ЛЕКЦИЯ 3

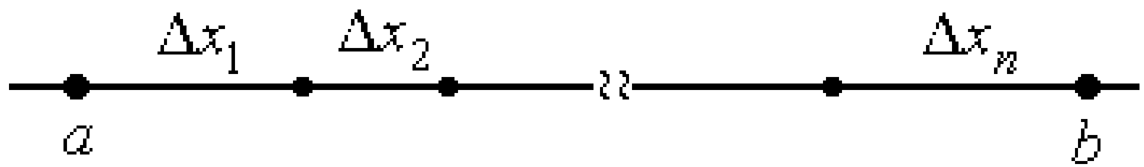
§ 7. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, $a<b$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей промежуточными точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

и выберем в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку $\xi_i : x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим через λ наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ldots,n$:

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$$



Определение 1. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i \qquad (2)$$

называется ***интегральной суммой*** функции $f\left(x\right)$ для данного разбиения (1) и данного выбора точек ξ_i.

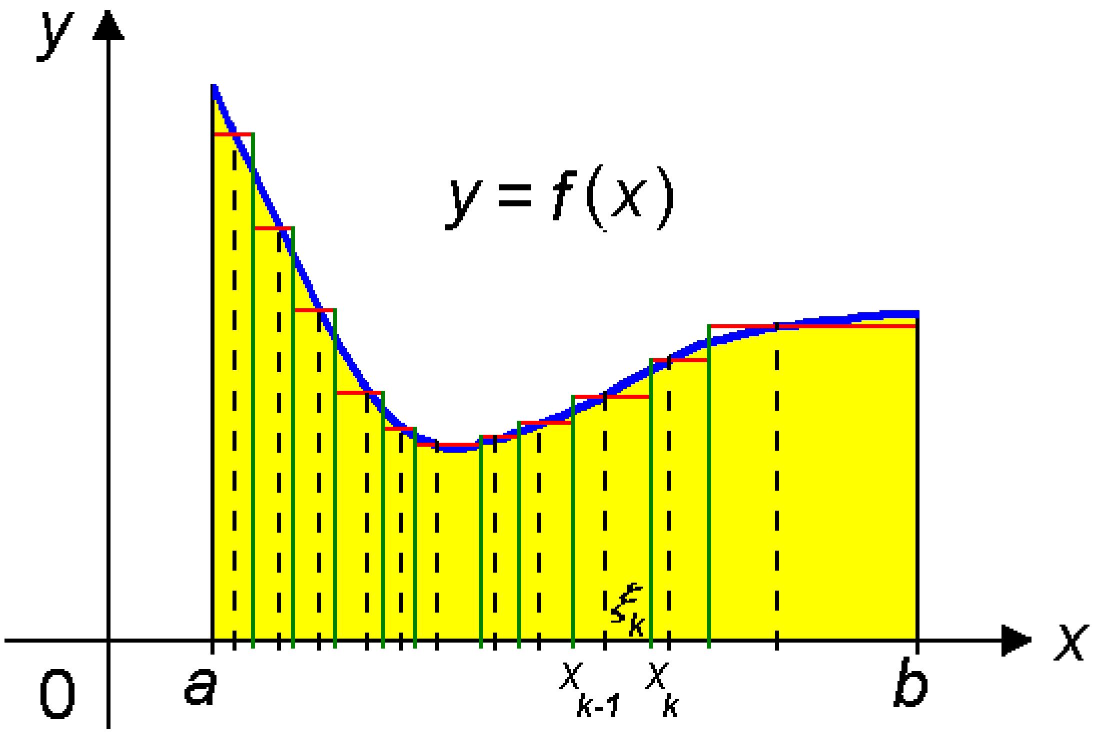


Рис. 1

Определение 2. Пусть существует конечный предел интегральных сумм (2), когда $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части промежуточными точками $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, ни от выбора точек $\xi_1, \xi_{2,} \ldots, \xi_n$. Тогда этот предел называется ***определенным интегралом*** функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Функция $f(x)$ называется при этом ***интегрируемой*** (по Риману) на отрезке $[a,b]$. Числа a и b называются ***нижним*** и ***верхним*** пределами интеграла, соответственно. Данное определение интеграла принадлежит Б. Риману.

