第 1 章　从自然数到实数

以“你识数吗？”作为这一章的副标题应该是恰如其分的. 微积分以函数为研究对象，函数的自变量和函数值都是实数，要研究函数的性质就必须先了解实数的性质.

人们对于数的认知始于幼儿时期的数（shǔ，counting）数（shù，numbers），到小学和中学阶段，逐步认识了自然数、分数（也就是有理数）和实数，并且学习了它们的一些基本运算（主要是代数运算，加减乘除，乘方和开方）. 我们知道有理数都可以表示为整数的比，从而有理数的四则运算可以通过其分数形式转化为整数的四则运算. 此外，我们还知道利用阿拉伯数字可以把实数表示为十进制小数，有理数可以表示为无限循环小数，而像 $\sqrt{2}, \pi$ 这样的数只能写成无限不循环小数（我们可以把有限小数看成特殊的无限循环小数），它们是无理数. 而对两个十进制无限小数，确定它们的和差积商的十进制小数表达其实并非是轻而易举的事情.

在这一章中，我们要回答的主要问题是：为什么要引进实数？为什么有理数无法满足微积分的需要？实数和有理数的根本区别在哪里？这需要我们对实数有一个更深入的理解.

我们假定读者熟悉基本逻辑规则以及集合的语言，在本章最后一节的附录中我们列举了一些常用记号供读者对照查看.

1.1　自然数集与数学归纳法

定义 1.1.1. 自然数集 $\mathbb{N}$ 是这样一个集合，存在元素 $0 \in \mathbb{N}$ 以及一个单射 $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\} =: \mathbb{N}^*$，使得 $\mathbb{N}$ 满足**数学归纳法原理**，即：对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 A，只要 (1) $0 \in A$ 且 (2) $\forall n$，$n \in A \Rightarrow S(n) \in A$，就有 $A = \mathbb{N}$.

称 $S(n)$ 为 n 的**后继**（successor），记 $1 = S(0)$，$2 = S(1)$，$3 = S(2)$ 等等.

注 1.1.2. (1) $B =: A$ 或 $A := B$ 表示把已有定义的表达式 B 记为符号 A.
(2) $\forall$ 是逻辑符号，表示“对任意”，“对每一个”，“对所有”.

(3) 上述定义中所称“单射”是这样的映射 $f: A \to B$，它满足：$\forall x, y$，$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$，即任何一个函数值只能被自变量的一个值取得.

(4) 由数学归纳法原理可以证明上述单射 $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ 是个满射，从而是个一一对应：令 $A = \{0\} \cup S(\mathbb{N})$. 则 $0 \in A$，并且若 $n \in A$，则 $S(n) \in S(\mathbb{N}) \subset A$. 因此 $A = \mathbb{N}$. 所以 $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$. 因此对每一个非零的自然数 m 都存在唯一的自然数 n 使得 $S(n) = m$.

(5) 与其说 $\mathbb{N}$ 是自然数集，不如说 $(\mathbb{N}, 0, S)$ 是自然数集. 也就是说自然数集不单单是一个集合，它的元素之间具有特定的关系.

(6) 在很多传统教材中，自然数是从数字 1 开始的. 现代教材教材中，自然数从 0 开始，因为空集 $\emptyset$ 的元素个数为 0. 另外，在数的进制表示法中数字 0 有着与其他数字不同的作用，它也被用于占位符.

定义 1.1.3. 自然数集 $\mathbb{N}$ 上的**加法**和**乘法**. 对任意 $m, n \in \mathbb{N}$，定义

$$m + n = \begin{cases} m, & \text{若 } n = 0; \\ S(m + n'), & \text{若 } n = S(n'). \end{cases}$$

$$m \cdot n = \begin{cases} 0, & \text{若 } n = 0; \\ m \cdot n' + m, & \text{若 } n = S(n'). \end{cases}$$

由上述定义知

$$S(m) = S(m + 0) = m + S(0) = m + 1,$$
$$m + (n + 1) = m + S(n) = S(m + n) = (m + n) + 1,$$
$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m.$$

定理 1.1.4. *$\mathbb{N}$ 上的加法满足***结合律**：*即对任意 $m, n, k \in \mathbb{N}$，*

$$m + (n + k) = (m + n) + k.$$

证明. 对 k 做数学归纳法.

令 $A = \{k \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N}, m + (n + k) = (m + n) + k\}$.

由加法定义知 $0, 1 \in A$.

若 $k \in A$，则

$$\begin{aligned} m + (n + (k + 1)) = m + ((n + k) + 1) &= (m + (n + k)) + 1 && \text{(加法定义)} \\ &= ((m + n) + k) + 1 && (k \in A) \\ &= (m + n) + (k + 1). && \text{(加法定义)} \end{aligned}$$

因此 $k + 1 \in A$. 从而 $A = \mathbb{N}$. $\square$

定理 1.1.5. 0 是 $\mathbb{N}$ 的加法**单位元**：即对任意 $m \in \mathbb{N}$，$m+0=0+m=m$.

证明. 对 m 做数学归纳法.

令 $A=\{m \in \mathbb{N} \mid m+0=0+m=m\}$.

因为 $0+0=0$，所以 $0 \in A$.

设 $m \in A$. 则由加法定义知

$$(m+1)+0=m+1=(0+m)+1=0+(m+1),$$

所以 $m+1 \in A$.

因此 $A=\mathbb{N}$. □

定理 1.1.6. $\mathbb{N}$ 上的加法满足**交换律**：即对任意 $m, n \in \mathbb{N}$，$m+n=n+m$.

证明. 对 n 做数学归纳法. 令 $A=\{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, m+n=n+m\}$.

由于 0 是加法单位元，所以 $0 \in A$.

下证 $1 \in A$，即 $\forall m \in \mathbb{N}$，$m+1=1+m$. 为此对 m 做数学归纳法.

令 $B=\{m \in \mathbb{N} \mid m+1=1+m\}$. 则 $0 \in B$. 对任意 $m \in B$，

$$1+(m+1)=(1+m)+1=(m+1)+1,$$

所以 $m+1 \in B$，因此 $B=\mathbb{N}$. 从而 $1 \in A$.

继续完成对 n 的数学归纳法证明. 设 $n \in A$. 则

$$\begin{aligned}
m+(n+1) &= (m+n)+1 && (\text{加法定义}) \\
&= (n+m)+1 && (n \in A) \\
&= n+(m+1) && (\text{加法定义}) \\
&= n+(1+m) && (1 \in A) \\
&= (n+1)+m, && (\text{加法结合律})
\end{aligned}$$

因此 $n+1 \in A$. 从而 $A=\mathbb{N}$. □

定理 1.1.7. $\mathbb{N}$ 上的加法对乘法满足**分配律**：即对任意 $m, n, k \in \mathbb{N}$,

$$(m+n) \cdot k=m \cdot k+n \cdot k.$$

定理 1.1.8. 1 是 $\mathbb{N}$ 上乘法的单位元：即对任意 $m \in \mathbb{N}$,

$$m \cdot 1=1 \cdot m=m.$$

定理 1.1.9. $\mathbb{N}$ 上的乘法满足交换律：即对任意 $m, n \in \mathbb{N}$，$m \cdot n=n \cdot m$.

定理 1.1.10. $\mathbb{N}$ 上的乘法满足结合律：即对任意 $m, n, k \in \mathbb{N}$,

$$m \cdot(n \cdot k)=(m \cdot n) \cdot k.$$

习题 1.1

1. 证明定理 1.1.7，1.1.8，1.1.9 和 1.1.10.

2. 证明对任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$2 \cdot (0+1+2+3+\cdots+n) = n(n+1),$$

$$1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)\cdot(n+1).$$

3. 设 $m, n, k \in \mathbb{N}$，证明
(1) （加法消去律）：若 $m+k=n+k$，则 $m=n$.
(2) （乘法消去律）：若 $k \neq 0$ 且 $m \cdot k = n \cdot k$，则 $m=n$.

4. (1) 证明：对任意 $m, n \in \mathbb{N}$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $m=n+k$ 或者 $n=m+k$. 对前者我们记 $n \leq m$（也记成 $m \geq n$）.
(2) 证明对 $\mathbb{N}$ 的任意非空子集 A，存在 $m \in A$ 使得对任意 $n \in A$ 都有 $m \leq n$. 即 $\mathbb{N}$ 的任意非空子集都有最小值.
(3) 设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $f(n+1) \leq f(n)$. 证明：存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $n \geq N$，都有 $f(n) = f(N)$.

5. 设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 满足：对任意 $k \in \mathbb{N}$，若 $S(k) \in A$，则 $k \in A$. 证明以下三种情况之一恰有一个成立：
(1) $A = \emptyset$;
(2) 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $n \in A$ 但 $S(n) \notin A$;
(3) $A = \mathbb{N}$.

6. （$\mathbb{N}$ 中的带余除法）设 $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$. 证明存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $kn \leq m < (k+1)n$（这里 $a < b$ 表示 $a \leq b$ 且 $a \neq b$），从而存在 $r \in \mathbb{N}, r < n$ 使得 $m = kn + r$.

