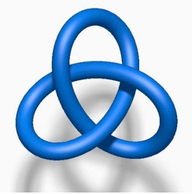
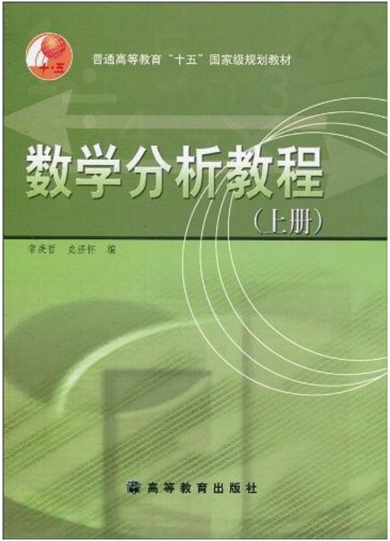
高等微积分

邹文明

第二章: 函数, 函数的极限与连续




普通高等教育"十五"国家级规划教材
数学分析教程
(上册)
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

§6. 无穷小量

定义 1. 极限为零的函数被称为无穷小量, 简称无穷小. 若 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 则记

$$\alpha(x) = o(1) \quad (X \ni x \to x_0).$$

注: $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ 当且仅当我们有

$$f(x) - a = o(1)\ (X \ni x \to x_0).$$

无穷小量的基本性质

- 如果 $\alpha(x) = o(1)$ $(X \ni x \to x_0)$, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $|\alpha(x)| < \varepsilon$.
- $\alpha(x)$ 为无穷小量当且仅当 $|\alpha(x)|$ 亦如此.
- 非零的常数与无穷小量之和, 在局部范围内与该常数同号.

- 有限多个无穷小量之和为无穷小量.
- 无穷小量乘以常数后还是无穷小量.
- 有界函数与无穷小量之积为无穷小量.
- 极限等于无穷的函数被称为 无穷大量, 也被简称为无穷大.
- 无穷大量的倒数为无穷小量.
- 不等于零的无穷小量的倒数为无穷大量.

定义 2. 设 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\beta(x)=0$. 另外我们还假设 $\beta(x)\neq 0$.

- 如果 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, 那么称 $X\ni x\to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量, 记作

$$\alpha(x)=o(\beta(x))\quad (X\ni x\to x_0).$$

- 如果 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$, 称 $X\ni x\to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量.

- 如果 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 那么称 $X\ni x\to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量, 记作

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\quad (X\ni x\to x_0).$$

- 设 $x_0\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{N}^*$. 如果 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^r}=c\neq 0$, 则称 $X\ni x\to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 为 r 阶无穷小量.
- 对无穷大量可以引入类似的概念.

评注

- 等价无穷小量的价值在于简化极限的计算:

$$\lim_{X\ni x\to x_0}\frac{f(x)}{\alpha(x)}=\lim_{X\ni x\to x_0}\frac{f(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{X\ni x\to x_0}\frac{f(x)}{\beta(x)}.$$

- 当 $X\ni x\to x_0$ 时, 即便我们有 $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$, 且 $\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$, 但通常我们却有

$$\alpha_1(x)+\beta_1(x)\not\sim\alpha_2(x)+\beta_2(x).$$

例如, 当 $x\to 0$ 时, 我们有

$$x\sim x+x^2,\ -x\sim -x,\ \text{但 } 0\not\sim x^2.$$

典型的等价无穷小量

当 $x \to 0$ 时, 我们有

- $\sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \tan x \sim x,$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3,$
- $\log(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x,$

  $a^x - 1 \sim x \log a \ (a > 0,\ a \neq 1),$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$

秋风起兮白云飞,草木黄落兮雁南归–汉・刘彻《秋风辞》

同学们辛苦了!

§7 − 9. 函数的连续与间断

定义 1. 假设 X 为数集, $x_0 \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ 为函数. 称 f 在点 x_0 处连续, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in X$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 均有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

若 f 在 X 的每点连续, 则称 f 为 X 上的连续函数. 所有这样连续函数的集合记为 $\mathscr{C}(X)$.

