高等微积分期末复习

周军宝

2024 年 1 月 6 日

目录

1 微分学及其应用

1.1 Taylor 公式及其应用

总结 1.1: Taylor 公式

1. (Peano 余项.) 设函数 f 在点 x_0 处 有直到 n 阶的导数, 则有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),x\to x_0$$

注意题目的要求:f 在 x_0 出有 n 阶导, 但是在 x_0 之外的信息我们并未知道.

2. (Maclaurin 展开.)$f(x)$ 在 0 点处的带有 Peano 余项的泰勒展开称为 f 的 Maclaurin 展开.

3. (Lagrange 余项.) 设函数 f 在点 (a,b) 内 有直到 $n+1$ 阶的导数, 则对任意的 $x,x_0\in(a,b)$ 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

ξ位于x,x_0之间.

4. (Cauchy 余项.) 设函数 f 在点 (a,b) 内 有直到$n+1$ 阶的导数, 则对任意的 $x,x_0\in(a,b)$ 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n.$$

ξ位于x,x_0之间.

关于泰勒公式要在哪里展开我们有以下的一些注记:

- 如果想要在端点 $[a,b]$ 处展开, 那么必须要求 f 在闭区间 $[a,b]$ 是可导的.
- 在 $\frac{a+b}{2}$ 展开的好处是: $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\,\mathrm{d}x$ 的积分为 0.
- 情况比较复杂的时候, 我们可能会考虑在任意点展开, 即:

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\cdots$$

- 用 Taylor 公式证明中值定理时常常要用到 Darbox 定理. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'_+(a)\neq f'_-(b)$. 若 c 为介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任一实数, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=c$.

$$\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}=f''(\xi)$$

  中 ξ 的存在就由 Darboux 定理保证

- 如果题目涉及到函数的最大值 (最小值) 的时候, 特别最值还是内点从而是极值点时, 我们可能会考虑在极值点处展开, 此时好处是 $f'(x_0)=0$.
- 泰勒公式结合 Stolz 定理求数列极限的题目在前边的习题课中也曾讲过[1].

[1] 见习题课课件

例 1.2.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 有最小值 $\min\limits_{x\in(0,1)} f(x)=0$, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, 求证: $\exists\xi\in(0,1)$, 使 $f''(\xi)>8$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, $f(a)=f(b)=0$, 证明[a]:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|.$$

(3) 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内存在四阶导数, 且 $\left|f^{(4)}(x)\right|\leq M$. 证明对于该邻域内异于 x_0 的任何 x 都有

$$\left|f''\left(x_0\right)-\frac{f(x)-2f\left(x_0\right)+f\left(x'\right)}{\left(x-x_0\right)^2}\right|\leq\frac{M}{12}\left(x-x_0\right)^2,$$

其中 x' 与 x 关于 x_0 对称.

[a]对比总复习课件例 2, 那里给的条件是 $\frac{a+b}{2}$ 处的值.

关于在中间取点的题目我们有:

例 1.3.

(1) 设 f 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数, 且 $f'(a)=f'(b)=0$. 求证: 存在 $c\in(a,b)$, 使得

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

(2) 设 $f\in C^2[0,1]$, 且 $f(0)=f(1)=0, f(x)\neq 0(x\in 0,1)$, 证明:

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\,\mathrm{d}x\geq 4$$

(3) 设 $f\in C^1[a,b]$, 且 $f(a)=f(b)$,, 证明:

$$\max_{a\leq x\leq b}|f'(x)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

例 1.4: 泰勒公式的极限性态

(1) 设函数 f 在点 x_0 处有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. 将 f 在 x_0 处按 Taylor 公式展开:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta_n h),$$

其中 $\theta_n \in (0,1)$. 求证: $\lim\limits_{n\to 0} \theta_n = \dfrac{1}{n+1}$.

(2) 设 f 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上有 n 阶导数, 且

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0, f^{(n)}$ 在 x_0 处连续, 且当 $0<|h|<\delta$ 时,

$$f(x_0+h) - f(x_{01}) = hf'(x_0+\theta h) \quad (0<\theta<1).$$

证明: $\lim\limits_{n\to 0} \theta = \dfrac{1}{n^{1/(n-1)}}$.

