第11课：导数应用-L’Hôpital法则-函数作图

第3章　函数的导数

- **内容：**

  第3.6节　导数应用-L’Hôpital法则

  第3.7节　导数应用-函数作图

导数应用-L'Hôpital法则

- **极限计算**：已知 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B,\quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=?$

➢ 1) 若$B\neq0$, $B\neq\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

➢ 2) 若$B=0$, $\begin{cases} A\neq 0, & \lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]=\infty \\ A=0, & \lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]=? \end{cases}$ —— "$\dfrac{0}{0}$型"未定式

➢ 3) 若$B=\infty$, $\begin{cases} A\neq \infty, & \lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]=0 \\ A=\infty, & \lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]=? \end{cases}$ —— "$\dfrac{\infty}{\infty}$型"未定式

- **注**：极限过程 $x\to a$ 可以换成其他极限过程，如单侧极限或无穷远处极限

第11-1课：导数应用-L'Hôpital法则

✓ 例1："$\frac{0}{0}$型"：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin(1/x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$不存在

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin(\frac{1}{x})=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{1-e^{1/x}}=?$$

✓ 例2："$\frac{\infty}{\infty}$型"：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^{\frac{1}{x}})=\ln 1=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P_m(x)}{\ln(x^n+e^{x^2})}=?\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{P_m(1/x)}{\ln x}=?\ (P_m\text{为}m\text{次多项式})$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan x}{\ln(\frac{\pi}{2}-x)}=?$$

第11-1课：导数应用-L'Hôpital法则

- **L'Hôpital法则** (1696<无穷小分析>, 1661-1704)：

  设 f, g 在(a,b)内可导, 满足$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} g(x)=0$ —— "$\frac{0}{0}$型"

如果 $g'(x)\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$, 则 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$（包括$K=\infty$）

证：不失一般性可以令 $f(a)=g(a)=0$, 则$\forall x\in(a,b)$

$$f,g\in C[a,x]\text{且在}(a,x)\text{内可导}$$

应用Cauchy中值定理 $\exists c\in(a,x)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

令 $x\to a^+$则 $c\to a^+$, 从而$\dfrac{f'(c)}{g'(c)}\to K$, 由此得到 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$ $\square$

第11-1课：导数应用-L'Hôpital法则

- **注**：若 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，L–法则失效

但不能由此断言 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在！

回忆例1

“$\dfrac{0}{0}$ 型” $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=0$

但是

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2\sin(1/x))'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{\cos x}$$ 不存在

第11-1课：导数应用-L'Hôpital法则

✓ 例3：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=?\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=?\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=?$

解：为应用L-法则, 检查需要的条件：都是"0/0型"且

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1\\&\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1\\&\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x)^a-1]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{a(1+x)^{a-1}}{1}=a\end{aligned}\right\}\text{极限存在}$$

由此可见L-法则有效，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a \qquad \square$$

第11-1课：导数应用-L'Hôpital法则

✓ **例4**：已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^m} = K \neq 0$，问 $m = ?\ K = ?$

解：m>0 时极限是"0/0型", 检查导数的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x - x)'}{(x^m)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(1/\cos^2 x) - 1}{mx^{m-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{mx^{m-1}\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{m\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^{m-1}} = \frac{2}{m}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{m-1}}$$

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$，所以 m=3

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x - x)'}{(x^m)'} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{3}, \quad \therefore \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

综上得到 m=3, K=1/3 □

第11-1课：导数应用-L’Hôpital法则

- **L’Hôpital法则** (无穷远处极限)

设 f, g 在$(b,+\infty)$内可导, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ —— “$\frac{0}{0}$型”

如果 $g'(x)\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K$ (包括$K=\infty$)

证：令 $x=1/t$, 则 $x\to+\infty$ 等价于 $t\to 0^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}$

注意 $\frac{[f(1/t)]'}{[g(1/t)]'}=\frac{f'(1/t)(-t^{-2})}{g'(1/t)(-t^{-2})}=\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$