7. 如果 $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ 和 $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ 是两个自然数集，映射 $f: \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ 满足

$$f(0_1) = 0_2,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_1, S_2(f(n)) = f(S_1(n)).$$

问以下结论是否成立？
(1) $\forall m_1, n_1 \in \mathbb{N}_1$，$f(m_1 \oplus_1 n_1) = f(m_1) \oplus_2 f(n_1)$，$f(m_1 \otimes_1 n_1) = f(m_1) \otimes_2 f(n_1)$，其中 $\oplus_k, \otimes_k$ 分别是 $(\mathbb{N}_k, 0_k, S_k)$ 中的加法和乘法;
(2) $f: \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ 既是单射，又是满射.

1.2 整数集

定义 1.2.1. 称 $\mathbb{Z} = \{m - n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ 为**整数集**，称其元素为**整数**. 约定：对 $m, n, p, q \in \mathbb{N}$，

$$m - n = p - q, \quad \text{若 } m + q = p + n.$$

定义 $\mathbb{Z}$ 上的加法和乘法为：

$$(m - n) + (p - q) := (m + p) - (n + q),$$
$$(m - n) \cdot (p - q) := (m \cdot p + n \cdot q) - (n \cdot p + m \cdot q).$$

定理 1.2.2. *$\mathbb{Z}$ 上的加法和乘法是良好定义的，即：若*

$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2, \quad p_1 - q_1 = p_2 - q_2,$$

则

$$(m_1 - n_1) + (p_1 - q_1) = (m_2 - n_2) + (p_2 - q_2),$$

$$(m_1 - n_1) \cdot (p_1 - q_1) = (m_2 - n_2) \cdot (p_2 - q_2).$$

证明. 关于加法的证明留给读者完成. 下面证明关于乘法的结论.

设 $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$，即 $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$. 于是

$$(m_k - n_k) \cdot (p_1 - q_1) = (m_k p_1 + n_k q_1) - (m_k q_1 + n_k p_1), \quad k = 1, 2.$$

而

$$\begin{aligned}(m_1 p_1 + n_1 q_1) + (m_2 q_1 + n_2 p_1) &= (m_1 + n_2) p_1 + (n_1 + m_2) q_1 \\ &= (m_1 + n_2)(p_1 + q_1) \\ &= (m_2 + n_1) p_1 + (n_2 + m_1) q_1 \\ &= (m_2 p_1 + n_2 q_1) + (m_1 q_1 + n_1 p_1),\end{aligned}$$

因此

$$(m_1 - n_1) \cdot (p_1 - q_1) = (m_2 - n_2) \cdot (p_1 - q_1).$$

同理

$$(m_2 - n_2) \cdot (p_1 - q_1) = (m_2 - n_2) \cdot (p_2 - q_2).$$

所以 $\mathbb{Z}$ 上的乘法与代表元选取无关. □

定理 1.2.3. *1. $\mathbb{Z}$ 上的加法和乘法满足交换律、结合律、分配律.*

2. 记 $0_{\mathbb{Z}} = 0 - 0$. 则 $0_{\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的**加法单位元**：对任意 $z \in \mathbb{Z}$，$z + 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}} + z = z$.

3. 对任意 $z \in \mathbb{Z}$，$z = m - n$（$m, n \in \mathbb{N}$），令 $-z = n - m$，则 $-z \in \mathbb{Z}$ 满足 $z + (-z) = (-z) + z = 0_{\mathbb{Z}}$. 即任何整数 z 有**加法逆元** $-z$.

4. $1_{\mathbb{Z}} = 1 - 0$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的**乘法单位元**：对任意 $z \in \mathbb{Z}$，$z \cdot 1_{\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}} \cdot z = z$.

利用加法逆元，可以引进加法的逆运算——减法：$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

上述定理证明留作练习.

定理 1.2.4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$，$f(n) := n - 0$（$n \in \mathbb{N}$）是 $\mathbb{N}$ 到 $f(\mathbb{N})$ 的一个一一对应，且 $f(0) = 0_{\mathbb{Z}}$，$f(S(n)) = f(n) + 1$.

证明. 若 $f(n) = f(m)$，则 $n - 0 = m - 0$，从而按整数的定义，$n + 0 = m + 0$，所以 $n = m$. 所以 $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ 是一一对应. $f(0) = 0 - 0 = 0$，

$$\begin{aligned}
f(S(n)) &= S(n) - 0 && (\, f \text{ 的定义}) \\
&= (n+1) - 0 && (\text{自然数加法的定义}) \\
&= (n-0) + (1-0) && (\text{整数加法的定义}) \\
&= f(n) + 1. && (\, f \text{ 和整数 } 1 \text{ 的定义})
\end{aligned}$$

□

根据这个定理和习题 1.1 的第 6 题，我们可视 $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$，从而 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. 记 $\mathbb{Z}^+ = f(\mathbb{N}^*)$，可以简记 $0_{\mathbb{Z}} = 0$，$1_{\mathbb{Z}} = 1$.

定理 1.2.5. 对任意 $z \in \mathbb{Z}$，$z \in \mathbb{Z}^+$、$z = 0$ 和 $-z \in \mathbb{Z}^+$ 三者中恰有一个成立.

证明. 我们证明对任何 $z \in \mathbb{Z}$，$z \in \mathbb{Z}^+$ 与 $-z \in \mathbb{Z}^+$中至多只有一个成立.

若 $z = m - n \in \mathbb{Z}^+$ 满足 $-z \in \mathbb{Z}^+$，则存在 $k, l \in \mathbb{N}$ 使得

$$m - n = S(k) - 0, \quad n - m = S(l) - 0.$$

二者相加得到

$$0 - 0 = (m+n) - (n+m) = (S(k) + S(l)) - 0 = S(k + S(l)) - 0,$$

从而 $0 = S(k + S(l))$，但这与 $0 \notin S(\mathbb{N})$ 矛盾. 所以对任何 $z \in \mathbb{Z}$，$z \in \mathbb{Z}^+$ 与 $-z \in \mathbb{Z}^+$ 中至多只有一个成立.

又因为 $0 = -0$，所以 $0 \notin \mathbb{Z}^+$，$-0 \notin \mathbb{Z}^+$. 因此对任意 $z \in \mathbb{Z}$，$z = 0$、$z \in \mathbb{Z}^+$ 与 $-z \in \mathbb{Z}^+$中至多只有一个成立.

设 $z = m - n$（$m, n \in \mathbb{N}$）满足 $z \neq 0$. 则 $m \neq n$. 由习题 1.1 中的结论可知，存在 $k \in \mathbb{N}^* = S(\mathbb{N})$ 使得 $m = n + k$ 或者 $n = m + k$. 对前者，我们有 $z \in \mathbb{Z}^+$，对后者我们有 $-z = n - m \in \mathbb{Z}^+$. □

至此我们知道，整数集 $\mathbb{Z}$ 由零、正整数（$\mathbb{Z}^+$ 中元素）、负整数（满足 $-z \in \mathbb{Z}^+$ 的整数 z）组成，有加法，有乘法，满足交换、结合、分配律，加法乘法各有单位元，加法有逆元.

习题 1.2

1. 证明定理 1.2.3.

2. 证明对任意自然数 m, n， $m + (-n) = m - n$.

3. 证明对任意整数 m, n，

$$-(-m) = m, \quad m \cdot (-n) = -m \cdot n, \quad (-m) \cdot (-n) = m \cdot n.$$

1.3 有理数集

定义 1.3.1. 称 $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{z_1}{z_2} \middle| z_1 \in \mathbb{Z}, z_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}$ 为**有理数集**，称其元素为**有理数**. 约定：对 $z_1, u_1 \in \mathbb{Z}$ 和 $z_2, u_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{u_1}{u_2}, \quad 若 z_1 \cdot u_2 = z_2 \cdot u_1.$$

定义 $\mathbb{Q}$ 上的加法和乘法为

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{u_1}{u_2} := \frac{z_1 \cdot u_2 + z_2 \cdot u_1}{z_2 \cdot u_2},$$
$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{u_1}{u_2} := \frac{z_1 \cdot u_1}{z_2 \cdot u_2},$$

并记

$$0_{\mathbb{Q}} := \frac{0}{1}, \quad 1_{\mathbb{Q}} := \frac{1}{1},$$
$$-\frac{z_1}{z_2} := \frac{-z_1}{z_2},$$
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-1} := \frac{z_2}{z_1}, \quad 若 z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

定理 1.3.2. $\mathbb{Q}$ 是一个域，即 $\mathbb{Q}$ 上的加法和乘法是良好定义的，且满足交换律、结合律和分配律；$0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}$ 分别是加法和乘法的单位元，且 $1_{\mathbb{Q}} \neq 0_{\mathbb{Q}}$；任何 $r \in \mathbb{Q}$ 有加法逆元；任何 $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0_{\mathbb{Q}}\}$ 有乘法逆元 r^{-1}，即 $r \cdot r^{-1} = r^{-1} \cdot r = 1_{\mathbb{Q}}$.

