高阶微分方程

一、可降阶微分方程

二、高阶线性微分方程

一、高阶可降阶微分方程

（一）$y''=f(x)$ 型

逐次积分

积分一次

$$y'=\int f(x)dx+C_1$$

再积分一次

$$y=\int(\int f(x)dx)dx+C_1x+C_2$$

（二） $y'' = f(x, y')$ 型

不显含未知函数

变量替换　　令 $y' = p = p(x)$

$$\longrightarrow \quad y'' = p'$$

原方程变形成为

$$p' = f(x, p)$$　　一阶

[例1] 求解 $x^2y'' + xy' = 1$

[解] 特点是：不显含 y

令 $y' = p = p(x)$ $\longrightarrow$ $x^2p' + xp = 1$

$\longrightarrow$ $p' + \frac{1}{x}p = \frac{1}{x^2}$ $\longrightarrow$ $p = \frac{C_1}{x} + \frac{1}{x}\ln|x|$

$\longrightarrow$ $y' = \frac{C_1}{x} + \frac{1}{x}\ln|x|$ 积分,得通解

$$y = C_1\ln|x| + \frac{1}{2}\ln^2|x| + C_2$$

2022/12/5

[解2]　注意到方程的特殊性

$$x^2y'' + xy' = 1 \Rightarrow x(\underbrace{xy'' + y'}_{(xy')'}) = 1$$

$$\Rightarrow x(xy')' = 1 \Rightarrow (xy')' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow xy' = \ln|x| + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{C_1}{x} + \frac{1}{x}\ln|x|$$

积分,得通解

$$y = C_1\ln|x| + \frac{1}{2}\ln^2|x| + C_2$$

2022/12/5

（三） $y'' = f(y, y')$ 型

不显含自变量 x

变量替换　　令 $y' = p = p(y)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

原方程变形成为

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

一阶

[例2] 求解 $1+yy''+y'^2=0$

[解] 特点是：不显含 x

令 $y'=p=p(y)$

方程化为 $1+ypp'+p^2=0$

分离变量 $\dfrac{pdp}{1+p^2}=-\dfrac{dy}{y}$

积分 $\dfrac{1}{2}\ln(1+p^2)=-\ln|y|+\dfrac{1}{2}\ln C_1$

$$\Rightarrow (1+p^2)y^2=C_1$$

$$\Rightarrow p=\pm\frac{\sqrt{C_1-y^2}}{y}$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{C_1-y^2}}{y}$$

分离变量解得 $$(x+C_2)^2+y^2=C_1$$

高阶线性微分方程

- 解的存在唯一性
- 通解的结构
- 二阶线性微分方程的变动任意常数法
- 二阶常系数齐次线性微分方程的特征根法
- 二阶常系数非齐次线性微分方程的待定系数法

n阶线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\Lambda+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \quad (1)$$

非齐次

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\Lambda+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \quad (2)$$

齐次

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \Lambda + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

定理2（线性方程解的存在唯一性）

设方程(1)中的系数 $a_i(x), i = 1,2,\Lambda, n$ 以及 $f(x)$ 都是区间 I 上的连续函数，$x_0 \in I$，则对任意一组初始条件

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \Lambda, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

方程(1)的解在区间 I 上存在唯一

二、高阶线性方程的通解结构（二阶）

(一)高阶线性齐次方程的通解结构

非齐次 $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=f(x)$ (1)

齐次 $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$ (2)

定理1：如果$y_1(x)$与$y_2(x)$是二阶线性齐次方程(2)的解,则它们的任意线性组合

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

都是方程(2)的解,其中C_1,C_2为任意常数.

问题:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是不是(2)的通解?

这要看 C_1 与 C_2 是不是互相独立?

提 示 考 虑 : $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 2x$

$$C_1 y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = (C_1 + 2C_2)x = Cx$$

$y_1(x) = e^{x}, \quad y_2(x) = e^{-x}$

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

取决于 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$！

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数}$$

定义：(线性相关)

设$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)$是区间$I$上的连续函数,如果存在一组不全为零的实数$C_1, C_2, \cdots, C_m$,使得在区间$I$上有

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_m y_m(x) \equiv 0$$

则称函数$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)$在区间$I$上线性相关,否则称为线性无关.

[例1] 若两个函数$y_1(x)$和$y_2(x)$满足条件:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq 常数$$

则这两个函数线性无关.

[例2] 若$\lambda_1, \lambda_2, \Lambda, \lambda_m \in R$互不相等,则函数

$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \Lambda, e^{\lambda_m x}$线性无关.

