Электричество и магнетизм

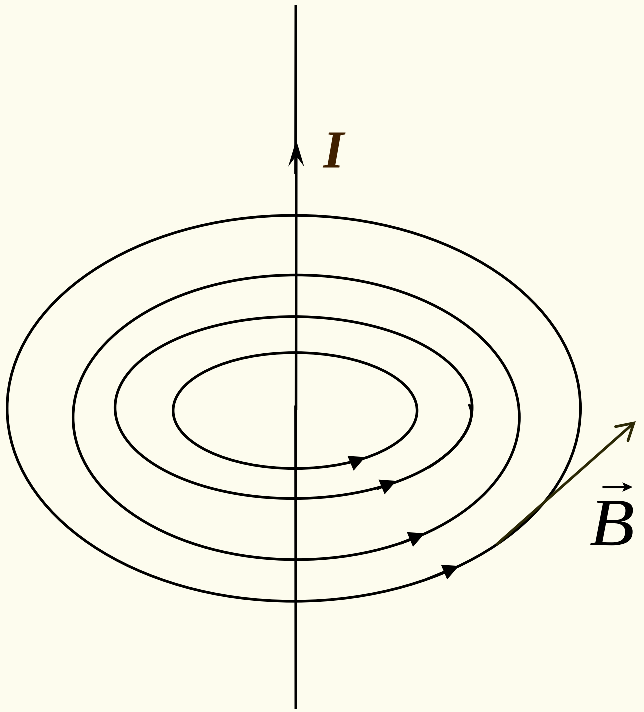
Семестр 2

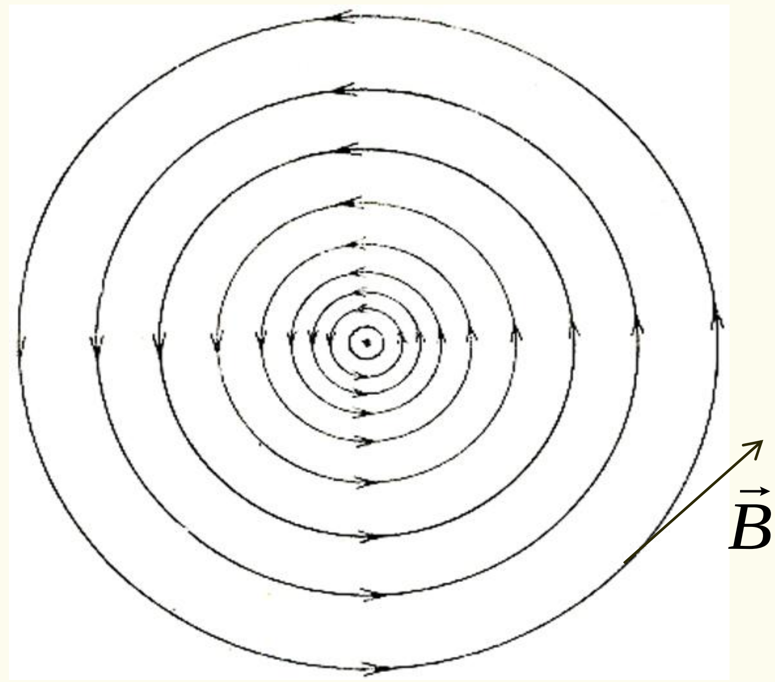
ЛЕКЦИЯ № 8

Теорема Гаусса и теорема о циркуляции магнитного поля. Магнитное поле в веществе.

1. Теорема Гаусса для магнитного поля.
2. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме.
3. Магнитное поле длинного прямолинейного соленоида круглого сечения с током.
4. Магнитное поле в веществе.

Вычислив магнитное поле прямолинейного тока, мы обнаружили, что силовые линии этого поля — замкнутые окружности, охватывающие проводник с током.





Направление магнитных силовых линий в различных точках пространства вокруг прямолинейного тока $\boldsymbol{I}$.

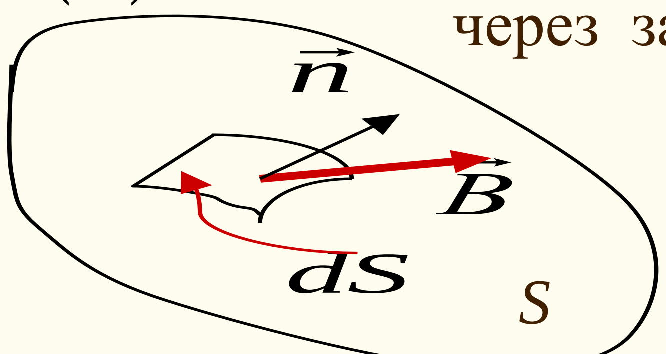
Замкнутость магнитных силовых линий приобретает принципиальное значение: из этого свойства следует вывод, что ***в природе нет магнитных зарядов***.

Магнитные поля являются ***вихревыми*** или ***солено-идальными*** поскольку их силовые линии замкнуты.

Теперь обратимся к **теореме Гаусса для магнитного поля**. В этой теореме рассматривается поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность:

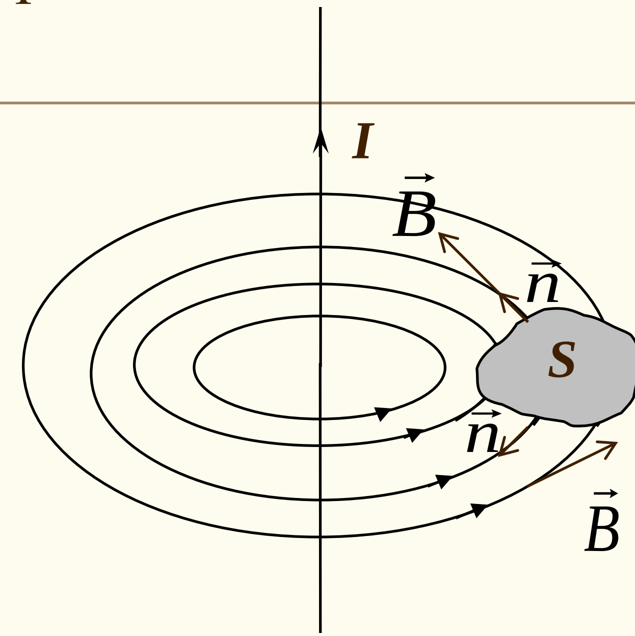
$$\Phi_S\left(\vec{B}\right)=\oint_S \vec{B}d\vec{S}=\oint_S B_n dS$$

где $\Phi_S\left(\vec{B}\right)$ - поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$, через замкнутую поверхность S.



$$d\Phi\left(\vec{B}\right)=\vec{B}d\vec{S}$$

Замкнутая гауссова поверхность **S** выбрана в магнитном поле прямолинейного тока.



Если густота магнитных силовых линий соответствует величине вектора магнитной индукции в выбранной точке пространства, то интеграл $\Phi_S(\vec{B}) = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS$ - есть алгебраическая сумма числа силовых линий входящих (–) и покидающих (+) замкнутую поверхность.

