# 线性代数小班辅导讲义 (无 82)

无 68 何昊天

2018 年 11 月 4 日

## 目录

# 1 向量与向量空间

## 1.1 向量的代数运算律

线性代数主要研究 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，可以将其看作 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中向量的推广。先用低维的情况想明白问题，再抽象至高维的情形往往是一个很有效的理解方法。

$\mathbb{R}^n$ 中向量的运算律如下：

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha + 0 = 0 + \alpha$

(4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$

(5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, 1\alpha = \alpha$

(6) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, k, l \in \mathbb{R}, k(l\alpha) = (kl)\alpha$

(7) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, k, l \in \mathbb{R}, (k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

(8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}, k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

向量的点积定义为 $\alpha \cdot \beta = |\alpha||\beta|cos\theta$，其中 $\theta$ 是两个向量之间的夹角，夹角这个概念也很自然地推广到了高维。

$\mathbb{R}^n$ 中向量点积运算律如下：

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

(2) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n, (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

(3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}, (k\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (k\beta) = k(\alpha \cdot \beta)$

(4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha \geq 0$

**Problem 1.1** 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$，计算 $\alpha_1 - \alpha_2$ 和 $3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$。

*Solution:* $\alpha_1 - \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，$3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ •

**Problem 1.2** 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，满足 $3(\alpha_1 - \alpha) + 2(\alpha_2 + \alpha) = 5(\alpha_3 + \alpha)$，计算 $\alpha$。

*Solution:* $\alpha = \frac{1}{6}(3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ •

**Problem 1.3** 证明 *Cauchy-Schwarz* 不等式 $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2 \le (\sum_{k=1}^n a_k^2)(\sum_{k=1}^n b_k^2)$。

*Solution:* $\forall x \in \mathbb{R}$，都有 $\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \ge 0$，令 $A = \sum_{k=1}^n a_k^2, B = \sum_{k=1}^n a_k b_k, C = \sum_{k=1}^n b_k^2$，则 $Ax^2 + 2Bx + C \ge 0$。

不妨设 $A > 0$，令 $x = -\frac{B}{A}$，则有 $B^2 \le AC$，此即 Cauchy-Schwarz 不等式。•

**Problem 1.4** 证明 *Minkowski* 不等式 $[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2]^{\frac{1}{2}} \le (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n b_k^2)^{\frac{1}{2}}$。

*Solution:* $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2\sum_{k=1}^n a_k b_k$，由 Cauchy-Schwarz 不等式 $\sum_{k=1}^n a_k b_k \le (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^n b_k^2)^{\frac{1}{2}}$，所以：

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \le \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^n b_k^2)^{\frac{1}{2}} = [(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n b_k^2)^{\frac{1}{2}}]^2$$

此即 Minkowski 不等式。•

## 1.2 向量组

向量组就是一组向量，实际上很多地方能够自然地得到向量组，比如矩阵的所有行和所有列各自都是一个向量组，因此研究向量组的一些性质是必要的。

向量组有如下重点问题：

(1) 能否用一个向量组去表示一个向量，特别的，向量组之间能否相互表示。

(2) 如何得到向量组的极大线性无关组（由 Zorn 引理，极大线性无关组是一定存在的）。

(3) 极大线性无关组的向量数，即向量组的秩。

只要掌握了这些问题的答案，也就掌握了向量组的所有内容。

**Problem 1.5** 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a+2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ a+8 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ b+3 \\ 5 \end{bmatrix}$，计算：

*(1)* 当 $a, b$ 取何值时，$\beta$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示。

*(2)* 当 $a, b$ 取何值时，$\beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 唯一线性表示。

*Solution:* 令 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$，讨论方程组 $Ax = \beta$ 是否有解。

$$\begin{bmatrix} A & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $a=-1, b\neq 0$ 时，方程组无解，$\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，当 $a\neq -1$ 时，方程组有唯一解，$\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一线性表示。•

