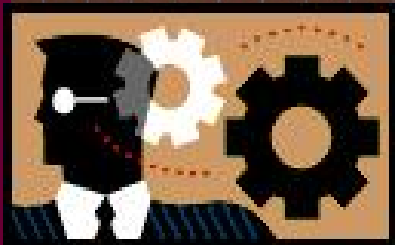




# 《线性代数》



## 第一章 线性方程组与行列式

### §1.1 Gauss消元法

2025秋

# 内容提要

- 初等变换与同解方程组
- **Gauss**消元法

## 引例1. 《九章算术》中有这样的数学问题——

今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗

$$3x + 2y + 1z = 39$$

上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗;

$$2x + 3y + 1z = 34$$

上禾一秉,中禾二秉,下禾三秉,实二十六斗;

$$1x + 2y + 3z = 26$$

问 上、中、下禾实一秉各几何?

$x, y, z$





**引例2.**《孙子算经》中著名的数学问题，其内容是：“今有雉（鸡）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问雉兔各几何。”

**解：**让所有动物先抬起一只腿， 再抬起一只腿

此时，鸡坐地上，兔子两条腿站地

于是， $94-35-35=24$ ，

故兔子数量为  $24/2=12$ ，

则鸡的数量为  $35-12=23$ 。

术曰：倍足以减首，余半之，即兽；以首减兽，即禽。



**注：**上述抬腿法很生动形象，虽然巧妙但并不容易一般化。另一个“笨”办法，也是最自然的办法，就是**列方程组和解方程组**。

**另解：**设鸡和兔的数量分别为  $x, y$ ，则 
$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$$

**求解方程：**用方程②-方程① $\times 2$ ，消去 $x$ ，求出 $y$ 后，代回求得 $x$ 。

附. 中国古代《算经十书》是指汉、唐一千多年间的十部著名的数学著作，曾为国子监算学科的教科书，标志着中国古代数学的高峰。

序号	书名	作者	年代	大致内容
1	《周髀算经》			讲述天文学“盖天说”的数学、天文著作
2	《九章算术》	张苍等编(刘徽注)	1th (263年)	全书共分九章，共搜246个数学问题，汉朝之前的数学问题汇总
3	《海岛算经》			介绍利用标杆进行地图测量的数学问题
4	《孙子算经》	不详	4~5th	系统介绍筹算法则，含筹算乘除法则，筹算分数算法和筹算开平方法。包括著名的“鸡兔同笼问题”和“孙子问题”
5	《张丘建算经》			讨论了最大公约数、最小公倍数、等差级数、不定方程组（百鸡问题）等数学问题
6	《夏侯阳算经》			引用当时流传的乘除捷法，解答日常生活中的应用问题，保存了很多数学史料
7	《缀术》			原书失传，用《数术记遗》（徐岳著）来充数。
8	《五经算术》			对《易经》《诗经》《尚书》《周礼》《仪礼》《礼记》《论语》等儒家经典中与数字有关的地方详加注释
9	《五曹算经》			全书分为田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹五部分，收录了67个应用数学问题
10	《缉古算经》			全书共20题，反映了当时开凿运河、修筑长城和大规模城市建设等土木和水利工程施工计算的数学问题

