定积分应用

一、几何应用

（一）平面图形的面积

1. 直角坐标系下平面图形面积的计算

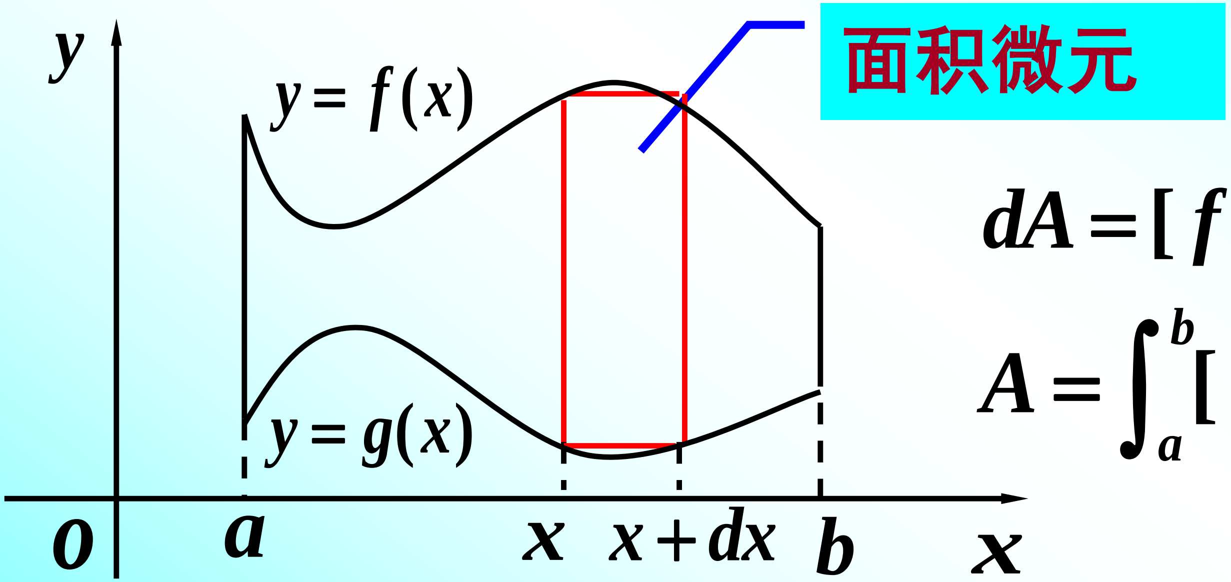
(1) 由直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴和连续曲线 $y=f(x)$ 所围曲边梯形的面积 A

根据定积分的定义和几何意义知

$$A=\int_a^b \left|f(x)\right| dx$$

(2) 由曲线$y=f(x)$, $y=g(x)$和直线$x=a$, $x=b$所围成的面积A

先看, $g(x)\le f(x)\quad x\in[a,\ b]$



$$dA=[f(x)-g(x)]dx$$

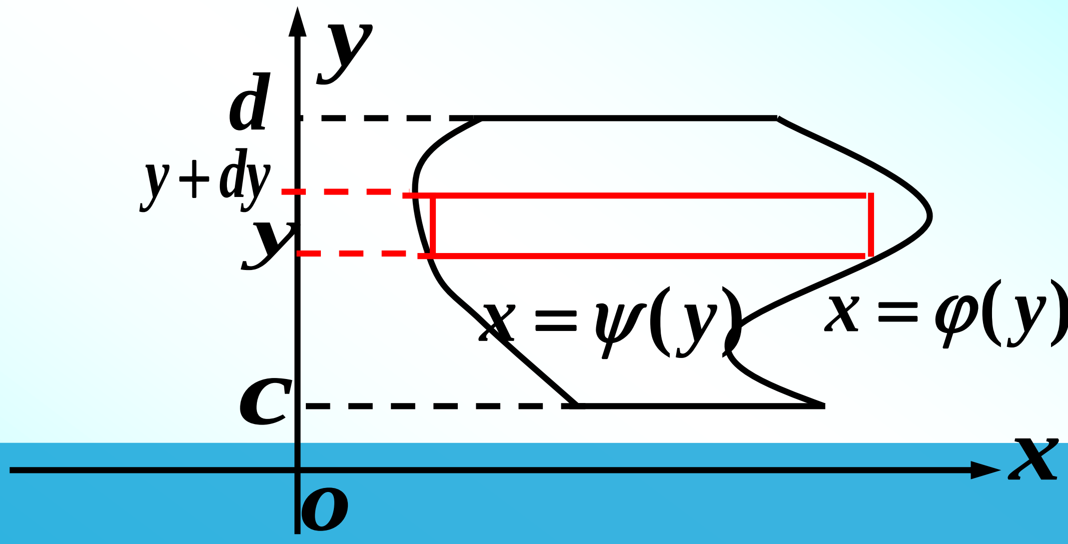
$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

$$A=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

设连续函数$\varphi(y),\psi(y)$满足

$$0\le\psi(y)\le\varphi(y)\quad y\in[c,d]$$

求由曲线$x=\varphi(y)$, $x=\psi(y)$,和直线 $y=c$, $y=d$ 所围成的面积A



面积公式:

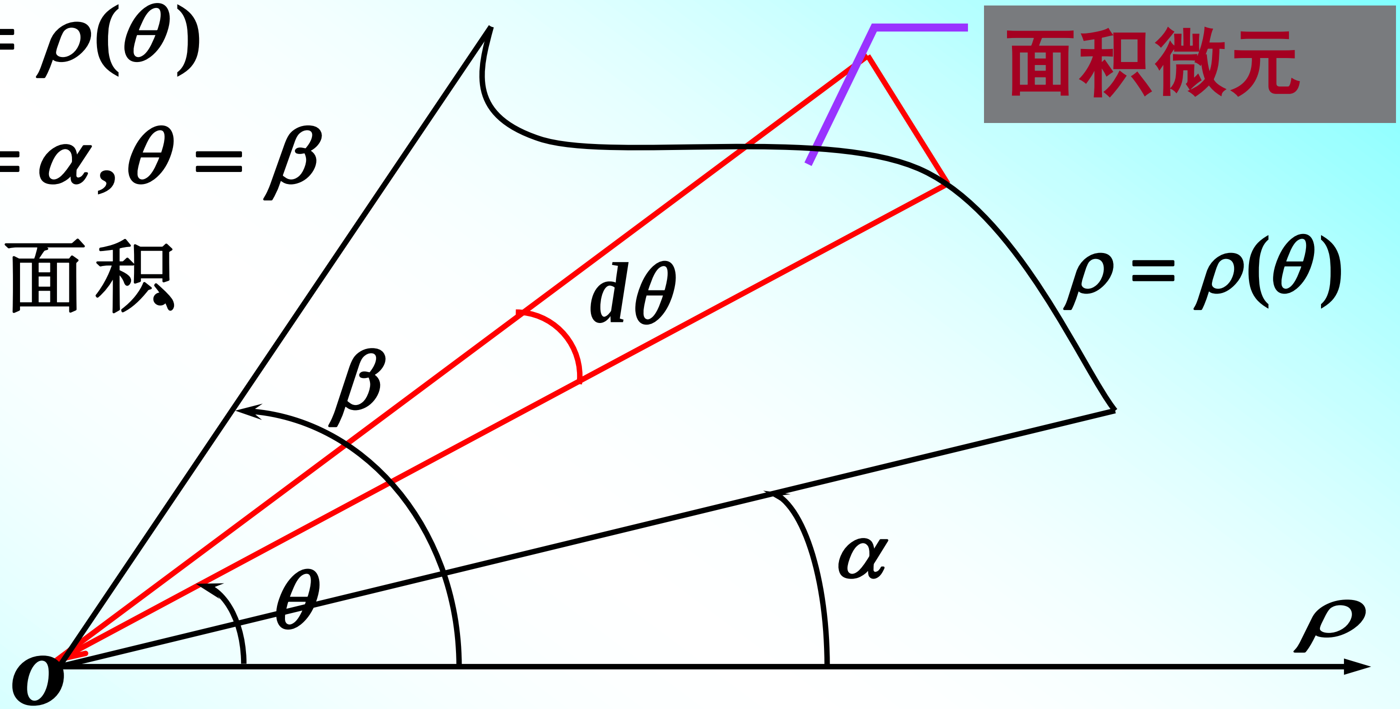
$$A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]dy$$

