2015-2016秋季线性代数期中试题

考试课程　　线性代数　　A卷　　　2015 年 11 月 13 日

姓名: ____________　　学号: ____________　　班级: ____________

每题5分

1. 设$A=\begin{pmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, 假设$A$有LU分解，则$L=$____,$U=$____.

   答：$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} a & r & r & r \\ 0 & b-r & s-r & s-r \\ 0 & 0 & c-s & t-s \\ 0 & 0 & 0 & d-t \end{pmatrix}$.

2. 设u,v是n维列向量，I_n是n阶单位阵，且I_n-uv^T可逆，则它的逆是____.

   答：$(I_n+\frac{uv^T}{1-v^Tu})$

3. 设A,D是n阶可逆矩阵，则分块矩阵$T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$可逆，它的逆是____.

   答：$T^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.

4. 设$E_{23}(-3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则存在初等阵(elementary matrix)E使得$E_{23}(-3)P=PE$. $E=$____.

   答：$E=E_{12}(-3)=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. 设L_k是一个n阶矩阵满足当$i \neq k$时，它的第i列是单位阵的第i列，第k列是$(0,\ldots,0,1,2,\cdots,n-k+1)^T$，其中1在第$k$个分量，则$L_1L_2\cdots L_{n-1} =$ ____.

答：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. 设$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, 则$PAP =$ ____________.

答：$\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$.

7. 举例说明是否存在两个2阶矩阵A, B满足$C(A) = C(B)$, $N(A) \neq N(B)$,$A, B =$ ____. 如果不存在，说明理由是____________.

答：(答案不唯一) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

8. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. 当$b$满足____，$Ax = b$有解.

答：$2b_1 - b_2 + b_3 = 0$.

9. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & k \end{pmatrix}$. 当$k =$ ____时，$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$有无穷解.

答：$k = 7$.

10. 下列陈述正确的是____________：(1) A和$R = RREF(A)$有同样列空间；(2) A^T和R^T（注：$R = RREF(A)$）有同样的列空间；(3) 若A, B满足$C(A) = C(B), N(A) = N(B)$，则$A = B$; (4) 若对于任意b, $Ax = b$和$Bx = b$有同样的解，则$A = B$.

答：正确的有(2)(4).

11. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是一个3阶矩阵满足当$i\neq j$, $\alpha_i^T\alpha_j=0$; 当$i=j$, $\alpha_i^T\alpha_i=i$, 则$A^TA=$____,

    答：$A^TA=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$,

12. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, 则$x^TAx-x^T(\frac{A+A^T}{2})x=$____.

    答：0.

13. 设A是一个2×3阶矩阵，AA^T可逆，则A^TA的秩是________.

    答：2.

14. 设A是一个$m\times n$阶矩阵，秩为m, $b\in\mathbb{R}^m$满足____时，$Ax=b$有解.

    答：$\forall b$, $r(A\vdots b)=m$, $b\in C(A)$或$m\leq n$.

15. 设A为3阶方阵, $b\in\mathbb{R}^3$, 通过行变换, $Ax=b$化为$Rx=d$, 其中$R=RREF(A)$, 完全解为$x=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$，则$R=$____, $d=$____.

    答：$R=\begin{pmatrix}1 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\quad d=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$.

16. 设A是5×4阶阵, $N(A)=\{c_1\vec{v}+c_2\vec{w}\mid c_1,c_2\in\mathbb{R},\vec{v}=(3,1,0,0)^T,\vec{w}=(1,0,4,1)^T\}$, 则$RREF(A)=$____.

    答：$RREF(A)=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

17. 设A,B是n阶方阵, $A^2=B^2=0$且$A+B$可逆，则A,B的秩有何关系____.

    答：$r(A)=r(B)$

18. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是三阶方阵，$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$. 则$A^Ty=b$有解的必要条件是$b$满足____.

答：$2b_1+b_2-b_3=0$

19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$X$是$3\times 2$阶未知变量矩阵，则$AX = 0_{2\times 2}$的解是____.

答：$X = \begin{pmatrix} -2c_1 & -2c_2 \\ c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

20. 设A是二阶可逆矩阵, 考虑分块矩阵$B=(A,A)$，则$N(B)=$____.

答：$N(B) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

记号：

- $C(A)$是A的列空间(column space); $N(A)$是A的零空间(null space); $RREF(A)$是A的简约行阶梯型(reduced row echelon form).