第5课：函数的极限：概念-性质-计算

第2章 函数及其连续性

- **内容：**

  第2.4节 函数的极限

第5-1课：函数极限的概念

函数极限的概念和性质

- **目的**：研究函数 f(x)在某一点x_0附近的性质(局部性质)

【注意】不是$f(x_0)$的值， $f(x_0)$甚至可以不存在！

- **约定**：函数f在x_0的附近有定义(除了x_0之外)

也即 $f: D \to \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$, 只要 $0 < |x - x_0| < \eta$ 都有 $x \in D$

- **极限**：设f在x_0的附近有定义, $A \in \mathbb{R}$, 如果

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{使得当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时 } |f(x) - A| < \varepsilon$$

则称 x 趋于x_0时 $f(x)$ 的极限为A, 或 $f(x)$趋于A, 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (x \to x_0)$$

【注意】在上面"x趋于x_0"的极限过程中 $x \neq x_0$（很重要！）

第5-1课：函数极限的概念

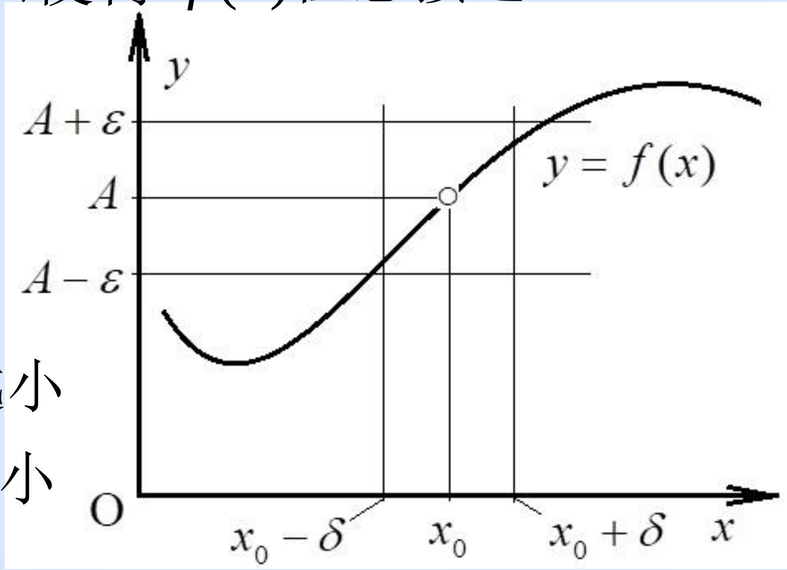
- **极限的含义：** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$
  1) $\forall\varepsilon>0$ …… $|f(x)-A|<\varepsilon$ —— 可以任意小
  2) $\exists\delta>0$ —— 通常与ε 有关
  3) $0<|x-x_0|<\delta$ —— x 充分接近 x_0时

综上，只要x充分接近x_0，就可以使得 $f(x)$任意接近A

此外 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 等价于

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

- **几何含义：** 见右图 ▸ ▸ ▸
  1) 一般而言 ε越小需要的δ也越小
  2) 在x_0附近曲线越陡需要的δ越小



第5-1课：函数极限的概念

- **单侧极限：**

  左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ —— x从左侧趋于x_0时$f(x)$趋于A

  右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ —— x从右侧趋于x_0时$f(x)$趋于A

  以右极限为例，其定义为：

  $$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\text{使得当 } 0<x-x_0<\delta \text{ 时 } |f(x)-A|<\varepsilon$$

- **记号：** 当相应的单侧极限存在时，分别记左右极限值

  $$f(x_0-)=\lim_{x\to x_0^-} f(x),\quad f(x_0+)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

➢ **推论：** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

证明留作练习 □

第5-1课：函数极限的概念

✓ **例1**：考虑函数 $f(x)=x$，验证 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$

解：$\forall \varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|x-x_0|<\varepsilon$ □

✓ **例2**：考虑函数 $f(x)=c$，验证 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

解：$\forall \varepsilon>0$，对所有 x 都有 $|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$ □

✓ **例3**：考虑 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=?$

解：先研究单侧极限，注意 $|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1,\qquad \therefore \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\text{ 不存在} \quad □$$

