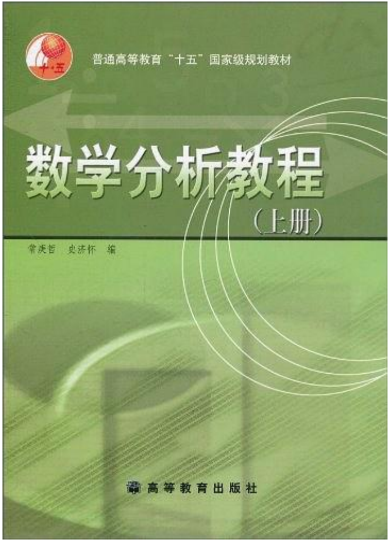
高等微积分(上)

邹文明

第三章: 导数


普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学分析教程
(上册)
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

复习: 微分–求导

- 函数 f 在点 x_0 处可微当且仅当 f 在该点处可导. 此时 $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.

1. 导数的四则运算法则:

- $(\lambda f+\mu g)'(x)=\lambda f'(x)+\mu g'(x)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
- $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x_0)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x_0)g'(x)}{(g(x))^2}$, 其中 $g(x)\neq 0$.
- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$, 其中 $g(x)\neq 0$.

2. 复合求导: $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$.

3. 反函数求导: $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

4. 对数求导: $(\ln|f(x)|)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

隐函数的求导

考虑方程 $f(x,y)=0$. 设 f 可导, $f(x_0,y_0)=0$, 且在点 (x_0,y_0) 的某邻域内可由此将 y 确定成关于 x 的可导函数 $y=y(x)$, 也即存在点 x_0 的某邻域 $B(x_0)$ 使得 $\forall x\in B(x_0)$, $f(x,y(x))=0$. 于是由复合函数求导法则可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))y'(x)=0,$$

其中 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示在 $f(x, y)$ 中仅仅对 x 求导, 而 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 表示在 $f(x, y)$ 中仅仅对 y 求导. 于是我们有

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}.$$

例 21. 假设 $y = y(x)$ 由方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 来确定. 求 $y'(x)$.

解: 将方程对 x 求导得 $y + xy' - e^x + e^y y' = 0$, 从而我们有 $y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}$.

例 22. 求椭圆曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 (x_0, y_0) 的切线方程, 其中 $y_0 \neq 0$.

解: 将上述方程所确定的隐函数记为 $y=y(x)$. 将方程两边对 x 求导可得

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2},$$

由此可得 $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$. 故所求切线方程为

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

例 23. 求解平面曲线 $x^2 + y\cos x - 2e^{xy} = 0$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程.

解: 将上述方程所确定的隐函数记为 $y = y(x)$. 将方程两边对 x 求导可得

$$2x + y'\cos x - y\sin x - 2e^{xy}(y + xy') = 0,$$

则 $y' = \frac{2ye^{xy}+y\sin x-2x}{\cos x-2xe^{xy}}$. 从而 $y'|_{(0,2)} = 4$, 进而所求切线方程为 $y - 2 = 4x$.

由参数方程所确定的函数的求导

考虑平面曲线方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in (a,b).$

设函数 $x(t), y(t)$ 关于参数 t 可导并且 $x'(t) \neq 0.$

则在局部上，参数 t 可反过来看成是 x 的函数，

也即 $t = t(x)$. 于是由反函数求导可得 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$.

另外 $y = y(t(x))$ 也可以被看成是 x 的函数.

将函数 $y = y(t(x))$ 关于 x 求导, 则我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

同样地, 如果 $y'(t) \neq 0$, 局部上, 我们也可以将 x 看成是 y 的函数. 此时我们则有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x'(t)}{y'(t)}.$$

例 24. 考虑曲线的极坐标方程

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in (a,b).$$

若 $x(\theta), y(\theta)$ 均可导且 $x'(\theta) \neq 0$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 由题设可知

$$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta,$$
$$y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta,$$

由此立刻可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta}$.

