线性代数期中辅导

刘余

清华大学丘成桐数学中心

2023.12

目录

内积和正交性

定义

设 $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, v 和 w 的内积（也称为点积）定义为:

$$v \cdot w := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

注

我们把 1×1 矩阵和实数等同，那么直接由定义可知 $v \cdot w = v^T w$, 其中等号右边是矩阵乘法。

注

我们有时也采用记号: $\langle v, w \rangle = v \cdot w$.

注 (Cauchy-Schwartz 不等式)

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \, \|w\| \, .$$

定义

S_1, S_2 是两个子集，我们称 S_1, S_2 正交，若对任意 $\boldsymbol{v}_1 \in S_1, \boldsymbol{v}_2 \in S_2$，都有 $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$.

注

S_1, S_2 常见的情形：

- 单个向量，
- 一组线性无关的向量，
- 一个线性子空间。

注

正交的线性子空间的交为 $\{0\}$。注意和高中学的平面垂直的区别。

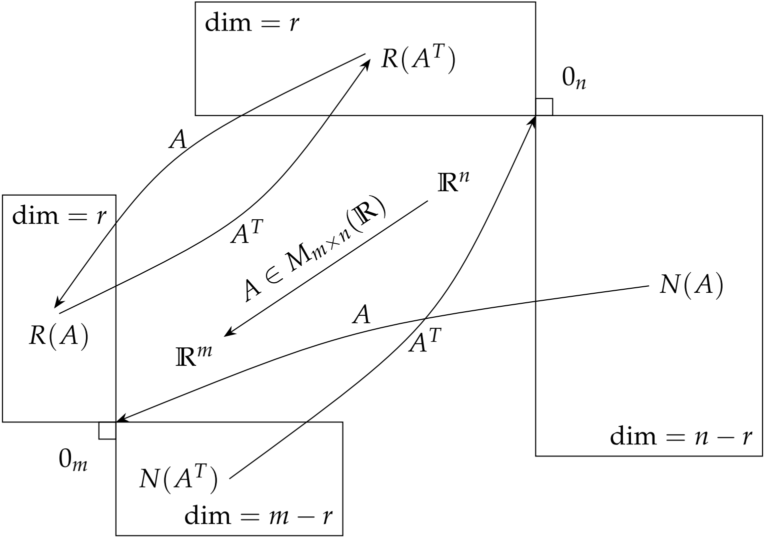
对任意子集 $S \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$S^\perp := \{\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0\}.$$

命题

1. 若 $S_1 \subseteq S_2$, 则 $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$;
2. 若 $V = \mathrm{span}(S)$, 则 $V^\perp = S^\perp$.
3. 对子空间 $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $(V^\perp)^\perp = V$.
4. 对子空间 $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim V + \dim V^\perp = n$.
5. 对两个子空间 V, W, $V \subseteq W$ 当且仅当 $V^\perp \supseteq W^\perp$.

四个基本子空间



$\dim = r$
$R(A^T)$
0_n
A
$\mathbb{R}^n$
$\dim = r$
A^T
$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
$N(A)$
$R(A)$
A
A^T
$\mathbb{R}^m$
0_m
$N(A^T)$
$\dim = m - r$
$\dim = n - r$

正交投影

定义

设 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 r 维子空间，任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ 可以唯一地表示成：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$，其中 $\boldsymbol{x}_1 \in V, \boldsymbol{x}_2 \in V^\perp$，映射

$$p_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{x}_1$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 到 V 的正交投影。

p_V 由如下性质唯一决定：

- $\forall \boldsymbol{x} \in V, p_V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$;
- $\forall \in V^\perp, p_V(\boldsymbol{x}) = 0$.

注

$p_V(\boldsymbol{v})$ 是 V 上和 $\boldsymbol{v}$ 距离最近的向量：$\|\boldsymbol{v} - p_V(\boldsymbol{v})\| = \min\{\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}\| : \boldsymbol{x} \in V\}$

正交投影矩阵

任取 V 的一组基：$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$，令 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r \end{bmatrix}$，

$$P := A(A^TA)^{-1}A^T$$

是关于 V 的正交投影矩阵，即对任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$，

$$p_V(\boldsymbol{v}) = P\boldsymbol{v}.$$

命题

$P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. 存在线性子空间 V 使得 P 是关于 V 的正交投影矩阵，当且仅当 $P^2 = P, P^T = P$.

