

Электричество и магнетизм

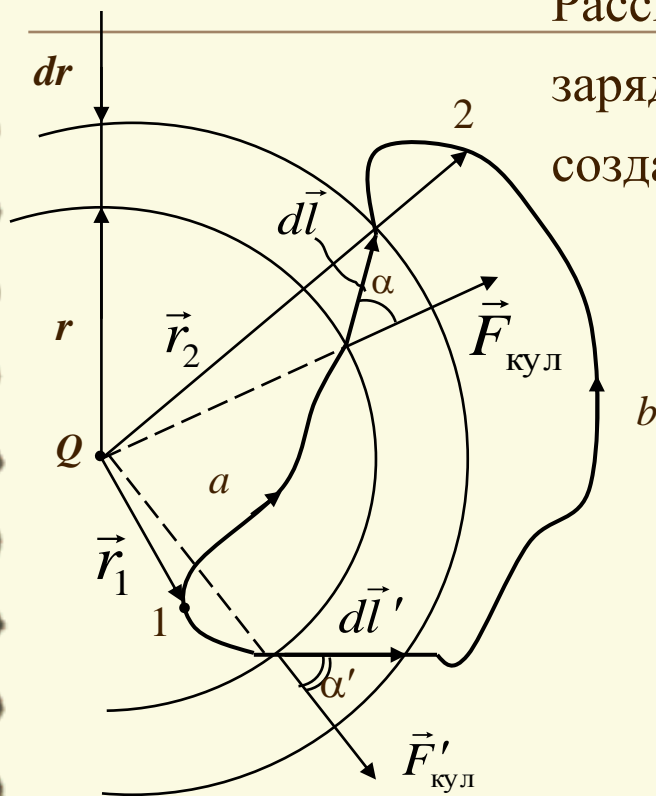
Семестр 2

ЛЕКЦИЯ № 3

1. Работа сил электростатического поля при перемещении заряда. Потенциал и разность потенциалов.
2. Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля.
3. Связь напряжённости и потенциала электростатического поля.
4. Эквипотенциальные поверхности

Работа сил электростатического поля при перемещении заряда. Потенциал.

Рассмотрим произвольное перемещение (1–а–2) заряда q в электростатическом поле. Пусть поле создаётся неподвижным точечным зарядом Q



$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F \cdot dl \cdot \cos \alpha = F \cdot dr$$

$$A_{1-2}(\vec{F}_{\text{Кул.}}) = \int_1^2 \vec{F}_K d\vec{l} = \int_1^2 F_K dr.$$

на перемещении $d\vec{l}'$ электрическая сила совершит работу

$$dA' = \vec{F} \cdot d\vec{l}' = F \cdot dl' \cdot \cos \alpha' = F dr$$

$$A'_{1-b-2}(\vec{F}_K) = A_{1-a-2}(\vec{F}_K)$$

Вычислим работу кулоновской силы при перемещении заряда q из точки 1 в положение 2 (по любой траектории):

$$\begin{aligned} A_{1-2}(\vec{F}_{\text{Кул.}}) &= \int_1^2 \vec{F}_K d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} F_K \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} k_0 \frac{qQ}{r^2} dr = \\ &= k_0 qQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = k_0 qQ \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = k_0 qQ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned}$$

Силы, работа которых не зависит от вида траектории и определяется только положением её начальной и конечной точек, называются **консервативными**.

Вывод:

Кулоновская сила консервативна.

Величина работы никак не связана с видом траектории. Она зависит только от положения её начальной (r_1) и конечной (r_2) точек.

В механике было показано, что *работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии системы*:

$$A_{1-2}(\vec{F}_{\text{конс.}}) = E_{p_1} - E_{p_2}$$

В последней формуле мы получили:

$$A_{1-2}(\vec{F}_{\text{Кул.}}) = k_0 \frac{qQ}{r_1} - k_0 \frac{qQ}{r_2} = E_{p_1} - E_{p_2}$$

Потенциальная энергия системы двух точечных зарядов, или, что то же самое, энергия заряда q в электрическом поле точечного заряда Q :

$$E_p = k_0 \frac{qQ}{r} + const$$

Константа принимается обычно равной нулю. Это означает, что принимается равной нулю энергия взаимодействия зарядов q и Q на бесконечном удалении их друг от друга (при $r = \infty$). Тогда на расстоянии r энергия взаимодействия равна:

$$E_p = k_0 \frac{qQ}{r}$$

Потенциальная энергия заряженной частицы в электрическом поле зависит, таким образом, от величины заряда q и от его положения в поле относительно заряда Q , создающего поле.

