第6课：函数的极限-连续函数概念

第2章 函数及其连续性

- **内容：**

  第2.4-2.5节 复合函数的极限-无穷远处的极限

  第2.6节 无穷大和无穷小及其比较

  第2.7节 连续函数-概念和实例

第6-1课：函数的极限 (续)

函数的极限 (续)

- **Cauchy收敛原理** (类比数列情况)：

  $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 使得

  $0<|x_1-x_0|<\delta, 0<|x_2-x_0|<\delta$ 时 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

  证明与数列情况类似，课后可以选择练习。

- **复合函数的极限**：设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim_{t\to t_0} g(t)=x_0$ 并且满足附加条件：$f(x_0)=A,$ 或者在t=t_0附近(t_0除外) $g(t)\neq x_0,$ 这时复合函数有极限 $\lim_{t\to t_0} f(g(t))=A$

- **注**：附加条件不能缺少，否则结论可能不成立(后面举例)

第6-1课：函数的极限 (续)

- **证**：由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$ 可知

  $\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,$ 使得 $0<|x-x_0|<\eta$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$

对于该 $\eta>0,\ \exists\delta>0,$ 使得 $0<|t-t_0|<\delta$ 时 $|g(t)-x_0|<\eta$

  根据附加条件需要考虑两种情况：

  情况1：$f(x_0)=A,$ 这导出 $|x-x_0|<\eta$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$

因此有 $0<|t-t_0|<\delta$ 时 $|f(g(t))-A|<\varepsilon$

  情况2：$g(t)\neq x_0$，从而 $0<|t-t_0|<\delta$ 时 $0<|g(t)-x_0|<\eta$

这也导出 $|f(g(t))-A|<\varepsilon$

  综合两种情况，都有

$$0<|t-t_0|<\delta \text{ 时 } |f(g(t))-A|<\varepsilon \qquad \square$$

第6-1课：函数的极限 (续)

✓ **例1**：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=?$（四则运算性质失效）

解：应用三角公式 $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{2\sin^2(x/2)}{x^2}$

令 $t=\dfrac{x}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}t=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2}=0$，利用复合函数极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{2t^2}=\frac{1}{2}(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t})^2=\frac{1}{2}\qquad\Box$$

✓ **例2**：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=?$

解：考虑变量代换 $x=\tan t$，$\lim\limits_{t\to 0}x=\lim\limits_{t\to 0}\tan t=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{\cos t}=0$

根据复合函数极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cos t=1\qquad\Box$$

第6-1课：函数的极限 (续)

✓ **例3**：设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ x\neq 0;\ \ g(t)=t\sin(\dfrac{1}{t}),\ t\neq 0$

注意到 $\lim\limits_{t\to 0} g(t)=0,\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1,$ 是否 $\lim\limits_{t\to 0} f(g(t))=1?$

解：在 t=0 附近有无穷多个$g(t)$ 的零点：

$$\exists\{t_n\} \text{ 满足 } t_n\neq 0 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} t_n=0,\ \ g(t_n)=0$$

注意 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 无定义，导致 $f(g(t_n))$无定义

这说明 $\lim\limits_{t\to 0} f(g(t))$ 无意义！ □

- **注**：如果补充定义 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ ——满足附加条件

则可以应用复合函数极限定理，$\lim\limits_{t\to 0} f(g(t))=1$ 成立

【注意】这时 $f(g(t_n))=f(0)=1$ —— 恰好就是极限值

第6-1课：函数的极限 (续)

- **无穷远处的极限** (类似数列无穷远处极限)

  1) 设 $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$, 记 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 如果

  $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$, 使得 $\forall x>M$ 都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,

称x趋于正无穷时$f(x)$趋向于A

  2) 设 $f:(-\infty,a)\to\mathbb{R}$, 记 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, 如果

  $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$, 使得 $\forall x<-M$ 都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,

称x趋于负无穷时$f(x)$趋向于A

  3) 设$|x|$充分大时$f(x)$有定义，记 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 如果

  $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$, 使得 $\forall |x|>M$ 都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,

称x趋于无穷时$f(x)$趋向于A

第6-1课：函数的极限 (续)

- **无穷远处极限的性质**

与x趋于x_0时极限类似，无穷远处极限也有相应性质：

唯一性-有界性-保号/保序性-四则运算性质-子列性质-Cauchy收敛原理-夹逼原理……

无穷远处极限有不同类型的复合函数极限，比如

- **复合函数的极限：**

如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A,\ \lim_{t\to t_0} g(t) = +\infty,$ 则 $\lim_{t\to t_0} f(g(t)) = A$

