第7课：连续函数的性质

第2章 函数及其连续性

- **内容：**

第2.7节 连续函数-反函数-间断点分类

第2.9节 一致连续概念

第2.10节 连续函数的性质

第7-1课：连续函数-反函数-间断点

连续函数 (续)

➢ **反函数的连续性**：令I是一个区间，设 $f\in C(I)$ 严格单调则反函数 f^{-1}在$J=f(I)$上处处连续(且严格单调)

证：首先, f 的连续性可以导出J是一个区间 (介值性质)其次反函数严格单调容易验证，下面证明在J上处处连续

任取 $y_0\in J$, 则 $f^{-1}(y_0)=x_0\in I$, 也即$y_0=f(x_0)$

$\forall\varepsilon>0$, 要使$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$, 也即

$$f^{-1}(y_0)-\varepsilon<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0)+\varepsilon$$

或写成 $$x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon$$

不妨令f严格增，则上式等价于 $f(x_0-\varepsilon)<y<f(x_0+\varepsilon)$

第7-1课：连续函数-反函数-间断点

- **证** (续)：下面考虑y如何满足 $f(x_0-\varepsilon)<y<f(x_0+\varepsilon)$

  注意到f严格单调增：$f(x_0-\varepsilon)<y_0=f(x_0)<f(x_0+\varepsilon)$

可见只要y距离y_0不太远即可满足要求，取$\delta>0$, 使得

$$f(x_0-\varepsilon)\le y_0-\delta<y_0+\delta\le f(x_0+\varepsilon)$$

当 $|y-y_0|<\delta$ 时

$$f(x_0-\varepsilon)\le y_0-\delta<y<y_0+\delta\le f(x_0+\varepsilon)$$

从而 $$f^{-1}(y_0)-\varepsilon<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0)+\varepsilon$$

这说明 $|y-y_0|<\delta$ 时, $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$ □

- **推论**：反三角函数 $\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\cdots$

在定义域中都是连续函数

第7-1课：连续函数-反函数-间断点

- **指数函数连续性：** e^x 处处连续

  证：任取x_0,根据指数律$e^x=e^{x_0}e^{x-x_0}$, 由极限运算性质得

$$\lim_{x\to x_0}e^x=e^{x_0}\lim_{x\to x_0}e^{x-x_0}=e^{x_0}\lim_{t\to 0}e^t$$

回忆 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{1/n}=1$, 为证$\lim\limits_{t\to 0}e^t=1$, 注意$|t|<1/n$时, $|e^t-1|\le e^{\frac{1}{n}}-1$

由此 $\forall\varepsilon>0$, 可取$n_0\in\mathbb{N}$, 使得$\forall n>n_0$有$|e^{1/n}-1|<\varepsilon$

当$|t|<1/(n_0+1)$时, 便有 $|e^t-1|\le e^{1/(n_0+1)}-1<\varepsilon$

  这说明 $\lim\limits_{x\to x_0}e^x=e^{x_0}$, e^x 在$x=x_0$连续 □

- **推论1：** 令 $a>0$且$a\neq 1$, 则 $a^x\in C(\mathbb{R})$, $\log_a x\in C(\mathbb{R}_+)$
- **推论2：** 对于任意 $a\in\mathbb{R}$, 一般幂函数 $x^a=e^{a\ln x}\in C(\mathbb{R}_+)$

第7-1课：连续函数-反函数-间断点

- **推论3**：初等函数在其定义域内都是连续的

  注：初等函数在定义域的边界单侧连续

- **说明** (通常习惯-不是严格定义)
- **初等函数**：

  基本初等函数经有限次四则运算和复合运算产生的函数

- **基本初等函数**：

  $\left.\begin{array}{l}\text{常值函数}\\ \text{恒等函数}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{四则运算}}$ 多项式，有理函数

  指数函数-对数函数 $\xrightarrow{\text{复合运算}}$ 一般幂函数

  三角函数(正弦-余弦)-反三角函数(反正弦-反余弦)

第7-1课：连续函数-反函数-间断点

- **连续与间断** (不连续)

