第 2 章　连续与极限

一个物理量 y 的值由另一个物理量 x 决定，x 的值可以直接观测，而 y 的值只能通过 $y = f(x)$ 间接得到. 由于任何测量都有误差，所以观测值只可能是近似值. 一个自然的问题是：如果 x 是 x^* 的近似值，那么 $f(x)$ 是否也是 $f(x^*)$ 的近似值？或者更严格地说，我们能否通过控制 x 和 x^* 之间的误差，来减小 $f(x)$ 与 $f(x^*)$ 之间的误差呢？

本章研究函数在一点附近或无穷远附近的渐近行为，其中在一点附近的渐近行为涉及函数的连续性和极限. 我们把数列看成自变量取正整数值的函数，因此把数列极限作为函数极限的一种特殊情况. 对无穷小和无穷大的概念以及大 O 和小 o 的语言，我们将做一个简明扼要又不失严谨的介绍.

2.1　函数的连续性

在上一章的习题里，我们已经对所有有理数 r 确定了幂 2^r 的意义. 如果试图对所有实数（特别是无理数） x 定义 2^x，使其适合已经确定了的有理数指数幂 2^r，就必须研究函数 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$，$f(r) = 2^r$ 的性质，也就是它的连续性.

有鉴于此，在本章中函数的定义域可以是任何实数子集，而不必是区间，这是要特别提醒读者注意的.

定义 2.1.1. 设 $I \subseteq \mathbb{R}$. 称函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 在 $a \in I$ 处**连续**，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in I$，只要 $|x - a| < \delta$，就成立 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \big(|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big).$$

换句话说，凡 I 中 δ-接近于 a 的 x，其函数值 $f(x)$ 都 ε-接近于 $f(a)$.

称 $f : I \to \mathbb{R}$ 是**连续函数**，如果 f 在每个 $a \in I$ 处连续. 此时我们记 $f \in \mathscr{C}(I)$.

上述定义中，$|f(x) - f(a)|$ 和 $|x - a|$ 是距离，也可以理解为误差. ε

和 δ 出现在不等式较大的一侧，用来控制距离和误差，它们都是很小的正数，$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ 是目的，所以 ε 可以任意变小. $|x-a|<\delta$ 是为了实现这个目的而采取的手段，δ 会随 ε 的改变而做出适当调整，因此通常把 δ 写成 δ_ε 的形式，来体现 δ_ε 依赖于 ε. 可以任意变小的 ε 和与之相应变小的 δ_ε 体现了上述定义本质上是函数的动态性质.

本书中我们有时也讨论变量取值为复数的函数，易见上述定义也适用于自变量或函数值为复数的函数.

例 2.1.2. 任何常值函数都是连续函数.

证明. 对任意 $a\in\mathbb{R}$ 和 $\varepsilon>0$，当 $|x-a|<1$ 时，$|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$. □

例 2.1.3. 设 $\lambda\in\mathbb{R}$. 线性函数 $f(x)=\lambda x$ 是连续函数.

证明. 对任意 $a\in\mathbb{R}$ 和 $\varepsilon>0$，当 $|x-a|<\frac{\varepsilon}{1+|\lambda|}$ 时，

$$|f(x)-f(a)|=|\lambda||x-a|<\varepsilon.$$

□

例 2.1.4. 绝对值函数是连续函数.

证明. 对任意 $a\in\mathbb{R}$ 和 $\varepsilon>0$，当 $|x-a|<\varepsilon$ 时，

$$|x|-|a|\le|x-a|<\varepsilon,\quad |a|-|x|\le|x-a|<\varepsilon,$$

从而

$$||x|-|a||=\max\{|x|-|a|,|a|-|x|\}<\varepsilon.$$

□

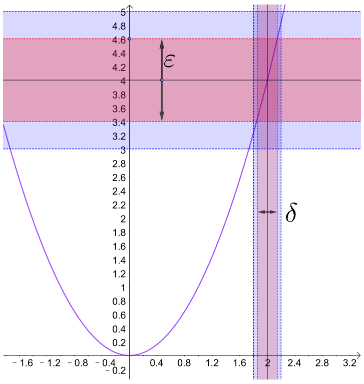
例 2.1.5. x^2 是连续函数.

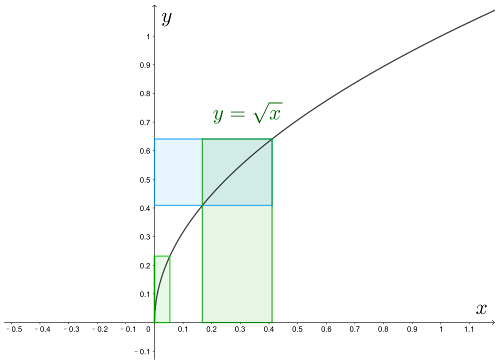
证明. 对任意 $a\in\mathbb{R}$ 和 $\varepsilon>0$，对任意 x，记 $h=x-a$，则

$$\begin{aligned}|x^2-a^2|=|(a+h)^2-a^2|&=|2ah+h^2|\\&\le(2|a|+|h|)\,|h|\\&\le(2|a|+1)\,|h| &&(\text{若 } |h|<1)\\&<\varepsilon, &&(\text{若 } |h|<\frac{\varepsilon}{1+2|a|})\end{aligned}$$

因此当 $|x-a|<\frac{\varepsilon}{1+2|a|+\varepsilon}$ 时，$|x^2-a^2|<\varepsilon$，x^2 在 a 处连续，x^2 是连续函数. □

例 2.1.6. $\sqrt{x}$（规定 $\sqrt{0}=0$）是区间 $[0,+\infty)$ 上的连续函数.





证明. 任意给定 $a \geq 0$ 和 $\varepsilon > 0$，若非负实数 x 满足 $|x-a| < \varepsilon^2$，则

$$\begin{aligned}|\sqrt{x}-\sqrt{a}|^2 &= |\sqrt{x}-\sqrt{a}||\sqrt{x}-\sqrt{a}| \\ &\leq |\sqrt{x}-\sqrt{a}|\big(|\sqrt{x}|+|\sqrt{a}|\big) \\ &= |(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})| = |x-a| \\ &< \varepsilon^2.\end{aligned}$$

所以 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}| < \varepsilon$，从而 $\sqrt{x}$ 在 a 处连续. 从而 $\sqrt{x}$ 是连续函数. □

注 2.1.7. (1) 按定义，验证连续就是验证以下逻辑命题

$$\forall \varepsilon > 0 \left[\exists \delta > 0 \Big(\forall x \in I \big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon \big) \Big) \right].$$

注意最后这个蕴涵关系只是充分条件，不是充分必要条件，所以验证连续性并不是求解不等式 $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$，而只是找到一个使这个不等式成立的形如 $|x-a| < \delta$ 的充分条件.

举例而言，$|x^2-4| < 1$ 的解集为 $(-\sqrt{5},-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},\sqrt{5})$，但为了说明 x^2 在 $x=2$ 处是连续的，我们仅需指出对于包含 2 在内的一个小区间 $(1.9, 2.1)$ 内的所有 x，都有 $|x^2-4| < 1$.

我们特别提醒初学者，用定义证明连续性**不是**求解不等式. 这给了我们适当放缩不等式的自由.

(2) 上述两个例子表现出来的连续性质有所不同.

对函数 $\sqrt{x}$ 而言，

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$$

只与 ε 有关，可以适用于所有 $a \in [0, +\infty)$.

对函数 x^2 而言，

$$\delta(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon+2|a|}$$

不仅与 ε 有关，也与 a 有关. 对任何 $\varepsilon, \delta > 0$，当 $n > \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\delta}$ 时，对于 $a = n^2$，$|n^2 + \frac{1}{n} - n^2| = \frac{1}{n} < \delta$，但是

$$\left|\left(n^2 + \frac{1}{n}\right)^2 - (n^2)^2\right| = \left|2n + \frac{1}{n^2}\right| > 2n > \varepsilon.$$

这表明对于 x^2，我们不可能找到只依赖于 ε 的 δ 使它适用于所有 a. 稍后我们会更细致地研究这两种不同的连续性质.

例 2.1.8. $\frac{1}{x}$ 是 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上的连续函数.

证明. 对任意 $a \neq 0$ 及任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{|a|^2\varepsilon}{1+|a|\varepsilon}$，则当 $|x-a| < \delta$ 时，就有 $|x-a| < |a|$，从而 $x \neq 0$，且

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|a||x|} < \frac{\delta}{|a|(|a| - |x-a|)} < \frac{\delta}{|a|(|a| - \delta)} = \varepsilon.$$

从而 $\frac{1}{x}$ 在任何 $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 处连续. □

例 2.1.9. $\sin x, \cos x$ 是连续函数.

证明. 在弧度制下，$\sin x$ 满足不等式

$$0 \le \sin x \le x, \quad \forall 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

上述不等式的几何解释是：图2.1中半径为 1 的圆中圆心角 x 所对应的等腰三角

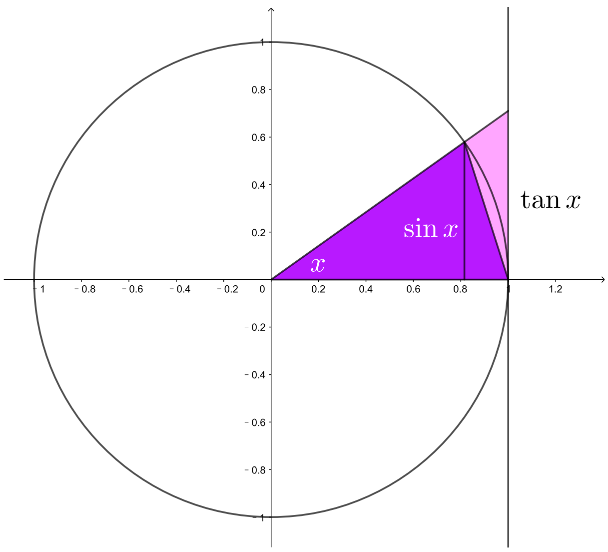


图 2.1: 等腰三角形、扇形、直角三角形

形面积 $\frac{\sin x}{2}$ 不超过扇形面积 $\frac{x}{2}$（在弧度制下，x 弧度的圆心角所对单位圆周上的弧长为 x）.

因为 sin 是奇函数，所以

$$0 \le |\sin x| \le |x|, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

从而对任意 $\varepsilon > 0$，当 $|x - x_0| < \min\{\varepsilon, \frac{\pi}{2}\}$ 时，

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \\ &\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x-x_0| < \varepsilon, \\ |\cos x - \cos x_0| &= \left|-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}\right| \\ &\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x-x_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $\sin, \cos$ 都是连续函数. □

以下定理确保在复合以及四则运算下可以保持函数的连续性，它使得我们可以通过函数的代数结构把一些复杂函数的连续性归结到一些“基础构件”的连续性，从而避免陷入繁琐的不等式论证. 但是，如果我们希望对误差进行细致的分析，不等式的讨论仍然是至关重要的，这也是我们给出详细证明的目的.

定理 2.1.10 (连续函数的复合). *设函数 f 在 a 处连续，g 在 $b = f(a)$ 处连续. 则 f 与 g 的***复合函数** *$g \circ f$ 在 a 处连续，其中 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.* □

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对 g 的定义域中任意 y，只要 $|y - b| < \delta$，就有 $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$.

对应于这个 δ，存在 $\sigma > 0$ 使得对 f 的定义域中任意 x，只要 $|x - a| < \sigma$，就有 $|f(x) - f(a)| < \delta$.

于是对于 $g \circ f$ 定义域中的任意 x，只要 $|x - a| < \sigma$，就有 $f(x)$ 在 g 的定义域中，并且 $|f(x) - f(a)| < \delta$，从而

$$|g(f(x)) - g(f(a))| = |g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon.$$

因此 $g \circ f$ 在 a 处连续. □

利用数学归纳法，这个定理可以推广到任意有限多个函数的情形.

定理 2.1.11 (连续函数四则运算). *设函数 f 和 g 都在 a 处连续. 则 $f + g$，$f \cdot g$，$\frac{f}{g}$（若 $g(a) \ne 0$）都在 a 处连续.*

证明. (1) 加法的连续性.

对任意 $\varepsilon > 0$，存在正数 δ_1, δ_2 使得：对任意 $x \in I$，只要 $|x - a| < \delta_1$，就有 $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$；只要 $|x - a| < \delta_2$，就有 $|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 因此当 $|x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时，

$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \le |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

因此 $f+g$ 在 a 连续.

(2) 乘法的连续性. 利用

$$f(x)g(x)=\left(\frac{f(x)+g(x)}{2}\right)^2-\left(\frac{f(x)-g(x)}{2}\right)^2$$

以及加法的连续性、线性函数与平方函数的连续性和复合函数的连续性，可以得到乘积函数的连续性.

下面我们仍从定义给出证明. 对任意 $\varepsilon>0$，取

$$\tilde{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon+|f(a)|+|g(a)|},$$

则 $0<\tilde{\varepsilon}<1$，因此存在正数 δ 使得：对任意 $x\in I$，只要 $|x-a|<\delta$ ，就有 $|f(x)-f(a)|<\tilde{\varepsilon}$，$|g(x)-g(a)|<\tilde{\varepsilon}$. 于是

$$\begin{aligned}
&|f(x)g(x)-f(a)g(a)|\\
\leq&|f(x)-f(a)||g(x)-g(a)|+|f(a)||g(x)-g(a)|+|g(a)||f(x)-f(a)|\\
<&\tilde{\varepsilon}^2+|f(a)|\tilde{\varepsilon}+|g(a)|\tilde{\varepsilon}\\
<&(1+|f(a)|+|g(a)|)\tilde{\varepsilon}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 $f\cdot g$ 在 a 处连续.

(3) 除法的连续性.

由 $\frac{1}{x}$ 的连续性和复合函数的连续性定理知 $\frac{1}{g}$ 在 a 处连续. 再由乘法的连续性结论知 $\frac{f}{g}$ 在 a 处连续. □

推论 2.1.12. *多项式，有理函数（两个多项式的商），根式以及三角函数* sin,cos,tan,cot *都是连续函数.* □

注 2.1.13. 本节中我们使用了很多不等式论证. 这种不等式论证方法是误差估计的基本方法，在实验科学和工程技术中会经常遇到.

习题 2.1

1. 如何仅用十进制有限小数加减乘运算得到 $\sqrt{2}$ 的给定精度的近似值？

2. 用定义证明：若 f,g 都在 x_0 处连续，且 $g(x_0)\neq 0$，则 f/g 在 x_0 处连续.

3. 设 $f_1,\ldots,f_n\in\mathscr{C}(I)$，记 $g(x)=\max\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\}$. 证明 $g\in\mathscr{C}(I)$.

4. **乘方和开方的连续性**. 用定义证明对任何正整数 n，x^n 和 $x^{\frac{1}{n}}$ 都是区间 $(0,+\infty)$ 上的连续函数. 分别对 $f(x)=x^n$ 和 $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ 判断是否对任意 $\varepsilon>0$ 都存在与 $x_0>0$ 无关的正数 δ 使得只要正数 x 满足 $|x-x_0|<\delta$ 就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

5. **对数函数的连续性**. 证明：对 $a>1$，对数函数 $\log_a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$（定义见习题 1.4）是连续函数.

6. 以下论证希望表明任何增函数都是连续函数.

   证明. 设 $f:(a,b)\to(c,d)$ 是一个增函数. 任取 $x_0\in(a,b)$. 对任意 $\varepsilon>0$，取 $x_\pm$ 使得 $f(x_\pm)=f(x_0)\pm\varepsilon$ 以及 $\delta=\min\{x_+-x_0,x_0-x_-\}$. 则 $x_-<x_0<x_+$，$\delta>0$，且对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，

   $$f(x_0)-\varepsilon=f(x_-)<f(x)<f(x_+)=f(x_0)+\varepsilon.$$

   因此 f 在 x_0 处连续. □

   请问上述结论对吗？这个证明对吗？如果你发现这个证明有问题，你能够把它修改成一个正确的证明吗？

7. 以下论证希望表明 x^2 是连续函数.

   对于 $a\in\mathbb{R}$，任取正数 ε ($0<\varepsilon<a^2$)，当

   $$|x-a|<\min\left\{\sqrt{a^2+\varepsilon}-a,a-\sqrt{a^2-\varepsilon}\right\}$$

   时，

   $$\sqrt{a^2-\varepsilon}-a<x-a<\sqrt{a^2+\varepsilon}-a,$$

   从而

   $$\sqrt{a^2-\varepsilon}<x<\sqrt{a^2+\varepsilon},$$

   因此

   $$a^2-\varepsilon<x^2<a^2+\varepsilon,$$

   于是 $|x^2-a^2|<\varepsilon$，所以 x^2 在 $x=a$ 处连续. □

   请问：这个论证有问题吗？

8. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，

   $$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

   (1) 证明：对任意 $x\in\mathbb{Q}$，$f(x)=f(1)x$.
   (2) 证明：若 f 连续，则对任意 $x\in\mathbb{R}$，$f(x)=f(1)x$.
   (3) 证明：若 f 单调，则 f 连续.

9. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，且满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，

   $$f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y).$$

   证明对任意 $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$，$f(x)=(f(1))^{x^2}$.

10. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在任何有界闭区间上有界，且满足**中点凸条件**，即对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

证明 f 是连续函数.

2.2 函数在一点处的极限

极限的定义和基本性质

极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 f 在 a 周边取得的函数值决定，它反映了函数 f 在 a 附近的性质，它可以帮助我们更好地了解函数的连续性.

定义 2.2.1. 称 $\{x\in\mathbb{R}|0<|x-a|<\varepsilon\}$ 为 a 的 **ε-去心邻域**. 限制在 I 中，称 $\{x\in I|0<|x-a|<\varepsilon\}$ 为 a **在 I 中的 ε-去心邻域**.

定义 2.2.2. 称 $a\in\mathbb{R}$ 是集合 I 的一个**聚点**，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x\in I$ 使得 $0<|x-a|<\varepsilon$. 即在 a 的任意去心邻域中都有 I 的成员.

称 a 是 I 的一个**孤立点**，如果 $a\in I$ 且 a 不是 I 的聚点，即在 a 的某个去心邻域中没有 I 的成员，即存在 $\delta_0>0$ 使得

$$\forall x, x\in I \text{ 且 } |x-a|<\delta_0\implies x=a.$$

简言之，I 的孤立点必然是 I 的成员，但不能被 I 的其他成员逼近；I 的聚点可以是也可以不是 I 的成员，但总是可以被 I 的（其他）成员逼近.

例 2.2.3.
1. 区间 $(0,1)$ 没有孤立点，它的所有聚点组成的集合为 $[0,1]$.
2. 集合 $\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}^*\right\}$ 的每个点都是孤立点，0 是这个集合的唯一聚点.
3. 任何实数都是 $\mathbb{Q}$ 的聚点.
4. $\mathbb{Z}$ 中每个点都是孤立点，$\mathbb{Z}$ 没有聚点.
5. 对非空的实数子集 I，I 中的每个数要么是 I 的孤立点，要么是 I 的聚点.

由定义知，如果 a 是 I 的一个孤立点，则 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 a 处连续. 这是连续性的一种平凡情形.

连续性的非平凡情形与极限有关. 当自变量 x 趋于 a 时，函数值 $f(x)$ 的极限值由 a 的去心邻域中的那些 x 所对应的函数值 $f(x)$ 决定.

