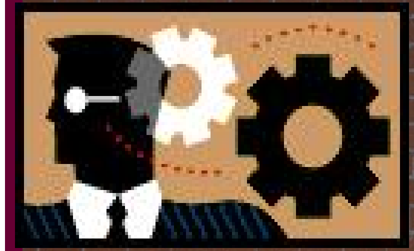
《线性代数》



第一章 线性方程组与行列式

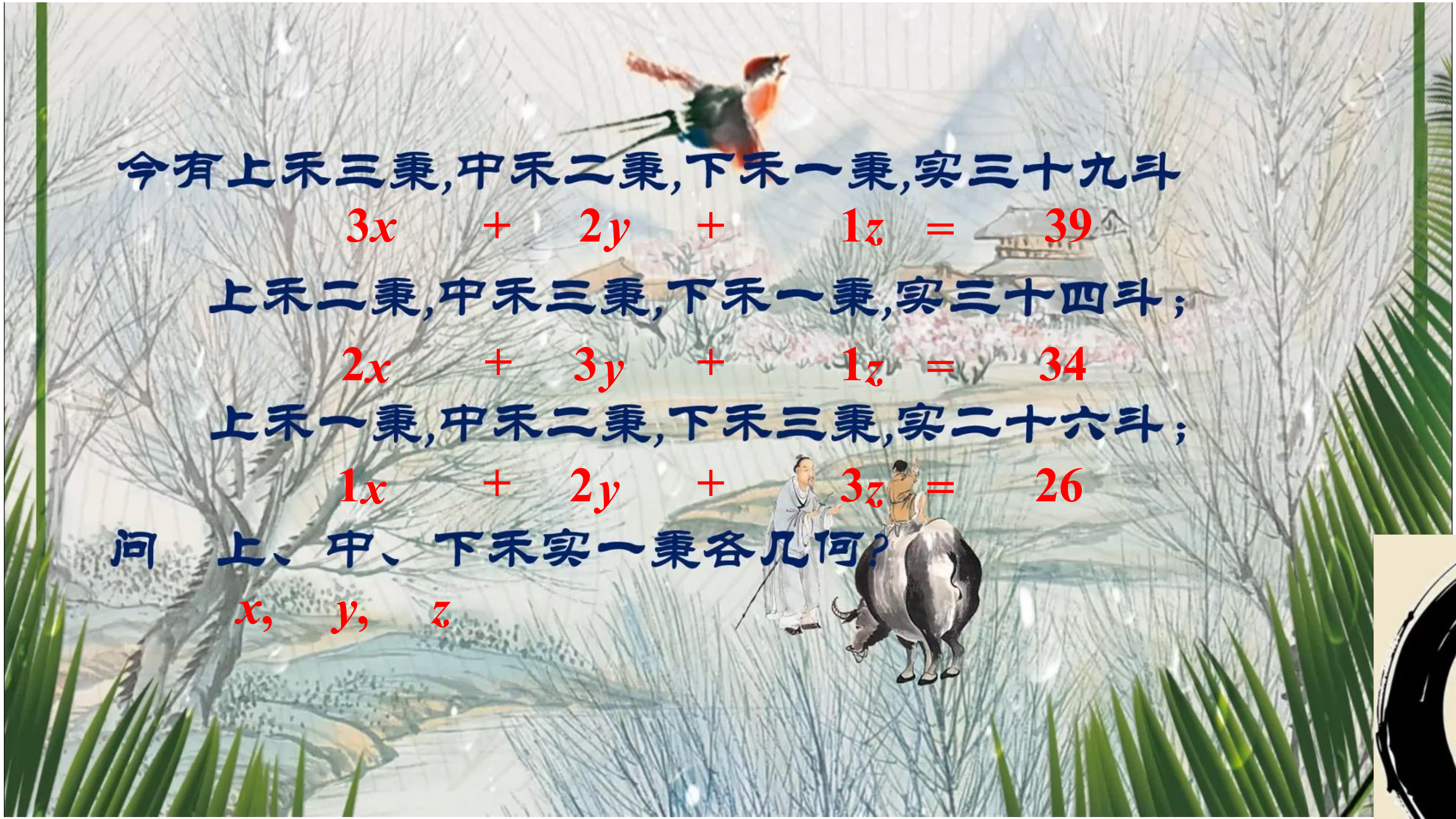
§1.1 Gauss消元法

2025秋

内容提要

- 初等变换与同解方程组
- **Gauss消元法**
- 阶梯型矩阵、简化阶梯型矩阵

引例1.《九章算术》中有这样的数学问题——



引例2.《孙子算经》中著名的数学问题，其内容是：“今有雉（鸡）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问雉兔各几何。”

解：让所有动物先抬起一只腿，　再抬起一只腿

此时，鸡坐地上，兔子两条腿站地

于是，94–35–35=24，

故兔子数量为 24/2=12,

则鸡的数量为 35–12=23.

术曰：倍足以减首，余半之，即兽；以首减兽，即禽。

注：上述抬腿法很生动形象, 虽然巧妙但并不容易一般化。另一个“笨”办法, 也是最自然的办法, 就是列方程组和解方程组.

另解：设鸡和兔的数量分别为 x, y, 则 $\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$

求解方程：用方程②-方程①×2，消去x，求出y后，代回求得x。

附. 中国古代《算经十书》

是指汉、唐一千多年间的十部著名的数学著作，曾为国子监算学科的教科书，标志着中国古代数学的高峰。

序号	书名	作者	年代	大致内容
1	《周髀算经》			讲述天文学“盖天说”的数学、天文著作
2	《九章算术》	张苍等编(刘徽注)	1th (263年)	全书共分九章，共搜246个数学问题，汉朝之前的数学问题汇总
3	《海岛算经》			介绍利用标杆进行地图测量的数学问题
4	《孙子算经》	不详	4～5th	系统介绍筹算法则，含筹算乘除法则，筹算分数算法和筹算开平方法。包括著名的“鸡兔同笼问题”和“孙子问题”
5	《张丘建算经》			讨论了最大公约数、最小公倍数、等差级数、不定方程组（百鸡问题）等数学问题
6	《夏侯阳算经》			引用当时流传的乘除捷法，解答日常生活中的应用问题，保存了很多数学史料
7	《缀术》			原书失传，用《数术记遗》（徐岳著）来充数。
8	《五经算术》			对《易经》《诗经》《尚书》《周礼》《仪礼》《礼记》《论语》等儒家经典中与数字有关的地方详加注释
9	《五曹算经》			全书分为田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹五部分，收录了67个应用数学问题
10	《缉古算经》			全书共20题，反映了当时开凿运河、修筑长城和大规模城市建设等土木和水利工程施工计算的数学问题

一. 初等变换与同解方程组

一般的线性方程组(Linear Equations)

定义1 关于n个未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的线性方程组，形式如下

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

其中
- $m \in \mathbb{N}$为方程组的个数，
- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$称为系数 (coefficient)，
- $b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le m)$ 称为常数项 (constant term).

📖 线性(一次)方程组的几个基本问题:

Q1. 解的存在问题： 判断方程组是否有解？

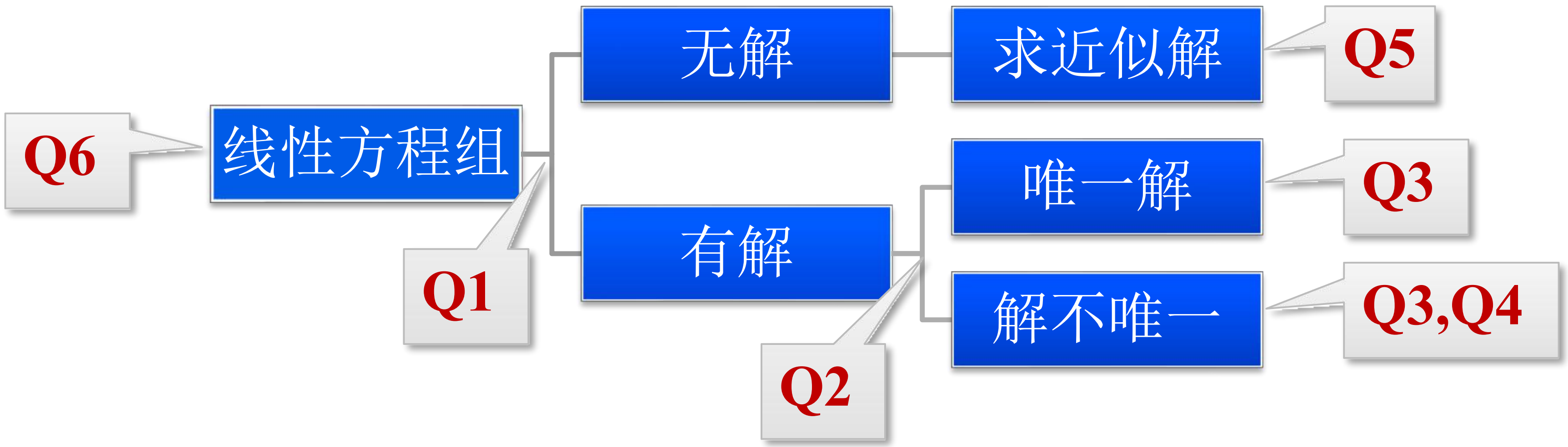
Q2. 解的个数问题： 如果有解, 有多少个解？

Q3. 解的求解问题： 能否给出解的公式，或者给出一个算法求出所有的解？

Q4. 解的结构问题： 解不唯一时解集合结构如何？

Q5. 解的近似问题 ： 如果无解，能否求出一个近似解？

Q6. 对应的几何问题： 线性方程组对应的几何意义是什么？



矩阵(Matrix)的定义

定义2

由 mn 个数排成行列的矩形数表 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

称为类型为 $m\times n$ 的矩阵(matrix), 有时候也简记为$A=(a_{ij})_{m\times n}$

当 $m=n$ 时叫 n 阶方阵 (square matrix).

- 特别地, 当$m=n=1$时, 一个1×1的矩阵就是一个数；反之，一个数可视为一个1×1的矩阵. ——数是特殊的矩阵，矩阵是数在两个方向延伸推广.
- 矩阵中的每个分量a_{ij}的下标 i 与 j, 分别表示其所在的行与列的位置.

📖 线性方程组的矩阵表示

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

系数矩阵 (coefficient matrix)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

增广系数矩阵 (augmented matrix)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)_{m\times(n+1)}$$

注：只有系数和常数项参与了运算，而未知量只起了标记位置的作用

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} ②-①\times2 \\ ③-① \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

交换第2, 3个方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_3 = -18 \end{cases} \quad ③-②\times4$$

为了简化运算过程的表达形式, 只考虑增广矩阵.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 4r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -18 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$ ③ ×1/3

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_3 \to r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 19 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$ ①-③×3 ②+③

$$\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 - 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6. \end{cases}$$ (①+②)/2

$$\xrightarrow{(r_1 + r_2)/2 \to r_1} \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} & \begin{array}{c} 9 \\ -1 \\ -6 \end{array} \end{array}\right)$$

问题1：上述过程使用了哪些操作？

总结一下，中学所用的消元法解方程组，只是对方程进行如下变形：

- 交换两个方程的位置
- 用一个非零数乘以某个方程
- 把一个方程的倍数加到另一个方程上

把上述操作简称为：

- 对换
- 倍乘
- 倍加

统称为方程组的初等变换

(elementary operation)

对应到(增广)系数矩阵的操作：

- 行对换
- 行倍乘
- 行倍加

统称为矩阵的初等行变换

(elementary row operation)

问题： 如上求解方法的理论保证是什么?

定理1：线性方程组的初等变换不改变方程组的解.

