第4课：函数概念-性质-运算-基本初等函数

第2章 函数及其连续性

- **内容：**

第2.1节 映射的一般概念和性质

第2.3节 函数概念和性质-基本初等函数

第4-1课：映射的一般概念和性质

映射(抽象函数) 概念和性质

本节集中介绍映射的一般概念-记号-术语

- **映射**：设A,B为二集合(不必是数集), 如果
  $\forall x \in A,\ \exists$唯一 $f(x) \in B$

则记 $f: A \to B$，称为由A到B的一个映射

- **要点** (映射三要素——Dirichlet引入现代函数概念时提出)
  1) A —— 定义域【常记$D(f)$=A，表示f的定义域】
  2) B —— 值域【后面给出更精确的值域表示】
  3) f —— 映射 (对应规律)

第4-1课：映射的一般概念和性质

考虑映射 $f: A \to B$

【注意】一般而言，未必每个 $y \in B$ 都有 $x \in A$ 满足 $y = f(x)$

即便有这样的 $x \in A$ 存在也未必唯一

- **满射**：称 f 是一个满射，如果

  $\forall y \in B, \exists x \in A$ 满足 $f(x) = y$ （$x \in A$ 不必唯一）

- **单射**：称 f 是一个单射，如果

  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$，必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$

- **双射**：如果 f 既是满射又是单射，称 f 是双射(1-1对应)

- **推论**：记 $B_1 = \{f(x) \mid x \in A\}$，则 $f: A \to B_1$ 是满射

  又若 $f: A \to B$ 是单射，则 $f: A \to B_1$ 是双射

第4-1课：映射的一般概念和性质

继续考虑映射 $f: A \to B$, 引入以下概念和记号：

- **象集**：令 $E \subset A$, 记 $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$

  —— 称为E 的象(集)

- **逆象**：令 $K \subset B$, 记 $f^{-1}(K) = \{x \in A \mid f(x) \in K\}$

  —— 称为K 的逆象(也称原象)

【注意】原象可以是空集，如果映射不是满射的话。

- **推论**：$f(A) \subset B$, 当且仅当 f 是满射时 $f(A) = B$

  $f^{-1}(B) = A$

验证 $f^{-1}(B) = A$：首先由原象定义 $f^{-1}(B) \subset A$

反之 $\forall x \in A$, $f(x) \in B$, 所以 $x \in f^{-1}(B)$, 因而 $A \subset f^{-1}(B)$ $\square$

第4-1课：映射的一般概念和性质

- **逆映射**：设 $f: A \to B$ 是单射，记$B_1 = f(A)$，则

$$\forall y \in B_1 = f(A), \ \exists 唯一\ x \in A\ 满足\ f(x) = y$$

定义 $f^{-1}(y) = x$，由此得到映射 $f^{-1}: B_1 \to A$，称为f 的逆映射

- **注**：仅当f为单射时，才能定义逆映射 $f^{-1}: B_1 \to A$

否则$\exists y \in B_1$，$f^{-1}(y)$ 不唯一，不符合映射要求

- **推论**：当且仅当$f: A \to B$为双射，逆映射$f^{-1}: B \to A$存在

- **复合映射**：设 $g: A \to B$，$f: C \to D$，满足$g(A) \subset C$，则

可以定义映射 $f \circ g: A \to D$：$\forall x \in A$，$f \circ g(x) = f(g(x)) \in D$

称为f与g的复合映射

- **注**：条件 $g(A) \subset C$不可缺少，否则$f(g(x))$可能无意义！

第4-1课：映射的一般概念和性质

- **定理**：设 $f:A\to B$ 是双射，则逆映射$f^{-1}:B\to A$存在

且 $f(A)=B,\ f^{-1}(B)=A,$ 所以复合映射

$$f\circ f^{-1}:B\to B,\ f^{-1}\circ f:A\to A$$

都存在，且二者分别是B与A上的恒等映射：

$$\forall y\in B,\quad f\circ f^{-1}(y)=y$$

$$\forall x\in A,\quad f^{-1}\circ f(x)=x$$

证：依照逆映射和复合映射的定义验证(自己练习) □

引入了映射的一般概念、记号、术语之后

下节讨论映射的具体实例 —— 函数 (一元函数)