2. 极坐标系下平面图形面积的计算

求曲线$\rho=\rho(\theta)$

及射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$

所围成的面积

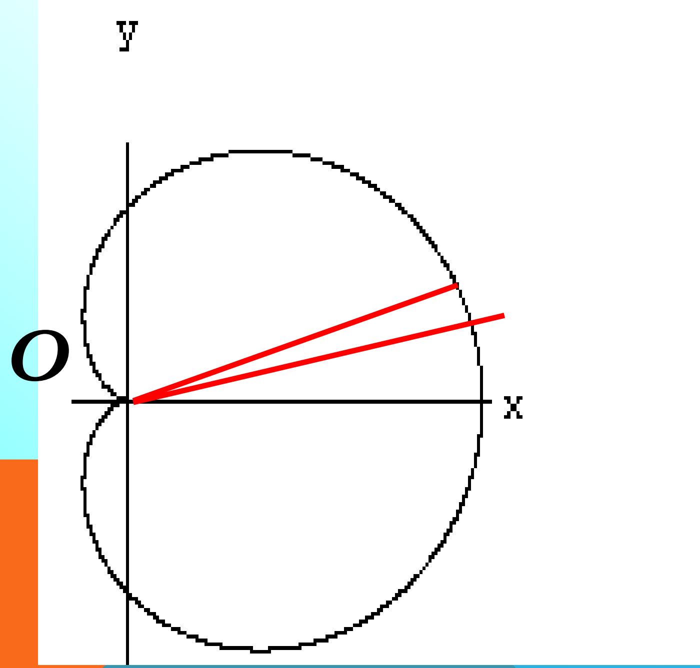


面积微元：小圆扇形 $dA=\dfrac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta$

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)d\theta$$

[例3] 求心脏线$\rho = a(1+\cos\theta)$所围成的面积A.

[解] 利用对称性 $A = 2A_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2(\theta)d\theta$



$$= \int_0^{\pi}[a(1+\cos\theta)]^2 d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}d\theta$$

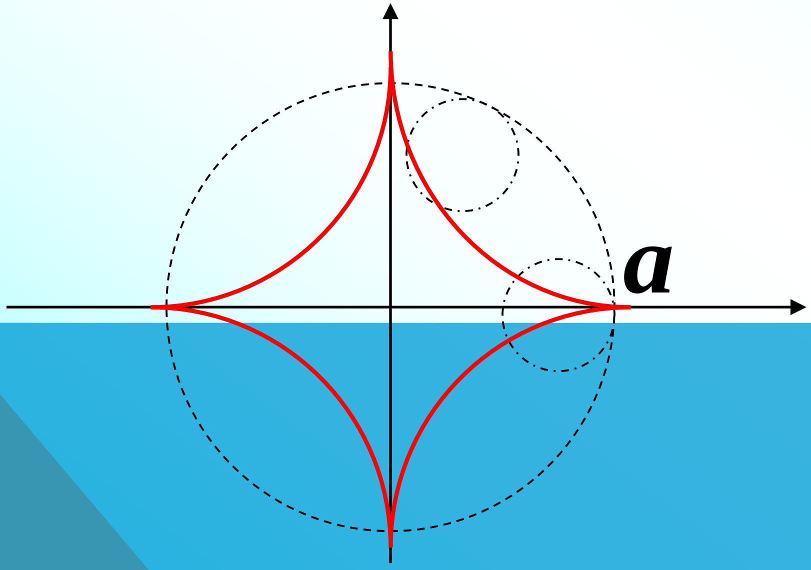
$$= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2$$

3. 参数方程下求图形面积

[例4] 求星形线：$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $t \in [0,\ 2\pi]$

所围面积。



［解］利用对称性

$$A=4A_1=4\int_0^a ydx$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$$

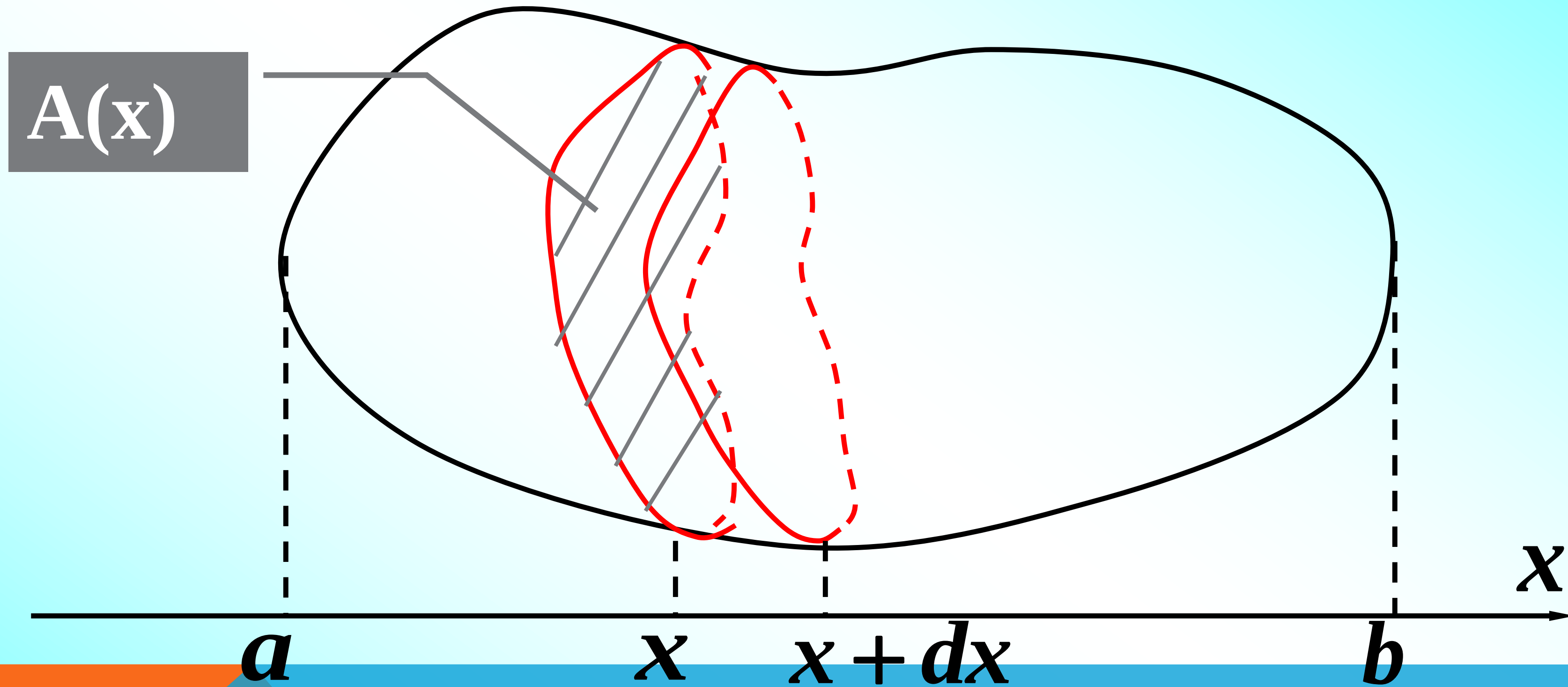
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^4 t(1-\sin^2 t)dx$$

