上节内容要点：

1.实数再认识（有理数的稠密性，确界公理）

2. 收敛数列的主要性质：唯一性；有界性；
子列及其收敛性；四则运算性质；夹逼性质；
证明思路要点（极限语言）

3. 注释：应用这些性质可以证明已知极限；也可以通过四则运算夹逼原理等通过已知极限求出为之极限，也可以证明极限的不存在性。但是要注意用的时候一定是数列收敛的时候才有这些性质。

第2课：单调数列及其性质

第1章 实数和数列极限

- **内容：**

  第1.5节 数列极限概念的推广

  第1.6-1.7节 单调数列的性质和应用

第2-1课：数列极限概念的推广

无穷小数列

- **无穷小数列：** 设$\{a_n\}$为一个数列

  如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，称$\{a_n\}$为无穷小数列（简称无穷小）

➢无穷小数列性质：

➢1.{a_n}为无穷小当且仅当{|a_n|}为无穷小；

➢2.无穷小和差依然为无穷小；（乘法和除法呢？）

➢3.无穷小数列和有界数列的乘积数列依然为无穷小；

➢4.数列{a_n}j极限为a等价于数列{a_n-a}为无穷小。

第2-1课：数列极限概念的推广

无穷大数列

- **无穷大数列：** 设$\{a_n\}$为一个数列
  如果 $\forall A>0,\ \exists n_0\in \mathrm{N},$ 使得$\forall n>n_0,$
  1) 都有 $a_n > A,$ 则称$\{a_n\}$趋于$+\infty,$ 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
  2) 都有$a_n < -A,$ 则称$\{a_n\}$趋于$-\infty,$ 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
  3) 都有 $|a_n| > A,$ 则称$\{a_n\}$趋于 $\infty,$ 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

以上三种情况统称$\{a_n\}$为无穷大数列

- **注1：** 情况1-2) 都是情况3) 的特殊情况
- **注2：** 无穷大数列是一类特殊的发散数列（发散到无穷大）

第2-1课：数列极限概念的推广

- **例**：考察数列 $\{a^n\}$ 的收敛发散性质

  已知 $|a|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

  当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$；当 $a=-1$ 时，$\{(-1)^n\}$ 发散

  若 $|a|>1$，$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$；又若 $a>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ ——自己练习

- **无穷大数列性质**：设 $\{a_n\}$ 为无穷大数列，则

  1) $\{a_n\}$ 无界

  2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1/a_n)=0$ —— $\{1/a_n\}$ 为无穷小 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 为无穷大

  3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\infty$

  又若 $b\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)=\infty$

第2-2课：单调数列及其性质

单调数列与单调性原理

- **单调数列**：设$\{a_n\}$为一个数列

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果 } a_n \le a_{n+1},\ n=1,2,\mathrm{L}\ ,\ \text{则称}\{a_n\}\text{单调增} \\ \text{如果 } a_n \ge a_{n+1},\ n=1,2,\mathrm{L}\ ,\ \text{则称}\{a_n\}\text{单调减}\end{array}\right\}\text{统称单调数列}$$

- **严格单调**：上面的不等号换成严格不等号

- **单调性原理(公理)**：单调有界数列必有极限(收敛)

- **注1**：这是实数集上的公理, 在有理数集上不成立
- **注2**：公理保证了极限的存在性，但没有给出极限的值

- **推论1**：单调数列收敛的充分必要条件是该数列有界

第2-2课：单调数列及其性质

- **推论2** (单调有界数列极限的刻画)
  1) 单调增有上界数列的极限是数列的最小上界(上确界)
  2) 单调减有下界数列的极限是数列的最大下界(下确界)

- 证：只证1) 设$\{a_n\}$为单调增有上界数列

$\exists A>0$, 使得$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le A$

由单调性原理 $\exists a \in \mathrm{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 要证 a 是$\{a_n\}$的最小上界

a) 首先 $a \le A$, 否则$\forall n \in \mathrm{N}$, $a_n \le A < a$, 与$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 矛盾

b) 此外 a 也是$\{a_n\}$的上界, 否则$\exists n_0 \in \mathrm{N}$, 使得 $a_{n_0} > a$

由数列单调增 $\forall n > n_0$, 都有 $a_n \ge a_{n_0} > a$, 也与$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 矛盾

