שאלה 0.1.

נתבונן בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^8$, המוגדר על ידי מערכת המשוואות הליניאריות

$$D : \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 3x_7 + 1x_8 = 5 \\ 1x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 2x_4 + 9x_5 + 1x_6 + 2x_7 + 7x_8 = 6 \\ 4x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 8x_4 + 15x_5 + 3x_6 + 8x_7 + 14x_8 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 2x_6 + 6x_7 + 7x_8 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 7x_4 + 1x_5 + 5x_6 + 7x_7 + 1x_8 = 4 \end{cases}$$

וניתנת הפונקציה הליניארית

$$f(x) = 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 8x_5 - 3x_6 + 6x_7 - 3x_8.$$

א. מצאו את נקודות האקסטראמה (מינימום ומקסימום) של f על ה־אאיפרון D באמצעות שיטת סימפלקס.

ב. מצאו את כל נקודות הקצה של D.

ג. האם כל נקודות הקצה של D נמצאות על פני ספירה כלשהי ב-$\mathbb{R}^8$? אם כן, מצאו את משוואת הספירה.

ד. תהי $V(D)$ קבוצת כל נקודות הקצה של D. מצאו את הנקודה

$$a^* = \arg\min_{a \in \mathbb{R}^8} \sum_{x \in V(D)} \|a - x\|^2 .$$

ה. חשבו את מימד D.

שאלה 0.2.

נגדיר $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ באופן הבא

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

ונגדיר תחום

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = a, x_i > 0, i = 1..n \right\}, \ (a > 0, \alpha_i > 0, i = 1..n)$$

א. מצאו כל נקודות הקיצון של הפונקציה f בתחום D.

ב. אם פונקציה f מקבלת ב- D מינימום ומקסימום, מצאו אותם.

שאלה 0.3.

תהי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ קמורה ו-

1. $\|f(x)-f(y)\| \leqslant L\,\|x-y\|$
2. $\|x_0-x^*\| \leqslant D$, כאשר x^* היא נקודת המינימום של f.

נגדיר

$$x_{k+1}=x_k-\alpha_k\nabla f(x_k),\quad \alpha_k=\frac{D}{L\sqrt{k+1}}$$

א. הוכיחו ש-

$$\|\nabla f(x)\| \leqslant L$$

ב. הוכיחו ש-

$$2\alpha_k(f(x_k)-f(x^*)) \leqslant \|x_k-x^*\|^2-\|x_{k+1}-x^*\|^2+\alpha_k^2L^2$$

ג. הוכיחו ש-

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(f(x_k)-f(x^*)) \leqslant \frac{1}{2}D^2\left(1+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}\right)$$

ד. נסמן $\bar{x}_n=\frac{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x_k}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}$ הוכיחו ש-

$$f(\bar{x}_n)-f(x^*)=O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$$

שאלה ②

נגדיר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ באופן הבא

$$f(x_1,\ldots,x_n)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

ונגדיר תחום

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}x_i=a, x_i>0, i=1..n\right\},\ (a>0,\alpha_i>0,i=1..n)$$

א. מצאו כל נקודות הקיצון של הפונקציה f בתחום D.

ב. אם פונקציה f מקבלת ב- D מינימום ומקסימום, מצאו אותם.

א. ראשית נבחין כי בהתאם לאילוצים על x ועל α ⇐ $f(x)$ חיובית תמיד. כעת מכיוון ש- $\ln(x)$

פונק' עולה ממש, נקבל מצב שבו המקס' של $f(x)$ יהיה באותה נק' כמו המקס של $\ln(f(x))$. לכן, נעבוד על $\ln(f(x))$.