**Problem 1.6** 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\\2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\3\\0\\1\end{bmatrix},\beta_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}4\\4\\1\\3\end{bmatrix}$，证明 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 可由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示，但 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 不能由 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 线性表示。

*Solution:* 令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3], B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$。

$\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&0&0&1&1&1\\0&4&0&2&2&2\\0&0&4&1&-3&5\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，故 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 可由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示。

$\begin{bmatrix}B & A\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&0&4&0&3&2\\0&2&-2&0&1&2\\0&0&0&2&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，故 $\alpha_1,\alpha_2$ 都不能由 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 线性表示。•

**Problem 1.7** 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}$，证明 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 等价。

*Solution:* 令 $A=[\alpha_1,\alpha_2], B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$。

$A^T\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$

$B^T\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

由行等价矩阵行向量组等价性知，$\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 等价。•

**Problem 1.8** 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\3\\t\end{bmatrix}$，计算当 $t$ 取何值时，$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关。

*Solution:* 令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，则 $|A|=t-5$。

当 $t\neq 5$ 时，$A$ 为可逆矩阵，故 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关。•

**Problem 1.9** 证明由阶梯型矩阵的非零行构成的向量组一定线性无关。

*Solution:* 这个结论是显而易见的，重点是怎么把理由说清楚。

可以考虑对主元数目做归纳，也可以假设主元所在的列编号然后进行说明。•

**Problem 1.10** 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，满足 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 的秩为 2，计算 $a, b$ 的值。

*Solution:* 因为 $\alpha_3, \alpha_4$ 显然线性无关，故 $\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_1\}, \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_2\}$ 的秩均为 2。

$\begin{bmatrix} \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 3-2a \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$，所以 $a = 2$。

$\begin{bmatrix} \alpha_3, \alpha_4, \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & b-4 \\ 0 & 0 & b-5 \end{bmatrix}$，所以 $b = 5$。•

## 1.3 向量空间

向量空间由两个要素构成：向量的集合 $V$ 与数域 $\mathbb{F}$，其中向量之间可以定义“加法”，向量和数域中的数可以定义“数乘”，且这些运算要满足下面的公理：

(1) $\forall u, v \in V, u \oplus v = v \oplus u$

(2) $\forall u, v, w \in V, (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$

(3) $\forall u \in V, u \oplus \hat{0} = \hat{0} \oplus u = u$

(4) $\forall u \in V, u \oplus \tilde{u} = \tilde{u} \oplus u = \hat{0}$

(5) $\forall u \in V, 1 \otimes u = u$

(6) $\forall u \in V, k, l \in \mathbb{F}, k \otimes (l \otimes u) = (kl) \otimes u$

(7) $\forall u \in V, k, l \in \mathbb{F}, (k + l) \otimes u = (k \otimes u) \oplus (l \otimes u)$

(8) $\forall u, v \in V, k \in \mathbb{F}, k \otimes (u \oplus v) = (k \otimes u) \oplus (k \otimes v)$

注意这里的 $\oplus$ 和 $\otimes$，未必是按常规理解的 $+$ 和 $\times$，而是可以随着我们的需求自己去定义的计算，同时 $\hat{0}$ 也未必是真正的 0，只要是能满足这些性质就足够了。

向量子空间：向量空间的封闭子集就是原空间的子空间，验证是子空间不需要验证所有公理，只需要验证封闭性即可，值得一提的是子空间一定是包含 $\hat{0}$ 元素的。

