〇、半期考题讲解

①、导数与单调性

②、导数与极值

③、导数与凹凸性

1^{∞}型，取对数

计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{2023}{n}+2\sin\frac{2023}{n}\right)^n$.

$$\left(\cos\frac{2023}{n}+2\sin\frac{2023}{n}\right)\to 1$$

此极限为"1^{∞}"，型
但这是个“1”，不是真【1】
典型错误1：直接写1
典型错误2：忘记回头带上e

$$\lim_{n\to+\infty} n * ln\left[1+\boxed{\left(cos\frac{2023}{n}+2sin\frac{2023}{n}-1\right)}\right] \longrightarrow 0$$

$$\boxed{\begin{gathered}\ln(1+\blacksquare)\sim\blacksquare\\(\blacksquare\to 0)\end{gathered}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{cos\frac{2023}{n}-1+2sin\frac{2023}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$\frac{1}{n}$ 是基本单元，考虑用Heine定理（课本P75 定理2.9）

$$\lim_{x\to 0}\frac{(cos2023x-1)+(2\,sin\,2023x)}{x}=0+2*2023=4046$$

$$\therefore a_n\to e^{4046}\ (n\to+\infty)$$

关键是用定义法

2.(7%) 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x(1-x^2), x \text{ 为有理数},\\ x(1+\sqrt{x}), x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

的连续性和可微性.

1、先讨论连续性

当$x\geq\ 0$时　在$\forall\, x_0$处，由于有理数和无理数的稠密性，总可取一个有理子列$\{a_n\}$和一个无理子列$\{b_n\}$趋于x_0

则$f(a_n)\to x_0(1-x_0^2)=A$　　$f(b_n)\to x_0(1+\sqrt{x_0})=B$

若f在x_0处连续，则必有$A=B$成立　　$x_0=0$

所以f在0处右连续，其他任何点都不连续

连续都谈不上，何谈可导可微？
（可导(微)必连续）

2、再讨论0处的可导性

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\begin{cases} 1-x^2, & x\in Q\\ 1+\sqrt{x}, & x\in R\backslash Q \end{cases}=\ 1$$

所以f在0处右导数存在为1　　不能带公式求导！

关键是用定义法

3.(8%) 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{e^{x-1}-1}, & x\neq 1\\ \frac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

在$x=1$处的可导性.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{e^{x-1}-1}-\frac{1}{2}}{x-1}$$

换元，令$x-1=t, t\to0$，$x=t+1$

$$\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{2}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{(2-t)(e^t-1)-2t}{2t^3}$$

法1：洛必达

$$\lim_{t\to0}\frac{(2-t)(e^t-1)-2t}{2t^3}=\lim_{t\to0}\frac{e^t(1-t)-1}{6t^2}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{-te^t}{12t}=-\frac{1}{12}$$

$$\therefore f'(1)=-\frac{1}{12}$$

关键是用定义法

3.(8%) 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{e^{x-1}-1}, & x\neq 1\\ \frac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

在$x=1$处的可导性.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{e^{x-1}-1}-\frac{1}{2}}{x-1}$$

换元，令$x-1=t, t\to 0$，$x=t+1$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{e^{t}-1}-\frac{1}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(2-t)(e^{t}-1)-2t}{2t^3}$$

法2：Taylor展开

$$\lim_{t\to 0}\frac{(2-t)\left(\mathrm{t}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)-2t}{2t^3}=-\frac{1}{12}$$

单调有界 + Stolz定理

4.(10%) 设$x_1 > 0$ 且$\forall n \geqslant 1$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$. 求证:

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求其值.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 2$.

