第17课：定积分概念与计算-可积函数的性质

第7章 函数的积分

- **内容：**

 第7.1节 定积分概念与初步计算

 第7.2节 可积函数的性质

第17-1课：定积分概念-来源与定义

定积分概念

- **问题来源（几何物理背景）**
- **实例1：** 曲边梯形的面积

设 $f \in C[a,b]$ 且 $f \geq 0$，如图记

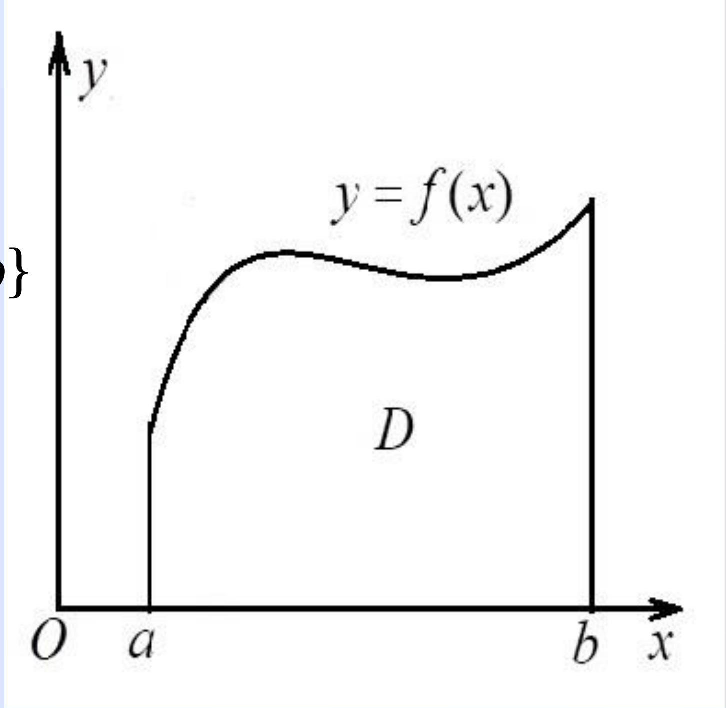
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

这是xy平面上由4条曲(直)线

$x=a,\ \ x=b,\ \ y=0,\ \ y=f(x)$

围成的平面区域，称为曲边梯形

求D的面积A=?



第17-1课：定积分概念-来源与定义

- **实例1 (续)：** 曲边梯形的面积
- **方法：** 分割为小长方形-将面积叠加-逼近

1) 有限分割：将区间$[a,b]$任意有限分割, 记为

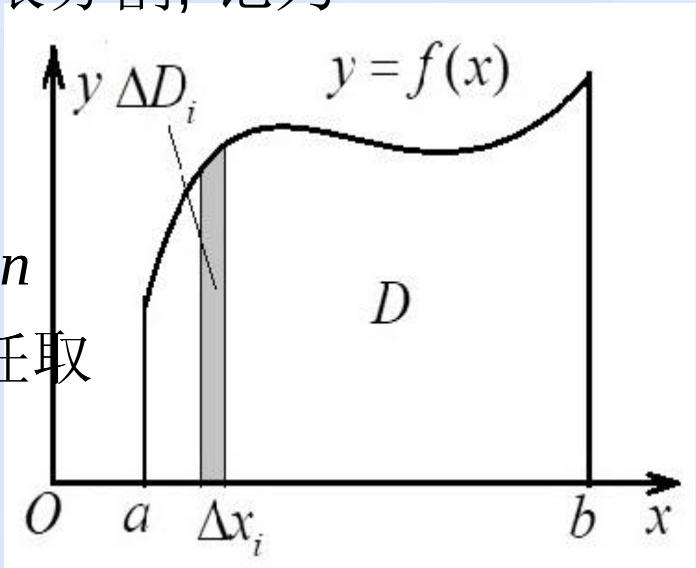
$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

记 $\|T\| = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n} \Delta x_i,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

2) D分割为子区域 $\Delta D_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$

面积为 $\Delta A_i \approx f(c_i)\Delta x_i,\ c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 任取

求和得 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$



3) 分割越细, 误差越小：令 $\|T\| \to 0$（分割无限加细）

逼近准确值 $A = \lim\limits_{\|T\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

第17-1课：定积分概念-来源与定义

- **实例2**：变速直线运动物体的位移

  设物体在t时刻运动速度为$v(t)$, 求时段$[a,b]$内的总位移S=?