评注

- 在上述定义中, 点 x_0 不一定为 X 的极限点. 若的确如此, 则 $\exists\delta > 0$ 使得 $\mathring{B}_X(x_0, \delta) = \emptyset$, 故 $B_X(x_0, \delta) = \{x_0\}$, 从而 f 总在该点连续. 例如 $\mathbb{N}^*$ 上的任意函数均连续. 以后除非是特别说明, 将总是假设 x_0 为 X 的极限点.

评注

- 若 x_0 为 X 的极限点, 则 f 在点 x_0 处连续当且仅当 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- 若 f 在点 x_0 处连续, 则 $|f|$ 也在该点连续.

- 当 $X=(a,b)$ 时, 则将 $\mathscr{C}(X)$ 简记为 $\mathscr{C}(a,b)$. 则 $f\in\mathscr{C}(a,b)$ 当且仅当 $\forall x_0\in(a,b)$, 均有
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$
- 当 $X=[a,b]$ 时, 则将 $\mathscr{C}(X)$ 简记为 $\mathscr{C}[a,b]$. 则 $f\in\mathscr{C}[a,b]$ 当且仅当 $f\in\mathscr{C}(a,b)$, 且
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b).$$

单侧连续

定义 2. 假设 X 为区间, $x_0 \in X$, 而 $f: X \to \mathbb{R}$.

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 称 f 在点 x_0 左连续.
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 称 f 在点 x_0 右连续.
- 左、右连续称为单侧连续.

连续性的局部性质

命题 1. 假设 X 为区间, $x_0 \in X$ 为 X 的内点, 而 $f : X \to \mathbb{R}$ 为函数. 那么 f 在点 x_0 处连续当且仅当 f 在点 x_0 处左、右连续.

命题 2. 假设 X 为数集, $x_0 \in X$. 则 $f : X \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续当且仅当对 X 中收敛到 x_0 的任意数列 $\{a_n\}$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

评注

- 若 X 中有收敛到点 x_0 的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$, 则 f 在点 x_0 处不连续. 该结论常用来证明函数在某点处的不连续性.
- 命题 2 也可以反过来将数列极限转化成函数极限, 并利用相关结论来简化计算.

命题 3. 设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而 $f, g : X \to \mathbb{R}$.

(1) (局部有界) 若 f 在点 x_0 处连续, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in B_X(x_0, \delta)$, 均有 $|f(x)| < 1 + |f(x_0)|$.

(2) (局部保序) 假设 f, g 在点 x_0 处连续.
若 $f(x_0) > g(x_0)$, 则 $\exists \delta > 0$ 使 $\forall x \in B_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) > g(x)$.

(3) (局部保号) 假设 f 在点 x_0 处连续.

a. 若 $f(x_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in B_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) > 0$.

b. 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \geqslant 0$, 则我们有 $f(x_0) \geqslant 0$.

命题 4. **(四则运算法则)** 设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续. 则

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ 在点 x_0 处连续,
- fg 在点 x_0 处连续,
- $\frac{f}{g}$ 在点 x_0 处连续 (若 $g(x_0) \neq 0$).

命题 5. **(复合法则)** 假设 X, Y 为数集, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, 而 $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbb{R}$ 分别在点 x_0, $y_0 = f(x_0)$ 处连续, 则 $g \circ f$ 在点 x_0 处连续.

初等函数的连续性

回顾: 常值函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数经过有限次四则运算与复合所得到的函数统称为初等函数.

例 1: 多项式, 有理函数, 双曲函数为初等函数.

定理 1. 初等函数在其定义域内连续.

间断点

- 函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在点 $x_0 \in X$ 不连续当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in B_X(x_0, \delta)$ 满足 $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0$.
- 若 f 在点 x_0 处不连续, 则称 f 在该点间断.

若 x_0 为 f 的间断点, 则

- 或者 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$ 不存在或无限,
- 或者 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$ 存在且有限但异于 $f(x_0)$.

可去间断点

定义 3. 假设 X 为非空数集，而 x_0 为其极限点. 如果极限 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)$ 存在并且有限，但该极限异于 $f(x_0)$ 或者 f 在点 x_0 处无定义，则称点 x_0 为 f 的可去间断点. 此时我们只需修改 f 在点 x_0 处的值就可以让 f 在该点处连续.

