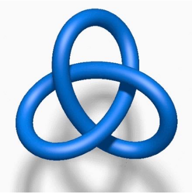
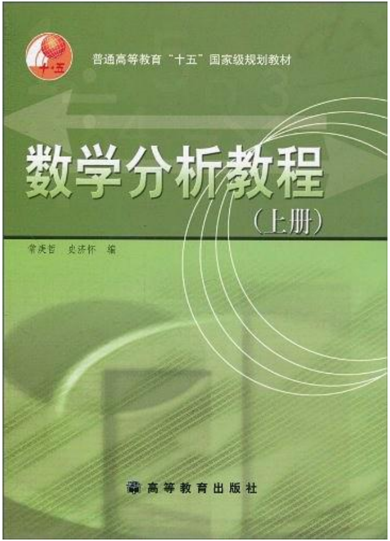
高等微积分

邹文明

第三章：导数




普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学分析教程
（上册）
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

回顾：微分–求导

- 函数 f 在点 x_0 处可微当且仅当 f 在该点处可导. 此时 $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.

1. 导数的四则运算法则: 假设 $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ 在点 $x_0 \in (a, b)$ 处可导, 则

- $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, 其中 $g(x_0) \neq 0$.
- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, 其中 $g(x_0) \neq 0$.

2. 复合求导: $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$.

3. 反函数求导: $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

4. 对数求导: $(\log|f(x)|)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

第 3 章总复习

- 定义: 导数, 左、右导数, 微分.
- 导数存在当且仅当左、右导数存在且相等.
- 可导蕴含着连续, 但反过来不成立.
- 导数的应用: 曲线的切线与法线.
- 基本初等函数的导数表.
- 可微=可导且 $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

- (高阶) 求导法则: 四则运算, 复合函数求导, 反函数求导, 隐函数求导, 由参数方程定义函数的求导, 对数求导及其应用.
- 初等函数在其定义域的内部可导, 其导函数也为初等函数.
- 高阶导数的定义, $\mathscr{C}^{(n)}$ 类 (n 阶导数连续), $\mathscr{C}^{(1)}$ 类 (连续可导); 连续函数为 $\mathscr{C}^{(0)}$ 类.
- $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类: 具有任意阶导数 (无穷可导).
- 初等函数在其定义域的内部无穷可导.

回顾: 基本的高阶求导公式

设 $n \geqslant 1$ 为整数, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则我们有

- $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$,
- $(e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$, 其中 α 可以为复数,
- $\Big(\log(1+x)\Big)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$,
- $\sin^{(n)}(x) = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$, $\cos^{(n)}(x) = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$.

注: 由函数方程 (隐函数、反函数) 或者参变量表示的函数, 也可以计算它们的高阶导数.

综合练习

例 1. 求函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的导数.

解: $y'=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^2-x^2)'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

综合练习

例 2. 求函数 $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ 的导数.

解: $y' = a^a x^{a^a - 1} + (e^{x^a \log a})' + (e^{a^x \log a})'$

$= a^a x^{a^a-1} + e^{x^a \log a}(x^a \log a)' + e^{a^x \log a}(a^x \log a)'$

$= a^a x^{a^a-1} + (\log a) a^{x^a} (a x^{a-1}) + a^{a^x} \cdot a^x (\log a)^2$

$= a^a x^{a^a-1} + (\log a) a^{x^a+1} x^{a-1} + (\log a)^2 a^{a^x + x}.$

例 3. 设 $y=f(\sin^2 x)f(\cos x^2)$, 其中 f 为可导函数, 求 y'.