定义 2.2.4. 设 $a \in \mathbb{R}$ 是集合 I 的一个聚点，称**当 x 趋于 a 时函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 存在极限**（也称**收敛**），如果存在 $A \in \mathbb{R}$ 使得：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in I$，只要 $0 < |x - a| < \delta$，就成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 此时称 A 为**当 x 趋于 a 时 $f : I \to \mathbb{R}$ 的一个极限**，记为 $\lim\limits_{I \ni x \to a} f(x) = A$（在不导致歧义时，也记为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$）. 即

$$\lim_{I \ni x \to a} f(x) = A : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \big(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\big).$$

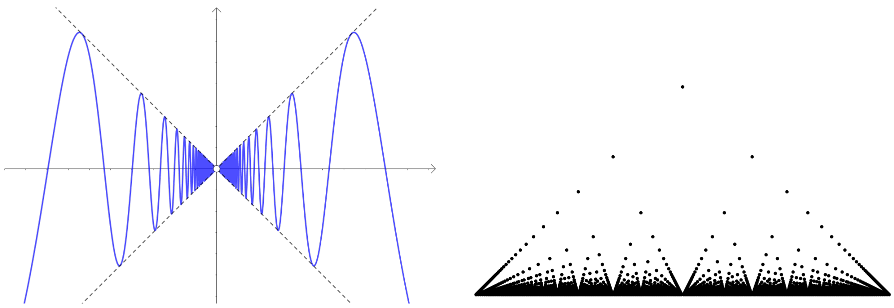
注意在上述定义中出现的“任意”、“存在”是不能随意交换先后顺序的.

定理 2.2.5. *若当 x 趋于 a 时函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 存在极限，则极限唯一.*

证明. (反证法) 设 A, B 都是当 x 趋于 a 时 f 的极限. 假设 $A \neq B$. 则存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in I$，只要 $0 < |x - a| < \delta$，就成立 $|f(x) - A| < \frac{|A-B|}{2}$，$|f(x) - B| < \frac{|A-B|}{2}$. 于是

$$|A - B| \le |f(x) - A| + |f(x) - B| < |A - B|,$$

这与 $|A - B| = |A - B|$ 矛盾. 所以 $A = B$. □



(a) (b)

图 2.2:

下面这个例子表明，极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 与 f 是否在 a 有定义或 $f(a)$ 的值无关.

例 2.2.6. 证明：$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

证明. $x \sin \frac{1}{x}$ 的定义域为 $I = (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$，0 是 I 的聚点. 对任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，则 $0 < |x - 0| < \varepsilon$ 时

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \le |x| < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. 见图2.2(a). □

例 2.2.7. 对 Riemann 函数（见图2.2(b)）

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & \text{若 } x=\frac{q}{p} \text{ 是既约分数;}\\ 0, & \text{若 } x \text{ 是无理数,}\end{cases}$$

这里称 $\frac{q}{p}$ 是既约分数是指，$p\in\mathbb{N}^*, q\in\mathbb{Z}$，$p, q$ 的最大的正整数公因子为 1. 证明对任意 $a\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to a} R(x)=0$.

证明. 对任意 $\varepsilon>0$，取正整数 $N>\frac{1}{\varepsilon}$.

对分母不大于 N 的任意两个不同的分数 $\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}$，

$$\left|\frac{q_1}{p_1}-\frac{q_2}{p_2}\right|\geq\frac{1}{p_1p_2}\geq\frac{1}{N^2}.$$

因为区间 $(a-\frac{1}{3N^2}, a+\frac{1}{3N^2})$ 长度小于$\frac{1}{N^2}$，所以其中分母不超过 N 的既约分数最多只有一个，所以存在 $\delta_\varepsilon>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta_\epsilon$ 时，x 要么是一个无理数，要么是一个分母大于 N 的既约分数，无论哪种情况都有

$$0\leq R(x)<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to a} R(x)=0$. □

极限与连续

下述定理很容易从定义得到证明，它说明了极限与连续性之间的关系.

定理 2.2.8. *设 a 是 I 的聚点. 则*

1. *若在 a 的一个去心邻域中$f(x)=g(x)$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$.*
2. *$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 的充分必要条件是如下定义的函数*

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in I\backslash\{a\},\\ A, & x=a\end{cases}$$

在 a 处连续.

3. *f 在 a 处连续当且仅当 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.*

□

例 2.2.9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x}=-1$.

证明. $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}$ 的定义域为 $I=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$，1 是 I 的聚点，且对任意 $x\in I$，

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}=\frac{x-2}{x}=: F(x),$$

F 在 $x=1$ 处连续，故 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x}=\frac{1-2}{1}=-1$. 见图2.3. □

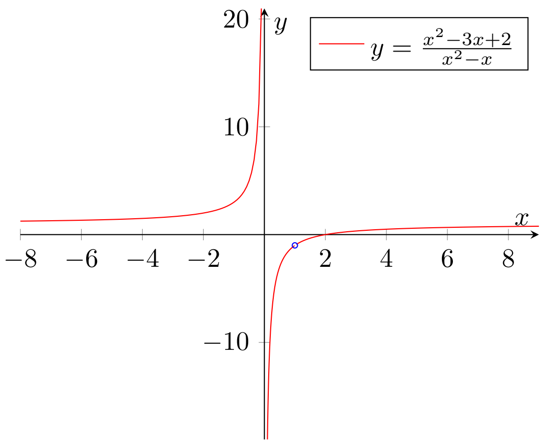


图 2.3:

例 2.2.10. 设 $a>0$. 求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$.

解. 对任何正数 $x\neq a$，$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$. 等式右端在 $x=a$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

□

极限的运算规则

利用连续函数的四则运算我们得到如下结论，

定理 2.2.11 (极限的四则运算). 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$. 则

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=A+B$.
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$.
3. 若 $B\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$. □

证明. 记

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq a;\\ A, & x=a,\end{cases}\qquad G(x)=\begin{cases}g(x), & x\neq a;\\ B, & x=a.\end{cases}$$

则 F,G 在 a 处连续. 因此 $F+G, FG$ 在 a 处连续. 从而

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}[F(x)+G(x)]=F(a)+G(a)=A+B,$$
$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}[F(x)G(x)]=F(a)G(a)=AB.$$

若 $B \neq 0$，则存在 $\delta > 0$ 使得 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$g(x) \neq 0$. 此时 $\frac{F}{G}$ 在 a 处连续，从而

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(a)}{G(a)} = \frac{A}{B}.$$

□

对于复合函数，情况稍有不同.

定理 2.2.12 (**复合函数的极限**). *设* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

1. *若 g 在点 b 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.*
2. *若 g 在点 b 处无定义，且 $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A$，则 $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = A$.*

证明. (1) 记 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ b, & x = a. \end{cases}$ 则 $F, g\circ F$ 连续，从而

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{x\to a} g(F(x)) = g(F(a)) = g(b).$$

(2) 记 $g\circ f$ 的定义域为 I. 则 $\forall x \in I$，$f(x) \neq b$.

记 $G(y) = \begin{cases} g(y), & y \neq b, \\ A, & y = b. \end{cases}$ 则 $G, G\circ F$ 连续.

对任意 $x \in I\backslash\{a\}$，$G(F(x)) = G(f(x)) = g(f(x))$，所以

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{x\to a} G(F(x)) = G(F(a)) = G(b) = A.$$

□

注 2.2.13. (1) 复合函数极限定理就是在极限计算中可以采取适当的换元.

(2) 如果 g 在 b 有定义，且存在极限 $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A$，但 $g(b) \neq A$，是否成立 $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = A$？为什么？

极限与序，极限与界

利用函数之间的大小关系，我们也可以通过适当放缩，把把复杂函数极限的计算转化为简单函数的极限.

定理 2.2.14 (**夹挤定理**). *设函数 u, v, f 都在 I 上定义，a 是 I 的聚点. 若在 a 的一个去心邻域中总有*

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = A$. 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

证明. 设 $\delta_0 > 0$ 满足对任意 $x \in I$ 且 $0 < |x-a| < \delta_0$，都有

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x).$$

对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in I$，只要 $0 < |x-a| < \delta$，就成立 $|u(x)-A| < \varepsilon$,$|v(x)-A| < \varepsilon$. 则当 $x \in I$ 且 $0 < |x-a| < \min\{\delta, \delta_0\}$ 时，

$$-\varepsilon < u(x) - A \leq f(x) - A \leq v(x) - A < \varepsilon,$$

于是 $|f(x)-A| < \varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. □

在下面这个例子中，我们将得到三角函数的一些重要极限，利用它们我们可以得到三角函数的连续性和可微性.

例 2.2.15. 三角函数的连续性和重要极限

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2} = 1.$$

x	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{\sin x}{x}$	$\frac{\tan x}{x}$	$\frac{1-\cos x}{x^2/2}$
$\frac{\pi}{6}$	0.50000000	0.86602540	0.95492966	1.10265779	0.97736146
$\frac{\pi}{12}$	0.25881905	0.96592583	0.98861593	1.02349052	0.99430146
$\frac{\pi}{24}$	0.13052619	0.99144486	0.99714666	1.00575100	0.99857292
$\frac{\pi}{48}$	0.06540313	0.99785892	0.99928621	1.00143035	0.99964308
$\frac{\pi}{96}$	0.03271908	0.99946459	0.99982152	1.00035713	0.99991076
$\frac{\pi}{192}$	0.01636173	0.99986614	0.99995538	1.00008925	0.99997769
$\frac{\pi}{384}$	0.00818114	0.99996653	0.99998884	1.00002231	0.99999442
$\frac{\pi}{768}$	0.00409060	0.99999163	0.99999721	1.00000558	0.99999861
$\frac{\pi}{1536}$	0.00204531	0.99999791	0.99999930	1.00000139	0.99999965
$\frac{\pi}{3072}$	0.00102265	0.99999948	0.99999983	1.00000035	0.99999991
$\frac{\pi}{6144}$	0.00051133	0.99999987	0.99999996	1.00000009	0.99999998
$\frac{\pi}{12288}$	0.00025566	0.99999997	0.99999999	1.00000002	0.99999999
$\frac{\pi}{24576}$	0.00006392	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99999999
$\frac{\pi}{49152}$	0.00003196	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99999999
$\frac{\pi}{98304}$	0.00001598	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99999978
$\frac{\pi}{196608}$	0.00000799	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99999978
$\frac{\pi}{393216}$	0.00000399	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99999630
$\frac{\pi}{786432}$	0.00000200	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99999630

解. 我们已经证明过 $\sin, \cos$ 是连续函数，所以

$$\lim_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0, \quad \lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1.$$

对 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，

$$0 < \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2},$$

从而

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos x},$$

由函数的奇偶性知，这个不等式对 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 也成立.

由于 $\sin x, \cos x$ 是连续函数，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$.

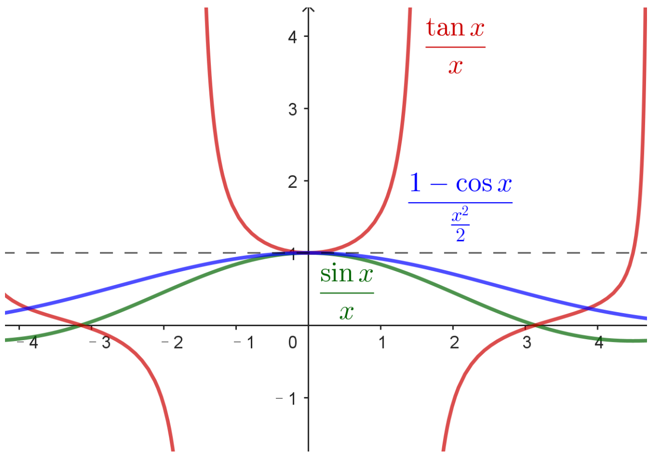
再由夹挤定理知，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1.$$

再由极限的四则运算性质以及复合函数极限性质知，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1.$$

□



注 2.2.16. 我们需要指出的是，极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2} = 1,$$

仅在弧度制下成立，在角度制下它们并不成立.

利用实数集的序结构，我们可以得到极限与序的关系.

定理 2.2.17 (保序性和有界性). 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. 则

1. 若 $A < B$. 则在 a 的某个去心邻域中总成立 $f(x) < g(x)$.

2. f 在 a 的某个去心邻域中有界.

3. 若在 a 的任何去心邻域中总存在 x 使得 $f(x) \le g(x)$，则 $A \le B$.

证明. (1) 若 $A < B$，则存在 $\delta_0 > 0$ 使得对任意 $x \in I$ 且 $0 < |x-a| < \delta_0$，

$$|f(x) - A| < \frac{B-A}{2}, \qquad |g(x) - B| < \frac{B-A}{2},$$

所以

$$f(x) < A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2} = B - \frac{B-A}{2} < g(x).$$

(2) $A - 1 < \lim\limits_{x\to a} f(x) < A + 1$，所以由(1)，存在 $\delta_0 > 0$ 使得对任意 $x \in I$ 且 $0 < |x-a| < \delta_0$， $A - 1 < f(x) < A + 1$.

(3) 由(1)和反证法知结论成立. □

推论 2.2.18. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，则 f 在 a 的某个去心邻域中有界. □

例 2.2.19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

证明. 记 $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$. 对任意 $M > 0$ 和任意 $\delta > 0$，由阿基米德性质，存在正整数 n 使得 $2n\pi + \frac{\pi}{2} > M + \frac{1}{\delta}$. 取 $x_n = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1}$，所以 $0 < x_n < \delta$，$f(x_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M$. 所以 f 在 $x = 0$ 的任意近旁无界，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在. □

函数在聚点附近有界不是存在极限的充分条件.

例 2.2.20. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在.

证明. 假设 $A = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 存在. 则存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $0 < |x| < \frac{1}{n}$ 时，$\sin\frac{1}{x} \in (A - \frac{1}{4}, A + \frac{1}{4})$. 令

$$x_n = \frac{2}{4n\pi + \pi}, \qquad y_n = \frac{1}{2n\pi}.$$

则 $0 < x_n < y_n < \frac{1}{n}$. 所以

$$1 = \left|\sin\frac{1}{x_n} - \sin\frac{1}{y_n}\right| \le \left|\sin\frac{1}{x_n} - A\right| + \left|A - \sin\frac{1}{y_n}\right| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

矛盾. 因此 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. □

习题 2.2

1. 记 $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-x}$，请用 Excel 计算 $f(1-0.1^n)$ 和 $f(1+0.1^n)$，观察并思考其中出现的问题.

2. （有理分式与根式，换元及四则运算）求极限
   (1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2-6x}$ (提示令 $h = x - 2$)；
   (2) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$ (n 是正整数，提示令 $h = x - a$)；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{m/n}-a^{m/n}}{x-a}$ (m,n 是正整数，提示令 $y=\sqrt[n]{x}$)；
(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$；
(5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

3. （三角函数，换元及四则运算）求极限
(1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ (提示令 $h=x-a$)；
(2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$ (提示令 $x=\frac{\pi}{2}-t$)；
(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$；
(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin x^2}$；
(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$；
(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ (提示令 $h=x-\frac{\pi}{3}$).

4. 求极限
(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$ ($[t]$ 表示不大于 t 的最大整数)；
(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}$.

5. 举例说明：存在函数 f,g 满足 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b,\lim\limits_{y\to b}g(y)=A$，但 $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=A$ 不成立.

6. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，$c>0$. 证明

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=\begin{cases}c, & f(x)>c;\\ f(x), & |f(x)|\le c;\\ -c, & f(x)<-c\end{cases}$$

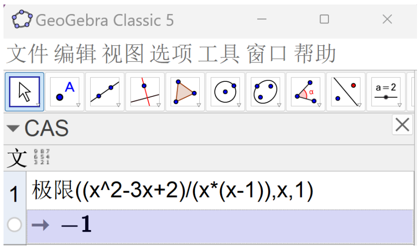
是连续函数.

7. **三角函数的基本性质及其推论** （续习题 1.6 第 1 题）
(1) 我们知道 $\sin\frac{\pi}{2}=1$. 记 $x_0=\frac{\pi}{2},x_n=\frac{x_0}{2^n}$，一方面，我们有递推关系

$$\sin x_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\cos x_n}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 x_n}}{2}}=\frac{\sin x_n}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-\sin^2 x_n})}},$$

另一方面，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 知当 $|x|>0$ 足够小时，$\sin x\approx x$. 因此当 n 足够大时，$2^{n+1}\sin x_n\approx\pi$. 请根据以上信息估算 π 的近似值，并比较 $\sin x_n$ 的两种递推关系的计算结果.
(2) 对给定的正整数 N，画出 $(\frac{k\pi}{2^N},\sin\frac{k\pi}{2^N})$（$k=0,1,\ldots,N$）的大体位置，描绘曲线 $y=\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 中的大致图形.

8. 学习用 GeoGebra 计算函数极限.



2.3 单侧极限与间断，单调函数的极限与连续性

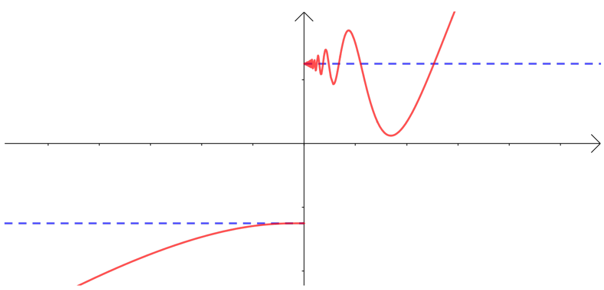
因为实数集具有序结构，所以对于一元函数，其自变量与函数值的大小变化都只有两种可能（从小变大或从大变小），自变量与函数值之间大小关系的协调性体现为函数的单调性. 这使得一元函数尤其是单调函数在连续性和极限行为方面有一些独特的性质. 在这一节中，我们讨论函数的单侧极限与单侧连续性，特别对单调函数的连续性做深入讨论，最终给出指数函数、对数函数和幂函数的严格定义及连续性的证明.

单侧极限与间断

定义 2.3.1 (**函数的单侧极限与单侧连续性**)**.** 设函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 $a \in \mathbb{R}$ 左侧任意近旁有定义，即对任意 $\delta > 0$， $I \cap (a-\delta, a) \neq \emptyset$. 此时称$I$ **从左侧逼近** a. 称 $A \in \mathbb{R}$ 为 f **在** a **左侧的极限**（记为 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$，也记为 $f(a-) = A$），如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $x \in I \cap (a-\delta, a)$，就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

称 f 在 $a \in \mathbb{R}$ **左连续**，如果 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

类似定义I **从右侧逼近** a，f **在** a **右侧的极限**（记为 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$，也记为 $f(a+) = A$）以及 f 在 $a \in \mathbb{R}$ **右连续**.



易见对单侧极限，上述（双侧）极限所有的性质（唯一性、四则运算、复合函数、夹挤定理、保序性和有界性）都成立，读者可以自己陈述相应的结论并给出证明. 以下定理很容易从定义得到证明.

定理 2.3.2. *设 f 在 a 左右两侧任意近旁有定义. 则*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *存在当且仅当单侧极限* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *和* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *都存在且相等. 此时* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
2. f *在 a 处连续当且仅当 f 在 a 处既右连续又左连续.*

□

定义 2.3.3 (**函数的间断点**). 设 $a \in \mathbb{R}$ 是 I 的聚点. 称 $a \in \mathbb{R}$ 是函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 的一个**间断点**，若 f 在 a 处无定义或不连续.

