

# Modelagem dinâmica do escoamento de um sistema de elevação por *plunger lift*

**Felipe Pinheiro Mota Assmann**

Orientador: Prof. Dr. Emilio Ernesto Paladino

Co-orientador: Prof. Dr. João Alves de Lima

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRN (área de concentração: Mecânica Computacional) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Natal, RN, janeiro de 2012

# Modelagem dinâmica do escoamento *plunger lift*

**Felipe Pinheiro Mota Assmann**

Dissertação de Mestrado aprovada em 18 de Abril de 2012 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

---

Prof. Dr. Emilio Ernesto Paladino (orientador) ..... UFRN

---

Prof. Dr. João Alves de Lima (co-orientador) ..... UFRN

---

Prof. Dr. Francisco Marcondes ..... UFC

---

Prof. Dr. Sandi Itamar Schafer de Souza ..... UFRN

*A minha família pela paciência e apoio  
durante a realização deste trabalho.*

---

# Agradecimentos

---

Ao meu orientador Emilio Paladino por ter me guiado durante a realização desse trabalho, sem as suas orientações esse trabalho não seria possível. Em especial durante a semana que passei em Florianópolis.

Ao meu coorientador João Alves que muitas vezes me deu uma perspectiva diferente que foi fundamental para a realização desse trabalho.

À Federico e Agustina (os argentinos) por terem sido grandes amigos e colegas de estudo.

Aos meus amigos que me apoiaram

À ANP, pelo apoio financeiro.

---

# Resumo

---

Um problema crítico em poços maduros de gás é a carga líquida. Quando a pressão do reservatório diminui, a velocidade superficial diminui e o arrasto exercido na fase líquida pode se tornar insuficiente para trazer todo o líquido para a superfície. O líquido começa a drenar para baixo, afogando o poço e aumentando a contrapressão, a qual diminui a velocidade superficial, e assim por diante. Um método popular para remediar esse problema é o *plunger lift*. Esse método consiste em derrubar um *plunger* na fundo coluna de produção com a válvula principal fechada. Quando o *plunger* alcança o fundo do poço a válvula de produção é aberta e o *plunger* carrega o líquido para a superfície. Atualmente, os modelos presentes na literatura para prever o comportamento do *plunger* são simplistas, em muitos casos estáticos (não consideram efeitos transientes). Assim, esse trabalho apresenta e valida um algoritmo numérico para resolver escoamentos em poços de gás usando o Método dos Volumes Finitos e a técnica **PRIME** para tratar o acoplamento da pressão e velocidade. Esse modelo será usado para desenvolver modelos dinâmicos para *plunger lift* que incluem efeitos transientes e compressíveis nos escoamentos em poços.

**Palavras-chave:** Elevação Artificial; *Plunger Lift*; Escoamento Compressível Unidimensional; Modelo Dinâmico

---

# Abstract

---

A critical problem in mature gas wells is the liquid loading. As the reservoir pressure decreases, gas superficial velocities decreases and the drag exerted on the liquid phase may become insufficient to bring all the liquid to the surface. Liquid starts to drain downward, flooding the well and increasing the backpressure which decreases the gas superficial velocity and so on. A popular method to remedy this problem is the Plunger Lift. This method consists of dropping the "plunger" to the bottom of the tubing well with the main production valve closed. When the plunger reaches the well bottom the production valve is opened and the plunger carry the liquid to the surface. However, models presented in literature for predicting the behavior in plunger lift are simplistic, in many cases static (not considering the transient effects). Therefore work presents the development and validation of a numerical algorithm to solve one-dimensional compressible in gas wells using the Finite Volume Method and *PRIME* techniques for treating coupling of pressure and velocity fields. The code will be then used to develop a dynamic model for the plunger lift which includes the transient compressible flow within the well.

**Keywords:** Artificial Lift; Plunger Lift; One-dimensional Compressible Flow; Dynamic Model

---

# Sumário

---

<b>Sumário</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ii</b>
<b>Lista de Símbolos e Abreviaturas</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 O método de elevação artificial <i>Plunger Lift</i> . . . . .	2
1.2 Justificativa . . . . .	6
1.3 Objetivo . . . . .	6
<b>2 Revisão da literatura</b>	<b>8</b>
<b>3 Modelagem do escoamento de gás na coluna de produção</b>	<b>14</b>
3.1 Modelagem matemática . . . . .	14
3.2 Método numérico . . . . .	16
3.2.1 Discretização da equação da conservação da massa . . . . .	22
3.2.2 Discretização da equação da conservação da quantidade de movimento	24
3.2.3 Obtenção de uma equação para o campo de pressões e linearização da	
equação de estado . . . . .	26
3.2.4 Discretização da equação de conservação da energia . . . . .	28
3.2.5 Condições de contorno . . . . .	29
<b>4 Validação do modelo para escoamento de gás</b>	<b>39</b>
4.1 Validação a partir do problema de <i>Sod shock tube</i> . . . . .	39
4.2 Escoamento de Fanno . . . . .	45
4.3 Conclusões validação do modelo para escoamento de gás . . . . .	49
<b>5 Modelagem de um sistema <i>plunger lift</i></b>	<b>50</b>
5.1 Resultados modelo <i>Plunger Lift</i> . . . . .	53
<b>6 Conclusões</b>	<b>60</b>
<b>Referências bibliográficas</b>	<b>61</b>

---

# Lista de Figuras

---

1.1	Esquema de poço de petróleo . . . . .	2
1.2	Vida do poço . . . . .	3
1.3	Esquema de <i>Plunger Lift</i> . . . . .	4
1.4	Estágios de funcionamento do <i>Plunger Lift</i> . . . . .	5
2.1	Etapas na subida do <i>Plunger</i> no modelo de Marcano . . . . .	11
2.2	Etapas na subida do <i>Plunger</i> no modelo de Baruzzi . . . . .	12
3.1	Perfil de escoamento em um duto . . . . .	15
3.2	Sub-volumes de um duto para uma propriedade genérica $\Phi$ . . . . .	18
3.3	Interpolação . . . . .	18
3.4	Arranjo desencontrado . . . . .	20
3.5	Fluxograma de solução algoritmo PRIME . . . . .	21
3.6	Malha escalar . . . . .	23
3.7	Malha utilizada para a equação da conservação da quantidade de movimento . .	25
3.8	Malha condição de contorno . . . . .	30
3.9	Malha vetorial para pressão prescrita com entrada de massa . . . . .	31
3.10	Malha escalar condição de contorno de pressão com entrada de massa . . . . .	32
3.11	Malha vetorial para pressão prescrita com saída de massa . . . . .	33
3.12	Malha escalar condição de contorno de pressão com saída de massa . . . . .	34
3.13	Malha vetorial condição de contorno de vazão mássica com saída de massa . .	35
3.14	Malha vetorial condição de contorno de vazão mássica com saída de massa . .	36
3.15	Malha vetorial condição de contorno de vazão mássica com saída de massa . .	37
4.1	<i>Sod shock tube</i> estado inicial . . . . .	40
4.2	Estado inicial <i>Sod shock tube</i> . . . . .	41
4.3	<i>Sod shock tube</i> malha de 50 volumes . . . . .	42
4.4	<i>Sod shock tube</i> malha de 100 volumes . . . . .	43
4.5	<i>Sod shock tube</i> malha de 500 volumes . . . . .	44
4.6	Fanno malha de 50 volumes . . . . .	46
4.7	Fanno malha de 100 volumes . . . . .	47
4.8	Fanno malha de 500 volumes . . . . .	48
5.1	Partes de um <i>Plunger Lift</i> . . . . .	50



5.2	Digrama de corpo livre do conjunto <i>plunger</i> e golfada de líquido . . . . .	51
5.3	Fluxograma <i>Plunger Lift</i> . . . . .	54
5.4	Velocidade do do conjunto <i>plunger</i> e golfada . . . . .	55
5.5	Posição do onjunto <i>plunger</i> e golfada . . . . .	55
5.6	Pressão abaixo do conjunto <i>plunger</i> e golfada . . . . .	55
5.7	Parte de baixo da coluna de produção, t=10s . . . . .	56
5.8	Parte de baixo da coluna de produção, t=175s . . . . .	57
5.9	Velocidade do conjunto <i>plunger</i> e golfada de líquido para algumas pressões de fundo de poço . . . . .	57
5.10	Posição do conjunto <i>plunger</i> e golfada de líquido para algumas pressões de fundo de poço . . . . .	58
5.11	Velocidade do conjunto <i>plunger</i> e golfada de líquido para alguns comprimento de golfada . . . . .	58
5.12	Posição do conjunto <i>plunger</i> e golfada de líquido para alguns comprimento de golfada . . . . .	59

---

# Lista de Símbolos e Abreviaturas

---

$\rho$  Densidade [ $kg/m^3$ ]

$z$  Comprimento [ $m$ ]

$w$  Velocidade [ $m/s$ ]

$t$  Tempo [ $s$ ]

$p$  Pressão [ $Pa$ ]

$u$  Energia interna [ $J$ ]

$h$  Entalpia [ $J$ ]

$R$  Constante do gás [ $JK^{-1}$ ]

$D$  Diâmetro do duto [ $m$ ]

$f$  Fator de atrito de *Darcy-Weisbach* [ $-$ ]

$g$  Gravidade [ $m/s^2$ ]

$C_v$  Calor específico a volume constante [ $JK^{-1}$ ]

$T$  Temperatura [ $K$ ]

$\Phi$  Uma propriedade qualquer [ $-$ ]

$\xi$  Sinal do fluxo de uma propriedade [ $-$ ]

$A$  Matriz  $A$  de um sistema linear [ $-$ ]

$B$  Vetor  $B$  de um sistema linear [ $-$ ]

$\hat{w}$  parâmetro da velocidade da equação da pressão

$\hat{d}$  parâmetro da pressão da equação da pressão

$p_s$  Pressão no separador [ $Pa$ ]

$p_c$  Pressão no topo do espaço anular [ $Pa$ ]

$p_{fp}$  Pressão no fundo do poço [kg]

$M_p$  Massa do *plunger* [kg]

$M_g$  Massa da golfada de líquido [kg]

$F_{ap}$  Força de atrito do *Plunger* [N]

$F_{ag}$  Força de atrito da golfada [N]

$\Pi$  Área da coluna de produção [ $m^2$ ]

$L$  Comprimento de um duto [ $m$ ]

\* Iteração anterior

$o$  Tempo anterior

$p$  Volume analisado

$N$  Volume ao norte do analisado

$s$  Volume ao sul do analisado

$n$  Fronteira norte do volume analisado

$s$  Fronteira sul do volume analisado

$cp$  Coluna de produção

$b$  Acima

$t$  Abaixo

$_2$  Parte de cima da coluna de produção

$_4$  Espaço anular

---

# Capítulo 1

## Introdução

---

O petróleo é uma substância complexa composta por diversos componentes, em especial hidrocarbonetos. Ele é uma das mais importantes matérias-primas da indústria, sendo utilizada para geração de energia, principalmente, em sistemas de transporte ou como insumo na indústria química.

O petróleo é encontrado em rochas subterrâneas de origem sedimentar com propriedades permoporosas chamadas de rochas reservatório. Para extraí-lo do subsolo e transportá-lo até as facilidades de produção é necessária a instalação de um poço de petróleo.

O poço de petróleo consiste de um canal cilíndrico perfurado na terra, ou leito marinho, no caso de produção *off shore*, sendo este canal protegido internamente por um tubo revestimento metálico concêntrico cimentado à rocha, chamado revestimento, posto em contato com a rocha reservatório através de uma estrutura chamada canhoneado.

Para que o poço seja posto em funcionamento é instalado de forma concêntrica ao revestimento um duto metálico chamado coluna de produção e um conjunto de válvulas que comunicam o poço ao equipamento de superfície chamado de árvore de natal. Um poço de petróleo típico pode ser observado através do desenho esquemático mostrado na Figura 1.1. É possível reparar nessa figura que haverá um espaço vazio entre o revestimento e a coluna de produção, esse espaço será chamado de "região anular".

Este sistema é construído com o objetivo de trazer o fluido do fundo do poço para a superfície. Este processo é chamado de elevação.

Quando o reservatório possui pressão suficiente para superar a perda de carga de forma natural, o poço é chamado surgente e o equipamento descrito acima é suficiente para a produção de petróleo. No entanto, nem sempre isso acontece e muitas vezes é necessário utilizar sistemas adicionais para contribuir para elevação do petróleo. Estes são chamados de sistemas de elevação artificial de petróleo. Há sistemas de elevação que permitem a redução da perda de carga e sistemas que aumentem a pressão no fundo do poço.

Os fluidos que os poços de petróleo produzem raramente são constituídos de uma única fase, sendo constituídos por vários líquidos, que por sua vez pode ser: óleo e água, gás e algumas vezes areia. Para poços predominantemente de gás, um dos possíveis problemas que podem prejudicar o processo de elevação é a carga líquida. Segundo Lea et al. (2003), ela é definida

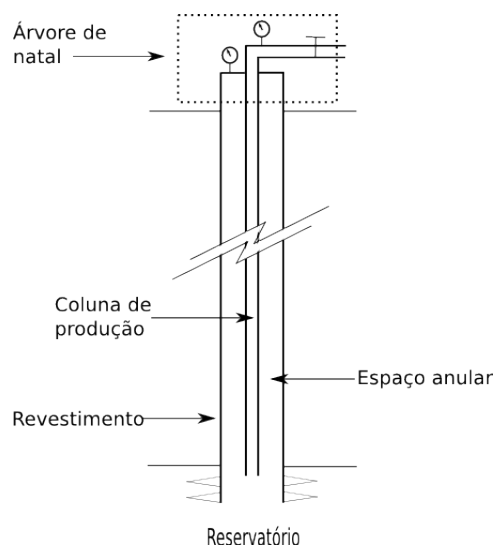


Figura 1.1: Esquema de poço de petróleo

como a inabilidade do gás produzido pelo reservatório de carregar o líquido produzido, até as instalações de superfície. Esse problema surge quando a velocidade do gás não é suficientemente alta para carregar o líquido e uma parte se acumula no fundo do poço. O gás produzido deve atravessar a coluna de líquido cada vez maior e o atrito entre as duas fases começa a restringir ou impedir o escoamento, reduzindo a vazão de gás e, portanto, restringindo ainda mais a capacidade deste, de arrastar o líquido. Uma das técnicas empregadas para tratar este problema é o sistema de elevação por *Plunger Lift*.

## 1.1 O método de elevação artificial *Plunger Lift*

Poços de gás com alta razão gás líquido (RGL) podem produzir de modo surgente. Para isso, basta que a velocidade do gás seja suficientemente alta. Nesse tipo de poço, o escoamento é multifásico, os quais podem ser classificados em diversos padrões de escoamento. Os padrões de escoamento encontrados em poços de gás são:

- Névoa;
- Anular com alto grau de entranhamento;
- golfada.

Estes padrões ocorrem, respectivamente, conforme se aumenta a vazão de líquido, esse tópico é abordado em detalhes em Shoham (2006). No entanto, para manter esses padrões de escoamento são necessárias altas velocidades superficiais de gás na coluna de produção, por vezes não disponíveis, em função da pressão da formação não ser suficientemente alta. Isso prejudica tanto a produção de gás como a produção de óleo quando em poços de produção do mesmo. O problema pode ser tão grave que, com o envelhecimento acompanhado pela diminuição da pressão de fundo de poço e da RGL do poço, ele pode até deixar de produzir, conforme é ilus-

trado na figura 1.2, a qual descreve o comportamento com o tempo de um poço de gás. Com o passar do tempo a RGL diminui e a pressão de fundo de poço também, até que o poço deixa de produzir.

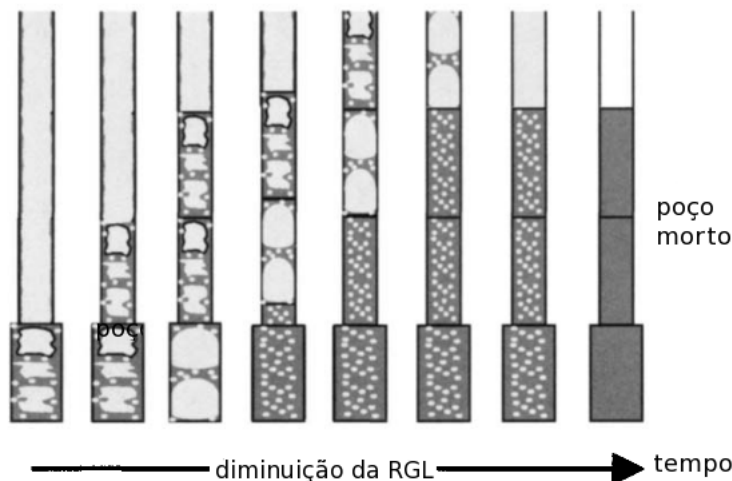


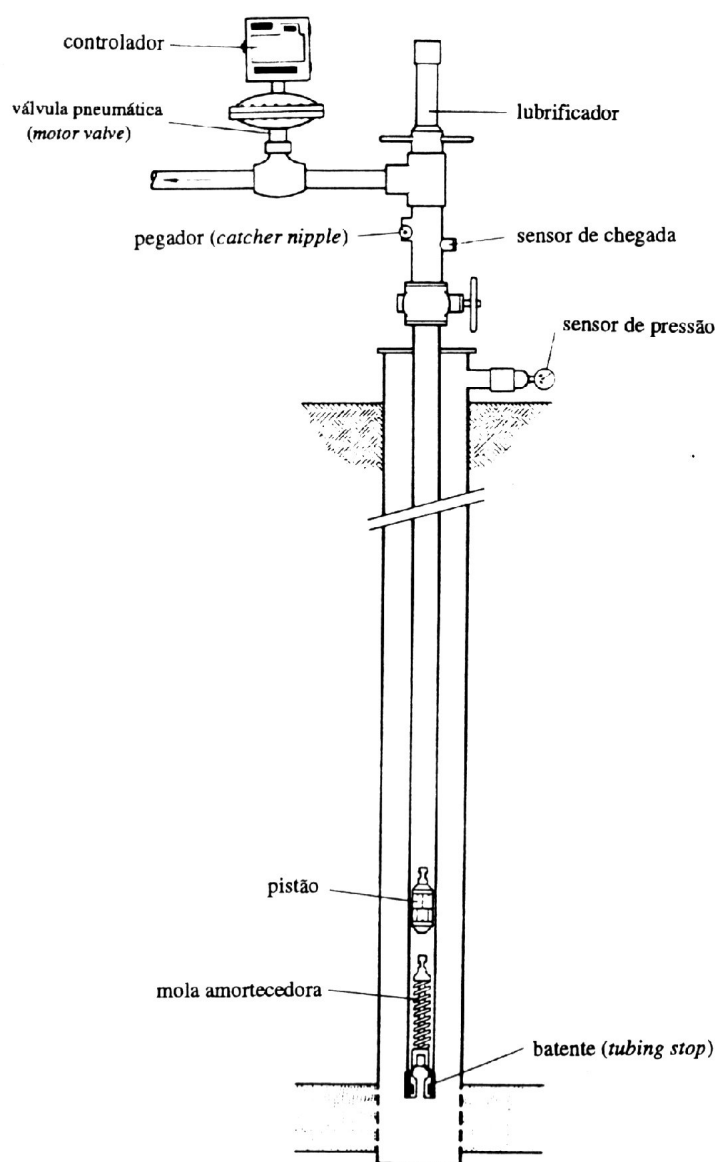
Figura 1.2: Vida do poço

Para se evitar a perda de carga resultante da interação do gás com o líquido, pode ser utilizada uma interface física na coluna de produção para separar o escoamento dos mesmos, chamado de *plunger*, que faz com que seja melhor utilizada a energia do gás, sendo para isso, necessário que o *plunger* suba e desça a coluna de produção. Existem diversos tipos de instalações possíveis para este método de elevação, podendo ser citadas como os mais comuns,

- *Plunger lift* convencional;
- *Plunger lift* com *packer*;
- Gás lift com pistão.

Esse trabalho se dedica ao estudo do mais utilizado tipo de instalação, o *Plunger Lift* convencional, que é geralmente chamado apenas de *Plunger Lift*.

O sistema de elevação por *Plunger Lift* convencional é mostrado de forma esquemática na figura 1.3

Figura 1.3: Esquema de *Plunger Lift*

A operação deste sistema consiste das seguintes etapas, que são repetidas de forma cíclica,

- O poço fechado faz crescer a pressão do gás no anular entre o revestimento e a coluna de produção até uma pressão previamente determinada.. Esta etapa está ilustrada na figura 1.4a;
- O poço é aberto e, através do diferencial de pressão, é provocada a subida do *plunger* e a carga líquida. Esta etapa está ilustrada na figura 1.4b;
- O poço é novamente fechado e o *plunger* cai por força da gravidade, esta etapa está ilustrada na figura 1.4c.