由此 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{[f(1/t)]'}{[g(1/t)]'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$, 据前面$L$-法则 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=K$

进而得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=K$ □

第11-1课：导数应用-L'Hôpital法则

✓ 例5：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{1-e^{1/x}}=?$

解：极限是“0/0型”, 检查导数的极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)'}{(1-e^{1/x})'}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{1+x^2}\Big/\frac{e^{1/x}}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{e^{1/x}(1+x^2)}=-1$$

应用L-法则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{1-e^{1/x}}=-1$ □

注：为简化书写，今后上面过程可以简写为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{1-e^{1/x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)'}{(1-e^{1/x})'}=\cdots=-1$$

第11-2课：导数应用-L'Hôpital法则

- **L'Hôpital法则** (∞/∞型极限)

设 f, g 在(a,b)内可导, 且 $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$

如果 $g'(x)\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$, 则 $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$（包括$K=\infty$）

证：为应用Cauchy中值定理, 取 $a < x < x_0 < b$, 考虑

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{1-g(x_0)/g(x)}{1-f(x_0)/f(x)}$$

其中$[x,x_0]$上可应用Cauchy中值定理, 得到 $c\in(x,x_0)$满足

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1-g(x_0)/g(x)}{1-f(x_0)/f(x)} \quad (\to K\,?)$$

以下依次选取x_0和x, 使得右端第一项接近K, 第二项接近1：

第11-2课：导数应用-L'Hôpital法则

- **L'Hôpital法则(∞/∞)证明 (续)：**

  已知当 $a < x < x_0 < b$ 时，有 $c \in (x, x_0)$满足

(*) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - g(x_0)/g(x)}{1 - f(x_0)/f(x)}$$

首先 $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$，以$K$有限为例：$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 \in (0, b-a)$

使得$a < x < a + \delta_1$时 $\left| \dfrac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \varepsilon_1$

固定 $x_0 \in (x, a+\delta_1)$，则$c \in (a, a+\delta_1)$，$\therefore \left| \dfrac{f'(c)}{g'(c)} - K \right| < \varepsilon_1$

再注意 $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = \infty$，$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 \in (0, x_0 - a)$

使得$a < x < a + \delta_2 < x_0$时 $\left| \dfrac{1 - g(x_0)/g(x)}{1 - f(x_0)/f(x)} - 1 \right| < \varepsilon_2$

第11-2课：导数应用-L’Hôpital法则

- **L’Hôpital法则(∞/∞)证明** (续二)：综上当 $a<x<x_0<b$ 时

(*) $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{1-g(x_0)/g(x)}{1-f(x_0)/f(x)},\qquad c\in(x,x_0)$$

$\forall\varepsilon_1>0,\exists\delta_1\in(0,b-a)$ 当 $a<x<x_0<a+\delta_1$时 $\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)}-K\right|<\varepsilon_1$

固定 $x_0\in(a,a+\delta_1)$, $\forall\varepsilon_2>0$, $\exists\delta_2\in(0,x_0-a)$

使得 $a<x<a+\delta_2<x_0<a+\delta_1$时 $\left|\dfrac{1-g(x_0)/g(x)}{1-f(x_0)/f(x)}-1\right|<\varepsilon_2$

代入(*)式 $(K-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)<\dfrac{f(x)}{g(x)}<(K+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$

$$\therefore\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon_1+(|K|+\varepsilon_1)\varepsilon_2$$

以下只须 $\forall\varepsilon>0$, 取$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon_2=\dfrac{\varepsilon}{2(|K|+\varepsilon_1)}$, $\delta=\delta_2$, …… □

第11-2课：导数应用-L'Hôpital法则

✓ **例6**：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}=?\quad (a>0)$

解：极限是"∞/∞型", 检查导数的极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^a)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{ax^{a-1}}=\frac{1}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^a}=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^a)'}=0 \qquad \square$$

