①、作业题讲解

②、补充练习

①、作业题讲解

②、补充练习

练习7.2　T2

2. 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 对一切连续函数 g 成立. 求证: $f=0$.

取$g(x)=f(x)$即可：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx = 0$$

$$f(x)=0, \qquad x\in[a,b]$$

3. 确定下列定积分的正负号:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{e}^x \ln^3 x\, \mathrm{d}x$.

$x \in [0, \pi]$

$f(x) = \dfrac{sinx}{x} \geq 0$　，且不恒为0

$$\int_0^{\pi} \frac{sinx}{x} dx > 0$$

$x \in [1/2,\ 1]$

$f(x) = e^x \ln^3 x \leq 0$　，且不恒为0

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x \ln^3 x\, dx < 0$$

4. 比较下列定积分的大小:

(3) $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$x \in [0,1]$时

$$\frac{sinx}{1+x} < \frac{sinx}{1+x^2}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{sinx}{1+x}dx < \int_0^{\pi} \frac{sinx}{1+x^2}dx$$

$x \in [0,\pi/2]$时

$$1 > \frac{sinx}{x}, \qquad \frac{sinx}{x} > \left(\frac{sinx}{x}\right)^2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{x}dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin(\frac{x}{2})}dx$$

利用和差化积，作恒等变形：

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x - \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x = 2\cos nx \cdot \sin\frac{x}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x - \sin\left(\frac{2n-3}{2}\right)x = 2\cos(n-1)x \cdot \sin\frac{x}{2}$$

……

$$\sin\left(\frac{3}{2}\right)x - \sin\left(\frac{1}{2}\right)x = 2\cos x \cdot \sin\frac{x}{2}$$

所以：

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2[\cos nx + \cos(n-1)\,x + \cdots + cos2x + cosx] \cdot \sin\frac{x}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin(\frac{x}{2})}dx$$

所以：

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2[\cos nx + \cos(n-1)x + \cdots + cos2x + cosx] \cdot \sin\frac{x}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin(\frac{x}{2})}dx = \int_0^{\pi}[1 + 2(cosx + cos2x + \cdots + \cos nx)]dx = \pi$$

10. 设 f, g 在 $[a,b]$ 上连续. 证明 **Cauchy-Schwarz** 不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2 dx \geq 0$$

$$\lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)\cdot g\,(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$$

这是一个关于λ的一元二次方程，非负，则判别式非正

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g\,(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

8. 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 且 $f>0$. 证明不等式:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant 1.$$

$$1=\left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{\frac{1}{f(x)}}dx\right)^2 \le \int_0^1 \left[\sqrt{f(x)}\right]^2 dx\cdot\int_0^1\left[\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\right]^2 dx$$

也可以用积分和式的定义来证明

3. 函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续且非负, 令 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=a_{MAX}$回忆一道经典证明题:

$$(a_i\geq 0, i=1,2,\ldots,m)$$

$$\text{设}A_n=\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{显然}A_n\leq\left(\int_a^b M^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=(b-a)^{\frac{1}{n}}M\to M$$

我们只需要再考虑左边的放缩

3. 函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续且非负, 令 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

设$A_n=\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}$　　　显然$A_n\le\left(\int_a^b M^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=(b-a)^{\frac{1}{n}}M\to M$

我们只需要再考虑左边的放缩

根据闭区间上连续函数的最值性，一定至少有一点$x_0\in[a,b]$，有$f(x_0)=M$

先不妨假设$x_0\in(a,b)$（当x_0恰好在区间端点时也同理可证）

由函数的连续性可知，

$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

3. 函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续且非负, 令 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

由函数的连续性可知,

$$\forall\, \varepsilon>0,\qquad \exists\delta>0,\qquad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

$$\text{有}\,|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$(b-a)^{\frac{1}{n}}M\geq A_n\geq\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}M^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=(2\delta)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon)$$

设f和g在$[a,b]$上可积，求证：
$|f|$和fg在$[a,b]$上也可积分

即证明，对于函数$F(x)$，有：

$$\lim_{||\pi||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^F\Delta x_i=0$$

