

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Отчет о выполнении лабораторной работы №1.3.1(2)

## Определение модуля юнга и модуля сдвига

Выполнил студент группы Б03-405  
Тимохин Даниил

20 ноября 2024 г.

## 1. Аннотация

В данной работе исследовалась зависимость упругих деформаций от внешних факторов. Находятся модуль Юнга и модуль сдвига материалов, из которых изготовлены экспериментальных установок. Проверяется теоретические зависимости деформаций от внешних факторов.

## 2. Теоретическая справка

### 2.1. Измерение модуля Юнга (Эксперимент 1)

По закону Гука зависимость приложенной силы растяжения

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

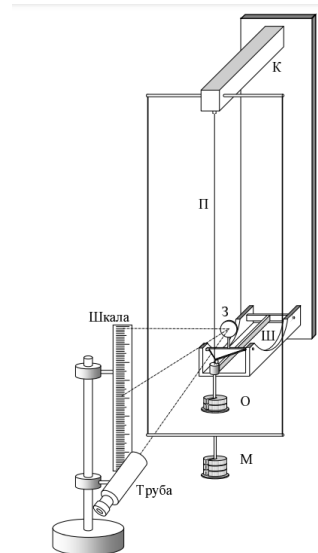
$$F = S \cdot \sigma \quad (2)$$

Измерения проводились на установке Лермантова (рис 1). Но в нашей вместо трубы использовался лазер. Зная  $l_{\text{из}}$  - расстояние от зеркала до шкалы, а также зная, что изменение угла между направлением лазер-зеркало и зеркало-прекция на шкале "будет в два раза больше угла между горизонтом и треугольником, упирающимся в цилиндр, получим

$$\Delta l = r_{\text{треуг}} \cdot \sin \frac{\arctg \frac{\Delta x}{l_{\text{из}}}}{2} \quad (3)$$

Из этого получаем, что  $\epsilon_{\Delta l} \approx \sqrt{\epsilon_{\Delta x}^2 + \epsilon_{l_{\text{из}}}^2}$

Сама установка сделана так, чтобы кронштейн К не влиял на измерения. Поэтому грузы висят на конце кронштейна, где закреплён исследуемый образец, чтобы его деформация оставалась постоянной вне зависимости от того, какая сила приложена к исследуемому образцу.



**Рис. 1.** Установка Лермантова

### 2.2. Измерение модуля сдвига в динамике (Эксперимент 2)

Из формулы вращательного движения

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M \quad (4)$$

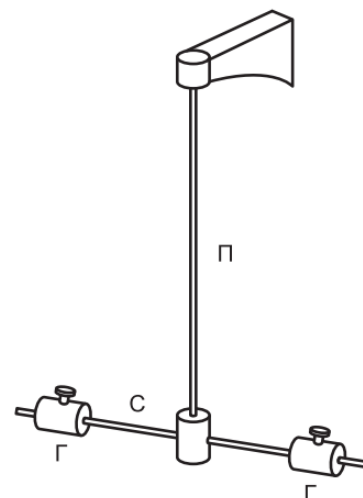
$M$  - модуль момента сил, который определяется по формуле  $M = f\varphi$ . Тогда получаем каноническое уравнение колебаний.

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{f}{I} \varphi = 0 \quad (5)$$

Тогда  $\omega^2 = \frac{f}{I}$  и период колебаний связан с моментом инерции и модулем кручения по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}} \quad (6)$$

Где  $f$  - модуль кручения, который вычисляется  $f = \frac{\pi R^4 G}{2l}$  (то есть зависит от геометрических параметров объекта).



**Рис. 2.** Крутильный маятник маятник

### 2.3.Измерение модуля сдвига в статике (Эксперимент 3)

Эта установка проще, чем предыдущая. Здесь момент сил создаётся за счёт подвешенных грузов. С обеих сторон необходимо повесить одинаковые грузы, чтобы момент сил был равномерным и не возникла поступательная составляющая.

