线性代数

第一章 线性方程组与行列式

§ 1.1 Gauss消元法

- 任课老师：盛洁
- 邮箱：shengj@mail.tsinghua.edu.cn

内容提要

- 初等变换与同解方程组
- Gauss消元法

引例1.《孙子算经》中有这样的数学问题：“今有雉（鸡）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问雉兔各几何。”

解： 让所有动物抬起两只腿

此时，鸡坐地上，兔子两条腿站地

于是，94–35–35=24，

故兔子数量为 24/2=12,

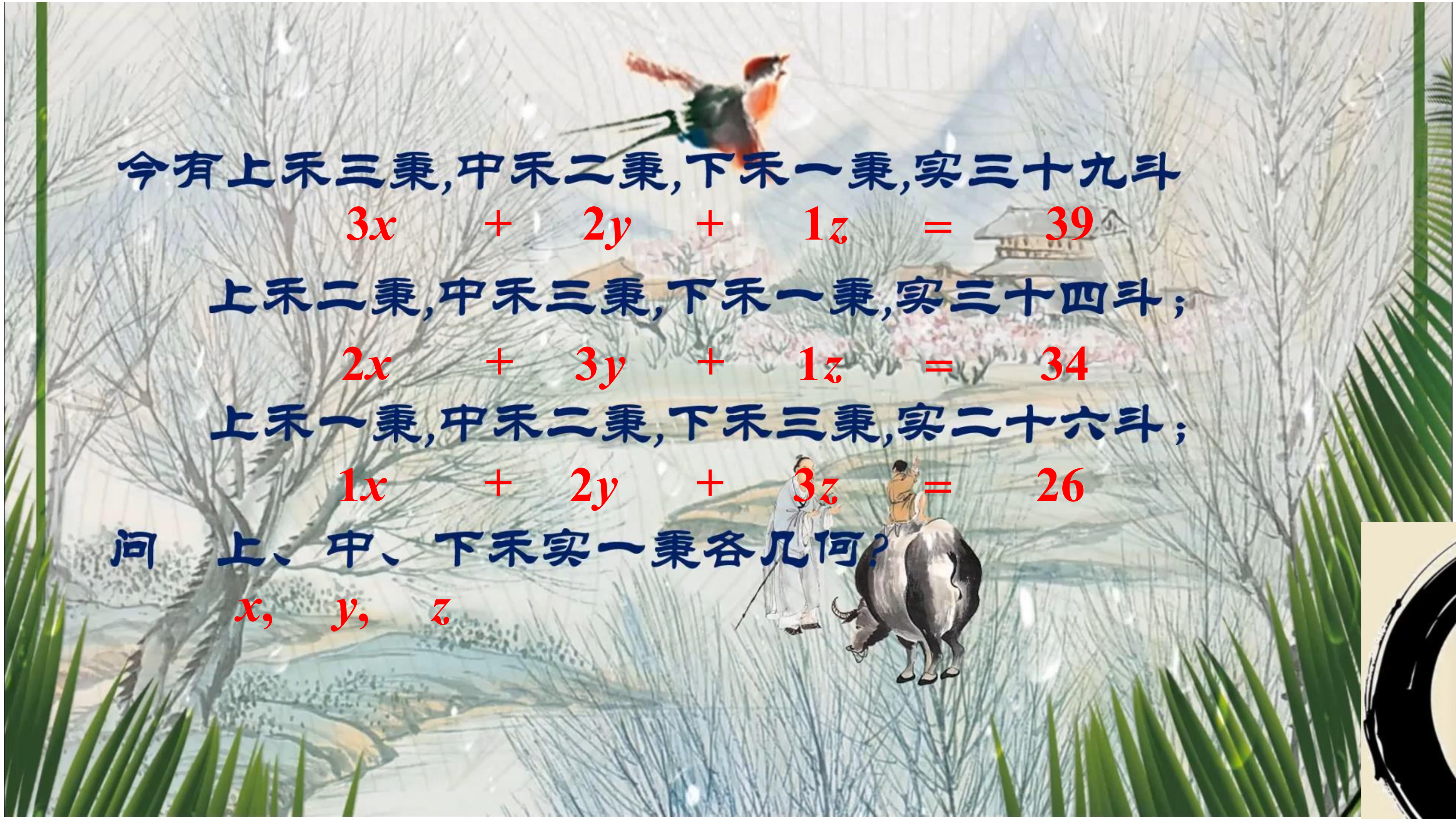
则鸡的数量为 35–12=23.

