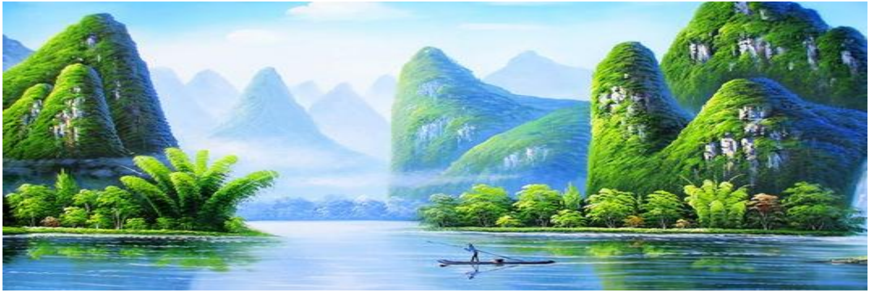
高等微积分

邹文明

反常积分和常微分方程

补充一章: 常微分方程(ODE)



§2. 一阶常微分方程的初等解法

一阶常微分方程的一般形式为 $F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$

一阶线性常微分方程的典型形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x),$$

其中 y 为待求解函数, $P(x), Q(x)$ 为已知函数.

如果 $Q(x) \equiv 0$, 则称之为一阶线性齐次常微分方程, 否则称为一阶线性非齐次常微分方程.

定理 1. 一阶线性非齐次常微分方程的通解为方程的一个特解与相应齐次方程的通解之和.

一阶线性齐次常微分方程的解

定理 2. 设 f 为 P 的任意一个原函数，则一阶线性齐次常微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$ 的通解为 $y = Ce^{-f(x)}$，也常被写作 $y = Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$.

一阶线性非齐次常微分方程的解 (常数变易法)

定理 3. 一阶线性非齐次常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

的通解为

$$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right),$$

其中 C 为任意的常数.

证明: 设 f 为 P 的一个原函数. 假设 $y = C(x)e^{-f(x)}$ 是非齐次方程的解, $C(x)$ 作为待定函数, 看看能不能确定！ 于是我们将它代入方程, 看看$C(x)$ 需要满足什么条件. 于是有

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y \\
&= C'(x)e^{-f(x)} - C(x)e^{-f(x)}f'(x) + P(x)y \\
&= C'(x)e^{-f(x)} - yP(x) + P(x)y \\
&= C'(x)e^{-f(x)},
\end{aligned}
$$

从而 $C'(x) = Q(x)e^{f(x)}$, 故

$$C(x) = C + \int Q(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

则原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-f(x)}C(x) = e^{-f(x)}\left(C + \int Q(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right), \end{aligned}$$

其中 C 为任意的常数.

可分离变量的一阶常微分方程

考虑方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$, 其中 f, g 为连续函数.
当 $g(y) \neq 0$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

故 $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$, 由此可得 y 的隐函数方程. 若 $g(y_0) = 0$, 则 $y \equiv y_0$ 也为方程的解.

可转化成一阶线性方程的一阶方程

下面将介绍几种能通过初等变换转化成一阶线性常微分方程的一阶方程.

例 6. 求解一阶常微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 为常数.

解: 若 $b = 0$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + c)$, 于是

$$y = \int f(ax + c)\,\mathrm{d}x + C.$$

若 $b \neq 0$, 令 $u = ax + by + c$, 则我们有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a + bf(u),$$

故 $\int \frac{\mathrm{d}u}{a+bf(u)} = \int \mathrm{d}x + C = x + C$, 由此得到 u, 进而得 y. 若 $\exists u_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $a + bf(u_0) = 0$, 则

$$ax + by + c = u_0$$

也为方程的解, 即 $y = \frac{1}{b}(u_0 - ax - c)$.

齐次型一阶常微分方程

齐次型一阶常微分方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x})$.

解: 定义 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, 从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$,

带入原常微分方程可立刻导出 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = F(u)$.

