4. Постоянный электрический ток.
Законы Ома и Джоуля - Ленца. Правила Кирхгофа

Согласно **закону Ома**, записанному в интегральной форме, сила I постоянного тока, протекающего по участку проводника в отсутствие сторонних сил, прямо пропорциональна напряжению V на этом участке и обратно пропорциональна сопротивлению R участка

$$I = \frac{V}{R} \ .$$

Для протекания постоянного тока по **замкнутой цепи** необходим **источник постоянной ЭДС**, где **сторонние силы** (силы не- электростатического происхождения) совершают работу по пространственному разделению зарядов противоположных знаков. Эта работа компенсирует потери кинетической энергии направленного движения носителей тока за счет столкновений с ионами кристаллической решетки проводника при протекании тока по замкнутой цепи.

Величина ЭДС ε численно равна работе A сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда из точки наименьшего потенциала («-») источника в точку наибольшего потенциала(«+»)

$$\varepsilon = \frac{A(q)}{q} \ .$$

Здесь $A(q)$ –работа сторонних сил по перемещению заряда $q>0$.

Закон Ома для замкнутой цепи, состоящей из источника постоянной ЭДС ε с внутренним сопротивлением r и резистора сопротивлением R, имеет вид

$$I = \frac{\varepsilon}{r+R} \ ,$$

где I - сила постоянного тока в цепи. При этом напряжение на зажимах источника ЭДС

$$V = \varepsilon - Ir = \frac{R}{r+R} \ .$$

Закон сохранения энергии для данной цепи постоянного тока запишется следующим образом:

$$P_Э = P_T \ ,$$

где

$$P_Э = I\varepsilon$$

- электрическая мощность источника постоянной ЭДС при протекании через него от «-» к «+» постоянного тока I и

$$P_T = Q_T = I^2 (r+R)$$

- тепловая мощность, которая определяется **законом Джоуля - Ленца** и численно равна полному количеству теплоты Q_T, выделяемой на резисторах с сопротивлениями r и R за единицу времени. Отметим, что величина I^2r есть та мощность, которая теряется внутри источника ЭДС.

Правила Кирхгофа устанавливают соотношения для токов и напряжений в разветвленных цепях постоянного тока. Они позволяют рассчитать любую такую цепь, состоящую из узлов, где соединяются три и более проводника, и контуров, содержащих источники постоянной ЭДС вместе с резисторами и конденсаторами.

Первое правило Кирхгофа формулируется для узлов и выражает закон сохранения электрического заряда: алгебраическая сумма всех токов для каждого узла равна нулю и выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \; ,$$

где n - число проводников, сходящихся в узле. Токи, втекающие в узел, берутся со знаком «+», токи, вытекающие из узла, берутся со знаком «-». Согласно первому правилу Кирхгофа заряды в узле не накапливаются.

Второе правило Кирхгофа формулируется для контуров и получается на основе теоремы о циркуляции вектора напряженности электрического поля. При обходе контура выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} V_i = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \; .$$

Здесь в левой части равенства стоит алгебраическая сумма падений напряжения на всех резисторах и конденсаторах рассматриваемого контура.

Падение напряжения берется со знаком «+», если элемент цепи проходится от «+» к «-», и со знаком «-», если элемент цепи проходится от «-» к «+». В правой части равенства стоит алгебраическая сумма ЭДС всех источников, включенных в данный контур. Величина ЭДС берется со знаком «+», если источник проходится от «-» к «+», и берется со знаком «-», если он проходится от «+» к «-».

Для любой цепи постоянного тока можно всегда выбрать такое число узлов и контуров, чтобы с помощью правил Кирхгофа получить полную систему независимых уравнений, позволяющую найти все токи и напряжения рассматриваемой цепи.

Задача №13

Электрическая цепь состоит из источника постоянной ЭДС ε с внутренним сопротивлением r и внешнего резистора сопротивлением R (см.рис.1). Определите, как тепловая мощность $P_T(R)$, выделяемая на резисторе, зависит от его сопротивления и найдите ее максимальную величину $P_{T\max}$.

