清华大学本科生考试试题专用纸（A ）

考试课程　　2015-2016 线性代数 - II　　2016 年 4 月 26 日

一 填空题（每空 4 分）：

1. 给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}$，则 A 的奇异值分解为 ________.

   答案：$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt6}{3}&0&-\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt3&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$.

2. 合同矩阵具有相同的 ________.

   (a) 特征值 (b) 秩 (c) 正特征值的个数 (d) 行列式

   答案：(b) (c)

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\a&5&0\\-1&0&b\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a,b 满足的条件是 ________.

   答案：$a=2,b>5$.

   由 A 是正定矩阵，故 A 对称，$a=2$；A 的各阶顺序主子式大于 0，故 $\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&5&0\\-1&0&b\end{vmatrix}>0$，即 $b>5$.

4. 已知矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&1&1\\0&-2&1&1\\0&0&-3&1\end{pmatrix}$，则 $H^{-1}=$ ________.

   答案：$H^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12&0&0\\\frac16&\frac16&-\frac13&0\\\frac1{12}&\frac1{12}&\frac1{12}&-\frac14\\\frac14&\frac14&\frac14&\frac14\end{pmatrix}$.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 与 A 合同的矩阵是 ________，与 A 相似的矩阵是 ________.

   答案：C,D; D.

6. 平面中所有满足 $5x^2+8xy+5y^2=1$ 的所有点的集合构成的图形是 ________.

   答案：长轴方向为 $\frac{1}{\sqrt2}(1,-1)$，长半轴长为 1，短轴方向为 $\frac{1}{\sqrt2}(1,1)$，短半轴长为 1/3 的椭圆.

7. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形是 ______.

答案：$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

8. 设 $A=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}$，则 A 的伪逆是 ______.

答案：$A^{+}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}$

二（15 分）设矩阵 A 有如下奇异值分解 $A=U\Sigma V^T$，其中 U,V 为正交阵：

$$A=\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^T\\v_2^T\\v_3^T\\v_4^T\end{pmatrix}.$$

（1）写出方程组 $Ax=u_1$ 的通解；（2）求方程组长度最短的解，并证明.

解：（1）方程组通解为 $x=v_1+k_3v_3+k_4v_4$，其中 k_3,k_4 为任意常数.

（2）长度最短的解为 $x^{+}=A^{+}b=v_1$ 或直接由 v_1,v_3,v_4 相互正交得 $x=v_1$ 是长度最短的解.

三（15 分）已知线性变换 σ 在基 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}&&&1\\&&1&\\&1&&\\1&&&\end{pmatrix}$，求 σ 在基 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵表示.

答案：$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

四（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$，其中 a,b,c 为实数. 试求使 $A^{100}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 的 a,b,c 的一切可能值.

答案：$a=-c=\pm1$，b 可为任意实数或 $b=0$ 且 $a=\pm1$，$c=\pm1$.

五（12 分）设 A,B 均为 n 阶正定矩阵，证明:AB 的特征值为正数.

证明：A 为正定矩阵，故存在可逆矩阵 P 使得 $A=PP^t$.

$$AB=PP^TB=PP^TBPP^{-1},$$

故 AB 与对陈矩阵 P^TBP 相似，二者有相同的特征值。而 P^TBP 合同于正定矩阵 B，也是正定矩阵，其特征值都是正数，因此 AB 的特征值是正数。

证法二：设 λ 为 AB 的任意特征值，$x \neq 0$ 是 AB 的属于特征值 λ 的特征向量，即有 $ABx = \lambda x$. 于是

$$x^T(B^TAB)x = (Bx)^TABx = \lambda x^TBx.$$

由于 B 正定，故 B 可逆，则对称矩阵 B^TAB 合同于正定阵 A，也是正定阵，从而上式左端 $x^T(B^TAB)x > 0$. 而由 B 正定知上式右端中 $x^TBx > 0$，所以 $\lambda > 0$，得证。

六（7 分）设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，若 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i, j=1}^{n} |a_{ij}|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，求证：A 的行列式 $\det A \neq 0$.

证明：设 λ 为 A 的任意特征值，x 是属于 λ 的特征向量. 则由 $Ax = \lambda x$ 得对任意 $1 \leq i \leq n$ 有

$$(a_{ii} - \lambda)x_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j.$$

于是

$$|a_{ii} - \lambda||x_i| \leq \sum j = 1, j \neq i^n |a_{ij}||x_j|.$$

取 x_i 满足 $|x_i| = \max\{|x_1 \cdots, |x_n|\}$，则

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum j = 1, j \neq i^n |a_{ij}| \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq |a_{ii}|.$$

所以 λ 落在复平面上以 a_{ii} 为圆心，$|a_{ii}|$ 为半径的圆盘中.

注意到 $|a_{ii}| > 0$，所以 $\lambda \neq 0$，从而矩阵 A 的行列式非零.