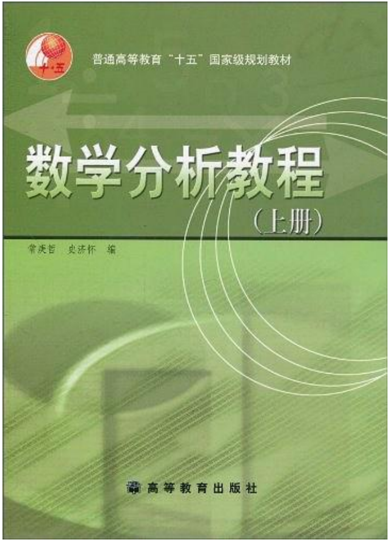
高等微积分

邹文明

第三章: 导数


普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学分析教程
（上册）
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

§3.4. 微分中值定理

定义 1. 假设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而 $f: X \to \mathbb{R}$. 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(x_0, \delta) \subseteq X$ 且 $\forall x \in B(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \geqslant f(x_0)$, 则称点 x_0 为 f 的极小值点, 而称 $f(x_0)$ 为 f 的极小值. 相应地, 我们也可以定义极大值点和极大值.

♣ 极小值点和极大值点统称为极值点.

♣ 极小值和极大值统称极值.

评注

- 极值点包含在 f 的定义域 X 当中的某一个开区间内, 这样的点称为 X 的内点.
- 函数 f 是否在点 x_0 取极值, 仅与 f 在该点邻域上的性态有关, 属于 “局部性质”.

- 如果函数 f 的定义域为区间, 则其最大值点为极大值点当且仅当该点为区间内点. 对于最小值点也有同样结论.
- 极值点不一定是最值点.

定理 1. (Fermat) 设 x_0 为 f 的极值点. 若 f 在点 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

证明: 可以假设点 x_0 为 f 的极小值点.

则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in B(x_0, \delta)$,

均有 $f(x) \geqslant f(x_0)$. 由函数极限的保号性可知

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0,$$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,$$

评注

- 导数为零的点称为驻点. 在该点处, 曲线的切线为水平.
- “可导” 的条件不可去掉. 函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x = 0$ 取极小值, 但 f 在该点处不可导, 此时上述定理的结论不成立.

- Fermat 定理表明: 极值点为驻点. 该定理的逆命题不成立. 例如, 对于函数 $f(x) = x^3$, 点 $x = 0$ 为其驻点, 但不是极值点.

定理 2. (Darboux, 导数介值定理)
若 f 在 $[a,b]$ 上可导而 μ 严格介于 $f'_+(a), f'_-(b)$ 之间, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\mu$.

证明: 不妨设 $f'_+(a) < \mu < f'_-(b)$ (否则我们可以考虑 $-f$). $\forall x \in [a,b]$, 定义 $F(x) = f(x) - \mu x$. 则 F 在 $[a,b]$ 上可导, 并且我们有

$$\begin{aligned} F'_+(a) &= f'_+(a) - \mu < 0, \\ F'_-(b) &= f'_-(b) - \mu > 0. \end{aligned}$$

由导数的定义, 我们有

$$F'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} < 0,$$

$$F'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{F(x)-F(b)}{x-b} > 0,$$

于是由函数极限的保号性可知, $\exists c \in (a,b)$ 使得 $\frac{F(c)-F(a)}{c-a} < 0$, 同样 $\exists d \in (a,b)$ 使 $\frac{F(d)-F(b)}{d-b} > 0$.
综上所述可知我们有 $F(c) < F(a)$, $F(d) < F(b)$.

由于 F 在 $[a,b]$ 上可导, 因此连续, 于是由最值定理可知 F 有最小值点 $\xi \in [a,b]$. 再注意到

$$F(\xi) \leqslant F(c) < F(a),\ F(\xi) \leqslant F(d) < F(b),$$

因此 ξ 为 F 的极小值点, 从而由 Fermat 定理可得 $F'(\xi) = 0$, 也即我们有 $f'(\xi) = \mu$.