核心问题在于讨论区间上的振幅ω_i^F

对$|f(x)|$，有：

$$\omega_i^{|f|}\le\omega_i^f$$

所以，由夹逼准则：

$$0\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{|f|}\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i^f\Delta x_i\to 0\ ,(||\pi||\to\ 0)$$

$|f(x)|$在$[a,b]$上也可积

设f和g在$[a,b]$上可积，求证：
$|f|$和fg在$[a,b]$上也可积分

对$f(x)g(x)$，在任意区间$[x_{i-1},x_i]$上，有：

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &= |f(x)g(x)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(y)g(y)| \\ &\le |f(x)g(x)-f(y)g(x)|+|f(y)g(x)-f(y)g(y)| \\ &\le \left|M_i^g\right|\omega_i^f+\left|M_i^f\right|\omega_i^g\end{aligned}$$

取：

$$M=\max\left\{\left|M_i^f\right|,\left|M_i^g\right|\right\}\ (1\le i\le n)$$

则：

$$\omega_i^{fg}\le M(\omega_i^f+\omega_i^g)$$

所以，由夹逼准则：

$$0\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{fg}\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}M(\omega_i^f+\omega_i^g)\Delta x_i\to 0\ ,(\|\pi\|\to\ 0)$$

故 $f(x)g(x)$在$[a,b]$上也可积

练习7.5　T2

设 $p:[a,b]\to\mathbb{R}$. 如果有分割

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使得在每一个子区间 (x_{i-1},x_i) ($i=1,2,\cdots,n$) 上, p 为常值函数, 则称 p 为 $[a,b]$ 上的 **阶梯函数**. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 求证: 对任给的 $\varepsilon>0$, 必存在 $[a,b]$ 上的阶梯函数 p 和 q, 使得在 $[a,b]$ 上, 有 $p\leqslant f\leqslant q$, 并且

$$\int_a^b (q(x)-p(x))\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

$$\lim_{||\pi||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^f\Delta x_i=0 \qquad \forall\,\varepsilon>0,\qquad \exists\pi,\qquad \sum_{i=1}^{n}\omega_i^f\Delta x_i<\varepsilon$$

$$q(x)=\begin{cases}M_i,(x_{i-1}<x<x_i)\\ f(x_i),(x=x_i)\end{cases}\qquad p(x)=\begin{cases}m_i,(x_{i-1}<x<x_i)\\ f(x_i),(x=x_i)\end{cases}$$

$$\int_a^b(q(x)-p(x))dx=\sum_{i=1}^{n}\omega_i^f\Delta x_i<\varepsilon$$

3. 设 $f(x), g(x) \in C[0,+\infty)$， $f(x)>0$， $g(x)$ 单调增加，

求函数 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 的增减区间。

解： 由于

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x f(t)g(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}$$

$$=\frac{f(x)[g(x)\int_0^x f(t)dt-\int_0^x f(t)g(t)dt]}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}=\frac{f(x)\int_0^x f(t)[g(x)-g(t)]dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2},$$

而 $g(x)$ 单调增加，对于 $t\in[0,x]$， $g(x)\geq g(t)$，所以 $\varphi'(x)\geq 0$，
故 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加。

变上限积分定义的函数

4. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0$，求常数 a,b,c 的值。

解：首先由分子趋于 0 但整个极限 $=c\neq 0$ 判断，极限应该是 $\dfrac{0}{0}$ 型，所以 $b=0$；

如果可以应用 L'Hospital 法则，注意 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，则可以得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^3}{\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2},$$

