УДК 517.518.8

Поздравляю, Вы проходите производственную практику на кафедре университета. Преподаватель университета, в отличие преподавателя института или колледжа, обязан заниматься научными исследованиями и публиковать хотя бы одну статью в год. Считается, что на учебный процесс отводится первая половина рабочего дня, а на научные исследования — вторая. Поэтому нам с Вами будет крайне полезно познакомиться с этим видом деятельности сотрудника кафедры.

Отнеситесь к этой публикации серьёзно. Это не только и не столько отчёт по практике. Это Ваша работа, которая может быть использована при защите курсовых и дипломных (бакалавра, магистра) работах. Да и в дальнейшем, на протяжении всей жизни, она останется Вашей. В том числе при защите диссертаций она вновь будет добавлять Вам имиджевый вес в списке литературы вместе с другими Вашими публикациями. Постарайтесь найти БЕСПЛАТНЫЙ журнал. По понятным причинам там отбор статей проходит более жёстко, т.к. журнал не имеет финансовых интересов. Это более престижно. Но есть неплохие и честно работающие платные журналы. Их честность отчасти подтверждается индексированием в РИНЦ. Взявшись за подготовку публикации, Вы получите бесценный опыт в этом направлении. Мало получить хороший результат, нужно уметь убедить других в том, что Ваша работа стоящая. Поэтому в случае неудачи не отчаивайтесь, а посылайте работу в следующий журнал. Если в одном издании Вас не поняли, доказывайте свою правоту в другом, третьем, вежливо, но настойчиво. Чтобы облегчить Вам поиски приведу некоторые ссылки на журналы, которые, возможно, уже не актуальны, но по ним можно узнать о новых проектах. Во первых, большое количество журналов можно найти на сайте math-net.ru . Во-вторых, часто студенты самостоятельно находят в поисковиках интересные интернет издания, например, в данный момент какой-либо вуз проводит бесплатную студенческую конференцию, предполагающую издание индексируемых в РИНЦ тезисов. Кроме того, часто присылают приглашения такие интернет издательства:

1. `http://www.nic-znanie.org.ua/ru/public`
2. `http://nauchoboz.ru/forum.html`
3. `mail@ran-nauka.ru` Это электронная почта, по которой можно отправить статью. Сначала спросите об актуальности проекта.
4. `www.conference-esa.ru`
5. `https://rdcu.be/b4bsC`
6. `https://ami.im/mnpk-tt-73-elibrary-ru/`
7. `https://www.ariessys.com/for-current-customers/tutorials/`
8. `https://service.elsevier.com/app/home/supporthub/publishing/`.
9. `http://585386.wixsite.com/math-mol` Бесплатная студенческая конференция в Воронеже

1 Задание на практику и методические рекомендации по подготовке научной статьи к публикации.

Если вспомнить план организации сочинения по литературе в школе (помните, введение, основная часть, заключение), то применительно к научной работе принята следующая схема изложения материала статьи.

Во введении (если нет структуры разбиения на разделы, то вначале статьи) описывается история вопроса. То есть какие исследования проводились в этой области ранее, решению каких проблем помогут результаты Вашей работы. Далее нужно чётко сформулировать задачу, которую собираетесь решить. Чтобы читатель мог понять суть и оценить научную ценность Ваших исследований. Сразу, в начале статьи, можно кратко сформулировать результаты Ваших исследований, которым посвящена Ваша работа. Например, сформулировать доказанные теоремы, или в Вашем случае описать результаты численных экспериментов. Чтобы читателю сразу, не листая весь текст, стало ясно, что конкретно сделано в Вашей работе. Наконец, идёт раздел с содержательной частью работы. В Вашем случае приводятся теоретические результаты (см. §5), которые обосновывают то, что

Ваш индикатор сохраняет свойства исходного. Затем здесь же построить новый индикатор, приближая значения старого с помощью соответствующего оператора из параграфа §2. Я думаю, что всем понятно, что отрезок $[0, \pi]$ из §5 линейной заменой легко преобразуется в отрезок выбранного Вами временного ряда. Здесь Важно, что отсчёты времени и узлы интерполяции у операторов и там и там равноотстоящие. Стоит также проиллюстрировать работу старого и Вашего индикатора на одном графике. Смысл этого приближения заключается в том, что новый индикатор позволяет в разы экономить трафик (особенно, если трейдер использует мобильное устройство), а график нового, получается очень похожим на классический индикатор. Заключение в математических статьях писать не принято, т.к. резюме уже сделано во введении. В конце статьи приводится список процитированной литературы. На все источники должны быть отсылки из текста работы. Для Вашего удобства я привёл в конце пособия список литературы на который следует сослаться из введения статьи и/или тела работы. Список литературы можно расширять, но сокращать не стоит, т.к. это снижает рейтинг нашего университета в базах, индексирующих цитируемость. Поэтому сокращение списка литературы следует согласовывать со мной.

В параграфе §4 этого пособия, чтобы облегчить Вам ознакомление с проблематикой изучаемых процессов, приводится история вопроса. Этот параграф можно просто отредактировать под Вашу конкретную задачу и вставить в свою статью. Не забудьте сделать литературную обработку текста в своём стиле и добавить информацию об индикаторе.

Параграф §5 содержит определение и теоретические результаты, объясняющие поведение и свойства новых операторов, которым посвящены Ваши численные эксперименты. В принципе, подробно можно изучать только ту часть материала этого параграфа, которая относится конкретно к Вашему заданию. Остальное можно просмотреть для общего развития.

Давайте договоримся, что номер в списках операторов §2, индикаторов §3 и Ваш личный номер в списке группы должны совпадать. Но если в процессе работы у Вас возникнут серьёзные проблемы с реализацией Вашего конкретного проекта, то следует обратиться ко мне на почту tayu@rambler.ru. Мы подумаем как помочь Вам справиться с Вашей проблемой и в случае необходимости заменим индикатор или оператор на другой. Главное, чтобы не получилось у всех одно и то же.

Выбор языка программирования, операционной системы каждый выбирает самостоятельно, исходя из той оценки, которую он хочет получить.

Во-первых, каждый студент, претендующий на положительную оценку, должен оформить документ под названием „Отчёт по производственной практике“ по актуальному на момент прохождения отчёта стандарту СГУ. Этот стандарт следует найти на сайте СГУ. Это очень важно! Без этого документа, оформленного строго по стандарту, я не имею права принимать отчёт и ставить положительную оценку.

Во-вторых, давайте договоримся использовать

Критерий, по которому будет оцениваться работа.

- Тем, кому достаточно оценки „удовлетворительно“, можно подготовить свою статью полностью к публикации и получить отказ в редакции журнала, индексируемого в РИНЦ. В этом случае **обязательно** вычисления следует проводить с помощью языков, предполагающих высокую квалификацию программиста, таких как C++, Python, Java и т.п.

- Тот, кто хочет получить оценку „хорошо“, может представить на отчёте публикацию в журнале, индексируемом в РИНЦ независимо от использованных языков программирования. Т.е. можно организовать вычисления на любом языке, включая языки и платформы высокого уровня такие как Матлаб, Маткад, Вольфрам и т.п.. Чтобы не было недоразумений, обязательно проверьте актуальность индексирования выбранного Вами журнала в базе

  `https://elibrary.ru/defaultx.asp?`

  И пришлите мне соответствующую ссылку до отчёта. К сожалению, на сайтах редакций журналов иногда указывается устаревшая или фейковая информация о базах индексирования.

- Если Вы предоставите вместе с отчётом ссылку на свою статью, написанную по своему заданию в пособии и принятую в печать в любом журнале, индексируемом в РИНЦ, то будем считать, что Вы прошли апробацию в Редколлегии журнала, рецензент дал положительный отзыв, и поэтому заслуживаете оценки „отлично“, если вычисления проводились с помощью языков, предполагающих высокую квалификацию программиста, таких как C++, Python, Java и т.п. Чтобы не было недоразумений, обязательно проверьте актуальность индексирования выбранного Вами журнала в базе

`https://elibrary.ru/defaultx.asp?`

И пришлите мне соответствующую ссылку заблаговременно. К сожаленю, на сайтах редакций журналов иногда указывается устаревшая или фейковая информация о базах индексирования.

- Наконец, тем, кто не собирается продолжать обучение в университете или отправляется в академический отпуск, можно вообще ничего не предоставлять.

По всем вопросам, связанным с прохождением практики, в том числе и консультацию по содержанию заданий можно получить по адресу tayu@rambler.ru

2 Операторы,с помощью которых следует модифицировать индикатор.

Ваш номер в списке группы совпадает с номером в списке Вашего оператора.