利用乘法逆元，可以引进乘法的逆运算——除法，并且可以把正整数指数的幂（即乘方运算）拓展为整数指数的幂. 对域中元素 a 和 $b \neq 0$ 以及正整数 n，

记

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}, \qquad a^n := \underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 个 }a\text{ 的乘积}}, \qquad b^{-n} = \underbrace{(b^{-1}) \cdot \cdots \cdot (b^{-1})}_{n\text{ 个 }b^{-1}\text{ 的乘积}}, \qquad b^0 = 1.$$

定理 1.3.3. 乘方运算具有以下性质：对任意 $a, b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$，对任意整数 m, n，都有

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^m b^m = (ab)^m.$$

定理 1.3.4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, f(z) := \frac{z}{1}$ 是一个单射，并且满足对任意 $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$，$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$，$f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$，$f(0) = 0_{\mathbb{Q}}$，$f(1) = 1_{\mathbb{Q}}$. 因此可视 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$，简记 $0_{\mathbb{Q}} = 0$，$1_{\mathbb{Q}} = 1$.

定理 1.3.5. 记 $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{Q} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^+ \right\}$，则 $\forall r \in \mathbb{Q}$，$r \in \mathbb{Q}^+$、$r = 0$ 和 $-r \in \mathbb{Q}^+$ 三者中恰有一个成立.

定义 1.3.6. $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$，定义

$$r_1 < r_2\text{（也记作 } r_2 > r_1\text{），若 } r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}^+\text{；}$$
$$r_1 \leq r_2\text{（也记作 } r_2 \geq r_1\text{），若 } r_1 < r_2 \text{ 或者 } r_1 = r_2.$$

推论 1.3.7. $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$，$r_1 < r_2$、$r_1 = r_2$ 和 $r_1 > r_2$ 三者中恰有一个成立.

定理 1.3.8. $\forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}$，

$$r_1 < r_2 \Rightarrow r_1 + r_3 < r_2 + r_3; \qquad r_1 < r_2 \text{ 且 } r_3 > 0 \Rightarrow r_1 \cdot r_3 < r_2 \cdot r_3.$$

推论 1.3.9. $\forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}$，

$$r_1 \leq r_2 \text{ 且 } r_2 \leq r_3 \Rightarrow r_1 \leq r_3\text{；（传递）}$$
$$r_1 \leq r_1\text{；（自反）}$$
$$r_1 \leq r_2 \text{ 且 } r_2 \leq r_1 \Rightarrow r_1 = r_2.\text{（反对称）}$$

上述定理和推论的证明留作练习.

定义 1.3.10. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，$\mathbb{F}^+ \subseteq \mathbb{F}$ 满足：(1) $\forall x \in \mathbb{F}$，$x \in \mathbb{F}^+$、$x = 0$ 和 $-x \in \mathbb{F}^+$ 三者中恰有一个成立；(2) $\forall x, y \in \mathbb{F}^+$，$x + y, xy \in \mathbb{F}^+$. 则称 $(\mathbb{F}, \mathbb{F}^+)$ 是一个**序域**（也简称 $\mathbb{F}$ 是一个序域）.

称 $x \in \mathbb{F}$ 是**非负的**，如果 $x = 0$ 或者 $x \in \mathbb{F}^+$.

现在我们总结一下本节的结论：

定理 1.3.11. $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+)$ 是一个序域.

事实上，在本节习题中，我们可以证明：$(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+)$ 是最小的序域.

例 1.3.12. 在任何序域 $\mathbb{F}$ 中，对任意正整数 n，x^n 关于正数 x 是增函数.

证明. 对 n 做数学归纳法可得. □

有理数集虽然满足了四则运算（加减乘除）以及比较大小的需要，但它是有漏洞的.

例 1.3.13. 不存在非负的有理数 r 使得 $r^2 = 2$.

证明. （反证法）假设存在非负的有理数 r 使得 $r^2 = 2$. 于是存在 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$，则 $m^2 = 2n^2$. 记 $A = \{n \in \mathbb{N}^* | 存在自然数\ m\ 使得\ m^2 = 2n^2\}$. 于是 A 是自然数集的非空子集，从而有最小元 n.

由于 $n^2 < m^2 = 2n^2 < (2n)^2$，且函数 x^2 关于正数 x 是增函数，所以 $n < m < 2n$.

取 $n' = m - n$，$m' = 2n - m$，则 $m', n' \in \mathbb{N}^*$，$n' < n$，$m' < m$，

$$m'^2 - 2n'^2 = (2n - m)^2 - 2(m - n)^2 = 2n^2 - m^2 = 0,$$

所以 $m'^2 = 2n'^2$. 从而 $n' \in A$. 但这与 n 是 A 的最小元矛盾.

因此不存在非负的有理数 r 使得 $r^2 = 2$. □

习题 1.3

1. 证明本节中未证明的定理和推论.

2. (a) 证明对于任何有理数 $r \in \mathbb{Q}$，存在唯一的整数 $z \in \mathbb{Z}$ 使得 $z \leq r < z + 1$. 我们记 $z =: [r]$，称它为 r 的**整数部分**.

   (b) （正整数的进位制表示法）任意给定正整数 $p > 1$，证明对于任意正整数 N，N 可以唯一写成如下形式

   $$N = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0,$$

   其中 n 是非负整数，a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 是小于 p 的非负整数，$a_n > 0$.

3. 重要的不等式. 以下设 $\mathbb{F}$ 为任一序域.

   (a) 证明 $x^2 \geq 0$（$\forall x \in \mathbb{F}$），并且 $x^2 = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

   (b) （**Cauchy-Schwarz 不等式**）证明对任意 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$，

   $$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2),$$

并且其中等式成立当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得

$$a_k = \lambda b_k, \quad \forall 1 \le k \le n,$$

或者

$$b_k = \lambda a_k, \quad \forall 1 \le k \le n.$$

事实上，成立以下 Lagrange 恒等式

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 = \sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

这个等式的几何意义是 $\mathbb{F}^n$ 中由向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ 所形成的平行四边形的面积与它在各 2 维坐标平面中的投影平行四边形面积之间的关系.

(c) （**Bernoulli 不等式**）设 $x_1, \ldots, x_n > -1$，且 $x_ix_j \ge 0(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\})$. 证明

$$(1 + x_1) \cdot \cdots \cdot (1 + x_n) \ge 1 + (x_1 + \cdots + x_n),$$

其中等号成立当且仅当 $n = 1$ 或者 $x_1, \ldots, x_n$ 中至多有一个非零. 经典的 Bernoulli 不等式：

$$(1 + x)^n \ge 1 + nx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x > -1.$$

(d) 利用 Bernoulli 不等式证明对任何正整数 n 以及任何正数 a, b，都有

$$ab^n \le \left(\frac{a + nb}{n + 1}\right)^{n+1},$$

且等号成立当且仅当 $a = b$. 并利用这个不等式证明对任何正整数 n，都有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

(e) （**算术-几何平均值不等式**）利用(d)中不等式证明：在任何序域 $\mathbb{F}$ 中，对任意正整数 n 和非负数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$，都成立

$$x_1x_2 \cdot \cdots \cdot x_n \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

其中等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. （提示：不是每个序域中都可以使用开方运算）

(f) （**广义的算术-几何平均值不等式**）证明对任何非负数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$ 和任何正整数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 都成立

$$x_1^{p_1}x_2^{p_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{p_n} \le \left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

其中等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

4. 证明：对任意正有理数 ε，都存在非负有理数 x 使得 $x^2 < 2 < (x+\varepsilon)^2$.

5. 证明：若正整数 p 不是完全平方数（即某个整数的平方），则不存在有理数 r 使得 $r^2 = p$.（尽可能不使用算术基本定理，即每个正整数可以唯一分解为有限多个素数的乘积）

6. 证明 $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+)$ 是最小的序域. 即对任何序域 $(\mathbb{F}, \mathbb{F}^+)$，$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$，$\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{F}^+$.

7. $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 按如下加法和乘法构成一个域，它是最小的域，但不是序域.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

8. 记 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$. 证明 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 上可以合理定义加法和乘法以及序使得 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 是一个序域，并且 $\mathbb{Q}$ 可以等同于 $\{a + 0\sqrt{2} | a \in \mathbb{Q}\}$，并且二者上面定义的加法、乘法和序是相容的.

1.4 实数集

设 $(\mathbb{F}, \mathbb{F}^+)$ 是一个序域.

定义 1.4.1. 对 $x \in \mathbb{F}$，记

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{若 } x \in \mathbb{F}^+, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \\ -x, & \text{若 } -x \in \mathbb{F}^+. \end{cases}$$

称 $|x|$ 为 x 的**绝对值**或**模**.

定理 1.4.2. *1.* $\forall x \in \mathbb{F}$，$|x| \geq 0$；$|x| = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

2. $\forall x, y \in \mathbb{F}$，$|xy| = |x| \cdot |y|$，$|x + y| \leq |x| + |y|$.

