线性代数核心知识点

第零章 预备知识

1. 单射 满射 双射

   已知映射 $f: X \to Y$，若 $\forall f(x_1) = f(x_2)$，均有 $x_1 = x_2$，则 f 为单射；若 $f(X) = Y$，则 f 为满射。若 f 既是单射又是满射，则 f 为双射。

2. 逆映射

   对于映射 f，若存在映射 g，使得 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$，且 $g \circ f = \mathrm{id}_X$，则称映射 f 可逆，f、g 互为逆映射。记作 $g = f^{-1}$，$f = g^{-1}$。

3. 单射，满射，双射和左可逆，右可逆，可逆的关系

   单射有左逆，满射有右逆，双射可逆。

第一章 线性映射和矩阵

4. 线性系统

   满足叠加原理（保加法，保数乘）的系统称为线性系统。

5. 向量空间(线性空间)

   带有线性运算（加法、数乘）的集合 $\mathbb{R}^m$ 称为向量空间（线性空间）。

6. 向量线性运算法则

   加法交换律、加法结合律、零向量、负向量、单位数、数乘结合律、数乘对数的分配律、数乘对向量的分配律。

7. 线性映射

   映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，若满足 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$，有

   （1） $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')$；（2） $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$，

   则称 f 为线性映射。

8. 线性变换 恒同变换

   定义域和陪域都为 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射称为线性变换。

   线性变换 $\begin{aligned} \mathrm{id}: \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} &\to \boldsymbol{x} \end{aligned}$ 称为恒同变换。

9. 线性组合和线性表示

   对于 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 和一组实数 $k_1, \cdots, k_n$，向量 $k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n$ 称为向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的一个线性组合。若 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 是 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的一个线性组合，称向量 $\boldsymbol{b}$ 可被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示。

10. 标准坐标向量（组）

    $\mathbb{R}^n$ 中第 i 个坐标为 1，其余各坐标均为 0 的向量称为第 i 个标准坐标向量。记为 $\boldsymbol{e}_i$。

$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标向量组。

11. 线性映射的存在性和唯一性

任取 $\mathbb{R}^m$ 中的 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，都存在唯一的线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，满足

$f(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{a}_i$。

若两个线性映射 $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 满足 $f(\boldsymbol{e}_i)=g(\boldsymbol{e}_i)\,,i=1,\cdots,n$，则 $f=g$。

12. 矩阵 方阵 矩阵左乘向量及其运算律

将一个 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 并列排在一起组成的矩形数表称为一个 $m\times n$ 矩阵。行数等于列数的矩阵是方阵。

$m\times n$ 矩阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$，则 $A\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\end{bmatrix}$。矩阵与向量的乘积对向量的线性运算满足分配律：$A(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2)=k_1A\boldsymbol{x}_1+k_2A\boldsymbol{x}_2$。

13. 线性映射的表示矩阵 平面上六种线性变换的表示矩阵

线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{e}_i$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准坐标向量，矩阵 $A=[f(\boldsymbol{e}_1)\ \cdots\ f(\boldsymbol{e}_n)]$ 称为线性映射 f（在标准坐标向量下的）的表示矩阵。

旋转变换 $R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，反射变换 $H_\theta=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$，对换变换 $P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$x_1$ 方向上的伸缩变换 $C_k=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$x_2$ 方向上的投影变换 $C_0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$x_2$ 方向上的错切变换 $S_k=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$。

14. 恒同矩阵（单位矩阵） 对角矩阵 （严格）上（下）三角矩阵

恒同映射的表示矩阵 $I_n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{bmatrix}$ 称为恒同矩阵（单位矩阵）。

$\forall i\ne j$，(i,j) 元为 0 的方阵 $D=\begin{bmatrix}d_1\boldsymbol{e}_1 & \cdots & d_n\boldsymbol{e}_n\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(d_i)$ 称为称为对角矩阵。

$\forall i>j$，(i,j) 元为 0 的方阵 U 称为上三角矩阵。$\forall i<j$，(i,j) 元为 0 的方阵 L 称为下三角矩阵。$\forall i\ge j$，(i,j) 元为 0 的方阵称为严格上三角矩阵。$\forall i\le j$，(i,j) 元为 0 的矩阵称为严格下三角矩阵。对角元素为 1 的方阵为单位上（下）三角矩阵。

15. 回代法和前代法

求解$U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$（$U$为上三角矩阵）型方程组时，自下而上逐个代入求出每一个分量的方法称为回代法。

求解$L\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$（$L$为下三角矩阵）型方程组时，自上而下逐个代入求出每一个分量的方法称为前代法。

16. 系数矩阵 增广矩阵

线性方程组中，每个方程各未知数前的系数构成的矩阵A称为方程组的系数矩阵，将常数项$\boldsymbol{b}$写在系数矩阵的右侧构成的矩阵$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$称为方程组的增广矩阵。

17. 初等变换及其同解性

对方程组施加的对换变换（互换两个方程的位置）、倍乘变换（一个方程两边乘以一个非零常数）、倍加变换（一个方程的常数倍加到另一个方程上）称为初等变换。

初等变换都是可逆变换，对换变换的逆是它本身，参数为k的倍乘变换的逆是参数为$\frac{1}{k}$的倍乘变换，参数为k的倍加变换的逆是参数为$-k$的倍加变换。

线性方程组经过某个初等变换后得到的方程组与原方程组同解。

18. 初等行（列）变换

对矩阵的行或列进行的对换变换、倍乘变换、倍加变换称为初等行（列）变换。

19. 自由变量 主变量

可以自由取值的未知数称为自由变量，取值依赖于自由变量的未知数称为主变量。

20. 通解（一般解）

描述方程组解集的表达式称为通解或一般解。

21. 阶梯形矩阵 行简化阶梯形矩阵

对矩阵进行消元的过程中得到的零行只存在于下方，非零行从左数第一个不为0的元素（主元）的列指标随行指标严格增加的矩阵是阶梯型矩阵。

每个非零行的主元都是1，每个主列除主元以外的元素都为0的阶梯型矩阵是行简化阶梯型矩阵，记作$\operatorname{rref}(A)$

22. 主列 自由列

主元所在的列对应系数矩阵中的列称为主列，其他列称为自由列。

23. 阶梯形和行简化阶梯形的存在性定理

任意矩阵都可以用对换行变换和倍加行变换化为阶梯型；任意矩阵都可以用初等行变换化为行简化阶梯型。

24. 线性方程组解情况判定定理

（1）增广矩阵的阶梯数大于系数矩阵阶梯数，方程组无解；

（2）增广矩阵的阶梯数等于系数矩阵的阶梯数，方程组有解，

①若阶梯数等于未知数个数，方程组有唯一解；

②若阶梯数小于未知数个数，方程组有无穷多组解。

25. 齐次线性方程组解情况推论

常数项等于0的方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$称为齐次线性方程组。

齐次线性方程组的系数矩阵的阶梯形的阶梯数等于未知数个数，方程组只有零解。

系数矩阵的阶梯形的阶梯小于未知数个数，方程组有非零解。

方程个数小于未知数个数的齐次线性方程组一定有非零解。

26. 矩阵的线性运算及其运算法则

矩阵的加法和数乘称为线性运算，满足加法交换律、加法结合律、零矩阵、负矩阵、单位数、数乘结合律、数乘对数的分配律、数乘对矩阵的分配律。矩阵与向量的乘积满足分配律 $(k_1A_1+k_2A_2)\boldsymbol{x}=k_1(A_1\boldsymbol{x})+k_2(A_2\boldsymbol{x})$ 。

