第14课：不定积分/原函数概念和计算

第6章 不定积分/原函数

- **内容：**

  第6.1节 不定积分/原函数概念

  第6.2节 不定积分计算-分部积分与换元法(变量代换)

第14-1课：不定积分/原函数概念

不定积分/原函数概念

- **原函数** (反导数)

  设 $f, F: I \to \mathbb{R}$, I 是一个区间, 如果

  $$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$$

则称F是f 在I上一个原函数 (f 为F的导函数)

- **推论1**：设F是 $f \equiv 0$ 在 I上一个原函数, 则 $\exists C \in \mathbb{R}$, 使得

  $$F(x) = C, \quad \forall x \in I$$

- **推论2**：设F_1和F_2都是f 在I上的原函数, 则 $\exists C \in \mathbb{R}$, 使得

  $$F_1(x) = F_2(x) + C, \quad \forall x \in I$$

第14-1课：不定积分/原函数概念

- **不定积分**：设 $f: I \to \mathbb{R}$，记

$$\int f(x)dx \qquad \text{———— 表示} f \text{ 的所有原函数}$$

称为函数 f 的不定积分

其中称 $\int$ — 积分号，$f(x)$ — 被积函数，x — 积分变量

- **推论3**：设F是 f 在I上一个原函数, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C\text{为任意实数}$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

- **注**：不同C对应不同原函数, 取遍实数得到所有原函数

- **推论4**：设 f 在I上处处可微，则

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \int df(x) = f(x) + C$$

第14-1课：不定积分/原函数概念

➢ **基本不定积分公式**

$$\int dx = \int 1dx = x + C,\quad x \in \mathbb{R}\ (\text{以下区间 } I = \mathbb{R} \text{ 就不再标出了})$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{——验证：} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$$

$$\int e^x dx = e^x + C,\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0,\ \alpha \neq 1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,\quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C,\quad |x| < 1$$

第14-1课：不定积分/原函数概念

- **基本不定积分公式** (续)

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad x>0\ \ (\alpha\neq-1)$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C,\quad x>0\ \text{或}\ x<0$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C,\ \ \int\frac{dx}{\sin^2 x}=\cot x+C,\quad x\in(a,b)=\cdots$$

- **线性性质** (求导验证)

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$$

其中常数α和β不全为0 (否则上式右端为0,左端为任意常数)

第14-1课：不定积分/原函数概念

✓ 例1：$\int(\frac{2}{x^2-2x}-4\sqrt[3]{x})dx=?$

解：原式 $=\int(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}-4x^{\frac{1}{3}})dx$

$$=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{x}-4\int x^{\frac{1}{3}}dx$$

$$=\ln|x-2|-\ln|x|-\frac{4x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C$$

$$=\ln|\frac{x-2}{x}|-3x^{\frac{4}{3}}+C$$

其中自变量区间为 $0<x<2$，或 $x<0$，或 $x>2$ □

第14-1课：不定积分/原函数概念

- 例2：$\int \sin^2(\frac{x}{2})dx = ?$

  解：$\int \sin^2(\frac{x}{2})dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx$

  $$= \frac{1}{2}(\int dx - \int \cos x dx) = \frac{x-\sin x}{2} + C \qquad \square$$

- **注**：类似可以计算

$$\int \cos^2(\frac{x}{2})dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)dx = \frac{x+\sin x}{2} + C'$$

或利用三角公式

$$\int \cos^2(\frac{x}{2})dx = \int [1-\sin^2(\frac{x}{2})]dx$$

$$= x - \frac{x-\sin x}{2} + C' = \frac{x+\sin x}{2} + C'$$

第14-2课：不定积分的计算-分部积分法

- **不定积分计算方法**

  下面只讨论计算方法, 需要的条件假设都可以满足

  回忆：乘积函数的求导公式

$$(uv)' = uv' + vu'$$

由此得到 $\int (uv' + vu')dx = \int (uv)'dx = uv + C$

再移项便导出

- **分部积分公式** (设原函数都存在)

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

或简记为 $\int udv = uv - \int vdu$

第14-2课：不定积分的计算-分部积分法

✓ **例1**：$\int \ln|x|\,dx = ?$

解：考虑应用分部积分公式 $\int u dv = uv - \int v du$

取 $u = \ln|x|,\ v = x,$ 则

$$\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - \int x d(\ln|x|)$$

$$= x\ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \ = x\ln|x| - x + C \qquad \square$$

