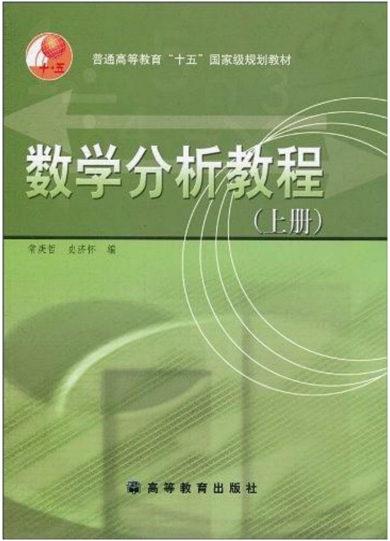
高等微积分

邹文明

第三章: 导数


普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学分析教程
（上册）
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

§3.5. 利用导数研究函数

定理 1. (函数的增减)

设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导. 则

(1) 函数 f 递增当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geqslant 0$;

(2) 函数 f 递减当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \leqslant 0$.

证明: (1) 充分性. 若 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) \geqslant 0$, 那么 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, 当 $x_2 > x_1$ 时, 由 Lagrange 中值定理可知, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

因此函数 f 为单调递增.

必要性. 设 f 单调递增, 则 $\forall x \in (a,b)$, 由导数定义以及函数极限保号性可知

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0.$$

故所证结论成立.

(2) 对 $-f$ 应用 (1) 结论立刻可知所证成立.

注: 由前面证明可知, 若 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) > 0$, 则 f 在 $[a,b]$ 上严格递增, 但其逆命题不成立. 例如 $f(x) = x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增, 但 $f'(0) = 0$.

定理 2. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 f 严格递增当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) \geqslant 0$ 且 f' 在 (a,b) 的任意子区间上不恒为零.

证明: 充分性. 假设 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geqslant 0$ 且 f' 在 (a,b) 的任意子区间上不恒为零. 则 f 递增. 如果 f 不为严格递增, 则 $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ 使得 $x_1 < x_2$, 但 $f(x_1) = f(x_2)$, 于是 f 在 $[x_1, x_2]$ 上取常值, 故 f' 在 (x_1, x_2) 上恒为零, 矛盾! 因此函数 f 为严格递增.

必要性. 如果 f 严格递增, 则 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) \geqslant 0$. 另外, 对于任意的子区间 $I \subseteq (a,b)$, 必存在 $x_1, x_2 \in I$ 使得 $x_1 < x_2$. 又由 Lagrange 中值定理可知, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得我们有

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0,$$

因此 f' 在 I 上不恒为零.

定理 $2'$. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 f 严格递减当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) \leqslant 0$ 且 f' 在 (a,b) 的任意子区间上不恒为零.

如何研究 (初等) 函数的单调性?

- 函数 f 的导数为零的点称为 f 的驻点.
- 驻点和导数不存在的点称为临界点.

确定 (初等) 函数单调性的具体步骤

- 计算导数, 找出临界点.
- 以临界点为端点来分割函数的定义域.
- 判断导函数在每个子区间的符号, 由此确定函数的单调性.

例 1. 求函数 $f(x)=x^4-2x^2$ 的单调区间.

解: 因函数 f 为初等函数, 故可导且

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1),$$

从而 f 的驻点为 $-1,0,1$. 由于 f' 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$ 上取负号, 而在 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上取正号, 因此 f 在 $(-\infty,-1]$ 和 $[0,1]$ 上为严格递减, 而在 $[-1,0]$ 和 $[1,+\infty)$ 上为严格递增.

例 2. 求函数 $f(x)=\frac{x}{3}-x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间.

解: 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上可导, 而 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 均有 $f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. 则 f 的驻点为 8, 其临界点为 0, 8. 由于 f' 在 $(-\infty,0)$ 和 $(8,+\infty)$ 上取正号, 于是函数 f 在 $(-\infty,0]$ 和 $[8,+\infty)$ 上严格递增. 同样因 f' 在 $(0,8)$ 上取负号, 故 f 在该区间上严格递减.

