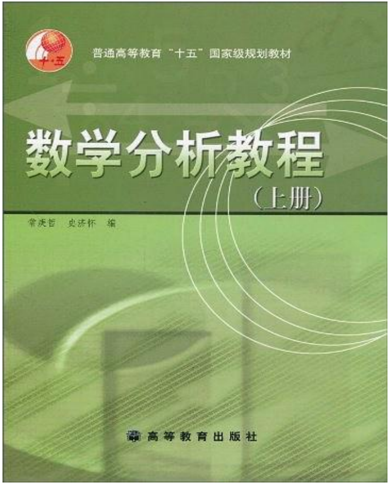
高等微积分

邹文明

第三章: 导数


普通高等教育"十五"国家级规划教材
数学分析教程
（上册）
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

§3.6. L'Hospital 法则

定理 1. 假设$f(x), g(x)$ 在点x_0的某个去心邻域内可导，并且$g'(x) \neq 0$. 满足:

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或者等于$\pm\infty$ 或者∞;

那么$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

证明: 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, 我们可以假设$f(x_0) = g(x_0) = 0$. 这样, $f(x), g(x)$ 在x_0 的某个邻域内连续. 在这个邻域内任意取一个点x, 并且$x \neq x_0$. 在区间$[x, x_0]$ 或者$[x_0, x]$ 上用柯西中值定理:

$$\frac{f(x}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

这里ξ 在x, x_0 之间. 令$x \to x_0$即可.

评注

- 在定理中, 可将极限过程“$x \to x_0$”改成“$x \to x_0^+$”换成“$x \to x_0^-$”.
- 定理中的条件均无法去掉且逆命题不成立.

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

解: $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

定理 2. 假设函数f, g 在$(x_0, x_0+\rho)$ 上可导, $g'(x) \neq 0$ 并且当$x \to x_0^+$时, $g(x) \to \infty$. 如果存在$A \in [-\infty, +\infty]$ 或者$A = \infty$, 使得

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

定理 3. 假设函数f, g 在$(a, +\infty)$ 上可导, $g'(x) \neq 0$ 并且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

或者$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty$.

如果存在$A \in [-\infty, +\infty]$ 或者$A = \infty$, 那么

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

评注

- 在计算函数极限时，无法确定的情形包括:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

但这些均可以转化成上面的情形.

例 2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{3x^2} = -\dfrac{1}{6}$.

例 3. 若 f 在 $(a,+\infty)$ 内可导且

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f'(x)+f(x)\right)=A\in\mathbb{R},$$

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

证明:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^x}{e^x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)e^x+f(x)e^x}{e^x}=A,$$

进而再利用题设条件可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

例 4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}$ $(a>0)$.

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{ax^a}=0.$

例 5. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解: $$\lim_{x\to 0^+}\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=2,$$

于是我们有 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^2$.

例 6. 设 $a \in \mathbb{R}$ 使得当 $x \to 0^+$ 时,

$$f(x) = x - \left(\frac{4}{3} + a\cos x\right)\sin x$$

为 x 的 $k > 1$ 阶无穷小, 求 a 和$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^5}$.

解: 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^k} \cdot x^{k-1} = 0$, 故

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(1 - \left(\frac{4}{3} + a\cos x\right)\frac{\sin x}{x}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{4}{3} + a\right), \qquad \Rightarrow a = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^5}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos x\right)\sin x}{x^5}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\frac{4}{3}\sin x+\frac{1}{6}\sin 2x}{x^5}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{4}{3}\cos x+\frac{1}{3}\cos 2x}{5x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4}{3}\sin x-\frac{2}{3}\sin 2x}{20x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4}{3}\cos x-\frac{4}{3}\cos 2x}{60x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{90x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\cos x+4\cos 2x}{90}=\frac{1}{30},$$

例 7. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x-x^2}{\sin x^2}$.

解: 由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x-x^2}{\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x-x^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1-2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-2}{2}=-\frac{3}{2}.$$

例 8. 计算 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}$.

解:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=\lim_{x\to1}\left(x-x^{x+1}(\ln x+1)\right)'$$
$$=\lim_{x\to1}\left(1-x^{x+1}\cdot x^{-1}-\left(x^{x+1}\right)'(\ln x+1)\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left(1-x^{x}-e^{(x+1)\ln x}\left((x+1)\ln x\right)'(\ln x+1)\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left(1-e^{x\ln x}-e^{(x+1)\ln x}\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right)(\ln x+1)\right)$$
$$=1-1-1\times(0+2)(0+1)=-2.$$

例 9. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$. 解:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{1}{x+1}}(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}} - 1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \times \frac{1}{x(x+1)}$$

