高等微积分
第五周习题课

王道叶

清华大学电子工程系

2023 年 10 月 22 日

定义及定理

定义1.9

对任意给定的$\varepsilon > 0$，若 $\exists N \in N^*$, $s.t.\ \forall m, n > N$，有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

则称数列$\{a_n\}$是一个**基本列**或Cauchy列

定理1.12

$$数列a_n收敛 \Leftrightarrow a_n是基本列$$

等价表述

对任意给定的$\varepsilon > 0$，若 $\exists N \in N^*$, $s.t.\ \forall n > N, \forall p \in N^*$，有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

则称数列$\{a_n\}$是一个**基本列**或Cauchy列

练习1.8 1

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在$N \in N^*$,凡是$n > N$时有

$$|a_n - a_N| < \varepsilon$$

问$\{a_n\}$是不是基本列?

证明.

可以任意取 $m, n > N$, 有:

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a_N) + (a_N - a_n)| \leqslant |a_m - a_N| + |a_n - a_N| < 2\varepsilon$$

$\therefore a_n$ 是基本列 □

- 该题给出了Cauchy列的又一种等价表述

数列极限为a的常用等价定义

1. $\forall \varepsilon > 0\,(0 < \varepsilon < 1)\,, \exists N \in N^*, s.t.\ \forall n > N,\ |a_n - a| < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, s.t.\ \forall n > N,\ |a_n - a| < C\varepsilon$ (C>0 为常数)
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, s.t.\ \forall n > N,\ |a_n - a| < \varepsilon^k$ (或 $\varepsilon^{\frac{1}{k}}, k \in N^*$)
4. $\forall \varepsilon > 0,$ 数列$\{a_n\}$中只有有限项再$U(a,\varepsilon)$之外

练习1.8 2(1)

（1）数列$\{a_n\}$ 满足

$$|a_{n+p}-a_n| \leqslant \frac{p}{n}$$

对一切$n,p \in N^*$成立，问 $\{a_n\}$ 是不是基本列？

证明.

当项数差 p 足够大的时候，显然不等式右侧的值很大，即这两项之间的距离**并不是足够的近** 考虑一个反例：
$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

$$|a_{n+p}-a_n| = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p} \leqslant \frac{p}{n+1} < \frac{p}{n}$$

然而数列$\{a_n\}$发散（课本27页例二、也可以用定积分证明） □

以数列$\{\frac{1}{n}\}$为一般项的级数称为**调和级数**。所谓级数，就是数列的部分和$\{S_n\}$的极限

练习1.8 2(2)

（2）$|a_{n+p}-a_n| \leqslant \frac{p}{n^2}$ 时又如何？

证明.

$$
\begin{aligned}
&|a_{n+p}-a_n| \\
\leqslant\ & |a_{n+p}-a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1}-a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1}-a_n| \\
\leqslant\ & \frac{1}{(n+p-1)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
<\ & \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\
=\ & \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p-1} < \frac{1}{n-1} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$即可 $\square$

练习1.8 3(2)

$b_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$ 其中$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$为一有界数列，$|q| < 1$

证明.

- 考虑放缩成等比数列求和

$$
\begin{aligned}
|b_{n+p} - b_n| &= |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_{n+p}q^{n+p}| \\
&\leqslant M|q|^{n+1}(1 + |q| + \cdots + |q|^{p-1}) \\
&= M|q|^{n+1}\frac{1-|q|^p}{1-|q|} \\
&\leqslant \frac{M|q|^{n+1}}{1-|q|} \to 0
\end{aligned}
$$

□

练习1.8 3(3)

$a_n = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in \mathcal{R}$

■ **处理三角函数常用技巧：有界放缩、和差化积、诱导公式、倍角公式、$|\sin x| \leqslant |x|$**

证明.

$$
\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= |\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^2}| \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{(n+1)n} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \\
&< \frac{1}{n} \to 0
\end{aligned}
$$

定义及概念

定义2.1

设A,B是两个集合，如果f是一种规律，使得对于A中的每一个元素x,B中有**惟一确定**的元素——————记为$f(x)$——————与x对应，则称f是一个由A到B的**映射**，用

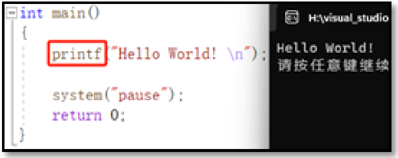
$$f : A \to B$$

来表示. 集合A叫做映射f的**定义域**. $f(x) \in B$叫做x在映射f下的像或f在x上的**值**.