第4-2课：一元函数的实例-运算-性质

函数的表示-运算-性质

- **函数**：设A为实数集合，则 $f: A \to \mathbb{R}$ 称为函数

  根据定义 $\forall x \in A$, $\exists$唯一 $f(x) \in \mathbb{R}$

这里实数 x 称为自变量，$f(x)$ 称为函数值

注：如果 $A \subset \mathbb{R}^n$，则 $f: A \to \mathbb{R}$ 称为n元函数

——下学期讨论的主题

- **函数常用表示方法**：

  1) 描述　2) 表格 —— 偶尔使用 (在建立数学模型阶段)

  3) 图像(曲线) —— 辅助使用，观察特点-趋势

  4) 公式 —— 主要使用，便于计算-推导-研究-分析

第4-2课：一元函数的实例-运算-性质

- ✓ **例1**：分段公式表示的函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$ —— 符号函数 (容易画出图像)

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$ —— Dirichlet函数 (画出图像？)

- ✓ **例2**：设 $\{a_n\}$ 是一个数列，定义函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(n)=a_n,\ n=1,2,\cdots$$

可见$\{a_n\}$相当于函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ (定义域是离散数集)

—— 数列可以看作定义在自然数集上的函数

第4-2课：一元函数的实例-运算-性质

- ✓ **例3**：考虑方程 $x+\sin y=y$

  可以证明 $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists$唯一 $y\in\mathbb{R}$, 使得下x,y 满足该方程

  据此定义 $y=f_3(x)$, 得到函数 $f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

  称为上述方程定义的隐函数

- ✓ **例4**：考虑方程组

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi) \quad (\text{实际上 } x^2+y^2=1)$$

注意 $\forall x\in(-1,1)$, 方程组对应的 $y>0$ (或$y<0$) 是唯一的

据此定义 $y=f_4(x)$, 得到函数 $f_4:(-1,1)\to\mathbb{R}$

称为通过参数定义的函数 (其中 t 称为参数)

第4-2课：一元函数的实例-运算-性质

- **函数的四则运算：**

设 $f:A\to\mathbb{R},\ g:B\to\mathbb{R}, D=A\bigcap B$非空, 定义

1) $f\pm g:D\to\mathbb{R},\ \ f\pm g(x)=f(x)\pm g(x), \forall x\in D$

2) $fg:D\to\mathbb{R},\qquad fg(x)=f(x)g(x), \forall x\in D$

3) $f/g:D\to\mathbb{R},\ \ f/g\,(x)=f(x)/g(x),\ \forall x\in D_0$

其中 D_0=$\{x\in D\,|\,g(x)\neq 0\}$

- **函数的复合运算：**

设 $f:A\to\mathbb{R},\ \ g:B\to\mathbb{R},\ \ g(B)\subset A$, 则得到的复合映射 $f\circ g:B\to\mathbb{R}$也是一个函数，称为复合函数

$$f\circ g(x)=f(g(x)),\ \ \forall x\in B$$

第4-2课：一元函数的实例-运算-性质

- **单调函数**：设 $f:A\to\mathbb{R},\ A\subset\mathbb{R}$

  如果$\forall x_1,x_2\in A,\ x_1<x_2$时，$f(x_1)\le f(x_2)$, 则称 f 单调增

  如果$\forall x_1,x_2\in A,\ x_1<x_2$时，$f(x_1)\ge f(x_2)$, 则称 f 单调减

又若上面的不等号是严格不等号，则称为严格单调

- **推论**：设 $f:A\to\mathbb{R}$严格单调, 记 $f(A)=D$, 则

  1) $f^{-1}:D\to A$ 存在

  2) f^{-1}也严格单调,且与 f 的增减性相同

  证：f 严格单调因而是单射，所以 $f:A\to D$是双射

因此反函数(逆映射) $f^{-1}:D\to A$ 存在

  不妨令f 严格单调增，验证 f^{-1} 也严格单调增...... □

第4-3课：基本初等函数

- **基本初等函数**

1) 多项式 (由常值函数和恒等函数的加乘运算生成)

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,\quad x\in\mathbb{R}$$

其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$为常数

2) 幂函数

$$f(x)=x^a,\quad x>0$$ (后面用指数-对数给出严格定义)

特别当 $a=n\in\mathbb{N}$时, $f(x)=x^n$, $x\in\mathbb{R}$

当 $a=-n,n\in\mathbb{N}$时, $f(x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$, $x\neq 0$

当 $a=\dfrac{n}{m}$, $m,n\in\mathbb{Z}$时, $f(x)=x^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{x^n}$, $x>0$

第4-3课：基本初等函数

- **基本初等函数** (续)

