高等微积分

邹文明

第七章: 定积分

第七章： 定积分

§7.1. Riemann 积分的概念

定义 1. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数.

- 分割: 称 $P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 的分割. 它将 $[a,b]$ 分成内部不相交的小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 令

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}\ (1\leqslant i\leqslant n),$$

$$\lambda(P) := \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i\ (\text{称为 } P \text{ 的步长}).$$

- 取点: 称 $\xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ 为分割 P 的取点, 其中 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 此时称 (P,ξ) 为 $[a,b]$ 的带点分割.
- Riemann 和: 对 $[a,b]$ 的带点分割 (P,ξ), 令

$$\sigma(f;P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称为 f 关于带点分割 (P,ξ) 的 Riemann 和.

- Riemann 积分: 如果存在 $I \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使对于 $[a,b]$ 的任意带点分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, $|\sigma(f;P,\xi) - I| < \varepsilon$. 此时记

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f;P,\xi) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分 (Riemann 积分), 简记为 $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 并且称 f 在 $[a,b]$ 上 (Riemann) 可积. 否则称之为不可积.

评注

- 常值函数可积且 $\forall c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b-a)$.
- 仅在有限个点处不为零的函数为可积函数.

- 记 $\mathscr{R}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上所有可积函数的集合.
- 否定形式: 函数 f 在 $[a,b]$ 上不可积当且仅当 $\forall I \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, 存在 $[a,b]$ 的带点分割 (P,ξ) 满足 $\lambda(P) < \delta$, 但我们却有

$$|\sigma(f;P,\xi) - I| \geqslant \varepsilon_0.$$

从现在开始, 我们约定:

$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

例 1. **(Dirichlet 函数)** $\forall x \in [0,1]$, 定义

$$D(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & 若\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

求证: $D \notin \mathscr{R}[0,1]$.

证明: 用反证法. 假设 D 可积并且其积分为 I. 令 $\varepsilon = \frac{1}{4}$. 于是由可积性可知, $\exists \delta > 0$ 使得对于 $[0,1]$ 的任意带点分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时,

$$|\sigma(D; P, \xi) - I| < \frac{1}{4}.$$

选取 $n=[\frac{1}{\delta}]+1$, $P:0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ 为 $[0,1]$ 的均匀分割. 则 $\lambda(P)=\frac{1}{n}<\delta$. 选取点 $\xi=\{\xi_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$, $\xi'=\{\xi_i'\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 使得对 $1\leqslant i\leqslant n$, 均有 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\cap\mathbb{Q}$, $\xi_i'\in[x_{i-1},x_i]\setminus\mathbb{Q}$, 那么

$$|\sigma(D;P,\xi)-I|<\frac{1}{4},$$

$$|\sigma(D;P,\xi')-I|<\frac{1}{4}.$$

注意到

$$\sigma(D;P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=0,$$

$$\sigma(D;P,\xi')=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i')\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1,$$

于是 $|I|<\frac{1}{4}$, $|1-I|<\frac{1}{4}$, 从而我们有

$$\frac{1}{2}>|I|+|1-I|\geqslant|I+(1-I)|=1.$$

矛盾! 故所证结论成立.

函数可积的必要条件

定理 1. 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证明: 假设 f 的积分为 I, 则 $\exists \delta > 0$ 使得对于 $[a,b]$ 的任意的带点分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, 我们有 $|\sigma(f;P,\xi) - I| < 1$. 定义 $n = [\frac{b-a}{\delta}] + 1$, 并设 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a,b]$ 的均匀分割, 则我们立刻有 $\lambda(P) = \frac{1}{n}(b-a) < \delta$.

$\forall x \in [a,b]$, 均可以找到 $k \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 使得 $x \in [x_{k-1}, x_k]$. 取点 $\xi = \{\xi_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 使得 $\xi_k = x$, 而其余点 ξ_i 则为分割 P 中的适当点. 则

$$
\begin{aligned}
1 &> \left|\sigma(f;P,\xi) - I\right| \\
&= \Bigg| f(x)\lambda(P) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} f(\xi_i)\lambda(P) - I \Bigg| \\
&\geqslant |f(x)|\lambda(P) - \Bigg| \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} f(\xi_i)\lambda(P) - I \Bigg|.
\end{aligned}
$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned}\lambda(P)|f(x)| &< 1+|I|+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}|f(\xi_i)|\lambda(P)\\ &\leqslant 1+|I|+\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|f(x_j)|\lambda(P),\end{aligned}$$

则我们有 $|f(x)| < \frac{1}{\lambda(P)}(1+|I|)+\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|f(x_j)|$,

从而 f 为有界函数.