多选题 1分

设置

在极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 定义中，

为什么要求 $x \neq x_0$ ？

A 因为 $f(x_0)$ 可能没定义

B 因为可能 $f(x_0) \neq A$

C 因为 $f(x_0)$ (无论存在与否) 不影响极限值

D 因为数学家的习惯——追求完美

提交

第5-2课：函数极限的性质

- **函数极限的性质** (类似数列极限的性质)

➢ **唯一性**：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则极限值唯一

证：令 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$

注意 $|A-B|\le|f(x)-A|+|f(x)-B|$

由此可导出 $\forall\varepsilon>0,\ |A-B|<\varepsilon,\ \therefore\ A=B$ □

➢ **有界性**(局部)：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则 $\exists\delta>0$, 使得

$$\forall 0<|x-x_0|<\delta,\ |f(x)|\le 1+|A|$$

即在x_0附近(除去x_0之外) $f(x)$有界

证：注意 $|f(x)|\le|f(x)-A|+|A|$ …… □

第5-2课：函数极限的性质

- **保号性**：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

  1) 若在x_0附近(除去x_0之外) $f(x)\ge 0$, 则$A\ge 0$

  2) 若$A>0$, 则$\exists\delta>0$, 使得$0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>0$

  证：已知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得$0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

  1) 据假设不妨令上面的 $f(x)\ge 0$, 从而$A+\varepsilon\ge 0$

注意 $\varepsilon>0$ 是任意的, 这就导出$A\ge 0$

  2) 当$A>0$时上面可取$\varepsilon=A/2$, 对于相应的$\delta>0$

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 便有 $f(x)>A-A/2>0$ □

- **注**：$\left.\begin{array}{l}\text{1)中即便 } f(x)>0 \text{ 也无法保证 } A>0 \\ \text{2)中 } A>0 \text{ 不能改为 } A\ge 0\end{array}\right\}$ 请自己思考/举例

第5-2课：函数极限的性质

- **四则运算**：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 则

  1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

  2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$

  3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)=A/B$，只要$B\neq 0$

  证：以2)为例 $f(x)g(x)-AB=f(x)[g(x)-B]+[f(x)-A]B$

  $\therefore\ |f(x)g(x)-AB|\le|f(x)|\cdot|g(x)-B|+|f(x)-A|\cdot|B|$

由已知 $\exists\delta_0>0$,使得$0<|x-x_0|<\delta_0$时$|f(x)|\le 1+|A|$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1,\delta_2>0$, 使得

$0<|x-x_0|<\delta_1$时$|f(x)-A|<\varepsilon/[2(1+|B|)]$

$0<|x-x_0|<\delta_2$时$|g(x)-B|<\varepsilon/[2(1+|A|)]$

取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时………… □

第5-2课：函数极限的性质

- **推论 (保序性)**：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

  1) 若在x_0附近(除去x_0之外) $f(x)\ge g(x)$, 则$A\ge B$

  2) 若$A>B$, 则$\exists\delta>0$, 使得$0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>g(x)$

  证：对于函数 $f(x)-g(x)$ 应用四则运算性质和保号性质 □

- **例4**：设$P(x)$为多项式函数，求$\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=?$

  解：令 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$x\in\mathbb{R}$

利用极限的四则运算性质和例1-例2结果

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=\lim_{x\to x_0} a_0x^n+\lim_{x\to x_0} a_1x^{n-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0} a_{n-1}x+\lim_{x\to x_0} a_n$$

$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n=P(x_0) \quad \square$$

- **例5**：$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$为有理函数, $Q(x_0)\ne 0$, 则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

第5-2课：函数极限的性质

- **子列性质** (回忆收敛数列子列性质)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：

对于任何数列 $\{x_n\}$满足 $x_n\neq x_0$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

证：必要性较容易(自己练习)，下面证充分性：

假若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$, 则$\exists\varepsilon_0>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n$ 满足

$$0<|x_n-x_0|<1/n,\ \ |f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$$

显然数列$\{x_n\}$满足 $x_n\neq x_0$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，但$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$ □

