Электричество и магнетизм

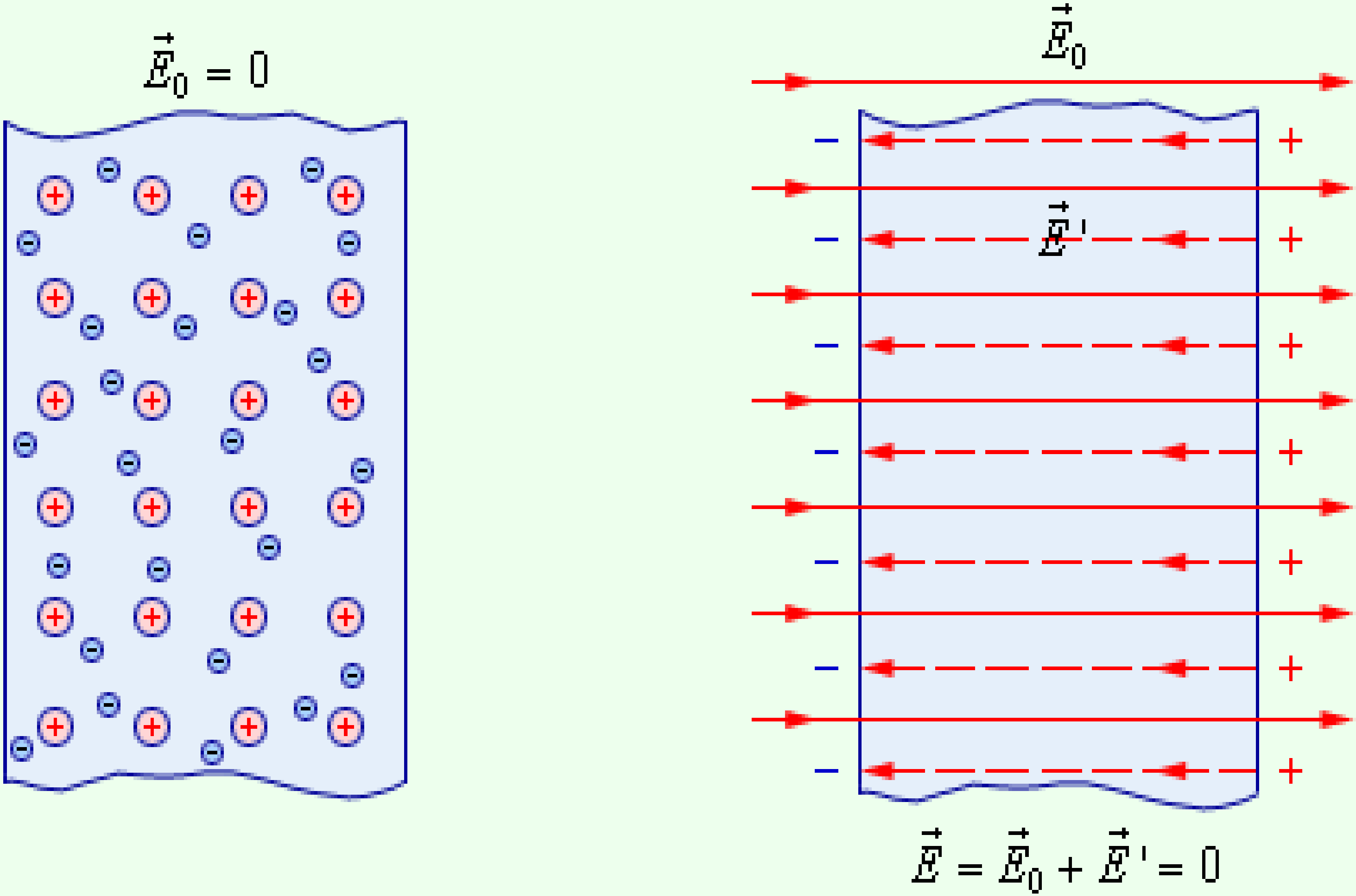
Семестр 2

ЛЕКЦИЯ № 5

Электростатика проводников

1. Действие электростатического поля на проводник. Индуцированные заряды.
2. Свойства заряженного проводника. Ёмкость уединённого проводника. Электрическое поле Земли.
3. Конденсатор. Ёмкость конденсатора.
4. Энергия заряженного конденсатора. Пространственное распределение энергии электрического поля. Плотность энергии электрического поля.

