# 2016-2017春

# 线性代数期中考试

1. (10分) 设$C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$。求2阶正交阵将$C$相似对角化。

   **解答：**

   $C$的特征多项式为$f_C(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+3$. 所以其有两个特征值$\lambda_1=3,\lambda_2=1$.分别求得其对应的单位特征向量为

   $$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \quad 和 \quad p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

   令$p=[p_1,p_2]$，$\Lambda=\mathrm{diag}(3,1)$。则$P$是2阶正交阵，且

   $$C=P\Lambda P^{-1}=P\Lambda P^T.$$

2. (15分) 设$D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$。求3阶正交阵将$D$相似对角化。

   **解答：**

   $D$的特征多项式为$f_D(\lambda)=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$. 所以其有三个特征值$\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=0$. 分别求得其对应的单位特征向量为

   $$q_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\quad q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\quad q_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

   令$Q=[q_1,q_2,q_3]$，$\Lambda=\mathrm{diag}(3,1,0)$。则$Q$是3阶正交阵，且

   $$D=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T.$$

3. (15分) 设$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

   (1) 求$A$的奇异值分解。

   (2) 求朝$A$的列空间投影的投影矩阵。

(3) 证明$\mathbb{R}^2$中的单位圆周$S^1$在$A$下的像$A(S^1)$是$\mathbb{R}^3$中的一个椭圆周。求该椭圆周的长轴和短轴。

**解答：**

(1) 设$A$的奇异值分解为$A = U\Sigma V^T$。由奇异值分解的理论知，$V$是$A^TA$的特征向量矩阵。直接计算得

$$A^TA = C, \quad AA^T = D,$$

这里的$C$与$D$分别是第一题和第二题中出现的矩阵。所以我们可以取$V = P = [p_1, p_2]$。相应的，两个奇异值分别为

$$\sigma_1 = \sqrt{3}; \quad \sigma_2 = 1.$$

由SVD，直接计算得，

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = q_1; \quad u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = q_2.$$

我们取$u_3 = q_3$, 定义$U = [q_1, q_2, q_3]$. 所以我们得到$A$的奇异值分解$A = U\Sigma V^T$, 其中

$$U = Q; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V = P.$$

(2) 注意到$\{u_1, u_2\}$是$C(A)$的一组标准正交基. 由投影矩阵的性质知该投影矩阵即为

$$[u_1, u_2][u_1, u_2]^T = u_1u_1^T + u_2u_2^T == \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) 设$x \in S^1$. 则$y = Ax = U\Sigma V^Tx \in A(S^1)$. 令

$$\hat{x} = V^Tx; \quad \hat{y} = U^Ty.$$

我们得到$\hat{y} = \Sigma\hat{x}$. 从而

$$\hat{y}_1 = \sqrt{3}\hat{x}_1; \quad \hat{y}_2 = \hat{x}_2; \quad \hat{y}_3 = 0.$$

由于$V^T$是正交矩阵，我们有$\|\hat{x}\| = \|x\| = 1$, 从而

$$\frac{\hat{y}_1^2}{3} + \hat{y}_2^2 = 1.$$

这说明$\hat{y}$的轨迹是以$\sqrt{3}e_1$为半长轴，$e_2$为半短轴的$XoY$平面上的椭圆。由于$U$是正交变换，且$y = U\hat{y}$, 我们得到$A(S^1)$是以$\sqrt{3}Ue_1 = \sqrt{3}u_1$为半长轴，$Ue_2 = u_2$为半短轴的椭圆。

4. (15分) 定义$A$如上。

(1) 求$A$的伪逆$A^+$。

(2) 证明$\mathbb{R}^3$中的单位球面$S^2$在$A^+$下的像$A^+(S^2)$是$\mathbb{R}^2$中的一个实心椭圆。求该椭圆的长轴和短轴。

(3) 求$Ax = b$的最小二乘解，其中$b = (1, 2, 3)^T$。

**解答：**

(1) 由伪逆的定义，

$$A^+ = V\Sigma^+U^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) 设$x \in S^2$, 则$y = A^+x = V\Sigma^+U^Tx \in A^+(S^2)$. 令

$$\hat{x} = U^Tx; \quad \hat{y} = V^Ty.$$

我们得到$\hat{y} = \Sigma^+\hat{x}$. 从而

$$\hat{y}_1 = \frac{\hat{x}_1}{\sqrt{3}}; \quad \hat{y}_2 = \hat{x}_2.$$

由于$U^T$是正交矩阵，我们有$\|\hat{x}\| = \|x\| = 1$, 从而

$$3\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2 = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 = 1 - \hat{x}_3^2.$$