- **推论**：若有两个数列$\{x_n\},\{y_n\}$满足 $x_n\neq x_0, y_n\neq x_0$ 且

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=B\neq A$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

第5-2课：函数极限的性质

✓ **例6**：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})=?$

解：记 $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$，注意 $f(\frac{1}{n\pi})=0,\ f(\frac{1}{2n\pi+(\pi/2)})=1$

取 $x_n=\frac{1}{n\pi},\ y_n=\frac{1}{2n\pi+(\pi/2)},\ n=1,2,\cdots$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0,\quad f(x_n)=0,\ f(y_n)=1,\ n=1,2,\cdots$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=1$

根据函数极限的子列性质，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在 □

已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}|x|$ 存在，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x^2})$ 不存在，极限 $\lim\limits_{x\to 0}|x|\sin(\frac{1}{x^2})$ 是否存在？

A 根据极限四则运算性质，该极限不存在

B 根据子列性质可知，该极限不存在

C 根据极限四则运算性质，该极限存在

D 可以直接验证，该极限存在

第5-3课：函数极限的计算

- **夹逼原理**：设在x_0附近(除去x_0之外)函数 f, g, h 满足

$$f(x)\le g(x)\le h(x)$$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$

证：留作练习 (可参考数列夹逼原理的证明) □

✓ **例7**：已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 求证 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=|A|$

证：考虑利用夹逼原理，注意三角不等式导出

$$\big||f(x)|-|A|\big|\le |f(x)-A|$$

由极限的四则运算性质得$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$,

易见这等价于 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-A|=0$, 应用夹逼原理得

$$\lim_{x\to x_0}\big||f(x)|-|A|\big|=0,\ \therefore \lim_{x\to x_0}(|f(x)|-|A|)=0,\cdots\cdots \quad □$$

第5-3课：函数极限的计算

✓ **例8**：验证 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1\pm x}=1$

解：注意 $|\sqrt{1\pm x}-1|=\dfrac{|x|}{\sqrt{1\pm x}+1}\le|x|$

已知 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，应用夹逼原理 $\lim\limits_{x\to 0}|\sqrt{1\pm x}-1|=0$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}(\sqrt{1\pm x}-1)=0,\qquad \lim_{x\to 0}\sqrt{1\pm x}=1 \qquad \square$$

✓ **例9**：计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=?$

解：注意 $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

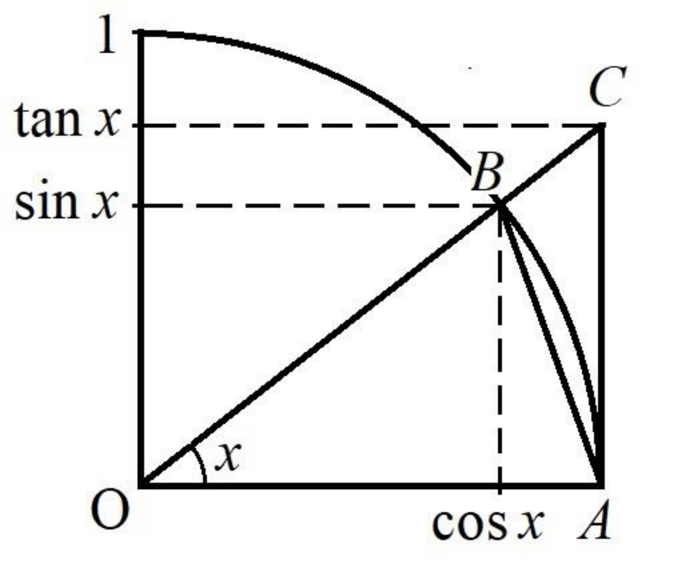
应用例8结论和极限的四则运算性质

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+1}=1 \qquad \square$$

第5-3课：函数极限的计算

✓ **例10：** 求证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证：考察右图中单位圆弧(半径1)



任取 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 有以下面积关系

$$\Delta OAB\text{ 的面积}\le\text{扇形}OAB\text{ 的面积}\le\Delta OAC\text{ 的面积}$$

也即 $\dfrac{1}{2}\sin x\le\dfrac{1}{2}x\le\dfrac{1}{2}\tan x=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{\cos x}$

