Контрольная работа № 1.

$1_7)$ $4(x(4-e^x)^{1/2}(2+(4-e^x)^{1/2})^2-y^{1/2})y^{1/2}\,dx-(4-e^x)^{1/2}\,dy=0;$

$a)\ \begin{array}{l} x_0=\ln 3\\ y_0=9(e^{1/2}+6\ \ln(3/e))^2\end{array},\quad b)\ \begin{array}{l} x_0=\ln 3\\ y_0=81\ln^2(9/e)\end{array}$

$2_1)$ $(3x+2y-10)y'=2x+3y-5;\quad a)\ \begin{array}{l} x_0=5\\ y_0=-2\end{array},\quad b)\ \begin{array}{l} x_0=3\\ y_0=-2\end{array}$

$3_3)$ $(y-x^2)y'+10xy+6x^3=0;\quad \begin{array}{l} a)\ x_0=-\sqrt{3}/2,\ y_0=-1/4\\ b)\ x_0=-\sqrt{3}/2,\ y_0=15/4\\ c)\ x_0=-\sqrt{5}/2,\ y_0=-15/4.\end{array}$

$4_3)$ $xy'=(3x^2\cos y-\sin y)\cos y;\quad a)\ \begin{array}{l} x_0=-2\\ y_0=3\pi/4\end{array},\quad b)\ \begin{array}{l} x_0=-2\\ y_0=-3\pi/2\end{array}$

Контрольная работа № 1 (переписывание 1).

$1_1)$ $xy'+3y+(xy)^{3/2}\ln(2x)=0;$

$a)\ \begin{array}{l} x_0=(2e^2)^{-1}\\ y_0=2^7e^6/9\end{array},\quad b)\ \begin{array}{l} x_0=(2e^2)^{-1}\\ y_0=2^3e^6\end{array},\quad c)\ \begin{array}{l} x_0=2^{1/2}\\ y_0=2^{13/2}(9\ln^2 2-4)^{-2}\end{array}$

$2_6)$ $yy'=2-6x-7y;\quad a)\ \begin{array}{l} x_0=1/9\\ y_0=4/3\end{array},\quad b)\ \begin{array}{l} x_0=1/9\\ y_0=2/9\end{array}$

$3_6)$ $x^2(5y^{-1/2}+x)y'+8xy^{1/2}+4=0;\quad a)\ \begin{array}{l} x_0=2^{-5}\\ y_0=2^6\end{array},$

$b)\ \begin{array}{l} x_0=-2\\ y_0=121/4\end{array},\quad c)\ \begin{array}{l} x_0=-2\\ y_0=1/4\end{array},\quad d)\ \begin{array}{l} x_0=-2\\ y_0=1\end{array},\quad e)\ \begin{array}{l} x_0=-2\\ y_0=9/4\end{array}$

$4_4)$ $3x^{1/2}(2y-1)y^2\,dx+(8y-2-4x^{3/2}y^2)\,dy=0;$

$(x_0,y_0):\quad a)\ (2^{2/3},-1/2),\quad b)\ (1,(1+\sqrt{17})/8),\quad c)\ (2^{1/3},1/2),$
$d)\ (2^{2/3},1/8),\quad e)\ (1,1/3),\quad f)\ (2^{2/3},9/8)$

Контрольная работа № 1 (переписывание 2).

$1_6)$ $xy + (x^2-1)(xy^{1/2} - y') = 0;$ $a)$ $\begin{matrix} x_0 = -\sqrt{2} \\ y_0 = 1/9 \end{matrix}$, $b)$ $\begin{matrix} x_0 = \sqrt{3}/2 \\ y_0 = 1/16 \end{matrix}$,

$c)$ $\begin{matrix} x_0 = 2 \\ y_0 = (1-3^{-3/4})^2 \end{matrix}$, $d)$ $\begin{matrix} x_0 = -\sqrt{3}/2 \\ y_0 = ((3^{3/4}-1)/12)^2 \end{matrix}$

$2_3)$ $(5x - 7y + 1)\,dy + (x + y - 1)\,dx = 0$

$3_5)$ $y' = -\sqrt{x^{-1}y^3 - y^4} - y^2;$

$a)$ $\begin{matrix} x_0 = -1 \\ y_0 = -1/5 \end{matrix}$, $b)$ $\begin{matrix} x_0 = 1/3 \\ y_0 = 3/10 \end{matrix}$, $c)$ $\begin{matrix} x_0 = -1/3 \\ y_0 = -3/2 \end{matrix}$, $d)$ $\begin{matrix} x_0 = -2 \\ y_0 = (2^{3/2}-5)^{-1} \end{matrix}$

$4_7)$ $(x + 2\ln y + 3x^{-1}\ln y)y\,dx = (x+1)\,dy;$ $a)$ $\begin{matrix} x_0 = -2/3 \\ y_0 = e^{-2} \end{matrix}$,

$b)$ $\begin{matrix} x_0 = -2 \\ y_0 = e^{-4} \end{matrix}$, $c)$ $\begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{matrix}$, $d)$ $\begin{matrix} x_0 = -1/2 \\ y_0 = e^{-5/27} \end{matrix}$, $e)$ $\begin{matrix} x_0 = -1 \\ y_0 = 1/3 \end{matrix}$, $f)$ $\begin{matrix} x_0 = -2/3 \\ y_0 = e^{-2/3} \end{matrix}$

Контрольная работа № 1 (переписывание 3).

$1_3)$ $x\ln x\,dy + 3(y - x^2y^{5/3}\ln^4 x)\,dx = 0;$ $a)$ $\begin{matrix} x_0 = e^{1/2} \\ y_0 = 64e^{-9/4} \end{matrix}$,

$b)$ $\begin{matrix} x_0 = e^{-1/2} \\ y_0 = 8e^{3/2} \end{matrix}$, $c)$ $\begin{matrix} x_0 = e^{1/4} \\ y_0 = -8^3e^{-3/4} \end{matrix}$, $d)$ $\begin{matrix} x_0 = e^{-1/2} \\ y_0 = -8^{3/2}(2e^{-1} - 3e^{-2})^{-3/2} \end{matrix}$

1) Решить уравнение Бернулли

7. $4(x(4-e^x)^{1/2}(2+(4-e^x)^{1/2})^2 - y^{1/2})y^{1/2}\,dx - (4-e^x)^{1/2}\,dy = 0;$

$$x_0 = \ln 3,\quad \begin{array}{l} a)\ y_0 = 9(e^{1/2} + 6\ \ln(3e^{-1}))^2 \\ b)\ y_0 = 81\ \ln^2(9e^{-1}) \\ c)\ y_0 = 324\ \ln^2(3e^{-2/3}) \end{array}$$

ОДЗ: $y \ge 0,\ x \le \ln 4;\quad y \equiv 0$ – граница областей;
$\underline{x \equiv \ln 4}$ – это особое решение уравнения в симметричной форме.

После деления на dx и $\sqrt{4-e^x}$ получаем уравнение Бернулли
$y' + 4(4-e^x)^{-1/2}y - 4x(2+(4-e^x)^{1/2})^2 y^{1/2} = 0.$
При этом возможно теряются решения $x \equiv C$. Подставляя $x \equiv C$ в уравнение, находим только граничное решение $\underline{x \equiv \ln 4}$.

Замена $u = y^{1-\alpha},\ \alpha = 1/2\ \Rightarrow\ u = y^{1/2},\ u' = y^{-1/2}y'/2\ \ (y \ne 0)$,
Подставляя в уравнение, находим $\underline{y \equiv 0}$ – граничное решение.

После деления уравнения на y^α и замены получаем
$u' + 2(4-e^x)^{-1/2}u = 2x(2+(4-e^x)^{1/2})^2$ – линейное уравнение.

Найдем $u_{\text{оо}}(x)$ из уравнения $u^{-1}du = -2(4-e^x)^{-1/2}dx$. Имеем:

$$\int \frac{-2\,de^x}{e^x\sqrt{4-e^x}} = \int \frac{4\,dv}{4-v^2} = \int \left(\frac{1}{2+v} + \frac{1}{2-v}\right) dv = \ln\left|\frac{2+v}{2-v}\right|$$

при подстановке $v = \sqrt{4-e^x},\ e^x = 4-v^2,\ de^x = -2v\,dv.$

Поэтому $\ln\dfrac{u(2-\sqrt{4-e^x})}{C(2+\sqrt{4-e^x})} = 0$ и $u_{\text{оо}}(x) = C(2+\sqrt{4-e^x})^2 e^{-x}.$
Тогда $u_{\text{чн}}(x) = C(x)(2+\sqrt{4-e^x})^2 e^{-x},\ C' = 2xe^x,\ C(x) = 2(x-1)e^x$ и $u_{\text{чн}}(x) = 2(x-1)(2+\sqrt{4-e^x})^2.$

Следовательно $u_{\text{он}}(x) = (Ce^{-x} + 2x - 2)(2+\sqrt{4-e^x})^2.$

Ответ: $y^{1/2} = (Ce^{-x} + 2x - 2)(2+\sqrt{4-e^x})^2;$
$x \equiv \ln 4$ – особое решение, $y \equiv 0\ (x \ne \ln 4)$ – граничные решения.

1) Решение задачи Коши для уравнения 1),7.

З.К.

a) $3(e^{1/2}+6\ln(3/e))=(C/3+2\ln 3-2)3^2 \Rightarrow C=e^{1/2} \Rightarrow$
$y^{1/2}=(e^{1/2-x}+2x-2)(2+\sqrt{4-e^x})^2$ для тех значений $x\in(-\infty,\ln 4)$, при которых функция $h(x)=e^{1/2-x}+2x-2>0$, причем $h(1/2)=0$.

Но $h'(x)=-e^{1/2-x}+2$, $h''(x)=e^{1/2-x}>0 \Rightarrow h'(x_m)=0$, где $x_m=1/2-\ln 2$, и $x_m<1/2$ – точка минимума функции $h(x) \Rightarrow$
$\underline{y=(e^{1/2-x}+2x-2)^2(2+\sqrt{4-e^x})^4}$, $\underline{x\in(1/2,\ln 4)}$.

b) $9\ln(9/e)=(C/3+2\ln 3-2)3^2 \ \Rightarrow\ C=3 \ \Rightarrow$
$y^{1/2}=(3e^{-x}+2x-2)(2+\sqrt{4-e^x})^2$ для тех значений $x\in(-\infty,\ln 4)$, при которых функция $h(x)=3e^{-x}+2x-2>0$.

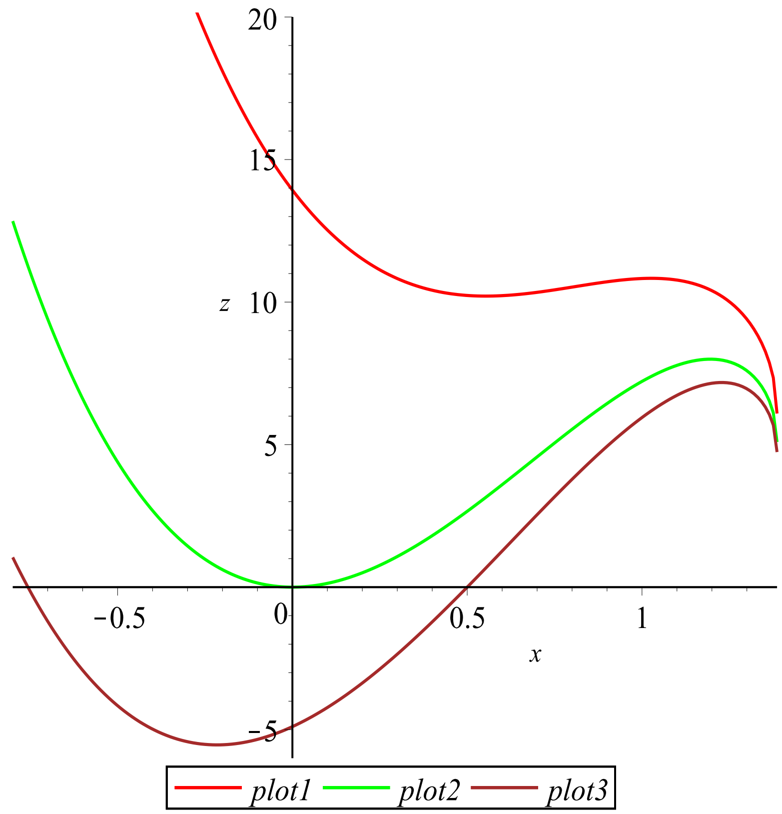
Но $h'(x)=-3e^{-x}+2$, $h''(x)=3e^{-x}>0 \Rightarrow h'(x_m)=0$, где $x_m=\ln 3/2$ – точка минимума $h(x)$, и $h(x_m)=2\ln(3/2)>0 \Rightarrow$
$\underline{y=(3e^{-x}+2x-2)^2(2+\sqrt{4-e^x})^4}$, $\underline{x\in(-\infty,\ln 4)}$.

c) $18\ln(3e^{-2/3})=(C/3+2\ln 3-2)3^2 \Rightarrow C=2 \ \Rightarrow$
$y^{1/2}=2(e^{-x}+x-1)(2+\sqrt{4-e^x})^2$ для тех значений $x\in(-\infty,\ln 4)$, при которых функция $h(x)=e^{-x}+x-1>0$, причем $h(0)=0$.

