第十三周习题课讲义: 定积分总结

2023 年 12 月 16 日

目录

1 定积分的计算

1.1 定义法

例题 1.1 *1.* $I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$;

2. $I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

1. 可以直接看出来:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

正是函数 $\frac{1}{1+x}$ 在定义域 $[0,1]$ 上的积分, 因此:

$$I=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

这是一个比较重要的极限, 大家要有印象!

2. $\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$ 不能直接化为定积分和式中的形式, 考虑放缩, 将分母 $n+\frac{1}{i}$ 化简. 因为 $\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}(i=1,2,\cdots,n)$, 即

$$\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$, 由夹挤准则得所求极限为 $I=\frac{2}{\pi}$.

例题 1.2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 是可积, 且 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}4\ln\left[1+\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right].$$

解：因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 所以 $\exists M>0,|f(x)|\leq M$, 所以

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\to 0\left(i\in N^{+},n\to\infty\right).$$

利用 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\quad(x\to 0)$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}4\ln\left[1+\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right]=&4\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)-2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}f^2\left(\frac{i}{n}\right)\\&+4\sum_{i=1}^{n}o\left(\frac{1}{n^2}f^2\left(\frac{i}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{2},\lim_{n\to\infty}4\sum_{i=1}^{n}o\left(\frac{f^2\left(\frac{i}{n}\right)}{n^2}\right)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}f^2\left(\frac{i}{n}\right)\right|\leq 2\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sup_{0\leq x\leq 1}\left\{|f(x)|^2\right\}\right|=2\lim_{n\to\infty}\frac{M^2}{n}=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}4\ln\left[1+\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right]=2\sqrt{3}$.

1.2 对称区间和周期函数的积分

1. 若 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 $[-a,a]$ 上连续, 则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 为奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数};\end{cases}$$

2. 若 $f(x)$ 不具有奇 (偶) 性, 可利用以下公式简化定积分计算:

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

3. 设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则有下列常用公式:

(1) $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$ (a 为任意常数);

(2) $\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

某些定积分中被积函数的原函数求不出来或者能求出来但非常麻烦, 我们可以考虑用下列公式.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\text{ 为正偶数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, n\geq 1\text{ 为正奇数};\end{cases}$

2.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(\sin x,\cos x)+f(\cos x,\sin x)]\mathrm{d}x$$

3. (区间再现公式) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$.

例题 1.3 *1.* $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

2. $I=\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}-\sqrt{\ln(3+x)}}\mathrm{d}x$

3. $I=\int_0^\pi \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$

(1) 因
$$\begin{aligned}
f(x)+f(-x)&=\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{x}}=\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)\sin^2 x=\sin^2 x,\\
I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\ \mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}\ \mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}(\pi-2).
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int_2^4\left(\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}-\sqrt{\ln(3+x)}}+\frac{\sqrt{\ln(9-6+x)}}{\sqrt{\ln(9-6+x)}-\sqrt{\ln(3+6-x)}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\int_2^4\ \mathrm{d}x=1.
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin^3(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\right]\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x\\
&=-\pi\int_0^\pi\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}(\cos x)=-\pi\int_0^\pi\frac{2-\left(1+\cos^2 x\right)}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}(\cos x)\\
&=-2\pi\arctan(\cos x)|_0^\pi+\pi\cos x|_0^\pi=\pi^2-2\pi.
\end{aligned}$$

1.3 变上限积分的计算

(1) 若被积函数不含求导变量 x, 直接利用下列公式求导:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t=f[u(x)]u'(x)-f[v(x)]v'(x),$$
其中 $f(x)$ 连续, $u(x),v(x)$ 可导.

(2) 若被积函数含求导变量, 为应用 (1) 中的公式, 则须移去求导变量, 其方法有因式提取法及变量代换法.

例题 1.4 设 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(0)=0$, 求 $\varphi'(0)$.

