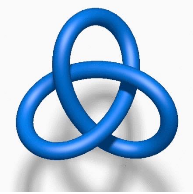
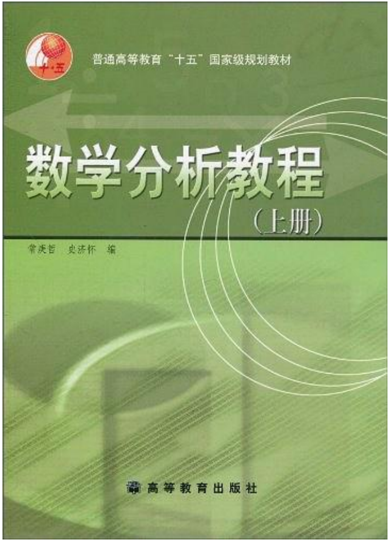
高等微积分（上）

邹文明

第一章: 实数和数列极限




普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学分析教程
（上册）
常庚哲　史济怀　编
高等教育出版社

例 7. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+2}{n^2-3}=2.$

证明: 方法 1. $\forall n\geqslant 1$, 令 $a_n=\frac{2n^2+n+2}{n^2-3}$, 那么

$$\left|a_n-2\right|=\left|\frac{(2n^2+n+2)-2(n^2-3)}{n^2-3}\right|=\left|\frac{n+8}{n^2-3}\right|.$$

于是 $\forall n\geqslant 8$, 我们有

$$|a_n-2|=\frac{n+8}{n^2-3}\leqslant\frac{2n}{\frac{1}{2}n^2}=\frac{4}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\max\{8,[\frac{4}{\varepsilon}]\}$, 则 $\forall n>N$, 我们有 $|a_n-2|\leqslant\frac{4}{n}<\varepsilon$. 故所证结论成立.

方法 2: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \max\{8, [\frac{4}{\varepsilon}]\}$, 则 $\forall n > N$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n^2+n+2}{n^2-3} - 2\right| &= \left|\frac{(2n^2+n+2) - 2(n^2-3)}{n^2-3}\right| \\
&= \left|\frac{n+8}{n^2-3}\right| = \frac{n+8}{n^2-3} \\
&\leqslant \frac{2n}{\frac{1}{2}n^2} = \frac{4}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

故所证结论成立.

§4. 收敛数列的性质

性质 1. (唯一性) 若数列收敛, 则其极限唯一.

证明: 用反证法. 设 $\{a_n\}$ 有两不同极限 A, B. 选取 $\varepsilon = \frac{1}{2}|A-B|$. 则 $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon$. 同样地, $\exists N_2 > 0$ 使得 $\forall n > N_2$, $|a_n - B| < \varepsilon$. 令 $N = \max(N_1, N_2)$. $\forall n > N$,

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= |A-B| = |(a_n - A) - (a_n - B)| \\ &\leqslant |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

矛盾! 故所证结论成立.

性质 2. **(有限韧性)** 仅改变数列有限项 (包括添加、删减项或改变其值) 不改变其敛散性.

证明: 假设 $\{a_n\}$ 的前 k 项变为 $b_1, b_2, \ldots, b_m$, 而之后的项没有做任何的改变, 由此所得到的新数列将被记作 $\{b_n\}$. 则 $\forall i \geqslant 1$, $b_{m+i} = a_{k+i}$.

假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon$. 选取 $N = N_1 + k + m$.

则 $\forall n > N$, 我们有 $k + (n-m) > N_1$, 于是

$$\begin{aligned} |b_n - A| &= |b_{m+(n-m)} - A| \\ &= |a_{k+(n-m)} - A| < \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $\{b_n\}$ 也收敛到 A.

若数列 $\{a_n\}$ 发散, 但数列 $\{b_n\}$ 收敛到 A. 由于改变后者的有限多项也可重新得到前者, 于是由前面讨论可知数列 $\{a_n\}$ 也收敛到 A. 矛盾! 故所证结论成立.

子列的概念： 给定数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots \quad a_n, \ldots.$$

给定以下的无穷多个自然数:

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots.. < k_n < \ldots,$$

我们得到对应的数列:

$$a_{k_1}, \quad a_{k_2}, \quad a_{k_3}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$$

这个新数列$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ 成为数列 $\{a_n\}$的一个子列.

性质 3. (均匀性) 数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A 当且仅当它的任意子列均收敛到 A.

