第12课：Taylor多项式+Peano余项

第4章 Taylor定理/公式

- **内容：**

  第4.1节 微分概念

  第4.2节 Taylor多项式+Peano余项

第12-1课：微分概念-定义与应用

微分概念和应用

- **函数局部逼近问题**：设 $f: I \to \mathbb{R},\ x_0 \in I$（区间）

  考虑用多项式在x_0附近逼近$f(x)$, 比如用0次多项式逼近

  $$f(x_0+\Delta x) \approx P_0(\Delta x) = a \quad (\Delta x\text{比较小})$$

上述近似的含义：$\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x) - P_0(\Delta x)] = 0$

如果$f(x)$在x_0点连续, 上式导出 $a = f(x_0)$, 也即$P_0(\Delta x) = f(x_0)$

进一步考虑1次多项式逼近 $P_1(\Delta x) = a + b\Delta x$

$$f(x_0+\Delta x) \approx P_1(\Delta x) \quad (\Delta x\text{比较小})$$

该近似的含义？类似上面要求 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x) - P_1(\Delta x)] = 0$

得到 $a = f(x_0)$，b应满足什么要求？

第12-1课：微分概念-定义与应用

- **微分**：设函数 f 在x_0点附近有定义, 如果存在实数λ使得

(*) $$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\lambda\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$$

称f 在x_0点可微, 记 f 在x_0点的微分为

$$\mathrm{d}f(x_0)=\lambda\Delta x,\quad \lambda\text{称为}f\text{在}x_0\text{点的微分系数}$$

- **注**：(*)式说明 f 在x_0点附近有一次多项式近似

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+\lambda\Delta x\ \ (\Delta x\text{很小})$$

回忆记号$o(\Delta x)$的含义, (*)式实际上表示

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-\lambda\Delta x}{\Delta x}=\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\to 0$$

也即 $$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\lambda\right]=0$$ —— 可见 $\lambda=f'(x_0)$

第12-1课：微分概念-定义与应用

- **推论** (可微与可导的关系)

  函数 f 在x_0点可微的充分必要条件是 f 在x_0点可导

这时微分系数 $\lambda = f'(x_0)$, $\therefore\ \mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$

- **注1**：考虑函数$f(x)=x$，则$\mathrm{d}f(x)=1\Delta x$, 也即$\mathrm{d}x=\Delta x$

一般而言, 可以改写 $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x$

今后规定微分记为 $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$

- **注2**：回忆Leibniz记号, 对于函数 $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),\quad \therefore\ dy = \frac{dy}{dx}dx$$

方便记忆和推导 (注意不要概念混淆)

第12-1课：微分概念-定义与应用

- **微分的应用**

✓ **例1**：利用微分计算 $\sin(29^0)$ 的近似值

解：$29^0 = 30^0 - 1^0 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}$(弧度)，即要计算 $\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180})$

为此取 $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$, 则由微分定义

$$\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin(x_0) + \mathrm{d}\sin(x_0) = \sin(x_0) + \cos(x_0) \cdot \Delta x$$

$$= \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot (-\frac{\pi}{180}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{2 \cdot 180}$$

$$\approx 0.5 - \frac{1.732 \times 3.1416}{360} \approx 0.5 - 0,0151 = 0.4849$$

$$\therefore \quad \sin(29^0) \approx 0.4849 \qquad \square$$

注：实际 $\sin(29^0) = 0.4849096\cdots$, 上面近似值误差 $< \frac{1}{100000}$

第12-1课：微分概念-定义与应用

- **微分的计算**

➢ **四则运算的微分**：设u(x),v(x)都是可微函数，则

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad \mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm \mathrm{d}v \\ &2)\quad \mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v \\ &3)\quad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\quad (v\neq 0) \end{aligned}\right\}\text{都可以借助导数来验证}$$

证：以3)为例

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'\mathrm{d}x=\frac{vu'-uv'}{v^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{vu'\mathrm{d}x-uv'\mathrm{d}x}{v^2}=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\qquad\square$$

第12-1课：微分概念-定义与应用

- **复合函数的微分**

设函数 $x=\varphi(t)$在t点可微，函数$y=f(x)$ 在$x=\varphi(t)$ 点可微

则复合函数 $y=f\circ\varphi(t)=f(\varphi(t))$在$t$点可微，且

$$\mathrm{d}y=(f\circ\varphi)'(t)\mathrm{d}t=f'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

证：微分与导数的关系+复合函数求导链式法则即得 □

- **注1**：已知 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$, 代入即得

$$\mathrm{d}y=f'(x)\varphi'(t)\mathrm{d}t,\ x=\varphi(t)$$

可见, 微分过程中不必区分变量的地位(自变量或中间变量)