推论. 若 f 在某个区间上可导, 则其导函数的像集为区间. 若 f' 恒不为零, 则它恒正或恒负.

定理 3. (Rolle) 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且 $f(a)=f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

证明: 由题设可知 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 于是由最值定理立刻可得, $\exists c,d \in [a,b]$ 使得 $f(c)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(d)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. 若 $f(c)=f(d)$, 则 $f \equiv f(c)$, 故 $\forall \xi \in (a,b)$, 均有 $f'(\xi)=0$. 如果 $f(c)<f(d)$, 由 $f(a)=f(b)$ 可知 c,d 当中必有点属于 (a,b), 记作 ξ, 而该点为 f 的极值点, 从而 $f'(\xi)=0$.

定理 4. (Lagrange, 拉格朗日中值定理)
如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导，则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明: $\forall x \in [a,b]$, 我们定义

$$F(x) = f(x) - \Big(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\Big),$$

则 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导，并且我们还有 $F(a) = F(b) = 0$. 于是由 Rolle 定理立刻可得知 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$. 由此可得所要结论.

约瑟夫·拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange,1736 1813）： 法国著名数学家, 物理学家. 1736年1月25日生于意大利都灵, 1813年4月10日卒于巴黎. 他在数学, 力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献, 其中尤以数学方面的成就最为突出。

拉格朗日总结了18世纪的数学成果, 同时又为19世纪的数学研究开辟了道路, 堪称法国最杰出的数学大师. 同时, 他的关于月球运动（三体问题）, 行星运动, 轨道计算, 流体力学等方面的成果. 成为这些领域的开创性或奠基性研究.

他解决三体运动的定型问题. 拉格朗日对流体运动的理论也有重要贡献, 提出了描述流体运动的拉格朗日方法.

在天体运动方程的解法中, 拉格朗日发现了三体问题运动方程的五个特解, 即拉格朗日平动解. 此外, 他还研究了彗星和小行星的摄动问题, 提出了彗星起源假说等.

评注

- 上述定理可由 Rolle 定理导出，而 Rolle 定理其实是该定理特殊的情形：当 $f(a) = f(b)$ 时，Lagrange 中值定理等价于说 $f'(\xi) = 0$. 因此 Lagrange 中值定理与 Rolle 定理等价.

- 上述定理中的等式也可表述成

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

这就解释了为何称之为中值定理. 人们通常将 ξ 表述成 $\xi = a + (b - a)\theta,\ \theta \in (0, 1)$.

- 上述等式将自变量增量与因变量增量通过导数联系在一起, 因此也常被称为拉格朗日有限增量定理.

推论 1. 设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 f 为常值函数当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) = 0$.

证明: **必要性.** 若 f 为常值函数, 那么由导数的定义立刻可知, $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) = 0$.

充分性. 如果 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) = 0$, 那么 $\forall x \in (a,b]$, 由 Lagrange 中值定理知 $\exists \xi \in (a,x)$ 使得 $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0$. 得证.

推论 2. 假设函数 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导. 如果 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) = g'(x)$, 则存在常数 $C \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(x) = g(x) + C$.

证明: $\forall x \in [a,b]$, 定义 $F(x) = f(x) - g(x)$, 那么 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 并且 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $F'(x) = 0$. 于是 $\exists C \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $F(x) = C$. 故所证结论成立.

定理 5. (Cauchy 中值定理) 假设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(\xi)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(\xi).$$

证明: $\forall x \in [a,b]$, 我们定义

$$\begin{aligned} F(x) &= \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big) \\ &\quad -\big(g(b)-g(a)\big)\big(f(x)-f(a)\big). \end{aligned}$$

则 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 并且我们还有 $F(a)=F(b)=0$. 于是由 Rolle 定理立刻可得知 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$. 由此可得所要结论.

