目录

①、作业题讲解

②、补充练习

反常积分的计算

介绍一个很常用的函数：伽玛(Gamma)函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx\ (s>0)$$

掌握以下4个重要公式：

①递推公式　$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ （用一次分部积分）

②计算公式　$\Gamma(n)=(n-1)!$ （利用递推公式）

③余元公式　$\Gamma(1-s)\Gamma(s)=\dfrac{\pi}{\sin \pi s}\ (0<s<1)$

④概率公式　$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ （利用余元公式）

$$(9)\quad \int_0^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\ (n \in \mathbb{N}^*);$$

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$(11)\quad \int_0^{+\infty} x^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\ (n \in \mathbb{N}^*);$$

令$x^2 = t,\quad x = \sqrt{t},\quad 2xdx = dt$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{2}$$

$$\text{(10)} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*);$$

①$a=0$时，0为瑕点，因此先分段后积分：

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x^{2n}}dx+\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}}dx$$

前者发散，后者收敛，所以该广义积分发散

②$a \neq 0$时,考虑用分部积分来进行递推:

$$I_n=\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\right]\Big|_0^{+\infty}+2n\int_0^{+\infty} \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$=2n\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx-2na^2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=2nI_n-2na^2I_{n+1}$$

$$\therefore I_{n+1}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot I_n$$

练习7.7 T1(10)

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$);

$$\therefore I_{n+1} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n$$

$$\therefore I_n = \frac{1}{a^{2n-2}} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I_n = \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$(12)\ \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

$$\because \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan +\infty - \arctan -\infty)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

2. 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $f \geqslant 0$. 如果 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 求证: $f = 0$.

只要在某点$x_0 > 0$处, 有$f(x_0) > 0$, 则:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx > 0$$

从而:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx > 0\text{, 矛盾}$$

$$\therefore f = 0$$

$$(5)\quad \int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x;$$

$$\because \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx = \int \frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin^2\sqrt{x} + C$$

$$\therefore I = \arcsin^2\sqrt{x}\,\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

(6) $\int_0^1 \ln^n x \, dx \ (n \in \mathbb{N}^*)$;

$$I_n = [x ln^n x]|_0^1 - n\int_0^1 ln^{n-1} x \, dx$$

$$I_n = (-n)I_{n-1} = (-1)^{n-1}(n)(n-1)\cdots 2\ I_1$$
$$= (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot I_1$$

$$I_1 = [xlnx - x]|_0^1 = -1$$

$$\therefore I_n = (-1)^n\, n!$$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\ (\,n \in \mathbb{N}^*\,).$

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n d(2\sqrt{x}) = 0 + 2n\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)^{n-1}dx$$

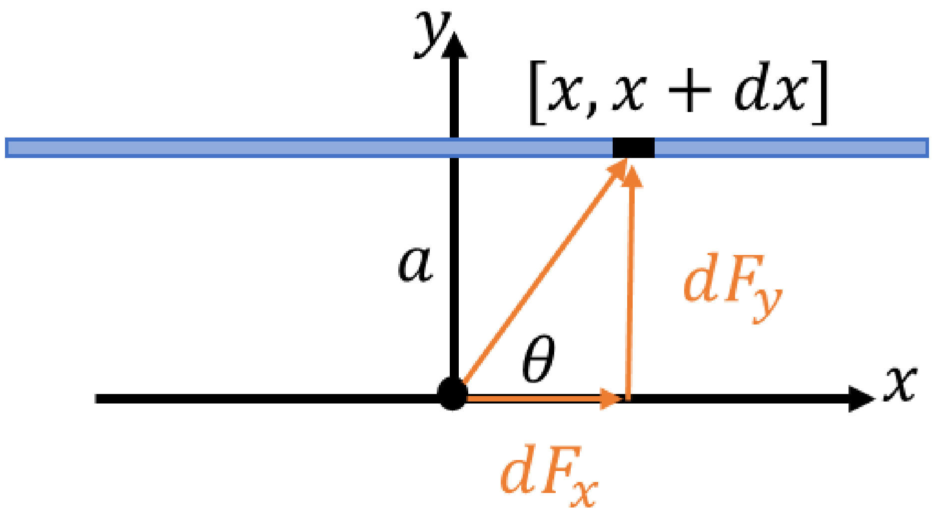
$$I_n = 2n\int_0^1 \frac{(x-1+1)(1-x)^{n-1}}{\sqrt{x}}dx$$

$$I_n = -2nI_n + 2nI_{n-1}$$

$$\therefore I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} \qquad I_1 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore I_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} * 2$$