这说明当$\hat{x}_3 = t \in [0, 1]$时，$\hat{y}$的轨迹是$\mathbb{R}^2$中以$\sqrt{(1-t^2)/3}e_1$为半短轴，$\sqrt{1-t^2}e_2$为半长轴的椭圆。当$t$从0连续变动到1时，我们得到，$\hat{y}$的轨迹是以$\frac{e_1}{\sqrt{3}}$为半短轴，$e_2$为半长轴的实心椭圆。由于$V$ 是正交变换，且$y = V\hat{y}$, 我们得到$A^+(S^2)$是以$\frac{Ve_1}{\sqrt{3}} = \frac{v_1}{\sqrt{3}}$为半短轴，$Ve_2 = v_2$ 为半长轴的实心椭圆。

(3) 由于此时$A$是列满秩的，所以其最小二乘解唯一，且可由$x^+ = A^+b$给出。计算得

$$x^+ = A^+b = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. (10分) 判定$f(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2+2xy+4yz$在$(0,0,0)$处是否有极大值或者极小值，并说明理由。

**解答：**

我们可以改写$f$为

$$f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=:u^TAu.$$

我们来判断$A$的正定性。直接计算得

$$\det A_1=1;\quad \det A_2=1;\quad \det A_3=\det A=-2.$$

所以$A$可逆，但是$A$既不正定,也不负定。由此说明$A$有且仅有一个负特征根。设$\lambda_1,\lambda_2>0,\lambda_3<0$ 是它的三个特征值。设$Q$正交使得$A=Q\Lambda Q^T$, 其中$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.令$v=Q^Tu$. 则

$$f(x,y,z)=v^T\Lambda v=\lambda_1v_1^2+\lambda_2v_2^2+\lambda_3v_3^2.$$

取$(x_1,y_1,z_1)^T=Qe_1$, 则只要$t\neq 0$,

$$f(tx_1,ty_1,tz_1)=\lambda_1t^2>0.$$

取$(x_2,y_2,z_2)^T=Qe_3$, 则只要$t\neq 0$,

$$f(tx_2,ty_2,tz_2)=\lambda_3t^2<0.$$

由此我们断言，$f$在零点处既没有极大值也没有极小值。

6. (15分) 设$a$是实数。定义$S_a:=\begin{pmatrix}a&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

(1) 证明：当$|a|>2$时，$S_a$可以相似对角化。求$S_a^{100}$.

(2) 证明：当$a=\pm 2$时，$S_a$不能对角化。求$S_a$的Jordan标准型。

(3) 证明：当$|a|<2$时，$S_a$与某旋转矩阵相似。求$S_a^{100}$.

**解答：**

直接计算得

$$f_{S_a}(\lambda)=\lambda^2-a\lambda+1.$$

(1) 如果$|a|>2$, 则$S_a$有两个互异实特征值

$$\lambda_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2};\quad \lambda_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}.$$

计算得它们对应的特征向量分别为

$$p_1=\begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix}$$

令$P=[p_1,p_2],\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$, 则

$$S_a=P\Lambda P^{-1};\quad S_a^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}.$$

(2)先假设$a=2$. 则$f_{S_2}(\lambda)=(\lambda-1)^2$. 所以1是$S_2$的代数重数为2的唯一特征根。计算得$x=(1,1)^T$ 是$S_2$唯一的线性无关的特征向量。从而$S_2$不可对角化。由Jordan标准型定理, $S_2$的Jordan标准型只能是

$$J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

(方法二：取$y=e_1$. 直接计算得

$$S_2y=S_2e_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=x+y.$$

令$M=[x,y]$，则

$$S_2M=S_2[x,y]=[S_2x,S_2y]=[x,x+y]=[x,y]\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=MJ.$$

所以$S_2=MJM^{-1}$。从而$J$是$S_2$的Jordan标准型。)
完全一样的证明可以得到，$S_{-2}$的Jordan标准型是

$$\tilde{J}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}.$$

(3) 当$|a|<2$时，$S_a$没有实特征值。此时

$$\lambda_1=\frac{a+i\sqrt{4-a^2}}{2};\quad \lambda_2=\frac{a-i\sqrt{4-a^2}}{2}.$$

