作业4

1. Pf: $(a,b)=1$. 由 Bezont Thm. $\exists x,y$. s.t. $ax+by=1$

则 $axc+byc=c$

$\Rightarrow cx+\frac{bc}{a}y=\frac{c}{a}$

由于 $a|bc$, 故 $\frac{bc}{a}\in\mathbb{Z}$.

则 $\frac{c}{a}\in\mathbb{Z}$. 则 $a|c$.

2. (1) Pf: 对于 $\forall k$, 有 $a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\cdots+ab^{k-2}+b^{k-1})$. 即 $a-b\,|\,a^k-b^k$

故 $f(a)-f(b)=C_m(a^m-b^m)+C_{m-1}(a^{m-1}-b^{m-1})+\cdots+C_1(a-b)$

由于 $a-b\,|\,a^m-b^m$, $a-b\,|\,a^{m-1}-b^{m-1}$, $\cdots$ $a-b\,|\,a-b$

故 $a-b\,|\,f(a)-f(b)$ #

(2) Pf: $\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}$

$=(a-b)(a^{n-2}+2a^{n-3}b+3a^{n-4}b^2+\cdots+(n-2)ab^{n-3}+(n-1)b^{n-2})+nb^{n-1}$

即 $\frac{a^n-b^n}{a-b}$ 除以 $a-b$ 的余数为 nb^{n-1}.

由辗转相除法可知, 后续步骤相同, 可得到同一最大公因数

故 $(a-b,\frac{a^n-b^n}{a-b})=(a-b,nb^{n-1})$ #

3. Pf: 即 $a_n\frac{p^n}{q^n}+\cdots+a_0=0$, $((p,q)=1)$

$\Rightarrow a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_0q^n=0$

由于 $p|0$. 故 $p\,|\,a_np^n+\cdots+a_0q^n$

而 $p|a_np^n$, $p\,|\,a_{n-1}p^{n-1}q$, $\cdots$

$\Rightarrow p|a_0q^n$. 由于 $(p,q)=1$

则 $p|a_0$

同理可得, $q|a_n$ #

4. Pf: $V_p(n!)=V_p(1)+V_p(2)+\cdots+V_p(n)=\sum_{k=1}^{n}V_p(k)$

$V_p(k)=\max\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\,|\,p^i|k\}=\sum_{i\in\mathbb{Z}_+ 且 p^i|k}1$

故 $V_p(n!)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}_+ 且 p^i|k}1=\sum_{i\in\mathbb{Z}^+}\sum_{1\leq k\leq n 且 p^i|k}1=\sum_{i\in\mathbb{Z}^+}\sum_{p^ix=k\leq n}1=\sum_{i\in\mathbb{Z}^+}\left[\frac{n}{p^i}\right]$

#