Электричество и магнетизм

Семестр 2

ЛЕКЦИЯ № 14

Основные законы и формулы в разделе электромагнетизма

Одним из фундаментальных законов природы является экспериментально установленный закон ***сохранения электрического заряда***.

В изолированной системе алгебраическая сумма зарядов всех тел остается постоянной

$$\boxed{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n = const}$$

Закон сохранения электрического заряда утверждает, что в замкнутой системе тел не могут наблюдаться процессы рождения или исчезновения зарядов только одного знака.

Закон Кулона

$$\vec{F}_{12} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\vec{F}_{21}$$

Два точечных неподвижных электрических заряда взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной произведению величины этих зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Силы электрического взаимодействия направлены по линии, соединяющей заряды. Одноимённые заряды отталкиваются, разноимённые — притягиваются.

Напряжённость электрического поля

Силовая характеристика электрического поля - **вектор напряжённости электрического поля** $\vec{E}$.

Кулоновская сила, действующая на электрический заряд q, находящийся в точке с радиусом - вектором $\vec{r}$, будет:

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}).$$

И электрическое поле характеризуется напряжённостью $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

В международной системе единиц СИ размерность напряжённости электрического поля Н/Кл или В/м.

Принцип суперпозиции

Согласно опыту в электрическом поле выполняется **принцип суперпозиции: вектор напряжённости электрического поля есть векторная сумма напряжённостей полей всех зарядов системы**

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i(q_i)}$$

Каждый *i*-й заряд (где $i = 1, 2, \ldots, n$) при отсутствии других зарядов создаёт электрическое поле $\vec{E}_i$

Принцип суперпозиции применяется для вычисления вектора напряжённости электрического поля системы, состоящей из многих электрических зарядов.

Теорема Гаусса для электрического поля

Эта теорема представляет собой только следствие закона Кулона и принципа суперпозиции электрических полей.

Поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме электрических зарядов, заключённых внутри этой поверхности, делённой на электрическую постоянную ε_0.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0}$$

- теорема Гаусса (иногда теорема Остроградского- -Гаусса)

Потенциальная энергия заряженной частицы в электрическом поле зависит от величины заряда q и от его положения в поле относительно заряда Q, создающего поле.

$$\boxed{W_p = k_0 \frac{qQ}{r}}$$

Энергия единичного (q = 1) точечного заряда уже не будет связана с величиной этого пробного заряда q и может быть принята в качестве энергетической характеристики данной точки электростатического поля:

$$\boxed{\varphi = \frac{W_p}{q} = k_0 \frac{Q}{r}}$$

- **потенциал точечного заряда Q**

Разность потенциалов равна работе, совершаемой электрической силой при перемещении единичного положительного заряда из начальной точки в конечную:

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1-2}\left(\vec{F}_{эл.}\right)}{q}}$$

$$dA_{1-2}\left(\vec{F}_{эл.}\right) = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l} = qEdl\cos\alpha = qE_l dl$$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \frac{dA_{1-2}}{q} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}}$$

Рассмотрим перемещение заряда q в электростатическом поле $\vec{E}$ по замкнутой траектории. Заряд из точки 1 перемещается по пути L_1 в точку 2, а затем возвращается в исходное положение по другому пути L_2. В процессе этого движения на заряд со стороны поля действует $\vec{F} = q\vec{E}$ консервативная электрическая сила, а работа этой силы на замкнутой траектории $L = L_1 + L_2$ равна нулю:

$$A\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right) = \oint_L \vec{F}_{\text{эл.}} \cdot d\vec{l} = \oint_L q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Поделив на q, получим:

$$\boxed{\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0}$$

<u>Теорема о циркуляции в электростатике</u>: *циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.*

Связь напряжённости и потенциала электростатического поля

$$\boxed{\vec{E} = -grad\varphi}$$

Здесь векторный оператор «*градиент*» - *grad:*

$$\nabla = grad = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right)$$

Вектор поляризация

Под действием электрического поля **все диэлектрики поляризуются**, приобретая отличный от нуля суммарный электрический дипольный момент.

Степень поляризованности диэлектрика **характеризуется** векторной макроскопической величиной, называемой **вектором поляризации**, равным суммарному электрическому дипольному моменту молекул единицы объёма вещества:

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i}$$

- **вектор поляризации**

где $\vec{p}_i$ - электрический дипольный момент i - ой частицы, V – объём вещества.