27. 向前差分和向后差分矩阵

对角元素全是 1，其下方相邻元素全是-1，其余元素全是 0 的矩阵 D_{nn} 称为向前差分矩阵；

对角元素全是 1，其上方相邻元素全是-1，其余元素全是 0 的矩阵 D_{nn}^{T} 称为向后差分矩阵。

28. 矩阵的转置及其运算法则

矩阵 A 对调行和列得到的矩阵是 A 的转置，记为 A^{T} 。

$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$，$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ a_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$，$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$ 。

29. 对称矩阵 反对称矩阵（斜对称矩阵）

若矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}=A$，则称其为对称矩阵；若矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$，则称其为反对称矩阵（或斜对称矩阵）。

30. 矩阵乘法 矩阵的整数幂

A 是 $l\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，设 $A=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_l^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$。则

$AB=\begin{bmatrix}A\boldsymbol{b}_1 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}B\\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_l^{\mathrm{T}}B\end{bmatrix}$。$AB$ 的 (i,k) 元 $\boldsymbol{c}_{ik}=\tilde{\boldsymbol{a}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_k=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}$ 。

$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}$。

31. 可交换矩阵

满足 $AB=BA$ 的同阶方阵 A、B 称为可交换矩阵。

32. 矩阵乘法的运算法则

结合律 $A(BC)=(AB)C=ABC$，分配律 $A(B+C)=AB+AC$，对数乘的交换律

$k(AB)=A(kB)$

33. 数量矩阵

I_n 是单位阵，k 为常数，kI_n 称为数量矩阵。

34. 矩阵乘法和转置的关系

$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$，$(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$，$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$。

35. 矩阵乘法和复合映射的关系

复合映射的表示矩阵是原映射的表示矩阵的乘积。

36. 初等矩阵与初等变换

初等行变换的表示矩阵称为初等矩阵，对换第i, j行对应对换矩阵P_{ij}，将第i行乘以一个非零常数k对应倍乘矩阵$E_{ii;k}$，将第j行的k倍加到第i行对应倍加矩阵$E_{ij;k}$。倍加矩阵是将恒同矩阵进行相同的初等行变换得到的。

左乘初等矩阵相当于进行相应的初等行变换，右乘可逆矩阵相当于进行相应的初等列变换。

37. 可逆矩阵 逆矩阵

对于矩阵A，如果存在矩阵B，满足$AB = BA = I$（I是单位阵），那么称A为可逆矩阵，B为A的逆，记作$B = A^{-1}$。如果矩阵可逆，那么逆矩阵唯一。

38. 初等矩阵的可逆性

初等矩阵都是可逆矩阵，$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$，$E_{ii;k}^{-1} = E_{ii;k^{-1}}$，$E_{ij;k}^{-1} = E_{ij;-k}$。

39. 对角矩阵的可逆性

对角元素都不为 0 的对角矩阵可逆，$\begin{bmatrix} d_1\boldsymbol{e}_1 & \cdots & d_n\boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1}\boldsymbol{e}_1 & \cdots & d_n^{-1}\boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$。

40. 逆矩阵的运算性质

若A可逆，则A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$；若A可逆，则A^{T}可逆，且$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$；若$A$、$B$可逆，则$AB$可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

41. 矩阵可逆的六个等价条件

A是n阶方阵，以下叙述等价：

A可逆、$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解$A^{-1}\boldsymbol{b}$、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解、$A$化为阶梯型矩阵后有$n$个主元、$\mathrm{rref}(A) = I_n$、$A$可以表示为有限个初等矩阵的乘积。

42. 计算逆矩阵的方法

对$[A \mid I_n]$做初等行变换，将其化为$[I_n \mid P]$，则$P = A^{-1}$。

43. 置换矩阵及其性质

单位矩阵经过一系列对换行变换得到的矩阵称为置换矩阵。

单位矩阵通过一系列对换列变换得到的矩阵也是置换矩阵；置换矩阵可通过按某种次序排列单位矩阵的行或列得到；不同的n阶置换矩阵有$n!$个；置换矩阵的乘积也是置换矩阵；置换矩阵的逆等于它的转置，也是置换矩阵。

44. 对角占优矩阵及其可逆性

如果n阶方阵每一行的对角元素都大于这一行的其他元素之和，那么这个矩阵称为（行）对角占优矩阵。对角占优矩阵一点可逆。

45. 矩阵的负整数幂和零次幂

$A^{-k} = (A^{-1})^k$，$A^0 = I_n$。

46. 左相抵 左相抵标准型

如果矩阵 A 可以通过一系列初等行变换得到矩阵 B，那么 A 和 B 左相抵。$\mathrm{rref}(A)$ 称为 A 的左相抵标准形。

47. 集合上的等价关系的性质

S 是非空集合，“～”是定义在 S 上的一种二元关系，如果满足

反身性：$a \sim a$；对称性：$a \sim b$ 则 $b \sim a$；传递性：$a \sim b$，$b \sim c$，则 $a \sim c$。

那么此关系为 S 上的等价关系。

48. 等价类 等价变换 不变量 标准形

集合中与某一元素 a 等价的集合称为 a 所在的等价类。

由一个元素变成与其等价的元素对应的过程称为这一等价关系的等价变换。

同一等价类元素所共有的属性称为这一等价关系中的不变量。

同一等价类中，形式最简单，性质最好的元素称为这一等价关系中的标准形。

49. 分块矩阵及其乘法，转置

将矩阵分为任意大小的块，分块矩阵的乘法和转置的运算法则和针对元素的法则类似，分块矩阵的转置的块也要转置。

50. 分块对角矩阵及其逆矩阵

具有 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$ 这样形式的矩阵称为分块对角矩阵，分块对角矩阵对应的线性系统等价于 s 个独立的子系统。当 $A_1,\cdots,A_s$ 均可逆时，矩阵 A 可逆，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}。$$

51. 分块初等矩阵及其逆矩阵

分块对换矩阵 $\begin{bmatrix} & I_{n_1} \\ I_{n_2} & \end{bmatrix}$，分块倍乘矩阵 $\begin{bmatrix} I_{n_1} & \\ & P \end{bmatrix}$（$P$ 可逆），分块倍加矩阵 $\begin{bmatrix} I_{n_1} & M \\ & I_{n_2} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} & I_{n_1} \\ I_{n_2} & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & I_{n_2} \\ I_{n_1} & \end{bmatrix}，\begin{bmatrix} I_{n_1} & \\ & P \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} I_{n_1} & \\ & P^{-1} \end{bmatrix}，\begin{bmatrix} I_{n_1} & M \\ & I_{n_2} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} I_{n_1} & -M \\ & I_{n_2} \end{bmatrix}。$$

52. Schur 补及其性质

分块矩阵 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，$A_{11}$ 关于 A 的 Schur 补为 $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$；$A_{22}$ 关于 A 的 Schur 补为 $A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$。$A_{11}$ 及其 Schur 补可逆、A_{11} 及其 Schur 补可逆、A 可逆相互等价。

53. LU 分解 LDU 分解 PLU 分解 $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解

见附录

54. 顺序主子阵 可逆矩阵 LU 分解存在的条件

方阵左上角的 $k\times k$ 块称为方阵的第 k 个顺序主子阵。

可逆矩阵的 LU 分解存在，当且仅当其任意顺序主子阵可逆，此时其 LU 分解唯一。

第二章 子空间和维数

55. 线性映射单射，满射和方程组的解的关系

设 $\varphi_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是线性映射，其表示矩阵为 A。φ_A 是单射，当且仅当齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}_m$ 只有零解。φ_A 是满射，当且仅当 $\forall\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$，方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 总有解。

56. 零空间，列空间

齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}_m$ 的解集称为 A 的零空间，记为 $N(A)$。