$$=12a^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{8}\pi a^2$$

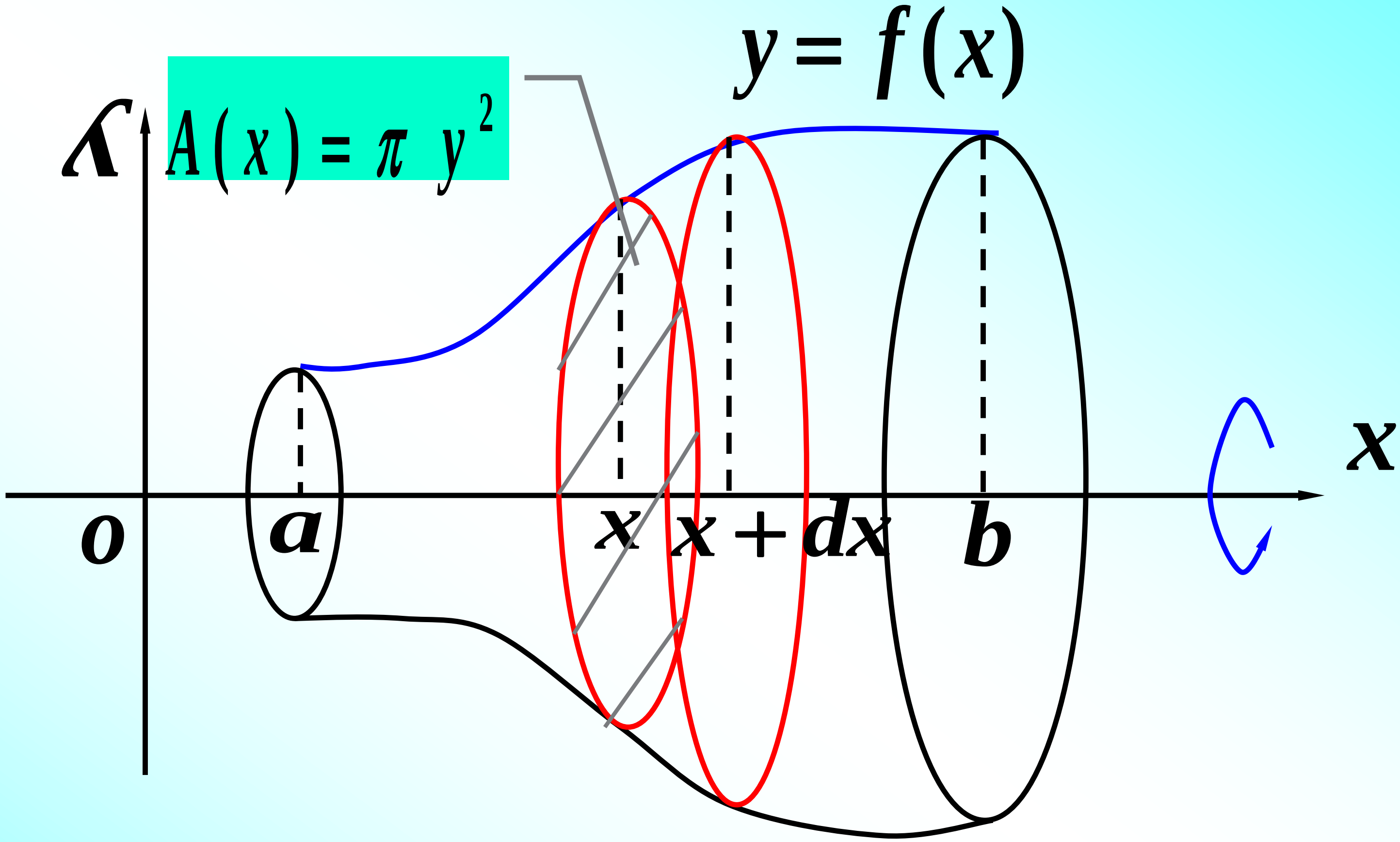
（二）空间立体的体积

1. 已知平行截面面积立体的体积



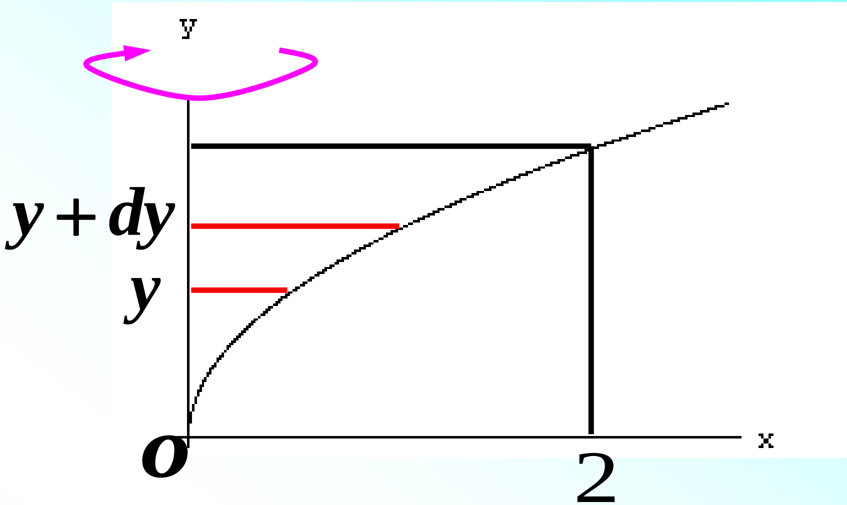
体积 $V=\int_a^b A(x)dx$

2. 旋转体的体积



$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

[例6] 怎样求由曲线 $y=\sqrt{x}$，直线 $x=2$ 和 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所成旋转体的体积？