Определение 3. Пусть $a > b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Определение 4. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости функции). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке.*

Это условие не является достаточным для интегрируемости функции по Риману.

Пример. Пусть $[a,b]=[0,1]$. Рассмотрим функцию Дирихле

$$D(x)=\begin{cases} 1, \ x - \textit{рациональное}, \\ 0, \ x - \textit{иррациональное} \end{cases}.$$

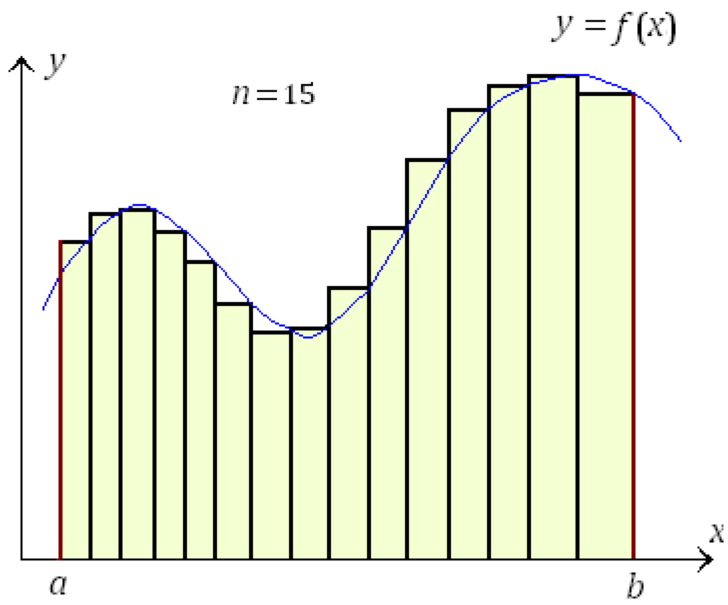
Пусть $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ — произвольное разбиение отрезка $[0,1]$. Пусть ξ_i– рациональные точки, $i = 1,\ldots,n$, тогда интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1$. Пусть ξ_i – иррациональные точки, $i = 1,\ldots,n$, тогда интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0$. Следовательно, не существует единого предела интегральных сумм.

Два класса интегрируемых по Риману функций

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости функции). *Непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на этом отрезке*.

Теорема 3. *Если функция* $f(x)$ *имеет конечное число точек разрыва на отрезке* $[a,b]$ *и ограничена на* $[a,b]$, *то* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$.

Пусть $f(x) \geq 0$. Геометрически частичная сумма (2) выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда вытекает



Геометрический смысл определенного интеграла. *Если неотрицательная функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

равен площади криволинейной фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, *снизу осью Ox и с боков отрезками прямых* $x = a$ *и* $x = b$.