A 的列向量的线性组合的全体（φ_A 的像集）称为 A 的列空间，记为 $R(A)$。

57. 单射，满射和零空间，列空间的关系

φ_A 是单射，当且仅当 $N(A)=\{\boldsymbol{0}\}$；φ_A 是满射，当且仅当 $R(A)=\mathbb{R}^m$。

58. 子空间 平凡子空间和非平凡子空间

设 M 是线性空间 $\mathbb{R}^m$ 的非空子集，若 $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$，$k\in\mathbb{R}$，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in M$，$k\boldsymbol{a}\in M$，则称 M 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间。列空间，零空间都是子空间。

线性空间 $\mathbb{R}^m$ 有两个平凡子空间 $\{\boldsymbol{0}\}$ 和 $\mathbb{R}^m$ 自身，其他子空间均为非平凡子空间。

59. 线性生成 生成向量

$\mathbb{R}^m$ 中向量组 S 的线性组合的全体构成的 $\mathbb{R}^m$ 的子集称为向量组 S 线性生成的子集，记作 $\operatorname{span}(S)$。

S 中的所有向量称为 $\operatorname{span}(S)$ 的生成向量。

子集 $\operatorname{span}(S)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。M 是 $\mathbb{R}^m$ 的某个子空间，如果 $S\subseteq M$，那么 $\operatorname{span}(S)\subseteq M$。

60. 列空间和线性生成的关系 向量属于列空间的条件

矩阵的列空间是其所有列向量的线性生成。向量 $\boldsymbol{b}\in R(A)$，当且仅当它可以被 A 的列向量线性表示，当且仅当方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解。

61. 线性相关、线性无关及其与方程组解集的关系

$\mathbb{R}^m$ 中的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，如果存在一组不全为 0 的实数 $k_1,\cdots,k_n$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=0$，则称向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性相关。

若 $k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=0$ 一定给出 $k_1,\cdots,k_n$ 全部为 0，则称向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关。

向量组$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性无关等价于零向量有唯一的线性表示，等价于方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有零解（$A$是以$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$为列向量的矩阵）。

向量组$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性相关，等价于$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解。

62. 子空间的基

M是$\mathbb{R}^m$的一个子空间，若M中存在有限个向量$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$满足：

（1）$M=\mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$；（2）$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性无关，

那么称向量组$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$是$M$的一组基。

63. 线性无关向量个数和向量维数的关系

$\mathbb{R}^m$中的个数超过m的一组向量一定线性相关。$\mathbb{R}^m$的任何一组基的个数不超过m。

64. 方阵列向量是一组基的充要条件

m阶方阵$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$是$\mathbb{R}^m$的一组基，当且仅当$A$可逆。标准坐标向量组称为$\mathbb{R}^m$的标准基。

65. 一般向量线性表示法唯一的充要条件

若向量$\boldsymbol{b}$可被向量组$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性表示，则表示法唯一当且仅当$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性无关。

66. 基的等价描述（线性表示）

M是$\mathbb{R}^m$的一个子空间，M中向量组$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$是$M$的一组基，当且仅当$M$中的任何向量都可以被向量组$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$唯一线性表示。

67. 向量组的线性表示

S和T是$\mathbb{R}^m$中的两个向量组，如果S中的每个向量都可以被T线性表示，则称S可以被T线性表示。

68. 极大线性无关组

$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$是$\mathbb{R}^m$中的向量组，$\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$是它的一个部分组，如果

（1）$\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$线性无关；（2）$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$可以被$\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$线性表示，

那么$\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$是$\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$的一个极大线性无关组。

$\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$是$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$的一个极大线性无关组，当且仅当$\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$是$\mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$的一组基。

69. 线性无关向量组线性表示任意向量的充要条件

向量$\boldsymbol{b}$可被线性无关向量组$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性表示，当且仅当向量组$\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性相关。

70. 极大线性无关组的存在性

任意向量组均存在极大线性无关组。

71. 向量组线性表示的三个等价条件

$S:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 和 $T:\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_p$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的两个向量组，则 S 可以被 T 线性表示，等价于存在 $p\times n$ 阶矩阵 U，使得 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_p\end{bmatrix}U$，等价于 $\operatorname{span}(S)\subseteq\operatorname{span}(T)$。

72. 向量组线性表示的传递性

S 可以被 T 线性表示，T 可以被 R 线性表示，则 S 可以被 R 线性表示。

73. 线性等价 共线

如果两个向量组可以互相线性表示，那么这两个向量组线性等价。

如果一个向量组和某个向量线性等价，那么这个向量组中的向量共线。

74. 线性等价的充要条件（线性生成）

S 与 T 线性等价，当且仅当 $\operatorname{span}(S)=\operatorname{span}(T)$。

给定向量组的两个极大线性无关组一定线性等价。

75. 向量组向量个数与线性表示的关系

如果一个向量组线性无关，那么它只能被个数不小于自身的向量组线性表示。

如果一个向量组可以被个数小于自身的向量组线性表示，那么这个向量组线性相关。

76. 线性等价的线性无关向量组的向量个数

线性等价的线性无关向量组的向量个数相同。

77. 极大线性无关组的向量个数关系 向量组的秩

一个向量组 S 的任何一个极大线性无关组的向量个数相同，称为这个向量组的秩，记作 $\operatorname{rank}(S)$。

78. 基存在定理

M 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间，如果 $M\neq\{\mathbf{0}\}$，那么 M 存在一组基，且基的个数不大于 m。

79. 子空间和矩阵列空间的关系

任何子空间都是某个矩阵的列空间。

80. 基扩充定理

M，N 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，如果 $M\subseteq N$，且 $M\neq\{\mathbf{0}\}$，那么 M 的任何一组基可以被扩充为 N 的一组基。M 的任何一组基可以被扩充为 $\mathbb{R}^m$ 的一组基。

81. 子空间的维数

子空间 M 的任何一组基的个数称为这个子空间的维数，记作 $\dim M$。

82. 维数的性质

（1）$\dim\mathbb{R}^m=m$；（2）M 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，则 $\dim M\leq m$；（3）M，N 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，如果 $M\subseteq N$，那么 $\dim M\leq\dim N$。

83. 维数已知的子空间基的判定

M 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间，$\dim M=r$，对于 M 中的含有 r 个向量的向量组，这个向量组线性无关，等价于这个向量组线性生成 M，等价于这个向量组是 M 的一组基。

84. 有包含关系的子空间相等条件

M，N 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，如果 $M\subseteq N$，且 $\dim M=\dim N$，则 $M=N$。

85. 方阵可逆的六条等价叙述

方阵 A 对应的线性映射为 φ_A，则以下叙述等价：

A 可逆，逆矩阵为 B；A 有左逆 B；A 有右逆 B；φ_A 是单射；φ_A 是满射；φ_A 是双射。

86. 矩阵的秩

矩阵 A 的列空间的维数 $\dim R(A)$ 称为矩阵的秩，记作 $\operatorname{rank}(A)$。

87. 左相抵矩阵的列向量性质

左相抵矩阵 A 和 B 的列向量的线性关系相同。A 的部分组线性无关等价于 B 的对应部分组线性无关；A 的某一列可以被 A 的部分组线性表示等价于 B 的对应列可以被 B 的对应部分组以相同的系数线性表示；A 的部分组是 A 的列向量组的极大线性无关组等价于 B 的对应部分组是 B 的列向量组的极大线性无关组。

对矩阵做初等行变换不改变行空间和秩。即若 B 可逆，则

$R((BA)^{\mathrm{T}})=R(A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})=R(A^{\mathrm{T}})$，且 $\operatorname{rank}(BA)=\operatorname{rank}(A)$。（“$B$ 可逆”可弱化为“B 有左逆”）