注

A^TA 可逆，当且仅当 A 列满秩。

标准正交基和 Gram-Schmidt 正交化

定义

线性子空间 V 的一组基 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ 称为是标准正交基，若

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

从一组基 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ 归纳构造标准正交基：

- $\boldsymbol{w}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}$;
- 若已经构造出了 $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k$，令

$$\tilde{\boldsymbol{w}}_{k+1} := \boldsymbol{v}_{k+1} - (\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{w}_1 - \cdots - (\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{w}_k)\boldsymbol{w}_k,$$

- 令 $\boldsymbol{w}_{k+1} = \dfrac{\tilde{\boldsymbol{w}}_{k+1}}{\|\tilde{\boldsymbol{w}}_{k+1}\|}$.

从一组基 $v_1, \cdots, v_r$, 通过 Gram-Schmidt 正交化过程得到 $w_1, \cdots, w_r$, 那么

命题

对任意 $1 \leq k \leq r$, 我们有 $\operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k) = \operatorname{span}(w_1, \cdots, w_k)$.

我们也可以通过下述两个条件:

- $w_1, \cdots, w_r$ 单位正交;
- 对任意 $1 \leq k \leq r$, 我们有 $\operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k) = \operatorname{span}(w_1, \cdots, w_k)$

来构造标准正交基

QR 分解

定理

若 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 是列满秩矩阵，那么存在列正交矩阵 $Q \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 和对角线都是正数的上三角矩阵 R，使得 $A = QR$. 这样的分解是唯一的。

注

当 A 不列满秩时，我们也有变形的 QR 分解，请参考教科书定理 *3.2.10.*

最小二乘解

令 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, 考虑方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

定义

方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解是指方程组 $A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$ 的解。

注

1. 方程组 $A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$ 一定有解。
2. $\boldsymbol{x}_0$ 是 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解当且仅当

$$\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_0\| = \min\left\{ \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}\| : \boldsymbol{x} \in R(A)\right\}$$

当且仅当

$$A\boldsymbol{x}_0 = p_{R(A)}(\boldsymbol{b}).$$

行列式

定义

对任意正整数 n，存在的函数：$M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，称为行列式函数，满足：

- 行（列）多线性性；
- 行（列）反对称性；
- 单位化。

行列式的完全展开式：

- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$;
- $\det\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}\right) = \cdots$

定理 (Laplace 展开)

令 C_{ij} 是矩阵第 (i,j) 个代数余子式，那么

1. 按行展开 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{kj} = \begin{cases} \det(A) & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$.
2. 按列展开 $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}C_{jk} = \begin{cases} \det(A) & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

命题

若 $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ 可逆，方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 为

$$x_i = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \boldsymbol{b} & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}\right)}{\det(A)}$$

求行列式的方法：

- 不要用行列式的完全展开式；
- 利用行列式的性质计算；
- 本质上就是“打洞”，利用 Laplace 展开降阶；

行列式的性质：

- 定义中的性质；
- 乘性：$\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
- 行和列的对称：$\det(A) = \det(A^T)$;
- 分块上（下）三角矩阵的行列式等于对角线矩阵行列式的乘积。

命题

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}\right) = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

例题

三对角矩阵的行列式：对第一行做 *Laplace* 展开，得到递推式，利用递推式计算。

例题

利用 *Sherman-Morisson* 公式来计算行列式，例如教材练习 *4.2.6*，*4.2.24* 等等。

相似对角化

定义

我们称矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 可以相似对角化，若存在可逆矩阵 $P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 和对角矩阵 $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 使得

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

若 $P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$, 则 $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$.

