上节课要点：

1.极限概念推广：无穷小数列和无穷大数列以及二者之间的关系。

注意：无穷大或无穷小数列是在n趋向无穷的变量， 一个数无论多么大都不是无穷大；同样一个数无论多么小都不是无穷小；常数列0认为是无穷小；

2.单调有界公理。

3.两个重要极限：

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n, b_n = 1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

第3课：收敛数列的特性以及极限计算

第1章 实数和数列极限

- **内容：**

  第1.8-1.9节 基本列和确界原理

  第1.12节 Stolz定理(一类极限计算的方法)

第3课：收敛数列的特性以及极限计算

本节要点

- **两个重要概念**

  1) 基本列 (Cauchy列)

  2) 上/下确界

- **三大基本原理** (与单调性原理等价)

  1) Bolzano-Weirestrass列紧原理

  2) Cauchy收敛原理

  3) 确界原理

- **一个极限计算技巧：**Stolz定理

第3-1课：基本列和Cauchy收敛原理

收敛准则-基本列及其研究

- **基本列等价定义：**

设$\{a_n\}$为一个数列

如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N,$ 当$n > N,$ 对任意自然数$p,$ 都有$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

则称$\{a_n\}$是基本列 (也称为Cauchy列)

问：如何描述数列{a_n}不是cauchy 列？

第3-1课：基本列和Cauchy收敛原理

收敛准则-基本列及其研究

- **推论**：若$\{a_n\}$收敛,则$\{a_n\}$是基本列（数列收敛的必要条件）

证：令$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$，使得$\forall n, n' > n_0$ 都有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_{n'} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

由三角不等式

$$|a_n - a_{n'}| = |(a_n - a) + (a - a_{n'})| \le |a_n - a| + |a_{n'} - a| < \varepsilon$$

第3-1课：基本列和Cauchy收敛原理

✓ **例1**：验证数列 $\{\dfrac{n^2}{n^2+1}\}$ 是基本列

解：记 $a_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$，$a_n-a_m=\dfrac{n^2}{n^2+1}-\dfrac{m^2}{m^2+1}=\dfrac{n^2-m^2}{(n^2+1)(m^2+1)}$

$\forall n,m>n_0$

$$|a_n-a_m|\le\frac{n^2+m^2}{(n^2+1)(m^2+1)}\le\frac{1}{(n^2+1)}+\frac{1}{(m^2+1)}<\frac{1}{2n_0^2}$$

由此立刻看出$\{a_n\}$是基本列 □

✓ **例2**：验证 $\{(-1)^n\}$ 不是基本列

解：记 $a_n=(-1)^n$，取 $\varepsilon=1>0$,

注意$\forall n\in\mathbb{N}$，$|a_n-a_{n+1}|=2>\varepsilon$ —— $\{a_n\}$ 不是基本列 □

第3-1课：基本列和Cauchy收敛原理

✓ **例3**：设 $0<p\le 1,\ a_n = 1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p},\ n=1,2,\cdots,$

$$|a_n - a_{n+m}| = \frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(n+m)^p}$$

$$\ge \frac{1}{n+m}+\frac{1}{n+m}+\cdots+\frac{1}{n+m} = \frac{m}{n+m}$$

取m=n得到 $\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n - a_{2n}|\ge 1/2$ …… $\{a_n\}$不是基本列

✓ **例4**：$a_n = 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2},\ n=1,2,\cdots$

$$|a_n - a_{n+m}| = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+m)^2}$$

$$\le \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+m-1)(n+m)}$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+m} < \frac{1}{n}$$ …… $\{a_n\}$是基本列

第3-1课：基本列和Cauchy收敛原理

- **问题**：基本列必收敛？
- **难点**：基本列收敛到哪里？极限如何得到？

➢ **引理1**：基本列是有界的 (类似收敛数列有界性证明)

证：取基本列$\{a_n\}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使得$\forall n, n' > n_0$, $|a_n - a_{n'}| < 1$

由此得到 $\forall n > n_0$, $|a_n - a_{n_0+1}| < 1$, $\therefore\ |a_n| \le |a_{n_0+1}| + 1$

进一步有 $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le |a_1| + \cdots + |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + 1$ $\square$

➢ **引理2 (Bolzano-Weierstrass)**：有界数列必有收敛子列

【所以基本列有收敛子列，进一步再证基本列收敛到到该子列极限】

- **注**：引理2的结论称为Bolzano-Weierstrass列紧性原理是实数理论中的重要结论, 与单调性原理 (公理) 是等价的

3. 证明子数列收敛准则:

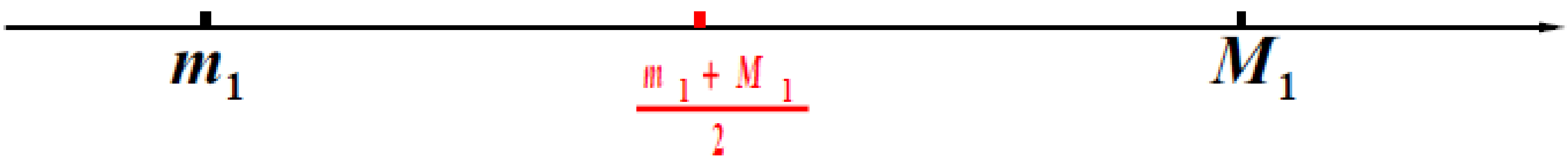
思路：先选一子序列，再证明该子序列收敛.

（1）证法一：利用两分法选子序列

（a）选子序列

$$\{a_n\}\text{有界}\Rightarrow \exists m_1, M_1, \forall n\in N, \text{有}$$

$$m_1 \le a_n \le M_1$$



把$\{a_n\}$分成两部分分别满足:

$$m_1 \le a_n \le \frac{m_1+M_1}{2} \qquad \frac{m_1+M_1}{2} \le a_n \le M_1$$

至少有一组含有数列的无穷多项，记为$\{a_{n_1}^*\}$

$$m_2 \le a_{n_1}^* \le M_2$$

如此无限地作下去，得一串子数列

$$\{a_{n_1}^*\},\ \{a_{n_2}^*\},\cdots,\ \{a_{n_k}^*\},\cdots$$

$$m_{k+1} \le a_{n_k}^* \le M_{k+1}$$

在每一个子数列中任意选一个数，记为

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \cdots,\ a_{n_k},\ \cdots$$

(*b*) 证明选出的子数列$\{a_{n_k}\}$收敛

$$m_1 \le m_2 \le \cdots \le m_k \le \cdots \le M_1$$

$$M_1 \ge M_2 \ge \cdots \ge M_k \ge \cdots \ge m_1$$

$\Rightarrow \quad \{m_k\}, \{M_k\}$都收敛

又因为 $\lim\limits_{k\to\infty}(M_k - m_k) = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{M_1 - m_1}{2^{k-1}} = 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} M_k = \lim_{k\to\infty} m_k = A$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$$ 证毕

(2)利用确界概念选一子数列

(a)选子序列

$$a_{n_1} = a_1$$

$$\{a_n \mid n \in N, n > 1\} = \{a_{n_1}\} \qquad b_1 = \sup\{a_{n_1}\}$$

$$a_{n_2}: \quad \exists a_{n_2} \in \{a_{n_1}\}, \text{使 } 0 \le b_1 - a_{n_2} < \frac{1}{2}$$

$$\{a_n \mid n \in N, n > n_2\} = \{a_{n_2}\} \quad b_2 = \sup\{a_{n_2}\} \le b_1$$

$$a_{n_3}: \quad \exists a_{n_3} \in \{a_{n_2}\}, \text{使 } 0 \le b_2 - a_{n_3} < \frac{1}{3}$$

$$\{a_n \mid n \in N, n > n_3\} = \{a_{n_3}\} \quad b_3 = \sup\{a_{n_3}\} \le b_2$$

如此无限地作下去得

a_{n_k} : $\exists a_{n_k} \in \{a_{n_{k-1}}\}$, 使 $0 \le b_{k-1} - a_{n_k} < \dfrac{1}{k}$

$$\{a_n \mid n \in N, n > n_k\} = \{a_{n_k}\}$$

$$b_k = \sup\{a_{n_k}\} \le b_{k-1}$$

(b) 证明选出的子数列收敛

由(1) $\Rightarrow \quad \lim\limits_{k\to\infty}(b_{k-1} - a_{n_k}) = 0$

$\{b_k\}$ 单调减有下界 $\Rightarrow \{b_k\}$ 收敛

$\Rightarrow \{a_{n_k}\}$ 收敛   证毕

第3-1课：基本列和Cauchy收敛原理

- **引理3**：任意数列有单调子列

证：任取数列$\{a_n\}$, 定义其"龙头项"如下：

固定 $k \in \mathbb{N}$, 如果$\forall n > k$, $a_k > a_n$, 则称 a_k为一个"龙头项"

数列必属于下列两种情况之一：

1) $\{a_n\}$有无穷多个"龙头项", 依次记为$a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_n}, \cdots$