定义及概念

概念

- 2023年10月的一些日期$A = \{16号,17号,...,23号\}$，$B = \{周一,...,周天\}$，f定义为某日到周几。则$A \to B$就是**满射**，但不是单射(16,23号都是周一)
- 若$A = \{16号，17号\}$，则$A \to B$为**单射**，但不是满射
- 若$A = \{16号,...,22号\}$，则$A \to B$既是满射，又是单射，所以是**双射（一一映射）**
- 映射是一个现代数学概念，概念非常广泛



printf可看作是内存中数据到屏幕上字符的映射(ASCII码表)

练习2.1 2

设映射f 满足$f \circ f(a) = a$,求 $f^n(a)$

解

$$f^n(a) = \begin{cases} f(a), & n = 2k-1 \\ a, & n = 2k \end{cases}$$

练习2.1 3

定义映射D :$\mathbf{R} \to 0,1$,如下:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}x\text{为有理数} \\ 0, & \text{当}x\text{为无理数} \end{cases}$$

(1) 求复合映射$D \circ D$
(2) 求$D^{-1}(\{0\}), D^{-1}(\{1\}), D^{-1}(\{0,1\})$

解

1. $D \circ D = D(D(x)) \equiv 1$
2. $D^{-1}(\{0\}) = \text{全体无理数} = \mathbf{R} \diagdown \mathbf{Q}$
   $D^{-1}(\{1\}) = \text{全体有理数} = \mathbf{Q}$
   $D^{-1}(\{0,1\}) = \text{全体实数} = \mathbf{R}$

基本概念及性质

- 概念(特殊的映射)
- 定义域,值域
- 单调性
- 周期性
- 奇偶性.对称性
- 反函数
- 复合映射

练习2.3　5(1)

设$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 求f^n

- **常用方法：数学归纳法**
- **以下为一种错误做法：**

证明.

$n=2$时，$f^2(x)=\frac{x}{\sqrt{1+2^1x^2}}$　设$n=k$时，$f^k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+2^{k-1}x^2}}$

则$n=k+1$时，

$$
\begin{aligned}
f^{k+1}(x) &= \frac{f^k(x)}{\sqrt{1+2^{k-1}\left[f^k(x)\right]^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+2^{k-1}x^2+2^{k-1}x^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+2^kx^2}}
\end{aligned}
$$

练习2.3 5(1)

设$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 求f^n

- 常用方法：数学归纳法
- 注意复合的对象是原始的f

证明.

$n=2$时，$f^2(x)=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$ 设$n=k$时，$f^k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$

则$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}f^{k+1}(x) &= \frac{f^k(x)}{\sqrt{1+[f^k(x)]^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+kx^2+x^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+(1+k)x^2}}\end{aligned}$$

□

练习2.3 7

设函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,是周期为$l$的周期函数.如果$f$以任何正数为周期,求证$f$为常值函数

证明.

$$\forall y>0, f(x+y)=f(x)$$

令$x=0$

$$f(y)=f(0)$$

$$\therefore f(x)\equiv C$$

□

练习2.3　9

求证,$(-a,a)$上任意函数均可表示为一个奇函数和一个偶函数之和

证明.

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

□

$\sin x$ 和 $\cos x$ 是具有周期的奇偶函数,是否可以用它们表示大多数周期函数?

...

感兴趣的同学可检索关键词{傅里叶级数,傅里叶变换},该名词将伴随电子系4年

问题2.3 1

设$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad x,y\in\mathbf{R}.$$

该式称为[Cauchy方程] ★

试证:对一切有理数 x,有$f(x)=xf(1)$

- 有理数的问题总是可以转换为整数的问题
- 本质:可加性 推出 齐次性

证明.

