第13课：Taylor多项式展开及应用

第4章 Taylor定理/公式

- **内容：**

  第4.2节 Taylor展开式-唯一性

  第4.3节 Taylor多项式+Lagrange型余项

第13-1课：Taylor公式-带Peano型余项

Taylor公式-带Peano余项：补充

- **复习-Taylor多项式展开**

  如果f(x)在x_0附近有定义, 且 $f^{(n)}(x_0)$存在

则可以构造n次Taylor多项式

$$P_n(\Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n$$

使得 $f(x_0+\Delta x) = P_n(\Delta x) + o(\Delta x^n)$

- **问题**：反之, 如果已知

$$f(x_0+\Delta x) = a_0 + a_1\Delta x + \cdots + a_n\Delta x^n + o(\Delta x^n)$$

是否右端必是Taylor多项式逼近：$a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0,1,\cdots,n$?

第13-1课：Taylor公式-带Peano型余项

- **观察分析：** 已知

$$f(x_0+\Delta x)=a_0+a_1\Delta x+\cdots+a_n\Delta x^n+o(\Delta x^n)$$

考虑是否 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=0,1,\cdots,n?$

首先 令 $\Delta x\to 0$ 得到 $a_0=f(x_0)$ —— $k=0$ 成立

代回上式导出

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+a_1\Delta x+o(\Delta x)$$

也即 f 在 x_0 点可微, 所以微分系数 $a_1=f'(x_0)$ —— $k=1$ 成立

是否可以依次推出 *k*=2,3,…… 都成立？

第13-1课：Taylor公式-带Peano型余项

- **Taylor展开的唯一性**：如果 $f^{(n)}(x_0)$存在, 且

$$f(x_0+\Delta x)=a_0+a_1\Delta x+\cdots+a_n\Delta x^n+o(\Delta x^n)$$

则必有 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k=0,1,\cdots,n$

证：记 $Q_n(\Delta x)=a_0+a_1\Delta x+\cdots+a_n\Delta x^n$, 则

$$f(x_0+\Delta x)=Q_n(\Delta x)+o(\Delta x^n)$$

另一方面, 根据Taylor展开公式

$$f(x_0+\Delta x)=P_n(\Delta x)+o(\Delta x^n),$$ P_n为Taylor多项式

二式相减：$P_n(\Delta x)-Q_n(\Delta x)=o(\Delta x^n)$, 也即 $P_n(x)-Q_n(x)=o(x^n)$

这说明左端n次多项式是x的n阶高阶无穷小(在x=0附近)

由此容易导出左端恒为0, $\therefore\ P_n(x)\equiv Q_n(x)$ □

第13-1课：Taylor公式-带Peano型余项

- **推论**：设 $f(x_0+\Delta x)=a_0+a_1\Delta x+\cdots+a_n\Delta x^n+o(\Delta x^n)$

如果对于某些 $k>1,\ a_k\neq\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$，则 $f^{(k)}(x_0)$不存在

- **特例**：$f(x)=x^3D(x)=0+0x+0x^2+o(x^2)$

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \text{不存在}, & x\neq 0\end{cases}\qquad \therefore\ f''(0)\text{不存在}$$

由此可见 $a_0=0=f(0),\ a_1=0=f'(0),\quad a_2=0\neq\dfrac{f''(0)}{2}$

- **推广**：$f(x)=x^{n+\lambda}D(x)=0+0x+\cdots+0x^n+o(x^n)$

其中 $n\geq 2,\lambda>0$

$$a_0=0=f(0),\ a_1=0=f'(0),\ a_k=0\neq\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\ k=2,\cdots,n$$

第13-1课：Taylor公式-带Peano型余项

✓ **例1**：$f(x)=e^{x^2-2x}$ 在 $x_0=1$ 点的Taylor多项式展开

解：间接展开-已知Maclaurin展开, 注意这时Δx=(x-1)

$$e^{x^2-2x}=e^{(x-1)^2-1}=e^{-1}e^{(x-1)^2}$$

$$=e^{-1}[1+\frac{(x-1)^2}{1!}+\cdots+\frac{(x-1)^{2n}}{n!}+o((x-1)^{2n})] \qquad \square$$

- **注**：利用Taylor多项式系数公式, 还可以导出本例中

$$f^{(k)}(1)=a_k k!=\begin{cases}\frac{(2m)!}{m!e}, & k=2m\\ 0, & k=2m+1\end{cases} \qquad m=0,1,2,\cdots$$