[解法1]

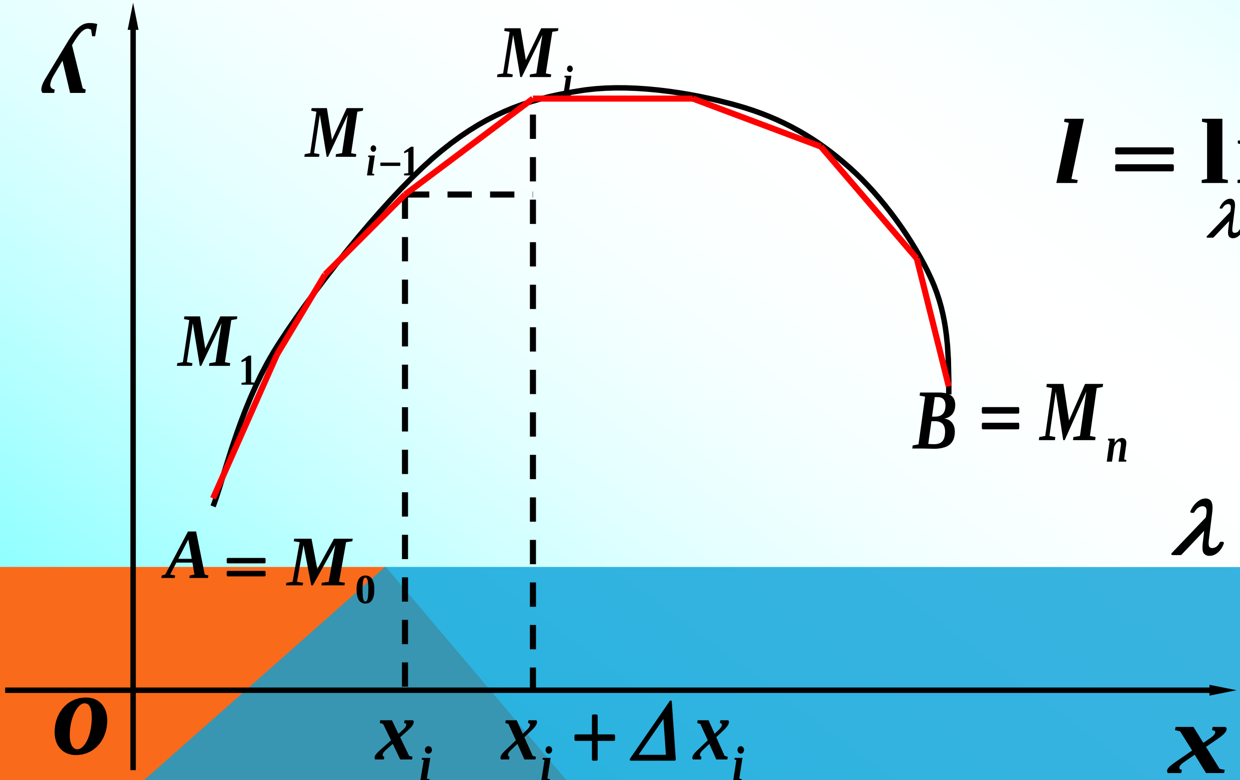
取 y 为积分变量，即分 y 的变化区间 $[0,\sqrt{2}]$

$$V=\pi\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}-\pi\int_0^{\sqrt{2}}x^2dy\quad =4\pi\sqrt{2}-\pi\int_0^{\sqrt{2}}y^4dy$$

$$=4\pi\sqrt{2}-\frac{4}{5}\pi\sqrt{2}=\frac{16}{5}\sqrt{2}\pi$$

（三）平面曲线的弧长

何谓曲线的长？　—内接折线长的极限



$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$$

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} |M_{i-1}M_i|$$

(1) 设曲线段方程为 $y = f(x) \quad (a \le x \le b)$

曲线是光滑的,即 $f'(x)$在$[a, b]$上连续

$$|M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad (i = 1, 2, \Lambda, n)$$

由*Lagrange*中值定理得到

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$(x_{i-1} < \xi_i < x_i)$$

$$\Rightarrow |M_{i-1}M_i| = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i \quad (i = 1, 2, \Lambda, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

2022/12/1

记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\left|M_{i-1}M_i\right|$ $\mu = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$

$$\Delta x_i \le \left|M_{i-1}M_i\right| \Rightarrow \mu \le \lambda$$

故,当$\lambda \to 0$时,有$\mu \to 0$.从而得到

$$l = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|M_{i-1}M_i\right|$$

$$= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\cdot\Delta x_i$$

$$= \int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

弧长： $l = \int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$

(2) 设曲线段由参数方程给出

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

$x'(t), y'(t) \in C[\alpha, \beta]$,且不同时为零

$t = \alpha$,对应起点A; $t = \beta$,对应终点B,

即,当$dt > 0$时,有$dl > 0$

弧长公式: $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$

(3) 设曲线段由极坐标方程给出

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

$\rho'(\theta)$在$[\alpha, \beta]$上连续

选θ作为参数

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

弧长公式: $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta$

弧微分公式

设光滑曲线$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$,
对应于变动区间$[a, x]$的弧长为$l(x)$,
则有

