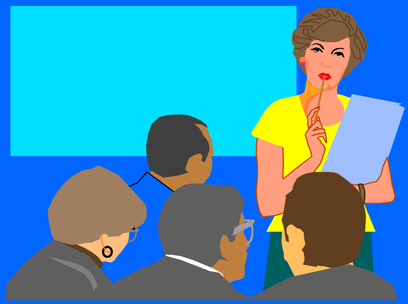
常微分方程组介绍

一、 基本概念

二、 线性微分方程组



一、基本概念

n元一阶方程组（线性或非线性）初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t,\ x_1,\ \Lambda\ ,\ x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t,\ x_1,\ \Lambda\ ,\ x_n) \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t,\ x_1,\ \Lambda\ ,\ x_n) \end{cases} \quad (1)$$

初始条件 $x_i(t_0) = x_{i0}\ \ (i = 1,\ 2,\ \Lambda\ ,\ n)\quad (2)$

记 $X(t)=(x_1(t), x_2(t), \Lambda, x_n(t))^T$

$$F(t)=(f_1(t), f_2(t), \Lambda, f_n(t))^T$$

$$X_0=(x_{10}, x_{20}, \Lambda, x_{n0})^T$$

$$\frac{dX}{dt}=\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \Lambda, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$$

运动速度

时间

初值问题
$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}=F(t, X) & (1) \\ X(t_0)=X_0 & (2) \end{cases}$$

动力组

定义：（解）

微分方程组的解是 n 维向量值函数

$$X(t)=(x_1(t),x_2(t),\Lambda,x_n(t))^T$$

满足微分方程组（1）和初始条件（2）

微分方程组（1）（2）的解

$$x_1=x_1(t),\ \ x_2=x_2(t),\Lambda,\ \ x_n=x_n(t)$$

在以t,x_1,x_2,Λ,x_n为坐标的欧氏空间内决定一条积分曲线

以二元为例 $\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$

解: $(y = y(x), z = z(x))^T$

代入方程组, 使每个方程都成为恒等式

通解: 含有两个任意常数的解

显式 $\begin{cases} y = y(x, C_1, C_2) \\ z = z(x, C_1, C_2) \end{cases}$

首次积分

隐式 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = C_1 \\ \psi(x, y, z) = C_2 \end{cases}$

二、线性微分方程组

***n*元一阶线性方程组**

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\dfrac{dx_2}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_2(t) \\
\qquad \vdots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{cases}
\qquad (1)
$$

n元一阶线性齐次方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 \cdots + a_{1n}(t)x_n \\[2ex]
\dfrac{dx_2}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \cdots + a_{1n}(t)x_n \\[2ex]
\qquad\qquad \vdots \\[2ex]
\dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 \cdots + a_{nn}(t)x_n
\end{cases}
$$

记 $$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \Lambda & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \Lambda & a_{2n}(t) \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \Lambda & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

则 $$\frac{dX}{dt}=A(t)X+F \qquad (1)$$

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X \qquad (2)$$

1. 线性微分方程组通解的结构

$\boxed{\text{线性算子}}$ $$L[X]=\frac{dX}{dt}-AX$$

非齐次 $$L[X]=F \qquad (1)$$

齐次 $$L[X]=0 \qquad (2)$$

线性算子的性质

(1) $L[cX] = cL[X]$;

(2) $L[X_1 + X_2] = L[X_1] + L[X_2]$;

(3) $L[\sum_{i=1}^{m} c_i X_i] = \sum_{i=1}^{m} c_i L[X_i]$;

[证] $$\frac{d(cX)}{dt} - A(cX) = c[\frac{dX}{dt} - AX]$$

$$\frac{d(X_1 + X_2)}{dt} - A(X_1 + X_2)$$

$$= (\frac{dX_1}{dt} - AX_1) + (\frac{dX_2}{dt} - AX_2)$$

定理1：（存在唯一性定理）

假设假设一阶线性微分方程组(2)的系数函数$a_{ij}(x)$与$f_i(x)$连续，则对任意初值x_0，方程组(2)解存在唯一。

定理1： 如果X是线性齐次微分方程组$L[X]=0$的解，则cX (c为任意常数)也是该方程组的解

定理2： 线性齐次微分方程组的解X_1与X_2的和X_1+X_2也是该方程组的解

定理3： 如果X_1, X_2, Λ, X_m是线性齐次微分方程组$L[X]=0$的解，则其线性组合$\sum_{i=1}^{m} c_i X_i$也是该方程组的解

