高等微积分

邹文明

第七章: 定积分

函数可积的必要条件

定义 3. 假设 X 为非空数集, 而 $f: X \to \mathbb{R}$ 为有界函数. 对于任意非空子集 $J \subseteq X$, 定义

$$\omega(f;J) := \sup_{x,y\in J} |f(x) - f(y)|,$$

并称之为 f 在 J 上的振幅.

引理 3. 令 $M=\sup\limits_{x\in J} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in J} f(x)$, 则

$$\omega(f;J)=M-m.$$

证明: 因 $\forall x,y\in J$, 均有 $|f(x)-f(y)|\leqslant M-m$, 因此 $\omega(f;J)\leqslant M-m$. 与此同时, 我们也有

$$\begin{aligned} M-m &= \sup_{x\in J} f(x)-\inf_{y\in J} f(y) \\ &= \sup_{x,y\in J}\big(f(x)-f(y)\big)\leqslant \omega(f;J). \end{aligned}$$

故所证结论成立.

定理 3. 假设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 那么 $f\in\mathscr{R}[a,b]$ 当且仅当我们有

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0.$$

证明: 对任意的分割 $P: a=x_0<\cdots<x_n=b$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\\ &= U(f;P)-L(f;P),\end{aligned}$$

于是由前面讨论立刻可知所证结论成立.

例 2. (Dirichlet 函数) $\forall x \in [0,1]$, 定义

$$D(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x \in \mathbb{Q} \\ 1, & 若\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

求证: $D \notin \mathscr{R}[0,1]$.

证明: 对于 $[a,b]$ 的任意分割

$$P_0 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

由于 D 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上、下确界分别为 1、0,

故 $\sum_{i=1}^{n} \omega(D; \Delta_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$. 由此得证.

定义 4. 设 X 为非空的数集. 称 $f: X \to \mathbb{R}$ 为一致连续, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in X$, 当 $|x-y| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

否定表述: 函数 f 在 X 上不为一致连续当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, 存在 $x, y \in X$ 满足 $|x-y| < \delta$, 但 $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0$.

命题 1. 函数 f 为一致连续当且仅当对于 X 中任意的数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(x_n) - f(y_n)\big) = 0$.

证明: 充分性. 用反证法, 设 f 在 X 上非一致连续, 那么 $\exists\varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall\delta > 0$, 存在 $x, y \in X$ 满足 $|x - y| < \delta$, 但是 $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0$. 从而 $\forall n \geqslant 1$, 均存在 $x_n, y_n \in X$ 满足 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, 但 $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 但 $\{f(x_n) - f(y_n)\}$ 不收敛到 0. 矛盾! 得证.

必要性. 假设 f 在 X 上一致连续, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in X$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 于是对于 X 中的任意数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 那么 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|x_n - y_n| < \delta$, 从而我们有 $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$, 由此可知所证成立.

注: 该结论常用于证明某函数不为一致连续.

例 3. 求证: 余弦函数在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 选取 $\delta = \varepsilon$, 则对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos y| &= \left|2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}\right| \\ &\leqslant 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leqslant |x-y| < \varepsilon, \end{aligned}$$

因此余弦函数在 $\mathbb{R}$ 上为一致连续.

例 4. 求证: $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

证明: 事实上, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)=0$, 但

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=+\infty,$$

故所证结论成立.

例 5. 证明 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 令 $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi} \in (0,1)$,

那么 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 1$,

因此所证结论成立.

定理 4. 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 f 为一致连续.

证明: 用反证法, 设 f 在 $[a,b]$ 上不为一致连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 X 中数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 使得 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$. 由于 $\{x_n\}$ 有界, 因此存在收敛子列 $\{x_{k_n}\}$, 设其极限为 c. 由数列极限的保序性可知 $c \in [a,b]$, 而由夹逼原理可知 $\{y_{k_n}\}$ 也收敛到 c, 再由 f 的连续性得

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})\right) = f(c) - f(c) = 0.$$ 矛盾!

由此可知所证结论成立.

定理 5. $\mathscr{C}[a,b] \subseteq \mathscr{R}[a,b]$.

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使 $\forall x, y \in [a,b]$, 若 $|x-y| < \delta$, 则 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a+1}$. 对 $[a,b]$ 的任意分割 $P: a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 当 $\lambda(P) < \delta$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a+1}(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

因此所证结论成立.

定理 6. 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数并且仅在有限多个点间断, 则 $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

定义 5. 称函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为逐段 (或分段) 连续函数, 如果 f 在 $[a,b]$ 上至多只有有限多个间断点, 且均为第一类间断点.

注: 函数 f 为逐段连续当且仅当存在 $[a,b]$ 的分割使得 f 在该分割的每个小区间上均连续. 因此逐段连续函数为有界函数.

推论. 若 f 在 $[a,b]$ 上逐段连续, 则 $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

单调函数为可积函数

定理 7. 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调, 则 $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

证明: 不失一般性, 假设 f 为单调递增 (否则可考虑 $-f$). $\forall\varepsilon>0$, 选取 $\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$, 则对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 P: $a=x_0<\cdots<x_n=b$, 当 $\lambda(P)<\delta$ 时, 我们均有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\delta\\ &= \big(f(b)-f(a)\big)\delta<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此所证结论成立.

定义 6. 我们称数集 X 为零测度集, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一列开区间 $\{(a_n, b_n)\}$ 使得

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n), \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \varepsilon.$$

注: (1) 空集为零测度集;
(2) 零测度集的子集也为零测度集;
(3) 有限集以及可数集为零测度集.

定理 8. (Lebesgue) 区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f 为 Riemann 可积当且仅当由 f 的所有间断点所构成的集合为零测度集.

推论. 如果 $f:[a,b]\to[c,d]$ 可积, 而 $g\in\mathscr{C}[c,d]$, 则 $g\circ f\in\mathscr{R}[a,b]$.

证明: 假设 $D(f)$, $D(g\circ f)$ 分别为 f, $g\circ f$ 的间断点集. 由于 g 连续, 因此 $D(g\circ f)\subseteq D(f)$, 从而我们有 $g\circ f\in\mathscr{R}[a,b]$.

同学们辛苦了!