定义

λ 称为是 A 的特征值，若存在非零向量 α, 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$; 在这个情况下，α 称为是属于特征值 λ 的特征向量。

命题

属于不同特征值的特征向量线性无关。

定义

对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, $V_\lambda := N(\lambda I_n - A)$ 称为是属于 λ 的特征子空间。

命题

λ_0 是 A 的特征值，当且仅当 $V_{\lambda_0} \neq 0$，当且仅当 $\lambda_0 I_n - A$ 不可逆，当且仅当 λ_0 是关于 λ 的多项式 $\det(\lambda I_n - A)$ 的根。

定理

方阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 可以相似对角化，当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量。

定理

1. 方阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 可以相似对角化，当且仅当 A 的所有特征值的代数重数都等于其几何重数。
2. 方阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 可以在实数域上相似对角化，当且仅当 A 的所有特征值都是实数，且其代数重数都等于其几何重数。

矩阵相似对角化的步骤：

1. 计算特征多项式 $f_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$;
2. 计算特征多项式的根，即解方程 $f_A(\lambda) = 0$；即求 A 的特征值和代数重数；
3. 对每一个特征值 λ_0，解线性方程组 $(\lambda_0 I_n - A)\boldsymbol{x} = 0$，同时得到 A 的特征值的几何重数；以及特征子空间的一组基。
4. 比较每个特征值的代数重数和几何重数，
   - 若存在不相等的，则不可相似对角化。
   - 若所有特征值的代数重数和几何重数都相等，那么可以写出相似对角化。

注

- 特征值的代数重数大于等于几何重数；
- $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn}$;
- $\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det(A)$.

命题

若 $A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{bmatrix}$ 是分块对角矩阵。则 A 可以相似对角化，当且仅当 $A_1, \cdots, A_k$ 都可以相似对角化。

命题

对于可对角化的 n 阶方阵 A, B, 以下等价：

1. A, B 可同时对角化；
2. 存在 n 个线性无关的向量，同时是 A, B 的特征向量；
3. A, B 交换： $AB = BA$.

命题

实对称矩阵都可以正交相似对角化。

实对称矩阵正交相似对角化的步骤：

1. 计算特征多项式 $f_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$；
2. 计算特征多项式的根，即解方程 $f_A(\lambda) = 0$；即求 A 的特征值；
3. 对每一个特征值 λ_0，解线性方程组 $(\lambda_0 I_n - A)\boldsymbol{x} = 0$，求出解空间的一组标准正交基；
4. 写出正交相似对角化。

注

事实上，一个实矩阵可正交对角化当且仅当它是对称矩阵。

定义

设 A 是实对称矩阵，我们称 A

1. 正定，若对任意 $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，都有 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0$;
2. 半正定，若对任意 $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，都有 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \geq 0$;
3. 负定，若对任意 $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，都有 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} < 0$;
4. 半正定，若对任意 $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，都有 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \leq 0$.
5. 不定，既存在 $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0$；也存在 $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} < 0$.

定义

我们称 A 和 B 合同，若存在可逆矩阵 $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^T A P$.

定理 (合同标准型)

任意实对称矩阵 A 都唯一地合同于形如 $\mathrm{diag}(I_p, -I_q, 0)$ 这样的矩阵，其中 p, q 分别称为 A 的正、负惯性指数。

定理

若 A 是实对称矩阵，那么以下等价：

1. A 正定；
2. A 的特征值都是正实数；
3. 存在可逆矩阵 P 使得 $A = P^T P$;
4. A 的顺序主子式都是正数；
5. A 的顺序子矩阵都正定；
6. A 存在 LDU 分解：$A = LDL^T$，其中 L 是对角线为 1 的下三角矩阵，D 是对角线都是正数的对角矩阵。

命题 (Rayleigh 商)

$$\sup_{0\neq \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = A\text{最大的特征值。}$$

奇异值分解

定理 (奇异值分解)

对任意矩阵 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，存在正交矩阵 $U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_m \end{bmatrix} \in M_{m\times m}(\mathbb{R}), V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，以及 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$，使得

$$A = U\Sigma V^T,$$

其中 $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) \in M_{r\times r}(\mathbb{R})$.