特别有 $f'(1)=f'''(1)=f^{(5)}(1)=0=\cdots,$

$$f^{(4)}(1)=\frac{4!}{2!e}=\frac{12}{e},\quad f^{(8)}(1)=\frac{8!}{4!e}=\frac{1680}{e},\cdots$$

第13-1课：Taylor公式-带Peano型余项

✓ 例2：$f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+2x}$ 在 $x_0=-1$ 点的n 阶Taylor展开

解：间接展开-据题意要写成Δx=(x+1)的多项式展开

$$\frac{x-2}{x^2+2x}=\frac{x-2}{x(x+2)}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x}=\frac{2}{1+(x+1)}-\frac{1}{1-(x+1)}$$

回忆 $$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n+o(t^n)$$

由此得 $$\frac{2}{1+(x+1)}=2[1-(x+1)+\cdots+(-1)^n(x+1)^n+o((x+1)^n)]$$

$$\frac{1}{1-(x+1)}=1+(x+1)+\cdots+(x+1)^n+o((x+1)^n)$$

所以 $$\frac{x-2}{x^2+2x}=1-3(x+1)+(x+1)^2-3(x+1)^3$$
$$+\cdots+[2(-1)^n-1](x+1)^n+o((x+1)^n)\qquad\square$$

第13-1课：Taylor公式-带Peano型余项

- 例3： $f(x)=\tan x$，写出5阶Maclaurin展开

解： 已知 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^6)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)$

以及 $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, 可用长除法计算, 也可以用待定系数法:

令 $\tan x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)$

则 $[a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + o(x^5)][1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)] = [x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)]$

由此易见 $a_0 = a_2 = a_4 = 0$, 继续计算

$$[a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)][1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)]$$

$$= a_1 x + (a_3 - \frac{a_1}{2!})x^3 + (a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!})x^5 + o(x^5)$$

第13-1课：Taylor公式-带Peano型余项

✓ **例3 (续)**：已知 $\tan x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$

以及 $\tan x \cos x = [a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)][1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)]$

$$= a_1 x + (a_3 - \frac{a_1}{2!})x^3 + (a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!})x^5 + o(x^5)$$

$$= \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),$$

比较多项式系数：$a_1 = 1,\ \ a_3 - \frac{a_1}{2!} = -\frac{1}{3!},\ \ a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!} = \frac{1}{5!}$

解得 $\quad a_1 = 1,\ \ a_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3},\ \ a_5 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{15}$

$$\therefore \ \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \qquad \square$$

第13-2课：Taylor公式-带Lagrange余项

Taylor公式-带Lagrange型余项

- **回忆-Taylor公式-带Peano余项**：设 $f^{(n)}(x_0)$存在, 则

$$f(x_0+\Delta x)=P_n(\Delta x)+o(\Delta x^n)$$

其中 $P_n(\Delta x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\dfrac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n$

- **注**1) 上式在 f 的定义域内处处成立 (几乎是废话)

  2) 一般而言, 只有Δx很小时才有近似关系

$$f(x_0+\Delta x)\approx P_n(\Delta x)\quad \text{(局部近似)}$$

  3) 仅当Δx趋于0时给出函数的精确刻画

第13-2课：Taylor公式-带Lagrange余项

- Taylor公式-带Lagrange余项 (整体公式)

  设 f 在(a,b)内$n+1$阶可导，$\forall x_0, x_0+\Delta x\in(a,b)$, $\exists\theta\in(0,1)$

$$f(x_0+\Delta x)=P_n(\Delta x)+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$$

其中 $P_n(\Delta x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n$

$$R_n(\Delta x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$$ —— Lagrange型余项

- **注**：当n=0时, 即已知 f 在(a,b)内1阶可导, 公式化为

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,\ \ \theta\in(0,1)$$

就是Lagrange中值公式 —— 上面余项类型命名的来源

第13-2课：Taylor公式-带Lagrange余项

- Taylor公式证明：要证的公式等价于 $\exists\theta\in(0,1)$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-P_n(\Delta x)}{\Delta x^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\qquad(\Delta x\neq 0)$$

回忆Cauchy中值定理：

设 $F(t),G(t)\in C[0,1]$且在$(0,1)$内可导，且 $G'(t)\neq 0$

则 $\exists\theta\in(0,1)$, $\dfrac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\dfrac{F'(\theta)}{G'(\theta)}$