综上即知 a 是$\{a_n\}$的最小上界

第2-2课：单调数列及其性质

✓ **例1**：验证数列 $\{\frac{a^n}{n!}\}$ 收敛并求数列的极限（$a \in \mathrm{R}$ 任意）

解：记 $a_n = \frac{|a|^n}{n!} \geq 0$，则 $a_{n+1} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|a||a|^n}{(n+1)n!} = \frac{|a|}{(n+1)} a_n$

由此可见，当$n > n_0 \geq |a|$之后，$\{a_n\}$为单调减有下界数列

由单调性原理 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 存在，而且由子列性质$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = A$

已知 $a_{n+1} = \frac{|a|}{(n+1)} a_n$，令$n \to \infty$ 导出 $A = 0 \cdot A = 0$ 如下：

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{(n+1)} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{(n+1)} \lim_{n\to\infty} a_n$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$，数列 $\{\frac{a^n}{n!}\}$ 收敛

第2-2课：单调数列及其性质

✓ **例2**：$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \cdots$　　求证$\{a_n\}$发散

证：考虑

$$a_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}) +$$

$$+ \cdots + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k})$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}) +$$

$$+ \cdots + (\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k})$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2},\ k = 1, 2, \cdots$$

这说明 $\{a_n\}$单调增，无界，因此发散　W

第2-2课：单调数列及其性质

✓ **例3：** $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2},\ n = 1, 2, \cdots$　求证$\{a_n\}$收敛

证：
$$a_{2^k-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \left(\frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{15^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^2}\right)$$
$$\le 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{8^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^2}\right)$$
$$= 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \frac{8}{8^2} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^2}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} < 2,\ k = 1, 2, \cdots$$

$\left[\begin{array}{l}\text{数列的极限}=?\\ \text{并不容易求出}\end{array}\right]$

注意到 $\{a_n\}$单调增有上界，因此收敛　W

第2-3课：单调收敛数列的实例

两个单调收敛数列及其极限

- **两个重要数列**

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ b_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},\quad n=1,2,\cdots$$

➢ **引理1**：数列$\{b_n\}$单调增有上界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 存在

证：只须证明数列有上界：注意 $n\geq 3$时 $n!>2^{n-1}$

$$\therefore\ b_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,\ n=3,4,\cdots \qquad \blacksquare$$

➢ **推论**：$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\ \leq 3$

第2-3课：单调收敛数列的实例

- **引理2**：$a_n \le b_n$，$n = 1, 2, \mathrm{L}$ ，因此$\{a_n\}$有上界

证：应用二项式展开公式

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$+\mathrm{L} + \frac{n(n-1)\mathrm{L}\ (n-k+1)}{k(k-1)\mathrm{L}\ 2}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \mathrm{L} + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \mathrm{L} + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\mathrm{L}\ \left(1-\frac{k-1}{n}\right) +$$

$$+\mathrm{L} + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\mathrm{L}\ \left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \mathrm{L} + \frac{1}{k!} + \mathrm{L} + \frac{1}{n!} = b_n \qquad \mathrm{W}$$

第2-3课：单调收敛数列的实例

- **引理3：** $\{a_n\}$单调增，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 存在

证：由上面推导

$$a_n = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) + $$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$\le 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1}) + $$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1}) + $$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}) = a_{n+1} \qquad \square$$

第2-3课：单调收敛数列的实例

- **定理**：$a=b$，今后记为 e

也即 $$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

证：由极限保序性，引理2导出 $a\le b$

回忆 $$a_n=2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})+$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$
$$\ge 2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

对于 $k\le n$ 成立。固定k，令$n\to\infty$，得

$$a\ge 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}=b_k$$ ——由此导出 $a\ge b$ W

第2课：单调数列及其性质

- **预习**（下次课内容）：

  第1.8节 基本列与收敛原理

  第1.9节 上下确界与确界原理

  第1.12节 Stolz定理*(计算数列极限的一类方法)

- **作业**（本次课）：

  练习题1.5：1, 4, 6.

  练习题1.6：1[自己练习], 2, 3, 5. 问题1.6：3*.

  练习题1.7：1[自己练习], 2, 5, 6, 7*-9*.