Учитывая соленоидальность магнитного поля, то есть замкнутость его силовых линий, придём к выводу: число входящих и выходящих силовых линий одинаково и их сумма всегда равна нулю:

$$\Phi_S\left(\vec{B}\right)=\oint_S \vec{B}d\vec{S}=\oint_S B_n dS=0$$

Полученное выражение— математическая запись **теоремы Гаусса** для магнитного поля: ***поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:***

$$\boxed{\oint_S \vec{B}d\vec{S}=0}$$

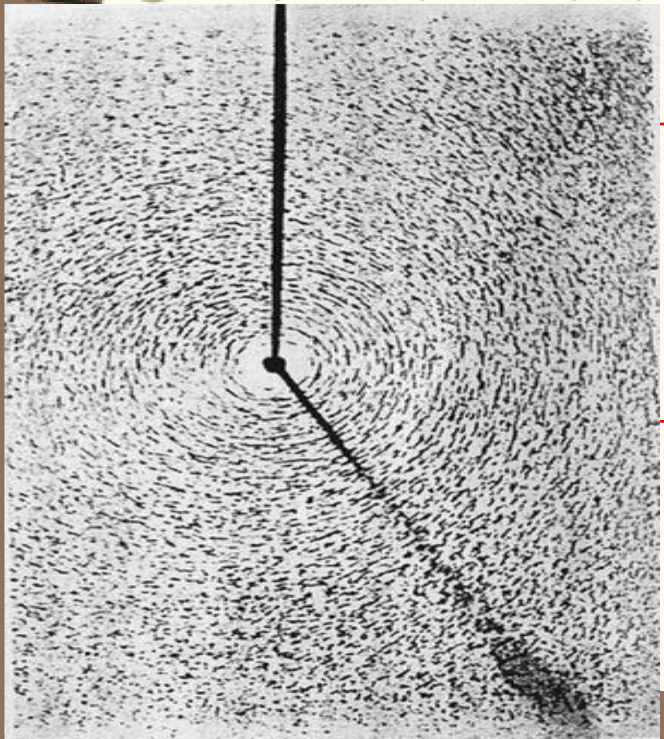
Теорема Гаусса для магнитного поля

Эта теорема утверждает: **в природе нет магнитных зарядов**.

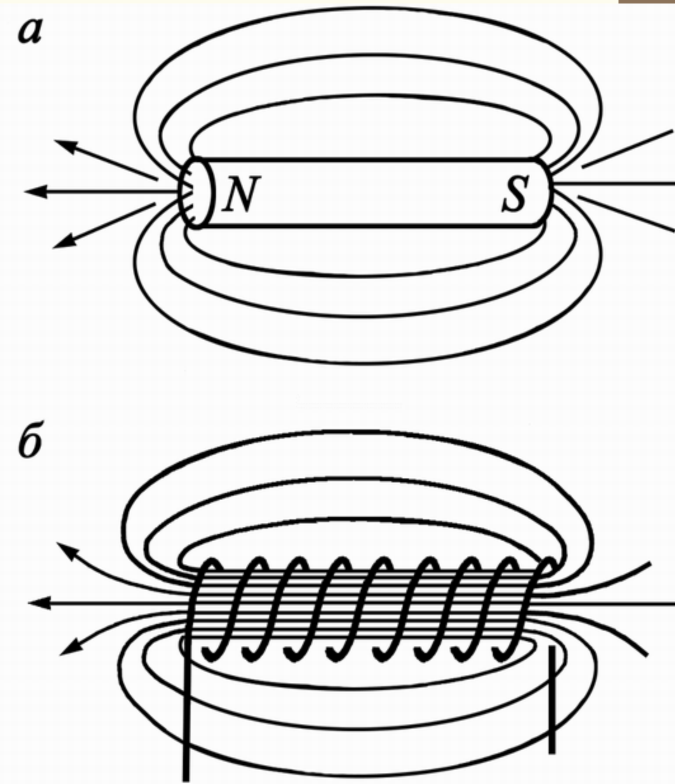
Линии напряженности ***электрического поля*** начинаются и заканчиваются на зарядах.

А ***магнитных зарядов в природе нет***. Опыт показывает, что линии $\vec{B}$ *всегда замкнуты* (см. рис.)

Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции записывается так:



$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$



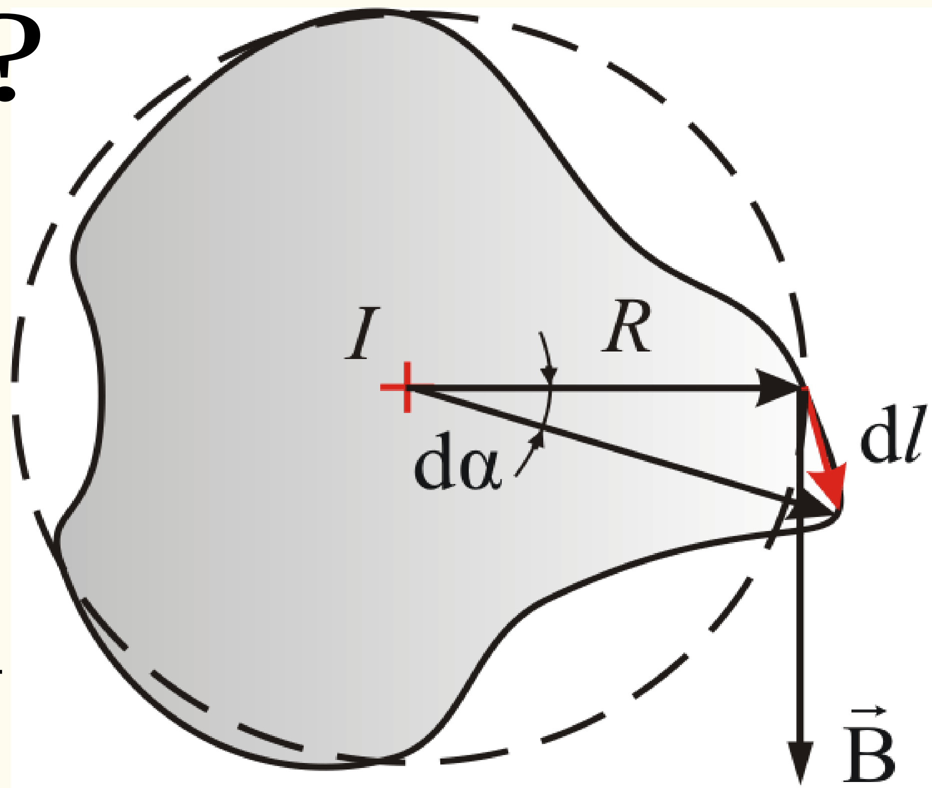
Теорема о циркуляции магнитного поля

Возьмем контур l охватывающий прямой ток ***I***,

и вычислим для него циркуляцию вектора магнитной индукции $\vec{B}$, т.е.

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = ?$$

Выражение магнитного поля прямолинейного тока ***I***: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$



Вначале рассмотрим случай, когда контур лежит в плоскости перпендикулярно току (ток I направлен за чертеж). В каждой точке контура вектор $\vec{\mathrm{B}}$ направлен по касательной к окружности радиуса R, проходящей через эту точку.

Воспользуемся свойствами скалярного произведения векторов:

$$B_l \mathrm{d}l = B\mathrm{d}l_B,$$

где $\mathrm{d}l_B$ – проекция $\mathrm{d}l$ на вектор $\vec{\mathrm{B}}$, $\mathrm{d}l_B = R\mathrm{d}\alpha$,

R – расстояние от тока I до $\mathrm{d}l$.

Тогда

$$B_l \mathrm{d}l = B\mathrm{d}l_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}\alpha}{2\pi}$$

$$\oint B_l \, \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha = \mu_0 I$$

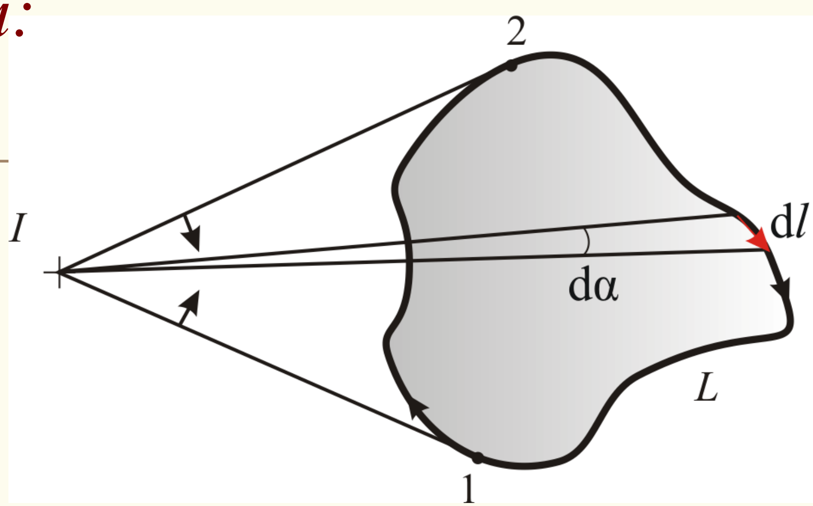
это теорема о циркуляции вектора $\vec{\mathrm{B}}$:

циркуляция вектора магнитной индукции равна току, охваченному контуром, умноженному на магнитную постоянную:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

Теорема о циркуляции магнитного поля (в вакууме)

Иначе обстоит дело, *если ток не охватывается контуром:*



В этом случае при обходе радиальная прямая поворачивается сначала в одном направлении (1–2), а потом в другом (2–1). Поэтому $\oint d\alpha = 0$,

и следовательно, в этом случае

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 0$$

Итак, $\oint\limits_L B_l dl = \mu_0 I,$

где I – ток, охваченный контуром L

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м$$

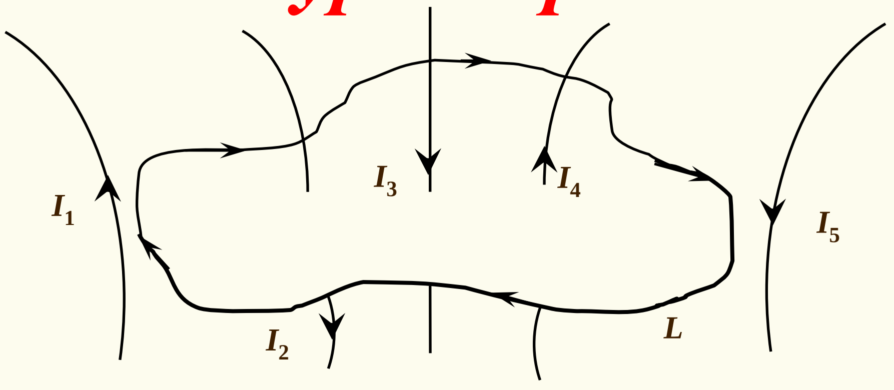
Эта формула справедлива и для тока произвольной формы, и для контура произвольной формы.

$$\oint\limits_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

Если контур охватывает несколько токов, то

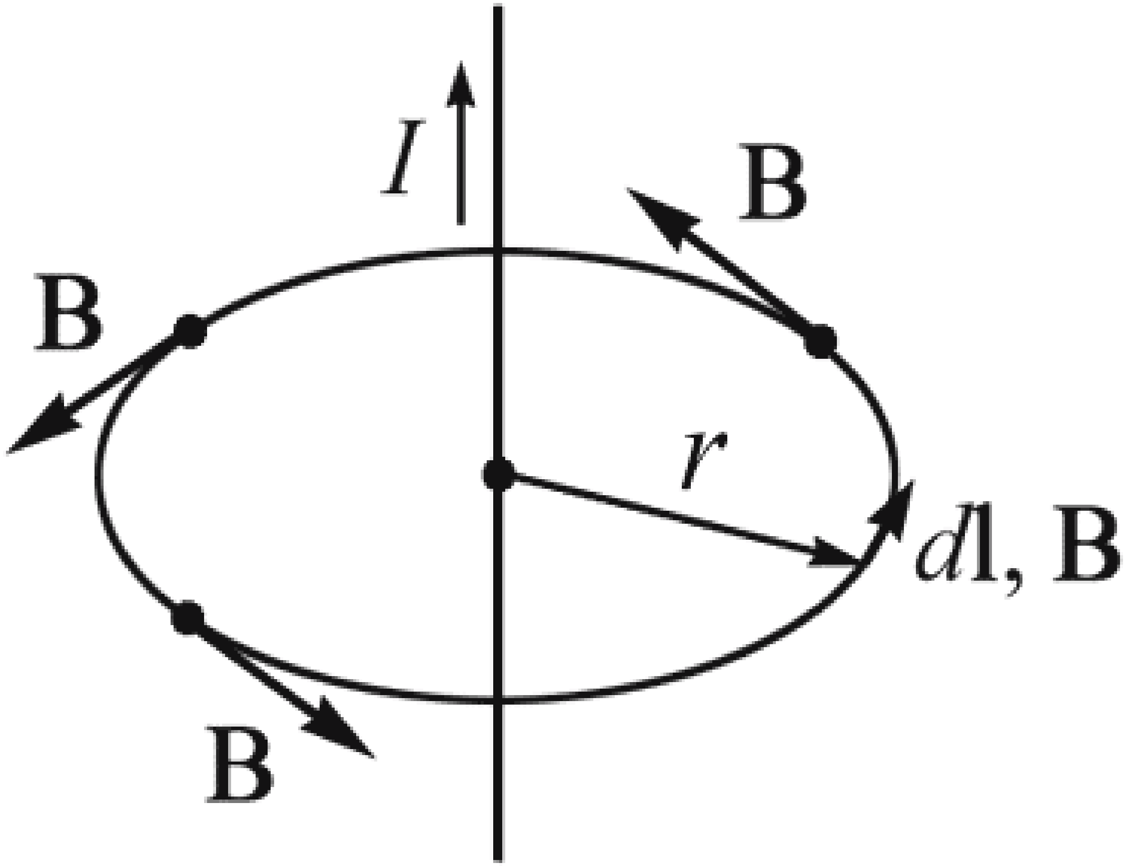
$$\oint B_l \mathrm{d}l = \mu_0 \sum_i I_i$$

т.е. ***циркуляция вектора*** $\vec{\mathrm{B}}$ ***равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром произвольной формы.***



Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I$

позволяет легко рассчитать величину **B** от бесконечного проводника с током:



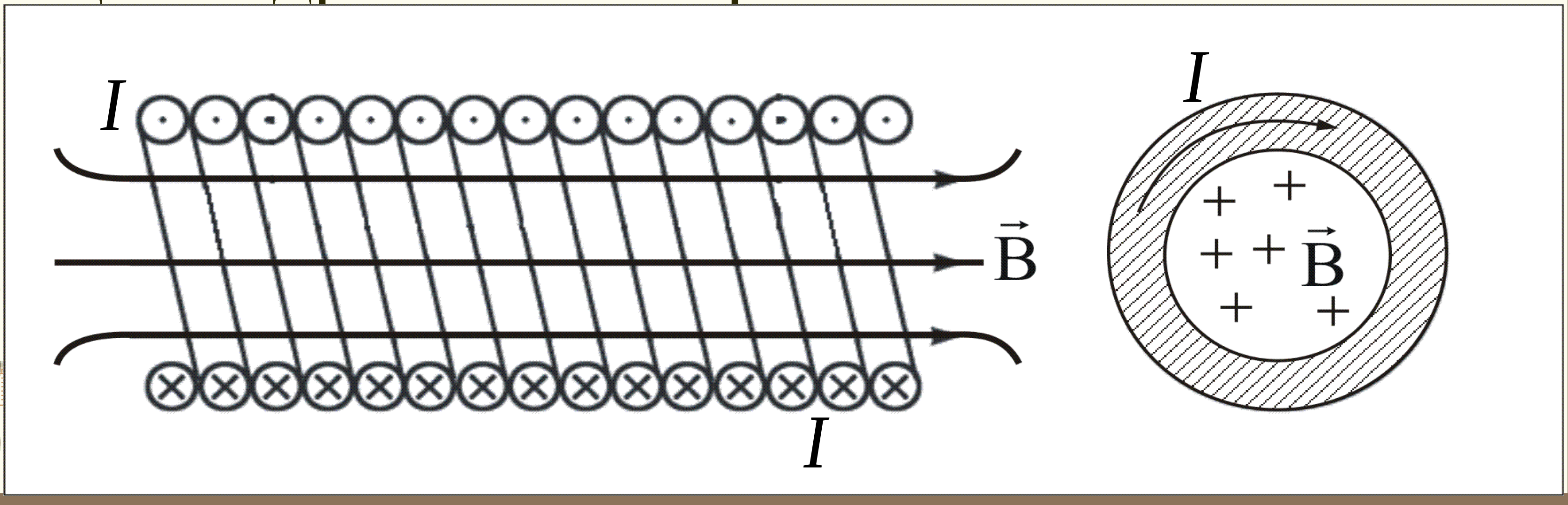
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