Тогда  $M = 2l_{неч}m\eta$  и аналогично предыдущему опыту  $\varphi \cdot f = M$ .

В данном опыте необходимо будет проверить, будет ли у нас линейная зависимость между моментом силы и углом закручивания нижней грани.

Важное уточнение - вместо зеркала находится лазер, поэтому

$$\varphi = \frac{x}{l_{ли}}, \quad (7)$$

где  $l_{ли}$  - расстояние от лазера до шкалы.

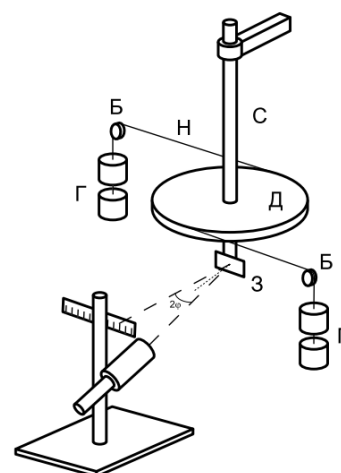


Рис. 3. Установка

### 3. Оборудование

#### 3 установки

Линейка

Счётчик колебаний для второй

Набор грузов для третьей установки

Штангенциркуль и микрометр

### 4. Результаты измерений и обработка данных

#### 4.1.Эксперимент 1

Сначала измерим необходимые параметры.

$l_{шз}=1.488$  м

$l_{нит}=1.76$  м

$r_{пруж}=0.013$  м

$d=0.00073$  м - диаметр проволоки

Из методички мы получаем, что максимальная нагрузка для неупругих деформаций  $\approx 11$  кг.

В эксперименте снимем зависимость показаний на линейке от грузов, подвешенных на О.

Далее в обработке будем пользоваться  $\Delta x = x - x_0$  и  $m$  - масса, которую мы положили на О. Тогда пользуясь формулами 1-2.

$$\Delta l = r_{пруж} \cdot \sin \frac{\arctg \frac{\Delta x}{l_{шз}}}{2} \approx r_{пруж} \cdot \frac{\Delta x}{2l_{шз}}$$

$$mg = ES \frac{\Delta l}{l_{нит}} \quad (8)$$

Тогда у нас должна получиться линейная зависимость от  $\Delta x$ , но для большей точности переведем по общей формуле в  $\Delta l$ .

Получаем, что при аппроксимации прямой зависимости  $mg$  от  $\Delta x$   $k = \frac{E\pi d^2}{4l}$

По результатам аппроксимации получим  $k = 44098 \pm 336 \frac{H}{м}$  (рис. 4)

Так как  $k \gg b$ , то мы получаем, что наша линейная теория верна в упругих деформациях.

И тогда получаем, что  $E = 185 \pm 2 ГПа$ , что близко к модулю юнга стали.

m, г	x, см
0	26
245.8	27.3
491.9	28.85
737.4	29.9
982.9	31.1
1228.5	32.2
1473.7	33.45
1719.4	35
1965	36.15
2211.1	37.5
2456.8	38.75
2211.1	37.4
1965	36
1719.4	35
1473.7	33.7
1228.5	32.4
982.9	31
737.4	30
491.9	29
245	27.4
0	26.1

