第20课：可积函数类-反常积分/无穷积分

第7章 函数的积分

- **内容：**

第7.7节 反常积分：无穷区间上的积分-无界函数积分

第20-2课：无穷积分-概念和计算

反常积分-无穷积分的概念和计算

- **问题**：已知的(正常)积分概念

$$\int_a^b f(x)dx \left\{ \begin{array}{l} \text{积分区间}[a,b]\text{有限} \\ \text{被积函数 } f \text{ 有界} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{突破这些限制} \\ \text{引入反常积分} \end{array}$$

- **无穷积分** (无穷积分区间上的积分)

设 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$，且 $\forall A>a,\ f\in R[a,A]$

定义 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$，若极限存在的话

称该无穷积分收敛, 否则称其发散

第20-2课：无穷积分-概念和计算

- **无穷积分** (续)：类似可对于 $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ 定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{b} f(x)dx \quad \text{（收敛或发散）}$$

对于 $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ 定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{（}a\in\mathbb{R}\text{ 可任取）}$$

如果右端二无穷积分都收敛, 则称左端无穷积分收敛

否则 (右端二无穷积分至少有一个发散) 称左端积分发散

- **注1**：上述定义与a的选取无关
- **注2**：另有一个定义与此不同 (其收敛性较弱)：

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx \quad \text{（Principal Value主值）}$$

第20-2课：无穷积分-概念和计算

- **例1**：研究收敛/发散 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$

  解：$\forall A > 1$

  若$p\neq 1$，$\int_1^A \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^A = \frac{A^{1-p}-1}{1-p} \to \begin{cases} 1/(p-1), & p>1 \\ +\infty, & p<1 \end{cases}$

  若$p=1$，则 $\int_1^A \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^A = \ln A \to +\infty \qquad (A \to +\infty)$

综上，当$p>1$时无穷积分收敛 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$

当$p\leq 1$时无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 发散(到正无穷) $\square$

- **注**：考虑曲线 $y = 1/x^p$ 与 $y=0, x=1$ 围成的无界区域面积

根据上面分析，$p>1$时面积有限，$p\leq 1$时面积无穷大。

第20-2课：无穷积分-概念和计算

✓ **例2**：研究 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}\quad(a>0)$

解：任取 $b\in\mathbb{R}$，分别考虑 $\int_{-\infty}^{b}\frac{dx}{x^2+a^2}$ 和 $\int_{b}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$

$$\forall B<b\qquad \int_B^b\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_B^b=\frac{1}{a}(\arctan\frac{b}{a}-\arctan\frac{B}{a})$$

$$\to\frac{1}{a}(\arctan\frac{b}{a}+\frac{\pi}{2})\quad(B\to-\infty)$$

$$\forall A>b\qquad \int_b^A\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_b^A=\frac{1}{a}(\arctan\frac{A}{a}-\arctan\frac{b}{a})$$

$$\to\frac{1}{a}(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{b}{a})\quad(A\to+\infty)$$

综上导出

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\int_{-\infty}^{b}\frac{dx}{x^2+a^2}+\int_{b}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{a}\quad\text{收敛}\qquad\square$$

第20-2课：无穷积分-概念和计算

- 广义Newton-Leibniz公式 (容易根据定义导出)：
  设 $f \in C[a,+\infty)$ 有原函数 $F \in C[a,+\infty)$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 收敛时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

- 注1：在相应条件之下也有

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

- 注2：分部积分-积分换元等技巧也可用于无穷积分
- 注3：线性性质-保序性质-积分区间可加性质仍成立

第20-2课：无穷积分-概念和计算

✓ **例3**：研究 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad (n \in \mathbb{N})$

解：可以先取 $\forall A > 0$，计算 $\int_0^A x^n e^{-x} dx$，再令 $A \to +\infty$

下面对于无穷积分直接应用分部积分技巧来计算

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x^n d(e^{-x}) = -[x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} d(x^n)]$$

$$= n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad 【注】: \lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$$

$$= n(n-1)\int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx$$

$$= \cdots = n!\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = n!(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = n! \quad \square$$

