习题课材料（一）

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 设 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, 是否存在线性映射 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, 满足 $f(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{b}_i, \forall i$?

习题 2. 给定三维向量 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, 定义:

1. 二者的点积为 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
2. 二者的叉积为 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{bmatrix}$.

那么给定 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, 映射 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 和 $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 是否是线性映射?

习题 3. 计算下列线性映射的表示矩阵

1. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$
2. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \times \boldsymbol{x}$
3. $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4 + x_2\end{bmatrix}$

习题 4 (♡). 证明, 如果 n 阶方阵 A 对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 都存在依赖于 $\boldsymbol{x}$ 的常数 $c(\boldsymbol{x})$, 满足 $A\boldsymbol{x} = c(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$, 则存在常数 c, 使得 $A = cI_n$.

习题 5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, 证明:

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解当且仅当 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

2. 齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解集是 $\{k\boldsymbol{x}_1 \mid k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

3. 当 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解时, 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是一个解, 则解集是 $\{\boldsymbol{x}_0 + k\boldsymbol{x}_1, k \in \mathbb{R}\}$.

习题 6. 求三阶方阵 $A \in M_3(\mathbb{R})$, 使得方程组 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的解集是 $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

习题 7. 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

λ 取何值时, 该方程组无解? λ 取何值时, 该方程组有唯一解? λ 取何值时, 该方程组有无穷多解? 证明你的论断.

习题 8.

1. $\mathbb{R}^3$ 中有三个平面, 分别经过点 $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, 具有法向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, 求这三个平面的交点.

2. $\mathbb{R}^3$ 中有一条经过原点的直线, 并且与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 垂直, 求所有直线上的点.

3. $\mathbb{R}^3$ 中有一个平面经过点 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求所有与该平面垂直的向量.

习题 9 (♡).

1. $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, 如果对任意的 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 都有 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 证明 $A = O$.

2. 如果对任意的 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, 线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 和 $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 都有相同的解集, 证明 $A = C$.

习题 10 ($\heartsuit$). 设线性映射 $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. 当 $n > m$ 时, $\boldsymbol{F}$ 是否可能是单射? 当 $n < m$ 时, $\boldsymbol{F}$ 是否可能是满射?