线性代数参考答案

整理编著: 杨鹏

2020 年 12 月 31 日

目录

1. 线性映射和矩阵

1.1. 映射.

练习 1.1.1. 判断下列映射是否是单射, 满射, 双射, 并写出双射的逆映射.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x+1$.

◀ 双射. 逆映射为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x-1$. ▶

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto 2x$.

◀ 双射. 逆映射为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{x}{2}$. ▶

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto 3$.

◀ 均不是. ▶

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$.

◀ 均不是. ▶

5. $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$.

◀ 单射. ▶

6. $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), x\mapsto e^x$.

◀ 双射. 逆映射为 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto logx$. ▶

7. $f:[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}]\to[-1,1], x\mapsto sinx$.

◀ 双射. 逆映射为 $f:[-1,1]\to[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}],\ x\mapsto -arcsinx-\pi$.(注意标准的反正弦函数 $arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 是 $sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ 的逆映射, 其定义域与题目中的不同. 所以考虑把 f 分解为 $g:[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ x\mapsto -x-\pi$ 与 $h:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1], x\mapsto sinx$ 的复合再求逆映射. 这里选取的 g 满足 $sin(g(x))=sinx$.) ▶

练习 1.1.2. 对复合映射 $f = g \circ h$,证明或举出反例.

1. g, h 都是满射, 则 f 也是满射.

◀ 正确. 设 $g \circ g' = id$, $h \circ h' = id$. 则 $f \circ (h' \circ g') = g \circ h \circ h' \circ g' = g \circ id \circ g' = g \circ g' = id$. 故 f 是满射. ▶

2. g, h 都是单射, 则 f 也是单射.

◀ 正确. 设 $g' \circ g = id$, $h' \circ h = id$. 则 $(h' \circ g') \circ f = h' \circ g' \circ g \circ h = h' \circ id \circ h = h' \circ h = id$. 故 f 是单射. ▶

3. h 不是满射,则 f 可能是满射.

◀ 例: $h : \{0\} \to \{0, 1\}$, $0 \mapsto 0$. $g : \{0, 1\} \to \{0\}$, $0, 1 \mapsto 0$. 我们有 $f = id_{\{0\}}$. ▶

4. g 不是满射,则 f 可能是满射.

◀ 错误. 若 f 满, 则存在 f' 使得 $f \circ f' = id$, 从而有 $g \circ h \circ f' = id$, 故 g 也满, 矛盾. 任举一例使得 g 不是满射即可. ▶

5. g 不是单射,则 f 可能是单射.

◀ 例: $h : \{0\} \to \{0, 1\}$, $0 \mapsto 0$. $g : \{0, 1\} \to \{0\}$, $0, 1 \mapsto 0$. 我们有 $f = id_{\{0\}}$. ▶

6. h 不是单射,则 f 可能是单射.

◀ 错误. 若 f 单, 则存在 f' 使得 $f' \circ f = id$, 从而有 $f' \circ g \circ h = id$, 故 h 也单, 矛盾. 任举一例使得 h 不是单射即可. ▶

7. g, h 都不是双射, 则 f 可能是双射.

◀ 例: $h : \{0\} \to \{0, 1\}$, $0 \mapsto 0$. $g : \{0, 1\} \to \{0\}$, $0, 1 \mapsto 0$. 我们有 $f = id_{\{0\}}$. ▶

思考其中真命题的逆否命题的含义.

练习 1.1.3. 1. 在不改变对应法则和定义域的前提下, $\mathbb{R}$ 上的变换 $f(x) = x^2 + 2x + 3$, 把陪域换成哪个集合, 得到的映射是满射?

◀ $[2, \infty)$. ▶

2. 证明映射 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ 是单射.

◀ 若 $f(x) = f(y)$, 由 $f(x) = x, f(y) = y$, 有 $x = y$. ▶

练习 1.1.4. 下列 $\mathbb{R}$ 上的变换,哪些满足交换律 $f \circ g = g \circ f$?

1. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$.

◀ 不满足. ▶

2. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.

◀ 满足. ▶

3. $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$.

◀ 不满足. ▶

4. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x + 2$.

◀ 满足. ▶

5. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x + 1$.

◀ 不满足. ▶

6. $f(x) = sinx$, $g(x) = cosx$.

◀ 不满足. ▶

练习 1.1.5. 对 $\mathbb{R}$ 上的变换 $f(x)=2x+1$ 和 $g(x)=ax+b$, 求实数 a,b, 使得 $f\circ g=g\circ f$.

◀ $(f\circ g)(x)=2(ax+b)+1$, $(g\circ f)(x)=a(2x+1)+b$. 解得当且仅当 $a=b+1$ 时原式成立. ▶

练习 1.1.6. 在化简函数 $arccos\circ sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[0,\pi]$ 的下列步骤中, 分别利用了映射的哪些性质?

1. 如果 $y=(arccos\circ sin)(x)$, 则 $cosy=(cos\circ(arccos\circ sin))(x)$.

◀ 映射的复合. ▶

2. $cos\circ(arccos\circ sin)=(cos\circ arccos)\circ sin$.

◀ 结合律. ▶

3. $(cos\circ arccos)\circ sin=id_{[0,1]}\circ sin$.

◀ 如果 $f=g$, 那么 $f\circ h=g\circ h$. ▶

4. $id_{[0,1]}\circ sin=sin$.

◀ 单位. ▶

综上得 $siny=cosz$, 由此推断化简结果.

练习 1.1.7. 用数学归纳法证明, 任取有限个映射 $f_1.\cdots f_n$, 如果对 $1\le i\le n-1$, f_{i+1} 的定义域都包含 f_i 的陪域, 则复合映射 $f_n\circ\cdots\circ f_1$ 不依赖于映射两两复合次序的选择.

◀ 我们想要证明无论怎样选择复合次序, $f_n\circ\cdots\circ f_1$ 总是等于 $f_n\circ(f_{n-1}\circ(\cdots\circ f_2)\circ f_1))\cdots)$. 我们需要两个引理.

引理 1. $(f_n\circ(f_{n-1}\circ(\cdots\circ f_2))\cdots)\circ f_1=f_n\circ(f_{n-1}\circ(\cdots\circ f_2)\circ f_1))\cdots)$.

◀ 对 n 归纳. $n=3$ 时即为结合律, 证明: $(f_3\circ(f_2\circ f_1))(x)=f_3((f_2\circ f_1)(x))=f_3(f_2(f_1(x)))=(f_3\circ f_2)(f_1(x))=((f_3\circ f_2)\circ f_1)(x)$, 故 $f_3\circ(f_2\circ f_1)=(f_3\circ f_2)\circ f_1)$. (注意这里只用了映射的复合的定义. 另证: 设 $f_1:x_1\mapsto x_2, f_2:x_2\mapsto x_3, f_3:x_3\mapsto x_4$, 则 $f_2\circ f_1:x_1\mapsto x_3, f_3\circ(f_2\circ f_1):x_1\mapsto x_4, f_3\circ f_2:x_2\mapsto x_4, (f_3\circ f_2)\circ f_1:x_1\mapsto x_4$.)

之后使用结合律归纳. ▶

引理 2. $(f_n\circ(f_{n-1}\circ(\cdots\circ f_{k+1}))\cdots)\circ(f_k\circ(f_{k-1}\circ(\cdots\circ f_1))\cdots)=f_n\circ(f_{n-1}\circ(\cdots\circ f_1)\cdots)$.

◀ 使用引理 1 对 k 归纳. ▶

现在使用归纳法来证明定理. $n=1$ 时是平凡的. 设 $n\le k$ 时定理成立. $n=k+1$ 时, 任给 $f_n\circ\cdots\circ f_1$ 的一种复合顺序, 设最后一次复合为 $(f_n\circ\cdots\circ f_{i+1})\circ(f_i\circ\cdots\circ f_1)$. 由归纳假设这等于 $(f_n\circ(f_{n-1}\circ(\cdots\circ f_{i+1}))\cdots)\circ(f_i\circ(f_{i-1}\circ(\cdots\circ f_1))\cdots)$. 又由引理 2, 这等于 $f_n\circ(f_{n-1}\circ(\cdots\circ f_1)\cdots)$. ▶

练习 1.1.8. 证明, 任意映射 f 都存在分解 $f=g\circ h$, 其中 h 是满射, g 是单射.

◀ 设 $f:X\to Y$. 考虑 f 的像集 $Y'=\{b\in Y|\text{存在 } a\in X,\ f(a)=b\}$. 我们有自然的映射 $h:X\to Y'$, $a\mapsto f(a)$ 和子集的嵌入 $g:Y'\to Y$. 易见 $f=g\circ h$, 且 h 是满射, g 是单射. ▶

练习 1.1.9. 证明命题 1.1.2: 对映射 $f:X\to Y$, 有

1. f 是单射当且仅当存在另一个映射 $g:Y\to X$, 使得 $g\circ f=id_X$;

◀ $\Rightarrow$: 定义 g 如下. 对任意的 $b\in Y$, 若存在某个 $a\in X$ 使得 $f(a)=b$, 则定义 $g(b)=a$, 否则任意选取某个 $a\in X$ 并定义 $g(b)=a$. 容易验证 g 是良定的且 $g\circ f=id_X$.

$\Leftarrow$: 若 $f(a)=f(b)$, 则 $g\circ f(a)=g\circ f(b)$, 即 $a=b$. 故 f 单. ▶

2. f 是满射当且仅当存在另一个映射 $g':Y\to X$, 使得 $f\circ g'=id_Y$;

◀ $\Rightarrow$: 定义 g' 如下. 对任意的 $b\in Y$, 存在某个 $a\in X$ 使得 $f(a)=b$. 定义 $g'(b)=a$. 容易验证 g' 是良定的且 $f\circ g'=id_Y$.

$\Leftarrow$: 对任意的 $b\in Y, b=id_Y(b)=f\circ g'(b)$. 故 f 满. ▶

3. f 是双射当且仅当 f 可逆, 即存在另一个映射 $g:Y\to X$, 使得 $f\circ g=id_Y, g\circ f=id_X$.

◀ $\Rightarrow$: 由上, 存在映射 $g,g':Y\to X$, 使得 $g\circ f=id_X$, $f\circ g'=id_Y$. 故 $g=g\circ id_Y=g\circ f\circ g'=id_X\circ g'=g'$ 即为 f 的逆.

$\Leftarrow$: 由上, f 单且满. ▶

1.2. **基本概念.**

练习 1.2.1. 如图 1.2.6 所示, 钟表表盘上对应整点有 12 个向量.

1. 计算 12 个向量之和.

◀ 零向量. ▶

2. 不计 2 点方向向量, 计算其他 11 个向量之和.

◀ 2 点方向向量的负向量 (或 8 点方向向量). ▶

3. 假设这 12 个向量的起点从表盘中心移到 6 点, 则 12 点对应向量变为 $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$. 计算此时 12 个向量之和.

◀ $\begin{bmatrix}0\\12\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.2.2. 如果平面上的向量 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$ 共线, 那么 $\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ 是否共线?

◀ 是的. 题目中的两个条件都等价于 $ad-bc=0$. ▶

练习 1.2.3. 证明命题 1.2.5 : 向量加法和数乘满足的八条运算法则.

◀ 自行验证. 用到的无非是数的加法和数乘对应的运算法则. ▶

练习 1.2.4. 1. 如果只用加法交换律, 不用加法结合律, 那么 $(a+b)+c$ 有多少种与之相等的表达式?

◀ (包括 $(a+b)+c$ 自身有)4 种. $(a+b)+c, (b+a)+c, c+(a+b), c+(b+a)$. ▶

2. 如果只用加法结合律, 不用加法交换律, 那么 $((a+b)+c)+d$ 有多少种与之相等的表达式?

◀ (包括 $(a+b)+c$ 自身有)5 种. $((a+b)+c)+d, (a+(b+c))+d, a+((b+c)+d), a+(b+(c+d)), (a+b)+(c+d)$. ▶

练习 1.2.5. 判断下列映射是否是线性映射.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x+1$.

◀ 不是. ▶

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x$.

◀ 是. ▶

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 0$.

◀ 是. ▶

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 1$.

◀ 不是. ▶

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$.

◀ 不是. ▶

6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2^{ln\,x}$.

◀ 不是. ▶

7. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+y\\y-x\\2x\end{bmatrix}$.

◀ 是. ▶

8. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+1\\y-x\\2x\end{bmatrix}$.

◀ 不是. ▶

练习 1.2.6. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是线性映射, 证明存在实数 k, 使得 $f(x)=kx$.

◀ 取 $k=f(1)$. $f(x)=xf(1)=kx$.(注意: 对一个一般的映射 f, 不能设 f 形如某个多项式或其他初等函数. 我们能够使用的只有 $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$.) ▶

练习 1.2.7. 设映射 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}g(x,y,z)\\h(x,y,z)\end{bmatrix}$, 其中 $g,h:\mathbb{R}^3\to$ ▶. 证明 f 是线性映射当且仅当 g,h 都是线性映射.

◀ f 是线性映射 $\Leftrightarrow$ 对向量 $X,Y\in\mathbb{R}^3$ 和数 a,b 满足 $f(aX+bY)=af(X)+bf(Y)\Leftrightarrow g(aX+bY)=ag(X)+bg(Y), h(aX+bY)=ah(X)+bh(Y)\Leftrightarrow g,h$ 是线性映射. ▶

练习 1.2.8. 设 $x_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $x_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $x_3=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $b_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $b_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $b_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, 是否存在线性映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, 满足 $f(x_i)=b_i$, $i=1,2,3$?

◀ 不存在. 由 $f(x_i)=b_i$, $i=1,2$ 知 $f(x_3)=f(-x_1+x_2)=-f(x_1)+f(x_2)=-b_1+b_2\neq b_3$, 矛盾. ▶

练习 1.2.9. 判断下列映射是否是线性映射.

1. 给定 $a\in\mathbb{R}^m$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$, $f(k)=ka$.

◀ 是. ▶

2. 给定实数 k, $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, $f(a)=ka$.

◀ 是. ▶

3. $f:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^m$, $f(\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\\ a_{m+1}\end{bmatrix})=a_{m+1}\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}$.

◀ 不是. ▶

练习 1.2.10. 给定三维向量 $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$,定义:

1. 二者点积为 $a\cdot b:=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.
2. 二者叉积为 $a\times b:=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$.

那么给定 $a\in\mathbb{R}^m$,映射 $f:\mathbb{R}^3\to R, b\to a\cdot b$ 和 $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, b\to a\times b$ 是否是线性映射?

◀ 是. ▶

练习 1.2.11. 给定平面上任意面积为 1 的三角形,经过下列变换之后,其面积是否确定? 如果是,面积多少?(不需严谨证明,猜测答案即可.)

1. 旋转变换.

◀ 面积为 1. ▶

2. 反射变换.

◀ 面积为 1. ▶

3. 对 x_2 投影的投影变换.

◀ 面积为 0. ▶

4. x_1 方向拉伸 3 倍, x_2 方向不变的伸缩变换.

◀ 面积为 3. ▶

5. 把 x_1 方向的 3 倍加到 x_2 方向上,保持 x_2 方向不变的错切变换.

◀ 面积为 1. ▶

练习 1.2.12. 设 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 $f(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}-y+1\\x+2\end{bmatrix}$.

1. 证明 f 不是线性变换.

◀ $f(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. ▶

2. 构造分解 $f=g\circ h$,其中 g 是 $\mathbb{R}^2$ 上的平移变换, h 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换. (这种平移与线性变换的复合称为仿射变换. 注意,平移变换并不是线性变换.)

◀ $h:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$, $g:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+1\\y+2\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.2.13. 设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(a+b)=f(a)+f(b)$, f 是否是线性映射?(需要微积分知识)

◀ 是的. 易见对 $k\in\mathbb{Z}$ 有 $f(ka)=kf(a)$. 以 $b=\frac{a}{k}$ 代入知 $f(ka)=kf(a)$ 对 $k\in\mathbb{Q}$ 成立. 由 f 连续, 这对 $k\in\mathbb{R}$ 也对. ▶

1.3. 线性映射的表示矩阵.

练习 1.3.1. 将下列向量 b 写成矩阵和向量乘积的形式.

(提示: 将一个 m 行 1 列的列向量写成某个 $m\times k$ 阶矩阵与某个 k 行 1 列的列向量之积.)

1. $b=2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

◀ $b=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$. ▶

2. $b=5\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$.

◀ $b=\begin{bmatrix}1&5\\2&4\\3&3\\4&2\\5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$. ▶

3. $b=\begin{bmatrix}2b+a+c\\c-b\\a+b+c\\a+b\end{bmatrix}$, 其中 a,b,c 为常数.

◀ $b=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$. ▶

4. $b=f(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix})$, 其中 $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ 是线性变换, 满足 $f(e_k)=ke_{6-k}$, $k=1,\cdots,5$.

◀ $b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. ▶

5. 假设如果某天下雨,则第二天下雨概率为 0.8;如果当天不下雨,则第二天下雨概率为 0.3. 已知当天有一半的概率会下雨,令 $b \in \mathbb{R}^2$,其两个分量分别是明天下雨和不下雨的概率.

◀ $b = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.3.2. 判断下列矩阵和向量的乘积是否良定义. 在可以计算时,先将其写成列向量的线性组合,再进行计算.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

◀ 不是. ▶

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$. ▶

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$. ▶

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

8. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

9. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} -9 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$. ▶

10. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.3.3. 设 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$, $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. 对任意自然数 i, 令 $u_{i+1} = Au_i$, $v_{i+1} = Av_i$.

1. 对 $i = 1, 2, 3, 4$, 计算 u_i, v_i.

◀ $u_i = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.625 \\ 0.375 \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$v_i = \begin{bmatrix} 1.7 \\ 2.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.05 \\ 1.95 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.225 \\ 1.775 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.3125 \\ 1.6875 \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, 3, 4$. ▶

2. 猜测 $\lim_{i\to\infty} u_i$, $\lim_{i\to\infty} v_i$.

◀ $\lim_{i\to\infty} u_i = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$, $\lim_{i\to\infty} v_i = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 1.6 \end{bmatrix}$. ▶

3. 任取初始向量 w_0, 猜测极限 $\lim_{i\to\infty} w_i$, 不同初始向量得到的极限在同一条直线上吗?

◀ 设 $w_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, 则极限 $\lim_{i\to\infty} w_i = \begin{bmatrix} 0.6(a+b) \\ 0.4(a+b) \end{bmatrix}$. 在. ▶

练习 1.3.4. 设线性变换 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. 令 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 将 y_1, y_2, y_3 分别用 x_1, x_2, x_3 表示出来.

◀ $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1 + x_2$, $y_3 = x_1 + x_2 + x_3$. ▶

2. 将 x_1, x_2, x_3 分别用 y_1, y_2, y_3 表示出来.

◀ $x_1 = y_1$, $x_2 = -y_1 + y_2$, $x_3 = -y_2 + y_3$. ▶

3. 找到矩阵 B, 使得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

◀ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. ▶

4. 设 g 是由矩阵 B 决定的线性变换, 证明 f, g 互为逆变换.

◀ 我们需要验证 fg 和 gf 均为单位映射. 这等价于验证 AB 与 BA 均为单位阵. 沿用前面的记号, 我们有 $AB \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, $BA \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 故 AB 与 BA 均为单位阵. ▶

练习 1.3.5. 计算下列线性映射 f 的表示矩阵.

1. f 为 xy 平面向 y 轴的投影变换.

◀ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ▶

2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot x$, 其中点积的定义见练习 1.2.10.

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$. ▶

3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x)=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times x$, 其中叉积的定义见练习 1.2.10.

◀ $\begin{bmatrix}0&-3&2\\3&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}$. ▶

4. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, $f(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4+x_2\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$. ▶

5. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, $f(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_4\\x_2\\x_3\\x_1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$. ▶

6. $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, $f(\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_m\\\vdots\\x_1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}&&&&1\\&&&1&\\&&\cdots&&\\&1&&&\\1&&&&\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.3.6. 考虑桥墩载荷问题,其中 l_1,l_2,d 作为常数.

1. 映射 f 输入 F_1,F_2 得到输出 f_1,f_2,写出 f 的矩阵.

2. 以桥梁的左端为支点, 顺时针方向的力矩为 $df_2 - l_1F_1 - l_2F_2$. 以桥梁的右端为支点或者以桥梁的中点作为支点, 都能类似地得到顺时针方向的力矩. 假设映射 f 的输入为 F_1, F_2, f_1, f_2, 而输出为桥梁的左端, 中点和右端的顺时针方向的力矩, 写出 f 的矩阵.

练习 1.3.7. 设 xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 f 是下列三个变换的复合: 先绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$; 然后进行一个保持 y 坐标不变, 同时将 y 坐标的两倍加到 x 坐标上的错切; 最后再沿着直线 $x+y=0$ 反射.

1. 证明 f 是线性变换.

◀ 这是由于三个变换均为线性变换, 且线性变换的复合也是线性变换. ▶

2. 计算 $f(e_1)$ 和 $f(e_2)$.

◀ $f(e_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix}$, $f(e_2) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{bmatrix}$. ▶

3. 写出 f 的矩阵.

◀ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{bmatrix}$. ▶

4. 计算 $f(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix})$.

◀ $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ -1 - \frac{11\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.3.8. 1. 幻方矩阵是指元素分别是 $1, \cdots, 9$ 的 3 阶矩阵 M, 且每行, 每列以及两条对角线上的三个元素之和都相同. 求 $M \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 的所有可能值.

◀ $\begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$. ▶

2. 数独矩阵是指 9 阶矩阵 M, 从上到下, 从左到右依次分成九个 3×3 的子矩阵, 且每行, 每列以及九个子矩阵中的元素都是 $1, \cdots, 9$. 求 $M \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 的所有可能值.

◀ $\begin{bmatrix} 45 \\ \vdots \\ 45 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.3.9. 证明, 如果 n 阶方阵 A 对任意 n 维列向量 x, 都有 $Ax = 0$, 则 $A = 0$.

◀ 设 $A=\begin{bmatrix}A_1 & \cdots & A_n\end{bmatrix}$, A_i 是列向量. 我们有 $A_i=Ae_i=0$, 故 $A=0$. 这里 $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ 是第 i 个元素为 1, 其他元素为 0 的列向量. ▶

练习 1.3.10. 证明, 如果 n 阶方阵 A 对任意 n 维列向量 x, 都存在依赖于 x 的常数 $c(x)$, 满足 $Ax=c(x)x$, 则存在常数 c, 使得 $A=cI_n$.

◀ 设 $A=\begin{bmatrix}A_1 & \cdots & A_n\end{bmatrix}$. 我们有 $A_i=Ae_i=c(e_i)e_i$. 取 $x=\begin{bmatrix}1\\ \cdots\\ 1\end{bmatrix}$, 由 $Ax=\begin{bmatrix}c(e_1)\\ \cdots\\ c(e_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c(x)\\ \cdots\\ c(x)\end{bmatrix}$ 知诸 $c(e_i)$ 均相等且等于 $c(x)$. 故 $A=c(x)I_n$. ▶

1.4. **线性方程组.**

练习 1.4.1. 把下列矩阵化为行简化阶梯形, 并回答问题. (注意: 主列 (主元所在的列) 的定义首次出现于 105 页. 参见书后的名词索引.)

1. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 化简后第一列是否为主列?

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&5&5&5&5\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&1\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$. 是. ▶

2. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 化简后第二列是否为主列?

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&7&8&9&10\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&7&8&9&10\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\0&7&8&9&10\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&7&8&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&6&6&6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&0&1&2&3\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&-1&-2\\0&0&1&2&3\end{bmatrix}$. 是. ▶

3. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 化简后第三列是否为主列?

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&8&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&8&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{7}{8}&-\frac{7}{4}\\0&1&0&-\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}\\0&0&8&9&10\end{bmatrix}$. 是. ▶

4. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 化简后第四列是否为主列?

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&0&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&\frac{11}{9}\\0&1&2&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&9&10\end{bmatrix}$. 是. ▶

5. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 化简后第五列是否为主列?

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&10\end{bmatrix}$. 是. ▶

练习 1.4.2. 下列方程组有解时,找到所有解;方程组无解时,对方程组做初等行变换,得到矛盾表达式 $0=1$.

1. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$. 解为 $x=1, y=1$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5\\0&-2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5\\0&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$. 通解为 $x=z, y=-2z$. ▶

3. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2\\2&2\\4&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2\\1&1\\0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$. 解为 $x=0, y=0$. ▶

4. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&0\\5&6&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&-1\\4&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$. 无解. ▶

5. $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$. 通解为 $x=-z, y=-z$. ▶

6. $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$. 解为 $x=0, y=0$. ▶

7. $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&0\\1&5&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$. 无解. ▶

8. $\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\5\end{bmatrix}$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&3&-2&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&3&-2&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&5\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}0&0&4&-3&0\\-1&0&3&-2&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&5&20\\-1&0&0&4&15\\0&-1&0&3&10\\0&0&-1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&1&4\\-1&0&0&4&15\\0&-1&0&3&10\\0&0&-1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&1&4\\-1&0&0&0&-1\\0&-1&0&0&-2\\0&0&-1&0&-3\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&4\end{bmatrix}$. 解为 $x=1,y=2,z=3,t=4$. ▶

9. $\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\5\end{bmatrix}$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-3&-2&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&4&3&0\\1&0&-3&2&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&-5&-20\\1&0&0&4&15\\0&1&0&-3&-10\\0&0&1&2&5\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}0&0&0&1&4\\1&0&0&4&15\\0&1&0&-3&-10\\0&0&1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&1&4\\1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&4\end{bmatrix}$. 解为 $x=-1,y=2,z=-3,t=4$. ▶

练习 1.4.3. 将下列问题首先化成 $Ax=b$ 的形式, 然后求所有解.

1. 对 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$, 如何将其第三列写成前两列的线性组合?

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$.

计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 解为 $x = -1, y = 2$. ▶

2. 对 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$, 如何将其第四列写成前两列的线性组合?

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$.

计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 9 \\ 11 & 12 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 解为 $x = -2, y = 3$. ▶

3. 对 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$, 如何将其第五列写成前两列的线性组合?

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$.

计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 10 \\ 11 & 12 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 解为 $x = -3, y = 4$. ▶

练习 1.4.4. 求证: 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0, \end{cases}$ 有非零解当且仅当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

◀ $\Rightarrow$: 设有非零解 x_1, x_2. 若 x_1, x_2 至少有一个为 0, 代入原方程易知 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. x_1, x_2 均不为 0 时, 将 $a_{11} = -\frac{a_{12}x_2}{x_1}$ 代入 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0$, 得到 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

$\Leftarrow$: 若 $a_{11}=a_{12}=0$, 易得 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=0, \end{cases}$ 的一组非零解. 若 $a_{11},a_{12}\neq 0, x=-a_{12}, y=a_{11}$ 为 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=0, \end{cases}$ 的一组非零解. ▶

练习 1.4.5. 求满足下列条件的常数 b,c.

1. 方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ 无解.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & b & 7 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & b-6 & -2 \end{bmatrix}$. 方程组无解当且仅当 $b-6=0$, 或 $b=6$. ▶

2. 方程组 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ c \end{bmatrix}$ 无解.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & c \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & c-20 \end{bmatrix}$. 方程组无解当且仅当 $c-20\neq 0$, 或 $c\neq 20$. ▶

3. 方程组 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & b & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 无解.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & b & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 3 \\ 4 & b+1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & b-11 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. 方程组无解当且仅当 $b=11$. ▶

4. 方程组 $\begin{bmatrix} b & 3 \\ 3 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$ 有无穷组解.

◀ $b\neq\pm 3$ 时, 作高斯消元知方程组有唯一解. $b=3$ 时, 无解. $b\neq 3$ 时, 有无穷组解. ▶

5. 方程组 $\begin{bmatrix} 2 & b \\ 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 \\ c \end{bmatrix}$ 有无穷组解.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 2 & b & 16 \\ 4 & 8 & c \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & b-4 & 16-\frac{c}{2} \\ 4 & 8 & c \end{bmatrix}$. 方程组有无穷组解当且仅当 $b-4=0$ 且 $16-\frac{c}{2}=0$, 或等价于 $b=4$ 且 $c=32$. ▶

6. 方程组 $\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 有非零解.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & b+1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 方程组有非零解当且仅当 $b+1=0$, 或 $b=-1$. ▶

7. 方程组 $\begin{bmatrix} b & 2 & 3 \\ b & b & -4 \\ b & b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 有非零解 (求三个不同的 b).

◀ $b = 0$ 时易见有非零解. $b \neq 0$ 时, $\begin{bmatrix} b & 2 & 3 \\ b & b & -4 \\ b & b & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b & 2 & 3 \\ b & b & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b-3 & -1 & 0 \\ b+4 & b+4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 故 $b = -4$ 时有非零解. 再设 $b \neq 0, -4$, $\begin{bmatrix} b-3 & -1 & 0 \\ b+4 & b+4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b-3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b-2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 故 $b = 2$ 时有非零解. ▶

练习 1.4.6. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_3 = 0, \end{cases}$ 有非零解, 求 a 的值, 并求出所有的解.

◀ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a+2 & 1 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a-\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. 故 $a = \frac{1}{3}$. 此时 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 通解为 $x_1 = 3x_3, x_2 = -7x_3$. ▶

练习 1.4.7. 在下列方程组中, 讨论在 p 取不同值时方程组是否有解, 并在有解时, 求出所有的解.

$$\begin{cases} px_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + px_2 + x_3 = p, \\ x_1 + x_2 + px_3 = p^2, \end{cases}$$

◀ $p = 1$ 时有无穷组解, 通解为 $x_1 = -x_2 - x_3 + 1$. 下设 $p \neq 1$. 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1-p & p-1 & 0 & p-1 \\ 1-p^2 & 1-p & 0 & p^2-p \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1+p & 1 & 0 & -p \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} p+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2+p & 0 & 0 & -p-1 \end{bmatrix}$. $p = -2$ 时, 无解. $p \neq 1, -2$ 时, 解为 $x_1 = -\frac{p+1}{p+2}, x_2 = \frac{1}{p+2}, x_3 = \frac{p^2+2p+1}{p+2}$. ▶

练习 1.4.8. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. 求证:

1. $Ax = b$ 有解当且仅当 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1+b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1+b_2+b_3 \end{bmatrix}$. 故 $Ax = b$ 有解当且仅当最后一行为 0, 即 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$. ▶

2. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集是 $\{kx_1 | k \in \mathbb{R}\}, x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 故通解为 $x_1 = x_3, x_2 = -x_3$. ▶

3. 当 $Ax = b$ 有解时, 设 x_0 是一个解, 则解集是 $\{x_0 + kx_1 | k \in \mathbb{R}\}$.

◀ $Ax = b \Leftrightarrow A(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in \{kx_1 | k \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow x \in \{x_0 + kx_1 | k \in \mathbb{R}\}$. ▶

练习 1.4.9. 求三阶方阵 A, 使得线性方程组 $AX = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的解集是 $\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} | c, d \in \mathbb{R}\}$.

◀ $AX = 0$ 的解集为 $\{c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} | c, d \in \mathbb{R}\}$, 故 A 的行是 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 的倍数. 由特解 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 解出 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.4.10. 1. 构造三阶方阵, 其元素各不相同, 且行简化阶梯形有且只有一个主元.

◀ 例: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 100 & 200 & 300 \end{bmatrix}$ ▶

2. 构造 100 阶方阵 A, 所有元素非零, 且行简化阶梯形恰有 99 个主元. 试描述 $Ax = 0$ 的解集.

◀ 例: $A=\begin{bmatrix}1&1&1&&\cdots&1&1\\1&2&1&&\cdots&1&1\\1&1&2&\ddots&&\vdots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&\ddots&&\\\vdots&\vdots&&\ddots&2&1&1\\1&1&\cdots&&1&2&1\\1&1&\cdots&&1&1&1\end{bmatrix}$. A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}1&&&&&&1\\&1&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&1&\\&&&&&&0\end{bmatrix}$. $Ax=0$ 的解集为 $\{k\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{bmatrix}|k\in\mathbb{R}\}$. ▶

练习 1.4.11. 给定线性方程组 $Ax=0$,其中 A 是 100 阶方阵. 假设 Gauss 消元法计算到最后一行得到 $0=0$.

1. 消元法是在计算 A 的行的线性组合. 因此 A 的 100 行的某个线性组合是?
   ◀ $\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$. ▶
2. 计算出 $0=0$ 说明方程组有无穷多解. 因此 A 的 100 列的某个线性组合是?
   ◀ $\begin{bmatrix}0\\0\\\cdots\\0\\0\end{bmatrix}$. ▶
3. 试说明 Gauss 消元法计算出的零行的个数和自由变量的个数相等.
   ◀ 二者均等于行数减去主元个数. ▶

练习 1.4.12. 仅用从上往下的倍加变换 (即把上面的行的若干倍加到下面的行上),将下列矩阵化为阶梯形,并分析其主元的规律.

1. $\begin{bmatrix}1&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}$.
   ◀ $\begin{bmatrix}1&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}2&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}2&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&&\\&\frac{3}{2}&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&&\\&\frac{3}{2}&1&\\&&\frac{4}{3}&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&&\\&\frac{3}{2}&1&\\&&\frac{4}{3}&1\\&&&\frac{5}{4}\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}2&-1&&\\-1&2&-1&\\&-1&2&-1\\&&-1&2\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}2&-1&&\\-1&2&-1&\\&-1&2&-1\\&&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&&\\&\frac{3}{2}&-1&\\&-1&2&-1\\&&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&&\\&\frac{3}{2}&-1&\\&&\frac{4}{3}&-1\\&&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&&\\&\frac{3}{2}&-1&\\&&\frac{4}{3}&-1\\&&&\frac{5}{4}\end{bmatrix}$. ▶

这些矩阵都是三对角矩阵, 即除对角元素及与其相邻的元素外其余元素都是零的方阵.

练习 1.4.13. 求解 $\begin{cases}x_1+x_n=0,\\x_1+x_2=0,\\x_2+x_3=0,\\\cdots\\x_{n-1}+x_n=0.\end{cases}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&&&1\\1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&&&1\\0&1&&-1\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&&&&1\\&1&&&-1\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&(-1)^n\\&&&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&&&&1\\&1&&&-1\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&(-1)^n\\&&&&1-(-1)^n\end{bmatrix}$.

n 为奇数时只有 0 解. n 为偶数时有解 $x_i=(-1)^i x_n$. ▶

练习 1.4.14. 证明用倍加变换与倍乘变换可以实现对换变换.

◀ 考虑两个向量 a,b. $(a,b)\to(a,a+b)\to(-b,a+b)\to(b,a+b)\to(b,a)$. ▶

练习 1.4.15. 证明定理 1.4.8 第二部分.

定理 1.4.8 : 任意矩阵都可以用对换行变换和倍加行变换化为阶梯形; 任意矩阵都可以用初等行变换化为行简化阶梯形.

◀ 首先用倍乘变换将主元全部变为 1, 再用倍加变换用主元消去与其处于同一列的所有元素. ▶

练习 1.4.16. 练习 1.3.8 中的数独矩阵经历哪些行变换或列变换后还是数独矩阵?

◀ 仅置换行 (列) 顺序, 且保持九个子矩阵的元素不变的行 (列) 变换. ▶

练习 1.4.17 (初等列变换在方程组上的含义)**.** 考虑方程组 $\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$. 进行下列换元, 写出 x', y' 满足的方程组. 对比原方程组, 其系数矩阵做了哪种初等变换?

1. $x' = y, y' = x$.
◀ $\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$. ▶
2. $x' = 2x, y' = y$.
◀ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 2\\2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$. ▶
3. $x' = x, y' = x + y$.
◀ $\begin{bmatrix}-1 & 2\\-1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$. ▶
4. $x' = 1 + x, y' = y$.
◀ $\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.4.18 (方程, 法向量与超平面)**.** 给定原点 O, 则空间中的点 P 与向量 OP 一一对应. 空间中所有点构成的集合称为点空间, 上述一一对应是点空间到线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的双射. 注意, 点空间与线性空间并不相同. 特别地, 空间中的点 P 也可用向量 $OP \in \mathbb{R}^3$ 表示.

两个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量垂直当且仅当其内积为零 (练习 1.2.10). 与空间中某个平面垂直的非零向量称为该平面的法向量. 考虑空间中以非零向量 $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ 为法向量的平面.

1. 给定 $p, q \in \mathbb{R}^3$, 分别对应该平面上的两个点, 证明, $\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}p = \begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}q$.

◀ 由于 $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ 为平面的法向量, 故 $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ 垂直于 $p - q$. ▶

2. 设该平面经过对应于 $p \in \mathbb{R}^3$ 的点, 令 $d = \begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}p$, 证明, 该平面是方程 $ax + by + cz = d$ 的解集.

◀ 对平面上的点 q, 由上问 q 也在 $ax + by + cz = d$ 的解集中. 反之, 对满足方程 $ax + by + cz = d$ 的 q, $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ 垂直于 $p - q$, 这说明 q 在平面上. ▶

3. 设 $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ 和 $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ 的解集平面平行, 试分析两个方程系数的关系.

◀ (这里使用的平行的定义是法向量平行. 请一并考虑平面重合的情况.) 两平面平行当且仅当向量 $\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}$ 平行. 由于是非零向量, 故这等价于存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得 $a_1 = ka_2, b_1 = kb_2, c + 1 = kc_2$. ▶

4. 设 $\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}$ 为两个不共线的非零向量,则 $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 和 $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ 的解集平面不平行,因此必相交于一条直线 l,对方程做倍加变换,证明,$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 与 $(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y+(c_1+c_2)z=d_1+d_2$ 的解集平面的交集还是直线 l.(从几何上看,倍加变换将一个平面沿相交直线旋转,因此不改变解集的交集.)

◀ 这是由于方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ (a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y+(c_1+c_2)z=d_1+d_2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$ 同解.▶

一个 m 元线性方程的解集是对应于 $\mathbb{R}^m$ 的点空间中的一个超平面,因此求解线性方程组等价于求若干超平面的交集.

练习 1.4.19. 对下列问题,将其化成 $Ax=b$,并找到所有解.

1. 考虑例 1.2.1 中的桥墩载荷问题.假设重物的重力分别为 $F_1=2, F_2=3$,放置的位置 l_1, l_2 为未知变量,桥梁长度为 5,如果两个桥墩的载荷分别为 $f_1=3, f_2=2$,求所有可能的 $\begin{bmatrix}l_1\\l_2\end{bmatrix}$.

2. 笼中有若干鸡兔,每只鸡有一个头两条腿两只翅膀,每只兔有一个头四条腿两只翅膀,笼中现有 4 个头,12 条腿,8 只翅膀,求鸡兔数目.

◀ $\begin{bmatrix}1&1\\2&4\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\12\\8\end{bmatrix}$.解得 $x=2, y=2$.▶

3. 设 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 满足 $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}$,且 A 第一列的元素之和为 2,求所有可能的 A.

◀ $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\8\\2\end{bmatrix}$.解得 $a=d-6, b=-d+10, c=-d+8$.▶

4. 求平面上直线 $y=2x+3, y=-x+5$ 的交点.

◀ $\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$.解得 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{13}{3}$.▶

5. 空间中有三个平面,分别经过点 $\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$,具有法向量 $\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}$,求这三个平面的交点 (练习 1.4.18).

◀ $\begin{bmatrix}1&3&5\\1&2&-3\\2&5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}2&5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\8\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}1&3&5&4\\1&2&-3&5\\2&5&2&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&8&-1\\1&2&-3&5\\0&1&8&-2\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}0&1&8&-1\\1&2&-3&5\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$. 无解. ▶

6. 空间中有一条经过原点的直线, 并且与向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ 垂直, 求所有直线上的点.

◀ $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. 解得 $x=z, y=-z$. ▶

7. 空间中有一个平面经过点 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, 所有与该平面垂直的向量.

◀ $\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. 解得 $x=z, y=z$. ▶

练习 1.4.20. 如果线性方程组 $Ax=b$ 和 $Cx=b$, 对任意 b 都有相同的解集, 那么 $A=C$ 成立么?

◀ 设 $Ae_i=a_i$ 为 A 的第 i 行. 由题意知 $Ce_i=a_i$, 即 C 的第 i 行与 A 相同. ▶

练习 1.4.21. 设线性映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 当 $n>m$ 时, F 是否可能是单射? 当 $n<m$ 时, F 是否可能是满射?

◀ $n>m$ 时, $Fx=0$ 必有非零解, 故 F 不单.

$n<m$ 时, 设 $a_i\in\mathbb{R}^n$ 满足 $Fa_i=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, 这里唯一的非零元在第 i 行. 由 $n<m$ 可以解出一组不全

为零的常数 k_i 使得 $k_1a_1+\cdots+k_ma_m=0$. 故在 $\mathbb{R}^m$ 中有 $\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{bmatrix}=k_1F(a_1)+\cdots+k_mF(a_m)=F(k_1a_1+\cdots+k_ma_m)=0$, 矛盾. ▶

1.5. **线性映射的运算.**

练习 1.5.1. 设 A,B,C 分别是 $3\times5,5\times3,3\times1$ 矩阵, 则 $BA,AB,BC^T,A(B+C)$ 中哪些定义良好?

◀ BA,AB. ▶

练习 1.5.2. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&-1&0\\0&2&-2\end{bmatrix}$, 求 $AB,BA,AB-BA$.

◀ $\begin{bmatrix}3&-3&3\\2&2&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&-3\\2&2&2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&-3&4\\2&0&3\\-3&-1&-1\end{bmatrix}$,

练习 1.5.3. 计算.

1. $\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}17&-6\\35&-12\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}17&-6\\35&-12\end{bmatrix}^5$.

◀ $\begin{bmatrix}3197&-1266\\7385&-2922\end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix}1&3&1\\2&2&1\\3&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&-1\\-2&-5&4\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}4&3&-3\\2&3&-2\\4&4&-3\end{bmatrix}$. ▶

5. $\begin{bmatrix}8&6&-6\\4&6&-4\\8&8&6\end{bmatrix}^6$.

◀ $\begin{bmatrix} 12160 & 12096 & -12096 \\ 8064 & 8128 & -8064 \\ 16128 & 16128 & -16064 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.5.4. 考虑下列 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换.

1. 设 $R_\theta(x) = R_\theta x$, 其中 $R_\theta = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$. 求证:

(a) R_θ 是绕原点逆时针旋转角度 θ 的变换.

◀ 考虑单位向量 $\begin{bmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \end{bmatrix}$, 这是单位向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 逆时针旋转角度 α 得到的向量. R_θ 将其变为 $\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta cos\alpha - sin\theta sin\alpha \\ sin\theta sin\alpha + cos\theta cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta+\alpha) \\ sin(\theta+\alpha) \end{bmatrix}$, 这是单位向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 逆时针旋转角度 $\theta+\alpha$ 得到的向量. ▶

(b) 分析当 θ 取何值时, 存在常数 λ 和非零向量 x, 满足 $R_\theta x = \lambda x$.

◀ 考虑方程 $\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, 或等价于 $\begin{bmatrix} cos\theta-\lambda & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$. 注意到我们可以对非零向量 x 做一个旋转将其变为 $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 a 为 x 的长度, 且旋转变换两两交换, 故不妨设 $x = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$. 代入原式得 $cos\theta = \lambda, sin\theta = 0$. 故 $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ▶

(c) 计算 R_θ^n, $n > 0$.

◀ 归纳证得 $R_\theta^n = \begin{bmatrix} cosn\theta & -sinn\theta \\ sinn\theta & cosn\theta \end{bmatrix}$. ▶

2. 设 $H_\theta(x) = H_\theta x$, 其中 $H_\theta = \begin{bmatrix} cos2\theta & sin2\theta \\ sin2\theta & -cos2\theta \end{bmatrix}$, 而 $v = \begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} sin\theta \\ -cos\theta \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的向量. 求证:

(a) $v^T w = 0, v^T v = w^T w = 1; H_\theta v = v, H_\theta w = -w$. 试分析变换 H_θ 的几何意义.

◀ 直接做矩阵乘法验证. H_θ 的几何意义是关于 v 所在直线的反射 (参见例 1.2.10,2). ▶

(b) $H_\theta^2 = I_2, H_\theta = I_2 - 2ww^T$.

◀ 直接验证. (第二条的另一种证法: 因为 v 和 w 张成了平面, 所以 H 在 v 和 w 上的作用唯一确定了线性变换 H. 验证 $H_\theta = I_2 - 2ww^T$ 满足 $H_\theta v = v, H_\theta w = -w$ 即可.) ▶

(c) $R_{-\theta} H_\phi R_\theta = H_{\phi-\theta}, H_\phi R_\theta H_\phi = R_{-\theta}$, 并分析其几何意义.

◀ 直接验证. 几何意义是明显的 (画一下一个单位向量在这些映射下的像就知道了), 这里不再赘述. ▶

3. 设 $S(x) = Sx$, 其中 $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. 设 λ 是常数, 求证: $Sx = \lambda x$ 有非零解当且仅当 $\lambda = 1$, 并求出所有的非零解; 计算 $S^k, k > 0$.

◀ $Sx=\lambda x$ 等价于 $\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}x=0$. 易见 $\lambda=1$ 时有解,$\lambda\neq 1$ 时无非零解.

$S^k=(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix})^k=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^k+k\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{k-1}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\cdots=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}$. (这里可以用二项式定理展开的原因是两项交换.) ▶

练习 1.5.5. 计算.

1. $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^2$.

◀ $\begin{bmatrix}4&&&\\&4&&\\&&4&\\&&&4\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^k$.

◀ 由于 $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^2=4I_4$, 故 $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^{2m}=4^mI_4$, $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^{2m+1}=4^mI_4\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}=4^m\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.5.6. 设 E_{ij} 是 (i,j) 元为 1, 其余元素为 0 的矩阵, 而 n 阶方阵 $J_n=\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&0&1\\&&&0\end{bmatrix}$.

1. 计算 $A=I_2+J_2, B=I_2+J_2^T, C=J_2-J_2^T$.

◀ $A=\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&\\1&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}&1\\-1&\end{bmatrix}$. ▶

2. 先计算 AB 再计算 $(AB)C$, 然后先计算 BC 再计算 $A(BC)$.

◀ $AB=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$, $(AB)C=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&1\end{bmatrix}$, $BC=\begin{bmatrix}&1\\-1&1\end{bmatrix}$, $A(BC)=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&1\end{bmatrix}$. ▶

3. 先计算 AB, AC 再计算 $AB+AC$,然后先计算 $B+C$ 再计算 $A(B+C)$.

◀ $AB=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$, $AC=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&\end{bmatrix}$, $AB+AC=\begin{bmatrix}1&2\\&1\end{bmatrix}$, $B+C=\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$, $A(B+C)=\begin{bmatrix}1&2\\&1\end{bmatrix}$.
▶

4. 计算 $AB+BC, B(A+C), (A+C)B$,三者是否相等?

◀ $AB+BC=\begin{bmatrix}2&2\\&2\end{bmatrix}$, $B(A+C)=\begin{bmatrix}1&2\\&3\end{bmatrix}$, $(A+C)B=\begin{bmatrix}3&2\\&1\end{bmatrix}$. 不相等. ▶

5. 计算 $(A+B)^2, A^2+2AB+B^2, A^2+AB+BA+B^2$,三者是否相等?

◀ $(A+B)^2=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$, $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2=\begin{bmatrix}6&4\\4&4\end{bmatrix}$, $A^2+AB+BA+B^2=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$. 仅成立 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$. ▶

6. 计算 $(AB)^2$ 与 A^2B^2,二者是否相等?

◀ $(AB)^2=\begin{bmatrix}5&3\\3&2\end{bmatrix}$, $A^2B^2=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}$. 不相等. ▶

7. 计算 $E_{13}-e_1e_3^T$, $e_1e_1^T+\cdots+e_4e_4^T$, $E_{13}E_{32}$, $E_{32}E_{13}$,其中 $e_i\in\mathbb{R}^4, E_{ij}$ 是 4 阶方阵.

◀ 0, I_4, E_{12}, 0. ▶

8. 计算 $\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}5&6\end{bmatrix}$. ▶

9. 计算 $J_4\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $J_4^T\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $J_4^2\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, J_4^4.

◀ $\begin{bmatrix}2\\3\\4\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\4\\0\\0\end{bmatrix}$, 0. ▶

10. 计算 J_n^k,其中 k 是正整数.

◀ $k<n$ 时 $J_n^k=\begin{bmatrix}&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\\&&&\\&&&\end{bmatrix}$,其中第 i 行的 1 出现的位置是 $(i,i+k)$. $k\geqslant n$ 时为 0. ▶

11. 设 $P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{bmatrix}$,计算 PJ_4+J_4P, $(P+I_4)(2P+3I_4)-(2P+3I_4)(P+I_4)$.

◀ $\begin{bmatrix}1&3&4&5\\1&4&8&13\\1&5&13&26\\0&1&4&10\end{bmatrix}$, 0(直接展开即可). ▶

12. 设 $R=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$, $T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&1\end{bmatrix}$,计算 SRT, SR^TT.

◀ $\begin{bmatrix}1&0\\\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.5.7. 设 2 阶矩阵 B 的 $(1,2)$ 元增加 1,对下列矩阵讨论该矩阵的哪行哪列一定不变,并举例说明所有其他行列确实可以变化.

1. $A+B$.

◀ 第 2 行和第 1 列不变. ▶

2. AB.

◀ 第 1 列不变. ▶

3. BA.

◀ 第 2 行不变. ▶

4. B^2.

◀ 都可以变.▶

练习 1.5.8. 判断对错.

1. 如果 B 的第一列等于第三列,则 AB 的第一列等于第三列.

◀ 正确. 设 B 的列为 $x_1,\cdots,x_m$,则 $B=\begin{bmatrix}x_1&\cdots&x_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}$. B 的第一列等于第三列当且仅当 $B=\begin{bmatrix}x_1&\cdots&x_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&1&&&\\&1&&&&\\&&0&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}1&&1&&&\\&1&&&&\\&&0&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}$. 左乘 A 不改变这个性质.▶

2. 如果 B 的第一列等于第三列,则 BA 的第一列等于第三列.

◀ 错误.▶

3. 如果 A 的第一行等于第三行,则 ABC 的第一行等于第三行.