(1) 只剩下单调有界准则 或 Cauchy 收敛定理能用

考虑单调有界准则

由题设立刻可知 $\forall n \geq 1$，均有 $x_n > 0$(数学归纳法)

$\ln(1 + x) \leq x \ (x \geq 0)$ 当且仅当$x = 0$取等

$\therefore x_{n+1} = \ln(1 + x_n) < x_n \ (x \geq 0)$ 所以，$\{x_n\}$单调递减有下界0，必有极限

设极限值为A

$0 \leq A = \ln(1 + A) \leq A$ $A = 0$

单调有界 + Stolz定理

4.(10%) 设$x_1>0$ 且$\forall n\geqslant 1$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 求证:

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求其值.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=2$.

(2) 考虑构造出$f(x_n)$,再利用Heine定理令$x=x_n$,函数极限易求

关键是消去n

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{x_n}}$ $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$严格单增趋于无穷 由stolze定理

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}-x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+x_{n-1})x_{n-1}}{x_{n-1}-\ln(1+x_{n-1})}$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)\,x}{x-\ln(1+x)}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=2$$

Cauchy列 + Lagrange

5.(10%) 设数列$\{a_n\}$满足递推公式$a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, 其中$f(x)$是一个可导函数，且存在一个常数$L\in(0,1)$使得$|f'(x)|\le L$, 证明：数列$\{a_n\}$收敛.

证明： 由Lagrange中值定理, $|a_{n+2}-a_{n+1}|=|f(a_{n+1})-f(a_n)|=|f'(\xi)(a_{n+1}-a_n)|\le L|a_{n+1}-a_n|$. 所以

$$|a_{n+2}-a_{n+1}|\le L|a_{n+1}-a_n|\le L^2|a_n-a_{n-1}|\le\cdots\le L^n|a_2-a_1|.$$

因此对任意$p\in\mathbb{N}^*$, 有

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\&\le L^{n+p-2}|a_2-a_1|+L^{n+p-3}|a_2-a_1|+\cdots+L^{n-1}|a_2-a_1|\\&\le\frac{L^{n-1}}{1-L}|a_2-a_1|\to0\ \ (n\to\infty)\end{aligned}$$

因此由Cauchy收敛定理，数列$\{a_n\}$收敛。

函数作图 或 Rolle定理

6.(8%)证明：方程$e^x - x^{2023} = 0$至多有二个不同的零点.

Taylor中值问题

7.(10%) 设f在$[a,b]$内二阶可导，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得
$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi).$$

根据Taylor公式将$f(x)$ 点$\frac{a+b}{2}$处展开到二阶导数项:

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \qquad \xi_1\in(\frac{a+b}{2},b)$$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \qquad \xi_2\in(a,\frac{a+b}{2})$$

两式相加得

Taylor中值问题

7.(10%) 设f在$[a,b]$内二阶可导，证明：存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi).$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \qquad \xi_1 \in \left(\frac{a+b}{2},b\right)$$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \qquad \xi_2 \in \left(a,\frac{a+b}{2}\right)$$

两式相加得

$$f(\mathrm{b})+f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{4}(b-a)^2\left[\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\right]$$

由导数的介值性,存在$\xi \in (\xi_2,\xi_1)$ 使得,$f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$

中值问题

9.(10%) 设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导，且存在常数$M > 0$使得$|f''(x)| \le M$，证明：对于任意$x_1 < x_2$，只要$f(x_1) = f(x_2)$，就有$|f'(x_1)| + |f'(x_2)| \le M(x_2 - x_1)$.

证明： 对于任意$x_1 < x_2$满足$f(x_1) = f(x_2)$，由Rolle中值定理，存在$c \in (x_1, x_2)$使得$f'(c) = 0$. 从而由Lagrange中值定理，

$$\exists \xi \in (x_1, c) \text{ 使得} f'(c) - f'(x_1) = f''(\xi)(c - x_1),$$

$$\exists \eta \in (c, x_2) \text{ 使得} f'(x_2) - f'(c) = f''(\eta)(x_2 - c),$$

因此
$$|f'(x_1)| = |-f''(\xi)(c - x_1)| \le M(c - x_1),$$
$$|f'(x_2)| = |f''(\eta)(x_2 - c)| \le M(x_2 - c),$$

所以$|f'(x_1)| + |f'(x_2)| \le M(x_2 - x_1)$.

