第六周习题课讲义

2023 年 10 月 31 日

目录

1 函数的极限

1.1 无穷小量

定义 1.1 (无穷小量) 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 上有定义, 如果当 $|x-x_0|\to 0$ 时, 有:

$$f(x)\to 0$$

则称在 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 是一个无穷小量, 我们用 $o(1)$ 表示.

定义 1.2 (等价/高阶无穷小) 设当 $x\to x_0$ 时, f 与 g 都是无穷小, 并且 g 在 x_0 的一个充分小的近旁 (除 x_0 之外) 不取零值.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 那么称 f 是比 g 更高阶的无穷小;

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$, 则称 f 与 g 是同阶的无穷小;

(3) 如果 (2) 中的极限值 $l=1$, 那么称 f 与 g 是等价的无穷小, 记为

$$f\sim g\quad (x\to x_0).$$

例题 1.1 (习题 2.6) 当 $x\to x_0$ 时,$\alpha=o(1)$, 求证:

$$o(\alpha)^k=o(\alpha^k)$$

证: 设 $\alpha = f(x) = o(1), x \to x_0$, 即:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

我们设 $g(x) = o(\alpha) = o(f(x))$, 即:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

左边就是 $g(x)^k$, 要证右边就是要证:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)^k}{f(x)^k} = \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)^k = 0$$

1.2 极限的计算

熟练利用各种等价无穷小计算极限.

$$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim x, x \to 0$$

$$\ln(1+x) \sim x; \quad e^x - 1 \sim x; \quad a^x - 1 \sim \ln a, x \to 0$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}; \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \alpha > 0, x \to 0$$

判断以下做法是否正确?

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x}{x^3} = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \sin x} = 1.$

都是经典的错误, 标准的零分!!!

为什么?

原因: 等价无穷小不能直接在加减中替换.

有时候在加减的时候可以直接无穷小替换, 有的时候又不可以了, 这是为什么呢?

下边我们来分析这件事情, 不妨设 $f(x) \sim g(x) \sim x, x \to 0$, 那么我们可以证明:$f(x) - g(x) \sim o(x), x \to 0$, 这是因为:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} = 1 - 1 = 0$$

现在我们分析:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^2}$$

由于我们知道 $\alpha = f(x) - g(x) = o(x)$, 但是这个 α 和 x^2 的阶数相比我们是要具体分析的, 如果 $\alpha = O(x^2)$, 那么这个结果可能是一个常数, 如果 $\alpha = o(x^2)$, 那么结果为 0, 如果 α 和 $x^\alpha, \alpha < 2$ 同阶, 那么结果就是无穷大. 有的时候我们如果在加减的时候需要去替换等价无穷小的时候可以采用如下的方法.

例如 $\tan x \sim \sin \sim x$, 我们可以记 $\sin x = x + o(x), \tan x = x + o(x)$, 因此:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x^3}$$

因此这启发我们不能直接得到结果为 0, 需要进一步去看 $o(x)$ 的阶数.

这样的方法并不能直接让我们得到某个极限是多少, 但是可以让你避免犯在加减运算中直接进行无穷小替换而犯错误.

当然经过一定的训练以及学会了泰勒展开之后, 我们就有固定的办法来分析这个高阶无穷小具体是多少阶.

例题 1.2 (习题 2.6) 计算下列函数极限或数列极限

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{1-\cos^2 x}$;

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(1+x+x^2\right)^{1/n}-1}{\sin 2x}, n \in \mathbb{N}^*$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$;

4. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$;

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\tan x)-\tan(\tan x)}{x^3}$

2 函数的连续

2.1 概念辨析

定义 2.1 (函数的极限) 设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义, 但 x_0 这一点自身可以是例外. 设 l 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x, 均有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋于点 x_0 时函数 f 有极限 l, 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=l;$$

注: 我们以后在书写的时候不用 f 在 x_0 近旁由定义这种说法, 而改为具体的 f 在 $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 由定义以及 f 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 由定义.

定义 2.2 (函数的连续) 设 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. 我们称函数 f 在点 $x_0 \in (a,b)$ 连续, 如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f\left(x_0\right).$$

也就是说, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个适当的 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$\left|f(x)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon.$$

注: 此时我们可以看到这里是 $|x-x_0|<\delta$, 即允许 $x=x_0$, 但是在定义函数的极限时我们不允许 $x=x_0$, 因此那里是 $0<|x-x_0|<\delta$.