定义: （向量值函数的线性相关性）

设有向量值函数X_1, X_2, Λ, X_n，其中

$$X_i = (x_{1i}(t), x_{2i}(t), \Lambda, x_{ni}(t))^T$$

若有一组不全为零的常数k_1, k_2, Λ, k_n

使当$a \le t \le b$时,有

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \Lambda + k_n X_n \equiv 0 \quad (*)$$

则称向量值函数X_1, X_2, Λ, X_n在区间$a \le t \le b$上是线性相关的,否则,是线性无关的.

（*）式等价于

$$\begin{cases} k_1 x_{11} + k_2 x_{12} + \cdots + k_n x_{1n} \equiv 0 \\ k_1 x_{21} + k_2 x_{22} + \cdots + k_n x_{2n} \equiv 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ k_1 x_{n1} + k_2 x_{n2} + \cdots + k_n x_{nn} \equiv 0 \end{cases} \qquad (*)'$$

若有一组不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$

是方程组 $(*)'$ 的解，则有系数行列式为零

$$w=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \Lambda & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \Lambda & x_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x_{n1} & x_{n2} & \Lambda & x_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (a \le t \le b)$$

向量值函数X_1, X_2, Λ, X_n的朗斯基行列式

定理4： 若向量值函数X_1, X_2, Λ, X_n在$a \le t \le b$上线性相关，则 X_1, X_2, Λ, X_n的朗斯基行列式$w \equiv 0$(在$a \le t \le b$上)

定理5：线性齐次方程组$L[X]=0$的系数$a_{ij}(t)$在$a\le t\le b$上连续,并且,它的解X_1, X_2, Λ, X_n的朗斯基行列式在某一点$t=t_0$处等于零,则在整个区间$a\le t\le b$上解X_1, X_2, Λ, X_n线性相关.

即在整个区间$a\le t\le b$上,有 $w=0$

[证] $w[X_1, X_2, \Lambda, X_n](t_0) = 0$

$\longrightarrow$ 方程组(*)′有非零解

即有一组不全为零的数 k_1, k_2, Λ, k_n

使 $k_1 X_1(t_0) + k_2 X_2(t_0) + \Lambda + k_n X_n(t_0) = 0$

记 $X(t) = k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t) + \Lambda + k_n X_n(t)$

由定理3, $X(t)$ 是方程组 $L[X] = 0$ 的解,

并且满足初始条件 $X(t_0) = 0$

根据初值问题解的存在唯一性定理,

推出 $k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t) + \Lambda + k_n X_n(t) \equiv 0$

定义：(基本解组)

线性齐次方程组$L[X]=0$的n个线性无关解X_1, X_2, Λ, X_n称为它的基本解组.

定义：(基本解矩阵)

$$\hat{X}(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \Lambda & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \Lambda & x_{2n}(t) \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \Lambda & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

定理6：若线性齐次方程组$L[X]=0$的系数$a_{ij}(t)$在$a \le t \le b$上连续，且X_1, X_2, Λ, X_n是它的一个基本解组，则该方程组的通解可以表示为

$$X(t)=C_1X_1(t)+C_2X_2(t)+\Lambda+C_nX_n(t)$$

或　$$X(t)=\hat{X}(t)C$$

其中　$$C=(C_1, C_2, \Lambda, C_n)^T$$

定理7：系数$a_{ij}(t)$和右端$f_i(t)$在$a \le t \le b$上连续的非齐次方程组$L[X] = F$的通解等于对应齐次方程组的通解$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i$与非齐次方程组一个解X^*的和.即

$$X = X^* + \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

或

$$X(t) = X^* + \hat{X}(t)C$$

2. 常系数线性微分方程组

非齐次 $$\frac{dX}{dt} = AX + F \qquad (1)$$

齐次 $$\frac{dX}{dt} = AX \qquad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{bmatrix}$$

