第15课：不定积分计算-被积函数有理化

第6章 不定积分/原函数

- **内容：**

  第6.2节　不定积分计算-被积函数有理化代换

  第6.3-6.4节 有理函数积分与三角有理式的积分

第15-1课：不定积分计算-有理化变量代换

不定积分计算-有理化变量代换

- **复习-不定积分换元法** (积分变量代换)

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$$

其中 $u=\varphi(x)$ 有反函数 $x=x(u)$

- **第一换元法** (凑微分)

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d[\varphi(x)] \overset{u=\varphi(x)}{=} \int f(u)du$$

$$= F(u)+C \overset{u=\varphi(x)}{=} F(\varphi(x))+C$$

- **第二换元法**

$$\int f(u)du \overset{u=\varphi(x)}{=} \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(x)+C$$

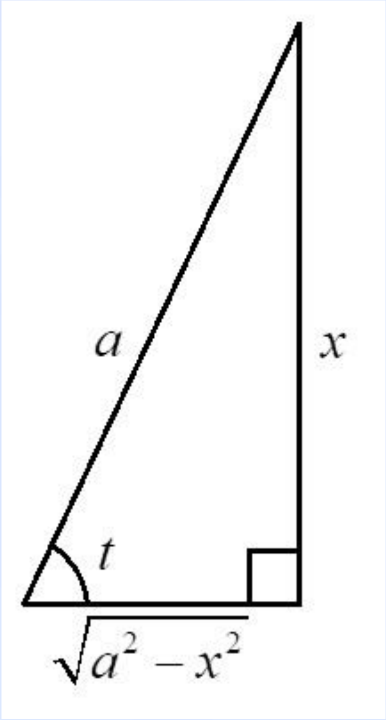
$$\overset{x=x(u)}{=} G(x(u))+C$$

第15-1课：不定积分计算-有理化变量代换

✓ **例1：** $I_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = ?\quad |x| < a\quad (a > 0)$

解：为被积函数有理化, 利用三角公式 $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

引入积分变量代换 $x = a\sin t,\ |t| < \pi/2$



则 $\sqrt{a^2 - x^2} = |a\cos t| = a\cos t,\quad dx = a\cos t dt$

$$\therefore\ I_1 = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int [1 + \cos(2t)]dt$$

$$\overset{u=2t}{=} \frac{a^2}{4}\int (1 + \cos u)du\ = \frac{a^2}{4}(u + \sin u) + C$$

$$= \frac{a^2}{4}(2t + \sin 2t) + C\ = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}) + C \qquad \square$$

第15-1课：不定积分计算-有理化变量代换

- ✓ **例2：** $a>0,\ I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=?\quad |x|>a$

解：为有理化被积函数, 利用三角公式 $1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$

引入积分变量代换 $x=\frac{a}{\cos t}$，不妨令 $x>a$, 取 $|t|<\pi/2$

则 $\sqrt{x^2-a^2}=|a\tan t|=a\tan t,\quad dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$

$$\therefore\ I_2=\int\frac{1}{a\tan t}\cdot\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{dt}{\cos t}$$

$$=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{1-\sin^2 t}$$

$$\overset{u=\sin t}{=}\int\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du$$

第15-1课：不定积分计算-有理化变量代换

✓ **例2 (续)：** $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = ? \quad |x| > a$

利用积分变量代换 $x = \frac{a}{\cos t}$, $u = \sin t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$