88. 矩阵行简化阶梯形的唯一性

矩阵的行简化阶梯形矩阵唯一。

89. 矩阵的秩和阶梯形矩阵的关系

矩阵的秩等于其化成的阶梯型矩阵的阶梯数。

90. 行空间 行空间的维数（行秩）

A 的行向量的转置线性生成的子空间 $R(A^{\mathrm{T}})$ 称为 A 的行空间。

矩阵行空间的维数（行秩）等于其化成的阶梯型矩阵的阶梯数，也等于列空间的维数（列秩）。即 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}(A)$。

91. 行满秩 列满秩 满秩

矩阵的秩不超过行数，也不超过列数。若矩阵的秩等于行数，则此矩阵行满秩；若矩阵的秩等于列数，则此矩阵列满秩。若方阵的秩等于阶数，则此方阵满秩。

92. 行满秩，列满秩，满秩与单射，满射，双射的关系

矩阵 A 对应的线性映射为 φ_A。A 列满秩等价于 A 是单射；A 行满秩等价于 A 是满射；A 满秩等价于 A 是双射。

93. 可逆矩阵，零矩阵与秩的关系

矩阵可逆等价于矩阵满秩，矩阵是零矩阵等价于矩阵秩为 0。

94. 矩阵乘积与列空间、秩的关系

$R(AB)\subseteq R(A)$，若 B 可逆，则 $R(AB)=R(A)$，$\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(A)$。即对矩阵做初等列变换不改变列空间，也不改变秩。（“B 可逆”可弱化为“B 有右逆”）

矩阵乘法不增加秩，即 $\operatorname{rank}(AB)\le\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$。

矩阵的秩在初等行、列变换下均不变，即若 P、Q 可逆，则 $\operatorname{rank}(PAQ)=\operatorname{rank}(A)$。

95. 相抵 相抵标准形

如果矩阵 A 可通过有限步初等行变换和初等列变换化成矩阵 B，那么称 A 与 B 相抵。若 $\operatorname{rank}(A)=r$，则存在可逆矩阵 P、Q，使得 $PAQ=D_r=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$。$D_r$ 称为矩阵 A 的相抵标准型。

A 与 B 相抵等价于 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$。

96. 零空间的基

矩阵 A 是 $m\times n$ 矩阵，秩为 r，在方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集中依次取第 $1,\cdots,n-r$ 个自由变量为 1，其他自由变量取 0，得到 $n-r$ 个解 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_{n-r}$，这 $n-r$ 个解是 $N(A)$ 的一组基。

97. 导出方程组 特解

称 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的导出方程组。$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解 $\boldsymbol{k}_0$ 称为方程组的一个特解。

98. 方程组解集与导出方程组解空间的关系

设方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解为 $\boldsymbol{k}_0$，导出方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 $N(A)$ 的一组基是 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_{n-r}$，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解集是 $\{\boldsymbol{k}_0+c_1\boldsymbol{k}_1+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{k}_{n-r} \mid c_1,\cdots,c_{n-r}\in\mathbb{R}\}$。

99. 线性方程组解情况的判定定理（秩表述）

对于有 n 个变量（A 有 n 列）的线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，

（1）方程组有解，当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\right)$；

（2）方程组有唯一解，当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\right)=n$；

（3）方程组有无穷多组解，当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\right)<n$。

100. 矩阵基本子空间维数关系定理

A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $\dim R(A)+\dim N(A)=n$，$\dim R(A^{\mathrm{T}})+\dim N(A^{\mathrm{T}})=m$。

第四章 内积和正交性

101. 内积的定义

对于 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$。

102. 内积的性质

（1）对称性：$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$；（2）双线性性；

（3）正定性：$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\ge 0$，当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时等号成立。

103. 向量的长度 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的距离

$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$

$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的距离

104. 单位向量 单位化向量

长度为 1 的向量称为单位向量，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ 称为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位化向量

105. Cauchy-Schwarz 不等式

$\left|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\right| \le \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$，当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时等号成立。

106. 向量的夹角

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta = \arccos\dfrac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$。$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交（或垂直）。

107. 三角不等式

$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \le \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$

108. 勾股定理

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交，则 $\|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2$

109. 正交投影

向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a})$ 方向上的正交投影为 $\dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$。

110. 正交投影的几何性质

$$\left\|\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\right\| = \min_{x\in\mathbb{R}}\|\boldsymbol{b}-x\boldsymbol{a}\|$$

111. 正交向量组 正交向量组的性质

一组非零且两两正交的向量称为一个正交向量组。
若所有向量均为单位向量，则称为正交单位向量组。
正交向量组线性无关。

112. 标准正交基

若一个子空间的一组基是正交向量组，则称之为该子空间的一组正交基。如果是正交单位向量组，则称之为该子空间的一组标准正交基。

113. 标准正交基的存在性

任何子空间都存在一组标准正交基。

114. 标准正交基扩充定理

设 M 和 N 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间，$M\subseteq N$，则 M 的任意一组标准正交基可扩充为 N 的一组标准正交基。

115. Gram-Schmidt 正交化

由一组基得到一组正交基的方法。步骤是将每一个向量在已有正交向量上的投影减去。

116. 正交矩阵

满足 $Q^{\mathrm{T}}Q=I_n$ 的 n 阶方阵 Q 称为正交矩阵。

117. 正交矩阵的等价表述

对于n阶方阵Q，以下说法等价：

（1）Q 是正交矩阵，$Q^{\mathrm{T}}Q = I_n$；

（2）Q 可逆，$Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$ 也为正交阵；

（3）$QQ^{\mathrm{T}} = I_n$；

（4）Q 的列向量是$\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基；

（5）Q 的行向量的转置是$\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基；

（6）Q 是保距变换，即$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$\|Q\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$；

（7）Q 是保内积变换，即$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，$(Q\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(Q\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

118. 正交矩阵对乘法的封闭性

两个n阶正交矩阵的乘积还是正交矩阵。

119. 二阶正交矩阵的表示形式

旋转变换型：$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，反射变换型：$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$。

120. Givens 变换（高维空间中的旋转变换）

在$\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j$平面上旋转角度$\theta$的变换对于的矩阵：$\begin{bmatrix} \ddots &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && \cos\theta &&&& -\sin\theta & \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& 1 && \\ && \sin\theta &&&& \cos\theta & \\ &&&&&&& 1 \\ &&&&&&&& \ddots \end{bmatrix}$

121. Householder 变换（高维空间中的反射变换）

在$\mathbb{R}^n$ 中，关于以$\boldsymbol{v}$为法向量的超平面的反射变换对应的矩阵：$H_{\boldsymbol{v}} = I - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$。

122. QR 分解

见附录

123. 列正交矩阵

满足$Q^{\mathrm{T}}Q = I_n$的$m \times n$ 矩阵称为列正交矩阵。

列正交矩阵的列向量组是$\mathbb{R}^m$ 的一个单位正交向量组。

124. 正交子空间

若子空间M 中的向量与N 中的向量都正交，则称M 和N 正交，记为$M \perp N$。若$\mathrm{span}(\boldsymbol{a}) \perp N$，则称称$\boldsymbol{a}$ 和N 正交，记为$\boldsymbol{a} \perp N$

125. 正交补

$\mathbb{R}^n$ 中所有与子空间M 正交的向量的集合$M^{\perp}$ 称为M 的正交补。

126. 正交补的性质

（1）若 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，则 $M^\perp$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间；