中值问题

10.(10%) 假设 $x_0\in(a,b)$，而 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 可导且在点 x_0 处二阶可导使得 $f''(x_0)\neq 0$，求证:

(1) $\forall x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$, $\exists\theta(x)\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'\big(x_0+\theta(x)(x-x_0)\big)\cdot(x-x_0).$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

(1) $\forall x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$，由于 f 为可导函数，则 f 在以 x_0,x 为端点的闭区间上可导，从而由 Lagrange 中值定理可知所证结论成立.

中值问题

10.(10%) 假设 $x_0 \in (a,b)$，而 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 可导且在点 x_0 处二阶可导使得 $f''(x_0)\neq 0$，求证:

(1) $\forall x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$, $\exists\theta(x)\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'\big(x_0+\theta(x)(x-x_0)\big)\cdot(x-x_0).$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

(2) 由于 $f''(x_0)$ 存在，而又由夹逼原理可得知 $\lim\limits_{x\to x_0}\theta(x)(x-x_0)=0$,

$$\begin{aligned}
f''(x_0) &= \lim_{y\to x_0}\frac{f'(y)-f'(x_0)}{y-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'\big(x_0+\theta(x)(x-x_0)\big)-f'(x_0)}{\theta(x)(x-x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{\theta(x)(x-x_0)^2}.
\end{aligned}$$

中值问题

10.(10%) 假设 $x_0\in(a,b)$, 而 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 可导且在点 x_0 处二阶可导使得 $f''(x_0)\neq 0$, 求证:

(1) $\forall x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$, $\exists\theta(x)\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'\big(x_0+\theta(x)(x-x_0)\big)\cdot(x-x_0).$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

再由 L'Hospital 法则与导数的定义可得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

又 $f''(x_0)\neq 0$, 于是我们有

$$\lim_{x\to x_0}\theta(x)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{f''(x_0)(x-x_0)^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

中值问题

11.(10%) 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 可导且在 (a,b) 内二阶可导. 如果 $f(a)=f(b)$ 且 $f'_+(a)f'_-(b)>0$,求证: $\exists\rho\in(a,b)$ 使得 $f''(\rho)=0$.

由于 $f'_+(a)f'_-(b)>0$, 不失一般性, 我们可以假设 $f'_+(a)>0$, $f'_-(b)>0$(否则考虑 $-f$).

于是由导数的定义以及函数极限的保号性可知 $\exists c,d\in(a,b)$使得$\forall x\in(a,c]$,

均有 $f(x)>f(a)$, 而 $\forall x\in[d,b)$, 则有 $f(x)<f(b)=f(a)$.

$$c<d,\quad f(c)>f(a),\ f(d)<f(a).$$

从而由连续函数介值定理知, $\exists\lambda\in(c,d)$ 使得 $f(\lambda)=f(a)$.

又因为 f 可导, 并且 $f(a)=f(\lambda)=f(b)$, 于是由 Rolle 定理可知, $\exists\xi_1\in(a,\lambda)$, $\exists\xi_2\in(\lambda,b)$ 使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

故由 Rolle 定理可知,$\exists\rho\in(\xi_1,\xi_2)$ $f''(\rho)=0$.

一致连续性

8.(10%) 设$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上可导，证明：$f'(x)$在$[a,b]$上连续的充要条件是$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当$0<|h|<\delta$时，对任意$x\in[a,b]$有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

（必要性）由于$f'(x)$在$[a,b]$上连续，所以一致连续，因此$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

当$x_1,x_2\in[a,b]$且$|x_1-x_2|<\delta$时有$|f'(x_1)-f'(x_2)|<\varepsilon.$

因此，当$0<|h|<\delta$时，对任意$x\in[a,b]$，有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|=|f'(\xi)-f'(x)|<\varepsilon,$$ 其中ξ在x与$x+h$之间.