נגדיר לגרנז'יאן - {אילוץ} $h(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i)-a=0$

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\ln(x_i)-\lambda\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)$$

{גזירה} $\forall x_j, x_j\in[1,\ldots,n]:\dfrac{\partial L}{\partial x_j}=\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_j\ln(x_j))-\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\lambda x_j)=0$

$$\frac{\alpha_j}{x_j}-\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{\alpha_j}{x_j}$$

מכיוון שזה חייב להתקיים לכל $j\in[1,\ldots,n]$, נוכל להשוות את הביטויים עבור λ, נסמן: $k=\dfrac{\alpha_1}{x_1}=\dfrac{\alpha_2}{x_2}=\ldots=\dfrac{\alpha_n}{x_n}$ נסמן ⊛ $\forall j: x_j=\dfrac{\alpha_j}{k}$

כעת נגזור לפי λ: $\dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)=0$ ⇐ $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$

ונציב את הביטוי עבור x_j למשוואת האילוץ: $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{k}=a\Rightarrow\dfrac{1}{k}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}=a$

נסמן בעזרת קבוע חיובי p ונקבל כי - $\dfrac{p}{k}=a\Rightarrow k=\dfrac{p}{a}$

נציב את k בחזרה ל ⊛ ונקבל- $x_j=\dfrac{\alpha_j}{k}=\dfrac{\alpha_j}{\left(\frac{p}{a}\right)}=\dfrac{a\alpha_i}{p}$ ולכן, נק' הקיצון היחידה היא $x^*=\left(\dfrac{a\alpha_1}{p},\dfrac{a\alpha_2}{p},\ldots,\dfrac{a\alpha_n}{p}\right)$

ומכיוון שכל x_j^* בתחום אז נק' הקיצון x^* בתחום D.

ב. מקס': הפונקציה $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln x_i$ קעורה מכיוון ש- $\ln(x)$ היא קעורה ו- $\alpha_i>0$ וידוע כי סכום פונקציות קעורות

הוא פונק' קעורה (לפי הנלמד בקורס). התחום D מהווה קבוצה קמורה ולכן, כל נק' קיצון שנמצא באמצעות

כופלי לגרנז' מהווה מקס' גלובלי והערך שלו יהיה ההצבה של x^* לתוך f ופישוט, הביטוי אשר מתקבל: $f(x^*)=\left(\dfrac{a}{p}\right)^p\cdot\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\alpha_i}$

מינ': התחום D חסום אך אינו מהווה קב' סגורה ולכן אינו מהווה קב' קומפקטית. לפיכך, לא מובטח מינ' ומקס' לפי ויירשטראס.

נחקור את התנהגות הפונק' כאשר $x_j\to 0^+$ כלשהו מכיוון ש- $\alpha_j>0$ הביטוי $x_j^{\alpha_j}\to 0$. מכאן, כל המכפלה (f) תשאף ל-0 גם היא.

מכיוון שכל ה-$x_i>0$, ערך $f(x)$ חיובי ממש. כלומר, אף f תתקרב רק לעולם לא תגיע ל-0. אי לכך ובהתאם לזאת, ל-f אין

ערך מינימלי, אך עם זאת - קיים לה אינפימום $=0$. במילים אחרות: $f(x)\in\left(0,\left(\dfrac{a}{p}\right)^p\cdot\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\alpha_i}\right]$ לכל x.

שאלה 3

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ קמורה ו-

1. $\|f(x)-f(y)\|\leqslant L\|x-y\|$
2. $\|x_0-x^*\|\leqslant D$, כאשר x^* היא נקודת המינימום של f.

נגדיר

$$x_{k+1}=x_k-\alpha_k\nabla f(x_k),\quad \alpha_k=\frac{D}{L\sqrt{k+1}}$$

א. מתנאי ליפשיץ נקבל - $\|\nabla f(x)-\nabla f(y)\|\le L\|x-y\|$

נציב $y=x^*$ ונקבל - $\|\nabla f(x)\|=\|\nabla f(x)-\nabla f(x^*)\|\le L\|x-x^*\|$

ומשום ש- $\|x-x^*\|\le D$ קיבלנו - $\|\nabla f(x)\|\le LD$

ולבסוף, ניתן להשאיף את ההפרש בין x ו-x^* ל-1 וע"י כך להגיע ל:

$$\|x-x^*\|\to 1\Rightarrow\|\nabla f(x)\|\le L\cdot\|x-x^*\|\approx 1\Rightarrow\|\nabla f(x)\|\le L \quad \blacksquare$$