1. оператор (5.33);
2. оператор (5.34);
3. оператор (5.35);
4. оператор (5.36);
5. оператор (5.37);
6. оператор (5.38);
7. оператор (5.39);
8. оператор (5.40);
9. оператор (5.41);
10. оператор (5.42);
11. оператор (5.43);
12. оператор (5.44);
13. оператор (5.50);
14. оператор (5.50);
15. оператор (5.33);
16. оператор (5.34);
17. оператор (5.35);
18. оператор (5.36);
19. оператор (5.37);
20. оператор (5.38);
21. оператор (5.39);
22. оператор (5.40);
23. оператор (5.41);
24. оператор (5.42);
25. оператор (5.43);
26. оператор (5.44);
27. оператор (5.33).

3 Индикаторы, которые следует модифицировать.

Ваш номер в списке группы совпадает с номером в списке Вашего индикатора.

1. ADX (Average Directional Movement Index, Индикатор среднего направленного движения)
2. Alligator (Индикатор Аллигатор)
3. AMA (Adaptive Moving Average, Адаптивная скользящая средняя)
4. Ichimoku (индикатор Ишимоку)
5. Moving Average (MA, Скользящая средняя)
6. Fractals (Фракталы Билла Вильямса)
7. Bollinger Bands (Полосы Боллинджера)
8. Envelopes (Конверты)
9. Parabolic SAR (Parabolic Stop and Reverse, Параболическая Система SAR)
10. Price Channel (Ценовой канал)
11. Bears/Bulls power (Индикатор силы Медведей/Быков)
12. TRIX (Triple Exponential Moving Average, Тройная экспоненциально сглаженная скользящая средняя)
13. Williams' A/D (Williams'Accumulation/Distribution, Индикатор Накопления/Распределения Вильямса)
14. Relative Vigor Index (RVI, Индекс относительной бодрости)
15. Williams'
16. A/D (Accumulation/Distribution, индикатор Накопления/Распределения)
17. Chaikin Oscillator (Осциллятор Чайкина)
18. BW MFI (Bill Williams' Market Facilitation Index, Индекс облегчения рынка Билла Вильямса)
19. Elders Force Index (Индекс силы Элдера)
20. Money Flow index (MFI, Индекс денежных потоков)
21. On Balance Volume (Индикатор балансового объема)
22. Volume Oscillator (Осциллятор объема)
23. Average True Range (ATR, Средний истинный диапазон)
24. CCI (Commodity Channel Index, Индекс товарного канала)
25. Chaikin's Volatility (Индикатор волатильности Чайкина)
26. Vertical Horizontal Filter (Вертикальный горизонтальный фильтр)
27. AC (Acceleration/Deceleration, индикатор Ускорения/Замедления)
28. AO (Awesome Oscillator, Чудесный осциллятор)
29. CMO (Chande Momentum Oscillator, Осциллятор скорости рынка Чанде)
30. MACD (Moving Average Convergence/Divergence, индикатор Схождения/Расхождения Скользящих Средних)
31. Momentum (Индикатор скорости рынка)
32. Price Oscillator (Ценовой осциллятор)

33. Rate of Change (ROC, Темп изменения цены)

34. Relative Strength Index (RSI, Индекс относительной силы)

35. Stochastic Oscillator (Стохастический осциллятор)

Подробнее на БКС Экспресс:

`{https://bcs-express.ru/novosti-i-analitika/vse-tekhnicheskie-indikatory-torgovoi-sistemy-quik}`

4 Пример Введения или вводной части статьи

Здесь приведены сведения по истории проблематики. Необходимо изложить этот материал своим языком, используя свой индивидуальный, неповторимый стиль изложения. Хотя история вопроса не меняется, но системы проверки на антиплагиает, а за ними и многие редакции журналов, требуют каждый раз менять текст, описывающий эту историческую информацию. Здесь можно отступать от примера и проявлять свою инициативу. Лишь бы всё было правильно и логично. По-моему, во введение статьи стоит добавить информацию о Вашем индикаторе.

Работа посвящена изучению аппроксимативных свойств синк-приближений, используемой в теореме отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона (см. [1], [2], [3], [4]). В связи с необходимостью развития теории кодирования сигналов, Э. Борель и Е.Т. Уиттекер ввели понятие кардинальной функции, сужение с оси на отрезок $[0, \pi]$ которой выглядит так:

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right). \tag{4.1}$$

К настоящему времени достаточно полно исследованы свойства синк-аппроксимаций аналитической на действительной оси функции, экспоненциально убывающей на бесконечности. Наиболее полный обзор результатов, полученных в этом направлении до 1993 года, а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти в [3]. Интересный исторический обзор исследований в этой области содержится также в [5].

Синк-приближения нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и приближения функций как одной так и нескольких переменных [6], [7] в теории квадратурных формул [3] и теории вейвлет-преобразований или всплесков [1], [2], [4]. В [8]изучаются модификации синк приближений (4.1), с помощью которых можно приближать произвольные раномерно непрерывные функции, ограниченные на оси.

Результаты работ [12], [9] позволяют сделать заключение о том, что при использовании классических синк-аппроксимаций (4.1) вблизи концов отрезка $[0, \pi]$ возникает явление Уилбрейама-Гиббса.

До появления работ [10], [11], [13], [14], [15], [9], насколько известно, приближение такими операторами на отрезке, или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций [3], [17] сведением к случаю оси с помощью конформного отображения. В [15] получена оценка сверху наилучшего приближения непрерывных, исчезающих на концах отрезка $[0, \pi]$, функций линейными комбинациями синков.

Из результатов исследований в [18] видно, что при попытке приближения негладких непрерывных функций значениями операторов (4.1) возможно появление „резонанса“, приводящего к неогранченному росту погрешности аппроксимации на всём интервале $(0, \pi)$. В этой же работе [18] установлено отсутствие равносходимости значений операторов (4.1) и рядов или интегралов Фурье на классе непрерывных функций.

В [19], [20] и [21] предложены различные модификации синк приближений (4.1), позволяющие приближать произвольные непрерывные функции на отрезке $[0, \pi]$. Исследование полноты системы синков (4.1) в [20] в пространствах $C[0, \pi]$ и $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$ позволяет сделать вывод о тщетности попыток построить оператор в виде линейных комбинаций синков, допускающий возможность равномерной аппроксимации произвольной непрерывной функции на отрезке. В работах [20], [21], кроме того, установлены новые необходимые и достаточные условия равномерной сходимости синк-приближений (4.1) и некоторых их модификаций на всём отрезке $[0, \pi]$.

Работа [22] посвящена исследованию аппроксимативных свойств операторов интерполирования, построенных по решениям задач Коши с дифференциальными выражениями второго порядка. Операторы, предложенные в [22], являются обобщением классических синк-приближений (4.1). В [23] приводится ряд приложений результатов работы [22] к исследованию аппроксимативных свойств классических алгебраических интерполяционных многочленов Лагранжа с матрицей узлов интерполирования, каждая строка которой состоит из нулей многочленов Якоби $P_n^{\alpha_n,\beta_n}$ с параметрами, зависящими от n.

Начиная с известной работы Крамера [24] изучаются также аналоги теорем отсчётов для операторов интерполяции Лагранжа по узлам из спектра задачи Штурма-Лиувилля, например, [25].

В тесной связи с синк-приближениями находятся интерполяционные процессы Лагранжа, построенные по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Г.И. Натансон в [26] получил признак Дини-Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0, \pi)$, т.е. равномерной на любом компакте, содержащемся в $(0, \pi)$, процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля.

Исследования, проведённые в [27], [28], [29] показывают, что при сколь угодно малом изменении параметров задачи Штурма-Лиувилля (потенциала q, или констант h, H) аппроксимативные свойства процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилл могут сильно измениться. В работе [30] устанавливается существование непрерывной на $[0, \pi]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа-Штурма-Лиувилля которой неограниченно расходится почти всюду на $[0, \pi]$.

Более подробную информацию о синк-аппроксимациях на отрезке и их обобщений можно найти в [31] – [74].

5 Теоретические результаты, по которым следует проводить численные эксперименты.

Эта часть посвящёна необходимым и достаточным условиям и признакам возможности аппроксимации значениями операторов (4.1) функций из пространства $C[0, \pi]$.

