第18课：微积分基本定理-定积分的分部积分

第7章 函数的积分

- **内容：**

第7.3节 微积分基本定理

第7.4节 定积分计算-分部积分法

第18-1课：微积分基本定理

微积分基本定理

- **变上限积分：**

  设 $f \in R[a,b]$，则$\forall x \in [a,b]$，$f \in R[a,x]$（区间可加性质）

定义 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ —— 积分值随着上限变化

据此得到函数 $F:[a,b] \to \mathrm{R}$

- **连续性分析：** 任取 $x, x+\Delta x \in [a,b]$，$\Delta x \geq 0$

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt+\int_x^a f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

已知可积函数有界

再由估值不等式得 $|F(x+\Delta x)-F(x)| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \leq M\Delta x$

第18-1课：微积分基本定理

- **可导性分析：**

已知 $F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

如果 $f\in C[a,b]$, 可以应用积分中值定理：$\exists c$ 在x与$x+\Delta x$之间

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$$

$$\therefore \quad \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(c), \quad (\Delta x\neq 0)$$

令 $\Delta x\to 0$, 则 $c\to x$, 进而 $f(c)\to f(x)$

- **结论**：设 $f\in R[a,b]$, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt\in C[a,b]$

又若 $f\in C[a,b]$, 则 $F\in C^1[a,b]$ 且 $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$

(x在区间端点时导数理解为单侧导数)

第18-1课：微积分基本定理

- **微积分基本定理**

1) 设 $f\in C[a,b]$, 则 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x),\ \forall x\in[a,b]$

或写成 $d\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)dx,\ \forall x\in[a,b]$

2) 设 $F\in C^1[a,b]$, 则 $\displaystyle\int_a^b F'(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ （Newton-Leibniz）

或写成 $\displaystyle\int_a^b dF(x) = F(x)\Big|_a^b$

- **注**：结论1-2) 显示了微分(导数)与积分之间的完美关系

历史上这个定理的建立标志了微积分学的创立(1670-1680)

- **推论**：设 $f\in C[a,b]$, 则 $\displaystyle\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C,\ \ x\in[a,b]$

也即连续函数(特别是初等函数)都有原函数/不定积分

第18-1课：微积分基本定理

- **注1**：利用区间可加等式 $\forall c \in [a,b]$（固定）

$$\int_c^x f(t)dt = \int_c^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$$

所以变上限积分中的固定下限也可以在区间内任取(固定)

- **注2**：考虑变下限积分的导数

$$\frac{d}{dx}\int_x^c f(t)dt = \frac{d}{dx}[-\int_c^x f(t)dt] = -f(x) \quad \text{(若 } f \text{ 连续的话)}$$

- **补充-记号约定:**

$$C^n(a,b) = \{ f \in C(a,b) \,||\, \text{满足 } f^{(n)} \in C(a,b) \}$$

$$C^n[a,b] = \{ f \in C[a,b] \,|| \text{满足 } f^{(n)} \in C[a,b] \}$$

第18-1课：微积分基本定理

✓ 例1：$I_1=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=?$

解：被积函数 $\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2\cos^2 x}=\sqrt{2}\,|\cos x|$

在积分区间上 cosx 变号：

$$\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2}\,|\cos x|=\begin{cases}\sqrt{2}\cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ -\sqrt{2}\cos x, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$

利用区间可加等式

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2}\cos x dx-\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\sqrt{2}\cos x dx$$

$$=\sqrt{2}(\sin x\big|_0^{\pi/2}-\sin x\big|_{\pi/2}^{3\pi/4})$$

$$=\sqrt{2}[(1-0)-(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)]=2\sqrt{2}-1$$ W

第18-1课：微积分基本定理

✓ 例2：求极限 $I_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\int_0^x tf(t)dt = ?$

其中函数 f 满足 $f(0)=0$, 且 $f\,'(0)$存在

解：注意这是“0/0”型极限, 考虑应用L’Hospital法则

为此计算变上限积分的导数

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = xf(x)$$

所以 $$I_2 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(x^3)'}\left(\int_0^x tf(t)dt\right)' = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{3}f'(0) \qquad \text{W}$$

第18-1课：微积分基本定理

✓ **例3**：设 $f\in C[a,b]$，$u(t),v(t)$ 可导，且 $a\le u(t),v(t)\le b$

计算导数 $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{v(t)}^{u(t)} f(x)dx=?$