一致连续性

8.(10%) 设$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上可导，证明：$f'(x)$在$[a,b]$上连续的充要条件是$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|h|<\delta$时，对任意$x\in[a,b]$有

$$\left|\frac{f(\boxed{x}+h)-f(\boxed{x})}{h}-f'(\boxed{x})\right|<\varepsilon.$$

（充分性）由已知条件，$\forall x_0\in[a,b]$，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|h|<\delta$时，只要$x_0+h\in[a,b]$，就有

$$|f'(x_0+h)-f'(x_0)|$$

$$=\left|f'(x_0+h)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|$$

$$\le\left|f'(\boxed{x_0+h})-\frac{f(\boxed{x_0+h}-h)-f(\boxed{x_0+h})}{-h}\right|+\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|<2\varepsilon.$$

所以$f'(x)$在x_0处连续．由x_0的任意性得$f'(x)$在$[a,b]$上连续．

中值定理构造类问题

设函数f在$[0,1]$上有三阶导函数，且 $f(0)=f(1)=0$. 令$F(x)=x^2f(x)$求证：
存在$\xi\in(0,1), F'''(\xi)=0$

因为$F(0)=F(1)=0$, 所以由罗尔定理，知$\exists x_1\in(0,1), F'(x_1)=0$

又因为$F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$, $\quad \mathrm{F}'(0)=F'(x_1)=0$

所以 $\quad \exists x_2\in(0,x_1), F''(x_2)=0$

又因为$F''(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+x^2f''(x)$, $\quad \mathrm{F}''(0)=F''(x_2)=0$

$$\therefore \exists \xi\in(0,x_2)\in(0,1), \qquad F'''(\xi)=0$$

注意区分各条件的[充要性]和[充分性]

设函数f在区间$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,那么:

- f在$[a,b]$上递增（减） $\Leftrightarrow$ $f' \geqslant 0(\leqslant 0)$在$(a,b)$内成立.
- $f' > 0(< 0)$在(a,b)内成立. $\Rightarrow$ f在$[a,b]$上严格递增（严格递减）
- f在$[a,b]$上严格递增（严格递减）的充要条件:
  1° 当$x \in (a,b)$ 时，$f' \geqslant 0(\leqslant 0)$ ；
  2° 在 (a,b)的任何开子区间内，$f' \neq 0$.

利用单调性证明不等式

(3) $\boxed{x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x \quad (x>0)}$

设 $g(x)=\sin x-x-\dfrac{x^3}{6}$

则 $g'(x)=\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$

于是 $g''(x)=x-\sin x>0$

所以 $g'(x)>g(0)=0$

于是 $g(x)>g(0)=0$

(4) $\boxed{\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)}$

设 $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{\arctan x}{1+x}$

则 $g'(x)=\dfrac{x^2+x^3+(1+x^2)\arctan x}{(1+x)^2(1+x^2)}>0$

于是 $g(x)>g(0)=0$

所以 $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$

利用单调性证明不等式

证明不等式（2）

当$x,y>0$ 且$\beta>\alpha>0$时，$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>\left(x^\beta+y^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$

$$f(\beta)=\left(x^\beta+y^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}-(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

显然$f(\alpha)=0$，只要证$f'<0$

$$f'(\beta)=\left(x^\beta+y^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}*\frac{g(\beta)}{\beta^2}$$

因此只需$g(\beta)<0$

$$g(\beta)=\frac{x^\beta\ln x^\beta+y^\beta\ln y^\beta}{x^\beta+y^\beta}-\ln(x^\beta+y^\beta)$$

$$\frac{x^\beta}{x^\beta+y^\beta}\ln x^\beta<\frac{x^\beta}{x^\beta+y^\beta}\ln(x^\beta+y^\beta)\qquad\frac{y^\beta}{x^\beta+y^\beta}\ln y^\beta<\frac{y^\beta}{x^\beta+y^\beta}\ln(x^\beta+y^\beta)$$

证毕

极值应用

内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$、边平行于坐标轴的矩形，何时面积最大?

