



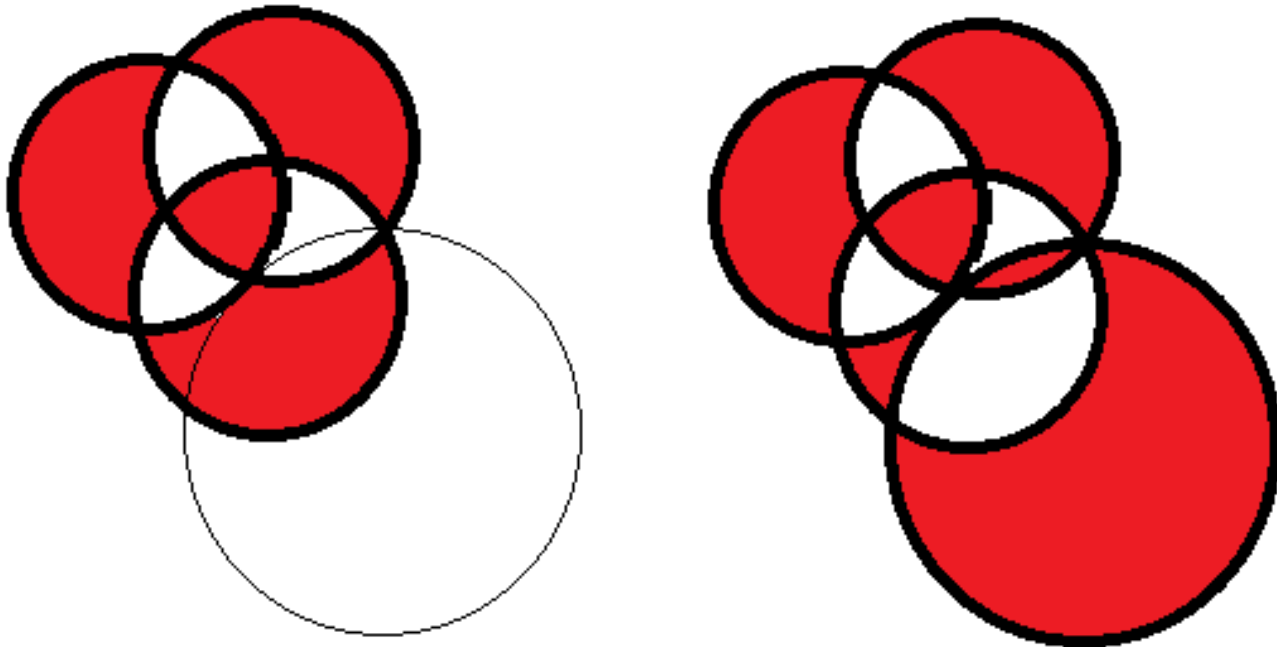
Discrete Mathematics

Lecture 13

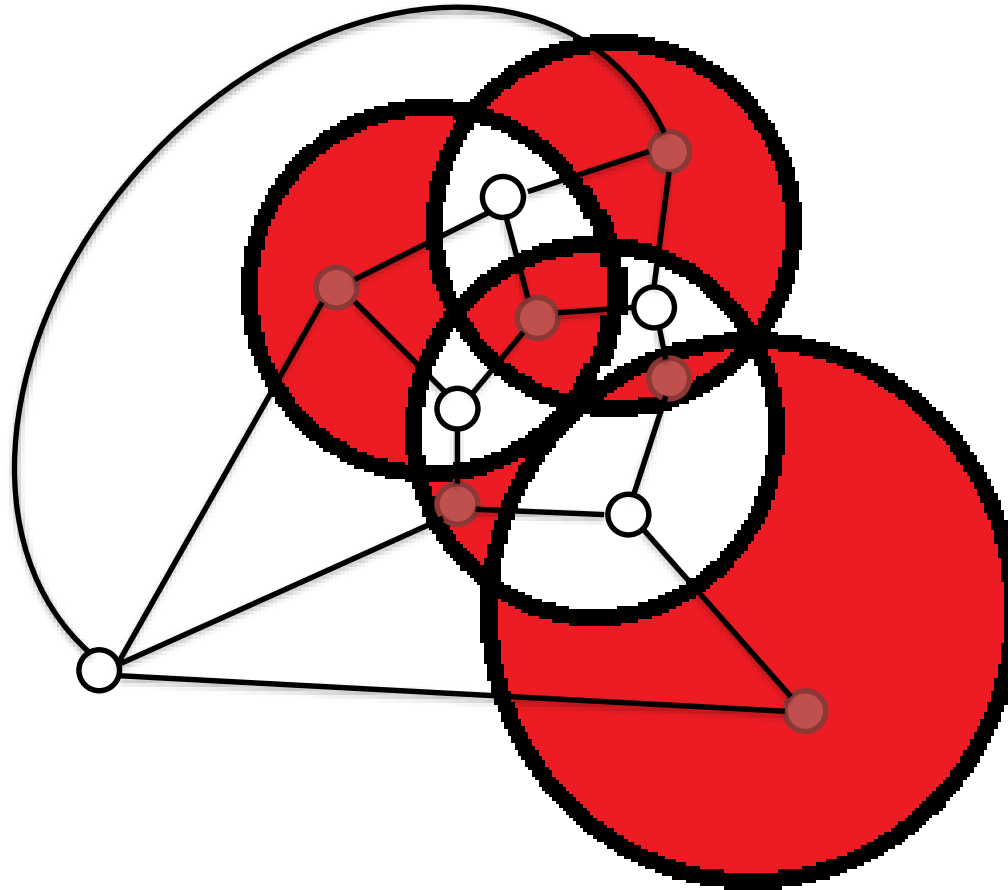
Coloring Maps & Graphs

13.1 Coloring Regions with Two colors

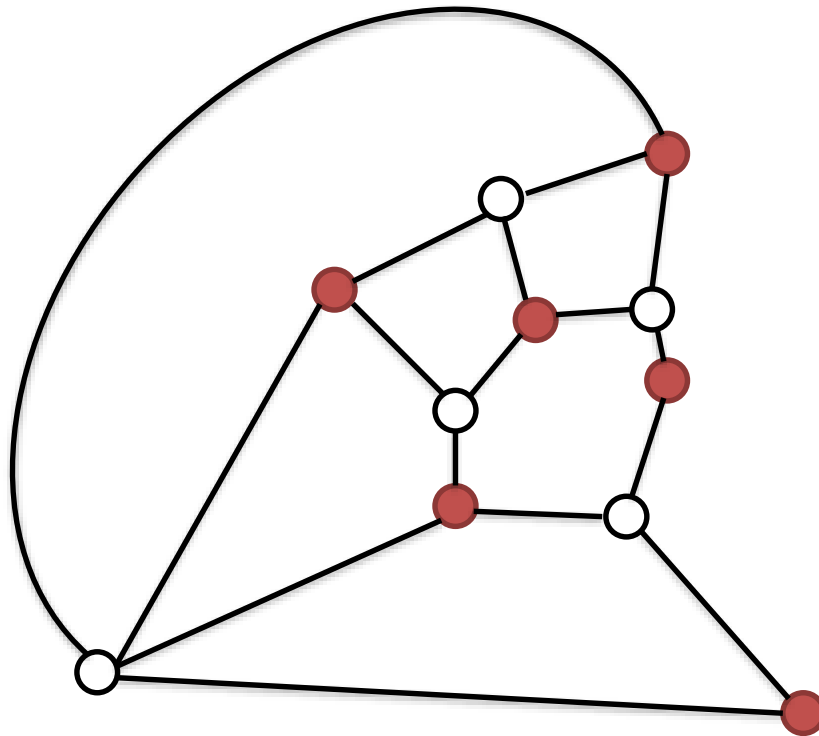
Theorem 13.1.1 The regions formed by n circles in the plane can be colored with red and blue in such a way that any two regions that share a common boundary arc will be colored differently.