例题 2.1 (习题 2.7) 回答下列问题:

1. 设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, 能否定义 $f(0)$ 使得 f 在 $x=0$ 处是连续的?
2. 函数 f 在点 x_0 近旁有定义, 并有
$$\lim_{h \to 0}\left(f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)\right)=0,$$
问 f 是否在 x_0 处连续?
3. 连续函数 f 在点 (a,b) 上的全体有理点上取 0 值, 问 f 是怎样的函数?

解:

1. 不能定义, 如果存在 $a, f(0)=a$ 能够使得 $f(x)$ 是连续的, 那么:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$$

但是该极限不存在, 取子列 $x_n=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}, f(x_n)=1, y_n=\dfrac{1}{2n\pi}, f(y_n)=0$, 因此极限不存在.

2. 未必, 如果 f 本身是连续的, 那么上边的式子自然成立, 但是可以考虑 $f(x)=\begin{cases}|x-x_0|, x\neq x_0\\ 1, x=x_0\end{cases}$, 显然 f 不连续但是上式是成立的.

3. $f\equiv 0$, 任取无理数 $x_0\in(a,b)$, 则存在有理数列 $r_k\to x_0$, 因为 f 连续, 所以:

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty} f(r_k)=0$$

例题 2.2 (习题 2.7) 讨论函数 $f+g$ 和 fg 在 x_0 处的连续性，如果:

(1) f 在 x_0 处连续，但 g 在 x_0 处不连续;

(2) f 和 g 在 x_0 处都不连续.

解: 1.fg 无法确定. 例如 $f=0$, 那么 $fg=0$, 因此 fg 必定连续, 但是如果 $f=1$, 那么 $fg=g$, 因此 fg 在 x_0 处不连续;

$f+g$ 是不连续的, 否则 $h=f+g$ 在 x_0 处连续, 那么 $g=h-f$ 也在 x_0 处连续, 产生矛盾.

2. 均无法确定. 例如:

$$f(x)=\begin{cases}1, x\neq x_0\\ 0, x=x_0\end{cases}, g=1-f$$

因此 $f+g$ 是连续的, 但是如果令 $g=1+f$, 那么 $f+g$ 在 x_0 处就不连续;

如果 f 还是如上定义,$g=1+f$, 那么 fg 仍然在 x_0 处仍然不连续; 但是如果令:

$$f(x)=\begin{cases}1, x\neq x_0\\ -1, x=x_0\end{cases}$$

$g=f$, 那么 $fg\equiv 1$, 因此在 x_0 处连续.

例题 2.3 (习题 2.7) *8. 设函数 f 只有可去间断点，令*

$$g(x)=\lim_{t\to x} f(t),$$

则 g 是一连续函数.

9. 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上递增 (或递减), 定义 $F(x)=f(x+)$, 则 F 在 $\mathbb{R}$ 上右连续.

证: 8. 要证 g 是连续函数, 只需要证明对 f 定义域上的每一个点都是连续的即可. 如果 x 是 f 的连续点, 那么 $g(x)=f(x)$. 如果 x 是 f 的可去间断点那么 $\lim\limits_{t\to x} f(t)$ 存在, 因此定义是合理的. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $t\in(x-\delta,x)\cup(x,x+\delta)$ 都有:

$$|f(t)-g(x)|<\varepsilon/2$$

上边式子对 $t\to y\in(x-\delta,x+\delta)$ 取极限就有:

$$|g(y)-g(x)|\leq\varepsilon/2<\varepsilon$$

因此根据连续的定义可知 g 是连续的.

证: 9. 首先证明对任意的 $y>x$, 都有 $f(y)\geq f(x^+)$, 因为:

$$f(y)\geq f(x+t), t\to 0^+$$

因此即使对后者取了极限也有:$f(y) \geq f(x^+)$. 叙述 $f(x^+)$ 的定义, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $t \in (x, x+\delta)$ 都有:

$$f(t) - f(x^+) < \varepsilon/2$$

上式中令 $t \to y^+ \in [x, x+\delta)$, 就有:

$$f(y^+) - f(x^+) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

即对上述给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 δ, 对任意的 $y \in [x, x+\delta)$, 都有:

$$F(y) - F(x) < \varepsilon$$

证毕.

