清华大学公共基础课（电子系）

高等微积分(1)

- **教材：** 数学分析教程（上册）
  常庚哲-史济怀编，高教社2003版
- **教师：** 郭玉霞（理科楼A413）
- **助教：** 待定

2022年秋季学期

本课程的内容

一元函数
微积分

级数

多元函数
微积分

常微分方程
（简单应用）

本学期的内容

利用极限研究函数的种种表达及其诸多性质

- 一元函数微分学：

极限连续及其理论

导数与微分及其理论

微分学应用

- 一元函数积分学：

不定积分

定积分概念及其理论

积分学应用

- 级数

数项级数

函数级数

傅立叶级数

常微分方程

（简单应用）

下学期的内容

- 多元函数微分学：

多元函数极限及其理论

偏导数与偏微分及其理论

多元微分学应用

- 多元函数积分学：

含参量积分

重积分， 曲线曲面积分

积分概念及其理论

积分学应用

$1-1：引言-课程介绍

引言-课程介绍

- **课程主题：** 函数的分析性质和应用

分析性质：$\begin{cases} \text{连续} \\ \text{微分} \sim \text{导数} \\ \text{积分} \sim \text{求和} \end{cases}$ （微积分）

- 连续： “无穷小量”的极限
- 导数：“无穷小量”商的极限 (微商)
- 积分：“无穷多项” “无穷小量” 的和

“无穷”~ 极限过程

这就是数学分析

什么是“数学分析”

数学发展到现在，已经成为科学世界中拥有100多个主要分支学科的庞大的“共和国”。

大体说来，数学中研究数的部分属于代数学的范畴；研究形的部分，属于几何学的范筹；沟通形与数且涉及极限运算的部分，属于分析学的范围。

这三大类数学构成了整个数学的本体与核心。在这一核心的周围，由于数学通过数与形这两个概念，与其它科学互相渗透，而出现了许多边缘学科和交叉学科。

第1-1课：引言-课程介绍

- **微积分历史回顾**
- 前传(17世纪前)：运动,几何,最大/最小值问题(零星-孤立)
- 诞生(17世纪末-18世纪初)：
  Newton(1642-1727)
  Leibniz (1646-1716) 独立(?)发现微积分基本定理
- 发展(18世纪-19世纪初)：新问题-新方法-新数学分支
  Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace, Fourier, Gauss,…
- 完善(19世纪初-中)：极限的严格理论，实数公理系统
  Cauchy, Weierstrass, Riemann, Cantor, …
- 后续(20世纪以来)：分析数学与其他数学分支的融合
  复分析-实分析-泛函分析-微分方程-微分几何-微分拓扑-

第1-1课：引言-课程介绍

- **课程特点**
- 数学系教材，难于其他班用的教材 (适当降低一些要求)
- 借助实例 (物理-几何) 来理解数学概念-掌握方法
- 注重理性思考和分析 (不是背公式-记结论-套方法！)

- **课程目的**
- 培养和建立理性思维的模式和习惯
- 掌握分析数学的论证和计算方法，为后续课程打好基础
- 学习和欣赏数学的美 (和谐, 简洁, 奇异, …)

学习建议：

学习数学的目的， 不仅仅是为了学到数学的概念、定理、公式；更重要的是了解数学的思想、方法和本质的逻辑关系，真正掌握数学的精髓。

只有这样，所学到的数学知识才不致沦为僵死的教条。如果能以这样的态度和想法去学习数学，那么数学就会变得有趣。如果能领会到其本质进而触类旁通，面对现实生活的种种问题就会显示出数学的威力。

