# 常系数微分方程

一：常系数微分方程特征根法

二：欧拉方程

三：常数变易法

# 常系数齐次线性方程的特征根法

问题：如何求常系数线性齐次方程的通解？

关键：找到一组线性无关解！

# 二阶线性常系数齐次方程

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$$

特征方程

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2$$

特征根

## 根据特征根，讨论通解

(1) $b^2-4ac>0$, 两个不等实根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$y_1=e^{\lambda_1 x}$ 与 $y_2=e^{\lambda_2 x}$ 线性无关

**通解** $\bar{y}=C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 e^{\lambda_2 x}$

(2) $b^2-4ac=0$, 两个相等实根

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda=-\dfrac{b}{2a}$ 一个解 $y_1=e^{\lambda x}$

**问题：如何求出另一个解？**

根据线性无关性

$\boxed{\text{设 } y_2=u(x)e^{\lambda x}}$

代入方程，经整理得

$$[au''+(2a\lambda+b)u'+(a\lambda^2+b\lambda+c)u]e^{\lambda x}=0$$

$$\Longrightarrow au''+(2a\lambda+b)u'+(a\lambda^2+b\lambda+c)u=0$$

因为$\lambda$是特征根,且是重根,故

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0 \qquad 2a\lambda+b=0$$

又 $a\neq 0$, 因而得到 $u''=0$

$$\Longrightarrow u'=C_1 \qquad \Longrightarrow u=C_1x+C_2$$

取 $u(x)=x \Longrightarrow y_2=xe^{\lambda x}$

**通解** $\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$

(3) $b^2-4ac<0$, 共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},\qquad y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$$

利用欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$y_1=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

根据解的性质，组合成两个实值解

$$\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x,\qquad \frac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

通解 $\bar{y}=e^{\alpha x}$ 线性无关 $+C_2\sin\beta x)$

[例1] 求方程$y''+3y'-10y=0$的通解

[解]　写出特征方程

$$\lambda^2+3\lambda-10=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+5)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=2,\quad \lambda_2=-5$$

通解

$$\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}$$

[例2] 求方程 $y''+8y'+16y=0$ 的通解

[解]　写出特征方程

$$\lambda^2+8\lambda+16=0$$

$$\Longrightarrow\quad (\lambda+4)^2=0$$

$$\Longrightarrow\quad \lambda=-4 \quad (\text{重根})$$

**通解** $\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{-4x}$

## [例3] 求方程 $y'' + 2y' + 2y = 0$ 的通解

[解]　写出特征方程

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

**通解**　$\bar{y} = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

## 三、常系数非齐次线性方程的待定系数法

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

解非齐次方程的关键是求一个解

有哪些方法?

(1) 变动任意常数法

(2) 待定系数法

方法(2)的关键：根据右端 $f(x)$，根据特征根

正确地设出特解形式

## 这种方法适用于*f(x)*的几种特殊情况

主要是利用三条法则

(1) $n$次多项式的导数是 $(n-1)$次多项式

(2) 指数函数的导数仍为指数函数

$$(e^{rx})' = re^{rx}$$

(3) $(\sin ax)' = a\cos ax$

$$(\cos ax)' = -a\sin ax$$

第一种情形： $f(x) = p_m(x)e^{\lambda x}$

其中P_m(x) 是x的m次多项时，常数lambda是实常数或复常数。因为多项式与指数乘积的导数仍为多项式与指数乘积

对方程 $y'' + ay' + by = P_m(x)e^{rx}$

设 $y^*(x) = Q(x)e^{rx}$

则 $y^{*}{}'(x) = Q'(x)e^{rx} + rQ(x)e^{rx}$

$$y^{*}{}''(x) = Q''(x)e^{rx} + 2rQ'(x)e^{rx} + r^2Q(x)e^{rx}$$

代入方程，约去公因子$e^{rx}$，并整理得到

$$Q''(x) + (2r + a)Q'(x)$$

$$+ (r^2 + ar + b)Q(x) = P_m(x) \quad (*)$$

$$Q''(x)+(2r+a)Q'(x)$$
$$+(r^2+ar+b)Q(x)=P_m(x) \quad (*)$$

(*) 式两端都是关于$x$的多项式，

欲使两端相等，首先必须使

两端多项式的次数相等.