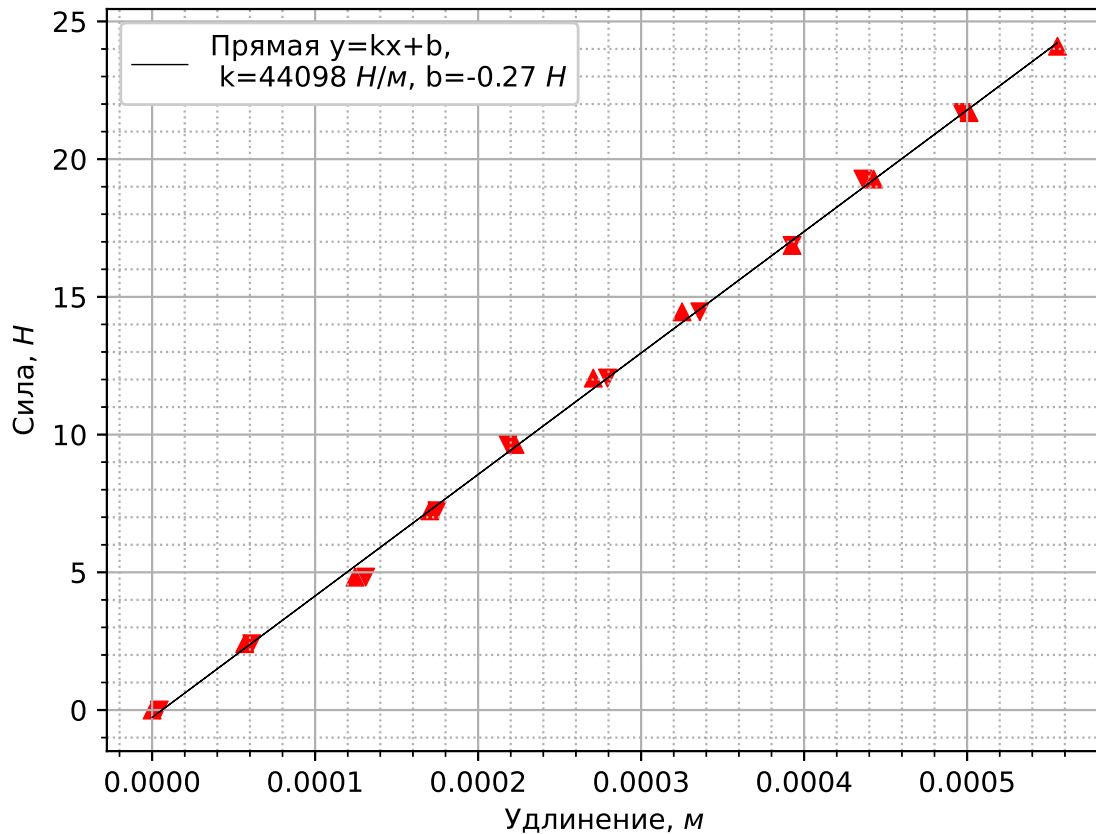


Рис. 4. Аппроксимация прямой  $y = kx + b$  зависимости  $mg(\Delta l)$

## 4.2. Эксперимент 2

Будем постепенно попарно двигать грузики для увеличения момента инерции. Тогда формула момента инерции будет выглядеть так

$$I = m_1 \cdot (r_1 - r_g/2)^2 + m_2 \cdot (r_1 + r_g/2)^2 + m_3 \cdot (r_2 - r_g/2)^2 + m_4 \cdot (r_2 + r_g/2)^2, \quad (9)$$

где  $r_1$  - расстояние до первой пары и  $r_2$  - расстояние до второй пары.

$r_g=0.04 \text{ м}$ ,  $m_1=0.2041 \text{ кг}$ ,  $m_2=0.2025 \text{ кг}$ ,  $m_3=0.2044 \text{ кг}$ ,  $m_4=0.2049 \text{ кг}$ ,  $R=0.00078 \text{ м}$ ,  $l=1.734 \text{ м}$ .

При этом, так как зависимость через корень, то линейной будет зависимость  $T^2(I)$ . При этом  $k = \frac{4\pi^2}{f}$  и так как  $f = \frac{\pi R^4 G}{2l}$ , то  $G = \frac{2lf}{\pi R^4} = \frac{8l\pi}{kR^4}$

Получаем  $k = 1717 \pm 9 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$  (рис 5) и тогда  $G = 68.6 \pm 0.4 \text{ ГПа}$ , что находится между медью и сталью, а значит скорее всего это сплав меди и стали.