2.2 柯西方程/达朗贝尔方程

例题 2.4 (习题 2.7 及其变式) *1. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且对一切 $x, y \in \mathbb{R}$ 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明：$f(x) = f(1)x$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立.*

2. 将 (1) 中连续性条件改为只在某一个点处连续, 是否还有如上结论?

3. 将 (1) 中连续条件改为 f 在某个点 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上有界, 是否还有如上结论?

证: 2. 假设 f 在 x_0 点处连续, 即意味对任意的 $x \to x_0$, 都有:

$$f(x) - f(x_0) \to 0$$

注意到：

$$f(x) = f(x_0 + x - x_0) = f(x_0) + f(x - x_0)$$

因此对任意一点 y_0, 当 $y \to y_0$ 时:

$$f(y) - f(y_0) = f(y - y_0) = f(y - y_0 + x_0) - f(x_0) \to 0, y \to y_0$$

因此一点连续等价于任意点连续.

3. 如果函数在 0 的某个邻域内是有界的，不妨设为在 $(-1, 1)$ 内是有界为 M 的 (1 可以改为任何的给定的正数)，那么因为：

$$f(x) = 2f(\frac{x}{2})$$

所以当 $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 时，我们有：$|f(x)| < \frac{M}{2}$ 那么，当 $x \in (-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n})$, 就有：$|f(x)| < \frac{M}{2^n}$ 又因为 $f(0) = 0$, 可以看到函数在 0 点是连续的. 故条件可以减弱为 f 在某个点的邻域内有界.

例题 2.5 (其他变式) *1. (指数型) 证明：对 x 和 y 的一切值, 满足方程*

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

且不恒等于 0 的唯一的连续函数 $f(x)(-\infty < x < +\infty)$ 是指数函数 $f(x) = a^x$, 其中 $a = f(1)$ 是正常数.

2. (对数型) 证明：对 $x > 0$ 和 $y > 0$ 的一切值, 满足方程

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

且不恒等于 0 的唯一的连续函数 $f(x)(0 < x < +\infty)$ 是指数函数 $f(x) = a \ln x$, 其中 $a = f(e)$ 是正常数.

3. 求在 $\mathbb{R}$ 上满足方程 $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$ 的连续函数.

证: 1. 事实上易见一点处为 0 则函数为 0，因此我们假设函数不为 0

那么就有：$f(x)=f(\frac{x}{2})^2>0$ 函数为正值，因此两边可以取对数：$\ln f(x+y)=\ln f(x)+\ln f(y)$ 令 $\ln f(x)=g(x)$, 所以：$g(x+y)=g(x)+g(y)$ 那么 $g(x)$ 是柯西方程，它的连续解为：

$$g(x)=g(1)x\Rightarrow \ln f(x)=\ln f(1)x\Rightarrow f(x)=[f(1)]^x$$

同样的，我们可以减弱条件为函数在 $(0,\varepsilon)$ 内有界，因为当 $x\in(-\varepsilon,0)$ 时，$0<x+\varepsilon<\varepsilon$, 那么就有：

$$f(x)=f(x+\varepsilon-\varepsilon)=f(x+\varepsilon)f(-\varepsilon)$$

因此函数 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内是有界的，下证 $\ln f(x)$ 是有界的, 只需证明 $f(x)$ 有非 0 下确界即可.

这是因为：又从 $f(x)f(-x)=f(0)=1$ 知道 $f(x)=\dfrac{1}{f(-x)}$. 因此在 $(0,\varepsilon)$ 上的函数 f 不仅上方有界, 且其下确界大于 0 .

因此 $\ln f(x)$ 是有界的，故满足柯西方程的减弱条件.

2. 证明：令 $x=e^s, y=e^t$, 所以我们得到：

$$f(e^{s+t})=f(e^t)+f(e^s)$$

令 $g(s)=f(e^s)$, 所以：

$$g(s+t)=g(s)+g(t)$$

因此：

$$g(s)=g(1)s=f(e)\ln x=f(x)$$

所以：$f(x)=f(e)\ln x$.

