 50 \cos 66° \cong 20{,}34$

39. $-30°$

40. $-150°$

41. $45°$

42. $240°$

43. $r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \text{tg}\,\theta = -2$$

44. $r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{3}{5},\ \cos\theta = \frac{4}{5},\ \text{tg}\,\theta = -\frac{3}{4}$$

45. $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{tg}\,\theta = 1$$

46. $r = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{5}{\sqrt{34}},\ \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{34}},\ \text{tg}\,\theta = -\frac{5}{3}$$

47. $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5},\ \cos\theta = \frac{3}{5},\ \text{tg}\,\theta = \frac{4}{3}$$

48. $r = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}},\ \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}},\ \text{tg}\,\theta = \frac{3}{2}$$

49. $r = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

$\text{sen}\,\theta = 1, \cos\theta = 0,\ \text{tg}\,\theta = \text{indefinido}$, (pois $x = 0$).

50. $r = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$

$\text{sen}\,\theta = 0, \cos\theta = -1,\ \text{tg}\,\theta = 0$

51. $r = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{2}{\sqrt{29}},\ \cos\theta = \frac{5}{\sqrt{29}},\ \text{tg}\,\theta = -\frac{2}{5}$$

52. $r = \sqrt{22^2 + (-22)^2} = 22\sqrt{2}$

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{tg}\,\theta = -1$$

53. O lado que determina a abertura do ângulo de $-450°$ é o mesmo do ângulo de 270°.
$\text{sen}\,\theta = -1$
$\cos\theta = 0$
$\text{tg}\,\theta$ indefinida

54. O lado que determina a abertura de $-270°$ é o mesmo do ângulo de 90°.
$\text{sen}\,\theta = 1$
$\cos\theta = 0$
$\text{tg}\,\theta$ indefinida

55. O lado que determina a abertura do ângulo de 7π é o mesmo do ângulo π.
$\text{sen}\,\theta = 0$
$\cos\theta = -1$
$\text{tg}\,\theta = 0$

56. O lado que determina a abertura do ângulo de $11\pi/2$ é o mesmo do ângulo $3\pi/2$.
$\text{sen}\,\theta = -1$
$\cos\theta = 0$
$\text{tg}\,\theta$ indefinida

57. O lado que determina a abertura do ângulo $-7\pi/2$ é o mesmo do ângulo $\pi/2$.
$\text{sen}\,\theta = 1$
$\cos\theta = 0$
$\text{tg}\,\theta$ indefinida

58. O lado que determina a abertura do ângulo -4π é o mesmo do ângulo 0 radianos.
sen $\theta = 0$
cos $\theta = 1$
tg $\theta = 0$

59. Como $\text{tg}\,\theta < 0$, sen θ e cos θ têm sinais contrários.

Assim: $\cos\theta = -\sqrt{1-\text{sen}^2\theta} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

60. $\cos\theta = +\sqrt{1-\text{sen}^2\theta} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Assim: $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{2}{\sqrt{21}}$

61. Verdadeiro.

62. $\text{sen}\,\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}$, porque tg θ = (sen θ)/(cos θ) > 0. Logo

$\text{sen}\,\theta = -\sqrt{1-\dfrac{25}{169}} = -\dfrac{12}{13}$. A resposta é A.

63. Máximo: $2\left(\text{em } -\dfrac{3\pi}{2} \text{ e } \dfrac{\pi}{2}\right)$

Mínimo: $-2\left(\text{em } -\dfrac{\pi}{2} \text{ e } \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Raízes: 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$.

64. Máximo: 3 (em 0), mínimo: -3 (em $\pm 2\pi$). Raízes: $\pm\pi$.

65. Máximo: 1 (em 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$);

Mínimo: $-1\left(\text{em } \pm\dfrac{\pi}{2} \text{ e } \pm\dfrac{3\pi}{2}\right)$

Raízes: $\pm\dfrac{\pi}{4}, \pm\dfrac{3\pi}{4}, \pm\dfrac{5\pi}{4}, \pm\dfrac{7\pi}{4}$

66. Máximo: $\dfrac{1}{2}\left(\text{em } -\dfrac{3\pi}{2} \text{ e } \dfrac{\pi}{2}\right)$;

Mínimo: $-\dfrac{1}{2}\left(\text{em } -\dfrac{\pi}{2} \text{ e } \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Raízes: 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$.

67. Máximo: $1\left(\text{em } \pm\dfrac{\pi}{2} \text{ e } \pm\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

Mínimo: -1 (em 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$).

Raízes: $\pm\dfrac{\pi}{4}, \pm\dfrac{3\pi}{4}, \pm\dfrac{5\pi}{4}, \pm\dfrac{7\pi}{4}$

68. Máximo: $2\left(\text{em } -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$;

Mínimo: $-2\left(\text{em } -\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Raízes: 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$.

69. O gráfico de $y = 5 \cdot \text{tg}\,x$ deve ser estendido verticalmente por 10 em comparação com $y = 0{,}5\ \text{tg}\,x$, assim $y_1 = 5\ \text{tg}\,x$ e $y_2 = 0{,}5\ \text{tg}\,x$.

70. Domínio: todos os números reais exceto múltiplos ímpares de π.
Imagem: $]-\infty, +\infty[$
Continuidade: a função é contínua neste domínio
Comportamento crescente/decrescente: é crescente em cada intervalo neste domínio
Simetria: é simétrica com relação à origem (ímpar)
Limite: não é limitada superiormente nem inferiormente
Extremo local: nenhum
Assíntotas horizontais: nenhuma
Assíntotas verticais: $x = k\pi$ para todos os inteiros ímpares k
Comportamento nos extremos do domínio: não existe.