概念要清晰, 一旦是求某一个具体的点尤其是分段点的时候, 必须要用定义法来计算, 而不是对第一项求导, 然后令 $x\to 0$, 这种作法是不正确的 (逻辑是混乱的).
$$\begin{aligned}
\varphi'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3}=\frac{1}{3}f'(0).
\end{aligned}$$

例题 1.5 求 $F(x)=\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)\mathrm{d}t$ 的导数, 其中 $f(x)$ 连续.

被积函数中的 x 无法作为因子提出, 故作变量代换: 令 $x^2-t^2=u$, 则

$$F(x)=\int_{x^2}^0 f(u)\left(-\frac{1}{2}\ \mathrm{d}u\right)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u,$$

于是 $\quad F'(x)=\frac{1}{2}\cdot f\left(x^2\right)\cdot 2x=xf\left(x^2\right).$

例题 1.6 *(1) 设 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 且满足 $f(x)=\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$;*

(2) 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=1-\cos x$, 求 $f(x)$;

解 (1) 令 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$, 则 $f(x)=\cos x+A$, 方程两边在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上对 x 积分得 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ \mathrm{d}x+A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}x=1+\frac{\pi}{2}A$, 即 $A=\frac{2}{2-\pi}$, 所以 $f(x)=\cos x+\frac{2}{2-\pi}$.

(2) 在 $1-\cos x=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导, 得

$$\sin x=xf(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

再求导得 $f(x)=\cos x$.

1.4 积分的极限

例题 1.7 (课件习题) *求极限:*

1. $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$
2. *设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 试证:*

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\frac{\pi}{2}$$

对 1, 我们提供一些类似的题目:

例题 1.8 *1. 求证: $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}(1-\sin x)^n dx=0$;*

2. 设 α 是给定的正常数. 证明: $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1+x^n)^\alpha\mathrm{d}x=1$

证明: 由于 $f\in C[-1,1]$, 因此存在 $M>0$ 使得 $\forall x\in[-1,1]$, 均有 $|f(x)|\leqslant M$. 又 f 在原点处连续, 于是 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta\in(0,1)$ 使得 $\forall x\in[-\delta,\delta]$, $|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{2\pi}$. 令 $\eta=\frac{\varepsilon\delta^2}{8M+1}$. 则 $\forall h\in(0,\eta)$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\ \mathrm{d}x&=\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\ \mathrm{d}x\\&\quad+\int_{-1}^{-\delta}\frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\ \mathrm{d}x+\int_{\delta}^1\frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\ \mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h}{h^2+x^2}\ \mathrm{d}x+\frac{2Mh}{\delta^2}(1-\delta)+\frac{2Mh}{\delta^2}(1-\delta)\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-\delta}^{\delta}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{\pi}\arctan\frac{\delta}{h}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\end{aligned}$$

由此可得 $\lim\limits_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h(f(x)-f(0))}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x=0$, 再注意到 $\lim\limits_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{h\to0^+}2\arctan\frac{1}{h}=\pi$, 由此可知所证结论成立.

有些同学总是会对 $\epsilon-\delta$ 语言不熟悉, 我们提供另一种估计的方法. $\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{h^{\frac14}}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{h^{\frac14}}^{1}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$, 其中

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_0^{h^{\frac14}}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_0^{h^{\frac14}}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x\left(0\leqslant\xi\leqslant h^{\frac14}\right)\\
&=f(\xi)\arctan\frac{x}{h}\Big|_0^{h^{\frac14}}=f(\xi)\arctan\frac{1}{h^{\frac34}}\to f(0)\frac{\pi}{2}\left(h\to0^+\right),\\
|I_2|&=\left|\int_{h^{\frac14}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\int_{h^{\frac14}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x(|f(x)|\leqslant M)\\
&=M\left(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{h^{3/4}}\right)\to0\left(h\to0^+\right).
\end{aligned}$$

以及我们也提供一些类似的题目, 并且说明即使对广义积分也有类似的结论.

