Контрольная работа № 1.

$1_1)\quad xy' + 3y + (xy)^{3/2}\ln(2x) = 0;$

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ $1]\ ((2e^2)^{-1}, 2^7e^6/9),$ $2]\ (2^{1/2}, 2^{13/2}(9\ln^2 2 - 4)^{-2}),$
$3]\ ((2e^2)^{-1}, 2^3e^6),$ $4]\ ((e^{1/2}/2), 2^{11}e^{-3/2}),$ $5]\ (1, 16(\ln^2 2 + 1/5)^{-2})$

$2_3)\quad (15x - 7y - 8)\,y' = 9y - x - 8;$

найти частные решения $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$ след. задач Коши:
$(x_0, y_0):$ $1]\ (16\sqrt{2} - 24, 0),$ $2]\ (17/14, 127/98),$ $3]\ (9/8, 17/8),$
$4]\ (5/16, 13/16)$ $5]\ (-151/64, 49/64),$ $6]\ (7/4, -1/4),$
$*]\ (-1, 9/7),$ $**]\ (3/2, 3/2)$

$3_6)\quad (8xy^{1/2} + 4)\,dx + x^2(5y^{-1/2} + x)\,dy = 0;$

найти частные решения $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$ след. задач Коши:
$(x_0, y_0):$ $1]\ (2^{-5}, 2^6),$ $2]\ (-2, 9/4),$ $3]\ (-2, 121/4),$ $4]\ (-2, 1/4),$
$5]\ (-2/5, 1/4),$ $6]\ (-1/2, 4),$ $7]\ (-2/15, 25/4),$ $8]\ (8/9, 63^2/8^2),$
$9]\ (-25/9, 117^2/50^2),$ $10]\ (-25/9, 36^2/25^2),$ $11]\ (8/105, 15^2/8^2),$
$12]\ (8/15, 45^2/8^2),$ $13]\ (8/35, 25/64),$ $*]\ (-2, 1),$ $**]\ (1/4, 16)$

$4_7)\quad (x^2 + (2x + 3)\ln y)y\,dx = x(x + 1)\,dy;$

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ $1]\ (-2, e^{-2}),$ $2]\ (-2, e^{-4}),$ $3]\ (1, 1),$ $4]\ (-1/2, e^{-5/27}),$
$5]\ (1, e^{-1/2}),$ $6]\ (-2/3, e^{-2/3}),$ $8]\ (1, e^{-7/8}),$ $9]\ (-1/2, 1),$
$10]\ (-3/2, e^{-4}),$ $*]\ (-1, 2/5),$ $**]\ (0, e^{-2}),$ $***]\ (-e^{-2}, 0)$

Контрольная работа № 1 (переписывание 1).

1_6) Найти все решения уравнения
$xy + (x^2-1)(xy^{1/2} - y') = 0;$

найти частные или специальные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $(-\sqrt{2}, 1/9)$, 2] $(\sqrt{3}/2, 1/16)$, 3] $(5/3, 4(8/27 - 3^{-3/2})^2)$,
4] $(-\sqrt{3}/2, ((3^{3/4}-1)/12)^2)$, 5] $(-\sqrt{3}/2, ((2^{3/2}-1)/12)^2)$, 6] $(-\sqrt{2}, 0)$

2_1) $(3x + 2y - 10)y' = 2x + 3y - 5;$

найти максимальные интервалы существования решений задач Коши, представляемых в виде $y = \varphi(x)$:
$(x_0, y_0):$ 1] $(0, -4)$, 2] $(8, 2)$, $3^\star$] $(31/5, 16/5)$, $4^\star$] $(4, -1 - 5^{1/4})$,
$5^\star$] $(4, -3)$, $6^\star$] $(4, 1)$, $*$] $(5, -2)$, $**$] $(3, -2)$

3_3) $(y - x^2)y' + 10xy + 6x^3 = 0;$

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $(-\sqrt{3}/2, -1/4)$, 2] $((8/9)^{1/2}, 8/3)$, 3] $(-\sqrt{3}/4, -1/16)$,
4] $(-\sqrt{3}/4, 15/16)$, 5] $(2/3, -2/3)$, 6] $(0, -2)$, $*$] $(-1/3, -1/3)$,
$**$] $((8/9)^{1/2}, -8/9)$

4_3) $(3x^2(\cos(2y) + 1) - \sin(2y))\,dx - 2x\,dy = 0;$

Найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $(-2, 3\pi/4)$, 2] $(-2, \operatorname{arctg} 9)$, 3] $(0, 9/2)$,
4] $(-3^{-1/4}, 7\pi/6)$, 5] $(1, 4\pi/3)$, 6] $(1, \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}))$, 7] $(1, 3\pi/2)$

Контрольная работа № 1 (переписывание 2).

1_3) $x\ln x\,dy+3(y-x^2y^{5/3}\ln^4 x)\,dx=0;$

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0,y_0):$ 1] $(e^{1/2},64e^{-9/4})$, 2] $(e^{-1/2},8e^{3/2})$, 3] $(e^{1/4},-8^3e^{-3/4})$,
4] $(e^{-1/2},-8^{3/2}(2e^{-1}-3e^{-2})^{-3/2})$, 5] $(e^{-3/2},8(10^{-2}+2e^{-3})^{-3/2}/27)$

2_2) $(x-4y+5)\,dx+(2x+y+10)\,dy=0;$

найти максимальные интервалы существования решений задач Коши, представляемых как в виде $y=\varphi(x)$, так и в виде $x=\psi(y)$:
(x_0,y_0): 1] $(-5,1)$, 2] $(-4,0)$, 3] $(-6,1)$, 5] $(-4,-1)$, $*$] $(-4,1)$.

3_5) $y'=-\sqrt{x^{-1}y^3-y^4}-y^2;$

найти частные или специальные решения следующих задач Коши:
$(x_0,y_0):$ 1] $(-1,-1)$, 2] $(-1,-1/5)$, 3] $(1/3,3/10)$,
4] $(-1/3,-3/2)$, 5] $(4/3,3/4)$, 6] $(-2,(2^{3/2}-5)^{-1})$, 7] $(3,3/10)$

4_{11}) $(y^2x^{-1}-e(x^2-y)+xy(1-2\ln x))\,dx+x(x\ln x-e)\,dy=0;$

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0,y_0):$ 1] $(e,2)$, 2] $(e^{-1},1)$, 3] $(e^{3/2},-2e^{5/2}/3)$, 4] $(2,-4)$,
5] $(1,2e-1)$, 6] $(e^{5/4},2e^{9/4}(e^{1/4}-2)/3)$, 7] $(e^{-2},e^{-1}+e^{-4})$,
8] $(1,-e-1)$, 9] $(e^{1/2},2e(e^{1/2}-1))$, 10] $(4,4(3-e)/(\ln 4-3/4))$

Контрольная работа № 1 (переписывание 3).

$1_7)$ $4(x(4-e^x)^{1/2}(2+(4-e^x)^{1/2})^2-y^{1/2})y^{1/2}\,dx-(4-e^x)^{1/2}\,dy=0;$
найти интегральную кривую решения следующей задачи Коши:
$(x_0,y_0):$ 1] $(0,(2+3^{1/2})^4/16);$
найти частные или специальные решения следующих задач Коши:
$(x_0,y_0):$ 2] $(\ln 3, 324\ \ln^2(3e^{-2/3}))$, 3] $(\ln 3, 324\ \ln^2(3/e))$,
4] $(\ln 3/7,(7e^{-1/2}+\ln 9/49-2)^2(2+5/7^{1/2})^4)$, 5_*] $(\ln 4,(8\ln 4-23/4)^2)$,
6^*] $(\ln(15/4),(25\ \ln(\sqrt{15}/2)-85/6)^2)$.

$2_6)$ $yy'=2-6x-7y;$ $x_0=1/9,$ $a)$ $y_0=4/3$ $b)$ $y_0=2/9$

$3_1)$ $8y'+xy^5+4(xy)^{-3}=0;$
найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0,y_0):$ 1] $(-1,-1)$, 2] $(-e^2,-2^{1/2}e^{-1})$, 3] $(e^{11/5},12^{1/4}e^{-11/10})$,
4] $(e^{-2/7},-(2/3)^{1/2}e^{1/7})$, 5] $(-2^{1/2},1)$

$4_2)$ $(x^2-2y(x^2-y^2)^{1/2}\ln x)\,dx+2x(x^2-y^2)^{1/2}\ln x\,dy=0;$
найти максимальные интервалы существования решений задач Коши, представимых в виде $y=\varphi(x)$:
(x_0,y_0): 1] $(e^{-1},2^{-1/2}e^{-1})$, 2] $(e,2^{-1/2}e)$, 3] $(e^{-1},(2e)^{-1})$,
4] $(e,e/2)$, 5] $(e^{-1},0)$, 6] $(e,0)$, 7] $(e^{-1},-2^{-1/2}e^{-1})$, 8] $(e,-2^{-1/2}e)$,
9] $(1/2,-\sqrt{3}/4)$, $*$] $(1,-\sqrt{3}/4)$

Контрольная работа № 1 (переписывание 4.)

$1_4)\quad 3(x-(2\ln y+1)x^{4/3}y)y'=y;$

$(x_0,y_0):\ 1]\ (-27e, e^{-1/3}),\ 2]\ (1/(8e^6),1)$

$2_4)\quad (2x+3y-5)\,dx-(x+4y)\,dy=0$

$3_2)\quad 6y'=\dfrac{y}{x}\Big(\dfrac{x^2}{y^6}+\dfrac{y^6}{x^2}\Big);$

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0,y_0):\quad 1]\ (3,-3^{1/3}),\quad 2]\ (-1,2),\quad 3]\ (e^{85/63},2^{-1/3}\cdot e^{85/189}),$
$4]\ (e^{3/2},2^{-1/6}\cdot e^{1/2}),\quad 5]\ (e^{-3/2},2^{1/6}\cdot e^{-1/2})$

$4_{4_2})\quad 3y^{1/2}(2x-1)x\,dy+(8-2x^{-1}-4y^{3/2}x)\,dx=0;$

$(x_0,y_0):\quad 1)\ (-1/8,2^{2/3}),\quad 2)\ ((7+\sqrt{113})/32,1),$
$3)\ (1/8,2^{2/3}),\quad 4)\ ((11+\sqrt{57})/32,3^{2/3}),\quad 5)\ (9/8,2^{2/3}),$
$6)\ (5/8,(82/45)^{2/3}),\quad 7)\ (1/3,1),\quad 8)\ (1/2,2^{1/3})$

Контрольная работа № 1 (переписывание 5).

$1_2)\quad tg\,x\,dx+2(2y^3\cos x-y)\,dy=0;$

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0,y_0):\ 1]\ (-\pi/3,0),\quad 2]\ (5\pi/3,-2^{-1/2}),$
$3]\ (-\arccos(\ln^{-1}(4e)),\ln^{1/2}(2e^{1/2})),\quad 4]\ (\arccos(\ln^{-1}4),-\ln^{1/2}2)),$
$5]\ (-\arccos(1/(6-2e^{3/2})),-2^{1/2})),$
$6]\ (-\arccos(\ln^{-1}(256/e^{14}),2\ln^{1/2}2)),$
$7]\ (-\arccos(\ln^{-1}(4e^2/9),-\ln^{1/2}(2e/3)),8]\ (2\pi-\arccos(1/(4-e^2)),1)),$
$9]\ (\arccos(1/(3-3e^{1/2})),-2^{-1/2})),\quad 10]\ (5\pi/4,0)$

$3_7)\quad x^3y'=2x\sqrt{y}-4;\quad x_0=-2,\quad \begin{matrix} a)\ y_0=9\\ b)\ y_0=1\end{matrix}$

$$4_5)\quad \left(\frac{x^2(1+y^3)^{2/3}\ln y}{(1+x^3)^{2/3}}+\frac{(1+y^3)^{1/3}}{x}\right)dx=$$
$$\left(\frac{y^2\ln x}{(1+y^3)^{2/3}}-\frac{((1+x^3)^{1/3}-1)(1+y^3)^{2/3}}{y}\right)dy;$$

$(x_0,y_0):\quad 1]\ (7^{1/3},7^{1/3}),\quad 2]\ (e^{1/2},1)$

Контрольная работа № 1.

1) Решить уравнение Бернулли

1. $xy' + 3y + (xy)^{3/2}\ln(2x) = 0$;

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $((2e^2)^{-1}, 2^7e^6/9)$, 2] $(2^{1/2}, 2^{13/2}(9\ln^2 2 - 4)^{-2})$,
3] $((2e^2)^{-1}, 2^3e^6)$, 4] $((e^{1/2}/2), 2^{11}e^{-3/2})$, 5] $(1, 16(\ln^2 2 + 1/5)^{-2})$

ОДЗ: $x \not\equiv C,\ x > 0,\ y \geq 0;\ \ y(x) \equiv 0$ – граничное решение.

Имеем уравнение Бернулли.

Замена $u = y^{1-\alpha},\ \alpha = 3/2 \ \Rightarrow\ u = y^{-1/2}\ \ (y \neq 0),\ 2u' = -y^{-3/2}y'$.

После деления уравнения на y^α и замены получаем
$u' - 3(2x)^{-1}u = x^{1/2}\ln(2x)/2$ – линейное уравнение.

Находим $u_{\text{оо}} = Cx^{3/2}$; $u_{\text{чн}} = C(x)x^{3/2},\ C' = (2x)^{-1}\ln(2x),\ C(x) = \ln^2(2x)/4 (= \ln\sqrt{2}\cdot\ln x + \ln^2\sqrt{x}) \Rightarrow u_{\text{он}} = Cx^{3/2} + x^{3/2}\ln^2(2x)/4$.

Ответ: $y^{-1/2} = x^{3/2}\left(\ln^2(2x)/4 - C\right)$,
$y(x) \equiv 0,\ x > 0$ – граничное решение.

Классическое общее решение $\underline{y(x, C) = x^{-3}(\ln^2(2x)/4 - C)^{-2}}$ при
$$\ln^2(2x)/4 > C \Leftrightarrow x \in \left[\begin{array}{c} (0, e^{-2\sqrt{C}}/2) \cup (e^{2\sqrt{C}}/2, +\infty) \text{ для } C \geq 0 \\ (0, +\infty) \text{ для } C < 0 \end{array}\right. .$$

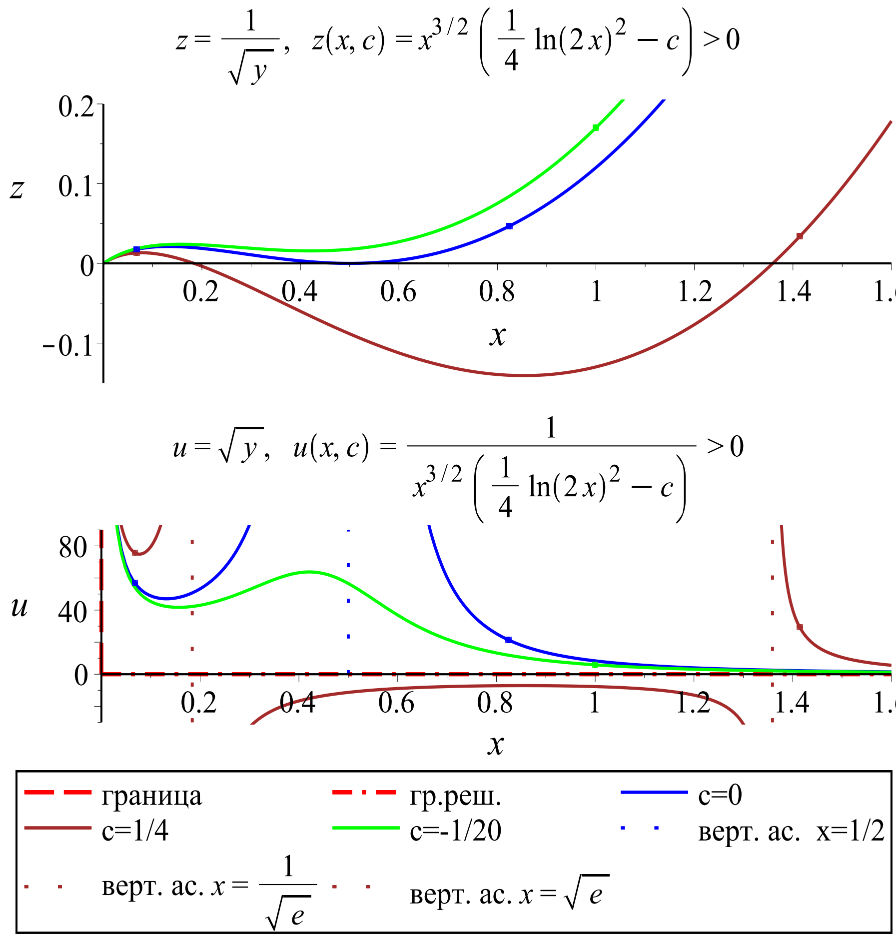
З.К. 1] $3\cdot 2^{-7/2}e^{-3} = 2^{-3/2}e^{-3}(1 - C)\ \Rightarrow\ C = 1/4\ \Rightarrow$
$\underline{y = 16x^{-3}(\ln^2(2x) - 1)^{-2}}$, $\underline{x \in (0, (2e)^{-1})}$.

2] $2^{-13/4}(9\ln^2 2 - 4) = 2^{3/4}((1/4)\ln^2 2^{3/2} - C)\ \Rightarrow\ C = 1/4\ \Rightarrow$
$\underline{y = 16x^{-3}(\ln^2(2x) - 1)^{-2}}$, $\underline{x \in (e/2, +\infty)}$.

3] $2^{-3/2}e^{-3} = 2^{-3/2}e^{-3}(1 - C)\ \Rightarrow\ C = 0\ \Rightarrow$
$\underline{y = 16x^{-3}\ln^{-4}(2x)}$, $\underline{x \in (0, 1/2)}$.

4] $2^{-11/2}e^{3/4} = 2^{-3/2}e^{3/4}(1/16 - C)\ \Rightarrow\ C = 0\ \Rightarrow$
$\underline{y = 16x^{-3}\ln^{-4}(2x)}$, $\underline{x \in (1/2, +\infty)}$.

5] $(\ln^2 2 + 1/5)/4 = (1/4)\ln^2 2 - C\ \Rightarrow\ C = -1/20\ \Rightarrow$
$\underline{y = 16\,x^{-3}(\ln^2(2x) + 1/5)^{-2}}$, $\underline{x \in (0, +\infty)}$.



$z = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad z(x, c) = x^{3/2}\left(\frac{1}{4}\ln(2x)^2 - c\right) > 0$
z
x
$u = \sqrt{y}, \quad u(x, c) = \frac{1}{x^{3/2}\left(\frac{1}{4}\ln(2x)^2 - c\right)} > 0$
u
x
граница
гр.реш.
c=0
c=1/4
c=-1/20
верт. ас. x=1/2
верт. ас. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$
верт. ас. $x = \sqrt{e}$

3. $(15x-7y-8)\,y' = 9y-x-8;$

найти частные решения $y=\varphi(x)$ и $x=\psi(y)$ след. задач Коши: $(x_0,y_0):$ 1] $(16\sqrt{2}-24,0)$, 2] $(17/14,127/98)$, 3] $(9/8,17/8)$, 4] $(5/16,13/16)$ 5] $(-151/64,49/64)$, 6] $(7/4,-1/4)$, $*$] $(-1,9/7)$, $**$] $(3/2,3/2)$

ОДЗ: $x \neq C$; $15x-7y-8=0$ – граница областей существования (изоклина с вертикальными отрезками поля), $(1,1)$ – точка пересечения прямых $15x-7y-8=0$ и $9y-x-8=0$, при этом $9y-x-8=0$ – изоклина с горизонтальными отрезками поля.

Замена $x=u+1,\ y=v+1,\ y'=dv/du$; $u=x-1,\ v=y-1$.

Получаем $(15u-7v)dv+(u-9v)du=0$ – однородное уравнение 1-го порядка, при этом $u\equiv C$ – не решение.

Замена $v=zu,\ dv=udz+zdu;\ z=vu^{-1}$.

Получаем $(15u-7zu)(udz+zdu)+(u-9zu)du=0$ – ур-е с раздел. перем. Тогда $z\equiv 1, z\equiv -1/7$ – решения или
$\dfrac{7z-15}{(7z+1)(z-1)}dz=-\dfrac{du}{u} \Leftrightarrow \displaystyle\int\left(\frac{14}{7z+1}-\frac{1}{z-1}\right)dz = C-\int\frac{du}{u} \Leftrightarrow$
$\ln\dfrac{(7z+1)^2u}{C(z-1)}=0$. Откуда $(7z+1)^2u=C(z-1)$, $z\equiv 1$ ($z\equiv -1/7$ при $C=0$). Следовательно $(7v+u)^2=C(v-u)$, $v=u$.

Ответ: $(7y+x-8)^2=C(y-x)$, $y=x$ $(x\neq 1)$

Если $u=zv$, то $\dfrac{z-9}{z^2+6z-7}dz=-\dfrac{dv}{v}$, $z\equiv 1$, $z\equiv -7$.

Имеем: $\displaystyle\int\left(-\frac{1}{z-1}+\frac{2}{z+7}\right)dz = C-\int\frac{dv}{v} \Leftrightarrow \ln\frac{(z+7)^2v}{C(z-1)}=0.$
Следовательно $(z+7)^2=C(z-1)v^{-1}, z\equiv 1$; $z=u/v$.

Найдем классические решения уравнения в виде $x=x(y,C)$.

1) $C=0$, $x(y)=-7y+8$, $y\neq 1$;

2) $C\neq 0$, $x(y,C_\mp)=-7y+8-C/2\mp\sqrt{D}$, $D=C(C/4+8(y-1))$, где $y>1-C/32$ при $C>0$ и $D>0 \Leftrightarrow y<1-C/32$ при $C<0$; $D=0\Leftrightarrow y=1-C/32$, тогда $x=1-9C/32$.

Таким образом, условие $D>0$ задает границы интервалов существования для $x(y,C_+)$ и $x(y,C_-)$, и точка $(1-9C/32, 1-C/32)$ является пересечением кривой $x(y,C_\mp)$ и изоклины $9y-x-8=0$.

Найдем теперь точки пересечения $x(y,C_\mp)$ с границей $15x-7y-8=0$. Приравнивая $x=7y/15-8/15$ и $x=x(y,C_\mp)$, получаем уравнения: $-112(y-1)/15-C/2\mp\sqrt{C(C/4+8(y-1))}=0$.

Оба уравнения имеют корни $y = 1$ и $y = 1 + 15C_{\mp}/1568$, если только $C_- < 0$, а $C_+ > 0$. Поэтому $(1, 1)$ и $(1-127C/224+(49C^2+15C)^{1/2}/16, 1 + 15C/1568)$ – искомые точки пересечения.

В результате получаем следующие решения:
1_x) $C = 0$, $x(y) = -7y + 8, y \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$;
2_x) $C \neq 0$, $x(y, C_{\mp}) = -7y + 8 - C/2 \mp \sqrt{C(C/4 + 8(y - 1))}$, где при $C > 0$ интервалы $y \in (1 - C/32, 1) \cup (1, 1 + 15C/1568) \cup (1 + 15C/1568, +\infty)$ для C_+ и $y \in (1-C/32, +\infty)$ для C_-, а при $C < 0$ интервалы $y \in (-\infty, 1+15C/1568)\cup(1+15C/1568, 1)\cup(1, 1-C/32)$ для C_- и $y \in (-\infty, 1 - C/32)$ для C_+;

Аналогично найдем классическое решение в виде $y = y(x, C)$.
1_y) $C = 0$, $y(x) = -x/7 + 8/7, x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$;
2_y) $C \neq 0$, $y(x, C_{\mp}) = (-14x + 112 + C \mp \sqrt{C(C + 224(1 - x))})/98$, где при $C > 0$ интервалы $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 1 + C/224)$ для C_+ и $x \in (-\infty, 1 + C/224)$ для C_-, а при $C < 0$ интервалы $x \in (1 + C/224, 1) \cup (1, +\infty)$ для C_- и $x \in (1 + C/224, +\infty)$ для C_+.

Решения З.К.

1] $C_+ = 64$, $x = -7y - 24 + 16\sqrt{2(y + 1)}$, $y \in (-1, 1)$;
$C_- = 64$, $y = (-7x + 88 - 16\sqrt{18 - 14x})/49$, $x \in (-\infty, 1)$.

2] $C_+ = 64$, $x = -7y - 24 + 16\sqrt{2(y + 1)}$, $y \in (1, 79/49)$;
$C_- = 64$, $y = (-7x + 88 - 16\sqrt{18 - 14x})/49$, $x \in (1, 9/7)$.

3] $C_+ = 64$, $x = -7y - 24 + 16\sqrt{2(y + 1)}$, $y \in (79/49, \infty)$;
$C_+ = 64$, $y = (-7x + 88 - 16\sqrt{18 - 14x})/49$, $x \in (-\infty, 9/7)$.

4] $C_+ = 8$, $x = -7y + 4 + 4\sqrt{4y - 3}$, $y \in (3/4, 1)$;
$C_- = 8$, $y = -x/7 + 60/49 - 4\sqrt{29 - 28x}/49$, $x \in (-\infty, 1)$.

5] $C_- = 8$, $x = -7y + 4 - 4\sqrt{4y - 3}$, $y \in (3/4, \infty)$;
$C_- = 8$, $y = -x/7 + 60/49 - 4\sqrt{29 - 28x}/49$, $x \in (-\infty, 1)$.

6] $C_- = -32$, $x = -7y + 24 - 16\sqrt{2 - y}$, $y \in (-\infty, 34/49)$;
$C_- = -32$, $y = -x/7 + 40/49 - 16\sqrt{7x - 6}/49$, $x \in (6/7, +\infty)$.

*] $C = 0$, $x = -7y+8, y \in (1, +\infty)$; $y = -x/7+8/7, x \in (-\infty, 1)$.

**] $x = y$, $y \in (1, \infty)$; $y = x$, $x \in (1, +\infty)$.

Особенности уравнения 2_3) в симметричной форме.

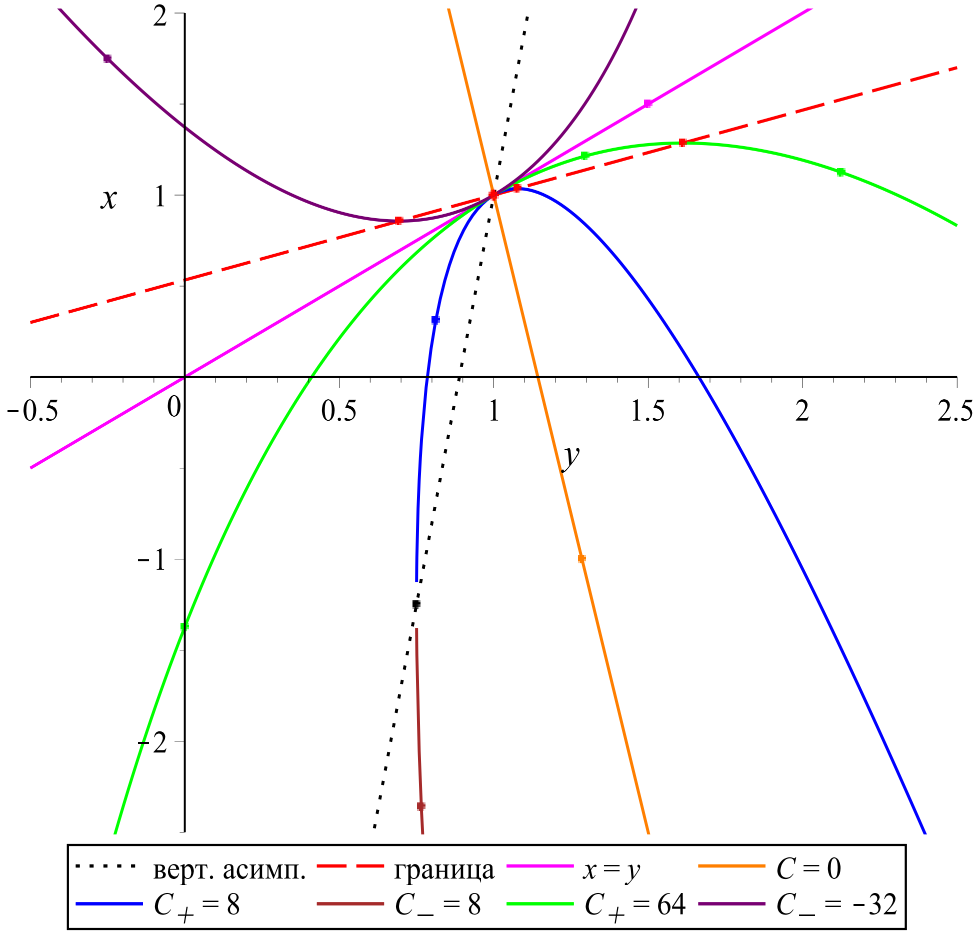
$(x - 9y + 8)\, dx + (15x - 7y - 8)\, dy = 0$.

ОДЗ: $(1, 1)$ – особая точка (пересечение прямых $15x-7y-8 = 0$ и $9y-x-8 = 0$), при этом $9y-x-8 = 0$ – изоклина с горизонтальными отрезками поля направлений, а $15x-7y-8 = 0$ – с вертикальными.