这等价于 $\dfrac{\cos x}{\sin x}\le\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{\sin x}$, $\therefore\ \cos x\le\dfrac{\sin x}{x}\le 1$

当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 时, 利用函数的奇偶性有

$$\cos x=\cos(-x)\le\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{\sin x}{x}\le 1$$

当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时

$$\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1$$

第5-3课：函数极限的计算

✓ **例10 (续)**：已知 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时有 $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$

为应用夹逼原理，由上式结合三角公式可得

$$0 \le 1-\frac{\sin x}{x} \le 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \le 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2$$

最后一个不等式用到了前面导出的 $0<|\sin x| \le |x|$

整理得 $$0 \le 1-\frac{\sin x}{x} \le 1-\cos x \le \frac{1}{2}x^2$$

令 $x \to 0^+$ 便得 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\frac{\sin x}{x}) = \lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x) = 0$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ （顺便得到 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$） □

Prop6.(单调收敛原理)

(1) f在(a,b)上的单增有上界, 则$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\sup\limits_{a<x<b} f(x)$;

(2) f在(a,b)上的单减有下界, 则$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\inf\limits_{a<x<b} f(x)$;

(3) f在(a,b)上的单增有下界, 则$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\inf\limits_{a<x<b} f(x)$;

(4) f在(a,b)上的单减有上界, 则$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\sup\limits_{a<x<b} f(x)$.

Proof. 只证(1),其它情形同理可证. $\{f(x):x\in(a,b)\}$

非空有上界, 从而有上确界

$$A=\sup\{f(x):x\in(a,b)\}.$$

由上确界的定义,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (a,b), s.t. \quad f(x_1) > \mathrm{A} - \varepsilon,$$

且

$$f(x) \le \mathrm{A}, \quad \forall x \in (a,b).$$

$f\uparrow$,则$\forall x \in (x_1, b)$,有

$$\mathrm{A} - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le \mathrm{A}.$$

故$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \mathrm{A}$.□

Thm. 证明:(a,b)上的单调函数在每一点处左右极限都存在.

Proof.不妨设f在(a,b)上单增, $x_0\in(a,b)$, 往证 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在(同理可证 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在).

$f\uparrow$, $\{f(x): x\in(a,x_0)\}$非空有上界$f(x_0)$, 从而有上确界

$$A=\sup\{f(x): x\in(a,x_0)\}.$$

由上确界的定义,

$$\forall\varepsilon>0, \exists x_1\in(a,x_0), s.t.\quad f(x_1)>A-\varepsilon,$$

且

$$f(x)\le A,\quad \forall x\in(a,x_0).$$

$f\uparrow$, $\forall x\in(x_1,x_0)$, 有$A-\varepsilon<f(x_1)\le f(x)\le A$. 故 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.□

Ex. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^b}=0\ (a>1, b>0).$

Proof. $0<\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{\ln\left([x]+1\right)}{[x]}\le\dfrac{\ln 2}{[x]}+\dfrac{\ln[x]}{[x]},\quad \forall x>1.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln 2}{[x]}+\frac{\ln[x]}{[x]}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{[x]}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln[x]}{[x]}=0.$$

由夹挤原理, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0.$ 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x}=\dfrac{1}{\ln a}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^b}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\log_a y^{1/b}}{y}=\frac{1}{b}\lim_{y\to+\infty}\frac{\log_a y}{y}=0.\square$$

Remark. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^b \log_a x = 0 \ (a>1, b>0)$.

Ex. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^b}{a^x} = 0 \ (a>1, b>0)$.

Proof. $0 < \dfrac{x^b}{a^x} \le \dfrac{([x]+1)^b}{a^{[x]}} \le \dfrac{(2[x])^b}{a^{[x]}} \le \dfrac{2^b[x]^b}{a^{[x]}}, \forall x > 1.$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^b[x]^b}{a^{[x]}} = 2^b \lim_{x\to+\infty} \frac{[x]^b}{a^{[x]}} = 0.$$ 由夹挤原理, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{a^x} = 0$.□

Ex. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{a^x}{x^x} = 0 \ (a>0, a\ne 1)$.

