2021 年秋季《离散数学》期中试卷

2021 年 11 月 6 日 14 : 00 – 16 : 00

本试卷共六道题, 分两页, 其中第 1 题 5 + 5 + 10 分, 第 3 题 5 + 10 分, 第 4 题 5 + 10 分, 其余每题每小问 5 分. 即使未能解决前面的小问, 也可利用其结论处理后面的小问.

1 (1) 设字母 a,b,c,d 分别有 1, 2, 3, 4 个, 用它们组成长度为 10 的单词. 一共能组成多少个单词? $C_{10}^{1}\times C_{9}^{2}\times C_{7}^{3}=12600$

(2) 将 20 个人分成四个 3 人小组与两个 4 人小组, 分得的小组不标号不排序. 一共有多少种分法? 答案不需要化到最简. $\frac{C_{20}^{3}\times C_{17}^{3}\times C_{14}^{3}\times C_{11}^{3}}{4!}\times\frac{C_{8}^{4}\times C_{4}^{4}}{2!}$

???

(3) 把 n 个人分成若干个小组, 分得的小组不标号不排序. 记这样的分法总数为 B_n. 通过考察第 n 个人与哪些人同组, 证明:

$$B_n=\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}B_{n-k},$$

其中约定 $B_0=1$, 并由此计算 B_6 的值.

$B_0=1$, $B_1=1$, $B_2=2$, $B_3=5$, $B_4=15$, $B_5=52$, $B_6=203$

2 (1) 设 p 是素数, k 是满足 $0<k<p$ 的正整数. 证明: 组合数 C_p^k 是 p 的倍数.

$C_p^k=\frac{p}{k}\cdot C_{p-1}^{k-1}\in N$

(2) 叙述并证明费马小定理.

(3) 求出使得 $2^d\equiv 1 \pmod{53}$ 成立的最小正整数 d.

$2^{52}\equiv 1 \pmod{53}$, $2^{13}\equiv 2\times 121\equiv 30 \pmod{53}$, $2^{26}\equiv 900\equiv -1$, $d=52$.

3 (1) 叙述容斥原理.

(2) 给定正整数 n, 设不超过 $\sqrt{n}$ 的所有素数分别为 $p_1<\cdots<p_k$. 设 $1,2,\ldots,n$ 中无平方因子的数的个数为 N. 利用容斥原理将 N 表示成 $p_1,\ldots,p_k$ 与 n 的表达式.(称正整数 m 无平方因子, 如果 m 不能被任何素数的平方整除.)

$N=$

$m=p_1p_2\cdots$

4 (1) 请求出 7 在模 163 下乘法的逆元, 即找一个整数 x 满足 $7x \equiv 1 \pmod{163}$.

$\begin{pmatrix}2&3\\3&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \pmod{163}$
行列式 $=7$ 与 163 互素
$70\begin{pmatrix}8&-3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\3&8\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix} \pmod{163}$
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \equiv 70\begin{pmatrix}8&-3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \pmod{163}$

$\begin{cases}2x+3y\equiv 5 \pmod{163}\\ 3x+8y\equiv 7 \pmod{163}\end{cases}$.
$\begin{cases}2x+3y+163z=5\\ 3x+8y+164w=7\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}2&3&163&0\\3&8&0&164\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$
注意, 线性变换时必须在整数域内 invertible

$163 = 23\times 7 + 2$
$7 = 3\times 2 + 1$
$\therefore 1 = 7 - 3\times 2 = 7 - 3\times(163 - 23\times 7) = 7\times 70 - 3\times 163$
$\therefore x \equiv 70 \pmod{163}$.

(2) 求解如下线性同余方程组:

$$\begin{cases} 2x + 3y \equiv 5 \pmod{163} \\ 3x + 8y \equiv 7 \pmod{163}. \end{cases}$$

5 (1) 直线上从左至右排列着 n 个点, 将每个点用红蓝两种颜色之一染色, 要求不存在连续三个相邻的顶点都染为蓝色. 设满足上述条件的染色方案的数目为 A_n. 证明: $\{A_n\}$ 满足如下递推关系:

第1个点红, 有 A_{n-1} 种
1点蓝: 2红 A_{n-2} 种; 2蓝 $\Rightarrow$ 3必红, A_{n-3} 种

$A_1=2, A_2=4, A_3=7 \xRightarrow{\text{模}2} a_1=0, a_2=0, a_3=1, a_4=1, a_5=0, a_6=0, a_7=1, a_8=1, a_9=0 \ldots$

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3}, \quad \forall n \geq 4.$$

(2) 利用 (1) 中给出的递推关系, 请确定每个 A_n 的奇偶性.

