补充：基本导数（微分）公式

(1) $(C)' = 0$

(2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

(3) $(e^{x})' = e^{x}$

(4) $(a^{x})' = a^{x}\ln a$

(5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

(7) $(\sin x)' = \cos x$

(8) $(\cos x)' = -\sin x$

(9) $(\tan x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(10) $(\cot x)' = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(11) $(\sec x)' = \sec x \tan x$

(12) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

(13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(16) $(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

第9课：高阶导数-微分中值定理

第3章 函数的导数

- **内容：**

  第3.3节　高阶导数

  第3.4节 中值定理：Rolle-Lagrange-Cauchy

第9-0课：导数运算法则复习补充

- **对数求导法**(适用于乘除-开方-幂-指数函数)：
- **原理**：令 $y=f(x)\neq 0$，则$\ln|y|=\ln|f(x)|$，由链式法则

$$\frac{d}{dx}(\ln|y|)=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\ln|f(x)|),$$

整理得 $$\frac{dy}{dx}=f(x)\frac{d}{dx}(\ln|f(x)|)$$

✓ **例1**：求导 $y=u(x)^{v(x)}$，其中$u(x)>0, v(x)$ 都是可导函数

解：用对数求导法

$$\ln y=v(x)\ln u(x),\quad \frac{d}{dx}(\ln y)=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)},$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=y\frac{d}{dx}(\ln y)$$

$$=u(x)^{v(x)}[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}] \qquad \square$$

第9-1课：高阶导数及其计算

高阶导数及其计算

- **回忆**：初等函数的导数仍是初等函数
- **导函数**：令I为一个区间，设 $f:I\to\mathbb{R}$ 在I上每一点可导

这时得到 $f':I\to\mathbb{R}$ 称为f 的导函数

- **高阶导数**：设 $f':I\to\mathbb{R}$ 如上，$x_0\in I$，定义

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\qquad \text{(若极限存在的话)}$$

称为f 在x_0点的二阶导数，也即 $f''=(f')'$

进一步可以定义三阶导数 $f'''=(f'')'=(f')'',\cdots\cdots$

以致n阶导数, 记为 $f^{(n)}=(f^{(n-1)})',\ n=1,2,3,\cdots,\quad f^{(0)}=f$

第9-1课：高阶导数及其计算

- **Leibniz记号**：令 $y=f(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}),\quad \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}),\quad n=1,2,\cdots$$

【注意】容易出现的记号错误

$$\frac{d^2y}{d^2x}\times \quad \frac{dy^2}{dx^2}\times \quad \frac{dy}{dx^2}\times \quad \frac{d^2y}{dx}\times$$

- **物理意义**：令 $s=f(t)$ 表示 t 时刻某物体沿直线的位移

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=f'(t)$$ 物体瞬时速度

$$\alpha(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=f''(t)$$ 物体加速度——速度的增加率

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d^3s}{dt^3}=f'''(t)$$ 加速度的增加率(很少用到)

第9-1课：高阶导数及其计算

✓ **例1：** $y = e^{\lambda x} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

$$y' = \lambda e^{\lambda x},\ \ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},\ \ \cdots,\ y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x},\ n = 1, 2, \cdots$$

✓ **例2：** $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin(x + \pi/2), \qquad y'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$$

$$y''' = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2),\ \ y^{(4)} = \sin x = \sin(x + 2\pi)$$

一般而言 $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2}),\ n = 1, 2, \cdots$

同理有 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \dfrac{n\pi}{2}),\ n = 1, 2, \cdots$

✓ **例3：** $y = ax^2 + bx + c$

$$y' = 2ax + b,\ \ y'' = 2a,\ \ y''' = 0,\ \ y^{(n)} = 0,\ n = 3, 4, \cdots$$

✓ **推广：** 令 $P_m(x)$为一个m 次多项式, 则

$$P_m^{(n)}(x) = 0,\ n = m + 1, m + 2, \cdots$$

第9-1课：高阶导数及其计算

- **高阶导数的计算**：设函数 f, g 都在 I 上有 n 阶导数, 则

  1) $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$

  2) $(cf)^{(n)} = cf^{(n)}$， c为常数

  3) $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$， $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (组合数)