ב. נעזר ב"למת הירידה" לגרדיאנטים של פונקציות ונקבל - $x_{k+1}=x_k-a_k\nabla f(x_k)$

נפחית x^* מכל אגף ונעלה נורמה בריבוע לשני האגפים:

$$\|x_{k+1}-x^*\|^2=\|x_k-a_k\nabla f(x_k)-x^*\|^2=\|x_k-x^*\|^2-2a_k\langle\nabla f(x_k),x_k-x^*\rangle+a_k^2\|\nabla f(x_k)\|^2$$

ממשפ"ט קמירות הפונקציה ניתן לחשב גם - $f(x_k)-f(x^*)\le\langle\nabla f(x_k),x_k-x^*\rangle$

$$2a_k(f(x_k)-f(x^*))\le 2a_k\langle\nabla f(x_k),x_k-x^*\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$2a_k(f(x_k)-f(x^*))\le\|x_k-X^*\|^2-\|x_{k+1}-x^*\|^2+a_k^2\|\nabla f(x_k)\|^2\le\|x_k-x^*\|^2-\|x_{k+1}-x^*\|^2+a_k^2L^2 \quad \blacksquare$$

ג. מתוצאות החישוב של סעיף ב והנתונים:

$$2\cdot\sum_{k=0}^{n}a_k(f(x_k)-f(x^*))\le\|x_0-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2+\sum_{k=0}^{n}a_k^2L^2\le D^2+L^2\sum_{k=0}^{n}a_k^2$$

$$a_k=\frac{D}{L\sqrt{k+1}}\Rightarrow a_k^2=\frac{D^2}{L^2(k+1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}a_k^2=\frac{D^2}{L^2}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}=\frac{D^2}{L^2}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}\qquad\Rightarrow 2\cdot\sum_{k=0}^{n}a_k(f(x_k)-f(x^*))\le D^2+D^2\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}=D^2\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}\right)$$

חלקי 2 /

$$(*)\quad\sum_{k=0}^{n}a_k(f(x_k)-f(x^*))\le\frac{1}{2}D^2\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}\right) \quad \blacksquare$$

ד. עשינו שימוש בכלל ינסן (Jensen's inequality) לפונקציות קמורות אשר קובע כי $f\left(\sum a_kx_k\right)\le\sum a_kf(x_k)$ $(*)\Rightarrow$

פתרון -

$$f(\overline{x}_n)\le\frac{\sum_{k=0}^{n}a_kf(x_k)}{\sum_{k=0}^{n}a_k}\Rightarrow f(\overline{x}_n)-f(x^*)\overset{(*)}{\le}\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k(f(x_k)-f(x^*))}{\sum_{k=0}^{n}a_k}$$

הצבה

$$(*)\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}a_k(f(x_k)-f(x^*))\le\frac{1}{2}D^2\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}\right)\approx\frac{1}{2}D^2(1+\ln(n+1))$$

הסבר לאינטגרל

$$(*)\quad\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{D}{L\sqrt{k+1}}\ge\frac{D}{L}\cdot\int_1^{n+2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{D}{L}\left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+2}=\frac{D}{L}\left(2\cdot\sqrt{n+2}-2\right)$$

$(*)\Rightarrow$ נעזרנו באינטגרל כדי למנוע להעריך את הסכום של $\sum\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ בעזרת חסם כדי למצוא חסם כללי לפונקציה זו
אנו רוצים לחסום - $f(\overline{x}_n)-f(x^*)=O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$

קיבלנו מונה שהוא טור הרמוני אשר בקורס מבני נתונים למדנו שהוא בעל סיבוכיות של $\Theta(\ln(n))$ ומכנה החסום ע"י $O(\sqrt{n})$ ולכן:

$$f(\overline{x}_n)-f(x^*)\le\frac{O(\ln n)}{O(\sqrt{n})}=O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) \quad \blacksquare$$