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx$$

因为$f'(x)$在$[a, b]$上连续,由原函数存在定理得到

$$\frac{dl(x)}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

即 $dl = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$

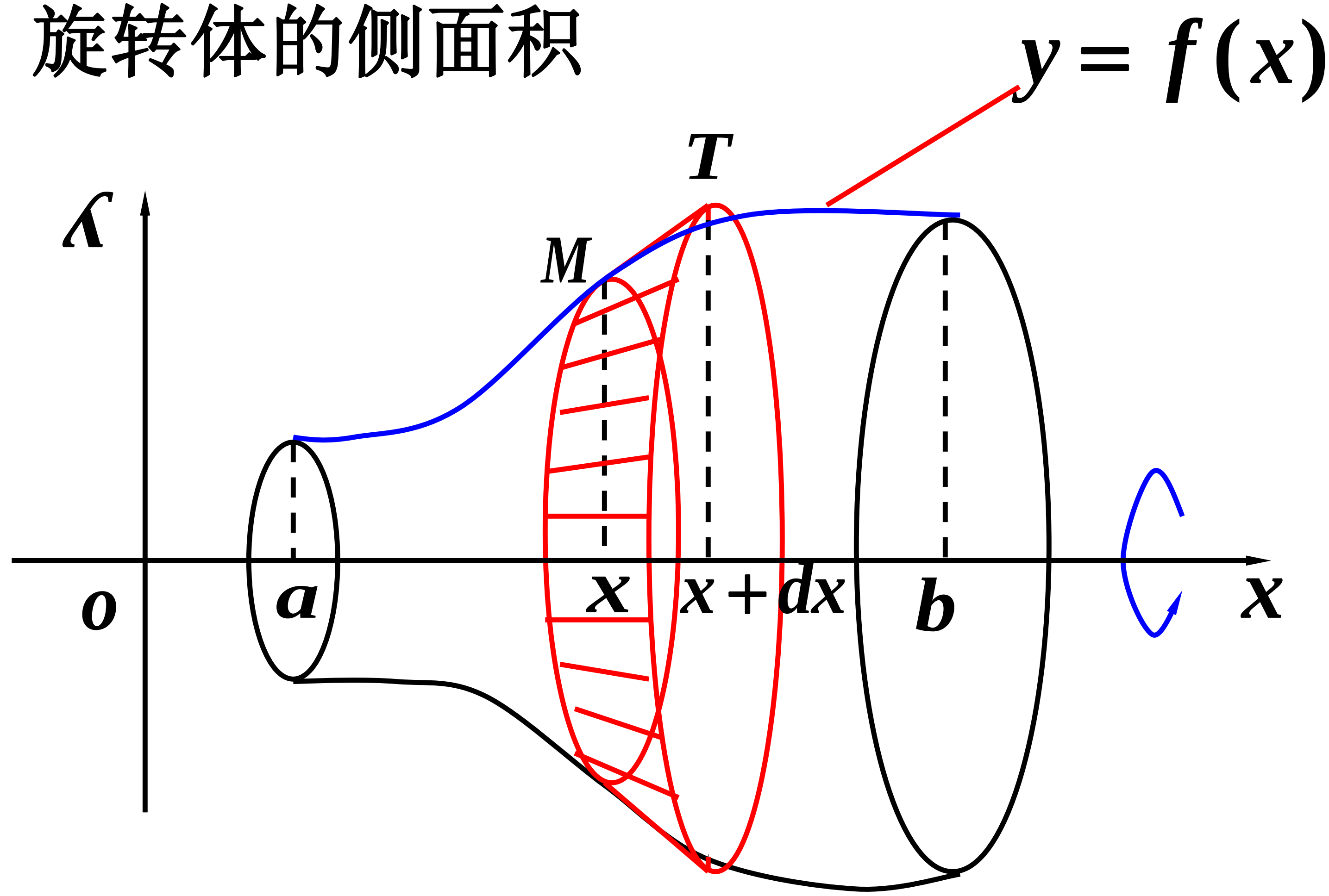
当$dl > 0$时, $dx > 0$, 从而有弧微分公式:

$$dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

$$dl = \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}\, d\theta$$

（四）旋转体的侧面积



用切线MT绕x轴旋转所得圆台的侧面积近似

圆台侧面积 $= \pi[y+(y+dy)]\cdot dl$

$$= 2\pi y dl + \pi dy \cdot dl$$

当 $dx \to 0$ 时， $dy \cdot dl = o(dx)$， 略去！

得侧面积微元：

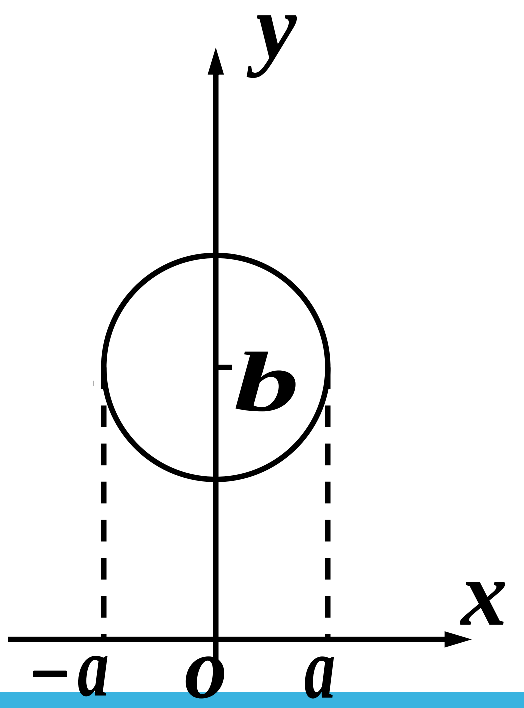
$$dS = 2\pi y dl = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

侧面积 $S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

[例9] 求圆 $x^2+(y-b)^2=a^2$ 绕 x 轴旋转所得旋转体(环体)的(表)面积 S. $(0<a<b)$

[解] 上半圆方程 $y_1=b+\sqrt{a^2-x^2}$

下半圆方程 $y_2=b-\sqrt{a^2-x^2}$



$$y_1'^2=y_2'^2=y'^2=\frac{x^2}{a^2-x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

所求面积为上、下半圆绕 x 轴旋转的侧面积之和，故

$$S = 2S_1 = 4\pi\int_0^a y_1\sqrt{1+y_1'^2}dx + 4\pi\int_0^a y_2\sqrt{1+y_2'^2}dx$$

$$= 4\pi\int_0^a [(b+\sqrt{a^2-x^2})+(b-\sqrt{a^2-x^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}]dx$$

$$= 8\pi ab\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

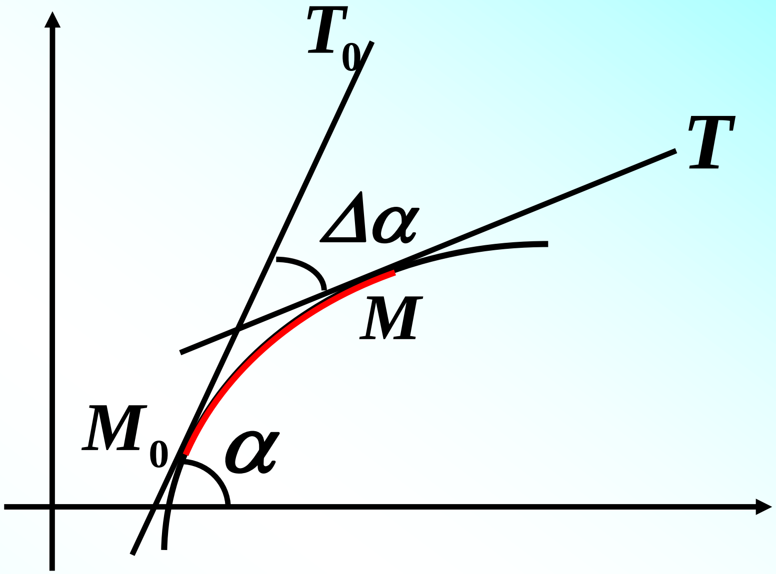
$$= 8\pi ab\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = 4\pi^2 ab$$

（五）曲率与曲率半径

曲率问题就是研究曲线的弯曲程度问题

设M_0, M之间的弧长为Δl

$\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta l}$为$M_0, M$之间的平均曲率



定义：若$\left|\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|$存在,

则称 $k=\left|\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|$为曲线在$M_0$处的曲率

设曲线$y = f(x)$二阶可导

$$k = \left| \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta l} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dl} \right|$$

$$\Theta \ \tan\alpha = y' \qquad \alpha = \arctan y'$$

$$d\alpha = \frac{1}{1 + y'^2} \cdot y'' dx \quad \text{而} \quad dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\therefore \quad \boxed{k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}}$$

