第八周习题课讲义

2023 年 11 月 21 日

1 Roll 中值定理

定理 1.1 (Roll 中值定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得:

$$f'(\xi)=0$$

定理 1.2 (更一般的 Roll 定理-习题 2) 设函数 f 在 (a,b) 上可导, 且 $f(a+)=f(b-)$ 是有限的或为 ∞. 求证: 存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明:

1. 如果 $f(a_+)=f(b_-)<\infty$, 那么我们可以定义:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), x\in(a,b) \\ f(a_+), x=a \\ f(b_-), x=b \end{cases}$$

那么 $\tilde{f}$ 满足 Roll 中值定理的条件, 因此结论成立.

2. 如果 $f(a_+)=f(b_-)=+\infty(-\infty)$, 那么我们定义:$g(x)=\arctan f(x)$, 同上定义 $\tilde{g}(x)$, 因此存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$(\tilde{g}')(\xi)=\frac{f'(\xi)}{1+(f(\xi))^2}=0\Rightarrow f'(\xi)=0$$

当然我们也可以去寻找 f 在 (a,b) 上的极小值或者极大值来证明 (思考).

例题 1.1 (习题 5) 设常数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0.$$

求证: 多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在 $(0,1)$ 内有一个零点.

证明:

构造函数:

$$f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+a_nx$$

显然 $f(0)=f(1)$, 满足 Roll 中值定理的条件, 故存在 $\xi\in(0,1)$ 使得:

$$f'(\xi)=a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\xi+a_n=0$$

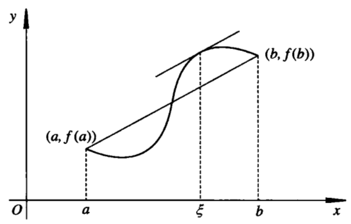

图 1: Lagrange 中值定理几何意义

2 Lagrange 中值定理

定理 2.1 (Lagrange 中值定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

条件和 Roll 中值定理条件相同, 简记为闭区间连续, 开区间可导. 我们需要记住 Lagrange 中值定理的几何意义, 方便我们构造辅助函数.

例题 2.1 (习题 3) $\dfrac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}<\arctan a-\arctan b<a-b(0<b<a).$

证明:

右侧的不等式是很容易证明的. 因为:

$$\frac{\arctan a-\arctan b}{a-b}=\frac{1}{1+\xi^2}<1,\xi\in(a,b)$$

左侧: 很遗憾从上边的等式就可以看出来没办法直接证明. 作变换: 令 $x_1=\arctan a, x_2=\arctan b$, 因此就得到了:

$$LHS=\frac{\tan x_1-\tan x_2}{1/(\cos x_1)(1/\cos x_2)};\quad RHS=x_1-x_2.$$

即 $\sin x_1\cos x_2-\sin x_2\cos x_1\Rightarrow\sin(x_1-x_2)<(x_1-x_2).$

例题 2.2 (习题 6) 设 f 在区间 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

思考: 用 Lagrange 中值定理, 得

$$f(x)-f(A)=f'(\xi_x)(x-A)\quad(A<\xi<x).$$

因此:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(\xi_x)(x-A)+f(A)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(\xi_x)=0$$

上述做法是否正确? 为什么?

证明: 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 当 $x>A$ 时, $|f'(x)|<\varepsilon/2$. 在区间 $[A,x]$ 上用 Lagrange 中值定理, 得

$$f(x)-f(A)=f'(\xi)(x-A)\quad(A<\xi<x).$$

因而有

$$|f(x)-f(A)|=|f'(\xi)|\,(x-A)<\frac{\varepsilon}{2}(x-A).$$

于是

$$|f(x)|\leqslant|f(A)|+|f(x)-f(A)|\leqslant|f(A)|+\frac{\varepsilon}{2}(x-A).$$

由此得

$$\frac{|f(x)|}{x} \leqslant \frac{|f(A)|}{x} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{A}{x}\right) \leqslant \frac{|f(A)|}{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $A' = \max(A, 2|f(A)|/\varepsilon)$, 当 $x > A'$ 时, 有 $0 < |f(x)|/x < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