Задачи Коши $2]_x$ и $3]_x$ задают одно и то же решение на интервале $(1, +\infty)$, а для задачи Коши $6]_x$ – интервал $(-\infty, 1)$.

$$x = y, \quad (7y + x - 8)^2 = C\,(y - x) \quad \text{или}$$

$$x(y, C_{\mp}) = -7y + 8 - \frac{1}{2}C \mp \sqrt{C\left(\frac{1}{4}C + 8y - 8\right)}$$



3) Решить обобщенно-однородное уравнение

---

6. $(8xy^{1/2}+4)\,dx+x^2(5y^{-1/2}+x)\,dy=0$;

найти частные решения $y=\varphi(x)$ и $x=\psi(y)$ след. задач Коши: $(x_0,y_0):$ 1] $(2^{-5},2^6)$, 2] $(-2,9/4)$, 3] $(-2,121/4)$, 4] $(-2,1/4)$, 5] $(-2/5,1/4)$, 6] $(-1/2,4)$, 7] $(-2/15,25/4)$, 8] $(8/9,63^2/8^2)$, 9] $(-25/9,117^2/50^2)$, 10] $(-25/9,36^2/25^2)$, 11] $(8/105,15^2/8^2)$, 12] $(8/15,45^2/8^2)$, 13] $(8/35,25/64)$, $*$] $(-2,1)$, $**$] $(1/4,16)$

ОДЗ: $y>0$, $y\equiv 0$ — граница, особых точек нет; $\sqrt{y}+5/x=0$ — изоклина с вертикальными отрезками, $\sqrt{y}+1/(2x)=0$ – изоклина с горизонтальными отрезками поля направлений.

$\partial M(x,y)/\partial x, \partial N(x,y)/\partial x$ непрерывны при $y>0$, поэтому все решения — частные.

Ищем m – порядок y, считая, что x имеет порядок 1:

$1+m/2+1=1=2-m/2+m=2+1+m \;\Rightarrow\; m=-2.$

Замена $y=z^{-2}$, $z=y^{-1/2}>0$; $dy=-2z^{-3}dz$ дает:
$(4xz^2+2z^3)dx-x^2(5z+x)dz=0$ — однородное уравнение.

После замены $z=ux$, $u=zx^{-1}\neq 0$; $dz=xdu+udx$ получаем $x\equiv 0$ или $x(5u+1)du=(2u^3-u^2-u)dx$ — уравнение с разд. переменными $\Leftrightarrow$ $\dfrac{(5u+1)\,du}{(u-1)(2u+1)u}=\dfrac{dx}{x}$ или $\underline{u\equiv 1}$, $\underline{u\equiv -1/2}$ — это потерянные при делении решения $(u\neq 0)$. Имеем:

$$\int\left(\frac{2}{u-1}-\frac{2}{2u+1}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x}+C \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{(u-1)^2}{(2u+1)uxC}=0$$

$\Rightarrow (u-1)^2=Cx(2u+1)u$ $(u\equiv 1$ при $C=0)$; $u=z/x=1/(xy^{1/2})$.

Ответ: $x\equiv 0$, $xy^{1/2}=-2$, $(1-xy^{1/2})^2=Cx(2+xy^{1/2})$.

Другой способ решения уравнения.

Пусть x имеет порядок α, а y – порядок β, тогда
$\alpha+\beta/2+\alpha=\alpha=2\alpha-\beta/2+\beta=2\alpha+\alpha+\beta$. Отсюда $\alpha=-\beta/2$.

Замена: $y^\alpha=ux^\beta$, или $y^{1/2}=ux^{-1}$, или $y=u^2x^{-2}$ $(ux>0)$, $dy=2x^{-2}udu-2x^{-3}u^2dx$, $u=xy^{1/2}$. При этом $x\equiv 0$ — решение.

Получаем $x(u+5)du=(u^2+u-2)dx$ — уравнение с разд. перемен.
$\Leftrightarrow u\equiv 1$, $u\equiv -2$ или $\dfrac{(u+5)du}{(u-1)(u+2)}=\dfrac{dx}{x}\Leftrightarrow \ln\dfrac{(u-1)^2}{(u+2)xC}=0.$

Отсюда $(u-1)^2=Cx(u+2)$, $u\equiv -2$, а $u=xy^{1/2}$.

Положим $z = y^{1/2} > 0,\ c = C/2$.

I. Найдем классические общие решения в виде $z = \varphi(x, c)$. Имеем $(1-xz)^2 = 2cx(2+xz)\ \ (x \neq 0) \Leftrightarrow z^2-2(x^{-1}+c)z-4cx^{-1}+x^{-2} = 0 \Leftrightarrow$ $\underline{z_{\mp} = x^{-1} + c \mp \sqrt{c^2 + 6cx^{-1}}}$, и по ОДЗ $z \neq -5x^{-1}$ при $x < 0$.

0) Если $c = 0$, то $z_{\mp} = x^{-1},\ x \in (0, +\infty)$.

Пусть $c \neq 0$. Рассмотрим дискриминант $D = c^2x^{-1}(x + 6c^{-1})$.

$D = 0$ при $c = -6x^{-1}$, тогда $z_{\mp} = -5x^{-1}$ – противоречит ОДЗ.

$D > 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \begin{cases} (-\infty, -6c^{-1}) \cup (0, +\infty) \text{ для } c > 0 \\ (-\infty, 0) \cup (-6c^{-1}, +\infty) \text{ для } c < 0 \end{cases}.$

1) $z_{-} > 0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{c^2 + 6cx^{-1}} < c + x^{-1}\ \ (*)$.

Если п. ч. ≤ 0, то это неравенство решений не имеет.

П. ч. $> 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \begin{cases} (-\infty, -c^{-1}) \cup (0, +\infty) \text{ для } c > 0 \\ (0, -c^{-1}) \text{ для } c < 0 \end{cases}.$

Тогда неравенство $(*)\ \Leftrightarrow 4cx < 1 \Leftrightarrow x \in \begin{cases} (-\infty, (4c)^{-1}) \text{ для } c > 0 \\ ((4c)^{-1}, +\infty) \text{ для } c < 0 \end{cases}.$

2) $z_{+} > 0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{c^2 + 6cx^{-1}} > -c - x^{-1}\ \ (**)$.

Если п. ч. $\leq 0 \Leftrightarrow\ x \in \begin{cases} (-\infty, -c^{-1}] \cup (0, +\infty) \text{ для } c > 0 \\ (0, -c^{-1}] \text{ для } c < 0 \end{cases}$, то доп. ограничений нет.

П. ч. $> 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \begin{cases} (-c^{-1}, 0) \text{ для } c > 0 \\ (-\infty, 0) \cup (-c^{-1}, +\infty) \text{ для } c < 0 \end{cases}.$

Тогда неравенство $(**) \Leftrightarrow 4cx > 1 \Leftrightarrow x \in \begin{cases} ((4c)^{-1}, +\infty) \text{ для } c > 0 \\ (-\infty, (4c)^{-1}) \text{ для } c < 0 \end{cases}.$

Произведя все необходимые пересечения интервалов, получаем:

0) $\underline{z = x^{-1}}$, $\ x \in (0, +\infty)$;

1) $\underline{z_{-} = x^{-1} + c - \sqrt{c^2 + 6cx^{-1}}}$,
$x \in \{\overline{(-\infty, -6c^{-1}) \cup (0, (4c)^{-1})} \text{ для } c > 0,\ \ \varnothing \text{ для } c < 0\}$;

2) $\underline{z_{+} = x^{-1} + c + \sqrt{c^2 + 6cx^{-1}}}$,
$x \in \{\overline{(-\infty, -6c^{-1}) \cup (0, +\infty)} \text{ для } c > 0,\ \ (-\infty, (4c)^{-1}) \text{ для } c < 0\}$;

3) $\underline{z = -2x^{-1}}$, $x \in (-\infty, 0)$.

II. Найдем классические общие решения в виде $x = \psi(z, c)$. Имеем $\underline{x_{\mp}(z, c) = (z + 2c \mp \sqrt{6cz + 4c^2})(z(z - 2c))^{-1}}$ с учетом необходимых ограничений на c и z. И частное решение $x \equiv 0,\ y > 0$.

З.К. 1] $(2^{-5}, 2^6) \;\Rightarrow\; c=4 \;\; (z_0=8)$;
$1]_y$ $z_-(x,4) = x^{-1}+4-2\sqrt{4+6x^{-1}} \;\Rightarrow$
$\underline{y=(x^{-1}+4-2\sqrt{4+6x^{-1}})^2}$, $\underline{x\in(0,2^{-4})}$;
$1]_x$ $x_-(z,4) = (z+8-2\sqrt{6z+16})(z(z-8))^{-1}$, $x_-\to 1/16$ при $z\to 0$, $x_-\to 1/32$ при $z\to 8$ $x_-\to 0$ при $z\to\infty$ $\Rightarrow$
$\underline{x=(y^{1/2}+8-2\sqrt{6y^{1/2}+16})(y^{1/2}(y^{1/2}-8))^{-1}}$, $\underline{y\in(0,+\infty)}$.
2] $(-2, 9/4) \;\Rightarrow\; c=4 \;\; (z_0=3/2)$;
$2]_y$ $z_-(x,4) = x^{-1}+4-2\sqrt{4+6x^{-1}}$, $z_-\to 0$ при $x\to-\infty$, z_- примыкает к изоклине $z=-5/x$ в точке $(-3/2, 10/3)$ $\Rightarrow$
$\underline{y=(x^{-1}+4-2\sqrt{4+6x^{-1}})^2}$, $x\in(-\infty,-3/2)$;
$2]_x$ $x_+(z,4) = (z+8+2\sqrt{6z+16})(z(z-8))^{-1}$, $x_+\to-\infty$ при $z\to 0$, $x_+\to-\infty$ при $z\to 8_{-0}$ $(z_{\min}=10/3)$ $\Rightarrow$
$\underline{x=(y^{1/2}+8+2\sqrt{6y^{1/2}+16})(y^{1/2}(y^{1/2}-8))^{-1}}$, $\underline{y\in(0,64)}$.
3] $(-2, 121/4) \Rightarrow c=4 \;\; (z_0=11/2)$;
$3]_y$ $z_+(x,4) = x^{-1}+4+2\sqrt{4+6x^{-1}}$, $z_+\to 8_{-0}$ при $x\to-\infty$, z_+ примыкает к изоклине $z=-5/x$ в точке $(-3/2, 10/3)$ $\Rightarrow$
$\underline{y=(x^{-1}+4+2\sqrt{4+6x^{-1}})^2}$, $\underline{x\in(-\infty,-3/2)}$;
$3]_x$ совпадает со случаем $2]_x$.
4] $(-2, 1/4) \;\Rightarrow\; c=-1 \;\; (z_0=1/2)$;
$4]_y$ $z_+(x,-1)) = x^{-1}-1+\sqrt{1-6x^{-1}}$ $(x_{\max}=-3/4)$ $\Rightarrow$
$\underline{y=(x^{-1}-1+\sqrt{1-6x^{-1}})^2}$, $\underline{x\in(-\infty,-1/4)}$;
$4]_x$ $x_-(z,-1) = (z-2-2\sqrt{4-6z})(z(z+2))^{-1}$, $x_-\to-\infty$ при $z\to 0$, x_- примыкает к изоклине $x=-1/(2z)$ в точке $(-3/4, 2/3)$ $\Rightarrow$
$\underline{x=(y^{1/2}-2-\sqrt{4-6y^{1/2}})(y^{1/2}(y^{1/2}+2))^{-1}}$, $\underline{y\in(0,4/9)}$.
5] $(-2/5, 1/4) \;\Rightarrow\; c=-1 \;\; (z_0=1/2)$;
$5]_y$ совпадает со случаем $4]_y$;
$5]_x$ $x_+(z,-1) = (z-2+2\sqrt{4-6z})(z(z+2))^{-1}$, $x_+\to -1/4$ при $z\to 0$, x_+ примыкает к изоклине $x=-1/(2z)$ в точке $(-3/4, 2/3)$ $\Rightarrow$
$\underline{x=(y^{1/2}-2+\sqrt{4-6y^{1/2}})(y^{1/2}(y^{1/2}+2))^{-1}}$, $\underline{y\in(0,4/9)}$.
6] $(-1/2, 4) \Rightarrow\; c=-4 \;\; (z_0=2)$;
$6]_y$ $z_+(x,-4) = x^{-1}-4+2\sqrt{4-6x^{-1}}$ $(x_{\max}=-3/16)$ $\Rightarrow$
$\underline{y=(x^{-1}-4+2\sqrt{4-6x^{-1}})^2}$, $\underline{x\in(-\infty,-1/16)}$;
$6]_x$ $x_-(z,-4) = (z-8-2\sqrt{16-6z})(z(z+8))^{-1}$, $x_-\to-\infty$ при $z\to 0$, x_- примыкает к изокл. $x=-1/(2z)$ в точке $(-3/4, 2/3) \Rightarrow$
$\underline{x=(y^{1/2}-2-\sqrt{4-6y^{1/2}})(y^{1/2}(y^{1/2}+2))^{-1}}$, $\underline{y\in(0,4/9)}$.

7] $(-2/15, 25/4) \Rightarrow\ c = -4\ \ (z_0 = 5/2)$;
$7]_y$ совпадает со случаем $6]_y$;
$7]_x$ $x_+(z,-4) = (z - 8 + 2\sqrt{16-6z})(z(z+8))^{-1}$, $x_+ \to -1/16$ при $z \to 0$, x_+ примыкает к изокл. $x = -1/(2z)$ в точке $(-3/16, 8/3) \Rightarrow$
$\underline{x = (y^{1/2} - 2 - \sqrt{4 - 6y^{1/2}})(y^{1/2}(y^{1/2}+2))^{-1}}$, $\underline{y \in (0, 64/9)}$.

8] $(8/9, 63^2/8^2) \Rightarrow c = 9/4\ \ (z_0 = 63/8)$;
$8]_y$ $z_+(x, 9/4) = x^{-1} + 9/4 + (3/2)\sqrt{9/4 + 6x^{-1}}\ \Rightarrow$
$\underline{y = (x^{-1} + 9/4 + (3/2)\sqrt{9/4+6x^{-1}})^2}$, $\underline{x \in (0, +\infty)}$;
$8]_x$ $x_+(z, 9/4) = (z + 9/2 + (3/2)\sqrt{9+6z})(z(z-9/2))^{-1}$, $x_+ \to +\infty$ при $z \to 9/2_{+0}$, $x_+ \to 0$ при $z \to +\infty\ \Rightarrow$
$\underline{x = (y^{1/2} + 9/2 + (3/2)\sqrt{9+6y^{1/2}})(y^{1/2}(y^{1/2} - 9/2))^{-1}}$,
$\underline{y \in (81/4, +\infty)}$.

9] $(-25/9, 117^2/50^2) \Rightarrow c = 9/4\ \ (z_0 = 117/50)$;
$9]_y$ $z_+(x, 9/4) = x^{-1} + 9/4 + (3/2)\sqrt{9/4+6x^{-1}}$, z_+ примыкает к изоклине $z = -5/x$ в точке $(-8/3, 15/8)$, $z_+ \to 9/2$ при $x \to -\infty \Rightarrow$
$y = (x^{-1} + 9/4 + (3/2)\sqrt{9/4+6x^{-1}})^2$, $x \in (-\infty, -8/3)$;
$9]_x$ $x_+(z, 9/4) = (z + 9/2 + (3/2)\sqrt{9+6z})(z(z-9/2))^{-1}$, $x_+ \to -\infty$ при $z \to 0$, $x_+ \to -\infty$ при $z \to 9/2_{-0}$ $(z_{\min} = 15/8)\ \Rightarrow$
$\underline{x = (y^{1/2} + 9/2 + (3/2)\sqrt{9+6y^{1/2}})(y^{1/2}(y^{1/2} - 9/2))^{-1}}$,
$\underline{y \in (0, 81/4)}$.

10] $(-25/9, 36^2/25^2) \Rightarrow c = 9/4\ \ (z_0 = 36/25)$;
$10]_y$ $z_-(x, 9/4) = x^{-1} + 9/4 - (3/2)\sqrt{9/4+6x^{-1}}$, z_- примыкает к изоклине $z = -5/x$ в точке $(-8/3, 15/8)$, $z_- \to 0$ при $x \to -\infty \Rightarrow$
$\underline{y = (x^{-1} + 9/4 - (3/2)\sqrt{9/4+6x^{-1}})^2}$, $\underline{x \in (-\infty, -8/3)}$;
$10]_x$ совпадает со случаем $9]_x$.

11] $(8/105, 15^2/8^2) \Rightarrow c = 9/4\ \ (z_0 = 15/8)$;
$11]_y$ $z_-(x, 9/4) = x^{-1} + 9/4 - (3/2)\sqrt{9/4+6x^{-1}}\ \Rightarrow$
$\underline{y = (x^{-1} + 9/4 - (3/2)\sqrt{9/4+6x^{-1}})^2}$, $\underline{x \in (0, 1/9)}$;
$11]_x$ $x_-(z, 9/4) = (z + 9/2 - (3/2)\sqrt{9+6z})(z(z-9/2))^{-1}$, $x_- \to 1/9$ при $z \to 0$, $x_- \to 1/18$ при $z \to 9/2$, $x_- \to 0$ при $z \to +\infty\ \Rightarrow$
$\underline{x = (y^{1/2} + 9/2 + (3/2)\sqrt{9+6y^{1/2}})(y^{1/2}(y^{1/2} - 9/2))^{-1}}$,
$\underline{y \in (0, +\infty)}$.

12] $(8/15, 45^2/8^2) \Rightarrow c = 3/4$ $(z_0 = 45/8)$;
$12]_y$ $z_+(x, 3/4) = x^{-1} + 3/4 + (3/4)\sqrt{1+8x^{-1}}$ $\Rightarrow$
$\underline{y = (x^{-1} + 3/4 + (3/4)\sqrt{1+8x^{-1}})^2}$, $\underline{x \in (0, +\infty)}$;
$12]_x$ $x_+(z, 3/4) = (z + 3/2 + (3/2)\sqrt{1+2z})(z(z-3/2))^{-1}$, $x_+ \to +\infty$ при $z \to 3/2_{+0}$, $x_+ \to 0$ при $z \to +\infty$ $\Rightarrow$
$\underline{x = (y^{1/2} + 3/2 + (3/2)\sqrt{1+2y^{1/2}})(y^{1/2}(y^{1/2} - 3/2))^{-1}}$, $\underline{y \in (9/4, +\infty)}$.

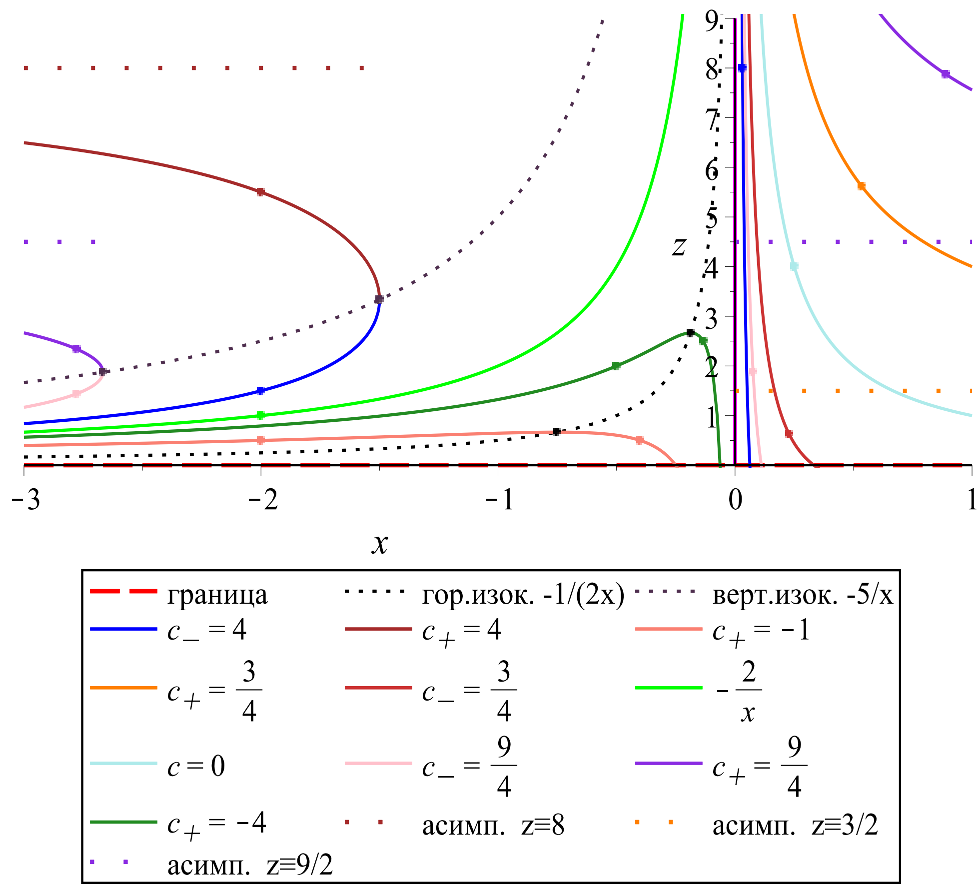
13] $(8/35, 25/64) \Rightarrow c = 3/4$ $(z_0 = 5/8)$;
$13]_y$ $z_-(x, 3/4) = x^{-1} + 3/4 - (3/4)\sqrt{1+8x^{-1}}$ $\Rightarrow$
$\underline{y = (x^{-1} + 3/4 - (3/4)\sqrt{1+8x^{-1}})^2}$, $\underline{x \in (0, 1/3)}$;
$13]_x$ $x_-(z, 3/4) = (z + 3/2 - (3/2)\sqrt{1+2z})(z(z-3/2))^{-1}$, $x_- \to 1/3$ при $z \to 0$, $x_- \to 1/6$ при $z \to 3/2$, $x_- \to 0$ при $z \to +\infty$ $\Rightarrow$
$\underline{x = (y^{1/2} + 3/2 - (3/2)\sqrt{1+2y^{1/2}})(y^{1/2}(y^{1/2} - 3/2))^{-1}}$, $\underline{y \in (0, +\infty)}$.

$*]$ $(-2, 1)$ $\Rightarrow$ $c = \infty$ $\Rightarrow$
$\underline{y = 4x^{-2}}$, $\underline{x \in (-\infty, 0)}$ или $\underline{x = -2y^{-1/2}}$, $\underline{y \in (0, +\infty)}$.

$**]$ $(1/4, 16)$ $\Rightarrow$ $c = 0$ $\Rightarrow$
$\underline{y = x^{-2}}$, $\underline{x \in (0, +\infty)}$ или $\underline{x = y^{-1/2}}$, $\underline{y \in (0, +\infty)}$.

Все возникающие неопределенности можно раскрыть, используя правило Лопиталя.

$$z=\sqrt{y},\quad z\left(x,c_{\mp}\right)=\frac{1}{x}+c\mp\sqrt{c^{2}+\frac{6\,c}{x}}$$



7. $(x^2 + (2x+3)\ln y)y\,dx = x(x+1)\,dy$;

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $(-2, e^{-2})$, 2] $(-2, e^{-4})$, 3] $(1,1)$, 4] $(-1/2, e^{-5/27})$,
5] $(1, e^{-1/2})$, 6] $(-2/3, e^{-2/3})$, 8] $(1, e^{-7/8})$, 9] $(-1/2, 1)$,
10] $(-3/2, e^{-4})$, $*$] $(-1, 2/5)$, $**$] $(0, e^{-2})$, $***$] $(-e^{-2}, 0)$

Дано урав. в симм. форме с $M = x^2y + (2x+3)y\ln y$, $N = -x^2 - x$.

ОДЗ: $y \geq 0$, так как функция $y\ln y$, входящая в M, может быть доопределена в нуле по непрерывности нулем. Поэтому не только точки $(-1, e^{-1})$, $(0,1)$, но и точки $(-1,0)$, $(0,0)$ — особые, в них $M=0$, $N=0$. Последние две особые точки являются граничными и разбивают границу области $y(x)\equiv 0$ на три граничных решения.

Кроме того, $\partial M(x,y)/\partial x$, $\partial N(x,y)/\partial x$ непрерывны при $y \geq 0$, поэтому все неособые точки — это точки единственности.

Имеем: $\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = x^2 + 4x + 4 + (2x+3)\ln y \not\equiv 0$, однако,

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N\omega'_x - M\omega'_y} = \frac{x^2+4x+4+(2x+3)\ln y}{-x(x+1)\omega'_x - (x^2 + (2x+3)\ln y)y\omega'_y} = -\frac{1}{\omega},$$

если выбрать $\omega(x,y) = x^4y$.

Поэтому $d\mu/d\omega = -\omega^{-1}\mu$, откуда $\mu = \omega^{-1} = x^{-4}y^{-1}$, а значит,
$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\ln y + \frac{3}{x^4}\ln y\right)dx - \left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x^3y}\right)dy = 0$ — уравнение в полных дифференциалах. И при умножении на $\mu(x,y)$ были потеряны решения $\underline{x\equiv 0}$ $(y\neq 1)$ и $\underline{y\equiv 0}$ $(x \neq -1, 0)$. Теперь

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \widetilde{N} \Rightarrow U(x,y) = C(x) - \int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\frac{dy}{y} = C(x) - \frac{\ln y}{x^2} - \frac{\ln y}{x^3};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \widetilde{M} \;\Rightarrow\; C'(x) = \frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; C(x) = -\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; U = -\frac{\ln y}{x^3} - \frac{\ln y}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

Ответ: $(x^{-3} + x^{-2})\ln y + x^{-1} = C$, $x(y)\equiv 0$ $(y\neq 1)$,
$y(x)\equiv 0$ $(x\neq -1, 0)$ — граничные решения.

Найдем классическое общее решение.

Имеем: $(x+1)\ln y = Cx^3 - x^2$.

При $C=-1$ получаем решения $\underline{x\equiv -1}$ $(y\neq e^{-1})$.

Все остальные решения имеют вид $y(x,c) = \exp\dfrac{cx^3 - x^2}{x+1}$ с $x\neq 0$, так как при $x\to 0$ примыкают к особой точке $(0,1)$.

Только при $c=-1$ функция $y(x,c)$ определена при всех значениях x и, наряду с $x\equiv -1$, проходит через особую точку $(e^{-1}, -1)$.

Пусть $c \neq -1$, тогда:
если $x \to -\infty$, то $y(x,c) \to 0$;
если $x \to -1_{-0}$, то $y(x,c) \to 0$ $(c < -1)$ и $y(x,c) \to \infty$ $(c > -1)$;
если $x \to -1_{+0}$, то $y(x,c) \to 0$ $(c > -1)$ и $y(x,c) \to \infty$ $(c < -1)$;
если $x \to +\infty$, то $y(x,c) \to 0$ $(c \leq 0)$ и $y(x,c) \to \infty$ $(c > 0)$.

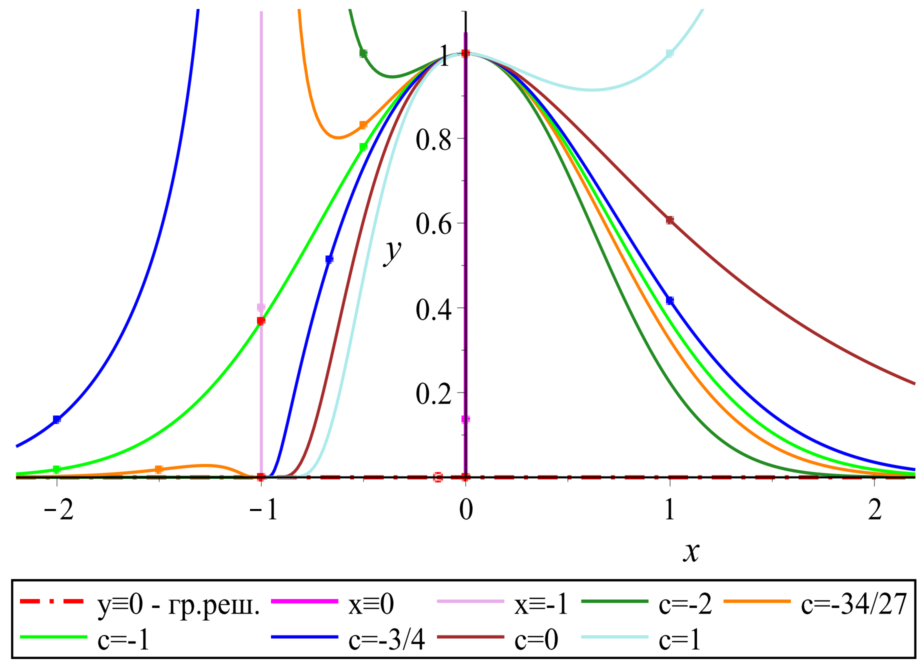
Решение поставленных задач Коши.
1] $(-2, e^{-2})$; $y(x,-3/4) = e^{(-3x^3/4 - x^2)/(x+1)}$, $x \in (-\infty, -1)$;
3] $(-2, e^{-4})$; $y(x,-1) = e^{-x^2}$, $x \in (-\infty, -1)$;
4] $(1, 1)$; $y(x,1) = e^{(x^3 - x^2)/(x+1)}$, $x \in (0, +\infty)$;
5] $(-1/2, e^{-5/27})$; $y(x,-34/27) = e^{(-34x^3/27 - x^2)/(x+1)}$, $x \in (-1, 0)$;
6] $(1, e^{-1/2})$; $y(x,0) = e^{-x^2/(x+1)}$, $x \in (0, +\infty)$;
7] $(-2/3, e^{-2/3})$; $y(x,-3/4) = e^{(-3x^3/4 - x^2)/(x+1)}$, $x \in (-1, 0)$;
8] $(1, e^{-7/8})$; $y(x,-3/4) = e^{(-3x^3/4 - x^2)/(x+1)}$, $x \in (0, +\infty)$;
9] $(-1/2, 1)$; $y(x,-2) = e^{(-2x^3 - x^2)/(x+1)}$, $x \in (-1, 0)$;
10] $(-3/2, e^{-4})$; $y(x,-34/27) = e^{(-34x^3/27 - x^2)/(x+1)}$, $x \in (-\infty, -1)$;
*] $(-1, 2/5)$; $x(y) \equiv -1$, $y \in (e^{-1}, +\infty)$;
**] $(0, e^{-2})$; $x(y) \equiv 0$, $y \in (0, 1)$;
***] $(-e^{-2}, 0)$; $y(x) \equiv 0$, $x \in (-1, 0)$ — частное граничное решение.