- **方法**：利用分段匀速运动的位移来逼近变速运动的位移

  1) 有限分割：将时段$[a,b]$任意有限分割, 记为

  $$T:\quad a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

记 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n,\quad \|T\|=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\Delta t_i$

  2) 在时段$[t_{i-1},t_i]$内物体位移$\Delta S_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i$，$\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$（任取）

求和得到 $$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$$

  3) 分割越细, 误差越小：令 $\|T\|\to 0$（分割无限加细）

逼近实际位移 $$S=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$$

第17-1课：定积分概念-来源与定义

- **抽象提升——**归纳类似问题的处理方法, 抽象出新概念
- **积分：** 设 $f:[a,b]\to \mathrm{R}$, 如果 $\exists A\in \mathrm{R}$ 使得

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$, 对于区间$[a,b]$上任意有限分割

$$T:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

记分割宽度 $\|T\|=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\Delta x_i$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$

只要 $\|T\|<\delta$, 必有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - A\right|<\varepsilon,\ \text{其中 } c_i\in[x_{i-1},x_i]\text{ 任取},\ i=1,2,\cdots,n$$

这时称 f 在$[a,b]$上Riemann可积, 记为 $f\in R[a,b]$, 并记

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A=\int_a^b f(x)dx$$

称之为 f 在$[a,b]$上的积分值, a—积分下限, b—积分上限

第17-1课：定积分概念-来源与定义

- **注1**：$\int_a^b f(x)dx$ 也称为是 f 在$[a,b]$上的定积分

注意与不定积分 $\int f(x)dx$ 区别

$$\int_a^b f(x)dx \quad —— \quad \text{一个实数(和式的极限)}$$

$$\int f(x)dx \quad —— \quad \text{一族函数(彼此相差一个常数)}$$

- **注2**：若 f 在$[a,b]$上Riemann可积, 则

—— 积分值与积分变量无关

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

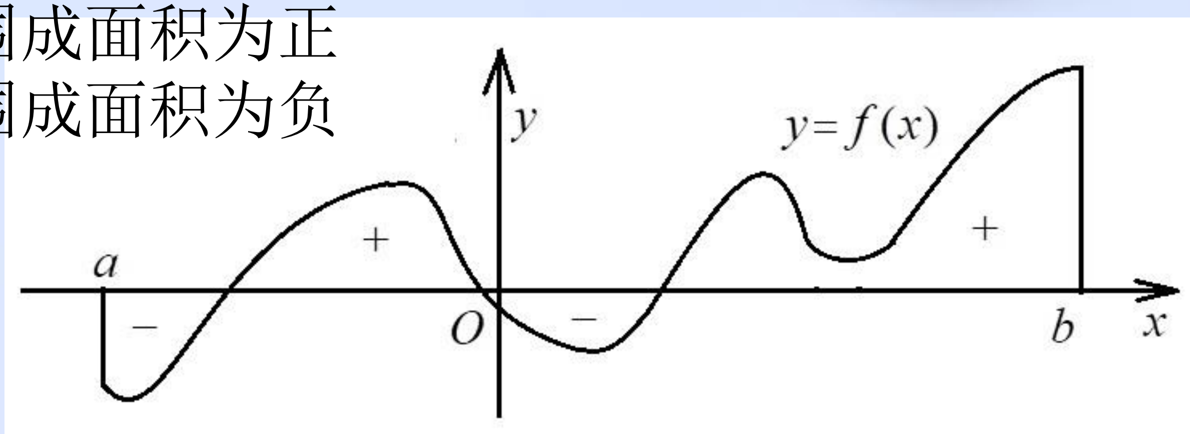
第17-1课：定积分概念-来源与定义

- **几何意义：** 曲边梯形的有向面积/代数面积

参见下图(不限制 f 的符号)：

x轴上方部分围成面积为正
x轴下方部分围成面积为负

$$A=\int_a^b f(x)dx$$



- **物理意义：**

变速直线运动物体位移 (分段匀速运动叠加逼近)

变力做功 (分段常力做功叠加逼近)

非均匀细棒的总质量 (分段均匀细棒质量叠加逼近)

第17-1课：定积分概念-来源与定义

- **积分的性质-1**
- **线性性质**：设 $f, g \in R[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, 则

$$\alpha f + \beta g \in R[a,b] \qquad \text{——} \ R[a,b]\text{构成线性空间}$$

且 $$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

证：任取$[a,b]$上有限分割T：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \mathrm{L} < x_n = b$

令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\forall c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \mathrm{L}, n$, 考虑相应和式

$$\sum_{i=1}^n [\alpha f(c_i) + \beta g(c_i)]\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(c_i)\Delta x_i$$

