①、作业题讲解

②、补充练习

①、作业题讲解

②、补充练习

$$\int \sin ax \sin bx \, dx$$

利用积化和差，作恒等变形：

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(ax - bx) - \cos(ax + bx)]$$

所以①：

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{sin(a-b)x}{a-b} - \frac{sin(a+b)x}{a+b}\right] + C \quad (a \neq b)$$

$a = b$②：

$$\int \sin^2 ax \, dx = \int \frac{1 - \cos 2ax}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + C$$

$$\int \sin^5 x\, dx$$

$$\int \sin^5 x\, dx = -\int \sin^4 x\, d(cosx)$$

$$\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2 = 1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x$$

令$cosx = u$：

$$\int \sin^5 x\, dx = \int (2u^2 - u^4 - 1\,)du = \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x - cosx + C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}}$$

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$= \int \frac{d\,tanx}{2+\tan^2 x}$$

令$\tan x = u$：

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{d\,u}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{tanx}{\sqrt{2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x + \sin x} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\tan\frac{x + \pi/4}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \int \frac{d\sin x}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}$$

令$\sin x = u$：

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin x\right) + C$$

推导出$\int \ln^n x \, dx$的递推公式

$$I_n = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x \, dx = x\ln^n x - nI_{n-1}$$

$$I_n = x\ln^n x - nI_{n-1}$$

$$\boxed{\int \frac{2x^2+1}{(x+3)(x-1)(x-4)}dx}$$

$$\int \frac{2x^2+1}{(x+3)(x-1)(x-4)}dx$$

$$=\int \left(\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-4}\right)dx$$

$$=\frac{19}{28}\int \frac{dx}{x+3}-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{11}{7}\int \frac{dx}{x-4}$$

$$=\frac{19}{28}\ln|x+3|-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{11}{7}\ln|x-4|+C$$

$$\boxed{\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx}$$

$$\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx = \int \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}dx$$

$$= \int [\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}]dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{4}{(x+2)^2}dx$$

$$= \ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + C$$

$$\boxed{\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx}$$

$$\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx$$

$$= \int [-\frac{2}{x+2} + \frac{2}{x+4} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{4}{(x+4)^2}]dx$$

$$= -2\ln|x+2| + 2\ln|x+4| - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x+4} + C$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$$

令$1+\sqrt[3]{1+x}=t$，则$x=(t-1)^3-1, dx=3(t-1)^2$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}=\int \frac{3t^2-6t+2}{t}dt$$

$$=\frac{3}{2}t^2-6t+2\ln|t|+C$$

$$=\frac{3}{2}(1+\sqrt[3]{1+x})^2-6(1+\sqrt[3]{1+x})+2\ln\left|1+\sqrt[3]{1+x}\right|+C$$

练习6.4　T2(3)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$$

令$1+x=t^6$，则$x=t^6-1, dx=6t^5dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx=\int \frac{6t^3(t^6-1)}{1+t}dt=\int 6t^3(t-1)(t^4+t^2+1)\,dt$$

$$=6\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right)+C$$

$$=6\left(\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{9}-\frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{8}+\frac{(x+1)^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{(x+1)}{6}+\frac{(x+1)^{\frac{5}{6}}}{5}-\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{4}\right)+C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}}$$

方案1：有理函数拆分

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{x dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

令$\sqrt{x^2+1} = t$，则$x^2 = t^2 - 1$，　$x\,dx = t\,dt$

$$\int \frac{x dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{t\,dt}{(t^2-1)t} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C$$

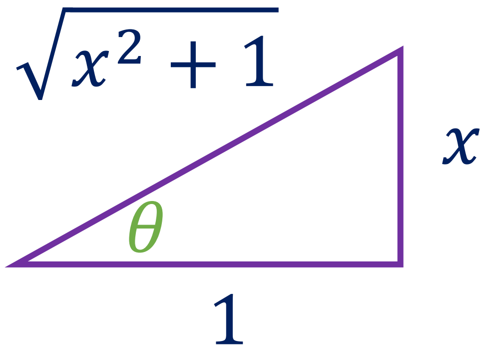
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+1} - 1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+1} + 1\right| + C$$