◀ 正确. 将第 1 问的解答取转置即得. ▶

练习 1.5.9. 求所有满足条件的矩阵 B.

1. 对任意 3 阶方阵 $A, BA = 4A$.

◀ 取 $A = I_3$, 知 $B = 4I_3$. ▶

2. 对任意 3 阶方阵 $A, BA = 4B$.

◀ 取 $A = I_3$, 知 $B = 0$. ▶

3. 对任意 3 阶方阵 A, BA 的每一行都是 A 的第一行.

◀ 题目条件即 $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$. 取 $A = I_3$, 知 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

4. 对任意 3 阶方阵 A, AB 的每一行的每一个元素都是 A 的对应行的平均值.

◀ 条件即 $AB = A \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. 取 $A = I_3$, 知 $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. ▶

5. $B^2 \neq 0$, $B^3 = 0$.

◀ $B = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P$, 其中 P 是某个可逆矩阵. ▶

6. $B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} B$.

◀ 条件等价于 $B \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} B$. 设 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 代入解得 B 形如 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.5.10. 给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. p, q, r 取何值时, 有 $AB = BA$?

◀ 只需考虑 $\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix}$. 解得 $q = 0, p = r$. ▶

2. z 取何值时, 有 $BC = CB$?

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价于 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 或 $z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 这恒成立. ▶

3. p, q, r, z 取何值时, 有 $ABC = CAB$?

◀ 与上面类似地, 提出 C 的因子 z, 原式等价于 $z \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 解得 $z = 0$ 或 $q = 0, p = r$. ▶

练习 1.5.11. 证明:

1. 设 n 维向量 x 的每个分量都是 1,则 n 阶方阵 A 的各行元素之和为 1 当且仅当 $Ax = x$.

◀ 直接计算.▶

2. 若 n 阶方阵 A, B 的各行元素之和均为 1,则 AB 的各行元素之和也均为 1.

◀ 由第 1 题,$ABx = Ax = x$.▶

3. 若 n 阶方阵 A, B 的各列元素之和均为 1,则 AB 的各行元素之列也均为 1.

◀ 第 2 题的结果取转置即得.▶

练习 1.5.12. 证明命题 1.5.17.

命题 1.5.17. 矩阵的乘法还满足如下运算法则:

1. 对加法的分配律:$(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$.
2. 对数乘的交换律:$k(AB) = (kA)B = k(AB)$.

◀ 可以用以下方法证明: (1) 利用线性映射对应的性质直接得到矩阵对应的性质; (2) 直接验证两边矩阵对应位置的元素相同; (3) 将矩阵乘法写成向量乘法的形式. ▶

练习 1.5.13. 证明上三角矩阵对加法, 数乘, 乘法封闭, 即: 设 U_1, U_2 是 n 阶上三角矩阵,k 是实数,则 $U_1 + U_2, kU_1, U_1U_2$ 都是上三角矩阵. 此外,U_1U_2 的对角元素是 U_1, U_2 对应的对角元素的乘积.

◀ 直接写出矩阵元素进行验证.▶

练习 1.5.14. 设 A 是 n 阶上三角矩阵,求证:$A^n = 0$ 当且仅当 A 是严格上三角矩阵.

◀$\Leftarrow$: 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & * & * & \cdots & * & * \\ & 0 & * & \cdots & * & * \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & * & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$ 为严格上三角矩阵,则

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & \cdots & & * \\ & 0 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & * \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \cdots$$

归纳可得 A^k 的前 k 列 (或后 k 行) 均为 0, 故 $A^n = 0$.

$\Rightarrow$: 若 A 不是严格上三角矩阵,则 A 的对角线上存在某个元素 $a_{ii} \neq 0$. A^k 对应位置的元素为 $a_{ii}^k \neq 0$. ▶

练习 1.5.15. 证明,如果 n 阶方阵 A 满足 $A^n = 0$,则 $(I^n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = I_n$.

◀ 展开上式左边得到 $I_n - A^n$. ▶

练习 1.5.16. 对 n 阶方阵 A, 考虑集合 $Com(A) = \{n \text{ 阶方阵 } B | AB = BA\}$.

1. 求证: $Com(A)$ 是所有 n 阶方阵的集合当且仅当 A 是数量阵 kI_n.

◀ $\Leftarrow$: 所有 n 阶方阵均与数量阵交换.

$\Rightarrow$: 设 $A=(a_{ij})$ 以及 E_{ij} 为 (i,j) 处为 1, 其他元素为 0 的矩阵. 由于任意 n 阶方阵均为诸 E_{ij} 的线性组合, 故我们应该对所有的 i,j 考虑方程 $AE_{ij}=E_{ij}A$. $i=j$ 时, $AE_{ii}=E_{ii}A$. 对 $k\neq i$ 考虑 $AE_{ii}=E_{ii}A$ 两边的 (i,k) 位置的元素, 我们得到 $a_{ik}=0$. $i\neq j$ 时, 考虑 $AE_{ij}=E_{ij}A$ 两边的 (i,j) 位置的元素, 我们得到 $a_{ii}=a_{jj}$. 故 A 是数量阵. ▶

2. 设 $A=diag(d_i)$, d_i 互不相同, 求 $Com(A)$.

◀ 设 $B=(b_{ij})$ 满足 $AB=BA$, 我们得到 $d_ib_{ij}=b_{ij}d_j$. 故 $i\neq j$ 时 $b_{ij}=0$, 即 B 为对角阵. ▶

3. 求证: 任取 $B,C\in Com(A)$, 都有 I_n, $kB+lC$, $BC\in Com(A)$.

◀ 直接验证满足定义. ▶

4. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, 求证: $J_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\in Com(A)$, 而且

$$Com(A)=\{k_1I_3+k_2J_3+k_3J_3^2|k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}\}.$$

◀ 与 A 交换等价于与 $A-I=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 交换. 设 $B=(b_{ij})$ 满足 $AB=BA$, 或等价于 $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}B=B\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 我们得到 $b_{11}=b_{22}=b_{33}$, $b_{12}=b_{23}$, $b_{21}=b_{31}=b_{32}=0$, 故 $B=b_{11}I_3+b_{12}J_3+b_{13}J_3^2$. 且形如这样的 B 均与 A 交换. ▶

练习 1.5.17. 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$, 求 A^k, 其中 k 是正整数.

◀ 我们给出 $k\geqslant 2$ 时的情况. $A^k=(\lambda I_3+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix})^k=\lambda^kI_3+k\lambda^{k-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{(k-1)k}{2}\lambda^{k-2}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{(k-1)k}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.5.18. 设 A 是 n 阶方阵, 求证: $A+A^T$, AA^T, A^TA 都是对称矩阵, 而 $A-A^T$ 是反对称矩阵.

◀ $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T$, $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$, $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$, $(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$. ▶

练习 1.5.19. 求证:

1. 任意方阵 A 都唯一地表为 $A=B+C$, 其中 B 是对称矩阵, C 是反对称矩阵.

◀ 假设我们已经得到了这样的分解 $A = B + C$,转置得 $A^T = B^T - C^T$.联立两式解得 $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$.检验知 B, C 满足题目中的条件.由于已经显式给出了 B, C 的表达式,故它们是唯一的. ▶

2. n 阶方阵 A 是反对称矩阵当且仅当对任意 n 维列向量 x,都有 $x^T Ax = 0$.

◀ ⇒: 1 阶矩阵 $x^T Ax$ 等于自身的转置.$x^T Ax = (x^T Ax)^T = -x^T Ax$,故 $x^T Ax = 0$.

⇐: 设 $A = (a_{ij})$.取 x 为第 i 个分量为 1,其余位置为 0 的列向量,$x^T Ax = 0$ 给出 $a_{ii} = 0$.取 y 为第 i, j 个分量为 1,其余位置为 0 的列向量,$y^T Ay = 0$ 给出 $a_{ij} + a_{ji} = 0$. ▶

3. 设 A, B 是 n 阶对称矩阵,则 $A = B$ 当且仅当对任意 n 维列向量 x,均有 $x^T Ax = x^T Bx$.

◀ ⇒: 显然.

⇐: 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$.取 x 为第 i 个分量为 1,其余位置为 0 的列向量,$x^T Ax = x^T Bx$ 给出 $a_{ii} = b_{ii}$.取 y 为第 i, j 个分量为 1,其余位置为 0 的列向量,$y^T Ay = y^T By$ 给出 $a_{ij} = b_{ij}$. ▶

练习 1.5.20. 设 A, B 是同阶对称矩阵.求证: AB 是对称矩阵当且仅当 $AB = BA$.

◀ ⇒: $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$.

⇐: $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$. ▶

练习 1.5.21. 设 A 是实对称矩阵,如果 $A^2 = 0$,求证: $A = 0$.

◀ 对任意的列向量 x, $0 = x^T A^2 x = x^T A^T Ax = (Ax)^T (Ax)$,故列向量 $Ax = 0$.这说明 $A = 0$. ▶

练习 1.5.22 (矩阵的迹). m 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的对角元素的和 $\sum_{i=1}^m a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}$ 称为它的迹,记作 $trace(A)$.验证下列性质.

1. 对任意同阶方阵 A, B, $trace(A + B) = trace(A) + trace(B)$.

◀ 验证每个分量相等. ▶

2. 对任意方阵 A 与实数 k, $trace(kA) = ktrace(A)$.

◀ 验证每个分量相等. ▶

3. 对 m 阶单位矩阵 I_m, $trace(I_m) = m$.

◀ 直接计算. ▶

4. 对任意方阵 A, $trace(A) = trace(A^T)$.

◀ 直接计算. ▶

5. 设 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$,则 $trace(A^T B) = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$.如果 A 是 m 阶方阵呢?

◀ 直接计算. ▶

6. 设 v, w 是 m 维向量,则 $trace(v^T w) = trace(wv^T)$.

◀ 直接计算. ▶

7. 设 A, B 分别是 $m \times n, n \times m$ 阶矩阵,则 $trace(AB) = trace(BA)$.

◀ 直接写出矩阵的元素进行计算.

这里额外给出一种证法 (初学者不妨暂时略过): 设 V, W 为 n, m 维线性空间, $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V, U)$. 我们需要证明 $\mathrm{trace}(fg) = \mathrm{trace}(gf)$. 只需注意到有以下的交换图表

$$\begin{tikzcd}
& V \otimes U^* \otimes U \otimes V^* \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{ev}_U \otimes \mathrm{id}_{V^*}"] & & U \otimes V^* \otimes V \otimes U^* \arrow[dd, "\mathrm{id}_U \otimes \mathrm{ev}_V \otimes \mathrm{id}_{U^*}"] \\
\mathrm{Hom}(U,V) \otimes \mathrm{Hom}(V,U) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[rr] \arrow[dd, "\circ"] & & \mathrm{Hom}(V,U) \otimes \mathrm{Hom}(U,V) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dd, "\circ"] & \\
& V \otimes V^* \arrow[dd, "\mathrm{ev}_{V^*}"] & & U \otimes U^* \arrow[dd, "\mathrm{ev}_{U^*}"] \\
\mathrm{End}(V) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dd, "\mathrm{tr}"] & & \mathrm{End}(U) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dd, "\mathrm{tr}"] & \\
& \mathbb{F} \arrow[rr, equal] & & \mathbb{F} \\
\mathbb{F} \arrow[ur, equal] \arrow[rr, equal] & & \mathbb{F} \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

图中两个横向的自然同构由张量积的交换约束给出. ▶

8. 设 A, B 是任意 m 阶方阵, 则 $AB - BA \neq I_m$.

◀ 两边取迹即得. ▶

练习 1.5.23 (差分矩阵与求导)**.** 在微积分中, $f(x)$ 的导数 $f'(x) \approx \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$. 对数列 a_n 的相邻两项做减法, 可以看作是一种离散导数 $\frac{a_{n+1}-a_n}{1}$. 两者具有某种共性, 令 D 为 100 阶向前差分矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 而 $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{100} \end{bmatrix}$. 求证:

1. 若 a_k 是关于 k 的 3 次多项式, 则除第 1 个分量外, Da 的第 k 个分量是关于 k 的 2 次多项式.

◀ 设 $a_k = ak^3 +$ 低次项. $(Da)_k = a_k - a_{k-1} = ak^3 - a(k-1)^3 +$ 低次项 $=$ 低次项. 这里的低次项意指多项式中次数不大于 2 的部分. ▶

2. 若 $a_k = e^k$, 则除第 1 个分量外, $\frac{e}{e-1}Da$ 的第 k 个分量是 e^k.

◀ $(\frac{e}{e-1}Da)_k = \frac{e}{e-1}(e^k - e^{k-1}) = e^k$. ▶

练习 1.5.24. 如图 1.5.2 的电路包含 5 个顶点, 电势分别为 v_i, $1 \leq i \leq 5$, $i.j$ 两点之间电阻为 $r_{ij} \neq 0$, 从顶点 i 到 j 的电流为 c_{ij} 又记 $c_{ii} = 0$. 令电势矩阵为 $V = diag(v_1, \cdots, v_5)$, 电流矩阵为 $C = [c_{ij}]$, 电导矩阵为 $R = [\frac{1}{r_{ij}}]$. 求证 $C = VR - RV$.

练习 1.5.25. 图 1.5.3 中的图含有四个顶点 v_1, v_2, v_3, v_4, 顶点之间有边连接. 对称矩阵 A 称为该图的邻接矩阵: 如果 v_i, v_j 之间有边, 则 A 的 i, j 元是 1; 如果 v_i, v_j 之间无边, 则 A 的 i, j 元是 0.

1. 从 v_3 出发,三次通过连线,最后回到 v_3 的方法有几种?

◀0 种.▶

2. 求矩阵 A^3 的 $(3,3)$ 元.

◀0.▶

3. 分析 A^n 的 i,j 元的意义.

◀ 从 i 出发,n 次通过连线到达 j 的方法的个数.▶

练习 1.5.26. 设 v^T, w^T 是 k 维行向量,A 是 $m \times n$ 矩阵.

1. 如果矩阵乘积 v^TA 良定义,需要满足什么条件?

◀v^T 的列数等于 A 的行数,即 $k = m$.▶

2. 对任意常数 $a, b \in \mathbb{R}$,证明 $(av^T + bw^T)A = av^TA + bw^TA$.

◀ 分配律. ▶

3. 把 $2a^T + 3b^T + 4c^T$ 写成一个行向量和矩阵的乘积.提示:类比于矩阵乘列向量是矩阵的列的线性组合,行向量乘矩阵是矩阵的行的线性组合.

◀$2a^T + 3b^T + 4c^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^T \\ b^T \\ c^T \end{bmatrix}$. ▶

4. 求矩阵 A,使得 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$.

◀ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.注意矩阵 A 的 (i,j) 元即为 x_iy_j 的系数. ▶

5. 求矩阵 A,使得 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4xy + 5y^2$.这样的 A 是否唯一?

◀$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 5 \end{bmatrix}$,其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 是和为 4 的常数.不唯一.▶

6. 求 3 阶对称矩阵 A,使得对任意非零 3 维向量 v,都有 $v^TAv > 0$.

◀ 例: $A = I_3$. ▶

练习 1.5.27. 由标准坐标向量 e_i 定义 $E_{ij} = e_ie_j^T$,它是 (i,j) 元为 1,其他元素为 0 的矩阵.

1. 证明,当 $j \neq k$ 时,$E_{ij}E_{kl} = 0$.

◀ 直接验证. ▶

2. 对任意矩阵 A,求向量 v 使得 Av 是 A 的第 i 列.

◀$v = e_i$. ▶

3. 对任意矩阵 A,求向量 v 使得 v^TA 是 A 的第 i 行.

◀$v = e_i$. ▶

4. 对任意矩阵 A,证明,$e_i^TAe_j$ 为 A 的 (i,j) 元.

◀ 直接验证. ▶

5. 对 $e_k \in \mathbb{R}^m$ 证明,$\sum_{k=1}^m e_ke_k^T = I_m$.

◀ 直接验证. ▶

6. (阅读) 计算矩阵乘积 AB 的 (i,j) 元的另一种方法: 设 A 有 m 列, B 有 m 行, 则

$$e_i^T ABe_j = e_i^T AI_m Be_j = ei^T A(\sum_{k=1}^m e_k e_k^T) Be_j = \sum_{k=1}^m (e_i^T Ae_k)(e_k^T Be_j).$$

练习 1.5.28. 注意 m 维列向量是 $m \times 1$ 矩阵.

1. 对 $v \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{R}, kv, vk$ 是否可以看作矩阵乘法?

◀ 是的. 分别可以看作以 m 阶标量阵 kI_m 左乘和以 1 阶标量阵 kI_1 右乘. ▶

2. 对 $v \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n, vw^T$ 是否良定义? 如果是, 乘积有几行几列?

◀ 是的. 这是一个 $m \times 1$ 矩阵与一个 $1 \times n$ 矩阵的乘法. 乘积是 $m \times n$ 矩阵. ▶

3. 求 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 的第 $(12,7)$ 元.

◀48. ▶

4. 求 v, w, 使得 $vw^T = \begin{bmatrix} (-1)^{(i+j)} \end{bmatrix}$.

◀$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^m \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{bmatrix}$. ▶

5. 求 v, w, 使得 $vw^T = \begin{bmatrix} \frac{i}{j} \end{bmatrix}$.

◀$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}$. ▶

6. 令 $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix}$. 证明 $AB = \sum_{i=1}^n a_i b_i^T$.

◀ 使用分块矩阵的乘法. 当然也可以直接验证. ▶

1.6. **可逆矩阵.**

练习 1.6.1. 计算下列矩阵乘法.

1. $\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$.

◀$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}^k$, k 是正整数.

◀ $\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}^{4m} = I_4, \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}^{4m+1} = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}^{4m+2}$

$= \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}^{4m+3} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

◀ $(ad-bc)I_4$. ▶

5. $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ -1 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 3 & 3 & 1 & \\ & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.2. 求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (I_3 + \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix})^{-1} = I_3 - \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ ▶

4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 不可逆, 求 A.

◀ 用第 3 行消掉前两行的第 3 个元素, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 13 & a-4 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. $a = 4$. ▶

练习 1.6.4. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, 解方程 $Ax = e_i, i = 1, 2, 3$, 并求 A^{-1}.

◀ $Ax=e_1$ 的解为 $x_1=\begin{bmatrix}1\\-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{9}\end{bmatrix}$, $Ax=e_2$ 的解为 $x_2=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{3}\\-\frac{5}{18}\end{bmatrix}$, $Ax=e_3$ 的解为 $x_3=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$, $A^{-1}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \\ -\frac{1}{9} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.5. 对 $\begin{bmatrix}A & I_n\end{bmatrix}$ 做初等行变换, 求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix}2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1\\ & & -1 & 2\end{bmatrix}$.

◀ $$\begin{bmatrix}2 & -1 & & & 1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & 1 & \\ & & -1 & 2 & & & & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & 1 & \\ & & -1 & 2 & & & & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & -1 & 2 & & & & 1\end{bmatrix}\to$$
$$\begin{bmatrix}2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\to$$
$$\begin{bmatrix}2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & & \frac{8}{15} & \frac{16}{15} & \frac{8}{5} & \frac{4}{5}\\ & & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5}\\ & & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & & & 1 & & & \\ & 1 & & & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ & & 1 & & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5}\\ & & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\to$$
$\begin{bmatrix}1 & & & & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ & 1 & & & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ & & 1 & & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5}\\ & & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$. 逆矩阵是 $\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1\\ & & -1 & 2\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}4 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}$.

$\blacktriangleleft$ $\begin{bmatrix} & & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \end{bmatrix}$. $\blacktriangleright$

4. $\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$.

$\blacktriangleleft$ $\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$. $\blacktriangleright$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & & \\ 3 & 4 & & \\ & & 1 & 2 \\ & & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$\blacktriangleleft$ $\begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ & & -2 & 1 \\ & & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. $\blacktriangleright$

6. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

$\blacktriangleleft$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. $\blacktriangleright$

7. $\begin{bmatrix} 1 & -a & & \\ & 1 & -b & \\ & & 1 & -c \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & a & ab & abc \\ & 1 & b & bc \\ & & 1 & c \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

8. $\begin{bmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & -a & (-a)^2 & \cdots & (-a)^{n-1} \\ & 1 & -a & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & (-a)^2 \\ & & & \ddots & -a \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.6. 说明 $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 可逆, 并计算其逆.

◀ 对角占优矩阵可逆. 其逆矩阵为 $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.7. 求 $A = \begin{bmatrix} & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \\ a_n & & & \end{bmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 $a_i \neq 0$.

◀ $\begin{bmatrix} & & & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1}^{-1} & \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.8. 求下列矩阵方程的解: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ $X=\begin{bmatrix}-7&-5\\-9&-6\\12&7\end{bmatrix}$. (回忆对可逆方阵 A 和矩阵 B, 对 $\begin{bmatrix}A&B\end{bmatrix}$ 做行变换把 A 变成 I, 这时 B 就被变成了 $A^{-1}B$, 因为这个行变换对应左乘矩阵 A^{-1}: $\begin{bmatrix}A&B\end{bmatrix}\to A^{-1}\begin{bmatrix}A&B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{-1}A&A^{-1}B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&A^{-1}B\end{bmatrix}$. 同样地, 对 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ 做列变换把 A 变成 I, 这时 B 就被变成了 BA^{-1}, 这个列变换对应右乘矩阵 A^{-1}: $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}A^{-1}=\begin{bmatrix}AA^{-1}\\BA^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\BA^{-1}\end{bmatrix}$. 本题为前一种情况.) ▶

练习 1.6.9. 证明二阶方阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ 可逆当且仅当 $d=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$. 此时, $A^{-1}=\frac{1}{d}\begin{bmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{bmatrix}$.

◀ $\Leftarrow$: 直接验证 $A^{-1}=\frac{1}{d}\begin{bmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{bmatrix}$ 是 A 的左右逆.

$\Rightarrow$: 前面已证. ▶

练习 1.6.10. 证明, 有一列元素 (或一行元素) 全为零的方阵不可逆.

◀ 仅证明第一个论述. 矩阵 A 的第 k 列元素全为零等价于 Ae_k=0. 左乘不改变这个性质, 故 A 没有左逆元. ▶

练习 1.6.11. 证明, 对角元素全非零的上三角矩阵 U 可逆, 其逆矩阵 U^{-1} 也是上三角矩阵, 且 U^{-1} 的对角元素是 U 的对角元素的倒数.

◀ 对 $\begin{bmatrix}U&I_n\end{bmatrix}$ 做初等行变换即得: $\begin{bmatrix}u_{11}&*&\cdots&*&1&&&\\&u_{22}&\ddots&\vdots&&1&&\\&&\ddots&*&&&\ddots&\\&&&u_{nn}&&&&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}u_{11}&&&&1&*&\cdots&*\\&u_{22}&&&&1&\ddots&\vdots\\&&\ddots&&&&\ddots&*\\&&&u_{nn}&&&&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&&&&u_{11}^{-1}&*&\cdots&*\\&1&&&&u_{22}^{-1}&\ddots&\vdots\\&&\ddots&&&&\ddots&*\\&&&1&&&&u_{nn}^{-1}\end{bmatrix}$.

(另解: 设 $U=\begin{bmatrix}u_{11}&*&\cdots&*\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&*\\&&&u_{nn}\end{bmatrix}$, 其中 $*$ 表示我们不具体写出的元素, 对角元 $u_{ii}\neq 0$, $i=$

$1,\cdots,n$. 我们有 $U=\begin{bmatrix}u_{11}&&&\\&\ddots&&\\&&\ddots&\\&&&u_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&*&\cdots&*\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&*\\&&&1\end{bmatrix}$. 注意到矩阵 $N=\begin{bmatrix}0&*&\cdots&*\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&*\\&&&0\end{bmatrix}$ 满足 $N^n=0$, 故 $I=I+N^n=(I+N)(I-N+N^2+\cdots+(-N)^{n-1})$, 从而 $I+N$ 可逆且 $(I+N)^{-1}=I-N+N^2+\cdots+(-N)^{n-1}$ 也是对角元为 1 的上三角阵. 故 $U=\begin{bmatrix}u_{11}&&&\\&\ddots&&\\&&\ddots&\\&&&u_{nn}\end{bmatrix}(I+N)$ 可逆且 $U^{-1}=(I+N)^{-1}\begin{bmatrix}u_{11}^{-1}&&&\\&\ddots&&\\&&\ddots&\\&&&u_{nn}^{-1}\end{bmatrix}$ 的对角线元素是 U 的对角线元素的倒数.) ▶

练习 1.6.12. 是否只有方阵才有可能可逆? 设 A 是 $m\times n$ 矩阵.

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$, 能否找到 B,C 使得 $AB=I_2, CA=I_3$?

◀ 可以找到 B. 设 $B=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{bmatrix}$, 易见 $AB=\begin{bmatrix}x_1+2x_2+3x_3&y_1+2y_2+3y_3\\4x_1+5x_2+6x_3&4y_1+5y_2+6y_3\end{bmatrix}=I_2$ 有无穷多解. 同样地, 设 $C=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{bmatrix}$, 易见 $CA=\begin{bmatrix}x_1+4y_1&2x_1+5y_1&3x_1+6y_1\\x_2+4y_2&2x_2+5y_2&3x_2+6y_2\\x_3+4y_3&2x_3+5y_3&3x_3+6y_3\end{bmatrix}$ 无解, 故不存在这样的 C. ▶

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{bmatrix}$, 能否找到 B,C 使得 $AB=I_2, CA=I_3$?

◀ 均不能. 方法同上. ▶

3. 设 $CA=I_n$, 证明 $Ax=0$ 只有零解. 此时 m,n 之间有何种关系?

◀ $Ax=0$ 两边左乘 C 知 $CAx=0$, 即 $I_nx=0, x=0$. 解方程知此时有 $m\geq n$. ▶

4. 设 $AB=I_m$, 证明 $A^Tx=0$ 只有零解. 此时 m,n 之间有何种关系?

◀ 上一题的解答取转置即得. 此时有 $m\leq n$. ▶

5. 设 $AB=I_m, CA=I_n$, 证明 $m=n$ 且 $B=C$; 由此可知, 可逆矩阵一定是方阵.

◀ 前两问给出了 $m=n$. 我们有 $B=I_nB=CAB=CI_n=C$. ▶

6. 如果 $m\neq n$, 那么 $\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n$ 之间是否存在线性双射?

◀ 由上一问知不存在. ▶

练习 1.6.13. 如果 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=I_n$, 判断 A,B 是否可逆.

◀ 由于齐次线性方程组 $Bx=0$ 只有零解, 故 B 可逆, 从而 A 也可逆. ▶

练习 1.6.14. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.

1. 求上述矩阵对应的初等行, 列变换.

◀ A: 把第 2 行加到第 1 行; 把第 1 列加到第 2 列;
B: 把第 3 行加到第 1 行; 把第 1 列加到第 3 列;
C: 把第 3 行加到第 2 行; 把第 2 列加到第 3 列;
D: 第 1 行乘 2; 第 1 列乘 2;
P: 互换第 2, 3 行; 互换第 2, 3 列. ▶

2. 从行变换的角度看, 是否一定有 $AB=BA$? 如果否, $AB-BA$ 从行变换的角度意味着什么?

◀ 是的. 把第 2 行加到第 1 行和把第 3 行加到第 1 行显然可以交换. ▶

3. 从行变换的角度看, 是否一定有 $AC=CA$? 如果否, $AC-CA$ 从行变换的角度意味着什么?

◀ 否. 把第 3 行加到第 1 行. ▶

4. 从行变换的角度看, 是否一定有 $BC=CB$? 如果否, $BC-CB$ 从行变换的角度意味着什么?

◀ 是的. 把第 3 行加到第 1 行和把第 3 行加到第 2 行显然可以交换. ▶

5. 从行变换的角度看, D 是否和 A,B,C 可交换? 计算 $DAD^{-1}, DBD^{-1}, DCD^{-1}$.

◀ D 与 A,B 不交换, D 与 C 交换. $DAD^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $DBD^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $DCD^{-1}=C$.
▶

6. 从行变换的角度看, P 是否和 A,B,C 可交换? 计算 $PAP^{-1}, PBP^{-1}, PCP^{-1}$.

◀ P 与 A,B,C 都不交换. $PAP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $PBP^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $PCP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$. ▶

7. 对三阶方阵 X, $(AX)B$ 和 $A(XB)$ 对 X 分别做了何种行, 列变换?

◀ 先把第 2 行加到第 1 行, 再把第 1 列加到第 3 列; 先把第 1 列加到第 3 列, 再把第 2 行加到第 1 行. ▶

8. 对任意矩阵 X, 先做初等行变换, 再做初等列变换, 其结果是否等于先做该初等列变换, 再做该初等行变换? 这对应着矩阵乘法的什么性质?

◀ 是的. 结合律. ▶

练习 1.6.15. 设矩阵 A 和 B 左相抵. 求证:

1. 如果 A 的第一列全是零, 则 B 的第一列全是零.

◀ A 的第一列全是零等价于 $A\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质. ▶

2. 如果 A 的所有列都相同, 则 B 的所有列都相同.

◀ A 的所有列都相同等价于 $A\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质. ▶

3. 如果 A 的第一列是第二列与第三列的和, 则 B 的第一列也是第二列与第三列的和.

◀ A 的第一列是第二列与第三列的和等价于 $A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质. ▶

4. 如果 A 的第一列和第二列不成比例, 则 B 的第一列和第二列也不成比例.

◀ 我们考虑其逆否命题. A 的第一列和第二列成比例等价于存在常数 k_1, k_2 使得 $A\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质. ▶

练习 1.6.16. 设有 M_1, M_2, M_3 三个城市, 城市之间有人口迁移. 定义矩阵 A, 其 (i,j) 元 a_{ij} 为人在一年中从 A_j 迁移到 A_i 的概率. 注意, A 的每个元素都在 $0,1$ 之间, 且 A 的每一列的元素之和都是 1.

1. 设今年三个城市的人口分别是 x_1, x_2, x_3, 证明明年它们的预期人口分别是 $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 的三个分量.

◀ 直接验证. ▶

2. 人口迁移满足什么条件时, A 为列对角占优矩阵 (行对角占优矩阵的转置)? 人口迁移满足什么条件时, A 为行对角占优矩阵? 考虑现实生活中的情形, 讨论这些假设是否合理.

◀ 一半以上人口留在原城市; 人口留在本城的概率大于其他城市迁往本城的概率之和. ▶

3. 如果把矩阵对角占优定义中的大于号换成大于等于号, 则称该矩阵为弱对角占优矩阵. 证明 $A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 弱对角占优, 且可逆, 并求其逆矩阵.

◀ 显然 A 弱对角占优. $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. ▶

4. 对任意 n 阶方阵, 设它有 $n-1$ 行都是对角占优, 仅有 1 行弱对角占优, 该矩阵可逆吗?

◀ 不一定. 例: $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.17. 设 A 是 n 阶方阵.

1. 对任意两个多项式 $p(x), q(x)$, 是否一定有 $p(A)q(A) = q(A)p(A)$?

◀ 是的. 直接展开. (由于多项式中只出现矩阵 A, 故乘法交换律成立.) ▶

2. 证明, 所有形如 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ & a & b \\ & & a \end{bmatrix}$ 的矩阵全都彼此交换.

◀ 这是由于每个 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ & a & b \\ & & a \end{bmatrix} = aI_3 + b\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}^2$ 均为 $\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}$ 的多项式. ▶

3. 设 $f(x) = p(x) + q(x), g(x) = p(x)q(x)$, 证明, $f(A) = p(A) + q(A), g(A) = p(A)q(A)$.

◀ 只证后者. 设 $g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i x^i$, $p(x) = \sum_{i=1}^{n_1} p_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n_2} q_i x^i$, 我们有 $g_i = \sum_{1\le i_1\le n_1, 1\le i_2\le n_2, i_1+i_2=i} p_{i_1}q_{i_2}$. 为验证 $g(A) = p(A)q(A)$. 将等式右边展开并比较两边 A 各幂次的系数. 建议想要写清楚的同学使用数学归纳法. (回忆我们对多项式 $g(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ 定义 $g(A) = a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 I$, 当 $g(x) = p(x)q(x)$ 时, 你需要论证 $g(A) = p(A)q(A)$. 证明的方法是比较两边多项式的系数. 这并不是平凡的, 因为矩阵的运算律与多项式的运算律不完全相同, 矩阵乘法没有交换律. 例如对 $p(x,y) = x$, $q(x,y) = y$, $g(x,y) = p(x,y)q(x,y)$, $h(x,y) = q(x,y)p(x,y)$, 对二元多项式我们有 $g = h$, 但对矩阵 A, B 不一定有 $g(A,B) = h(A,B)$. 这里成立的原因 (大致) 是多项式中只含有 A 时交换律也是成立的.) ▶

4. 求 A 使得 $A + I_n, A - I_n$ 均不为零, 但是 $A^2 - I_n = 0$.

◀ 例: $\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$. ▶

5. 设 $A^2 - I_n = 0$, 证明, 任何 n 维向量 v 都存在分解式 $v = x + y$, 满足 $(A - I_n)x = (A + I_n)y = 0$.

◀ $v = \frac{A+I_n}{2}v + \frac{-(A-I_n)}{2}v$. ▶

6. 设 $A^3 = 0$, 证明 $A + I_n$ 与 $A - I_n$ 都可逆, 并求 $p(x), q(x)$ 使得 $p(A), q(A)$ 分别为其逆.

◀ $I_3 = A^3 + I_3 = (A + I)(A^2 - A + I_3)$; $-I_3 = A^3 - I_3 = (A - I)(A^2 + A + I_3)$. (注意到对任意的 $\lambda \neq 0$, 同样的论证给出 $A - \lambda I_n$ 可逆.) ▶

练习 1.6.18. 证明, 如果 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 则 $I_n - 2A$ 可逆.

◀ 我们需要用 A 的多项式表示 $(I_n - 2A)^{-1} = -\frac{1}{2}(A - \frac{1}{2}I_n)^{-1}$. 这里为了带余除法的简便等价地考虑 A 的首一多项式. 做多项式的带余除法, $0 = A^2 - A = A(A - \frac{1}{2}I_n) - \frac{1}{2}A = (A - \frac{1}{2}I_n)(A - \frac{1}{2}I_n) - \frac{1}{4}I_n$. 这说明 $(A - \frac{1}{2}I_n)^{-1}$ 从而 $I_n - 2A$ 可逆并给出其逆. (注意到若矩阵 A 满足多项式方程 $f(A) = 0$, 则对满足 $f(\lambda) \neq 0$ 的任意的 λ, 同样的带余除法 (即 $f(A) = g(A)(A - \lambda I_n) + hI_n$) 给出 $A - \lambda I_n$ 可逆, 及其逆 $(= -\frac{1}{h}g(A))$ 作为 A 的次数小于 f 的多项式. 如果 A 是一个上三角阵, 方程 $f(A) = 0$ 对 A 的对角元给出了什么限制, 导致 $A - \lambda I_n$ 可逆?) ▶

练习 1.6.19. 如果一个 n 阶方阵从 $(1,n)$ 元到 $(n,1)$ 元的对角线下的所有元素均为零,则称为西北矩阵.类似地,可以定义东南矩阵.如果 B 是西北矩阵,那么 B^T,B^2,B^{-1} 是什么矩阵?西北矩阵和东南矩阵的乘积是什么矩阵?

◀ B^T 是西北矩阵, B^{-1} 是东南矩阵.西北矩阵和东南矩阵的乘积是东北矩阵. ▶

练习 1.6.20. 1. 求可逆矩阵 A,B,使得 $A+B$ 不可逆.

◀ 例: $A=I_n,B=-I_n$.▶

2. 求不可逆矩阵 A,B,使得 $A+B$ 可逆.

◀ 例: $A=\begin{bmatrix}1&\\&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&\\&1\end{bmatrix}$.▶

3. 求 3 阶不可逆矩阵 A,使得对任意 $k>0,A+kI_3$ 都对角占优.

◀ $A=0$. ▶

练习 1.6.21. 求所有三阶矩阵 A,满足 $A^2=I_3$,且 A 的每个元素只能是 0 或 1.

◀ $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}$.▶

练习 1.6.22. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$ 是对称矩阵,通过"对称化简"求其逆矩阵:

1. 将 A 的第一行的二倍从第二行中减去,第一行的三倍从第三行中减去.这对应哪个初等矩阵 E_1? E_1^T 对应的列变换是什么?计算 E_1A 和 $A_1=E_1AE_1^T$.

◀ $E_1=\begin{bmatrix}1&&\\-2&1&\\-3&&1\end{bmatrix}$. $E_1^T=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$ 对应的列变换是将第一列的二倍从第二列中减去,第一列的三倍从第三列中减去. $E_1A=\begin{bmatrix}1&2&3\\&&-1\\&-1&-3\end{bmatrix}$, $A_1=E_1AE_1^T=\begin{bmatrix}1&&\\&&-1\\&-1&-3\end{bmatrix}$. ▶

2. 将 A_1 的第二行与第三行调换.这对应哪个初等矩阵 E_2? E_2^T 对应的列变换是什么?计算 E_2A_1 和 $A_2=E_2A_1E_2^T$.

◀ $E_2=\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}$. $E_2^T=\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}$ 对应的列变换是将第二列与第三列调换. $E_2A_1=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&-3\\&&-1\end{bmatrix}$, $A_2=E_2A_1E_2^T=\begin{bmatrix}1&&\\&-3&-1\\&-1&\end{bmatrix}$. ▶

3. 将 A_2 的第二行的 $\frac{1}{3}$ 倍从第三行中减去.这对应哪个初等矩阵 E_3? E_3^T 对应的列变换是什么?计算 E_3A_2 和 $A_3=E_3A_2E_3^T$.

◀ $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, E_3^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & -\frac{1}{3} \\ & & 1 \end{bmatrix}$ 对应的列变换是将第二列的 $\frac{1}{3}$ 倍从第三列中减去. $E_3A_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -3 & -1 \\ & & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, A_3 = E_3A_2E_3^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. ▶

4. 综上, $A_3 = E_3E_2E_1AE_1^TE_2^TE_3^T$, 由此求 A 的逆.

◀ $A = (E_3E_2E_1)^{-1}A_3(E_3E_2E_1)^{-T}$, 两边取逆得 $A^{-1} = (E_3E_2E_1)^TA_3^{-1}(E_3E_2E_1) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
▶

练习 1.6.23. 求证: 对称矩阵的逆矩阵也是对称矩阵; 反对称矩阵的逆矩阵也是反对称矩阵.

◀ 设方阵 A 满足 $A^T = A$, 我们要证明 $(A^{-1})^T = A^{-1}$, 只需验证 $(A^{-1})^T$ 是 A 的左右逆, 即验证 $(A^{-1})^TA = A(A^{-1})^T = I$. 同理, 设方阵 B 满足 $B^T = -B$, 我们只需验证 $(B^{-1})^TB = B(B^{-1})^T = -I$. (如果直接使用 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 这个结果, 这道题是很简单的. 但是课本上没有给出 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 的证明, 所以你应该知道如何验证. 你应该在使用某个结果前验证之.) ▶

1.7. 分块矩阵.

练习 1.7.1. 设 A 的行简化阶梯形为 R, 行变换对应的可逆矩阵是 P.

1. 求 $\begin{bmatrix} A & 2A \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形, 以及行变换对应的可逆矩阵.

◀ 由 $PA = R, P\begin{bmatrix} A & 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA & 2PA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 2R \end{bmatrix}$. 易见这是行简化阶梯形. 行变换对应的可逆矩阵是 P. ▶

2. 求 $\begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形, 以及行变换对应的可逆矩阵.

◀ $\begin{bmatrix} P & \\ & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \\ -2I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & \\ & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ 为行简化阶梯形. 行变换对应的可逆矩阵是 $\begin{bmatrix} P & \\ & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \\ -2I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & \\ -2I & I \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.2. 求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & & & \\ & & 2 & 2 & 3 \\ & & 1 & -1 & 0 \\ & & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ 分块求逆. 结果为 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 2 & -1 & & & \\ & & 1 & -4 & -3 \\ & & 1 & -5 & -3 \\ & & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & \\ & 1 & & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

◀ 将矩阵写成一个准对角阵右乘置换二三列的置换矩阵再求逆. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ & & 1 & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.3. 计算下列分块矩阵:

1. $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & I_m \end{bmatrix}^{-1}$.

◀ $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_n & A \end{bmatrix}^{-1}$.

◀ $\begin{bmatrix} -A & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.4. 设分块矩阵 $X = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$, 其中 A, B 可逆. 试证 X 可逆, 并求其逆.

◀ $X = \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & \\ & A \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵之积故可逆. $X^{-1} = \begin{bmatrix} B & \\ & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.5. 设分块矩阵 $U = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 其中 A, B 可逆. 试证 U 可逆, 并求其逆.

◀ $U = \begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}C \\ & I \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵之积故可逆. $U^{-1} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}C \\ & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}C \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ & B^{-1} \end{bmatrix}$. (也可直接设 $U^{-1} = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}$ 并代入计算.) ▶

练习 1.7.6. 设 A_1, A_2 分别为 m, n 阶方阵, 且存在可逆方阵 T_1, T_2, 使得 $T_1^{-1}A_1T_1$ 和 $T_2^{-1}A_2T_2$ 都是对角矩阵. 求证: 存在 $m+n$ 阶可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T$ 是对角矩阵.

◀ 取 $T = \begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix}$. $T^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & \\ & T_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{-1}A_1T_1 & \\ & T_2^{-1}A_2T_2 \end{bmatrix}$ 为对角矩阵. ▶

练习 1.7.7. 1. 任取 $m \times n$ 矩阵 X, 分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, 计算 $\begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} A+XC & B+XD \\ C & D \end{bmatrix}$. ▶

2. 由此判断 $\begin{bmatrix} 1 & & & & c_1 \\ & 1 & & & c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a \end{bmatrix}$ 何时可逆, 并在可逆时求其逆.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & c_1 \\ & 1 & & & c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & c_1 \\ & 1 & & & c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i \end{bmatrix}$. 故

当且仅当 $a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i \neq 0$ 时有逆, 此时其逆为 $\begin{bmatrix} 1 & & & & c_1 \\ & 1 & & & c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1} & 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & -(a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1}c_1 \\ & 1 & & & -(a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1}c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -(a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1}c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & -(a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1}c_1 \\ & 1 & & & -(a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1}c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -(a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1}c_{n-1} \\ -(a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1}b_1 & -(a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1}b_2 & \cdots & -(a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1}b_{n-1} & (a-\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i)^{-1} \end{bmatrix}.$$

▶

练习 1.7.8. 利用 Sherman-Morrison 公式判断下列矩阵何时可逆, 并在可逆时求其逆.

$$\begin{bmatrix} a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n+1 \end{bmatrix}.$$

◀ 首先设 $a_1, \cdots, a_n \neq 0$. $\begin{bmatrix} a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix} +$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

由于 $\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}$ 可逆, 我们可以应用 Sherman-Morrison 公式:

$\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 可逆当且仅当

$1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^{-1} \neq 0.$

此时有 $\left(\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} - \frac{\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^{-1} - \frac{a_1^{-2}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_1^{-1}a_2^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_1^{-1}a_3^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & \cdots & -\frac{a_1^{-1}a_n^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \\ -\frac{a_2^{-1}a_1^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & a_2^{-1} - \frac{a_2^{-2}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_2^{-1}a_3^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & \cdots & -\frac{a_2^{-1}a_n^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \\ -\frac{a_3^{-1}a_1^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_3^{-1}a_2^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & a_3^{-1} - \frac{a_3^{-2}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & \ddots & -\frac{a_3^{-1}a_n^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n^{-1}a_1^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_n^{-1}a_2^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_n^{-1}a_3^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & \cdots & a_n^{-1} - \frac{a_n^{-2}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \end{bmatrix}.$$

现在考虑 $a_1, \cdots, a_n$ 不必非零的一般情况. 如果 $a_1, \cdots, a_n$ 中有至少两个为 0, 则矩阵有两行相等故不可逆. 如果仅有某个 $a_k = 0$, 我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & & -1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 \quad -1 & & \\ & & 1 & & \\ & & -1 \quad 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1+1 & 1 & & \cdots & \cdots & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & & \\ & \ddots & a_{k-1}+1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{k+1}+1 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & \cdots & \cdots & & 1 & a_n+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{k-1} & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & a_{k+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_n \end{bmatrix}.$$

此时逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && a_{k-1} &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& a_{k+1} && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& a_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 && -1 &&& \\ & \ddots & \vdots &&& \\ && 1 & -1 && \\ &&& 1 && \\ &&& -1 & 1 & \\ &&& \vdots && \ddots \\ &&& -1 &&& 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^{-1} &&& -a_1^{-1} &&& \\ & \ddots && \vdots &&& \\ && a_{k-1}^{-1} & -a_{k-1}^{-1} &&& \\ -a_1^{-1} & \cdots & -a_{k-1}^{-1} & 1-\sum_{1\le i\le n, i\ne k} a_i^{-1} & -a_{k+1}^{-1} & \cdots & a_n^{-1} \\ &&& -a_{k+1}^{-1} & a_{k+1}^{-1} && \\ &&& \vdots && \ddots & \\ &&& -a_n^{-1} &&& a_n^{-1} \end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

练习 1.7.9. 1. 求 A 使得 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 为反对称矩阵.

◀ 由 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 等价于 $A^T = -A$. ▶

2. 求 5 阶置换矩阵 P, 满足 $P^5 \neq I_5, P^6 = I_5$.

◀ 例: $\begin{bmatrix} & 1 &&& \\ && 1 && \\ 1 &&&& \\ &&&& 1 \\ &&& 1 & \end{bmatrix}$. ▶

3. 求对称矩阵 A, 使得不存在 B, 满足 $A = BB^T$.

◀ 例: 考虑实矩阵. 对 $A = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$, 不存在 B 满足 $A = BB^T$. (如果我们的域中任何元素都有平方根, 那么任意的 A 均能表达成某个 BB^T 的形式.) ▶

练习 1.7.10. 给定 $m \times n, n \times m$ 矩阵 A, B, 求证: $I_m + AB$ 可逆当且仅当 $I_n + BA$ 可逆.

◀ 考虑 $\begin{bmatrix} I_n & \\ -A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & \\ & I_m + AB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ -A & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n + BA & \\ & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & \\ -A & I_m \end{bmatrix}$.
▶

练习 1.7.11. 设实分块方阵 $X = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 其中 A 是方阵. 如果 X 与 X^T 可交换, 求证: $C = 0$.

◀ $\begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^T & \\ C^T & B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & \\ C^T & B^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix}$ 或等价于 $\begin{bmatrix} AA^T+CC^T & CB^T \\ BC^T & BB^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^TA & A^TC \\ C^TA & C^TC+B^TB \end{bmatrix}$ 给出了 $C^TC=0$. 对任意的实列向量 $x, 0 = x^TC^TCx = (Cx)^T(Cx)$, 故 $Cx = 0$. 从而 $C = 0$. ▶

练习 1.7.12. 设分块对角矩阵 $J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}$, 其中 $J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$, $J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$. 试找出一个五次多项式 $f(x)$, 使得 $f(J) = 0$.

◀ $f(x) = a(x-2)^3(x-1)^2$. 注意对分块对角矩阵 $\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{bmatrix}$ 有 $f(\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_n) \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.13. 构造 $2n$ 阶实方阵 A, 满足 $A^2 = -I_{2n}$.

◀ 例: $A = \begin{bmatrix} & -1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & 1 & \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.14. 设 A, B 为两个左相抵的行简化阶梯形矩阵.

1. 证明: $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

◀ 设对某个可逆矩阵 P 有 $A = PB$. 则 $Ax = PBx = 0$ 当且仅当 $Bx = 0$. ▶

2. 证明, 如果 A 的最后一列不是主列, 则存在 x 使得 $A\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$.

◀ 设 A 有某个行简化阶梯形, 直接计算. ▶

3. 证明, 如果 A 最后一列是主列, 则对任意 $x, A\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$.

◀ 这个向量的最后一行非零. ▶

4. 设 A, B 除了最后一列之外, 其他列均相等, 且 A 的最后一列不是主列, 证明 $A = B$.

◀ 由第 2 问, 存在 x 使得 $A\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. 由第 1 问, $B\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. 由 $(A-B)\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, $A - B$ 的最后一列为零. ▶

5. 设 A, B 除了最后一列之外, 其他列均相等, 且 A 的最后一列是主列, 证明 $A = B$.

◀ 由 A 的最后一列是主列, B 的最后一列也是主列, 否则存在 x 使得 $B\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0$, 从而也有 $A\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0$. 故 A,B 的最后一列均为 $\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$. ▶

6. 用数学归纳法证明, 左相抵的行简化阶梯形必然相等. 由此证明, 一个矩阵 A 的行简化阶梯形唯一.

◀ 对矩阵的列数归纳. ▶

练习 1.7.15 (置换的不动点)**.** 设 P 是置换矩阵. 如果 P 对应的行变换保持第 i 行不变, 则称 i 为 P 的不动点.

1. 证明 i 是 P 的不动点当且仅当 P 的第 i 个对角元为 1.

◀ 显然. ▶

2. 证明 P 的不动点个数等于 $trace(P)$(练习 1.5.22).

◀ $trace(P)$ 等于 P 的对角元之和. ▶

3. 对任意置换矩阵 P_1,P_2, 证明 P_1P_2 和 P_2P_1 的不动点个数相等.

◀ 这是由于 $trace(P_1P_2)=trace(P_2P_1)$. ▶

练习 1.7.16. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的变换 $f(x)=Ax+b$, 具有该形式的变换称为仿射变换. 仿射变换通常不是线性变换. (仅在 $b=0$ 时是.)

1. 证明 $\begin{bmatrix}A & b\\0^T & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(x)\\1\end{bmatrix}$. 记 $A_f:=\begin{bmatrix}A & b\\0^T & 1\end{bmatrix}$.

◀ 直接验证. ▶

2. 证明 $A_fA_g=A_{f\circ g}$.

◀ 直接验证. ▶

3. 证明当仿射变换 f 可逆时, 矩阵 A_f 可逆, 且 $A_{f^{-1}}=(A_f)^{-1}$.