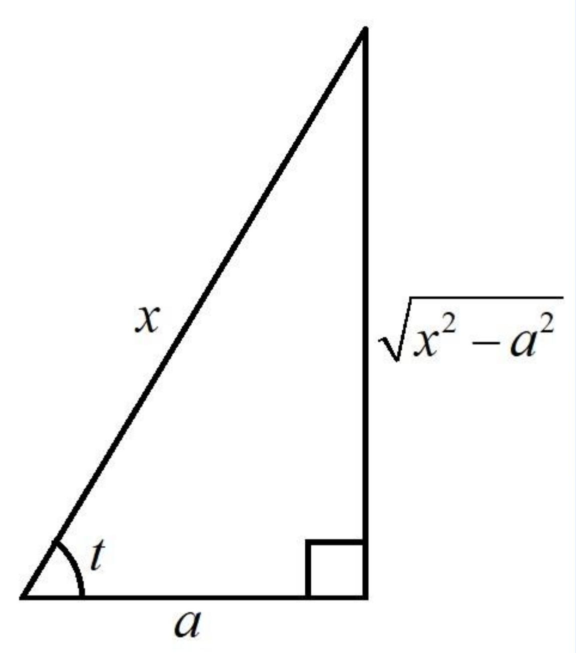
得到

$$I_2 = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+u)^2}{1-u^2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})^2}{a^2} + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C' \qquad \square$$



第15-1课：不定积分计算-有理化变量代换

✓ 例3：$I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=?\quad(a>0)$

解：为将被积函数有理化, 利用三角公式 $1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$

引入积分变量代换 $x=a\tan t,\ |t|<\pi/2$

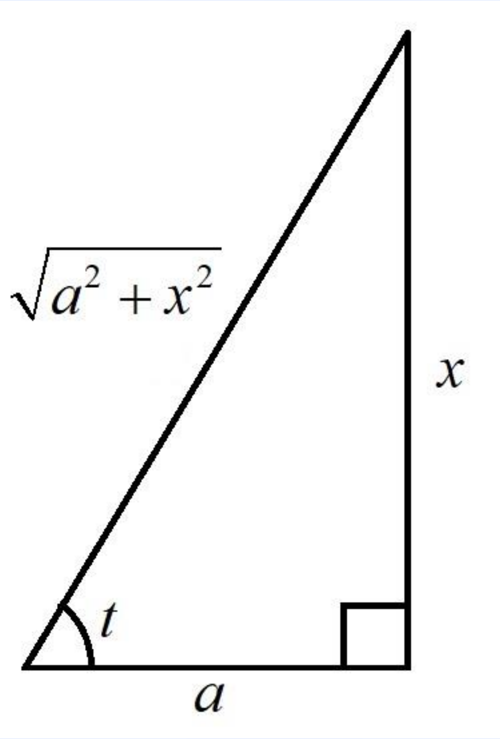
则 $\sqrt{a^2+x^2}=|\frac{a}{\cos t}|=\frac{a}{\cos t},\quad dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$

$$\therefore\ I_3=\int\frac{\cos t}{a}\cdot\frac{adt}{\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\cos t}\qquad(u=\sin t)$$

$$=\int\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}+C\quad(u=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}})$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^2}{a^2}+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C'\qquad\square$$



第15-1课：不定积分计算-有理化变量代换

- **小结：** 利用积分变量三角代换，将2次无理式有理化

回忆三角公式 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1,\quad \dfrac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1$

1) 取 $x = a\sin t$, 则 $\sqrt{a^2 - x^2} = |a\cos t|$, $dx = a\cos t dt$

2) 取 $x = \dfrac{a}{\cos t}$, 则 $\sqrt{x^2 - a^2} = |a\tan t|$, $dx = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$

3) 取 $x = a\tan t$, 则 $\sqrt{a^2 + x^2} = \left|\dfrac{a}{\cos t}\right|$, $dx = \dfrac{adt}{\cos^2 t}$

- **推广：** 一般2次无理式的处理

$\sqrt{-x^2 + 2px + q} = \sqrt{-(x-p)^2 + (q+p^2)}$ ——类似于情况1)

$\sqrt{x^2 + 2px + q} = \sqrt{(x+p)^2 + (q-p^2)}$ ——类似于情况2)或3)

第15-1课：不定积分计算-有理化变量代换

✓ 例4：$I_4 = \int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = ? \quad (a > 0)$

解：除了三角代换有理化之外, 也可试试分部积分

$$I_4 = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int x d(\sqrt{a^2 + x^2}) = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{a^2 + x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - I_4 + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\therefore \quad I_4 = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 + x^2} + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) \qquad \text{—— 利用例3结果}$$

$$= \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})] + C \qquad \square$$

第15-1课：不定积分计算-有理化变量代换

✓ 例5：$H_n=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=?\quad n=1,2,\cdots$

