Лекция 6

§13. Вычисление длины дуги кривой

Пусть AB – дуга незамкнутой ($A \neq B$) кривой на плоскости или в пространстве без точек самопересечения. Возьмем на AB последовательность точек в определенном направлении (от A к B или от B к A), например, $A = M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$. Соединив последовательно взятые точки отрезками, получим ломаную линию $M_0 M_1 \ldots M_{n-1} M_n$, вписанную в дугу AB.

Определение 1. *Длиной* l кривой AB называется (конечный) предел длин вписанных в AB ломаных, когда длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю (если предел при этом существует и не зависит от выбора точек ломаной). Кривая, имеющая конечную длину, называется *спрямляемой*.

Обозначим

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \left| M_{i-1} M_i \right|.$$

Тогда

$$l_{AB} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left| M_{i-1} M_i \right|.$$

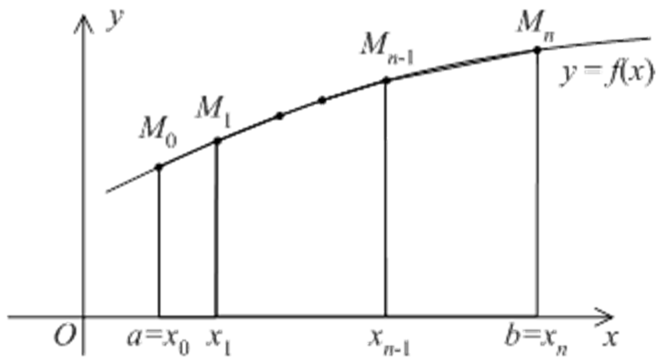
Отметим аддитивность длины кривой: если точка C лежит на спрямляемой кривой, то дуги AC и CB также спрямляемы и длина дуги AB равна сумме длин дуг AC и CB: $l_{AB} = l_{AC} + l_{CB}$.

Если AB – замкнутая кривая, т.е. $A = B$, то выберем на дуге AB промежуточную точку C. Если дуги AC и CB спрямляемы, то будем считать, что длина дуги AB равна сумме длин дуг AC и CB: $l_{AB} = l_{AC} + l_{CB}$. Можно показать, что длина дуги AB не зависит от выбора точки C.

Теорема 1(вычисление длины дуги графика функции). Если кривая задана уравнением $y=y(x),\ x\in[a,b]$ и производная $y'(x)$ является непрерывной функцией, то длина l дуги этой кривой равна

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx,$$

где a и b – абсциссы концов дуги.



Доказательство. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей промежуточными точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через λ наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i.$$

Рассмотрим точки $A = M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \ldots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), M_n(x_n, y_n) = B$ дуги графика функции. Найдем длину звена ломаной и длину всей ломаной:

$$|M_{i-1}M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y(x_i) - y(x_{i-1}))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [y'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})]^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (y'(\xi_i))^2 (\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Мы применили формулу конечных приращений к функции $y(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$, точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$. Таким образом, длина ломаной совпадает с интегральной суммой для интеграла $\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$. Переходя к пределу при $\lambda\to0$ находим, что

$$l_{AB}=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\left|M_{i-1}M_i\right|=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(y'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx.$$

Пример. Найти длину дуги кривой $y=\dfrac{2}{3}x^{3/2}$, $x\in[0,1]$.

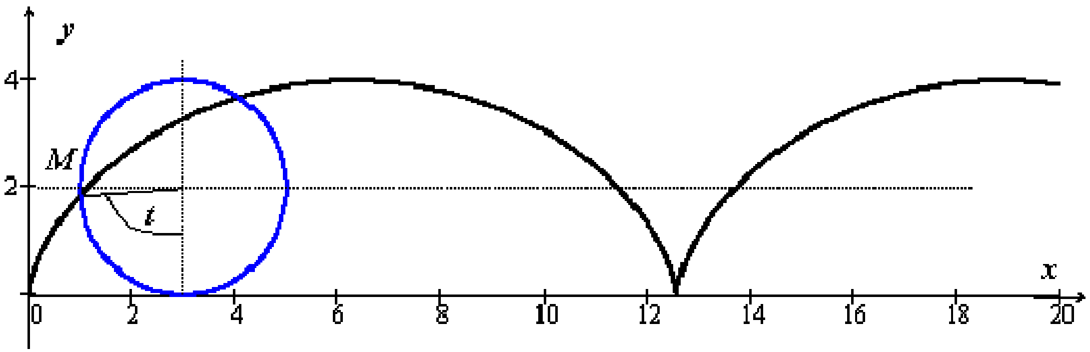
◀Находим $y'=\left(\dfrac{2}{3}x^{3/2}\right)'=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{3}x^{1/2}=\sqrt{x}$,