证明: 充分性. 如果 $\{a_n\}$ 的任意子列收敛到 A, 则 $\{a_n\}$ 作为其自身子列也收敛到 A. 得证.

必要性. 设 $\{a_n\}$ 收敛到 A 而 $\{a_{k_n}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的任意的子列. 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|a_n - A| < \varepsilon$. $\forall n > N$, 均有 $k_n \geqslant n > N$, 故 $|a_{k_n} - A| < \varepsilon$, 从而子列 $\{a_{k_n}\}$ 也收敛到 A.

评注

上述性质常用来判断数列的发散性.

为证明数列 $\{a_n\}$ 发散, 主要的方法有两个:

- 证明数列 $\{a_n\}$ 的某个子列发散.
- 构造数列 $\{a_n\}$ 的两个不同子列使得它们均收敛, 但它们的极限却不相等.

例 1. 求证: 数列 $\{(-1)^n\}$ 不收敛.

分析: 假设该数列收敛到 A. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 我们需要找到某一个 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 均有 $|(-1)^n - A| < \varepsilon$. 当 n 为偶数时, $|1 - A| < \varepsilon$, 而当 n 为奇数时, 则有 $|1 + A| < \varepsilon$. 因此总有 $1 + |A| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = 1 + |A|$ 就可导出矛盾.

该段分析实际上是用反证法证明了上述结论.

证明 1: 用反证法. 设数列 $\{(-1)^n\}$ 收敛到 A. 令 $\varepsilon = 1 + |A|$. 则由极限的定义可知, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 我们有 $|(-1)^n - A| < \varepsilon$. 特别地, 当 $n = 2N$ 和 $2N + 1$ 时, 我们有

$$|1 - A| < \varepsilon, \; |-1 - A| < \varepsilon.$$

由此可得 $1 + |A| < \varepsilon$. 矛盾! 故 $\{(-1)^n\}$ 发散.

下面用极限不收敛的定义来给出一个新证明.

回顾: 数列 $\{a_n\}$ 发散当且仅当对任意 $A \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N > 0, \exists n_N > N$ 满足

$$|a_{n_N} - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

证明 2: $\forall A \in \mathbb{R}$, 令 $\varepsilon_0 = 1 + |A|$. 那么 $\forall N > 0$, 当 $A \geqslant 0$ 时, 成立 $|(-1)^{2N+1} - A| = 1 + A = \varepsilon_0$, 而当 $A < 0$ 时, 我们则有

$$|(-1)^{2N} - A| = 1 + |A| = \varepsilon_0.$$

因此数列 $\{(-1)^n\}$ 不收敛.

下面利用收敛数列的均匀性来给出一个更为简单的证明.

证明 3: 数列 $\{(-1)^n\}$ 的偶数项子列收敛到 1, 其奇数项子列收敛到 -1, 而收敛数列的任意的子列均收敛到同一个值, 故数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

思考题: 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A 等价于它的子列 $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛于 A.

性质 4. (有界性) 收敛的数列有界.

证明: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 我们均有 $|a_n - A| < 1$. 定义

$$M = |A| + 1 + \max_{1\leqslant k\leqslant N} |a_k|.$$

任取整数 $n \geqslant 1$. 若 $1 \leqslant n \leqslant N$, 则 $|a_n| \leqslant M$; 如果 $n > N$, 那么我们有

$$|a_n| \leqslant |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \leqslant M.$$

于是 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|a_n| \leqslant M$, 也即 $\{a_n\}$ 有界.

性质 5. (局部保序) 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

(1) 若 $A > B$, 则 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n > b_n$.

(2) 若 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n \geqslant b_n$, 则 $A \geqslant B$.

证明: (1) 令 $\varepsilon = \frac{1}{2}(A - B) > 0$. 则 $\exists N_1 > 0$ 使 $\forall n > N_1$, 均有 $|a_n - A| < \varepsilon$. 同样, $\exists N_2 > 0$ 使 $\forall n > N_2$, 均有 $|b_n - B| < \varepsilon$.

令 $N = \max(N_1, N_2)$. 则 $\forall n > N$, 我们有

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon.$$

从而 $a_n > A - \varepsilon = \frac{1}{2}(A + B) = B + \varepsilon > b_n$.

(2) 用反证法. 假设 $A < B$, 则 $\exists K \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall n > K$, 我们有 $a_n < b_n$. 于是 $a_{N+K} < b_{N+K}$. 这与题设矛盾. 故所证成立.