例题 2.3 (习题 7) *设函数 f 在开区间 $(0, a)$ 上可导, 且 $f(0+) = +\infty$. 证明: f' 在 $x = 0$ 的右旁无下界.*

证明: 反证: 不妨假设当 $0 < x < \delta$ 时,$|f'(x)| \le M$, 根据 Lagrange 中值定理:

$$\frac{f(x) - f(x/2)}{x - x/2} = f'(\xi)(x - x/2) \Rightarrow |f(x) - f(x/2)| \le \frac{Mx}{2}$$

迭代, 我们就可以得到:

$$|f(x) - f(x/2^n)| = \sum_{k=1}^{n} |f(x/2^{k-1}) - f(x/2^k)| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{Mx}{2^k} \le Mx$$

于是我们得到当 $n \to \infty$ 时,$f(0+)$ 是有界的, 与题目条件矛盾.

例题 2.4 (习题 10) *设 f 既不是常值函数又不是线性函数, 且在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导. 证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得*

$$|f'(\xi)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|.$$

证明:

不妨假设 $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \ge 0$, 作辅助函数:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

因此 $F(a) = F(b) = 0$. 由于 f 不是常值函数和线性函数因此 $F(x)$ 不是常数. 故存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F(\xi) \ne F(a) = F(b)$. 考虑:

$$\frac{F(\xi) - F(a)}{\xi - F(a)}; \frac{F(\xi) - F(b)}{\xi - b}$$

若 $F(\xi) > F(a)$, 那么:

$$\frac{F(\xi) - F(a)}{\xi - F(a)} = f'(\eta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0, \eta \in (a, \xi)$$

如果 $F(\xi) < F(b)$, 那么:

$$\frac{F(\xi) - F(b)}{\xi - b} = f'(\eta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0, \eta \in (\xi, b)$$

证毕.

3 Cauchy 中值定理

定理 3.1 (Cauchy 中值定理) *设函数 f 和 g 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在区间 (a, b) 上可导, 且当 $x \in (a, b)$ 时, $g'(x) \ne 0$, 这时必存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例题 3.1 (习题 8) *设 $xf'(x) - f(x) = 0$ 对一切 $x > 0$ 成立, 且 $f(1) = 1$. 求 $f(2)$.*

定理 3.2 (推广的 Cauchy 中值定理) *设函数 f 与 g 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 处分别存在有限的极限; 又设当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $g'(x) \ne 0$. 证明: 存在 $\xi \in (-\infty, +\infty)$, 使得*

$$\frac{f(+\infty) - f(-\infty)}{g(+\infty) - g(-\infty)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明:

作变换, 令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(\tan x), x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ f(+\infty), x=\frac{\pi}{2} \\ f(-\infty), x=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

对 g 作同样的变换, 因此我们就有:

$$\frac{\tilde{f}(\frac{\pi}{2})-\tilde{f}(-\frac{\pi}{2})}{\tilde{g}(\frac{\pi}{2})-\tilde{g}(-\frac{\pi}{2})}=\frac{f(+\infty)-f(-\infty)}{g(+\infty)-g(-\infty)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例题 3.2 (习题 9) *设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且 $ab>0$. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得*

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证明:

不妨假设 $a,b>0$, 左边进行变形就有了:

$$\frac{f(b)/b-f(a)/a}{1/b-1/a}=\left[\frac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}\right]\cdot\Big/\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)$$

整理即可.

4 处理中值定理习题的思想

4.1 基本思想

我们都可以将这一类题目归结为 Roll 中值定理.

