第七章：微分方程

一、微分方程的基本概念

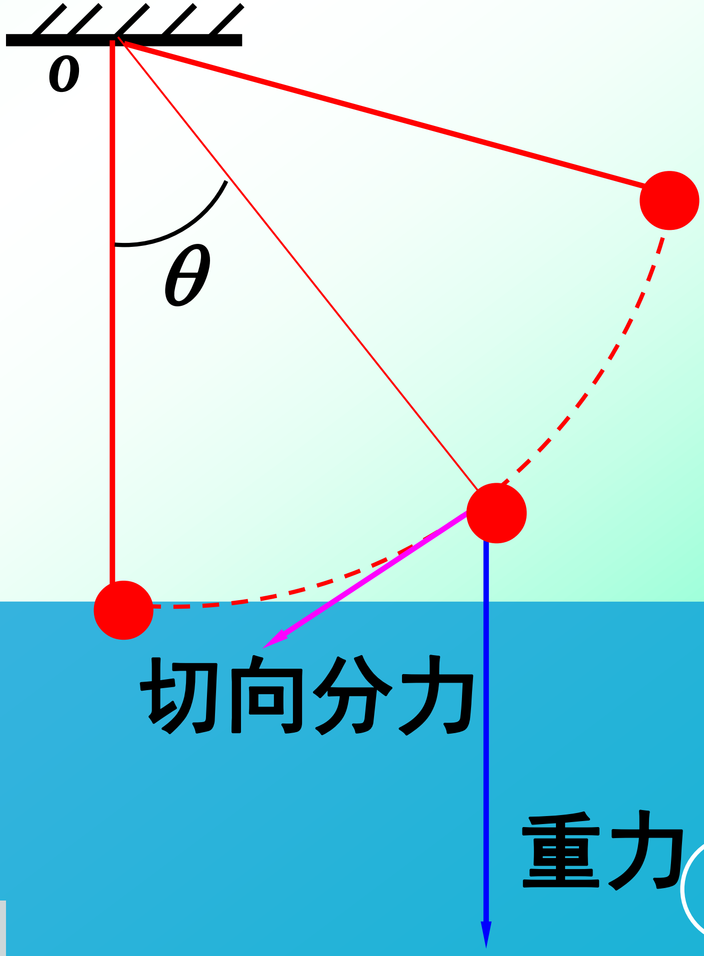
二、解的存在唯一性定理

三、一阶常微分方程的初等积分法

一、微分方程的基本概念

十七世纪末，力学、天文学、物理学及工程技术提出大量需要寻求函数关系的问题。在这些问题中，函数关系不能直接写出来，而要根据具体问题的条件和某些物理定律，首先得到一个或几个含有未知函数的导数的关系式，即微分方程，然后由微分方程和某些已知条件把未知函数求出来。

[例1]一个质量为m的小球,系在线的一端,线的另一端系在墙上,线的长度等于l.将小球拉开一个小角度松手使小球摆动,求小球的运动规律



[解] 设小球线速度为$v(t)$.

切向分力: $F_1 = -mg\sin\theta$

阻力: $F_2 = \mu v$

根据牛顿第二定律,得到

$$m\frac{dv}{dt}=-\mu v-mg\sin\theta$$

注意到 $v(t)=l\frac{d\theta}{dt}$

从而有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

当$\theta<<1$时,$\sin\theta\approx\theta$,所以有

微分方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0$$

初始条件

定解条件

$$\theta(t)\big|_{t=0}=\theta_0,\quad \frac{d\theta}{dt}\bigg|_{t=0}=\theta_1$$

定解问题

定义1: 含有未知函数的导数的方程称为微分方程.

未知函数是一元函数,含有未知函数的导数的微分方程称为常微分方程.

例如 $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0$$

未知函数是多元函数,含有未知函数的偏导数的微分方程称为偏微分方程.

定义2:（微分方程的阶）

未知函数的导数的最高阶数称为

微分方程的阶.

