2022 年秋季《离散数学》期末试卷

2023 年 1 月 4 日 9 : 00-11 : 00

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1 题 10 分, 其余每题各 15 分. 可以自由的使用课本, 讲义与作业中命题的结论, 但若该试题就是这些命题本身, 则不能引用, 需要写出证明. 可用前面小问的结论解决后面的小问.

1 (1) 设 G 是 n 个顶点的简单图, 且共有 m 个连通分支. 求 G 的边数的最小值.

(2) 设 n 阶连通图 G 中每个顶点的度都是 2. 请确定 G.

2 (1) 叙述平面图的 *Euler 公式*.

(2) 设简单图 G 中每个顶点的度都不超过 Δ. 证明: G 的色数 $\chi(G)$ 不超过 $\Delta+1$.

(3) 设 $Y_1,\ldots,Y_b$ 都是集合 $X=\{1,2,\ldots,v\}$ 的 k 元子集, 满足: 对任何 X 中任何两个不同元素 x,x', 都恰好有 λ 个 Y_i 包含 x 与 x'. 请问每个元素 $x\in X$ 恰被多少个 Y_i 包含?

3 (1) 叙述 *Hall 匹配定理*.

(2) 设 $G=A\cup B$ 是二部分图, 满足 $|A|=|B|=n$, 且图中每点的度都等于同一个值. 证明: 图 G 中存在完美匹配.

(3) 在国际象棋盘 (8×8 的方格表) 上放置 24 个棋子兵, 每个兵占据棋盘的一个小方格, 满足每行每列都恰有 3 个兵. 证明: 可从中选出 8 个兵, 它们彼此既不同行, 也不同列.(提示: 令 $A=B=\{1,2,\ldots,8\}$, 考虑以 $A\cup B$ 为顶点集的二部图 G, 定义 $i\in A$ 与 $j\in B$ 连边当且仅当方格 (i,j) 处有兵)

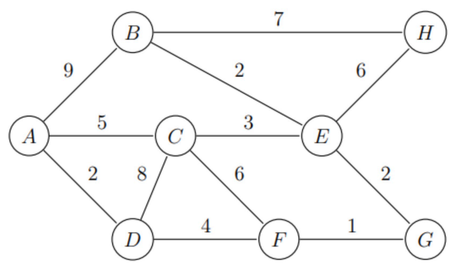
4 考虑以 $\{1,2,\ldots,n\}$ 为顶点集的树 T, 设 $P(T)=(y_1,y_2,\ldots,y_{n-2})$ 是 T 的*普吕弗 (Prüfer) 序列*.

(1) 令 $Y=\{y\in\{1,2,\ldots,n\}|存在\ 1\le i\le n-2\ 使得\ y_i=y\}$ 证明: T 的*叶子 (leaf)* 的数目等于 $n-|Y|$.

(2) 设 $n=2m$ 是偶数. 已知 $P(T)=(1,2,\ldots,m-1,1,2,\ldots,m-1)$. 请确定树 T.

5 (1) 设 T 是连通图 G 的生成树. 证明: 对于不属于 T 的任何边 e, 图 G 中都存在一个包含 e 的简单圈.

(2) 求出以下加权图的最便宜生成树 (总权最小的生成树), 图中用字母标记顶点, 权重写在边的旁边.



6 在简单图 G 中, 称两条有公共顶点的边 AB, AC 构成的图形为一个角, 并称 A 是该角的顶点, 称 B, C 为该角的支点.

(1) 设 G 是 n 阶图, 每个顶点的度分别为 $d_1, \ldots, d_n$. 请用 $d_1, \ldots, d_n$ 表示 G 中角的总数目 S.

(2) 利用 Cauchy-Schwartz 不等式 $n(d_1^2 + \cdots + d_n^2) \geq (d_1 + \cdots + d_n)^2$, 证明: 若 n 阶简单图 G 的边数为 E, 则 G 中角的总数目 S 满足 $S \geq \frac{2E^2}{n} - E$.

(3) 称简单图 G 中没有长为 4 的圈, 如果不存在四个不同顶点 v_1, v_2, v_3, v_4 使得 $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1$ 都是 G 的边. 证明: G 中没有长为 4 的圈的充分必要条件为: 对 G 的任何两个不同顶点 B, C, 以 B, C 为支点的角至多一个.

(4) 利用 (2), (3) 的结论证明: 若 n 阶图 G 中没有长为 4 的圈, 则其边数 E 满足 $E \leq \frac{1+\sqrt{4n-3}}{4}n$.

7 设 $G = A \cup B$ 是二部分图, 满足 $|A| = |B| = n$. 设 M 是 G 的一个完美匹配.

(1) 设 G 中每点的度都大于等于 2. 证明: G 中存在一个简单圈 C, 它的边是 M 中的边与 M 补集中的边交替出现.

(2) 如果 G 的边数大于 $\frac{n(n+1)}{2}$, 证明: G 还有另一个不同于 M 的完美匹配.(提示: 可对 n 归纳, 并在一种情形下利用 (1) 的结论)