Теорема 5.1 *Если функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то для всех $x \in [0, \pi]$ имеет место поточечная на отрезке $[0, \pi]$ и равномерная внутри интервала $(0, \pi)$, то есть равномерная на каждом компакте, содержащемся в этом интервале, сходимость*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f(x) - L_n(f, x)\Big) = 0, \tag{5.1}$$

тогда и только тогда, когда выполняется, соответственно, поточечно на отрезке $[0, \pi]$ или равномерно внутри интервала $(0, \pi)$ одно из эквивалентных условий

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}(x)\Big) = 0, \tag{5.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_{k-1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}(x)\Big) = 0, \tag{5.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\big(f(x_{k+1,n}) - 2f(x_{k,n}) + f(x_{k-1,n})\big)l_{k,n}(x)\Big) = 0, \tag{5.4}$$

где

$$l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi}.$$

Прежде чем доказывать теорему 5.1 получим следующее представление главной части погрешности приближения непрерывных функций с помощью операторов (4.1)

Теорема 5.2 *Если функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то для всех $x \in [0, \pi]$ имеют место следующие соотношения*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}(x)\Big) = 0, \tag{5.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_{k-1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}(x)\Big) = 0, \tag{5.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f(x)-L_n(f,x)-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\big(f(x_{k+1,n})-2f(x_{k,n})+f(x_{k-1,n})\big)l_{k,n}(x)\Big)=0, \tag{5.7}$$

где

$$l_{k,n}(x)=\frac{(-1)^k\sin nx}{nx-k\pi}.$$

Сходимость в $(5.5),(5.6),(5.7)$ *поточечная на отрезке* $[0,\pi]$ *и равномерная внутри интервала* $(0,\pi)$*, то есть равномерная на каждом компакте, содержащемся в этом интервале.*

Пусть $f\in C[0,\pi]$ и последовательности положительных чисел γ_n и ε_n удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_n=o(1),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n}{\omega(f,\frac{\pi}{n})}=\infty;\qquad \varepsilon_n=\frac{1}{\pi}\exp\Big\{-\frac{\gamma_n}{\omega(f,\frac{\pi}{n})}-1\Big\}. \tag{5.8}$$

(В случае $f\equiv const$ считаем $\gamma_n=0,\quad \varepsilon_n=\frac{1}{e\pi}$). Например, в качестве γ_n можно взять $\sqrt{\omega(f,\frac{\pi}{n})}$, тогда $\varepsilon_n=\frac{1}{e\pi}\exp-\Big\{\frac{1}{\sqrt{\omega(f,\frac{\pi}{n})}}\Big\}$.

Для любого натурального n и $x\in[0,\pi]$ обозначим через $p,m_1,\ m_2$ такие целые числа, что

$$m_1=\Big[\frac{k_1}{2}\Big]+1,\quad m_2=\Big[\frac{k_2}{2}\Big],\quad \frac{\pi p}{n}\le x<\frac{\pi(p+1)}{n}, \tag{5.9}$$

где числа k_1 и k_2 определяются из неравенств:

$$\frac{\pi(\hat{k}_1-1)}{n}<x-\varepsilon_n\le\frac{\pi\hat{k}_1}{n},\quad \frac{\pi\hat{k}_2}{n}\le x+\varepsilon_n<\frac{\pi(\hat{k}_2+1)}{n}$$

следующим образом

$$k_1=\max(0,\hat{k}_1),\quad k_2=\min(n-1,\hat{k}_2). \tag{5.10}$$

Если не оговорено иное, будем пользоваться обозначением $x_{k,n}=\frac{k\pi}{n},k=0,1,...,n,n\in\mathbb{N}$.

Теорема 5.3 *Для всех* $x\in[0,\pi]$ *имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f(x)-L_n(f,x)-\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}(x)\Big)=0, \tag{5.11}$$

где номера k_1 *и* k_2 *определяются с помощью неравенств* (5.10)*. Если* $k_2<k_1$*, то сумма в (5.11) отсутствует. Сходимость в (5.11) поточечная на отрезке* $[0,\pi]$ *и равномерная внутри интервала* $(0,\pi)$*.*

Из этой теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 5.1 *Если гладкость функции* f *допускает выбор последовательностей* γ_n *и* ε_n*, удовлетворяющих требованиям (5.8), и таких, что в отрезок* $[x-\varepsilon_n,x+\varepsilon_n]$ *будет при каждом* n *попадать не более* $K_n=o\Big(\big(\omega\big(f,\frac{\pi}{n}\big)\big)^{-1}\Big)$ *узлов* $\frac{\pi k}{n}$*,* $\quad k_1\le k\le k_2$*, где* $k_2-k_1+1\le K_n$*, то имеет место равномерная внутри* $(0,\pi)$ *и поточечная на всём отрезке* $[0,\pi]$ *аппроксимация функции* f *значениями операторов (4.1).*

Следствие 5.2 (Признак Дини-Липшица) *Если функция* f *принадлежит классу Дини-Липшица, то есть выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\ln n=0, \tag{5.12}$$

то значения операторов (4.1) сходятся к f *равномерно внутри* $(0,\pi)$ *и поточечно на всём* $[0,\pi]$*:*

$$\lim_{n\to\infty}L_n(f,x)=f(x).$$

Следствие 5.3 *Из соотношений (5.8) и (5.11) следует справедливость принципа локализации для непрерывных функций процесса (4.1). То есть поведение значений операторов (4.1) в точке* x *зависит от значений функции* f *лишь в окрестности* x*.*

Следствие 5.4 *Если в качестве последовательности* γ_n *в (5.8) взять* $\gamma_n = \sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{n})}$*, то суммирование в (5.11) можно брать по номерам узлов из сегмента* $\left[x - \frac{1}{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\omega(f,\frac{\pi}{n})}} - 1\right\}, x + \frac{1}{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\omega(f,\frac{\pi}{n})}} - 1\right\}\right] \cap [0, \pi]$.

Теорема 5.4 (Критерий сходимости в точке) *Пусть* $f \in C[0, \pi]$ *и последовательности положительных чисел* γ_n *и* ε_n *определяются соотношениями (5.8). Для любого натурального* n *и* $x \in [0, \pi]$ *обозначим через* p, m_1, m_2 *целые числа с помощью соотношений (5.9). Тогда поточечно на отрезке* $[0, \pi]$ *и равномерно внутри интервала* $(0, \pi)$ *справедливо*

$$\lim_{n\to\infty}\left|f(x) - L_n(f, x) - \frac{\sin nx}{2\pi}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - 2f\left(\frac{2\pi m}{n}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p - 2m}\right| = 0, \tag{5.13}$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$*, то сумма в (5.13) равна нулю.*

Замечание 5.1 *Этот результат является критерием сходимости синк-приближений в точке, так как из него следует необходимое и достаточное условие приближения операторами (4.1) функции* f *в фиксированной точке:*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin nx}{2\pi}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - 2f\left(\frac{2\pi m}{n}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p - 2m}\right| = 0,$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$*, то сумма равна нулю.*

Теорема 5.5 (Критерий равномерной сходимости) *Пусть* $f \in C[0, \pi]$*,* $0 \le a < b \le \pi$*,* $0 < \epsilon < \frac{b-a}{2}$*. Для любого натурального* n *обозначим через* p_1*,* p_2 *такие целые числа, что*

$$\frac{\pi p_1}{n} \le a + \epsilon < \frac{\pi(p_1 + 1)}{n}, \quad \frac{\pi p_2}{n} \le b - \epsilon < \frac{\pi(p_2 + 1)}{n},$$

а p*,* m_1 *и* m_2 *определяются с помощью соотношений* (5.9)*. Тогда, для того чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f, \cdot) - f\right\|_{C[a+\epsilon, b-\epsilon]} = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty}\max_{p_1\le p\le p_2}\left|\sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - 2f\left(\frac{2\pi m}{n}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p - 2m}\right| = 0, \tag{5.14}$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$*, то сумма в (5.14) равна нулю.*

Замечание 5.2 *На всём отрезке по теореме Арцеля-Александрова сходимость процессов (4.1), вообще говоря, является квазиравномерной, так как на концах отрезка сходимость обеспечивается интерполяционными свойствами оператора (4.1). Для функции* $f \equiv 1$ *непосредственно проверяется, что* $|L_n(1, \frac{\pi}{2n}) - 1|$ *не стремится к нулю. Таким образом, даже для* $f \equiv 1$ *устанавливается отсутствие равномерной сходимости на всём отрезке* $[0, \pi]$.

5.1 Новые операторы

Пусть $\rho_\lambda \ge 0 \quad \rho_\lambda = o(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$, $h(\lambda) \in \mathbb{R}$, и при каждом неотрицательном λ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, то есть

$$V_0^\pi[q_\lambda] \le \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \rho_\lambda = o(\lambda). \tag{5.15}$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$, при $\lambda \to +\infty$, нули решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \big(\lambda - q_\lambda(x)\big)y = 0, \\ y(0,\lambda) = 1, \\ y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{5.16}$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, — задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \big(\lambda - q_\lambda(x)\big)y = 0, \\ y(0,\lambda) = 0, \\ y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{5.17}$$

попадающие в $[0,\pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \leq x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \ldots < x_{n(\lambda),\lambda} \leq \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0, x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi). \tag{5.18}$$

(Здесь $x_{-1,\lambda} < 0, \quad x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули продолжения решения задачи Коши (5.16) или (5.17), после доопределения каким-либо образом функции q_λ вне отрезка $[0,\pi]$ с сохранением ограниченности вариации). В дальнейшем, если не оговорено иное, для краткости будем обозначать $n = n(\lambda)$. Теорема осцилляции, или метод контурного интегрирования при условии (5.15) обеспечивают также неограниченное возрастание количества нулей (5.18) $n(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Пусть $\rho_\lambda \geq 0 \quad \rho_\lambda = o(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$, $h(\lambda) \in \mathbb{R}$, и при каждом неотрицательном λ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле (5.15). Для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$, при $\lambda \to +\infty$, нули решения задачи Коши (5.16) или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, — задачи Коши (5.17), попадающие в $[0,\pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим (5.18).

