

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Отчет о выполнении лабораторной работы №3.4.4

Свободные и вынужденные колебания в электрическом контуре

Выполнил студент группы Б03-405
Тимохин Даниил

17 сентября 2025 г.

1. Аннотация

В данной работе исследуются свободные и вынужденные колебания, а также их параметры.

2. Теоретическая справка

В данной работе исследуются два основных режима: свободные и вынужденные колебания.

Свободные колебания описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{U} + 2\gamma\dot{U} + \omega^2 U = 0 \quad (1)$$

где $\gamma = \frac{R}{2L}$ и $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

В общем случае решением будет выражение

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma t} \cos(w_1 t + \varphi_0) \quad w_1 = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} \quad (2)$$

Для его выполнения требуется, чтобы $0 \leq R < R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Иначе возникнут затухающие колебания или критический режим, который мы не сможем получить в силу необходимой точности параметров установки, которых мы не сможем добиться.

При невыполнении условий т. е. затухающих колебаний ($R > R_{кр}$).

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma t} ch(\alpha t + \varphi_0) \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - w_0^2} \quad (3)$$

Введем декремент затухания, эквивалентный обратному числу колебаний за которое амплитуда уменьшится в e раз.

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{n+k}} \quad (4)$$

А также добротность контура - его способность сохранять колебания.

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\rho}{R} = \frac{2\pi W}{\Delta W} = \frac{w_0}{\Delta w} \quad (5)$$

При этом Δw - ширина частот на значении $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимума на АЧХ или от $-\frac{3\pi}{4}$ до $-\frac{\pi}{4}$ на ФЧХ.

И для вынужденных колебаний

$$\ddot{U} + 2\gamma\dot{U} + \omega^2 U = w^2 \mathcal{E} \quad (6)$$

И тогда

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos\psi_I \sin(wt + \varphi_0 + \psi_I) \quad tg\psi_i = \frac{wL - \frac{1}{wC}}{R} \quad (7)$$

3. Оборудование

Магазин конденсаторов, катушек, сопротивлений

Генератор частот

Цифровой осциллограф

4. Проведение эксперимента и обработка результатов

Сначала рассчитаем основные параметры системы.