13.1 Coloring Regions with Two colors



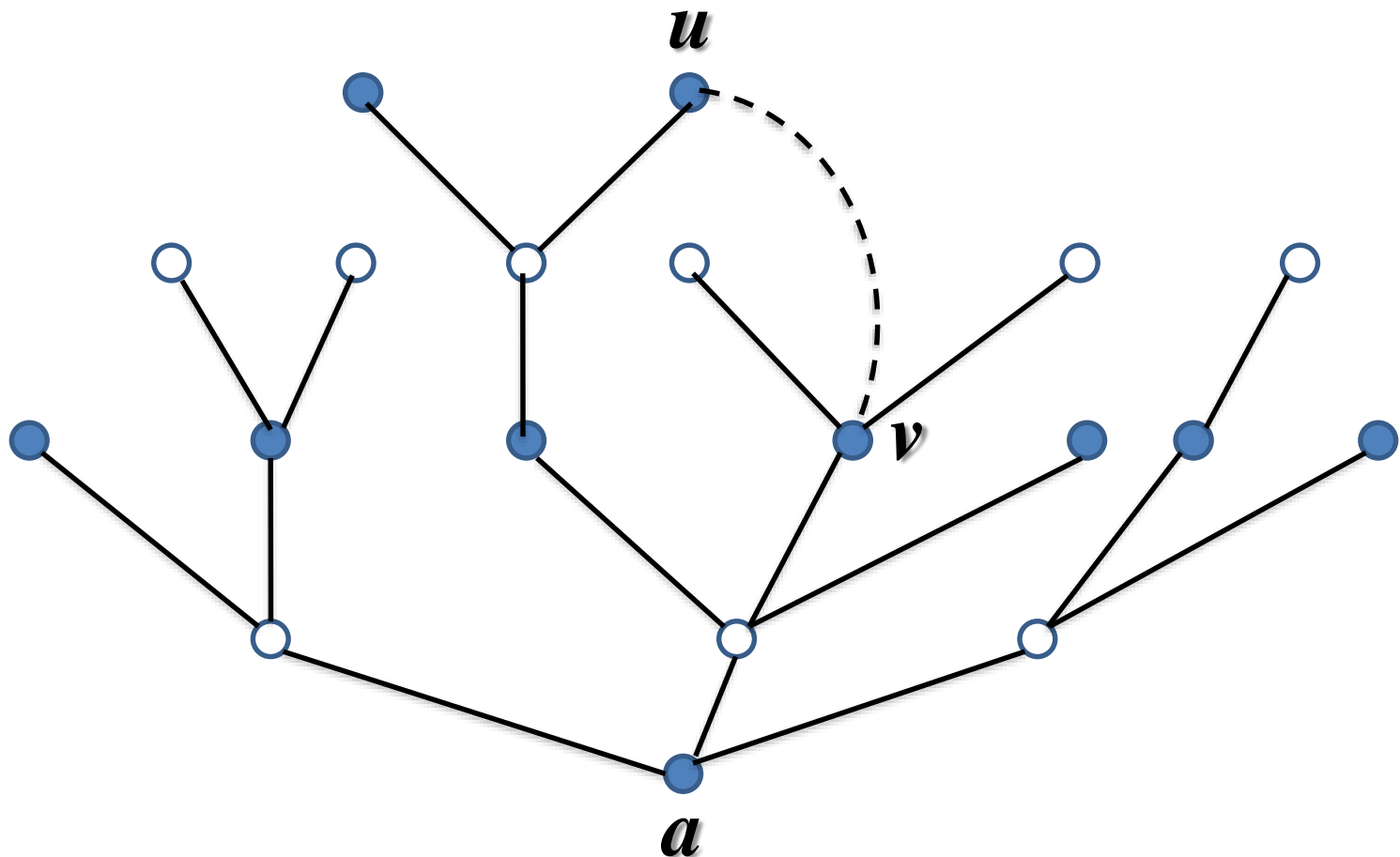
13.1 Coloring Regions with Two colors



13.2 Coloring graphs with Two colors

Theorem 13.2.1

G is bipartite \Leftrightarrow **G** has no odd cycles.



13.3 Coloring graphs with many colors

图的**正常着色**：图 G 的正常着色(或简称**着色**)是指对它的每一个顶点指定一种颜色，使得没有两个相邻的顶点有同一种颜色。如果图在着色时用了 n 种颜色，我们称 G 为 n -色的。

色数(*chromatic number*)：对图 G 着色时，需要的最少颜色数称为 G 的色数，记作 $\chi(G)$ 。

Example

If P_n is a path on n nodes and C_n a cycle on n nodes, then

$$\chi(P_n) = 2,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{if } n \text{ is even,} \\ 3, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

$$\chi(K_n) = n.$$

对点着色的Powell方法 (1967):

第一步：对每个顶点按度数递减次序进行排列。

第二步：用第一种颜色对第一个顶点着色，并按次序对与前面着色点不相邻的每一点着同样的颜色。

第三步：用第二种颜色对未着色的点重复第二步，用第三种颜色继续这种做法，直到全部点均着了色为止。

Exercise 13.3.4 (Szekeres-Wilf 1968)

If $\delta(H) := \min\{d(v) \mid v \in V(H)\}$, then
 $\chi(G) \leq \max\{\delta(H) \mid H \subseteq G\} + 1$.

Theorem 13.3.1 (Brooks' Theorem 1941)

If every node in a graph has degree at most d , then the graph can be colored with $d+1$ colors.

Proof idea. Use induction on the number of nodes.

Exercise 13.3.4 (Szekeres-Wilf 1968)

If $\delta(H) := \min\{d(v) \mid v \in V(H)\}$, then

$$\chi(G) \leq \max\{\delta(H) \mid H \subseteq G\} + 1.$$

Proof idea from Powell. Let $n = |V(G)|$.

Take v_n with $d(v_n) = \delta(G)$ & let $G_{n-1} = G - v_n$.