解: $y' = (f(\sin^2 x))' f(\cos x^2) + f(\sin^2 x)(f(\cos x^2))'$

$$
\begin{aligned}
&= f'(\sin^2 x)(\sin^2 x)' f(\cos x^2) \\
&\quad + f(\sin^2 x) f'(\cos x^2)(\cos x^2)' \\
&= f'(\sin^2 x)\big(2\sin x \cdot (\sin x)'\big) f(\cos x^2) \\
&\quad + f(\sin^2 x) f'(\cos x^2)\big(-\sin x^2 \cdot (x^2)'\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f'(\sin^2 x)\big(2\sin x\cos x\big)f(\cos x^2)\\
&\quad + f(\sin^2 x)f'(\cos x^2)\big(-\sin x^2\cdot(2x)\big)\\
&= f'(\sin^2 x)f(\cos x^2)\sin 2x\\
&\quad -2x\sin x^2 f(\sin^2 x)f'(\cos x^2).
\end{aligned}
$$

例 4. 求 $xy = 1 + xe^y$ 确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 将方程对 x 求导, 则 $y + xy' = e^y + xe^y \cdot y'$.

由此立刻可得 $y' = \frac{e^y - y}{x(1-e^y)}$.

例 5. 已知 $x = \cos t$, $y = at\sin t$. 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 由于 $x' = -\sin t$, $y' = a\sin t + at\cos t$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'}{x'} = \frac{a\sin t + at\cos t}{-\sin t} = -a - at\cot t.$$

例 6. 若由函数方程 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 为二阶可导, 求 y''.

解: 将方程对 x 求导得 $2x + y + xy' + 2yy' = 0$, 则 $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$. 于是我们有

$$y'' = -\frac{(2+y')(x+2y) - (2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2} = \frac{3(xy' - y)}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{3\left(-x \cdot \frac{2x+y}{x+2y} - y\right)}{(x+2y)^2} = -\frac{3\Big(x(2x+y) + y(x+2y)\Big)}{(x+2y)^3}$$

例 7. 设 $y=x^{x^{x^x}}$, 求 y'.

解:
$$
\begin{aligned}
y' &= \left(e^{x^{x^x}\log x}\right)' = x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x}\log x\right)' \\
&= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + \left(x^{x^x}\right)'\log x\right) \\
&= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + \left(e^{x^x\log x}\right)'\log x\right) \\
&= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + \left(x^{x^x}\left(x^x\log x\right)'\right)\log x\right) \\
&= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + x^{x^x}\left(x^{x-1} + \left(x^x\right)'\log x\right)\log x\right) \\
&= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + x^{x^x}\left(x^{x-1} + \left(e^{x\log x}\right)'\log x\right)\log x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{x^{x^x}}\Big(x^{x^x-1} + \\
&\quad x^{x^x}(x^{x-1} + x^x(1+\log x)\log x)\log x\Big) \\
&= x^{x^{x^x}+x^x}\Big(x^{-1} + x^x\big(x^{-1} + \log x + \log^2 x\big)\log x\Big) \\
&= x^{x^{x^x}+x^x}\Big(x^{-1} \\
&\quad + x^{x-1}\log x + x^x\log^2 x + x^x\log^3 x\Big).
\end{aligned}
$$

例 8. 求 a, b 使 $f(x) = \begin{cases} \sin ax, & 若\ x \leqslant 0 \\ \log(1+x) + b, & 若\ x > 0 \end{cases}$, 在 $\mathbb{R}$ 上可导.

解: 由于 f 在 $(0, +\infty)$ 和 $(-\infty, 0)$ 上均为初等函数, 则 f 在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上可导. 又 $f(0-0) = 0$, $f(0+0) = b$, 故 f 在点 $x = 0$ 处连续当且仅当 $b = 0$. 现假设 $b = 0$, 则 $f'_{-}(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin ax}{x} = a$, $f'_{+}(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, 故 f 在点 $x = 0$ 可导当且仅当 $a = 1, b = 0$, 此时 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导.

例 9. 设 $k \in \mathbb{Z}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x}, & 若\ x \neq 0, \\ 0, & 若\ x = 0. \end{cases}$$

请问 k 取何值时, 函数 f 在点 $x = 0$: (1) 连续; (2) 可导; (3) 连续可导.

解: (1) 如果 $k \geqslant 1$, 那么 $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |x^k|$. 由夹逼原理可知 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. 此时 f 在原点处连续.

现假设 $k \leqslant 0$. $\forall n \geqslant 1$, 令 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$. 那么有 $f(x_n) = 0$, $f(y_n) = y_n^k \geqslant 1$. 则 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 均收敛到 0, 但 $\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ 却不收敛到同一个极限. 这表明 f 在原点间断.

