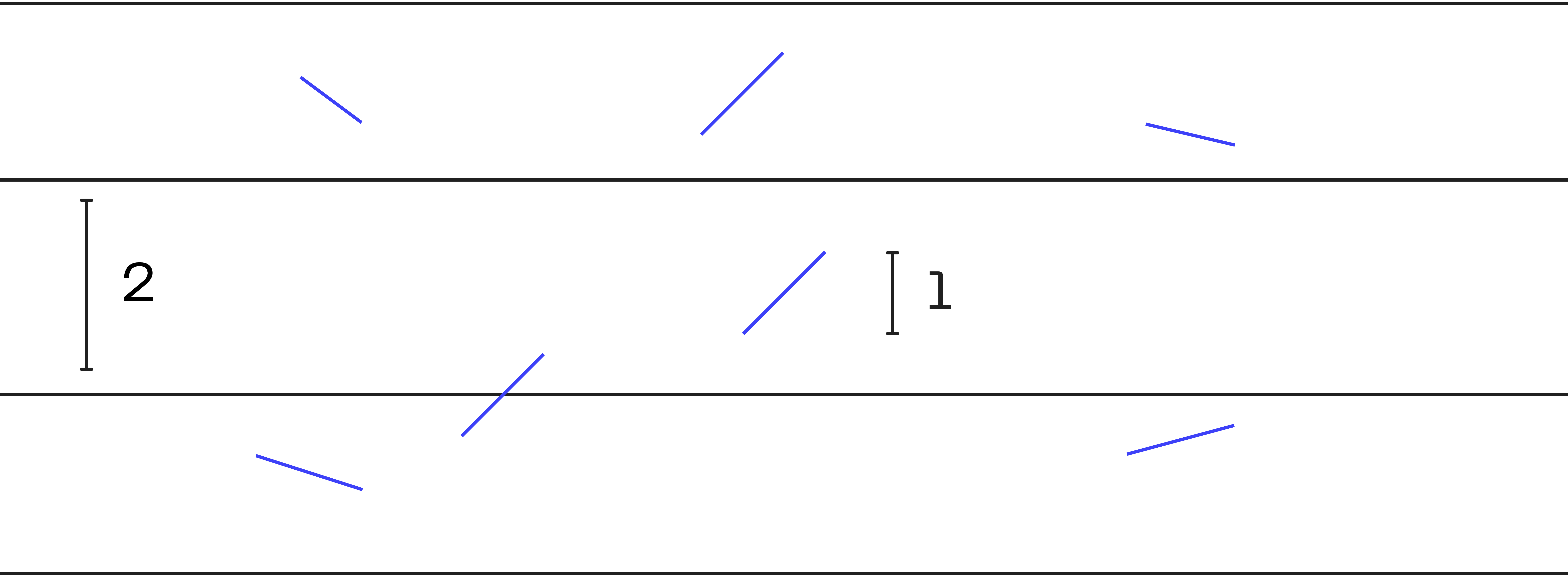
Buffon's needle

Ignacio Maximiliano Jiménez Ramírez
Daniel Sánchez López

Origen

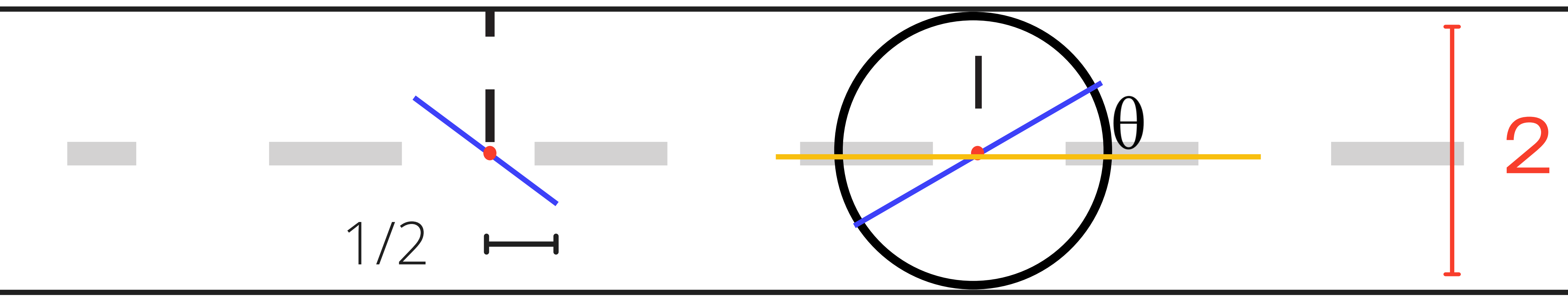
La aguja de Buffon es un clásico problema de probabilidad geométrica, de realización práctica y cuyo interés radica en que es un método fácil para ir aproximando el valor del número π a partir de sucesivos intentos. Fue planteado por el naturalista francés Buffon en 1733 y reproducido por él mismo ya resuelto en 1777.