Но $h'(x)=-e^{-x}-1$, $h''(x)=e^{1/2-x}>0 \Rightarrow$
$x=0$ – точка минимума функции $h(x) \Rightarrow$
$\underline{y=4(e^{-x}+x-1)^2(2+\sqrt{4-e^x})^4}$, $\underline{x\in(0,\ln 4)}$.

```
> restart; with(plots):
> sqrt(y) = (C· exp(-x) + 2· x - 2)·(2 + sqrt(4 - exp(x)))^2;
  plot([(3·exp(-x) + 2· x - 2)·(2 + sqrt(4 - exp(x)))^2, (2· exp(-x) + 2· x - 2)·(2
     + sqrt(4 - exp(x)))^2, (exp(1/2 - x) + 2· x - 2)·(2 + sqrt(4 - exp(x)))^2], x=-.8
     ..ln(4), z=-6..20, color=[red, green, brown], legend=[plot1, plot2, plot3]);
```

$$\sqrt{y} = \left(C\,e^{-x} + 2\,x - 2\right)\left(2 + \sqrt{4 - e^{x}}\right)^{2}$$




```
>
```

2) Решить дробно-линейное уравнение

---

1. $(3x+2y-10)y' = 2x+3y-5;\quad \begin{matrix} a)\ x_0 = 5 \\ b)\ x_0 = 3 \end{matrix},\quad y_0 = -2$

ОДЗ: $x \neq C$; $3x+2y-10=0$ – граница областей $\exists$.

Замена $u = x-4,\ v = y+1;\ du = dx,\ dv = dy;\ x = u+4,\ y = v-1.$
$(3u+2v)v' = 2u+3v$ – однородное уравнение 1-го порядка.

Замена $v = zu,\ v' = uz' + z;\ z = vu^{-1}\quad u \equiv 0$ – не решение.

Получаем $(3u+2zu)(uz'+z) = 2u+3zu$ – ур-е с раздел. перем.
или $\dfrac{2z+3}{(1-z)(1+z)}dz = 2\dfrac{du}{u}$, $\underline{z = \pm 1}$ – потерянные решения
(замена $z = uv^{-1}$ дает такое же уравнение). Тогда

$$\int \left(\frac{1}{z+1} - \frac{5}{z-1}\right) dz = 4\int \frac{du}{u} + C \text{ или } \ln \frac{z+1}{(z-1)^5 u^4 C} = 0 \ \Rightarrow$$

$z+1 = C(z-1)^5 u^4,\quad z = 1;\quad z = vu^{-1} = (y+1)/(x-4).$

Ответ: $x+y-3 = C(y-x+5)^5,\quad y-x+5 = 0\ \ (x \neq 4)$

З.К. a) $C = 0\ \Rightarrow\ y = -x+3,\quad x \in (4, +\infty);$

b) $y = x-5,\quad x \in (-\infty, 4);$
так как в обоих случаях точка $(4,-1)$ принадлежит границе.

3) Решить обобщенно-однородное уравнение

3.	$(y-x^2)y' + 10xy + 6x^3 = 0;$	$a)\ x_0 = -\sqrt{3}/2,\ y_0 = -1/4;$ $b)\ x_0 = -\sqrt{3}/2,\ y_0 = 15/4;$ $c)\ x_0 = -\sqrt{5}/2,\ y_0 = -15/4.$

ОДЗ: $x \not\equiv C$; $y = x^2$ – граница областей $\exists$.

Ищем m – порядок y: $2+m-1 = m+m-1 = 1+m = 3 \Rightarrow m = 2$.

1) Замена $y = z^2 > 0$ ($y \equiv 0$ – не решен.), $y' = 2zz'$; $z = y^{1/2} > 0$.

Получаем $(z^2 - x^2)zz' + 5xz^2 + 3x^3 = 0$ – однородное уравнение.

Замена $z = ux$, $z' = xu' + u \neq 0$; $u = zx^{-1}$.

После деления на x^3 получаем уравнение с разд. переменными $x(u^2-1)uu' + u^4 + 4u^2 + 3 = 0$.

Замена $v = u^2 > 0$, тогда

$$2\,\frac{dx}{x} = \frac{(1-v)\,dv}{(v+3)(v+1)} = \left(\frac{1}{v+1} - \frac{2}{v+3}\right) dv \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{(v+3)^2x^2C}{(v+1)} = 0$$

$\Leftrightarrow\; (v+3)^2x^2 = C^{-1}(v+1)$.

Подставляя $v = yx^{-2}$ в найденное решение и умножая его на x^2, получаем общее решение $\underline{(y+3x^2)^2 = C^{-1}(y+x^2)}$ при $y > 0$.

2) Замена $y = -z^2 < 0$, $y' = -2zz'$; $z = (-y)^{1/2} > 0$.

Получаем $(z^2 + x^2)zz' - 5xz^2 + 3x^3 = 0$ – однородное уравнение.

После замены $z = ux$, получаем уравнение с разд. переменными $x(u^2+1)uu' + u^4 - 4u^2 + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{(u^2+1)u\,du}{(u^2-1)(u^2-3)} = -\dfrac{dx}{x}$ или $u^2 \equiv 1$, $u^2 \equiv 3$. Замена $v = u^2$, тогда $v \equiv 1, 3$ или

$$\left(\frac{2}{v-3} - \frac{1}{v-1}\right) dv = -2\frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{(v-3)^2x^2(-C)}{v-1} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$-C(v-3)^2x^2 = v - 1 \quad (v = 1$ при $C = 0)$.

Подставляя $v = -yx^{-2}$ в найденное решение и умножая его на x^2, получаем общее решение $\underline{y = -3x^2}$, $\underline{C(y+3x^2)^2 = y + x^2}$ при $y < 0$.

Ответ:

$y = -3x^2\ (x \neq 0)$, $\quad C(y+3x^2)^2 = y + x^2$.

Запишем классическое общее решение, заменив C на C^{-1}:

$y^2 - (C - 6x^2)y + 9x^4 - Cx^2 = 0 \;\Leftrightarrow$

$y_{1,2} = C/2 - 3x^2 \mp \sqrt{C^2/4 - 2Cx^2}$ при $C^2/4 - 2Cx^2 \geq 0$.

З.К. а) $(-1/4+9/4)^2 = C(-1/4+3/4) \;\Rightarrow\; C = 8 \;\Rightarrow\; y = y_1 \;\Rightarrow$

$\underline{y = 4 - 3x^2 - 4\sqrt{1-x^2}}$, $\underline{x \in (-1, 0)}$,

так как $|x| \leq 1$, а по ОДЗ $x^2 \neq 4 - 3x^2 - 4\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x \neq 0, \pm 1$.

б) $(15/4 + 9/4)^2 = C(15/4 + 3/4) \;\Rightarrow\; C = 8 \;\Rightarrow\; y = y_2 \;\Rightarrow$

$\underline{y = 4 - 3x^2 + 4\sqrt{1-x^2}}$, $\underline{x \in (-1, 1)}$,

так как $|x| \leq 1$, а по ОДЗ $x^2 \neq 4 - 3x^2 + 4\sqrt{1-x^2} \;\Leftrightarrow\; x \neq \pm 1$.

с) $\underline{y = -3x^2}$, $\underline{x \in (-\infty, 0)}$, так как $(0, 0)$ – граничная точка.

ДРУГОЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ 3),3.

Нестандартная замена: $y = ux^2,\ y' = u'x + 2ux,\ u = x^{-2}y$.

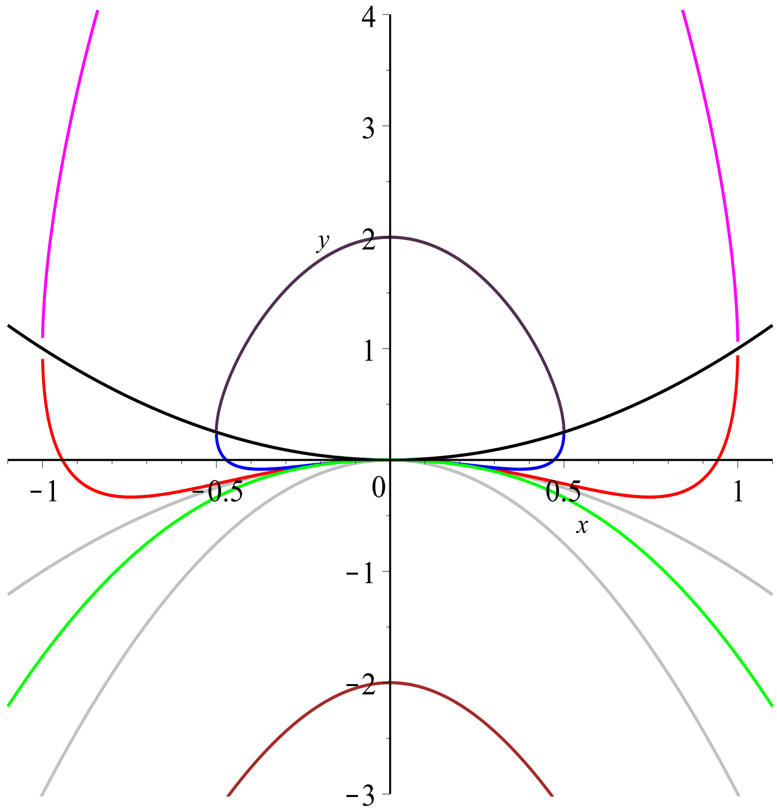
После деления на x^3 получаем уравнение с разд. переменными: $x(u-1)u' + 2(u^2+4u+3) = 0 \ \Leftrightarrow\ \underline{u = -1, -3}$ или $\dfrac{(u-1)du}{(u+3)(u+1)} + \dfrac{2dx}{x} = 0$. Отсюда $\ln\dfrac{(u+3)^2x^2C}{u+1} = 0$.

Поэтому $\underline{u = -3}$ или $C(u+3)^2x^2 = u+1$, а значит, $\underline{y = -3x}$, $(x \neq 0)$; $\underline{C(y+3x)^2 = y + x^2}$.

```
> restart; with(plots):
```

> # $y=\frac{c}{2}-3\cdot x^2+-\left(\frac{c^2}{4}-2\cdot c\cdot x^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $c=8, c=2, c=-2$; $y=-x^2$, $y=-3\cdot x^2$;

$plot([x^2, -x^2, -3\cdot x^2, 4-3\cdot x^2-4\cdot \mathrm{sqrt}(1-x^2), 4-3\cdot x^2+4\cdot \mathrm{sqrt}(1-x^2), 1-3\cdot x^2-\mathrm{sqrt}(1-4\cdot x^2), 1-3\cdot x^2+\mathrm{sqrt}(1-4\cdot x^2), -1-3\cdot x^2-\mathrm{sqrt}(1+4\cdot x^2), -1-3\cdot x^2+\mathrm{sqrt}(1+4\cdot x^2)], x=-1.1..1.1, y=-3..4, color=[black, grey, grey, red, magenta, blue, violet, brown, green]);$



3. $xy' = (3x^2\cos y - \sin y)\cos y;\quad x_0 = -2,\quad \begin{matrix} a)\ y_0 = 3\pi/4 \\ b)\ y_0 = -3\pi/2 \end{matrix}$

ОДЗ: $x \not\equiv C$; $x \equiv 0$ – граница областей $\exists$.

Запишем уравнение в симметричной форме: $M\,dx + N\,dy = 0$, тогда $M = 3x^2\cos^2 y - \sin y\cos y$, $N = -x$.