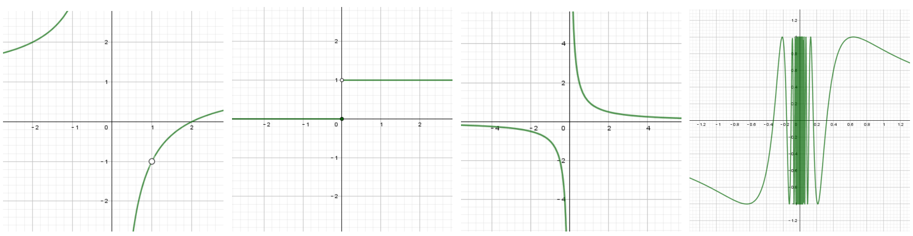
间断点分为：

1. **第一类间断点**：它细分为
   (a) **可去间断点**：极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，但 f 在 a 处无定义或者 $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.
   (b) **跳跃间断点**：$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 都存在，但不相等（无论 f 是否在 a 有定义）.
2. **第二类间断点**：除第一类间断点以外的其他间断点，即两个单侧极限 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 中至少有一个不存在.

注 2.3.4. (1) f 在它的可去间断点 a 处不连续，是由于 f 在 a 处未定义或 $f(a)$ 的值不恰当所致，只要把 f 在 a 的值改为 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$，即可让函数在 a 处变为连续.

(2) 如果 a 是 f 的跳跃间断点，则可以把 f 在 a 的值改为某一侧的单侧极限值，从而使函数在那一侧是连续的，但无论如何不可能让函数在 a 处连续.

(3) 如果 a 是 f 的第二类间断点，则在 a 处某一侧，无论怎样修改 f 在 a 的值都无法使函数 f 在这一侧连续.



例 2.3.5. (1) $x = 1$ 是 $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}$ 的可去间断点.

(2) $x=0$ 是函数 $h(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 的跳跃间断点.

(3) $x=0$ 是函数 $\frac{1}{x}$ 的第二类间断点.

(4) $x=0$ 是函数 $\sin\frac{1}{x}$ 的第二类间断点.

(5) Riemann 函数 $R(x)$（见例 2.2.7）的间断点是所有有理数，而且都是可去间断点.

(6) Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$ 在所有点都间断，且为第二类间断.

单调与极限，单调与连续

细心的读者可能会注意到，到目前为止出现的所有涉及极限的结论，都是在某些极限存在的前提下得到的. 下面这个结论与众不同，它给出了极限存在的一个充分条件，它是实数连续性的一个重要体现.

定理 2.3.6 (单调有界 $\Rightarrow$ 单侧极限存在). *设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 单调不减.*

1. 若 f 在 (a,b) 内有上界，则 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\sup\limits_{x\in(a,b)}f(x)$.

2. 若 f 在 (a,b) 内有下界，则 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\inf\limits_{x\in(a,b)}f(x)$.

证明. (1) 由确界公理，上确界 $A=\sup\limits_{x\in(a,b)}f(x)$ 存在. 对任意 $\varepsilon>0$，因为 $A-\varepsilon$ 不是 $\{f(x)|x\in(a,b)\}$ 的上界，所以存在 $x_1\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)>A-\varepsilon$. 由 f 的单调性知，对任意 $x\in(x_1,b)$，$A-\varepsilon<f(x_1)\le f(x)\le A$. 所以 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$.
(2) 对 $g(x)=-f(-x)$ 用（1）的结论. □

推论 2.3.7. *设 $f:I\to\mathbb{R}$ 单调，且 f 在 x_0 左右两侧任意近旁有定义. 则单侧极限 $f(x_0-),f(x_0+)$ 都存在，且 $f(x_0-)\le f(x_0+)$. 若 $f(x_0-)<f(x_0+)$，则 x_0 是 f 的跳跃间断点；若 $f(x_0-)=f(x_0+)$，且 f 在 x_0 无定义，则 x_0 是 f 的可去间断点；若 $f(x_0-)=f(x_0+)$ 且 f 在 x_0 处有定义，则 f 在 x_0 连续.*

证明. 不妨设 f 单调不减. 任取 $x_1<x_0<x_2$ 使得 $f(x_1),f(x_2)$ 都有定义. 则对任意 $x\in I\bigcap(x_1,x_0)$ 和任意 $y\in I\bigcap(x_0,x_2)$，$f(x_1)\le f(x)\le f(y)\le f(x_2)$. 于是由前述定理和极限保序性知，$f(x_0-),f(x_0+)$ 都存在. 且 $f(x_0-)\le f(x_0+)$.

如果 $f(x_0-)<f(x_0+)$，则 x_0 是 f 的跳跃间断点.

如果 $f(x_0-)=f(x_0+)$ 且 f 在 x_0 无定义，则 x_0 是 f 的可去间断点.

如果 $f(x_0-)=f(x_0+)$ 且 f 在 x_0 有定义，则对任意 $x\in I\bigcap(x_1,x_0)$ 和任意 $y\in I\bigcap(x_0,x_2)$，

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_0)\le f(y)\le f(x_2),$$

所以 $f(x_0-) \le f(x_0) \le f(x_0+)$. 因为 $f(x_0-) = f(x_0+)$，所以

$$f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+).$$

从而 f 在 x_0 处连续. □

从 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x \to 0^+$ 和 $\frac{1}{x}$ 在 $x \to 0^+$ 的情况我们知道，仅靠有界性或仅靠单调性都不足以保证极限存在.

定理 2.3.8 (单调函数的连续性、反函数的连续性). *设 $I \subset \mathbb{R}$ 是区间，$f: I \to \mathbb{R}$ 是单调函数. 则*

1. *f 连续当且仅当 $f(I)$ 是区间.*

2. *若 f 是严格单调的连续函数，则 $f^{-1}: f(I) \to I$ 连续.*

证明. 不妨设 f 单调不减.

(1) f 连续 $\Longrightarrow f(I)$ 是区间：

对任意 $f(x_1), f(x_2) \in f(I)$ ($x_1, x_2 \in I, f(x_1) < f(x_2)$)以及任意 $y \in \big(f(x_1), f(x_2)\big)$，令 $A := \{x \in I | f(x) < y\}$. 则 $x_1 \in A$. 对任意 $x \in A$，$f(x) < y < f(x_2)$，所以由 f 单调不减知 $x < x_2$，从而 x_2 是 A 的上界. 因此 A 有上确界 x_0. 于是 $x_1 \le x_0 \le x_2$，因为 I 是区间，所以 $x_0 \in I$.

对任意 $x \in I \cap (-\infty, x_0)$ 和任意 $z \in I \cap (x_0, +\infty)$，存在 $x_3 \in A$ 使得 $x < x_3 < x_0$，同时，$z \notin A$. 于是

$$f(x) \le f(x_3) < y \le f(z), \quad f(x) \le f(x_3) \le f(x_0) \le f(z),$$

从而 $f(x_0-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \le \min\{y, f(x_0)\} \le \max\{y, f(x_0)\} \le \lim\limits_{z \to x_0^+} f(z) = f(x_0+)$.

因为 f 在 x_0 处连续，所以 $f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$. 于是 $\max\{y, f(x_0)\} = \min\{y, f(x_0)\} = f(x_0)$，所以 $y = f(x_0) \in f(I)$. 因此 $f(I)$ 是区间.

$f(I)$ 是区间 $\Longrightarrow f$ 连续：

假设 f 在 $x_0 \in I$ 处不连续. 则由单调性知，要么 $f(x_0) < f(x_0+)$，要么 $f(x_0) > f(x_0-)$.

若 $f(x_0) < f(x_0+) =: \alpha$，则对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 \le x_0 < x_2$，成立不等式 $f(x_1) \le f(x_0) < \alpha \le f(x_2)$. 从而 $\frac{f(x_0)+\alpha}{2} \notin f(I)$，但这与 $f(I)$ 是区间矛盾.

类似可证 $f(x_0) > f(x_0-)$ 也与 $f(I)$ 是区间矛盾.

所以 $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$（当 x_0 是 区间 I 的端点时，这里有一个单侧极限不能定义），从而 f 在 x_0 处连续.

(2) 若 f 严格单调且连续，则 $f(I)$ 是区间且 $f^{-1}: f(I) \to I$ 严格单调. 又 $f^{-1}(f(I)) = I$ 是区间，所以根据(1)，f^{-1} 连续. □

例 2.3.9 (乘方与开方的连续性). 对任何正整数 n，我们已知 x^n 是区间 $(0,+\infty)$ 到 $(0,+\infty)$ 的连续的增函数，因此其值域是一个区间.

对任意正数 y，取正整数 $m > y + \frac{1}{y}$，则 $m^n \geq m > y > \frac{1}{m} \geq \left(\frac{1}{m}\right)^n$. 因为 $\left(\frac{1}{m}\right)^n$ 和 m^n 都是 x^n 的函数值，x^n 的值域是区间，所以 y 是 x^n 的函数值. 因此 x^n（$x > 0$）的值域为 $(0,+\infty)$.

因此 x^n（$x > 0$）的反函数 $x^{\frac{1}{n}}$ 是区间 $(0,+\infty)$ 到 $(0,+\infty)$ 上的连续的增函数.

又 x^{-1}（$x > 0$）是连续函数，所以对任何非零有理数 r，x^r（$x > 0$）是 $(0,+\infty)$ 到 $(0,+\infty)$ 的连续函数，$x^{1/r}$ 是它的反函数. □

例 2.3.10. x^3 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的严格增的连续函数，对任意 $y_0 \in \mathbb{R}$，取正整数 n 使得 $-n < y_0 < n$. 则 $-n^3 \leq -n < y_0 < n \leq n^3$，所以 y_0 在 x^3 的值域中. 因此 x^3 的值域是 $\mathbb{R}$.

因此 x^3 有从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续反函数，记为 $x^{\frac{1}{3}}$.

例 2.3.11 (对数函数的连续性，以及指数函数——作为对数函数的反函数——的连续性). 对任何正数 $a > 1$，我们已知对数函数 $\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 是增函数（见习题 1.4），满足

$$\log_a a = 1; \qquad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

对任何 $x > 0$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，取正整数 $n > \frac{1}{\varepsilon}$，则当 $|y - x| < \frac{x(a^{\frac{1}{n}}-1)}{a^{\frac{1}{n}}}$ 时，$xa^{-\frac{1}{n}} < y < xa^{\frac{1}{n}}$，从而

$$\begin{aligned}\log_a x - \varepsilon < \log_a x - \frac{1}{n} &= \log_a(xa^{-\frac{1}{n}}) \\ &< \log_a y \\ &< \log_a(xa^{\frac{1}{n}}) = \log_a x + \frac{1}{n} < \log_a x + \varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\log_a$ 是连续函数.

对任意实数 y，取正整数 $m > |y|$，则

$$\log_a(a^m) = m > y > -m = \log_a(a^{-m}),$$

所以 y 在 $\log_a$ 的值域中. 所以 $\log_a$ 的值域为 $\mathbb{R}$.

因此对数函数 $\log_a$ 的反函数——指数函数 $\exp_a$ 是 $\mathbb{R}$ 到区间 $(0,+\infty)$ 上的连续的增函数，满足

$$\exp_a(1) = a; \quad \exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

由此知：

$$\begin{aligned}
\exp_a(m) &= (\exp_a(1))^m = a^m,\\
\exp_a(-m) &= \frac{1}{\exp_a(m)} = \frac{1}{a^m} = a^{-m},\\
\exp_a(\frac{m}{n}) &= \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}},\\
\exp_a(x) &= \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to x} a^r.
\end{aligned}$$

因此习惯上，我们记 $a^x := \exp_a(x)$.

当 $0 < a < 1$ 时，对数函数 $\log_a = -\log_{1/a}$ 是从区间 $(0, +\infty)$ 到 $\mathbb{R}$ 上的连续的减函数，其反函数 a^x 是 $\mathbb{R}$ 到区间 $(0, +\infty)$ 上的连续的减函数.

对正数 $b \neq 1$，令 $f(x) = \frac{\log_a x}{\log_a b}$，则

$$f(b) = 1; \quad f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y > 0.$$

因此 $f(x) = \log_b x$，从而 $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$. 取 $x = b^t$，则 $\log_a(b^t) = t\log_a b$，因此

$$b^t = a^{t\log_a b}. \tag{换底公式}$$

□

例 2.3.12 (幂函数的连续性). 对任何正数 x 和实数 μ，定义

$$x^\mu = 2^{\mu\log_2 x},$$

由换底公式知，这里数字 2 可以改成任何不等于 1 的正数.

由指数函数与对数函数的连续性以及复合函数的连续性知 x^μ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的连续函数.

再由指数函数与对数函数的单调性知：

当 $\mu > 0$ 时，x^μ 是增函数，值域为 $(0, +\infty)$.

当 $\mu < 0$ 时，x^μ 是减函数，值域为 $(0, +\infty)$.

当 $\mu = 0$ 时，$x^0 = 1$. □

下面我们不借助对数函数，直接利用从有理数指数逼近的办法定义任意实数指数的指数函数，并证明它的连续性.

例 2.3.13 (指数函数的另一定义以及连续性). 设 $a > 1$，考虑 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$，$f(x) = a^x$. 证明

1. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 是增函数；
2. 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，极限 $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni x\to x_0} f(x)$ 都存在，记为 $\hat{f}(x_0)$；
3. f 在任何 $x_0 \in \mathbb{Q}$ 处连续，$\hat{f}(x_0) = f(x_0)$；

4. $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是增函数；

5. $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数.

因此可记 $a^x=\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to x}a^r$.

证明. (1) 对任意两个有理数 $r<s$，存在正整数 N 和整数 m,n 使得 $r=\frac{m}{N}, s=\frac{n}{N}$. 从而 $n-m\in\mathbb{N}^*$. 因为 x^N 是增函数，$\left(a^{\frac{1}{N}}\right)^N=a>1=1^N$，所以 $a^{\frac{1}{N}}>1$. 故

$$\frac{a^s}{a^r}=a^{\frac{n-m}{N}}=\left(a^{\frac{1}{N}}\right)^{n-m}>1.$$

所以 $a^r<a^s$. 所以 $f(x)=a^x$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的增函数.

(2) 根据定理2.3.6，对任意 $x_0\in\mathbb{R}$，$A=\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni x\to x_0^-}f(x)$ 和 $B=\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni x\to x_0^+}f(x)$ 都存在. 因为 f 是增函数，所以 $A\le B$. 对任意正整数 N，由有理数的稠密性，存在有理数 r 满足 $x_0-\frac{1}{N}<r<x_0$，从而 $x_0<r+\frac{1}{N}$，于是

$$a^r\le A\le B\le a^{r+\frac{1}{N}},$$

从而

$$1\le\frac{B}{A}\le\frac{a^{r+\frac{1}{N}}}{a^r}=a^{\frac{1}{N}}.$$

因为 $\inf\limits_{N\in\mathbb{N}^*}a^{\frac{1}{N}}=1$，所以 $A=B$，从而 $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni x\to x_0}f(x)$ 存在.

(3) 由(2)及定理2.3.6(3)，f 在任何 $x_0\in\mathbb{Q}$ 处连续，从而 $f(x_0)=\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni x\to x_0}f(x)=\hat{f}(x_0)$.

(4) 设 $x,y\in\mathbb{R}$ 满足 $x<y$. 由有理数的稠密性，存在有理数 r_0,s_0 使得 $x<r_0<s_0<y$. 任取有理数 r,s，满足 $x<r<r_0<s_0<s<y$. 则

$$a^r<a^{r_0}<a^{s_0}<a^s,$$

从而 $\hat{f}(x)=\lim\limits_{r\to x}a^r\le a^{r_0}<a^{s_0}\le\lim\limits_{s\to y}a^s=\hat{f}(y)$，$\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是增函数.

(5) 任取 $x_0\in\mathbb{R}$. 由(4)和定理2.3.6，$\hat{A}=\lim\limits_{\mathbb{R}\ni x\to x_0^-}\hat{f}(x)$ 和 $\hat{B}=\lim\limits_{\mathbb{R}\ni x\to x_0^+}\hat{f}(x)$ 都存在，且 $\hat{A}\le\hat{B}$.

对任意正整数 N 及有理数 $r\in(x_0-\frac{1}{N},x_0)$，

$$r<x_0<r+\frac{1}{N},$$

所以由(3,4)知

$$a^r=f(r)=\hat{f}(r)<\hat{A}\le\hat{B}<\hat{f}\left(r+\frac{1}{N}\right)=f\left(r+\frac{1}{N}\right)=a^{r+\frac{1}{N}}=a^ra^{\frac{1}{N}},$$

因此

$$1\le\frac{\hat{B}}{\hat{A}}\le\frac{a^ra^{\frac{1}{N}}}{a^r}=a^{\frac{1}{N}},\quad N\ge1.$$

所以由 $\inf\limits_{N\in\mathbb{N}^*}a^{\frac{1}{N}}=1$ 知 $\hat{A}=\hat{B}$. 再由定理2.3.6(3)知 $\hat{f}$ 在 x_0 处连续. □

对 $0<a<1$，可以类似定义 a^x 并得到相应的性质.

习题 2.3

1. 在推论 2.3.7和定理 2.3.8的证明中我们都使用了“不妨设”的说法. 为什么可以通过“不妨设”只讨论一种情形？如果是其他情形，应该如何处理？

2. 指数函数的运算性质. 证明对任意 $a,b>0$ 和 $x,y\in\mathbb{R}$，$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$，$(a^x)^y=a^{xy}$，$a^x\cdot b^x=(ab)^x$.

3. 幂函数的运算性质. 证明对任意 $x,y>0$ 以及任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，
$$x^\mu y^\mu=(xy)^\mu,\quad x^\lambda x^\mu=x^{\lambda+\mu},\quad (x^\mu)^\lambda=x^{\lambda\mu}.$$

4. 是否每个函数都可以写成一个单调不增函数与一个单调不减函数的和？

5. 设 A 是 I 的一个稠密子集. 是否每个严格单调的连续函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 都可以扩充为一个连续函数 $\hat{f}:I\to\mathbb{R}$，即 $\forall x\in A,\hat{f}(x)=f(x)$？

6. 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是一个有界函数，
$$g:(a,b)\to\mathbb{R},\quad g(x)=\sup_{a<t\leq x}f(t).$$
(1) 证明：g 单调不减.
(2) 证明：若 f 是连续函数，则 g 是连续函数.
(3) 如果不假定f 是连续函数，那么 g 是否为连续函数？是否具有单侧连续性？

7. 一个区间上的单调有界的函数最多可以有多少个间断点？你能够构造一个单调有界函数使它具有尽可能多的间断点吗？

8. **三角函数的值域，反三角函数**（续习题 1.6 第 1 题和习题 2.2 第 6 题）
(13) 证明：$\cos,\sin$ 的值域为区间 $[-1,1]$.
(14) 在区间 $[0,\pi]$ 上，$\cos$ 有连续的反函数 $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$；在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin$ 有连续的反函数 $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

2.4　无穷远、无穷小与无穷大，数列的极限

无穷远、无穷小与无穷大

无穷远是从自变量的角度说的.

定义 2.4.1. 设 $A\in\mathbb{R}$，函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $N>0$，$I\bigcap[N,+\infty)\neq\emptyset$.

