

1 Esercizi

Esercizio 1.1. Esercizio d'implementazione dell'algoritmo di valutazione del polinomio d'interpolazione in più punti (Esercizio 1.11 sulle dispense).

Esercizio 1.2. Esercizio d'implementazione della formula dei trapezi (Esercizio 2.2 sulle dispense).

Esercizio 1.3. Esercizio d'implementazione del metodo di estrapolazione (Esercizio 2.4 sulle dispense).

2 Problemi

Problema 2.1. Si consideri la funzione \sqrt{x} .

(a) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di \sqrt{x} sui nodi

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{64}, \quad x_2 = \frac{4}{64}, \quad x_3 = \frac{9}{64}, \quad x_4 = \frac{16}{64}, \quad x_5 = \frac{25}{64}, \quad x_6 = \frac{36}{64}, \quad x_7 = \frac{49}{64}, \quad x_8 = 1.$$

Calcolare il vettore (colonna)

$$\begin{bmatrix} p(\zeta_1) - \sqrt{\zeta_1} & p(\zeta_2) - \sqrt{\zeta_2} & \cdots & p(\zeta_{21}) - \sqrt{\zeta_{21}} \end{bmatrix}^T$$

dove $\zeta_i = \frac{i-1}{20}$ per $i = 1, \dots, 21$, e osservare in che modo varia la differenza $p(\zeta_i) - \sqrt{\zeta_i}$ al variare di i da 1 a 21.

(b) Tracciare il grafico di \sqrt{x} e di $p(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$, ponendo i due grafici su un'unica figura e inserendo una legenda che ci dica qual è la funzione \sqrt{x} e qual è il polinomio $p(x)$.

Problema 2.2. Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x.$$

Per ogni intero $n \geq 1$ indichiamo con I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare

$$I = \int_0^1 f(x) dx = 1.7182818284590...$$

(a) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un $n = n(\varepsilon)$ tale che $|I - I_n| \leq \varepsilon$.

(b) Costruire una tabella che riporti vicino ad ogni $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-10}\}$:

- il numero $n(\varepsilon)$;
- il valore I_n per $n = n(\varepsilon)$;
- il valore esatto I (in modo da confrontarlo con I_n);
- l'errore $|I - I_n|$ (che deve essere $\leq \varepsilon$).

(c) Calcolare le approssimazioni di I ottenute con le formule dei trapezi I_2, I_4, I_8, I_{16} e confrontarle con il valore esatto I .

(d) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione dei valori I_2, I_4, I_8, I_{16} sui nodi $h_2^2, h_4^2, h_8^2, h_{16}^2$, dove $h_2 = \frac{1}{2}$, $h_4 = \frac{1}{4}$, $h_8 = \frac{1}{8}$, $h_{16} = \frac{1}{16}$ sono i passi di discretizzazione relativi alle formule dei trapezi I_2, I_4, I_8, I_{16} rispettivamente. Calcolare $p(0)$ e confrontare $I_2, I_4, I_8, I_{16}, p(0)$ con il valore esatto I . Che cosa si nota?

Problema 2.3. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$ e indichiamo con I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^1 f(x) dx$.

(a) Calcolare I prima manualmente e poi con la funzione simbolica `int` di MATLAB.

(b) Calcolare $I_5, I_{10}, I_{20}, I_{40}$.

- (c) Calcolare $p(0)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione dei dati (h_0^2, I_5) , (h_1^2, I_{10}) , (h_2^2, I_{20}) , (h_3^2, I_{40}) e h_0, h_1, h_2, h_3 sono i passi di discretizzazione delle formule dei trapezi $I_5, I_{10}, I_{20}, I_{40}$.
- (d) Riportare in una tabella:
- i valori $I_5, I_{10}, I_{20}, I_{40}, p(0)$;
 - gli errori $|I_5 - I|, |I_{10} - I|, |I_{20} - I|, |I_{40} - I|, |p(0) - I|$.
- (e) Posto $\varepsilon = |p(0) - I|$, determinare un n in modo tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Calcolare successivamente I_n e verificare che effettivamente $|I_n - I| \leq \varepsilon$.