常数矩阵

特征根法

设方程组（2）有如下形式的解

$$X = re^{\lambda t} \qquad r = (r_1, r_2, \Lambda\ , r_n)^T$$

代入方程组（2） $\longrightarrow$ $\lambda re^{\lambda t} = Are^{\lambda t}$

或 $(A - \lambda I)r = 0 \quad (3)$

$r \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)$ 是奇异矩阵

即 $|A - \lambda I| = 0$ $\boxed{\text{特征方程}}$

特征方程的根称为方程组的特征根

λ 是矩阵 A 的特征根

r 是矩阵 A 的对应于 λ 的特征向量

定理8：若齐次方程组的系数矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量 $r^{(i)} \in R^n$，且分别对应于特征值 $\lambda_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$，则函数组

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} r^{(1)}, \quad X_2(t) = e^{\lambda_2 t} r^{(2)},$$

$$\cdots, \quad X_n(t) = e^{\lambda_n t} r^{(n)}$$

是齐次方程组 $L[X] = 0$ 的一个基本解组.

(1) 若特征根λ_i互不相等

通解 $$X(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i r^{(i)} e^{\lambda_i t}$$

(2) 若λ_i是A的k重根

则基本解组中对应有

$$e^{\lambda_i t} r^{(i1)},\quad e^{\lambda_i t} r^{(i2)},\quad \Lambda,\quad e^{\lambda_i t} r^{(ik)}$$

(3) 若特征方程有复根 $\lambda_j = \alpha \pm i\beta$

对应的特征向量 $r^{(j)} = a \pm ib$

对应有两个线性无关解

$$(a+ib)e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad (a-ib)e^{(\alpha-i\beta)t}$$

两个线性无关实解

$$e^{\alpha t}(a\cos\beta t - b\sin\beta t)$$

$$e^{\alpha t}(b\cos\beta t + a\sin\beta t)$$

[例1] 解方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x + y - 2z \end{cases}$

[解]

记 $X = (x, y, z)^T$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{dX}{dt} = AX$$

特征方程 $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad -\lambda^3 + \lambda = 0$

特征根 $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$

对应的特征向量

$$r^{(1)} = (1, 1, -1)^T$$

$$r^{(2)} = (1, 0, -1)^T$$

$$r^{(3)} = (1, 1, -2)^T$$

基本解组

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{t},\quad X_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}e^{-t}$$

基本解矩阵

$$\hat{X}=\begin{bmatrix}1 & e^{t} & e^{-t}\\1 & 0 & e^{-t}\\-1 & -e^{t} & -2e^{-t}\end{bmatrix}$$

通解

$$X=\hat{X}C=\begin{bmatrix}1 & e^{t} & e^{-t}\\ 1 & 0 & e^{-t}\\ -1 & -e^{t} & -2e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}C_1+C_2e^{t}+C_3e^{-t}\\ C_1+C_3e^{-t}\\ -C_1-C_2e^{t}-2C_3e^{-t}\end{bmatrix}$$

或

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{t} + C_3 e^{-t} \\ y = C_1 + C_3 e^{-t} \\ z = -C_1 - C_2 e^{t} - 2C_3 e^{-t} \end{cases}$$

[例2] 解方程组 $\dfrac{dx}{dt}=x-5y,\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y$

[解]　特征方程 $\begin{vmatrix}1-\lambda & -5\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\Longrightarrow\ \lambda^2+9=0\ \Longrightarrow\ \lambda_{1,2}=\pm 3i$

对应的特征向量

$$r^{(1)}=(5,\ 1-3i)^T$$

$$r^{(2)}=(5,\ 1+3i)^T$$

对应有两个线性无关解

$$X_1=\begin{bmatrix}5\\1-3i\end{bmatrix}e^{i3t},\qquad X_2=\begin{bmatrix}5\\1+3i\end{bmatrix}e^{-i3t},$$

两个线性无关实解

$$\begin{bmatrix}5\cos 3t\\ \cos 3t+3\sin 3t\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}5\sin 3t\\ -3\cos 3t+\sin 3t\end{bmatrix}$$

基本解矩阵

$$\hat{X}=\begin{bmatrix}5\cos 3t & 5\sin 3t\\ \cos 3t+3\sin 3t & -3\cos 3t+\sin 3t\end{bmatrix}$$

