第8课：导数概念与计算

第3章 函数的导数

- **内容：**

  第3.1节 导数概念

  第3.2节 导数的计算

第8-1课：导数概念-来源与定义

导数概念

- **问题来源**
- **实例1**：质点直线运动的瞬时速度

设某质点沿直线运动，在 t 时刻的位移是 $s = f(t)$

考虑 t 时刻到$t+\Delta t$时刻这个时段内质点运动的平均速度

$$\tilde{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

一般而言，时段越短，平均速度越接近 t 时刻的“真实”速度

由此定义质点在 t 时刻的瞬时速度

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad \text{(若极限存在)}$$

第8-1课：导数概念-来源与定义

- **实例2**：平面光滑曲线的切线方程

  设平面直角坐标下某曲线方程为 $y = f(x)$

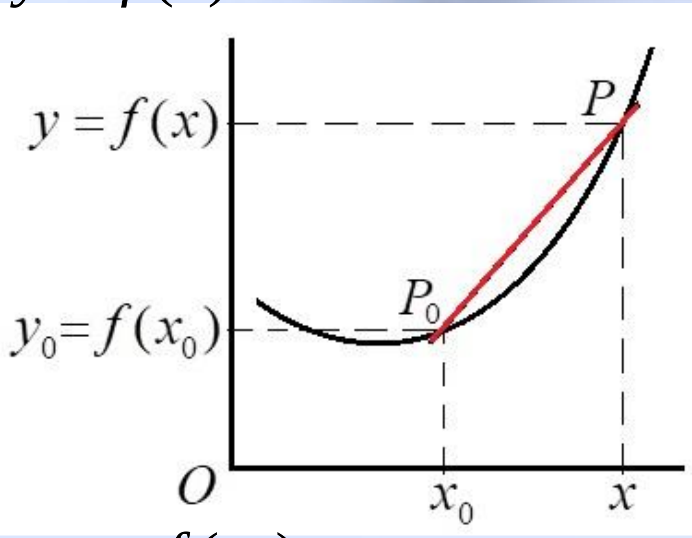
令$P_0 = (x_0, y_0)$为曲线上一点

考虑曲线在该点的切线方程

为此需要确定切线斜率k

任取曲线上另一点 $P = (x, y)$

用连接P和P_0的割线斜率来逼近k：



$$k \approx \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad 其中\ y = f(x),\ y_0 = f(x_0)$$

直观地看，曲线上P越接近P_0，割线斜率越接近切线斜率

$$\therefore\ k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (假设极限存在)$$

第8-1课：导数概念-来源与定义

- **抽象提升** —— 从上面实例中抽象出新的概念
- **导数**：设函数 $f(x)$在x_0附近有定义(包括x_0点)

定义 f 在x_0点的导数

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad \text{若极限存在的话}$$

这时称 f 在x_0点可导

- **注**：导数可以等价地表示为（应用代换$\Delta x=x-x_0$）

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

- **Leibniz记号**：记 $\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x},\quad \text{或记为}\quad \frac{df}{dx}(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(x_0)$$

第8-1课：导数概念-来源与定义

- **单侧导数：**

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

➢ **推论：** $f'(x_0)$存在等价于 $f'_-(x_0)$和$f'_+(x_0)$都存在且相等

✓ **例1：** 考察函数 $f(x)=|x|$在$x=0$点的单侧导数和可导性

解：$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1$

$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x-0}{\Delta x}=1$

由此可见 $f'(0)$不存在，所以$f(x)=|x|$在$x=0$点不可导 □

第8-1课：导数概念-来源与定义

- **函数可导与连续的关系：**

可导与连续都是刻画函数值在一点附近的性质，注意到

$$(\Delta)\quad \begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+[f(x)-f(x_0)] && \text{(差一个无穷小)} \\ &= f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) && \text{(差一阶无穷小)} \end{aligned}$$

由此易得

- **定理**：若 f 在x_0点可导, 则 f 在x_0点连续 (逆命题对吗?)