第1讲：实数-数列-收敛数列及其性质

第1章 实数和数列极限

- **内容：**

  第1.1-1.2节 实数及其性质

  第1.3-1.4节 数列的收敛-极限以及性质

第1-2课：实数-数列和收敛数列

第1章 实数和数列极限

- **第1.1-1.2节** (讨论实数和性质) 详细内容自己阅读
- **通用记号约定**

数集： $\mathbf{N}$—自然数全体，关于加法和乘法运算封闭

$\mathbf{Z}$—整数全体，自然数集的扩充 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$

关于加法的逆运算(减法)也封闭

$\mathbf{Q}$—有理数全体，整数集的扩充 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

关于加-乘及其逆运算(减-除)封闭

$\mathbf{R}$—实数全体，有理数集的扩充，关于极限运算封闭

区间： (a,b), $[a,b]$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $\cdots$

第1.1-1.2节 实数及其性质

实数系

实数R，有理数Q，自然N，整数Z。

$\forall$: 对任意(Any)

$\exists$: 存在(Exist)

s.t. 使得(subject to)

Thm.（有理数的稠密性）

$$\forall a,b\in \cdot\ ,a<b,\exists r\in\ \ ,\text{s.t. } a<r<b.$$

第1-2课：实数-数列和收敛数列

- **集合关系：**

  包含于 $\subset$：　$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

  属于/不属于 $\in, \notin$：　$2^{10} \in \mathbf{N},\ 1/5 \in \mathbf{Q},\ \pi \in \mathbf{R},\ -\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$

- **集合运算：**

  并 $\cup$：　$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或者 $x \in B\}$

  交 $\cap$：　$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 并且 $x \in B\}$

- **逻辑记号：**

  $P \Rightarrow S$：由P导出S, P是S的充分条件

  $S \Leftarrow P$：S由P导出, S是P的必要条件

  $S \Leftrightarrow P$：S与P等价, S是P的充分必要条件

  $\forall$—任意，$\exists$—存在

实数R，有理数Q，自然N，整数Z。

Def. (上界、下界、有界、无界)

A为非空数集. 若$\exists M\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall x\in A$, 有$x\le M$, 则称M为A的一个上界. 若$\exists m\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall x\in A$, 有$x\ge m$, 则称m为A的一个下界. 若A既有上界又有下界, 则称A有界, 否则称A无界.

Question. (0,1)与[0,1]的上下界?

Question. 集合的上、下界是否一定是集合中元素?

Question. ¯ , , iv, 是否有界？是否有上界、下界？

Question. 一个集合的上、下界是否唯一?

Def. (上确界$\sup A$、下确界$\inf A$)

A为非空数集. 称A的最小上界ξ为A的上确界,记作$\xi = \sup A$. 称A的最大下界η为A的下确界,记作$\eta = \inf A$.

Remark. ($\sup A, \inf A$的等价定义)

$\xi = \sup A$的充要条件:

ξ是A的上界, 且$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$, s.t. $x > \xi - \varepsilon$.

$\eta = \inf A$的充要条件:

η是A的下界, 且$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$, s.t. $x < \eta + \varepsilon$.

Thm. (确界原理—实数的连续性)

非空有上(下)界的集合必有上(下)确界.

Ex. A为非空有界数集, 记$-A=\{-x: x\in A\}$, 则

$\sup(-A)=$ ___$-\inf A$___, $\inf(-A)=$ ___$-\sup A$___.

Proof. 记$\eta=\inf A$, 则

$\forall x\in A$, 有$\eta\le x$; 且$\forall\varepsilon>0, \exists y\in A$, s.t. $y<\eta+\varepsilon$.

于是, $\forall -x\in -A$, 有$-\eta\ge -x$ ($-\eta$是集合A的上界); 且$\forall\varepsilon>0$,

$\exists -y\in -A$, s.t. $-y>-\eta-\varepsilon$ ($\forall\varepsilon>0, -\eta-\varepsilon$不是集合A的上界).

由上确界的定义知$\sup(-A)=-\eta=-\inf A$.

同理可证$\inf(-A)=-\sup A$.W

Remark. 若非空集合A无上界, 则记$\sup A = +\infty$;

若非空集合A无下界, 则记$\inf A = -\infty$.

