1 知识点

数列极限: 数列 $\{a_n\}$ 收敛到 $a<\infty$ 是指: 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^+$, 使得当 $n>N$ 时, 有:

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

反面论证: 存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意的 $N>0$, 都存在 $n_0>N$ 使得:

$$|a_{n_0}-a|\geq\varepsilon$$

1. **定义法:** 即利用 $\varepsilon-N$ 语言, 得到的数列的极限.
2. **单调收敛准则:** 单调有界的数列一定有极限.
3. **Cauchy 收敛准则:** 一个数列的充要条件是该数列是基本列.
4. **夹逼原理:** 设 $a_n\leq b_n\leq c_n$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$
5. **其他:** 例如极限的四则运算和 Stolz 公式等.

2 定义法

习题 1.3-4: 下列陈述是否可以作为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义? 若回答是肯定的, 请证明之; 若回答是否定的, 请举出反例.

1. 对无限多个正数 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$;
2. 对任意给定的 $\varepsilon>1$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$;
3. 对任意给定的正数 $\varepsilon<1$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$;
4. 对每一个正整数 k, 存在 $N_k\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N_k$ 时, 有 $|a_n-a|<1/k$;
5. 对任意给定的两个正数 ε 与 δ, 在区间 $(a-\varepsilon,a+\delta)$ 之外至多只有数列 $\{a_n\}$ 中的有限多项.

解答:1. 否. 例如 $a_n=(-1)^n$, 取 $a=1$, 对任意大于 2 的 ε,(1) 都是成立的, 但是 a_n 不收敛.

2. 不正确同上, 取 $b_n=\dfrac{1}{2}a_n$ 即可.

3. 正确.(显然.)

4. 正确. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 我们总可以找到 k, 使得 $k>\dfrac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\varepsilon>\dfrac{1}{k}$, 故当 $n>N_k$ 时:

$$|a_n-a|<\frac{1}{k}<\varepsilon$$

5. 正确. 特别的, 取 $\varepsilon=\delta$, 因为只有有限项在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外, 我们记使得 a_n 不在该区间的最大下标为 n_0, 因此当 $n>n_0$ 时,$a_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, 即 $|a-a_n|<\varepsilon$, 故 a_n 极限为 a.

习题 1.3:1-(8)/(10) 用定义证明下列极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\arctan n}{1+n^2}=\dfrac{\pi}{2}$

解答:(1): 只需要知道如下的求和公式就可以:

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=n(n+1)(2n+1)/6=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

因此:

$$\left|\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3n^2+n}{6n^3}\right|\le\frac{1}{n}$$

因此对任意的 $\varepsilon>0$, 当 $n>[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ 时, 就有:

$$\left|\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3n^2+n}{6n^3}\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon$$

(2): 第二个稍显复杂. 首先我们先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$, 这是因为 $\tan x$ 单调递增, 因此对任意给定的 $0<\varepsilon<1$, 当 $n>\tan(\pi/2-\varepsilon)$, 就有

$$\frac{\pi}{2}-\arctan n<\varepsilon$$

现在:

$$\left|\frac{\pi}{2}-\frac{n^2\arctan n}{1+n^2}\right|\le\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|+\left|\frac{\arctan n}{1+n^2}\right|$$

因此对任意给定的 $\varepsilon>0$, 当 $n>\max\{\tan(\pi/2-\varepsilon),[\sqrt{3/\varepsilon}]+1\}$(这里把第二项放缩成了 $3/n^2$), 就有:

$$\left|\frac{\pi}{2}-\frac{n^2\arctan n}{1+n^2}\right|\le\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|+\left|\frac{\arctan n}{1+n^2}\right|<2\varepsilon$$

问题 1.4-1 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

提示: 利用书本的习题: 已知 $a_n\to a(n\to\infty)$. 求证:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to a\quad(n\to\infty).$$

解答: 先设 $b=0$. 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 所以有界, 从而存在 $M>0$, 使得 $|a_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$. 于是

$$\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\right|\leqslant M\frac{|b_1|+\cdots+|b_n|}{n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

现设 $b\neq 0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-b)=0$. 于是用刚才得到的结果, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_1\left(b_n-b\right)+\cdots+a_n\left(b_1-b\right)\right)=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1b_n+\cdots+a_nb_1}{n}-b\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)=0.$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

问题 1.4-2 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

解答: 令 $a_n=(-1)^n(x_n-x_{n-2})$. 故:

$$\sum_{k=1}^{n}a_n=(-1)^n(x_n-x_{n-1})+(-1)^{n+1}(x_2-x_1)$$

因此上一题的回顾, 或者 Stolz 公式.