类似于单/双侧极限的关系，无穷远处极限也有同样性质

- **推论：** $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$

第6-1课：函数的极限 (续)

✓ 例4：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=?$

解：已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$，考虑用夹逼原理来计算

注意 $x\geq 1$ 时，$[x]\leq x\leq [x]+1$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leq\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

易知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

由此得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=e,\quad\therefore\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\quad\square$$

第6-1课：函数的极限 (续)

✓ **例5：** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=?$

解：利用变量代换(复合函数)：取 $y=-x$, 则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

显然

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=e,\quad \therefore \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \square$$

➢ **推论：** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

第6-2课：无穷大与无穷小

- **无穷大量**

  设函数 f 在 x_0 附近有定义(除去 x_0 之外)，如果

  $\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ 使得 $\forall 0<|x-x|<\delta$ 都有

  1) $f(x)>M$， 则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to+\infty$，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

  2) $f(x)<-M$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to-\infty$，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

  3) $|f(x)|>M$， 则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to\infty$， 记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

以上情况称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大量

- **无穷小量**：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小量

  注：其他极限过程 $(x\to x_0^{\pm}, x\to\pm\infty)$ 类似定义无穷大/小量

- **推论**：在同一极限中 $f(x)$ 为无穷大量 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量

第6-2课：无穷大与无穷小

- **无穷小量的比较**

  设$f(x)$和$g(x)$都是无穷小量(在同一极限过程 $x \to \Theta$)

  1) 如果 $\lim\limits_{x\to\Theta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 则称 $f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小量

  2) 如果 $\lim\limits_{x\to\Theta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$, 则称 $f(x)$与$g(x)$是同阶无穷小量

特别当c=1时，称$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小量，记为

$$f(x)\sim g(x)\quad (x\to\Theta)$$

- **无穷小的阶**：令$a>0$,

  若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^a}=c\neq 0$, 则称$f(x)$为 a 阶无穷小 ($x\to x_0$时)

第6-2课：无穷大与无穷小

- 例1：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\quad \therefore\quad \sin x\sim x\ (x\to 0)$ —— 1阶无穷小
- 例2：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}=1,\quad \therefore \tan x\sim x$ —— 1阶无穷小
- 例3：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2},\quad \therefore\ 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ —— 2阶无穷小
- 例4：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2},\quad \therefore \sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$ —1阶…
- 例5：在 $x\to 0$ 过程中 $\tan x-\sin x$是几阶无穷小？

解：注意 $\tan x-\sin x=\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

由此可知 $\tan x-\sin x$是3阶无穷小，$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$ □

第6-2课：无穷大与无穷小

➢ 等价无穷小代换

设 $f(x)\sim g(x)\ \ (x\to\Theta)$ 也即 $\lim\limits_{x\to\Theta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

考虑 $f(x)h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}g(x)h(x)$，应用极限的四则运算性质：

$$\lim_{x\to\Theta}f(x)h(x)=\lim_{x\to\Theta}g(x)h(x)$$ ——$f(x)$代换为等价无穷小$g(x)$

【注意】只有<u>乘除因子</u>可以做等价无穷小代换！

✓ **例6**：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\arctan x}=?$

解：回忆 $x\to0$时，$\arctan x\sim x$，$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$，

应用等价无穷小代换，原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^2\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ □

几个重要的等价无穷小

$(1)x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x), x \to 0;$

$(2)1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \to 0$

$(3)(1+x)^a \sim ax, x \to 0, a \in R$

$o(f)$与0(f)的运算：

$o(f)+o(f)=o(f)$

$o(f)+O(f)=O(f)$($o(f)$吸收到$O(f)$)

$O(f)+O(f)=O(f)$

$\frac{o(f)}{g}=o(\frac{f}{g}), \frac{O(f)}{g}=O(\frac{f}{g}), g \neq 0$

第6-2课：无穷大与无穷小

- **无穷大量的比较：**

  设$f(x)$和$g(x)$都是无穷大量(在同一极限过程 $x\to\Theta$)

  1) 如果 $\lim\limits_{x\to\Theta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $g(x)$是 $f(x)$的高阶无穷大量

  2) 如果 $\lim\limits_{x\to\Theta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$, 则称 $f(x)$与$g(x)$是同阶无穷大量