有一无限长的均匀细棒，密度为 ρ，在距棒 a 处放置一单位质量的质点，计算棒对质点的引力.



$$dF_y = dF \cdot \sin\theta = \frac{G\rho dx}{x^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\therefore F = 2\int_0^{+\infty} \frac{Ga\rho dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2G\rho}{a} \quad (\text{令} x = a\tan t)$$

有一直径为 1m、高为 2m 的直立圆柱桶盛满了水. 桶底有一个直径为 1cm 的小孔. 水从小孔流出的速度为 $v=0.6\sqrt{2gh}$, 其中 h 是瞬时水深, g 为重力加速度. 问水全部流完需多长时间?

$$r = 0.5cm, \qquad R = 0.5m$$

$$\pi r^2 v dt = -\pi R^2 dh$$

$$dt = -\frac{5R^2}{3r^2}\frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$

$$\therefore T = -\int_2^0 \frac{5R^2}{3r^2}\frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{5 * 10^4 * 2}{3\sqrt{g}} \approx 10649s = 2.96h$$

习题 2.1.1 求解下列微分方程:

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^2)}$;

(2) $\frac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$;

可分离变量

(1)

$$ydy=\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$\int ydy=\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$\frac{1}{2}y^2=x-arctanx+C$$

(2)

$$\frac{dy}{dx}=(1+x)(1+y^2)$$

$$\int\frac{1}{1+y^2}dy=\int(1+x)dx$$

$$arctany=x+\frac{1}{2}x^2+C$$

习题 2.1.2 求下列微分方程满足初始条件的解，并确定解的存在区间:

(1) $y^2dx + (x+1)dy = 0,\quad y(0) = 1;$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+2y},\ y(2) = 0;$

可分离变量

(1)

$$-\frac{1}{y^2}dy = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int -\frac{1}{y^2}dy = \int \frac{dx}{1+x}$$

$$\frac{1}{y} = \ln|1+x| + C$$

$$C = 1$$

$$\frac{1}{y} = \ln|1+x| + 1$$

(2)

$$(1+2y)dy = 2xdx$$

$$\int (1+2y)dy = \int 2x\,dx$$

$$y + y^2 = x^2 + C$$

$$C = -4$$

$$y + y^2 = x^2 - 4$$

习题 2.3.2 求下列初值问题的解:

(1) $y' = y - 5, \quad y(0) = 1;$

(2) $xy' + 2y = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi};$

一阶线性

(1)

$$P(x) = -1, \qquad Q(x) = -5$$

$$\int P(x)dx = -x$$

$$y = e^x\left(C + \int -5\,e^{-x}dx\right) = Ce^x + 5$$

$$y(0) = C + 5 = 1, \qquad C = -4$$

$$\therefore y(x) = 5 - 4e^x$$

(2)

$$P(x) = \frac{2}{x}, \qquad Q(x) = \frac{sinx}{x}$$

$$\int P(x)dx = lnx^2$$

$$y = \frac{1}{x^2}\left(C + \int \frac{sinx}{x} \cdot x^2\,dx\right) = \frac{sinx - xcosx + C}{x^2}$$

$$y(\pi) = \frac{\pi + C}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}, \qquad C = 0$$

$$\therefore y(x) = \frac{sinx - xcosx}{x^2}$$

习题 2.4.1 *1.* 求解微分方程:

(1) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$;

伯努利方程

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y^2}=x^3$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d(y^{-2})}{dx}+x\cdot y^{-2}=x^3 \qquad 令u=y^{-2}$$

$$\frac{du}{dx}-2xu=-2x^3 \qquad \int P(x)dx=\int -2xdx=-x^2$$

$$u(x)=e^{x^2}\left(C+\int x^3\cdot e^{-x^2}dx\right)=e^{x^2}\left(C-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{y^2}=e^{x^2}\left(C-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)$$

习题 2.2.1 求解微分方程:

(1) $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$;

(2) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$;

齐次型

(2)

$$y=ux,\qquad y'=u'x+u$$

$$x(u'x+u)=ux+\sqrt{x^2(1-u^2)}$$

$$x^2u'=|x|\sqrt{1-u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{|x|}{x^2}dx$$

① $x>0$时

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|+C_1$$

② $x<0$时

$$\arcsin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C_1$$

习题 2.2.1 求解微分方程:

(1) $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$;

(2) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$;