3) 指数函数：令$a>0$ 固定

$$f(x)=a^x,\ \ x\in\mathbb{R}\ \ \text{(后面给出严格定义)}$$

4) 对数函数：令 $a>0$ 且$a\neq 1$

$$f(x)=\log_a x,\ \ x>0\ \text{——— 指数函数的反函数}$$

特别当 $a=e$ 时，记$\log_e x=\log x$ 或 $\ln x$

5) 三角函数

$$f_1(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R}\qquad f_2(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}$$

注意 $\begin{cases} f_1:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]\ \text{严格单调增} \\ f_2:[0,\pi]\to[-1,1]\ \text{严格单调减} \end{cases}$

6) 反三角函数

$$f_1^{-1}(x)=\arcsin x,\ \ f^{-1}{}_2(x)=\arccos x,\ |x|\le 1$$

第4-3课：基本初等函数

- **补充：指数的定义与性质**

令 $a>0$, 定义a^x如下：$a^0=1$

1) $x=n\in\mathbb{N}$时, $a^x=a^n$ (n个相乘)

2) $x=\dfrac{n}{m}$, $m,n\in\mathbb{N}$时, $a^x=a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$

3) $x>0$ 为无理数时，取有理数列$\{p_n\},\{q_n\}\to x$, 且

$$p_1<p_2<\cdots<p_n<\cdots<x<\cdots<q_n<\cdots<q_2<q_1$$

不妨令$a>1$, 则由指数的单调性

$$a^{p_1}<a^{p_2}<\cdots<a^{p_n}<\cdots<a^{q_n}<\cdots<a^{q_2}<a^{q_1}$$

由单调性原理得到唯一 $y\in\mathbb{R}$满足 $a^{p_n}<y<a^{q_n}$, $n=1,2,\cdots$

$$y=\lim_{n\to\infty}a^{p_n}=\lim_{n\to\infty}a^{q_n},\quad \text{定义 } a^x=y$$

4) $x<0$ 时, $x=-|x|$, $a^x=a^{-|x|}=1/a^{|x|}$

第4-3课：基本初等函数

- **指数的性质**

1) 若$a>1, x>0$，则$a^x>1$；若$0<a<1, x>0$，则$0<a^x<1$

2) 指数律

$$a^{x+y}=a^x a^y,\quad a^{x-y}=a^x/a^y,\quad a^{xy}=(a^x)^y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$(ab)^x=a^x b^x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (a,b>0)$$

3) 若$a>1$，则a^x 为严格单调增函数

若$0<a<1$，则a^x 为严格单调减函数

证：先验证有理数指数的情况，再通过极限及其保序性过渡到无理数指数的情况，细节略 (课后选做) □

- **推论**：当$a>0, a\neq 1$时，函数 a^x 存在反函数 $y=\log_a x$ 严格单调 (若a>1增，若a<1减)

第4-3课：基本初等函数

- **对数函数的性质：** 令$a>0, a\neq 1$

1) a^x 的定义域为$\mathbb{R}$，值域为$\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$

   $\log_a x$ 的定义域为$\mathbb{R}_+$，值域为$\mathbb{R}$

2) 反函数性质

$$y=\log_a x \Leftrightarrow a^y=x,\ \forall x>0, y\in\mathbb{R} \qquad (\therefore \log_a a=1)$$

$$\log_a(a^x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R};\quad a^{\log_a x}=x,\ \forall x\in\mathbb{R}_+$$

3) 对数律

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+$$

$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+$$

$$\log_a(x^y)=y\log_a x,\ \forall x\in\mathbb{R}_+, y\in\mathbb{R}$$

4) 换底公式：

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}=\frac{\ln x}{\ln a},\ \forall x\in\mathbb{R}_+\quad \text{其中}a,b>0,\ a,b\neq 1$$

第4-3课：基本初等函数

- **幂函数**

固定$a \in \mathbb{R}$, 定义

$$x^a = e^{a \ln x}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

注：当 $a = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$

由指数律和反函数性质

$$e^{a \ln x} = e^{\frac{n}{m} \ln x} = (e^{\ln x})^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{n}{m}}$$

与幂函数前面定义一致

第4课：函数概念-性质-运算-基本初等函数

- **预习** (下次课内容)：

  第2.3节 补充说明

  第2.4节 函数的极限

- **作业** (本次课)：

  练习题2.1：1-2[自己练习], 3, 5.

  练习题2.3：1[自己练习], 2-5, 8*, 9, 10, 11.

  问　题2.3：1, 2*, 3(1*).