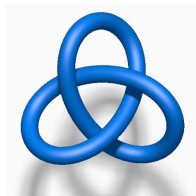


高等微积分

邹文明

第二章: 函数, 函数的极限与连续





普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学分析教程

(上册)

常庚哲 史济怀 编

高等教育出版社

§10. 闭区间上连续函数的性质

定理 1. (连续函数介值定理) 如果 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 那么对于介于 $f(a), f(b)$ 之间的任意的实数 μ , 均存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \mu$.

证明: 不失一般性, 我们可假设 $f(a) < \mu < f(b)$.

定义 $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq \mu\}$, 且 $\xi = \sup A$.
则 $\forall n \geq 1, \exists x_n \in A$ 使得 $\xi - \frac{1}{n} < x_n \leq \xi$. 再由
夹逼原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$. 另外 $\forall n \geq 1, x_n \in A$,
故 $f(x_n) \leq \mu$, 且 $\xi \in [a, b]$. 由连续性与极限的
保序性立刻可知 $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \mu < f(b)$,
于是 $b > \xi$. 由 ξ 的定义, $\forall x \in (\xi, b], f(x) > \mu$,

从而由连续性以及极限的保序性可得

$$f(\xi) = f(\xi + 0) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) \geq \mu,$$

进而我们有 $f(\xi) = \mu$.

推论. (零点存在定理) 若函数 $f \in \mathcal{C}[a, b]$ 使得 $f(a)f(b) \leq 0$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = 0$.

证明: 由于 0 介于 $f(a), f(b)$ 之间, 于是由连续函数介值定理可知所证结论成立.

秋风起兮白云飞,草木黄落兮雁南归—汉·刘彻《秋风辞》



同学们辛苦了！

例 1. 如果 $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ 连续, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得我们有 $f(\xi) = \xi$.

证明: $\forall x \in [a, b]$, 令 $F(x) = f(x) - x$. 则 F 为区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 并且

$$F(a) \geq 0, \quad F(b) \leq 0,$$

于是由连续函数介值定理可知 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $F(\xi) = 0$, 也即我们有 $f(\xi) = \xi$.

例 2. 任何实系数奇次多项式方程有实根.

证明: 考虑实系数的多项式 $f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$,

其中 $n \geq 0$ 且 $a_{2n+1} > 0$, 那么 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. 由于

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{2n+1}} = a_{2n+1} > 0$, 从而可知 $\exists M > 0$ 使得

当 $|x| \geq M$ 时, 均有 $\frac{f(x)}{x^{2n+1}} > 0$. 于是 $f(M) > 0$,

且 $f(-M) < 0$. 进而由连续函数介值定理立刻

可知 $\exists c \in [-M, M]$ 使得 $f(c) = 0$. 由此得证.

例 3. 假设函数 $f \in \mathcal{C}(a, b)$ 使得 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c_1$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = c_2$, 其中 c_1, c_2 不相等并且不一定为有限. 如果 $\mu \in \mathbb{R}$ 严格介于 c_1, c_2 之间, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $\mu = f(\xi)$.

证明: 不失一般性, 假设 $c_1 < \mu < c_2$. 由函数极限局部保序性知, $\exists \delta_1 \in (a, b)$ 使得 $\forall x \in (a, \delta_1)$, 我们有 $f(x) < \mu$.

同样地, $\exists \delta_2 \in (a, b)$ 使得 $\forall x \in (\delta_2, b)$, 我们均有 $f(x) > \mu$. 由此可知 $\delta_2 \geq \delta_1$.

任取 $a_1 \in (a, \delta_1)$,

$b_1 \in (\delta_2, b)$, 那么 $a_1 < b_1$, $f(a_1) < \mu$, $f(b_1) > \mu$.

又因 f 在 $[a_1, b_1]$ 上连续, 于是由连续函数介值定理可知, $\exists \xi \in (a_1, b_1) \subset (a, b)$ 使得 $\mu = f(\xi)$.

因此所证结论成立.

例 4. 求证: 方程 $x^7 - 3x^4 - 6x^3 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内有一个根.

证明: $\forall x \in [0, 1]$, 我们定义

$$f(x) = x^7 - 3x^4 - 6x^3 + 5x + 1.$$

则 $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ 且 $f(0) = 1$, $f(1) = -2$. 由连续函数介值定理可知 $\exists \xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

命题 1. 如果 X 为区间, 而 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 则像集 $\text{Im}f$ 为区间.

证明: 任取 $y_1, y_2 \in \text{Im}f$ ($y_1 \neq y_2$), 则 $\exists a, b \in X$ 使得 $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$. 不失一般性, 我们可假设 $a < b$, 否则可调整 y_1, y_2 的编号. 由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则对于介于 y_1, y_2 之间的任意实数 y , $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $y = f(\xi) \in \text{Im}f$, 故 $\text{Im}f$ 包含以 y_1, y_2 为端点的区间, 从而 $\text{Im}f$ 为区间.

命题 2. 如果 X 为区间, 而 $f \in \mathcal{C}(X)$ 为单射, 则 f 必为严格单调函数.

证明: 用反证法, 假设 f 不为严格单调的函数, 因为是单射, 则在 X 中存在点 x_1, x_2, x_3 使得 $x_1 < x_2 < x_3$, 但 $f(x_2)$ 却不介于 $f(x_1), f(x_3)$ 之间.