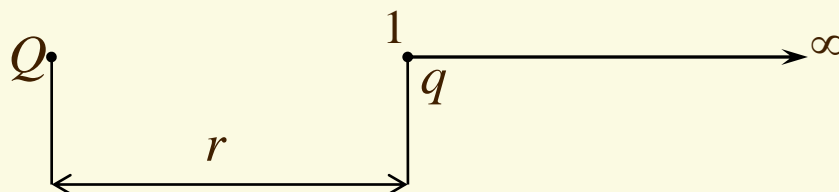
$$E_p = k_0 \frac{qQ}{r}$$

Энергия единичного ($q = 1$) точечного заряда уже не будет связана с величиной этого пробного заряда q и может быть принята в качестве энергетической характеристики данной точки электростатического поля:

$$\varphi = \frac{E_p}{q} = k_0 \frac{Q}{r}$$

- **потенциал точечного заряда Q**

Можно придать потенциалу и иной физический смысл.
Поместим заряд q в поле точечного заряда Q .
Первоначально расстояние между зарядами — r .



Отпустим заряд q . Под действием электрической силы отталкивания заряд q удалится в бесконечность. На этом перемещении кулоновская сила совершит работу:

$$A_{1-\infty}(F_{\text{Кул.}}) = \int_1^{\infty} \vec{F}_{\text{Кул.}} d\vec{l} = \int_r^{\infty} F dr = \int_r^{\infty} k_0 \frac{qQ}{r^2} dr = k_0 qQ \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{\infty} = k_0 \frac{qQ}{r}$$

Получаем:

$$\varphi = k_0 \frac{Q}{r} = \frac{A_{1-\infty}(F_{\text{Кул.}})}{q}$$

$$\varphi = k_0 \frac{Q}{r} = \frac{A_{1-\infty}(F_{\text{Кул.}})}{q}$$

Потенциал некоторой точки электростатического поля равен работе, совершаемой электрической силой при удалении единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность.

Теперь вычислим потенциал поля, созданного системой точечных зарядов Q_1, Q_2, \dots, Q_N .

При перемещении заряда q из точки 1 в бесконечность электрическая сила совершит работу, равную алгебраической сумме работ сил, действующих на движущийся заряд со стороны зарядов Q_1, Q_2, \dots, Q_N

$$A_{1-\infty}(\vec{F}) = A_{1-\infty}(\vec{F}_1) + A_{1-\infty}(\vec{F}_2) + \dots + A_{1-\infty}(\vec{F}_N)$$

Работа каждой силы равна:

$$A_{1-\infty}(\vec{F}_i) = q \cdot k_0 \frac{Q_i}{r_i} = q \cdot \varphi_i$$

Здесь $\varphi_i = k_0 \frac{Q_i}{r_i}$ — потенциал поля, создаваемого в точке 1 зарядом Q_i .

Таким образом, суммарная работа равна:

$$A_{1-\infty}(\vec{F}) = q\varphi_1 + q\varphi_2 + \dots + q\varphi_N = q \sum_{i=1}^N \varphi_i = q\varphi$$

$$\text{где } \varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i$$

Потенциал поля, созданного системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в рассматриваемой точке каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i$$

- принцип суперпозиции для потенциала

Разность потенциалов.

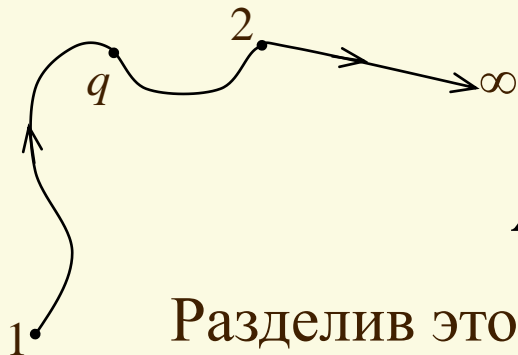
Обратимся к вычислению работы электрической силы при перемещении заряда q из точки 1 теперь уже произвольного электростатического поля в бесконечность. Поскольку эта работа не зависит от формы траектории, унося заряд в бесконечность, пройдем предварительно точку 2 электростатического поля

Работа на этом перемещении складывается из двух частей:

$$A_{1-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}}) = A_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}}) + A_{2-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}})$$

Разделив это равенство на величину переносимого заряда q , получим:

$$\frac{A_{1-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q} = \frac{A_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q} + \frac{A_{2-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q}$$



или:
$$\frac{A_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q} = \frac{A_{1-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q} - \frac{A_{2-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Здесь
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q} - \frac{A_{2-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q} \text{ — } \textit{\textbf{разность потенциалов}}$$
 двух точек поля.

