第十四周习题课讲义: 定积分的几何应用 + 广义积分

2024 年 1 月 6 日

目录

1 作业题评讲

例题 1.1 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可导. 求证:

(1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\ \mathrm{d}x=0$;

(2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\ \mathrm{d}x=0$.

证: 只证 (1).

$$\begin{aligned}I&=\int_a^b f(x)d\left(-\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right)\\&=-\frac{\sin\lambda x\cdot f(x)}{\lambda}|_a^b+\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x dx\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 因此 $|f(x)\sin\lambda x|\le M$, 故:

$$\lim_{\lambda\to\infty}I_1=0$$

因为 $f(x)$ 连续可导因此 $f'(x)$ 连续, 故:$|f'(x)\sin\lambda x|\le M_2$, 故:

$$\lim_{\lambda\to\infty}I_2=0$$

注: 如果 $f(x)$ 只是连续或者可积, 那么则不能用上述方法来做, 此时分部积分公式无法使用, 需要利用 Darbox 和去做, 有兴趣同学可以尝试.

连续可导的意思不是 $f(x)$ 又是连续的、又是可导的而是指 $f(x)$ 是可导的并且导函数是连续的.

例题 1.2 在 $[-1,+\infty)$ 上定义函数

$$f(x)=\int_{-1}^x\frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t^2\left(1+\mathrm{e}^{1/t}\right)^2}\ \mathrm{d}t,$$

试写出函数 f 的简单表达式.

解: 首先观察被积函数,$g(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{1/t}}{t^2\left(1+\mathrm{e}^{1/t}\right)^2}$, 可以看出 0 是 $g(t)$ 的一个间断点, 计算可得:

$$\lim_{t\to0^-}=\lim_{t\to0^+}g(t)=0$$

因此 0 是 g 的可去奇点, 故补充定义 $g(t)=0$, 我们就得到 $g(t)$ 在 $[-1,x]$ 上是可积的, 故 $f(x)$ 总是有定义的.

但是在具体计算的时候我们要分开计算 $x<0$ 和 $x>0$ 的情况. 当 $x<0$ 时:

$$f(x)=\int_{-1/x}^{-1}\frac{1}{(1+e^{1/t})^2}d(e^{1/t})=\frac{1}{1+e^{1/x}}-\frac{e}{1+e}$$

因此 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\dfrac{1}{1+e}$.

当 $x>0$ 时, 我们有:

$$f(x)=\int_{-1}^0 g(t)dt+\int_0^x g(t)dt=\frac{1}{1+e^{1/x}}+\frac{1}{1+e}$$

综上:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}-\dfrac{e}{1+e}, x<0\\ \dfrac{1}{1+e}, x=0\\ \dfrac{1}{1+e^{1/x}}+\dfrac{1}{1+e}, x>0\end{cases}$$

例题 1.3 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解: 根据 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}f(\sin x,\cos x)dx=\int_0^{\pi/2}f(\cos x,\sin x)dx$ 可知, 我们只需要计算其中一个.

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

利用万能替换直接计算可得:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

例题 1.4 设函数 f 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)=f(1)=f'(0)=0, f'(1)=1$. 求证:

$$\int_0^1\left(f''(x)\right)^2\,\mathrm{d}x\geqslant 4,$$

并指出不等式中等号成立的条件.

证: 猜测证明该不等式需要利用 C-S 不等式, 因此:

$$(\int_a^b f\cdot g)^2\leq\int_a^b f^2\cdot\int_a^b g^2$$

根据题意就应该时 f 取为 f'', 那么取 g 为什么? 我们知道要想取等, 那么必然时 $f=kg$, 因此 g 和 f 必须具备 (基本) 一样的条件 (不妨猜测 $f=g$), 即:

$$g(0)=g(1)=g'(0)=0, g'(1)=1$$

我们要猜 g 等于什么, 那么最好从多项式函数猜起, 根据题意 g 至少是三阶多项式且以至少 0 为二重根,1 为单根, 故:

$$g(x)=x^3-x^2$$

是最低次满足条件的多项式, 又因为 $\displaystyle\int(g'')^2dx=4$, 因此我们知道 g 就应该是 f. 因此在 C-S 不等式中取 f 为 f 二阶导,g 为 g 的二阶导, 就可以证出:

$$\int_0^1\left(f''(x)\right)^2\,\mathrm{d}x\geqslant 4,$$

取等条件为 $f=kg$, 对比就会发现 $k=1$.