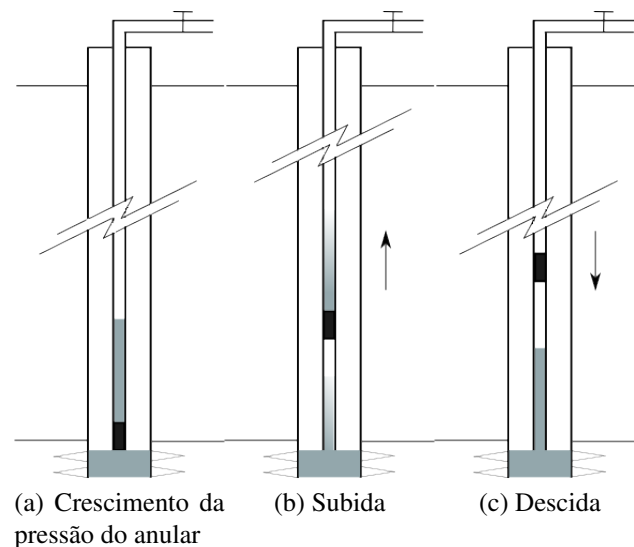


Figura 1.4: Estágios de funcionamento do *Plunger Lift*

As principais diferenças entre a instalação do sistema *Plunger Lift* e a instalação normal de um poço surgente são:

- *Plunger* : É a interface física entre o escoamento do gás e do líquido. Diferentes tipos de *plunger* podem ser utilizados, dependendo das condições de produção do poço, no entanto uma das principais características é idealmente na descida ele permite que se passe o máximo de líquido por ele e na subida o mínimo, esse fenômeno de passagem de líquido pelo *plunger* é conhecido com *fallback*. Em uma situação ideal na subida o *fallback* não deveria existir;
- Mola amortecedora: utilizada para aliviar o impacto do *plunger* no fundo da coluna de produção;
- Lubrificador: utilizada para aliviar o impacto do *plunger* na cabeça do poço e para poder extraí-lo sem precisar parar a produção;
- Válvula : uma válvula para a linha de produção que é operada pelo controlador;
- Controlador: Trata-se de um dispositivo com certa lógica para operar a válvula. É o cérebro da operação do sistema, uma vez que toda a operação é controlada pela abertura e fechamento da mesma



## 1.2 Justificativa

Conforme será visto no capítulo referente a revisão bibliográfica, os modelos desenvolvidos até o presente momento não consideram todos os fenômenos do escoamento do método de elevação artificial *Plunger Lift*. Existe a necessidade de desenvolvimento de novos modelos que representem de forma mais acurada o funcionamento deste método de elevação.

Estes modelos podem ser empregados nas mais diversas atividades de engenharia e pesquisa sobre *Plunger Lift*. Entre as principais aplicações de um modelo destas características, podem-se citar,

- Previsão do comportamento de poços já operando;
- Especificação de novos poços;
- Treinamento de operadores na operação de poços;
- Pesquisas em técnicas de automação para poços usando *Plunger Lift*

Além disso, um modelo mais completo e representativo do comportamento do sistema de elevação por *Plunger Lift* permitirá uma melhor compreensão qualitativa e quantitativa do processo, permitindo ponderar melhor os impactos resultantes das simplificações existentes nos diversos modelos já utilizados, delimitando as suas condições de aplicabilidades.

## 1.3 Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um modelo computacional de *Plunger Lift* utilizando um modelo descrito por equações diferenciais unidimensionais e transientes em dutos para o escoamento na coluna de produção. Em uma primeira aproximação, será implementado um modelo simplificado, considerando o conjunto *Plunger Lift*-coluna de líquido (acima do mesmo) como uma massa pontual que se desloca acima da coluna de gás.

Para alcançar este objetivo, são definidas as seguintes metas parciais,

- Desenvolvimento de um código computacional unidimensional transiente para o escoamento compressível em dutos testado e validado a partir de problemas padrão;
- Introduzir os efeitos provocados pelo pistão (*plunger*) e coluna de líquido através das condições de contorno do modelo.
- Implementar um modelo, baseado na aplicação da 2a lei de Newton aplicada ao conjunto *plunger* - coluna de líquido, para computar a posição e velocidade do *plunger* em função do tempo, durante o estágio de subida do mesmo

Evidentemente, trata-se de uma abordagem simplificada à um problema de grande complexidade. Entretanto, através desta abordagem inicial, onde são introduzidos os efeitos dinâmicos do escoamento da coluna de gás, não considerados em modelos anteriores, pretende-se dar início a uma linha de estudo que procura desenvolver modelos mais sofisticados para este sistema

de elevação, baseados na solução do escoamento no poço através das equações diferenciais de conservação, considerando os efeitos dinâmicos deste sistema de elevação, cujo comportamento é inerentemente transiente.

---

## Capítulo 2

### Revisão da literatura

---

Neste capítulo, é apresentada uma revisão dos modelos publicados na literatura sobre o método de elevação artificial por *Plunger Lift*, destacando-se as principais e mais relevantes simplificações e hipóteses adotadas no desenvolvimento dos modelos por seus autores. A ordem adotada para a apresentação destes trabalhos é a cronológica, sendo as publicações distribuídas entre 1965 e 2000. Destaca-se a escassez de publicações técnicas e científica sobre o assunto na literatura.

Antes dos primeiros modelos matemáticos serem desenvolvidos, o uso do *Plunger Lift* era muito limitado, funcionando bem em algumas aplicações, enquanto em outras aplicações nem era possível sua operação, devido, entre outros aspectos, à falta de conhecimento sobre o seu funcionamento.

O primeiro trabalho publicado apresentando um modelo matemático para o sistema *Plunger Lift* foi o de Foss & Gaul (1965). Este trabalho faz um apanhado das principais práticas desenvolvidas dos campos de *Ventura Avenue* nos Estados Unidos que, na época, tinha 100 poços operando usando o sistema *Plunger Lift* de elevação artificial de um total de mais de 600 poços existentes no campo. O autor desenvolveu um modelo estático *lumped* (as propriedades a serem resolvidas são todas concentradas em um ponto), mecanicista, acoplando a dados reais de campo. Um modelo estático assume o equilíbrio de forças e, portanto, um movimento do *plunger* e da coluna de líquido em regime permanente (velocidade constante). Um modelo *lumped* não leva em consideração a continuidade do sistema. Esse modelo foi desenvolvido para calcular certos parâmetros de projeto dos poços com *Plunger Lift* instalados, tais como o mínimo volume de gás necessário e de pressão no anular. A previsão destes valores mínimos podia garantir a operacionalidade do sistema.

O modelo assume um equilíbrio de forças atuando no conjunto *plunger* e líquido. Para expressar matematicamente este equilíbrio, são assumidas as seguintes hipóteses simplificadoras.

- A velocidade do gás, *plunger* e líquido é constante e igual a  $5,08\text{m/s}$ , obtida da média da operação dos poços reais.
- Desconsidera-se o atrito do *plunger*;
- Desconsidera-se a alimentação de fluido do reservatório durante a subida do *plunger*;
- Considera que, no final da subida do *plunger*, a pressão promovida pela coluna de gás no

anular é igual à pressão provocada pela coluna de gás no interior da coluna.

Como é de interesse calcular os diversos parâmetros de projeto, é calculada a pressão mínima requerida para elevar todo o líquido pela coluna de produção. Esta pressão mínima ocorre no estágio de subida, quando o *plunger* está próximo da superfície, fato este conhecido a partir da observação de instalações reais de *Plunger Lift* em poços. De fato, como o movimento do *plunger* se dá a partir da expansão do gás existente no anular, quanto mais próximo da superfície este esteja, menor deverá ser a pressão. Nesta condição, considera-se, por hipótese, que as pressões nas colunas de gás no anular e na coluna de produção se balanceiam, pois possuem alturas semelhantes e pelo fato da principal componente do campo de pressões ser a hidrostática. Esta igualdade pode ser descrita pela seguinte equação:

$$P_{anular,min} = (p_{plunger} + p_{superficie} + p_{slug} + f_{slug}) \left(1 + \frac{D}{K}\right) \quad (2.1)$$

$P_{anular,min}$  = Pressão mínima necessária para elevar todo o líquido acima do *plunger*

$p_{plunger}$  = Pressão necessária para elevar *plunger*

$p_{superficie}$  = Pressão na cabeça do poço

$p_{slug}$  = Pressão necessária para elevar líquido

$f_{slug}$  = Atrito do líquido com a coluna de produção

$D$  = Diâmetro da coluna de produção

$K$  = Atrito do gás com a coluna de produção obtido através da operação de poços reais

Este modelo, apesar de suas limitações, é a primeira abordagem científica do método e permite garantir a operação do sistema ao calcular a pressão mínima de gás requerida. Suas limitações, no entanto, não permitem uma otimização da operação do sistema, nem a obtenção da melhor produção possível.

Os trabalhos que foram publicados em seguida de Hacksma (1972) e de Abercrombie (1988) adotam a mesma abordagem estática com algumas diferenças técnicas.

Em Hacksma (1972) são introduzidos os conceitos de RGL mínima e RGL ótima. A RGL mínima define a relação entre gás e líquido mínima requerida para que o *plunger* atinja a superfície e é função da pressão de separação e das características mecânicas do poço. A RGL ótima é a relação de gás e líquido que promove a maior produção. Ela depende também da alimentação do reservatório. Por isso, neste trabalho, é acrescentada ao modelo a produção de fluido do reservatório através da IPR (*Inflow Performance Relationship*), curva que descreve a relação entre as vazões de fluidos do reservatório e a pressão de fundo do poço. Este trabalho já permite uma melhoria do projeto de forma a garantir uma melhor produtividade do poço.

Abercrombie (1988), considera que há apenas *fallback* positivo do gás para o líquido, o que impede o *fallback* do líquido. Atualiza o modelo de Foss & Gaul (1965) considerando apenas novos valores, em especial, da velocidade média do *plunger* adotando um valor para a velocidade de subida de  $10,16\text{m/s}$ , o dobro do previamente adotado, valor que diz ser mais condizente com o encontrado na prática.

Por outro lado, Lea (1982) desenvolve um modelo dinâmico *lumped* mecanicista para a etapa de subida do *Plunger Lift*. Esse modelo é desenvolvido através do equilíbrio de forças no conjunto *plunger* e golfada de líquido sendo consideradas as velocidade do gás, líquido e *plunger* iguais e calculadas de forma dinâmica. A perda de carga nos escoamentos nas colunas de gás abaixo e acima do conjunto são calculadas de forma quase-estática através da equação do peso de uma coluna de gás e do atrito de escoamento de um fluido em um duto.

Foi percebido uma discrepância da ordem de 16% no volume de gás necessário a ser armazenado para elevar o *plunger* por completo em relação ao trabalho de Foss & Gaul (1965), prevendo menores pressões mínimas requeridas para operar o sistema. A partir desse modelo dinâmico foi também desenvolvido um modelo estático melhorado, para ser usado em estimativas rápidas de engenharia.

Seguindo a mesma linha, Rosina (1983) desenvolveu um modelo para a simulação do período de subida do *plunger*, sendo sua principal contribuição ter considerado que a velocidade do líquido é diferente da velocidade do gás e do *plunger*, sendo que o líquido também escoar em torno do pistão em um escoamento anular que se constitui em um *fallback* do líquido. Neste caso, o *plunger* assume a velocidade da bolha de gás. Os resultados do modelo são comparados a resultados experimentais. Ele também discute a possibilidade de haver líquido no anular, mas não inclui tal situação no modelo.

Marcano & Chacín (1992) modelam todas as etapas do *Plunger Lift* considerando também que há *fallback*. O *fallback* de líquido foi considerado uma função linear da velocidade do pistão, tendo sido a relação determinada experimentalmente para cada tipo de pistão. O problema é modelado através das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento escritas de forma *lumped* por um conjunto de EDOs.

Uma vez que, para esse trabalho, a etapa de funcionamento do *Plunger Lift* mais importante é a de subida, serão descritas as considerações tomadas para a sua modelagem. Ela foi subdividida em quatro subetapas :

- Nessa subetapa, descrita de forma esquemática pela figura 2.1a, o anular está parcialmente preenchido de líquido na parte inferior e gás pressurizado na parte superior. Quando a válvula da linha é aberta o gás pressurizado começa a expulsar o líquido do anular para a coluna de produção;
- Essa subetapa descrita de forma esquemática pela figura 2.1b, começa quando o líquido é todo expulso do anular, agora quem está sendo expulso do anular para a coluna de produção é o gás e isso provoca um escoamento de natureza multifásica que é descrito com correlação apropriada também é modelado o comportamento do *fallback*;

- Nessa etapa, descrita de forma esquemática pela figura 2.1c o escoamento abaixo do *plunger* é tratado inteiramente como multifásico através de uma correlação, o *fallback* também é modelado como uma função linear da velocidade do *plunger* sendo ele de líquido acima do *plunger* para baixo;
- Essa etapa, descrita de forma esquemática pela figura 2.1d, descreve a produção na linha de produção do líquido acima do *plunger* sendo a modelagem empregada muito semelhante a etapa anterior.

Ainda são modeladas as etapas de *build up* e descida do *plunger* através da ação da gravidade.

O modelo foi comparado à produção de óleo de um poço real, e foram obtidos erros em torno 12% a 17% de volumes produzidos esperados. Isso prova que o modelo tem capacidade de prever com razoável acurácia a coluna de líquido acumulada e quanto desse líquido é perdido por *fallback* até chegam as facilidades de produção.

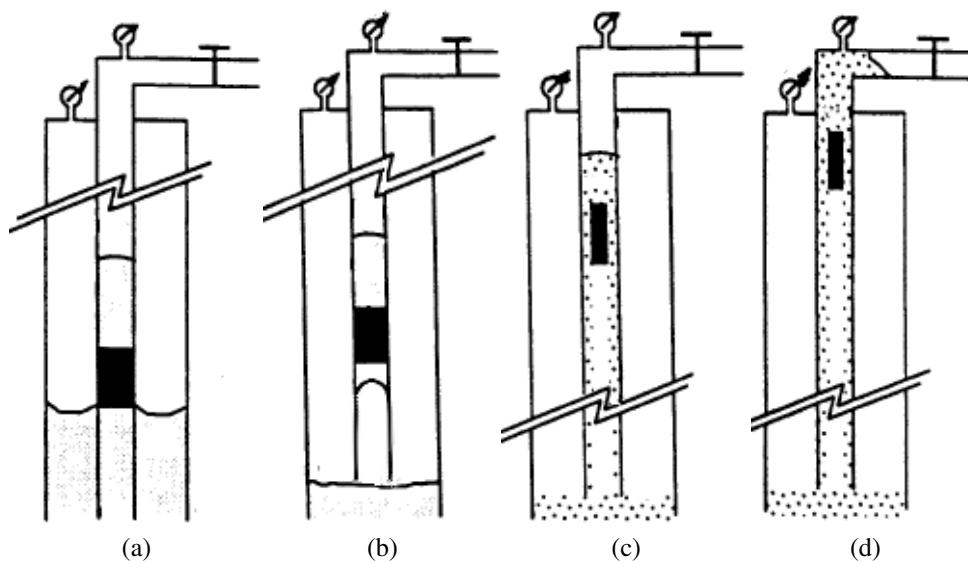


Figura 2.1: Etapas na subida do *Plunger* no modelo de Marcano

Baruzzi (1994) desenvolve um modelo *lumped* para as várias etapas do *Plunger Lift* escritas através de equações algébricas e EDOs que são resolvidas numericamente pelo método de Newton. As etapas são subdivididas em,

- Subida, representada pela figura 2.2a, na qual o gás sob pressão no anular empurra o *plunger* e o pistão de líquido para cima;
- Produção, na qual o líquido chega à linha de produção e que está representada pela figura 2.2b;
- Produção de gás, na qual o *plunger* chega ao topo e é produzido o gás, sendo representado pela figura 2.2c;

- Etapa de Acumulação, na qual a pressão de gás se acumula no espaço anular e o líquido se acumula na coluna de produção acima do pistão, representado pela figura 2.2d.

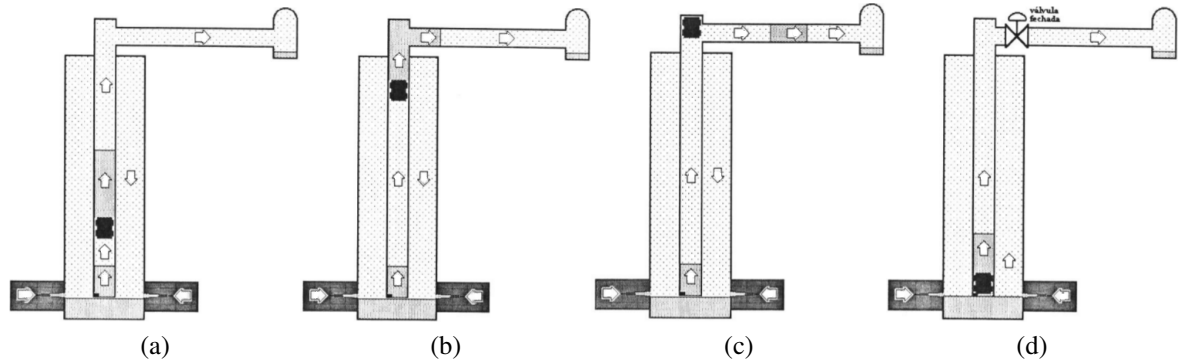


Figura 2.2: Etapas na subida do *Plunger* no modelo de Baruzzi

Baruzzi (1994) ainda faz uma discussão das principais hipóteses físicas discutidas nos trabalhos anteriores, que são,

- Ocorrência de *fallback*
- Presença de líquido no anular

Sobre o *fallback*, considera que é um fenômeno de ocorrência considerável, mas devido as poucas pesquisas realizadas sobre o assunto e a complexidade do fenômeno, prefere não incluí-lo em sua modelagem.

Em relação a presença de líquido no anular, desenvolve uma metodologia para calcular a RGL máxima para que só se acumule líquido na coluna de produção, adotando em seu modelo apenas esta possibilidade. Sugere que esta hipótese deve ser adotada como premissa de projeto, sendo recomendado quando tiver casos de RGL maiores que acarreta um separador estático de gás ou, quando possível, manter a coluna de produção abaixo do canhoneado, instalação comumente denominada de âncora natural, que promove eficazmente a separação do líquido e do gás, direcionando o líquido para a coluna de produção e o gás para o espaço anular.

Gasbarri & Wiggons (1996) utilizam uma modelagem semelhante a Lea (1982) e adota um modelo dinâmico para as etapas de subida, (*afterflow*) e crescimento da pressão, acrescentando ainda o comportamento do reservatórios através da IPR. Este modelo adota, em grande parte, as hipóteses e equações de modelos anteriores, introduzindo o efeito do atrito do pistão de líquido e do gás em expansão antes e depois do *plunger*, subdividindo a coluna em pequenos volumes de controle para incluir os efeitos citados, mas sem levar em consideração a aceleração do gás. O modelo considera, ainda, os efeitos da pressão de separador, perda de carga na linha de produção e o comportamento transiente depois que o pistão de líquido chega à superfície e começa a ser produzido.

Maggard et al. (2000) discutem os efeitos do comportamento transiente do reservatório em relação ao comportamento quase-estático assumido nos modelos de *Plunger Lift*, especialmente

em poços produtores de gás em reservatórios de permeabilidade extremamente baixa, denominados na indústria de petróleo de *Tight Gas Wells*, nos quais este efeito é mais significativo. Cabe observar que a IPR de Vogel representa um conjunto de situações estáticas, ou seja, em regime permanente, relacionando uma pressão de fundo no poço com uma vazão de produção. Entretanto, devido à grande extensão do reservatório e, conseqüentemente, o tempo relativamente significativo para estabilização do fluxo, a discrepância pode ser significativa numa modalidade cíclica de produção como o *plunger*, especialmente quando os tempos de ciclos são pequenos em relação ao tempos de estabilização do fluxo no reservatório. Utilizando uma modelagem semelhante às já descritas e acoplando-a a um *software* de simulação de reservatório, ele prova a importância de levar os fenômenos transientes em conta.