## 一. 初等变换与同解方程组

## 一般的线性方程组(Linear Equations)

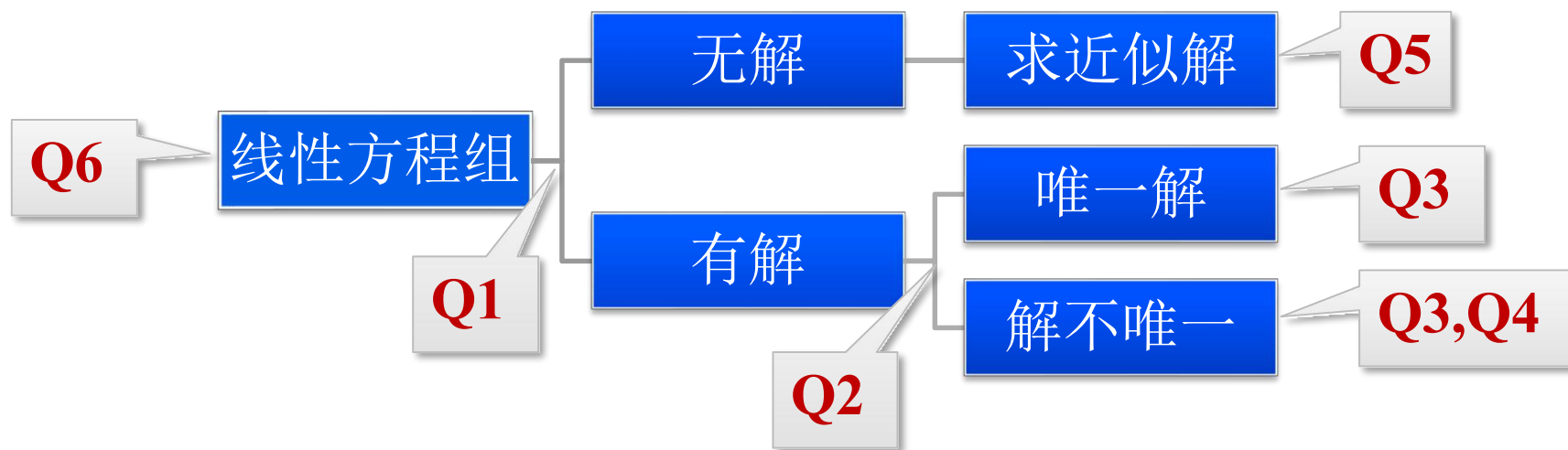
**定义1** 关于 $n$ 个未知量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的线性方程组, 形式如下

[illegible]

- 其中
- $m \in \mathbb{N}$  为方程组的个数,
  - $a_{ij} \in \mathbb{R}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) 称为 **系数 (coefficient)**,
  - $b_i \in \mathbb{R}$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 称为 **常数项 (constant term)**.

## 线性(一次)方程组的几个基本问题:

- Q1.** 解的存在问题: 判断方程组是否有解?
- Q2.** 解的个数问题: 如果有解, 有多少个解?
- Q3.** 解的求解问题: 能否给出解的公式, 或者给出一个算法求出所有的解?
- Q4.** 解的结构问题: 解不唯一时解集合结构如何?
- Q5.** 解的近似问题: 如果无解, 能否求出一个近似解?
- Q6.** 对应的几何问题: 线性方程组对应的几何意义是什么?



# 矩阵(Matrix)的定义

## 定义2

由  $mn$  个数排成行列的矩形数表  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

称为类型为  $m \times n$  的矩阵(matrix), 有时候也简记为  $A = (a_{ij})_{m \times n}$

当  $m = n$  时叫  $n$  阶方阵 (square matrix).

- 特别地, 当  $m=n=1$  时, 一个  $1 \times 1$  的矩阵就是一个数; 反之, 一个数可视为一个  $1 \times 1$  的矩阵. ——数是特殊的矩阵, 矩阵是数在两个方向延伸推广.
- 矩阵中的每个分量  $a_{ij}$  的下标  $i$  与  $j$ , 分别表示其所在的行与列的位置.





### 例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 \quad \quad + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \quad \textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2 \\ x_2 - x_3 = 5 \quad \textcircled{3} - \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{交换第2, 3} \\ \text{个方程组} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_3 = -18 \quad \textcircled{3} - \textcircled{2} \times 4 \end{cases}$$

为了简化运算过程的表达形式, 只考虑增广矩阵.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 4r_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -18 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ x_3 = -6 \end{cases} \quad \textcircled{3} \times 1/3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 19 & \textcircled{1} - \textcircled{3} \times 3 \\ x_2 = -1 & \textcircled{2} + \textcircled{3} \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 9 & (\textcircled{1} + \textcircled{2})/2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_3 \rightarrow r_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 - 3r_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{(r_1 + r_2)/2 \rightarrow r_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

**问题1:** 上述过程使用了哪些操作?

总结一下，中学所用的消元法解方程组，只是对方程进行如下变形：

- 交换两个方程的位置
- 用一个非零数乘以某个方程
- 把一个方程的倍数加到另一个方程上

把上述操作简称为：

- 对换
- 倍乘
- 倍加

统称为方程组的初等变换  
(elementary operation)

对应到(增广)系数矩阵的操作：

- 行对换
- 行倍乘
- 行倍加

统称为矩阵的初等行变换  
(elementary row operation)

**问题：**如上求解方法的理论保证是什么？

**定理1：**线性方程组的初等变换不改变方程组的解。

**证明：**显然，对换和倍乘变换不改变方程组的解。下面考虑倍加的情况。

设把原方程组(1)的第*i*个方程的*k*倍加到第*j*个方程上得到新的方程组，记为(2)式，则(1)与(2)只有第*j*个方程不同。方程组(2)的第*j*个方程为：

$$(ka_{i1} + a_{j1})x_1 + (ka_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots (ka_{in} + a_{jn})x_n = kb_i + b_j \quad (3)$$