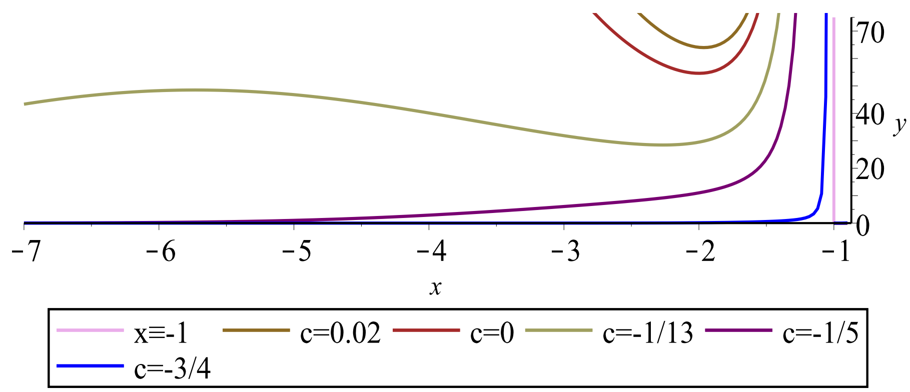
Особенности уравнения 4_7), *если оно разрешено относительно производной:* $(x^2 + (2x+3)\ln y)y = x(x+1)y'$.

ОДЗ: $y \geq 0$, $x \not\equiv C$; $x \equiv 0$, $x \equiv -1$ – *границы.*

Решения $x \equiv -1, 0$ *стали границами областей существования.*

$$y = e^{\frac{c x^3 - x^2}{x+1}}$$





Контрольная работа № 1 (переписывание 1).

6) $xy + (x^2 - 1)(xy^{1/2} - y') = 0;$

найти частные или специальные решения следующих задач Коши: $(x_0, y_0):$ 1] $(-\sqrt{2}, 1/9)$, 2] $(\sqrt{3}/2, 1/16)$, 3] $(5/3, 4(8/27 - 3^{-3/2})^2)$, 4] $(-\sqrt{3}/2, ((3^{3/4}-1)/12)^2)$, 5] $(-\sqrt{3}/2, ((2^{3/2}-1)/12)^2)$, 6] $(-\sqrt{2}, 0)$

ОДЗ: $x \not\equiv C$, $y \geq 0$; $x \equiv -1, 1$, $y \equiv 0$ – границы областей $\exists$. При этом $y(x) \equiv 0$ $(x \neq \mp 1)$ – граничные решения.

Имеем уравнение Бернулли $(x^2 - 1)y' - xy - x(x^2 - 1)y^{1/2} = 0$. Оно инвариантно относительно замены x на $-\tilde{x}$.

Замена $u = y^{1-\alpha}$, $\alpha = 1/2 \Rightarrow u = y^{1/2}$, $2u' = y^{-1/2}y'$ $(y \neq 0)$.

После деления уравнения на y^α и замены получаем $2(x^2 - 1)u' - xu = x(x^2 - 1)$ – линейное уравнение.

Находим $u_{\text{оо}} = C|x^2 - 1|^{1/4}$; $u_{\text{чн}} = C(x)(x^2 - 1)^{1/4}$ для $|x| > 1$, тогда $C' = x(x^2-1)^{1/4}/2$, $C(x) = (x^2-1)^{3/4}/3 \Rightarrow u_{\text{чн}} = (x^2-1)/3$.

Подставляя эту функцию в ЛНУ, убеждаемся, что она является решением для всех допустимых значений переменной x.

Следовательно, $u_{\text{он}} = C|x^2 - 1|^{1/4} + (x^2 - 1)/3$.

Ответ: $y^{1/2} = C|x^2 - 1|^{1/4} + \dfrac{x^2 - 1}{3}$;
граничные решения $y(x) \equiv 0$ при $x < -1$, $-1 < x < 1$, $x > 1$.

Выпишем классическое общее решение.

При $|x| > 1:$ $C(x^2 - 1)^{1/4} + (x^2 - 1)/3 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^{3/4} > -3C$.
При $|x| < 1:$ $C(1 - x^2)^{1/4} - (1 - x^2)/3 > 0 \Leftrightarrow (1 - x^2)^{3/4} < 3C$.

Кроме того, при любой константе C, если $x = \pm 1$, то $y = 0$. И, если $y_0 = 0$, то для любого x_0 $x_0 \neq \pm 1$ найдется единственное число C_0, удовлетворяющее формуле решения, а значит, каждое из трех граничных решений $y \equiv 0$ является специальным.

Поэтому: 1) $y = (C(x^2 - 1)^{1/4} + (x^2 - 1)/3)^2$,
$|x| \in \{(1, +\infty)$ при $C \geq 0$, $(\sqrt{1 + (-3C)^{4/3}}, +\infty)$ при $C < 0\}$;

2) $y = (C(1 - x^2)^{1/4} - (1 - x^2)/3)^2$,
$|x| \in \{[0, 1)$ при $C > 1/3$, $(\sqrt{1 - (3C)^{4/3}}, 1)$ при $0 < C \leq 1/3\}$.

1) Продолжение 1 решения уравнения 1_6).

Решение поставленных задач Коши.

1] $(-\sqrt{2}, 1/9):\ 1/3 = (1/2)^{1/4}C + 1/3 \ \Rightarrow\ C = 0,$ поэтому $\underline{y = (x^2-1)^2/9}$, $\underline{x \in (-\infty, -1)}$.

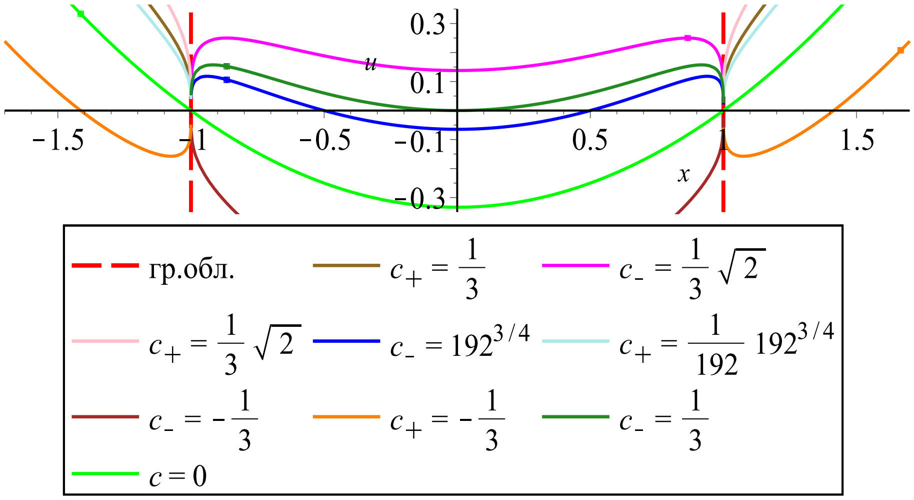
2] $(\sqrt{3}/2, 1/16):\ 1/4 = C(1/4)^{1/4} - 1/12 \ \Rightarrow\ C = \sqrt{2}/3,$ поэтому $\underline{y = (\sqrt{2}(1-x^2)^{1/4} + x^2 - 1)^2/9}$, $\underline{x \in (-1, 1)}$.

3] $(5/3, 4(8/27 - 3^{-3/2})^2):\ 2(8/27 - 3^{-3/2}) = 2 \cdot 3^{-1/2}C + 16/27 \ \Rightarrow$ $C = -1/3,$ поэтому $\underline{y = (-(x^2-1)^{1/4} + x^2 - 1)^2/9}$, $\underline{x \in (\sqrt{2}, +\infty)}$.

4] $(-\sqrt{3}/2, ((3^{3/4}-1)/12)^2):\ (3^{3/4}-1)/12 = (1/4)^{1/4}C - 1/12 \ \Rightarrow$ $C = 3^{-1/4} \cdot 4^{-3/4}$, поэтому $\underline{y = ((3/4)^{3/4}(1-x^2)^{1/4} + x^2 - 1)^2/9}$, $\underline{x \in (-1, -1/2)}$.

5] $(-\sqrt{3}/2, ((2^{3/2}-1)/12)^2):\ (2^{3/2}-1)/12 = (1/4)^{1/4}C - 1/12 \ \Rightarrow$ $C = 1/3,$ поэтому $\underline{y = ((1-x^2)^{1/4} + x^2 - 1)^2/9}$, $\underline{x \in (-1, 0)}$.

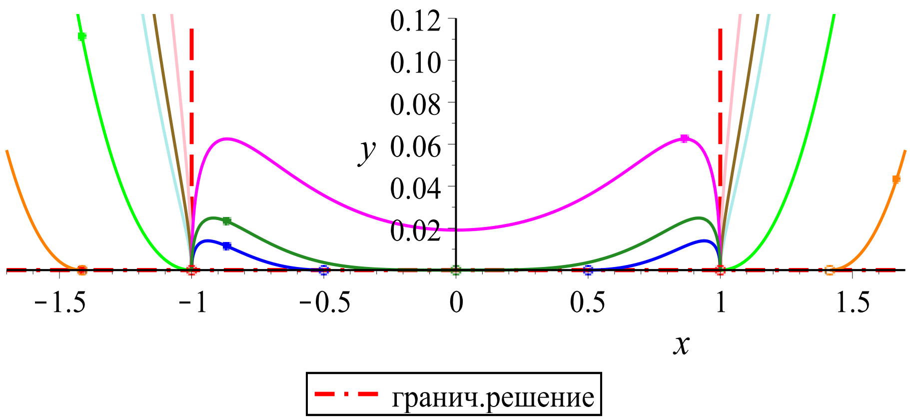
6] $(-\sqrt{2}, 0)\ :\ 0 = C + 1/3 \ \Rightarrow\ C = -1/3$, однако, решение $y = (-(x^2-1)^{1/4} + x^2 - 1)^2/9$ будет являться смешанным, так как $(-\sqrt{2}, 0)$ — граничная точка, поэтому
$\underline{y \equiv 0}$, $\underline{x \in (-\infty, -1)}$ — специальное граничное решение.



$$u(x, c_-) = c_- \left(-x^2 + 1\right)^{1/4} + (x^2 - 1)/3, \quad |x| < 1,$$

$$u(x, c_+) = c_+ \left(x^2 - 1\right)^{1/4} + (x^2 - 1)/3, \quad 1 < |x|$$

y≡0; $y(x, c_\mp) = u(x, c_\mp)^2$ при $0 < u(x, c_\mp)$



2) Решить дробно-линейное уравнение

1. $(3x+2y-10)y' = 2x+3y-5;$

найти максимальные интервалы существования решений задач Коши, представимых в виде $y=\varphi(x)$:
$(x_0, y_0):$ 1] $(0,-4)$, 2] $(8,2)$, 3*] $(31/5, 16/5)$, 4*] $(4, -1-5^{1/4})$,
5*] $(4,-3)$, 6*] $(4,1)$, *] $(5,-2)$, **] $(3,-2)$

ОДЗ: $x \neq C$; $3x+2y-10=0$ – граница областей существования и единственности, совпадающая с асимптотами для вертикальных отрезков поля направлений: $y=-3x/2+5$ с $x<4$ и $x>4$, так как в точке $(4,-1)$ правая часть уравнения тоже обращается в нуль, а значит, поле направлений в ней не определено.

Замена $u=x-4$, $v=y+1$; $du=dx$, $dv=dy$; $x=u+4$, $y=v-1$ дает $(3u+2v)v'=2u+3v$ – однородное уравнение 1-го порядка.

Замена $v=zu$, $v'=uz'+z$; $z=vu^{-1}$; $u\equiv 0$ – не решение.

Получаем $(3u+2zu)(uz'+z)=2u+3zu$ – ур-е с раздел. перем. или $\dfrac{2z+3}{(1-z)(1+z)}dz = 2\dfrac{du}{u}$, $\underline{z=\pm 1}$ – потерянные решения (замена $z=uv^{-1}$ дает такое же уравнение). Тогда

$$\int\left(\frac{1}{z+1}-\frac{5}{z-1}\right)dz = 4\int\frac{du}{u}+C \text{ или } \ln\frac{C(z+1)}{(z-1)^5u^4}=0 \Rightarrow$$

$C(z+1)=(z-1)^5u^4$, $z\equiv -1$; $z=vu^{-1}=(y+1)/(x-4)$.

Ответ: $C(x+y-3)=(y-x+5)^5$, $y=-x+3$ $(x\neq 4)$

Решение поставленных задач Коши.

Хотя решения задач Коши 1] – 4] не удастся разрешить ни относительно y ни относительно x, что теоретически возможно, для нахождения максимального интервала существования найдем возможные пересечения графика общего решения с границей $3x+2y=10$.

Подставляя для всякой C уравнение границы $y=5-3x/2$ в формулу общего решения, найдем уравнение для абсцисс точек соприкосновения границы с решением: $C(2-x/2)=(5(2-x/2))^5 \Leftrightarrow$ $z^5-Cz/5=0$, где $z=10-5x/2$.

Следовательно, $z_*=0$ и при $C>0$ также $z_{1,2}=\pm(C/5)^{1/4}$. Отсюда $(x_*,y_*)=(4,-1)$, $(x_{1,2},y_{1,2})=(4-2z_{1,2}/5, -1+3z_{1,2}/5)$.

1] $(x_0, y_0) = (0, -4)$, тогда $C = -1/7 < 0 \Rightarrow$
$\underline{x + y - 3 = -7(y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (-\infty, 4)} \ni x_0$.
2] $(x_0, y_0) = (8, 2)$, тогда $C = -1/7 < 0 \Rightarrow$
$\underline{x + y - 3 = -7(y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (4, +\infty)} \ni x_0$.
$3^\star$] $(x_0, y_0) = (31/5, 16/5)$, тогда $C = 5$ и $z_{1,2} = \pm 1$.

Поэтому пересечение кривой $5(x + y - 3) = (y - x + 5)^5$ с границей происходит в точках: $(18/5, -2/5)$, $(4, 1)$, $(22/5, -8/5)$ и неявное решение однозначно разрешимо относительно y на интервалах $(-\infty, 22/5)$, $(4, 22/5)$, $(18/5, 4)$, $(18/5, +\infty)$, так как $y \to \mp\infty$ при $x \to \mp\infty$, как это происходит и с графиком решения $y = x - 5$, а начальное данное $(31/5, 16/5)$ и точка пересечения $(18/5, -2/5)$ лежат над прямой $y = x - 5$.

В результате $\underline{5(x + y - 3) = (y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (18/5, +\infty)} \ni x_0$.

$4^\star$] $(x_0, y_0) = (4, -1 - 5^{1/4})$. Все аналогично случаю $3^\star$], только начальное данное $(4, -1 - 5^{1/4})$ и точка пересечения $(18/5, -2/5)$ лежат под прямой $y = x - 5$.

Поэтому $\underline{5(x + y - 3) = (y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (18/5, +\infty)} \ni x_0$.

$5^\star$] $(x_0, y_0) = (4, -3)$, тогда $C = 16$ и $z_{1,2} = \pm 2/5^{1/4}$.

Поэтому пересечение кривой $16(x+y-3) = (y-x+5)^5$ с границей происходит в точках: $(4-4/5^{5/4}, -1+6/5^{5/4})$, $(4, 1)$, $(4+4/5^{5/4}, -1-6/5^{5/4})$ и неявное решение однозначно разрешимо относительно y на интервалах $(-\infty, 4 + 4/5^{5/4})$, $(4, 4 + 4/5^{5/4})$, $(4 - 4/5^{5/4}, 4)$, $(4 - 4/5^{5/4}, +\infty)$, так как $y \to \mp\infty$ при $x \to \mp\infty$, как это происходит и с графиком решения $y = x - 5$, а начальное данное $(4, -3)$ и точка пересечения $(4 + 4/5^{5/4}, -1 - 6/5^{5/4})$ лежат под прямой $y = x - 5$.

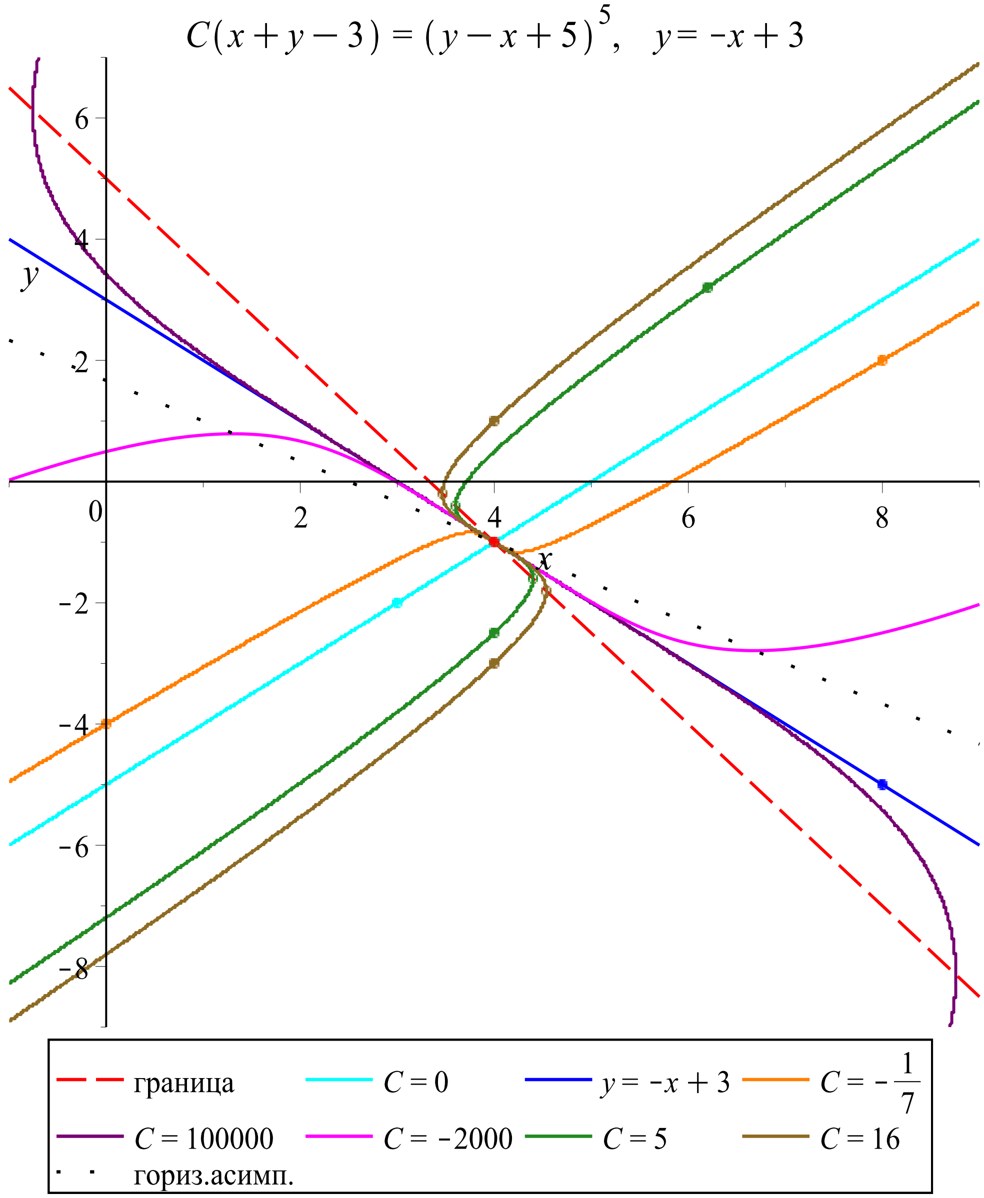
В итоге $\underline{16(x + y - 3) = (y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (-\infty, 4 + 4/5^{5/4})} \ni x_0$.

$6^\star$] $(x_0, y_0) = (4, 1)$. Все аналогично случаю $5^\star$], только начальное данное $(4, 1)$ и точка пересечения $(4 - 4/5^{5/4}, -1 + 6/5^{5/4})$ лежат над прямой $y = x - 5$.

Поэтому $\underline{16(x + y - 3) = (y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (4 - 4/5^{5/4}, +\infty)} \ni x_0$.

*] $(x_0, y_0) = (5, -2)$, тогда $y = -x + 3$, $x \in (4, +\infty)$;

**] $(x_0, y_0) = (3, -2)$, тогда $C = 0 \Rightarrow y = x - 5$, $x \in (-\infty, 4)$, так как в обоих случаях точка $(4, -1)$ принадлежит границе.


$C(x+y-3)=(y-x+5)^5, \quad y=-x+3$
граница
$C=0$
$y=-x+3$
$C=-\frac{1}{7}$
$C=100000$
$C=-2000$
$C=5$
$C=16$
гориз.асимп.

3) Решить обобщенно-однородное уравнение

3. $(y-x^2)y'+10xy+6x^3=0$;

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0,y_0):$ 1] $(-\sqrt{3}/2,-1/4)$, 2] $((8/9)^{1/2},8/3)$, 3] $(-\sqrt{3}/4,-1/16)$, 4] $(-\sqrt{3}/4,15/16)$, 5] $(2/3,-2/3)$, 6] $(0,-2)$, $*$] $(-1/3,-1/3)$, $**$] $((8/9)^{1/2},-8/9)$

ОДЗ: $x\not\equiv C$; $y=x^2$ – граница областей существования.

Уравнение инвариантно относительно замены x на $-\tilde{x}$.

Пусть x имеет порядок α, а y – порядок β, тогда y' имеет порядок $\beta-\alpha$. Приравняем порядки всех слагаемых: $\beta+\beta-\alpha=2\alpha+\beta-\alpha=\alpha+\beta=3\alpha$. Отсюда $\beta=2\alpha$.

Замена: $y^\alpha=ux^\beta$ или $y=ux^2$ $y'=u'x^2+2ux$, $u=x^{-2}y$.

После деления на x^3 получаем уравнение с разд. переменными: $x(u-1)u'+2(u^2+4u+3)=0$. Тогда

$$u=-1,-3 \text{ или } \frac{(u-1)du}{(u+3)(u+1)}+\frac{2dx}{x}=0 \Leftrightarrow \ln\frac{(u+3)^2x^2}{(u+1)C}=0.$$

Отсюда $u=-3$ или $(u+3)^2x^2=C(u+1)$.

Ответ: $y=-x^2$ $(x\neq 0)$, $(y+3x^2)^2=C(y+x^2)$.

Классическое общее решение: $y^2-(C-6x^2)y+9x^4-Cx^2=0 \Leftrightarrow$ $\underline{y_\mp(x,C)=C/2-3x^2\mp\sqrt{C^2/4-2Cx^2}}$ при $D=C^2/4-2Cx^2\geq 0$.

Оно определено при следующих значениях аргумента:
$C<0\Leftrightarrow x\in\{\mathbb{R}^1$ для $y_-(x,C)$, $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ для $y_+(x,C)\}$;
$C=0\Leftrightarrow y=-3x^2$ $(x\neq 0)$; $C>0\Leftrightarrow x\in\{(-(C/8)^{-1/2},(C/8)^{-1/2})$ для $y_+(x,C)$, $(-(C/8)^{-1/2},0)\cup(0,(C/8)^{-1/2})$ для $y_-(x,C)\}$.

Кроме того, при $C<0$ интегральные кривые решений $y_+(x,C)$ $(x\neq 0)$ лежат между графиками решений $y=-x^2$ и $y=-3x^2$, а интегральные кривые решений $y_-(x,C)$ лежат под графиком решения $y=-3x^2$. Также, графики всех решений $y_\mp(x,C)$ с $C>0$ и $x\neq 0$ в момент соприкосновения с границей областей $y=x^2$ имеют вертикальную касательную.

3) Продолжение 1 решения уравнения 3_3).

Решение поставленных задач Коши.

1] $(-\sqrt{3}/2, -1/4) \Rightarrow (-1/4+9/4)^2 = C(-1/4+3/4) \;\Rightarrow\; C = 8 \;\Rightarrow$ $\underline{y_- = 4 - 3x^2 - 4\sqrt{1-x^2}}$, $\underline{x \in (-1, 0)}$.

2] $((8/9)^{1/2}, 8/3) \Rightarrow (8/3+8/3)^2 = C(8/3+8/9) \;\Rightarrow\; C = 8 \;\Rightarrow$ $\underline{y_+ = 4 - 3x^2 + 4\sqrt{1-x^2}}$, $\underline{x \in (-1, 1)}$.

3] $(-\sqrt{3}/4, -1/16) \;\Rightarrow\; (-1/16+9/16)^2 = C(-1/16+3/16) \;\Rightarrow$ $C = 2 \;\Rightarrow\; \underline{y_- = 1 - 3x^2 - \sqrt{1-4x^2}}$, $\underline{x \in (-1/2, 0)}$.

4] $(-\sqrt{3}/4, 15/16) \Rightarrow (15/16+9/16)^2 = C(15/16+3/16) \;\Rightarrow\; C = 2$ $\Rightarrow\; \underline{y_+ = 1 - 3x^2 + \sqrt{1-4x^2}}$, $\underline{x \in (-1/2, 1/2)}$.

5] $(2/3, -2/3) \Rightarrow (-2/3+4/3)^2 = C(-2/3+4/9) \;\Rightarrow\; C = -2 \;\Rightarrow$ $\underline{y_+ = -1 - 3x^2 + \sqrt{1+4x^2}}$, $\underline{x \in (0, +\infty)}$.

6] $(0, -2) \Rightarrow C = -2 \;\Rightarrow\; \underline{y_- = -1 - 3x^2 - \sqrt{1+4x^2}}$, $\underline{x \in \mathbb{R}^1}$.

*] $(-1/3, -1/3) \Rightarrow C = 0 \Rightarrow\; \underline{y = -3x^2}$, $\underline{x \in (-\infty, 0)}$.

**] $((8/9)^{1/2}, -8/9) \Rightarrow\; \underline{y = -x^2}$, $\underline{x \in (0, +\infty)}$.

Д р у г о й с п о с о б р е ш е н и я у р а в н е н и я.

Пусть m – порядок y, 1 – порядок x. Приравниваем порядки в каждом слагаемом: $2+m-1 = m+m-1 = 1+m = 3 \;\Rightarrow\; m = 2$.

1) Замена $y = z^2 > 0$ ($y \equiv 0$ – не решен.), $y' = 2zz'$; $z = y^{1/2} > 0$.

Получаем $(z^2 - x^2)zz' + 5xz^2 + 3x^3 = 0$ – однородное уравнение.

Замена $z = ux$, $z' = xu' + u \neq 0$; $u = zx^{-1}$.

После деления на x^3 получаем уравнение с разд. переменными $x(u^2-1)uu' + u^4 + 4u^2 + 3 = 0$.

Замена $v = u^2 > 0$, тогда

$$2\,\frac{dx}{x} = \frac{(1-v)\,dv}{(v+3)(v+1)} = \left(\frac{1}{v+1} - \frac{2}{v+3}\right)dv \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{(v+3)^2x^2C}{(v+1)} = 0$$

$\Leftrightarrow\; (v+3)^2x^2 = C^{-1}(v+1)$.

Подставляя $v = yx^{-2}$ в найденное решение и умножая его на x^2, получаем общее решение $\underline{(y+3x^2)^2 = C^{-1}(y+x^2)}$ при $y > 0$.

2) Замена $y = -z^2 < 0$, $y' = -2zz'$; $z = (-y)^{1/2} > 0$.

Получаем $(z^2 + x^2)zz' - 5xz^2 + 3x^3 = 0$ – однородное уравнение.

После замены $z = ux$, получаем уравнение с разд. переменными

$$x(u^2+1)uu' + u^4 - 4u^2 + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(u^2+1)u\,du}{(u^2-1)(u^2-3)} = -\frac{dx}{x} \text{ или}$$

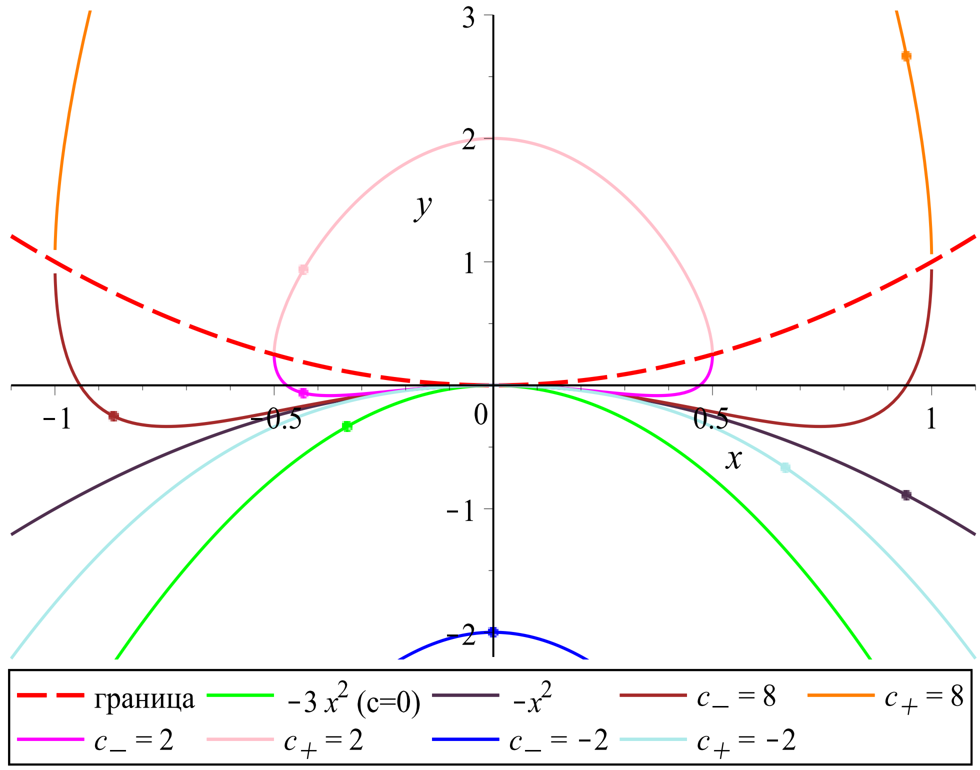
$u^2 \equiv 1$, $u^2 \equiv 3$. Замена $v = u^2$, тогда $v \equiv 1, 3$ или

$$\left(\frac{2}{v-3} - \frac{1}{v-1}\right)dv = -2\frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{(v-3)^2x^2}{(v-1)(-C)} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$(v-3)^2x^2 = -C(v-1)$ $\quad$ ($v = 3$ при $C = 0$).