APÊNDICE D

Revisão rápida

1. $\sqrt{(2-(-1))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

2. $\sqrt{(a-2)^2 + (b+3)^2}$

3.
$\sqrt{(2-(-3))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61}$

4. $\sqrt{(a-(-3))^2 + (b-(-4))^2}$
$= \sqrt{(a+3)^2 + (b+4)^2}$

5. $\sqrt{(-7-4)^2 + (-8-(-3))^2}$
$= \sqrt{(-11)^2 + (-5)^2} = \sqrt{146}$

6. $\sqrt{(b-a)^2 + (c-(-3))^2}$
$= \sqrt{(b-a)^2 + (c+3)^2}$

7. $y^2 = 4x$

$y = \pm 2\sqrt{x}$

8. $y^2 = 5x$

$y = \pm\sqrt{5x}$

9. $4y^2 + 9x^2 = 36$

$4y^2 = 36 - 9x^2$

$y = \pm\sqrt{\dfrac{36 - 9x^2}{4}} = \pm\dfrac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

10. $25x^2 + 36y^2 = 900$

$36y^2 = 900 - 25x^2$

$y = \pm\sqrt{\dfrac{900 - 25x^2}{36}} = \pm\dfrac{5}{6}\sqrt{36 - x^2}$

11. $9y^2 - 16x^2 = 144$

$9y^2 = 144 + 16x^2$

$y = \pm\dfrac{4}{3}\sqrt{9 + x^2}$

12. $4x^2 - 36y^2 = 144$

$36y^2 = 4x^2 - 144$

$y = \pm\dfrac{2}{6}\sqrt{x^2 - 36}$

$y = \pm\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2 - 36}$

13. $y + 7 = -(x^2 - 2x)$

$y + 7 - 1 = -(x - 1)^2$

$y + 6 = -(x - 1)^2$

14. $y + 5 = 2(x^2 + 3x)$

$y + 5 + \dfrac{9}{2} = 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2$

$y + \dfrac{19}{2} = 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2$

15. Vértice: $(1, 5)$. Eixo de simetria $x = 1$.

16. Vértice: $(3, 19)$ pois $f(x) = -2(x - 3)^2 + 19$. Eixo de simetria $x = 3$.

17. $f(x) = a(x + 1)^2 + 3$, logo: $1 = a + 3$, $a = -2$, $f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$.

18. $f(x) = a(x - 2)^2 - 5$, logo: $13 = 9a - 5$, $a = 2$, $f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$

19. $3x + 12 = (10 - \sqrt{3x - 8})^2$

$3x + 12 = 100 - 20\sqrt{3x - 8} + 3x - 8$

$-80 = -20\sqrt{3x - 8}$

$4 = \sqrt{3x - 8}$

$16 = 3x - 8$

$3x = 24$

$x = 8$

20. $6x + 12 = (1 + \sqrt{4x + 9})^2$

$6x + 12 = (1 + 2\sqrt{4x + 9} + 4x + 9)$

$2x + 2 = 2\sqrt{4x + 9}$

$x + 1 = \sqrt{4x + 9}$

$x^2 + 2x + 1 = 4x + 9$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x - 4)(x + 2) = 0$

$x = 4$

21. $6x^2 + 12 = (11 - \sqrt{6x^2 + 1})^2$

$6x^2 + 12 = 121 - 22\sqrt{6x^2 + 1} + 6x^2 + 1$

$-110 = -22\sqrt{6x^2 + 1}$

$6x^2 + 1 = 25$

$6x^2 - 24 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x = 2, x = -2$

22. $2x^2 + 8 = (8 - \sqrt{3x^2 + 4})^2$

$2x^2 + 8 = 64 - 16\sqrt{3x^2 + 4} + 3x^2 + 4$

$0 = x^2 - 16\sqrt{3x^2 + 4} + 60$

$x^2 + 60 = (16\sqrt{3x^2 + 4})^2$

$x^4 + 120x^2 + 3600 = 256(3x^2 + 4)$

$x^4 - 648x^2 + 2576 = 0$

$x = 2, x = -2$

23. $\sqrt{3x + 12} = 10 + \sqrt{3x - 8}$

$3x + 12 = 100 + 20\sqrt{3x - 8} + 3x - 8$

$-80 = 20\sqrt{3x - 8}$

$-4 = \sqrt{3x - 8}$ sem solução

24. $\sqrt{4x+12} = 1 + \sqrt{x+8}$

$4x + 12 = 1 + 2\sqrt{x+8} + x + 8$

$3x + 3 = 2\sqrt{x+8}$

$9x^2 + 18x + 9 = 4x + 32$

$9x^2 + 14x - 23 = 0$

$$x = \frac{-14 + \sqrt{196 - 4(9)(-23)}}{18}$$

$$x = \frac{-14 \pm 32}{18}$$

$x = 1$ ou $x = -\frac{23}{9}$

Quando $x = -\frac{23}{9}$,

$\sqrt{4x+12} - \sqrt{x+8}$

$$= \sqrt{\frac{16}{9}} - \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{4}{3} - \frac{7}{3} = -1$$

A única solução é $x = 1$.

25. $\sqrt{6x^2+12} = 1 + \sqrt{6x^2+1}$

$6x^2 + 12 = 1 + 2\sqrt{6x^2+1} + 6x^2 + 1$

$10 = 2\sqrt{6x^2+1}$

$25 = 6x^2 + 1$

$6x^2 - 24 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x = 2, x = -2$

26. $\sqrt{2x^2+12} = -8 + \sqrt{3x^2+4}$

$2x^2 + 12 = 64 - 16\sqrt{3x^2+4} + 3x^2 + 4$

$x^2 + 56 = 16\sqrt{3x^2+4}$

$x^4 + 112x^2 + 3136 = 768x^2 + 1024$

$x^4 - 656x^2 + 2112 = 0$

$x = 25{,}55$;

$x = -25{,}55$ (as outras soluções são estranhas)

27. $2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{15}{2} = 0$, assim, $x = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$

28. $2(x+1)^2 - 7 = 0$, assim, $x = -1 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$

29. $c = a + 2$

$(a+2)^2 - a^2 = \frac{16a}{3}$

$a^2 + 4a + 4 - a^2 = \frac{16a}{3}$

$4a = 12$:

$a = 3$,

$c = 5$

30. $c = a + 1$

$(a+1)^2 - a^2 = \frac{25a}{12}$

$a^2 + 2a + 1 - a^2 = \frac{25a}{12}$

$a = 12$,

$c = 13$

Exercícios

1. $k = 0, h = 0, p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Vértice: $(0, 0)$;

foco: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$;

diretriz: $y = -\frac{3}{2}$;

largura focal: $|4p| = \left|4 \cdot \frac{3}{2}\right| = 6$.

2. $k = 0, h = 0, p = \frac{-8}{4} = -2$

Vértice: $(0, 0)$;

foco: $(-2, 0)$, diretriz: $x = 2$;

largura focal: $|4p| = |4(-2)| = 8$.

3. $k = 2, h = -3, p = \frac{4}{4} = 1$

Vértice: $(-3, 2)$;

foco: $(-2, 2)$,

diretriz: $x = -3 - 1 = -4$;

largura focal: $|4p| = |4(1)| = 4$.

