不定积分例题

例 1 设$f(x)=2|x|$，求$\int f(x)\mathrm{d}x$.

解：由
$$f(x)=2|x|=\begin{cases}-2x, & x<0\\ 2x, & x\geqslant 0\end{cases},$$
可知在$(-\infty,0)$内，$\int f(x)\mathrm{d}x=-x^2+C_1$；在$[0,+\infty)$内，$\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C_2$，其中，$C_1$，$C_2$暂且作为固定常数，则得
$$F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1, & x<0\\ x^2+C_2, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

另外，由于原函数至少应是一个连续函数，为保证$F(x)$在$x=0$处连续，只需确定C_1，C_2，使$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)$，解得$C_1=C_2$，记为$C$，则
$$F(x)=\begin{cases}-x^2+C, & x<0\\ x^2+C, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

容易验证确有$F'(x)=\begin{cases}-2x, & x<0\\ 2x, & x\geqslant 0\end{cases}=2|x|$，$F(x)$的确是$f(x)$的原函数.

所以

$$\int 2|x|\mathrm{d}x=\begin{cases}-x^2+C, & x<0\\ x^2+C, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

上述结果也可写成

$$\int 2|x|\mathrm{d}x=x|x|+C.$$

注：求分段函数的不定积分时，一般都是按本例的方法处理：分段函数分段积分，并选择适当常数，使 $F(x)$ 在分段点处为连续函数.

例 2 判断以下三种求不定积分 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 的解法是否正确？

解：（方法一）因为被积函数的定义域为 $|x|>1$，所以

$$\text{原式} \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \mp\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mp\arcsin t + C = \begin{cases} -\arcsin \frac{1}{x} + C, x>1 \\ \arcsin \frac{1}{x} + C, x<-1 \end{cases}$$

（方法二）原式 $= \int \frac{x dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d\sqrt{x^2-1}}{x^2-1+1}$

$$= \arctan\sqrt{x^2-1} + C.$$

（方法三）原式 $\xlongequal{x=\sec t} \int \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sec t \cdot |\tan t|} dt = \pm\int dt = |t| + C = \left|\arccos \frac{1}{x}\right| + C.$

注：以上三种解法都是正确的，给出了三种不同形式的答案，这并不矛盾．事实上，一个函数若有原函数，则它必然有无穷多个原函数，它们任意两个之间之差是一个常数．可以验证以上三个函数之间相差常数，也可以通过求导验证积分正确与否．

例 3　已知 $f'(\cos^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，试求 $f(x)$．

解： 要求出 $f(x)$，可以先求出 $f'(x)$，由于

$$f'(\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 + \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = 2\cos^2 x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x},$$

所以

$$f'(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x},$$

则

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(2x - 2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = x^2 - 2x + \ln x + C,$$

其中，$0 < x < 1$．

例 4 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{(\sqrt{x}-x)^3}{x^2\sqrt{x}}dx$;

(2) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$;

(3) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$;

(4) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

(5) $\int \frac{\cos x}{1-\cos x}dx$.

解：（1）先将被积函数的分子展开，分项相除化为幂函数的代数和，即

$$\frac{(\sqrt{x}-x)^3}{x^2\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}-3x^2+3x^2\sqrt{x}-x^3}{x^2\sqrt{x}}=x^{-1}-3x^{-\frac{1}{2}}+3-x^{\frac{1}{2}},$$

利用不定积分的基本性质，分项积分

$$\text{原式}=\int\left(x^{-1}-3x^{-\frac{1}{2}}+3-x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=\int x^{-1}\mathrm{d}x-3\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+3\int\mathrm{d}x-\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-6\sqrt{x}+3x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

（2）由于 $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$，将被积函数恒等变形为

$$\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin x+\cos x}=\cos x-\sin x.$$

$$\text{原式}=\int(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x=\sin x+\cos x+C.$$

（3）利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$（注意 1 的妙用），对被积函数进行三角恒等变形为

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=\tan x-\cot x+C.$$

（4）经过恒等变形，被积函数化为

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$原式=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C.$$

(5) 本题分母有两项，对分子分母同乘一个因子，可将分母化成单项；也可以用倍角公式将分母化为单项.

