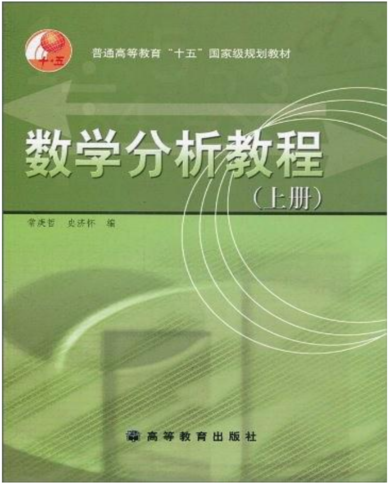
秋季学期微积分 A (1)课程

邹文明

第四章: Taylor 定理


普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学分析教程
（上册）
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

第四章　Taylor 定理

定理 1. (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

假设 $n \geqslant 1$ 为整数, $x_0 \in \mathbb{R}$, $B(x_0)$ 为 x_0 的邻域, 函数 $f: B(x_0) \to \mathbb{R}$ 为 $n-1$ 阶可导且在点 x_0 为 n 阶可导. 则当 $x \to x_0$ 时,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

注: 令 $r_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, 则该定理等价于说 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

通常将 $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
叫作 f 在点 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式.

证明: 由于 r_n 为 $n-1$ 阶可导, $r_n^{(n)}(x_0)$ 存在且

$$r_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0),$$

故 $r_n^{(n-1)}(x_0) = 0 = r_n^{(n)}(x_0)$. 由 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

因此所证结论成立.

注: 当 $x_0 = 0$ 时, 该公式也称为 Maclaurin 公式. 二者可通过变换 $x \mapsto x - x_0$ 联系起来.

带 Peano 余项的基本 Taylor 公式

当 $x \to 0$ 时，我们有

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
- $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$, $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.
- $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$.
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$.

$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

例 1. 求 $f(x)=\sin^2 x$ 的 Maclaurin 展式.

解: 当 $x\to 0$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+o\big((2x)^{2n}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+o\big(x^{2n}\big).
\end{aligned}
$$

例 2. 求函数 $f(x)=\frac{1}{1+x-x^2}$ 在点 $x_0=\frac{1}{2}$ 的一般 Taylor 多项式.

解: 令 $t=x-\frac{1}{2}$, 则我们有

$$f(x)=\frac{1}{1+(t+\frac{1}{2})-(t+\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{\frac{5}{4}-t^2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{5}t^2}.$$

于是所求一般 Taylor 多项式为

$$\frac{4}{5}\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{4}{5}t^2)^k=\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{4}{5})^{k+1}(x-\tfrac{1}{2})^{2k}.$$

例 3. 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}$.

解: $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(-\frac{1}{3}+o(1)\right)}{x^3}=-\frac{1}{3}$$

例 4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n^2}$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\log\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\log\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)}{\frac{1}{n}} - 1\right) = -\frac{1}{6},$$

因此我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n^2} = e^{-\frac{1}{6}}$.

例 5. 计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\sin^2 x}-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2}$.

解:
$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\sin^2 x}-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\Big(\big(1+\sin^2 x+o(\sin^2 x)\big)$$
$$-\Big(1-\frac{1}{2!}(2\sqrt{x})^2+\frac{1}{4!}(2\sqrt{x})^4+o(x^2)\Big)-2x\Big)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\Big(\sin^2 x-\frac{2}{3}x^2\Big)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

例 6. 求 $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ 使得极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax^k} - \cos x^2}{x^8}$ 存在且有限, 随后计算该极限.