4. $k = -1, h = -4, \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

Vértice: $(-4, -1)$;

foco: $\left(-4, \frac{-5}{2}\right)$;

diretriz: $y = -1 - \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{1}{2}$;

largura focal: $|4p| = \left|4\left(\frac{-3}{2}\right)\right| = 6.$

5. $k = 0, h = 0, 4p = \frac{-4}{3}$, assim, $p = \frac{1}{3}$

Vértice: $(0, 0)$;

foco: $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$;

diretriz: $y = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$;

largura focal: $|4p| = \left|\left(\frac{-4}{3}\right)\right| = \frac{4}{3}$;

6. $k = 0, h = 0, 4p = \frac{16}{5}$, assim,

$p = \frac{4}{5}$

Vértice: $(0, 0)$;

foco: $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$;

diretriz: $x = \frac{-4}{5}$;

largura focal: $|4p| = \left|4\left(\frac{4}{5}\right)\right| = \frac{16}{5}.$

7. (c)
8. (b)
9. (a)
10. (d)
11. $p = -3$ e a parábola aberta para a esquerda, assim, $y^2 = -12x$.
12. $p = 2$ e a parábola é de concavidade para cima, assim, $x^2 = 8y$.
13. $-p = 4$ (assim, $p = -4$) e a parábola é de concavidade para baixo, assim, $x^2 = -16y$.
14. $-p = -2$ (assim, $p = 2$) e a parábola se abre para a direita, assim, $y^2 = 8x$.
15. $p = 5$ e a parábola de concavidade para cima, assim, $x^2 = 20y$.
16. $p = -4$ e a parábola aberta para a esquerda, assim, $y^2 = -16x$.
17. $h = 0, k = 0, |4p| = 8$, ou seja, $p = 2$. Como abre para a direita: $(y - 0)^2 = 8(x - 0)$ e $y^2 = 8x$.
18. $h = 0, k = 0, |4p| = 12$, ou seja, $p = -3$. Como abre para a esquerda: $(y - 0)^2 = -12(x - 0)$ e $y^2 = -12x$.
19. $h = 0, k = 0, |4p| = 6$, ou seja, $p = \frac{-3}{2}$

como a concavidade é para baixo:
$(x - 0)^2 = -6(y - 0)$ e $x^2 = -6y$.

20. $h = 0, k = 0, |4p| = 3$, ou seja, $p = \frac{3}{4}$

Como a concavidade é para cima:
$(x - 0)^2 = 3(y - 0)$ e $x^2 = 3y$.

21. $h = -4, k = -4, -2 = -4 + p$, assim, $p = 2$. Como a parábola se abre para a direita, então $(y + 4)^2 = 8(x + 4)$.

22. $h = -5, k = 6, 6 + p = 3$, assim, $p = -3$. Como a parábola é de concavidade para baixo, então $(x + 5)^2 = -12(y - 6)$.

23. A parábola de concavidade para cima e o vértice está na metade entre o foco e a diretriz em $x =$ eixo h. Assim, $h = 3$ e

$$k = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$1 = \frac{5}{2} - p, \text{ assim,}$$

$$p = \frac{3}{2},$$

$$(x - 3)^2 = 6\left(y - \frac{5}{2}\right)$$

24. A parábola abre para a esquerda e o vértice está na metade entre o foco e a diretriz em $y =$ eixo k, assim $k = -3$ e

$$h = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$5 = \frac{7}{2} - p, \text{ assim,}$$

$$p = -\frac{3}{2}$$

$$(y + 3)^2 = -6\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

25. $h = 4$, $k = 3$
$6 = 4 - p$, assim, $p = -2$. A parábola se abre para a esquerda: $(y - 3)^2 = -8(x - 4)$.

26. $h = 3$, $k = 5$
$7 = 5 - p$, assim, $p = -2$. A parábola de concavidade para baixo: $(x - 3)^2 = -8(y - 5)$.

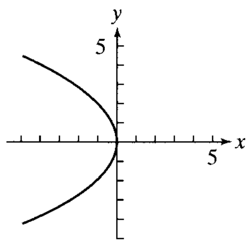
27. $h = 2$, $k = -1$
$|4p| = 16$. Assim, $p = 4$. Como a concavidade é para cima: $(x - 2)^2 = 16(y + 1)$.

28. $h = -3$, $k = 3$
$|4p| = 20$, ou seja, $p = -5$. Como a concavidade é para baixo: $(x + 3)^2 = -20(y - 3)$.

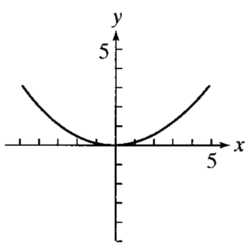
29. $h = -1$, $k = -4$
$|4p| = 10$, ou seja, $p = -\dfrac{5}{2}$. Como a parábola se abre para esquerda:
$(y + 4)^2 = -10(x + 1)$.

30. $h = 2$, $k = 3$
$|4p| = 5$, ou seja, $p = \dfrac{5}{4}$
Como a parábola se abre para a direita:
$(y - 3)^2 = 5(x - 2)$.

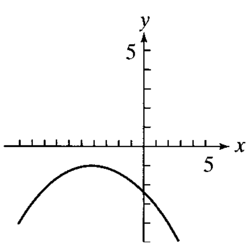
31.



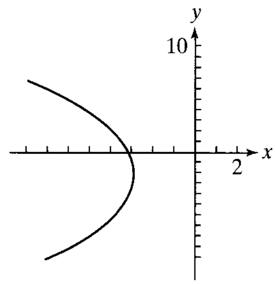
32.



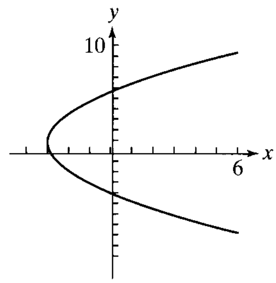
33.



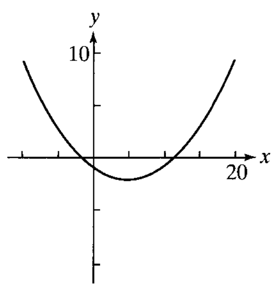
34.



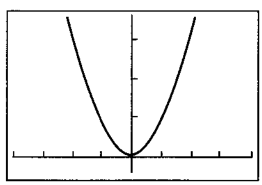
35.



36.