（2）$M \cap M^\perp = \{\mathbf{0}\}$；

（3）$\dim M + \dim M^\perp = n$；

（4）$(M^\perp)^\perp = M$；

（5）$\mathbb{R}^n$ 中的任意向量在 M 和 $M^\perp$ 上的分解唯一。

127. 矩阵的四个基本子空间的关系

（1）$R(A)^\perp = N(A^{\mathrm{T}})$，$R(A^{\mathrm{T}})^\perp = N(A)$；

（2）$R(A^{\mathrm{T}}A) = R(A^{\mathrm{T}})$，$N(A^{\mathrm{T}}A) = N(A)$；

（3）$R(AA^{\mathrm{T}}) = R(A)$，$N(AA^{\mathrm{T}}) = N(A^{\mathrm{T}})$；

128. 正交投影

若 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的变换 $\varphi_{P_M}: \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_1 \in M$ 称为子空间 M 上的正交投影变换，$\boldsymbol{a}_1$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 在 M 上的正交投影。

129. 正交投影矩阵

矩阵 A 的列空间上的正交投影变换的表示矩阵称为正交投影矩阵，记作 P_A。

方阵 P 是正交投影矩阵，当且仅当 $P^2 = P^{\mathrm{T}} = P$。此时 P 是关于自身的正交投影矩阵。

若 Q 的列向量是 A 的一组标准正交基，则 $P_A = QQ^{\mathrm{T}}$。

若 $A^{\mathrm{T}}A$ 可逆，则 $P_A = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$。

130. 最小二乘问题

求解 $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|$ 的问题称为最小二乘问题，其解称为方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解。

$\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的最小二乘解，当且仅当 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$。

第四章 行列式函数

131. 行列式函数

定义在全体 n 阶方阵上的满足列多线性性、列反对称性、单位化条件的函数 δ 称为行列式函数。方阵 A 的行列式函数的值记作 $\det(A)$ 或 $|A|$。

132. 行列式的几何意义

$\mathbb{R}^n$ 中的几何体，经过线性变换 A 后，“（有向）体积”变成原来的 $\det(A)$ 倍。该数称为线性变换的变积系数。

133. 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

134. 行列式的化零条件

（1）有两列或两行相等的矩阵行列式为 0；

（2）不满秩（不可逆）矩阵的行列式为 0；

（3）有一行或一列全为 0 的行列式为 0。

135. 初等矩阵的行列式

$\det(P_{ij}) = -1$， $\det(E_{ii;k}) = k$， $\det(E_{ji;k}) = 1$。

136. 行列式的性质

（1）行列式保持矩阵乘法，即 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$；

（2） $\det(A) = \det(A^{\mathrm{T}})$；

（3）矩阵 A 可逆，当且仅当 $\det(A) \neq 0$；

（4）行列式满足行线性性和行反对称性；

（5）行列式若存在，则唯一。

137. 特殊矩阵的行列式

（1）对角矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵的行列式是对角元素的乘积；

（2）分块对角矩阵、分块上三角矩阵、分块下三角矩阵的行列式是对角块行列式的乘积；

（3）可逆矩阵的逆的行列式是原矩阵行列式的倒数。

138. 行列式的等价定义

定义在全体 n 阶方阵上的满足下列性质的函数 δ 是行列式函数：

（1） $\delta(AB) = \delta(A)\delta(B)$；

（2）若 A 不可逆，则 $\delta(A) = 0$；

（3） $\delta(P_{ij}) = -1$， $\delta(E_{ii;k}) = k$， $\delta(E_{ji;k}) = 1$，

139. Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)。$$

140. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}。$$

141. 代数余子式

$A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$是方阵$A$划去第$i$行和第$j$列得到的$n-1$阶方阵，$M_{ij}=\det\left(A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\right)$称为$a_{ij}$的余子式，$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det\left(A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\right)$称为$a_{ij}$的代数余子式。

142. 行列式的展开式

（1）按第j列展开：$\det(A)=a_{1j}C_{1j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$；

（2）按第i行展开：$\det(A)=a_{i1}C_{i1}+\cdots+a_{in}C_{in}$

若使用了“错位”的列或行进行展开，则结果为 0。即设$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{c}_j=\begin{bmatrix} C_{1j} \\ \vdots \\ C_{nj} \end{bmatrix}$，当$j'\neq j$时，$\boldsymbol{a}_{j'}^T\boldsymbol{c}_j=0$。

143. 伴随矩阵

对方阵A，设矩阵$C=\left[C_{ij}\right]_{n\times n}$，则$C^{\mathrm{T}}$是$A$的伴随矩阵。

144. 逆矩阵公式

对可逆方阵A，$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}C^{\mathrm{T}}$，$C^{\mathrm{T}}A=\det(A)I_n$。

145. Cramer 法则

给定方阵A，则$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解当且仅当$A$可逆，即$\det(A)\neq 0$。此时唯一解为

$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，其中$x_i=\dfrac{\det\left(B_i\right)}{\det(A)}$，$B_i$是将$A$的第$i$列换成$\boldsymbol{b}$得到的矩阵。

146. 排列的符号 行列式的完全展开

将正整数$1,\cdots,n$按一定的顺序排列，称为排列σ。若该排列能通过奇数次对换得到$1,\cdots,n$，则该排列为奇排列，$\operatorname{sign}(\sigma)=-1$；若能通过偶数次对换得到$1,\cdots,n$，则该排列为偶排列，$\operatorname{sign}(\sigma)=1$。

$\det(A)=\sum\limits_{\sigma}\operatorname{sign}(\sigma)a_{\sigma_1,1}a_{\sigma_n,n}=\sum\limits_{\sigma}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1,\sigma_1}a_{n,\sigma_n}$。

第五章 特征值和特征向量

147. 代数学基本定理及其推论

复系数一元n次多项式在$\mathbb{C}$上至少有一个根。

复系数一元n次多项式在$\mathbb{C}$上恰有n个根（包含重根）。

148. Vieta 定理

复系数一元n次多项式$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$的$n$个根$x_1,\cdots,x_n$满足

$-\frac{a_1}{a_0}=x_1+\cdots+x_n$；$(-1)^n\frac{a_n}{a_0}=x_1\cdots x_n$。

149. 特征值 特征向量 特征对

给定n阶方阵A，若对$\lambda\in\mathbb{C}$，存在非零向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$，使得$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，则称$\lambda$为$A$的一个特征值，$\boldsymbol{x}$为$A$的一个特征向量。$(\lambda,\boldsymbol{x})$称为$A$的一个特征对。

方阵的属于不同特征值的特征向量线性无关。

150. 特征多项式

$p_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$称为方阵$A$的特征多项式，$\lambda_0$是$A$的特征值，当且仅当$p_A(\lambda_0)=0$。

非零向量$\boldsymbol{x}_0$是A的属于λ_0的特征向量，当且仅当$\boldsymbol{x}_0\in N(\lambda_0 I-A)$。

151. 求特征值和特征向量的方法

（1）计算$p_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$；

（2）求$p_A(\lambda)=0$的所有根，得到A的特征值；

（3）对每个特征值λ_i，求$N(\lambda_0 I-A)$的一组基，即为λ_i对应的全部特征向量。

152. 特殊矩阵的特征值

（1）反射矩阵的特征值是 1 和 -1；（2）投影矩阵（不一定正交）的特征值是 1 和 0；（3）上（下）三角矩阵的特征值是其所有对角元素；（4）旋转矩阵R_θ 的特征值$\cos\theta\pm\mathrm{i}\sin\theta$

153. Gershgorin 圆盘定理

对n阶方阵A，其任意特征值λ一定落在圆盘$G_i=\left\{z\,\middle|\,|z-a_{ii}|\le\sum_{j\ne i}|a_{ij}|\right\}$中的一个内。

