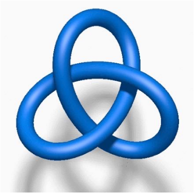
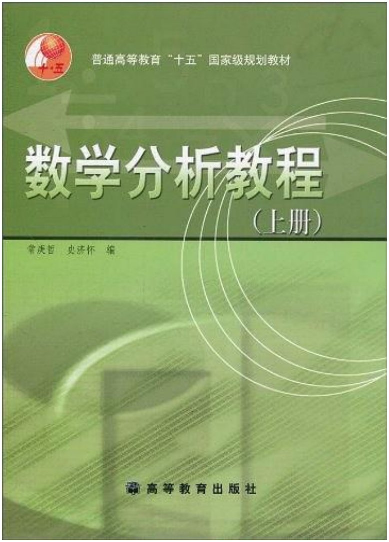
秋季学期微积分 A (1)课程

邹文明

第二章: 函数, 函数的极限与连续




普通高等教育"十五"国家级规划教材
数学分析教程
(上册)
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

几种常见的极限

情形 I: $x_0, a \in \mathbb{R}$ (1) $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \setminus \{x_0\}$, 则

$\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$.

此时我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

(2) 右极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0, x_0 + \eta)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

(3) 左极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0 - \eta, x_0)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$.

情形 II: $x_0 \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$

(1) $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, 则我们有

$\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = +\infty$ 当且仅当 $\forall M > 0$,

$\exists \delta \in (0, \eta)$

使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 我们有 $f(x) > M$.

此时将此极限简记为$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

(2) 右极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0, x_0 + \eta)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = +\infty$ 当且仅当 $\forall M > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$

使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 我们均有 $f(x) > M$.

我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

(3) 左极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0 - \eta, x_0)$, 那么

$$\lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = +\infty$$ 当且仅当 $\forall M > 0$,

$\exists \delta \in (0, \eta)$

使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 我们均有 $f(x) > M$.

我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

类似地, 我们还可以考虑如下情形的极限:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$,

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$,
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$,
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$.

命题 2. 假设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, 而 $f : \mathring{B}(x_0, \rho) \to \mathbb{R}$ 为函数. 那么 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

证明: 必要性. 假设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \rho)$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}(x_0, \delta)$, $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 因此 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 均会有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$; 同时 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 也将有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 于是我们有 $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

充分性. 假设我们有 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 \in (0, \rho)$ 使得 $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$, 我们均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$; 同时 $\exists \delta_2 \in (0, \rho)$ 使得 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, 也将有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 由此令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则我们有

$$\mathring{B}(x_0, \delta) \subseteq (x_0 - \delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_2),$$

于是 $\forall x \in \mathring{B}(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 故

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

情形 III: $x_0 = \pm\infty$ 或 ∞, 而 $a \in \mathbb{R}$.

(1) $x_0 = +\infty$ 且 $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (\eta, +\infty)$:

$\lim\limits_{X \ni x \to +\infty} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > \eta$ 使得

$\forall x > M$, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将上述极限简记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

(2) $x_0 = -\infty$ 且 $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (-\infty, -\eta)$:

$\lim\limits_{X \ni x \to -\infty} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > \eta$ 使得

$\forall x < -M$, 我们有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将该极限简记作 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.

(3) $x_0=\infty$, $X=\mathbb{R}$: $\lim\limits_{X\ni x\to\infty} f(x)=a$ 当且仅当

$\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$ 使 $|x|>M$ 时,

$|f(x)-a|<\varepsilon$.

该极限简记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$. 类似地, 可考虑:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$.

命题 3. 假设 $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, 而 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为函数. 则 $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ 当且仅当

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

证明: 必要性. 假设 $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ 使得 $|x| > M$ 时, 均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$.

也即 $\forall x < -M$ 以及 $\forall x > M$, $f(x) \in B(a, \varepsilon)$.

由此可知 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = a$.

充分性. 假设 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, 那么 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists M_1 > 0$ 使 $\forall x < -M_1$, $f(x) \in B(a,\varepsilon)$;

同样地 $\exists M_2 > 0$ 使得 $\forall x > M_2$, $f(x) \in B(a,\varepsilon)$.