证：对于上式应用极限的四则运算性质

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$

$$= f(x_0)+f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0) \qquad \square$$

- **注**：式(Δ)给出了函数值$f(x)$与$f(x_0)$之间差的刻画

第8-2课：导数运算法则

导数的计算方法

- 直接计算 (按照定义)

✓ 例1： $f(x)=c$ (常数), 对于任意x, 有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

✓ 例2： $f(x)=x^n\ (n\in\mathbb{N})$，应用二项式展开

$$\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\frac{nx^{n-1}\Delta x+[n(n-1)/2]x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\Delta x^n}{\Delta x}$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{2}+\cdots+\Delta x^{n-1}\to nx^{n-1}$$

可见 $f'(x)=nx^{n-1}$，也即 $(x^n)'=nx^{n-1}$

第8-1课：导数概念-来源与定义

✓ 例3：$f(x)=\sin x$，应用和差化积公式

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2}{\Delta x}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})\ \to \cos x$$

$\therefore\ (\sin x)'=\cos x$，类似有(留作练习) $(\cos x)'=-\sin x$

✓ 例4：$f(x)=\ln x,\ x>0$，利用对数性质

$$\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

注意 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}=e$，再利用对数函数的连续性便得到

$$\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}\to\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x},\quad \therefore\ (\ln x)'=\frac{1}{x},\ x>0$$

第8-2课：导数运算法则

- **导数的四则运算**：设函数 f,g 都在 x 点可导，则

1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$，　只要 $g(x) \neq 0$

证1) 留作练习

2) $\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$

$= \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$

根据导数的定义以及函数的连续性，令 $\Delta x \to 0$

上式右端 $\to f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

第8-2课：导数运算法则

- **导数四则运算性质证明 (续)：**

3) 先证 f =1情况：

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$ 简化为 $$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

为此考虑 $$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}\right]=\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$=-\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\to-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

对于一般可导f, 结合乘积求导公式2)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'=f'\frac{1}{g}+f\left(\frac{1}{g}\right)'=f'\frac{1}{g}-f\frac{g'}{g^2}=\frac{f'g-fg'}{g^2} \qquad \square$$

第8-2课：导数运算法则

✓ 例5：$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (= \sec^2 x)$$

$$(\cot x)' = (\frac{1}{\tan x})' = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = \cdots = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

✓ 例6：$(\frac{3+4x}{1+2x})' = \frac{(3+4x)'(1+2x) - (3+4x)(1+2x)'}{(1+2x)^2}$

$$= \frac{4(1+2x) - (3+4x)2}{(1+2x)^2} = -\frac{2}{(1+2x)^2}$$

法二：$(\frac{3+4x}{1+2x})' = (2 + \frac{1}{1+2x})' = 0 - \frac{(1+2x)'}{(1+2x)^2} = -\frac{2}{(1+2x)^2}$

第8-2课：导数运算法则

- **复合函数的导数** (链式法则)：

设函数 $x=\varphi(t)$在t点可导，函数$y=f(x)$ 在$x=\varphi(t)$ 点可导

则复合函数 $y=f\circ\varphi(t)=f(\varphi(t))$在$t$点可导，且

$$(f\circ\varphi)'(t)=f'\circ\varphi(t)\varphi'(t)=f'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

注：使用Leibniz记号：$y=f(x)$, $x=\varphi(t)$, 上式化为

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$ 【注意】导数是“微商”-不是商(分式)

证：Leibniz记号提示了证明路线 $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\to\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$

为实现上述想法，取$\Delta t\neq 0$, 考虑

$$\Delta y=f(\varphi(t+\Delta t))-f(\varphi(t))=f(x+\Delta x)-f(x)$$

其中 $x=\varphi(t)$, $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$ ——代入上式得到$\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\cdots$