第二种思路大家自己完善.

2 定积分的几何应用

2.1 平面区域的面积

平面区域的面积:

1. (基本公式) 设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$. 则由曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 与直线 $x=a, x=b$ 所围平面区域的面积等于

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.}$$

2. (参数方程) 设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 其中 x, y 连续, $y \geqslant 0, x(t)$ 为严格递增, 则存在连续反函数 $t=t(x)$. 定义 $a=x(\alpha), b=x(\beta)$. 由 $\Gamma, x=a, x=b$ 及 x 轴所围区域的面积等于

$$\boxed{S=\int_a^b y(t(x))\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=\!=} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t.}$$

3. (极坐标) 设曲线弧 $\widehat{AB}$ 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$,
其中 $\rho(\theta)$ 为连续函数. 那么曲线弧 $\widehat{AB}$ 与射线 $\theta=\alpha, \theta=\beta$ 所围成的区域的面积为

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho(\theta))^2\ \mathrm{d}\theta.}$$

关于平面区域面积的计算, 我们给出几点注记 (处理技巧):

- 当区域不那么完美时, 我们需要将区域给分割;
- 有的时候我们只需要将坐标倒过来看, 那么区域就会变成一个比较好的部分;
- 利用参数方程时要看一看参数方程是否满足条件;
- 利用极坐标时看清楚要计算什么图形的面积 (区域是否包含原点.).

例题 2.1 求由抛物线 $y^2=4x$ 和直线 $y=x-3$ 所围成图形的面积.

方法一: 划分区域: 抛物线 $y^2=4x$ 和直线 $y=x-3$ 的两个交点是 $(1,-2)$ 和 $(9,6)$. 把这个平面图形分成两个部分: 位于直线 $x=1$ 左侧的部分的面积记为 S_1, 位于该直线右侧的部分的面积记为 S_2 . 则所求面积为

$$\begin{aligned} S=S_1+S_2 &= \int_0^1 [2\sqrt{x}-(-2\sqrt{x})]\mathrm{d}x+\int_1^9 [2\sqrt{x}-(x-3)]\mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1+\left(\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2+3x\right)\Big|_1^9=\frac{64}{3}. \end{aligned}$$

方法二: 将 y 看作是被积变量. 将方程化为 $x=\dfrac{y^2}{4}, x=3+y$.

$$S=\int_{-2}^6\left[(y+3)-\frac{1}{4}y^2\right]\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}y^2+3y-\frac{1}{12}y^3\right)\Big|_{-2}^6=\frac{64}{3}.$$

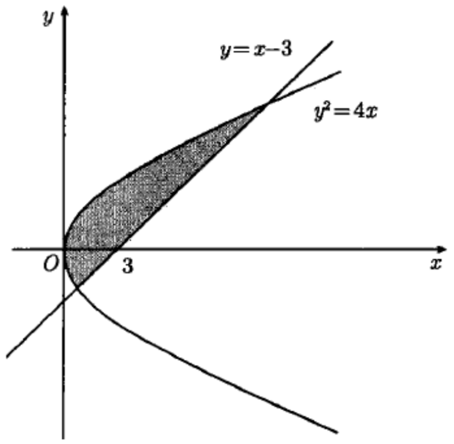

图 1:

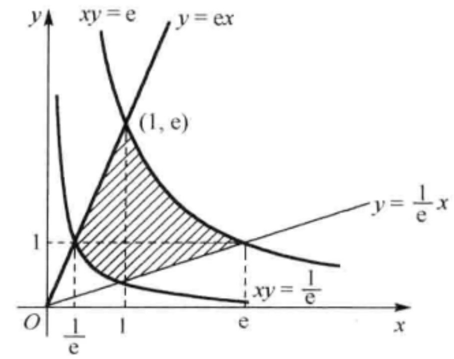

图 2:

例题 2.2 求曲线 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所围成平面图形的面积.

