# Discrete Mathematics

## Lecture 12

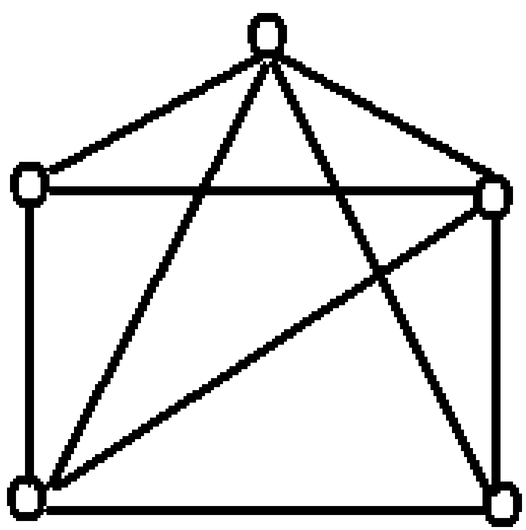
## *Euler's Formula*

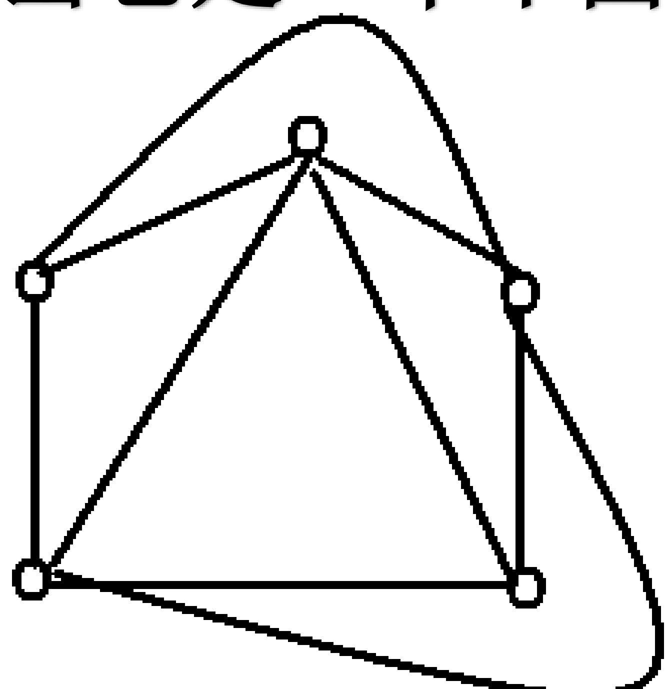
# 1、平面图（planar graph）

**定义** 如果图$G=(V,E)$的所有顶点和边可以在一个平面上图示出来，而使各边仅在顶点处相交，则图$G$称为**平面图**，它的平面图示称为图$G$的**平图**（planar map），否则称$G$为**非平面图**。

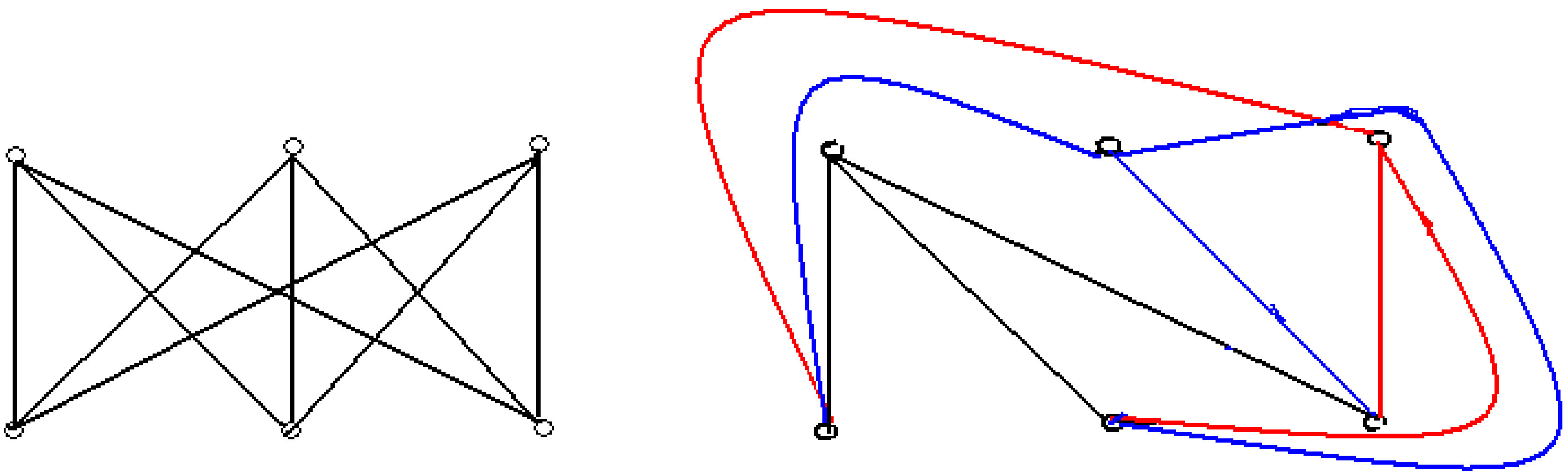
**Note**. A planar **graph** is a pair $(V, E)$, but a planar **map** is a **geometry**.

