高等微积分

邹文明

第七章： 定积分

回顾：Riemann 积分的几个定理

定理 1.(Cauchy 不等式) 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x\right).$$

积分 Hölder 不等式

定理 2. 若 $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$, $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

定理 3. (积分第一中值定理)
若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得我们有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

同学们辛苦了!

定理 4′. (广义积分第一中值定理) 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, $g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且 g 不变号, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 由于 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $fg \in \mathscr{R}[a,b]$. 设 f 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M, m. 又 g 在 $[a,b]$ 上不变号, 不失一般性, 由此我们可以假设 $g \geqslant 0$, 否则考虑 $-g$.

则 $\forall x \in [a, b]$, 我们有

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x),$$

进而我们就有

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 此时 $\forall \xi \in [a,b]$, 所证结论成立. 若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, 则

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant M.$$

由连续函数最值定理与介值定理知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = f(\xi)$. 故所证结论成立.

例 4. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=0.$

证明: $\forall x\geqslant 1$, 定义 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则 f 连续, 从而 $\forall n\geqslant 1$, 由积分中值定理知 $\exists\xi_n\in[n,n+\pi]$ 使得

$$\Big|\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\Big|=\Big|\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\pi\Big|\leqslant\frac{\pi}{\xi_n}\leqslant\frac{\pi}{n},$$

于是由夹逼原理可知所证结论成立.

§7.3. 微积分基本定理

定义 1. 假设 J 为区间, 而 $F, f : J \to \mathbb{R}$ 为函数. 若 F 在 J 上连续, 在 J 的内部可导且 $F' = f$, 则称 F 为 f 的一个原函数.

定理 1. 设 $f \in \mathscr{R}[a, b]$. $\forall x \in [a, b]$, 定义

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

那么 $F \in \mathscr{C}[a, b]$. 如果 f 在点 $x_0 \in [a, b]$ 连续, 那么 F 在点 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

证明: 由于 f 可积, 则 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| < +\infty$,

于是 $\forall x, y \in [a, b]$, 我们均有

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t \right|$$

$$= \left| \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_y^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant M|x - y|.$$

从而由夹逼原理可知, $\forall x_0 \in [a, b]$, 我们有

$$\lim_{x\to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0,$$

进而可知函数 F 在 $[a, b]$ 上连续.

假设 f 在点 x_0 处连续, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall t \in [a,b]$, 当 $|t - x_0| < \delta$ 时, $|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 均有

$$
\begin{aligned}
&|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

故 F 在点 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

注: 若 f 在点 x_0 仅有单侧连续, 则 F 在点 x_0 有相应的单侧导数. 在跳跃间断点处亦如此.

推论 1. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ 并且 $F' = f$, 也即 F 为 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

推论 2. 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi, \psi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ 可导. $\forall u \in [\alpha, \beta]$, 令 $G(u) = \int_{\psi(u)}^{\varphi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t$. 那么函数 G 可导且 $\forall u \in [\alpha, \beta]$, 我们均有

$$G'(u) = f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - f\big(\psi(u)\big)\psi'(u).$$

证明: $\forall u \in [\alpha, \beta]$, 我们有

$$G(u) = \int_a^{\varphi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{\psi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(u)\big) - F\big(\psi(u)\big).$$

于是由复合函数求导法则可知 G 可导且

$$\begin{aligned} G'(u) &= F'\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - F'\big(\psi(u)\big)\psi'(u) \\ &= f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - f\big(\psi(u)\big)\psi'(u), \end{aligned}$$

因此所证结论成立.

例 1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin 3t}{t}\,\mathrm{d}t$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin 3t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = 3.$

例 2. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$.

解: $\forall x>0$, 我们有 $\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t\geqslant x$, 于是由夹逼原理可得知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t=+\infty$, 进而我们由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)e^{x^2}}{e^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

例 3. 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, $f(x) > 0$. $\forall x \in [a,b]$, 令 $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$. 求证: 函数 G 在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点.

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 因而 G 在 $[a,b]$ 上可导, 从而连续. 又 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(x) > 0$, 那么

$$G(a) = \int_b^a \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} < 0, \ G(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0,$$

由连续函数介值定理可知 G 在 $[a,b]$ 上有零点. $\forall x \in [a,b]$, $G'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$, 则 G 为严格递增, 从而为单射, 故在 $[a,b]$ 上仅有一个零点.

例 4. 设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$. $\forall x \in [a,b]$, 定义

$$F(x) = \int_a^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t,$$

计算 F''.

解: $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$F(x) = x\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x t f(t)\,\mathrm{d}t,$$

于是 $F'(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 从而 $F''(x) = f(x)$.

同学们辛苦了!