例 2. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在点 $x = 0$ 处没有定义, 但 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 若令 $f(0) = 1$, 则 f 连续.

跳跃间断点

定义 4. 设 X 为区间, 而 x_0 为其内点. 若函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 处的左、右极限

$$f(x_0-0) := \lim_{x\to x_0^-} f(x),\quad f(x_0+0) := \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

存在 (且有限), 但却不相等, 则称点 x_0 为 f 的跳跃间断点.

例 3. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$, 从而点 $x = 0$ 为符号函数 sgn 的跳跃间断点.

间断点的分类

- 可去间断点以及跳跃间断点合起来被称为第一类间断点. 其特点是函数在该点处的左、右极限 (若有意义) 存在且有限.
- 不属于第一类间断点的其它间断点被称为第二类间断点. 其特点是函数在该点处至少有一个单侧极限不存在或无限.

秋风起兮白云飞,草木黄落兮雁南归–汉·刘彻《秋风辞》

同学们辛苦了！

§10. 闭区间上连续函数的性质

定理 1. **(连续函数介值定理)** 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 那么对于介于 $f(a), f(b)$ 之间的任意的实数 μ, 均存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = \mu$.

证明: 不失一般性, 我们可假设 $f(a) < \mu < f(b)$.

定义 $A=\{x\in[a,b]\ :\ f(x)\leqslant\mu\}$, 且 $\xi=\sup A$. 则 $\forall n\geqslant 1$, $\exists x_n\in A$ 使得 $\xi-\frac{1}{n}<x_n\leqslant\xi$. 再由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$. 另外 $\forall n\geqslant 1$, $x_n\in A$, 故 $f(x_n)\leqslant\mu$, 且 $\xi\in[a,b]$. 由连续性与极限的保序性立刻可知 $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\leqslant\mu<f(b)$, 于是 $b>\xi$. 由 ξ 的定义, $\forall x\in(\xi,b]$, $f(x)>\mu$,

从而由连续性以及极限的保序性可得

$$f(\xi) = f(\xi + 0) = \lim_{x \to \xi^+} f(x) \geqslant \mu,$$

进而我们有 $f(\xi) = \mu$.

推论. **(零点存在定理)** 若函数 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 使得 $f(a)f(b) \leqslant 0$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = 0$.

证明: 由于 0 介于 $f(a), f(b)$ 之间, 于是由连续函数介值定理可知所证结论成立.

秋风起兮白云飞,草木黄落兮雁南归—汉・刘彻《秋风辞》

同学们辛苦了!

例 1. 如果 $f:[a,b]\to[a,b]$ 连续, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得我们有 $f(\xi)=\xi$.

证明: $\forall x\in[a,b]$, 令 $F(x)=f(x)-x$. 则 F 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 并且

$$F(a)\geqslant 0,\ F(b)\leqslant 0,$$

于是由连续函数介值定理可知 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $F(\xi)=0$, 也即我们有 $f(\xi)=\xi$.

例 2. 任何实系数奇次多项式方程有实根.

证明: 考虑实系数的多项式 $f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$, 其中 $n \geqslant 0$ 且 $a_{2n+1} > 0$, 那么 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. 由于 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{2n+1}} = a_{2n+1} > 0$, 从而可知 $\exists M > 0$ 使得当 $|x| \geqslant M$ 时, 均有 $\frac{f(x)}{x^{2n+1}} > 0$. 于是 $f(M) > 0$, 且 $f(-M) < 0$. 进而由连续函数介值定理立刻可知 $\exists c \in [-M, M]$ 使得 $f(c) = 0$. 由此得证.

例 3. 假设函数 $f \in \mathscr{C}(a,b)$ 使得 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = c_1$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = c_2$, 其中 c_1, c_2 不相等并且不一定为有限. 如果 $\mu \in \mathbb{R}$ 严格介于 c_1, c_2 之间, 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\mu = f(\xi)$.

