微积分 A(1) 期中试题（电子系）

参考解答

一、填空题（每题 3 分，共 45 分。填空题答案填在相应试题的横线上）

1. $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=$ ________。 答案：$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=$ ________。 答案：$\dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-\ln 2)(x+1)}\right)^x=$ ________。 答案：$\dfrac{2}{e}$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}, & x>0\\ a, & x=0\\ b+x\cos\dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $a=$ ____，$b=$ ____。答案：$\dfrac{1}{2}$

5. 设 $f(x)=(\sin x)^{\ln x}$，$x\in(0,\pi)$，求 $f'(x)=$ ________。

   答案：$f'(x)=(\sin x)^{\ln x}(\dfrac{\ln\sin x}{x}+\dfrac{\cos x\ln x}{\sin x})$

6. 设 $f(x)=|\dfrac{\sin x}{x}|$，$x\neq 0$，则 $f'_+(\pi)=$ ________。 答案：$1/\pi$

7. 已知极坐标方程 $r=\dfrac{a}{1-\cos\theta}$ 确定了函数 $y=y(x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ____。答案：$\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

8. 已知函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\sin y+xe^y=0$ 确定的隐函数，则

   $\dfrac{dy}{dx}=$ ________。 答案：$-\dfrac{e^y}{\cos y+xe^y}=\dfrac{e^y}{\sin y-\cos y}$

9. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中有二阶导数，$f(1)=1, f'(1)=2, f''(1)=3$，

   已知 $y=f(x+y)$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________。 答案：-3

10. 设函数 f 在 $x=a$ 点有二阶导数，$f(a)=A, f'(a)=B, f''(a)=C$，则

    $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+4x)-2f(a+x)+f(a-2x)}{x^2}=$ ________。 答案：$9C$

11. 设方程 $\cos y+xe^y=\sin x$ 确定了平面直角坐标系中一条曲线，则曲线在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 点

    的切线方程为________。 答案：$y=\dfrac{\pi}{2}+(e^{\frac{\pi}{2}}-1)x$

12. 设 f 在 $x=0$ 附近有定义，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+xf(x)}{x^2}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=$______。

答案：2

13. $y=x\arctan x$ 在 $x\to-\infty$ 时的斜渐近线方程为__________。答案：$y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$

14. 设 $f(x)=x^2\sin ax$，则 $f^{(2019)}(0)=$______________。答案：$-2019\cdot 2018\cdot a^{2017}$

15. 甲船以每小时 20 海里的速度从某地向东行驶，同时乙船在甲船正北方 82 海里处以每小时 16 海里的速度向南行驶，则经过_______时间两船相距最近。答案：2 小时

二、解答题（共 38 分。将解答过程和结果写在答题纸上）

1.（9 分）设函数 $f(x)=|\sin x|^3$，$x\in(-1,1)$，讨论 $f'''(x)$ 的连续性，如有间断点指出间断点及其类型。

解：$f'(x)=\pm 3\operatorname{sgn}(x)|\sin x|^2\cos x$，（$f'(0)=0$） ———————— 2 分

$f''(x)=\pm 3\operatorname{sgn}(x)(2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x)$，（$f''(0)=0$） ———————— 4 分

$f'''(x)=\pm 3\operatorname{sgn}(x)(2\cos^3 x-7\sin^2 x\cos x)$，$x\neq 0$； ———————— 6 分

$f'''(0)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to 0\pm} f'''(x)=\pm 6$， ———————— 9 分

所以 $f'''(x)$ 仅在 $x=0$ 有跳跃间断（第一类间断），除了该点外处处连续。

2.（10 分）设 $u=\arcsin(x)$，利用方程 $(1-x^2)(u')^2=1$ 计算 $u^{(n)}(0)$，$n=1,2,3,\cdots$。

解：方程两端关于 x 求导得 $2(1-x^2)u'u''-2x(u')^2=0$，

注意 $u'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\neq 0$，上式导出 $(1-x^2)u''-xu'=0$， ———————— 3 分

应用 Leibniz 乘积求导公式在上式两端求导 n 次得到

$$(1-x^2)u^{(n+2)}-x(2n+1)u^{(n+1)}-n^2u^{(n)}=0,$$

令 $x=0$ 得到递推关系 $u^{(n+2)}(0)=n^2u^{(n)}(0)$， ———————— 8 分

结合 $u^{(1)}(0)=u'(0)=1$，$u^{(0)}(0)=u(0)=0$ 导出：

n 为偶数：$u^{(n)}(0)=[(n-2)!!]^2u(0)=0$，

n 为奇数：$u^{(n)}(0)=[(n-2)!!]^2u'(0)=[(n-2)!!]^2$。 ———————— 10 分

3. （9 分）求出函数 $g(x)=x-e^{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调区间、极值和极值点、凸性区间以及渐近线（如果存在的话），并画出曲线 $y=g(x)$ 的草图。