为保证可应用 L'Hospital 法则，上述极限应该存在且有限（依题意 c 有限）；

注意分母趋于 0，故分子也应趋于 0，所以 $a=1$，因此 $c=\dfrac{1}{2}$。

5. 设 $F(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^8\right)dt$，求 $F^{(8)}(0)=?$ $F^{(9)}(0)=?$ $F^{(10)}(0)=?$

$$F'(x)=\ln(1+x^8)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\cdots$$

$$\ln(1+x^8)=x^8-\frac{x^{16}}{2}+\frac{x^{24}}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{8k}}{k}+\cdots$$

$$F(x)=\int \ln(1+x^8)\,dx$$

$$=\int x^8-\frac{x^{16}}{2}+\frac{x^{24}}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{8k}}{k}+\cdots dx$$

$$=\frac{1}{9}x^9+\cdots$$

5. 设 $F(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^8\right)dt$，求 $F^{(8)}(0)=?$ $F^{(9)}(0)=?$ $F^{(10)}(0)=?$

$$F(x)=\int \ln(1+x^8)\,dx$$

$$=\int x^8-\frac{x^{16}}{2}+\frac{x^{24}}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{8k}}{k}+\cdots dx$$

$$=\frac{1}{9}x^9+\cdots$$

所以，由$F(x)$的麦克劳林公式可知

$$\frac{F^9(0)}{9!}=\frac{1}{9} \qquad F^9(0)=8!$$

$$F^9(0)=0 \qquad F^{10}(0)=0$$

变上限积分定义的函数

6. $$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x (\ln t)^2\,dt}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^3}=?$$

解：应用三次 L'Hospital 法则（中间经过化简 $x\to 1, \cos x\to\cos 1$），

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x (\ln t)^2\,dt}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{6x\cos(x^2)\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^2}=\frac{1}{6\cos 1}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^2}$$

$$=\frac{1}{6\cos 1}\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x/x}{4x\cos(x^2)\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)}=\frac{1}{12\cos^2 1}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)}$$

$$=\frac{1}{12\cos^2 1}\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{2x\cos(x^2)}=\frac{1}{24\cos^3 1}。$$

7. 设曲线 $y=f(x)$ 由 $x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{t-u}\sin\frac{u}{3}du$ 及 $y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{t-u}\cos 2u du$ 确定，求该曲线在 $t=\pi/2$ 的点处的法线方程（法线与切线互相垂直）。

解：计算 $x'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\sin\frac{u}{3}du\right)=e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\sin\frac{u}{3}du+\sin\frac{t}{3}.$

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\cos 2u du\right)=e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\cos 2u du+\cos 2t.$$

由此 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{y'(\pi/2)}{x'(\pi/2)}=\frac{-1}{1/2}=-2$，

即曲线在 $t=\pi/2$ 点处的切线斜率为 -2，而法线与切线垂直，其斜率应为 $\frac{1}{2}$，

所以法线方程为 $y-y(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[x-x(\frac{\pi}{2})]$，

注意 $x(\frac{\pi}{2})=y(\frac{\pi}{2})=0$，故法线方程为 $y=\frac{x}{2}$。

积分证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，求证

$$\int_0^a f(u)(a-u)du = \int_0^a [\int_0^u f(t)dt]du \text{。}$$

证：记 $F(u)=\int_0^u f(t)dt$，右式可以利用分部积分方法处理，

$$右式=\int_0^a F(u)du = uF(u)\Big|_0^a - \int_0^a uF'(u)du$$

$$= a\int_0^a f(t)dt - \int_0^a uf(u)du = \int_0^a f(u)(a-u)du \text{。}$$

法二：令 $G(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du - \int_0^x [\int_0^u f(t)dt]du$，则

$$G(x)=x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du - \int_0^x [\int_0^u f(t)dt]du,$$

$$G'(x)=\int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) - \int_0^x f(t)dt = 0,$$

所以 $G(a)\equiv G(0)=0$，此即为所需要证的。

积分证明题

2．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\geq 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)。$$

【这是课本上问题 7.1 第 1 题的另一个版本】

证：将 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 点展开成 1 阶 Taylor 公式，带 Lagrange 型余项：

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2，（\xi\in[a,b]）$$

已知 $f''(\xi)\geq 0$，故

$$f(x)\geq f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})，\quad x\in[a,b]，$$

利用积分的保序性质，将上述不等式两边从 a 到 b 积分，

注意到 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx=\frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b=0$，就得到