◀ 直接验证. ▶

(本题的意义是将仿射空间嵌入相同维数的射影空间中, 可以把仿射变换在这个仿射开子集上的限制写成线性变换的形式.)

练习 1.7.17. 图 1.7.3 中有四个弹簧振子. 弹簧的初始长度为 l_1,l_2,l_3,l_4, 振子在稳态的最终长度为 $l_1+x_1,l_2+x_2,l_3+x_3,l_4+x_4$.

1. 找到矩阵 A 使得 $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=g\begin{bmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\m_4\end{bmatrix}$. 此时 A 的分块结构有什么特点? 你能否从系统中看出原因?

2. 图 1.7.3 中振子下面, 由劲度系数分别为 k_5, k_6 的弹簧挂住了一个质量为 m_5 的振子. 找到矩阵 A 使得 $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=g\begin{bmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\m_4\\m_5\end{bmatrix}$. 此时 A 的分块结构是否还有之前的特点? 为什么?

练习 1.7.18. 考虑一个元素皆为复数的矩阵. 将每个元素分成实部和虚部, 不难发现对任意复数矩阵, 都存在实数矩阵 A, B, 使得该复数矩阵为 $A+iB$, 其中 i 是虚数单位. 同理, 任意复数向量, 都存在实数向量 v, w, 使得该复数向量为 $v+iw$. 下面用 $R(A), R(v), I(A), I(v)$ 来表达复矩阵 A 和复向量 v 的实部和虚部.

1. 用实数矩阵和向量 A, B, v, w 来表达 $(A+iB)(v+iw)$ 的实部和虚部;

◀ $Av-Bw$; $Aw+Bv$. ▶

2. 对任意实数矩阵 A, B, 求矩阵 X, 使得 $X\begin{bmatrix}R(v+iw)\\I(v+iw)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R((A+iB)(v+iw))\\I((A+iB)(v+iw))\end{bmatrix}$ 对任意实数向量 v, w 都成立.

◀ $\begin{bmatrix}A & -B\\B & A\end{bmatrix}$. ▶

3. 考虑映射 $f(a+ib)=\begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix}$. 验证 $f((a+ib)(c+id))=f(a+ib)f(c+id)$.

◀ 直接验证. ▶

练习 1.7.19 (错位分块对角矩阵)**.** 定义 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\triangle\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & a_{12} & 0\\0 & b_{11} & 0 & b_{12}\\a_{21} & 0 & a_{22} & 0\\0 & b_{21} & 0 & b_{22}\end{bmatrix}$.

1. 证明 $(A_1\triangle B_1)(A_2\triangle B_2)=(A_1A_2)\triangle(B_1B_2)$.

◀ 直接验证. ▶

2. 证明 $A\triangle B$ 可逆当且仅当 A, B 都可逆; 此时有 $(A\triangle B)^{-1}=A^{-1}\triangle B^{-1}$.

◀ 注意到 $I_2\triangle I_2=I_4$. ▶

3. 求 X, 使得对任意 2 阶方阵 A, B, 都有 $X(A\triangle B)X^{-1}=\begin{bmatrix}A & 0\\0 & B\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1\end{bmatrix}$. ▶

1.8. **LU 分解.**

练习 1.8.1. 求下列矩阵的 PLU 分解, 其中 L 为单位下三角矩阵.

1. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ & 3 & -2 \\ & & 0 \end{bmatrix}$. (注意本题不可 LU 分解.) ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$. ▶

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&1&1&\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\&&&3\end{bmatrix}$. ▶

6. $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&1&1&\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&2\\&&&0\end{bmatrix}$. ▶

7. $\begin{bmatrix}1&5&5&5\\1&2&6&6\\1&2&3&7\\1&2&3&4\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&1&1&\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5&5&5\\&-3&1&1\\&&-3&1\\&&&-3\end{bmatrix}$. ▶

8. $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&&&1\\&1&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\1&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\&&&-1\end{bmatrix}$. ▶

9. $\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&1&&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&&1&\\&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&\\&-1&&1\\&&-1&1\\&&&3\end{bmatrix}$. ▶

注意观察,哪些 0 保留在了 L 中或者 U 中.

练习 1.8.2. 利用行变换解下列方程

1. $\begin{bmatrix}1&5&5&5\\1&2&6&6\\1&2&3&7\\1&2&3&4\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}34\\28\\23\\20\end{bmatrix}.$

◀ $x=\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}.$ ▶

2. $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}34\\28\\23\\20\end{bmatrix}.$

◀ $y=\begin{bmatrix}34\\-6\\-5\\-3\end{bmatrix}.$ ▶

3. $\begin{bmatrix}1&5&5&5\\0&-3&1&1\\0&0&-3&1\\0&0&0&-3\end{bmatrix}x=y$, 这里的 y 是上一问的解.

◀ $x=\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}.$ ▶

练习 1.8.3. 设 n 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&w^T\\v&B\end{bmatrix}$ 存在 LU 分解 $A=LU$, 其中 $v\neq 0$.

1. A 的左上角元素 a_{11} 是否非零?

◀ 是的. 由 L,U 的对角元非零, 计算 L 和 U 的积即得. ▶

2. 从上往下对 A 做行变换, 将 v 变为 0 时, 需要做多少次加法, 乘法?

◀ 加法, 乘法各 $(n-1)^2$ 次. 设 v 的元素为 $v_i, i=1,2,\cdots,n-1$, 其中 v_i 在 A 的第 $i+1$ 行. 对 B 的第 i 行的操作是将 w^T 乘 $-\frac{v_i}{a_{11}}$ 加到 B 的第 i 行, $i=1,2,\cdots,n-1$. 我们对 B 的每个元素做了 1 次加法和乘法, 而 B 的元素个数是 $(n-1)^2$. ▶

3. 再设 A 为对称矩阵. 此时 v 和 w 有什么关系? B 有什么性质?

◀ $v=w$. B 为对称矩阵. ▶

4. 利用行变换将 v 变为 0 时, 再利用对应的列变换将 w^T 变为 0, 求证此时 B 变为对称矩阵. 此时需要做几次加法, 乘法?

◀ 设将 v 变为 0 对应的行变换是左乘可逆矩阵 P,则将 w^T 变为 0 对应的列变换是右乘可逆矩阵 $P^T, B = PAP^T$ 也是对称阵. 加法, 乘法各 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次. ▶

由此看到, 对称矩阵 LU 分解的计算量可以节省 (大约) 一半. 这是因为 B 在做完行变换后也是对称矩阵, 因此计算出矩阵右上角 (即 $\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{bmatrix}$ 中 $*$ 所在的位置) 的元素即可, 这些元素的个数是 $\frac{n(n-1)}{2}$. 重复此步骤直到将 A 化为对角阵, 我们将 B 写成了 LDL^T 的形式, 这里 $U = DL^T$. 注意我们将用于左乘的初等矩阵相乘得到 L 时不需要做额外的计算. 计算总数时需要求出 $\sum_{k=2}^n k^2$, 你可能注意到了对 $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ 两边从 $k = 2$ 到 n 求和即可. 计算所有四则运算的总数时还要多一些低次项, 但我们只关心最高阶项, 所以这无关紧要. (总之, 计算的次数是有限的.)

练习 1.8.4. 设 n 阶方阵 $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$. 利用初等变换证明, 存在分解式 $T = LU$, 其中 L 是下三角矩阵, U 是上三角矩阵. 据此求出 T^{-1}.

◀ 依次将 T 的第 i 行加到第 $i+1$ 行, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, 我们得到 $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$. 故

$$T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&&&\\&1&-1&&\\&&1&\ddots&\\&&&\ddots&-1\\&&&&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&&&\\-1&1&&&\\&-1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1\\&1&\ddots&\ddots&1\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\\vdots&\ddots&\ddots&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\\1&1&\cdots&1&1\end{bmatrix}=$$

$\begin{bmatrix}n&n-1&n-2&\cdots&1\\n-1&n-1&n-2&\cdots&1\\n-2&n-2&n-2&\ddots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$.(注意矩阵 $N=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{bmatrix}$ 满足矩阵方程 $N^n=0$,故 $I=I-N^n=(I-N)(I+N+N^2+\cdots+N^{n-1})$,从而 $(I-N)^{-1}=I+N+N^2+\cdots+N^{n-1}=$

$$I+\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1&&\\&0&0&\ddots&\\&&0&\ddots&1\\&&&\ddots&0\\&&&&0\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0&1\\&0&\ddots&\ddots&0\\&&0&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1\\&1&\ddots&\ddots&1\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&1\end{bmatrix}$$,以

及取转置后知对 $\begin{bmatrix}0&&&&\\1&0&&&\\&1&0&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&0\end{bmatrix}$ 有类似结果.) ▶

2. 子空间和维数

2.1. 基本概念.

练习 2.1.1. 判断下列子集是否是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 其中的子空间是否可以写成线性生成的子空间; 如果可以, 写出一组生成向量.

1. $\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^T \mid \sum_{i=1}^n a_i=0\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix}1&-1&0&\cdots&0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1&0&-1&0&\cdots&0\end{bmatrix}^T$, $\cdots$, $\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&-1\end{bmatrix}^T$. ▶

2. $\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^T \mid \sum_{i=1}^n a_i=1\}$.

◀ 否. ▶

3. $\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^T \mid \sum_{i=1}^n a_i^2=0\}$.

◀ 是. 零空间是子空间. 生成向量的集合为空集. (空集生成的子空间是零空间. 不能写零向量是生成向量, 因为生成向量是线性无关的, 且生成向量的数量等于子空间维数. 回忆一族向量生成的子空间是包含这些向量的最小的子空间.) ▶

4. $\{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T | a_1 = 0\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \cdots, \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. ▶

5. $\{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T | a_1 \geq 0\}$.

◀ 否. ▶

6. $\{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T | a_1 = \cdots = a_n\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$. ▶

7. $\{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T | a_1^2 = \cdots = a_n^2\}$.

◀ 否. ▶

8. $\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T | a_1 a_2 a_3 = 0\}$.

◀ 否. ▶

9. $\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T | a_1 = a_2\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. ▶

10. $\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T | a_1 \leq a_2 \leq a_3\}$.

◀ 否. ▶

11. $\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T | \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵 $\}$.

◀ 否. ▶

12. $\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T | \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 是不可逆矩阵 $\}$.

◀ 否. ▶

13. $\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T | \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 是对称矩阵 $\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. ▶

14. $\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T | \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 是反对称矩阵 $\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. ▶

(为什么有同学写子空间找不到一组生成向量?)

练习 2.1.2. 判断满足下列性质的 $\mathbb{R}^3$ 子集 M 是否存在. 若存在, 进一步判断哪些是子空间.

1. M 含有 e_1, e_2, e_3; 对任意 $v, w \in M$, 都有 $v + w \in M$; 存在 $v \in M$, 使得 $\frac{1}{2}v \notin M$.

◀ 存在. 例: $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}$. 都不是子空间. ▶

2. M 含有所有形如 $\begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \\ 1 \end{bmatrix}$ 的向量;对任意 $v \in M$,都有 $kv \in M$;存在 $v, w \in M$,使得 $v + w \notin M$.

◀ 存在. 例: $\{\begin{bmatrix} kcos\theta \\ ksin\theta \\ k \end{bmatrix} |0 \le \theta < 2\pi, k \in \mathbb{R}\}$. 都不是子空间. ▶

3. M 含有 e_1, e_2 但不含有 e_3;对任意 $v, w \in M, k \ge 0$,都有 $v + w, kv \in M$.

◀ 存在. 例: $\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} |a, b \ge 0\}$. $\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} |a, b \in \mathbb{R}\}$ 是子空间. ▶

练习 2.1.3. 证明命题 2.1.8 .

命题 2.1.8 :

1. 子集 $span(S)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

◀ 验证其非空且对加法和数乘封闭. ▶

2. 如果 S 中的向量都在 $\mathbb{R}^n$ 的某个子空间中,则 $span(S)$ 中的向量也都在该子空间中.

◀ 由子空间含有其中向量的线性组合得到. ▶

(注: 由于没有引入抽象线性空间的定义,现在还不能说明某个线性空间的子空间是线性空间.)

练习 2.1.4. 证明, $R(O_{m\times n}) = 0$, $N(O_{m\times n}) = \mathbb{R}^n$;如果 n 阶方阵 A 可逆,则 $R(A) = \mathbb{R}^n$, $N(A) = 0$.

◀ 对任意的 n 维列向量 $x, O_{m\times n}x = 0$,故 $R(O_{m\times n}) = 0$, $N(O_{m\times n}) = \mathbb{R}^n$.

对可逆方阵 A 及任意列向量 $y, A(A^{-1})y = y$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$,故 $R(O_{m\times n}) = 0$, $N(O_{m\times n}) = \mathbb{R}^n$. ▶

练习 2.1.5. 证明,对例 2.1.2 中的 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$,这三个向量中的任意两个都可以作为 $R(A)$ 的一组生成向量,但是,其中任意单个向量都不能生成 $R(A)$.

例 2.1.2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,则 $R(A) = Ax|x \in \mathbb{R}^3 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} |x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} |x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 是陪域 $\mathbb{R}^3$ 中的整个 x_1x_2 平面;而 $N(A) = x \in \mathbb{R}^3|Ax = 0 = k \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是定义域 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的一条直线. 映射 A 既不是单射,也不是满射.

◀ 直接解方程以尝试将 $R(A)$ 中的任意形如 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的向量解为你选择的向量的线性组合. ▶

练习 2.1.6. 判断下列 A, B 是否具有相同的列空间,零空间,证明或举出反例.

1. A 为任意矩阵, B 分别为 $2A$, $\begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & AC \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A \\ CA \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$, PA, AQ, 其中 P, Q 可逆.

◀ $2A$: 相同, 相同.

$\begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$: 相同, 不同.

$\begin{bmatrix} A & AC \end{bmatrix}$: 相同, 不同.

$\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$: 不同, 相同.

$\begin{bmatrix} A \\ CA \end{bmatrix}$: 不同, 相同.

$\begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$: 不同, 不同.

PA: 不同, 相同.

AQ: 相同, 不同. ▶

2. A 为 n 阶方阵, B 分别为 $A + I_n$, A^2, A^T.

◀ $A + I_n$: 不同, 不同.

A^2: 不同, 不同.

A^T: 不同, 不同. 反例自举. ▶

练习 2.1.7. 设矩阵 A, B 具有相同的行数和列数, 对下列判断, 证明或举出反例.

1. 如果 A, B 有相同的零空间, 那么对任意向量 b, $Ax = b$ 与 $Bx = b$ 一定同解.

◀ 错误. 例: $A = I$, $B = 2I$. ▶

2. 如果 A, B 有相同的列空间, 那么对任意向量 b, $Ax = b$ 与 $Bx = b$ 一定同解.

◀ 错误. 例: $A = I$, $B = 2I$. ▶

3. 如果 A, B 有相同的零空间和列空间, 那么对任意向量 b, $Ax = b$ 与 $Bx = b$ 一定同解.

◀ 错误. 例: $A = I$, $B = 2I$. ▶

练习 2.1.8. 设 $Ax = b$ 有解, 证明,

1. $R(A) = R(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix})$.

◀ 设 $Ax_0 = b$, 我们有 $R(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}) = R(\begin{bmatrix} A & Ax_0 \end{bmatrix}) = Ay + y_{n+1}Ax_0 = Ay = R(A)$. ▶

2. $N(A^T) = N(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix})$.

◀ 设 $Ax_0 = b$, $N(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix}) = N(\begin{bmatrix} A^T \\ x_0^T A^T \end{bmatrix}) = \{x | A^T x = x_0^T A^T x = 0\} = \{x | A^T x = 0\} = N(A^T)$. ▶

练习 2.1.9. 把 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 b 表示成 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合.

1. $a_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$;

◀ 设 $b = x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4 = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$, 即 $\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$. 解得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$. ▶

2. $a_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\3\\1\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

◀ 同上, 设 $b = x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4 = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$, 解得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$. ▶

练习 2.1.10. 判断下列向量组是否线性相关.

1. $a_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\3\\4\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}1\\3\\0\\1\end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix}0\\-7\\3\\1\end{bmatrix}$;

◀ 高斯消元. 否. ▶

2. $a_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$.

◀ 是. ▶

练习 2.1.11. 如果向量组 a, b, c 中的任何两个都线性无关, 试问该向量组是否一定线性无关?

◀ 否. 例: 对线性无关的两向量 $e_1, e_2, e_1, e_2, e_1+e_2$. ▶

练习 2.1.12. 设 $\mathbb{R}^n$ 中向量 a_1, a_2, a_3, 满足 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3 = 0$, 其中 $k_1k_2 \neq 0$. 求证: $span(a_1, a_3) = span(a_2, a_3)$.

◀ 由于 $a_2=-\frac{k_1}{k_2}a_1-\frac{k_3}{k_2}a_3$ 以及 $a_1=-\frac{k_2}{k_1}a_2-\frac{k_3}{k_1}a_3$, $span(a_1,a_3)=span(a_2,a_3)=span(a_1,a_2,a_3)$. ▶

练习 2.1.13. 证明向量组 a_1,a_2,a_3 与向量组 a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1 线性等价.

◀ 这是由于 $\begin{bmatrix}a_1+a_2 & a_2+a_3 & a_3+a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & 1\\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1\end{bmatrix}$ 以及方阵 $\begin{bmatrix}1 & & 1\\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1\end{bmatrix}$ 可逆. ▶

练习 2.1.14. 设向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关, 证明向量组 $a_1,a_1+a_2,\cdots,a_1+\cdots+a_s$ 线性无关.

◀ 这是由于 $\begin{bmatrix}a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+\cdots+a_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ & 1 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & 1\\ & & & 1\end{bmatrix}$ 以及方阵 $\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ & 1 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & 1\\ & & & 1\end{bmatrix}$ 可逆. ▶

练习 2.1.15. 设 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关, A 是 n 阶可逆矩阵, 求证: $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ 线性无关.

◀ $\begin{bmatrix}k_1Aa_1 & k_2Aa_2 & \cdots & k_sAa_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}k_1a_1 & k_2a_2 & \cdots & k_sa_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}k_1a_1 & k_2a_2 & \cdots & k_sa_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{bmatrix}=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_s=0$. ▶

练习 2.1.16. 证明, 一个线性无关向量组的任意部分组也线性无关; 如果向量组有一个部分组线性相关, 则该向量组也线性相关.

◀ 第二个论断由定义显然正确. 第一个论断是第二个的逆否命题. ▶

练习 2.1.17. 证明, 一个向量组线性相关当且仅当其中有一个向量可以被其他向量线性表示.

◀ "$\Leftarrow$ ": 由定义即得.

"$\Rightarrow$ ": 设向量组 $a_1,\cdots,a_s$ 线性相关, 则存在不全为 0 的常数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得 $k_1a_1+\cdots k_sa_s=0$. 设某个 $k_i\neq 0$, 则有 $a_i=-\frac{k_1}{k_i}a_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}a_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}a_{i+1}-\cdots-\frac{k_s}{k_i}a_s$. (这个命题的意义是我们可以逐个去除某个向量组中的向量直到得到某个线性无关的子向量组. 反之, 你也可以逐个添加线性无关的向量直到得到某个线性无关的子向量组.) ▶

练习 2.1.18. 给定 $\mathbb{R}^m$ 中向量组 $a_1,\cdots,a_n$, 从每个向量中去掉第 $i_1,\cdots,i_s$ 个分量, 得到 $\mathbb{R}^{m-s}$ 中向量组 $a_1',\cdots,a_n'$. 证明:

1. 如果 $a_1,\cdots,a_n$ 线性相关, 则 $a_1',\cdots,a_n'$ 线性相关.

◀ 若向量组 $a_1, \cdots, a_n$ 线性相关,则存在不全为 0 的常数 $k_1, \cdots, k_n$ 使得 $k_1 a_1 + \cdots k_n a_n = 0$. 从每个向量中去掉第 $i_1, \cdots, i_s$ 个分量后,仍有 $k_1 a_1' + \cdots k_n a_n' = 0$, 故 $a_1', \cdots, a_n'$ 线性相关. ▶

2. 如果 $a_1', \cdots, a_n'$ 线性无关,则 $a_1, \cdots, a_n$ 线性无关.

◀ 这是上一问的逆否命题. ▶

练习 2.1.19 (子空间的和)**.** 设 M, N 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间,定义集合 $M + N := \{m + n | m \in M, n \in N\}$. 证明,

1. 集合 $M + N$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间,称为子空间 M 与 N 的和.

◀ 验证 $0 \in M + N$ 以及 $M + N$ 对加法和数乘封闭. ▶

2. 交集 $M \cap N$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间,称为子空间 M 与 N 的交.

◀ 验证 $0 \in M \cap N$ 以及 $M \cap N$ 对加法和数乘封闭. ▶

3. 集合的交与并满足 $(S_1 \cup S_2) \cap S_3 = (S_1 \cap S_3) \cup (S_1 \cap S_2)$. 证明或举出反例: 子空间的交与和满足 $(M + N) \cap W = (M \cap W) + (N \cap W)$.

◀ 反例: 对线性无关的两向量 $e_1, e_2, M = span(e_1)$, $N = span(e_2)$, $W = span(e_1 + e_2)$. ▶

4. 集合的交与并满足 $(S_1 \cap S_2) \cup S_3 = (S_1 \cup S_3) \cap (S_1 \cup S_2)$. 证明或举出反例: 子空间的交与和满足 $(M \cap N) + W = (M + W) \cap (N + W)$.

◀ 反例: 对线性无关的两向量 $e_1, e_2, M = span(e_1)$, $N = span(e_2)$, $W = span(e_1 + e_2)$. ▶

练习 2.1.20. 设 $\mathbb{R}^m$ 中子空间 $M = span(a_1, \cdots, a_s), N = span(b_1, \cdots, b_t)$, 证明, $M + N = span(a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t)$.

◀ 证明两边互相包含. ▶

练习 2.1.21. 1. 给定 $m \times n, m \times s$ 矩阵 A, B, 证明, $R(A) + R(B) = R(C)$, 其中 $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$.

◀ $R(C) = Cx = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax_1 + bx_2 = Ax_1 + bx_2 = R(A) + R(B)$. ▶

2. 给定 $m \times n, l \times n$ 矩阵 A, B, 证明, $N(A) \cap N(B) = N(D)$, 其中 $D = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$.

◀ $N(D) = \{x | Dx = 0\} = \{x | \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0\} = \{x | \begin{bmatrix} Ax \\ Bx \end{bmatrix} = 0\} = \{x | Ax = Bx = 0\} = \{x | Ax = 0\} \cap \{x | Bx = 0\} = N(A) \cap N(B)$. ▶

练习 2.1.22 (Kirchhoff 电压定律)**.** 对图 2.1.1 中的电路网络,令 M_G 为对应的关联矩阵. 根据 Kirchhoff 电压定律,找出一个方程组,其解集恰为 $R(M_G)$. 要求用尽量少的方程 (但不需要写出证明).

练习 2.1.23 (电路网络拓展)**.** 设电路网络的关联矩阵是 M_G, 定义图的 Laplace 矩阵 $L_G = M_G^T M_G$.

1. 矩阵 L_G 的元素有什么意义?
2. 求子空间 $N(L_G)$ 的一组生成向量.
3. 求子空间 $R(L_G)$ 的一组生成向量, 要求其中每个向量至少有两个分量为零.
4. 任取向量 $v \in N(L_G), w \in R(L_G), v^T w$ 可能取哪些值?
5. 求线性方程组, 其解集恰好是 $R(L_G)$.

2.2. **基和维数.**

练习 2.2.1. 求下列向量组的极大无关部分组和秩.

1. $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

◀ 使用筛选法. a_1 线性无关, 将 a_1 添加到极大无关组中. a_1, a_2 线性相关. a_1, a_3 线性无关, 将 a_3 添加到极大无关组中. a_1, a_3, a_4 线性相关. 故我们得到了极大无关部分组 $\{a_1, a_3\}$. 秩为 2.

(另解: 从练习 2.1.15 可以看出对矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix}$ 做行变换不改变线性无关性, 故将其化为行简化阶梯形后可以直接给出极大无关组. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$, 易见 $\{a_1, a_3\}$ 构成极大无关部分组且秩为 2.) ▶

2. $a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 有极大无关部分组 $\{a_1, a_2\}$. 秩为 2. ▶

练习 2.2.2. 在下列向量组中, 除去哪个向量, 得到的向量组和原向量组线性等价?

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

◀ 第 $1, 2, 3, 4$ 个. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 第 $1, 2, 4$ 个. ▶

3. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 第 $1, 4$ 个. ▶

4. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 第 4 个. ▶

练习 2.2.3. 用筛选法去掉方程组中所有多余的方程: $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$.

◀ 筛选法留下了第 1, 2, 3 个方程. ▶

练习 2.2.4. 给定线性无关的向量组 a_1, a_2, a_3, 求 $a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_1$ 所有的极大线性无关部分组.

◀ 三个向量中的任意两个. ▶

练习 2.2.5. 证明, 一个向量组的任意线性无关的部分组都可以扩充成它的一个极大线性无关部分组.

◀ 从这个部分组开始使用筛选法. 筛选法保证了选取的向量线性无关且能线性表示所有向量. ▶

练习 2.2.6. 证明, 如果向量组 S 可以被向量组 T 线性表示, 则 $rank(S) \le rank(T)$.

◀ 我们可以用 S 和 T 的极大线性无关部分组 S' 和 T' 代替 S 和 T 而不改变秩. 此时仍有 S' 可以被 T' 线性表示, 故 $rank(S) = rank(S') \le rank(T') = rank(T)$. (不等号由基扩充定理保证.) ▶

练习 2.2.7. 证明, 如果向量组和它的一个部分组的秩相同, 则两个向量组线性等价.

◀ 设向量组 S 与部分组 S' 的秩相同. 取 S' 的极大线性无关部分组 S'', 由 S'' 线性无关且 $rank(S) = rank(S'')$, 故 S'' 也是 S 的极大线性无关部分组. 故 S 与 S' 可以互相线性表示. ▶

练习 2.2.8. 举例说明秩相等的向量组未必线性等价.

◀ $\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\}, \{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\}$. ▶

练习 2.2.9. 已知向量组的秩是 r, 设 S 是一个包含 r 个向量的部分组. 证明:

1. 如果 S 线性无关, 则 S 是原向量组的一个极大线性无关部分组.

◀ 将线性无关的部分组 S 扩充成极大线性无关部分组 S'. 比较集合的势知 $S = S'$. ▶

2. 如果 S 与原向量组线性等价, 则 S 是原向量组的一个极大线性无关部分组.

◀ 删去可以线性表示原向量组的向量组 S 中的某些向量得到原向量组的极大线性无关部分组 S''. 比较集合的势知 $S = S''$. ▶

练习 2.2.10. 证明命题 2.2.17.

命题 2.2.17. 设 M 是 $\mathbb{R}^m$ 的 r 维子空间, 给定 M 中含有 r 个向量的向量组 $a_1, \cdots, a_r$.

1. 如果 $a_1, \cdots, a_r$ 线性无关, 则 $a_1, \cdots, a_r$ 是 M 的一组基.

◀ 将线性无关的向量组 $a_1, \cdots, a_r$ 扩充为 M 的一组基. 比较集合的势知这组基正是 $a_1, \cdots, a_r$. ▶

2. 如果 $M = span(a_1, \cdots, a_r)$, 则 $a_1, \cdots, a_r$ 是 M 的一组基.

◀ 删去可以线性表示 M 的向量组 $a_1, \cdots, a_r$ 中的某些向量得到 M 的一组基. 比较集合的势知这组基正是 $a_1, \cdots, a_r$. ▶

练习 2.2.11. 求下列子空间的基和维数.

1. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x-y=0$ 与平面 $x+y-2z=0$ 的交集.

◀ 解线性方程组得一组基 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. 维数为 1. ▶

2. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中与向量 $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}$ 都垂直的向量组成的子空间.

◀ 本问为上一问的同义转述. ▶

3. 齐次线性方程组 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} x = 0$ 的解集.

◀ 解线性方程组得一组基 $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$. 维数为 1. ▶

练习 2.2.12. 一个三阶方阵, 如果每行、每列以及两个对角线上的元素之和都相等, 则称为幻方矩阵. 判断 $\{a = \begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_9\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^9 | \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\a_4 & a_5 & a_6\\a_7 & a_8 & a_9\end{bmatrix}$ 是幻方矩阵 $\}$ 是否是 $\mathbb{R}^9$ 的子空间. 如果是, 求它的一组基.

◀ 是. 对矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1\\1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 高斯消元以解出对应的线性方程组. 解空间的一组基为 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}4 & 9 & 2 & 3 & 5 & 7 & 8 & 1 & 6\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}4 & 3 & 8 & 9 & 5 & 1 & 2 & 7 & 6\end{bmatrix}^T$. (注: 这里用洛书 $\begin{bmatrix}4 & 9 & 2\\3 & 5 & 7\\8 & 1 & 6\end{bmatrix}$ 与其转置给出了一组基.) ▶

练习 2.2.13. 任取非零常数 $k_1, \cdots, k_n$ 满足 $\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} + 1 \neq 0$, 求如下向量组的秩:

$$a_1 = \begin{bmatrix}1+k_1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}1\\1+k_2\\\vdots\\1\end{bmatrix}, \cdots, a_n = \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1+k_n\end{bmatrix}.$$

◀ 由练习 1.7.8, 方阵 $\begin{bmatrix} 1+k_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+k_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+k_n \end{bmatrix}$ 可逆, 故向量组的秩为 n. ▶

练习 2.2.14. 给定 r 阶方阵 P 和子空间 M 的一组基 $a_1, \cdots, a_r$. 令 $\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{bmatrix} P$. 证明, $b_1, \cdots, b_r$ 是 M 的一组基当且仅当矩阵 P 可逆.

◀ $b_1, \cdots, b_r$ 是 M 的一组基 $\iff$ $\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_r \end{bmatrix}$ 秩为 r $\iff$ $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{bmatrix} P$ 秩为 $r \iff P$ 可逆. (最后的 $\iff$ 成立的理由: $\Leftarrow$: 右乘可逆阵不改变矩阵的秩 (可逆操作不改变向量组的秩). $\Rightarrow$: 矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{bmatrix} P$ 的秩不大于 P 的秩.) ▶

练习 2.2.15 (Steinitz 替换定理)**.** 设 $S: a_1, \cdots, a_r$ 线性无关, 可被 $T: b_1, \cdots, b_t$ 线性表示, 求证:

1. $r \le t$.

◀ 假设 $t > r$. 设 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix} A$. 由 A 的行数大于列数, 存在 $x \neq 0$ 使得 $Ax = 0$. 我们有 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix} Ax = 0$, 与 $a_1, \cdots, a_r$ 线性无关矛盾. ▶

2. 可以选择 T 中的 r 个向量换成 S, 得到的新的向量组与 T 线性等价.

◀ 将 $a_1, \cdots, a_r$ 扩充为 $a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots, b_t$ 的一个极大线性无关组. 若其中向量不足 t 个, 任取 $b_1, \cdots, b_t$ 中的一些向量补足至 t 个. ▶

练习 2.2.16 (平行的平面)**.** 考虑方程 $x - 3y - z = 12$ 和 $x - 3y - z = 0$ 的解集. 这两个解集的交集是什么? 如果 x_1, x_2 分别是第一个和第二个方程的解, 那么 $x_1 + x_2$, $x_1 + 2x_2$, $2x_1 + x_2$ 分别是哪个方程的解?

提示: 从几何上看, 这两个解集是 $\mathbb{R}^3$ 中两个平行的平面, 其中一个经过原点, 因此是二维子空间; 另一个不经过原点, 因此不是子空间.

◀ 空集. 第一个, 第一个, 都不是. ▶

练习 2.2.17. 设 M, N 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间, 求证维数公式: $dim(M + N) = dim(M) + dim(N) - dim(M \cap N)$.

提示: 先取 $M \cap N$ 的一组基, 根据基扩充定理, 分别扩充成 M 和 N 的一组基, 证明这两组基的并集是 $M + N$ 的一组基.

◀ 取 $M \cap N$ 的一组基 $a_1, \cdots, a_i$, 分别扩充成 M 的一组基 $a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_j$ 和 N 的一组基 $a_1, \cdots, a_i, c_1, \cdots, c_k$. 考虑向量组 $a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_j, c_1, \cdots, c_k$, 其显然可以线性表示 $M + N$. 下面说明其线性无关. 设有线性组合 $k_1 a_1 + \cdots + k_i a_i + l_1 b_1 + \cdots + l_j b_j + m_1 c_1 + \cdots + m_k c_k = 0$. 由 $l_1 b_1 + \cdots + l_j b_j = -(k_1 a_1 + \cdots + k_i a_i + m_1 c_1 + \cdots + m_k c_k) \in N$ 知 $l_1 b_1 + \cdots + l_j b_j \in M \cap N$, 由 $M \cap N$ 的一组基 $a_1, \cdots, a_i$ 与 $b_1, \cdots, b_j$ 线性无关知 $l_1 = \cdots = l_j = 0$. 同理有 $m_1 = \cdots = m_k = 0$. 故 $k_1 a_1 + \cdots + k_i a_i = 0$. 由 $a_1, \cdots, a_i$ 是 $M \cap N$ 的一组基有 $k_1 = \cdots = k_i = 0$. ▶

2.3. **矩阵的秩.**

练习 2.3.1. 给定矩阵 $A = u_1 v_1^T + u_2 v_2^T$.

1. 写出 A 的行空间、列空间.

◀ 设 u_i, v_i 的第 j 个元素为 u_{ij}, v_{ij}. A 的列空间 $R(A)$ 是 $Ae_1 = u_1v_1^Te_1+u_2v_2^Te_1 = v_{11}u_1+v_{21}u_2$ 和 $Ae_2 = u_1v_1^Te_2+u_2v_2^Te_2 = v_{12}u_1+v_{22}u_2$ 生成的子空间. A 的行空间 $R(A^T)$ 是 $A^Te_1 = v_1u_1^Te_1+v_2u_2^Te_1 = u_{11}v_1 + u_{21}v_2$ 和 $A^Te_2 = v_1u_1^Te_2 + v_2u_2^Te_2 = u_{12}v_1 + u_{22}v_2$ 生成的子空间. ▶

2. 如果 u_1, u_2, v_1, v_2 都不为零, 求 $rank(A)$.

◀ $rank(A)$ 可能的取值为 $0, 1, 2$. ▶

3. 讨论这四个向量与 $rank(A)$ 之间的关系.

◀ $u_1v_1^T$ 和 $u_2v_2^T$ 中的每项可以提供秩 1. ▶

练习 2.3.2. 求下列矩阵列空间的一组基.

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ 第 $1, 2, 4$ 列. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$.

◀ 第 $1, 2, 3$ 列. ▶

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ 第 $1, 2, 3, 4, 5$ 列. ▶

练习 2.3.3. 求满足下列条件的 3×4 矩阵 A 的行简化阶梯形和秩.

1. $Ax = 0$ 解集的一组基为 $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

◀ A 对应的行简化梯形矩阵对应零空间 $N(A)$ 满足的一组线性无关的线性方程. 设 $N(A)$ 的一组基为 $a_1, \cdots, a_k$, 解方程 $x^T \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{bmatrix} = 0$ 得到一组线性无关的行向量 x^T, 再做行变换化为行简化梯形即为 A 的行简化梯形. (解方程时选取适当的解, 可以直接得到行简化梯形.) 解得 A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ & & 1 & -6 \\ & & & \end{bmatrix}$. $rank(A) = 2$. ▶

2. A 的 i, j 元为 $a_{ij} = 4$.

◀ A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$. $rank(A) = 1$. ▶

3. A 的 i, j 元为 $a_{ij} = i + j + 1$.

◀ A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & & \end{bmatrix}$. $rank(A) = 2$. ▶

4. A 的 i, j 元为 $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

◀ A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$. $rank(A) = 1$. ▶

练习 2.3.4. 设矩阵 A 的行简化阶梯形为 R,求下列 B 的行简化阶梯形.

1. $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} R & R \end{bmatrix}$. ▶

2. $B = \begin{bmatrix} A & AC \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} R & RC \end{bmatrix}$. ▶

3. $B = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

4. $B = \begin{bmatrix} A \\ CA \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

5. $B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$.

◀ 设 $R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 R_1 行满秩. B 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

6. $B = PA$, 其中 P 是可逆矩阵.

◀ R. ▶

7. A 有 LU 分解 $A = LU$, 这里 L 为单位下三角阵, 令 $B = U$.

◀ I. (由于 A 可逆.) ▶

练习 2.3.5. 求矩阵 A 中“$*$”处的元素,满足相应的条件.

1. $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&*&*\\4&*&*\end{bmatrix}$, 且 A 的秩为 1.

◀ $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&4&8\\4&8&16\end{bmatrix}$. (秩 1 矩阵的任意两行 (列) 线性相关.) ▶

2. $A=\begin{bmatrix}*&9&*\\1&*&*\\2&6&-3\end{bmatrix}$, 且 A 的秩为 1.

◀ $A=\begin{bmatrix}3&9&-\frac{9}{2}\\1&3&-\frac{3}{2}\\2&6&-3\end{bmatrix}$. ▶

3. $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&*\end{bmatrix}$, $a\neq 0$, 且 A 的秩为 1.

◀ $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&\frac{bc}{a}\end{bmatrix}$. ▶

4. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&7\\4&5&*\end{bmatrix}$, 且 A 的秩为 2.

◀ $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&7\\4&5&9\end{bmatrix}$. ▶

练习 2.3.6. 构造满足下列条件的矩阵 R, 要求其中为 1 的元素尽量多.

1. R 为 4×7 的阶梯形, 其中主列为第二、四、五列.

◀ $\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&1&1\\&&&1&1&1&1\\&&&&1&1&1\\&&&&&&\end{bmatrix}$. ▶

2. R 为 4×7 的阶梯形, 其中主列为第一、三、六、七列.

◀ $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\&&1&1&1&1&1\\&&&&&1&1\\&&&&&&1\end{bmatrix}$. ▶

3. R 为 4×7 的阶梯形, 其中主列为第四、六列.

◀ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$. ▶

4. R 为 4×8 的行简化阶梯形,其中自由列为第二、四、五、六列.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

5. R 为 4×8 的行简化阶梯形,其中自由列为第一、三、六、七、八列.

◀ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$. ▶

练习 2.3.7. 说明满足下列条件的矩阵 A 是否存在. 如果存在,举例说明,要求其中为 0 的元素尽量多.

1. A 为 4×7 的阶梯形,其中主列为第二、四、五列, A^T 的主列为第一、三列.

◀ 不存在. 主列的数量即为矩阵的秩, 而 $rank(A) = rank(A^T)$. ▶

2. A 为 4×7 的阶梯形,其中主列为第二、四、五列, A^T 的主列为第二、三、四列.

◀ 不存在. 非零的阶梯形矩阵第 1 行非零. ▶

练习 2.3.8. 证明, $rank(kA) = rank(A)\,(k \neq 0)$, $rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$.

◀ 前者是由于左乘可逆阵 kI 不改变秩; 后者是由于 $A+B$ 的列空间含于 A 的列空间和 B 的列空间生成的向量空间, 故其维数不大于后两者的维数之和. ▶

练习 2.3.9. 对分块矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, 证明, $\max\{rank(A), rank(B)\} \leq rank(C) \leq rank(A)+rank(B)$.

◀ 由 A, B 的列空间含于 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 的列空间, 故有 $rank(A) \leq rank(C)$, $rank(B) \leq rank(C)$, 从而有 $\max\{rank(A), rank(B)\} \leq rank(C)$. 由 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 的列空间含于 A 的列空间和 B 的列空间生成的向量空间, 故其维数不大于后两者的维数之和. ▶

练习 2.3.10. 1. 对分块对角矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 证明, $rank(C) = rank(A) + rank(B)$.

◀ 将 C 相抵到 $\begin{bmatrix} I_{rank(A)} & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & I_{rank(B)} & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 即得 $rank(C) = rank(A) + rank(B)$. ▶

2. 对分块上三角矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 证明, $rank(C) \leq rank(A) + rank(B)$. 由此证明, 当 A, B 可逆时, C 也可逆.

◀ 将 C 相抵到 $\begin{bmatrix} I_{rank(A)} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ & & I_{rank(B)} & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 再相抵到 $\begin{bmatrix} I_{rank(A)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ & & I_{rank(B)} & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 即得 $rank(C) \leq rank(A)+rank(B)$, 等号成立当且仅当第二个矩阵中的 $* = 0$. 当 A, B 可逆时, C 相抵于 $\begin{bmatrix} I_{rank(A)} & \\ & I_{rank(B)} \end{bmatrix}$ 故可逆. ▶

练习 2.3.11 (秩不等式)**.** 设 A, B, C 分别为 $m \times n, n \times k, k \times s$ 矩阵, 证明, $rank(AB) + rank(BC) \leq rank(ABC) + rank(B)$.

◀ 相抵. $\begin{bmatrix} & B \\ ABC & \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 1 列}]{\text{第 2 列右乘}C} \begin{bmatrix} BC & B \\ ABC & \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{-A\text{左乘第 1 行}} \begin{bmatrix} BC & B \\ & -AB \end{bmatrix}$. 故 $rank(ABC) + rank(B) = rank(\begin{bmatrix} & B \\ ABC & \end{bmatrix}) = rank(\begin{bmatrix} BC & B \\ & -AB \end{bmatrix}) \geq rank(-AB) + rank(BC) = rank(AB) + rank(BC)$. ▶

练习 2.3.12. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 1, 证明, 存在非零向量 $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$, 使得 $A = ab^T$.

◀ 由 A 的秩为 1, A 的某列 $a \neq 0$, 且 A 的任意两列线性相关. 设 A 的第 i 列等于 a 的 b_i 倍, 取 $b = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$, 则 $A = ab^T$. ▶

练习 2.3.13. 试分析矩阵 A 满足什么条件时, $AB = AC$ 可以推出 $B = C$.

◀ $AB = AC$ 可以推出 $B = C$ 当且仅当 A 列满秩 (这等价于 A 左可逆, 见下一题). 若 A 左可逆 (即存在矩阵 A' 使得 $A'A = I$), 我们有 $AB = AC \Rightarrow A'AB = A'AC \Rightarrow B = C$. 若 A 不列满秩, 则 $Ax = 0$ 有非零解, $Ax = A0$ 即为反例. (注意: A 不是方阵时也有左右可逆的概念, 但同时有左右逆时一定是方阵.) ▶

练习 2.3.14. 设 $m \times n$ 矩阵 A 列满秩, 求证: 存在行满秩的 $n \times m$ 矩阵 B, 使得 $BA = I_n$.

◀ 我们有 $m \geq n$. 由 A 的秩为 n, A 的行向量 $a_1^T, \cdots, a_m^T$ 生成了整个 (n 维) 行向量空间, 故存在 $b_{i1}, \cdots, b_{in}$ 使得 $b_{i1}a_1^T + \cdots + b_{in}a_m^T = e_i^T$. 取 $B = (b_{ij})$ 即有 $BA = I_n$. 由 $n = rank(I_n) = rank(BA) \leq rank(B) \leq n$, 我们有 $rank(B) = n$ 即 B 行满秩. ▶

练习 2.3.15. 证明命题 2.3.10.

命题 2.3.10: 1. 矩阵 A 可逆当且仅当 A 满秩.

2. 矩阵 A 是零矩阵当且仅当 $rank(A) = 0$.

◀ 由于相抵不改变命题中的条件, 故只需考虑 A 的相抵标准形 $\begin{bmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{bmatrix}$. 第一个命题的两边均等价于 $n - r = 0$, 第二个命题的两边均等价于 $r = 0$. ▶

练习 2.3.16. 设 A, B 是 n 阶方阵, 利用不等式 $rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$, 证明,

1. 如果 $AB = I_n$, 则 A, B 都可逆, 且 $BA = I_n$.

◀ 若 $AB = I_n$, 由不等式 $rank(A) = rank(B) = n$, 故 A, B 都可逆. 由 $AB = I_n$, B 为 A 的逆, 故 $BA = I_n$. ▶

2. 如果 AB 可逆, 则 A,B 都可逆.

◀ 由不等式 $rank(A)=rank(B)=n$, 故 A,B 都可逆. ▶

练习 2.3.17. 证明命题 2.3.15.

命题 2.3.15: 给定两个 $m\times n$ 矩阵 A,B. 那么二者相抵, 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q, 使得 $PAQ=B$.

◀ 初等行变换即左乘可逆阵, 初等列变换即右乘可逆阵. ▶

练习 2.3.18. 证明, 当 A 行满秩时, 仅用初等列变换就可以把它化为相抵标准形; 当 A 列满秩时, 仅用初等行变换就可以把它化为相抵标准形.

◀ 第一个断言是第二个的转置, 只证第二个断言. 考虑 A 的行简化阶梯形, 其必形如 $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 2.3.19. 对二阶方阵 A, 如果存在 $n>2$, 使得 $A^n=0$, 求证: $A^2=0$.

◀ 在秩不等式 $rank(AB)+rank(BC)\le rank(ABC)+rank(B)$ 中取 $B=A^{k-1},C=A$ 有 $rank(A^{k-1})-rank(A^k)\ge rank(A^k)-rank(A^{k+1})$, 故若对某个 k 有 $rank(A^{k-1})=rank(A^k)$, 则 $rank(A^{k-1})=rank(A^k)=rank(A^{k+1})=\cdots$. 设 p 是最小的正整数使得 $A^p=0$, 我们有 $2=rank(I_2)>rank(A)>\cdots>rank(A^p)=0$, 故 $p\le 2$. ▶

练习 2.3.20. 多项式 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$, 求证: 对任意方阵 A, 都有 $rank(f(A))\le rank(A)$.

◀ 由 $f(0)=0$, 存在某个多项式 $g(x)$ 使得 $f(x)=xg(x)$. $rank(f(A))=rank(A\cdot g(A))\le rank(A)$. ▶

练习 2.3.21. 证明反对称矩阵的秩是偶数. 由此证明, 奇数阶反对称矩阵一定不可逆.

◀ 我们需要进行保持反对称性的操作以求得反对称阵的不变量. 下面对 A 的阶数归纳证明对反对称阵 A, 存在可逆阵 P 使得 $P^TAP=diag(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},0,\cdots,0)$.

归纳奠基. 对 1 阶反对称阵 $A=0$ 命题显然成立. 2 阶反对称阵形如 $\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$. 若 $a=0$, 命题显然成立. 若 $a<0$, 我们可以互换 A 的两行, 再互换 A 的两列 (这对应取 $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 并考虑 P^TAP), 故只需考虑 $a>0$ 的情况. 此时取 $P=\begin{bmatrix} a^{-\frac{1}{2}} & \\ & a^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$ 即可.

归纳提升. 设命题对 $k-1$ 阶反对称阵和 $k-2$ 阶反对称阵成立. 我们证明命题对 k 阶反对称阵 A 成立.

若 A 的第一行为 0, 即 $A=diag(0,A_1)$, 其中 A_1 为 A 右下角 $k-1$ 阶的反对称块, 由归纳假设存在可逆阵 P_1 使得 $P_1^TA_1P_1=diag(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},0,\cdots,0)$. 取 $P=diag(1,P_1)$, 则 $P^TAP=diag(0,\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},0,\cdots,0)$, 再取一个置换矩阵 P' 交换对角块的顺序即可.

若 A 的第一行不为 0, 取某个适当的置换矩阵 P'' 并考虑 P''^TAP'', 只需考虑 A 的 $(2,1)$ 元不为 0 的情况, 此时 $A=\begin{bmatrix}A_2 & -*^T\\ * & *'\end{bmatrix}$, 其中 $A_2=\begin{bmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{bmatrix}$, $a\neq 0$. 取 $P=\begin{bmatrix}I_2 & A_2^{-1}*^T\\ & I_{k-2}\end{bmatrix}$ 并考虑 P^TAP, 我们将 A 化为了某个准对角阵, 再应用 $k-2$ 阶时的归纳假设, 我们将 A 化为了 $diag(\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},0,\cdots,0)$ 的形式.

故反对称阵的秩是偶数. 奇数阶反对称阵不满秩, 从而不可逆. (这是相合部分的标准结论.) ▶

练习 2.3.22. 设 A 是 n 阶可逆实反对称矩阵, b 是 n 维实列向量, 求证:

1. $rank(A+bb^T)=n$;

◀ 相抵证明 $\begin{bmatrix}1 & \\ & A+bb^T\end{bmatrix}$ 可逆: $\begin{bmatrix}1 & \\ & A+bb^T\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{b\text{左乘第 1 行}}\begin{bmatrix}1 & \\ b & A+bb^T\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{加到第 2 列}]{\text{第 1 列右乘}-b^T}\begin{bmatrix}1 & -b^T\\ b & A\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{加到第 1 行}]{b^TA^{-1}\text{左乘第 2 行}}\begin{bmatrix}1 & \\ b & A\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{-b\text{左乘第 1 行}}\begin{bmatrix}1 & \\ & A\end{bmatrix}$. 注意对反对称方阵 A^{-1} 有 $b^TA^{-1}b=0$. (本题也可以通过证明对应的齐次线性方程组只有零解得到满秩. 一般地, 考虑特征值可知若方阵 A 的对称分量与反对称分量之一可逆, 则 A 可逆.) ▶

2. $rank(\begin{bmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{bmatrix})=n$.

◀ 相抵. $\begin{bmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{-b^TA^{-1}\text{左乘第 1 行}}\begin{bmatrix}A & b\\ & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{加到第 2 列}]{\text{第 1 列右乘}-A^{-1}b}\begin{bmatrix}A & \\ & 0\end{bmatrix}$. ▶

练习 2.3.23 (满秩分解)**.** 1. 求向量 u,v, 使得 $uv^T=\begin{bmatrix}3 & 6 & 6\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 8 & 8\end{bmatrix}$.

◀ $u=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$. ▶

2. 设 A 是秩为 $r>0$ 的 $m\times n$ 的矩阵, 令 C 为 A 的主列按顺序组成的矩阵, 则 C 有几行几列? 令 R 为 A 的行简化阶梯形的非零行按顺序组成的矩阵, 则 R 有几行几列? 求证 $A=CR$.

