高等微积分
第七周习题课

王道叶

清华大学电子工程系

2023 年 11 月 6 日

1. 导数的定义
2. 导数的计算
3. 练习题

1 导数的定义

2 导数的计算

3 练习题

导数的本质： 比值的极限

定义3.1 P129

设函数f在一点x_0的近旁有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在且有限，称这个极限值为f在点x_0的导数，记为$f'(x_0)$
并称函数f在点x_0**可导**.
Δx 称为自变量在x_0处的**增量**.
$[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]$ 称为函数f在x_0处的**差分**.

等价表示

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

f在一点x_0处的 差分——微分——导数 三者的关系

- 导数：是一个$\frac{0}{0}$型的比值的极限，在可导的情况下，说穿了，不过一个**实数**而已

- 差分：函数值在x_0处的增量，$[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]$，这是一个关于Δx的**函数！**.是一个新的函数$g(\Delta x)$，其表达式通常极其复杂，难以讨论，因此我们希望对其进行**修剪 | 简化 | 近似**，于是有了下面微分的概念

- 微分:x_0处对差分函数$g(\Delta x)$的**（线性）近似替代**，只保留其**线性主部**$[A\Delta x]$，这是一个关于Δx的**线性函数**，称其为x_0处的微分

- 对[一元函数]$f(x)$来说，可微与可导等价.且线性主部中的系数$[A=f'(x_0)]$

- **例子：编程计算**$\sin(\frac{\pi}{4}+0.03)$

回忆已学过的局部概念

1. f在x_0处的极限
2. f在x_0处的连续性（一致连续是整体概念）
3. f在x_0处的可导性
4. f在x_0处的可微性
5. f在x_0处的极值性

理解局部与整体

- 对"局部"的理解：是对一个过程的讨论，是某点处的性质
  - 首先是在x_0附近要存在一个领域，该领域内函数要有定义
  - 领域的大小（半径δ）、形状（对称、去心、单侧）我们丝毫不关心，只要有这样的领域即可
  - 领域本身的特点不会影响函数在x_0处的各种局部性质（极限值、连续性、可导性）

- 对"整体"的理解：领域的大小（区间）很重要
  - 最大（小）值是一个函数的整体概念（区间取得不一样，结果很难一样）
  - Lagrange、Rolle等各种中值定理是整体概念（区间不同，中值ξ就会改变）

练习3.1 2 导数的定义 + 极限定义

设f在x_0处可导,$a_n \to 0-$ 而$b_n \to 0+ \ (n \to \infty)$,证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0)$$

证明.

■ **方法二 $\varepsilon - \delta$ 语言定义法(上次课周学长的方法更简单实用)**

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{b_n}{b_n - a_n} \frac{f(b_n) - f(0)}{b_n} + \frac{-a_n}{b_n - a_n} \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n}$$
$$= \alpha_n \ B_n + (1 - \alpha_n) \ A_n \ (\alpha_n \in (0,1), A_n, B_n \to f'(0))$$

$$\because |B_n - f'(0)| < \varepsilon, \qquad |A_n - f'(0)| < \varepsilon$$

$$\therefore \left|\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(0)\right| < \varepsilon$$

练习3.1 3 导数的定义 + 奇偶性

设f是一偶函数且在$x=0$处可导,证明$f'(0)=0$

证明.

■ 直接利用上一题的结论

令$b_n=\frac{1}{n}$, $a_n=-\frac{1}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\frac{n}{2}\left[f(\frac{1}{n})-f(-\frac{1}{n})\right]\equiv 0=f'(0)$$

□

练习3.2 4 导数的定义 + 奇偶性

证明:
(1) 若f是可导的奇函数, 则f'是偶函数;
(2) 若f是可导的偶函数, 则f'是奇函数.
对以上命题作出几何解释.

证明.