解: 当 $x \to 0$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
\cos x^2 &= 1 - \frac{1}{2!}(x^2)^2 + \frac{1}{4!}(x^4)^2 + o(x^8), \\
e^{ax^k} &= 1 + ax^k + \frac{1}{2!}(ax^k)^2 + o(x^{2k}), \\
e^{ax^k} - \cos x^2 &= ax^k + \frac{a^2}{2}x^{2k} + o(x^{2k}) \\
&\quad + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4!}x^8 + o(x^8).
\end{aligned}
$$

于是由题设可知, 我们有

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^k}-\cos x^2}{x^8}\cdot x^4 \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{ax^k+\frac{a^2}{2}x^{2k}+o(x^{2k})+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4!}x^8+o(x^8)}{x^4} \\
&= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{ax^k+\frac{a^2}{2}x^{2k}+o(x^{2k})}{x^4}.
\end{aligned}$$

由此立刻可得 $k=4$, $a=-\frac{1}{2}$,

从而我们有

$$
\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^k}-\cos x^2}{x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^8}\Big(-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{8}x^8+o(x^8)
$$

$$
+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4!}x^8+o(x^8)\Big)=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}.
$$

例 7. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$.

解: 由题设可知

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36,
\end{aligned}$$

进而我们可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$.

定理 2. (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

假设 $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathscr{C}^{(n)}[a,b]$ 在 (a,b) 上 $n+1$ 阶可导, 那么 $\forall x_0, x \in [a,b]$ $(x_0 \neq x)$, 存在 ξ 严格介于 x_0, x 之间使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中称余项 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 Lagrange 余项.
通常也将 ξ 写成 $x_0+\theta(x-x_0)$, $\theta \in (0,1)$.

证明: 不失一般性, 设 $x > x_0$. $\forall t \in [x_0, x]$, 令

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\ G(t) = (x-t)^{n+1}.$$

则 $F \in \mathscr{C}[x_0, x]$ 在 (x_0, x) 上可导. $\forall t \in [x_0, x]$,

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$- - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \cdot (-1) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

$G'(t) = -(n+1)(x-t)^n$. 又 $F(x) = G(x) = 0$, 则由 Cauchy 中值定理可知, $\exists \xi \in (x_0, x)$ 使得

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

即 $F(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} G(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

故所证结论成立.

推论. 如果 $f \in \mathscr{C}^{(n)}[a,b]$ 在 (a,b) 上的 $n+1$ 阶导数恒为零, 则 f 为次数不超过 n 的多项式.

带 Lagrange 余项的基本 Taylor 公式 $(0 < \theta < 1)$

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin(\theta x)}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin(\theta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$

- $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$.
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

例 8. $\forall x \in \mathbb{R}$, 求证: $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

证明: 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可得知,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^{\theta x}}{4!} x^4 \\ &\geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

例 9. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 若 $x \neq y$, 求证:

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y\right| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $f(x) = \sin x$, 那么 f 为初等函数, 因此为无穷可导. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 当 $x \neq y$ 时, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 存在 ξ 严格介于 x, y 之间使得我们有

$$f(x) = f(y) + f'(y)(x - y) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - y)^2.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin y + (x-y)\cos y \\ &\quad -\frac{1}{2}(x-y)^2 \sin \xi,\end{aligned}$$

由此我们可立刻导出

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y} - \cos y\right| &= \frac{1}{2}|(x-y)\sin \xi| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|x-y|.\end{aligned}$$

例 10. 若 $f \in \mathscr{C}^{(2)}[-1,1]$ 在 $(-1,1)$ 上三阶可导，并且使得 $f(1)=1$, $f(-1)=0$, $f'(0)=0$, 求证: $\exists \xi \in (-1,1)$ 使得 $f'''(\xi)=3$.

证明: 由带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展式知，存在 $\xi_1 \in (-1,0)$, $\xi_2 \in (0,1)$ 使得我们有

$$\begin{aligned} f(-1) &= f(0) - f'(0) + \frac{1}{2!}f''(0) - \frac{1}{3!}f'''(\xi_1), \\ f(1) &= f(0) + f'(0) + \frac{1}{2!}f''(0) + \frac{1}{3!}f'''(\xi_2), \end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6,$$

进而由 Darboux 定理可知 $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) = 3.$$

因此所证结论成立.

祝大家期中考试取得圆满成功!