注意 $k_1 < k_2 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$, 因此 $a_{k_1} > a_{k_2} > a_{k_3} > \cdots > a_{k_n} > \cdots$

这时 $\{a_n\}$中有严格单调减子列$\{a_{k_n}\}$

2) "龙头项"只有有限多, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, a_n不是"龙头项"

取 $a_{k_1} = a_{n_0}$, 不是"龙头项", $\therefore \exists k_2 > k_1$, $a_{k_1} \leq a_{k_2}$,

而 a_{k_2}也不是"龙头项", $\therefore \exists k_3 > k_2$, $a_{k_2} \leq a_{k_3}$, $\cdots$ $\cdots$

依次类推，得到单调增子列$\{a_{k_n}\}$ $\square$

第3-1课：基本列和Cauchy收敛原理

- Cauchy收敛原理(准则)

  数列收敛的充分必要条件是该数列为基本列

  证：只须性充分性。任取基本列$\{a_n\}$, 则$\{a_n\}$有界(引理1)

由Bolzano-Weierstrass列紧原理，存在收敛子列$\{a_{k_n}\}$

记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$, 下面验证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ —— $\{a_n\}$收敛

  为此注意 $|a_n - a| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a|$

首先 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, 使得$\forall n, n' > n_1$, 都有 $|a_n - a_{n'}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

其次由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, 使得$\forall n > n_2$, $|a_{k_n} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

综上，当$n > n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$, 注意$k_n \ge n > n_0$,

$$\therefore\ |a_n - a| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

注：

柯西原理是分析学中一个具有重要理论意义的定理。这是因为我们后面所有的分析理论都是建立在极限基础之上，进而利用极限原理得到各种各样形式不同的柯西原理。

这一结论告诉我们可以通过数列自身的特性来判别其是否有极限。

第3-1课：基本列和Cauchy收敛原理

- **观察说明：**Cauchy收敛原理的意义

1. 基本列是数列收敛的充分必要条件(数学理论的追求)

2. 基本列的定义与收敛数列定义相差无几(至少看上去)验证通常比较繁琐(难度也几乎一样)。

3. 比较基本列与收敛数列定义，根本区别在于极限值。基本列不涉及数列收敛的极限值。

4. 基本列有重要理论意义，对后续分析数学有巨大影响——泛函分析，微分方程，分析拓扑，调和分析等

【在引入了"距离"的集合上，可以定义该集合的"基本列"；如果存在不收敛的基本列，该集合就需要"完备化"……】

第3-2课：上-下确界与确界原理

（回忆）上确界与下确界

- **上-下界**：设数集$E\subset\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}$,

  如果 $\forall x\in E$,都有$x\le A$, 则称 A 是 E 的一个上界

  如果 $\forall x\in E$,都有$x\ge A$, 则称 A 是 E 的一个下界

- **注**：若A 是 E 的上界, 则$\forall B>A$, B也是 E 的上界

  若A 是 E 的下界, 则$\forall B<A$, B也是 E 的下界

- **上确界**(最小上界)：如果β是E 的最小上界, 即满足

  1) 上界：$\forall x\in E$,都有$x\le\beta$

  2) 最小：$\forall\varepsilon>0$, $\exists x\in E$使得$x>\beta-\varepsilon$ （$\beta-\varepsilon$不是E上界）

则称 β是E的上确界，记为$\beta=\sup E$

- **注**：若E 没有上界，也可记为 $\sup E=+\infty$

第3-2课：上-下确界与确界原理

- **下确界**(最大下界)：如果α是E 的最大下界，即满足

  1) 下界：$\forall x \in E$, 都有$x \ge \alpha$

  2) 最大：$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E$使得$x < \alpha + \varepsilon$ （$\alpha + \varepsilon$不是E下界）

则称 α是E 的下确界，记为$\alpha = \inf E$

- **注**：若E没有下界，可记为$\inf E = -\infty$

✓ **例1**：$\inf \mathbb{N} = 1$ (如果0不算自然数)， $\sup(a,b) = b$， $\inf \mathbb{Q}_+ = 0$

✓ **例2**：$\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$, $\sup\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$

✓ **例3**：$\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} = \sqrt{2}$, $\inf\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} = -\infty$

✓ **例4**：$\inf\{(1+1/n)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2$,

$\sup\{(1+1/n)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$

$$\begin{bmatrix}\text{上确界不必是最大值} \\ \text{下确界不必是最小值}\end{bmatrix}$$

第3-2课：上-下确界与确界原理

- **确界原理**：设$E\subset\mathbb{R}$非空　（空集如何？）
- 1) 如果E有上界，则必有上确界：$\exists\beta=\sup E\in\mathbb{R}$
- 2) 如果E有下界，则必有下确界：$\exists\alpha=\inf E\in\mathbb{R}$