(3) (具体的例子) 证明: 在 $|x| \leqslant 1$ 时存在 $\theta \in (0,1)$, 使得 $\arcsin x = \dfrac{x}{\sqrt{1-(\theta x)^2}}$, 且有 $\lim\limits_{x\to 0} \theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

f 的中间阶导往往可以被最高阶导以及 f 本身的增长给限制, 一旦违背这些规律往往意味 f 是平凡的.

例 1.5.

(1) 设函数 f 在 R 上连续, $\varphi(x) = f(x) \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 单调递减. 证明: 在 R 上 $f(x) \equiv 0$.

(2) 设函数[a] $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微, 且 $f(0)=0, |f'(x)| \leqslant A|f(x)|, A>0$, 证明: $f(x) \equiv 0$, $x \in (-\infty,+\infty)$

(3) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有二阶导数, 且 $f(0)=f'(0)=0, |f''(x)| \leq |f(x)|+|f'(x)|$. 求证: $\exists \delta>0$, 使得在 $(-\delta,\delta)$ 内有 $f(x) \equiv 0$.

(4) 设函数 f 在 $(-1,1)$ 内二阶可导, $f(0)=f'(0)=0, |f''(x)|^2 \leqslant |f(x)f'(x)|$. 证明: 在 $(-1,1)$ 内 $f(x) \equiv 0$.

(5) 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可微, 且已知

$$M_0 = \sup\{|f(x)| \mid x \in (0,+\infty)\} \text{ 和} M_2 = \sup\{|f''(x)| \mid x \in (0,+\infty)\}$$

为有限数. 证明 $M_1 = \sup\{|f'(x)| \mid x \in (0,+\infty)\}$ 也是有限数, 并满足不等式

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

[a] 如果遇到类似到要证明 $f \equiv 0$ 的题目, 可以往这方便靠.

1.2 凸函数及其性质

总结 1.6: 凸函数

定义 1: 如果 f 在区间 I 上由定义, 对任意的 $x_1,x_2\in I,\lambda\in(0,1)$ 都有:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

有时候我们可能更需要从几何直观上理解:
定义 2: 设 $x_1<x_2<x_3\in I$ 那么必然有:

$$\frac{f(x_2-x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

下边是其常用的形式:

- (Jesen 不等式 1): 对任意的 $q_i\ge 0,q_1+q_2+\cdots+q_n=1$, 任意的 $x_1,\cdots,x_n\in I$, 都有:

$$f(q_1x_1+\cdots+q_nx_n)\le q_1f(x_1)+\cdots+q_nf(x_n)$$

- (Jesen 不等式 2): 对任意的 $p_i\ge 0$(但不全为 0), 都有:

$$f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\le\frac{p_1f(x_1)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+\cdots+p_n}$$

注: 类似还有, 开区间上的凸函数的左右导数必然存闭区间上必然有界、(a,b) 内任意的闭区间一定连续、如果可导, 导函数的单调性, 二阶可导, 二阶导的正负号以及有支撑线的各种性质可以查看裴礼文.(第三版 p229.)

例 1.7.

(1) 设 f 在 $[a,b]$ 上单调递增, 证明对每个 $c\in(a,b)$, 函数 $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ 是凸函数;

(2) 设 f 是 (a,b) 上的下凸函数, 则对每一对 $x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}.$$

(3) 若函数 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 且 $m\le f(x)\le M$, 又 $g(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续下凸函数, 则有:

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\mathrm{d}x$$

若 $g(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续上凸函数时, 上式中的不等号相反.