设矩形右上角的坐标是 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$，那么矩形的面积就是：

$$4ab\cos\theta\sin\theta \ = \ 2ab\sin 2\theta.$$

因此当 $\theta \ = \ \pi/4$ 时，即矩形的长和宽分别是$\sqrt{2}a$ 和$\sqrt{2}b$时矩形的面积最大

极值应用

求出使得不等式$a^x \geq x^a (x > 0)$成立的一切正数a.

作恒等变形：

$$a^x \geq x^a \Leftrightarrow e^{xlna} \geq e^{alnx} \Leftrightarrow \frac{lna}{a} \geq \frac{lnx}{x}$$

$$f(x) = \frac{lnx}{x} \qquad f_{max} = f(e) = \frac{1}{e}$$

$$\therefore \quad a = e$$

凸函数的定义

证明：同一区间上的两个凸函数之和仍为凸函数

假设 f 和 g 是区间 I 上的两个凸函数，那么对 I 中任意两个不同的数 $x1$ 和 $x2$ ，有：

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)+g(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\lambda_1 g(x_1)+\lambda_2 g(x_2)$$

$$=\lambda_1[f(x_1)+\mathrm{g}(x_1)]+\lambda_2[f(x_2)+\mathrm{g}(x_2)]$$

$$(\lambda_1+\lambda_2=1,\qquad \lambda_1,\lambda_2>0)$$

$\therefore f+g$在区间 I 上也是凸函数

凸函数的定义

设f：$[a,b]\to \boldsymbol{R}$ 为凸函数. 如果有$c\in(a,b)$, 使得$f(a)=f(c)=f(b)$
求证：f 为常值函数

设存在一点$x_0\in(a,b)$,有$f(x_0)\neq f(a)=K$, 则：

$$f(x_0)=f\left(\frac{b-x_0}{b-a}\,a+\frac{x_0-a}{b-a}\,b\right)<\frac{b-x_0}{b-a}f(a)+\frac{b-x_0}{b-a}f(b)=K$$

$$f(x_0)<K$$

假设$x_0\in(a,\mathrm{c})$,我们在(x_0,b)上再做一次：

$$f(c)=f\left(\frac{b-\mathrm{c}}{b-x_0}\,x_0+\frac{c-x_0}{b-x_0}\,b\right)<\frac{b-\mathrm{c}}{b-x_0}f(x_0)+\frac{c-x_0}{b-x_0}f(b)<K$$

$f(c)<K$ 矛盾！

因此 f 是常值函数

用充要条件判断凸性

判断以下函数的凸性：

(3) $f(x) = ln\left(\frac{1}{x}\right), x > 0$

(4) $f(x) = xlnx \,, x > 0$

(5) $f(x) = -sinx, x \in [0, \pi]$

均为是凸函数的：

$$(3) f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

$$(4) f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

$$(5) f''(x) = sinx \geq 0$$

凸函数的定义+充要条件

设函数f在区间$[0,+\infty]$上可导, $f(0)=0$ ， 且f'严格递增. 求证: $\frac{f(x)}{x}$在区间$(0,+\infty]$上也严格递增

因为f'是严格递增的，所以f是严格凸函数. 于是对于$x_2>x_1>0$有

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_2-x_1}{x_2}0+\frac{x_1}{x_2}x_2\right)<\frac{x_2-x_1}{x_2}f(0)+\frac{x_1}{x_2}f(x_2)=\frac{x_1}{x_2}f(x_2)$$

于是 $$\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_2)}{x_2}$$

所以 $\frac{f(x)}{x}$ 在$(0,+\infty)$上严格递增

凸函数的定义+充要条件

设函数f在$\boldsymbol{R}$上有界且$f'' \geq 0$. 证明:

f为常值函数

假设f不是常值的，那么存在两点a和b使得$f(a) \neq f(b)$.