1

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)} = f'(-x_0)$$

2 $f'(x_0) = -\lim_{x\to x_0} \frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)} = -f'(-x_0)$

□

- 图形关于原点对称，则对称点处的斜率相同
- 图形关于y轴对称，则对称点处的斜率为相反数

练习3.2 3 导数的定义 + 周期性

若f是一个可导的周期函数，试证：f'也是周期函数.

证明.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x+T)-f(a+T)}{(x+T)-(a+T)}=f'(a+T)$$

□

练习3.1 4 导数的定义 判断可导性的题目

设函数f在x_0处可导,则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$$

举例说明：即使上式左边的极限存在且有限，f在x_0也未必可导

- 在各种类似的问题中，分子有$f(x_0)$是可导的必要条件
- 因为【一元函数】可导必连续，连续则x_0处必有定义
- 我们就考虑上一题中的偶函数

证明.

- $f(x)=|x-x_0|$
- $f(x)=e^{-|x-x_0|}$

□

练习3.1 7 导数的定义+结合数列极限

设函数f在$x=a$可导，且$f(a)\neq 0$. 求数列极限

$$\lim_{n\to\infty}(f(a+\frac{1}{n})/f(a))^n.$$

■ 在各类极限求解问题中，我们先判断这个极限的【型】

■ 1^∞型、$\frac{0}{0}$型、$\frac{\infty}{\infty}$型、$0\cdot\infty$型、∞^0型、0^0型、$\infty-\infty$型等

证明.

本题为1^∞型

$$\ln A_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left[f(a+\frac{1}{n})-f(a)\right]}{f(a)}\right)$$

$$=\frac{f'(a)}{f(a)}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(f(a+\frac{1}{n})/f(a))^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$ □

练习3.1 8 导数的定义

设函数φ在点a处连续,又在a的近旁有$f(x)=(x-a)\ \varphi(x)$ 和 $g(x)=|x-a|\ \varphi(x)$. 证明:f在点a处可导, 并求出$f'(a)$.又问: 在什么条件下 g在点a处可导?

解

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\varphi(a)$$

$$g'_+(a)=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|x-a|\varphi(x)}{x-a}=+\varphi(a)$$

$$g'_-(a)=\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=-\varphi(a)$$

$\therefore$ 当$\varphi(a)=0$时,g在a点可导，且$g'(a)=0$

练习3.1 10 导数的定义

设

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ x^{\lambda}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \end{cases}$$

求证：当$\lambda>1$时 $f'(0)$ 存在；而当$\lambda\leqslant 1$时，f在$x=0$处不可导

证明.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\lambda}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases} 0, & \lambda>1 \\ \text{不}\exists, & \lambda\leqslant 1 \end{cases}$$

■ **与练习2.5 T7类似**

□

练习3.1　6　导数的几何意义——切线斜率

证明：抛物线$y=x^2$上的两点(x_1,x_1^2)和(x_2,x_2^2)处的切线互相垂直的充分必要条件是,x_1 和x_2满足关系　$4x_1\ x_2+1=0.$

证明.

$$k_1\ k_2=2x_1\cdot 2x_2=-1$$

□

练习3.2 7 导数的几何意义——切线斜率

证明: 双曲线 $xy = a > 0$在各点处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为常数

证明.

由对称性，我们只讨论第一象限的点$(x_0, \frac{a}{x_0})$的情况

$$k_{x_0} = -\frac{a}{x_0^2}$$

与y轴的交点$A(0, 2y_0)$

与x轴的交点$B(2x_0, 0)$

$$\therefore S = 2a$$

□

思考讨论　　概念 | 符号语言　　一定要吃透

如何理解如下两个记号： $f'_+(x_0)$　　$f'(x_0+0)$

1. 他们的本质是什么？
2. 能否举一些例子加以理解？
3. 他们的关系如何？

解

前者是f在x_0处的右导数，是关于f的一个比值的极限；
前者是f'在x_0处的右极限，是一个新的函数$g = f'$的函数的单侧极限；例如：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