(4) 若 f 为 $[0,1]$ 上的上凸函数, 则对每个正整数 n 成立不等式:

$$\int_0^1 f\left(x^n\right)\mathrm{d}x\leqslant f\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

2 不定积分

2.1 不定积分表

总结 2.1: 常用的不定积分

$$\int 0\ \mathrm{d}x = c, \qquad \int x^{\lambda}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\lambda}x^{\lambda+1} + c(\lambda \neq -1),$$
$$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln|x| + c, \qquad \int \mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + c,$$
$$\int \mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + c, \qquad \int a^{x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^{x} + c,$$
$$\int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x + c, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = -\cot x + c,$$
$$\int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x + c, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \tan x + c,$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \arctan x + c, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \arcsin x + c.$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c,$$
$$\int \sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + c,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + c,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln|\sec x + \tan x| + c$$
$$\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$$
$$\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^m} = -\frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + C$$
$$I_{m+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}} = \frac{x}{2a^2m\left(x^2+a^2\right)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m}I_m$$

1(三角代换).$\tan\frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \cos x = \frac{2t}{1+t^2}$

2. 如果:$y(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, n \geqslant 1$ 为整数, $ad-bc \neq 0$. 那么令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 则 $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, 从而 $x = \frac{dt^n-b}{a-ct^n}$, 于是 $\mathrm{d}x = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{\left(a-ct^n\right)^2}\ \mathrm{d}t$.

3. 如果:$y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}, a \neq 0$. 通常先将 ax^2+bx+c 配方, 然后再来应用三角函数将原来那个不定积分转化成三角有理函数的不定积分.

2.2 不定积分的一些常用技巧

总结 2.2: 不定积分常用技巧

- (观察法). 拿到一道不定积分首先观察, 看能否通过简单的初等变形、凑微分或者分部积分直接求解.
- (组合积分法). 将一个复杂的积分拆分为两个简单的积分. 这样的例子比较少见, 下边是我总结的一些例子.
- (三角幂次). 在三角中如果升幂, 常用 $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, 如果合适我们也可以用 $\tan^2 x+1=\csc^2 x$ 进行代换达到凑微分的目的, 利用三角和差公式我们也可以实现降幂.
- (有理函数的积分). 处理有理函数的积分, 除了利用待定系数方法以外, 我们在习题课上也讲过一些快速确定系数的方法.
- (根式). 一般而言, 分母出现了根式的式时, 如果无法利用凑微分法求解时, 我们往往会想办法将其去掉.
-

被积函数	换元变换
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$t=a\sec t, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt[n]{ax+b}$	$t=\sqrt[n]{ax+b}$
$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
$\frac{1}{x^p\left(1+x^q\right)^r}$	$t=\frac{1}{x}$

例 2.3: 组合积分法

用组合积分的思想计算下列的不定积分或者广义积分

(1) 令 $A=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx, B=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx, a^2+b^2\neq 0$

(2) 求不定积分 $I_1=\int\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx$ 和 $I_2=\int\frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}dx$.

(3) 求不定积分 $\int e^{ax}\sin bx dx, \int e^{ax}\cos bx dx$

(4) 求不定积分 $\int\frac{1}{1+x^3}dx, \int\frac{x}{1+x^3}dx,$

(5) 求不定积分 $\int\frac{1}{1+x^2+x^4}dx$ 和 $\int\frac{x^2}{1+x^2+x^4}dx$.

(6) 计算广义积分 $\int_0^{\infty}\frac{1-x}{1+x^4}, \int_0^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^4}dx.$

例 2.4: 与三角有关的一类题目

(1) 求 $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, \mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \, \mathrm{d}x$

(3) $\int -\frac{\sin x}{\cos^3 x + \sin^3 x} \, \mathrm{d}x$

例 2.5: 总复习课件习题

(1) 计算 $\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x} \, \mathrm{d}x.$

(2) (或许用凑微分更快) 计算 $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} \, \mathrm{d}x$

(3) 计算 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}} \, \mathrm{d}x.$

(4) 计算 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x \, \mathrm{d}x.$

例 2.6: 一组凑微分习题

(1) $I = \int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x;$

(2) $I = \int \frac{\mathrm{e}^{\sin 2x} \cdot \sin^2 x}{\mathrm{e}^{2x}} \, \mathrm{d}x;$

(3) $I = \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} \, \mathrm{d}x;$

(4) $I = \int \frac{\sqrt{\ln(1+x)-\ln x}}{x(x+1)} \mathrm{d}x;$

(5) $I = \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, \mathrm{d}x.$

例 2.7: 一组换元法习题

(1) $I=\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $I=\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $I=\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x$;

(4) $I=\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$.