第8-2课：导数运算法则

- **链式法则证明 (续)：**

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}\to f'(x)\varphi'(t)$$

漏洞！ $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\neq 0?$

重新严格化：对于 $\Delta x\neq 0$, 引入记号

$$\alpha(\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)\to 0\ (\Delta x\to 0)$$

则 $$f(x+\Delta x)-f(x)=[f'(x)+\alpha(\Delta x)]\Delta x$$

规定 $\alpha(0)=0$ 则该式对于 $\Delta x=0$ 也成立

回到证明过程，注意 $x=\varphi(t),\ \Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$

则 $$\Delta y=f(\varphi(t+\Delta t))-f(\varphi(t))=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$=[f'(x)+\alpha(\Delta x)]\Delta x$$ —————— 于是得到 $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\cdots$

第8-2课：导数运算法则

- **链式法则证明** (续二)：

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta t}=[f'(x)+\alpha(\Delta x)]\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

令$\Delta t\to 0$，则

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}\to\varphi'(t)$$

此外 $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\to 0$，因此$\alpha(\Delta x)\to 0$

这样导出 $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=[f'(x)+\alpha(\Delta x)]\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\to f'(x)\varphi'(t)$

所以有 $(f\circ\varphi)'(t)=f'(x)\varphi'(t),\ x=\varphi(t)$ $\square$

第8-2课：导数运算法则

✓ **例7**：计算导数 $y=\tan^4 x$

解：记 $u=\tan x$，则 $y=u^4$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=4u^3\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4\sin^3 x}{\cos^5 x} \quad \square$$

✓ **例8**：求导数 $y=\tan(x^4)$

解：记 $u=x^4$，则 $y=\tan u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2 u}4x^3=\frac{4x^3}{\cos^2(x^4)} \quad \square$$

✓ **例9**：求导数 $y=\ln(-x),\ x<0$

解：记 $u=-x$，则 $y=\ln u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}(-1)=\frac{1}{x};$$

回忆：$(\ln x)'=\frac{1}{x},\ x>0$

综合：$(\ln|x|)'=\frac{1}{x},\ x\neq 0$

第8-3课：导数运算法则

- **反函数的导数：**

设 $y=f(x)$ 在区间I 上连续严格单调，$x_0\in I$, $f'(x_0)\neq 0$ 存在

则反函数 $x=f^{-1}(y)$在 $y_0=f(x_0)$点可导, 且

(♥) $$(f^{-1})'(y_0)=1/f'(x_0)$$

证：记 $y=f(x)$, 则 $x=f^{-1}(y)$

注意 $\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\to\dfrac{1}{f'(x_0)}$, 只要 $x\to x_0$

根据反函数连续性，$y\to y_0$时导出 $x=f^{-1}(y)\to f^{-1}(y_0)=x_0$

综上便得 $(f^{-1})'(y_0)=1/f'(x_0)$ □

- **注：** (♥)式用Leibniz记号表示为 $\dfrac{dx}{dy}=1\Big/\dfrac{dy}{dx}$ $\quad\begin{cases}x=f^{-1}(y)\\ y=f(x)\end{cases}$

第8-3课：导数运算法则

- **指数函数求导：**

记 $y=e^x$，则 $x=\ln y$，回忆对数函数的导数 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y}$

根据反函数导数公式 $\dfrac{dy}{dx}=1\Big/\dfrac{dx}{dy}=y$，也即 $(e^x)'=e^x$

法二(利用链式法则)：已知 $x=\ln y=\ln(e^x)$

将右端看作x的复合函数，关于x求导得到

$$1=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^x}(e^x)',\ \text{仍得到}\ (e^x)'=e^x$$

- **推广：** 令 $a>0,\ a\neq 1$，则 $a^x=e^{x\ln a}$，$\log_a x=\ln x/\ln a$

$$\therefore\ (a^x)'=(e^{x\ln a})'=(e^{x\ln a})(x\ln a)'=a^x\ln a$$

$$(\log_a x)'=(\ln x)'/\ln a\ =1/(x\ln a)$$

第8-3课：导数运算法则

✓ **例10**：求导一般幂函数 $y = x^a,\ x > 0$

解：注意 $y = e^{a\ln x} = e^u,\ u = a\ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u\frac{a}{x} = x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