Вводим **вспомогательный** **вектор электрического смещения**, или **вектор электрической индукции**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_d) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_{абс.} \vec{E}$$

где $1 + \chi_d = \varepsilon$ - **относительная диэлектрическая проницаемость вещества**, и

$\varepsilon_{абс.} = \varepsilon_0 \varepsilon$ - **абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества**.

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}}$$

- **вектор электрического смещения** **или** **вектор электрической индукции**

Теорема Гаусса для диэлектрика

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \oint_S D_n dS = q_{\text{свободн}}$$

Поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов внутри этой поверхности.

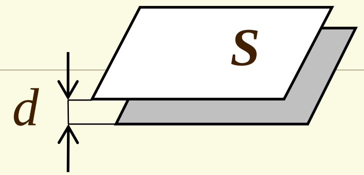
Электрическая ёмкость

При сообщении проводнику заряда, на его поверхности появляется потенциал **φ**. Но если этот же заряд сообщить другому проводнику, то потенциал будет другой. Это зависит от геометрических параметров проводника. Но в любом случае, потенциал ***φ*** пропорционален заряду ***q*:**

$$q = C \cdot \varphi$$

Коэффициент пропорциональности ***C*** называют ***электроёмкостью*** – *физическая величина, численно равна заряду, который необходимо сообщить проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на единицу*. Единица измерения ёмкости в СИ – фарада **1 Ф = 1Кл / 1В**.

Ёмкость плоского конденсатора



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \qquad \sigma = \frac{q}{S}$$

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \quad d\varphi = -Edx$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = -\int_d^0 Edx = Ed = \frac{q \cdot d}{\varepsilon_0 S}$$

Ёмкость плоского конденсатора (в веществе) :

$$\boxed{C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}$$

Энергия заряженного конденсатора

$$A = -W_c = \int dA = C\int_U^0 U'dU' = \frac{1}{2}CU^2$$

$$W_c = \frac{CU^2}{2}$$

Энергию конденсатора можно посчитать и по другим формулам (т.к. $q = C \cdot U$):

$$W_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}qU$$

Энергия электростатического поля

Носителем энергии в конденсаторе, W_c является электростатическое поле.

Найдем W_c:

$$W_c = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d}\frac{d}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd$$

$\frac{U}{d} = E;$ $Sd = V$ – объем. Отсюда:

$$\boxed{W_c = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V}$$

Энергия электростатического поля

Энергия взаимодействия системы из N зарядов:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i}$$

$\varphi_i = \sum\limits_{k \neq i} \varphi_k$ − потенциал в точке, где расположен заряд q_i

создаваемый всеми остальными зарядами (кроме q_i).

Электрический ток.

Основной количественной характеристикой электрического тока является ***сила тока.*** Сила тока в проводнике численно равна **величине заряда, переносимого через полное сечение проводника в единицу времени:**

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$ - **Сила тока**

Сила тока в системе СИ измеряется в Амперах: $\left[\frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}\right]$

Это скалярная характеристика. Сила тока может быть как положительной, так и отрицательной. Если направление тока совпадает с условно принятым положительным направлением обхода вдоль проводника, то сила такого тока $I > 0$. В противном случае сила тока отрицательна.

Плотность электрического тока

Заряд, который протекает за единицу времени через единичное поперечное сечение проводника:

$$j = \frac{dq}{dtdS} = \frac{I}{dS} = e \cdot n \cdot V_{\text{др}}$$

$$\boxed{\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{V}_{\text{др}}}$$

Плотность электрического тока

Для обычных напряженностей поля концентрация электронов n не зависит от $\vec{E}$ и τ не зависит от температуры. В этом приближении $\vec{j} \sim \vec{E}$, т.е.