✓ **推论**：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{e^{ax}}=0\quad (a>0, P(x)$为多项式$)$

只须注意：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{(\ln u)^n}{u^a}=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\dfrac{\ln u}{u^{a/n}}\right)^n=0,\ n=0,1,2,\cdots \quad \square$

第11-2课：导数应用-L’Hôpital法则

✓ 例7：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\tan x}{\ln(\frac{\pi}{2}-x)}=?$

解：极限是“∞/∞型”, 检查导数比的极限

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(\tan x)'}{[\ln(\frac{\pi}{2}-x)]'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1/\cos^2 x}{(-1)\Big/(\frac{\pi}{2}-x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2x-\pi}{2\cos^2 x}$$

这是“0/0型”, 继续检查导数比的极限

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)'}{(2\cos^2 x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2}{(-4)\sin x\cos x}=-\infty$$

应用两次L-法则即得 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\tan x}{\ln(\frac{\pi}{2}-x)}=-\infty$ □

第11-2课：导数应用-L'Hôpital法则

- 其他类型未定式：

  "$\infty-\infty$型"，"$0\cdot\infty$型"，"0^0型"，"∞^0型"，"1^∞型"

转化为"$\dfrac{0}{0}$型" 或 "$\dfrac{\infty}{\infty}$型"，然后应用适当的L-法则

✓ 例8：$\lim\limits_{x\to0+} x^a \ln x = ? \quad (a>0)$ —— "$0\cdot\infty$型"

解：$\lim\limits_{x\to0+} x^a \ln x = \lim\limits_{x\to0+} \dfrac{\ln x}{x^{-a}}$ —— "$\dfrac{\infty}{\infty}$型"

$$= \lim_{x\to0+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-a})'} = \lim_{x\to0+} \frac{x^{-1}}{(-a)x^{-a-1}} = -\frac{1}{a}\lim_{x\to0+} x^a = 0 \qquad \square$$

【注意】$\lim\limits_{x\to0+} x^a \ln x = \lim\limits_{x\to0+} \dfrac{x^a}{(\ln x)^{-1}}$ —— "$\dfrac{0}{0}$型"

$$= \lim_{x\to0+} \frac{(x^a)'}{[(\ln x)^{-1}]'} = \lim_{x\to0+} \frac{ax^{a-1}}{(-1)(\ln x)^{-2}x^{-1}} = -a\lim_{x\to0+} \frac{x^a}{(\ln x)^{-2}} = ?$$

第11-2课：导数应用-L'Hôpital法则

✓ **例9：** $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=?$ —— “$\infty-\infty$型”

解：
$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \quad \text{—— “}\frac{0}{0}\text{型”}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{(e^x-1-x)'}{[x(e^x-1)]'}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} \quad \text{—— “}\frac{0}{0}\text{型”}$$

两次L-法则

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2} \qquad \square$$

- **注：** 也可以用等价无穷小代换+L-法则 $e^x-1\sim x\ (x\to 0)$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$

第11-2课：导数应用-L'Hôpital法则

✓ 例10： $\lim\limits_{x\to 0+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}=?$ —— "0^0型"

解：注意 $\lim\limits_{x\to 0+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0+}e^{\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}}$

(利用了指数函数的连续性) 所以只须计算极限

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x} \qquad \text{—— “}\frac{\infty}{\infty}\text{型”}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{[\ln(1-\cos x)]'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x/(1-\cos x)}{1/x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{1-\cos x}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^2 \qquad \square$$

第11-2课：导数应用-L'Hôpital法则

✓ **例11：** $\lim\limits_{x\to 0+}(\cos\sqrt{x^3})^{\frac{1}{x-\tan x}}=?$ —— "1^∞型"

解：注意 $\lim\limits_{x\to 0+}(\cos\sqrt{x^3})^{\frac{1}{x-\tan x}}=\lim\limits_{x\to 0+}e^{\frac{\ln(\cos\sqrt{x^3})}{x-\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln(\cos\sqrt{x^3})}{x-\tan x}}$