Proof. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^x} = \lim\limits_{y\to+\infty} e^{x(\ln a - \ln x)} = e^{(+\infty)\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$.□

Thm. f在$U(x_0,\rho)$中有定义,则以下命题等价:

(1)$\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,\forall x,y\in U(x_0,\delta)$,有$\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$;

(2)$\exists \mathrm{A}\in\mathbb{R}$,对$U(x_0,\rho)$中任意收敛到$x_0$的点列$\{x_n\}$,有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\mathrm{A};$$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}.$

Remark. (1) $\Leftrightarrow$ (3) (函数极限的Cauchy收敛原理)

Remark. (2) $\Leftrightarrow$ (3) (用数列的极限来研究函数的极限)

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 设$x_n \in U(x_0,\rho), \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. $\forall \varepsilon > 0$, 由(1),

$$\exists \delta > 0, \forall x, y \in U(x_0,\delta), \text{有} \left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon.$$

对此δ, 因$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\exists N, s.t.\quad x_n \in U(x_0,\delta), \quad \forall n > N.$

于是 $\left| f(x_n) - f(x_m) \right| < \varepsilon, \qquad \forall n, m > N.$

故$\{ f(x_n) \}$为Cauchy列, 收敛, $\exists \mathrm{A} \in \mathbb{R}, s.t. \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \mathrm{A}.$

设$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$, 同理$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \mathrm{B}$. 只要证$\mathrm{A} = \mathrm{B}$即可.

构造点列$\{z_n\}$: $z_{2n-1} = x_n,\ z_{2n} = y_n$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$, $\{ f(z_n) \}$

收敛, 且 $\mathrm{A} = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_{2n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_{2n}) = \mathrm{B}.$

$(2)\Rightarrow(3)$:

$$\text{设}\lim_{x\to x_0} f(x)\neq \mathrm{A}.\text{则}\exists\varepsilon_0>0,\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n\in U(x_0,\frac{1}{n}),s.t.$$

$$\left|f(x_n)-\mathrm{A}\right|>\varepsilon_0.$$

$$\text{此时},\lim_{n\to\infty} x_n=x_0,\text{但}\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq \mathrm{A},\text{与(2)矛盾}.$$

$(3)\Rightarrow(1)$:略.□

Remark. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$,则

- $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \mathrm{A} \neq \mathrm{B} = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;
- $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

Ex. Dirichlet函数$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} D(x)$ __不存在__, $\lim\limits_{x\to x_0^+} D(x)$ __不存在__, $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ __不存在__,

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Ex. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ __不存在__.

Proof. $x_n=\frac{1}{2n\pi}, y_n=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$,

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=0,$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{y_n}=1$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. □

Ex. (1) $\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$, (2) $\lim_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$.

Proof. $\forall \{x_n\}, x_n \to x_0$, 有 $\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^{x_0}, \lim_{n\to\infty} \ln x_n = \ln x_0$. □

Thm. $\lim_{x\to x_0} u(x) = a, \lim_{x\to x_0} v(x) = b, a^b$有意义, 则$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$.

Proof. $\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)}$

$$= e^{\lim_{x\to x_0}\left(v(x)\ln u(x)\right)} = e^{\lim_{x\to x_0} v(x)\cdot \lim_{x\to x_0} \ln u(x)} = e^{b\ln a} = a^b. \square$$

Remark. $\lim_{x\to x_0} \sqrt{u(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} u(x)}$, $\lim_{x\to x_0} a^{u(x)} = a^{\lim_{x\to x_0} u(x)}, \cdots$

1^{∞}型极限

Ex. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

Proof. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right\}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}=e^{-\frac{1}{2}}.\square$$

第5课：函数的极限：概念-性质-运算

- **预习** (下次课内容)：

  第2.4-2.5节 复合函数的极限与无穷远处的极限

  第2.6节 无穷大与无穷小及其比较

  第2.7节 连续函数-概念

- **作业** (本次课)：

  练习题2.4：1-2[自己练习], 3(3,4), 4(3,5), 5, 7*, 9, 11(1,3,5,7-10), 12*.