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}}$$

- **закон Ома в дифференциальной форме**

Закон Ома в интегральной форме для однородного **участка цепи** (не содержащего ЭДС)

$$\boxed{I = \frac{U}{R}}$$

где $$R = \rho \frac{l}{S},$$ $[\rho] = [\text{Ом} \cdot \text{м}]$

Закон Ома для замкнутой цепи, содержащего источник ЭДС

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R + r}.}$$

Закон Джоуля – Ленца

Закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме, характеризующий плотность выделенной энергии.

$$\omega = \sigma \cdot E^2 = \rho \cdot j^2$$

Так как выделенная теплота равна работе сил электрического поля

$$A = IUt$$

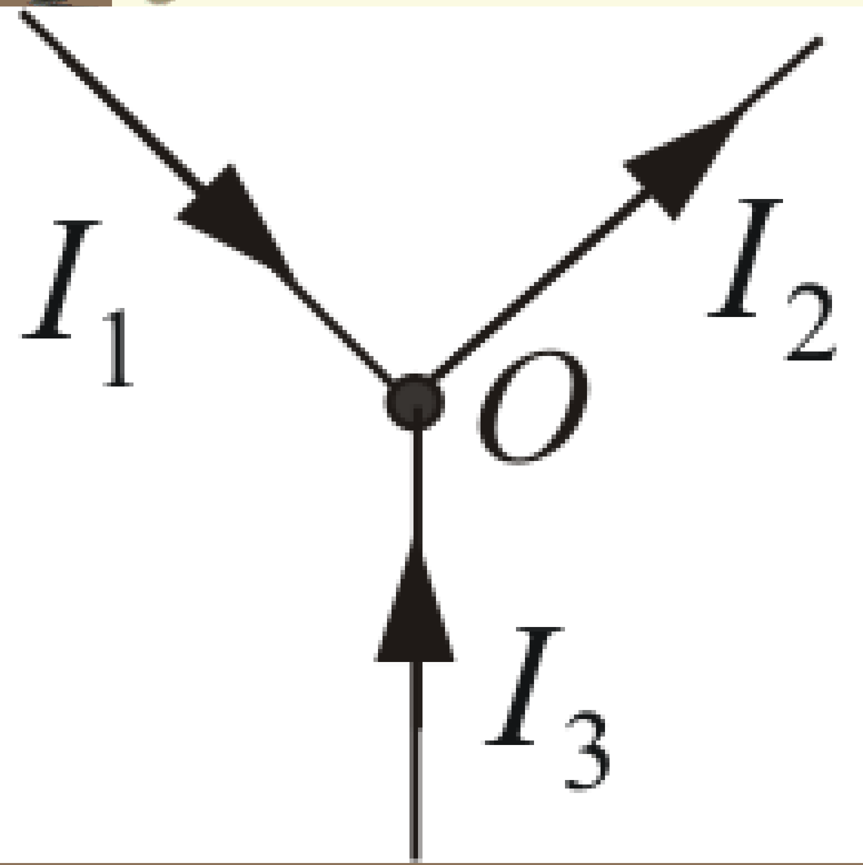
то мы можем записать для мощности тока:

$$N = I \cdot U = I^2 R$$

Это закон ***Джоуля – Ленца в интегральной форме***.

Первое правило Кирхгофа

утверждает, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле цепи равна нулю:



$$\sum_{k=3}^{n} I_k = 0$$

(*узел* – любой участок цепи, где сходятся более двух проводников)

Второе правило Кирхгофа

В любом замкнутом контуре электрической цепи ***алгебраическая сумма произведения тока на сопротивление равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом же контуре***.

$$\boxed{\sum_k I_k R_k = \sum_k \varepsilon_k .}$$

Обход контуров осуществляется по часовой стрелке, если направление обхода совпадает с направлением тока, то ток берется со знаком «плюс».

Основы магнитостатики

Магнитное поле. Силовая характеристика магнитного поля - вектор магнитной индукции

В основе магнитостатики, изучающей законы постоянного магнитного поля, лежат **экспериментальные факты**, установленные в XIX веке:

1) **магнитное поле действует на движущиеся электрические заряды,**

2) **движущиеся электрические заряды создают магнитное поле.**

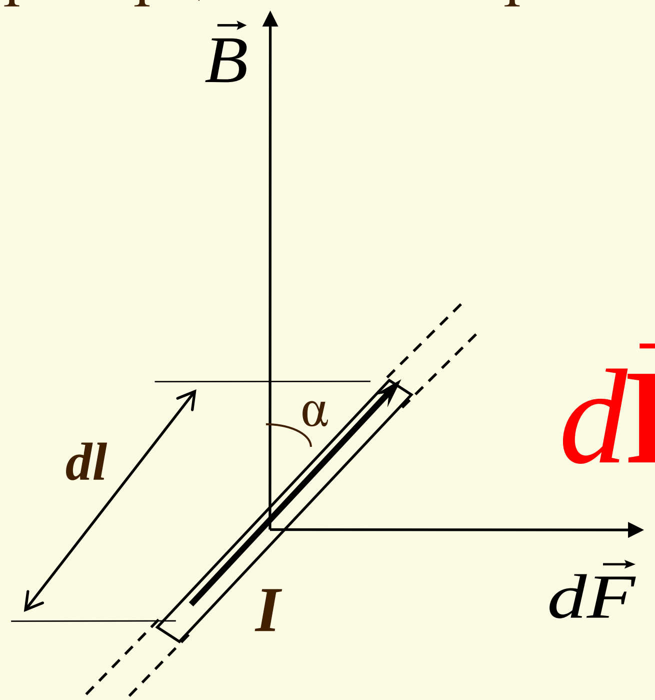
На электрический заряд ***q***, движущийся в магнитном поле $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}$, действует **сила Лоренца**

$$\vec{F}_{Л} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$$

Сила Ампера

Магнитное поле не действует на неподвижные заряды.

В магнитном поле сила действует на электрический ток. Согласно закону Ампера, *максимальная* сила dF_{max}, действующая на участок проводника dl с током I, пропорциональна произведению Idl



$$\mathbf{dF_{max} = I \cdot dl \cdot B}$$

$$d\vec{\mathbf{F}} = I[d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}}]$$ – ***сила Ампера***

$$dF = I \cdot dl \cdot B \sin\alpha$$

Закон Био-Савара-Лапласа

Токи, текущие по проводникам, создают в окружающем пространстве магнитное поле. **Как вычислить магнитное поле произвольного тока**? В электростатике: взаимодействие точечных зарядов, затем - принцип суперпозиции. В магнитостатике - тот же прием. Аналог точечных зарядов - малые прямолинейные участки проводников с током - ***элементы тока***. **Важно знать закон, по которому вычисляется магнитное поле, созданное элементом тока.** Для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока ***I*** длиной ***dl*** , была получена формула:

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l} \times \vec{r}\right]}{r^3}}$$

- **закон Био-Савара-Лапласа**

Для вектора **индукции магнитного поля** $\vec{B}$ справедлив **принцип суперпозиции**:

– магнитная индукция результирующего поля равна геометрической сумме магнитных индукций $\vec{B}_i$ складываемых полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \ldots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i$$

или в случае непрерывного проводника:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

Теорема Гаусса для магнитного поля

Математическая запись **теоремы Гаусса** для магнитного поля: ***поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:***

$$\boxed{\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0}$$

Теорема Гаусса для магнитного поля

Эта теорема утверждает: **в природе нет магнитных зарядов**.

Теорема о циркуляции магнитного поля (в вакууме)

$$\boxed{\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I}$$

Циркуляция вектора магнитной индукции равна алгебраической сумме токов, охваченных замкнутым контуром, умноженному на магнитную постоянную.

где $$I = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

Действие магнитного поля на вещество. Индуцированные молекулярные токи. Вектор намагничивания

Все вещества являются **магнетиками**, так как под действием внешнего поля они намагничиваются и их **магнитный момент единицы объёма** оказывается отличным от нуля. Он характеризует **намагниченность** вещества и называется **вектор намагничивания:**

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{mi}$$

где $\vec{p}_{mi}$ магнитный момент i - го атома из числа n атомов, содержащихся в объеме ΔV.

Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе

С учетом как **токов проводимости** $I_{пр}$, создаваемых свободными зарядами в проводниках, так и **токов намагничивания** I_m, создаваемых связанными зарядами в веществе, **теорема о циркуляции** векторного поля магнитной индукции вдоль произвольного замкнутого контура L **принимает вид:**

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\left(I_{пр} + I_m\right)$$

где справа токи проводимости $I_{пр}$ и молекулярные токи I_m.

Теперь теорему о циркуляции магнитного поля в веществе можно записать через вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}$:

$$\boxed{\oint_L \vec{H}d\vec{l} = I}$$

Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе

Циркуляция вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура L равна алгебраической сумме токов проводимости I охватывающих этот контур.

где $$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

$$\boxed{\varepsilon_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

- закон электромагнитной индукции - закон Фарадея

Это выражение для ЭДС индукции контура является совершенно универсальным, не зависящим от способа изменения потока магнитной индукции и носит название ***закон Фарадея***.

