2021 年秋季《离散数学》期中试卷

2021年11月6日14:00-16:00

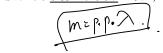
本试卷共六道题, 分两页, 其中第 1 题 5+5+10 分, 第 3 题 5+10 分, 第 4 题 5+10 分, 其余每题每小问 5 分. 即使未能解决前面的小问, 也可利用其结论处理后面的小问.

- 1 (1) 设字母 a,b,c,d 分别有 1,2,3,4 个, 用它们组成长度为 10 的单词. 一共能组成多少 个单词? $(\sqrt{x}(\sqrt{2} \times C_7^3 = 12600))$
 - (2) 将 20 个人分成四个 3 人小组与两个 4 人小组, 分得的小组不标号不排序. 一共有

$$B_n = \sum_{k=1}^{n}$$
 $B_n = \sum_{k=1}^{n}$ $B_$

- 2 (1) 设p 是素数, k 是满足 0 < k < p 的正整数. 证明: 组合数 C_p^k 是 p 的倍数. (2) 叙述并证明费马小定理.

- (3) 求出使得 $2^d \equiv 1 \pmod{53}$ 成立的最小正整数 d.
- 3 (1) 叙述容斥原理.
 - (2) 给定正整数 n, 设不超过 \sqrt{n} 的所有素数分别为 $p_1 < \cdots < p_k$. 设 $1, 2, \ldots, n$ 中无 平方因子的数的个数为 N. 利用容斥原理将 N 表示成 p_1, \ldots, p_k 与 n 的表达式.(称 正整数 m 无平方因子, 如果 m 不能被任何素数的平方整除.)



- 4 (1) 请求出 7 在模 163 下乘法的逆元, 即找一个整数 x 满足 $7x \equiv 1 \pmod{163}$.
 - (1) 请水出 / 往楔 103 下來在印史 儿,以了以 ($\frac{2}{2}$)($\frac{2}{3}$)(163=23×7+2 7=3×2+1 ... 1=7-3×2=7-3×(163-23×2)=7×20-3×163
- 5 (1) 直线上从左至右排列着 n 个点, 将每个点用红蓝两种颜色之一染色, 要求不存在连 续三个相邻的顶点都染为蓝色. 设满足上述条件的染色方案的数目为 A_n . 证明: $\{A_n\}$ 满足如下递推关系: [458] [212 Ana + 1

$$A_n=A_{n-1}+A_{n-2}+A_{n-3}, \quad orall n\geq 1.$$

- (3) 将正 n 边形的每个顶点用红蓝两种颜色之一染色, 要求不存在连续三个相邻的顶 点都染为蓝色. 设满足上述条件的染色方案的数目为 B_n . 证明: 对 $n \geq 5$ 有

$$B_n = A_{n-2} + 2A_{n-3} + 3A_{n-4}.$$

- (4) 请确定 B_{2021} 的奇偶性, 并说明理由.
- 6 (1) 设 $X:\Omega \to \mathbf{R}$ 是有限概率空间 Ω 上的随机变量, 其期望值为 $E[X] = \mu$. 证明: $E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2.$
 - (2) 有两个国家, 用 A 表示第一个国家的城市的集合, 用 B 表示第二个国家的城市 的集合. 对任何 $a \in A, b \in B, a, b$ 间有 0 条或 1 条 (双向的) 直飞航线. 对非空子 集 $U \subseteq A, V \subseteq B$, 用 e(U, V) 表示从 U 中的城市到 V 中的城市的直飞航班的数目, 定义 $d(U,V)=\frac{e(U,V)}{|U|\cdot|V|}$. 设 A,B 都分成了若干个省 (的不交并): $A=A_1\cup\cdots\cup A_n,$ $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$. 将 $A \times B$ 视为均匀的概率空间, 定义 $A \times B$ 上的随机变量 X 为:

对
$$(a,b) \in A \times B$$
,如果 $a \in A_i, b \in B_j$,则 $X(a,b) = d(A_i,B_j)$. 证明:
$$E[X] = d(A,B), \quad E[X^2] = \sum_{\substack{i \in A_i \in A$$

(3) 设 $|A_1| \ge \epsilon |A|$, $|B_1| \ge \epsilon |B|$, 且有 $|d(A_1, B_1) - d(A, B)| \ge \epsilon$, 其中 ϵ 是给定的正数. 结合(1)与(2)的结论,证明:

$$\begin{split} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{|A_i| \cdot |B_j|}{|A| \cdot |B|} d^2(A_i, B_j) \right) - d^2(A, B) &\geq \epsilon^4. \\ & \text{ LHSI } \frac{\overline{\xi}(\vec{\chi}) - \overline{\xi}(\vec{\chi})}{|\mathcal{L}|} e^{\frac{2}{|A|} \frac{1}{|A|} |d(\mu, k) \cdot d(\mu, k)|^2} \\ & 2 &= \frac{|A| \|k\|}{2} e^{\frac{2}{|A|} \frac{1}{|A|}} e^{\frac{2}{|A|} \frac{1}{|A|}} e^{\frac{2}{|A|} \frac{1}{|A|}} \end{split}$$