练习6.4　T2(5)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

方案2：三角换元

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$



令$x = tan\theta$，则$x^2+1 = \sec^2\theta$，　$dx = \sec^2\theta\ d\theta$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\sec^2\theta\ d\theta}{tan\theta\ sec\theta} = \int \frac{1}{sin\theta} d\theta$$

$$= \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\tan\frac{\arctan x}{2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$$

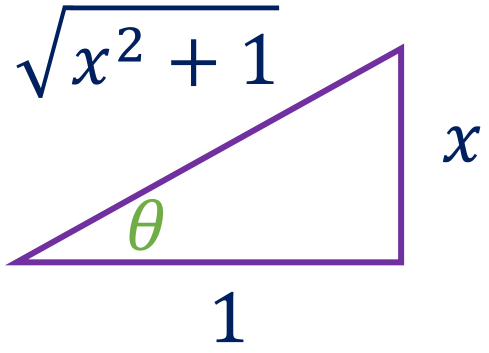
令$\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} = t$，则$x = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2, dx = 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right)dt$

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx = \int \frac{8t(t^2-1)dt}{(t^2+1)^3} = 8\int \left(\frac{2}{(t^2+1)^3} - \frac{3}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right) dt$$

练习6.4 T2(7)

$$\boxed{\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$



令$x=\tan\theta$， 则$\theta = \arctan x$, $dx=\sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C$$

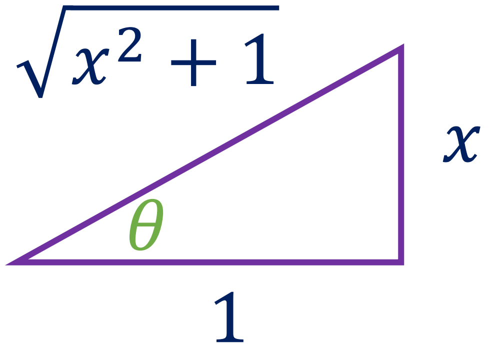
$$= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2} sin\theta cos\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

练习6.4 T2(7)

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$



令$x=\tan\theta$， 则$\theta=\arctan x$, $dx=\sec^2\theta\,d\theta$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx=\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^6\theta}\,d\theta=\int \cos^4\theta\,d\theta$$

$$=\int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta=\frac{1}{4}\int 1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\theta+\frac{1}{2}sin\theta cos\theta+\frac{1}{4}\int (\frac{1+\cos 4\theta}{2})d\theta$$

$$=\frac{3}{8}\arctan x+\frac{1}{2}sin\theta cos\theta+\frac{1}{8}sin\theta cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+C$$

$$=\frac{3}{8}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{x}{8(1+x^2)}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+C$$

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$$

令$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$，则$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}=-4\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}=\int(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{(t-1)^2})\,dt$$

$$=\ln|t+1|-\ln|t-1|+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{t-1}+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$$

① 当$m=n=1$, 且$b\,!=\ a$时

$$\int \frac{dx}{(x+a)^1(x+b)^1} = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$$

② 当$m=1$，$n>1$时

令$t=\frac{x+a}{x+b}, x=\frac{a-tb}{t-1}, dx=\frac{b-a}{(t-1)^2}dt$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)^n}=-\frac{1}{(a-b)^n}\int \frac{(t-1)^{n-1}dt}{t}$$

$$=-\frac{1}{(a-b)^n}\int\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^{n-k-1}\,t^{k-1}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{(a-b)^n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^{n-k-1}}{k}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^k+(-1)^{n-1}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|\right)+C$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$$