Take v_{n-1} with $d_{G_{n-1}}(v_{n-1}) = \delta(G_{n-1})$ and

let $G_{n-2} = G_{n-1} - v_{n-1} \dots$

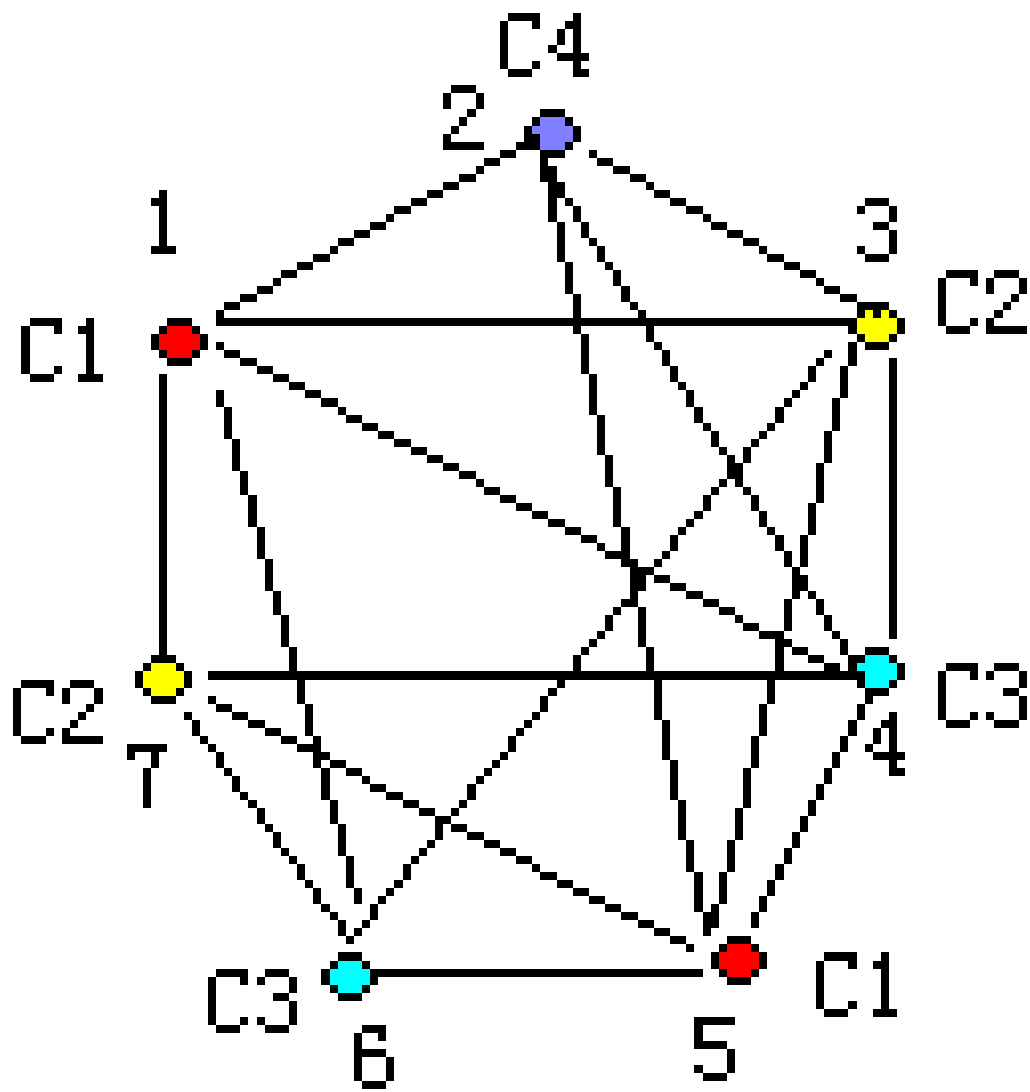
Take v_k with $d_{G_k}(v_k) = \delta(G_k)$ & let $G_{k-1} = G_k - v_k$.

... up to v_1 . Use Powell's method to color

v_1, v_2, \dots, v_n .

例 如何安排一次七门课程的考试，使得没有学生同一时间有两门考试？

解：用顶点表示课程，若两个顶点所表示的课程里有公共学生选修，则在这两个顶点之间有边。用不同颜色来表示考试的各个时间段。考试的安排就对应于图的一个着色。



如图所示，
因为这个图
的色数为4，
所以需要4
个时间段：
1和5、3和7、
4和6、2。

13.4 Map Coloring & the Four Color Theorem

与平面图有密切关系的一个图论的应用是图形的着色问题，这个问题最早起源于地图的着色，一个地图中相邻国家着以不同颜色，那么最少需用多少种颜色？

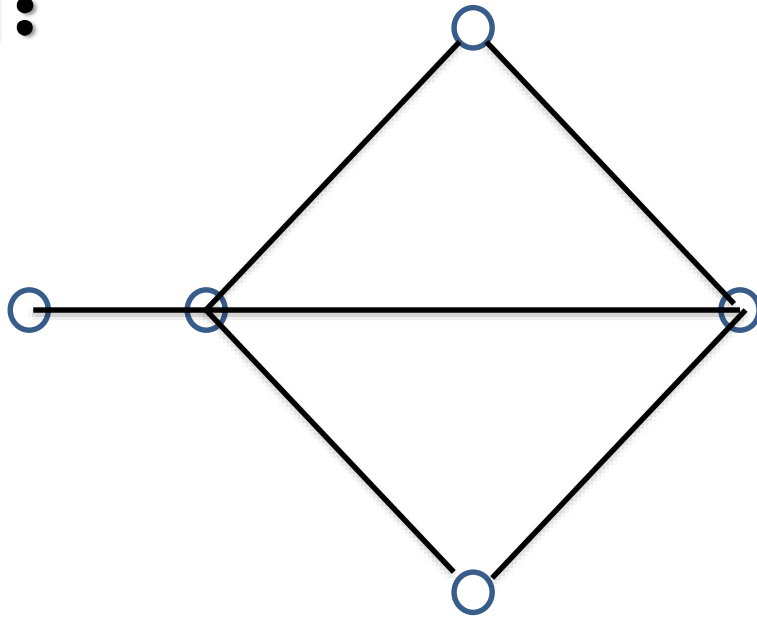


- 十九世纪中叶，英国人**Guthrie**提出了用四种颜色即可对地图着色的猜想，
- **1879年Kempe**给出这个猜想的第一个“证明”，
- 但到**1890年Heawood**发现**Kempe**证明是错误的，
- 但他指出**Kempe**的方法虽不能证明地图着色用四种颜色就够了，但可证明用五种颜色就够了，即五色定理成立。

- 此后四色猜想一直成为数学家感兴趣而未能解决的难题。
- 直到**1976**年美国数学家**Appel**和**Haken**宣布：用电子计算机（在**Koch**帮助下）证明了四色猜想是成立的。
- 所以从**1976**年以后就把四色猜想这个名词改成“**四色定理**”了。
- 为了叙述图形着色的有关定理，下面先介绍对偶图的概念。

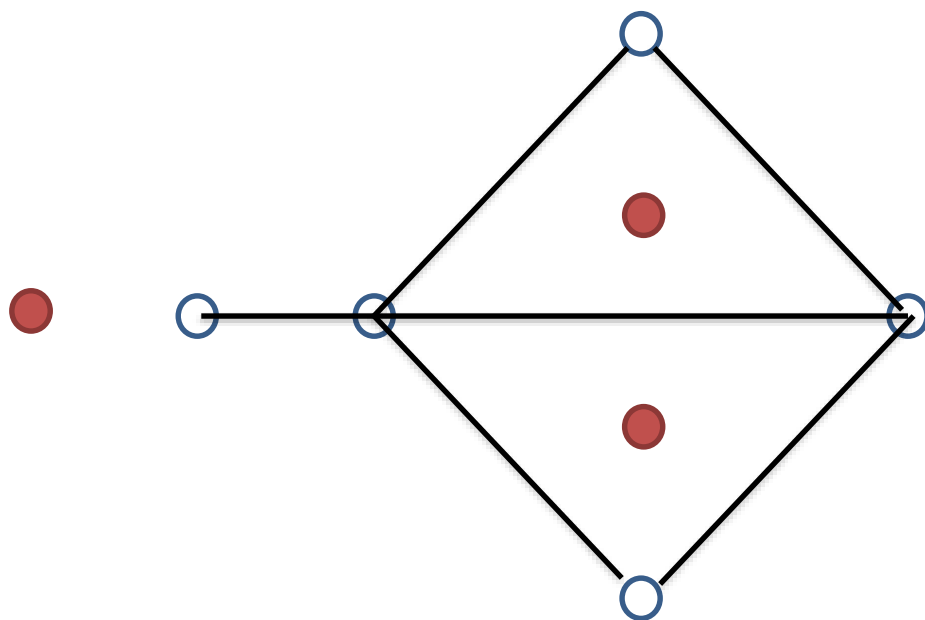
一、对偶图 (dual of planar map)

定义 对具有面 F_1, F_2, \dots, F_n 的平图 $G=(V, E, F)$ 实施下列步骤所得到的图 G^* 称为图 G 的对偶图:

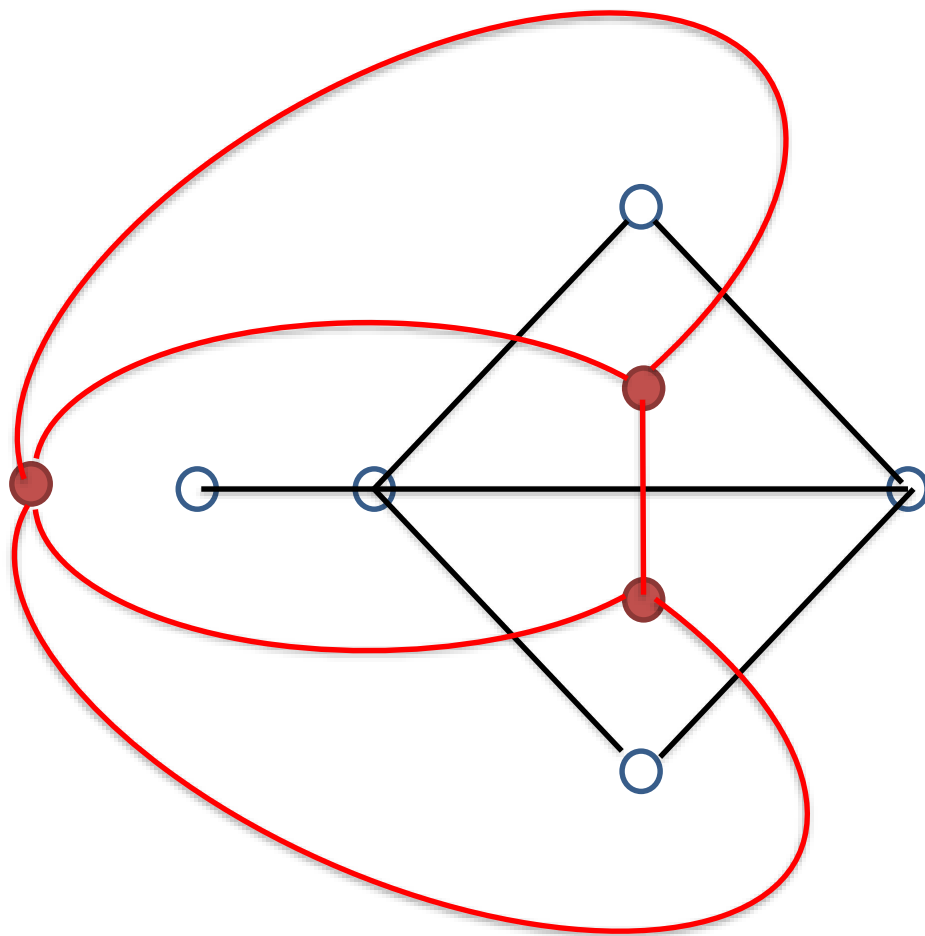


如果存在图 $G^*=(V^*,E^*)$ 满足下述条件:

(a) 在 G 的每一个面 F_i 的内部作一个 G^* 的顶点 v_i^* , 即图 G 的任一个面 F_i 内部有且仅有一个顶点 $v_i^* \in V^*$ 。