三个真命题

1. 若函数$f(x)$在点x_0的右领域$[x_0,x_0+\delta]$上连续，在$(x_0,x_0+\delta)$内可导，且$f'(x_0+0)$存在，则$f'_+(x_0)$ 也存在，且二者相等
2. 若函数$f(x)$在点x_0连续，在$(x_0-\delta,x_0)\bigcup(x_0,x_0+\delta)$内可导，且$\lim_{x\to x_0} f'(x)$存在，则$f'(x_0)$ 必也存在，且二者相等
3. $[Darboux$定理$]$ 若函数$f(x)$在$[a,b]$上可导,且$f'(a)<f'(b)$，则对$\forall\lambda\in(f'(a),f'(b))$,必存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\lambda$.

■ **导函数的介值性，只要在闭区间上可导（没说导函数连续），就能取到区间端点之间的任何值**

■ **推论：导函数在其定义域内不存在第一类间断点**

1. 导数的定义
2. 导数的计算
3. 练习题

方法和技巧

必须熟练掌握导数的计算法则

- 初等函数的导数
- 导数的四则运算法则
- 复合函数求导的链式法则
- 反函数求导
- 隐函数、参数方程确定的函数求导 ★
- 高阶导数的 *Leibniz* 定理 ★

练习3.2 1 导数运算 基础计算

20 $(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \ \cos x$

21 $(e^{ax} \ \cos bx)' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx$

22 $(\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

23 $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

24 $(\arctan(1+x^2))' = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

25 $(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}})' = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\ [1+\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})]$

26 $(\ln(\cos x+\sin x))' = \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

27 $(x(\cos(\ln x)-\sin(\ln x)))' = -2\ \sin(\ln x)$

28 $(a^{\sin x})' = a^{\sin x}\ \cos x\ \ln a$

29 $(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}})' = \frac{1+x\ \arcsin x/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

30 $(x^{x^x})' = x^{x^x}(x^x\ \ln x)' = x^{x^x}[x^x\ (\ln x+1)\ln x + x^{x-1}]$

31 $(\frac{e^x+e^{-x}}{2})' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = sh\ x$

练习3.2 5 导数的本质 + 极限的（局部）保序性

设f是一个三次多项式，且$f(a)=f(b)=0$. 证明：函数f在$[a,b]$上不变号的充分必要条件是 $f'(a)\ f'(b)\leqslant 0$ ■ **几何上十分直观**

法1：设$f(x)=A(x-a)(x-b)(x-c)$,显然易证(**零点定理**)

法2：■ **导数的本质仍是极限，所以可利用（局部）保序性**

证明.

$\Rightarrow$ 不妨设$f\geqslant 0$,则在a右侧,$f(x)-f(a)\geqslant 0$

$\therefore f'_+(a)=f'(a)\geqslant 0$,同理 $f'_-(b)=f'(b)\leqslant 0$

$\Leftarrow$ 不妨设$f'(a)\geqslant 0, f'(b)\leqslant 0$

假设f变号，则$\exists c\in(a,b), s.t. f(c)=0$

则三次多项式的3个零点为a,c,b，则由上述必要性的结论，立刻有：

$f'(a)\ f'(c)\leqslant 0,\quad f'(c)\ f'(b)\leqslant 0$,则

$f'(a)\ f'(b)\geqslant 0$,矛盾！ □

练习3.2 6 导数的本质 + 极限的（局部）保序性

设函数f在$[a,b]$上连续，$f(a)=f(b)=0$，且

$$f'(a+0)\ f'(b-0)>0$$

证明:f在(a,b)内至少有一个零点.

■ 上一题的泛化|一般化

证明.