令 $M = \max(M_1, M_2)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $|x| > M$ 时, 我们总有 $f(x) \in B(a,\varepsilon)$. 故 $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

典型例题

例 1. 证明: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 要找 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时, 均有 $|x^2| < \varepsilon$, 为此只需取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 那么当 $0 < |x| < \delta$ 时, 我们有 $|x^2| < \delta^2 = \varepsilon$. 从而所证结论成立.

例 2. 求证: 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$ 不存在.

证明: 由于当 $x>0$ 时, 我们均有 $\operatorname{sgn}x=1$, 而当 $x<0$ 时, 则有 $\operatorname{sgn}x=-1$, 于是

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}x=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}x=-1,$$

也就是说左、右极限不相等, 由此我们立刻可知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$ 不存在.

例 3. 求证: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 我们可选取 $\delta = \varepsilon$, 那么 $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 我们均有

$$|x\sin\frac{1}{x}| \leqslant |x| < \varepsilon.$$

故所证结论成立.

思考题: 求证: $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = 1.$

同学们辛苦了！

复习: 映射的定义与性质

- 映射 $f: X \to Y$ 为对应规则使得 $\forall x \in X$, 有唯一确定 $y \in Y$ 与之对应, 记 y 为 $f(x)$.
- 称 X 为 f 的定义域, Y 为 f 的取值范围, 并将 X 记为 $D(f)$.
- 我们称 $R(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$ 为映射 f 的值域, 也叫 f 的像集, 记作 $f(X)$ 或 $\mathrm{Im} f$.
- 定义域与值域为数集的映射被称为函数.

- 对于由表达式 $y = f(x)$ 所定义的函数, 使得表达式有意义的所有 x 组成的集合被称为函数 f 的自然定义域, 而由所有取值组成的集合则被称为 f 的值域.
- 数列恰好就是定义在 $\mathbb{N}^*$ 上的函数.
- 函数的四则运算: 线性组合, 乘法, 除法.
- 映射的复合.

- 单射: 不同元有不同像; 像同则原像同.
- 满射: 取值范围与值域重合.
- 双射: 既是单射也是满射, 也称可逆映射.
- 双射有逆映射, 反之亦然.
- 函数的基本性质: 有界性 (像集的有界性), 周期性, 奇偶性, 单调性.
- 严格单调函数为单射, 由此而得到的反函数与原来的函数有同样的单调性.
- 有反函数的函数不一定严格单调.

复习: 基本初等函数

- 常值函数;
- 幂函数: $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;
- 指数函数: $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$;
- 对数函数: $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$;
  自然对数函数: $y = \ln x = \log x$ $(x > 0)$;
- 三角函数: $y = \sin x$, $y = \cos x$;
- 反三角函数: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

复习: 初等函数

常用的其它初等函数: 多项式, 有理函数,

- 正切: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 余切: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$;
- 双曲正弦: $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

  双曲余弦: $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,

  双曲正切: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

  双曲余切: $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

复习: 函数极限的概念

- 直观描述: 当 x 接近 x_0 时, $f(x)$ 接近 a.
  在下面, 固定 X 为非空数集.
- 有限点处的邻域与去心邻域: $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
- $B_X(a,\varepsilon) = \{x \in X : |x-a| < \varepsilon\}$, 称为点 a 在 X 中的 ε-邻域.
- $\mathring{B}_X(a,\varepsilon) = \{x \in X : 0 < |x-a| < \varepsilon\}$, 称为点 a 在 X 中的 ε-去心邻域.

无穷点处的邻域与去心邻域: 固定 $\varepsilon > 0$.

- $B_X(+\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(+\infty, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ x > \frac{1}{\varepsilon}\}$, 称为 $+\infty$ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.
- $B_X(-\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(-\infty, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ x < -\frac{1}{\varepsilon}\}$, 称为 $-\infty$ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.
- $B_X(\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(\infty, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ |x| > \frac{1}{\varepsilon}\}$, 称为 ∞ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.
- 一点处的任意两个邻域总可以比较大小.