上面公式3) 称为Leibniz公式

【回忆】比较二项式公式 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

证：1-2)容易，3)先观察 $(fg)' = f'g + fg'$

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)''' = (f''g + 2f'g' + fg'')' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

归纳：$(fg)^{(n+1)} = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)})' = \cdots$（留给感兴趣的同学练习）

第9-1课：高阶导数及其计算

✓ 例4： $y=x^2e^{\lambda x}$，求 $y^{(n)}=?$

解：应用Leibniz公式, 注意 $(x^2)^{(k)}=0,\ k=3,4,\cdots$

$$y^{(n)}=(x^2e^{\lambda x})^{(n)}$$

$$=x^2(e^{\lambda x})^{(n)}+n(x^2)'(e^{\lambda x})^{(n-1)}$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}(x^2)''(e^{\lambda x})^{(n-2)}$$

$$=\lambda^n x^2e^{\lambda x}+2n\lambda^{n-1}xe^{\lambda x}+n(n-1)\lambda^{n-2}e^{\lambda x}$$

$$=[\lambda^n x^2+2n\lambda^{n-1}x+n(n-1)\lambda^{n-2}]e^{\lambda x}$$

$$n=0,1,2,\cdots$$ □

第9-1课：高阶导数及其计算

✓ **例5**：$y=\arctan x$，求 $y^{(100)}(0)=?$

解：$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，$y''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，$y'''=\cdots$，

注意 $(1+x^2)y'=1$ 对于所有 x 都成立, 应用Leibniz公式：

$$[(1+x^2)y']^{(n)}=1^{(n)}=0, \text{ 其中 } (1+x^2)^{(k)}=0,\ k=3,4,\cdots$$

得到 $$(1+x^2)(y')^{(n)}+n(1+x^2)'(y')^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}(1+x^2)''(y')^{(n-2)}=0$$

$$\therefore\ (1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0$$

令x=0得 $y^{(n+1)}(0)+n(n-1)y^{(n-1)}(0)=0,\ n=1,2,\cdots$

已知 $y''(0)=0$, 上式递推得 $y^{(4)}(0)=y^{(6)}(0)=\cdots=y^{(100)}(0)=0$ □

✓ **推广**：

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

[例] 设函数 $y = f(x)$由参数方程

$$\begin{cases} x = \ln\cos t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$$

确定,求$y''(x)$.

[解] $$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos t - \cos t + t\sin t}{-\sin t/\cos t} = -t\cos t$$

$$\boxed{y''(x) = \frac{d}{dx}(y'(x))_x}$$

$y'(x)$由参数方程确定

$$\begin{cases} x = \ln\cos t \\ y'(x) = -t\cos t \end{cases}$$

$$y''(x)=[y'(x)]'_x=\frac{[y'(x)]'_t}{x'(t)}$$

$$=\frac{(-t\cos t)'_t}{(\ln\cos t)'_t}=\frac{-\cos t+t\sin t}{-\sin t/\cos t}$$

$$=\frac{\cos^2 t-t\sin t\cos t}{\sin t}$$

[注 意]： $y''(x)\neq(-t\cos t)'_t$

第9-2课：微分/导数中值定理

微分/导数中值定理

- **目标**：研究区间内可导函数的导数性质
- **极值** (局部最大/最小值)：

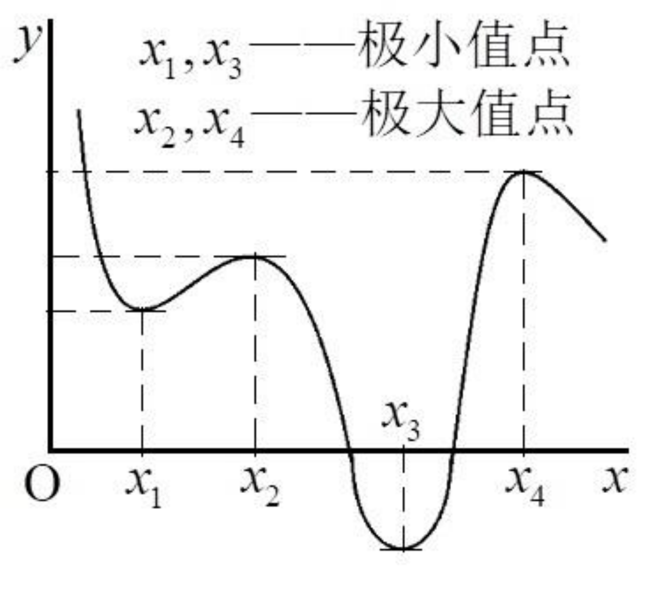
  设 f 在x_0附近有定义(包括x_0)，若 $\exists\delta>0$, 使得