3. 于是 $d(x, y) = |x - y|$ 定义了 $\mathbb{F}$ 上一个**距离**：$\forall x, y, z \in \mathbb{F}$，

$$d(x, y) = d(y, x) \geq 0;$$
$$d(x, y) = 0 \text{ 当且仅当 } x = y;$$
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

证明. 证明作为练习留给读者完成. □

有了距离，就可以定量研究逼近的误差. 因为有序，所以就有所谓不足近似值和过剩近似值. 这都离不开下面这些概念.

定义 1.4.3. 设 $A \subseteq \mathbb{F}$.

称 A 在域 $\mathbb{F}$ 中**有界**，若存在 $M \in \mathbb{F}^+$ 使得：$x \in A \Rightarrow |x| \leq M$. 此时称这样的正数 M 为 A（在域 $\mathbb{F}$ 中）的一个**界**.

称 A 在域 $\mathbb{F}$ 中**有上界**（相应地，**有下界**），若存在 $b \in \mathbb{F}$ 使得：$\forall x, x \in A \Rightarrow x \leq b$（相应地，$\forall x, x \in A \Rightarrow x \geq b$）. 此时称这样的 b 为 A 在域 $\mathbb{F}$ 中的一个**上界**（相应地，**下界**）.

如果 A 的成员 M 是 A 的上界，则称 M 为 A 的**最大值**，记

$$M =: \max A =: \max_{x \in A} x.$$

如果 A 的成员 m 是 A 的下界，则称 m 为 A 的**最小值**，记

$$m =: \min A =: \min_{x \in A} x.$$

如果 A 在域 $\mathbb{F}$ 中存在最小上界，则称这个最小上界为 A 在域 $\mathbb{F}$ 中的**上确界**，记为 $\sup_{\mathbb{F}} A$ 或 $\sup\limits_{x \in A} x$.

如果 A 在域 $\mathbb{F}$ 中存在最大下界，则称这个最大下界为 A 在域 $\mathbb{F}$ 中的**下确界**，记为 $\inf_{\mathbb{F}} A$ 或 $\inf\limits_{x \in A} x$.

在不引起歧义的情况下，我们简记 $\sup A := \sup_{\mathbb{F}} A$，$\inf A := \inf_{\mathbb{F}} A$.

不难发现：对序域 $\mathbb{F}$ 的子集 A，

1. A 有界当且仅当 A 既有上界又有下界.

2. 若 A 非空且只有有限多个元素，则 A 必然有最大值和最小值.

3. 如果 A 有最大值，则 $\max A = \sup A$；如果 A 有最小值，则 $\min A = \inf A$.

例 1.4.4. 对 $A = \{x \in \mathbb{F} \,|\, 0 \leq x < 1\}$，$A$ 有最小值 0，从而 $\inf A = \min A = 0$. A 有上界，但没有最大值：$\forall x \in A$，$0 \leq x < \frac{x+1}{2} < 1$，所以 $\frac{x+1}{2} \in A$. 1 是 A 的最小上界，$\sup A = 1$：1 是 A 的一个上界；$\forall x \in \mathbb{F}$，若 $x < 1$，则 $\frac{\max\{x,0\}+1}{2} \in A$，而 $\frac{\max\{x,0\}+1}{2} > x$，所以 x 不是 A 的上界. □

例 1.4.5. 空集 $\emptyset$ 是有界集，任何 $M \in \mathbb{F}$ 既是 $\emptyset$ 的上界也是 $\emptyset$ 的下界. $\emptyset$ 既无上确界，也无下确界. □

例 1.4.6. 自然数集 $\mathbb{N}^*$ 在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中无上界. 事实上，对任何有理数 $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$，$\frac{m}{n}\le\left|\frac{m}{n}\right|=\frac{|m|}{|n|}\le|m|<|m|+1$，其中 $|m|+1\in\mathbb{N}^*$. 所以 $\frac{m}{n}$ 不是 $\mathbb{N}^*$ 的上界. $\square$

例 1.4.7. 集合 $A=\left\{x\in\mathbb{Q}|x>0,x^2<2\right\}$ 非空，在 $\mathbb{Q}$ 中有上界，但在 $\mathbb{Q}$ 中没有上确界.

证明. 因为 $1\in A$，所以 A 不是空集. 从如下断言知 2 是 A 的一个上界.

断言：*若 $y>0$ 满足 $y^2\ge 2$，则 y 是 A 的一个上界.*

断言的证明：若 y 不是 A 的一个上界，则存在 $x\in A$ 使得 $x>y>0$，于是 $x^2>x\cdot y>y^2\ge 2$，这与 $x\in A$ 矛盾. **断言证毕.**

设 $b\in\mathbb{Q}$ 满足 $b>0$. 则由例 1.3.13 知 $b^2\ne 2$.

若 $b^2<2$，则 $b\in A$ 且 $\frac{1}{\frac{2}{b^2}-1}\in\mathbb{Q}$，因 $\mathbb{N}^*$ 在 $\mathbb{Q}$ 中无上界，故可取正整数 $N>\frac{3}{\frac{2}{b^2}-1}$，于是

$$\left(b+\frac{b}{N}\right)^2=b^2\left(1+\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2}\right)\le b^2\left(1+\frac{3}{N}\right)<2.$$

因此 $b+\frac{b}{N}\in A$，从而 b 不是 A 的上界. 同时这还表明 A 没有最大值.

若 $b^2>2$，则取正整数 $N>\frac{2}{1-\frac{2}{b^2}}$，则 $1-\frac{1}{N}>\frac{1}{2}$，

$$\left(b-\frac{b}{N}\right)^2=b^2\left(1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2}\right)>b^2\left(1-\frac{2}{N}\right)>2.$$

而 $0<b-\frac{b}{N}<b$，所以由断言知 $b-\frac{b}{N}$ 是 A 的上界，所以 b 是 A 的一个上界，但不是 A 的最小上界.

因此 A 在 $\mathbb{Q}$ 中没有上确界. $\square$

另一方面，根据勾股定理，边长为 1 的正方形的对角线长度 x 满足 $x^2=1^2+1^2=2$.

就像上面例子表明的那样，在很多问题中有理数无法满足我们的要求的，这就需要在有理数的基础上进一步扩展数的概念. Dedekind 通过对有理数进行分割的方式构造了实数.

定义 1.4.8. 称 A 是一个**实数**，如果 A 满足以下所有性质：

1. A 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个非空子集；
2. A 在 $\mathbb{Q}$ 中有上界；
3. $\forall x\in A$，$\forall y\in\mathbb{Q}$，$y<x\Rightarrow y\in A$；
4. 若 A 在 $\mathbb{Q}$ 中存在上确界 b，则 $b\in A$.

记 $\mathbb{R}$ 为所有实数组成的集合，称为**实数集**.

例 1.4.9. 对有理数 r，$\mathbb{Q}_r := \{x \in \mathbb{Q} | x \le r\}$ 是一个实数. 一般地，如果 $B \subset \mathbb{Q}$ 非空有下界，则

$$A := \bigcap_{r \in B} \mathbb{Q}_r = \{x \in \mathbb{Q} | \forall r \in B, x \le r\}$$

是一个实数. 由本节习题知，所有实数都可以表示成这样.

证明. 设 $x_0 \in \mathbb{Q}$ 是 B 的下界. 则 $\forall r \in B$，$x_0 \le r$，从而 $x_0 \in \mathbb{Q}_r$. 因此 $x_0 \in \bigcap\limits_{r \in B} \mathbb{Q}_r = A$. 因此 A 非空.

对任意 $r \in B$，对任意 $x \in A$，有 $x \le r$. 所以 r 是 A 的上界.

对任意 $x \in A$，对任意 $y \in \mathbb{Q}$，若 $y < x$，则对任意 $r \in B$， $y < x \le r$，从而 $y \in \mathbb{Q}_r$，因此 $y \in A$.

假设 b 是 A 在 $\mathbb{Q}$ 中的上确界，但 $b \notin A$. 则存在 $r_0 \in B$ 使得 $b \notin \mathbb{Q}_{r_0}$，因此 $b > r_0$. 于是 r_0 不是 A 的上界，从而存在 $x \in A$ 使得 $x > r_0$. 但这与 $x \in A \subseteq \mathbb{Q}_{r_0}$ 矛盾.

所以，若 b 是 A 在 $\mathbb{Q}$ 中的上确界，则 $b \in A$.

因此 A 是一个实数. □

定义 1.4.10. 在 $\mathbb{R}$ 上定义序：对 $A, B \in \mathbb{R}$，$A \le B$（也记为 $B \ge A$）当且仅当它们作为有理数集 $\mathbb{Q}$ 的子集满足 $A \subseteq B$. 记 $A < B$（也记为 $B > A$）表示 $A \le B$ 且 $A \ne B$，即 $A \subset B$.

定理 1.4.11. $\mathbb{R}$ 上的序 $\le$ 满足传递、自反和反对称，并且 $\forall A, B \in \mathbb{R}$，$A \le B$ 和 $B \le A$ 中至少有一个成立.

定理 1.4.12. 定义 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$，$f(r) = \mathbb{Q}_r := \{x \in \mathbb{Q} | \, x \le r\}$. 则 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 是增函数，即 $\forall r, s \in \mathbb{Q}$，$r < s \Rightarrow f(r) < f(s)$. 但 f 不是满射.