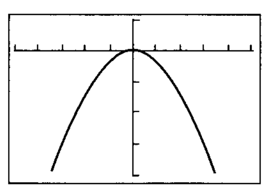


37.

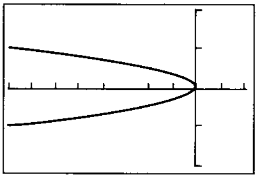


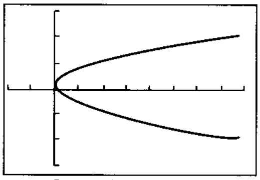
[−4, 4] por [−2, 18]

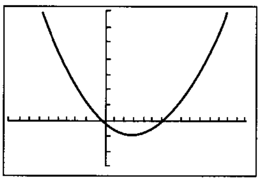
38.

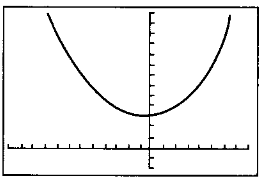


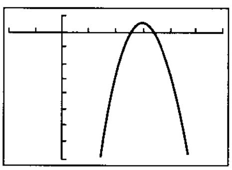
[−10, 10] por [−8, 2]

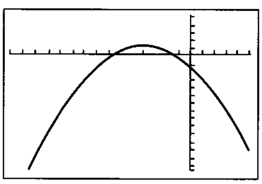
39.

$[-8, 2]$ por $[-2, 2]$

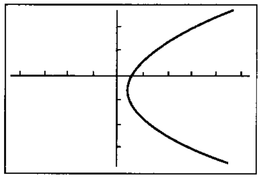
40.

$[-2, 8]$ por $[-3, 3]$

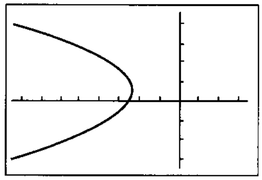
41.

$[-10, 15]$ por $[-3, 7]$

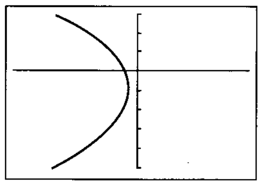
42.

$[-12, 8]$ por $[-2, 13]$

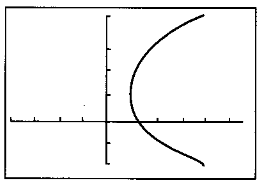
43.

$[-2, 6]$ por $[-40, 5]$

44.

$[-15, 5]$ por $[-15, 5]$

45.

$[-22, 26]$ por $[-19, 13]$

46.

$[-17, 7]$ por $[-7, 9]$

47.

$[-13, 11]$ por $[-10, 6]$

48.

$[-20, 28]$ por $[-10, 22]$

49. Completando o quadrado produz $y - 2 = (x + 1)^2$. O vértice é $(h, k) = (-1, 2)$. O foco é

$$(h, k + p) = \left(-1, 2 + \frac{1}{4}\right) = \left(-1, \frac{9}{4}\right)$$

A diretriz é $y = k - p = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

50. Completando o quadrado produz

$$2\left(y - \frac{7}{6}\right) = (x - 1)^2.$$

O vértice é $(h, k) = \left(1, \frac{7}{6}\right)$.

O foco é $(h, k + p) = \left(1, \frac{7}{6} + \frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{3}\right)$

A diretriz é $y = k - p = \frac{7}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

51. Completando o quadrado produz $8(x - 2) = (y - 2)^2$. O vértice é $(h, k) = (2, 2)$. O foco é $(h + p, k) = (2 + 2, 2) = (4, 2)$. A diretriz é $x = h - p = 2 - 2 = 0$.

52. Completando o quadrado produz

$$-4(x - \frac{13}{4}) = (y - 1)^2$$

O vértice é $(h, k) = (13/4, 1)$. O foco é

$$(h + p, k) = \left(\frac{13}{4} - 1, 1\right) = \left(\frac{9}{4}, 1\right)$$

A diretriz é $x = h - p = \frac{13}{4} + 1 = \frac{17}{4}$.

53. $h = 0$, $k = 2$, e a parábola se abre para a esquerda. Assim, $(y - 2)^2 = 4p(x)$. Usando $(-6, -4)$, encontramos $(-4 - 2)^2 = 4p(-6)$, ou seja, $4p = -\frac{36}{6}$.

A equação para a parábola é: $(y - 2)^2 = -6x$.

54. $h = 1$, $k = -3$, e a parábola se abre para a direita. Assim, $(y + 3)^2 = 4p(x - 1)$. Usando $\left(\frac{11}{2}, 0\right)$, encontramos $(0 - 3)^2 = 4p\left(\frac{11}{2} - 1\right)$, ou seja,

$4p = 9 \cdot \frac{2}{9} = 2$.

A equação para a parábola é: $(y + 3)^2 = 2(x - 1)$.

55. $h = 2$, $k = -1$ e a parábola é de concavidade para baixo. Assim $(x - 2)^2 = 4p(y + 1)$.
Usando $(0, -2)$, encontramos $(0 - 2)^2 = 4p(-2 + 1)$, assim, $4 = -4p$ e $p = -1$. A equação para a parábola é: $(x - 2)^2 = -4(y + 1)$.

56. $h = -1$, $k = 3$ e a parábola é de concavidade para cima. Assim, $(x + 1)^2 = 4p(y - 3)$.
Usando $(3, 5)$, encontramos $(3 + 1)^2 = 4p(5 - 3)$, assim, $16 = 8p$ e $p = 2$. A equação para a parábola é $(x + 1)^2 = 8(y - 3)$.

57. $(0)^2 = 4p(0)$ é verdade qualquer que seja p. A resposta é D.

58. O foco de $y^2 = 4px$ é $(p, 0)$. Aqui, $p = 3$, assim, a resposta é B.

59. O vértice da parábola com equação $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ é (h, k). Aqui, $k = 3$ e $h = -2$. A resposta é D.

