2022 年秋季《离散数学》期中试卷

2022 年 11 月 5 日 $14:00-16:00$

本试卷共六道题, 分两页, 其中第 1,6 题 $5+5+10$ 分, 第 2 题 10 分, 第 3 题 $5+10+5$ 分, 第 4 题 $5+5+5$ 分, 第 5 题 $5+10$ 分. 可利用前面小问的结论处理后面的小问.

1 (1) 设映射 $f:\{1,2,\ldots,100\}\to\{1,2,\ldots,50\}$ 是满射, 且满足 $f(1)\le f(2)\le\cdots\le f(100)$. 求满足上述条件的映射 f 的个数, 将结果用组合数表示即可.

(2) 将 $3\times n$ 方格纸 (共 3 行共 n 列的方格纸) 剖分成若干个 1×3 或 3×1 小条的并, 设方法总数为 a_n. 求 a_n 满足的递推关系式, 并说明理由.

(3) 一颗质地均匀的正方体骰子, 六个面上分别标有点数 $1,2,3,4,5,6$. 随机地掷该骰子三次 (各次掷骰子的结果互不影响), 将三次掷得的点数依次为 a_1,a_2,a_3, 求事件 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_1|=6$ 发生的概率.

2 给定正整数 m 以及整数 a,b,c,d, 满足 $ad-bc\equiv 1 \pmod m$. 求解如下线性同余方程组:

$$\begin{cases} ax+by\equiv 1 \pmod m \\ cx+dy\equiv 2 \pmod m. \end{cases}$$

3 (1) 叙述容斥原理.

(2) 给定正整数 n, 设其素因子分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, 其中 $p_1,\ldots,p_k$ 是不同的素数, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ 是正整数. 对正整数 m, 定义 $f(m)$ 为 $1,2,\ldots,m$ 中与 n 互素的数的个数, 即

$$f(m)=\#\{x\in\mathbb{Z}|1\le x\le m\text{且}\gcd(x,n)=1\}.$$

利用容斥原理计算 $f(m)$, 请用 m 与 $p_1,\ldots,p_k$ 表示.

(3) 利用 (2) 的计算结果, 结合不等式 $y-1<[y]\le y$(其中 $[y]$ 表示不超过 y 的最大整数), 请证明如下不等式:

$$f(m) < m(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_k}) + 2^{k-1}.$$

4 (1) 给定正整数 a, m. 证明: a 模 m 的倒数存在的充分必要条件是 a 与 m 互素. 换句话说, 即同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{m}$ 有解的充分必要条件是 a 与 m 互素.

(2) 叙述并证明 Euler 定理.

(3) 设 p, q 是不同的素数, $N = pq$. 设 $d, e \in \{1, 2, \dots, \varphi(N)\}$ 满足 $de \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$. 利用 Euler 定理证明: 对不超过 N 的非负整数 u, 令 v 为 u^e 除以 N 所得的余数, 则有

$$u \equiv v^d \pmod{N}.$$

5 给定正整数 m, n, 定义映射 $F: \{0, 1, \dots, mn-1\} \to \{0, 1, \dots, m-1\} \times \{0, 1, \dots, n-1\}$ 为: 若 a 除以 m 的余数为 b, a 除以 n 的余数为 c, 则定义 $F(a) = (b, c)$.

(1) 证明: 若 m 与 n 互素, 则上述定义的 F 是双射.

(2) 当 m 与 n 的最大公因子为 d 时, 求上述定义的 F 的像集的元素个数.

6 (1) 叙述 Markov 不等式.

(2) 设 Ω 是有限的概率空间, $X: \Omega \to \mathbb{R}$ 是 Ω 上的一个随机变量. 对给定的实数 t 定义随机变量 $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ 为

$$Y(\omega) = e^{tX(\omega)}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

证明: 当 t 是正数时, 对每个实数 λ 有

$$P(X \ge \lambda) \le \frac{E[Y]}{e^{t\lambda}}.$$

(3) 设随机变量 X 取值在 $[-1, 1]$ 中, 且 X 的期望为零. 设 $t \in [-1, 1]$ 是给定的实数, 定义随机变量 $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $Y(\omega) = e^{tX(\omega)}$. 利用不等式

$$e^y \le 1 + y + y^2, \quad \forall y \in [-1, 1]$$

证明: $E[Y] \le e^{t^2 \mathrm{Var}(X)}$, 其中 Var(X) 表示 X 的方差.