通解

$$X = \hat{X}C$$

$$= \begin{bmatrix} 5\cos 3t & 5\sin 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t & -3\cos 3t + \sin 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t \\ C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(-3\cos 3t + \sin 3t) \end{bmatrix}$$

或

$$x = 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t$$

$$y = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t)$$

$$+ C_2(\sin 3t - 3\cos 3t)$$

回忆：一阶线性微分方程组的通解

- **一阶线性微分方程组（标准形式）：**

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$$

其中已知函数 $a_{ij}(x), f_i(x) \in C(I),\ i, j = 1, 2, \cdots, n$

- **矩阵形式：**

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

其中 $\mathbf{A}(x) = \left(a_{ij}(x)\right)_{n\times n},\ \mathbf{y} = \left(y_i\right)_{n\times 1},\ \mathbf{f}(x) = \left(f_i(x)\right)_{n\times 1}$

Review:

- **基本解矩阵：**

设 $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\cdots,\mathbf{y}_n$ 是齐次方程组的n个线性无关解，记

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}, \qquad 其中\ \ \mathbf{y}_1=\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix},\cdots,\mathbf{y}_n=\begin{pmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

称为齐次线性方程组的基本解矩阵

- **Wronsky行列式：**

$$W[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\cdots,\mathbf{y}_n]=\begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}=\det\Phi(x)\neq 0$$

——基本解矩阵是可逆矩阵

- 齐次方程组的通解：

$$\mathbf{y}=\Phi(x)\mathbf{C},\ \text{其中}\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$ 是任意n维常数列向量

- 非齐次方程组的通解： $$\mathbf{y}=\Phi(x)\mathbf{C}+\mathbf{y}_{\#}$$

其中 $\mathbf{y}_{\#}$

是非齐次方程组的一个特解

- 求解策略：

1) 找出齐次方程组的n个线性无关解
2) 找出非齐次方程组一个特解 (观察?常数变异?)
3) 如上组合得到通解 (必要时利用定解条件确定C)

- **非齐次方程组求解**-常数变异法：

设已知齐次方程组的一个基本解矩阵 $\Phi=\left(\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n\right)$

为求出非齐次方程组的一个解$y_{\#}$，使用“常向量变异法”

令 $\mathbf{y}_{\#}=\Phi(x)\mathbf{C}(x)$, $\mathbf{C}(x)$待定， 以n=2为例，计算导数如下

设 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 也即 $\begin{cases} z_1=c_1y_{11}+c_2y_{12} \\ z_2=c_1y_{21}+c_2y_{22} \end{cases}$

所以 $\begin{cases} z_1'=c_1y_{11}'+c_2y_{12}'+c_1'y_{11}+c_2'y_{12} \\ z_2'=c_1y_{21}'+c_2y_{22}'+c_1'y_{21}+c_2'y_{22} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{11}' & y_{12}' \\ y_{21}' & y_{22}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} \quad \therefore\ \mathbf{y}_{\#}'=\Phi'\mathbf{C}+\Phi\mathbf{C}'$$

第29-1课：一阶线性微分方程组-求解

- **非齐次方程组求解**-常数变异法：

令 $\mathbf{y}_{\#}=\Phi(x)\mathbf{C}(x)$ 是非齐次方程组的一个解,$\mathbf{C}(x)$待定

则 $$\mathbf{y}_{\#}'=\Phi'\mathbf{C}+\Phi\mathbf{C}'$$

其中 $$\Phi'=\left(\mathbf{y}_1' \cdots \mathbf{y}_n'\right)=\left(\mathbf{A}\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{A}\mathbf{y}_n\right)$$

$$=\mathbf{A}\left(\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n\right)=\mathbf{A}\Phi$$

$$\therefore\ \mathbf{y}_{\#}'=\mathbf{A}\Phi\mathbf{C}+\Phi\mathbf{C}'=\mathbf{A}\mathbf{y}_{\#}+\Phi\mathbf{C}'$$