一定有周期, 因为 (A_n, A_{n-1}, A_{n-2}) 模 2 只有 8 种可能
但有无数个对应向量 ($n\to+\infty$)
$\therefore$ 必 $\exists$ $(A_j, A_{j-1}, A_{j-2}) \equiv (A_i, A_{i-1}, A_{i-2}) \pmod 2$.
$\Rightarrow (A_{j+1}, A_j, A_{j-1}) \equiv (A_{i+1}, A_i, A_{i-1}) \pmod 2$
$\Rightarrow \cdots$

(3) 将正 n 边形的每个顶点用红蓝两种颜色之一染色, 要求不存在连续三个相邻的顶点都染为蓝色. 设满足上述条件的染色方案的数目为 B_n. 证明: 对 $n \geq 5$ 有

取一边中点为 C, 设 C 两边最长的连续蓝点个数分别为 x, y $(x+y\le 2)$.
① $x=y=0$, C 两边都红, A_{n-2}
② $x=0, y=1$ 或 $x=1, y=0$: $2\times A_{n-3}$
③ $x=1, y=1$; $x=2, y=0$; $x=0, y=2$: $3\times A_{n-4}$.

$$B_n = A_{n-2} + 2A_{n-3} + 3A_{n-4}.$$

$B_{2021} \equiv A_{2019} + A_{2017} \equiv 1+0 \equiv 1 \pmod 2$

(4) 请确定 B_{2021} 的奇偶性, 并说明理由.

6 (1) 设 $X : \Omega \to \mathbf{R}$ 是有限概率空间 Ω 上的随机变量, 其期望值为 $E[X] = \mu$. 证明: $E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$.

$= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) = E(X^2) - E(X)^2$

(2) 有两个国家, 用 A 表示第一个国家的城市的集合, 用 B 表示第二个国家的城市的集合. 对任何 $a \in A, b \in B$, a, b 间有 0 条或 1 条 (双向的) 直飞航线. 对非空子集 $U \subseteq A, V \subseteq B$, 用 $e(U,V)$ 表示从 U 中的城市到 V 中的城市的直飞航班的数目, 定义 $d(U,V) = \frac{e(U,V)}{|U|\cdot|V|}$. 设 A, B 都分成了若干个省 (的不交并): $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$. 将 $A \times B$ 视为均匀的概率空间, 定义 $A \times B$ 上的随机变量 X 为: 对 $(a,b) \in A \times B$, 如果 $a \in A_i, b \in B_j$, 则 $X(a,b) = d(A_i, B_j)$. 证明:

$E(X) = \sum_{(a,b)\in A\times B} \frac{X(a,b)}{|A|\cdot|B|} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(a,b)\in A_i\times B_j} \frac{X(a,b)}{|A||B|} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(a,b)\in A_i\times B_j} \frac{d(A_i,B_j)}{|A|\cdot|B|} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{|A_i||B_j|}{|A||B|} d(A_j, B_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{e(A_i,B_j)}{|A|\cdot|B|} = \frac{e(A,B)}{|A||B|} = d(A,B)$

$$E[X] = d(A,B), \quad E[X^2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{|A_i|\cdot|B_j|}{|A|\cdot|B|} d^2(A_i, B_j).$$

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{(a,b)\in A_i\times B_j} \frac{X^2(a,b)}{|A||B|} = \sim \frac{d^2(A_i,B_j)}{|A||B|} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{|A_i||B_j|}{|A||B|} d^2(A_i, B_j)$

(3) 设 $|A_1| \geq \epsilon|A|$, $|B_1| \geq \epsilon|B|$, 且有 $|d(A_1,B_1) - d(A,B)| \geq \epsilon$, 其中 ϵ 是给定的正数. 结合 (1) 与 (2) 的结论, 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{|A_i|\cdot|B_j|}{|A|\cdot|B|} d^2(A_i, B_j)\right) - d^2(A,B) \geq \epsilon^4.$$

$LHS = E(X^2) - E(X)^2 = E((X-\mu)^2)$
$\geq \sum_{(a,b)\in A_1\times B_1} \frac{1}{|A||B|} |d(A_1,B_1) - d(A,B)|^2$
$= \frac{|A_1||B_1|}{|A||B|} |\quad|^2 \geq \varepsilon^4$.