问题 1.4-4 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

法一 (Stolz 公式): 由于:

$$\frac{(n+1)a_{n+1}}{2n+1} \to \frac{a}{2}$$

所以极限存在就是 $\frac{a}{2}$

法二 (拟合法): 注意到:

$$\frac{a}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} a = \lim_{n\to\infty} \frac{a+2a+\cdots na}{n^2}$$

做差就得到了:

$$I = \frac{(a_1-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}$$

利用上一题相似的方法.

3 单调收敛准则

习题 1.6-4 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n<1$, 且有不等式 $(1-a_n)\,a_{n+1} > \frac{1}{4}$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

解答: 注意到:

$$(1-a_n)a_{n+1} > \frac{1}{4} \geq a_n(1-a_n) \Rightarrow a_{n+1}-a_n > 0$$

故 a_n 单调递增有上界 (1), 对不等式取极限故有 $(1-a)a \geqslant \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

习题 1.7-9 令 $x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1) \quad (n\in \mathrm{N}^*)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 此极限常记为 γ, 叫作 Euler 常数.

解答:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

直接做差

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n+1})$$

因此 x_n 单调递增有上界 (例如 1) , 因此极限存在.

迭代数列的极限计算 1/2/5

(1) $x_1=1, x_{n+1} = \dfrac{1+2x_n}{1+x_n} (n=1,2,\cdots)$

(2) $0<x_1<3, x_{n+1} = \sqrt{x_n\,(3-x_n)} (n=1,2,\cdots)$

(3) 设 $x_1=a, x_2=b, x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}+x_n}{2} (n=1,2,\cdots)$;

(4) 设 $x_1=a>0, x_2=b>0, x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n} (n=1,2,\cdots)$;

(5) 设 $x_0>0, x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n} (n=0,1,2,\cdots)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解答: (1) 首先直接看出 $x_n>0$, 再由

$$x_{n+1} = \frac{2+2x_n-1}{1+x_n} = 2-\frac{1}{1+x_n} < 2$$

得知数列是有界数列. 由于 $x_2 = \frac{3}{2} > x_2$, 设 $n>2$ 时有 $x_n - x_{n-1} > 0$, 则依数学归纳法从

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1+2x_n}{1+x_n} - \frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = \frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_{n-1})\,(1+x_n)} > 0$$

推出数列是单调增加数列. 依据单调有界数列必定收敛的准则知, 所给数列收敛. 设 x_n 的极限为 l, 注意到 $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$, 在递归公式 $x_{n+1} = 2-\dfrac{1}{1+x_n}$ 两边取极限, 得

$$l = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 2-\frac{1}{1+\lim_{n\to\infty} x_n} = 2-\frac{1}{1+l},$$

解得 $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 即为所求极限.

(2) 由于 $0<x_1<3$, 故 $x_2=\sqrt{x_1\left(3-x_1\right)} \leqslant \dfrac{x_1+3-x_1}{2}=\dfrac{3}{2}$, 即 $0<x_2 \leqslant \dfrac{3}{2}$. 于是设 $0<x_n \leqslant \dfrac{3}{2}$, 便可推出

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n\left(3-x_n\right)} \leqslant \frac{x_n+3-x_n}{2}=\frac{3}{2},$$

由归纳法知数列有界, 即 $0<x_n \leqslant \dfrac{3}{2}(n>1)$. 其次, 当 $n>1$ 时, 有 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sqrt{x_n\left(3-x_n\right)}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{3}{x_n}-1} \geqslant \sqrt{2-1}=1$, 这说明该数列单调增加, 于是所论数列收敛. 设其极限为 l, 在递归公式 $x_{n+1}=\sqrt{x_n\left(3-x_n\right)}$ 两边取极限, 得

$$l=\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}=\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\left(3-\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)}=\sqrt{l(3-l)},$$

解得 $l=\dfrac{3}{2}$, 即为所求极限.

(3)/(4) 直接计算通项公式.