例如 $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0$$ 二阶

n阶微分方程的一般形ェ

$$\boxed{F(x, y, \frac{dy}{dx}, \Lambda, \frac{d^n y}{dx^n})=0 \qquad (1)}$$

定义3:（线性与非线性)

未知函数及其各阶导数都是一次方幂的微分方程称为线性微分方程.

n阶线性常微分方程的一般形式

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\Lambda$$

$$+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

不是线性方程的称为非线性微分方程

例如$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$是一阶非线性微分方程

定义4：(微分方程的解)

如果把函数$y=y(x)$代入方程(1)后使方程成为恒等式，则称函数$y=y(x)$是微分方程(1)的一个解.

微分方程的通解：

n阶常微分方程(1)的包含n个独立的任意常数的解$y=f(x,C_1,\cdots,C_n)$称为微分方程的通解.

例如：一阶微分方程 $\frac{du}{dt}+ku=A$

函数 $u(t)=\frac{A}{k}+e^{-kt}$是一个解

对于任意常数C，单参数函数族

$$u(t)=\frac{A}{k}+Ce^{-kt}$$

是微分方程的通解

$$(\Theta\ \frac{du}{dt}+ku=-Cke^{-kt}+A+Cke^{-kt}\equiv A)$$

通解有时也写成隐式形式

$$\Phi[x, y(x), C_1, C_2, \Lambda\ , C_n] = 0$$

称为微分方程的通积分

微分方程的特解：

一个常微分方程的满足定解条件的解称为微分方程的特解

例如：一阶微分方程定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + ku = A \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

通解 $u(t) = \dfrac{A}{k} + Ce^{-kt}$

$$u(0) = \frac{A}{k} + C = 1 \quad \Rightarrow C = 1 - \frac{A}{k}$$

特解 $u(t) = \dfrac{A}{k} + (1 - \dfrac{A}{k})e^{-kt}$

n阶微分方程的定解问题

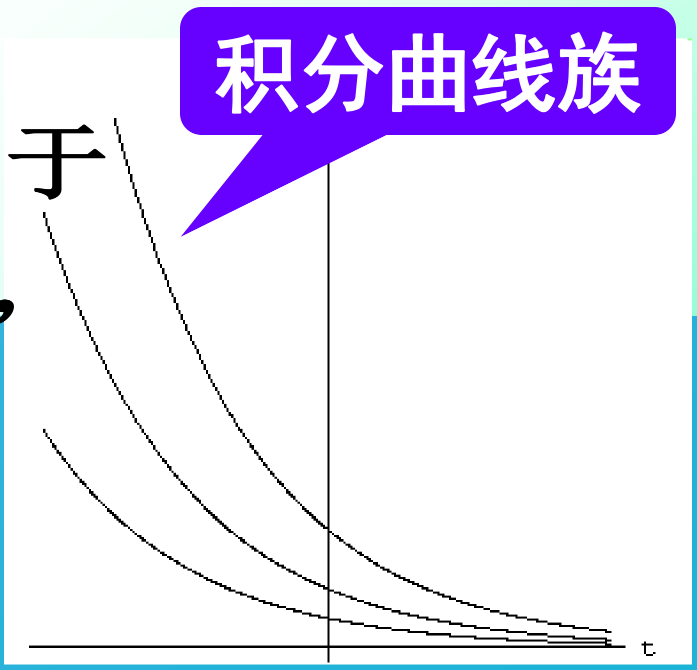
$$\begin{cases} F\left(x,\ y,\ \dfrac{dy}{dx},\ \Lambda\ ,\ \dfrac{d^n y}{dx^n}\right)=0 \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \\ \dfrac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}=y_1 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\bigg|_{x=x_0}=y_{n-1} \end{cases}$$

有n个
定解条件

定义5: (积分曲线与积分曲线族)