[证] 如果有常数C_1, C_2, C_3, 使得

$$C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+C_3e^{\lambda_3 x}\equiv 0$$

求导，得

$$\begin{cases} C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+C_3e^{\lambda_3 x}=0 \\ \lambda_1 C_1e^{\lambda_1 x}+\lambda_2 C_2e^{\lambda_2 x}+\lambda_3 C_3e^{\lambda_3 x}=0 \\ \lambda_1^2 C_1e^{\lambda_1 x}+\lambda_2^2 C_2e^{\lambda_2 x}+\lambda_3^2 C_3e^{\lambda_3 x}=0 \end{cases}$$

系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)+\lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2)+\lambda_3\lambda_1(\lambda_1-\lambda_3)$$

$$\neq 0$$

$$\Longrightarrow C_1 e^{\lambda_1 x} = C_2 e^{\lambda_2 x} = C_3 e^{\lambda_3 x} = 0$$

$$\Longrightarrow C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

$\Longrightarrow$ 函数组 $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}$ 线性无关

问题：如何判定函数组

$$y_1(x), y_2(x), \Lambda\ , y_m(x)$$

在区间 I 上线性无关？

朗斯基行列式

$$W[y_1, y_2, \Lambda\ , y_m] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \Lambda & y_m \\ y_1' & y_2' & \Lambda & y_m' \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \Lambda & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

定理2： 设函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$, Λ $y_n(x)$在区间I上有 $n-1$阶导数, 则

(1) 其在I上线性相关的必要条件是：

y_1, y_2, Λ , y_n 的朗斯基行列式在区间 I上恒为零.

(2) 若y_1, y_2, Λ , y_n 为齐次方程的n个线性无关解, 则对任意x, 其朗斯基行列式不等于零。

注释

一般情况下，朗斯基行列式恒等于零不是线性相关的充分条件.

考察函数组：$\varphi(t)=\begin{cases}0 & ,t\le 0\\ t^3 & ,t>0\end{cases}$ $\psi(t)=\begin{cases}t^3 & ,t\le 0\\ 0 & ,t>0\end{cases}$

显然$W[\varphi,\psi](t)\equiv 0\ (-\infty<t<+\infty)$.

但是可以证明φ与ψ在$(-\infty,+\infty)$线性无关.

定理2证明

假设y_1，y_2，Λ ，y_n线性相关，则存在不全为零的实数c_1，c_2，Λ ，c_n满足对$\forall x \in I$

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \Lambda + c_n y_n(x) = 0$$

求导得

$$c_1 y^{(k)}{}_1(x) + c_2 y^{(k)}{}_2(x) + \Lambda + c_n y^{(k)}{}_n(x) = 0$$

$$k = 0,1,2...n-1$$

这是一个关于系数$c_1, ..., c_n$的一个线性方程组（有非零解）

所以系数矩阵为朗斯基行列式必为零。

证明(2)　　设存在$x_0 \in I$，使得$W(x_0)=0$。

即

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_n]\Big|_{x_0} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}_{x_0} = 0$$

则存在一组不全为零的实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$使得

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}_{x_0} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

令 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\Lambda+c_ny_n(x)$

由定理1，$y(x)$是n阶线性常微分方程的解

且满足初始条件

$$y(x_0)=0, y'(x_0)=0,\Lambda, y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

因为$y\equiv 0$也是满足上述初始条件的解，由解的存在唯一性可知

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\Lambda+c_ny_n(x)\equiv 0$$

即 $y_1(x), y_2(x),\Lambda\ y_n(x)$在$I$上线性相关.

证毕

定理4：(齐次方程通解结构)

若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次微分方程

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

的两个线性无关解,则

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

是方程 $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$

的通解,其中 C_1, C_2 是两个任意常数

推广到n阶线性微分程

非齐次

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\Lambda+a_n(x)y=f(x) \qquad (1)'$$

齐次

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\Lambda+a_n(x)y=0 \qquad (2)'$$

定理4′： (齐次方程通解结构)

若 $y_1(x), y_2(x), \Lambda, y_n(x)$ 是 n 阶线性齐次方程(2)′的 n 个线性无关解则

$$\overline{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \Lambda + C_n y_n(x)$$

是方程(2)′的通解,其中 C_1, C_2, Λ, C_n 是 n 个任意常数.

定理5 假设线性齐次方程

$$x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+\Lambda\ +a_n(t)x(t)=0.$$ 2

中的系数 $a_1(t),a_2(t),\Lambda\ ,a_n(t)$ 在区间 I 连续，

则该方程在 I 存在恰好有 n 个线性无关的解.

证明

首先证明方程组 2 存在 n 个线性无关的解.

然后证明方程组 2 至多存在 n 个线性无关的解.

在 R^n 取一组线性无关的向量：

$\overset{\rho}{e}_1=(1,0,0,\Lambda\ ,0)^T$, $\overset{\rho}{e}_2=(0,1,0,\Lambda\ ,0)^T$, /\ /\

$\overset{\rho}{e}_n=(0,0,\Lambda\ ,1)^T$.

在区间I 任取一点t_0 .