$\lim\limits_{I\ni x\to+\infty}f(x)=A$ 表示：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得对任意 $x\in I$，只要 $x>N$，就成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 这时我们称当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ **收敛**.

类似定义 $\lim\limits_{I\ni x\to-\infty}f(x)=A$，请读者给出相应的陈述.

定义 2.4.2. 设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $N>0$，

$$I\bigcap\Big((-\infty,-N]\cup[N,+\infty)\Big)\neq\emptyset.$$

$\lim\limits_{I\ni x\to\infty}f(x)=A$ 表示：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得对任意 $x\in I$，只要 $|x|>N$，就成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

无穷小和无穷大是从函数值的角度说的.

定义 2.4.3. 设 c 是一个实数或者为 $+\infty,-\infty,\infty$ 之一.

称函数 f 在它的自变量 $x\to c$ 时是一个**无穷小**，如果 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$.

称函数 f 在它的自变量 $x\to c$ 时是一个**无穷大**，如果 $\lim\limits_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=0$，此时记 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$.

称函数 f 在它的自变量 $x\to c$ 时 是一个**正（负）无穷大**，如果当 $x\to c$ 时 f 是无穷大，且 $f(x)>0$（ $f(x)<0$），此时记 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=+\infty$（ $\lim\limits_{x\to c}f(x)=-\infty$）.

有了无穷小的概念，我们可以把各种极限 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$ 都用无穷小的语言来叙述：

1. 对 $A\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$ 当且仅当 $f(x)-A$ 在 $x\to c$ 时是无穷小.
2. $\lim\limits_{x\to c}f(x)=+\infty$（$-\infty$，或 ∞）当且仅当 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $x\to c$ 时是正无穷小（负无穷小，或无穷小）.

数列的极限，无穷小数列与无穷大数列

定义 2.4.4. **数列** $\{a_n\}_{n\geq1}$ 实际上是一个定义在正整数集 $\mathbb{N}^*$ 上的函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$，$f(n)=a_n$.

称数列 $\{a_n\}$ **收敛**，如果存在实数 A 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$ 使得对任意 $n > N$，就成立 $|a_n - A| < \varepsilon$.

称数列 $\{a_n\}$ 是一个**无穷小数列**，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

称数列 $\{a_n\}$ 是一个**无穷大数列**，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$.

称数列 $\{a_n\}$ 是一个**正（负）无穷大数列**，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$（$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$）.

邻域与去心邻域，极限概念的统一陈述

现在，在符号 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$ 中，c 和 A 都可以是一个实数，也可以是 $+\infty, -\infty, \infty$ 中的任何一个，c 还可以是某个实数的左侧或右侧. 这样这个符号有二十多种组合情形. 为了便于统一讨论，我们引入“邻域”和“去心邻域”的概念.

定义 2.4.5. 对 $a \in \mathbb{R}$，如果 V 是一个包含 a 的开区间，则称 V 为 a 的一个**邻域**，称 $V\backslash\{a\}$ 为 a 的一个**去心邻域**.

任何以 a 为右端点（左端点）的开区间称为 a 的一个**左侧去心邻域**（**右侧去心邻域**）.

称任何形如$(N, +\infty)$（$N \in \mathbb{R}$）的开区间为 $+\infty$ 的一个**邻域**.

称任何形如$(-\infty, N)$（$N \in \mathbb{R}$）的开区间为 $-\infty$ 的一个**邻域**.

称任何形如$(-\infty, -N)\bigcup(N, +\infty)$（$N > 0$）的开区间为 ∞ 的一个**邻域**. $+\infty, -\infty, \infty$ 的邻域也称为它们的**去心邻域**.

注 2.4.6.
1. 有限多个邻域（去心邻域）的交集仍是邻域（去心邻域）.
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$，即对 A 的任何邻域 W，存在 c 的去心邻域 V 使得 $f(V) \subseteq W$.
3. f 在 x_0 处连续，即对 $f(x_0)$ 的任何邻域 W，存在 x_0 的邻域 V 使得 $f(V) \subseteq W$.

例 2.4.7. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ 当且仅当对任意 $M > 0$，存在 c 的一个去心邻域 V 使得对任意 $x \in V$，都有 $|f(x)| > M$.

证明. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0$，后者当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，存在 c 的一个去心邻域 V 使得对任意 $x \in V$，都有 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$，即 $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$.

对任意 $M > 0$，取 $\varepsilon = 1/M$，于是对任意 $x \in V$，都有 $|f(x)| > M$.

反之，对任意 $\varepsilon > 0$，取 $M = 1/\varepsilon$，于是对任意 $x \in V$，都有 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$.

$W = \{y \in \mathbb{R} | |y| > M\}$ 是 ∞ 的一个邻域. □

例 2.4.8. 设 $\alpha > 0$. 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha = 0$.

证明. 取正整数 m 使得 $0 < \frac{1}{m} < \alpha$. 对任意 $M \geq 1$，当 $x > M^m$ 时，利用指数函数与幂函数的单调性，$x^\alpha > x^{\frac{1}{m}} > (M^m)^{\frac{1}{m}} = M$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.

对任意 $\varepsilon > 0$，当 $0 < x < \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^m$ 时，$0 < x^\alpha < x^{\frac{1}{m}} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha = 0$. □

例 2.4.9. 设 $a > 1$. 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

证明. 对任意 $M > 0$，取正整数 $N > \frac{M}{a-1}$. 则当 $x > N$ 时，由 Bernoulli 不等式，

$$a^x > a^N = (1 + a - 1)^N > N(a-1) > M.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

对任意 $\varepsilon > 0$，取正整数 $N_1 > \frac{1}{\varepsilon(a-1)}$. 当 $x < -N_1$ 时，

$$0 \leq a^x < a^{-N_1} = \frac{1}{a^{N_1}} < \frac{1}{N_1(a-1)} < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$. □

极限的四则运算，夹挤定理，复合函数极限

例 2.4.10. 若当 $x \to c$ 时，f_1, f_2 都是无穷小，f_3 有界，则当 $x \to c$ 时，$f_1 + f_2, f_1 f_3$ 也是无穷小.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 c 的去心邻域 V_k 使得对任意 $x \in V_k$，都有 $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$（$k = 1, 2$）. 于是 $V = V_1 \cap V_2$ 也是 c 的去心邻域，且对任意 $x \in V$，

$$|f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此当 $x \to c$ 时，$f_1 + f_2$ 是无穷小.

存在常数 $M > 0$ 以及 c 的去心邻域 V_3，使得对任意 $x \in V_3$，都有 $|f_3(x)| \leq M$. 于是对任意 $x \in V_1 \cap V_3$，

$$|f_1(x) f_3(x)| \leq M\varepsilon.$$

因此当 $x \to c$ 时，$f_1 f_3$ 是无穷小. □

因此我们得到：若 $\lim\limits_{x\to c} f_k(x) = A_k \in \mathbb{R}$，则 $\lim\limits_{x\to c}(f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2$. 若 $\lim\limits_{x\to c} f_k(x) = A_k \in \mathbb{R}$，则 $\lim\limits_{x\to c}(f_1(x) f_2(x)) = A_1 A_2$.

$$f_1(x)f_2(x) - A_1A_2 = (f_1(x) - A_1)(f_2(x) - A_2) + A_2(f_1(x) - A_1) + A_1(f_2(x) - A_2),$$

上式等号右端求和三项都是无穷小.

对于 $x \to c$（c 为实数或 $\infty, +\infty, -\infty$）且函数极限为实数的情形，不难证明夹挤定理成立.

对于无穷大，有以下结论

定理 2.4.11. 设 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = (\pm)\infty$.

1. 若 $g(x)$ 有正下界，则

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = (\pm)\infty.$$

2. 若 g 是一个有界函数，则

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = (\pm)\infty.$$

3. 若 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$，且 $f(x) \le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$.

证明. (1) 设 $g(x) \ge m > 0$，$f(x) > 0$. 则 $1/g(x)$ 有界. 因为当 $x \to c$ 时，$1/f(x)$ 是无穷小，所以

$$\frac{1}{f(x)g(x)} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}$$

是无穷小，从而 $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = +\infty$.

(2) 因为

$$f(x)+g(x) = f(x)\left[1+\frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

其中 $1+\frac{g(x)}{f(x)}$ 有正下界，$f(x)$ 是无穷大，所以 $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \infty$，且对 c 的某个去心邻域中的所有 x，都有 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)$ 具有相同的正负号.

(3) 读者可以自行给出证明. □

关于复合函数的极限，有如下结论.

定理 2.4.12 (复合函数的极限). 设 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$，$\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$，其中 c, A, B 可以是某个实数或无穷大 $\infty, +\infty, -\infty$，或某个实数的某一侧. 则在下述三个条件之一成立时，都有 $\lim\limits_{x\to c} g(f(x)) = B$：

1. $A = \infty, +\infty, -\infty$；

2. A 是实数或实数的某侧，且 $f(x)$ 总在 A 的去心邻域中；

3. A 是实数或实数的某侧，g 在 A 处连续.

证明. 我们只证明前两种情形，第三种情形的证明留给读者自己完成.

对前两种情形，都存在 c 的去心邻域 W_0 和 A 的去心邻域 V_0，使得对任意 $x \in W_0$，$f(x) \in V_0$.

由 $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$ 知，对 B 的任意邻域 U，存在 A 的去心邻域 V 使得 $g(V) \subseteq U$.

若 A 是无穷远，则取 $V_1 = V$；若 A 是有限实数，则取 $V_1 = V \cup \{A\}$. 于是 V_1 是 A 的邻域.

由 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$ 知，对 A 的邻域 V_1，存在 c 的去心邻域 W 使得 $f(W) \subseteq V_1$.

于是对任意 $x \in W_0 \cap W$，$f(x) \in V_0 \cap V_1 \subseteq V$，从而 $g(f(x)) \in U$. □

我们可以通过换元，把无穷远处的极限变为有限点处的极限.

例 2.4.13. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = 1$.

证明. 记 $t = \dfrac{1}{x^2}$. 则当 $x \to \infty$ 时，$t \to 0$. 所以

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{t\to 0} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} = \sqrt{\frac{1+0}{1-0}} = 1.$$

□

函数极限与数列极限的关系

定理 2.4.14 (Heine). *(1) 函数 g 在y_0 处连续当且仅当对 g 的定义域中任意满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$ 的数列$\{y_n\}_{n\geq 1}$，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n) = g(y_0)$.*
(2) $\lim\limits_{y\to c} g(y) = A$ 当且仅当对满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = c$ 及 $y_n \neq c$ 的任意数列 y_n，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n) = A$.

证明. 必要性部分是前述定理的推论. 下证充分性部分：

(1) 设任意满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$ 的数列 $\{y_n\}_{n\geq 1}$，都有 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(y_n) = g(y_0)$. 我们用反证法证明 g 在 y_0 连续. 假设 g 在 y_0 不连续.

则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对任意 $\delta > 0$，都存在 y 满足 $|y - y_0| < \delta$，但 $|g(y) - g(y_0)| \geq \varepsilon_0$.

对每个正整数 n，依次取 $\delta = \frac{1}{n}$，于是存在 y_n 使得 $|y_n - y_0| < \frac{1}{n}$，但 $|g(y_n) - g(y_0)| \geq \varepsilon_0$.

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$，但是 $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n) = g(y_0)$ 不成立. 这与已知矛盾.

(2) 假设 $\lim\limits_{y\to c} g(y) = A$ 不成立. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对任意正整数 n 都存在 $y_n \neq c$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = c$ 且 $|g(y_n) - A| \geq \varepsilon_0$：若 c 是实数，则取 y_n 满足 $0 < |y_n - c| < \frac{1}{n}$；若 $c = +\infty$，则取 $y_n > n$；若 $c = -\infty$，则取 $y_n < -n$；若 $c = \infty$，则取 $|y_n| > n$.

这与已知矛盾. 所以 $\lim\limits_{y\to c} g(y) = A$. □

注 2.4.15. 上述反证法中把连续变量问题转换为离散（数列）形式是一个重要的方法.

例 2.4.16. 讨论 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 是有理数;} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

的间断点和间断类型.

解. 对任意 $a\in\mathbb{R}$，由于有理数的稠密性，所以对于任何正整数 n，存在有理数 x_n 使得 $\frac{1}{n+1}<|x_n-a|<\frac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}D(x_n)=1$.

另一方面，取 $y_n=x_n+\frac{\sqrt{2}}{4n+4}$，则 y_n 都是无理数，满足 $|y_n-a|\le|x_n-a|+|x_n-y_n|\le\frac{3}{n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}D(y_n)=0$.

所以 D 在 a 处间断.

同时

$$|y_n-a|\ge|x_n-a|-|x_n-y_n|>\frac{1}{n+1}-\frac{\sqrt{2}}{4n+4}>\frac{1}{2n+2}>|x_n-y_n|.$$

易见我们可以取 x_n 位于 a 的某一侧，则 y_n 与 x_n 位于 a 的同侧. 因此 $\lim\limits_{x\to a^+}D(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^-}D(x)$ 都不存在，所以 a 是 D 的第二类间断点. □

上述定理有以下推论.

推论 2.4.17. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，则对任意单射 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$，都有 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{f(k)}=A$.

特别地，当 f 是增函数时，称数列 $\{a_{f(k)}\}_{k\ge1}$ 为 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 的**子列**. 因此：若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，则 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 的任何子列也满足 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{f(k)}=A$.

证明. 对任意正整数 M，N_M 是有限集合 $f^{-1}\{1,2,\dots,M\}$ 的最大值，则对任意 $k>N_M$，$f(k)>M$. 因此 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(k)=+\infty$.

所以由复合函数极限有 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{f(k)}=A$. □

极限与序的关系，单调有界收敛定理

对极限为实数或 $+\infty,-\infty$，极限的保序性、单调有界收敛的结论也都成立. 请读者给出相应的陈述和证明.

相比于连续变量的函数，数列的单调性有时可以用初等的办法得到.

例 2.4.18. 证明数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 和 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ 都有极限，且极限值相等. 记 e 为它们共同的极限.

证明. 记 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. 由习题 1.3-3(d) 的结论知 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 单调增，$\{b_n\}$ 单调减，且 $a_n\le b_n$. 因此 a_n,b_n 单调有界，有极限. 再由 $b_n=a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$. 记这个共同极限为 e.

记 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. 对任意正整数 N 以及任意正整数 $n\ge N$，

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\ge1+\sum_{k=1}^{N}\frac{n\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!},$$

对上式最左和最右两端同时让 $n\to+\infty$ 取极限，由极限的保序性和四则运算性质（这时 N 是固定的）得到

$$\mathrm{e}\ge1+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}=S_N.$$

于是 S_N 单调增有上界，从而有极限. 因此 $\mathrm{e} \geq \lim\limits_{N\to+\infty} S_N$.

另一方面，对任意正整数 n，

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = S_n,$$

所以 $\mathrm{e} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \mathrm{e}$. □

例 2.4.19. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

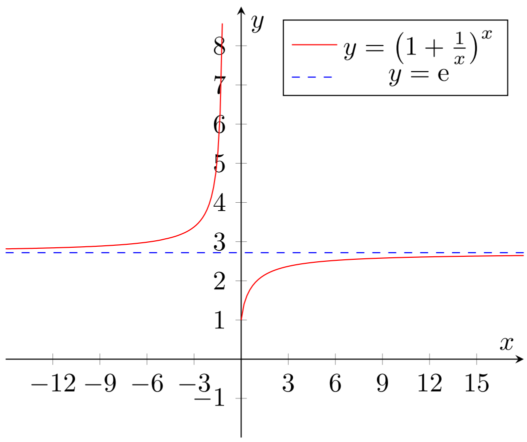


图 2.4:

证明. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$，所以

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = \mathrm{e}.$$

对任意 $x>1$，不超过 x 的最大整数 $[x]$ 是正整数，并且 $[x] \leq x < [x]+1$，于是

$$\lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty,$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]+1} \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

所以由上述极限以及复合函数极限定理和夹挤定理知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

对 $x<0$，令 $u=-x-1$，则 $x\to-\infty$ 时，$u\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u+1}\right)^{-u-1} = \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1} = \mathrm{e}.$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$. □

注 2.4.20. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 对进一步研究指数函数和对数函数特别重要，但其存在性却不容易直接得到. 因此我们先考虑它的一个特殊情况，即 x 是正整数的情况. 这时，数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的单调性可以用上面的初等方法得到，该数列的有界性可借助另一个数列 $b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ 得到证明. 这两个数列具有相同的极限值，在实际计算中，前者要重新计算乘方，后者只需进行累乘和累加，从运算复杂性和控制误差两个方面看，后者在计算 e 的近似值时都有着明显的优势.

例 2.4.21 (**与指数函数、对数函数有关的重要极限**).

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1.$$

证明. 由复合函数极限定理知，

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\mathrm{e}.$$

由复合函数极限定理以及对数函数 $\ln=\log_{\mathrm{e}}$ 的连续性知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1.$$

由复合函数极限定理以及极限的四则运算性质知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\overset{y=\mathrm{e}^x-1}{=\!=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=1.$$

□

函数图像在无穷远处的渐近线

定义 2.4.22. 如果 $a\in\mathbb{R}$ 并且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，则称直线 $x=a$ 为函数图像 $y=f(x)$ 在 $x\to a$ 时的**竖直渐近线**.

定义 2.4.23. 如果 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(kx+b))=0$，则称直线 $y=kx+b$ 为函数图像 $y=f(x)$ 在 $x\to\pm\infty$ 时的**斜渐近线**. 若其中 $k=0$，这渐近线又称为**水平渐近线**.

易见，$y=kx+b$ 为函数图像 $y=f(x)$ 在 $x\to\pm\infty$ 时的渐近线当且仅当

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big).$$

例 2.4.24. 设 $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. 求 $y=f(x)$ 的渐近线.

解. f 的定义域为 $(-\infty,0]\bigcup(1,+\infty)$，$f:(-\infty,0]\bigcup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ 为连续函数.

$$\lim_{x\to1^+}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\overset{h=x-1}{=}\lim_{h\to0^+}\sqrt{\frac{(1+h)^3}{h}}=\lim_{h\to0^+}\sqrt{\frac{1}{h}+3+3h+h^2}=+\infty,$$

所以 $x=1$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to1^+$ 时的竖直渐近线.

当 $x>1$ 时，

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}=x\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=1,$$

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x=x\left[\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}-1\right]=\frac{x\left(1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}\to\frac{1}{2},\quad x\to+\infty,$$

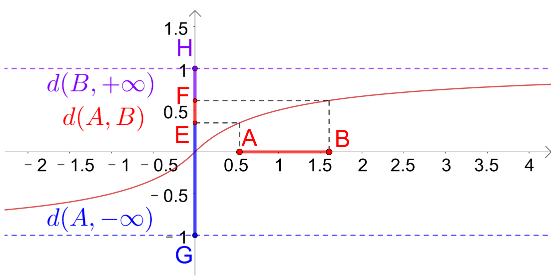
所以 $y=x+\frac{1}{2}$ 是函数图象 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的斜渐近线.

类似可证 $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)=-\frac{1}{2}$，所以 $y=-x-\frac{1}{2}$ 是函数图象 $y=f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的斜渐近线. □

习题 2.4

1. 记 $\overline{\mathbb{R}}$ 为实数集 $\mathbb{R}$ 添加两个元素 $-\infty,+\infty$ 所得到的集合. 考虑 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的函数

$$h(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+|x|}, & x\in\mathbb{R};\\ 1, & x=+\infty;\\ -1, & x=-\infty.\end{cases}$$



(a) 证明：$h|_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{R}$ 到区间 $(-1,1)$ 上的连续的增函数.

