

常系数微分方程

一：常系数微分方程特征根法

二：欧拉方程

三：常数变易法

常系数齐次线性方程的特征根法

问题：如何求常系数线性齐次方程的通解？

关键：找到一组线性无关解！

二阶线性常系数齐次方程

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

特征方程



$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2$$

特征根

根据特征根，讨论通解

(1) $b^2 - 4ac > 0$, 两个不等实根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ 与 $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ 线性无关

通解 $\bar{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

(2) $b^2 - 4ac = 0$, 两个相等实根

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{b}{2a}$ 一个解 $y_1 = e^{\lambda x}$

问题：如何求出另一个解？

根据线性无关性

设 $y_2 = u(x)e^{\lambda x}$

代入方程，经整理得

$$[au'' + (2a\lambda + b)u' + (a\lambda^2 + b\lambda + c)u]e^{\lambda x} = 0$$

$$\longrightarrow au'' + (2a\lambda + b)u' + (a\lambda^2 + b\lambda + c)u = 0$$

因为 λ 是特征根，且是重根，故

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad 2a\lambda + b = 0$$

又 $a \neq 0$ ，因而得到 $u'' = 0$

$$\longrightarrow u' = C_1 \quad \longrightarrow u = C_1 x + C_2$$

取 $u(x) = x \quad \longrightarrow y_2 = xe^{\lambda x}$

通解

$$\bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$$

(3) $b^2 - 4ac < 0$, 共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

利用欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$y_1 = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

根据解的性质，组合成两个实值解

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

通解

$$\bar{y} = e^{\alpha x} (\text{线性无关} + C_2 \sin \beta x)$$

[例1] 求方程 $y'' + 3y' - 10y = 0$ 的通解

[解] 写出特征方程

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

➡ $(\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0$

➡ $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -5$

通解

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}$$

[例2] 求方程 $y'' + 8y' + 16y = 0$ 的通解

[解] 写出特征方程

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$


$$(\lambda + 4)^2 = 0$$



$$\lambda = -4 \quad (\text{重根})$$

通解 $\bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-4x}$

[例3] 求方程 $y'' + 2y' + 2y = 0$ 的通解

[解] 写出特征方程

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$


$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i$$

通解 $\bar{y} = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

三、常系数非齐次线性方程的 待定系数法

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

解非齐次方程的关键是求一个解

有哪些方法？

(1) 变动任意常数法

(2) 待定系数法

方法(2)的关键：根据右端 $f(x)$ ，根据特征根
正确地设出特解形式



这种方法适用于 $f(x)$ 的几种特殊情况
主要是利用三条法则

(1) n 次多项式的导数是 $(n-1)$ 次多项式

(2) 指数函数的导数仍为指数函数

$$(e^{rx})' = re^{rx}$$

(3) $(\sin ax)' = a \cos ax$

$$(\cos ax)' = -a \sin ax$$

第一种情形: $f(x) = p_m(x)e^{\lambda x}$

其中 $P_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式, 常数 λ 是实常数或复常数。 因为多项式与指数乘积的导数仍为多项式与指数乘积

对方程 $y'' + ay' + by = P_m(x)e^{rx}$

设 $y^*(x) = Q(x)e^{rx}$

则 $y^{*'}(x) = Q'(x)e^{rx} + rQ(x)e^{rx}$

$y^{*''}(x) = Q''(x)e^{rx} + 2rQ'(x)e^{rx} + r^2Q(x)e^{rx}$

代入方程 约去公因子 e^{rx} , 并整理得到

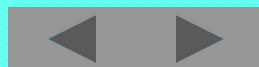
$$Q''(x) + (2r + a)Q'(x)$$

$$+ (r^2 + ar + b)Q(x) = P_m(x) \quad (*)$$

$$Q''(x) + (2r + a)Q'(x) + (r^2 + ar + b)Q(x) = P_m(x) \quad (*)$$

(*) 式两端都是关于 x 的多项式,
欲使两端相等, 首先必须使
两端多项式的次数相等.