(5) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}$;

(6) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5\sqrt[3]{1+x^6}}$;

(7) $I=\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$;

(8) $I=\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}\mathrm{d}x$.

3 定积分

3.1 定义相关

总结 3.1: 定积分及基本性质

- 分割, 取值，求极限: 通过极限转化为函数的 Darbox 和. 值得注意的是有的时候区间的划分可能不是等分的 (如下题中的 (2)).
- $f\in\mathcal{R}[a,b]\Rightarrow f$ 有界,$F(x)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 一致连续, 如果 f 连续, 则 $F(x)$ 可导.
- (积分第一中值定理) 设 $f\in C[a,b], g\geq 0$ 并且在 $[a,b]$ 可积, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

  注: 证明过程主要用到了 f 的可积性和介值性, 因此可以推广到 f' 的情况.
- (绝对值不等式)$\left\|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\|\leq\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$
- 如果 $f\in C[a,b]\geq 0$, 且 $\int_a^b f)\,\mathrm{d}x=0\Rightarrow f\equiv 0$.

例 3.2.

(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum\limits_{i=0}^{n-1}b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}\quad(b>1)$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 是可积, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}4\ln\left[1+\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right].$$

(4) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积,$g(x)\geq 0$, 且 g 是以 $T>0$ 为周期的函数在 $[0,T]$ 上可积, 证明[a]:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\ \mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\ \mathrm{d}x\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

[a]对比总复习课件例 3, 那里给出了具体的 g 以及 f 是连续的.

下边的题目也是我们在习题课讲过的, 他们都是同一类关于极限和积分的题目.

例 3.3.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ \mathrm{d}x$

(2) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 试证:

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$$

(3) 设 α 是给定的正常数. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\left(1+x^n\right)^\alpha\ \mathrm{d}x=1$

下边一类是处理 Darbox 和收敛到积分速率的题目:

例 3.4.

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. $\forall n\in\mathbf{N}$, 记 $A_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}nA_n=\dfrac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可敞, 且 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,

$$B_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left[a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right].$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty}n^2B_n=\dfrac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]$.

(3) 特别的, 我们取:

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k},B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2n+2k-1}$$

计算相应的结果.

3.2 定积分计算

总结 3.5: 计算总结

(1) 若 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 $[-a,a]$ 上连续, 则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 为奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数};\end{cases}$$

(2) 设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则有下列常用公式:

(a) $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$ (a 为任意常数);

(b) $\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ \mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\text{ 为正偶数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, n\geq 1\text{ 为正奇数};\end{cases}$

(4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(\sin x,\cos x)+f(\cos x,\sin x)]\mathrm{d}x$$

(5) (区间再现公式) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$.

(6) 转化为不定积分, 利用 NL 公式 (没有办法的办法).

例 3.6.

1. 证明: $\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=1-\sin 1.$

2. 若 $f\in C([0,1])$, 求证: $\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)f(x)\mathrm{d}x.$

3. 证明:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=0.$$

4. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 对任何 $a>0$, 求证:

$$\int_0^a\left(\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)(a-x)\mathrm{d}x.$$

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(0)+f(1)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.7.