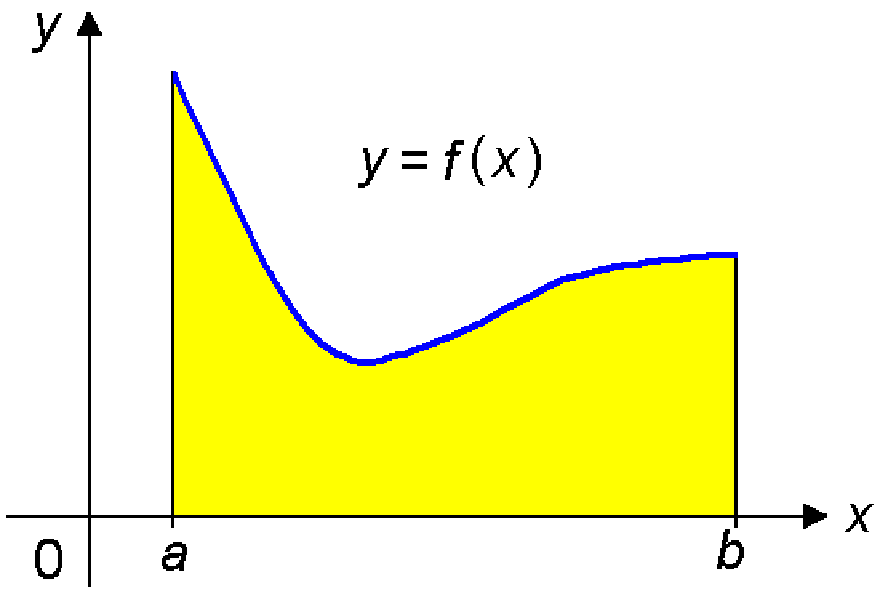


Рис. 1

Механический смысл определенного интеграла. Пусть дан линейный неоднородный стержень, лежащий на оси Ох в пределах отрезка $[a,b]$. Пусть плотность распределения массы вдоль стержня (линейная плотность) есть некоторая непрерывная функция $\rho(x) \geq 0$. Требуется определить массу стержня. Для этого разобьем стержень на n произвольных мелких частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Будем считать, что плотность $\rho(x)$ постоянна на части $[x_{i-1}, x_i]$ и равна $\rho(\xi_i)$ для некоторой точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда масса отрезка стержня $[x_{i-1}, x_i]$ равна $\rho(\xi_i)\Delta x_i$, а масса всего стержня приближенно равна $\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$. Точное значение массы m получим в пределе, когда $\max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i \to 0$:

$$m = \lim_{\substack{\max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

§ 8. *Основные свойства определенного интеграла: линейность, аддитивность, монотонность. Теорема о среднем. Среднее значение функции на отрезке.*

Свойства определенного интеграла

0) Нормировка.

$$\int_a^b 1dx = b-a.$$

Следствие. $\int_a^b Cdx = C(b-a), C = \text{const}$

1) **Линейность**.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, A и B – константы, то функция $Af(x)+Bg(x)$ также интегрируема на $[a,b]$ и выполняется равенство

$$\int_a^b Af(x)+Bg(x)dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx.$$

2) Монотонность.

Если $a<b$, $f(x)\le g(x)$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Следствие 1. Если $f(x)\ge 0$ на $[a,b]$, $a<b$, и $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

Следствие 2. Если $a<b$, $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $m\le f(x)\le M$ на $[a,b]$, где $m=\mathrm{const}$, $M=\mathrm{const}$, то

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Следствие 3. Если $a<b$, функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a,b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Замечание. Из интегрируемости функции $\left|f(x)\right|$ не следует интегрируемость функции $f(x)$.

Пример. Пусть $[a,b]=[0,1]$. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1, \ x - \textit{рациональное}, \\ -1, \ x - \textit{иррациональное} \end{cases}.$$

Функция $\left|f(x)\right|\equiv 1$ интегрируема на $[a,b]$, однако функция $f(x)$ не является интегрируемой $[a,b]$.

3) **Аддитивность**.

Для любых трех чисел *a,b,c* справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

при условии, что функция $f(x)$ интегрируема на объемлющем отрезке.

Это свойство вытекает из следующих двух утверждений.

Лемма 1. Пусть $a < c < b$ и функция $f(x)$ интегрируема на $[a,c]$ и на $[c,b]$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Лемма 2. Если $[c,d] \subseteq [a,b]$ и функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то функция $f(x)$ интегрируема на $[c,d]$.

Определение 1. Средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется число

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Пусть $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, где $m = \text{const}$, $M = \text{const}$, тогда $m \le \mu \le M$.

Теорема (о среднем). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка с, что* $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

◀Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $m \le f(x) \le M$, где $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. По определению среднего значения $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, $m \le \mu \le M$. По теореме о переходе непрерывной функции через промежуточные значения найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что $\mu = f(c)$ и, следовательно, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.▶

Замечание. Условие непрерывности функции является существенным.

Пример. Пусть $[a,b]=[0,2]$. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 2, & 1<x\le 2\end{cases}.$$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=1+2\cdot 1=3,\ \mu=\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx=\frac{3}{2}=1,5.$$

Значение $1,5$ функцией не принимается.