不妨设 $a > b$ 且 $f(a) > f(b)$. 则由 f 的凸性知，对于 $c > b$ 有:

$$f(b) = f\left(\frac{b-a}{c-a}c + \frac{c-b}{c-a}a\right) \leq \frac{b-a}{c-a}f(c) + \frac{c-b}{c-a}f(a)$$

所以 $$f(c) \geq f(a) + \frac{c-a}{b-a}[f(b) - f(a)]$$

令$c \to +\infty$则 $f(c) \to +\infty$ 与f有界矛盾!

$\therefore$ f是常值函数.

凸函数的定义+充要条件

设函数f在$[a,b]$上连续，导函数f'在(a,b)上递增. 求证：对任何$x \in (a,b)$，有

$$(b-x)f(a)+(x-a)f(b) \geq (b-a)f(x)$$

因为f在$[a,b]$上是凸的：

$$\therefore\ f(x)=f\left(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b\right) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

构造凸函数—利用琴生不等式

证明下列不等式，并指出等号成立的条件

$$(3)\quad \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \le \left(x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n}\right)^{\frac{1}{x_1+x_2+\cdots x_n}} \qquad (x_i>0)$$

即证：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}(x_1 lnx_1 + x_2 lnx_2 + x_n lnx_n)$$

构造：

$$f(x)=xlnx, \qquad f''(x)=\frac{1}{x}>0$$

由琴生不等式：

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\ ,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1,\lambda_i>0$$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时取等

构造凸函数—利用琴生不等式

证明下列不等式，并指出等号成立的条件

$$(4) x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1, \lambda_i>0)$$

即证：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i ln x_i \le \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$$

构造：

$$f(x) = -lnx, \qquad f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

由琴生不等式：

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\ , \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1, \lambda_i>0$$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时取等

凸函数的几何意义

设 $a < b < c < d$. 求证:
若 f 在$[a,c]$及$[b,d]$上为凸函数, 那么 f 在$[a,d]$上也是凸函数

对任意的$x_1, x_2 \in [a,d]$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 如果x_1, x_2 在$[a,c]$或$[b,d]$内，显然成立.

当$x_1 < b$, $x_2 > c$时，任取$x \in (x_1, x_2)$，分类讨论

当$x_1 < b, x_2 > c$时，任取$x \in (x_1, x_2)$，分类讨论

① $x \in (x_1, b]$　　利用$[b,d]$上的凸性:

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \qquad \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \le \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c} \qquad \frac{f(c)-f(x)}{c-x} \le \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}$$

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \le \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}$$

再利用$[a,c]$上的凸性:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(c)-f(x)}{c-x} \qquad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

凸函数的几何意义

设 $a < b < c < d$. 求证：

若 f 在$[a,c]$及$[b,d]$上为凸函数，那么 f 在$[a,d]$上也是凸函数

② $x \in (b,c)$

利用$[a,c]$上的凸性：$\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \dfrac{f(c)-f(x)}{c-x}$　　再利用$[b,d]$上的凸性：$\dfrac{f(c)-f(x)}{c-x} \le \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

$$\therefore \quad \frac{f(c)-f(x)}{c-x} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

$$\therefore \quad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

凸函数的几何意义

设 $a<b<c<d$. 求证:
若 f 在$[a,c]$及$[b,d]$上为凸函数, 那么 f 在$[a,d]$上也是凸函数

③ $x\in[c,x_2)$

利用$[a,c]$上的凸性: $\dfrac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1}\le\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

再利用$[b,d]$上的凸性: $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\le\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$

$$\therefore\quad \frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1}\le\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

$$\therefore\quad \frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1}\le\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

利用$[b,d]$上的凸性: $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}\le\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

$$\therefore\quad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

同学们辛苦了！

谢谢！