反证法：假设f在(a,b)内无零点，即f在$[a,b]$上不变号.
不妨设 $f>=0$ ，则由于极限的保序性，立刻有：

$$f'_+(a)\geqslant 0,\qquad f'_-(b)\leqslant 0$$

则$f'_+(a)\ f'_-(b)\leqslant 0$,矛盾!
$\therefore f$ 在(a,b)内至少有一个零点. □

1 导数的定义

2 导数的计算

3 练习题

求极限 常用方法 | 技巧

1. 初等代数运算：分子有理化、和差化积、n次方差公式等
2. 提取“非零”的极限因子先算掉
3. 插项、裂项、分而治之
4. 夹逼准则放缩：放大、基本不等式、裂项相消
5. 等价无穷小替换 ★
6. Taylor展开(YYDS) ★★★
7. 洛必达法则 (不到绝路先别洛)
8. Stolz定理：数列的洛必达法则(离散化)

求极限 练习题

1. $$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)^{\frac{1}{8}}-(n+1)^{\frac{1}{4}}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n!}$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\ \cos 2x\ \cdots\cos nx}{x^2}$$

6. $$\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$$

求极限 1:分子有理化 + 分数放大 + 夹逼准则

1

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)^{\frac{1}{8}}-(n+1)^{\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}0&<\left|\frac{(n^2+1)^{\frac{1}{4}}-(n+1)^{\frac{1}{2}}}{(n^2+1)^{\frac{1}{8}}+(n+1)^{\frac{1}{4}}}\right|\\&<\left|\frac{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}-(n+1)}{n^{\frac{1}{4}}[(n^2+1)^{\frac{1}{4}}+(n+1)^{\frac{1}{2}}]}\right|\\&<\frac{2n}{n^{\frac{1}{4}}\ n^{\frac{1}{2}}\ [(n^2+1)+(n+1)]}\\&<\frac{2n}{n^{\frac{7}{4}}}\to 0\end{aligned}$$

$$\therefore a_n\to 0(n\to\infty)$$

■ 注：也可以考虑凑$[(n+1)^2]^{\frac{1}{8}}$，再利用n次方差公式直接放缩

求极限 2: 夹逼准则 | 基本不等式 | Stolz

2

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n!}$$

- 法1：基本不等式

$$(1\cdot 2\cdots n)^{\frac{1}{n}} > \frac{n}{\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

由Stolz定理，$\frac{\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}\to 0,\ \therefore a_0\to 0(n\to\infty)$

- 法2：初等代数放缩

$$(n!)^2 = [1\cdot n][2\cdot(n-1)]\cdots[n\cdot 1] > n^n$$

$$\therefore \sqrt[n]{1/n!} < \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

求极限 3: 提取“非零”的极限因子 | 等价无穷小

③

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x-\sin x}$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0} e^{\sin x}\cdot\frac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0} 1\cdot\frac{x-\sin x}{x-\sin x}\\ &= 1\end{aligned}$$

■ 注：也可以考虑用Lagrange中值定理，$\xi_x \to 0$

求极限 4: 和差化积 | 等价无穷小 | Taylor公式

4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$$

- 法1：和差化积

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}-2\cdot\frac{\sin(\frac{\sin x+x}{2})\cdot\sin(\frac{\sin x-x}{2})}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

- 法2：综合运用洛必达法则 + Taylor公式

求极限 5: 插项拆项 | 等价无穷小

5

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\ \ \cos 2x\ \ \cdots\cos nx}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\,\frac{1-\cos 2x\ \ \cos 3x\ \ \cdots\cos nx}{x^2}\\
&= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos 2x\,\frac{1-\cos 3x\ \ \cos 4x\ \ \cdots\cos nx}{x^2}\\
&= \frac{1}{2}[1^2+2^2+\cdots n^2]\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}
\end{aligned}$$

求极限 6: n次方差公式 | 拆项 | 等价无穷小

6

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$原式=\lim_{x\to a}\frac{[x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1}]-na^{n-1}}{x-2}$$ (n项 - n项)

令$x-a=t, t\to 0, x=a+t$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}[a^i(a+t)^{n-1-i}-a^{n-1}]}{t}$$

$$=a^{n-1}\lim_{t\to 0}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}[(1+t/a)^{n-1-i}-1]}{t}$$

$$=a^{n-2}\sum_{i=0}^{n-1}(n-1-i)=a^{n-2}\sum_{j=0}^{n-1}j$$

$$=a^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}$$

连续函数

例1.