注: (1) 在命题的第二部分, 即便假设 $\forall n > N$, $a_n > b_n$, 一般也不能得到 $A > B$. 例如: $\forall n \geqslant 1$, 若令 $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1$, 则 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $a_n > b_n$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

(2) 由局部保序性立刻可得极限的唯一性.

推论. (局部保号) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A.$

(1) 若 $A > 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $a_n > 0.$

(2) 若 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $a_n \geqslant 0$, 则 $A \geqslant 0.$

证明: 只需在上述命题中令 $b_n \equiv 0.$

注: (1) 对于 $A < 0$ 也有类似结论.

(2) 若 $A \neq 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $a_n \neq 0.$

定理 1. (四则运算)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 则

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = AB$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$ (若 $B \neq 0$).

证明: (1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, 均有 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}$. 同样, $\exists N_2 > 0$ 使 $\forall n > N_2$, 均有 $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$. 令 $N = \max(N_1, N_2)$.

于是 $\forall n > N$, 我们有

$$\begin{aligned} |(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)| &= |\alpha(a_n - A) + \beta(b_n - B)| \\ &\leqslant |\alpha||a_n - A| + |\beta||b_n - B| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

(2) 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 因此 $\exists M > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|a_n| \leqslant M$. 又由极限的定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}, \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n(b_n - B) + (a_n - A)B| \\ &\leqslant |a_n||b_n - B| + |a_n - A||B| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此立刻可得所要的结论

(3) 因 $\{|b_n|\}$ 收敛于 $|B| > \frac{1}{2}|B| > 0$, 由保序性可知 $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, $|b_n| > \frac{1}{2}|B|$. 再由极限定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2 > 0$ 使得 $\forall n > N_2$, 均有 $|a_n - A| < \frac{1}{4}\varepsilon|B|$, $|b_n - B| < \frac{\varepsilon|B|^2}{4(|A|+1)}$.

令 $N = \max(N_1, N_2)$. 则 $\forall n > N$, 我们有

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n - A}{b_n} - \frac{A}{b_n B}(b_n - B)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|b_n|}|a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n B|}|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此所证结论成立

例 2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_\ell n^\ell}$, 其中 $\ell \geqslant k \geqslant 0$ 为整数, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ 且 $b_\ell \neq 0$.

解:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_\ell n^\ell}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^{-\ell}+\cdots+a_{k-1}n^{k-1-\ell}+a_kn^{k-\ell}}{b_0n^{-\ell}+\cdots+b_{\ell-1}n^{-1}+b_\ell}\\
=&\begin{cases} 0, & \text{若 } k<\ell,\\ \frac{a_\ell}{b_\ell}, & \text{若 } k=\ell. \end{cases}
\end{aligned}$$

例 3. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+e^{-n^2}}{n+\cos n}$.

解:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+e^{-n^2}}{n+\cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}e^{-n^2}}{1+\frac{1}{n}\cos n} = 1.$$

定理 2. **(夹逼原理)** 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ 满足:

(1) $\exists n_0 > 0$ 使得 $\forall n > n_0$, $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

则数列 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, 均有

$$|a_n - A| < \varepsilon, \ |b_n - A| < \varepsilon.$$

令 $N = \max(N_1, n_0)$. 则 $\forall n > N$, 我们有

$$-\varepsilon < a_n - A \leqslant x_n - A \leqslant b_n - A < \varepsilon.$$

也即 $|x_n - A| < \varepsilon$. 故所证结论成立.

评注

四则运算法则和夹逼定理的价值在于

使得我们可以从已知的数列极限出发,

来得到新的未知的数列极限!

命题 1. 若非负项数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{A}.$$

证明: 由保号性知 $A\geqslant 0$. 若 $A=0$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, $|a_n|<\varepsilon^2$, 从而 $\sqrt{a_n}<\varepsilon$, 此时所证结论成立. 若 $A>0$, 则 $\forall n\geqslant 1$, 均有

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|=\frac{|a_n-A|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{A}}|a_n-A|.$$

由题设及夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}|\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|=0$, 由此立刻可得所要结论.

例 4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$.

解: $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$0 \leqslant \sqrt{n+3}-\sqrt{n-1} = \frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}} < \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}=0$, 于是由夹逼原理可知

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})=0.$$

例 5. 证明: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0)$.

