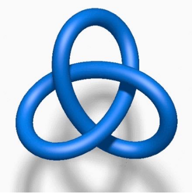
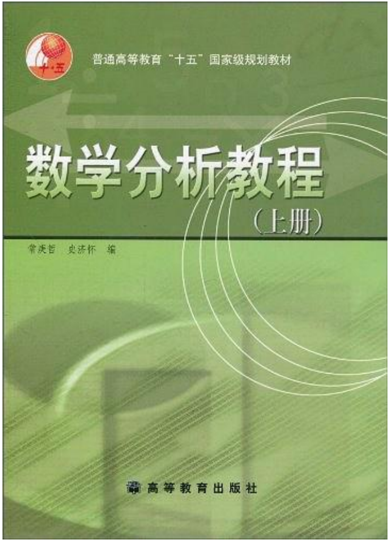
高等微积分（上）

邹文明

第一章: 实数和数列极限(第二节: 极限)




普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学分析教程
(上册)
常庚哲 史济怀 编
高等教育出版社

§2. 数列极限的基本概念

所谓数列是指将一些实数排成一列:

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

记作 $\{a_n\}$, 并称 a_n 为该数列的第 n 项或通项.

定义 1. 称数列 $\{a_n\}$ 有极限 $A \in \mathbb{R}$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|a_n - A| < \varepsilon$. 也称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A,

记作 $a_n \to A\ (n \to \infty)$ 或

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (读: 当 n 趋于无穷时, a_n 趋于 A).

数列有极限也称为收敛, 否则称为发散.

注记:

- (否定形式) 数列 $\{a_n\}$ 不收敛到 A 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N > 0, \exists n_N > N$ 满足

$$|a_{n_N} - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

- 总可以选取 n_N 使得数列 $\{n_N\}$ 依 N 严格递增, 由此得到子列 $\{a_{n_N}\}$ 不收敛于 A.

- $\lim a_n = A$ 当且仅当 $\lim |a_n - A| = 0.$

- 从某一项开始取常数的数列收敛到该常数.
  也即若 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $a_n \equiv A$, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

- 数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A 并不意味着从某一项开始会恒有 $a_n = A$. 后面我们将证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \text{But} \qquad \frac{1}{n} \neq 0.$$

若干例子

例 1. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

分析: $\forall\varepsilon>0$, 我们需要找到某一个 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时, 我们有 $|\frac{1}{n}|<\varepsilon$. 为此只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$, 于是我们只需取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 则 $\forall n > N$, 均有 $n > [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 从而 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 进而得 $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$, 也即

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

例 2. 设 $0 < |q| < 1$. 求证: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 我们需要找到某一个 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 均有 $|q^n| < \varepsilon$. 为此需 $n > \log_{|q|} \varepsilon$, 于是我们只需取 $N = |[\log_{|q|} \varepsilon]| + 1$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = |[\log_{|q|} \varepsilon]| + 1$, 则 $\forall n > N$, 均有 $n > [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$, 从而 $n > \log_{|q|} \varepsilon$, 进而得 $|q^n| < \varepsilon$, 也即我们有 $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

例 3. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}=0.$

分析: $\forall\varepsilon>0$, 我们需要找到某一个 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时, 我们有 $|\frac{1}{n+\sqrt{n}}|<\varepsilon$. 而 $\frac{1}{n+\sqrt{n}}<\frac{1}{n}$, 则只需 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$, 故可取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 则 $\forall n > N$, 均有 $n > [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 从而 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 故 $|\frac{1}{n+\sqrt{n}}| < |\frac{1}{n}| < \varepsilon$, 即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0.$$

例 4. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n})=0.$

分析: $\forall\varepsilon>0$, 需求 $N>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有

$$|\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n}-0|<\varepsilon.$$

可注意到, 我们有

$$|\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n}-0|=\frac{(1+n)-n}{(\sqrt[3]{1+n})^2+\sqrt[3]{1+n}\cdot\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}$$

故只需求 $N>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有 $n^{-\frac{2}{3}}<\varepsilon$, 也即要求 $n>\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$, 由此只需取 $N=[\varepsilon^{-\frac{3}{2}}]+1$.

证明: $\forall \varepsilon>0$, 令 $N=[\varepsilon^{-\frac{3}{2}}]+1$. 那么 $\forall n>N$, 我们有 $n>\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$, 由此立刻可得

$$|\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n}|=\frac{(1+n)-n}{(\sqrt[3]{1+n})^2+\sqrt[3]{1+n}\cdot\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}$$

$$\leqslant n^{-\frac{2}{3}}<\varepsilon,$$

故所证结论成立.

例 5. 求证: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 而 $\{b_n\}$ 有界, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

证明: 由题设可知, $\exists M > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|b_n| \leqslant M$. $\forall \varepsilon > 0$, 同样由题设知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, 从而我们有

$$|a_n b_n| \leqslant M|a_n| < \varepsilon,$$

故所证结论成立.

例 6. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明: 方法 1. $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{2}{\varepsilon^2}] + 2$, 则 $\forall n > N$, 我们有 $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$, 由此可知

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon^j \geqslant \frac{1}{2} n(n-1)\varepsilon^2 > n,$$

于是 $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, 从而 $|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$. 由此可知所证结论成立.

方法 2. $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=[\frac{4}{\varepsilon^2}]+1$, 则 $\forall n>N$,

$$1\le\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdots1}_{n-2}}\le\frac{1}{n}(2\sqrt{n}+n-2)$$

$$\leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

由此可得 $|\sqrt[n]{n}-1|\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$. 故所证成立.

例 7. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+2}{n^2-3}=2.$

证明: 方法 1. $\forall n\geqslant 1$, 令 $a_n=\frac{2n^2+n+2}{n^2-3}$, 那么

$$\left|a_n-2\right|=\left|\frac{(2n^2+n+2)-2(n^2-3)}{n^2-3}\right|=\left|\frac{n+8}{n^2-3}\right|.$$

于是 $\forall n\geqslant 8$, 我们有

$$|a_n-2|=\frac{n+8}{n^2-3}\leqslant\frac{2n}{\frac{1}{2}n^2}=\frac{4}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\max\{8,[\frac{4}{\varepsilon}]\}$, 则 $\forall n>N$, 我们有 $|a_n-2|\leqslant\frac{4}{n}<\varepsilon$. 故所证结论成立.

方法 2: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \max\{8, [\frac{4}{\varepsilon}]\}$, 则 $\forall n > N$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n^2+n+2}{n^2-3} - 2\right| &= \left|\frac{(2n^2+n+2)-2(n^2-3)}{n^2-3}\right| \\
&= \left|\frac{n+8}{n^2-3}\right| = \frac{n+8}{n^2-3} \\
&\leqslant \frac{2n}{\frac{1}{2}n^2} = \frac{4}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

故所证结论成立.

同学们辛苦了！