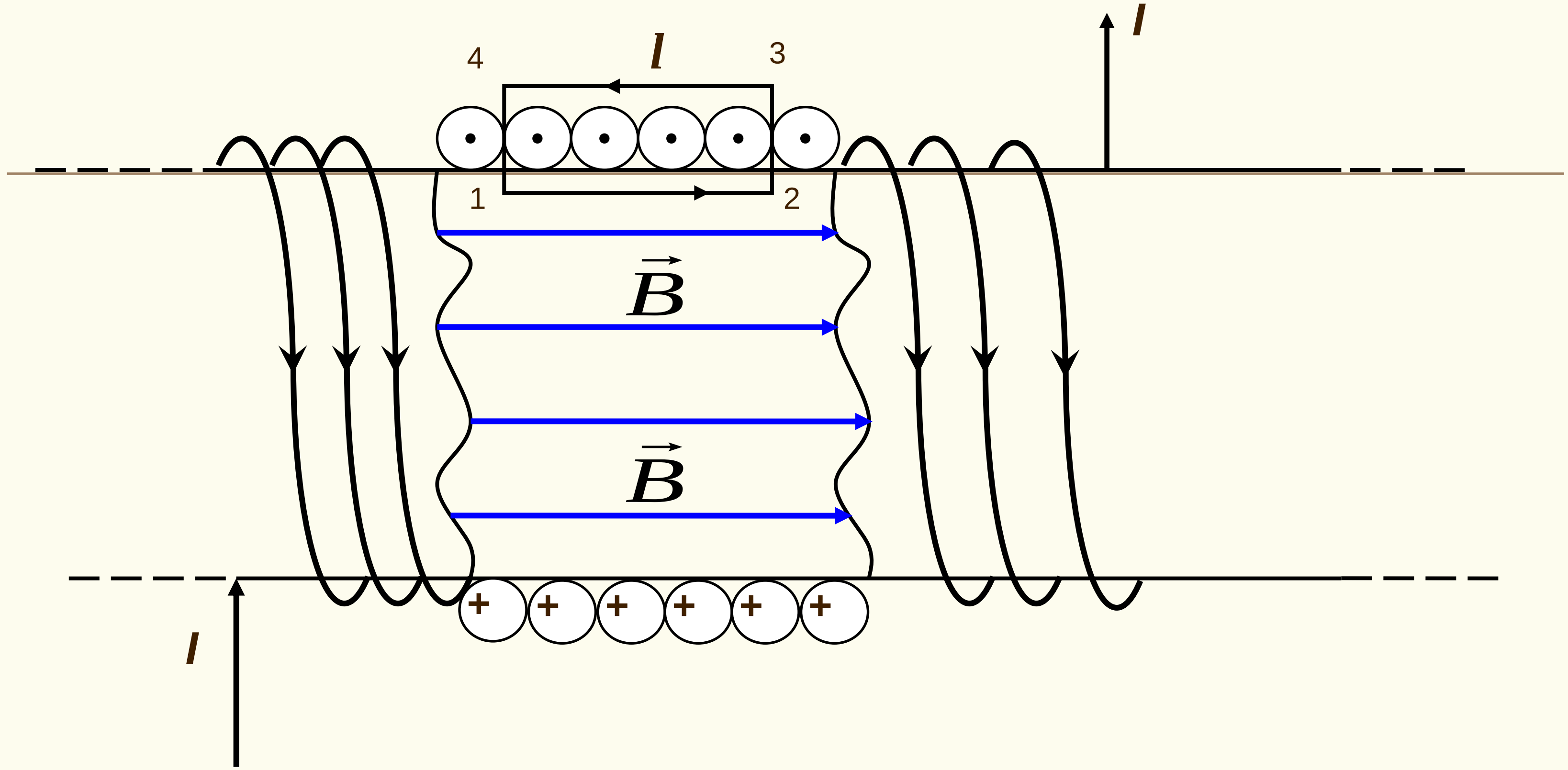
Что совпадает с ранее полученным.

Магнитное поле соленоида

Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ ($\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$) для вычисления простейшего магнитного поля

– бесконечно ***длинного соленоида***, представляющего собой тонкий провод, намотанный плотно виток к витку на цилиндрический каркас.





Поле внутри соленоида связано с направлением тока правилом правого буравчика. Выберем контур 1-2-3-4-1, часть которого (1-2) находится внутри соленоида, а часть — снаружи.

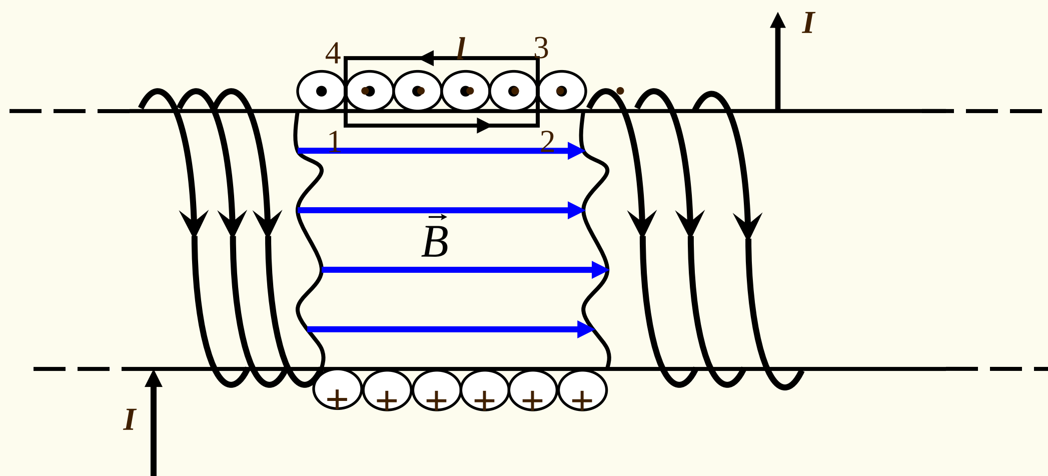
Вычислим циркуляцию вектора магнитной индукции по этому контуру:

$$\oint\limits_{1-2-3-4-1} \vec{B}d\vec{l} = \int\limits_{1-2} \vec{B}d\vec{l} + \int\limits_{2-3} \vec{B}d\vec{l} + \int\limits_{3-4} \vec{B}d\vec{l} + \int\limits_{4-1} \vec{B}d\vec{l} = B \cdot l$$

Второй и четвёртый интегралы равны нулю, т.к. вектор $\vec{\mathrm{B}}$ перпендикулярен направлению обхода, т.е. $B_l = 0$.

Возьмём участок 3–4 – на большом расстоянии от соленоида, где поле стремится к нулю и пренебрежём третьим интегралом.

Поэтому циркуляция оказывается равной произведению ***B·l***



Теперь воспользуемся теоремой о циркуляции:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = B \cdot l = \mu_0 \sum I_i$$

Здесь алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром, равна:

$$\sum I_i = I \cdot N = I \cdot n \cdot l$$

где: *I*— ток в соленоиде;

l— длина стороны контура;

n — число витков на единице длины соленоида. *N*=*n*·*l* – число витков на длине *l*.