例题 1.9 *1.* 设 $f\in C[0,1]$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)dx=1.$

2.(*) 设 f 对一切的 $b>0$, 在 $[0,b]$ 上都是 *Riemann* 可积的, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\alpha$. 证明:

$$\lim_{t\to0^+}t\int_0^{+\infty}e^{-tx}f(x)dx=\alpha$$

例题 1.10 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. $\forall n\in\mathbf{N}$, 记 $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}-\int_a^bf(x)\mathrm{d}x$, 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}nA_n=\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$.

推广:

例题 1.11 (*) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可敞, 且 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,

$$B_n=\int_a^bf(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left[a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right].$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty}n^2B_n=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]$.

只给出第一个的解答: 转化为 $f'(x)$ 的积分和.

$$\begin{aligned}
&\text{令}x_i=a+i\frac{b-a}{n},\text{则}\\
&nA_n=n\left(\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)\frac{b-a}{n}-\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x\right)\\
&\quad\;=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f\left(x_i\right)-f(x)\right)\mathrm{d}x\\
&\quad\;=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'\left(\eta_i\right)\left(x_i-x\right)\mathrm{d}x\left(\eta_i\in\left(x_{i-1},x_i\right)\right).
\end{aligned}$$

因 (x_i-x) 不变号, 导函数有介值性, 因此应用积分第一中值定理, 不难知道: $\exists\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'\left(\eta_i\right)\left(x_i-x\right)\mathrm{d}x=f'\left(\xi_i\right)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x_i-x\right)\mathrm{d}x.$$

于是式 (1) 成为

$$
\begin{aligned}
nA_n &= n\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i - x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})^2 \\
&= \frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\to \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))(n\to\infty).
\end{aligned}
$$

2 定积分、中值公式、Taylor 公式

2.1 定积分和中值定理

和我们之前处理中值定理的题目的基本策略是相同, 不同点在于我们往往需要利用积分的一些性质, 尤其是第一积分中值定理.

例题 2.1 *设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微, 且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$, 试证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.*

证令 $\varphi(x)=xf(x)$, 则 $\varphi(1)=f(1)$, 由积分中值定理可知, 存在 $\eta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 使得 $\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\varphi(\eta)$, 由已知条件, 有 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{2}\varphi(\eta)=\varphi(\eta)$, 于是

$$\varphi(1)=f(1)=\varphi(\eta),$$

且 $\varphi(x)$ 在区间 $[\eta,1]$ 上连续, 在区间 $(\eta,1)$ 内可导, 故由罗尔定理可知, 存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, 使得 $\varphi'(\xi)=0$, 即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

例题 2.2 *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:*

(1) 在区间 (a,b) 内, $f(x)>0$;

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3) 在 (a,b) 内存在与 (2) 中 ξ 相异的点 η, 使 $f'(\eta)\left(b^2-a^2\right)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证 (1) 由极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在及 $f(x)$ 的连续性知 $\lim\limits_{x\to a^+} f(2x-a)=f(a)=0$, 又由 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导且 $f'(x)>0$, 得 $f(x)>f(a)=0$.

(2) 设 $F(x)=x^2, g(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理的条件, 由柯西中值定理知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(3) 对 $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\xi]$ 上用拉格朗日中值定理: 存在 $\eta\in(\alpha,\xi)$, 使得

$$f(\xi)-f(a)=(\xi-a)f'(\eta),$$

代人上式并注意到 $f(a)=0$, 得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{(\xi-a)f'(\eta)}, \text{即} f'(\eta)\left(b^2-a^2\right)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例题 2.3 设 $f(x) \in C^{(2)}[a,b]$, 试证: $\exists \xi \in (a,b)$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$$

证明将 $f(x)$ 在点 $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ 处展开为一阶泰勒公式.