证明： 显然，对换和倍乘变换不改变方程组的解。下面考虑倍加的情况。

设把原方程组(1)的第i个方程的k倍加到第j个方程上得到新的方程组，记为(2)式，则(1)与(2)只有第j个方程不同。方程组(2)的第j个方程为：

$$\left(ka_{i1}+a_{j1}\right)x_1+\left(ka_{i2}+a_{j2}\right)x_2+\cdots\left(ka_{in}+a_{jn}\right)x_n=kb_i+b_j \quad (3)$$

设$(c_1,c_2,\ldots,c_n)$是方程组(1)的一个解，则由其第i、j个方程有

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots a_{in}c_n=b_i$$

$$a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots a_{jn}c_n=b_j$$

所以 $$\left(ka_{i1}+a_{j1}\right)c_1+\left(ka_{i2}+a_{j2}\right)c_2+\cdots+\left(ka_{in}+a_{jn}\right)c_n=kb_i+b_j$$

这表明$(c_1,c_2,\ldots,c_n)$也满足方程(3)，即新方程组(2)的第j个方程; 而(2)的其余方程与(1)一样，故$(c_1,c_2,\ldots,c_n)$也为方程组(2)的一个解.

反之，由倍加变换是可逆的过程，可证明(2)的每个解也是(1)的解。具体来说，设$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$为新方程组(2)的一个解，则由其第i、j个方程，有

$$a_{i1}d_1+a_{i2}d_2+\cdots a_{in}d_n=b_i$$

$$\left(ka_{i1}+a_{j1}\right)d_1+\left(ka_{i2}+a_{j2}\right)d_2+\cdots+\left(ka_{in}+a_{jn}\right)d_n=kb_i+b_j$$

这说明

$$a_{j1}d_1+a_{j2}d_2+\cdots a_{jn}d_n=b_j$$

而(1)的其余方程与(2)一样，所以$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$也为方程组(1)的一个解. ■

二. Gauss消元法

由定理知, 对一个线性方程组做初等变换，得到一个新的方程组，则这两个线性方程组是同解的.

具体地，设方程组(1)中x_1的系数不全为零，总可以通过对换，使得 $a_{11}\neq 0$, 于是，把第一个方程的$-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$倍加到第j个方程上 ($2\leq j\leq m$)，即可在第2～m个方程中消去未知量 x_1. 按类似的步骤，考察第2～m个方程，对其他未知量继续做下去。以此类推，便可求解线性方程组.

这样的计算方法就称为Gauss消元法 (Gaussian elimination).

注：在具体求解方程组时,只需对增广系数矩阵$(A, \vec{b})$做初等变换即可.
但, 只能做矩阵的行变换, 不能做列变换! 为什么？


(德, C. F. Gauss, 1777 ~1855)

Guass消元法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

对增广矩阵做初等行变化

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \end{array}\right) \xrightarrow{\left(\begin{matrix}\text{不妨设} \\ a_{11} \neq 0\end{matrix}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a'_{22} \\ \vdots \\ a'_{m2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a'_{2n} \\ \vdots \\ a'_{mn} \end{matrix} & \begin{matrix} b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{matrix} \end{array}\right)$$

（不全为0）

（是否全为0？）

Case1. $a'_{22}, a'_{32}, \cdots a'_{n2}$不全为0,

$$\xrightarrow{(\text{不妨设}a'_{22}\neq 0)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \cdots & \tilde{a}_{3n} & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{n3} & \cdots & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

Case2. $a'_{22}, a'_{32}, \cdots a'_{n2}$全为0,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots$$

（是否全为0？）

结论:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \cdots \quad \begin{array}{c} \text{非}0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i_2} & \cdots & c_{1i_r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & c_{2i_2} & \cdots & c_{2i_r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{ri_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是否为0?
（都有可能）

例2 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$

解:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -3 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 45 & -30 & -10 \\ 0 & 0 & 70 & -15 & -20 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -48 \end{array}\right) \to \underline{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

上面的矩阵的最后一行对应的方程是

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1$$

不管x_1, x_2, x_3, x_4取何值，上式均不可能成立，所以原方程组无解.