证明. 设 $r, s \in \mathbb{Q}, r < s$. 则 $s \in \mathbb{Q}_s \backslash \mathbb{Q}_r$，所以 $\mathbb{Q}_r \subset \mathbb{Q}_s$. 因此 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 是增函数. 令 $A = \{x \in \mathbb{Q} | \, x < 0 \text{ 或 } x^2 < 2\}$. 由例 1.4.7 知，$A$ 非空，在 $\mathbb{Q}$ 中有上界但无上确界. 设 $x \in A$，$y \in \mathbb{Q}$ 满足 $y < x$. 若 $y \le 0$，则 $y \in A$；若 $y > 0$，则 $x > y > 0$，从而 $y^2 < x^2 < 2$，所以 $y \in A$. 因此 A 是个实数. 但 A 无最大值，所以 $\forall r \in \mathbb{Q}$，$A \ne \mathbb{Q}_r$. 即 $A \notin f(\mathbb{Q})$. 故 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 不是满射. □

因此 $\mathbb{Q}$ 被单射 f 保持大小顺序地安放在 $\mathbb{R}$ 中，于是可视 $\mathbb{Q}_r$ 即为有理数 r，从而 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

定理 1.4.13. $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，即 $\forall A, B \in \mathbb{R}, A < B$，存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $A < \mathbb{Q}_r < B$.

证明. 任取 $A, B \in \mathbb{R}, A < B$. 则 $A \subset B$，因此存在 $b \in \mathbb{Q}$ 使得 $b \in B \backslash A$.

因为 $B \in \mathbb{R}$ 且 $b \in B$，所以 $\mathbb{Q}_b \subseteq B$. 因为 $b \notin A$，所以 b 是 A 的上界（假设存在 $x \in A$ 使得 $b < x$，则由 $A \in \mathbb{R}$ 知 $b \in A$，矛盾），但不是 A 的上确界.

因此存在 $c \in \mathbb{Q}$ 使得 $c < b$ 且 c 是 A 的上界. 取 $r = \frac{b+c}{2} \in \mathbb{Q}$，则 $c < r < b$，从而 $A \subseteq \mathbb{Q}_c \subset \mathbb{Q}_r \subset \mathbb{Q}_b \subseteq B$. □

定理 1.4.14 (确界性质). $\mathbb{R}$ 中任何非空有上界的集合都有上确界.

证明. 设 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ 非空有上界. 令 $A^* = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$. 则 $\emptyset \neq A^* \subseteq \mathbb{Q}$.

对 $\mathcal{A}$ 的任何上界 $B \in \mathbb{R}$，对任意 $A \in \mathcal{A}$，$A \subseteq B$，因此 $A^* \subseteq B$. 因为 $B \in \mathbb{R}$，所以 B 在 $\mathbb{Q}$ 中有上界 c. 于是 $\forall x \in A^*$，都有 $x \in B$，因此 $x \leq c$. 所以 c 是 A^* 在 $\mathbb{Q}$ 中的一个上界.

设 $x \in A^*$，$y \in \mathbb{Q}$ 满足 $y < x$. 则存在 $A_x \in \mathcal{A}$ 使得 $x \in A_x$，因为 $A_x \in \mathbb{R}$，所以 $y \in A_x \subseteq A^*$.

(1) 如果 A^* 在 $\mathbb{Q}$ 中没有上确界，则 $A^* \in \mathbb{R}$. A^* 是 $\mathcal{A}$ 的上界. 对 $\mathcal{A}$ 的任何上界 $B \in \mathbb{R}$，对任何 $A \in \mathcal{A}$，必然有 $A \subseteq B$，因此 $A^* \subseteq B$，所以 $A^* \leq B$，所以 A^* 是 $\mathcal{A}$ 的最小上界，即上确界.

(2) 如果 A^* 在 $\mathbb{Q}$ 中有上确界 $b^* \in \mathbb{Q}$，则令 $\bar{A} = A^* \bigcup \{b^*\}$. 易见 b^* 是 $\bar{A}$ 的最大值. 对任意 $y \in \mathbb{Q}$，若 $y < b^*$，则 y 不是 A^* 在 $\mathbb{Q}$ 中的上界，所以存在 $x \in A^*$ 使得 $y < x$. 于是 $y \in A^* \subseteq \bar{A}$. 所以 $\bar{A} \in \mathbb{R}$ 且 $\bar{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的上界. 接下来，我们证明 $\bar{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的上确界.

假设 $\bar{A}$ 不是 $\mathcal{A}$ 的上确界（即最小上界），则存在 $\mathcal{A}$ 的上界 B，使得 $B < \bar{A}$. 由有理数集在实数集中的稠密性（定理 1.4.13），存在有理数 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $B < \mathbb{Q}_r < \bar{A}$. 所以 $r \in \bar{A}$ 且 $r < b^*$，因此 $r \in A^* \subseteq B$，从而 $\mathbb{Q}_r \subseteq B$，这与 $B < \mathbb{Q}_r$ 矛盾. 所以 $\bar{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的上确界.

总之，$\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有上确界. □

下面考虑 $\mathbb{R}$ 上的运算.

定义 1.4.15. 设 $A, B \in \mathbb{R}$，定义

$$\begin{aligned}
A + B &= \{r \in \mathbb{Q} | \forall a \in \mathbb{Q} \backslash A, \forall b \in \mathbb{Q} \backslash B, r \leq a + b\}, \\
-A &= \{r \in \mathbb{Q} | \forall a \in A, r \leq -a\}, \\
0_{\mathbb{R}} &= \{r \in \mathbb{Q} | r \leq 0\}, \\
1_{\mathbb{R}} &= \{r \in \mathbb{Q} | r \leq 1\}.
\end{aligned}$$

对 $A, B \in \mathbb{R}$，如果 $A \geq 0$ 且 $B \geq 0$，则定义

$$A \cdot B = \{r \in \mathbb{Q} | \forall a \in \mathbb{Q} \backslash A, \forall b \in \mathbb{Q} \backslash B, r \leq a \cdot b\};$$

如果 $A \geq 0$ 且 $B < 0$，则定义 $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$；如果 $A < 0$ 且 $B \geq 0$，则定义 $A \cdot B = -((-A) \cdot B)$；如果 $A < 0$ 且 $B < 0$，则定义 $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$.

对 $A \in \mathbb{R}$，如果 $A > 0$，则定义

$$A^{-1} = \{r \in \mathbb{Q} | \forall x \in \mathbb{Q} \backslash A, r \leq x^{-1}\}.$$

如果 $A < 0$，则定义

$$A^{-1} = -((-A)^{-1}).$$

定理 1.4.16. *1.* 若 $A \in \mathbb{R}$，则 $-A \in \mathbb{R}$ 且 $-(-A) = A$，$A + (-A) = 0_{\mathbb{R}}$.

2. 若 $A, B \in \mathbb{R}$，则 $A + B, A \cdot B \in \mathbb{R}$.

3. 若 $A \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$，则 $A^{-1} \in \mathbb{R}$ 且 $(A^{-1})^{-1} = A$，$A \cdot A^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$.

4. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+})$ 是一个序域，其中 $\mathbb{R}^{+} = \{A \in \mathbb{R} | A > 0\}$.

证明. 我们只证明 (1) 中的部分结论：$-A \in \mathbb{R}$，以及 $-(-A) = A$.

记 $C = \{x \in \mathbb{Q} | -x \in A\}$. 因为 A 非空有上界，所以 C 非空有下界. 由于

$$-A = \bigcap_{c \in C} \mathbb{Q}_c.$$

所以由例 1.4.9 知 A 是一个实数.

$x \in -A$ 当且仅当 $\forall a \in A$，$x \leq -a$，即 $a \leq -x$，即 $-x$ 是 A 的上界.

如果存在有理数 r_0 使得 $A = \mathbb{Q}_{r_0}$，则 r_0 是 A 的最大值，此时 y 是 A 的上界当且仅当 $y \geq r_0$. 因此

$$-A = \{x \in \mathbb{Q} | -x \geq r_0\} = \mathbb{Q}_{-r_0}.$$

从而

$$-(-A) = \mathbb{Q}_{-(-r_0)} = \mathbb{Q}_{r_0} = A.$$

若 A 没有最大值，则 $\mathbb{Q} \backslash A$ 由 A 的所有上界组成，于是

$$-A = \{x \in \mathbb{Q} | -x \in \mathbb{Q} \backslash A\} = \{x \in \mathbb{Q} | -x \notin A\}.$$

因为 $\mathbb{Q} \backslash A$ 没有最小值（见本节习题），所以 $-A$ 没有最大值. 因此

$$-(-A) = \{x \in \mathbb{Q} | -x \notin -A\} = \{x \in \mathbb{Q} | -(-x) \in A\} = A.$$

□

定理 1.4.17 (阿基米德性质). *$\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 中没有上界.*

证明. 假设 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有上界. 因为 $\mathbb{N}$ 非空（$1 \in \mathbb{N}$），所以由确界性质（定理 1.4.14）知 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有上确界 $b \in \mathbb{R}$. 从而 $b-1$ 不是 $\mathbb{N}$ 的上界，因此存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $b-1<n$，于是 $b<n+1$，而 $n+1 \in \mathbb{N}$，所以 b 不是 $\mathbb{N}$ 的上界，但这与 b 是 $\mathbb{N}$ 的上确界矛盾. □

最后，我们可以总结一下这一章中最重要的结论：**实数集 $\mathbb{R}$ 是唯一一个具有确界性质的序域.**

定理 1.4.18. *若 $(\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_1^+)$ 和 $(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2^+)$ 是两个序域，都具有确界性质，则存在唯一的一一对应 $f: \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ 使得 f 保持加法、乘法和序，即*

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad f(x \cdot y)=f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{F}_1,$$

且 $f(\mathbb{F}_1^+)=\mathbb{F}_2^+$.