例 3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 求证: $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$, 则 f 为初等函数, 因此为无穷可导且

$$f'(x) = -\sin x + x.$$

于是 f' 在 $(0, +\infty)$ 上取正号, 而在 $(-\infty, 0)$ 上取负号, 从而函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上为严格递增, 而在 $(-\infty, 0]$ 上为严格递减, 则 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 我们有 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$.

例 4. 求证: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均有 $e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$.

证明: $\forall y \in \mathbb{R}$, 令 $f(y) = (1+y)e^{-y} - 1$. 则 f 为初等函数, 因此可导. 又 $\forall y > 0$, 均有

$$f'(y) = e^{-y} - (1+y)e^{-y} = -ye^{-y} < 0,$$

因而 f 在 $[0, +\infty)$ 上为严格递减, 从而 $\forall y > 0$, 我们有 $f(y) < f(0) = 0$, 也即 $e^{-y} < \frac{1}{1+y}$. 于是 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均有 $e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$.

函数的极值

定理 1. 假设 $x_0 \in (a,b)$, 并且函数 $f \in \mathscr{C}(a,b)$ 在 $(a,b) \setminus \{x_0\}$ 上可导.

(1) 若 f' 在 (a,x_0) 上非负而在 (x_0,b) 上非正, 则 x_0 为 f 的最大值点, 也为极大值点.

(2) 若 f' 在 (a,x_0) 上非正而在 (x_0,b) 上非负, 则 x_0 为 f 的最小值点, 也为极小值点.

证明: (1) 由于 f 在 $(a,x_0]$ 上递增, 在 $[x_0,b)$ 上递减, 故所证成立. 由 (1) 立刻可得 (2).

例 5. 求函数 $f(x)=|x|^{\frac{2}{3}}(x-1)$ 的极值点.

解: 由于 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-1)$, 则 f 为连续函数, 它在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上可导且 $f'(x)=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$. 于是 f 的临界点为 $0, \frac{2}{5}$, 且 f' 在 $(-\infty,0)$ 和 $(\frac{2}{5},+\infty)$ 上取正号, 而在 $(0,\frac{2}{5})$ 上取负号, 故 f 在点 $x=0$ 取极大值 0, 而在点 $x=\frac{2}{5}$ 取极小值 $-\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{\frac{2}{3}}$.

最大值与最小值

回顾: 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 上可导, 则 f 的最值点或者为端点, 或者为 f 的驻点.

确定最值的具体方法

- 求函数 f 在临界点处的值以及端点处的值, 比较大小以便确定最值.
- 若已知最值存在且在内部取到, 并且函数又只有一个临界点 (驻点), 则该点为所求解.

例 6. 求函数 $V(x)=x(50-2x)^2$ 在 $[0,25]$ 上的最大值. 解: 由于 V 为初等函数, 故连续, 则在 $[0,25]$ 上

有最大值. 又 $V(1)>0$, 并且 $V(0)=V(25)=0$, 于是 V 的最大值在 $(0,25)$ 内取到. 但

$$
\begin{aligned}
V'(x) &= (50-2x)^2+x\times 2(50-2x)\times(-2) \\
&= (50-2x)(50-6x).
\end{aligned}
$$

则 $\frac{25}{3}$ 为 V 在 $(0,25)$ 内的唯一驻点, 因此它是 V 的最大值点, 故最大值为 $V(\frac{25}{3})=\frac{250000}{27}$.

§3.6. L'Hospital 法则

定理 1. 假设$f(x), g(x)$ 在点x_0的某个去心邻域内可导，并且$g'(x) \neq 0$. 满足:

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或者等于$\pm\infty$ 或者∞;

那么 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

证明: 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, 我们可以假设$f(x_0) = g(x_0) = 0$. 这样, $f(x), g(x)$ 在x_0 的某个邻域内连续. 在这个邻域内任意取一个点x, 并且$x \neq x_0$. 在区间$[x, x_0]$ 或者$[x_0, x]$ 上用柯西中值定理:

$$\frac{f(x}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

这里ξ 在x, x_0 之间. 令$x \to x_0$即可.

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

解: $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

同学们辛苦了！