也即 $(x^a)' = ax^{a-1}$ （回忆$(x^n)' = nx^{n-1}$） □

- **特例**：

$$(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

第8-3课：导数运算法则

✓ **例11**：求导 $y=\arcsin x,\ |x|<1$

解：应用反函数求导公式或链式法则

已知 $x=\sin y$，关于x求导得 $1=\cos y\dfrac{dy}{dx}$，$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos y}$

为解出关于x的显示表达式，注意到

$$|y|<\frac{\pi}{2}，\text{因而}\ \cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\ (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1 \qquad \square$$

- 类似处理 $y=\arccos x$：由 $x=\cos y$，得到 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sin y}$

注意 $0<y<\pi$，所以 $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$

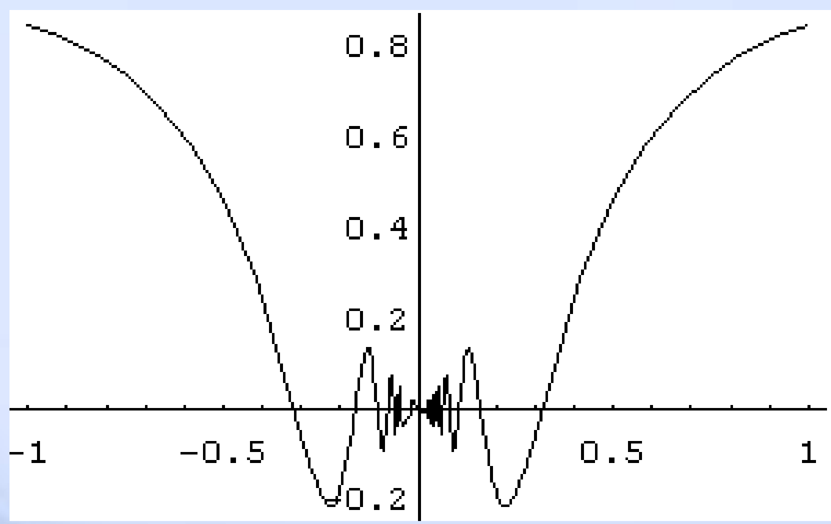
$$\therefore\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1$$

[例] $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $y'(0)$

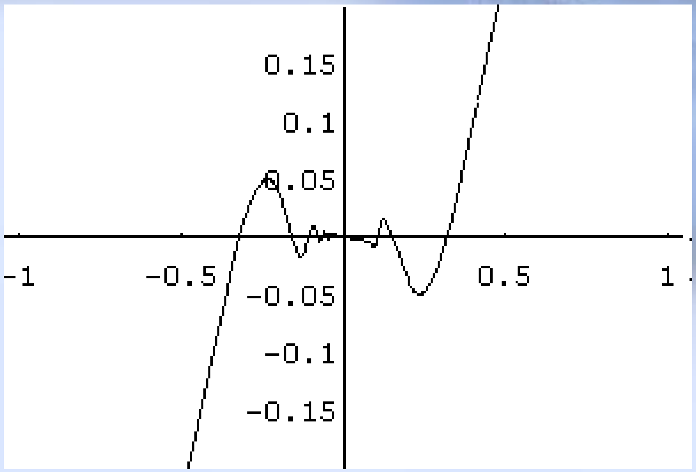
[解] $y'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$

$y'(0)$不存在！

振荡



若 $y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$



则 $y'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)\sin\dfrac{1}{\Delta x}\right)=0$

第8-3课：导数运算法则

✓ 例12：求导 $y = \arctan x$

解：注意 $x = \tan y,\ |y| < \pi/2$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$(\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = 1\Big/\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \square$$