现取 $F(t)=f(x_0+t\Delta x)-P_n(t\Delta x)$, $G(t)=(t\Delta x)^{n+1}\in C^{n+1}[0,1]$

则 $F(0)=G(0)=0$ 且

$$F'(t)=[f'(x_0+t\Delta x)-P_n'(t\Delta x)]\Delta x$$

$$G'(t)=[(n+1)(t\Delta x)^n]\Delta x\neq 0$$

第13-2课：Taylor公式-带Lagrange余项

- Taylor公式证明 (续)：应用Cauchy中值定理得到 $\theta_1 \in (0,1)$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-P_n(\Delta x)}{\Delta x^{n+1}}=\frac{f'(x_0+\theta_1\Delta x)-P_n'(\theta_1\Delta x)}{(n+1)(\theta_1\Delta x)^n}$$

依照类似步骤, 上式右端再次用Cauchy中值定理得 $\theta_2 \in (0,1)$

$$\frac{f'(x_0+\theta_1\Delta x)-P_n'(\theta_1\Delta x)}{(n+1)(\theta_1\Delta x)^n}=\frac{f''(x_0+\theta_2\theta_1\Delta x)-P_n''(\theta_2\theta_1\Delta x)}{(n+1)n(\theta_2\theta_1\Delta x)^n}$$

依次递推得到 $\cdots,\theta_n,\theta_{n+1} \in (0,1)$, 使得

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-P_n(\Delta x)}{\Delta x^{n+1}}=\cdots=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_1\cdots\theta_n\Delta x)-P_n^{(n)}(\theta_1\cdots\theta_n\Delta x)}{(n+1)!(\theta_1\cdots\theta_n\Delta x)}$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta_1\cdots\theta_{n+1}\Delta x)}{(n+1)!},\quad \text{取}\,\theta=\theta_1\cdots\theta_{n+1}\in(0,1)\qquad\square$$

第13-2课：Taylor公式-带Lagrange余项

- 注1：带Lagrange余项Taylor公式常用的表达形式

设 f 在(a,b)内n+1阶可导, $\forall x_0, x \in (a,b)$, $\exists \xi$在x_0与x之间

$$f(x) = P_n(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

比较而言 $f(x_0 + \Delta x) = P_n(\Delta x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$

- 注2：带Lagrange余项的Maclaurin公式(x_0=0)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

第13-2课：Taylor公式-带Lagrange余项

- **计算Maclaurin展开-带Lagrange余项**

✓ 例1：$f(x)=e^x$

解：已知展开式的多项式, 只须写出Lagrange型余项

已知 $f^{(n+1)}(x)=e^x$, $\quad \therefore\ R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

$$\therefore\ e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1 \qquad \square$$

- 注1) 根据Taylor公式条件, 上式对所有x和n成立(θ会变化)

  2) 固定x, 易证 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, $\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!})=e^x$

  3) 固定n, 显然有 $\lim\limits_{x\to+\infty}R_n(x)=+\infty$

第13-2课：Taylor公式-带Lagrange余项

- ✓ 例2： $f(x)=(1+x)^{-1}$

  解：已知 $f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}(n+1)!(1+x)^{-(n+2)}$

Lagrange型余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}},\quad 0<\theta<1 \qquad \square$$

- 注1) 根据Taylor公式的条件, 上式对于x>-1都成立

  2) 当|x|<1(固定), 可证明 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 多项式逼近$(1+x)^{-1}$

  3) 当x>1, 可以证明 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\infty$, 多项式不再逼近$(1+x)^{-1}$

第13-2课：Taylor公式-带Lagrange余项

✓ **例3：** $f(x)=\sin x$

解：已知 $f^{(2m+1)}(x)=\sin(x+\dfrac{(2m+1)\pi}{2})=(-1)^m\cos x$

$$\therefore\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{\cos(\theta x)x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

其中 $0<\theta<1$ □

✓ **例4：** $f(x)=\cos x$

解：类似 $f^{(2m+2)}(x)=\cos(x+\dfrac{(2m+2)\pi}{2})=(-1)^{m+1}\cos x$

$$\therefore\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{\cos(\theta x)x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