- **注：** 无穷大也可以定义阶，不过用处不大，略去。

✓ **例7：** $x\to+\infty$时，$\ln x$, x^a, e^x都是无穷大量$(a>0)$

其中 x^a是$\ln x$的高阶无穷大, e^x是x^a的高阶无穷大（后面证明）

✓ **例8：** $x\to 0^+$时，$\ln x$, $1/x^a$, $e^{1/x}$都是无穷大量$(a>0)$

高低阶排列与例5类似 ——从左到右-低阶到高阶

第6-3课：连续函数-概念和实例

连续函数概念和实例

- **连续**：设函数 f 在 x_0 附近有定义(包括 $x=x_0$)
  如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 f 在 x_0 连续，也即
  $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

否则称 f 在 x_0 间断(不连续)

- **单侧连续**：
  左：$f(x_0-)=f(x_0)$ —— 称 f 在 x_0 左连续
  右：$f(x_0+)=f(x_0)$ —— 称 f 在 x_0 右连续

- **推论**：f 在 x_0 连续当且仅当 f 在 x_0 左右都连续

第6-3课：连续函数-概念和实例

- 例1：考虑符号函数sgn(x)

  在 $x_0 \neq 0$连续：$\lim_{x\to x_0}\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x_0>0\\ -1, & x_0<0\end{cases}=\operatorname{sgn}(x_0)$

  在 $x_0=0$间断：$\operatorname{sgn}(0-)=-1$，$\operatorname{sgn}(0+)=1$，$\operatorname{sgn}(0)=0$

- 例2：Dirichlet函数D(x)处处间断

  ——注意 $\lim_{x\to x_0} D(x)$不存在$(\forall x_0)$

- 例3：多项式函数P(x)处处连续

  ——回忆 $\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

- 例4：有理函数 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$在定义域内处处连续

第6-3课：连续函数-概念和实例

- ✓ **例5**：验证三角函数$\sin x, \cos x$处处连续

  解：任取x_0, 由和差化积公式

$$\sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}$$

$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}$$

已知 $|\sin x| \le |x|$ 对于所有x成立，代入上面二式得

$$|\sin x - \sin x_0| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x-x_0|$$

$$|\cos x - \cos x_0| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x-x_0|$$

由此导出 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$ □

- ➢ **推论**：$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$在$x_0 \ne n\pi + \dfrac{\pi}{2}$连续, $n \in \mathbb{Z}$

第6-3课：连续函数-概念和实例

- **连续函数的运算**

➢ 四则运算：设函数 f 和 g 在 x_0 连续，则 $f \pm g$ 和 fg 也在 x_0 连续

又若 $g(x_0) \neq 0$，则 f/g 也在 x_0 连续

注：连续函数的和、差、积、商仍是连续函数

➢ 复合运算：设函数 $g(t)$ 在 t_0 连续， $f(x)$ 在 $x_0 = g(t_0)$ 连续，

则复合函数 $f \circ g(t)$ 在 t_0 连续，也即

$$\lim_{t \to t_0} f(g(t)) = f(g(t_0)) = f(x_0)$$

注：连续函数的连续函数是连续函数

上面结论直接由极限的运算性质导出。

第6-3课：连续函数-概念和实例

- **记号约定：** 令 $a<b$ (包括$a=-\infty$，或$b=+\infty$)，记

  $C(a,b)=\{f:(a,b)\to\mathbb{R}\mid f(x)$在$(a,b)$内处处连续 $\}$

  $C[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f(x)$在$(a,b)$内处处连续，并且

  在$x=a$ 右连续，在$x=b$ 左连续$\}$

- **性质：** $C(a,b)$与$C[a,b]$ 都是线性空间，也即

  $\forall f,g\in C(a,b),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，必有$\alpha f+\beta g\in C(a,b)$

  $\forall f,g\in C[a,b],\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，必有$\alpha f+\beta g\in C[a,b]$

  注： 关于线性运算封闭的集合称为线性空间

  连续函数集合关于线性运算是封闭的

  或者说：连续函数的线性组合仍是连续函数

第6课：函数的极限-连续函数概念

- **预习 (下次课内容)：**

  第2.7节 函数连续性-反函数-间断点分类

  第2.9节 一致连续概念

  第2.10节 连续函数的性质

- **作业 (本次课)：**

  练习题2.4：8*, 14.

  练习题2.5：1(3), 2-3, 4*, 6(3,6-10), 8*-9*, 10.

  练习题2.6：1(1,3-4,7-8,10-12), 3(1-4).

  练习题2.7：1[自己练习], 2(3-5), 6-7, 10.