习题课材料（十一）

习题 1. 设 A 对称正定, B 是实矩阵.

1. 证明, 对任意整数, A^k 也正定.
2. 若存在正整数 r, 使得 $A^r B = BA^r$, 证明 $AB = BA$.

习题 2 (Hadamard 不等式). 给定 n 阶对称正定矩阵 A, 求证：

1. 对任意 $\boldsymbol{y}$, $\det\left(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\right) \le 0$;
2. 记 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$, 则 $\det(A) \le a_{nn}\det(A_{n-1})$, 其中 A_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子阵;
3. $\det(A) \le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

利用上述结论证明：如果实矩阵 $T = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}$ 可逆, 那么 $\det(T)^2 \le \prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \cdots + t_{ni}^2)$.

习题 3. ♡♡ 证明 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{i+j} \end{bmatrix}_{n\times n}$ 正定.

习题 4. 举例说明, 实对称矩阵 A 的所有顺序主子式都非负, 但 A 并不半正定.

习题 5. ♡♡ 证明, 实对称矩阵半正定, 当且仅当它的所有主子式都非负.

习题 6. ♡ 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, A 正定. 证明, 存在可逆矩阵 T, 使得 $T^{\mathrm{T}}AT$ 和 $T^{\mathrm{T}}BT$ 同时是对角矩阵.

习题 7. ♡♡ 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, A, B 半正定. 证明, 存在可逆矩阵 T, 使得 $T^{\mathrm{T}}AT$ 和 $T^{\mathrm{T}}BT$ 同时是对角矩阵.

习题 8. ♡♡ 证明矩阵的广义逆唯一.

习题 9. ♡ 证明矩阵任意特征值的绝对值不大于其最大的奇异值.

习题 10. 证明或者举出反例.

1. n 阶方阵 A 为正交矩阵当且仅当它的 n 个奇异值都是 1.
2. n 阶方阵的 n 个奇异值的乘积等于所有特征值的乘积.
3. 设 n 阶方阵 A 和 $A+I_n$ 的奇异值分解分别为 $A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$,$A+I_n=U(\Sigma+I_n)V^{\mathrm{T}}$. 证明 A 是对称矩阵.
4. ♡ 如果 n 阶方阵 A 的 n 个奇异值就是它的 n 个特征值, 则 A 是对称矩阵.