其中 $0<\theta<1$ □

第13-2课：Taylor公式-带Lagrange余项

✓ **例5**：$f(x)=\ln(1+x)$

解：$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}$

$$\therefore\quad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

其中 $x>-1,\ 0<\theta<1$ $\square$

✓ **特例**：用n次多项式逼近计算ln(1.5), 则误差为

$$|R_n(\frac{1}{2})|=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}[1+(\theta/2)]^{n+1}}\le\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

比如要使误差低于10^{-4}, 可取n=9 (用9次多项式逼近)

$$|R_9(\frac{1}{2})|\le\frac{1}{10\times2^{10}}=\frac{1}{10240}<\frac{1}{10000}$$

第13-2课：Taylor公式-带Lagrange余项

- 例6： $f(x)=(1+x)^{\alpha},\quad \alpha\in\mathbb{R}$

  解：计算 $f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$

$$\therefore\quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}x^{n+1}$$

  其中 $0<\theta<1$ $\square$

- 特例： $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+R_2(x)$

$$R_2(x)=\frac{1}{3!}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-3}x^3=\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}}$$

比如0<x<0.2, 则2次多项式逼近的误差 $|R_2|\le\frac{1}{16}(\frac{1}{5})^3=\frac{1}{2000}$

第13-3课：Taylor公式的应用

- **Taylor公式的应用**

✓ **例7**：计算e的近似值, 精确到10^{-4}

解：回忆例1(x=1)：$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0<\theta<1)$

取近似值 $e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$, 误差 $R_n=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$

误差控制 $|R_n|=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\le\frac{3}{(n+1)!}<\frac{1}{10000}$

为此取n=7：$|R_7|\le\frac{3}{8!}=\frac{1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2}=\frac{1}{56\cdot 24\cdot 10}<\frac{1}{10000}$

所以 $e\approx 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}\approx 2.71825\cdots$ □

【比较】精确值 $e=2.718281828459045235360287471352 7\cdots\cdots$

第13-3课：Taylor公式的应用

✓ **例8**：函数线性插值的误差估计

设 f 在$[a,b]$上连续, 则 f 在$[a,b]$内的线性插值函数为

$$L(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$=\frac{(x-a)f(b)+(b-x)f(a)}{b-a}$$

为了估计线性插值函数L(x)与函数f(x)的误差, 注意

$$f(x)=\frac{(x-a)f(x)+(b-x)f(x)}{b-a}$$

由此得到

$$L(x)-f(x)=\frac{(x-a)[f(b)-f(x)]+(b-x)[f(a)-f(x)]}{b-a}$$

下面利用Taylor公式代换 $[f(b)-f(x)]$ 与 $[f(a)-f(x)]$ ——

第13-3课：Taylor公式的应用

✓ **例8 (续)：** 函数线性插值的误差估计

对于$[a,b]$上连续函数f和其线性插值函数L, 有

(差) $$L(x)-f(x)=\frac{(x-a)[f(b)-f(x)]+(b-x)[f(a)-f(x)]}{b-a}$$

进一步假设f在(a,b)内2阶可导, 任取(a,b)内的x

应用Taylor公式在x点展开f得到

$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(c_1)(a-x)^2}{2},\quad c_1\in(a,x)$$

$$f(b)=f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(c_2)(b-x)^2}{2},\quad c_2\in(x,b)$$

