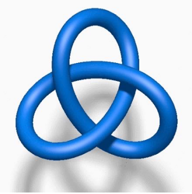
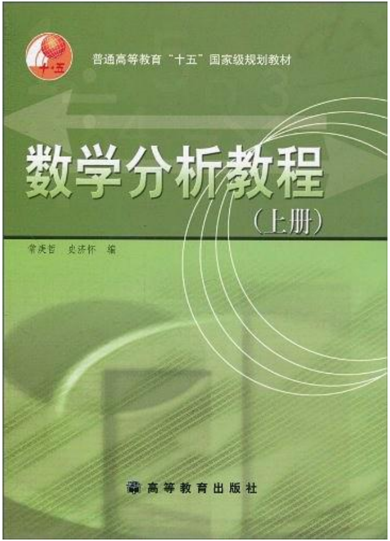
高等微积分(上)

邹文明

第二章: 函数, 函数的极限与连续




普通高等教育"十五"国家级规划教材
十·五
数学分析教程
(上册)
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

§1. 函数

定义 1. 设 X, Y 为非空集合. 若它们之间存在对应规则 f 使得 $\forall x \in X$, 均有唯一确定 $y \in Y$ (记作 $y = f(x)$) 与之对应, 称 f 为 X 到 Y 的映射 (记作 $f : X \to Y$), $y = f(x)$ 为自变量 x 在 f 下的像, 而 x 为因变量 y 的原像.

评注

- 严格地讲，一个映射 $f: X \to Y$ 由三个部分组成：定义域 X (记作 $D(f)$)，取值的范围 Y 以及对应规则 f. 但知道 f，也就知道 X, Y，因此人们通常直接将对应规则 f 称为映射，而用 $f(x)$ 表示 f 在点 x 处的值.

- 比如说 sin 表示正弦函数, $\sin x$ 为正弦函数在点 x 的值.
  但习惯上也用 $y=\sin x$ 表示正弦函数.
- 我们称 $R(f)=\{f(x) \mid x \in X\}$ 为映射 f 的值域, 也叫 f 的像集, 记作 $f(X)$ 或 $\mathrm{Im} f$.
- 定义域与值域均为数集的映射被称为函数.

- 对于由表达式 $y = f(x)$ 所定义的函数, 使得表达式有意义的所有点 x 组成的集合被称为函数 f 的自然定义域, 由所有取值而组成的集合则被称为 f 的值域. 例如 $f(x) = \sqrt{x}$ 的自然定义域和值域均为 $[0, +\infty)$.

典型例子

例 1. $\forall x \in X$, 令 $id_X(x) = x$. 称 id_X 为 X 上的恒等映射.

例 2. 设 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$. 假设对应规则 f 是将 1 与 a, b 对应, 而将 $2, 3$ 与 c 对应. 则 f 不是一个映射.

例 3. 数列就是定义在 $\mathbb{N}^*$ 上的函数. 例如 $\{\frac{1}{n}\}$ 就是函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)=\frac{1}{n}$.

函数的四则运算

设 D 为非空数集, f, g 为定义在 D 上的函数.

- 线性组合: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

  $(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x), \ \forall x \in D.$

- 乘法: $(fg)(x) := f(x)g(x), \ \forall x \in D.$
- 除法: $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall x \in D$ 使得 $g(x) \neq 0.$

定义 2. (映射的复合)

设 $f: A \to B$, $g: B \to C$ 为映射. $\forall x \in A$, 令

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

则 $g \circ f$ 为从 A 到 C 的映射, 被称为 g 与 f 的复合映射. 映射的复合可用下图表示:

$$g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

定义 3. 设 $f: X \to Y$ 为映射.

- 称 f 为单射, 若 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 均有 $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 称 f 为满射, 若 $R(f) = Y$, 也即说 $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ 使得 $y = f(x)$.
- 若 f 既是单射也是满射, 则称 f 为双射或者可逆映射.

逆映射 若 $f: X \to Y$ 为双射, 那么 $\forall y \in Y$, $\exists!\ x \in X$
使得 $f(x) = y$. 记 $x = f^{-1}(y)$. 如此定义的 f^{-1} 是一个从 Y 到 X 的映射, 被称为 f 的逆映射.
此时 $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$. 也即

$\forall x \in X$, $f^{-1}(f(x)) = x$; $\forall y \in Y$, $f(f^{-1}(y)) = y$.

当 f 为函数时, 则称 f^{-1} 为 f 的反函数.

函数的基本性质

有界性: 设 X 为非空数集, $f: X \to \mathbb{R}$ 为函数.