Ejercicio



Cuál es la probabilidad de que la aguja cruce una línea?

Hacer experimento en pro de quien guste



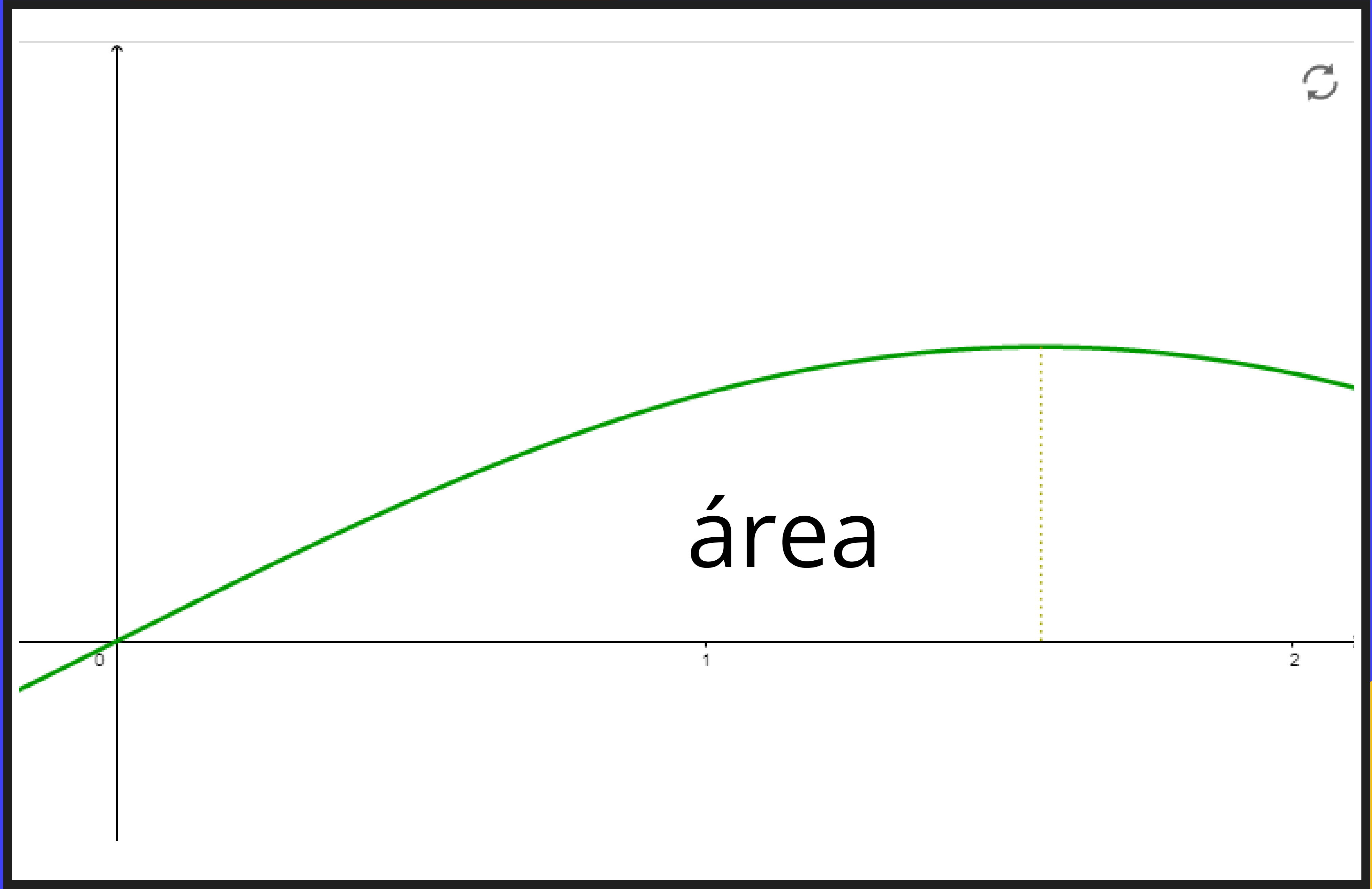
Datos

(0<= d <= 1)

