2012-2013春季线性代数期中试题

考试课程　　线性代数　　A卷　　　　2013 年 05 月 9 日

姓名: ____________　　学号: ____________　　班级: ____________

注：解答题请写清步骤。

1. (12分) 设A为n阶正定矩阵，B是$n\times m$实矩阵，B^T为B的转置矩阵，证明：B^TAB为正定矩阵的充分必要条件是B的秩$r(B)=m$.

   证明：B^TAB为正定矩阵$\Leftrightarrow$ $X^TB^TABX>0$对任意$X\neq 0$成立

   $\Leftrightarrow BX\neq 0$ 对任意$X\neq 0$成立(A正定)

   $\Leftrightarrow B$列无关

   $\Leftrightarrow r(B)=m$.

2. (12分) 矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&1\\-1&0&2\end{pmatrix}$ 与$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 是否相似？并解释理由。

   解：$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$,所以$A$的特征值是1（两重）和2。因为$r(A-I)=1$,所以1的几何重数为2，故矩阵$A$可对角化。$B$为其自身的若当标准型，故不可对角化。因此$A,B$不相似。

3. (20分) 设A为3×3对称阵，第3列为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

   (1) 设A有代数余子式$C_{13}=0$,$C_{23}=1$且$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. 求矩阵$A$。问$A$是否可逆?

   提示：由已知条件可解得$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,$A$列相关，不可逆。

   (2) 求A的奇异值分解.

答案：$A=U\Sigma V^T=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} & 0\\ \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$.

(3) 在A的奇异值分解基础上,给出A的列空间$C(A)$的一组基.

解:由A的奇异值分解知$u_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_2=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$为$C(A)$的一组基。

4. (16分) 设向量空间$V=\{A为3\times3矩阵|A^T=-A\}$, $H=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(1) 证明：对任意$X\in V$,

$$\sigma: X\mapsto HX-XH$$

为V到V的线性变换；

提示：首先证明对任意X,$\sigma(X)\in V$,再证明$\sigma(X+Y)=\sigma(X)+\sigma(Y)$,$\sigma(cX)=c\sigma(X)$对任意$X,Y\in V$,$c\in\mathbb{R}$都成立，则$\sigma$是$V$上的线性变换。

(2) 证明：H, $E=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$为$V$的一组基；

提示：要证明H,E,F在向量空间V中线性无关，且V中任意向量可由H,E,F线性表出。

(3) 求σ在V的基底H,E,F下的矩阵表示。

答案：$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

5. (16分) 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ -10\end{pmatrix}$，判断方程组$Ax=b$是否有解。若有解，求出方程组的通解；若无解，求$x_0$,使得它是使得$\|Ax-b\|$取极小值的所有$x$中长度最短的。

解：因为$r(A,b)=3>2=r(A)$，所以方程组无解。

可解得$A^+=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-4 & 7 & 1\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$，所以$x_0=A^+b=(-3,2)^T$。

6. (12分) 在如图弹簧振动系统中有$n=6$个质点和$m=7$根弹簧. 设弹簧的弹性系数均为c,质点的质量均为m. 求质点位移$\mathbf{u}$与弹簧的弹力$\mathbf{y}$.

解:由图知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 又$C=cI$,故有

$$A^TCAu=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}u=mg\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

解得位移为$u=\frac{mg}{5c}\begin{pmatrix} 12 \\ 19 \\ 21 \\ 26 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$, 弹力为$y=cAu=\frac{mg}{5}\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \\ -8 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix}$.

7. (12分) 求下图的关联矩阵及其四个基本子空间的一组基：

解：由图知有5个节点，8条边，关联矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$为零空间$N(A)$的一组基,

树图对应的向量$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$为行空间$R(A)$的一组基,

任取4个列向量，如$\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$构成列空间$C(A)$的一组基,

4个不相关回路给出左零空间$N(A^T)$的一组基$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$。