解: 曲线方程去掉绝对值后为

$$\begin{cases} xy=\mathrm{e}, \quad x\geqslant 1, y\geqslant 1 \\ y=\mathrm{e}x, 0<x<1, y\geqslant 1 \\ y=\dfrac{x}{\mathrm{e}}, \quad x\geqslant 1, 0<y<1 \\ xy=\dfrac{x}{\mathrm{e}}, 0<x<1, 0<y<1 \end{cases}$$

图形如图 2 所示. 所求面积为

$$A=\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\left(\mathrm{e}x-\frac{1}{\mathrm{e}x}\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{\mathrm{e}}\left(\frac{\mathrm{e}}{x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例题 2.3 四条直线 $y=1, y=x, y=2x$ 和 $y=6-x$ 所围成的平面区域;

解: 宜选取 y 为积分变量. 由 $\begin{cases} y=x, \\ y=6-x \end{cases}$ 解得交点 $(3,3)$; 由 $\begin{cases} y=2x, \\ y=6-x \end{cases}$ 解得交点 $(2,4)$. 所以

$$A=\int_{1}^{3}\left(y-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y+\int_{3}^{4}\left[(6-y)-\frac{y}{2}\right]\mathrm{d}y=\frac{11}{4}.$$

例题 2.4 设曲线为 $f(x)=ax+b-\ln x$, 在 $[1,3)$ 上 $f(x)\geqslant 0$, 求常数 a,b, 使 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ 最小.

解由于 $f(x)\geqslant 0$, 则当直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=\ln x$ 的切线时, 积分 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ (直线与曲线在区间 $[1,3]$ 所夹面积) 为最小. 设切点坐标为 $(x_0,\ln x_0)$, 则 $y=\ln x$ 的切线方程为

$$y=\frac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0,$$

即有 $a=\dfrac{1}{x_0}, b=\ln x_0-1=-(\ln a+1)$. 此时

$$S=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3(ax+b-\ln x)\mathrm{d}x=4a-2(1+\ln a)-\int_1^3 \ln x\ \mathrm{d}x$$

令 $S_a'=4-\dfrac{2}{a}=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}, b=\ln 2-1$, 而 $S_a'''=\dfrac{2}{a^2}>0$, 所以 S 取得最小值,

$$S=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2-4\ln 2-3\ln 3.$$

2.2 曲线弧长的计算

1. 参数方程: $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\ \mathrm{d}t$.
2. 函数图像: $L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\ \mathrm{d}x$.
3. 极坐标方程: $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\ \mathrm{d}\theta$.
4. 空间曲线参数方程:
$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\ \mathrm{d}t.$$

对待曲线的弧长, 尤其是参数方程的, 要看清楚参数变换的范围 (必须保证积分是正的).

例题 2.5 求椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$$

的周长.

解椭圆的参数方程为

$$x=a\cos t, y=b\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

故

$$\begin{aligned}S&=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\ \mathrm{d}t=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\ \mathrm{d}t\\&=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\ \mathrm{d}t=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\ \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

这里最后的积分不可以由初等函数表示出来, 我们将其称为椭圆积分.

例题 2.6 证明椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的周长等于正弦曲线 $y=c\sin\dfrac{x}{b}$ 的一波之长, $c=\sqrt{a^2-b^2}$

直接计算即可.

2.3 体积的计算

利用定积分我们可以计算一些两类特殊几何体的体积.

旋转体的体积: 用垂直 x 轴的平面截旋转体所得的截面是半径为 $f(x)$ 的圆盘, 则 $S(x)=\pi(f(x))^2$. 于是所求旋转体的体积为 $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$. 如果是 $x=g(y)$ 绕着 y 轴旋转, 我们也可以计算处体积公式