Da revisão bibliográfica apresentada, pode-se concluir que, apesar da escassez, as melhorias progressivas nos modelos matemáticos trouxeram resultados significativos, e o sistema evoluiu de uma situação em que a efetiva produção era até incerta, até um estágio em que se pode tanto garantir a operação como buscar uma otimização de produção e de durabilidade. A melhoria progressiva foi obtida a partir de um modelo estático, muito simplificado e *lumped* em única etapa, para um modelo dinâmico que incorpora fenômenos anteriormente desprezados, tais como a influência do reservatório, o atrito de gás e líquido, os efeitos transitórios, etc.

Como apresentado no capítulo anterior, a principal contribuição do presente trabalho consistirá em incluir alguns efeitos dinâmicos relativos ao escoamento do gás na coluna de produção, através de um modelo diferencial unidimensional para o escoamento do mesmo. Uma vez que o sistema *Plunger Lift* tem como características a alta durabilidade, o consumo desprezível de energia, remoção contínua de parafina, incrustações e outros sólidos, além de adequação a poços de alta RGL e baixa produtividade existentes em grande número no mundo todo, justifica-se plenamente incorporar novas melhorias no modelo tais como as que são propostas neste trabalho.



---

## Capítulo 3

# Modelagem do escoamento de gás na coluna de produção

---

Para desenvolver um modelo para *plunger lift* unidimensional se faz necessário, primeiramente, desenvolver um modelo do escoamento de gás em um duto, que representa a região da coluna de produção abaixo do *plunger*. Este capítulo apresenta esta modelagem que será descrita através de equações governantes do escoamento compressível em dutos a saber, conservação da massa, quantidade de movimento e energia, na sua forma unidimensional, a discretização das mesmas através de Método dos Volumes Finitos e o algoritmo de solução necessário para resolver o sistema, uma vez que estas equações possuem um forte acoplamento físico, sendo necessário um delicado algoritmo para avançar a solução do sistema de forma estável e robusta.

### 3.1 Modelagem matemática

Os escoamentos compressíveis são governados por leis de conservação, sendo as propriedades conservadas a massa, a quantidade de movimento e a energia e pela equação de estado do gás, que deve ser introduzida para o fechamento do sistema, de forma a relacionar a massa específica do fluido com a pressão e temperatura locais. Para a modelagem do escoamento do gás em dutos, foram utilizadas as leis da conservação, considerando um modelo unidimensional transiente. Neste modelo, as variáveis calculadas, velocidade, pressão temperatura e massa específica, representam um valor médio na seção transversal do duto. Esta situação é ilustrada na figura 3.1a, que mostra uma parte de um duto e, em uma seção transversal, o perfil esquemático de velocidades. No entanto, em grande parte das análises de engenharia, incluído a aplicação desenvolvida neste trabalho, a distribuição transversal de velocidades não é necessária. A isso, combina-se o fato de serem as dimensões longitudinais bem maiores que as radiais, tornando oneroso e elevando o custo computacional da solução numérica do escoamento nas três dimensões. Assim, assume-se um valor de velocidade (assim como temperatura, pressão etc.) constante ao longo da extensão radial da seção do duto, sendo o valor dessa constante igual a média dos valores do perfil real. O novo perfil é apresentado de forma esquemática na figura 3.1b. Esse tipo de simplificação é chamado de aproximação unidimensional. Uma vez que a

informação dos gradientes transversais ao escoamento é perdida no processo de integração (média), a informação sobre a difusão de quantidade de movimento e energia deve ser introduzida no modelo, por exemplo através de um fator de atrito. Neste caso, ainda não foi considerado o fluxo de calor através das paredes do duto (consideradas isoladas), porém a inclusão deste fenômeno neste modelo é direta. Os termos de difusão axial são desprezados, uma vez que são de segunda ordem, quando comparados com aqueles que representam o transporte convectivo das propriedades.

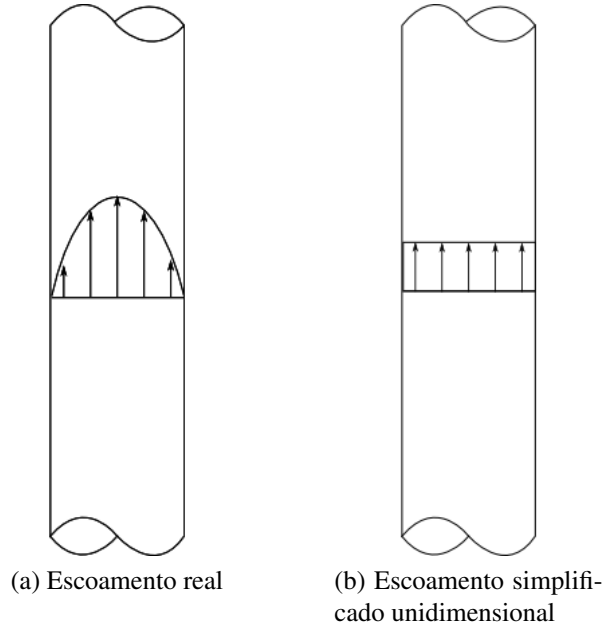


Figura 3.1: Perfil de escoamento em um duto

Utilizando estas simplificações em um referencial euleriano se obtém conforme apresentado por Guzmán (1999) o conjunto de equações 3.1.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{f \rho w^2}{2D} - \rho g \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho w u}{\partial z} = -p \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{f \rho |w^3|}{2D} + w \rho g \quad (3.1c)$$

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (3.1d)$$

sendo,

$t$  = Tempo

$z$  = Comprimento

$\rho$  = Densidade

$w$  = Velocidade

$p$  = Pressão

$u$  = Energia interna

$R$  = Constante dos gás

$D$  = Diâmetro do duto

$f$  = Fator de atrito de Darcy-Weisbach

A última equação do sistema anterior, equação 3.1d, representa a equação de estado, neste caso considerado gás ideal, e, como já salientado, se faz necessária para o fechamento do sistema. É conhecido que o escoamento em um poço de gás não é de natureza ideal, mas isso é uma primeira abordagem e foi optado por esta simplificação devido as pressões relativamente baixas. Isso também, permite que seja utilizado sempre a equação 3.2 podendo-se intercambiar temperatura e energia interna livremente.

$$u = C_v \Delta T \quad (3.2)$$

Para modelar o atrito entre o gás e as paredes do duto, o que representa a perda de carga provocada pelo atrito, é utilizada a equação de *Darcy-Weisbach*. Ela relaciona a energia cinética do fluido dividida pelo diâmetro do duto a um fator de atrito chamado de fator de atrito de *Darcy-Weisbach*, que foi correlacionado utilizando dados experimentais e teóricos, sendo amplamente utilizado em projetos de engenharia.

Outra coisa importante é o emprego da equação da conservação da energia escrita utilizando a energia interna, outra alternativa seria o emprego da entalpia através da equação 3.3. Essa escolha é devido a consideração numérica. Mais detalhes sobre o motivo dessa escolha será apresentado na descrição do método numérico.

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial w \rho h}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{f \rho |w^3|}{2D} + w \rho g \quad (3.3)$$

## 3.2 Método numérico

O equacionamento matemático para o escoamento em dutos de gás é descrito por equações de derivadas parciais não-lineares acopladas entre si. Raramente é possível encontrar soluções analíticas para este tipo de sistema de equações, sendo, por isso, adotadas comumente soluções

numéricas para as mesmas. Assim, é implementado neste trabalho um algoritmo para solução deste sistema de equações, no qual foi utilizado o método numérico dos volumes finitos na discretização destas equações, considerando um arranjo desencontrado, e para tratar o acoplamento pressão-velocidade foi empregado o método PRIME descrito por Maliska (2004). Este método, como outros que seguem a mesma linha, é baseado na transformação da equação da conservação da massa em uma equação que tem como incógnita a pressão.

A escolha de um método numérico é um assunto controverso, existindo diversas técnicas disponíveis. Podem ser citadas como as principais técnicas, o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos volumes finitos. Dentre esses métodos, um dos mais utilizados para solução de problemas de escoamento é de volumes finitos devido a sua natureza conservativa e este foi um dos principais motivos para ter sido usada esta técnica neste trabalho. Para mais detalhes sobre o método de volume finitos e suas vantagens na solução de problemas de escoamento pode-se consultar Maliska (2004).

O método dos volumes finitos consiste em dividir o domínio de solução em pequenos volumes discretos, sendo esse conjunto de volumes de controle interconectados, formando uma malha computacional. Para cada um dos volumes, as equações de derivadas parciais são integradas, de forma conservativa, resultando em um balanço da propriedade conservada para cada volume de controle que constitui a malha. Assim, quando os balanços são aplicados a todos os volumes, resulta em um conjunto de equações algébricas. O procedimento de subdividir o domínio em sub-volumes de tal forma a se constituir uma malha pode ser observado em maiores detalhes na figura 3.2 que mostra um duto esquemático sendo sub-dividido em volumes para a conservação de uma propriedade genérica  $\Phi$ . Na parte inferior da imagem aparecem as letras maiúsculas  $P$ ,  $S$ ,  $N$ .  $P$  representa o nó onde é armazenada a variável para o volume onde é realizado o balanço.  $S$  é o volume abaixo deste e  $N$  o volume acima. Também, aparecem as letras minúsculas  $s$  e  $n$ , sendo que  $s$  representa a propriedade na superfície inferior do volume estudado  $P$  e  $n$  a superfície superior. Essa notação será usada para as equações apresentadas no decorrer do trabalho.

Com o domínio fluido subdividido através de uma malha, escreve-se o conjunto de equações algébricas, sendo necessário, para algumas variáveis, calcular o seu valor e de suas derivadas em pontos onde eles são desconhecidos. Para isso, são utilizados funções de interpolação, que expressam as variáveis nestes locais, em função dos seus valores nodais. Essas funções devem ser escolhidas de forma a representar a física da variável a ser avaliada. Uma vez que as equações possuem apenas termos convectivos, a forma mais estável é a interpolação tipo *upwind*. De forma geral, em problemas dominados pela convecção, funções de maior ordem tendem a introduzir oscilações numéricas, instabilizando a solução numérica, ao tempo que, funções de primeira ordem (*upwind*) tendem a introduzir dissipação numérica em regiões com altos gradientes da variável a ser calculada, conforme mostrado por Maliska (2004). Entretanto, uma vez que a demanda computacional do modelo é baixa, por se tratar de um modelo 1D, optou-se por utilizar este tipo de função de interpolação, mais estável, e refinar a malha, quando

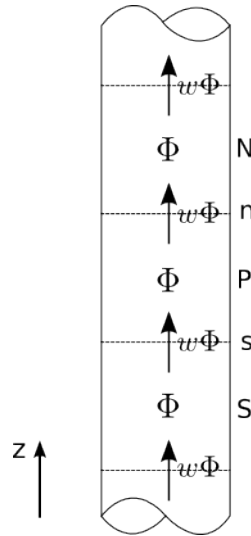


Figura 3.2: Sub-volumes de um duto para uma propriedade genérica  $\Phi$

necessário, para obter melhor representação dos gradientes.

Para analisar os tipos de função de interpolação, será usada a figura 3.3. Esta figura representa um duto com dois valores  $\Phi_P$ , à baixo, e  $\Phi_N$ , à acima, e o valor intermediário, que se deseja calcular através da interpolação,  $\Phi_n$  ou a sua derivada. Ainda foi acrescentada a velocidade,  $w_n$ , que será utilizada na interpolação UDS. Esse mesmo tipo de procedimento pode ser desenvolvido com facilidade para a fronteira  $\Phi_s$ .

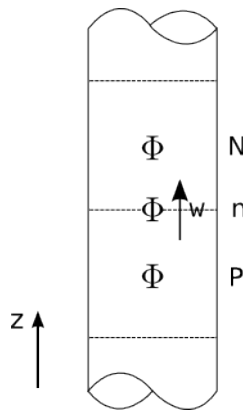


Figura 3.3: Interpolação

O método CDS, também conhecido como interpolação linear, calcula o valor intermediário  $\Phi_n$  através da equação 3.4 e para a derivada em relação a  $z$  através da equação 3.5

$$\Phi_n = \frac{\Phi_P + \Phi_N}{2} \quad (3.4)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_n = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta z} \quad (3.5)$$

Como salientado, o método UDS consiste em um método especial para termos que são ad-

vectivos, que são aqueles em que a propriedade é transportada exclusivamente pelo movimento do fluido, diminuindo possíveis oscilações numéricas. Ele é baseado no transporte de certa variável pelo  $w$  intermediário. Se o valor de  $w$  é positivo  $\Phi_n$  é igual a  $\Phi_P$  se for negativo é igual a  $\Phi_N$ . Isso pode ser expresso de forma matemática através da equação 3.6.

$$\xi = \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{se } w \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } w < 0 \end{cases}$$

$$\Phi_n = \Phi_P \left( \frac{1}{2} + \xi \right) + \Phi_N \left( \frac{1}{2} - \xi \right) \quad (3.6)$$

De posse das equações algébricas, é possível selecionar uma das variáveis como incógnita, sendo necessário, antes disso, a linearização do sistema. Sendo a variável tratada como incógnita,  $\phi$ , e o problema assumido como unidimensional, gera-se uma matriz tri-diagonal  $A$ , que pode ser escrita através dos vetores  $A_S$ ,  $A_P$  e  $A_N$  e um vetor  $B$  que se relacionam através da equação 3.7.

$$\begin{pmatrix} A_P & A_N & 0 & \cdots & 0 \\ A_S & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & A_N \\ 0 & \cdots & 0 & A_S & A_P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ B \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

O escoamento compressível em dutos transiente é descrito por um conjunto de incógnitas que devem ser determinadas pelo sistema de equações 3.1 que estão fisicamente acopladas pela pressão e massa específica. Para tratar esse acoplamento é utilizada uma malha desencontrada e o método PRIME, conforme apresentado por Maliska (2004).

Um arranjo desencontrado foi escolhido, pelo fato de facilitar o tratamento do acoplamento entre a velocidade e a pressão. Arranjos co-localizado facilitam a indexação do volumes de controle, principalmente em problemas tridimensionais com geometrias complexas, onde são utilizadas coordenadas generalizadas, para as quais implementação computacional torna-se extremamente complexa, quando utilizadas malhas desencontradas (Marchi & Maliska (1994)). Entretanto, em problemas 1D, onde a indexação é simples, este tipo de arranjo é o mais indicado, pois trata naturalmente o acoplamento entre os balanços de massa e quantidade de movimento, a partir do qual é determinado o campo de pressões. Este arranjo considera que as velocidades são armazenadas nas faces dos volumes de controle e as variáveis escalares, como pressão, temperatura e massa específica nos centros destes. Assim, as equações de conservação são integradas em duas malhas diferentes uma para a variável vetorial, a velocidade  $w$ , e outra

para as variáveis escalares, a pressão  $p$ , a densidade  $\rho$  e a temperatura  $T$ . Através da figura 3.4, é possível observar um esquema de como as duas malhas coexistem, sendo os valores vetoriais representados por setas e os escalares por círculos. Esse esquema foi escolhido devido a maior facilidade com que é representado o gradiente de pressão na equação da quantidade de movimento. Para maiores discussões sobre a diferença de arranjo desencontrado e colocalizado, que consiste da integração em apenas em um único tipo de volume de controle, pode-se consultar Marchi & Maliska (1994)

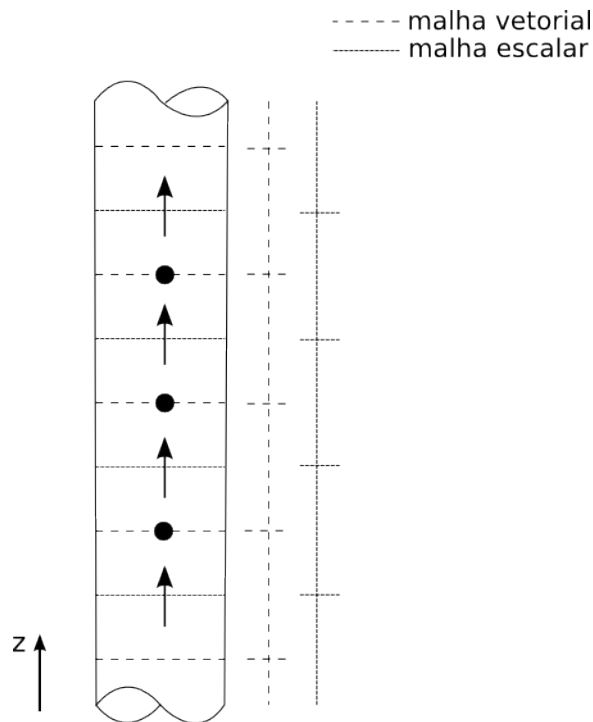


Figura 3.4: Arranjo desencontrado

O acoplamento da velocidade e da densidade com a pressão é uma dificuldade na resolução numérica das equações governantes do escoamento. Para superar este problema, foi empregado o método PRIME. Este método consiste de um algoritmo iterativo baseado em uma equação para a pressão resolvida de forma implícita e em equações de correção para a velocidade e densidade que, na realidade, consistem, respectivamente, nas equações discretizadas da quantidade de movimento, que é resolvida de forma explícita e da equação de estado, que calcula os valores de massa específica a partir dos valores de pressão e temperatura, obtidas das equações de conservação da massa e energia. Este algoritmo é constituído de várias etapas descritas através de um fluxograma mostrado na figura 3.5. Estas etapas são,

1. Ler os dados referentes ao estado inicial do sistema, dados geométricos do duto, condições de contorno, propriedades do fluido e parâmetros de malha de discretização;
2. Estes dados iniciais são definidos como as variáveis da solução no primeiro instante de tempo calculado  $\Delta t$ ;

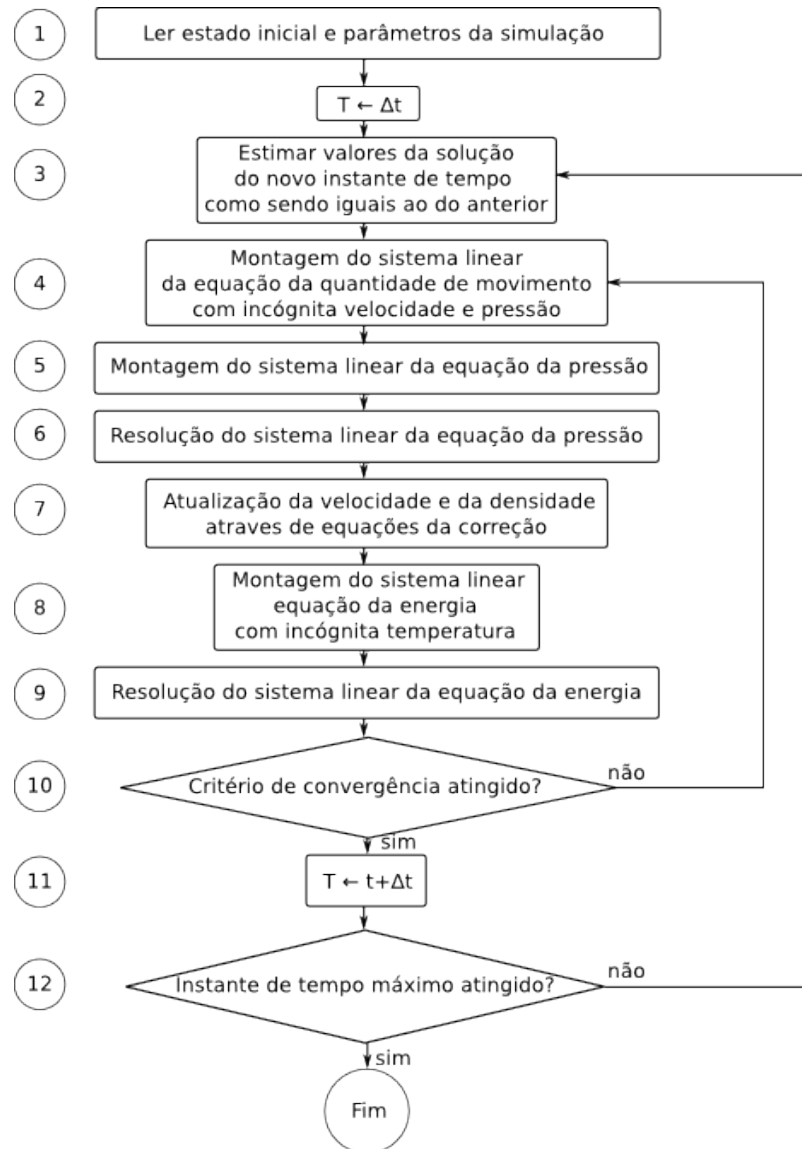


Figura 3.5: Fluxograma de solução algoritmo PRIME

3. Estimar a primeira solução da iteração como sendo igual ao instante anterior. Essa estimativa é muito importante para calcular os sistemas lineares das equações;
4. Calcular o sistema linear referente a quantidade de movimento discretizada utilizando volumes finitos, tendo como incógnita  $w$  e  $p$ , de acordo com as equações apresentadas na seção 3.2.2. Esse sistema linear não é resolvido, ele é utilizado para a montagem da equação da pressão e como equação de correção da velocidade;
5. O sistema linear referente a equação da pressão é montado. Na realidade, esse sistema é a equação da conservação da massa discretizada utilizando volumes finitos, conforme pode ser visto na dedução apresentada na seção 3.2.1 utilizando as incógnitas  $w$  e  $p$ , rescritas na forma de pressão com a equação discretizada da quantidade de movimento e a equação de estado, conforme é apresentado na seção 3.2.3;
6. O sistema linear da pressão é resolvido, resultando em uma nova solução para o campo de



pressão;

7. O valor da velocidade e da densidade é calculado utilizando para isso a equação discretizada da quantidade de movimento e equação de estado, sendo a última linearizada;
8. Montagem do sistema linear da equação da energia discretizado utilizando volumes finitos;
9. Resolução do sistema linear obtendo um novo campo de temperatura;
10. O campo de velocidade é testado para observar se está convergido, se tiver, passa-se para o item 11, se não tiver, o problema passa por uma nova iteração voltando para a etapa 4;
11. É testado se a solução já atingiu o regime permanente (ou o tempo total de simulação determinado pelo usuário). Se não, um novo instante de tempo é calculado, voltando para a etapa 3. Se sim, o algoritmo é concluído.