Подставляя $v = -yx^{-2}$ в найденное решение и умножая его на x^2, получаем общее решение $\underline{y = x^2}$, $\underline{(y+3x^2)^2 = C(y+x^2)}$ при $y < 0$.

$$y\left(x, c_{\mp}\right) = \frac{1}{2}\, c - 3\, x^2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{-8\, c\, x^2 + c^2}$$



3. $(3x^2(\cos(2y)+1)-\sin(2y))\,dx-2x\,dy=0$;

Найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0,y_0):$ 1] $(-2,3\pi/4)$, 2] $(-2,\operatorname{arctg}9)$, 3] $(0,9/2)$,
4] $(-3^{-1/4},7\pi/6)$, 5] $(1,4\pi/3)$, 6] $(1,\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}))$, 7] $(1,3\pi/2)$

ОДЗ: $x,y-\forall$; $(0,k\pi/2)$ — особые точки уравнения $Mdx+Ndy=0$ с $M=3x^2(\cos(2y)+1)-\sin(2y)$, $N=-2x$ $(k\in\mathbb{Z})$, поскольку $M(0,y)=0$ при $\sin(2y)=0$.

Следовательно, $\widehat{B}=B=\mathbb{R}^2\setminus\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\{(0,k\pi/2)\}$.

Имеем: $\partial M/\partial y-\partial N/\partial x=-6x^2\sin(2y)-2\cos(2y)+2\not\equiv 0$.

Но $\dfrac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{-M}=2\dfrac{\sin y}{\cos y}\Rightarrow\dfrac{d\mu}{dy}=2\dfrac{\sin y}{\cos y}\mu\Rightarrow\mu=\dfrac{1}{\cos^2 y}$.

Поэтому $(3x^2(\cos(2y)+1)-\sin(2y))\cos^{-2}y\,dx-2x\cos^{-2}y\,dy=0$ $\Leftrightarrow$ $(3x^2-\operatorname{tg}y)\,dx-\dfrac{x\,dy}{\cos^2 y}=0$ – уравнение в полных дифференциалах. И при умножении на $\mu(y)$ потеряны решения $\underline{\cos y=0}$.

Теперь $\dfrac{\partial U}{\partial x}=\mu M\ \Rightarrow\ U(x,y)=\displaystyle\int(3x^2-\operatorname{tg}y)\,dx+C(y)=$ $x^3-x\operatorname{tg}y+C(y)$; $\dfrac{\partial U}{\partial y}=\mu N\Rightarrow C'(y)=0\Rightarrow C(y)=0$.

Поэтому функция $U(x,y)=x^3-x\operatorname{tg}y$ – это интеграл уравнения.

Ответ: $x^2-\operatorname{tg}y=Cx^{-1}\ \Leftrightarrow\ y=\operatorname{arctg}(x^2-Cx^{-1})+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$; $x(y)\equiv 0$ $(y\neq k\pi/2)$; $y(x)\equiv\pi/2+k\pi$ $(x\neq 0,\ k\in\mathbb{Z})$.

Решение поставленных задач Коши:

1] $(-2)^2-\operatorname{tg}(3\pi/4)=(-2)^{-1}C\ \Rightarrow\ C=-10\ \Rightarrow\ k=1\ \Rightarrow$ $y=\operatorname{arctg}(x^2+10x^{-1})+\pi$, $x\in(-\infty,0)$;

2] $(-2)^2-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}9)=(-2)^{-1}C\ \Rightarrow\ C=10\ \Rightarrow\ k=0\ \Rightarrow$ $y=\operatorname{arctg}(x^2-10x^{-1})$, $x\in(-\infty,0)$;

3] $x(y)\equiv 0$, $y\in(\pi,3\pi/2)$;

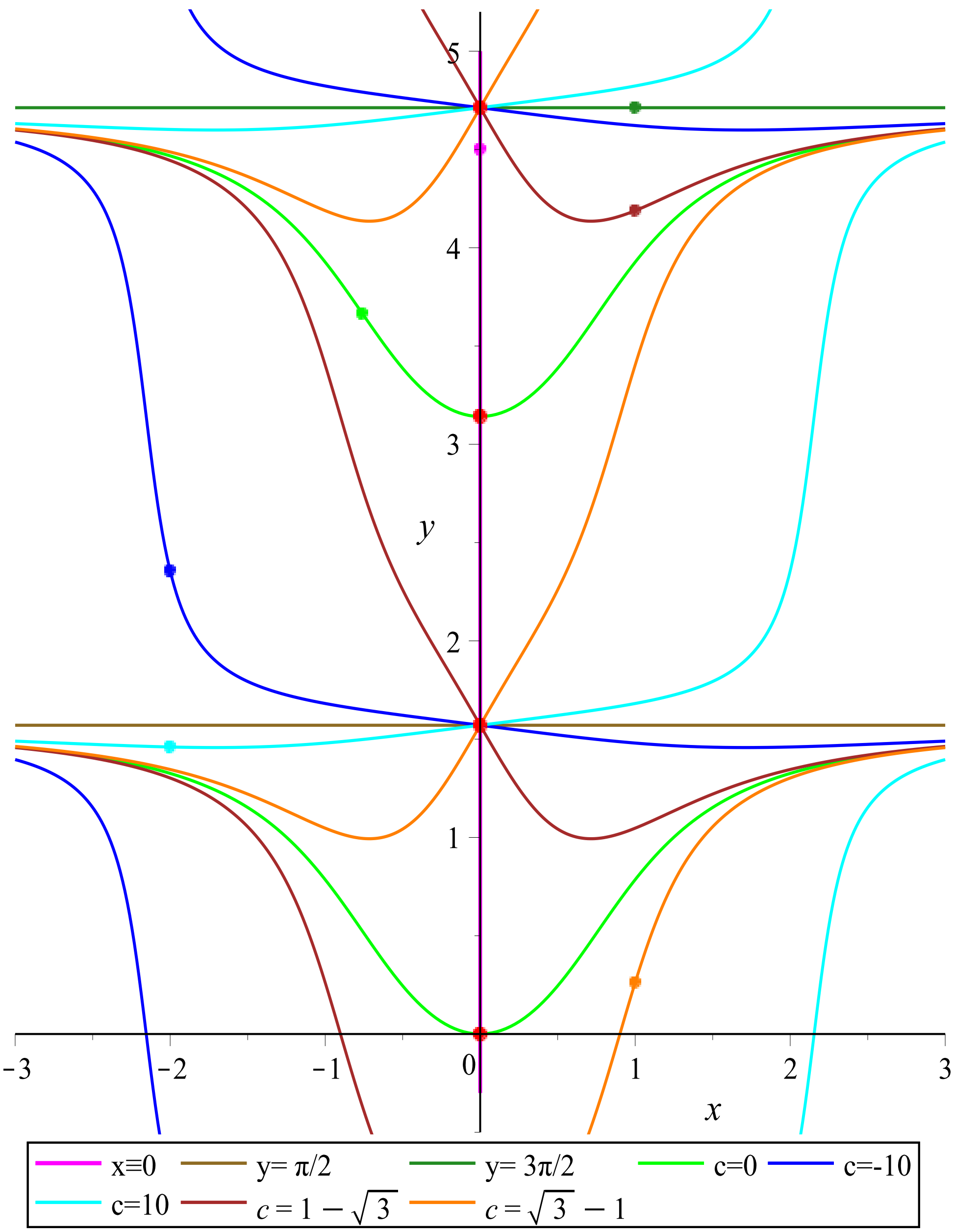
4] $(-3^{-1/4})^2-\operatorname{tg}(7\pi/6)=-3^{1/4}C\ \Rightarrow\ C=0\ \Rightarrow\ k=1\ \Rightarrow$ $y=\operatorname{arctg}(x^2)+\pi$, $x\in(0,+\infty)$;

5] $1-\operatorname{tg}(4\pi/3)=C\ \Rightarrow\ C=1-\sqrt{3}\ \Rightarrow\ k=1\ \Rightarrow$ $y=\operatorname{arctg}(x^2-(1-\sqrt{3})x^{-1})+\pi$, $x\in(0,+\infty)$;

6] $1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}))=C\ \Rightarrow\ C=\sqrt{3}-1\ \Rightarrow\ k=0\ \Rightarrow$ $y=\operatorname{arctg}(x^2-(\sqrt{3}-1)x^{-1})$, $x\in(0,+\infty)$;

7] $y(x)=\pi/2+\pi$, $x\in(0,+\infty)$.

$$y(x, c, k) = \operatorname{arctg}\left(x^2 - \frac{c}{x}\right) + \pi k$$



Контрольная работа № 1 (переписывание 2).

3. $3(y - x^2y^{5/3}\ln^4 x)\,dx + x\ln x\,dy = 0.$

Найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $(e^{1/2}, 64e^{-9/4})$, 2] $(e^{-1/2}, 8e^{3/2})$, 3] $(e^{1/4}, -8^3e^{-3/4})$,
4] $(e^{-1/2}, -8^{3/2}(2e^{-1} - 3e^{-2})^{-3/2})$, 5] $(e^{-3/2}, (8/27)\cdot(10^{-2} + 2e^{-3})^{-3/2})$

Дано уравнение в симметрич. форме $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, оно инвариантно относительно замены y на $-\widetilde{y}$.

ОДЗ: $x \geq 0$, так как функция $x\ln x$, входящая в N, может быть доопределена в нуле по непрерывности нулем. Поэтому не только точка $(1,0)$, но и точка $(0,0)$ — особые, в них $M = 0$, $N = 0$. При этом $(0,0)$ — особая граничная точка. Она разбивает границу $x \equiv 0$ на два граничных решения с $y < 0$ и $y > 0$.

Кроме того, $\partial M(x,y)/\partial x$, $\partial N(x,y)/\partial x$ непрерывны при $x \geq 0$, поэтому все неособые точки — это точки единственности.

После деления на dx и $x\ln x$ получаем уравнение Бернулли
$y' + 3(x\ln x)^{-1}y - 3xy^{5/3}\ln^3 x = 0$. При этом возможно теряются решения $x \equiv C$. Подставляя $x \equiv C$ в уравнение, заключаем, что $\underline{x \equiv 0}, \underline{x \equiv 1}$ $(y \neq 0)$ — две пары решений.

Замена $u = y^{1-\alpha}$, $\alpha = 5/3 \Rightarrow u = y^{-2/3}$ $(y \neq 0)$, $3u' = -2y^{-5/3}y'$.
Подставляя $y \equiv 0$, заключаем, что $\underline{y \equiv 0}$, $(x \neq 1)$ — два решения.

После деления уравнения на $x^{5/3}$ и замены получаем
$u' - 2(x\ln x)^{-1}u = -2x\ln^3 x$ – линейное уравнение.

Находим $u_{\text{оо}} = C\ln^2 x$; $u_{\text{чн}} = C(x)\ln^2 x$, $C' = -2x\ln x$,
$C(x) = x^2/2 - x^2\ln x \;\Rightarrow\; u_{\text{он}} = C\ln^2 x + (x^2/2 - x^2\ln x)\ln^2 x$.

Ответ: $y^{-2/3} = (C + x^2/2 - x^2\ln x)\ln^2 x$;
$y(x) \equiv 0$, $x \in (0,1)$ или $x > 1$; $x(y) \equiv 1$, $y < 0$ или $y > 0$;
$x(y) \equiv 0$, $y < 0$ или $y > 0$ — граничные решения.

Найдем классическое общее решение.

Пусть $h(x,c) = (c + x^2(1/2 - \ln x))\ln^2 x$, тогда $h(1,c) = 0$,
$h'(x,c) = 2x^{-1}\ln x(c + (1/2 - \ln x - \ln^2 x)x^2)$ и $h'(1,c) = 0$.

Поэтому $y(x,c) = ((c + x^2(1/2 - \ln x))\ln^2 x)^{-3/2}$ при $h(x,c) > 0$.

Функция $h(x,c) < 0$ $(x \neq 1)$ при $c \leq -1/2$,
так как $h'(x,-1/2) = 2x^{-1}\ln x(-1/2 + (1/2 - \ln x - \ln^2 x)x^2)$
и $h'(x,-1/2) > 0$ при $0 < x < 1$ и $h'(x,-1/2) < 0$ при $x > 1$.

Функция $h(x,c) > 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $x = 1$ при $c > 1/2$.

При $x \to 0$ функции $h(x,0) \to 0$, $h(x,c) \to -\infty$ $(-1/2 < c < 0)$,
$h(x,c) \to +\infty$ $(c > 0)$; $h(x,c) \to -\infty$ $(c > -1/2)$ при $x \to +\infty$.

Решение поставленных задач Коши.

1] $(e^{1/2}, 64e^{-9/4})$: $e^{3/2}/16 = (c + e/2 - e/2)(1/2)^2 \Rightarrow$
$c = e^{3/2}/4 \Rightarrow y(x) = ((e^{3/2}/4 + x^2(1/2 - \ln x))\ln^2 x)^{-3/2}$, $x \in (1, e^{3/4})$.

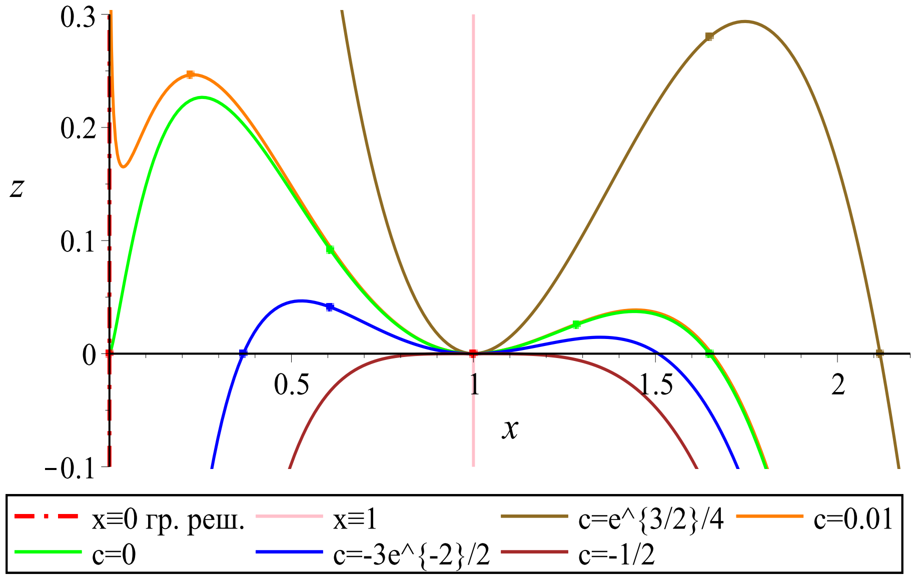
2] $(e^{-1/2}, 8e^{3/2})$: $1/(4e) = (c + 1/(2e) + 1/(2e))(-1/2)^2 \Rightarrow c = 0$.
Поэтому $y(x) = (x^2(1/2 - \ln x)\ln^2 x)^{-3/2}$, $x \in (0, 1)$.

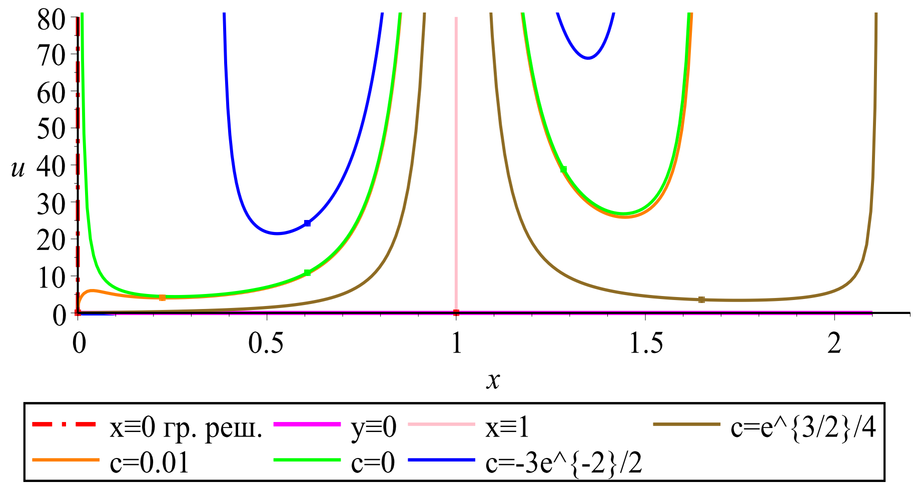
3] $(e^{1/4}, -8^3 e^{-3/4})$: $e^{1/2}/64 = (c + e^{1/2}/2 - e1/2/4)(1/4)^2 \Rightarrow c = 0$.
Поэтому $y(x) = -(x^2(1/2 - \ln x)\ln^2 x)^{-3/2}$, $x \in (1, e^{1/2})$.

4] $(e^{-1/2}, -8^{3/2}(2e^{-1} - 3e^{-2})^{-3/2})$:
$(2e^{-1} - 3e^{-2})/8 = (C + 1/(2e) + 1/(2e))(-1/2)^2 \Rightarrow c = -3e^{-2}/2$.
Поэтому $y(x) = -((-3e^{-2}/2 + x^2(1/2 - \ln x))\ln^2 x)^{-3/2}$, $x \in (e^{-1}, 1)$.

5] $(e^{-3/2}, (8/27) \cdot (10^{-2} + 2e^{-3})^{-3/2})$:
$9(10^{-2} + 2e^{-3})/4 = (C + e^{-3}(1/2 + 3/2))(-3/2)^2 \Rightarrow c = 10^{-2}$.
Поэтому $y(x) = ((10^{-2} + x^2(1/2 - \ln x))\ln^2 x)^{-3/2}$, $x \in (0, 1)$.

$$z = \frac{1}{y^{2/3}}, \quad z = \left(c + x^2\left(\frac{1}{2} - \ln(x)\right)\right)\ln(x)^2; \quad u = y^{2/3}$$





2. $(x-4y+5)\,dx+(2x+y+10)\,dy=0;$

найти максимальные интервалы существования решений задач Коши, представимых как в виде $y=\varphi(x)$, так и в виде $x=\psi(y)$: (x_0,y_0): 1] $(-5,1)$, 2] $(-4,0)$, 3] $(-6,1)$, 5] $(-4,-1)$, $*$] $(-4,1)$.

Особая точка $(-5,0)$ — точка пересечения прямых $x-4y+5=0$ и $2x+y+10$ — изоклин соответственно с горизонтальными и вертикальными отрезками поля направлений в координатах (x,y).

После замены $u=x+5$; $x=u-5$ получаем

$(u-4y)du+(2u+y)dy=0$ – однородное уравнение 1-го порядка.

a) Замена $z=yu^{-1}$, $y=zu$; $dy=udz+zdu$; $u=0$ – не решение.

Получаем $(u-4zu)du+(2u+zu)(udz+zdu)=0$ — уравнение с раздел. переменными.

Отсюда $\dfrac{z+2}{(z-1)^2}dz=-\dfrac{du}{u}$, $\underline{z=1}$ – потерянное решение;

$$\int\left(\frac{1}{z-1}+\frac{3}{(z-1)^2}\right)dz=C-\int\frac{du}{u} \text{ или } \ln\frac{(z-1)u}{C}=\frac{3}{z-1}\ \Rightarrow$$

$(z-1)u=Ce^{3/(z-1)}$, $z=1$; $z=yu^{-1}=y/(x+5)$, $u=x+5$.

Ответ: $y-x-5=Ce^{3(x+5)/(y-x-5)}$, $y-x-5=0$.

b) Если замена $z=uy^{-1}$, $u=zy$; $y=0$ – не решение,

то $\dfrac{z-4}{(z-1)^2}dz=-\dfrac{dy}{y}$, $\underline{z=1}$ –потерянное решение,

$$\int\left(\frac{1}{z-1}-\frac{3}{(z-1)^2}\right)dz=c-\int\frac{dy}{y} \text{ или } \ln\frac{(z-1)y}{c}=\frac{-3}{z-1}\ \Rightarrow$$

$(z-1)y=ce^{-3/(z-1)}$, $z=1$, $z=u/y=(x+5)/y\ \Rightarrow$

$x+5-y=ce^{-3y/(x+5-y)}$, $y-x-5=0$.

Решение задач Коши.

В тех случаях, когда найденное решение задачи Коши не удается в явном виде разрешить ни относительно y, ни относительно x, указываем только максимальные интервалы существования как для $y=\varphi(x)$, так и для $x=\psi(y)$.

Очевидно, что если $y>x+1$, то $C>0$, и наоборот. Кроме того, для любой $C\neq0$ график решения задачи Коши примыкает к особой точке $(-5,0)$, касаясь прямой $y=x+5$. При $C>0$ это происходит при $x\to-5$ слева, а при $C<0$ — справа.

2) Продолжение 1 решения уравнения 2_2).

1] $(x_0, y_0) = (-5, 1)$, тогда $C = 1$ и $y - x - 5 = e^{3(x+5)/(y-x-5)}$.

Решение вида $y = \varphi(x)$ пересекается с изоклиной $2x + y + 10 = 0$ в точке $(-5 - e^{-1}/3, 2e^{-1}/3)$, поэтому $x \in (-5 - e^{-1}/3, +\infty)$.

Решение вида $x = \psi(y)$ пересекается с изоклиной $x - 4y + 5 = 0$ в точке $(-5 - 4e^{-4}/3, -e^{-4}/3)$, поэтому $y \in (-e^{-4}/3, +\infty)$.

2] $(x_0, y_0) = (-4, 0)$, тогда $C = -e^3$ и $y - x - 5 = -e^{3y/(y-x-5)}$.

Решение вида $y = \varphi(x)$ пересекается с изоклиной $2x + y + 10 = 0$ в точке $(-5 + e^2/3, -2e^2/3)$, поэтому $x \in (-5, -5 + e^2/3)$.

Решение вида $x = \psi(y)$ пересекается с изоклиной $x - 4y + 5 = 0$ в точке $(-5 + 4e^{-1}/3, e^{-1}/3)$, поэтому $x \in (-\infty, e^{-1}/3)$.

3] $(x_0, y_0) = (-6, 1) \Rightarrow C = 2e^{3/2}$ и $y - x - 5 = 2e^{3(x+5)/(y-x-5)+3/2}$.

Решение вида $y = \varphi(x)$ пересекается с изоклиной $2x + y + 10 = 0$ в точке $(-5 - 2e^{1/2}/3, 4e^{1/2}/2)$, поэтому $x \in (-5 - 2e^{1/2}/3, -5)$.

Решение вида $x = \psi(y)$ пересекается с изоклиной $x - 4y + 5 = 0$ в точке $(-5 - 8e^{-5/2}/3, -2e^{-5/2}/3)$, поэтому $y \in (-2e^{-5/2}/3, +\infty)$.

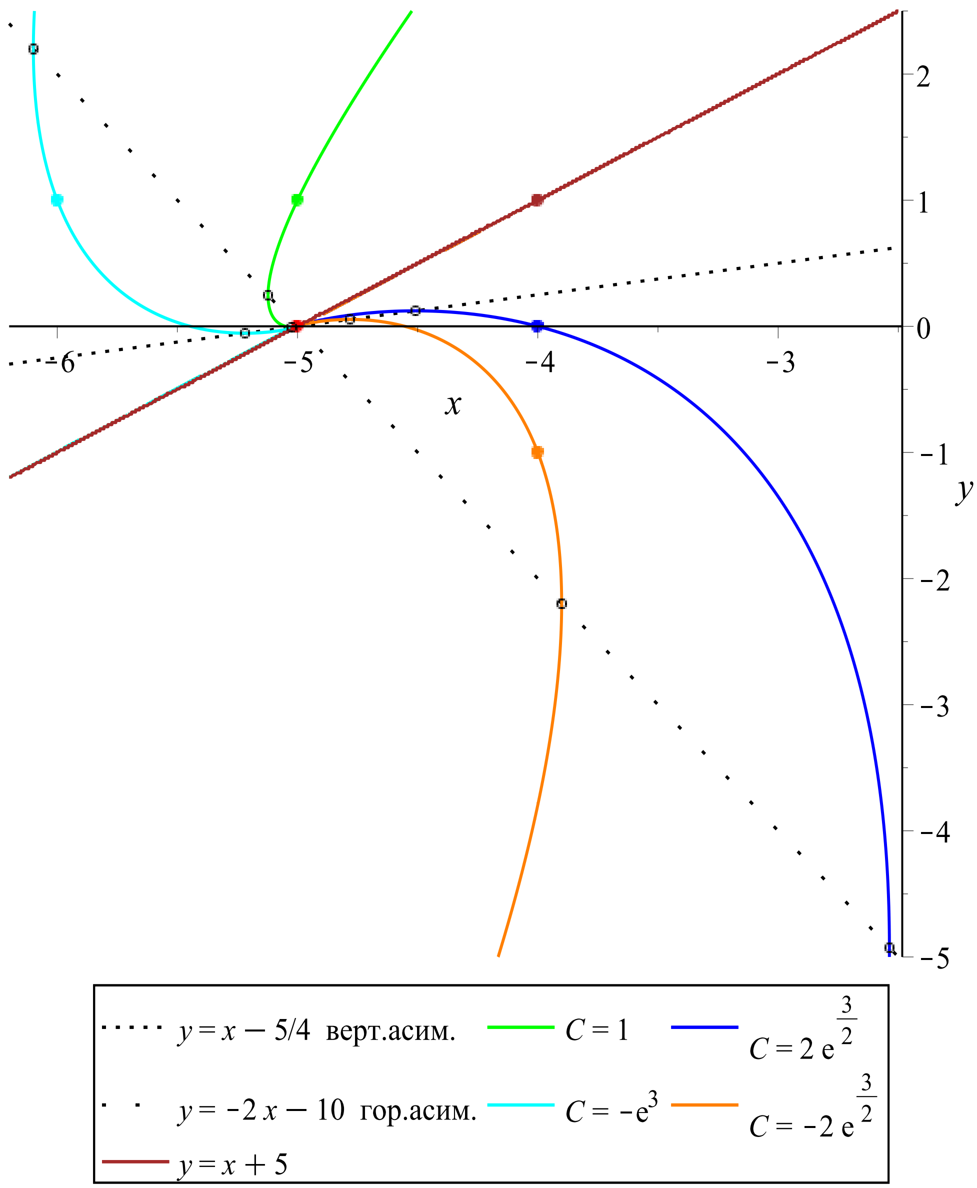
4] $(x_0, y_0) = (-4, -1)$, тогда $C = -2e^{3/2}$ и
$y - x - 5 = -2e^{3(x+5)/(y-x-5)+3/2}$.

Решение вида $y = \varphi(x)$ пересекается с изоклиной $2x + y + 10 = 0$ в точке $(-5 + 2e^{1/2}/3, -4e^{1/2}/2)$, поэтому $x \in (-5, -5 + 2e^{1/2}/3)$.

Решение вида $x = \psi(y)$ пересекается с изоклиной $x - 4y + 5 = 0$ в точке $(-5 + 8e^{-5/2}/3, 2e^{-5/2}/3)$, поэтому $y \in (-\infty, 2e^{-5/2}/3)$.

$*$] $(x_0, y_0) = (-4, 1)$, тогда $C = 0$, поэтому
$y = x + 5$, $x \in (-5, +\infty)$ или $x = y - 5$, $y \in (0, +\infty)$.

$$y - x - 5 = C\,e^{\frac{3\,(x+5)}{y-x-5}}, \quad y = x + 5$$



5. $y' = -\sqrt{x^{-1}y^3 - y^4} - y^2$;

найти частные или специальные решения следующих задач Коши: $(x_0, y_0):$ 1] $(-1,-1)$, 2] $(-1,-1/5)$, 3] $(1/3, 3/10)$, 4] $(-1/3,-3/2)$, 5] $(4/3, 3/4)$, 6] $(-2,(2^{3/2}-5)^{-1})$, 7] $(3, 3/10)$

ОДЗ: $x \not\equiv C$, $x \neq 0$, $x^{-1}y^3 - y^4 \geq 0 \Leftrightarrow (xy)^{-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq xy \leq 1$. Поэтому кривые $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, $y = x^{-1}$ являются границами двух областей $\exists$: $0 < xy < 1$, заключенных между ними.

Ищем m – порядок y, считая, что x имеет порядок 1: $m - 1 = (3m-1)/2 = 2m \ \Rightarrow \ m = -1$.

Замена $y = z^{-1} \neq 0$, $y' = -z^{-2}z'$; $z = y^{-1}$, при этом $y \equiv 0$ $(x \neq 0)$ – граничные решения.

Получаем $z' = \sqrt{x^{-1}z - 1} + 1$ – однородное уравнение.

Замена $z = ux$, $z' = xu' + u$; $u = zx^{-1}$.

Получаем $xu' + u = \sqrt{u-1} + 1$ – уравнение с разд. переменными. Имеем: $\displaystyle\int \frac{du}{u - 1 - \sqrt{u-1}} = C - \int \frac{dx}{x}$, при этом $\underline{u = 1}$, $\underline{u = 2}$ – потерянные при делении решения.

Подстановка $v = \sqrt{u-1}$, $u = v^2 + 1$; $du = 2v\,dv$. Тогда $\displaystyle\int \frac{2\,dv}{v-1} = \ln\frac{C}{x} \ \Rightarrow \ \ln\frac{(v-1)^2 x}{C} = 0 \ \Rightarrow \ (\sqrt{u-1} - 1)^2 = Cx^{-1}$ и возвращаем $u = 2$ при $C = 0$. Обратная замена $u = (xy)^{-1}$.