1. 将欲证等式写成等号一端只有零, 再构造辅助函数.
2. 将 $f(\xi)=0$ 改写为 $f(x)=0$;
3. 依据 $f(x)$ 构造辅助函数 $F(x)$. 常用方法是: 直接观察利用导数的运算法则凑微分, 比如:
   1. $$\begin{gathered} f(x)=P'(x)Q(x)+P(x)Q'(x),\ \text{则}F(x)=P(x)Q(x); \\ f(x)=P'(x)+P(x)Q'(x),\ \text{则}F(x)=P(x)\mathrm{e}^{Q(x)}; \\ f(x)=P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x), \text{则}F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}; \end{gathered}$$
   2. 利用定积分 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$ 得到辅助函数 $F(x)$;
   3. 解微分方程得到辅助函数 $F(x)$.
4. 验证辅助函 $F(x)$ 在给定的区间上满足罗尔定理的条件, 便可推出待证结论.

   具体的:

$$\begin{array}{ll} \lambda f(x)+f'(x)=0 & F(x)=f(x)e^{\lambda x} \\ f(x)+xf'(x)=0 & F(x)=xf(x) \\ f(x)-xf'(x)=0 & F(x)=\frac{f(x)}{x} \\ f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0 & F(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(x)}{g''(x)} & F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x) \\ f^2(x)+f'(x)=0 & F(x)=f(x)\exp\left(\int_a^x f(t)dt\right). \end{array}$$

4.2 补充习题

例题 4.1 (补充习题) *1. 设* $f \in C([a,b]), g \in C([a,b])$, *且均在* (a,b) *上可导. 若* $f(a)=f(b)=0$, *则存在* $\xi \in (a,b)$, *使得*

$$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0.$$

2. 设 $f(x), g(x)$ *在* $[a,b]$ *二次可导, 且* $g''(x) \neq 0 (x \in (a,b))$. *若有* $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$, *则存在* $\xi \in (a,b)$, *使得*

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

3. 设 $f(x), g(x)$ *在* $[a,b]$ *上可导, 且在* (a,b) *上* $g'(x) \neq 0$, *则存在* $\xi \in (a,b)$, *使得*

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明:

1. 作 $F(x)=\mathrm{e}^{g(x)}f(x)$, 由题设知 $F(a)=F(b)=0$, 从而存在 $\xi \in (a,\, b), F'(\xi)=0$, 即

$$\mathrm{e}^{g(\xi)}g'(\xi)f(\xi)+\mathrm{e}^{g(\xi)}f'(\xi)=0.$$

2. 易知 $g(x) \neq 0 (a<x<b)$ (否则将导致 $g''\left(\xi'\right)=0$). (ii) 作 $F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)(a \leqslant x \leqslant b)$, 易知 $F(a)=F(b)=0$, 故存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即 $f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$. 由此得证.

3. 先将其改写为 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)g(b)-f(a)g'(\xi)=0$, 不难判定, 上式左端是函数

$$F(x)=f(x)g(x)-f(x)g(b)-f(a)g(x)$$

在 $x=\xi$ 处的导数, 因此 $F(x)$ 就是辅助函数. 因为 $F(a)=-f(a)g(b)=F(b)$, 所以根据 Rolle 定理可知, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即得所证.

当题目中出现高阶导数 (一般来说只有一个函数的高阶导数) 我们需要多次积分才能找出我们所需要的辅助函数, 此时我们需要根据题目中列出含有参数的辅助函数, 然后根据边值条件去求解其中的未知系数.

例题 4.2 *设* f *在* $[a,b]$ *上二阶可微,* $f(a)=f(b)=0$. *证明: 对每个* $x \in (a,b)$, *存在* $\xi \in (a,b)$, *使得成立*

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

证明:

固定 $x \in (a,b)$, 令 $\lambda=\dfrac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$. 于是只要证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立 $f''(\xi)=\lambda$. 构造在 $[a,b]$ 上的辅助函数

$$F(t)=f(t)-\frac{\lambda}{2}(t-a)(t-b).$$

由条件 $f(a)=f(b)=0$ 得到 $F(a)=F(b)=0$. 从 λ 的定义还可得到 $F(x)=0$. 在区间 $[a,x]$ 和 $[x,b]$ 上分别对 F 用 Rolle 定理得到两个点 η_1 和 η_2, 满足条件

$$a<\eta_1<x<\eta_2<b \text{ 和} F'\left(\eta_1\right)=F'\left(\eta_2\right)=0.$$

然后再在区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上对 F' 用 Rolle 定理, 知道有 $\xi \in (\eta_1,\eta_2) \subset (a,b)$, 满足要求 $F''(\xi)=0$. 这就是 $f''(\xi)=\lambda$.

