清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 《线性代数（工科类）》 刘思齐老师 2024 年 1 月 10 日

本试题共 10 道大题，满分 100 分.

学号：______________ 姓名：________________

1. (5 分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. (5 分) 设 $A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$, 其中 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^{2024}$. 若 $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, 计算 $\|a_1 + a_3\|^2 + \|a_1 + a_2\|^2 + \|a_2 + a_3\|^2$.

3. (15 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

 (1) 求 $\mathcal{R}(A)$ 的一组标准正交基

 (2) 求 $\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$ 上的正交投影矩阵.

 (3) 求 $Ax = b$ 的最小二乘解.

4. (10 分) 已知 3 阶方阵 A 满足 $A^2 - 2A - 3I = O$, 请给出 $\det(A + 2I)$ 的所有可能取值.

5. (15 分) 判断以下命题正误，并简要给出理由或者反例.

 (1) 若矩阵 A 满足 $A^2 = O$, 则 A 一定可以对角化.

 (2) 若矩阵 A 满足 $A^2 = 100A$, 则 A 一定可以对角化.

 (3) 若 2 阶实矩阵 A 满足 $\det(A) < 0$, 则 A 一定可以在实数上对角化.

 (4) 若 A 是下三角方阵但不是对角矩阵，则 A 一定不可以对角化.

 (5) 若矩阵 A 的所有特征向量为 $k\begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix}, k \neq 0$, 则 A 一定不可以对角化.

6. (10 分) 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

7. (10 分) 给定线性空间 $\mathbb{R}[x]_4=\{a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4\mid a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}\}$ 上的线性变换: 求导运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

(1) 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 在基 $1,x,\frac{x^2}{2!},\frac{x^3}{3!}$ 下的矩阵.

(2) 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 在基 $\frac{x^3}{3!},\frac{x^2}{2!},x,1$ 下的矩阵.

(3) 求证 $A=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0\end{bmatrix}$ 和 $A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda_0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda_0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda_0\end{bmatrix}$ 相似.

8. (10 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证: A 至少有 k 个正特征值 (计重数, 即未必是不同的特征值), 当且仅当存在 k 维子空间 V, 使得对于任意非零向量 $v\in V$, 有 $v^{\mathrm{T}}Av>0$.

9. (10 分) 设 A 是 n 阶正定实对称矩阵, $x\in\mathbb{R}^n$, 求证:

$$0\le x^{\mathrm{T}}(A+xx^{\mathrm{T}})^{-1}x<1.$$

10. (10 分) 给定 n 阶可逆矩阵 A 及线性方程组 $Ax=b,A\tilde{x}=\tilde{b}$. 求证:

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}\le\frac{\sigma_1}{\sigma_n}\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$

其中 σ_1,σ_n 分别为 A 的最大和最小奇异值.