Ex. A,B为非空有界集合, $A \cap B$非空, 则

$\sup(A \cup B)$ $\underline{= \max\{\sup A, \sup B\}}$,

$\inf(A \cup B)$ $\underline{= \min\{\inf A, \inf B\}}$,

$\sup(A \cap B)$ $\underline{\leq \min\{\sup A, \sup B\}}$,

$\inf(A \cap B)$ $\underline{\geq \max\{\inf A, \inf B\}}$.

如何证明?

第1-2课：实数-数列和收敛数列

- 第1.3节 数列和收敛数列
- **数列**：$\{a_n\}$ 表示依照下标次序排列的一列实数

  $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 其中每个 $a_n \in \mathbf{R}$

- **收敛**：设数列如上，$a \in \mathbf{R}$

  如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N}$, 使得$\forall n > n_0$, 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$,

则称数列$\{a_n\}$收敛于a（n趋于无穷时)，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{—— } a \text{ 称为}\{a_n\}\text{的极限}$$

也记为 $a_n \to a \quad (n \to \infty)$

- **发散**：若$\{a_n\}$不收敛，则称数列$\{a_n\}$发散

也即 $\forall a \in \mathrm{R}, \ \lim_{n\to\infty} a_n \neq a$

第1-2课：实数-数列和收敛数列

- **收敛的含义**：$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

  1) $\forall \varepsilon > 0$ …… $|a_n - a| < \varepsilon$ ——可以任意小

  2) $\exists n_0 \in \mathrm{N}$ —— 可能与ε 有关

  3) $\forall n > n_0$ —— n 充分大以后

综上，只要 n 充分大，就可以使得 a_n任意接近 a

此外 $|a_n - a| < \varepsilon$ 即$\pm(a_n - a) < \varepsilon$

这等价于 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$，$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

- **思考**：$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$

具体什么含义？如何根据极限定义来验证？

第1-2课：实数-数列和收敛数列

✓ **例1**： 设 $\exists m\in \mathrm{N}_+$(正自然数), 验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^m}=0$

解：根据极限定义 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|\frac{1}{n^m}-0|=\frac{1}{n^m}<\varepsilon$,

这只须 $\frac{1}{n}<\sqrt[m]{\varepsilon}$, 相当于 $n>\frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon}}$,

为此可以取 $n_0=[\frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon}}]$ (不超过[***] 的最大整数),

$\forall n>n_0$, 必有$n\geq n_0+1>\frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon}}$,

$\therefore\ |\frac{1}{n^m}-0|<\varepsilon$, 这就说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^m}=0$ W (解答结束标记)

✓ **类似**：容易验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[m]{n}}=0$

第1-2课：实数-数列和收敛数列

- **例2**：设 $0<|a|<1$，验证 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$　（$|a|<\sqrt[n]{\varepsilon}$ 如何选取 n_0 ?）

解：注意 $\dfrac{1}{|a|}>1$，记 $\lambda = \dfrac{1}{|a|}-1>0$，则

$$\frac{1}{|a|^n}=(1+\lambda)^n = 1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n > n\lambda,$$

$$\therefore\ |a|^n<\frac{1}{n\lambda},\quad \text{为使 } |a|^n<\varepsilon, \text{ 只须} \frac{1}{n\lambda}<\varepsilon,$$

因此 $\forall\varepsilon>0$，可取 $n_0=[\dfrac{1}{\lambda\varepsilon}]$，

$$\forall n>n_0,\ \text{必有} n\geq n_0+1>\frac{1}{\lambda\varepsilon},$$

$$\therefore\ |a^n-0|=|a|^n<\frac{1}{n\lambda}<\varepsilon,\quad \text{这说明 } \lim_{n\to\infty}a^n=0 \qquad \blacksquare$$

第1-2课：实数-数列和收敛数列

- **例3**：验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

解：类似于例2, 注意 $\sqrt[n]{n}>1$，记 $a_n=\sqrt[n]{n}-1>0$，则

$$n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2+\cdots+a_n^n>\frac{n(n-1)}{2}a_n^2,$$

$$\therefore\ a_n^2<\frac{2}{n-1},\ \text{为使}\ |\sqrt[n]{n}-1|=a_n<\varepsilon,\ \text{只须}\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$$