- 称 f 有上界, 若 $\exists M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in X$, 我们均有 $f(x) \leqslant M$.
- 称 f 有下界, 若 $\exists m \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in X$, 我们均有 $f(x) \geqslant m$.

有界性: 设 X 为非空数集, $f: X \to \mathbb{R}$ 为函数.

- 称 f 有界, 若 f 既有上界也有下界.
- 称 f 无界, 若 f 没有上界或者没有下界.

评注:函数 f 的有界性等价于像集 $R(f)$ 的有界性:

- 函数 f 有上界当且仅当 $R(f)$ 有上界.
- 函数 f 有下界当且仅当 $R(f)$ 有下界.
- 函数 f 有界当且仅当 $R(f)$ 有界; 而这恰好等价于说 $\exists M > 0$ 使 $\forall x \in X, |f(x)| \leqslant M$.
- 函数 f 无界当且仅当 $R(f)$ 无界.

周期性:设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为函数.

- 如果 $\exists T\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们均会有 $f(x+T)=f(x)$, 那么称函数 f 为周期函数, 而 T 为其周期. 此时 $-T$ 也为 f 的周期.
- 满足上述性质的最小的正数 T (如果存在) 称为 f 的最小正周期.

本课程将只讨论具有最小正周期的周期函数.

奇偶性: 设 X 为非空数集使得 $\forall x \in X$, 均有 $-x \in X$. 设 $f : X \to \mathbb{R}$ 为函数.

- 若 $\forall x \in X$, 均有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 f 为偶函数.
- 如果 $\forall x \in X$, 均有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 f 为奇函数.

单调性: 设 X 为非空数集, 而 $f: X \to \mathbb{R}$ 为函数.

- 称 f 在 X 上为单调递增, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- 称 f 在 X 上为严格递增, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$.

- 称 f 在 X 上为单调递减, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
- 称 f 在 X 上为严格递减, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) > f(x_2)$.
- 递增函数和递减函数合称为单调函数; 严格递增和严格递减函数合称为严格单调函数.

命题 1. 严格单调函数为单射.

证明: 假设 $f:X\to\mathbb{R}$ 为严格单调. 不失一般性, 可假设 f 严格增, 否则则考虑 $-f$. $\forall x_1,x_2\in X$, 若 $x_1\neq x_2$, 则不妨设 $x_1>x_2$ (否则重新编号). 因 f 严格增, 故 $f(x_1)>f(x_2)$, 从而 f 为单射.

注: 如果 f 在 X 上严格单调, 则 $f: X \to R(f)$ 为双射, 从而存在反函数 $f^{-1}: R(f) \to X$. 值得一提是, 有反函数的函数不一定严格单调.

命题 2. 严格单调函数的反函数与原来的函数有同样的单调性.

证明: 假设 f 为 X 上的严格递增函数 (对严格递减函数可以类似证明), 而 $f^{-1}: R(f) \to X$ 为 f 的反函数. $\forall y_1, y_2 \in R(f)$, 定义 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. 于是 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. 假设 $y_1 > y_2$, 则 $x_1 \neq x_2$. 若 $x_2 > x_1$, 由严格递增性可知 $y_2 > y_1$, 矛盾! 故 $x_1 > x_2$, 由此得证.

基本初等函数

- 常值函数;
- 幂函数: $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;
- 指数函数: $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$;
- 对数函数: $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$;

  自然对数函数: $y = \ln x = \log x$ $(x > 0)$;

基本初等函数

- 三角函数: $y = \sin x$, $y = \cos x$;
- 反三角函数: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

由上述基本初等函数经过有限多次四则运算和复合运算后得到的函数，称为初等函数.

常用的其它初等函数：多项式，有理函数，

- 正切：$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$，余切：$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$；
- 双曲正弦：$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$，

  双曲余弦：$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$，

  双曲正切：$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$，

  双曲余切：$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

辛苦了！

§2. 函数极限的概念 ($\varepsilon-\delta$ 语言): 固定

$X \neq \emptyset$ 为非空数集. 有限点处的邻域与去心邻域:

定义 1. 设 $a \in \mathbb{R}$, 而 $\varepsilon > 0$. 定义:

- $B_X(a,\varepsilon) = \{x \in X : |x-a| < \varepsilon\}$, 称为点 a 在 X 中的 ε-邻域.
- $\mathring{B}_X(a,\varepsilon) = \{x \in X : 0 < |x-a| < \varepsilon\}$, 称为点 a 在 X 中的 ε-去心邻域.