（方法一）$\int \frac{\cos x}{1-\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^2 x} + \int (\csc^2 x - 1)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sin x} - \cot x - x + C = -\cot\frac{x}{2} - x + C.$$

（方法二）$\int \frac{\cos x}{1-\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\cot^2\frac{x}{2} - 1\right)\mathrm{d}x$

$$= \int \left(\csc^2\frac{x}{2} - 2\right)\mathrm{d}\,\frac{x}{2} = -\cot\frac{x}{2} - x + C.$$

例 1 计算下列不定积分（凑微分）.

(1) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$; (2) $\int \frac{\ln\ln x}{x\ln x}dx$;

(3) $\int (x-1)e^{x^2-2x+2}dx$; (4) $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(x+1)}dx$.

注：凑微分法是计算积分的基本方法. 这种方法比较灵活，要多做一些练习，注意观察逆写的微分公式.

解：(1)（方法一） $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x}{e^x(1+e^x)}dx = \int \frac{1}{e^x(1+e^x)}de^x$

$$= \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right)de^x$$

$$= \ln e^x - \ln(1+e^x) + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

（方法二） $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{e^x(e^{-x}+1)}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\int \frac{1}{e^{-x}+1}d(e^{-x}+1)$

$$= -\ln(e^{-x}+1) + C.$$

（2）反复凑微分，可得

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx = \int \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}d\ln x = \int \ln(\ln x)d\ln(\ln x) = \frac{1}{2}[\ln(\ln x)]^2 + C.$$

（3）选择难以处理的部分作适当变量替换，如令

$$t = x^2 - 2x + 2,\ dt = (2x - 2)dx = 2(x - 1)dx,$$

则
$$\int (x-1)e^{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2-2x+2}d(x^2 - 2x + 2) = \frac{1}{2}e^{x^2-2x+2} + C.$$

（4）选择难以处理的部分 $\ln(1+x) - \ln x$ 作适当变量替换，令

$$t = \ln(1+x) - \ln x, dt = \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{-1}{x(1+x)}dx,$$

则
$$\int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(x+1)}dx = -\int [\ln(1+x) - \ln x]d[\ln(1+x) - \ln x]$$

$$= -\frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln x]^2 + C = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+x}{x}\right)^2 + C.$$

注：上面两题中虽给出了凑的形式，但是实际计算中一般不需要显式写出代换过程.

例 2 计算下列不定积分（三角代换）.

(1) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{b^2+x^2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-c^2}}\mathrm{d}x$. （其中 a，b，$c>0$）

解：(1) 令 $x=a\sin t$，$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，则

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{a\cos t\mathrm{d}t}{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t}=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{a^2}\cot t+C.$$

回代时由 $\cot t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$，故

$$\text{原式}=-\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C.$$

(2) 令 $x=b\tan t$，$\sqrt{b^2+x^2}=b\sec t$，$\mathrm{d}x=\frac{b}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$，则

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{b^2+x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{b^2\tan^2 t\cdot b\sec t}\frac{b}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{b^2}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{b^2}\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{b^2\sin t}+C.$$

回代时引入辅助三角形，如图 8.1 所示，得 $\sin t=\frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}}$，则

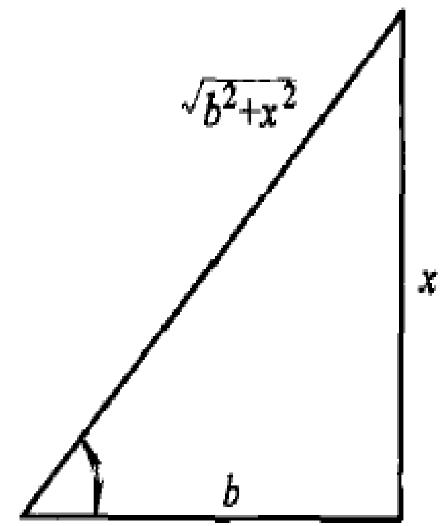

图 8.1

$$\text{原式}=-\frac{1}{b^2}\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{x}+C.$$