(b) 证明：

$$d(x,y)=|h(x)-h(y)|,\quad x,y\in\overline{\mathbb{R}}$$

是 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的一个距离.

(c) 证明：对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，$d(x,y) \le 2|x-y|$.

(d) 设 $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$，$A \in \mathbb{R}$. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$（按通常含义）当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in \mathbb{R}$，只要 $0 < d(x, x_0) < \delta$，就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 后者我们记为 $\lim\limits_{d(x,x_0)\to 0} f(x) = A$.

(e) 对任意 $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$，$x_0$ 在 $\mathbb{R}$ 中的去心邻域就是 x_0 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中按距离 d 给出的去心邻域.

(f) 对任意 $x_0, A \in \overline{\mathbb{R}}$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = A$ 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $0 < d(x, x_0) < \delta$，就有 $d(f(x), A) < \varepsilon$.

2. 关于极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$，有人认为：当 x 充分大时，$x^2+1 \approx x^2$，$x^2-1 \approx x^2$，所以 $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \approx 1$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = 1$. 请问这样的说法成立吗？为什么？作为一个对照，请讨论极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x^\alpha} - x\right)$，其中 $0 < \alpha < 2$.

3. 设 $0 < a < b$，$f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. 叙述并证明数列情形的单调有界收敛定理.

5. (p **进制小数**) 设 $p > 1$ 是正整数. 对任何实数 x，令

$$a_0 = [x], \quad x_0 = a_0,$$

对正整数 n，记

$$a_n = [p^n(x - x_{n-1})], \quad x_n = x_{n-1} + \frac{a_n}{p^n}.$$

证明对每个正整数 n，a_n 是小于 p 的非负整数，且

$$x_n \le x < x_n + \frac{1}{p^n}.$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. 这样，每个实数 x 与唯一一个整数数列 $\{a_n\}_{n\ge 0}$ 对应，后者满足 $a_0 \in \mathbb{Z}$，$a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}(n \ge 1)$，且

$$a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_n}{p^n} \le x < a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_n+1}{p^n}.$$

对非负实数 x，$a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 就是 x 的 p 进制小数展开.

6. 设 $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 满足：若 $a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 是 x 的二进制小数展开，则

$$f(x) = a_0.0a_10a_20a_3\cdots.$$

求 f 的所有间断点.

7. 设正整数 $m \geq 3$，a_n 和 b_n 分别是半径为 1 的圆的内接和外切正 $2^n m$ 边形的边长，p_n 和 q_n 是相应的周长.

(1) 证明

$$a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}, \quad p_{n+1} = 2^{n+1} m \sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{p_n^2}{2^{2n} m^2}}},$$

并计算圆的周长的近似值.

(2) 证明

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}}}, \quad p_{n+1} = \frac{p_n}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{p_n^2}{2^{2n+2} m^2}}}},$$

并计算圆的周长的近似值.

(3) 证明

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{1 + \sqrt{1 + \frac{b_n^2}{4}}}, \quad q_{n+1} = \frac{2q_n}{1 + \sqrt{1 + \frac{q_n^2}{2^{2n+2} m^2}}},$$

并计算圆的周长的近似值.

(4) 证明

$$\frac{a_n}{2} = \sin \frac{\theta_n}{2}, \quad \frac{b_n}{2} = \tan \frac{\theta_n}{2}, \quad \theta_n = \frac{2\pi}{2^n m},$$

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n b_{n+1}}{2}}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{a_n + b_n},$$

$$p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}, \quad q_{n+1} = \frac{2 p_n q_n}{p_n + q_n}.$$

并计算圆的周长的近似值.

(5) 通过数值计算，观察并比较以上算法的逼近效果，解释其中出现的现象.

(6) 证明 $p_n < p_{n+1} < q_{n+1} < q_n$，从而极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$ 都存在.

(7) 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

8. 用 Excel 计算以下数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$)，$\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$，观察它们的单调性并比较它们的收敛速度.

9. (1) 证明数列 $c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n}$ 单调减，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \mathrm{e}$.

(2) 证明对任意正整数 n，

$$\frac{1}{(n+1)!} < \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n}.$$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sin(2\pi n! \mathrm{e}) = 2\pi$.

(4) 证明 e 是无理数.

10. 证明

(1) 对任意正整数 n，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$；

(2) 对任意正整数 n，$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$；

(3) 数列

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

单调递减；

(4) 数列

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

单调递增；

(5) 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 存在且相等，这个共同的极限值 γ 称为**欧拉常数**；以 a_n 作为 γ 的近似值，并确保误差小于 10^{-4}，问 n至少应该是多少？

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = \ln 2$；

(7) 对任意 $a \geq 0$ 和任意正整数 m，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{mn}\frac{1}{k+a} = \ln m$.

11. 设 $\alpha > 0$。证明存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^\alpha}$ 关于 n 是单调减的.

12. (1) 证明对任意 $k \in \mathbb{R}$，数列 $a_n = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n$ 在 $n > k$ 时单调不减.

(2) 证明对任意 $k \in \mathbb{N}$，当 $n > k$ 时，$a_n < \mathrm{e}^{-k}$.

(3) 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^n}$ 存在，并求它的值.

13. 设 $a_1 > 0, b_1 > 0$，$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. 证明 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 收敛到相同极限.

14. **对数函数的另一种定义方式**. 设 $x > 0$. 对正整数 n ，记

$$a_n(x) = 2^n\left(x^{\frac{1}{2^n}} - 1\right).$$

证明 $\{a_n(x)\}_{n\geq 1}$ 单调有界. 定义

$$\ln x = \lim_{n\to+\infty} 2^n\left(x^{\frac{1}{2^n}} - 1\right),$$

证明对任意正数 x, y，$\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

15. （几何级数） (1) 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 及任意正整数 n，记 $S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. 证明：数列 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 收敛当且仅当 $|x| < 1$. 并求 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ 的值.
(2) 设 $p > 1$ 是正整数. 证明 $x \in \mathbb{R}$ 是有理数当且仅当在 p 进制下 x 是一个有限小数或一个无限循环小数.

16. 设 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$.
(1) 设 $0 < A < \alpha < B$. 证明存在 N 使得当 $n \geq N$ 时 $A < \frac{a_{n+1}}{a_n} < B$. 从而 $\frac{a_N}{A^N} A^n < a_n < \frac{a_N}{B^N} B^n$.
(2) 设 $\alpha < 1$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
(3) 利用(1)证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$.

17. 设 $a > 1$ 及 $k > 0$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$. (提示：用第16题结论)

18. 设 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$. (提示：用第16题结论)

19. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}}$. (提示：用第16题结论)

20. 设 $a > 1$ 及 $k > 0$. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^k}$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x}$，$\lim\limits_{x\to0^+} x^k \ln x$. (提示：用第19题结论)

21. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \alpha$.

22. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$. (提示：用不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$)

23. 设 $a_0 \geq -1$，$a_n = \sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}$，$n = 1, 2, \ldots$. 讨论 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 是否存在，若存在，求它的值.

24. 写出一个数列 $\{a_n\}$ 使得对于任意 $A \in \mathbb{R}$ 或 $A = +\infty, -\infty, \infty$，都存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$.

25. 证明：任何一个实数数列都含有一个单调子列.

26. 证明对实数 x，数列 $\sin nx$ 收敛当且仅当存在整数 k 使得 $x = k\pi$.

27. 证明关于实数集 $\mathbb{R}$ 的以下两个陈述是等价的：
(1) $\mathbb{R}$ 是一个序域，且满足确界公理，即任何非空有上界的实数集合 $X \subset \mathbb{R}$ 都在 $\mathbb{R}$ 中有上确界.
(2) $\mathbb{R}$ 是一个序域，且满足：任何单调不减且有上界的实数数列 $\{x_n\}_{n\geq1}$ 都在 $\mathbb{R}$ 中有极限.

用 GeoGebra 进行计算

在 GeoGebra CAS 的对话框中输入

极限(sqrt((x^2+1)/(x^2-1)),x,∞)

渐近线(sqrt(x^3/(x-1)))

检查计算结果.

2.5 大 O 与小 o，函数的主项，阶的比较

在解决复杂问题时，我们往往采取突出主要矛盾忽略次要矛盾的办法，使得在不改变问题本质的情况下，问题得到适当的简化.

把一个函数分解成具有简单形式的主要项（简称主项）和次要项是微积分中常用的一个办法. 例如对多项式 $P(x)=3x-2x^2$ 而言，当 $x\to 0$ 时，$-2x^2$ 的绝对值要远比 $3x$ 的绝对值更小，此时在 $P(x)$ 的两项中，$3x$ 对 $P(x)$ 的贡献是主要的，它是 $P(x)$ 主项；而当 $x\to+\infty$ 时，$-2x^2$ 和 $3x$ 都是无穷大，但$-2x^2$ 的绝对值要远比 $3x$ 的绝对值更大，此时 $-2x^2$ 是 $P(x)$ 的主项，相比之下，$3x$ 对 $P(x)$ 的贡献可以被忽略. 区分主项和次要的项，不是看它们各自的大小，而是看它们相对的大小关系. 大 O、小 o [1]和阶的概念为此提供了一种便捷的语言.

定义 2.5.1. “$f(x)=O(g(x)),\ \ x\to a$”表示：存在常数 $M>0$ 以及 a 的去心邻域 V 使得对任意 $x\in V$，$|f(x)|\le M\,|g(x)|$.

“$f(x)=o(g(x)),\ \ x\to a$” 表示：对任意 $\varepsilon>0$，都存在 a 的去心邻域 V_ε 使得对任意 $x\in V_\varepsilon$，$|f(x)|\le\varepsilon\,|g(x)|$.

称当 $x\to a$ 时，函数 f 是**有界量**，如果 $f(x)=O(1),\ \ x\to a$. 即存在常数 $M>0$ 以及 a 的去心邻域 V 使得对任意 $x\in V$，$|f(x)|\le M$.

因此，
$x\to a$ 时，f 是无穷小，当且仅当 $f(x)=o(1),\ \ x\to a$；
$x\to a$ 时，f 是无穷大，当且仅当 $\frac{1}{f(x)}=o(1),\ \ x\to a$；
$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\in\mathbb{R}$ 当且仅当 $f(x)-A=o(1),\ \ x\to a$.

例 2.5.2. 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac12,\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

所以当 $x\to0$ 时， $1-\cos x=O(x^2)$，$\sin(x^2)=O(x^2)$，$x^2=O(x^2)$. 但这三个函数并不恒等.

同样，因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

所以 $x\to0$ 时， $\mathrm{e}^x-1-x=o(x)$，$\sin x-x=o(x)$，$\ln(1+x)-x=o(x)$. 这三个函数也不恒等. □

注 2.5.3. 上述例子表明 $O(g(x))$ 或 $o(g(x))$ 都不是一个函数，而是一个由函数组成的集合，也就是一类函数，这类函数具有上述定义所描述的那样的共同性

[1]这里，O 和 o 是希腊字母，读作奥密克戎，但通常人们把他们简单地叫成“大欧”和“小欧”.

质. $f(x)=O(g(x))$ 的确切含义应该是 $f\in O(g)$. 但后者这个表达虽然准确，但不适合计算，所以习惯上仍使用 $f(x)=O(g(x))$ 的表达形式，而这个表达式没有对称性，例如，$x^2=o(x)$，但我们不能写成 $o(x)=x^2$.

O 和 o 满足一些运算性质（关于乘法与加减法），例如

- $f=O(f)$，但 $f\notin o(f)$ 除非在 c 的某个去心邻域中 $f=0$.
- 若 $f=o(g)$，则 $f=O(g)$. 即 $o(g)\subset O(g)$，$o(g)\neq O(g)$ 除非 $g=0$.
- 若 $f=O(p), g=O(q)$，则 $fg=O(pq)$.
- 若 $f=O(p), g=o(q)$，则 $fg=o(pq)$.
- $o(h)$ 和 $O(h)$ 都是线性空间. 即，若 $x\to c$ 时，$f=o(h), g=o(h)$，则对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，$\lambda f+\mu g=o(h)$. 对 O 成立类似结论.

定义 2.5.4. (1) 设 $x\to a$ 时，f,g 都是无穷小.

称 f 是**不比** g **更低阶**的无穷小，如果 $f(x)=O(g(x))$，$x\to a$；

称 f 是**比** g **更高阶**的无穷小，如果 $f(x)=o(g(x))$，$x\to a$.

(2) 设 $x\to a$ 时，f,g 都是无穷大.

称 f 是**不比** g **更低阶**的无穷大，如果 $\frac{1}{f}$ 是不比 $\frac{1}{g}$ 更低阶的无穷小，即 $g(x)=O(f(x))$，$x\to a$；

称 f 是比 g **更高阶**的无穷大，如果当 $x\to a$ 时，$\frac{1}{f}$ 是比 $\frac{1}{g}$ 更高阶的无穷小，即 $g(x)=o(f(x))$，$x\to a$.

例 2.5.5. (1) $x\to 0^+$ 时，x^β 是比 x^α 更高阶的无穷小当且仅当 $0<\alpha<\beta$，x^ρ 是比 x^τ 更高阶的无穷大当且仅当 $\rho<\tau<0$.

(2) $x\to+\infty$ 时，x^β 是比 x^α 更高阶的无穷大当且仅当 $0<\alpha<\beta$，x^ρ 是比 x^τ 更高阶的无穷小当且仅当 $\rho<\tau<0$.

(3) 对 $\alpha\le 1$，当 $0<|x|<1$ 时，

$$|x|\sin^2\frac{1}{x}+x^2\cos^2\frac{1}{x}\le |x|^\alpha|x|^{1-\alpha}\left(\sin^2\frac{1}{x}+\cos^2\frac{1}{x}\right)=|x|^\alpha|x|^{1-\alpha},$$

所以 $|x|\sin^2\frac{1}{x}+x^2\cos^2\frac{1}{x}=O(|x|)$；对 $\alpha<1$，$|x|\sin^2\frac{1}{x}+x^2\cos^2\frac{1}{x}=o(|x|^\alpha)$.

对 $\alpha>1$，取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则

$$\frac{|x_n|\sin^2\frac{1}{x_n}+x_n^2\cos^2\frac{1}{x_n}}{|x_n|^\alpha}=\frac{1}{x_n^{\alpha-1}}\to+\infty,\quad n\to+\infty,$$

所以 $|x|\sin^2\frac{1}{x}+x^2\cos^2\frac{1}{x}\neq O(|x|^\alpha)$.

对 $\beta \geq 2$，

$$|x|^\beta = |x|^\beta \sin^2 \frac{1}{x} + |x|^\beta \cos^2 \frac{1}{x} \leq |x|^{\beta-2} \left(|x| \sin^2 \frac{1}{x} + x^2 \cos^2 \frac{1}{x} \right).$$

所以 $x^2 = O\left(|x| \sin^2 \frac{1}{x} + x^2 \cos^2 \frac{1}{x}\right)$；对 $\beta > 2$，$|x|^\beta = o\left(|x| \sin^2 \frac{1}{x} + x^2 \cos^2 \frac{1}{x}\right)$.

对 $\beta < 2$，取 $x_n = \frac{1}{n\pi}$，则

$$\frac{|x_n|^\beta}{|x_n| \sin^2 \frac{1}{x_n} + x_n^2 \cos^2 \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{x_n^{2-\beta}} \to +\infty, \quad n \to +\infty,$$

所以 $|x|^\beta \neq O\left(|x| \sin^2 \frac{1}{x} + x^2 \cos^2 \frac{1}{x}\right)$.

“不比……更低阶”和“比……更高阶”满足传递性，但不是任何两个无穷小都可以比较高阶，例如，$x \sin^2 \frac{1}{x} + x^2 \cos^2 \frac{1}{x}$ 是无穷小，但是它无法和 $|x|^{3/2}$ 比较哪个是更高阶的无穷小.

定义 2.5.6. (1) 称 $x \to a$ 时 f, g **同阶**，如果当 $x \to a$ 时，$f(x) = O(g(x))$ 且 $g(x) = O(f(x))$，即存在常数 $M > 1$ 以及 a 的去心邻域 V 使得对任意 $x \in V$，

$$\frac{1}{M} |g(x)| \leq |f(x)| \leq M |g(x)|.$$

(2) 称 $x \to a$ 时 f, g **等价**，如果 $f(x) = g(x) + o(g(x))$, $x \to a$.

注 2.5.7. 在算法理论中，还有 Ω 和 Θ 的符号. $f = \Omega(g)$ 表示 $g = O(f)$. $f = \Theta(g)$ 表示 $f = O(g)$ 且 $g = O(f)$，也就是 f, g 同阶.

如果 $g(x) \neq 0$，则 $f(x) = g(x) + o(g(x))$, $x \to a$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. 于是我们此前得到的一些极限现在可以写成如下形式.

例 2.5.8. 当 $x \to 0$ 时，

$$\sin x = x + o(x), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \tan x = x + o(x),$$
$$\ln(1+x) = x + o(x), \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + o(x), \qquad (1+x)^r = 1 + rx + o(x).$$

这些等式的作用是把超越函数渐近展开为主项是多项式的形式.

证明. 我们只证明最后一个. 当 $x \to 0$ 时，

$$\begin{aligned}(1+x)^r &= \mathrm{e}^{r \ln(1+x)} \\ &= \mathrm{e}^{rx + o(x)} \\ &= 1 + rx + o(x) + o(rx + o(x)) \\ &= 1 + rx + o(x).\end{aligned}$$

上述过程中使用了如下事实

$$ro(x)=o(x);$$
$$\text{若 } f(x)=O(g(x)),\text{则 } o(f(x))=o(g(x));$$
$$o(x)+o(x)=o(x).$$

类似的关于 O, o 的运算性质我们留作习题. □

例 2.5.9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt[3]{1-x^4}}{\sin^2 x\,(1-\cos x)}$.

解.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt[3]{1-x^4}}{\sin^2 x\,(1-\cos x)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}(2x^4)+o(2x^4)-\left(1+\frac{1}{3}(-x^4)+o(-x^4)\right)}{[x+o(x)]^2\left[1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right]}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{\frac{x^4}{2}\,[1+o(1)]^2\,[1+o(1)]}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x^4}{3}[1+o(1)]}{\frac{x^4}{2}\,[1+o(1)]}\\
=&\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

□

例 2.5.10. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}$.

解.

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\frac{x+o(x)-[x+o(x)]}{x^2(x+o(x))}=\frac{o(x)}{x^3+o(x^3)},$$

这样展开是无法确定最后的极限的，因为分子 $o(x)$ 无法与分母中的主项 x^3 比较.

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}&=\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^2(x+o(x))}=\frac{[x+o(x)]\left[\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}{x^3+o(x^3)}=\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}\\
&=\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)},
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}$. □

注 2.5.11. 有些教材用 “$f(x) \sim g(x), x \to a$” 来表示 f 与 g 等价，并提出了无穷小等价替换的做法. 例如

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \qquad x \to 0,$$

当 $x \to 0$ 时用 x 替换 $\sin x$、$\tan x$、$\ln x$ 等. 初学者常常会据此得到

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x}{x^2 x} = 0.$$

这明显是错误的（等价本质上只用于乘除法），但初学者却不明就里. 所以我们不建议读者使用 $f(x) \sim g(x)$，$x \to a$ 这种看似简单的表达形式.