60. $h = 0, k = 0, a = 4, b = \sqrt{7}$,

assim, $c = \sqrt{16 - 7} = 3$

Vértices: $(4, 0), (-4, 0)$;

focos: $(3, 0), (-3, 0)$

61. $h = 0, k = 0, a = 5, b = \sqrt{21}$,

assim, $c = \sqrt{25 - 21} = 2$

Vértices: $(0, 5), (0, -5)$;

focos: $(0, 2), (0, -2)$

62. $h = 0, k = 0, a = 6, b = 3\sqrt{3}$,

assim, $c = \sqrt{36 - 27} = 3$

Vértices: $(0, 6), (0, -6)$;

focos: $(0, 3), (0, -3)$

63. $h = 0, k = 0, a = \sqrt{11}, b = \sqrt{7}$,

assim, $c = \sqrt{11 - 7} = 2$

Vértices: $(\sqrt{11}, 0), (-\sqrt{11}, 0)$;

focos: $(2, 0), (-2, 0)$

64. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \cdot h = 0, k = 0, a = 2, b = \sqrt{3}$, assim,

$c = \sqrt{4 - 3} = 1$

Vértices: $(2, 0), (-2, 0)$;

focos: $(1, 0), (-1, 0)$

65. $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1 \cdot h = 0, k = 0, a = 3, b = 2$, assim,

$c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

Vértices: $(0, 3), (0, -3)$;

focos: $(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$

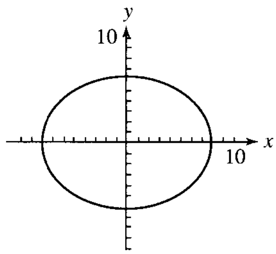
66. (d)

67. (c)

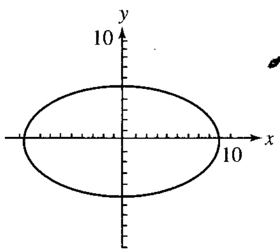
68. (a)

69. (b)

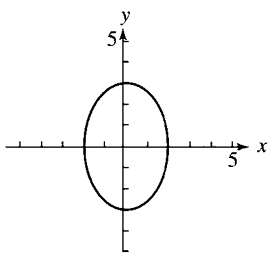
70.



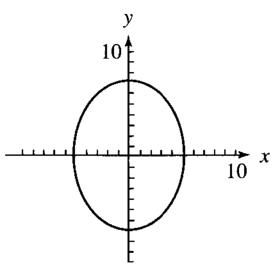
71.



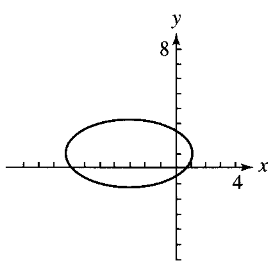
72.



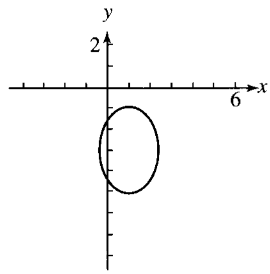
73.



74.



75.



76. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

77. $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

78. $c = 2$ e $a = \dfrac{10}{2} = 5,$

assim, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{21},$

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$

79. $c = 3$ e $b = \dfrac{10}{2} = 5,$

assim, $a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{16} = 4:$

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

80. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

81. $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

82. $b = 4;$

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

83. $b = 2;$

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

84. $b = 5;$

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

85. $a = 13;$

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$$

86. O centro (h, k) é $(1, 2)$ (o ponto médio dos eixos); a e b representam metade dos comprimentos dos eixos (4 e 6, respectivamente):

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$

87. O centro (h, k) é $(-2, 2)$ (o ponto médio dos eixos); a e b representam metade dos comprimentos dos eixos (2 e 5, respectivamente):

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

88. O centro (h, k) é $(3, -4)$ (o ponto médio do eixo maior); $a = 3$, metade do comprimento do eixo maior. Como $c = 2$ (metade da distância entre os focos), então

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5}$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{5} = 1$$

89. O centro (h, k) é $(-2, 3)$ (o ponto médio do eixo maior); $b = 4$, metade do comprimento do eixo maior. Como $c = 2$ (metade da distância entre os focos), então

$$a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{12}$$

$$\frac{(x+2)^2}{12} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

90. O centro (h, k) é $(3, -2)$ (o ponto médio do eixo maior); a e b representam metade dos comprimentos dos eixos (3 e 5, respectivamente), então

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

91. O centro (h, k) é $(-1, 2)$ (o ponto médio do eixo maior); a e b representam metade dos comprimentos dos eixos (4 e 3, respectivamente), então

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

92. Centro $(-1, 2)$;

vértices $(-1 \pm 5, 2) = (-6, 2), (4, 2)$;

focos: $(-1 \pm 3, 2) = (-4, 2), (2, 2)$

93. Centro $(3, 5)$;

vértices $(3 \pm \sqrt{11}, 5) \approx (6{,}32; 5), (-0{,}32; 5)$;

focos: $(3 \pm 2{,}5) = (5, 5), (1, 5)$

94. Centro $(7, -3)$;

vértices $(7, -3 \pm 9) = (7, 6), (7, -12)$;

focos: $(7, -3 \pm \sqrt{17}) \approx (7; 1{,}12), (7; -7{,}12)$

95. Centro $(-2, 1)$;

vértices $(-2, 1 \pm 5) = (-2, -4), (-2, 6)$;

focos: $(-2, 1 \pm 3) = (-2, -2), (-2, 4)$

96. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$ pode ser reescrita como $9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 2y) = 23$. Isto equivale a $9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 2y + 1) = 23 + 9 + 4$, ou $9(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 36$. Dividir ambos os lados por 36 para obter $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

Vértices: $(1, -4)$ e $(1, 2)$;

focos: $(1, -1 \pm \sqrt{5})$;

excentricidade: $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

97. $\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$.

Vértices: $(2 \pm \sqrt{5}, -3)$;

focos: $(2 \pm \sqrt{2}, -3)$;

excentricidade: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

98. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$.

Vértices: $(-7, 1)$ e $(1, 1)$;

focos: $(-3 \pm \sqrt{7}, 1)$;

excentricidade: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

99. $(x-4)^2 + \frac{(y+8)^2}{4} = 1$.

Vértices: $(4, -10)$ e $(4, -6)$;

focos: $(4, -8 \pm \sqrt{3})$;

excentricidade: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

100. O centro (h, k) é (2, 3) (dados); a e b representam metade dos comprimentos dos eixos (4 e 3, respectivamente):

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

101. O centro (h, k) é (24, 2) (dados); a e b representam metade dos comprimentos dos eixos (4 e 3, respectivamente):

$$\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

102. Substituir $y^2 = 4 - x^2$ na primeira equação:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{4-x^2}{9} = 1$$

$$9x^2 + 4(4 - x^2) = 36$$

$$5x^2 = 20$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2, y = 0$$

Solução: $(-2, 0)$, $(2, 0)$

103. Substituir $x = 3y - 3$ na primeira equação:

$$\frac{(3y-3)^2}{9} + y^2 = 1$$

$$y^2 - 2y + 1 + y^2 = 1$$

$$2y2 - 2y = 0$$

$$2y(y - 1) = 0$$

$$y = 0 \text{ ou } y = 1$$

$$x = -3\ x = 0$$

Solução: $(-3, 0)$, $(0, 1)$

104. Falso.

105. Verdadeiro.

106. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$, assim,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

A resposta é C.

