

## 习题课材料（七）

习题 1. 设  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  是  $\mathbb{R}^n$  的两个线性子空间,  $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{N} = m$ . 假设  $m < n$ , 且存在  $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ , 满足  $\mathbf{u} \perp \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in \mathcal{N}$ , 证明, 存在  $\mathbf{b} \in \mathcal{N}, \mathbf{b} \perp \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{M}$ .

习题 2. 设平面上四个点  $(x_i, y_i)$  分别是  $(0, 0), (1, 8), (3, 8), (4, 20)$ .

1. 求  $k, b$ , 使得直线  $y = kx + b$  满足  $\sum_{i=1}^4 |y_i - (kx_i + b)|^2$  最小.

2. 求  $a, b, c$ , 使抛物线  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  满足  $\sum_{i=1}^4 |y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)|^2$  最小.

习题 3. 设  $\mathcal{M}$  是  $\mathbb{R}^3$  中由方程  $x_1 - x_2 + x_3 = 0$  所决定的平面. 求  $\mathbf{b} = [1, 1, 2]^T$  在  $\mathcal{M}$  上的正交投影.

习题 4. 若  $n$  阶方阵  $P$  满足  $P^2 = P$ , 则称  $P$  为斜投影矩阵. 给定  $n$  阶斜投影矩阵  $P$ .

1. 证明  $I_n - P$  也是斜投影矩阵.

2. 证明  $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I_n - P), \mathcal{R}(I_n - P) = \mathcal{N}(P)$ .

3. 对  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , 证明存在唯一分解  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , 其中  $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{R}(P), \mathbf{v}_2 \in \mathcal{R}(I_n - P)$

4. 构造二阶斜投影方阵, 且它不是正交投影.

习题 5. 证明  $(\mathcal{M} + \mathcal{N})^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp, (\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^\perp = \mathcal{M}^\perp + \mathcal{N}^\perp$ .

习题 6 ( $\heartsuit$ ). 给定子空间  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^m, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \subset \mathbb{R}^n$ . 何时存在  $m \times n$  矩阵  $A$ , 使得  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{M}_1, \mathcal{N}(A^T) = \mathcal{M}_2, \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{N}_1, \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}_2$  同时成立?

习题 7. 给定矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ .

1. 求向  $A$  的列空间的正交投影  $P_1$ ,

2. 求向  $A$  的行空间的正交投影  $P_2$ ,

3. 计算  $P_1 A P_2$ .

习题 8. 设  $n$  阶实方阵  $A$  满足  $A = -A^T$ .

1. 证明  $I_n + A, I_n - A$  可逆.
2. 证明  $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$  是正交方阵.