根据r与特征根的关系，分三种情况：

$$Q''(x)+(2r+a)Q'(x)$$
$$+(r^2+ar+b)Q(x)=P_m(x) \quad (*)$$

(1) $r$ 不是特征方程的根

$$r^2+ar+b\neq 0$$

这时(*)式的左端是一个与$Q(x)$次数相同的多项式,而右端$P_m(x)$是$m$次多项式故

取 $Q(x)=Q_m(x)$ m 次多项式

(2) $r$ 是特征方程的单根

$$r^2+ar+b=0 \qquad 而 \quad 2r+a\neq 0$$

这时方程(*)的左端是一个比$Q(x)$次数低一次的多项式

取 $Q(x)=xQ_m(x)$

(3) $r$ 是特征方程的重根

$$r^2+ar+b=0 \quad \text{并且} \quad 2r+a=0$$

这时方程(*)的左端是一个比$Q(x)$次数低二次的多项式

取 $Q(x)=x^2Q_m(x)$

[例1] $y'' + 3y' + 2y = 4e^{3x}$

$(\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0), r = 3$

**[解]齐次方程的通解 $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$**

**设 $y^*(x) = Ae^{3x}$ 代入方程**

$$y^*{}'' + 3y^*{}' + 2y^* = (9 + 9 + 2)Ae^{3x} = 4e^{3x}$$

**比较系数:** $20A = 4$ $\Rightarrow$ $A = \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow$ $y^*(x) = \dfrac{1}{5}e^{3x}$ **通解** $y(x) = \bar{y} + y^*(x)$

[例2] $y'' + 3y' + 2y = 4e^{-2x}$

[解] 这时$r = -2$

设 $y^*(x) = Axe^{-2x}$ 代入方程

$$y^{*}{}'' + 3y^{*}{}' + 2y^* = 4e^{-2x}$$

$\Rightarrow -Ae^{-2x} = 4e^{-2x} \Rightarrow A = -4$

$\Rightarrow y^*(x) = -4xe^{-2x}$

通解 $y(x) = \bar{y} + y^*(x)$

$$= C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - 4xe^{-2x}$$

[例3] 解方程 $y'' + y' + y = x^2$

[解] 求齐次方程通解 $\bar{y}(x)$

特征方程 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

特征根 $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$\Rightarrow \bar{y}(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

求非齐次方程一个解

将方程改写成 $y'' + y' + y = x^2 e^{0x}$

因为$r = 0$不是特征方程的根

故设特解形式为

$$y^*(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y^*{}'(x) = 2ax + b, \quad y^*{}''(x) = 2a$$

代入方程

$$2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2$$

整理 $ax^2 + (2a + b)x + (2a + b + c) = x^2$

**比较系数**

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y^*(x)=x^2-2x$$

非齐次方程通解为

$$y(x)=y^*(x)+\bar{y}(x)$$

$$=x^2-2x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

[例4] 解方程 $x'' - 2x' + x = 4te^t$

[解] 特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (重根)

因为 $r = 1$ 是二重特征根故

设特解为 $x_0(t) = t^2(at + b)e^t$

代入原方程得到

$$(6at + 2b)e^t = 4te^t$$

$$\Rightarrow 6at+2b=4t \Rightarrow a=\frac{2}{3},\ b=0$$

$$\Rightarrow x_0(t)=\frac{2}{3}t^3e^t$$

又齐次方程的通解

$$\overline{x}(t)=(c_1+c_2t)e^t$$

于是原方程通解

$$x(t)=(\frac{2}{3}t^3+C_1+C_2t)e^t$$

第二种情形:

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$$

**设**

$$\boldsymbol{y^*(x)=x^k e^{\alpha x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_m^{(2)}\sin\beta x]}$$

**其中** $\boldsymbol{m=\max(l,n)}$

$$\boldsymbol{k=\begin{cases}0, & \alpha+i\beta\text{不是特征根}\\ 1, & \alpha+i\beta\text{是特征根}\end{cases}}$$

## 特别：我们考虑

$$ay'' + by' + cy = A\sin\beta x$$

$$ay'' + by' + cy = A\cos\beta x$$

考虑方程 $$az'' + bz' + cz = Ae^{i\beta x}$$

注意到

$$A\cos\beta x = \mathrm{Re}[Ae^{i\beta x}]$$

$$A\sin\beta x = \mathrm{Im}[Ae^{i\beta x}]$$

[例5] 求方程 $y'' - 4y' + 13y = 4\sin 3x$

的一个解

[解法一] 考虑方程 $z'' - 4z' + 13z = 4e^{i3x}$

特征根 $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$

设该方程的一个解为 $z = ae^{i3x}$

代入方程得到

$$-9ae^{i3x} - 12iae^{i3x} + 13ae^{i3x} = 4e^{i3x}$$

整理得 $$(1-3i)ae^{i3x}=e^{i3x}$$

比较系数得到 $$a=\frac{1}{1-3i}=\frac{1+3i}{10}$$

$$z=\frac{1+3i}{10}e^{i3x}=\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i\right)(\cos 3x+i\sin 3x)$$

