# 2021 年秋季《离散数学》期中参考答案

本卷共六道题, 分两页, 其中第 1 题 $5+5+10$ 分, 第 3 题 $5+10$ 分, 第 4 题 $5+10$ 分, 其余每题每小问 5 分.

1 (1) 设字母 a,b,c,d 分别有 $1,2,3,4$ 个, 用它们组成长度为 10 的单词. 一共能组成多少个单词?

(2) 将 20 个人分成四个 3 人小组与两个 4 人小组, 分得的小组不标号. 一共有多少种分法?

(3) 把 $n$ 个人分成若干个小组, 分得的小组不标号. 记这样的分法总数为 $B_n$. 证明:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} B_{n-k},$$

并由此计算 $B_6$ 的值.

解. (1) 依次选取放 $a, b, c, d$ 的位置, 可得所求的单词个数为如下的多项式系数:

$$\binom{10}{1,2,3,4} = C_{10}^1 \cdot C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \frac{10!}{1!2!3!4!} = 12600.$$

(2) 分组规模为 $n_3 = 4$ 个 3 元组, $n_4 = 2$ 个 4 元组, 由讲义中例子的结论, 所求的分法数目为

$$\frac{20!}{n_3! n_4! (3!)^{n_3} (4!)^{n_4}} = \frac{20!}{4!2!(3!)^4(4!)^2}.$$

(3) 设第 $n$ 个人所在的小组共 $k$ 个人, 则 $1 \le k \le n$. 将所有分组方法按照 $k$ 的值分类. 对给定的 $k$, 需要先在前 $n-1$ 个人中选择 $k-1$ 个人与第 $n$ 个人同组, 这一步有 $C_{n-1}^{k-1}$ 种选择; 然后再把剩下的 $n-k$ 个人分组, 有 $B_{n-k}$ 种选择. 利用乘法原理知这两步操作共有 $C_{n-1}^{k-1} \cdot B_{n-k}$ 种方法. 由此可得

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} B_{n-k},$$

其中需要约定 $B_0=1$.

显然 $B_1=1, B_2=2, B_3=5$, 利用上述递推关系可得

$$
\begin{aligned}
B_4 &= C_3^0B_3 + C_3^1B_2 + C_3^2B_1 + C_3^3B_0 = 15,\\
B_5 &= C_4^0B_4 + C_4^1B_3 + C_4^2B_2 + C_4^3B_1 + C_4^4B_0 = 52,\\
B_5 &= C_5^0B_5 + C_5^1B_4 + C_5^2B_3 + C_5^3B_2 + C_5^4B_1 + C_5^5B_0 = 203.
\end{aligned}
$$

□

2 (1) 设 $p$ 是素数, $k$ 是满足 $0<k<p$ 的正整数. 证明: 组合数 $C_p^k$ 是 $p$ 的倍数.

(2) 叙述并证明费马小定理.

(3) 求出使得 $2^d \equiv 1 \pmod{53}$ 成立的最小正整数 $d$.

解. (1) 注意到, 对 $0<k<p$, 有

$$kC_p^k = \frac{p!}{(k-1)!(p-k)!} = pC_{p-1}^{k-1}.$$

由二项式系数的组合含义知 $C_{p-1}^{k-1}$ 是整数, 因而有 $p \mid kC_p^k$. 结合 $k$ 与 $p$ 互素, 即得 $p \mid C_p^k$.

(2) 利用 (1) 的结论可知, 对整数 $a \geq 1$ 有

$$a^p = ((a-1)+1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_n^k (a-1)^{p-k} \equiv (a-1)^p + 1 \pmod{p}.$$

由此即得

$$a^p \equiv (a-1)^p + 1 \equiv (a-2)^p + 2 \equiv \cdots \equiv 1^p + (a-1) \equiv a \pmod{p}.$$

(3) 设 $d$ 是所求的最小正整数, 即是 2 模 53 的阶. 由费马小定理知 $2^{52} \equiv 1 \pmod{53}$, 因而有 $d \mid 52$. 52 共有 6 个约数 $1, 2, 4, 13, 26, 52$, 直接计算可得

$$
\begin{aligned}
2^4 &\equiv 16 \neq 1 \pmod{53},\\
2^{13} &\equiv 8 \cdot 1024 \equiv 30 \pmod{53}\\
2^{26} &\equiv (30)^2 \equiv -1 \neq 1 \pmod{53},
\end{aligned}
$$

从而有 $d \nmid 4, d \nmid 26$, 只能 $d=52$. □

3 (1) 叙述容斥原理.

(2) 给定正整数 $n$, 设不超过 $\sqrt{n}$ 的所有素数分别为 $p_1 < \cdots < p_k$. 设 $1, 2, \ldots, n$ 中无平方因子的数的个数为 $N$. 利用容斥原理将 $N$ 表示成 $p_1, \ldots, p_k$ 与 $n$ 的表达式.(称正整数 $m$ 无平方因子, 如果 $m$ 不能被任何素数的平方整除.)