齐次型

(2)

$$y=ux,\qquad dy=xdu+udx$$

$$(u^2x^2-2x^2u)dx+x^2(xdu+udx)=0$$

$$\frac{du}{u-u^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|\frac{u}{1-u}\right|=\ln|x|+C$$

$$\therefore\ \ln\left|\frac{y}{x-y}\right|=\ln|x|+C$$

$$\therefore\left|\frac{y}{x-y}\right|=e^C|x|$$

$$\therefore\ \frac{y}{x-y}=C_1x$$

关于微分方程中的绝对值问题

绝大多数情况都是可以不用考虑绝对值的

有一种特殊的情况需要小心一些：

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}\frac{y}{x}=x$$

$$\int P(x)dx=\ln|x|^{-\frac{1}{2}} \qquad y=\sqrt{|x|}\left(C+\int\frac{x}{\sqrt{|x|}}dx\right)$$

$x>0$:

$$y=\frac{2}{3}x^2+C\sqrt{x}$$

$x<0$:

$$y=\frac{2}{3}x^2+C\sqrt{-x}$$

$$\therefore\ y=\frac{2}{3}x^2+C\sqrt{|x|}$$

总结：积分时存在偶次根号的情况，需要考虑绝对值
其他情况，绝对值的±1可以被常数C合并

微分方程知识点总结

类型	形式	方法
1 可分离变量型	$g(y)dy=f(x)dx$	等号两边分别积分
2 齐次型	$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$	$y=ux$ $y'=xu'+u$
	$\frac{dy}{dx}=f(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1})$	化为齐次 $x=X+h$ $y=Y+k$
3 一阶线性	$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$	常数变易法 $y=e^{-\int P(x)dx}[C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx]$
	伯努利方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq 0,1)$	令$z=y^{1-n}$ 转换为一阶线性

微分方程知识点总结

类型	形式	方法
4 可降阶型	$y^{(n)} = f(x)$	连积n次，得通解
	不显含y型 $y'' = f(x, y')$	令$y' = P(x), y'' = P'$ $P' = f(x, P)$
	不显含x型 $y'' = f(y, y')$	令$y' = P(x), y'' = P\frac{dP}{dy}$ $P\frac{dP}{dy} = f(y, P)$

<table>
<tr><th>类型</th><th>形式</th><th>通解形式</th></tr>
<tr><td rowspan="3">5
二阶常系数
线性齐次方程</td><td rowspan="3">$y'' + py' + qy = 0$</td><td>① 特征方程有两异实根$r_1 \neq r_2$:
$Y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$</td></tr>
<tr><td>② 特征方程有两同实根$r_1 = r_2 = r$:
$Y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$</td></tr>
<tr><td>③ 特征方程有一对共轭复根$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$:
$Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$</td></tr>
</table>

微分方程知识点总结

<table>
<tr><th>类型</th><th>形式</th><th>通解形式</th></tr>
<tr><td rowspan="2">6
二阶常系数线性非齐次方程</td><td>$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

$P_m(x)$为m次多项式</td><td>$y^*=x^k e^{\lambda x}Q_m(x)$
k为λ的重数$(k=0,1,2)$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$
$=e^{\lambda x}[P_l(x)cos\omega x+P_n(x)sin\omega x]$</td><td>$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)cos\omega x+R_m^{(2)}(x)sin\omega x]$
$m=\max\{l,n\}$
$k=\begin{cases}0, \lambda\pm i\omega\text{不是特征根}\\ 1, \lambda\pm i\omega\text{是特征根}\end{cases}$</td></tr>
</table>

$$\boxed{x^2 y' = x^2 + 3xy + y^2;}$$

$y' = 1 + 3\dfrac{y}{x} + (\dfrac{y}{x})^2$，令 $u = \dfrac{y}{x}$, $y = xu$有 $y' = u + xu'$

$\therefore u + xu' = 1 + 3u + u^2$， $\therefore \int \dfrac{du}{(1+u)^2} = \int \dfrac{1}{x} dx$