◀ m 行 r 列. r 行 n 列. 若 A 为行简化阶梯形, 不难看出 $A=CR$. 对一般的矩阵 A', 我们有 $A'=PA$, 其中 P 可逆, A 为某个行简化阶梯形矩阵. 记 A' 对应的矩阵为 C',R', 我们有 $C'=PC$, $R'=R$, 由 $A=CR$ 我们有 $A'=C'R'$. ▶

3. 任意秩为 $r>0$ 的 $m\times n$ 矩阵 A 可以分解成列满秩矩阵和行满秩矩阵的乘积, 即分别存在 $m\times r, r\times n$ 矩阵 C,R, 且 $rank(C)=rank(R)=r$, 使得 $A=CR$.

◀ 由上一问即得. ▶

4. 证明, 任意线性映射 f 都存在分解 $f=g\circ h$, 其中 g 是线性满射, h 是线性单射. 提示: 对一般的映射, 也有类似的结论, 见练习 1.1.8.

◀ 设 f 对应的矩阵是 A, 取 g,h 分别为上一问的分解中的 C,R 对应的线性映射即可. ▶

练习 2.3.24 (秩一分解)**.** 证明, 任意秩为 $r>0$ 的矩阵 A 可以分解成 r 个秩为 1 的矩阵的和.

◀ 考虑相抵标准形 $A=Pdiag(I_r,0)Q$, 则 $A=Pdiag(\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix},0)Q+\cdots+Pdiag(\begin{bmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1\end{bmatrix},0)Q$ 即为欲求分解. ▶

2.4. **线性方程组的解集.**

练习 2.4.1. 求下列矩阵零空间的一组基:

1. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\ -6\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 7 & -5 & 5 & 5\\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}4\\ -2\\ 2\\ -3\\ 7\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2\\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4\\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ -5\\ 0\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$. ▶

练习 2.4.2. 求下列方程组的全部解: $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1. \end{cases}$

◀ $\begin{bmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_5 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4+\frac{5}{6}x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$. ▶

练习 2.4.3. 求下列矩阵零空间的一组基.

1. $\begin{bmatrix} I_n & I_n \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} e_i \\ -e_i \end{bmatrix}$, $i=1,2,\cdots,n$. ▶

2. $\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} e_i \\ -e_i \end{bmatrix}$, $i=1,2,\cdots,n$. ▶

3. $\begin{bmatrix} I_n & I_n & I_n \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} e_i \\ -e_i \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} e_i \\ 0 \\ -e_i \end{bmatrix}$, $i=1,2,\cdots,n$. ▶

练习 2.4.4. 给定 $A=\begin{bmatrix} 1 & & \\ 6 & 1 & \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$,求 A 的零空间、列空间、行空间、左零空间的一组基.

◀ 对 A 做可逆行变换不改变 A 的零空间, A 的零空间即为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的零空间, 一组基为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

对 A 做可逆列变换不改变 A 的列空间, A 的列空间即为 $\begin{bmatrix}1&&\\6&1&\\9&8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\6&1&\\9&8&1\end{bmatrix}$ 的列空间, 一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

A 的行空间即为 A^T 的列空间, 对 A 做可逆行变换不改变 A^T 的列空间, A^T 的列空间即为 $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\end{bmatrix}^T$ 的列空间, 一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$.

A 的左零空间即为 A^T 的零空间,对 A 做可逆列变换不改变 A^T 的零空间, A^T 的零空间即为 $\begin{bmatrix}1&&\\6&1&\\9&8&1\end{bmatrix}^T$ 的零空间, 一组基为 $\varnothing$. ▶

练习 2.4.5. 线性方程组 $Ax=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ 的全部解是 $x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 求 A.

◀ 对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 $x=k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 故可解出 A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}1&0\\&\end{bmatrix}$, A 的每行是 $\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$ 的线性组合. 代入特解 $x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 解得 $A=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}$. ▶

练习 2.4.6. 求常数 a,b,c, 使得方程 $\begin{bmatrix}1&-3&-1\end{bmatrix}x=12$ 的所有解都具有如下形式: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}c\\0\\1\end{bmatrix}x_3$.

◀ 考察特解 $\begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix}$ 得 $a=12$. 对应的齐次线性方程组 $\begin{bmatrix}1&-3&-1\end{bmatrix}x=0$ 的解形如 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}c\\0\\1\end{bmatrix}x_3$, 解得 $b=3,c=1$. ▶

练习 2.4.7. 设 3×4 矩阵 A 的零空间的一组基是 $\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}$.

1. 求 $rank(A)$.

◀ $rank(A)=4-dim(N(A))=3$. ▶

2. 写出 A 的行简化阶梯形.

◀ A 对应的行简化梯形矩阵对应零空间 $N(A)$ 满足的一组线性无关的线性方程. 设 $N(A)$ 的一组基为 $a_1,\cdots,a_k$, 解方程 $x^T\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_k\end{bmatrix}=0$ 得到一组线性无关的行向量 x^T, 再做行变换化为行简化梯形即为 A 的行简化梯形. (解方程时选取适当的解, 可以直接得到行简化梯形.) 解得 A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}1 & & -2 & \\ & 1 & -3 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$. ▶

3. 方程组 $Ax=b$ 对哪些 b 有解?

◀ 由 A 行满秩, 存在矩阵 $B_{4\times 3}$ 使得 $AB=I_3$. 对任意的 b, $Ax=b$ 有解 $x=Bb$. ▶

练习 2.4.8. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\1&0&0&0\end{bmatrix}$, 对任意 $v\in\mathbb{R}^4$, 令 $S_v:=\{v+x_0|x_0\in N(A)\}$, 即由 $N(A)$ 沿着 v 平移后得到的子集. 令 $v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$, $v_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\6\end{bmatrix}$, 求 b_i 使得 S_{v_i} 是 $Ax=b_i$ 的解集, 并分析 v_1,v_2,v_3 之间的关系.

◀ $b_1=\begin{bmatrix}5\\17\\1\end{bmatrix}$, $b_2=\begin{bmatrix}11\\23\\0\end{bmatrix}$, $b_3=\begin{bmatrix}38\\86\\1\end{bmatrix}$. ▶

练习 2.4.9. 设 A,B,C,D 为二阶方阵, 如果分块矩阵 $M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$ 满足每一行、每一列以及四个二阶子方阵中的四个元素都是 1,2,3,4, 则称 M 为四阶数独矩阵. 写出一个四阶数独矩阵, 并分别求其列空间、行空间、零空间和左零空间的一组基.

◀ 例: $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\2&1&4&3\\4&3&2&1\end{bmatrix}$. 这样的矩阵总有秩 3, 故你给出的四个空间的维数应为 $3,3,1,1$. ▶

练习 2.4.10. 把国际象棋的棋盘以及棋子的初始位置分别抽象成如下矩阵 B 和 C:

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}r&n&b&q&k&b&n&r\\p&p&p&p&p&p&p&p\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\p&p&p&p&p&p&p&p\\r&n&b&q&k&b&n&r\end{bmatrix}.$$

分别求其列空间、行空间、零空间和左零空间的一组基.

◀ 注意对 A 做行变换不改变 $N(A)$ 和 $R(A^T)$, 对 A 做列变换不改变 $R(A)$ 和 $N(A^T)$, 故做行变换或列变换化为标准形可求得列空间 (列的线性组合) 和零空间 (线性方程组的解空间).

$$R(B)=R(B^T):\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}.N(B)=N(B^T):\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

对 C 的元素讨论.

(1). $r=n=b=q=k=p=0$. $C=0.R(C)=R(C^T):\varnothing.N(C)=N(C^T):e_1,\cdots,e_8$.

(2). $r=n=b=q=k=0$, $p\neq 0$. $R(C): e_2+e_7.R(C^T): e_1+\cdots+e_8.N(C): e_1,e_3,e_4,e_5,e_6,e_8,e_2-e_7.N(C^T): e_i-e_{i+1}, 1\leq i\leq 7$.

(3). $p=0$, r,n,b,q,k 不全为 0.

(4). $p\neq 0$, r,n,b,q,k 不全为 0. 具体计算与前面方法相同, 不再赘述. ▶

练习 2.4.11. 在平面直角坐标系下给定点 $A(a_1,a_2),B(b_1,b_2),C(c_1,c_2)$, 证明, A,B,C 三点不共线当且仅当矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&a_2&1\\b_1&b_2&1\\c_1&c_2&1\end{bmatrix}$ 可逆.

◀ 平面上的点 $A(a_1,a_2),B(b_1,b_2),C(c_1,c_2)$ 不共线 $\iff$ $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $A'=(a_1,a_2,1)^T,B'=(b_1,b_2,1)^T,C'=(c_1,c_2,1)^T$ 线性无关 $\iff$ 矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&a_2&1\\b_1&b_2&1\\c_1&c_2&1\end{bmatrix}$ 可逆. ▶

练习 2.4.12. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_t$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的解, 其中 $b\neq 0$, 证明, $c_0x_0+c_1x_1+\cdots+c_tx_t$ 也是解当且仅当 $c_0+\cdots+c_t=1$.

◀ 这是因为 $A(c_0x_0+c_1x_1+\cdots+c_tx_t)=(c_0+\cdots+c_t)b$. ▶

练习 2.4.13. 设 x_0 是线性方程组 $Ax=b$ 的一个解,其中 $b\neq 0$,而 $k_1,\cdots,k_t$ 是 $N(A)$ 的一组基.令 $x_i=x_0+k_i, 1\le i\le t$, 证明,线性方程组的任意解都可唯一地表示成 $c_0x_0+c_1x_1+\cdots+c_tx_t$,其中 $c_0+\cdots+c_t=1$.

◀ 注意到 $c_0x_0+c_1x_1+\cdots+c_tx_t=x_0+c_1k_1+\cdots+c_tk_t$. ▶

练习 2.4.14. 对任意 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的向量组 $x_0,x_1,\cdots,x_t$,证明,存在满足如下条件的非齐次线性方程组:

1. $x_0,x_1,\cdots,x_t$ 都是此方程组的解;
2. 该方程组的任意解都能被 $x_0,x_1,\cdots,x_t$ 线性表示.

◀ $x_1,\cdots,x_t$ 确定了一个含有 $n-t$ 个方程的齐次线性方程组, 使得其解空间由 $x_1-x_0,\cdots,x_t-x_0$ 生成. 由其得到一个非齐次线性方程组, 使得 x_0 为其特解. ▶

练习 2.4.15. 给定线性方程组 $Ax=b$,和分块矩阵 $\begin{bmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{bmatrix}$.证明,如果 $rank(A)=rank(B)$, 则方程组有解.

◀ 若方程组无解, 则 $rank(\begin{bmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{bmatrix})\ge rank(\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix})>rank(A)$. ▶

练习 2.4.16 (Fredholm 二择一定理)**.** 线性方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当 $\begin{bmatrix}A^T\\ b^T\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 无解.

◀ $Ax=b$ 有解 $\iff b$ 在 A 的列空间中. 容易看出 $\begin{bmatrix}A^T\\ b^T\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 有解 $\iff b$ 不在 A 的列空间中. (等价证法: $Ax=b$ 有解 $\iff rank(A)=rank(\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix})$, $\begin{bmatrix}A^T\\ b^T\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 有解 $\iff rank(\begin{bmatrix}A^T\\ b^T\end{bmatrix})=rank(\begin{bmatrix}A^T & 0\\ b^T & 1\end{bmatrix})\overset{\text{转置}}{\iff} rank(\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix})=rank(\begin{bmatrix}A & b\\ 0 & 1\end{bmatrix})$, $\begin{bmatrix}A^T\\ b^T\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 无解 $\iff rank(\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix})+1=rank(\begin{bmatrix}A & b\\ 0 & 1\end{bmatrix})$.) ▶

练习 2.4.17. 如果 10 阶方阵 A 满足 $A^2=0$,证明 $rank(A)\le 5$.是否存在 $A^2=0$,$rank(A)=5$ 的 10 阶方阵 A?

◀ 在秩不等式 $rank(AB)+rank(BC)\le rank(ABC)+rank(B)$ 中取三个变元分别为 A^5,I_{10},A^5. 例: $diag(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix})$. ▶

练习 2.4.18. 设 A,B 分别为 $m\times n,n\times k$ 矩阵,证明,$rank(AB)\ge rank(A)+rank(B)-n$.

◀ 在秩不等式 $rank(AB)+rank(BC)\le rank(ABC)+rank(B)$ 中取三个变元分别为 A,I_n,B. ▶

练习 2.4.19. 对 n 阶方阵 A,求证:

1. $A^2=A$ 当且仅当 $rank(A)+rank(I_n-A)=n$.

◀ 相抵. $\begin{bmatrix} A & \\ & I_n-A \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 列}]{\text{第 1 列右乘}I} \begin{bmatrix} A & A \\ & I_n-A \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{I\text{左乘第 1 行}} \begin{bmatrix} A & A \\ A & I_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 1 行}]{-A\text{左乘第 2 行}} \begin{bmatrix} A-A^2 & \\ A & I_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 1 列}]{\text{第 2 列右乘}-A}$ $\begin{bmatrix} A-A^2 & \\ & I_n \end{bmatrix}$. 故 $rank(A)+rank(I_n-A)=rank(A-A^2)+n=n \iff rank(A-A^2)=0 \iff$ $A^2=A$. (直接应用秩不等式 (取秩不等式中的三个变元为 A, I_n, I_n-A) 以及其中等号成立的条件即可. 这里相当于重新证明了一遍秩不等式. 下一问同理.) ▶

2. $A^2=I_n$ 当且仅当 $rank(I_n+A)+rank(I_n-A)=n$.

◀ 相抵. $\begin{bmatrix} I_n+A & \\ & I_n-A \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 列}]{\text{第 1 列右乘}I} \begin{bmatrix} I_n+A & I_n+A \\ & I_n-A \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{I\text{左乘第 1 行}} \begin{bmatrix} I_n+A & I_n+A \\ I_n+A & 2I_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 1 列}]{\text{第 2 列右乘}-\frac{1}{2}(I_n+A)}$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I_n-A^2) & I_n+A \\ & 2I_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 1 行}]{-\frac{1}{2}(I_n+A)\text{左乘第 2 行}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I_n-A^2) & \\ & 2I_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}I_n\text{左乘第 2 行}]{2I_n\text{左乘第 1 行}} \begin{bmatrix} I_n-A^2 & \\ & I_n \end{bmatrix}$. 故 $rank(I_n+A)+rank(I_n-A)=rank(I_n-A^2)+n=n \iff rank(I_n-A^2)=0 \iff A^2=I_n$. ▶

(注: 使用 Jordan 标准形容易解决本题. 如第 2 问, 对单个 k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda)$, 我们有 $rank(I_k+J_k(\lambda))+rank(I_k-J_k(\lambda))\ge k$, 等号成立当且仅当 $\lambda=\pm1$ 且 $k=1$. 对 A 的所有 Jordan 块求和, 我们得到 $rank(I_n+A)+rank(I_n-A)\ge n$, 等号成立当且仅当 A 的所有 Jordan 块均为特征值为 ±1 的 1 阶 Jordan 块.)

练习 2.4.20. 证明或否定: 如果对任意 b, 方程组 $A_1x=b$ 和 $A_2x=b$ 总有相同的解集, 则 $A_1=A_2$.

◀ 取 $b=A_1e_i$ 为 A_1 的第 i 列, $x=e_i$ 为 $A_1x=b$ 的解, 故也是 $A_2x=b$ 的解, 即 $A_2e_i=A_1e_i$, A_2 的第 i 列等于 A_1 的第 i 列. $A_2=\begin{bmatrix}A_2e_1\cdots A_2e_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1e_1\cdots A_1e_n\end{bmatrix}=A_1$. ▶

练习 2.4.21. 证明, $\mathbb{R}^n$ 的任意子空间一定是某个矩阵的零空间.

◀ 设这个子空间的基为 $a_1,\cdots,a_r$, 将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $a_1,\cdots,a_r,b_1,\cdots,b_{n-r}$, 则线性映射 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-r}$, $k_1a_1+\cdots+k_ra_r+l_1b_1+\cdots+l_{n-r}b_{n-r}\mapsto l_1e_1+\cdots+e_{n-r}b_{n-r}$ 的矩阵的零空间即为这个子空间. ▶

练习 2.4.22. 设 A,B 分别是 $l\times n, m\times n$ 矩阵, 证明, $N(A)\subseteq N(B)$ 当且仅当存在 $m\times l$ 矩阵 C, 使得 $B=CA$.

◀ $N(A)\subseteq N(B) \iff B$ 的行可被 A 的行线性表示 (为什么?) $\iff$ 存在 $m\times l$ 矩阵 C, 使得 $B=CA$. ▶

练习 2.4.23. 设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵, 证明, $N(A)=N(B)$ 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 T, 使得 $B=TA$.

◀ $N(A)=N(B) \iff A,B$ 的行可以互相线性表示 $\iff$ 存在 m 阶可逆矩阵 T, 使得 $B=TA$. ▶

练习 2.4.24. 设 A 是 n 阶方阵, 求证: 存在 $k\le n$, 满足 $rank(A^k)=rank(A^{k+1})=\cdots$. 由此证明, 如果存在 p 使得 $A^p=0$, 则 $A^n=0$.

◀ 在秩不等式 $rank(AB)+rank(BC)\le rank(ABC)+rank(B)$ 中取 $B=A^{k-1}, C=A$ 有 $rank(A^{k-1})-rank(A^k)\ge rank(A^k)-rank(A^{k+1})$, 故若对某个 k 有 $rank(A^{k-1})=rank(A^k)$, 则

$rank(A^{k-1}) = rank(A^k) = rank(A^{k+1}) = \cdots$. 设 p 是最小的正整数使得 $A^p = 0$, 我们有 $n = rank(I_n) > rank(A) > \cdots > rank(A^p) = 0$, 故 $p \leq n$. ▶

练习 2.4.25 (Kirchhoff 电流定律)**.** 对练习 2.1.22 中的电路网络, 令 M_G 为对应的关联矩阵. 根据 Kirchhoff 电流定律, 求 M_G 左零空间的一组基.

练习 2.4.26. 在例 2.4.7 中, 有结论 $rank(M_G^T R^{-1} M_G) = rank(M_G)$, 其中 R^{-1} 为对角元素都大于零的对角矩阵. 根据下列思路证明该结论.

1. 若 $y^T R^{-1} y = 0$, 则 $y = 0$.
2. $M_G x = 0$, 当且仅当 $M_G^T R^{-1} M_G x = 0$.
3. $rank(M_G^T R^{-1} M_G) = rank(M_G)$.

练习 2.4.27 (桥墩载荷)**.** 现在假设桥有三个桥墩, 重力为 F_1 的重物和桥墩位置关系如图 2.4.5 所示. 以 S_1, S_2, S_3 三处为杠杆, 列出方程

$$\begin{bmatrix} 0 & -d_1 & -d_1 - d_2 \\ d_1 & 0 & -d_2 \\ d_1 + d_2 & d_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 F_1 \\ (d_1 - l_1) F_1 \\ (d_1 + d_2 - l_1) F_1 \end{bmatrix}$$

可以发现系数矩阵秩是 2, 因此方程组有无穷多解. 与实际矛盾! 添加力平衡条件如何? 添加其他支点的杠杆平衡条件如何? 全部无用! 事实上, 不管有多少桥墩, 系数矩阵的秩都是 2. 问题出在哪里? 关键问题在于我们忽略了桥的形变, 以及认为结构横向联系无限强. 在实际工程计算中, 这种简单实用的杠杆法要假设载荷只由相邻的两个桥墩承担. 另一种可行做法是考虑桥的形变以及结构的横向联系对载荷的影响, 所需物理知识已大大超出了本书的范围.

3. 内积和正交性

3.1. 基本概念.

练习 3.1.1. 证明命题 3.1.3.

命题 3.1.3: 向量内积满足如下性质:

1. 对称性: $a^T b = b^T a$;
2. 双线性性: $a^T(k_1 b_1 + k_2 b_2) = k_1 a^T b_1 + k_2 a^T b_2$, $(k_1 a_1 + k_2 a_2)^T b = k_1 a_1^T b + k_2 a_2^T b$;
3. 正定性: $a^T a \geq 0$, 且 $a^T a = 0$ 当且仅当 $a = 0$.

◀ 对称性对 1×1 矩阵取转置即得. 双线性性是由于矩阵乘法的双线性性. 正定性直接对 a 的坐标计算即得. ▶

练习 3.1.2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中求向量 a, b 的夹角.

1. $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\frac{\pi}{2}$. ▶

2. $a=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\3\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}3\\1\\5\\1\end{bmatrix}$.

◀ $\frac{\pi}{4}$. ▶

3. $a=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$.

◀ $arccos\frac{3}{\sqrt{77}}$. ▶

练习 3.1.3. 求证:

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 a,b 夹角为 0, 当且仅当存在 $k\geq 0$, 使得 $a=kb$.

◀ a,b 夹角为 0 $\iff$ $a^Tb=\sqrt{\|a\|=\|b\|}$ $\iff$ 存在 $k\geq 0$, 使得 $a=kb$ (Schwarz 不等式的取等条件). ▶

2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的两向量 a,b 正交, 当且仅当对任意实数 t, 有 $\|a+tb\|\geq\|a\|$.

◀ 由命题 3.1.7 即得. ▶

3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 a,b 正交, 当且仅当 $\|a+b\|=\|a-b\|$.

◀ a,b 正交 $\iff a^Tb=0 \iff a^Ta+2a^Tb+b^Tb=a^Ta-2a^Tb+b^Tb \iff \|a+b\|^2=\|a-b\|^2$. ▶

练习 3.1.4. 证明推论 3.1.5.

推论 3.1.5 (三角不等式): $\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|$, 等号成立当且仅当 a,b 共线.

◀ 两边平方, 这等价于 $a^Ta+2a^Tb+b^Tb\leq a^Ta+2\|a\|\|b\|+b^Tb$, 由 Schwarz 不等式即得. ▶

练习 3.1.5 (Cauchy-Schwarz 不等式的其他证明)**.** 1. 先证明 a,b 都是单位向量的情形: $|a^Tb|\leq 1$, 且等号成立当且仅当 $a=\pm b$. 再由单位向量的情形推广到一般的情形. 提示: 利用均值不等式 $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$.

◀ 对每个分量使用均值不等式即得. 注意两边都是双线性的, 故一般情况可约化到单位向量的情况. ▶

2. 根据内积的正定性, 对任意实数 t, 都有 $(a+tb)^T(a+tb)=a^Ta+2ta^Tb+t^2b^Tb\geq 0$. 利用判别式证明结论.

◀ 由二次型正定, 其判别式非负. Cauchy-Schwarz 不等式取等对应判别式等于 0. ▶

练习 3.1.6. 给定 (非零向量) $a\in\mathbb{R}^3$. 计算 a 与坐标向量 e_1,e_2,e_3 的夹角的余弦, 并计算这三个余弦值的平方和.

◀ 设 $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, 则三个余弦为 $\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$. 平方和为 1. ▶

练习 3.1.7. 设 $\|a\|=3$, $\|b\|=4$, 确定 $\|a-b\|$ 的取值范围.

◀ $[1,7]$. ▶

练习 3.1.8. 设 $a=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}z\\x\\y\end{bmatrix}$, 且 $x+y+z=0$. 确定 a,b 夹角的取值范围.

◀ a,b 夹角的余弦值为 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\frac{1}{2}((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))}{x^2+y^2+z^2}=-\frac{1}{2}$. 故夹角为 $\frac{2}{3}\pi$. ▶

练习 3.1.9. 1. 找到 $\mathbb{R}^4$ 中的四个两两正交的向量, 且每个向量的每个分量只能是 ± 1.

◀ $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$. ▶

2. $\mathbb{R}^n$ 中最多有多少个两两正交的向量?

◀ n 个. (由于这些向量线性无关.) ▶

练习 3.1.10. 1. 找到 $\mathbb{R}^2$ 中的三个向量, 使它们之间两两内积为负.

◀ $\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$. ▶

2. 找到 $\mathbb{R}^3$ 中的四个向量, 使它们之间两两内积为负.

◀ $\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\\3\end{bmatrix}$. ▶

3. $\mathbb{R}^n$ 中最多有多少个向量, 使它们之间两两内积为负?

◀ $n+1$ 个. 注意将 $\mathbb{R}^n$ 中两两内积为负的向量 $a_1,\cdots,a_m$ 中的前 $m-1$ 个投影到与 a_m 垂直的平面上, 我们得到了 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中 $m-1$ 个两两内积为负的向量: 这是由于 $i\neq j$ 时 $a_i-\frac{a_i^Ta_m}{a_m^Ta_m}a_m$ 与 $a_j-\frac{a_j^Ta_m}{a_m^Ta_m}a_m$ 的内积仍然为负. 存在性类似前两问直接构造. ▶

练习 3.1.11. 在 $\mathbb{R}^4$ 中求一单位向量与下列向量正交:

$$a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}, a_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

◀ 解线性方程组 $x^T\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}=0$ 再将 x 单位化. 最后得到单位向量 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix}4\\0\\1\\-3\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.1.12. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 证明,

1. 如果 $b^Ta_i=0\,(1\le i\le n)$, 则 $b=0$.

◀ 这是由于 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. ▶

2. 如果 $b_1^Ta_i=b_2^Ta_i\,(1\le i\le n)$, 则 $b_1=b_2$.

◀ 这是由于 $b_1-b_2=0$. ▶

练习 3.1.13. 设 a_1,a_2,a_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基,证明下列向量组也是一组标准正交基:

$b_1=\frac{1}{3}(2a_1+2a_2-a_3)$, $b_2=\frac{1}{3}(2a_1-a_2+2a_3)$, $b_3=\frac{1}{3}(a_1-2a_2-2a_3)$.

◀ 这是由于过渡矩阵 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{bmatrix}$ 是正交矩阵. ▶

练习 3.1.14. 设 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 是 $\mathbb{R}^5$ 的一组标准正交基,令 $b_1=a_1+a_5, b_2=a_1-a_2+a_4, b_3=2a_1+a_2+a_3$, 求 $span(b_1,b_2,b_3)$ 的一组标准正交基.

◀ $\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1+a_5)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(a_1-2a_2+2a_4-a_5)$, $\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3-a_5)$. ▶

练习 3.1.15. 求齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3+x_5=0,\end{cases}$ 解空间的一组标准正交基.

◀ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\frac{1}{3\sqrt{35}}\begin{bmatrix}7\\-6\\6\\13\\5\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.1.16. 利用 Gram-Schmidt 正交化方法求由下列向量线性生成的子空间的标准正交基:

1. $a_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $a_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\2\end{bmatrix}$, $a_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\2\end{bmatrix}$.

◀ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-2\\1\\4\\3\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix}-2\\2\\-3\\2\end{bmatrix}$. ▶

2. $a_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}$, $a_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$, $a_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$.

◀ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}4\\-1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\frac{1}{3\sqrt{70}}\begin{bmatrix}-12\\13\\14\\11\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.1.17. 证明命题 3.1.13.

命题 3.1.13: 设 M,N 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间,如果 $M\subseteq N$,则 M 的任意一组标准正交基都可以扩充成 N 的一组标准正交基.

◀ 首先将 M 的这组标准正交基扩充成 N 的一组基, 再做 Gram-Schmidt 正交化. M 的这组标准正交基在正交化下不变. ▶

练习 3.1.18 (勾股定理的高维推广)**.** 1. 向量 $a, b \in \mathbb{R}^n$ 围成一个三角形, 证明其面积的平方为 $\frac{1}{2}(\|a\|^2 \|b\|^2 - (a^T b)^2)$.

◀ 使用三角形面积关于余弦的公式. ▶

2. 两两垂直的向量 $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ 围成一个四面体, 证明其斜面上三角形面积的平方等于其余三个直角三角形面积的平方和.

◀ 使用上一问得到的面积公式. 注意斜边上的三角形由 $a-b, a-c$ 张成. ▶

练习 3.1.19. 取定非零向量 $a \in \mathbb{R}^n$, 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的一个变换, 它将每个向量 b 映射到其向直线 $span(a)$ 正交投影后平行于 a 的部分.

1. 证明这是一个线性变换, 其表示矩阵为 $A = \frac{aa^T}{a^T a}$.

◀ 线性由投影的线性得到. 将 a 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基, 易见这个线性变换在这组基上的作用与 A 确定的线性变换在这组基上的作用相同, 从而 A 是这个线性变换的表示矩阵. ▶

2. 证明 $A^2 = A, A^T = A$.

◀ 直接对 $A = \frac{aa^T}{a^T a}$ 验证. ▶

练习 3.1.20 (内积决定转置)**.** 求证: 设 $m \times n$ 矩阵 A 和 $n \times m$ 矩阵 B, 如果对任意 $v \in \mathbb{R}^m$,$w \in \mathbb{R}^n$, 都有 $(Bv)^T w = v^T (Aw)$, 则 $B = A^T$.

◀ 取 v, w 为 $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ 的标准正交基代入检验. (矩阵的转置在线性映射层面的某种对应是线性映射的共轭映射.) ▶

练习 3.1.21 (Riesz 表示定理)**.** 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是线性映射, 证明, 存在向量 b, 使得对任意 $a \in \mathbb{R}^n$, 都有 $f(a) = b^T a$.

◀ 取 $b = \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.1.22. 1. (平行四边形法则) 证明 $\mathbb{R}^n$ 中任意平行四边形的两条对角线长度的平方和, 等于其四条边长的平方和.

◀ 设平行四边形相邻的两条边为向量 a, b, 欲证 $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$. 某个向量范数的平方是其内积, 使用内积的双线性直接展开. ▶

2. (极化公式) 证明 $v^T w = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$. 提示: 这意味着, 长度决定角度.

◀ 直接展开.▶

3. 设 $\|a\|_4 = (\sum_{i=1}^n a_i^4)^{\frac{1}{4}}$, 定义关于 v, w 的二元函数 $\frac{1}{4}(\|v+w\|_4^2 - \|v-w\|_4^2)$. 这个二元函数是否满足内积定义中的对称性、双线性、正定性?

◀ 满足内积定义中的对称性、正定性, 不满足双线性. ▶

4. 定义 $\|a\|_\infty$ 为所有分量中绝对值的最大值, 定义关于 v, w 的二元函数 $\frac{1}{4}(\|v+w\|_\infty^2 - \|v-w\|_\infty^2)$. 这个二元函数是否满足内积定义中的对称性、双线性、正定性? 此时, 三角不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式是否仍然成立?

◀ 满足内积定义中的对称性、正定性, 不满足双线性. Cauchy-Schwarz 不等式由练习 3.1.5.2 仍然成立, 从而三角不等式也成立. ▶

练习 3.1.23. 将某个矩阵分解为平均值与细节的叠加, 我们得到了可逆的图像压缩.

3.2. **正交矩阵和 QR 分解.**

练习 3.2.1. 求一个四阶正交矩阵, 其中前两个列向量分别为: $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\2\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix}$.

◀ 列向量为 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\2\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix}2\\1\\4\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{14}}\begin{bmatrix}2\\8\\-3\\7\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.2.2. 写出元素都是 0 或 1 的所有三阶正交矩阵.

◀ $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.2.3 (Hadamard 矩阵)**.** 给定 n 阶矩阵 A, 如果 A 的元素都是 1 或 -1, 且 $A^TA = nI_n$, 则称 A 是一个 n 阶 Hadamard 矩阵. 显然 Hadamard 是所有元素绝对值相同的正交矩阵的倍数. 可以证明 Hadamard 矩阵的阶只能是 $1, 2$ 或 $4k, k = 1, 2, \cdots$. 然而是否存在 $4k$ 阶 Hadamard 矩阵, 还是一个悬而未决的问题, 称为 Hadamard 猜想. Hadamard 矩阵在信号处理中有应用.

练习 3.2.4. 1. 列举所有的 $1, 2$ 阶 Hadamard 矩阵.

◀ $\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&1\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&1\\-1&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&-1\\1&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$.
▶

2. 说明不存在 3 阶 Hadamard 矩阵.

◀ 两个元素均为 ± 1 的奇数维向量不可能正交. ▶

3. 找出一个 4 阶 Hadamard 矩阵.

◀ $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$. ▶

4. 证明如果 A 是 Hadamard 矩阵, 则 $\begin{bmatrix}A&A\\A&-A\end{bmatrix}$ 也是 Hadamard 矩阵. 以此说明存在 2^n 阶 Hadamard 矩阵. 提示: 这与阅读 3.1.23 中的 Haar 小波基相关.

◀ 直接验证. ▶

练习 3.2.5. 证明, 上三角矩阵是正交矩阵时, 必是对角矩阵, 且对角元素是 ±1.

◀ 这是由于其列向量构成单位正交基. (推论: 若 A, B 为满足 $A^TA = B^TB$ 的上三角阵, 则 $(AB^{-1})^T(AB^{-1}) = I$, 这说明 $A = diag(\pm1, \cdots, \pm1)B$. 若进一步有 A, B 对角元非负, 则 $A = B$.) ▶

练习 3.2.6. 证明, 分块上三角矩阵 $\begin{bmatrix} c & a^T \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ 是正交矩阵时, 必有 $c = \pm1$, $a = 0$, Q 是正交矩阵.

◀ 由第一列是单位向量, $c = \pm1$. 由第一列与其他列正交, $a = 0$. 再由 $\begin{bmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ 正交得到 Q 正交. ▶

练习 3.2.7. 对标准基 $e_1, \cdots, e_n$, 显然 $\sum_{i=1}^n e_ie_i^T = I_n$. 对任意标准正交基 $q_1, \cdots, q_n$, 求证 $\sum_{i=1}^n q_iq_i^T = I_n$.

◀ 注意 $\begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$ 为正交矩阵以及 $\sum_{i=1}^n q_iq_i^T = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T$. ▶

练习 3.2.8. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两组标准正交基, 证明存在正交矩阵 Q, 使得 $Qa_i = b_i$, $1 \le i \le n$.

◀ $Qa_i = b_i$, $1 \le i \le n$ 等价于 $Q\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$. $Q = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{-1}$ 为两个正交矩阵之积故正交. ▶

练习 3.2.9. 设 $a_1, \cdots, a_s$ 和 $b_1, \cdots, b_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个向量组, 证明, 存在正交矩阵 Q, 使得 $Qa_i = b_i$, $1 \le i \le s$, 当且仅当 $a_i^Ta_j = b_i^Tb_j$, $1 \le i, j \le s$.

◀ $\Rightarrow$: $\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_s \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix}^T Q^TQ \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix}$.

$\Leftarrow$: $Qa_i = b_i$, $1 \le i \le s$ 等价于 $Q\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_s \end{bmatrix}$. 注意同时对 $a_1, \cdots, a_s$ 和 $b_1, \cdots, b_s$ 做同样的初等变换 (对应以可逆阵右乘于 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_s \end{bmatrix}$) 不改变题目中的两个条件. 通过做适当的初等变换, 可以设 $a_1, \cdots, a_s$ 和 $b_1, \cdots, b_s$ 仅有前 $t < n$ 个向量非 0. 此时可以使用 QR 分解: $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_t \end{bmatrix} = Q_1\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix} = Q_2\begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 Q_1, Q_2 是 n 阶正交阵, R_1, R_2 为 t 阶对角元非负的上三角阵. 由 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_t \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix}$ 我们有 $R_1^TR_1 = R_2^TR_2$, 由 R_1, R_2 为对角元非负的上三角阵我们有 $R_1 = R_2$. 故 $Q_2^{-1}Q_1\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.2.10. 回顾命题 3.2.4 , 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 考虑下列放松的条件.

1. A 在一组基上保距, 即如果对 $1 \le i \le n$, $\|Ae_i\| = \|e_i\|$, 那么 A 是否一定是正交矩阵?

◀ 不一定. ▶

2. A 在一组基上保内积, 即如果对 $1 \le i, j \le n$, Aa_i 与 Aa_j 的内积等于 a_i 与 a_j 的内积, 那么 A 是否一定是正交矩阵?

◀ 是的. $a_i^TA^TAa_j = a_i^Ta_j$, $1 \le i, j \le n$ 即 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T A^TA\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, 即 $A^TA = I$. ▶

练习 3.2.11. 设 $H_v := I_n - 2vv^T$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上反射变换的表示矩阵,Q 是 n 阶正交矩阵,证明 $Q^{-1}H_vQ$ 也是某个反射变换的表示矩阵.

◀ $Q^{-1}H_vQ = H_{Q^{-1}v}$. 将 v 扩充成一组标准正交基 $v_1 = v, v_2, \cdots, v_n$, 考察其在 $Q^{-1}v_1, \cdots, Q^{-1}v_n$ 上的作用. ▶

练习 3.2.12. 计算 QR 分解.

1. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.2.13. 设向量组 $v_1, \cdots, v_k$ 线性无关, 首先令 q_1 为与 v_1 平行的单位向量, 然后令 q_2 为二维子空间 $span(v_1, v_2)$ 中垂直于直线 $span(v_1)$ 的单位向量, 再令 q_3 为三维子空间 $span(v_1, v_2, v_3)$ 中垂直于平面 $span(v_1, v_2)$ 的单位向量, 以此类推. 这样得到的 $q_1, \cdots, q_k$ 与 Gram-Schmidt 正交化得到的结果是否一致? 如果有区别的话, 区别在哪里? 从 QR 分解的角度如何解释?

◀ 每个 q_i 可能相差数乘 ± 1. 这里相当于不要求 R 的对角元均为正数的 QR 分解 (故不唯一.) ▶

练习 3.2.14 (QR 分解的其他理解)**.** 考虑 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的列向量围成的平行四边形.

1. 通过列变换, 把第一列的若干倍加到第二列, 使得平行四边形变成长方形. 这对应着 A 右乘哪个矩阵?

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix}$. ▶

2. 通过旋转和反射,把平行四边形的第一条边变到 x_1 轴正半轴上,第二条边变到 x_1x_2 平面中 $x_2>0$ 的那一半.这对应着 A 左乘哪个正交矩阵?

◀ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.2.15. 证明命题 3.2.6.

命题 3.2.6: 给定 $\mathbb{R}^n$ 中向量 x,y,满足 $\|x\|=\|y\|$,则存在反射 H_v,其中 $v=\frac{y-x}{\|y-x\|}$,使得 $H_v(x)=y$.

◀ 简单计算即得. ▶

练习 3.2.16. 证明任意 n 阶正交矩阵可以表示成不多于 n 个反射的乘积.

◀ 注意我们可以对一组单位正交基中的向量依次做 (可能的) 反射得到另一组单位正交基中的向量使得每次反射保持前面的向量不变. ▶

练习 3.2.17 (保角变换)**.** 设可逆矩阵 A 对应的线性变换保持向量之间的角度不变.

1. 对 A 进行 QR 分解,证明 R 也保持向量之间的角度不变.

◀ 这是因为 Q 保持向量之间的角度不变以及 $R=Q^{-1}A$ 为两个保角变换的复合. ▶

2. 证明 R 为对角矩阵.

◀ R 保持向量之间的角度不变说明两两正交的向量 $e_1,\cdots,e_n$ 在 R 作用下的像 $Re_1,\cdots,Re_n$ 仍然两两正交. 由于上三角阵 $R=\begin{bmatrix} r_{11} & * & \cdots & * \\ & r_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$ 的第 1 列 Re_1 与其余列正交,我们得到 $R=\begin{bmatrix} r_{11} & & & & \\ & r_{22} & * & \cdots & * \\ & & r_{33} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & r_{nn} \end{bmatrix}$. 由 R 的第 2 列与其余列正交,我们得到 $R=\begin{bmatrix} r_{11} & & & & & \\ & r_{22} & & & & \\ & & r_{33} & * & \cdots & * \\ & & & r_{44} & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & * \\ & & & & & r_{nn} \end{bmatrix}$. 对第 $3,\cdots,n-1$ 列做同样论证,我们得到 R 为对角矩阵. ▶

3. 证明 $R=kI_n$,这里 k 为常数. 由此得到,A 必是某个正交矩阵的倍数.

◀ R 不改变 e_i 与 $e_1+\cdots+e_n$ 间的夹角,即 $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{e_i^T(e_1+\cdots+e_n)}{\|e_i\|\|e_1+\cdots+e_n\|}=\frac{e_i^TR^TR(e_1+\cdots+e_n)}{\|Re_i\|\|R(e_1+\cdots+e_n)\|}=$(由 Re_i 垂直于 Re_j)$\frac{e_i^TR^TRe_i}{\|Re_i\|\|R(e_1+\cdots+e_n)\|}=\frac{\|Re_i\|}{\|R(e_1+\cdots+e_n)\|}$, 故 R 的所有对角元相等. ▶

练习 3.2.18. 设 $a_1,\cdots,a_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 m 个向量,定义矩阵 $G(a_1,\cdots,a_m):=\begin{bmatrix} a_1^Ta_1 & \cdots & a_1^Ta_m \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^Ta_1 & \cdots & a_m^Ta_m \end{bmatrix}$, 称为 $a_1,\cdots,a_m$ 的 Gram 矩阵. 证明,

1. $a_1,\cdots,a_m$ 是标准正交向量组当且仅当 $G(a_1,\cdots,a_m)=I_m$.

◀ $a_1,\cdots,a_m$ 是标准正交向量组当且仅当 $a_i^Ta_j=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$. ▶

2. Gram 矩阵 $G=G(a_1,\cdots,a_m)$ 是 m 阶对称矩阵, 且对任意 $x\in\mathbb{R}^m$, 都有 $x^TGx\geq 0$.

◀ 注意 $\begin{bmatrix}a_1^Ta_1 & \cdots & a_1^Ta_m\\ \vdots & & \vdots\\ a_m^Ta_1 & \cdots & a_m^Ta_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_m\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_m\end{bmatrix}$. ▶

3. $a_1,\cdots,a_m$ 线性无关当且仅当 $G=G(a_1,\cdots,a_m)$ 可逆, 也等价于对任意非零向量 $x\in\mathbb{R}^m$, 都有 $x^TGx>0$.

◀ $a_1,\cdots,a_m$ 线性无关当且仅当 $\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_m\end{bmatrix}$ 可逆. ▶

3.3. **正交投影.**

练习 3.3.1. 设 M 是下列齐次线性方程组的解空间: $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0,\\ 3x_1+2x_2-2x_4=0,\\ 3x_1+x_2+9x_3-x_4=0,\end{cases}$

分别求 M 和 $M^\perp$ 的一组标准正交基.

◀ 可以求出 M 的一组基, 正交化后扩充为一组标准正交基, 以得到 M 和 $M^\perp$ 的一组标准正交基. 以 QR 分解描述如下: 设 $A^T=Q_1R_1=\begin{bmatrix}Q_1 & Q_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_1\\0\end{bmatrix}$, 则 $A=R_1^TQ_1^T$. 由 $AQ_2=0$ 以及维数原因, $M=N(A)$ 对应矩阵 Q_2, 即 M 的一组标准正交基为 Q_2 的各列. $M^\perp=N(A)^\perp=C(A^T)$ 对应矩阵 Q_1R_1 或 Q_1, 即 $M^\perp$ 的一组标准正交基为 Q_1 的各列. 本题解得 $Q_1=\begin{bmatrix}0.51639778 & 0.51847585\\ 0.25819889 & 0.41478068\\ 0.77459667 & -0.62217102\\ -0.25819889 & -0.41478068\end{bmatrix}$, $Q_2=\begin{bmatrix}0.59881455 & 0.32548004\\ -0.11142809 & -0.86537512\\ -0.09980243 & -0.05424667\\ 0.78679374 & -0.37715506\end{bmatrix}$. (对于实际计算中要处理的大矩阵, 在计算结果中保留分数或根式是不可能的. 故这里仅给出精确到小数点后 8 位的近似值. 应该适量补充使用机器进行计算的教学.) ▶

练习 3.3.2. 设 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 $a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $a_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ 生成子空间 $M=span(a_1,a_2)$, 求 $M^\perp$ 的一组标准正交基.

◀ 对 $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 进行 QR 分解得 $Q=\begin{bmatrix}0.57735027 & -0.25819889 & 0.77389339 & -0.03300021\\ 0.57735027 & 0.51639778 & -0.28256137 & -0.56582601\\ 0.00000000 & 0.77459667 & 0.28256137 & 0.56582601\\ 0.57735027 & -0.25819889 & -0.49133203 & 0.59882622\end{bmatrix}$.

$M^\perp$ 的一组标准正交基由 Q 的后两列给出. ▶

练习 3.3.3. 1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&4\\6&3\\5&1\end{bmatrix}$, 求两个矩阵列空间的交集中的一个非零向量; 由此判断两个列空间是否正交.

◀ 注意 $C(A)\cap C(B)=N(A^T)^\perp\cap N(B^T)^\perp=(N(A^T)+N(B^T))^\perp$, 计算出零空间 $N(A^T)$ 和 $N(B^T)$ 的一组基, 即可求出 $C(A)\cap C(B)$. 本题计算得 $N(A^T)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $N(B^T)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}3\\-5\\3\end{bmatrix}$, $N(A^T)+N(B^T)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\-5\\3\end{bmatrix}$. $C(A)\cap C(B)=(N(A^T)+N(B^T))^\perp$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}5\\6\\5\end{bmatrix}$. 由两个子空间交集非空, 这两个子空间不正交. ▶

2. 求标准正交基 v_1,v_2,v_3, 使得 $v_1\in R(A)\cap R(B)$, $v_1,v_2\in R(A)$, 且 $v_1,v_3\in R(B)$.

◀ $v_1=\frac{1}{\sqrt{86}}\begin{bmatrix}5\\6\\5\end{bmatrix}$, $v_2=\frac{1}{\sqrt{43}}\begin{bmatrix}3\\-5\\3\end{bmatrix}$, $v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. ▶

3. 求一组向量 x,y, 使得 $Ax=By$, 并计算 $\begin{bmatrix}A&-B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

◀ $Ax=By\in R(A)\cap R(B)=span(v_1)$. 解方程 $Ax=By=v_1$ 得 $x=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}A&-B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=Ax-By=0$. ▶

4. 求 $\begin{bmatrix}A&-B\end{bmatrix}$ 零空间的一组基, 并求所有的 x,y, 满足 $Ax=By$.

◀ $rank(\begin{bmatrix}A&-B\end{bmatrix})=3$, 故零空间维数为 1, 一组基为 $\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\end{bmatrix}$. 所有的 x,y 即为上一问给出的一组 x,y 的某个倍数. ▶

练习 3.3.4. 1. $\mathbb{R}^5$ 中的两个三维子空间是否可能正交?

◀ 正交子空间的交平凡, 由维数原因知这不可能. ▶

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$, 则 $R(A)$ 和 $N(A)$ 是否正交? 是否互为正交补空间?

◀ 否. ▶

练习 3.3.5. 设 6 阶方阵 A 满足 $A^3 = 0$, 它的秩最大为多少? 举例说明. 在 A, A^2 的行空间、列空间、零空间和左零空间之中, 哪些相互正交?

◀ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$ 时取到最大秩 4. 例子自举. ▶

练习 3.3.6. 设 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $M = span(a_1, \cdots, a_s)$, 证明, $M^\perp = \{b \in \mathbb{R}^n | b^T a_i = 0, 1 \le i \le s\}$.

◀ 由定义即得. ▶

练习 3.3.7. 对向量组 $\{v_1, \cdots, v_k\}$, 定义 $\{v_1, \cdots, v_k\}^\perp$ 为与这些向量都正交的向量所构成的子集.

1. 证明 $\{v_1, \cdots, v_k\}^\perp$ 是一个子空间.

◀ 验证其包含 0 且对数乘和加法封闭. ▶

2. 构造矩阵 A, 使得 $N(A) = \{v_1, \cdots, v_k\}^\perp$.

◀ $A = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{bmatrix}^T$. ▶

3. 证明 $(\{v_1, \cdots, v_k\}^\perp)^\perp = span(v_1, \cdots, v_k)$.

◀ $(\{v_1, \cdots, v_k\}^\perp)^\perp = (N(A))^\perp = R(A^T) = R(\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{bmatrix}) = span(v_1, \cdots, v_k)$. ▶

练习 3.3.8. 集合运算有 De Morgan 定律: 对给定集合的两个子集 $X, Y, X \cap Y$ 的补集等于 X 的补集与 Y 的补集的并集; $X \cup Y$ 的补集等于 X 的补集与 Y 的补集的交集. 子空间是否也有类似的法则呢? 设 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间 M, N, 不妨设存在矩阵 A, B, 使得 $M = R(A), N = R(B)$.

1. $M + N$ 是哪个矩阵的列空间? 因此, $(M + N)^\perp$ 是该矩阵的什么空间?

◀ $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$. 左零空间. ▶

2. $M^\perp, N^\perp, M^\perp \cap N^\perp$ 分别是哪个矩阵的零空间?

◀ $A^T, B^T, \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix}$. ▶

3. 证明 De Morgan 定律的子空间版本: $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$, $(M \cap N)^\perp = M^\perp + N^\perp$.

◀ 由上, 我们有 $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$. 以 $M^\perp$, $N^\perp$ 代入再取正交补得 $(M \cap N)^\perp = M^\perp + N^\perp$. (也可以直接证明两边互相包含.) ▶

练习 3.3.9. 设 $a_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}$, $a_2=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$, $M=span(a_1,a_2)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的的子空间,求 $b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 在 M 上的正交投影.

◀ $\begin{bmatrix}\frac{8}{9}\\\frac{11}{9}\\\frac{7}{9}\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.3.10. 设 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中的直线: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\2x_1-x_2-2x_3=0.\end{cases}$

求 $b=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 在直线 L 上的正交投影.

◀ 解得直线的一个方向向量为 $\begin{bmatrix}1\\-4\\3\end{bmatrix}$. b 在这个方向上的正交投影为 $\begin{bmatrix}\frac{2}{13}\\-\frac{8}{13}\\\frac{6}{13}\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.3.11. 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中由方程 $x_1-x_2+x_3$ 决定的平面,求 $b=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ 在平面 M 上的正交投影,并求 b 到平面 M 的距离.

◀ 平面的一个法向量为 $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$. b 在平面 M 上的正交投影为 $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{4}{3}\end{bmatrix}$. b 到平面 M 的距离为 $\sqrt{\frac{14}{3}}$. ▶

练习 3.3.12. 将下列问题中的 x 分解成 $N(A)$ 与 $R(A^T)$ 中向量的和.