证：易见1)与2)**类似**(留作课下思考)，下面只证1)

已知$\exists a_0\in E$, b_0是E上界, 不妨令$a_0<b_0$ ——否则$a_0=b_0=\sup E$

如果 $E\cap[\frac{a_0+b_0}{2},b_0]$非空, 就取$[a_1,b_1]=[\frac{a_0+b_0}{2},b_0]$

否则取$[a_1,b_1]=[a_0,\frac{a_0+b_0}{2}]$, 这样$E\cap[a_1,b_1]$非空, b_1是E上界

同样若 $E\cap[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$非空, 取$[a_2,b_2]=[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$

否则 取$[a_2,b_2]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$, 仍然$E\cap[a_2,b_2]$非空, b_2是E上界

依次递推　…………

第3-2课：上-下确界与确界原理

- **确界原理证明 (续)**

依次递推，得到数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$, 具有以下性质：

(a) $\{a_n\}$单调增，$\{b_n\}$单调减，且$a_n \le b_n$，$n = 1, 2, \cdots$,

(b) $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$, $n = 1, 2, \cdots$

(c) $E \cap [a_n, b_n]$非空，b_n是E上界，$n = 1, 2, \cdots$

应用单调性原理，由(a)导出

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 都存在，结合(b)得到 $a = b$

由(c)可知$\forall x \in E$都有$x \le b_n$，$n = 1, 2, \cdots$，从而 $x \le b$（极限保序）

这说明 $a = b$ 是 E 的上界

第3-2课：上-下确界与确界原理

- **确界原理证明** (续2)

  已证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,\ \ a = b$ 是 E 的上界

  $\forall \varepsilon > 0$, 只要证 $a-\varepsilon$ 不是E 的上界

  注意 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > a-\varepsilon$, 根据极限的保序性质

  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使得$\forall n > n_0,\ a_n \ge a-\varepsilon$

据上面性质(c) $E \bigcap [a_n, b_n]$非空, $\therefore \exists x_n \in E \bigcap [a_n, b_n],\ n = 1, 2, \cdots,$

综上 $\forall n > n_0,\ \exists x_n \in E,\ x_n \ge a_n \ge a-\varepsilon$

可见 $a-\varepsilon$ 不是E 的上界, $\therefore\ a = b = \sup E$ $\square$

- **回忆约定**：若E 无$\begin{cases} 上界, & \sup E = +\infty \\ 下界, & \inf E = -\infty \end{cases}$

Question. 相较于定义, 利用Cauchy收敛原理判别数列敛散性的优势?

Question. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n - x_{n+p}\right| = 0, \forall p \in N \overset{?}{\Rightarrow} \{x_n\}$为Cauchy列

No! 反例:$\{\sqrt{n}\}, \{\ln n\}, \left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}$.

Question. $\left|x_n - x_{n+p}\right| \le \dfrac{p}{n}, \forall p, n \in N \overset{?}{\Rightarrow} \{x_n\}$为Cauchy列.

No! 反例:$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}$.

Question. $\left|x_n - x_{n+p}\right| \le \dfrac{p}{n^2}, \forall p, n \in N \overset{?}{\Rightarrow} \{x_n\}$为Cauchy列. Yes!

Proof. $\left|x_n - x_{n+p}\right| \le \dfrac{p}{n^2}, \forall p, n \in N$, 则$\left|x_n - x_{n+1}\right| \le \dfrac{1}{n^2}, \forall n.$

于是

$$\left|x_n - x_{n+p}\right| \le \left|x_n - x_{n+1}\right| + \left|x_{n+1} - x_{n+2}\right| + \cdots + \left|x_{n+p-1} - x_{n+p}\right|$$

$$\le \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)^2}$$

$$\le \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)}$$

$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p-1} < \frac{1}{n-1}, \quad \forall p, \forall n > 1. \square$$

Ex. $\exists M>0, s.t.\sum_{k=1}^{n}\left|x_{k+1}-x_k\right|\le M, \forall n \Rightarrow \{x_n\}$为Cauchy列.