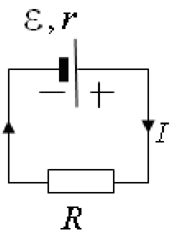

Рис. 1

Решение

Согласно закону Ома для замкнутой цепи сила тока в цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{r+R} \quad . \tag{1}$$

Тепловая мощность, выделяемая на резисторе, определяется законом Джоуля-Ленца:

$$P_T = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2} \quad . \tag{2}$$

Максимальная тепловая мощность находится с помощью уравнения для определения экстремума функции $P_T(R)$:

$$\frac{dP_T}{dR} = \frac{\varepsilon^2 (r-R)}{(r+R)^2} = 0 \quad . \tag{3}$$

Отсюда получаем, что максимум достигается при R=r, когда сопротивление резистора во внешней цепи равно внутреннему сопротивлению источника ЭДС и внешняя цепь в определенном смысле согласована с внутренней цепью источника,

$$P_{Tmax} = \frac{\varepsilon^2}{4r} \quad . \tag{4}$$

График зависимости $P_T(R)$ приведен на рис. 2 .

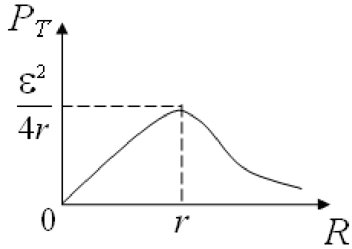

Рис. 2

Если ввести К.П.Д. данной цепи согласно формуле

$$\eta = \frac{P_T}{P_Э}100\% = \frac{I^2 R}{I\varepsilon}100\% = \frac{R}{r+R}100\% \ ,$$

то при получении максимальной мощности (4)

$$\eta=50\% \ ,$$

т.е. половина всей электрической мощности источника ЭДС теряется внутри самого источника. Максимальный К.П.Д. достигается, если $R>>r$, но при этом тепловая мощность на резисторе стремится к 0.

Ответ: $P_T = \dfrac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$, $P_{Tmax} = \dfrac{\varepsilon^2}{4r}$, $R=r$.

Задача№14

Для электрической цепи постоянного тока, показанной на рис. 1, определите показания $V_В$ идеального вольтметра ($R_В$=∞) и идеального амперметра $I_А$($R_А$=0). Параметры элементов цепи указаны на схеме.

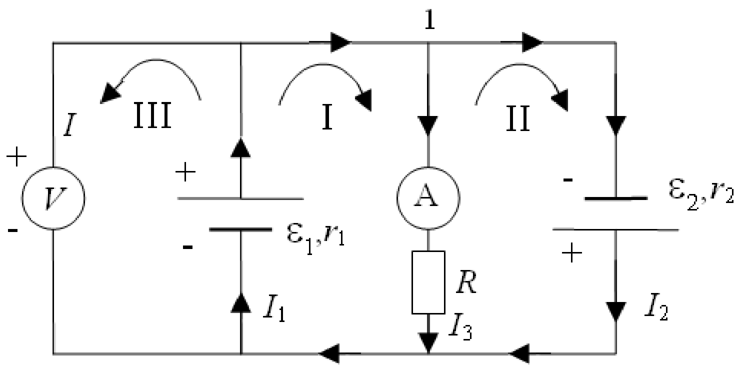

Рис. 1

Решение

В рассматриваемой схеме можно выделить 6 контуров и 4 узла. Для полного описания электрических процессов, происходящих в цепи, достаточно найти токи I_1, I_2, и I_3, предполагаемые направления которых показаны на схеме. Ток через идеальный вольтметр равен нулю, поскольку сопротивление такого вольтметра считается равным бесконечности (разрыв цепи).

Для получения полной системы независимых уравнений для нахождения четырех неизвестных величин $V_В$, I_1, I_2, и I_3 выберем контуры I, II и III вместе с узлом 1. Обход контуров I и II совершается по ходу часовой стрелки, а контура III-против хода часовой стрелки.