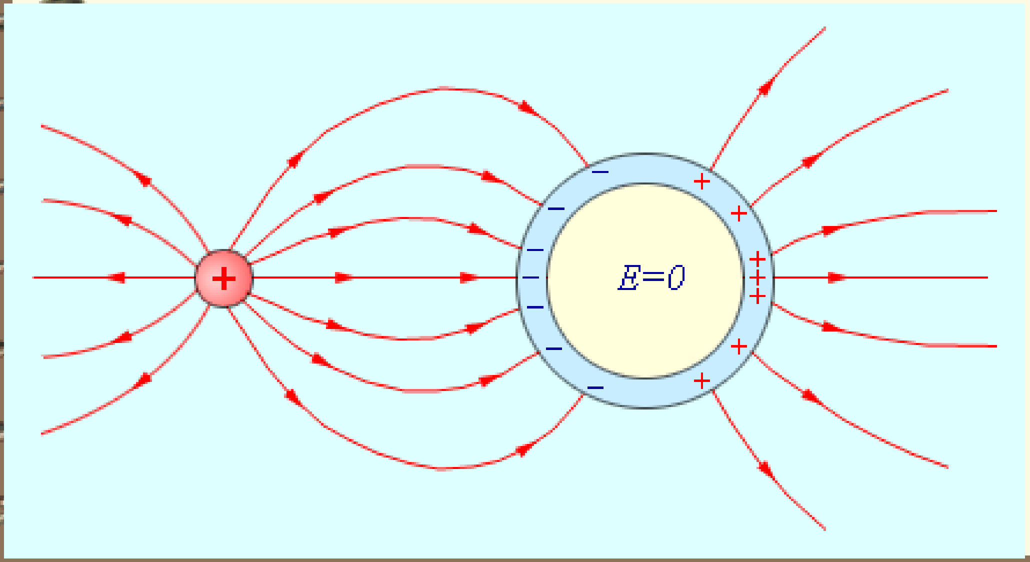
Основная особенность **проводников** – наличие **свободных зарядов (электронов)**, которые участвуют в тепловом движении и могут перемещаться по всему объему проводника. Типичные проводники – металлы. В отсутствие внешнего поля в любом элементе объема проводника отрицательный свободный заряд компенсируется положительным зарядом ионной решетки. В проводнике, **внесенном в электрическое поле,** происходит перераспределение свободных зарядов, в результате чего на поверхности проводника возникают **нескомпенсированные положительные и отрицательные заряды**. Этот процесс называют **электростатической индукцией**, а появившиеся на поверхности проводника заряды – **индукционными зарядами**.

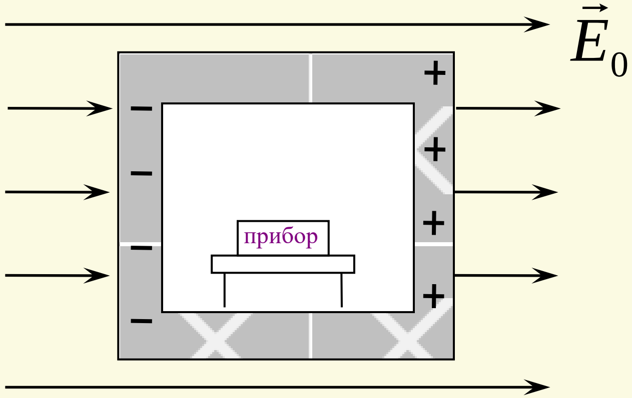


Электростатическая индукция

Все **внутренние области проводника**, внесенного в электрическое поле, остаются **электронейтральными**. Если удалить некоторый объем, выделенный внутри проводника, и образовать пустую полость, то *электрическое поле внутри полости* будет равно *нулю*.

