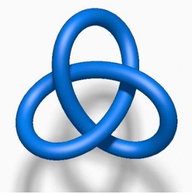
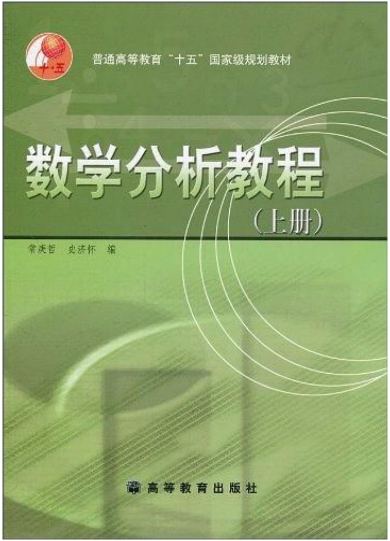
高等微积分

邹文明

第二章: 函数, 函数的极限与连续




普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学分析教程
（上册）
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

§6. 闭区间上连续函数的性质

定理 1. (连续函数介值定理) 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 那么对于介于 $f(a), f(b)$ 之间的任意的实数 μ, 均存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = \mu$.

证明: 不失一般性, 我们可假设 $f(a) < \mu < f(b)$.

定义 $A=\{x\in[a,b]\ :\ f(x)\leqslant\mu\}$, 且 $\xi=\sup A$. 则 $\forall n\geqslant 1,\exists x_n\in A$ 使得 $\xi-\frac{1}{n}<x_n\leqslant\xi$. 再由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$. 另外 $\forall n\geqslant 1, x_n\in A$, 故 $f(x_n)\leqslant\mu$, 且 $\xi\in[a,b]$. 由连续性与极限的保序性立刻可知 $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\leqslant\mu<f(b)$, 于是 $b>\xi$. 由 ξ 的定义, $\forall x\in(\xi,b]$, $f(x)>\mu$,

从而由连续性以及极限的保序性可得

$$f(\xi) = f(\xi + 0) = \lim_{x \to \xi^+} f(x) \geqslant \mu,$$

进而我们有 $f(\xi) = \mu$.

推论. **(零点存在定理)** 若函数 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 使得 $f(a)f(b) \leqslant 0$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = 0$.

证明: 由于 0 介于 $f(a), f(b)$ 之间, 于是由连续函数介值定理可知所证结论成立.

秋风起兮白云飞,草木黄落兮雁南归–汉・刘彻《秋风辞》

同学们辛苦了！

例 1. 如果 $f:[a,b]\to[a,b]$ 连续, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得我们有 $f(\xi)=\xi$.

证明: $\forall x\in[a,b]$, 令 $F(x)=f(x)-x$. 则 F 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 并且

$$F(a)\geqslant 0,\ F(b)\leqslant 0,$$

于是由连续函数介值定理可知 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $F(\xi)=0$, 也即我们有 $f(\xi)=\xi$.

例 2. 任何实系数奇次多项式方程有实根.

证明: 考虑实系数的多项式 $f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$, 其中 $n \geqslant 0$ 且 $a_{2n+1} > 0$, 那么 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. 由于 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{2n+1}} = a_{2n+1} > 0$, 从而可知 $\exists M > 0$ 使得当 $|x| \geqslant M$ 时, 均有 $\frac{f(x)}{x^{2n+1}} > 0$. 于是 $f(M) > 0$, 且 $f(-M) < 0$. 进而由连续函数介值定理立刻可知 $\exists c \in [-M, M]$ 使得 $f(c) = 0$. 由此得证.

例 3. 求证: 方程 $x^7 - 3x^4 - 6x^3 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内有一个根.

证明: $\forall x \in [0,1]$, 我们定义

$$f(x) = x^7 - 3x^4 - 6x^3 + 5x + 1.$$

则 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 且 $f(0) = 1$, $f(1) = -2$. 由连续函数介值定理可知 $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

定理 2. (最值定理) 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 f 有最值.

证明: 首先证明 f 在 $[a,b]$ 上有界. 用反证法, 设 f 为无界函数. 则 $\forall n \geqslant 1$, $\exists a_n \in [a,b]$ 使得 $|f(a_n)| > n$. 但数列 $\{a_n\}$ 有界, 故存在收敛的子列 $\{a_{k_n}\}$. 将其极限记为 x_0. 则由极限保序性可知 $x_0 \in [a,b]$. 又由连续性可得

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_{k_n}) = \infty.$$

矛盾! 故函数 f 在 $[a,b]$ 上有界.

令 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. 如果 f 在 $[a,b]$ 上无最大值, 则 $\forall x\in[a,b]$, 均有 $f(x)<M$. 令 $F(x)=\frac{1}{M-f(x)}$. 那么 $F\in\mathscr{C}[a,b]$, 从而有界. $\forall K>0$, 由 M 的定义可知 $\exists x\in[a,b]$ 使得 $f(x)>M-\frac{1}{K}$. 从而 $F(x)=\frac{1}{M-f(x)}>K$, 也即 F 没有上界. 矛盾!

于是 f 在 $[a,b]$ 上有最大值.

又因 $-f \in \mathscr{C}[a,b]$,

则 $-f$ 在 $[a,b]$ 上有最大值, 故 f 也有最小值.

推论. 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\mathrm{Im} f$ 为闭区间.

证明: 由最值定理知, $\exists c, d \in [a,b]$ 使得我们有

$$f(c) = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(d) = \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

于是 $\forall x \in [a,b]$, 我们均有 $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$, 从而 $\mathrm{Im} f \subseteq [f(c), f(d)]$. $\forall \mu \in [f(c), f(d)]$, 又由连续函数介值定理可知, 存在 ξ 介于 c, d 之间使得 $\mu = f(\xi)$. 故 $\mathrm{Im} f = [f(c), f(d)]$.

