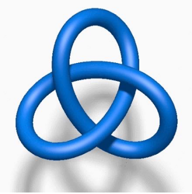
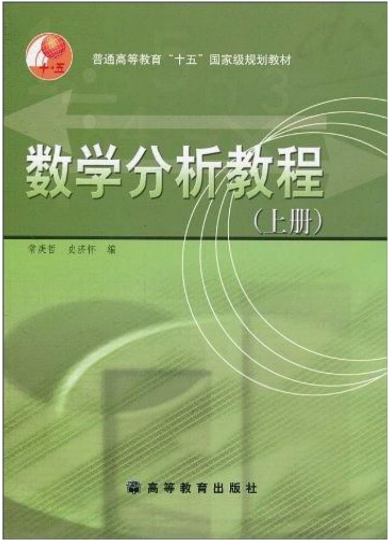
高等微积分

邹文明

第三章: 导数




普通高等教育"十五"国家级规划教材
数学分析教程
(上册)
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

回顾：导数的概念

- 导数：$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- 左导数：$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- 右导数：$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- 导数 $f'(x_0)$ 存在当且仅当 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.
- 若函数 f 在点 x_0 处可导，则它在该点连续；但反过来不成立.

- 几何应用 (曲线的切线与法线): 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

相应的法线方程为

$$x - x_0 = -f'(x_0)(y - f(x_0)).$$

例(复习). 证明: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

证明: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$.

例(复习). 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

例(复习). 求证: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0)$.

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\overset{y=a^x-1}{=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a$.

注: 特别地, 我们有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

例 6. $\forall a > 0$, 求证: $(a^x)' = a^x \ln a$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = a^x$. 则

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{a^y - a^x}{y - x} = \lim_{y \to x} a^x \cdot \frac{a^{y-x} - 1}{y - x} = a^x \ln a.$$

例 7. $\forall a>0$, 求证: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $f(x)=\log_a x$. 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{\log_a y-\log_a x}{y-x} = \lim_{y\to x}\frac{\ln(1+\frac{y-x}{x})}{(y-x)\ln a} \\ &= \lim_{y\to x}\frac{\frac{y-x}{x}}{(y-x)\ln a} = \frac{1}{x\ln a}. \end{aligned}$$

注: 特别地, $(e^x)'=e^x$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

例 8. 设 $k \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = x^k$. 求证:

$$f'(x) = kx^{k-1}.$$

证明: 仅需考虑 $k \geqslant 2$. 若 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \to x} \frac{y^k - x^k}{y - x} = x^k \lim_{y \to x} \frac{(1 + \frac{y-x}{x})^k - 1}{y - x} \\ &= x^k \lim_{y \to x} \frac{k \cdot \frac{y-x}{x}}{y - x} = kx^{k-1}. \end{aligned}$$

另外 $f'(0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y^k}{y} = 0$. 故所证成立.

例 9. 求证: $(\sin x)' = \cos x$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = \sin x$. 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \to x} \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \\ &= \lim_{y \to x} \frac{2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2}}{y - x} = \cos x. \end{aligned}$$

注: 同理可证 $(\cos x)' = -\sin x$.

同学们辛苦了！

典型导数: $$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(e^x)' = e^x, \ (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

导数、微分–继续

定义 2. 假设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为函数, $x_0\in(a,b)$. 称 f 在点 x_0 处可微, 若 $\exists A\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+o(h)\quad(h\to 0).$$

此时还称线性函数 $h\mapsto Ah$ 为 f 在点 x_0 处的微分, 记作 $\mathrm{d}f(x_0)$ 或 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$. 若函数 f 在 (a,b) 的每一点处可微, 则称之在 (a,b) 上可微.

评注

- 微分是函数在点 x_0 处的增量的线性部分.
- 微分 $\mathrm{d}f(x_0)$ 是一个函数使得 $\forall h \in \mathbb{R}$, 均有
$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = Ah.$$

例 10. $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $\pi(x) = x$. 则 $\forall x_0, h \in \mathbb{R}$,

$$\pi(x_0 + h) - \pi(x_0) = h,$$

故 $\mathrm{d}\pi(x_0)(h) = h = \pi(h)$. 也即 $\mathrm{d}\pi(x_0) = \pi$. 通常将 $\mathrm{d}\pi$ 记作 $\mathrm{d}x$. 于是 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 均有 $\mathrm{d}x(x_0) = \pi$. 出于简化记号, 该式常被写成

$$\mathrm{d}x = \pi.$$

定理 1. 函数 f 在点 x_0 处可微当且仅当 f 在该点处可导. 此时 $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.

证明: f 在点 x_0 可微当且仅当 $\exists A \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h) \quad (h \to 0),$$

而这等价于说 $A = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, 也即 f 在点 x_0 处可导且 $A = f'(x_0)$. 此时 $\forall h \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = Ah = f'(x_0)h = f'(x_0)\,\mathrm{d}x(h).$$

于是我们有 $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.