其中 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\cos\sqrt{x^3})}{x-\tan x}$ —— "$\dfrac{0}{0}$型"

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{[\ln(\cos\sqrt{x^3})]'}{(x-\tan x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\sqrt{x^3})\big/\cos\sqrt{x^3}}{1-1\big/\cos^2 x}$$

$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x^3}}{\cos^2 x-1}\cdot\frac{\cos^2 x}{\cos\sqrt{x^3}}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{3}{2}$$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{3}{2}}$ $\square$

注意1： $\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型才可直接使用洛必达法则，

其他未定型要先化成这两种类型之一，然后再用洛必达法则。

注意2： 洛必达法则只说明

当$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}=A$时，$\lim \frac{f(x)}{g(x)}=A$

当$\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在时,并不能断定

$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在只能说明这时不能

使用洛必达法则

例如$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x}) = 1$

而 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} \cancel{=} \lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$不存在

注意3:

只有未定式极限才能使用罗必达法则；有些未定式极限,使用多次罗必达法则之后,已经成为 非未定式极限, 就不能再使用罗必达法则了.

[例] 显然有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1-x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-1}=0$$

这显然是一个错误的结果!

练习:

$$\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}$$

[1] 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

[解] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=2$$

[2] 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$

[解] 这是"$\dfrac{0}{0}$"型

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

[3] 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}\quad(n\in N)$

$$\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}$$

[解] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

当$x\to+\infty$时, e^x 是比 x^n 更高阶的无穷大量

e^{-x}是比x^{-n}更高阶的无穷小量

[4] 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}\quad(\alpha>0)$

[解] $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0$$

当$x\to+\infty$时, $x^{\alpha}(\alpha>0)$是比$\ln x$ 更高阶的无穷大量.

[小结]: 当$x\to+\infty$时,下列无穷大量的阶依次升高

$\ln x$, $x^{\alpha}(\alpha>0)$, $a^{x}(a>1)$

[5] 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

[解] $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$

$=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$ 等价代换

$=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}$

$=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$

[6] 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{-2}{1+\ln x}}$ "0^0" 型

[解] 令 $y=(\sin x)^{\frac{-2}{1+\ln x}}$, 取对数,得

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{1+\ln x}\ln(\sin x)$$

"$\frac{\infty}{\infty}$"

$$=-2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{1+\ln x}=-2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=-2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\cos x=-2$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{-2}{1+\ln x}}=e^{-2}$$

[7] 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$ $\boxed{“\infty-\infty”}$

[解] $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\ln(1+\frac{1}{x})^x}{\frac{1}{x}}$

$\boxed{令 \quad \frac{1}{x}=t}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$$

[8] 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为正常数，求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

[解] $$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x) - \ln n}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}$$

$$=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}$$

$$=\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

[9] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=?$

$\infty-\infty$

$\dfrac{0}{0}$

[解] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}$

通分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$

等价代换

极限等于2

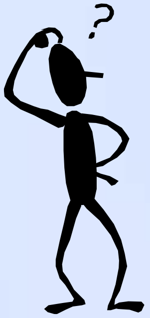
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\cdot\dfrac{x+\sin x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

思考题:

下列极限是否存在?是否可用洛必达法则?为什么?若有极限,求出其极限值。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$



导数应用-函数作图

- **曲线作图步骤：** 曲线方程 $y = f(x)$

1) 确定函数 f 定义域
2) 检查f 的对称性：奇偶性-周期性
3) 检查曲线的渐近线：垂直-水平-斜渐近线
4) 研究导函数 f'：确定曲线的增减区间-极值点/临界点
5) 研究二阶导函数 f''：确定曲线的上下凸区间-拐点
6) 计算在若干关键点的f 值
7) 综上绘图(借助适当的表格)