Proof. 令$y_n=\sum_{k=1}^{n}\left|x_{k+1}-x_k\right|, n\in\mathbb{N}$. $\{y_n\}$单增有上界,$\{y_n\}$收敛,

$\{y_n\}$为Cauchy列. $\forall \varepsilon>0, \exists N, s.t.$

$$0\le y_{n+p}-y_n\le\varepsilon, \quad \forall n>N, \forall p.$$

从而有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|\le\left|x_{n+p}-x_{n+p-1}\right|+\cdots+\left|x_{n+1}-x_n\right|$$

$$=y_{n+p-1}-y_n<\varepsilon, \qquad \forall n>N, \forall p. \square$$

Ex. $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$, 则 $\inf\limits_{n\ge 1}\{\frac{x_n}{n}\}$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \inf\limits_{n\ge 1}\{\frac{x_n}{n}\}$.

Proof. $0 \le \frac{x_n}{n} \le x_1$, 则 $\inf\limits_{n\ge 1}\{\frac{x_n}{n}\} = \mathrm{A}$ 存在. $\forall \varepsilon > 0, \exists m, s.t.$

$$\mathrm{A} \le \frac{x_m}{m} < \mathrm{A} + \varepsilon.$$

$\forall n > m$, 有 $n = km + r, k, r \in \mathbb{Z}, 0 \le r < m$. 记 $x_0 = 0$, 则

$$\mathrm{A} \le \frac{x_n}{n} \le \frac{kx_m + x_r}{n} = \frac{kx_m}{km+r} + \frac{x_r}{n} \le \frac{x_m}{m} + \frac{x_r}{n} \le \mathrm{A} + \varepsilon + \frac{x_r}{n}.$$

$\exists N > m, s.t. \max\limits_{0\le r<m}\{\frac{x_r}{n}\} < \varepsilon, \forall n > N$. 于是,

$$\mathrm{A} \le \frac{x_n}{n} \le \mathrm{A} + 2\varepsilon, \forall n > N. \square$$

第3-2课：上-下确界与确界原理

- **补充说明：**实数理论中的6大原理

1. 单调性原理
2. 确界原理

仅适用于实数集(有序集)

3. Bolzano-Weiestrass列紧原理
4. Cauchy收敛原理
5. 区间套原理

* 6. Heine-Borel有限覆盖原理 (第1.10节，不要求)

- 3-6可以推广到定义了"距离"的一般集合
- 6甚至可以推广到更一般的"拓扑空间"

Thm.(闭区间套定理) 若闭区间列$[a_n, b_n]$满足条件:

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] (n = 1, 2, \cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

则$\exists!\, \xi \in \mathbb{R}, s.t.\ \xi \in \bigcap\limits_{n\geq 1}[a_n, b_n]; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi.$

●单调收敛原理$\Rightarrow$闭区间套定理:

存在性. 由$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $a_n\uparrow, b_n\downarrow$,且

$$a_1\le a_n\le b_n\le b_1,\qquad \forall n.$$

由单调收敛原理,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在. 又$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n\triangleq\xi.$$

设$\exists a_k>\xi$. 由$\{a_n\}$单增,有$a_n\ge a_k,\forall n>k$.令$n\to+\infty$,有

$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ge a_k>\xi$, 矛盾.所以$a_n\le\xi,\forall n$. 同理,$\xi\le b_n,\forall n$.

故 $$a_n\le\xi\le b_n,\forall n.$$

唯一性. 设$\forall n$有$a_n \le \eta \le b_n$. 由极限的保序性,有

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \eta \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 而$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$,故$\eta = \xi$.□

•闭区间套定理$\Rightarrow$Bolzano-Weirstrass定理:

设$\{x_n\}$为有界列. 则$\exists a_1 < b_1, s.t.\ x_n \in [a_1, b_1], \forall n$. 用中点$\dfrac{a_1+b_1}{2}$将$[a_1,b_1]$分为两个区间, 其中至少有一个含有$\{x_n\}$中无穷多项,记之为$[a_2,b_2]$. 用中点$\dfrac{a_2+b_2}{2}$将$[a_2,b_2]$分为两个区间, 其中至少有一个含有$\{x_n\}$中无穷多项,记之为$[a_3,b_3]$. 如此继续,得到一列区间$[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$,满足

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n](n=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}=0.$$

由闭区间套定理,$\exists!\,\xi\in\bigcap_{n\geq 1}[a_n,b_n]$, 且$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$.