§2. 求导法则

定理 1. (导数的四则运算) 如果 $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ 在点 $x_0 \in (a, b)$ 处可导, 则

(1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 我们有

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

(2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, 若 $g(x_0) \neq 0$.

推论. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

证明: (1) 由函数极限的四则运算法则可知

$$
\begin{aligned}
&(\lambda f+\mu g)'(x_0)\\
=&\lim_{x\to x_0}\frac{(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(x_0)}{x-x_0}\\
=&\lambda\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\mu\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\
=&\lambda f'(x_0)+\mu g'(x_0).
\end{aligned}
$$

(2) 由于 g 在点 x_0 处可导, 因此连续. 则由函数极限的四则运算法则可知

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)g(x) + f(x_0)\big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \Big(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\Big)$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(3) 由于 g 在点 x_0 处可导，因此连续. 再由函数极限的四则运算法则可知

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)}$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

多个函数的情形

利用数学归纳法，我们可以将上述结论推广到多个函数．特别地，我们有

- $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)'(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k'(x_0)$.
- $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\right)'(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k'(x_0) \prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} f_i(x_0)$.

例 1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + e^x \sin x$, 则

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\ln x)' x - (\ln x) x'}{x^2} \\
&\quad + (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' \\
&= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} + e^x \sin x + e^x \cos x \\
&= \frac{1 - \ln x}{x^2} + e^x \sin x + e^x \cos x.
\end{aligned}
$$

例 2. $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

例 3. $(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

例 4. $(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

例 5. $(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

例 6. $(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \operatorname{ch} x$.

例 7. $(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \operatorname{sh} x$.

定理 2. 如果 $g:(a,b)\to(c,d)$ 在点 $x_0\in(a,b)$ 可导, 而 $f:(c,d)\to\mathbb{R}$ 在点 $u_0=g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f\circ g:(a,b)\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 可导, 且

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).$$

证明: $\forall u\in(c,d)$, 定义

$$F(u)=\begin{cases}\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}, & 若\ u\neq u_0,\\ f'(u_0), & 若\ u=u_0.\end{cases}$$

由导数定义可知 F 在点 u_0 连续. 又 g 在点 x_0 可导, 因此连续, 再由连续函数复合法则可得

$$\lim_{x \to x_0} F(g(x)) = F(g(x_0)) = f'(g(x_0)).$$

又 $\forall u \in (c, d)$, $f(u) - f(u_0) = F(u)(u - u_0)$.

故

$$(f\circ g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}F(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=F(g(x_0))g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).$$

与“约分”类似的链式法则

若记 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 则链式法则可表述成

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},$$

更为简单地, 人们通常也将之简写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

一阶微分的形式不变性 (复合求导法则)

若 $y = f(u)$, 则 $\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u$.
若 $u = g(x)$, 则 $y = f \circ g(x)$, 从而我们有

$$\mathrm{d}y = (f \circ g)'(x)\,\mathrm{d}x = f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

但 $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$, 故 $\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u$ 依然成立,
只是此时 u 表示函数 $u = g(x)$.

例 8. 设 $y=\ln(\tan x^2)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解: $$\mathrm{d}y=\frac{1}{\tan x^2}\,\mathrm{d}(\tan x^2)$$

$$=\frac{1}{\tan x^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x^2}\,\mathrm{d}x^2=\frac{2x\,\mathrm{d}x}{\sin x^2\cdot\cos x^2}.$$

例 9. 设 $\alpha \neq 0$, $f(x) = x^{\alpha}$ $(x > 0)$. 求 $f'(x)$.

解:
$$f'(x) = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)'$$
$$= x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

例 10. 求 $f(x)=\sqrt{x}+x^2\ln x\ (x>0)$ 的导数.

解: $f'(x)=(x^{\frac{1}{2}})'+(x^2\ln x)'$

$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'$$

$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2x\ln x+x.$$

例 11. 设 u, v 为可导函数并且 $u(x) > 0$. 定义 $f(x) = u(x)^{v(x)}$, 求 $f'(x)$.

解：
$$f'(x) = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))'$$
$$= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

例 12. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 令 $f(x) = \ln|x|$. 求 $f'(x)$.

解: 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}$.

当 $x < 0$ 时, $f(x) = \ln(-x)$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

于是 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均有 $f'(x) = \frac{1}{x}$.

例 13. 若 g 可导且 $g \neq 0$, 令 $f(x) = \ln |g(x)|$.
则 $f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

例 14. 设 $f(x) = \ln \left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$. 则

$$f'(x) = \frac{\left(x + (x^2 + a)^{\frac{1}{2}}\right)'}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 + a)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + a)'}{x + \sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \frac{1 + x(x^2 + a)^{-\frac{1}{2}}}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{(x + \sqrt{x^2 + a})\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

例 15. 求 $y = f_1 \cdots f_n$ 的导数, 其中 $f_k(x) \neq 0$.