$$l=\int\limits_0^1\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}dx=\int\limits_0^1\sqrt{1+x}dx=\left.\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1=\frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right).▶$$

Теорема 2(вычисление длины дуги плоской кривой, заданной параметрически). Если плоская кривая задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x'(t)$, $y'(t)$ - непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$, то длина l этой кривой равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

Пример. Найти длину арки циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.



Циклоида

◀Находим

$$x' = 2\left(t-\sin t\right)' = 2\left(1-\cos t\right),\ y' = 2\left(1-\cos t\right)' = 2\sin t,$$

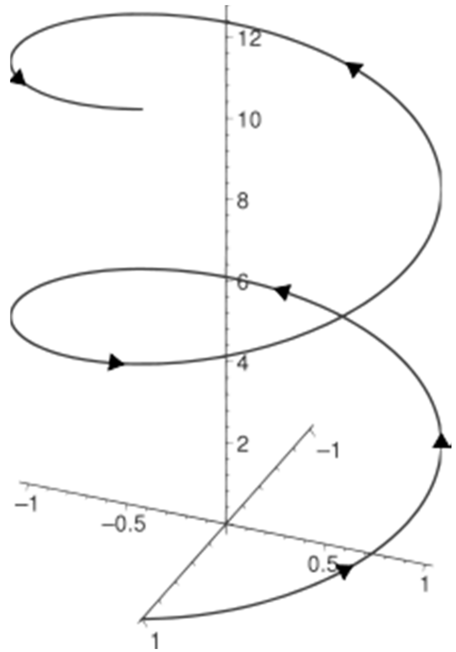
$$\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2} = \sqrt{\left(2\left(1-\cos t\right)\right)^2+\left(2\sin t\right)^2} = \sqrt{4-4\cos t} =$$

$$= 2\sqrt{2\sin^2\left(t/2\right)} = 2\sqrt{2}\sin\left(t/2\right).$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt = \int_{0}^{2\pi}2\sqrt{2}\sin\left(t/2\right)dt = -4\sqrt{2}\cos\left(t/2\right)\Big|_0^{2\pi} = 8\sqrt{2}.$$ ▶

Теорема 3 (вычисление длины дуги кривой в пространстве, заданной параметрически). Если кривая в пространстве задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ - непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$, то длина l этой кривой равна $l = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}dt$.

Пример. Найти длину дуги винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ct$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, $c > 0$.



На рисунке $a = 1, c = 1, t \in [0, 4\pi]$.

$$◀\, l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+c^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+c^2}\,dt=2\pi\sqrt{a^2+c^2}\,.▶$$

Теорема 4 (вычисление длины дуги кривой в полярных координатах). Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$ и функция $r'(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то длина l этой кривой равна

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+\left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

Доказательство. Выразим декартовые координаты точки через полярные координаты и перейдем к параметрическому заданию кривой, полагая параметр t равным полярному углу φ:

$$x = r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi.$$

Тогда

$$x' = \left(r(\varphi)\cos\varphi\right)' = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,$$

$$y' = \left(r(\varphi)\sin\varphi\right)' = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi,$$

$$\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2 = \left(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi\right)^2 + \left(r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi\right)^2 =$$

$$= \left(r'(\varphi)\right)^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \left(r(\varphi)\right)^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2.$$

По теореме 2

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

Пример. Найти длину кардиоиды $r = a\left(1+\cos\varphi\right)$, $a>0$.

◀ Очевидно, $\varphi \in \left[0,2\pi\right]$. В силу симметрии кривой относительно полярного луча можно вычислить длину дуги, соответствующей $\varphi \in \left[0,\pi\right]$ и удвоить результат.