例题 4.3 *已知函数* $f(x)$ *在* $[0,1]$ *上三阶可导, 且* $f(0)=-1, f(1)=0, f'(0)=0$, *试证至少存在一点* $\xi \in (0,1)$, *使*

$$f(x)=-1+x^2+\frac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi), x \in (0,1)$$

证明:

作辅助函数

$$\varphi(t)=f(t)-t^{2}+1-\frac{t^{2}(t-1)}{x^{2}(x-1)}\left[f(x)-x^{2}+1\right], x \in(0,1)$$

则有, $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(x)=0$, 由罗尔定理知, 存在 $\xi_1 \in(0, x), \xi_2 \in(x, 1)$, 使

$$\varphi'\left(\xi_1\right)=\varphi'\left(\xi_2\right)=0.$$

又 $\varphi'(0)=0$, 对 $\varphi'(t)$ 用罗尔定理, 存在点 $\eta_1 \in\left(0, \xi_1\right), \eta_2 \in\left(\xi_1, \xi_2\right)$, 使

$$\varphi''\left(\eta_1\right)=\varphi''\left(\eta_2\right)=0.$$

所以, $\exists \xi \in\left(\eta_1, \eta_2\right) \subset(0,1)$, 使

$$\varphi'''(\xi)=0.$$

而 $\varphi'''(t)=f'''(t)-\dfrac{3!}{x^{2}(x-1)}\left[f(x)+1-x^{2}\right]$, 所以原等式成立.

4.3 一道经典习题

例题 4.4 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微, 且 $f(0)=0,|f'(x)| \leqslant p|f(x)|, 0<p<1$. 证明: $f(x) \equiv 0, x \in(-\infty,+\infty)$

注: 本质上 p 可以不要求小于 1.

证明

方法 1 先考虑 $x \in[0,1], f(x)$ 为连续函数且可导, 所以 $|f(x)|$ 也为连续函数, 可取到最大值 M, 设 $x_0 \in[0,1]$, 有 $\left|f\left(x_0\right)\right|=M \geqslant 0$, 由拉格朗日定理有:

$$M=\left|f\left(x_0\right)\right|=\left|f\left(x_0\right)-f(0)\right|=\left|f'(\xi) x_0\right|, \xi \in\left(0, x_0\right).$$
$$M=\left|f'(\xi) x_0\right| \leqslant\left|f'(\xi)\right| \leqslant p|f(\xi)| \leqslant p M,$$

于是有即得 $(1-p) M \leqslant 0$, 而 $p<1$, 所以 $M \leqslant 0$. 因此 $M=0$. 由此可知 $f(x) \equiv 0, x \in[0,1]$. 类似可得到 $f(x)$ 在区间 $[i, i+1](i=\pm 1, \pm 2, \cdots)$ 上恒等于 0 . 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上恒等于 0 .

方法 2 在 0 与 x 为端点的区间上用拉格朗日中值定理得

$$|f(x)|=\left|f(0)+f'\left(\xi_1\right) x\right|=\left|f'\left(\xi_1\right) x\right| \leqslant p\left|f\left(\xi_1\right) x\right|, \quad (\xi_1 \text{ 介于}0\text{ 与}x\text{ 之间})$$

限制 $x \in\left[0, \dfrac{1}{2 p}\right]$, 有 $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|f\left(\xi_1\right)\right|$. 重复使用该方法, 可得

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left|f\left(\xi_1\right)\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|f\left(\xi_2\right)\right| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{n}}\left|f\left(\xi_n\right)\right| \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$$

其中 $0<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_1<x \leqslant \dfrac{1}{2 p}$. 从而 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \dfrac{1}{2 p}\right]$ 上恒等于 0 . 类似可得到 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{i}{2 p}, \dfrac{i+1}{2 p}\right](i=\pm 1, \pm 2, \cdots)$ 上恒等于 0 , 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 恒等于 0 .