设 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是方程组(1)的一个解，则由其第*i*、*j*个方程有

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots a_{in}c_n = b_i$$

$$a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \cdots a_{jn}c_n = b_j$$

$$\text{所以 } (ka_{i1} + a_{j1})c_1 + (ka_{i2} + a_{j2})c_2 + \cdots + (ka_{in} + a_{jn})c_n = kb_i + b_j$$



这表明 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 也满足方程(3), 即新方程组(2)的第 $j$ 个方程; 而(2)的其余方程与(1)一样, 故 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 也为方程组(2)的一个解.

反之, 由倍加变换是可逆的过程, 可证明(2)的每个解也是(1)的解. 具体来说, 设 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为新方程组(2)的一个解, 则由其第 $i$ 、 $j$ 个方程, 有

$$a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \cdots + a_{in}d_n = b_i$$

$$(ka_{i1} + a_{j1})d_1 + (ka_{i2} + a_{j2})d_2 + \cdots + (ka_{in} + a_{jn})d_n = kb_i + b_j$$

这说明

$$a_{j1}d_1 + a_{j2}d_2 + \cdots + a_{jn}d_n = b_j$$

而(1)的其余方程与(2)一样, 所以 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 也为方程组(1)的一个解. ■

## 二. Gauss消元法

由定理知, 对一个线性方程组做初等变换, 得到一个新的方程组, 则这两个线性方程组是同解的.

具体地, 设方程组(1)中 $x_1$ 的系数不全为零, 总可以通过对换, 使得  $a_{11} \neq 0$ , 于是, 把第一个方程的  $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$  倍加到第 $j$ 个方程上 ( $2 \leq j \leq m$ ), 即可在第 $2 \sim m$ 个方程中消去未知量  $x_1$ . 按类似的步骤, 考察第 $2 \sim m$ 个方程, 对其他未知量继续做下去. 以此类推, 便可求解线性方程组.

这样的计算方法就称为 Gauss消元法 (Gaussian elimination).

**注:** 在具体求解方程组时, 只需对增广系数矩阵  $(A, \vec{b})$  做初等变换即可.

但, 只能做矩阵的行变换, 不能做列变换! 为什么?



(德, C. F. Gauss,  
1777 ~1855)

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$$

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & | & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & | & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -3 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 45 & -30 & | & -10 \\ 0 & 0 & 70 & -15 & | & -20 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & | & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & | & -48 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

---

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & | & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

上面的矩阵的最后一行对应的方程是

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1$$

不管 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 取何值，上式均不可能成立，所以原方程组无解。

### 例3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

解:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & -2 & 10 \\ 2 & -2 & -11 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

这时方程组化为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \frac{1}{5}\mathbf{x}_4 = \frac{11}{5} \\ \mathbf{x}_3 - \frac{2}{5}\mathbf{x}_4 = \frac{2}{5} \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

或写为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \frac{1}{5}\mathbf{x}_4 + \frac{11}{5} \\ \mathbf{x}_3 = \frac{2}{5}\mathbf{x}_4 + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{11}{5} \\ x_3 = \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} \end{cases} \quad (4)$$

可以看出，对于未知量 $x_2, x_4$ 的任一组取值，都可以唯一决定出 $x_1, x_3$ 的值。称 $x_1, x_3$ 为**主变量**， $x_2, x_4$ 为**自由未知量**。用自由未知量表示主变量的(4)式称为**方程组的一般解**，或者把(4)式表示为如下形式

$$\begin{cases} x_1 = s + \frac{1}{5}t + \frac{11}{5} \\ x_2 = s \\ x_3 = \frac{2}{5}t + \frac{2}{5} \\ x_4 = t \end{cases} \quad (\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad (\text{有无穷多个解})$$

## 本讲小结

- 线性方程组的三种初等变换：对换，倍乘，倍加
- 初等变换不改变方程组的解
- 增广矩阵的初等行变换：**Gauss消元法**

上述方法给出一套标准化流程化的求解过程，不管形式如何变化，诸多解题技巧最终归结为三招——天下武功归于三招，极好地体现了抽象数学的威力，不愧为“大巧若拙，大智若愚。”

### 思考问题：

**Gauss消元法何时停止？**

**Gauss消元法可否判断线性方程组解的情况？(无解，唯一解，很多解)**

**Gauss消元的过程是不是唯一的？**

## 本讲作业

- 教材76页1 (1) (3)