  1) $\forall |x-x_0|<\delta, f(x)\le f(x_0)$,

称 $f(x_0)$为 f 的极大值, x_0为极大值点

  2) $\forall |x-x_0|<\delta, f(x)\ge f(x_0)$,

称 $f(x_0)$为 f 的极小值, x_0为极小值点



- **注**：极值不一定是最值

极值点必须在区间内部-右图所示

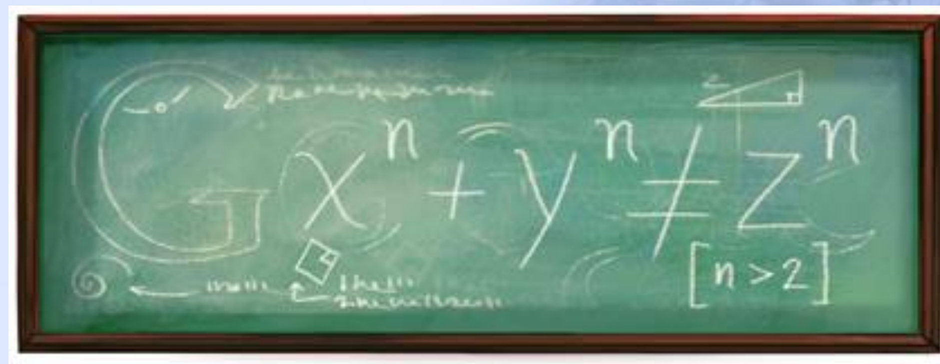
第9-2课：微分/导数中值定理

- **Fermat大定理-1637**：

  整数n>2时不定方程

  $$x^n + y^n = z^n$$

  没有非零整数解



Fermat：“已发现美妙证明, 可惜空白太小, 写不下”

Euler-1770：n=3

Legendre-1823：n=5

Dirichlet-1832：n=14

…………

研究产生新的数学分支和工具：
代数数论，代数几何，……
“下金蛋的母鸡”——D.Hilbert

电脑辅助-1987：$2 < n < 10^{1,800,000}$

1986-1994年A.Wiles：任意n>2 —— 轰动世界！

第9-2课：微分/导数中值定理

- **Fermat引理：**

设函数f 在其极值点x_0可导，则必有 $f'(x_0)=0$

证：不妨令x_0为极大值点，则$\exists\delta>0$, 使得

$$\forall |x-x_0|<\delta, f(x)\le f(x_0)$$

考察x_0点的左右导数，结合极限保序性质

$$\left.\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \\ f'_+(x_0) &= \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0 \end{aligned}\right\}\text{极限保序性}$$

而f 在x_0可导 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$, $\therefore\ f'(x_0)=0$ □

第9-2课：微分/导数中值定理

- **注：** Fermat引理的逆不成立

  —— 导数为0的点未必是极值点

  考虑 $f(x)=x^3,\ f'(x)=3x^2,\ f'(0)=0,$ 但$f(0)=0$不是极值！

- **临界点/驻点：**

  若 $f'(x_0)=0$，则称x_0为 f 的临界点/驻点

  称$f(x_0)$为 f 的临界值(可能的极值)

- **启发：** 求解极值问题(微积分来源之一) —— 寻找临界点

- **几何意义：**

  曲线 $y=f(x)$在极值点$(x_0,f(x_0))$的切线与x轴平行(斜率为0)

