习题课材料（二）

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

本节考虑的矩阵均为实矩阵。

习题 1. 证明：

1. 设 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量都是 1，则 n 阶方阵 A 的各行元素之和为 1 当且仅当 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.
2. 若 n 阶方阵 A,B 的各行元素之和均为 1, 则 AB 的各行元素之和也均为 1.
3. 若 n 阶方阵 A,B 的各列元素之和均为 1, 则 AB 的各列元素之和也均为 1.

习题 2. 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$, 求 A^k, 其中 k 为正整数.

习题 3 (♡).

1. 设 A 为 n 阶方阵, 求证: $A+A^T$, AA^T, A^TA 都是对称矩阵, 而 $A-A^T$ 是反对称矩阵.
2. 求证: 任意方阵 A 都可唯一地表为 $A=B+C$, 其中 B 是对称矩阵, C 是反对称矩阵.
3. 求证: n 阶方阵 A 是反对称矩阵当且仅当对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 都有 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=0$.
4. 求证: 设 A,B 是 n 阶对称矩阵, 则 $A=B$ 当且仅当对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 都有 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^TB\boldsymbol{x}$.
5. 给定 n 阶实反对称矩阵 A, 求证 I_n-A 可逆.

习题 4. 证明: 如果 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$, 则 I_n-2A 可逆.

习题 5. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & a & -2\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 不可逆, 求 a.

习题 6. 求下列矩阵方程的解: $\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

习题 7. 设 A 的行简化阶梯形为 R, 行变换对应的可逆矩阵是 P.

1. 求 $\begin{bmatrix} A & 2A \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形, 以及行变换对应的可逆矩阵.
2. 求 $\begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形, 以及行变换对应的可逆矩阵.

习题 8 (矩阵的迹). 方阵 A 的对角线元素的和称为它的**迹**, 记作 $\mathrm{trace}(A)$. 验证下列性质.

1. 对任意同阶方阵 A,B, $\mathrm{trace}(A+B)=\mathrm{trace}(A)+\mathrm{trace}(B)$.
2. 对任意方阵 A 与实数 k, $\mathrm{trace}(kA)=k\mathrm{trace}(A)$.
3. 对 m 阶单位阵 I_m, $\mathrm{trace}(I_m)=m$.
4. 对任意方阵 A, $\mathrm{trace}(A)=\mathrm{trace}(A^T)$.
5. 设 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, 则 $\mathrm{trace}(A^TB)=\sum_{i=1}^4 a_ib_i$. 如果 A,B 是 m 阶方阵呢?
6. 设 A 是实对称矩阵, 如果 $\mathrm{trace}(A^2)=0$, 则 $A=O$.
7. 设 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 是 m 维向量, 则 $\mathrm{trace}(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w})=\mathrm{trace}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^T)$.
8. 设 A,B 分别是 $m\times n$, $n\times m$ 矩阵, 则 $\mathrm{trace}(AB)=\mathrm{trace}(BA)$.
9. 设 A,B 是任意 m 阶方阵, 则 $AB-BA\neq I_m$.

习题 9 (♡). 设实分块方阵 $X=\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$, 其中 A 是方阵, 如果 X 与 X^T 可交换, 求证: $C=O$.

习题 10 (♡). 令 $X_\varepsilon=\begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$, 其中 $\varepsilon\in\mathbb{R}$, 而 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, C 为 n 阶对角占优方阵，B_1 为任意给定的 $3\times n$ 矩阵，B_2 为任意给定的 $n\times 3$ 矩阵。

1. 求 A 的 LU 分解。
2. 先说明 A 可逆，再试找一个常数 $\varepsilon_0>0$ (依赖于 C,B_1,B_2)，使得对任意满足条件 $|\varepsilon|\leq\varepsilon_0$ 的 ε, X_ε 均可逆。