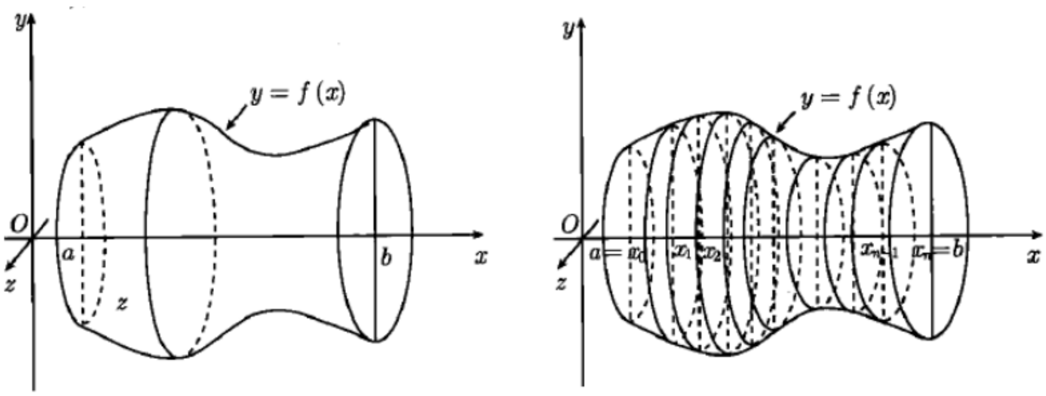

图 3:

为:

$$V=\pi\int_c^d g(y)^2dy$$

已知截面面积求体积: 一般地, 如果一个立体 K 夹在两个平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间, 这里 $a<b$, 并且已知对每个 $x\in[a,b]$, 该立体 K 的相应截面积为 $S(x)$, 并且 S 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则该立体 K 的体积为

$$\boxed{V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$$

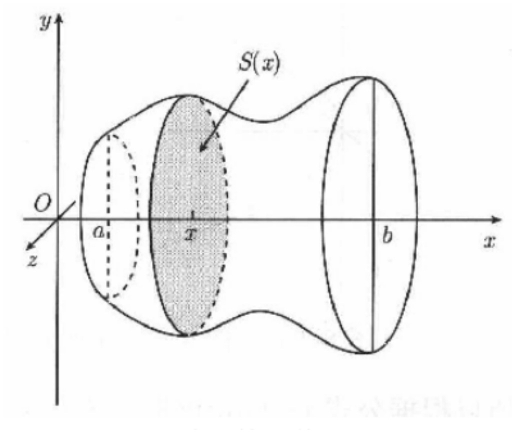

图 4:

例题 2.7 求下列几何体的体积:

(1) 过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线与 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积;

(2) 曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积;

(3) 设有一正椭圆柱体, 其底面的长、短轴分别为 $2a, 2b$, 用过此柱体底面的短轴且与底面成 $\alpha(0<\alpha<\pi/2)$ 角的平面截此柱体, 得一楔形体, 求此楔形体的体积.

(4) 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+z^2=a^2$ 相交部分的体积.

解:(1) 将点 $P(1,0)$ 的坐标 $x=1, y=0$ 代人切线方程中, 解得 $x_0=3$. 切线方程为 $y=(x-1)/2$. 所求旋转体的体积是两个旋转体体积之差, 即

$$V=\pi\int_1^3\frac{1}{4}(x-1)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_2^3(\sqrt{x-2})^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}.$$

(2) (以侧面积为截面) 曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 与 x 轴的交点为 $x=1$ 和 $x=2$, 故

$$V_y=\int_1^2 2\pi x|y|\mathrm{d}x=-2\pi\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

(3) 用垂直于 x 轴的平行平面截此楔形体所得截面为矩形, 其面积为

$$S(x)=2b\sqrt{1-x^2/a^2}\cdot x\tan\alpha,$$

则楔形体的体积为 $V=\displaystyle\int_0^a S(x)\mathrm{d}x=\frac{2a^2b}{3}\tan\alpha$.

