2012-2013春季线性代数期中试题

考试课程　　线性代数　　A卷　　　　2013 年 05 月 6 日

姓名: ____________　学号: ____________　班级: ____________

注：解答题请写清步骤。

1. (12分) 矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 与$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否相似？并解释理由。

   解：$|\lambda I - A| = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$,所以$A$的特征值是1（两重）和2。因为$r(A-I)=1$,所以1的几何重数为2，故矩阵$A$可对角化。$B$为其自身的若当标准型，故不可对角化。因此$A, B$不相似。

2. (12分) 设A为m阶正定矩阵，B是$m \times n$实矩阵，B^T为B的转置矩阵，证明：B^TAB为正定矩阵的充分必要条件是B的秩$r(B)=n$.

   证明：B^TAB为正定矩阵$\Leftrightarrow X^TB^TABX > 0$对任意$X \neq 0$成立

   $\Leftrightarrow BX \neq 0$ 对任意$X \neq 0$成立(A正定)

   $\Leftrightarrow B$列无关

   $\Leftrightarrow r(B) = n.$

3. (16分) 设$A = I_3 - cE_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。

   (1) 求使得A 是投影矩阵的所有c,并说明理由。
   答案：$c = 0$ 或1/3.

   (2) 求使得A 是正交矩阵的所有c,并说明理由。
   答案：$c = 0$ 或2/3.

   (3) 求使得A 是正定矩阵的所有c,并说明理由。
   答案：$c < 1/3$.

   (4) 求使得A 是可对角化的所有c,说明理由。
   答案：任意c.

   (5) 若A 可逆，用c表示写出A^{-1}的特征值。
   答案：$1, 1, \frac{1}{1-3c}(c \neq 1/3)$.

4. (16分) 求矩阵A的奇异值分解，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解：$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$

5. (16分) 设$\mathbb{R}^3$中的变换为$\varphi(x)=\alpha x^T\alpha$，其中$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}^T$。

(1)求证φ是线性变换。

(2)求φ在基$\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}^T$,$\begin{pmatrix}2&0&-1\end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}^T$下的矩阵表示。

解：(1)略。

(2)记$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}^T$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}2&0&-1\end{pmatrix}^T$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}^T$。由$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$,得$A=\begin{pmatrix}\frac{20}{3}&-\frac{5}{3}&5\\-\frac{16}{3}&\frac{4}{3}&-4\\8&2&-6\end{pmatrix}$。

6. (16分) 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}4\\-1\\-10\end{pmatrix}$，判断方程组$Ax=b$是否有解。若有解，求出方程组的通解；若无解，求$x_0$,使得它是让$\|Ax-b\|$取得极小值的所有$x$中长度最短的。

解：因为$r(A,b)=3>2=r(A)$，所以方程组无解。

可解得$A^+=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-4&7&1\\7&-4&1\end{pmatrix}$，所以$x_0=A^+b=(-3,2)^T$。

7. (12分) 求下图的关联矩阵及其四个基本子空间的一组基：

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, "4"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, "3"] & (4) \\
(2) \arrow[r, "2"'] & (3) \arrow[u, "5"']
\end{tikzcd}$$

解：由图知关联矩阵为$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 则$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$为零空间$N(A)$的一组基，

树图对应的向量组$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$构成行空间$R(A)$的一组基,

A的任意3列,如$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$构成列空间$C(A)$的一组基，

2个不相关的回路对应的向量$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$给出左零空间$N(A^T)$的一组基。