  在x_0连续：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

  在x_0间断：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ —— 称x_0为f 的间断点

- **间断点分类**：

  可去间断：$f(x_0-)=f(x_0+)\neq f(x_0)$ （包括$f(x_0)$无定义）

  跳跃间断：$f(x_0-)$与$f(x_0+)$都存在但不相等

  第二类间断：$f(x_0-)$与$f(x_0+)$至少有一个不存在

- **注1**：可去间断与跳跃间断也统称为第一类间断

  2：可去间断常常被看作连续，只要重新定义$f(x_0)$

  3：第二类间断中还有一些不太通用的分类

——无穷间断，振荡间断等等 (“顾名思义”)

第7-1课：连续函数-反函数-间断点

- 例1：$f_1(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ x\neq 0$

  x=0为可去间断点，补充定义 $f_1(0)=1$, 则 f_1在$x=0$连续

- 例2：$f_2(x)=\operatorname{sgn}(x),$

  x=0为跳跃间断点：$\operatorname{sgn}(0-)=-1,\ \operatorname{sgn}(0+)=1,\ \operatorname{sgn}(0)=0$

- 例3：$f_3(x)=xD(x)$, 这里$D(x)$为$Dirichlet$函数

  首先$\lim\limits_{x\to 0} f_3(x)=\lim\limits_{x\to 0} xD(x)\ =0=f_3(0)$ —— f_3在x=0连续

  再注意 $x\neq 0$时, $D(x)=f_3(x)/x$, 但$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$处处不存在

所以$x_0\neq 0$是f_3的第二类间断点（由上可知 $\lim\limits_{x\to x_0} f_3(x)$不存在）

- 例4：$f_4(x)=\sin(1/x),\ x\neq 0$

  x=0是f_4的第二类间断点(振荡间断)

第7-2课：连续函数-一致连续性

- **一致连续概念**

令 $f: I \to \mathbb{R}$, I是一个区间(开-闭-半开半闭-有界-无界)

称 f 在I 上一致连续，如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得

$$\forall x', x'' \in I \text{ 只要满足} |x' - x''| < \delta \text{ 都有} |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

➢ **推论**：若 f 在I 上一致连续，则 $\forall x_0 \in I$, f 在x_0连续

进而 $f \in C(I)$

【**观察**】在I 上一致连续与在I 上处处连续的区别？

- **否定一致连续**：函数 f 在I 上不一致连续，如果 $\exists \varepsilon_0 > 0$,

以及收敛于0的数列$\{a_n\}$ 使得$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\exists x_n', x_n'' \in I \text{ 满足} |x_n' - x_n''| < a_n, \text{ 但} |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0$$

第7-2课：连续函数-一致连续性

✓ **例1**：考察三角函数 $\sin x, \cos x$ 的一致连续性

解：任取x_1, x_2, 由和差化积公式

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\sin\frac{x_1 - x_2}{2}$$

由此得到 $|\sin x_1 - \sin x_2| \le 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \le |x_1 - x_2|$

同理可得 $|\cos x_1 - \cos x_2| \le 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \le |x_1 - x_2|$

可见 $\forall \varepsilon > 0$, 取$\delta = \varepsilon$, 只要$|x_1 - x_2| < \delta$ 便有

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$$

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \le |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$$

所以$\sin x, \cos x$ 在$\mathbb{R}$上一致连续 □

第7-2课：连续函数-一致连续性

✓ **例2**：验证 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$I=(0,1)$上不一致连续

解：任取 $x',x''\in I$，考虑

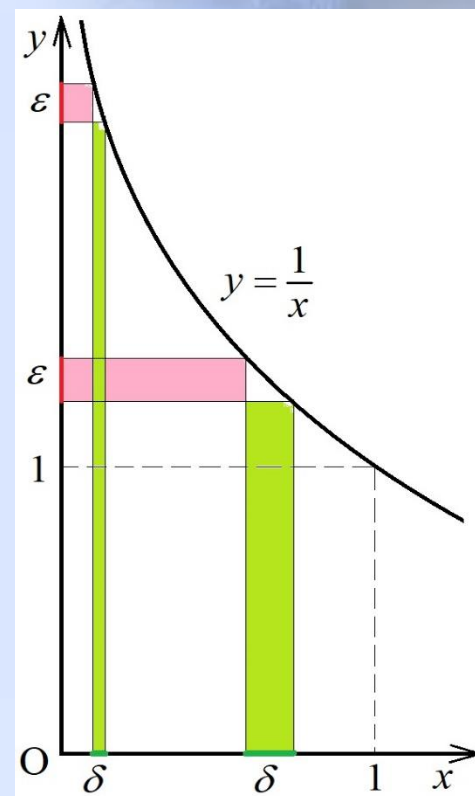
(#) $$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'x''}$$