生成子空间：由一个向量组的所有线性组合构成的空间，其维数等于向量组的秩。

与矩阵 $A_{m\times n}$ 相关的有四个重要空间：

(1) 列空间：$\{y \in \mathbb{R}^m | y = Ax, \exists x \in \mathbb{R}^n\}$

(2) 行空间：$\{y \in \mathbb{R}^n | y = A^T x, \exists x \in \mathbb{R}^m\}$

(3) 零空间：$\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$

(4) 左零空间：$\left\{x \in \mathbb{R}^m | A^T x = 0\right\}$

**Problem 1.11** 给定正整数 $n$，证明次数不超过 $n$ 的实系数多项式构成数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间。

*Solution:* 设 $f, g, h \in \mathbb{R}[x]_n, k, l \in \mathbb{R}$，依次验证八条公理：

(1) $f + g = g + f$

(2) $(f + g) + h = f + (g + h)$

(3) $f + 0 = 0 + f = f$

(4) $f + (-f) = (-f) + f = 0$

(5) $1 \cdot f = f$

(6) $(kl) \cdot f = k \cdot (l \cdot f)$

(7) $(k + l) \cdot f = k \cdot f + l \cdot f$

(8) $k \cdot (f + g) = k \cdot f + k \cdot g$

综上所述，次数不超过 $n$ 的实系数多项式构成数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间。$\bullet$

**Problem 1.12** 给定正实数集 $\mathbb{R}_+$，定义 $a, b \in \mathbb{R}_+$ 的加法结果为 $a \cdot b$，$a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}$ 的纯量乘法结果为 $a^b$，证明 $\mathbb{R}_+$ 构成数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间。

*Solution:* 设 $a, b, c \in \mathbb{R}_+, k, l \in \mathbb{R}$，依次验证八条公理：

(1) $ab = ba$

(2) $(ab)c = a(bc)$

(3) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(4) $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

(5) $a^1 = a$

(6) $a^{kl} = (a^l)^k$

(7) $a^{(k+l)} = a^k a^l$

(8) $(ab)^k = a^k b^k$

综上所述，$\mathbb{R}_+$ 构成数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间。$\bullet$

**Problem 1.13** 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$，则 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基，计算从 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 到 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 的过渡矩阵。

*Solution:* 由 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

可得 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3] = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

所以从 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 到 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$。•

# 2 矩阵

## 2.1 矩阵的代数运算律

矩阵乘法的计算规则应该掌握，但应该避免直接计算矩阵乘法，事实上很少有必须计算 3 阶及以上矩阵乘法的情况。

矩阵的代数运算律：

(1) 结合律：$A(BC) = (AB)C$

(2) 分配律：$A(B+C) = AB + AC, (A+B)C = AC + BC$

(3) 交换律：一般来说 $AB \neq BA$，与所有矩阵相乘的交换的矩阵是纯量矩阵 $cI_n$

考察常用的代数公式：

(1) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

(2) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$

矩阵的转置：$(A^T)^T = A, (AB)^T = B^T A^T, (A+B)^T = A^T + B^T$

矩阵的逆：$(A^{-1})^{-1}, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

转置和逆混合计算：$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

二阶矩阵求逆公式：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$（需要记忆）

一般矩阵的求逆：Gauss-Jordan 消元法，事实上很少有必须计算 3 阶及以上矩阵的逆的情况。

**Problem 2.1** 计算 $\begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}^n$。

*Solution:* 考虑这个矩阵的几何意义，直接得出答案即可。

$\begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$ 和一个向量相乘等价于将这个向量逆时针旋转 $\alpha$，故乘上 $n$ 个该矩阵等价于将向量逆时针旋转 $n\alpha$，所以答案为 $\begin{bmatrix} cosn\alpha & sinn\alpha \\ -sinn\alpha & cosn\alpha \end{bmatrix}$。•

**Problem 2.2** 计算 $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n$。

*Solution:* 注意到 $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，且纯量矩阵和任何矩阵相乘都可以交换，然后用下一题的结论即可。

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n = \left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)^n = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n + n\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{bmatrix}$$ •

**Problem 2.3** 若矩阵 $A, B$ 满足 $AB = BA$，证明 $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i}$。

*Solution:* 已知 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 = \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}A^iB^{2-i}$

假设 $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i}$ 成立，考虑 $(A+B)^{n+1}$。$(A+B)^{n+1} = (A+B)(A+B)^n = (A+B)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i} = A\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i} + B\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^{i+1}B^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i+1} = \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}A^iB^{n-i+1} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i+1} = \sum_{i=0}^{n+1}(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i})A^iB^{n-i+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}A^iB^{n+1-i}$。