(考虑一种情形) 若 $f(x_1), f(x_3) > f(x_2)$,
则 $\exists \mu \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x_2) < \mu < f(x_1), \quad f(x_2) < \mu < f(x_3).$$

从而由连续函数介值定理可得知 $\exists \alpha \in (x_1, x_2)$
使得 $\mu = f(\alpha)$. 同理 $\exists \beta \in (x_2, x_3)$ 使 $\mu = f(\beta)$.
于是 $f(\alpha) = f(\beta)$, 但 $\beta > \alpha$. 矛盾!

综上所述可知所证结论成立.

命题 3. 设 X 为区间, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 为单调函数, 则 $f \in \mathcal{C}(X)$ 当且仅当像集 $\text{Im} f$ 是一个区间.

证明: 必要性源于前面的命题. 下面只需证明充分性. 不失一般性, 假设 f 单调递增, 否则可考虑 $-f$. 用反证法, 假设 f 在点 $x_0 \in X$ 间断. 则由单调有界定理可知或者 $f(x_0 + 0) > f(x_0)$ 或者 $f(x_0 - 0) < f(x_0)$.

不失一般性, 我们假设
 $f(x_0 + 0) > f(x_0)$, 对另一种情形可作类似讨论.

则 $\forall x \in X$, 当 $x > x_0$ 时, 我们均有

$$f(x) \geq f(x_0 + 0) > f(x_0),$$

而当 $x < x_0$ 时, 则有 $f(x) \leq f(x_0)$. 这表明

$$(f(x_0), f(x_0 + 0)) \cap \text{Im} f = \emptyset.$$

但 $\exists b \in X$ 使得 $b > x_0$, 从而 $f(b) \geq f(x_0 + 0)$.

由 $\text{Im} f$ 为区间可知 $[f(x_0), f(b)] \subseteq \text{Im} f$, 矛盾!

故假设不成立, 因此 f 在 X 上连续.

定理 2. (反函数定理) 若 X 为区间, $f \in \mathcal{C}(X)$ 为单射, 则反函数 $f^{-1} : \text{Im}f \rightarrow X$ 存在且连续.

证明: 由 **命题 1** 可知 $\text{Im}f$ 为区间, 而由 **命题 2** 知 f 为严格单调, 从而反函数 $f^{-1} : \text{Im}f \rightarrow X$ 存在且单调. 由于 f^{-1} 单调且 $\text{Im}f^{-1} = X$ 为区间, 则由 **命题 3** 可知 f^{-1} 为连续函数.

定理 3. (最值定理) 若 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 则 f 有最值.

证明: 首先证明 f 在 $[a, b]$ 上有界. 用反证法, 设 f 为无界函数. 则 $\forall n \geq 1, \exists a_n \in [a, b]$ 使得 $|f(a_n)| > n$. 但数列 $\{a_n\}$ 有界, 故存在收敛的子列 $\{a_{k_n}\}$. 将其极限记为 x_0 . 则由极限保序性可知 $x_0 \in [a, b]$. 又由连续性可得

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{k_n}) = \infty.$$

矛盾! 故函数 f 在 $[a, b]$ 上有界.

令 $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. 如果 f 在 $[a, b]$ 上无最大值, 则 $\forall x \in [a, b]$, 均有 $f(x) < M$. 令 $F(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. 那么 $F \in \mathcal{C}[a, b]$, 从而有界. $\forall K > 0$, 由 M 的定义可知 $\exists x \in [a, b]$ 使得 $f(x) > M - \frac{1}{K}$. 从而 $F(x) = \frac{1}{M - f(x)} > K$, 也即 F 没有上界. 矛盾! 于是 f 在 $[a, b]$ 上有最大值.

又因 $-f \in \mathcal{C}[a, b]$,
则 $-f$ 在 $[a, b]$ 上有最大值, 故 f 也有最小值.

推论. 若 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 则 $\text{Im} f$ 为闭区间.

证明: 由最值定理知, $\exists c, d \in [a, b]$ 使得我们有

$$f(c) = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(d) = \sup_{x \in [a, b]} f(x),$$

于是 $\forall x \in [a, b]$, 我们均有 $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$,
从而 $\text{Im} f \subseteq [f(c), f(d)]$. $\forall \mu \in [f(c), f(d)]$, 又由
连续函数介值定理可知, 存在 ξ 介于 c, d 之间
使得 $\mu = f(\xi)$. 故 $\text{Im} f = [f(c), f(d)]$.

例 5. 若 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 且 f 可以取到正值, 求证: f 在 \mathbb{R} 上有正的最大值.

证明: 由题设立刻知, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0) > 0$. 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 < f(x_0)$, 由函数极限保序性知, $\exists M > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $|x| > M$ 时, 我们均有 $f(x) < f(x_0)$, 于是 $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sup_{x \in [-M, M]} f(x) > 0$.

又 f 在 $[-M, M]$ 上连续, 则由连续函数的最值定理可知 f 在 $[-M, M]$ 上有正的最大值, 进而可知所证结论成立.

例 6. 若 $f \in \mathcal{C}[a, +\infty)$ 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$,
求证: 函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

证明: 由极限定义可知 $\exists M > a$ 使得 $\forall x > M$,
均有 $|f(x) - A| < 1$, 由此可得 $|f(x)| < 1 + |A|$.
又 f 在 $[a, M]$ 上连续, 从而有界, 也即 $\exists K > 0$
使得 $\forall x \in [a, M]$, 均有 $|f(x)| < K$. 则 $\forall x \geq a$,
我们总有 $|f(x)| < 1 + |A| + K$. 故所证成立.