③ 当$m>1$，$n>1$时

$$I(m,n)=\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}=\frac{1}{1-m}\int \frac{d\left(\frac{1}{(x+a)^{m-1}}\right)}{(x+b)^n}$$

$$=\frac{1}{(1-m)(x+a)^{m-1}(x+b)^n}+\frac{n}{1-m}\int \frac{dx}{(x+a)^{m-1}(x+b)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{(1-m)(x+a)^{m-1}(x+b)^n}+\frac{n}{1-m}I(m-1,n+1)$$

可以一直递推下去，直到得到$I(1,m+n-1)$

则可以利用②

$$\boxed{\int_0^{10} \frac{x}{x^3+16}dx \le \frac{5}{6}}$$

$$\frac{x}{x^3+16} = \frac{1}{x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}$$

$$\int_0^{10} \frac{x}{x^3+16}dx \le 10 * \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2e^2$$

$$e^{-\frac{1}{4}} \le e^{x^2-x} \le e^2$$

练习7.1　T6(3)

$$\boxed{\int_0^{2\pi} |a\,cosx + b\,sinx|dx \le 2\pi\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$|a\,cosx + b\,sinx| \le \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{n}) = \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}$$

练习7.1 T7(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{n+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=ln2$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad ,p>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad ,p>0$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p)$$

$$=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}$$

设$a,b>0, f\in C[-a,b]$. 又设$f>0$且

$$\int_{-a}^{b} xf(x)dx=0 \quad 求证:$$

$$\int_{-a}^{b} x^2 f(x)dx \le ab\int_{-a}^{b} f(x)dx$$

$$(x+a)(x-b)\le 0, \qquad x\in[-a,b]$$

$$\int_{-a}^{b}(x+a)(x-b)f(x)dx=\int_{-a}^{b}x^2f(x)dx-ab\int_{-a}^{b}f(x)dx\le 0$$

①、作业题讲解

②、补充练习

三、原函数与不定积分概念

1. 已知 $F(x)$是$\sin(x^2)$的一个原函数，$\varphi(x)=F(x^2)$，求$d\varphi(x)$。

由原函数的定义 $F'(x)=\sin(x^2)$，

所以 $\varphi'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(F(x^2)\right)=F'(x^2)\cdot 2x=2x\sin(x^4)$，

$$d\varphi(x)=2x\sin x^4 dx\text{。}$$

三、原函数与不定积分概念

2. 设 $x>0$ 时 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且有 $F(x)f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$，

又知 $F(x)$ 在 $x\geq 0$ 时连续，且 $F(0)=0$，$F(x)\geq 0$，求 $f(x)$。

由题意知 $F'(x)=f(x)$，$2F(x)F'(x)=\dfrac{2}{(1+x)^2}$，

也即 $\dfrac{d}{dx}[F^2(x)]=\dfrac{2}{(1+x)^2}$，回忆 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-2}{1+x}\right)=\dfrac{2}{(1+x)^2}$，

因而存在常数 C 使得 $F^2(x)=-\dfrac{2}{1+x}+C$，

已知 $F(0)=0$，代入上式得 $C=2$，$F^2(x)=2-\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{2x}{1+x}$，

所以 $F(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}$（已知 $F(x)\geq 0$），

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2F(x)}=\frac{1}{\sqrt{2x(1+x)^3}},\quad x>0。$$

三、原函数与不定积分概念

3．求函数 $f(x)$，已知：

（1） $f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$， $x>0$；　　（2） $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$ 。