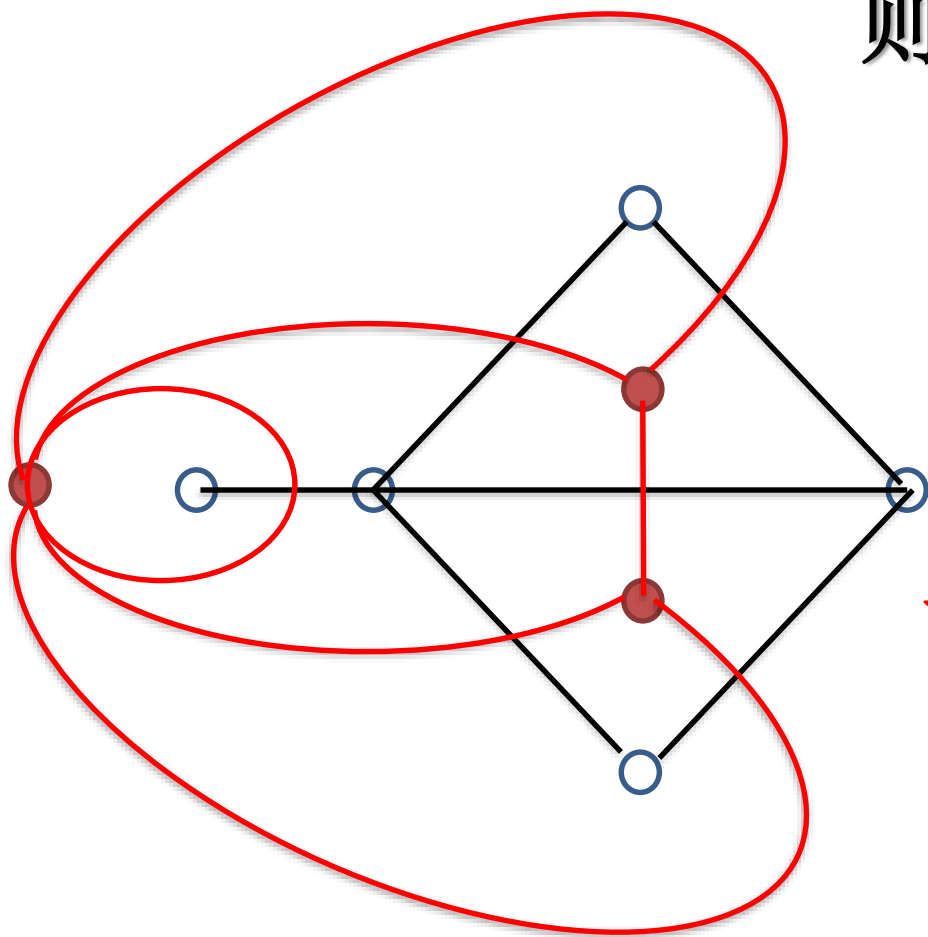


(b) 若 G 的面 F_i, F_j 有公共边 e_k , 则作 $e_k^* = \{v_i^*, v_j^*\}$, 且 e_k^* 与 e_k 相交。



(c) 当且仅当 e_k 只是一个面 F_i 的边界时 (桥), v_i^* 存在一个环 e_k^* 与 e_k 相交。

则称图 G^* 为 G 的对偶图。

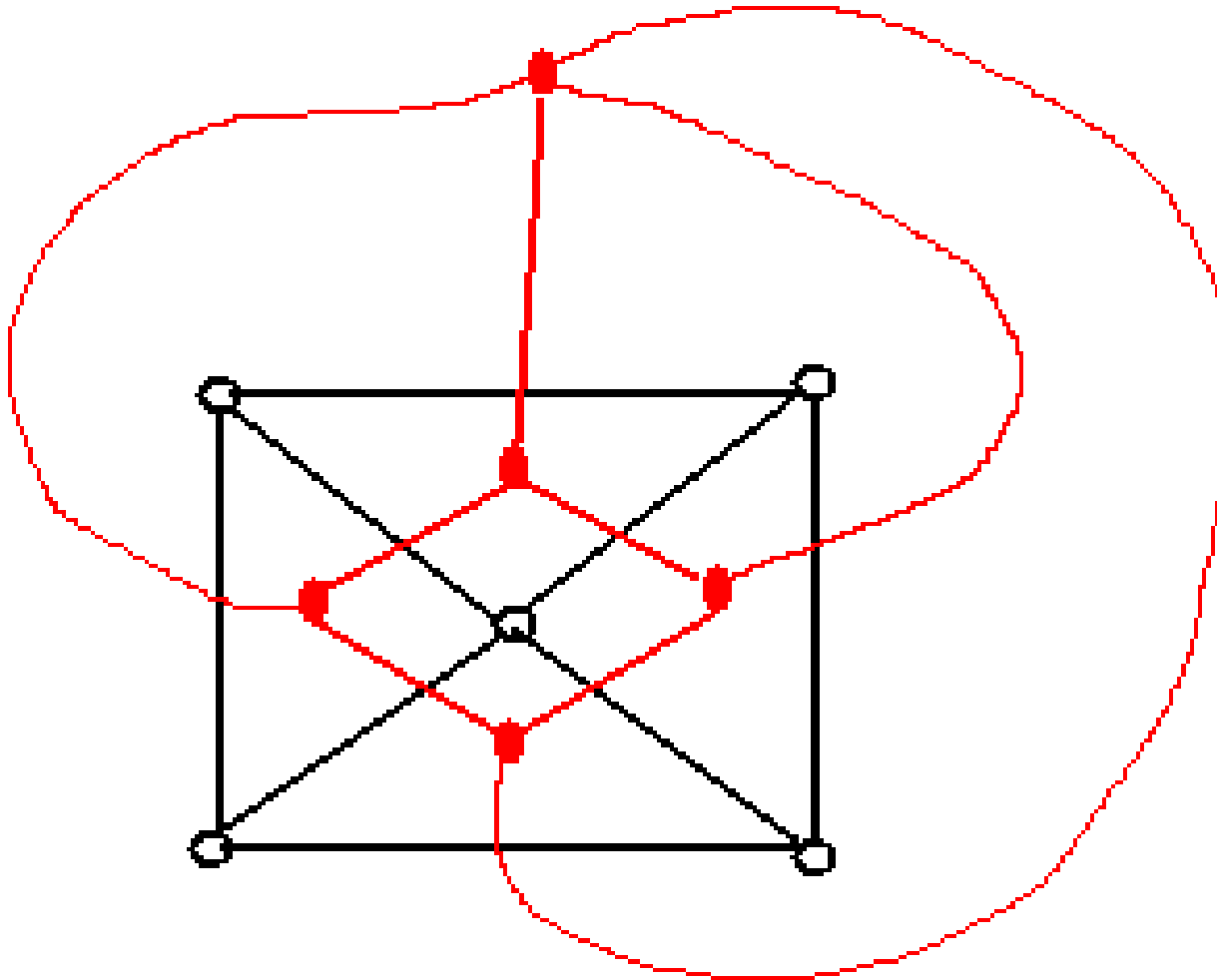


$v^* = f, e^* = e.$

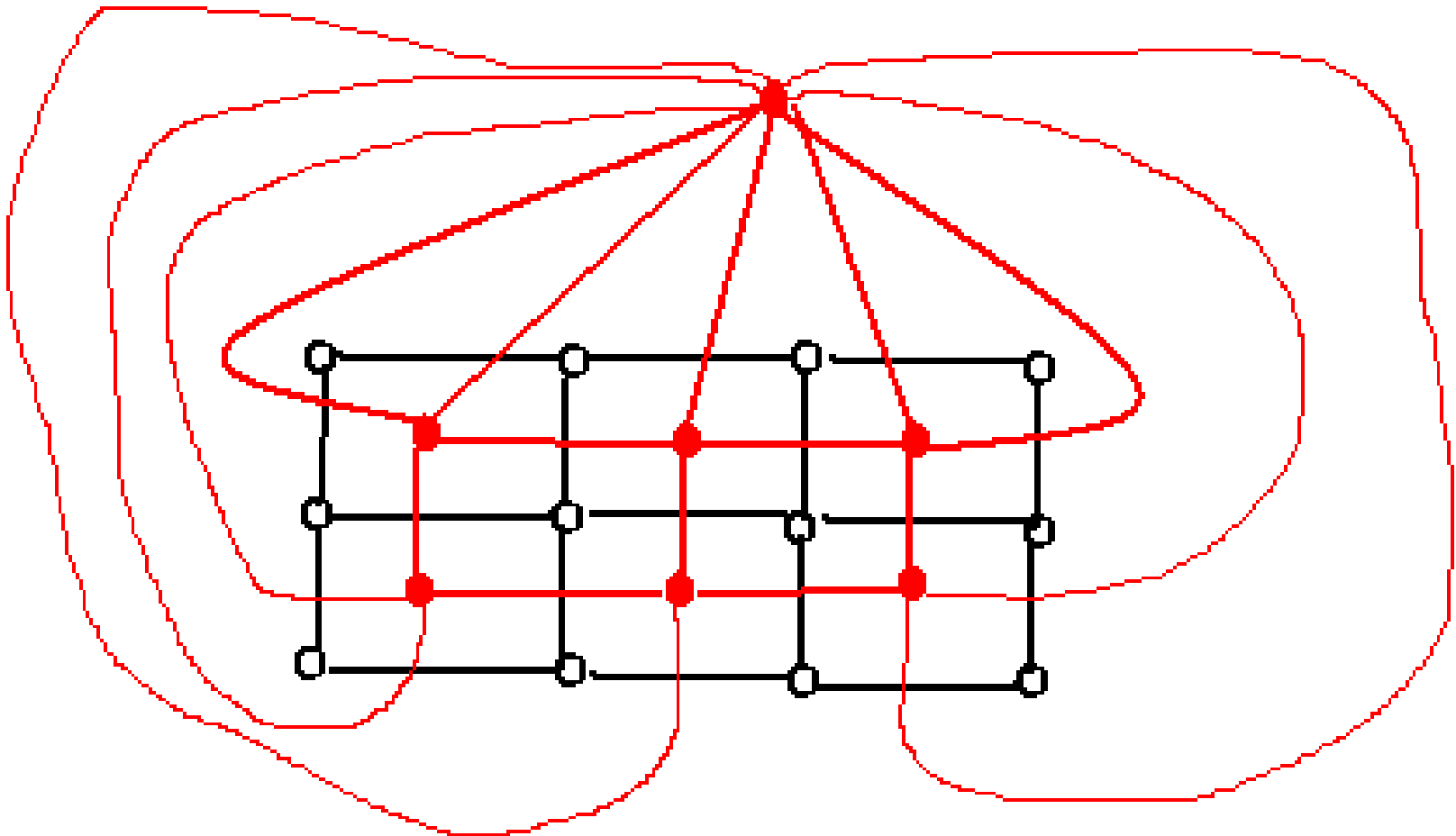
说明：平图的对偶图仍是平面图。

Example

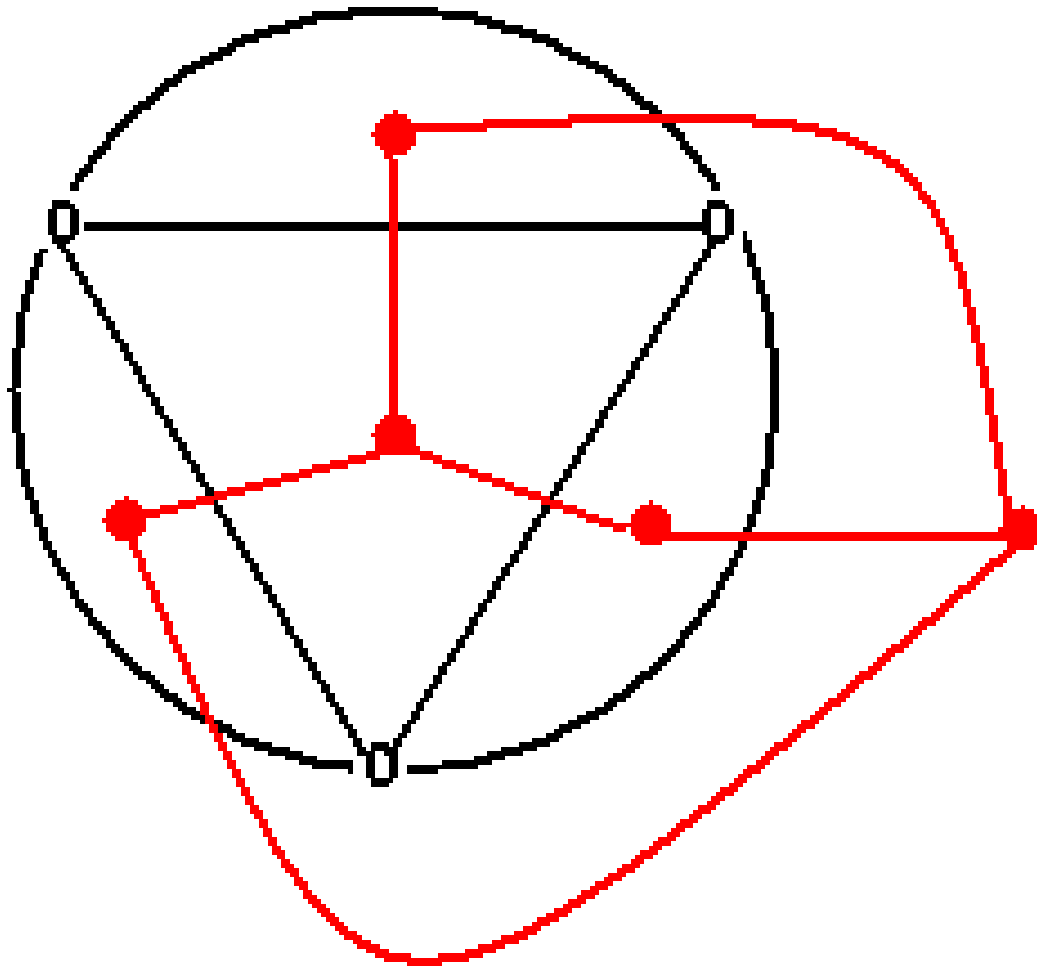
(a) $v^*=5$, $e^*=8$, $f^*=5$