【注】在无穷积分中进行分部积分，消除了很多中间项

这比先计算有限区间上积分再取极限效率更高

第20-2课：无穷积分-概念和计算

✓ **例4**：研究 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{5/2}}\quad(a>0)$

解：引入有理化三角换元 $x=a\tan t,\ |t|<\frac{\pi}{2}$, 则

$$x^2+a^2=\frac{a^2}{\cos^2 t},\quad dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$$

且 $$\lim_{t\to-\pi/2}x(t)=-\infty,\quad \lim_{t\to\pi/2}x(t)=+\infty$$

$$\therefore\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{5/2}}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^5 t}{a^5}\cdot\frac{adt}{\cos^2 t}=\frac{1}{a^4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 tdt$$

$$=\frac{1}{a^4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 t)d(\sin t)$$

$$=\frac{1}{a^4}(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{4}{3a^4}\qquad\square$$

【注】上面的换元将无穷积分转化成为正常积分

Ex. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\arctan x\Big|_0^A=\frac{\pi}{2}.$

$$\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.\right)$$

Ex. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\ln x}{x^2}dx=-\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\ln x\,d\frac{1}{x}$

$$=-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\Big|_1^A-\int_1^A\frac{1}{x^2}dx\right)=-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^A=1.$$

$$\left(\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\,d\frac{1}{x}=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=0-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=1.\right)$$

Ex. 讨论广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$的收敛性.

解: $p=1$时, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$, 发散.

$$p\neq 1\text{时}, \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Bigg|_1^{+\infty}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$$

综上, $p>1$时, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1}$; $p\leq 1$时, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散.□

Ex. 讨论广义积分 $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$ 的收敛性.

解: $p=1$ 时, $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln\ln x\Big|_e^{+\infty}=+\infty.$

$p\neq 1$ 时, $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^p}d\ln x$

$$=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_e^{+\infty}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$$

综上, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leq 1$ 时发散. □

Remark. 若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_{-\infty}^a f(x)dx$均收敛,则$\forall b\in\mathbb{R}$,

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx=\int_b^a f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛,}$$

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\int_{-\infty}^b f(x)dx+\int_b^a f(x)dx \text{ 收敛.}$$

Def.若$\exists a\in\mathbb{R}$, s.t.$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_{-\infty}^a f(x)dx$均收敛,则称广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \triangleq \int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(x)dx.$$

Ex. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^{2-x}(e^{2x-2}+1)}$

$$=\frac{1}{e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{x-1}dx}{(e^{x-1})^2+1}=\frac{1}{e}\arctan e^{x-1}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2e}.$$

Question.变上(下)限的广义积分如何求导?

$$\left(\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\right)'=\left(\int_{-\infty}^{a}f(t)dt+\int_{a}^{x}f(t)dt\right)'=f(x)$$

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{+\infty}f(t)dt\right)'=\left(\int_{0}^{+\infty}f(t)dt-\int_{0}^{\alpha(x)}f(t)dt\right)'=-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

Ex. $F(x)=e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt, x\in[0,+\infty)$.

证明：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$, (2)$F(x)$在$[0,+\infty)$上单减.

Proof.(1) $x>1$时, $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \le \int_x^{+\infty} te^{-t^2/2}dt$

$$=-e^{-t^2/2}\Big|_x^{+\infty}=e^{-x^2/2}\ (\to 0, x\to+\infty\text{时.})$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt}{\mathrm{e}^{-x^2/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x^2/2}}{-xe^{-x^2/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(2) $F'(x)=xe^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt-1 \le e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} te^{-t^2/2}dt-1=0.$

故$F(x)$在$[0,+\infty)$上单减.□

•瑕积分(无界函数积分)

Def. f在$[a,b)$上定义,在b点附近无界(此时称$x=b$为f的一个瑕点),若$\forall\delta\in(0,b-a)$, $f\in R[a,b-\delta]$,且

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_a^{b-\delta}f(x)dx=I,$$

则称f在$[a,b)$上的瑕积分收敛,称I为f在$[a,b)$上的瑕积分(值),记作

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to0^+}\int_a^{b-\delta}f(x)dx.$$

若$\lim\limits_{\delta\to0^+}\int_a^{b-\delta}f(x)dx$不存在,则称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$发散.