（1）取 $\varphi(x)=f(x^2)$，则 $\varphi'(x)=2xf'(x^2)=2$， $x>0$，

注意 $(2x)'=2$，所以存在常数 C 使得 $\varphi(x)=2x+C$，也即 $f(x^2)=2x+C$ 。
由题设，我们只有 $x>0$ 时函数 $f'(x)$ 的信息，所以只能确定 $x>0$ 时的 $f(x)$：

$$f(x)=2\sqrt{x}+C,\quad x>0。$$

（2）取 $g(x)=f(\sin^2 x)$，则 $g'(x)=(\sin^2 x)'f'(\sin^2 x)=2\sin x\cos^3 x$

注意到 $(\cos^4 x)'=4\cos^3 x(-\sin x)=-4\sin x\cos^3 x$，

$$(-\frac{\cos^4 x}{2})'=2\sin x\cos^3 x=g'(x),$$

所以存在常数 C 使得 $g(x)=-\dfrac{\cos^4 x}{2}+C$，也即

$$f(\sin^2 x)=-\frac{\cos^4 x}{2}+C=-\frac{(1-\sin^2 x)^2}{2}+C,$$

可见 $f(x)=-\dfrac{(1-x)^2}{2}+C$， $x\geq 0$。

四、计算不定积分

$$1.\quad \int\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}dx$$

解：通过分子或分母有理化，对被积函数变形：

$$原式=\int\frac{2-3x}{\sqrt{4-9x^2}}dx=\int\frac{2}{\sqrt{4-9x^2}}dx+\int\frac{(-3x)}{\sqrt{4-9x^2}}dx$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{(4/9)-x^2}}+\frac{1}{6}\int\frac{d(4-9x^2)}{\sqrt{4-9x^2}}$$

$$=\frac{2}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{4-9x^2}+C \qquad \square$$

注：也可以考虑有理化换元 $t=\sqrt{\dfrac{2-3x}{2+3x}}$，……（计算过程较繁琐）

四、计算不定积分

$$2.\quad \int \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$$

解：先考虑分母有理化变形，分子分母同乘以$\sqrt{x^2+1}-x$：

$$原式=\int x(\sqrt{x^2+1}-x)dx=\int x\sqrt{x^2+1}dx-\int x^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}d(x^2+1)-\int x^2dx=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}+C$$

注：如果用换元$x=\tan t$去根号，原式化为$\int\frac{\sin t dt}{(\sin t+1)\cos^2 t}$，还需要再用万能代换，

……（计算过程较繁）

四、计算不定积分

3. $\int \frac{1}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$

解：为去根号考虑变换 $x=\tan t$，$|t|<\frac{\pi}{2}$，则 $\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{\cos t}$，$dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$，

$$原式=\int \frac{1}{1+5\tan^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos t}=\int \frac{\cos t}{\cos^2 t+5\sin^2 t}dt=\int \frac{d(\sin t)}{1+4\sin^2 t}$$

再引入变换 $u=2\sin t$，则

$$原式=\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\arctan u+C$$

由 $\tan t=x$ 得 $\sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，

$$原式=\frac{1}{2}\arctan(2\sin t)+C=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C$$

四、计算不定积分

$$4.\quad \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

解：注意 $d(\tan x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$，可以考虑分部积分

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \tan x d(\frac{1}{\cos x}) = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \tan x \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x},$$

所以 $\displaystyle \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C,$

最后一步利用了已知积分 $\displaystyle \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$。

四、计算不定积分

$$4.\ \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

法二：利用凑微分方法，化为有理函数积分：

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)^2} = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1-t)^2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4}(\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t}) + C = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{\sin x}{2(1-\sin^2 x)} + C \text{。}$$

四、计算不定积分

5. $\int \frac{\arctan(1/x)}{1+x^2}dx$

解：用“凑微分”做积分变量代换：

$$原式=\int \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}\cdot\frac{1}{x^2}dx=-\int \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+(\frac{1}{x})^2}\cdot d(\frac{1}{x})$$

$$=-\int \arctan\frac{1}{x}d(\arctan\frac{1}{x})=-\frac{1}{2}(\arctan\frac{1}{x})^2+C。$$

也可以考虑下式：

$$arctanx+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$$

四、计算不定积分

6. $\int \cos(\ln x)dx$

解：试试分部积分改变一下困难的被积函数

$$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) - \int xd[\cos(\ln x)] = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx$$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int xd[\sin(\ln x)]$$

$$= x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] - \int \cos(\ln x)dx,$$

$$\therefore \quad \int \cos(\ln x)dx = \frac{1}{2}x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C。$$

