

## 习题课材料 (六)

**习题 1.** 给定  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ . 计算  $\mathbf{a}$  与坐标向量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  的夹角的余弦, 并计算这三个余弦值的平方和.

**习题 2.** 证明, 分块上三角矩阵  $X = \begin{bmatrix} c & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix}$  是正交矩阵时, 必有  $c = \pm 1$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,  $Q$  是正交矩阵.

**习题 3** (♥). 设可逆矩阵  $A$  保持向量之间角度不变. 证明  $A$  是正交矩阵的常数倍.

**习题 4.** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为线性映射. 证明存在唯一  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ .

**习题 5.** 设  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  为  $\mathbb{R}^3$  的标准正交基. 证明

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3), \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3)$$

也是  $\mathbb{R}^3$  的标准正交基.

**习题 6.** 向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  围成一个三角形. 证明它的面积的平方为  $\frac{1}{4}(\|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}^T \mathbf{b})^2)$ .

**习题 7.** 对向量组

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

进行 *Schmidt* 正变化.

**习题 8.** 求矩阵  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  的  $QR$  分解.