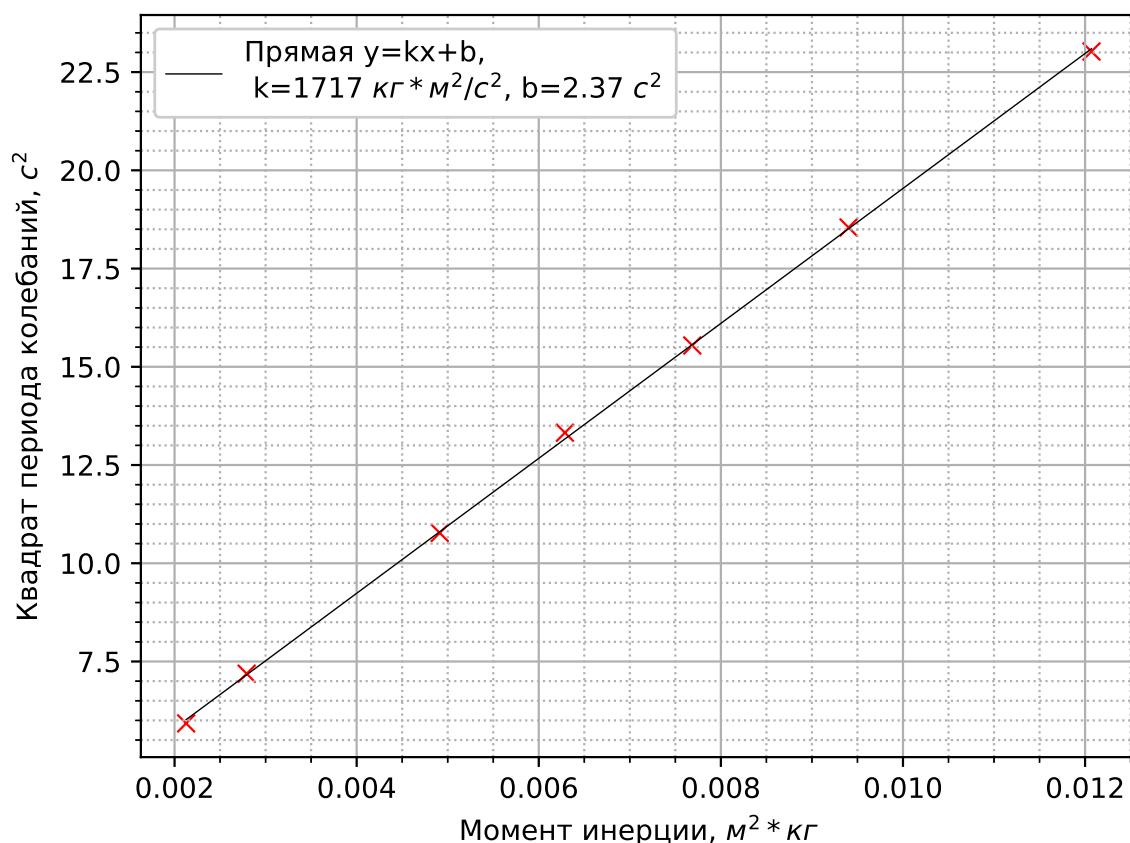


Рис. 5. Аппроксимация прямой  $y = kx + b$  зависимости  $T^2(I)$

### 4.3. Эксперимент 3

Из теории для этого эксперимента получим, что нам необходимо исследовать зависимость  $\Delta\varphi(\Delta m)$ . При этом