如果取 $|x_n'-x_n''|=\dfrac{1}{2n}$，$x_n'x_n''=\dfrac{1}{2n^2}$，$n=1,2,\cdots$

则 $$|f(x_n')-f(x_n'')|=\frac{|x_n'-x_n''|}{x_n'x_n''}=n>1$$

为此只要选取 $x_n'=\dfrac{1}{n}$，$x_n''=\dfrac{1}{2n}$，$n=1,2,\cdots$

这说明 f 在I上不一致连续 □



几何说明：见右图

▪ **注**：由(#)式可见，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$I=[1,+\infty)$上一致连续

第7-2课：连续函数-一致连续性

✓ **例3**：考察 $f(x)=\cos(x^2)$在$\mathbb{R}$上是否一致连续？

解：观察 $f(\pm\sqrt{k\pi})=\cos(k\pi)=(-1)^k, k=0,1,2,\cdots$

$$\therefore \quad |f(\pm\sqrt{2n\pi})-f(\pm\sqrt{(2n-1)\pi})|=1-(-1)=2$$

如果取 $x_n'=\sqrt{2n\pi},\ x_n''=\sqrt{(2n-1)\pi},\ n=1,2,\cdots$

则 $$|x_n'-x_n''|=\frac{\pi}{\sqrt{2n\pi}+\sqrt{(2n-1)\pi}}\le\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2n}}\to 0$$

但 $$|f(x_n')-f(x_n'')|=2$$

这说明 f 在I 上不一致连续 □

有界闭区间上连续函数的性质

- **目的**：讨论$C[a,b]$中函数的性质($a<b$都是有限实数)

➢ **一致连续性**：

设 $f\in C[a,b]$，则f在$[a,b]$上一致连续

- **反证**：若不然，$\exists\varepsilon_0>0$及收敛于0的数列$\{a_n\}$，使得$\forall n\in\mathbb{N}$，

$\exists x_n', x_n''\in[a,b]$ 虽满足$|x_n'-x_n''|<a_n$，但$|f(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon_0$

由Bolzano-Weierstrass列紧原理，存在$\{x_n'\}$的收敛子列

$$\{x_{k_n}'\}\to x^*\in[a,b]$$

注意到 $|x_{k_n}''-x^*|\le|x_{k_n}''-x_{k_n}'|+|x_{k_n}'-x^*|$

$$\le a_{k_n}+|x_{k_n}'-x^*|\to 0$$ 也即 $\{x_{k_n}''\}\to x^*$

第7-3课：连续函数-有界闭区间上的性质

- **证明一致连续性** (续)

若$C[a,b]$中函数f不一致连续，前面得到$[a,b]$中两个子列都收敛于x^*： $\{x'_{k_n}\} \to x^*, \ \{x''_{k_n}\} \to x^* \ (n \to \infty)$

并且满足

($) $$|f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \geq \varepsilon_0$$

由f的连续性 $\lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*)$

因此

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_{k_n}) = f(x^*), \ \lim_{n \to \infty} f(x''_{k_n}) = f(x^*)$$

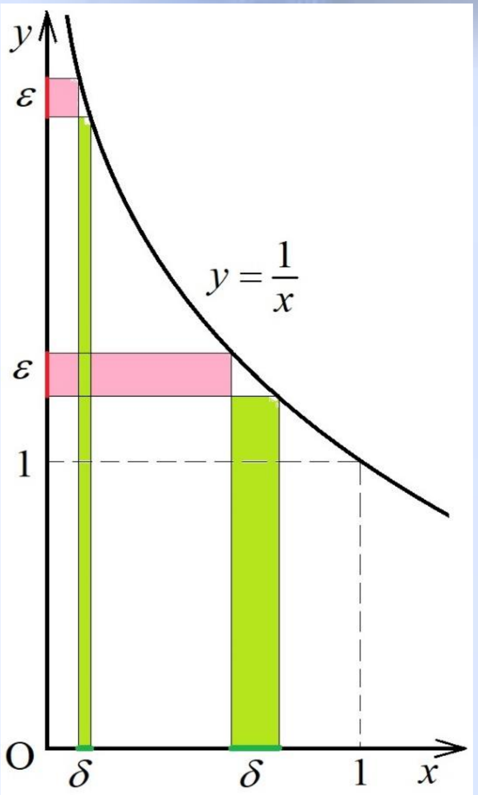
这与上面($)式矛盾！这说明$f$必在$[a,b]$上一致连续 □

- **注**：在有界闭区间上，处处连续等价于一致连续

回忆前一节例2-例3，有界开区间或无界闭区间上不成立！

第7-2课：连续函数-一致连续性

✓ **例2**：验证 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $I=(0,1)$ 上不一致连续