第9-2课：微分/导数中值定理

- **Rolle定理**：设函数 $f\in C[a,b]$，且在(a,b)内可导

  如果$f(a)=f(b)$，则存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$

  证：若f(x)=常数，则 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)=0$

  若f(x)非常数，不妨设

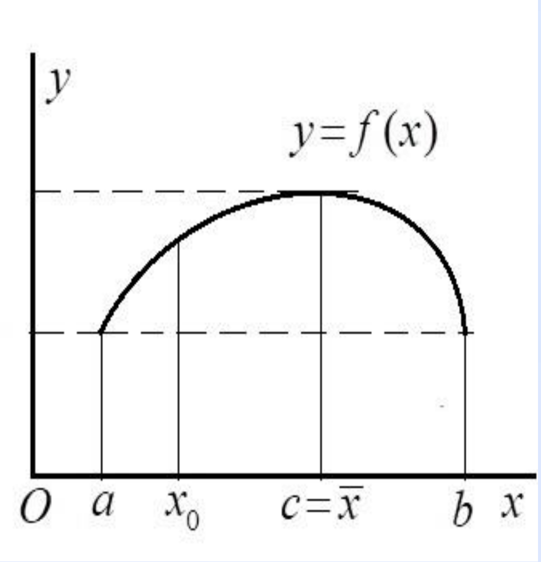
  $\exists x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(a)=f(b)$

  由连续函数最值性质

  $\exists\bar{x}\in(a,b)$，$\forall x\in[a,b]$，$f(x)\le f(\bar{x})$

  注意 $\bar{x}\in(a,b)$是极大值点，由Fermat引理

  $f'(\bar{x})=0$ □

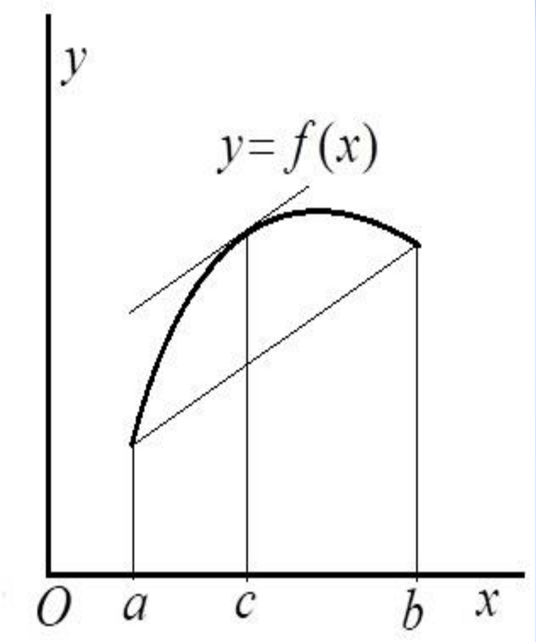


- **推广**：取消限制 $f(a)=f(b)$，建立Lagrange中值定理——

第9-2课：微分/导数中值定理

- **Lagrange中值定理**：设函数 $f\in C[a,b]$，且在(a,b)内可导

则存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



证：构造辅助函数，转化为Rolle定理

考虑 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\in C[a,b]$

注意 $F(b)=f(b)-[f(b)-f(a)]=f(a)=F(a)$

应用Rolle定理 $\exists c\in(a,b)$，使得$F'(c)=0$

也即 $F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ □

- **注**：公式其他形式：记 $x=a$，$x+\Delta x=b$，则

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad \theta=\frac{c-a}{b-a}\in(0,1)$$

【优点】对于 $\Delta x<0$ $(b<a)$ 也成立

第9-3课：中值定理的应用

- **应用-函数性质研究：**

➢ **推论1：** 设函数 f 在(a,b)内可导, 则 f(x)=常数的充分必要条件是 $f'(x)=0,\ \forall x\in(a,b)$

证：必要性明显 (计算导数即可)

为证充分性, 令 $f'(x)\equiv 0,\ \forall x\in(a,b)$

任取 $x_1,x_2\in(a,b),\ x_1<x_2$， 则 $f\in C[x_1,x_2]$且在(x_1,x_2)内可导

应用Lagrange中值定理，$\exists c\in(x_1,x_2)$, 使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0 \qquad (\because\ f'(x)\equiv 0)$$