注意到$|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$且它们互为共轭，所以存在$0<\theta<\pi$ 使得

$$\lambda_1=e^{i\theta},\quad \lambda_2=e^{-i\theta}.$$

设$z = u + iv$是$\lambda_1$对应的特征向量，其中$u, v \in \mathbb{R}^2$。首先我们断言$u, v$线性无关。否则，不妨设$v = tu$. 则我们有$z = (1 + ti)u$. 由$S_a z = e^{i\theta} z$, 我们得到$S_a u = e^{i\theta} u$, 但这是不可能的，因为左边是实向量，而右边的向量的虚部不为零（$\sin\theta \neq 0$.）

由$S_a z = e^{i\theta} z$，分开实部与虚部可得

$$S_a u = u\cos\theta - v\sin\theta;\quad S_a v = u\sin\theta + v\cos\theta.$$

令$P = [u, v]$，则$P$可逆，且

$$S_a P = P\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

即$S_a = PR_{-\theta}P^{-1}$. 从而

$$S_a^{100} = PR_{-100\theta}P^{-1}.$$

7. (12分) 设$Q$是一个3阶正交阵且行列式为1。

(1) 证明$Q$必有一个特征值为1.

(2) 设$v_1$是1对应的单位特征向量。令$W$是与$v_1$垂直的二维子空间。证明$W$是$Q$的不变子空间，即任给$w \in W$, 都有$Qw \in W$。

(从而$Q$是从$W$到$W$的一个线性变换)

(3) 取定$W$的一组标准正交基$v_2, v_3$。则$\{v_1, v_2, v_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一个标准正交基。证明$Q$在这组基的选取下的矩阵实现形如

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & a & b \\ & c & d \end{pmatrix}.$$

(4) 证明$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$是线性变换$Q: W \to W$在$W$选取基底$\{v_2, v_3\}$下的矩阵实现。证明$\widetilde{Q}$是一个二阶旋转矩阵。

(注：本题的目的是证明，$Q$本质上可以看成绕由$v_1$确定的轴的旋转)

**证明：**

(1)设$f_Q(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$是$Q$的特征多项式。因为$Q$是正交阵，所以对$i = 1, 2, 3$, $|\lambda_i| = 1$. 又因为$f_Q$是实系数多项式，所以

其复根（非实数）必成对出现且互为共轭。从而$f_Q$必有一个实根。所以本质上有两种情形：

(i) $f_Q$有一个实根$\lambda_1$和两个复根$\lambda_2 = e^{i\theta}, \lambda_3 = e^{-i\theta}$。此时，由

$$1 = \det Q = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

可得$\lambda_1 = 1$.

(ii) $f_Q$有三个实根, 且绝对值都等于1。因为$\det Q = 1$, 所以要么三个根都为1，要么一个根为1，另外两根为$-1$.

(2) 任取$w \in W$, 则$w \perp v_1$. 由$v_1$是$Q$特征向量，且$Q^T = Q^{-1}$,我们有$Q^T v_1 = Q^{-1} v_1 = v_1$. 从而

$$(Qw)^T v_1 = w^T Q^T v_1 = w^T v_1 = 0.$$

这说明$Qw \perp v_1$. 由$W$的定义知，$Qw \in W$.

(3) 已知$Qv_1 = v_1$. 由于$v_2, v_3 \in W$, 由(2)知，$Qv_2, Qv_3 \in W$. 从而存在$a, b, c, d \in \mathbb{R}$使得

$$Qv_2 = av_2 + cv_3; \quad Qv_3 = bv_2 + dv_3. \tag{1}$$

从而线性变换$Q$在基底$\{v_1, v_2, v_3\}$下的矩阵实现为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & a & b \\ & c & d \end{pmatrix}.$$

(4) 由式(1)直接可得，$\widetilde{Q}$是线性变换$Q : W \to W$在$W$选取基底$\{v_2, v_3\}$下的矩阵实现。令$V = [v_1, v_2, v_3]$, 则$V$是正交矩阵。(3)的证明过程表明

$$QV = VP.$$

从而$P = V^T Q V$是三个正交矩阵的乘积，也是正交矩阵。且$\det P = \det Q = 1$. 由此可得$\widetilde{Q}$是一个二阶正交阵，且行列式为1，其必然是一个二阶旋转矩阵。