(4) 解记两个柱面所交的部分为 Ω. 由对称性知, Ω 的体积是它在第一卦限中那部分体积的 8 倍. 因此我们只需计算它在第一卦限部分的体积. 容易知道, 当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时, 以横坐标为 x 的平面截第一卦限中那部分所得的截面是以 $\sqrt{a^2-x^2}$ 为边的正方形, 其面积为

$$g(x)=a^2-x^2.$$

故:Ω 的体积

$$V(\Omega)=8\int_0^a\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}a^3.$$

例题 2.8 *设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内大于零, 且满足 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 又设曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$ 及 $y=0$ 所围面图形 S 的面积值为 2 . 求 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.*

解: 由已知得

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$$

故 $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{3a}{2}x+C$, 即有 $f(x)=\dfrac{3a}{2}x^2+Cx, x\in[0,1]$. 再由已知条件有 $2=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{3a}{2}x^2+Cx\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{C}{2}$, 得 $C=4-a$, 因此

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x$$

旋转体体积

$$V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}\left(a^2+10a+160\right).$$

令 $V'(a)=\dfrac{\pi}{30}(2a+10)=0$ 得 $a=-5$. 又 $V''(a)=\dfrac{\pi}{15}>0$, 故 $a=-5$ 时, 旋转体的体积最小.

3 广义积分

3.1 广义积分的定义

定义 3.1 *设函数 f 在无限区间 $[a,+\infty)$ 上定义，且在任意有限区间 $[a,b]$ $(b>a)$ 上 Riemann 可积. 则称符号*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

为无穷积分. 如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称上述极限值为该无穷积分的值，仍用符号 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 表示.

如果我们令 $F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 那么广义积分的收敛性就可以看成 $F(t)$ 作为一元函数当 $t\to\infty$ 极限是否存在? 故无穷积分的收敛性就可以转换为一个函数在无穷远处的极限是否存在？故判断函数极限是否存在的定理就可以完全挪移到这里来. 例如: 海涅原理、柯西收敛准则.

例如: 已知广义积分 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 问:

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{2n}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=?$$

显然, 它等于 0.

上边的定义说的是单侧无穷积分的定义, 下边我们来定义双侧无穷积分的定义:

定义 3.2 *整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 则定义为*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

规定只有当右端的两个无穷积分都收敛时才称无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则就称它发散.

注: 广义积分的收敛与右侧的点 a 的选取无关.

有的同学会对下列积分的敛散性怀疑.

例题 3.1 *判断函数:$\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ 是否收敛.*

错误的回答: 考虑:

$$I_n=\int_{-n}^{n} xdx$$

由于 x 是积函数因此 $I_n\equiv 0$ 故 $\int_{-\infty}^{\infty} xdx=\lim_{n\to\infty} I_n=0$. 故积分收敛.

错误的原因是没有注意到 $\mathbb{R}$ 上无穷积分收敛的定义, 必须要求 $\int_0^{\infty} xdx$ 是收敛的, 但是其显然不收敛.

事实上该广义积分的收敛等价于一个二元函数的极限是否存在, 令:

$$F(a,b)=\int_a^b f(x)dx$$

因此广义积分的收敛性等价于:

$$\lim_{a\to-\infty,b\to+\infty} F(a,b)$$

是否存在, 这里的 a,b 是独立的趋于无穷, 而错误的做法是将 a,b 绑在了一起要求他们具有相同的趋于无穷的方式, 换句话说就说有一个子列的极限是存在的, 但这并不能保证极限是存在的.

课堂上我们已经讲过了瑕积分的定义, 稍后我们在习题中会具体指出如果出现了混合积分的情况, 如何处理.

例题 3.2 *设 $f(x)$ 在任何的闭区间 $[0,b]$ 都是 Riemann 可积的 (说明不是瑕积分), 并且广义积分 $\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛.*

(1) 如果 $f(x)\geq 0$ 是否有 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$? (否)

(2) 如果 $f(x)\geq 0$ 连续是否有 (1) 的结论? (否)

(3) 如果 $f(x)$ 确实极限存在 A, 那么 A 可以是多少? (0)

(4) 如果 $f(x)$ 单调递减趋于 0, 能够有 $f(x)=O(1/x)$?,$o(1/x)$ 呢? (两者均正确)

(5) 如果 f 连续, 能否找到一单调递增的序列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)\to 0$? (可以, 积分中值定理.)

3.2 广义积分的计算

现阶段而言我们判断广义积分是否收敛的手段非常有限, 只能通过简单讲积分积出来然后令上限趋于 a(瑕点或者无穷) 来判断, 也就是说目前广义积分的计算其实大部分而言就说不定积分的计算.