1. $x=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. ▶

2. $x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. ▶

3. $x=\begin{bmatrix}5\\5\\9\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&4\\2&3&5\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{14}{3} \\ \frac{28}{3} \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.3.13. 证明命题 3.3.12.

命题 3.3.12: 给定 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 M 和向量 a, 而 $a_1 = P_M(a)$ 为 a 在 M 上的正交投影, 则 $\|a - a_1\| = min_{x \in M} \|a - x\|$.

◀ 证明与命题 3.1.7 的证明类似. ▶

练习 3.3.14. 说明满足下列条件的矩阵是否存在, 如果存在, 举例说明.

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \in R(A)$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in N(A)$.

◀ 例: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \in R(A^T)$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in N(A)$.

◀ 不存在, 因为行空间的 $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ 与列空间的 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 不正交. ▶

3. $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 有解, 且 A 的左零空间包含 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 不存在, 因为列空间与左零空间不正交. ▶

4. A 不是零矩阵, 且 A 的每一行的转置垂直于 A 的每一列.

◀ A 的每一行的转置垂直于 A 的每一列等价于 $A^2 = 0$. 例: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

5. A 非零, 且 $R(A) = N(A)$.

◀ 例: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

6. A 的所有列向量的和是零向量, 且所有行向量的和是分量均为 1 的向量.

◀ 不存在. 从列的角度看, 矩阵内所有元素和是零. 从行的角度看, 矩阵的元素和不是零, 矛盾. ▶

7. A, B 均为非零的正交投影矩阵, 且 $A + B$ 仍是正交投影矩阵.

◀ 例: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$. (实际上只要两个投影的像彼此正交即可.) ▶

8. A, B 均为正交投影矩阵, 但 $A + B$ 并不是正交投影矩阵.

◀ 例: $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$,然而它的平方不等于自己 (实际上只要两个投影的像彼此不正交即可). ▶

9. A, B, C 均为非对角的三阶正交投影矩阵, 且 $A+B+C=I_3$.

◀ 例: 任取标准正交基, 比如 $u=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, v=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}, w=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$, 令 $A=uu^T, B=vv^T, C=ww^T$. ▶

练习 3.3.15. 下列说法中, 哪些正确?

1. A 的所有行的转置与 A^{-1} 的所有行的转置两两正交.

◀ 这等价于 $A(A^{-1})^T=I$. 错误. ▶

2. A 的所有行的转置与 A^{-1} 的所有列两两正交.

◀ 这等价于 $A(A^{-1})=I$. 正确. ▶

3. A 的所有列与 A^{-1} 的所有行的转置两两正交.

◀ 这等价于 $A^{-1}A=I$. 正确. ▶

4. A 的所有列与 A^{-1} 的所有列两两正交.

◀ 这等价于 $A^{-1}A^T=I$. 错误. ▶

5. 如果向量 v 与 w 正交, 则 $v^Tx=0$ 与 $w^Tx=0$ 的解集互相正交.

◀ 错误. ▶

6. 如果 A 是正交投影矩阵, 则 A 的第 k 列的长度的平方等于 A 的第 k 个对角元素.

◀ 错误. ▶

7. 如果 A, B 是正交投影矩阵, 则 $AB=BA$ 当且仅当 AB 也是正交投影矩阵.

◀ 正确. ▶

8. 如果 A, B 是正交投影矩阵, 则 $A+B$ 是正交投影矩阵当且仅当 $R(A), R(B)$ 互相正交.

◀ 正确. ▶

练习 3.3.16. 如果矩阵 A 的列向量线性无关, 那么向 $R(A)$ 的正交投影矩阵为 $A(A^TA)^{-1}A^T$. 试分析以下化简中可能出现的问题: $A(A^TA)^{-1}A^T=AA^{-1}(A^T)^{-1}A^T=I_nI_n$.

1. 证明 $(A^TA)^{-1}=A^{-1}(A^T)^{-1}$ 并不一定总成立.

◀ A^{-1} 不存在时, 右边没有意义. ▶

2. 当 A 满足什么条件时, 上式一定成立? 试分析此时正交投影矩阵等于 I_n 的原因.

◀ A 可逆. 此时 $R(A)$ 为全空间, 故投影为恒等映射. ▶

练习 3.3.17. 设 $A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 6\\ 4 & 8 & 8\end{bmatrix}$.

1. 求向 A 的列空间的正交投影矩阵 P_1.

◀ 列空间的一组标准正交基为 $\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}$. $P_1=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}^T$. ▶

2. 求向 A 的行空间的正交投影矩阵 P_2.

◀ 行空间的一组标准正交基为 $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$. $P_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$. ▶

3. 计算 P_1AP_2.

◀ 注意 $A=15\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$. $P_1AP_2=15\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}^T=A$. (注意向 A 的列空间投影的矩阵 P_1 作用在 A 的列空间上自然是恒等映射, 同理 P_2 也是.) ▶

练习 3.3.18. 给定 $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{bmatrix}$. 设 P_1 是关于 A 的第一列的正交投影矩阵, P_2 是关于 A 的正交投影矩阵, 计算 P_2P_1.

◀ $P_2P_1=P_1$. ▶

练习 3.3.19. 一个 n 阶方阵 P 是关于 A 的正交投影矩阵, 当且仅当对任意向量 $x\in\mathbb{R}^n$, 都有 $Px\in R(A)$, $x-P(x)\in N(A^T)$.

◀ 由定义即得. ▶

练习 3.3.20. 当 A 分别为对称矩阵、反对称矩阵、正交矩阵或上三角矩阵时, 判断 $R(A)$ 和 $N(A)$ 是否互为正交补. 证明或给出反例.

◀ $R(A)=N(A)^{\perp}\iff R(A)=R(A^T)$. A 为对称矩阵, 反对称矩阵或正交矩阵时这显然成立. A 为上三角矩阵时有反例 $\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.3.21. 给定 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 M_1, M_2, $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 N_1, N_2.

1. 是否一定存在矩阵 A, 使得 $R(A)=M_1, N(A^T)=M_2, R(A^T)=N_1, N(A)=N_2$?

◀ 不一定. 若这四个子空间是某个矩阵 A 对应的四个子空间, 则必有 M_1, M_2 互为正交补, N_1, N_2 互为正交补, 且 $dim(M_1)=dim(N_1)$. ▶

2. 如果不一定存在, 那么当四个子空间满足什么条件时, 这样的矩阵才一定存在?

◀ M_1, M_2 互为正交补, N_1, N_2 互为正交补, 且 $dim(M_1)=dim(N_1)$.

满足上述条件时, 为 M_1 选取一组基 $a_1,\ldots,a_r$, 作为列向量构成矩阵 A. 为 N_1 选取一组基 $b_1,\ldots,b_r$, 作为列向量构成矩阵 B. 我们断言 AB^T 即为所求: 由于 A 列无关, 因此 $AB^Tx=0$ 当且仅当 $B^Tx=0$ 当且仅当 $x\in N(B^T)=R(B)^{\perp}=N_1^{\perp}=N_2$, 因此零空间正确. 同理观察 BA^T, 发现 AB^T 的左零空间也正确. 由此易知其它子空间符合要求. ▶

练习 3.3.22. 给定向量 $b_1,\cdots,b_m$, 不难确知其平均值 $x_m=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m b_i$. 再给出向量 b_{m+1}, 这 $m+1$ 个向量的平均值就是 $x_{m+1}=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1} b_i$. 则 x_{m+1} 可以用 b_{m+1}, x_m, m 来表示: $x_{m+1}=x_m+\frac{1}{m+1}(b_{m+1}-x_m)$.

若给出向量组成的矩阵 $B_n=\begin{bmatrix}b_{m+1}&\cdots&b_{m+n}\end{bmatrix}$, 如何用 B_n, x_m, m, n 来表示 $b_1,\cdots,b_{m+n}$ 这 $m+n$ 个向量的平均值 x_{m+n}?

◀ $x_{m+n} = \frac{1}{m+n}(mx_m + B_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix})$. ▶

练习 3.3.23. 一个方阵如果仅仅满足 $P^2 = P$,则称之为斜投影矩阵,其对应的线性变换称为斜投影. 给定一个 n 阶斜投影矩阵 P.

1. 证明 $I_n - P$ 也是 n 阶斜投影矩阵.

◀ $(I_n - P)^2 = I_n - 2P + P^2 = I_n - 2P + P = I_n - P$. ▶

2. 证明 $R(P) = N(I_n - P)$, $R(I_n - P) = N(P)$.

◀ 易见左边含于右边. 由秩不等式 $rank(P) + rank(I_n - P) \geq n$, 故两边相等. ▶

3. 对任意向量 $v \in \mathbb{R}^n$,是否一定存在分解 $v = v_1 + v_2$,满足 $v_1 \in R(P), v_2 \in R(I_n - P)$? 分解如果存在,是否唯一?

◀ $v = Pv + (I_n - P)v$. 若 $Pv_1 = (I_n - P)v_2$, 则 $Pv_1 = PPv_1 = P(I_n - P)v_2 = 0$, 故分解唯一. ▶

4. 构造一个二阶斜投影矩阵,但不是正交投影矩阵.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.3.24. 设平面上的四个点 $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ 分别是 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \end{bmatrix}$,利用最小二乘法求下列直线或曲线:

1. 求平行于 x 轴的直线 $y = b$ 使得 $\sum_{i=1}^4 |y_i - b|^2$ 最小.

◀ $b = 9$. ▶

2. 求经过原点的直线 $y = kx$ 使得 $\sum_{i=1}^4 |y_i - kx_i|^2$ 最小.

◀ $k = \frac{56}{13}$. ▶

3. 求直线 $y = kx + b$ 使得 $\sum_{i=1}^4 |y_i - (kx_i + b)|^2$ 最小.

◀ $k = 4, b = 1$. ▶

4. 求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 使得 $\sum_{i=1}^4 |y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)|^2$ 最小.

◀ $a = \frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}, c = 2$. ▶

4. 行列式

4.1. 引子.

4.2. 行列式函数.

练习 4.2.1. 计算下列行列式.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&2&-1\\0&0&0&3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 2\cdot 3=-6.$ ▶

2. $\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\0&1&4\end{vmatrix}.$

◀ $\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&5&-5\\0&1&4\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}5&-5\\1&4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&-1\\1&4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&-1\\0&5\end{vmatrix}=5\cdot 1\cdot 5=25.$ ▶

3. $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}.$

◀ $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=160.$ ▶

4. $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}.$

◀ 沿第一列展开. $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x+y&x\\x&y\end{vmatrix}-y=\begin{vmatrix}y&x+y\\x&y\end{vmatrix}+(x+y)\begin{vmatrix}y&x+y\\x+y&x\end{vmatrix}=$
$x(xy+y^2-x^2)-y(y^2-x^2-xy)+(x+y)(xy-(x+y)^2)=-2x^3-2y^3.$ ▶

5. $\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}.$

◀ 视 x, y 为形式变元, 从而无需考虑可逆性. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & & & \\ -1 & & -x & & \\ -1 & & & y & \\ -1 & & & & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & x & & & \\ & & -x & & \\ & & & y & \\ & & & & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & x & & & \\ & & -x & & \\ & & & y & \\ & & & & -y \end{vmatrix} = x^2y^2$. (或: 由行列式是各分量的多项式 (从而是各分量的连续函数), 又各分量是 x, y 的连续函数, 故行列式是 x, y 的连续函数, 从而对任意的 x, y 均有行列式的值为 x^2y^2.) ▶

练习 4.2.2. 设 A 是三阶方阵, $det(A) = 5$, 求下列矩阵 B 的行列式.

1. $B = 2A, -A, A^2, A^{-1}$.

◀ $40, -5, 25, \frac{1}{5}$. ▶

2. $B = \begin{bmatrix} a_1^T - a_3^T \\ a_2^T - a_1^T \\ a_3^T - a_2^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1^T + a_3^T \\ a_2^T + a_1^T \\ a_3^T + a_2^T \end{bmatrix}$, 其中 $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix}$.

◀ 第一个将前两行加到第三行后得到 0. 第二个后两行减去第一行后得到 $2det(A) = 10$. ▶

练习 4.2.3. 设 $A_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + nI_2$.

1. 求 A_0, A_1, A_2, A_3 的行列式.

◀ $2, 6, 12, 20$. ▶

2. 求 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + xI_2$ 的行列式, 并将其写成 $(x+a)(x+b)$ 的形式.

◀ $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. ▶

3. 分别求 $A_0^2, A_0^2 + I_2, A_0^2 + 3A_0 + 2I_2, A_0^3 - 2A_0^2 + 3A_0 - 4I_2$ 的行列式, 并分析它们与 a, b 的关系.

◀ $4, 10, 72, -6$. 等于多项式在 a, b 处值的积. ▶

练习 4.2.4. 计算 $det(A)$.

1. $A = \begin{bmatrix} i+j \end{bmatrix}_{n\times n}$.

◀ 其余行减去第一行. $|\begin{bmatrix} i+j \end{bmatrix}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$. $n = 1, 2$ 时行列式的值为 $2, -1$. $n \geq 3$ 时行列式的值为 0. ▶

2. $A = \begin{bmatrix} ij \end{bmatrix}_{n\times n}$.

◀ 每行每列提出公因数. $|\begin{bmatrix}ij\end{bmatrix}_{n\times n}| = \prod_{1,j=1}^{n} ij| \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}_{n\times n}|$. $n=1$ 时行列式的值为 1. $n \geq 2$ 时行列式的值为 0. ▶

练习 4.2.5. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ -1 & & & 1 \end{vmatrix}$.

◀ 依次将每行加到下一行. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ -1 & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & -1 \\ 0 & & & 0 \end{vmatrix} = 0$. ▶

练习 4.2.6. 计算 $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & 1+x_1y_4 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & 1+x_2y_4 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & 1+x_3y_4 \\ 1+x_4y_1 & 1+x_4y_2 & 1+x_4y_3 & 1+x_4y_4 \end{vmatrix}$.

◀ 注意矩阵为两个秩不大于 1 的矩阵之和, 故其秩不大于 2. $n \geq 3$ 时行列式为 0. $n=1$ 时行列式为 $1+x_1y_1$. $n=2$ 时行列式为 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)$. ▶

练习 4.2.7. 计算 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

◀ 归纳. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$. ▶

练习 4.2.8. 1. 令 A_n 是从右上到左下对角线上的元素全为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵. 求 A_2, A_3, A_4, A_5 的行列式, 分析其规律, 推断出 A_n 的行列式.

◀ $-1, 1, 1, -1$. 归纳可得 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. ▶

2. 令 $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, 以此类推 A_n. 求 A_2, A_3, A_4 的行列式, 分析其规律, 推断出 A_n 的行列式. 提示: 利用 LU 分解.

◀ 1. ▶

3. 设 A 具有 QR 分解 $A = Q\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, 求 $det(A)$ 的所有可能值.

◀ ±24. 这是由于正交矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I$, 求行列式知 Q 的行列式为 ±1. ▶

4. 定义 Hilbert 矩阵 $H_n = \left|\frac{1}{i+j-1}\right|_{n\times n}$. 计算 H_2, H_3 的行列式.

◀ 我们考虑一般的 $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$, 题目是 $a_j = j, b_i = i-1$ 的特殊情况. 注意到 $\frac{1}{a_j+b_i} - \frac{1}{a_n+b_i} = \frac{a_n-a_i}{(a_n+b_i)(a_j+b_i)}$, 前 $n-1$ 行同时减去最后一行, 有 $\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{(a_n+b_1)(a_1+b_1)} & \frac{a_n-a_1}{(a_n+b_2)(a_1+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_n+b_n)(a_1+b_n)} \\ \frac{a_n-a_2}{(a_n+b_1)(a_2+b_1)} & \frac{a_n-a_2}{(a_n+b_2)(a_2+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_2}{(a_n+b_n)(a_2+b_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. 前 $n-1$ 列同时减去最后一列, 原式 $= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$
$= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}{\prod_{k=1}^{n}(b_n+a_k)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix}$, 即 $D_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}{\prod_{k=1}^{n}(b_n+a_k)} D_{n-1}$.
故 $D_n = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}$. ▶

Hilbert 矩阵是一种常见的难于计算的矩阵, 常用来测试算法.

练习 4.2.9. 证明或举出反例.

1. $AB - BA$ 的行列式必然是零.

◀ 错误. 例: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

2. A 的行列式等于其行简化阶梯形的行列式.

◀ 错误. 倍乘变换和交换两行改变行列式. 反例自举. ▶

3. A 为 n 阶反对称矩阵, 当 n 为奇数时, $det(A) = 0$.

◀ 正确. $det(A) = det(A^T) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A)$ 推出 $det(A) = 0$. ▶

4. A 为 n 阶反对称矩阵, 当 n 为偶数时, $det(A) = 0$

◀ 错误. 反例自举. ▶

5. 如果 $|det(A)| > 1$, 那么当 n 趋于无穷时, A^n 中必然有元素的绝对值趋于无穷.

◀ 正确. A 的某个特征值的绝对值大于 1. ▶

6. 如果 $|det(A)| < 1$, 那么当 n 趋于无穷时, A^n 中的所有元素都趋于 0.

◀ 错误. 例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 4.2.10. 1. 对二阶可逆矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 计算其逆矩阵的行列式: $det(A^{-1}) = det(\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & c \end{bmatrix}) = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$. 错在哪里?

◀ $det(A^{-1}) = det(\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & c \end{bmatrix}) = \frac{ad-bc}{(ad-bc)^2} = \frac{1}{ad-bc}$. ▶

2. 对分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, 计算其行列式: $det(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}) = AD - BC$, 得到的是矩阵, 而不是数, 这当然是错误的. 如果 A 可逆, 正确的公式是什么?

◀ 第二行减去第一行的 CA^{-1} 倍, $det(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}) = det(\begin{bmatrix} A & B \\ & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}) = det(A)det(D - CA^{-1}B) = det(AD - ACA^{-1}B)$. (在额外给出条件 $AC = CA$ 时, 行列式的值为 $det(AD - BC)$.) ▶

3. 计算正交投影矩阵 P 的行列式 $det(P) = det(A(A^TA)^{-1}A^T) = \frac{det(A)det(A^T)}{det(A^TA)} = 1$, 然而正交投影矩阵常常不可逆. 错在哪里?

◀ 仅在 A 为方阵时 A 的行列式有意义. 此时 $P = I$, 显然成立. ▶

4. 如果 $AB = -BA$, 那么 $det(A)det(B) = -det(B)det(A)$, 由此得到 $2det(A)det(B) = 0$, 所以 A, B 必有一个矩阵不可逆. 这是否正确? 如果不是, 请指出错误并举出反例.

◀ 当 A, B 均为 n 阶方阵时, $det(A)det(B) = (-1)^n det(B)det(A)$. 反例自举. ▶

5. 对矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 同时做两个行变换 (注意: 这不是初等行变换!) 得到 $\begin{bmatrix} a+sc & b+sd \\ c+ta & d+tb \end{bmatrix}$, 行列式是否一定保持不变? s, t 满足什么条件时, 行列式一定保持不变?

◀ 否. 直接计算行列式知行列式不变当且仅当 $st(bc - ad) = 0$. ▶

练习 4.2.11. 设 n 阶方阵 A 的对角元素全为 0, 其他元素全为 1, 令 $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$.

1. 求向量 u, 使得 a_i 可以写成 e_i 和 u 的线性组合.

◀ $u = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. ▶

2. 利用列多线性性质, 求 $det(A)$.

◀ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $(-1)^{n-1}(1-n)$. ▶

练习 4.2.12. 证明命题 4.2.5.

命题 4.2.5: 行列式函数在初等变换下满足的性质.

◀ 直接运用定义证明. ▶

练习 4.2.13. 证明命题 4.2.11.

命题 4.2.11: 满足某些基本性质的行列式函数是唯一的. 此即行列式函数的公理化定义.

◀ 由行列式函数在初等变换下满足的性质知其值完全被单位阵处的取值所决定. ▶

练习 4.2.14. 证明奇数阶反对称矩阵不可逆.

◀ $det(A) = det(A^T) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A)$ 推出 $det(A) = 0$. ▶

练习 4.2.15. 证明任意可逆矩阵 A 都可以只用倍加变换化为 $diag(1, 1, \cdots, det(A))$.

◀ 归纳. 注意倍加变换不改变行列式的值. ▶

练习 4.2.16. 给定 $A = \Big[a_{ij}\Big]_{n\times n}$, 而 $B = \Big[a_{ij}c^{i-j}\Big]_{n\times n}$, 其中 $c \neq 0$, 证明, $det(A) = det(B)$.

◀ 从行列中分别提出公因式 c^i 和 c^{-j}. ▶

练习 4.2.17. 给定 $n-1$ 个互不相同的数 $a_1, \cdots, a_{n-1}$, 令 $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$. 证明 $P(x)$ 是一个关于 x 的 $n-1$ 次多项式, 并求 $P(x)$ 的 $n-1$ 个根.

◀ 显然 $P(x)$ 是一个关于 x 的不大于 $n-1$ 次的多项式. 由首项系数不为 0, $P(x)$ 的次数恰为 $n-1$. 注意 $P(x)$ 有 $n-1$ 个根 $a_1, \cdots, a_{n-1}$. ▶

练习 4.2.18. 设 $f_i(x)$ 是 i 次多项式, $0 \leq i \leq 1$, 其首项系数是 a_i. 又设 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ 是 n 个数, 计算下列 n 阶行列式: $\begin{vmatrix} f_0(b_0) & f_0(b_1) & \cdots & f_0(b_{n-1}) \\ f_1(b_0) & f_1(b_1) & \cdots & f_1(b_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(b_0) & f_{n-1}(b_1) & \cdots & f_{n-1}(b_{n-1}) \end{vmatrix}$.

◀ 首先从每行提出公因式 a_i, 再用上面的行消去下面的行的低次项. 我们得到行列式的值等于

$$\prod_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \cdots & b_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \prod_{1\le i<j\le n}(b_j - b_i).$$ ▶

练习 4.2.19. 1. 对分块对角矩阵 $X = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 其中 A, B 是方阵, 证明, $det(X) = det(A)det(B)$.

◀ 考察在 X 中选取 n 个行列互不相同的元素的方式. 这些元素只能落在 A, B 中. ▶

2. 对分块对角矩阵 $X = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 其中 A, B 是方阵, 证明, $det(X) = det(A)det(B)$.

◀ 考察在 X 中选取 n 个行列互不相同的元素的方式. 这些元素只能落在 A, B 中. ▶

练习 4.2.20. 设 A 可逆, D 是方阵, 证明, $det(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}) = det(A)det(D - CA^{-1}B)$.

◀ $det(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}) = det(\begin{bmatrix} A & B \\ & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}) = det(A)det(D - CA^{-1}B)$. ▶

练习 4.2.21. 设 A, B 是 n 阶方阵, 证明, $det(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}) = det(A+B)det(A-B)$.

◀ $\begin{vmatrix} A+B & \\ & A-B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & -\frac{1}{2}(A-B)+\frac{1}{2}(A+B) \\ & A-B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ & A-B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$. ▶

练习 4.2.22. 设 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$, 证明, $det(\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}) = det(A^2 + B^2)$.

◀ 由于等式两边均为 A, B 的元素的多项式 (从而连续), 我们可以仅对 A 可逆的情况进行验证: 这是由于可以考虑 A 的微扰 $A + tI$(注意 $A + tI$ 仍与 B 交换, 且 $0 < |t|$ 不大于 A 的任一非零特征值的绝对值时 $A + tI$ 没有零特征值从而可逆) 并令 t 趋于 0. A 可逆时有 $det(\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}) = det(A)det(A + BA^{-1}B) = det(A(A + BA^{-1}B)) = det(A^2 + B^2)$.

这里额外给出几个摄动法的例子.

(1). 方阵 A 的特征多项式 P_A 是 A 的化零多项式. 对半单的 A 这显然正确 (对角化即可看出). 一般地, 对充分小的 $t \neq 0, A_t = A + t \cdot diag(1, 2, \cdots, n)$ 为半单阵, 故 $P_{A_t}(A_t) = 0$. 由 A_t 与 P_{A_t} 均关于 t 连续, 我们可以令 $t \to 0$ 得到 $P_A(A) = 0$.

(2). 相似的方阵有相似的伴随矩阵. 对可逆的 A, $(P^{-1}A^*P)(P^{-1}A^*P) = I$ 给出 $(P^{-1}AP)^* = P^{-1}A^*P$. 一般地, 对充分小的 $t \neq 0, A_t = A + tI$ 可逆, 从而有 $(P^{-1}A_tP)^* = P^{-1}A_t^*P$, 且前式关于 t 连续, 故可令 $t \to 0$ 得到 $(P^{-1}AP)^* = P^{-1}A^*P$.

(3). $(AB)^*=B^*A^*$. A,B 均可逆时这是显然的. 一般地, 对充分小的 $t\neq 0, A_t=A+tI, B_t=B+tI$ 可逆, 从而有 $(A_tB_t)^*=B_t^*A_t^*$, 且前式关于 t 连续, 故可令 $t\to 0$ 得到 $(AB)^*=B^*A^*$. ▶

练习 4.2.23. 设 A,B 分别是 $m\times n, n\times m$ 矩阵, 证明, $det(I_m+AB)=det(I_n+BA)$. 由此推出, I_m+AB 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆.

◀ 考虑 $\begin{bmatrix} I_n & \\ -A & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & \\ & I_m+AB\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B\\ & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & B\\ -A & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & B\\ & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n+BA & \\ & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & \\ -A & I_m\end{bmatrix}$.
▶

练习 4.2.24. 计算 $\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2\end{vmatrix}$.

◀ 由上题, $det(I_n+\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix})=det(I_1+\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix})=1+\sum_{i=1}^n a_i^2$.
▶

练习 4.2.25. 设 A 是三阶矩阵, 已知 $det(A-I_3)=det(A-2I_3)=det(A-3I_3)=0$.

1. 证明存在非零向量 V_1,v_2,v_3, 满足 $Av_i=iv_i$.

◀ 这是因为 $A-iI_3$ 不可逆. ▶

2. 设 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$, 证明 $k_1v_1+2k_2v_2+3k_3v_3=0, k_1v_1+4k_2v_2+9k_3v_3=0$.

◀ 两边同时用 A 作用. ▶

3. 证明存在可逆 Vandermonde 矩阵 V, 使得 $\begin{bmatrix} k_1v_1 & k_2v_2 & k_3v_3\end{bmatrix}V=0$.

◀ $V=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{bmatrix}$. ▶

4. 证明 V_1,v_2,v_3 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 因此矩阵 $B=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}$ 可逆.

◀ 由上, 我们有 V_1,v_2,v_3 线性无关. ▶

5. 证明存在对角矩阵 D, 使得 $AB=BD$, 并计算 $det(A)$.

◀ $D=diag(1,2,3)$. $det(A)=det(D)=6$. ▶

练习 4.2.26. 对函数 $f(t)=det(I_n+tA)$ 在 $t=0$ 处求导. 设 $A=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$, 则 I_n+tA 的第 i 列是 e_i+ta_i.

1. 当 $n=1,2,3$ 时, 用 A 的元素表示 $f'(0)$; 分析其规律, 求 $f'(0)$ 的一般表达式.

◀ $f'(0)=\sum_{i=1}^n det(\begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_{i-1} & a_i & e_{i+1} & \cdots & e_n\end{bmatrix})=trace(A)$. ▶

2. 利用 $det(I_m+AB)=det(I_n+BA)$, 证明 $trace(AB)=trace(BA)$(trace 的定义见练习 1.5.22).

◀ 考虑 $det(I_m+tAB)=det(I_n+tBA)$. ▶

练习 4.2.27. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,任取其中的 k 行和 k 列构成 k 阶方阵,它的行列式称为 A 的一个 k 阶子式. 定义 $rank_{det}(A)=max\{k|A\text{有非零的 } k \text{ 阶子式}\}$. 证明,$rank_{det}(A)=rank(A)$.

◀ 注意初等行列变换不改变两边, 从而只需对相抵标准形证明. ▶

练习 4.2.28 (Hadamard 不等式)**.** 1. 利用 QR 分解证明,对任意 n 阶矩阵 $T=\begin{bmatrix}t_1 & \cdots & t_n\end{bmatrix}$, $det(T)\leq \|t_1\|\,\|t_2\|\cdots\|t_n\|$.

◀ 注意正交矩阵的行列式为 ±1, 以及正交变换不改变向量长度. ▶

2. 说明阅读 3.2.3 中的 Hadamard 矩阵使得等号成立.

◀ 因为 R 是标量阵. ▶

练习 4.2.29. 设 n 阶对称矩阵 A 有 LDL^T 分解 $A=LDL^T$,其中 $D=diag(d_i)$,并记 A 的第 i 个顺序主子阵为 A_i. 证明 $d_i=\frac{det(A_i)}{det(A_{i-1})}$. 矩阵 A 的第 i 个顺序主子阵的行列式称为其第 i 个顺序主子式.

◀ 这是由于 A 的第 i 个顺序主子式与 D 的第 i 个顺序主子式相同. ▶

练习 4.2.30 (行列式在多元微积分中的应用)**.** 一个多元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$,把 x_i 之外的变量都看做常数,对 x_i 的导数称为 f 对 x_i 的偏导数,记作 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. 例如,$f(x,y)=x^2y$,则 $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2$.

平面 $\mathbb{R}^2$ 有直角坐标系 (x,y),和极坐标系 (r,θ),其中 $r\geq 0$ 是该点到原点的距离,$\theta\in[0,2\pi)$ 是从 x 轴正方向开始,逆时针旋转,到达该点和原点连线所需要的的角度. 两种坐标之间的关系是 $x=rcos\theta, y=rsin\theta$.

分别计算 $J_1=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{bmatrix}$ 和 $J_2=\begin{bmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y}\end{bmatrix}$ 的行列式,将结果都写成 r,θ 的函数. 这两个矩阵 J_1,J_2 有什么关系?

◀ $r,\frac{1}{r}$. 互逆. ▶

练习 4.2.31. 设 $f(a,b,c,d)=ln(ad-bc)$.

1. 接上题,求偏导数 $\frac{\partial f}{\partial a},\frac{\partial f}{\partial b},\frac{\partial f}{\partial c},\frac{\partial f}{\partial d}$.

◀ $\frac{d}{ad-bc},-\frac{c}{ad-bc},-\frac{b}{ad-bc},\frac{a}{ad-bc},$. ▶

2. 证明 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b}\\ \frac{\partial f}{\partial c} & \frac{\partial f}{\partial d}\end{bmatrix}^T$.

◀ 直接计算. ▶

3. 三阶时是否有类似的结论?

◀ 注意上面等价于 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b}\\ \frac{\partial f}{\partial c} & \frac{\partial f}{\partial d}\end{bmatrix}^T=I$. 是的. ▶

练习 4.2.32. 在 Vandermonde 矩阵中,如果对不同的 i,j 有 $\lambda_i=\lambda_j$,则其 i,j 两行相同,行列式为零. 根据多项式理论,$\lambda_i-\lambda_j$ 是 Vandermonde 行列式的一个因式. 事实上,Vandermonde 行列式就是这些因式的乘积.

(得到多项式的全部因式后,只需求出首项系数即可得到该多项式. 归纳易得首项系数为 1.)

4.3. 行列式的展开式.

练习 4.3.1. 计算.

1. $\begin{vmatrix}1&1&4\\1&2&2\\1&2&5\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1&1&4\\1&2&2\\1&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&4\\0&1&-2\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&4\\0&1&-2\\0&0&3\end{vmatrix}=3.$ ▶

2. $\begin{vmatrix}1&1&10\\1&2&2\\1&2&5\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1&1&10\\1&2&2\\1&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&10\\0&1&-8\\0&1&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&10\\0&1&-8\\0&0&3\end{vmatrix}=3.$ ▶

练习 4.3.2. 利用按行 (列) 展开求下列行列式; 按哪一行 (列) 展开, 使得计算最简单?

1. $\begin{vmatrix}1&0&0&2\\0&3&4&5\\5&4&0&3\\2&0&0&1\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1&0&0&2\\0&3&4&5\\5&4&0&3\\2&0&0&1\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1&0&2\\5&4&3\\2&0&1\end{vmatrix}=-4\cdot4\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-4\cdot4\cdot(1\cdot1-2\cdot2)=48.$ ▶

2. $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&0\\0&0&4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&0\\0&0&4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&0\\0&3&0\end{vmatrix}=24-12-8-6=-2.$

▶

练习 4.3.3. 计算 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4&a_5\\b_1&b_2&b_3&b_4&b_5\\c_1&c_2&0&0&0\\d_1&d_2&0&0&0\\e_1&e_2&0&0&0\end{vmatrix}$.

◀ 分块知对应矩阵的秩不大于前两行的子块的秩 (≤ 2) 与后三行的子块的秩 (≤ 2) 之和 (≤ 4). 故行列式为 0. ▶

练习 4.3.4. 求 $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4, x^3 的系数.

◀ $2, -1$. ▶

练习 4.3.5. 计算 $\begin{vmatrix} \lambda & & & & a_n \\ -1 & \lambda & & & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & \lambda & a_2 \\ & & & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$.

◀ 从最后一行向上依次将每行的 λ 倍加到上一行. 结果是 $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$. ▶

练习 4.3.6. 回顾例 1.8.4 中的对称、上三角和下三角 Pascal 矩阵. 在四阶的情形, 这三种矩阵分别为 $S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$, $U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. 另外, 存在 LU 分解 $S_n = L_nU_n$.

1. 求 $det(L_n), det(U_n), det(S_n)$.

◀ $1, 1, 1$. ▶

2. 求 S_n 右下角元素的代数余子式.

◀ 1. ▶

3. 将 S_n 右下角的元素减 1 得到矩阵 A_n, 求 $det(A_n)$.

◀ 0. ▶

练习 4.3.7. 给定 $A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. 利用展开式得到 $det(B_n)$ 关于 n 的递推关系, 并计算 $det(B_n)$.

◀ 将第一行加到第二行知 $det(B_n) = det(B_{n-1})$. $det(B_n) = 1$. ▶

2. 利用 $det(A_n)$ 与 $det(B_n)$ 的关系计算 $det(A_n)$.

◀ $det(A_n) = det(B_n) + det(A_{n-1})$. $det(A_n) = n + 1$. ▶

练习 4.3.8 (行列式中的 Fibonacci 数列)**.** 如果一个矩阵比上 (下) 三角矩阵仅仅多一排非零对角元, 则称之为上 (下)Hessenberg 矩阵. 例如, $H_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 就是上 Hessenberg 矩阵. 上 Hessenberg 矩阵在数值代数中很有用.

1. 令 H_n 为 n 阶上 Hessenberg 矩阵,其对角元素都是 2,其他非零元素都是 1. 证明 $det(H_{n+2}) = det(H_{n+1}) + det(H_n)$,即这些行列式组成了 Fibonacci 数列.

◀ 将矩阵第一行分解为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$. ▶

2. 令 S_n 是对角元素为 3, 与对角元相邻的元素为 1 的 n 阶三对角矩阵 (见练习 1.4.12), 例如, $S_4 = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$. 它既是上 Hessenberg 矩阵, 也是下 Hessenberg 矩阵. 求 $det(S_n)$ 的递归公式, 并分析与 Fibonacci 数列的关系.

◀ $det(S_{n+2}) = 3det(S_{n+1}) - det(S_n)$. 二者均满足某个二阶线性递推方程. ▶

3. 设 n 阶三对角矩阵的行列式的完全展开式中, 最多有 t_n 项非零, 求 t_n 的递归公式.

◀ $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$. ▶

练习 4.3.9. 求下列推广的 Vandermonde 行列式: $\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n\end{vmatrix}$.

◀ 这是 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式 $\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n\\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n\end{vmatrix}$ 在 x_{n+1}^{n-1} 处的 n 阶余子式. 将 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式沿最后一行展开知这个余子式的值为 $-\prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j - x_i)$ 作为 x_{n+1} 的多项式的 $n-1$ 次项的系数. 由 $-\prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j - x_i) = -\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\cdot\prod_{1\le i\le n}(x_{n+1} - x_i) = -\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\cdot(x_{n+1}^n - \sum_{1\le i\le n} x_i\cdot x_{n+1}^{n-1} + \cdots + (-1)^n\prod_{1\le i\le n} x_i)$ 知行列式的值为 $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\cdot\sum_{1\le i\le n} x_i$. ▶

练习 4.3.10. 对 n 阶方阵 A, 证明, $det(\lambda I_n - A)$ 是 λ 的首项系数为 1 的 n 次多项式.

◀ 考虑行列式完全展开式关于 λ 的最高次项. ▶

练习 4.3.11. 1. 设 A 是正交矩阵, 且 $det(A) < 0$, 证明 $I_n + A$ 不可逆. 由此可得, 存在非零向量 x, 使得 $Ax = -x$. (学过定理 8.2.18 (正交矩阵的实 Schur 分解) 之后, 本题是显然的.)

◀ $|I_n + A| = \left|(I_n + A)^T\right| = \left|I_n + A^T\right| = \left|I_n + A^{-1}\right| = \left|A^{-1}\right||I_n + A| = -|I_n + A|$. ▶

2. 设 A 是奇数阶正交矩阵, 且 $det(A) > 0$, 证明 $I_n - A$ 不可逆. 由此可得, 存在非零向量 x, 使得 $Ax = x$. 偶数阶的情形, 结论是否成立?

◀ $|I_n - A| = \left|(I_n - A)^T\right| = \left|I_n - A^T\right| = \left|I_n - A^{-1}\right| = \left|-A^{-1}\right||I_n - A| = -|I_n - A|$. 不成立, 如 $\begin{bmatrix}sina & -cosa\\ cosa & sina\end{bmatrix}$. ▶

练习 4.3.12. 设 n 阶方阵 $A = \begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}$ 对角占优 (见定义 1.6.13), 证明 $det(A) > 0$.

◀ 本题有误, 如对角占优矩阵 $\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}$ 的行列式小于 0. 若额外给出条件 $a_{ii} > 0, i = 1, \cdots, n$, 则 Gershgorin 圆盘定理保证了实特征值为正, 故 $det(A) > 0$. ▶

练习 4.3.13. 证明若 A 不可逆, 则其伴随矩阵的秩是 0 或 1.

◀ 考察 n 阶方阵 A 的秩. 若 $rank(A) \leq n-2$, 则伴随矩阵的秩是 0. 若 $rank(A) = n-1$, 秩不等式保证了伴随矩阵的秩是 1. ▶

练习 4.3.14. 给定所有元素全为整数的可逆矩阵 A, 证明, A^{-1} 的所有元素全为整数, 当且仅当 $|det(A)| = 1$.

◀ $\Leftarrow$. 考虑以伴随矩阵与 $det(A)$ 表出 A^{-1}.

$\Rightarrow$. 这是由于 $det(A)$ 与 $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$ 均为整数. ▶

练习 4.3.15. 利用 Cramer 法则把未知数 x_1, x_2 表示成 t 的函数: $\begin{cases} e^t x_1 + e^{-2t} x_2 = 3sint, \\ e^t x_1 - 2e^{-2t} x_2 = tcost. \end{cases}$

◀ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t}sint + \frac{2}{3}te^{-t}cost \\ e^{2t}sint - \frac{1}{3}te^{2t}cost \end{bmatrix}$. ▶

练习 4.3.16 (Cramer 法则的另一证明). 设 $b = Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$, 则 $det\begin{bmatrix} b & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} x_1a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = x_1 det(A)$.

练习 4.3.17. 利用完全展开式求行列式.

1. 设 A 为 4 阶矩阵, 所有元素均为 1, 在其行列式的完全展开式中, 多少项为 1? 多少项为 -1? 由此计算 A 的行列式.

◀ $12, 12, 0$. ▶

2. 把 A 的 (i, j) 元乘以 $\frac{i}{j}$ 得到 B, 在 A 和 B 行列式的完全展开式中, 每一项如何变化? 行列式如何变化?

◀ 讨论. ▶

3. 设 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ e & 0 & f & 0 \\ 0 & g & 0 & h \end{bmatrix}$, 在行列式的完全展开式中, 有多少项非零? 这个完全展开式是否有因式分解? (跟分块对角矩阵的情形进行类比)

◀ $4, (af - be)(ch - dg)$. ▶

练习 4.3.18. 由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$, 证明, $1, \cdots, n$ 的所有排列中, 奇、偶排列各占一半.

◀ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{|\sigma|=1} 1 + \sum_{|\sigma|=-1} -1.$ ▶

练习 4.3.19. 在空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 证明由向量 a_1, a_2 围成的平行四边形面积是 $\sqrt{det(A^TA)}$, 其中 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$

◀ 由面积的双线性, 只需对 e_1, e_2, e_3 中的任意两个验证其围成的平行四边形面积为 1. ▶

练习 4.3.20 (行列式游戏)**.** 甲和乙两个人构造一个 n 阶方阵, 轮流填写矩阵中的元素, 直到填满为止. 如果矩阵的行列式非零, 则甲胜; 否则, 乙胜.

1. 如果乙先开始, 且 $n = 2$, 谁有必胜策略?

◀ 乙. ▶

2. 如果乙先开始, 且 $n = 3$, 谁有必胜策略?

◀ 乙. ▶

3. 如果甲先开始, 且 $n = 3$, 谁有必胜策略?

◀ 甲. ▶

4. 如果甲先开始, 且 n 为偶数, 则谁有必胜策略?

◀ 乙. ▶

5. 特征值和特征向量

5.1. 引子.

练习 5.1.1. 证明定理 5.1.5.

定理 5.1.5(Vieta 定理): 复系数一元 n 次多项式 $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的 n 个根 (计重数)$x_1, \cdots, x_n$ 满足 $-\frac{a_1}{a_0} = x_1 + \cdots + x_n, \cdots, (-1)^k \frac{a_k}{a_0} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \cdots, (-1)^n \frac{a_n}{a_0} = x_1 \cdots x_n$.

◀ 将 $p(x) = a_0 \prod_{1 \le i \le n}(x - x_i)$ 按 x 的幂次展开即得. ▶

5.2. 基本概念.

练习 5.2.1. 求下列复矩阵的全部特征值和特征向量.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

◀ 特征值为 $7, -2$. 解得对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$.

◀ 特征值为 $ai, -ai$. 解得对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

◀ 特征值为 $1,1,-1$. 解得对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&3\\-1&-3&0\end{bmatrix}$.

◀ 特征值为 $\sqrt{14}i,-\sqrt{14}i,0$. 解得对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}6+\sqrt{14}i\\-2+3\sqrt{14}i\\-10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6-\sqrt{14}i\\-2-3\sqrt{14}i\\-10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$. (注意对于实方阵的共轭的复特征值,可以选取共轭的特征向量,故计算量可以减少一半.) ▶

5. $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$.

◀ 特征值为 $2,2,2,-2$. 解得对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$. ▶

练习 5.2.2. 构造符合要求的矩阵 A.

1. A 的特征多项式为 $\lambda^2-9\lambda+20$, 构造三个不同的 A.

◀ $\begin{bmatrix}4&\\&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&\\&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&1\\&5\end{bmatrix}$. ▶

2. $A=\begin{bmatrix}0&1\\ *&*\end{bmatrix}$, 且 A 的特征值为 $4,7$.

◀ A 的特征多项式为 $\lambda^2-11\lambda+28$. 解得 $A=\begin{bmatrix}0&1\\-28&11\end{bmatrix}$. ▶

3. $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\ *&*&*\end{bmatrix}$, 且 A 的特征值为 $1,2,3$.

◀ A 的特征多项式为 $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6$. 解得 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&11&6\end{bmatrix}$. ▶

练习 5.2.3. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & y \end{bmatrix}$, 已知 A, B 特征多项式相同, 求 x, y.

◀ A 的特征多项式为 $(\lambda-2)(\lambda^2 - x\lambda - 8)$, B 的特征值为 $2, 2, y$, 特征多项式为 $(\lambda-2)^2(\lambda-y)$. 解得 $x = -2, y = -4$. ▶

练习 5.2.4. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ 可逆, 且 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 A 的特征向量, 求 a, b 的值.

◀ $Ab = \begin{bmatrix} 3+b \\ 2+2b \\ a+b+1 \end{bmatrix}$. 解得 $a = 2, b = 1$ 或 -2. 检验知 $a = 2$ 时 A 可逆. ▶

练习 5.2.5. 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

1. 利用一元二次方程求根公式, 写出 A 的两个特征值 λ_1, λ_2 的表达式.

◀ A 的特征多项式为 $(\lambda-a)(\lambda-d) - bc$. 解得 $\lambda = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+2bc+d^2}{2}}$. ▶

2. 构造一个非对角的 A, 满足 $\lambda_1 = \lambda_2$.

◀ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ & a \end{bmatrix}$. ▶

3. 设 λ 为 A 的特征值, 证明 $A \begin{bmatrix} b \\ \lambda - a \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} b \\ \lambda - a \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} \lambda - d \\ c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda - d \\ c \end{bmatrix}$. 提示: 如果这两个向量不是零向量, 那么它们就是特征向量.

◀ 记另一个特征值为 λ', 则 $\lambda + \lambda' = a + d$. $A \begin{bmatrix} \lambda - d & b \\ c & \lambda - a \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \lambda - d & b \\ c & \lambda - a \end{bmatrix} = (A - \lambda I_2)(A - \lambda' I_2)$, Cayley-Hamilton 定理断言后者的值为 0. ▶

4. 若上述两个向量中有且仅有一个是零向量, 求 A 的特征值和特征向量.

◀ 这说明 $\lambda = a$ 或 $\lambda = d$ 以及 $bc = 0$. 故 A 的特征值为 a, d. 对 A 为上 (下) 三角矩阵分别讨论可得 A 的特征向量. ▶

5. 若上述两个向量都是零向量, 求 A 的特征值和特征向量.

◀ 此时 A 为对角阵, 特征值为 a, d, 对应的特征向量分别为 e_1, e_2. ▶

练习 5.2.6. 给定向量 $a, b \in \mathbb{R}^n$, 计算 $A = ab^T$ 的所有特征对.

◀ 对 A 的秩讨论. $rank(A) = rank(ab^T) \le rank(a) = 1$.

若 $rank(A) = 0$ 或等价于 $A = 0$, 即 $a = 0$ 或 $b = 0$, 则 A 的全部特征值为 $0, \cdots, 0$, 对应的特征向量为 $e_1, \cdots, e_n$.

若 $rank(A) = 1$, 则 $a, b \neq 0$. 设 b 的第 i 个分量 $b_i \neq 0$, 则 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -b_j(\text{第 i 列}) & 0 & \cdots & 0 & b_i(\text{第 j 列}) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$, $j \neq i$ 给出了 A 的特征值 0 对应的 $n-1$ 个线性无关的特征向量. 注意 $trace(A) = trace(ab^T) = trace(b^T a) = b^T a$, 故 A 的全部特征值为

$0,\cdots,0,b^Ta$. 以下对 b^Ta 讨论. (1). 若 $b^Ta\neq 0$, 则 $Aa=ab^Ta=(b^Ta)a$, 故 a 为特征值 b^Ta 对应的特征向量. 由不同特征值的特征向量线性无关,a 连同前面给出的 $n-1$ 个特征向量给出了 A 的 n 个线性无关的特征向量. (2). 若 $b^Ta=0$, 则由 $A\neq 0$, A 的 n 重特征值 0 不可能有 n 个线性无关的特征向量, 故前面给出的 $n-1$ 个特征向量即为 A 的全部线性无关的特征向量.

(注意不要遗漏零特征值的特征对. 一并参考练习 5.3.12.) ▶

练习 5.2.7. 已知 A 的特征值为 $1,2,3$, 求下列矩阵的特征值.

1. $2A, A+I_3, A^2, \overline{A}, A^T, A^{-1}$($A$ 为何可逆?).

◀ 注意可以将 A 相似到对角阵以及转置不改变 A 的特征多项式. $2A:2,4,6$, $A+I_3:2,3,4$, $A^2:1,4,9$, $\overline{A}:1,2,3$, $A^T:1,2,3$, $A^{-1}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}A & A\\ 0 & A\end{bmatrix}$.

◀ 设可以用 P 将 A 相似到对角阵. 用 $\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}$ 相似容易看出这两个矩阵的特征值为 $1,1,2,2,3,3$. ▶

练习 5.2.8. 证明, 如果 (λ,x) 是 A 的特征对, 则 $(f(\lambda),x)$ 是 $f(A)$ 的特征对, 其中 $f(x)$ 是任意多项式.

◀ 易见 $Ax=\lambda x$ 蕴涵 $f(A)x=f(\lambda)x$. (你可以先对单项式 x^n 归纳证明这一点再说明对这些单项式的线性组合也成立.) ▶

练习 5.2.9. 设 A 是可逆矩阵, 证明, A 的特征值都不为 0; 若 λ_0 是 A 的一个特征值, 则 $\frac{1}{\lambda_0}$ 是 A^{-1} 的一个特征值.

◀ $Ax=0x$ 蕴涵 $x=0$; $Ax=\lambda_0x$ 蕴涵 $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda_0}x$. (或: 将 A 相似上三角化易见这些成立.) ▶

练习 5.2.10. 设 $q_1,q_2,q_3\in\mathbb{R}^3$ 为一组标准正交基, 分别求 $q_1q_1^T$, $q_1q_1^T+q_2q_2^T$, $q_1q_1^T+q_2q_2^T+q_3q_3^T$ 的所有特征值和特征向量.

◀ $1,0,0,q_1,q_2,q_3$; $1,1,0,q_1,q_2,q_3$; $1,1,1,q_1,q_2,q_3$. (注意 $q_1q_1^T+q_2q_2^T+q_3q_3^T=I_3$.) ▶

练习 5.2.11. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^Tv=\lambda v$, 其中 $v\neq 0$.

1. 设 $Aw=\mu w$, 且 $\lambda\neq\mu$, 证明 v,w 正交.

◀ $\lambda v^Tw=v^TAw=\mu v^Tw$ 推出 $v^Tw=0$. ▶

2. 证明, 对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交.