注： 上述抬腿法很生动形象,虽然巧妙但并不容易一般化。另一个“笨”办法,也是最自然的办法,就是列方程组和解方程组。

另解： 设鸡和兔的数量分别为 x, y, 则 $\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$

求解方程：用方程②–方程①×2，消去x，求出y后，回代求得x.

引例2.《九章算术》中有这样的数学问题——



附. 中国古代《算经十书》

是指汉、唐一千多年间的十部著名的数学著作，曾为国子监算学科的教科书，标志着中国古代数学的高峰。

序号	书名	作者	年代	大致内容
1	《周髀算经》	佚名	-1th	讲述天文学“盖天说”的数学、天文著作
2	《九章算术》	张苍等编 (刘徽注)	-2～3th	全书共分九章，共搜246个数学问题，先秦至两汉的数学问题汇总
3	《海岛算经》	刘徽	3th	介绍利用标杆进行间接测量的数学问题
4	《孙子算经》	佚名	4～5th	系统介绍筹算法则，含筹算乘除法则，筹算分数算法和筹算开平方法。包括著名的“鸡兔同笼问题”和“孙子问题”
5	《张丘建算经》	张丘建	5th	讨论了最大公约数、最小公倍数、等差级数、不定方程组（百鸡问题）等数学问题
6	《夏侯阳算经》	佚名	5th	原书失传，现传本为《韩延算书》：引用当时流传的乘除捷法，解答日常生活中的应用问题，保存了很多数学史料
7	《缀术》	祖冲之、祖暅	5～6th	原书失传，用《数术记遗》来充数
8	《五经算术》	甄鸾	6th	对《诗经》《尚书》《周易》《周礼》《礼记》等儒家经典中与数学相关的地方详加注释
9	《五曹算经》	甄鸾	6th	全书分为田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹五部分，收录了72个应用数学问题
10	《缉古算经》	王孝通	7th	全书共20题，反映了当时开凿运河、修筑堤坝、建设粮仓等大规模土木和水利工程施工中产生的复杂计算问题

一．初等变换与同解方程组

一般的线性方程组(Linear Equations)

定义1 关于n个未知量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的线性方程组，形式如下

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

其中　　m为方程的个数，

$a_{ij} \in \mathbb{R}(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$称为系数（coefficient），

$b_i \in \mathbb{R}(1 \le i \le m)$称为常数项（constant term）.

线性(一次)方程组的几个基本问题:

Q1. 解的存在问题：　判断方程组是否有解?