曲率公式

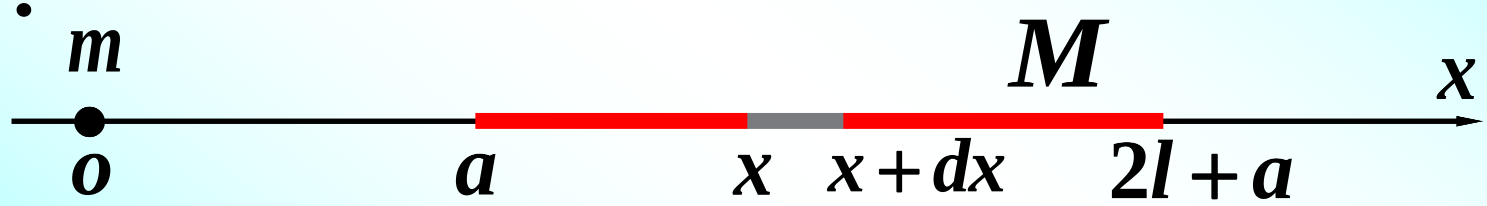
$R = \dfrac{1}{k}$ 称为曲线$y = f(x)$在M_0处的曲率半径

二、物理应用

（一）引力问题

[例1] 设有一均匀细杆长为$2l$，质量为M. 另有一质量为m的质点，位于细杆所在直线上，与杆的近端的距离为a. 求细杆对质点的引力F.

[解]



两质点之间的引力，遵循万有引力定律

$$\boxed{f = k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

分割区间$[a, a+2l]$

取小区间$[x, x+dx]$,视为质点质量: $\frac{M}{2l}dx$

$$\Rightarrow \quad dF = k\frac{m\cdot(\frac{M}{2l}dx)}{x^2} = \frac{kmM}{2l}\cdot\frac{1}{x^2}dx$$

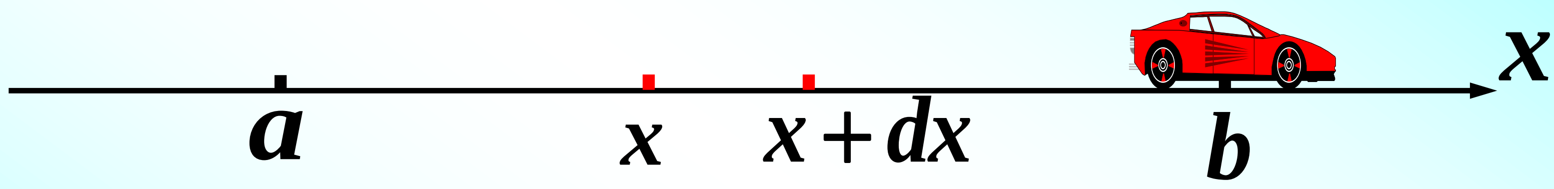
从a到$a+2l$求积分,得到细杆对质点的引力

$$F = \int_a^{a+2l}\frac{kmM}{2l}\cdot\frac{1}{x^2}dx$$

$$= \frac{kmM}{2l}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^{a+2l} = \frac{kmM}{a(a+2l)}$$

（二）变力做功问题

问题：求物体从 $x=a$ 移到 $x=b$ 变力 $f(x)$ 所做的功

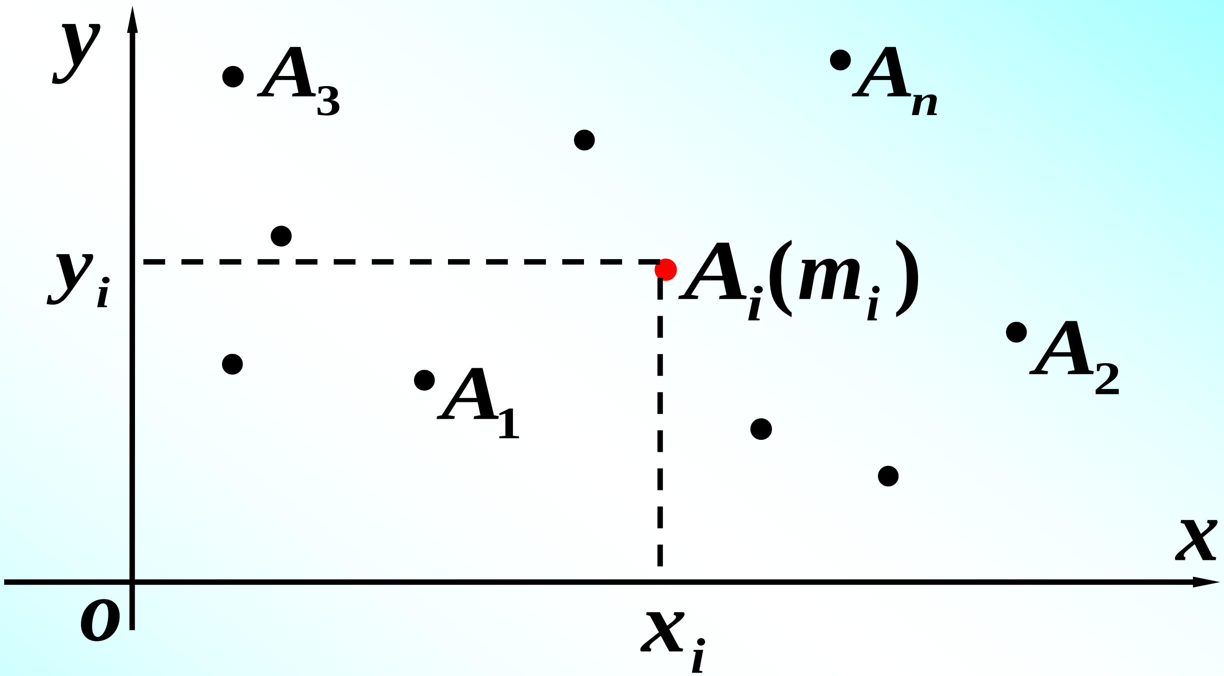


功的微元 $dW = f(x)dx$

$$W = \int_a^b f(x)dx$$

（三）静力矩和质心

1. 质点系的质心



质点A_i对x轴的静力矩 $m_i y_i$

质点A_i对y轴的静力矩 $m_i x_i$

质点系对x轴的静力矩：$M_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$

质点系对y轴的静力矩：$M_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$

质点系总质量：$M=\sum_{i=1}^{n} m_i$

设质心为：$(\bar{x},\bar{y})$

由静力矩定律知 $M_x=M\bar{y},\quad M_y=M\bar{x}$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M},\qquad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}$$

2. 平面曲线的质心

设线密度$\rho =$常数(质量均匀分布)