◀ 由上一问即得. ▶

练习 5.2.12. 证明:

1. 若存在正整数 k, 使得 $A^k=0$, 则 A 的特征值只能是 0.

◀ $Ax=\lambda x$ 蕴涵 $A^kx=\lambda^kx$. (或: 将 A 相似上三角化易见其成立.) ▶

2. 若 $A^2=I_n$, 则 A 的特征值只能是 1 或 -1.

◀ $Ax=\lambda x$ 蕴涵 $A^2x=\lambda^2x$. (或: 将 A 相似上三角化易见其成立.) ▶

3. 若 $A^2=A$, 则 A 的特征值只能是 1 或 0.

◀ $Ax=\lambda x$ 蕴涵 $A^2x=\lambda^2x$. (或: 将 A 相似上三角化易见其成立.) ▶

练习 5.2.13. 对方阵 A,若多项式 $f(x)$ 满足 $f(A)=0$,则称 $f(x)$ 是 A 的化零多项式.

给定 A 的特征值 λ,证明,若 $f(x)$ 是 A 的化零多项式,则 $f(\lambda)=0$. ◀ 考虑 λ 的特征向量 x, 有 $0=f(A)x=f(\lambda)x$. (或: 将 A 相似上三角化易见其成立.) ▶

练习 5.2.14. 设方阵 A,B 可交换,λ_0 是 A 的一个特征值,V_{λ_0} 是 A 的特征值为 λ_0 的特征子空间. 证明, 对任意 $x\in V_{\lambda_0}$, 都有 $Bx\in V_{\lambda_0}$. 当 A,B 不可交换时, 结论是否成立?

◀ $ABx=BAx=B\lambda_0x=\lambda_0Bx$, 这说明 Bx 落在 A 的特征值 λ_0 的特征子空间中 (由于 Bx 可能为零向量, 不能说 Bx 是 A 的特征值 λ_0 的特征向量). 不成立. ▶

练习 5.2.15. 证明, A 和 $T^{-1}AT$ 具有相同的特征多项式.

◀ $det(\lambda I-A)=det(T^{-1}(\lambda I-A)T)=det(\lambda I-T^{-1}AT)$. ▶

练习 5.2.16. 设 λ_1,λ_2 是 A 的两个不同特征值, x_1,x_2 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量. 证明, x_1+x_2 不是 A 的特征向量.

◀ 由 x_1,x_2 线性无关, $A(x_1+x_2)=\lambda(x_1+x_2)$ 与 $Ax_1=\lambda_1x_1$, $Ax_2=\lambda_2x_2$ 导出矛盾. ▶

练习 5.2.17. 证明或举出反例.

1. 如果 A,B 具有相同的特征值、代数重数和特征向量, 则 $A=B$.

◀ 错误. 反例: $\begin{bmatrix}0 & & 1\\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & 1\\ & & 0\end{bmatrix}$. ▶

2. 如果 A,B 有相同的特征值和代数重数, 则 $A-B$ 所有特征值之和为零.

◀ 正确. 注意方阵所有特征值之和为其迹, 故 $A-B$ 的所有特征值之和为 A 的所有特征值之和减去 B 的所有特征值之和. ▶

3. $A+B$ 的特征值等于 A 与 B 的特征值之和.

◀ 错误. 反例: $\begin{bmatrix}0 & 1\\ & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & \\ 1 & 0\end{bmatrix}$. ▶

4. AB 的特征值是 A 与 B 的特征值之积.

◀ 错误. 反例: $\begin{bmatrix}1 & \\ & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & \\ & 1\end{bmatrix}$. ▶

5. AB 和 BA 具有相同的特征值和代数重数.

◀ 正确 (A,B 均为方阵时). $det(\lambda I-AB)=det(\lambda I-BA)$. ($A,B$ 不是方阵的情况见练习 5.2.18.) ▶

6. 如果 A 的特征值全为零, 则 A 是零矩阵.

◀ 错误. 反例: $\begin{bmatrix}0 & 1\\ & 0\end{bmatrix}$. ▶

7. 将 A 的第 i 行加到第 j 行上, 再将第 i 列从第 j 列中减去, 得到的矩阵 B 和 A 有相同的特征值. 若正确, 则对应的特征向量有何联系?

◀ 错误. 反例: $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ & 2\end{bmatrix}$, $j=1,i=2$. ▶

8. 将 A 的第 i 行加到第 j 行上, 再将第 j 列从第 i 列中减去, 得到的矩阵 B 和 A 有相同的特征值. 若正确, 则对应的特征向量有何联系?

◀ 正确. 记 $P=I+E_{ji}$, 则 $B=PAP^{-1}$. x 是 A 的特征向量当且仅当 Px 是 B 的相同特征值的特征向量. ▶

9. 将 A 的第 i,j 行交换, 再将第 i,j 列交换, 得到的矩阵 B 和 A 有相同的特征值. 若正确, 则对应的特征向量有何联系?

◀ 正确. 记 $P=I-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}$, 则 $B=PAP^{-1}$. x 是 A 的特征向量当且仅当 Px 是 B 的相同特征值的特征向量. ▶

10. 对角阵的特征向量一定是标准基向量.

◀ 错误. 如零矩阵. ▶

11. 正交矩阵的特征值都是绝对值等于 1 的复数.

◀ 正确. 设 $Ax=\lambda x$, 则 $\overline{\lambda}\lambda\overline{x}^Tx=\overline{x}^T\overline{A}^TAx=\overline{x}^TA^TAx=\overline{x}^Tx$. ▶

12. 所有 n 阶置换矩阵都有一个共同的特征向量.

◀ 正确. $\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^T$. ▶

练习 5.2.18. 设 A,B 分别是 $m\times n, n\times m$ 矩阵, 证明, $\lambda^n det(I_m-AB)=\lambda^m det(I_n-BA)$. 特别地, 当 $m=n$ 时, $det(I_m-AB)=det(I_n-BA)$.

◀ $\begin{bmatrix}I_n & \\ \frac{1}{\lambda}A & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I_n & \\ & \lambda I_m-AB\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & B\\ & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda I_n & \lambda B\\ A & \lambda I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & B\\ & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I_n-BA & \\ & \lambda I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & \\ \frac{1}{\lambda}A & I_m\end{bmatrix}$.
▶

练习 5.2.19. 如果复矩阵 A,B 可交换, 证明 A,B 至少有一个公共的特征向量.

◀ 设 λ 是 A 的一个特征值, V_λ 是 A 的特征值为 λ 的特征子空间. 由练习 5.2.14, 对任意 $x\in V_\lambda$, 都有 $Bx\in V_\lambda$, 故 B 限制到 V_λ 上给出了 V_λ 上的一个线性变换, 这说明 V_λ 包含 B 的某个特征向量.

(重要推论: 可交换的复矩阵 A,B 可以同时相似上三角化. 下面对方阵的维数归纳证明之. 取 A,B 的某个公共的特征向量 x_1 扩充为一组基 $x_1,\cdots,x_n$. 我们有 $A\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Ax_1 & \cdots & Ax_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & *_{1\times(n-1)}\\ 0_{(n-1)\times 1} & A'_{(n-1)\times(n-1)}\end{bmatrix}$ 以及对 B 类似的等式. 记 $P=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}$, 我们有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda & *_{1\times(n-1)}\\ 0_{(n-1)\times 1} & A'_{(n-1)\times(n-1)}\end{bmatrix}$, $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}\lambda & *_{1\times(n-1)}\\ 0_{(n-1)\times 1} & B'_{(n-1)\times(n-1)}\end{bmatrix}$. 现在运用归纳假设, 存在 P' 使得 $P'^{-1}A'P'$, $P'^{-1}B'P'$ 均为上三角阵, 则 $Pdiag(1,P')$ 将 A,B 同时相似到上三角阵:
$diag(1,P')^{-1}P^{-1}APdiag(1,P')=diag(1,P')^{-1}\begin{bmatrix}\lambda & *\\ 0 & A'\end{bmatrix}diag(1,P')=\begin{bmatrix}\lambda & *'\\ 0 & diag(1,P')^{-1}A'diag(1,P')\end{bmatrix}$,
$diag(1,P')^{-1}P^{-1}BPdiag(1,P')=diag(1,P')^{-1}\begin{bmatrix}\lambda & *\\ 0 & B'\end{bmatrix}diag(1,P')=\begin{bmatrix}\lambda & *'\\ 0 & diag(1,P')^{-1}B'diag(1,P')\end{bmatrix}$.

将不同特征值分离, 我们可以得到更精细的刻画. 由练习 5.4.6.3, 可以用某个可逆阵 P 将 A 相似到 $diag(A_1,\cdots,A_s)$, 其中每个 A_i 均为所有特征值相同的矩阵. 设 P 将 B 相似到 $B'=\begin{bmatrix}B_{ij}\end{bmatrix}_{i,j}$, 其中诸 B_{ij} 为使得下面的乘法有意义的分块. $diag(A_1,\cdots,A_s)\begin{bmatrix}B_{ij}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{ij}\end{bmatrix}diag(A_1,\cdots,A_s)$ 等价于 $A_iB_{ij}=B_{ij}A_j, 1\le i,j\le s$. $i\ne j$ 时, 由 A_i 与 A_j 没有相同特征值, 我们有 $B_{ij}=0$(练习 5.4.6.1). 故 $B'=diag(B_{11},\cdots,B_{ss})$ 也成为对角阵, 满足 $A_iB_{ii}=B_{ii}A_i$. 如果想得到 B' 更精细的刻画, 对每个 B_{ii} 做与上面同样的操作, 我们可以将 B_{ii} 相似到某个对角块的所有特征值相同的准对角阵, 此时

A_i 被相似到 (由同样理由) 某个相同分块的准对角阵. 最后,应用上面的推论将这些交换的块同时上三角化. 结论: 设复方阵 A,B 可交换,则存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = diag(A_1,\cdots,A_t)$, $P^{-1}BP = diag(B_1,\cdots,B_t)$,使得每个 A_i,B_i 均为仅有一个特征值的上三角阵 (我们自动有 $A_iB_i = B_iA_i$).) ▶

练习 5.2.20. 设 A 是四阶数独矩阵 (见练习 2.4.9),证明其绝对值最大的特征值为 10,且属于该特征值的特征向量的所有分量都相等.

◀ Gershgorin 圆盘定理保证其特征值不大于 10 且不小于 2. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ 为特征值 10 对应的特征向量, 故绝对值最大的特征值为 10. 考虑特征值 10 的特征向量中绝对值最大的分量知其所有分量相等. ▶

练习 5.2.21. 设方阵 A 的每个元素都是整数,证明 $\frac{1}{2}$ 一定不是 A 的特征值.

◀ 由 A 的特征多项式 P_A 是首一整系数多项式, $\frac{1}{2}$ 不是 P_A 的根. ▶

练习 5.2.22. 回顾例 5.1.1 中的矩阵 $A = \begin{bmatrix}0.6 & 0.1\\ 0.4 & 0.9\end{bmatrix}$, 以及稳定状态对应的矩阵 $A^\infty = \begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.8 & 0.8\end{bmatrix}$.

1. 如果 A^n 和 A^∞ 中对应的元素相差不超过 0.01, 那么 n 至少是多少?

◀ 7. ▶

2. 交换 A 的两行, 特征值是否不变?

◀ 特征值由 $1,\frac{1}{2}$ 变为 $1,-\frac{1}{2}$. ▶

练习 5.2.23. 给定 m 阶方阵 A_1, n 阶上三角矩阵 A_2 和 $m\times n$ 矩阵 B, 证明: 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 关于 $m\times n$ 矩阵 X 的矩阵方程 $A_1X - XA_2 = B$ 有唯一解.

矩阵方程 $A_1X - XA_2 = B$ 称为 Sylvester 方程, 在控制论中有不少应用.

◀ 观察可知其对应的 mn 元齐次线性方程组的系数矩阵可逆. (一并参考练习 5.4.6.) ▶

5.3. **对角化和谱分解.**

练习 5.3.1. 设三阶方阵 A 的特征值及对应特征向量是 $1,1,3$ 和 $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, 求 A.

◀ $A\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{bmatrix}$. 解得 $A = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -4 & 3\end{bmatrix}$. ▶

练习 5.3.2. 判断下列方阵是否可对角化.

1. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$.

◀3 个特征值互不相同, 故可对角化. ▶

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ 特征值全是 0 的对角阵仅有零矩阵, 故其不可对角化. (或: 特征值 0 有代数重数 3 和几何重数 1, 故其不可对角化.) ▶

练习 5.3.3. 计算 A^n.

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ A 的特征值为 $1, 0, 0$ 且可对角化. $A^n = A$. (注意一个秩 1 矩阵 $A = ab^T$ 满足 $(ab^T)n = a(b^Ta)^{n-1}b^T = (b^Ta)^{n-1}ab^T = (b^Ta)^{n-1}A$.) ▶

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ A 有特征值 $2, 2, 6$ 以及对应的特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. 故 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$.

$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 6^n \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$. ▶

练习 5.3.4. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. 当 k 取何值时, A 可对角化? 当 A 可对角化时, 写出其谱分解.

◀ A 的特征值为 $1, -1, -1$. 考虑 Jordan 标准形我们知道 A 相似于 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{bmatrix}$, 二者的区别在于 $A + I$ 的秩为 1 或 2. 易见 $A + I$ 的秩为 1 当且仅当 $k = 0$. 此时计算得 A 的特征值 $1, -1, -1$ 分别对应特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. 故 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$.

▶

练习 5.3.5. 设 A 是 4 阶方阵,其对角元都是 4,非对角元都是 -1. 令 H 为 4 阶 Hadamard 矩阵,即 $H=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$(见阅读 3.2.3). 计算 AH, 由此得出 A 的谱分解, 并求 $det(A)$, A^{-1}.

◀ $AH=\begin{bmatrix}1&5&5&5\\1&-5&5&-5\\1&5&-5&-5\\1&-5&-5&5\end{bmatrix}=Hdiag(1,5,5,5)$, 故 $A=Hdiag(1,5,5,5)H^{-1}$ 为其谱分解. $det(A)=125$, $A^{-1}=Hdiag(1,\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5})H^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}$. ▶

练习 5.3.6. 利用矩阵,求下列数列的通项公式和极限.

1. (Lucas 数) $L_1=1, L_2=3, L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$.

◀ $\begin{bmatrix}L_{n+1}\\L_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_n\\L_{n-1}\end{bmatrix}$. 对 $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ 进行谱分解 (设两个特征值为 $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$), 我们得到 $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}&-\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\\-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}&\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\end{bmatrix}$, 故

$\begin{bmatrix}L_n\\L_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix}L_2\\L_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1^{n-2}&\\&\lambda_2^{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}&-\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\\-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}&\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_2\\L_1\end{bmatrix}$. 解得 $L_n=\frac{3(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-2}-\lambda_2^{n-2})}{\lambda_1-\lambda_2}$. ▶

2. $a_0=0, a_1=1, a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n$.
3. $a_0=a_1=0, a_2=1, a_{n+3}=\frac{1}{2}a_{n+2}+\frac{1}{4}a_{n+1}+\frac{1}{4}a_n$.
4. $a_0=1, a_{n+1}=a_n+2\times 3^n$. 提示: 考虑向量 $\begin{bmatrix}a_n\\3^n\end{bmatrix}$.
5. $a_0=0, b_0=1, a_{n+1}=a_n+b_n, b_{n+1}=3a_n+3b_n$.

◀ 与上面类似, 不再赘述. ▶

练习 5.3.7. 利用谱分解说明如下事实.

1. $\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix}^{1024}$ 的每个元素都大于 10^{700}.

◀ 显然每个元素均为正实数. 谱分解给出 $\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&\\&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\1&1\end{bmatrix}^{-1}$, 故 $\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix}^{1024}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{1024}&\\&5^{1024}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\1&1\end{bmatrix}^{-1}$, 其元素绝对值不小于 $5^{1024}/det(\begin{bmatrix}-2&1\\1&1\end{bmatrix})>10^{700}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}^{1024} = I_2$.

◀ 谱分解给出矩阵的两个特征值为 $\pm i$, 故 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}^{4} = I_2$. ▶

3. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}^{1024} = -\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

◀ 谱分解给出矩阵的两个特征值为三次单位根 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, 故 $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}^{3} = I_2$. ▶

4. $\begin{bmatrix} 5 & 6.9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}^{1024}$ 的每个元素都小于 10^{-70}.

◀ 谱分解给出矩阵的两个特征值为 $\frac{5\pm3\sqrt{5}i}{10}$, 其模为 $\sqrt{\frac{7}{10}}$. 计算对数易得. ▶

练习 5.3.8 (Pavel Grinfeld)**.** 利用谱分解计算 $\begin{bmatrix} 110 & 55 & -164 \\ 42 & 21 & -62 \\ 88 & 44 & -131 \end{bmatrix}^{2017}$.

◀ 矩阵有三个半单特征值 $0,1,-1$, 故有 $\begin{bmatrix} 110 & 55 & -164 \\ 42 & 21 & -62 \\ 88 & 44 & -131 \end{bmatrix}^{2017} = (Xdiag(0,1,-1)X^{-1})^{2017} = Xdiag(0,1,-1)^{2017}X^{-1} = Xdiag(0,1,-1)X^{-1} = \begin{bmatrix} 110 & 55 & -164 \\ 42 & 21 & -62 \\ 88 & 44 & -131 \end{bmatrix}$. (注意这里不需要实际计算出特征向量以得到 X.) ▶

练习 5.3.9. 设有谱分解 $A = X\Lambda X^{-1}$, 求下列矩阵的谱分解.

1. A^{-1}.

◀ $X\Lambda^{-1}X^{-1}$. ▶

2. A^T.

◀ $X^{-T}\Lambda X^T$. ▶

3. $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 2\Lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$.

◀ 注意 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 有谱分解 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, 故 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & \\ & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & \\ & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & \\ & X^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}X & \frac{1}{\sqrt{2}}X \\ \frac{1}{\sqrt{2}}X & -\frac{1}{\sqrt{2}}X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & \\ & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}X^{-1} & \frac{1}{\sqrt{2}}X^{-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}X^{-1} & -\frac{1}{\sqrt{2}}X^{-1} \end{bmatrix}$ 给出了 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 的谱分解. ▶

练习 5.3.10. 利用特征值计算下列 n 阶矩阵的行列式.

1. $\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix}$.

◀ 注意 $\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix} = (a-b)I_n + \begin{bmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & b \end{bmatrix}$, 而秩 1 矩阵 $\begin{bmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & b \end{bmatrix}$ 有特征值 nb 和 $0(n-1$ 重), 故 $\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix}$ 的特征值为 $a+(n-1)b$ 和 $a-b(n-1$ 重), 从而其行列式为 $(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_{n-1} & 1+a_nb_n \end{bmatrix}$.

◀ 注意 $\begin{bmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_{n-1} & 1+a_nb_n \end{bmatrix} = I_n + \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$, 而秩 1 矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$ 有特征值 $\sum_{i=1}^n a_ib_i$ 和 $0(n-1$ 重)(参考练习 5.2.6), 故 $\begin{bmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_{n-1} & 1+a_nb_n \end{bmatrix}$ 的特征值为 $1+\sum_{i=1}^n a_ib_i$ 和 $1(n-1$ 重), 从而其行列式为 $1+\sum_{i=1}^n a_ib_i$. ▶

练习 5.3.11. 证明:

1. n 阶方阵 $J_n(\lambda_0) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}$ 只有一个特征值 λ_0, 其代数重数是 n, 几何重数是 1.

◀ $J_n(\lambda_0)$ 的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^n$, 故其仅有一个 n 重特征值 λ_0. 考虑线性方程组系数矩阵的秩知其特征子空间维数为 1. ▶

2. 分块对角矩阵 $A = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_0) & \\ & J_{n_2}(\lambda_0) \end{bmatrix}$ 只有一个特征值 λ_0, 其代数重数是 n_1+n_2, 几何重数是 2.

◀ 与上一问类似. ▶

练习 5.3.12. 试分析秩为 1 的方阵何时可对角化.

◀ 对秩 1 方阵 A 的特征值讨论.

若 A 有 n 重特征值 0, 由特征值全为 0 的对角阵只有零矩阵, A 不能对角化 (由相似不改变秩).

若 A 有 $n-1$ 重特征值 0 和某个非零特征值 a, 运用练习 5.4.6.3 的结论 (或更一般地, 考虑 Jordan 标准形) 并考虑秩即知 A 可对角化.

(一并参考练习 5.2.6.) ▶

练习 5.3.13. 设 A 是实二阶方阵, 且 $det(A) < 0$, 证明 A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化.

◀ 由 A 的两个特征值均为实数, A 在 $\mathbb{C}$ 上相似于某个实对角阵. 下面证明一个有用的命题:

若两个实方阵 A, B 在 $\mathbb{C}$ 上相似, 则 A, B 也在 $\mathbb{R}$ 上相似.

证明. 设可逆复方阵 $P+iQ$ 将 A 相似到 B, 即 $(P+iQ)A = B(P+iQ)$. 分别考虑实部和虚部知 $PA = BP, QA = BQ$. 注意 $det(P+tQ)$ 作为 t 的多项式在 i 处的取值非零, 从而其不是零多项式, 故存在某个实数 t_0 使得 $det(P+t_0Q) \neq 0, P+t_0Q$ 可逆. 注意 $(P+t_0Q)A = B(P+t_0Q)$, 故可逆实方阵 $P+t_0Q$ 将 A 相似到 B. ▶

练习 5.3.14. 证明 $A = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ B & -I_{n-r} \end{bmatrix}$ 可对角化.

◀ 这是练习 5.4.6.2 的直接推论. ▶

练习 5.3.15. 证明,

1. 若 $A^2 = A$, 则 A 可对角化.

◀ 由于 A 有没有重根的化零多项式 (即满足 $f(A) = 0$ 的多项式 f, 定义于练习 5.2.13), A 的 Jordan 块的阶数只能为 1. ▶

2. 若 $A^2 = 0$, 且 $A \neq 0$, 则 A 不可对角化.

◀ 否则, 由 A 的特征值全为 0, A 相似于对角阵 0, 这蕴涵 $A = 0$. ▶

3. 若 $A^2 + A + I_n = 0$, 则 A 在 $\mathbb{R}$ 上不可对角化.

◀ 否则, 实方阵 A 实相似于一个复方阵. ▶

练习 5.3.16. 证明或举出反例.

1. 如果 A 所有的特征向量是 $k\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$, $k \neq 0$, 则 A 一定有不单的特征值.

◀ 正确. 由于每个特征值给出的特征子空间线性无关, 2 阶方阵 A 仅有一个特征值. ▶

2. 如果 A 所有的特征向量是 $k\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$, $k \neq 0$, 则 A 一定不可对角化.

◀ 正确. 由上一问即得. ▶

3. 如果 A 是上三角矩阵但不是对角矩阵, 则 A 不可对角化.

◀ 错误. 反例: $\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 0\end{bmatrix}$. ▶

4. 如果 A 是上三角矩阵但不是对角矩阵, 则存在对角矩阵 D, 使得 $A - D$ 不可对角化.

◀ 错误. 反例: $\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 0\end{bmatrix}$. ▶

5. 如果 A 可以被对角矩阵对角化, 则 A 也是对角矩阵.

◀ 正确. 直接计算. ▶

练习 5.3.17. 证明定理 5.3.9 第 2 条.

定理 5.3.9.2: n 阶实方阵 A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化, 当且仅当其特征多项式的根都是实根, 且其特征值都半单.

◀ 类似第一问给出证明. 也可使用以下结论:

若两个实方阵 A, B 在 $\mathbb{C}$ 上相似, 则 A, B 也在 $\mathbb{R}$ 上相似.

这样, 我们有 n 阶实方阵 A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化 $\iff$ A 在 $\mathbb{C}$ 上相似于某个实对角阵 $\iff$ A 的特征多项式的根都是实根, 且其特征值都半单.

见练习 5.3.13 答案的注记. ▶

练习 5.3.18. 证明, 对反射矩阵 $H_v = I_n - 2vv^T$, 其中 $||v|| = 1$, 存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}H_vQ = diag(-1, 1, \cdots, 1)$.

◀ 将 v 扩充成一组标准正交基 $v_1 = v, v_2, \cdots, v_n$, 则 $H_v\begin{bmatrix}v_1 & \cdots & v_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1 & \cdots & v_n\end{bmatrix} diag(-1, 1, \cdots, 1)$. 取正交矩阵 $Q = \begin{bmatrix}v_1 & \cdots & v_n\end{bmatrix}$. ▶

练习 5.3.19 (Householder 矩阵的推广)**.** 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间,对任意 $v\in\mathbb{R}^n$,存在唯一的分解 $v=v_1+v_2$,其中 $v_1\in M$, $v_2\in M^\perp$. 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的变换 H,使得 $H(v_1+v_2)=v_1-v_2$.

1. 证明 H 是线性变换.

◀ 由 H 的定义即得. ▶

2. 设 H 为该线性变换的表示矩阵,证明 $H^2=I_n$.

◀ $H^2(v_1+v_2)=H(v_1-v_2)=v_1+v_2$. ▶

3. 求 H 的特征值、代数重数及特征子空间. H 能否被对角化?

◀ $1, dim(M), M$; $-1, dim(M^\perp), M^\perp$. 能, 取 M 的一组基 $v_1,\cdots,v_{dim(M)}$ 以及 $M^\perp$ 的一组基 $v_{dim(M)+1},\cdots,v_n$, H 在这组基下对角化. ▶

4. 证明,存在矩阵 A,使得 $H=I_n-2AA^T$.

◀ 在上一问中选取 M 和 $M^\perp$ 的标准正交基. 记 $B=\begin{bmatrix}v_1 & \cdots & v_{dim(M)}\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}v_{dim(M)+1} & \cdots & v_n\end{bmatrix}$,则 $\begin{bmatrix}B & A\end{bmatrix}$ 是正交矩阵,且 $H\begin{bmatrix}B & A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B & A\end{bmatrix}diag(I_{dim(M)},-I_{n-dim(M)})$. 故

$H=\begin{bmatrix}B & A\end{bmatrix}diag(I_{dim(M)},-I_{n-dim(M)})\begin{bmatrix}B & A\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B & A\end{bmatrix}diag(I_{dim(M)},-I_{n-dim(M)})\begin{bmatrix}B & A\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}B & A\end{bmatrix}diag(I_{dim(M)},-I_{n-dim(M)})\begin{bmatrix}B^T\\ A^T\end{bmatrix}=BB^T-AA^T=(I_n-BB^T-AA^T)+BB^T-AA^T=I_n-2AA^T$. ▶

线性变换 H 保持 M 不变,把 $M^\perp$ 中的向量映射到其负向量,因此是关于子空间 M 的反射变换.

练习 5.3.20. 设 A 是 n 阶实方阵,满足 $A^2=I_n$,证明 A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化,并判断 A 是否是关于某个子空间的反射变换.

◀ 由于 A 有没有重根的化零多项式 (即满足 $f(A)=0$ 的多项式 f, 定义于练习 5.2.13), A 的 Jordan 块的阶数只能为 1, 故 A 的特征值均半单. 又 A 的特征值均为实数. 注意关于某个子空间的反射变换的矩阵为对称阵,故 A 一般情况下不必代表某个反射. 反例自举. ▶

练习 5.3.21. 设矩阵 A 的特征多项式是 $p_A(x)$.

1. 设 A 为对角矩阵,证明 $p_A(A)=0$.

◀ 设 m 阶方阵 A 的全部特征值为 $a_1,\cdots,a_m$, f 为多项式,则 $f(A)$ 的全部特征值为 $f(a_1),\cdots,f(a_m)$. ▶

2. 设 A 为可对角化的矩阵,证明 $p_A(A)=0$.

◀ 将 A 对角化即得 $p_A(A)=0$. (注意 $p_A(x)$ 在 A 的相似下不变.) ▶

3. 设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$,它是否可对角化? 是否满足 $p_A(A)=0$?

◀ 否. 是. ▶

练习 5.3.22. 求下列矩阵的特征值,并判断是否可以对角化.

1. $\begin{bmatrix}10 & 1 & \\ & 10 & 1\\ & & 10\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}10 & 1 & \\ & 10.001 & 1\\ & & 10.002\end{bmatrix}$.

◀ $10, 10, 10$, 不可对角化; $10, 10.001, 10.002$, 可对角化. ▶

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ 0.001 & & & 0 \end{bmatrix}$.

◀ $0, 0, 0, 0$, 不可对角化; $\pm\frac{\sqrt[4]{10}}{10}, \pm\frac{\sqrt[4]{10}}{10}i$, 可对角化. ▶

提示: 由此可见, 矩阵变化不大时, 特征值和可对角化性质可能变换很大.

(注: 为某个矩阵添加微扰项时, 由特征多项式的系数是矩阵元素的多项式, 特征多项式变化不大. 特征值是特征多项式的根, 其在特征多项式系数的微扰下变化也不大, 但在特征多项式有重根时可能出现重根的分离 (如第 2 问). 矩阵的微扰会破坏 Jordan 块的结构, 故会影响可对角化的性质. 一并注意 (相似到 Jordan 标准形容易看出) 在扰动足够小时矩阵的秩不会减小, 这即是说秩是矩阵空间上的下半连续函数.)

5.4. **相似.**

练习 5.4.1. 设 A, B 是 n 阶方阵, 且满足 $AB = BA$.

1. 证明, 若 A 有 n 个不同的特征值, 则 B 可对角化.

◀ 由 A 有 n 个不同的特征值, A 可对角化. 设 $P^{-1}AP = A' = diag(a_1, \cdots, a_n)$ 并记 $P^{-1}BP = B' = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$. $AB = BA$ 等价于 $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$ 或等价于 $A'B' = B'A'$, 即 $\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$ 或等价于 $\begin{bmatrix} a_1b_{11} & \cdots & a_1b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n1} & \cdots & a_nb_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_1 & \cdots & b_{1n}a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_1 & \cdots & b_{nn}a_n \end{bmatrix}$. 考虑两边 (i, j) 位置的元素相等知 $a_ib_{ij} = b_{ij}a_j$. 对于两个不同下标 $i \neq j$, 由 $a_i \neq a_j$, 我们有 $b_{ij} = 0$. 故 $B' = diag(b_{11}, \cdots, b_{nn})$. ▶

2. 若 A 有代数重数大于 1 的特征值, B 是否一定可对角化?

◀ 否. B 的 Jordan 块的阶数可能大于 1. 例如 $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 5.4.2. 对下列矩阵 A, B, 求 X 使得 $A = XBX^{-1}$.

1. $A = MN, B = NM$, 其中 M, N 为方阵, 且 M 可逆.

◀ M. ▶

2. $A = \begin{bmatrix} MN & 0 \\ N & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N & NM \end{bmatrix}$, 其中 M, N 不必是方阵.

◀ $\begin{bmatrix} I & M \\ & I \end{bmatrix}$. ▶

3. $A=\begin{bmatrix} M & -N \\ N & M \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} M+iN & 0 \\ 0 & M-iN \end{bmatrix}$, 其中 M,N 是方阵.

◀ $\begin{bmatrix} I & I \\ -iI & iI \end{bmatrix}$. ▶

练习 5.4.3. 1. 设 A,B 是 n 阶方阵满足 $AB=BA$. 若 A 有 n 个不同的特征值, 证明, 存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

◀ 由练习 5.4.1.1, A,B 可以同时对角化, 故不妨设 A,B 已是对角阵. 由 A 的特征值互不相同, 可对 A 的对角元 Lagrange 插值得到所需多项式. (详细过程: 将 A,B 同时对角化. 设 $P^{-1}AP=diag(a_1,\cdots,a_n)$, $P^{-1}BP=diag(b_1,\cdots,b_n)$, 其中 $a_1,\cdots,a_n$ 互不相同. 取 $f(x)=\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\prod_{i\neq j}(a_j-a_i)}\prod_{i\neq j}(x-a_i)$, 我们有 $f(a_j)=b_j$, 故 $P^{-1}f(A)P=f(P^{-1}AP)=P^{-1}BP$, 从而有 $B=f(A)$.)

(注: 由于 A 的特征多项式是 A 的 n 次首 1 化零多项式, 对其做带余除法取余式总能得到某个次数不超过 $n-1$ 的多项式, 因此无需考虑题目中的次数要求. 然而, 由 A 有 n 个不同的特征值, A 的极小多项式 (即次数最低的首 1 化零多项式) 就是 A 的特征多项式, 故题目中所求的 f 是唯一的.) ▶

2. 设 A,B 是 n 阶方阵满足 $AB=BA$. 若 $A=J_n(\lambda)$, 证明, 存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

◀ 条件等价于 B 与 $J_n(0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}=A-\lambda I_n$ 交换. 记 $B=(b_{ij})$. 考虑方程 $J_n(0)B=BJ_n(0)$. 记 i 或 j 大于 n 时 $b_{ij}=0$, 则两边的 (i,j) 元分别为 $b_{i+1,j}$ 和 $b_{i,j+1}$. 由两边相等, 解得

$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{11} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{12} \\ & & & b_{11} \end{bmatrix}=b_{11}I+b_{12}J_n(0)+\cdots+b_{1n}J_n(0)^{n-1}=b_{11}I+b_{12}(J_n(\lambda)-\lambda I_n)+\cdots+b_{1n}(J_n(\lambda)-\lambda I_n)^{n-1}$.

故 $f(x)=\sum_{i=1}^n b_{1i}(x-\lambda)^{i-1}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^{i-1}b_{1i}\binom{i-1}{j}\lambda^{i-j-1}x^j=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^n b_{1i}\binom{i-1}{j}\lambda^{i-j-1}\right)x^j$. ▶

3. 举例说明, 存在 A,B 满足 $AB=BA$, 但不存在多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

◀ 选取适当的 A 使得 A 有某个特征值的 Jordan 块多于 1 个即可, 如取 $A=\begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}$.

(注: 若 A 的每个特征值只有 1 个 Jordan 块, 将 A 相似到 Jordan 标准形易见与 A 交换的 B 均能写成 A 的多项式: 不妨设 A 已相似到 $diag(J_{n_1}(\lambda_1),\cdots,J_{n_r}(\lambda_r))$ 并记 $B=(B_{ij})$, 其中诸 λ_i 互不相同. 考虑 $diag(J_{n_1}(\lambda_1),\cdots,J_{n_r}(\lambda_r))$ 与 (B_{ij}) 交换知对 $i\neq j$ 有 $B_{ij}=0$ (由 $J_{n_i}(\lambda_i)$ 与 $J_{n_j}(\lambda_j)$ 没有相同特征值, $J_{n_i}(\lambda_i)B_{ij}=B_{ij}J_{n_j}(\lambda_j)$ 蕴涵 $B_{ij}=0$. 参考练习 5.2.19, 练习 5.4.6.1 解答的讨论), 故 $B=diag(B_{11},\cdots,B_{rr})$. Lagrange 插值得到多项式 f_i 使得 $f_i(J_{n_i}(\lambda_i))=B_{ii}$. 下面进行第二次插值以得到多项式 f 使得 $f(J_{n_i}(\lambda_i))=B_{ii}$: 设 $J_{n_i}(\lambda_i)$ 的特征多项式为 $P_{J_{n_i}(\lambda_i)}(x)=(x-\lambda_i)^{n_i}$. 由多

项式 $\prod_{j\neq i} P_{J_{n_j}(\lambda_j)}$ 与 $P_{J_{n_i}(\lambda_i)}$ 互素, 存在 (可由带余除法得到) 多项式 s_i, t_i 使得 $s_i \prod_{j\neq i} P_{J_{n_j}(\lambda_j)} + t_i P_{J_{n_i}(\lambda_i)} = 1$. 注意多项式 $s_i \prod_{j\neq i} P_{J_{n_j}(\lambda_j)}$ 满足其在 $J_{n_j}(\lambda_j), j \neq i$ 与 $J_{n_i}(\lambda_i)$ 处的值分别为 0_{n_i} 与 I_{n_i}. 取 $f = \sum_{i=1}^n f_i s_i \prod_{j\neq i} P_{J_{n_j}(\lambda_j)}$ 即有 $f(J_{n_i}(\lambda_i)) = f_i(J_{n_i}(\lambda_i)) = B_{ii}$, 故 $B = f(A)$.) ►

练习 5.4.4. 证明,任意迹为 0 的方阵相似于一个对角元素全为 0 的方阵.

◄ 设 $A = (a_{ij})$ 的迹为 0. 首先说明可以通过相似将 a_{11} 变为 0. 记 E_{ij} 为 (i,j) 处为 1,其余位置为 0 的矩阵. 若 $a_{11} = 0$, 我们已经得到了所需结果. 若 $a_{11} \neq 0$ 且 $a_{12} \neq 0$, 则 $P = I_n - \frac{a_{11}}{a_{12}} E_{21}$ 满足 $P^{-1}AP$ 的左上角为 0. 若 $a_{11} \neq 0$, $a_{12} = 0$ 且 $a_{12} \neq 0$, 则 $P = I_n + \frac{1}{a_{22}} E_{12}$ 的相似将 a_{12} 变为 $1 \neq 0$. 若 $a_{22} = 0$, 则 $P = I_n - E_{11} - E_{22} + E_{12} + E_{21}$ 的相似将 a_{11} 变为 $a_{22} = 0$.

下面对 A 的阶数归纳.

归纳奠基. 命题对 1 阶方阵显然成立.

归纳提升. 设命题对 $n-1$ 阶方阵成立. 对 n 阶方阵 A, A 可以相似到某个 $\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & A'_{(n-1)\times(n-1)} \end{bmatrix}$. 由 A 的迹为 0, A' 的迹也为 0. 由归纳假设,存在某个矩阵 P 将 A' 相似到某个对角元素全为 0 的方阵, 故 $diag(1, P)$ 将 $\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & A'_{(n-1)\times(n-1)} \end{bmatrix}$ 相似到某个对角元素全为 0 的方阵.

(推论: 迹为 0 的矩阵均为换位子 (定义两个方阵 B, C 的换位子 $[B, C] := BC - CB$).

证明: 设 A 的迹为 0. 选择某个 P 使得 $P^{-1}AP = (a_{ij})$ 的对角元素 $a_{ii} = 0$. 任取一个特征值均不相同的对角阵 $B = diag(b_1, \cdots, b_n)$. 设 $C = (c_{ij})$, 方程 $BC - CB = P^{-1}AP$ 或等价于 $(b_i - b_j)c_{ij} = a_{ij}$ 有 (唯一) 解. 由 $P^{-1}AP = [B, C]$ 我们得到 $A = [PBP^{-1}, PCP^{-1}]$.) ►

练习 5.4.5 (Jordan 链)**.** 对任意 n 阶方阵 A,一组向量 $x_1, \cdots, x_n$,如果存在 $\lambda \in \mathbb{C}$,使得

$(A - \lambda I)x_1 = 0$, $(A - \lambda I)x_2 = x_1$, $\cdots$, $(A - \lambda I)x_s = x_{s-1}$, 而 $(A - \lambda I)y = x_s$ 无解, 就称其为 A 的一个关于 λ 长度为 s 的 Jordan 链.

显然, $x_1 \in N(A - \lambda I)$ 是特征向量, $x_2 \in N((A - \lambda I)^2)$, $\cdots$, $x_s \in N((A - \lambda I)^s)$, 但 $x_s \notin N(A - \lambda I)$.

求证:

1. $x_1, \cdots, x_s$ 线性无关.

◄ 设 $x_1, \cdots, x_s$ 有非平凡的线性组合 $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$, 其中 $a_k \neq 0$ 为线性组合的最后一个非零系数. 以 $(A - \lambda I)$ 作用 $k - 1$ 次知 $a_kx_1 = 0$, 矛盾. ►

2. 令 $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_s \end{bmatrix}$, 则 $AX_1 = X_1 J_s(\lambda)$.

◄ 直接验证. ►

3. 若 A 只有一个特征值 1, 且其几何重数为 1, 则 A 有一个关于 λ 的长度为 n 的 Jordan 链 $x_1, \cdots, x_n$, 且 A 相似于 $J_n(\lambda)$.

◄ 对于每个 s, 我们有 $dim(N((A - \lambda I)^s)) - dim(N((A - \lambda I)^{s-1})) \leq 1$, 否则以 $(A - \lambda I)^{s-1}$ 作用即有 $dim(N(A - \lambda I)) > 1$. 由 $dim(N((A - \lambda I)^s)) \geq dim(N((A - \lambda I)^{s-1}))$, 有 $dim(N((A - \lambda I)^n)) - dim(N((A - \lambda I)^{n-1})) = 1$. 取 $x_n \in N((A - \lambda I)^n) \backslash N((A - \lambda I)^{n-1})$ 以及 $x_i = (A - \lambda I)x_{i+1}$. 由 $X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ 可逆, $X^{-1}AX = J_n(\lambda)$.

(注: 一般情况下,选取适当的 Jordan 链, 可以将任一方阵 A 相似到 Jordan 标准形,并且这给出了用于相似的可逆阵 (找到这个矩阵等价于给出了一组 Jordan 链线性生成全空间). 详细过程见任一本数学系用的线性代数教材.) ▶

练习 5.4.6. 给定 m 阶方阵 A_1, n 阶方阵 A_2 和 $m \times n$ 矩阵 B. 证明

1. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值,关于 $m \times n$ 矩阵 X 的 Sylvester 方程 $A_1X - XA_2 = B$ 有唯一解.

◀ 注意 $A_1X - XA_2 = B$ 有唯一解 $\iff$ ($m \times n$ 矩阵构成的 mn 维线性空间上的) 线性变换 $X \mapsto A_1X - XA_2$ 可逆 $\iff$ 线性变换 $X \mapsto A_1X - XA_2$ 没有零特征值 $\iff$ $A_1X - XA_2 = 0$ 蕴涵 $X = 0$.

我们来证明 $A_1X = XA_2$ 蕴涵 $X = 0$. 注意以下事实:

(1) 设 m 阶方阵 A_1 的全部特征值为 $a_1, \cdots, a_m$, f 为多项式,则通过将 A_1 上三角化可看出方阵 $f(A_1)$ 的全部特征值为 $f(a_1), \cdots, f(a_m)$;

(2) 设 A_1 的特征多项式为 $p_{A_1}(x) = det(xI - A_1) = (x - a_1) \cdots (x - a_m)$, 则 $p_{A_1}(A_1) = 0$;

(3) 设 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 则 $p_{A_1}(A_2)$ 的全部特征值非 0(设 A_2 的特征值为 $b_1, \cdots, b_n$, 则 $p_{A_1}(A_2)$ 的特征值为 $p_{A_1}(b_1), \cdots, p_{A_1}(b_n)$, 由于 p_{A_1} 的根为 A_1 的特征值, b_i 不是 p_{A_1} 的根), 故 $p_{A_1}(A_2)$ 可逆.

设 $A_1X = XA_2$. 我们有 $A_1^kX = A_1^{k-1}A_1X = A_1^{k-1}XA_2 = A_1^{k-2}XA_2^2 = \cdots = A_1XA_2^{k-1} = XA_2^k$. 将多项式写成单项式的线性组合,我们得到对任意的多项式 f 有 $f(A_1)X = Xf(A_2)$. 以 $f = p_{A_1}$ 代入即得 $X = 0$.

(注: 设 A_1, A_2 的特征值分别为 $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n$. 若 A_1, A_2 均可对角化, 则线性变换 $X \mapsto A_1X - XA_2$ 也可对角化,且其 mn 个特征值为 $a_i - b_j, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$: 设 $P_1^{-1}A_1P_1 = diag(a_1, \cdots, a_m)$, $P_2^{-1}A_2P_2 = diag(b_1, \cdots, b_n)$. 我们有 $P_1^{-1}(A_1X - XA_2)P_2 = (P_1^{-1}A_1P_1)(P_1^{-1}XP_2) - (P_1^{-1}XP_2)(P_2^{-1}A_2P_2) = diag(a_1, \cdots, a_m)(P_1^{-1}XP_2) - (P_1^{-1}XP_2)diag(b_1, \cdots, b_n)$. 设 e_{ij} 为第 i 行 j 列为 1, 其余元素为 0 的矩阵, 则 $diag(a_1, \cdots, a_m)e_{ij} - e_{ij}diag(b_1, \cdots, b_n) = (a_i - b_j)e_{ij}$, 故 $X_{ij} = P_1e_{ij}P_2^{-1}$ 为线性变换 $X \mapsto A_1X - XA_2$ 的特征值 $a_i - b_j$ 对应的特征向量. 易见诸 X_{ij} 线性无关.

一般情况下, 设 A_1, A_2 分别相似于 Jordan 标准形 $diag(J_{r_1}(\lambda_1), \cdots, J_{r_s}(\lambda_s))$, $diag(J_{r'_1}(\lambda'_1), \cdots, J_{r'_t}(\lambda'_t))$, 则 $diag(J_{r_1}(\lambda_1), \cdots, J_{r_s}(\lambda_s))X - Xdiag(J_{r'_1}(\lambda'_1), \cdots, J_{r'_t}(\lambda'_t)) = (J_{r_i}(\lambda_i)X_{ij} - X_{ij}J_{r'_j}(\lambda'_j))_{ij} = ((\lambda_i - \lambda'_j)X_{ij} + (J_{r_i}(0)X_{ij} - X_{ij}J_{r'_j}(0)))_{ij}$, 其中 X_{ij} 为使得乘法有意义的 X 的分块. 易见 $X_{ij} \mapsto J_{r_i}(0)X_{ij} - X_{ij}J_{r'_j}(0)$ 仅有特征值 0, 故仍有 $X \mapsto A_1X - XA_2$ 的 mn 个特征值为 $a_i - b_j, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.) ▶

2. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值,则存在唯一的矩阵 X 满足 $\begin{bmatrix} I_m & X \\ & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B \\ & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & X \\ & I_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$.

◀ 注意 $\begin{bmatrix} I_m & X \\ & I_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & -X \\ & I_n \end{bmatrix}$. 计算等式左边的积知方程等价于 $A_2X - XA_1 = -B$. 由上一问 X 的解存在唯一. ▶

3. 对 n 阶方阵 A,存在可逆矩阵 X,使得 $X^{-1}AX=\begin{bmatrix}\lambda_1 I+N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I+N_s\end{bmatrix}$,其中 $N_1,\cdots,N_s$ 是严格上三角矩阵.

◀ 注意 (审视归纳过程易见) 将 A 相似到上三角阵时可以额外要求其对角线上的特征值按任意顺序排列. 故我们可以设 A 被相似到 $\begin{bmatrix}\lambda_1 I+N_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 I+N_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_s I+N_s\end{bmatrix}$, 其中 λ_i 互不相同, $N_1,\cdots,N_s$ 是严格上三角矩阵. 现在用第二问的结果将所有 $*$ 通过相似消去. ▶

练习 5.4.7 (Jordan 分解的证明)**.** 下面证明定理 5.4.8.

定理 5.4.8 (Jordan 分解). 对 n 阶方阵 A,存在可逆矩阵 X,使得 $X^{-1}AX=J=\begin{bmatrix}J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(\lambda_r)\end{bmatrix}$,

其中 $J_{n_i}(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$ 是 n_i 阶 Jordan 块,而 $n_1+\cdots+n_r=n$,且除了这些 Jordan 块的排列次序外,J 被 A 唯一确定.

证明. 首先考虑严格上三角矩阵的 Jordan 分解,即对 n 阶严格上三角矩阵 A,存在可逆矩阵 X 使得 $X^{-1}AX=J=\begin{bmatrix}J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(0)\end{bmatrix}$, 其中 $n_1+\cdots+n_r=n$, $n_1\geq\cdots\geq n_r\geq 1$.

对 n 用数学归纳法. $n=1$ 显然成立,假设命题对任意不超过 $n-1$ 阶的矩阵成立,下证命题对 n 阶矩阵也成立. 对 A 分块 $A=\begin{bmatrix}0 & a^T \\ & A_1\end{bmatrix}$. 根据归纳假设,存在 $n-1$ 阶可逆矩阵 $\widetilde{X}_1$, 使得 $\widetilde{X}_1^{-1}A_1\widetilde{X}_1=\begin{bmatrix}J_{k_1}(0) & \\ & J\end{bmatrix}$,其中 J 是分块对角矩阵,对角块是 $J_{k_i}(0)$, $i=2,\cdots,s$, 且 $k_1\geq\cdots\geq k_s$, $k_1+\cdots+k_s=n-1$. 取 $X_1=\begin{bmatrix}1 & \\ & \widetilde{X}_1\end{bmatrix}$, 于是 $X_1^{-1}AX_1=:\begin{bmatrix}0 & a_1^T & a_2^T \\ & J_{k_1}(0) & \\ & & J\end{bmatrix}$. 取 $X_2=\begin{bmatrix}1 & a_1^T J_{k_1}(0)^T & \\ & I_{k_1} & \\ & & I\end{bmatrix}$, 则

$$X_2^{-1}X_1^{-1}AX_1X_2=\begin{bmatrix}0 & (a_1^Te_1)e_1^T & a_2^T \\ & J_{k_1}(0) & \\ & & J\end{bmatrix}.$$

若 $a_1^Te_1=0$,则存在置换矩阵 P,使得 $P^{-1}X_2^{-1}X_1^{-1}AX_1X_2P=\begin{bmatrix}J_{k_1}(0) & & \\ & 0 & a_2^T \\ & & J\end{bmatrix}$, 对 $\begin{bmatrix}0 & a_2^T \\ & J\end{bmatrix}$ 使用归纳假设即得结论.

若不然,先取 $X_3=\begin{bmatrix}a_1^Te_1 & & \\ & I_{k_1} & \\ & & a_1^Te_1I\end{bmatrix}$, 就有 $X_3^{-1}X_2^{-1}X_1^{-1}AX_1X_2X_3=\begin{bmatrix}J_{k_1+1}(0) & a_2^T \\ & J\end{bmatrix}$. 再取 $X_4=\prod_{i=1}^{k_1}\begin{bmatrix}I_{k_1+1} & -e_{i+1}a_2^TJ^{i-1} \\ & I\end{bmatrix}$,计算可得 $X_4^{-1}X_3^{-1}X_2^{-1}X_1^{-1}AX_1X_2X_3X_4=\begin{bmatrix}J_{k_1+1}(0) & \\ & J\end{bmatrix}$ 也得结论. 综上即有命题成立,即严格上三角矩阵有 Jordan 分解.