例 25. (旋轮线, 摆线, 速降线) 求由参数方程

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (0 < t < 2\pi)$$

给出的函数 $y = y(x)$ 的导数.

解: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$.

例 26. 设 $\begin{cases} x = a\sin^3 t \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$，求 $y'(x)$.

解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{-3a(\cos^2 t)\sin t}{3a(\sin^2 t)\cos t} = -\cot t.$

§3.3. 高阶导数

- 若函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 可导，并且它的导函数 $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 处也可导，则称 f 在点 x_0 处二阶可导，将 $(f')'(x_0)$ 记为 $f''(x_0)$，也记作 $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$.
- 若 f' 在 (a,b) 上可导，则称 f 在 (a,b) 上为二阶可导，并将它的导函数 $(f')'$ 记作 f''.

- 若已定义了 n 阶导数 $f^{(n)}$ (也记作 $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$), 则将 $f^{(n)}$ 的导数称为 f 的 $n+1$ 阶导数, 记作 $f^{(n+1)}$, 即 $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, 也可写成

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\Big).$$

- 若 f 在 (a,b) 上 n 阶可导且 $f^{(n)}$ 连续, 那么称 f 为 n 阶连续可导, 也称为 $\mathscr{C}^{(n)}$ 类函数. 所有这样函数组成的集合, 记作 $\mathscr{C}^{(n)}(a,b)$.

- 例如, f 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类是指 f 为可导且 f' 连续, 此时也称 f 为连续可导.

- 通常也将 $\mathscr{C}(a,b)$ 记作 $\mathscr{C}^{(0)}(a,b)$.
- 若 f 在 (a,b) 上有任意阶导数, 那么称 f 为无穷可导, 也称为 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类函数. 所有这样的函数组成的集合, 记作 $\mathscr{C}^{(\infty)}(a,b)$.

- 我们在任意区间上都可以定义类似的概念, 例如 $\mathscr{C}^{(n)}[a,b]$ 和 $\mathscr{C}^{(\infty)}[a,b]$, 在端点处只需考虑相应的单侧导数和单侧连续性.

定理 1. 初等函数在其定义域的内部无穷可导.

基本的高阶求导公式

设 $n \geqslant 1$ 为整数, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则

- $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$,
- $(e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$, 其中 α 可以为复数,
- $\big(\ln(1+x)\big)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$,
- $\sin^{(n)}(x) = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$, $\cos^{(n)}(x) = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$.

注: 由函数方程 (隐函数、反函数) 或者参变量表示的函数, 也可以计算它们的高阶导数.

例 1. 设 $y=\frac{1}{x^2-x-2}$, 求 $y^{(n)}$.

解: 由题设知 $y=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\Big)$, 故

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= \frac{1}{3}\big((x-2)^{-1}\big)^{(n)}-\frac{1}{3}\Big((x+1)^{-1}\Big)^{(n)} \\
&= \frac{1}{3}(-1)(-1-1)\cdots\Big(-1-(n-1)\Big)(x-2)^{-1-n} \\
&\quad -\frac{1}{3}(-1)(-1-1)\cdots\Big(-1-(n-1)\Big)(x+1)^{-1-n} \\
&= \frac{(-1)^n}{3}n!\Big((x-2)^{-1-n}-(x+1)^{-1-n}\Big).
\end{aligned}$$

例 2. 求 $y''|_{(1,1)}$, 而 y 由 $(x^2+y^2)^2 = 4xy$ 确定.

解: 在函数方程两边对 x 求导可得

$$2(x^2+y^2)(x^2+y^2)' = (4xy)' = 4y + 4xy',$$

故 $2(x^2+y^2)(2x+2yy') = 4y+4xy'$. 从而就有

$y' = \frac{x^3+xy^2-y}{x-x^2y-y^3}$, 进而可得

$$y'' = \frac{(3x^2+y^2+2xyy'-y')(x-x^2y-y^3)-(x^3+xy^2-y)(1-2xy-x^2y'-3y^2y')}{(x-x^2y-y^3)^2},$$

于是 $y'|_{(1,1)} = -1$, 进而知 $y''|_{(1,1)} = -6$.