将$[f(b)-f(x)]$与$[f(a)-f(x)]$代入上面(差)式得 ——

第13-3课：Taylor公式的应用

✓ 例8 (续二)：函数线性插值的误差估计

$$L(x)-f(x)=\frac{(x-a)[f(b)-f(x)]+(b-x)[f(a)-f(x)]}{b-a}$$

$$=\frac{x-a}{b-a}[f'(x)(b-x)+\frac{f''(c_2)(b-x)^2}{2}]$$

$$+\frac{b-x}{b-a}[f'(x)(a-x)+\frac{f''(c_1)(a-x)^2}{2}]$$

$$=\frac{(b-x)(x-a)}{2(b-a)}[f''(c_1)(x-a)+f''(c_2)(b-x)]$$

$$=\frac{(b-x)(x-a)}{2}[\frac{x-a}{b-a}f''(c_1)+\frac{b-x}{b-a}f''(c_2)]$$

注意：$a<x<b$ 时，$0<\dfrac{x-a}{b-a}<1$，$\dfrac{x-a}{b-a}+\dfrac{b-x}{b-a}=1$

第13-3课：Taylor公式的应用

✓ **例8** (续三)：函数线性插值的误差估计

已有 $L(x)-f(x)=\dfrac{(b-x)(x-a)}{2}[\lambda f''(c_1)+(1-\lambda)f''(c_2)]$

其中 $\lambda=\dfrac{x-a}{b-a}>0,\ 1-\lambda=\dfrac{b-x}{b-a}>0$

利用导函数的介值性质 $\exists c\in(a,b)$, 使得

$$f''(c)=\lambda f''(c_1)+(1-\lambda)f''(c_2)]$$

因此 $L(x)-f(x)=\dfrac{(b-x)(x-a)}{2}f''(c)$

由此导出 $|L(x)-f(x)|\le\dfrac{(b-x)(x-a)}{2}\sup\limits_{a<c<b}|f''(c)|$

设 $f\in C^2[a,b]$, 则上式导出

$$\max_{a\le x\le b}|L(x)-f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$ —— 误差估计

第13-3课：Taylor公式的应用

✓ **例9**：二阶导数的离散逼近

设 $f\in C^2[a,b]$，求证 $\exists c\in(a,b)$，使得

$$f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$$

证：Taylor展开 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$

取 $x_0=\frac{a+b}{2}$，$x=a$，$x=b$，存在 $\xi_a\in(a,x_0)$，$\xi_b\in(x_0,b)$

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi_a)}{2}(a-\frac{a+b}{2})^2$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi_b)}{2}(b-\frac{a+b}{2})^2$$

注意 $\frac{a+b}{2}-a=b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}$，上面二式相加 ——

第13-3课：Taylor公式的应用

- **例9 (续)：** 二阶导数的离散逼近

利用函数在区间中点的Taylor展开式，组合得到

$$f(a)+f(b)=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi_a)+f''(\xi_b)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

由导函数的介值性质 $\exists c\in(a,b)$, 使得 $f''(c)=\dfrac{f''(\xi_a)+f''(\xi_b)}{2}$

因此 $$f(a)+f(b)=2f(\frac{a+b}{2})+f''(c)(\frac{b-a}{2})^2 \qquad \square$$

- **注：** 令 $f\in C^2[a-h,a+h],\ h>0$

根据上面结论 $\exists c\in(a-h,a+h)$, 使得

$$\frac{f(a-h)-2f(a)+f(a+h)}{h^2}=f''(c)\approx f''(a)$$

——用函数在区间内离散三点的值逼近二阶导数值

第13-3课：Taylor公式的应用

- 例10：定义函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

1) 求证函数在x=0有任意阶导数

2) 研究函数的Maclaurin展开

解：首先

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

第13-3课：Taylor公式的应用

✓ 例10 (续)：继续计算 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t^4}{e^{t^2}}=0$

$$\therefore\quad f''(x)=\begin{cases}(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4})e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

容易归纳证明x≠0时

$$f^{(n)}(x)=P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}},P_n(\frac{1}{x})\text{为}\frac{1}{x}\text{的某个多项式(未必n次)}$$

进一步假设 $f^{(n)}(0)=0,$ 则

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{tP_n(t)}{e^{t^2}}=0$$

根据归纳原理 $f^{(n)}(0)=0,\ n=0,1,2,\cdots$

第13-3课：Taylor公式的应用

✓ 例10 (续二)：

已经证明 $$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在x=0有任意阶导数 $f^{(n)}(0)=0,\ n=0,1,2,\cdots$

由此可知, 函数有Maclaurin展开

$$f(x)=0+0x+0x^2+\cdots+0x^n+o(x^n),\ n=1,2,\cdots$$

- **注**：实际上直接验证

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{t^2}}=0,\quad n=1,2,\cdots$$

便得到 $f(x)=o(x^n),\ n=1,2,\cdots$

但这不能说明 $f^{(n)}(0)=0$, 除非确定 $f^{(n)}(0)$存在, $n=0,1,2,\cdots$

第13课：Taylor多项式展开及应用

- **预习 (下次课内容):**

  第6.1节 不定积分/原函数

  第6.2节 分部积分与简单换元法

- **作业 (本次课)：**

  练习题4.1：5(1,4)-估计微分近似的误差大小.

  练习题4.3：1, 2(1,3,6,用间接展开法), 3(4-6), 4-6.

  问题4.3：1*(只考虑n=1), 2*, 3(在最小值点展开), 7*.