次之,考虑任意矩阵的 Jordan 分解. 根据练习 5.4.6,存在可逆矩阵 X_1, 使得 $X_1^{-1}AX_1=\begin{bmatrix}\lambda_1I+N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sI+N_s\end{bmatrix}$, 其中 $N_1,\cdots,N_s$ 是严格上三角矩阵. 再利用严格上三角矩阵的 Jordan 分解,存在可逆矩阵 $X_2=\begin{bmatrix}X_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & X_{ss}\end{bmatrix}$, 使得 $X_2^{-1}X_1^{-1}AX_1X_2=J$ 是分块对角矩阵,而且每个对角块都是 Jordan 块. 令 $X=X_1X_2$,就证明了 Jordan 分解的存在性.

最后考虑 Jordan 分解的唯一性. J 中相同特征值的 Jordan 块的个数就是该特征值的几何重数,而这些 Jordan 块的阶数的和就是该特征值的代数重数. 注意矩阵的特征值、代数重数、几何重数都是相似不变量. 因此只需证明若 $J(\lambda)=\begin{bmatrix}J_{n_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda)\end{bmatrix}$ 和 $\widetilde{J}(\lambda)=\begin{bmatrix}J_{m_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(\lambda)\end{bmatrix}$ 相似,其中 $n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1$, $m_1\geq\cdots\geq m_k\geq 1$, $n_1+\cdots+n_k=m_1+\cdots+m_k$,则必有 $m_i=n_i$, $i=1,\cdots,k$.

若不然,则存在 j, 使得 $m_i=n_i, i=1,\cdots,j-1$, 但 $m_j\neq n_j$. 不妨设 $m_j\geq n_j$, 令 $J_1=\begin{bmatrix}J_{n_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_{j-1}}(\lambda)\end{bmatrix}$, $J_2=\begin{bmatrix}J_{n_j}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda)\end{bmatrix}$, $\widetilde{J}_2=\begin{bmatrix}J_{m_j}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(\lambda)\end{bmatrix}$, 则 $J(\lambda)^{n_j}=\begin{bmatrix}(J_1-\lambda I)^{n_j} & \\ & 0\end{bmatrix}$, $\widetilde{J}(\lambda)^{n_j}=\begin{bmatrix}(J_1-\lambda I)^{n_j} & \\ & (\widetilde{J}_2-\lambda I)^{n_j}\end{bmatrix}$, 其中 $(\widetilde{J}_2-\lambda I)^{n_j}\neq 0$. 但二者相似,故秩相同,矛盾.

(注记. 由定理对唯一性的证明可以看出,考虑 Jordan 块的幂的秩知 A 的 Jordan 标准形完全被 A 的所有特征值 $\{\lambda_i\}$ 以及对每个 i 和 k, $rank((A-\lambda_i)^k)$ 确定. 注意由秩不等式,我们只需计算到秩对 k 稳定即可 (见练习 2.4.24). 由 Jordan 标准形,两个方阵 A,B 相似当且仅当 A,B 有相同的 Jordan 块,从而当且仅当 A,B 有相同的特征值 $\{\lambda_i\}$ 以及对每个 i 和 k, $rank((A-\lambda_i)^k)=rank((B-\lambda_i)^k)$.)

练习 5.4.8 (补充练习)**.** 以下考虑的均为 n 阶复方阵. 证明,

(1). 若某个多项式 f 满足 $f(A)=0$ 且 f 无重根,则 A 可对角化.

◀ A 的 Jordan 块的阶数均为 1. ▶

(2). 方阵 A 与 A^T 相似.

◀ 只需考虑单个 Jordan 块. 这又约化到特征值 0 的 Jordan 块的情形. 考虑秩知其转置也仅有 1 个 Jordan 块. ▶

(3). $rank(A^2) = rank(A)$ 当且仅当 A 没有 0 特征值或 A 的特征值 0 是半单的.

◀ 这当且仅当 A 没有阶数大于 1 的特征值 0 的 Jordan 块. ▶

(4). 若 $rank(A^2) = rank(A)$, 则存在某个方阵 B 使得 $A = B^2$.

◀ 我们需要对一个特征值不为 0 的 Jordan 块或一个特征值 0 的 1 阶 Jordan 块做同样事情, 后者是显然的. 对于前者, 设 $J_n(\lambda) = \lambda I + N$, 验证幂级数 $f(x) = \sqrt{\lambda + x} = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}x - \frac{1}{8\lambda\sqrt{\lambda}}x^2 + \cdots$ 给出的矩阵多项式 $f(N)$ 满足条件. ▶

(5). 若 $diag(A, A)$ 相似于 $diag(B, B)$, 则 A 相似于 B.

◀ 考虑相同 Jordan 块的个数即可. ▶

(6). A 的特征值都是 0 当且仅当 A 是幂零的 (即存在某个自然数 n, 使得 $A^n = 0$).

◀ 上三角化或考虑 Jordan 标准形. ▶

(7). A 是幂零的当且仅当 $tr(A^k) = 0$ 对任意 $k \geq 1$.

◀ 左边显然蕴涵右边. 反之, $tr(A^k)$ 是 A 的所有特征值 (计重数) 的 k 次幂之和. 我们得到 A 的所有不同特征值组成的 Vandermonde 行列式为 0. (或用 A 的所有特征值的初等对称多项式全为 0 推出 A 的所有特征值全为 0.) ▶

(8). 设方阵 A 的特征值全是 1. 证明方阵 A 的任意次幂都与 A 相似.

◀ 只需对特征值为 1 的单个 Jordan 块证明之. ▶

(9). 任何与任何与 A 可交换的矩阵可交换的矩阵都是 A 的多项式.

◀ 考虑 Jordan 标准形 (暴力计算). ▶

(10). 设 $AB - BA = C$, $AC = CA$, 则 C 幂零.

◀ 证明 1. 归纳证明 $tr(C^k) = 0$ 对任意 $k \geq 1$.

证明 2. 考虑 C 的 Jordan 标准形, 并且把相同特征值的 Jordan 块合并在一起. 即 $C = diag(C_1, \cdots, C_r)$, 其中不同的 C_i 没有共同的特征值. 此时 A 也被分块为 $A = diag(A_1, \cdots, A_r)$. 记 $B = (B_{ij})$, 则 $C_i = A_iB_{ii} - B_{ii}C_i$, 这说明 C_i 的迹为 0. 由 C_i 是仅有 1 个特征值的上三角阵, C_i 的特征值为 0. ▶

(11). 伴随矩阵 A^* 总可以表示为 A 的多项式.

◀ 证明 1. $rank(A) < n-1$ 和 $rank(A) = n$ 的情况是明显的. 下面考虑 $rank(A) = n-1$ 的情况. 设 $A = diag(B, J)$, 其中 B 可逆, J 是唯一的特征值 0 的 Jordan 块. 由 $AA^* = A^*A = 0$, $A^* = diag(0, C)$, 其中 $C = det(B)J^* = (-1)^{l+1}det(B)\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{l \times l} = (-1)^{l+1}det(B)J^{l-1}$. 我们欲求多项式 f 使得 $f(B) = 0$, $f(J) = (-1)^{l+1}det(B)J^{l-1}$. 设 B 的特征多项式为 $g(x)$, 则 $f(x) = (-1)^{n+1}x^{l-1}g(x)$ 满足要求.

证明 2. 我们证明 A^* 与任何与 A 可交换的矩阵可交换. A 可逆时 $AB=BA$ 蕴涵 $A^*B=BA^*$. A 不可逆时, 对绝对值充分小的 $t\neq 0$ 有 $A_t:=A+tI$ 可逆, 故 $A_t^*B=BA_t^*$. 由于两边均关于 t 连续, 故可令 $t\to 0$ 得到 $A^*B=BA^*$. ▶

(12). 对 $J_n(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{bmatrix}$ 以及多项式 f, $f(J_n(\lambda))=\begin{bmatrix}f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\\ & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!}\\ & & & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!}\\ & & & & f(\lambda)\end{bmatrix}$.

(注: 对于收敛的形式幂级数, 这也是成立的. 常用的是指数函数 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots$. 给出任一复方阵 A 的 Jordan 标准形 $A=Pdiag(J_1(\lambda_1),\cdots,J_k(\lambda_k))P^{-1}$, 则 $e^A=Pdiag(e^{J_1(\lambda_1)},\cdots,e^{J_k(\lambda_k)})P^{-1}$. 这给出了计算矩阵的指数函数的方法. 一并参照课本例 7.5.15.)

(13). A 可以唯一地写成一个半单方阵与一个幂零方阵的和.

◀ 存在性由 Jordan 标准形得到. 唯一性由半单且幂零的方阵仅有零矩阵得到. ▶

(14). $A^2=I_n$ 当且仅当 $rank(I_n+A)+rank(I_n-A)=n$.

◀ 对单个 k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda)$, 我们有 $rank(I_k+J_k(\lambda))+rank(I_k-J_k(\lambda))\geq k$, 等号成立当且仅当 $\lambda=\pm1$ 且 $k=1$. 对 A 的所有 Jordan 块求和, 我们得到 $rank(I_n+A)+rank(I_n-A)\geq n$, 等号成立当且仅当 A 的所有 Jordan 块均为特征值为 ±1 的 1 阶 Jordan 块. ▶

6. 实对称矩阵

6.1. 实对称矩阵的谱分解.

练习 6.1.1. 求下列实对称矩阵的谱分解.

1. $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$;

◀ $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$. ▶

2. $\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$;

◀ $\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt5} & \frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt5}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt5} & \frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt5}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$. ▶

3. $\begin{bmatrix}0&0&4&1\\0&0&1&4\\4&1&0&0\\1&4&0&0\end{bmatrix}$;

◀ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&&&\\&3&&\\&&-3&\\&&&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$. ▶

4. $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$. ▶

练习 6.1.2. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 $0,3,3$, $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\in V_{\lambda=0}$, $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\in V_{\lambda=3}$, 求 A.

◀ $\lambda=3$ 的特征子空间与 $\lambda=1$ 的特征子空间正交. 将 $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ 添加向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ 扩充为 $\lambda=3$ 的特征子空间的基. $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$. ▶

练习 6.1.3. 设实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&1&1&-1\\1&a&-1&1\\1&-1&a&1\\-1&1&1&a\end{bmatrix}$ 有一个单特征值 -3, 求 a 的值和 A 的谱分解.

◀ A 有三重特征值 $a+1$ 和单特征值 $a-3$. 故 $a=0$.

$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$. ▶

练习 6.1.4. 设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, $a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in N(A)$, 求 A 及其谱分解.

◀ $rank(A) = 1$. $R(A^T) = N(A)^{\perp}$ 有一组基 $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$, 故

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T. \blacktriangleright$$

练习 6.1.5. 求下列实对称矩阵 A 的谱分解.

1. A 满足 $A^3 = 0$.

◀ A 的特征值全为 0. A 可以正交相似到零矩阵, 故 $A = 0 = I0I$. ▶

2. $A = a_1x_1x_1^T + a_2x_2x_2^T$, 其中 x_1, x_2 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组标准正交基, a_1, a_2 为实数.

◀ $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \\ & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$. ▶

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$, 其中 M 是 n 阶对称矩阵, 有谱分解 $M = Q\Lambda Q^T$.

◀ $A = (\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & \\ & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}^T$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & \\ & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & \\ & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & \\ & Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}Q & \frac{1}{\sqrt{2}}Q \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Q & -\frac{1}{\sqrt{2}}Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & \\ & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}Q & \frac{1}{\sqrt{2}}Q \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Q & -\frac{1}{\sqrt{2}}Q \end{bmatrix}^T. \blacktriangleright$$

练习 6.1.6. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 计算满足下列条件的 b 的取值范围.

1. A 不可逆.

◀ $det(A) = 0$. $b = 0$. ▶

2. A 可以正交对角化.

◀ A 为对称阵. $b = 1$. ▶

3. A 不可对角化.

◀ A 有某个非半单的二重特征值. A 的特征多项式 $\lambda^2 - 2\lambda - b$ 有重根给出 $b = -1$. 由 $A - I \neq 0$ 知特征值 1 非半单. (注: 前面给出的是在 $\mathbb{C}$ 上不可对角化的条件. 若考虑的基域是 $\mathbb{R}$, 则 A 不可对角化当且仅当 A 有某个非半单的二重特征值或有复特征值. 前者等价于特征多项式有重根或 $b = -1$, 后者等价于特征多项式的判别式小于 0 或 $\lambda < -1$.) ▶

练习 6.1.7. 计算下列矩阵及其特征值. 哪些是对称矩阵? 哪些矩阵的特征值是 ± 1? 由此看出正交相似的特殊性.

1. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. 特征值为 $\frac{\pm\sqrt{5}+1}{2}$. 对称. ▶

2. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$. 特征值为 ± 1. ▶

3. $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. 特征值为 ± 1. 对称. ▶

练习 6.1.8. 证明命题 6.1.6.

命题 6.1.6: 实方阵的正交相似关系是等价关系.

◀ 等价关系的自反性, 对称性, 传递性分别由单位阵正交, 正交阵的逆正交, 正交阵的积正交给出. (注: 这无非是说正交阵在矩阵乘法下构成一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 的子群 $O(n)$.) ▶

练习 6.1.9. 证明, 两个实对称矩阵正交相似, 当且仅当它们具有相同的特征多项式.

◀ 正交相似标准形说明两个实对称阵正交相似当且仅当其有不计排列顺序时相同的特征值, 而特征多项式确定了矩阵的所有特征值. ▶

练习 6.1.10. 设实对称矩阵 A 满足 $A^5 = I_n$, 证明 $A = I_n$.

◀ A 的任意特征值 λ 为满足 $\lambda^5 = 1$ 的实数, 故 $\lambda = 1$. A 正交相似于 I_n, 故 $A = I_n$. ▶

练习 6.1.11. 设 $A_1, \cdots, A_m$ 是 m 个两两可交换的实对称矩阵, 证明它们可以同时正交对角化.

◀ 考虑 A_1 某个特征值的特征子空间 V_1. 由 A_1 与 $A_2, \cdots, A_m$ 交换, $A_2, \cdots, A_m$ 限制在 V_1 上成为 V_1 上的两两交换的线性变换 $A_2|_{V_1}, \cdots, A_m|_{V_1}$. 取 V_1 上的线性变换 $A_2|_{V_1}$ 的某个特征值的特征子空间 $V_2 \subseteq V_1$. 由 $A_2|_{V_1}$ 与 $A_3|_{V_1}, \cdots, A_m|_{V_1}$ 交换, $A_3|_{V_1}, \cdots, A_m|_{V_1}$ 限制在 V_2 上成为 V_2 上的两两交换的线性变换 $A_3|_{V_2}, \cdots, A_m|_{V_2}$. 取 V_2 上的线性变换 $A_3|_{V_2}$ 的某个特征值的特征子空间 $V_3 \subseteq V_2$. 这样做下去, 直到找到 $A_m|_{V_{m-1}}$ 的某个特征值的特征子空间 $V_m \subseteq V_{m-1}$. V_m 中的 (非零) 向量是 $A_1, \cdots, A_m$ 的公共特征向量. (想写得更清楚可以使用归纳法.)

取 $A_1, \cdots, A_m$ 的公共特征向量 v_1. 对 v_1 的正交补空间操作可 (归纳地) 得到 $A_1, \cdots, A_m$ 的公共一组特征向量 $v_1, \cdots, v_n$ 组成全空间的一组基, $\begin{bmatrix}v_1 & \cdots & v_n\end{bmatrix}$ 同时将 $A_1, \cdots, A_m$ 正交相似到对角阵.

(另证: 将 A_1 正交相似到对角阵 $diag(\lambda_1 I, \cdots, \lambda_k I)$, 由 A_1 与 $A_2, \cdots, A_m$ 交换, $A_2, \cdots, A_m$ 是有相同分块的准对角阵, 且对应位置的对角块交换. 故可对矩阵的个数 m 归纳.) ▶

练习 6.1.12. 当 n 充分大时, 矩阵 $A = \begin{bmatrix}1 & 10^{-n}\\ 0 & 1+10^{-n}\end{bmatrix}$ 非常接近对称矩阵. 计算其谱分解, 并求两个线性无关的特征向量的夹角.

◀ $\begin{bmatrix}1 & 10^{-n}\\0 & 1+10^{-n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & 1+10^{-n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$. 两个线性无关的特征向量 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$. ▶

练习 6.1.13. 设 λ_1 是实对称矩阵 A 的最大的特征值. 证明 A 的左上角元素 $a_{11}\le\lambda$.

◀ 设有谱分解 $A=Q^T\Lambda Q$, 其中对角阵 Λ 的对角元为 $\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_n$. $a_{11}=e_1^TAe_1=(Qe_1)^T\Lambda(Qe_1)$. 设单位向量 $Qe_1=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$, 则 $a_{11}=(Qe_1)^T\Lambda(Qe_1)=\lambda_1a_1^2+\cdots+\lambda_na_n^2\le\lambda_1a_1^2+\cdots+\lambda_1a_n^2=\lambda_1(a_1^2+\cdots+a_n^2)=\lambda_1$. (同理可得对角元 $a_{kk}=e_k^TAe_k\le\lambda_1$.) ▶

练习 6.1.14. 考虑下列复对称矩阵.

1. 设复对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}i & 1\\1 & -i\end{bmatrix}$, 计算 A^2, 并判断 A 是否可对角化.

◀ $A^2=0$. 由 A 的特征值均为 0 且 $A\ne 0$, A 不可对角化. ▶

2. 设复对称矩阵 $F_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & i & -1 & -i\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -i & -1 & i\end{bmatrix}$, 计算 F_4^2 和 $F_4F_4^T$; 根据 F_4^2 的特征值, F_4 的迹和行列式, 求 F_4 的所有特征值. 是否存在实正交矩阵 Q, 使得 Q^TF_4Q 是对角阵?

◀ $F_4^2=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&4\\0&0&4&0\\0&4&0&0\end{bmatrix}$, $F_4F_4^T=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$. F_4 的特征值为 $2,2,-2,2i$. 解出 F_4 的 4 个线性无关的实特征向量知存在欲求的实正交矩阵. ▶

这里 F_4 是一个四阶离散 Fourier 变换的表示矩阵, 这类矩阵在信号处理和数值积分中有重要应用.

练习 6.1.15. 设实对称矩阵 $S=\begin{bmatrix}0 & A\\A^T & 0\end{bmatrix}$.

1. 证明, $Sx=\lambda x$, 当且仅当 $x=\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}$, 满足 $Az=\lambda y$, $A^Ty=\lambda z$.

◀ 直接对 x 分块计算. ▶

2. 证明, 如果 λ 是 S 的特征值, 则 $-\lambda$ 也是 S 的特征值.

◀ 设 λ 有特征向量 $\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}$, 则 $-\lambda$ 有特征向量 $\begin{bmatrix}y\\-z\end{bmatrix}$. ▶

3. 证明, 如果 $\lambda\ne 0$ 是 S 的特征值, 则 λ^2 是 A^TA 的特征值, 也是 AA^T 的特征值.

◀ 设 S 的特征值 $\lambda\ne 0$ 有特征向量 $\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}$, 则 $y,z\ne 0$, 故 y,z 分别为 AA^T 和 A^TA 的特征值 λ^2 的特征向量. ▶

4. 证明, AA^T 和 A^TA 的非零特征值相同, 且有相同的重数.

◀ 由 AA^T 和 A^TA 均对称,其代数重数等于几何重数. 考虑二者特征值 $\lambda \neq 0$ 的特征子空间: 若 AA^T 有特征向量 y,则 $\lambda^{-1}A^Ty$ 是 A^TA 的特征向量; 若 A^TA 有特征向量 z,则 $\lambda^{-1}Ay$ 是 AA^T 的特征向量. 这给出了 AA^T 和 A^TA 的特征值 $\lambda \neq 0$ 的特征子空间的双射,故 AA^T 和 A^TA 的特征值 $\lambda \neq 0$ 的几何重数相同. (或由于 $\lambda^n det(\lambda I_m - AA^T) = \lambda^m det(\lambda I_n - A^TA)$.) ▶

5. 分别取 $A = I_2$ 或 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求对应 S 的谱分解.

◀ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$. ▶

练习 6.1.16. 构造一个实方阵 A,满足 $AA^T = A^TA$ 但 $A \neq A^T$,并验证 A 和 A^T 具有相同的特征值和特征向量. 注意,这里相同的特征向量不意味着对应的特征值相同. 提示: 事实上,对实方阵 A,如果 $AA^T = A^TA$,则 A 和 A^T 具有相同的特征值和特征向量.

◀ 例: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 6.1.17 (二阶差分矩阵与二阶导数)**.** 在微积分中, $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x) \approx \frac{f(x+\delta)+f(x-\delta)-2f(x)}{2\delta^2}$. 如果将一个区间等分,将函数 $f(x)$ 在等分点处的取值列成一个向量 f,则 f 就是离散化的函数,计算中可以代替 $f(x)$. 而 $f(x)$ 的二阶导数就可以用 $\frac{1}{2h^2}Df$ 来表示,其中 h 是每个分出的小区间的长度,而 $D = \begin{bmatrix} * & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & * \end{bmatrix}$, 其中“$*$”处元素与函数在区间端点处满足的条件有关.

1. 求 $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 的谱分解,并将特征向量写成 $\begin{bmatrix} sind \\ sin2d \\ sin3d \end{bmatrix}$ 的形式. 提示: 这是离散化的正弦函数.

2. 求 $B_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 的谱分解,并将特征向量写成 $\begin{bmatrix} cosd \\ cos3d \\ cos5d \\ cos7d \end{bmatrix}$ 的形式. 提示: 这是离散化的正弦函数.

注意, $\frac{d^2}{dx^2}sinkx = -k^2sinkx$, $\frac{d^2}{dx^2}coskx = -k^2coskx$. 对离散化的情形,也有类似结论. 这一点将在第 7 章中得到更多讨论. 在 Fourier 分析中,将函数写成正弦函数和余弦函数的和有极大的好处; 而在计算上,将向量写成离散正弦或离散余弦的线性组合,也有类似的好处. 例如,图片的 JPEG 压缩就常用 B_8 谱分解产生的正交基来进行处理.

练习 6.1.18. 考虑正方形铁丝上的热扩散问题, 设四个顶点的温度组成向量 $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}$. 在热量扩散时, 如果一个点的温度低于周围点温度的平均值, 则该点温度升高; 反之则该点温度降低. 假设每经过一个时间单位, 一个点的温度变化与周围点平均温度和该点温度之差成正比, 比例系数为 k.

1. 写出矩阵 A, 使得 At 表示经过一个单位时间之后四个点的温度.
2. 令 H 为 4 阶 Hadamard 矩阵 (见练习 5.3.5), 计算 AH.
3. 求 A 的谱分解.
4. 求 $\lim_{t\to\infty} A^t$, 它是否与 k 有关? 经过足够长的时间后, 最终的温度分布是什么?

练习 6.1.19. 采集 n 个人的三项数据, 例如身高、体重、收入, 组成向量 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^n$. 令 x_1, x_2, x_3 为三组数据的平均值, u 为分量全是 1 的向量. 定义向量 a_i, a_j 的协方差为 $cov(a_i, a_j) = \frac{1}{n}(a_i - x_i u)^T(a_j - x_j u)$. 称 $C = \begin{bmatrix} cov(a_i, a_j) \end{bmatrix}_{3\times 3}$ 为数据的协方差矩阵.

1. 令 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$, U 为所有元素都是 1 的 $n\times 3$ 矩阵, 求常数 k, 使得 $lUU^TA = \begin{bmatrix} x_1u & x_2u & x_3u \end{bmatrix}$.
2. 用 A, U 来表示 C, 并证明 C 是对称矩阵.
3. 任取 $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3$, 证明向量 Ay_1, Ay_2 的协方差是 $y_1^TCy_2$.
4. 设 C 有谱分解 $C = Q\Lambda Q^T$, 考虑 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} Q$ 的三个列向量对应的三组数据, 证明这三组数据两两协方差为零.

协方差为零的两组数据称为不相关的数据, 利用谱分解从原本相关的数据中得到不相关的数据的线性组合, 是统计学中很重要的一个方法.

6.2. 正定矩阵.

练习 6.2.1. 判断下列矩阵是否正定.

1. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$.

◀ 否. 第 2 个顺序主子式非正. ▶

2. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$.

◀ 否. 第 1 个顺序主子式非正. ▶

3. $\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix}$.

◀ 否. 第 2 个顺序主子式非正. ▶

4. $\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$.

◀ 是. 全部顺序主子式为正. ▶

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ 否. 第 2 个顺序主子式非正. ▶

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ 否. 第 2 个顺序主子式非正. ▶

(注: 计算顺序主子式即可! 这比特征值的计算量小.)

练习 6.2.2. 考虑实矩阵 $S = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$. 求使得下列条件成立的 b 的取值范围.

1. S 不正定但是半正定.

◀ $1 - b^2 = 0$, $b = \pm 1$. (注意若某个对称阵的前 $n-1$ 个顺序主子式均为正, 则其正定, 半正定, 不定当且仅当其行列式即第 n 个顺序主子式为正, 为 0, 为负.) ▶

2. S 不定.

◀ $1 - b^2 < 0$, $-1 < b < 1$. ▶

1. S 半负定.

◀ 第 1 个顺序主子式为正, 这不可能. ▶

练习 6.2.3. 下列实矩阵中未知元素满足什么条件时, 矩阵正定? 半正定?

1. $\begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 9 \end{bmatrix}$.

◀ $-3 < b < 3$; $b = \pm 3$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & c \end{bmatrix}$.

◀ $c > 8$; $c = 8$. ▶

3. $\begin{bmatrix} c & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

◀ $c > 0, |c| > |b|$; $c \pm 0, |c| \geq |b|$. (使用练习 6.2.14 的结论: 实对称矩阵半正定, 当且仅当它的所有主子式都非负. 下面同理.) ▶

4. $\begin{bmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$.

◀ $c > 1$; $c \geq 1$. ▶

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & d & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ 我们等价地考虑 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & d \end{bmatrix}$. 第 1 个顺序主子式为正, 第 2 个顺序主子式非正, 故不定. ▶

6. $\begin{bmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{bmatrix}$.

◀ $s > 8$; $s \geq 8$. ▶

7. $\begin{bmatrix} t & 3 & 0 \\ 3 & t & 4 \\ 0 & 4 & t \end{bmatrix}$.

◀ $t > 5$; $t \geq 5$. ▶

8. $\begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a+c & a-c \\ a & a-c & a+c \end{bmatrix}$.

◀ 相合. $\begin{bmatrix} a & & \\ & c & -c \\ & -c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a+c & a-c \\ a & a-c & a+c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. 不可能正定. 半正定当且仅当 $a, c \geq 0$. ▶

练习 6.2.4. 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵. A 正定. 证明, 存在可逆矩阵 T, 使得 T^TAT 和 T^TBT 同时是对角矩阵.

◀ 设 $A = SS^T$. 我们有 $(S^{-T})^TAS^{-T} = I$ 以及 $B' := (S^{-T})^TBS^{-T}$ 为某个对称阵. 选取正交阵 O 使得 $B'' := O^TB'O$ 为对角阵, 我们仍有 $O^TIO = I$. 取 $T = S^{-T}O$, 我们有 $T^TAT = O^T(S^{-T})^TAS^{-T}O = O^TIO = I$, $T^TBT = O^T(S^{-T})^TBS^{-T}O = O^TB'O = B''$ 均为对角阵. ▶

练习 6.2.5. 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵. A, B 半正定. 证明, 存在可逆矩阵 T, 使得 T^TAT 和 T^TBT 同时是对角矩阵.

◀ 注意以下事实: 若半正定矩阵 A 的某个对角元是 0, 那么该对角元所在的行和列所有元素都是 0. 考虑 A 的正交相似标准形 $A = Q^T\Lambda Q = Q^T\sqrt{\Lambda}QQ^T\sqrt{\Lambda}Q$, 知 A 可以写成某个对称半正定矩阵的平方. 记其为 $P = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$, $A = P^2 = P^TP$ 的第 (i,j) 元 $a_{ij} = v_i^Tv_j$. $a_{ii} = v_i^Tv_i = 0$ 说明 $v_i = 0$, 从而 $a_{ij} = v_i^Tv_j = 0$. (也可以用 A 半正定蕴涵主子式 $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2$ 非负说明. $a_{ii} = 0$ 时我们得到 $-a_{ij}^2 \geq 0$.)

回到题目. 首先将 A 相合到 $A' = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 设 B 被同样的矩阵相合到 $B' = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$. 下面在保持 A' 不变的前提下把 B' 化成标准形. 设可逆阵 Q 使得 $Q^TB_{22}Q = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则可逆阵 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ 的

相合保持 A' 不变,并将 B' 相合到 $\begin{bmatrix} B_{11} & * & 0 \\ * & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 现在用 I_s 相合消去"*" 的部分,这保持 A' 不变, 且 $\begin{bmatrix} B_{11} & * & 0 \\ * & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 最后对 B_{11} 做正交变换将其化为对角阵即可. ▶

练习 6.2.6. 设 A 对称正定, B 是实矩阵.

1. 证明,对任意整数 k, A^k 也正定.

◀ 注意 A^{k-2} 被 A 相合到 A^k. 故我们只需考虑 $A^0 = I$ 和 $A^1 = A$ 正定.▶

1. 若存在正整数 r, 使得 $A^rB = BA^r$, 证明 $AB = BA$.

◀ 设 A 正交相似到 $diag(\lambda_1 I, \cdots, \lambda_k I)$, B 被相同矩阵正交相似到 B'. 我们要说明 $A'^rB' = B'A'^r$ 蕴涵 $A'B' = B'A'$. 将 B 分块为 $[B_{ij}]$ 易见对 $i \neq j$ 有 $B_{ij} = 0$, 故 $A'B' = B'A'$. ▶

练习 6.2.7. 对 n 阶实对称矩阵 A, 证明, 当实数 t 充分大时, $tI_n + A$ 正定.

◀ 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则 $tI_n + A$ 的特征值是 $t + \lambda_1, \cdots, t + \lambda_n$. 故 $t > max_{1\leq i\leq n}(-\lambda_i)$ 时 $tI_n + A$ 的全部特征值为正, 从而其正定. ▶

练习 6.2.8. 对 n 阶实对称矩阵 A, 证明, 存在正实数 c, 使得对任意 n 维列向量 x, 都有 $|x^tAx| \leq cx^Tx$.

◀ 将 A 正交相似到对角阵可以看出, 若 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 选取 $c = max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|$ 即可.

(另证: 我们需要说明 $\max_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} \frac{|x^tAx|}{x^Tx} = \max_{\|x\|=1} |x^tAx|$ 存在. 这由 $|x^tAx|$ 是紧集 $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数保证.) ▶

练习 6.2.9 (Hadamard 不等式)**.** 求证:

1. 如果 A 正定, 那么任取列向量 y, 分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{bmatrix}$ 不正定;

◀ $\begin{bmatrix} I & \\ -y^TA^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}y \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \\ & -y^TA^{-1}y \end{bmatrix}$. ▶

2. 如果 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ 正定, 那么 $det(A) \leq a_{nn}A_{n-1}$, 其中 A_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式;

◀ 设 $A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & y \\ y^T & a_{nn} \end{bmatrix}$, 则 $\begin{bmatrix} I & \\ -y^TA_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & y \\ y^T & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{n-1}^{-1}y \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \\ & a_{nn} - y^TA_{n-1}^{-1}y \end{bmatrix}$. ▶

3. 如果 A 正定, 那么 $det(A) \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$;

◀ 由上一问即得. ▶

4. 如果实矩阵 $T = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}$ 可逆, 那么 $det(T)^2 \leq \prod_{i=1}^n (t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \cdots + t_{ni}^2)$.

◀ $det(T)^2 = det(TT^T) \leq (TT^T)_{11}(TT^T)_{22}\cdots(TT^T)_{nn} = \prod_{i=1}^n (t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \cdots + t_{ni}^2)$. ▶

提示: 练习 4.2.28 用不同方法证明了相同结论.

练习 6.2.10. 证明 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{i+j} \end{bmatrix}_{n\times n}$ 正定.

◀ 计算所有顺序主子式大于 0. 参见练习 4.2.8.4. ▶

练习 6.2.11. 设 A, B 是实对称矩阵,如果 $A-B$ 正定,则记作 $A \succ B$. 求证:

1. $A \succ B$, $B \succ C$ 可以推出 $A \succ C$.

◀ 这是由于正定矩阵的和正定. ▶

2. $A \succ B$ 和 $B \succ A$ 不可能同时成立.

◀ 这是由于 $A-B$ 和 $B-A$ 不可能同时正定. ▶

3. 对任意实对称矩阵 A, 都存在实数 k_1, k_2 使得 $k_1 I_n \succ A \succ k_2 I_n$.

◀ 将 A 正交相似到单位阵知可取 k_1 大于 A 的最大特征值, k_2 小于 A 的最小特征值. ▶

练习 6.2.12. 举例说明,实对称矩阵 A 的所有顺序主子式都非负,但 A 并不半正定.

◀ $A = diag(0, -1)$. ▶

练习 6.2.13. 证明命题 6.2.4.

命题 6.2.4: 对实对称矩阵 A, 以下叙述等价:

1. A 半正定;
2. A 的特征值都是非负数;
3. 存在矩阵 T, 使得 $A = TT^T$;
4. A 存在 LDL^T 分解, 且 D 的对角元素都是非负数.

◀ 参见命题 6.2.2 的证明. ▶

练习 6.2.14. 证明,实对称矩阵半正定,当且仅当它的所有主子式都非负.

◀ $\Rightarrow$. 否则其有负特征值. (或: 注意正定对称阵的所有主子式非负 (我们可以用置换矩阵将其变成某个顺序主子式). 对于半正定的对称阵 A 以及 $t > 0$, $A + tI$ 正定, 从而其主子式 > 0, 令 $t \to 0$ 知 A 对应位置的主子式 ≥ 0.)

$\Leftarrow$. 归纳. 设命题在阶数为 $n-1$ 时成立. 阶数为 n 时, 若 A 的所有对角元均为 0, 则矩阵为零矩阵 (考虑第 i, j 行和列的主子式 $a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 = -a_{ij}^2 \geq 0$ 知 $a_{ij} = 0$), 从而半正定. 否则我们可以用某个对换矩阵做正交变换将 A 变成 $\begin{bmatrix} a_{11} & x^T \\ x & A_{n-1} \end{bmatrix}$, 其中 $a_{11} > 0$. 再做相合 $\begin{bmatrix} 1 & \\ -a_{11}^{-1}x^T & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & x^T \\ x & A_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}x \\ & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \\ & A_{n-1} - a_{11}^{-1}xx^T \end{bmatrix}$ 消去 x. 记 $A'_{n-1} = A_{n-1} - a_{11}^{-1}xx^T$, 则其任意 k 阶主子式非负, 由其乘 a_{11} 等于 A 对应位置的 $k+1$ 阶主子式. 由归纳假设 A'_{n-1} 半正定. ▶

练习 6.2.15. 设 A 是实对称矩阵, 证明,

1. A 半正定, 当且仅当存在实对称矩阵 B, 使得 $A = B^2$.

◀ $\Leftarrow$. 显然.

$\Rightarrow$. 设 A 有谱分解 $A = Q\Lambda Q^T$, 定义 $\sqrt{\Lambda}$ 为对角元等于 Λ 对应位置元素的算术平方根的对角阵. 取 $B = Q\sqrt{\Lambda}Q^T$. ▶

2. 若 A 半正定, 则存在唯一的半正定实对称矩阵 B, 使得 $A = B^2$.

◀ 存在性由上一问给出. 设存在两种分解 $A = B^2 = B'^2$. 由 B, B' 半正定, 其特征值一一对应于 A 特征值的算术平方根. 设 $B = Q\Lambda Q^T$ 以及 $B' = Q'\Lambda Q'^T$, $\Lambda = diag(\lambda_1 I, \cdots, \lambda_k I)$. $B^2 = B'^2$ 给

出 $Q\Lambda^2Q^T = Q'\Lambda^2Q'^T$ 或等价于 $Q^TQ'\Lambda^2 = \Lambda^2Q^TQ'$. 将 Q^TQ' 分块为 $\left[Q_{ij}\right]_{k\times k}$, 对 $i \neq j$ 我们有 $Q_{ij} = 0$. 从而 Q^TQ' 与 Λ 交换, 即 $B = B'$. ▶

练习 6.2.16. 证明,若实对称矩阵对角占优,且对角元素全为正数,则该矩阵正定.

◀ 其所有顺序主子式大于 0(见练习 4.3.12 的证明), 故正定. ▶

练习 6.2.17. 证明或举出反例:

1. 如果 A, B 对称正定,则 $A+B$ 正定.

◀ 这是由于对任意的 $x \neq 0$ 有 $x^T(A+B)x > 0$. ▶

2. 如果 A, B 对称半正定,则 $A+B$ 半正定.

◀ 这是由于对任意的 x 有 $x^T(A+B)x \geq 0$. ▶

3. 如果 A, B 对称不定,则 $A+B$ 不定.

◀ 错误. 反例: $A = diag(2, -1)$, $B = diag(-1, 2)$. ▶

4. 如果 A 列满秩, B 对称正定,则 A^TBA 正定.

◀ 显然其半正定. 由其满秩知其正定. ▶

5. 如果 $S = A^TA$ 且 A 有 QR 分解 $A = QR$, 则 $S = R^TR$ 是 S 的 Cholesky 分解.

◀ 正确. ▶

6. 如果 A, B 正定,则 AB 的特征值都是正数.

◀ A, B 对称时将 A 相合到 I(注意相合不改变对称阵特征值正负) 即得结论. 否则即使是 A 本身也不必有实特征值. ▶

练习 6.2.18. 考虑实对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$. 证明 S 正定当且仅当 A 及其 Schur 补都正定.

◀ 这无非是以下两个简单事实的推论: 对称阵正定即全部特征值为正, 以及相合不改变对称阵特征值正负. ▶

练习 6.2.19 (非对称矩阵的 Rayleigh 商)**.** 1. 如下对实矩阵的特征值都是实数的证明,哪里有问题?

设 $Ax = \lambda x$, 于是 $x^TAx = \lambda x^Tx$, $\lambda = \frac{x^TAx}{x^Tx}$. 由于分子、分母都是实数,特征值 λ 也是实数.

◀ 这仅在特征向量 x 是实向量时成立. ▶

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 计算 $\max_{x\neq 0} \frac{x^TAx}{x^Tx}$.

◀ 0. ▶

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, 计算 $\max_{x\neq 0} \frac{x^TAx}{x^Tx}$.

◀ $2\sqrt{5}$. ▶

4. 对任意实矩阵 A 与非零实向量 x, 证明 $\frac{x^TAx}{x^Tx} = \frac{x^TA^Tx}{x^Tx} = \frac{x^TBx}{x^Tx}$, 其中 $B = \frac{A+A^T}{2}$ 是对称矩阵.

◀ 这是由于 1 阶矩阵 x^TAx 等于其转置 x^TA^Tx. ▶

6.3. 奇异值分解.

练习 6.3.1. 求下列矩阵的奇异值分解.

(注意矩阵的奇异值不计排列顺序是唯一的,但奇异值分解中选取的正交矩阵不必唯一.)

1. $\begin{bmatrix}3 & 4 & 0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \\ & & 1\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$. ▶

5. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$. ▶

6. $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$. ▶

7. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & -\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{bmatrix}$. ▶

(题外话. 我曾经想把 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ 中的二重根式去掉. 我给出了 $\sqrt{1+\sqrt{2}} = \frac{1+i+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{1+i}}$. 但我很快意识到这并没有解决问题, 因为表达式中的 $i=\sqrt{-1}$. 学习近世代数后, 我终于能够证明这是不可能的.)

8. $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其中 A 有奇异值分解 $A = U\Sigma V^T$.

◀ $\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. ▶

练习 6.3.2. 矩阵 A 的 QR 分解 $A = QR$, 且 R 有奇异值分解 $R = U\Sigma V^T$, 求 A 的奇异值分解.

◀ $A = (QU)\Sigma V^T$. ▶

练习 6.3.3. 设 A 的奇异值分解为 $A = U\Sigma V^T$, 求矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 的谱分解.

◀ $\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V\Sigma U^T \\ U\Sigma V^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & \\ & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \Sigma \\ \Sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & \\ & U^T \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} V & \\ & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \\ & -\Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & \\ & U^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}V & \frac{1}{\sqrt{2}}V \\ \frac{1}{\sqrt{2}}U & -\frac{1}{\sqrt{2}}U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \\ & -\Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}V & \frac{1}{\sqrt{2}}V \\ \frac{1}{\sqrt{2}}U & -\frac{1}{\sqrt{2}}U \end{bmatrix}^T$.

(这里仅考虑了 A 为方阵的情况. 一般情况是类似的.) ▶

练习 6.3.4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 考虑单位圆 $C = \{v \in \mathbb{R}^2 | \|v\| = 1\}$ 及其在 A 对应的线性变换 A 下的像 $AC = \{Av \in \mathbb{R}^2 | \|v\| = 1\}$.

1. 设 $\omega \in A(C)$, 证明 $\omega^T(AA^T)^{-1}\omega = 1$.

◀ 将 $\omega = Av$ 代入即得. ▶

2. 求 A 的奇异值分解 $A = U\Sigma V^T$.

◀ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \end{bmatrix}$. ▶

3. 注意 V, U 为二阶正交矩阵, 对应的线性变换是旋转或反射, 而 Σ 是对角矩阵, 对应伸缩变换. 从几何上看, 曲线 $V^T(C), \Sigma V^T(C), U\Sigma V^T(C)$ 分别是什么形状?

◀ 圆, 椭圆, 关于原点旋转某个角度的椭圆. (注意正交矩阵给出的变换是旋转和反射的复合.) ▶

练习 6.3.5. 设 A 的奇异值分解是 $A = U\Sigma V^T$.

1. 证明 $AA^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T$, $A^TA = V(\Sigma^T\Sigma)V^T$ 分别是这两个对称矩阵的谱分解, 并得到 AA^T 和 A^TA 的非零特征值相同.

◀ 这已经是谱分解的形式了. ▶

2. 对任意 A 的奇异值 $\sigma \neq 0$, 设 v 和 w 分别是 A^TA 和 AA^T 的属于 σ^2 的特征向量, 证明 Av 和 A^Tw 分别是 AA^T 和 A^TA 的属于 σ^2 的特征向量.

◀ 直接验证. ▶

练习 6.3.6. 1. 将 $\frac{3x^2+2xy+3y^2}{x^2+y^2}$ 表示成对称矩阵 S 的 Rayleigh 商,并通过 Rayleigh 商求表达式的最大值和最小值.

◀ $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. $4, 2$. ▶

2. 将 $\frac{(x+4y)^2}{x^2+y^2}$ 表示成矩阵 S 的 Rayleigh 商,并通过 Rayleigh 商求表达式的最大值和最小值.

◀ $S = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$. $17, 0$. ▶

练习 6.3.7. 证明命题 6.3.7.

命题 6.3.7: 矩阵的谱范数满足的性质.

◀ 直接按定义验证. ▶

练习 6.3.8. 证明命题 6.3.13.

命题 6.3.13: 矩阵的 Frobenius 范数满足的性质.

◀ (1), (2) 用定义, (3) 用 Schwarz 不等式, (5) 用迹给出的定义, (4) 对 A 做奇异值分解并应用 (5) 即可看出. ▶

练习 6.3.9. 证明命题 6.3.14.

命题 6.3.14: 对任意矩阵 A,其 Frobenius 范数平方 $\|A\|_F^2$ 等于 A 的所有奇异值的平方和. 因此, $\|A\|_F \geq \|A\|$.

◀ 对 A 做奇异值分解并应用命题 6.3.13.5. ▶

练习 6.3.10 (樊畿迹定理). 对任意 n 阶对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,假设特征值为 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$,对应特征向量为 $u_1, \cdots, u_n$, 则 $\max_{n\times m\, Q:\, Q^TQ=I} trace(Q^TAQ) = \sum_{i=1}^m \lambda_i$, 且 $Q = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{bmatrix}$ 时取得最大值.

◀ 证明类似定理 6.3.11. ▶

练习 6.3.11 (极分解). 对 n 阶方阵 A,存在正交矩阵 Q 和对称半正定矩阵 S,使得 $A = QS$.

◀ 考虑 A 的奇异值分解 $A = U\Sigma V^T = (UV^T)(V\Sigma V^T)$. ▶

分解式 $A = QS$ 称为 A 的极分解. 容易看到, $A = S_1Q_1$, 即方阵分解为对称半正定矩阵和正交矩阵的乘积,也存在.

练习 6.3.12. 证明矩阵的广义逆唯一.

◀ 我们来证明满足 $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $(A^+A)^T = A^+A$, $(AA^+)^T = AA^+$ 的广义逆 A^+ 唯一. 设 A 有广义逆 A_1^+ 和 A_2^+. 我们有 $A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_2^+A)A_1^+ = (A_1^+A)^T(A_2^+A)^TA_1^+ = (A_2^+AA_1^+A)^TA_1^+ = (A_2^+A)^TA_1^+ = A_2^+AA_1^+$ 以及 $A_2^+AA_1^+ = A_2^+(AA_2^+A)A_1^+ = A_2^+(AA_1^+AA_2^+)^T = A_2^+(AA_2^+)^T = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$. 故 $A_1^+ = A_2^+$. ▶

练习 6.3.13. 证明矩阵任意特征值的绝对值不大于其最大的奇异值.

◀ 矩阵特征值的绝对值不大于谱范数. ▶

练习 6.3.14. 证明或者举出反例.

1. n 阶方阵 A 为正交矩阵当且仅当它有 n 个奇异值,值都是 1.

◀ 考虑奇异值分解即得. ▶

2. 如果 n 阶方阵有 n 个奇异值, 则所有奇异值的乘积等于所有特征值的乘积.

◀ 错误. 反例: $\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}$. ▶

3. 假设 n 阶方阵 A 的 SVD 分解为 $A = U\Sigma V^T$, 而 $A + I_n$ 的 SVD 分解为 $A + I_n = U(\Sigma + I_n)V^T$. 证明 A 是对称矩阵.

◀$UV^T = I_n$ 说明 $U = V$. ▶

4. 如果 n 阶方阵 A 的 n 个奇异值就是它的 n 个特征值, 则 A 是对称矩阵.

◀ 设 A 有实 Schur 分解 $A = UTU^T$(见阅读 8.3.1), 其中 U 正交, T 上三角. 由正交相似不改变奇异值与特征值, 我们只需对 T 考虑. T 奇异值的平方和等于 $trace(T^TT)$, 后者等于 T 所有元素的平方和. 这说明 T 是对角阵. ▶

练习 6.3.15 (低秩逼近与数据拟合)**.** 考虑平面上的点 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4\\20\end{bmatrix}$. 现在想找到一条直线, 使得点到直线距离的平方和最小. 令 $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 4\\0 & 8 & 8 & 20\end{bmatrix}$.

1. 找到函数 $f(a,b,c)$, 使得 $f(a,b,c)$ 就是每个点到直线 $ax + by + c = 0$ 的距离的平方和.

◀ 回忆一点 (x_0, y_0) 到直线 $ax + by + c = 0$ 的距离为 $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 设各点坐标为 (x_i, y_i), $f(a,b,c) = \frac{a^2\sum_i x_i^2+2ab\sum_i x_iy_i+b^2\sum_i y_i^2+2ac\sum_i x_i+2bc\sum_i y_i+c^2\sum_i 1}{a^2+b^2}$. ▶

2. 假设 a, b 已知, 用导数证明此时最好的 c 是 $-\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$, 这里 x_0, y_0 代表四个点的 x 坐标平均值和 y 坐标平均值. 提示: 这意味着欲求直线应为 $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c = 0$.

◀ $\frac{\partial f}{\partial c}(a,b,c) = \frac{2a\sum_i x_i+2b\sum_i y_i+2c\sum_i 1}{a^2+b^2} = 0$ 给出 $c = \frac{a\sum_i x_i+b\sum_i y_i}{\sum_i 1}$. ▶

3. 对 A 进行"中心化", 即对每一行所有元素减去该行的平均值, 得到 B. 此时对 B 的列对应的四个点来说, 最佳直线为何应该经过原点? A, B 对应的最佳直线为何一定平行?

◀$c = 0$. 对 A 的操作相当于整体平移了所有点. ▶

4. 计算 B 的最佳秩 1 逼近.

◀ 对 B 进行奇异值分解并取舍弃最大奇异值外的所有奇异值. ▶

5. 计算欲求直线.

◀ 由上一问即得. ▶

6. 思考: 如果考虑的不是平面上的点, 而是 n 维空间中的点, 问题如何处理?

◀ 考虑方程 $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$. ▶

练习 6.3.16. 考虑子空间 M, N, 其对应的正交投影矩阵为 P, Q. 我们想要研究矩阵 $H = P(P+Q)^+Q + Q(P+Q)^+P$.

1. 计算 $(P+Q)(P+Q)^+$ 的列空间和零空间, 该矩阵是否是一个正交投影矩阵?

2. 计算 $(P+Q)^+(P+Q)$ 的列空间和零空间, 该矩阵是否是一个正交投影矩阵? 和前一矩阵有何关联?

3. 证明 $Q(P+Q)^+(P+Q) = Q$, $(P+Q)(P+Q)^+Q = Q$.

4. 证明 $H = 2P(P+Q)^+Q = 2Q(P+Q)^+P$.

5. 假设 T 是 $M\cap N$ 上的正交投影矩阵, 证明 $HP=HQ=HT=H$.

6. 证明 $HT=T$.

注意 $PT=QT=T$, 再利用第 1 条, 可得 $H=HT=T$, 由此即得 $M\cap N$ 的正交投影矩阵的表达式.

7. 线性空间和线性映射

7.1. 线性空间.

练习 7.1.1. 在所有正实数构成的集合 $\mathbb{R}^+$ 上, 定义加法和数乘运算: $a\oplus b := ab$, $k\odot := a^k$, $\forall a,b\in\mathbb{R}^+, k\in\mathbb{R}$. 判断 $\mathbb{R}^+$ 对这两个运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

◀ 是的. 其到 $\mathbb{R}$ 的同构由自然对数 ln 给出. ▶

练习 7.1.2. 令 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\mathbb{Q}[\omega]=\{a+b\omega|a,b\in\mathbb{Q}\}$.