证明: 若 $a \geqslant 1$, 那么 $\forall n > a$, 我们有

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{n}.$$

又 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 则由夹逼原理所证结论成立.

若 $0 < a < 1$, 则 $\frac{1}{a} > 1$, 由四则运算法则可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

例 6. 设 $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_m$. 求证:
$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_m.$$

证明: $\forall n \geqslant 1$, 我们有
$$a_m \leqslant (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant a_m \sqrt[n]{m}.$$
又 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = 1$, 由夹逼原理知所证结论成立.

思考题: 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$.

收敛数列的性质回顾

- 唯一性: 若数列收敛, 则其极限唯一.
- 有限韧性: 改变有限项不改变敛散性.
- 均匀性: 数列收敛当且仅当它的任意子列均收敛到同一个值 (常用于证明某数列发散).
- 有界性: 收敛的数列有界.

- 局部保序: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

(1) 若 $A > B$, 则 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n > b_n$.

(2) 若 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n \geqslant b_n$, 则 $A \geqslant B$.

- 局部保号: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

(1) 若 $A > 0$, 则 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n > 0$.

(2) 若 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n \geqslant 0$, 则 $A \geqslant 0$.

(3) 若 $A \neq 0$, 则 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n \neq 0$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 则

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = AB$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$ (若 $B \neq 0$).

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+2}{n^2-3} = 2.$
- 数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+e^{-n^2}}{n+\cos n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0+\cdots+a_k n^k}{b_0+\cdots+b_\ell n^\ell} = \begin{cases} 0, & 若\ k<\ell, \\ \frac{a_\ell}{b_\ell}, & 若\ k=\ell, \end{cases}$ $\ell \geqslant k \geqslant 0$ 为整数, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ 且 $b_\ell \neq 0$.

例 7. 利用定义证明: $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, 其中当 n 为偶数时, $x_n = \frac{n-1}{n}$, 而当 n 为奇数时, $x_n = \frac{n+1}{n}$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 则 $\forall n > N$, 均有

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

故所证结论成立.

例 8. 利用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1.$

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 则 $\forall n > N$, 均有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1 \right| &= \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n^2+n} + n} \\
&< \frac{1}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

例 9. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ (其中 $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$).

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \left[\dfrac{(k+1)!a^k}{(a-1)^{k+1}\varepsilon}\right] + 1$. $\forall n > N$,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon a^n &= \frac{\varepsilon}{a^k} \cdot (1 + (a-1))^{n+k} = \frac{\varepsilon}{a^k} \sum_{l=0}^{n+k} \binom{n+k}{l} (a-1)^l \\
&\geqslant \frac{\varepsilon}{a^k} \binom{n+k}{k+1} (a-1)^{k+1} \\
&\geqslant \frac{\varepsilon n^{k+1} (a-1)^{k+1}}{(k+1)!a^k} > n^k,
\end{aligned}
$$

例 10. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0$ (其中 $\alpha\in\mathbb{R}$, $a>1$).

证明: 由于 $\alpha\leqslant[|\alpha|]+1$, 于是 $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $0<\frac{n^\alpha}{a^n}\leqslant\frac{n^{[|\alpha|]+1}}{a^n}$, 从而由夹逼原理知所证成立.

例 11. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$, 其中 $0<|q|<1$.

证明: 在上例中, 令 $k=1$, $a=\frac{1}{|q|}$. 则

$$\lim_{n\to\infty}|nq^n|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0,$$

进而可得所要结论.

例 12. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{\alpha\varepsilon n}}=0$ (前例题), 因此 $\exists N_1>0$ 使得 $\forall n>N_1$, 均有 $\frac{n+1}{e^{\alpha\varepsilon n}}<1$, 也即 $n+1<e^{\alpha\varepsilon n}$.

令 $N=[(N_1+1)^{\frac{1}{\alpha}}]+1$. 则 $\forall n>N$, 我们均有 $n^\alpha>N_1+1$, 从而 $[n^\alpha]>N_1$, 进而可得

$$n^\alpha<[n^\alpha]+1<e^{\alpha\varepsilon[n^\alpha]}\leqslant e^{\alpha\varepsilon n^\alpha},$$

于是 $\alpha\log n<\alpha\varepsilon n^\alpha$. 故 $\left|\frac{\log n}{n^\alpha}\right|<\varepsilon$. 由此得证

例 13. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \ (a \in \mathbb{R})$.