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!}f''(\eta)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

（其中 η 间于 x 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间）积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

由积分第一中值定理知 $\exists \xi \in (a,b)$, 使

$$\int_a^b f''(\eta)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = f''(\xi)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = f''(\xi)\frac{1}{12}(b-a)^3.$$

带入原式中即可得证.

例题 2.4 *1. 已知 $f(x)$ 在: $[0,1]$ 上有直到二阶的连续导数, 试证:*

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leqslant |f(1) - f(0)| + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x.$$

2. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 试证:

$$\int_0^1 |f'(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x + 9\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x.$$

其中 1 的 $f(1) - f(0)$ 有多种变式: 例如 $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{b-a}dx$. 或者是根据中值公式构造出来的式子.

证明对 $\forall x_1 \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right], x_2 \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$, 由拉格朗日中值定理得:

$$|f'(\xi)| = \left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq 3|f(x_1)| + 3|f(x_2)|$$

因此对 $\forall x \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left|f'(\xi) + \int_\xi^x f''(t)\mathrm{d}t\right| \leq |f'(\xi)| + \int_\xi^x |f''(t)| \mathrm{d}t \\ &\leq 3|f(x_1)| + 3|f(x_2)| + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x \end{aligned}$$

在上述不等式两端分别对 x_1, x_2 在 $\left[0, \dfrac{1}{3}\right], \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ 上进行积分得

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq 9\int_0^{\frac{1}{3}} |f(x)|\mathrm{d}x + 9\int_{\frac{2}{3}}^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x \\ &\leq 9\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x \end{aligned}$$

因此对 x 在 $[0,1]$ 上积分可得

$$\int_0^1 |f'(x)| \mathrm{d}x \leq 9\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x$$

2.2 定积分和 Taylor 公式

例题 2.5 *1(* 积分型泰勒公式). 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$. 证明:*

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2\int_a^b |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2. 条件同上, 将 $f(\frac{a+b}{2})=0$ 修改为 $f(a)=f(b)=0$, 证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

证明对 $\forall x\in(a,b)$, 由泰勒公式可得

$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x)^2,\quad \xi\in(a,x)$$
$$f(b)=f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(b-x)^2,\quad \eta\in(x,b)$$

两式相加

$$f(x)=f'(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{4}\left[f''(\xi)(a-x)^2+f''(\eta)(b-x)^2\right]$$

再两边积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_a^b \left[f''(\xi)(a-x)^2+f''(\eta)(b-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_a^b f'(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}f(x)=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{8}\int_a^b\left[f''(\xi)(a-x)^2+f''(\eta)(b-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

因此

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{8}\int_a^b\left[(a-x)^2+(b-x)^2\right]\mathrm{d}x=\frac{M}{12}(b-a)^3$$

3 积分与不等式

3.1 转换为变上限积分

例题 3.1 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微, 且当 $x\in(0,1)$ 时, $0<f'(x)<1, f(0)=0$. 证明: $\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 > \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$.

证令 $F(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=0$, 且

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right].$$

由于 $f'(x)>0, f(0)=0$, 所以 $f(x)>f(0)=0$. 再设 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$, 则 $G(0)=0$, 且

$$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)\left[1-f'(x)\right]>0,$$

从而 $G(x)>G(0)=0$, 因此 $F'(x)>0(x\in[0,1])$. 于是当 $x\in[0,1]$ 时, $F(x)>F(0)=0$. 特别地, $F(1)>0$, 即题目所要求.

例题 3.2 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续且单调减, 证明当 $a\in(0,1)$ 时, 有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

1. 由于所证不等式等价于 $\dfrac{\int_0^a f(x)\mathrm{d}x}{a}\geqslant\dfrac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1}$, 令 $F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$, 则只需证明 $F(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$ 单调减即可. 事实上, 有

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{xf(x)-xf(\xi)}{x^2}=\frac{f(x)-f(\xi)}{x}\\&\leqslant 0(\xi\in(0,x),f\text{ 单调减}),\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 单调减, 故结论成立.