第11-3课：导数应用-函数作图

- **曲线渐近线**：考虑曲线 $y=f(x)$

  a) 垂直：若 $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\infty$，则 $x=a$ 是垂直渐近线

  b) 水平：若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$，则 $y=b$ 是水平渐近线

  c) 斜：若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$，则 $y=ax+b$ 是斜渐近线

  反之，如果要找出渐近线方程，只要确定上面 a,b

注意到 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{f(x)-(ax+b)}{x}\right]=0$，$\therefore$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-a\right]=0$

综上得到

- **渐近线方程**：直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线

当且仅当 $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$ （二极限存在）

第11-3课：导数应用-函数作图

- **曲线上下凸：** 考虑曲线 $y=f(x)$

  a) 下凸区间 $\sim f'(x)$单调增 $\sim f''(x)\geq 0$

  b) 上凸区间 $\sim f'(x)$单调减 $\sim f''(x)\leq 0$

- **曲线/函数拐点：**

  曲线拐点：曲线的上下凸发生改变的点 $P=(x_0, f(x_0))$

  函数拐点：函数上下凸性发生改变的点 x_0

  $\sim f'(x)$增减发生改变的点

  $\sim f''(x)$符号发生改变的点 $\Rightarrow f''(x_0)=0$

第11-3课：导数应用-函数作图

- **例1**：作出曲线 $y=f(x)$图形, $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

解：参考作图步骤, 依次检查

1) 定义域：$x\neq -1$

2) 对称性：无奇偶对称与周期性

3) 渐近线：

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=-\infty \quad \text{—— 垂直渐近线 } x=-1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\pm\infty \quad \text{—— 无水平渐近线}$$

$$a=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1 \quad \text{—— 斜渐近线 } y=x-5$$

$$b=\lim_{x\to \pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5$$

第11-3课：导数应用-函数作图

✓ **例**1 (续)：继续作图步骤　$f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

4) 计算 $f'(x)=\dfrac{3(x-1)^2}{(x+1)^2}-\dfrac{2(x-1)^3}{(x+1)^3}=\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$

令 $f'(x)=0$, 得到临界点 $x=1,\ x=-5$

检验导函数符号

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}\begin{cases}>0, & x<-5, & \text{曲线上升}\\ <0, & -5<x<-1, & \text{曲线下降}\\ >0, & -1<x, & \text{曲线上升}\end{cases}$$

所以 x=-5是极大值点, x=1不是极值点 (x=-1是奇点)

5) $f''(x)=\cdots=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}\begin{cases}<0, & x<1 \text{ ——曲线上凸}\\ >0, & x>1 \text{ ——曲线下凸}\end{cases}$

可见 x=1是函数拐点, 对应曲线拐点*P*=(1,0)

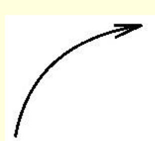
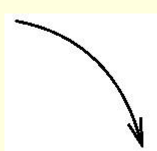
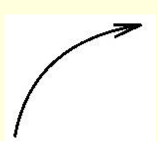
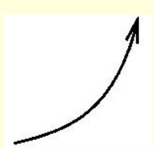
第11-3课：导数应用-函数作图