$\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = -6x^2\sin y\cos y + 2\sin^2 y \not\equiv 0$, поэтому это не есть уравнение в полных дифференциалах.

Но $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M} = 2\dfrac{\sin y}{\cos y} \;\Rightarrow\; \dfrac{d\mu}{dy} = 2\dfrac{\sin y}{\cos y}\,\mu \;\Rightarrow\; \mu = \dfrac{1}{\cos^2 y} \;\Rightarrow$

$(3x^2 - \operatorname{tg} y)\,dx - \dfrac{x\,dy}{\cos^2 y} = 0$ – уравнение в полных дифференциалах.

И при умножении на $\mu(y)$ потеряны решения $\underline{\cos y = 0}$.

Имеем: $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \mu M \;\Rightarrow\; U(x,y) = \displaystyle\int (3x^2 - \operatorname{tg} y)\,dx + C(y) =$
$x^3 - x\operatorname{tg} y + C(y)$;

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = \mu N \;\Rightarrow\; C'(y) = 0 \;\Rightarrow C(y) = 0 \;\Rightarrow U(x,y) = x^3 - x\operatorname{tg} y.$

Ответ: $y = \pi/2 + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}),\quad x^3 - x\operatorname{tg} y = C \quad (x \neq 0) \;\Leftrightarrow$ $x^2 - \operatorname{tg} y = Cx^{-1} \;\Leftrightarrow\; y = \operatorname{arctg}(x^2 - Cx^{-1}) + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$.

З.К. $a)\ (-2)^3 + 2\operatorname{tg}(3\pi/4) = C \;\Rightarrow\; C = -10$,
поэтому $y = \operatorname{arctg}(x^2 + 10x^{-1}) + \pi,\quad x \in (-\infty, 0)$;

$b)\ y = -3\pi/2,\quad x \in (-\infty, 0)$.

Переписывание 1   КР 1.

---

1) Решить уравнение Бернулли

---

1. $xy' + 3y + (xy)^{3/2}\ln(2x) = 0;$

$a)\ \begin{array}{l} x_0 = (2e^2)^{-1} \\ y_0 = 2^7e^6/9 \end{array},\quad b)\ \begin{array}{l} x_0 = (2e^2)^{-1} \\ y_0 = 2^3e^6 \end{array},\quad c)\ \begin{array}{l} x_0 = 2^{1/2} \\ y_0 = 2^{13/2}(9\ln^2 2 - 4)^{-2} \end{array}$

ОДЗ: $x \not\equiv C,\ x > 0,\ y \geq 0;\quad y \equiv 0$ – граница области $\exists$.

Имеем уравнение Бернулли.

Замена $u = y^{1-\alpha},\ \alpha = 3/2 \ \Rightarrow\ u = y^{-1/2}\ \ (y \neq 0),\ 2u' = -y^{-3/2}y'$. Подставляя в уравнение, заключаем, что $\underline{y \equiv 0}$ – гр. решение.

После деления уравнения на y^α и замены получаем $u' - 3(2x)^{-1}u = x^{1/2}\ln(2x)/2$ – линейное уравнение.

Находим $u_{\text{оо}} = Cx^{3/2};\ u_{\text{чн}} = C(x)x^{3/2},\ C' = (2x)^{-1}\ln(2x),\ C(x) = \ln^2(2x)/4 (= \ln\sqrt{2}\cdot\ln x + \ln^2\sqrt{x}) \Rightarrow u_{\text{он}} = Cx^{3/2} + x^{3/2}\ln^2(2x)/4.$

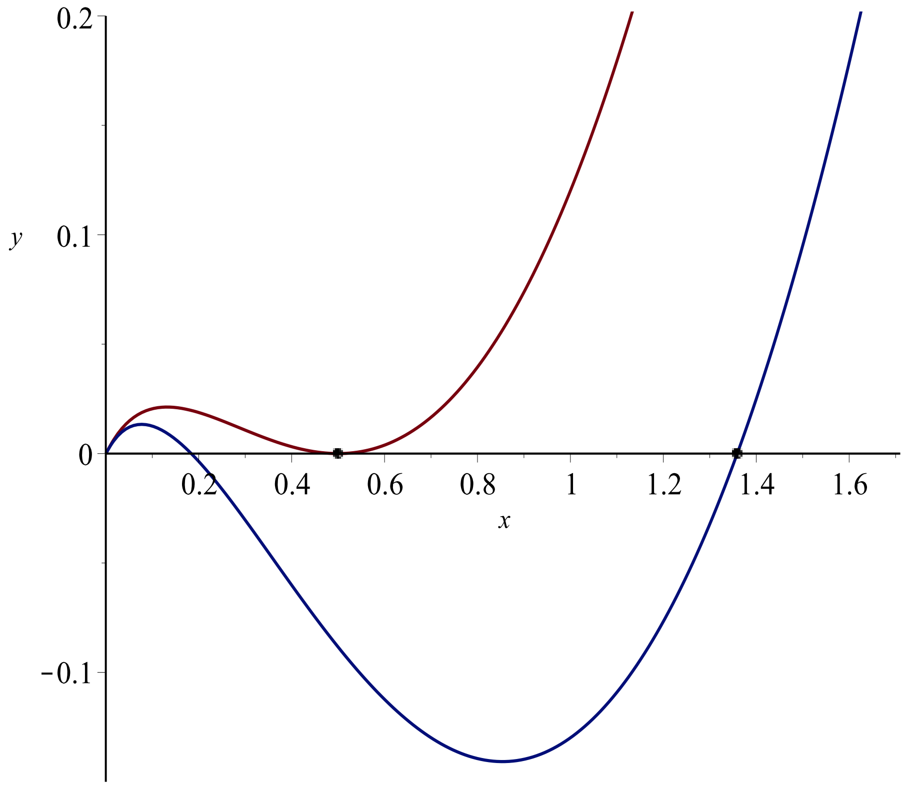
Ответ: $y^{-1/2} = x^{3/2}\left(\ln^2(2x)/4 - C\right),\quad y \equiv 0$ – граничное решение.

Классическое общее решение $\underline{y = x^{-3}\left(\ln^2(2x)/4 - C\right)^{-2}}$ при
$$\ln^2(2x)/4 > C \Leftrightarrow x \in \begin{cases} (0, e^{-2\sqrt{C}}/2) \cup (e^{2\sqrt{C}}/2, +\infty) \text{ для } C \geq 0 \\ (0, +\infty) \text{ для } C < 0 \end{cases}.$$

З.К. $a)\ 2^7 3^{-2}e^6 = 2^3e^6(1-C)^{-2}\ \Rightarrow\ C = 1/4\ \Rightarrow$
$\underline{y = 16x^{-3}(\ln^2(2x) - 1)^{-2}},\quad \underline{x \in (0, (2e)^{-1})}.$

$b)\ 2^3e^6 = 2^3e^6(1-C)^{-2}\ \Rightarrow\ C = 0\ \Rightarrow$
$\underline{y = 16x^{-3}\ln^{-4}(2x)},\quad \underline{x \in (0, 1/2)}.$

$c)\ 2^{-13/4}(9\ln^2 2 - 4) = 2^{3/4}((1/4)\ln^2 2^{3/2} - C)\ \Rightarrow\ C = 1/4\ \Rightarrow$
$\underline{y = 16x^{-3}(\ln^2(2x) - 1)^{-2}},\quad \underline{x \in (e/2, +\infty)}.$



> # $y^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\ln^2(2x)}{4} - c\right) > 0$: $c = 0$ *коричневый*, $c = \frac{1}{4}$ *синий.*

2) Решить дробно-линейное уравнение

---

6. $yy' = 2 - 6x - 7y;\quad x_0 = 1/9,\quad \begin{matrix} a)\ y_0 = 4/3 \\ b)\ y_0 = 2/9 \end{matrix}$

ОДЗ: $x \not\equiv C,\ \ y \equiv 0$ – граница области.

Точка пересечения прямых $(1/3, 0)$.

Замена $u = x - 1/3;\quad x = u + 1/3.$

$ydy + (7y + 6u)du = 0$ – однородное уравнение 1-го порядка.

Замена $z = yu^{-1},\ y = zu;\ dy = udz + zdu;\quad u = 0$ – не решение.

$zu(udz + zdu) + (7zu + 6u)du = 0$ – ур-ие с раздел. перем. Имеем:

$$\frac{z}{(z+1)(z+6)}dz = -\frac{du}{u},\ \ \underline{z = -1},\ \underline{z = -6}$$ – потерянные решения;

$$\int\left(\frac{6}{z+6} - \frac{1}{z+1}\right)dz = C - 5\int\frac{du}{u}\ \text{ или }\ \ln\frac{(z+6)^6u^5}{(z+1)C} = 0\ \Rightarrow$$

$(z+6)^6 = C(z+1)u^{-5},\quad z = -1;\quad z = yu^{-1},\ u = x - 1/3.$

Ответ: $(y + 6x - 2)^6 = C(3y + 3x - 1),\quad 3y + 3x = 1$

З.К. a) $C = 0\ \Rightarrow\ y = -6x + 2,\quad x \in (-\infty, 1/3).$

b) $y = -x + 1/3,\quad x \in (-\infty, 1/3)\qquad (y = 0$ – граница области$).$

Замечание. Если замена $z = uy^{-1},\ u = zy;\ y = 0$ – не решение,

то $$\frac{6z+7}{(6z+1)(z+1)}dz = -\frac{dy}{y},\ \ \underline{z = -1},\ \underline{z = -1/6}$$ – потер. решения,

$$\int\left(\frac{36}{6z+1} - \frac{1}{z+1}\right)dz = C - 5\int\frac{dy}{y}\ \text{ или }\ \ln\frac{(6z+1)^6y^5}{(z+1)C} = 0\ \Rightarrow$$

$(6z+1)^6 = C(z+1)y^{-5},\quad z = -1,\quad z = u/y,\ u = x - 1/3.$ И т. д.

3) Решить обобщенно-однородное уравнение

6. $x^2(5y^{-1/2}+x)y'+8xy^{1/2}+4=0;$ $\quad a)\ \begin{matrix} x_0=2^{-5} \\ y_0=2^6 \end{matrix}$,

$b)\ \begin{matrix} x_0=-2 \\ y_0=121/4 \end{matrix}$, $c)\ \begin{matrix} x_0=-2 \\ y_0=1/4 \end{matrix}$, $d)\ \begin{matrix} x_0=-2 \\ y_0=1 \end{matrix}$, $e)\ \begin{matrix} x_0=-2 \\ y_0=9/4 \end{matrix}$

ОДЗ: $y>0,\ x\not\equiv C;\ x\equiv 0,\ 5y^{-1/2}+x=0$ – границы областей $\exists$.

Ищем m – порядок переменной y:

$2-m/2+m-1=2+1+m-1=1+m/2=0\ \Rightarrow\ m=-2.$

Замена $\ y=z^{-2},\ \ z=y^{-1/2}>0;\ \ y'=-2z^{-3}z'.$

Получаем $\ x^2(5z+x)z'-4xz^2-2z^3$ – однородное уравнение.

Замена $z=ux,\ \ u=zx^{-1}\neq 0;\ \ z'=xu'+u.$

Получаем $\ x^2(5xu+x)(u'x+u)-4x^3u^2-2x^3u^3\ \Leftrightarrow$
$x(5u+1)u'=2u^3-u^2-u$ – уравнение с разд. переменными $\Leftrightarrow$
$\dfrac{(5u+1)\,du}{(u-1)(2u+1)u}=\dfrac{dx}{x}$ и $\underline{u\equiv 1}$, $\underline{u\equiv -1/2}$ – это потерянные при делении решения $(u\neq 0)$. Имеем:

$$\int\left(\frac{2}{u-1}-\frac{2}{2u+1}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x}+C\ \ \Leftrightarrow\ \ \ln\frac{(u-1)^2}{(2u+1)uxC}=0$$

$\Rightarrow (u-1)^2=Cx(2u+1)u\ \ (u\equiv 1$ при $C=0);\ \ u=z/x=1/(xy^{1/2}).$

Ответ: $\ xy^{1/2}=-2,\ \ (1-xy^{1/2})^2=Cx(2+xy^{1/2}).$

Найдем классическое общее решение $y=\varphi(x,c)$ уравнения 3_6).

