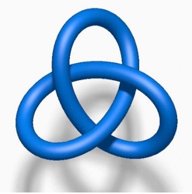
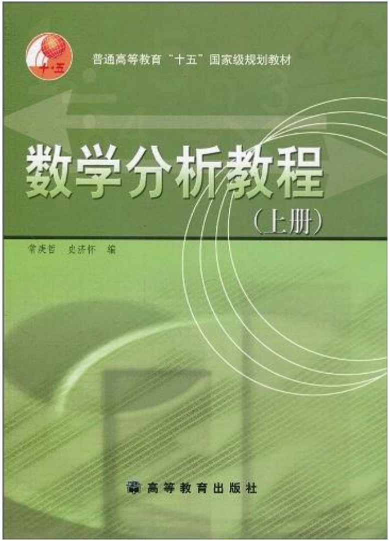
秋季学期微积分 A (1)课程

邹文明

第二章: 函数, 函数的极限与连续




普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学分析教程
(上册)
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

§3. 函数极限的性质

函数极限与数列极限的关系:

定理 1. 设 X 为非空数集, x_0 为 X 的极限点, $f : X \to \mathbb{R}$ 为函数, 而 $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$. 那么

$$\lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$$

当且仅当对于 $X \setminus \{x_0\}$ 中以 x_0 为极限的任意数列 $\{a_n\}$, 均有 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a$.

证明: 必要性. $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$, 那么 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 假设 $X \backslash \{x_0\}$ 中的数列 $\{a_n\}$ 趋近到 x_0, 那么 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 我们均有 $a_n \in \mathring{B}(x_0, \delta)$, 从而可知 $f(a_n) \in B(a, \varepsilon)$, 进而可得

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = a.$$

充分性. 现在用反证法. 假设当 $X \ni x \to x_0$ 时, $f(x)$ 不趋近到点 a. 那么 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$ 满足 $f(x) \notin B(a, \varepsilon_0)$. 从而可知 $\forall n \geqslant 1$, $\exists a_n \in \mathring{B}_X(x_0, \frac{1}{n})$ 使得 $f(a_n) \notin B(a, \varepsilon_0)$. 因此 $\{f(a_n)\}$ 不趋近到 a. 然而 $a_n \in \mathring{B}_X(x_0, \frac{1}{n})$, 于是由夹逼原理可知 $X \backslash \{x_0\}$ 中的数列 $\{a_n\}$ 趋近到 x_0. 这与题设矛盾! 故所证结论成立.

评注

- 在上述定理中，我们必须假设 a_n 不等于 x_0. 例如我们可考虑函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 若\ x\neq 0, \\ 1, & 若\ x=0. \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. 令 $a_n\equiv 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=1$.

- 函数极限问题与数列极限问题等价!

该定理通常用来证明函数极限不存在

为此只需下述两条之一成立:

- 在 $X\backslash\{x_0\}$ 中构造以 x_0 为极限的数列 $\{a_n\}$ 使得数列 $\{f(a_n)\}$ 的极限不存在.
- 在 $X\backslash\{x_0\}$ 中构造以 x_0 为极限的两个不同数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $\{f(a_n)\}$ 和 $\{f(b_n)\}$ 趋近到不同的极限.

例 1. 求证：极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ 不存在.

证明: 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{sgn}\frac{1}{n}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\operatorname{sgn}(-\frac{1}{n})=-1,$$

故所求极限不存在.

思考题: 求证：极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

性质 1. 函数极限若存在且有限, 必唯一.

性质 2. (局部有界性) 设 X 为非空数集, x_0 为该集的极限点, $a \in \mathbb{R}$, 而函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 使得 $\lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$, 则 $\exists \delta, M > 0$ 使 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $|f(x)| < M$.

证明: 由定义可知, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $|f(x) - a| < 1$. 故 $|f(x)| < 1 + |a|$.

性质 3. (局部保序性) 设 X 为非空数集, x_0 为其极限点, 而 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 为函数使得

$$\lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{X \ni x \to x_0} g(x) = b.$$

- 如果 $a > b$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) > g(x)$.
- 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) \geqslant g(x)$, 则 $a \geqslant b$.

注: 同数列情形完全一样, 即便 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) > g(x)$, 一般也不能推出 $a > b$.

证明: (1) 方法 1. 现用反证法. 我们假设 $a > b$, 但却 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$ 使得 $f(x) \leqslant g(x)$. 则 $\forall n \geqslant 1$, $\exists a_n \in \mathring{B}_X(x_0, \frac{1}{n})$ 使得 $f(a_n) \leqslant g(a_n)$. 又由夹逼原理可知 $\{a_n\}$ 在 $X \backslash \{x_0\}$ 中趋于 x_0, 于是由数列极限的保序性可得

$$a = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} g(a_n) = b,$$

矛盾! 故所证结论成立.

方法 2. 假设 $a, b \in \mathbb{R}$, 其它的情形会更为简单. 令 $\varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$. 则 $\exists \delta_1 > 0$ 使 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta_1)$, $|f(x) - a| < \varepsilon$. 同时 $\exists \delta_2 > 0$ 使 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta_2)$, $|g(x) - b| < \varepsilon$. 令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 那么

$$\mathring{B}_X(x_0, \delta) = \mathring{B}_X(x_0, \delta_1) \cap \mathring{B}_X(x_0, \delta_2),$$

则 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有

$$f(x) > a - \varepsilon = b + \varepsilon > g(x).$$

(2) 同数列极限的情形一样, 由 (1) 可导出 (2).

推论. (局部保号性) 设 X 为非空的数集, x_0 为其极限点, 而 $f: X \to \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$.

- 如果 $a > 0$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) > 0$.
- 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) \geqslant 0$, 则 $a \geqslant 0$.