证明: 令 $k = [|a|] + 1$, 则$k + 1 > |a|$. 则 $\forall \varepsilon > 0$,
若令$N = \max\left(k, \left[\frac{|a|^{k+1}}{k!\varepsilon}\right]\right)$,
那么 $\forall n > N$, 我们有 $n > \frac{|a|^{k+1}}{k!\varepsilon}$, 从而可得

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^{k+1}}{n\cdot k!}\left(\prod_{j=k+1}^{n-1} \frac{|a|}{j}\right) \leqslant \frac{|a|^{k+1}}{n\cdot k!} < \varepsilon,$$

进而可知所要结论成立.

例 14. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由前例可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon^{-n}}{n!} = 0$, 从而知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $\frac{\varepsilon^{-n}}{n!} < 1$, 即我们有 $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon$. 由此可知所证结论成立.

例 15. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

证明: $\forall n > 1$, 我们有 $0 < \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n} \prod\limits_{j=2}^{n} \dfrac{j}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. 于是由夹逼原理立刻可得所要结论.

例 16. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由极限定义可知, $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, 均有 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$M = \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|, \ N = \max\left\{N_1, [\frac{2M}{\varepsilon}]\right\}.$$

则 $\forall n > N$, 我们均有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-A\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k-A|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|a_k-A|+\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}|a_k-A|$$

$$\leqslant \frac{M}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此所证结论成立.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log n} = 0.$

  对数函数比常数增长得更快!

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^{\alpha}} = 0$ (其中 $\alpha > 0$).

  幂函数比对数函数增长得更快!

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{a^{n}} = 0$ (其中 $\alpha \in \mathbb{R},\ a > 1$).

  指数函数比幂函数增长得更快!

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \ (a \in \mathbb{R})$.

  连乘积比指数函数增长得更快!

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$. $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

- 平均性: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

§5. 数列极限概念的推广

定义 1. 设 $\{a_n\}$ 为数列.

(1) 称该数列趋向于 $+\infty$, 记作 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 若 $\forall M > 0, \exists N > 0$ 使得 $\forall n > N, a_n > M$.

(2) 称该数列趋向于 $-\infty$, 记作 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 若 $\forall M > 0, \exists N > 0$ 使得 $\forall n > N, a_n < -M$.

(3) 称该数列趋向于 ∞, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 如果 $\forall M > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $|a_n| > M$.

例 1. 由上述定义立刻可得

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty.$$

注: (1) 正项数列 $\{a_n\}$ 趋近于 0 当且仅当 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 趋于 $+\infty$. (2) $\{a_n\}$ 趋于 0 当且仅当 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 趋于 ∞.
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

假设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$.

- 若 $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, 则称 $\{x_n\}$ 有极限 A, 也称数列 $\{x_n\}$ 趋向于 A 或趋近于 A.
- 若 $A \in \mathbb{R}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛到 A.

- 关于数列极限的许多结论仅对收敛数列成立. 比如说唯一性、四则运算等等对无穷极限不成立, 但保序性、夹逼原理等依然成立.

§6. 单调数列

定义 1. 设 $\{a_n\}$ 为数列.

- 称该数列递增, 若 $\forall n \geqslant 1$, $a_n \leqslant a_{n+1}$;
- 称该数列严格递增, 若 $\forall n \geqslant 1$, $a_n < a_{n+1}$;
- 称该数列递减, 若 $\forall n \geqslant 1$, $a_n \geqslant a_{n+1}$;
- 称该数列严格递减, 若 $\forall n \geqslant 1$, $a_n > a_{n+1}$.
- 递增数列与递减数列合称单调数列.

定理 1. (单调有界定理)

- 单调递增(减)有上(下)界的数列必收敛;

证明: 假设数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界. 那么由确界定理可知该数列有上确界 A, 于是 $\forall n \geqslant 1$, $a_n \leqslant A$, 并且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $a_N > A - \varepsilon$. 从而 $\forall n > N$, 均有 $a_n \leqslant A < a_N + \varepsilon \leqslant a_n + \varepsilon$, 也即 $|a_n - A| < \varepsilon$, 因此我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

如果 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, 则 $\{-a_n\}$ 单调递增有上界, 因此收敛, 进而可知 $\{a_n\}$ 收敛.

注: (1) 可能数列不是从第一项, 而是从某一项开始单调有界. 由于改变数列的有限项不改变其敛散性, 故此时单调有界定理依然成立.