因此 $\forall\varepsilon>0$，取 $n_0=[\frac{2}{\varepsilon^2}]+1$,

$$\forall n>n_0,\ \text{必有}\ n\ge n_0+1>\frac{2}{\varepsilon^2}+1,$$

$$\therefore\ |\sqrt[n]{n}-1|=a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$$

W

总结：

用定义验证数列的极限实际上就是验证a_n 与A的距离随n的增大而能达到任意小， 即对任意给定的epsilon>o通过求解不等式

|a_n-A|<epsilon

来确定N. 我们注意到定义中强调的是N的存在性， 因此我们可以放大寻找范围。

因此适当放大不等式是我们使用定义证明数列极限的一个重要技巧。

也就是由 $|a_n - A| < \varepsilon$ 找N, 比较困难!

$\boxed{\text{可以考虑将} |a_n - A| \text{简化放大}}$

$$|a_n - A| \le \varphi(n)$$

于是,要使 $|a_n - A| < \varepsilon$

只要使 $\varphi(n) < \varepsilon$ 由此找出$n > N$

这样找出的N当然不是最小的

但是, 不会影响结论。

Remark. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N} \in \text{¥}, \text{s.t. 当} n > \mathrm{N} \text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N} \in \text{¥}, \text{s.t. 当} n \geq \mathrm{N} \text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N} \in \text{¥}, \text{s.t. 当} n > \mathrm{N} \text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon / 2$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in (0,1), \exists \mathrm{N} \in \text{¥}, \text{s.t. 当} n \geq \mathrm{N} \text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| \leq 2\varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \text{ゥ}, \exists \mathrm{N} = \mathrm{N}(k) \in \quad , \text{s.t. 当} n \geq \mathrm{N} \text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| \leq \frac{1}{k}.$$

Question. 如何用ε-N语言描述$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \mathrm{A}$?

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \mathrm{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon>0, \forall \mathrm{N} \in \text{¥}, \exists n > \mathrm{N}, \text{s.t.} |a_n - \mathrm{A}| > \varepsilon.$$

Ex. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$.证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\mathrm{A}}$;(2)若 $\mathrm{A}>0, a_n>0$, 则

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \mathrm{A}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0.$

Proof.(1) $\forall \varepsilon \in (0, e^{\mathrm{A}})$,

$$\left|e^{a_n} - e^{\mathrm{A}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|e^{a_n-\mathrm{A}} - 1\right| < \varepsilon e^{-\mathrm{A}}$$

$$\Leftrightarrow 1-\varepsilon e^{-\mathrm{A}} < e^{a_n-\mathrm{A}} < 1+\varepsilon e^{-\mathrm{A}}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-\varepsilon e^{-\mathrm{A}}) < a_n - \mathrm{A} < \ln(1+\varepsilon e^{-\mathrm{A}}) \qquad (*)$$

令 $\delta = \min\{-\ln(1-\varepsilon e^{-\mathrm{A}}), \ln(1+\varepsilon e^{-\mathrm{A}})\}$, 则 $\delta > 0$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$, $\exists N, s.t. \forall n > N$, 有 $|a_n - \mathrm{A}| < \delta$. 于是 $n > N$ 时 $(*)$ 成立, 由极限的定义得 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\mathrm{A}}$.

$$(2)\quad |\ln a_n - \ln A| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \ln \frac{a_n}{A} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{A} < e^{\varepsilon} \Leftrightarrow Ae^{-\varepsilon} < a_n < Ae^{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow A(e^{-\varepsilon}-1) < a_n - A < A(e^{\varepsilon}-1) \qquad (**)$$

$\forall \varepsilon > 0$,令$\delta = \min\{-A(e^{-\varepsilon}-1), A(e^{\varepsilon}-1)\}\ (>0)$.由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,
$\exists N, s.t. \forall n > N$,有$|a_n - A| < \delta$. 于是$n > N$时$(**)$成立, 由极限的定义得$\ln a_n = \ln A$.

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n} = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right) = \ln 1 = 0.$$ W

Ex. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.证明： $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$

Proof. 因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, s.t.$

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \forall n > N_1.$$

对此 $N_1, \exists N > N_1, s.t.$

$$\frac{|a_1 - A| + \cdots + |a_{N_1} - A|}{n} < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

于是，当 $n > N$ 时，有

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| = \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right|$$

$$\le \frac{|a_1 - A| + \cdots + |a_{N_1} - A|}{n} + \frac{|a_{N_1+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} < 2\varepsilon.$$

Ex. $a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0.$ 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A.$

Proof. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\left\{\dfrac{\ln a_1 + \ln a_2 \cdots + \ln a_n}{n}\right\}$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 \cdots + \ln a_n}{n}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \ln a_n\right\} = \exp\left\{\ln \lim_{n\to\infty} a_n\right\} = e^{\ln A} = A.$$

Question. $A = 0$ 时结论是否成立?给出证明或反例.

Def. 称$\{a_n\}$发散到$+\infty$，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，若

$$\forall M > 0, \exists N \in ¥, 当 n > N 时, a_n > M.$$

称$\{a_n\}$发散到$-\infty$，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$，若

$$\forall M > 0, \exists N \in ¥, 当 n > N 时, a_n < -M.$$

称$\{a_n\}$发散到∞，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$，若

$$\forall M > 0, \exists N \in ¥, 当 n > N 时, |a_n| > M.$$

Question. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$及$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$的几何意义？

第1-3课：收敛数列的性质

- 第1.4节 收敛数列的性质

➢ **唯一性**：如果$\{a_n\}$收敛，则其极限是唯一的

证：假设 $\{a_n\}$有两个不同的极限：$a < b$

根据极限定义 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1, n_2 \in \mathrm{N}$, 使得

$$\forall n > n_1, \text{ 都有 } |a_n - a| < \varepsilon, \text{ 也即 } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

$$\forall n > n_2, \text{ 都有 } |a_n - b| < \varepsilon, \text{ 也即 } b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon,$$

特别当 $n > \max\{n_1, n_2\}$上面二式同时成立

取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$ 便得到

$$a_n < a + \varepsilon = \frac{b+a}{2} = b - \varepsilon < a_n \quad \text{—— 矛盾}$$

第1-3课：收敛数列的性质（Property）

- **有界性**：设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则$\{a_n\}$有界

  证：取 $n_0 \in \mathrm{N}$, 使得 $\forall n > n_0$ 都有 $|a_n - a| < 1$,

因此 $|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$,

取 $M = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0}| + |a| + 1$

则 $\forall n \in \mathrm{N}$, 都有 $|a_n| \le M$ ——有界 W

- **注**：有界数列不必收敛。

  考察 $a_n = (-1)^n$，显然 $|a_n| = |(-1)^n| = 1$ ——有界

但$\{a_n\}$发散 ——验证留作课下练习

第1-3课：收敛数列的性质

- **数列的子列：** 设$\{a_n\}$为一数列

  取一列自然数 $k_n \in \mathrm{N}$ 满足 $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < \cdots$

注意 $\{a_{k_n}\}$构成一个数列，称为数列$\{a_n\}$的一个子列

  特例： $\{a_{2n}\}$是$\{a_n\}$的一个子列（偶数项构成的子列）

  $\{a_n\}$本身也是自己的一个子列

- **子列性质：** 设$\{a_n\}$收敛于a，则$\{a_n\}$的任意子列也收敛于a

  证：$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathrm{N}$, 使得 $\forall n > n_0$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$,

  任取 $\{a_n\}$的一个子列$\{a_{k_n}\}$，注意 $k_n \ge n$

因此 $\forall n > n_0$ 都有$k_n \ge n > n_0$，$\therefore$ $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n \to \infty} a_{k_n} = a$ W

