# 习题课材料（三）

## 注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

本节考虑的矩阵均为实矩阵，习题 1、5、8 为第五周习题课未讲题目。

**习题** 1. 设 $A$ 的行简化阶梯形为 $R$, 行变换对应的可逆矩阵是 $P$.

1. 求 $\begin{bmatrix} A & 2A \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形, 以及行变换对应的可逆矩阵.
2. 求 $\begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形, 以及行变换对应的可逆矩阵.

**习题** 2. 1. 任取 $m \times n$ 矩阵 $X$，分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，计算 $\begin{bmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

2. 由此判断 $\begin{bmatrix} 1 & & & & c_1 \\ & 1 & & & c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & a \end{bmatrix}$ 何时可逆，并在可逆时求其逆.

**习题** 3. 利用 Sherman-Morrison 公式判断下列矩阵何时可逆，并在可逆时求其逆.

$$\begin{bmatrix} a_1+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a_3+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a_n+1 \end{bmatrix}.$$

**习题** 4 (♡). 给定 $m \times n, n \times m$ 矩阵 $A, B$，求证：$I_m + AB$ 可逆当且仅当 $I_n + BA$ 可逆.

**习题** 5 (♡). 设实分块方阵 $X = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$, 其中 $A$ 是方阵, 如果 $X$ 与 $X^T$ 可交换, 求证: $C = O$.

**习题** 6. 证明：对角元素全非零的上三角矩阵 $U$ 可逆，其逆矩阵 $U^{-1}$ 也是上三角矩阵，且 $U^{-1}$ 的对角元素是 $U$ 的对角元素的倒数.

**习题** 7. 设 $n$ 阶方阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

利用初等变换证明，存在分解式 $T = LU$，其中 $L$ 是下三角矩阵，$U$ 是上三角矩阵. 据此求出 $T^{-1}$.

**习题** 8 (♡). 令 $X_\varepsilon = \begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$, 其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}$, 而 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $C$ 为 $n$ 阶对角占优方阵，$B_1$ 为任意给定的 $3 \times n$ 矩阵，$B_2$ 为任意给定的 $n \times 3$ 矩阵。

1. 求 $A$ 的 $LU$ 分解。

2. 先说明 $A$ 可逆，再试找一个常数 $\varepsilon_0 > 0$ (依赖于 $C, B_1, B_2$)，使得对任意满足条件 $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ 的 $\varepsilon$, $X_\varepsilon$ 均可逆。