注意上面 $x_1,x_2\in(a,b)$ 的任意性, $f(x)=$常数 □

➢ **推论2：** 设函数 f,g在(a,b)内可导, 且$f'\equiv g'$, 则 $f-g=$常数

也即 $\exists C_0\in\mathbb{R}$, 使得$f(x)=g(x)+C_0,\ \forall x\in(a,b)$

第9-3课：中值定理的应用

✓ **例1**：求证 $\forall x>-1$, 有 $\dfrac{x}{1+x}\le \ln(1+x)\le x$，等号仅在 $x=0$ 成立

证：对于函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 应用Lagrange中值定理

$\exists\theta\in(0,1)$, 使得 $f(x)-f(0)=f'(\theta x)(x-0)$

也就是 $$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta x}$$

以下分别考虑x>0与x<0两种情况：

若 $x>0$, 则 $1+x>1+\theta x>1$, $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\theta x}<x$

若 $-1<x<0$, 则 $1+x<1+\theta x<1$, 进而也有 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\theta x}<x$

综上 $\forall x>-1$, 成立 $\dfrac{x}{1+x}\le \ln(1+x)\le x$, 等号仅在 $x=0$ 成立 □

第9-3课：中值定理的应用

- 例2：求证方程 $2x-\sin x=1$ 至多只有一个根

  证：假若不然，记 $f(x)=2x-\sin x-1$

  $\exists x_1 < x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$

应用Rolle定理 $\exists c\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(c)=0$

但 $f'(c)=2-\cos c=0$　这不可能！　$\square$

第9-3课：中值定理的应用

- **Cauchy中值定理** (Lagrange中值定理的推广)：

  设函数 $f, g \in C[a,b]$, 且在(a,b)内可导, $g'(x) \neq 0$

则存在 $c \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

证：注意到如果 $g(x)=x$ 即转化为Lagrange定理的情况

考虑Lagrange定理的证明方法, 类似构造辅助函数

令 $$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)] \in C[a,b]$$

则 $$F(b) = f(b) - [f(b)-f(a)] = f(a) = F(a)$$

应用Rolle定理 $\exists c \in (a,b)$, 使得$F'(c)=0$

也即 $$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$$ 导出结论 □

第9-4课：中值定理的应用-函数单调性

- **单调性判别：** 设函数 $f \in C[a,b]$, 且在(a,b)内可导

1) f 在$[a,b]$上单调增 $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b),\ f'(x) \geq 0$

2) f 在$[a,b]$上单调减 $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b),\ f'(x) \leq 0$

证：回忆导数定义

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

根据极限的保号性得到导数的符号, 所以 "$\Rightarrow$"成立

反之, $\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$，应用Lagrange中值公式

$\exists c \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$

由此导出函数f 的单调性，因此 "$\Leftarrow$"成立 □

第9-4课：中值定理的应用-函数单调性

- **严格单调性判别**：设函数 $f \in C[a,b]$, 且在(a,b)内可导

  a) f 在$[a,b]$上严格单调增, 如果 $\forall x \in (a,b),\ f'(x) > 0$

  b) f 在$[a,b]$上严格单调减, 如果 $\forall x \in (a,b),\ f'(x) < 0$

  证：回忆前面 "$\Leftarrow$"证明部分即可 □

【注意】函数严格单调不能保证导数严格不等于0！

但个别点导数等于0仍可以导出函数严格单调

A) 如果除了有限个点之外，在(a,b) 内 $f'(x) > 0$

则 f 在$[a,b]$上严格单调增

B) 如果除了有限个点之外，在(a,b) 内 $f'(x) < 0$

则 f 在$[a,b]$上严格单调增

证：将区间$[a,b]$分段考虑即可 □

第9-4课：中值定理的应用-函数单调性

✓ **例1**：求证 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时有 $\sin x<x<\tan x$

证：只须证 $x<\tan x$，取 $f(x)=\tan x-x,\ 0\le x<\dfrac{\pi}{2}$

则 $f\in C[0,\dfrac{\pi}{2}),\quad f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\ge 0$ 等号仅在 $x=0$ 成立

由此 $f(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2})$上严格单调，$\therefore\ \forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\ f(x)>f(0)=0$ $\square$

✓ **例2**：求证 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时有 $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$

证：只须证 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}$，取 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

则 $f\in C(0,\dfrac{\pi}{2}],\quad f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$（回忆上题 $x<\tan x$）