✓ **例2**：$\int xe^x dx = ?$

解：在分部积分公式中取 $u = x,\ v = e^x,$ 则

$$\int xe^x dx = \int x d(e^x)$$

$$= xe^x - \int e^x dx \ = xe^x - e^x + C \qquad \square$$

第14-2课：不定积分的计算-分部积分法

- ✓ 例3：$\int x^2 e^{3x} dx = ?$　　【分部积分公式 $\int u dv = uv - \int v du$ 】

解：取 $u = x^2$，$v = \dfrac{1}{3} e^{3x}$，则

$$\int x^2 e^{3x} dx = \int x^2 d(\frac{1}{3} e^{3x}) = \frac{1}{3}[x^2 e^{3x} - \int e^{3x} d(x^2)]$$

$$= \frac{1}{3}[x^2 e^{3x} - 2\int x e^{3x} dx] \quad \text{（继续分部积分）}$$

$$= \frac{1}{3}[x^2 e^{3x} - 2\int x d(\frac{1}{3} e^{3x})]$$

$$= \frac{1}{3}[x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}(x e^{3x} - \int e^{3x} dx)]$$

$$= (\frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{9} x + \frac{2}{27}) e^{3x} + C \qquad \square$$

第14-2课：不定积分的计算-分部积分法

✓ 例4：$\int e^x \cos x dx = ?\quad \int e^x \sin x dx = ?$

解：仍考虑分部积分方法, 记

(a) $$A = \int e^x \cos x dx = \int \cos x d(e^x) = \cos x e^x - \int e^x d(\cos x)$$

$$= \cos x e^x + \int e^x \sin x dx = \cos x e^x + B$$

(b) $$B = \int e^x \sin x dx = \int \sin x d(e^x) = \sin x e^x - \int e^x d(\sin x)$$

$$= \sin x e^x - \int e^x \cos x dx = \sin x e^x - A$$

(b)代入(a): $A = \cos x e^x + \sin x e^x - A + C$

整理得到 $$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C_1 \\ B = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C_2 \end{cases} \qquad \square$$

第14-3课：不定积分的计算-换元法

- **不定积分计算方法** (需要的条件都满足)

回忆：复合函数求导公式-链式法则

$$\frac{d}{dx}[F(\varphi(x))]=F'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

对应不定积分公式

(1) $$\int F'(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F(\varphi(x))+C$$

反之记 $F(\varphi(x))=G(x)$，设$u=\varphi(x)$有反函数$x=x(u)$

则 $$\frac{d}{du}G(x(u))=G'(x(u))\frac{dx}{du}$$

$$=F'(\varphi(x))\varphi'(x)\frac{1}{\varphi'(x)}=F'(u)$$

对应不定积分公式

(2) $$\int F'(u)du=G(x(u))+C$$ 综合积分公式(1-2)得——

第14-3课：不定积分的计算-换元法

- **不定积分换元法** (积分变量代换公式)

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$$

其中 $u=\varphi(x)$ 有反函数 $x=x(u)$

- **注**：左端积分变量是x, 右端积分变量是u, 公式含义如下：

  1) 若 $F(u)$是$f(u)$的一个原函数, 则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))+C$$

  2) 若 $G(x)$是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int f(u)du = G(x(u))+C$$

容易看出在含义1)情况下, 不必要求 $u=\varphi(x)$ 有反函数

公式验证：回顾前一页的计算推导 ——

第14-3课：不定积分的计算-换元法

- **不定积分换元法** (积分变量代换公式)

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$$

其中 $u = \varphi(x)$ 有反函数 $x = x(u)$

- **第一换元法** (凑微分)

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d[\varphi(x)] \overset{u=\varphi(x)}{=} \int f(u)du$$

$$= F(u) + C \overset{u=\varphi(x)}{=} F(\varphi(x)) + C$$

- **第二换元法**

$$\int f(u)du \overset{u=\varphi(x)}{=} \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

$$= G(x) + C \overset{x=x(u)}{=} G(x(u)) + C$$

第14-3课：不定积分的计算-换元法

✓ 例5：$\int (x+a)^m dx = ?$

解：$\int (x+a)^m dx = \int (x+a)^m d(x+a) \overset{u=x+a}{=} \int u^m du$

$$= \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \overset{u=x+a}{=} \frac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + C \qquad \square$$