证明: 不失一般性, 假设 $c_1 < \mu < c_2$. 由函数极限局部保序性知, $\exists \delta_1 \in (a,b)$ 使得 $\forall x \in (a, \delta_1)$, 我们有 $f(x) < \mu$.

同样地, $\exists\delta_2 \in (a,b)$ 使得 $\forall x \in (\delta_2, b)$, 我们均有 $f(x) > \mu$. 由此可知 $\delta_2 \geqslant \delta_1$.

任取 $a_1 \in (a, \delta_1)$,

$b_1 \in (\delta_2, b)$, 那么 $a_1 < b_1$, $f(a_1) < \mu$, $f(b_1) > \mu$.

又因 f 在 $[a_1, b_1]$ 上连续, 于是由连续函数介值定理可知, $\exists\xi \in (a_1, b_1) \subset (a,b)$ 使得 $\mu = f(\xi)$.

因此所证结论成立.

例 4. 求证: 方程 $x^7 - 3x^4 - 6x^3 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内有一个根.

证明: $\forall x \in [0,1]$, 我们定义

$$f(x) = x^7 - 3x^4 - 6x^3 + 5x + 1.$$

则 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 且 $f(0) = 1$, $f(1) = -2$. 由连续函数介值定理可知 $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

命题 1. 如果 X 为区间, 而 $f: X \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 则像集 $\operatorname{Im} f$ 为区间.

证明: 任取 $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$ $(y_1 \neq y_2)$, 则 $\exists a, b \in X$ 使得 $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$. 不失一般性, 我们可假设 $a < b$, 否则可调整 y_1, y_2 的编号. 由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则对于介于 y_1, y_2 之间的任意实数 y, $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $y = f(\xi) \in \operatorname{Im} f$, 故 $\operatorname{Im} f$ 包含以 y_1, y_2 为端点的区间, 从而 $\operatorname{Im} f$ 为区间.

命题 2. 如果 X 为区间, 而 $f \in \mathscr{C}(X)$ 为单射, 则 f 必为严格单调函数.

证明: 用反证法, 假设 f 不为严格单调的函数, 因为是单射,则在 X 中存在点 x_1, x_2, x_3 使得 $x_1 < x_2 < x_3$,
但 $f(x_2)$ 却不介于 $f(x_1), f(x_3)$ 之间.

(考虑一种情形) 若 $f(x_1), f(x_3) > f(x_2)$,

则 $\exists \mu \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x_2) < \mu < f(x_1), \ f(x_2) < \mu < f(x_3).$$

从而由连续函数介值定理可得知 $\exists \alpha \in (x_1, x_2)$ 使得 $\mu = f(\alpha)$. 同理 $\exists \beta \in (x_2, x_3)$ 使 $\mu = f(\beta)$. 于是 $f(\alpha) = f(\beta)$, 但 $\beta > \alpha$. 矛盾!

综上所述可知所证结论成立.

命题 3. 设 X 为区间, $f : X \to \mathbb{R}$ 为单调函数, 则 $f \in \mathscr{C}(X)$ 当且仅当像集 $\mathrm{Im} f$ 是一个区间.

证明: 必要性源于前面的命题. 下面只需证明充分性. 不失一般性, 假设 f 单调递增, 否则可考虑 $-f$. 用反证法, 假设 f 在点 $x_0 \in X$ 间断. 则由单调有界定理可知或者 $f(x_0+0) > f(x_0)$ 或者 $f(x_0-0) < f(x_0)$.

不失一般性, 我们假设 $f(x_0+0) > f(x_0)$, 对另一种情形可作类似讨论.

则 $\forall x \in X$, 当 $x > x_0$ 时, 我们均有

$$f(x) \geqslant f(x_0+0) > f(x_0),$$

而当 $x < x_0$ 时, 则有 $f(x) \leqslant f(x_0)$. 这表明

$$\big(f(x_0), f(x_0+0)\big) \cap \mathrm{Im} f = \emptyset.$$

但 $\exists b \in X$ 使得 $b > x_0$, 从而 $f(b) \geqslant f(x_0+0)$.
由 $\mathrm{Im} f$ 为区间可知 $[f(x_0), f(b)] \subseteq \mathrm{Im} f$, 矛盾!
故假设不成立, 因此 f 在 X 上连续.