Ответ: $(\sqrt{(xy)^{-1} - 1} - 1)^2 = Cx^{-1}$;
$y = x^{-1}$, $y(x) \equiv 0$ $(x \neq 0)$ – граничные решения.

Другой способ решения уравнения.

Пусть x имеет порядок α, а y – порядок β, тогда y' имеет порядок $\beta - \alpha$. Приравняем порядки во всех слагаемых: $\beta - \alpha = (-\alpha + 3\beta)/2 = (4\beta)/2 = 2\beta$. Отсюда $\alpha = -\beta$.

Замена: $y^\alpha = ux^\beta$ или $y = ux^{-1}$, $y' = x^{-1}u' - x^{-2}u$, $u = xy > 0$.

После умножения на x^2 получаем уравнение с разд.переменными $xu' = h(u)$, где $h(u) = -\sqrt{u^3 - u^4} + u - u^2 = u(-u\sqrt{u^{-1} - 1} + 1 - u)$.

Замена $v = \sqrt{u^{-1} - 1}$, тогда $u = (v^2+1)^{-1}$, $du = -2v(v^2+1)^{-2}dv$ и $h(v) = v(v^2+1)^2(v-1)$. Поэтому $v = 1$ – решение и уравнение $2(v-1)^{-1}dv = x^{-1}dx$, откуда $(v-1)^2 = Cx$ ($v = 1$ – входит при $C = 0$). Подставляя $v = \sqrt{(xy)^{-1} - 1}$, получаем ответ.

Найдем классическое общее решение.

Выделим решение при $C=0$ – это $y=1/(2x)$.

После этого положим $c=C^{-1}$.

Имеем: $(\sqrt{(xy)^{-1}-1}-1)^2=(cx)^{-1}$, причем $\underline{cx>0}$.

Тогда $\sqrt{(xy_{\pm})^{-1}-1}=1\pm\sqrt{(cx)^{-1}}$ и $\underline{cx\geq 1}$ для $\underline{y_-}$, причем для любой c, если $cx=1$, то $xy=1$ — попадаем на одно из граничных решений, которые, тем самым, являются специальными.

В результате $(xy_{\pm})^{-1}-1=1\pm 2(cx)^{-1/2}+(cx)^{-1}\Leftrightarrow$
$\underline{y_{\pm}(x)=c(2cx\pm 2(cx)^{1/2}+1)^{-1}}$ $(c\neq 0)$.

З.К.

1] $(-1,-1)\Rightarrow C,c=-1$, $y_-(x_0)=y_0$ и $cx_0=1$, а значит, $(-1,-1)$ — граничная точка и точка неединственности и решение $y_-(x)$ будет смешанным. Поэтому

$y=1/x$, $x\in(-\infty,0)$ — специальное граничное решение.

2] $(-1,-1/5)\Rightarrow C,c=-1$ и $y_+(x_0)=y_0$. Поэтому
$y=(-1)(-2x+2\sqrt{-x}+1)^{-1}$, $x\in(-\infty,0)$.

3] $(1/3,3/10)\Rightarrow C=4/3, c=3/4$ и $y_+(x_0)=y_0$. Поэтому
$y=3(6x+4\sqrt{3x}+4)^{-1}$, $x\in(0,+\infty)$.

4] $(-1/3,-3/2)\Rightarrow C=0\Rightarrow y=1/(2x)$, $x\in(-\infty,0)$.

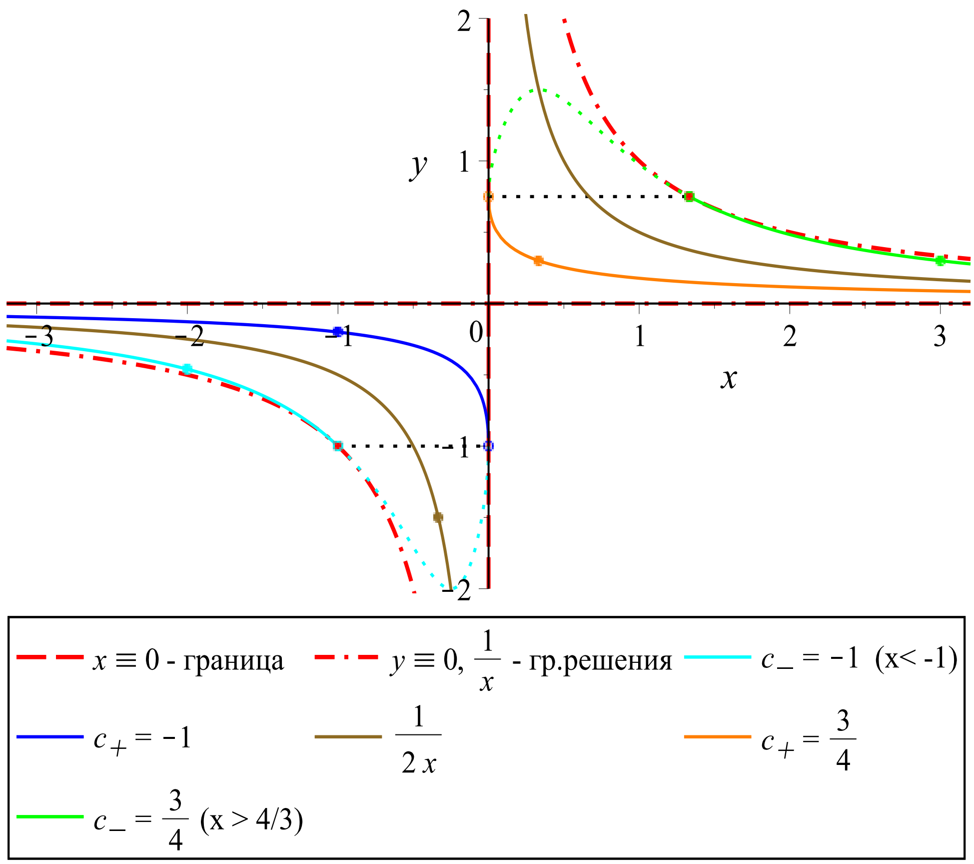
5] $(4/3,3/4)\Rightarrow C=4/3, c=3/4$, $y_-(x_0)=y_0$ $cx_0=1$, а значит, $(4/3,3/4)$ — граничная точка и точка неединственности и решение $y_-(x)$ будет смешанным. Поэтому

$y=1/x$, $x\in(0,+\infty)$ — специальное граничное решение.

6] $(-2,(2^{3/2}-5)^{-1})\Rightarrow C,c=-1$, $y_-(x_0)=y_0$ и $cx>1$. Поэтому
$y=(-1)(-2x-2\sqrt{-x}+1)^{-1}$, $x\in(-\infty,-1)$.

7] $(3,3/10)\Rightarrow C=4/3, c=3/4$, $y_-(x_0)=y_0$ и $cx>1$. Поэтому
$y=3(6x-4\sqrt{3x}+4)^{-1}$, $x\in(4/3,+\infty)$.

$$y(x, c_{\pm}) = \frac{c}{2\,c\,x \pm 2\sqrt{c\,x} + 1}\,,\ y \equiv 0\,,\ y = \frac{1}{x}$$



11. $(y^2x^{-1} - e(x^2 - y) + xy(1 - 2\ln x))\,dx + x(x\ln x - e)\,dy = 0$;
найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $(e, 2)$, 2] $(e^{-1}, 1)$, 3] $(e^{3/2}, -2e^{5/2}/3)$, 4] $(2, -4)$,
5] $(1, 2e - 1)$, 6] $(e^{5/4}, 2e^{9/4}(e^{1/4} - 2)/3)$, 7] $(e^{-2}, e^{-1} + e^{-4})$,
8] $(1, -e - 1)$, 9] $(e^{1/2}, 2e(e^{1/2} - 1))$, 10] $(4, 4(3 - e)/(\ln 4 - 3/4))$

Дано уравнение в симметричной форме $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Если его разрешить относительно y, получим уравнение Риккати.

ОДЗ: $x > 0$; точки $(e, e^2), (e, -e^2)$ — особые, в них $M = 0, N = 0$.

$\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = 2(e + yx^{-1} - 2x\ln x) \not\equiv 0$, однако,
$\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N\omega'_x - M\omega'_y} = \dfrac{-2(e + yx^{-1} - 2x\ln x)}{(e + yx^{-1} - 2x\ln x)\omega} = -\dfrac{2}{\omega}$, если выбрать $\omega(x, y) = x^2 + y$.

Поэтому $d\mu/d\omega = -2\omega^{-1}\mu$, откуда $\mu = \omega^{-2} = (x^2 + y)^{-2}$, и

$$\frac{(y^2x^{-1} - e(x^2 - y) + xy(1 - 2\ln x)}{(x^2 + y)^2}\,dx + \frac{x(x\ln x - e)}{(x^2 + y)^2}\,dy = 0$$

— уравнение в полных дифференциалах. При умножении на $\mu(x, y)$ теряется решение $\underline{y = -x^2}$ $(x \ne e)$. Теперь
$\partial U/\partial y = \widetilde{N} \Rightarrow U(x, y) = C(x) - x(x\ln x - e)(x^2 + y)^{-1}$;
$\partial U/\partial x = \widetilde{M} \;\Rightarrow\; C'(x) = x^{-1} \;\Rightarrow\; C(x) = \ln x \;\; (x > 0) \;\Rightarrow$
$U = (ex + y\ln x)(x^2 + y)^{-1}$.

Ответ: $y = -x^2$ $(x \ne e)$, $(ex + y\ln x)(x^2 + y)^{-1} = C$.

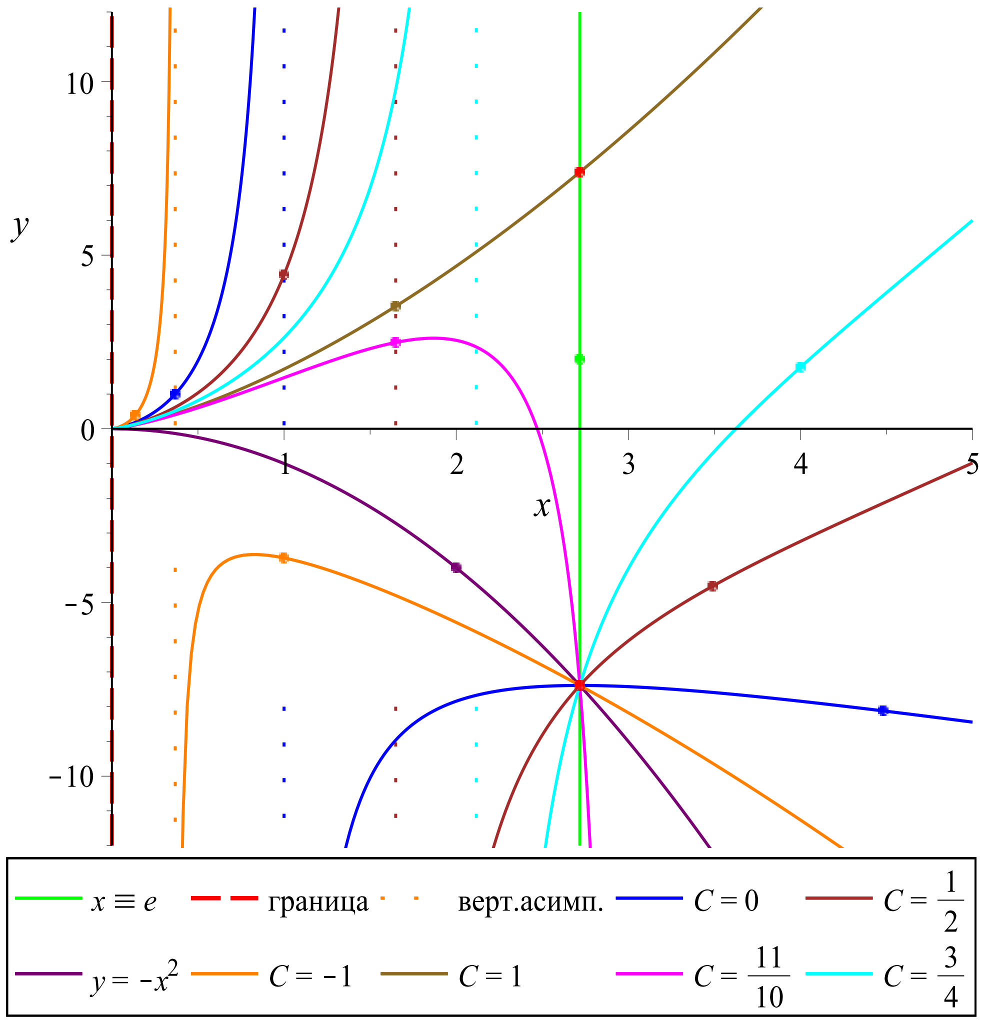
Найдем классическое общее решение.

Имеем: $y(\ln x - C)y = Cx^2 - ex$. При этом $x = e^C$ является решением, если $Ce^{2C} - e^{C+1} = 0 \Leftrightarrow Ce^{C-1} = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Поэтому $x \equiv e$ $(y \ne \pm e^2)$ или $y(x, C) = x(Cx - e)(\ln x - C)^{-1}$ $(x \ne e^C)$.

Поскольку $y(e, C) = -e^2$, графики всех решений примыкают к нуль-граничной точке $(e, -e^2)$. А если $C < 1$, то $y(x, C) \to +\infty$ при $x \to e^C{}_{-0}$ и $y(x,) \to -\infty$ при $x \to e^C{}_{+0}$.

Решение предложенных задач Коши:
1] $(e, 2)$; $x(y) \equiv e$, $y \in (-e^2, e^2)$;
2] $(e^{-1}, 1)$; $y(x, 0) = -ex/\ln x$, $x \in (0, 1)$;
3] $(e^{3/2}, -2e^{5/2}/3)$; $y(x, 0) = -ex/\ln x$, $x \in (e, +\infty)$;
4] $(2, -4)$; $y(x) = -x^2$, $x \in (0, e)$;
5] $(1, 2e - 1)$; $y(x, 1/2) = x(x - 2e)\ln^{-1}(x^2/e)$, $x \in (0, e^{1/2})$;
6] $(e^{5/4}, 2e^{9/4}(e^{1/4} - 2)/3)$; $y(x, 1/2) = x(x - 2e)\ln^{-1}(x^2/e)$, $x > e$;
7] $(e^{-2}, e^{-1} + e^{-4})$; $y(x, -1) = -x(x + e)\ln^{-1}(ex)$, $x \in (0, e^{-1})$;
8] $(1, -(e + 1))$; $y(x, -1) = -x(x + e)\ln^{-1}(ex)$, $x \in (e^{-1}, e)$;
9] $(e^{1/2}, 2e(e^{1/2} - 1))$; $y(x, 1) = x(x - e)\ln^{-1}(x/e)$, $x \in (0, e)$;
10] $(4, 4(3-e)/(\ln 4-3/4))$; $y(x, 3/4) = x(3x-4e)\ln^{-1}(x^4/e^3)$, $x > e$.

$$y(x, C) = \frac{x^2 - \mathrm{e}\, x}{\ln(x) - C}, \qquad y = -x^2, \qquad x \equiv \mathrm{e}$$



Контрольная работа № 1 (переписывание 3).

7. $4(x(4-e^x)^{1/2}(2+(4-e^x)^{1/2})^2-y^{1/2})y^{1/2}\,dx-(4-e^x)^{1/2}\,dy=0$;
найти интегральную кривую решения следующей задачи Коши:
$(x_0,y_0):$ 1] $(0,(2+3^{1/2})^4/16)$;
найти частные или специальные решения следующих задач Коши:
$(x_0,y_0):$ 2] $(\ln 3, 324\ln^2(3e^{-2/3}))$, 3] $(\ln 3, 324\ln^2(3/e))$,
4] $(\ln 3/7,(7e^{-1/2}+\ln 9/49-2)^2(2+5/7^{1/2})^4)$, 5] $(\ln 4,(8\ln 4-23/4)^2)$,
6*] $(\ln(15/4),(25\ln(\sqrt{15}/2)-85/6)^2)$.

ОДЗ: $y\geq 0$, $x\leq \ln 4$; $\underline{y\equiv 0}$ и $\underline{x\equiv \ln 4}$ – границы области и граничные решения уравнения в симметричной форме, имеющего одну особую точку $(\ln 4, 0)$.

После деления на dx и $\sqrt{4-e^x}$ получаем уравнение Бернулли $y'+4(4-e^x)^{-1/2}y-4x(2+(4-e^x)^{1/2})^2y^{1/2}=0$ $(x\neq \ln 4)$.

Замена $u=y^{1-\alpha}$, $\alpha=1/2 \Rightarrow u=y^{1/2}$, $u'=y^{-1/2}y'/2$ $(y\neq 0)$.

После деления уравнения на y^α и замены получаем
$u'+2(4-e^x)^{-1/2}u=2x(2+(4-e^x)^{1/2})^2$ – линейное уравнение.

Найдем $u_{\text{оо}}(x)$ из уравнения $u^{-1}du=-2(4-e^x)^{-1/2}dx$. Имеем:

$$\int\frac{-2\,de^x}{e^x\sqrt{4-e^x}}=\int\frac{4\,dv}{4-v^2}=\int\left(\frac{1}{2+v}+\frac{1}{2-v}\right)dv=\ln\left|\frac{2+v}{2-v}\right|$$

при подстановке $v=\sqrt{4-e^x}$, $e^x=4-v^2$, $de^x=-2v\,dv$.

Поэтому $\ln\dfrac{u(2-\sqrt{4-e^x})}{C(2+\sqrt{4-e^x})}=0$ и $u_{\text{оо}}(x)=C(2+\sqrt{4-e^x})^2e^{-x}$.

Тогда $u_{\text{чн}}(x)=C(x)(2+\sqrt{4-e^x})^2e^{-x}$, $C'=2xe^x$, $C(x)=2(x-1)e^x$ и $u_{\text{чн}}(x)=2(x-1)(2+\sqrt{4-e^x})^2$.

Следовательно, $u_{\text{он}}(x)=(Ce^{-x}+2x-2)(2+\sqrt{4-e^x})^2$.

Ответ: $y^{1/2}=(Ce^{-x}+2x-2)(2+\sqrt{4-e^x})^2$;
$x(y)\equiv \ln 4$ $(y>0)$ и $y(x)\equiv 0$ $(x<\ln 4)$ – граничные решения.

Найдем классическое общее решение.

Положим $h(x,C)=Ce^{-x}+2x-2$, тогда $h'(x,C)=-Ce^{-x}+2$, $h''(x,C)=Ce^{-x}$.

Поэтому $\underline{y(x,C)=h^2(x,C)(2+\sqrt{4-e^x})^4}$ при $h(x,C)>0$.

В частности, $h(\ln 4,C)=C/4+2\ln 4-2>0\Leftrightarrow C>-8(\ln 4-1)$, а при $C=-8(\ln 4-1)$ решение вырождается в особую точку.

Кроме того, поскольку в $y'(x,C)$ в знаменателе появляется выражение $\sqrt{4-e^x}$, график любого решения $y(x,C)$, соприкасающегося с прямой $x(y)=\ln 4$, имеет вертикальную касательную.

Это означает, что $x(y)=\ln 4$ – специальное граничное решение.

Точно также $y(x)\equiv 0$ – специальное граничное решение, поскольку $y'(x,C)$ имеет множитель $h(x,C)$, обращающийся в нуль при попадании интегральной кривой на ось абсцисс.

1) Решение задач Коши для уравнения 1_7).

З.К. 1] $(0,(2+3^{1/2})^4/16):\ (2+3^{1/2})^2/4=(C-2)(2+3^{1/2})^2 \Rightarrow C=9/4$. Но $h'(x,9/4)=-9e^{-x}/4+2=0 \Leftrightarrow x=\ln(9/8)$ – точка минимума $(h''>0)$ и $h(\ln(9/8),9/4)=2\ln(9/8)>0$.

Следовательно, решение $y(x,9/4)$ определено при $x\in(-\infty,\ln 4]$, $y(\ln 4,9/4)=(8\ln 4-23/4)^2$ и в точке $(\ln 4,(8\ln 4-23/4)^2)$ оно "стыкуется" с граничным решением.

Поэтому интегральная кривая имеет вид:

$$\left\{(x,y)\colon \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty,\ln 4],\ y=(5/2e^{-x}+2x-2)^2(2+\sqrt{4-e^x})^4 \\ x\equiv\ln 4,\ y\in(0,(8\ln 4-23/4)^2] \end{array}\right.\right\}.$$

2] $(\ln 3,324\ \ln^2(3e^{-2/3}))$: $18\ln(3e^{-2/3})=(C/3+2\ln 3-2)3^2 \Rightarrow C=2$. Но $h'(x,2)=-2e^{-x}+2=0 \Leftrightarrow x_{\min}=0\ (h''>0)$, кроме того, $h(0,2)=0$ и $x_{\min}<x_0$.

Поэтому $\underline{y=4(e^{-x}+x-1)^2(2+\sqrt{4-e^x})^4}$, $\underline{x\in(0,\ln 4)}$.

3] $(\ln 3,324\ \ln^2(3/e))$: $18\ln(3/e)=(C/3+2\ln 3-2)3^2 \Rightarrow C=0$. Но $h(x,0)=2x-2$, $h(1,2)=0$ и $x_0>1$.

Поэтому $\underline{y=4(x-1)^2(2+\sqrt{4-e^x})^4}$, $\underline{x\in(1,\ln 4)}$.

4] $(\ln 3/7,(7e^{-1/2}+\ln 9/49-2)^2(2+5/7^{1/2})^4)$: $(7e^{-1/2}+2\ln 3/7-2)(2+5/7^{1/2})^2=(7C/3+2\ln 3/7-2)(2+\sqrt{4-3/7})^2 \Rightarrow C=3e^{-1/2}$. Но $h'(x,3e^{-1/2})=-3e^{-x-1/2}+2=0 \Leftrightarrow x_{\min}=\ln(3/2)-1/2\ (h''>0)$, $x_0<x_{\min}$ и $h(x,3e^{-1/2})=0$ при $x=-1/2$.

Поэтому $\underline{y=(3e^{-x-1/2}+2x-2)^2(2+\sqrt{4-e^x})^4}$, $\underline{x<-1/2}$.

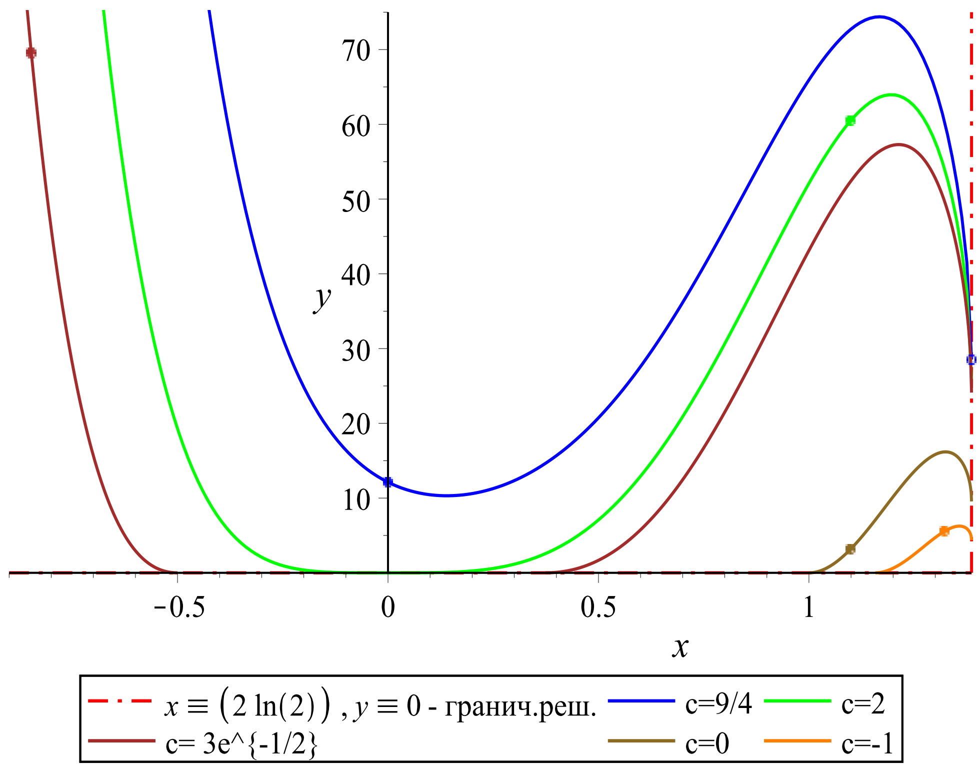
5] $(\ln 4,(8\ln 4-23/4)^2)$ — это граничная точка.

Поэтому $\underline{x\equiv\ln 4}$, $\underline{y>0}$ — специальное граничное решение.

6*] $(\ln(15/4),(25\ \ln(\sqrt{15}/2)-85/6)^2)$: $25\ \ln(\sqrt{15}/2)-85/6=(4C/15+2\ln(15/4)-2)(2+1/2)^2 \Rightarrow C=-1$. Но $h(1,-1)=-e^{-1}<0$, $h(15/4,-1)=-4/15+2\ln(15/4)-2>0$ $(\ln(15/4)>1.3)$ и $h'(x,-1)>0$. Значит, $\exists!\,x_*\in(1,15/4)$ $(x_*\approx 1.2)$, что $h(x_*,-1)=0$.

Поэтому $\underline{y=(-e^{-x}+2x-2)^2(2+\sqrt{4-e^x})^4}$, $\underline{x\in(x_*,\ln 4)}$.

$$y(x,C)=\left(2+\sqrt{4-e^{x}}\right)^{4}h^{2},\ h(x,C)=C\,e^{-x}+2\,x-2,\ 0\le h;$$
$$y\equiv 0,\ x\equiv(2\ln(2))$$



2) Решить дробно-линейное уравнение

---

6. $yy' = 2 - 6x - 7y;\quad x_0 = 1/9,\quad \begin{array}{l} a)\ y_0 = 4/3 \\ b)\ y_0 = 2/9 \end{array}$

ОДЗ: $x \not\equiv C,\ y \equiv 0$ – граница области.

Точка пересечения прямых $(1/3, 0)$.

Замена $u = x - 1/3;\quad x = u + 1/3.$

$ydy + (7y + 6u)du = 0$ – однородное уравнение 1-го порядка.

Замена $z = yu^{-1},\ y = zu;\ dy = udz + zdu;\quad u = 0$ – не решение.

$zu(udz + zdu) + (7zu + 6u)du = 0$ – ур-ие с раздел. перем. Имеем:

$\dfrac{z}{(z+1)(z+6)}dz = -\dfrac{du}{u},\ \underline{z=-1},\ \underline{z=-6}$ – потерянные решения;

$\displaystyle\int\left(\frac{6}{z+6} - \frac{1}{z+1}\right)dz = C - 5\int\frac{du}{u}$ или $\ln\dfrac{(z+6)^6u^5}{(z+1)C} = 0 \ \Rightarrow$

$(z+6)^6 = C(z+1)u^{-5},\quad z=-1;\quad z = yu^{-1},\ u = x - 1/3.$

Ответ: $(y + 6x - 2)^6 = C(3y + 3x - 1),\quad 3y + 3x = 1$

З.К. a) $C = 0 \ \Rightarrow\ y = -6x + 2,\quad x \in (-\infty, 1/3).$

b) $y = -x + 1/3,\quad x \in (-\infty, 1/3)\quad (y = 0$ – граница области).

Замечание. Если замена $z = uy^{-1},\ u = zy;\ y = 0$ – не решение,

то $\dfrac{6z+7}{(6z+1)(z+1)}dz = -\dfrac{dy}{y},\ \underline{z=-1},\ \underline{z=-1/6}$ – потер. решения,

$\displaystyle\int\left(\frac{36}{6z+1} - \frac{1}{z+1}\right)dz = C - 5\int\frac{dy}{y}$ или $\ln\dfrac{(6z+1)^6y^5}{(z+1)C} = 0 \ \Rightarrow$

$(6z+1)^6 = C(z+1)y^{-5},\quad z=-1,\quad z = u/y,\ u = x - 1/3.$ И т. д.

3) Решить обобщенно-однородное уравнение

1. $8y' + xy^5 + 4(xy)^{-3} = 0$;

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $(-1,-1)$, 2] $(-e^2, -2^{1/2}e^{-1})$, 3] $(e^{11/5}, 12^{1/4}e^{-11/10})$,
4] $(e^{-2/7}, -(2/3)^{1/2}e^{1/7})$, 5] $(-2^{1/2}, 1)$

ОДЗ: $x \neq 0$, $y \neq 0$; $x(y) \equiv 0$, $y(x) \equiv 0$ – границы областей $\exists$; уравнение не меняется как при замене y на $-\tilde{y}$, так и при замене x на $-\tilde{x}$. Считаем, что $x > 0$, а в ответе, если надо, пишем $|x|$.

Пусть x имеет порядок α, а y – порядок β, тогда y' имеет порядок $\beta - \alpha$. Приравняем порядки во всех слагаемых: $\beta - \alpha = \alpha + 5\beta = -3(\alpha + \beta)$. Отсюда $\alpha = -\beta/2$.

После замены: $y^\alpha = ux^\beta$ или $y = x^{-1/2}u$, $y' = x^{-1/2}u' - x^{-3/2}u$; $u = x^{1/2}y$ и умножения на $x^{3/2}y^3$ получаем уравнение с разд. пер. $8xu^3u' + u^8 - 4u^4 + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \pm 2^{1/4}$ или $-\dfrac{2du^4}{(u^4-2)^2} = \dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow$ $2(u^4 - 2) = \ln Cx$. Отсюда $x^{1/2}y = \pm 2^{1/4}$ или $x^2y^4 = \dfrac{2(\ln Cx + 1)}{\ln Cx}$.

Ответ: $y = \pm 2^{1/4}|x|^{-1/2}$, $y = \pm 2^{1/4}|x|^{-1/2}(\ln Cex/\ln Cx)^{1/4}$.

