

## 样题 (一)

说明:

1. 样题仅用于学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异, 样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。

题 1. (5分) 把矩阵  $A$  的第一行的2倍加到第二行, 之后互换第一列和第二列, 得到的矩阵是  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 。那么, 矩阵  $A$  是什么?

题 2. (5分) 试给出一个2阶上三角矩阵  $U$ , 使得  $U$  不是对角阵, 且  $U^{-1} = U$ 。

题 3. (5分) 假设  $A_1, A_2, A_3, A_4$  是同阶可逆方阵,  $C = A_1 A_2 A_3 A_4$  是它们的乘积, 试用  $C^{-1}$  和  $A_1, A_2, A_4$  表示  $A_3^{-1}$ 。

题 4. (8分) 试写下两个非零的2阶方阵  $A, B$  使得  $A^2 = B^2 = 0$ 。所有满足  $A^2 = 0$  的2阶方阵的全体是否是  $M_2(\mathbb{R})$  的线性子空间? 若是请证明, 若不是请说明原因。

题 5. (8分) 设  $A \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ , 且线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有三组解  $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ , 试证明  $\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \end{bmatrix}$  也是该方程组的解。

题 6. (8分) 设  $A$  是  $3 \times 4$  阶矩阵,  $A$  的零空间  $N(A)$  是  $\left\{ c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ 。

求  $\text{rref}(A)$ , 这里  $\text{rref}(A)$  指  $A$  的 *reduced row echelon form*。

题 7. (10分) 求下面线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 & = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 & = 2 \end{cases}$$

题 8. (20分) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ .

1. (6分) 证明:  $A$  可逆的充分必要条件是  $a, b, c$  两两不同。

2. (6分) 当  $A$  可逆时, 求  $A$  的  $LU$  分解。

3. (8分) 当  $a = 1, b = 2, c = 3$  时, 求  $A^{-1}$ 。

题 9. (6分) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ .

1. (2分) 把  $A$  写成  $\alpha\beta^T$  的形式, 其中  $\alpha, \beta$  均是列向量。

2. (4分) 计算  $A^{2019}$ 。

题 10. (8分) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ . 求所有与  $A$  可交换的矩阵, 即所有满足  $AB = BA$  的矩阵  $B$ 。

题 11. (12分) 设  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . 证明:

1. (3分)  $A^T A$  是对称矩阵;

2. (6分) 设  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  是非零向量, 且  $c \in \mathbb{R}$  满足  $A^T A \mathbf{x} = c \mathbf{x}$ . 证明  $c \geq 0$ ;

3. (3分) 证明  $A^T A$  的对角线元素都不小于零。

题 12. (5分) 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , 且  $A^k = 0$ , 其中  $k$  是一个正整数。

1. (2分) 证明  $I_n - A$  可逆,

2. (3分) 若  $AB + BA = B$ , 证明  $B = 0$ 。