Разность потенциалов равна работе, совершаемой электрической силой при перемещении единичного положительного заряда из начальной точки в конечную:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q}$$

Зная разность потенциалов двух точек поля, легко вычислить работу электрического поля, совершаемую при перемещении заряда q между этими точками:

$$A_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}}) = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

В международной системе единиц СИ потенциал (и разность потенциалов) измеряется в вольтах:

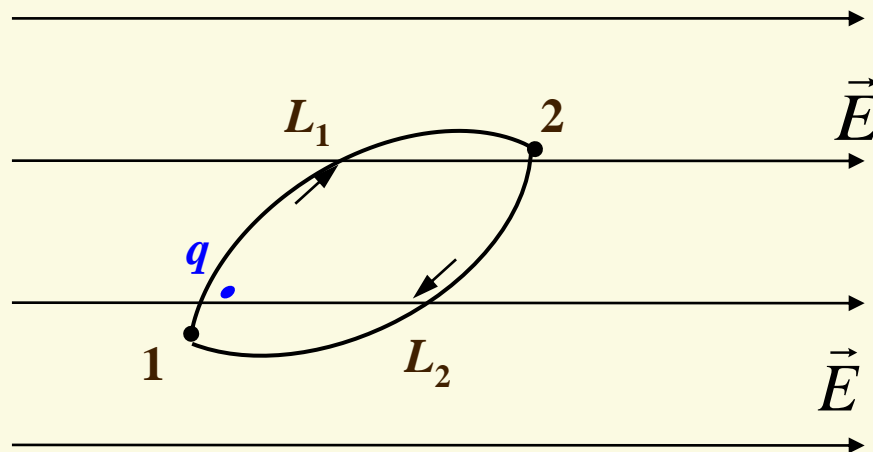
$$\varphi_1 = \frac{A_{1-\infty}(F_{\text{эл.}})}{q} \quad - \text{ потенциал } \left[\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В} \right]$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1-2}(F_{\text{эл.}})}{q} \quad - \text{ разность потенциалов}$$

Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля

Существуют два равнозначных определения консервативной силы. Оба они подробно обсуждались в механике.

1. Консервативной называется сила, работа которой не зависит от формы траектории.
2. Консервативной называется сила, работа которой на замкнутой траектории равна нулю.



Рассмотрим перемещение заряда q в электростатическом поле \vec{E} по замкнутой траектории. Заряд из точки 1 перемещается по пути L_1 в точку 2, а затем возвращается в исходное положение по другому пути L_2 . В процессе этого движения на заряд со стороны поля действует $\vec{F} = q\vec{E}$ консервативная электрическая сила, а работа этой силы на замкнутой траектории $L = L_1 + L_2$ равна нулю:

$$A(\vec{F}_{\text{эл.}}) = \oint_L \vec{F}_{\text{эл.}} \cdot d\vec{l} = \oint_L q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

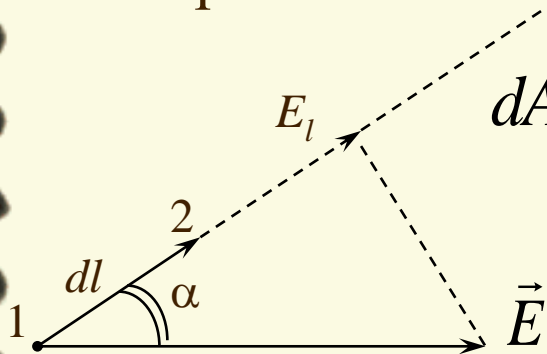
Поделив на q , получим:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Теорема о циркуляции в электростатике: *циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.*

Связь напряжённости и потенциала электростатического поля

Для отыскания связи, вычислим работу электрической силы на элементарном перемещении dl заряда q в электростатическом поле \vec{E} .



$$dA_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}}) = \vec{F} d\vec{l} = q\vec{E} d\vec{l} = qE dl \cos \alpha = qE_l dl$$

Эту же работу можно связать с разностью потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2) = -(\varphi_2 - \varphi_1) = -d\varphi$:

$$dA_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}}) = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -qd\varphi$$

Объединив, получим: $E_l dl = -d\varphi$ или $E_l = -\frac{d\varphi}{dl}$

Здесь E_l — проекция вектора напряжённости поля \vec{E} на направление перемещения, а $d\varphi$ — изменение потенциала при переходе в поле из точки 1 в точку 2.