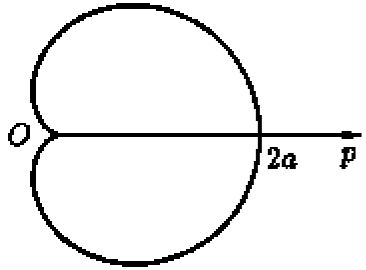


Рис. 187.

$$l = 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\varphi)+\left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}2a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 8a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 8a\,.$$ ▶

§14. Механические приложения определенного интеграла

1. Вычисление работы переменной силы при прямолинейном перемещении

Пусть материальная точка перемещается вдоль отрезка $[a,b]$ оси Ox под действием переменной силы $\vec{F}$, параллельной оси Ox. Тогда работа этой силы вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Пример. Какую работу надо затратить для того, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой равен R, на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется в бесконечность?

◄ Согласно закону всемирного тяготения сила F, действующая на тело массы m, равна

$$F = k\frac{mM}{r^2},$$

где k – гравитационная постоянная, M — масса Земли, r — расстояние тела до центра Земли. На поверхности Земли, т.е. при $r = R$, имеем $F = mg$, где g — ускорение свободного падения. Приравнивая выражения для F, находим, что

$$k\frac{mM}{R^2} = mg,$$

откуда $kM = gR^2$ и $F = mg\dfrac{R^2}{r^2}$.

Находим работу

$$A = \int_R^{R+h} F(r)dr = \int_R^{R+h} mg\frac{R^2}{r^2}dr = mgR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{R+h} = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = mgR\frac{h}{h+R}.$$

В пределе при $h \to \infty$ получаем, что $A = mgR$.

2. Вычисление моментов. Координаты центра масс

Статический момент материальной точки массы m, лежащей на координатной оси и имеющей координату x равен mx. Статические моменты M_x и M_y точки массы m, лежащей на плоскости и имеющей координаты (x, y), относительно оси Ox и оси Oy равны соответственно

$$M_x = my, \; M_y = mx.$$

Аналогично в пространстве определяются статические моменты точки массы m и имеющей координаты (x, y, z) относительно координатных плоскостей:

$$M_{xy} = mz, \; M_{xz} = my, \; M_{yz} = mx.$$

Момент инерции материальной точки массы m относительно точки A (относительно прямой l, относительно плоскости p) равен произведению массы точки на квадрат расстояния ее до точки A (до прямой l, до плоскости p, соответственно).

Статические моменты и моменты инерции системы материальных точек равны сумме соответствующих моментов точек, составляющих эту систему. Это позволяет получить формулы для вычисления моментов материального отрезка – стержня, некоторых кривых, плоских фигур и пространственных тел с помощью определенных интегралов.

Центр масс системы материальных точек на прямой равен $\frac{M}{m}$, где M - статический момент системы, а m – масса системы.

Для точек на плоскости центр масс C имеет координаты

$$x_C = \frac{M_y}{m},\ y_C = \frac{M_x}{m}.$$

Для точек в пространстве центр масс C имеет координаты

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, y_C = \frac{M_{xz}}{m},\ z_C = \frac{M_{xy}}{m},$$

где в числителях стоят статические моменты относительно соответствующих координатных плоскостей.

Так, для стержня $[a,b]$ с линейной плотностью $\rho(x)$ статический момент M и момент инерции I_0 относительно точки $O(0)$ вычисляются по формулам

$$M=\int_a^b x\rho(x)dx,\ I_0=\int_a^b x^2\rho(x)dx,$$

а момент инерции I_A относительно точки $A(x_0)$ - по формуле

$$I_A=\int_a^b (x-x_0)^2\rho(x)dx.$$

Пример. Найти центральный момент инерции стержня $[0,1]$, $\rho(x) = x^2$ (т.е. момент инерции относительно центра масс стержня).

◄ Найдем сначала массу, статический момент и центр масс стержня. Масса m стержня равна

$$m = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3};$$

статический момент M стержня равен

$$M = \int_0^1 x \langle x^2 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Тогда центр масс стержня имеет координату $x_C = \frac{M}{m} = \frac{3}{4}$.

Теперь найдем центральный момент инерции стержня:

$$I_C = \int_0^1 \left(x - \tfrac{3}{4}\right)^2 x^2 dx = \frac{1}{80}.$$