На этом основана электростатическая защита – чувствительные к электрическому полю приборы для исключения влияния поля помещают в металлические ящики.





При внесении металлического проводника во внешнее электростатическое поле, ***электроны проводимости перемещаются (перераспределяются)*** до тех пор, пока всюду внутри проводника поле электронов проводимости и положительных ионов не скомпенсирует внешнее поле.

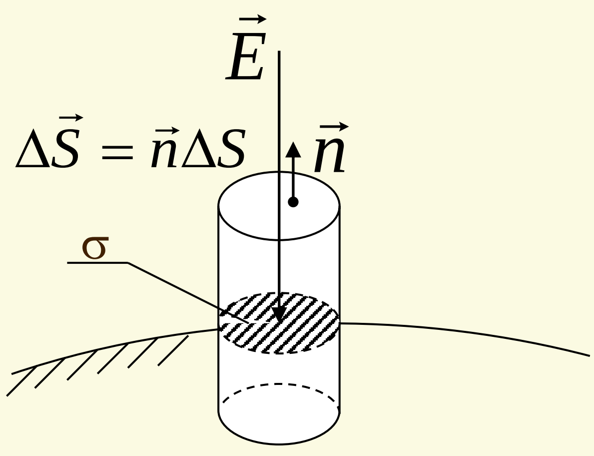
В любой точке внутри проводника, находящимся в электростатическом поле $\boldsymbol{E = 0}$; $\boldsymbol{d\varphi = 0}$; ***т. е.*** $\boldsymbol{\varphi = const}$.

На поверхности проводника напряженность $\vec{\mathbf{E}}$ ***направлена по нормали к этой поверхности***, иначе, под действием составляющей E_τ, касательной к поверхности, заряды перемещались бы по проводнику, а это противоречило бы их статичному распределению.

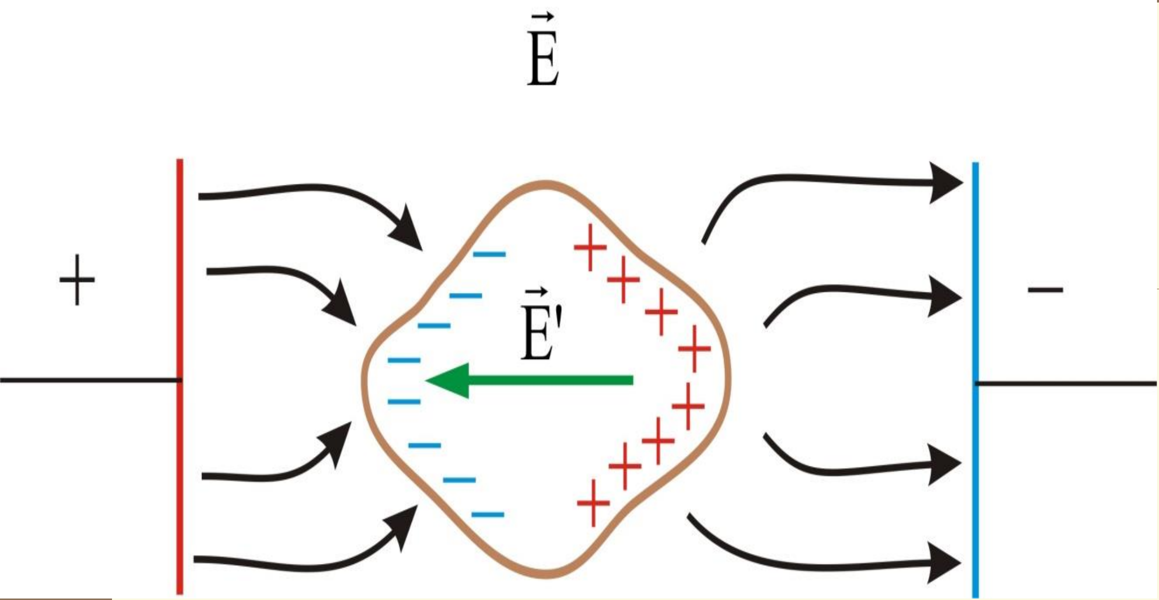
Вне заряженного проводника – поле есть, следовательно, должен быть вектор $\vec{\mathbf{E}}$, и направлен он перпендикулярно поверхности.