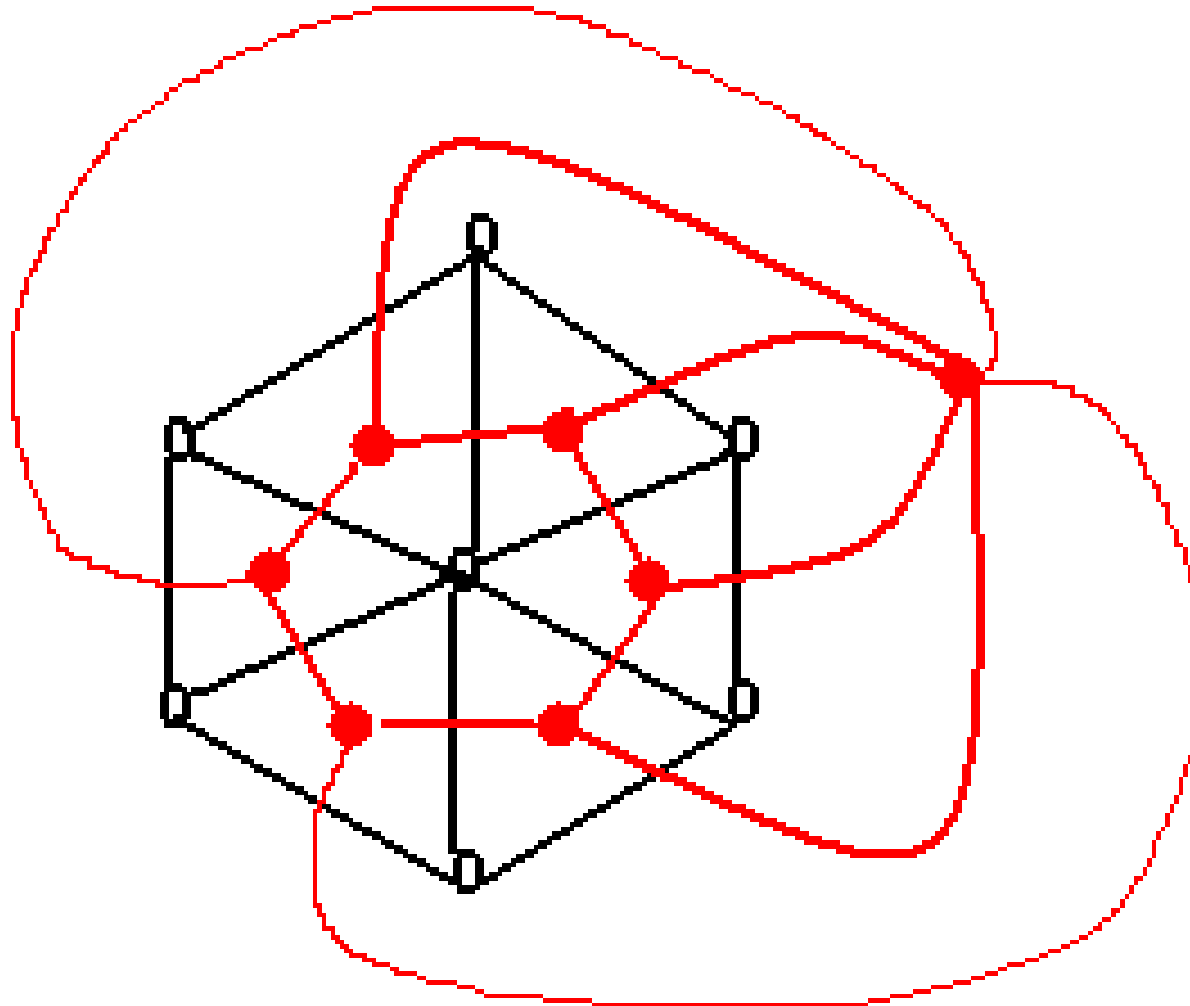
(b) $v^*=7, e^*=17, f^*=12$



(c) $v^*=5, e^*=6, f^*=3$

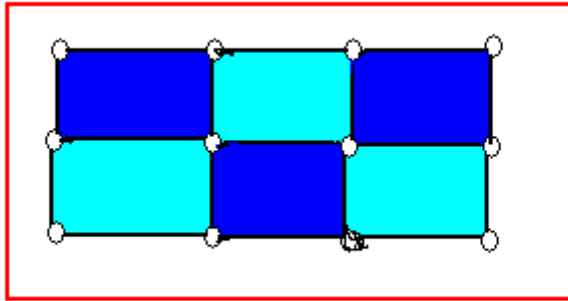


(d) $v^*=7, e^*=12, f^*=7$

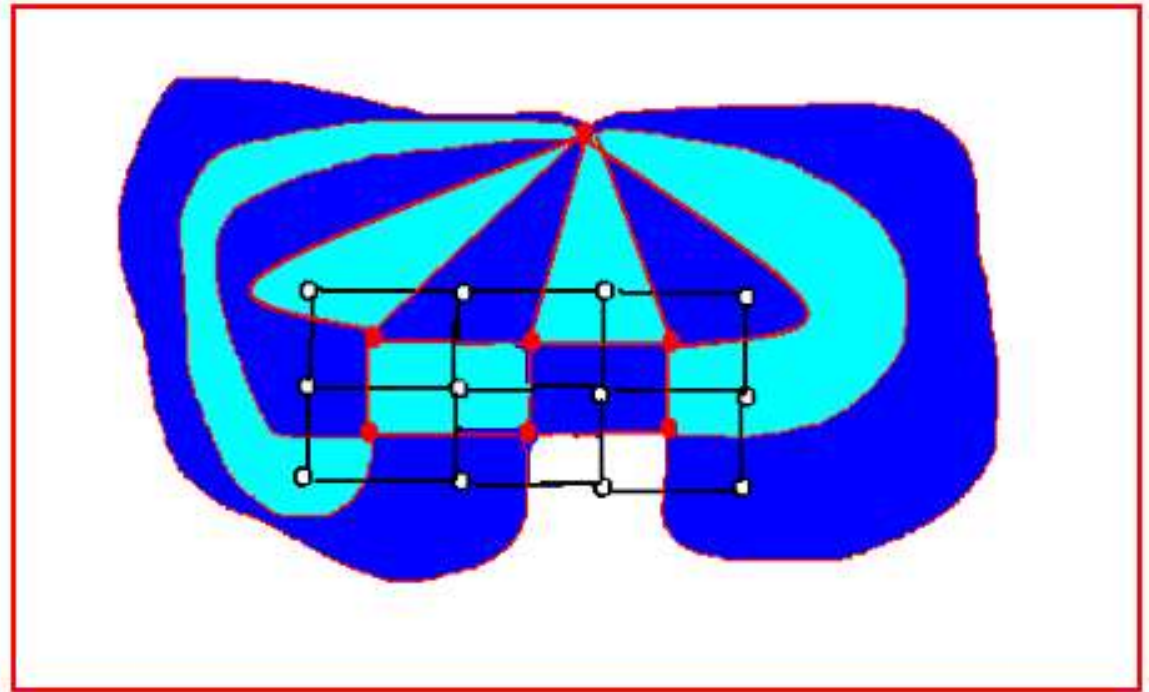


二、图的着色

- 对点的着色就是对图 G 的每个顶点指定一种颜色，使得相邻顶点的颜色不同，
- 对边着色就是，给每条边指定一种颜色使得相邻的边的颜色不同，
- 给面着色就是给每个面指定一种颜色使得有公共边的两个面有不同的颜色。
- 对边着色和对面着色均可以转化为对顶点着色问题。



图中有**7**个面，
用三种颜色对
其进行了着色。



对偶图有**12**个面，用三种颜色
对其进行了着色。

对偶图的面着色对应原图的顶点着色；
原图的面着色对应对偶图的顶点着色。

从对偶图的概念，我们可以看到，对于地图的着色问题，可以归纳为对于（**简单**）平面图顶点的着色问题，因此四色问题可以归结为要证明：**对于任何一个平面图，一定可以用四种颜色，对它的顶点进行着色，使得相邻的顶点都有不同的颜色。**

Theorem 13.4.1 (The Four color Th.)

平面图的色数不超过四。

Lemma 13.4.3 每个平面单图必有一个顶点 u ，使得 $d(u) \leq 5$ 。

证明： 设 $|V|=v$ ， $|E|=e$ ， 且 G 的最小度为 δ ， 则

$$v\delta \leq \sum d(v_i) = 2|E| = 2e \leq 2(3v-6),$$

即 $\delta \leq 6-12/v$ ， 所以 $\delta \leq 5$ 。

定理13.4.2 (五色定理)

