第16课：不定积分计算-分类型积分与小结

第6章 不定积分/原函数

- **内容：**

  第6.4节 不定积分计算-简单无理式的积分

  小结： 不定积分的一般方法-实例说明

- **作业：**

  练习题6.4：1(6,8,10), 2(1-6[自己练习], 7,9,10,12).

第16-1课：不定积分计算-简单无理式积分

不定积分计算-简单无理式积分

- **目的**：计算不定积分$\int f(x)dx$，$f(x)$ 是某些无理函数
- **方法**：用第二换元法将无理式积分转化为有理式积分

回忆换元公式

$$\int f(x)dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

其中$f(x)$是无理函数, 需要选取适当代换$x=\varphi(t)$ 使得

1) $f(\varphi(t))$成为有理函数 (关键性条件!)

2) $\varphi'(t)$也是有理函数 (选择φ(t)为有理函数即可)

满足1-2) 就可将无理函数的积分转化为有理函数的积分

第16-1课：不定积分计算-简单无理式积分

- 无理函数类型1：

$$f(x)=R(x,\sqrt[n]{ax+b}),$$ 其中 $R(u,v)$ 为2元有理函数

- 方法：取 $t=\sqrt[n]{ax+b}$，则 $x=\dfrac{1}{a}(t^n-b)$，$dx=\dfrac{n}{a}t^{n-1}dt$

$$\therefore \int f(x)dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a},t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

容易看到 $R\left(\dfrac{t^n-b}{a},t\right)\dfrac{n}{a}t^{n-1}=\hat{R}(t)$ 是 t 的有理函数

计算出不定积分后便可以导出无理函数*f*(x)的不定积分

$$\int f(x)dx=\int \hat{R}(t)dt=G(t)+C=G(\sqrt[n]{ax+b})+C$$

第16-1课：不定积分计算-简单无理式积分

- 无理函数类型2 (类型1的推广)：

$$f(x)=R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}),\quad ad\neq bc\ (\text{否则根号下是常数})$$

- 方法：取 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 则 $t^n=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$

$$\therefore\ cx+d=\frac{bc-ad}{c(t^n-a/c)}=\frac{bc-ad}{ct^n-a},\qquad dx=\frac{n(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}t^{n-1}dt$$

因此 $\int f(x)dx=\int R(\frac{1}{c}(\frac{bc-ad}{ct^n-a}-d),t)\frac{n(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}t^{n-1}dt$

$$=\int\hat{R}(t)dt=G(t)+C=G(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})+C$$

第16-1课：不定积分计算-简单无理式积分

✓ **例1**：计算 $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=?$

解：被积函数变形 $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=\frac{1}{(x+1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$,

令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, 则 $t^3=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$,

$$x-1=\frac{2}{t^3-1},\quad dx=-\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}$$

$$\therefore\quad I_1=-\int\frac{t}{2+2/(t^3-1)}\cdot\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}=-\int\frac{3t^3dt}{t^3(t^3-1)}=\int\frac{3dt}{1-t^3}$$

至此, 无理函数积分转化为有理函数积分 $I_1=\int\frac{3dt}{1-t^3}$

第16-1课：不定积分计算-简单无理式积分

✓ 例1(继续)： $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=?$

设 $\int\frac{3dt}{1-t^3}=\int\frac{3dt}{(1-t)(1+t+t^2)}=\int(\frac{A}{1-t}+\frac{Bt+C}{1+t+t^2})dt$

则 $A(1+t+t^2)+(Bt+C)(1-t)=3$

令 t=1： $3A=3,\quad A=1$

t=0： $A+C=3,\ C=3-A=2$

t=-1： $A-2B+2C=3,\ B=\frac{1}{2}(A+2C-3)=1$

$$\therefore\ I_1=\int(\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{1+t+t^2})dt$$

$$=-\ln|1-t|+\frac{1}{2}\int\frac{(1+2t)dt}{1+t+t^2}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t+t^2}$$

第16-1课：不定积分计算-简单无理式积分

✓ 例1(续二)： $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=?$

已知 $I_1=-\ln|1-t|+\frac{1}{2}\int\frac{(1+2t)dt}{1+t+t^2}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t+t^2},\quad t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$

