2023秋高等微积分期中考试

1、计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\dfrac{2023}{n}+2\sin\dfrac{2023}{n}\right)^n$.

2.(7%) 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x(1-x^2), x \text{ 为有理数}, \\ x(1+\sqrt{x}), x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

的连续性和可微性.

3.(8%) 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-1}-\frac{1}{\mathrm{e}^{x-1}-1}, & x\neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$$

在$x=1$处的可导性.

4.(10%) 设$x_1>0$ 且$\forall n\geqslant 1$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 求证:

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=2$.

5.(10%) 设数列$\{a_n\}$满足递推公式$a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, 其中$f(x)$是一个可导函数，且存在一个常数$L\in(0,1)$使得$|f'(x)|\leq L$, 证明：数列$\{a_n\}$收敛.

6.(8%)证明：方程$e^x - x^{2023} = 0$至多有二个不同的零点.

7.(10%) 设f在$[a,b]$内二阶可导，证明：存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi).$$

8.(10%) 设$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上可导，证明：$f'(x)$在$[a,b]$上连续的充要条件是$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当$0 < |h| < \delta$时, 对任意$x \in [a,b]$有

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

9.(10%) 设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 且存在常数$M > 0$使得$|f''(x)| \leq M$, 证明：对于任意$x_1 < x_2$，只要$f(x_1) = f(x_2)$，就有$|f'(x_1)| + |f'(x_2)| \leq M(x_2 - x_1)$.

10.(10%) 假设 $x_0 \in (a,b)$, 而 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 可导且在点 x_0 处二阶可导使得 $f''(x_0) \neq 0$, 求证:

(1) $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$, $\exists \theta(x) \in (0,1)$ 使得

$f(x) = f(x_0) + f'\big(x_0 + \theta(x)(x - x_0)\big) \cdot (x - x_0)$.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

11.(10%) 设函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 可导且在 (a,b) 内二阶可导. 如果 $f(a) = f(b)$ 且 $f'_+(a) f'_-(b) > 0$,求证: $\exists \rho \in (a,b)$ 使得 $f''(\rho) = 0$.