3.
$$f(\frac{x+y}{2})=\frac{f(x)+f(y)}{2}=f(\frac{(x+y)+0}{2})=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}$$

所以：

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$$

令 $g(x)=f(x)-f(0)$, 那么：

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

所以：$g(x)=[f(1)-f(0)]x$.

3 闭区间连续函数的性质

定理 3.1 (介值定理) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上非常值的连续函数, γ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数, 则必存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=\gamma$.

注: 根据下边的最值定理我们可以将 $f(a),f(b)$ 修改为

$$\max_{[a,b]}f(x),\min_{[a,b]}f(x)$$

定理 3.2 (最值定理) 有界闭区间上的连续函数必在该区间上有界, 并且必能取到它在此区间上的最大值和最小值.

例题 3.1 (习题 2.10) *6. 求证三次方程 $x^3+2x-1=0$ 只有惟一实根, 此根在 $(0,1)$ 内.*

7. 设 $\varphi\in C(\mathbb{R})$, 且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=0.$$

(1) 证明: 当 n 为奇数, 方程 $x^n+\varphi(x)=0$ 有一实根;

(2) 证明: 当 n 为偶数, 有一数 y 使得对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$y^n+\varphi(y)\leqslant x^n+\varphi(x).$$

证: 6. 令 $f(x)=x^3+2x-1$,f 是连续函数且单调递增, 因为 $f(0)=-1,f(1)=1$, 因此存在 $x_0\in(0,1)$ 使得:

$$f(x_0)=1 \iff x^3+2x-1=0$$

证: 7.(1): 令 $f(x)=x^n+\varphi(x)$,$f(x)$ 是连续函数, 当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=x^n(1+\dfrac{\varphi(x)}{x^n})$, 根据题设条件可知, 存在 $M>0$, 使得当 $|x|>M$ 时,$|\dfrac{\varphi(x)}{x^n}|\leq\dfrac{1}{2}$, 因此当 $x>M$ 时,$f(x)>\dfrac{M^n}{2}$, 当 $x<-M$ 时:$f(x)<-\dfrac{M^n}{2}$, 因此根据零点存在定理可知存在 $x_0\in(-M,M)$, 使得 $f(x_0)=0$

(2): 首先先把 $f(0)$ 取出来, 同上, 我们得到当 $|x|>M$ 时, 有 $f(x)\geq\dfrac{M^n}{2}$. 并且我们取 M 充分大使得 $\dfrac{M^n}{2}>f(0)$, 而在闭区间 $[-M,M]$ 中, 根据闭区间连续函数的性质可知存在 y_0 使得,$f(y_0)=\min\limits_{x\in[-M,M]}$, 因为 $0\in[-M,M]$, 因此 $f(y_0)\leq f(0)<\dfrac{M^n}{2}$, 因此:

$$f(y_0)=\min_{x\in\mathbb{R}}f(x)$$

取 $y=y_0$ 于是习题得证

例题 3.2 (习题 2.10) *设 $f\in C[0,1]$ 且 $f(0)=f(1)$, 求证: 对任何 $n\in\mathbb{N}^*$ 存在 $x_n\in[0,1]$ 使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)$.*

证: 考虑函数 $g(x)=f(x+\dfrac{1}{n})-f(x)$, 那么:

$$\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{k}{n})=f(1)-f(0)=0$$

那么必然有两个是异号的, 或者全部为 0, 不妨设:

$$g(\frac{k_1}{n})\geq 0,g(\frac{k_2}{n})\leq 0,k_1<k_2$$

因此根据零点存在定理必然存在 $x_n\in[\dfrac{k_1}{n},\dfrac{k_2}{n}]$, 使得 $f(x_n)=0$.

例题 3.3 (补充习题) *设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b],\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为正数且其和为 1 , 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使*

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$$

证: 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续, 因此必然存在最小值和最大值, 不妨记为 m,M, 因此:

$$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)-1\cdot m\geq 0$$
$$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)-1\cdot M\leq 0$$

根据介值定理即可得证.

例题 3.4 (补充习题) *设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 且 $f(x)=f(\sqrt{x})(x>0)$, 证明 $f(x)$ 是常数.*

证: 迭代即有: $f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=\cdots=f(x^{1/2^n})$

因此对任意的 $x>0$, 令 $n\to\infty$, 由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 因此: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{1/2^n})=f(1)=1$ 所以 $f(x)\equiv 1$.

