$a(x^2-2x+1)$

《微积分A-1》期中考试试题 A卷

2021年秋季学期，考试时间: 2021-11-07上午

姓名 于方舟 班级 九11 学号 2021012630

注意事项: 正反面都有题目. 满分100分; 将解答或证明写在规定的地方,标明题号.

$(e^{x\ln 2x})' = e^{x\ln 2x}\cdot(\frac{1}{2}+\ln 2x)$

一、计算题 (45%)

1. (5%) 计算下列极限.

$\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)^x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right].$$

$\frac{(2x)^x-2}{a(x-1)+b(x-1)^2}$

2. 求满足下列条件的参数a,b的值.

$\frac{(2x)^x(\frac{1}{2}+\ln 2x)-2}{a+2bx-2b}$

(1) (5%)已知 $(2x)^x-2\sim a(x-1)+b(x-1)^2\ (x\to 1)$, 求 a,b 的值.

(2) (5%)设

$$f(x)=\begin{cases} a\ln x+b, & x\geq 1,\\ e^x, & x<1.\end{cases}$$

在 $x=1$ 点可导, 求 a,b 的值.

$x \sim \tan x$

$\frac{1}{\cos x}$

(3) (5%) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x<0,\\ 3e^x+a, & x\geq 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续，求 a.

$1+x^2-1+x^2$

(4) (5%) 求a,b的值使得极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x^5}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^4}\right)$$

存在（有限），并求该极限值.

$\frac{2}{x^4}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^4}$

$\frac{ax^2+2+b}{x^4}$

3. (5%) 设 $y=x^2+e^x$,求其反函数 $x=x(y)$ 的二阶导数 $\frac{d^2x}{dy^2}$.

4. (5%)求曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$处的切线方程.

$\frac{d\frac{dx}{dy}}{dy\,dx}\cdot\frac{dx}{dy}$

5. (5%) 设函数 $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,求 $y^{(100)}$.

$2(\frac{1}{2}+\ln 2)-2$

$y=-(x-e^{\frac{\pi}{2}})$

6. (5%)求函数$f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$的极值。 $2\ln x\cdot\frac{1}{x}$ $\frac{(2)^2}{e^2}$

二、证明题 (55%)

1. (6%) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$, 证明: 一定存在 $x_0\in[0,\frac{1}{2}]$ 使得 $f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{2})$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且对任何自然数 n, $f(x)$ 在 $[n,n+1]$ 上严格单调, 若 $f(n)f(n+1)<0$,

(1) (5%)证明: 存在唯一的 $\xi_n\in(n,n+1)$ 使得 $f(\xi_n)=0$;

(2) (5%)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi}{\xi_n}$.

$< n\sin\frac{2\pi}{n}$ $> (n+1)\sin\frac{2\pi}{n+1}-\sin\frac{2\pi}{n+1}$

3. (8%) 设 $f(x),g(x)$ 在 x_0 点可导, 且

$$f(x_0)=g(x_0),\quad f'(x_0)=g'(x_0).$$

若 $h(x)$ 在 x_0 的某一邻域内满足

$$f(x)\le h(x)\le g(x),$$

证明: $h(x)$ 在 x_0 点可导, 并且 $h'(x_0)=f'(x_0)=g'(x_0)$.

$\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{1}{n}}$ $\frac{h(x+\Delta x)-h(\Delta x)}{\Delta x}$

4. (7%) 证明曲线 $y=e^x$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 的交点不超过三个.

5. (1) (6%)设 $x>0$, 证明存在 $0<\theta<1$ 使得下面等式成立

$$\frac{(1+x)\ln(1+x)}{\arctan x}=(1+\theta^2x^2)[1+\ln(1+\theta x)];$$

(2) (6%) 设 $x>0$, 证明不等式

$$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}.$$

$x_n(2-x_n)$ $-2ax-b$

6. (6%) 设$0<x_0<1$, $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n,\forall n\ge 0$。证明数列$\{x_n\}$收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

7. (6%) 证明: 函数$f(x)$在区间I上一致连续的充要条件为: 对区间I上的任何两个数列$\{x_n\},\{y_n\}$, 当$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$时, 有$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$.

$h(x_0)$ e^x-2a

$\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{2\Delta x}$

$\frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$

$\frac{g(x+\Delta x)-f(x)}{}$