Def. f在(a,b)上定义, a,b为瑕点, 若$\exists c\in(a,b)$, s.t.瑕积分

$\int_a^c f(x)dx$与$\int_c^b f(x)dx$均收敛, 则

$$\int_a^b f(x)dx \triangleq \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

此时, $\int_a^b f(x)dx=\int_a^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx,\ \forall d\in(a,b)$;

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^c f(x)dx+\lim_{\beta\to b^-}\int_c^\beta f(x)dx$$

$$=\lim_{\substack{\alpha\to a^+,\\ \beta\to b^-}}\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

第20-3课：瑕积分概念 (奇异积分)

✓ **例5**：研究瑕积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad (p>0)$

解：x=0是被积函数的瑕点, 取 $\varepsilon \in (0,1)$

若$p\neq 1$, $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-p}}{1-p} \to \begin{cases} 1/(1-p), & p<1 \\ +\infty, & p>1 \end{cases}$

若$p=1$, 则 $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon \to +\infty \quad (\varepsilon \to 0^+)$

综上, 仅当$p<1$时瑕积分收敛 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$ □

- **注1**：考察 $y=1/x^p$ 与 $y=0, x=0, x=1$ 围成无界区域面积

根据上面分析, $p<1$ 时面积有限, $p\geq 1$ 时面积无穷大

- **注2**：比较-回忆相关无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 仅当 $p>1$ 时收敛

第20-3课：瑕积分概念 (奇异积分)

✓ **例6**：研究瑕积分 $\int_0^2 \frac{dx}{|x-1|^p} \quad (p>0)$

解：x=1是被积函数的瑕点，且在积分区间内部

仿照前面瑕积分的处理方法，应该考虑

$$\int_0^2 \frac{dx}{|x-1|^p} = \int_0^1 \frac{dx}{|x-1|^p} + \int_1^2 \frac{dx}{|x-1|^p}$$

仅当右端二瑕积分都收敛，左端原瑕积分才收敛

其中
$$\int_0^1 \frac{dx}{|x-1|^p} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^p} \overset{t=1-x}{=} \int_0^1 \frac{dt}{t^p}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{|x-1|^p} = \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^p} \overset{u=x-1}{=} \int_0^1 \frac{du}{u^p}$$

仅当 $p<1$ 时上面二瑕积分收敛，从而原瑕积分收敛

第20-3课：瑕积分概念 (奇异积分)

✓ **例7**：研究反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$

解：x=0是被积函数的瑕点，且积分在无穷区间上

参考前面反常积分的处理方法-将问题孤立/分离-考虑

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}=\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$$

右端瑕积分+无穷积分，二者都收敛时左端反常积分收敛

计算 $\int\frac{dx}{x(x+1)}=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx=\ln|\frac{x}{x+1}|$

$$\therefore\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}=\ln|\frac{x}{x+1}|\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln|\frac{x}{x+1}|-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$$

$$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}=\lim_{\varepsilon\to0+}\ln|\frac{x}{x+1}|\Big|_\varepsilon^1=-\ln 2-\lim_{\varepsilon\to0+}\ln|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}|=+\infty$$

Ex. $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_\delta^1 \ln x dx = \lim_{\delta \to 0+} \left(x \ln x - x \right) \Big|_\delta^1 = -1.$

$$\left(\int_0^1 \ln x dx = x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} dx = -1. \right)$$

Ex. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\alpha \to -1^+ \\ \beta \to 1^-}} \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\alpha \to -1^+ \\ \beta \to 1^-}} \arcsin x \Big|_\alpha^\beta = \pi.$

$$\left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi. \right)$$

Ex.讨论广义积分$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$的收敛性.

