高等微积分

邹文明

第七章: 定积分

§7.3. 微积分基本定理

定理 1. 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$. $\forall x \in [a,b]$, 定义

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

那么 $F \in \mathscr{C}[a,b]$. 如果 f 在点 $x_0 \in [a,b]$ 连续, 那么 F 在点 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

推论 1. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ 并且 $F' = f$, 也即 F 为 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

推论 2. 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi, \psi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ 可导. $\forall u \in [\alpha,\beta]$, 令 $G(u) = \int_{\psi(u)}^{\varphi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t$. 那么函数 G 可导且 $\forall u \in [\alpha,\beta]$, 我们均有

$$G'(u) = f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - f\big(\psi(u)\big)\psi'(u).$$

微积分基本定理

定理 2. (Newton-Leibniz 公式) 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $G \in \mathscr{C}[a,b]$ 为 f 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G\Big|_a^b := G(b) - G(a).$$

证明: $\forall u \in [a,b]$, 定义 $F(u) = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$. 则 F 可导且 $\forall x \in (a,b)$, $F'(x) = f(x) = G'(x)$. 于是 $\exists C \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, $F(x) = G(x) + C$, 从而

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

评注

- 因为 $G' = f$, 故 $\mathrm{d}G(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$. 出于简便, 人们常将 Newton-Leibniz 公式写成:
  $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}G(x) = G\Big|_a^b = G(b) - G(a).$

例 5. 计算 $\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \mathrm{d}(-\cos x) = -\cos x \Big|_0^{\pi}$

$$= -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

例 6. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 若\ x\in[0,1)\\ 1, & 若\ x\in[1,2]\end{cases}$. $\forall x\in[0,2]$, 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 计算 F'.

解: $\forall x\in[0,2]$, 当 $x\leqslant 1$ 时, 我们有

$$F(x)=\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^x=x^2,$$

故 $\forall x<1$, $F'(x)=2x$. 当 $x\geqslant 1$ 时, 我们则有

$$F(x)=\int_0^1 2t\,\mathrm{d}t+\int_1^x 1\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^1+t\Big|_1^x=x,$$

则 $\forall x>1$, $F'(x)=1$. 而 $F'_-(1)=2$, $F'_+(1)=1$, 因此函数 F 在点 $x=1$ 处不可导.

§7.4.定积分的换元积分与分部积分

定理 1. 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ 连续可导, 则 $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

证明: 设 F 为 f 的一个原函数. $\forall t \in [\alpha, \beta]$, 令 $G(t) = F(\varphi(t))$. 则 G 连续可导且 $\forall t \in [\alpha, \beta]$,

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

于是由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= G(\beta) - G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} G'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注: 与不定积分不同, 在上述定理中, 我们无需假设 φ 为双射.

例 2. 计算 $\int_{-4}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}$.

解: $\int_{-4}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}} \overset{u=-x}{=} \int_{4}^{3} \frac{\mathrm{d}(-u)}{\sqrt{(-u)^2-4}} = \int_{3}^{4} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-4}}$

$\overset{u=2\sec t}{=} \int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}(2\sec t)}{2\tan t} = \int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\tan t}$

$= \int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\cos^2 t} \overset{z=\sin t}{=} \int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|\Big|_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{1-\frac{\sqrt{5}}{3}}{1+\frac{\sqrt{5}}{3}} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}} + \ln 2.$

例 3. 计算 $\int_1^6 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3x-2}}$.

解: $$\int_1^6 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3x-2}} \overset{u=\sqrt{3x-2}}{=\!=} \int_1^4 \frac{\frac{u^2+2}{3}\,\mathrm{d}\frac{u^2+2}{3}}{u} = \int_1^4 \frac{u^2+2}{3u}\cdot\frac{2u}{3}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_1^4 \frac{2}{9}(u^2+2)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}\left(\frac{u^3}{3}+2u\right)\Big|_1^4 = \frac{2}{9}(21+6) = 6.$$

例 4. 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$.

解: $$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{x=\pi-t}{=} \int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}(\pi-t)$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t-I.$$

于是 $I=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\cos t)}{1+\cos^2 t}=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos t)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$.

定理 2. 若 $u, v \in \mathscr{C}^{(1)}[a, b]$, 则
$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = uv\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

证明: $\forall x \in [a, b]$, 我们有
$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$
于是 $\int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b$. 由此立刻可得所要结论.

例 5. 计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=\!=} \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}(t^2) = 2\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2te^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = 2e - 2e^t\Big|_0^1 = 2.$$

例 6. 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$$

$$= x(\ln x - 1)\Big|_{1}^{e} - x(\ln x - 1)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} = 2 - \frac{2}{e}.$$

例 7. 计算 $\int_0^1 x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^1 x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}(\ln x)^2$$

$$= -\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

例 8. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \, \mathrm{d}(\arcsin x)$$

$$= \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例 9. 对任意整数 $n \geqslant 0$, 计算

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x.$$

解: 由定义可知 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = 1$.
当 $n \geqslant 2$ 时, 应用分部积分可得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}(\sin^{n-1} x)$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x$$

$$-(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

故 $\forall n \geqslant 2$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 进而 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$I_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} \cdot I_1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \cdot I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

$$I_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} \cdot I_0 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

最后 $\forall n \geqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t = I_n. \end{aligned}$$

定理 3. 设 $f \in \mathscr{R}[-a,a]$, 其中 $a>0$.