Таким образом:

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot I \cdot n \cdot l,$$

откуда следует, что:

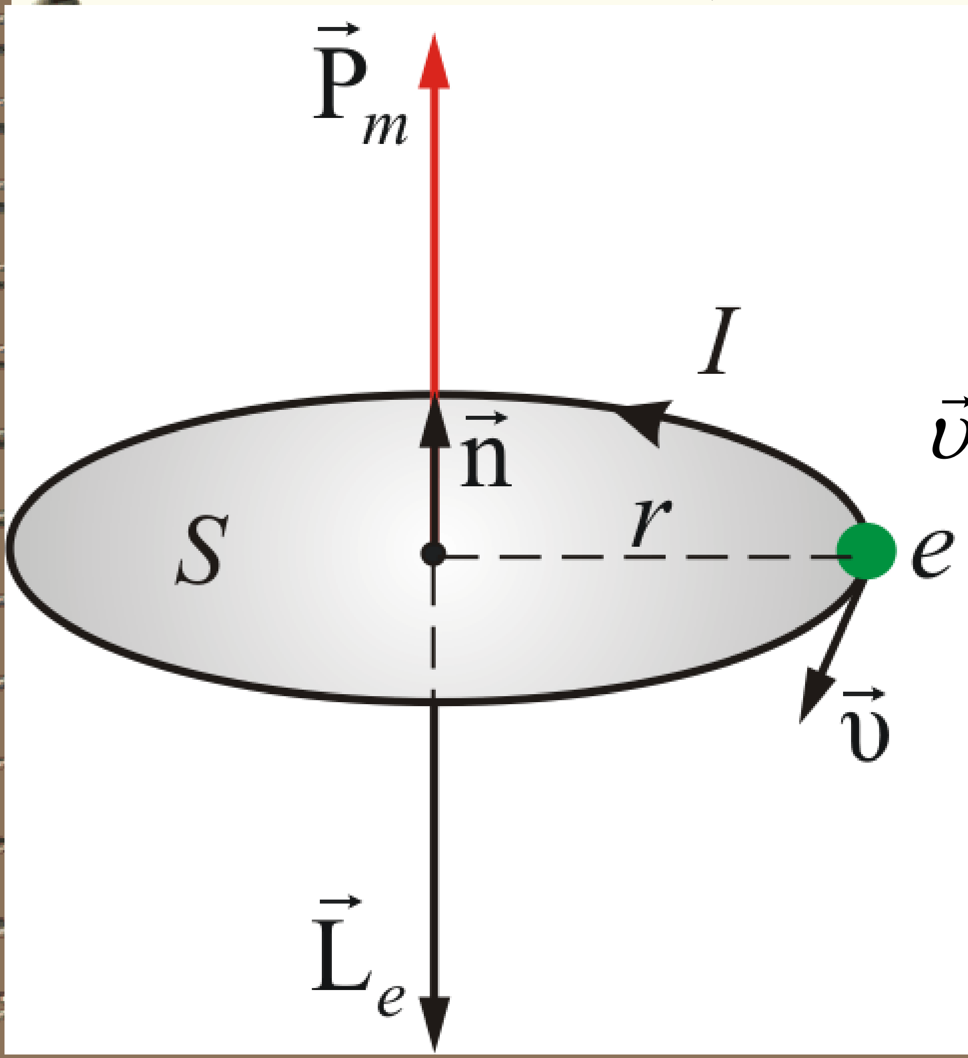
$$\boxed{B = \mu_0 \cdot n \cdot I}$$

Индукция магнитного поля соленоида пропорциональна силе тока ***I*** и числу витков ***n*** на единице длины соленоида.

Магнитное поле в веществе

Экспериментальные исследования показали, что все вещества в большей или меньшей степени обладают магнитными свойствами. У некоторых материалов магнитные свойства сохраняются и в отсутствие внешнего магнитного поля. Магнитные свойства веществ определяются магнитными свойствами атомов или элементарных частиц (электронов, протонов и нейтронов), входящих в состав атомов. Источниками магнитного поля в веществе являются **орбитальное и спиновое движения связанных зарядов в составе атомов**.

Электрон, движущийся по орбите в атоме эквивалентен замкнутому контуру с ***орбитальным током*** $I = e\nu,$ где e=1,6·10^{-19} $Кл$ – заряд электрона,



ν – частота его вращения по орбите,

$\vec{\upsilon}$ - скорость электрона

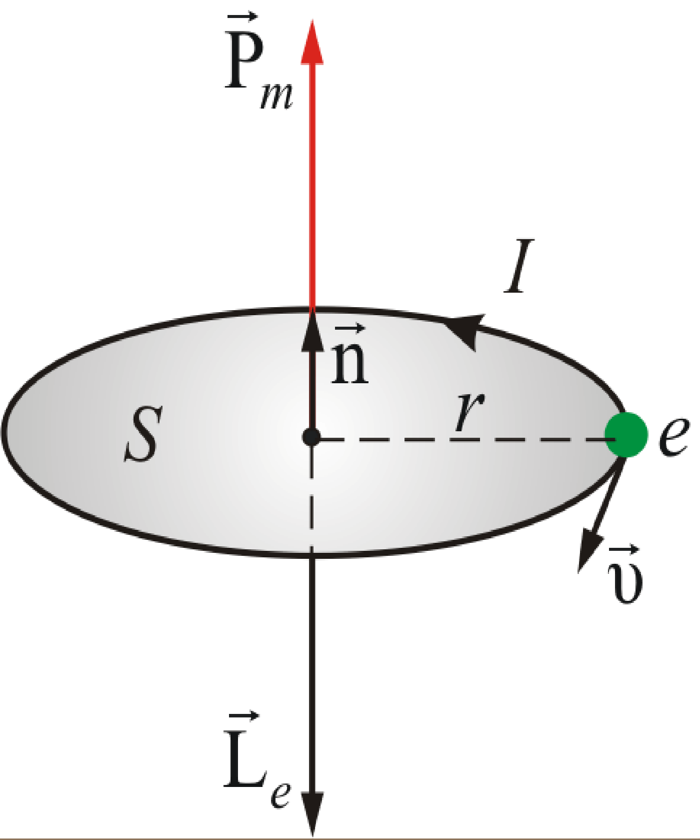
$$\boxed{\nu = \frac{\upsilon}{2\pi r}}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi r}{\upsilon}$$

Орбитальному току соответствует ***орбитальный магнитный момент электрона*** $\vec{\mathbf{P}}_m$

$$\boxed{\vec{\mathbf{P}}_m = IS\vec{n} = \frac{e\upsilon}{2\pi r} S\vec{n},}$$

где S – площадь орбиты,
$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к S.