例3 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

解:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & -2 & 10 \\ 2 & -2 & -11 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

这时方程组化为 $\begin{cases} x_1 - x_2 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{11}{5} \\ x_3 - \frac{2}{5}x_4 = \frac{2}{5} \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ 或写为 $\begin{cases} x_1 = x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{11}{5} \\ x_3 = \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{11}{5} \\ x_3 = \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} \end{cases} \tag{4}$$

可以看出，对于未知量x_2, x_4的任一组取值， 都可以唯一决定出x_1, x_3的值。称x_1, x_3为主变量，x_2, x_4为自由未知量。用自由未知量表示主变量的(4)式称为方程组的一般解，或者把(4)式表示为如下形式

$$\begin{cases} x_1 = s + \frac{1}{5}t + \frac{11}{5} \\ x_2 = s \\ x_3 = \frac{2}{5}t + \frac{2}{5} \\ x_4 = t \end{cases} \quad (\forall s, t \in \mathbb{R})$$

（有无穷多个解）

三、阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵

定义3 一个矩阵若满足下列条件，称其为**阶梯形矩阵(echelon matrix)**.

(1) 矩阵若有零行（即元素全为0的行），则零行一定全在矩阵的下方.

(2) 对于矩阵的每一个非零行，从左起第1个非零元素称为此行的**主元(pivot)**. 矩阵下面行的主元所在列一定在上面行的主元所在列的右端.

例如：
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

多选题 5分

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

下列哪些是阶梯型矩阵？ （可多选）

A
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

C
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

提交

定义4 一个阶梯矩阵若满足下列条件，称其为**简化阶梯形矩阵(reduced row echelon form, RREF)**.

(1).主元都是1.

(2).每个主元所在的列中，除主元外其他的元素都是0.

例如：

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\
0 & \boxed{1} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

定理2 任一矩阵A都可以通过矩阵的初等行变换化为阶梯形矩阵，进而可再化为简化的阶梯形矩阵.

证明：对矩阵A的行数m作归纳.

(1) $m=1$时，A 已经是阶梯形矩阵，结论显然.

(2) 设结论对$(m-1)$行的矩阵成立，则对任意m行的矩阵来说.

若A的每个元素都为0，则A是阶梯形矩阵.