注：类似地可以求出 $\int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$。

四、计算不定积分

7. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

解：试用分部积分消除对数函数

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int xd[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C。$$

四、计算不定积分

8. 求不定积分 $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}$ 的递推公式（n 为自然数）。

解：推导递推公式时常常可以利用分部积分，当 $n=0,1,2,\cdots$ 时：

$$I_n=\int\frac{\sin xdx}{\sin^{n+1}x}=-\int\frac{d\cos x}{\sin^{n+1}x}=-\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}+\int\cos x\cdot d\frac{1}{\sin^{n+1}x}$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}-(n+1)\int\frac{\cos^2 x}{\sin^{n+2}x}dx=-\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}-(n+1)\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^{n+2}x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}-(n+1)(I_{n+2}-I_n)\text{，}$$

整理得到

$$I_{n+2}=-\frac{\cos x}{(n+1)\sin^{n+1}x}+\frac{n}{n+1}I_n\text{，}\quad n=1,2,3,\cdots\text{，}$$

此外 $I_0=\int dx=x+C$，

$$I_1=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin dx}{\sin^2 x}=-\int\frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C\text{。}$$

至此得到需要的递推公式。 □

四、计算不定积分

小结：

求积分通常先化简，之后看能否用“凑微分”的积分变量代换解决。一般是将被积函数由乘除化为加减，无理式化为有理式；分母由复杂化为简单，幂函数的次数由高变低，反三角函数化为三角函数。

分部积分也常用来简化被积函数，比如处理对数函数、反三角函数等；也常用于导出递推公式。

四、计算不定积分

9. 求 $A=\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ 和 $B=\int \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$。

解：注意到 $A+B=\int dx = x+C_1$，

$$A-B=\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}=\ln|\sin x+\cos x|+C_2,$$

所以 $A=\frac{x+\ln|\sin x+\cos x|}{2}+C_1$，$B=\frac{x-\ln|\sin x+\cos x|}{2}+C_2$。

推广：令 $A=\int \frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx$，$B=\int \frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$，$a^2+b^2\neq 0$。

注意到 $aA+bB=\int dx=x+C_1$，

$$\int \frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}=\int \frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx=-aB+bA,$$

而 $\int \frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2$，

也即 $\begin{cases} aA+bB=\int dx = x+C_1 \\ bA-aB=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2 \end{cases}$

四、计算不定积分

9. 求 $A=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ 和 $B=\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ 。

解得 $A=\dfrac{ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|}{a^2+b^2}+C_1$，

$$B=\frac{bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|}{a^2+b^2}+C_2\text{。}$$

一、计算定积分

1．求 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx.$

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx.=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx=4\sqrt{2}-4。$$

一、计算定积分

2．设 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\le 0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$，求 $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

注意不存在整个 $[-1,2]$ 区间内 $f(x)$ 的原函数，无法直接用 Newton-Leibniz 公式。可利用积分区间可加性：

解法一：$\int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$

在每个小区间 $[-1,0],[0,2]$ 内分别可以用 N-L 公式：

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{3}{2}，\quad \int_{0}^{2} f(x)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{0}^{2}=4，$$

故 $$\int_{-1}^{2} f(x)dx=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}。$$

解法二：注意在 $[-1,1]$ 上 $f(x)$ 是奇函数，所以 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$，

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{1}^{2} f(x)dx=\int_{1}^{2}(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_{1}^{2}=\frac{5}{2}。$$

一、计算定积分

3. 求 $\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

积分中令 $u=-x$，$\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int_{3}^{4}\frac{du}{\sqrt{u^2-4}}$，