154. 代数重数 几何重数

特征值λ_0是$p_A(\lambda)$的n_0重根，则n_0称为λ_0作为A的特征值的代数重数。1 重特征值称为单特征值。

$N(\lambda_0 I-A)$的维数称为λ_0作为A的特征值的几何重数。

特征值的几何重数不大于代数重数。若某个特征值的几何重数等于代数重数，则称该特征值半单；几何重数小于代数重数，则称该特征值亏损。

155. 共轭复数与特征值、特征向量的关系

对n阶方阵A，其一个特征值λ_0的共轭也是A的代数重数相同的特征值，且对应特征向量为原特征向量的共轭。

156. 特征值与行列式、迹的关系

$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=\mathrm{trace}(A)$； $\lambda_1\cdots\lambda_n=\det(A)$

157. 可对角化矩阵

对于方阵 A，若存在可逆矩阵 X 使得 $X^{-1}AX=\Lambda$ 为对角阵，则称 A 可对角化。

158. 谱分解

见附录

159. n 阶方阵 A 可对角化的条件

充要条件：（1） A 有 n 个线性无关的特征向量；（2） A 的所有特征值都半单。

充分条件： A 有 n 个不同的特征值，即所有特征值都是单特征值。

160. 分块对角矩阵可对角化的充要条件

分块对角矩阵可对角化，当且仅当其所有对角块可对角化。

161. 矩阵的相似

对于方阵 A、B，若存在可逆矩阵 X 使得 $X^{-1}AX=B$，则称 A 与 B 相似。方阵的相似关系是等价关系。

矩阵可对角化，当且仅当其相似于对角阵。此时该对角阵称为 A 的相似标准形。

162. 相似关系中的不变量

秩、特征多项式、特征值、特征值的几何重数、特征值的代数重数、迹、行列式。

163. 对角矩阵相似的充要条件

对角矩阵相似，当且仅当其对角元素除排列次序外相同。

164. 与矩阵相似的上三角矩阵

对任意方阵，存在可逆矩阵使其相似于上三角矩阵，且上三角矩阵的对角元素是该方阵的特征值（计重数）。

165. Hamilton-Cayley 定理

设 $p_A(\lambda)$ 为 A 的特征多项式，则 $p_A(A)=O$。

166. Jordan 标准形

对 n 阶方阵 A，存在可逆矩阵使其相似于 $J=\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}$，其中

$J_{n_i}(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$ 为 n_i 阶 Jordan 块。

167. 同时对角化

若存在可逆矩阵 X，使得 $X^{-1}AX=\Lambda_1$， $X^{-1}BX=\Lambda_2$ 均为对角阵，则称 A、B 可同时对角化。

168. 同时对角化的等价条件

A、B 是可对角化的方阵，则以下叙述等价：

（1） A、B 可同时对角化；（2） A、B 的特征向量相同；（3） A、B 可交换。

第六章 实对称矩阵

169. 实对称矩阵的特征对性质

实对称矩阵的特征值都是实数，特征向量都是实向量。属于不同特征值的特征向量彼此正交。

170. 实对称矩阵的谱分解

见附录

171. 正交相似

对于实方阵A、B，若存在正交阵Q使得$Q^{\mathrm{T}}AQ=B$，则称A与B正交相似。

方阵的正交相似关系是等价关系。正交相似不变量为所有相似不变量和方阵的对称性。实对称矩阵的正交相似标准形是对角阵。

172. 正定矩阵 半正定矩阵 负定 半负定

对n阶实方阵A，若对于任何非零向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，都有$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}>0$，则称矩阵$A$正定。若对于任何非零向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，都有$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}\geq 0$，则称矩阵$A$正定。类似可定义负定、半负定。

不属于上述任何一种类型的矩阵是不定矩阵。

173. 实对称矩阵正定的等价叙述

（1）A正定；

（2）A的特征值都是正数；

（3）存在可逆矩阵T，使得$A=TT^{\mathrm{T}}$；

（4）A有 $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解，且D的对角元素都是正数；

（5）A的顺序主子式（顺序主子阵的行列式）都是正数；

（6）A的顺序主子阵都是正定。

174. 实对称矩阵半正定的等价叙述

（1）A半正定；

（2）A的特征值都是非负数；

（3）存在矩阵T，使得$A=TT^{\mathrm{T}}$；

（4）A有 $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解，且D的对角元素都是非负数；

（5）A的主子式（顺序主子阵的行列式）都是非负数；

（6）A的主子阵都是半正定。

175. 不定矩阵的性质

若矩阵A不定，则存在向量$\boldsymbol{x}$，使得$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=0$。

176. 合同

对于方阵A、B，若存在可逆矩阵X使得$X^{\mathrm{T}}AX=B$，则称A与B合同。

合同关系是等价关系。相抵不变量（如秩）、正定性等、对称性都是合同不变量。

177. 合同标准型

对n阶实对称方阵A，存在可逆矩阵使其合同于$J=\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{bmatrix}$，其中

$r=\operatorname{rank}(A)$。

178. Sylvester 惯性定律

实对称矩阵的合同标准形唯一，且其正、负、零对角元个数与A的正、负、零特征值个数相同。

p称为A的正惯性指数，$r-p$称为A的负惯性指数，三元组$(p,r-p,n-r)$称为A的惯性指数或惯量。

179. 奇异值 奇异向量

对于 $m\times n$ 阶矩阵 A，若存在非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$， $\sigma\geq 0$，使得 $A\boldsymbol{x}=\sigma\boldsymbol{y}$，

$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\sigma\boldsymbol{x}$，则称 σ 为 A 的特征值， $\boldsymbol{x}$ 为 A 的右奇异向量， $\boldsymbol{y}$ 为 A 的左奇异向量。

180. 奇异值分解

见附录

181. 矩阵的左、右奇异向量与四个基本子空间的关系

（1） $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r$ 为 $R(A)$ 的一组标准正交基；

（2） $\boldsymbol{u}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 为 $N(A^{\mathrm{T}})$ 的一组标准正交基；

（3） $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r$ 为 $R(A^{\mathrm{T}})$ 的一组标准正交基；

（4） $\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 为 $N(A)$ 的一组标准正交基；

182. 谱范数

对于任意矩阵 A， $\max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 称为 A 的谱范数，记为 $\|A\|$。

183. 谱范数的性质

（1） $\|A\|\geq 0$，当且仅当 $A=O$ 时等号成立；

（2） $\|kA\|=|k|\|A\|$；

（3） $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$；

（4） $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$；

（5）若 U， V 正交，则 $\|UAV^T\|=\|A\|$；

184. 谱范数和奇异值的关系

（1）矩阵的谱范数等于 A 的最大奇异值。

（2）设实矩阵的奇异值 $\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_n$，对应的右奇异向量为 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$。则

$$\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=\sigma_1,\quad \max_{\substack{\boldsymbol{x}\perp\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1})\\ \boldsymbol{x}\neq 0}}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=\sigma_1,\quad \min_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=\sigma_n;\quad \min_{\substack{\boldsymbol{x}\perp\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{v}_n)\\ \boldsymbol{x}\neq 0}}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=\sigma_i$$

第七章 线性空间与线性映射

185. 数域

至少包含一个非零复数，且对复数的加减乘除四则运算的 $\mathbb{C}$ 的子集是一个数域。

186. 线性空间 子空间 子空间的交 线性组合 线性生成 线性相关 线性无关 极大线性无关组 线性等价 向量组的秩 基 维数 基扩充定理 线性映射 线性运算 复合映射 线性变换 特征值 特征向量 特征对 特征子空间 线性映射的存在性和唯一性 复合映射的表示矩阵

与之前章节的定义类似，只需将 $\mathbb{R}$ 改为任意数域 $\mathbf{F}$，$\mathbb{R}^n$ 改为线性空间 V 即可。特征值、特征向量、特征子空间是对于一般的线性映射而不是矩阵而言的。

187. 子空间的和

M_1、M_2 是线性空间 V 的子空间，集合 $M_1+M_2=\{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}\mid \boldsymbol{m}\in M_1,\boldsymbol{n}\in M_2\}$ 称为 M_1、M_2 的和。

188. 子空间的直和

若 $M=M_1+M_2$，且 M 中的任意向量在两子空间中的分解式唯一，则称 M 为 M_1、M_2 的直和，或 M_1+M_2 为直和。记作 $M=M_1\oplus M_2$。

189. 直和的等价表述

（1）M_1+M_2 为直和；

（2）零向量有唯一的分解式 $\mathbf{0}=\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2$，$\boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{m}_2=\mathbf{0}$.