$$L = 0.1 \text{ Гн}$$

$$C^* = 1.21 \text{ нф}$$

Тогда т. к. по заданию $\nu_0 = 6500 \text{ Гц}$, то

$C = 6.21 \text{ нф}$ и магазин выставлен на 5 нф

$$R_{кр} = 8165 \text{ Ом и } \rho = 4082 \text{ Ом}$$

$$R_L = 60 \text{ Ом}$$

Пункт 1. Проверить совпадение экспериментального и теоретического периода

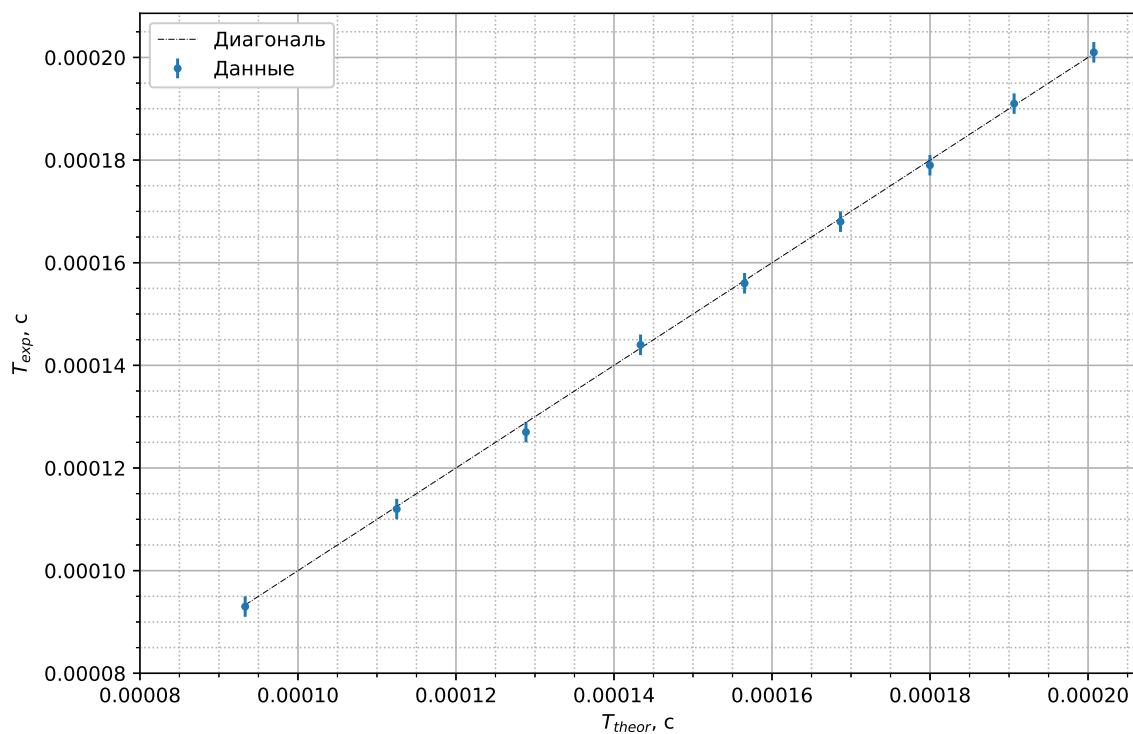


Рис. 1. Проверочный график

Все значения попали в области погрешностей.

Далее идут оценки добротности. Главная проблема в том, что здесь большое значение будет играть погрешность наблюдателя.

Теперь оценим декременты затухания при разных R для свободных колебаний.

Таблица 1. Классический расчет декремента описания

n	R , Ом	U_0 , В	U_n , В	Θ	$Q_{эксп}$	$Q_{теор}$
1	408,25	2,84	1,96	0,37	8,5	8,6
2	408,25	2,84	1,36	0,36	8,6	8,6
3	408,25	2,84	0,94	0,37	8,5	8,6
2	500	2,66	1,1	0,44	7,1	7,2
2	750	2,28	0,66	0,62	5,1	5,0
2	1000	1,99	0,36	0,85	3,7	3,8
2	1250	1,74	0,22	1,03	3,0	3,1
1	1500	1,52	0,43	1,26	2,5	2,6
1	1750	1,32	0,3	1,48	2,1	2,2
1	2000	1,14	0,2	1,74	1,8	1,9

Далее построим график $\frac{1}{\Theta^2}(\frac{1}{R_{\Sigma}^2})$. Так как

$$\Theta = \frac{2\pi R}{\sqrt{R_{кр}^2 - R^2}} \rightarrow \frac{1}{\Theta^2} = \frac{R_{кр}^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{R^2} - \frac{1}{4\pi^2} \quad (8)$$

