高等微积分

邹文明

第七章：定积分

回顾: Riemann 积分的概念

- 对于分割 $P: a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 令
$$\begin{aligned} \Delta_i &= [x_{i-1}, x_i] \ (1 \leqslant i \leqslant n), \\ \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \ (1 \leqslant i \leqslant n), \\ \lambda(P) &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i \ (\text{称为 } P \text{ 的步长}). \end{aligned}$$
- 取点: $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, 其中 $\xi_i \in \Delta_i$. 此时我们称 (P, ξ) 为带点分割.

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数.

- Riemann 和: $\sigma(f;P,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
- Riemann 积分:

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f;P,\xi).$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得对 $[a,b]$ 的任意带点分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P)<\delta$ 时, 均有 $|\sigma(f;P,\xi)-I|<\varepsilon$.

- 记 $\mathscr{R}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上可积函数的集合.

- 否定形式: 函数 f 在 $[a,b]$ 上不可积当且仅当 $\forall I \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, 存在 $[a,b]$ 的某个带点分割 (P,ξ) 满足 $\lambda(P) < \delta$, 但我们却有 $|\sigma(f;P,\xi) - I| \geqslant \varepsilon_0$.
- 常值函数可积且 $\forall c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$.
- 有限个点处不为零的函数可积且积分为零.
- Dirichlet 函数不可积.
- Riemann 可积的必要条件: 可积函数有界.

回顾: 判断函数可积的 Darboux 准则

- 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 而
$$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$
为 $[a,b]$ 的分割. 对于 $1\leqslant i\leqslant n$, 令
$$m_i=\inf_{x\in\Delta_i} f(x),\qquad M_i=\sup_{x\in\Delta_i} f(x),$$
$$L(f;P)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i;\qquad U(f;P)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i.$$

- 下积分: $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\limits_P L(f, P)$.
- 上积分: $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\limits_P U(f, P)$.
- $L(f, P) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant U(f, P)$.

函数可积性判别准则 (Darboux 准则)

设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界, 则下述结论等价:

(1) $f\in\mathscr{R}[a,b]$;

(2) $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\big(U(f;P)-L(f;P)\big)=0$;

(3) $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0$;

(4) $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

回顾: 一致连续函数

- 一致连续函数: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in X$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- 刻画: 函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 为一致连续当且仅当对于 X 当中的任意的两个数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 则我们有

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

- 非一致连续例子: $f(x) = \sin\frac{1}{x}, \ \forall x \in (0,1)$.
- 闭区间上的连续函数一致连续.

回顾: 典型的可积函数类

- 在闭区间上仅有限多个点间断点的有界函数可积. 特别地, 闭区间上的连续函数、逐段连续函数均可积.
- 闭区间上的单调函数可积.
- 闭区间上的有界函数为 Riemann 可积当且仅当其间断点集为零测度集.

§7.2. Riemann 积分的性质

命题 1. (积分的线性性) 假设函数 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 由定积分的定义可知

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(\alpha f + \beta g; P, \xi) \\ &= \lim_{\lambda(P)\to 0} \Big(\alpha\sigma(f; P, \xi) + \beta\sigma(g; P, \xi)\Big) \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

推论. 如果 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则在有限多个点处改变 f 的取值, 既不会改变可积性, 也不改变积分.

证明: 将改变后的函数记作 g. 定义 $F = g - f$, 那么 F 仅在有限多个点处不为零, 因此为可积. 又 $g = f + F$, 则 g 也可积并且我们有

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 2. (积分区间的可加性) 假设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数, 而 $c\in(a,b)$, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 f 分别在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上可积, 此时

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 充分性. 假设 f 分别在区间 $[a,c]$, $[c,b]$ 上可积, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,c]$ 的分割 P_1 与 $[c,b]$ 的分割 P_2 使得我们有

$$U(f;P_1)-L(f;P_1)<\frac{\varepsilon}{2},\ U(f;P_2)-L(f;P_2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $P = P_1 \cup P_2$, 则 P 为 $[a, b]$ 的分割, 并且

$$\begin{aligned}
&U(f;P) - L(f;P) \\
&= \big(U(f;P_1) + U(f;P_2)\big) - \big(L(f;P_1) + L(f;P_2)\big) \\
&= \big(U(f;P_1) - L(f;P_1)\big) + \big(U(f;P_2) - L(f;P_2)\big) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

因此函数 f 在 $[a, b]$ 上可积.

$\forall \varepsilon > 0$, 援引前面的记号, 我们有

$$0 \leqslant U(f;P_1) - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant U(f;P_1) - L(f;P_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 \leqslant U(f;P_2) - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant U(f;P_2) - L(f;P_2) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - L(f;P) \leqslant U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon,$$

$$U(f;P) = U(f;P_1) + U(f;P_2),$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned} 0 \ &\leqslant \ \Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big) \\ &+\big(U(f;P) - L(f;P)\big) < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

进而可得

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon \;&\leqslant\; -\big(U(f;P)-L(f;P)\big) \\
&\leqslant\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&<\; 2\varepsilon-\big(U(f;P)-L(f;P)\big)\leqslant 2\varepsilon,
\end{aligned}
$$

再由 $\varepsilon>0$ 的任意性可知

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

必要性. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在区间 $[a,b]$ 的分割 P 使 $U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon$. 将 P 分别限制在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上并补上点 c, 由此可以得到 $[a,c]$ 的分割 P_1 以及 $[c,b]$ 的分割 P_2. 令 $Q=P_1\cup P_2$, 则 $P\subseteq Q$, 从而

$$\begin{aligned}
U(f;P_1)-L(f;P_1) &\leqslant U(f;Q)-L(f;Q)\\
&\leqslant U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon,\\
U(f;P_2)-L(f;P_2) &\leqslant U(f;Q)-L(f;Q)\\
&\leqslant U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon,
\end{aligned}$$

由此可知 f 分别在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上可积.