2. 利用变限积分函数证明. 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 1)$, 证 $F(x)\geqslant 0$. 因

$$F'(x)=f(x)-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(\xi),\quad \xi\in(0,1),$$

且由 $f(x)$ 单调减知在区间 $[0,\xi]$ 上 $F'(x)\geqslant 0$, 在区间 $[\xi,1]$ 上 $F'(x)\leqslant 0$, 故 $F(x)$ 的最小值为 $F(0)=F(1)=0$, 于是 $F(x)\geqslant 0(0\leqslant x\leqslant 1)$.

3.2 凸 (凹) 函数不等式

例题 3.3 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二次可导, 且 $f''(x)\leqslant 0$, 证明: $(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\geqslant\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$.

这里我们假设了 f 具有二阶导, 因此我们提供两种解法, 一种不要求函数具有高阶可导性, 一种要求. 先证 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$. 令 $F(t)=\displaystyle\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\dfrac{t-a}{2}[f(a)+f(t)](a\leqslant t\leqslant b)$, 则

$$\begin{aligned}F'(t)&=f(t)-\frac{1}{2}[f(a)+f(t)]-\frac{t-a}{2}f'(t),\\F''(t)&=\frac{1}{2}f'(t)-\frac{1}{2}f'(t)-\frac{t-a}{2}f''(t)=-\frac{t-a}{2}f''(t)\geqslant 0,\end{aligned}$$

于是 $F'(t)$ 单调增, 又 $F'(t)\geqslant F'(a)=0$, 故 $F(t)$ 单调增, 从而 $F(b)\geqslant F(a)=0$, 此即所证:

再证

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $F(t)=\displaystyle\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-(t-a)f\left(\dfrac{a+t}{2}\right)(a\leqslant t\leqslant b)$, 则

$$\begin{aligned}F'(t)&=f(t)-f\left(\frac{a+t}{2}\right)-(t-a)f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\\&=f'(\xi)\left(t-\frac{a+t}{2}\right)-\frac{1}{2}(t-a)f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\left(\frac{a+t}{2}<\xi<t\right)\\&=\frac{1}{2}(t-a)\left[f'(\xi)-f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

因为 $f''(x)\leqslant 0, f'(x)$ 递减, 故 $F'(t)\leqslant 0$. 故 $F(t)$ 单调减, 从而 $F(b)\leqslant F(a)=0$, 此即所证.

例题 3.4 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 下凸且连续, 证明: $(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\geqslant\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$.

证明

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) dx \\
&= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{0} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) dx + \int_0^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{b-a}{2}} \left[f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) + f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right] dx \\
&\geq 2\int_0^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

对于右边不等式, 令 $x = (1-t)a + tb, 0 \leq t \leq 1$, 得

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x) = (b-a)\int_0^1 f[(1-t)a+bt]dt \\
&\leq (b-a)\int_0^1 (1-t)f(a) + tf(b)dt = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}
\end{aligned}$$

定理 3.1 *若函数 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 且 $m \leq f(x) \leq M$, 又 $g(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续下凸函数, 则有:*

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\mathrm{d}x$$

若 $g(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续上凸函数时, 上式中的不等号相反.

例题 3.5 *证明: 对于连续函数 $f(x) > 0$, 有*

$$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

证明令 $g(x) = \ln x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x}, g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 即 $g(x)$ 为凹函数, 可由上式琴声不等式定理, 可得

$$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

或利用定积分定义, 将 $[0,1]$ 分 n 等分, 可取 $\Delta x = \frac{1}{n}$, 由"算术平均数 $\geq$ 几何平均数"得:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right) = \exp\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

然后两边取对数即证.