令 $\|T\| = \max\limits_{i=1,2,\mathrm{L},n} \Delta x_i \to 0$, 右端有极限 $\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

所以左端有相同极限, 依照定义 $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ 且L　　W

第17-1课：定积分概念-来源与定义

- **积分的性质-2**
- **保号性质**：设 $f \in R[a,b]$, 且 $f \geq 0$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

本质上就是极限的保号性质，证明留作练习

- **推论1** (保序性质)：设 $f, g \in R[a,b]$, 且 $f \geq g$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

证：线性性质+保号性质 (自己练习)

- **推论2**：设 $|f|, f \in R[a,b]$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

证：注意 $\pm f \leq |f|$ ……

第17-1课：定积分概念-来源与定义

- **积分的性质-3**
- **区间可加性质：** 设 $a<c<b$，则

$$f\in R[a,b]\Leftrightarrow f\in R[a,c] \text{ 且 } f\in R[c,b]$$

这时有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (回忆几何意义)

证明留到下次。

- **规定：** $\int_a^a f(x)dx=0,\quad \int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$
- **推论1：** $\int_a^b f(x)dx+\int_b^a f(x)dx=\int_a^a f(x)dx$
- **推论2：** $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

注： 这说明区间可加等式与 **a,b,c** 大小无关，只要 f 可积

第17-2课：定积分的计算

定积分的计算

- **初步计算方法：** 先假设 $f \in R[a,b]$（后面讨论如何判断）

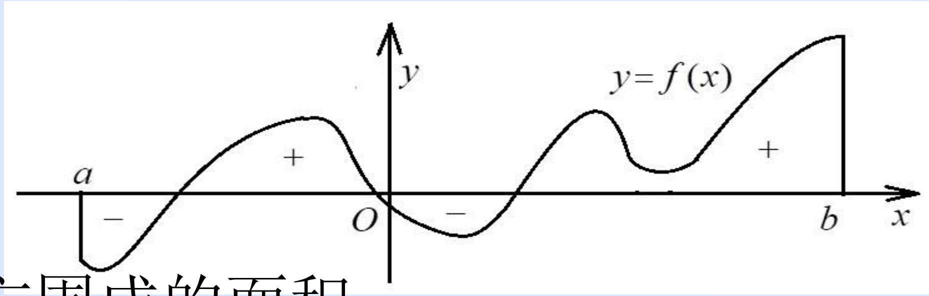
  1) 利用定义：为简化计算通常取均匀分割

$$T: \ \Delta x = \frac{b-a}{n}, \ x_i = a + i\Delta x, \ i = 0,1,\cdots,n$$

则 $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$ (比如取定c_i=x_i)

  2) 借助几何意义

$$\int_a^b f(x)dx = A^+ - A^-$$



其中A^+表示$y=f(x)$在x轴上方围成的面积

A^-表示$y=f(x)$在x轴下方围成的面积

第17-2课：定积分的计算

✓ **例1**：$f_1(x) \equiv c,\ x \in [a,b]$

取$[a,b]$的均匀分割T：$\Delta x = \dfrac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x,\ i = 0,1,\cdots,n$

则分割的宽度$\|T\| = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$，所以$\|T\| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$

考察这个分割下函数的和式

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x = c\sum_{i=1}^{n}\Delta x = c(b-a)$$

$$\therefore \int_a^b f_1(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i)\Delta x = c(b-a),\ \text{也即} \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

➢ **推论 (估值性质)**：设 $f \in R[a,b]$ 且$m \le f(x) \le M$，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

第17-2课：定积分的计算

✓ 例2：$f_2(x)\equiv x,\ x\in[a,b]$

仍然取均匀分割T同上，注意 $x_i = a + i\Delta x,\ i = 0,1,L\ ,n$

这时函数的和式

$$\sum_{i=1}^{n} f_2(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(a+i\Delta x)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} a\Delta x + \sum_{i=1}^{n} i\Delta x^2$$

其中 $\sum_{i=1}^{n} a\Delta x = a(b-a)$

$$\sum_{i=1}^{n} i\Delta x^2 = \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2} \to \frac{(b-a)^2}{2} \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore \int_a^b f_2(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(a+i\Delta x)\Delta x = a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2$$