解：$H_1=\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$$H_n=\frac{x}{(a^2+x^2)^n}-\int xd[(a^2+x^2)^{-n}]$$

$$=\frac{x}{(a^2+x^2)^n}+2n\int\frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}\qquad [=\int\frac{(a^2+x^2)-a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}dx]$$

$$=\frac{x}{(a^2+x^2)^n}+2n(H_n-a^2H_{n+1})$$

$$H_{n+1}=\frac{1}{2na^2}[\frac{x}{(a^2+x^2)^n}+(2n-1)H_n]\qquad \text{——递推关系}$$

$$=\frac{2n-1}{2na^2}H_n+\frac{x}{2na^2(a^2+x^2)^n},\quad n=1,2,\cdots\qquad \square$$

第15-2课：不定积分计算-有理函数积分

不定积分计算-有理函数积分

- **目的**：计算 $\int f(x)dx,\quad f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}, P(x),Q(x)$都是多项式
- **方法** (将函数 f 分解成为“简单函数”的和-逐项积分)

1) 将f 表示为多项式 + “真分式”

“真分式”：分子多项式P的次数<分母多项式Q的次数
“假分式”：分子多项式P的次数≥分母多项式Q的次数

2) 将“真分式”分解成部分分式的和：

“真分式”=∑部分分式

3) 将多项式与部分分式逐项积分

第15-2课：不定积分计算-有理函数积分

- **有理函数 = 多项式 + "真分式"**

✓ **例1：** $f_1(x)=\dfrac{x^4-3x^3+4x^2+1}{x^3-4x^2+4x}$

解：可以用长除法, 也可以用待定系数法。

令 $$\frac{x^4-3x^3+4x^2+1}{x^3-4x^2+4x}=x+a+\frac{bx^2+cx+d}{x^3-4x^2+4x}$$

则 $$x^4-3x^3+4x^2+1=(x+a)(x^3-4x^2+4x)+bx^2+cx+d$$

比较等式两端多项式系数：

$$-3=a-4,\quad 4=-4a+4+b,\quad 0=4a+c,\quad 1=d$$

得到 $a=1,\ b=4,\ c=-4,\ d=1$

$$\therefore\quad f_1(x)=x+1+\frac{4x^2-4x+1}{x^3-4x^2+4x}\qquad\square$$

第15-2课：不定积分计算-有理函数积分

✓ 例2： $f_2(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3+2x^2+2x}$

解：仍用待定系数法，可以令

$$f_2(x)=\frac{x^4+1}{x^3+2x^2+2x}=x+a+\frac{bx^2+cx+d}{x^3+2x^2+2x}$$

由此得到

$$x^4+1=(x+a)(x^3+2x^2+2x)+bx^2+cx+d$$

比较多项式系数：

$$0=a+2,\ 0=2a+2+b,\ 0=2a+c,\ 1=d$$

$$\therefore\ a=-2,\ b=-2a-2=2,\ c=-2a=4,\ d=1$$

也即 $$f_2(x)=x-2+\frac{2x^2+4x+1}{x^3+2x^2+2x}\qquad\square$$

第15-2课：不定积分计算-有理函数积分

- **"真分式" = ∑部分分式**
- **部分分式：** $\dfrac{A}{(x-a)^i}$, $\dfrac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^j}$, $i, j=1,2,\cdots$
- **方法：** n次多项式有n个根(重根)-实根或共轭复根(一对)

对应于此, 多项式必存在以下因式分解：

$$Q(x)=(x-a)^k(x^2+2px+q)^m\cdots \qquad (p^2<q)$$

由此导出"真分式"可以作部分分式分解 (高等代数知识)

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+2px+q)}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+2px+q)^m}+\cdots$$

第15-2课：不定积分计算-有理函数积分

✓ **例1 (续)**：$f_1(x)=\dfrac{x^4-3x^3+4x^2+1}{x^3-4x^2+4x}=x+1+\dfrac{4x^2-4x+1}{x^3-4x^2+4x}$

