שאלה 0.1.

נתבונן בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^8$, המוגדר על ידי מערכת המשוואות הליניאריות

$$D: \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 3x_7 + 1x_8 = 5 \\ 1x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 2x_4 + 9x_5 + 1x_6 + 2x_7 + 7x_8 = 6 \\ 4x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 8x_4 + 15x_5 + 3x_6 + 8x_7 + 14x_8 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 2x_6 + 6x_7 + 7x_8 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 7x_4 + 1x_5 + 5x_6 + 7x_7 + 1x_8 = 4 \end{cases}$$

וניתנת הפונקציה הליניארית

$$f(x) = 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 8x_5 - 3x_6 + 6x_7 - 3x_8.$$

א. מצאו את נקודות האקסטראמה (מינימום ומקסימום) של f על ה־אאיפרון D באמצעות שיטת סימפלקס.

ב. מצאו את כל נקודות הקצה של D.

ג. האם כל נקודות הקצה של D נמצאות על פני ספירה כלשהי ב-$\mathbb{R}^8$? אם כן, מצאו את משוואת הספירה.

ד. תהי $V(D)$ קבוצת כל נקודות הקצה של D. מצאו את הנקודה

$$a^* = \arg\min_{a \in \mathbb{R}^8} \sum_{x \in V(D)} \|a - x\|^2 .$$

ה. חשבו את מימד D.

שאלה 0.2.

נגדיר $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ באופן הבא

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

ונגדיר תחום

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = a, x_i > 0, i = 1..n \right\}, \ (a > 0, \alpha_i > 0, i = 1..n)$$

א. מצאו כל נקודות הקיצון של הפונקציה f בתחום D.

ב. אם פונקציה f מקבלת ב- D מינימום ומקסימום, מצאו אותם.

שאלה 0.3.

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ קמורה ו-

1. $\|f(x)-f(y)\|\leqslant L\|x-y\|$
2. $\|x_0-x^*\|\leqslant D$, כאשר x^* היא נקודת המינימום של f.

נגדיר

$$x_{k+1}=x_k-\alpha_k\nabla f(x_k),\quad \alpha_k=\frac{D}{L\sqrt{k+1}}$$

א. הוכיחו ש-

$$\|\nabla f(x)\|\leqslant L$$

ב. הוכיחו ש-

$$2\alpha_k(f(x_k)-f(x^*))\leqslant\|x_k-x^*\|^2-\|x_{k+1}-x^*\|^2+\alpha_k^2L^2$$

ג. הוכיחו ש-

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(f(x_k)-f(x^*))\leqslant\frac{1}{2}D^2\left(1+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}\right)$$

ד. נסמן $\bar{x}_n=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_kx_k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k}$ הוכיחו ש-

$$f(\bar{x}_n)-f(x^*)=O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$$