De posse de todas as técnicas para ser desenvolvido um método numérico para a resolução do modelo, falta deduzir as equações discretizadas utilizando o método dos volumes finitos. Elas serão apresentadas na seguinte ordem:

1. Discretização da equação da conservação da massa tendo como incógnitas os campos de velocidade e de densidade;
2. Discretização da equação da quantidade de movimento com incógnitas velocidade e pressão;
3. Obtenção de uma equação para o campo de pressões a partir da equação das equações discretizadas da conservação da massa e quantidade de movimento e a equação de estado;
4. Discretização da equação da conservação da energia para obtenção do campo de temperaturas.

Uma vez que se trata de um sistema de equações diferenciais que será resolvido em forma segregada e, sendo ainda, a equação da conservação da quantidade de movimento não linear, serão necessários vários processos iterativos, onde, para cada passo de tempo, serão necessários passos iterativos internos para resolver os acoplamentos entre as equações e as não linearidades. Assim, serão utilizados os sobrescritos  $*$  e  $^0$  para a dedução destas equações sendo,

\* Para a variável na interação anterior

$^0$  Para a variável no instante de tempo anterior

### 3.2.1 Discretização da equação da conservação da massa

Integrando no volume e no tempo a equação da conservação da massa, equação 3.1a, utilizando os volumes da malha escalar apresentados de forma esquemática na figura 3.6, é obtida a equação,

$$\frac{1}{\Delta t} (\Delta z p|_P - \Delta z p|_P^0) + (\rho w|_n - \rho w|_s) = 0 \quad (3.8)$$

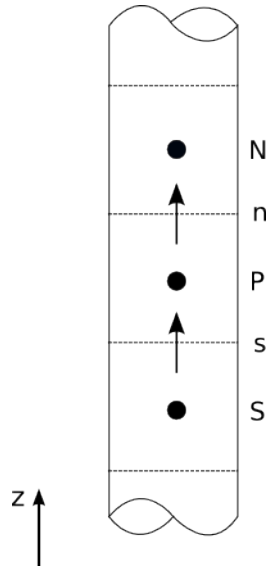


Figura 3.6: Malha escalar

Conforme foi dito anteriormente, em se tratando de um problema de escoamento compressível, esta equação tem como incógnitas, tanto  $\rho$  quanto  $w$  e, uma vez que estas incógnitas aparecem multiplicadas na equação discretizada, é utilizada a linearização descrita pela equação 3.9. Esta equação é descrita para a face norte, podendo ser deduzida de forma análoga para a face sul do volume de controle.

$$\rho w|_n = \rho^* w|_n + \rho w^*|_n - \rho^* w^*|_n \quad (3.9)$$

Aplicando esta linearização na equação 3.8 têm-se,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\Delta z \rho|_P - \Delta z \rho|_P^0) + \\ & + (\rho^* w|_n + \rho w^*|_n - \rho^* w^*|_n) - \\ & - (\rho^* w|_s + \rho w^*|_s - \rho^* w^*|_s) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aplicando uma interpolação UDS para as densidades,  $\rho_n$  e  $\rho_s$ , que é fisicamente consistente, uma vez que se trata de uma equação hiperbólica, e considerando a equação da conservação da massa como uma equação de transporte para a densidade, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} (\Delta z \Pi|_P \rho_P - \Delta z \rho|_P^0) + \\
& + \left( \rho^*|_n w_n + w^*|_n \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) \rho_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) \rho_P \right) - \rho^* w^*|_n \right) - \\
& - \left( \rho^*|_s w_s + w^*|_s \left( \left( \frac{1}{2} + \xi_s \right) \rho_S + \left( \frac{1}{2} - \xi_s \right) \rho_P \right) - \rho^* w^*|_s \right) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Que também pode ser escrito da seguinte forma,

$$m_P^{\rho} \rho_P + m_n^{\rho} \rho_N + m_s^{\rho} \rho_S + m_n^w w_n + m_s^w w_s = b \tag{3.12}$$

Sendo  $m_P^{\rho}$ ,  $m_n^{\rho}$ ,  $m_s^{\rho}$ ,  $m_n^w$ ,  $m_s^w$  e  $b$

$$\begin{aligned}
m_P^{\rho} &= \frac{1}{\Delta t} (\Delta z|_P) + w^*|_n \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) - w^*|_s \left( \frac{1}{2} - \xi_s \right) \\
m_n^{\rho} &= +w^*|_n \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) \\
m_s^{\rho} &= -w^*|_s \left( \frac{1}{2} + \xi_s \right) \\
m_n^w &= +\rho^*|_n \\
m_s^w &= -\rho^*|_s \\
b &= \Delta z \rho|_P^0 + \rho^* w^*|_n - \rho^* w^*|_s
\end{aligned}$$

### 3.2.2 Discretização da equação da conservação da quantidade de movimento

Integrando a equação da conservação da quantidade de movimento, Eq. 3.1b, considerando a malha mostrada na figura 3.7, resulta em,

$$\frac{1}{\Delta t} (\Delta z \rho w|_P - \Delta z \rho w|_P^0) + (\rho w w|_n - \rho w w|_s) = -\frac{\partial p}{\partial z} \Delta z - \frac{f \rho w^2}{2D} \Delta z - \rho g \Delta z \tag{3.13}$$

No entanto, na equação 3.13, não basta apenas a realização das interpolações necessárias para gerar o sistema linear. É necessário o tratamento da não-linearidades acrescentadas pelo termo advectivo  $w^2$  e a introduzida pelo termo responsável por modelar o atrito, a equação de Darcy-Weisbach, onde este é função de  $w^2$ , podendo introduzir instabilidades na solução numérica, se tratado em forma totalmente explícita (Patankar (1980)).

Para tratar o problema relacionado a não linearidade do termo  $w^2$ , uma das velocidades é

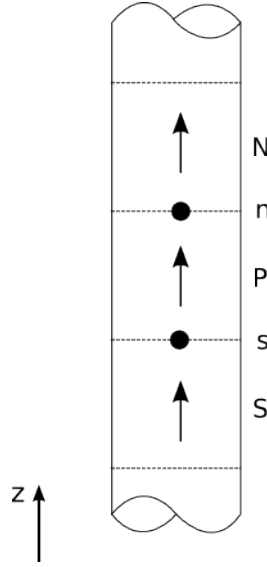


Figura 3.7: Malha utilizada para a equação da conservação da quantidade de movimento

explicitada, ou seja, é utilizado o valor da interação anterior  $w^*$ , isso não traz grandes problemas para a estabilidade da solução.

Para tratar o problema de termo fontes medidas menos diretas são necessárias, pois conforme é mostrado na literatura por Patankar (1980), uma linearização direta instabiliza a solução. Desta forma, é necessário um tratamento mais adequado do termo fonte, quando este tem uma variação não linear com a variável a ser resolvida. A proposta para este tratamento, apresentada em Patankar (1980) para a linearização, é conseguida pela expansão em série de Taylor do termo fonte, em função da variável principal da equação, considerando apenas o primeiro termo que resulta na equação 3.14

$$\left. \frac{f\rho w^2}{2D} \right|_P = \left. \frac{f\rho w^2}{2D} \right|_P^* + \left. \frac{f\rho w}{D} \right|_P^* (w_P - w_P^*) \quad (3.14)$$

Utilizando esses tratamentos e as interpolações,

- CDS para  $w_n^*$  e  $w_s^*$
- UDS para  $\rho_P^*$ ,  $w_n$  e  $w_s$
- CDS para  $\frac{\partial p}{\partial z}$

tem-se,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta z |_P \left( \left( \frac{1}{2} + \xi_P \right) \rho_s^* + \left( \frac{1}{2} - \xi_P \right) \rho_n^* \right) w_P - \Delta z \rho w |_P^0 \right) \\
& + \rho^* |_n \left( \frac{w_P^* + w_N^*}{2} \right) \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) w_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) w_P \right) \\
& - \rho^* |_s \left( \frac{w_P^* + w_S^*}{2} \right) \left( \left( \frac{1}{2} + \xi_s \right) w_S + \left( \frac{1}{2} - \xi_s \right) w_P \right) \\
& = - (p_n - p_s) - \left( \frac{f \rho w^2}{2D} \Big|_P^* + \frac{f \rho w}{D} \Big|_P^* (w_P - w_P^*) \right) - \rho g \Delta z
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Que pode ser escrito como

$$A_P^w w_P + A_N^w w_N + A_S^w w_S = B^w - (p_n - p_s) \tag{3.16}$$

Sendo  $A_P^w, A_N^w, A_S^w$  e  $B^w$

$$\begin{aligned}
A_P^w &= \frac{\Delta z}{\Delta t} |_P \left( \left( \frac{1}{2} + \xi_P \right) \rho_s^* + \left( \frac{1}{2} - \xi_P \right) \rho_n^* \right) + \\
&+ \rho |_n \left( \frac{w_P^* + w_N^*}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) - \rho |_s \left( \frac{w_P^* + w_S^*}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - \xi_s \right) + \frac{f \rho w}{D} \Big|_P^* \\
A_N^w &= + \rho |_n \left( \frac{w_P^* + w_N^*}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) \\
A_S^w &= - \rho |_s \left( \frac{w_P^* + w_S^*}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + \xi_s \right) \\
B^w &= \frac{\Delta z}{\Delta t} \rho w |_P^0 + \frac{f \rho w^2}{2D} \Big|_P^* - \rho g \Delta z
\end{aligned}$$

### 3.2.3 Obtenção de uma equação para o campo de pressões e linearização da equação de estado

A partir da equação discretizada da conservação da massa descrita na seção 3.2.1, pode ser obtida uma equação para a pressão, sendo substituídas a velocidade  $w$  e a densidade  $\rho$  por equações que relacionem estas variáveis com a pressão.

Para a velocidade é utilizada a equação discretizada da quantidade de movimento descrita na seção de numero 3.2.2 utilizando o equacionamento 3.16 sendo isolado  $w_P$  conforme a equação 3.17.

$$w_P = \frac{-A_N^w w_N - A_S^w w_S + B^w - (p_n - p_s)}{A_P^w} \tag{3.17}$$

Com intenção de simplificar a notação é usado  $\hat{w}$  e  $d$ . Esses termos são definidos na equação 3.18

$$\begin{aligned}\hat{w}_P &= \frac{-A_N^w w_N - A_S^w w_S + B^w}{A_P^w} \\ d_P &= \frac{1}{A_P^w}\end{aligned}\quad (3.18)$$

Rescrevendo a equação 3.17 com a nova notação obtemos a equação 3.19.

$$w_P = \hat{w}_P - d_P (p_n - p_s) \quad (3.19)$$

Para a densidade é utilizada a equação de estado de gás reorganizada na forma mostrada na Eq. 3.20

$$\rho_P = \frac{p_P}{RT_P} \quad (3.20)$$

Rescrevendo a equação 3.12 descrita na seção 3.2.1, sendo a velocidade  $w$  substituída por 3.19 e a densidade por 3.20 é obtida a equação da pressão como,

$$m_P^p \frac{p_P}{RT_P^*} + m_n^p \frac{p_N}{RT_N^*} + m_s^p \frac{p_S}{RT_S^*} + m_n^w (\hat{w}_n - d_n (p_N - p_P)) + m_s^w (\hat{w}_s - d_n (p_P - p_S)) = b \quad (3.21)$$

Esta equação pode ser reescrita

$$A_P^p p_P + A_N^p p_N + A_S^p p_S = B^p \quad (3.22)$$

sendo,

$$\begin{aligned}A_P^p &= m_P^p \frac{p_P}{RT_P^*} + m_n^w d_n - m_s^w d_s \\ A_N^p &= m_n^p \frac{p_N}{RT_N^*} - m_n^w d_n \\ A_S^p &= m_s^p \frac{p_S}{RT_S^*} + m_s^w d_s \\ B^p &= b - m_n^w \hat{w}_n - m_s^w \hat{w}_s\end{aligned}$$

Ainda é necessário que seja apresentada a equação de estado linearizada. Essa etapa é fundamental para ter um algoritmo que seja estável o suficiente para obter a solução de natureza transiente.

A linearização se dá com a aplicação da série de Taylor no termo  $p$  utilizando apenas o primeiro termo e ignorando o resto o que resulta na equação 3.23

$$\left. \frac{p}{RT} \right|_P = \left. \frac{p}{RT} \right|_P^* + \left. \frac{1}{RT} \right|_P^* (p_P - p_P^*) \quad (3.23)$$

### 3.2.4 Discretização da equação de conservação da energia

A equação da conservação da energia Eq. 3.1c é integrada para um volume de controle da malha onde são armazenadas as variáveis escalares, obtendo,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta t} (\rho u|_P - \rho u|_P^0) + w \rho u|_n - w \rho u|_s = \\ - p \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{f \rho_P |w_P^3|}{2D} + w_P \rho_P g \end{aligned}$$

Isolando para a incógnita  $u$  e aplicando as interpolações:

- CDS para a velocidade  $w^*$
- UDS para a densidade  $\rho^*$
- UDS para a entalpia  $u$
- CDS para  $\frac{\partial w}{\partial z}$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta t} (\rho u|_P - \rho u|_P^0) + w \rho|_n^* \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) u_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) u_P \right) - \\ - w \rho|_s^* \left( \left( \frac{1}{2} + \xi_s \right) u_S + \left( \frac{1}{2} - \xi_s \right) u_P \right) = \\ = - p_P (w_n - w_s) \Delta z|_* + \left. \frac{f \rho_P |w_P^3|}{2D} \right|_* + w_P \rho_P g|_* \end{aligned}$$

Que pode ser escrito como

$$A_P u_P + A_N u_N + A_S u_S = B$$

Sendo,

$$\begin{aligned}
A_P &= \frac{\Delta z}{\Delta t} (\rho|_P^*) + w\rho|_n^* \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) - w\rho|_s^* \left( \frac{1}{2} - \xi_s \right) \\
A_N &= w\rho|_n^* \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) \\
A_S &= -w\rho|_s^* \left( \frac{1}{2} + \xi_s \right) \\
B &= \frac{\Delta z}{\Delta t} (\rho u|_P^0) - p_P(w_n - w_s)\Delta z|_* + \frac{f\rho_P|w_P^3|}{2D} \Big|_* + w_P\rho_P g|_*
\end{aligned}$$

Conforme descrito na seção referente a modelagem matemática, outra formulação, baseada na entalpia também é possível. No entanto para a discretização do termo  $w \frac{\partial p}{\partial z}$  será necessário calcular as pressão nas faces dos volumes e elas não estão disponíveis. Assim esta pressão deverá ser interpolada, resultando em uma derivada calculada sem envolver o ponto onde esta sendo realizado o balanço, o que introduz conhecidas instabilidades numéricas. Assim, devido ao arranjo escolhido para as variáveis na malha, observou-se que esta forma da equação da energia se apresenta como a melhor opção.

### 3.2.5 Condições de contorno

O escoamento em uma coluna de produção é finito e é necessário a definição de condições de contorno nas fronteiras do domínio do escoamento. Neste trabalho foram implementados os seguintes tipos de condição de contorno, tanto na entrada quanto na saída do domínio

- Condição de pressão prescrita;
- Condição de vazão mássica prescrita;
- Condição de velocidade prescrita.

Estas condições de contorno foram implementadas para generalizar o modelo para o escoamento de gás em uma coluna de produção e para realização de testes para validar o código computacional. Entretanto, como será visto, apenas a condição de velocidade prescrita na saída e pressão prescrita na entrada serão utilizadas na implementação do modelo para o *Plunger Lift*,

Nesta seção, será mostrado como essas condições de contorno são incorporadas ao método numérico e consequentemente ao código computacional. Para isso, serão apresentadas as várias considerações que foram feitas e as deduções das equações discretizadas para os volumes nas fronteiras do domínio para cada tipo de condição de contorno.

A primeira consideração que deve ser feita é com relação a configuração da malha. Conforme foi antes definido, o arranjo de malha empregado para a discretização é desencontrado. Esse fato gera a necessidade de o emprego de meios volumes para uma das malhas na fronteira.



Foi definido que a malha que terá esse meios volumes será a malha vetorial. Essa configuração de malha pode ser observada para a fronteira sul através da figura 3.8, sendo de modo análogo para o norte.

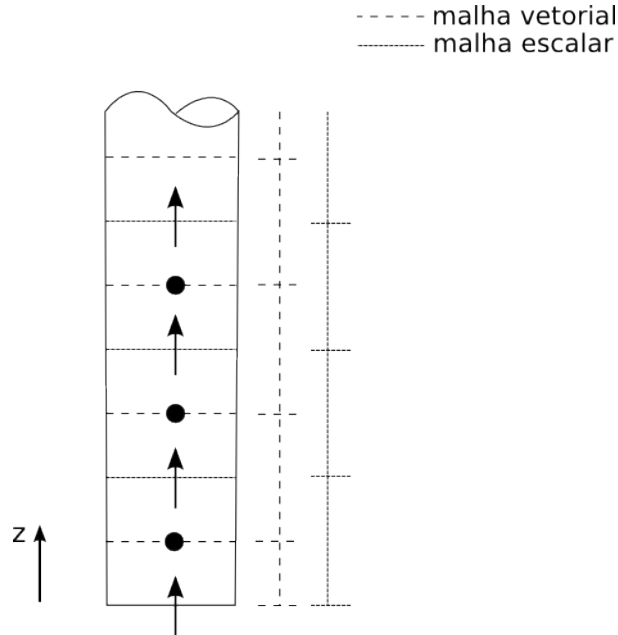


Figura 3.8: Malha condição de contorno

Outro conceito fundamental para a dedução das equações discretizadas para os volumes nas fronteiras e o conceito de escoamento localmente parabólico. Esse conceito é muito importante para a definição das condições de contorno. Ele define que o perfil de velocidade não se altera em certo espaço, ou seja o escoamento é plenamente desenvolvido nesta região. Isso pode ser descrito matematicamente através da equação 3.24.

$$\frac{dw}{dz} = 0 \quad (3.24)$$

Esse conceito é utilizado para definir condições de contorno de entrada e saída de massa.

Com estes conceitos serão deduzidas as equações discretizadas para as condições definidas. No entanto, será apresentado apenas para a fronteira sul devido ao fato de poder-se fazer de forma análoga para o norte. Seguido a seguinte ordem de dedução:

- Equação da conservação da quantidade de movimento;
- Obtenção de uma equação para a pressão, lembrando que esta é obtida a partir da conservação da massa;
- Equação da conservação da Energia.

Também serão distinguidas as condições de entrada de massa e de saída de massa. Esse fato é muito importante, devido ao fato de se for de entrada será necessário conhecer a temperatura e a densidade, pois elas estão vindo de fora do domínio, se for de saída, essas informações

já são conhecidas pois vem de dentro do domínio. Isso influencia a dedução das equações discretizadas.

### Condição de pressão prescrita com entrada de massa

Neste caso a pressão na fronteira do domínio do escoamento é conhecida ( $p_f$ ), também como se trata de uma condição de entrada de massa deve ser conhecido a densidade e a temperatura da massa que estão entrando ( $\rho_f, T_f$ ).