例 4. 若 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ 且 f 可以取到正值, 求证: f 在 $\mathbb{R}$ 上有正的最大值.

证明: 由题设立刻知, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0) > 0$. 又 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 < f(x_0)$, 由函数极限保序性知, $\exists M > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $|x| > M$ 时, 我们均有 $f(x) < f(x_0)$, 于是 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sup\limits_{x\in[-M,M]} f(x) > 0$. 又 f 在 $[-M, M]$ 上连续, 则由连续函数的最值定理可知 f 在 $[-M, M]$ 上有正的最大值, 进而可知所证结论成立.

例 5. 若 $f \in \mathscr{C}[a,+\infty)$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, 求证: 函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

证明: 由极限定义可知 $\exists M > a$ 使得 $\forall x > M$, 均有 $|f(x) - A| < 1$, 由此可得 $|f(x)| < 1 + |A|$. 又 f 在 $[a, M]$ 上连续, 从而有界, 也即 $\exists K > 0$ 使得 $\forall x \in [a, M]$, 均有 $|f(x)| < K$. 则 $\forall x \geqslant a$, 我们总有 $|f(x)| < 1 + |A| + K$. 故所证成立.

§1. 导数与微分的概念

定义 1. 假设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为函数, $x_0\in(a,b)$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 存在 (并且有限), 则称 f 在点 x_0 处可导, 上述极限被称为函数 f 在点 x_0 处的导数, 被记作 $f'(x_0)$, 或者 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$, $\mathrm{D}_x f(x_0)$, 等等.

若 f 在 (a,b) 的每点处可导, 则称 f 在 (a,b) 上可导, 由此得到的函数 f' 称为 f 的导函数.

单侧导数 (左、右可导)

左导数: $f'_-(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

右导数: $f'_+(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

评注

- 函数 f 是否在点 x_0 处可导仅与 f 在 x_0 的邻域内的性质有关.
- 函数 f 在点 x_0 处可导当且仅当 f 在该点的左、右导数存在 (有限) 且相等.
- 曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

切线与法线

设曲线 Γ 在点 (x_0, y_0) 有切线，该切线与 x 轴夹角为 α，则切线的方程为 $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \tan\alpha$，也即 $y - y_0 = \tan\alpha \cdot (x - x_0)$，过这一点的法线是与切线垂直的直线，它与 x 轴的夹角等于 $\alpha + \frac{\pi}{2}$，从而法线的方程为 $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \tan(\alpha + \frac{\pi}{2})$，也即

$$x - x_0 = -\tan\alpha \cdot (y - y_0).$$

例 1. 设函数 f 在点 x_0 可导. 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程与法线方程.

解: 曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 切线的斜率为 $f'(x_0)$, 故所求切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. 进而可知相应的法线方程为

$$x-x_0=-f'(x_0)(y-f(x_0)).$$

命题 1. 若 f 在点 x_0 可导, 则 f 在该点连续.

证明: 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) \\ = & \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) \\ = & f'(x_0)\times 0=0. \end{aligned}$$

注: 反过来, 连续性并不蕴含着可导性.

例 2. 常值函数的导数等于 0.

例 3. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $\pi(x) = x$, 则 $\pi'(x) \equiv 1$. 此时也常将之记作 $x' = 1$.

例 4. 若 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 求 $f'(0)$.

解: 由导数定义以及夹逼原理可得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 5. 求证: $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导.

证明: 由题设可知

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

故所证结论成立.

注: 上述函数 f 在点 $x=0$ 处连续, 但不可导.

例(复习). 证明: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

证明: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e.$

例(复习). 证明: $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$

证明: $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1.$

例(复习). 求证: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a \ (a>0).$

证明: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \overset{y=a^x-1}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y\log a}{\log(1+y)}=\log a.$

例 6. $\forall a > 0$, 求证: $(a^x)' = a^x \log a$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = a^x$. 则

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{a^y - a^x}{y - x} = \lim_{y \to x} a^x \cdot \frac{a^{y-x} - 1}{y - x} = a^x \log a.$$

例 7. $\forall a>0$, 求证: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$.

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $f(x)=\log_a x$. 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{\log_a y-\log_a x}{y-x} = \lim_{y\to x}\frac{\log(1+\frac{y-x}{x})}{(y-x)\log a} \\ &= \lim_{y\to x}\frac{\frac{y-x}{x}}{(y-x)\log a} = \frac{1}{x\log a}. \end{aligned}$$

注: 特别地, $(e^x)'=e^x$, $(\log x)'=\frac{1}{x}$.

例 8. 设 $k \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = x^k$. 求证:

$$f'(x) = kx^{k-1}.$$

证明: 仅需考虑 $k \geqslant 2$. 若 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \to x} \frac{y^k - x^k}{y - x} = x^k \lim_{y \to x} \frac{(1 + \frac{y-x}{x})^k - 1}{y - x} \\ &= x^k \lim_{y \to x} \frac{k \cdot \frac{y-x}{x}}{y - x} = kx^{k-1}. \end{aligned}$$

另外 $f'(0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{y^k}{y} = 0$. 故所证成立.

例 9. 求证: $(\sin x)' = \cos x$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = \sin x$. 则

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y \to x} \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \\
&= \lim_{y \to x} \frac{2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2}}{y - x} = \cos x.
\end{aligned}
$$

注: 同理可证 $(\cos x)' = -\sin x$.

秋风起兮白云飞,草木黄落兮雁南归–汉・刘彻《秋风辞》

同学们辛苦了!