(0<= θ <= pi/2)

(1/2) sin(θ)

Gráfica



Solución

Probabilidad = área debajo de la curva/área del rectangulo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)\sin(\theta)\ d\theta$$

$$\longrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \longrightarrow \frac{1}{\pi}$$

Método

Si tiramos una aguja al suelo al azar en un espacio con lineas horizontales N veces, y contamos el numero de veces que hay intersecciones.
Teniendo como x el numeros de veces que interciona y N como la cantidad de lanzamientos:
x/N
Ahora, si utilizamos su reciproco
N/X
Se puede obtener una aproximación de pi.

$$\frac{x}{N} \rightarrow \frac{1}{\pi} \qquad \frac{N}{x} \rightarrow \pi$$

Código (Estimación de pi)

Planteamiento del problema

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{(\ell/2)\sin\theta} \frac{4}{t\pi}\,dx\,d\theta = \frac{2\ell}{t\pi}.$$

Función de densidad o de probabilidad que una aguja cruce una línea. Al integrar obtenemos que.

$$\pi \approx \frac{2n\ell}{ht}.$$

Variables

n = cantidad de aguajas lanzadas (1000)

l = longitud de la aguja (3 unidades)

h = agujas que cruzan una línea = 521

t = distancia entre las líneas (2.5)

h

```
array([1., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 1., 0., 1., 1., 0., 0., 0., 1., 1., 1.,
       1., 1., 0., 1., 1., 0., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 0., 1., 1., 0., 1.,
       1., 1., 0., 0., 1., 1., 0., 1., 1., 0., 1., 0., 0., 0., 0., 0., 1.,
       0., 1., 1., 0., 1., 1., 1., 0., 1., 1., 1., 1., 1., 0., 0., 0., 1.,
       1., 1., 1., 1., 1., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 0., 1., 0., 1., 0., 0.,
       1., 1., 1., 1., 1., 0., 0., 0., 1., 0., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 1.,
       0., 0., 0., 1., 0., 1., 1., 1., 0., 1., 1., 1., 1., 1., 0., 1., 1.,
       1., 1., 1., 1., 0., 0., 1., 0., 1., 1., 0., 1., 1., 0., 0., 1., 0.,
       1., 1., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 1., 0., 1., 1., 0.,
       0., 1., 1., 0., 0., 0., 1., 0., 1., 1., 1., 0., 1., 0., 0., 1., 0.,
       1., 0., 1., 0., 0., 1., 1., 1., 0., 1., 0., 0., 1., 0., 1., 1., 1.,
       1., 0., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 0., 0., 0., 0., 0., 1., 1.,
       0., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 0., 1., 0., 1., 0., 1., 0., 1., 0.,
       1., 0., 0., 1., 0., 1., 1., 1., 1., 1., 0., 0., 1., 0., 0., 1., 1.,
       1., 0., 1., 0., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 0., 0., 0., 1., 0., 1., 1.,
       1., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 0., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 1., 0., 0.,
       0., 0., 1., 0., 1., 1., 1., 0., 1., 0., 0., 1., 1., 0., 0., 1., 1.,
       0., 1., 1., 0., 1., 0., 1., 0., 1., 1., 0., 0., 1., 1., 0., 0., 1.,
       1., 1., 1., 0., 1., 1., 0., 1., 1., 1., 1., 0., 1., 0., 1., 1., 0.,
```

