习题课材料（四）

习题 1. 设$Ax=b$，证明：

1. $\mathscr{R}(A)=\mathscr{R}([A,b])$;

2. $\mathscr{N}(A^{\mathrm{T}})=\mathscr{N}([A,b]^{\mathrm{T}})$.

（尝试用定义解决第*1*问，并用矩阵的语言解决第*2*问）

习题 2. 如果向量组$\{a,b,c\}$中的任何两个向量都线性无关，试问该向量组是否一定线性无关？

习题 3. 证明：向量组$\{a_1,\cdots,a_m\}$的秩为r的充要条件为：其中有r个向量线性无关，且向量组中任何多于r个向量所组成的向量组都线性相关。

习题 4. 证明：对任意$\mathbb{R}^m$的非平凡子空间M,N，都有$M\cup N\neq\mathbb{R}^m$。

习题 5 (子空间上的运算)**.** 设M,N是$\mathbb{R}^m$的两个子空间。

1. 证明交集$M\cap N$是$\mathbb{R}^m$的子空间，称为M与N的交。

2. 定义集合：

$$M+N=\{m+n\mid m\in M,n\in N\}.$$

证明$M+N$是$\mathbb{R}^m$的子空间，称为M与N的和。

3. $M\cup N$是否为$\mathbb{R}^m$的子空间？

习题 6. 证明：如果向量组S可以被向量组T线性表示，则$\operatorname{rank}(S)\leq\operatorname{rank}(T)$。

习题 7. 给定$\mathbb{R}^m$的子空间M的一组基$a_1,a_2,\cdots,a_r$以及一个r阶方阵P。令

$$[b_1,b_2,\cdots,b_r]=[a_1,a_2,\cdots,a_r]P,$$

证明：$b_1,b_2,\cdots,b_r$是M的一组基当且仅当P可逆。

习题 8 (维数公式♡)**.** 设M,N是$\mathbb{R}^m$的两个子空间，求证维数公式：

$$\dim(M+N)=\dim M+\dim N-\dim(M\cap N).$$

习题 9. 教材练习*2.2.13*。