(3) 令 $x=c\sec t$，$\sqrt{x^2-c^2}=c\tan t$，$\mathrm{d}x=c\sec t\tan t\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-c^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{c\sec t\tan t\mathrm{d}t}{c^2\sec^2 t\cdot c\tan t}=\int\frac{1}{c^2}\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{b^2}\sin t+C,$$

引入辅助三角形，如图 8.2 所示，得

$$\sin t=\frac{\sqrt{x^2-c^2}}{x},$$

故
$$\text{原积分}=\frac{1}{b^2}\frac{\sqrt{x^2-c^2}}{x}+C.$$

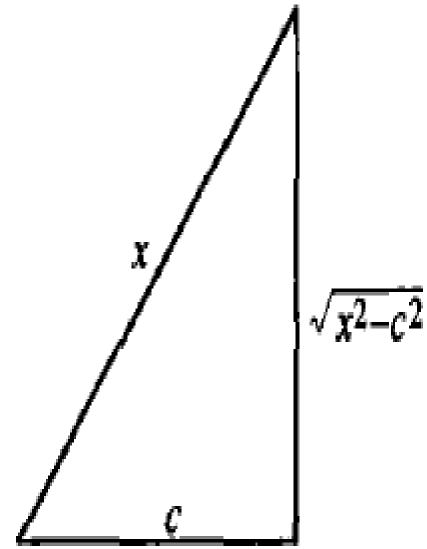

图 8.2

注：(1) 从解题过程中可知，用第二换元法计算不定积分时有变量回代的过程，且利用了辅助直角三角形的几何意义来写出各三角函数值.

(2) 若根号中出现的是 $1+ax^2$，$1-ax^2$，ax^2-1，$a>0$，应化为 $1+(\sqrt{a}x)^2$，$1-(\sqrt{a}x)^2$，$(\sqrt{ax})^2-1$，再利用相应的三角代换来解题.

(3) 此类题型也可以考虑双曲代换.

例 3 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x} + 1} dx$; (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$;

(3) $\int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx$; (4) $\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$.

解: (1) 注意到 $(e^x + e^{-x})' = e^x - e^{-x}$, $(e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x}$,

及 $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$, $(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} - 2$.

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x} + 1} dx = \int \frac{d(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2 - 1},$$

令 $e^x + e^{-x} = t$, 得

$$原式 = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{t+1} dt\right) = \frac{1}{2}\ln \frac{t-1}{t+1} + C = \frac{1}{2}\ln \frac{e^x + e^{-x} - 1}{e^x + e^{-x} + 1} + C.$$

注: 不要设 $e^x = t$ 或 $e^{-x} = t$, 那样将会更麻烦.

(2) 令 $\sqrt{1+e^x}=t$，则 $e^x=t^2-1$，$x=\ln(t^2-1)$，$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$，所以

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=\int\frac{1}{t}\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int\frac{1}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$$

(3) 作倒代换，$x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，则

$$原式=\int\frac{1+\ln t}{\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{1+\ln t}{(1+t\ln t)^2}dt.$$

因为 $(1+t\ln t)'=1+\ln t$，所以

$$原式=-\int\frac{d(1+t\ln t)}{(1+t\ln t)^2}=\frac{1}{1+t\ln t}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C.$$

(4)（方式一）　原式 $=\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{1+e^{2x}}=\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C.$