Имеем $(1-xy^{1/2})^2=2cx(2+xy^{1/2})\ \ (c=C/2,\ x\neq 0,\ y>0)\ \Leftrightarrow$
$(y^{1/2})^2-2(c+x^{-1})y^{1/2}-4cx^{-1}+x^{-2}=0\ \Leftrightarrow$
$\underline{y^{1/2}_{1,2}=c+x^{-1}\mp\sqrt{c^2+6cx^{-1}}}$, и по ОДЗ $\ y^{1/2}\neq -5x^{-1}$ при $x<0$.

0) Если $c=0$, то $y^{1/2}=x^{-1}$ или $y=x^{-2},\ \ x\in(0,+\infty)$.

Пусть $c\neq 0$. Рассмотрим дискриминант $D=c^2x^{-1}(x+6c^{-1})$.

$D=0$ при $c=-6x^{-1}$, тогда $y^{1/2}_{1,2}=-5x^{-1}$ – противоречит ОДЗ.

$$D>0\ \Leftrightarrow\ x\in\begin{cases}(-\infty,-6c^{-1})\cup(0,+\infty) \text{ для } c>0\\ (-\infty,0)\cup(-6c^{-1},+\infty) \text{ для } c<0\end{cases}.$$

1) $y^{1/2}_1>0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{c^2+6cx^{-1}}<c+x^{-1}.$

Если п. ч. ≤ 0, то это неравенство решений не имеет.

$$\text{П. ч.}>0\ \Leftrightarrow\ x\in\begin{cases}(-\infty,-c^{-1})\cup(0,+\infty) \text{ для } c>0\\ (0,-c^{-1}) \text{ для } c<0\end{cases}.$$

Тогда это неравенство $\Leftrightarrow 4cx<1\Leftrightarrow x\in\begin{cases}(-\infty,(4c)^{-1}) \text{ для } c>0\\ ((4c)^{-1},+\infty) \text{ для } c<0\end{cases}$.

2) $y^{1/2}_2>0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{c^2+6cx^{-1}}>-c-x^{-1}.$

Если п. ч. ≥ 0, то это неравенство решений не имеет.

П. ч. $<0\ \ \Leftrightarrow\ \ x\in\begin{cases}(-c^{-1},0) \text{ для } c>0\\ (-\infty,0)\cup(-c^{-1},+\infty) \text{ для } c<0\end{cases}$. Тогда это неравенство $\Leftrightarrow 4cx>1\Leftrightarrow x\in\begin{cases}((4c)^{-1},+\infty) \text{ для } c>0\\ (-\infty,(4c)^{-1}) \text{ для } c<0\end{cases}$.

Произведя все необходимые пересечения интервалов, получаем:

0) $\underline{y = x^{-2}}$, $x \in (0, +\infty)$;

1) $\underline{y = (c + x^{-1} - \sqrt{c^2 + 6cx^{-1}})^2}$,
$x \in \{(-\infty, -6c^{-1}) \cup (0, (4c)^{-1})$ для $c > 0$, $\varnothing$ для $c < 0\}$;

2) $\underline{y = (c + x^{-1} + \sqrt{c^2 + 6cx^{-1}})^2}$,
$x \in \{\varnothing$ для $c > 0$, $(-\infty, (4c)^{-1})$ для $c < 0\}$;

3) $\underline{y = 4x^{-2}}$, $x \in (-\infty, 0)$.

З.К. a) $c = 4 \Rightarrow y = (x^{-1} + 4 - 2\sqrt{4 + 6x^{-1}})^2$, $x \in (0, 2^{-4})$;
b) $c = 4 \Rightarrow y = (x^{-1} + 4 + 2\sqrt{4 + 6x^{-1}})^2$, $x \in (-\infty, -3/2)$;
c) $c = -1 \Rightarrow y = (x^{-1} - 1 + \sqrt{1 - 6x^{-1}})^2$, $x \in (-\infty, -1/4)$;
d) $y = 4x^{-2}$, $x \in (-\infty, 0)$;
e) $c = 4 \Rightarrow y = (x^{-1} + 4 - 2\sqrt{4 + 6x^{-1}})^2$, $x \in (-\infty, -3/2)$.

Только в b) и e) интегральные кривые соприкасаются с границей $y^{1/2} = -5x^{-1}$ в точке $(-3/2, 100/9)$, имея в ней верт. касательные.

- -

Приведем решения задачи Коши в виде $x = h(y^{1/2})$.

При $c = 4$ имеем: $(1 - xy^{1/2})^2 = 8x(2 + xy^{1/2}) \Leftrightarrow (y - 8y^{1/2})x^2 - 2(y^{1/2} + 8)x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2}(y) = \dfrac{y^{1/2} + 8 \mp 2(6y^{1/2} + 16)^{1/2}}{y - 8y^{1/2}}$.

e_x) Решение $x_1(y)$ не удовлетворяет начальным данным $-2, 9/4$. По ОДЗ $x_2(y) \neq -5y^{-1/2} \Leftrightarrow 16 - 3y^{1/2} \neq (6y^{1/2} + 16)^{1/2} = a > 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 48 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 6 \Leftrightarrow y \neq 100/9$. Следовательно,

$\underline{x = (y^{1/2} + 8 + 2(6y^{1/2} + 16)^{1/2})(y - 8y^{1/2})^{-1}}$, $y \in (0, 100/9)$.

b_x) Проходят все рассуждения из e_x), но в ответе то же решение определено при $y \in (100/9, 64)$ ($y \equiv 64$ – горизонт. асимптота).

a_x) $\underline{x = (y^{1/2} + 8 - 2(6y^{1/2} + 16)^{1/2})(y - 8y^{1/2})^{-1}}$, $y \in (0, +\infty)$, при этом $(y^{1/2} + 8 - 2(6y^{1/2} + 16)^{1/2})(y - 8y^{1/2})^{-1} \to 1/32$ при $y \to 64$.

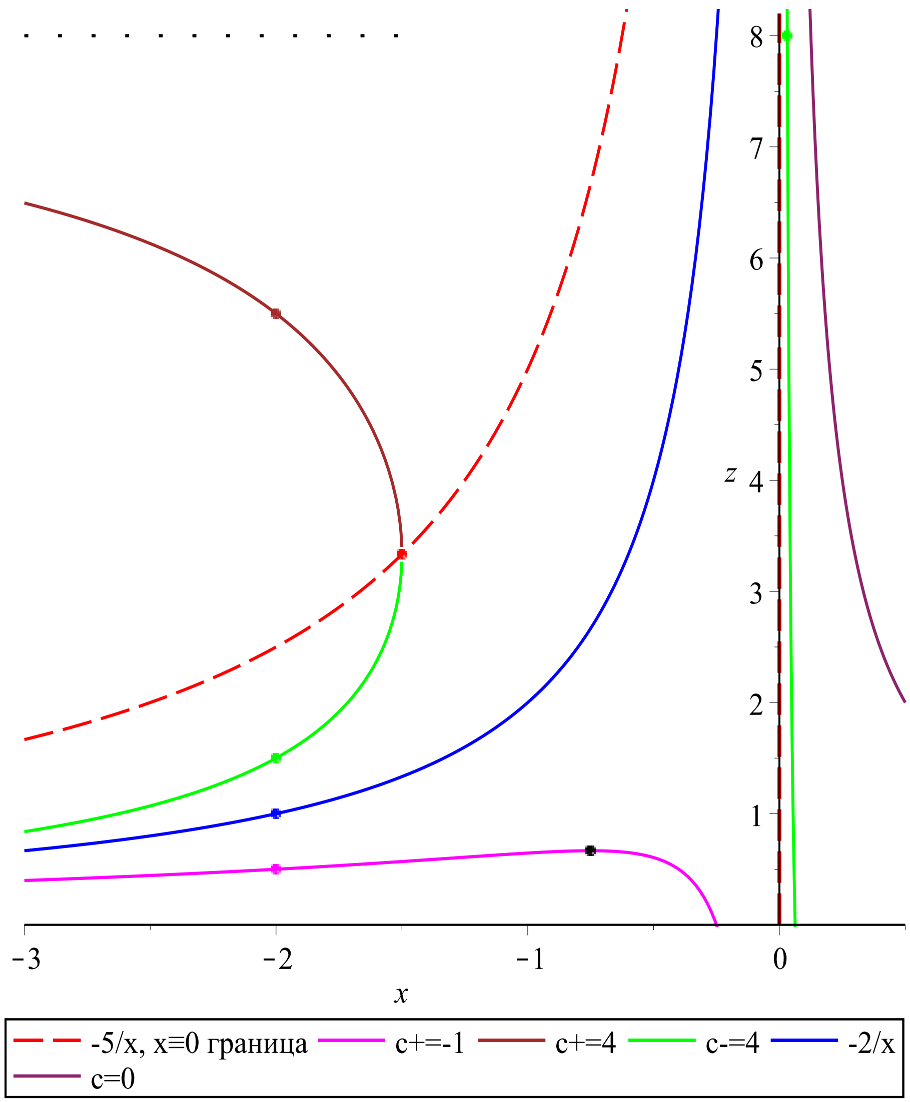
Теперь приведем два оставшихся решения.

c_x) $(1 - xy^{1/2})^2 = -2x(2 + xy^{1/2}) \Leftrightarrow (y + 2y^{1/2})x^2 - 2(y^{1/2} - 2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2}(y) = \dfrac{y^{1/2} - 2 \mp (4 - 6y^{1/2})^{1/2}}{y + 2y^{1/2}} < 0$ при $0 < y \leq 4/9$. При этом $x_{1,2}(4/9) = -3/4$ и $x'_{1,2}(4/9) = \infty$.

Решение $x_2(y)$ не удовлетворяет начальным данным $-2, 1/4$. И по ОДЗ $x_1(y) \neq -5y^{-1/2} \Leftrightarrow 6y^{1/2} + 8 \neq (4 - 6y^{1/2})^{1/2} = a > 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 12 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3 \Leftrightarrow y \neq 25/36 > 4/9$. Следовательно,

$\underline{x = (y^{1/2} - 2 - (4 - 6y^{1/2})^{1/2})(y + 2y^{1/2})^{-1}}$, $y \in (0, 4/9)$.

d_x) $\underline{x = -2y^{-1/2}}$, $y \in (0, +\infty)$.



> # $z=y^{\frac{1}{2}}$; $z(x, c\mp) = c + \frac{1}{x} \mp \left(c^2 + \frac{6\cdot c}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. $3x^{1/2}(2y-1)y^2\,dx+(8y-2-4x^{3/2}y^2)\,dy=0$;

(x_0,y_0) : $a)$ $(2^{2/3},-1/2)$, $b)$ $(1,(1+\sqrt{17})/8)$, $c)$ $(2^{1/3},1/2)$, $d)$ $(2^{2/3},1/8)$, $e)$ $(1,1/3)$, $f)$ $(2^{2/3},9/8)$, $g)$ $((82/45)^{2/3},5/8)$

ОДЗ: $x\geq 0$; $x\equiv 0$ — граница области $\exists$; $(0,1/4)$, $(2^{2/3},1/2)$ – особые точки; $8y-2-4x^{3/2}y^2=0$ – изоклина для вертикальных отрезков поля направлений.

$\partial M/\partial y-\partial N/\partial x=6x^{1/2}(4y-1)y\not\equiv 0$, поэтому это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Но $\dfrac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{-M}=-2\,\dfrac{4y-1}{(2y-1)y}\ \Rightarrow\ \dfrac{d\mu}{dy}=-2\,\dfrac{4y-1}{(2y-1)y}\,\mu$, откуда $\mu=(2y-1)^{-2}y^{-2}$.

Умножая исходное уравнение на μ, получаем уравнение в полных дифференциалах $\dfrac{3x^{1/2}}{2y-1}\,dx+\left(\dfrac{8y-2}{(2y-1)^2y^2}-\dfrac{4x^{3/2}}{(2y-1)^2)}\right)dy=0$.

Но при умножении теряются два решения $\underline{y\equiv 1/2}$ и $\underline{y\equiv 0}$.

Имеем: $\dfrac{\partial U}{\partial x}=\mu M\ \Rightarrow\ U(x,y)=3\displaystyle\int x^{1/2}(2y-1)^{-1}\,dx+C(y)=$ $2x^{3/2}(2y-1)^{-1}+C(y)$;

$\dfrac{\partial U}{\partial y}=\mu N\ \Rightarrow\ C'(y)=\dfrac{8y-2}{(2y-1)^2y^2}\ \Rightarrow\ C(y)=2y^{-1}-4(2y-1)^{-1}$.