分割弧长区间$[0, L]$

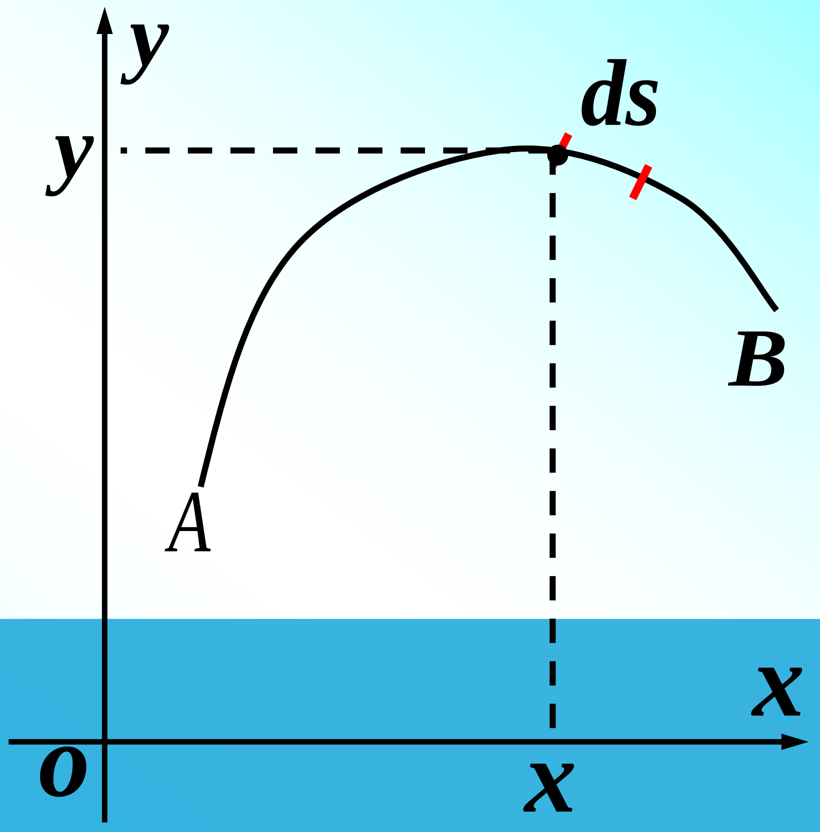
任取一小区间

$$[l, l+dl]$$

视为质点：(x, y)

$$dM = \rho dl$$

质量微元



静力矩微元 $dM_x = y\rho\, dl,\quad dM_y = x\rho\, dl$

于是得

$$M_x = \int_0^L y\rho\, dl = \rho\int_0^L y dl,\qquad M_y = \int_0^L x\rho\, dl = \rho\int_0^L x\, dl$$

$$M = \int_0^L \rho dl = \rho\int_0^L dl = \rho L$$

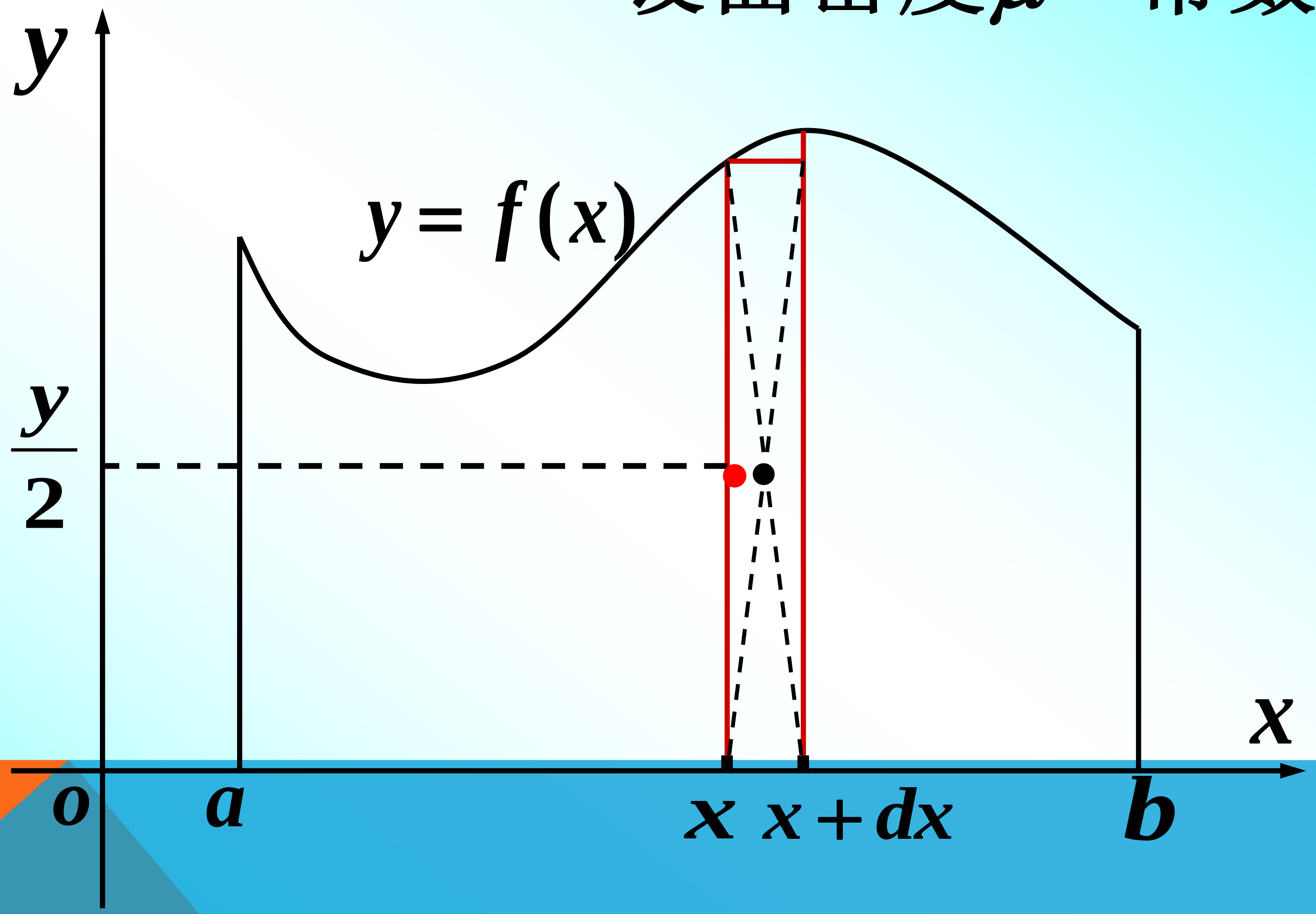
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\rho\int_0^L xdl}{\rho L} = \frac{\int_0^L xdl}{L}$$

质心坐标

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\rho\int_0^L ydl}{\rho L} = \frac{\int_0^L ydl}{L}$$