Выделим гауссову замкнутую поверхность в виде цилиндра, одно основание которого находится внутри, а другое — вне проводника, вблизи его поверхности. Образующие цилиндра — нормальны к поверхности проводника. Поток через выделенную поверхность равен потоку вектора напряжённости лишь через основание ΔS, находящееся вне заряженного тела.

$$\Phi(\vec{E}) = -E_n \cdot \Delta S = -\frac{\Delta q}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma \cdot \Delta S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



$$E_\tau = 0$$



В установившимся состоянии в проводнике, помещенном в электростатическое поле мы имеем:

- *Появление у заряженной поверхности на металле заряда противоположного знака* – ***электростатическая индукция***. *Этот процесс очень краток ~ 10^{-8} секунд.*
- ***Электростатическое экранирование*** – *внутрь проводника поле не проникает.*
- *Во всех точках внутри проводника* $\mathbf{E = 0}$, *а во всех точках на поверхности* $\mathbf{E = E_n}$ $\mathbf{(E_\tau = 0)}$;
- *Весь объем проводника, находящегося в электростатическом поле* ***эквипотенциален***.

Электрическая ёмкость

При сообщении проводнику заряда, на его поверхности появляется потенциал **φ**. Но если этот же заряд сообщить другому проводнику, то потенциал будет другой. Это зависит от геометрических параметров проводника. Но в любом случае, потенциал ***φ*** пропорционален заряду ***q*:**

$$q = C \cdot \varphi$$

Коэффициент пропорциональности ***C*** называют ***электроёмкостью*** – *физическая величина, численно равна заряду, который необходимо сообщить проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на единицу*. Единица измерения ёмкости в СИ – фарада **1 Ф = 1Кл / 1В**.

Если потенциал поверхности шара

то $$\varphi_{шар.} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$$

$$C_{шар.} = 4\,\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$$

Если $\varepsilon = 1$ (воздух, вакуум) и $R = R$земли, то

$C_З = 7 \cdot 10^{-4}$ Ф или 700 мкФ.

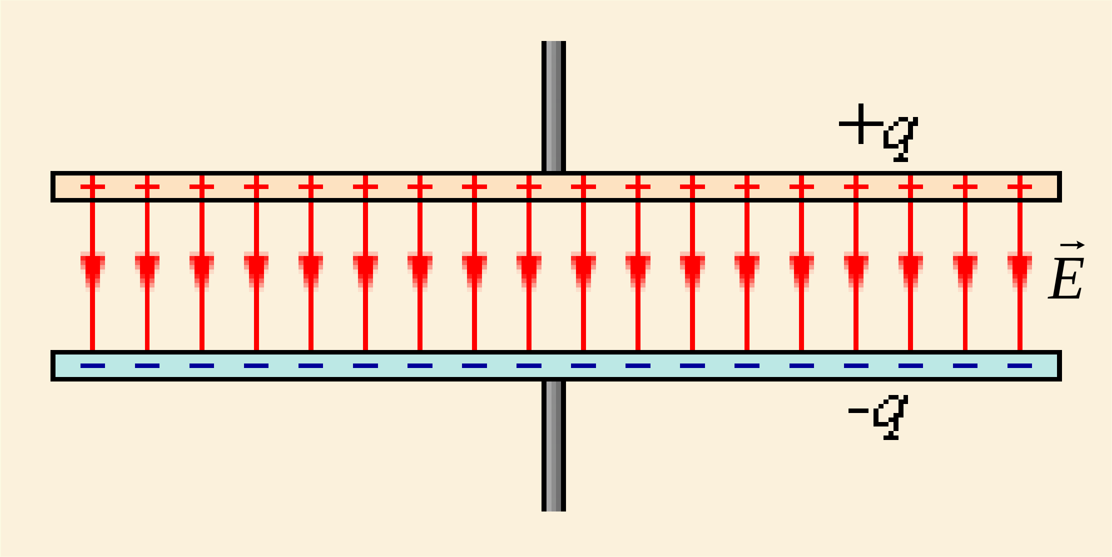
Чаще на практике используют и более мелкие единицы: 1 нФ (нанофарада) = 10^{-9} Ф и 1пкФ (пикофарада) = 10^{-12} Ф.