定理 2. (反函数定理) 若 X 为区间, $f \in \mathscr{C}(X)$ 为单射, 则反函数 $f^{-1}: \mathrm{Im} f \to X$ 存在且连续.

证明: 由 命题 1 可知 $\mathrm{Im} f$ 为区间, 而由 命题 2 知 f 为严格单调, 从而反函数 $f^{-1}: \mathrm{Im} f \to X$ 存在且单调. 由于 f^{-1} 单调且 $\mathrm{Im} f^{-1} = X$ 为区间, 则由 命题 3 可知 f^{-1} 为连续函数.

定理 3. (最值定理) 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 f 有最值.

证明: 首先证明 f 在 $[a,b]$ 上有界. 用反证法, 设 f 为无界函数. 则 $\forall n \geqslant 1$, $\exists a_n \in [a,b]$ 使得 $|f(a_n)| > n$. 但数列 $\{a_n\}$ 有界, 故存在收敛的子列 $\{a_{k_n}\}$. 将其极限记为 x_0. 则由极限保序性可知 $x_0 \in [a,b]$. 又由连续性可得

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_{k_n}) = \infty.$$

矛盾! 故函数 f 在 $[a,b]$ 上有界.

令 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. 如果 f 在 $[a,b]$ 上无最大值, 则 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(x) < M$. 令 $F(x) = \frac{1}{M-f(x)}$. 那么 $F \in \mathscr{C}[a,b]$, 从而有界. $\forall K > 0$, 由 M 的定义可知 $\exists x \in [a,b]$ 使得 $f(x) > M - \frac{1}{K}$. 从而 $F(x) = \frac{1}{M-f(x)} > K$, 也即 F 没有上界. 矛盾!

于是 f 在 $[a,b]$ 上有最大值.

又因 $-f \in \mathscr{C}[a,b]$,
则 $-f$ 在 $[a,b]$ 上有最大值, 故 f 也有最小值.

推论. 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\operatorname{Im} f$ 为闭区间.

证明: 由最值定理知, $\exists c, d \in [a,b]$ 使得我们有

$$f(c) = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \ f(d) = \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

于是 $\forall x \in [a,b]$, 我们均有 $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$, 从而 $\operatorname{Im} f \subseteq [f(c), f(d)]$. $\forall \mu \in [f(c), f(d)]$, 又由连续函数介值定理可知, 存在 ξ 介于 c, d 之间使得 $\mu = f(\xi)$. 故 $\operatorname{Im} f = [f(c), f(d)]$.

例 5. 若 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ 且 f 可以取到正值, 求证: f 在 $\mathbb{R}$ 上有正的最大值.

证明: 由题设立刻知, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0) > 0$. 又 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 < f(x_0)$, 由函数极限保序性知, $\exists M > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $|x| > M$ 时, 我们均有 $f(x) < f(x_0)$, 于是 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sup\limits_{x\in[-M,M]} f(x) > 0$. 又 f 在 $[-M, M]$ 上连续, 则由连续函数的最值定理可知 f 在 $[-M, M]$ 上有正的最大值, 进而可知所证结论成立.

例 6. 若 $f\in\mathscr{C}[a,+\infty)$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$, 求证: 函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

证明: 由极限定义可知 $\exists M>a$ 使得 $\forall x>M$, 均有 $|f(x)-A|<1$, 由此可得 $|f(x)|<1+|A|$. 又 f 在 $[a,M]$ 上连续, 从而有界, 也即 $\exists K>0$ 使得 $\forall x\in[a,M]$, 均有 $|f(x)|<K$. 则 $\forall x\geqslant a$, 我们总有 $|f(x)|<1+|A|+K$. 故所证成立.

§1. 导数与微分的概念

定义 1. 假设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为函数, $x_0\in(a,b)$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 存在 (并且有限), 则称 f 在点 x_0 处可导, 上述极限被称为函数 f 在点 x_0 处的导数, 被记作 $f'(x_0)$, 或者 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$, $\mathrm{D}_x f(x_0)$, 等等.