可见 $f(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 严格单调减 $\therefore\ \forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2}],\ f(x)>f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{2}{\pi}$ $\square$

第9-4课：中值定理的应用-函数单调性

✓ **例3**：求证 $e^x > 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},\ \forall x>0,\ n=1,2,\cdots$

证：考虑函数

$$f_n(x)=e^x-(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}),\ x\geq 0,\ n=1,2,\cdots$$

注意 $f_n'(x)=e^x-(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!})=f_{n-1}(x)$

这启发可以对n采用归纳论证：

首先 $f_0(x)=e^x-1>0,\ \forall x>0$

假设 $f_{n-1}(x)>0,\ \forall x>0$，也即 $f_n'(x)=f_{n-1}(x)>0,\ \forall x>0$

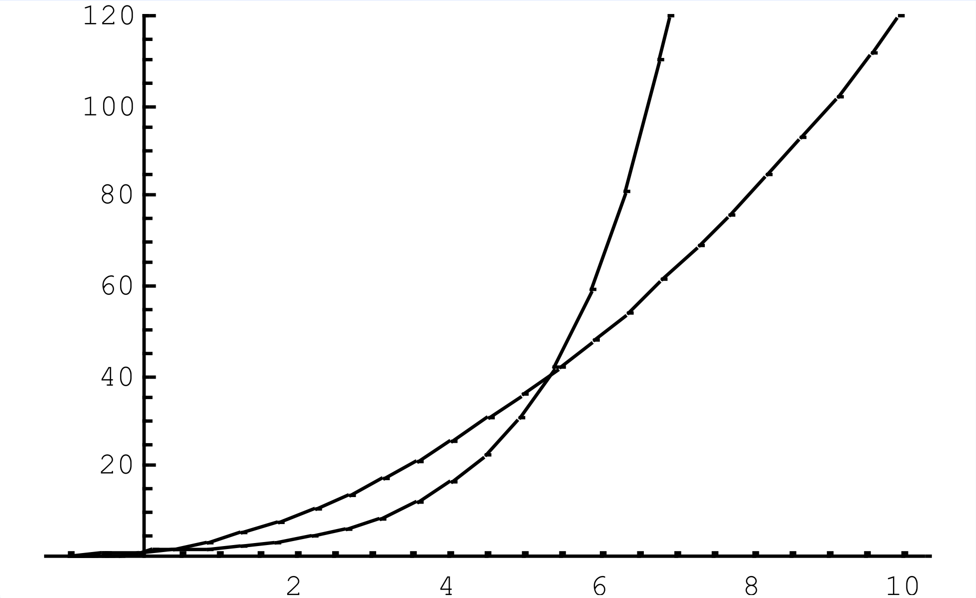
这说明 $f_n(x)$在$[0,+\infty)$中严格单调增

$\therefore f_n(x)>f_n(0)=0,\ \forall x>0$ 归纳论证完成 □

[例] 讨论下列方程有几个实根?

零点问题

$$2^x = x^2 + 2x + 1$$



该方程实根个数就是两条曲线

$$y = 2^x$$

$$y = x^2 + 2x + 1$$

交点个数

图形发现三个交点

而且大体上能确定位置

以下证明恰好有三个根

首先证明至少有三个根

令 $f(x)=2^x-x^2-2x-1$ 计算表明

$$f(-2)=-\frac{3}{4}<0,\ f(-1)=\frac{3}{2}>0,\ f(1)=-2<0,\ f(10)>0$$

根据介值定理

$f(x)$ 在 $(-2,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, 和 $(1,\ 10)$