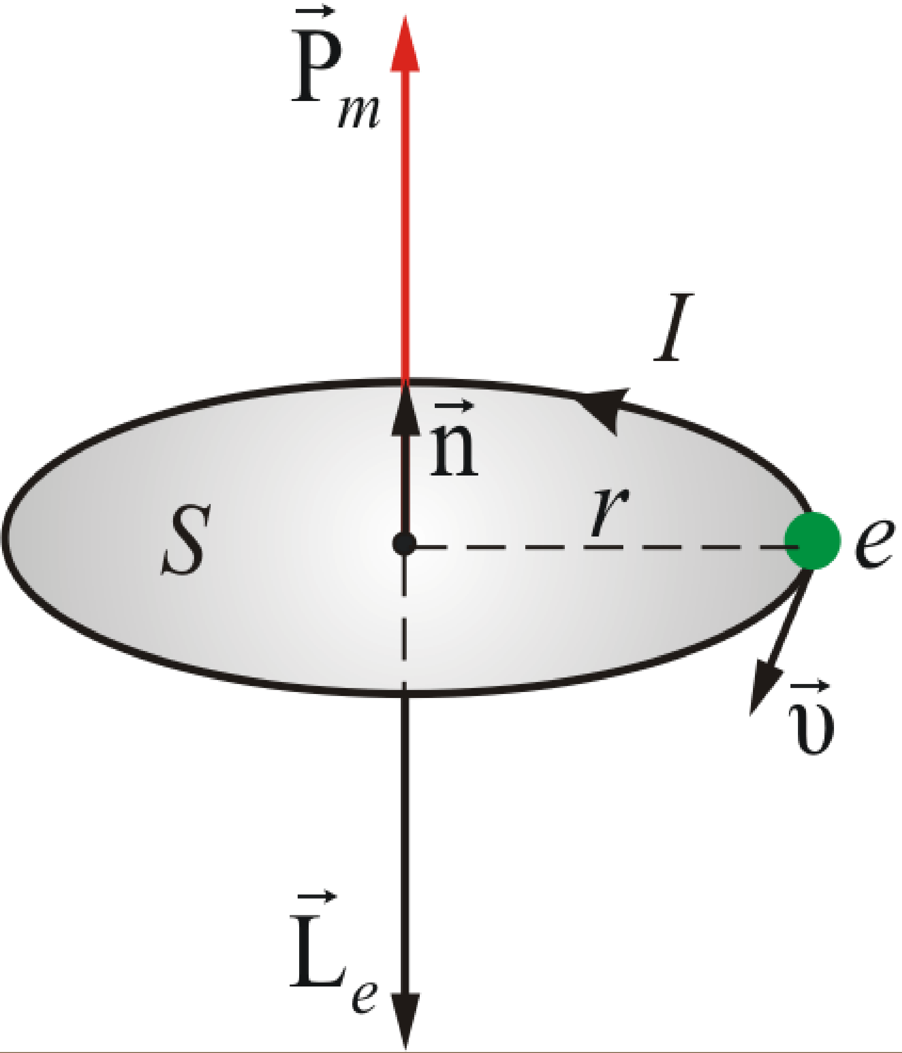


Электрон, движущийся по орбите имеет ***орбитальный момент импульса*** $\mathbf{L}_e$, который имеет противоположное направление по отношению к $\mathbf{P_m}$ и связан с ним соотношением:

$$\boxed{\vec{\mathbf{P}}_m = \gamma \vec{\mathbf{L}}_e.}$$

$\gamma = -\frac{e}{2m}$ ***- гиромагнитное отношение***

Электрон обладает ***собственным моментом импульса*** L_{eS}, который называется ***спином электрона s***:



$$L_{eS} = \frac{1}{2}\hbar$$

где h постоянная Планка:

$$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,Дж \cdot с$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,Дж \cdot с$$

При включении внешнего магнитного поля орбитальное и спиновое движения атомных электронов изменяются. Эти измененные движения определяют молекулярные токи, индуцированные магнитным полем.

Эти токи называются **токами намагничивания** или **молекулярными токами**. С их помощью описывается отклик вещества на внешнее магнитное поле, а именно создание дополнительного, **индуцированного магнитного поля**.

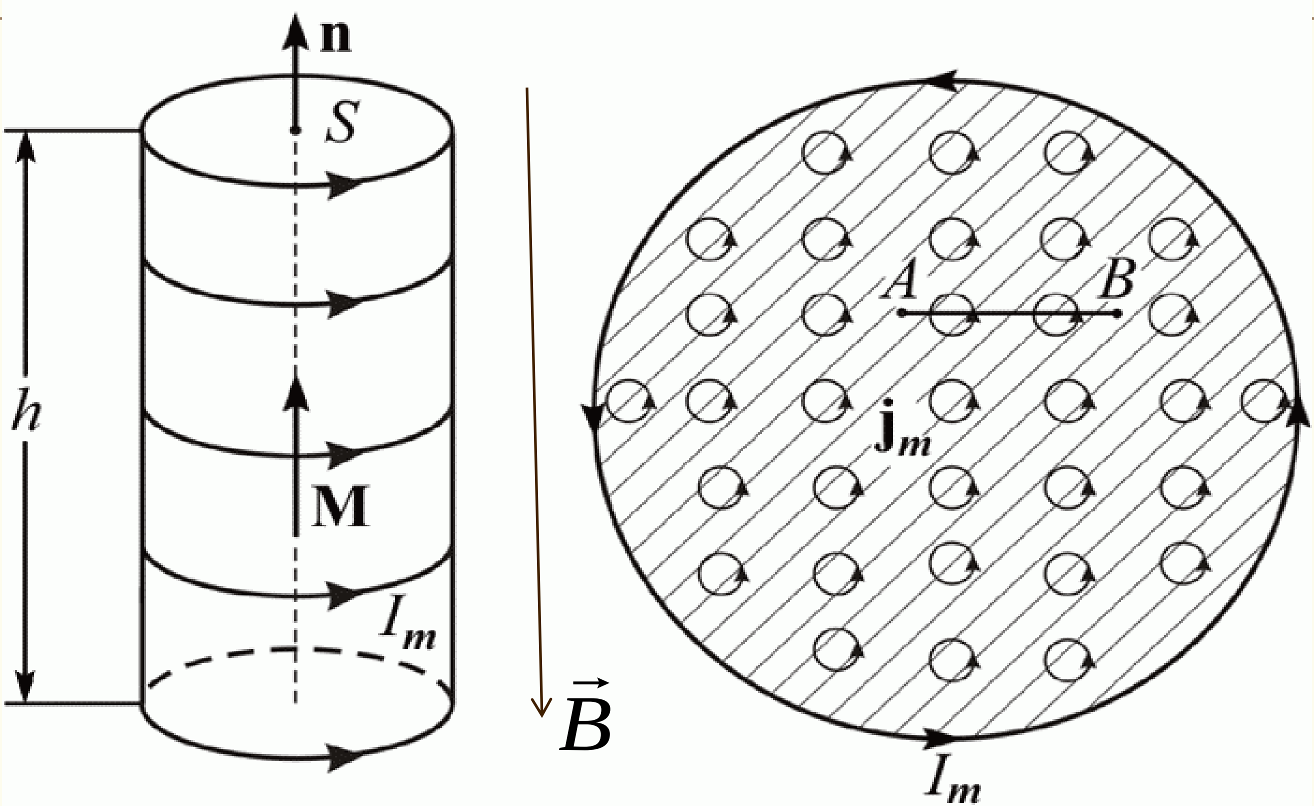
Действие магнитного поля на вещество. Индуцированные молекулярные токи. Вектор намагничивания

Все вещества являются **магнетиками**, так как под действием внешнего поля они намагничиваются и их **магнитный момент единицы объёма** оказывается отличным от нуля. Он характеризует **намагниченность** вещества и называется **вектор намагничивания:**