107. O eixo focal é horizontal e passa por (2, 3). A resposta é *C*.

108. Completando o quadrado produz

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

A resposta é B.

109. Os dois focos têm a distância $2c$, a soma das distâncias de cada foco a um ponto na elipse é $2a$. A resposta é C.

110. $a = 4, b = \sqrt{7}, c = \sqrt{16 + 7} = \sqrt{23}$

Vértices: $(\pm 4, 0)$;

focos: $(\pm\sqrt{23}, 0)$.

111. $a = 5, b = \sqrt{21}, c = \sqrt{25 + 21} = \sqrt{46}$

Vértices: $(0, \pm 5)$;

focos: $(0, \pm\sqrt{46})$.

112. $a = 6, b = \sqrt{13}, c = \sqrt{36 + 13} = 7$

Vértices: $(0, \pm 6)$;

focos: $(0, \pm 7)$.

113. $a = 3, b = 4, c = \sqrt{9 + 16} = 5$

Vértices: $(\pm 3, 0)$;

focos: $(\pm 5, 0)$.

114. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1; a = 2, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{7}$

Vértices: $(\pm 2, 0)$;

focos: $(\pm\sqrt{7}, 0)$.

115. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$a = 2, b = 3, c = \sqrt{13}$

Vértices: $(\pm 2, 0)$;

focos: $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

116. (c)

117. (b)

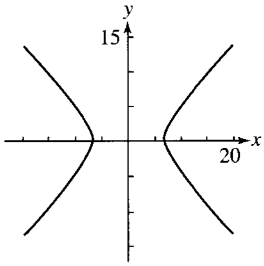
118. (a)

119. (d)

120. Eixo transversal de (–7, 0) a (7, 0); assíntotas:

$$y = \pm\frac{5}{7}x,$$

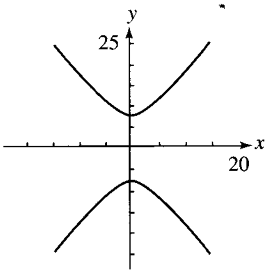
$$y = \pm\frac{5}{7}\sqrt{x^2 - 49}$$



121. Eixo transversal de (0, –8) a (0, 8); assíntotas:

$$y = \pm\frac{8}{5}x,$$

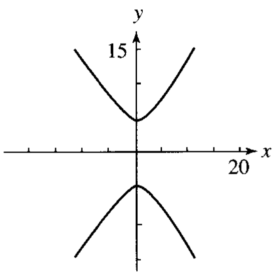
$$y = \pm\frac{8}{5}\sqrt{x^2 + 25}$$



122. Eixo transversal de (0, –5) a (0, 5); assíntotas:

$$y = \pm\frac{5}{4}x,$$

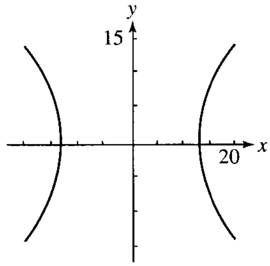
$$y = \pm\frac{5}{4}\sqrt{x^2 + 16}$$



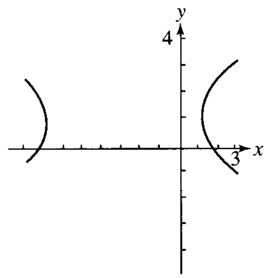
123. Eixo transversal de (–13, 0) a (13, 0); assíntotas:

$$y = \pm\frac{12}{13}x,$$

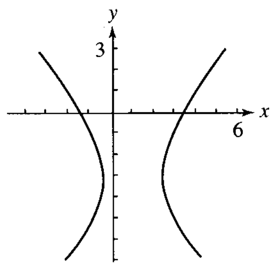
$$y = \pm\frac{12}{13}\sqrt{x^2 - 169}$$



124. O centro (h, k) é $(-3, 1)$. Como $a^2 = 16$ e $b^2 = 4$, temos $a = 4$ e $b = 2$. Os vértices são $(-3 \pm 4, 1)$ ou $(-7, 1)$ e $(1, 1)$.



125. O centro (h, k) é $(1, -3)$. Como $a^2 = 2$ e $b^2 = 4$, temos $a = \sqrt{2}$ e $b = 2$. Os vértices são $(1 \pm \sqrt{2}, -3)$.



126. $c = 3$ e $a = 2$, assim, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5}$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

127. $c = 3$ e $b = 2$, assim,

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5}$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

128. $c = 15$ e $b = 4$, assim,

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{209}$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{209} = 1$$

129. $c = 5$ e $a = \dfrac{3}{2}$, assim,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{91}$$

$$\frac{x^2}{2{,}25} - \frac{y^2}{22{,}75} = 1 \text{ ou } \frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{91}{4}} = 1$$

130. $a = 5$ e $c = ea = 10$, assim,

$$b = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{5}$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$$

131. $a = 4$ e $c = ea = 6$, assim,

$$b = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$$

132. $b = 5$, $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$

$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$$

133. $c = 6$, $a = \dfrac{c}{e} = 3$,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

134. O centro (h, k) é $(2, 1)$; $a = 2$, metade do comprimento do eixo transverso. E $b = 3$, metade do eixo não transverso.

$$\frac{(y - 1)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{9} = 1$$

135. O centro (h, k) é $(-1, 3)$; $a = 6$, metade do comprimento do eixo transverso. E $b = 5$, metade do eixo não transverso.

$$\frac{(x + 1)^2}{36} - \frac{(y - 3)^2}{25} = 1$$

136. O centro (h, k) é $(2, 3)$; $a = 3$, metade do comprimento do eixo transverso.

Como $|b/a| = \dfrac{4}{3}$, então, $b = 4$:

$$\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y - 3)^2}{16} = 1$$

137. O centro (h, k) é $\left(-2, \dfrac{5}{2}\right)$, $a = \dfrac{9}{2}$, metade do comprimento do eixo transverso. Como $|a/b| = \dfrac{4}{3}$, então $b = \dfrac{27}{8}$

$$\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{\frac{81}{4}} - \frac{(x + 2)^2}{\frac{729}{64}} = 1$$

