第10课：导数应用-极值问题-函数凸性

第3章 函数的导数

- **内容：**

  第3.5节 导数应用

  极值问题-函数的凸性

第10-1课：导数应用-极值问题

导数应用-极值问题

- **极值问题**：求已知函数的极值/极值点或最大/最小值

➢ **必要条件** (Fermat引理+)：

若x=x_0为f(x)的极值点，则 $f'(x_0)=0$, 除非$f'(x_0)$ 不存在

➢ **充分条件1**：设 f 在x_0点连续, 则$f(x_0)$为f 的

a)极大值, 若在x_0左侧附近 $f'(x)\ge 0$, 在x_0右侧附近 $f'(x)\le 0$

b)极小值, 若在x_0左侧附近 $f'(x)\le 0$, 在x_0右侧附近 $f'(x)\ge 0$

只须证a)：由题意 $\exists\delta>0$, 使得

$$\left.\begin{array}{l} x\in(x_0-\delta,x_0)\text{ 时}f'(x)\ge 0,\ \therefore f(x)\le f(x_0) \\ x\in(x_0,x_0+\delta)\text{ 时}f'(x)\le 0,\ \therefore f(x)\le f(x_0) \end{array}\right\}\text{极大值}$$

第10-1课：导数应用-极值问题

- **充分条件2**：设 f 在x_0点存在2阶导数，且 $f'(x_0)=0$

  a)' 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$为严格极大值

  b)' 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$为严格极小值

  只证a)'：已知

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

根据极限保号性质

$$\exists\delta>0,\text{ 使得 }\forall 0<|x-x_0|<\delta,\ \frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

这说明

$$\left.\begin{array}{l} x\in(x_0-\delta,x_0)\text{ 时}f'(x)>0,\ \therefore f(x)<f(x_0) \\ x\in(x_0,x_0+\delta)\text{ 时}f'(x)<0,\ \therefore f(x)<f(x_0) \end{array}\right\}\text{严格极大值}$$

综上可见，$f(x_0)$为f 的严格极大值 □

第10-1课：导数应用-极值问题

- **注**：上面充分条件都不是必要的！

✓ **例1**：$f(x)=x^4\geq 0=f(0)$ —— 是f 的极小值

$f'(x)=4x^3,\ f''(x)=12x^2$

$f'(0)=f''(0)=0$ —— 充分条件2不满足

注意 $x<0$ 时$f'(x)<0,\ x>0$ 时$f'(x)>0$ —— 充分条件1满足

✓ **例2**：$f(x)=x^2(2+\sin\frac{1}{x})\geq 0=f(0)$ —— 是f 的极小值

$f'(x)=2x(2+\sin\frac{1}{x})-\cos\frac{1}{x}$ —— $f''(0)$不存在

考虑 $x_n=\frac{1}{n\pi},\ n=1,2,\cdots,$ 则$\{x_n\}\to 0$

$f'(x_n)=\frac{4}{n\pi}+(-1)^{n+1}$ ——在x=0附近无穷次变号

充分条件都不满足

第10-1课：导数应用-极值问题

- ✓ **例3**：$f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$, 求$f$在区间$[-1,3]$上的最大最小值

解：最大最小值只能在极值点或者区间[-1,3]边界点达到

注意 f 处处可导, 极值点必是临界点, 临界点方程 $f'(x)=0$

$$f'(x)=(1+\frac{5-5x}{x^2+1})'=\frac{-5(x^2+1)-2x(5-5x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{5(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}=0$$

也即 $x^2-2x-1=0$

解得临界点 $x_1=1-\sqrt{2},\ x_2=1+\sqrt{2}\in[-1,3]$

只须比较边界值和临界值 (不必判断是否极值)

第10-1课：导数应用-极值问题

✓ **例3 (续)**：比较函数 $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$ 的边界值和临界值

边界点 $a=-1,\ b=3$; 临界点 $x_1=1-\sqrt{2},\ x_2=1+\sqrt{2}\in[-1,3]$

边界值 $$f(-1)=\left.\frac{x^2-5x+6}{x^2+1}\right|_{x=-1}=\frac{1+5+6}{2}=6$$

$$f(3)=\left.\frac{x^2-5x+6}{x^2+1}\right|_{x=3}=\frac{9-15+6}{10}=0$$

临界值 $$f(1\mp\sqrt{2})=\left.\frac{x^2-5x+6}{x^2+1}\right|_{x=1\mp\sqrt{2}}=\cdots=\frac{7\pm5\sqrt{2}}{2}$$

比较 $f(1-\sqrt{2})=\dfrac{7+5\sqrt{2}}{2}>6,\quad f(1+\sqrt{2})=\dfrac{7-5\sqrt{2}}{2}<0$

$$\therefore\ \max_{[-1,3]} f=f(1-\sqrt{2})=\frac{7+5\sqrt{2}}{2},\quad \min_{[-1,3]} f=f(1+\sqrt{2})=\frac{7-5\sqrt{2}}{2}\qquad\square$$

第10-1课：导数应用-极值问题

- **例3** (续二)：若要判断临界值是否极值，可检验导数符号

  观察导函数 $f'(x)=\dfrac{5(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$，临界点 $x_{1,2}=1\mp\sqrt{2}$

在两临界点之间 $f'(1)=-\dfrac{5}{2}<0$，这说明在区间$(x_1,\ x_2)$ 内$f'<0$

由此可知

$$\left.\begin{array}{l}\text{在区间}(-1,x_1)\text{内}f'>0\\ \text{在区间}(x_1,\ x_2)\text{内}f'<0\end{array}\right\}f(x_1)\text{是严格极大值}$$

以及

$$\left.\begin{array}{l}\text{在区间}(x_1,\ x_2)\text{内}f'<0\\ \text{在区间}(x_2,3)\ \text{内}f'>0\end{array}\right\}f(x_2)\text{是严格极小值}$$

设f定义在a点附近（包括a），以下结论正确的有

- A　f在a点导数大于0，则f在a附近单调增
- B　f在a点二阶导数大于0，则f(a)是极小值
- C　f在a点导数不存在，则f(a)不是极值
- D　f在a点附近导数不小于0，则f在a附近单调增

第10-2课：导数应用-函数的凸性

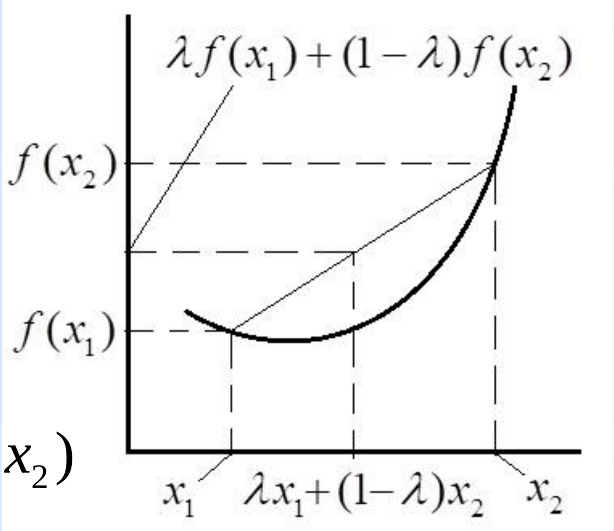
导数应用-函数的凸性

- **函数的凸性** (对应曲线的凸性)：

  设 $f: I \to \mathbb{R}$，I 为区间，如果 $\forall x_1, x_2 \in I$，$\lambda \in (0,1)$，总有

  $$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

称 f 为 I 中的凸函数(convex)



- **几何意义**：参见右图
- **注**：为明确起见今后称之为下凸

  若反向不等式成立则称 f 为上凸

即 $$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

- **推论**：f 是下凸函数当且仅当 $-f$ 是上凸函数

第10-2课：导数应用-函数的凸性

➢ **等价凸性**：设 $f: I \to \mathbb{R}$, f在区间I 中下凸等价于

$$\forall x_1,\cdots,x_n \in I,\ \lambda_1,\cdots,\lambda_n \in (0,1) \text{ 满足} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \text{ 总有}$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

证：n=2与原定义等价, 用递推即可导出 $n = 2,3,\cdots$

以n=3为例, 已知n=2时有上面不等式，现在任取

$$x_1, x_2, x_3 \in I,\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in (0,1) \text{ 满足} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

注意 $\lambda_2 + \lambda_3 = (1-\lambda_1)$, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3} + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} = 1$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \le \lambda_1 f(x_1) + (\lambda_2+\lambda_3) f\left(\frac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right)$$

$$\le \lambda_1 f(x_1) + (\lambda_2+\lambda_3)\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3} f(x_2) + \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} f(x_3)\right]$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$$ —— n=3不等式成立 □

第10-2课：导数应用-函数的凸性

- **Jensen不等式：**

设 $f: I \to \mathbb{R}$ 为下凸函数，则 $\forall x_1, \cdots, x_n \in I$，$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$

总有 $$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\right) \le \frac{\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

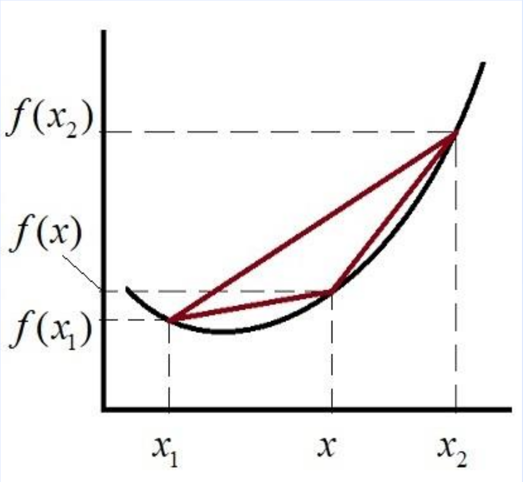
证：利用等价凸性结论立刻得到 □

第10-2课：导数应用-函数的凸性

- **等价凸性**：设 $f: I \to \mathbb{R}$, I为区间

  f 在 I 中下凸 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, x \in (x_1, x_2)$ 都有

(&) $$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$



证：注意 $x_1 < x < x_2$，可以将x表示为

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2$$

利用下凸性质

$$f(x) \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

由此得 $f(x)-f(x_1) \le \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)]$

以及 $f(x)-f(x_2) \le \dfrac{x-x_2}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)]$

综合就是(&)

"$\Rightarrow$"成立

第10-2课：导数应用-函数的凸性

- **等价凸性证明(续)：** 已知 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, x \in (x_1, x_2)$ 都有

(&) $$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

为证 f 下凸, 对于 $\forall x_1, x_2 \in I$, $\lambda \in (0,1)$, 取

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \text{ 则} \lambda = \frac{x_2-x}{x_2-x_1},\ 1-\lambda = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

代入(&)式有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

整理得 $f(x) \le \dfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$

也即 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ "$\Leftarrow$"得证 □

第10-2课：导数应用-函数的凸性

- **凸性判别** (1阶导数判别法)：设 $f: I \to \mathbb{R}$ 处处可导，则

  f 在 I 中下凸 $\Leftrightarrow$ f'在 I 中单调增

证"$\Rightarrow$"：令f下凸，则由等价凸性 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, x \in (x_1, x_2)$

$$(\&) \qquad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

在二个不等式中分别令 $x \to x_1^+$与$x \to x_2^-$，得到

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2) \qquad \text{——"}\Rightarrow\text{"成立}$$

为证"$\Leftarrow$"，令f'单调增，要证(&)式，应用L-中值公式

$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, x \in (x_1, x_2)$，存在 $c_1 \in (x_1, x)$，$c_2 \in (x, x_2)$ 使得

$$f'(c_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, \quad f'(c_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

第10-2课：导数应用-函数的凸性

- **凸性判别证明**(续)：注意 f'单调增，$c_1 < x < c_2$

$$\therefore \quad f'(c_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

回忆初等分式不等式

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_2}{b_2} \text{且} b_1, b_1 > 0, \quad \text{则} \quad \frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \le \frac{a_2}{b_2}$$

由此即得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad \square$$

- **推论** (凸性判别的2阶导数法)：设 $f : I \to \mathbb{R}$ 处处2次可导

$$f \text{ 在 } I \text{ 中下凸} \Leftrightarrow \text{在 } I \text{ 中} f'' \ge 0$$

第10-2课：导数应用-函数的凸性

✓ **例1**：研究幂函数的凸性 $f(x)=x^p$，$x\ge 0$, $p>0$

解：计算导数 $f'(x)=px^{p-1}, f''(x)=p(p-1)x^{p-2}$，$x>0$

应用2阶导数判别法

1) 当 $0<p\le 1$ 时，$-f''(x)\ge 0$, $x>0$

$-x^p$在$[0,+\infty)$中是下凸函数, x^p是上凸函数

2) 当 $p\ge 1$ 时, $f''(x)\ge 0$, x^p在$[0,+\infty)$中是下凸函数 □

✓ **推论**：$\forall x_1,x_2,\cdots x_n\ge 0$

若 $0<p\le 1$, 则 $(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^p\ge \dfrac{1}{n}(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)$

若 $p\ge 1$, 则 $(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^p\le \dfrac{1}{n}(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)$

第10-2课：导数应用-函数的凸性

✓ **例2**：研究对数函数的凸性 $f(x)=\ln x,\ \ x>0$

解：计算导数 $f'(x)=x^{-1}, f''(x)=-x^{-2}<0,\ \ x>0$

据2阶导数判别法

$$-\ln x\text{在}(0,+\infty)\text{中是下凸函数}$$

$$\therefore \ln x\text{在}(0,+\infty)\text{中是上凸函数} \qquad \square$$

✓ **推论**：$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\ \ \forall x_1,x_2,\cdots x_n>0$

证：已知对数函数 lnx是上凸函数, 所以

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\ge\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)$$

$$=\ln[(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}]\ \ldots\ldots \qquad \square$$

第10-2课：导数应用-函数的凸性

- **例3**：研究函数的凸性 $f(x)=x^{-1}$，$x\neq 0$

  解：计算导数 $f'(x)=-x^{-2}, f''(x)=2x^{-3}$，$x\neq 0$

据2阶导数判别法

x^{-1}在$(0,+\infty)$ 中是下凸函数, 在$(-\infty,0)$ 中是上凸函数 □

- **推论**：$\forall x_1,x_2,\cdots x_n>0$

(#) $$\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\leq\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right),$$

  证：已知 $f(x)=x^{-1}$在$(0,+\infty)$ 中是下凸函数

所以 $$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]$$

这就是要证的不等式(#) □

例4：证明开区间上的凸函数处处连续。

证明：只需要证明对任意$x_0 \in (a, b)$，f在x_0连续。

由f凸$\Rightarrow$对$\forall x_1 < x_0 < x < x_2$,

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}(x-x_0) \le f(x)-f(x_0) \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}(x-x_0)$$

由夹逼性$\Rightarrow$ f在x_0连续。

第10课：导数应用-极值问题-函数凸性

- **预习** (下次课内容)：

  第3.6节 导数应用-L'Hospital法则

  第3.7节 导数应用-函数作图

- **作业** (本次课)：

  练习题3.5：6, 8, 9(2,5,6), 11, 15, 16, 18[自己练习], 19(1,3), 21*, 23*.

  问题3.3：3*. 问题3.4：2(F=f/g). 问题3.5：4*, 8*.