Записав для направлений x , y и z , получим соответствующие составляющие (проекции) вектора напряжённости:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы означает, что проекция вектора напряжённости на ось x равна частной производной потенциала по x , взятой с противоположным знаком.

Полный вектор напряжённости можно представить в виде векторной суммы:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Последнее уравнение принято записывать так:

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

Здесь векторный оператор «градиент» *grad*:

$$grad = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Последнее уравнение устанавливает искомую связь двух характеристик электростатического поля — напряжённости и потенциала:

*напряжённость электростатического поля
равна градиенту потенциала с обратным
знаком:*

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

Единица измерения напряжённости электрического поля:

$$[E] = \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta l]} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Формула $\vec{E} = -grad\varphi$ выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке.

Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям \vec{E} в каждой точке поля

найти разность

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$$

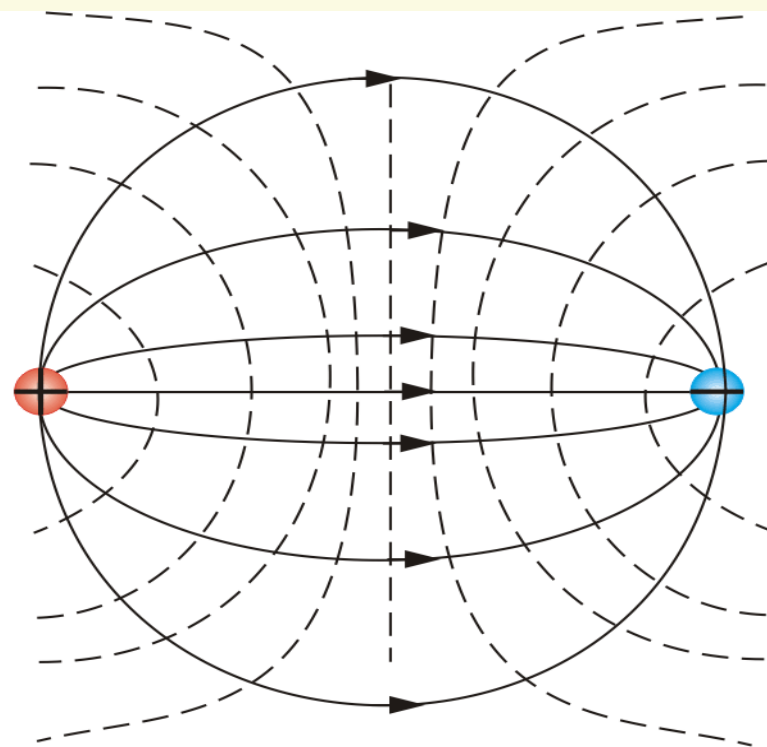
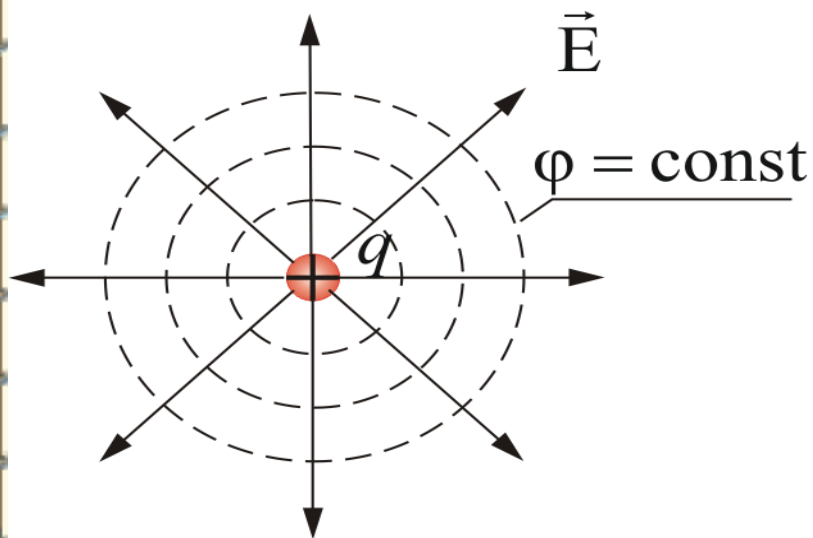
потенциалов между двумя произвольными точками поля.