138. O centro (h, k) é $(-1, 2)$, $a = 2$, metade do comprimento do eixo transverso.
A distância do centro ao foco é $c = 3$, assim,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5}$$

$$\frac{(x + 1)^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{5} = 1$$

139. O centro (h, k) é $\left(-3, -\dfrac{11}{2}\right)$, $b = \dfrac{7}{2}$, metade do comprimento do eixo transverso. A distância do centro ao foco é $c = \dfrac{11}{2}$, assim,

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{18}$$

$$\frac{(y + 5{,}5)^2}{\frac{49}{4}} - \frac{(x + 3)^2}{18} = 1$$

140. O centro (h, k) é $(-3, 6)$, $a = 5$, metade do comprimento do eixo transverso. A distância do centro ao foco é $c = ea = 2 \cdot 5 = 10$, assim,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{5}$$

$$\frac{(y - 6)^2}{25} - \frac{(x + 3)^2}{75} = 1$$

141. O centro (h, k) é $(1, -4)$, $c = 6$, a distância do centro ao foco é

$$a = \frac{c}{e} = \frac{6}{2} = 3$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y + 4)^2}{27} = 1$$

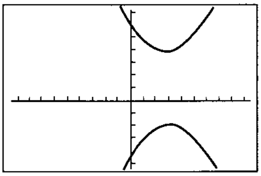
142. Centro $(-1, 2)$; vértices: $(-1 \pm 12, 2) = (11, 2)$, $(-13, 2)$; focos: $(-1 \pm 13, 2) = (12, 2)$, $(-14, 2)$

143. Centro (–4, –6); vértices: $(-4 \pm \sqrt{12}, -6)$; focos: $(-4 \pm 5, -6) = (1, -6), (-9, -6)$

144. Centro (2, –3); vértices: $(2, -3 \pm 8) = (2, 5), (2, -11)$; focos: $(2, -3 \pm \sqrt{145})$

145. Centro (–5, 1); vértices: $(-5, 1 \pm 5) = (-5, -4), (-5, 6)$; focos: $(-5, 1 \pm 6) = (-5, -5), (-5, 7)$

146.



[−9,4; 9,4] por [−5,2; 7,2]

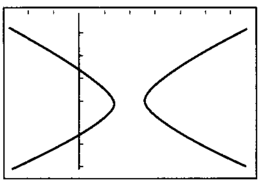
Dividir toda a equação por 36.

Vértices: (3, –2) e (3, 4);

focos: $(3, 1 \pm \sqrt{13})$;

$e = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

147.



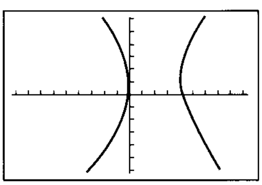
[−2,8; 6,8] por [−7,1; 0]

Vértices: $\left(\dfrac{3}{2}, -4\right)$ e $\left(\dfrac{5}{2}, -4\right)$;

focos: $\left(2 \pm \dfrac{\sqrt{13}}{6}, -4\right)$,

$$e = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9}\right)}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{9+4}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

148.



[−9,4; 9,4] por [−6,2; 6,2]

$9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0$ pode ser reescrita como $9(x^2 - 4x) - 4(y^2 - 2y) = 4$. É equivalente a $9(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 - 2y + 1) = 4 + 36 - 4$, ou $9(x - 2)^2 - 4(y - 1)^2 = 36$. Dividir ambos os lados da equação por 36 para obter

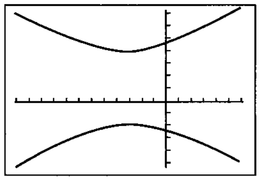
$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Vértices: (0, 1) e (4, 1);

focos: $(2 \pm \sqrt{13}, 1)$;

$e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

149.



[−12,4; 6,4] por [−5,2; 7,2]

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$$

Vértices: (–3, –2) e (–3, 4);

focos: $(-3, 1 \pm \sqrt{34})$;

$e = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$.

150. $a = 2$, $(h, k) = (0, 0)$ e a hipérbole abre para a esquerda e para a direita. Assim, $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Usando (3, 2): $\dfrac{9}{4} - \dfrac{4}{b^2} = 1$,

$9b^2 - 16 = 4b^2$,

$5b^2 = 16$,

$b^2 = \dfrac{16}{5}$; Assim:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{16} = 1$$

151. $a = \sqrt{2}$, $(h, k) = (0, 0)$ e a hipérbole tem concavidade para cima e para baixo.

Assim $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

Usando (2, −2):

$\dfrac{4}{2} - \dfrac{4}{b^2} = 1$,

$$\frac{4}{b^2} = 1,$$

$$b^2 = 4;$$

Assim $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} = 1$.

152. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$$x - \frac{2\sqrt{3}}{3}y = -2$$

Resolva a segunda equação para x e substitua na primeira equação.

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}y = -2$$

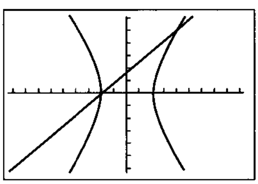
$$\frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}y - 2\right)^2 - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}y^2 - \frac{8\sqrt{3}}{3}y + 4\right) - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{2}{9}y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y = 0$$

$$\frac{2}{9}y\,(y - 3\sqrt{3}) = 0$$

$y = 0$ ou $y = 3\sqrt{3}$



[−9,4; 9,4] por [−6,2; 6,2]

Soluções: (–2, 0), (4, $3\sqrt{3}$)

153. Adicionar:

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$\frac{5x^2}{4} = 10$$

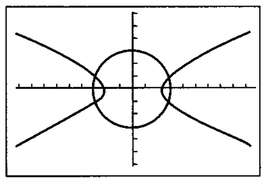
$$x^2 = 8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$8 + y^2 = 9$$

$$y = \pm 1$$



[−9,4; 9,4] por [−6,2; 6,2]

Há 4 soluções: ($\pm 2\sqrt{2}$), ± 1)

154. Verdadeiro. A distância é $c - a = a(c/a - 1) = a(e - 1)$

155. Verdadeiro. Para uma elipse, $b^2 + c^2 = a^2$

156. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1$, assim $c = \sqrt{4 + 1}$ e os focos estão $\sqrt{5}$ unidades distante horizontalmente de (0, 0). A resposta é B.