Исследуются аппроксимативные свойства операторов типа Лагранжа, построенных по решениям задачи Коши вида (5.16) или (5.17) и ставящих в соответствие любой, определённой на отрезке $[0,\pi]$ функции f, интерполирующую её в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^n$ непрерывную функцию таким образом

$$S_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x - x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}). \tag{5.19}$$

Подбирая соответствующим образом функции q_λ (следует иметь ввиду, что условие (5.15) является достаточным, но не необходимым для наличия нулей (5.18)), получаем единое представление в виде оператора (5.19) различных конструкций лагранжева типа таких, как классические интерполяционные многочлены (с точностью до весового множителя), кардинальные функции Уиттекера, интерполяционные процессы Лагранжа, построенные по специальным функциям математической физики. Так, например, с точностью до преобразования Лиувилля многочлены Чебышева и многочлены Якоби, в случае $\alpha = \pm\frac{1}{2}, \quad \beta = \pm\frac{1}{2}$ (смотрите [?, Гл. VII,§ 3], или [?, § 4.24]), являются решениями дифференциальных уравнений задач (5.16), (5.17), с потенциалом, удовлетворяющим условию (5.15). **Если взять $q_\lambda \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, $h(\lambda_n) = n$, то операторы (5.19) в случае задачи Коши (5.17) превращаются в усечённые кардинальные функции Уиттекера** (4.1).

Если $f \in C[0,\pi] \setminus C_0[0,\pi]$, $C_0[0,\pi] = \{f \in C[0,\pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$, то исследование вопросов сходимости значений операторов (5.19) в точке $x = \pi$ (случай задачи (5.17)) и точках $x = 0$ или $x = \pi$ (случай задачи (5.16)) для каждой конкретной задачи Коши и выбора последовательности значений $\lambda = \lambda_n$ следует проводить отдельно. Поэтому, предлагаются некоторые модификации оператора (5.19). В предположении $\rho_\lambda \geq 0$, при каждом неотрицательном λ считаем, что функция q_λ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса $\rho_\lambda = o\big(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\big)$ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, то есть такая, что

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right), \quad \text{при } \lambda \to \infty, \quad q_\lambda(0) = 0. \tag{5.20}$$

В случае задачи Коши (5.17), кроме того, потребуем отличие от нуля функции $h(\lambda)$, то есть

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right), \text{ при } \lambda \to \infty, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad h(\lambda) \neq 0. \tag{5.21}$$

При каждом $\lambda > 0$ доопределим функцию

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} q_\lambda(x) & \text{при } x \in [0,\pi], \\ q_\lambda(\pi) & \text{при } x > \pi, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{5.22}$$

Через $x_{k,\lambda}; k \in \mathbb{Z}$ будем обозначать нули решения $y(x,\lambda)$ задачи Коши (5.16), или (5.17), рассматриваемой на всей действительной оси, перенумерованные в порядке возрастания, таким образом, чтобы выполнялись неравенства (5.18).

Исключив из рассмотрения тривиальный случай $f \equiv 0$, возьмём фиксированную положительнозначную функцию $\vartheta(\lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\vartheta(\lambda) = o(1), \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})} = \infty; \text{ положим } \varepsilon(\lambda) = \exp\left\{-\frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}\right\}. \tag{5.23}$$

Например, в качестве $\vartheta(\lambda)$ можно взять $\vartheta(\lambda) = \sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}$, тогда $\varepsilon(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}}\right\}$.

Для любого положительного λ и $x \in [0,\pi]$ обозначим через p, m_1 и m_2 такие целые числа, что

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right], \quad x_{p,\lambda} \le x < x_{p+1,\lambda}, \tag{5.24}$$

где номера нулей k_1 и k_2 определяются из неравенств

$$x_{k_1-1,\lambda} < x - \varepsilon(\lambda) \le x_{k_1,\lambda}, \quad x_{k_2,\lambda} \le x + \varepsilon(\lambda) < x_{k_2+1,\lambda}.$$

Теорема 5.6 (Критерий сходимости в точке) *Пусть $f \in C_0[0,\pi]$, и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (5.20) в случае задачи Коши (5.16), или (5.21) — в случае задачи (5.17). Доопределим функцию $f(x) = 0$ для всех $x \notin [0,\pi]$. Тогда для операторов вида (5.19), построенных с помощью решений задачи Коши (5.16), равномерно по x на $[0,\pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Bigg| f(x) - S_\lambda(f,x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p - 2m} \Bigg| = 0. \tag{5.25}$$

А для операторов вида (5.19), построенных с помощью решений задачи Коши (5.17), равномерно по x на $[0,\pi]$, а также по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Bigg| f(x) - S_\lambda(f,x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi h(\lambda)} \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p - 2m} \Bigg| = 0. \tag{5.26}$$

Где штрих у сумм в (5.25) или (5.26) означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$ (смотрите (5.24)), то суммы в (5.25) и (5.26) равны нулю.

Для получения результатов отрицательного характера, то есть описания множеств расходимости значений операторов вида (5.19) для различных функциональных классов пространства $C_0[0,\pi]$, может быть более удобным „глобальный“ вид критерия сходимости интерполяционных процессов (5.19) в точке.

Теорема 5.7 (Критерий сходимости в точке) *Пусть $f \in C_0[0,\pi]$, и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (5.20) в случае задачи Коши (5.16), или (5.21) — в случае задачи (5.17).*

Тогда для операторов вида (5.19), построенных с помощью решений задачи Коши (5.16), равномерно по x на $[0,\pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Bigg| f(x) - S_\lambda(f,x)$$

$$-\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda+h^2(\lambda)}}\sum_{m=1}^{[\frac{n-1}{2}]}{}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda})-2f(x_{2m,\lambda})+f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\Bigg| = 0. \tag{5.27}$$

А для операторов вида (5.19)*, построенных с помощью решений задачи Коши* (5.17)*, равномерно по* x *на* $[0,\pi]$*, а также по* $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ *и* $h(\lambda) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg| f(x) - S_\lambda(f,x)$$

$$-\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi h(\lambda)}\sum_{m=1}^{[\frac{n-1}{2}]}{}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda})-2f(x_{2m,\lambda})+f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\Bigg| = 0. \tag{5.28}$$

Где штрих у сумм в (5.27) *или* (5.28) *означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю, а индекс* p *определяется с помощью соотношений* (5.24)*.*

Теорема 5.8 (Критерий равномерной сходимости) *Пусть* $f \in C_0[0,\pi]$*, и функции* q_λ *и* $h(\lambda)$ *удовлетворяют условию* (5.20) *в случае задачи Коши* (5.16)*, или* (5.21) *— в случае задачи* (5.17)*. Тогда, для того чтобы значения оператора* (5.19)*, построенного по решениям задачи Коши* (5.16) *или* (5.17)*, равномерно на* $[0,\pi]$*, а также равномерно по всем* $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$*, аппроксимировали функцию* $f \in C_0[0,\pi]$*:*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\|S_\lambda(f,\cdot)-f\right\|_{C_0[0,\pi]} = 0, \tag{5.29}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\lambda\to\infty}\max_{0\le p\le n}\left|\sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda})-2f(x_{2m,\lambda})+f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\right| = 0, \tag{5.30}$$

или эквивалентное ему условие

$$\lim_{\lambda\to\infty}\max_{0\le p\le n}\left|\sum_{m=1}^{[\frac{n-1}{2}]}{}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda})-2f(x_{2m,\lambda})+f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\right| = 0, \tag{5.31}$$

где штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$ *(смотрите* (5.24)*), то сумма в* (5.30) *равна нулю.*

Определим оператор, ставящий в соответствие любой, принимающей конечные значения на отрезке $[0,\pi]$*, функции* f*, непрерывную функцию по правилу*

$$T_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})}\left\{f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda} - f(0)\right\} + \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0). \tag{5.32}$$

С помощью этого оператора, в отличие от (5.19), можно равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$ аппроксимировать непрерывные (не обязательно исчезающие на концах отрезка) функции, обладающие достаточным запасом гладкости, с сохранением интерполяции, то есть для всех $0 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $T_\lambda(f, x_{k,\lambda}) = f(x_{k,\lambda})$.

5.2 Новые операторы, обобщающие синк-аппроксимации. Предмет исследования в численных экспериментах.