✓ 例6：$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = ? \quad a \neq 0$

解：$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{a[1+(x/a)^2]} d(\frac{x}{a}) \overset{u=x/a}{=} \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2}$

$$= \frac{1}{a}\arctan u + C \overset{u=x/a}{=} \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad \square$$

第14-3课：不定积分的计算-换元法

✓ 例7：$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = ? \quad a>0$

解：$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}} d(\frac{x}{a}) \overset{u=x/a}{=} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

$$= \arcsin u + C \overset{u=x/a}{=} \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad \square$$

✓ 例8：$\int \tan(hx)dx = ? \quad h>0$

解：$\int \tan(hx)dx = \frac{1}{h}\int \tan(hx)d(hx) \overset{u=hx}{=} \frac{1}{h}\int \tan u du$

$$= \frac{1}{h}\int \frac{\sin u}{\cos u} du = -\frac{1}{h}\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} \overset{s=\cos u}{=} -\frac{1}{h}\int \frac{ds}{s}$$

$$= -\frac{1}{h}\ln|s| + C \overset{s=\cos(hx)}{=} -\frac{1}{h}\ln|\cos(hx)| + C \qquad \square$$

第14-3课：不定积分的计算-换元法

✓ 例9： $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = ? \quad x>0$

解：被积函数去根号(有理化)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{dx}{x+x^{5/6}} \overset{x=t^6}{=} \int \frac{d(t^6)}{t^6+t^5}$$

$$= \int \frac{6t^5 dt}{t^6+t^5} = \int \frac{6dt}{t+1} = 6\ln|1+t|+C$$

$$\overset{t=\sqrt[6]{x}}{=} 6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C \qquad \square$$

- **注**：被积函数有理化通常是不定积分的第一步
  下次课系统讨论有理函数的积分方法

第14-3课：不定积分的计算-换元法

✓ 例10： $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = ?\quad |x| < a \ \ (a > 0)$

解：为有理化被积函数, 利用三角公式 $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

引入积分变量代换 $x = a\sin t,\ |t| < \pi/2$

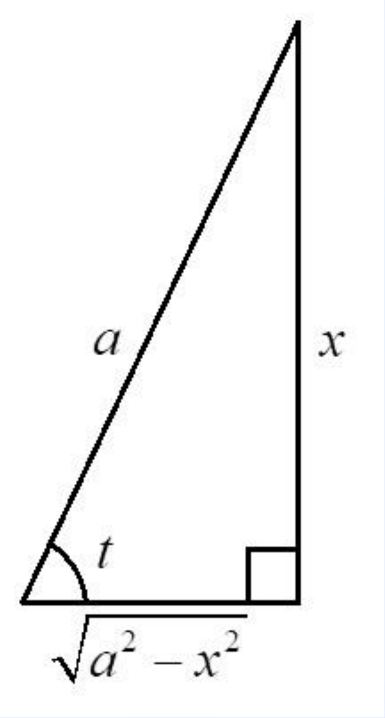
则 $\sqrt{a^2 - x^2} = |a\cos t| = a\cos t,\quad dx = a\cos t dt$

$$\therefore\ I = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int [1 + \cos(2t)]dt$$

$$\overset{u=2t}{=} \frac{a^2}{4}\int (1 + \cos u)du \ = \frac{a^2}{4}(u + \sin u) + C$$

$$= \frac{a^2}{4}(2t + \sin 2t) + C \ = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}) + C \qquad \square$$



第14课：不定积分/原函数概念和计算

- **预习 (下次课内容)：**

  第6.2节 不定积分计算-典型换元问题

  第6.3-6.4节 有理函数积分与三角有理式积分

- **作业 (本次课)：**

  练习题6.1：1(11-14[其余自己练习]).

  练习题6.2：1(1-2,5-6,8-9[其余自己练习]), 2-3,

  4(8-10,16-18,22-24,28-30[其余自己练习]),8*.