Согласно правилу Кирхгофа для узла 1

$$I_1 - I_2 - I_3=0 \ . \tag{1}$$

Обходя контуры I, II и III согласно рис.1 в соответствии со вторым правилом Кирхгофа, получим:

$$I_1r_1+I_3R=\varepsilon_1\ , \tag{2}$$

$$I_2r_2-I_3R=\varepsilon_2\ , \tag{3}$$

$$V_B+I_1r=\varepsilon_1\ . \tag{4}$$

Решая систему уравнений (1)-(4), находим:

$$I_3 = I_A = \frac{r_2\varepsilon_1 - r_1\varepsilon_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}\ , \tag{5}$$

$$V_B = \varepsilon_1 - I_1r_1 = I_3R = \frac{R(r_2\varepsilon_1 - r_1\varepsilon_2)}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}\ . \tag{6}$$

Если величина I_3<0, то направление тока I_3 в схеме на рисунке необходимо поменять на противоположное. При этом напряжение V_B на вольтметре меняет свою полярность.

Ответ: $I_A = \frac{r_2\varepsilon_1 - r_1\varepsilon_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}$, $V_B = \frac{R(r_2\varepsilon_1 - r_1\varepsilon_2)}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}$.

Задача№15

Для стационарного режима, где токи и заряды не зависят от времени, определить заряд q на конденсаторе емкостью C (см. рис. 1). Параметры всех элементов цепи указаны на схеме. Какое количество теплоты Q_T выделится на резисторах с сопротивлениями R_1 и R_2 после размыкания ключа K?

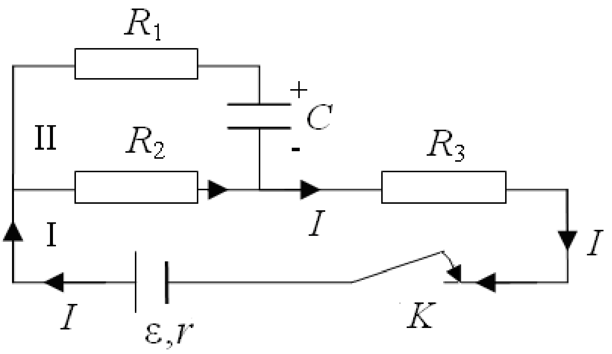

Рис. 1

Решение

Пусть при t<0, где t –время, ключ K разомкнут, а конденсатор не заряжен. При t=0 ключ K замыкается и в контурах I и II потекут токи. Ток в контуре II заряжает конденсатор C. После окончания зарядки конденсатора ток в контуре II обращается в нуль, а ток I в контуре I перестает зависеть от времени. Это стационарный (установившийся) режим для рассматриваемой цепи.

Для расчета заряда q на конденсаторе и постоянного тока I в стационарном режиме применим второе правило Кирхгофа к контурам I и II, обходя эти контуры по ходу часовой стрелки,

$$I(r + R_2 + R_3) = \varepsilon \ , \tag{1}$$

$$V_C - IR_2 = 0 \ . \tag{2}$$

Решая систему уравнений (1)-(2), получим:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_2 + R_3} \ , \tag{3}$$

$$V_C = IR_2 = \frac{R_2}{r + R_2 + R_3}\varepsilon \ , \tag{4}$$

$$q = CV_C = \frac{R_2}{r + R_2 + R_3}C\varepsilon \ . \tag{5}$$

При размыкании ключа K ток I в контуре I обращается в нуль, а конденсатор начинает разряжаться через резисторы с сопротивлениями R_1 и R_2. После разрядки конденсатора вся накопленная в нем энергия электрического поля

$$W = \frac{q^2}{2C} \tag{6}$$

согласно закону сохранения энергии превратилась в тепловую энергию, которая приходится на резисторы R_1 и R_2.

На основе закона Джоуля - Ленца эта тепловая энергия

$$Q_T = \int_0^\infty I_P^2(t)(R_1 + R_2)dt = W_C \ . \tag{7}$$

Здесь $I_P(t)$ – нестационарный ток разрядки конденсатора.

Из формул (5)-(7) следует, что полная тепловая энергия

$$Q_T = \left(\frac{R_2}{r + R_2 + R_3}\right)^2 \frac{C\varepsilon^2}{2} \ . \tag{8}$$

Ответ: $q = \frac{R_2}{r + R_2 + R_3}C\varepsilon$; $Q_T = \left(\frac{R_2}{r + R_2 + R_3}\right)^2 \frac{C\varepsilon^2}{2}$.