(2) 单调递增有上界数列的极限就是其上确界;
单调递减有下界数列的极限就是其下确界.

§7. 超越数e

复习. 我们有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

例 1. $\forall n \geqslant 1$, 定义

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

求证: 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛到同一极限.

注: 该极限就是著名的超越数 e. 上述这两数列实际上给出了 e 的上、下“有理逼近”.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 由定义立刻得 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. 另外由几何平均小于算术平均可得

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \\ &\leqslant \left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}. \end{aligned}$$

同样地, 我们也有

$$
\begin{aligned}
b_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1} \\
&\geqslant \frac{1}{\left(\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)(n+1)+1}{n+2}\right)^{n+2}} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}.
\end{aligned}
$$

于是 $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$. 由单调有界定理可知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛. 设其极限分别为 a, b. 注意到 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$b_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)a_n.$$

两边取极限可得 $b = a$. 故所证成立.

注: 我们事实上证明了, $\forall n \geqslant 1$, 均有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\quad \frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

特别地, 我们有 $2 = a_1 < e < b_5 < 3$.

例 2. $\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. 求证: $\{a_n\}$ 收敛.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2} > a_n$, 故数列 $\{a_n\}$ 递增. 又 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

于是由单调有界定理可知 $\{a_n\}$ 收敛.

应用单调有界定理的基本思想

- 单调有界定理时常应用于由递归关系定义的数列. 此时先假设极限存在, 由此计算极限, 然后再比较该极限与数列最初的值的大小. 若极限大, 则该数列理应递增, 否则递减.
- 利用各种手段 (通常是数学归纳法) 来证明数列的单调性和有界性.

例 3. 设 $c > 0$, $a_1 = \sqrt{c}$, 而 $\forall n \geqslant 1$, 归纳定义

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}.$$

(1) 利用数学归纳法证明: $\forall n \geqslant 1$, $a_n < 1 + \sqrt{c}$.

(2) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并计算其极限.

证明: (1) 当 $n = 1$ 时, 成立 $a_1 = \sqrt{c} < 1 + \sqrt{c}$.

现假设所要结论对 $n \geqslant 1$ 成立, 则我们有

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c} + 1.$$

于是由数学归纳法可知所证结论成立.

(2) 对 $n \geqslant 1$ 运用数学归纳法来证明 $a_n \leqslant a_{n+1}$.

当 $n = 1$ 时, 我们有

$$a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}} > \sqrt{c} = a_1.$$

现假设所要结论对 $n \geqslant 1$ 成立, 则

$$a_{n+2} = \sqrt{c + a_{n+1}} \geqslant \sqrt{c + a_n} = a_{n+1}.$$

从而由数学归纳可知上述结论成立.

由于数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 则由单调有界定理可知其极限存在, 设为 A. 又 $\forall n \geqslant 1$, 均有

$$a_{n+1}^2 = c + a_n,$$

于是由极限的四则运算法则可得 $A^2 = c + A$. 但 $\{a_n\}$ 非负, 由极限的保号性可知 $A \geqslant 0$, 故

$$A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c}).$$

例 4. 设 $b_1 \geqslant a_1 \geqslant 0$. $\forall n \geqslant 1$, 归纳定义

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ \ b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n).$$

求证: 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛到同一个极限.

证明: 对 $n \geqslant 1$ 用数学归纳法证明 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.
当 $n = 1$ 时, 所证结论就是题设条件.
现假设所证结论对 $n \geqslant 1$ 成立. 由归纳定义知

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \geqslant \sqrt{a_n b_n} = a_{n+1} \geqslant 0.$$

从而由数学归纳法可知所要结论成立.

进而可知, $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{a_n^2} = a_n,$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \leqslant b_n.$$

因此 $\{a_n\}$ 单调递增且 $\{b_n\}$ 单调递减. 进而

$$\forall n \geqslant 1,\ a_n \leqslant b_n \leqslant b_1,\ b_n \geqslant a_n \geqslant a_1.$$

于是 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 而 $\{b_n\}$ 单调递减有下界, 故它们均收敛. 设其极限分别为 a, b.

再注意到 $\forall n \geqslant 1$, 我们均有 $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, 在等号两边取极限, 由此立刻可得

$$b = \frac{1}{2}(a+b),$$

也即 $a = b$. 故所证结论成立.

同学们辛苦了！