解. (1) 设 $A_1, \ldots, A_n$ 是有限集合, 则有

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

(2) 如果正整数 $x \le n$ 有平方因子, 则存在素数 $q$ 使得 $q^2 \mid x$. 由此知 $q^2 \le x \le n$, 即 $q \le \sqrt{n}$, 这说明 $x$ 能被某个 $p_i^2 (1 \le i \le k)$ 整除.

令 $A_i = \{1 \le x \le n : p_i^2 \mid x\}$. 对 $i_1 < \ldots < i_t$, 有

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \#\{1 \le x \le n : p_{i_1}^2 \cdots p_{i_t}^2 \mid x\} = [\frac{n}{p_{i_1}^2 \cdots p_{i_t}^2}].$$

利用容斥原理可得

$$\begin{aligned} N &= n - |A_1 \cup \cdots \cup A_k| \\ &= n - \left( \sum_{t=1}^{k} (-1)^{t-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_t \le k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \right) \\ &= n - \left( \sum_{t=1}^{k} (-1)^{t-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_t \le k} [\frac{n}{p_{i_1}^2 \cdots p_{i_t}^2}] \right) \\ &= n - \sum_{i=1}^{k} [\frac{n}{p_i^2}] + \sum_{1 \le i < j \le k} [\frac{n}{p_i^2 p_j^2}] - \cdots + (-1)^k [\frac{n}{p_1^2 \cdots p_k^2}]. \end{aligned}$$

□

4 (1) 请求出 7 在模 163 下乘法的逆元, 即找一个整数 $x$ 满足 $7x \equiv 1 \pmod{163}$.

(2) 求解如下线性同余方程组:

$$\begin{cases} 2x + 3y \equiv 5 \pmod{163} \\ 3x + 8y \equiv 7 \pmod{163}. \end{cases}$$

解. (1) 要解同余方程 $7x \equiv 1 \pmod{163}$. 设 $7x = 1 + 163y$, 则

$$x = 23y + \frac{1+2y}{7}.$$

取 $y = 3$, 得到 $x = 70$, 显然有 $7 \cdot 70 \equiv 1 \pmod{163}$, 即 7 在模 163 下乘法的逆元为 70.

(2) 将第二个方程的 2 倍减去第一个方程的 3 倍, 得到

$$7y \equiv -1 \pmod{163}.$$

两边同时乘以 70, 可得

$$y \equiv 70 \times 7y \equiv -70 \pmod{163}.$$

代回第一个方程得到

$$2x \equiv 215 \equiv 52 \pmod{163},$$

由于 $(2, 163) = 1$, 上式两边可消去 2, 得到 $x \equiv 26 \pmod{163}$. 这样, 所求的解为

$$\begin{cases} x \equiv 26 \pmod{163} \\ y \equiv -70 \equiv 93 \pmod{163}. \end{cases}$$

□

5 (1) 直线上从左至右排列着 $n$ 个点, 将每个点用红蓝两种颜色之一染色, 要求不存在连续三个相邻的顶点都染为蓝色. 设满足上述条件的染色方案的数目为 $A_n$. 证明: $\{A_n\}$ 满足如下递推关系:

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3}, \quad \forall n \geq 4.$$

(2) 利用 (1) 中给出的递推关系, 请确定每个 $A_n$ 的奇偶性.

(3) 将正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点用红蓝之一两种颜色染色, 要求不存在连续三个相邻的顶点都染为蓝色. 设满足上述条件的染色方案的数目为 $B_n$. 证明:

$$B_n = A_{n-2} + 2A_{n-3} + 3A_{n-4}.$$

(4) 请确定 $B_{2021}$ 的奇偶性, 并说明理由.

解. (1) 设从点 1 开始最多有连续 $x$ 个蓝点, 则 $0 \le x \le 2$. 将染色方案按照 $x$ 的值分类. 对于给定的 $x$, 点 1 到点 $x$ 为蓝色, 点 $x+1$ 为红色, 还需将点 $x+2$ 到点 $n$ 共 $n-x-1$ 个点染色, 要求无连续三个蓝点, 方法数目为 $A_{n-x-1}$. 利用加法原理可得

$$A_n = \sum_{x=0}^{2} A_{n-x-1} = A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3}.$$

约定 $A_0 = 1$, 则上式对 $n \ge 3$ 都成立.