### Equação da quantidade de movimento

A malha para a discretização da quantidade de movimento para essa condição de contorno fica conforme a figura 3.2.5. Conforme pode ser visto, a variável de velocidade que transporta a quantidade de movimento se confunde com a própria velocidade que se deseja calcular do meio volume. Isso é o que caracteriza uma condição de localmente parabólico, ou seja  $w_f = w_p$ .

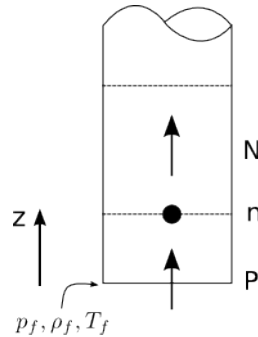


Figura 3.9: Malha vetorial para pressão prescrita com entrada de massa

Aplicando esse conceito a discretização da quantidade de movimento do meio volume se chega:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\Delta z |_P \rho_f w_P - \Delta z \rho w|_P^0) \\ & + \rho^*|_n \left( \frac{w_P^* + w_N^*}{2} \right) \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) w_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) w_P \right) \\ & - \rho_f w_P^* w_P \\ & = - (p_n - p_f) - \left( \frac{f w^2}{2D} \Big|_P^* + \frac{f w}{D} \Big|_P^* (w_P - w_P^*) \right) - \rho g \Delta z \end{aligned}$$

### Equação da pressão

Devido a densidade na fronteira ( $\rho_f$ ) ser conhecida não é necessário fazer a linearização para o fluxo de massa para o primeiro volume da malha escalar, conforme pode-se observar na figura 3.10

Aplicando nas equações discretizadas da pressão chega-se:

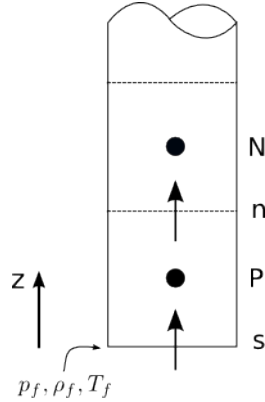


Figura 3.10: Malha escalar condição de contorno de pressão com entrada de massa

$$m_P^p \frac{p_P}{RT_P^*} + m_n^p \frac{p_N}{RT_N^*} + m_n^w (\hat{w}_n - d_n(p_N - p_P)) + m_s^w (\hat{w}_s - d_s(p_P - p_f)) = b \quad (3.25)$$

sendo,

$$\begin{aligned} m_s^w &= \rho_f \\ \hat{w}_s &= \frac{-A_{N,s}^w w_{N,s} + B_s^w}{A_{P,s}^w} \\ d_s &= \frac{1}{A_{P,s}^w} \end{aligned}$$

### Equação da conservação da energia

Como se conhece a temperatura na fronteira ( $T_f$ ) não há necessidade de interpolar a temperatura em  $s$ . Isso provoca com que a equação discretizada fique para o primeiro volume:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta t} (\rho u|_P - \rho u|_P^0) + w \rho|_n^* \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) u_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) u_P \right) - \\ - w|_s^* \rho_f u_f = \\ = - p_P (w_n - w_s) \Delta z|_* + \frac{f \rho_P |w_P^3|}{2D} \Big|_* + w_P \rho_P g|_* \end{aligned}$$

### Condição de pressão prescrita com saída de massa

A pressão também é definida na fronteira através de  $p_f$ , mas como a condição é de saída de massa não se conhecem a temperatura ( $T_f$ ) e densidade ( $\rho_f$ ) na fronteira. Esses valores são interpolados a partir dos valores internos do domínio, calculados do sistema linear.

### Equação da quantidade de movimento

Sendo aplicando o mesmo tipo de procedimento do aplicado para condição de pressão prescrita com entrada de massa, mas agora levando em conta a interpolação em  $f$  da densidade, conforme pode-se observar na figura 3.11. Essa interpolação da densidade deve ser feita com UDS ou seja  $\rho_f = \rho_P$

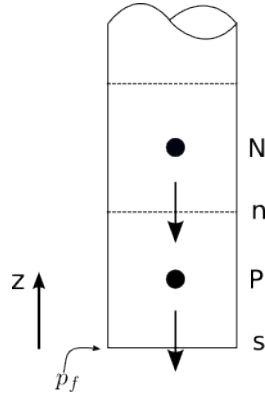


Figura 3.11: Malha vetorial para pressão prescrita com saída de massa

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} (\Delta z |_P \rho_n^* w_P - \Delta z \rho w|_P^0) \\
 & + \rho^* |_n \left( \frac{w_P^* + w_N^*}{2} \right) \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) w_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) w_P \right) \\
 & - \rho_n^* w_P^* w_P \\
 & = - (p_n - p_f) - \left( \frac{f w^2}{2D} \right)_P^* + \frac{f w}{D} |_P^* (w_P - w_P^*) - \rho g \Delta z
 \end{aligned}$$

### Equação da pressão

Da mesma forma da equação discretizada para a pressão com entrada de massa não é necessário fazer a linearização do fluxo de massa no sul, mas dessa vez é necessário interpolar a densidade na fronteira. Essa interpolação é feita da mesma forma que para a equação discretizada da quantidade de movimento. Utilizando UDS, ou seja  $\rho_f = \rho_n$ . A forma que a malha toma é apresentada de forma gráfica pela figura 3.12

Aplicando nas equações discretizadas da pressão chega-se:

(3.26)

sendo,

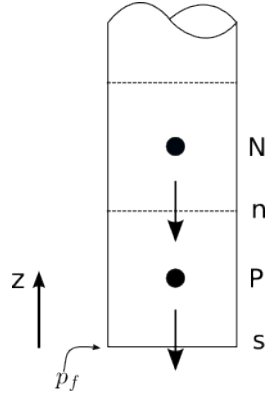


Figura 3.12: Malha escalar condição de contorno de pressão com saída de massa

$$m_s^w = \rho_n^*$$

$$\hat{w}_s = \frac{-A_{N,s}^w w_{N,s} + B_s^w}{A_{P,s}^w}$$

$$d_s = \frac{1}{A_{P,s}^w}$$

### Equação da conservação da energia

Da mesma forma que para pressão prescrita, mas agora interpolando temperatura e densidade com UDS, ou seja  $\rho_f = \rho_P^*$  e  $T_f = T_P^*$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta z}{\Delta t} (\rho u|_P - \rho u|_P^0) + w \rho|_n^* \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) u_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) u_P \right) - \\ & - w|_s^* \rho_P^* u_P^* = \\ & = -p_P (w_n - w_s) \Delta z|_* + \frac{f \rho_P |w_P^3|}{2D} \Big|_* + w_P \rho_P g|_* \end{aligned}$$

### Condição de vazão mássica prescrita com entrada de massa

Para esse tipo de condição de contorno o fluxo de massa é conhecido ( $\dot{m}_f$ ), ou seja não se conhecem a velocidade e densidade mas o seu produto, e para escoamento de entrada de massa também é necessário conhecer a temperatura do fluido que está entrando ( $T_f$ ).

### Equação da quantidade de movimento

A configuração de malha vetorial para esse tipo de condição de contorno pode ser vista de forma gráfica através da figura 3.13, sendo os volumes numerados. Para esse tipo de condição de contorno é preciso utilizar a seguinte estratégia no primeiro volume (meio volume) a velocidade não faz parte do domínio de solução, em lugar disso é aplicado a condição de localmente parabólico. Isso implica que o escoamento passa inalterado pelo primeiro volume. Essa condição pode se desenrolar na seguinte expressão matemática:

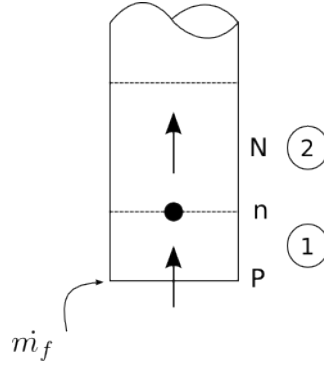


Figura 3.13: Malha vetorial condição de contorno de vazão mássica com saída de massa

$$\dot{m}_f = \rho w|_n \quad (3.27)$$

Isso significa que o fluxo de quantidade de movimento da fronteira sul do segundo volume pode ser calculado através:

$$\rho w w|_s = \dot{m}_f \frac{\dot{m}_f}{\rho_s} \quad (3.28)$$

Para o segundo volume a equação discretizada da quantidade de movimento é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta z|_P \left( \left( \frac{1}{2} + \xi_P \right) \rho_s^* + \left( \frac{1}{2} - \xi_P \right) \rho_n^* \right) w_P - \Delta z \rho w|_P^0 \right) \\ & + \rho^*|_n \left( \frac{w_P^* + w_N^*}{2} \right) \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) w_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) w_P \right) \\ & - \dot{m}_f \frac{\dot{m}_f}{\rho_n} \\ & = - (p_n - p_s) - \left( \frac{f \rho w^2}{2D} \Big|_P^* + \frac{f \rho w}{D} \Big|_P^* (w_P - w_P^*) \right) - \rho g \Delta z \end{aligned} \quad (3.29)$$

### Equação da pressão

A equação da pressão é obtida a partir da equação da conservação da massa, conforme, foi descrito anteriormente, e as condições de contorno devem resultar da aplicação deste princípio de conservação. Ou seja como o fluxo de massa é conhecido ele pode ser substituído diretamente, gerando a equação:

$$m_P^p \frac{p_P}{RT_P^*} + m_n^p \frac{p_N}{RT_N^*} + m_n^w (\hat{w}_n - d_n (p_N - p_P)) - \dot{m}_f = b \quad (3.30)$$

### Equação da conservação da energia

Como a temperatura ( $T_f$ ) e vazão mássica ( $\dot{m}_f$ ) a equação discretizada pode ser obtida diretamente:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta z}{\Delta t} (\rho u|_P - \rho u|_P^0) + w \rho|_n^* \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) u_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) u_P \right) - \\
& - \dot{m}_f u_f = \\
& = - p_P (w_n - w_s) \Delta z|_* + \frac{f \rho_P |w_P^3|}{2D} \Big|_* + w_P \rho_P g|_*
\end{aligned}$$

### Condição de vazão mássica prescrita com saída de massa

A condição de contorno de vazão mássica com saída de massa é semelhante a de entrada, mas agora não se conhece a temperatura ( $T_f$ ), que deve ser interpolada.

### Equação da quantidade de movimento

Aplicando um procedimento análogo a condição de entrada de massa, ou seja, aplicando a condição de localmente parabólico para o primeiro volume (meio volume), sendo agora a malha da configuração representada de forma gráfica 3.14, se chega a equação discretizada para o segundo volume:

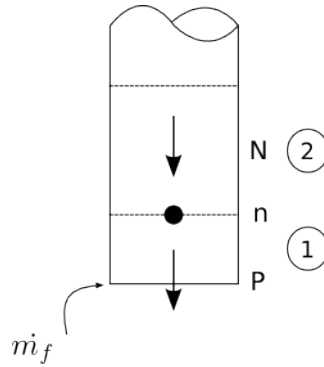


Figura 3.14: Malha vetorial condição de contorno de vazão mássica com saída de massa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta z|_P \left( \left( \frac{1}{2} + \xi_P \right) \rho_s^* + \left( \frac{1}{2} - \xi_P \right) \rho_n^* \right) w_P - \Delta z \rho w|_P^0 \right) \\
& + \rho^*|_n \left( \frac{w_P^* + w_N^*}{2} \right) \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) w_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) w_P \right) \\
& - \dot{m}_f \frac{\dot{m}_f}{\rho_n} \\
& = - (p_n - p_s) - \left( \frac{f \rho w^2}{2D} \Big|_P^* + \frac{f \rho w}{D} \Big|_P^* (w_P - w_P^*) \right) - \rho g \Delta z
\end{aligned} \tag{3.31}$$

### Equação da pressão

Aplicando o mesmo raciocínio que foi usado para a condição de entrada de massa, a equação da pressão fica:

$$m_P^{\rho} \frac{p_P}{RT_P^*} + m_n^{\rho} \frac{p_N}{RT_N^*} + m_n^w (\hat{w}_n - d_n(p_N - p_P)) - \dot{m}_f = b \quad (3.32)$$

### Equação da conservação da energia

Sendo aplicado o mesmo tipo de procedimento do que para entrada de massa, mas agora interpolando a temperatura ( $T_f$ ) se chega a:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta z}{\Delta t} (\rho u|_P - \rho u|_P^0) + w \rho|_n^* \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) u_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) u_P \right) - \\ & - \dot{m}_f u_f = \\ & = -p_P (w_n - w_s) \Delta z|_* + \frac{f \rho_P |w_P^3|}{2D} \Big|_* + w_P \rho_P g|_* \end{aligned}$$

### Condição de contorno de velocidade prescrita

Esse tipo de condição de contorno será a utilizada na interface entre a coluna de produção e o *Plunger*, sendo empregada apenas na fronteira norte. Ela se caracteriza por uma velocidade conhecida ( $w_n$ ) que, como será visto, corresponderá a velocidade ascensional do *Plunger*, sendo consideradas apenas velocidades positivas.

### Equação da conservação da quantidade de movimento

Esse tipo de condição é o mais direto. Sendo necessário substituir a velocidade do meio volume pela velocidade prescrita. Isso pode ilustrado graficamente através da figura 3.15.

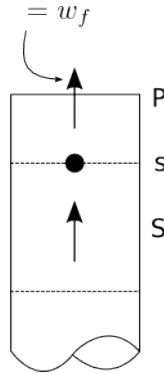


Figura 3.15: Malha vetorial condição de contorno de vazão mássica com saída de massa

### Equação da pressão

Deve ser observado para essa equação a condição de contorno da equação da pressão. Também deve ser interpolado o  $\rho_f$  que através de UDS é  $\rho_f = \rho_P$

Isso resulta na equação,

$$m_P^{\rho} \frac{p_P}{RT_P^*} + m_n^{\rho} \frac{p_N}{RT_N^*} + m_n^w (\hat{w}_n - d_n(p_N - p_P)) - w_f \rho_P = b \quad (3.33)$$

### Equação da conservação energia



Seguindo o mesmo principio de interpolação ela fica no formato:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta z}{\Delta t} (\rho u|_P - \rho u|_P^0) + w \rho|_n^* \left( \left( \frac{1}{2} - \xi_n \right) u_N + \left( \frac{1}{2} + \xi_n \right) u_P \right) - \\ & - w_f \rho_P u_n = \\ & = - p_P (w_n - w_s) \Delta z|_* + \frac{f \rho_P |w_P^3|}{2D} \Big|_* + w_P \rho_P g|_* \end{aligned}$$

---

## Capítulo 4

# Validação do modelo para escoamento de gás

---

Nesse capítulo serão apresentados alguns resultados preliminares obtidos para o escoamento em dutos de gás que tem como intenção validar o código computacional desenvolvido. Para isso, será utilizado o problema transiente conhecido como *Sod shock tube* para validar a capacidade do código de reproduzir problemas transientes e o problema de regime permanente do escoamento de Fanno para validar a capacidade de resolver problema com atrito e entrada e saída de massa.

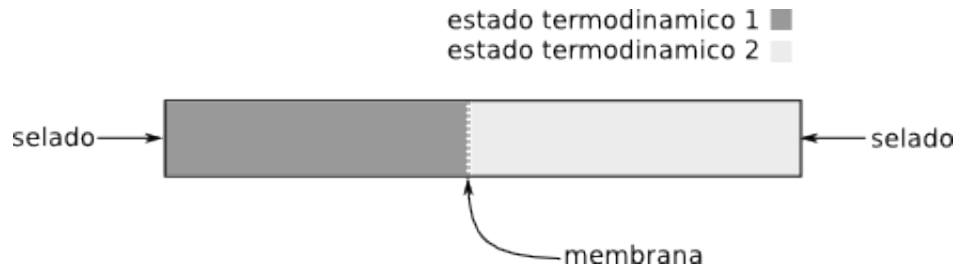
### 4.1 Validação a partir do problema de *Sod shock tube*

Um problema que é padrão para teste de algoritmos para escoamento unidimensional de gás em dutos é o *Sod shock tube*. Este problema foi apresentado pela primeira vez em Sod (1977) e vem sendo utilizado em trabalhos de métodos numéricos, deste tipo de problema, para testar e validar os métodos desenvolvidos. Isso só é possível devido ao fato do problema ter solução analítica exata.

O problema consiste em um duto selado nos dois lados contendo um gás, que se encontra separado por uma membrana em dois estados termodinâmicos diferentes. No início do experimento, essa membrana é rompida, provocando uma onda de rarefação para um lado e uma descontinuidade de contato e uma descontinuidade de choque para outro lado. Para esse problema não são levados em conta os efeitos gravitacionais nem de atrito viscoso com as paredes do duto.

A possibilidade de isolar os efeitos apenas do transporte advectivo sem levar em consideração termos fontes torna esse problema ideal para testar algoritmos desenvolvidos para resolver problemas de escoamentos unidimensionais. Além disso, o transiente é complicado para métodos numéricos, devido as descontinuidades que surgem na solução, dando a capacidade de avaliar a precisão e estabilidade do método.

Para melhor observar como é a configuração inicial do *Sod shock tube*, pode-se observar a figura esquemática de numero 4.1

Figura 4.1: *Sod shock tube* estado inicial

Para o caso estudado, o estado do gás na região à esquerda, dado em unidades adimensionais, é,

- $\rho = 1.0$
- $p = 1.0$
- $w = 0$

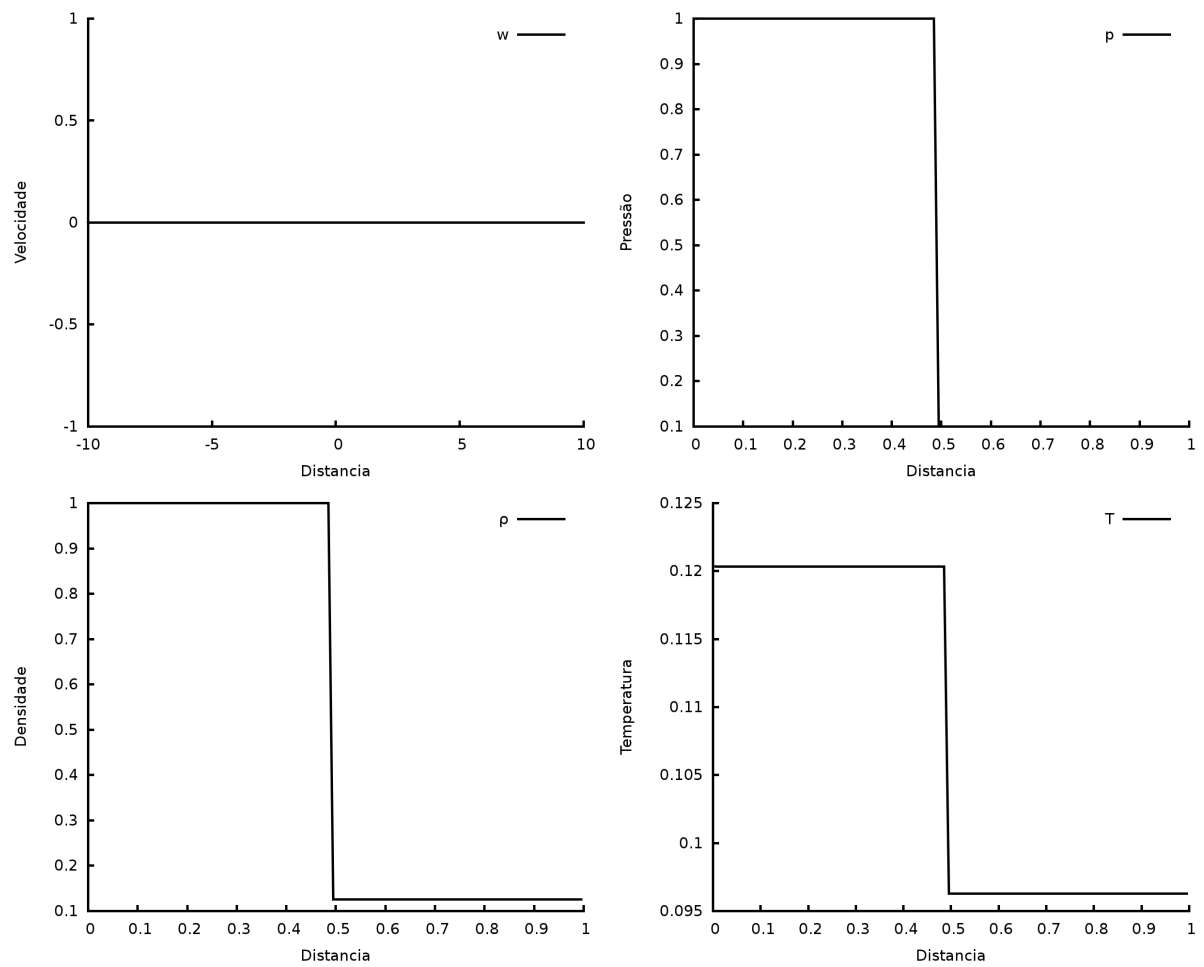
e, para a região da direita do duto,

- $\rho = 0.125$
- $p = 0.1$
- $w = 0$

A configuração inicial do problema é graficamente ilustrado, esquematicamente, na figura 4.2

Foi escolhido para comparação com os resultados numéricos, o instante de tempo de  $t = 0.2$  para o problema pelo fato de as ondas de choque já terem se propagado o suficiente para que sejam bem observadas as características escoamento.