注: (1) 由局部保序 (号) 性可导出极限唯一性.
(2) 若 $a \neq 0$, 则 f 在某个 $\mathring{B}_X(x_0)$ 上不为零.

定理 2. (四则运算) 设 X 为非空的数集, x_0 为其极限点, 而 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 为函数使得

$$\lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{X \ni x \to x_0} g(x) = b.$$

则下列结论成立 (若等式右边有意义):

(1) $\displaystyle\lim_{X \ni x \to x_0} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda a + \mu b,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

(2) $\displaystyle\lim_{X \ni x \to x_0} (fg)(x) = ab.$

(3) $\displaystyle\lim_{X \ni x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}.$

广义四则运算 ($a > 0$ 为实数)

- $a + (+\infty) = +\infty$, $a - (+\infty) = -\infty$.
- $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$.
- $a \times (+\infty) = +\infty$, $a \times (-\infty) = -\infty$, $a \times \infty = \infty$.

- $(-a)\times(+\infty)=-\infty$, $(-a)\times(-\infty)=+\infty$, $(-a)\times\infty=\infty$; $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$, $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$.
- $\frac{a}{\pm\infty}=0$, $\frac{a}{\infty}=0$, $\frac{a}{0^+}=+\infty$, $\frac{a}{0^-}=-\infty$, $\frac{a}{0}=\infty$.
- 无法确定型: $(+\infty)+(-\infty)$, $0\times\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

例 2. 研究有理函数在 $x \to \pm\infty$ 时的性态.

解: 令 $f(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j x^j}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k} = x^{n-m} \cdot \frac{a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{j-n}}{b_m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^{k-m}}$,

其中假设 $a_n,\ b_m > 0$. 于是我们有

$$(1) \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & \text{若 } n = m, \\ 0, & \text{若 } n < m, \\ +\infty, & \text{若 } n > m, \end{cases}$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}, & 若\ n=m, \\ 0, & 若\ n<m, \\ +\infty, & 若\ n>m\ 且\ n-m\ 为偶数, \\ -\infty, & 若\ n>m\ 且\ n-m\ 为奇数. \end{cases}$$

定理 3. (夹逼原理) 设 X 为非空的数集, x_0 为其极限点, 而 $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ 为函数满足:

(1) $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

(2) $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{X \ni x \to x_0} h(x) = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

则我们有 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$.

证明: 利用数列的夹逼原理或其证明思想.

定理 4. (复合函数极限) 设 X, Y 为非空数集, x_0 为 X 的极限点而 $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, \pm\infty\}$, 并且函数 $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$ 满足:

(1) $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$, 均有 $f(x) \in Y \setminus \{y_0\}$,

(2) $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{Y \ni y \to y_0} g(y) = a$,

则我们有 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} g(f(x)) = a$.

注: 复合函数极限法则实质是在做变量替换.

证明: 由于 $\lim\limits_{Y\ni y\to y_0} g(y)=a$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$ 使得 $\forall y\in \mathring{B}_Y(y_0,\eta)$, 均有 $g(y)\in B(a,\varepsilon)$. 又因 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=y_0$, 则 $\exists\delta>0$ 使 $\forall x\in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$, $f(x)\in B(y_0,\eta)$. 由条件 (1) 可知 $f(x)\in Y\backslash\{y_0\}$, 于是 $f(x)\in \mathring{B}_Y(y_0,\eta)$, 从而 $g(f(x))\in B(a,\varepsilon)$. 由此可知所证结论成立.

各种基本类型极限的关系

评注: 本节的 定理 1 是上述定理的特殊情形, 由此可知该定理中的条件 (1) 不能去掉.

各种基本类型极限的关系

设 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 而 $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, \pm\infty\}$, 由复合函数极限法则可知下述结论等价:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$,
- $\lim\limits_{y \to 0} f(y + x_0) = a$,
- $\lim\limits_{z \to \infty} f(\frac{1}{z} + x_0) = a$.

对于左极限、右极限也有类似的结论.

命题 1. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

证明: 因 $\lim\limits_{y\to a} \log y = \log a$, 则由四则运算与复合函数极限法则可知 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\log u(x) = b\log a$. 又因 $\lim\limits_{y\to b\log a} e^y = e^{b\log a} = a^b$, 则由复合函数极限法则可得 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{v(x)\log u(x)} = a^b$.

推论 1. 若 $a > 0$, 而 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

推论 2. 若 $x_0 > 0$, 而 $\alpha \in \mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$.

注: 由极限定义立刻可得 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0 \ (\alpha > 0)$.

推论 3. 假设 X 为非空的数集, x_0 为其极限点, 而函数 $f : X \to [0, +\infty)$ 使得 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = A$, 则我们有 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$.

推论 4. $\forall k \in \mathbb{N}^*$ 以及 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$.

证明: 若 $x_0 > 0$, 则由前例可知所证成立.
若 $x_0 < 0$, 则由复合函数极限法则可知

$$\lim_{x \to x_0} x^k \overset{y=-x}{=} \lim_{y \to -x_0} (-1)^k y^k = (-1)^k (-x_0)^k = x_0^k.$$

若 $x_0 = 0$, 由前例可知 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^k = 0$. 由复合函数极限法则得 $\lim\limits_{x \to 0^-} x^k \overset{y=-x}{=} \lim\limits_{y \to 0^+} (-1)^k y^k = 0$. 于是 $\lim\limits_{x \to 0} x^k = 0 = x_0^k$. 综上所述可知所证成立.

例 3. 求证: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

证明: 由复合函数极限法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

秋风起兮白云飞,草木黄落兮雁南归–汉・刘彻《秋风辞》

同学们辛苦了！