解：记 $F(u)=\displaystyle\int_a^u f(x)dx$，则 $F'(u)=f(u)$

注意 $$\int_v^u f(x)dx=\int_v^a f(x)dx+\int_a^u f(x)dx$$

$$=\int_a^u f(x)dx-\int_a^v f(x)dx=F(u)-F(v)$$

应用链式法则

$$\frac{d}{dt}\int_{v(t)}^{u(t)} f(x)dx=\frac{d}{dt}[F(u)-F(v)]$$

$$=F'(u)u'-F'(v)v'$$

$$=f(u(t))u'(t)-f(v(t))v'(t)$$ W

第18-1课：微积分基本定理

✓ **例4**：设 $f \in C^1[a,b]$

求证 $$\max_{a\le x\le b} |f(x)| \le \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$$

分析：应用N-L公式

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)dt,\ \forall x \in [a,b]$$

可取 $$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$ （回忆中值定理）

$$\left|\int_c^x f'(t)dt\right| \le \left|\int_c^x |f'(t)|dt\right| \le \int_a^b |f'(t)|dt$$

…………

第18-1课：微积分基本定理

✓ **例5**：设 $f \in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0$

求证 $$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx$$

分析：应用N-L公式

$$f(x)=\int_a^x f'(t)dt,\ \forall x\in[a,b]$$

应用Cauchy-Schwarz不等式

$$|f(x)|^2=[\int_a^x f'(t)dt]^2 \le \int_a^x dt\int_a^x |f'(t)|^2\,dt$$
$$=(x-a)\int_a^b |f'(t)|^2\,dt$$

在[a,b]上关于x积分……

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

定积分的计算-分部积分法

- **思考-定积分计算：**求出被积函数的原函数-应用N-L公式

但求原函数通常并不容易：分部积分-换元(变量代换)……

考虑在定积分计算中直接应用上述技巧：分部积分-换元…

- **回忆：**乘积函数求导公式 $(uv)'=u'v+uv'$

$\therefore\ u(x)v'(x)=[u(x)v(x)]'-u'(x)v(x)$，在区间上积分…

- **分部积分公式：**设 $u,v\in C^1[a,b]$，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

或写成 $$\int_a^b u(x)d[v(x)]=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)d[u(x)]$$

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

✓ 例1： $I_1 = \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx = ?$

解：考虑应用分部积分, 取 u=x³, v= -cosx

$$I_1 = -x^3 \cos x \Big|_0^{\pi} + 3\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = \pi^3 + 3\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$$

继续反复用分部积分处理

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$= -2\int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$= 2x \cos x \Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \cos x dx$$

$$= -2\pi - 2\sin x \Big|_0^{\pi} = -2\pi \quad \therefore \quad I_1 = \pi^3 - 6\pi \quad \text{W}$$

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

- 例2：$A_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x dx=?\ n=0,1,2,\cdots$ （$B_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx$类似）

  解：利用分部积分导出递推关系

$$A_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2},\quad A_1=\int_0^{\pi/2}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=1$$

n>1：
$$A_n=\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}xd(\sin x)$$
$$=\cos^{n-1}x\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin xd(\cos^{n-1}x)$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x\sin^2 xdx$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx$$
$$=(n-1)(A_{n-2}-A_n)\qquad \therefore\ A_n=\frac{n-1}{n}A_{n-2},\quad n=2,3,\cdots$$

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

✓ **例2 (续)**： $A_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = ?\ \ n = 0, 1, 2, \cdots$

已知 $A_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \dfrac{\pi}{2}$， $A_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$,

以及递推关系 $A_n = \dfrac{n-1}{n} A_{n-2}$， $n = 2, 3, \cdots$

所以

$$A_{2m} = \frac{2m-1}{2m} A_{2m-2} = \frac{(2m-1)(2m-3)}{2m(2m-2)} A_{2m-4}$$

$$= \cdots = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots 2} A_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$A_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} A_{2m-1} = \frac{2m(2m-2)}{(2m+1)(2m-1)} A_{2m-3}$$

$$= \cdots = \frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} A_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

W

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

✓ **特例：** 已知

$$A_{2m}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\quad A_{2m+1}=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