取 z 的虚部,得到原方程一个解

$$y^*(x)=\frac{3}{10}\cos 3x+\frac{1}{10}\sin 3x$$

$$y'' - 4y' + 13y = 4\sin 3x$$

[解法二］设方程的一个解为

$$y^*(x) = a\cos 3x + b\sin 3x$$

代入方程, 比较系数, 定出 $a$ 和 $b$

## 小结：

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

若 $f(x) = P_m(x)e^{rx}$

设 $y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{rx}$

$$k = \begin{cases} 0, & r\text{不是特征根} \\ 1, & r\text{是特征单根} \\ 2, & r\text{是特征重根} \end{cases}$$

若

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$$

设

$$y^*(x)=x^k e^{\alpha x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_m^{(2)}\sin\beta x]$$

其中 $m=\max(l,n)$

$$k=\begin{cases}0, & \alpha+i\beta\text{不是特征根}\\ 1, & \alpha+i\beta\text{是特征根}\end{cases}$$

## 二、欧拉方程

欧拉方程是一种变系数方程

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$$

作变量代换　令 $x=e^t\,(x>0)$　或$t=\ln|x|$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

代入欧拉方程，得

$$a\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+b\frac{dy}{dt}+cy=f(e^t)$$

即 $$a\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\frac{dy}{dt}+cy=f(e^t)$$

常系数二阶线性非齐次

[例6] 求方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0$ 的通解

[解] 令 $|x|=e^t$ 代入方程，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0 \quad (1)$$

特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=0$

特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-1$

方程(1)的通解 $y=e^{-t}(C_1+C_2t)$

原方程的通解 $y=\frac{1}{|x|}(C_1+C_2\ln|x|)$

# 三、二阶线性常微分方程的

## 常数变易法

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (1)$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (2)$$

情况1：若已知$y_0(x)$是方程(2)的一个非零解,求方程(1)的解。(同理可求方程(2)的解)

设方程(1)的解 $\boxed{y(x) = C(x)y_0(x)}$

$$y' = C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x)$$

$$y'' = C''(x)y_0(x) + 2C'(x)y_0'(x) + C(x)y_0''(x)$$

将 $y, y', y''$ 代入方程(1), 整理得

$$y_0C''(x) + (2y_0' + a_1(x)y_0)C'(x)$$
$$+ [y_0'' + a_1(x)y_0' + a_2(x)y_0]C(x) = f(x)$$

已知 $y_0(x)$ 是方程(2)的解 $\longrightarrow$

$$y_0C''(x) + (2y_0' + a_1(x)y_0)C'(x) = f(x)$$

这是关于待定函数 $C(x)$ 的二阶可降阶方程

解出 $C(x)$, 即可得到方程(1)的解。

情况2：若已知方程(2)的通解

$$\bar{y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

设非齐次方程(1)的解

$$\boxed{y^*(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)}$$

$$y^*{}'(x)=C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)$$

$$+C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)$$

附加条件

$$\boxed{C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \qquad (1')}$$

于是 $y^{*}{}' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$

$$y^{*}{}'' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2''$$

代入方程(1)得到

$$[C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2''] + a_1(x)[C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'] + a_2(x)[C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2] = f(x)$$

整理后得到

$$[C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2']$$

$$+C_1(x)[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1]$$

$$+C_2(x)[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2] = f(x)$$

$y_1(x)$与$y_2(x)$均为齐次方程(2)的解, 故

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \qquad (2')$$

将$(1')$式与$(2')$式联立,即得

$$\boxed{\begin{cases} y_1 C_1'(x) + y_2 C_2'(x) = 0 \\ y_1' C_1'(x) + y_2' C_2'(x) = f(x) \end{cases}}$$