柯西(Cauchy, 1789—1857) 是法国数学家、物理学家、天文学家。19世纪初期，微积分已发展成一个庞大的分支. 但微积分的理论基础并不严格. 为解决新问题并澄清微积分概念, 数学家们展开了数学分析严谨化的工作, 在分析基础的奠基工作中, 做出卓越贡献的要首推伟大的数学家柯西. 柯西1789年8月21日出生于巴黎, 父亲是一位精通古典文学的律师, 与当时法国的大数学家拉格朗日与拉普拉斯交往密切. 柯西少年时代的数学才华颇受这两位数学家的赞赏, 并预言柯西日后必成大器. 拉格朗日向其父建议“赶快给柯西一种坚实的文学教育”. 1807年至1810年柯西在工学院学习, 曾当过交通道路工程师. 由于身体欠佳, 接受了拉格朗日和拉普拉斯的劝告, 放弃工程师而致力于纯数学的研究. 柯西在数学上的最大贡献是在微积分中引进了极限概念, 并以极限为基础建立了逻辑清晰的分析体系. 这是微积分发展史上的精华.

评注

- 如果 $\forall x \in [a,b]$, $g(x)=x$, 此时 Cauchy 中值定理为 Lagrange 中值定理. 因此 Rolle 定理, Lagrange 中值定理, Cauchy 中值定理等价.

- 若 g' 恒不为零, 由 Lagrange 中值定理可知 $g(a) \neq g(b)$, 于是 Cauchy 中值定理变为

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例 1. 如果 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 并且 $f(a) = f(b) = 0$, 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi) = 0.$$

证明: $\forall x \in [a,b]$, 定义 $F(x) = f(x) e^{g(x)}$, 那么有 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且 $F(a) = F(b) = 0$, 于是 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 也即我们有

$$0 = f'(\xi) e^{g(\xi)} + f(\xi) e^{g(\xi)} g'(\xi),$$

由此立刻可知所证结论成立.

例 2. 试证明: 方程 $x^4+3x^3+6x^2-4x-8=0$ 恰好有两个实根.

证明: 我们定义 $f(x)=x^4+3x^3+6x^2-4x-8$, 则 f 连续并且 $f(0)=-8<0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, 因此方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ 上均有实根. 若该方程还有其它实根, 由 Rolle 定理知 f' 至少有两个实根, 故 f'' 至少有一个实根. 但 $f''(x)=12x^2+18x+12$, 其判别式等于 -252, 因此 f'' 无实根. 矛盾! 于是所证结论成立.

例 3. $\forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$, 求证:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明: $\forall x > -1$, 定义 $f(x) = \ln(1+x)$, 则 f 为初等函数, 从而可导. $\forall x > -1$, 借助 Lagrange 中值定理可知, $\exists \theta \in (0,1)$ 使得

$$\ln(1+x) = f(x) - f(0) = f'(\theta x)x = \frac{x}{1+\theta x}.$$

但当 $x \neq 0$ 时, 我们也有 $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\theta x} < x$, 由此可知所证结论成立.

例 4. $\forall x, y \in [-1,1]$, 求证:

$$|\arcsin x - \arcsin y| \geqslant |x-y|.$$

证明: $\forall x \in [-1,1]$, 定义 $f(x) = \arcsin x$. 那么 f 连续并且 $\forall x \in (-1,1)$, 我们均有 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\forall x, y \in [-1,1]$, 由 Lagrange 中值定理可知存在 ξ 介于 x, y 之间使得 $\arcsin x - \arcsin y = \frac{x-y}{\sqrt{1-\xi^2}}$, 故 $|\arcsin x - \arcsin y| = \frac{|x-y|}{\sqrt{1-\xi^2}} \geqslant |x-y|$.

