Inducción Matemática

Mathematical Induction

Autores: Gian Franco Posso Giraldo
Daniel Enrique Villa Arias

IS&C, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia
Correo-e: f.posso@utp.edu.co
daniel.villa2@utp.edu.co

***Resumen*— Este documento presenta un resumen de que es la inducción matemática, su importancia para demostrar la veracidad de proposiciones que dependen de una variable "n" que toma una infinidad de valores enteros.**

***Palabras clave*— Inducción, veracidad, matemáticas, número natural.**

Abstract— This document presents a summary of what mathematical induction is, its importance to demonstrate the veracity of propositions that depend on a variable "n" that takes an infinity of integer values.

Keywords— Induction, truthfulness, mathematics, natural number.

I. INTRODUCCIÓN

La inducción matemática es un razonamiento que permite demostrar una infinidad de proposiciones, o una proposición que depende de un parámetro que toma una infinidad de valores enteros. De la certeza de una o varias proposiciones particulares se puede pasar a la certeza de la correspondiente proposición general, o generalización, a este proceso calificado como un procedimiento eficaz se lo conoce como Inducción.

El objetivo de este documento es dar una explicación breve y concisa de la inducción matemática, con el fin de mejorar y aumentar los conocimientos de dicho tema.

1.1 DEMOSTRACIÓN

En su forma más básica, el método de Inducción Matemática consta de 2 etapas. Si deseamos probar que una determinada propiedad "P" se cumple para todo número natural, entonces procedemos aplicando el siguiente esquema.

Paso 1 (Base de la Inducción). - Se demuestra que el primer natural (el número 1) cumple la propiedad: P(1).

Paso 2 (Paso Inductivo). - Partiendo de la suposición (Hipótesis de Inducción) de que un número natural cualquiera k cumple con la propiedad: P(k), procedemos a demostrar que, en consecuencia, el número k + 1 también debe cumplir con dicha propiedad: P (k + 1). Es decir, probamos la validez de la implicación P(k) ⇒ P (k + 1).

En caso de poder realizar exitosamente lo anterior, entonces concluimos que la propiedad P se cumple para todos los números naturales.

1.2 EJEMPLOS

A continuación, veremos cómo funciona el método a través de revisar algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 1. Pruebe que para todo número natural "n"

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución. Probaremos la validez de la fórmula a través de Inducción matemática.

Paso 1 (Base de la Inducción). - Procedemos a mostrar la validez de la fórmula para el caso "n = 1".

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Paso 2 (Paso Inductivo). - Suponemos que la fórmula es válida para un número natural cualquiera "n = k".

$$\text{Hipótesis de Inducción: } 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

y a partir de esto establecemos la validez de la fórmula para “n= k + 1”.

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+(k+1) &= (1+2+\cdots+k)+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2} \end{aligned}$$

Con esto termina nuestra prueba por inducción y podemos concluir que la fórmula se cumple o es válida para todo número natural “n”.

Ejemplo 2. Pruebe que para todo número natural “n”.

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solución. Probaremos la validez de la fórmula a través de Inducción Matemática.

Paso 1 (Base de la Inducción). - Procedemos a mostrar la validez de la fórmula para el caso “n = 1”.

$$1^2=\frac{1(1+1)[2(1)+1]}{6}=\frac{1(2)(3)}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Paso 2 (Paso Inductivo). - Suponemos que la fórmula es válida para un número natural cualquiera “n = k”.

Hipótesis de Inducción: $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

y a partir de esto establecemos la validez de la fórmula para

“n = k + 1”.

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+\cdots+(k+1)^2 &= \left(1^2+2^2+\cdots+k^2\right)+(k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6} \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que la fórmula se cumple para todo número natural “n”.

REFERENCIAS

Referencias en la Web:

[1] https://www.buenastareas.com/ensayos/Inducci%C3%B3n-Matem%C3%A1tica/55135062.html

[2] https://compilandoconocimiento.com/2017/01/01/induccion-matematica/

[3] https://www.youtube.com/watch?v=5HuMMTTfAGs

[4] https://es.slideshare.net/alexandergelabert/problemas-resueltos-sobre-induccin-matemtica