- **注2**：回忆Leibniz记号, 对于函数 $y=f(x)$, $x=\varphi(t)$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},\quad \therefore\ dy=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}dt$$

第12-1课：微分概念-定义与应用

✓ **例2**：方程 $\arctan(\frac{x}{y}) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定了一个隐函数$y(x)$ 求隐函数的微分与导数

解：记 $u=\frac{x}{y}$, $v=x^2+y^2$, 方程写为$\arctan u = \frac{1}{2}\ln v$

方程两端微分：$\mathrm{d}(\arctan u) = \mathrm{d}(\frac{1}{2}\ln v)$

$$左 = \frac{du}{1+u^2} = \frac{d(x/y)}{1+(x/y)^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

$$右 = \frac{dv}{2v} = \frac{d(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)} = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$

这导出 $ydx-xdy = xdx+ydy, \quad \therefore\ (x+y)dy = (y-x)dx$

当 $x+y\neq 0$ 时，$dy = \frac{y-x}{x+y}dx,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}$ □

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

Taylor公式-带Peano型余项

- **回忆-函数局部逼近问题**

  如何用*n*次多项式在x_0附近逼近*f*(x)？

  $$f(x_0+\Delta x)\approx P_n(\Delta x)\quad (\Delta x\text{比较小})$$

  参考引入微分概念的启发, 比如用2次多项式逼近

  $$P_2(\Delta x)=a+b\Delta x+c\Delta x^2$$

应满足 $$f(x_0+\Delta x)=P_2(\Delta x)+o(\Delta x^2)$$

一般而言, 考虑n次多项式逼近

$$P_n(\Delta x)=a_0+a_1\Delta x+\cdots+a_n\Delta x^n$$

应满足 $$f(x_0+\Delta x)=P_n(\Delta x)+o(\Delta x^n)$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

- **分析：** 以2次多项式逼近为例, 令

$$P_2(\Delta x) = a + b\Delta x + c\Delta x^2 \qquad \text{—— } a,b,c \text{ 待定}$$

满足 $\quad f(x_0+\Delta x) = P_2(\Delta x) + o(\Delta x^2)$

也即 $\quad f(x_0+\Delta x) - a - b\Delta x - c\Delta x^2 = o(\Delta x^2)$

考虑 $\Delta x \to 0$, 则导出 $f(x_0+\Delta x) - a \to 0 \qquad \text{—— } a = f(x_0)$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-a}{\Delta x} - b \to 0 \qquad \text{—— } b = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-a-b\Delta x}{\Delta x^2} - c \to 0 \qquad \text{—— } c = \frac{f''(x_0)}{2}$$

这说明, 只要 $f''(x_0)$存在, 便有

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

- **推广- Taylor多项式**

  设$f(x)$在x_0附近有定义，且 $f^{(n)}(x_0)$存在，引入多项式

$$P_n(\Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n$$

称为$f(x)$在x_0点的n次Taylor多项式

- **特例-Maclaurin多项式**

  在$x_0=0$的情况下，Taylor多项式称为Maclaurin多项式

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

- **Taylor公式**：设f(x)在x_0附近有定义，且 $f^{(n)}(x_0)$存在，则

$$f(x_0+\Delta x)=P_n(\Delta x)+o(\Delta x^n)$$

等价地 $$f(x)=P_n(x-x_0)+o((x-x_0)^n)$$

称为f(x)在x_0点(带Peano型余项)的n阶/次Taylor多项式展开

其中小o项就是Peano型余项 (只说明趋向于0的阶数)

证：下面要对“0/0型”极限反复应用L-法则，回忆

$$P_n(\Delta x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n$$

$$\therefore\ P_n'(\Delta x)=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}\Delta x+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}\Delta x^{n-1}$$

一般而言，对于 $k=1,\cdots,n$

$$P_n^k(\Delta x)=f^{(k)}(x_0)+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{1!}\Delta x+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-k)!}\Delta x^{n-k}$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

- Taylor公式证明(续)：下面反复对“0/0型”极限应用L-法则
  已知条件隐含f 的n阶以下导数都在x_0附近存在

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-P_n(\Delta x)}{\Delta x^n}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-P_n'(\Delta x)}{n\Delta x^{n-1}}$$

$$=\cdots=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-P_n^{(n-1)}(\Delta x)}{n(n-1)\cdots 2\cdot\Delta x}$$

注意到 $P_n^{(n-1)}(\Delta x)=f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0)\Delta x$

所以 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-P_n(\Delta x)}{\Delta x^n}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\Delta x}{n!\Delta x}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}-f^{(n)}(x_0)\right]=0 \qquad \square$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

- 计算**Maclaurin**展开 (平移即得Taylor展开)