（3）$M_1\cap M_2=\{\mathbf{0}\}$；

（4）$\dim(M_1+M_2)=\dim M_1+\dim M_2$

190. 维数公式

$\dim(M_1+M_2)=\dim M_1+\dim M_2-\dim(M_1\cap M_2)$

191. 核 像集

给定数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间 U，V，映射 $f:U\to V$，$N(f)=\{\boldsymbol{a}\in U\mid f(\boldsymbol{a})=\mathbf{0}\}$ 称为 f 的核，$R(f)=\{f(\boldsymbol{a})\mid \boldsymbol{a}\in U\}$ 称为 f 的像集。

f 是单射，当且仅当 $N(f)=\mathbf{0}$；f 是满射，当且仅当 $R(f)=V$。

192. 同构映射

给定数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间 U，V，若存在映射 $f:U\to V$ 是双射，则称 U，V 同构。f 为 U 到 V 的同构映射。

两个同构映射的复合仍然是同构映射，同构映射的逆也是同构映射。线性映射的同构关系是等价关系，唯一的不变量是维数。

193. 坐标

对于数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间 V，设 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是其一组基，则 $\forall \boldsymbol{x}\in V$，都可以被这一组基唯一线性表示，写为 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$。有序组 $x_1,\cdots,x_n$ 称为向量在基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标。

确定基向量顺序后，由向量到向量的坐标的映射是同构映射。

194. 向量的线性无关性与坐标的线性无关性

取定一组基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，一个向量组线性无关，当且仅当其中的所有向量在这组基下的坐标向量在$\mathbf{F}^n$中线性无关。

195. 过渡矩阵

给定n维线性空间的两组基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$和$\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$，设$\boldsymbol{t}_i = t_{1i}\boldsymbol{e}_1+\cdots+t_{ni}\boldsymbol{e}_n$，$i=1,2,\cdots,n$。则$T=\left[t_{ij}\right]_{n\times n}$称为从基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$到$\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$的过渡矩阵。形式上可写为$(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T$。

196. 过渡矩阵的性质

给定n维线性空间的一组基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$和方阵$T$，若$(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T$，则$\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$是一组基当且仅当$T$可逆。

若$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{x}$，则$\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}$。

197. 线性映射的表示矩阵

给定数域$\mathbf{F}$上的线性空间U，V，映射$f:U\to V$，$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$为$U$的一组基，$\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m$为$V$的一组基。设$f(\boldsymbol{e}_i)=f_{1i}\boldsymbol{i}_1+\cdots+f_{mi}\boldsymbol{i}_m$，则$F=\left[f_{ij}\right]_{m\times n}$称为$f$在两组基下的表示矩阵。

确定两组基后，由线性映射到表示矩阵的映射是同构映射。

$\mathrm{Hom}(U,V)$表示全体映射$f:U\to V$，则$\dim\mathrm{Hom}(U,V)=\dim\mathbf{F}^{m\times n}=mn$。

从线性映射的核、像集到表示矩阵的零空间、列空间的映射是同构映射。

198. 线性映射的矩阵在基变换下的变化规律

给定数域$\mathbf{F}$上的线性空间U，V。U的两组基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$和$\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$，$V$的两组基$\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m$，$\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m$。$(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T$，$(\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m)=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)S$。若映射$f:U\to V$在基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，$\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m$下的表示矩阵为$F$，则此映射在基$\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$，$\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m$下的表示矩阵为$S^{-1}FT$。

给定数域$\mathbf{F}$上的线性空间U，V，映射$f:U\to V$，$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$为$U$的一组基，$\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m$为$V$的一组基。$f$在基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，$\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m$下的表示矩阵为$F$。则任意与$F$相抵的矩阵$F'$，存在$U$，$V$的各自一组基，使得$f$其下的矩阵为$F'$。

给定数域$\mathbf{F}$上的线性空间U，V，任意线性映射$f:U\to V$，存在U，V的各自一组基，使得f其下的矩阵为$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$，其中$r=\dim R(f)$。

线性变换的表示矩阵在定义域和陪域内取同一组基。

199. 线性变换的特征值与矩阵的特征值

给定数域$\mathbf{F}$上的线性空间V及其一组基，f为其上的线性变换，在这组基下的矩阵为F，$\lambda\in\mathbf{F}$，$\boldsymbol{x}\in V$，$\hat{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{F}^n$为$\boldsymbol{x}$在这组基下的坐标。则$(\lambda,\boldsymbol{x})$为$f$的特征对，当且仅当$(\lambda,\hat{\boldsymbol{x}})$是$F$的特征对。