根据 r 与特征根的关系, 分三种情况 :



$$Q''(x) + (2r + a)Q'(x) + (r^2 + ar + b)Q(x) = P_m(x) \quad (*)$$

(1) r 不是特征方程的根

$$r^2 + ar + b \neq 0$$

这时(*)式的左端是一个与 $Q(x)$ 次数相同的多项式,而右端 $P_m(x)$ 是 m 次多项式故

取 $Q(x) = Q_m(x)$ m 次多项式

(2) r 是特征方程的单根

$$r^2 + ar + b = 0 \quad \text{而} \quad 2r + a \neq 0$$



这时方程*)的左端是一个比 $Q(x)$ 次数低一次的多项式

$$\text{取 } Q(x) = x Q_m(x)$$

(3) r 是特征方程的重根

$$r^2 + ar + b = 0 \quad \text{并且} \quad 2r + a = 0$$

这时方程*)的左端是一个比 $Q(x)$ 次数低二次的多项式

$$\text{取 } Q(x) = x^2 Q_m(x)$$

[例1] $y'' + 3y' + 2y = 4e^{3x}$

$(\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0), r = 3$

[解] 齐次方程的通解 $= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

设 $y^*(x) = Ae^{3x}$ 代入方程

$$y^{*''} + 3y^{*'} + 2y^* = (9 + 9 + 2)Ae^{3x} = 4e^{3x}$$

比较系数: $20A = 4 \quad \longrightarrow \quad A = \frac{1}{5}$

$\longrightarrow y^*(x) = \frac{1}{5}e^{3x}$ 通解 $y(x) = \bar{y} + y^*(x)$

[例2] $y'' + 3y' + 2y = 4e^{-2x}$

[解] 这时 $r = -2$

设 $y^*(x) = Axe^{-2x}$ 代入方程

$$y^{*''} + 3y^{*'} + 2y^* = 4e^{-2x}$$

$$\longrightarrow -Ae^{-2x} = 4e^{-2x} \longrightarrow A = -4$$

$$\longrightarrow y^*(x) = -4xe^{-2x}$$

通解 $y(x) = \bar{y} + y^*(x)$

$$= C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - 4xe^{-2x}$$



[例3] 解方程 $y'' + y' + y = x^2$

[解] 求齐次方程通解 $\bar{y}(x)$

特征方程 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

特征根 $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$



$$\bar{y}(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

求非齐次方程一个角

将方程改写成 $y'' + y' + y = x^2 e^{0x}$

因为 $r = 0$ 不是特征方程的根

故设特解形式为

$$y^*(x) = ax^2 + bx + c$$

→ $y^{*'}(x) = 2ax + b, \quad y^{*''}(x) = 2a$

代入方程

$$2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2$$

整理 $ax^2 + (2a + b)x + (2a + b + c) = x^2$

比较系数

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow y^*(x) = x^2 - 2x$$

非齐次方程通解:

$$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x)$$

$$= x^2 - 2x + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

[例4] 解方程 $x'' - 2x' + x = 4te^t$

[解] 特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (重根)

因为 $r = 1$ 是二重特征根故

设特解为 $x_0(t) = t^2(at + b)e^t$

代入原方程得到

$$(6at + 2b)e^t = 4te^t$$

$$\longrightarrow 6at + 2b = 4t \longrightarrow a = \frac{2}{3}, \quad b = 0$$

$$\longrightarrow x_0(t) = \frac{2}{3}t^3 e^t$$

又齐次方程的通解:

$$\bar{x}(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$$

于是原方程通解:

$$x(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + C_1 + C_2 t\right)e^t$$

第二种情形：

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$$

设

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x} [Q_m^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_m^{(2)} \sin \beta x]$$

其中 $m = \max(l, n)$

$$k = \begin{cases} 0, & \alpha + i\beta \text{不是特征根} \\ 1, & \alpha + i\beta \text{是特征根} \end{cases}$$

特别：我们考虑

$$ay'' + by' + cy = A \sin \beta x$$

$$ay'' + by' + cy = A \cos \beta x$$

考虑方程 $az'' + bz' + cz = Ae^{i\beta x}$

$$A \cos \beta x = \operatorname{Re}[Ae^{i\beta x}]$$

注意到

$$A \sin \beta x = \operatorname{Im}[Ae^{i\beta x}]$$

[例5] 求方程 $y'' - 4y' + 13y = 4\sin 3x$
的一个解

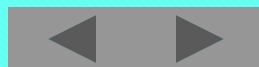
[解法一] 考虑方程 $z'' - 4z' + 13z = 4e^{i3x}$

特征根 $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$

设该方程的一个解为 $z = ae^{i3x}$

代入方程得到

$$-9ae^{i3x} - 12iae^{i3x} + 13ae^{i3x} = 4e^{i3x}$$



整理得 $(1 - 3i)ae^{i3x} = e^{i3x}$

比较系数得到 $a = \frac{1}{1 - 3i} = \frac{1 + 3i}{10}$



$$z = \frac{1 + 3i}{10} e^{i3x} = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right)(\cos 3x + i \sin 3x)$$