$[a_1,b_1]$中包含$\{x_n\}$的无穷多项, 因此$\exists x_{n_1}\in[a_1,b_1]$. $[a_2,b_2]$中包含$\{x_n\}$的无穷多项, 因此$\exists x_{n_2}\in[a_2,b_2]$, 且$n_2>n_1$. 依此推, $\exists x_{n_{k+1}}\in[a_{k+1},b_{k+1}]$, 且$n_{k+1}>n_k$. 由此得到$\{x_n\}$的子列$\left\{x_{n_k}\right\}$, 满足$a_k\leq x_{n_k}\leq b_k$, $\forall k$. 令$k\to\infty$, 由夹挤原理得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=\xi.\square$$

有限覆盖定理: 若闭区间 $[a,b]$ 被开区间系 $\Sigma=\{\sigma\}$ 覆盖（即 $[a,b]\subseteq\bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma}\sigma$），则存在有限子系 $\Sigma^*=\{\sigma_1,\cdots\sigma_n\}\subseteq\Sigma$ 使得 $[a,b]\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{n}\sigma_k.$

区间套定理证明：有限覆盖定理：

证明：用反证法. **假设不然，** 即 $[a,b]$ 不能被 Σ

中有限个开区间覆盖. 将区间 $[a,b]$ 等分为两半，

必至少有一半不能被 Σ 中有限个开区间覆盖，

将这样的一半记作 $[a_1,b_1]$.（如果两半都如此，

任取其一）. 再将 $[a_1,b_1]$ **等分为两半，** 其中至少

也有一半不能被 Σ **中有限个开区间覆盖.**

将此记作 $[a_2,b_2]$. **依此类推.**

这样我们得到区间套 $\{[a_k, b_k]\}$.

由区间套定理知， 存在唯一点 $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$.

因为 Σ 覆盖区间 $[a, b]$,

所以 $\exists \sigma \in \Sigma$ 使得 $c \in \sigma$.

因为 $\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$, $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$,

所以 $\exists k$ 使得 $[a_k, b_k] \subset \sigma$.

与区间套的构做方式矛盾.□

邻域 点 x_0 的 δ 邻域是指与点 x_0 距离小于 δ 的点的集合 $N(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$，即开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

聚点 设集合 $A\subseteq\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$. 若对于任意正数 δ, a 的 δ 邻域中都含有 A 中无穷多个点，则称 a 是A 的一个聚点.

例如，$A=(x_0-\delta, x_0+\delta)$, A 中每个点都是A 的聚点，$x_0-\delta$, $x_0+\delta$ 也都是A 的聚点.

例如 $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$, 则 **A** 只有一个聚点 $a=0$. 而集合 $\mathbb{Z}$ 没有聚点.

命题 a 是**A** 的一个聚点的充要条件是 $\forall\delta>0$, a 的 δ 邻域中都含有 **A** 中异于 a 的点.

定理：有界无穷集必有聚点.

证明 设A是有界无穷集. 任取 $x_1 \in A$.

$A\setminus\{x_1\}$ 是有界无穷集, 任取 $x_2 \in A\setminus\{x_1\}$.

$A\setminus\{x_1, x_2\}$ 是有界无穷集, 任取 $x_3 \in A\setminus\{x_1, x_2\}$.

