1 Введение

Рассмаривается модель коллективного принятия решений, где каждый из n участников голосует за один из двух возможных вариантов. Данную модель можно описать как случайный марковский процесс

2 Определение модели

Мы рассматриваем вероятностное пространство $(\{0,1\}^N, \mathcal{F}_{\{0,1\}^N}, P)$

Обозначение 1: $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)) \in \{0,1\}^N$ – вектор голосов в момент времени t, где $\xi_i(t) \in \{0,1\}$ $\forall i \in \overline{1,n}$.

Обозначение 2: $W = (w_{ij})_{i,j=1}^k$ - матрица весов, каждый элемент которой

Пусть x участник голосования, $\xi_x(t) \in \{0,1\}(0 - \text{"против"}, 1 - \text{"за"})$

Пусть, например, при $t = 0$ имеем начальный вектор: $(0, 1, 1, 0, 0, \cdots, 1)$

Для каждого следующего момента момента времени определим динамику:

1. $\xi(t)$ – Цепь маркова с дискретным временем и множеством состояний

   $X = \{0,1\}^N$,

   Пусть $y_1, y_2 \in X$

Обозначим $p_{y_1 y_2}(t)$ за вероятность перейти из конфигурации y_1

в y_2 в момент времени t то есть: $p_{y_1 y_2}(t) = P(\xi(t) = y_2 \mid \xi(t-1) = y_1)$

2. $\xi(t) = (\xi_i(t), i \in 1...n)$ условно независимы, то есть

   $P(\xi_i(t) = y_i | \xi(t-1) = \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i(t) = y_i | \xi(t-1) = \theta)$

3. $P(\xi_x(t) = 1 \mid \xi(t-1) = \theta) = \sum\limits_{x \in \overline{1,n}} \omega_{xy} \cdot \theta_y(t)$

Замечание 1: $W-$ стохастическая, то есть: $\omega_{xy} > 0, \sum\limits_{y} \omega_{xy} = 1$

Замечание 2: $\theta^0 = (0, \ldots, 0), \theta^1 = (1, \ldots, 1)$ - поглощающие состояния.

Из 2^N состояний - 2 поглощающих

3 Модель на круге(циферблате)

Рассмотрим более подробно модель голосования на круге. Графически её можно определить следующим образом:

Пример 1: Пусть рассматривается конифигурация из 5 человек, каждый смотрит на соседа слева и справа. Тогда графически отношения между соседями выглядят следующим образом

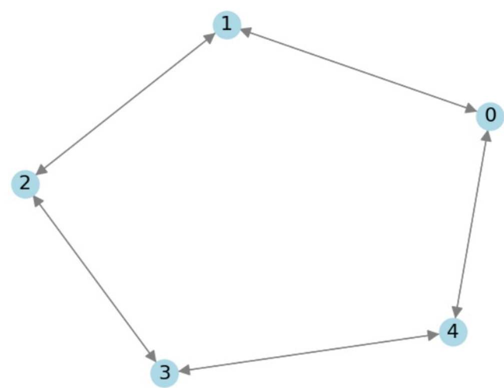

Рис. 1: К примеру 1

Обозначение 3: Сдвиги $s = (s_i)_{i=1}^{K}$ - вектор, каждый элемент которого указывает на какого соседа ориентируется тот или иной участник

Замечание 1: В модели на круге матрица весов $W = (\omega_{ij})_{i,j=1}^{N}$ является вырожденной, ввиду того, что у каждого человека есть соседи при любом сдвиге

Пример: Пусть s - набор сдвигов, тогда для человека под номером j важны мнения людей под номерами $(j + s_i) \bmod n + 1, \forall i \in \{1,\dots,n\}$

Тогда для вычисления $P(\xi_i(t) \mid \xi(t-1)) \forall i \in \{1,\dots,n\}$ справедлива следующая формула:

$$P(\xi_i(t) = 1 \mid \xi(t-1)) = \sum_{j=1}^{K} \omega_{i,(i+s_j) mod \text{ N+1}} \cdot \xi_{(i+s_j) mod \text{ N+1}}(t-1)$$

4 Свойства модели

Основными свойствами модели являются:

1. Оценивание моментов остановки модели при заданной конфигурации

2. Изучения поведения модели при заданной конфигурации

3. $$H_0 : E\xi_1(t) \neq \frac{\sum_{i=1}^{N} I(\xi_i(0) = 1)}{N}$$

   Против альтернативы

   $$H_1 : E\xi_1(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} I(\xi_i(0) = 1)}{N}$$

5 Оценивание моментов остановки модели при заданной конфигурации

Обозначение 4: τ_1 - момент остановки в состоянии $(1, \dots, 1)$, τ_0 - момент остановки в состоянии $(0, \dots, 0)$

При заданной конфигурации (ξ_0, W, s), где ξ_0 - начальный вектор голосов, при переходе в состояние x за t шагов есть вероятность:

$$P(\xi(t)=x\mid\xi(0))=\sum_{k\in J}(\prod_{i=1}^{t-1}P(\xi(i)=k_i|\xi(i-1))\cdot$$

$$\cdot P(\xi(t)=x|\xi(t-1)=k_{t-1})) \quad (1)$$

где $k=(k_1,\dots,k_{t-1}),\ k_i\in\{0,1\}^N$ - всевозможные наборы состояний за $t-1$ шагов и вероятность перехода в момент T равна:

$$P(\xi(T)=v\mid\xi(T-1))=\prod_{i=1}^{N}P(\xi_i(T)=v_i\mid\xi(T-1)) \quad (2)$$

$$P(\xi_i(T)=v_i\mid\xi(T-1))=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{K}w_{i,(i+s_j)mod\ \mathrm{N}+1}\cdot\xi_{(i+s_j)mod\ \mathrm{N}+1}(T-1), v_i=1\\ 1-\sum\limits_{j=1}^{K}w_{i,(i+s_j)mod\ \mathrm{N}+1}\cdot\xi_{(i+s_j)mod\ \mathrm{N}+1}(T-1), v_i=0\end{cases} \quad (3)$$

тогда среднее время момента τ_0 и τ_1 равны соответсвенно:

$$E\tau_0=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot P(\tau_0=i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot P(\xi(t)=\mathbf{0}\mid\xi(0),\xi(j)\neq\mathbf{0}\ \forall j\in\{0,i-1\}) \quad (4)$$

$$E\tau_1 = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P(\tau_1 = i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P(\xi(t) = \mathbf{1} \mid \xi(0), \xi(j) \neq \mathbf{1}\ \forall j \in \{0, i-1\}) \quad (5)$$

Ввиду сложности прямого вычисления данных мат ожиданий, $E\tau_i,\ i = 0, 1$ оцениваются методом Монте-Карло

6 Дальнейшее развитие

Ближайшие задачи, которые предстоит изучить:

1. Оценка функции распределения момента остановки τ при заданной конфигурации

2. Определение критерия приводимости случайного графа, порождённого конфигурацией