- 当 $x=\frac{1}{q},q\in\mathbf{N}_+$时,$f(1)=f(\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q})=qf(\frac{1}{q})$
  $\therefore f(\frac{1}{q})=\frac{1}{q}f(1)$
- 当 $x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbf{N}_+$时,有: $f(\frac{p}{q})=pf(\frac{1}{q})=\frac{p}{q}f(1)$
- $f(x)$ 为奇函数,易证 $x=-\frac{p}{q}$ 的情况

□

基本概念及性质

可结合数列极限的对应概念及性质来理解和掌握函数极限

- $\varepsilon-\delta$语言
- 四则运算性质
- 夹逼准则
- Heine定理(定理2.9)
- Cauchy收敛原理
- 左右极限
- 惟一性,局部有界性,保序性

函数的6种极限过程(与数列极限不同)

- x_0^-, x_0^+, x_0
- $-\infty, +\infty, \infty$

练习2.4 3(1)

证$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = |A|$

证明.

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x$满足$0 < |x - x_0| < \delta$, 有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\therefore\ ||f(x)| - |A|| \leqslant |f(x) - A| < \varepsilon$ □

练习2.4 3(2)

证$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = A^2$

证明.

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x$满足$0 < |x - x_0| < \delta$, 有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

$|f^2(x) - A^2| = |f(x) - A|\ |f(x) + A|$

利用局部有界性, $|f(x)| \leqslant M$

$\therefore\ |f^2(x) - A^2| \leqslant |f(x) - A|\ (M + |A|) < (M + |A|)\varepsilon$ □

练习2.4　3(3)

证$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$

证明.

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x$满足$0<|x-x_0|<\delta$, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$$\therefore\ |\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}$$

$\square$

练习2.4 3(4)

证$\lim_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}$

证明.

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x$满足$0<|x-x_0|<\delta$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.
若在x_0附近$f(x)\equiv 0$, 显然成立, 否则:

$$|\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{A}|=\frac{|f(x)-A|}{f^{\frac{2}{3}}(x)+f^{\frac{1}{3}}(x)A^{\frac{1}{3}}+A^{\frac{2}{3}}}<\frac{\varepsilon}{A^{\frac{2}{3}}}$$

□

- 思考：为什么可以直接这样放缩?
- 局部保号性，分母的3项全都是正的

练习2.4 5

设

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 2\\ -ax, & x<2\end{cases}$$

(1) 求$f(2+)$与$f(2-)$

(2) 若 $\lim_{x\to 2} f(x)$存在，a应该取何值？

解

1. $4, -2a$
2. $a=-2$

练习2.4 6

设$\lim_{x\to x_0} f(x) > a$,求证：当x足够靠近x_0但$x \neq x_0$时$f(x) > a$

■ **本质:局部保序性的逆用**

证明.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x$满足$0 < |x - x_0| < \delta$, 有$|f(x) - A| < \varepsilon . A > a$

令$\varepsilon = \frac{A-a}{2}$

$$\therefore f(x) > A - \varepsilon = A - \frac{A-a}{2} > a$$

□

练习2.4 7

设$f(x_0-)<f(x_0+)$,求证：$\exists\delta>0$ 使得当

$$x\in(x_0-\delta,x_0)\text{及}y\in(x_0,x_0+\delta)$$

时有$f(x)<f(y)$

- **本质:局部保序性的逆用**

证明.

设$f(x_0-)=a,f(x_0+)=A,A>a$. 令$\varepsilon=\frac{A-a}{2}$

$$f(y)>A-\varepsilon=A-\frac{A-a}{2}>\frac{A+a}{2}$$

$$f(x)<a+\varepsilon=a+\frac{A-a}{2}<\frac{A+a}{2}$$

$$\therefore\ f(x)<f(y)$$

□

练习2.4　8

设f在$(-\infty, x_0)$内是递增的,并且有一数列$\{x_n\}$适合$x_n < x_0 (n = 1, 2, \cdots), x_n \to x_0$ 且使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

求证：$f(x_0-) = A$

- **本质:Heine定理的变式**

练习2.4 8

- 本题将Heine定理中数列的任意性弱化为存在性，但补充了递增这一条件，因此需要充分利用递增条件进行证明

证明.