……

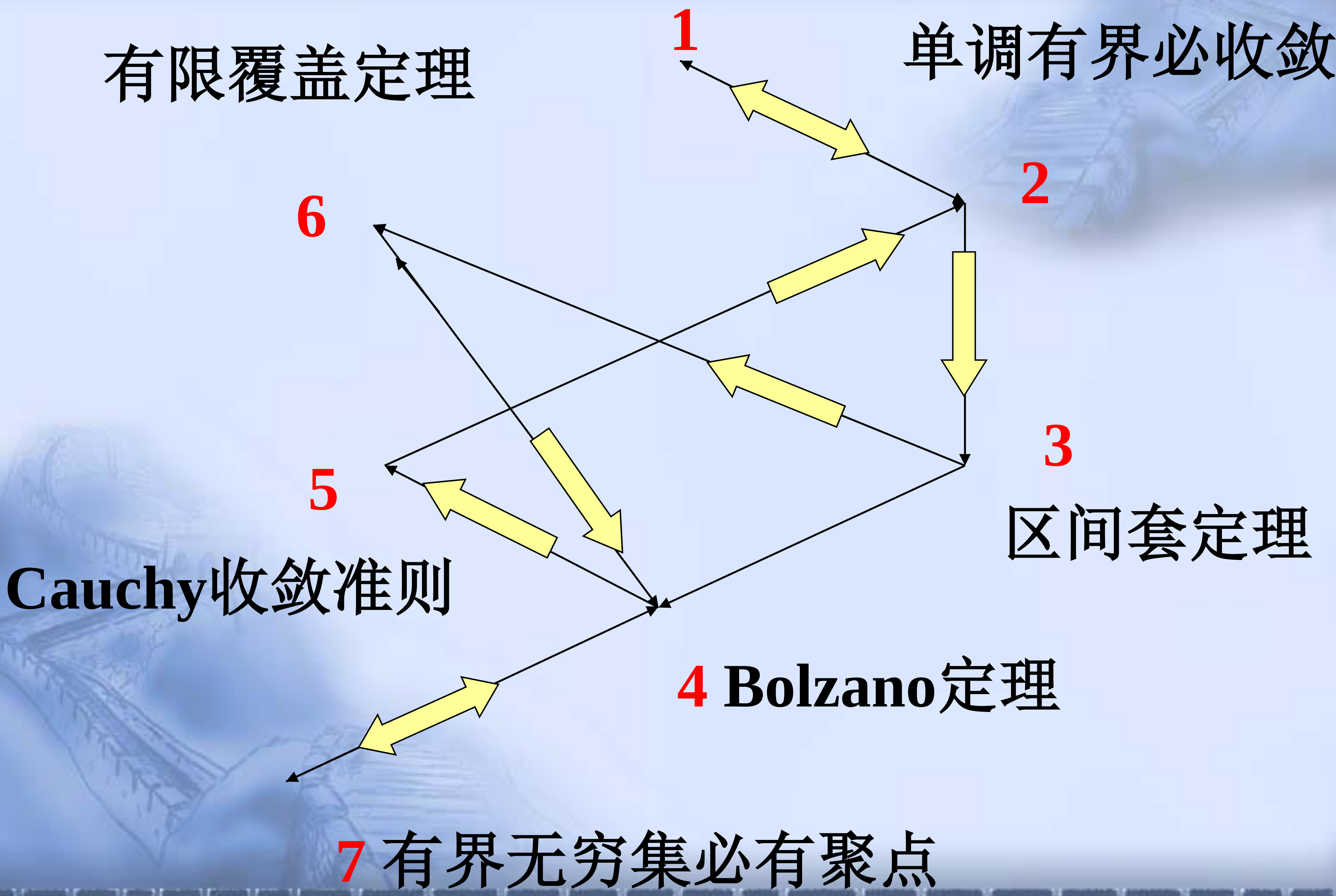
数列 $\{x_n\}$ 有界, 从而有收敛子列, 记

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. 下证 a 是 A 的一个聚点.

$\forall \delta > 0\, \exists K\, \forall k > K\, |x_{n_k} - a| < \delta$. 即 a 的 δ 邻域

含有 A 中无穷多个点 $x_{n_{K+1}}, x_{n_{K+2}}, \cdots$.

有上(下)界则必有上(下)确界



第3-3课：Stolz定理-一类数列极限的计算

- Stolz定理

设$\{a_n\}$为一数列, $\{b_n\}$是严格单调增无穷大数列

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$ （包括$A=\pm\infty$的情况）

***证明略(需要用到第1.11节的上/下极限概念)

Thm.(Stolz定理)

(1)
$$\left.\begin{aligned} &\{b_n\}\text{严格}\uparrow \\ &\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \\ &\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \mathrm{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \mathrm{A};$$

(2)
$$\left.\begin{aligned} &\{b_n\}\text{严格}\downarrow \\ &\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \\ &\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \mathrm{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \mathrm{A}.$$

Proof.(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\mathrm{A}$,则 $\lambda_n \triangleq \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}-\mathrm{A}\to 0.$

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N$,有$|\lambda_n|<\varepsilon$. 于是,当$n>N$时,

$$a_n-\mathrm{A}b_n=a_{n-1}-\mathrm{A}b_{n-1}+\lambda_n(b_n-b_{n-1})$$

$$a_{n-1}-\mathrm{A}b_{n-1}=a_{n-2}-\mathrm{A}b_{n-2}+\lambda_{n-1}(b_{n-1}-b_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$a_{N+1}-\mathrm{A}b_{N+1}=a_N-\mathrm{A}b_N+\lambda_{N+1}(b_{N+1}-b_N)$$

各式相加,得

$$a_n-\mathrm{A}b_n=a_N-\mathrm{A}b_N+\lambda_n(b_n-b_{n-1})+\cdots+\lambda_{N+1}(b_{N+1}-b_N),$$

$b_n\uparrow$,则

$$|a_n-\mathrm{A}b_n|\le|a_N-\mathrm{A}b_N|+\varepsilon|b_n-b_N|,\forall n>N.$$

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\mathrm{A}\right| \le \frac{|a_N-\mathrm{A}b_N|}{|b_n|}+\varepsilon\frac{|b_n-b_N|}{|b_n|}, \forall n>N.$$