(1) $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

(2) $I=\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}-\sqrt{\ln(3+x)}}\mathrm{d}x$

(3) $I=\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

总结 3.8: 平面区域的面积

(1) (基本公式) 设 $f,g\in C([a,b])$. 则由曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 与直线 $x=a,x=b$ 所围平面区域的面积等于

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

(2) (参数方程) 设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, 其中 x,y 连续, $y\geqslant 0, x(t)$ 为严格递增, 则存在连续反函数 $t=t(x)$. 定义 $a=x(\alpha),b=x(\beta)$. 由 $\Gamma,x=a,x=b$ 及 x 轴所围区域的面积等于

$$S=\int_a^b y(t(x))\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t.$$

(3) (极坐标) 设曲线弧 $\widehat{AB}$ 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$,

其中 $\rho(\theta)$ 为连续函数. 那么曲线弧 $\widehat{AB}$ 与射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 所围成的区域的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(\rho(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta.$$

关于平面区域面积的计算, 我们给出几点注记 (处理技巧):

- 当区域不那么完美时, 我们需要将区域给分割;
- 有的时候我们只需要将坐标倒过来看, 那么区域就会变成一个比较好的部分;
- 利用参数方程时要看一看参数方程是否满足条件 (例如利用参数方程绕 y 轴旋转.);

总结 3.9: 曲线弧长的计算

(1) 参数方程: $L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

(2) 函数图像: $L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

(3) 极坐标方程: $L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$.

(4) 空间曲线参数方程:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

总结 3.10: 体积的计算

旋转体的体积: 用垂直 x 轴的平面截旋转体所得的截面是半径为 $f(x)$ 的圆盘, 则 $S(x)=\pi(f(x))^2$. 于是所求旋转体的体积为 $V=\pi\int_{a}^{b}(f(x))^2\,\mathrm{d}x$.
如果是 $x=g(y)$ 绕着 y 轴旋转, 我们也可以计算处体积公式为:

$$V=\pi\int_{c}^{d}g(y)^2dy$$

已知截面面积求体积: 一般地, 如果一个立体 K 夹在两个平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间, 这里 $a<b$, 并且已知对每个 $x\in[a,b]$, 该立体 K 的相应截面积为 $S(x)$, 并且 S 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则该立体 K 的体积为

$$V=\int_{a}^{b}S(x)\mathrm{d}x$$

看清楚旋转轴在哪里!

1. 设曲线为 $f(x)=ax+b-\ln x$, 在 $[1,3)$ 上 $f(x)\geqslant 0$, 求常数 a,b, 使 $\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$ 最小.
2. 证明椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的周长等于正弦曲线 $y=c\sin\frac{x}{b}$ 的一波之长，$c=\sqrt{a^2-b^2}$
3. 曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积;
4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内大于零, 且满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 又设曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$ 及 $y=0$ 所围面图形 S 的面积值为 2 . 求 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

3.3 广义积分的计算

总结 3.11: 广义积分的定义

定义: 设函数 f 在无限区间 $[a,+\infty)$ 上定义, 且在任意有限区间 $[a,b]$ $(b>a)$ 上 Riemann 可积. 则称符号 $\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 为无穷积分. 如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则称无穷积分 $\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 则定义为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. 规定只有当右端的两个无穷积分都收敛时才称无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 否则就称它发散.

总结 3.12: 计算广义积分的方法

- 先看积分的形式, 能不能直接利用奇偶性将不好积的部分消去;
- 直接利用分部积分公式化为简单的积分;
- 利用定义将原函数求出来, 令 $x \rightarrow a$(瑕点) 或 $x \rightarrow \infty$.
- 倒带换, 尤其是函数很难积以及出现多项式,$\ln t$ 的情况.

例 3.13.

1. 计算广义积分 $I=\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^{2}} \mathrm{d}x$.
2. 证明: 对于任何实数 α, 成立恒等式 $\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^{2}\right)\left(1+x^{\alpha}\right)}=\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\frac{\pi}{4}$
3. $I=\int_{0}^{+\infty} \frac{1+x^{2}}{1+x^{4}} dx$, $I=\int_{0}^{+\infty} \frac{1-x^{2}}{1+x^{4}} dx$
4. (例 30) 求广义积分 $\int_{0}^{+\infty} \frac{x e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}} \mathrm{d}x$

3.4 积分不等式

例 3.14: 转换为变上限积分

(1) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微, 且当 $x \in(0,1)$ 时, $0<f^{\prime}(x)<1, f(0)=0$. 证明: $\left[\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right]^{2}>\int_{0}^{1} f^{3}(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续且单调减, 证明当 $a \in(0,1)$ 时, 有

$$\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x \geqslant a \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二次可导, 且 $f^{\prime\prime}(x) \leqslant 0$, 证明:$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$.