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{mi}$$

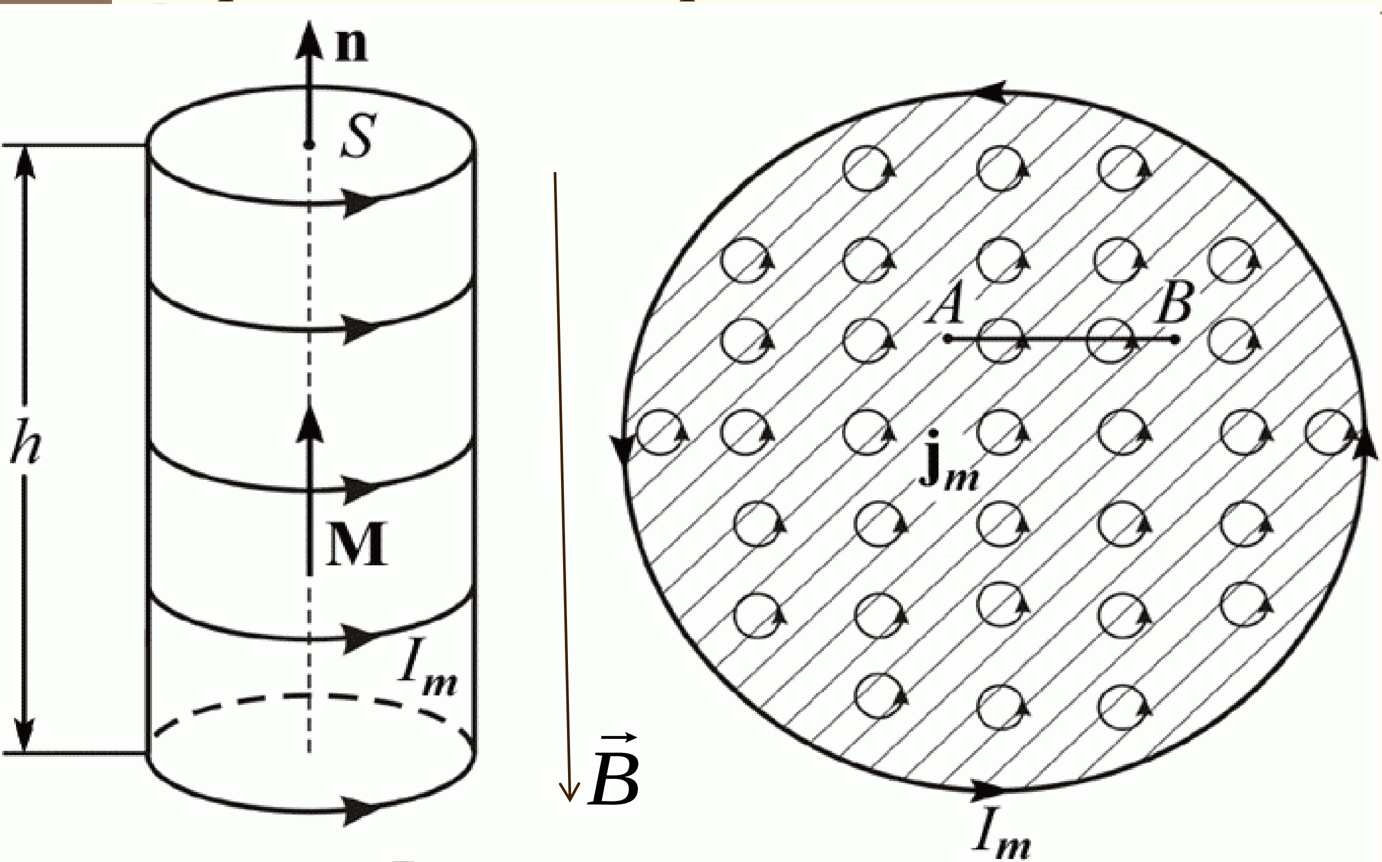
где $\vec{p}_{mi}$ магнитный момент i - го атома из числа n атомов, содержащихся в объеме ΔV.

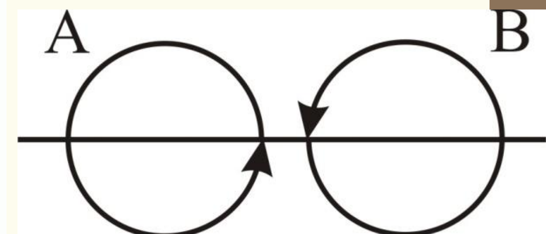
Для того чтобы связать вектор $\vec{\mathbf{j}}$ с током I_m, рассмотрим равномерно намагниченный параллельно оси цилиндрический стержень:



Равномерная намагниченность означает, что плотность атомных циркулирующих токов j_m внутри материала повсюду постоянна.

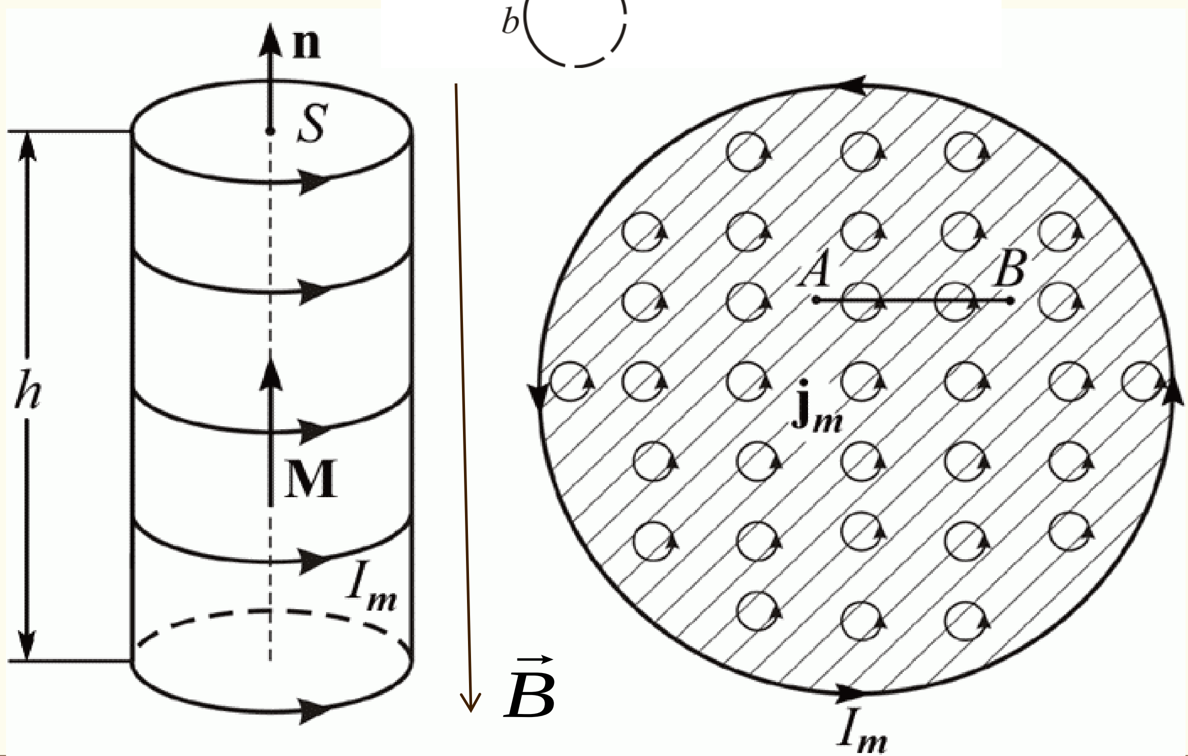
Каждый атомный ток в плоскости сечения стержня, перпендикулярной его оси, представляет микроскопический кружок, причем все микротоки текут в одном направлении – против часовой стрелки.





В местах соприкосновения отдельных атомов и молекул молекулярные токи противоположно направлены и компенсируют друг друга.

Некомпенсированными остаются лишь **токи, текущие вблизи поверхности материала**, создавая на поверхности материала некоторый **микроток** I_m, возбуждающий во внешнем пространстве магнитное поле, равное полю, созданному всеми молекулярными токами.



На границе магнетика с вакуумом вектор намагничивания связан с возникающими поверхностными молекулярными токами соотношением:

$$\vec{i}_m = \left[\vec{J} \times \vec{n}\right]$$

где $\vec{i}_m$ - линейная плотность поверхностных молекулярных токов,

$\vec{n}$ - вектор наружной нормали к поверхности магнетика.

$i_m = J_l$, где J_l - проекция на ось цилиндра.

Можно показать, что намагниченность и токи намагничивания связаны между собой интегральным соотношением:

$$I_m = \int_S \vec{j}_m d\vec{S} = \int_L \vec{i}_m d\vec{l} = \oint_L \vec{J} d\vec{l}$$

где слева стоит сила молекулярного тока I_m через произвольную поверхность S внутри магнетика, определяемая плотностью молекулярных токов $\vec{j}_m$ (возникающих в неоднородном магнетике и пронизывающих эту поверхность), а справа стоит **циркуляция вектора намагниченности** вдоль замкнутой линии *L*, ограничивающей эту поверхность.

Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе

С учетом как **токов проводимости** I_{np}, создаваемых свободными зарядами в проводниках, так и **токов намагничивания** I_m, создаваемых связанными зарядами в веществе, **теорема о циркуляции** векторного поля магнитной индукции вдоль произвольного замкнутого контура L **принимает вид:**

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\left(I_{np} + I_m\right)$$

где справа токи проводимости I_{np} и молекулярные токи I_m.