由**Bolzano-Weierstrass定理(列紧性定理)**（定理1.11 P36），我们一定可以从$\{x_n\}$中选出一个单调递增趋于x_0的子列$\{a_n\}$.
$\therefore$ 数列$\{f(a_n)\}$也是单调递增，且趋于A的(子列),即：
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in N^*, \forall n > N_0$, 有$|f(a_n) - A| = A - f(a_n) < \varepsilon$
$\therefore$ 取$\delta = (x_0 - a_{N_0+1})$
则$\forall x$, 满足$a_{N_0+1} < x < a_M$(M足够的大),我们有：
$A - \varepsilon < f(a_{N_0+1}) \leqslant f(x) < f(a_M) < A + \varepsilon$

$$\therefore |f(x) - A| < \varepsilon$$

□

本题综合性较强，需要对各种定义概念、定理和性质熟练理解并能运用

练习2.4 9

用肯定的语气表达“当$x \to x_0$ 时 $f(x)$ 不收敛于 l ”.

解

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x^* \text{满足} 0 < |x^* - x_0| < \delta, \text{有} |f(x^*) - A| \geqslant \varepsilon$$

练习2.5 3

证明：$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})=0$.

证明.

- 和差化积

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant |\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}| \\
&= |2\cos(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2})\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2})| \\
&\leqslant \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\
&< \frac{1}{\sqrt{x+1}} \to 0
\end{aligned}$$

□

练习2.5 4

$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$,求证$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^n a_k\sin\sqrt{x+k}=0$.

证明.

- 我们想凑出$a_1+a_2+\cdots+a_n$这一形式

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \left|\sum_{k=1}^n a_k(\sin\sqrt{x+k}-\sin\sqrt{x-n})\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n |a_k||\sqrt{x+k}-\sqrt{x-n}| < \sum_{k=1}^n |a_k|\frac{n+k}{\sqrt{x}} \\
&\leqslant \frac{2n\ \sum_{k=1}^n |a_k|}{\sqrt{x}} = \frac{C}{\sqrt{x}} \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

□

练习2.5　5

求极限：$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解

- **考虑诱导公式**

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant |\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi+n\pi)| \\
&= |\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)| \\
&\leqslant \frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}} \\
&\leqslant \frac{\pi}{n} \to 0
\end{aligned}
$$

练习2.5 8

如果 $x \in (-1,1)$有$|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx| \leqslant |\sin x|$,求证

$$|\sum_{k=1}^{n} ka_k| \leqslant 1.$$

证明.

当$x \neq 0$时， $\frac{|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx|}{|\sin x|} \leqslant 1$，由局部保序性，当$x \to 0$时有：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx|}{|\sin x|} \\
&= |\sum_{k=1}^{n} a_k \lim_{x\to 0} (\frac{\sin kx}{\sin x})| \\
&= |\sum_{k=1}^{n} ka_k| \leqslant 1
\end{aligned}$$

练习2.5 7

用极限来定义函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} n^x[(1+\frac{1}{n})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^n]$$

求f的定义域，并写出f的表达式

解

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} n^{x-1}(1+\frac{1}{n})^n=\begin{cases}0, & x<1\\ e, & x=1\end{cases}$$

定义及概念

无穷大定义2.14

设x_0是一个实数，函数f在x_0的一个近旁（可能除x_0之外）有定义.如果对任意给定的正数A，$\exists \delta > 0$，使得凡是$0 < |x - x_0| < \delta$便有$|f(x)| > A$，则称“当x趋于x_0时函数f趋向于无穷大”,记作：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

或者

$$f(x) \to \infty (当 x \to x_0 时)$$

思考讨论

函数$f(x)$(或数列a_n)无上界
与
函数$f(x)$(或数列a_n)趋于正无穷大
二者是否等价?

解

考虑如下函数:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当}x\text{为有理数} \\ 0, & \text{当}x\text{为无理数} \end{cases}$$

$$g(x)=e^{\frac{1}{\sin x}}$$

常用的等价无穷小公式

当$x \to 0$时

$\sin(x) \sim x$ $\tan(x) \sim x$

$\arcsin(x) \sim x$ $\arctan(x) \sim x$

$ln(1+x) \sim x$ $e^x - 1 \sim x$

$log_a(1+x) \sim \frac{x}{lna}$ $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$

$1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2$ $ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \sim x$

$x - sinx \sim \frac{1}{6}x^3$ $tanx - x \sim \frac{1}{3}x^3$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ $arcsinx - x \sim \frac{1}{6}x^3$

$x - arctanx \sim \frac{1}{3}x^3$ $tanx - sinx \sim \frac{1}{2}x^3$

练习

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sin^2 x}$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x+x^3}{x^3}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$$

5. $$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$$

同学们辛苦了！

谢谢！