例 3.15: Cauchy-Schwarz 不等式

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(1)-f(0)=1$. 证明: $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{~d}x \geqslant 1$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geqslant 0, \int_a^b f(x)=1, \lambda$ 为实数. 证明:

$$\left[\int_a^b f(x)\sin\lambda x \mathrm{~d}x\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\cos\lambda x \mathrm{~d}x\right]^2 \leqslant 1.$$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. 试证 $\int_0^1\left(1+x^2\right)f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{\pi}$.

(4) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$, 证明: $1\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}$.

(5) 一般, 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$, 则

$$1\leqslant\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}$$

(6) 设 $g(x)\in C^1[0,a]$,$g(0)=0$, 试证:

$$\int_0^a|g(x)g'(x)|dx\leq\frac{a}{2}\int_0^a|g'(x)|^2dx$$

例 3.16.

1. 已知 $f(x)$ 在: $[0,1]$ 上有直到二阶的连续导数, 试证：

$$\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\leqslant|f(1)-f(0)|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x.$$

2. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 试证:

$$\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x+9\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x.$$

例 3.17: 一类与多项式有关的构造题

(1) 设 $f\in C[0,1]$, 并且 $\int_0^1 f(x)dx=1, \int_0^1 xf(x)dx=\frac{27}{2}$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)dx>2021$$

(2) 设 f 为 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数, 则:

$$\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

(3) 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且:$\int_0^1 x^k f(x)dx=0, k=0,\cdots,n-1$, $\int_0^1 x^n f(x)dx=1$, 证明: 在 $[0,1]$ 的某一部分上:

$$|f(x)|\geq 2^n(n+1)$$

(4) 设 $a,b>0, f(x)\geq 0, f\in\mathcal{R}[a,b]$ 且 $\int_a^b xf(x)dx=0$, 证明:

$$\int_a^b x^2 f(x)dx\leq ab\int_a^b f(x)dx$$

4 常微分方程

4.1 方程解法总结

总结 4.1: 初等解法总结

(1) (可分离变量). $y'=f(x)g(y)$.

(2) (齐次方程). $y'=f(y/x), y'=f(ax+by+c), y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$.

(3) (伯努利方程).$y'+p(x)y=q(x)y^n(n\neq 0,1)$.

(4) (线性方程).$y'+p(x)y=q(x)$.

(5) (可降阶的二阶方程)

  (a) $y''=f(x)$, 直接两次积分.

  (b) 缺少 y,$y''=f(x,y')$, 令 $p=y'$, 但是仍看作是 x 的函数.

  (c) 缺少 x, 令 $p=y'$, 但是看作是 y 的函数,$y''=f(y,y')$

总结 4.2: 二阶常系数线性方程求解

设二阶线性方程为:

$$y''(x)+py'+qy=f(x)$$

- 先求解齐次方程:$y''(x)+py'+qy=0$ 的通解 y_1. 此时考虑特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$. 如果有两个不同的实特征值 λ_1,λ_2, 那么通解为 $C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$; 两个相同的特征值, 通解为 $C_1e^{\lambda_1x}+C_2xe^{\lambda_1x}$. 如果有一对共轭的复根 (由于是复根, 因此必不相同)$a+bi$, 那么通解为 $C_1e^{ax}\sin bx+C_2e^{ax}\cos bx$.
- 求非齐次方程的特解 y_2.
- 因此该方程的通解即为 $y=y_1+y_2$.

下边是求特解的一些方法 (其实就是猜.)