8. (8分) 设$A$是$n$阶实对称矩阵且$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$是$A$的$n$个特征根。

(1) 证明：

$$\lambda_1 = \min_{\dim V = 1} \max_{\vec{0} \ne v \in V} \frac{v^T A v}{v^T v}.$$

(1) 证明：对$2 \le k \le n$，

$$\lambda_k = \min_{\dim V = k} \max_{\vec{0} \neq v \in V} \frac{v^T A v}{v^T v}.$$

**证明：**

定义$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 设正交阵$Q$使得

$$A = Q \Lambda Q^T.$$

则$A q_i = \lambda_i q_i$.

(1) 首先取$V_* = s(q_1)$. 则任给$v \in V_*$，有$v = t q_1$. 从而

$$\frac{v^T A v}{v^T v} = \lambda_1.$$

这说明

$$\lambda_1 = \max_{\vec{0} \neq v \in V_*} \frac{v^T A v}{v^T v} \ge \min_{\dim V = 1} \max_{\vec{0} \neq v \in V} \frac{v^T A v}{v^T v}. \tag{2}$$

另一方面，任取$V$是一维子空间，任取$\vec{0} \neq v \in V$。令$w = Q^T v$, 则

$$v^T A v = v^T Q \Lambda Q^T v = w^T \Lambda w = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i w_i^2 \ge \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} w_i^2 = \lambda_1 w^T w.$$

同时

$$v^T v = (Qw)^T Q w = w^T w.$$

所以我们得到

$$\frac{v^T A v}{v^T v} \ge \lambda_1.$$

这说明

$$\lambda_1 \le \max_{\vec{0} \neq v \in V} \frac{v^T A v}{v^T v}.$$

由于$V$是任意选取的一维子空间，所以我们得到

$$\lambda_1 \le \min_{\dim V = 1} \max_{\vec{0} \neq v \in V} \frac{v^T A v}{v^T v}. \tag{3}$$

由式(2)和式(3), 我们证明了(1)。

(2) 首先取$V^* = s(q_1, \cdots, q_k)$. 则任给$v \in V_*$，有

$$v = t_1 q_1 + \cdots + t_k q_k = Q \begin{pmatrix} t \\ \vec{0} \end{pmatrix},$$

其中$t = (t_1, \cdots, t_k)^T$不为零向量, $\vec{0}$是$n-k$维零向量。从而

$$\frac{v^T A v}{v^T v} = \frac{v^T Q \Lambda Q^T v}{v^T v} = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j t_j^2}{\sum_{j=1}^k t_j^2} \le \lambda_k.$$

这说明

$$\lambda_k \ge \max_{\vec{0} \ne v \in V^*} \frac{v^T A v}{v^T v} \ge \min_{\dim V = k} \max_{\vec{0} \ne v \in V} \frac{v^T A v}{v^T v}. \tag{4}$$

另一方面，定义

$$W := s(q_k, q_{k+1}, \cdots, q_n).$$

则$W$是一个$n-k+1$维子空间。任取$V$是一个$k$维子空间, 我们断言$W \cap V$是一个维数大于等于1的子空间。事实上，由维数公式（见教材P183，第43 题）

$$\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) \ge k + (n - k + 1) - n = 1.$$

任取$\vec{0} \ne v \in V \cap W$。有

$$v = s_k q_k + \cdots + s_n q_n = Q \begin{pmatrix} \vec{0} \\ s \end{pmatrix},$$

其中$s = (s_k, \cdots, s_n)^T$不为零向量, $\vec{0}$是$k-1$维零向量。从而

$$\frac{v^T A v}{v^T v} = \frac{v^T Q \Lambda Q^T v}{v^T v} = \frac{\sum_{j=k}^n \lambda_j s_j^2}{\sum_{j=k}^n s_j^2} \ge \lambda_k.$$

由于$v \in V$, 这说明

$$\lambda_k \le \max_{\vec{0} \ne v \in V} \frac{v^T A v}{v^T v}.$$

由于$V$是任意一个$k$维子空间，所以

$$\lambda_k \le \min_{\dim V = k} \max_{\vec{0} \ne v \in V} \frac{v^T A v}{v^T v}. \tag{5}$$

由式(4)和式(5), 我们证明了(2)。