В результате $U(x,y)=2x^{3/2}(2y-1)^{-1}+2y^{-1}-4(2y-1)^{-1}=$ $2x^{3/2}(2y-1)^{-1}-2(y(2y-1))^{-1}$.

Ответ: $y\equiv 0$, $y\equiv 1/2$,

$\dfrac{x^{3/2}}{2y-1}-\dfrac{1}{y(2y-1)}=C$ или $x^{3/2}y-1=Cy(2y-1)$.

Классические общие решения:

$y_{1,2}(x,C)=\dfrac{x^{3/2}+C\mp((x^{3/2}+C)^2-8C)^{1/2}}{4C}$ при $(x^{3/2}+C)^2\geq 8C$,

$y=x^{-3/2}$ $(C=0)$;

$x=(C(2y-1)+y^{-1})^{2/3}$ при $C(2y-1)+y^{-1}>0$.

З.К. $a)$ $y_{1,2}(2^{2/3},-2)=(0\mp 4)/(-8)\ \Rightarrow\ y=y_2(x,-2)\Leftrightarrow$

$\underline{y=(x^{3/2}-2+((x^{3/2}-2)^2+16)^{1/2})/(-8)}$, $\underline{x\in(0,+\infty)}$.

$b)$ $y_{1,2}(1,-2)=(-1\mp\sqrt{17})/(-8)\ \Rightarrow\ y=y_1(x,-2)\Leftrightarrow$

$\underline{y=(x^{3/2}-2-((x^{3/2}-2)^2+16)^{1/2})/(-8)}$, $\underline{x\in(0,2^{2/3})}\ni 1$,

так как $y(2^{2/3})=1/2$, а $(2^{2/3},1/2)$ – особая точка.

c) $\underline{y\equiv 1/2}$, $\underline{x\in(0,2^{2/3})}\ni 2^{1/3}$,

так как график решения при $x=2^{2/3}$ попадает в особую точку.

d) $y_{1,2}(2^{2/3},8)=(10\mp 6)/32 \;\Rightarrow\; y=y_1(x,8)\Leftrightarrow$
$\underline{y=(x^{3/2}+8-((x^{3/2}+8)^2-64)^{1/2})/32}$, $\underline{x\in(0,+\infty)}$.

Здесь $y_{1,2}(x,8)=(x^{3/2}+8\mp(x^3+16x^{3/2})^{1/2})/32$, следовательно $y_1(0,8)=y_2(0,8)=1/2$, т. е. графики обоих решений попадают на границу области в особую точку $(0,1/2)$.

e) $y_{1,2}(1,6)=(7\mp 1)/24 \;\Rightarrow\; y=y_2(x,6)\Leftrightarrow$
$\underline{y=(x^{3/2}+6+((x^{3/2}+6)^2-48)^{1/2})/24}$, $\underline{x\in((4\sqrt{3}-6)^{2/3},2^{2/3})}\ni 1$, так как график решения при $x=2^{2/3}$ попадает в особую точку, причем $y_{1,2}((4\sqrt{3}-6)^{2/3},6)=\sqrt{3}/6$ и $y'_{1,2}(x,6)=\infty$ при $x=(4\sqrt{3}-6)^{2/3}$, т. е. график решения соприкасается с изоклиной для вертикальных отрезков поля в точке $((4\sqrt{3}-6)^{2/3},\sqrt{3}/6)$.

f), *g*) $y_{1,2}(x,8/9)=(x^{3/2}+8/9\mp((x^{3/2}+8/9)^2-64/9)^{1/2})/(32/9)$, поэтому $y_{1,2}((8/3)6^{-1/3},8/9)=3/4$ и $y'_{1,2}(x,8/9)=\infty$ при $x=(8/3)6^{-1/3}$, т. е. графики решений соприкасаются с изоклиной для вертикальных отрезков поля направлений в точке $((8/3)6^{-1/3},3/4)$.

f) $y_{1,2}(2^{2/3},8/9)=(26\mp 10)/32 \;\Rightarrow\; y=y_2(x,8/9)\Leftrightarrow$
$\underline{y=(x^{3/2}+8/9+((x^{3/2}+8/9)^2-64/9)^{1/2})/(32/9)}$,
$\underline{x\in((8/3)6^{-1/3},+\infty)}\ni 2^{2/3}$.

g) $y_{1,2}((82/45)^{2/3},8/9)=(122/5\mp(22/5))/32 \;\Rightarrow\; y=y_1(x,8/9)\Leftrightarrow$
$\underline{y=(x^{3/2}+8/9+((x^{3/2}+8/9)^2-64/9)^{1/2})/(32/9)}$,
$\underline{x\in((8/3)6^{-1/3},2^{2/3})}\ni(82/45)^{2/3}$,
так как график решения при $x=2^{2/3}$ попадает в особую точку.

4) Продолжение 2 решения задачи Коши для уравнения 4_4).

Решения задачи Коши относительно x.

Общее решение $x^{3/2} = C(2y-1) + y^{-1}$.

a) $(2^{2/3}, -1/2)$. $C = -2 \Rightarrow x^{3/2} = -2(2y-1) + y^{-1} > 0 \Leftrightarrow$ $y \in (-\infty, (1-\sqrt{5})/4) \cup (0, (1+\sqrt{5})/4)$. Следовательно

$x = (-2(2y-1) + y^{-1})^{2/3}, \quad y \in (-\infty, (1-\sqrt{5})/4) \ni -1.$

b) $(1, (1+\sqrt{17})/8)$. $C = -2 \Rightarrow y \in (0, (1+\sqrt{5})/4) \ni y_0$.

Но $x = 2^{2/3}$ при $y = 1/2$, а значит, график решения попадает в эту особую точку. Следовательно

$x = (-2(2y-1) + y^{-1})^{2/3}, \quad y \in (1/2, (1+\sqrt{5})/4) \ni (1+\sqrt{17})/8.$

d) $(2^{2/3}, 1/8)$. $C = 8 \Rightarrow x^{3/2} = 8(2y-1) + y^{-1} > 0 \Leftrightarrow$ $y \in (0, 1/4) \cup ((1/4, +\infty)$ и $(0, 1/4)$ – граничная точка. Поэтому

$x = (8(2y-1) + y^{-1})^{2/3}, \quad y \in (0, 1/4) \ni 1/8.$

e) $(1, 1/3)$. $C = 6 \Rightarrow x^{3/2} = 6(2y-1) + y^{-1} > 0 \Leftrightarrow y > 0$.

Но $x = 2^{2/3}$ при $y = 1/2$, а значит, график решения попадает в эту особую точку. Следовательно

$x = (6(2y-1) + y^{-1})^{2/3}, \quad y \in (0, 1/2) \ni 1/3.$

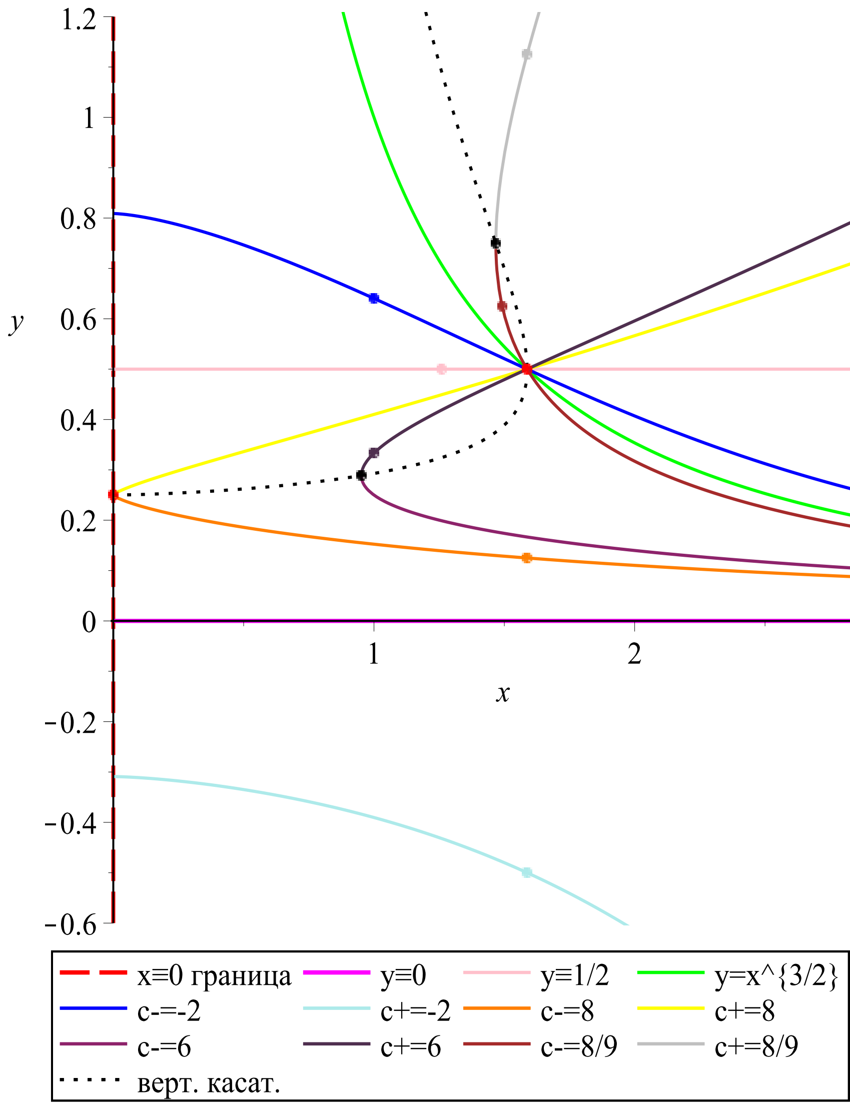
f) $(2^{2/3}, 9/8)$. $C = 8/9 \Rightarrow x^{3/2} = 8(2y-1)/9 + y^{-1} > 0 \Leftrightarrow y > 0$.

Но $x = 2^{2/3}$ при $y = 1/2$, а значит, график решения попадает в эту особую точку. Следовательно

$x = (8(2y-1)/9 + y^{-1})^{2/3}, \quad y \in (1/2, +\infty) \ni 9/8.$

g) $((82/45)^{2/3}, 5/8)$. Эта точка принадлежит графику решения задачи Коши из f).

З а м е ч а н и е. Уравнение является также уравнением Бернулли.



$$> \quad \# \quad y(x,c\mp)=\frac{x^{\frac{3}{2}}+c\mp \mathrm{sqrt}\left(\left(\left(x^{\frac{3}{2}}+c\right)^{2}-8\,c\right)\right)}{4\,c}.$$

Переписывание 2   КР 1.

---

1) Решить уравнение Бернулли

---

6. $xy + (x^2-1)(xy^{1/2} - y') = 0;$ $a)$ $\begin{matrix} x_0 = -\sqrt{2} \\ y_0 = 1/9 \end{matrix}$, $b)$ $\begin{matrix} x_0 = \sqrt{3}/2 \\ y_0 = 1/16 \end{matrix}$,
$c)$ $\begin{matrix} x_0 = 2 \\ y_0 = (1-3^{-3/4})^2 \end{matrix}$, $d)$ $\begin{matrix} x_0 = -\sqrt{3}/2 \\ y_0 = ((3^{3/4}-1)/12)^2 \end{matrix}$

ОДЗ: $x \not\equiv C$, $y \geq 0$; $x \equiv -1, 1$, $y \equiv 0$ – границы областей $\exists$.

Имеем уравнение Бернулли $(x^2-1)y' - xy - x(x^2-1)y^{1/2} = 0$.

Замена $u = y^{1-\alpha}$, $\alpha = 1/2 \Rightarrow u = y^{1/2}$, $2u' = y^{-1/2}y'$ $(y \neq 0)$. Подставляя в уравнение, заключаем, что $\underline{y \equiv 0}$ – гр. решение.

После деления уравнения на y^α и замены получаем $2(x^2-1)u' - xu = x(x^2-1)$ – линейное уравнение.

Находим $u_{\text{оо}} = C|x^2-1|^{1/4}$; $u_{\text{чн}} = C(x)(x^2-1)^{1/4}$ для $|x| > 1$, тогда $C' = x(x^2-1)^{1/4}/2$, $C(x) = (x^2-1)^{3/4}/3 \Rightarrow u_{\text{чн}} = (x^2-1)/3$.

Подставляя эту функцию в ЛНУ, убеждаемся, что она является решением для всех допустимых значений переменной x.

Следовательно, $u_{\text{он}} = C|x^2-1|^{1/4} + (x^2-1)/3$.