非齐次项 $f(x)$ 的形式	与特征根比较	特解 y^* 的待定形式
$f(x)$ 为多项式	0 不是特征根	y^* 为与 $f(x)$ 同次幂的多项式
	0 是特征根	$y^*=xg(x),\quad g(x)$ 为与 $f(x)$ 同次幂的多项式
$f(x)=P(x)\mathrm{e}^{rx}$	r 不是特征根	$y^*=Q(x)\mathrm{e}^{rx},Q(x)$ 为与 $P(x)$ 同次幂的多项式
	r 是单根	$y^*=xQ(x)\mathrm{e}^{rx},Q(x)$ 为与 $P(x)$ 同次幂的多项式
	r 是二重根	$y^*=x^2Q(x)\mathrm{e}^{rx},Q(x)$ 为与 $P(x)$ 同次幂的多项式
$f(x)=e^{\xi\cdot x}(A(x)\cdot\cos\eta x$ $+B(x)\cdot\sin\eta x)$	$\xi\pm\eta i$ 不是特征根	$y^*=\mathrm{e}^{\xi x}(C(x)\cos\eta x+D(x)\sin\eta x),C(x),D(x)$ 为与 $A(x),B(x)$ 同次幂的多项式, 系数待定
	$\xi\pm\eta i$ 是特征根	$y^*=x\mathrm{e}^{\xi x}(C(x)\cos\eta x+D(x)\sin\eta x),C(x),D(x)$ 为与 $A(x),B(x)$ 同次幂的多项式, 系数待定

简单情况下, 如果求出了齐次方程两个线性无关的解, 也可以这样求特解:

$$z_0(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_1(x)y_2(t)}{W\left(y_1,y_2\right)(t)}f(t)\mathrm{d}t$$

可以将二阶常系数齐次方程的求解方法推广到 n 阶, 这里我们只写出三阶的情况.

- 三个不同的实根 a,b,c, 那么通解就是 $C_1e^{ax}+C_2e^{bx}+C_3e^{cx}$
- 三个实根, 但是两个相同 a,b,b, 那么通解就是 $C_1e^{ax}+C_2e^{bx}+C_3xe^{bx}$
- 三个实根但是都相同. 通解为 $(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{ax}$
- 一对共轭复根 $a\pm bi+$ 一实根 c. 通解为 $C_1e^{cx}+C_2\sin bxe^{ax}+C_3\cos bxe^{bx}$.

求特解的方法同上 (这是因为三阶方程的复根最多也只可能是成对出现, 如果是四阶及其以上复根的就要复杂的多了.).

总结 4.3: 欧拉方程解法

一般的 Euler 方程为:

$$x^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1xy'+a_0y=0,$$

其中 $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$ 为常数.
方程的特点: 变系数的线性方程, 但其系数均为幂函数, 且幂次与相应项的求导阶数一致.
一般解法: 作变量替换 $t=\ln|x|$ 来将方程化成以 t 为自变量, 以 y 为待定函数的常系数方程.

总结 4.4: Wronsky 行列式总结

(线性相关性) 称函数 $f_1,\ldots,f_n:I\to\mathbb{R}$ 在 I 上线性相关, 如果存在不全为零的实数 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $\forall x\in I$, 均有 $c_1f_1(x)+\cdots+c_nf(x)=0$. 若不存在不全为零的实数 $c_1,\ldots,c_n$ 使 $\forall x\in I$, 均有 $c_1f_1(x)+\cdots+c_nf(x)=0$, 则称 $f_1,\ldots,f_n$ 在 I 上线性无关.
如果 $f_1,f_2\ldots,f_n\in C^{(n-1)}(I)$ 在 I 上线性相关，则 $\forall x\in I,W\left(f_1,f_2,\ldots,f_n\right)(x)=0$.
推论. 若 $\exists x_0\in I$ 使得 $W\left(f_1,f_2,\ldots,f_n\right)(x_0)\neq0$ 则 $f_1,\ldots,f_n$ 在 I 上线性无关.

4.2 例题

例 4.5.

我们举两个例子作为例子.