奇异值分解的性质：

1. $r = \operatorname{rank}(A)$;
2. 对任意 $1 \leq i \leq r$，$A\boldsymbol{v}_i = \sigma_i \boldsymbol{u}_i, A^T\boldsymbol{u}_i = \sigma_i \boldsymbol{v}_i$.
3. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 是 $R(A)$ 的一组标准正交基；
4. $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ 是 $R(A^T)$ 的一组标准正交基；
5. $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 是 $N(A^T)$ 的一组标准正交基；
6. $\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 是 $N(A)$ 的一组标准正交基。

奇异值分解的步骤:

1. 对 A^TA 作正交相似对角化，使得 $A^TA = V\Lambda V^T$，其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$，满足 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$.
2. 对 $1 \leq i \leq r$，令 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \boldsymbol{u}_i = \dfrac{A\boldsymbol{v}_i}{\sigma_i}$.
3. 求出 $\mathbb{R}^m$ 中，向量 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 的正交补空间的一组标准正交基 $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m$.
4. 令 $U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_m \end{bmatrix}$，写出奇异值分解 $A = U\Sigma V^T$.

注

也可以对 AA^T 作正交相似对角化来求 A 的奇异值分解。事实上，因为 $A^TA \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), AA^T \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$，我们通常比较一下 m, n 的大小，选取小的矩阵进行操作。

我们把奇异值分解乘开就有 $A = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \cdots + \sigma_r \boldsymbol{u}_r \boldsymbol{v}_r^T$. 对 $1 \le k \le r$, 令

$$A_k = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \cdots + \sigma_k \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{v}_k^T$$

定理 (低秩逼近)

- $\|A - A_k\| = \min \left\{ \|A - B\| : B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \operatorname{rank}(B) \le k \right\}$;
- $\|A - A_k\|_F = \min \left\{ \|A - B\|_F : B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \operatorname{rank}(B) \le k \right\}$;

矩阵范数

- $\|A\| := \sup_{0\neq \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\|\boldsymbol{x}=1\|} \|A\boldsymbol{x}\| = \sigma_1;$
- $\|A\|_F := (\mathrm{tr}(AA^T))^{1/2} = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i^2\right)^{1/2}$

命题

1. $\|A\|\ (\|A\|_F) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $A = 0$;
2. $\|kA\| = |k|\,\|A\|\ (\|kA\|_F = |k|\,\|A\|_F)$;
3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \|A+B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$;
4. $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|, \|AB\|_F \leq \min\left\{ \|A\|_F\,\|B\|, \|A\|\,\|B\|_F \right\}$;
5. 若 P, Q 是正交矩阵, 则 $\|PAQ\| = \|A\|, \|PAQ\|_F = \|A\|_F$.

线性空间的一般理论

F 是一个数域，V 是一个非空集合。我们称 V 是 F 上的线性空间，如果 V 上有一个运算“加法”，F 上的元素和 V 上的元素有一个运算”数乘”，这两个运算满足 8 条运算法则。

注

1. 我们需要明确 V 中的元素是什么，特别是零向量是什么。搞清楚零向量 $\mathbf{0}$ 和 F 中的数”0”的区别和联系。
2. 我们不必过分深究 8 条运算法则是什么，只需要把 V 想象成 $\mathbb{R}^n$，了解我们之前学过的和“线性”有关运算规律在这里都适用即可。

例题

1. 矩阵空间 $M_{m\times n}(F)$ 及其子空间。
2. 函数空间：某个集合或者区间上的函数、实值连续函数、光滑函数等等。
3. 域上的多项式及其子空间。

定义

S 是 V 的一个子集，我们称 S 线性相关，若存在 $n \geq 1$, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in S$, 以及不全为零的 $x_1, \cdots, x_n \in S$, 使得