以下定理告诉我们上面定义的“等价”本质上是一个对称的关系. 它同时也给我们提供了一个重要的工具，我们会多次看到它的应用，这里我们介绍一下 Newton 是如何利用这个想法发现广义二项式展开的.

定理 2.5.12. *若 $f(x) + o(f(x)) = G(x) + o(g(x))$, $G(x) = O(g(x))$, $\quad x \to a$，则 $f(x) = G(x) + o(g(x))$, $\quad x \to a$.*

证明. $f(x) + \alpha(x) = G(x) + \beta(x)$，其中 $\alpha = o(f)$, $\quad \beta = o(g)$, $\quad x \to a$. 于是存在正数 M 以及 a 的去心邻域 V_0，使得 $\forall x \in V_0$，$|G(x)| \le M|g(x)|$；并且，对任意 $0 < \varepsilon < 1$，存在 a 的去心邻域 V_ε 使得对任意 $x \in V_\varepsilon$，

$$|\alpha(x)| \le \frac{\varepsilon}{2M+2}|f(x)| \le \frac{1}{2}|f(x)|, \quad |\beta(x)| \le \frac{\varepsilon}{2M+2}|g(x)| \le \frac{1}{2}|g(x)|.$$

从而

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |G(x) + \beta(x) - \alpha(x)| \\ &\le |G(x)| + |\beta(x)| + |\alpha(x)| \\ &\le \left(M + \frac{1}{2}\right)|g(x)| + \frac{1}{2}|f(x)|, \end{aligned}$$

所以 $|f(x)| \le (2M+1)\,|g(x)|$. 因此

$$|f(x) - G(x)| = |\beta(x) - \alpha(x)| \le \frac{\varepsilon|g(x)|}{2M+2} + \frac{\varepsilon(2M+1)\,|g(x)|}{2M+2} = \varepsilon|g(x)|.$$

所以 $f(x) = G(x) + o(g(x))$, $\quad x \to a$. □

推论 2.5.13. *若 $f(x) = g(x) + o(g(x))$, $x \to a$，则 $g(x) = f(x) + o(f(x))$, $x \to a$.* □

例 2.5.14. 对正有理数 r， $(1+x)^r = 1 + rx + \dfrac{r(r-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$, $\quad x \to 0$.

证明. 设 $r = \frac{m}{n}$，$(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \alpha(x)$. 则 $\lim\limits_{x\to 0} \alpha(x) = 0$.

于是 $(1+x)^m = [1+\alpha(x)]^n$，从而

$$1 + mx + o(x) = 1 + n\alpha(x) + o(\alpha(x)), \quad x \to 0,$$

即

$$\alpha(x)+o(\alpha(x))=\frac{m}{n}x+o(x),\quad x\to 0.$$

根据定理2.5.12，$\alpha(x)=\frac{m}{n}x+o(x)=rx+o(x)$，$x\to 0$.

再令 $(1+x)^{\frac{m}{n}}=1+rx+\beta(x)$. 则 $\lim\limits_{x\to 0}\beta(x)=0$，于是 $(1+x)^m=[1+rx+\beta(x)]^n$，从而

$$\begin{aligned}
&1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+o(x^2)\\
=&(1+rx)^n+n\,(1+rx)^{n-1}\,\beta(x)+o(\beta(x))\\
=&1+nrx+\frac{r^2n(n-1)}{2}x^2+o(x^2)+n\beta(x)+o(\beta(x))
\end{aligned}$$

所以根据定理2.6.3，

$$\beta(x)=\frac{1}{2}\left[r(m-1)-r^2(n-1)\right]x^2+o(x^2)=\frac{r(r-1)}{2}x^2+o(x^2).$$

所以 $(1+x)^r=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+o(x^2)$, $x\to 0$ □

历史上 Newton 曾用类似的办法得到：对任意有理数 r，

$$(1+x)^r=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k+\cdots,\quad x\to 0.$$

当 r 是正整数时，这是人们早已熟知的二项式展开，此时上式右端只有有限多项，到 $k=r$ 时结束. Newton 发现这个展开对有理数也成立，它被称为**广义 Newton 二项式**[2]. Newton 从这样一个基本发现出发得到了一系列重要的结果. 广义二项式这个结论我们将在后面将用 Taylor 展开的办法得到，那时指数 r 可以是任意实数.

习题 2.5

1. 证明 $o(f)\pm o(f)=o(f)$，$O(f)\pm O(f)=O(f)$，$o(f)\cdot O(g)=o(fg)$，$O(f)\cdot O(g)=O(fg)$；如果 $g\neq 0$，则 $f=O(g)$ 当且仅当 $\frac{f}{g}=O(1)$，$f=o(g)$ 当且仅当 $\frac{f}{g}=o(1)$.

2. 设 $0<a<b$，$f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

3. 问

   (a)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x^2\sin\frac{1}{x}}=1$$
   成立吗？为什么？

[2] 在1676年9月13日通过皇家学会秘书 Henry Oldenburg 写给 Leibniz 的信里 Newton 解释了这个结果. https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03977/63

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x^2\sin\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$$

成立吗？为什么？

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$$

成立吗？为什么？

4. (1) 设 f 在 $x=0$ 处连续，$f(0)=0$，并且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=\lambda$. 证明

$$f(x)=\lambda x+o(x),\qquad x\to 0.$$

(2) 利用上述结果证明

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\qquad x\to 0.$$

你能用这个办法得到 e^x 在 $x\to 0$ 时的更高阶的展开形式吗？(提示：考虑 $\mathrm{e}^x=1+x+xf(x)$ 并利用 $\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^x$)

(3) 你能得到 $\sin x$ 在 $x\to 0$ 时的更高阶展开吗？

5. **Aitken 加速法**是由新西兰数学家 Alexander Aitken（1895 年 4 月 1 日–1967 年 11 月 3 日）于 1926 年提出的一个加速数列收敛的方法. 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*，那么在坐标平面中过点 (x_n,x_{n+1}) 和点 (x_{n+1},x_{n+2}) 做一条直线，认为这条直线与对角线 $y=x$ 的交点为 (x^*,x^*) 的近似值，这样得到 x^* 的近似值

$$y_n=\frac{x_{n+2}x_n-x_{n+1}^2}{x_{n+2}+x_n-2x_{n+1}}=x_n-\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}+x_n-2x_{n+1}}.$$

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=\mu\in(0,1)$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|y_n-x^*|}{|x_n-x^*|}=0$.

(2) 如果 $x_n=x^*+\frac{\alpha}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ ($n\to+\infty$)，求 $|y_n-x^*|$ 的阶.

6. 设 $a_0>0$，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$，$n=1,2,3,\ldots$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

(2) 对不同的初值 a_0，用 Excel 计算数列 a_n 前 1000 项的值，用 Excel 画散点图并添加趋势线，观察点列 (n,a_n) 的变化，猜测 a_n 关于 n 的阶数以及渐近表达式.

(3) 证明你在(2)中得到的猜想.

习题讨论课1

1. 求极限
   (a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\mu-a^\mu}{x-a}$
   (e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(5x-1)^5}$ (f) $\lim\limits_{x\to 1}\arctan\dfrac{1}{1-x}$
   (g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$

2. 设 $A\in\mathbb{R}$ 或 $A=-\infty$ 或 $A=+\infty$ 或 $A=\infty$.

   (a) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，请判断是否成立
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A?$$
   若成立，请用极限的定义给出证明；若不成立，请给出反例.

   (b) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，且非负实数 $t_{n,1},t_{n,2},\ldots,t_{n,n}$ 满足
   $$t_{n,1}+t_{n,2}+\cdots+t_{n,n}=1,$$
   请判断是否成立
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(t_{n,1}a_1+t_{n,2}a_2+\cdots+t_{n,n}a_n\right)=A?$$

   (c) 设实数列 $\{x_n\}$ 单调增，满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=A$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n}=A$.

   (d) 设 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$. 证明：若 $a_0>0$，则
   $$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2-a_0^2}{n}=2,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2-a_0^2-2n}{\ln\left(1+\frac{2n}{a_0^2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

3. 设 $a_n>0$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，其中 $A\geq 0$ 或 $A=+\infty$. 请判断
   $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=A$$
   是否成立. 若成立，请给出证明；若不成立，请给出反例.

4. 设 $a>1,\alpha>0,\beta>0$. 证明
   $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{a^x}=0.$$

5. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}n!\left(\dfrac{a}{n}\right)^n$.

6. 设 $x_n > 0(\forall n \geq 1)$. 证明数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right\}$ 收敛当且仅当数列 $\left\{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+x_k)\right\}_{n\geq 1}$ 收敛.

7. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明

(a) 对任何有理数 $r \in [0,1]$，

$$f((1-r)x+ry) \leq (1-r)f(x)+rf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(b) 如果 f 连续，则对任意 $t \in [0,1]$，

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(c) 如果 f 连续，则对任意 $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$，只要 $t_1+t_2+\cdots+t_n = 1$，就有对任意 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$，

$$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n) \leq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n).$$

(d) 如果 f 在任何有界闭区间中有界，则 f 连续.

(e) 如果 f 没有第二类间断点，则 f 连续.

(f) 如果 f 单调，则 f 连续.

8. 设 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 满足对任意正整数 n, m，$0 \leq x_{n+m} \leq x_n+x_m$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n} = \inf\limits_{n\geq 1}\dfrac{x_n}{n}$.

9. (1) 对复数变量函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 定义连续性.

(2) 对复数 $z = x+\mathrm{i}y$（$x, y \in \mathbb{R}$），记

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

证明：e^z 关于 z 是连续函数，且满足 $\mathrm{e}^0 = 1$，且

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

第2章总结

内容回顾

这一章我们介绍了函数的连续性与函数和数列的极限.

如果结合函数图像，那么函数的连续性以及函数在一点处的极限是比较直观的. 利用函数在一点处的极限以及单侧极限，我们可以了解函数连续与间断的不同情况.

利用复合函数和四则运算，我们可以把复杂函数的连续性与极限问题分解转化为对一些更简单的函数讨论相应的性质.

利用函数之间的不等式关系，我们可以通过夹挤定理来研究函数的极限.

单调有界收敛性质来源于实数的确界性质.

无穷大的引入丰富了我们对函数极限行为的刻画. 无穷小、大 O 和小 o 的语言使我们描述函数极限行为有了更方便的语言.

数列极限可以被看成是函数在无穷远处的极限.

这一章里，我们进一步研究了基本初等函数（多项式、幂函数、对数函数、指数函数、三角函数与反三角函数）的连续性以及它们在定义域边界处的极限.

给学生的建议

理解函数的连续性，理解函数极限是函数在动态过程中表现出的一种特殊性质.

熟练掌握计算函数极限的各种方法.

熟练掌握与基本初等函数有关的几个重要极限.

学习正确使用无穷小、无穷大、大 O、小 o 等语言.

给教师的建议

本教材对极限与连续的讲授方式和顺序与通常教材不太一样.

微积分主体上研究的是连续变量的函数性质，所以我们没有像通常教材那样——先讲数列极限，然后讲函数极限，而是把数列极限当成特殊形式的函数极限一并处理.

微积分的核心思想之一是用好的函数逼近一般的函数，因此连续函数、可微函数是微积分课程涉及的主要对象. 在这一章里，我们首先考察函数在有限点附近的性态，因此我们选择了函数的连续性作为切入点. 当然，为了更好地了解连续性，我们需要用它的反面——即间断性作为对照，而描述函数间断性的一个基本途径是研究函数在一点附近的极限. 同时，我们也考虑函数在无穷远处的极限，特别当函数的自变量是离散变量时，这对应于数列的极限.

有了这一章的知识准备，教师可以直接进入第四章关于导数的教学，也可以在第三章中进一步对实数的连续性和函数的连续性做更深入的探讨，这由教师根据课程要求自行决定.

第 3 章　深入了解连续性

在前面两章中，我们重新认识了实数，特别是实数的确界性质，了解了连续函数和极限的概念和基本性质. 在这一章里，我们将要对实数和函数的连续性进一步研究，为后续内容的学习打好基础.

3.1　实数的连续性

为了寻找一个问题的答案，我们往往先大致预估一下答案所在的范围，然后再逐步缩小这个范围. 以下“有界闭区间套定理”正是这样一个想法，利用它我们能够通过一系列筛选最终找到问题的答案.

定义 3.1.1 (闭集). 称 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是**闭集**，如果 I 满足：

$$\text{数列 } \{x_n\}_{n\geq 1} \text{ 满足 } x_n \in I\ (\forall n \geq 1) \text{ 且 } \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in I.$$

如果一个区间是闭集，那么称它是一个**闭区间**.

闭区间有如下几种形式：

$$[a,b],\quad [a,+\infty),\quad (-\infty,b],\quad (-\infty,+\infty),\quad \emptyset,$$

其中只有第一种是非空的有界闭区间.

定理 3.1.2 (有界闭区间套定理). *设一列非空有界闭区间 $[a_n,b_n]$ 构成一个区间套，即对任意正整数 n，$[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]$. 则 $\bigcap\limits_{n\geq 1}[a_n,b_n] \neq \emptyset$. 若进一步 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$，则存在唯一的实数 A 使得 $\bigcap\limits_{n\geq 1}[a_n,b_n]=\{A\}$.*

证明. 由 $[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]$ 知

$$a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_1,$$

所以数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 单调不减有上界，数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 单调不增有下界. 因此确界 $A = \sup\limits_{n\geq 1} a_n$, $\quad B = \inf\limits_{n\geq 1} b_n$ 存在，而且 $A \leq B$.

$c \in \bigcap\limits_{n\geq 1} [a_n, b_n]$ 当且仅当 c 是 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 上界且是 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 下界，当且仅当 $A \leq c \leq B$. 因此 $\bigcap\limits_{n\geq 1} [a_n, b_n] = [A, B]$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$，则由 $0 \leq B - A \leq b_n - a_n$ 知 $B - A = 0$，所以 $A = B$，$\bigcap\limits_{n\geq 1} [a_n, b_n] = \{A\}$. □

在上述定理中，“有界”、“闭”、“套”都是不可或缺的重要条件.

以下的“列紧性”定理可以帮助我们从一堆看似杂乱无章的近似解中找到逼近最终解的线索. 同时，从它的证明过程中我们可以体会有界闭区间套这个重要工具是如何帮助我们解决具体问题的.

为了找到数列 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 以及相应的极限 A，我们只需找到这样的实数 A：在 A 的任意近旁，都聚集着数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项.

定理 3.1.3 (列紧性). 任何有界的实数列必含有收敛的子列.

证明. 设 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 有界. 于是存在实数 a_1, b_1 使得对任意 $n \geq 1$，$x_n \in [a_1, b_1]$. 取 $n_1 = 1$.

如果区间 $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ 中含有数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 的无穷多项，则取 $a_2 = a_1$, $\quad b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$；否则取 $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $\quad b_2 = b_1$. 因此 $[a_2, b_2]$ 中含有数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 的无穷多项，取 $n_2 > n_1$ 使 $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$.

按照这个办法可以得到有界闭区间套$[a_k, b_k]$，以及 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 使得对任意 $k \geq 1$，$x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. 因为 $\lim\limits_{k\to+\infty}(b_k - a_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{b_1-a_1}{2^{k-1}} = 0$，所以由闭区间套定理（定理3.1.2），存在 $A \in \mathbb{R}$ 使得 $\bigcap\limits_{k\geq 1} [a_k, b_k] = \{A\}$. 因为 $A, x_{n_k} \in [a_k, b_k]$，所以

$$|x_{n_k} - A| \leq |b_k - a_k| = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}},$$

从而 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = A$. □

根据定义，要验证一个数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛，就是要找到这样的实数 A，使得 $|a_n - A|$ 随着 n 变大而越来越接近于零. 我们把 a_n 当成 A 的近似值，如果无法得到 A 的精确值，那么我们就无法知道误差 $|a_n - A|$ 的大小. 在这种情况下，就无法利用极限的定义来说明数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛到 A. 以下的“ Cauchy 准则”告诉我们可以通过测量值之间的误差 $|a_m - a_n|$ 来验证数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是否收敛.

定理 3.1.4 (数列收敛的 Cauchy 准则). 数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 收敛当且仅当它是一个 **Cauchy 数列**，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_\varepsilon \geq 1$ 使得对任意 $m, n \geq N_\varepsilon$，$|x_m - x_n| < \varepsilon$.

证明. 必要性（即收敛数列是 Cauchy 数列）的证明留给读者完成. 下证充分性.

设 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 Cauchy 数列. 则存在 n_1 使得对任意 $m,n\geq n_1$，$|x_m-x_n|<1$. 从而对任意正整数 n，

$$|x_n|\leq |x_{n_1}|+|x_n-x_{n_1}|\leq |x_{n_1}|+1+\max_{1\leq k\leq n_1}|x_k-x_{n_1}|.$$

所以 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是有界数列，从而根据定理 3.1.3，$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 有收敛子列. 设 $A=\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}$. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 K 使得 $n_K\geq N_\varepsilon$ 且 $|x_{n_K}-A|<\varepsilon$. 于是对任意 $n\geq N_\varepsilon$（这个 N_ε 就是 Cauchy 数列定义中的那个），

$$|x_n-A|\leq |x_n-x_{n_K}|+|x_{n_K}-A|<2\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$. □

我们再给一个证明，可以进一步体会如何使用有界闭区间套定理这个工具.

充分性的另一个证明. 我们用有界闭区间套定理给充分性一个另外的证明. 跟上面证明一样，我们知道 Cauchy 数列是有界的，设 a_1,b_1 使得数列 $\{x_n\}$ 中的所有项都在有界闭区间 $[a_1,b_1]$ 中. 令

$$u_1=\frac{2a_1+b_1}{3},\quad v_1=\frac{a_1+2b_1}{3}.$$

则由 Cauchy 数列的定义知，$[a_1,u_1]$ 和 $[v_1,b_1]$ 这两个闭区间中至少有一个只含数列 $\{a_n\}$ 中的有限多项.

如果 $[a_1,u_1]$ 只含数列 $\{x_n\}$ 中的有限多项，则取 $a_2=u_1,b_2=b_1$；否则取 $a_2=a_1,b_2=v_1$. 总之，有界闭区间 $[a_2,b_2]$ 之外最多只有数列 $\{x_n\}$ 中的有限多项，即存在正整数 N_1 使得对任意 $n\geq N_1$，$x_n\in[a_2,b_2]$.

如此得到正整数列 $N_1\leq N_2\leq N_3\leq\cdots$ 以及有界闭区间套 $[a_k,b_k]$，使得对任意 $n\geq N_k$，$x_n\in[a_k,b_k]$；$|a_k-b_k|=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}|a_1-b_1|$.

由有界闭区间套定理知存在实数 A 使得 $\{A\}=\bigcap\limits_{k\geq 1}[a_k,b_k]$. 从而对任意 $k\geq 1$，对任意 $n\geq N_k$，

$$|x_n-A|\leq |b_k-a_k|=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}|a_1-b_1|,$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$. □

习题 3.1

1. 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是一个有界闭区间，则 $I=[\alpha,\beta]=\{x\in\mathbb{R}|\alpha\leq x\leq\beta\}$，其中 $\alpha=\inf I$，$\beta=\sup I$.

2. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 证明对任何实数 b，$\{x\in\mathbb{R}|f(x)\leq b\}$ 是闭集；一般地，对任何闭集 $F\subseteq\mathbb{R}$，$f^{-1}(F)=\{x\in\mathbb{R}|f(x)\in F\}$ 是闭集.

3. 设 $\{F_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中一列有界的非空闭集，满足 $F_{n+1}\subset F_n$.

   (a) 证明 $\bigcap\limits_{n\geq 1} F_n\neq\emptyset$.

   (b) 如果进一步，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x,y\in F_n}|x-y|=0$，则 $\bigcap\limits_{n\geq 1} F_n$ 仅含有一个实数.

4. 证明不含任何收敛子列的数列一定是无穷大数列.

5. 设 $\mathbb{F}$ 是一个序域. 证明以下结论都等价于 $F=\mathbb{R}$.

   (a) $\mathbb{F}$ 满足确界公理.

   (b) $\mathbb{F}$ 满足任何单调不减且有上界的序列都收敛.

   (c) $\mathbb{F}$ 满足阿基米德性质以及有界闭区间套性质.

   (d) $\mathbb{F}$ 中任何有界数列都有收敛子列.

   (e) $\mathbb{F}$ 满足阿基米德性质以及 Cauchy 准则.

6. (a) 设 f 在区间 $[a,b]$ 上定义，记

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

   证明：存在 $x_0\in[a,b]$ 以及数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$，满足对任意正整数 n，都有 $x_n\neq x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$，$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\geq\lambda$. （提示：构造有界闭区间套 $[a_n,b_n]$ 使得 $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\geq\lambda$. ）

   (b) 设函数 f 在区间 I 上满足：对任意 $x_0\in I$，极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

   证明：f 在区间 I 上是增函数.

   (c) 设函数 f 在区间 I 上满足：对任意 $x_0\in I$，极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0,$$

   证明：f 在区间 I 上是单调不减.

   (d) 如果 (b,c) 中的极限为单侧极限，问相应的结论还成立吗？

7. 有界实数数列的上下极限. 设实数数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 有界.

   (a) 记

$$\beta_n=\sup_{k\geq n}a_k.$$

   证明 $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ 单调不增，且有下界，因而有极限

$$\beta=\lim_{n\to+\infty}\beta_n=\inf_{n\geq 1}\beta_n=\inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n}a_k,$$

   记 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,a_n:=\beta$，称为 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的**上极限**.

(b) 记

$$\alpha_n = \inf_{k\geq n} a_k.$$

证明 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ 单调不减，且有上界，因而有极限

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \sup_{n\geq 1} \alpha_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k,$$

记 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n := \alpha$，称为 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的**下极限**.

(c) 证明：若 $A < \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n < B$，则存在 N 使得当 $n \geq N$ 时，$a_n < B$；对任意 k，都存在 $n > k$ 使得 $a_n > B$.

(d) 记

$$L = \left\{ \xi \in \mathbb{R} \;\middle|\; \text{存在子列 } \{a_{n_k}\}_{k\geq 1} \text{ 使得 } \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \xi \right\},$$

则 L 是有界闭集，且 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \max L$，$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \min L$.

(e) 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ 当且仅当 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

(f) 设 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 是有界实数列，满足 $a_n \leq b_n$. 证明

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \leq \varliminf_{n\to+\infty} b_n, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

(g) 设 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 是有界实数列. 证明

$$\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n,$$

并且对任意 $\lambda \geq 0$，

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \lambda a_n = \lambda \varlimsup_{n\to+\infty} a_n, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} (-\lambda a_n) = -\lambda \varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

8. **函数极限的 Cauchy 准则**.

(a) 证明：存在实数 $A \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$，存在 N_ε 使得对任意 $x, y \in I$ 且 $x, y > N_\varepsilon$，都有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(b) 证明：存在实数 $A \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$，存在 δ_ε 使得对任意 $x, y \in I$ 且 $|x - a| < \delta_\varepsilon, |y - a| < \delta_\varepsilon$，都有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

3.2 应用：迭代与不动点

把计算器设为弧度制，然后随便输入一个数字，不断地按 cos 按钮，你会看到什么现象？换一个数字，重复上述过程，你会有什么发现？

很多时候，一个数列是根据递推关系 $x_{n+1}=f(x_n)$ 产生的，或者说这个数列由初值 x_0 和 f 的不断迭代产生. 其中一个简单情形是 x_0 是 f 的一个不动点，$f(x_0)=x_0$，这时产生的数列是常数数列. 一个稍微复杂一点的情形是 x_0 经 f 的迭代收敛到一个不动点，这个不动点是数列 x_n 的极限. 很多数学问题可以转化为解方程，而后者又可以改写成不动点形式.

同时，很多科学中的复杂问题要用算法才能解决，而迭代算法是其中很重要的一类方法. 所以不动点问题无论在理论研究中还是在实际应用中都有重要意义. 在这一节中，我们要研究在什么条件下一个函数产生的迭代数列可以收敛到一个不动点.

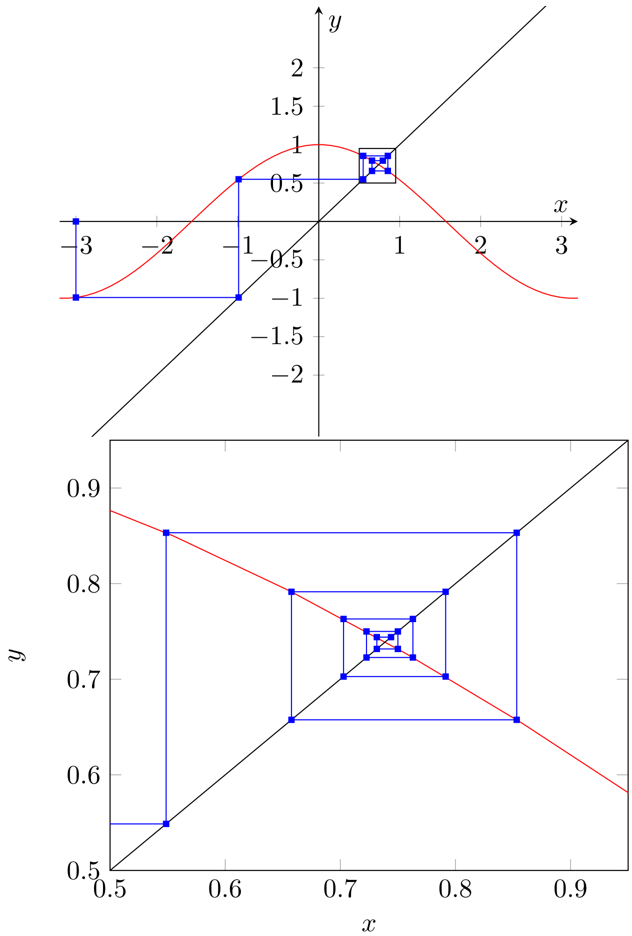


图 3.1:

定理 3.2.1 (Banach 压缩不动点定理). 设 I 是闭集，$f:I\to\mathbb{R}$ 满足 $f(I)\subseteq I$，且存在常数 $0<\lambda<1$ 使得对任意 $x,y\in I$，$|f(x)-f(y)|\le\lambda|x-y|$（此时称 f 为集合 I 上的一个**压缩映射**）. 则存在唯一的 $x^*\in I$ 使得 $f(x^*)=x^*$（即 x^*

是 f 的不动点)，并且对任意 $x \in I$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x) = x^*$. 其中 $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n个f}$ 是 f 的 n 次迭代，事实上，

$$|f^n(x_0) - x^*| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|f(x_0) - x_0|, \quad \forall n \ge 1.$$

证明. 任取 $x_0 \in I$，记 $x_n = f^n(x)(n = 1, 2, \dots)$. 则

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \le \lambda\,|x_{n+1} - x_n| \le \lambda^{n+1}\,|x_1 - x_0|\,,$$

从而

$$|x_{n+p} - x_n| \le \sum_{k=1}^{p} |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \le \sum_{k=1}^{p} \lambda^{n+k-1}\,|x_1 - x_0| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\,|x_1 - x_0|\,,$$

所以 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 是 Cauchy 数列. 根据定理 3.1.4，极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$ 存在. 在上述不等式中令 $p \to +\infty$，得到

$$|x^* - x_n| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\,|x_1 - x_0|\,.$$

于是

$$\begin{aligned}|f(x^*) - x^*| &\le |f(x^*) - f(x_n)| + |f(x_n) - x^*|\\ &\le \lambda\,|x^* - x_n| + |x_{n+1} - x^*| \le \frac{2\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\,|x_1 - x_0|\,,\end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$，得到 $|f(x^*) - x^*| \le 0$，从而 $f(x^*) = x^*$.

对任意 $y \in I$，

$$|f^n(y) - x^*| = |f^n(y) - f^n(x^*)| \le \lambda^n\,|y - x^*|\,,$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(y) = x^*$. 若 $\tilde{x} \in I$ 满足 $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$，则 $\tilde{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} f^n(\tilde{x}) = x^*$. □

例 3.2.2. 考虑 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$，$x_n = f^n(x_0)$.

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，$x_1 = f(x_0) \in [-1, 1] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $x_2 \in [0, 1]$. 因此对任意 $n \ge 2$，$x_n \in [0, 1]$.

对任意 $x, y \in [0, 1]$，

$$|f(x) - f(y)| = |\cos x - \cos y| = \left|2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}\right| \le \sin 1 \cdot |x - y|.$$

所以 f 是映闭区间 $[0, 1]$ 到其自身的压缩映射，因此 f 有唯一的不动点 x^*，对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，$f^n(x_0)$ 收敛到 x^*. □

一般而言，压缩条件通常只是一个在不动点附近的局部条件. 在实际应用中，会出现非压缩情形、大范围情形以及高维情形，函数迭代会展现出更丰富也更复杂的行为，其中的奥秘值得去探索.

习题 3.2

1. 把 Kepler 方程 $x-\varepsilon\sin x=y$ 改写为不动点形式 $x=\varepsilon\sin x+y$. 证明
(1) 若 $0<\varepsilon<1$，则对任意 $y\in\mathbb{R}$， Kepler 方程有唯一解 $x(y)$，讨论 $x(y)$ 关于 y 的连续性.
(2) 若 $y\in\mathbb{R}$，则对任意 $\varepsilon\in(0,1)$， Kepler 方程有唯一解 $x(\varepsilon)$，讨论 $x(\varepsilon)$ 关于 ε 的连续性.

2. 为了求解 $x^2+px+q=0(\ q\neq 0\ )$，把该方程改写为 $x=-\frac{q}{x}-p$. 并利用迭代 $x_{n+1}=-\frac{q}{x_n}-p$ 计算上述方程的近似解. 这个算法的优势在于它只用简单的算术运算，而不必求平方根.
(1) 问对怎样的初值 x_1，这个迭代会收敛到原二次方程的零点？
(2) 我们知道方程 $x^2-x-1=0$ 有两个不同的实数解，请利用数值计算，看看能否通过选择不同的初值得到所有的解，观察计算结果，发现其中的问题并给予解释.

3. 设 $c>0$，$a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$. 求 a_1 的范围使得数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 有意义且收敛. 提示：考虑函数 $f(x)=\sqrt{x+c}$.

4. 证明 $x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{\alpha x_n+\beta}$ 可以通过适当的形如 $y_n=cx_n+d$ 的变换变为以下形式之一：
$$(1)\ y_{n+1}=y_n+A;\quad (2)\ y_{n+1}=Ay_n;\quad (3)\ y_{n+1}=\frac{A}{y_n};\quad (4)\ y_{n+1}=1+\frac{A}{y_n}.$$
然后分别讨论它们的极限行为.

5. 任取 $x_0\geq -1$，记 $x_n=\sqrt{\frac{1+x_{n-1}}{2}}$，$n=1,2,3,\ldots$.
   (a) 证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛；
   (b) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}4^n(1-x_n)$.（提示：对 $x_0\in[-1,1]$，可以考虑 $x_n=\cos\theta_n$. 对 $x_0>1$，考虑 $x_n=\frac{\mathrm{e}^{\theta_n}+\mathrm{e}^{-\theta_n}}{2}$. ）
   (c) 如果 $y_n=2y_{n-1}^2-1$，$-1\leq y_0\leq 1$，数列 $\{y_n\}$ 是否收敛？

6. 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是一个非空的闭区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 连续，满足 $f(I)\subset I$，且对任意 $x,y\in I$，$x\neq y$，都有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. 试问 f 是否存在不动点？

3.3 连续函数的介值性质，反函数的连续性

回忆，$I\subseteq\mathbb{R}$ 是一个区间，指：对任意 $x_1,x_2\in I$ 和任意 $x\in\mathbb{R}$，如果 $x_1<x<x_2$，那么必有 $x\in I$.

定理 3.3.1 (Bolzano 1817). *设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 连续. 则 $f(I)=\{f(x)|x\in I\}$ 也是区间. 等价说法是，若 $x_1,x_2\in I$，$f(x_1)<f(x_2)$，则对任意 $y\in(f(x_1),f(x_2))$，存在介于 x_1,x_2 之间的 ξ（从而 $\xi\in I$ ）使得 $f(\xi)=y$.*

证明. (**二分法**) 考虑 $g(t)=f((1-t)x_1+tx_2)-y$. 则 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 连续，且 $g(0)=f(x_1)-y<0<f(x_2)-y=g(1)$.

假设对任意 $t\in(0,1)$，$g(t)\neq 0$.

取 $a_1=0$，$b_1=1$. 若 $g\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)>0$ ，则取 $a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$；若 $g\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0$ ，则取 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$.

如此不断进行下去得到闭区间套$[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$，对任意 n，$g(a_n)<0<g(b_n)$. 由有界闭区间套定理（定理3.1.2），存在实数 ξ 使得 $\bigcap\limits_{n\geq 1}[a_n,b_n]=\{\xi\}$. 则 $\xi\in I$，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\xi$.

因为 g 在 ξ 连续，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}g(b_n)=g(\xi)$. 由数列的保序性，$g(\xi)\leq 0\leq g(\xi)$，所以 $g(\xi)=0$. 但这与假设对任意 $t\in(0,1)$，$g(x)\neq 0$ 矛盾. 所以存在 $\tilde{t}\in(0,1)$ 使得 $g(\tilde{t})=0$，从而 $\xi=(1-\tilde{t})x_1+\tilde{t}x_2\in I$ 满足 $f(\xi)=0$. □

注 3.3.2. 上述结论也称为连续函数的介值性质或连续函数的零点定理.

推论 3.3.3. *设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 是连续单射. 则 f 是严格单调函数.*

证明. 断言：*若 $x_1,x_2\in I$ 满足 $x_1<x_2$ 且 $f(x_1)<f(x_2)$，则 f 在区间 $[x_1,x_2]$ 上是增函数.*

断言的证明：任取 $x,y\in(x_1,x_2)$ 满足 $x<y$.

若 $f(x)<f(x_1)$，则 $f(x)<f(x_1)<f(x_2)$，于是由介值性质知存在 $\xi\in(x,x_2)$ 使得 $f(\xi)=f(x_1)$，这与 f 是单射矛盾. 因此 $f(x)>f(x_1)$.

同理可证 $f(x)<f(x_2)$. 所以 $f(x_1)<f(x)<f(x_2)$.

对 x,y,x_2 重复上面对 x_1,x,x_2 的讨论知，$f(x)<f(y)<f(x_2)$.

所以 $f(x_1)<f(x)<f(y)<f(x_2)$. 因此 f 在区间 $[x_1,x_2]$ 上是增函数.

由断言知 f 在区间 I 的任何有界闭子区间上都是严格单调的. 所以 f 在 I 上是严格单调的. □

推论 3.3.4. *设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 是连续单射. 则 $f^{-1}:f(I)\to I$ 是连续函数.*

证明. 由前一个推论知 $f:I\to\mathbb{R}$ 是严格单调函数. 由介值性质知 $f(I)$ 是区间. 于是 $f^{-1}:f(I)\to I$ 是严格单调的，并且它把区间 $f(I)$ 映为区间 I，所以根据定理 2.3.8，f^{-1} 连续. □

定义 3.3.5. 多项式、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为**基本初等函数**. 有限多个基本初等函数通过有限多次四则运算和复合得到的函数称为**初等函数**.

初等函数都是连续函数.

连续函数的上述性质根源于实数区间的连续性，具体而言是连通性. 连通性是一般的拓扑概念，我们不在这里展开讨论，仅仅指出：实数集的子集 I 是连通的，当且仅当它是区间. 在一般的拓扑学中可以证明，任何连续映射总把连通集映为连通集. 对应于实数集的情形，任何连续函数总把区间映为区间.

习题 3.3

1. 求正数 a 的平方根$\sqrt{a}$ 就是解方程 $x^2 = a$. 古巴比伦人给出一个求 $\sqrt{a}$ 近似值的方法：$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$——对 $\sqrt{a}$ 的任何近似值 x_n，x_n 与 $\frac{a}{x_n}$ 必然一个是 $\sqrt{a}$ 的不足近似值，另一个是过剩近似值. 作为 $\sqrt{a}$ 的近似值，$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ 总是比 x_n 与 $\frac{a}{x_n}$ 中较差的一个近似值更好.
(1) 请对这个说法给予讨论.
(2) 分别利用二分法和古巴比伦人的方法计算 $\sqrt{2}$ 的近似值，并对计算结果进行比较，你能解释你看到的现象吗？
(3) 对不同的 $0 < \lambda < 1$，比较 $x_{n+1} = \lambda x_n + (1-\lambda)\frac{a}{x_n}$ 的收敛效果.

2. 设 n 是正整数，连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $f(x) = x^{2n-1} + o(x^{2n-1}),\quad x \to \infty$. 证明 f 是满射. 问：是否存在 $N > 0$ 使得对任意 $|y| > N$，$f(x) = y$ 有唯一解？若连续函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $g(x) = x^{2n} + o(x^{2n})$，$x \to \infty$，问 g 是否为满射？

3. 设 $f : I \to \mathbb{R}$ 是区间 I 上的一个单射. 证明如果 f 连续，则 f 是严格单调的，从而 $f^{-1} : f(I) \to I$ 连续.

4. 设连续函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 满足 $f[a,b] \subseteq [a,b]$ 或者 $[a,b] \subseteq f[a,b]$. 证明 f 至少有一个不动点. 如果把有界闭区间 $[a,b]$ 改成任意区间，结论是否还成立？

5. 设 $f : I \to \mathbb{R}$ 是区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数，且存在 $x^* \in I$ 满足 $f(f(x^*)) = x^* \neq f(x^*)$，证明 f 在 I 中有不动点.

6. 用确界性质证明连续函数介值定理. 设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续，$f(a) < c < f(b)$. 记 $A = \{x \in [a,b] | f(x) < c\}$， 证明 $\xi = \sup A$ 满足 $f(\xi) = c$. [1]

7. 考虑方程 $x = \tan(\cos x)$.
   (a) 证明这个方程有唯一解.
   (b) 用 Excel 计算迭代 $x_{n+1} = \tan(\cos x_n)$，尝试不同的初值，观察计算结果.

[1]这是 Bolzano 给出的证明方法，见 Steve Ross 编著的 The Mathematical Works by Bernard Bolzano, Oxford University Press, 2006

(c) 用 Excel 计算迭代 $y_{n+1}=\arccos(\arctan y_n)$，尝试不同的初值，观察计算结果.