解：任取 I 内x',x", 考虑

(#) $$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'x''}$$

如果取 $|x_n'-x_n''|=\dfrac{1}{2n},\ x_n'x_n''=\dfrac{1}{2n^2},\ n=1,2,\cdots$

则 $$|f(x_n')-f(x_n'')|=\frac{|x_n'-x_n''|}{x_n'x_n''}=n>1$$

为此只要选取 $x_n'=\dfrac{1}{n},\ x_n''=\dfrac{1}{2n},\ n=1,2,\cdots$

这说明 f 在 I 上不一致连续 □

几何说明：见右上图

- **注**：由(#)式可见，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $I=[1,+\infty)$ 上一致连续

第7-2课：连续函数-一致连续性

✓ **例3**：考察 $f(x)=\cos(x^2)$在$\mathbb{R}$上是否一致连续？

解：观察 $f(\pm\sqrt{k\pi})=\cos(k\pi)=(-1)^k, k=0,1,2,\cdots$

$$\therefore \ |f(\pm\sqrt{2n\pi})-f(\pm\sqrt{(2n-1)\pi})|=1-(-1)=2$$

如果取 $x_n'=\sqrt{2n\pi},\ x_n''=\sqrt{(2n-1)\pi},\ n=1,2,\cdots$

则 $$|x_n'-x_n''|=\frac{\pi}{\sqrt{2n\pi}+\sqrt{(2n-1)\pi}}\le\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2n}}\to 0$$

但 $$|f(x_n')-f(x_n'')|=2$$

这说明 f 在I 上不一致连续 □

几何说明：作图 ……

第7-3课：连续函数-有界闭区间上的性质

➢ 有界性质

设 $f\in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界

证：再用反证法，假设 f 在 $[a,b]$ 上无界，则

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists x_n\in[a,b],\ 使得 |f(x_n)|>n$$

仍用Bolzano-Weierstrass列紧原理，$\{x_n\}$存在收敛子列

$$\{x_{k_n}\}\to x^*\in[a,b]$$

根据 f 的连续性 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n})=f(x^*)$

但由$\{x_n\}$上面的性质 $|f(x_{k_n})|>k_n,\ n=1,2,\cdots$

这个矛盾说明 f 必在 $[a,b]$ 上有界 □

第7-3课：连续函数-有界闭区间上的性质

- **最值性质**：设 $f \in C[a,b]$，则 $\exists \underline{x}, \overline{x} \in [a,b]$ 使得

$$f(\underline{x}) \le f(x) \le f(\overline{x}),\ \forall x \in [a,b]$$

证：已知 f 在 $[a,b]$ 上有界，由确界原理，存在

$$M = \sup_{a \le x \le b} f(x),\ \ m = \inf_{a \le x \le b} f(x)$$

根据上确界含义 $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in [a,b]$，使得

$$M - 1/n < f(x_n) \le M$$

取 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{k_n}\} \to \overline{x} \in [a,b]$，则

$$M - 1/k_n < f(x_{k_n}) \le M$$

再由夹逼原理和 f 的连续性得 $f(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = M$

同理可证 $\exists \underline{x} \in [a,b]$，使得 $f(\underline{x}) = m$ $\square$

第7-3课：连续函数-有界闭区间上的性质

- **介值性质**：设 $f\in C[a,b]$，且 $f(a)\neq f(b)$，

若实数λ介于$f(a)$与$f(b)$之间，则 $\exists c\in(a,b)$，使得 $f(c)=\lambda$

证：先考虑特例 $f(a)<0<f(b)$，要证 $\exists c\in(a,b)$，$f(c)=0$

记 $a_1=a$，$b_1=b$，$c_1=(a_1+b_1)/2$

这时 $f(a_1)<0<f(b_1)$，检查 $f(c_1)$符号：

如果 $f(c_1)=0$，则$c=c_1$，证明完成

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 } f(c_1)<0,\ \text{令} a_2=c_1,\ b_2=b_1\\ \text{若 } f(c_1)>0,\ \text{令} a_2=a_1,\ b_2=c_1\end{array}\right\}\ c_2=\frac{a_2+b_2}{2}$$