评注

- 我们已约定

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

由上述命题可知: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, 均有

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

评注

由该命题可导出: 若函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界且仅在有限多个点处间断, 则 $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

例 1. (阶梯函数) 设

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

为 $[a, b]$ 的分割, 而函数 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(x) = k_i, \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

此时称 f 为阶梯函数. 则 $f \in \mathscr{R}[a, b]$ 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n k_i(x_i - x_{i-1}).$$

命题 3. (保序性) 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且 $f \geqslant g$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 若 $\exists m, M \in \mathbb{R}$ 使得 $m \leqslant f \leqslant M$, 则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

证明: $\displaystyle \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i.$

推论. (保号性) 若 $f \in \mathscr{R}[a, b]$ 非负, 则 $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \geqslant 0$.

命题 3'. (严格保号性) 若函数 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 非负, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 当且仅当 $f \equiv 0$.

证明: 充分性源于积分定义. 下面证明必要性.

用反证法, 假设 f 在点 $x_0 \in [a,b]$ 处不等于零, 则 $f(x_0) > 0$. 由连续函数保序性, $\exists c, d \in [a,b]$ 使得 $c < d$, $x_0 \in [c,d]$, 并且 $\forall x \in [c,d]$, 我们有 $f(x) \geqslant \frac{1}{2} f(x_0)$. 由此我们可立刻导出

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2} f(x_0)(d-c) > 0,$$

矛盾! 故所证结论成立.

推论. (严格保序性) 若 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 使 $\forall x \in [a,b]$, 我们有 $f(x) \geqslant g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, 且等号成立当且仅当 $f \equiv g$.

证明: 定义 $F = f - g$, 则函数 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 非负, 故 $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $F \equiv 0$, 也即 $f \equiv g$. 因此所证结论成立.

例 2. 若 $f \in \mathscr{C}[a-1, b+1]$ (其中 $a < b$), 求证

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b |f(x+t)-f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}[a-1, b+1]$, 则 f 一致连续, 从而 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ 使得 $\forall x, y \in [a-1, b+1]$, 当 $|x-y| < \delta_1$ 时, 我们有 $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. 令 $\delta = \min(\delta_1, \frac{1}{2})$,

于是 $\forall x \in [a,b]$ 以及 $\forall t \in \mathbb{R}$,
当 $|t| < \delta$ 时, 均有 $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, 故

$$\int_a^b |f(x+t) - f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

因此所证结论成立.

例 3. 求证: $\frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{2}$.

证明: $\forall x \in [1,2]$, 定义 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. 那么 f 可导并且 $\forall x \in (1,2)$, 均有 $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0$. 因此函数 f 严格递减, 从而我们有

$$\frac{2}{5} = f(2) < \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < f(1) = \frac{1}{2}.$$

命题 4. 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ 且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明: 对于区间 $[a,b]$ 的任意分割

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

我们有 $0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i,$

于是由夹逼原理知 $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i = 0,$

从而我们有 $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$. 又 $\forall x \in [a,b]$, 均有

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

由此我们可立刻导出

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

因此所证结论成立.

命题 5. 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $fg \in \mathscr{R}[a,b]$.

证明: 定义 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, 则 $\forall x, y \in [a,b]$,

$$\left|(f(x))^2 - (f(y))^2\right| = \left|f(x) + f(y)\right| \cdot \left|f(x) - f(y)\right|$$
$$\leqslant 2M\left|f(x) - f(y)\right|.$$

于是对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 P, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f^2; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant 2M \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i.$$

由于 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则由夹逼原理可知

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f^2;\Delta_i)\Delta x_i = 0,$$

故 $f^2 \in \mathscr{R}[a,b]$. 又 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则

$$f+g, f-g \in \mathscr{R}[a,b],$$

由此可得 $fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big) \in \mathscr{R}[a,b]$, 从而所证结论成立.

定理 1.(Cauchy 不等式) 若 $f, g \in \mathscr{R}[a, b]$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x\right).$$

证明: $\forall t \in \mathbb{R}$, 令 $F(t) = \int_a^b \big(tf(x) - g(x)\big)^2 \mathrm{d}x$, 则

$$F(t) = t^2\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x - 2t\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \big(g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

由于 F 为关于 t 的二次多项式且恒 $\geqslant 0$, 因此其判别式 $\leqslant 0$. 由此立刻可得所要结论.

经典的 Hölder 不等式

定理 2. 若 $x_k, y_k, p, q > 0\,(1 \leqslant k \leqslant n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$, 并且等号成立当且仅当 $x_k^p y_k^{-q}$ 为不依赖 k 的常数.

积分 Hölder 不等式

定理 3. 若 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明: 对 $[a,b]$ 的任意带点分割 (P,ξ), 我们有

$$\begin{aligned} |\sigma(fg; P, \xi)| &= \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \left(|f(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(|g(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned}$$

于是由经典的 Hölder 不等式可知

$$
\begin{aligned}
|\sigma(fg;P,\xi)| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(|f(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}}\right)\cdot\left(|g(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|^p\Delta x_i\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|g(\xi_i)|^q\Delta x_i\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sigma(|f|^p;P,\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sigma(|g|^q;P,\xi)\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

由于 $f,g\in\mathscr{C}[a,b]$, 从而 $|f|^p,|g|^q\in\mathscr{C}[a,b]$, 进而由定积分定义及极限保序性可得所要不等式.

定理 4. (积分第一中值定理)

若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得我们有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明: 令 $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 那么

$m \leqslant f \leqslant M$, 由此可得 $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$.

由最值定理知 $\mathrm{Im} f = [m, M]$, 故 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

同学们辛苦了!