

习题课材料（九）

习题 1. 构造符合要求的矩阵 A :

1. A 的特征多项式为 $\lambda^2 - 9\lambda + 20$, 构造三个不同的 A .

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}$, 且 A 的特征值为 4, 7.

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \end{bmatrix}$, 且 A 的特征值为 1, 2, 3.

习题 2. 设 λ_1, λ_2 是 A 的两个不同特征值, x_1, x_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明, $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量.

习题 3. ♡ 设 A, B 分别是 $m \times n, n \times m$ 矩阵, 证明对任意复数 λ , 有

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA).$$

特别地, 当 $m = n$ 时, $\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$.

习题 4. ♡♡ 如果复矩阵 A, B 可交换, 证明 A, B 至少有一个公共的特征向量.

习题 5. 设 $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ 为二阶方阵, 如果分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ 满足每一行、每一列以及四个二阶子方阵中的四个元素都是 1, 2, 3, 4, 则称 M 为四阶数独矩阵.

设 A 是四阶数独矩阵, 证明其绝对值最大的特征值为 10, 且属于该特征值的特征向量的所有分量都相等.

习题 6. ♡♡ 设方阵 A 的每个元素都是整数, 证明 $\frac{1}{2}$ 一定不是 A 的特征值.

习题 7. ♡♡ 给定 m 阶方阵 A_1 , n 阶上三角矩阵 A_2 和 $m \times n$ 矩阵 B . 证明如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 关于 $m \times n$ 矩阵 X 的矩阵方程 $A_1 X - X A_2 = B$ 有唯一解.

矩阵方程 $A_1 X - X A_2 = B$ 称为 Sylvester 方程, 在控制论中有不少应用.

习题 8. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. 当 k 取何值时, A 可对角化? 当 A 可对角化时, 写出其谱分解.

习题 9. 证明 $A = \begin{bmatrix} I_r & O \\ B & -I_{n-r} \end{bmatrix}$ 可对角化.

习题 10. ♡

1. 若 $A^2 = A$, 则 A 可对角化.
2. 若 $A^2 = O$, 且 $A \neq O$, 则 A 不可对角化.
3. 若 $A^2 + A + I_n = O$, 则 A 在 \mathbb{R} 上不可对角化.