✓ 例13：求导 $y = x^x,\ x > 0$ （更一般情况 $y = u(x)^{v(x)},\ u(x) > 0$）

解： $y = e^{x\ln x} = e^u,\ u = x\ln x$

利用链式法则-指数求导-乘积求导，得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1) \qquad \square$$

问题：如何求其他函数的导数？

其他基本初等函数

初等函数 … …

四则

复合

反函数

隐函数 **

参数方程 **

导数运算法则

基本导数公式

[例] 由方程 $ye^{xy} - x\cos^3 x^2 + 1 = 0$ 确定

隐函数 $y = f(x)$, 求 y'_x.

[解] 方程两边对x求导,得

$$e^{xy} y' + y(e^{xy})' - (x\cos^3 x^2)' + (1)' = 0 \quad (1)$$

$$e^{xy}[y' + y(y + xy')] - \cos^3 x^2$$

$$+ 3x\cos^2 x^2 \sin x^2 2x = 0 \quad (2)$$

解出y',得

$$y' = \frac{\cos^3 x^2 - 6x^2\cos^2 x^2 \sin x^2 - y^2 e^{xy}}{e^{xy}(1 + xy)}$$

问: $y'(0) = ?$ $\quad y(0) = -1 \Rightarrow y'(0) = 0$

参数方程求导法

设函数$y=f(x)$由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

确定

设$\varphi'(t)$, $\psi'(t)$都存在,且$\varphi'(t)\neq 0$,

$x=\varphi(t)$存在可导的反函数$=\varphi^{-1}(x)$.

如何求$\dfrac{dy}{dx}$?

分析函数关系:

$$y=\psi(t)$$

$$x=\varphi(t)\Rightarrow \quad t=\varphi^{-1}(x)$$

$\Rightarrow \quad y$通过t成为x的复合函数

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$$

利用复合函数和反函数微分法, 得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

[例] 求椭圆: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

在$t = \dfrac{\pi}{4}$处的切线方程

[解]

当$t = \dfrac{\pi}{4}$时, $x = a\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $y = b\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ 切点: $M_0(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{a}{\sqrt{2}})$

切线斜率: $k = \tan\alpha = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$$

$$\Rightarrow \quad k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b\cos\frac{\pi}{4}}{a\sin\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}$$

$\Rightarrow$ 切线方程: $\quad y-\frac{b}{\sqrt{2}}=-\frac{b}{a}(x-\frac{a}{\sqrt{2}})$

即 $\quad y=-\frac{b}{a}x+\sqrt{2}b$

对数微分法

求幂指函数$f(x)=u(x)^{v(x)}$ 的导数

方法一： $f(x)=e^{v(x)\ln u(x)}$

再应用复合函数微分法（链式法则）

方法二： 利用对数微分法

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x)= f(x)[\ln f(x)]'$$

[例1] 求幂指函数$y=(\sin x)^{\cos x}$的导数y'

[解] 两边取对数, 得

对数微分法

$$\ln y=\cos x\ln(\sin x)$$

两边对x求导, 得到

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(-\sin x)\cdot\ln(\sin x)+\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$

解出y', 得

$$y'=(\sin x)^{\cos x}\cdot\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\cdot\ln(\sin x)\right]$$

[例2] 设 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，求 y'

[解]

$$\ln y=\frac{1}{3}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{3}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

$$y'=y(\ln y)'$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$$

[小结1] 导数计算

(1)四则计算法则特别注意乘、除

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v',\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