$f(x)=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{2}{x}}}$,讨论在$x=0$处$f$的连续性.

例2.

$f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,讨论其间断点的类型

连续函数 例1

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{2}{x}} + ^{-\frac{1}{x}}}{2e^{-\frac{2}{x}} + 3} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} = \frac{1}{2}$$

$\therefore x = 0$ 是$f(x)$的第一类间断点（跳跃间断点）.

连续函数　例2

可能的间断点都在分母为0的点：$x=0, x=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty$$

$\therefore x=0$ 是$f(x)$的第二类间断点.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0$$

$\therefore x=0$ 是$f(x)$的第一类间断点（跳跃间断点）.

导数的定义

例1.

设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2\,g(x), & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中$g(x)$是有界函数，考察$f(x)$在$x=0$处的连续性和可导性

例2.

设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$在$x=0$处可导，求证$f(0)=0$

导数的定义 例1

$f(0+0)=0$ (等价无穷小)
$f(0-0)=\lim_{x\to 0} x^2\ g(x)=0$ (无穷小*有界)
$\therefore f$在0处连续
$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}=x\ g(x)=0$
$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}=\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=0$
$\therefore f$在0处可导，且导数为0

导数的定义 例2

$g(x) = F(x) - f(x) = f(x)|\sin x|$ 在0处可导

$g'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-f(x)\sin x}{x} = -f(0)$

$g'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)\sin x}{x} = f(0)$

$\therefore f(0) = 0$

导数的计算

1. $$y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

2. $$\arcsin \sqrt{1 - x^2}$$

解

1.

$$(\sqrt{x + \sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

2.

$$(\arcsin \sqrt{1 - x^2})' = -\frac{x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$$

隐函数求导

例1.

隐函数$y=y(x)$由方程$e^{xy}+\tan(xy)=y$确定，求$y'(0)$

例2.

隐函数$y=y(x)$由方程$e^{x+y}-\sin(x+y)=x^3$确定，求$y'(x)$

隐函数求导　例1.

$y(0) = 1$

原方程两边关于x求导数（左端可以把$u = xy$看做中间变量）得

$$[e^{xy} + \frac{1}{\cos^2(xy)}](y + x\ y') = y'$$

$\therefore y'(0) = 2$

隐函数求导 例2.

原方程两边关于x求导数（左端可以把$u = x + y$看做中间变量）得

$$[e^{x+y} - \cos(x+y)](1 + y') = 3x^2$$

$$\therefore y'(x) = \frac{3x^2}{e^{(}x+y) - \cos(x+y)} - 1$$

高阶导数计算

例1.

$$f(x) = (x+1)^2 \ln(1-x), \text{求} f^{(n)}(-1)$$

例2.

$$[\frac{1}{x^2 - a^2}]^{(n)}$$

例3.

$$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2-3x+2}, \text{求} f^{(n)}(x)$$

高阶导数计算　例1.

当$n > 2$时利用Leibniz公式。
令$u(x) = (x+1)^2, v(x) = \ln(1-x)$

$$f^{(n)}(-1) = \frac{n(n-1)}{2}\ u''(-1)v^{(n-2)}(-1) = -\frac{n!}{2^{n-2}}$$

高阶导数计算 例2.

$$
\begin{aligned}
[\frac{1}{x^2-a^2}]^{(n)} &= \frac{1}{2a}[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}]^{(n)} \\
&= \frac{1}{2a}[\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}]
\end{aligned} \tag{1}
$$

高阶导数计算　例3.

$$f(x) = 2x + 6 + \frac{17}{x-2} - \frac{3}{x-1}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! [\frac{17}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3}{(x-1)^{n+1}}]$$

同学们辛苦了！

谢谢！