证证法 1 对于任意 $x_0>0$, 有 $0<x_n<1(n=1,2, \cdots)$,

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}=\frac{x_{n-1}-x_n}{\left(1+x_n\right)\left(1+x_{n-1}\right)},$$

因此

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|=\frac{x_n}{1+x_n}\left|x_n-x_{n-1}\right|$$

由于 $2 x_n<1+x_n$, 可知 $\dfrac{x_n}{1+x_n}<\dfrac{x_n}{2 x_n}=\dfrac{1}{2}$,

$$\left|x_{n+1}-x_n\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|x_n-x_{n-1}\right|(n=2,3, \cdots)$$

由此可知, 对任意 $m>n$, 有

$$\begin{aligned}
\left|x_m-x_n\right| & \leqslant\left|x_m-x_{m-1}\right|+\left|x_{m-1}-x_{m-2}\right|+\cdots+\left|x_{n+1}-x_n\right| \\
& \leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left|x_2-x_1\right|+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left|x_2-x_1\right| \\
& \leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^m+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
& \leqslant \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}},
\end{aligned}$$

对任给 $\varepsilon>0$, 必定存在 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon,$$

从而对任意 $m>n>N$, 总有 $\left|x_m-x_n\right|<\varepsilon$, 由柯西极限存在准则可知 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_n=A$, 可得

$$A=\frac{1}{1+A},$$

可解得 $A=\lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

证法 2 由于 $x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}(n=0,1,2, \cdots)$. 可知有

$$0<x_n<1 \quad(n=1,2, \cdots).$$

$$\begin{aligned}
x_{2 k+2}-x_{2 k} & =\frac{1}{1+x_{2 k+1}}-\frac{1}{1+x_{2 k-1}} \\
& =\frac{x_{2 k-1}-x_{2 k+1}}{\left(1+x_{2 k+1}\right)\left(1+x_{2 k-1}\right)}, \\
x_{2 k+1}-x_{2 k-1} & =\frac{1}{1+x_{2 k}}-\frac{1}{1+x_{2 k-2}} \\
& =\frac{x_{2 k-2}-x_{2 k}}{\left(1+x_{2 k}\right)\left(1+x_{2 k-2}\right)} .
\end{aligned}$$

可知 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n-1}\}$ 的单调性相反, 由于

$$x_2 - x_0 = \frac{1}{1+x_1} - x_0 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_0}} - x_0 = \frac{1-x_0-x_0^2}{2+x_0} = \frac{\frac{5}{4}-\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2}{2+x_0},$$

可知当 $0 < x_0 < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时, $x_2 - x_0 > 0, \{x_{2n}\}$ 单调增加; 当 $x_0 > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时, $x_2 - x_0 < 0, \{x_{2n}\}$ 单调减少. 由于 $0 < x_n < 1$, 可知, 对于任意 $x_0 > 0$, 总有 $\{x_{2n}\}$ 收敛, 同理知 $\{x_{2n-1}\}$ 收敛. 设

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = A, \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = B,$$

则由 $x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}$, 可得知

$$x_{2n} = \frac{1}{1+x_{2n-1}}, \quad x_{2n+1} = \frac{1}{1+x_{2n}},$$

从而有

$$A = \frac{1}{1+B}, \quad B = \frac{1}{1+A},$$

可解得 $A = B = \dfrac{1}{1+A}$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

4 夹逼原理

习题 1.4-5 求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{1/n}\,(0 \leqslant a \leqslant b)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{1/n}\,(a_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m)$.

$$b \leq (a^n + b^n)^{1/n}\,(0 \leqslant a \leqslant b) \leq (2b^n)^{1/n}$$

$$(\max_i a_i) \leq (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{1/n} \leq m^{1/n}(\max_i a_i)$$

习题 1.4-7 设 $a_n > 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = a.$$

解答:

方法一:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, a_i \geq 0$$

若 $a = 0$, 则显然: $0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

根据夹逼准则可知 $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to 0$.

若 $a \neq 0$, 对给定的 $0 < \varepsilon < \dfrac{a}{2}$, 存在 $N_0 > 0$, 使得当 $n > N_0$ 之后有,$a_n > a - \dfrac{\varepsilon}{2}$, 因此:

$$b_n = (a - \varepsilon/2)^{n-N_0} \prod_{i=1}^{N_0} a_i \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.c_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

可以看到 b_n 极限为 $a - \varepsilon_0/2$,c_n 极限为 a, 则存在 N_1, 使得当 $n > \max\{N_1, N_0\}$, 后有 $b_n > a - \varepsilon, c_n < a + \varepsilon$, 即:

$$a - \varepsilon_0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq a + \varepsilon_0$$

由 ε_0 的任意性可知, $\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\to 0$.

方法二:$a=0$ 的情况已经说明, 当 $a>0$ 时, 利用基本不等式:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\le \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\le \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$$

注意到由于 $a>0$, 因此可以利用柯西命题证明极限为 a, 故由夹逼原理可以证明.