常微分方程的每一个解都是一个一元函数 $y=f(x)$ 或是 $F(x,y)=0$ (隐式解), 它的图形称为该常微分方程的一条积分曲线

通解 $y=f(x,C)$ 对应于 xy 平面上的一族曲线, 称为积分曲线族



二、解的存在唯一性定理

考察一阶常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

设函数 $f(x, y)$ 在以点 (x_0, y_0) 为中心的某个矩形

$$D = \{(x, y): |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$$

中连续,并且关于变元y满足李普希兹($Lipschitz$)条件：即存在正数L,使得对于矩形中任意两点$(x,y_1),(x,y_2)$,都有

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|$$

则存在正数h,使得初值问题在区间$[x_0-h,x_0+h]$上存在唯一的解$y=y(x)$

其中 $h=\min(a,\dfrac{b}{M}),$

$$M=\max_{(x,y)\in D}\left|f(x,y)\right|$$

[例] 考虑一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$，

定解条件 $y(x_0)=y_0$．

当 $y>0$ 时，$f(x,y)=2\sqrt{y}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$

是连续的给定 $y_0>0$，在 (x_0,y_0) 的某邻域内，有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|$

$$=\left|2\sqrt{y_1}-2\sqrt{y_2}\right|=\frac{1}{\sqrt{\xi}}|y_1-y_2|\le L|y_1-y_2|$$

满足定理条件，解存在唯一。

当 $y_0 = 0$ 时, $f(x, y)$不满足定理条件

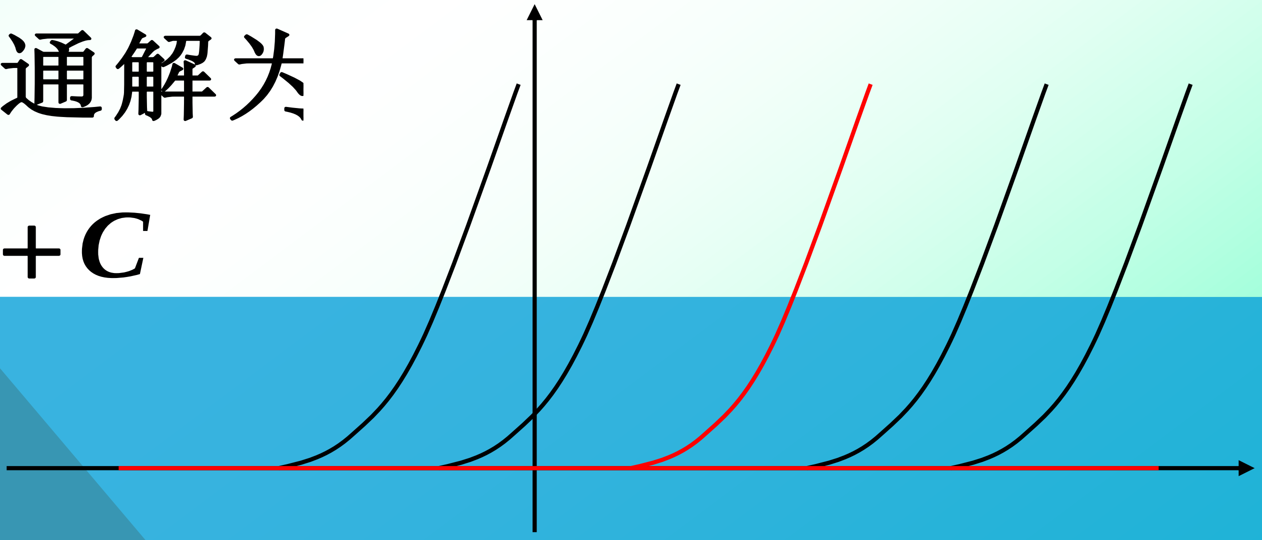
这时定解问题有两个解

$\sqrt{y} = x - x_0$, $y = 0$ (奇异解).

当 $y_0 < 0$ 时, 解不存在.

易验证通解为

$\sqrt{y} = x + C$



三、一阶常微分方程的初等积分法

- 所谓初等解法，就是用不定积分的方法求解常微分方程.
- 初等解法只适用于若干非常简单的一阶常微分方程，以及某些特殊类型的二阶常微分方程.

