1. 令 $y_i=x_i+1$. 即求 $y_1+y_2+\cdots+y_k\le n+k$ 的有序正整数组 $(y_1,y_2,\cdots,y_k)$ 的数目。

设 $S_m=\#\{(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\mathbb{Z}_+^m \mid y_1+y_2+\cdots+y_k=m\}$，设该集合为 X.

构建双射 $\Phi: X\to Y=\{(s_1,\cdots,s_{k-1}) \mid 1\le s_1<s_2<\cdots<s_{k-1}<m\}$

$\Phi(\{x_1,x_2\cdots x_k\})=\{x_1,x_1+x_2,\cdots,x_1+\cdots+x_{k-1}\}$

则 $S_m=|X|=|Y|=\#\{$从1~m-1中选k-1个数从小到大排列$\}=C_{m-1}^{k-1}$

则总数 $S=\sum_{m=k}^{n+k}S_m=C_{k-1}^{k-1}+C_k^{k-1}+\cdots+C_{n+k-1}^{k-1}=C_k^k+C_k^{k-1}+\cdots+C_{n+k-1}^{k-1}$

$=C_{n+k}^k$

2. 由题，$n-1-2-\cdots-(r-1)=n-\frac{r(r-1)}{2}$

设题中选法集合为X

构建双射 $\Phi: X\to Y=\{(y_1,y_2\cdots,y_r) \mid 1\le y_1<y_2<\cdots<y_r\le n-\frac{r(r-1)}{2}\}$

则 $S=|X|=|Y|=C_{n-\frac{r(r-1)}{2}}^r$

3. 由题. 构建双射:

$\Phi: X=\{1,2,\cdots,r$不相邻坐在 1~n 座位$\}\longrightarrow Y=\{(y_1,y_2\cdots,y_r) \mid y_1+y_2+\cdots+y_r=n-r,\ y_1,y_2\cdots y_r\in\mathbb{N}^+\}$

显然此双射成立. 由1中结论,

$S=|X|=|Y|=C_{n-r-1}^{r-1}$

4. $\sum_{A\subseteq[n]}|A|$

$=0\cdot C_n^0+1\cdot C_n^1+2\cdot C_n^2+\cdots+nC_n^n$

$=\sum_{i=1}^{n}iC_n^i$

$=n\sum_{i=1}^{n}C_{n-1}^{i-1}$

$=n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1})$

$=n\cdot2^{n-1}$

5. Pf: 取 $[n+1]$ 的 $a+b+1$元子集 $X=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{a+1},\cdots x_{a+b+1}) \mid x_1<x_2<\cdots<x_{a+b+1},\ x_{a+1}=k+1\}$

设 $Y=\{(x_1,x_2\cdots,x_a) \mid x_1<x_2<\cdots<x_a\le k\}$

则 $|Y|=C_k^a$

设 $W=\{(k+2\le x_{a+2}<x_{a+3}<\cdots<x_{a+b+1}\le n+1\}$

则 $|W|=C_{n-k}^b$

则 $|X|=|Y|\times|W|=C_k^a\cdot C_{n-k}^b$

设 $Z=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{a+1},\cdots x_{a+b+1}) \mid x_1<x_2<\cdots<x_{a+b+1}\le n+1\}$

则 $|Z|=C_{n+1}^{a+b+1}=\sum_{k=0}^{n}C_k^aC_{n-k}^b$.

6.(1) 列出表格：

	A_1	A_2	$\cdots$	A_k
1	(0,1)	(0,1)	$\cdots$	
2	(0,1)	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
n	(0,1)		$\cdots$	

每一行都至少需要1个1、[illegible]

则每一行种类数为 $C_k^1+C_k^2+C_k^3+\cdots+C_k^k=2^k-1$

有n行，故总数为 $S=(2^k-1)^n$

(2) 列出表格

	B_1	B_2
1	(0,1)	(0,1)
2	(0,1)	$\vdots$
3	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdots$	

由题意，设B_1选定k个1，则B_2可在$(n-k)$个中任选.

即此时有 $C_n^k(C_{n-k}^0+C_{n-k}^1+\cdots+C_{n-k}^{n-k})=C_n^k\cdot 2^{n-k}$

则总数 $S=\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^{n-k}=(1+2)^n=3^n$.