也即 $\int_a^b xdx = a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$ W

第17-2课：定积分的计算

✓ 例3：$\int_{-3}^{0}(2x+\sqrt{9-x^2})dx=?$

解：假设被积函数是可积的, 则可以利用积分线性性质以及例2结果和积分的几何意义

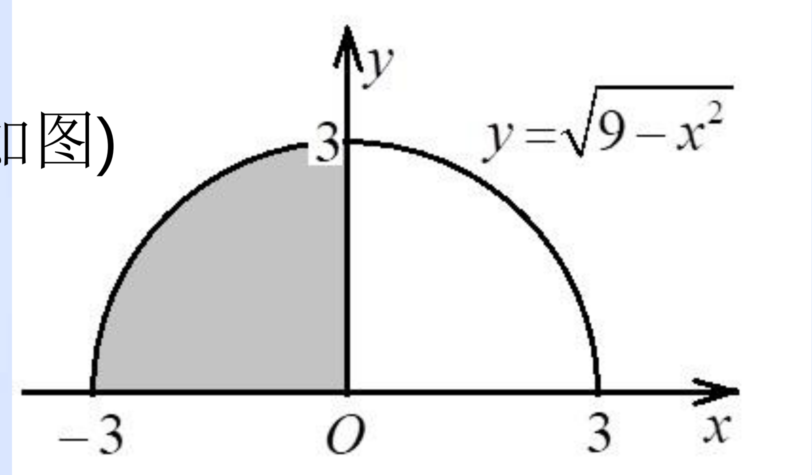
$$\int_{-3}^{0}(2x+\sqrt{9-x^2})dx$$

$$=2\int_{-3}^{0}xdx+\int_{-3}^{0}\sqrt{9-x^2}dx \quad \text{(如图)}$$

$$=[0^2-(-3)^2]+\frac{1}{4}\pi 3^2$$

$$=-9+\frac{9}{4}\pi$$

W



第17-2课：定积分的计算

✓ **例4**： $f_4(x)=\begin{cases}3, & x<3\\ 4x, & x\ge 3\end{cases}$ 计算 $\int_0^5 f_4(x)dx=?$

解：根据区间可加性质，f_4(x)在区间[0,5]上可积当且仅当在[0,3]上和[3,5]上都可积，这时有

$$\int_0^5 f_4(x)dx=\int_0^3 f_4(x)dx+\int_3^5 f_4(x)dx$$

$$=\int_0^3 3dx+\int_3^5 4xdx \text{ [注]}$$

$$=3\cdot 3+2(5^2-3^2)=41$$

W

- **注**：虽然f_4(3)=12≠3，但不影响积分结果

一般而言，函数改变个别点的值，不会影响区间上积分的值

第17-2课：定积分的计算

- **Newton-Leibniz公式**

  设 $f \in R[a,b]$ 且在(a,b)上有原函数 $F \in C[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{\text{记为}}{=} F(x)\Big|_a^b$$

- **注：** 不定积分包含了所有原函数, 所以公式也可写成

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b$$

由此可以看出定积分与不定积分的联系

- **N-L公式** (另一种表述)

  设 $F \in C[a,b]$ 在(a,b)内可导, 且导函数在$[a,b]$上可积, 则

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b dF(x) = F(x)\Big|_a^b$$

第17-2课：定积分的计算

- **N-L公式的证明：**

取$[a,b]$上均匀分割 T：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

其中 $x_i = a + i\Delta x,\ i = 0,1,\cdots,n,\ \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

这时 $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})]$

在每个区间$[x_{i-1},x_i]$上应用Lagrange中值公式得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x,\quad c_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

已知 $F' = f \in R[a,b]$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

这说明 $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ W

第17-2课：定积分的计算

- 例5：$\int_a^b x^p dx = ?$

解：$p \neq -1,\ b > a > 0$ 时（$p \in \mathrm{N}$时 a, b 可以任意）

$$\int_a^b x^p dx = \int x^p dx \Big|_a^b = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \Big|_a^b = \frac{1}{p+1}(b^{p+1} - a^{p+1})$$

$p = -1,\ ab > 0$ 时

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int \frac{dx}{x} \Big|_a^b = \ln|x|\Big|_a^b = \ln\left|\frac{b}{a}\right|$$

W

- 特例：$p=1$，$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$　（与例2 结果一致）

可积函数的性质

- **目的**：找出可积函数的特性，确定何种函数是可积的
- **有界性 (必要条件)**：若 $f\in R[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上有界

论证：令 $\int_a^b f(x)dx=A$，根据积分定义，存在均匀分割

$$T:\quad x_i=a+i\Delta x,\ i=0,1,\cdots,n,\ \Delta x=\frac{b-a}{n}$$

使得 $\left|\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x-A\right|<1,\quad c_i\in[x_{i-1},x_i]$ 任取，$i=1,2,\cdots,n$