因为$y_1(x)$与$y_2(x)$线性无关,所以上述方程组的系数行列式不等于零

即 $$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

故方程组有解,解出$C_1'(x)$和$C_2'(x)$后,再积分便可得到$C_1(x)$和$C_2(x)$

综上所述,只要求出齐次方程(2)的一个非零解或两个线性无关的解，就可已通过变动任意常数法得到二阶线性常微分方程的解。

问题：

方程(2)的一个非零解$y_1(x)$怎麼得到？

## 观察法

注意 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ 系数的特点

若 $a_2(x)=0 \longrightarrow y_1(x)=1$

若 $1+a_1(x)+a_2(x)=0 \longrightarrow y_1(x)=e^{x}$

若 $1-a_1(x)+a_2(x)=0 \longrightarrow y_1(x)=e^{-x}$

若 $y_1(x)=x \longrightarrow a_1(x)+xa_2(x)=0$

若 $y_1(x)=x^2 \longrightarrow 2+2xa_1(x)+x^2a_2(x)=0$

[例1] 求 $y''+\dfrac{2}{x}y'-\dfrac{2}{x^2}y=0$ 的通解

[解] $\because\ a_1(x)+xa_2(x)=0$ 观察得 $y_1(x)=x$

设 $y_2(x)=C(x)y_1(x)=xC(x)$ 代入方程

整理得 $C''x+4C'=0$ 可降阶方程

设 $C'=p(x)$ $\Longrightarrow$ $p'x+4p=0$ $\Longrightarrow$ $p(x)=x^{-4}$

$\Longrightarrow C(x)=-\dfrac{1}{3}x^{-3}$ $\Longrightarrow$ $y_2(x)=-\dfrac{1}{3}x^{-2}$

通解 $\bar{y}=C_1x+C_2x^{-2}$

$$y''+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=0$$

[法 2] 利用方程的特殊性

两边乘 $x^2$ ⟶ $x^2y''+2xy'-2y=0$

系数是 $x$ 的降幂排列，设想解是幂函数

设 $y(x)=x^{\lambda}$　　代入方程

$$y'=\lambda x^{\lambda-1},\quad y''=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$$

⟶ $x^{\lambda}(\lambda^2+\lambda-2)=0\quad x\neq 0$

⟶ $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$ ⟶ $y_1(x)=x,\ y_2(x)=x^{-2}$

线性无关

通解 $\bar{y}=C_1x+C_2x^{-2}$

[例2] 求方程 $y'' - y = \sin^2 x$ 的一个解

[解] 易验证，相应的齐次方程的通解

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

设非齐次方程的解

$$y^*(x) = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

将$y_1 = e^x$，$y_2 = e^{-x}$， $f(x) = \sin^2 x$

代入$C_1', C_2'$所满足的方程组

$$\begin{cases} y_1 C_1'(x) + y_2 C_2'(x) = 0 \\ y_1' C_1'(x) + y_2' C_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} e^{x} \cdot C_1'(x) + e^{-x} \cdot C_2'(x) = 0 \\ e^{x} \cdot C_1'(x) - e^{-x} \cdot C_2'(x) = \sin^2 x \end{cases}$$

解得 $C_1'(x)=\frac{1}{2}e^{-x}\sin^2 x$

$$C_2'(x)=-\frac{1}{2}e^{x}\sin^2 x$$

积分得到

$$C_1(x)=\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin^2 x dx=-\frac{1}{10}e^{-x}(\sin^2 x+\sin 2x+2)$$

$$C_2(x)=-\frac{1}{2}\int e^{x}\sin^2 x dx=-\frac{1}{10}e^{x}(\sin^2 x-\sin 2x+2)$$

非齐次方程的一个解

$$y^*(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

$$=-\frac{1}{10}(\sin^2 x+\sin 2x+2)e^{-x}\cdot e^{x}$$

$$-\frac{1}{10}(\sin^2 x-\sin 2x+2)e^{x}\cdot e^{-x}$$

$$=-\frac{1}{5}(\sin^2 x+2)$$

[例3]已知$x_0(t)=e^t$是齐次方程$x''-2x'+x=0$

的解,求非齐次方程$x''-2x'+x=\frac{1}{t}e^t$的通解.

[解] 令$x=u(t)e^t$，则

$$x'=(u'+u)e^t,\quad x''=(u''+2u'+u)e^t$$

代入非齐次方程

$$(u''+2u'+u)e^t-2(u'+u)e^t+ue^t=\frac{1}{t}e^t$$

即 $u''=\frac{1}{t}$， 解得 $u=c_2+(c_1-1)t+t\ln|t|$

通解 $x(t)=u(t)e^t=c_2e^t+(c_1-1)te^t+te^t\ln|t|$

# Homework

Ex7.3**:** (1,2,5,7)

Ex 7.4:1,3,,4, 5(1,6), 6, 7

**Ex7.5: 2(3),3(2, 3, 6, 7,10),4(2, 3);6, 7**