✓ 例1：$f(x)=e^x$

解：已知 $f^{(k)}(x)=e^x,\ f^{(k)}(0)=1,\ \ k=0,1,2,\cdots$

$$\therefore\quad e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\qquad\square$$

【思考】上式能否估计 $|e^1-(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{8!})|$ 有多大？

✓ 例2：$f(x)=(1+x)^{-1}$

解：容易计算 $f^{(k)}(x)=(-1)^k k!(1+x)^{-(k+1)}$

$$\therefore\quad f^{(k)}(0)=(-1)^k k!,\ \ k=0,1,2,\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)\qquad\square$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

✓ 例3： $f(x)=\sin x$

解： 已知 $f^{(k)}(x)=\sin(x+\frac{k\pi}{2}),\ f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2},\quad k=0,1,2,\cdots$

$$\therefore\quad f^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k=2m\\ (-1)^m, & k=2m+1\end{cases}\qquad m=0,1,2,\cdots$$

$$\therefore\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+o(x^{2m+1})\qquad\square$$

✓ 例4： $f(x)=\cos x$

解： 类似上面

$$f^{(k)}(0)=\cos\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^m, & k=2m\\ 0, & k=2m+1\end{cases}\qquad m=0,1,2,\cdots$$

$$\therefore\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m})\qquad\square$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

✓ 例5： $f(x)=\ln(1+x)$

解：计算 $f'(x)=(1+x)^{-1}$, $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{k-1}$

$$\therefore \quad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!,\quad k=1,2,\cdots$$

$$\therefore \quad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n) \qquad \square$$

✓ 例6： $f(x)=\arctan x$

解：回忆前面(第9课)曾计算 $f^{(100)}(0)=0$, 顺便得到

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k=2m\\ (-1)^m(2m)!, & k=2m+1\end{cases} \qquad m=0,1,2,\cdots$$

$$\therefore \quad \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{2m+1}+o(x^{2m+1}) \qquad \square$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

✓ 例7： $f(x)=(1+x)^{\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R}$

解：计算 $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1),\ k=1,2,\cdots$$

$$\therefore\quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n) \qquad \square$$

✓ 特例： $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2) \qquad (\alpha=\frac{1}{2})$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2) \qquad (\alpha=-\frac{1}{2})$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

- 应用-极限计算

✓ 例8：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)\tan^2 x}{\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}=?$

解：用L-法则较繁琐, 用Taylor展开判断分子-分母的阶数

分子容易判断(乘积因子可以用无穷小代换)：

$$e^{x^2}-1\sim x^2,\ \tan^2 x\sim x^2,\quad 分子=x^4+o(x^4)$$

分母展开到4阶无穷小即可(高于4阶的无穷小不影响结果)

$$\ln(1+\sin^2 x)=\sin^2 x-\frac{\sin^4 x}{2}+o(\sin^4 x)$$

$$=[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]^2-\frac{1}{2}[x+o(x)]^4+o(x^4)$$

$$=x^2-\frac{x^4}{3}-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

✓ 例8 (续)： $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)\tan^2 x}{\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}=?$

展开到4阶无穷小

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),\ 1-\cos x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$\sqrt[3]{2-\cos x}=[1+(1-\cos x)]^{\frac{1}{3}}$$

$$=1+\frac{1}{3}(1-\cos x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(1-\cos x)^2+o((1-\cos x)^2)$$

$$=1+\frac{1}{3}(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24})-\frac{1}{9}[\frac{x^2}{2}+o(x^2)]^2+o(x^4)$$

$$=1+\frac{x^2}{6}-(\frac{1}{72}+\frac{1}{36})x^4+o(x^4)$$

$$=1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

第12-2课：Taylor公式-带Peano型余项

✓ 例8 (续二)：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)\tan^2 x}{\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}=?$

已经得到

分子 $=x^4+o(x^4)$，分母需要展开到4阶无穷小

$$\ln(1+\sin^2 x)=x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4),\ \sqrt[3]{2-\cos x}=1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$分母=[x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)]-6[\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)]$$

$$=(-\frac{5}{6}+\frac{1}{4})x^4+o(x^4)=-\frac{7}{12}x^4+o(x^4)$$

$$\therefore\ I=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+o(x^4)}{-\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}=-\frac{12}{7}\qquad\square$$

第7课：连续函数的性质

- **预习（下次课内容）：**

  第4.3节 Tayor公式-带Lagrange型余项

  各种应用实例

- **作业 (本次课)：**

  练习题4.1：1-2[自己练习], 3, 4, 5(1,4).

  练习题4.2：1, 2*(考虑$f(x)=x^3D(x)$, n=2),

  3(取对数-利用ln(1+x)的展开).