(1)

$$y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-x}\cos x + \mathrm{e}^{2x}(4x+5)$$

(2)

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x+5)$$

(3)

$$y'' - y' - 6y = \mathrm{e}^{-2x} + \cos x - x + 2$$

(4)

$$x^2y'' - xy' + 2y = x\sin(\ln x)$$

总结 4.6: 已知通解求方程

1. 已知 y_1, y_2, y_3 为方程三个解 (两两线性无关), 我们令 $z_1 = y_2 - y_1, z_2 = y_3 - y_1$, 那么 z_1, z_2 就是方程的基本解组: 那么齐次方程就是该矩阵的行列式等于 0 对应的方程.

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z \\ z_1' & z_2' & z' \\ z_1'' & z_2'' & z' \end{pmatrix}$$

然后再将 y_1 带进去求非齐次项.

2. 如果是常系数的方程, 给出了具体的 y_1, y_2, y_3 那么往往可以直接看出特征值那么就直接可以写出齐次的方程.

例 4.7.

(1) 假设 y_1, y_2 为一阶线性非齐次方程的两个不同解. 求方程的表达式以及方程的通解.

(2) 设 $y_1 = x\mathrm{e}^x, y_2 = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}, y_3 = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x}$ 是某个二阶常系数非齐次线性微分方程的三个特解, 求该微分方程及其通解.

例 4.8.

一般而言, 由积分转化为微分方程的题目, 往往由题目会蕴含初值条件, 因此通解的自由度会下降. 例如 1，2 题中 $f(0)$ 被确定,3 中 f' 被确定. 这些题和例 11 题作对比.

(1) (例 21.) 设函数 f 在实轴上连续且使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f(x) = x + \displaystyle\int_0^x f(s)\mathrm{d}s$. 求函数 f 的表达式.

(2) (例 22.) 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且满足积分方程

$$f(x) = 4e^x + \int_0^x (x-s)f(s)\mathrm{d}s, \forall x \in \mathbb{R}.$$

求函数 f 的表达式.

(3) (例 36) 求可导函数 f 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$f'(x)=f(x)+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

(4) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且其反函数存在为 $g(x)$. 若 $\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1$, 求 $f(x)$.

例 4.9: 常微分方程解的结构

(1) 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均为非齐次线性方程 $y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=Q(x)$ 的特解, 其中 $P_1(x), P_2(x), Q(x)$ 为已知函数, 且 $\dfrac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)} \neq$ 常数. 求证: $y(x)=\left(1-C_1-C_2\right)y_1(x)+C_1y_2(x)+C_2y_3(x)$ 为给定方程的通解 (C_1, C_2 为任意常数).

(2) 证明: 如果 $f(x)$ 是一个连续函数且 $f(x+T)=f(x), y=\varphi(x)$ 是 $y'+y=f(x)$ 的一个解, 且 $\varphi(T)=\varphi(0)$, 则 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x)=\varphi(x+T)$.

(3) 假设 I 为区间，而 $a_0,\ldots,a_{n-1}, f \in C(I)$. 求证: 下述 n 阶线性非齐次常微分方程 $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$ 有且至多有 $n+1$ 个线性无关的解.

(4) 设 $f(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的正解 (或者负解), 其中 $p(x), q(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数, 则方程的通解为: $y=f(x)\left[C_1+C_2\int_{x_0}^x \dfrac{1}{f^2(x)} e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} ds\right]$

例 4.10: 常微分方程解的界

(1) 设二次可微函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)-f'(x)-2f(x)=0$, 证明: 若对于不同的两点 $x_1 \neq x_2$, 有 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$, 则 $f(x)$ 恒为 0 .

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} f(x)=1$, 证明: 当 $x \rightarrow+\infty$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x)$ 的一切解都趋于 1 .

(3) (例 43.) 设 f 连续. 考虑 $y''+8y'+7y=f(x)$.

(1) 若 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 则方程的任意解均在 $[0,+\infty)$ 上有界.

(2) 若 $\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} f(x)=0$, 则方程的任意解亦如此.

(4) 设 p, q 为实常数. 问 p, q 满足何条件时方程 $y''+py'+qy=0$ 的解在 $[a,+\infty)$ 上有界, 其中 $a \in \mathbb{R}$ 为常数.