8. 设 $u:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数.

(a) 证明 $K=\{x\in[0,1]|u(x)=0\}$ 是闭集；

(b) 如果对于 $[0,1]\backslash K$ 的任何子区间 (α,β)，u 在 $[\alpha,\beta]$ 上都是单调不减，证明 u 在 $[0,1]$ 上单调不减.

9. 设 $f:[0,1]\cap\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ 连续，$f(0)<0<f(1)$. 问：f 是否在区间 $(0,1)$ 内存在零点？

3.4 有界闭集上的连续函数

引理 3.4.1. *$I\subset\mathbb{R}$ 是有界闭集当且仅当 I 中任何数列都含有在 I 中收敛的子列.*

证明. （必要性）设 I 是有界闭集，$x_n\in I(n\geq 1)$. 则 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是有界数列，从而有收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$，$x_0=\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}$. 因为 I 是闭集，所以 $x_0\in I$.

（充分性）设 I 中任何数列都含有在 I 中收敛的子列.

假若 I 无界，则存在 $x_n\in I$ 使得 $|x_n|>n$. 于是 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 的任何子列都无界，从而没有收敛子列. 这与已知矛盾. 因此 I 有界.

设 $x_n\in I$ 且存在极限 $x_0=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$. 根据已知，$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 有在 I 中收敛的子列 $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$. 因为 $x_0=\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}$，所以 $x_0\in I$. 因此 I 是闭集. □

引理 3.4.2. *设 $I\subset\mathbb{R}$ 是非空有界闭集，则 I 有最大值和最小值.*

证明. 因为 $I\subset\mathbb{R}$ 非空有界，所以由确界性质知，I 有上确界 $M=\sup I$ 和下确界 $m=\inf I$.

于是对任意正整数 n，存在 $x_n,y_n\in I$ 满足

$$M-\frac{1}{n}<x_n\leq M,\qquad m\leq y_n<m+\frac{1}{n}.$$

于是 $M=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n, m=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

因为 I 是闭集，所以 $M,m\in I$，它们分别是 I 的最大值和最小值. □

定理 3.4.3. *设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是有界闭集，$f:I\to\mathbb{R}$ 连续. 则 $f(I)=\{f(x)|x\in I\}$ 是有界闭集.*

证明. 任取 $f(x_n)\in f(I)$，其中 $x_n\in I$.

因为 I 是有界闭集，所以根据引理，$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$，满足 $x_0=\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}\in I$. 由 f 的连续性知 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)\in f(I)$，所以根据引理知 $f(I)$ 是有界闭集. □

由定理 3.4.3 和引理 3.4.2 知

推论 3.4.4 (最值定理). 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是有界闭集，$f : I \to \mathbb{R}$ 连续. 则 $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ 有最大值和最小值. □

下面的例子表明，在上述定理和推论中，I 有界、闭，f 连续都是不可缺少的重要条件.

例 3.4.5. $f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = 1/x$ 是连续函数，但 f 在区间 $(0,1)$ 内没有最大值和最小值. 它甚至没有上界.

$1/x$ 在闭区间 $[1, +\infty)$ 上连续，但没有最小值.

函数

$$g(x) = \begin{cases} (-1)^p p, & \text{若 } x = \frac{q}{p} \text{ 是既约分数;} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

在区间 $[0,1]$ 上既无上界也无下界，从而既没有最大值，也没有最小值. □

应用：代数学基本定理

多项式是最简单的函数，仅用有限次加法和乘法就可得到. 多项式方程求解是数学史中的重要问题之一. 虽然只有四次和四次以下的多项式存在求根公式，即可以用多项式的系数通过有限多次四则运算和开方运算得到根的表达式，而且有些多项式方程（比如 $x^2 + 1 = 0$）在实数集中无解，但是以下的代数学基本定理确保了任何不是常值的多项式在复数集中总是存在零点的. 这个定理有很多不同的证明，我们这里给出一个比较初等的证明. 为此我们把之前的一些概念和结果推广到复数情形.

复变量函数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的连续性：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 这里对复数 $z = x + \mathrm{i}y$（$x, y \in \mathbb{R}$ 是 z 的实部和虚部），$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

集合 $K \subseteq \mathbb{C}$ 的有界性、K 是闭集以及复数列的极限概念都与实数情形的定义形式相同，不再赘述.

集合 $K \subseteq \mathbb{C}$ 有界当且仅当 K 的实部集合 $\{x \in \mathbb{R}|\exists z \in K,\ x \text{ 是 } z \text{ 的实部}\}$ 与 K 的虚部集合 $\{y \in \mathbb{R}|\exists z \in K,\ y \text{ 是 } z \text{ 的虚部}\}$ 都是有界集. 因此 $\mathbb{C}$ 中任何有界数列必有收敛子列.

与定理 3.4.3 和推论 3.4.4 的证明相同，可以得到：对任何连续函数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 以及任何非空有界闭集 $K \subseteq \mathbb{C}$，$|f(z)|$ 在 K 上有最小值.

定理 3.4.6 (代数学基本定理). 任何复系数非常值多项式至少有一个复数根.

证明. 设 $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$，$n \geq 1$.

第一步：证明 $|P(z)|$ 有最小值 $|P(z_0)|$.

取 $R=1+2\left(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|\right)$，则当 $|z|\geq R$ 时，

$$\begin{aligned}|P(z)| &= \left|z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0\right| \\ &\geq |z|^n-|a_{n-1}|\,|z|^{n-1}-\cdots-|a_1|\,|z|-|a_0| \\ &\geq |z|^n-\left(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|\right)|z|^{n-1} \\ &= |z|^n\left(1-\frac{|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|}{|z|}\right) \\ &\geq \frac{|z|^n}{2}\geq\frac{|z|}{2}>|a_0|=|P(0)|.\end{aligned}$$

因为 $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是连续函数，所以 $|P(z)|$ 在有界闭集 $K=\{z\in\mathbb{C}|\,|z|\leq R\}$ 上有最小值 $|P(z_0)|$. 从而对任意 $z\in\mathbb{C}$， $|P(z)|\geq|P(z_0)|$.

第二步：证明 $P(z_0)=0$.

假设 $P(z_0)\neq 0$.

令 $Q(z)=\frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$. 于是 $Q(z)$ 是 n 次多项式满足 $Q(z)=1+b_mz^m+\cdots+b_nz^n$，其中正整数 $m\leq n$ 且 $b_m=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$（$r>0$），而且 $|Q(z)|$ 的最小值为 $|Q(0)|=1$.

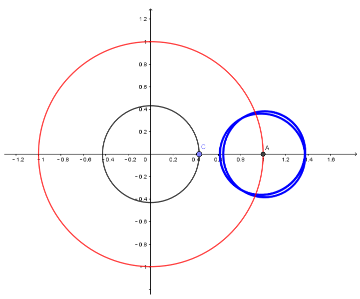


图 3.2: 存在 z 使得 $|Q(z)|<1$

记 $\tilde{Q}(z)=1+b_mz^m$. 取 $z^*=\varepsilon\left(\cos\frac{\pi-\theta}{m}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\theta}{m}\right)$，其中

$$0<\varepsilon<\min\left\{1,\frac{1}{\sqrt[m]{r}},\frac{r}{|b_{m+1}|+\cdots+|b_n|}\right\},$$

则 $\tilde{Q}(z^*)=1-r\varepsilon^m\in(0,1)$，

$$\begin{aligned}|Q(z^*)| &\leq \left|Q(z^*)-\tilde{Q}(z^*)\right|+\left|\tilde{Q}(z^*)\right| \\ &\leq \left(|b_{m+1}|+\cdots+|b_n|\right)\varepsilon^{m+1}+(1-r\varepsilon^m)<1,\end{aligned}$$

这与 $|Q(0)|=1$ 是 $|Q(z)|$ 的最小值矛盾.

所以 $P(z_0)=0$. □

习题 3.4

1. 设 n 是正整数，连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x)=x^{2n}+o(x^{2n}),\quad x\to\infty$. 证明 f 有最小值.

2. (a) 用确界性质证明：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有上界.（提示：考虑 $A=\{x\in[a,b]|f$ 在区间 $[a,x]$ 上有上界$\}$）

   (b) 证明连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有最大值.（提示：记 $M=\sup\{f(x)|a\le x\le b\}$，用反证法证明 M 是 f 的函数值，考虑 $g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$）

3. 设 $a\in\mathbb{R}$，f 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. 证明 f 存在最大值或存在最小值.

4. 称 $f:I\to\mathbb{R}$ 是一个**下半连续函数**，如果对任意$x_0\in I$ 以及任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得

$$x\in I,|x-x_0|<\delta\Longrightarrow f(x)>f(x_0)-\varepsilon.$$

   证明：如果 $I\subset\mathbb{R}$ 是有界闭集，则 f 在 I 上取得最小值.

5. 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是一个非空有界闭集，$f:I\to\mathbb{R}$ 是连续函数，满足 $f(I)\subset I$，且 对任意 $x,y\in I$，$x\neq y$，都有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$.

   (a) 证明：f 有唯一的不动点 ξ.

   (b) 问：这个不动点 ξ 是否是吸引的不动点，即对任意 $x_0\in I$，数列 $\{f^n(x_0)\}_{n\ge1}$ 都收敛于 ξ?

3.5 函数的一致连续性

在一些实际问题中，一些物理量 y 可以从一些容易观测的物理量 x 通过特定的法则 $y=f(x)$ 计算得到. 实际测量总会有误差，所以我们很难得到 x 的精确值，进而也就无法得到 y 的精确值. 但是我们总还是可以得到 x 的一些近似值 $\hat{x}$，我们希望近似值 $\hat{y}=f(\hat{x})$ 不要明显偏离精确值 y. 这就需要转化方式（即函数 f ）是连续的.

但在实际问题中 f 仅仅连续是不够的. 因为我们既然无从知道 x 的精确值，也就无从知道 $y=f(x)$ 的精确值，所以我们既无法直接知道误差 $|\hat{x}-x|$ 的大小，也无法知道误差 $|f(\hat{x})-f(x)|$ 的大小. 一个现实的问题是，当我们不知道 x 的真值时，如果 x 的两个近似值（通常取一对不足近似值和过剩近似值）x_1,x_2 彼此足够接近时，是否能保证 $f(x_1),f(x_2)$ 也足够接近呢？或者说，$|x_1-x_2|$ 小到什么程度可以使误差 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 满足给定的精度要求？这就要求 f 是一致连续函数.

定义 3.5.1. 称函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 $K \subseteq I$ 上是**一致连续的**，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_\varepsilon > 0$ 使得对任意 $x_0 \in K$ 以及任意 $x \in I$，只要 $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$，就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 这里 δ_ε 只与 ε 有关，与 $x_0 \in K$ 和 $x \in I$ 无关.

例 3.5.2. 称函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 是一个 **Lipschitz 函数**，如果存在常数 $L > 0$ 使得对任意 $x, y \in I$，$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$. 所有的 Lipschitz 函数都是一致连续的. 因此 $\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续函数.

例 3.5.3. 由例 2.1.6 的证明知函数 $\sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是一致连续的.

例 3.5.4. 函数 x^2 在 $\mathbb{R}$ 上不是一致连续的，但在任何有界闭区间 $[-N, N]$ 上是一致连续的.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2N+1+\varepsilon}$，则对任意 $x_0 \in [-N, N]$ 以及 $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$，$|x| \le |x_0| + \delta_\varepsilon < N+1$，$\left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0|\,|x + x_0| \le |x - x_0|\,(|x| + |x_0|) \le (2N+1)\,|x - x_0| < \varepsilon$. 所以在任何有界闭区间 $[-N, N]$ 上，x^2 是一致连续的.

假设 x^2 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的. 因为 $\left|\left(N + \frac{1}{N}\right)^2 - N^2\right| = \left|2 + \frac{1}{N^2}\right| \ge 2$，所以对 $0 < \varepsilon < 2$，相应的 δ_ε 必须满足 $0 < \delta_\varepsilon < \frac{1}{N}$. 而 N 是任意的，所以不存在定义中所说的只依赖于 ε 的正数 δ_ε. □

例 3.5.5. 证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sin\sqrt{x^2+1} - \sin x\right) = 0$.

证明. 因为

$$|\sin x - \sin y| = \left|2 \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}\right| \le |x - y|$$

所以 $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一致连续函数. 而当 $x \to +\infty$ 时，

$$\left|\sqrt{x^2+1} - x\right| = x\left|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1\right| = x\left(\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \to 0,$$

所以 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sin\sqrt{x^2+1} - \sin x\right) = 0$. □

定理 3.5.6. *设 $f: I \to \mathbb{R}$ 连续，$K \subseteq I$ 是有界闭集. 则 f 在 K 上是一致连续的.*

证明. 假设 f 在 K 上不是一致连续的. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及数列 $x_n \in K$ 和 $y_n \in I$ 使得 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ 但 $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon_0$. 因为 $x_n \in K$ 有界，所以 $\{x_n\}_{n \ge 1}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k \ge 1}$，极限为 x_0. 则 $x_0 \in K$ 且 $\lim\limits_{k \to +\infty} y_{n_k} = x_0$. 从而 $\lim\limits_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim\limits_{k \to +\infty} f(y_{n_k})$. 但这与 $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \varepsilon_0$ 矛盾. 所以 f 在 K 上是一致连续的. □

习题 3.5

1. $\sin(x^2)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一致连续函数吗？为什么？

2. 讨论 x^α 在区间 $(0,+\infty)$ 上的一致连续性.

3. 证明 $\mathbb{R}$ 上任何连续的周期函数都是一致连续的.

4. 讨论一致连续性与函数四则运算、复合、反函数之间的关系.

5. 用确界性质证明：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.（提示：考虑 $A=\{x\in[a,b]|f$ 在区间 $[a,x]$ 上一致连续$\}$）

习题讨论课2

1. 以下陈述哪个与“$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是 Cauchy 列”等价？

   (a) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N 使得对任意正整数 $n \geq N$，$|a_n - a_N| < \varepsilon$.

   (b) 对任意 $\varepsilon > 0$，对任意正整数 p，存在正整数 N 使得对任意正整数 $n \geq N$，$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

   (c) 对任意正整数 p，$\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$.

2. 关于闭区间套定理

   (a) 如果区间套不是闭区间，请问该定理结论是否成立？

   (b) 如果区间套不是有界区间，请问该定理结论是否成立？

   (c) 如果用有界闭集代替有界闭区间，请问该定理结论是否成立？

   (d) 请给出 $\mathbb{R}^n$ 中闭集的定义. 在 $\mathbb{R}^n$ 中是否成立有界闭集套定理？

   (e) 用闭区间套性质和阿基米德性质证明任何 Cauchy 实数数列都收敛.

3. 如果实数数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 不含任何收敛子列，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$.

4. 设 $0 < \lambda < 1$，$x_1 = a$，$x_2 = b$，$x_n = \lambda x_{n-1} + (1-\lambda)x_{n-2}$. 证明 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的值.

5. 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ 满足 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. $x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k$，

$$x_n = \lambda_1 x_{n-1} + \cdots + \lambda_k x_{n-k}.$$

   证明 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的值. .

6. 任给 x_1, y_1 满足 $-\sqrt{2} < x_1 < 2 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2} < y_1 < 1 + \sqrt{2}$，证明由

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1 + y_n^2}{2}, \\ y_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2}{2} \end{cases}$$

   产生的数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1}$ 都收敛. 求或估计 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 的值.

7. 设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续函数，满足 $f[a, b] \subseteq [a, b]$.

   (a) 证明：存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

   (b) 证明：如果 f 是单调函数，则对任何 $x_0 \in [a, b]$，要么 $f^n(x_0)$ 收敛于 f 的一个不动点，要么 $\{f^n(x_0)\}$ 收敛于 f 的一个周期为 2 的周期轨道：即存在 $\eta \in [a, b]$ 满足 $f^2(\eta) = \eta$，但 $f(\eta) \neq \eta$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \min\left\{|f^n(x_0) - \eta|, |f^n(x_0) - f(\eta)|\right\} = 0.$$

(c) 如果去掉 f 的单调性，(b)中结论是否成立？

8. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，满足 $[a,b]\subseteq f[a,b]$. 证明：存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\xi$.

9. 设 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续，令

$$g(x)=\sup_{a\le t\le x} f(t).$$

(a) 证明 g 在 $[a,+\infty)$ 上连续.

(b) 若 f 是一致连续的，问 g 是否一致连续的？

10. 设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 是连续单射，证明：$f^{-1}:f(I)\to I$ 连续.

11. 设 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 一致连续，$g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续，满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$. 证明 g 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

12. 证明

(a) 连续的周期函数是一致连续的.

(b) 连续的非常值的周期函数的周期集合没有聚点.

13. 对 $t>0$，考虑 $f_t(x)=(1-x)^t-x$，$0\le x\le 1$.

(a) 证明函数 $f_t:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续的减函数.

(b) 证明对任意 $t>0$，$f_t(x)=0$ 有唯一解 $x_t\in(0,1)$.

(c) 证明 x_t 关于 $t>0$ 是减函数，并且 $\lim\limits_{t\to+\infty}x_t=0$.

(d) 证明当 $t\to+\infty$ 时，$x_t=\frac{\ln t}{t}+o\left(\frac{\ln t}{t}\right)$.

14. 1911年德国数学家 Otto Toeplitz 提出了如下猜想：任何一条平面简单封闭曲线上必存在四个点，它们是一个正方形的四个顶点. 这也称为“内接正方形问题”或“正方形桩子问题”. 这里考虑一种特殊情况. 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数，满足 $f(0)=f(1)=0<f(x)$ ($\forall 0<x<1$). 曲线 γ 由区间 $[0,1]$ 对应的线段和 f 的图像组成. 证明：

(a) γ 有一个内接正方形.

(b) 对任意 $\lambda>0$，γ 有一个内接矩形，其相邻两边的长度比为 λ.

关于这个问题可以参见 https://www.webpages.uidaho.edu/ markn/squares/ 和 https://arxiv.org/pdf/2005.09193.pdf

第3章总结

内容回顾

这一章我们更进一步地研究了实数的连续性以及函数的连续性.

在实数连续性方面，我们主要证明了列紧性定理和 Cauchy 收敛准则. 这是关于数列极限的两个重要结论.

在函数连续性方面，我们主要证明了连续函数的介值定理、最大最小值定理、有界闭集上一致连续性定理. 连续函数介值定理保证了一类方程解的存在性问题，最大最小值定理保证了一类优化问题解的存在性.

在证明实数的连续性定理和连续函数介值定理时，我们使用了二分法和构造有界闭区间套的方法.

另外，作为应用，我们介绍了压缩不动点定理，它保证了一类方程解的存在和唯一性. 我们还证明了代数学基本定理，它保证了复数域中多项式方程解的存在性.

给学生的建议

学习使用有界闭区间套方法、实数的列紧性解决数学问题.

理解数列收敛的 Cauchy 准则以及函数的一致连续性.

学习把一些数学问题转化为方程求解形式，以及利用介值性质、压缩不动点定理得到解的存在性（和唯一性）.

学习处理由递推关系确定的数列，了解如何研究它们的极限性质.

给教师的建议

本章内容对微积分初学者都不简单，教师可以根据课程要求自行决定讲授内容和方式. 课时充裕的话，讲一些应用总是好的. 如果课时不太充裕，也鼓励有兴趣的学生自学一部分内容.