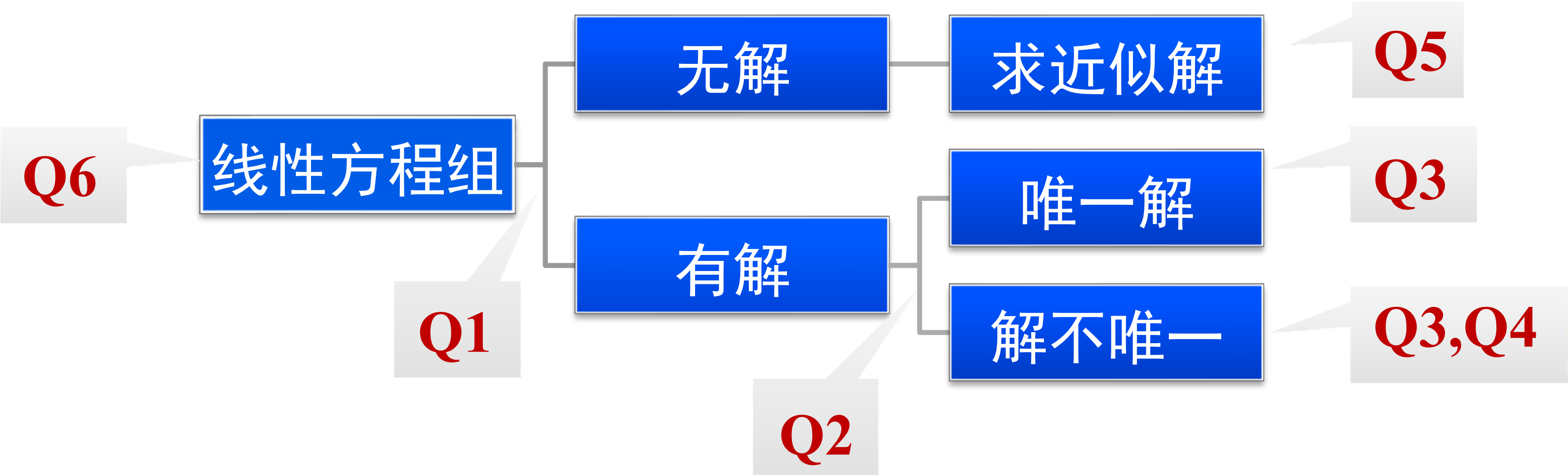
Q2. 解的个数问题：　如果有解，有多少个解?

Q3. 解的求解问题：　能否给出解的公式，或者给出一个算法求出所有的解?

Q4. 解的结构问题：　解不唯一时解集合结构如何?

Q5. 解的近似问题 ：　如果无解，能否求出一个近似解?

Q6. 对应的几何问题：　线性方程组对应的几何意义是什么?



矩阵(Matrix)的定义

定义2

由mn个数排成行列的矩形数表$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

称为类型为$m\times n$的矩阵(matrix)，有时也简记为$A=(a_{ij})_{m\times n}$.

当$m=n$时称为n阶方阵(square matrix).

* 矩阵中的每个分量a_{ij}的下标i与j，分别表示其所在行和列的位置。

* 特别的，当$m=n=1$时，一个1×1的矩阵就是一个数；反之，一个数可视为一个1×1的矩阵。——数是特殊的矩阵，矩阵是在两个方向上的延伸推广。

线性方程组的矩阵表示

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

系数矩阵
(coefficient matrix)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

增广矩阵
(augmented matrix)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

注：只有系数和常数项参与了运算，而未知量只起了标记位置的作用

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

②－①×2

③－①

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

② ⟷ ③

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

③－②×4

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_3 = -18 \end{cases}$$

为了简化运算过程的表达形式，

可以只考虑增广矩阵.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_1 \to r_3]{r_2 - 2r_1 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 - 4r_2 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -18 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ x_3 = -6 \end{cases} \quad ③ \times 1/3$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 19 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6 \end{cases} \quad \begin{array}{c} ① - ③ \times 3 \\ ② + ③ \end{array}$$

$$\xrightarrow[r_2 + r_3 \to r_2]{r_1 - 3r_3 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6 \end{cases} \quad (① + ②)/2$$

$$\xrightarrow{(r_1 + r_2)/2 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

问题1：上述过程使用了哪些操作？

总结一下，中学所用的消元法解方程组，只是对方程进行如下变形：

① 交换两个方程的位置
② 用一个非零数乘以某个方程
③ 把一个方程的倍数加到另一个方程上

把上述操作简称为：对换、倍乘、倍加，统称为**方程组的初等变换**

(elementary operation)

对应到增广矩阵的操作：行对换、行倍乘、行倍加，统称为**矩阵的初等行变换**

(elementary row operation)

问题2：如上求解方法的理论保证是什么?

定理1：线性方程组的初等变换不改变方程组的解.