解: $p = 1$时, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = +\infty.$

$$p \neq 1\text{时}, \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p < 1, \\ +\infty, & p > 1. \end{cases}$$

综上, $p < 1$时, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$; $p \geq 1$时, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$发散.□

Ex. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{1+(\sqrt{x})^2} d\sqrt{x} + \int_1^{+\infty} \frac{2}{1+(\sqrt{x})^2} d\sqrt{x}$$

$$= 2\arctan\sqrt{x}\Big|_0^1 + 2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty} = \pi.$$

$$\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+(\sqrt{x})^2} d\sqrt{x} = 2\arctan\sqrt{x}\Big|_0^{+\infty} = \pi. \right)$$

Ex. $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx.$

解: $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\ln 2dx+\int_0^{\pi/2}\ln\sin\frac{x}{2}dx+\int_0^{\pi/2}\ln\cos\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/4}\ln\sin tdt+2\int_0^{\pi/4}\ln\cos tdt$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/4}\ln\sin tdt+2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin tdt$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,\qquad I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.\square$$

Ex. $I=\int_0^{\pi/2}\sin x\cdot\ln\sin x dx$

分析:$I=-\int_0^{\pi/2}\ln\sin x d\cos x$

$$=-\cos x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx,$$ 无法计算

解：$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x d(1-\cos x)$

$$=(1-\cos x)\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos x}{\sin x}\cos x dx$$

$$=0-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\cos x dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\cos x}d\cos x$$

$$=\int_1^0\frac{t}{1+t}dt=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t}-1\right)dt=-1+\ln(1+t)\Big|_0^1=-1+\ln 2.\square$$

Lemma (Riemann-Lebesgue). f在$[a,b]$上可积或广义绝对可积(即f与$|f|$均在$[a,b]$上广义可积),则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0.$$

Proof. 只证第一式,第二式同理.

Case1. 设f在$[a,b]$上可积,则f在$[a,b]$上有界,即

$$\exists M>0, s.t. |f(x)|\le M, \forall x\in[a,b].$$

任意给定$\lambda>1$,令$n=\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor$. n等分$[a,b]$:

$$x_i=a+(b-a)i/n,\quad i=0,1,2,\cdots,n.$$

$$\omega_i(f)=\sup\{f(\xi)-f(\eta):\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]\},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

f在$[a,b]$上可积，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i = 0$. 于是

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x dx\right|$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(f(x)-f(x_i)\big)\cos\lambda x dx\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\cos\lambda x dx\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x dx\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i + \frac{2Mn}{\lambda} = \sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor}\omega_i(f)\Delta x_i + \frac{2M\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor}{\lambda}$$

$$\to 0, \text{当}\lambda\to+\infty\text{时}.$$

Case2. f在$[a,b]$上广义绝对可积，不妨设a为唯一的瑕点.

则$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t.}, f$在$[a+\delta, b]$上可积，且

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|\,dx < \varepsilon/2.$$

从而 $$\left|\int_a^{a+\delta} f(x)\cos\lambda x dx\right| \le \int_a^{a+\delta} |f(x)|\,dx < \varepsilon/2,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

于是$\exists \Lambda > 0$，当$\lambda > \Lambda$时，$\left|\int_{a+\delta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx\right| < \varepsilon/2$，进而有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| \le \left|\int_a^{a+\delta} f(x)\cos\lambda x dx\right| + \left|\int_{a+\delta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx\right|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall \lambda > \Lambda. \square$$

第20课：-反常积分/无穷积分

- **预习 (下次课内容)：**

  补充：积分的几何与物理应用

  *第7.10节 数值积分

- **作业 (本次课) ：**

  练习题7.6：2.　　　　　问题7.6：2*.

  练习题7.7：1(1-2,7-8,10-11,12*), 2*, 3(3,5,7), 4, 5*.