Необходимость в устройствах, накапливающих заряд есть, а уединенные проводники обладают малой емкостью. Обратите внимание, что электроёмкость проводника увеличивается, если к нему поднести другой проводник – явление электростатической индукции.

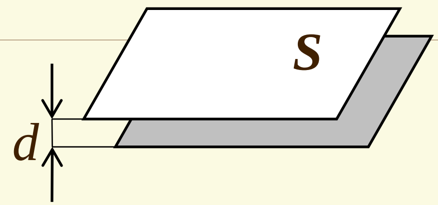
Конденсатор. Ёмкость конденсатора

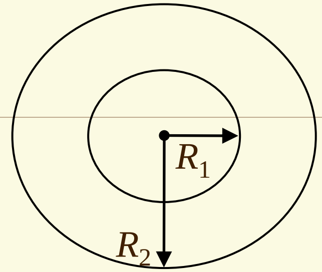
Конденсатор – два проводника называемые *обкладками* расположенные близко друг к другу.

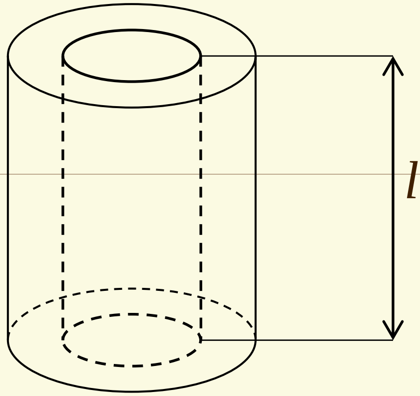
Конструкция такова, что внешние окружающие конденсатор тела не оказывают влияние на электроёмкость конденсатора. Это будет выполняться, если ***электростатическое поле будет сосредоточено внутри конденсатора между обкладками***.



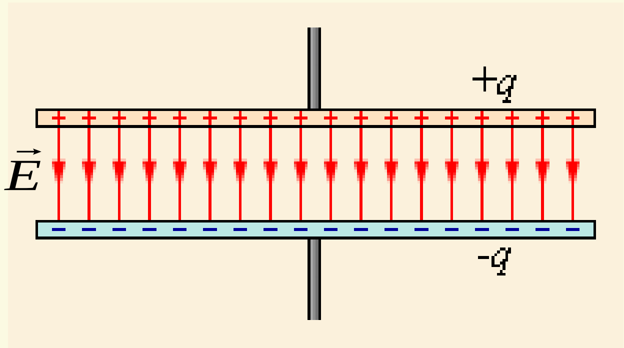
Конденсаторы бывают ***плоские, сферические и цилиндрические.***







Так как электростатическое поле находится внутри конденсатора, то линии напряженности электрического поля $\vec{E}$ начинаются на положительной обкладке и заканчиваются на отрицательной – и никуда не исчезают. Следовательно, заряды на обкладках **противоположны по знаку, но одинаковы по величине.**