若 $F(u) = u$, 则 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0$, 从而 $u \equiv C$, 也即

$$y = Cx.$$

下面假设 $F(u) \neq u$. 则我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{F(u) - u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C = \ln|x| + C,$$

由此可得到 u 的隐函数方程, 进而可得出 y.

如果 $\exists u_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $F(u_0) = u_0$, 则 $u = u_0$ 也为上述方程的解, 也即 $y = u_0 x$ 为原方程的解.

例 7. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2+y^2}{3xy}$.

解: 由题设可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{3(\frac{y}{x})}$. 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = -\frac{1+u^2}{3u},$$

于是 $\frac{3u\,\mathrm{d}u}{1+4u^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$, 从而我们有

$$\frac{3}{8}\ln(1+4u^2) + \ln|x| = C_1,$$

也即 $x(1+4u^2)^{\frac{3}{8}} = C$, 故 $x\left(\frac{x^2+4y^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{8}} = C$.

例 8. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{x}{y}+e^{-\frac{x}{y}}}$.

解: 令 $u = \frac{x}{y}$, 则 $x = uy$, 从而可知

$$1 = y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{u}{u+e^{-u}},$$

即 $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{u+e^{-u}}{ue^{-u}}\,\mathrm{d}u = (e^u + \frac{1}{u})\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}(e^u + \ln|u|)$,

则 $e^u + \ln|u| = \ln|x| + C$, 故 $e^{\frac{x}{y}} = \ln|y| + C$.

可化为齐次型的一阶常微分方程

典型例子: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$.

解: 分情况讨论. 如果 $a_1b_2 \neq a_2b_1$, 则下述直线

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

有唯一的交点, 设为 (x_0, y_0). 定义 $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, 则原方程变为齐次型方程

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right).$$

现在假设 $a_1b_2 = a_2b_1$. 若 $(a_2, b_2) = (0, 0)$, 那么 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1}{c_2}x + \frac{b_1}{c_2}y + \frac{c_1}{c_2}\right)$ 为已求解过的方程.

若 $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$, 则由 (a_1, b_1) 与 (a_2, b_2) 线性相关可知 $\exists k \in \mathbb{R}$ 使得 $(a_1, b_1) = k(a_2, b_2)$, 故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(k + \frac{c_1 - kc_2}{a_2x + b_2y + c_2}\right)\\ &= F(a_2x + b_2y + c_2)\end{aligned}$$

也为已求解过的方程.

例 9. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$.

解: 直线 $x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 的交点为 $(1, 2)$. 我们由此作变换

$$X = x - 1, \quad Y = y - 2.$$

原方程变为 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$. 令 $u = \frac{Y}{X}$, 则

$$u + X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{1-u}{1+u}.$$

也即 $\frac{(1+u)\,\mathrm{d}u}{1-2u-u^2}=\frac{\mathrm{d}X}{X}$, 由此可得

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2|=\ln|X|+C_1,$$

从而 $1-2u-u^2=\frac{C_2}{X^2}$. 又由于

$$X=x-1,\quad u=\frac{y-2}{x-1},$$

带入上述方程并整理后可得

$$x^2-2xy-y^2+2x+6y=C.$$

Jacob Bernoulli 方程

Bernoulli 方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, 其中 α 为常数且不等于 0 或 1.

解: 当 $y \neq 0$ 时, 则有 $y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$.

令 $z = y^{1-\alpha}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 从而可得

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)z = q(x),$$

也即我们有 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$.

若 $\alpha > 0$, 则 $y \equiv 0$ 也为方程的解.

例 10. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = -2xy^{-1}$.

解: 由题设可得 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y^2 = -2x$. 令 $z = y^2$, 则 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z = -2x$, 也即 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 2z = -4x$. 从而

$$\begin{aligned} z &= e^{\int 2\,\mathrm{d}x}\left(C + \int (-4x)e^{\int(-2)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{2x}\left(C + \int (-4x)e^{-2x}\,\mathrm{d}x\right) = Ce^{2x} + 2x + 1. \end{aligned}$$

于是原方程的通解为 $y^2 = Ce^{2x} + 2x + 1$.