Напоминаю, что если взять $q_\lambda \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, $h(\lambda_n) = n$, **то операторы** (5.19) **в случае задачи Коши** (5.17) **превращаются в усечённые кардинальные функции Уиттекера** (4.1)**. Поэтому в Вашем случае**

$$s_{k,\lambda}(x)f(x_{k,\lambda}) \equiv \frac{(-1)^k\sin nx}{nx-k\pi}f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad x_{k,\lambda} = \frac{k\pi}{n}.$$

Далее, на пространстве непрерывных на $[0,\pi]$ функций f определим операторы

$$A_\lambda(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(s_{k-1,\lambda}(x) + s_{k,\lambda}(x)\big) f(x_{k,\lambda}), \tag{5.33}$$

$$\widetilde{A}_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1,\lambda}) + f(x_{k,\lambda})}{2} s_{k,\lambda}(x), \tag{5.34}$$

$$AT_\lambda(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{ f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda} - f(0)\right\}\big(s_{k-1,\lambda}(x) + s_{k,\lambda}(x)\big)$$
$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0), \tag{5.35}$$

$$\widetilde{AT}_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{ \frac{f(x_{k+1,\lambda}) + f(x_{k,\lambda})}{2} - \frac{(f(\pi)-f(0))}{\pi}\frac{(x_{k+1,\lambda}+x_{k,\lambda})}{2}\right.$$
$$\left.-f(0)\right\} s_{k,\lambda}(x) + \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0). \tag{5.36}$$

Аналогично, определим операторы B_λ, $\widetilde{B}_\lambda$, BT_λ и $\widetilde{BT}_\lambda$, рассматривая другие пары соседних номеров узлов и функций $s_{k,\lambda}$:

$$B_\lambda(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big(s_{k+1,\lambda}(x) + s_{k,\lambda}(x)\big) f(x_{k,\lambda}), \tag{5.37}$$

$$\widetilde{B}_\lambda(f,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1,\lambda}) + f(x_{k,\lambda})}{2} s_{k,\lambda}(x), \tag{5.38}$$

$$BT_\lambda(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{ f(x_{k,n}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda} - f(0)\right\}\big(s_{k+1,\lambda}(x) + s_{k,\lambda}(x)\big)$$
$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0), \tag{5.39}$$

$$\widetilde{BT}_\lambda(f,x) = \sum_{k=1}^{n}\left\{ \frac{f(x_{k-1,n}) + f(x_{k,n})}{2} - \frac{(f(\pi)-f(0))}{\pi}\frac{(x_{k-1,\lambda}+x_{k,\lambda})}{2}\right.$$
$$\left.-f(0)\right\} s_{k,\lambda}(x) + \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0). \tag{5.40}$$

Наконец, рассмотрим операторы

$$C_\lambda(f,x) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\big(s_{k+1,\lambda}(x) + 2s_{k,\lambda}(x) + s_{k-1,\lambda}(x)\big) f(x_{k,\lambda}), \tag{5.41}$$

$$\widetilde{C}_\lambda(f,x) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} s_{k,\lambda}(x)\big(f(x_{k+1,\lambda}) + 2f(x_{k,\lambda}) + f(x_{k-1,\lambda})\big), \tag{5.42}$$

$$CT_\lambda(f,x) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\big(s_{k+1,\lambda}(x) + 2s_{k,\lambda}(x) + s_{k-1,\lambda}(x)\big)\left\{ f(x_{k,\lambda})\right.$$
$$\left.-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda} - f(0)\right\} + \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0), \tag{5.43}$$

$$\widetilde{CT}_\lambda(f,x) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} s_{k,\lambda}(x)\left\{ f(x_{k+1,\lambda}) + 2f(x_{k,\lambda}) + f(x_{k-1,\lambda})\right.$$

$$-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}(x_{k+1,\lambda}+2x_{k,\lambda}+x_{k-1,\lambda})-4f(0)\Bigg\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0). \tag{5.44}$$

К сожалению, предлагаемые операторы не обладают интерполяционными свойствами как S_λ или T_λ. Зато их аппроксимативные качества существенно менее чувствительны к гладкостным свойствам приближаемой функции. С их помощью можно аппроксимировать произвольный элемент пространства $C[0,\pi]$.

Любая линейная функция является неподвижной точкой для оператора (5.32), то есть $T_\lambda(a\cdot +b,x)\equiv ax+b$. Исключив из рассмотрения тривиальный случай, когда f линейна, возьмём фиксированную положительнозначную функцию $\tilde{\vartheta}(\lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered}\tilde{\vartheta}(\lambda)=o(1), \quad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\tilde{\vartheta}(\lambda)}{\omega\Big(f(\cdot)-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\cdot-f(0),\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\Big)}=\infty,\\ \text{положим } \tilde{\varepsilon}(\lambda)=\exp\Bigg\{-\frac{\tilde{\vartheta}(\lambda)}{\omega\Big(f(\cdot)-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\cdot-f(0),\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\Big)}\Bigg\}.\end{gathered} \tag{5.45}$$

Для любого положительного λ и $x\in[0,\pi]$ обозначим через $p,\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ такие целые числа, что

$$\tilde{m}_1=\left[\frac{\tilde{k}_1}{2}\right]+1, \quad \tilde{m}_2=\left[\frac{\tilde{k}_2}{2}\right], \quad x_{p,\lambda}\le x<x_{p+1,\lambda}, \tag{5.46}$$

где номера нулей $\tilde{k}_1$ и $\tilde{k}_2$ определяются из неравенств

$$x_{\tilde{k}_1-1,\lambda}<x-\tilde{\varepsilon}(\lambda)\le x_{\tilde{k}_1,\lambda}, \quad x_{\tilde{k}_2,\lambda}\le x+\tilde{\varepsilon}(\lambda)<x_{\tilde{k}_2+1,\lambda}.$$

Определение 5.1 *Пусть параметры задачи Коши* (5.16) *удовлетворяют условию* (5.20), *а параметры задачи* (5.17) — *условию* (5.21). *Определим операторы, ставящие в соответствие любой функции $f\in C[0,\pi]$, интерполирующие её непрерывные функции $\mathbb{T}_\lambda(f,x)$ и $\widetilde{\mathbb{T}}_\lambda(f,x)$ по следующим правилам. Доопределим функции*

$$f(x)=\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0) \text{ для всех } x\notin[0,\pi]$$

и q_λ как в (5.22).

Тогда в случае задачи Коши (5.16), *для каждого $x\in[x_{p,\lambda},x_{p+1,\lambda})$, $0\le p\le n$, положим*

$$\begin{gathered}\mathbb{T}_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})}\Bigg\{f(x_{k,\lambda})\\ -\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\Bigg\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\\ +\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda+h^2(\lambda)}}\sum_{m=\tilde{m}_1}^{\tilde{m}_2}{}'\frac{f(x_{2m+1,\lambda})-2f(x_{2m,\lambda})+f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m},\end{gathered} \tag{5.47}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathbb{T}}_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})}\Bigg\{f(x_{k,\lambda})\\ -\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\Bigg\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\\ +\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda+h^2(\lambda)}}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}'\frac{f(x_{2m+1,\lambda})-2f(x_{2m,\lambda})+f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}.\end{gathered} \tag{5.48}$$

А в случае задачи Коши (5.17), *для каждого $x\in[x_{p,\lambda},x_{p+1,\lambda})$, $0\le p\le n$, положим*

$$\mathbb{T}_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})}\Bigg\{f(x_{k,\lambda})$$

$$-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\Bigg\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)$$

$$+\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi h(\lambda)}\sum_{m=\tilde{m}_1}^{\tilde{m}_2}{}'\frac{f(x_{2m+1,\lambda})-2f(x_{2m,\lambda})+f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}, \tag{5.49}$$

$$\widetilde{\mathbb{T}}_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})}\Bigg\{f(x_{k,\lambda})$$

$$-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\Bigg\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)$$

$$+\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi h(\lambda)}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}'\frac{f(x_{2m+1,\lambda})-2f(x_{2m,\lambda})+f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}. \tag{5.50}$$

Здесь штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю, а границы изменения индекса суммирования m в (5.47) *и* (5.49) *определяются с помощью* (5.46). *Если $\tilde{m}_2<\tilde{m}_1$, то соответствующие суммы в* (5.47) *и* (5.49) *равны нулю.*

Операторы (5.47) – (5.50) обладают интерполяционным свойством как S_λ и T_λ. С помощью операторов $\mathbb{T}_\lambda$ и $\widetilde{\mathbb{T}}_\lambda$ можно равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$ приближать произвольную непрерывную функцию как и с помощью AT_λ, BT_λ, CT_λ, $\widetilde{AT}_\lambda$, $\widetilde{BT}_\lambda$ и $\widetilde{CT}_\lambda$. Правда, значения операторов (5.47) – (5.50) могут оказаться менее гладкими, чем результаты действия операторов S_λ и T_λ, или AT_λ, BT_λ, CT_λ, $\widetilde{AT}_\lambda$, $\widetilde{BT}_\lambda$ и $\widetilde{CT}_\lambda$.