Foi testado o algoritmo considerando malhas de 50, 100 e 500 nós. A solução encontrada é plotada na figuras de numero 4.3, 4.4, 4.5, não é apresentado o resultado relacionado com a temperatura, mas ela pode ser facilmente obtida através da equação de estado.

Figura 4.2: Estado inicial *Sod shock tube*

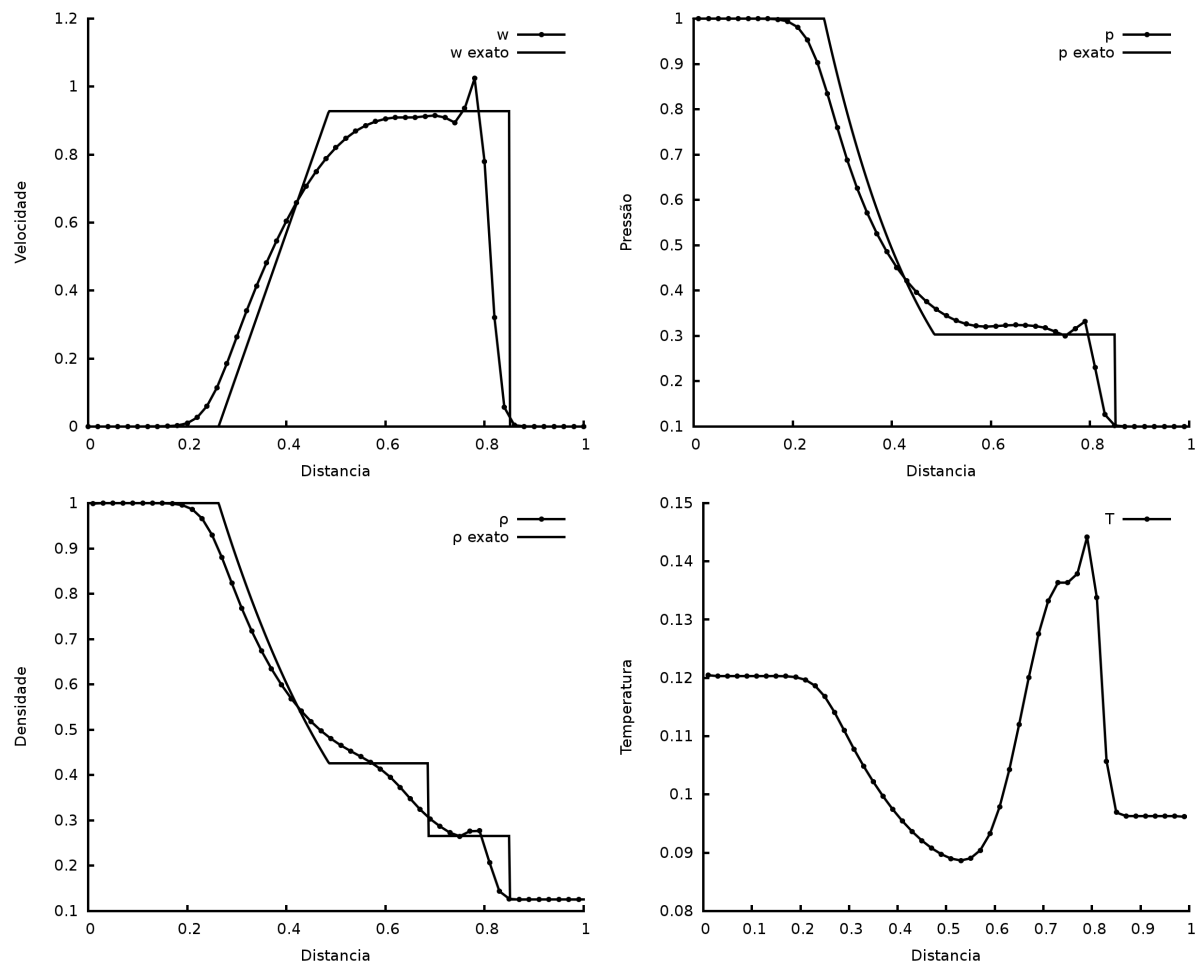


Figura 4.3: Sod shock tube malha de 50 volumes

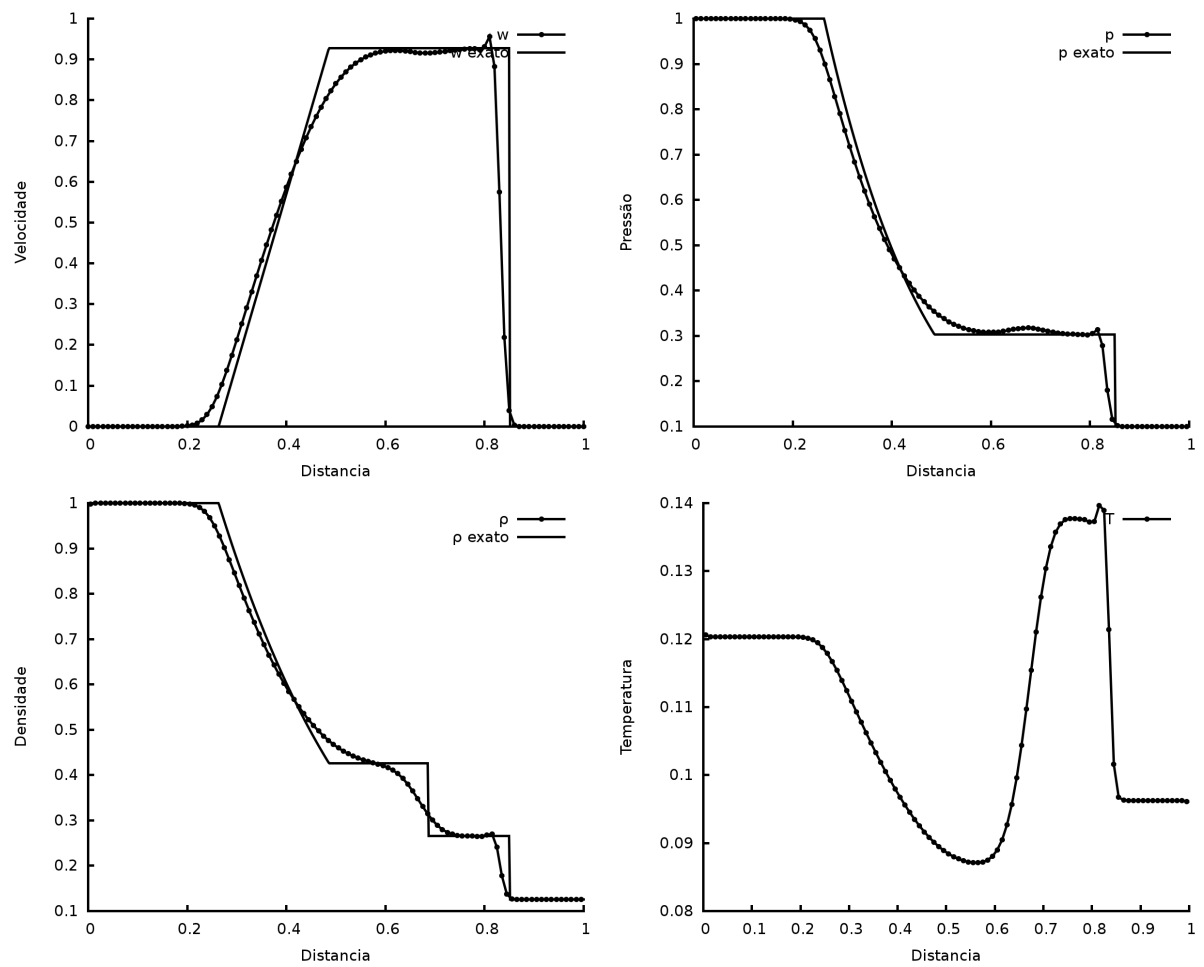


Figura 4.4: Sod shock tube malha de 100 volumes

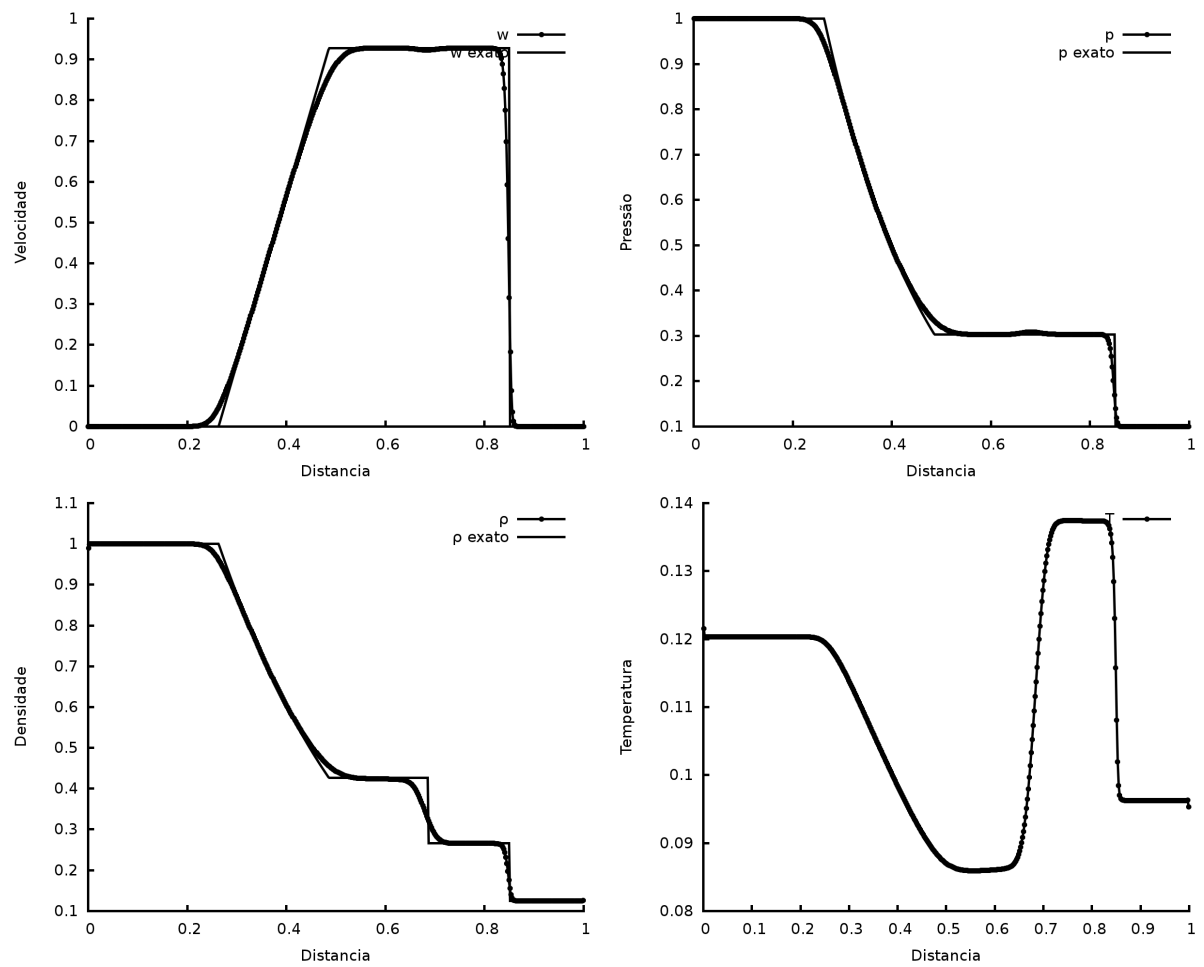


Figura 4.5: Sod shock tube malha de 500 volumes

## 4.2 escoamento de Fanno

Para validar a capacidade do algoritmo desenvolvido de representar o escoamento com atrito e entradas e saídas de massa, foi escolhido o escoamento em regime permanente de Fanno. Esse problema é o escoamento de um gás ideal em um duto de seção constante com as seguintes condições de contorno,

- Na entrada, que se encontra na fronteira Sul, é definida como condição de contorno de pressão prescrita dada por  $p_{fs} = 98,5 \text{ KPa}$  e temperatura de  $T_{fs} = 294 \text{ K}$
- Na saída, que se encontra na fronteira Norte, é definida como condição de vazão mássica da saída sendo assumido que  $\dot{m}_{fn} = 3,08 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$

E as propriedades do duto e do fluidos são,

- Comprimento total da tubulação,  $L = 4,29 \text{ m}$
- Diâmetro da tubulação,  $D = 7,16 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- Fator de atrito,  $f = 0,0237$
- Constante do gás,  $R = 286,7 \text{ Nm/KgK}$
- Calor específico,  $C_p = 1004 \text{ Nm/KgK}$

Foram testados o algoritmo para uma malha de 50, 100 e 500 nós e as soluções encontradas em cada caso são plotadas, respectivamente, na figuras 4.6, 4.7 e 4.8