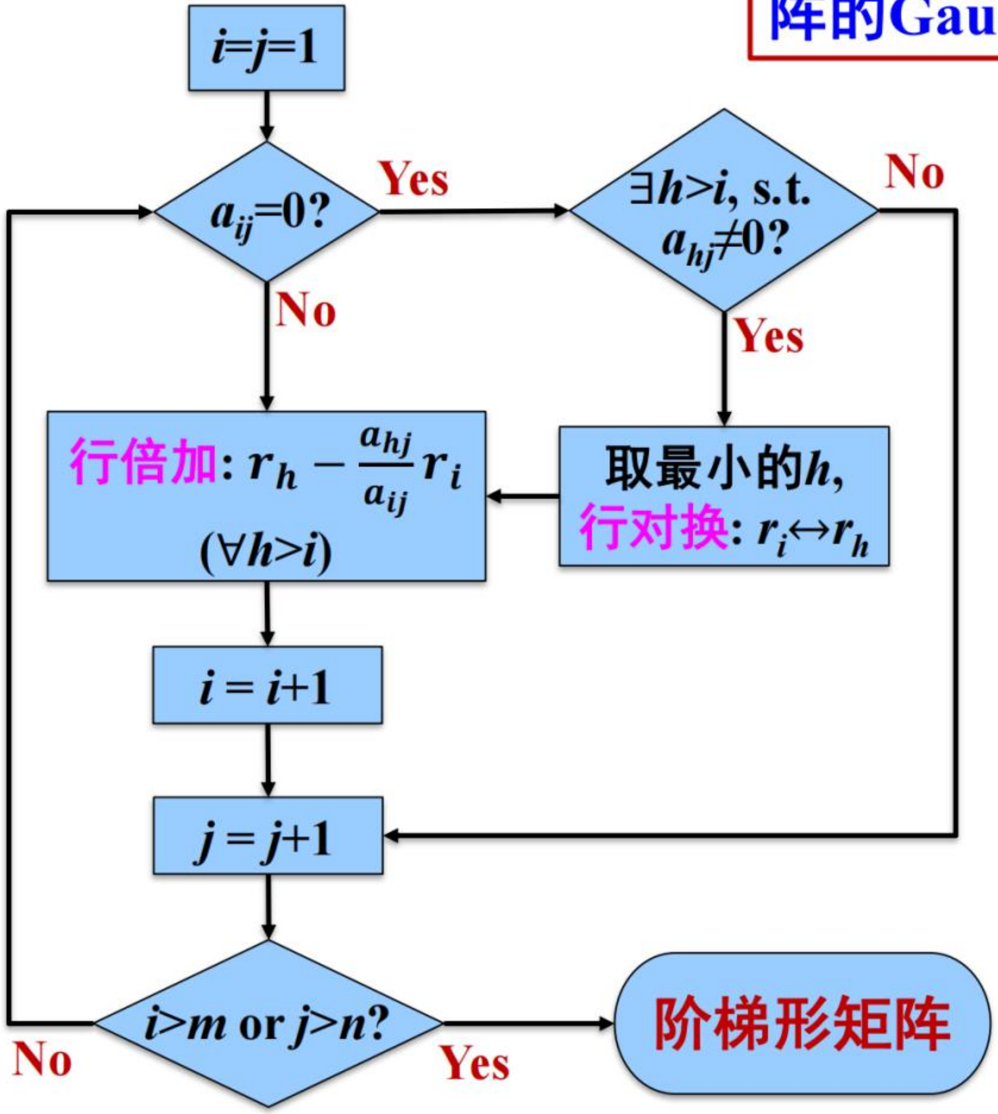
若A中有非零元素，则取列指标最小的一个非零元素，设它在第j列，于是A的第1到第$j-1$列上的元素都为0. 由于可进行行对换，我们可假设$a_{1j}\neq 0$. 对任意第i行($i=2, 3, \ldots, m$), 把A的第一行的$\left(-\frac{a_{ij}}{a_{1j}}\right)$倍加到第$i$行上，设得到的矩阵为$B$，则矩阵$B$的第$j$列上除第1行元素外均为0，即矩阵$B$形如：