当一个积分中既有瑕点又是无穷积分时, 我们需要将其分为两段一部分只有瑕点在有界区间上积分, 另一段不含瑕点但是在无界区间上积分.借助瑕积分和广义积分可以互相转换的性质, 很可能两部分就可以消掉某一些比较困难的积分.

例题 3.3 *计算广义积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

然后对上式右边的第二个积分作倒代换, 就得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

因此原广义积分等于 0 .

例题 3.4 *计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.*

做法同上, 但是如下是错误做法.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right)\\&=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\Big|_{0+}^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x(1+x^2)}.\end{aligned}$$

从而断言积分是发散的. 这是错误的, 原因在于分部积分无法直接使用, 但这并不意味着积分就发散, 认真对比发现第一项和后一项都是发散的, 事实上两者相减可以把发散的部分减掉. 因此如果我们在处理的时候出现两部分都是无穷的时候很可能是我们选择了错误的做法. 但也着并不意味着我们就完全处理, 一个比较好的事情就是如果我们把 $0,+\infty$ 换成 a,b 后者是可以积出的, 我们利用广义积分的定义也是可以计算出极限的. 计算可得:

$$\int_a^b \frac{x\ln x}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{4}\ln\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{4}\ln(1+b^2)/(1+a^2)+\frac{\ln a}{2(1+a^2)}-\frac{\ln b}{2(1+b^2)}$$

令 $a\to 0^+, b\to+\infty$, 也可以得到 $I=0$.

一个类似的题目是这样的:

例题 3.5 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

解: 试用无穷积分的分部积分计算:

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=-\int_0^{+\infty}xd\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)=\left.\frac{x}{1+e^{-x}}\right|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^{-x}},$$

注意右端 2 项都发散, 分部积分失效. 因此可以按照上边的方式先将 $0,+\infty$ 换为 a,b, 然后再取极限. 或者: 设 $\mathrm{e}^x=t$, 则 $x=\ln t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. 当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x\to+\infty$ 时, $t\to+\infty$. 于是

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\ \mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\ln t}{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t\\
&=-\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\ln t\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{1+t}\right)=-\lim_{b\to+\infty}\left[\left.\frac{\ln t}{1+t}\right|_1^b-\int_1^b\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}\right]\\
&=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\frac{b}{1+b}-\ln\frac{1}{2}\right]=\ln 2.
\end{aligned}$$

例题 3.6 证明*: 对于任何实数 α, 成立恒等式*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

第二类是关于递推形式的积分, 这部分我们在不定积分曾经花了很多功夫, 在广义积分这里仍然是重要的.

例题 3.7 计算广义积分 $\displaystyle\int_0^1(\ln x)^n\ \mathrm{d}x, n\in\mathbf{N}_+$

解: 这是一个无界积分, $x=0$ 是瑕点. 由 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^n=0$, 知所求广义积分收敛. 设 $I_n=\displaystyle\int_0^1(\ln x)^n\ \mathrm{d}x$, 应用分部积分法得到

$$\begin{aligned}
I_n&=x(\ln x)^n|_{0^+}^1-\int_0^1 n(\ln x)^{n-1}\ \mathrm{d}x=-n\int_0^1(\ln x)^{n-1}\ \mathrm{d}x=-nI_{n-1}\\
&=(-1)^2n(n-1)I_{n-2}=\cdots=(-1)^n n!I_0=(-1)^n n!.
\end{aligned}$$

例题 3.8 计算 $J_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$

解: 首先 $J_0=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\overset{t=x^2+\infty}{=}\int_0^{-t}e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 以下利用无穷积分的分部积分计算:

$$\begin{aligned}J_n&=-\int_0^{+\infty}x^{2n-1}d\left(\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)=-\left.\frac{e^{-x^2}}{2}x^{2n-1}\right|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(2n-1)e^{-x^2}x^{2n-2}dx\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)J_{n-1}=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)J_{n-2}=\cdots\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}J_0=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

还有一个特别的积分:

例题 3.9 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

解: 记 $I(t)=\int_0^t\frac{1+x^2}{1+x^4}dx, t>0$, 考虑有理函数积分:

$$\begin{aligned}I(t)&=\int_0^t\frac{1+x^2}{(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2}+\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\left(\arctan\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right|_0^t\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{2t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2t-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

所以 $I=\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

法二: 用积分换元 $t=x-\frac{1}{x}$, 则 $dt=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$, 且 $x\to0^+$ 时 $t\to-\infty, x\to+\infty$ 时 $t\to+\infty$, 此外 $t^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$, 所以 $\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}dx=\frac{dt}{t^2+2}$, 因此 $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2}=\left.\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

类似的可以计算:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^4}dx$$

选择 $t=x+\frac{1}{x}$, 不过要看清变元的变化 (倒带换也可以, 结果为 0.).