取 z 的虚部,得到原方程一个解

$$y^*(x) = \frac{3}{10} \cos 3x + \frac{1}{10} \sin 3x$$

$$y'' - 4y' + 13y = 4\sin 3x$$

[解法二] 设方程的一个解为

$$y^*(x) = a \cos 3x + b \sin 3x$$

代入方程, 比较系数, 定出 a 和 b

小结:

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

若 $f(x) = P_m(x)e^{rx}$

设 $y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{rx}$

$$k = \begin{cases} 0, & r \text{不是特征根} \\ 1, & r \text{是特征单根} \\ 2, & r \text{是特征重根} \end{cases}$$

若

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$$

设

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x} [Q_m^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_m^{(2)} \sin \beta x]$$

其中 $m = \max(l, n)$

$$k = \begin{cases} 0, & \alpha + i\beta \text{不是特征根} \\ 1, & \alpha + i\beta \text{是特征根} \end{cases}$$

二、欧拉方程

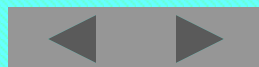
欧拉方程是一种变系数方程

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

作变量代换 令 $x = e^t$ ($x > 0$) 或 $t = \ln|x|$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2}$$





$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

代入欧拉方程，得

$$a\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + b \frac{dy}{dt} + cy = f(e^t)$$

即

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + (b - a) \frac{dy}{dt} + cy = f(e^t)$$

常系数二阶线性非齐次



[例6] 求方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0$ 的通解

[解] 令 $|x| = e^t$ 代入方程, 得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (1)$$

特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

方程(1)的通解 $y = e^{-t} (C_1 + C_2 t)$

原方程的通解 $y = \frac{1}{|x|} (C_1 + C_2 \ln|x|)$

三、二阶线性常微分方程的 常数变易法

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (2)$$

情况1: 若已知 $y_0(x)$ 是方程(2)的一个非零解, 求方程(1)的解。(同理可求方程(2)的解)

设方程(1)的解 $y(x) = C(x)y_0(x)$

$$y' = C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x)$$

$$y'' = C''(x)y_0(x) + 2C'(x)y_0'(x) + C(x)y_0''(x)$$

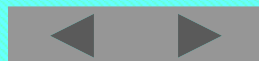
将 y, y', y'' 代入方程(1), 整理得

$$y_0 C''(x) + (2y_0' + a_1(x)y_0)C'(x) \\ + [y_0'' + a_1(x)y_0' + a_2(x)y_0]C(x) = f(x)$$

已知 $y_0(x)$ 是方程(2)的解 

$$y_0 C''(x) + (2y_0' + a_1(x)y_0)C'(x) = f(x)$$

这是关于待定函数 $C(x)$ 的二阶可降阶方程
解出 $C(x)$, 即可得到方程(1)的解。



情况2：若已知方程(2)的通解

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

设非齐次方程(1)的解

$$y^*(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

$$\begin{aligned} y^{*'}(x) &= C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) \\ &\quad + C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) \end{aligned}$$

附加条件

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \quad (1')$$



于是 $y^{*'} = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$

$$y^{*''} = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' \\ + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2''$$

代入方程(1)得到

$$[C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' \\ + C_2(x)y_2''] + a_1(x)[C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'] \\ + a_2(x)[C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2] = f(x)$$

整理后得到

$$\begin{aligned} & [C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2'] \\ & + C_1(x)[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1] \\ & + C_2(x)[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2] = f(x) \end{aligned}$$

$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 均为齐次方程2)的解,故

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0$$

$$\longrightarrow C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \quad (2')$$



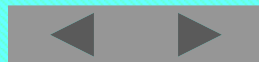
将(1')式与(2')式联立,即得

$$\begin{cases} y_1 C_1'(x) + y_2 C_2'(x) = 0 \\ y_1' C_1'(x) + y_2' C_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

因为 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关所以上述方程组的系数行列式不等于零

$$\text{即 } \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

故方程组有解解出 $C_1'(x)$ 和 $C_2'(x)$ 后,再积分便可得到 $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$



综上所述, 只要求出齐次方程(2)的一个非零解或两个线性无关的解, 就可已通过变动任意常数法得到二阶线性常微分方程的解。

问题:

方程(2)的一个非零解 $y_1(x)$ 怎么得到?