Теорема 5.9 (Критерий поточечной сходимости значений операторов T_λ) *Пусть параметры задачи Коши* (5.16) *удовлетворяют условию* (5.20), *и $f\in C[0,\pi]$. Доопределим функции*

$$f(x)=\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\ \text{для всех}\ x\notin[0,\pi]$$

и q_λ как в (5.22). *Тогда для операторов вида* (5.32), *построенных с помощью решений задачи Коши* (5.16), *равномерно по x на $[0,\pi]$, а также по $q_\lambda\in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $h(\lambda)\in\mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg|f(x)-T_\lambda(f,x)$$

$$-\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda+h^2(\lambda)}}\sum_{m=\tilde{m}_1}^{\tilde{m}_2}{}'\frac{f(x_{2m+1,\lambda})-2f(x_{2m,\lambda})+f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\Bigg|=0 \tag{5.51}$$

или

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg|f(x)-T_\lambda(f,x)$$

$$-\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda+h^2(\lambda)}}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}'\frac{f(x_{2m+1,\lambda})-2f(x_{2m,\lambda})+f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\Bigg|=0.$$

Здесь штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю, а границы изменения индекса суммирования в (5.51) *определяются с помощью* (5.46). *Если $\tilde{m}_2<\tilde{m}_1$, то сумма в* (5.51) *равна нулю.*

Теорема 5.10 (Критерий поточечной сходимости значений операторов T_λ) *Пусть параметры задачи Коши* (5.17) *удовлетворяют условию* (5.21), *и $f\in C[0,\pi]$. Доопределим функции*

$$f(x)=\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0)\ \text{для всех}\ x\notin[0,\pi]$$

и q_λ как в (5.22). Тогда для операторов вида (5.32), построенных с помощью решений задачи Коши (5.17), равномерно по x на $[0,\pi]$, а также по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $h(\lambda) \neq 0$ справедливы равенства

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg| f(x) - T_\lambda(f,x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi h(\lambda)} \sum_{m=\tilde{m}_1}^{\tilde{m}_2}{}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\Bigg| = 0 \tag{5.52}$$

или

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg| f(x) - T_\lambda(f,x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi h(\lambda)} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\Bigg| = 0.$$

Здесь штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю, а границы изменения индекса суммирования в (5.52) определяются с помощью (5.46). Если $\tilde{m}_2 < \tilde{m}_1$, то сумма в (5.52) равна нулю.

Теорема 5.11 (Критерий равномерной сходимости значений операторов T_λ) *Пусть $f \in C[0,\pi]$, и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (5.20) в случае задачи Коши (5.16) или (5.21) — в случае задачи (5.17). Доопределим функции*

$$f(x) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0) \text{ для всех } x \notin [0,\pi]$$

и q_λ как в (5.22). Тогда, для того чтобы значения оператора (5.32), построенного по решениям задачи Коши (5.16) или (5.17), равномерно на $[0,\pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$, аппроксимировали функцию $f \in C[0,\pi]$:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \big\| T_\lambda(f,\cdot) - f \big\|_{C[0,\pi]} = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5.30) (где границы изменения индекса суммирования определяются с помощью (5.46)), или эквивалентное ему условие (5.31). Если $\tilde{m}_2 < \tilde{m}_1$, то сумма в (5.30) равна нулю.

Значения опреаторов (5.47) и (5.48) с ростом λ равномерно аппроксимируют произвольный элемент пространства $C[0,\pi]$. Конструкция этих операторов обладает интерполяционным свойством, таким же как у S_λ или T_λ ((5.19) или (5.32)), то есть $\mathbb{T}_\lambda(f, x_{k,\lambda}) = f(x_{k,\lambda})$ $k = 0,1,2,\dots,n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Правда, в случае непрерывности потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ значения опреаторов (5.47) – (5.50) могут оказаться менее гладкими, чем результат действия операторов S_λ или T_λ.

Следствие 5.5 *Пусть параметры задачи Коши (5.16) удовлетворяют условию (5.20), и $f \in C[0,\pi]$. Тогда для операторов $\mathbb{T}_\lambda(f,x)$ и $\widetilde{\mathbb{T}}_\lambda(f,x)$, определённых соотношениями (5.47) и (5.48) (смотрите определение 5.1), равномерно по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f - \mathbb{T}_\lambda(f,\cdot)\|_{C[0,\pi]} = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f - \widetilde{\mathbb{T}}_\lambda(f,\cdot)\|_{C[0,\pi]} = 0.$$

Следствие 5.6 *Пусть параметры задачи Коши (5.17) удовлетворяют условию (5.21), и $f \in C[0,\pi]$. Тогда для операторов $\mathbb{T}_\lambda(f,x)$ и $\widetilde{\mathbb{T}}_\lambda(f,x)$, определённых соотношениями (5.49) и (5.50) (смотрите определение 5.1), равномерно по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $h(\lambda) \neq 0$ справедливы равенства*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f - \mathbb{T}_\lambda(f,\cdot)\|_{C[0,\pi]} = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f - \widetilde{\mathbb{T}}_\lambda(f,\cdot)\|_{C[0,\pi]} = 0.$$

Значения операторов S_λ (5.19) и T_λ (5.32) интерполируют аппроксимируемую функцию, но зато, как видно из теоремы 5.6 и предложений 5.7–5.11, достаточно чувствительны к гладкостным свойствам приближаемой функции. Значения операторов $\mathbb{T}_\lambda(f,x)$ и $\widetilde{\mathbb{T}}_\lambda(f,x)$, определённых соотношениями (5.47) – (5.50), интерполируют приближаемую функцию, но могут потерять гладкость в узлах интерполяции. Поэтому для приближения "плохих" функций с сохранением гладкости аппроксимирующей функции можно пользоваться лишёнными интерполяционного свойства Лагранжа операторами (5.33)-(5.36).

Теорема 5.12 *Пусть $f \in C_0[0,\pi]$, и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию* (5.20) *в случае задачи Коши* (5.16) *или* (5.21) *— в случае задачи* (5.17). *Тогда равномерно по x на отрезке $[0,\pi]$ и по q_λ на шарах $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda(f,x) = \lim_{\lambda\to\infty} \widetilde{A}_\lambda(f,x) = f(x), \tag{5.53}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} B_\lambda(f,x) = \lim_{\lambda\to\infty} \widetilde{B}_\lambda(f,x) = f(x), \tag{5.54}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} C_\lambda(f,x) = \lim_{\lambda\to\infty} \widetilde{C}_\lambda(f,x) = f(x). \tag{5.55}$$

Если $f \in C[0,\pi]$, то сходимость в (5.53)-(5.55) *равномерная внутри интервала $(0,\pi)$.*

Теорема 5.13 *Пусть $f \in C[0,\pi]$, и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию* (5.20) *в случае задачи Коши* (5.16) *или* (5.21) *— в случае задачи* (5.17). *Тогда равномерно по x на отрезке $[0,\pi]$ и по q_λ на шарах $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$*

$$\lim_{\lambda\to\infty} AT_\lambda(f,x) = \lim_{\lambda\to\infty} \widetilde{AT}_\lambda(f,x) = f(x), \tag{5.56}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} BT_\lambda(f,x) = \lim_{\lambda\to\infty} \widetilde{BT}_\lambda(f,x) = f(x), \tag{5.57}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} CT_\lambda(f,x) = \lim_{\lambda\to\infty} \widetilde{CT}_\lambda(f,x) = f(x). \tag{5.58}$$

Замечание 5.3 *Обратите внимание на то, что, если рассмотреть, например, "симметричные" аналоги оператора A_λ вида*

$$D_\lambda(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\big(s_{k-1,\lambda}(x) + s_{k+1,\lambda}(x)\big)f(x_{k,\lambda}),$$

или

$$\tilde{D}_\lambda(f,x) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(x_{k+1,\lambda}) + f(x_{k-1,\lambda})}{2}s_{k,\lambda}(x),$$

то для определения возможности равномерной аппроксимации с его помощью функций пространства $C_0[0,\pi]$ вновь потребуются необходимые и достаточные условия (5.30) *или* (5.31).

Выбор языка программирования, операционной системы каждый выбирает самостоятельно, исходя из той оценки, которую он хочет получить.

Во-первых, каждый студент, претендующий на положительную оценку, должен оформить документ под названием „Отчёт по производственной практике“ по актуальному на момент прохождения отчёта стандарту СГУ. Этот стандарт следует найти на сайте СГУ. Без этого документа я не имею право принимать отчёт и ставить положительную оценку.

Во-вторых, давайте договоримся использовать

Критерий, по которому будет оцениваться работа.

- Тем, кому достаточно оценки „удовлетворительно“, можно подготовить свою статью полностью к публикации и получить отказ в редакции журнала, индексируемого в РИНЦ. В этом случае **обязательно** вычисления следует проводить с помощью языков, предполагающих высокую квалификацию программиста, таких как C++, Python, Java и т.п.организовать вычисления на любом языке, включая языки и платформы высокого уровня такие как Матлаб, Маткад, Вольфрам и т.п.