Ответ: $y^{1/2} = C|x^2-1|^{1/4} + \dfrac{x^2-1}{3}$; $y \equiv 0$ – граничное решение.

Выпишем классической общее решение.

При $|x| > 1:$ $C(x^2-1)^{1/4} + (x^2-1)/3 > 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^{3/4} > -3C$.
При $|x| < 1:$ $C(1-x^2)^{1/4} - (1-x^2)/3 > 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^{3/4} < 3C$.

Кроме того, при любой константе C, если $x = \pm 1$, то $y = 0$.

Поэтому: 1) $y = (C(x^2-1)^{1/4} + (x^2-1)/3)^2$,
$|x| \in \{(1, +\infty)$ при $C \geq 0$, $(\sqrt{1 + (-3C)^{4/3}}, +\infty)$ при $C < 0\}$;

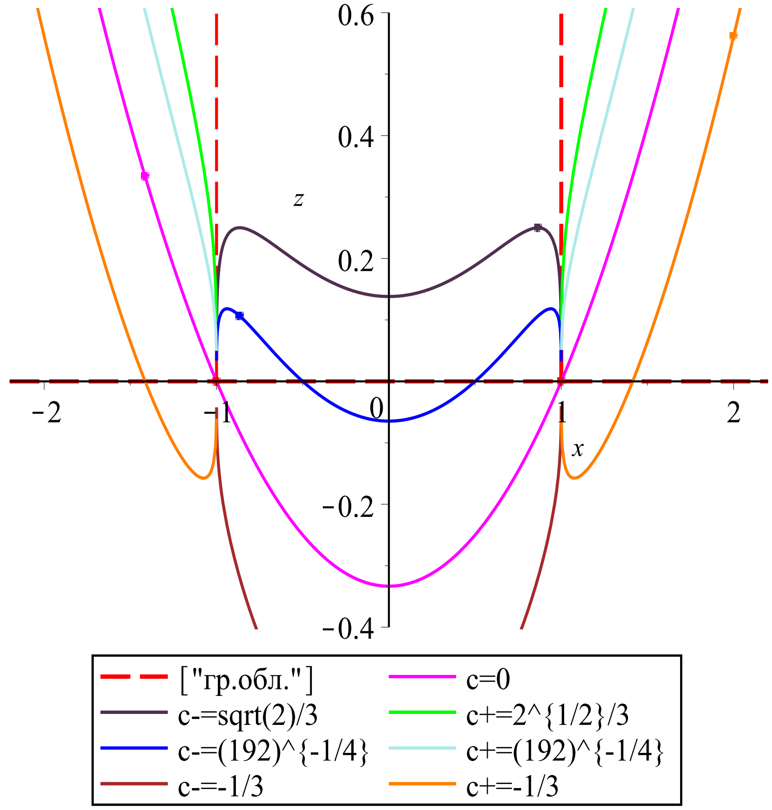
2) $y = (C(1-x^2)^{1/4} - (1-x^2)/3)^2$,
$|x| \in \{[0,1)$ при $C > 1/3$, $(\sqrt{1-(3C)^{4/3}}, 1)$ при $0 < C \leq 1/3\}$.

З.К. $a)$ $1/3 = (1/2)^{1/4}C + 1/3 \Rightarrow C = 0$, поэтому
$\underline{y = (x^2-1)^2/9}$, $\underline{x \in (-\infty, -1)}$.

$b)$ $1/4 = C(1/4)^{1/4} - 1/12 \Rightarrow C = \sqrt{2}/3$, поэтому
$\underline{y = (\sqrt{2}(1-x^2)^{1/4} + x^2 - 1)^2/9}$, $\underline{x \in (-1, 1)}$.

$c)$ $1 - 3^{-3/4} = 3^{1/4}C + 1 \Rightarrow C = -1/3$, поэтому
$\underline{y = (-(x^2-1)^{1/4} + x^2 - 1)^2/9}$, $\underline{x \in (\sqrt{2}, +\infty)}$.

$d)$ $(3^{3/4}-1)/12 = (1/4)^{1/4}C - 1/12 \Rightarrow C = 3^{-1/4} \cdot 4^{-3/4}$, поэтому
$\underline{y = ((3/4)^{3/4}(1-x^2)^{1/4} + x^2 - 1)^2/9}$, $\underline{x \in (-1, -1/2)}$.



> # $z = y^{\frac{1}{2}}$; $z = (c\mp)\cdot|x^2-1|^{\frac{1}{4}} + \frac{(x^2-1)}{3}$ ($c-$ *при* $x^2<1$, $c+$ *при* $x^2>1$).

2) Решить дробно-линейное уравнение

3. $(5x-7y+1)\,dy+(x+y-1)\,dx=0$

Точка пересечения прямых $(1/2, 1/2)$.

Замена $u=x-1/2,\ v=y-1/2;\quad x=u+1/2,\ y=v+1/2.$

$(5u-7v)dv+(u+v)du=0$ – однородное уравнение 1-го порядка.

Замена $z=vu^{-1},\ v=zu;\ dv=udz+zdu;\quad u=0$ – не решение.

$(5u-7zu)(udz+zdu)+(u+zu)du=0$ – ур-е с раздел. перем.

$$\frac{7z-5}{(7z+1)(z-1)}dz=-\frac{du}{u},\quad \underline{z=1},\ \underline{z=-1/7}$$ – потерянные решения;

$$\int\left(\frac{21}{7z+1}+\frac{1}{z-1}\right)dz=C-4\int\frac{du}{u} \text{ или } \ln\frac{(7z+1)^3(z-1)u^4}{C}=0$$

$\Rightarrow\ (7z+1)^3(z-1)u^4=C;\quad z=vu^{-1}\ \Rightarrow\ (7v+u)^3(v-u)=C.$

Ответ: $(7y+x-4)^3(y-x)=C$

Если $z=uv^{-1},\ u=zv,$ то $\dfrac{z+1}{z^2-6z+7}dz=-\dfrac{dv}{v},\quad \underline{z=1},\ \underline{z=-7};$

$$\int\left(\frac{1}{z-1}+\frac{3}{z+7}\right)dz=C-4\int\frac{dv}{v} \text{ или } \ln\frac{(z-1)(z+7)^3v^4}{C}=0$$

$\Rightarrow\ (z-1)(z+7)^3=Cv^{-4};\quad z=u/v\ \Rightarrow\ (u-v)(u+7v)^3=C.$

3) Решить обобщенно-однородное уравнение

5. $y' = -\sqrt{x^{-1}y^3 - y^4} - y^2$;

$a)\ \begin{matrix} x_0 = -1 \\ y_0 = -1/5 \end{matrix},\quad b)\ \begin{matrix} x_0 = 1/3 \\ y_0 = 3/10 \end{matrix},\quad c)\ \begin{matrix} x_0 = -1/3 \\ y_0 = -3/2 \end{matrix},\quad d)\ \begin{matrix} x_0 = -2 \\ y_0 = (2^{3/2} - 5)^{-1} \end{matrix}$

ОДЗ: $x \not\equiv C$, $x \neq 0$, $x^{-1}y^3 - y^4 \geq 0 \Leftrightarrow (xy)^{-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq xy \leq 1$. Поэтому кривые $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, $y = x^{-1}$ являются границами двух областей $\exists$: $0 < xy < 1$, заключенных между ними.

Ищем m – порядок y : $m - 1 = (3m - 1)/2 = 2m \ \Rightarrow\ m = -1$.

Замена $y = z^{-1} \neq 0$, $y' = -z^{-2}z'$; $z = y^{-1}$, при этом $\underline{y \equiv 0}$ – граничное решение.

Получаем $z' = \sqrt{x^{-1}z - 1} + 1$ – однородное уравнение.

Замена $z = ux$, $z' = xu' + u$; $u = zx^{-1}$.

Получаем $xu' + u = \sqrt{u - 1} + 1$ – уравнение с разд. переменными.
Имеем: $\displaystyle\int \frac{du}{u - 1 - \sqrt{u - 1}} = C - \int \frac{dx}{x}$, при этом $\underline{u = 1}$, $\underline{u = 2}$ – потерянные при делении решения.

Подстановка $v = \sqrt{u - 1}$, $u = v^2 + 1$; $du = 2v\,dv$. Тогда
$\displaystyle\int \frac{2\,dv}{v - 1} = \ln\frac{C}{x} \ \Rightarrow\ \ln\frac{(v-1)^2 x}{C} = 0 \ \Rightarrow\ (\sqrt{u - 1} - 1)^2 = Cx^{-1}$ и возвращаем $u = 2$ при $C = 0$. Обратная замена $u = (xy)^{-1}$.

Ответ: $(\sqrt{(xy)^{-1} - 1} - 1)^2 = Cx^{-1}$;
$xy = 1$, $y \equiv 0$ – граничные решения.

Найдем классическое общее решение.

Выделим решение при $C = 0$ – это $y = 1/(2x)$.

После этого $(\sqrt{(xy)^{-1} - 1} - 1)^2 = (cx)^{-1}$, причем $\underline{cx > 0}$.

Тогда $\sqrt{(xy_\pm)^{-1} - 1} = 1 \pm \sqrt{(cx)^{-1}}$ и $\underline{cx > 1}$ для $\underline{y_-}$, причем, если $cx = 1$, то $xy = 1$ – попадаем на граничное решение.

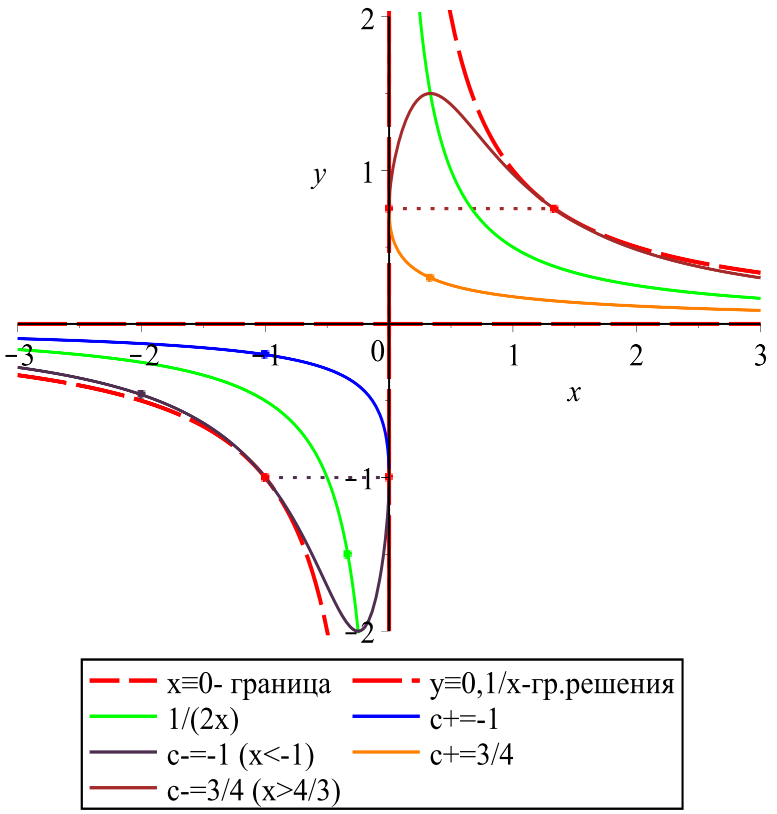
В результате $(xy_\pm)^{-1} - 1 = 1 \pm 2(cx)^{-1/2} + (cx)^{-1} \Leftrightarrow$
$\underline{y_\pm(x) = c(2cx \pm 2(cx)^{1/2} + 1)^{-1}}$ $(c \neq 0)$.

З.К. a) $(x_0, y_0) = (-1, -1/5) \Rightarrow C, c = -1$ и $y_+(x_0) = y_0$.
Поэтому $y = (-1)(-2x + 2\sqrt{-x} + 1)$, $x \in (-\infty, 0)$.

b) $(x_0, y_0) = (1/3, 3/10) \Rightarrow C = 4/3 \Leftrightarrow c = 3/4$ и $y_+(x_0) = y_0$.
Поэтому $y = 3(6x + 4\sqrt{3x} + 4)^{-1}$, $x \in (0, +\infty)$.

c) $(x_0, y_0) = (-1/3, -3/2) \Rightarrow C = 0 \Rightarrow\ y = 1/(2x)$, $x \in (-\infty, 0)$.

d) $(x_0, y_0) = (-2, (2^{3/2} - 5)^{-1}) \Rightarrow C, c = -1$ и $y_-(x_0) = y_0$.
Поэтому $y = (-1)(-2x - 2\sqrt{-x} + 1)$, $x \in (-\infty, -1)$,
так как $cx > 1$ для решения $y_-(x)$.