例 10. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1+x^2}-1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$. 解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1+x^2}-1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(-2)(e^x-1)}{e^x-1+xe^x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(-2)\cdot\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=-1.$$

例 11. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解: $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+\frac{x}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

例 12. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

解: $$\lim_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\exp\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}\Big)$$
$$=\exp\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}\Big)$$
$$=\exp\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}\Big)=e.$$

§3.7. 二阶导数决定的函数性质–凹凸与作图等

定理. 假设f 在$[a,b]$ 上连续, $f'(x_0)=0, f''(x_0)$存在. 那么

(1) 当$f''(x_0)<0$ 时, $f(x_0)$ 是一个严格极大值;

(2) 当$f''(x_0)>0$ 时, $f(x_0)$ 是一个严格极小值;

证明: 只证明(1). 因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)<0.$$

因此存在$\delta>0$ 使得当$0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$\frac{f'(x_0)}{x-x_0}<0.$$

这个说明: 当$x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) < 0$.
当$x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) > 0$. 即左边严格递增, 右侧严格递减. 故....

定义 1.(凸函数) 设 I 为区间, 而 $f: I \to \mathbb{R}$ 为函数.

- 若 $\forall x, y \in I$ 以及 $\forall \lambda \in (0,1)$, 均有
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
则称 f 为 I 上的下凸函数, 简称凸函数.
- 若 $\forall x, y \in I\ (x \neq y)$ 以及 $\forall \lambda \in (0,1)$, 均有
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
则称 f 为 I 上严格下凸函数, 也称严格凸.

- 若 $\forall x, y \in I$ 以及 $\forall \lambda \in (0,1)$, 均有

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

则称 f 为 I 上的上凸函数, 也称凹函数.

- 若 $\forall x, y \in I$ $(x \neq y)$ 以及 $\forall \lambda \in (0,1)$, 均有

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

则称 f 为 I 上严格上凸函数, 也称严格凹.

注: f 凹当且仅当 $-f$ 凸. 故下面仅讨论凸性.

定理 1. 函数 f 为区间 I 上的凸函数当且仅当对任意整数 $n \geqslant 1$, 对任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, 对任意 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, 若 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, 则

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

证明: 充分性. 取 $n = 2$ 即得到凸函数的定义.
必要性. 下面对 $n \geqslant 1$ 应用数学归纳法来证明: 对任意 $x_1, \ldots, x_n \in I$ 以及对任意 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, 若 $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, 则 $f\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

当 $n=1$ 时, 所证为恒等式.

当 $n=2$ 时, 所证源于凸函数定义.

现假设所证结论对 $n \geqslant 2$ 成立. 那么对任意的 $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ 以及对任意的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geqslant 0$,

当 $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$时, 若 $\lambda_{n+1} = 1$, 则

$\lambda_k = 0\,(1 \leqslant k \leqslant n)$, 此时所证为恒等式.

下面假设 $\lambda_{n+1} < 1$. 则我们有

$$
\begin{aligned}
f\Big(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\Big) &= f\Big(\lambda_{n+1}x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k\Big)\\
&\leqslant \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1})f\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k\Big)\\
&\leqslant \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}f(x_k)\\
&= \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k).
\end{aligned}
$$

定理 2. 函数 f 为区间 I 上的凸函数当且仅当 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, 均有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

证明: **充分性.** $\forall x, y \in I\ (x < y)$ 以及 $\lambda \in (0,1)$, 令 $x_1 = x$, $x_2 = \lambda x + (1-\lambda)y$, $x_3 = y$. 由题设可知 $\frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{\lambda x+(1-\lambda)y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, 也即我们有

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leqslant (1-\lambda)(f(y) - f(x)) + f(x) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

必要性. $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, 令 $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, 则 $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. 于是

$$\begin{aligned} f(x_2) &\leqslant \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot f(x_1) + \left(1 - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) \cdot f(x_3) \\ &= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot (f(x_3) - f(x_2)) \\ &\quad + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot f(x_2), \end{aligned}$$

故 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$, 进而可得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

定理 3. 如果函数 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 上可导, 则 f 为凸函数当且仅当 f' 在 (a,b) 上递增.

证明: 充分性. $\forall x, y \in [a,b]$, 不失一般性, 可设 $x < y$. $\forall \lambda \in (0,1)$, 定义 $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. 于是由 Lagrange 中值定理可得知, $\exists \xi_1 \in (x,z)$ 使得 $f'(\xi_1) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$. 同样也可知 $\exists \xi_2 \in (z,y)$ 使得 $f'(\xi_2) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$. 又由题设可知 $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$,

故 $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$, 即 $f(z) \leqslant \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)$, 由此立刻可知 f 为凸函数.