综上所述可知 f 在原点连续当且仅当 $k \geqslant 1$.

(2) 若 f 在原点可导, 则它在该点连续. 故只需讨论 $k \geqslant 1$ 的情形. 若 $k \geqslant 2$, 由夹逼原理可知

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{k-1} \sin\frac{1}{x} = 0,$$

故 f 在点 $x = 0$ 处可导且 $f'(0) = 0$.

若 $k = 1$, 则由极限 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在可知 $f'(0)$ 不存在. 于是 f 在原点可导当且仅当 $k \geqslant 2$.

(3) 由前面的讨论可假设 $k \geqslant 2$. 当 $x \neq 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= kx^{k-1}\sin\frac{1}{x} + x^k\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= kx^{k-1}\sin\frac{1}{x} - x^{k-2}\cos\frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

若 $k \geqslant 3$, 由夹逼原理可知 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$.

若 $k = 2$ 时, $\forall n \geqslant 1$, $f'(x_n) = -1$, $f'(y_n) = ky_n$.

则 $\{f'(x_n)\}$, $\{f'(y_n)\}$ 不收敛到同一极限, 故 f' 在原点间断. 则 f' 在原点连续当且仅当 $k \geqslant 3$.

例 10. 设 $f(x)=|x-\sin x|$, 求 $f'(0)$.

解: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x-\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\frac{1}{6}x^3|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{6}\operatorname{sgn} x=0.$

例 11. 判断函数 $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 在点 $x=1$ 处的间断点的类型.

解: 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1$, 因此点 $x=1$ 为 f 的第一类间断点 (跳跃间断点).

例 12. 设 $f(x) = xe^x$. 求 $f^{(n)}$ $(n \geqslant 1)$.

解: $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = xe^x + ne^x$.

例 13. 假设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为二阶可导且 $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\neq 1$. 若隐函数 $y=y(x)$ 可由 $y=f(x+y)$ 来确定, 求 y', y''.

解: 将方程对 x 求导, 则 $y'=f'(x+y)(1+y')$. 于是 $y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}$. 同时我们也有

$$y''=f''(x+y)(1+y')^2+f'(x+y)y'',$$

由此可得 $y''=\frac{f''(x+y)(1+y')^2}{1-f'(x+y)}=\frac{f''(x+y)}{(1-f'(x+y))^3}$.

例 14. 假设参数方程 $x = 2t + \sin t,\ y = \cos t$ 可确定可导函数 $y = f(x)$. 求 $f'(0)$.

解: 由题设可知 $f'(0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = \frac{-\sin t}{2+\cos t}\Big|_{t=0} = 0$.

例 15. 设 $y = x^x$, 求微分 $\mathrm{d}y$ 以及 $\mathrm{d}y(1)$.

解: 因 $y' = (e^{x\log x})' = x^x(x\log x)' = x^x(\log x + 1)$, 故 $\mathrm{d}y = x^x(\log x + 1)\,\mathrm{d}x$, 进而可知 $\mathrm{d}y(1) = \mathrm{d}x$.

例 16. 假设函数 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ 在点 $x=0$ 处可导. 如果 $\forall x\in(-1,1)$, 均有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$. 求证: $|f'(0)|\leqslant 1$.

证明: 由题设立刻可知 $|f(0)|\leqslant|\sin 0|=0$, 于是我们有 $f(0)=0$, 进而可得

$$\begin{aligned}|f'(0)| &= \left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \\ &\leqslant \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1.\end{aligned}$$

17. 假设 f 可导且函数 $y = f(\sin x)$ 存在可导的反函数, 求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

解: 由于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(\sin x)\cos x$, 故 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(\sin x)\cos x}$.

18. 函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = t - \cos t \end{cases}$ 给出, 求其微分 $\mathrm{d}y$.

解: 由参数方程求导法则可知 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1+\sin t}{1-\cos t}$, 则

$$\mathrm{d}y = \frac{1+\sin t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}x.$$

谢谢大家!