方法 3 记 $g(x)=f^{2}(x), x \in(-\infty,+\infty), k=2 p$. 由 $2 f(x) f'(x)=\left(f^{2}(x)\right)'$ 及 $|f'(x)| \leqslant p|f(x)|$, 可得

$$|g'(x)| \leqslant k g(x), \text{ 即} -k g(x) \leqslant g'(x) \leqslant k g(x), x \in(-\infty,+\infty)$$

由 $g'(x) \leqslant k g(x)$ 可得 $\left(\mathrm{e}^{-k x} g(x)\right)' \leqslant 0$, 所以 $\mathrm{e}^{-k x} g(x)$ 是单调递减的, 故当 $x \leqslant 0$ 时, $g(x) \geqslant g(0)=0$; 当 $x \geqslant 0$ 时, $g(x) \leqslant g(0)=0$. 另一方面, 由 $-k g(x) \leqslant g'(x)$, 可得 $\left(\mathrm{e}^{-k x} g(x)\right)' \geqslant 0$, 所以 $\mathrm{e}^{k x} g(x)$ 是单调递增的, 故当 $x \leqslant 0$ 时, $g(x) \leqslant 0$; 当 $x \geqslant 0$ 时, $g(x) \geqslant 0$. 综合可得 $g(x)=f^{2}(x) \equiv 0, x \in(-\infty,+\infty)$.

方法 4 用反证法. 若 $\exists x_0 \in(-\infty,+\infty)$, 使 $f\left(x_0\right) \neq 0$, 不妨设 $f\left(x_0\right)>0$. 记 $x_1=\inf \left\{x \mid\left(x, x_0\right) \text{ 内 } f\left(x_0\right)>0\right\}$, 由连续函数的局部保号性知 $f\left(x_1\right)=0$, 在 $\left(x, x_0\right)$ 内 $f(x)>0$.

令 $g(x)=\ln f(x), x \in\left(x, x_0\right)$, 则 $|g'(x)|=\left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right|<p$, 由拉格朗日中值定理知 $g(x)$ 在 $\left(x_1, x_0\right)$ 内有界. 但 $\lim\limits_{x \rightarrow x_1^{+}} f(x)=f\left(x_1\right)=0$, 从而 $\lim\limits_{x \rightarrow x_1^{+}} g(x)=-\infty$, 这是矛盾的. 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 恒等于 0 .

5 洛必达法则

5.1 使用条件

定理 5.1 ($\frac{0}{0}$ **型**) 设 f,g 在 (a,b) 上可导, 并且 $g(x)\neq 0$ 对 $x\in(a,b)$ 成立. 又设

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=0.$$

在这些条件下, 如果极限

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在 (或为 ∞), 那么便有

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理 5.2 ($\frac{*}{\infty}$ **型**) 设函数 f 与 g 在 (a,b) 上可导, $g(x)\neq 0$, 且

$$\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty.$$

如果极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞), 那么

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.2 计算极限

例题 5.1

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & 当x\neq 0,\\ 0, & 当x=0\end{cases}$$

在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微, 而且

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=\cdots=0.$$

证明由于

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}\mathrm{e}^{-y^2}=0=f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 由于在 $x\neq 0$ 的点处, $f(x)$ 是初等函数因而是连续的, 所以 f 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续. 其次, 在 $x\neq 0$ 的点处, $f(x)$ 显然是可导的, 且

$$f'(x)=\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

应用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{2y^3}{\mathrm{e}^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{6y^2}{2y\mathrm{e}^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{3y}{\mathrm{e}^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{3}{2y\mathrm{e}^{y^2}}=0,$$

易知 (导数无第一类间断点)$f(x)$ 在 $x=0$ 处也可微, 且 $f'(0)=0$. 这样证明了

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & 当x\neq 0,\\ 0, & 当x=0.\end{cases}$$

而且, 上面的推导还表明 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的. 由于在 $x\neq 0$ 的点处, $f'(x)$ 是初等函数因而是连续的, 所以 f' 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续. 采用类似的方法, 可以证明 f' 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导, 且

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-6}{x^6}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & 当x\neq 0,\\ 0, & 当x=0.\end{cases}$$

而且 f'' 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.