其中 $$\int\frac{(1+2t)dt}{1+t+t^2}=\int\frac{d(1+t+t^2)}{1+t+t^2}=\ln|1+t+t^2|+C_1$$

$$\int\frac{dt}{1+t+t^2}=\int\frac{dt}{3/4+(t+1/2)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})+C_2$$

$$\therefore\ I_1=-\ln|1-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}|+\frac{1}{2}\ln[1+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{(\frac{x+1}{x-1})^2}]$$

$$+\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{3}}+C$$

W

第16-1课：不定积分计算-简单无理式积分

- 无理函数类型3：

$$f(x)=R(x,\sqrt{\pm x^2+2px+q}),\ \text{这里}\ R(u,v)\ \text{同前}$$

- 情况1：设 $\sqrt{-x^2+2px+q}=\sqrt{-(x-p)^2+\omega^2}$，$\omega=\sqrt{q+p^2}>0$

取 $x=p+\omega\sin t$，则 $\sqrt{-(x-p)^2+\omega^2}=\omega\cos t$，$dx=\omega\cos t dt$

$$\therefore\ \int f(x)dx=\int R(p+\omega\sin t,\omega\cos t)\omega\cos t dt$$

显然 $R(p+\omega\sin t,\omega\cos t)\omega\cos t=\hat{R}(\cos t,\sin t)$ 是三角有理式不定积分之后便可得到无理函数*f*(x)的不定积分

$$\int f(x)dx=\int\hat{R}(\cos t,\sin t)dt$$

$$=G(t)+C=G(\arcsin\frac{x-p}{\sqrt{q+p^2}})+C$$

第16-1课：不定积分计算-简单无理式积分

- 无理函数类型3：

$$f(x)=R(x,\sqrt{\pm x^2+2px+q}),$$ 这里 $R(u,v)$ 同前

- 情况2：设 $\sqrt{x^2+2px+q}=\sqrt{(x+p)^2+\omega^2}$，$\omega=\sqrt{q-p^2}>0$

取 $x+p=\omega\tan t$，则 $\sqrt{(x+p)^2+\omega^2}=\dfrac{\omega}{\cos t}$，$dx=\dfrac{\omega dt}{\cos^2 t}$

$$\therefore \int f(x)dx=\int R(\omega\tan t-p,\frac{\omega}{\cos t})\frac{\omega dt}{\cos^2 t}$$

类似情况1可得

$$\int f(x)dx=\int \hat{R}(\cos t,\sin t)dt$$

$$=G(t)+C=G(\arctan\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}})+C$$

第16-1课：不定积分计算-简单无理式积分

- 无理函数类型3：

$$f(x)=R(x,\sqrt{\pm x^2+2px+q}),\ \text{这里 } R(u,v) \text{ 同前}$$

- 情况3：设 $\sqrt{x^2+2px+q}=\sqrt{(x+p)^2-\omega^2},\ \omega=\sqrt{p^2-q}>0$

取 $x+p=\dfrac{\omega}{\cos t}$，则 $\sqrt{(x+p)^2-\omega^2}=\omega\tan t,\ dx=\dfrac{\omega\sin t dt}{\cos^2 t}$

$$\therefore\ \int f(x)dx=\int R(\frac{\omega}{\cos t}-p,\omega\tan t)\frac{\omega\sin t dt}{\cos^2 t}$$

类似情况1-2得

$$\int f(x)dx=\int \hat{R}(\cos t,\sin t)dt$$

$$=G(t)+C=G(\arccos\frac{\sqrt{p^2-q}}{x+p})+C$$

第16-2课：不定积分计算-小结与实例

小结：不定积分计算一般策略

- **积分策略** (一般情况下的考虑模式)：$\int f(x)dx,$

一. 基本积分公式

二. 化简被积函数 (变形观察)

三. “凑微分”——利用明显的换元(积分变量代换)

四. 被积函数分类处理：

1) 有理函数 $f(x)=P(x)/Q(x)$

2) 三角有理式 $f(x)=R(\cos x,\sin x)$

3) 简单无理式 $f(x)=R(x,\sqrt{\pm x^2+2px+q})$ 或$R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$

五. 尝试分部积分 (灵活应用？)