证明. 证明留给读者完成. □

习题 1.4

1. 证明本节中未经证明的定理和推论.

2. 设 $\mathbb{F}$ 是序域，$A \subset \mathbb{F}$ 是非空的有限集合. 证明：A 有最大值和最小值.

3. 讨论集合 $\{q^n | n \in \mathbb{N}^*\}$ 的有界性，其中 $q \in \mathbb{Q}$.

4. 设 $\mathbb{F}$ 是序域.

   (a) 证明 $\mathbb{F}$ 具有阿基米德性质（即 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{F}$ 中无上界）当且仅当 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{F}$ 中稠密.（由此可知有理数在实数集中稠密）

   (b) 设 $\mathbb{F}$ 具有阿基米德性质. 证明：若对 $a, b \in \mathbb{F}$，证明 $a \le b$ 当且仅当对任意 $n \in \mathbb{N}^*$， $a<b+\frac{1}{n}$.

5. （按 Dedekind 分割）设 $A \subset \mathbb{Q}$. 证明：A 是一个实数当且仅当

   (a) A 非空且有上界，且

   (b) $\mathbb{Q} \backslash A$ 中每个元素都是 A 的上界，且

   (c) $\mathbb{Q} \backslash A$ 没有最小值.

6. （按 Dedekind 分割）设 $A \subset \mathbb{Q}$ 是一个实数. 证明：

$$A=\bigcap_{r \in \mathbb{Q} \backslash A} \mathbb{Q}_r.$$

7. 称 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个**区间**，如果对任意 $x, y \in I$ 以及任意 $z \in \mathbb{R}$，$x < z < y \Rightarrow z \in I$. 证明 $\mathbb{R}$ 中的区间必然是如下九种集合之一：

$$\begin{gathered}
(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}, \\
(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\},, \\
(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}, \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}, \\
(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \\
(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\},.
\end{gathered}$$

如果把 $\mathbb{R}$ 改成 $\mathbb{Q}$，上述结论成立吗？

8. (a) 证明：整数集 $\mathbb{Z}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中既无上界，又无下界.

   (b) 证明：对任意实数 x，存在唯一的整数 $[x]$ 使得 $[x] \leq x < [x] + 1$；$[x]$ 成为 x 的**整数部分**.

   (c) 设 $a > 1$. 证明对任意实数 $x > 0$，存在唯一的整数 k 使得 $a^k \leq x < a^{k+1}$.（提示：用 Bernoulli 不等式）

9. **从乘方到开方**：关于有理数指数的幂函数

   (a) 设 n 是正整数，y_1, y_2 是正实数，满足 $0 < y_1 < y_2$.

   i. 证明存在正整数 N 使得 $\left(\frac{1}{N}\right)^n < y_1 < y_2 < N^n$；

   ii. 证明存在正有理数 s 满足 $y_1 < s^n < y_2$.

   (b) 对任意 $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ 和任何正数 x. 证明：
   (1) 集合 $A_{x,m,n} = \{s \in \mathbb{Q} | s > 0, s^n < x^m\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有上确界；
   (2) $A_{x,m,n}$ 的上确界是满足 $y^n = x^m$ 的唯一正实数 y，记 $y =: \sqrt[n]{x^m} =: x^{\frac{m}{n}}$. 特别当 $n = 2$ 时，记 $y =: \sqrt{x^m}$.

   (c) 证明：对任何 $x > 0$ 及任何有理数 r，x^r 有唯一定义且与分数表示 $r = \frac{m}{n}$ 的选取无关.

   (d) 证明：对正有理数 r，函数 $f_r : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$，$f(x) = x^r$ 是增函数，且是满射；对负有理数 r，$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$，$f(x) = x^r$ 是减函数，且是满射.

   (e) 对 $x > 0$，规定 $x^0 = 1$，证明：对任意 $r, s \in \mathbb{Q}$ 以及任意 $x, y > 0$，$x^r \cdot x^s = x^{r+s}$，$(x^r)^s = x^{r \cdot s}$，$x^r \cdot y^r = (x \cdot y)^r$.

10. 设 $a > 1$. 证明：对任意 $n \in \mathbb{N}^*$，$a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{n+1}}$，且 $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}^*} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

11. **从乘方开方到定义在有理数集上的指数函数** 设 $a > 1$，函数 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$，$f(x) = a^x$. 证明：

   (a) f 是增函数；

(b) f 满足

$$f(0)=1,\quad f(1)=a;\quad f(x+y)=f(x)f(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{Q};$$

(c) $f(\mathbb{Q})$ 在正实数集 $\mathbb{R}^+$ 中稠密，即对任意 $0<b<c$，存在 $r\in\mathbb{Q}$ 使得 $b<a^r<c$.

12. **从乘方到对数** 设 $a>1$.

(a) 对任何 $x>0$，记集合

$$A_x:=\left\{\frac{m}{n}\middle| a^m\le x^n, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

证明：如果 $a^m>x^n$ ($m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*$)，则 $\frac{m}{n}$ 是 A_x 的一个上界.

(b) 证明：对任何 $x>0$，A_x 非空、有上界.

(c) 证明：$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$，$f(x)=\sup A_x$ 是增函数.

(d) 证明：$f(a)=1$ 且 $f(xy)=f(x)+f(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^+$.

(e) 证明：若 $b>0$ 且 $b\ne 1$，则存在唯一的单调函数 $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 满足 $g(b)=1$ 且 $g(xy)=g(x)+g(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^+$. 记 g 为 $\log_b$，称为以 b 为底的**对数函数**.

(f) 证明：若 $a,b>0$ 且 $a,b\ne 1$，则 $\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b},\quad x>0$.

13. $\mathbb{Q}$ 是最小的阿基米德序域. $\mathbb{R}$ 是否为最大的阿基米德序域？

14. 是否存在非阿基米德序域，即一个序域但不具有阿基米德性质？

1.5 复数

虽然微积分通常处理实数变量的函数，但有时也会涉及复数.

复数及其代数运算

复数集 $\mathbb{C}$ 由形如 $x+\mathrm{i}y$ 的对象组成，其中 x 和 y 是实数，分别叫做**复数** $x+\mathrm{i}y$ 的**实部**和**虚部**. 对复数 $z=x+\mathrm{i}y$，记 $\bar{z}=x+\mathrm{i}(-y)$，称为 z 的**共轭**.

我们把复数 $x+\mathrm{i}y$ 对应于实数对 (x,y)，这样我们就可以把复数集 $\mathbb{C}$ 看成 xy 坐标平面. 因此，从实数坐标的角度，我们称 $\mathbb{C}$ 为“复平面”. 简记 $0+\mathrm{i}y$ 为 $\mathrm{i}y$，这类复数称为**纯虚数**，全体纯虚数对应于复平面中的一条直线，叫做**虚轴**；记 $x+\mathrm{i}0$ 为 x，它对应于实数，这类复数对应于复平面中另外一条直线，叫做**实轴**. 另外，简记 $x+\mathrm{i}1$ 为 $x+\mathrm{i}$，记 $x+\mathrm{i}(-y)$ 为 $x-\mathrm{i}y$.

$\mathbb{C}$ 上的加法和乘法定义为

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),$$
$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).$$

它们满足交换律、结合律、分配律. 0 是加法单位元，1 是乘法单位元；$-x-\mathrm{i}y$ 是 $x+\mathrm{i}y$ 的加法逆元；对非零复数 $x+\mathrm{i}y$，它有乘法逆元

$$\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

因此复数集 $\mathbb{C}$ 是一个域. 把实数 x 看成复数 $x+\mathrm{i}0$，这是一个单射，它保持加法和乘法运算以及单位元和逆元，所以实数集 $\mathbb{R}$ 是复数集 $\mathbb{C}$ 的一个**子域**（subfield）.

i 称为**虚数单位**，它满足 $\mathrm{i}^2=-1$. 由此知 $\mathbb{C}$ 不是一个序域.

复数加法的几何意义

从加法定义知，复数加法对应于 xy 坐标平面中的向量加法，服从平行四边形法则，即复数 z_1,z_2 看成从原点出发的两个向量，它们的和 z_1+z_2 对应于以 z_1,z_2 为一对邻边所确定的平行四边形中从原点出发的对角线向量.