根据线性微分方程的存在唯一性定理，齐次方程2

存在 n 个解:

$$\varphi_1,(t),\varphi_2(t),\Lambda\ ,\varphi_n(t)\ ,$$

它们分别满足初值条件：

$$(\varphi_1(t_0),\varphi_1'(t_0),\Lambda\ ,\varphi_1^{(n-1)}(t_0))^T=(1,0,0,\Lambda\ ,0)^T\ ;$$

$$(\varphi_2(0),\varphi_2'(0),\Lambda\ ,\varphi_2^{(n-1)}(0))^T=(0,1,0,\Lambda\ ,0)^T\ ;$$

…………………

$$(\varphi_n(0),\varphi_n'(0),\Lambda\ ,\varphi_n^{(n-1)}(0))^T=(0,0,0,\Lambda\ ,1)^T\ ;$$

于是函数组$\varphi_1,(t),\varphi_2(t),\Lambda\ ,\varphi_n(t)$的朗斯基行列式满足

$$\begin{vmatrix} \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \Lambda\ \Lambda & \varphi_m'(t_0) \\ \varphi_1''(t_0) & \varphi_2''(t_0) & \Lambda & \varphi_n''(t_0) \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \varphi_1{}^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2{}^{(n-1)}(t_0) & \Lambda & \varphi_n{}^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & & \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

于是由前面定理推出　函数组 $\varphi_1,\varphi_2,\Lambda\ ,\varphi_n$ 线性相关,

这说明齐次方程 2 有 n 个线性无关的解.

然后证明方程 2 至多存在 n 个线性无关的解.

设 $\varphi_1,\varphi_2,\Lambda\ ,\varphi_n$ 是齐次方程 2 的 n 个线性相关解,

$\psi(t)$ 是齐次方程 2 的任意一个解.

下面证明 ψ 可以由 $\varphi_1,\varphi_2,\Lambda\ ,\varphi_n$ 线性表示.

假设 ψ 满足初值条件:

$$\psi(t_0)=c_1\ ,\psi'(t_0)=c_2\ ,\Lambda\ ,\psi^{(n-1)}(t_0)=c_n\ .$$

构造齐次方程2的一个解:

$$\psi_0(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\Lambda\ +c_n\varphi_n(t)\,.$$

则两个解 ψ 和 ψ_0 满足同样的初值条件.

于是根据存在唯一性定理推出 $\psi(t)\equiv\psi_0(t)$.

于是 ψ 可以由 $\varphi_1,\varphi_2,\Lambda\ ,\varphi_n$ 线性表示:

$$\psi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\Lambda\ +c_n\varphi_n(t)\,.$$

由于齐次方程 2 的每个解都能由 $\varphi_1,\varphi_2,\Lambda\ ,\varphi_n$ 线性表示,

所以齐次方程 2 的线性无关解不超过 n 个.

于是齐次方程存在恰好有 n 个线性无关的解.

（二）二阶线性非齐次方程的通解结构

定理6：（叠加原理）

(1) 如果 $y_1(x), y_2(x)$ 是非齐次方程(1)的解，则 $y_1(x)-y_2(x)$ 是齐次方程(2)的解.

(2) 如果 $y^*(x)$ 是非齐次方程(1)的一个解，$y(x)$ 是齐次方程(2)的一个解，则 $y^*(x)+y(x)$ 是非齐次方程(1)的解.

定理7：（非齐次方程通解结构）

如果$y^*(x)$是非齐次方程(1)的一个解，$\bar{y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是齐次方程(2)的通解，则

$$y=y^*+\bar{y}=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

是非齐次方程(1)的通解

$$\boxed{y(\text{非齐通})=y^*(\text{非齐特})+\bar{y}(\text{齐通})}$$

[例3] 函数 $\cos^2 x,\ \sin^2 x$ 在区间 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 之内满足一个二阶线性齐次微分方程.

(1) 证明它们是一组基本解

(2) 作出这个微分方程

(3) 证明1和 $\cos 2x$ 是这个方程的另一组基本解。

2022/12/5

[证]

(1) 考虑 $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ 的朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ -2\cos x\sin x & 2\sin x\cos x \end{vmatrix}$$

$$=2\cos^3 x\sin x+2\cos x\sin^3 x$$

$$=2\cos x\sin x=\sin 2x$$

$$\neq 0 \quad (\ x\in(0,\frac{\pi}{2})\,)$$

故 $\cos^2 x,\ \sin^2 x$ 在区间$(0, \frac{\pi}{2})$之内线性无关,为一组基本解

(2) 这时,微分方程的通解为

$$y(x) = C_1 \cos^2 x + C_2 \sin^2 x$$

$$y'(x) = -2C_1 \cos x \sin x + 2C_2 \sin x \cos x$$

$$= (-C_1 + C_2)\sin 2x$$

$$y''(x) = 2(-C_1 + C_2)\cos 2x$$

微分方程 $y'' - 2y' \,ctg\, 2x = 0$

(3) 将1和$\cos 2x$代入方程

$$y'' - 2y' ctg\, 2x = 0$$

易验证是这个方程的解

又因为$1, \cos 2x$在区间$(0, \frac{\pi}{2})$之内线性无关,所以为一组基本解.

Homework:

(1).Ex7.3： (1,2,5,7)

(2).Ex 7.4:1,3,,4, 5(1,6), 6, 7