Находим угол сдвига

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{l_{ли}} \quad (10)$$

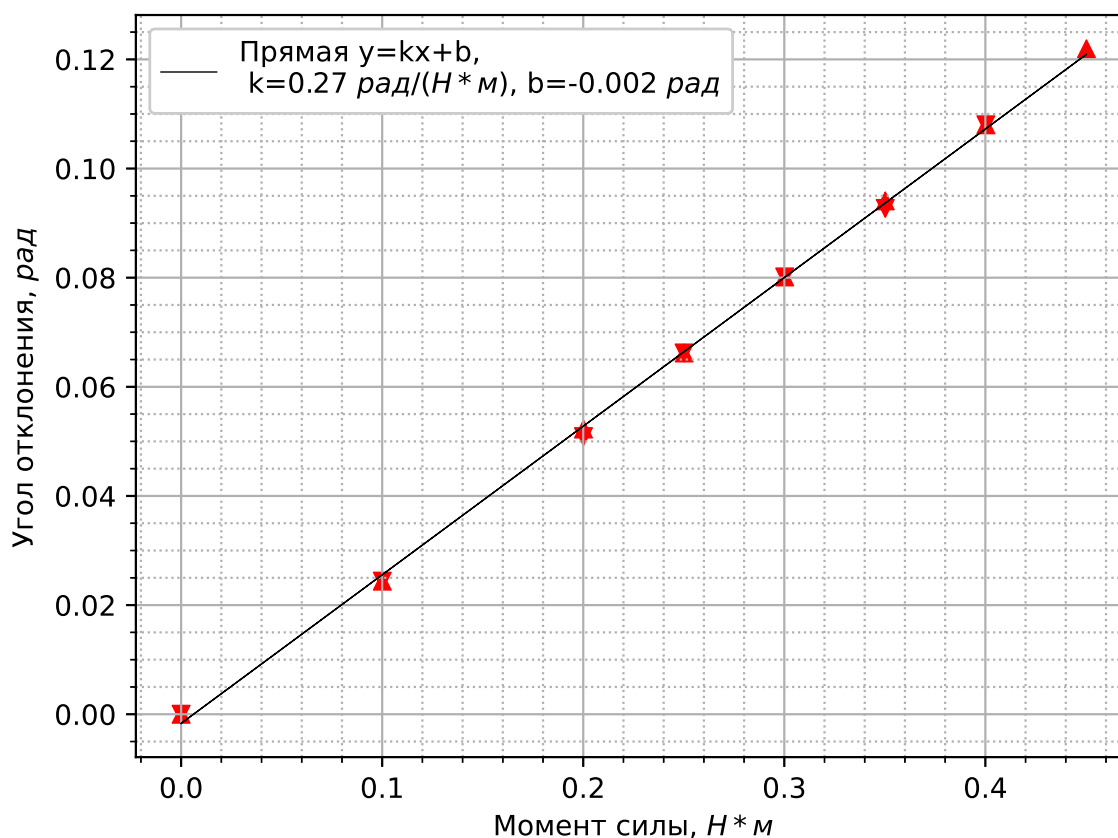
Теоретическая зависимость

$$\Delta\varphi = \frac{2\Delta m g l_{плеч}}{f} \quad (11)$$

$l_{плеч} = 0.051$  м,  $l_{ли} = 1.435$  м,  $R = 0.0025$  м,  $l = 1.328$  м.

Получим  $k = 0.272 \pm 0,002 \frac{1}{H * м}$  (рис 5),  $f = \frac{1}{k}$  из чего аналогично второму эксперименту получаем  $G = 79.5 \pm 0.5$  ГПа, что очень близко к значению стали.

$\Delta x$ , см	$\Delta m$ , гр
0	0
3.5	100
7.5	200
9.5	250
11.5	300
13.5	350
15.5	400
17.5	450
15.5	400
13.3	350
11.5	300
9.5	250
7.3	200
3.5	100
0	0



**Рис. 6.** Аппроксимация прямой  $y = kx + b$  зависимости  $\Delta\varphi(\Delta m)$

## 5. Обсуждение результатов и выводы

В ходе выполнения работы мы подтвердили выполнение законов теории упругости. И то, что упругие деформации обратимы.

Были определены по модулю юнга и модулю сдвига материалы из которого были сделаны образцы.

Данные были получены с хорошей точностью, что говорит о том, что на протяжении эксперимента мы не достигли предела упругих деформаций. Также об этом свидетельствует то, что данные полученные при обратном ходе совпадают с данными прямого хода измерений.