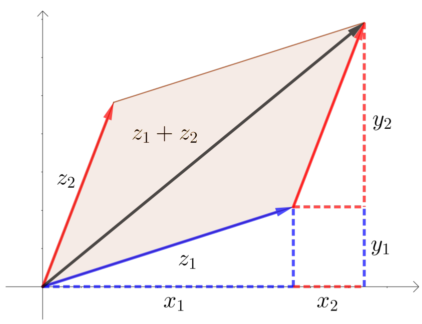

图 1.1:

复数的模、距离、界

对复数 $z=x+\mathrm{i}y$（$x,y\in\mathbb{R}$），定义 z 的**绝对值**（也称为**模**）为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

易见 $|z|\geq 0$，且 $|z|=0$ 当且仅当 $x=y=0$ 即 $z=0$.

不难证明：对任意复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，

$$\begin{aligned}\left|(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)\right|^2&=\left|(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)\right|^2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2\\&=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2),\end{aligned}$$

所以 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

同时我们得到 Cauchy-Schwarz 不等式

$$(x_1x_2-y_1y_2)^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1y_2+x_2y_1)^2\leq(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2).$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\\ &= x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2(x_1x_2+y_1y_2)\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2(x_1x_2+y_1y_2)\\ &\le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

从而 $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

利用复数的模我们可以定义 $\mathbb{C}$ 上的距离：$d(z,w)=|z-w|$. 我们也能引进界的概念，一个集合 $A\subset\mathbb{C}$ 是**有界的**，如果存在正数 R 使得对任意 $z\in A$，都有 $|z|\le R$. 但是，由于 $\mathbb{C}$ 不是序域，所以没有上界和下界的概念.

复数乘法和共轭的几何意义

记 $S^1=\{z\in\mathbb{C}||z|=1\}$，它对应于复平面中的单位圆周 $x^2+y^2=1$.

任何 $w\in S^1$，可以确定一个 $\mathbb{C}$ 上的变换：$z\mapsto wz$，它关于 z 是复线性的：

$$w(z_1+z_2)=wz_1+wz_2;\quad w(az)=awz,\quad \forall a,z,z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

这个变换还是保距的：

$$|wz_1-wz_2|=|w(z_1-z_2)|=|w||z_1-z_2|=|z_1-z_2|,\quad \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

如果用复数的实部虚部表示，记 $w=u+\mathrm{i}v$（$u,v\in\mathbb{R}$），则对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$（$x,y\in\mathbb{R}$），变换 $z\mapsto wz$ 对应于线性变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}ux-vy\\uy+vx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&-v\\v&u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

这个线性变换的系数矩阵的行列式为 $u^2+v^2=1$. 我们称 $\mathbb{C}$ 上的这类变换为**旋转**.

对任意非零复数 w，线性变换 $z\mapsto wz$ 可以分解为

$$z\mapsto\frac{w}{|w|}z\mapsto|w|\frac{w}{|w|}z,$$

即一个旋转以及一个**伸缩**.

共轭变换 $z\mapsto\bar{z}$ 对应于**反射**

$$\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

它的行列式为 -1，它是保距的，它是实线性的，但不是复线性的：$\overline{\lambda z}=\lambda\bar{z}$ 对所有 $z\in\mathbb{C}$ 成立当且仅当 λ 是实数.

1.6 附：逻辑、集合与映射

数学的特点之一是依靠逻辑推理，而集合是现代数学的语言.

1.6.1　逻辑

设 p 是一个陈述. 则 $\neg p$ 也是一个陈述，称为“**非** p”，它们的真值关系为

p	真	假
$\neg p$	假	真

设 p, q 是两个陈述.

$p \wedge q$ 和 $p \vee q$ 是两个陈述，分别称为“ p **且** q ”和“ p **或** q”，它们的真值为

$p \wedge q$		q	
		真	假
p	真	真	假
	假	假	假

$p \vee q$		q	
		真	假
p	真	真	真
	假	真	假

即当且仅当 p, q 都是真时，$p \wedge q$ 为真；当且仅当 p, q 都是假时，$p \vee q$ 为假.

陈述 $p \Rightarrow q$ 表示 $(\neg p) \vee q$，称为“ p **蕴涵** q ”或者“**若** p**，则** q ”，其中 p 称为**前件**， q 称为**后件**. $p \Rightarrow q$ 的真值为

$p \Rightarrow q$		q	
		真	假
p	真	真	假
	假	真	真

即当且仅当 p 真且 q 假时，$p \Rightarrow q$ 为假. $p \Rightarrow q$ 也可以写成 $q \Leftarrow p$.

记 $p \Leftrightarrow q$ 表示“ $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$”，称为 p **和** q **等价**.

在日常语言中，$p \Rightarrow q$ 有以下不同的表述形式：“若 p，则 q ”，“如果 p，那么 q ”，“如果 p，就有 q ”，“当 p 成立时，q 成立”，“只要 p 成立，q 就成立”，“只有 q 成立，p 才成立”等等.

当 $p \Rightarrow q$ 为真时，p 称为 q 的**充分条件**，q 称为 p 的**必要条件**. 当 $p \Leftrightarrow q$ 为真时，称 p 和 q 为对方的**充分必要条件**. $p \Leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p, q 都是真或都是假.

易见以下陈述为真

$$p \vee (\neg p), \quad \neg(\neg p) \Leftrightarrow p,$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q), \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q),$$

另外，

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \quad (p \vee p) \Leftrightarrow p,$$
$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r, \qquad p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r,$$
$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r), \qquad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

特别要提醒读者注意的是：p，q 和 $p \Rightarrow q$ 是三个不同的陈述；并且当条件 p 为假时，无论后件 q 是真还是假，蕴涵关系 $p \Rightarrow q$ 都是真的. 另外，

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p),$$

即逆否命题与原命题具有相同的真值，这为反证法提供了逻辑依据.

对于命题 $p \Rightarrow q$，如果使用反证法，我们可以证明 $p \wedge \neg q$ 为假.

1.6.2 集合

设 A 是一个集合. 记号 $x \in A$ 表示对象 x 是集合 A 的一个成员，称 x 是 A 的一个**元素**. $x \notin A$ 表示 $\neg(x \in A)$.

设 A, B 是两个集合. 如果

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

则称 A 是 B 的一个**子集**，记为 $A \subseteq B$. 如果进一步有$A \neq B$，则称 A 是 B 的一个**真子集**，记为 $A \subset B$. 根据蕴涵关系的逻辑可以证明空集 $\emptyset$ 是任何集合的子集.

设 X 是一个集合，$p(x)$ 是一个包括变元 x 的陈述. 则记

$$\{x \in X | p(x)\}$$

为 X 中所有使得 $p(x)$ 为真的那些元素 x 组成的集合.

一般而言，$\{x | p(x)\}$ 可能并不是一个集合. 例如 $A = \{x | x \notin x\}$，如果 A 是个集合，那么 $A \in A$ 和 $A \notin A$ 中必有一个成立. 但无论它们中的哪一个成立都会和 A 的定义矛盾. 为了避免产生类似的矛盾，所以数学家对“集合”这个看似朴素的概念做了必要的限制，由此产生了公理化集合论. 在公理化集合论中，对于已有的集合 X，$\{x \in X | p(x)\}$ 是一个集合.

陈述“ $\forall x \in A, p(x)$ ” 为真当且仅当对 A 的所有元素 x，$p(x)$ 为真. 陈述“ $\exists x \in A, p(x)$ ”为真当且仅当存在 A 的元素 x 使得 $p(x)$ 为真.

陈述“ $\forall x \in A, p(x)$ ” 等价于 $x \in A \Rightarrow p(x)$. 在日常语言中，这个陈述可以有不同形式的表述，例如“凡 A 中成员 x，都 $p(x)$”，“对 A 中任一/任意/每个/所有 x，都 $p(x)$”等.

易见

$$\neg(\forall x \in A, p(x)) = \exists x \in A, \neg(p(x));$$
$$\neg(\exists x \in A, p(x)) = \forall x \in A, \neg(p(x)).$$

但是当 $\forall$ （对所有，对每一个，对任意）和 $\exists$ （存在，至少有一个）同时出现在一个陈述中时，它们的前后顺序不能随意改变，比如：“对每个男人 A，都存在一个男人 B 使得 A 是 B 的儿子”和“存在一个男人 B 使得每一个男人 A 都是 B 的儿子”的意思是完全不同的.

设 Λ 是一个集合，对每个 $\lambda \in \Lambda$，A_λ 是 X 的一个子集，记

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in X | \forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\},$$
$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in X | \exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\},$$

它们分别称为集合 A_λ 们的**交集**和**并集**，$x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 当且仅当 $\forall \lambda \in \Lambda$，$x \in A_\lambda$；$x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 当且仅当 $\exists \lambda \in \Lambda$，$x \in A_\lambda$. 对为数不多的集合，比如 A, B, C，它们的交集常写作 $A \cap B \cap C$，它们的并集常写作 $A \cup B \cup C$.

对 X 的子集 A，

$$A^c = \{x \in X | x \notin A\}$$

称为 A 的**补集**. 对 X 的子集 A, B，记 $A \backslash B = A \cap B^c$.