= 521

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{(\ell/2)\sin\theta} \frac{4}{t\pi}\, dx\, d\theta = \frac{2\ell}{t\pi}.$$

$$\pi \approx \frac{2n\ell}{ht}.$$

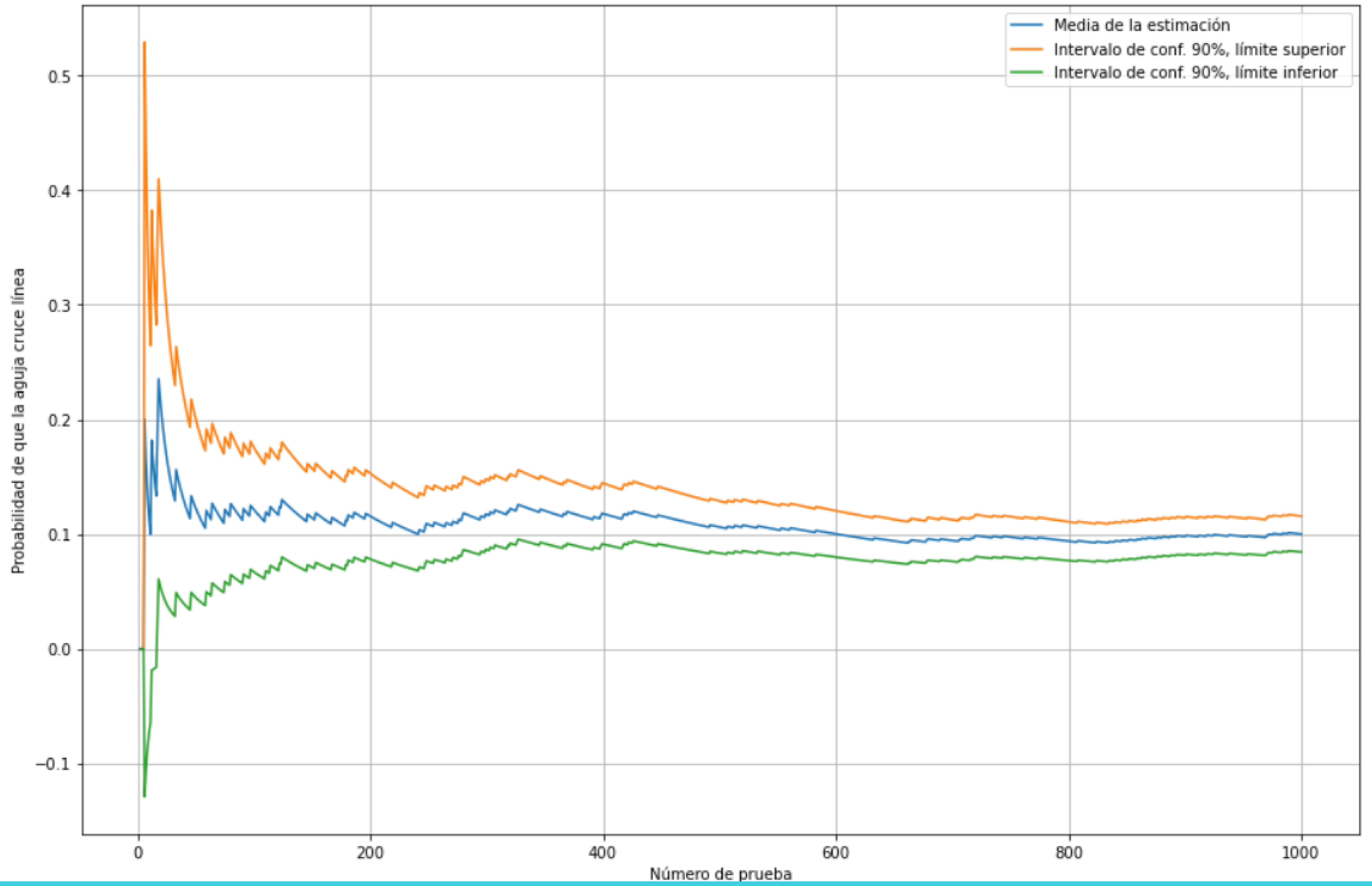
Estimación de Pi

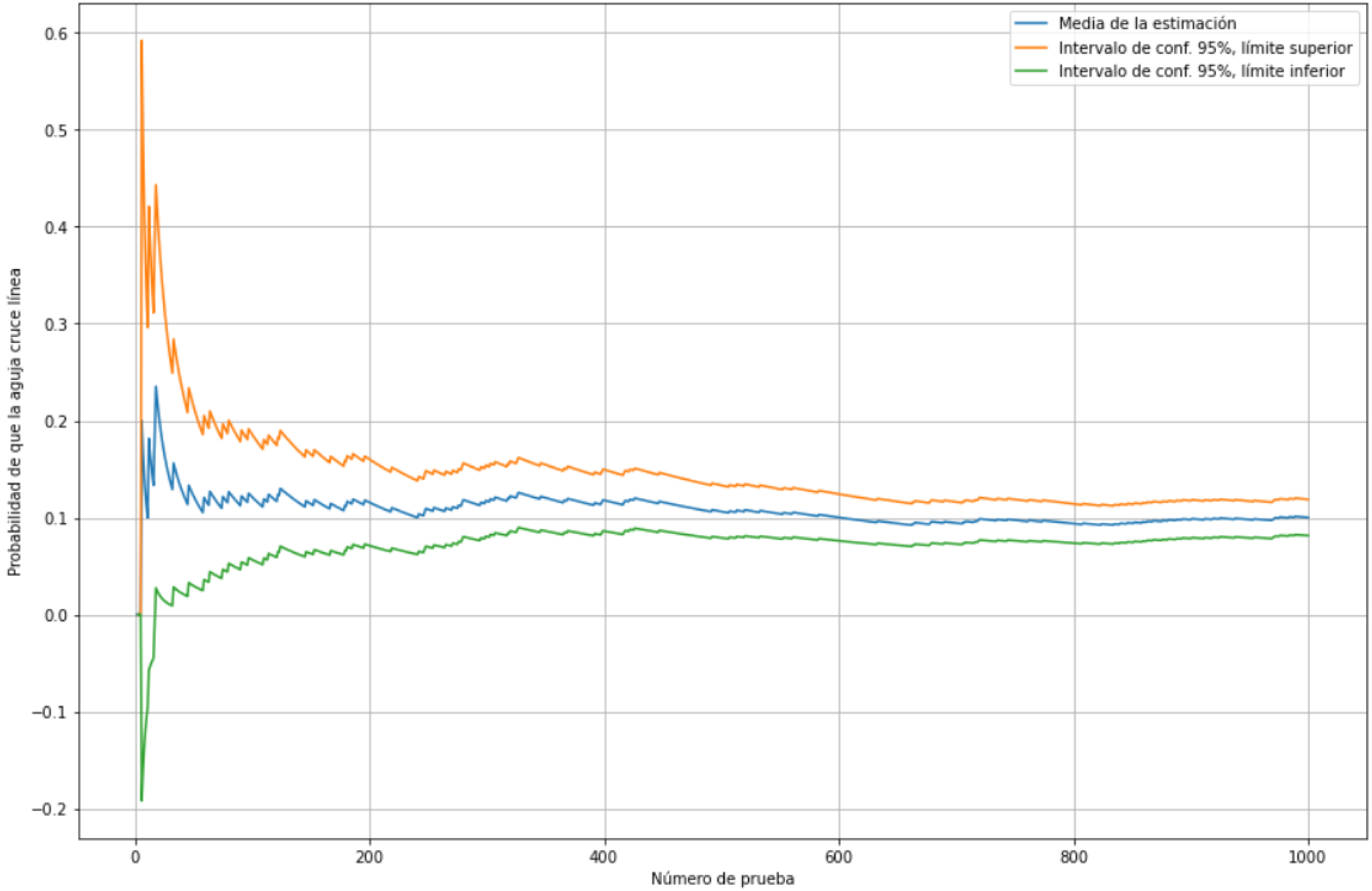
Con simulación Monte Carlo

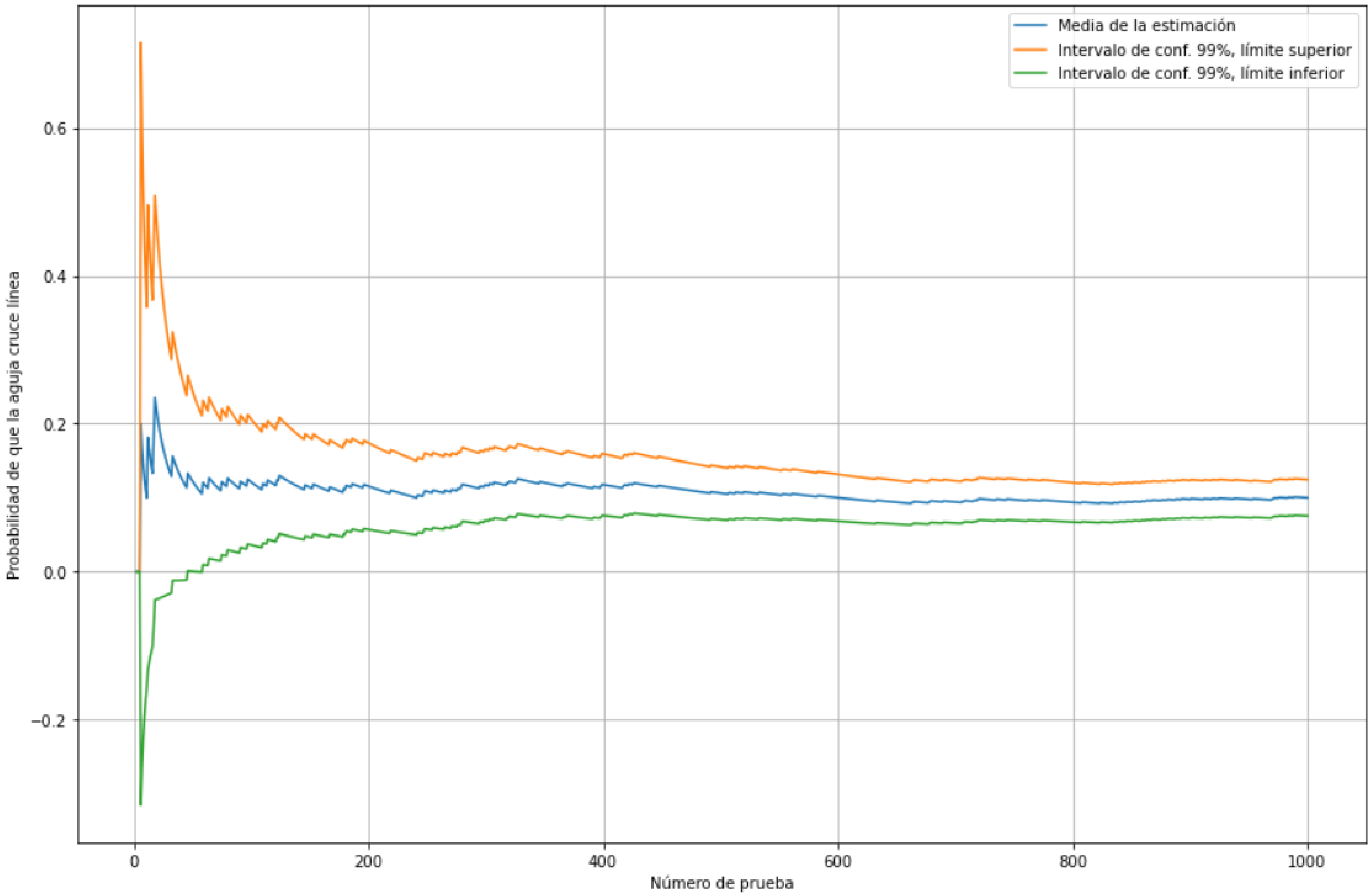
```
Pi =(2*needle_length*N)/(c*line_width)
Pi
```

```
3.198976327575176
```

$$\approx \pi$$


Media de la estimación
Intervalo de conf. 90%, límite superior
Intervalo de conf. 90%, límite inferior
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
Probabilidad de que la aguja cruce línea
0
200
400
600
800
1000
Número de prueba


Media de la estimación
Intervalo de conf. 95%, límite superior
Intervalo de conf. 95%, límite inferior
Probabilidad de que la aguja cruce línea
Número de prueba
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
0
200
400
600
800
1000



Media de la estimación
Intervalo de conf. 99%, límite superior
Intervalo de conf. 99%, límite inferior
Probabilidad de que la aguja cruce línea
Número de prueba
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
200
400
600
800
1000

Conclusiones.