$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)。$$

积分证明题

3．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\le 0$， $x\in[0,1]$，证明：

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right)。$$

证：类似上题考虑，利用 $f''(x)\le 0$，得到

$$f(x)\le f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3}),\quad x\in[0,1],$$

再用 x^2 替换 x 得到（注意 x^2 仍在 $[0,1]$ 中）

$$f(x^2)\le f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3});$$

上式两边从 0 到 1 积分，由于 $\int_0^1 (x^2-\frac{1}{3})dx=0$，得到

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right)。$$

推广：题设条件下有 $\int_0^1 f(x^a)dx \le f\left(\frac{1}{a+1}\right)$， $a>0$。

积分证明题

4. 设 $f\in C^1[a,b]$， $f(a)=0$，求证：

（1） $\max\limits_{a\le x\le b} f^2(x)\le (b-a)\int_a^b [f'(x)]^2\,dx$ （2） $\int_a^b f^2(x)dx\le \dfrac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\,dx$

证：分析题意，导数的积分可以考虑应用 Newton-Leibniz 公式。

由题设，Newton-Leibniz 公式给出 $f(x)=\int_a^x f'(t)dt$， $\forall x\in[a,b]$，

应用 Cauchy-Schwarz 不等式：

（*） $f^2(x)=(\int_a^x f'(t)dt)^2\le(\int_a^x 1dt)(\int_a^x [f'(t)]^2dt)=(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2dt$ 。

由此导出 $f^2(x)\le(b-a)\int_a^b [f'(t)]^2dt$， $\forall x\in[a,b]$，从而（1）成立；

进一步注意（*）式可导出 $f^2(x)\le(x-a)\int_a^b [f'(t)]^2dt$，两端在 $[a,b]$ 上积分即得

$\int_a^b f^2(x)dx\le\int_a^b (x-a)dx\int_a^b [f'(t)]^2dt=\dfrac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(t)]^2dt$，（2）得证。

积分证明题

先介绍两个常用的积分（第一）中值定理：

①若函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，则在$[a，b]$上至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

②若若函数$f(x)$与$g(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，函数$g(x)$在$[a，b]$上可积且不变号，则$[a，b]$在上至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

积分证明题

5*. 设 $f\in C[0,\pi]$，利用积分的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$。

证明：先利用区间可加性，将区间$[0,\pi]$上积分分成 n 段区间上的积分，

每段上$\sin nx$不变号（便于应用积分中值定理并计算积分）：

$$\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx|\,dx,$$

在每个区间上应用积分中值定理，得到$\xi_k\in[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi]$，使得

$$\text{上式}=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\,dx=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{\pi}{n}\to\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx\quad (n\to\infty),$$

最后一步是利用区间$[0,\pi]$上均匀分割的 Riemann 和式的极限得到积分。

积分证明题

设 f 在 $[a,b]$ 上连续、递增. 求证:

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

常用的技巧和方法:

对于不等式两边有相同积分上下限的证明问题，常常可以构造变上限积分函数

从而转换为类似以下这种证明题:

$$\frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} < \arctan a - \arctan b < a - b(0 < b < a).$$

积分证明题

设 f 在 $[a, b]$ 上连续、递增. 求证:

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

思路 1：注意要证不等式事实上对于所有 $b > a$ 都成立，可以考虑上限 b 为变量：

令 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$， $a\le x\le b$，则

$$F'(x)=xf(x)-[\frac{a+x}{2}f(x)+\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt]=\frac{x-a}{2}f(x)+\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt,$$

利用 f 单调性……导出 $F'(x)\ge 0$，从而 $F(b)\ge F(0)=0$。

积分证明题

设 f 在 $[a,b]$ 上连续、递增. 求证:

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

思路 2：考虑要证不等式左右二积分相减：

$$\int_a^b xf(x)dx - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx$$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\,,$$

注意 $x-\dfrac{a+b}{2}$ 在两个区间上都不变号，两个积分可以分别应用中值定理，

最终导出相减结果大于等于 0 ……

1. 直径 1 米高 2 米的圆柱桶盛满水，桶底有一个直径 1 厘米的小孔向外流水，流速为 $v = 0.6\sqrt{2gh}$，h 为瞬时水深，g 为重力加速度。求桶中水流完需要多少时间。