注意这时 $f(a_2)<0<f(b_2)$，继续检查 $f(c_2)$符号，类似论证…

除非c_2是 f 零点，否则得到 $a_2\le a_3<b_3\le b_2$，且 $f(a_3)<0<f(b_3)$

第7-3课：连续函数-有界闭区间上的性质

- **介值性质证明**(续)：依照前面的论证, 除非得到f的零点c, 否则递推得到两个单调数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$, 满足

$$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n,\ b_{n+1} - a_{n+1} = (b-a)/2^n$$

以及 $$f(a_n) < 0 < f(b_n),\ n = 1, 2, \cdots$$

由单调性原理 $\{a_n\}$和$\{b_n\}$收敛于同一个 $c \in (a,b)$

由函数连续性 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$

由极限保序性 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le 0 \le \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n),\ \therefore\ f(c) = 0$

对于一般情况，不妨设 $f(a) < \lambda < f(b)$

引入函数 $F(x) = f(x) - \lambda \in C[a,b]$, 则

$$F(a) < 0 < F(b)$$

由上面证明有 $c \in (a,b)$, 使得$F(c) = 0,\ \therefore\ f(c) = \lambda$ $\square$

第7-3课：连续函数-有界闭区间上的性质

- **零点性质** (介值性质的特例)：

  设 $f\in C[a,b]$，若 $f(a)f(b)<0$，则$\exists c\in(a,b)$，使 $f(c)=0$

- **推论**：设 $f\in C[a,b]$，则 $f([a,b])$是一个闭区间

  证：结合连续函数的最值性质和介值性质即得 $\square$

【注】这个性质在反函数连续性证明中用到。

✓ **例题**：设 $f\in C[0,1]$ 且$f(0)=f(1)$，

求证 $\exists c\in(0,1)$，使 $f(c)=f(c+\frac{1}{2})$

证明：考虑函数 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)\in C[0,\frac{1}{2}]$，则

$$F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0),\quad F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})=-F(0),$$

即 $F(0)F(\frac{1}{2})\le 0$，$\quad\therefore\quad\cdots\cdots$

[例] 证明奇次多项式

$$P(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}$$

至少存在一个实根

[证] $P(x)\in C(-\infty,+\infty)$

$$P(x)=x^{2n+1}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)$$

不妨设 $a_0>0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$$

$$\Rightarrow \exists r>0,\text{使}\ P(r)>0,\quad P(-r)<0$$

根据零点定理 $\exists c\in(-r,r)$, 使 $P(c)=0$

[例] 若函数$f \in C[a,b)$,且 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$,

则 f 在$[a,b)$能取到最小值

[证] $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ 对于$M = \max\{f(a),\ 0\} \geq 0$

$\exists c:\ a < c < b,\quad \forall x \in (c,\ b)$,有 $f(x) > M$

因为$f(x) \in C[a,\ c]$,根据最大最小值定理,

$\exists x_0 \in [a,\ c]$,使 $f(x_0) \leq f(x) \quad (\forall x \in [a,\ c])$

综上所述,f 在$[a,\ b)$能取到最小值

Ex. $f,g\in C[a,b],\{x_n\}\subset[a,b],g(x_n)=f(x_{n+1}),\forall n\in\mathbb{N},$ 且$f(x_1)\le g(x_1)$. 证明:$\exists\xi\in[a,b],s.t.f(\xi)=g(\xi)$.

Proof. 若$\exists x_{n_0},s.t.f(x_{n_0})>g(x_{n_0})$, 令$h(x)=f(x)-g(x)$,则 $h\in C[a,b]$,且

$$h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\le 0,$$

$$h(x_{n_0})=f(x_{n_0})-g(x_{n_0})>0,$$

由介值定理,$\exists\xi\in[a,b],s.t.h(\xi)=0$,即$f(\xi)=g(\xi)$.

若$\forall n, f(x_n)\le g(x_n)$,由已知条件得

$$f(x_n)\le g(x_n)=f(x_{n+1})\le g(x_{n+1}),\quad \forall n.$$

$\{f(x_n)\},\{g(x_n)\}$均为单增数列. 由闭区间上连续函数的有界性定理, $\{f(x_n)\},\{g(x_n)\}$均为有界列, 从而均收敛.

