清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 线性代数（10421324） 2020 年 11 月 8 日

本试题共 8 道大题，满分 100 分.

1. (10 分) 找出方程组 $Ax = x$ 的所有解，其中 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

2. (15 分) 设 $T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -3 & 20 & 12 \\ 2 & -9 & -6 \\ -4 & 20 & 13 \end{bmatrix}$.

$2+\cancel{2}-6=-2$

$4-1-4=-1$

$-4-1+6=1$

   (1) (5 分) 证明 T 可逆，并求 T^{-1}.

   (2) (5 分) 计算 $T^{-1}AT$.

   (3) (5 分) 计算 A^5.

3. (15 分) 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + (\lambda+2)x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

λ 取何值时，该方程组无解？λ 取何值时，该方程组有唯一解？λ 取何值时，该方程组有无穷多解？并证明你的论断.

4. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$，已知 $Ax = b$ 的三个特解为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，

$A: 3\times 4$

讨论 A 的秩并写出 $Ax = b$ 的解集.

5. (21 分) 考察 4×6 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -200 & -180 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$.

   (1) (3 分) 求 A 的行简化阶梯形.

   (2) (3 分) 求 A 的列空间的维数，并取 A 的一些列组成它的一组基.

   (3) (3 分) 求 A 的行空间的维数，并取 A 的一些行组成它的一组基.

(4) (5 分) 求 A 的零空间的维数，和它的一组基.

(5) (4 分) 在 A 的第二列和第三列之间加入一列零得到矩阵 B. 写出 B 的行空间的维数和一组基，以及 B 的零空间的维数和一组基.

(6) (3 分) 在 A 的第二行和第三行之间加入一行零得到矩阵 C. 写出 C 的列空间的维数和一组基，以及 C 的零空间的维数和一组基.

6. (9 分) 判断下列陈述正误 (每个 1 分)，并简要说明理由 (每个 2 分).

(1) 可以找到一个 7×7 实矩阵，它的零空间和列空间相同.

(2) 存在一个 2×5 实矩阵 A 使得 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 构成零空间的一组基.

(3) 设 A 为 3×3 实方阵，如果 A 与 A^T 具有相同的零空间和相同的列空间，那么 A 一定是对称矩阵.

$N(A) = N(A^T)$

$C(A) = C(A^T)$

7. (10 分) 令 A_1, A_2 为 2 阶方阵，且

$$A_i \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_i + a_i \\ 4b_i - a_i \end{bmatrix}, \qquad A_i \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_i - a_i \\ 2b_i + a_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2,$$

其中 a_i, b_i 为固定实数. 求证:

(1) $A_1 A_2 = A_2 A_1$;

(2) $A_i^2 - (a_i + b_i) A_i + a_i b_i I_2 = O$, $i = 1, 2$.

$(A - A$

$A = [c_1 \ c_2 \ c_3$

$= \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$

$r_1 x = r_2$

$= c_1 x = c_2$

$= 0$

8. (10 分) 令 $X_\epsilon = \begin{bmatrix} A & \epsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$, 其中 $\epsilon \in \mathbb{R}$, 而 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, C 为 n 阶对角占优方阵，B_1 为任意给定的 $3 \times n$ 矩阵，B_2 为任意给定的 $n \times 3$ 矩阵.

(1) (5 分) 求 A 的 LU 分解.

(2) (5 分) 先说明 A 可逆，再试找一个常数 $\epsilon_0 > 0$ (依赖于 C, B_1, B_2)，使得对任意满足条件 $|\epsilon| \le \epsilon_0$ 的 ϵ, X_ϵ 均可逆.

提示：若 $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ 满足 $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, |c_{ii}| > \sum_{j \ne i} |c_{ij}|$, 则称 C 为对角占优方阵，这类矩阵可逆.

$A -$

$A - B_2 C^{-1} \epsilon B_1$