- Тот, кто хочет получить оценку „хорошо“, может представить на отчёте публикацию в журнале, индексируемом в РИНЦ независимо от использованных языков программирования. Чтобы не было недоразумений, обязательно проверьте актуальность индексирования выбранного Вами журнала в базе

  `https://elibrary.ru/defaultx.asp?`

  И пришлите мне соответствующую ссылку до отчёта. К сожаленю, на сайтах редакций журналов иногда указывается устаревшая или фейковая информация о базах индексирования.

- Если Вы предоставите вместе с отчётом ссылку на свою статью, написанную по своему заданию в пособии и принятую в печать в любом журнале, индексируемом в РИНЦ, то будем считать, что Вы прошли апробацию в Редколлегии журнала, рецензент дал положительный отзыв, и поэтому заслуживаете оценки „отлично“, если вычисления проводились с помощью языков, предполагающих высокую квалификацию программиста, таких как C++, Python, Java и т.п. Чтобы не было недоразумений, обязательно проверьте актуальность индексирования выбранного Вами журнала в базе

  `https://elibrary.ru/defaultx.asp?`

  И пришлите мне соответствующую ссылку заблаговременно. К сожаленю, на сайтах редакций журналов иногда указывается устаревшая или фейковая информация о базах индексирования.

- Наконец, тем, кто не собирается продолжать обучение в университете или отправляется в академический отпуск, можно вообще ничего не предоставлять.

По всем вопросам, связанным с прохождением практики, в том числе и консультацию по содержанию заданий можно получить по адресу tayu@rambler.ru или в комментариях по адресу

`https://mathzadan.blogspot.com`

Желаю практических успехов и высоких оценок на отчёте! Желаю лёгкой отладки кода экспериментов и успешной публикации! Если есть вопросы, то консультацию можно получить по почте

`tayu@rambler.ru`

или в комментариях блога

`http://mathzadan.blogspot.com`

Список литературы

[1] Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды*, (М., Изд-во АФЦ, 1999)

[2] Новиков И.Я., С.Б. Стечкин *Основы теории всплесков*. Успехи математических наук. 1998,Т. 53. выпуск 6(324)., С. 53-128.

[3] Stenger F. *Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions*, (N.Y., Springer Ser. Comput. Math., **20** Springer-Verlag, 1993)

[4] Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам*, (Ижевск, "Регулярная и хаотическая динамика 2001)

[5] Butzer P.L. *A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields* Journal of Approximation Theory **160**, 3-18 (2009)

[6] Livne Oren E., Brandt Achi E. *MuST: The multilevel sinc transform*, SIAM J. on Scientific Computing, **33**(4), 1726-1738 (2011)

[7] Marwa M. Tharwat *Sinc approximation of eigenvalues of Sturm—Liouville problems with a Gaussian multiplier* Calcolo: a quarterly on numerical analysis and theory of computation Vol. 51 Issue 3, September (2014) Pages 465-484

[8] Kivinukk A., Tamberg G. *Interpolating generalized Shannon sampling operators, their norms and approximation properties*, Sampl. Theory Signal Image Process. 8 (1), 77–95 (2009)

[9] Trynin A.Yu., Sklyarov V.P. *Error of sinc approximation of analytic functions on an interval*, Sampling Theory in Signal and Image Processing, **7** (3), 263-270 (2008)

[10] Трынин А.Ю. Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам / А.Ю. Трынин // Математика. Механика. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005 . – Т. 7 . – С. 124-127.

[11] Трынин А.Ю. *Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке*, Сибирский математический журнал, **48**(5), 1155–1166 (2007)

[12] Jerri Abdul J. *Lanczos-Like σ-Factors for Reducing the Gibbs Phenomenon in General Orthogonal Expansions and Other Representations*, Journal of Computational Analysis and Applications, **2**(2), pp. 111-127 (2000)

[13] Трынин А.Ю. *Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке*, Математический сборник, **198**(10), 141–158 (2007)

[14] Трынин А.Ю. *Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке*, Известия высш. уч-ых заведений. Математика., **6**, 66-78 (2008)

[15] Sklyarov V.P. *On the best uniform sinc-approximation on a finite interval*, East Journal on Approximations, **14** (2), 183-192 (2008)

[16] Трынин А.Ю. *Теорема отсчётов на отрезке и её обобщения*/ А.Ю. Трынин // LAP LAMBERT Academic Publishing RU. — 2016. — 479с.

[17] Mohsen A., El-Gamel M. *A Sinc-Collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations.* Z. angew. Matth. Phys. , 2006, 1-11, DOI 10.1007/ s00033-006-5124-5.

[18] Трынин А.Ю. *О расходимости синк-приближений всюду на* $(0, \pi)$, Алгебра и анализ, **22** (4), 232-256 (2010)

[19] Трынин А.Ю. *О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций*, Уфимский математический журнал, 7, № 4 116-132, (2015)

[20] Трынин А.Ю. *О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций*, Алгебра и анализ, **27**:5 (2015), 170–194

[21] Трынин А.Ю. *Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков*, Известия высш. уч-ых заведений. Математика., № 3, 72-81, (2016)

[22] Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке*, Математический сборник, **200**(11), 61–108 (2009)

[23] Трынин А.Ю. *Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби*, Известия Российской Академии Наук. Серия математическая, **75**(6), 129–162 (2011)

[24] Kramer H.P. *A generalized sampling theorem.* J. Math. Phus. **38** (1959), 68-72.

[25] Zayed A.I. , Hinsen G., Butzer P.L. *On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm-Liouville problems.* SIAM J. Appl. Math. **50**, No. 3 (1990), 893-909.

[26] Натансон Г.И. *Об одном интерполяционном процессе.* Учён. записки Ленинград. пед. ин-та. 1958. Т. 166. С.213-219.

[27] Трынин А.Ю. *Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля*, Известия высш. уч-ых заведений. Математика., **9**(460), 60-73 (2000)

[28] Трынин А.Ю. *Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля*, Уфимск. матем. журн., **3**:4 (2011), 133–143

[29] Трынин А.Ю. *Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма–Лиувилля*, Уфимск. матем. журн., **5**:4 (2013), 116–129

[30] Трынин А.Ю. *О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля*, Известия высш. уч-ых заведений. Математика., **11**, 74-85 (2010)

[31] Трынин А.Ю. Принцип локализации для процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин // Математика. Механика. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006 . – Т. 8 . – С. 137-140.

[32] Трынин А.Ю. Об одном интегральном признаке сходимости процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин // Математика. Механика. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007 . – Т. 9 . – С. 94-97.

[33] Трынин А.Ю. Существование систем Чебышёва с ограниченными константами Лебега интерполяционных процессов / А.Ю. Трынин // Математика. Механика. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008 . – Т. 10 . – С. 79-81.

[34] Трынин А.Ю. Пример системы Чебышёва с почти всюду сходящейся к нулю последовательностью функций Лебега интерполяционных процессов / А.Ю. Трынин // Математика. Механика. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009 . – Т. 11 . – С. 74-76.

[35] Трынин А.Ю. Об одном признаке типа Дини-Липшица сходимости обобщённых интерполяционных процессов Уиттекера-Котельникова-Шеннона / А.Ю. Трынин, И.С. Панфилова // Математика. Механика. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010 . – Т. 12 . – С. 83-87.

[36] Трынин А.Ю. О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по узлам Якоби на множестве полной меры / А.Ю. Трынин, И.С. Панфилова // Математика. Механика. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010 . – Т. 12 . – С. 87-91.

[37] Трынин А.Ю. О необходимых и достаточных условиях равномерной и поточечной сходимости интерполяционных процессов по "взвешенным" многочленам Якоби / А.Ю. Трынин // Математика. Механика. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011 . – Т. 13 . – С. 96-100.

[38] Трынин А.Ю. ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ АНАЛОГА ФОРМУЛЫ НЕВАИ ДЛЯ СИНК-ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ/ А.Ю. Трынин // Математика. Механика. . – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014.– № 16.– С. 78-81.

[39] Трынин А.Ю. О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ УЗЛОВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ Q/IN LP[0,PI]/ А.Ю. Трынин // Математика. Механика. . – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015.– № 17.– С. 72-75.

[40] Трынин А.Ю. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин ; Саратовский ун-т. . – 1991. – С. 1-32. – Деп. в ВИНИТИ 26.04.91, №1763-В91.

[41] Трынин А.Ю. Об одном признаке сходимости интерполяционных процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин ; Саратовский ун-т . – 1991 . – С. 1-33. – Деп. в ВИНИТИ 27.05.91, №2201-В91.

[42] Трынин А.Ю. О полноте линейных комбинаций синков в $C[0, \pi]$ / А.Ю. Трынин // Материалы международной конференции „Современные проблемы математики, механики и их приложений“, посвящённой 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего. 30 марта - 02 апреля 2009 года . – Москва: Изд-во Московского ун-та, 2009 . – С. 98-99.