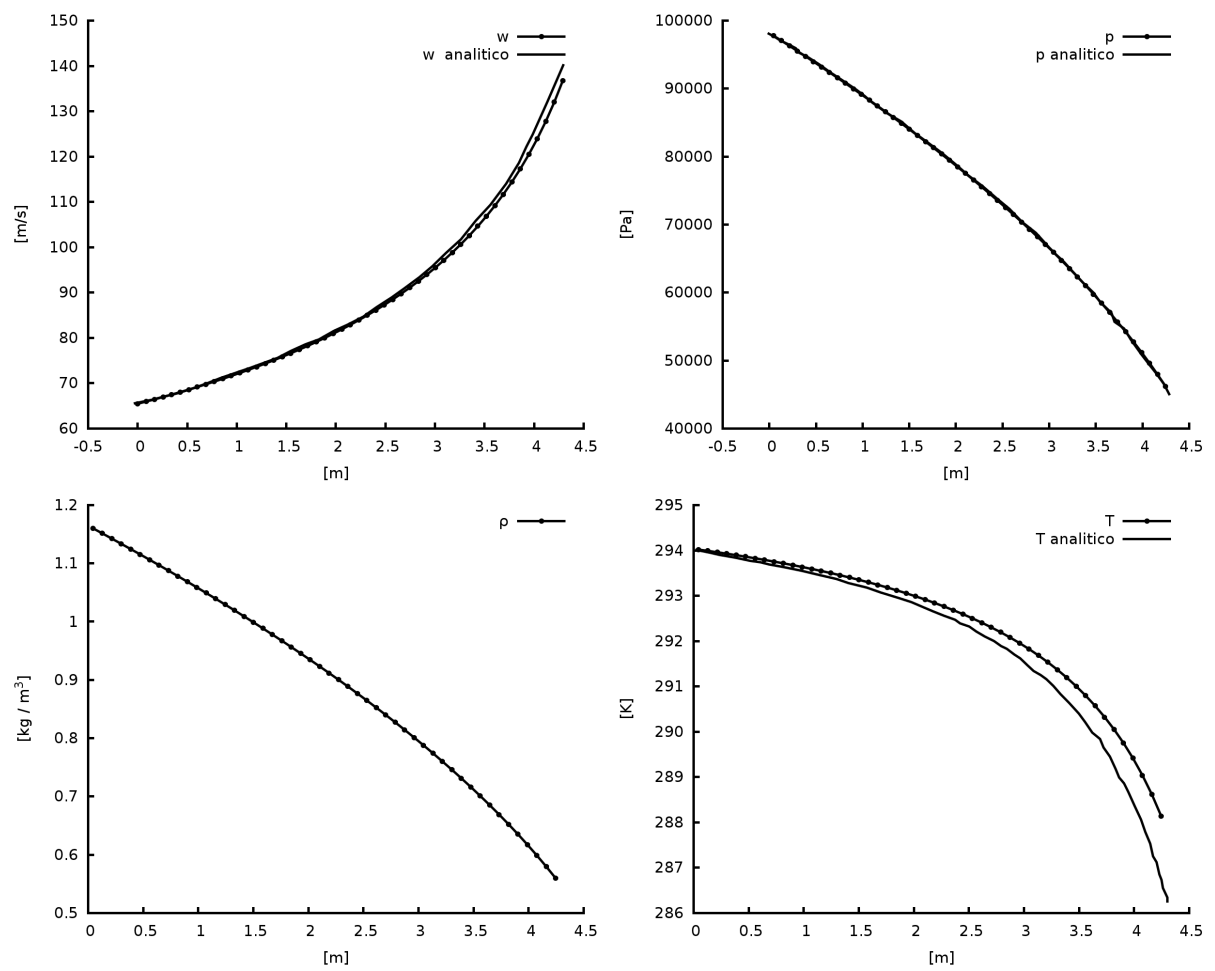


Figura 4.6: Fanno malha de 50 volumes

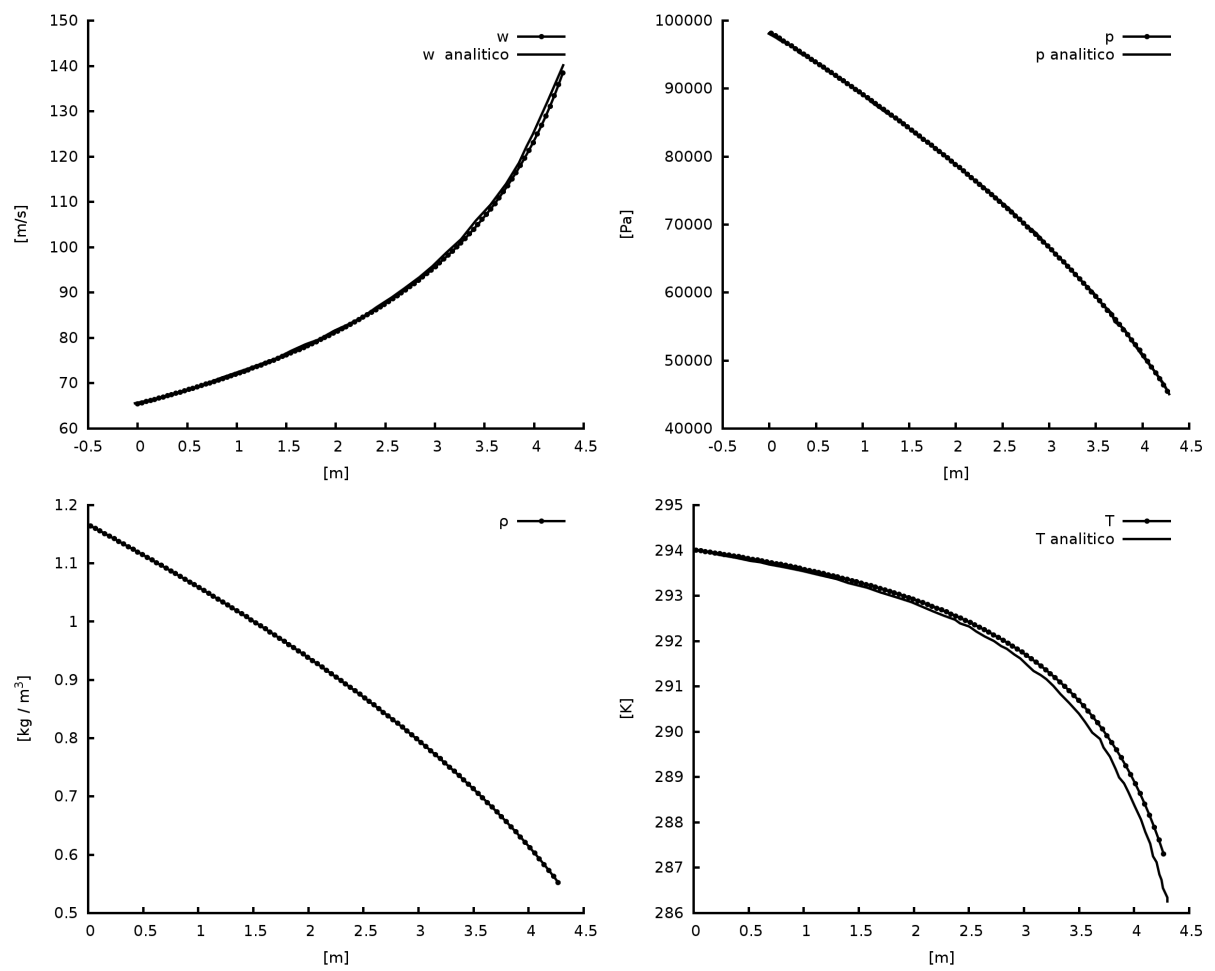


Figura 4.7: Fanno malha de 100 volumes

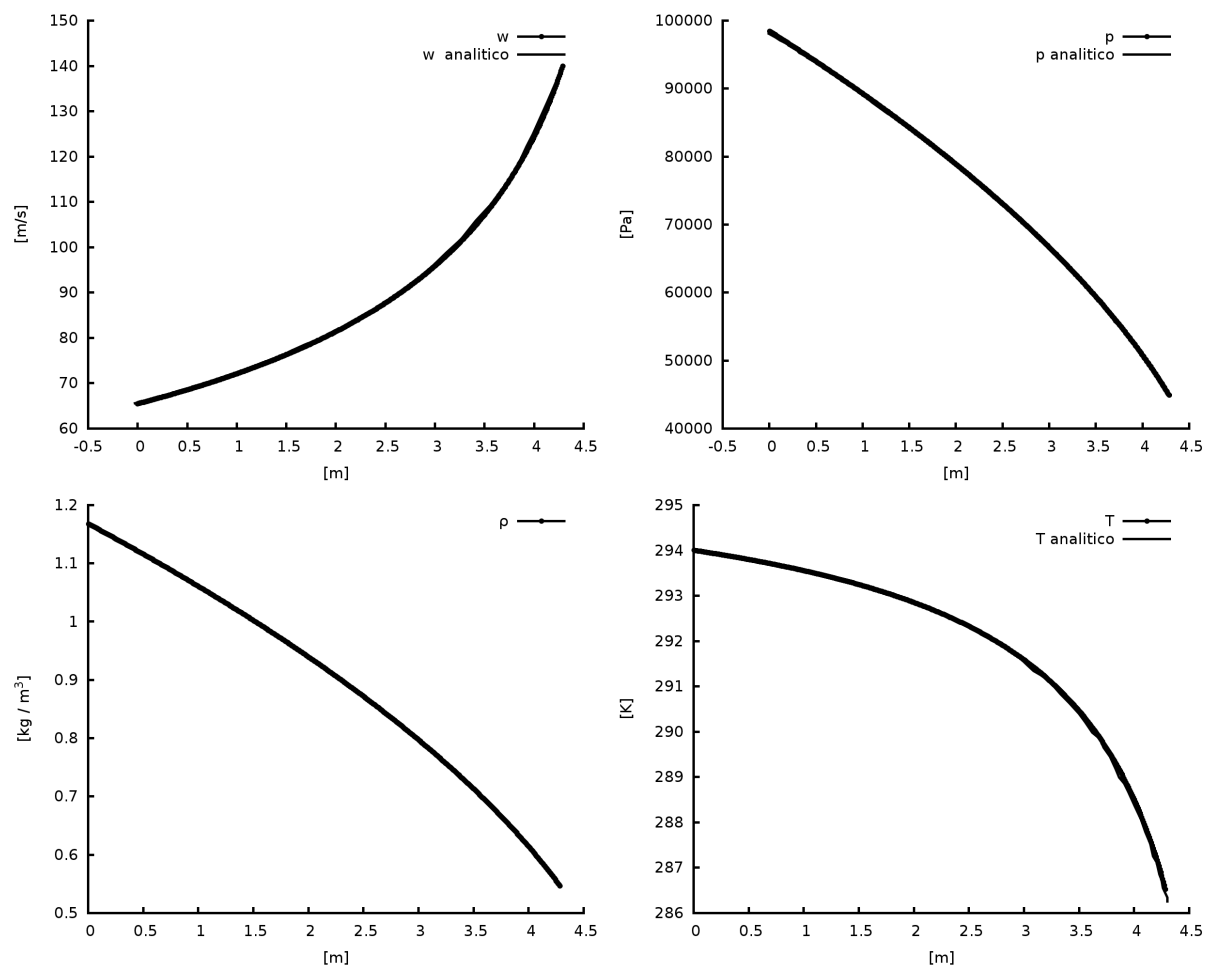


Figura 4.8: Fanno malha de 500 volumes

### 4.3 Conclusões validação do modelo para escoamento de gás

Os resultados preliminares representam os problemas estudados de forma adequada, validando o modelo desenvolvido. Houveram alguns problemas de natureza numérica, mas isso já era esperado. Mesmo com esse problemas, devido ao método ser de pouca dificuldade computacional podem ser utilizadas malhas refinadas que eliminam, conforme mostrado pelos resultados, qualquer tipo de problema de natureza numérica, mostrando a validade da abordagem numérica escolhida.

Levando isso em consideração, o modelo desenvolvido para o escoamento de gás pode ser usado sem grandes preocupações para o desenvolvimento de um modelo para *plunger lift*.

---

## Capítulo 5

### Modelagem de um sistema *plunger lift*

---

O sistema *Plunger Lift* é composto por varias partes, já descritas no Capítulo 1, porém apresentadas novamente para facilitar a descrição do modelo desenvolvido. Essas partes são ilustradas pela figura 5.1 sendo suas partes numeradas e suas dimensões descritas por L subscrito e a pressão da superfície por  $p_s$  e a pressão no topo do espaço anular por  $p_c$ .

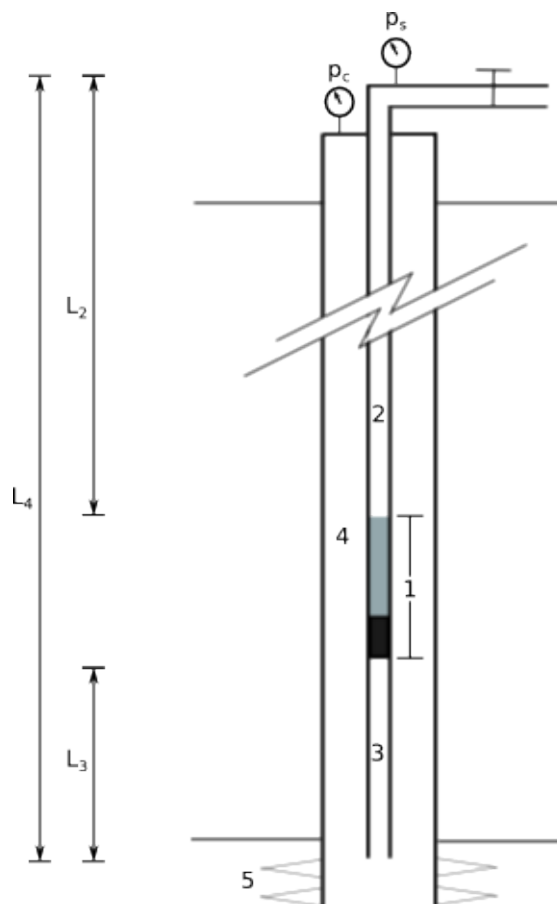


Figura 5.1: Partes de um Plunger Lift

As partes identificadas na figura são as seguintes :

1. Conjunto *plunger* e golfada de líquido;
2. Coluna de produção acima do conjunto *plunger* e golfada de líquido;

3. Coluna de produção abaixo do conjunto *plunger* e golfada de líquido;
4. Região anular do poço;
5. Reservatório.

Para modelar este sistema é necessário modelar as varias partes e as relações entre elas.

Para modelar a parte de número 1, o conjunto *plunger* e golfada de líquido, utiliza-se a segunda lei de Newton, tendo o diagrama de corpo livre 5.2 e o equacionamento matemático 5.1.

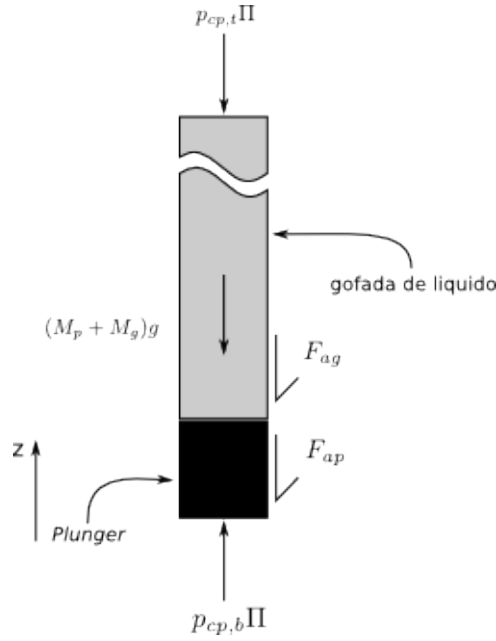


Figura 5.2: Digrama de corpo livre do conjunto *plunger* e golfada de líquido

$$(M_p + M_g) \frac{d^2 z}{dt^2} = -(M_p + M_g)g - F_{ag} - F_{ap} - p_{cp,t}\Pi + p_{cp,b}\Pi \quad (5.1)$$

Sendo,

$M_p$  Massa do *plunger*

$M_g$  Massa da golfada de líquido acima do *plunger*

$F_{ap}$  Força de atrito do *plunger*

$F_{ag}$  Força de atrito da golfada de líquido

$\Pi$  Área da coluna de produção

$p_{cp,t}$  Pressão provocada pela parte 2, ou seja, o gás na coluna de produção abaixo do *plunger*

$p_{cp,b}$  Pressão provocada pela parte 4, ou seja, o gás na coluna de produção acima da golfada de líquido

$z$  A distância do conjunto *plunger* e golfada de líquido na coluna de produção

Para resolver essa equação é utilizado o método de Euler resolvido em dois tempos, um para a resolver a distância percorrida pelo conjunto *Plunger*-Coluna de líquido e outra para

resolver a velocidade do mesmo. Isso é feito através da equações 5.2 que são resolvidas de forma explícita.

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \Delta t v_n \\ v_{n+1} &= v_n + \Delta t \frac{-(M_p + M_g)g - F_{ag} - F_{ap} - p_{cp,t}\Pi + p_{cp,b}\Pi}{(M_p + M_g)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

No entanto, para resolver essa equação do conjunto plunger e golfada de líquido é necessário conhecer o comportamento das partes 2 e 3, ou seja, da coluna de produção. Para fazer isso é feita a seguinte simplificação: como a inércia do gás é bem menor do que a inércia do conjunto *plunger* e golfada de líquido em cada instante de tempo, o comportamento do gás será calculado de forma quase-estática, ou seja, uma sucessão de regimes permanentes.

Outra simplificação importante é que não é modelado nenhum tipo de fallback entre a coluna de produção e o conjunto plunger e golfada de líquido, obviamente isso acontece, mas esse fenômeno é pouco conhecido e muito dependente do *plunger* utilizado. Então será modelado o *plunger* como perfeitamente selante, o que muitos *plunger* buscam fazer.

Utilizando essas simplificações para a parte 2, a parte de cima da coluna de produção é modelada através da equação do peso de uma coluna de gás hidrostática. Isso significa que sabendo o valor da pressão na superfície, que é um valor conhecido e será chamado  $p_s$ , pode-se calcular a pressão no topo da golfada através da equação encontrada Baruzzi (1994).

$$p_{cp,t} = p_s e^{\left(\frac{L_2 g}{TR}\right)} \quad (5.3)$$

sendo :

$L_2$  O comprimento da parte de cima da coluna de produção

$R$  A constante do gás

$T$  A temperatura do gás nesse caso a ambiente

É preciso aplicar essas simplificações também para parte 3, que é a parte de baixo da coluna de produção, a qual é mais importante para a elevação do conjunto *plunger* e golfada de líquido. Por isso, nesse trabalho é proposto uma nova abordagem baseada na solução das equações de derivadas parciais, lembrando que devido ao fato de no sistema *Plunger Lift* o gás ser tratado como quase-estático para cada instante de tempo, ter-se-a resolução em regime permanente. Para isso é utilizado o modelo apresentado no capítulo 3. Sendo empregado as seguintes condições de contorno:

- A parte de baixo da coluna de produção (parte 3) é alimentada tanto pelo anular (parte 4) como pelo reservatório (parte 5). Isso provoca um efeito, muitas vezes não intuitivo, da

pressão no fundo da coluna de produção ser praticamente constante devido o fato do reservatório alimentar de gás o anular, conforme foi apresentado por Baruzzi (1994). Então, desconsiderando a produção de líquido os efeitos do anular e do reservatório podem ser simulados nessa situação como uma pressão constante, como uma primeira abordagem, descrita pela equação do peso de uma coluna de gás hidrostática no anular sabendo que se conhece a pressão no topo do anular

$$p_{fp} = p_c e^{\left(\frac{L_4 g}{TR}\right)} \quad (5.4)$$

sendo :

$p_{fp}$  Pressão no fundo do poço

$p_c$  Pressão no topo do anular

Então na parte de baixo da coluna de produção é aplicado a condição de contorno de pressão prescrita com a pressão  $p_{fp}$ .

- A condição de cima da parte 3 é considerado que o gás tem a mesma velocidade do conjunto *plunger* e golfada (parte 1), então é empregado a velocidade prescrita com essa velocidade.

O algoritmo para a resolução do escoamento dentro de um *Plunger Lift* pode ser resumido através do fluxograma

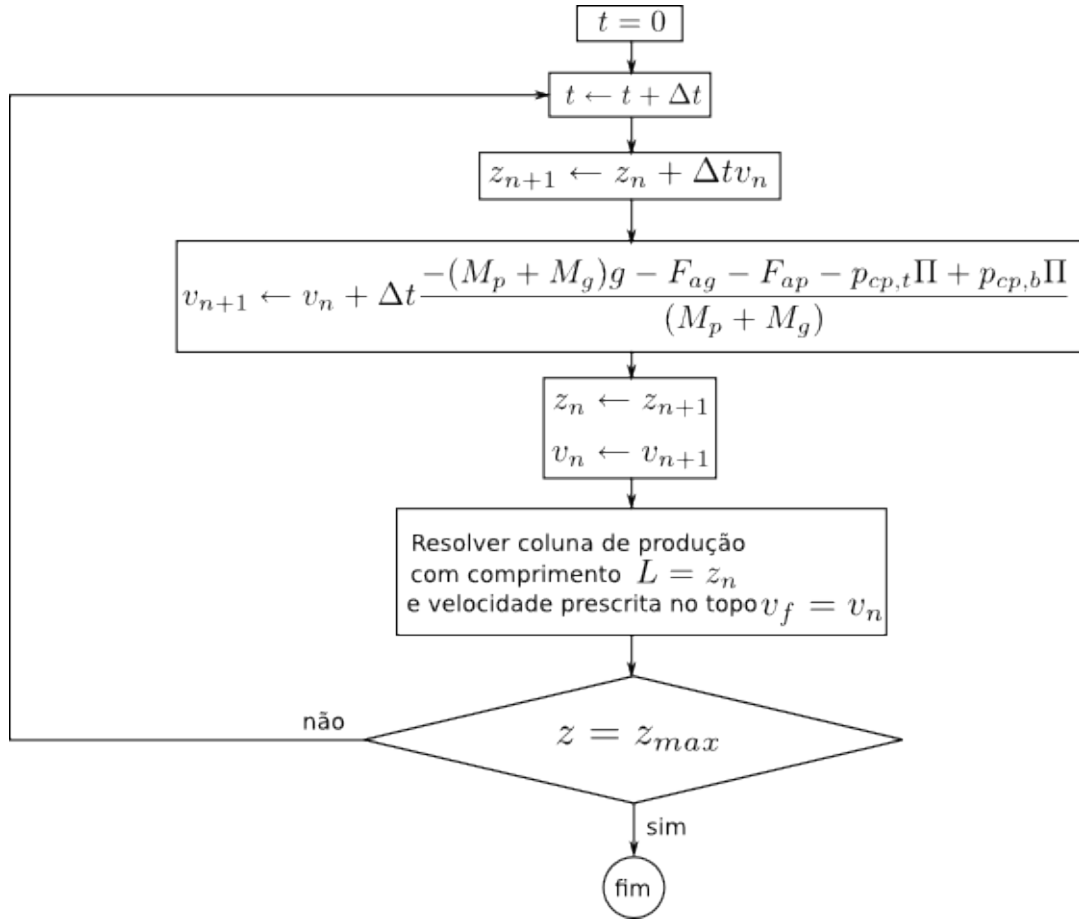
## 5.1 Resultados modelo *Plunger Lift*

O modelo desenvolvido é testado para um poço exemplo apresentado por Baruzzi (1994). Esse poço exemplo contem as seguintes características apresentadas pela seguinte tabela.

Pressão no separador	$4,8263310^5 Pa$
Pressão no revestimento	$2,52310^6 Pa$
Massa do <i>plunger</i>	$1Kg$
Diâmetro da coluna de produção	$0,050673$
Comprimento da coluna de produção	$1165m$
Comprimento da golfada de líquido	$104m$
fator de fricção	$0,03$

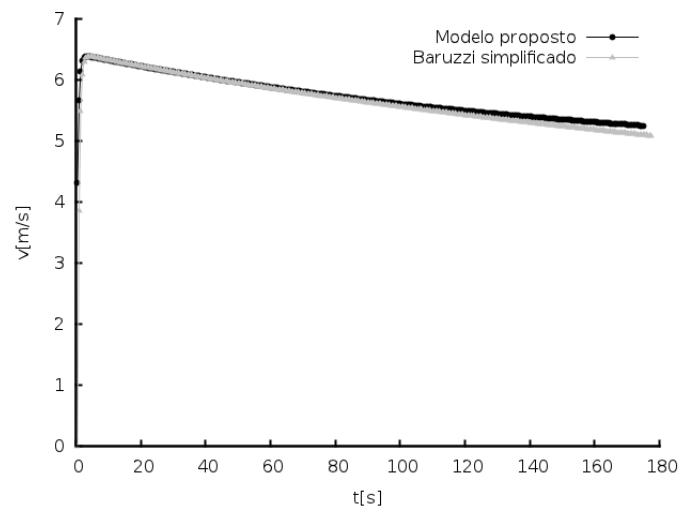
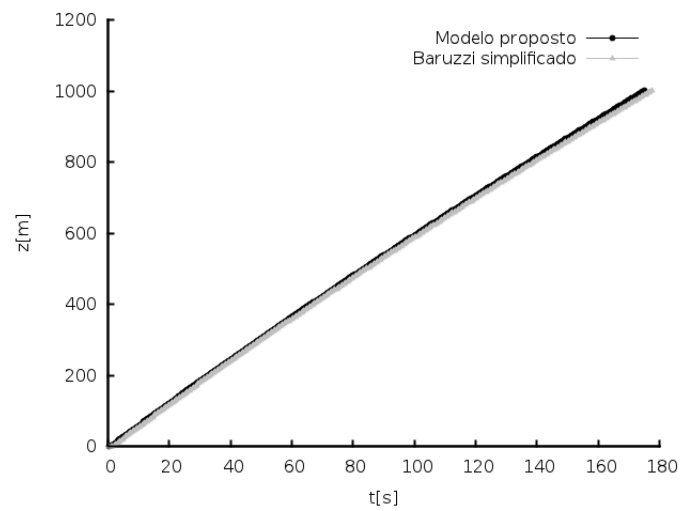
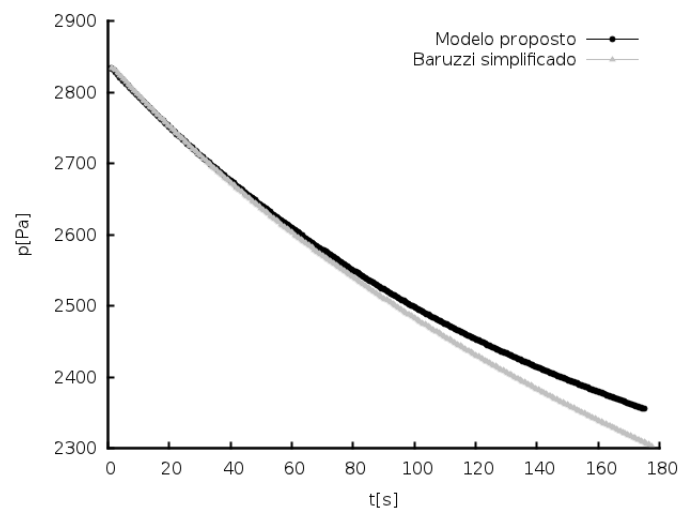
A golfada estudada é considerada como sendo de água. Utilizando o modelo desenvolvido e um modelo de Baruzzi (1994) simplificado considerando o gás como sendo ideal. Para esse poço é obtido a curva para o conjunto *plunger* e golfada da velocidade em relação ao tempo figura 5.4, da posição em relação ao tempo figura 5.5 e da pressão abaixo do conjunto *plunger* e golfada figura 5.6.

