样题分析

邢文训

2020年12月23日

提纲

- 难易程度
- 内容分配
- 题目简单解答

难易程度

- 七章内容11题
- 概念与计算：87分，题1-题10。
- 证明：13分，题9(c)，题11。
- 送分，26+分，题1，题2，题3.
- 简单、中度，69-分，题4-题10
- 难题，5分，11题。

内容分布

- 第1、2章：题3（主题），涉及几乎所有题目。
- 第三章：内积及正交性。题5（主题），判断正交矩阵，列正交矩阵，投影矩阵，正交投影，题10（2），Schmidt正交化。
- 第四章：行列式。题6（主题），题7（主题），题1，题2，题4.
- 第五章：特征值特征向量。题4（主题），题1，题2，题9，题10，题11。
- 第六章：实对称矩阵。题9（主题），题10（主题），题11（主题），题1，题2，特别奇异值分解.
- 第七章：线性空间和线性映射。题8（主题）

一、送分题目

题1 (8分). 判断以下矩阵是否可以相似对角化，并简单说明理由。

$$(a)\begin{bmatrix}3&4\\0&5\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}100&200\\0&100\end{bmatrix}\qquad (c)\begin{bmatrix}23&69&188\\69&45&202\\188&202&68\end{bmatrix}\qquad (d)\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\4&8&12\end{bmatrix}$$

解1. *(a)* 可对角化，因为有两个互异特征值。

(b) 不可对角化，因为特征值唯一，但是*100*的几何重数是*1*，小于它的代数重数*2*.

(c) 可对角化，因为实对称阵都可对角化。

(d) 可对角化。这是一个秩为*1*的矩阵，故*0*的几何重数是*2*，迹是*17*，故第三个特征值是*17*，*17*的几何和代数重数都为*1*，*0*的几何和代数重数都为*2*.

题2 (8分). 判断以下实对称阵是否正定，并简单说明理由。

$$(a)\begin{bmatrix}1&2\\2&6\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$(c)\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\3&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-2&3\\0&0&3\end{bmatrix}\qquad (d)\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-6&0\\0&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

清華大學 Tsinghua University

题3 (10分). 设$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$，分别找出$N(A)$, $N(A^T)$, $C(A)$, $C(A^T)$的一组基。

解3. *(1)* $(1,0,1,1,1)$, $(0,1,1,1,1)$, $(0,0,0,1,1)$ 是$C(A^T)$ 的一组基。

(2) $N(A)$ 的基是$(-1,-1,1,0,0)$, $(0,0,0,-1,1)$.

(3) $\mathbb{R}^3$ 的任意一组基均为$C(A)$ 的基。

(4) 基是空集。

清華大學 Tsinghua University

二、简单到中度难度

题4 (5分). 设$P=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}$. 求$P$ 的特征多项式，并说明理由。

解4. 特征多项式是$\lambda(\lambda-1)^2$。

利用$|\lambda I-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda I-BA|$, B为最右侧矩阵，A为余下，或直接计算。

清華大學 Tsinghua University

题5 (16分). 设

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

第一个矩阵记为Q，第二个矩阵记为R.

(1) (2分) 验证$Q^TQ=I$.　　(1) 送分

(2) (6分) 求到$C(A)$ 的投影矩阵。

(3) (8分) 设$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\end{bmatrix}$. 求$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解。

(2) 和 (3) 计算概念和公式

解5. *(1)* 略。

(2) 到$C(A)$ 的投影矩阵是

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

(3) 最小二乘解是$\hat{x}=(2\sqrt{2}+4,-2,2)$.

题6 (6分). 已知：整数1653, 2581, 3451, 4582可以被29整除. 证明下面的四阶行列式值被29整除.

$$\begin{vmatrix}1 & 6 & 5 & 3\\ 2 & 5 & 8 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 1\\ 4 & 5 & 8 & 2\end{vmatrix}$$

直接计算或利用第4列1000倍，第三列100倍，第二列10倍加到第一列。

题7 (6分). 解关于x的方程

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & -2 & 4 & -8\\ 1 & x & x^2 & x^3\end{vmatrix}=0.$$

解7. $x=1,\ 2,$ 或-2.

一元三次多项式，范式行列式。

题8 (6分). 定义$M_2(\mathbb{R})$上线性变换$T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 满足

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求T在基$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$下的矩阵。

送分题，第七章，
概念清楚！，

解8. T 在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵是$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

题9 (20分). 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a)送分计算！

(a) (10分) 求A的奇异值分解$A = U\Sigma V^T$，其中U 是3阶正交阵，V 是2阶正交阵。

(b) (2分) 应用(a)写出A的四个基本子空间的一组标准正交基。

(c) (8分) 设$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$. 若$A\boldsymbol{v} = \sigma \boldsymbol{u}$, 其中$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$是奇异向量(singular vector), σ是奇异值(singular value), 证明$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}$是$M$的特征向量，并由此应用奇异向量给出5阶正交阵$Q$，使得$Q^T MQ$是对角阵.

解9. *(a)* $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(b) 略。

(c)

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

M实对称矩阵，
$(u^T,v^T)^T$ 对应σ的特征向量，
$(u^T,-v^T)^T$ 对应$-\sigma$的特征向量！

题10 (10分). 在以下两题中选且仅选一道题完成。

(1) $C: 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 1$ 是实平面上哪种二次曲线，椭圆、双曲还是抛物线？若C 是椭圆，请算出它的长、短轴长，以及长、短轴所在的直线方程；若C 是双曲线，请算出它的虚、实轴长以及虚、实轴所在的直线方阵，以及两条渐近线方程；若C 是抛物线，请算出它的顶点以及对称轴方程。

(2) 令 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. 求4阶正交阵$Q$ 和对角阵Λ 使得$Q^T AQ = \Lambda$.

（2）给分题，实对称矩阵计算特
征值特征向量和Schmidt正交化。

解10. *(1)* 椭圆。长轴长$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 短轴长$\frac{2}{\sqrt{7}}$，长轴所在直线方程是$x + 2y = 0$, 短轴所在直线方程是$2x - y = 0$.

(2)

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

三、难度较大（证明）题

题11 (5分). 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, A 的算子范数(operator norm) 是

$$\|A\| = \max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|A\boldsymbol{v}\| = \max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{\|A\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

试证：

$$\|A\| = \max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1}} \boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{v}.$$

解11. 先证对任意的$\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$, 有

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m \\ \|\boldsymbol{u}\|=1}} \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{w}\|.$$

当$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ 时，等式显然成立。当$\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ 时，一方面由*Cauchy-Schwarz*不等式知

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} \leq |\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\ \|\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{w}\|.$$

另一方面，若令$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}$, 则$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{w}^T}{\|\boldsymbol{w}\|}\boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{w}\|$. 故等式得证。

回到原命题有

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1}} \boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{v} = \max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|A\boldsymbol{v}\| = \|A\|.$$

第二个等号用的是$\|A\|$ 的定义。

学习快乐！考试成功！