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=a$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{n+1})=a.$

$\{x_n\}\subset[a,b]$为有界列,有收敛子列x_{n_k}, 设 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}=\xi$,

则$\xi\in[a,b]$. 由f, g的连续性得

$$f(\xi)=\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})=\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

$$=\lim_{n\to+\infty} g(x_n)=\lim_{k\to+\infty} g(x_{n_k})=g(\xi).\square$$

Ex.(a,b)上的单调函数的间断点都是跳跃间断点.

Proof. 设f (a,b)上单增, $x_0\in(a,b)$为f的间断点. 由于单调函数在每一点处的左右极限都存在, 必有

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)\neq f(x_0) \quad \text{或} \quad \lim_{x\to x_0+} f(x)\neq f(x_0).$$

f单增,由函数极限的保序性,有

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)\le f(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x)\ge f(x_0).$$

因此, 必有

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)<\lim_{x\to x_0+} f(x).$$

故x_0为跳跃间断点.□

Ex. Riemann函数$R(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 1/q & x=p/q,\ p,q\text{互质},q>0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0,\forall x_0\in\mathbb{R}$.(无理点连续, 有理点间断)

Proof. $\forall\varepsilon>0,\exists N,s.t.1/N<\varepsilon$. 在$U(x_0,1)$中仅存在有限个有理数$p/q$,满足:$p,q$互质,$0<q\le N$. 记这有限个有理数到$x_0$的最小距离为$\delta$, 则$\delta>0$,且对$U(x_0,\delta)$中任意有理数$x$,有$R(x)<1/N<\varepsilon$. 而对$U(x_0,\delta)$中任意无理数$x$,有$R(x)=0$.

故$0\le R(x)<\varepsilon,\forall x\in U(x_0,\delta)$. 从而有$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.□

Ex. $f \in C[0,1], f(0)=f(1)$,则对任意正整数$n, \exists \xi \in [0,1]$,

$s.t.\ f(\xi)=f(\xi+1/n)$.

Proof. 令$g(x)=f(x)-f(x+1/n)$, 则$g \in C[0,1-1/n]$.

$$0=\frac{f(0)-f(1)}{n}=\frac{g(0)+g(1/n)+\cdots+g((n-1)/n)}{n}$$

$$\in [\min_{0\le x\le 1-1/n} g(x), \max_{0\le x\le 1-1/n} g(x)].$$

由介值定理,$\exists \xi \in [0,(n-1)/n] \subset [0,1], s.t.\ g(\xi)=0$,即

$f(\xi)=f(\xi+1/n)$.□

Thm.(Weirstrass第一逼近定理) $f \in C[a,b]$, 则 $\forall \varepsilon > 0$,

存在多项式 $P(x)$, $s.t.$

$$\left| f(x) - P(x) \right| < \varepsilon, \forall x \in [a,b].$$

Proof. 不失一般性, 设 $[a,b]=[0,1]$.

记 $\mathrm{X} = C[0,1]$, Y 为 $[0,1]$ 上多项式构成的集合, 定义映射

$$\mathrm{B}_n : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$$

$$g(t) \mapsto \mathrm{B}_n(g)(x) = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

$\mathrm{B}_n(g)$ 是 $g \in \mathrm{X}$ 在映射 B_n 下的像, $\mathrm{B}_n(g)(x)$ 是以 x 为自变量的 n 次多项式, 称为Bernstein多项式.

映射B_n有如下性质：

(1) B_n是线性映射,即对任意$g,h\in \mathrm{X}, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$,有

$$\mathrm{B}_n(\alpha g+\beta h)=\alpha \mathrm{B}_n(g)+\beta \mathrm{B}_n(h);$$

(2) B_n具有单调性,即$g,h\in \mathrm{X}, g\le h$,有 $\mathrm{B}_n(g)\le \mathrm{B}_n(h)$;

(3) $\mathrm{B}_n(1)(x)=1, \mathrm{B}_n(t)(x)=x, \mathrm{B}_n(t^2)(x)=x^2+\dfrac{x-x^2}{n}$.事实上

$$\mathrm{B}_n(1)(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = [x+(1-x)]^n=1,$$

$$\mathrm{B}_n(t)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = x\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$= x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = x[(x+(1-x)]^{n-1}=x,$$

$$B_n(t^2)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n-1}C_{n-1}^{k-1}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2+\frac{x}{n}=x^2+\frac{x-x^2}{n}.$$