（方法二）　令 $I=\int \frac{e^{x}dx}{e^{x}+e^{-x}}$，$J=\int \frac{e^{-x}dx}{e^{x}+e^{-x}}$，则有

$$I+J=\int \frac{(e^{x}+e^{-x})dx}{e^{x}+e^{-x}}=x+C,$$

$$I-J=\int \frac{(e^{x}-e^{-x})}{e^{x}+e^{-x}}dx=\int \frac{1}{e^{x}+e^{-x}}d(e^{x}+e^{-x})=\ln(e^{x}+e^{-x})+C,$$

联立解出

$$I=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(e^{x}+e^{-x})+C.$$

注： 选择适当的变量替换，可使积分化简. 面对开根号、超越函数及积分中难以处理的部分，可以考虑作适当的变量替换将其化简. 尤其是倒代换，对某些不定积分具有很神奇的作用.

例 4 计算下列积分.

(1) $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$ $(a>0)$; (2) $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$; (3) $\int\frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x$.

解: (1)(方法一) 该被积表达式带有根号，作变量代换，先去掉根号.

令 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=t$，则 $x=\frac{at^2-a}{1+t^2}$，所以

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{4at^2}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=2a\int\frac{t\mathrm{d}(t^2+1)}{(t^2+1)^2}=-2a\int t\mathrm{d}\frac{1}{t^2+1}=-\frac{2at}{t^2+1}+2a\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$=2a\arctan t-\frac{2at}{t^2+1}+C=2a\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(方法二) 将被积函数分子有理化，再令 $x=a\sin t$，则

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{a(1+\sin t)}{a\cos t}a\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\int a(1+\sin t)\mathrm{d}t=at-a\cos t+C=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

（2）为去掉被积函数中的根号，令 $t=\sqrt[6]{x}$，则

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t^6(t^3+t^2)}6t^5\mathrm{d}t = 6\int \frac{1}{t^2+t}\mathrm{d}t$$

$$=6\left(\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t\right) = 6(\ln t - \ln(t+1)) + C = \ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C.$$

（3）对第二类换元积分法，除了常用代换外，有时根据被积函数特点采用特殊代换，也可以简化积分．对本题，令 $t=\tan x$，则

$$\int \frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int \frac{t-1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\arctan t + C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+\tan x| - \frac{1}{4}\ln\sec^2 x + \frac{1}{2}x + C.$$

例 1 已知 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

分析： 先通过代换求出 $f(x)$ 的一般表达式，再代入被积函数后计算积分.

解： 设 $t=\sin^2 x$，则 $\sin x=\sqrt{t}$，$x=\arcsin\sqrt{t}$，$f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = -2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x} \\ &= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int \sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x} \\ &= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

例 2　计算 $\int \sin(\ln x)\,dx$.

解： 使用两次分部积分公式

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln x)\,dx &= x\sin(\ln x) - \int x[\cos(\ln x)]\frac{1}{x}dx \\ &= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \\ &= x\sin(\ln x) - x[\cos(\ln x)] + \int x[-\sin(\ln x)]\frac{1}{x}dx \\ &= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \int \sin(\ln x)\,dx.\end{aligned}$$

由方程中可解出　$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$

注： 同理可得 $\int \cos\ln x\,dx = \frac{1}{2}(x\cos\ln x + x\sin\ln x) + C.$

例 3 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$;　　(2) $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$;　　(3) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$.

解: (1) 这是对数函数与幂函数乘积形式的不定积分，取 $\mu=\ln^3 x$，$v'=\frac{1}{x^2}$，

则 $dv=d\left(-\frac{1}{x}\right)$，于是

$$\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx=-\int \ln^3 x d\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\ln^3 x+\int \frac{1}{x^2}3\ln^2 x dx$$

$$=-\frac{1}{x}\ln^3 x-3\int \ln^2 x d\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\ln^3 x-3\frac{1}{x}\ln^2 x+6\int \frac{1}{x^2}\ln x dx$$

$$=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x-6\int \ln x d\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x-\frac{6}{x}\ln x-\frac{6}{x}+C.$$

（2）这是幂函数与指数函数乘积形式的不定积分，取 $u=x$，$v'=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$，