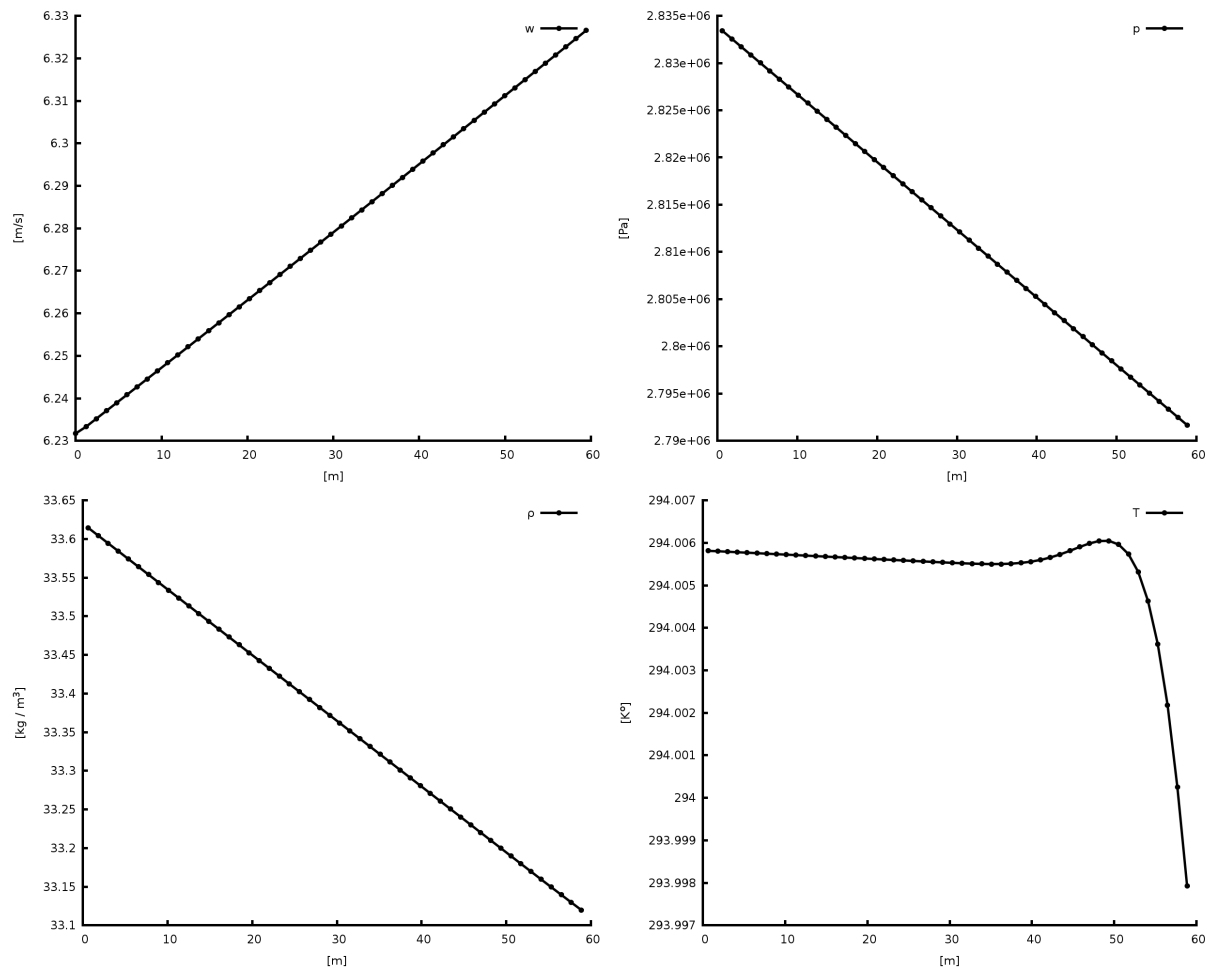


Figura 5.3: Fluxograma *Plunger Lift*

A partir desse resultado algumas conclusões podem ser retiradas. Devido ao tamanho da golfada, o atrito do líquido é suficiente para estabilizar a velocidade do conjunto *plunger* e golfada, isso prova porque a abordagem Foss & Gaul (1965) é frequente em projetos de engenharia de *Plunger Lift*. No entanto, conforme a parte de baixo da coluna de produção aumenta, o comportamento não é equivalente ao descrito por Baruzzi (1994) isso em especial devido ao comportamento do atrito do gás, que se comporta de forma semelhante ao escoamento de fanno. Ou seja, no início da subida o comportamento é bastante previsível através da equação hidrostática de uma coluna de gás, os perfis da figura 5.7, no entanto, no final do escoamento, o escoamento é mais afetado, conforme pode-se observar através da figura 5.8.

De forma a mostra a aplicabilidade desse modelo para diferentes situações é apresentado um estudo comparativo variando as pressão de fundo nas figuras 5.9 e 5.10 e para vários comprimento de golfada, do mesmo poço apresentado anteriormente.

Figura 5.4: Velocidade do do conjunto *plunger* e golfadaFigura 5.5: Posição do onjunto *plunger* e golfadaFigura 5.6: Pressão abaixo do conjunto *plunger* e golfada

Figura 5.7: Parte de baixo da coluna de produção,  $t=10\text{s}$

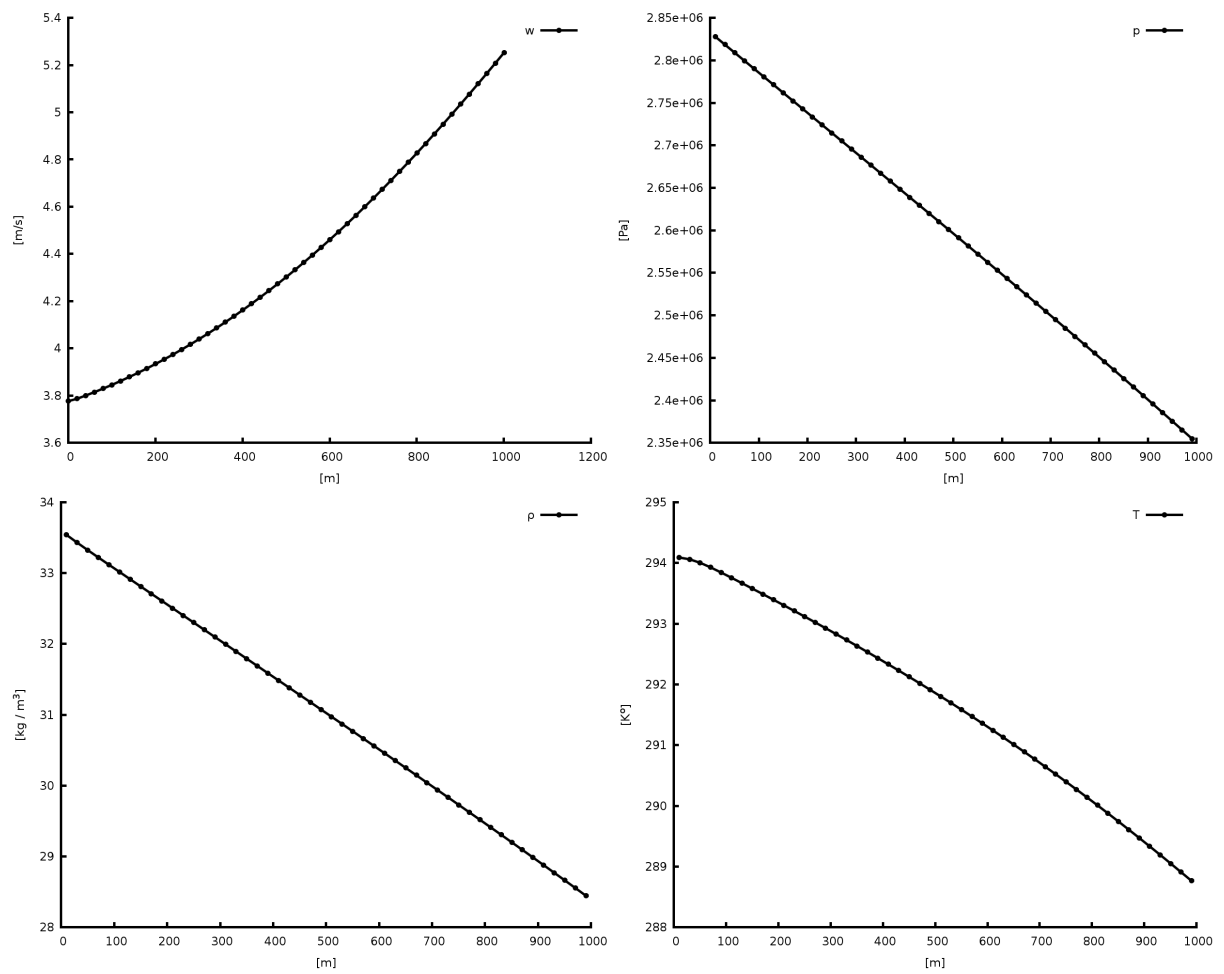


Figura 5.8: Parte de baixo da coluna de produção,  $t=175s$

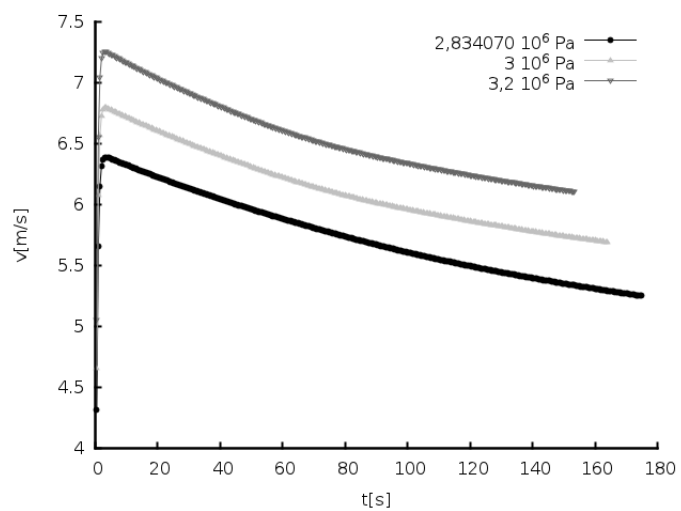


Figura 5.9: Velocidade do conjunto *plunger* e golfada de líquido para algumas pressões de fundo de poço

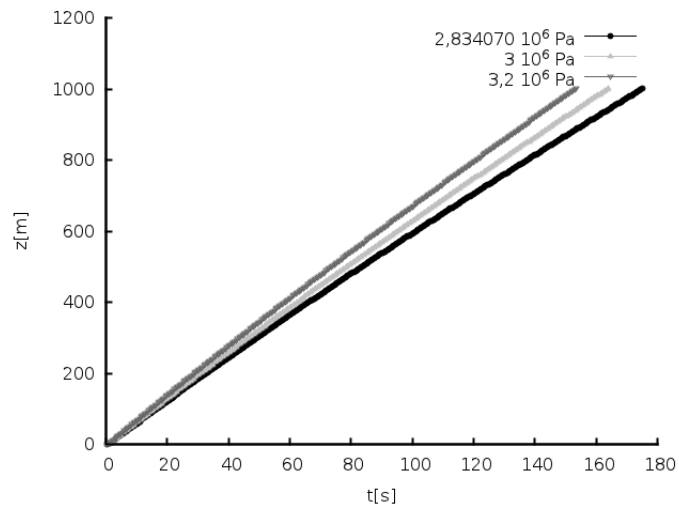


Figura 5.10: Posição do conjunto *plunger* e golfada de líquido para algumas pressões de fundo de poço

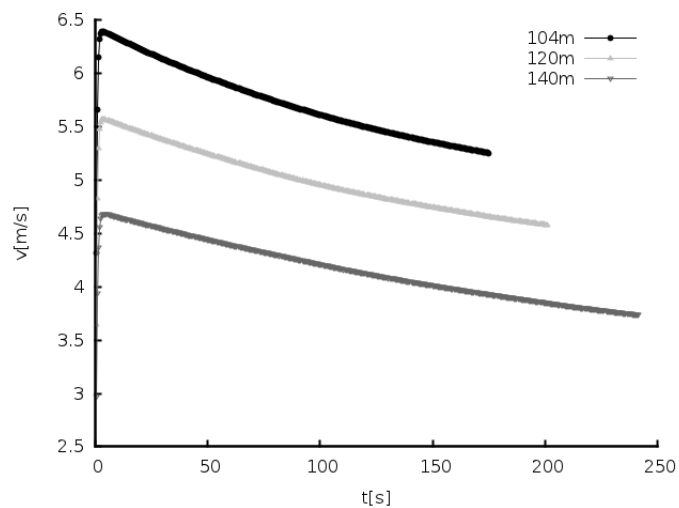


Figura 5.11: Velocidade do conjunto *plunger* e golfada de líquido para alguns comprimento de golfada

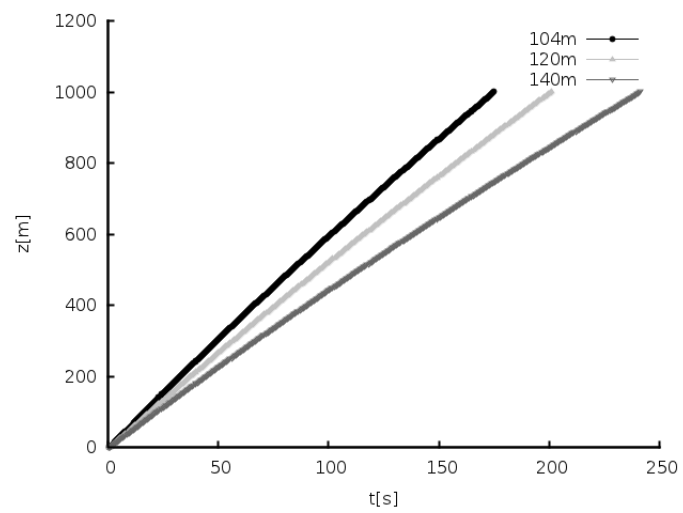


Figura 5.12: Posição do conjunto plunger e golfada de líquido para alguns comprimento de golfada

---

# Capítulo 6

## Conclusões

---

Um modelo dinâmico para o sistema de elevação por *Plunger Lift* foi desenvolvido e implementado com sucesso. A principal contribuição deste, em relação a modelos anteriores apresentado na literatura, é apresentar uma modelagem mais preciso do escoamento na coluna de gás, abaixo do *Plunger*.

Primeiramente, foi implementado um código numérico para resolver o escoamento unidimensional, transiente, compressível de gás em uma coluna de produção. As equações governantes do escoamento, a saber, conservação da massa, quantidade de movimento e energia, foram discretizadas através do método dos volumes finitos com malha desencontrada e um algoritmo para o tratamento do acoplamento pressão velocidade-densidade baseado no método **PRIME** foi utilizado. O algoritmo foi desenvolvido e implementado considerando diversos tipos de condição de contorno, tanto na entrada quanto na saída do duto e foi validado com sucessos a partir de diversos problemas-teste, considerado *benchmark* na literatura.

As condições de contorno consideradas, contemplam condições de pressão, velocidade e vazão mássica prescritas, tanto na entrada quanto na saída do duto. Assim, este código, pode ser utilizado para diversas finalidade que requeriam a modelagem do escoamento de gás, transiente na coluna de produção. A utilização de um método semi-implícito (**PRIME**), reduz significativamente o tempo de computação em transientes rápidos, podendo, por exemplo, ser utilizado na modelagem em sistemas de controle.

Neste trabalho este código foi empregado para modelar em uma primeira abordagem no escoamento de um *Plunger Lift* na etapa de subida.

Esse modelo foi desenvolvido resolvendo a segunda lei de newton para o conjunto *plunger* e gofada de liquido, a partir de um esquema de Runge-Kutta de primeira ordem, e as equações da coluna de gás hidrostáticas para a parte de cima da coluna de produção e para o anular. No entanto, na parte de baixo do *Plunger* foi utilizado o modelo para uma coluna de produção implementado sendo que de forma quase-estática. Embora a pressão de fundo de poço foi considerada constante nos casos resolvido para validação, a implementação das condições de contorno realizada de forma genérica, pode contemplar, por exemplo, um modelo de expansão de gás do anular, ou um modelo para o comportamento do reservatório através de um Índice de Produção do Reservatório, IPR, que poderiam ser considerados a partir de uma variação

transiente da pressão de fundo.

Nessa primeira abordagem foram observadas algumas melhorias em relação a modelos anteriores. No entanto existe a necessidade de modelar o sistema *Plunger Lift* de forma a levar em conta consideração fenômenos que não foram considerados como,

1. Implementar um modelo 1D para o gás em todas as partes do sistema *Plunger Lift*, isto é, também para a parte da coluna de produção, que fica acima do *Plunger*, hoje considerado através de um modelo (lumped);
2. Implementar um modelo para escoamento multifásico do tipo nevoa na parte de baixo da coluna de produção. Isto seria relativamente simples, uma vez que pode ser considerado um modelo homogêneo;
3. Implementar um modelo para o comportamento do reservatório através de um Índice de Produção do Reservatório, IPR;
4. Implementar um modelo 1D para o escoamento da coluna de líquido, hoje considerado através de um modelo (lumped);
5. *Fallback*;
6. Modelo transiente real para a parte de baixo da coluna de produção.

No desenvolvimento desse trabalho foram encontradas várias dificuldades diferentes muitas vezes sua solução foi não trivial. Uma das mais importantes são referentes à não-linearidade na solução do escoamento para isso é fundamental a linearização dos termos, em especial da equação de estado, conforme apresentado, se não a solução diverge com bastante facilidade em especial da natureza fortemente acoplada do problema. Outra dificuldade importante encontrada é a definição das condições de contorno para arranjo desconhecido isso é resolvido em especial com o emprego da condição de localmente parabólico. Fica para trabalhos futuros a necessidade de observar as dificuldades superadas.



---

## Referências Bibliográficas

---

- Abercrombie, B. (1988), 'Technology of artificial lift methods', *PennWell Publ. Co.* .
- Baruzzi, J. O. A. (1994), Modelagem de plunger lift convencional, Dissertação de mestrado, universidade estadual de campinas.
- de Moraes, F. F., J. F. Davidson & D. Harisson (1978), 'The motion of a large gas bubble rising through liquid flowing in a tube', *Fluid Mechanics* .
- Foss, D. L. & R. B. Gaul (1965), 'Plunger-lift performance criteria with operation experience - ventura avenue field', *API Drilling and Production Practices* pp. 124–140.
- Gasbarri, S. & M. L. Wiggons (1996), 'A dynamic plunger lift model for gas wells', *SPE* .
- Guzmán, O. J. R (1999), Um método conservativo para análise de transientes de gases / líquidos em tubulações, Dissertação de mestrado, PUC-Rio.
- Hacksma, J. D. (1972), 'Predict plunger lift performance'.
- Lea, J. F. (1982), 'Dynamic analysis of plunger lift operations', *JPT* pp. 2617–2630.
- Lea, J., H. V. Nickens & M. Wells (2003), *Gas Well Deliquification : Solutions to Gas Well Liquid Loading Problems*, Elsevier.
- Maggard, J.B., R.A. Wattenbarger, S.L. Scott & Texas A & M University (2000), 'Modeling plunger lift for water removal from tight gas wells', *SPE/CERI Gas Technology Symposium* .
- Maliska, C. R. (2004), *Transferência de calor e mecânica do fluidos computacional*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
- Marcano, L. & J. Chacín (1992), 'Mechanistic design of conventional plunger-lift installation', *SPE* .
- Marchi, C. H. & C. R. Maliska (1994), 'A nonorthogonal finite-volume method for the solution of all speed flows using co-located variables', *Numerical Heat Transfer* pp. 293–311.
- Patankar, S. V. (1980), *Numerical heat transfer and fluid flow*, Taylor & Francis.

- Rosina, L. (1983), A study of plunger lift dynamics, Dissertação de mestrado, University of Tulsa.
- Shoham, Ovadia (2006), *Mechanistic modeling of gas-liquid two-phase flow in pipes*, SPE.
- Sod, G. A. (1977), 'A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws', *Journal of computational physics* .