有些图形从表面看有几条边是相交的，但是不能就此肯定它不是平面图，例如，下面左图表面看有几条边相交，但如把它画成右图，则可看出它是一个平面图。





有些图形不论怎样改画，除去顶点外，总有边相交。如$K_{3,3}$，故它为非平面图。

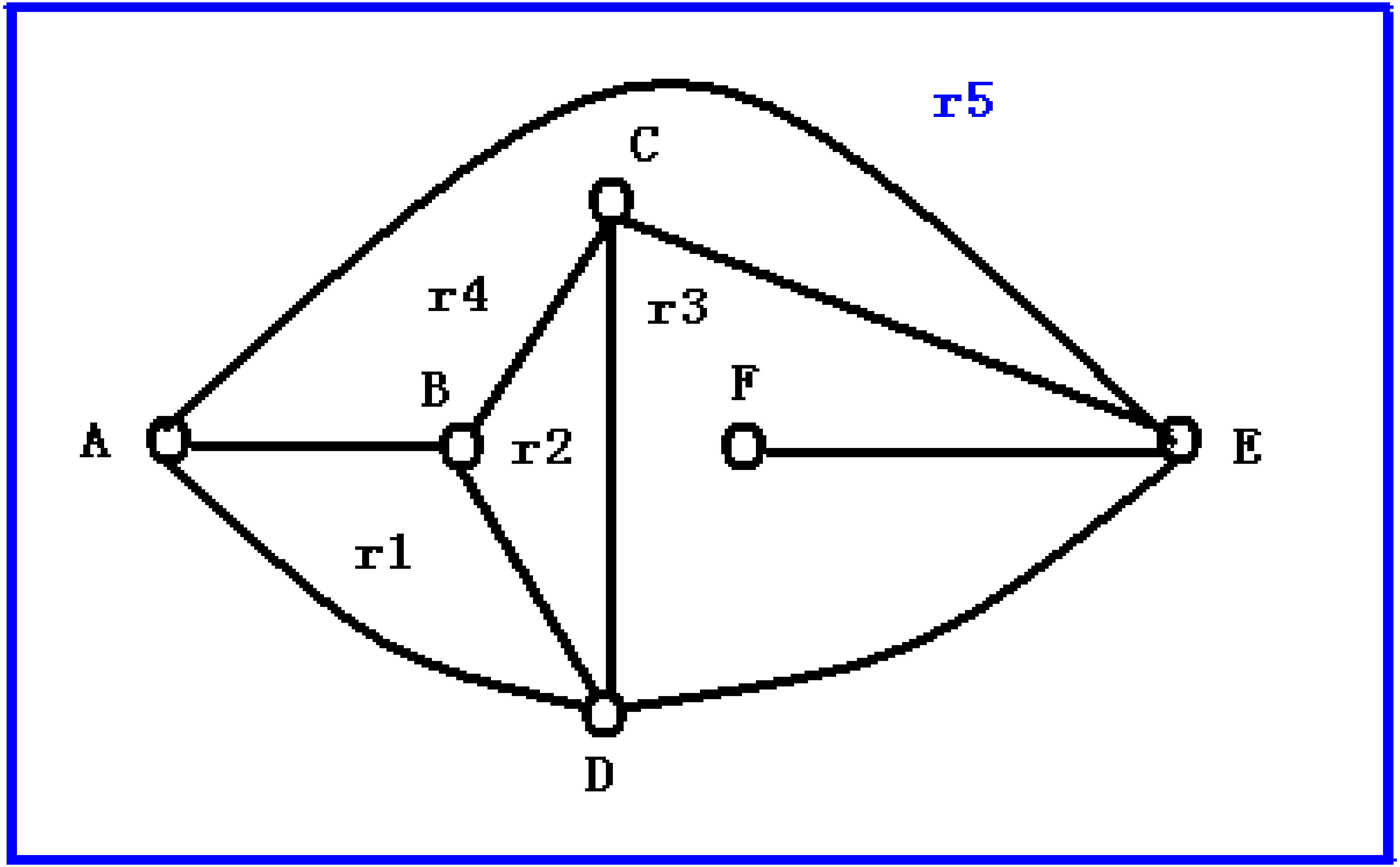


**Two drawings of $K_{3,3}$.**

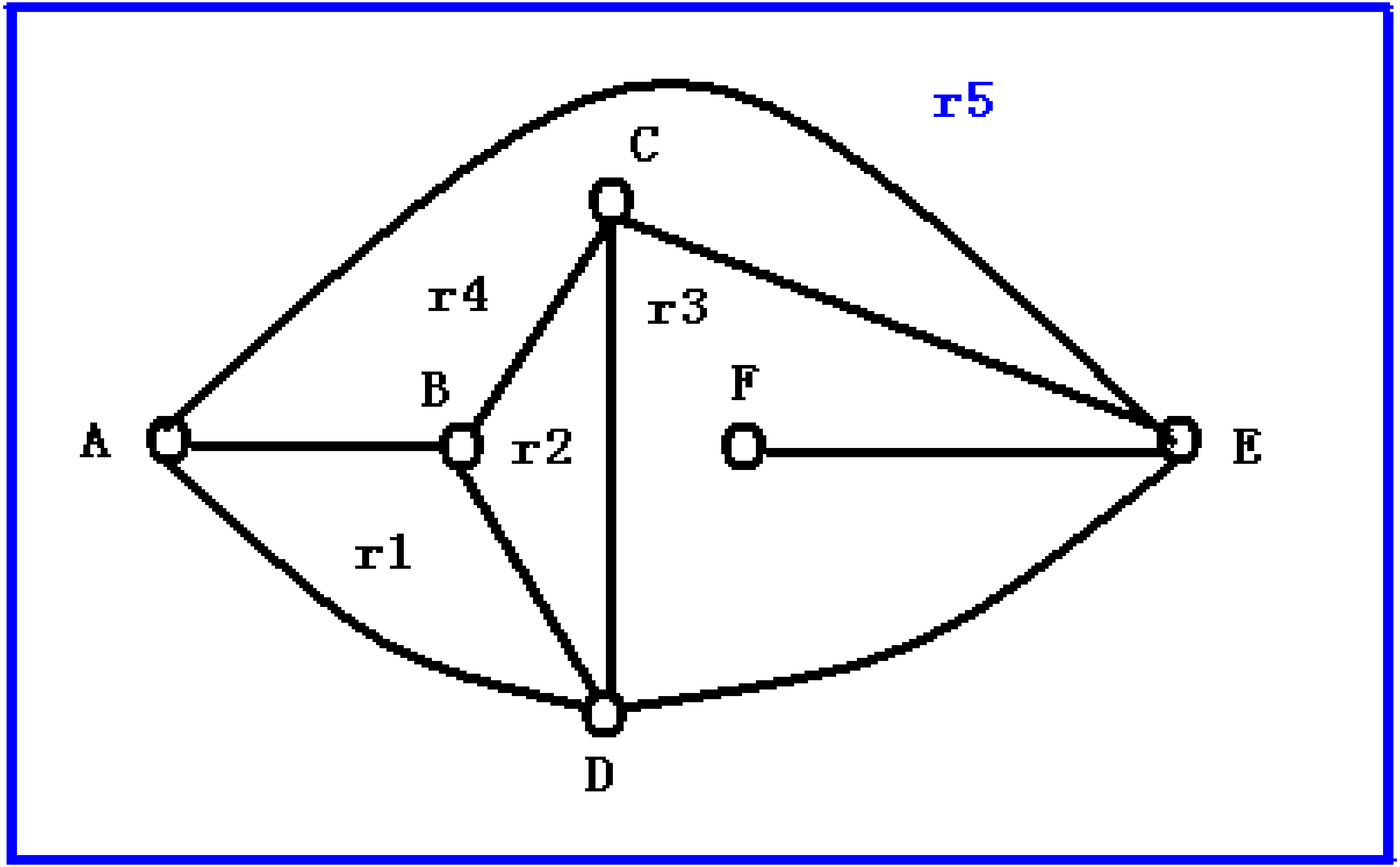
# 2、面(face)和边界(boundary)