3.3 * 广义积分的敛散性基本判别法简介

在计算一个广义积分之前一般我们会先判断该广义积分是否收敛, 如果不收敛我们就不用再进行下去. 那么如何判断其是否收敛呢? 我们将在下学期的课程中详细介绍各种判别法, 在这里我们只给出最简单的几个判别法.

感兴趣的同学看一下, 不做要求.

定理 3.1 (比较判别法 1) 设函数 $f(x)$ $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 并且 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)(a\leqslant x<+\infty)$, 则

(1) 当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散;

定理 3.2 (比较判别法 2) 设函数 $f(x)$ $g(x) \in C[a,+\infty)$, 且 $g(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$ (有限或 ∞), 则

(1) 当 $\lambda\neq 0$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性;

(2) 当 $\lambda=0$ 时, 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(3) 当 $\lambda=\infty$ 时, 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

例题 3.10 讨论积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^a}\mathrm{d}x$ (an 为正数) 的敛散性

解因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x^a}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^{a-1}}=\begin{cases}0, & a<1\\ 1, & a=1\\ \infty, a>1\end{cases}$, 所以仅当 $n>1$ 时, $x=0$ 是被积函数的奇点. 由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^a}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^a}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^a}\mathrm{d}x$$

对积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^a}\mathrm{d}x$, 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{na-1}\dfrac{\ln(1+x)}{x^a}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\neq0$, 所以当 $a-1<1$ 即 $a<2$ 时, 积分收敛;

对积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^a}\mathrm{d}x, \forall\alpha>0$, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{a-\alpha}\dfrac{\ln(1+x)}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}=0$. 而仅当 $a-\alpha>1$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{a-\alpha}}\mathrm{d}x$ 收敛, 故当 $n>1+\alpha$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^a}\mathrm{d}x$ 收敛. 由 α 的任意性知, 当 $a>1$ 时积分收敛. 综上所述, 当且仅当 $1<a<2$ 时原积分收敛.

上周的课件中有这样一道打了 * 号的题目, 他需要用积分第二中值定理和积分型泰勒公式做, 有同学感兴趣, 下边是它的解答, 同样这道题不感兴趣的同学可以不看, 不在我们的教学大纲中.

例题 3.11 (*) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(\dfrac{a+b}{2})=0$, 证明:

$$|\int_a^b f(x)dx|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\int_a^b|f''(x)|dx$$

证明:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\int_{\frac{a+b}{2}}^{x}f''(t)(x-t)dt$$

由于:

$$\int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})=0$$

所以：

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b (\int_{\frac{a+b}{2}}^x f''(t)(x-t)dt)dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (\int_{\frac{a+b}{2}}^x f''(t)(x-t)dt)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (\int_{\frac{a+b}{2}}^x f''(t)(x-t)dt)dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (\int_x^{\frac{a+b}{2}} f''(t)(t-x)dt)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (\int_{\frac{a+b}{2}}^x f''(t)(x-t)dt)dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (\frac{a+b}{2}-x)(\int_{\xi_1}^{\frac{a+b}{2}} f''(t)dt)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})(\int_{\frac{a+b}{2}}^{\xi_2} f''(t)dt)dx \\
&\le \int_a^{\frac{a+b}{2}} (\frac{a+b}{2}-x)(\int_{\xi_1}^{\frac{a+b}{2}} |f''(t)|dt)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})(\int_{\frac{a+b}{2}}^{\xi_2} |f''(t)|dt)dx \\
&\le \frac{1}{8}(b-a)^2 \int_a^b |f''(x)|dx
\end{aligned}
$$

这里用到了积分第二中值定理