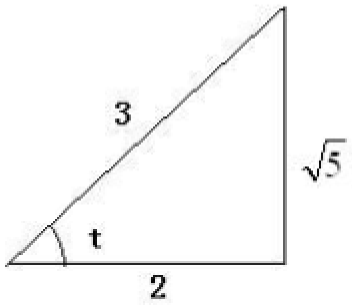
再令 $u=\frac{2}{\cos t}$，则 $\sqrt{u^2-4}=2\tan t$，$du=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt$，

当 $u=3$ 时 $t=\arccos\frac{2}{3}$，当 $u=4$ 时 $t=\frac{\pi}{3}$，

$$\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int_{3}^{4}\frac{du}{\sqrt{u^2-4}}=\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin t}{2\tan t\cos^2 t}dt=\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)d(\sin t)$$

令 $y=\sin t$，当 $t=\arccos\frac{2}{3}$ 时 $y=\frac{\sqrt{5}}{3}$（见右图），

当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因此



$$原式=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)dy=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\Bigg|_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\ln(3+\sqrt{5})+\ln 2$$

二、变上限积分定义的函数

1. 设 $F(x)=\int_0^{x^4}(t-1)e^{t^2}dt$，求 $F(x)$ 的单调上升区间。

解：$F'(x)=4x^3(x^4-1)e^{x^8}$，

可见仅在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 中 $F'(x)>0$，从而 $F(x)$ 单调上升。

2. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t}dt$ 的极大值点。

解：计算 $f'(x)=2x(x^2-1)e^{-x^2}$（函数处处可导），

令 $f'(x)=0$，解得只有 3 个临界点 $x=0,\pm1$；

用 2 阶导数检验：$f''(x)=(-4x^4+10x^2-2)e^{-x^2}$，

$f''(\pm1)=4e^{-1}>0$，可见 $x=\pm1$ 都是 $f(x)$ 的极小值点；

$f''(0)=-2<0$，只有 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点。

3. 设 $f(x),g(x)\in C[0,+\infty)$， $f(x)>0$， $g(x)$ 单调增加，

求函数 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 的增减区间。

解： 由于

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x f(t)g(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}$$

$$=\frac{f(x)[g(x)\int_0^x f(t)dt-\int_0^x f(t)g(t)dt]}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}=\frac{f(x)\int_0^x f(t)[g(x)-g(t)]dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2},$$

而 $g(x)$ 单调增加，对于 $t\in[0,x]$， $g(x)\geq g(t)$，所以 $\varphi'(x)\geq 0$，
故 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加。

4. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0$，求常数 a,b,c 的值。

解：首先由分子趋于 0 但整个极限 $=c\neq 0$ 判断，极限应该是 $\dfrac{0}{0}$ 型，所以 $b=0$；

如果可以应用 L'Hospital 法则，注意 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，则可以得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^3}{\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2},$$

为保证可应用 L'Hospital 法则，上述极限应该存在且有限（依题意 c 有限）；

注意分母趋于 0，故分子也应趋于 0，所以 $a=1$，因此 $c=\dfrac{1}{2}$。

5. 设 $F(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^8\right)dt$，求 $F^{(8)}(0)=?$ $F^{(9)}(0)=?$ $F^{(10)}(0)=?$

$$F'(x)=\ln(1+x^8)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\cdots$$

$$\ln(1+x^8)=x^8-\frac{x^{16}}{2}+\frac{x^{24}}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{8k}}{k}+\cdots$$

$$F(x)=\int\ln(1+x^8)\,dx$$

$$=\int x^8-\frac{x^{16}}{2}+\frac{x^{24}}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{8k}}{k}+\cdots dx$$

$$=\frac{1}{9}x^9+\cdots$$

5. 设 $F(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^8\right)dt$，求 $F^{(8)}(0)=?$ $F^{(9)}(0)=?$ $F^{(10)}(0)=?$

$$F(x)=\int \ln(1+x^8)\,dx$$

$$=\int x^8-\frac{x^{16}}{2}+\frac{x^{24}}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{8k}}{k}+\cdots dx$$

$$=\frac{1}{9}x^9+\cdots$$

所以，由$F(x)$的麦克劳林公式可知

$$\frac{F^9(0)}{9!}=\frac{1}{9} \qquad F^9(0)=8!$$

$$F^9(0)=0 \qquad F^{10}(0)=0$$

$$\textbf{6.}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x (\ln t)^2\,dt}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^3}=?$$