例 5. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 求证: $e^x > 1 + x$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = e^x - 1 - x$. 则 f 连续可导并且 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 借助 Lagrange 中值定理可知, 存在 ξ 严格介于 $0, x$ 之间使得我们有

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)x = (e^{\xi} - 1)x.$$

若 $x > 0$, 那么 $\xi > 0$, 于是 $f(x) > 0$. 若 $x < 0$, 则 $\xi < 0$, 此时也有 $f(x) > 0$. 故所证成立.

同学们辛苦了！

例 6. 求证: 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可导使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=f(x)$, 则 $\exists c\in\mathbb{R}$ 使 $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ce^x$.

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $F(x)=f(x)e^{-x}$. 则 F 在 $\mathbb{R}$ 上可导并且 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $F'(x)=0$. 从而 $\exists c\in\mathbb{R}$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $F(x)=c$, 也即 $f(x)=ce^x$.

例 7. 若 $f\in\mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且 $\forall x\in(a,b)$, 均有 $f'(x)\neq 0$, 求证: $\exists\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}.$$

证明: 方法 1. 由 Lagrange 中值定理知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. $\forall x\in[a,b]$, 令 $g(x)=e^x$. 由 Cauchy 中值定理, $\exists\eta\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$, 即 $f(b)-f(a)=(e^b-e^a)e^{-\eta}f'(\eta)$.

由此可得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

方法 2. 由 Lagrange 中值定理知 $\exists \eta \in (a, b)$ 使得

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^\eta,$$

进而可得

$$\frac{f'(\eta)}{f'(\eta)} = 1 = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}.$$

因此所证结论成立.

例 8. 若 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导且 $f(1)=0$, 求证: $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明: $\forall x \in [0,1]$, 令 $F(x)=x^2 f(x)$, 则 $F \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导, 并且有 $F(0)=F(1)=0$. 于是由 Rolle 定理可知, $\exists \xi \in (0,1)$ 使得

$$0=F'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi),$$

但 $\xi \neq 0$, 由此立刻可得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

同学们辛苦了！

例 9. 设 $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$ 在 (a, b) 内二阶可导且有相同最大值. 若 $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

证明: $\forall x \in [a, b]$, 令 $F(x) = f(x) - g(x)$. 则 $F \in \mathscr{C}[a, b]$ 在 (a, b) 内为二阶可导. 假设 f, g 在 (a, b) 内的最大值点分别为 α, β, 则 $f(\alpha) = g(\beta)$, 并且由函数连续性知这也是 f, g 在 $[a, b]$ 上的最大值.

若 $\alpha=\beta$, 令 $\eta=\alpha$, 此时 $F(\eta)=0$. 若 $\alpha\neq\beta$, 则

$$F(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=g(\beta)-g(\alpha)\geqslant 0,$$
$$F(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=f(\beta)-f(\alpha)\leqslant 0,$$

于是由连续函数介值定理可知, $\exists\eta\in(a,b)$ 使得 $F(\eta)=0$. 又 $F(a)=F(b)=0$, 则由 Rolle 定理可知, $\exists\xi_1\in(a,\eta)$, $\exists\xi_2\in(\eta,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$, $F'(\xi_2)=0$. 再由 Rolle 定理可得知, $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $F''(\xi)=0$, 也即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

例 10. 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可导且使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=e$, 求 c 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^x$.

解: 当 $c=0$ 时, 成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^x=1$. 当 $c\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{-2c}{x+c}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{-2c}{x+c}=-2c.\end{aligned}$$

于是我们总有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=e^{-2c}$.

由 Lagrange 中值定理, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \xi(x) \in (x, x+1)$ 使得 $f(x+1) - f(x) = f'(\xi(x))$, 则由夹逼原理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} \xi(x) = +\infty$. 于是由题设条件与复合函数极限法则可得

$$\begin{aligned} e^{-2c} &= \lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} f'(\xi(x)) = \lim_{y\to+\infty} f'(y) = e, \end{aligned}$$

进而我们立刻可知 $c = -\frac{1}{2}$.

同学们辛苦了！