1. 证明 $\mathbb{Q}[\omega]$ 关于数的加法和数乘构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.

◀ 验证其为 $\mathbb{C}$ 的子空间. 我们只需考虑加法和数乘封闭. ▶

2. 证明子集 $\mathbb{Q}$ 和 $M=\{b\omega|b\in\mathbb{Q}\}$ 都是 $\mathbb{Q}[\omega]$ 的子空间. 并求二者的交与和.

◀ 验证两个子集对加法和数乘封闭. 二者之交为零空间, 和为 $\mathbb{Q}[\omega]$. ▶

3. 判断 $\mathbb{Q}[\omega]$ 是否是数域.

◀ 是的. 其对乘法与非零元的取逆封闭. ▶

练习 7.1.3. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间, 子集 $\mathbb{R}$ 是否是子空间?

◀ 是的. 其对加法和 $\mathbb{Q}$ 上的数乘封闭. ▶

练习 7.1.4. 设 $\mathbb{Q}[i]=\{a+bi|a,b\in\mathbb{Q}\}$.

1. 证明 $\mathbb{Q}[i]$ 关于数的加法和数乘构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.

◀ 验证其为 $\mathbb{C}$ 的子空间. 我们只需考虑加法和数乘封闭. ▶

2. 证明 $\mathbb{Q}[i]$ 是数域.

◀ 其对乘法与非零元的取逆封闭. ▶

3. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作有理数域 $\mathbb{Q}[i]$ 上的线性空间, 子集 $\mathbb{R}$ 是否是子空间?

◀ 不是, 对 i 的数乘不封闭. ▶

练习 7.1.5. 设 V 是以 0 为极限的实数序列全体: $V=\{\{a_n\}|\lim_{n\to\infty}a_n=0\}$. 定义加法和数乘分别为: $(a_n)+b_n=a_n+b_n$; $k(a_n)=ka_n$, $k\in\mathbb{R}$. 证明 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

◀ 加法和数乘的运算律由 $\mathbb{R}$ 上加法和数乘的运算律给出. ▶

练习 7.1.6. 设 $M_1 = span(a_1, a_2)$, $M_2 = span(b_1, b_2)$, 其中 $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. 分别求 $M_1 + M_2$, $M_1 \cap M_2$ 的一组基和维数.

◀ $\{a_1, a_2, b_1\}, 3$; $\{2a_1 + a_2\}, 1$. ▶

练习 7.1.7. 设 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 是矩阵空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中所有迹为零的矩阵构成的子集.

1. 证明 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

◀ 其为线性函数 $trace : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ 的核. ▶

2. 求子空间 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 和 $span(I_n)$ 的交与和.

◀ 交为零空间. 和为 $\mathbb{F}^{n\times n}$. ▶

练习 7.1.8. 对 n 阶方阵 A, 令 $P(A) = \{f(A)|f(x) \in \mathbb{F}[x]\}$. 证明 $P(A)$ 关于矩阵的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间.

◀ 我们需要验证加法和数乘的封闭性. 这由多项式加法和数乘的封闭性直接得到. ▶

练习 7.1.9. 对 n 阶方阵 A, 令 $Com(A) = \{n\text{阶方阵}B|AB = BA\}$.

1. 证明, $Com(A)$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

◀ 验证加法和数乘的封闭性. ▶

2. 证明, 对任意 $B, C \in Com(A)$, 都有 $BC \in Com(A)$; 由此证明对任意多项式 $f(x)$, 都有 $f(A) \in Com(A)$.

◀ 按定义验证. ▶

练习 7.1.10. 1. 可逆矩阵的全体不是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

◀ 其不包含零矩阵. ▶

2. 奇异矩阵的全体不是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

◀ 奇异矩阵的和 $diag(0, 1, 1, \cdots, 1) + diag(1, 0, 1, \cdots, 1)$ 不是奇异的. ▶

7.2. 基和维数.

练习 7.2.1. 把数域 $\mathbb{F}$ 看作自身上的线性空间, 求它的一组基和维数.

◀ $\{1\}$, 1. ▶

练习 7.2.2. 求练习 7.1.1 中线性空间 $\mathbb{R}$ 的一组基和维数.

◀ $\{e\}$, 1. ▶

练习 7.2.3. 在练习 7.1.2 中的线性空间 $\mathbb{Q}[\omega] = \{a + b\omega|a, b \in \mathbb{Q}\}$ 内,

1. 求下列向量组的秩: $S_1 : \frac{1}{2}, 3, -7$, $S_2 : 1, \omega, \omega^2, \omega^3$, $S_3 : \omega, \overline{\omega}, \sqrt{3}i$.

◀ $1, 2, 2.$ ▶

2. 求 $\mathbb{Q}[\omega]$ 的一组基和维数.

◀ $\{1, \omega\}$, 2. ▶

练习 7.2.4. 判断练习 7.1.5 中线性空间的维数是否有限.

◀ 无限. ▶

练习 7.2.5. 判断 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $C[-\pi, \pi]$ 内的下列向量组是否线性相关, 并求其秩.

1. cos^2x, sin^2x.

◀ 否. 2. ▶

2. $cos^2x, sin^2x, 1$.

◀ 是. 2. ▶

3. $cos2x, sin2x$.

◀ 否. 2. ▶

4. $1, sinx, sin2x, \cdots, sinnx$.

◀ 否. $n+1$. ▶

5. $1, sinx, sin^2x, \cdots, sin^nx$.

◀ 否. $n+1$. ▶

练习 7.2.6. 考虑练习 7.1.9 中的线性空间 $Com(A)$, 对下列 A 求 $Com(A)$ 的一组基.

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ I, A, A^2. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ I, A, A^2. ▶

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$.

◀ $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$. ▶

4. $diag(a_i)$, 其中 a_i 各不相同.

◀ $e_1e_1^T, \cdots, e_ne_n^T$. (或 $I, A, \cdots, A^{n-1}$.) ▶

5. $diag(a_i)$.

◀ 用置换矩阵进行相似, 不妨设 A 相似到 $B = diag(b_1I, \cdots, b_kI)$. 与 B 交换的矩阵形如 $diag(B_1, \cdots, B_k)$, 容易给出一组基. ▶

练习 7.2.7. 给定 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数 $a_1, \cdots, a_n$.

1. 在线性空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 中, 令 $f_i(x) = (x-a_1)\cdots\widehat{(x-a_i)}\cdots(x-a_n)$, $i = 1,\cdots,n$, 其中 $\widehat{(x-a_i)}$ 表示不含该项. 证明, $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 的一组基.

◀ 在 a_i 处赋值知 $f_i(x)$ 不能被其他 $n-1$ 个元素线性表示. ▶

2. 设 $b_1,\cdots,b_n$ 是 $\mathbb{F}$ 中任意 n 个数, 找出 $f(x) \in \mathbb{F}[x]_n$, 使得 $f(a_i) = b_i$.

◀ $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{f_i(a_i)} f_i(x)$. ▶

练习 7.2.8. 证明, n 维线性空间中任意多于 n 个的向量都线性相关.

◀ 这是由于其极大线性无关组中向量的个数不大于 n. ▶

练习 7.2.9. 考虑练习 7.1.8 中的线性空间 $P(A)$.

1. 判断其维数是否有限.

◀ 有限. 由其是有限维线性空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间, 故其维数不大于 n^2. ▶

2. 证明存在次数不大于 n^2 的多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得 $f(A) = 0$.

◀ 这是由于 $1, A, A^2, \cdots, A^{n^2}$ 线性相关. ▶

3. 令 $A = diag(1,\omega,\omega^2)$, 其中 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 求 $P(A)$ 的维数和一组基.

◀ 3, $\{I, A, A^2\}$. ▶

练习 7.2.10. 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $M^\perp$ 是其正交补空间, 证明, $\mathbb{R}^n = M \oplus M^\perp$.

◀ 由维数关系, 只需验证两个子空间的交为 0. ▶

练习 7.2.11. 证明, 练习 7.1.7 中的 $\mathbb{F}^{n\times n} = \mathbb{F}_0^{n\times n} \oplus span(I_n)$.

◀ 由维数关系, 只需验证两个子空间的交为 0. ▶

练习 7.2.12. 证明连续函数空间的子集 $span(f(x) = k_0 + k_1 cosx + k_2 cos2x | f(0) = 0)$ 是一个子空间, 并求一组基.

◀ 验证加法和数乘封闭. 一组基为 $\{cosx - 1, cos2x - 1\}$. ▶

练习 7.2.13. 给定 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 上的线性变换 $f : X \to AX$. 分别求 $N(f)$ 和 $R(f)$ 的维数和一组基.

◀ 维数分别是 $3, 6$. 易给出二者的基. ▶

练习 7.2.14. 设 M_1, M_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间, 且 $M_1 \subseteq M_2$. 证明, 如果 $dim\, M_1 = dim\, M_2$, 则 $M_1 = M_2$.

◀ 取 M_1 的一组基. 由维数相同知其也生成了 M_2. ▶

7.3. **线性映射.**

练习 7.3.1. 证明命题 7.3.4.

命题 7.3.4: 集合 $Hom(U,V)$ 关于加法和数乘两种运算构成线性空间.

◀ 验证线性空间的定义. ▶

练习 7.3.2. 证明命题 7.3.7.

◀ 直接验证. ▶

练习 7.3.3. 证明命题 7.3.10.

命题 7.3.10: 对 U 上的线性变换 f,属于不同特征值的特征向量线性无关.

◀ 可以用线性变换的语言重写一遍命题 5.3.3 (方阵的属于不同特征值的特征向量线性无关) 的证明. 更方便的做法是取一组基并将线性变换等同于线性变换在这组基下的矩阵,此时欲证的命题变成方阵的属于不同特征值的特征向量线性无关. ▶

练习 7.3.4. 给定 $a \in \mathbb{F}$,判断下面定义的 $\mathbb{F}[x]$ 上的变换 T_a 是否是线性变换:$T_a(f(x)) = f(x+a), \forall f(x) \in \mathbb{F}[x]$.

◀ 是的. ▶

练习 7.3.5. 在光滑函数空间 $C^{\infty}(\mathbb{R})$ 上定义变换: $A(f(x)) = (f'(x))^2$. 判断 A 是否是线性变换.

◀ 不是. ▶

练习 7.3.6. 考虑练习 7.1.1 中的实线性空间 $\mathbb{R}^+$,给定 $a > 0$,判断映射 $log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto log_a x$ 是否是线性映射. 如果是,进一步分析当 a 取何值时,该映射是同构.

◀ $a = 1$ 时对数无意义. 其他情况下均为线性同构. ▶

练习 7.3.7. 计算例 7.3.2 中线性映射的核与像集,并求二者的维数.

◀ 1. 以矩阵 A 左乘或右乘给出的线性映射 L_A 和 R_A. 容易直接描述核与像,如 $Ker(L_A) = \{X \in \mathbb{F}^{m\times n} | AX = 0\}$. 利用相抵标准形可以求出核与像的维数. 设 $rank(A) = r$, 则 $dimKer(L_A) = (m-r)p$, $dimIm(L_A) = rp$, $dimKer(R_A) = (n-r)l$, $dimIm(R_A) = rl$.

2. 转置. 核为 0, 像为全空间.

3. 迹. 容易直接描述. 核的维数是 $n^2 - 1$, 像的维数是 1.

4. 函数在某些点处的赋值. 容易直接描述. ▶

练习 7.3.8. 定义 $\mathbb{F}[x]$ 上的变换: $A(f(x)) = xf(x), \forall f(x) \in \mathbb{F}[x]$.

1. 证明 A 是 $\mathbb{F}[x]$ 上的线性变换.

◀ 直接验证定义. ▶

2. 设 D 是求导算子, 证明 $DA - AD = I$.

◀ $(DA - AD)f = DAf - ADf = D(xf) - Af' = xf' + f - xf' = f$. ▶

练习 7.3.9. 设 f 是线性空间 V 上的线性变换,$a \in V$. 证明,如果存在正整数 m,使得 $f^{m-1}(a) \neq 0$, $f^m(a) = 0$,则 $a, f(a), \cdots, f^{m-1}(a)$ 线性无关. 由此推出 $dim(V) \geq m$.

◀ 否则, 设 $k_0 a + k_1 f(a) + \cdots + k_{m-1} f^{m-1}(a) = 0$. 用 f 作用 $m-1$ 次知 $k_0 = 0$, 再用 f 作用 $m-2$ 次知 $k_1 = 0$, 以此类推知全部系数为 0. ▶

练习 7.3.10. 设线性空间 V 有直和分解: $V = M_1 \oplus M_2$. 任取 $a \in V$, 都有唯一的分解式:$a = a_1 + a_2$, 其中 $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$. 定义 V 上的变换: $P_{M_1}(a) = a_1$, $P_{M_2}(a) = a_2$.

1. 证明,P_{M_1}, P_{M_2} 都是 V 上的线性变换. 称 P_{M_1} 为平行于 P_{M_1} 在 P_{M_2} 上的投影变换.

2. 证明,$N(P_{M_1}) = M_2$, $R(P_{M_1}) = M_1$.

3. 证明,$P_{M_1}^2 = P_{M_1}$, $P_{M_1} + P_{M_2} = I$, $P_{M_1} P_{M_2} = 0$.

4. 分别求 P_{M_1}, P_{M_2} 的特征值和特征子空间.

练习 7.3.11. 考虑例 7.3.11 中的线性变换 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换 S, 试问它是否是投影变换.

◀ 是的. ▶

练习 7.3.12. 证明矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 与 $\mathbb{F}^{mn}$ 同构.

◀ 二者均为 $\mathbb{F}$ 上的 mn 维线性空间. ▶

练习 7.3.13. 证明多项式空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 与 $\mathbb{F}^n$ 同构.

◀ 二者均为 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间. ▶

练习 7.3.14. 证明练习 7.1.2 中的线性空间 $\mathbb{Q}[\omega]$ 与练习 7.1.4 中的线性空间 $\mathbb{Q}[i]$ 同构.

◀ 二者均为 $\mathbb{Q}$ 上的 2 维线性空间. ▶

7.4. **向量的坐标表示.**

练习 7.4.1. 证明命题 7.4.1.

命题 7.4.1: 设向量组 $a_1,\cdots,a_s$ 线性无关, 如果 b 可以被其线性表示, 则表示法唯一.

◀ 唯一性由 $a_1,\cdots,a_s$ 线性无关得到. ▶

练习 7.4.2. 求 $\mathbb{F}^4$ 中由基 e_1,e_2,e_3,e_4 到基 t_1,t_2,t_3,t_4 的过渡矩阵, 并分别求向量 a 在两组基下的坐标.

1. $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, e_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}; t_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, t_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\0\end{bmatrix}, t_3=\begin{bmatrix}5\\3\\2\\1\end{bmatrix}, t_4=\begin{bmatrix}6\\6\\1\\3\end{bmatrix}; a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$.

◀ 我们欲求的过渡矩阵 (记为 A) 满足 $(t_1,t_2,t_3,t_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)A$. 在 e_1,e_2,e_3,e_4, t_1,t_2,t_3,t_4 均为列向量时, 我们有 $\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{bmatrix}A$. 故这里过渡矩阵

$$A=\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}.$$

向量 $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$ 在 e_1,e_2,e_3,e_4 下的坐标就是 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$. 由 $a=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4\end{bmatrix}A^{-1}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$, a 在基 t_1,t_2,t_3,t_4 下的坐标为 $A^{-1}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$. ▶

2. $e_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\\1\end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}; t_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}, t_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\\2\end{bmatrix}, t_3 = \begin{bmatrix}-2\\1\\1\\2\end{bmatrix}, t_4 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\\2\end{bmatrix}; a = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$.

◀ 同上, $A = \begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$.

设 a 在基 e_1, e_2, e_3, e_4 下的坐标为 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$, 即 $a = (e_1, e_2, e_3, e_4)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$. 由于 e_1, e_2, e_3, e_4 是列向量, 我们有 $a = \begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$. a 在基 e_1, e_2, e_3, e_4 下的坐标 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{bmatrix}^{-1} a = \begin{bmatrix}\frac{3}{13}\\\frac{5}{13}\\-\frac{2}{13}\\-\frac{3}{13}\end{bmatrix}$. a 在基 t_1, t_2, t_3, t_4 下的坐标为 $\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4\end{bmatrix}^{-1} a = \begin{bmatrix}\frac{4}{13}\\\frac{2}{13}\\-\frac{3}{13}\\-\frac{1}{13}\end{bmatrix}$.▶

练习 7.4.3. 考虑函数空间的子空间 $span(sin^2x, cos^2x)$.

1. 证明 sin^2x, cos^2x 和 $1, cos2x$ 分别是子空间的一组基.

◀ 只需检验其线性无关. 对函数在某些点处赋值即得.▶

2. 分别求从 sin^2x, cos^2x 到 $1, cos2x$, 和从 $1, cos2x$ 到 sin^2x, cos^2x 的过渡矩阵.

◀ $(1, cos2x) = (sin^2x, cos^2x)\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$. $(sin^2x, cos^2x) = (1, cos2x)\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}^{-1} = (1, cos2x)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.▶

3. 分别求 1 和 sin^2x 在两组基下的坐标.

◀ $(1) = (1, cos2x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = (sin^2x, cos^2x)\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

$(sin^2x) = (sin^2x, cos^2x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = (1, cos2x)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = (1, cos2x)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ▶

练习 7.4.4. 考虑练习 7.2.7 中的线性空间 $\mathbb{F}[x]_n$, 考虑 $n = 3$ 的情形.

1. 给定 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数 a_1, a_2, a_3, 求由基 $1, x, x^2$ 到基 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 的过渡矩阵.

$$\blacktriangleleft (f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)) = (a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix} a_2a_3 & a_1a_3 & a_1a_2 \\ -a_2+a_3 & -a_1+a_3 & -a_1+a_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

2. 考虑练习 7.2.7 中的 $f(x)$, 给定 $\mathbb{F}$ 中任意三个数 b_1,b_2,b_3, 求 $f(x)$ 在两组基下的坐标.

$$\blacktriangleleft (f(x)) = (f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x))\begin{bmatrix} \frac{b_1}{f_1(a_1)} \\ \frac{b_2}{f_2(a_2)} \\ \frac{b_3}{f_3(a_3)} \end{bmatrix} = (a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix} a_2a_3 & a_1a_3 & a_1a_2 \\ -a_2+a_3 & -a_1+a_3 & -a_1+a_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{b_1}{f_1(a_1)} \\ \frac{b_2}{f_2(a_2)} \\ \frac{b_3}{f_3(a_3)} \end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

练习 7.4.5. 矩阵空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 有两组基 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 和 $t_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $t_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $t_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $t_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 求从基 e_1,e_2,e_3,e_4 到基 t_1,t_2,t_3,t_4 的过渡矩阵.

$$\blacktriangleleft (t_1,t_2,t_3,t_4) = (e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

练习 7.4.6. 设 e_1,e_2,e_3,e_4 是线性空间 V 的一组基, 求下列向量组的一个极大线性无关部分组: $t_1 = e_1+e_2+e_3+e_4$, $t_2 = -e_1-3e_2+5e_3+e_4$, $t_3 = 3e_1+2e_2-e_3+4e_4$, $t_4 = -2e_1-6e_2+10e_3+2e_4$.

$\blacktriangleleft t_1,t_2,t_3. \blacktriangleright$

练习 7.4.7. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是线性空间 V 的一组基.

1. 判断 $t_1 = e+1, t_2 = e_1+e_2, \cdots, t_n = e_1+e_2+\cdots+e_n$ 是否也是 V 的一组基.

$\blacktriangleleft (t_1,t_2,\cdots,t_n) = (e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. 过渡矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ 可逆, 故 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 V 的一组基. $\blacktriangleright$

2. 判断 $t_1 = e+1+e_2, t_2 = e_2+e_3, \cdots, t_n = e_n+e_1$ 是否也是 V 的一组基.

$\blacktriangleleft (t_1,t_2,\cdots,t_n) = (e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 过渡矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆当且仅当 n 是奇数, 故 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 V 的一组基当且仅当 n 是奇数. $\blacktriangleright$

练习 7.4.8. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数, $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是线性空间 V 的一组基, 令 $t_i = a_1 + a_ie_2+\cdots+a_i^{n-1}e_n$, $i = i,\cdots,n$. 证明 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 也是 V 的一组基.

$\blacktriangleleft$ 过渡矩阵的行列式为 $a_1,\cdots,a_n$ 的 Vandermonde 行列式, 故不为 0. $\blacktriangleright$

练习 7.4.9. 设 $(I): e_1,\cdots,e_n$, $(II): t_1,\cdots,t_n$, $(III): s_1,\cdots,s_n$ 是线性空间 V 的三组基,如果从 (I) 到 (II) 的过渡矩阵是 P, 从 (II) 到 (III) 的过渡矩阵是 Q, 证明,

1. 从 (II) 到 (I) 的过渡矩阵是 P^{-1}.
2. 从 (I) 到 (III) 的过渡矩阵是 PQ.

◀ 直接按定义验证. (注意过渡矩阵直到现在还是形式的记法,所以你需要验证后才能使用这些性质. 这和建立矩阵乘法的过程是类似的.) ▶

7.5. **线性映射的矩阵表示.**

练习 7.5.1. 证明命题 7.5.5.

◀ 直接验证. ▶

练习 7.5.2. 证明命题 7.5.12.

◀ $\Rightarrow$: F 的 n 个线性无关的特征向量给出了 f 的 n 个线性无关的特征向量.

$\Leftarrow$: f 在这些特征向量组成的基下的矩阵是对角阵. ▶

练习 7.5.3. 证明命题 7.5.13.

◀ 直接验证. ▶

练习 7.5.4. 设 A 是 $\mathbb{F}^3$ 上的一个线性变换: $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+2x_2\\x_3-x_2\\x_2-x_3\end{bmatrix}$. 求 A 在标准基下的矩阵,并分别求 $N(A)$ 和 $R(A)$ 的一组基和维数.

$$◀ A(e_1,e_2,e_3)=(Ae_1,Ae_2,Ae_3)=(e_1,2e_1-e_2+e_3,e_2-e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}.$$

$N(A)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$, 维数为 1. $R(A)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, 维数为 2. ▶

练习 7.5.5. 设 $V=span(f_1,f_2)$ 是函数空间的子空间,其中 $f_1=e^{ax}cosbx, f_2=e^{ax}sinbx$. 证明求导算子 D 是 V 上的线性变换,并求其在基 f_1,f_2 下的矩阵.

◀ 之前已证明过 D 是函数空间上的线性变换,只需说明 $DV\subset V$. $D(f_1,f_2)=(Df_1,Df_2)=(ae^{ax}cosbx-be^{ax}sinbx, ae^{ax}sinbx+be^{ax}cosbx)=(f_1,f_2)\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}$. ▶

练习 7.5.6. 设 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 上的线性变换 $L_A: X\mapsto AX$, 其中 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. 求 L_A 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

$$◀ L_A(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix}a&&b&\\&a&&b\\c&&d&\\&c&&d\end{bmatrix}. ▶$$

练习 7.5.7. 设 V 是所有 2 阶对称矩阵构成的线性空间, f 是其上的线性变换: $f(X)=A^TXA$, 其中 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 求 f 在基 $E_{11}, E_{22}, E_{12}+E_{21}$ 下的矩阵.

◀ $f(E_{11}, E_{22}, E_{12}+E_{21}) = (E_{11}, E_{22}, E_{12}+E_{21})\begin{bmatrix} a^2 & c^2 & 2ac \\ b^2 & d^2 & 2bd \\ ab & cd & ad+bc \end{bmatrix}$. ▶

练习 7.5.8. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 证明, 存在 $\mathbb{F}[x]$ 中一个次数不超过 n^2 的多项式 $f(x)$, 使得 $f(A)=0$.

◀ 这是由于 $I, A, \cdots, A^{n^2}$ 是维数为 n^2 的线性空间 $End(V)$ 中的 n^2+1 个向量, 从而线性相关. ▶

练习 7.5.9. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $\mathbb{F}$ 可以看作自身上的线性空间, 而 V 到 $\mathbb{F}$ 的线性映射称为 V 上的线性函数. 令 $V^*=Hom(V,\mathbb{F})$, 称为 V 的对偶空间. 证明, V^* 和 V 同构.

◀ 这是由于二者维数相同. (但这个同构不是典范的.) ▶

练习 7.5.10. 求导算子 D 定义了多项式空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的线性变换, 给定 $\mathbb{F}[x]_n$ 的两组基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 和 $1, x, \cdots, \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$.

1. 求两组基之间的过渡矩阵.

◀ $(1, x, \cdots, \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}) = (1, x, \cdots, x^{n-1})\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(n-1)!} \end{bmatrix}$. ▶

2. 求 D 在两组基下的矩阵.

◀ $D(1, x, \cdots, \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}) = (0, 1, x, \cdots, \frac{1}{(n-2)!}x^{n-2}) = (1, x, \cdots, \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1})\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

$D(1, x, \cdots, x^{n-1}) = (0, 1, x, \cdots, (n-1)x^{n-2}) = (1, x, \cdots, x^{n-1})\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & n-1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$. ▶

3. 通过过渡矩阵验证两个表示矩阵是相似的.

◀ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & n-1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(n-1)!} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(n-1)!} \end{bmatrix}^{-1}$. ▶

4. 是否存在一组基, 使得 D 在该组基下的矩阵是对角矩阵?

◀ 否. ▶

练习 7.5.11. 设 V 是 n 维线性空间,f 是其上的线性变换,又设存在向量 $a\in V$,使得 $f^{n-1}(a)\neq 0$, 且 $f^n(a)=0$. 证明,V 存在一组基,使得 f 在该组基下的矩阵是 $J_n=\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&0&1\\&&&0\end{bmatrix}$.

◀ 由练习 7.3.9 知 $a,f(a),\cdots,f^{n-1}(a)$ 线性无关, 故构成 V 的一组基. 我们有 $f(a,f(a),\cdots,f^{n-1}(a))=(a,f(a),\cdots,f^{n-1}(a))\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&0&1\\&&&0\end{bmatrix}$. ▶

练习 7.5.12. 考虑练习 7.5.11 中的方阵 J_n,判断 J_n 与 J_n^T 是否相似.

◀ 是的. 由于 J_n^T 的全部特征值为 0 且秩为 $n-1$,其相似于特征值 0 的 n 阶 Jordan 块 J_n. ▶

练习 7.5.13. 已知 $\mathbb{F}^3$ 上的线性变换 f 在标准基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵是 $A=\begin{bmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{bmatrix}$. 设 $t_1=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$, $t_2=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}$, $t_3=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{F}^3$ 的另一组基,求 f 在这组基下的矩阵.

◀ $(t_1,t_2,t_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$. ▶

练习 7.5.14. 设 3 维线性空间 V 有一组基 e_1,e_2,e_3,其上的线性变换 f 在该组基下的矩阵是 $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&8&2\\-2&-14&-3\end{bmatrix}$.

1. 求 f 的全部特征值和特征向量.

◀ f 的 (即 A 的) 特征多项式为 $det(\lambda I-A)=(\lambda-3)^2(\lambda-1)$, 故 f 的 (即 A 的) 特征值为 $3,3,1$. 解得 A 的特征值 3 的一组线性无关的特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$, 特征值 1 的一组线性无关的特征向量为 $\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$. 故得 f 的特征对 $(3,e_1-e_2+2e_3)$, $(1,2e_1-e_3)$. ▶

2. 判断是否存在一组基, 使得 f 在该组基下的表示矩阵是对角矩阵. 如果存在, 写出这组基及对应的对角矩阵.

◀ 否. 特征值 3 的几何重数小于代数重数. ▶

练习 7.5.15. 设 4 维线性空间 V 有一组基 e_1, e_2, e_3, e_4,其上的线性变换 f 在该组基下的矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. 求 f 的全部特征值和特征向量.

◀ 计算得 A 的特征值为 $0, 0, 1, 1$, 以及特征值 0 的特征向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和特征值 1 的特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. 故 f 有特征对 $(0, e_2), (0, e_3), (1, e_1 + e_3), (1, e_4)$. ▶

2. 判断是否存在一组基,使得 f 在该组基下的表示矩阵是对角矩阵. 如果存在,写出这组基及对应的对角矩阵.

◀ 是的. 取基为 $(e_2, e_3, e_1 + e_3, e_4)$, 则 $f(e_2, e_3, e_1 + e_3, e_4) = (e_2, e_3, e_1 + e_3, e_4)\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

练习 7.5.16. 设 $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 在 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 中定义如下变换: $f(X) = B^{-1}XB, \forall X \in \mathbb{F}^{2\times 2}$.

1. 证明 f 是线性变换.

◀ 这是由于左乘和右乘某个给定矩阵都是线性的. ▶

2. 求 f 的全部特征值和特征向量.

◀ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. 在 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的基 $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ 下 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

解得 A 的特征值为 $1, 1, -1, -1$ 以及特征值 1 的特征向量 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和特征值 -1 的特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. 故 f 有特征对 $(1, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}), (1, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}), (-1, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}), (-1, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix})$. ▶

练习 7.5.17 (矩阵函数)**.** 利用收敛幂级数,我们定义了矩阵函数.

注记. 7.1 节定义了子空间的直和. 下面定义线性映射的直和,这在矩阵层面的对应是准对角阵. 设有线性空间 $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 和线性映射 $f_i : U_i \to V_i$, $i = 1, \cdots, n$. U 中的元素可以记为 $u = (u_1, \cdots, u_n)$, $u_i \in U_i$. 称 $f : U \to V$ 为 $f_1, \cdots, f_n$ 的直和,记作 $f = f_1 \oplus \cdots \oplus f_n$, 若 $f(u_1, \cdots, u_n) = f_1(u_1) + \cdots + f_n(u_n)$. 若 f_i 在 U_i, V_i 的某组基下的矩阵为 A_i, 则 f 在将 U_i, V_i 的基按顺序排列得到的 U, V 的基下的矩阵为 $diag(A_1, \cdots, A_n)$. 矩阵的相抵标准形给出了线性映射的直和分解.

对于 $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, $f_i : U_i \to U_i$, 称线性变换 $f : U \to U$ 为 $f_1, \cdots, f_n$ 的直和,若 $f(u_1, \cdots, u_n) = f_1(u_1) + \cdots + f_n(u_n)$. 若 f_i 在 U_i 的某组基下的方阵为 A_i, 则 f 在将 U_i 的基按顺序排列得到的 U 的基下的方阵为 $diag(A_1, \cdots, A_n)$. 矩阵的相似标准形说明线性映射可以分解为 Jordan 块给出的线性变换的直和.

8. 内积空间

8.1. 欧氏空间.

练习 8.1.1. 证明正交向量组线性无关.

◀ 设正交向量组 $u_1, \cdots, u_n$ 满足线性方程 $k_1u_1, \cdots, k_nu_n = 0$. 两边与 u_i 做内积得 $k_i = 0$.▶

练习 8.1.2. 证明命题 8.1.15.

命题 8.1.15: 给定欧氏空间 V,设 M 是线性空间 V 的子空间,则 M 关于 V 上的内积也构成欧氏空间.

◀V 上的内积限制在 M 上仍然对称,双线性且正定, 故其给出了 M 上的内积. ▶

练习 8.1.3. 证明命题 8.1.17 第 2-3 条.

命题 8.1.17: 给定欧氏空间 V 的有限子空间 M,则

1. $M \oplus M^\perp = V$;

2. $dimM^\perp = n - dimM$;

◀ 由第 1 条, 我们有 $dimV = dimM + dimM^\perp$.▶

3. $(M^\perp)^\perp = M$.

◀ 考虑 $a \in M$. 对任意的 $b \in M^\perp$, 我们有 $a \perp b$, 故 $a \in (M^\perp)^\perp$, 从而有 $M \subseteq (M^\perp)^\perp$. 由第 2 条, 我们有 $dim(M^\perp)^\perp = n - dimM^\perp = n - (n - dimM) = dimM$, 故 $(M^\perp)^\perp = M$.▶

练习 8.1.4 (无限维欧氏空间中的正交投影)**.** 对欧氏空间 V 的有限维子空间 M,命题 8.1.17 第 1 条也成立: $M \oplus M^\perp = V$.

事实上,对任意 $a \in M \cap M^\perp$, $\langle a, a\rangle = 0$,于是 $a = 0$,这就说明 $M \cap M^\perp = 0$,即 $M + M^\perp$ 是直和.根据定理 8.1.10 ,M 存在一组标准正交基,记为 $q_1, \cdots, q_r$.对任意 $b \in V$,定义向量 $b_1 := \langle b, q_1\rangle q_1 - \cdots - \langle b, q_r\rangle q_r \in M$, $b_2 := b - b - b_1$. 易见 $\langle q_i, b_2\rangle = 0$,于是 $b_2 \perp M$,即得 $b_2 \in M \perp$.因此 $b = b_1 + b_2 \in M \oplus M^\perp$.这就说明 $M \oplus M^\perp = V$.

定义 8.1.19 显然可以推广成无限维欧氏空间到其有限维子空间上的正交投影.

练习 8.1.5. 计算例 8.1.11 中 Lengendre 多项式作为多项式空间中向量的范数,并说明该向量组不是正交单位向量组.

练习 8.1.6. 在 $\mathbb{R}^2$ 中,对任意 $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$, 定义二元函数 $f(a,b)=a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1+2a_2b_2$. 判断 $f(a,b)$ 是否是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个内积.

◀ $f(a,b)$ 的 Gram 方阵 $\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$ 对称正定, 故 $f(a,b)$ 给出了 $\mathbb{R}^2$ 上的一个内积.▶

练习 8.1.7. 证明,$\mathbb{R}^n$ 上的二元函数 b^TAa 定义了一个内积,当且仅当 A 是对称正定矩阵.

◀ 形如 b^TAa 的二元函数是双线性的. A 对称等价于二元函数 b^TAa 对称, A 正定等价于二元函数 b^TAa 正定.▶

练习 8.1.8. 证明,矩阵空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 关于如下二元函数构成欧氏空间: $\langle A,B\rangle = trace(B^TA)$.

◀ 验证 $\langle A,B\rangle = trace(B^TA)$ 给出了 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的一个内积. .▶

练习 8.1.9. 设 3 维欧氏空间 V 的一组基是 a_1,a_2,a_3,它的度量矩阵是 $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&10&-2\\1&-2&2\end{bmatrix}$. 求 V 的一组标准正交基.

◀ 我们有 $\langle a_1,a_1\rangle=1$, $\langle a_1,a_2\rangle=0$, $\langle a_1,a_3\rangle=1$. 取 $a_3'=-a_1+a_3$, 则 $\langle a_1,a_3'\rangle=0$. 取 $a_2'=a_2+2a_3'=-2a_1+a_2+2a_3$, 则 $\langle a_2',a_3'\rangle=0$. 又 $\langle a_2',a_2'\rangle=6$, 取 $a_2''=\frac{1}{\sqrt6}a_2'$, 则 $\langle a_2'',a_2''\rangle=1$. 故 a_1,a_2'',a_3' 给出了 V 的一组标准正交基. (注意命题 8.1.13. 这里的操作实际上是找到 T, 使得 $T^TGT=I$. 以 T 作为过渡矩阵,内积在新的一组基下的度量矩阵为 I, 从而这组基是标准正交基.)▶

练习 8.1.10. 设 q_1,q_2,q_3 是 3 维欧氏空间 V 的一组标准正交基,令 $b_1=\frac{1}{3}(2q_1-q_2+2q_3)$, $b_2=\frac{1}{3}(2q_1+2q_2-q_3)$, $b_3=\frac{1}{3}(q_1-2q_2-2q_3)$. 证明, b_1,b_2,b_3 也是 V 的一组标准正交基.

◀ 由于 q_1,q_2,q_3 到 b_1,b_2,b_3 到过渡矩阵 T 是正交阵, 内积在 b_1,b_2,b_3 下的度量矩阵为 $T^TGT=I$(命题 8.1.13), 故 b_1,b_2,b_3 是 V 的一组标准正交基.▶

练习 8.1.11. 设 q_1,q_2,q_3,q_4,q_5 是 5 维欧氏空间 V 的一组标准正交基,令 $a_1=q_1+q_5$, $a_2=q_1-q_2+q_4$, $a_3=2q_1+q_2+q_3$. 求 $span(a_1,a_2,a_3)$ 的一组标准正交基.

◀ 在 $span(a_1,a_2,a_3)$ 继承的标准内积下 a_1,a_2,a_3 的度量矩阵为 $G=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&3&1\\2&1&4\end{bmatrix}$. 计算得对 $T=\begin{bmatrix}\sqrt2&-\frac{1}{\sqrt{10}}&-\frac{1}{\sqrt2}\\&\frac{\sqrt2}{\sqrt5}&\\&&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$, 有 $T^TGT=I$, 故 $(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)T$ 给出了一组标准正交基.▶

练习 8.1.12. 设 M 是 n 维欧氏空间 V 的子空间,在 M 中取一组标准正交基 $q_1,\cdots,q_r$.证明,V 中任意向量 a 在 M 上的正交投影 $a_1=\sum_{i=1}^r\langle a,q_i\rangle q_i$.

◀ 注意 a 在 M 上的正交投影 a_1 由以下性质唯一刻画: $a_1\in M$; $\langle a,q_i\rangle=\langle a_1,q_i\rangle$.▶

练习 8.1.13. 设 M 是欧氏空间 V 的子空间, P_M 是 V 到 M 上的正交投影. 证明, $\langle P_M(a), b\rangle = \langle a, P_M(b)\rangle$, $\forall a, b \in V$.

◀ 取 M 的一组标准正交基 $q_1, \cdots, q_r$, 则有 $P_M(a) = \sum_{i=1}^r \langle a, q_i\rangle q_i$, $P_M(b) = \sum_{i=1}^r \langle b, q_i\rangle q_i$. 故 $\langle P_M(a), b\rangle = \langle a, P_M(b)\rangle = \sum_{i=1}^r \langle a, q_i\rangle \langle b, q_i\rangle$. ▶

练习 8.1.14 (Riesz 表示定理)**.** 设 f 是欧氏空间 V 内的线性函数, 证明, 存在唯一的固定向量 $b \in V$, 使得对任意 $a \in V$, 都有 $f(a) = \langle a, b\rangle$.

◀ 存在性. 取 V 的一组标准正交基 $q_1, \cdots, q_n$. 我们有 $a = \sum_{i=1}^n \langle a, q_i\rangle q_i$. $f(a) = f(\sum_{i=1}^n \langle a, q_i\rangle q_i) = \sum_{i=1}^n \langle a, q_i\rangle f(q_i) = \sum_{i=1}^n \langle a, f(q_i)q_i\rangle = \langle a, \sum_{i=1}^n f(q_i)q_i\rangle$.

唯一性. 若 b, b' 均满足要求, 考虑 $f(b-b') = \langle b-b', b\rangle = \langle b-b', b'\rangle$ 知 $b = b'$. ▶

8.2. **欧氏空间上的线性映射.**

练习 8.2.1 (线性变换的范数)**.** 类似于定义 6.3.6 , 欧氏空间 V 上向量的范数可以自然地诱导出 V 上线性变换的范数, 即 $\inf_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, 称为 f 的范数, 记为 $\|f\|$. 注意 $\|f\| = +\infty$ 有可能成立.

对练习 7.3.8 中的线性变换 D 和 A, 证明 $\|D\|\,\|A\| \geq \frac{1}{2}$.

◀ 我们有 $1 = \|I\| = \|DA - AD\| \leq \|DA\| + \|AD\| \leq \|D\|\,\|A\| + \|A\|\,\|D\| = 2\,\|A\|\,\|D\|$. ▶

这是量子力学中 Heisenberg 不确定性原理的一个简化模型.

练习 8.2.2. 证明命题 8.2.14.

命题 8.2.14: 给定 n 维欧氏空间 V 上的线性变换 f, 以下叙述等价:

1. f 是正交变换, 即, 对任意 $x, y \in V$, 都有 $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$;
2. f 为保距变换, 即, 对任意 $x \in V$, 都有 $\|f(x)\| = \|x\|$.
3. f 把 V 的标准正交基映射成标准正交基.

◀ $1 \Rightarrow 2$: 取 $y = x$.

$2 \Rightarrow 1$: 我们有 $\|f(x+y)\| = \|x+y\|$ 或等价于 $\langle f(x+y), f(x+y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle$. 展开得 $\|f(x)\|^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(y)\|^2 = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$. 故 $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

$1 \Rightarrow 3$: 取 $x, y = e_i, e_j$.

$3 \Rightarrow 1$: 由于 $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ 两边均是双线性的, 我们只需对 $x, y = e_i, e_j$ 验证. ▶

练习 8.2.3. 证明命题 8.2.15.

命题 8.2.15: 给定 n 维欧氏空间 V 上的线性变换 f,

1. f 是正交变换, 当且仅当 $ff^* = f^*f = id_V$.

◀ 使用伴随映射的定义. ▶

2. f 是正交变换, 当且仅当 f 在任意标准正交基下的矩阵都是正交矩阵.

◀ 这是第 1 问中 $ff^* = f^*f = id_V$ 的矩阵形式. ▶

练习 8.2.4. 求下列正交矩阵的正交相似标准形:

1. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

◀ 其特征值为 $1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, 故正交相似于 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. ▶

2. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

◀ 其特征值为 $\pm 1, \pm i$, 故正交相似于 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{bmatrix}$. ▶

练习 8.2.5. 设 q 是 n 维欧氏空间 V 中的单位向量, P 是 M 向 $span(q)$ 上的正交投影. 令 $Q = I - 2P$ 是 V 上的线性变换. 求证:

1. $P(a) = \langle a, q\rangle\, q$.

◀ 这是练习 8.1.12 的直接推论. ▶

2. Q 是正交变换, 且其正交相似标准形是 $diag(-1, 1, \cdots, 1)$. 称 Q 为关于超平面 $span(q)^{\perp}$ 的反射.

◀ 将 q 扩充为 V 的一组标准正交基 $q, q_2, \cdots, q_n$, Q 在这组基下的矩阵是 $diag(-1, 1, \cdots, 1)$. ▶

练习 8.2.6. 设 Q 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换, $\lambda_0 = 1$ 是一个特征值, 对应的特征子空间 $V_{\lambda_0=1}$ 的维数是 $n-1$. 证明, Q 是反射.

◀ 考虑 Q 的特征值知 Q 有 $n-1$ 重特征值 1 和 1 重特征值 -1. 故 Q 是关于特征值 -1 的特征向量的反射. ▶

练习 8.2.7. 证明伴随映射的基本结论:

1. 若 $g = f^*$, 则 $f = g^*$.

◀ $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle = \langle f^{**}(x), y\rangle$. ▶

2. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

◀ $\langle (g\circ f)(x), y\rangle = \langle g(f(x)), y\rangle = \langle f(x), g^*(y)\rangle = \langle x, f^*(g^*(y))\rangle = \langle x, (f^*\circ g^*)(y)\rangle$. ▶

练习 8.2.8. 欧氏空间 V 上的线性变换 f, 如果满足 $ff^* = f^*f$, 则称 f 是一个正规变换. 验证对称变换和正交变换都是正规变换.

实矩阵 A, 如果满足 $AA^T = A^TA$, 则称 A 是一个正规矩阵. 验证对称、反对称、正交矩阵都是正规矩阵.

◀ 由定义即得. ▶

8.3. **酉空间.**

练习 8.3.1 (实 Schur 分解)**.** 给定 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵 A,则存在正交矩阵 Q,使得 $Q^TAQ = T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1r} \\ & T_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & T_{r-1,r} \\ & & & T_{rr} \end{bmatrix}$,其中 T_{ii} 或者是 1 阶实矩阵,或者是 2 阶实矩阵且其特征多项式的两个零点是一对共轭复数. 并且通过对 Q 的选取,可以实现对对角块 T_{ii} 的任意排列.

分解 $A = QTQ^T$ 称为 A 的实 Schur 分解.

练习 8.2.8 中定义了实正规矩阵,即如果 $AA^T = A^TA$,则 A 正规. 类似于定理 8.3.15 ,有如下结论: 实矩阵 A 是正规矩阵,当且仅当存在正交矩阵 Q 和分块对角矩阵 T,使得 $Q^TAQ = T$,其中 T 的对角块或者是 1 阶实矩阵,或者是形如 $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ 的 2 阶实矩阵.

由此立得定理 8.2.18.

类似于 Schur 分解,针对实矩阵的特征值问题, Francis 算法就是在计算矩阵的实 Schur 分解.

练习 8.3.2. 在 $\mathbb{C}[x]_n$ 中定义二元函数 $\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^n f(k)\overline{g(k)}$.

1. 证明,它定义了 $\mathbb{C}[x]_n$ 上的一个内积.

◀ 验证定义. ▶

2. 当 $n = 3$ 时,求它的一组标准正交基.

◀ $\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$, $\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$, $\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$. ▶

练习 8.3.3. 在具有标准内积的酉空间 $\mathbb{C}^3$ 中,设 $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$ 求与之线性等价的一个正交向量组.

◀ $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2+i \\ 1-i \\ -1+4i \end{bmatrix}$. ▶

练习 8.3.4. 证明命题 8.3.9.

命题 8.3.9: 给定 n 维酉空间 V 中一组标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 和 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵 U. 令 $(u_1, \cdots, u_n) = (e_1, \cdots, e_n)U$, 则 $u_1, \cdots, u_n$ 是一组标准正交基, 当且仅当 U 是酉矩阵.

◀ 照搬命题 8.1.14 的证明. ▶

练习 8.3.5. 证明命题 8.3.10.

命题 8.3.10: 矩阵 U 是酉矩阵, 当且仅当 U 的 (行) 列向量组构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基.

◀ $UU^T = U^TU = I$ 的每个元素代表 U 某 (行) 列与另一 (行) 列的内积. ▶

练习 8.3.6. 利用 Schur 分解证明命题 8.3.13.

命题 8.3.13:

1. Hermite 矩阵的特征值都是实数;

◀ 将任给的 Hermite 矩阵酉相似到上三角阵. 由于与 Hermite 矩阵酉相似的矩阵仍为 Hermite 矩阵, 其为上三角的 Hermite 矩阵, 从而是对角线均为实数的对角阵, 且对角线上的元素为其全部特征值. ▶

2. 酉矩阵的特征值都是绝对值为 1 的复数.

◀ 同理, 我们将任给的酉方阵酉相似到对角阵. 其对角线上的元素是绝对值为 1 的复数. ▶

练习 8.3.7. 证明, 酉矩阵的行列式的绝对值为 1; 酉矩阵的特征值的绝对值为 1.

◀ 由上一题即得. ▶

练习 8.3.8. 设 f 是酉空间 V 上的 Hermite 变换, 证明, 对任意 $a \in V$, $\langle f(a), a\rangle$ 都是实数.

◀ $\langle f(a), a\rangle = \langle a, f^*(a)\rangle = \langle a, f(a)\rangle = \overline{\langle f(a), a\rangle}$. ▶

练习 8.3.9. 如果矩阵的共轭转置等于其自身的负矩阵, 那么该矩阵称为反 Hermite 矩阵或斜 Hermite 矩阵. 证明, 反 Hermite 矩阵是正规矩阵, 且其特征值都是纯虚数.

◀ 第一个论述是显然的. 第二个论述由正规矩阵的酉相似标准形得到. ▶

练习 8.3.10. 如果一个 Hermite 矩阵的特征值都是正实数, 则称其为正定 Hermite 矩阵. 证明, 二元函数 $\overline{b}^T Aa$ 定义了 $\mathbb{C}^n$ 上的一个内积, 当且仅当 A 是正定 Hermite 矩阵.

◀ 参见练习 8.1.7. ▶

练习 8.3.11. 利用酉矩阵的酉相似标准形证明定理 8.2.18 (正交矩阵的实 Schur 分解).

◀ 注意到对实方阵 Q, 若 $QX = \lambda z$, 则 $Q\overline{z} = \overline{\lambda}\overline{z}$, 故可设 Q 在一组复单位向量 $x_1, \cdots, x_{n_1}, y_1, \cdots, y_{n_2}, z_1, \overline{z_1}, \cdots, z_s, \overline{z_s}$ 组成的标准正交基下被相似到酉相似标准形:

$Q(x_1, \cdots, x_{n_1}, y_1, \cdots, y_{n_2}, z_1, \overline{z_1}, \cdots, z_s, \overline{z_s}) = (x_1, \cdots, x_{n_1}, y_1, \cdots, y_{n_2}, z_1, \overline{z_1}, \cdots, z_s, \overline{z_s})$ $diag(I_{n_1}, -I_{n_2}, cos\theta_1 + isin\theta_1, cos\theta_1 - isin\theta_1, \cdots, cos\theta_s + isin\theta_s, cos\theta_s - isin\theta_s)$.

注意到给出实方阵的实特征值的复特征向量等价于给出两个实特征向量 (即其实部与虚部), 故不妨设 $x_1, \cdots, x_{n_1}, y_1, \cdots, y_{n_2}$ 均为实向量.

设 $z_j, \overline{z_j}$ 是 Q 特征值 $cos\theta_j \pm isin\theta_j$ 的特征向量. 我们有 $QRe(z_j) = cos\theta_j Re(z_j) - sin\theta_j Im(z_j)$, $QIm(z_j) = sin\theta_j Re(z_j) + cos\theta_j Im(z_j)$. 由此得 $Re(z_j)$ 与 $Im(z_j)$ 正交且模长均为 $\frac{1}{2}$.

易见 $x_1, \cdots, x_{n_1}, y_1, \cdots, y_{n_2}, \sqrt{2}Re(z_1), \sqrt{2}Im(z_1), \cdots, \sqrt{2}Re(z_1), \sqrt{2}Im(z_1)$ 组成了 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 且 Q 在这组基下的矩阵为 $diag(I_{n_1}, -I_{n_2}, \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 \end{bmatrix})$. ▶

References

[1] 梁鑫, 田垠, 杨一龙, 线性代数入门.

School of the Gifted Young, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026, P.R. China
Email address: ya174952@mail.ustc.edu.cn