(一) 变量可分离型 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

或 $f(x)dx=g(y)dy$

- 可化为可分离变量

(二) 一阶线性方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

- 伯努利(Bernoulli)方程

(三)* 全微分方程 $M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0$

- 积分因子

（一）分离变量法

[例1] 解方程

(1) $\dfrac{dy}{dx}=2xy$

这两个方程的共同特点是变量可分离型

(2) $\sqrt{1-y^2}=3x^2y\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx}=f(x)h(y)$ $\xrightarrow{\text{分离变量}}$ $g(y)dy=f(x)dx$

两边积分 $\int g(y)dy=\int f(x)dx$ 通解

（1）［解］ $$\frac{dy}{dx}=2xy$$

分离变量 $$\frac{1}{y}dy=2x\,dx$$

两边积分 $$\int\frac{1}{y}dy=\int 2x\,dx$$

$$\ln|y|=x^2+C_1 \quad 即 \quad |y|=e^{x^2+C_1}=e^{x^2}e^{C_1}$$

当$y>0$时， $y=e^{C_1}e^{x^2}$

当$y<0$时， $y=-e^{C_1}e^{x^2}$

记 $C=\pm e^{C_1}$,则有

$$y=Ce^{x^2} \quad (C\neq 0)$$

注意：$y\equiv 0$ 也是方程的解

(分离变量时,这个解被丢掉了!)

故C也可以等于零

于是得到方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$

通解 $y=Ce^{x^2} \quad (C\in R)$

(2) [解] $\sqrt{1-y^2}=3x^2y\dfrac{dy}{dx}$

分离变量 $\dfrac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{dx}{3x^2}$

两端积分, 得 $-\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-y^2}=-\dfrac{1}{3x}+C$

通解 $\sqrt{1-y^2}=\dfrac{1}{3x}+C$

注意:

$y^2=1$,即$y=\pm1$也是方程的解

奇异解

总结：对于可分离变量的微分方程，　首先经过初等变形可以将微分方程化为如下形式：

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x\,.$$

如果能求得$g(y)$和$f(x)$的原函数$G(y)$，$F(x)$，(1)式两端积分就得到微分方程的通解：

$$G(y) = F(x) + C\,.$$

这种求解微分方程的方法称为分离变量法.

分离变量法仅适用于某些非常简单的微分方程.

例3 求解微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x(y-1)}{(1+x^2)y}\,(y>1)\,.$$

解 分离变量

$$\frac{y\mathrm{d}y}{y-1}=\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)}\,.$$

等式两端积分得到

$$y+\ln(y-1)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1\,.$$

取指数得到

$$e^y(y-1)=C\sqrt{1+x^2}\ (C=e^{C_1}>0)\,.$$

这就是微分方程的通解.

如果给定初值条件 $y(1)=2$,

可以在通解表达式 $e^y(y-1)=C\sqrt{1+x^2}\ (C>0)$ 中

取 $x=1, y=2$.

可以求出 $C=\dfrac{e^2}{\sqrt{2}}$, 于是得到特解

$$e^y(y-1)=\frac{e^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\ .$$

●可化为可分离变量

[例4] $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$$

[例5] $$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

这两个方程的共同特点是什麽？

可化为 $$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

齐次型方程

齐次型方程 $\dfrac{dy}{dx}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

求解方法

令 $u=\dfrac{y}{x}$ 即 $y=xu$

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$ 代入得到

$$\boxed{\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}}$$

这是什么方程？

可分离变量方程！

[例4]的解: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$

令 $u=\dfrac{y}{x}$ 　则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,代入得到

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u$$

分离变量 → $\cot u\,du=\dfrac{dx}{x}$

两端积分 → $\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$

取指数并且脱去绝对值

$$\Rightarrow \quad \sin u = \pm e^{C_1} x = Cx \qquad (C \neq 0)$$

由此又得到

$$y = x \arcsin(Cx) \qquad (C \neq 0)$$

注意： $y \equiv 0$ 也是原方程的一个解

所以可以有 $C = 0$

通解 $y = x \arcsin(Cx) \quad (C \in \mathrm{R})$

[例5] $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x+y}$

[解]