第16-2课：不定积分计算-小结与实例

- **积分策略** (续)：$\int f(x)dx,$

  五. 尝试分部积分 (常用情况)：

  1) $f(x)$ 有因子 x^n，e^{ax}，$\cos bx$，$\sin bx$

  —— 分部积分后不会增加复杂性，或这些因子保持不变；

  2) $xf'(x)$ 容易积分：$(\arctan x)'$，$(\arcsin x)'$，$(\ln|x|)'$，L L

  —— $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx = \text{L}$

- **计算实例** ——

第16-2课：不定积分计算-小结与实例

✓ 例1： $\int\sqrt{1+\csc x}\,dx=\int\sqrt{1+\frac{1}{\sin x}}\,dx=\int\sqrt{1+\frac{1}{\sin x}}\,\frac{d(\sin x)}{\cos x}$

$$=\int\sqrt{\frac{1+\sin x}{\sin x}}\,\frac{d(\sin x)}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{\sin x(1-\sin x)}}$$

$$\overset{u=\sin x}{=}\int\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}=\int\frac{du}{\sqrt{-(u-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}}$$

$$\overset{u-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t}{=}\int\frac{\cos t\,dt}{\cos t}=t+C\quad=\arcsin(2u-1)+C$$

$$=\arcsin(2\sin x-1)+C$$ W

第16-2课：不定积分计算-小结与实例

✓ 例2：$\int \frac{x}{1+\cos x}dx = \int \frac{x}{2\cos^2 \frac{x}{2}}dx = \int x d(\tan \frac{x}{2})$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}dx = x\tan\frac{x}{2} - \int \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}dx$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\int \frac{1}{\cos(x/2)}d(\cos\frac{x}{2})$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$$

W

第16-2课：不定积分计算-小结与实例

✓ 例3：$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{\ln(x^2)}{(1+x^2)^2}d(x^2)$

$$\overset{u=x^2}{=} \frac{1}{4}\int \frac{\ln u}{(1+u)^2}du = -\frac{1}{4}\int \ln u d(\frac{1}{1+u})$$

$$= -\frac{1}{4}[\frac{\ln u}{1+u} - \int \frac{1}{1+u}d(\ln u)] \quad = -\frac{1}{4}[\frac{\ln u}{1+u} - \int \frac{du}{u(1+u)}]$$

$$= -\frac{\ln u}{4(1+u)} + \frac{1}{4}\int (\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u})du = -\frac{\ln u}{4(1+u)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + C$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C$$

W

第16-2课：不定积分计算-小结与实例

✓ 例4：$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)x^2}dx = \int [\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}]\arctan x dx$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} d(\arctan x) - \int \frac{\arctan x dx}{1+x^2}$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} - \int \arctan x d(\arctan x)$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C$$

W

第16-2课：不定积分计算-小结与实例

✓ 例5：$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx = \int \frac{1+2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2\cos^2(x/2)} e^x dx$

$$= \int [\frac{1}{2\cos^2(x/2)} + \tan(x/2)] e^x dx$$

$$\overset{x=2u}{=} \int (\frac{1}{\cos^2 u} + 2\tan u) e^{2u} du$$

$$= \int e^{2u} d(\tan u) + 2\int e^{2u} \tan u du$$

$$= e^{2u} \tan u - \int \tan u d(e^{2u}) + 2\int e^{2u} \tan u du$$

$$= e^x \tan \frac{x}{2} + C$$

W

第16-2课：不定积分计算-小结与实例

- **不定积分补充：**

  考虑初等函数f(x)的原函数/不定积分$\int f(x)dx$

  1) 计算不定积分没有万能的方法(与导数计算完全不同)

  2) 被积函数简单但不定积分未必容易, 甚至可能很难

  3) 不是所有初等函数都有初等原函数/初等积分！

  4) 但所有初等函数都有原函数/不定积分 (下章讨论)

  5) 已知没有初等积分的初等函数：

$$f(x)=e^{x^2},\ \frac{\sin x}{x},\ \sin(x^2),\ \cdots$$

- **下章预告：** 定积分-Newton-Leibniz公式(微积分的核心)

第16课：不定积分计算-分类型积分与小结

- **预习 (下次课内容):**

  第7.1节 定积分概念

  第7.2节 定积分与可积函数的性质

- **作业 (本次课)：**

  练习题6.4：1(6,8,10), 2(1-6[自己练习],7,9,10,12).