- 若 f 为奇函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- 若 f 为偶函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明: $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=-t}{=\!=} \int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}(-t) = \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t,$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a \big(f(x)+f(-x)\big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此立刻可得所要的结论.

例 10. 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解: 由题设可知

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,\mathrm{d}(\pi-x)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

例 11. 计算 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{x=2\sin t}{=\!=} 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\,\mathrm{d}(2\sin t)$$

$$= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

周期连续函数的定积分

定理 4. 如果 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 是周期为 $T > 0$ 的周期函数, 则 $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明:
$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x+T)\,\mathrm{d}(x+T)$$
$$= \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

同学们辛苦了!

补充:　定积分的应用

典型问题: 假设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(x) \geqslant g(x)$. 则由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 所围平面区域的面积等于

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

例 1. 计算由曲线 $y=2-x^2$ 与 $y=x$ 所围的区域的面积.

解: 设两曲线的交点为 (x_0,y_0), 则 $y_0=2-x_0^2$, $y_0=x_0$, 故 $x_0=-2$ 或 1, 于是两曲线的交点为 $(-2,-2)$ 和 $(1,1)$, 进而可知所求面积为

$$S=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,\mathrm{d}x=\Big(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

例 2. 计算由曲线 $y=x^2$, 曲线 $y=\sqrt{x}$ 及直线 $x=2$ 所围成的区域的面积.

解: 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 的两个交点为$(0,0)$, $(1,1)$, 曲线 $y=x^2$ 与直线 $x=2$ 的交点为 $(2,4)$, 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=2$ 的交点为$(2,\sqrt{2})$, 这些交点将所围的区域分割成两部分. 我们将夹在 $(0,0)$ 与 $(1,1)$ 之间的面积记为 S_1, 其余部分的面积记作 S_2.

于是我们有

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \\ S_2 &= \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^2 \\ &= 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

故所求总面积为 $S = S_1 + S_2 = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}$.

例 3. 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 所围面积.

解: 由对称性知所求面积为第一象限内面积的4 倍, 后者由曲线 $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ (0\leqslant x\leqslant a)$ 与直线 $y=0$ 围成, 故所求面积为

$$S=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\sin t}{=\!=} 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}(a\sin t)$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=2ab\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

直角坐标系下由参数表示的曲线所围成的平面区域的面积

设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$,
其中 x, y 连续, $y \geqslant 0$, $x(t)$ 为严格递增, 则存在连续反函数 $t = t(x)$. 定义 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$.
由 Γ, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围区域的面积等于

$$S = \int_a^b y(t(x))\,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

例 4. 求旋轮线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴所围成的区域的面积.

解: 因 $\forall t \in [0, 2\pi]$, 均有 $x'(t) = a(1-\cos t) \geqslant 0$ 并且 $x'(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 的任意子区间上不恒为零, 从而 $x(t)$ 为严格递增, 则所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= a^2\Big(t - 2\sin t + \frac{t+\frac{1}{2}\sin 2t}{2}\Big)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

极坐标系下平面区域的面积

设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 为连续函数. 那么曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围成的区域的面积等于

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big(\rho(\theta)\big)^2 \,\mathrm{d}\theta.$$

例 5. 求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围的区域的面积.

解: $$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(\rho(\theta)\big)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\Big(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\Big)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\Big(\theta+2\sin\theta+\frac{\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta}{2}\Big)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}a^2\pi.$$

补充例题!

补充例题 1. 若 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 求证:

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 因此 $|f|$ 连续, 从而由最值定理知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使 $|f(\xi)| = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

又由积分中值定理, $\exists \eta \in [a,b]$ 使得我们有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta),$$

由此我们立刻可以导出

$$|f(\xi)-f(\eta)|=\left|\int_{\eta}^{\xi} f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{\eta}^{\xi} |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{a}^{b} |f'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \max_{x\in[a,b]} |f(x)| &= |f(\xi)| \leqslant |f(\eta)| + |f(\xi)-f(\eta)| \\ &\leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_{a}^{b} |f'(x)|\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

因此所证结论成立.

补充例题2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

解: $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$0\leqslant\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

于是由夹逼原理立刻可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=0.$$

补充例题3. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

解: $\forall n\geqslant 1$, 令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$. 则 $I_n\geqslant 0$, 且

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,\mathrm{d}x=I_{n+1}.$$

于是由单调有界定理可知数列 $\{I_n\}$ 收敛. 设其极限为 I. 则由数列极限的保号性可知 $I\geqslant 0$.

注意到 $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall \varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 我们有

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)^n \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

则由极限保序性可得 $0 \leqslant I \leqslant \varepsilon$, 再由 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ 可任意小立刻可得 $I = 0$.

补充例题4. 令 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\,\mathrm{d}x$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\,\mathrm{d}x$. 比较 I_1, I_2 的大小.

证明: $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}]$, 我们有 $\sin x<x$. 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上, 正弦函数严格递增, 余弦函数严格递减, 故

$$\sin(\sin x)<\sin x,\ \cos(\sin x)>\cos x.$$

从而 $I_1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$. 另外,

$$I_2>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1,$$

于是我们有 $I_2>I_1$.

补充例题5. 若 $f \in \mathscr{C}[0,1]$, 求证: $\exists \xi \in [0,1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x)x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(\xi).$$

证明: $\forall x \in [0,1]$, 定义 $g(x) = x^2$, 则 g 连续并且非负. 由积分第一中值定理知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)x^2\,\mathrm{d}x &= f(\xi)\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= f(\xi)\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}f(\xi).\end{aligned}$$

同学们辛苦了!