定义 设G是一连通平图，由图中的边所包围的区域，在区域内既不包含图的顶点，也不包含图的边，这样的区域称为G的一个面，有界的区域称为有界面，无界的区域称为无界面。

包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的边界。面$F$的边界的长度称为该面的度数，记为$d(F)$。




$d(r_1)=3$, $d(r_2)=3$, $d(r_3)=5$, $d(r_4)=4$, $d(r_5)=3$.




$$d(r_1)+d(r_2)+d(r_3)+d(r_4)+d(r_5)=18.$$

**定理** 有限平图面的度数之和为其边数的两倍：$\sum d(F)=2|E|$。

**证明思路**：任一条边或是两个面的共同边（贡献两次），或是一个面边界的重复边（贡献两次）。

如边是两个面的分界线，该边在两个面的度数中各记一次。

如边不是两个面的分界线(其为桥)则该边在该面的度数中重复记了两次，故定理结论成立。

# 3、Euler's Formula

**定理12.1.1** 设$G$为一连通平图，$v$为其顶点数，$e$为其边数，$f$为其面数，那么Euler公式成立：$v-e+f=2$。

证明：对面数进行归纳。

若$f$=1, 则$G$为一棵树，且$e=v-1$，$f=1$，

故$v-e+f=2$成立。

设对于面数小于$n$的所有连通平图定理成立，任选$G$的一条非桥$a$，则$G-a$是连通平图，且有$f(G-a)=n-1$。

- 由归纳假设有$v(G-a)-e(G-a)+f(G-a)=2$，
- 另外，$v(G-a)=v(G)$，$e(G-a)=e(G)-1$，
- $f(G-a)=f(G)-1$，
- 故 $v(G)-e(G)+f(G)=2$。