复习: 极限点与函数极限

- **极限点:** 点 $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, \pm\infty\}$ 被称为 X 的极限点, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 均有 $\mathring{B}(x_0, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.
- 任意的 $a \in \mathbb{R}$ 均是 $(a-\eta, a+\eta)$, $(a-\eta, a)$, $(a, a+\eta)$ 的极限点, 其中 $\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- 自然数集 $\mathbb{N}$ 的极限点为 $+\infty = \infty$.
- 整数集 $\mathbb{Z}$ 的极限为: $+\infty$, $-\infty$, ∞.
- 任意实数以及 $\pm\infty$, ∞ 均为有理数集 $\mathbb{Q}$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 的极限点.

- 刻画: 设 X 为非空数集, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$. 则 a 为 X 的极限点当且仅当在 $X \backslash \{a\}$ 中存在收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$.
- $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$, 也即点 a 的任何邻域在 f 下的原像均包含 x_0 的一个去心邻域.
- 极限的否定表述: 当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 不趋近于点 a 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$ 使 $f(x) \notin B(a, \varepsilon_0)$.

- 24 种常用极限的直接定义 (不借助邻域).
- 函数极限的存在性只与 f 在点 x_0 的邻域内的性态有关, 但与 f 在该点的取值无关.
- 如同数列, 当 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R}$ 时, 才说 "当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 收敛于 a".
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a.$

更多例题

例 4. 求证: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=-1.$

分析: $\forall \varepsilon>0$, 找 $\delta>0$ 使

得 $0<|x-1|<\delta$ 时,

均有 $|\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}+1|<\varepsilon$. 注意到

$$|\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}+1|=|\frac{2x^2-4x+2}{x(x-1)}|=2\frac{|x-1|}{|x|}.$$

要使之“很小”, 须使 $\frac{1}{|x|}$ 有上界, 从而由 $|x-1|$ 可以“很小”而让上式变得“ 小”. 让 $\frac{1}{|x|}$ 有上界,

就是让 x 远离原点. 由于极限只涉及到点 1 的小邻域. 因此可假设 $|x-1|<\frac{1}{…}$ 从而 $x>\frac{1}{…}$

证明: $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta=\min\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{4}\}$. 由此立刻可知当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 我们有 $|x-1|<\frac{1}{2}$, 从而我们有 $x>\frac{1}{2}$, 进而可知

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}+1\right|=\left|\frac{2x^2-4x+2}{x(x-1)}\right|$$

$$=\ 2\frac{|x-1|}{|x|}<4|x-1|<\varepsilon.$$

故所证结论成立.

例 5. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}$. 求证: $\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$.

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 求 $\delta > 0$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,
均有 $|e^x - e^{x_0}| < \varepsilon$.

(1) 若 $x > x_0$, 那么 $|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0}(e^{x - x_0} - 1)$.
要使 $|e^x - e^{x_0}| < \varepsilon$, 需 $x - x_0 < \log(1 + \varepsilon e^{-x_0})$.
也即取 $\delta = \log(1 + \varepsilon e^{-x_0})$.

(2) 若 $x < x_0$, 则我们有

$$|e^x - e^{x_0}| = e^x(e^{x_0 - x} - 1) < e^{x_0}(e^{x_0 - x} - 1).$$

因此也只需 $x_0 - x < \delta = \log(1 + \varepsilon e^{-x_0})$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 选取 $\delta = \log(1 + \varepsilon e^{-x_0})$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 分情况讨论:

(1) 若 $0 < x - x_0 < \delta$, 则我们有

$$|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1) < e^{x_0}(e^\delta - 1) = \varepsilon.$$

(2) 若 $0 < x_0 - x < \delta$, 此时我们也有

$$\begin{aligned} |e^x - e^{x_0}| &= e^x(e^{x_0-x} - 1) < e^{x_0}(e^{x_0-x} - 1) \\ &< e^{x_0}(e^\delta - 1) = \varepsilon. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

例 6. 固定 $x_0 > 0$. 求证: $\lim\limits_{x \to x_0} \log x = \log x_0$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 定义 $\delta = \min\left(x_0(1 - e^{-\varepsilon}), x_0(e^{\varepsilon} - 1)\right)$.