"真分式"的部分分式分解：分母 $x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2$

可以设 $\dfrac{4x^2-4x+1}{x^3-4x^2+4x}=\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{x-2}+\dfrac{A_3}{(x-2)^2}$，则

$$4x^2-4x+1=A_1(x-2)^2+A_2x(x-2)+A_3x$$

令 x=0：$1=4A_1$，$A_1=1/4$

x=2：$9=2A_3$，$A_3=9/2$

x=1：$1=A_1-A_2+A_3$，$A_2=A_1+A_3-1=15/4$

综上得到 $f_1(x)=x+1+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{15}{4(x-2)}+\dfrac{9}{2(x-2)^2}$ □

第15-2课：不定积分计算-有理函数积分

✓ **例1** (续二)：$I_1=\int f_1(x)dx=?\quad f_1(x)=\dfrac{x^4-3x^3+4x^2+1}{x^3-4x^2+4x}$

解：根据前面的推导

$$f_1(x)=x+1+\frac{1}{4x}+\frac{15}{4(x-2)}+\frac{9}{2(x-2)^2}$$

所以

$$I_1=\int xdx+\int dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{15}{4}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{15}{4}\ln|x-2|-\frac{9}{2(x-2)}+C \qquad \square$$

第15-2课：不定积分计算-有理函数积分

- 例2 (续)：$f_2(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3+2x^2+2x}=x-2+\dfrac{2x^2+4x+1}{x^3+2x^2+2x}$

  "真分式"的部分分式分解：分母 $x^3+2x^2+2x=x(x^2+2x+2)$

  令 $$\frac{2x^2+4x+1}{x^3+2x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

则有 $$2x^2+4x+1=A(x^2+2x+2)+(Bx+C)x$$

令 x=0： $1=2A,\ A=1/2$

x=1： $7=5A+B+C,\ B+C=7-5A=9/2$

x=-1： $-1=A+B-C,\ \ B-C=-1-A=-3/2$

$\Big\}\ B=\dfrac{3}{2},\ C=3$

综上得 $$f_2(x)=x-2+\frac{1}{2x}+\frac{(3/2)x+3}{x^2+2x+2}\qquad\square$$

第15-2课：不定积分计算-有理函数积分

✓ **例2 (续二)**： $I_2=\int f_2(x)dx=?\quad f_2(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3+2x^2+2x}$

解： 已知 $f_2(x)=x-2+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{(3/2)x+3}{x^2+2x+2}$

$$\therefore\ I_2=\int xdx-2\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{xdx}{x^2+2x+2}+3\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{3}{4}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{3}{4}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}+\frac{3}{2}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{3}{4}\ln(x^2+2x+2)$$

$$+\frac{3}{2}\arctan(x+1)+C\qquad\square$$

第15-2课：不定积分计算-有理函数积分

- **小结-有理函数积分**

  根据上面步骤, 有理函数积分归结于以下部分分式积分

$$\frac{A}{(x-a)^i},\quad \frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^j},\quad i,j=1,2,\cdots\qquad (p^2<q)$$

其中 $$\frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^j}=\frac{Bx+C}{[(x+p)^2+q-p^2]^j}$$

因而可以归结为以下积分

$$\int\frac{bx+c}{[x^2+a^2]^n}dx=\frac{b}{2}\int\frac{d(x^2+a^2)}{[x^2+a^2]^n}+c\int\frac{dx}{[x^2+a^2]^n}$$

后面两类积分前面都已计算过(回忆上一课例5递推公式)

  综上, 有理函数的积分理论上都可以解决 (有初等积分)

第15-3课：不定积分计算-三角有理式积分

不定积分计算-三角有理式积分

- **目的**：计算 $\int f(x)dx,\ f(x)=R(\cos x,\sin x)$——三角有理式

其中 $R(u,v)=\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ 称为为2元有理函数, P,Q为2元多项式

- **实例**：$P_1(u,v)=u^2-v^2$，$P_2(u,v)=(u+v)^n$

$$Q(u,v)=u-v+1$$

$$f_1(x)=R_1(\cos x,\sin x)=\frac{P_1(\cos x,\sin x)}{Q(\cos x,\sin x)}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x+1}$$

$$f_2(x)=R_2(\cos x,\sin x)=\frac{P_2(\cos x,\sin x)}{Q(\cos x,\sin x)}=\frac{(\cos x+\sin x)^n}{\cos x-\sin x+1}$$