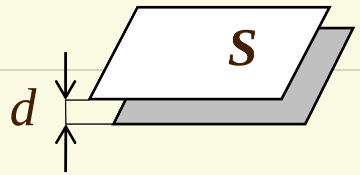


Ёмкость конденсатора:

$$\boxed{C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}}$$

Ёмкость плоского конденсатора

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 S} \qquad \sigma=\frac{q}{S}$$



$$E=-\frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \quad d\varphi=-Edx$$

$$\varphi_1-\varphi_2=U=-\int_d^0 Edx=Ed=\frac{q\cdot d}{\varepsilon_0 S}$$

Ёмкость плоского конденсатора (в вакууме) :

$$\boxed{C=\frac{q}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{q}{U}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

Если между обкладками плоского конденсатора имеется диэлектрик, то:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = -\int_d^0 E dx = Ed = \frac{q \cdot d}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

Ёмкость плоского конденсатора (в диэлектрике):

$$\boxed{C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}$$

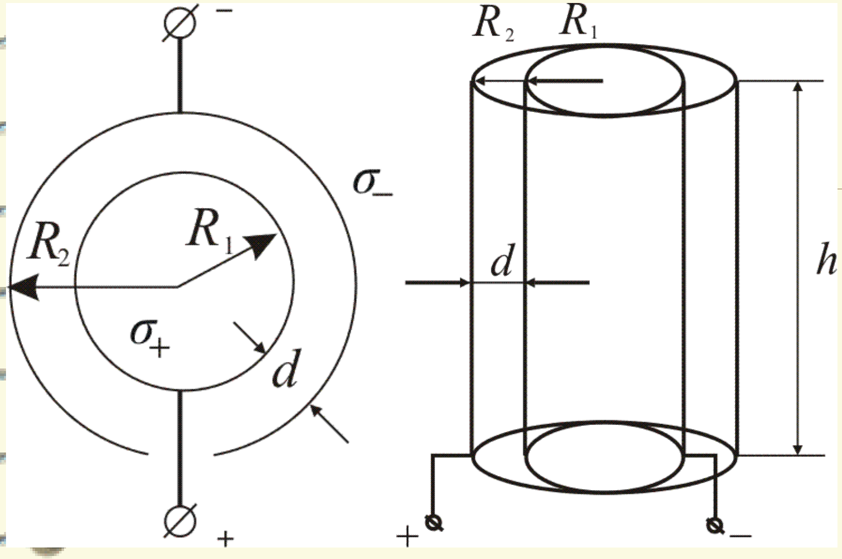
Вносим между пластинами диэлектрик с ε, больше чем у воздуха и потенциал конденсатора изменяется. Отсюда можно получить единицы измерения ε_0:

$$\varepsilon_0 = \frac{Cd}{\varepsilon S}$$

$$[\varepsilon_0] = \frac{[C]\cdot[d]}{[S]} = \frac{Ф \cdot м}{м^2} = \frac{Ф}{м}$$

Помимо емкости каждый конденсатор характеризуется $U_{раб}$ (или $U_{пр.}$ – максимальное допустимое напряжение).

Ёмкость цилиндрического конденсатора.



Разность потенциалов между обкладками:

$$\Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

где $\tau = q/l$ – линейная плотность заряда, R_1 и R_2 – радиусы цилиндрических обкладок.