易见

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c,$$
$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

记

$$\emptyset_X = \{x \in X | x \neq x\},$$

称它为 X 中的**空集**. 易见对于 X 的任何子集 A，都有 $\emptyset_X \subseteq A$.

1.6.3　映射与函数

定义 1.6.1. 设 A, B 是集合，$f \subset A \times B$，满足：对任意 $x \in A$，存在唯一的 $y \in B$ 使得 $(x, y) \in f$. 此时，我们记 $f : A \to B$，称 f 为从 A 到 B 的一个**映射**（map）.

称 A 为 f 的**定义域**. 记 $f(A) = \{y \in B | \exists x \in A$ 使 $f(x) = y\}$，称为 f 的**值域**.

称 f 是一个**满射**（surjective），如果 $f(A) = B$.

称 f 是一个**单射**（injective），如果 $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

称 f 是一个**双射**，或**一一对应**（bijective），如果 f 既是单射又是满射.

如果 B 是 $\mathbb{R}$（或 $\mathbb{C}$ ）的子集，则称 $f : A \to B$ 为一个**函数**（function）.

定义 1.6.2. 设 A,B,C 是三个集合，$f,A\to B,g:B\to C$ 是映射. 则

$$g\circ f:A\to C,\quad (g\circ f)(x)=g(f(x))$$

是一个映射，称为 f,g 的**复合**.

如果存在映射 $g:B\to A$ 使得

$$\forall x\in A,\forall y\in B,g(f(x))=x,f(g(y))=y,$$

则称 g 为 f 的**逆映射**（inverse），记为 $g=f^{-1}$. 函数 f 的逆映射也称为**反函数**.

定义 1.6.3. 设 A,B 都是 $\mathbb{R}$ 的子集. 如果 $f:A\to B$ 满足

$$\forall x_1,x_2\in A,x_1<x_2\Longrightarrow f(x_1)\le f(x_2),$$

则称 f 在 A 上**单调不减**.

如果 $f:A\to B$ 满足

$$\forall x_1,x_2\in A,x_1<x_2\Longrightarrow f(x_1)<f(x_2),$$

则称 f 在 A 上**严格增**（或为**增函数**）.

如果 $f:A\to B$ 满足

$$\forall x_1,x_2\in A,x_1<x_2\Longrightarrow f(x_1)\ge f(x_2),$$

则称 f 在 A 上**单调不增**.

如果 $f:A\to B$ 满足

$$\forall x_1,x_2\in A,x_1<x_2\Longrightarrow f(x_1)>f(x_2),$$

则称 f 在 A 上**严格减**（或为**减函数**）.

增函数、减函数、单调不增函数、单调不减函数统称为**单调函数**，增函数和减函数统称为**严格单调函数**.

例 1.6.4.

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q},\\ -x, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

是单射，但在任何区间中都不是单调的.

定义 1.6.5. 称函数 $f: A\to\mathbb{R}$ 在集合 $A_0\subseteq A$ 上**有上界**，如果函数值集合 $f(A_0)$ 有上界，即存在 $M\in\mathbb{R}$ 使得 $\forall x\in A_0$，$f(x)\le M$. 称这样的实数 M 是 f 在集合 $A_0\subseteq A$ 上的一个**上界**.

类似可以定义函数 $f: A\to\mathbb{R}$ 在集合 $A_0\subseteq A$ 上**有下界**，以及函数 $f: A\to\mathbb{R}$ 在集合 $A_0\subseteq A$ 上的**下界**.

称函数 $f: A\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 在集合 $A_0\subseteq A$ 上**有界**，如果存在 $M\in\mathbb{R}$ 使得 $\forall x\in A_0$，$|f(x)|\le M$.

定义 1.6.6. 设 $A\subseteq\mathbb{R}$. 称 $f: A\to B$ 是**周期函数**，如果存在 $T\neq 0$ 使得 $\forall x\in A$，$x+T, x-T\in A$，且

$$f(x+T)=f(x).$$

称 T 是 f 的一个**周期**. 如果存在最小的正数 T 使得 T 是 f 的周期，则称 T 是 f 的**最小正周期**.

例 1.6.7.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

任何非零有理数都是 f 的周期，所以它没有最小正周期.

习题 1.6

1. **三角函数的基本性质及其推论** 正弦和余弦 $\sin,\cos$ 是两个定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的函数，满足：存在正数 π 使得

   (a) $\cos 0=\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\cos\pi=-1$；

   (b) 对任意实数 x,y，

   $$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$$

   (c) 对任意 $0<x<\frac{\pi}{2}$，

   $$0<\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}.$$

   我们把 (a,b,c) 作为三角函数 $\sin,\cos$ 的基本性质，用它们得到这两个函数的其他性质.

利用性质 (a) 和 (b) 证明：

(1) 对任意实数 x，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$；

(2) $\sin 0 = \sin\pi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$；

(3) 对任意实数 x，

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x;$$

(4) 对任意实数 x，

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x, & \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x, \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x, & \cos(\pi + x) &= -\cos x, \\ \sin(2\pi + x) &= \sin x, & \cos(2\pi + x) &= \cos x; \end{aligned}$$

(5) 对任意实数 x, y，

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y;$$

并且

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2};$$

(6) 对任意实数 x，

$$\begin{aligned} &\sin 2x = 2\sin x\cos x, \\ &\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x; \\ &\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \\ &\sin 3x = 2\sin x\cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x. \end{aligned}$$

利用 (c) 和 (6) 证明

(7) 对任意实数 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1;$$

利用 (c) 和 (5) 证明

(8) sin 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上严格增，cos 在区间 $[0, \pi]$ 上严格减.

利用 (4) 和 (8) 证明

(9) 2π 是 sin 的最小正周期，也是 cos 的最小正周期.

利用 (a,c) 和 (6) 证明

(10) $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$；$\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(11) 利用 (10) 中的结果，计算 $\sin\frac{k\pi}{12}$（$k=0,1,2,\ldots,12$）.

利用 (7) 和 (10) 证明

(12) $3<\pi<\frac{6}{\sqrt{3}}<3.5$.

由 (12) 知 $1.5=\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}<\frac{3.5}{2}=1.75<3<\pi$，所以由 (8) 知

(13) $\frac{\pi}{2}$ 是 $\cos$ 在区间 $[0,3]$ 内的唯一零点.

(14) 记 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. 证明：$\tan$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上有定义，且是奇函数；

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y},\quad \forall 0<y<x<\frac{\pi}{2},$$

$\tan$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 中 $\tan x$ 是增函数.

(15) $\sin,\cos$ 究竟是什么？

第1章总结

内容回顾

这一章我们回顾了从自然数出发构造实数的过程.

对于自然数集，最重要的性质就是数学归纳法原理. 学生要掌握使用数学归纳法进行论证以及用归纳的方式给出定义.

对于实数集，学生需要了解：实数集是一个序域，它同时具有代数结构和序结构，并且序结构与代数结构相适应；作为序域，实数集区别于有理数集的关键在于实数集具有确界性质：每个非空有上界的实数子集都有实数上确界. 学生应该逐步学会如何利用确界性质解决一些关于实数和函数的问题. 在我们学习了有关极限的知识（第二章）后，我们会对实数的性质做进一步研究（第三章）.

利用实数的确界性质，我们从乘法运算出发严格讨论了开方运算以及有理数指数的幂函数和对数函数（第 1.4 节习题）. 虽然学生在中学阶段就接触过这些内容，但是那时不可能给出一个严谨的讨论.

在这一章中，我们还证明了几个重要的不等式（第 1.3 节习题），它们对后续学习会有帮助.

给学生的建议

了解界和确界的概念，知道确界性质. 通过例题理解确界性质是如何应用于具体问题的. 模仿例题中的办法，用确界性质独立解决一些实际问题.

明白中学阶段数学知识存在的漏洞，知道如何去修补这些漏洞.

在澄清基本概念的同时，逐渐培养从概念（定义）出发根据基本规则进行逻辑推理的习惯，学习用清晰和严谨的语言表达数学思想，是进一步学习数学应该具备的素质和能力.

给教师的建议

根据课程目标和学生实际情况，自行决定要讲授的内容和方式.

从自然数出发构造整数和有理数的过程可以理解为要让形如 $5 + x = 3$ 或 $3x = 5$ 这样的代数方程有解，涉及的运算是有限次加减乘除四则运算. 但从有理数到实数的过程不再是代数问题（圆周率 π 不是任何整系数多项式方程的解，不能用有限次四则运算和开方运算求得）. 这一过程本质上是极限过程（无尽小数的方式本身就用到极限），在未讲授极限概念的情况下定义实数，Dedekind 分割是涉及概念最少的一种方式（第1.4节本质上就是采取了 Dedekind 分割的想法）. 但这个方式对初学者显得比较抽象.

如果教师能够给学生讲清楚界和确界的概念，并通过开方运算的可行性、有理数的稠密性等展示给学生如何使用确界性质，那么教师也可以把“*实数集是满足确界性质的序域*”作为微积分教学的起点.

如果只是给学生展示微积分最初步的概貌，那么这一章完全可以跳过.