观察法

注意 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ 系数的特点

$$\text{若 } a_2(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad y_1(x) = 1$$

$$\text{若 } 1 + a_1(x) + a_2(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad y_1(x) = e^x$$

$$\text{若 } 1 - a_1(x) + a_2(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad y_1(x) = e^{-x}$$

$$\text{若 } y_1(x) = x \quad \longrightarrow \quad a_1(x) + x a_2(x) = 0$$

$$\text{若 } y_1(x) = x^2 \quad \longrightarrow \quad 2 + 2x a_1(x) + x^2 a_2(x) = 0$$



[例1] 求 $y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = 0$ 的通解

[解] $\because a_1(x) + x a_2(x) = 0$ 观察得 $y_1(x) = x$

设 $y_2(x) = C(x) y_1(x) = x C(x)$ 代入方程

整理得 $C''x + 4C' = 0$ 可降阶方程

设 $C' = p(x) \longrightarrow p'x + 4p = 0 \longrightarrow p(x) = x^{-4}$

$\longrightarrow C(x) = -\frac{1}{3}x^{-3} \longrightarrow y_2(x) = -\frac{1}{3}x^{-2}$

通解

$$\bar{y} = C_1 x + C_2 x^{-2}$$

[法 2] 利用方程的特殊性

$$y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = 0$$

两边乘 $x^2 \longrightarrow x^2 y'' + 2x y' - 2y = 0$

系数是 x 的降幂排列，设想解是幂函数

设 $y(x) = x^\lambda$ 代入方程

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$$

$$\longrightarrow x^\lambda (\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \quad x \neq 0$$

$$\longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 \longrightarrow y_1(x) = x, y_2(x) = x^{-2}$$

通解 $\bar{y} = C_1 x + C_2 x^{-2}$ 线性无关

[例2] 求方程 $y'' - y = \sin^2 x$ 的一个解

[解] 易验证，相应的齐次方程的通解

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

设非齐次方程的解

$$y^*(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

将 $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $f(x) = \sin^2 x$

代入 C'_1, C'_2 所满足的方程组

$$\begin{cases} y_1 C_1'(x) + y_2 C_2'(x) = 0 \\ y_1' C_1'(x) + y_2' C_2'(x) = f(x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} e^x \cdot C_1'(x) + e^{-x} \cdot C_2'(x) = 0 \\ e^x \cdot C_1'(x) - e^{-x} \cdot C_2'(x) = \sin^2 x \end{cases}$$

解得 $C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \sin^2 x$

$$C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x \sin^2 x$$

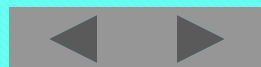
积分得到

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin^2 x dx = -\frac{1}{10}e^{-x} (\sin^2 x + \sin 2x + 2)$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2} \int e^x \sin^2 x dx = -\frac{1}{10}e^x (\sin^2 x - \sin 2x + 2)$$

非齐次方程的一个角

$$\begin{aligned}y^*(x) &= C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \\&= -\frac{1}{10}(\sin^2 x + \sin 2x + 2)e^{-x} \cdot e^x \\&\quad - \frac{1}{10}(\sin^2 x - \sin 2x + 2)e^x \cdot e^{-x} \\&= -\frac{1}{5}(\sin^2 x + 2)\end{aligned}$$



[例3] 已知 $x_0(t) = e^t$ 是齐次方程 $x'' - 2x' + x = 0$

的解, 求非齐次方程 $x'' - 2x' + x = \frac{1}{t}e^t$ 的通解

[解] 令 $x = u(t)e^t$, 则

$$x' = (u' + u)e^t, \quad x'' = (u'' + 2u' + u)e^t$$

代入非齐次方程

$$(u'' + 2u' + u)e^t - 2(u' + u)e^t + ue^t = \frac{1}{t}e^t$$

$$\text{即 } u'' = \frac{1}{t}, \quad \text{解得 } u = c_2 + (c_1 - 1)t + t \ln|t|$$

$$\text{通解 } x(t) = u(t)e^t = c_2e^t + (c_1 - 1)te^t + te^t \ln|t|$$

Homework

Ex7.3: $(1, 2, 5, 7)$

Ex 7.4: $1, 3, 4, 5(1, 6), 6, 7$

Ex7.5: $2(3), 3(2, 3, 6, 7, 10), 4(2, 3); 6, 7$