证明：显然，对换和倍乘变换不改变方程组的解。下面考虑倍加的情况。

设把原方程组(1)的第i个方程的k倍加到第j个方程上得到新的方程组，记为(2)式，则(1)与(2)只有第j个方程不同。方程组(2)的第j个方程为：

$$\left(ka_{i1}+a_{j1}\right)x_1+\left(ka_{i2}+a_{j2}\right)x_2+\cdots\left(ka_{in}+a_{jn}\right)x_n=kb_i+b_j \tag{3}$$

设$(c_1,c_2,\ldots,c_n)$是方程组(1)的一个解，则由其第i、j个方程有

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots a_{in}c_n=b_i$$

$$a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots a_{jn}c_n=b_j$$

所以 $$\left(ka_{i1}+a_{j1}\right)c_1+\left(ka_{i2}+a_{j2}\right)c_2+\cdots\left(ka_{in}+a_{jn}\right)c_n=kb_i+b_j$$

这表明$(c_1,c_2,\ldots,c_n)$也满足方程(3)，即新方程组(2)的第j个方程; 而(2)的其余方程与(1)一样，故$(c_1,c_2,\ldots,c_n)$也为方程组(2)的一个解.

反之，由倍加变换是可逆的过程，可证明(2)的每个解也是(1)的解。具体来说，设$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$为新方程组(2)的一个解，则由其第i、j个方程，有

$$a_{i1}d_1+a_{i2}d_2+\cdots a_{in}d_n=b_i$$

$$\left(ka_{i1}+a_{j1}\right)d_1+\left(ka_{i2}+a_{j2}\right)d_2+\ldots+\left(ka_{in}+a_{jn}\right)d_n=kb_i+b_j$$

这说明

$$a_{j1}d_1+a_{j2}d_2+\cdots+a_{jn}d_n=b_j$$

而(1)的其余方程与(2)一样，所以$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$也为方程组(1)的一个解. ■

二. Gauss消元法

由定理知，对一个线性方程组做初等变换，得到一个新的方程组，则这两个线性方程组是同解的.

具体地，设方程组(1)中x_1的系数不全为零，总可以通过对换，使得$a_{11}\neq 0$，于是，把第一个方程的$-\dfrac{a_{j1}}{a_{11}}$倍加到第j个方程上$(2\leq j\leq m)$，即可在第$2\sim m$个方程中消去未知量x_1. 按类似的步骤，考察第$2\sim m$个方程，对其他未知量继续做下去。以此类推，便可求解线性方程组.

这样的计算方法就称为Gauss消元法 (Gaussian elimination).

注：在具体求解方程组时，只需对增广矩阵$(A,\vec{b})$做初等变换即可. 但，只能做矩阵的行变换，不能做列变换！为什么？

(德, C. F. Gauss, 1777 ~1855)

例2: 解方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=-1 \\ 2x_1+6x_2-3x_3=5 \\ 3x_1+9x_2-10x_3=2. \end{cases}$$

解: 对增广矩阵做初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \\ 3 & 9 & -10 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1\to r_3]{r_2-2r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}r_2\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - 5r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 1. \end{cases}$$

因此方程组的一般解为

$$x_3 = 1, \quad x_2 = k,$$

$$x_1 = -1 + 5x_3 - 3x_2 = 4 - 3k, k \in \mathbb{R}. \square$$

主元: ○

主变量: x_1, x_3

自由变量: x_2.

任意给定自由变量的值, 可以唯一确定主变量的值.

例3: 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

解: 对增广矩阵做初等行变换

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1 \to r_3]{r_2 - 2r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_3 \to r_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

原方程组有同解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_3 = 2 \\ 0 = 1. \end{cases}$$

因此原方程组无解.□

本讲小结

- 线性方程组的三种初等变换：对换，倍乘，倍加
- 初等变换不改变方程组的解
- 增广矩阵的初等行变换：Gauss消元法

上述方法给出一套标准化流程化的求解过程，不管形式如何变化，诸多解题技巧最终归结为三招——天下武功归于三招，极好地体现了抽象数学的威力，不愧为“大巧若拙，大智若愚.”

思考问题：

Gauss消元法何时停止？

Gauss消元法可否判断线性方程组解的情况?(无解，唯一解，很多解)

Gauss消元的过程是不是唯一的？