**定理12.2.2** 设$G$为一简单连通平面图，其点数$v \geq 3$，其边数为$e$，那么$e \leq 3v-6$。

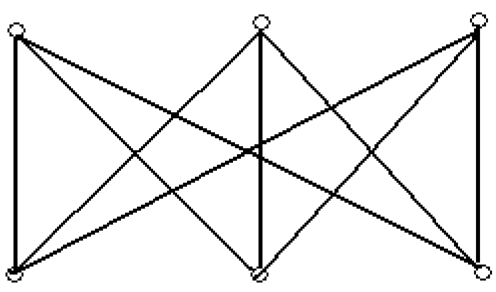
证明思路：设$G$的面数为$f$, 并注意每一面的度数不小于3, 各面度数之和为$2e$, 因此 $3f \leq \sum d(F) = 2e$，$f \leq 2e/3$，
代入Euler公式：$2=v-e+f \leq v-e+2e/3$，
整理后得：$e \leq 3v-6$.

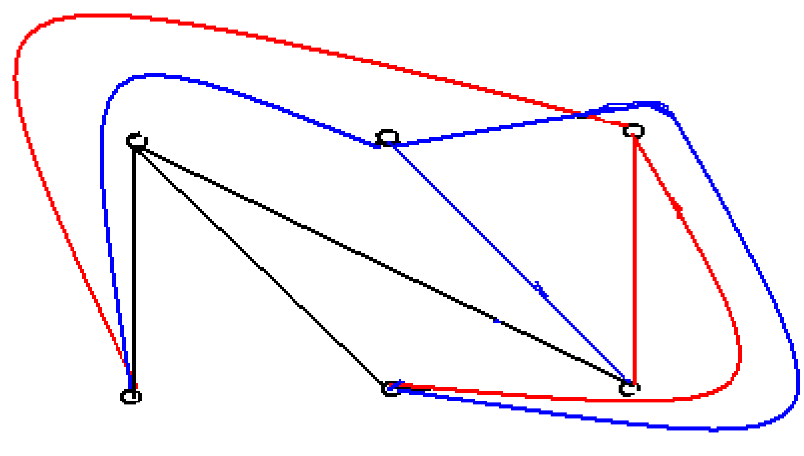
**What if the min degree of faces is *k*>3?**

**Then the graph $G$ is sparser, see Page 13.**

例如：$K_5$中$v$=5，e=10，3$v$-6=9，从而e>3$v$-6，所以$K_5$不是平面图。

定理12.2.2的结论不是充分的。如图$K_{3,3}$满足定理的条件（$v$=6，e=9，3$v$-6=12，e≤3$v$-6成立），但$K_{3,3}$不是平面图。