若 f 在 (a,b) 的每点处可导, 则称 f 在 (a,b) 上可导, 由此得到的函数 f' 称为 f 的导函数.

单侧导数 (左、右可导)

左导数: $f'_-(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

右导数: $f'_+(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

评注

- 函数 f 是否在点 x_0 处可导仅与 f 在 x_0 的邻域内的性质有关.
- 函数 f 在点 x_0 处可导当且仅当 f 在该点的左、右导数存在 (有限) 且相等.
- 曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

切线与法线

设曲线 Γ 在点 (x_0, y_0) 有切线, 该切线与 x 轴夹角为 α, 则切线的方程为 $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \tan\alpha$, 也即 $y - y_0 = \tan\alpha \cdot (x - x_0)$, 过这一点的法线是与切线垂直的直线, 它与 x 轴的夹角等于 $\alpha + \frac{\pi}{2}$, 从而法线的方程为 $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \tan(\alpha + \frac{\pi}{2})$, 也即

$$x - x_0 = -\tan\alpha \cdot (y - y_0).$$

例 1. 设函数 f 在点 x_0 可导. 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程与法线方程.

解: 曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 切线的斜率为 $f'(x_0)$, 故所求切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. 进而可知相应的法线方程为

$$x - x_0 = -f'(x_0)(y - f(x_0)).$$

命题 1. 若 f 在点 x_0 可导, 则 f 在该点连续.

证明: 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)\\
=\ &\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\\
=\ &f'(x_0)\times 0=0.
\end{aligned}$$

注: 反过来, 连续性并不蕴含着可导性.

例 2. 常值函数的导数等于 0.

例 3. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $\pi(x) = x$, 则 $\pi'(x) \equiv 1$. 此时也常将之记作 $x' = 1$.

例 4. 若$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 求 $f'(0)$.

解: 由导数定义以及夹逼原理可得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 5. 求证: $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导.

证明: 由题设可知

$$f'_{+}(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

故所证结论成立.

注: 上述函数 f 在点 $x=0$ 处连续, 但不可导.

例(复习). 证明: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

证明: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$.

例(复习). 证明: $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

证明: $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1$.

例(复习). 求证: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a\ (a>0)$.

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\overset{y=a^x-1}{=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{y\log a}{\log(1+y)}=\log a$.

注: 特别地, 我们有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

例 6. $\forall a > 0$, 求证: $(a^x)' = a^x \log a$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = a^x$. 则

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{a^y - a^x}{y - x} = \lim_{y \to x} a^x \cdot \frac{a^{y-x} - 1}{y - x} = a^x \log a.$$

例 7. $\forall a > 0$, 求证: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = \log_a x$. 则

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y \to x} \frac{\log_a y - \log_a x}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{\log(1 + \frac{y-x}{x})}{(y - x)\log a} \\
&= \lim_{y \to x} \frac{\frac{y-x}{x}}{(y - x)\log a} = \frac{1}{x \log a}.
\end{aligned}
$$

注: 特别地, $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$.

例 8. 设 $k \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = x^k$. 求证:

$$f'(x) = kx^{k-1}.$$

证明: 仅需考虑 $k \geqslant 2$. 若 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \to x} \frac{y^k - x^k}{y - x} = x^k \lim_{y \to x} \frac{(1 + \frac{y-x}{x})^k - 1}{y - x} \\ &= x^k \lim_{y \to x} \frac{k \cdot \frac{y-x}{x}}{y - x} = kx^{k-1}. \end{aligned}$$

另外 $f'(0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{y^k}{y} = 0$. 故所证成立.

例 9. 求证: $(\sin x)' = \cos x$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = \sin x$. 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y\to x} \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \\ &= \lim_{y\to x} \frac{2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{y+x}{2}}{y-x} = \cos x. \end{aligned}$$

注: 同理可证 $(\cos x)' = -\sin x$.

秋风起兮白云飞,草木黄落兮雁南归–汉 • 刘彻《秋风辞》

同学们辛苦了！