Тогда можно найти $R_{кр}$ из $y = ax + b$

$$R_{кр} = 2\pi\sqrt{a} \quad (9)$$

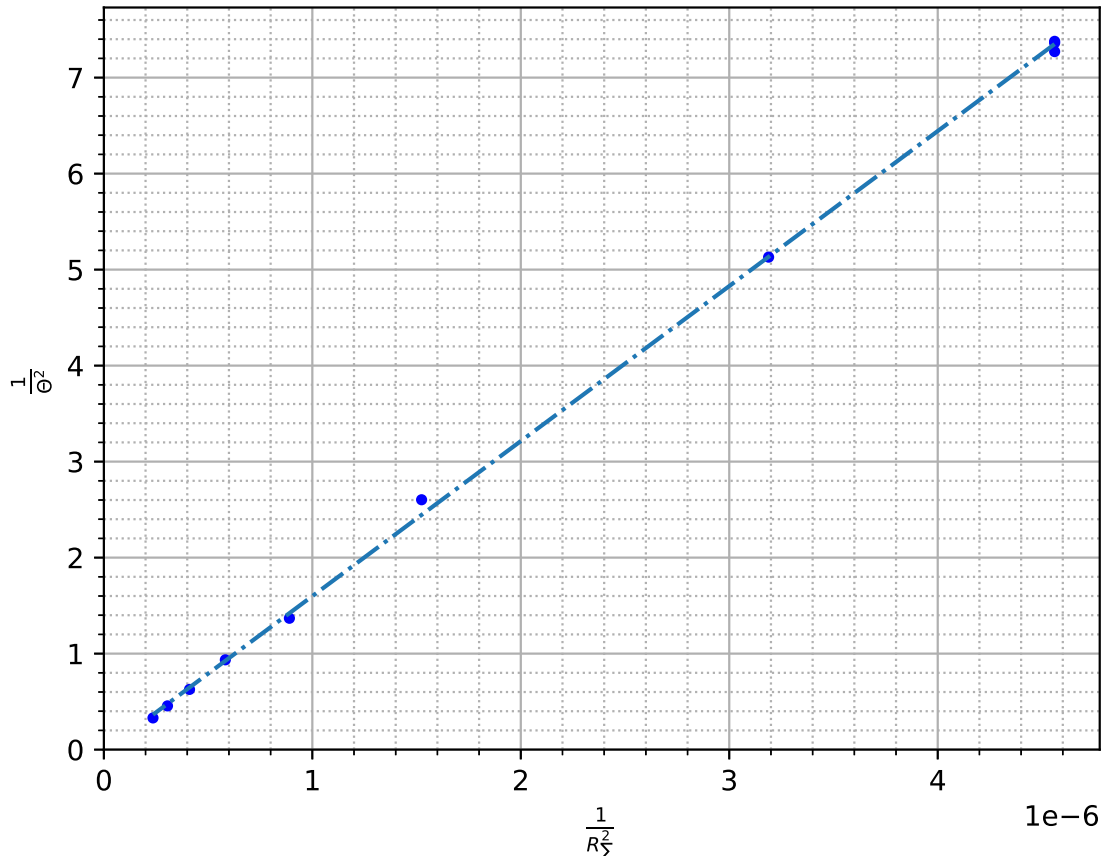


Рис. 2. Нахождение критического сопротивления по графику

Получим значение $a = 1614862.41 \text{ Ом}^2$ и $\varepsilon_a = 0.006$ для линейной аппроксимации. $b \approx 0$.

Тогда получим, что $R_{кр}^{изм} = 7984,5 \text{ Ом}$ и $\varepsilon_{R_{кр}^{изм}} = 0.04$, Она вызвана тем, что точное сопротивление катушки мы можем измерить с погрешностью $\approx 4\%$ от общего сопротивления цепи.

Тогда при сопротивлении $R = 408 \text{ Ом}$ добротность контура по измеренным параметрам будет равна $Q_{min}^{изм} = 8.53$, а теоретическая $Q_{min}^{теор} = 8.57$. При сопротивлении $R = 2000 \text{ Ом}$ получим $Q_{max}^{изм} = 1.8$ и $Q_{min}^{теор} = 1.94$. Значения достаточно близки с учетом того, что Q - является качественной величиной и для неё главное - порядок.

Найдем на фазовой диаграмме пересечения оси Ox в положительном направлении, что соответствует максимуму напряжения. Декремент считаем по формуле из теории.

n	делений	Θ	Q
5	4	-	-
4	6	0,41	7,75
3	9	0,41	7,75
2	13	0,4	8,00
1	18	0,38	8,35

Точность оценим, как $\varepsilon_Q = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} / \Delta n = \sqrt{\frac{1}{4}^2 + \frac{1}{18}^2} / 4 = 0.06$

Возьмем последнее значение, так как оно из-за большего промежутка измерения более точный.