(2)复合求导法则

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

注意分析清楚
函数关系

(3)反函数求导公式 $[f^{-1}(y)]'=\dfrac{1}{f'(x)}$

要求 $f'(x)\neq 0$

(4)隐函数求导法则,两边求导时,有复合求导问题

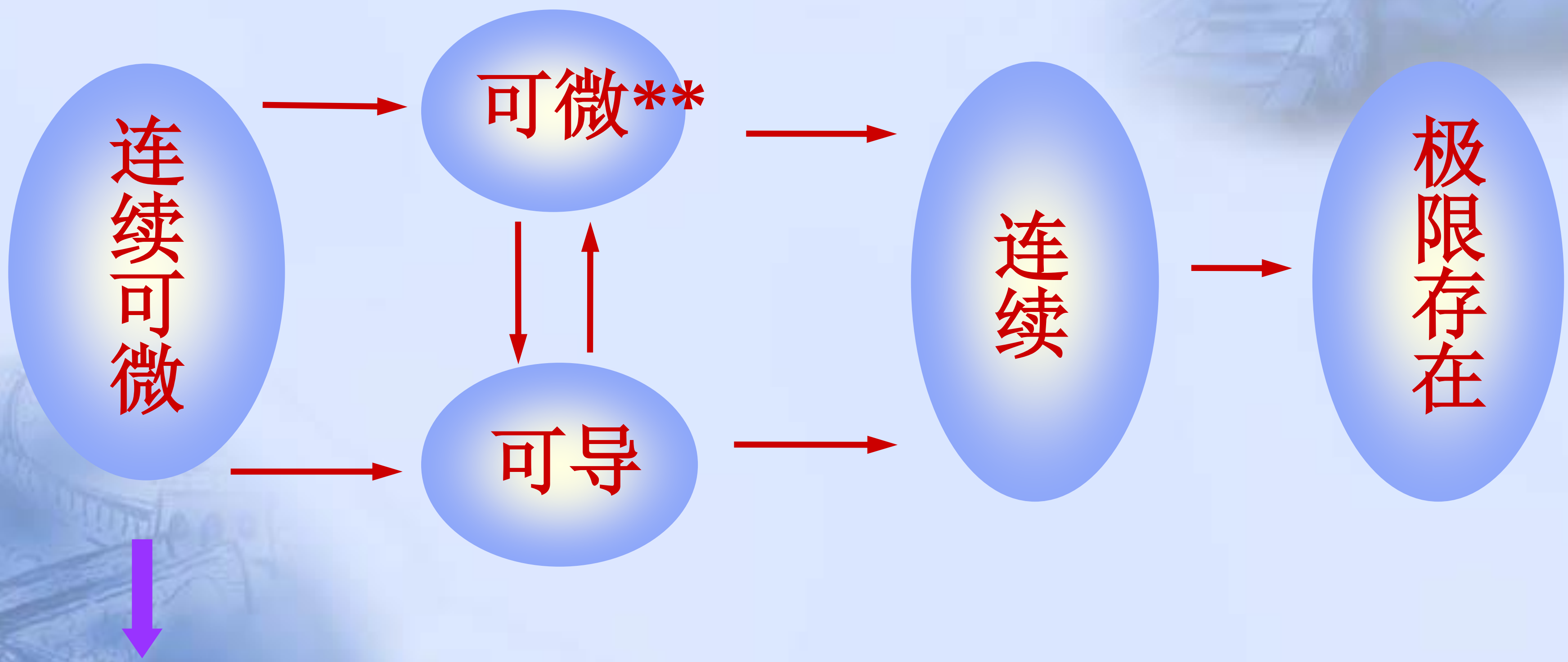
(5)参数方程求导时要特别注意怎样求高阶阶导数

$$y''(x) = (y'(x))'_x = \frac{[y'(x)]'_t}{x'(t)}$$

$$\boxed{y''(x) \cancel{=} (y'(x))'_t}$$

(6)对数微分法适用于多因子乘除的函数或幂指函数。

[小结2] ：几个概念之间的关系



$$\boxed{f \in C^1(I)}$$

第8课：导数概念与计算

- **预习 (下次课内容)：**

  第3.3节 高阶导数

  第3.4节 微分中值定理

- **作业 (本次课)：**

  练习题3.1：2*, 3-6, 9, 10*.

  练习题3.2：1(11-30,[其余自己练习]), 2(1-2), 3, 5*, 7.