令 $u=\dfrac{y}{x}$， $y=ux$， $y'=u+xu'$

则 $u+xu'=\dfrac{1-u}{1+u}$ 即 $xu'=\dfrac{1-2u-u^2}{1+u}$

$$\frac{1+u}{1-2u-u^2}du=\frac{1}{x}dx$$ 凑微分

$$\frac{\frac{1}{2}d(u^2+2u-1)}{1-2u-u^2}=\frac{1}{x}dx$$ 两端积分

得 $$\frac{1}{2}\ln(u^2+2u-1)=-\ln x+\ln C_1$$

$$u^2+2u-1=\frac{C}{x^2}$$

通解 $$y^2+2xy-x^2=C$$

[例6] 求 $y' = \cos(x - y)$ 的通解。

[解] 令 $x - y = u$， $1 - y' = u'$

则 $u' = 1 - \cos u \Rightarrow \dfrac{du}{1 - \cos u} = dx$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{1 - \cos u} = \int dx \Rightarrow \int \frac{du}{2\sin^2 \frac{u}{2}} = \int dx$$

通解 $-\cot \dfrac{x - y}{2} = x + C$

(二) 一阶线性微分方程

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (1)$$

非齐次

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (2)$$

齐次

对于一般形式的一阶线性微分方程我们讨论其解的结构情况，然后给出通解公式。其核心是常数变易法。

线性方程的解的性质：

性质1：线性齐次方程(2)必有零解。

性质2：若$y=y(x)$是线性齐次方程(2)的解,则

$y=Cy(x)$亦是(2)的解(C为任意常数)。

性质3：如果$y_1(x)$与$y_2(x)$是线性齐次方程(2)的解,则它们的任意线性组合

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

都是方程(2)的解,其中C_1, C_2为任意常数.

性质4:

如果$y_1(x)$, $y_2(x)$是非齐次方程(1)的解,

则$y_1(x)-y_2(x)$是齐次方程(2)的解.

性质5:

如果$y^*(x)$是非齐次方程(1)的一个解,

$y(x)$是齐次方程(2)的一个解,则

$y^*(x)+y(x)$是非齐次方程(1)的解.

一阶线性微分方程

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y+c(x)=0$$

标准形式:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$ 非齐次

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$$ 齐次

(1) 如何解齐次方程?

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$$

什麽类型?

分离变量 $\longrightarrow$ $$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

解得 $$y = ce^{-\int p(x)dx}$$

齐次通解

是p(x)一个原函数
不是不定积分！

注意：

齐次通解的结构：

设 $y_1(x)$ 是 $y' + p(x)y = 0$的一个非零解，则通解 $\bar{y} = Cy_1(x)$

(2) 用常数变异法解非齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \qquad (2)$$

对应于(1)的齐次方程

(2) 的通解为 $\bar{y}=Ce^{-\int p(x)dx}=Cy_1(x)$

假定(1)的解具有形式

$$y=C(x)y_1(x)$$

将这个解代入(1)，经计算得到

$$C'(x)y_1(x)+C(x)y_1{}'(x)$$

$$+p(x)C(x)y_1(x)=q(x)$$

$\Theta\ y_1(x)$ 是 ② 的解，

$$\therefore C(x)y_1{}'(x)+p(x)C(x)y_1(x)=0$$

化简得到 $C'(x)y_1(x)=q(x)$

即 $$C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

积分 $$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}+C$$

从而得到非齐次方程(1)的通解

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

非齐次通解

或 $$y=e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}\left(C+\int_{x_0}^{x} q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}dx\right)$$

给 $y(x_0)=y_0$ 得 $C=y_0$

特解

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx}dx\right)$$

非齐次特解

非齐次通解的结构：

设 $\bar{y}$ 是 $y'+p(x)y=0$ (2)的通解,

$y^*(x)$是$y'+p(x)y=q(x)$ (1)的一个解,

则(1)的通解为

$$y(x)=\bar{y}+y^*(x)$$

[例1] 求$y'+y=1 \quad (1)$的通解。

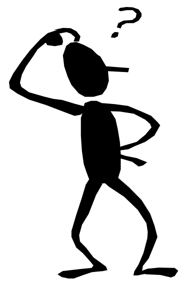
[解] 易知$y'+y=0 \quad (2)$的一个解

$$y_1(x)=e^{-x},$$

$\therefore (2)$的通解 $\bar{y}=Ce^{-x}.$

观察出$y^*(x)=1$是(1)的一个解.