各至少有一个零点 因此方程至少有三个根

然后证明方程最多有三个根

用反证法 假定方程

$f(x)=2^x-x^2+2x+1=0$ 有四个相异实根

根据罗尔定理

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2x + 2 = 0$$

至少有三个相异实根

$$\Rightarrow \quad f''(x) = (\ln 2)^2 \cdot 2^x - 2 = 0$$

至少有两个相异实根

$$\Rightarrow \quad f'''(x) = (\ln 2)^3 \cdot 2^x = 0$$

至少有一个实根

矛盾！

综上所述，方程恰好有三个实根

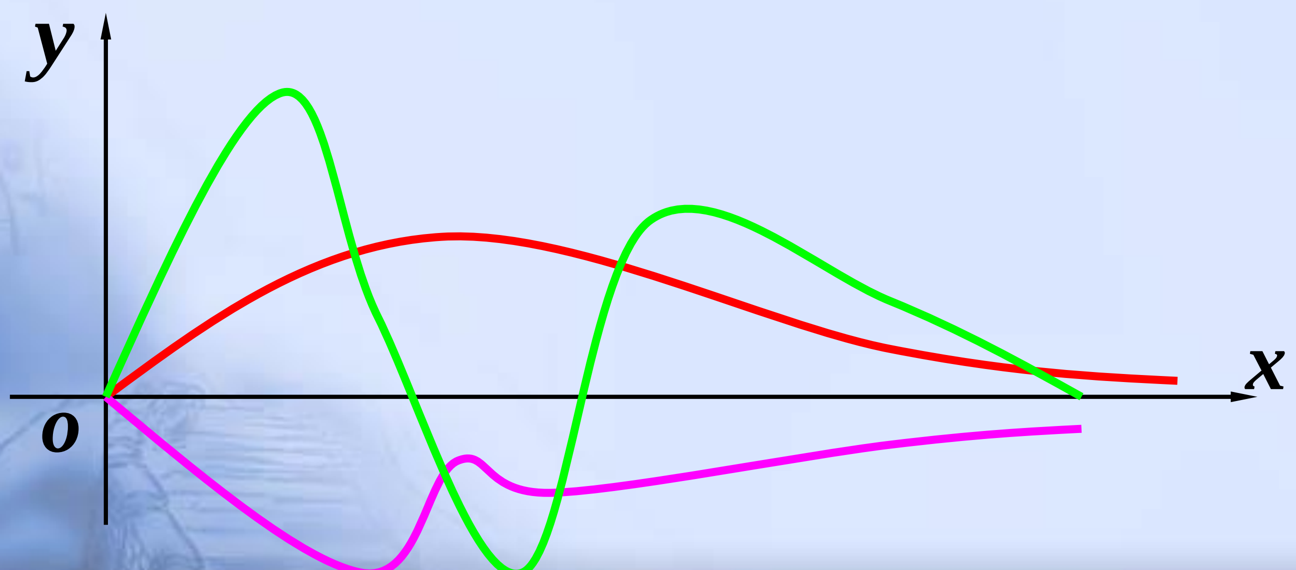
[例] 设 $f \in C[0,+\infty)$, f 在 $(0,+\infty)$ 可导,并且

$$f(0)=0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

则存在 $\xi \in (0,+\infty)$, $f'(\xi)=0$

证明思路直观分析

$f(x)$ 必然在 $(0,+\infty)$ 内部达到最大或最小值



[证] 如果在$(0,+\infty)$ $f(x)\equiv 0$ 结论自然成立

不妨假设$f(x)$在$(0,+\infty)$不恒等于零

$\Rightarrow \exists x_0\in(0,+\infty)$使得$f(x_0)\neq 0$ 不妨设$f(x_0)>0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$\Rightarrow \exists x_1 > x_0, \forall x > x_1, f(x)< f(x_0)$$