无穷远点处的邻域与去心邻域:

定义 2. 设 $\varepsilon > 0$. 定义:

- $B_X(+\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(+\infty, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ x > \frac{1}{\varepsilon}\}$,
  称为 $+\infty$ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.
- $B_X(-\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(-\infty, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ x < -\frac{1}{\varepsilon}\}$,
  称为 $-\infty$ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.
- $B_X(\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(\infty, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ |x| > \frac{1}{\varepsilon}\}$,
  称为 ∞ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.

评注: 设 $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{\pm\infty\}$, 而 $\varepsilon > 0$.

- $B_X(x_0, \varepsilon) = \mathring{B}_X(x_0, \varepsilon)$ 当且仅当 $x_0 \notin X$.
- 常将 $B_X(x_0, \varepsilon)$ 和 $\mathring{B}_X(x_0, \varepsilon)$ 简记为 $B_X(x_0)$ 和 $\mathring{B}_X(x_0)$, 称为 x_0 的邻域和去心邻域.
- 点 x_0 处的任意两个邻域总可以比较大小.

- 当 $X=\mathbb{R}$ 时, 通常省略下标 X. 例如, 常将 $B_X(x_0,\varepsilon)$ 简记作 $B(x_0,\varepsilon)$. 则对一般数集 X,

$$\begin{aligned} B_X(x_0,\varepsilon) &= B(x_0,\varepsilon)\cap X, \\ \mathring{B}_X(x_0,\varepsilon) &= \mathring{B}(x_0,\varepsilon)\cap X. \end{aligned}$$

定义 3. 设 X 为非空数集, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, \pm\infty\}$. 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\mathring{B}_X(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$, 则称点 x_0 为 X 的极限点. 注: 这里并不要求 $x_0 \in X$.

典型的极限点

- 设 $\eta > 0$, $a \in \mathbb{R}$. 那么点 a 为 $(a-\eta, a+\eta)$, $(a-\eta, a)$, $(a, a+\eta)$ 的极限点.
- 自然数集 $\mathbb{N}$ 的极限点为 $+\infty = \infty$.
- 整数集 $\mathbb{Z}$ 的极限点为: $+\infty$, $-\infty$, ∞.
- 任意实数以及 $\pm\infty$, ∞ 均为有理数集 $\mathbb{Q}$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 的极限点.

命题 1. 设 X 为非空数集, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$. 则 a 为 X 的极限点当且仅当 $X \backslash \{a\}$ 中存在着收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$.

证明: 这里只考虑 $a \in \mathbb{R}$ 的情形. **必要性.** 如果 a 为 X 的极限点, 那么 $\forall n \geqslant 1$, $\exists x_n \in \mathring{B}_X(a, \frac{1}{n})$. 也即 $x_n \in X \backslash \{a\}$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. 于是由夹逼原理可知数列 $\{x_n\}$ 收敛到 a.

充分性. 假设 $X\backslash\{a\}$ 中有数列 $\{x_n\}$ 收敛到 a. 则 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, 我们均有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

由于 $x_n\in X\backslash\{a\}$, 故 $x_n\in\mathring{B}_X(a,\varepsilon)$, 由此立刻可知 a 为 X 的极限点.

定义 4. 设 X 为非空数集, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$ 为 X 的极限点, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, $f : X \to \mathbb{R}$ 为函数. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, $f(x) \in B(a, \varepsilon)$, 那么称当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 趋近到 a (或以 a 为极限), 并将 a 记为 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$. 有时也简记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

评注

- 若 $X=\mathbb{N}^*$ 且 $x_0=\infty$, 函数极限为数列极限: "$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得 $\forall n\in\mathring{B}_{\mathbb{N}^*}(\infty,\delta)$, 我们均有 $f(n)\in B(a,\varepsilon)$". 这等价于说 "$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有 $|f(n)-a|<\varepsilon$".
- 函数极限的存在性只与 f 在点 x_0 的邻域内的性态有关, 但与 f 在该点的取值无关.

- 假设 点 x_0 为数集 X 的极限点是为了保证: $\forall\delta > 0$, 我们均有 $\mathring{B}_X(x_0, \delta) \neq \emptyset$.
- 仅仅当 $a \in \mathbb{R}$ 时, $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$ 才被称为当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 收敛到 a.

- 函数极限定义的否定表述:
  当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 不趋近于 a 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$ 满足 $f(x) \notin B(a, \varepsilon_0)$.

几种常见的极限

情形 I: $x_0, a \in \mathbb{R}$ (1) $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (x_0-\eta, x_0+\eta) \setminus \{x_0\}$, 则

$$\lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = a \text{ 当且仅当 } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, \eta)$$

使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$.