判断函数可积的 **Darboux** 准则

定义 2. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 而

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

为 $[a,b]$ 的分割. 对于 $1\leqslant i\leqslant n$, 定义

- $m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$,
- $L(f;P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \quad$ (Darboux 下和),
- $U(f;P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \quad$ (Darboux 上和).

评注

♠ 定义 $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

若 (P,ξ)为 $[a,b]$ 的带点分割, 则我们有

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leqslant L(f;P)\leqslant \sigma(f;P,\xi) \\ &\leqslant U(f;P)\leqslant M(b-a). \end{aligned}$$

♠ 若 P_1, P_2 为 $[a,b]$ 的分割且 $P_1 \subseteq P_2$, 则

$$L(f;P_1) \leqslant L(f;P_2) \leqslant U(f;P_2) \leqslant U(f;P_1).$$

引理 1. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 而 P_1,P_2 为 $[a,b]$ 的两个分割, 则 $L(f;P_1)\leqslant U(f;P_2)$.

证明: 记 Q 为 P_1,P_2 合起来所得到的 $[a,b]$ 的分割, 则 $P_1\subseteq Q$, $P_2\subseteq Q$, 从而

$$L(f;P_1)\leqslant L(f;Q)\leqslant U(f;Q)\leqslant U(f;P_2).$$

注: 由此定义下积分:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_P L(f;P),$$

上积分: $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_P U(f;P)$, 则我们有

$$L(f;P) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant U(f;P).$$

引理 2. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 而

$$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

为 $[a,b]$ 的分割. 则

$$L(f;P)=\inf_{\xi}\sigma(f;P,\xi),\ U(f;P)=\sup_{\xi}\sigma(f;P,\xi).$$

证明: 仅考虑 Darboux 下和. 此时, 我们有

$$\begin{aligned}\inf_{\xi}\sigma(f;P,\xi) &= \inf_{\xi}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\inf_{\xi_i\in\Delta_i}f(\xi_i)\Big)\Delta x_i=L(f;P).\end{aligned}$$

定理 2. (Darboux) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 则下述结论等价:

(1) $f\in\mathscr{R}[a,b]$,

(2) $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 P 使得

$$U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon.$$

(3) $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明: (1)⇒(2) 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 I 为 f 的积分. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得对于 $[a,b]$ 的任意带点分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, $|\sigma(f;P,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$. 故 $I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(f;P,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$, 则由引理 2 可知

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant L(f;P) \leqslant U(f;P) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3},$$

故 $U(f;P) - L(f;P) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. 因此 (2) 成立.

(2)⇒(3) 假设 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 P 使得我们有 $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$, 那么

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon. \end{aligned}$$

再由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3)⇒(1) 设 $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, 并将该值记作 I. 由上积分的定义, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 $P_0 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 使得

$$0 \leqslant U(f;P_0) - I < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

定义 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{4nM+1}$, 则对 $[a,b]$ 的任意的分割 P, 当 $\lambda(P) < \delta_1$ 时, 记 Q 为 P, P_0 合起来所组成的新分割, 则我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant U(f;P) - I \leqslant U(f;Q) + 2nM\lambda(P) - I \\ &\leqslant U(f;P_0) - I + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

同样借助于 $I = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 以及下积分的定义可知, $\exists \delta_2 > 0$ 使得对于 $[a,b]$ 的任意的分割 P, 当 $\lambda(P) < \delta_2$ 时, 我们均有 $0 \leqslant I - L(f;P) < \varepsilon$, 选取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, 我们有

$$I - \varepsilon < L(f;P) \leqslant \sigma(f;P,\xi) \leqslant U(f;P) < I + \varepsilon,$$

也即 $|\sigma(f;P,\xi) - I| < \varepsilon$, 故 $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

评注

由前面可知 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 等价于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得对于 $[a,b]$ 的任意分割 P, 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, 均有 $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$. 此时我们也称

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \big(U(f;P) - L(f;P)\big) = 0.$$

同学们辛苦了!