根据连续函数的最大最小值定理

存在$\xi\in[0, x_1]$, 使得 $f(\xi)=\max\{f(x)\,|\,0\le x\le x_1\}$

并且$\xi\neq 0$ $f(\xi)=\max\{f(x)\,|\,0\le x<+\infty\}$

由于ξ在$(0,+\infty)$内部, 所以ξ是驻点$\Rightarrow f'(\xi)=0$

例 证明恒等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (|x| \le 1)$$

[证] 令 $f(x) = \arcsin x + \arccos x \quad (|x| < 1)$

则 $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0 \quad (|x| < 1)$

于是由拉格朗日中值定理的推论1知

$$f(x) \equiv c \quad (c\text{为常数}) \quad (|x| < 1)$$

又 $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$

故 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \quad (|x| < 1)$

又,当$x = \pm 1$时有

$$f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = \frac{\pi}{2}$$

于是得到

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (|x| \le 1)$$

例5 证明当$0<a<b$时，有不等式

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}$$

[证] 令 $f(x)=\arctan x \qquad x\in[a,b]$

显然，$f(x)$满足条件：(1)在闭区间$[a,b]$上连续；(2)在开区间(a,b)内可微，且

$$f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

于是由拉格朗日中值定理,有

$$\arctan b - \arctan a = \frac{1}{1+\xi^2}\cdot(b-a) \quad (a<\xi<b)$$

因为 $$\frac{b-a}{1+b^2} < \frac{b-a}{1+\xi^2} < \frac{b-a}{1+a^2}$$

所以有

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

[例8] 设实系数多项式

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

$(a_0\neq 0)$的根全是实根证明$P_n'(x)$也仅有实根.

[证] 因为$P_n(x)$的根全是实根故设

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m}$$

其中, $x_1<x_2<\cdots<x_m$

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$$

$$P_n(x) = (x - x_1)^{k_1}[a_0(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m}]$$

$$= (x - x_1)^{k_1} f(x)$$

因为x_1是$P_n(x)$的k_1重根，所以 $f(x_1) \neq 0.$

$$P_n'(x) = k_1(x - x_1)^{k_1 - 1} f(x) + (x - x_1)^{k_1} f'(x)$$

$$= (x - x_1)^{k_1 - 1}[k_1 f(x) + (x - x_1) f'(x)]$$

又 $k_1 f(x_1) + (x_1 - x_1) f'(x_1) = k_1 f(x_1) \neq 0$

故 x_1 是$P_n'(x)$的$(k_1 - 1)$重根.

同理, x_2 是$P_n'(x)$的(k_2-1)重根, $\cdots$, x_m 是$P_n'(x)$的(k_m-1)重根.

又根据罗尔定理在$(x_1,x_2),(x_2,x_3),\cdots,(x_{m-1},x_m)$内分别有$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{m-1}$,使$P_n'(x)=0$.

所以$P_n'(x)=0$的实根个数至少为

$$(k_1-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_m-1)+m-1=n-1$$

又$P_n'(x)=0$只有$n-1$个根,故都为实根

思考题：设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二次可微

$f''(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，又存在一点$x_0$，

使$f(x_0)<0$，求证：方程$f(x)=0$

在$(-\infty,+\infty)$有且仅有两个实根

[证] (1)由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$ 知, $\exists a>0$,

使当 $x\geq a$ 时, 有 $f'(x)\geq\dfrac{\alpha}{2}>0$.

在区间 $[a,x]$ 上应用拉格朗日中值定理, 有

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) \qquad (a < \xi < x)$$

于是当$x > a$时，有 $f(x) > f(a) + \frac{\alpha}{2}(x-a)$

由此推知 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

从而$\exists b > x_0$，使$f(b) > 0$.

又知$f(x_0) < 0$，于是根据介值定理知$\exists x_1 > x_0$，使 $f(x_1) = 0$.

同理可证$\exists x_2 < x_0$，使 $f(x_2) = 0$.

因此$f(x) = 0$在$(-\infty, +\infty)$上至少有两个实根x_1, x_2.

(2)证明$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$上仅有两个实根.

假设$f(x)=0$有三个实根x_1, x_2, x_3,且$x_1 < x_2 < x_3$.

根据罗尔定理存在$\xi \in (x_1, x_2)$, $\eta \in (x_2, x_3)$,使得$f'(\xi)=0$, $f'(\eta)=0$.

再用罗尔定理存在$\zeta \in (\xi,\eta)$,使得$f''(\zeta)=0$.这与题设矛盾!

因此,$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$上仅有两个实根

第9课：高阶导数-微分中值定理

- **预习 (下次课内容)：**

  第3.5节 导数应用：

  极值问题-函数的凸性

- **作业 (本次课)：**

  练习题3.3：1[自己练习], 2(2-3), 3, 5*($x=x_0$修改为$x>x_0$).

  练习题3.4：1, 3(2-4), 4(考虑F=f-p), 5(构造F=…), 6*,

  7, 8-9(考虑F=f/x,G=1/x), 11, 12*.

  练习题3.5：1[自己练习], 2(2,4), 3(1,2), 4, 5.