Знак (-) – математическое выражение ***правила Ленца*** о направлении индукционного тока: ***индукционный ток всегда направлен так, чтобы своим полем противодействовать изменению начального магнитного поля***.

Закон электромагнитной индукции записан в **трактовке Максвелла** для произвольного неподвижного контура L:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}d\vec{S}$$

Здесь используется знак частной производной $\frac{\partial}{\partial t}$, т.к. контур L неподвижный.

И окончательно:

$$\boxed{\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}d\vec{S}}$$

- уравнение Максвелла

Это закон электромагнитной индукции в трактовке Максвелла

Явление самоиндукции. Индуктивность.

Магнитный поток $\Phi \sim B \cdot S \sim I$,
т.к. $B \sim I$. Поэтому можно записать, что: $\boxed{\Phi = L \cdot I}$

где L – индуктивность контура. Она зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды.

$$[L] = Гн(Генри)$$
$$[\Phi] = Вб(Вебер)$$

Тогда для э.д.с. самоиндукции:

$$\varepsilon_{самоинд} = -\frac{d}{dt}(L \cdot I)$$ и при $L = const$

Получаем: $$\boxed{\varepsilon_{самоинд} = -L\frac{dI}{dt}}$$ **- э.д.с. самоиндукции**

Энергия катушки с током. Энергия и плотность энергии магнитного поля.

$$\boxed{W_L = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}}$$

Энергия катушки с током – это энергия магнитного поля, созданного этой катушкой.

Энергия магнитного поля:

$$\boxed{W_L = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 \cdot V = \omega_м \cdot V}$$

и **плотность** (объёмная) **энергии магнитного поля (в веществе)**:

$$\omega_м = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$$

Дифференциальное уравнение собственных незатухающих электрических колебаний:

$$\boxed{\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

Решением этого уравнения является следующая гармоническая функция: ***$q = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$***

$$\boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

Уравнение свободных затухающих колебаний в контуре R,L и C

решение этого уравнения имеет вид:

$$\boxed{q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),}$$

$\beta = R/2L$ ***- коэффициент затухания***

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ***- частота затухающих колебаний***

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2 q=\frac{U_m}{L}\cos\omega t$$

уравнение вынужденных электрических колебаний

Решение уравнения при больших *t*:

$$\boxed{q=q_m\cos(\omega t+\varphi)}$$

Здесь амплитуда колебаний заряда и фаза φ:

$$q_m=U_m/\omega\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=U_m/\omega\sqrt{R^2+(R_L-R_C)^2}$$

$$\varphi=arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Ток смещения. Обобщение теоремы о циркуляции магнитного поля

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{D}}$$ *- плотность тока смещения*

По Максвеллу магнитное поле в общем случае определяется не током проводимости, а ***полным током***, равным сумме **тока проводимости и тока смещения**:

$$I_{\text{полн}} = \int_S \left(\vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}}\right) d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j}_{\text{пр}} + \dot{\vec{D}}\right) d\vec{S}$$

Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе (уравнение Максвелла):

$$\boxed{\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S}}$$

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах имеет вид:

$\operatorname{div}\vec{D} = \rho$ — $\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV$ — теорема Гаусса

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ — $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$ — закон Фарадея

$\operatorname{div}\vec{B} = 0$ — $\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$ — отсутствие магнитных зарядов

$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ — $\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S}$ — обобщенный закон Б-С-Л

Материальные уравнения:

1. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$
2. $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$
3. $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется вектором Умова – Пойнтинга или чаще <u>вектором Пойнтинга</u>:

$$\boxed{\vec{P} = [\vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{H}}]}$$

Поскольку напряженности электрического и магнитного полей являются векторами, то их вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ образуют ***векторные волновые уравнения*** **:**

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{H} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2\vec{H}}{dt^2} = 0}$$

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ - оператор Лапласа

Решение волнового уравнения для плоской волны, т.е. распространяющейся вдоль одного направления x:

$$\boxed{\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{E}}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_o)}$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{H}}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_o)}$$

где $\vec{\mathrm{E}}_0$ и $\vec{\mathrm{H}}_0$ - амплитуды напряженностей электрического и магнитных полей; φ_o – начальная фаза колебаний; $k = \dfrac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число.

ЛЕКЦИЯ ЗАКОНЧЕНА!