习题课材料（十）

习题 1. 设 A,B 是 n 阶方阵, 且满足 $AB=BA$.

1. 证明, 若 A 有 n 个不同的特征值, 则 B 可对角化.
2. 若 A 有代数重数大于 1 的特征值, B 是否一定可对角化？

习题 2. ♡ 给定 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=BA$.

1. 证明, 若 A 有 n 个不同的特征值, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.
2. 证明, 若 $A=J_n(\lambda)$, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.
3. 举例说明, 存在 A,B 满足 $AB=BA$, 但不存在多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

习题 3. ♡♡ 证明, 任意迹为 0 的方阵相似于一个对角元素全为 0 的方阵.

习题 4. 利用 Jordan 标准形证明, A 与 A^{T} 相似.

习题 5. 给定 m 阶方阵 A_1, n 阶方阵 A_2 和 $m\times n$ 矩阵 B. 证明:

1. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 则关于 $m\times n$ 矩阵 X 的 Sylvester 方程 $A_1X-XA_2=B$ 有唯一解.
2. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 则存在唯一的矩阵 X 满足
$$\begin{bmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}.$$
3. 对 n 阶方阵 A, 存在可逆矩阵 X, 使得
$$X^{-1}AX=\begin{bmatrix} \lambda_1 I+N_1 & & & \\ & \lambda_1 I+N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I+N_s \end{bmatrix},$$
其中 $N_1,N_2,\ldots,N_s$ 是严格上三角矩阵.

4. ♡ 如果 $m>n$ 且 $A_1=J_m(0),A_2=J_n(0),B=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$, 即 B 除第一行外元素全为 0, 则关于 $m\times n$ 矩阵 X 的 Sylvester 方程 $A_1X-XA_2=B$ 有解, 于是存在矩阵 X 满足

$$\begin{bmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}.$$

5. 对 n 阶方阵 $A=\begin{bmatrix} J_{k_1}(0) & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{a}_r^{\mathrm{T}} \\ & J_{k_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_r}(0) \end{bmatrix}$, 其中 $k_1>k_2\geq\cdots\geq k_r$ (即 A 是一个 Jordan 标准形与除第一行外元素全为 0 的矩阵的和), 存在可逆矩阵 X, 使得

$$X^{-1}AX=\begin{bmatrix} J_{k_1}(0) & & & \\ & J_{k_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_r}(0) \end{bmatrix}.$$

习题 6. 设实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$, 有一个单特征值 -3, 求 a 的值和 A 的谱分解.

习题 7. 设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\in\mathcal{N}(A)$, 求 A 及其谱分解.

习题 8. 求下列实对称矩阵 A 的谱分解:

1. A 满足 $A^3=O$.

2. $A=a_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}+a_2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组标准正交基, a_1,a_2 为实数.

3. $A=\begin{bmatrix} O & M \\ M & O \end{bmatrix}$, 其中 M 是 n 阶对称矩阵, 有谱分解 $M=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$.

习题 9. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 计算满足下列条件的 b 的取值范围:

1. A 不可逆.
2. A 可以正交对角化.
3. A 不可对角化.

习题 10. ♡ 设 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 是 m 个两两可交换的实对称矩阵, 证明它们可以同时正交对角化.