§3. 可降阶的高阶常微分方程

最简单的情形: $y^{(n)} = f(x)$

此时只需求 n 次原函数, 就可求解出 y.

例 1. 求解方程 $y''' = e^x + x$.

解: 由题设可得 $y'' = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C_1$, 从而我们有 $y' = e^x + \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$, 进而可得

$$y = e^x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

不显含未知量 y 的方程

现考虑常微分方程 $y^{(n)} = F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n-1)})$, 其中 $k \geqslant 1$. 令 $p(x) = y^{(k)}$, 则我们有

$$p^{(n-k)} = F(x, p, p', \dots, p^{(n-k-1)}),$$

由此可以求解出 $p = p(x)$, 进而再对 $y^{(k)} = p(x)$ 求 k 次原函数就可求解出 y.

例 2. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=0$.

解: 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 则原方程变为 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-p^2=0$.
若 $p\equiv 0$, 此时 $y\equiv C$, 其中 C 为任意常数.
若 $p\neq 0$, 那么 $\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=\mathrm{d}x$, 由此可得 $-\frac{1}{p}=x+C_1$,
也即 $p=-\frac{1}{x+C_1}$. 于是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x+C_1}$, 从而

$$y=-\ln|x+C_1|+C_2,$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

不显含自变量 x 的方程:$F\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$

将 y 看成自变量, 并令 $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

原方程变为 $F(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = 0$, 由此可求 $p = p(y)$, 进而对 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$ 应用分离变量法就可以得到原来方程的解.

例 3. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=0$.

解: 将 y 看成自变量, 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程变为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$, 于是 $p\equiv 0$ 或 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$. 如果 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$, 则 $p=C_1e^y$. 该解也包含 $p\equiv 0$ 的情形. 由于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1e^y$, 则 $e^{-y}\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x$, 从而

$$-e^{-y}=C_1x+C_2,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

§4. 高阶线性常微分方程解的结构

n 阶线性常微分方程的标准形式为

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

其中 $a_0, \dots, a_{n-1}, f$ 均为区间 I 上的连续函数, 函数 f 被称为该方程的非齐次项. 当 $f \equiv 0$ 时, 相应的方程称为齐次方程.

- 存在与唯一: $\forall x_0 \in I$ 以及 $\forall \xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$, 在区间 I 上均存在唯一的解 $y = y(x)$ 使得

$$y^{(k)}(x_0) = \xi_k \ (0 \leqslant k \leqslant n-1).$$

- 齐次方程的解集: 齐次方程的所有解组成的集合是一个 n 维的线性空间.
- 非齐次方程的解集: 非齐次方程的通解就是非齐次方程的特解与齐次方程通解之和.

定义 1. 称函数 $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ 在 I 上线性相关, 如果存在不全为零的实数 $c_1, \ldots, c_n$ 使得 $\forall x \in I$, 均有 $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f(x) = 0$.
若不存在不全为零的实数 $c_1, \ldots, c_n$ 使 $\forall x \in I$, 均有 $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f(x) = 0$, 则称 $f_1, \ldots, f_n$ 在 I 上线性无关.

例 1. $1, x, \ldots, x^n$ 在任意区间上线性无关.

定义 2. 设 $f_1, f_2 \ldots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$. 定义

$$
\begin{aligned}
W(x) &:= W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) \\
&:= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

并称为 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 的 Wronsky 行列式.

定理 1. 如果 $f_1, f_2 \ldots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$ 在 I 上线性相关, 则 $\forall x \in I$, $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = 0$.

证明: 如果 $f_1, f_2 \ldots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$ 在 I 上线性相关, 那么存在不全为零的实数 $c_1, \ldots, c_n$ 使得 $\forall x \in I$, $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$, 对之求导得

$$c_1 f_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(k)}(x) = 0 \ (0 \leqslant k < n),$$

于是 $(c_1, \ldots, c_n)$ 为 n 阶线性方程组的非零解, 从而相应系数行列式 $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = 0$.

同学们辛苦了!