**推论** 对每个面的度至少为$k$的连通平图有 $e \le k(v-2)/(k-2)$,
这里$v$和$e$分别是点数和边数。

假设$K_{3,3}$是平面图，因在$K_{3,3}$中无三角形，故每个面的度至少为4，

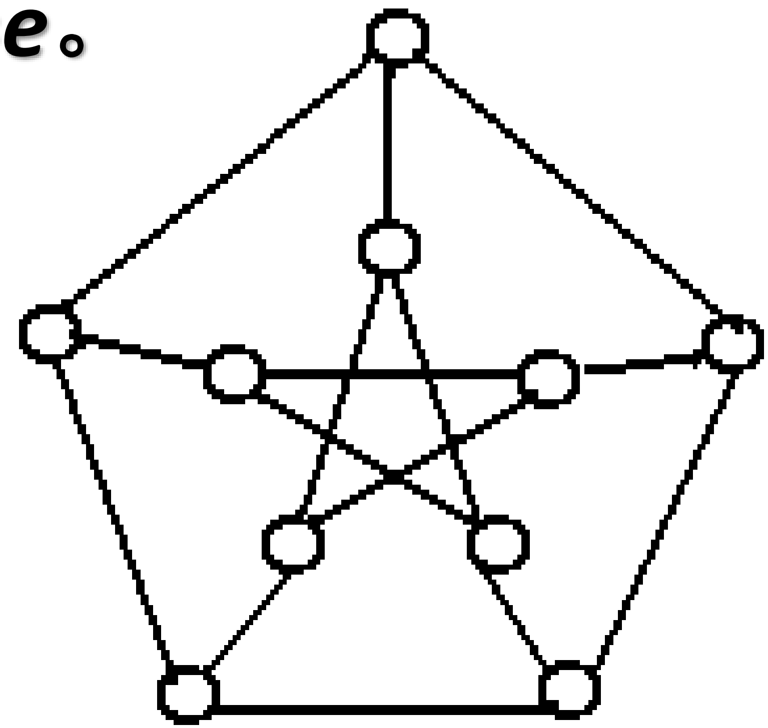
在$K_{3,3}$中有$v$=6个顶点$e$=9条边，

$4(v-2)/2=8<9$, 与推论矛盾，

故$K_{3,3}$不是平面图。

**d(*F*)≥5， *k*=5， *v*=10， *e*=15，**

**$k(v-2)/(k-2)=40/3<15=e$。**



**The Petersen graph is not planar.**

**例** 设一个连通平图点数$v$=10，每个面均由4条边围成，求该平图边数和面数。

**解**：因每个面的度均为4，则$2e=4f$，

即$e=2f$，

又$v$=10，代入Euler公式$v-e+f=2$

有$10-2f+f=2$，解得，$f=8$，

则$e=2f=16$。

**例** 证明少于30条边的平面连通简单图至少有一个顶点的度不大于4。

**证明**：设最小度为$\delta$，则$v\delta \le 2e < 60$，即$\delta < 60/v$。

又因为$e \le 3v-6$，所以$v\delta \le 2e \le 6v-12$，

于是$\delta \le 6-12/v$。故$\delta \le 4$。

因此至少有一个顶点的度不大于4。

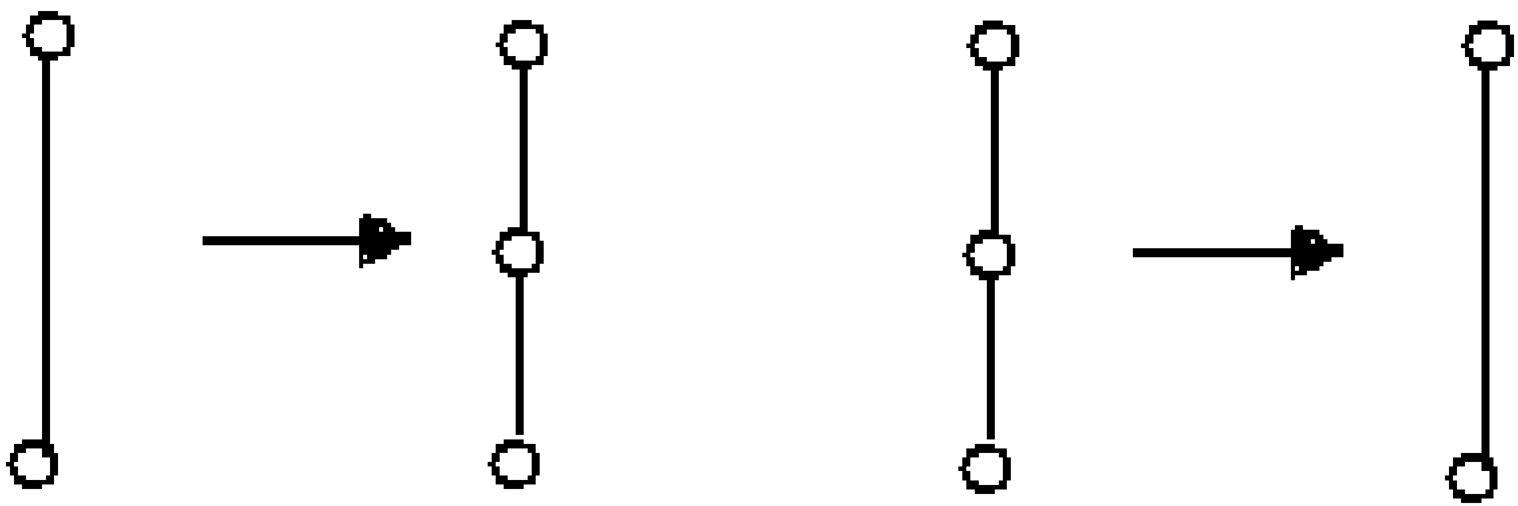
**例** 证明在有6个顶点和12条边的连通简单平图中，每个面由3条边围成（即每个面的度数均为3）。