3.3 一些经典不等式的应用

例题 3.6 *(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(1) - f(0) = 1$. 证明: $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{~d}x \geqslant 1$.*

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x) \geqslant 0, \int_a^b f(x) = 1, \lambda$ 为实数. 证明:

$$\left[\int_a^b f(x)\sin\lambda x \mathrm{~d}x\right]^2 + \left[\int_a^b f(x)\cos\lambda x \mathrm{~d}x\right]^2 \leqslant 1.$$

(1) 因为 $1=f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$, 由柯西 - 施瓦兹不等式得

$$1^2=\left(\int_0^1 f'(x)\cdot 1\ \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 [f'(x)]^2\ \mathrm{d}x\cdot\int_0^1\ \mathrm{d}x=\int_0^1 [f'(x)]^2\ \mathrm{d}x,$$

(2) 由柯西 - 施瓦兹不等式得

$$\left[\int_a^b f(x)\sin\lambda x\ \mathrm{d}x\right]^2=\left[\int_a^b \sqrt{f(x)}\sqrt{f(x)}\sin\lambda x\ \mathrm{d}x\right]^2$$
$$\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\sin^2\lambda x\ \mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f(x)\sin^2\lambda x\ \mathrm{d}x.$$

同理可证:

$$\left[\int_a^b f(x)\cos\lambda x\ \mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f(x)\cos^2\lambda x\ \mathrm{d}x.$$

于是左边 $\leqslant \int_a^b f(x)\sin^2\lambda x\ \mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\cos^2\lambda x\ \mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1.$

例题 3.7 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. 试证 $\int_0^1\left(1+x^2\right)f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{\pi}$.

$$1=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left[\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\sqrt{1+x^2}f(x)\right)\mathrm{d}x\right]^2$$
$$\leqslant\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2\ \mathrm{d}x\cdot\int_0^1\left(\sqrt{1+x^2}f(x)\right)^2\ \mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\left(1+x^2\right)(f(x))^2\ \mathrm{d}x.$$

例题 3.8 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$, 证明: $1\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}$.

证明由柯西不等式有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1\sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=1.$$

又由于 $(f(x)-1)(f(x)-3)\leqslant 0$, 故有 $\frac{(f(x)-1)(f(x)-3)}{f(x)}\leqslant 0$, 即

$$f(x)+\frac{3}{f(x)}\leqslant 4,\ \text{从而}\int_0^1\left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\leqslant 4.$$

由均值不等式 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$, 得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2}{4}\leqslant 4.$$

定理 3.2 一般, 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$, 则

$$1\leqslant\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}$$

例题 3.9 设 $f \in C[0,1]$, 并且 $\int_0^1 f(x)dx = 1, \int_0^1 xf(x)dx = \frac{27}{2}$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)dx > 2021$$

乍一看, (心中暗暗一喜, 小问题还能难住我? 必然是要利用柯西不等式, 还不三下五除二?), 快快现原形! 哼! 我上来就是一个柯西不等式:

$$\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_0^1 x^2 \ \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \ge \frac{\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 x^2 \ \mathrm{d}x}$$

小手一算, 不对劲, 不对劲, 右边根本达不到 2021 啊? 怎么回事啊?

嗯? $f(x)$ 积分条件没用上, 怎么办? 那必然要出现这个积分, 又要用不等式, , 而且积分还要能算出来, 那只能是 $(x-a)f(x)$ 的积分了!

至于 a 是多少呢? 我也不知道, 大不了一会求函数最值算了! 好, 现在就来算:

$$\left(\int_0^1 (x-a)f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_0^1 (x-a)^2 \ \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \ge \frac{\left(\int_0^1 (x-a)f(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 (x-a)^2 \ \mathrm{d}x}$$

分子为: $\left(\frac{27}{2}-a\right)^2$, 分母为: $\frac{(1-a)^3}{3}+\frac{a^3}{3}$

取几能够使右边大于 2021 呢? 难道真要算函数的最值, 算了, 这个最值一看就不好算, 不如先试触一下, $a=\frac{1}{2}$ 可以吗? 可以！done!