> # $y(x,c\pm)=\dfrac{c}{2\cdot c\cdot x\pm 2\cdot \mathrm{sqrt}(c\cdot x)+1}$

7 $(x+2\ln y+3x^{-1}\ln y)y\,dx=(x+1)\,dy$; $a)$ $\begin{matrix}x_0=-2/3\\ y_0=e^{-2}\end{matrix}$,

$b)$ $\begin{matrix}x_0=-2\\ y_0=e^{-4}\end{matrix}$, $c)$ $\begin{matrix}x_0=1\\ y_0=1\end{matrix}$, $d)$ $\begin{matrix}x_0=-1/2\\ y_0=e^{-5/27}\end{matrix}$, $e)$ $\begin{matrix}x_0=-1\\ y_0=1/3\end{matrix}$, $f)$ $\begin{matrix}x_0=-2/3\\ y_0=e^{-2/3}\end{matrix}$

ОДЗ: $x\neq 0,\ y>0\ \Rightarrow\ x\equiv 0,\ y\equiv 0$ – границы областей $\exists$.

Дано уравнение в симметричной форме с $M=xy+2y\ln y+3x^{-1}y\ln y$, $N=-x-1$; точка $(-1,e^{-1})$ – особая (в ней $M,N=0$).

$\partial M/\partial y-\partial N/\partial x=3+3x^{-1}+x+2\ln y+3x^{-1}\ln y\not\equiv 0$, поэтому это не есть уравнение в полных дифференциалах. Однако,

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N\omega'_x-M\omega'_y}=\frac{3+3x^{-1}+x+2\ln y+3x^{-1}\ln y}{-(x+1)\omega'_x-(x+2\ln y+3x^{-1}\ln y)y\omega'_y}=-\frac{1}{\omega},$$

если выбрать $\omega(x,y)=x^3y$.

Поэтому $d\mu/d\omega=-\omega^{-1}\mu$, откуда $\mu=\omega^{-1}=x^{-3}y^{-1}$, а значит, $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\ln y+\frac{3}{x^4}\ln y\right)dx-\left(\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x^3y}\right)dy=0$ — уравнение в полных дифференциалах. И при умножении на $\mu(x,y)$ решения не теряются согласно ОДЗ. Теперь

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\widetilde{N}\Rightarrow U(x,y)=C(x)-\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\frac{dy}{y}=C(x)-\frac{\ln y}{x^2}-\frac{\ln y}{x^3};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\widetilde{M}\ \Rightarrow\ C'(x)=\frac{1}{x^2}\ \Rightarrow\ C(x)=-\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ U=-\frac{\ln y}{x^3}-\frac{\ln y}{x^2}-\frac{1}{x}.$$

Ответ: $(x^{-3}+x^{-2})\ln y+x^{-1}=C$.

Найдем классическое общее решение.

Имеем: $(x+1)\ln y=Cx^3-x^2\ \ (x\neq 0)$.

Тогда $x\equiv -1$ – решение, оно получаеся из общего при $C=-1$ и, примыкая к особой точке $(-1,e^{-1})$, разбивается на два частных решения с $y\in(0,e^{-1})$ и с $y\in(e^{-1},+\infty)$.

Все остальные решения имеют вид $y=\exp\dfrac{cx^3-x^2}{x+1}$ $(x\neq 0)$ и примыкают к граничной точке $(0,1)$, а при $c>0$ стремятся к бесконечности при $x\to+\infty$.

З.К. $a)$ $c=-3/4$. Поэтому $y=e^{(-3x^3/4-x^2)/(x+1)}$, $x\in(-1,0)$.

$b)$ $c=-1$. Поэтому $y=e^{-x^2}$, $x\in(-\infty,-1)$.

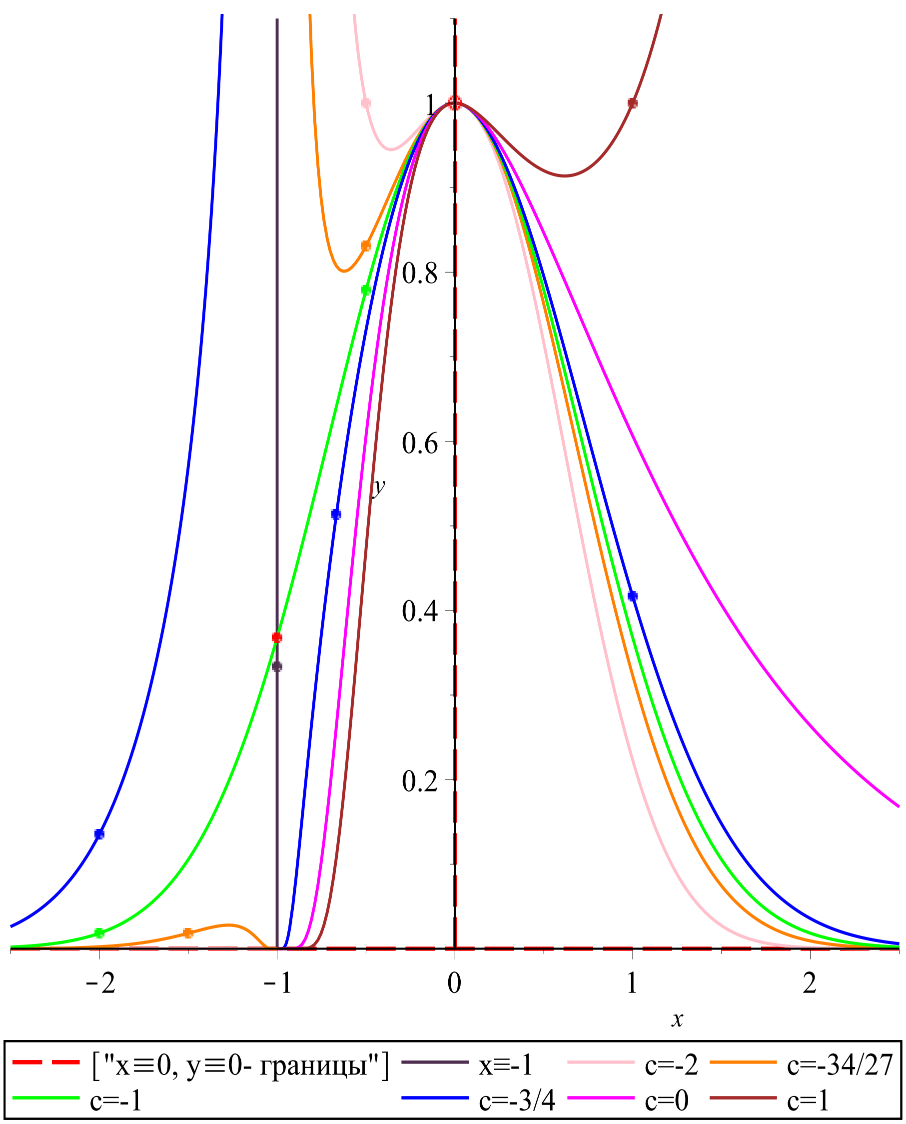
$c)$ $c=1$. Поэтому $y=e^{(x^3-x^2)/(x+1)}$, $x\in(0,+\infty)$.

$d)$ $c=-34/27$. Поэтому $y=e^{(-34x^3/27-x^2)/(x+1)}$, $x\in(-1,0)$.

$e)$ $C=-1$. Поэтому $x\equiv-1$, $y\in(0,e^{-1})$.

$f)$ $c=-3/4$. Поэтому $y=e^{(-3x^3/4-x^2)/(x+1)}$, $x\in(-1,0)$.

З а м е ч а н и е. Если обе части исходного уравнения домножить на x, то точка $(1,0)$ станет особой, а граница области $x\equiv 0$ образует два решения, определенных при $y\in(0,1)$ и при $y>1$.



> # $y=\exp\left(\frac{c\cdot x^3-x^2}{x+1}\right)$

7*a*. $(x^2+(2x+3)\ln y)y\,dx = x(x+1)\,dy$; $a)\ \begin{matrix} x_0=-2/3 \\ y_0=e^{-2} \end{matrix}$,

$b)\ \begin{matrix} x_0=-2 \\ y_0=e^{-4} \end{matrix}$, $c)\ \begin{matrix} x_0=-1 \\ y_0=2/5 \end{matrix}$, $d)\ \begin{matrix} x_0=-1/2 \\ y_0=e^{-5/27} \end{matrix}$, $e)\ \begin{matrix} x_0=1 \\ y_0=1 \end{matrix}$, $f)\ \begin{matrix} x_0=-2/3 \\ y_0=e^{-2/3} \end{matrix}$

Дано уравн. в симм. форме с $M = x^2y+(2x+3)y\ln y$, $N = x^2+x$. ОДЗ: $y>0$; точки $(0,1)$, $(-1,e^{-1})$ – особые (в них $M,N=0$).

$\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = x^2+4x+4+(2x+3)\ln y \not\equiv 0$, однако,

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N\omega'_x - M\omega'_y} = \frac{x^2+4x+4+(2x+3)\ln y}{-x(x+1)\omega'_x-(x^2+(2x+3)\ln y)y\omega'_y} = -\frac{1}{\omega},$$

если выбрать $\omega(x,y)=x^4y$.

Поэтому $d\mu/d\omega = -\omega^{-1}\mu$, откуда $\mu=\omega^{-1}=x^{-4}y^{-1}$, а значит, $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\ln y+\frac{3}{x^4}\ln y\right)dx - \left(\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x^3y}\right)dy = 0$ — уравнение в полных дифференциалах. И при умножении на $\mu(x,y)$ теряются решения $\underline{x\equiv 0}$ $(y\neq 1)$. Теперь

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \widetilde{N} \Rightarrow U(x,y) = C(x) - \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\frac{dy}{y} = C(x) - \frac{\ln y}{x^2} - \frac{\ln y}{x^3};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \widetilde{M} \ \Rightarrow\ C'(x) = \frac{1}{x^2} \ \Rightarrow\ C(x) = -\frac{1}{x} \ \Rightarrow\ U = -\frac{\ln y}{x^3} - \frac{\ln y}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

Ответ: $(x^{-3}+x^{-2})\ln y + x^{-1} = C$, $\quad x\equiv 0\ \ (y\neq 1)$.

Найдем классическое общее решение.

Имеем: $(x+1)\ln y = Cx^3-x^2$.

При $C=-1$ получаем решения $\underline{x\equiv -1}$ $(y\neq e^{-1})$.

Все остальные решения имеют вид $y=\exp\dfrac{cx^3-x^2}{x+1}$ с $x\neq 0$, так как примыкают к особой точке $(0,1)$, а при $c>0$ стремятся к бесконечности при $x\to+\infty$.

З.К. $a)$ $c=-3/4$. Поэтому $y=e^{(-3x^3/4-x^2)/(x+1)}$, $x\in(-1,0)$.

$b)$ $c=-1$. Поэтому $y=e^{-x^2}$, $x\in(-\infty,-1)$.