3. 平面薄板的质心

设面密度$\mu=$常数



质量： $M=\int_a^b \mu y dx$

静力矩：

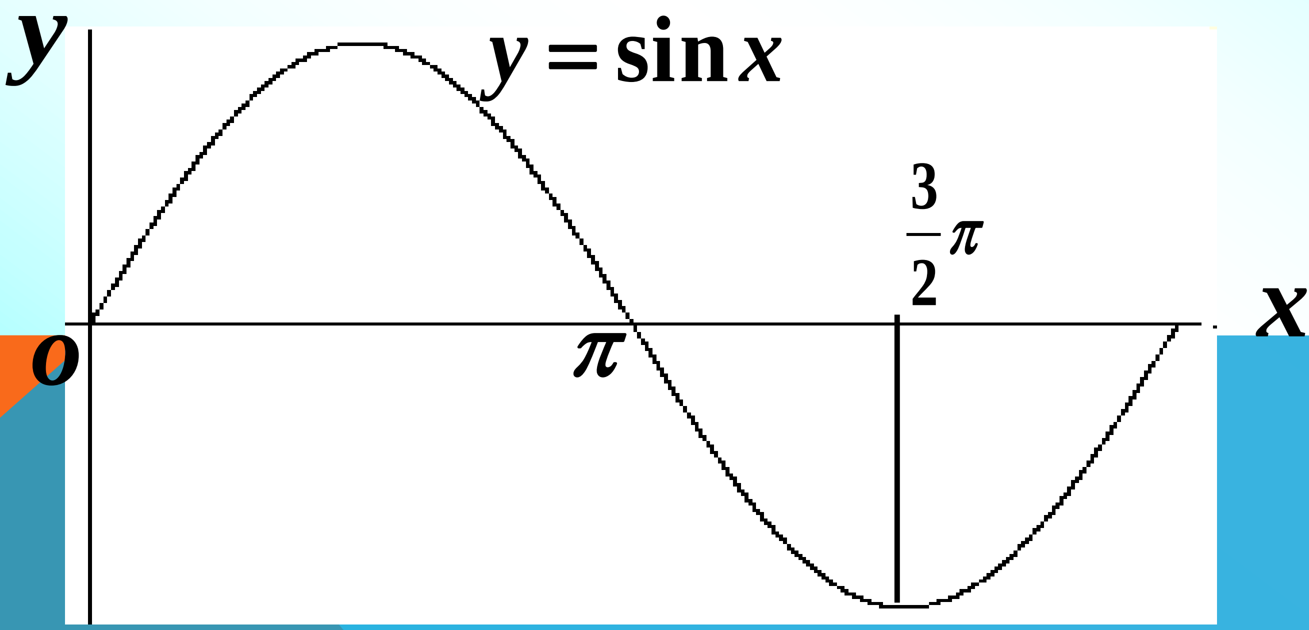
$$M_x=\frac{1}{2}\mu\int_a^b y^2dx,\qquad M_y=\mu\int_a^b xydx$$

质心坐标：

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\qquad \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}$$

[例1] 求曲线$y=\sin x$在区间$[\pi,\frac{3}{2}\pi]$上的部分与x轴、直线$x=\frac{3}{2}\pi$所夹区域图形的重心坐标

[解]



$$M=\int_{\pi}^{3\pi/2}-\sin x\,dx=1$$

$$M_y=\int_{\pi}^{3\pi/2}x\cdot(-\sin x)\,dx$$

$$=x\cos x\Big|_{\pi}^{3\pi/2}-\int_{\pi}^{3\pi/2}\cos x\,dx\quad=\pi+1$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi/2}-\sin^2 x\,dx\quad=-\frac{1}{4}\int_{\pi}^{3\pi/2}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\pi}^{3\pi/2}=-\frac{\pi}{8}$$

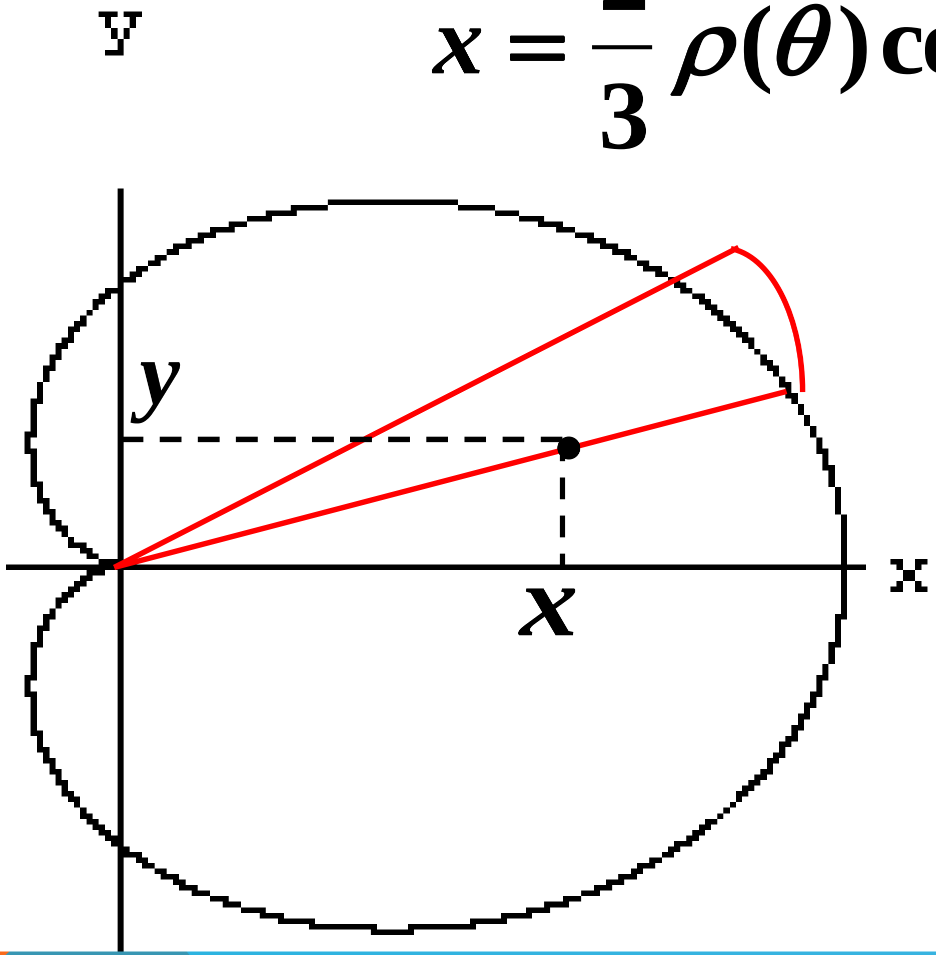
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \pi + 1$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = -\frac{\pi}{8}$$

重心坐标：$(\pi + 1, \ \frac{-\pi}{8})$

[例2] 求心脏线$\rho = a(1+\cos\theta)$所围区域图形的重心坐标

$$x = \frac{2}{3}\rho(\theta)\cos\theta$$



[例2] 求心脏线$\rho = a(1+\cos\theta)$所围区域图形的重心坐标

[解] 由对称性知$\overline{y} = 0$

$$M = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 8a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{3}{2} \pi a^2$$

$$M_y=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi}(\cos\theta+3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta$$

$$=\frac{5}{4}\pi a^3$$

于是 $\bar{x}=\dfrac{M_y}{M}=\dfrac{5}{6}a$

重心直角坐标 重心极坐标

$(\bar{x}=\dfrac{5}{6}a,\quad \bar{y}=0)$ $(\theta=0,\quad \rho=\dfrac{5}{6}a)$

预习 (下次课内容):

《高等微积分教程》

第7.1节 常微分方程的基本概念

第7.2节 一阶方程的初等解法-分离变量方法

- 作业 (本次课)：

练习题8.1：1-2[自己练习], 3。

练习题8.2：1*, 2[自己练习], 3-5, 7*-8*.