$q = \tau \cdot l$, (l – длина конденсатора)

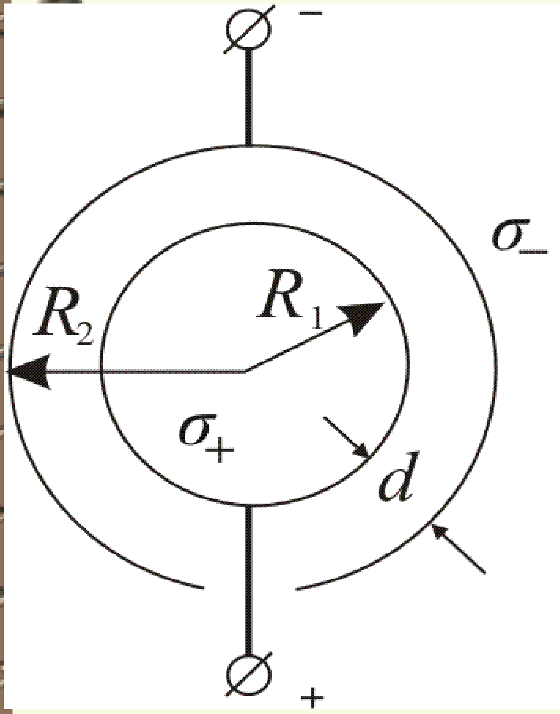
$$\Delta\varphi = \frac{l\tau\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l} = \frac{q}{C}$$

$$C_{цил.} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Понятно, что зазор между обкладками мал: $d = R_2 - R_1$, то есть $d << R_1$, тогда $\ln\frac{R_2}{R_1} \approx \frac{R_2 - R_1}{R_1}$

$$C_{цил.} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l R_1}{R_2 - R_1} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{d}$$

Ёмкость шарового конденсатора.



$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Это разность потенциалов между обкладками шарового конденсатора, где R_1 и R_2 – радиусы шаров.

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C}, \qquad C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

В шаровом конденсаторе $R = R_1 \approx R_2$; $S = 4\pi R^2$; $R_2 - R_1 = d$ – расстояние между обкладками. Тогда:

$$C_{шар.} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}{d} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{d}.$$

Таким образом, ёмкость шарового конденсатора,

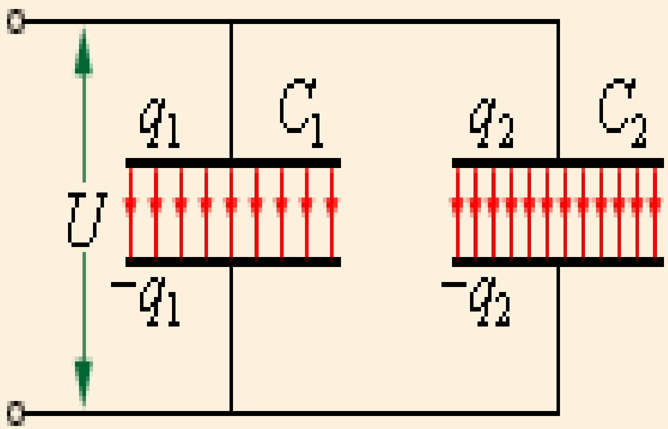
$$C_{шар.} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{d},$$

что совпадает с ёмкостями плоского и цилиндрического конденсатора.

Соединение конденсаторов

Емкостные батареи – комбинации параллельных и последовательных соединений конденсаторов.

1) Параллельное соединение:



Общим является напряжение U

$$q_1 = C_1U$$

$$q_2 = C_2U$$

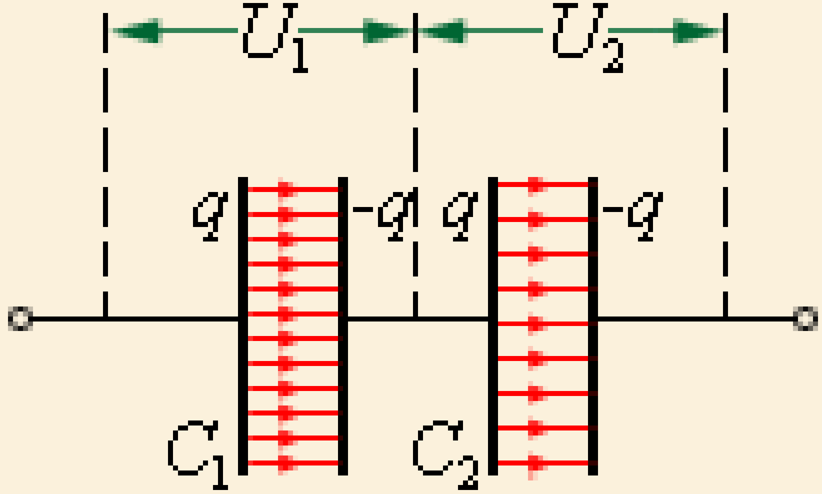
Суммарный заряд:

$$q = q_1 + q_2 = U(C_1 + C_2)$$

Результирующая емкость: $$\boxed{C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2}$$

2) Последовательное соединение :

Общим является заряд q



$$U_1 = \frac{q}{C_1} \qquad U_2 = \frac{q}{C_2}$$

$$U = \sum U_i = q \sum \frac{1}{C_i}$$

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Энергия заряженного конденсатора

Если замкнуть обкладки конденсатора, то по проволоке потечет ток, который может даже расплавить ее. Значит, конденсатор запасает энергию. Вычислим ее.

Конденсатор разряжается *U'* – мгновенное значение напряжения на обкладках. Если при этом значении напряжения между обкладками проходит заряд *dq*, то ***работа:***

$$dA = U'dq.$$

Работа равна убыли потенциальной энергии конденсатора:

$$dA = -dW_c.$$

Так как $q = CU$, то $dA = CU'dU'$, а полная работа:

$$\boxed{A = \int dA}$$

$$A = -W_c = \int dA = C\int_U^0 U' dU' = \frac{1}{2}CU^2$$

$$W_c = \frac{CU^2}{2}$$

Энергию конденсатора можно посчитать и по другим формулам (т.к. $q = C \cdot U$):

$$W_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}qU$$

Энергия электростатического поля

Носителем энергии в конденсаторе, W_c является электростатическое поле.

Найдем W_c:

$$W_c = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d}\frac{d}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd$$

$\frac{U}{d} = E;$ $Sd = V$ – объем. Отсюда:

$$\boxed{W_c = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V}$$

Энергия электростатического поля

Если поле **однородно**, заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью. Тогда можно посчитать ***объёмную плотность энергию ω:***

$$\omega = \frac{W}{V}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}}$$

Так как $D = \varepsilon_0\varepsilon E$, то $\boxed{\omega = \frac{ED}{2}}$

Объёмная плотность энергии ω в заданной точке электрического поля пропорциональна квадрату напряжённости поля в этой точке.

Измеряется объёмная плотность энергии, конечно, в Дж/м^3:

$$[\omega]=[\varepsilon_0][E^2]=\frac{\text{Ф}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{В}^2}{\text{м}^2}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}^3}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$$

Зная, как меняется плотность энергии в пространстве, можно вычислить энергию, сосредоточенную в объёме *V*, электрического поля:

$$W=\int_V \omega dV$$

Энергия системы зарядов

Если поле создано двумя точечными зарядами q_1 и q_2, то

$$W_1 = q_1\varphi_{12} \qquad W_2 = q_2\varphi_{21}$$

Здесь φ_{12} – потенциал поля, создаваемого зарядом q_2 в точке, где расположен заряд q_1, φ_{21} – потенциал поля от заряда q_1 в точке с зарядом q_2.

Для вакуума можно записать:

$$\varphi_{12} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \varphi_{21} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Здесь *r* – расстояние между зарядами. Из двух последних систем уравнений следует, что

$$W_1 = W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = W$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}W_1 + \frac{1}{2}W_2 = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21})}$$

Энергия взаимодействия системы из N зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i$$

$\varphi_i = \sum\limits_{k \neq i} \varphi_k$ – потенциал в точке, где расположен заряд q_i

создаваемый всеми остальными зарядами (кроме q_i).


Лекция закончена!