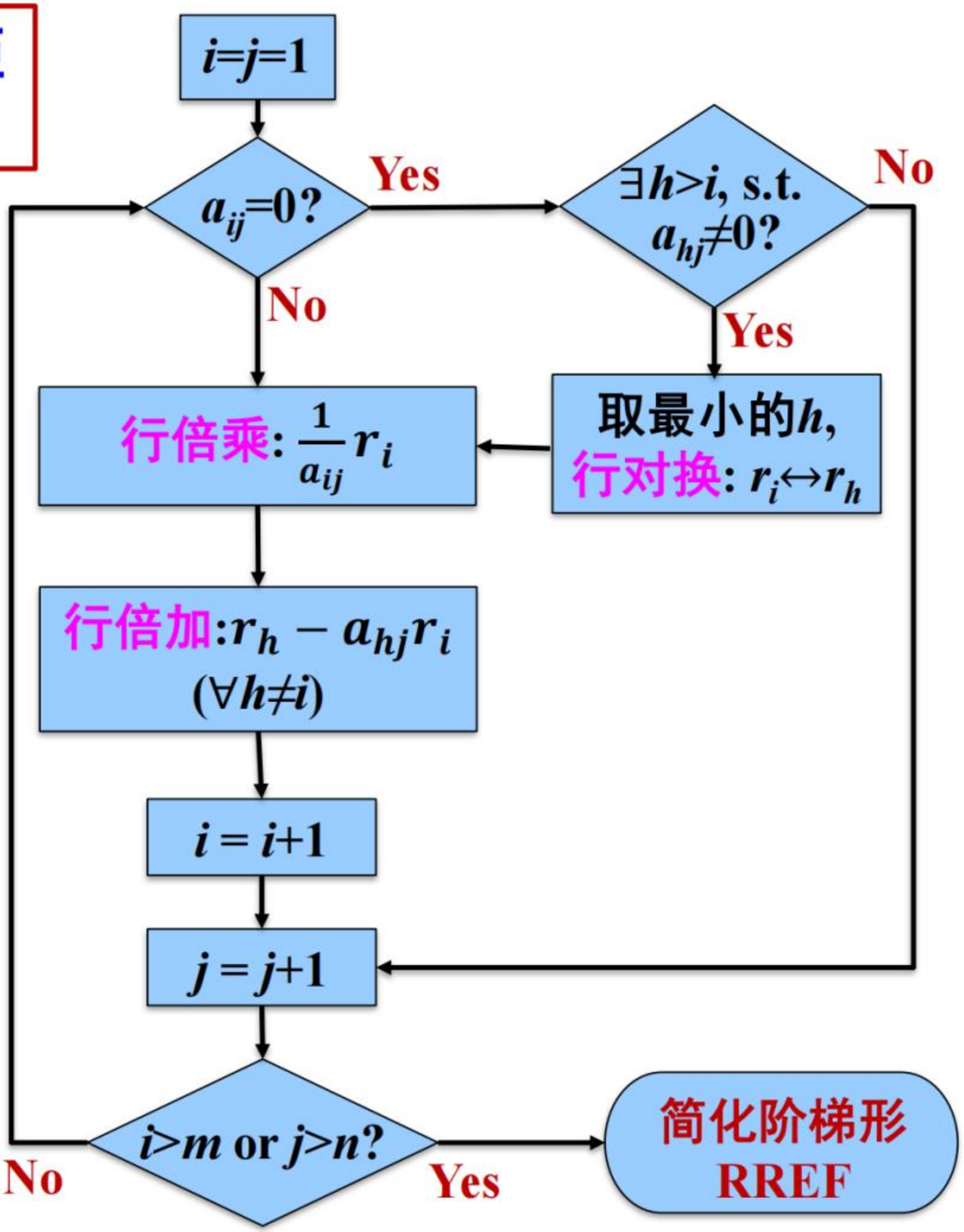
$$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{2,j+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{m,j+1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad \nearrow B_1$$

设$\boldsymbol{B}$的后$\boldsymbol{m-1}$行作成的矩阵为$\boldsymbol{B_1}$，则$\boldsymbol{B_1}$为$\boldsymbol{m-1}$行矩阵.由归纳假设，$\boldsymbol{B_1}$通过初等行变换可化为阶梯形矩阵.再加上$\boldsymbol{B}$的第1行，得到的矩阵仍为阶梯形矩阵. 即矩阵$\boldsymbol{A}$通过初等行变换化为阶梯形矩阵.

把$\boldsymbol{A}$通过初等行变换化成阶梯形后，把非0行乘以适当的非0常数，可把主元素变成1；再从最后一个主元开始，把它所在行的适当倍数加到其他非0行上，可把它上方元素变成0, 以此类推，就可把阶梯形矩阵化为简化的阶梯形矩阵. ■

流程图：对$m \times n$矩阵的Gauss消元法





本讲小结

- 线性方程组的三种初等变换：对换，倍乘，倍加
- 初等变换不改变方程组的解
- 增广矩阵的初等行变换：**Gauss**消元法

上述方法给出一套标准化流程化的求解过程，不管形式如何变化, 诸多解题技巧最终归结为三招——天下武功归于三招,极好地体现了抽象数学的威力, 不愧为“大巧若拙, 大智若愚.”

思考问题：

Gauss消元法何时停止？

Gauss消元法可否判断线性方程组解的情况?(无解，唯一解，很多解)

Gauss消元的过程是不是唯一的？

本讲作业

- 教材76页1（1）（3）