## 清华大学本科生考试试题专用纸

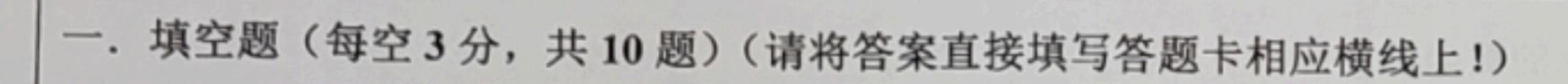
考试课程

微积分 A(1)

(B)

2021年12月29日

3



1. 
$$y = x \ln(e + \frac{1}{x^2})$$
 的斜渐近线为\_\_\_\_\_\_

$$2. \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} \right) = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1} = \underline{\hspace{1cm}}$$

7. 常微分方程 
$$x^2y'' + xy' - 4y = 0$$
  $(x > 0)$  的通解为\_\_\_\_\_。

8. 设
$$p > 0$$
,广义积分  $\int_{1}^{+\infty} x^2 \ln(1+\sin\frac{1}{x^p}) dx$  收敛,则实数  $p$  的取值范围为\_\_\_\_\_\_。

9. 由曲线段 
$$y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$$
,  $x \in [1, 4]$ 绕  $x$  轴旋转一周所成旋转面的面积为\_\_\_\_\_\_。

10. 设连续函数 
$$f(x)$$
 满足  $2\int_1^x f(t)dt = xf(x) + x^2$ , 则  $f'(1) = ______$ 

- 二. 解答题 (请写出详细的解答过程和必要的根据!)
- 11. (10分) 求积分  $\int_0^{\infty} \cos(\ln x) dx$  的值。
- 12. (10分) 求常微分方程 y"-3y'+2y=ex的通解。
- 13. (15 分) 求函数  $y = 4e^{-x}(2x^2 + x + 1) 5$  的单调区间,极值,上凸区间与下凸区间,以及 拐点的横坐标。
- 14. (10分)设D为 $y = \sqrt{x(1-x)}$ 与x轴围成的有界区域。
  - (I) 求 D的面积;
  - (II) 求 D 绕 x 轴 一 周 所 成 旋 转 体 体 积 。
- 15. (10分)设平面曲线y = y(x)满足y(0) = 1, y'(0) = 0,且对曲线上任意点P(x,y)(x > 0),沿曲线从点(0,1)到点P(x,y)的弧长等于该曲线在点P(x,y)的切线斜率,求y(x)(x > 0)。
- 16. (8分) 设 f(x) 是 R 上以 T 为周期的周期函数,且连续,证明:
- (I)函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt \frac{x}{T} \int_0^T f(t)dt$  是以T 为周期的周期函数;
- (II)  $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$
- 17. (7分) 设可导函数 f(x) 满足 f(1)=1, 且对  $x \ge 1$ 时, 有  $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$ 。
- (I)证明:  $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ 存在且有限;
- (II) 证明:  $\lim_{x\to +\infty} f(x) \le 1 + \frac{\pi}{4}$ 。

附加题(本题为附加题,全对才给分,其分数不计入总评,仅用于评判A+)

设 $f \in C[0,1]$ , g为非负的周期函数, 周期为1, 且 $g \in R[0,1]$ , 求证:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right).$$