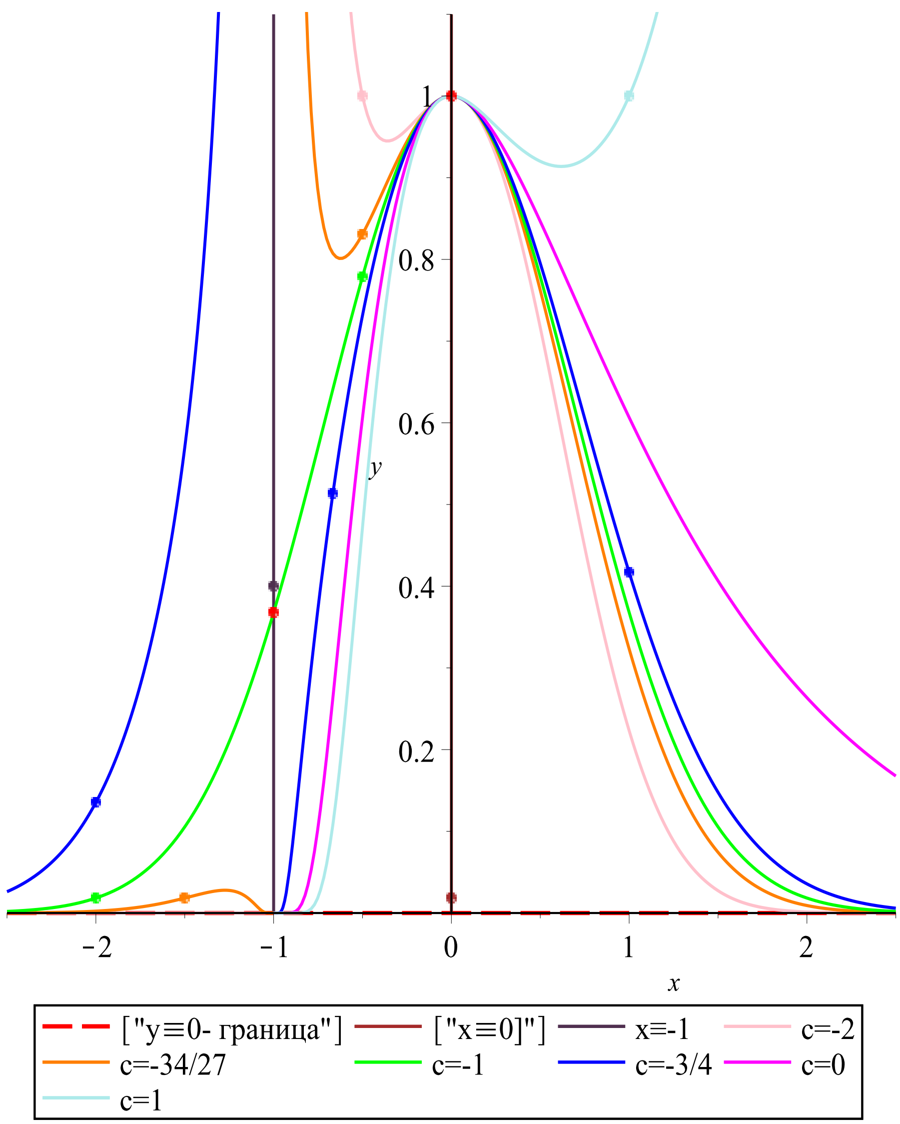
$c)$ $C=-1$. Поэтому $x\equiv -1$, $y\in(e^{-1},+\infty)$.

$d)$ $c=-34/27$. Поэтому $y=e^{(-34x^3/27-x^2)/(x+1)}$, $x\in(-1,0)$.

$e)$ $c=1$. Поэтому $y=e^{(x^3-x^2)/(x+1)}$, $x\in(0,+\infty)$.

$f)$ $c=-3/4$. Поэтому $y=e^{(-3x^3/4-x^2)/(x+1)}$, $x\in(-1,0)$.

З а м е ч а н и е. Другая функция ω: $\omega=4\ln x+\ln y=\ln x^4y$. Тогда $\dfrac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N\omega'_x-M\omega'_y}=-1$, $\mu'=-\mu$ и $\mu=e^{-\omega}=x^{-4}y^{-1}$.



> # $y=\exp\left(\frac{c \cdot x^3 - x^2}{x+1}\right)$

1) Решить уравнение Бернулли

3. $x\ln x\,dy + 3(y - x^2y^{5/3}\ln^4 x)\,dx = 0$; *a)* $\begin{matrix} x_0 = e^{1/2} \\ y_0 = 64e^{-9/4} \end{matrix}$,

b) $\begin{matrix} x_0 = e^{-1/2} \\ y_0 = 8e^{3/2} \end{matrix}$, *c)* $\begin{matrix} x_0 = e^{1/4} \\ y_0 = -8^3e^{-3/4} \end{matrix}$, *d)* $\begin{matrix} x_0 = e^{-1/2} \\ y_0 = -8^{3/2}(2e^{-1} - 3e^{-2})^{-3/2} \end{matrix}$

ОДЗ: $x > 0$, $(1, 0)$ – особая точка.

После деления на dx и $x\ln x$ получаем уравнение Бернулли $y' + 3(x\ln x)^{-1}y - 3xy^{5/3}\ln^3 x = 0$.
При этом возможно теряются решения $x \equiv C$. Подставляя $x \equiv C$ в уравнение, заключаем, что $\underline{x \equiv 1}$ – решение.

Замена $u = y^{1-\alpha}$, $\alpha = 5/3 \Rightarrow u = y^{-2/3}$ $(y \neq 0)$, $3u' = -2y^{-5/3}y'$.
Подставляя $y \equiv 0$ в уравнение, заключаем, что $\underline{y \equiv 0}$ – решение.

После деления уравнения на $x^{5/3}$ и замены получаем $u' - 2(x\ln x)^{-1}u = -2x\ln^3 x$ – линейное уравнение.

Находим $u_{\text{оо}} = C\ln^2 x$; $u_{\text{чн}} = C(x)\ln^2 x$, $C' = -2x\ln x$, $C(x) = x^2/2 - x^2\ln x \;\Rightarrow\; u_{\text{он}} = C\ln^2 x + (x^2/2 - x^2\ln x)\ln^2 x$.

Ответ: $y^{-2/3} = (C + x^2/2 - x^2\ln x)\ln^2 x$, $y \equiv 0$, $x \equiv 1$.

Найдем классическое общее решение.

Пусть $h(x,c) = (c + x^2(1/2 - \ln x))\ln^2 x$, тогда $h(1,c) = 0$, $h'(x,c) = 2x^{-1}\ln x(c + (1/2 - \ln x - \ln^2 x)x^2)$ и $h'(1,c) = 0$.

Поэтому $y(x,c) = ((c + x^2(1/2 - \ln x))\ln^2 x)^{-3/2}$ при $h(x,c) > 0$.

Функция $h(x,c) < 0$ $(x \neq 1)$ при $c \leq -1/2$, так как $h'(x,-1/2) = 2x^{-1}\ln x(-1/2 + (1/2 - \ln x - \ln^2 x)x^2)$ и $h'(x,-1/2) > 0$ при $0 < x < 1$ и $h'(x,-1/2) < 0$ при $x > 1$.

Функция $h(x,c) > 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $x = 1$ при $c > 1/2$.

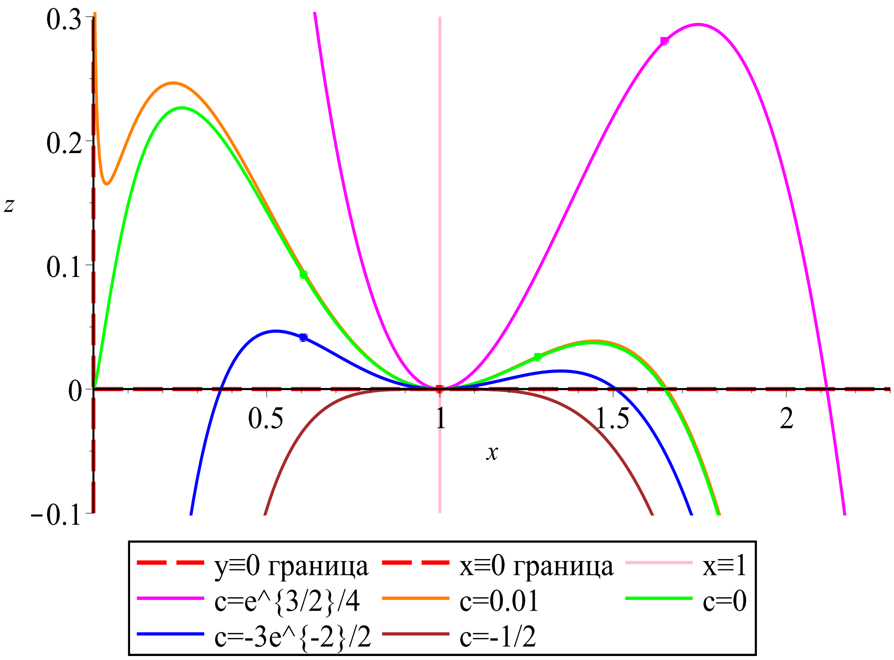
При $x \to 0$ фунции $h(x,0) \to 0$, $h(x,c) \to -\infty$ $(-1/2 < c < 0)$, $h(x,c) \to +\infty$ $(c > 0)$; $h(x,c) \to -\infty$ $(c > -1/2)$ при $x \to +\infty$.

З.К. *a)* $e^{3/2}/16 = (c + e/2 - e/2)(1/2)^2 \;\Rightarrow\; c = e^{3/2}/4$. Поэтому $y(x) = ((e^{3/2}/4 + x^2(1/2 - \ln x))\ln^2 x)^{-3/2}$, $x \in (1, e^{3/4})$.

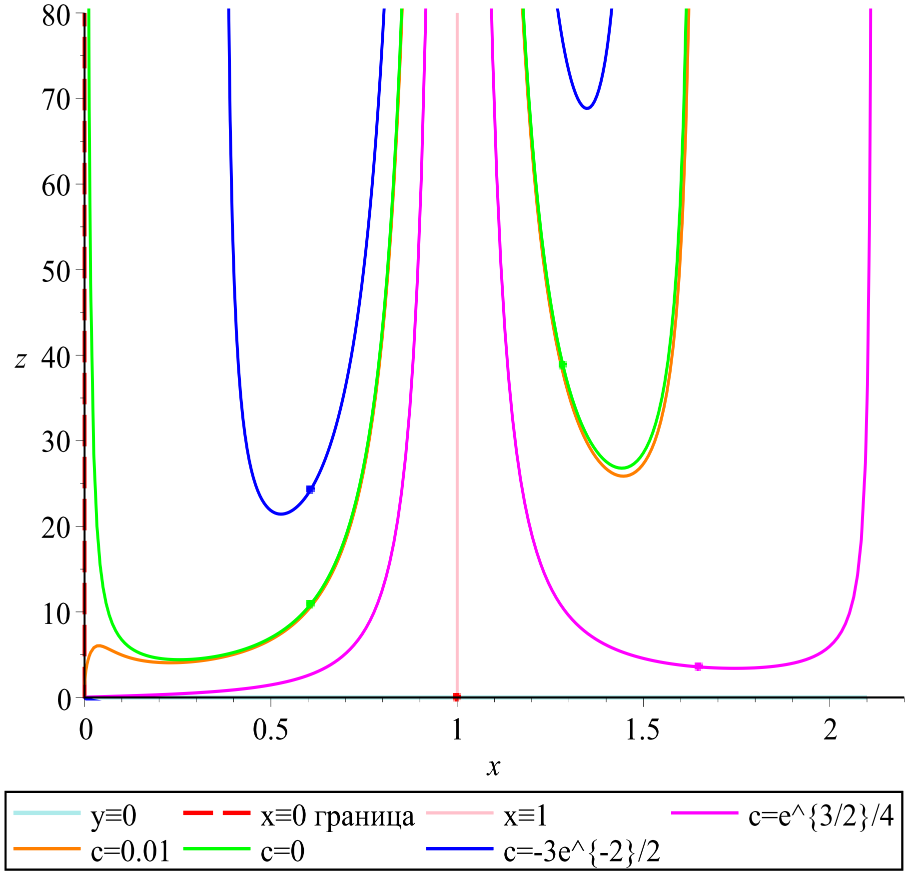
b) $1/(4e) = (c + 1/(2e) + 1/(2e))(-1/2)^2 \;\Rightarrow\; c = 0$. Поэтому $y(x) = (x^2(1/2 - \ln x)\ln^2 x)^{-3/2}$, $x \in (0, 1)$.

c) $e^{1/2}/64 = (c + e^{1/2}/2 - e1/2/4)(1/4)^2 \;\Rightarrow\; c = 0$. Поэтому $y(x) = -(x^2(1/2 - \ln x)\ln^2 x)^{-3/2}$, $x \in (1, e^{1/2})$.

d) $(2e^{-1} - 3e^{-2})/8 = (C + 1/(2e) + 1/(2e))(-1/2)^2 \;\Rightarrow\; c = -3e^{-2}/2$.
Поэтому $y(x) = -((-3e^{-2}/2 + x^2(1/2 - \ln x))\ln^2 x)^{-3/2}$, $x \in (e^{-1}, 1)$.



> # $z = y^{-\frac{2}{3}}$; $z = \left(c + x^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln(x)\right)\right) \cdot (\ln(x))^2 > 0$



> \# $z = y^{\frac{2}{3}}$; $z = \left(\left(c + x^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln(x)\right)\right) \cdot (\ln(x))^2\right)^{-1} > 0$