则 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}\,\dfrac{-1}{\mathrm{e}^x+1}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\mathrm{d}x&=-\int x\mathrm{d}\,\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}=-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x\\&=-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}x=-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}-\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}+1)}{\mathrm{e}^{-x}+1}\\&=-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+C.\end{aligned}$$

（3）这是幂函数与三角函数乘积形式的不定积分，取三角函数为 v'，幂函数为 u，应用分部积分公式. 注意到被积函数带有根号，为去掉根号，令$\sqrt{x}=t$，则

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= 2\int t^2\sin t\,\mathrm{d}t = -2\int t^2\,\mathrm{d}\cos t\\ &= -2t^2\cos t+4\int t\cos t\,\mathrm{d}t = -2t^2\cos t+4\int t\,\mathrm{d}\sin t\\ &= -2t^2\cos t+4t\sin t-4\int\sin t\,\mathrm{d}t = -2t^2\cos t+4t\sin t+4\cos t+C\\ &= -2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

例 4 求不定积分 $I=\int\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$，$J=\int\frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$.

解：$I+J=\int\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$,

$$I-J=\int\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{(\cos x-\sin x)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{(\cos x+\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\cos 2x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\ln(\sin 2x+1)+C,$$

解联立方程组，可求得

$$I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{8}\ln(2\sin 2x+2)+C,$$

$$J=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\ln(2\sin 2x+2)+C.$$

例 1 计算下列定积分（有理式的积分）.

(1) $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$;

(2) $\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx$;

(3) $\int \frac{1}{x^{11}+2x}dx$;

(4) $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

(5) $\int \frac{x-4}{x^2+x-2}dx$.

解: (1)（方法一） 用增补项方法对被积函数恒等变形.

$$原式 = \int \frac{1-x^4+x^4}{x^4(1+x^2)}dx = \int \frac{1-x^2}{x^4}dx + \int \frac{1}{(1+x^2)}dx$$

$$= -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

（方法二） 作倒代换，令$\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，则

$$原式=\int\frac{t^4}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{t^4}{1+t^2}dt=-\int\frac{t^4-1}{1+t^2}dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=-\int(t^2-1)dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt=-\frac{t^3}{3}+t-\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C.$$

（2）采用拆项法对被积函数恒等变形.

$$\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{x^2+(x^2+1)}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}.$$

$$原式=\int\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\arctan x-\frac{1}{x}+C.$$

(3) 由 $x^{11}+2x=x(x^{10}+2)$ 联想到被积函数的分子、分母同乘以 x^9，有

$$\int\frac{1}{x^{11}+2x}\mathrm{d}x=\int\frac{x^9}{x^{10}(x^{10}+2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\int\left(\frac{1}{x^{10}}-\frac{1}{x^{10}+2}\right)\mathrm{d}x^{10}$$

$$=\frac{1}{20}[\ln x^{10}-\ln(x^{10}+2)]+C=\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}+C.$$

(4) 考虑被积函数的分母 $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$，对比被积函数的分子，可凑成

$$\frac{x^4+1}{x^6+1}=\frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x^2}{x^6+1}.$$

$$\int\frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x^3}{(x^3)^2+1}=\arctan x-\frac{1}{3}\arctan x^3+C.$$

(5) 设
$$\frac{x-4}{x^2+x-2}=\frac{x-4}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1},$$
有
$$x-4\equiv A(x-1)+B(x+2)=(A+B)x+2B-A.$$

由于此式为恒等式，故两端同次幂的系数应相等，即$\begin{cases}A+B=1\\2B-A=-4\end{cases}$，解得$\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$，故
$$\frac{x-4}{x^2+x-2}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-1},$$
从而
$$\int\frac{x-4}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}=2\ln|x+2|-\ln|x-1|+C.$$

例 2 求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx.$

分析：（1）对于 $\int f(e^x)dx$ 型积分，均可通过变量代换 $e^x=t$ 化为有理函数的不定积分.