Найдем Добротность по АЧХ

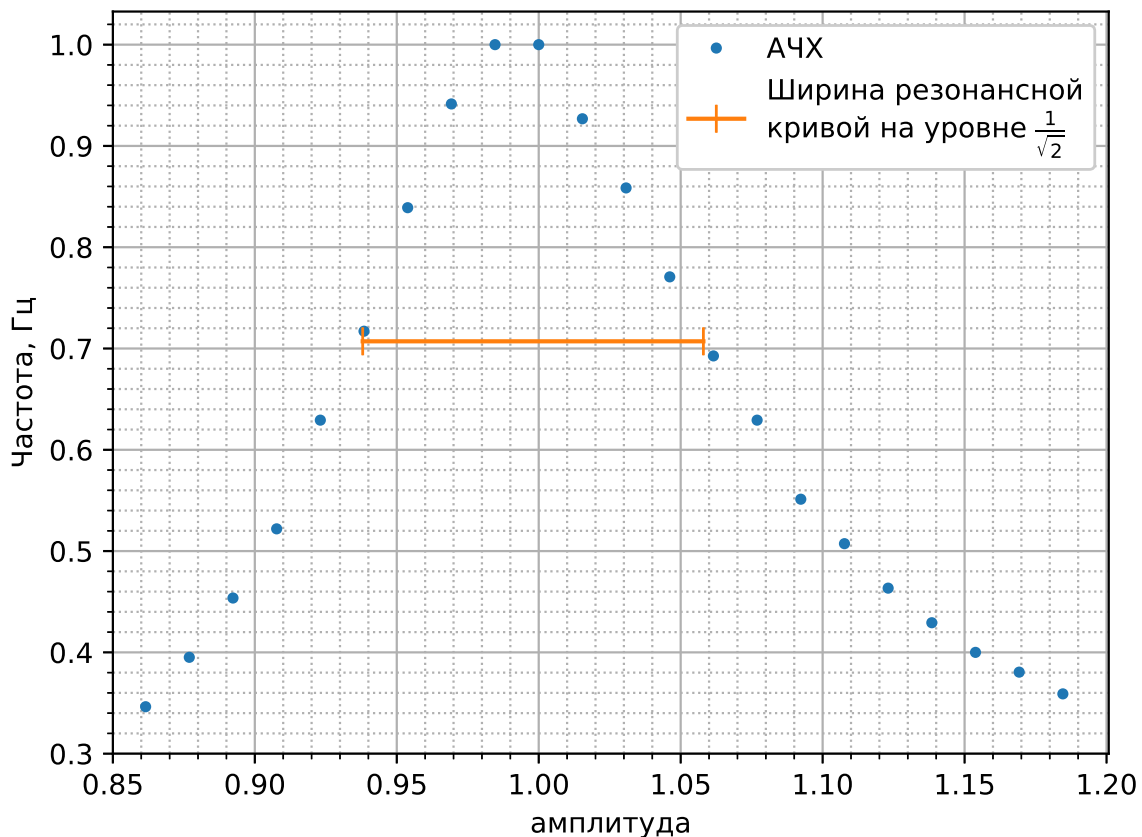


Рис. 3. АЧХ при $R = 400 \text{ Ом}$

Из графика ширина резонансной кривой на нужном уровне равна $\Delta\omega = 0.12\omega_0$, а $\omega_{рез} = 0.99\omega_0$. Значит по формуле

$$Q^{ACH} = \frac{\omega_{рез}}{\Delta\omega} = \frac{0.99\omega_0}{0.12\omega_0} = \frac{0.99}{0.12} = 8.25 \quad (10)$$

Относительную погрешность оценим как двойное расстояние между точками, разделенное на ω_0 . Получим $\varepsilon_{Q^{ACH}} = \frac{200}{6500} = 0.03$