**证明**：设该图有$v$个顶点, $e$条边, $f$个面, 根据Euler公式$v-e+f=2$, 有$f=2-v+e=8$，

故每个面的平均度数为$2e/f=24/8=3$，

又因为连通简单平图（$v\geq3$）中每个面的度数均大于或等于3，因此该图每个面的度数均为3。

在给定图*G*的边上，插入一个新的度数为2的顶点，使一条边分成两条边，或者对关联度为2的顶点的两条相邻边，去掉这个顶点，使两条边化成一条边，这些都不会影响图的平面性。



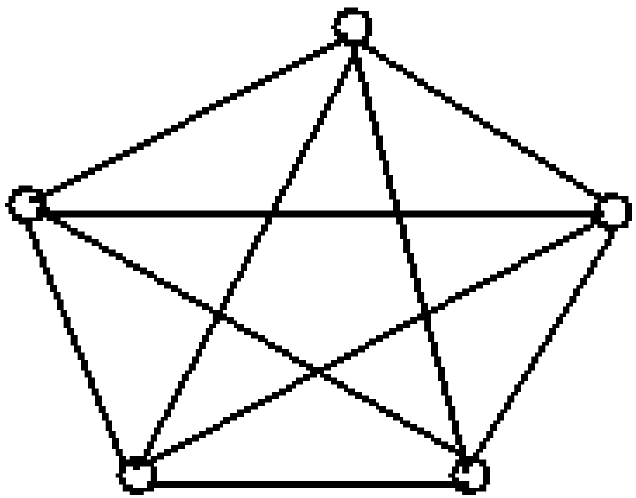
定义 对两图$G_1$和$G_2$，若$G_1$是通过对$G_2$的边反复地插入二度顶点后得到的，则称$G_1$是**topological $G_2$-minor**。

**Kuratowski's Theorem（1930）**

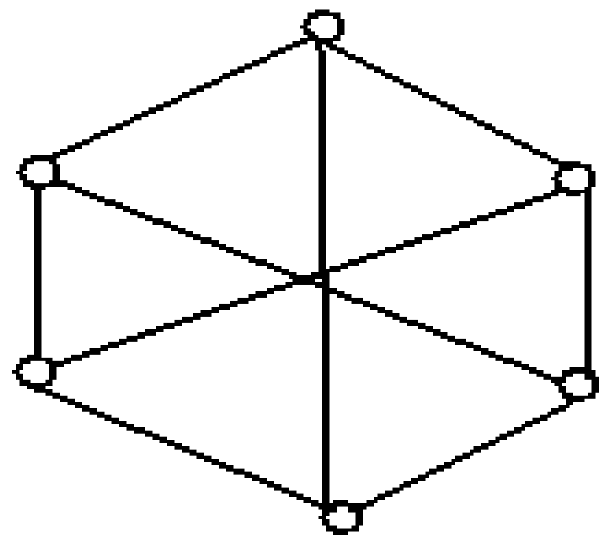
**A graph is planar⇔it contains neither topological $K_5$-minor nor $K_{3,3}$-minor。**

This starts the **Minor Theory** by **Robertson** and **Seymour**.

The two graphs $K_5$ and $K_{3,3}$ are often called the **Kuratowski** graphs。



$K_5$



$K_{3,3}$