由B_n的性质,给定$s\in[0,1]$,函数$(t-s)^2$在B_n映射下的像为

$$\mathrm{B}_n((t-s)^2)(x)=\mathrm{B}_n(t^2)(x)-2s\mathrm{B}_n(t)(x)+s^2\mathrm{B}_n(1)(x)$$

$$=x^2+\frac{x-x^2}{n}-2sx+s^2=\frac{x-x^2}{n}+(x-s)^2.$$

现在可以利用B_n完成定理证明了. $f\in C[0,1]$,则$\forall\varepsilon>0$,

$\exists\delta>0, s.t.$

$$\left|f(t)-f(s)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall\left|t-s\right|<\delta, t,s\in[0,1].$$

$f\in C[0,1]$,则$\exists M>0, s.t.\left|f(t)\right|<M, \forall t\in[0,1]$.从而

$$\left|f(t)-f(s)\right|<2M\le\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2,\ \forall\left|t-s\right|\ge\delta, t,s\in[0,1].$$

因此$\forall t,s\in[0,1]$,有

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2 < f(t)-f(s) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2.$$

任意固定$s\in[0,1]$,由B_n的性质,有

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{x-x^2}{n}+(x-s)^2\right] < \mathrm{B}_n(f)(x)-f(s)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{x-x^2}{n}+(x-s)^2\right].$$

令$s=x$,得

$$\left|\mathrm{B}_n(f)(x)-f(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\delta^2}(x-x^2) \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2},\ \forall x\in[0,1].$$

任意取定$n > \dfrac{M}{\delta^2 \varepsilon}$,有

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall x \in [0,1]. \square$$

说明：

1. 函数f在x_0连续也等价于$f(x)=f(x_0)+\alpha$, 其中α满足

$$\lim_{x\to x_0}\alpha=0$$

2. 函数f在E上一致连续等价于：对E中任何两个数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$，只要$(x_n-y_n)\to 0$，就有$f(x_n)-f(y_n)\to 0$.

3.单调函数只可能有第一类间断点

4.如果函数单调，则f连续当且仅当f([a，b])是一个以f(a)和f(b)维端点的区间。

5. 单调函数的间断的集合至多可数

练习：

1. $f \in c[a,b]$且$\forall x \in [a,b], \exists y \in [a,b]$满足$|f(y)| \le \frac{1}{2}|f(x)|$.

证明：f在[a, b]中有零点。

2. f在(a, b)连续，且在端点左右极限存在，则f一致连续。

3. f在无限区间(a, +∞）连续且在∞处极限存在，则f一致连续。

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续且严格单调，若

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)(a \le x_n \le b)$,求证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

1.提示：（1）取$x_0 \in [a,b]$，由已知得到

$$\{x_n\} \subset [a,b],\ f(x_n) \le \frac{1}{2} f(x_{n-1}) \le .. \le \frac{1}{2^n} f(x_0)$$

存在子列$x_{n_k} \to \xi \in [a,b]$且由连续性及$henie$定理

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(\xi)| = 0。$$

（2）用反证法。否则$|f(x)|$也没有零点。由于$|f(x)|$也连续

于是$|f(x)| > 0$。从而有最小值，$|f(\xi)| = \min |f(x)|$.

且$\xi \in [a,b]$，于是由已知存在y，使得

$$|f(y)| \le \frac{1}{2} |f(\xi)| < |f(\xi)|$$.矛盾。

4.提示：

反证法：假设$x_n \neq a$.不妨设$f(x)$严格单调增。

设由子列$x_{n_k} \to c > a(\neq a)$,由连续性加$Henion$

定理$f(x_{n_k}) \to f(c) > f(a)$.与已知矛盾。

第7课：连续函数的性质

- **预习 (下次课内容)：**

  第3.1节 导数概念

  第3.2节 导数计算初步

- **作业 (本次课)：**

  练习题2.7：8-9.　　　　问题2.7：5*.

  练习题2.8：1[自己练习], 2(1,3), 3(2,4,6,8), 4*.

  练习题2.9：1(2,4), 2, 4*.　　　　问题2.9：2*.

  练习题2.10：1, 3, 4, 6.