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

否则，称 S 线性无关。

定理

任意线性空间都存在极大线性无关组。任一 V 线性空间的任意极大线性无关组都有相同的基数，称作 V 的维数。V 的一个极大线性无关组称作 V 的一组基。

定义

设 V, W 是两个 F 线性空间，映射 $f : V \to W$ 称为是线性映射，若对任意 $x_1, x_2 \in F, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$, 都有

$$f(x_1\boldsymbol{v}_2 + x_2\boldsymbol{v}_2) = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2).$$

若线性映射即单又满，我们称 f 是（线性）同构。

假设 $\dim_F V = n$；任意给定 V 的一组基 $\underline{\boldsymbol{v}}: \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$，我们就有线性同构：

$$\varphi_{\underline{\boldsymbol{v}}}: F^n \longrightarrow V \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

给定 V 的另一组基 $\underline{\boldsymbol{v}}: \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$，我们就有线性同构：

$$\varphi_{\underline{\boldsymbol{v}'}}: F^n \longrightarrow V \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto x_1\boldsymbol{v}'_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}'_n$$

我们用 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 来线性表出 $\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_n$，知存在可逆矩阵 $P \in M_{n\times n}(F)$，满足：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}'_1 & \cdots & \boldsymbol{v}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} P$$

定义

P 称为是基 $\underline{\boldsymbol{v}}$ 到 $\underline{\boldsymbol{v}}'$ 的过渡矩阵。

任意 $\boldsymbol{v} \in V$，它们在基 $\underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{v}}'$ 之下的坐标是 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in F^n$，那么

$$\boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x} : \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}'_1 & \cdots & \boldsymbol{v}'_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} P\boldsymbol{x}'$$

即下述图表交换：

$$\begin{tikzcd} F^n \arrow[rr, dashed, "P"] \arrow[dr, "\varphi_{\underline{\boldsymbol{v}}'}"'] & & F^n \arrow[dl, "\varphi_{\underline{\boldsymbol{v}}}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

设 V, W 是有限维线性空间，$f: V \to W$ 是线性映射；给定 V, W 的一组基 $\underline{\boldsymbol{v}}: \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \underline{\boldsymbol{w}}: \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$，则存在唯一的矩阵 $A \in M_{m\times n}(F)$ 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in F^n$，我们有

$$f\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\right) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m\end{bmatrix}(A\boldsymbol{x}).$$

定义

矩阵 A 称为线性映射 f 在基 $\underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{w}}$ 之下的表示矩阵。

即我们有交换图表：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ F^n \arrow[u, "\varphi_{\underline{\boldsymbol{v}}}"'] \arrow[r, "A"] & F^m \arrow[u, "\varphi_{\underline{\boldsymbol{w}}}"'] \end{tikzcd}.$$

给定 V, W 的另一组基 $\underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{w}}'$, 我们就有另一个表示矩阵 A' 则 $A' = Q^{-1}AP$, 其中 P, Q 分别是 $\underline{\boldsymbol{v}}$ 到 $\underline{\boldsymbol{v}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{w}}$ 到 $\underline{\boldsymbol{w}}'$ 的过渡矩阵。即我们有交换图表:

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[rr, "f"] & & W & . \\
 & F^n \arrow[u, "\varphi_{\underline{\boldsymbol{v}}}"'] \arrow[rr, "A"] & & F^m \arrow[u, "\varphi_{\underline{\boldsymbol{w}}}"'] & \\
F^n \arrow[uur, "\varphi_{\underline{\boldsymbol{v}}'}"] \arrow[ur, "P"'] \arrow[rr, "A'"] & & F^m \arrow[uur, "\varphi_{\underline{\boldsymbol{w}}'}"] \arrow[ur, "Q"'] & &
\end{tikzcd}
$$

求表示矩阵的方法就是按照定义来：

- 把 $f(\boldsymbol{v}_i)$ 用基 $\underline{\boldsymbol{w}}$ 展开：$f(\boldsymbol{v}_i) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{bmatrix} \alpha_i$.
- $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$

也可以直接令

$$x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) = y_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + y_m \boldsymbol{w}_m,$$

这样每个 y_j 都是关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的一次式，然后排成矩阵

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

谢谢倾听。

扫二维码反馈意见: