高等微积分

常微分方程

§4. 高阶线性常微分方程解的结构

n 阶线性常微分方程的标准形式为

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x),$$

其中 $a_0,\ldots,a_{n-1},f$ 均为区间 I 上的连续函数，函数 f 被称为该方程的非齐次项. 当 $f\equiv 0$ 时，相应的方程称为齐次方程.

- 存在与唯一: $\forall x_0 \in I$ 以及 $\forall \xi_0, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$, 在区间 I 上均存在唯一的解 $y = y(x)$ 使得
$$y^{(k)}(x_0) = \xi_k \ (0 \leqslant k \leqslant n-1).$$
- 齐次方程的解集: 齐次方程的所有解组成的集合是一个 n 维的线性空间.
- 非齐次方程的解集: 非齐次方程的通解就是非齐次方程的特解与齐次方程通解之和.

定义 1. 称函数 $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ 在 I 上线性相关, 如果存在不全为零的实数 $c_1, \ldots, c_n$ 使得 $\forall x \in I$, 均有 $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f(x) = 0$.
若不存在不全为零的实数 $c_1, \ldots, c_n$ 使 $\forall x \in I$, 均有 $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f(x) = 0$, 则称 $f_1, \ldots, f_n$ 在 I 上线性无关.

例 1. $1, x, \ldots, x^n$ 在任意区间上线性无关.

定义 2. 设 $f_1, f_2 \ldots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$. 定义

$$
\begin{aligned}
W(x) &:= W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) \\
&:= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

并称为 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 的 Wronsky 行列式.

定理 1. 如果 $f_1, f_2 \ldots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$ 在 I 上线性相关, 则 $\forall x \in I$, $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = 0$.

证明: 如果 $f_1, f_2 \ldots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$ 在 I 上线性相关, 那么存在不全为零的实数 $c_1, \ldots, c_n$ 使得 $\forall x \in I$, $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$, 对之求导得

$$c_1 f_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(k)}(x) = 0 \ (0 \leqslant k < n),$$

于是 $(c_1, \ldots, c_n)$ 为 n 阶线性方程组的非零解, 从而相应系数行列式 $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = 0$.

推论. 若 $\exists x_0 \in I$ 使得 $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$, 则 $f_1, \ldots, f_n$ 在 I 上线性无关.

定理 2. 假设 $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$ 为 n 阶齐次线性常微分方程在 I 上的解. 那么它们在 I 上线性相关当且仅当 $W(y_1, \ldots, y_n) \equiv 0$.

证明: 仅需证明充分性. 假设 $W(y_1, \ldots, y_n) \equiv 0$. 固定 $x_0 \in I$, 则有 $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = 0$, 由此可知 $\exists c_1, c_2, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ 不全为零使得

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots c_n y_n(x_0) = 0, \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

$\forall x \in I$, 我们定义 $y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$. 则 y 也为题设方程的解且满足

$$y^{(k)}(x_0) = 0 \ (0 \leqslant k \leqslant n-1).$$

由方程的解的唯一性可知 $y \equiv 0$, 故 $y_1, \ldots, y_n$ 在 I 上线性相关.

注: 证明充分性仅需要 $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = 0$.

定义 3. n 阶齐次线性常微分方程的 n 个线性无关解被称为该方程的基本解组.

例 2. 设 y_1, y_2, y_3 为二阶非齐次线性常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个特解. 问它们何时可以给出非齐次常微分方程的通解? 若能给出, 请给出通解的表达式.

解: 令 $z_1 = y_1 - y_3$, $z_2 = y_2 - y_3$, 那么 z_1, z_2 为相应齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的特解, 从而 y_1, y_2, y_3 能够给出非齐次微分方程的通解只需要 z_1, z_2 是上述齐次方程的线性无关解.

而这则等价于说

$$
\begin{aligned}
&0 \neq W(z_1, z_2) = z_1 z_2' - z_1' z_2 \\
= \ & (y_1 - y_3)(y_2' - y_3') - (y_1' - y_3')(y_2 - y_3) \\
= \ & (y_1 y_2' - y_1' y_2) + (y_2 y_3' - y_2' y_3) + (y_3 y_1' - y_3' y_1) \\
= \ & W(y_1, y_2) + W(y_2, y_3) + W(y_3, y_1).
\end{aligned}
$$

此时非齐次方程的通解为

$$y = y_3 + C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

总结：一阶常微分方程的解法

- 一阶方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right).$$

- 分离变量法: 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ 的解满足

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

若 $g(y_0) = 0$, 则 $y \equiv y_0$ 也为原方程的解.

可转化成一阶线性方程的一阶方程

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax+by+c)\ (b \neq 0)$: 首先作变换
$$u = ax + by + c,$$
再利用分离变量法.
- 齐次型 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x})$: 首先作变换 $u = \frac{y}{x}$, 然后再用分离变量法.

- 混合型: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$. 可转化为上述两种情形.

回顾: Bernoulli 方程

Bernoulli 方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$, 其中 α 为常数且不等于 0 或 1.

作变换 $z=y^{1-\alpha}$ 可得到一阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x).$$

若 $\alpha>0$, 则 $y\equiv 0$ 也为方程的解.

回顾：可降阶高阶常微分方程

- $y^{(n)} = f(x)$: 求 n 次原函数.
- $y^{(n)} = F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n-1)})$ $(k \geqslant 1)$: 令 $p(x) = y^{(k)}$, 由 $p^{(n-k)} = F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k-1)})$ 解出 $p = p(x)$, 再对 $y^{(k)} = p(x)$ 求 k 次原函数.
- $F\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$: 将 y 看成自变量, 令 $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 原方程变为 $F(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = 0$, 解出 $p = p(y)$, 再对 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$ 应用分离变量法.

回顾: n 阶线性非齐次常微分方程

考虑一般的 n 阶常微分线性方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

- 该方程的初值问题有唯一解.
- 齐次方程的解集为 n 维线性空间.

- 假设 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 为齐次方程的线性无关解 (称为基本解组). 则齐次方程的通解为

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

其中 $C_1, \ldots, C_n$ 为任意的常数.

- 设 z_0 为非齐次方程的特解. 则方程的通解为
$$y(x) = z_0(x) + C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x),$$
其中 $C_1, \ldots, C_n$ 为任意的常数.

- 设 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 为齐次方程的解. 则它们为线性无关当且仅当 Wronsky

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

例 3. 若 $1, x, e^x$ 为三阶齐次线性常微分方程的三个解. 求证它们为基本解组, 并求相应的三阶齐次线性常微分方程.

证明: 由题设可知

$$W(1, x, e^x) = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x \neq 0,$$

故 $1, x, e^x$ 线性无关, 也即它们构成基本解组.

它们所满足的三阶方程为

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x & y \\ 0 & 1 & e^x & y' \\ 0 & 0 & e^x & y'' \\ 0 & 0 & e^x & y''' \end{vmatrix} = e^x y''' - e^x y'',$$

由此立刻可得 $y''' - y'' = 0$.

注: 也可以令 $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$, 然后再从 y, y', y'', y''' 的表达式中消去 C_1, C_2, C_3, 由此可得到 y 所满足的常微分方程.

更一般地, 若 $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{C}^{(n)}(I)$ 在 I 上线性无关, 则它们必为下述 n 阶方程的基本解组:

$$
\begin{vmatrix}
y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) & y \\
y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) & y' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \\
y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}
\end{vmatrix} = 0.
$$

让我们继续....

§5. 常系数高阶线性常微分方程

n 阶线性常微分方程的标准形式为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

其中 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ 为常数, 而 $f \in \mathscr{C}(I)$. 函数 f 被称为该方程的非齐次项. 当 $f \equiv 0$ 时, 相应的方程被称为齐次方程.

出于简便, 下面仅考虑二阶线性常系数常微分方程, 对于高阶方程, 其方法和结论均类似.

二阶线性常系数齐次方程的求解

问题: 求解 $y'' + py' + qy = 0$, 其中 p, q 为常数.

尝试性思考: 考虑形如 $y = e^{\lambda x}$ 这样的解, 其中 λ 为常数. 带入原方程得 $(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0$. 如果 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 则 $y = e^{\lambda x}$ 为原方程的解.

定义 1. 称代数方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 为相应的齐次常微分方程的特征方程, 称其解为特征根, 而称 $\Delta = p^2 - 4q$ 为其判别式.

$\Delta > 0$ 的情形

如果 $\Delta > 0$, 则特征方程有两个互异实根 λ_1, λ_2, 从而 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ 为方程的解. 又

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2 \neq 0,$$

故 y_1, y_2 线性无关, 从而原齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

$\Delta = 0$ 的情形

如果 $\Delta = 0$, 则特征方程只有一个实根 $\lambda = -\frac{p}{2}$, 故 $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$ 为原方程的解. 令 $y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}$, 则

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}, \\ y_2'' &= -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} + (\frac{p}{2})^2 xe^{-\frac{p}{2}x}. \end{aligned}$$

从而 $y_2'' + py_2' = -\frac{1}{4}p^2xe^{-\frac{p}{2}x} = -qy_2$, 即 y_2 也为原齐次常微分方程的解.

大家可注意到

$$
\begin{aligned}
W(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\
= \ & e^{-\frac{p}{2}x}\left(e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2} x e^{-\frac{p}{2}x}\right) - \left(-\frac{p}{2} e^{-\frac{p}{2}x}\right) \cdot x e^{-\frac{p}{2}x} \\
= \ & e^{-px} \neq 0,
\end{aligned}
$$

则 y_1, y_2 线性无关, 从而原齐次方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{p}{2}x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

命题 1. 设 $p(x), q(x)$ 为实值函数, $f(x)$ 为复值函数, 而复值函数 $y = y(x)$ 满足非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

令 $u(x) = \operatorname{Re} y(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} y(x)$, 则

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = \mathrm{Re} f(x),$$
$$v'' + p(x)v' + q(x)v = \mathrm{Im} f(x).$$

证明: 分别考虑最初的那个方程的实部和虚部, 由此立刻可得所要结论.

$\Delta < 0$ 的情形

如果 $\Delta < 0$, 则特征方程有两个共轭的复特征根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 且 $\beta \neq 0$. 则 $e^{(\alpha+i\beta)x}$ 为原齐次方程的复解, 从而

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

为原齐次常微分方程的实解.

大家同样可注意到

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\ = &\ e^{\alpha x}\cos\beta x(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x) \\ &-(\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x)e^{\alpha x}\sin\beta x \\ = &\ \beta e^{2\alpha x} \neq 0, \end{aligned}$$

故 y_1, y_2 线性无关, 从而原齐次方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

评注

人们通常也考虑齐次常微分方程的复值通解:

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x},$$

这里 C_1, C_2 为任意的复常数. 上述函数取实值当且仅当 $C_1 = \overline{C_2}$, 此时我们重新得到了齐次方程的实值通解.

例 1. 求解初值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

解: 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, 它的特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. 因而通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$. 带入初始条件可得 $C_1 = 1$, $C_2 - C_1 = -2$. 于是原方程的解为 $y = (1 - x)e^{-x}$.

n 阶线性常系数齐次方程的求解

考虑 n 阶线性常系数齐次常微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0,$$

其中 $a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$ 为常数. 该常微分方程的特征多项式被定义为

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0.$$

假设该特征多项式不同的特征根为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, 重数为 $n_1, \ldots, n_k$, 则齐次方程的复值通解为

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{n_j - 1} C_{j,l} x^l e^{\lambda_j x},$$

其中 $C_{j,l}$ 为任意的复值常数. 为得到实值通解, 只需要针对复数值特征根 λ_j, 在上式中将 $e^{\lambda_j x}$ 及其共轭替换成 $e^{\lambda_j x}$ 的实部和虚部, 并让 $C_{j,l}$ 为任意的实常数.

例 2. 求解方程 $y''' - y'' - y' + y = 0$.

解: 该方程的特征方程为

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

注意到我们有

$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$

于是特征根为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. 从而所求齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x$.

二阶线性常系数非齐次方程的求解

从齐次方程的线性无关解 y_1, y_2 出发，由公式

$$z_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

可得非齐次方程的一个特解，进而得到非齐次方程的通解 $y = z_0 + C_1y_1 + C_2y_2$. 但通常很难计算 z_0. 仅在某些特殊的情形，我们才能得到通解的显式表达式.

特殊的二阶线性常系数方程的求解

考虑特殊的二阶线性常系数非齐次方程

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

其中 p, q 为实常数, 而 $f(x) = P_n(x)e^{\mu x}$, 这里 P_n 为 n 次多项式, $\mu \in \mathbb{C}$ 为常数. 我们将首先寻求复值解, 然后再借助前面的命题来得到相应的常微分方程的实值解.

利用待定系数法求非齐次方程的特解

- 如果 μ 不是齐次方程的特征根, 则会有特解 $z_0(x) = Q_n(x)e^{\mu x}$, Q_n 为待定 n 次多项式.
- 如果 μ 为齐次方程的一重特征根, 则有特解 $z_0(x) = Q_n(x)xe^{\mu x}$, Q_n 为待定 n 次多项式.
- 如果 μ 为齐次方程的二重特征根, 则有特解 $z_0(x) = Q_n(x)x^2e^{\mu x}$, Q_n 为待定 n 次多项式.

注: 通过将 z_0 带入非齐次方程来确定 Q_n.

例 3. 求解 $y''+y=\frac{1}{2}\cos x$.

解: 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$, 由此得 $\lambda=\pm i$. 则齐次方程的基本解组为 $\cos x$, $\sin x$. 非齐次项为 $f(x)=\frac{1}{2}\cos x$. 由此来考虑非齐次方程 $y''+y=\frac{1}{2}e^{ix}$. 由于 i 为齐次方程的一重特征根, 故非齐次方程有特解 $z_0=Axe^{ix}$, 则

$$\begin{aligned} z_0' &= A(1+ix)e^{ix}, \\ z_0'' &= iAe^{ix}+Ai(1+ix)e^{ix}=A(2i-x)e^{ix}, \end{aligned}$$

于是 $A(2i-x)e^{ix}+Axe^{ix}=\frac{1}{2}e^{ix}$, 从而 $A=-\frac{i}{4}$, 进而 $z_0=-\frac{i}{4}xe^{ix}$ 为非齐次方程

$$y''+y=\frac{1}{2}e^{ix}$$

的特解, 由此可知 $y_0=\frac{1}{4}x\sin x$ 为非齐次方程

$$y''+y=\frac{1}{2}\cos x$$

的特解, 故所求非齐次方程的通解为

$$y=\frac{1}{4}x\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

命题 2. 假设 z_1, z_2 分别满足下列非齐次方程

$$z_1'' + pz_1' + qz_1 = f_1(x),$$
$$z_2'' + pz_2' + qz_2 = f_2(x),$$

则 $z_0 = z_1 + z_2$ 为非齐次方程

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解.

证明: 利用常微分方程的线性性.

推广

由待定系数法及命题 1, 2, 可处理如下形式的非齐次项 $f(x)$ 及它们之间的常系数线性组合 (其中 P_n 为 n 次多项式, a, b 为实常数):

$$
\begin{aligned}
& P_n(x), \;\; P_n(x)e^{ax}, \\
& P_n(x)\sin bx = \operatorname{Im}\left(P_n(x)e^{ibx}\right), \\
& P_n(x)\cos bx = \operatorname{Re}\left(P_n(x)e^{ibx}\right), \\
& P_n(x)e^{ax}\sin bx = \operatorname{Im}\left(P_n(x)e^{(a+ib)x}\right), \\
& P_n(x)e^{ax}\cos bx = \operatorname{Re}\left(P_n(x)e^{(a+ib)x}\right).
\end{aligned}
$$

例 3. 求解 $y'' + y = \cos x \cos 2x$.

解: 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 由此得 $\lambda = \pm i$. 故齐次方程的基本解组为 $\cos x, \sin x$.
由于非齐次项为 $\cos x \cos 2x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 3x$,
这促使我们考虑非齐次方程

$$y'' + y = \frac{1}{2}e^{ix}, \quad y'' + y = \frac{1}{2}e^{3ix}.$$

前者有特解 $z_1 = -\frac{i}{4}xe^{ix}$. 由于 $3i$ 不是其齐次方程的特征根, 故后者有特解 $z_2 = Ae^{3ix}$, 于是

$$A(3i)^2e^{3ix} + Ae^{3ix} = \frac{1}{2}e^{3ix},$$

故 $A = -\frac{1}{16}$, 从而 $z_2 = -\frac{1}{16}e^{3ix}$. 则所求通解为

$$y = \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{16}\cos 3x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

同学们辛苦了！