则 $\forall x > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 我们有

$$-x_0(1 - e^{-\varepsilon}) \leqslant -\delta < x - x_0 < \delta \leqslant x_0(e^{\varepsilon} - 1),$$

也即 $x_0 e^{-\varepsilon} < x < x_0 e^{\varepsilon}$, 则 $-\varepsilon < \log x - \log x_0 < \varepsilon$,

从而 $|\log x - \log x_0| < \varepsilon$. 故所证结论成立.

例 7. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}$. 求证: $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 我们可选取 $\delta = \varepsilon$, 那么 $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= \left| 2 \sin \frac{x + x_0}{2} \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \\ &\leqslant 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \\ &\leqslant |x - x_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

注: 同理可证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

例 8. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

证明: 由熟知的不等式

$$\sin x < x < \tan x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}),$$

立刻可得 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, 于是我们有

$$\begin{aligned} 0 \ &< \ 1-\frac{\sin x}{x} < 1-\cos x \\ &= \ 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x. \end{aligned}$$

由此可知 $|1-\frac{\sin x}{x}|<|x|$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$. 由于该式两边函数为偶函数, 则当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时, 我们有 $|1-\frac{\sin x}{x}|<|x|$. $\forall\varepsilon>0$, 如果选取 $\delta=\min(\varepsilon,\frac{\pi}{2})$, 则 $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $0<|x|<\delta$ 时, 我们有

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<|x|<\varepsilon.$$

故所证结论成立.

例 9. 证明: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 要找 $M > 0$ 使得当 $|x| > M$ 时, 均有 $|\frac{1}{x^2}| < \varepsilon$, 为此只需取 $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 选取 $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 则当 $|x| > M$ 时, 我们有 $|\frac{1}{x^2}| < \frac{1}{M^2} = \varepsilon$. 从而所证结论成立.

例 10. 设 $a > 1$, 证明: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $M = |\log_a \frac{1}{\varepsilon}| + 1$. 则 $\forall x > M$, 均有 $x > \log_a \frac{1}{\varepsilon}$, 从而 $|\frac{1}{a^x}| < \varepsilon$. 故所证成立.

例 11. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\log(x+1)-\log x\Big)=0.$

证明: $\forall\varepsilon>0$, 令 $M=\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}$, 则 $\forall x>M$, 我们有 $x>\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}$, 也即 $1+\frac{1}{x}<e^{\varepsilon}$, 从而

$$|\log(x+1)-\log x|=\log(1+\tfrac{1}{x})<\varepsilon.$$

故所证结论成立.

例 12. 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0)$.

证明: $\forall M > 0$, 令 $K = M^{\frac{1}{\alpha}}$, 则 $\forall x > K$, 我们有 $x^\alpha > K^\alpha = M$. 因此所证结论成立.

例 13. 求证: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=1.$

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $|x|>1$ 时, 我们有

$$\left|\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-1\right|=\frac{2}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 我们令 $M=\max\left(\sqrt{2},\frac{2}{\varepsilon}\right)$, 那么 $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $|x|>M\geqslant\sqrt{2}$ 时, 均有 $\left|\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-1\right|<\frac{2}{|x|}<\varepsilon$.

故所证结论成立.

例 14. 设 $a>1$, $\alpha>0$. 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}=+\infty$.

证明: 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{(n+1)^\alpha}=+\infty$, 从而 $\forall M>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有 $\frac{a^n}{(n+1)^\alpha}>M$. 于是 $\forall x>N+1$, 我们有 $[x]\geqslant N+1$, 进而可知

$$\frac{a^x}{x^\alpha}>\frac{a^{[x]}}{([x]+1)^\alpha}>M.$$

故所证结论成立. **注:** 该结论对 $\alpha\leqslant 0$ 也成立.

思考题: 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

秋风起兮白云飞,草木黄落兮雁南归–汉・刘彻《秋风辞》

同学们辛苦了！