Д р у г о й с п о с о б р е ш е н и я у р а в н е н и я.

Пусть m – порядок y, 1 – порядок x. Приравниваем порядки в каждом слагаемом: $m - 1 = 1 + 5m = -3 - 3m \;\Rightarrow\; m = -1/2$.

Замена $y = (|y| =)\, z^{-1/2}$, $z = y^{-2} > 0$; $y' = (-1/2)z^{-3/2}z'$.

Получаем $4zz' = x + 4x^{-3}z^4$ – однородное уравнение.

Замена $z = ux$, $u = zx^{-1}$; $z' = xu' + u$.

Получаем $4xuu' + 4u^2 = 1 + 4u^4$ – уравнение с разд. переменными.

Имеем: $\dfrac{4u\,du}{(2u^2-1)^2} = \dfrac{dx}{x}$ и $\underline{u = \pm 2^{-1/2}}$ – потерянные при делении решения. Отсюда $\dfrac{1}{1-2u^2} = \ln cx$. Обратная замена $u = \dfrac{z}{x} = \dfrac{1}{xy^2}$.

Тогда $xy^2 = \pm\sqrt{2}$, $x^2y^4 = \dfrac{2\ln cx}{\ln ce^{-1}x}$ $(c = Ce)$.

Выпишем классические общие решения для первой и четвертой четверти, когда, в частности, $x>0$ и $C>0$:

$$\varphi(x,C) = \pm x^{-1/2}\left(\frac{2\ln Cex}{\ln Cx}\right)^{1/4} \text{ при } 0<x<(Ce)^{-1} \text{ или } x>C^{-1}.$$

При этом $\varphi(x,C)\to \pm 2^{1/4}x^{-1/2}$ при $C\to+\infty$.

В остальных четвертях решения симметричны относительно оси ординат.

З.К.

1] $(x_0,y_0)=(-1,-1)$, тогда $C=-e^{-2}$ и

$$y=-(-x)^{-1/2}\left(\frac{2\ln(-e^{-1}x)}{\ln(-e^{-2}x)}\right)^{1/4} \text{ при } x\in(-e,0)\ni x_0.$$

2] $(x_0,y_0)=(-e^2,-2^{1/2}e^{-1})$, тогда $C=-e^{-1}$ и

$$y=-x^{-1/2}\left(\frac{2\ln(-x)}{\ln(-e^{-1}x)}\right)^{1/4} \text{ при } x\in(-\infty,-e)\ni x_0.$$

3] $(x_0,y_0)=(e^{11/5},12^{1/4}e^{-11/10})$, тогда $C=e^{-2}$ и

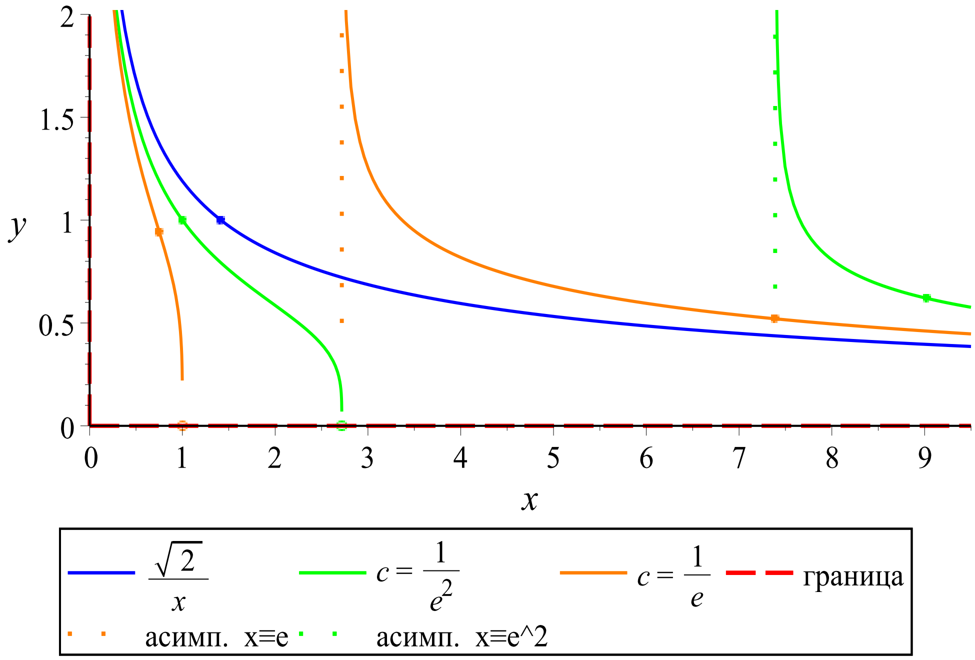
$$y=x^{-1/2}\left(\frac{2\ln e^{-1}x}{\ln e^{-2}x}\right)^{1/4} \text{ при } x\in(e^2,+\infty)\ni x_0.$$

4] $(x_0,y_0)=(e^{-2/7},-(2/3)^{1/2}e^{1/7})$, тогда $C=e^{-1}$ и

$$y=-x^{-1/2}\left(\frac{2\ln x}{\ln e^{-1}x}\right)^{1/4} \text{ при } x\in(0,1)\ni x_0.$$

5] $(x_0,y_0)=(-2^{1/2},1)$, тогда $y=2^{1/4}(-x)^{-1/2}$ при $x\in(-\infty,0)$.

$$y = \frac{2^{1/4}\left(\frac{\ln(C\,\mathrm{e}\,x)}{\ln(C\,x)}\right)^{1/4}}{\sqrt{x}}, \quad y = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{x}}$$



2. $(x^2 - 2y(x^2-y^2)^{1/2}\ln x)\,dx + 2x(x^2-y^2)^{1/2}\ln x\,dy = 0$;
найти максимальные интервалы существования решений задач Коши, представимых в виде $y=\varphi(x)$:
(x_0,y_0): 1] $(e^{-1},2^{-1/2}e^{-1})$, 2] $(e,2^{-1/2}e)$, 3] $(e^{-1},(2e)^{-1})$,
4] $(e,e/2)$, 5] $(e^{-1},0)$, 6] $(e,0)$, 7] $(e^{-1},-2^{-1/2}e^{-1})$, 8] $(e,-2^{-1/2}e)$,
9] $(1/2,-\sqrt{3}/4)$, $*$] $(1,-\sqrt{3}/4)$

Область $B=\{(x,y)\colon\ x>0,\ |y|<x\}$, граничное множество $\widehat{B}=\{y=\mp x,\ x>0\}$, множество особых точек $\check{B}$ – пусто, точка $(0,0)$ — граничная, она образует $\check{B}$; граничные прямые из $\widehat{B}$ совпадают с изоклинами для вертикальных отрезков поля направлений.

Имеем: $\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = -2(x^2-y^2)^{1/2}(3\ln x+1)\not\equiv 0$, однако,
$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = -\frac{3\ln x+1}{x\ln x} \ \Rightarrow\ \frac{d\mu}{dx} = -\frac{3\ln x+1}{x\ln x}\,\mu.$$
Поэтому $\mu = x^{-3}\ln^{-1}x$.

Умножая на μ, получаем уравнение в полных дифференциалах
$(x^{-1}\ln^{-1}x - 2x^{-3}y(x^2-y^2)^{1/2})\,dx + 2x^{-2}(x^2-y^2)^{1/2}\,dy = 0.$

При этом теряется решение $x(y)\equiv 1$.

Имеем: $\partial U/\partial y = \mu N \ \Rightarrow\ U(x,y) = 2x^{-2}\int(x^2-y^2)^{1/2}\,dy + C(x) = x^{-2}y(x^2-y^2)^{1/2} + \arcsin(x^{-1}y) + C(x)$.

Теперь $\partial U/\partial x = -2x^{-3}y(x^2-y^2)^{1/2} + C'(x)$, поэтому из равенства $\partial U/\partial x = \mu M$ вытекает, что $C'(x) = (x\ln x)^{-1} \ \Rightarrow\ C(x) = \ln|\ln x|$.

В результате $U(x,y) = x^{-2}y(x^2-y^2)^{1/2} + \arcsin(x^{-1}y) + \ln|\ln x|$.

Ответ: $x^{-2}y(x^2-y^2)^{1/2} + \arcsin(x^{-1}y) + \ln|\ln x| = C$, $\quad x(y)\equiv 1$.

Решение $x(y)\equiv 1$ разбивает B на две области единственности: $B_1=\{(x,y)\colon\ 0<x<1,\ |y|<x\}$ и $B_2=\{(x,y)\colon\ x>1,\ |y|<x\}$, в которых $N(x,y) = 2x(x^2-y^2)^{1/2}\ln x \neq 0$, а значит, общий интеграл в каждой из них представим в виде классического общего решения $y=\varphi(x,C)$. Следовательно, любое частное решение задачи Коши $y=\varphi(x,c_0)$ является внутренним, так как на границах его максимального интервала существования $(\alpha_{c_0},\beta_{c_0})$ интегральная кривая примыкает к какой-либо из границ G с вертикальной касательной. Точнее говоря, если $y_* = \mp x_*$, то $|\ln x_*| = e^{c_0\pm\pi/2}$.

Поэтому, если $x_0>1$, то $\alpha_{c_0} = \exp(e^{c_0-\pi/2})$, $\beta_{c_0} = \exp(e^{c_0+\pi/2})$, а если $x_0<1$, то $\alpha_{c_0} = \exp(-e^{c_0+\pi/2})$, $\beta_{c_0} = \exp(-e^{c_0-\pi/2})$.

Отметим также, что изоклины для горизонтальных отрезков поля направлений, задаваемые равенством $x^2-2y(x^2-y^2)^{1/2}\ln x=0$ ($M(x,y)=0$), представляют собой две кривые, задаваемые функциями $y=-\eta_{\mp}(x)$ и $y=\eta_{\mp}(x)$, где $\eta_{\mp}=2^{-1/2}(1\mp\sqrt{1-ln^{-2}x})^{1/2}$. Первая из них расположена в B_1, а вторая — в B_2.

Найдем частные решения поставленных задач Коши.

Положим для краткости $v(x,y)=x^{-2}y(x^2-y^2)^{1/2}+\arcsin(x^{-1}y)$.

1] $(x_0,y_0)=(e^{-1},2^{-1/2}e^{-1})$, тогда $\underline{v(x,y)+\ln\ln x^{-1}=1/2+\pi/4}$, $\underline{x\in(\exp(-e^{1/2+3\pi/4}),\exp(-e^{1/2-\pi/4}))}\approx(2.8\cdot10^{-8},0.47)\ni x_0$.

2] $(x_0,y_0)=(e,2^{-1/2}e)$, тогда $\underline{v(x,y)+\ln\ln x=1/2+\pi/4}$, $\underline{x\in(\exp(e^{1/2-\pi/4}),\exp(e^{1/2+3\pi/4}))}\approx(2.12,3.6\cdot10^{7})\ni x_0$.

3] $(x_0,y_0)=(e^{-1},(2e)^{-1})$, тогда $\underline{v(x,y)+\ln\ln x^{-1}=\sqrt{3}/4+\pi/6}$, $\underline{x\in(\exp(-e^{\sqrt{3}/4+2\pi/3}),\exp(-e^{\sqrt{3}/4-\pi/3}))}\approx(3.6\cdot10^{-6},0.58)\ni x_0$.

4] $(x_0,y_0)=(e,e/2)$, тогда $\underline{v(x,y)+\ln\ln x=\sqrt{3}/4+\pi/6}$, $\underline{x\in(\exp(e^{\sqrt{3}/4-\pi/3}),\exp(e^{\sqrt{3}/4+2\pi/3}))}\approx(1.72,2.7\cdot10^{5})\ni x_0$.

5] $(x_0,y_0)=(e^{-1},0)$, тогда $\underline{v(x,y)+\ln\ln x^{-1}=0}$, $\underline{x\in(\exp(-e^{\pi/2}),\exp(-e^{-\pi/2}))}\approx(8.1\cdot10^{-3},0.81)\ni x_0$.

6] $(x_0,y_0)=(e,0)$, тогда $\underline{v(x,y)+\ln\ln x=0}$, $\underline{x\in(\exp(e^{-\pi/2}),\exp(e^{\pi/2}))}\approx(1.23,122.8)\ni x_0$.

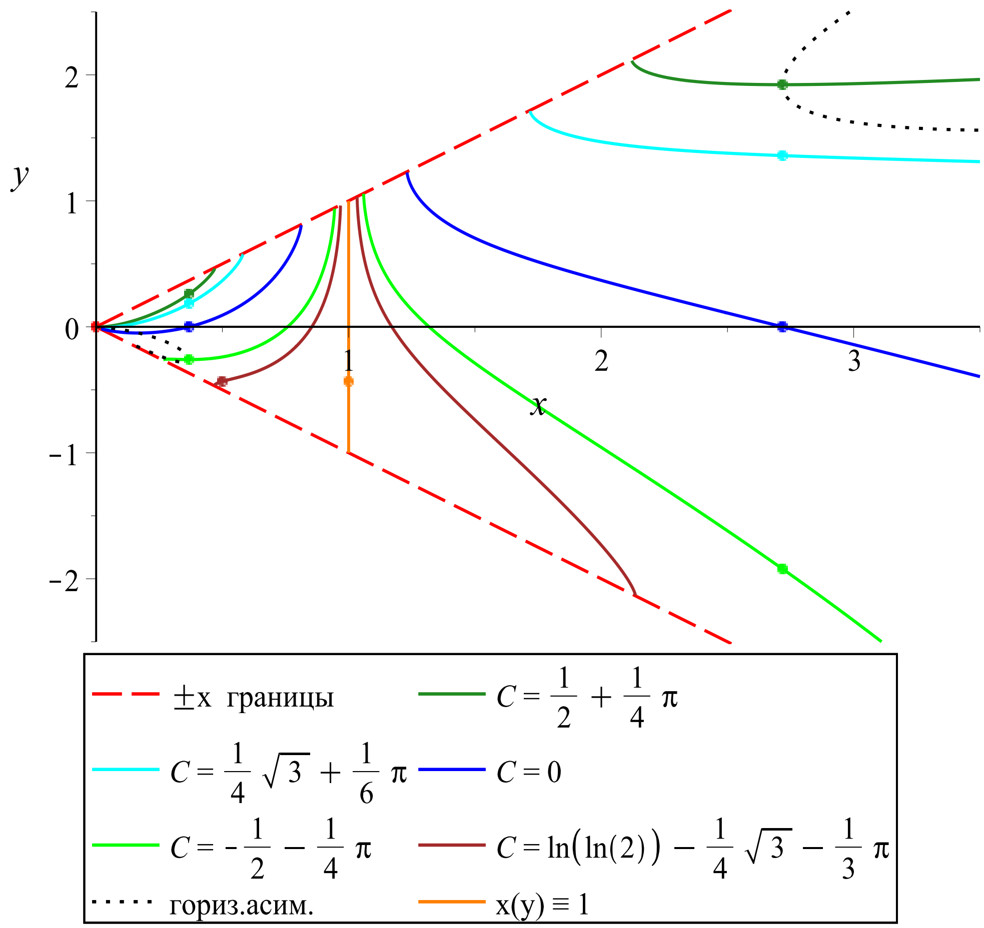
7] $(x_0,y_0)=(e^{-1},-2^{-1/2}e^{-1})\ \Rightarrow\ \underline{v(x,y)+\ln\ln x^{-1}=-1/2-\pi/4}$, $\underline{x\in(\exp(-e^{-1/2-3\pi/4}),\exp(-e^{-1/2+\pi/4}))}\approx(0.26,0.94)\ni x_0$.

8] $(x_0,y_0)=(e,-2^{-1/2}e)$, тогда $\underline{v(x,y)+\ln\ln x=-1/2-\pi/4}$, $\underline{x\in(\exp(e^{-1/2+\pi/4}),\exp(e^{-1/2-3\pi/4}))}\approx(1.06,3.78)\ni x_0$.

9] $(x_0,y_0)=(1/2,-\sqrt{3}/4)$, тогда $4(-\sqrt{3}/4)(1/4-3/16)^{1/2}-\arcsin(\sqrt{3}/2)+\ln(-\ln(1/2))=C$, поэтому $\underline{v(x,y)+\ln\ln x^{-1}=c_0}$, где $c_0=\ln\ln 2-\sqrt{3}/4-\pi/3\approx-1.85$, $\underline{x\in(\exp(-e^{\ln\ln 2-\sqrt{3}/4+\pi/6}),\exp(-e^{\ln\ln 2-\sqrt{3}/4-5\pi/6}))}\approx(0.47,0.97)\ni x_0$.

$*$] $(x_0,y_0)=(1,-\sqrt{3}/4)$, тогда $\underline{x(y)\equiv1}$, $\underline{y\in(-1,1)}$.

$$\frac{y\sqrt{x^2-y^2}}{x^2}+\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)+\ln(|\ln(x)|)=C,\quad x\equiv 1$$



Контрольная работа № 1 (переписывание 4).

4. $3(x-(2\ln y+1)x^{4/3}y)y' = y;$

$(x_0,y_0):$ 1] $(-27e, e^{-1/3})$, 2] $(8^3e^{-3/8}(10e^{1/4}+1)^{-3}), e^{1/8})$,
3] $(-(e/2+5/(2e))^{-3}e^{9/2}, e^{-5/2})$, 4] $(-((5/2)e^{-2}+5e^{-5})^{-3}, e^{-5})$,
5] $(8e^{3/2}(3/2-\ln 2)^{-3}, e^{-1/2}/2)$, 6] $(8(3e^{-1/2}-5e^{-5/2})^{-3}, e^{-5/2})$,
7] $((5/3)^3(e^{-1/5}-e^{-3/5})^{-3}, e^{-3/5})$, 8] $(8(3e^{-5/2}-e^{-1/2})^{-3}, e^{-1/2})$,
9] $((e^{-3}+(3/2)\ln(3/2))^{-3}, 3/2)$, 10] $(-8e^{-3}, 1)$,
$11^{\star}_{4}$] $(-8(5e^{-11/2}+3e^{-3/2})^{-3}, e^{-3/2})$

ОДЗ: $x \not\equiv C$, $y \geq 0$, так как функция $y\ln y$ может быть доопределена в нуле по непрерывности нулем; $x(1-(2\ln y+1)yx^{1/3}) = 0 \Leftrightarrow$ $x \equiv 0$ и $x^{-1/3} = 2y\ln y + y$ — границы областей существования наряду с $y \equiv 0$. При этом $y(x) \equiv 0$ $(x \neq 0)$ — граничные решения.

Кроме того, функция $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, где $f = \dfrac{y}{3(x-(2\ln y+1)x^{4/3}y)}$, определена и непрерывна в областях существования, включая границы $y \equiv 0$, $x < 0$ и $y \equiv 0$, $x > 0$. Поэтому это множество состоит из точек единственности.

Имеем уравнение Бернулли по $x:$ $x' = 3y^{-1}x - 3(2\ln y+1)x^{4/3}$. При этом при делении на dy теряются решения $y \equiv 0$ $(x \neq 0)$.

Замена $u = x^{1-\alpha}$, $\alpha = 4/3 \Rightarrow u = x^{-1/3}$, $3u' = -x^{-4/3}x'$.

После деления уравнения на x^{α} и замены получаем
$u' + y^{-1}u = 2\ln y + 1$ — линейное уравнение.

Находим $u_{\text{оо}} = Cy^{-1}$; $u_{\text{чн}} = C(y)y^{-1}$, $C' = 2y\ln y + y$,
$C(y) = y^2\ln y \Rightarrow u_{\text{он}} = Cy^{-1} + y\ln y$.

Ответ: $x^{-1/3} = Cy^{-1} + y\ln y$,
$y \equiv 0$ $(x \neq 0)$ — граничные решения.

Положим $z = x^{1/3}$.

В координатах y, z границы $z \equiv 0$ и $z_b = (2\ln y + 1)^{-1}$ являются изоклинами с горизонтальными отрезками поля направлений.

Изоклина z_b определена при $y \in (0, e^{-1/2}) \cup (e^{-1/2}, +\infty)$, причем $z_b \to -\infty$ при $y \to 0$ и при $y \to e^{-1/2}{}_{-}$, $z_b \to +\infty$ при $y \to e^{-1/2}{}_{+}$, $z_b \to 0$ при $y \to +\infty$ $(y(z) \equiv 0,\ y(z) \equiv e^{-1/2}$ — вертикальные асимптоты функции $z_b(y))$.

Формула, задающее классическое общее решение, имеет вид

$$z = \psi(y, C), \quad \psi = (Cy^{-1} + y\ln y)^{-1}\,(\neq 0).$$

Исследуем функцию $z = \psi(y, C)$.

Имеем: $\psi' = -(Cy^{-1} + y\ln y)^{-2}(-Cy^{-2} + \ln y + 1)$.

Тогда $\psi'(y_*, C_*) = 0 \Leftrightarrow C_* = y_*^2(\ln y_* + 1)$ $(*)$. Это значит, что для $\forall\, C_*$ корни уравнения $(*)$, если существуют, являются абсциссами экстремальных точек кривой $z(y, C_*)$.

Имеем: $C_*' = 2y_*(\ln y_* + 3/2)$, $C_*'' = 2\ln y_* + 5 > 0$ при $y_*^0 = e^{-3/2}$. Поэтому y_*^0 – это точка минимума C_* и $C_*(y_*^0) = C_*^0 = -1/(2e^3)$.

При $\forall\, C < C_*^0$ функция $z(y, C) \searrow$. Ее график расположен над $z_b^- = \{(y, (y(1 + 2\ln y))^{-1})\colon\ y \in (0, e^{-1/2})\}$.

Решение поставленных задач Коши.

В каждой задаче надо удалять точки попадания графика решения на границу, а значит, проверять неравенство $x^{-1/3}y^{-1} \neq 2\ln y + 1$. $(*)$

1] $x_0 = -27e$, $y_0 = e^{-1/3} \Rightarrow (-27e)^{-1/3} = Ce^{1/3} + e^{-1/3}(-1/3) \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow x^{-1/3}y^{-1} = \ln y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1$. По $(*)$ $\ln y \neq 2\ln y + 1 \Leftrightarrow y \neq e^{-1}$. В результате $\underline{x = (y\ln y)^{-3}}$, $\underline{y \in (e^{-1}, 1)} \ni y_0$.

2] $x_0 = 8^3 e^{-3/8}(10e^{1/4}+1)^{-3})$, $y_0 = e^{1/8} \Rightarrow (8^3e^{-3/8}(10e^{1/4}+1)^{-3})^{-1/3} = Ce^{-1/8} + (1/8)e^{1/8} \Leftrightarrow C = (5/4)e^{1/2} \Rightarrow x^{-1/3}y^{-1} = (5/4)e^{1/2}y^{-2} + \ln y = h(y)\ (\neq 0)$. По $(*)$ $h(y) \neq 2\ln y + 1$ или $\eta(y) = \ln y - (5/4)e^{1/2}y^{-2} + 1 \neq 0$. Но $\eta(y) \nearrow$ и $\eta(e^{1/4}) = 0$, поэтому $y \in (0, e^{1/4}) \ni y_0$. При таких y функция $h(y) \neq 0$, так как $h'(y) = y^{-3}(y^2 - (5/2)e^{1/2}) < 0$ и $h(e^{1/4}) > 0$.

В результате $\underline{x = ((5/4)e^{1/2}y^{-1} + y\ln y)^{-3}}$, $\underline{y \in (0, e^{1/4})}$.

3] $x_0 = -(e/2+5/(2e))^{-3}e^{9/2}$, $y_0 = e^{-5/2} \Rightarrow -(e/2+5/(2e))e^{-3/2} = Ce^5 - 5e^{-5} \Leftrightarrow C = -e^{-3}/2 \Rightarrow x^{-1/3}y^{-1} = \ln y - e^{-3}y^{-2}/2 = h(y)\ (\neq 0)$. По $(*)$ $h(y) \neq 2\ln y + 1$ или $\eta(y) = \ln y + 1 + e^{-3}y^{-2}/2 \neq 0$. Но $\eta'(y) = y^{-3}(y^2 - e^{-3}) < 0$ при $0 < y < e^{-3/2}$ и $\eta(e^{-3/2}) = 0 \Rightarrow y \in (0, e^{-3/2}) \ni y_0$. Здесь $h(y) < 0$, так как $h \nearrow$ и $h(e^{-3/2}) < 0$.

В результате $\underline{x = (-e^{-3}(2y)^{-1} + y\ln y)^{-3}}$, $\underline{y \in (0, e^{-3/2})}$.

4] $x_0 = -((5/2)e^{-2} + 5e^{-5})^{-3}$, $y_0 = e^{-5} \Rightarrow -((5/2)e^{-2} + 5e^{-5}) = Ce^{5/2} - 5e^{-5/2}/2 \Leftrightarrow C = -5e^{-7}/2 \Rightarrow x^{-1/3}y^{-1} = -5e^{-7}y^{-2}/2 + \ln y = h(y)(\neq 0)$. По $(*)$ $h(y) \neq 2\ln y + 1$ или $\eta(y) = \ln y + 1 + 5e^{-7}y^{-2}/2 \neq 0$. Но $\eta'(y) = y^{-3}(y^2 - 5e^{-7}) < 0$ при $0 < y < \sqrt{5}e^{-7/2}$ и $\eta(e^{-7/2}) = 0$ $\Rightarrow y \in (0, e^{-7/2}) \ni y_0$. Здесь $h(y) < 0$, так как $h \nearrow$ и $h(e^{-7/2}) < 0$.

В результате $\underline{x = (-5e^{-7}(2y)^{-1} + y\ln y)^{-3}}$, $\underline{y \in (0, e^{-7/2})}$.

5] $x_0 = 8e^{3/2}(3/2 - \ln 2)^{-3}$, $y_0 = e^{-1/2}/2 \Rightarrow (1/2)(3/2 - \ln 2)e^{-1/2} = 2Ce^{1/2} - e^{-1/2}(1/2 + \ln 2)/2 \Leftrightarrow C = e^{-1}/2 \Rightarrow x^{-1/3}y^{-1} = (2ey^2)^{-1} + \ln y = h(y)(\neq 0)$. По $(*)$ $h(y) \neq 2\ln y + 1$ или $\eta(y) = \ln y + 1 + (2ey^2)^{-1} \neq 0$. Но $\eta'(y) = y^{-3}(y^2 - e^{-1}) < 0$ при $0 < y < e^{-1/2}$ и $\eta(e^{-1/2}) = 0 \Rightarrow y \in (0, e^{-1/2}) \ni y_0$. Здесь $h(y) < 0$, так как $h \nearrow$ и $h(e^{-1/2}) < 0$.

В результате $\underline{x = (-e^{-1}(2y)^{-1} + y\ln y)^{-3}}$, $\underline{y \in (0, e^{-1/2})}$.

6] $x_0 = 8(3e^{-1/2} - 5e^{-5/2})^{-3}$, $y_0 = e^{-5/2} \Rightarrow (3/2)e^{-1/2} - (5/2)e^{-5/2} = Ce^{5/2} - (5/2)e^{-5/2} \Leftrightarrow C = 3e^{-3}/2 \Rightarrow x^{-1/3}y^{-1} = \ln y + (3/2)e^{-3}y^{-2} = h(y)(\neq 0)$. По $(*)$ $h(y) \neq 2\ln y + 1$ или $\eta(y) = \ln y + 1 - 3e^{-3}y^{-2}/2 \neq 0$. Но $\eta(y) \nearrow$ и $\eta(e^{-3/2}) = 0$, поэтому $y \in (0, e^{-3/2}) \ni y_0$. При таких y функция $h(y) \neq 0$, так как $h' = y^{-3}(y^2 - 3e^{-3}) < 0$ и $h(e^{-3/2}) = 0$.

В результате $\underline{x = (3e^{-3}(2y)^{-1} + y\ln y)^{-3}}$, $\underline{y \in (0, e^{-3/2})}$.

7] $x_0=(5/3)^3(e^{-1/5}-e^{-3/5})^{-3}$, $y_0=e^{-3/5}$ $\Rightarrow$ $(3/5)(e^{-1/5}-e^{-3/5})=Ce^{3/5}-(3/5)e^{-3/5}$ $\Leftrightarrow$ $C=3e^{-4/5}/5$ $\Rightarrow$ $x^{-1/3}y^{-1}=3e^{-4/5}y^{-2}/5+\ln y=h(y)(\neq 0)$. Поскольку $h'(y)=y^{-3}(y^2-(6/5)e^{-4/5})$, то $y_{\min}=\sqrt{6/5}e^{-2/5}$ и $h(y_{\min})=1/2+\ln\sqrt{6/5}-2/5>0$, а значит, $h(y)>0$ при $y>0$. По $(*)$ $h(y)\neq 2\ln y+1$ или $\eta(y)=-(3/5)e^{-4/5}y^{-2}+\ln y+1\neq 0$. Но $\eta(y)\nearrow$ и $\eta(e^{-2/5})=0$, поэтому $y\in(0,e^{-2/5})\ni y_0$.

В результате $\underline{x=((3/5)e^{-4/5}y^{-1}+y\ln y)^{-3}}$, $\underline{y\in(0,e^{-2/5})}$.

10] $x_0=-8e^{-3}$, $y_0=1$ $\Rightarrow$ $-e/2=C\Leftrightarrow x^{-1/3}y^{-1}=-(1/2)ey^{-2}+\ln y=h(y)(\neq 0)$. По $(*)$ $h(y)\neq 2\ln y+1$ или $\eta(y)=\ln y+1+ey^{-2}/2\neq 0$. Но $\eta'(y)=y^{-3}(y^2-e)<0$ при $0<y<e^{1/2}$ и $\eta(e^{1/2})=2$ $\Rightarrow y\in(0,e^{-1/2})\ni y_0$. Здесь $h(y)<0$, так как $h\nearrow$ и $h(e^{1/2})=0$.

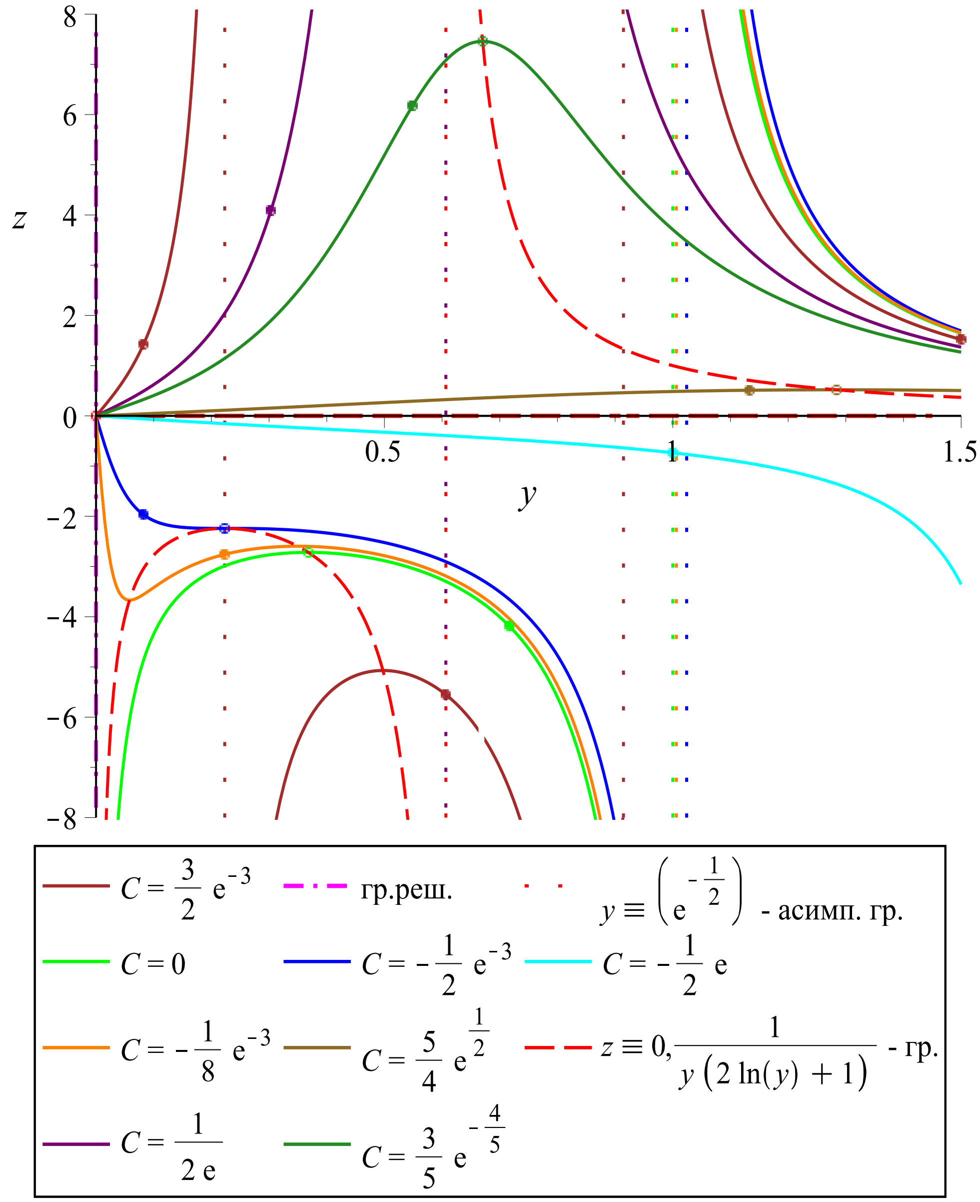
В результате $\underline{x=(-e(2y)^{-1}+y\ln y)^{-3}}$, $\underline{y\in(0,e^{1/2})}$.

$11^{\star}_{4}$] $x_0=-8(5e^{-11/2}+3e^{-3/2})^{-3}$, $y_0=e^{-3/2}$ $\Rightarrow$
$-(5/2)e^{-11/2}-3e^{-3/2}/2=Ce^{3/2}-3e^{-3/2}/2$ $\Leftrightarrow$ $C=-5e^{-7}/2\Rightarrow$ $x^{-1/3}y^{-1}=-5e^{-7}y^{-2}/2+\ln y=h(y)\,(\neq 0)$. По $(*)$ $h(y)\neq 2\ln y+1$ или $\eta(y)=\ln y+1+5e^{-7}y^{-2}/2\neq 0$.

Но $\eta(e^{-7/2})=0$ и $y_0>e^{-7/2}$, а $\eta'(y)=y^{-3}(y^2-5e^{-7})\Rightarrow\eta(y)\searrow$ при $e^{-7/2}<y<\sqrt{5}e^{-7/2}$ и $\eta(y)\nearrow$ при $y>\sqrt{5}e^{-7/2}$. При этом $\eta(e^{-3/2})<0$, а $\eta(1/2)>0$, а значит, $\exists!\,y_*\in(y_0,1/2):$ $\eta(y_*)=0$. Здесь $h(y)<0$, так как $h\nearrow$ и $h(1/2)<0$.

В результате $\underline{x=(-5e^{-7}(2y)^{-1}+y\ln y)^{-3}}$, $\underline{y\in(e^{-7/2},y_*)}$.

$$z(y, C) = \frac{1}{\frac{C}{y} + y\ln(y)}, \quad x = z(y, c)^3$$



2) Решить дробно-линейное уравнение

4. $(2x+3y-5)\,dx-(x+4y)\,dy=0$

Точка пересечения прямых $(-4,1)$.

Замена $u=x-4,\ v=y+1;\quad x=u+4,\ y=v-1.$

$(u+4v)dv-(2u+3v)du=0$ – однородное уравнение 1-го порядка.

Замена $z=vu^{-1},\ v=zu;\ dv=udz+zdu;\quad u=0$ – не решение.

$(u+4zu)(udz+zdu)-(2u+3zu)du=0$ – ур-е с раздел. перем.

$\dfrac{4z+1}{(2z+1)(z-1)}dz=-2\dfrac{du}{u}$, $\underline{z=1}$, $\underline{z=-1/2}$ – потерянные решения;

$\displaystyle\int\left(\frac{2}{2z+1}+\frac{5}{z-1}\right)dz=C-6\int\frac{du}{u}$ или $\ln\dfrac{(2z+1)(z-1)^5u^6}{C}=0$

$\Rightarrow\ (2z+1)(z-1)^5u^6=C;\quad z=vu^{-1}\ \Rightarrow\ (2v+u)(v-u)^5=C.$

Ответ: $(2y+x-2)(y-x+5)^5=C$

Если $z=uv^{-1},\ u=zv,$ то $\dfrac{2z+3}{z^2+z-2}dz=-2\dfrac{dv}{v}$, $\underline{z=1}$, $\underline{z=-2}$;

$\displaystyle\int\left(\frac{5}{z-1}+\frac{1}{z+2}\right)dz=C-6\int\frac{dv}{v}$ или $\ln\dfrac{(z-1)^5(z+2)v^6}{C}=0$

$\Rightarrow\ (z-1)^5(z+2)=Cv^{-6};\quad z=u/v\ \Rightarrow\ (u-v)^5(u+2v)=C.$

2. $6y' = \dfrac{y}{x}\Big(\dfrac{x^2}{y^6} + \dfrac{y^6}{x^2}\Big);$

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $(3, -3^{1/3})$, 2] $(-1, 2)$, 3] $(e^{85/63}, 2^{-1/3}\cdot e^{85/189})$,
4] $(e^{3/2}, 2^{-1/6}\cdot e^{1/2})$, 5] $(e^{-3/2}, 2^{1/6}\cdot e^{-1/2})$

ОДЗ: $x \neq 0,\ y \neq 0;\ x(y) \equiv 0,\ y(x) \equiv 0$ – границы областей $\exists$; уравнение не меняется как при замене y на $-\tilde{y}$, так и при замене x на $-\tilde{x}$. Считаем, что $x > 0$, а в ответе, если надо, пишем $|x|$.

Ищем m – порядок $y:\ m-1 = m-1+2-6m = m-1+6m-2 \Rightarrow m = 1/3$.

Замена $y = z^{1/3},\ \ y' = (1/3)z^{-2/3}z';\ \ z = y^3 \neq 0.$

Получаем $2z' = xz^{-1} + x^{-3}z^3$ – однородное уравнение.

Замена $z = ux,\ \ z' = xu' + u;\ \ u = zx^{-1}.$

Получаем $2xuu' = u^4 - 2u^2 + 1$ – уравнение с разд. переменными.

Имеем: $\dfrac{2u\,du}{(u^2-1)^2} = \dfrac{dx}{x}$ и $\underline{u = \pm 1}$ – потерянные при делении решения. Отсюда $(1-u^2)^{-1} = \ln Cx;\ \ u = z/x = x^{-1}y^3.$

Ответ: $y^3 = \pm x,\ \ \dfrac{x^2}{x^2 - y^6} = \ln Cx$ или $y^6 = x^2(1 - \ln^{-1} Cx).$

Найдем классические общие решения:

$$y = \pm|x|^{1/3}(1-\ln^{-1} Cx)^{1/6},\ x \in \begin{cases} (0, C^{-1}) \cup (C^{-1}e, +\infty) \text{ для } C > 0 \\ (-\infty, C^{-1}e) \cup (C^{-1}, 0) \text{ для } C < 0 \end{cases},$$

так как $1 - \ln^{-1} Cx > 0 \Leftrightarrow \ln Cx < 0$ или $\ln Cx > 1$.

З.К. 1] $(3, -3^{1/3}) \Rightarrow y = -x^{1/3},\ \ x \in (0, +\infty)$.

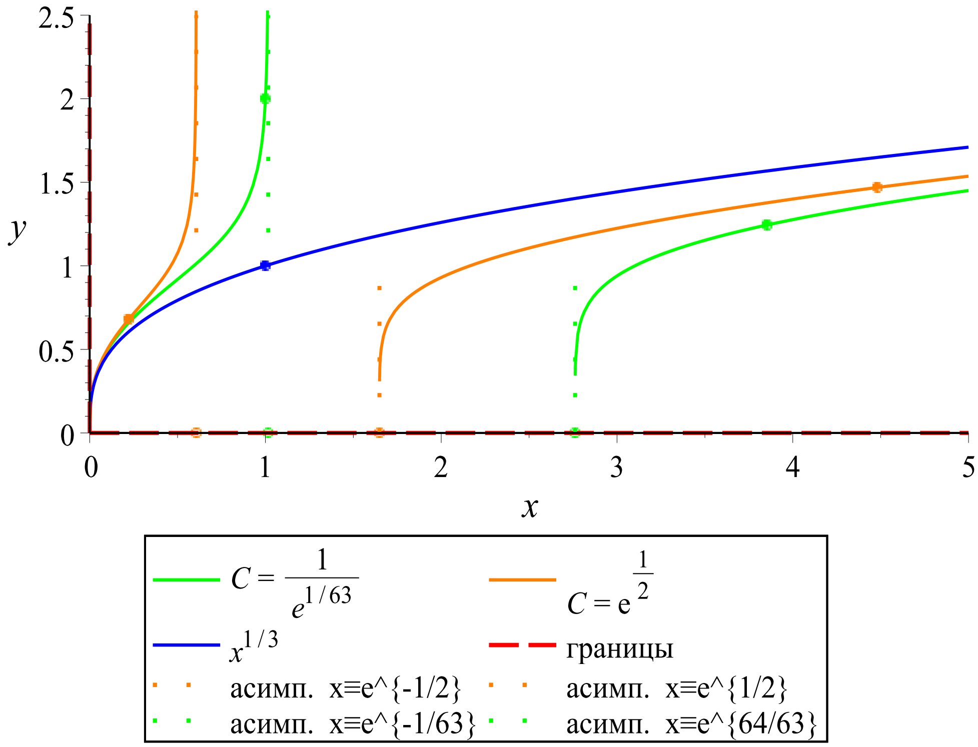
2] $(-1, 2) \Rightarrow C = -e^{-1/63} \Rightarrow$
$y = -x^{1/3}(1 - \ln^{-1}(-e^{1/63}x))^{1/6},\ \ x \in (-e^{1/63}, 0) \ni x_0.$

3] $(e^{85/63}, 2^{-1/3}\cdot e^{85/189}) \Rightarrow C = e^{-1/63} \Rightarrow$
$y = x^{1/3}(1 - \ln^{-1}(e^{1/63}x))^{1/6},\ \ x \in (e^{64/63}, +\infty) \ni x_0.$

4] $(-e^{3/2}, -2^{-1/6}\cdot e^{1/2}) \Rightarrow C = -e^{1/2} \Rightarrow$
$y = x^{1/3}(1 - \ln^{-1}(-e^{1/2}x))^{1/6},\ \ x \in (-\infty, -e^{1/2}) \ni x_0.$

5] $(e^{-3/2}, -2^{1/6}\cdot e^{-1/2}) \Rightarrow C = e^{1/2} \Rightarrow$
$y = -x^{1/3}(1 - \ln^{-1}(e^{1/2}x))^{1/6},\ \ x \in (0, e^{-1/2}) \ni x_0.$

$$y = x^{1/3}\left(1 - \frac{1}{\ln(C\,x)}\right)^{1/6}, \quad y = x^{1/3} \ \ (x>0,\ y>0)$$



4_2. $3y^{1/2}(2x-1)x\,dy + (8 - 2x^{-1} - 4y^{3/2}x)\,dx = 0$;
$(x_0, y_0):$ 1) $(-1/8, 2^{2/3})$, 2) $((7+\sqrt{113})/32, 1)$,
3) $(1/8, 2^{2/3})$, 4) $((11+\sqrt{57})/32, 3^{2/3})$, 5) $(9/8, 2^{2/3})$,
6) $(5/8, (82/45)^{2/3})$, 7) $(1/3, 1)$, 8) $(1/2, 2^{1/3})$

Функции M и N непрерывны на множестве $\widehat{G} = G \cup \hat{\partial}G$, где $G = \{y > 0,\ x \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\}\}$, $\hat{\partial}G = \{y = 0,\ x \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\}\}$ и $H^0 = \{(1/4, 0)\} \cup \{(1/2, 2^{2/3})\}$, поскольку только в этих точках M и N одновременно обращаются в нуль. Поэтому согласно (2.2) область G^0 для уравнения (2.5) — это область G, из которой "выколота" нуль-граничная точка $(1/2, 2^{2/3})$, а нуль-граничная точка $(1/4, 0)$, что интересно, лежит на границе G^0, тем самым, $\hat{\partial}G^0 = \{y = 0,\ x \in \mathbb{R}^1 \backslash \{1/4\}\}$.

Отметим, что кривая $8 - 2x^{-1} - 4y^{3/2}x = 0$ $(N(x, y) = 0)$ является изоклиной для вертикальных отрезков поля направлений.

Уравнение (2.5) не является уравнением в полных дифференциалах, так как $\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = -3y^{1/2}(6x-1) \not\equiv 0$. Однако, при выборе $\omega(x, y) \equiv x$ в формуле (2.16) $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = -\dfrac{6x-1}{(2x-1)x}$.
Поэтому $\dfrac{d\mu}{dx} = -\dfrac{6x-1}{(2x-1)x}\mu$, откуда $\mu = \dfrac{1}{(2x-1)^2 x}$.

Умножая исходное уравнение на μ, получаем уравнение в полных дифференциалах $\dfrac{3y^{1/2}}{2x-1}\,dy + \left(\dfrac{8x-2}{(2x-1)^2x^2} - \dfrac{4y^{3/2}}{(2x-1)^2)}\right)dx = 0$.

Но при умножении теряется решение $\underline{x \equiv 1/2}$ $(y \neq 2^{2/3})$.

Имеем: $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \mu N \ \Rightarrow\ U(x, y) = 3\displaystyle\int y^{1/2}(2x-1)^{-1}\,dy + C(x) = 2y^{3/2}(2x-1)^{-1} + C(x)$; $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \mu M \ \Rightarrow\ C'(x) = \dfrac{8x-2}{(2x-1)^2x^2}$, откуда $C(x) = 2x^{-1} - 4(2x-1)^{-1}$.

В результате дифференциал $U(x, y) = \dfrac{2y^{3/2}}{2x-1} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{2x-1}$.

Ответ: $x(y) \equiv 1/2$, $y \in (0, 1/4)$ или $y > 1/4$;
$\dfrac{y^{3/2}}{2x-1} - \dfrac{1}{x(2x-1)} = C \ \Leftrightarrow\ y^{3/2}x - 1 = Cx(2x-1)$.

Для уравнения (2.5) имеется возможность выписать классическое общее решение как в виде $x=\psi(y,C)$, так и в виде $y=\varphi(x,C)$, и найти полные решения задач Коши так же в одном из двух видов. При этом следует обратить внимание на причины того, что графики полных решений $x=\psi_0(y)$ и $y=\varphi_0(x)$ одной и той же задачи Коши могут не совпадать, а также — на различия в примыкании решений к граничным точкам и к нуль-граничной точке.

Итак, $\psi(x,C)=(C(2x-1)+x^{-1})^{2/3}$ при $C(2x-1)+x^{-1}>0$.

Или $x=y^{-3/2}$, если в общем интеграле $C=0$, а если $C\neq 0$, то $\varphi_{\mp}(y,C)=\dfrac{y^{3/2}+C\mp((y^{3/2}+C)^2-8C)^{1/2}}{4C}$ при $(y^{3/2}+C)^2\geq 8C$.

Перейдем к решению конкретных задач Коши с н. д. (x_0,y_0).

1) $(-1/8,2^{2/3})$, 2) $((7+\sqrt{113})/32,1)$. Тогда $C=-8$.

1_y,2_y) $8(2x-1)+x^{-1}>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,(1-\sqrt{2})/4)\cup(0,(1+\sqrt{2})/4)$.

1_y) $\underline{y=(-8(2x-1)+x^{-1})^{2/3}}$, $x\in(-\infty,(1-\sqrt{2})/4)\ni x_0$.

2_y) $\underline{y=(-8(2x-1)+x^{-1})^{2/3}}$, $x\in(1/2,(1+\sqrt{2})/4)\ni x_0$, так как нуль-граничная точка $(1/2,2^{2/3})$ принадлежит как интервалу $((0,(1+\sqrt{2})/4)$, так и графику функции $y=\psi(x,-8)$.

1_x) $\varphi_{\mp}(2^{2/3},-8)=(-6\mp 10)/(-32)\ \Rightarrow\ x=\varphi_{+}(y,-8)\Leftrightarrow$
$\underline{x=(y^{3/2}-8+((y^{3/2}-8)^2+64)^{1/2})/(-32)}$, $y\in(0,+\infty)$.

2_x) $\varphi_{\mp}(1,-8)=(-7\mp\sqrt{113})/(-32)\ \Rightarrow\ x=\varphi_{-}(y,-8)\Leftrightarrow$
$\underline{x=(y^{3/2}-8-((y^{3/2}-8)^2+64)^{1/2})/(-32)}$, $y\in(0,2^{2/3})\ni y_0$, так как $\varphi_{-}(2^{2/3},-8)=1/2$.

3) $(1/8,2^{2/3})$, 4) $((11+\sqrt{57})/32,3^{2/3})$. Тогда $C=8$.

3_y,4_y) $8(2x-1)+x^{-1}>0\Leftrightarrow x\in(0,1/4)\cup(1/4,+\infty)$.

3_y) $\underline{y=(8(2x-1)+x^{-1})^{2/3}}$, $x\in(0,1/4)\ni x_0$.

4_y) $\underline{y=(8(2x-1)+x^{-1})^{2/3}}$, $x\in(1/2,+\infty)\ni x_0$ $(x(1/2,8)=2^{2/3})$.

3_x,4_x) Здесь $\varphi_{\mp}(y,8)=(y^{3/2}+8\mp(y^3+16y^{3/2})^{1/2})/32$, поэтому $x_{-}(0,8)=x_{+}(0,8)=1/2$, т. е. графики обоих решений попадают на границу области в нуль-граничную точку $(1/4,0)$.

3_x) $\varphi_{\mp}(2^{2/3},8)=(10\mp 6)/32\ \Rightarrow\ x=\varphi_{-}(y,8)\Leftrightarrow$
$\underline{x=(y^{3/2}+8-((y^{3/2}+8)^2-64)^{1/2})/32}$, $y\in(0,+\infty)$.

4_x) $\varphi_{\mp}(3^{2/3},8)=(11\mp\sqrt{57})/32\ \Rightarrow\ x=\varphi_{+}(y,8)\Leftrightarrow$
$\underline{x=(y^{3/2}+8+((y^{3/2}+8)^2-64)^{1/2})/32}$, $y\in(2^{2/3},+\infty)\ni y_0$, так как $\varphi_{-}(2^{2/3},8)=1/2$.

5) $(9/8, 2^{2/3})$, 6) $(5/8, (82/45)^{2/3})$. Тогда $C = 8/9$.

5_y,6_y) $8(2x-1)/9 + x^{-1} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Но $\psi(1/2, 5/8) = 2^{2/3}$ и $9/8 > 5/8 > 1/2$, поэтому обе пары н. д. задают одно и то же полное решение задачи Коши $\underline{y = (8(2x-1)/9 + x^{-1})^{2/3}}$, $x \in (1/2, +\infty)$.

5_x,6_x) $\varphi_{\mp}(y, 8/9) = (y^{3/2} + 8/9 \mp ((y^{3/2} + 8/9)^2 - 64/9)^{1/2})/(32/9)$ и $\varphi_{\mp}((8/3)6^{-1/3}, 8/9) = 3/4$ ($\varphi'_{\mp}(y, 8/9) = \infty$ при $y = (8/3)6^{-1/3}$), т. е. графики решений соприкасаются с изоклиной для вертикальных отрезков поля направлений в точке $((8/3)6^{-1/3}, 3/4)$.

5_x) $\varphi_{\mp}(2^{2/3}, 8/9) = (26 \mp 10)/32 \Rightarrow x = \varphi_+(y, 8/9) \Leftrightarrow$
$\underline{x = (y^{3/2} + 8/9 + ((y^{3/2} + 8/9)^2 - 64/9)^{1/2})/(32/9)},$
$y \in ((8/3)6^{-1/3}, +\infty) \ni y_0$.

6_x) $\varphi_{\mp}((82/45)^{2/3}, 8/9) = (122/5 \mp (22/5))/32 \Rightarrow x = \varphi_-(y, 8/9)$
$\Leftrightarrow \underline{x = (y^{3/2} + 8/9 + ((y^{3/2} + 8/9)^2 - 64/9)^{1/2})/(32/9)},$
$y \in ((8/3)6^{-1/3}, 2^{2/3}) \ni y_0$, так как $\varphi_-(2^{2/3}, 8/9) = 1/2$.

Приведем еще несколько задач Коши, которые указаны ниже на "портрете" решений уравнения (2.5).

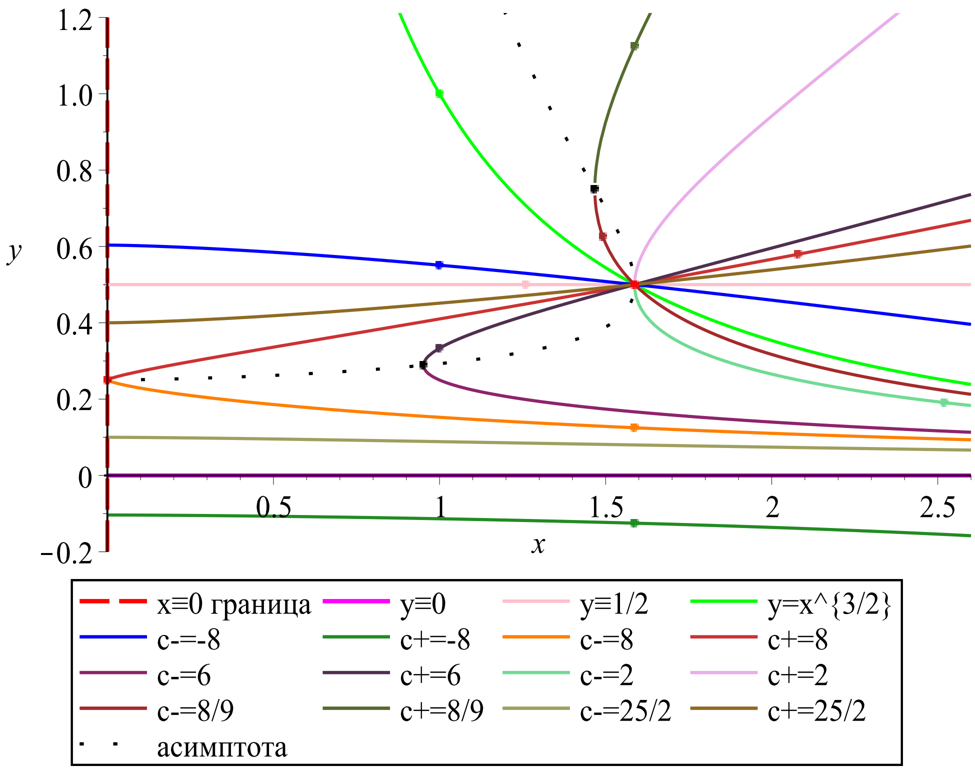
7) $(1/3, 1)$. Тогда $C = 6$.

7_y) $6(2x-1) + x^{-1} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ и $\psi(1/2, 6) = 2^{2/3}$, следовательно $\underline{y = (6(2x-1) + x^{-1})^{2/3}}$, $x \in (0, 1/2) \ni x_0$.

7_x) $\varphi_{\mp}(1, 6) = (7 \mp 1)/24 \Rightarrow x = \varphi_+(y, 6) \Leftrightarrow$
$\underline{x = (y^{3/2} + 6 + ((y^{3/2} + 6)^2 - 48)^{1/2})/24}$, $y \in ((4\sqrt{3} - 6)^{2/3}, 2^{2/3}) \ni y_0$, поскольку $\varphi_+((4\sqrt{3} - 6)^{2/3}, 6) = \sqrt{3}/6$ и $\varphi'_+(y, 6) = \infty$ при $y = (4\sqrt{3} - 6)^{2/3}$, т. е. график решения соприкасается с изоклиной для вертикальных отрезков поля в точке $((4\sqrt{3} - 6)^{2/3}, \sqrt{3}/6)$.

8_y) $(1/2, 2^{1/3})$. Тогда $\underline{x(y) \equiv 1/2}$, $y \in (0, 2^{2/3}) \ni y_0$.

З а м е ч а н и е. Уравнение в симметричной форме (2.5) является также уравнением Бернулли относительно y.



1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
y
0.5
1
1.5
2
2.5
x
x≡0 граница
y≡0
y≡1/2
y=x^{3/2}
c-=-8
c+=-8
c-=8
c+=8
c-=6
c+=6
c-=2
c+=2
c-=8/9
c+=8/9
c-=25/2
c+=25/2
асимптота

Контрольная работа № 1 (переписывание 5).

2. $tg\, x\, dx + 2(2y^3 \cos x - y)\, dy = 0$;

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $(-\pi/3, 0)$, 2] $(5\pi/3, -2^{-1/2})$,
3] $(-\arccos(\ln^{-1}(4e)), \ln^{1/2}(2e^{1/2}))$, 4] $(\arccos(\ln^{-1} 4), -\ln^{1/2} 2))$,
5] $(-\arccos(1/(6-2e^{3/2})), -2^{1/2}))$,
6] $(-\arccos(\ln^{-1}(256/e^{14}), 2\ln^{1/2} 2))$,
7] $(-\arccos(\ln^{-1}(4e^2/9), -\ln^{1/2}(2e/3)), 8] (2\pi - \arccos(1/(4-e^2)), 1))$,
9] $(\arccos(1/(3-3e^{1/2})), -2^{-1/2}))$, 10] $(5\pi/4, 0)$

ОДЗ: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x(y) \equiv \pi/2 + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ – гр-цы областей $\exists$; $(\pi k, 0), (2\pi k, \mp 2^{-1/2})$ — особые точки.

Имеем уравнение $-d(\cos x) + 2\cos x(2y^3 \cos x - y)\, dy = 0$. Оно инвариантно относительно замен x на $-\tilde{x}$, y на $-\tilde{y}$.

Положив $z = \cos x$ $(0 < |z| \leq 1)$ – получаем $z' + 2yz - 4y^3 z^2 = 0$ – это уравнение Бернулли относительно $z(y)$.

Замена $u = z^{1-\alpha}$, $\alpha = 2 \Rightarrow u = z^{-1}$ $(|u| \geq 1)$, $u' = -z^{-2} z'$.

После деления уравнения на z^α и подстановки замены получаем $u' - 2yu = -4y^3$ – линейное уравнение.

Находим $u_{\text{оо}} = Ce^{y^2}$; $u_{\text{чн}} = C(y)e^{y^2}$, $C' = -4y^3 e^{-y^2}$, $C(y) = 2(y^2+1)e^{-y^2} \Rightarrow u_{\text{он}} = Ce^{y^2} + 2y^2 + 2$ и $u = \cos^{-1} x$.

Ответ: $\cos^{-1} x = 2y^2 + 2 + Ce^{y^2}$ $(|y^2 + 2 + Ce^{y^2}| \geq 1) \Leftrightarrow$
$x(y, c_\mp) = 2\pi k \mp \arccos(1/(2y^2 + 2 + c_\mp e^{y^2}))$.

Поскольку получено классическое общее решение, разрешенное относительно x, $x(y) \equiv \pi k$ – изоклины с вертикальными отрезками поля, а $y(x) \equiv 0$ и $\cos(x) = 1/(2y^2) \Leftrightarrow x = 2\pi k \mp \arccos(1/(2y^2))$ – изоклины с горизонтальными отрезками поля направлений.

Пусть $y \geq 0$, $c = c_+$, $k = 0$. Найдем максимальные интервалы существования решения $x(y, c) = \arccos(1/(y^2 + 2 + ce^{y^2}))$ $(*)$.

Это решение удобно записать в виде $x(y, c) = \arccos(1/h(y, c))$, где $h(y, c) = 2y^2 + 2 + ce^{y^2}$.

Функция $x(y, c)$ определена при тех y, при которых $h \geq 1$, если $h \geq 0$, и $h \leq -1$, если $h \leq 0$. При этом $x(y, c) \nearrow \Leftrightarrow h(y, c) \nearrow$.

Для $\forall\, c \in \mathbb{R}^1$ исследуем функцию $h(y, c)$.

Поскольку $h'(y, c) = 2y(2 + ce^{y^2})$, то $y = 0$ – точка локального минимума функции $h(y, c)$ и $h(0, c) = 2 + c \geq 1 \Leftrightarrow c \geq -1$.

I. Для $\forall\, c \geq 0$ функция $h(y, c) \nearrow_{2+c}^{\infty}$. Поэтому $x(y, c)$ определена при $y \in [0, +\infty)$ и монотонно возрастает от $\arccos(1/(2+c))$ до $\pi/2\, (= \arccos 0)$. В частности, $x(y, 0) = \arccos(1/(y^2 + 2))$.

II. Для $\forall c < 0$ из уравнения $2 + ce^{y^2} = 0$ выявляется точка локального максимума $y_* = \ln^{1/2}(-2/c)$ и $h(y_*, c) = 2\ln(-2/c) \geq 1 \Leftrightarrow c \geq -2e^{-1/2}$. Поэтому при $y \nearrow^{\infty}_{y_*}$ функция $h(y,c) \searrow^{\ln(4/c^2)}_{-\infty}$.

1. Рассмотрим уравнение $h(y,c) = 1 \Leftrightarrow 2y^2 + 1 + ce^{y^2} = 0$.

a) При $c \in (-1, 0)$ функция $h(0,c) > 1$, поэтому имеется один корень $\tilde{y}_+ > y_*$ и $(*)$ определено при $y \in [0, \tilde{y}_+)$. При этом $\tilde{y}_+$ в промежуток не входит, так как $x(\hat{y}_+, c) = 0\,(= \arccos 1)$, а значит, в этой точке график решения попал бы на изоклину $x \equiv 0$ с вертикальными отрезками поля.

b) При $c \in (-2e^{-1/2}, -1]$ функция $h(0,c) \leq 1$ и $h(y_*, c) > 1$, поэтому имеются два корня $\hat{y}_+, \tilde{y}_+$, причем $0 \leq \hat{y}_+ < y_* < \tilde{y}_+$, и $(*)$ определено при $y \in (\hat{y}_+, \tilde{y}_+)$. В частности, $y \in (0, \tilde{y}_+)$ при $c = -1$ и поскольку $h(0,-1) = 1$, график решения $x(y,-1)$ при $y = 0$ попал бы в особую точку $(0,0)$ со своим углом наклона касательной.

c) При $c \in (-\infty, -2e^{-1/2}]$ функция $h(y_*, c) \leq 1$ и промежуток отсутствует, так как уже при $c = -2e^{-1/2}$ он вырождается в точку $\hat{y}_+ = y_* = \tilde{y}_+ = 2^{-1/2}$, и точка $(2^{-1/2}, 0)$ является особой.

2. Рассмотрим уравнение $h(y,c) = -1 \Leftrightarrow 2y^2 + 3 + ce^{y^2} = 0$.

a) При $c \in [-3, 0)$ функция $h(0,c) \geq -1$, поэтому имеется один корень y_- и $(*)$ определено при $y \in (y_-, +\infty)$. В частности, $y \in (0, +\infty)$ при $c = -3$ и поскольку $h(0,-3) = 0$, график решения $x(y,-3)$ при $y = 0$ попал бы в особую точку $(0, \pi)$ со своим углом наклона касательной $(\arccos(-1) = \pi)$.

Очевидно, что при $\tilde{y}_+ < y_-$ при $c \in (-2e^{-1/2}, 0)$.

b) При $c \in (-\infty, -3)$ функция $h(y,c)$ убывает, $h(0,c) < -1$, поэтому корней нет и $(*)$ определено при $y \in [0, +\infty)$.

В результате в II при $c \in (-2e^{-1/2}, 0)$ имеется два решения $(*)$.

Решение задач Коши.

1] $(x_0, y_0) = (-\pi/3, 0)$. Тогда $k = 0$, $c = c_-$,
$-\pi/3 = -\arccos(1/(2 + c_-)) \Rightarrow c_- = 0$ – это случай I, поэтому

$$x = -\arccos(1/(y^2 + 2)), \quad y \in \mathbb{R}^1.$$

2] $(x_0, y_0) = (5\pi/3, -2^{-1/2})$. Тогда $k = 1$, $c = c_-$,
$5\pi/3 = 2\pi - \arccos(1/(1 + 2 + c_-e^{1/2})) \Leftrightarrow 1/(1 + 2 + c_-e^{1/2}) = 1/2$ $\Leftrightarrow c_- = -e^{-1/2} \approx -0.6$ – это случай II.1.a), поскольку $\tilde{y}_+ \approx 1.476$, $y_- \approx 1.614$ и $|y_0| < \tilde{y}_+$. Следовательно,

$$x = 2\pi - \arccos(1/(2y^2 + 2 - e^{y^2 - 1/2})), \quad y \in (-\tilde{y}_+, \tilde{y}_+) \ni y_0.$$

3] $(x_0, y_0) = (-\arccos(\ln^{-1}(4e)), \ln^{1/2}(2e^{1/2}))$. Тогда $k = 0, c = c_-$, $\ln(4e) = 2\ln(2e^{1/2}) + 2 + c_-(2e^{1/2}) \Leftrightarrow c_- = -e^{-1/2}$ – аналог задачи 2], поскольку точка локального максимума $y_* = \ln(-2/c) = y_0 < \tilde{y}_+ \Rightarrow$

$x = -\arccos(1/(2y^2 + 2 - e^{y^2-1/2})), \quad y \in (-\tilde{y}_+, \tilde{y}_+) \ni y_0.$

4] $(x_0, y_0) = (\arccos(\ln^{-1} 4), -\ln^{1/2} 2))$. Тогда $k = 0, c = c_+$, $\ln 4 = 2\ln 2 + 2 + c_+(2) \Leftrightarrow c_+ = -1$ – это случай II.1.b), причем $\hat{y}_+ = 0$, $\tilde{y}_+ \approx 1.121$, $y_- \approx 1.387$, $y_* = \ln(-2/c) = |y_0| < \tilde{y}_+$. Поэтому

$x = \arccos(1/(2y^2 + 2 - e^{y^2})), \quad y \in (-\tilde{y}_+, 0) \ni y_0.$

5] $(x_0, y_0) = (-\arccos(1/(6 - 2e^{3/2})), -2^{1/2}))$, тогда $k = 0, c = c_-$, $6 - 2e^{3/2} = 4 + 2 + c_-e^{1/2} \Leftrightarrow c_- = -2e^{-1/2}$ – это случай II.2.a), так как $h(y_0, c_-) < -1$, $y_-0 \approx 1.283$. Следовательно,

$x = \arccos(1/(2y^2 + 2 - 3e^{y^2})), \quad y \in (-\infty, 0) \ni y_0.$

Здесь случай II.1. в принципе не может быть реализован, так как носитель решения $(*)$ вырождается в точку $y = 2^{-1/2}$.

6] $(x_0, y_0) = (-\arccos(\ln^{-1}(256/e^{14}), 2\ln^{1/2} 2)) \Rightarrow k = 0, c = c_-$, $\ln 4 = 2\ln 2 + 2 + 2c_- \Leftrightarrow c_- = -1$ – это случай II.2.a), так как $h(y_0, -1) < -1$, $y_- \approx 1.387$, $y_0 \approx 1.665$ и $y_0 > y_-$. Следовательно,

$x = -\arccos(1/(2y^2 + 2 - e^{y^2})), \quad y \in (y_-, +\infty) \ni y_0.$

7] $(x_0, y_0) = (-\arccos(\ln^{-1}(4e^2/9), -\ln^{1/2}(2e/3)) \Rightarrow k = 0, c = c_-$, $\ln(4e/9) = 2\ln(2e/3) + 2 + (2/3)c_- \Leftrightarrow c_- = -3/e$ – это случай II.1.b), причем $\hat{y}_+ \approx 0.355$, $y_* = |y_0| \approx 0.771$, $\tilde{y}_+ = 1$, $y_- \approx 1.335$. Поэтому

$x = -\arccos(1/(2y^2 + 2 - 3e^{y^2-1})), \quad y \in (-\tilde{y}_+, -\hat{y}_+) \ni y_0.$

8] $(x_0, y_0) = (2\pi - \arccos(1/(4 - e^2)), 1))$, тогда $k = 1, c = c_-$, $4 - e^2 = 2 + 2 + c_-e^2 \Leftrightarrow c_- = -e$ – это случай II.2.a), так как $h(y_0, -e) < -1$, $y_- \approx 0.506$. Следовательно,

$x = 2\pi - \arccos(1/(2y^2 + 2 - e^{y^2+1})), \quad y \in (y_-, +\infty) \ni y_0.$

9] $(x_0, y_0) = (\arccos(1/(3 - 3e^{1/2})), -2^{-1/2}))$, тогда $k = 0, c = c_+$, $3 - 3e^{1/2} = 1 + 2 + c_+e^{1/2} \Leftrightarrow c_- = -3$ – это случай II.2.a), так как $h(y_0, -3) < -1$, $y_-0 = 0$. Следовательно,

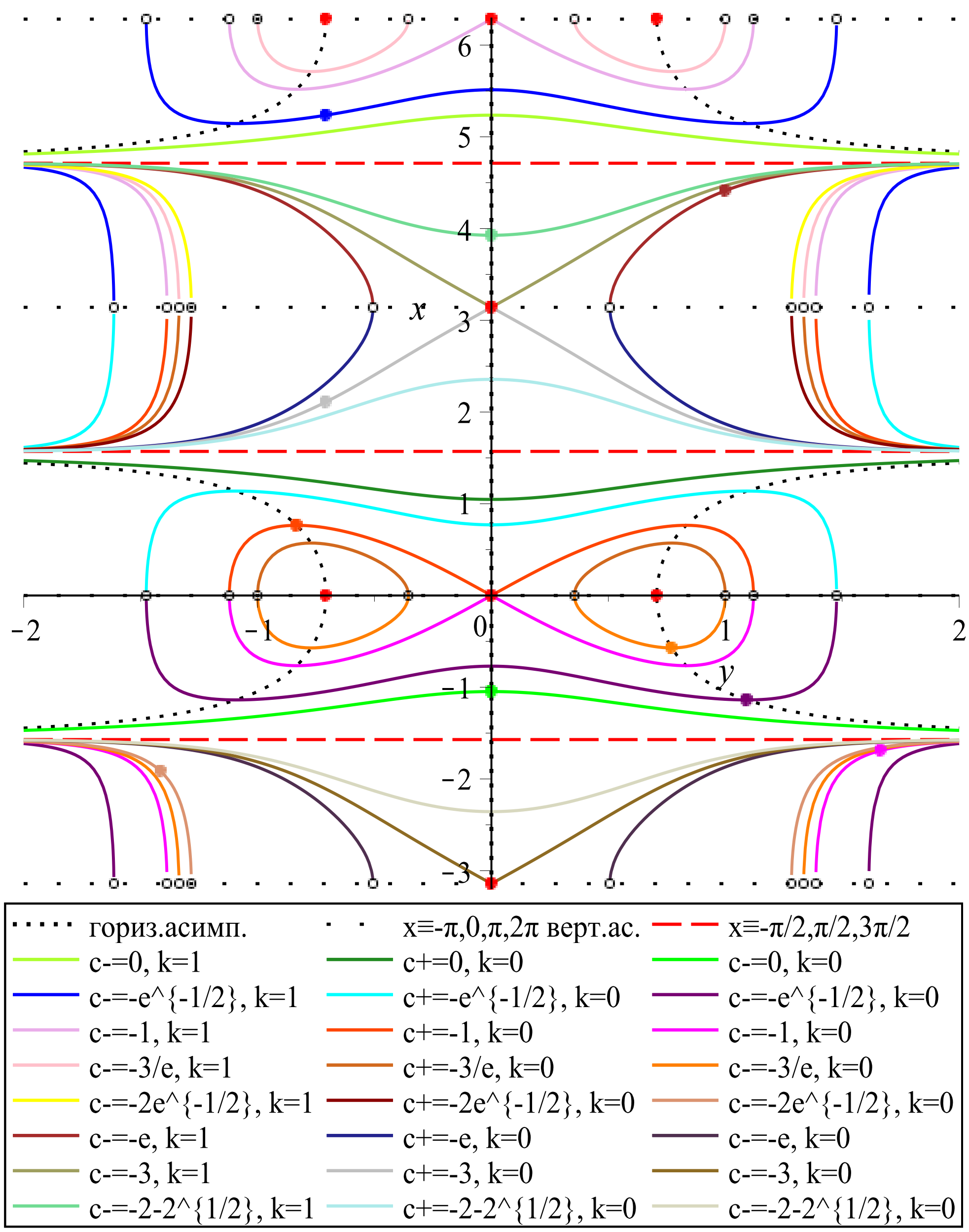
$x = \arccos(1/(2y^2 + 2 - 3e^{y^2})), \quad y \in (-\infty, 0) \ni y_0.$

10] $(x_0, y_0) = (5\pi/4, 0) \Rightarrow k = 1, c = c_-$,

$5\pi/4 = 2\pi - \arccos(1/(2 + c_-)) \Leftrightarrow 3\pi/4 = -\arccos(1/(2 + c_-)) \Leftrightarrow \pi/4 = \arccos(-1/(2 + c_-)) \Leftrightarrow 2^{-1/2} = -1/(2 + c_-) \Leftrightarrow c_- = -2 - 2^{1/2}$ – это случай II.2.b), так как $c_- < 3$, $h(0, c_-) < -1$. Следовательно,

$x = 2\pi - \arccos(1/(2y^2 + 2 - 2 - (2^{1/2})e^{y^2})), \quad y \in \mathbb{R}^1.$

$$x\left(y, c_{\mp}\right) = 2\,\pi\,k \mp \arccos\left(\frac{1}{c e^{y^2} + 2\,y^2 + 2}\right)$$



5. $(y+3x/2)^2\,y' = 8(y+3)^2;$

найти частные решения следующих задач Коши:
$(x_0, y_0):$ 1] $(0,-4)$, 2] $(8,2)$, 3*] $(31/5, 16/5)$, 4*] $(4, -1-5^{1/4})$, 5*] $(4,-3)$, 6*] $(4,1)$, $*$] $(5,-2)$, $**$] $(3,-2)$

ОДЗ: $x \neq C$; $2x+3y=0$ – граница областей существования и единственности, совпадающая с асимптотами для вертикальных отрезков поля направлений: $y=-3x/2$ с $x<2$ и $x>2$, так как в точке $(2,-3)$ правая часть уравнения тоже обращается в нуль, а значит, поле направлений в ней не определено.

Замена $u=x-2$, $v=y+3$; $du=dx$, $dv=dy$; $x=u+2$, $y=v-3$ дает $(v+3u/2)^2\,v'=8v^2$ — однородное уравнение 2-го порядка.

После замены $v=zu$, $v'=uz'+z$; $z=vu^{-1}$ $(u \not\equiv 0)$ получаем $(zu+3u/2)^2(uz'+z)=8(zu)^2$ — уравнение с раздел. переменными, или $uz'+z=32z^2(2z+3)^{-2}$, или $-uz'=z(4z^2-20z+9)(2z+3)^{-2}$.

Разделяя переменные, получаем $-\dfrac{du}{u}=\dfrac{4z^2+12z+9}{z(2z-1)(2z-9)}dz$ и $z\equiv 0, 1/9, 1/2$ — потерянные решения. Тогда

$$\int\left(\frac{1}{z}-\frac{4}{2z-1}+\frac{4}{2z-9}\right)dz+\int\frac{du}{u}=C \text{ или } \ln\frac{z(2z-9)^2u}{C(2z-1)^2}=0.$$

Отсюда $z(2z-9)^2u=C(2z-1)^2$ и $z\equiv 1/2$ $(z=0,1/9$ при $C=0)$ или $v(2v-9u)^2=C(2v-u)^2$ и $2v-u=0$. Отметим, что эти функции симметричны относительно начала координат, так как они не меняются одновременной смену знака у C,u,v, а $Cv>0$.

Ответ: $(y+3)(2y-9x+24)^2=C(2y-x+8)^2$, $y=x/2-4$ $(x\neq 2)$.

Решение поставленных задач Коши.

Хотя решения задач Коши 1] – 4] не удастся разрешить ни относительно y ни относительно x, что теоретически возможно, для нахождения максимального интервала существования найдем возможные пересечения графика общего решения с границей $3x+2y=10$.

Подставляя для всякой C уравнение границы $y=5-3x/2$ в формулу общего решения, найдем уравнение для абсцисс точек соприкосновения границы с решением: $C(2-x/2)=(5(2-x/2))^5 \Leftrightarrow z^5-Cz/5=0$, где $z=10-5x/2$.

Следовательно, $z_*=0$ и при $C>0$ также $z_{1,2}=\pm(C/5)^{1/4}$. Отсюда $(x_*,y_*)=(4,-1)$, $(x_{1,2},y_{1,2})=(4-2z_{1,2}/5, -1+3z_{1,2}/5)$.

1] $(x_0, y_0) = (0, -4)$, тогда $C = -1/7 < 0 \Rightarrow$
$\underline{x + y - 3 = -7(y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (-\infty, 4)} \ni x_0$.
2] $(x_0, y_0) = (8, 2)$, тогда $C = -1/7 < 0 \Rightarrow$
$\underline{x + y - 3 = -7(y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (4, +\infty)} \ni x_0$.
$3^\star$] $(x_0, y_0) = (31/5, 16/5)$, тогда $C = 5$ и $z_{1,2} = \pm 1$.

Поэтому пересечение кривой $5(x + y - 3) = (y - x + 5)^5$ с границей происходит в точках: $(18/5, -2/5)$, $(4, 1)$, $(22/5, -8/5)$ и неявное решение однозначно разрешимо относительно y на интервалах $(-\infty, 22/5)$, $(4, 22/5)$, $(18/5, 4)$, $(18/5, +\infty)$, так как $y \to \mp\infty$ при $x \to \mp\infty$, как это происходит и с графиком решения $y = x - 5$, а начальное данное $(31/5, 16/5)$ и точка пересечения $(18/5, -2/5)$ лежат над прямой $y = x - 5$.

В результате $\underline{5(x + y - 3) = (y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (18/5, +\infty)} \ni x_0$.

$4^\star$] $(x_0, y_0) = (4, -1 - 5^{1/4})$. Все аналогично случаю $3^\star$], только начальное данное $(4, -1 - 5^{1/4})$ и точка пересечения $(18/5, -2/5)$ лежат под прямой $y = x - 5$.

Поэтому $\underline{5(x + y - 3) = (y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (18/5, +\infty)} \ni x_0$.

$5^\star$] $(x_0, y_0) = (4, -3)$, тогда $C = 16$ и $z_{1,2} = \pm 2/5^{1/4}$.

Поэтому пересечение кривой $16(x+y-3) = (y-x+5)^5$ с границей происходит в точках: $(4-4/5^{5/4}, -1+6/5^{5/4})$, $(4, 1)$, $(4+4/5^{5/4}, -1-6/5^{5/4})$ и неявное решение однозначно разрешимо относительно y на интервалах $(-\infty, 4 + 4/5^{5/4})$, $(4, 4 + 4/5^{5/4})$, $(4 - 4/5^{5/4}, 4)$, $(4 - 4/5^{5/4}, +\infty)$, так как $y \to \mp\infty$ при $x \to \mp\infty$, как это происходит и с графиком решения $y = x - 5$, а начальное данное $(4, -3)$ и точка пересечения $(4 + 4/5^{5/4}, -1 - 6/5^{5/4})$ лежат под прямой $y = x - 5$.

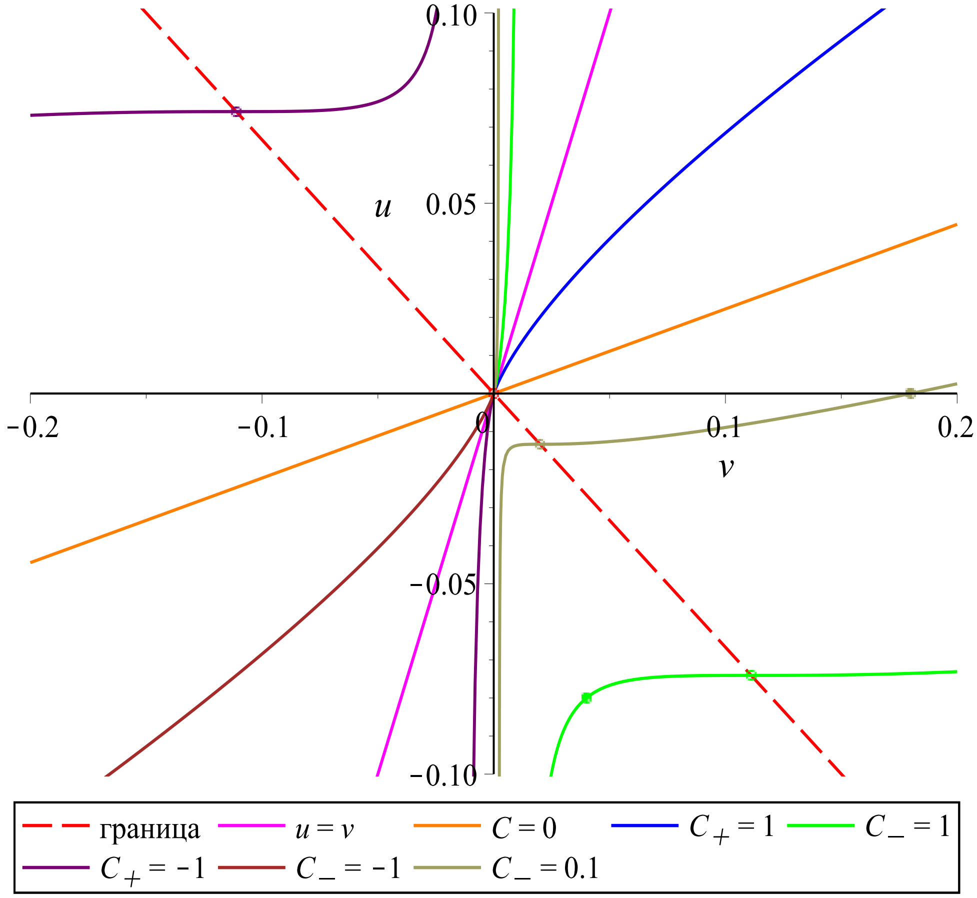
В итоге $\underline{16(x + y - 3) = (y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (-\infty, 4 + 4/5^{5/4})} \ni x_0$.

$6^\star$] $(x_0, y_0) = (4, 1)$. Все аналогично случаю $5^\star$], только начальное данное $(4, 1)$ и точка пересечения $(4 - 4/5^{5/4}, -1 + 6/5^{5/4})$ лежат над прямой $y = x - 5$.

Поэтому $\underline{16(x + y - 3) = (y - x + 5)^5}$, $\underline{x \in (4 - 4/5^{5/4}, +\infty)} \ni x_0$.

*] $(x_0, y_0) = (5, -2)$, тогда $y = -x + 3$, $x \in (4, +\infty)$;

**] $(x_0, y_0) = (3, -2)$, тогда $C = 0 \Rightarrow y = x - 5$, $x \in (-\infty, 4)$, так как в обоих случаях точка $(4, -1)$ принадлежит границе.



0.10
0.05
u
−0.2
−0.1
0
0.1
0.2
v
−0.05
−0.10
граница
u = v
C = 0
C₊ = 1
C₋ = 1
C₊ = −1
C₋ = −1
C₋ = 0.1

3) Решить обобщенно-однородное уравнение

---

7. $x^3y' = 2x\sqrt{y} - 4;\quad x_0 = -2,\quad \begin{matrix} a)\ y_0 = 9 \\ b)\ y_0 = 1 \end{matrix}$

ОДЗ: $x \not\equiv C,\ x \neq 0,\ y \geq 0,\ y \equiv 0$ – граница области.

Ищем m – порядок $y:\ 3 + m - 1 = 1 + m/2 = 0\ \Rightarrow\ m = -2$. Замена $y = z^{-2},\ \ z = y^{-1/2} > 0;\ \ y' = -2z^{-3}z';\ \ y = 0$ – не решение.

Получаем $x^3z' = 2z^3 - xz^2$ – однородное уравнение.

Замена $z = ux,\ \ u = zx^{-1};\ \ z' = xu' + u;\ \ u = 0$ – не решение.

Получаем $xu' + u = 2u^3 - u^2$ – уравнениеие с разд. переменными.

Имеем: $\dfrac{du}{2u^3 - u^2 - u} = \dfrac{dx}{x}$ и $\underline{u = -1/2}$, $\underline{u = 1}$ – потерянные решения.

Отсюда $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3(u-1)} + \frac{4}{3(2u+1)} - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{dx}{x} + C\ \Rightarrow$ $\ln \dfrac{x^3u^3C}{(u-1)(2u+1)^2} = 0 \Rightarrow (u-1)(2u+1)^2 = Cx^3u^3,$ причем $u = -1/2, 1$ при $C = 0$. Обратная замена $u = x^{-1}z = x^{-1}y^{-1/2}$.

Ответ: $(1 - xy^{1/2})(2 + xy^{1/2})^2 = Cx^3$.

З.К. $a)\ C = -14\ \Rightarrow\ (1 - xy^{1/2})(2 + xy^{1/2})^2 = -14x^3;$
$b)\ C = 0\ \Rightarrow\ xy^{1/2} = -2\ \Rightarrow\ y = 4x^{-2},\ \ x \in (-\infty, 0).$

5. $\left(\dfrac{x^2(1+y^3)^{2/3}\ln y}{(1+x^3)^{2/3}}+\dfrac{(1+y^3)^{1/3}}{x}\right)dx=$
$\left(\dfrac{y^2\ln x}{(1+y^3)^{2/3}}-\dfrac{((1+x^3)^{1/3}-1)(1+y^3)^{2/3}}{y}\right)dy;$
$(x_0,y_0):$ 1] $(7^{1/3},7^{1/3})$, 2] $(e^{1/2},1)$

ОДЗ: $x>0,\ y>0$. Дано уравнение в симметричной форме $Mdx+Ndy=0$ с $M=x^2(1+x^3)^{-2/3}(1+y^3)^{2/3}\ln y+x^{-1}(1+y^3)^{1/3}$, $N=((1+x^3)^{1/3}-1)(1+y^3)^{2/3}y^{-1}-y^2(1+y^3)^{-2/3}\ln x$.

$\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{2x^2y^2\ln y}{(1+x^3)^{2/3}(1+y^3)^{1/3}}+\dfrac{2y^2}{x(1+y^3)^{2/3}}\not\equiv 0$, поэтому это не есть уравнение в полных дифференциалах. Однако,

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{-M}=-\frac{2y^2}{1+y^3}\ \Rightarrow\ \frac{d\mu}{dy}=\frac{-2y^2}{1+y^3}\mu\ \Rightarrow\ \underline{\mu=\frac{1}{(1+y^3)^{2/3}}}.$$

$$\left(\frac{x^{-1}}{(1+y^3)^{1/3}}+\frac{x^2\ln y}{(1+x^3)^{2/3}}\right)dx=\left(\frac{y^2\ln x}{(1+y^3)^{4/3}}-\frac{(1+x^3)^{1/3}-1}{y}\right)dy$$

– уравнение в полных дифференциалах.

$\dfrac{\partial U}{\partial x}=\mu M\Rightarrow U(x,y)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{(1+y^3)^{1/3}x}+\frac{x^2\ln y}{(1+x^3)^{2/3}}\right)dx+C(y)=$ $(1+y^3)^{-1/3}\ln x+(1+x^3)^{1/3}\ln y+C(y);$

$\dfrac{\partial U}{\partial y}=\mu N\ \Rightarrow\ C'(y)=-y^{-1}\ \Rightarrow\ C(y)=-\ln y\ \Rightarrow$
$U(x,y)=(1+y^3)^{-1/3}\ln x+(1+x^3)^{1/3}\ln y-\ln y.$

Ответ: $\underline{\dfrac{\ln x}{(1+y^3)^{1/3}}+((1+x^3)^{1/3}-1)\ln y=C.}$

З.К. 1] $\dfrac{1}{3}\ln 7\cdot\dfrac{1}{2}+1\cdot\dfrac{1}{3}\ln 7=C\ \Rightarrow\ C=\dfrac{1}{2}\ln 7\ \Rightarrow$
$\ln x(1+y^3)^{-1/3}+((1+x^3)^{1/3}-1)\ln y=\ln 7^{1/2}.$

2] $C=2^{-4/3}\ \Rightarrow\ \ln x(1+y^3)^{-1/3}+((1+x^3)^{1/3}-1)\ln y=2^{-4/3}.$

Другой способ решения (выделение полных дифференциалов).

Исходное уравнение $\Leftrightarrow$ $(1+y^3)^{2/3}\ln y\,d((1+x^3)^{1/3}-1)+(1+y^3)^{1/3}\,d(\ln x)-\ln x\,d((1+y^3)^{1/3})+(1+y^3)^{2/3}((1+x^3)^{1/3}-1)\,d(\ln y)=0$ $\Leftrightarrow$ $(1+y^3)^{2/3}\,d(((1+x^3)^{1/3}-1)\ln y)+(1+y^3)^{2/3}\,d(\ln x/(1+y^3)^{1/3})=0$. Разделив теперь на интегрирующий множитель и проинтегрировав, получаем ответ.

$$\frac{\ln(x)}{\left(y^3+1\right)^{1/3}} + \left(\left(x^3+1\right)^{1/3} - 1\right)\ln(y) = C$$