1. 求 $x_n=\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ 的极限.

解答:

$$1\le x_n\le\sqrt{n}$$

以及根据夹逼定理, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

2. 设 $x_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\dots\cdot2n}$, 求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解答: 注意到:

$$x_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

注意到:

$$\frac{2n-1}{2n}\le\frac{2n}{2n+1}$$

我们有:

$$x_n\le y_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$$

我们发现:

$$0\le x_n\cdot x_n\le x_n\cdot y_n=\frac{1}{2k+1}$$

由此得到 x_n 极限为 0, 类似的 y_n 的极限也为 0.

5 柯西收敛准则

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足以下压缩条件: $\exists\theta\in(0,1)$ 使得

$$|a_{n+2}-a_{n+1}|\le\theta\,|a_{n+1}-a_n|,\quad n=1,2,3,\cdots,$$

求证 $\{a_n\}$ 收敛。

解答: 证: 考虑应用柯西收敛准则, 这样只要验证 $\{a_n\}$ 是基本列即可。为此需要分析 $|a_n-a_{n'}|$ 的大小, 这里 n 与 n' 都是自然数。不妨假定 $n'=n+m, m\in\mathbf{N}$ 任意, 需要考察

$$|a_n-a_{n+m}|\le|a_n-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+m-1}-a_{n+m}|;$$

为了估计右端每一项, 反复利用压缩条件, 得到

$$\begin{aligned}|a_n-a_{n+m}|&\le\left(\theta^{n-1}+\theta^{n}+\cdots+\theta^{n+m-2}\right)|a_2-a_1|\\&=\theta^{n-1}\left(1+\theta+\cdots+\theta^{m-1}\right)|a_2-a_1|\le\frac{\theta^{n-1}}{1-\theta}|a_2-a_1|;\end{aligned}$$

已知 $0<\theta<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\theta^n=0$, 对于 $\forall\varepsilon>0$ 可取 $n_0\in\mathbf{N}$, 使得 $\dfrac{\theta^{n_0}}{1-\theta}|a_2-a_1|<\varepsilon$, 这样 $\forall n'>n>n_0$, 便有

$$|a_n-a_{n'}|\le\frac{\theta^{n-1}}{1-\theta}|a_2-a_1|<\varepsilon,\text{ 即 }\{a_n\}\text{ 是基本列.}$$

2. 设数列

$$\{|a_2-a_1|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\}$$

有界, 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

解答: 记 $b_n = |a_2 - a_1| + \cdots + |a_n - a_{n-1}|$, 由于 b_n 单调递增有上界, 因此有极限. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N_1 > 0$, 使得当 $n, m > N_1$ 时, 都有:

$$|b_n - b_m| < \varepsilon$$

因此对于数列 a_n 而言, $\boxed{\text{对上述给定的 } \varepsilon > 0}$, 当 $n, m > N_1$ 时, 有:

$$|a_n - a_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k - a_{k-1}| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k - a_{k-1}| = b_m - b_n < \varepsilon$$

因此 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 因此极限存在.

6 Stolz 公式

1. 设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n (1 - x_n) (n = 1, 2, 3, \ldots)$. 试证: $\lim\limits_{n \to +\infty} n x_n = 1$.

解答: 易见, $0 < x_n < 1 (n = 1, 2, 3, \ldots)$, 且

$$x_{n+1} = x_n (1 - x_n) < x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

于是 $\{x_n\}$ 单调减少且有界. 从而 $\{x_n\}$ 收敛, 设其极限为 A. 对递推公式取极限得到 $A = A(1 - A)$. 因此, $A = 0$. 即 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$. 进一步, 由斯托尔茨定理, 我们有:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n^{-1}}{n} &= \lim_{n \to +\infty} \left(x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1} \right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n^2}{x_n^2 (1 - x_n)} = 1. \end{aligned}$$

这就得到了结论.

2. 设 $a_1 > 0, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n} (n \geqslant 1)$, 证明 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$ 。

解答: $\boxed{\text{由前边的作业可知 } a_n \to +\infty.}$

作如下观察: 如果 $\dfrac{a_n^2}{\sqrt{2n}}$ 极限存在, 那么由于 $\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}} > 0$, 因此极限也存在. 同上我们又发现:

$$\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{2n + 2 - 2n} = \frac{a_n^2 + 2 + 1/a_n^2 - a_n^2}{2} \to 1$$

因此习题得证.