例 3. 如果函数 $y = f(x)$ 二阶可导且其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也二阶可导，求 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}$.

解: 由反函数定理可得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(x)}$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \\ &= -\frac{1}{(f'(x))^2} \cdot f''(x) \cdot \frac{1}{f'(x)}\end{aligned}$$

例 4. 由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 来求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解: 首先我们有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$, 由此立刻可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2}\cdot\frac{1}{x'(t)}\\&=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}.\end{aligned}$$

例 5. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 来确定，求 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解: 由于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}$$

$$=\frac{(\cos t)(1-\cos t)-(\sin t)(\sin t)}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}$$

$$=\ldots\ldots$$

定理 2. (高阶导数的四则运算法则)

设函数 $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ 为 n 阶可导, 则

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

2. (Leibniz 公式) $\quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$,

   其中 $\binom{n}{k} = \mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

证明: 第一个公式源于求导的线性性.

对 $n \geqslant 1$ 用数学归纳法来证明 Leibniz 公式.
当 $n = 1$ 时, 由导数的四则运算法则立刻可得

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg' \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},\end{aligned}$$

因此此时所证结论成立.
假设所证结论对 $n \geqslant 1$ 成立. 则我们有

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)},$$

故由数学归纳法可知所证结论成立.

例 6. 设 $y = x^2 \sin 2x$. 计算 $y^{(n)}$ $(n \geqslant 2)$.

解:
$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (\sin 2x)^{(n-k)} \\
&= x^2 \cdot 2^n \cdot \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&\quad + \binom{n}{1} \cdot 2x \cdot 2^{n-1} \cdot \sin\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\
&\quad + \binom{n}{2} \cdot 2 \cdot 2^{n-2} \cdot \sin\left(2x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

例 7. 设 $f(x)=(x+1)^2\ln(1-x)$. 求 $f^{(n)}(-1)\ (n\geqslant 1)$.

解: 由题立刻可知

$$f'(x)=2(x+1)\ln(1-x)+\frac{(x+1)^2}{x-1},$$

于是我们有

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\ln(1-x)+\frac{2(x+1)}{x-1} \\ &\quad +\frac{2(x+1)(x-1)-(x+1)^2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

从而 $f'(-1)=0,\ f''(-1)=2\ln 2.$

当 $n \geqslant 3$ 时, 由 Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (x+1)^2(\ln(1-x))^{(n)} \\ &\quad +2n(x+1)(\ln(1-x))^{(n-1)} \\ &\quad +n(n-1)(\ln(1-x))^{(n-2)}, \end{aligned}$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(-1) &= n(n-1)(\ln(1-x))^{(n-2)}\Big|_{x=-1} \\ &= n(n-1)\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(x-1)^{n-2}}\Big|_{x=-1} \\ &= -\frac{n!}{(n-2)2^{n-2}}. \end{aligned}$$

例 8. 求 $f(x)=\ln(2-3x)$ 的第 10 阶导数.

解: 由题设知 $f'(x)=\frac{1}{2-3x}\cdot(2-3x)'=\frac{-3}{2-3x}$, 故

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (-3)\cdot\frac{-1}{(2-3x)^2}\cdot(2-3x)' \\
&= (-3)\cdot\frac{3}{(2-3x)^2}=\frac{-3^2}{(2-3x)^2}.
\end{aligned}
$$

又 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $\left(\frac{1}{(2-3x)^n}\right)'=\frac{3n}{(2-3x)^{n+1}}$, 则由数学归纳法立刻可得

$$f^{(10)}(x)=\frac{-3^{10}\cdot 9!}{(2-3x)^{10}}.$$

同学们辛苦了！