由此导出

$$\left|\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x\right|<\left|\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x-A\right|+|A|<1+|A|$$

因此

$$\left|\sum_{i=1}^n f(c_i)\right|\le(1+|A|)/\Delta x$$

第17-3课：可积函数的性质

- **有界性论证 (续)**：由 $\int_a^b f(x)dx = A$ 导出

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\right| \le \frac{1+|A|}{\Delta x},\quad c_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ 可以任取, } i = 1, 2, \text{L } , n$$

进一步有

$$|f(c_1)| \le \left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\right| + \left|\sum_{i=2}^{n} f(c_i)\right| \le \frac{1+|A|}{\Delta x} + \left|\sum_{i=2}^{n} f(x_i)\right|$$

也即 $|f(x)| \le \dfrac{1+|A|}{\Delta x} + \left|\sum_{i\ne 1}^{n} f(x_i)\right| = M_1,\ \forall x \in [x_0, x_1]$

同理 $|f(x)| \le \dfrac{1+|A|}{\Delta x} + \left|\sum_{i\ne 2}^{n} f(x_i)\right| = M_2,\ \forall x \in [x_1, x_2]$

L L L L L L L L L L L L L L

$|f(x)| \le \dfrac{1+|A|}{\Delta x} + \left|\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right| = M_n,\ \forall x \in [x_{n-1}, x_n]$

$\forall x \in [a, b]$

L L W

第17-3课：可积函数的性质

- **注**：有界是可积的必要条件，但不是充分条件

  f在$[a,b]$上有界未必有 $f\in R[a,b]$

- **实例**：Dirichlet函数$D(x)$在$[0,1]$上有界

  任取$[0,1]$上分割 T：$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$

  1) 选取 $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ 为有理数，$i=1,2,\cdots,n$

则 $$\sum_{i=1}^{n}D(c_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1$$

  2) 选取 $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ 为无理数，$i=1,2,\cdots,n$

则 $$\sum_{i=1}^{n}D(c_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\Delta x_i=0$$

综上不可能 $\exists A\in \mathrm{R}$ 使得 $|\sum_{i=1}^{n}D(c_i)\Delta x_i-A|<\varepsilon\le\frac{1}{2}$ W

第17-3课：可积函数的性质

- **连续性** (充分条件)：

  $C[a,b] \subset R[a,b]$ ——连续函数是可积的（证明稍后）

- **推论** (积分中值定理)：

  设 $f,g \in C[a,b]$，且 $g(x)$ 不变号，则 $\exists c \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

- **特例**：设 $f \in C[a,b]$，则 $\exists c_0 \in [a,b]$ 使得

$$f(c_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

称为函数 f 在区间$[a,b]$上的平均值

第17-3课：可积函数的性质

- **积分中值定理证明**：不妨设 $g(x)\ge 0$，由保号性 $\int_a^b g(x)dx \ge 0$

  已知 $f\in C[a,b]$，据最值性质有 $m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x),\ M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$

这导出 $\quad mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x),\ \ x\in[a,b]$

应用积分保序性质和线性性质得到

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

不妨令 $\int_a^b g(x)dx>0$，则上式导出

$$m\le \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx \le M$$

由连续函数介值性质 $\exists c\in[a,b]$ 使得

$$f(c)=\int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx \qquad \text{W}$$

第17-3课：可积函数的性质

- ✓ **例题** (Cauchy不等式)：设 $f,g\in C[a,b]$,

求证 $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b[f(x)]^2dx\int_a^b[g(x)]^2dx$

证明：考虑 $\forall\lambda\in\mathrm{R}$, $\int_a^b[f(x)+\lambda g(x)]^2dx\ge 0$

应用积分线性性质得到

$$\int_a^b[f(x)]^2dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\lambda^2\int_a^b[g(x)]^2dx\ge 0$$

记 $A=\int_a^b[f(x)]^2dx,\ B=\int_a^b f(x)g(x)dx,\ \ C=\int_a^b[g(x)]^2dx$

则有 $\forall\lambda\in\mathrm{R},\ A+2B\lambda+C\lambda^2\ge 0$

所以 ……

第17课：定积分概念与计算-可积函数的性质

- **预习 (下次课内容):**

  第7.3节 微积分基本定理

  第7.4节 定积分计算-换元法与分部积分

- **作业 (本次课) :**

  练习题7.1：2*(均匀分割取极限), 4(1,3), 5(2), 6(2-4), 7(3-4, 5*提示: 转化为定积分), 8, 9(1).

  练习题7.2：2, 4[自己练习], 5, 8, 9*.