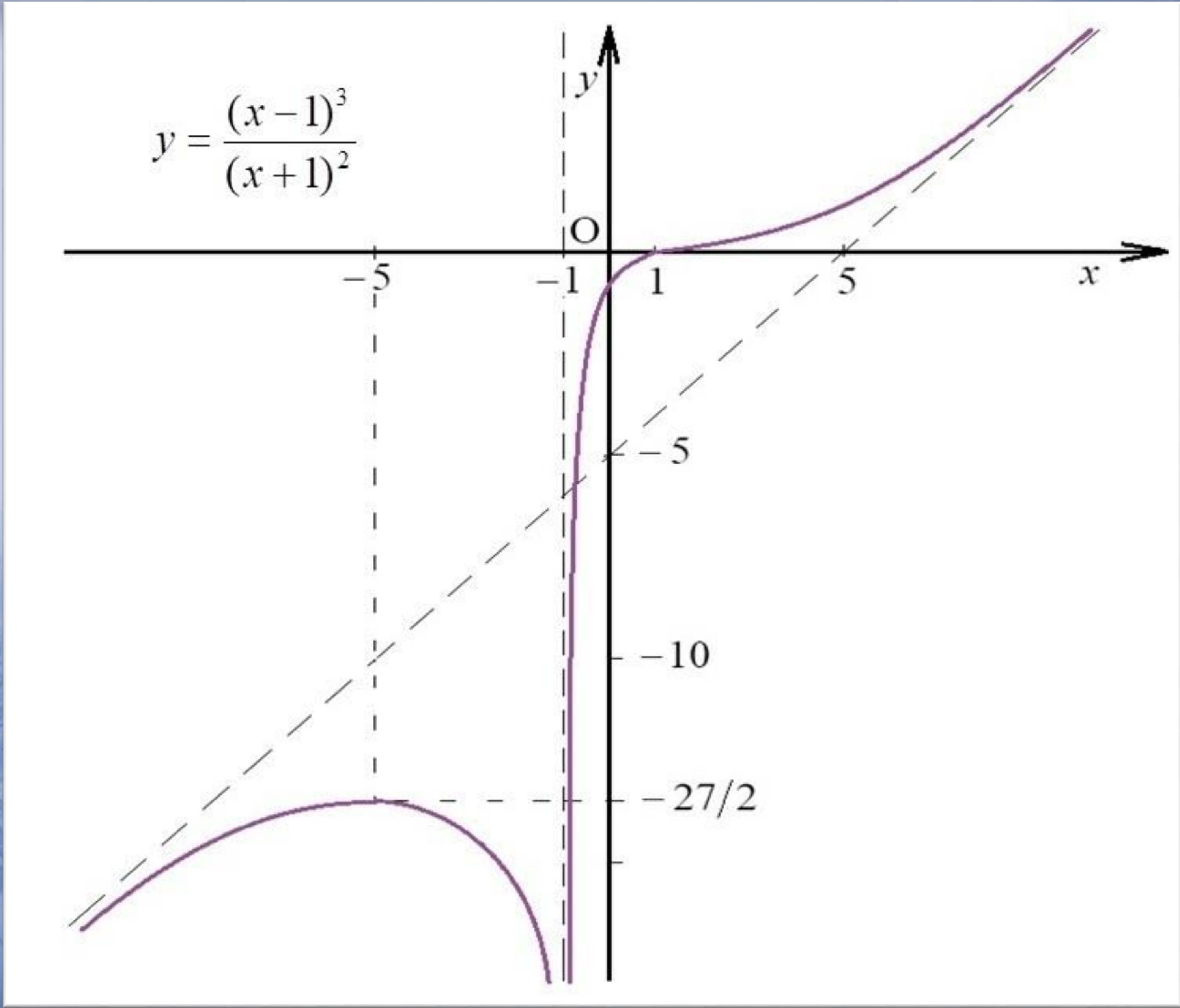
✓ **例1 (续二)**：继续作图步骤 $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

已经计算得 $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$， $f''(x)=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$

6) 典型函数值 $f(-5)=-27/2$（极大值） $f(1)=0$ (拐点值)

7) 综合上面信息列表-作图：

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$-\dfrac{27}{2}$		$-\infty$		0	



$y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
y
O
x
−5
−1
1
5
−5
−10
−27/2

第11课：导数应用-极值问题-函数凸性

- **预习** (下次课内容)：

  第4.1节 函数的微分

  第4.2节 Taylor公式-带Peano余项

- **作业** (本次课) ：

  练习题3.6：1(2,4,6,8,10,12,14,其余自己练习),

  2, 3, 4*(参考书中例3).

  练习题3.7：1(1,4,5,其余自己练习).

  问题3.5：7(假设有二解y_1,y_2,证明y_1-y_2=0), 11*.