2022秋季学期《高等微积分》期末考试题 A

考试时间：2023-01-02：上午9:00-11:00

注意事项：满分100分;共有9道大题目.

1.(10%)

(1) 已知$\frac{sinx}{x}$是$f(x)$的原函数，求$\int xf'(x)dx$.

(2) 求不定积分$I = \int \frac{dx}{1+x^3}$ 和$J = \int \frac{xdx}{1+x^3}$.

2.(10%)求极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(b^{\frac{1}{n}} - 1\right) \sum_{i=0}^{n-1} b^{\frac{i}{n}} \sin b^{\frac{2i+1}{2n}} \quad (b > 1).$$

3.(10%) 假设$f(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上可微，满足

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3}\int_0^x f(t)dt, \quad x > 0.$$

求$f(x)$.

4.(10%) 设$f(x)$在x_0的邻域内存在四阶导数，且$|f^{(4)}(x)| \le M$. 证明对于该邻域内异于x_0的任何x 都有

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x) - 2f(x_0) + f(x')}{(x - x_0)^2} \right| \le \frac{M}{12}(x - x_0)^2,$$

其中x' 与x 关于x_0 对称.

5.(10%) 设$f(x)$是连续函数，

(1) 利用定义证明函数$F(x) = \int_0^x f(t)dt$可导，且$F'(x) = f(x)$;

(2) 当$f(x)$是以2为周期的周期函数时，证明函数

$$G(x) = 2\int_0^x f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt$$

也是以2为周期的周期函数.

6.(10%)已知函数$f(x)$在区间$(-1,1)$内有二阶导数，且$f(0)=f'(0)=0, |f''(x)|\leq |f(x)|+|f'(x)|$. 求证：$\exists\delta>0$，使得在$(-\delta,\delta)$内有$f(x)\equiv 0$.

7.(13%)解方程: $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^{-x}\cos x+\mathrm{e}^{2x}(4x+5)$.

8.(12%) 设$y_1(x), y_2(x), y_3(x)$均为非齐次线性方程

$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=Q(x)$$

的特解, 其中$P_1(x), P_2(x), Q(x)$为已知函数, 且

$$\frac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}\neq \text{常数}.$$

求证：$y(x)=(1-C_1-C_2)y_1(x)+C_1y_2(x)+C_2y_3(x)$为给定方程的通解($C_1, C_2$为任意常数).

9.(15%)一小船A从原点出发，以匀速v_0沿y轴正向行驶.同时，另一小船B从x轴上的点$(x_0,0)(x_0<0)$出发，朝A追去，其速度方向始终指向A，速度大小为常数v_1.
(1)求船B的运动方程.
(2)如果$v_1>v_0$，问船B需要多少时间才能追上A.