《离散数学》第一次作业

1 求满足 $x_1+x_2+\cdots+x_k \le n$ 的有序非负整数组 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 的数目. (提示: 等价于找正整数 $y_i = x_i+1$ 满足 $y_1+y_2+\cdots+y_k \le n+k$, 再转化为 $\{y_i\}$ 的部分和序列)

2 从 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ 中选出 r 个数, 要求选出的数中没有两个数相邻. 求满足条件的选法的总数. (提示: 要求取 $x_1<x_2<\ldots<x_r$ 两两不相邻, 等价于取 $x_1<x_2-1<x_3-2<\cdots<x_r-(r-1)$)

3 绕着圆桌均匀放置着 n 个座位, 我们将数字 $1,2,\ldots,r$ 依顺时针顺序放到这些座位上(每个座位上至多放一个数字), 要求 1 与 2 的座位不相邻, 2 与 3 的座位不相邻, ..., $r-1$ 与 r 的座位不相邻, r 与 1 的座位不相邻. 如果两种这样的放置方式可以通过旋转从一种变成另一种, 则视它们为同样的放置方式. 在这种意义下, 一共有多少种不同的放置方式?(提示: 等价于找正整数 $y_1,\ldots,y_r$ 满足 $y_1+\cdots+y_r=n-r$)

4 当 A 遍 $[n]$ 的所有子集时, 计算和式 $\sum_{A\subseteq[n]}|A|$ 的值.

5 证明:

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^a C_{n-k}^b = C_{n+1}^{a+b+1}.$$

(提示: 一个可能的证法是考虑 $[n+1]$ 的 $a+b+1$ 元子集 $\{x_1<x_2<\ldots<x_{a+b+1}\}$ 的数目, 并按照 x_{a+1} 的值分类)

6 (1) 给定正整数 n 与 k, 求有序组 $(A_1,\ldots,A_k)$ 的数目, 其中 $A_1,\ldots,A_k\subseteq[n]$ 且满足 $A_1\cup\ldots\cup A_k=[n]$.(提示: 将 $A_1,\ldots,A_k$ 的特征向量排成一个 $k\times n$ 的 0,1 表格. 可逐列的构造此表格, 再用乘法原理)

(2) 求有序组 (B_1,B_2) 的数目, 其中 $B_1,B_2\subseteq[n]$ 且满足 $B_1\cap B_2=\emptyset$.

7 设 $f:[n]\to[n]$ 是双射. 以 $1,2,\ldots,n$ 为顶点画一个图: 如果 $f(i)=j$, 则画一个从 i 指向 j 的箭头, 把所有这样的 n 个箭头都画出, 得到图 G. 如果顶点 $i_1,i_2,\ldots,i_k$ 之间的箭头为

$$i_1\to i_2\to\cdots\to i_k\to i_1,$$

则称 $i_1,i_2,\ldots,i_k$ 构成一个长度为 k 的 "有向圈".

(1) 证明: G 可以分拆成若干个互不相交的 "有向圈" 的并.(提示: 从任何元素 i 出发, 沿着箭头前进 $i\to f(i)\to f^{(2)}(i)\to\cdots$, 由元素的有限性, 上述走法一定会回到某个经过的顶点, 再由 f 是单射可知一定只能回到 i, 由此得到一个有向圈. 删掉此有向圈, 做类似的推理)

(2) 设 f 确定的图 G 分解成 m_1 个长为 1 的有向圈, m_2 个长为 2 的有向圈,..., m_n 个长为 n 的有向圈, 其中 $m_1,\ldots,m_n$ 是非负整数, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} im_i=n$. 证明: 这种 f 的总数目为

$$\frac{n!}{(m_1)!(m_2)!\cdots(m_n)!1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}}=\frac{n!}{(\prod_{i=1}^{n}(m_i)!)\cdot(\prod_{i=1}^{n}i^{m_i})}.$$

(提示: 构造 f 等价于: 先把 $[n]$ 分解为 m_1 个 1 元组, m_2 个 2 元组,..., m_n 个 n 元组; 其次把每个组用箭头连成有向圈, 对于 i 元组, 将它连成有向圈的方法数目为 $(i-1)!$)