由归纳法原理知，$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i}$。•

**Problem 2.4** 设 $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{n\times n}$，计算 $A$ 的所有方幂。

*Solution:* $A = \begin{bmatrix}0 & I_{n-1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，当 $k < n$ 时，$A^k = \begin{bmatrix}0 & I_{n-k}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，当 $k \geq n$ 时，$A^k = 0$。•

**Problem 2.5** 设矩阵 $A, B$ 可逆，且 $A+B$ 也可逆，证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆。

*Solution:* $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(I + AB^{-1}) = A^{-1}(B+A)B^{-1}$，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$。•

**Problem 2.6** 已知 $A^2 = A, B^2 = B, (A-B)^2 = A+B$，证明 $AB + BA = 0$。

*Solution:* $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA = A + B - AB - BA = A + B \Rightarrow AB + BA = 0$。•

**Problem 2.7** 证明 $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ 的充要条件是 $AB = BA$。

*Solution:* $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 + AB - BA = A^2 - B^2 \Leftrightarrow AB = BA$。•

**Problem 2.8** 设 $A$ 是反对称矩阵，$B$ 是对称矩阵，证明 $AB$ 是反对称矩阵的充要条件是 $AB = BA$。

*Solution:* $(AB)^T = B^TA^T = -BA$，而 $AB$ 反对称等价于 $(AB)^T = -AB$，故 $AB$ 是反对称矩阵的充要条件是 $AB = BA$。•

**Problem 2.9** 设 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，且矩阵 $B$ 满足 $BA=2B+4I$，计算 $B$。

*Solution:* $BA=2B+4I=B(2I)+4I\Rightarrow B(A-2I)=4I\Rightarrow B=\frac{1}{4}(A-2I)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$。•

**Problem 2.10** 设 $A^2=2A$，求证 $r(A)+r(A-2I)=n$。

*Solution:* 由 $A^2=2A$ 得 $A(A-2I)=0$，则 $C(A-2I)\subseteq N(A)$，所以 $r(A)+r(A-2I)\leq n$。

又 $r(A)+r(A-2I)\geq r(A-2I-A)=r(-2I)=n$，所以 $r(A)+r(A-2I)=n$。•

**Problem 2.11** 设 $A$ 为对阵矩阵且 $A^T=A^{-1}$，求证 $r(A-I)+r(A+I)=n$。

*Solution:* 由 $A$ 为对阵矩阵且 $A^T=A^{-1}$ 得 $A^2=I$，即 $(A+I)(A-I)=0$，则 $C(A-I)\subseteq N(A+I)$，所以 $r(A+I)+r(A-I)\leq n$。

又 $r(A+I)+r(A-I)\geq r(A+I-(A-I))=r(2I)=n$，所以 $r(A-I)+r(A+I)=n$。•

**Problem 2.12** 设存在正整数 $k$，使得 $A^k=0$，求证 $A-I$ 可逆。

*Solution:* $(A-I)(-I-A-A^2-\cdots-A^{k-1})=I-A^k=I$。•

## 2.2 分块矩阵

把分块矩阵中每一块的矩阵看作对象来处理，很多问题都会得到简化。

矩阵和分块矩阵的初等变换需要熟记，这里以分块矩阵为例：

(1) $\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}PA & PB\\ C & D\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}I & 0\\ Q & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ QA+C & QB+D\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}0 & I\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C & D\\ A & B\end{bmatrix}$

**Problem 2.13** 设 $A=\begin{bmatrix}B & I\\ 0 & B\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，计算 $A^{-1}$。

*Solution:* $\begin{bmatrix}A & I_4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}I & B^{-1} & B^{-1} & 0\\ 0 & I & 0 & B^{-1}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}I & 0 & B^{-1} & -B^{-2}\\ 0 & I & 0 & B^{-1}\end{bmatrix}$

因为 $B^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，所以 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -5 & 3\\ -1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$。•

**Problem 2.14** 设 $B$ 为 $n$ 阶可逆矩阵,$\alpha$ 为 $n$ 维非零向量,若 $A=\begin{bmatrix} BB^T & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$,证明 $r(A)=n+1$。