解：记圆桶直径 $R = 1$（米），小孔直径 $r = 0.01$（米），小孔流速 $v = 0.6\sqrt{2gh}$（米/秒），设 dt 时段水深的变化为 dh，

根据水量守恒：流出的水量=桶中水量的减少，可列出

$$\pi r^2 v dt = -\pi R^2 dh，因而 \frac{dt}{dh} = -\frac{R^2}{r^2 v} = -\frac{R^2}{0.6r^2\sqrt{2gh}}$$ （负号表示水深减小）

利用不定积分得到 $t = -\int \frac{R^2}{0.6r^2\sqrt{2gh}} dh = -\frac{R^2}{0.6r^2\sqrt{g}}\sqrt{h} + C$

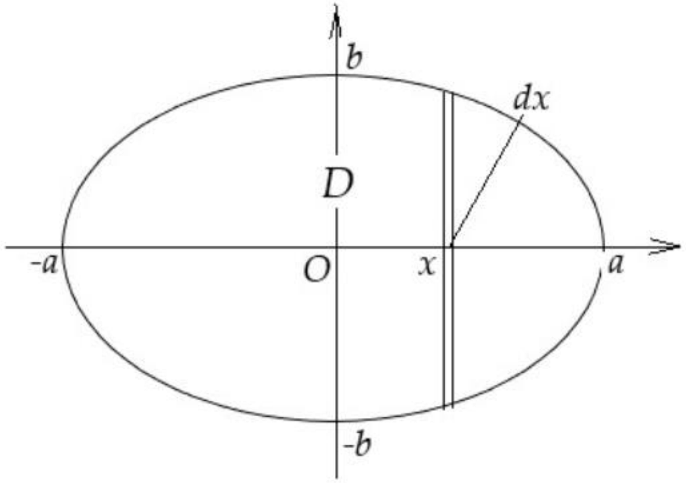
注意初始 $t = 0$ 时水深 $h = 2$，由此得到 $C = \frac{R^2}{0.6r^2\sqrt{g}}\sqrt{2}$，所以

$$t = \frac{R^2}{0.6r^2\sqrt{g}}(\sqrt{2} - \sqrt{h}), \quad 0 \le h \le 2,$$

令 $h = 0$ 得到水流光需要的时间：

$$T = \frac{R^2\sqrt{H}}{0.6r^2\sqrt{g}} = \frac{10^4\sqrt{2}}{0.6\sqrt{g}} \approx \frac{1.414\times 10^4}{3.131\times 0.6} \approx 7527$$ （秒，合 2 小时 5 分 27 秒）。

2. 令 D：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ 表示 xy 平面上的椭圆区域，计算 D 分别饶 x 轴和 y 轴旋转一周生成的空间旋转体区域的体积 V_x 与 V_y。



解：以绕 x 轴旋转为例，用微元法推导：

任取 $x\in[-a,a]$ 处微元 dx，

在区域 D 中截下一个窄条区域

绕 x 轴旋转一周形成一个空间薄圆盘，

半径为 $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$，厚度 dx，体积 $dV_x=\pi y^2dx=\pi(b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}})^2dx$，

关于 $x\in[-a,a]$ 叠加求和得到

$$V_x=\pi\int_{-a}^{a}(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi ab^2;$$

同理可得（或利用变量 x 与 y 的对称性）$V_y=\dfrac{4}{3}\pi a^2b$。

3. 设半径为 R 的圆柱形管道中水流速度分布为 $v(r)=k(R^2-r^2)$，$0\le r\le R$，计算该管道的平均流速 $\bar{v}$。

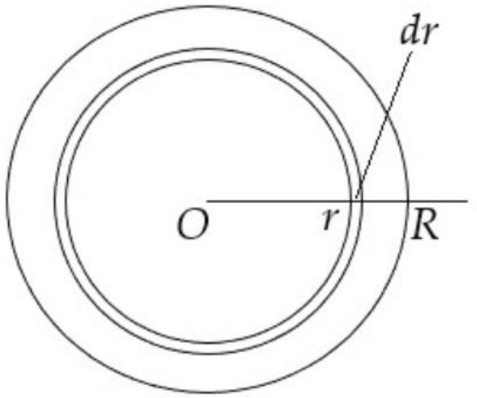
解：按照流速分布，管道中心流速 $v(0)=kR^2$，管道壁上流速 $v(R)=0$，流速不一致。

