序

数列［极限］、［无穷大］、［有界］的定义

1、复习以下定义：

$\{a_n\}$收敛于a（$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$）：

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists n_0 \in \mathbf{N}$，使得$\forall n > n_0$，有$|a_n - a| < \varepsilon$；

$\{a_n\}$趋向于正无穷大（$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$）：

$\forall A > 0$，$\exists n_0 \in \mathbf{N}$，使得$\forall n > n_0$，有$a_n > A$；

$\{a_n\}$是有界数列：

$\exists A > 0$，使得$\forall n \in \mathbf{N}$，$|a_n| \le A$。

给出下面论断类似的表达方式：

（1）$\{a_n\}$不收敛于a（即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$）；

（2）$\{a_n\}$发散（即$\{a_n\}$不收敛）；

（3）$\{a_n\}$不趋向于正无穷大（即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq +\infty$）；

（4）$\{a_n\}$是无界数列。

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$：$\exists \varepsilon_1 > 0$，使得$\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists n_1 > n$，满足$|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon_1$。

（2）$\forall a \in \mathbf{R}$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$（即$\exists \varepsilon_1 > 0$，使得$\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists n_1 > n$，满足$|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon_1$）。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq +\infty$：$\exists A > 0$，使得$\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists n_1 > n$，满足$a_{n_1} \leq A$。

（4）$\{a_n\}$无界：$\forall A > 0$，$\exists n_1 \in \mathbf{N}$，使得$|a_{n_1}| > A$。

求数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in N^*\right\}$的上下确界

方法 1：　单调有界定理 + 确界命题

单调有界定理：

- 单调递增有上界的数列必收敛；
- 单调递减有下界的数列必收敛。

命题：

- 若数列$\{x_n\}$单调递增有上界，则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$$

- 若数列$\{x_n\}$单调递减有下界，则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = inf\{x_n\}$$

求数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in N^*\right\}$的上下确界

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n * 1 \le \left(\frac{n*\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1}$$ 单调递增

$$a_n \le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3$$ 有上界 1.7节 P31

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e$$

要证e为a_n的上确界 即证 $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 \in N^*$ $s.t.$ $a_{n_0}>e-\varepsilon$

根据极限的定义 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, $n>N$时

$|a_n-e|<\varepsilon$ $\therefore a_n>e-\varepsilon$ 取$n_0=N+1$即可

求数列$\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in N^*\}$的上下确界

方法 2： 导数+单调性 但不严谨，我们还没学导数

令$f(x) = xln\left(1+\frac{1}{x}\right), (x \geq 1)$

$$f'(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

令$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}, (0 < x \leq 1)$

$$g'(x) = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)^2} > 0 \quad \rightarrow \quad g(x)\text{在}(0,1]\text{上单调增}$$

$$g(x) > g(0) = 0$$

$$f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x)\text{在}[1,+\infty]\text{上单调增}$$

$$\boxed{ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \quad (1)}$$

$f(+\infty) =?$

令$h(x) = ln(1+x) - x,\ (0 < x \leq 1)$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad h(x)\text{在}(0,1]\text{上单调减}$$

$$\boldsymbol{h(x) < h(0) = 0}$$

$$\downarrow$$

$$xln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 \quad \leftarrow \quad \frac{ln(1+x)}{x} < 1$$

$$a_n = e^{f(n)} \in [2, e)$$

显然，$inf\ A = 2$

下证e为a_n的上确界

练习1.9 T2（1） 求数列$\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in N^*\}$的上下确界

$$\boxed{\text{即证 } \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N^* \quad s.t.\ a_{n_0} > e-\varepsilon\ ,\quad \text{即 } \left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0} > e-\varepsilon}$$

① $\varepsilon > e-2$ 时，显然成立

$$a_1 = 2 > e-\varepsilon$$

② $0 < \varepsilon \le e-2$ 时：

即证 $n_0 ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) > ln(e-\varepsilon)$

$$ln(e-\varepsilon) = C \in [ln2, 1)$$

$$ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) > \frac{C}{n_0}$$

利用式(1)

$$\boxed{ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}}$$

$$ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) > \boxed{\frac{1}{n_0+1} > \frac{C}{n_0}} \rightarrow n_0 > \frac{C}{1-C}$$

取 $n_0 = \left[\frac{C}{1-C}\right] + 1$ 则 $a_{n_0} > e-\varepsilon$ 得证

下证e为a_n的上确界

求数列$\{\sqrt[n]{n}: n \in N^*\}$的上下确界

先求下确界

$\sqrt[n]{n} \geq 1$　　所以1是下界，下证明1是下确界

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$　　（1.3节例4 P11）

$\therefore \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \ n > N$时

$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$　　$\therefore \sqrt[n]{n} < \varepsilon + 1$

所以1是下确界

求数列$\{\sqrt[n]{n}: n\in N^*\}$的上下确界

再求上确界

$$\{\sqrt[n]{n}\} = \{1,\quad 1.414,\quad 1.442,\quad 1.414,\quad 1.380,\dots\dots\}$$

构造函数 $f(x)=\frac{lnx}{x}$ 求导 判断单调性？　　我们还不会求导，不严谨

数学归纳法　① $n=3$时，$3^{\frac{1}{3}}>4^{\frac{1}{4}}$, 成立　②设$n=k$时，$k^{\frac{1}{k}}>(k+1)^{\frac{1}{k+1}}$，成立

③下证$n=k+1$时，$(k+1)^{\frac{1}{k+1}}>(k+2)^{\frac{1}{k+2}}$，成立

即证：$(k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}$　$\rightarrow$　$(k+1)\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}>1$

$$(k+1)\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}>(k+1)\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}=\frac{(k)^{\ k+1}}{(k+1)^k}>1 \quad 成立$$

所以$\sqrt[3]{3}$为上确界

2、讨论以下命题是否正确。如果正确，给出证明；如果不正确，给出反例。

（1）数列$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n \pm b_n\}$必发散；

（2）数列$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n b_n\}$必发散；

（3）数列$\{a_n\}$发散，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n \pm b_n\}$必发散；

（4）数列$\{a_n\}$发散，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n b_n\}$必发散。

解：（1）正确：假如$\{a_n + b_n\}$收敛，则由$\{a_n\}$收敛以及极限的四则运算性质

$$\lim_{n\to\infty}[(a_n + b_n) - a_n] = \lim_{n\to\infty} b_n$$ 也收敛，导出矛盾。

（2）不正确：比如取$a_n = 1/n$，$b_n = (-1)^n$，$\{a_n b_n\}$收敛于 0。

注：如果$\{a_n\}$收敛于 0，$\{b_n\}$有界（无论是否发散），则$\{a_n b_n\}$必收敛于 0。

如果$\{a_n\}$收敛于$a \neq 0$，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n b_n\}$必发散。可仿照（1）给出证明。

2、讨论以下命题是否正确。如果正确，给出证明；如果不正确，给出反例。

（1）数列$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n \pm b_n\}$必发散；

（2）数列$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n b_n\}$必发散；

（3）数列$\{a_n\}$发散，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n \pm b_n\}$必发散；

（4）数列$\{a_n\}$发散，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n b_n\}$必发散。

解：（3）不正确，反例：取$a_n = n$，$b_n = 1 - n$，$\{a_n + b_n\}$收敛于 1。

（4）不正确，反例：取$a_n = [1+(-1)^n]n$，$b_n = 1-(-1)^n$，$\{a_n b_n\}$收敛于 0。

同学们辛苦了！

谢谢！