解：应用三次 L'Hospital 法则（中间经过化简 $x\to 1,\cos x\to\cos 1$），

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x (\ln t)^2\,dt}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{6x\cos(x^2)\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^2}=\frac{1}{6\cos 1}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^2}$$

$$=\frac{1}{6\cos 1}\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x/x}{4x\cos(x^2)\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)}=\frac{1}{12\cos^2 1}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)}$$

$$=\frac{1}{12\cos^2 1}\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{2x\cos(x^2)}=\frac{1}{24\cos^3 1}\text{。}$$

7. 设曲线 $y=f(x)$ 由 $x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{t-u}\sin\frac{u}{3}du$ 及 $y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{t-u}\cos 2u du$ 确定，求该曲线在 $t=\pi/2$ 的点处的法线方程（法线与切线互相垂直）。

解：计算 $x'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\sin\frac{u}{3}du\right)=e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\sin\frac{u}{3}du+\sin\frac{t}{3}.$

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\cos 2u du\right)=e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\cos 2u du+\cos 2t.$$

由此 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{y'(\pi/2)}{x'(\pi/2)}=\frac{-1}{1/2}=-2$，

即曲线在 $t=\pi/2$ 点处的切线斜率为 -2，而法线与切线垂直，其斜率应为 $\frac{1}{2}$，

所以法线方程为 $y-y(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[x-x(\frac{\pi}{2})]$，

注意 $x(\frac{\pi}{2})=y(\frac{\pi}{2})=0$，故法线方程为 $y=\frac{x}{2}$。

三、积分证明题

1．设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，求证

$$\int_0^a f(u)(a-u)du=\int_0^a\left[\int_0^u f(t)dt\right]du。$$

证：记 $F(u)=\int_0^u f(t)dt$，右式可以利用分部积分方法处理，

$$右式=\int_0^a F(u)du=uF(u)\Big|_0^a-\int_0^a uF'(u)du$$

$$=a\int_0^a f(t)dt-\int_0^a uf(u)du=\int_0^a f(u)(a-u)du。$$

法二：令 $G(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du-\int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du$，则

$$G(x)=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du-\int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du,$$

$$G'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)-\int_0^x f(t)dt=0,$$

所以 $G(a)\equiv G(0)=0$，此即为所需要证的。

2．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\ge 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)。$$

【这是课本上问题 7.1 第 1 题的另一个版本】

证：将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 点展开成 1 阶 Taylor 公式，带 Lagrange 型余项：

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2，（\xi\in[a,b]）$$

已知 $f''(\xi)\ge 0$，故

$$f(x)\ge f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})，\quad x\in[a,b]，$$

利用积分的保序性质，将上述不等式两边从 a 到 b 积分，

注意到 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx=\frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b=0$，就得到

$$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)。$$

三、积分证明题

3．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\le 0$， $x\in[0,1]$，证明：

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right)。$$

证：类似上题考虑，利用 $f''(x)\le 0$，得到

$$f(x)\le f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})，\quad x\in[0,1]，$$

再用 x^2 替换 x 得到（注意 x^2 仍在 $[0,1]$ 中）

$$f(x^2)\le f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3})；$$

上式两边从 0 到 1 积分，由于 $\int_0^1 (x^2-\frac{1}{3})dx=0$，得到

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right)。$$

推广：题设条件下有 $\int_0^1 f(x^a)dx \le f\left(\frac{1}{a+1}\right)$， $a>0$。

同学们辛苦了！

谢谢！