根据平均流速定义，整个管道中流速都是 $\bar{v}$ 得到的等效流量应该与上面管道流量相等。

在平均流速下，单位时间内圆柱形管道流量 $V=\bar{v}\cdot\pi R^2$，

在题设流速分布下单位时间内整个管道流量 $V=\int_0^R v(r)2\pi r dr$，【注】

所以 $\bar{v}=\dfrac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi\, r v(r)dr=\dfrac{2k}{R^2}\int_0^R r(R^2-r^2)dr=\dfrac{1}{2}kR^2$。



【注】：用微元法推导：任取 $r\in[0,R]$ 处微元 dr，

绕管轴一周形成薄圆环，其截面积 $dA=2\pi r dr$，

单位时间内流量 $dV=v(r)dA=v(r)2\pi r dr$，

关于 $r\in[0,R]$ 求和，得到整个管道流量

$$V=\int_0^R v(r)2\pi r dr。$$

1. 设 $f\in C[-1,1]$ 且可导，$M=\sup\limits_{[-1,1]}|f'|$。已知有 $a\in(0,1)$ 使得 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$，

求证：$\left|\int_{-1}^{1}f(x)dx\right|\le M(1-a^2)$。

证明：由已知 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{-a}f(x)dx+\int_{a}^{1}f(x)dx$，且 $\exists c\in[-a,a]$，使得 $f(c)=0$。

当 $a\le x\le 1$ 时，$\pm f(x)=\pm f'(\xi)(x-c)\le M(x-c)$，

$$\int_{a}^{1}|f(x)|dx\le M\int_{a}^{1}(x-c)dx=M[\frac{1-a^2}{2}-c(1-a)];$$

当 $-1\le x\le -a$ 时，$\pm f(x)=\pm f'(\eta)(x-c)\le M(c-x)$，

$$\int_{-1}^{-a}|f(x)|dx\le M\int_{-1}^{-a}(c-x)dx=M[c(1-a)+\frac{1-a^2}{2}].$$

综上

$$\left|\int_{-1}^{1}f(x)dx\right|\le\left|\int_{-1}^{-a}f(x)dx\right|+\left|\int_{a}^{1}f(x)dx\right|$$

$$\le\int_{-1}^{-a}|f(x)|dx+\int_{a}^{1}|f(x)|dx\le M(1-a^2).\qquad\square$$

2. 设 $f \in C^2[0,1]$，且 $f(0)=f(1)=f'(0)=0$， $f'(1)=1$，求证 $\int_0^1 [f''(x)]^2 dx \geq 4$。

证明：参考课本中提示，记 $p(x)=x^3-x^2$，考虑

$$0 \leq \int_0^1 [f''(x)-p''(x)]^2 dx$$

$$= \int_0^1 [f''(x)]^2 dx + \int_0^1 [p''(x)]^2 dx - 2\int_0^1 f''(x)p''(x)dx, \qquad (*)$$

其中 $\int_0^1 [p''(x)]^2 dx = \int_0^1 (6x-2)^2 dx = 4$，

$$\int_0^1 f''(x)p''(x)dx = f'(x)p''(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)p'''(x)dx$$

$$= f'(1)p''(1) - f'(0)p''(0) - 6\int_0^1 f'(x)dx$$

$$= p''(1) - 6[f(1)-f(0)] = 4,$$

代入（*）式得 $\int_0^1 [f''(x)]^2 dx \geq 4$。 □

注：此外等号成立时必有 $f''(x) \equiv p''(x) = 6x-2$，

结合已知条件可导出 $f(x) = x^3 - x^2 \equiv p(x)$。

介绍一个很常用的函数：伽玛(Gamma)函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt\ (x>0)$$

