清华大学本科生考试试题专用纸（B ）

考试课程　　2015-2016 线性代数 - II　　2016 年 4 月 28 日

一 填空题（每空 4 分）：

1. 设 n 阶方阵 A 有 n 个特征值分别为 $2,3,4,\cdots,n,n+1$，且方阵 B 与 A 相似，则 $|B-E|=$ ________.
   答案：$n!$. 由相似矩阵有相同的特征值，故 B 的特征值为 $2,3,4,\cdots,n,n+1$，从而 $B-E$ 的特征值为 $1,2,3,\cdots,n$. 故 $|B-E|=1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n!$.

2. 给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}$，则 A 的奇异值分解为 ________.

   答案：$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{3}&0&-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\a&5&0\\-1&0&b\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a,b 满足的条件是 ________.
   答案：$a=2,b>5$.
   由 A 是正定矩阵，故 A 对称，$a=2$;
   A 的各阶顺序主子式大于 0，故 $\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&5&0\\-1&0&b\end{vmatrix}>0$，即 $b>5$

4. 设 3×3 矩阵 A 有特征值 $0,-1,1$ 及相应特征向量 x_1,x_2,x_3，则 A 的列空间 $C(A)=$ ________，对向量 $u(0)=(1,1,1)$，方程 $\frac{du}{dt}=Au$ 的解为 ________.
   答案：$C(A)=\{kx_2+lx_3|k,l\text{为任意实数}\}$.

   $u(t)=c_1x_1+c_2e^{-t}x_2+c_3e^tx_3$，其中 $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

5. 已知矩阵 $H=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&1&1\\0&-2&1&1\\0&0&-3&1\end{pmatrix}$，则 $H^{-1}=$ ________.

   答案：$H^{-1}=\begin{pmatrix}\frac14&-\frac14&0&0\\\frac14&\frac14&-\frac13&0\\\frac14&\frac14&\frac16&-\frac{3}{10}\\\frac14&\frac14&\frac16&\frac{1}{10}\end{pmatrix}$. 注意 H 的列向量相互正交.

6. 平面中所有满足 $5x^2+6xy+5y^2=1$ 的所有点的集合构成的图形是 ________.
   答案：长轴方向为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$，长半轴长为 $2\sqrt{2}$，短轴方向为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$，短半轴长为 $\sqrt{2}$ 的椭圆.

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

   $D=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 与 A 合同的矩阵是 ________，与 A 相似的矩阵

是 ________.

答案：C,D; D.

8. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&2&-1\\0&3&-2&2\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形是 ________.

答案：$J=\begin{pmatrix}3&1&&\\&3&&\\&&3&1\\&&&3\end{pmatrix}$.

二（15 分）设矩阵 A 有如下奇异值分解 $A=U\Sigma V^T$，其中 U,V 为正交阵：

$$A=\begin{pmatrix}u_1&u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^T\\v_2^T\\v_3^T\\v_4^T\end{pmatrix}.$$

（1）写出方程组 $Ax=u_1$ 的通解；（2）求方程组长度最短的解，并证明.

解：（1）方程组通解为 $x=v_1+k_3v_3+k_4v_4$，其中 k_3,k_4 为任意常数.

（2）长度最短的解为 $x^+=A^+b=v_1$ 或直接由 v_1,v_3,v_4 相互正交得 $x=v_1$ 是长度最短的解.

三（15 分）求解初值问题 $\frac{du}{dt}=Au,u(0)=\begin{pmatrix}2\\1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

解：$u(t)=e^{At}u(0)=\begin{pmatrix}e^{2t}+\frac{t}{3}+1\\e^{2t}-\frac{t}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

四（12 分）设 A,B 均为 n 阶正定矩阵，证明:AB 的特征值为正数.

证明：A 为正定矩阵，故存在可逆矩阵 P 使得 $A=PP^t$.

$$AB=PP^TB=PP^TBPP^{-1},$$

故 AB 与对陈矩阵 P^TBP 相似，二者有相同的特征值。而 P^TBP 合同于正定矩阵 B，也是正定矩阵，其特征值都是正数，因此 AB 的特征值是正数。

证法二：设 λ 为 AB 的任意特征值，$x\neq 0$ 是 AB 的属于特征值 λ 的特征向量，即有 $ABx=\lambda x$. 于是

$$x^T(B^TAB)x=(Bx)^TABx=\lambda x^TBx.$$

由于 B 正定，故 B 可逆，则对称矩阵 B^TAB 合同于正定阵 A，也是正定阵，从而上式左端 $x^T(B^TAB)x>0$. 而由 B 正定知上式右端中 $x^TBx>0$，所以 $\lambda>0$，得证。

五（15 分）设 $V=\{$次数小于等于4的多项式集合$\}$，对任意 $f\in V$，$\sigma:V\to V$ 定义为 $\sigma(f)(x)=(x+1)\frac{df(x)}{dx}$. （1）证明 σ 是线性变换；（2）求 σ 在 V 的一组基 $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ 下的矩阵表示.

(1) 证明：由于

$$\begin{aligned}\sigma(f_1+f_2)(x) &= (x+1)\frac{d(f_1+f_2)(x)}{dx} = (x+1)\frac{df_1(x)}{dx} + (x+1)\frac{df_2(x)}{dx} \\ &= \sigma(f_1)(x) + \sigma(f_2)(x) \\ \sigma(cf)(x) &= (x+1)\frac{d(cf)(x)}{dx} = c(x+1)\frac{df(x)}{dx} = c\sigma(f)(x)\end{aligned}$$

对任意 f_1，$f_2, f \in V$ 和 $c \in \mathbb{R}$ 成立，故 $\sigma : V \to V$ 是线性变换.

(2) 解：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

六 (7 分) 设 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & & & & \\ 1 & k & 1 & & & \\ & 1 & k & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & k & 1 \\ & & & & 1 & k \end{pmatrix}_{n\times n}$，其中 $k \in \mathbb{R}$，又 λ_{min} 和 λ_{max} 分别表示 A 的最小和最大特征值. 试证：$\lambda_{min} \leq k-1$，且 $k+1 \leq \lambda_{max}$.

证明：取 $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$ 或 $x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$，用

$$\lambda_{min} \leq \frac{x^TAx}{x^Tx} \leq \lambda_{max}$$

得证.