带入方程组 $\mathbf{y}_{\#}'=\mathbf{A}\mathbf{y}_{\#}+\mathbf{f}$

$$\therefore\ \Phi\mathbf{C}'=\mathbf{f},\ \mathbf{C}'=\Phi^{-1}\mathbf{f}$$

$\mathbf{C}(x)=\int\Phi^{-1}(x)\mathbf{f}(x)dx$ ——对向量的每个分量积分

$$\mathbf{y}_{\#}=\Phi(x)\int\Phi^{-1}(x)\mathbf{f}(x)dx$$

第29-1课：一阶线性微分方程组-求解

- 非齐次方程组通解：

$$\mathbf{y}=\Phi(x)\mathbf{C}+\Phi(x)\int\Phi^{-1}(x)\mathbf{f}(x)dx$$

$$=\Phi(x)[\mathbf{C}+\int\Phi^{-1}(x)\mathbf{f}(x)dx]$$

- 初值问题的解：

若 $\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0$， 则可取 $\int\Phi^{-1}(x)\mathbf{f}(x)dx=\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$

也即 $\mathbf{y}=\Phi(x)\mathbf{C}+\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$

$$\therefore\ \mathbf{y}_0=\Phi(x_0)\mathbf{C},\quad \mathbf{C}=\Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0$$

$$\therefore\ \mathbf{y}=\Phi(x)[\Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt]$$

- **齐次方程组求解**-常系数情况：

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y},\ \text{其中}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathrm{L} & a_{1n} \\ \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{n1} & \mathrm{L} & a_{nn} \end{pmatrix}$$ 是常数n阶方阵

- **特征方程**：类比单个线性方程的情况，寻找指数解

令 $\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{U}$，其中λ是待定实数/复数，U是待定n维常向量

带入方程组 $$\mathbf{y}' = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}(e^{\lambda x}\mathbf{U}) = e^{\lambda x}\mathbf{A}\mathbf{U}$$

$$\therefore\ \lambda\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{U},\ \text{也即}\ (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

注意U是非零向量，所以

称为相应一阶微分方程组的特征方程 (λ的n次代数方程)

- **特征方程法**：

令 $\mathbf{y}=e^{\lambda t}\mathbf{U}$ 是齐次方程组的解，则导出$\lambda\mathbf{U}=\mathbf{A}\mathbf{U}$

$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$ 一阶线性方程组的特征方程

根据代数理论，λ是矩阵A的特征值，U是相应的特征向量

- **引理**：若λ是特征方程的k重根，则

$$\mathbf{y}=e^{\lambda x}(\mathbf{U}_0+x\mathbf{U}_1+\cdots+x^{k-1}\mathbf{U}_{k-1})$$

可以确定齐次方程组k个线性无关解，$U_0,U_1,\ldots,U_{k-1}$待定

- **注1**：特征方程不同根对应的齐次方程组的解线性无关
- **注2**：若$\lambda=\alpha\pm i\beta$是复数，通过线性组合可以得到相应的实值解 （上面 $e^{\lambda x}$对应于$e^{\alpha x}\cos\beta x$ 以及$e^{\alpha x}\sin\beta x$）

一阶线性方程组求解-消元法

- 一阶线性微分方程组（以n=2为例）：

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + f_1(t) \\ y' = a_2 x + b_2 y + f_2(t) \end{cases}$$

假设方程组是常系数的，将第一方程求导并结合第二方程：

$$\begin{aligned} x'' &= a_1 x' + b_1 y' + f_1'(t) \\ &= a_1 x' + b_1(a_2 x + b_2 y + f_2) + f_1' \\ &= a_1 x' + b_1 a_2 x + b_2(x' - a_1 x - f_1) + b_1 f_2 + f_1' \\ &= (a_1 + b_2) x' + (b_1 a_2 - a_1 b_2) x - b_2 f_1 + b_1 f_2 + f_1' \end{aligned}$$

转化为单个二阶线性微分方程，解得x之后进一步解出y

- 推广：变系数一阶线性微分方程组 (n=2)：

$$\begin{cases} x' = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ y' = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases}$$

