清華大學
Tsinghua University

线性代数预备知识

之提要

1. 高中数学 VS 大学数学

高中数学

计算、技巧、答案

语言相对非正式

具体，如数字与函数

大学数学

定义、定理、证明

语言精确、形式化

抽象，如空间与映射

线性代数

理解抽象结构：如向量空间、线性映射

熟悉语言：复杂的符号系统

锤炼逻辑性：定义-定理-证明

2. 集合的语言

常见数集的表达：

自然数集$\mathbb{N}$，**整数集**$\mathbb{Z}$，**有理数集**$\mathbb{Q}$，**实数集**$\mathbb{R}$，**复数集**$\mathbb{C}$

一些符号：

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$1 \in A$$

$$\{1\} \subseteq A$$

$$\emptyset \subseteq A, \qquad A \subseteq A$$

$$\emptyset \in P(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

$$\emptyset \subseteq P(A)$$

3. 逻辑符号

	符号	中文含义	推荐英文表述
$\forall$	$\forall$	**任意/对所有**	For all / For every
$\exists$	$\exists$	**存在**	There exists
$\Longrightarrow$	$\Rightarrow$	**推出**	Implies
$\Longleftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	**当且仅当**	If and only if

比较： $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \exists \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{s.t.}\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0};$

$\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{s.t.}\ \forall \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}, \mathbf{0}+\mathbf{c}=\mathbf{c}.$

注： $s.t.$ = such that

4. 求和与连乘符号

重点：求和号Σ

读法：Sigma

西格玛(音译)

两种常见写法：$\sum_{i=m}^{n} a_i$ $$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

相关概念：**下标（指标）、下限**
上限、通项

注意区分

哑指标可以被替换为任意其他符号，而不改变求和的意义

例：$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$

确切指标是在表达式上下文中真实存在、值固定的指标

例：令$b = \sum_{i=1}^{100} a_i$(*)，其中$a_i = \sum_{j=1}^{i} j$ (**)

在(*)中，i是哑指标；在(**)中，i是确切指标，j是哑指标。

连乘号Π

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$$

5．映射

回顾函数的定义，定义域、函数值、值域、自变量、因变量
映射的定义
定义域、陪域、值域（注意区分陪域和值域）
像、原像、像集、原像集
什么是单射、满射、双射？
变换的定义

6. 希腊字母

α, β, γ: 标量
λ, μ: 特征值
δ: 增量/变化量
ε: 小正数
θ: 角度
ξ: 向量/变量
π: 圆周率
Π: 连乘符号
φ, ϕ, ψ: 映射/角度
σ: 奇异值/映射
Σ: 求和符号/对角矩阵
Ω: 集合/空间

区分α和a; ω和w;
φ和ψ

UPPERCASE	LOWERCASE	NAME	UPPERCASE	LOWERCASE	NAME
A	α	Alpha	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Ksi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Upsilon
I	ι	Iota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega

7. 反证法与数学归纳法

反证法 (Proof by Contradiction)

思路： 假设结论不成立 → 推导出与公理或定理或条件的矛盾 → 故原结论必须成立。

注：若不熟悉，找两个例子演练

数学归纳法 (Mathematical Induction)

第一： 验证 $n = 1$ 成立；假设 $n = k$ 成立，证明 $n = k + 1$ 也成立。从而结论对任意自然数 n 成立。

第二： 验证 $n = 1$ 成立；假设 $n \leq k$ 成立，证明 $n = k + 1$ 也成立。从而结论对任意自然数 n 成立。

8. 充要条件、充分性与必要性

充分必要条件 - 剖析概念间的等价性

线性代数的魅力之一：将看似不同的概念通过**充要条件**联系起来。

例子：假设A是$n \times n$阶矩阵，则以下陈述等价：
•A 是可逆矩阵。
•$\det(A) \neq 0$.
•齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有平凡解。
•A 的行（列）向量线性无关。
•A 可表示为有限个初等矩阵的乘积。

矩阵(Matrix)简释：
一个长方形数表(数阵)
电影The Matrix

区分充分性和必要性

9. 复数

熟悉:
复数的基本运算（加、减、乘、除、共轭、模长）
复平面

10．多项式运算

熟悉：
多项式的加法、减法、乘法和带余除法
多项式的因式分解
韦达定理
知道：代数基本定理

谢谢！