掌握以下4个重要公式：

①递推公式 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ （用一次分部积分）

②计算公式 $\Gamma(n)=(n-1)!$ （利用递推公式）

③余元公式 $\Gamma(1\text{-}x)\Gamma(x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ $(0<x<1)$

④概率公式 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ （利用余元公式）

积分/反常积分计算

$$1.\quad I_n=\int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}dx$$

解：$\forall t>0$，记 $I_n(t)=\int_0^t x^{2n+1}e^{-x^2}dx$，则利用分部积分可得

$$I_n(t)=-\int_0^t x^{2n}d(\frac{1}{2}e^{-x^2})=-\frac{e^{-x^2}}{2}x^{2n}\Big|_0^t+\frac{1}{2}\int_0^t 2ne^{-x^2}x^{2n-1}dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-t^2}t^{2n}+nI_{n-1}(t)$$

令 $t\to+\infty$ 得 $I_n=nI_{n-1}$（只要 I_{n-1} 收敛）；依次递推得到

$$I_n=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\cdots=n!I_0\text{，只要 }I_0\text{ 收敛；}$$

而事实上 $I_0=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-x^2}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}(-\frac{e^{-x^2}}{2})\Big|_0^t=\frac{1}{2}$，所以 $I_n=\frac{n!}{2}$。

注：也可以简化上面步骤，利用广义积分的分部积分直接计算：

$$I_n=-\int_0^{+\infty}x^{2n}d(\frac{1}{2}e^{-x^2})=-\frac{e^{-x^2}}{2}x^{2n}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}2ne^{-x^2}x^{2n-1}dx$$

$$=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\cdots=n!I_0=\frac{n!}{2}\text{。}$$

$$2.\quad I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$$

解：$\forall t>0$，记 $I(t)=\int_0^t \frac{dx}{1+x^3}$，考虑有理函数积分：

注意 $\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}(\frac{1}{1+x}-\frac{x-2}{1-x+x^2})=\frac{1}{3}[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1-3}{1-x+x^2}]$

所以 $I(t)=\frac{1}{3}\int_0^t(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{1-x+x^2})dx+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{dx}{1-x+x^2}$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}\Bigg|_0^t+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{dx}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t+t^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}(\arctan\frac{2(t-1/2)}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

依照定义 $I=\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$。

$$2.\quad I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$$

法二：利用区间可加性，$I=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$，

其中的无穷积分中引入积分换元 $x=1/t$：

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\int_1^0\frac{1}{1+t^{-3}}(-\frac{dt}{t^2})=\int_0^1\frac{t}{t^3+1}dt=\int_0^1\frac{x}{1+x^3}dx,$$

原式化为两个普通积分的和，且都在 $[0,1]$ 区间上：

$$I=\int_0^1\frac{1+x}{1+x^3}dx=\int_0^1\frac{dx}{1-x+x^2}=\int_0^1\frac{dx}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}))=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\text{。}$$

3. $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ （$a>0$，n 为正整数）

解：易知$I_1 = \pi/(2a)$；利用广义积分的分部积分

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{(a^2+x^2)^n}\Bigg|_0^{+\infty} + 2n\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}$$

$$= 2n\int_0^{+\infty} \frac{a^2+x^2-a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}dx = 2n(I_n - a^2 I_{n+1}),$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2a^2n}I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2a^4n(n-1)}I_{n-1} = \cdots = \frac{(2n-1)!!}{2^na^{2n}n!}I_1 = \frac{\pi(2n-1)!!}{2a^{2n+1}(2n)!!}。$$

法二：应用积分换元$x = a\tan t$，$0 \le t < \frac{\pi}{2}$，则无穷积分转换为普通积分：

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n} t}{a^{2n}} \cdot \frac{adt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^{2n-1}}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} tdt = \frac{\pi(2n-3)!!}{2a^{2n-1}(2n-2)!!}。$$