$\therefore -\dfrac{1}{1+u} = \ln^{|x|} + c_1$， $\therefore (cx)^{(1+\frac{y}{x})} = e^{-1}$

$$y' = x^2 - 2xy + y^2 + 1;$$

$y' = (x-y)^2 + 1$，令 $u = x - y$　　有 $u' = 1 - y'$ 代入上式有

$1 - u' = u^2 + 1$　　$\therefore u' = -u^2$　　$\div \int \frac{du}{u^2} = \int dx$　　即 $\frac{-1}{u} = x + c$

$$\therefore (x-y)(x+c) = 1$$

$$\boxed{y'\ln x+\frac{y}{x}=x^3y^2\ln^2 x\ ;}$$

$$(y\ln x)'=x^3(y\ln x)^2，\ 令u=y\ln x\quad \therefore u'=x^3u^2，$$

$$\therefore \int\frac{du}{u^2}=\int x^3dx$$

$$\therefore -\frac{1}{u}=\frac{x^4}{4}+c_1$$

即：$(x^4+c)\cdot y\ln x=-4$

可以看出这是一个伯努利方程，可以化为一阶线性求解

$f \in C_{[0,+\infty)}$ $\quad |f(x)| \le m$ $\quad$ 证明 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + ay = f(x) & a > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解满足 $|y(x)| \le \dfrac{m}{a}(1 - e^{-ax})$

证明： $y(x) = e^{-\int adx}\left[\int f(x)e^{\int adx}dx + c\right] = e^{-ax}\left[\int f(x)e^{ax}dx + c\right]$

$\because y(0) = 0$， $\quad \therefore y(x) = e^{-ax}\int_0^x f(x)e^{ax}dx$

$|f(x)| \le m$， $\quad \therefore |y(x)| \le e^{-ax}\int_0^x |f(x)|e^{ax}dx \le e^{-ax}\int_0^x me^{ax}dx = \dfrac{m}{a}(1 - e^{-ax})$

求 $y'' - 2y' + y = xe^{ax}$ 通解（a 为常数）

（1）$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ $\quad\therefore y'' - 2y' + y = 0$ 通解为 $y_1(x) = (c_1 + c_2 x)e^x$

（2）当 $a \neq 1$ 时：

$y^* = (A + Bx)e^{ax}$ 代入原方程可得

$$(2a-2)B + (a^2 - 2a + 1)(A + Bx) = x$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 B = 1 \\ (2a-2)B + (a^2 - 2a + 1)A = 0 \end{cases}$$

$$\therefore B = \frac{1}{a^2}, \qquad A = -\frac{2a-2}{a^2 - 2a + 1} = \frac{2}{1-a}$$

$$\therefore y^* = \left(\frac{2}{1-a} + \frac{1}{a^2}x\right)e^{ax}$$

通解为：$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + \left(\frac{2}{1-a} + \frac{1}{a^2}x\right)e^{ax}$

求 $y''-2y'+y=xe^{ax}$ 通解（a 为常数）

（1）$\lambda^2-2\lambda+1=0$ $\therefore y''-2y'+y=0$ 通解为 $y_1(x)=(c_1+c_2x)e^x$

(3) 当 $a=1$ 时

$y^*=x^2(A+Bx)e^x$ 代入原方程可得

$$2A+6Bx=x \qquad \therefore \begin{cases} 6B=1 \\ 2A=0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} A=0 \\ B=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

$\therefore$ 通解为 $y(x)=(c_1+c_2x)e^x+\dfrac{1}{6}x^3e^x$

写出下列二阶线性非齐次方程特解形式

（1） $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}(x-1) + e^{2x}$；

解（1） $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda = 3, -1$

$\therefore y'' - 2y' - 3y = e^{-x}(x-1)$ 特解为

$y_1^* = x(A+Bx)e^{-x}$

$y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$ 特解为 $y_2^* = ce^{2x}$

故原方程特解为 $y_{(x)}^* = x(A+Bx)e^{-x} + ce^{2x}$

写出下列二阶线性非齐次方程特解形式

（2） $y'' + 4y = x\cos 2x + \sin x$.

$\therefore$ 原方程特解为 $y^* = x\left[(A_1 + B_1 x)\cos 2x + (A_2 + B_2 x)\sin 2x\right] + A\cos x + B\sin x$

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$ ，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

解： $f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt, f''(x)=-\sin x-f(x)$ 即 $\begin{cases} f''(x)+f(x)=-\sin x \\ f(0)=0, f'(0)=1 \end{cases}$

对应齐次方程通解为 $Y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$ ，设特解 $y^*_{(x)}=x(a\sin x+b\cos x)$ ，

代入方程可得 $a=0, b=\frac{1}{2}$，故方程通解为：

$$y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x+\frac{x}{2}\cos x$$

代入初始条件得 $c_1=\frac{1}{2}$， $c_2=0$，故 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$

同学们辛苦了！

祝：

新年快乐 期末顺利

谢谢！