(2) 显然 $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 2^2, A_3 = 2^3 - 1$, 利用 (1) 得到的递推关系

$$A_n \equiv A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3} \pmod 2,$$

用归纳法容易证明

$$A_n \equiv \begin{cases} 1, & \text{如果} n \equiv 0, 3 \pmod 4, \\ 0, & \text{如果} n \equiv 1, 2 \pmod 4. \end{cases}$$

(3) 取定一条边的中点 $c$, 设 $c$ 两侧分别最多有 $x$ 与 $y$ 个蓝点, 则 $x + y \le 2$. 将染色方案按照 $x, y$ 的值分类. 对于给定的 $x, y$, $c$ 两侧分别有连续 $x$ 与 $y$ 个蓝点, 两侧更远处的下一个点必须为红点. 除此之外, 还需将剩余的 $n-x-y-2$ 个顶点染色, 要求无连续三个蓝点. 可将这 $n-x-y-2$ 个顶点展开成直线型, 满足条件的染色方法数目为 $A_{n-x-y-2}$. 利用加法原理可得

$$B_n = \sum_{x+y \le 2} A_{n-x-y-2} = A_{n-2} + 2A_{n-3} + 3A_{n-4}.$$

(4) 利用 (3) 的结论, 有

$$B_{2021} \equiv A_{2019} + A_{2017} \pmod 2.$$

利用 (2) 的结论知, $A_{2019} \equiv 1 \pmod 2$, $A_{2017} \equiv 0 \pmod 2$, 可得 $B_{2021}$ 是奇数.

□

6 (1) 设 $X : \Omega \to \mathbf{R}$ 是有限概率空间 $\Omega$ 上的随机变量, 其期望值为 $E[X] = \mu$. 证明: $E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$.

(2) 有两个国家, 用 $A$ 表示第一个国家的城市的集合, 用 $B$ 表示第二个国家的城市的集合. 对任何 $a \in A, b \in B$, $a, b$ 间有 0 条或 1 条 (双向的) 直飞航线. 对非空子

集 $U \subseteq A, V \subseteq B$, 用 $e(U,V)$ 表示从 $U$ 中的城市到 $V$ 中的城市的直飞航班的数目, 定义 $d(U,V) = \frac{e(U,V)}{|U|\cdot|V|}$. 设 $A, B$ 都分成了若干个省 (的不交并): $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$. 将 $A \times B$ 视为均匀的概率空间, 定义 $A \times B$ 上的随机变量 $X$ 为: 对 $(a,b) \in A \times B$, 如果 $a \in A_i, b \in B_j$, 则 $X(a,b) = d(A_i, B_j)$. 证明:

$$E[X] = d(A,B), \quad E[X^2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{|A_i|\cdot|B_j|}{|A|\cdot|B|} d^2(A_i, B_j).$$

(3) 设 $|A_1| \geq \epsilon|A|$, $|B_1| \geq \epsilon|B|$, 且有 $|d(A_1,B_1) - d(A,B)| \geq \epsilon$, 其中 $\epsilon$ 是给定的正数. 结合 (1) 与 (2) 的结论, 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{|A_i|\cdot|B_j|}{|A|\cdot|B|} d^2(A_i, B_j)\right) - d^2(A,B) \geq \epsilon^4.$$

*证明:* (1) 依定义直接计算, 有

$$\begin{aligned}
E[(X-\mu)^2] &= \sum_{\omega} (X(\omega) - \mu)^2 p_\omega \\
&= \sum_{\omega} (X^2(\omega) - 2X(\omega)\mu + \mu^2) p_\omega \\
&= \sum_{\omega} X^2(\omega) p_\omega - 2\mu \sum_{\omega} X(\omega) p_\omega + \mu^2 \sum_{\omega} p_\omega \\
&= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\
&= E[X^2] - E[X]^2.
\end{aligned}$$

(2) 直接计算即可:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} X(a,b)p(a,b) = \frac{1}{|A|\cdot|B|}\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} X(a,b) \\
&= \frac{1}{|A|\cdot|B|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a\in A_i}\sum_{b\in B_j} X(a,b) \\
&= \frac{1}{|A|\cdot|B|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a\in A_i}\sum_{b\in B_j} d(A_i,B_j) \\
&= \frac{1}{|A|\cdot|B|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |A_i|\cdot|B_j| d(A_i,B_j) \\
&= \frac{1}{|A|\cdot|B|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e(A_i,B_j) \\
&= \frac{1}{|A|\cdot|B|} e(A,B) \\
&= d(A,B).
\end{aligned}$$

类似的, 有

$$E[X^2] = \frac{1}{|A|\cdot|B|}\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} X^2(a,b) = \frac{1}{|A|\cdot|B|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |A_i|\cdot|B_j| d^2(A_i,B_j).$$

(3) 利用 (1) 的结论, 有

$$\begin{aligned}
E[X^2]-E[X]^2 &= E[(X-\mu)^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{|A_i|\cdot|B_j|}{|A|\cdot|B|}\left(d(A_i,B_j)-d(A,B)\right)^2 \\
&\geq \frac{|A_1|\cdot|B_1|}{|A|\cdot|B|}\left(d(A_1,B_1)-d(A,B)\right)^2 \\
&\geq \epsilon\cdot\epsilon\cdot\epsilon^2 \\
&= \epsilon^4.
\end{aligned}$$

结合 (2) 的结论, 此即为所要证明的不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{|A_i|\cdot|B_j|}{|A|\cdot|B|} d^2(A_i,B_j)\right) - d^2(A,B) \geq \epsilon^4.$$

$\square$