解：$g'(x)=1-e^{x}$，可见 $g(x)$ 在 $x<0$ 时严格增，在 $x>0$ 时严格减， ————2 分

所以 $x=0$ 是极大值点，极大值为 $g(0)=-1$； ———— 4 分

由于 $g''(x)=-e^{x}<0$，函数处处上凸； ———— 5 分

考察 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-e^{x}}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^{x})=0$，

由此得到 $x\to-\infty$ 时曲线 $y=g(x)$ 的渐近线 $y=x$。 ———— 7 分

曲线草图略（有渐近线，有单调区间和极值点，有上凸性）。 ———— 9 分

4. （10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^{3}+2xy^{2}+2x^{2}y-32=0$ 确定，求出 $y(x)$ 的极值。

解：方程两端关于 x 求导得

（*） $3y^{2}y'+2y^{2}+4xyy'+4xy+2x^{2}y'=0$，

为求驻点，令 $y'=0$，得到 $y^{2}+2xy=0$，与原方程联立，解得唯一解组

$x=-2,y=4$（也即 $y(-2)=4$ 是唯一可能的极值）。 ———— 4 分

为检查是否极值，计算 $y=y(x)$ 在该点的二阶导数：对（*）式继续求导得

$$6y(y')^{2}+3y^{2}y''+8yy'+4x(y')^{2}+4xyy''+4y+8xy'+2x^{2}y''=0,$$

将 $y'=0$， $x=-2,y=4$ 带入得到 $24y''+16=0$， $y''=-2/3<0$， ——— 9 分

可见 $y(x)$ 在 $x=-2$ 点达到极大值，所以 $y(-2)=4$ 是 $y(x)$ 的极大值。 ——— 10 分

三、证明题（共 17 分。将详细证明过程写在答题纸上）

1. （9 分）求证：$f(t)=\dfrac{\ln t}{1-t}$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内严格单调增，由此导出

$\dfrac{y}{x}>\dfrac{y^{x}}{x^{y}}$ 对于 $0<x<y<1$ 以及 $1<x<y<+\infty$ 成立。

证：计算 $f'(t)=\dfrac{1}{t(1-t)}+\dfrac{\ln t}{(1-t)^{2}}=\dfrac{1-t+t\ln t}{t(1-t)^{2}}$，

为确定符号，继续考察函数 $\varphi(t)=1-t+t\ln t$， $\varphi'(t)=\ln t$， ———— 3 分

在$(0,1)$内$\varphi'(t)=\ln t<0$，$\varphi(t)=1-t+t\ln t$严格单调减，$\varphi(t)>\varphi(1)=0$，

在$(1,+\infty)$内$\varphi'(t)=\ln t>0$，$\varphi(t)=1-t+t\ln t$严格增，$\varphi(t)>\varphi(1)=0$，

综上可见在$(0,1)$和$(1,+\infty)$内$f'(t)>0$，从而$f(t)=\dfrac{\ln t}{1-t}$严格增得证。 —— 6 分

因此对于$0<x<y<1$以及$1<x<y<+\infty$，都有$\dfrac{\ln y}{1-y}>\dfrac{\ln x}{1-x}$，

整理得 $\ln y-\ln x>x\ln y-y\ln x$，也即 $\ln(\dfrac{y}{x})>\ln(\dfrac{y^x}{x^y})$，进而$\dfrac{y}{x}>\dfrac{y^x}{x^y}$。— 9 分

2. （8 分）设函数f在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，且$f(0)=f(1)$。

求证：存在$c\in(0,1)$，使得 $cf''(c)+2f'(c)=0$。

证：考虑辅助函数$F(x)=x[f(x)-f(0)]$， ———————— 2 分

由已知条件得$F(0)=F(1)=0$，

应用 Rolle 定理，存在$a\in(0,1)$，使得$F'(a)=0$，注意 ———————— 4 分

$$F'(x)=[f(x)-f(0)]+xf'(x)，\quad F'(0)=0$$

再次应用 Rolle 定理，存在$c\in(0,a)$使得$F''(c)=0$，

经计算 $F''(x)=xf''(x)+2f'(x)$，结论得证。 —————— 8 分