积分/反常积分计算

4. $I=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

解：记 $I(t)=\int_0^t\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$，$t>0$，考虑有理函数积分：

$$I(t)=\int_0^t\frac{1+x^2}{(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2}+\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{2t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2t-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

所以 $I=\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$。【也可以直接用广义 N-L 公式的写法】

4. $I=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

法二：用积分换元 $t=x-\frac{1}{x}$，则 $dt=(1+\frac{1}{x^2})dx$，

且 $x\to 0^+$ 时 $t\to -\infty$， $x\to +\infty$ 时 $t\to +\infty$，

此外 $t^2=(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$，

所以 $\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}dx=\frac{dt}{t^2+2}$，

因此 $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$。

利用已知 $\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$，计算以下 5-7 题：

5．计算 $J_n = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$。 【比较前面第 1 题】

解：首先 $J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \overset{t=x^2}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，

以下利用无穷积分的分部积分计算：

$$J_n = -\int_0^{+\infty} x^{2n-1} d(\frac{1}{2} e^{-x^2}) = -\frac{e^{-x^2}}{2} x^{2n-1} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (2n-1) e^{-x^2} x^{2n-2} dx$$

$$= (n-\frac{1}{2}) J_{n-1} = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) J_{n-2} = \cdots$$

$$= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) \cdots \frac{1}{2} J_0 = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}\text{。}$$

利用已知 $\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$，计算以下 5-7 题：

6. $\int_0^1 (\ln\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} dx$

解：利用瑕积分换元计算：

$$\int_0^1 (\ln\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} dx \overset{t=-\ln x}{=} \int_{+\infty}^0 t^{\frac{1}{2}}(-e^{-t})dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt,$$

再用分部积分（以及已知积分值）：

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = -t^{\frac{1}{2}} e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}，\text{也即 原式} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}。$$

利用已知 $\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$ ，计算以下 5-7 题：

7. $\int_0^1 (-\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx$

解：再次利用瑕积分换元以及已知积分值：

$$\int_0^1 (-\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx \overset{t=-\ln x}{=} \int_{+\infty}^0 t^{-\frac{1}{2}} (-e^{-t}) dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{\pi} \text{。}$$

8. $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$

解：考虑换元 $x=\tan t$， $0\le t<\frac{\pi}{2}$，无穷积分化为普通积分：

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{(1+5\tan^2 t)}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{(1+5\tan^2 t)\cos t}=\int_0^{\pi/2}\frac{d(\sin t)}{(1+5\tan^2 t)\cos^2 t}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{d(\sin t)}{\cos^2 t+5\sin^2 t}=\int_0^1\frac{du}{1+4u^2}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{du}{(1/2)^2+u^2}$$ （代换 $u=\sin t$ ）

$$=\frac{1}{2}\arctan(2u)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\arctan 2$$

9. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$

解：应用分部积分去掉 arctan：

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\int_1^{+\infty} \arctan x d(\frac{1}{x}) = -\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{d(\arctan x)}{x}$$

$$= \arctan 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{d(x^2)}{x^2(1+x^2)} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} (\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}) du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{u}{1+u}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

10. $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

解：试用无穷积分的分部积分计算：

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx = -\int_0^{+\infty} xd(\frac{1}{1+e^{-x}}) = \frac{x}{1+e^{-x}}\Bigg|_0^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}},$$

注意右端 2 项都发散，分部积分失效。

考虑先用分部积分法求出不定积分（原函数），再用广义 N-L 公式：

$$\int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx = -\int xd(\frac{1}{1+e^{-x}}) = \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{dx}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(e^x+1) + C,$$

注意到 $x \to +\infty$ 时，

$$\frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(e^x+1) = \frac{x}{1+e^{-x}} - x - \ln(1+e^{-x}) = -\frac{x}{e^x+1} - \ln(1+e^{-x}) \to 0,$$

由广义 N-L 公式

$$\int_1^{+\infty} \frac{xe^{-x}dx}{(1+e^{-x})^2} = \left[-\frac{x}{e^x+1} - \ln(1+e^{-x})\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{e+1} + \ln(1+e^{-1})。$$

同学们辛苦了！

谢谢！