- **推论：** $\{a_n\}$收敛的充分必要条件是$\{a_n\}$的任意子列收敛

注：

上述命题通常可以用来判别数列的不收敛。

也就是如果一个数列的两个子列如果极限不一样或有不收敛子列就可以判定该数列不收敛。比如：$\{(-1)^n\}$

第1-3课：收敛数列的性质

- **保号性质**：设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

  1) 若 $a_n \geq 0$ (充分大后)，则 $a \geq 0$

  2) 若 $a > 0$，则 n 充分大后 $a_n > 0$

- **四则运算性质**：设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则

  $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

  $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

  $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a/b$， 只要 $b \neq 0$

- **推论**(保序性质)：设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

  1) 若 $a_n \geq b_n$ (充分大后)，则 $a \geq b$

  2) 若 $a > b$，则 n 充分大后 $a_n > b_n$

第1-3课：收敛数列的性质

- **夹逼原理**：设 $a_n \le b_n \le c_n$ (n充分大后),

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

证：依照极限定义 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1, n_2 \in \mathrm{N}$, 使得

$\forall n > n_1$, 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 也即 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$,

$\forall n > n_2$, 都有 $|c_n - a| < \varepsilon$, 也即 $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$,

$n > \max\{n_1, n_2\}$充分大后，综合上面不等式得到

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$$

由此 $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$, 也即 $|b_n - a| < \varepsilon$ …… W

第1-4课：收敛数列的性质应用

✓ **例4**：设 $a>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=?$

解：若 $a\ge 1$, 则 $n\ge a$ 时, $1\le a\le n$

从而 $1\le \sqrt[n]{a}\le \sqrt[n]{n}$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (上节例3), 由夹逼原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

若 $0<a<1$, 记 $\lambda=\dfrac{1}{a}>1$, 由上 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lambda}=1$

而 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{\lambda}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{\lambda}}$

利用四则运算性质 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ W

第1-4课：收敛数列的性质应用

- 例5：求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+5})=?$

  解：注意 $0\le|\sqrt{n+1}-\sqrt{n+5}|=\dfrac{4}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+5}}\le\dfrac{2}{\sqrt{n}}$,

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0$ (参见上节例1)

由夹逼原理 $\lim\limits_{n\to\infty}|\sqrt{n+1}-\sqrt{n+5}|=0$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+5})=0$ W

注：容易验证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

- **推广**：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})=0$

第1-4课：收敛数列的性质应用

✓ **例6**：求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})\sqrt{n+c}=?$

解：$(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})\sqrt{n+c}=\dfrac{(a-b)\sqrt{n+c}}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}$

$$=\frac{(a-b)\sqrt{n+c}/\sqrt{n+a}}{1+\sqrt{n+b}/\sqrt{n+a}}$$

容易得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+a}}{\sqrt{n+c}}=1$

由四则运算性质 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a-b)\sqrt{n+c}/\sqrt{n+a}}{1+\sqrt{n+b}/\sqrt{n+a}}=\dfrac{a-b}{2}$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})\sqrt{n+c}=\dfrac{a-b}{2}$ W

几个重要不等式

Bernoulli不等式：设$a_i > -1$且符号相同，则有

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots.(1+a_n) \geq 1+(a_1+\ldots+a_n)$$

（递推）

Cauchy——Schwarz不等式

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2)$$

利用$\sum (a_k + \lambda b_k)^2 \geq 0.$

Minkowski不等式

$$[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2]^{\frac{1}{2}} \leq [\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2]^{\frac{1}{2}} + [\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2]^{\frac{1}{2}}$$

利用Cauchy——Schwarz不等式

算术－几何平均不等式

已知$a_i \geq 0, i=1,2\ldots n$则成立

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$$

递推（或者函数的凸性）

第1课：实数-数列-收敛数列及其性质

- **预习**（下次课内容）：

  第1.5节 极限概念的"推广"

  第1.6-1.7节 单调数列的性质和应用

- **作业**（本次课）：

  阅读第1.1-1.2节.

  练习题1.3：1(2,4,6,8), 2, 6*, [3-5自己思考练习].

  练习题1.4：3(1,3,5,7,9), 4(2,4,6), 5(1), 7*, 8, 9*.