应用数学归纳法可以证明, 对任意正整数 n, f 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有 n 阶连续的导数, 且

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{当} x\neq 0,\\ 0,\ \text{当} x=0,\end{cases}$$

其中 $P_n(x)$ 表示 $2(n-1)$ 阶多项式. 事实上, 如果这个结论在 n 时成立, 那么显然 $f^{(n)}(x)$ 在 $x\neq 0$ 的点处可微, 且

$$\left(f^{(n)}(x)\right)'=\left(\frac{P_n(x)}{x^{3n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=\frac{2P_n(x)+x^3P_n'(x)-3nx^2P_n(x)}{x^{3(n+1)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},$$

其中 $P_{n+1}(x)=2P_n(x)+x^3P_n'(x)-3nx^2P_n(x)$ 是 $2(n-1)+2=2n$ 阶的多项式. 令 $Q_{n+1}(y)=y^{3(n+1)}P_{n+1}\left(\dfrac{1}{y}\right)$, 则易见 $Q_{n+1}(y)$ 是 $n+3$ 阶多项式, 因此通过多次应用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\left(f^{(n)}(x)\right)'=\lim_{x\to 0}\frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^{3(n+1)}P_{n+1}\left(\frac{1}{y}\right)}{\mathrm{e}^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{Q_{n+1}(y)}{\mathrm{e}^{y^2}}=0.$$

由于导数无第一类间断点 $f^{(n)}(x)$ 在 $x=0$ 处也可微, 且 $f^{(n+1)}(0)=0$. 这说明上述结论也在 $n+1$ 时成立. 因此, 根据数学归纳法, 上述结论对任意正整数 n 都成立. 这样 f 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微, 而且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=\cdots=0$

5.3 洛必达法则法则未必最优

例题 5.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

解由 Lagrange 中值定理，存在 ξ, 其介于 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间, 使得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\xi}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

其中用到 $\xi\to 0(x\to 0)$ (迫敛性定理) 和如下等价关系

$$\tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\quad (x\to 0).$$

一般性的结果:

例题 5.3 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的一阶导数, 且 $f'(0)=0, f''(0)$ 存在, 证明:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\frac{1}{2}f''(0).$$

解析: 由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 x 和 $\ln(1+x)$ 之间, 使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)}{x^3}\cdot(x-\ln(1+x))=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}.$$

容易明白 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}<\dfrac{\xi}{x}<1$, 由迫敛性定理得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x}=1$. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}=f''(0).$$

结论很快就可得到了.

5.4 一类构造题

例题 5.4 (书本习题) 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上可导. 如果对 $\alpha>0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha f(x)+xf'(x)\right)=\beta,$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\beta/\alpha$.

证明因为 $\alpha>0$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty$. 由洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}f(x)}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}f(x)+x^{\alpha}f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{\alpha}f'(x)\right)=\frac{\beta}{\alpha}.\end{aligned}$$

类似的:

例题 5.5 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导, 若极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=A$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{x}}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x)+f'(x)\right)e^{x}}{e^{x}}=A.$$

定理 5.3 设 α 为有正实部的复数, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha f(x)+f'(x))=A$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A/\alpha$.

例题 5.6 设 f 二阶可导. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)]=A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

证令 $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2},\beta=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\alpha\beta=1,\alpha+\beta=1$. 于是

$$\begin{aligned}f(x)+f'(x)+f''(x)&=\alpha\beta f(x)+(\alpha+\beta)f'(x)+f''(x)\\&=\beta\left[\alpha f(x)+f'(x)\right]+\left[\alpha f(x)+f'(x)\right]'.\end{aligned}$$

这推出

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\alpha f(x)+f'(x)\right]=A/\beta,$$

由此

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A/(\alpha\beta)=A.$$

注若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)]=A$, 则未必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 如: $f(x)=\cos x$