$\therefore (1)$的通解 $y(x)=Ce^{-x}+1$



[例2] $xdy - ydx = -y^2e^ydy$

[解] 这是线性方程吗?

变形为: $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} = -ye^y$

是关于函数 x=x(y) 的一阶线性方程!

第一步:先求解齐次方程

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 0$$

$$x = Ce^{\int \frac{dy}{y}}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

齐次方程通解是 $x = Cy \quad (C \in \mathrm{R})$

第二步:用常数变异法解非齐次方程

假设非齐次方程的解为 $x = C(y)y$

代入方程并计算化简

$$yC'(y) + C(y) - C(y) = -ye^y$$

$$\Rightarrow \quad C'(y) = -e^y$$

积分得 $C(y) = -\int e^y dy = -e^y + C$

通解 $x = Cy - ye^y$

[例3] 设$a>0$, $f(x)$ 在$[0,+\infty)$连续有界, 证明方程

$$\frac{dx}{dt}+ax=f(t)\quad (t>0)$$

每个解在$[0,+\infty)$ 有界.

[证] 设 $x=x(t)$ 是满足初始条件$x(0)=x_0$ 的解.

则 $$x(t)=e^{-at}\left(x_0+\int_0^t e^{as}f(s)ds\right)\quad (t>0)$$

设 $|f(x)| \le M$

$$\Rightarrow |x(t)| \le |x_0| + \left|\int_0^t e^{-a(t-s)} f(s)ds\right|$$

$$\le |x_0| + M \cdot \left|\int_0^t e^{-a(t-s)} ds\right|$$

$$\le |x_0| + \frac{M}{a}$$

例4：设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$

其反函数为$g(x)$，若$\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$，求$f(x)$.

例5：若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，$G(x)$是$\dfrac{1}{f(x)}$的一个原函数。由知$F(x)G(x)=-1$，$f(0)=1$，求$f(x)$.（先导出F的方程求解F从而解出f）

●伯努利(Bernoulli)方程（可化为一阶线性微分方程）

Bernoulli 方 程

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n}$$

方程两端同除y^n

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$

则有 $$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

将原方程化为

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$$

Bernoulli 方　程

令 $z=y^{1-n}$

线性方程

[例] 解方程 $y'+\frac{2}{x}y=3x^2y^{\frac{4}{3}}$

[解] Bernoulli方程 $n=\frac{4}{3}$

$$y^{-\frac{4}{3}}y'+\frac{2}{x}y^{-\frac{1}{3}}=3x^2$$

令 $z=y^{1-\frac{4}{3}}=y^{-\frac{1}{3}}$ $\Longrightarrow$ $z'=-\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}y'$

将原方程化为 $-3z'+\frac{2}{x}z=3x^2$

解线性方程 $$z' - \frac{2}{3x}z = -x^2 \quad (1)$$

相应的齐次方程 $$z' - \frac{2}{3x}z = 0 \quad (2)$$

(2)的通解

$$\bar{z} = Ce^{\int \frac{2}{3x}dx} = C(e^{\int \frac{1}{x}dx})^{\frac{2}{3}} = Cx^{\frac{2}{3}}$$

设(1)的解为

$$z = C(x)x^{\frac{2}{3}}$$

代入(1)，计算化简得到

$$C'(x)x^{\frac{2}{3}} = -x^2$$

$$C(x)=\int -x^{\frac{4}{3}}dx=-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$$

$$z^{*}(x)=-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{7}x^{3}$$

(1)的通解

$$z(x)=\bar{z}+z^{*}(x)=Cx^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{7}x^{3}$$

原方程的通解

$$y^{-\frac{1}{3}}=Cx^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{7}x^{3}$$

小结

1. 解、通解、特解、定解问题

2. 一阶微分方程可积类型

可分离型、可化为可分离、**一阶线性**、

伯努利方程、**利用微分形式***、积分因子*

思想：方程变形——变量代换

Homework:

Ex7.1: 1(1, 3,6),3(3, 5, 7),
4(2, 3).

Ex7.2: 1(3, 5, 6, 9, 10),2(4, 5, 7),
3(6, 9, 10, 14),5.