第一个方程求导并结合第二个方程，得

$$\begin{aligned} x'' &= a_1(t)x' + b_1(t)y' + a_1'(t)x + b_1'(t)y + f_1'(t) \\ &= a_1x' + b_1(a_2x + b_2y + f_2) + a_1'x + b_1'y + f_1' \\ &= a_1x' + (b_1a_2 + a_1')x + (b_1b_2 + b_1')(\frac{x' - a_1x - f_1}{b_1}) + b_1f_2 + f_1' \\ &= (a_1 + b_2 + \frac{b_1'}{b_1})x' + (b_1a_2 - a_1b_2 + a_1' - \frac{a_1b_1'}{b_1})x \\ &\qquad -(b_2 + \frac{b_1'}{b_1})f_1 + b_1f_2 + f_1' \end{aligned}$$

✓ 例1：求解 $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$

解：利用消元法，第一方程求导

$$y_1'' = y_1' + 2y_2' = y_1' + 2(4y_1 + 3y_2)$$

$$= y_1' + 8y_1 + 3(y_1' - y_1) = 4y_1' + 5y_1$$

所以得到 $y_1'' - 4y_1' - 5y_1 = 0$

其特征方程

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0,\ \ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$$

得到方程的二线性无关解

$$y_{11} = e^{-x},\ \ y_{12} = e^{5x}$$

✓ 例1：求解 $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$

解（续）：解得y_1两个线性无关解

$$y_{11} = e^{-x},\quad y_{12} = e^{5x}$$

分别带入原方程组第一方程解得相应的y_2得到

$$y_{21} = \frac{1}{2}(y_{11}' - y_{11}) = \frac{1}{2}(-1-1)e^{-x} = -e^{-x}$$

$$y_{22} = \frac{1}{2}(y_{12}' - y_{12}) = \frac{1}{2}(5-1)e^{5x} = 2e^{5x}$$

其Wronsky行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{5x} \\ -e^{-x} & 2e^{5x} \end{vmatrix} = 3e^{4x} \neq 0$$

✓ 例1：求解 $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$

解（续二）：综上得到基本解矩阵

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{5x} \\ -e^{-x} & 2e^{5x} \end{pmatrix}$$

进一步得到通解

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{5x} \\ -e^{-x} & 2e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

W

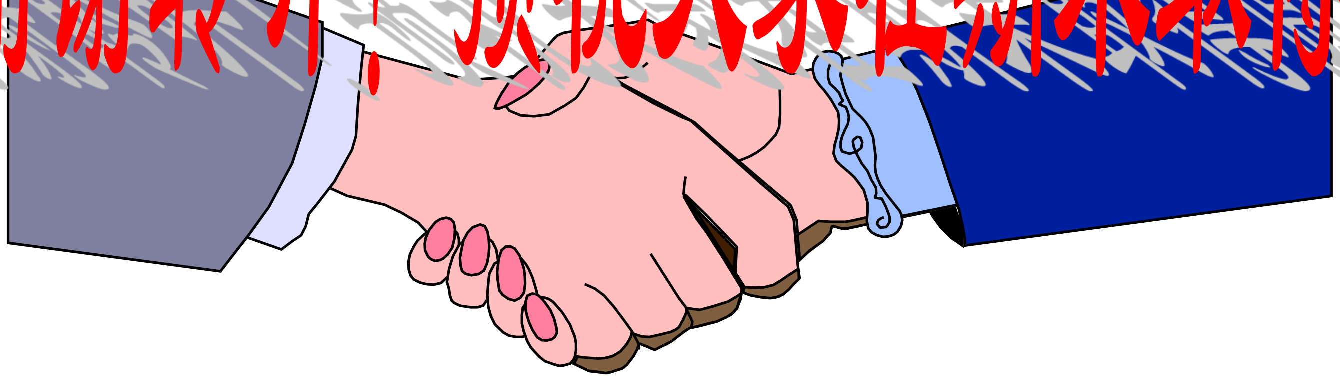
（五）微分方程

1。可分离变量的微分方程;
2。可化为可分离变量的微分 方程 （齐次方程）;
3。一阶线性微分方程
4。 可化为一阶线性微分方程的方程（贝努利方程）
5。可降解的高阶 微分方程(两类)
6。微分方程解的结构定理。
7。二阶常系数微分方程待定系数法，二阶线性微分方程常数变异法。
8。一阶线性方程组。

HOMEWORK

Ex7.6: 1(2, 3), 2(1, 4)

谢谢聆听！预祝大家在期末取得圆满成绩！



结束放映