F可对角化当且仅当f有n个线性无关的特征向量。

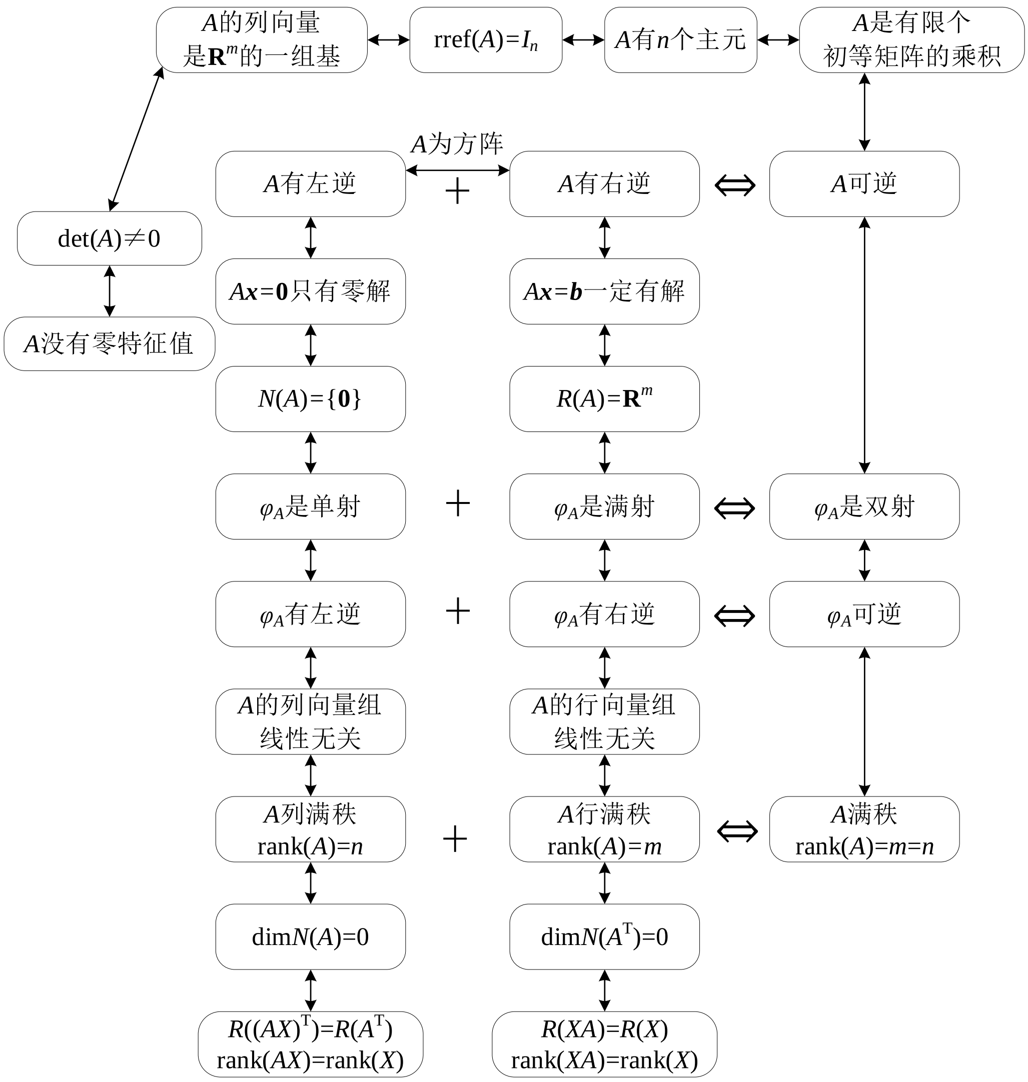
200. 线性变换矩阵在基变换下的变化规律

给定数域$\mathbf{F}$上的线性空间V和它的两组基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$和$\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$，$(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T$。$f$在基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$下的表示矩阵为$F$，则在基$\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$下的表示矩阵为$T^{-1}FT$。即线性映射做基变换，其表示矩阵做相似变换。

$\mathbf{F}$上的n阶方阵A，B相似，当且仅当它们是n维线性空间V上的某个线性变换在两组基下的矩阵。

附录 1 矩阵相关的等价命题

设$\varphi_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是线性映射，其表示矩阵为$A$。$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$。$X$为任意符合乘法条件的矩阵。则下图中的关系成立。



附录 2 常见矩阵分解

1. LU 分解

定义：将可逆矩阵写成一个单位下三角矩阵（对角元素均为 1 的下三角矩阵）L 和一个上三角矩阵 U 的乘积。

步骤：

①将待分解矩阵 A 与 n 阶单位阵并列，得到矩阵 $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$；

②对矩阵 $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ 做倍加变换，使 A 成为上三角矩阵 U（只能将处于上方的行的若干倍加到下方，不能反过来），得到矩阵 $\begin{bmatrix} U & L^{-1} \end{bmatrix}$；

③对下三角矩阵 L^{-1} 求逆，得到矩阵 L。

2. LDU 分解

定义：将可逆矩阵写成一个单位下三角矩阵 L，对角矩阵 D 和一个单位上三角矩阵 U 的乘积。

步骤：在 LU 分解的基础上通过对角矩阵 D 将 U 的对角元素化为 1 即可。

3. $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解

定义：将可逆对称矩阵写成单位下三角矩阵 L，对角矩阵 D 和单位上三角矩阵 L^{T} 的乘积。

步骤：和 LDU 分解完全相同。

4. PLU 分解

定义：将矩阵写成一个置换矩阵 P，一个单位下三角矩阵 L 和一个上三角矩阵 U 的乘积。

步骤：与 LU 分解相似，但是不能只通过倍加变换得到上三角矩阵，而是先进行对换行变换得到 $P^{-1}A$，再对 $P^{-1}A$ 进行 LU 分解。

5. QR 分解

定义：将可逆矩阵写成一个正交矩阵 Q，一个对角元素均为正数的上三角矩阵 R 的乘积。

步骤：

①写出待分解矩阵 A 的列空间的一组基 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$；

②进行 Gram-Schmidt 分解：

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{q}}_1 = \boldsymbol{a}_1 \\
&\tilde{\boldsymbol{q}}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1 \\
&\tilde{\boldsymbol{q}}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_2}\tilde{\boldsymbol{q}}_2 \\
&\vdots \\
&\tilde{\boldsymbol{q}}_n = \boldsymbol{a}_n - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1 - \cdots - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}
\end{aligned}
$$

③记 $\tilde{Q}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{q}}_n\end{bmatrix}$，$\tilde{R}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1} & \cdots & \dfrac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \dfrac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}} \\ & & & 1\end{bmatrix}$；

④将 $\tilde{Q}$ 归一化，变成单位正交阵：$Q=\tilde{Q}\operatorname{diag}(\|\tilde{\boldsymbol{q}}_i\|^{-1})$；

⑤记 $R=\operatorname{diag}(\|\tilde{\boldsymbol{q}}_i\|)\tilde{R}$，则 $A=QR$。

注：一般的 $m\times n$ 矩阵，在 $m\geq n$ 时也有 QR 分解。

6. 谱分解

定义：将可对角化矩阵分解为 $X\Lambda X^{-1}$ 的形式，其中 Λ 是对角阵。

步骤：

①令 $p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=0$，解出 A 的所有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$；

②分别求 $N(\lambda_i I-A)$ 的一组基，将所有基向量按对应特征值下标顺序并列，得到 X；

③求 X 的逆 X^{-1}。

7. 实对称矩阵的谱分解

定义：将实对称矩阵分解为 $Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ 的形式，其中 Q 是正交阵，Λ 是对角阵。

步骤：与一般谱分解相似。但是特征向量需要先正交化（只需正交化同一个特征值的不同特征向量），再单位化。求出 Q 后直接取转置得到 Q^{T}。

记 $Q=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \cdots & \boldsymbol{q}_n\end{bmatrix}$，也可以将 A 写成 $\lambda_1\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{q}_n\boldsymbol{q}_n^{\mathrm{T}}$。

8. 实对称正定矩阵的 Cholesky 分解

定义：将实对称正交矩阵写成 LL^{T} 的形式，L 是可逆阵。

步骤：

①先进行谱分解得到 $A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$；

②令 $D=\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$，则 $D^2=\lambda$，令 $T=QD$；

③对 T^{T} 进行 QR 分解得到 $T^{\mathrm{T}}=QL^{\mathrm{T}}$，则 $A=LQ^{\mathrm{T}}QL^{\mathrm{T}}=LL^{\mathrm{T}}$。

9. 奇异值分解（SVD）

定义：将 $m\times n$ 矩阵 A 分解为 $U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ 的形式，其中 U 为 m 阶正交阵，V^{T} 为 n 阶正交阵，$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_r & O \\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}$，$\Sigma_r=\operatorname{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$。

步骤：

①计算 $A^{\mathrm{T}}A$；

②对 $A^{\mathrm{T}}A$ 进行（正交）谱分解，得到 $V\Lambda V^{\mathrm{T}}$ ，$\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$ ，且 $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_r>0$ ，$V=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n\end{bmatrix}$ ；

③令 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$ ，$i=1,2,\cdots,r$ 。则 $\Sigma_r=\operatorname{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$ ，$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}$ ；

④计算 AA^{T} ；

⑤对 AA^{T} 进行（正交）谱分解，得到 $U\Lambda U^{\mathrm{T}}$ 。则有 $A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ 。

（简便方法：若 $m\geq n$ ，则先求 $A^{\mathrm{T}}A$ 的谱分解，再依次计算 $\boldsymbol{u}_i=\dfrac{1}{\sigma_i}A\boldsymbol{v}_i$ ，$i=1,2,\cdots,n$ ，然后将其扩充为 $\mathbb{R}^m$ 的一组标准正交基 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 。若 $m<n$ ，则先求 AA^{T} 的谱分解 $U\Lambda U^{\mathrm{T}}$ ，再依次计算 $\boldsymbol{v}_i=\dfrac{1}{\sigma_i}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i$ ，$i=1,2,\cdots,m$ ，然后将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 。）