$b_n \uparrow +\infty$, 则 $\exists N_1 > N, s.t.$

$$\frac{|a_N-\mathrm{A}b_N|}{|b_n|}<\varepsilon, \quad \frac{|b_n-b_N|}{|b_n|}<2, \quad \forall n>N_1.$$

于是, $$\left|\frac{a_n}{b_n}-\mathrm{A}\right| \le 3\varepsilon, \forall n>N_1.$$

由极限的定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\mathrm{A}.$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\mathrm{A}, 则\forall\varepsilon>0,\exists N, s.t.$$

$$\mathrm{A}-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<\mathrm{A}+\varepsilon,\qquad\forall n>N.$$

$\{b_n\}$严格$\downarrow$,则

$$(\mathrm{A}-\varepsilon)(b_{n-1}-b_n)<a_{n-1}-a_n<(\mathrm{A}+\varepsilon)(b_{n-1}-b_n),\qquad\forall n>N.$$

于是

$$(\mathrm{A}-\varepsilon)(b_{n+m-1}-b_{n+m})<a_{n+m-1}-a_{n+m}<(\mathrm{A}+\varepsilon)(b_{n+m-1}-b_{n+m}),$$
$$\forall n>N,\forall m>0.$$

上式对m从1到k求和, 得

$$(\mathrm{A}-\varepsilon)(b_n-b_{n+k})<a_n-a_{n+k}<(\mathrm{A}+\varepsilon)(b_n-b_{n+k}),$$
$$\forall n>N,\forall k>0.$$

$$(\mathrm{A}-\varepsilon)(b_n-b_{n+k})<a_n-a_{n+k}<(\mathrm{A}+\varepsilon)(b_n-b_{n+k}),$$
$$\forall n>N,\forall k>0.$$

令$k\to+\infty$,由$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=0$,得

$$(\mathrm{A}-\varepsilon)b_n\le a_n\le(\mathrm{A}+\varepsilon)b_n,\qquad \forall n>N.$$

$b_n\downarrow 0$, 故$b_n>0$,

$$\mathrm{A}-\varepsilon\le\frac{a_n}{b_n}\le\mathrm{A}+\varepsilon,\qquad \forall n>N.$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\mathrm{A}.$□

Ex. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$.

Proof. 令$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = n$,则

$$y_n\text{严格}\uparrow +\infty,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

由Stolz定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A.\square$$

Ex. $x_n=\dfrac{1}{\ln n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解：令$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}, b_n=\ln n$, 则 b_n严格$\uparrow+\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{\ln n-\ln(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1/n}{\ln(1-1/n)}=1.$$

由Stolz定理,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=1.\square$$

Ex. k为正整数, $x_n=\dfrac{1^k+2^k+\cdots n^k}{n^{k+1}}$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解: 令$a_n=1^k+2^k+\cdots n^k, b_n=n^{k+1}$, 则$b_n\uparrow+\infty$.

由Stolz定理,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^k+n^{k-1}(n-1)+n^{k-2}(n-1)^2+\cdots+(n-1)^k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^k}=\frac{1}{k+1}.\square$$

第3-3课：Stolz定理-一类数列极限的计算

✓ 例2：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{k+1}}{1^k+2^k+\cdots+n^k}=?\quad (k\in\mathbb{N})$

解：取 $a_n=n^{k+1},\ b_n=1^k+2^k+\cdots+n^k$

$$a_n-a_{n-1}=n^{k+1}-(n-1)^{k+1}$$

$$=(k+1)n^k-\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots+(-1)^{k+1}$$

$$\therefore\ \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\frac{(k+1)n^k-\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots+(-1)^{k+1}}{n^k}\to k+1$$

Stolz定理：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{k+1}}{1^k+2^k+\cdots+n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k+1\qquad\square$

第3-3课：Stolz定理-一类数列极限的计算

✓ **例3**：已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = ?$

解：令 $x_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$，$y_n = n^2$

$$x_n - x_{n-1} = na_n,\quad y_n - y_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a}{2}$$

应用Stolz定理得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{2} \qquad \square$$

第3课：收敛数列的特性以及极限计算

- **预习（下次课内容）：**
  第2.1节 映射及其相关概念
  第2.3节 函数(一元函数)：表示-运算-性质
  (第2.2节不讲-作为课外阅读)
- **作业（本次课）：**
  练习题1.8：1, 2*, 3(2,3), 4*, 5, 6.
  练习题1.9：1(4-6), 2, 3, 4*(提示:收敛数列有界).
  练习题1.12：1-5, 8.