（2）这是反三角函数与指数函数乘积的形式，用分部积分法求积分.

解：（方法一） 令 $e^x=t$，$dx=\frac{dt}{t}$，则

$$\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx = \int \frac{\arctan t}{t^3}dt = \int \arctan t\, d\left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[t^{-2}\arctan t - \int \frac{1}{t^2(1+t^2)}dt\right] = -\frac{1}{2}\left(t^{-2}\arctan t + \frac{1}{t} + \arctan t\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C.$$

（方法二）

$$\int \frac{\arctan e^{x}}{e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \arctan e^{x} d(e^{-2x})$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^{x} - \int \frac{1}{e^{2x}(1+e^{2x})}de^{x}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^{x} + e^{-x} + \arctan e^{x}) + C.$$

例 3 计算 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$.

解：令 $u=\cos x$，则 $x=\arccos u$，$\mathrm{d}x=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$.

$$I=\int\frac{1}{(2+u)\sqrt{1-u^2}}\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}u}{(2+u)(u^2-1)}.$$

由
$$\frac{1}{(2+u)(u^2-1)}=\frac{1}{3(2+u)}+\frac{1}{6(u-1)}-\frac{1}{2(u-1)},$$

可得
$$I=\frac{1}{3}\ln|u-2|+\frac{1}{6}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|+C$$
$$=\frac{1}{3}\ln(\cos x+2)+\frac{1}{6}\ln|\cos x-1|-\frac{1}{2}\ln|\cos x+1|+C.$$

例 5 计算 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$.

解：令 $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，则 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$，代入原式得

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\int \frac{1+t^2}{1-t^2}t\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=\int \frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{2}{t^2-1}+\frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\arctan t+C=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

例 4 利用公式 $\int (f(x)+f'(x))e^x dx=\int (e^x f(x))'dx=e^x f(x)+C$ 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$; (2) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$.

解: (1) 原式 $=\int \frac{x+1-1}{(1+x)^2}e^x dx=\int\left[\frac{1}{1+x}+\left(\frac{1}{1+x}\right)'\right]e^x dx=\frac{e^x}{1+x}+C$.

(2) 原式 $=\int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+1}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x dx=\int\left[\tan\frac{x}{2}+\left(\tan\frac{x}{2}\right)'\right]e^x dx=e^x\tan\frac{x}{2}+C$.

$\sin x$ $\qquad\qquad$ 2

例 8 求下列积分的递推公式.

(1) $I_n = \int (\ln x)^n \mathrm{d}x (n \in \mathbf{N})$; (2) $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n} (n \in \mathbf{N}, a > 0)$.

解: (1) $I_n = \int (\ln x)^n \mathrm{d}x = x(\ln x)^n - \int x \mathrm{d}(\ln x)^n$

$$= x(\ln x)^n - \int x n (\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$= x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} \mathrm{d}x = x(\ln x)^n - nI_{n-1}.$$

$$I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}.$$

(2) $I_n = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} - \displaystyle\int x \mathrm{d}\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} - \displaystyle\int x\left[-n\dfrac{2x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right]\mathrm{d}x$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^n} - \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}.$$

从而
$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right].$$

例 9 已知 $f(x)$ 的一个原函数是$\frac{\sin x}{x}$，求 $\int x^3 f'(x)\,dx$.

解： 由条件 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'$，知

$$\int x^3 f'(x)\,dx = \int x^3\,df(x) = x^3 f(x) - 3\int x^2 f(x)\,dx$$

$$= x^3\left(\frac{\sin x}{x}\right)' - 3\int x^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)'dx = x(x\cos x - \sin x) - 3\int x^2\,d\,\frac{\sin x}{x}$$

$$= x(x\cos x - \sin x) - 3x\sin x + 6\int \sin x\,dx = x^2\cos x - 4x\sin x - 6\cos x + C.$$

注： 一般对于这种类型的题目，需要使用分部积分，一般不需要求出 $f(x)$.