例题 3.5 (补充习题) *设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n(n=2,3,\cdots)$.*

(1) 证明: 方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 上有唯一的实根 x_n;

(2) 证明数列 $\{x_n\}$ 有极限, 并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

证:(1). 显然 $f(0)=0,f(1)=n$, 因此固定 n 时,$f(x)$ 一定在 $[0,1]$ 之间存在一个实根 x_n.

(2). 等比数列求和可得:$f_n(x)=\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}$. 现在我们分析 x_n 的性质. 根据 (1) 可知 $x_n\in(0,1)$. 其次 x_n 一定是单调递减的. 反证: 假设 $x_n\le x_{n+1}$, 那么必然有:

$$1=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n<x_{n+1}+\cdots+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n+1}\neq 1$$

因此就有单调递减且有下界我们知道 x_n 极限必然存在. 假设为 a, 那么一定有:

$$\lim_{x_n\to a}\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=\frac{a}{1-a}=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

矛盾, 因此极限存在且为 0.

4 函数的导数

4.1 概念辨析

定义 4.1 (函数的导数) *设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义, 如果极限*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

存在且有限, 则称这个极限值为 f 在点 x_0 的导数, 记作 $f'\left(x_0\right)$, 并称函数 f 在点 x_0 可导.

将上述极限过程的 $h\to 0$ 改为 $h\to 0^+$ 就得到了右导数的定义, 修改为 $h\to 0^-$ 就得到了左导数的定义.

注: 注意到左导数和右导数的符号:$f'_-(x_0),f'_+(x_0)$.

后边还有一个记号是 $f'(x_0^+)$, 这个符号是指:

$$\lim_{h\to 0^+}f'(x_0+h)$$

例题 4.1 (补充习题) *设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 ( ).*

1. $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ *存在*
2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ *存在*
3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ *存在*
4. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ *存在*

4 正确, 其他都是错误的.

1. 只是右侧导数存在, 左侧导数未知. 反例:

$$f(x)=\begin{cases}x,x\ge a\\ a-1,x<a\end{cases}$$

2. 甚至得不到 f 在 a 点的连续性. 反例:

$$f(x)=\begin{cases}x,x\neq a\\ a-1,x\neq a\end{cases}$$

3. 甚至得不到 f 在 a 点的连续性. 反例:

$$f(x)=\begin{cases}|x-a|,x\neq a\\ -1,x=a\end{cases}$$

例题 4.2 (习题 3.1) 设 f 在 $x=0$ 可导, $a_n \to 0^-, b_n \to 0^+(n\to\infty)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0).$$

注: 如果这里修改为 $a_n.b_n\to 0$, 结论是否仍然正确? 请证明或者给出反例.

证: 注意到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导等价为:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)+o(1), x\to 0$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}&=\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0}\cdot\frac{b_n}{b_n-a_n}+\frac{f(0)-f(a_n)}{0-a_n}\cdot\frac{-a_n}{b_n-a_n}\\&=f'(0)\cdot\frac{b_n}{b_n-a_n}+o(1)\cdot\frac{b_n}{b_n-a_n}\\&+f'(0)\cdot\frac{-a_n}{b_n-a_n}+o(1)\frac{-a_n}{b_n-a_n}\\&=f'(0)+o(1)\end{aligned}$$

故:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0).$$

例题 4.3 (补充习题) 设 $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x+100)$, 求 $f'(1)$.

虽然我们可以用求导公式去计算, 但是有的时候定义法反而来的更快一些!

4.2 连续性与可微性的关联: 局部概念的理解

我们都知道如果 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$, 且 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处可微, 那么 $f(x)$ 一定在 x_0 点是连续的, 但是是否有下列的结果?

例题 4.4 *设 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$, 并且 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处可微, 能否推出 f 在 x_0 的某个小邻域 (区间) 内是连续的? 给出证明或者给出反例.*

例题 4.5 *1. 能否给出只在一点处连续的函数?*

2. 能否给出只在一点处可微的函数?

3. 是否存在左右导数都存在但不相等的函数?

1. $f(x)=xD(x)$.

2. $f(x)=x^2D(x)$, 其中 $D(x)$ 为 Drichlet 函数.

3. (0 点可导但是 0 点的任意邻域内都有不可导的点.)

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$