必要性. 对于 $a < x < z < y < b$, 由定理 2 得

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

于是由函数极限的保序性可知

$$f'(x) = f'_+(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'_-(y) = f'(y),$$

因此 f' 为单调递增函数.

定理 4. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 上二阶可导, 则 f 为凸函数当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, 均有

$$f''(x) \geqslant 0.$$

证明: 由前面定理可知 f 为凸函数当且仅当 f' 在 (a,b) 上递增, 而在题设条件下, 这等价于说 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f''(x) \geqslant 0$.

定理 5. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 上二阶可导，则 f 为严格凸函数当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, 均有

$$f''(x) \geqslant 0,$$

且 f'' 在 (a,b) 的任意子区间上不恒为零.

证明: 由定义可知, 函数 f 为严格凸函数当且仅当函数 f 为凸函数, 并且其图像不含直线段, 也即 f' 为严格递增, 由此可知所证结论成立.

如何研究 (初等) 函数的凸凹性?

定义 2. 函数图像凸凹性发生改变的点为拐点.

命题 1. 若函数 f 可导且点 $(x_0, f(x_0))$ 为 f 的图像的拐点, 则 x_0 为 f' 的极值点.

证明: 由题设可知 f 在点 x_0 的两侧有不同的凸凹性, 则 f' 在点 x_0 的两侧有不同的单调性, 从而该点为 f' 的极值点.

推论. 若 f 在点 x_0 处二阶可导且点 $(x_0, f(x_0))$ 为 f 的函数图像的拐点, 则 $f''(x_0) = 0$.

注: 该结论的逆命题不成立. 考虑 $f(x) = x^4$.

确定 (初等) 函数凸凹性的具体步骤

- 计算二阶导数, 找出二阶导数为零的点.
- 以这些点为端点来分割函数的定义域.
- 判断二阶导数在每个子区间上的符号, 由此确定函数的凸凹性, 并判别拐点.

例 1. 确定 $f(x)=3x^4-16x^3+24x^2-x+2$ 的凸凹区间.

解:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 12x^3-48x^2+48x-1, \\
f''(x) &= 36x^2-96x+48=12(3x-2)(x-2),
\end{aligned}
$$

从而 f'' 的零点为 $\frac{2}{3}, 2$. 又函数 f'' 在 $(-\infty, \frac{2}{3})$, $(2, +\infty)$ 上取正号, 则 f 在这些区间上严格凸; 而 f'' 在 $(\frac{2}{3}, 2)$ 上取负号, 因此 f 在该区间上为严格凹; 从而 f 的拐点为 $(\frac{2}{3}, \frac{212}{27}), (2, 16)$.

例 2. 确定旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$的凸凹性.

解: 函数 $x(t), y(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上均为连续, 另外, 当 $t \in (0, 2\pi)$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'}{x'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right) \cdot \frac{1}{x'} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2} < 0,$$

因此旋轮线在 $t \in [0, 2\pi]$ 时为严格凹.

例 3. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, 求证:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

证明: $\forall x > 0$, 定义 $f(x) = \ln x$, 那么 f 为初等函数, 因此无穷可导且 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 于是 f 为凹函数, 从而 $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, 均有

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\Big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_k),$$

由此立刻可得 $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$.

♠♣ 函数作图

定义 1. 设曲线 Γ 由方程 $y=f(x)$ 给出.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$, 则称 $y=L$ 为曲线 Γ 的水平渐近线, 其中 $L\in\mathbb{R}$.

(2) 若 $x_0\in\mathbb{R}$ 使 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$, 则称 $x=x_0$ 为曲线 Γ 的竖直渐近线.

(3) 若 $\exists k, b \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ 或 $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, 称 $y = kx + b$ 为曲线 Γ 的斜渐近线, 其中假设 $k \neq 0$.

评注

由斜渐近线的定义，曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$ (其中 $k\neq 0$) 当且仅当我们有

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\neq 0,\ \ b=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big),$$

或者我们有

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\neq 0,\ \ b=\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-kx\big).$$

例 1. 求函数 $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的渐近线.

解: f的自然定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\infty$, 由此知曲线 $y=f(x)$ 没有水平渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\infty$, 则上述曲线有竖直渐近线 $x=-1$. 最后

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=-5,$$

故该曲线的斜渐近线为 $y=x-5$.

函数作图的步骤

1. 确定函数的定义域.
2. 确定函数的奇偶性, 对称性, 周期性等.
3. 求曲线的渐近线 (水平, 竖直, 斜渐近线).
4. 求导数, 确定临界点, 单调区间, 极值点.
5. 计算二阶导数, 确定凸凹区间和拐点.
6. 指出特殊点 (端点与坐标轴的交点等).

同学们辛苦了！