任意平面图最多是5-色的。

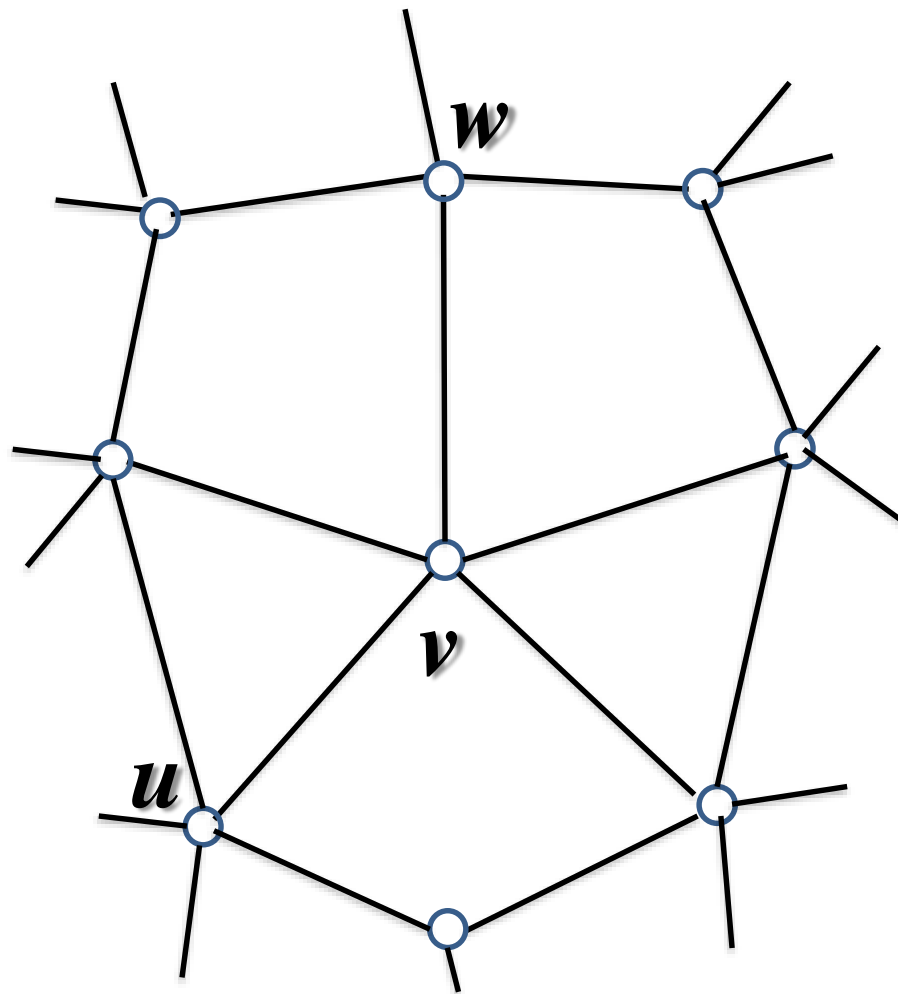
证明思路：对顶点个数采用归纳法

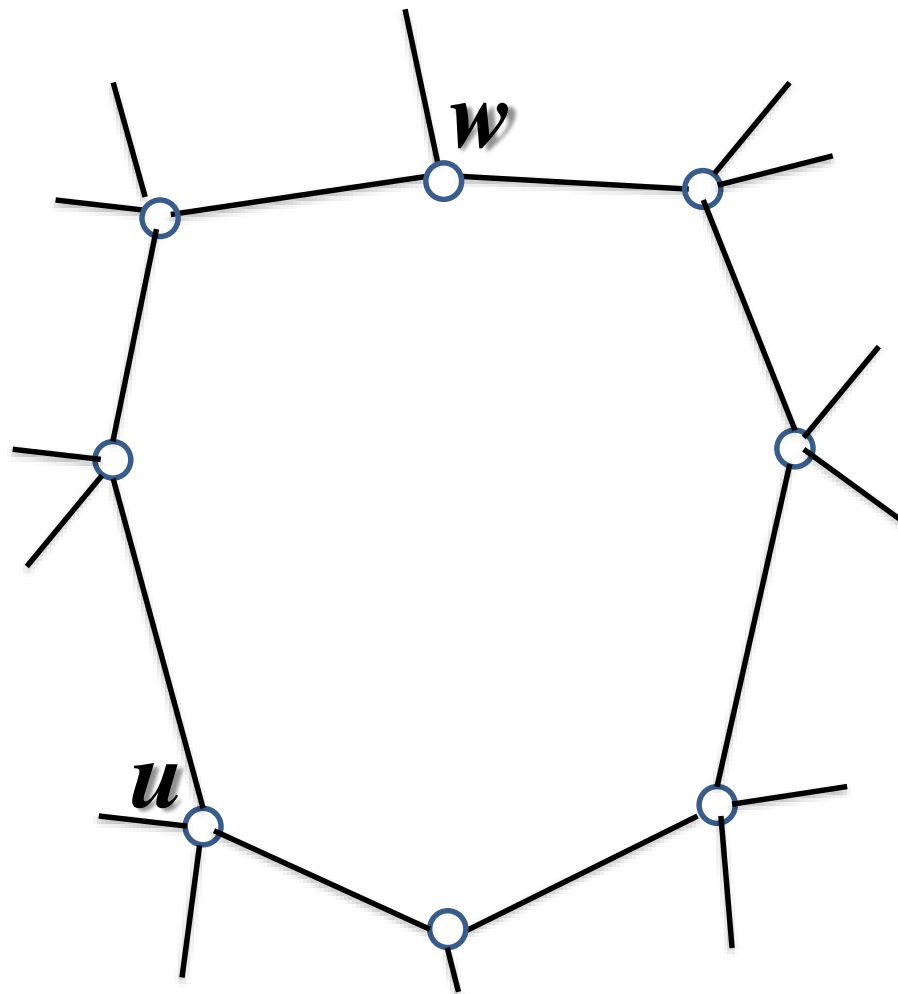
(1) 归纳基础：平面图 G 的顶点数 ≤ 5 时，结论成立。

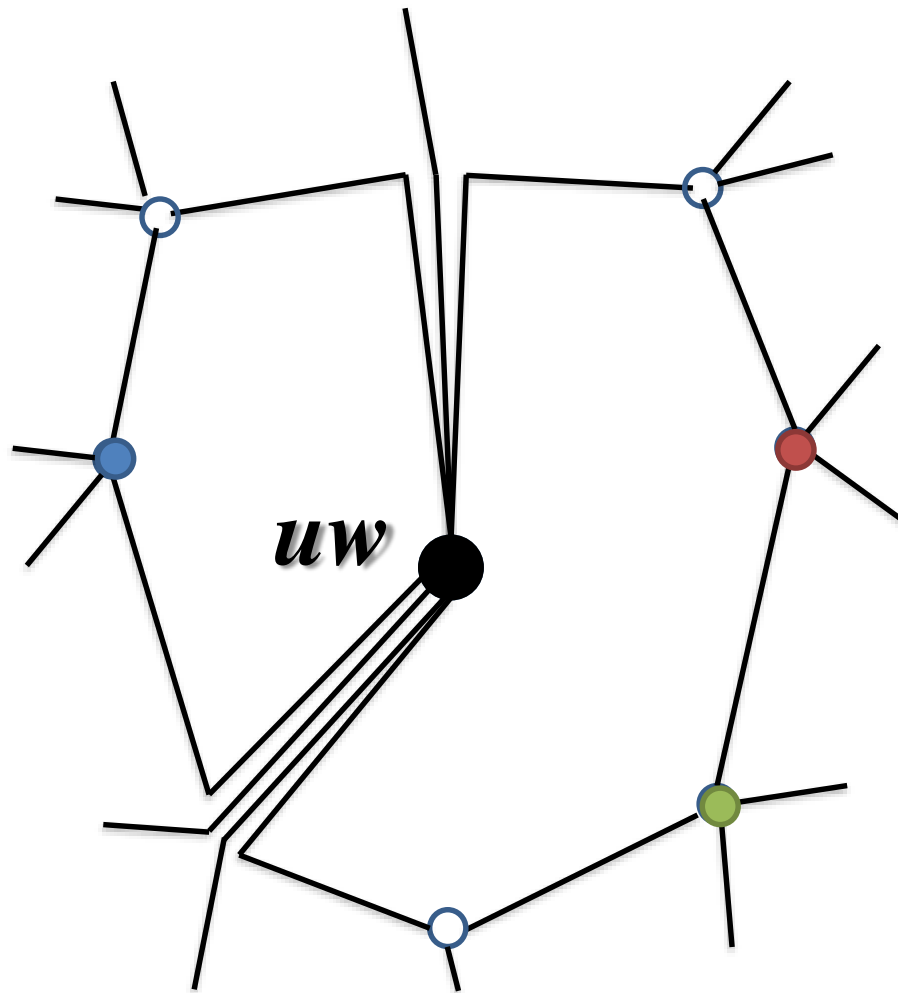
(2) 归纳假设：设 G 有至多 k 个顶点时结论成立，即 G 是**最多可5-着色的**。

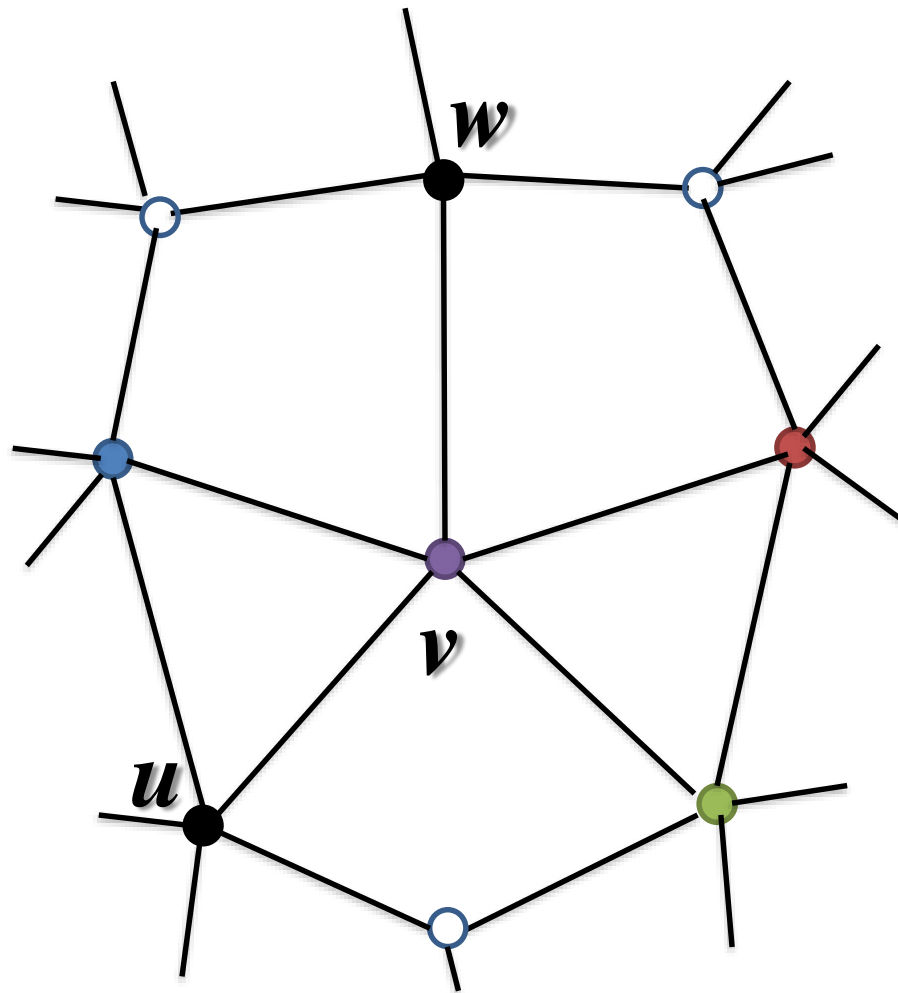
(3) 归纳推理：需要证明 G 有 $k+1$ 个顶点时结论仍成立。

- 先在 G 中删去最小度数的顶点 v ，所得的图 $G-v$ 有 k 个顶点且仍为平面图，根据归纳假设， $G-v$ 是5-色的。
- 然后考虑在 $G-v$ 中添加回顶点 v 的情况。
- 若 $d(v) < 5$ ，则可以对 v 正常着色。
- 若 $d(v) = 5$ ，则利用下面技巧证明：









Hadwiger's Conjecture (1943)

Every k -chromatic graph has a K_k -minor.

Remark

- This conjecture is true for $k \leq 6$.
- Some mathematicians now believe that it might even be **false**.