*Solution:* 因为 $B$ 可逆，所以 $BB^T$ 可逆，做初等变换：$A \Rightarrow \begin{bmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & -\alpha^T(BB^T)^{-1}\alpha \end{bmatrix}$，则 $r(A)=r(BB^T)+r(\alpha^T(BB^T)^{-1}\alpha)$。

$r(BB^T)=n, \alpha^T(BB^T)^{-1}\alpha=(B^{-1}\alpha)^T(B^{-1}\alpha)>0$，所以 $r(A)=n+1$。•

# 3 线性方程组

线性方程组主要分为两类:

(1) 齐次线性方程组 $Ax=0$：主要方法是转化为阶梯型矩阵，主元所在的列就是 $C(A)$ 的一组基，再通过每次将一个自由元置为 1、其它自由元置为 0，可得 $N(A)$ 的一组基，也即方程的基础解系。

(2) 非齐次线性方程组 $Ax=b$：方程的所有解可以表示为任何一个特解加上对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，其中特解也可以从阶梯型矩阵中得到。

## 3.1 齐次线性方程组

**Problem 3.1** 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$ 的两个不同基础解系并写出通解。

*Solution:* 记系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$。

分别取 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，可得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$，则基础解系为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，通解即为两向量的线性组合。

分别取 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，可得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，则基础解系为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，通解即为两向量的线性组合。•

**Problem 3.2** 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为 $\alpha_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

*Solution:* 设所求方程组为 $Ax=0$，记 $B=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}$，则 $AB=0 \Rightarrow B^TA^T=0$。

考虑方程组 $B^Tx=0$，求得基础解系为 $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix}$，即 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$，故所求方程组为 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\2x_1-3x_2+x_4=0\end{cases}$。•

## 3.2 非齐次线性方程组

**Problem 3.3** 求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=5\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$ 的一个解以及对应齐次线性方程组的基础解系。

*Solution:* $\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 5\\2 & 1 & 1 & 2 & 1\\5 & 3 & 2 & 2 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & -8\\0 & 1 & -1 & 0 & 13\\0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$，令 $x_3=0$ 得到方程一个特解 $\begin{bmatrix}-8\\13\\0\\2\end{bmatrix}$，令 $x_3=1$ 得基础解系 $\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$。•

**Problem 3.4** 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 $s$ 个解向量，令 $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s, k1, k2,\cdots,k_s\in\mathbb{R}$，证明：

*(i)* $\eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解的充要条件为 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。

*(ii)* $\eta$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解的充要条件为 $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$。

*Solution:*

(1) $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 是 $Ax=b$ 的解 $\Leftrightarrow A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s, k1, k2,\cdots,k_s)=b \Leftrightarrow (k_1+k_2+\cdots+k_s)b=b \Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。

(2) $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 是 $Ax=0$ 的解 $\Leftrightarrow A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s, k1, k2,\cdots,k_s)=0 \Leftrightarrow (k_1+k_2+\cdots+k_s)b=0 \Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_s=0$。

•

**Problem 3.5** 设 $rank(A_{m\times 4})=3$，$\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解向量，且 $\eta_1=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}, \eta_2+\eta_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，求 $Ax=b$ 的通解。

*Solution:* 由 $r(A)=3$ 得 $Ax=0$ 的基础解系只含一个向量，令 $\xi=2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$，则 $\xi$ 为方程 $Ax=0$ 的基础解系，所以 $Ax=b$ 的通解为 $\{\eta_1+k\xi|k\in\mathbb{R}\}$。•

**Problem 3.6** 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，求线性方程组 $Ax=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 的通解。

*Solution:* 由题意知 $r(A)=3$，故 $Ax=0$ 的基础解系只有一个向量。由 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 得 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$，所以 $Ax=0$ 的基础解系为 $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$。

显然 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是方程组 $Ax=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 特解，所以通解为：$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}|k\in\mathbb{R}\right\}$。•