157. Os eixos focais passam horizontalmente pelo centro (–5, 6). A resposta é E.

158. Completando o quadrado duas vezes e dividindo para obter 1 no lado direito, a equação fica assim:

$$\frac{(y + 3)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{12} = 1$$

A resposta é B.

159. $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, e as inclinações são $\pm b/a$. A resposta é C.

Índice remissivo

D

F

G

H

Q

R

S

T

U

V

Sobre os autores

Franklin D. Demana

Franklin D. Demana tem mestrado em matemática e Ph.D. pela Michigan State University. Atualmente ele é professor emérito de matemática na The Ohio State University. Como um ativo defensor da utilização da tecnologia para ensinar e aprender matemática, ele é co-fundador do programa de desenvolvimento profissional Teachers Teaching with Technology (T3). Ele foi o responsável e co-responsável por mais de US$ 10 milhões de financiamento das National Science Foundation (NSF) e por atividades de doação da fundação. Ele é atualmente um dos principais pesquisadores, atuando com uma doação de US$ 3 milhões do U.S. Department of Education Mathematics and Science Educational Research, a um programa da The Ohio State University. Além, de apresentações freqüentes em encontros profissionais, ele publicou uma série de artigos nas áreas de ensino de matemática com o apoio de calculadora e computador. O Dr. Demana também é co-fundador (com Bert Waits) da International Conference on Technology in Collegiate Mathematics (ICTCM). Ele foi um dos agraciados, em 1997, com o prêmio Glenn Gilbert National Leadership Award da National Council of Supervisors of Mathematics e foi um dos ganhadores, em 1998, do prêmio Christofferson-Fawcett Mathematics Education Award da Ohio Council of Teachers of Mathematics.

O Dr. Demana é co-autor de *Calculus: graphical, numerical, algebraic; Essential algebra: a calculator approach; Transition to college mathematics; College algebra and trigonometry: a graphing approach; College algebra: a graphing approach; Precalculus: functions and graphs;* e *Intermediate algebra: a graphing approach.*

Bert K. Waits

Bert Waits tem Ph.D. pela The Ohio State University e é atualmente professor emérito de matemática naquela instituição. O Dr. Waits é co-fundador do programa nacional de desenvolvimento profissional Teachers Teaching with Technology (T3) e tem atuado como co-responsável ou principal pesquisador de vários grandes projetos da National Science Foundation. O Dr. Waits publicou artigos em mais de 50 periódicos profissionais reconhecidos nacionalmente nos Estados Unidos. Ele é freqüentemente convidado para conduzir palestras, workshops e minicursos em encontros nacionais da MAA e do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) sobre como utilizar a tecnologia da computação para melhorar o ensino e o aprendizado da matemática. Ele foi convidado para conduzir apresentações no International Congress on Mathematical Education (ICME-6, -7 e -8) em Budapeste (1988), Quebec (1992) e Sevilha (1996). O Dr. Waits foi um dos agraciados, em 1997, com o prêmio Glenn Gilbert National Leadership Award concedido pelo National Council of Supervisors of Mathematics e é co-fundador (com Frank Demana) da ICTCM. Ele também foi um dos ganhadores do prêmio Christofferson-Fawcett Mathematics Education Award, apresentado em 1998 pelo Ohio Council of Teachers of Mathematics.

O Dr. Waits é co-autor de *Calculus: graphical, numerical, algebraic; College algebra and trigonometry: a graphing approach; College algebra: a graphing approach; Precalculus: functions and graphs;* e *Intermediate algebra: a graphing approach.*

Gregory D. Foley

Greg Foley se formou e tem mestrado em matemática e é Ph.D. ensino de matemática pela The University of Texas em Austin. Ele é diretor da Liberal Arts and Science Academy of Austin, o programa acadêmico avançado de ensino médio da Austin Independent School District no Texas. O Dr. Foley lecionou aritmética básica em cursos de matemática no nível de graduação além de dar aulas de ensino de matemática no nível de graduação e pós-graduação. De 1977 a 2004, ele manteve cargos em período integral no corpo docente da North Harris County College, Austin Community College, The Ohio State University, Sam Houston State University e Appalachian State University, onde foi professor eminente de ensino de matemática no Departamento de Ciências Matemática e dirigiu o programa Mathematics Education Leadership Training (MELT). O Dr. Foley apresentou mais de 200 palestras, workshops e institutos nos Estados Unidos e internacionalmente, dirigiu uma série de projetos financiados e publicou artigos em vários periódicos profissionais. Ativo em várias sociedades acadêmicas, ele é membro do Committee on the Mathematical Education of Teachers da Mathematical Association of America (MAA). Em 1998, o Dr. Foley recebeu o prêmio bienal Award for Mathematics Excellence da American Mathematical Association of Two-Year Colleges (AMATYC) e, em 2005, recebeu o prêmio anual Leadership Award da Teachers Teaching with Technology (T3).

Daniel Kennedy

Dan Kennedy se formou na College of the Holy Cross e tem mestrado e é Ph.D. em matemática pela University of North Carolina em Chapel Hill. Desde 1973 ele leciona matemática na Baylor School em Chattanooga, Tennessee, onde detém a cátedra de professor eminente Cartter Lupton. O Dr. Kennedy se tornou um leiturista do Advanced Placement Calculus em 1978, o que o levou a um maior envolvimento no programa como consultor de workshops, líder de apresentações e líder exames. Ele se uniu ao Advanced Placement Calculus Test Development Committee em 1986 e, em 1990, se tornou o primeiro professor de ensino médio em 35 anos a presidir o comitê. Foi durante seu exercício do cargo de presidente que o programa passou a requerer calculadoras gráficas e estabeleceu as primeiras bases para a reforma de 1998 do currículo do Advanced Placement Calculus. Autor do *Teacher's guide—AP* calculus* de 1997, o Dr. Kennedy conduziu mais de 50 workshops e institutos para professores de cálculo de ensino médio. Seus artigos sobre ensino da matemática foram publicados na *Mathematics Teacher* e *American Mathematical Monthly*, e ele é um requisitado palestrante sobre reforma educacional em encontros profissionais e comunitários. O Dr. Kennedy foi nomeado um Tandy Technology Scholar em 1992 e recebeu o prêmio Presidential Award em 1995.

O Dr. Kennedy é co-autor de *Calculus: graphical, numerical, algebraic; Prentice Hall algebra I; Prentice Hall geometry;* e *Prentice Hall algebra 2.*