[43] Трынин А.Ю. Об асимптотических формулах для значений некоторых линейных дифференциальных операторов второго порядка / А.Ю. Трынин // Материалы международной конференции „Современные проблемы математики, механики и их приложений“, посвящённой 105-летию С.М. Никольского. 17 - 19 мая 2010 года. – Москва: Изд-во Московского ун-та, 2010 . – С. 38.

[44] Трынин А.Ю. О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ / А.Ю. Трынин // Тезисы международной конференции „Современные проблемы математики, механики и их приложений“, посвящённой 90-летию С.Б. Стечкина. 23 - 26 августа 2010 года . – Москва: Изд-во Московского ун-та, 2010 . – С. 75-76.

[45] Трынин А.Ю. Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин // Сборник тезисов международной конференции „Дифференциальные уравнения и смежные вопросы“, посвящённой 110-летию И.Г. Петровского. 30 мая - 4 июня 2011 года . – Москва: Изд-во Московского ун-та, 2011 . – С. 370-371.

[46] Трынин А.Ю. Об интегральных признаках сходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин // Тезисы докладов 8 Саратовской зимней школы „Современные проблемы теории функций и их приложения“. 30 января - 6 февраля 1996 года . – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1996 . – С. 113-114.

[47] Трынин А.Ю. Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин // Тезисы докладов 9 Саратовской зимней школы „Современные проблемы теории функций и их приложения“. 26 января - 1 февраля 1998 года . – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1997 . – С. 156.

[48] Трынин А.Ю. Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа-Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин // Тезисы докладов 10 Саратовской зимней школы „Современные проблемы теории функций и их приложения“. 27 января - 2 февраля 2000 года . – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000 . – С. 140-141.

[49] Трынин А.Ю. Асимптотическая формула для потенциала с ограниченным изменением / А.Ю. Трынин // Тезисы докладов 11 Саратовской зимней школы „Современные проблемы теории функций и их приложения“, посвящённой памяти выдающихся профессоров МГУ Н.К. Бари и Д.Е. Меньшова. 28 января - 4 февраля 2002 года . – Саратов: Изд-во „Колледж“ , 2002 . – С. 211-212.

[50] Трынин А.Ю. Критерии равномерной сходимости синк-приближений на отрезке / А.Ю. Трынин // Тезисы докладов 13 Саратовской зимней школы „Современные проблемы теории функций и их приложения“. 27 января - 3 февраля 2006 года. – Саратов : Изд-во „Научная книга“ , 2006 . – С. 176-178.

[51] Трынин А.Ю. Одно обобщение теоремы дискретизации / А.Ю. Трынин // Тезисы докладов 14 Саратовской зимней школы „Современные проблемы теории функций и их приложения“, посвящённой памяти академика П.Л. Ульянова. 28 января - 4 февраля 2008 года . – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008 . – С. 189-190.

[52] Трынин А.Ю. Об одном обобщении теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона / А.Ю. Трынин // Тезисы докладов 15 Саратовской зимней школы „Современные проблемы теории функций и их приложения“, посвящённой 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100 летию СГУ. 28 января - 4 февраля 2010 года. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010 . – С. 175-176.

[53] Трынин А.Ю. О равносходимости операторов интерполирования по решениям задачи Коши и многочленов Лагранжа-Якоби / А.Ю. Трынин // Материалы 16 Саратовской зимней школы „Современные проблемы теории функций и их приложения“. 27 января - 3 февраля 2012 года . – Саратов : Изд-во „Научная книга“ , 2012 . – С. 178-179.

[54] Трынин А.Ю. *ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ УЗЛОВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ*/ А.Ю. Трынин // „Современные проблемы теории функций и их приложения“ Материалы 17-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова. – Саратов : Изд-во „Научная книга“ , 2014.— С.265-268

[55] Трынин А.Ю. ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ И УЗЛОВЫХ ТОЧЕК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ШТУРМА - ЛИУВИЛЛЯ/Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51. № 3. С. 662-675.

[56] Трынин А.Ю. Функция Грина интерполяционного оператора Лагранжа-Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин // Материалы школы-конференции, посвящённой 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова „Теория функций её приложения и смежные вопросы“. 13-18 сентября 1999 года. Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского . – Казань: Изд-во Казанского мат. общества, 1999 . – С. 228.

[57] Трынин А.Ю. Об оценке аппроксимации аналитических функций одним интерполяционным оператором / А.Ю. Трынин // Материалы Седьмой международной Казанской летней научной школы-конференции „Теория функций её приложения и смежные вопросы“. 27 июня - 4 июля 2005 года. Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского . – Казань: Изд-во Казанского мат. общества, 2005. – Т. 30. – С. 155-156.

[58] Трынин А.Ю. О константах Лебега интерполяционных процессов по системам Чебышёва / А.Ю. Трынин // Материалы Восьмой международной Казанской летней научной школы-конференции „Теория функций её приложения и смежные вопросы“. 27 июня - 4 июля 2007 года. Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского . – Казань: Изд-во Казанского мат. общества, 2007. – Т. 35 . – С. 248-249.

[59] Трынин А.Ю. О расходимости почти всюду процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин // Материалы Девятой международной Казанской летней научной школы-конференции „Теория функций её приложения и смежные вопросы“. 1 - 7 июля 2009 года. Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанского мат. общества, 2009. – Т. 38 . – С. 284-285.

[60] Трынин А.Ю. Критерии равномерной сходимости процессов Лагранжа по “взвешенным“ многочленам Якоби / А.Ю. Трынин // Материалы Десятой международной Казанской летней научной школы-конференции „Теория функций её приложения и смежные вопросы“. 1 - 7 июля 2011 года. Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского . – Казань: Изд-во Казанского мат. общества, 2011. – Т. 43 . – С. 341-344.

[61] Трынин А.Ю. О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций на отрезке / А.Ю. Трынин // Тезисы докладов „VII Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения“. 27 мая - 3 июня 2012 года. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2012 . – С. 36-37.

[62] Трынин А.Ю. Об устойчивости задачи интерполирования по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин // Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы „Современные методы теории функций и смежные вопросы“. 25 января - 1 февраля 1995 года . – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1995 . – С. 231.

[63] Трынин А.Ю. Оценки снизу функций и констант Лебега интерполяционных процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин // Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы „Современные методы теории функций и смежные вопросы“. 27 января - 4 февраля 1999 года . – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1999 . – С. 190.

[64] Трынин А.Ю. Односторонний признак Дини-Липшица для исследования равномерной сходимости синк-аппроксимаций. // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. Вып. 18. 2016. с. 70-74

[65] А.Ю. Трынин О некоторых достаточных условиях равномерной сходимости синк-аппроксимаций. //18-ая международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (г. Саратов, 27 января – 3 февраля 2016 года) г. Саратов.: Московский государственный университет, МИАН, Саратовский государственный университет, 2016, с.287-289.

[66] Трынин А.Ю. Синк-аппроксимации непрерывных функций и их обобщения. // IX МЕЖДУНАРОДНЫЙ СИМПОЗИУМ "РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ."27 мая – 3 июня 2016 г. г. Новороссийск: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова Математический институт им. В.А. Стеклова РАН Московский физико-технический институт (государственный университет) Южный федеральный университет Донской государственный технический университет Государственный морской университет им. адмирала Ф.Ф. Ушакова МОО «Женщины в науке и образовании» НОУ "Учебный центр "Знание с 34.

[67] Трынин А.Ю. „Односторонний“ признак Дини-Липшица для сходимости значений операторов Лагранжа-Штурма-Лиувилля // Труды Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии г. Казань, Казанский федеральный университет, 26.06.2016–2.07.2016, с.237-238.

[68] А.Ю. Трынин Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации// Известия Саратовского университета. Новая серия /.-2016 . -Т. 16,- Выпуск 3,- С.288-298.

[69] A. Yu. Trynin Krylov test for the Lagrange–Sturm–Liouville operators Усл. печ. л. 14,5 The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Moscow, Russia, August 13-20, 2017. P/177-178. Тираж 300 экз.

[70] А.Ю. Трынин О принципе локализации для синк аппроксимаций на отрезке. Труды XIII Международной Казанской летней школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». – . 2017. –Том 54. – с. 357-361.

[71] А.Ю. Трынин О принципе локализации синк-аппроксимаций на классе непрерывных функций. Сборник трудов конференции Математика. Механика, Из-во СГУ. – Саратов. —. — 2017. —с. 97-100.

[72] Трынин А.Ю. *ОПЕРАТОРЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ*/автореферат дис. ... доктора физико-математических наук : 01.01.01 / Воронежский государственный университет. Воронеж, (2013)

[73] Трынин А.Ю. *О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА ПО МАТРИЦЕ УЗЛОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЯКОБИ*/А.Ю. ТрынинА.//Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского.–Казань.– 2013.— Т. 46.— № 11.— С. 431-433.

[74] Трынин А.Ю. *ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ УЗЛОВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ*/А.Ю. ТрынинА.//Уфимский математический журнал.— Уфа.— 2013.— Т. 5.— № 4.— С. 116-129.