所以

$$A_2=\int_0^{\pi/2}\cos^2 x dx=\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$A_3=\int_0^{\pi/2}\cos^3 x dx=\frac{2!!}{3!!}=\frac{2}{3}$$

$$A_4=\int_0^{\pi/2}\cos^4 x dx=\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\cdots=\frac{3\pi}{16}$$

$$A_5=\int_0^{\pi/2}\cos^5 x dx=\frac{4!!}{5!!}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{8}{15}$$

$$A_6=\int_0^{\pi/2}\cos^6 x dx=\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\cdots=\frac{5\pi}{32}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

- 例3：$A=\int_0^{\pi} e^{ax}\cos bxdx=?\quad B=\int_0^{\pi} e^{ax}\sin bxdx=?$

解：仍利用分部积分计算

$$A=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\cos bxd(e^{ax})=\frac{1}{a}[e^{ax}\cos bx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{ax}d(\cos bx)]$$

$$=\frac{1}{a}[e^{ax}\cos bx\Big|_0^{\pi}+b\int_0^{\pi}e^{ax}\sin bxdx]=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\Big|_0^{\pi}+\frac{b}{a}B$$

$$B=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\sin bxd(e^{ax})=\frac{1}{a}[e^{ax}\sin bx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{ax}d(\sin bx)]$$

$$=\frac{1}{a}[e^{ax}\sin bx\Big|_0^{\pi}-b\int_0^{\pi}e^{ax}\cos bxdx]=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx\Big|_0^{\pi}-\frac{b}{a}A$$

整理二式得到

$$aA-bB=e^{ax}\cos bx\Big|_0^{\pi}\ \text{以及}\ bA+aB=e^{ax}\sin bx\Big|_0^{\pi}$$

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

- ✓ **例3 (续)**： $A=\int_0^\pi e^{ax}\cos bx dx=?\quad B=\int_0^\pi e^{ax}\sin bx dx=?$

已经导出
$$\begin{cases} aA-bB=e^{ax}\cos bx\Big|_0^\pi \\ bA+aB=e^{ax}\sin bx\Big|_0^\pi \end{cases}$$

解得
$$A=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)\Big|_0^\pi$$
$$B=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)\Big|_0^\pi$$

- ✓ **特例**： $\int_0^\pi e^x\cos x dx=\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)\Big|_0^\pi=-\frac{e^\pi+1}{2}$

$$\int_0^\pi e^x\sin x dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)\Big|_0^\pi=\frac{e^\pi+1}{2}$$

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

- 例4：$I=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=?\quad (a>0)$

解：再次利用分部积分计算

$$I=x\sqrt{a^2-x^2}\Big|_{-a}^{a}-\int_{-a}^{a}xd(\sqrt{a^2-x^2})$$

$$=0+\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int_{-a}^{a}\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=-\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=-I+a^2\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a}=-I+\pi a^2\qquad \therefore\ I=\frac{1}{2}\pi a^2\qquad \text{W}$$

- 注：观察该积分的几何意义……

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

- **分部积分应用：**

  设函数 f 在$[a,b]$上“充分光滑”(需要的导数都存在)

由N-L公式有

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

在右端积分中考虑分部积分

$$\int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t)d(t-x) \quad \text{(积分过程中上限是固定的)}$$

$$= (t-x)f'(t)\Big|_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)dt$$

$$= (x-a)f'(a) - \int_a^x (t-x)f''(t)dt$$

代回上式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt$$

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

- **分部积分应用 (续)：**

  已知 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x (x-t)f''(t)dt$

在右端积分中继续分部积分

$$\int_a^x (x-t)f''(t)dt=-\frac{1}{2}\int_a^x f''(t)d[(t-x)^2]$$

$$=-\frac{1}{2}[(t-x)^2 f''(t)\Big|_a^x-\int_a^x (t-x)^2 f'''(t)dt]$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)+\frac{1}{2}\int_a^x (t-x)^2 f'''(t)dt$$

综上得到

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

$$+\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)+\frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt$$

第18-2课：定积分的计算-分部积分法

- **分部积分应用** (续二)：
  不断重复上面分部积分过程即可得到

> **Taylor展开公式** (带积分型余项)
  设 $f \in C^{n+1}[a,b]$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中余项为

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

【容易用归纳法严格证明—可以自己练习】

第18课：微积分基本定理-定积分的分部积分

- **预习 (下次课内容)：**

  第7.4节 定积分换元法

  第7.5节 可积函数理论

- **作业 (本次课)：**

  练习题7.3：1(2,3), 2, 3, 4(提示:关于a求导), 5, 7, 8.

  练习题7.4：1(2,4,6,10,11), 2, 4*, 10*, 11, 13.