第15-3课：不定积分计算-三角有理式积分

- **三角有理式积分法**

  通过换元(积分变量三角代换) 转化为有理函数的积分

- **“万能代换”：** $t=\tan\dfrac{x}{2},\ x=2\arctan t,\quad dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\frac{2\cos(x/2)\sin(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\therefore\quad \int R(\cos x,\sin x)dx=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}\ =\int \hat{R}(t)dt$$

这时$\hat{R}$(t)是t的有理函数, 积分之后再将t=tan(x/2)代回

第15-3课：不定积分计算-三角有理式积分

✓ **例1**：$ab \neq 0,\quad I_1 = \int \frac{dx}{a + b\cos x} = ?$

解：令 $t = \tan\frac{x}{2}$，则 $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$，$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I_1 = \int \frac{1}{a + b(1-t^2)/(1+t^2)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{a+b+(a-b)t^2}$$

以下根据(a+b)(a-b)的符号分别讨论：

情况1) $(a+b)(a-b)=0$

若a+b=0：$I_1 = \int \frac{2dt}{(a-b)t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{at} + C = -\frac{1}{a}\cot\frac{x}{2} + C$

若 a-b=0：$I_1 = \int \frac{2dt}{a+b} = \frac{1}{a}\int dt = \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a}\tan\frac{x}{2} + C$

第15-3课：不定积分计算-三角有理式积分

✓ 例1 (继续)： $I_1 = \int \frac{dx}{a + b\cos x} = ?$

情况2) $(a+b)(a-b) > 0$

$$I_1 = \int \frac{2dt}{a+b+(a-b)t^2} = \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{(a+b)/(a-b)+t^2}$$

记 $\omega = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$， 回忆 $\int \frac{dt}{\omega^2 + t^2} = \frac{1}{\omega}\arctan\frac{t}{\omega} + C$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

第15-3课：不定积分计算-三角有理式积分

✓ 例1 (续二)： $I_1 = \int \frac{dx}{a + b\cos x} = ?$

情况3) $(a+b)(a-b) < 0$

$$I_1 = \int \frac{2dt}{a+b+(a-b)t^2} = \frac{2}{b-a}\int \frac{dt}{(a+b)/(b-a)-t^2}$$

记 $\omega = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}$, $\int \frac{dt}{\omega^2 - t^2} = \frac{1}{2\omega}\int (\frac{1}{\omega - t} + \frac{1}{\omega + t})dt = \frac{1}{2\omega}\ln\left|\frac{\omega + t}{\omega - t}\right| + C$

$$I_1 = \frac{2}{b-a}\int \frac{dt}{\omega^2 - t^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\ln\left|\frac{\omega + t}{\omega - t}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}\tan(x/2)}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}\tan(x/2)}\right| + C \qquad \square$$

第15-3课：不定积分计算-三角有理式积分

✓ 例2： $I_2=\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=?$

解： 令 $t=\tan x$，则 $x=\arctan t$，$dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$$I_2=\int\frac{1-t}{1+t}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int(\frac{1}{1+t}-\frac{t}{1+t^2})dt$$

$$=\ln|1+t|-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C$$

$$=\ln|1+\tan x|-\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)+C$$

$$=\ln|1+\tan x|+\frac{1}{2}\ln(\cos^2 x)+C$$

$$=\ln|\cos x+\sin x|+C \qquad \square$$

第15-3课：不定积分计算-三角有理式积分

✓ **例2：** $I_2=\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=?$

解法二：观察被积函数

$$I_2=\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}$$

$$=\ln|\cos x+\sin x|+C \qquad \square$$

- **注：** 上面例题说明,“万能代换”可以解决三角有理式的积分问题, 但未必总是最好的方法。

第15课：不定积分计算-被积函数有理化

- **预习 (下次课内容)：**
  第6.4节 简单无理式的积分
  小结 不定积分策略

- **作业 (本次课)：**
  练习题6.2：5, 6(也可以用三角代换), 7.
  练习题6.3：7, 9, 12, 14. [自己练习2,5,6]
  练习题6.4：1(1-2[自己练习],5,7,11).