习题课材料（五）

习题 1. 梳理任意固定矩阵行秩等于列秩的证明过程以及线性方程组求解理论。

习题 2. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 1，证明：存在非零向量 $a\in\mathbb{R}^m, b\in\mathbb{R}^n$，使得 $A=ab^{\mathrm{T}}$。

习题 3. 设 A,B,C 分别为 $m\times n, n\times k, k\times s$ 矩阵，证明：

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\leq\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B).$$

问题 4. 构造矩阵 A,B,C 使得：

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & C\end{bmatrix}\right)>\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(C).$$

习题 5. 证明反对称矩阵的秩不能是 1。

习题 6. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_t$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的解，其中 $b\neq 0$，证明：$c_0x_0+c_1x_1+\cdots+c_tx_t$ 也是解当且仅当 $c_0+c_1+\cdots+c_t=1$。

习题 7. 对于 n 阶方阵 A，求证：$A^2=A$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(\mathrm{I}_n-A)=n$。

习题 8 (♡). 线性方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当 $\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\ b^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ 无解。

习题 9 (♡). 证明多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

的根中有 k 个 n 次单位根的充要条件是矩阵

$$\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0\end{bmatrix}$$

的秩为 $n-k$。

习题 10. 教材练习 2.3.14。