Найдем Добротность по ФЧХ

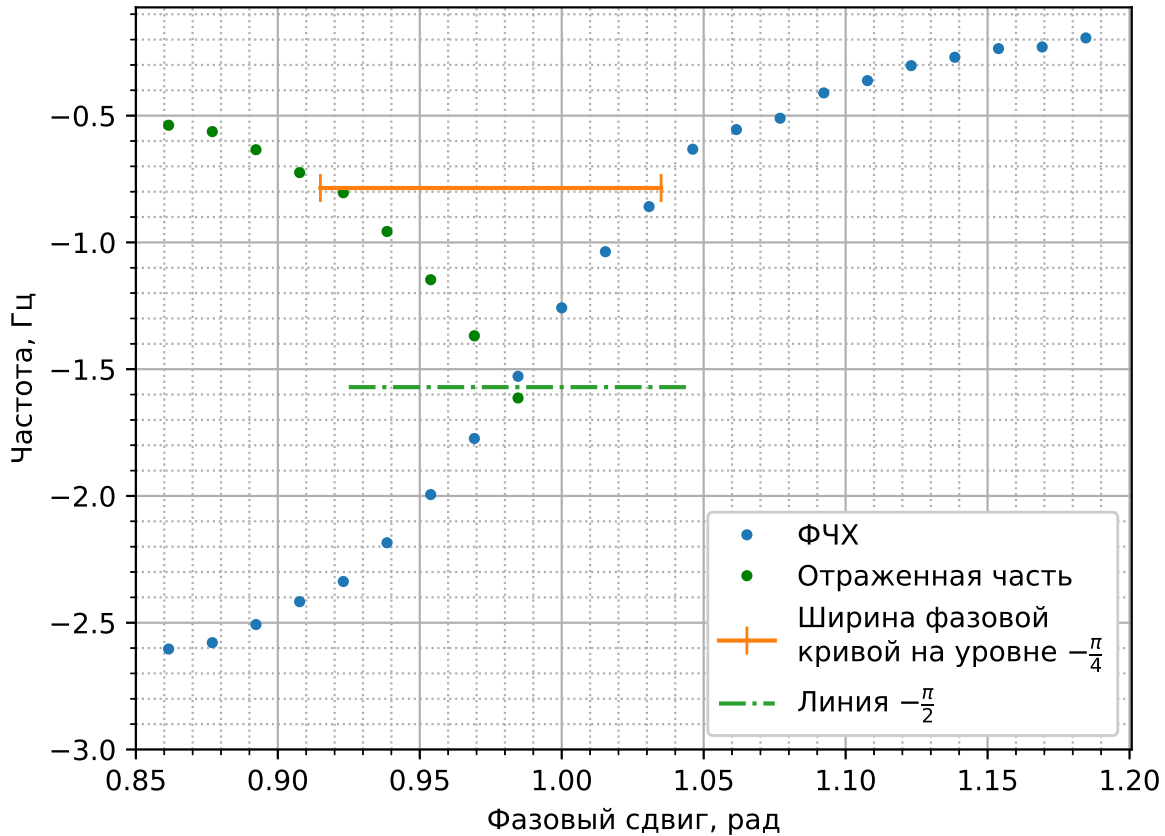


Рис. 4. ФЧХ при $R = 400 \text{ Ом}$

Из графика ширина резонансной кривой на нужном уровне равна $\Delta\omega = 0.12\omega_0$, а $\omega_{рез} = 0.985\omega_0$. Значит по формуле

$$Q^{\Phi CH} = \frac{\omega_{рез}}{\Delta\omega} = \frac{0.985\omega_0}{0.12\omega_0} = \frac{0.985}{0.12} = 8.2 \quad (11)$$

Относительную погрешность оценим как двойное расстояние между точками, разделенное на ω_0 . Получим $\varepsilon_{Q^{\Phi CH}} = \frac{200}{6500} = 0.03$

Теперь найдем декремент при нарастании напряжения, когда подаётся сигнал той же частоты, что и критическая для данного контура.

n	U_0 , В	U , В	R , Ом	Θ	Q
1	102	33	408,25		
2	102	55	408,25	0,38	8,18
3	102	72	408,25	0,42	7,54
4	102	82	408,25	0,41	7,61
5	102	88	408,25	0,40	7,88
6	102	94	408,25	0,43	7,29
1	26,2	8,4	2000		
2	26,2	21,8	2000	1,40	2,25
3	26,2	25,4	2000	1,55	2,03

Здесь наблюдается погрешность больше, чем в варианте с фазовой кривой, та как свой вклад также вносит и генератор, который включен в это время.

5. Обсуждение результатов и выводы

Были исследованы вынужденные и свободные колебания, а также как они себя ведут в различных условиях.

Использованы различные методики для вычисления добротности. Наиболее точными являются результаты по ФЧХ и АЧХ, так как для них нам не требуется знание сопротивления катушки, а также измерения контура в нестационарном состоянии.