解: $\ln|y| = \sum_{k=1}^{n} \ln|f_k|$. 于是$\frac{y'}{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}$, 进而

$$y' = y \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k} = \sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_{k-1} f_k' f_{k+1} \cdots f_n.$$

例 16. 设 $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2(2x+3)\right)^{\frac{1}{3}}$, 求 $f'(x)$.

解: $\ln|f(x)|=\frac{1}{2}(\ln|x+1|-\ln|x-1|)$
$+\frac{1}{3}(2\ln|x|+\ln|2x+3|)$.

两边求导立刻可得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{2x+3}\right)$$

$$=\frac{1}{1-x^2}+\frac{2(x+1)}{x(2x+3)}.$$

故 $f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2(2x+3)\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{2(x+1)}{x(2x+3)}\right)$.

例 17. 求 $f(x)=\frac{(1+x)(1-2x)}{(1-3x)(1+4x)}$ 的导数.

解:
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= f(x)\cdot\Big(\frac{(1+x)'}{1+x}+\frac{(1-2x)'}{1-2x} \\
&\quad -\frac{(1-3x)'}{1-3x}-\frac{(1+4x)'}{1+4x}\Big) \\
&= \frac{(1+x)(1-2x)}{(1-3x)(1+4x)}\Big(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{2x-1} \\
&\quad +\frac{3}{1-3x}-\frac{4}{1+4x}\Big).
\end{aligned}
$$

定理 3. 设函数 $f:(a,b)\to(c,d)$ 为双射，它在点 x_0 可导且 $f'(x_0)\neq 0$. 若 $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 连续，则反函数 f^{-1} 在点 y_0 处可导，并且我们还有

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

证明: 由于 f 为单射, 那么 $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$,
均有 $f(x) \neq f(x_0)$, 此时定义 $G(x) = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$.
而 $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} G(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$,
由复合函数极限法则得 $\lim\limits_{y\to y_0} G(f^{-1}(y)) = \frac{1}{f'(x_0)}$,
也即 $\lim\limits_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$, 因此 f^{-1} 在点 y_0
可导且 $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

注: 令 $y = f(x)$, 则 $x = f^{-1}(y)$, 从而 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$.

反三角函数

- 反正弦: 正弦函数 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为严格递增, 其值域为 $[-1, 1]$. 由连续函数的反函数定理可知, 其反函数是一个从 $[-1, 1]$ 到 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的连续函数, 记作 $x = \arcsin y$.

- 反余弦: 余弦函数 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上严格递减, 值域为 $[-1, 1]$. 由连续函数的反函数定理可知, 其反函数是从 $[-1, 1]$ 到 $[0, \pi]$ 的连续函数, 记作 $x = \arccos y$.

- 反正切: 正切函数 $y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上为严格递增, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 由连续函数反函数定理可知, 其反函数是从 $(-\infty, +\infty)$ 到 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的连续函数, 记作 $x = \arctan y$.

- 反余切: 余切函数 $y = \cot x$ 在 $(0, \pi)$ 上严格递减, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 由连续函数反函数定理知, 其反函数是从 $(-\infty, +\infty)$ 到 $(0, \pi)$ 的连续函数, 记作 $x = \operatorname{arccot} y$.

例 18. 令 $f(x)=\sin x$, 那么 $f'(x)=\cos x$, 并且 $f^{-1}(y)=\arcsin y$. 于是当 $y\neq\pm1$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},
\end{aligned}
$$

故 $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, 由此可得

$$
(\arccos y)' = (\tfrac{\pi}{2} - \arcsin y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.
$$

例 19. 求函数 $y = x + \ln x$ 的反函数的导数.

解: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}$.

例 20. $(\arctan x)' \overset{x=\tan y}{=} \dfrac{1}{(\tan y)'_y} = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}$

$$= \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = (\frac{\pi}{2} - \arctan x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

基本初等函数的导数公式

- $(c)' = 0 \ \ (c \text{ 为常数})$.
- $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, \ a \neq 1)$.
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ (a > 0, \ a \neq 1)$.
- $(x^k)' = kx^{k-1} \ (k \in \mathbb{N}^*)$.
- $(x^{-k})' = -kx^{-k-1} \ (k \in \mathbb{N}^*, \ x \neq 0)$.
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \ x > 0)$.

基本初等函数的导数公式 (续)

- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$,
  $(\tan x)' = (\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
  $(\cot x)' = (\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

定理 4. 一般而言，初等函数在其自然定义域的内部可导,
其导函数也为初等函数.
——但也有反例: $y = x^{1/3}$

秋风起兮白云飞,草木黄落兮雁南归–汉・刘彻《秋风辞》

同学们辛苦了！