此时我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

(2) 右极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0, x_0 + \eta)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

(3) 左极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0 - \eta, x_0)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$.

情形 II: $x_0 \in \mathbb{R},\ a = +\infty$

(1) $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, 则我们有 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = +\infty$ 当且仅当 $\forall M > 0, \exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 我们有 $f(x) > M$.

此时将此极限简记为$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

(2) 右极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0, x_0 + \eta)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = +\infty$ 当且仅当 $\forall M > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 我们均有 $f(x) > M$. 我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

(3) 左极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0 - \eta, x_0)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = +\infty$ 当且仅当 $\forall M > 0, \exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 我们均有 $f(x) > M$. 我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

类似地, 我们还可以考虑如下情形的极限:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$,

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty,$
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty,$
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty.$

命题 2. 假设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, 而 $f : \mathring{B}(x_0, \rho) \to \mathbb{R}$ 为函数. 那么 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

证明: 必要性. 假设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \rho)$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}(x_0, \delta)$, $f(x) \in B(a, \varepsilon)$.

因此 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 均会有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$;

同时 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 也将有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$.

于是我们有 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

充分性. 假设我们有 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 \in (0,\rho)$ 使得 $\forall x \in (x_0-\delta_1, x_0)$, 我们均有 $f(x) \in B(a,\varepsilon)$; 同时 $\exists \delta_2 \in (0,\rho)$ 使得 $\forall x \in (x_0, x_0+\delta_2)$, 也将有 $f(x) \in B(a,\varepsilon)$. 由此令 $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$, 则我们有

$$\mathring{B}(x_0,\delta) \subseteq (x_0-\delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta_2),$$

于是 $\forall x \in \mathring{B}(x_0,\delta)$, 均有 $f(x) \in B(a,\varepsilon)$. 故

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

情形 III: $x_0 = \pm\infty$ 或 ∞, 而 $a \in \mathbb{R}$.

(1) $x_0 = +\infty$ 且 $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (\eta, +\infty)$:

$\lim\limits_{X \ni x \to +\infty} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > \eta$ 使得 $\forall x > M$, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将上述极限简记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

(2) $x_0=-\infty$ 且 $\exists \eta>0$ 使得 $X\supseteq(-\infty,-\eta)$:

$\lim\limits_{X\ni x\to-\infty} f(x)=a$ 当且仅当 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>\eta$ 使得

$\forall x<-M$, 我们有 $|f(x)-a|<\varepsilon$. 此时我们将该极限简记作 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$.

(3) $x_0 = \infty$, $X = \mathbb{R}$: $\lim\limits_{X \ni x \to \infty} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ 使 $|x| > M$ 时, $|f(x) - a| < \varepsilon$.

该极限简记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$. 类似地, 可考虑:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

命题 3. 假设 $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, 而 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为函数. 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ 当且仅当

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

证明: 必要性. 假设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. 那么 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ 使得 $|x| > M$ 时, 均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 也即 $\forall x < -M$ 以及 $\forall x > M$, $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 由此可知 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.

充分性. 假设 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, 那么 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M_1>0$ 使 $\forall x<-M_1$, $f(x)\in B(a,\varepsilon)$; 同样地 $\exists M_2>0$ 使得 $\forall x>M_2$, $f(x)\in B(a,\varepsilon)$. 令 $M=\max(M_1,M_2)$. $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $|x|>M$ 时, 我们总有 $f(x)\in B(a,\varepsilon)$. 故 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$.

典型例题

例 1. 证明: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0.$

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 要找 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时, 均有 $|x^2| < \varepsilon$, 为此只需取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 那么当 $0 < |x| < \delta$ 时, 我们有 $|x^2| < \delta^2 = \varepsilon$. 从而所证结论成立.

例 2. 求证: 极限 $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ 不存在.

证明: 由于当 $x > 0$ 时, 我们均有 $\operatorname{sgn} x = 1$, 而当 $x < 0$ 时, 则有 $\operatorname{sgn} x = -1$, 于是

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1,$$

也就是说左、右极限不相等, 由此我们立刻可知极限 $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ 不存在.

例 3. 求证: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

证明: $\forall\varepsilon > 0$, 我们可选取 $\delta = \varepsilon$, 那么 $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 我们均有

$$|x\sin\frac{1}{x}| \leqslant |x| < \varepsilon.$$

故所证结论成立.

思考题: 求证: $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = 1$.

同学们辛苦了！