Поскольку I_m связана с циркуляцией вектора намагничивания $\vec{\mathbf{J}}$ соотношением $I_m = \oint_L \vec{J} d\vec{l}$, то:

$$\oint_L (\vec{B} - \mu_0 \vec{J}) d\vec{l} = \mu_0 I_{np}$$

или

$$\oint_L \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \mu_0 \vec{J}) d\vec{l} = I_{np}$$

Обозначим $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B} - \mu_0 \vec{J}\right)$ - **напряжённость магнитного поля**

Тогда: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}$

Теперь теорему о циркуляции магнитного поля в веществе можно записать через вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}$:

$$\boxed{\oint_L \vec{H}d\vec{l} = I}$$

Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе

Циркуляция вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура L равна алгебраической сумме токов проводимости I охватывающих этот контур.

Для изотропных магнетиков связь между индукцией $\vec{B}$ и напряжённостью магнитного поля $\vec{H}$ линейная и в этом случае можно положить:

$$\vec{J} = \chi\vec{H}$$

где χ - магнитная восприимчивость, тогда:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{J} = \mu_0(1+\chi)\vec{H} = \mu\mu_0\vec{H}$$

где $\mu = 1 + \chi$ - магнитная проницаемость вещества.

И получаем:

$$\boxed{\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}}$$

Магнитные свойства вещества

МАГНЕТИКИ

СЛАБОМАГНИТНЫЕ ВЕЩЕСТВА

ДИАМАГНЕТИКИ

- *Водород*
- *Бензол*
- *Вода*
- *Медь*
- *Стекло*
- *Кварц*
- *Каменная соль*
- *Висмут*
- *Графит*

$\mu \leqslant 1$

ПАРАМАГНЕТИКИ

- *Азот*
- *Воздух*
- *Кислород*
- *Эбонит*
- *Алюминий*
- *Вольфрам*
- *Платина*

$\mu \geqslant 1$

СИЛЬНОМАГНИТНЫЕ ВЕЩЕСТВА

ФЕРРОМАГНЕТИКИ

- *Железо*
- *Никель*
- *Кобальт*

$\mu \gg 1$

μ - магнитная проницаемость вещества

Диамагнетизм (от греч. *dia* – расхождение) –свойство веществ намагничиваться противоположно приложенному магнитному полю.

Диамагнетиками называются вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствии внешнего поля равны нулю, т.к. магнитные моменты всех электронов атома взаимно скомпенсированы (*например инертные газы, водород, азот,* NaCl, Bi, Cu, Ag, Au *и др.)*. Для них $\mu < 1$, $\chi < 0$.

При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле его атомы приобретают наведенные магнитные моменты ***направленные противоположно вектору*** $\vec{\mathbf{B}}$.

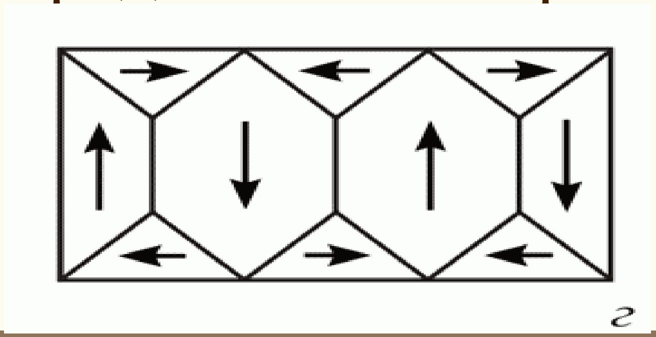
Парамагнетизм (от греч. *para* – возле) – свойство веществ во внешнем магнитном поле намагничиваться в направлении этого поля, поэтому внутри парамагнетика к действию внешнего поля прибавляется действие наведенного внутреннего поля.

Парамагнетиками *называются вещества, атомы которых имеют в отсутствии внешнего магнитного поля, отличный от нуля магнитный момент* $\vec{\mathbf{p}}_m$.

Эти вещества намагничиваются в направлении вектора $\vec{\mathbf{B}}$. У них $\mu > 1$, а $\chi > 0$

К ферромагнетикам (*ferrum* – железо) относятся вещества, магнитная восприимчивость которых положительна и очень велика 10^2–10^5. Например, у стали $\mu \approx 8000$, у сплава железа с никелем магнитная проницаемость достигает значений 250000.

Наличие у ферромагнетиков самопроизвольного магнитного момента в отсутствие внешнего магнитного поля означает, что электронные спины и магнитные моменты атомных носителей магнетизма ориентированы в веществе упорядоченным образом и образуют области



спонтанной намагниченности – домены.

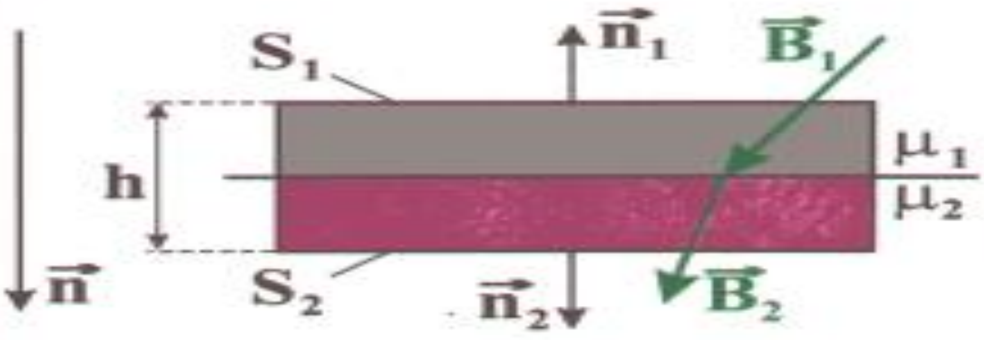
К группе ферромагнетиков относятся химические элементы: железо, никель, кобальт и их сплавы, а так же лантаниды (например, гадолиний). Из них наибольшей магнитной проницаемостью обладает железо. Поэтому вся эта группа получила название ферромагнетиков.

Ферромагнетиками могут быть различные сплавы, содержащие ферромагнитные элементы. Широкое применение в технике получили керамические ферромагнитные материалы – ферриты.

Для каждого **ферромагнетика** существует определенная температура (так называемая температура или **точка Кюри**), выше которой ферромагнитные свойства исчезают, и вещество становится **парамагнетиком**. У железа, например, температура Кюри равна 770 °С, у кобальта 1130 °С, у никеля 360 °С.

Граничные условия для векторов B и H

Поведение векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе раздела магнетиков



$(S_1 = S_2 = S)$

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

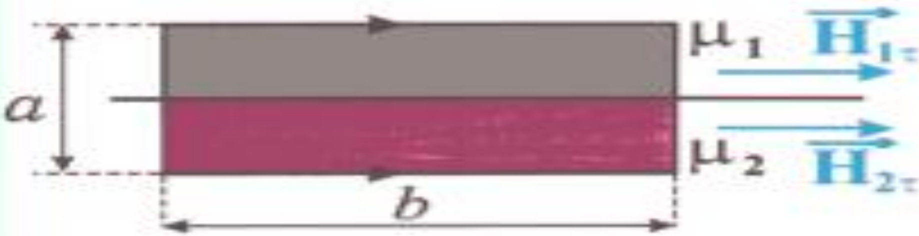
при $h \to 0$

$$\Phi = B_{1n_1} S_1 + B_{2n_2} S_2 = (B_{1n_1} + B_{2n_2}) S = 0$$

отсюда $B_{1n_1} = -\,B_{2n_2}$

Проектируя на $\vec{n}$, получаем :

$$B_{1n} = B_{2n}$$



так как $\mu_0\mu_1 H_{1n} = \mu_0\mu_1 H_{2n}$,

то $$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j}\, d\vec{S}$ при $\vec{j} = 0,\ a \to 0,\ H_{1\tau} b - H_{2\tau} b = 0$

Отсюда $H_{1\tau} = H_{2\tau}$

так как $\dfrac{B_{1\tau}}{\mu_0\mu_1} = \dfrac{B_{2\tau}}{\mu_0\mu_1}$, то $\dfrac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$

Лекция закончена!