Эквипотенциальные поверхности

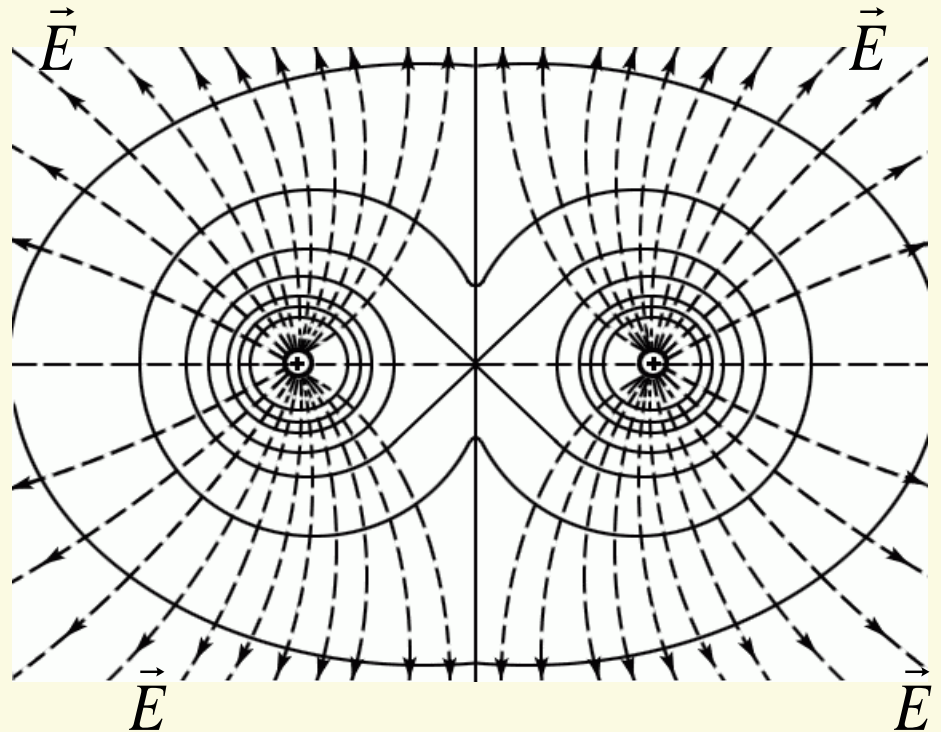
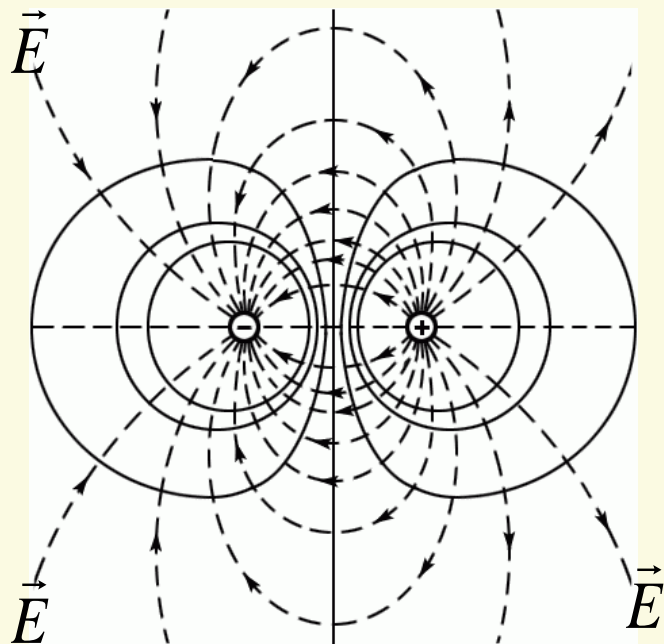
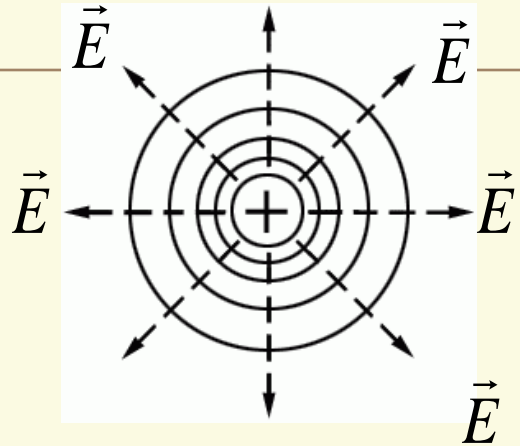
Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется **эквипотенциальной поверхностью**.

Уравнение этой поверхности (пунктиры на рис.)

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}$$



Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны





Лекция закончена!