Лекция 11. Полные системы и замкнутые классы логических функций

Ранее рассматривались два способа задания логической функции — табличный и формульный. Табличный способ универсален (т.е. пригоден для любой функции), но громоздок. Формула — более компактный способ, но она задает функцию через другие функции. Поэтому возникает вопрос: любая ли логическая функция может быть представлена формулой через функции некоторой заданной системы?

Определение 1. Система логических функций $\{f_1, \ldots, f_n\}$ называется (функционально) *полной*, если любая логическая функция может быть представлена в виде некоторой композиции, в которую входят только функции данной системы.

Пример 1. Система функций $\{1, x_1 \wedge x_2, x_1 \oplus x_2\}$ является полной, так как любая логическая функция может быть представлена полиномом Жегалкина, т.е. композицией, в которую входят только функции данной системы.

Упражнение 1 (д/з). Привести другие примеры полных систем логических функций.

Определение 2. Множество логических функций называется *замкнутым классом*, если любая композиция функций из этого множества снова принадлежит ему.

Рассмотрим основные замкнутые классы логических функций:

Определение 3. Логическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *сохраняющей ноль*, если для нее выполняется равенство: $f(0, \ldots, 0) = 0$. Класс всех логических функций любого числа переменных, сохраняющих ноль, обозначается T_0.

Пример 2. Проверить, что следующие функции принадлежат классу T_0: а) константа 0, б) тождественная функция x, в) конъюнкция $x_1 \wedge x_2$.

Упражнение 2 (д/з). Проверить, что следующие функции принадлежат классу T_0: а) дизъюнкция $x_1 \vee x_2$, б) сложение по модулю 2 $x_1 \oplus x_2$.

Упражнение 3 (д/з). Проверить, что следующие функции не принадлежат классу T_0: а) константа 1, б) отрицание $\bar{x}$.

Утверждение 1. *T_0 — замкнутый класс.*

Доказательство. Пусть функции $f(x_1, \ldots, x_m)$, а также

$$f_1(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}), \ldots, f_m(x_{m,1}, \ldots, x_{m,n_m})$$

(некоторые из этих переменных могут совпадать между собой) принадлежат T_0. Докажем, что функция $F = f(f_1, \ldots, f_m)$ принадлежит T_0. Последнее соотношение вытекает из следующей цепочки равенств:

$$F(0, \ldots, 0) = f(f_1(0, \ldots, 0), \ldots, f_m(0, \ldots, 0)) = f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Определение 4. Логическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *сохраняющей единицу*, если для нее выполняется равенство: $f(1, \ldots, 1) = 1$. Класс всех логических функций любого числа переменных, сохраняющих единицу, обозначается T_1.

Пример 3. Проверить, что следующие функции принадлежат классу T_1: а) константа 1, б) конъюнкция $x_1 \wedge x_2$.

Упражнение 4 (д/з). Проверить, что следующие функции принадлежат классу T_1: а) тождественная функция x, б) дизъюнкция $x_1 \vee x_2$.

Упражнение 5 (д/з). Проверить, что следующие функции не принадлежат классу T_1: а) константа 0, б) отрицание $\bar{x}$.

Утверждение 2. *T_1 — замкнутый класс.*

Упражнение 6 (д/з). Доказать утверждение 2.

Определение 5. Функция $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ называется *двойственной функцией* к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если она определяется равенством $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

Определение 6. Операция замены 0 на 1 и 1 на 0 в столбце значений функции называется *инвертированием.*

Замечание 1. Очевидно, что таблица для двойственной функции $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ получается из таблицы функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ двумя последовательными операциями: а) инвертированием столбца значений функции и б) переворачиванием инвертированного столбца. Проиллюстрируем это на примере функции трех переменных.

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$\bar{f}(x_1, x_2, x_3)$	$f^*(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0

Упражнение 7 (д/з). Доказать, что следующие функции двойственны друг другу: а) константа 0 и константа 1, б) тождественная функция x и отрицание $\bar{x}$, в) конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ и дизъюнкция $x_1 \vee x_2$.

Упражнение 8 (д/з). Доказать, что отношение двойственности между функциями f и f^* симметрично.

Определение 7. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если она равна своей двойственной, т.е. выполняется следующее условие: $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n)$ или

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n). \tag{1}$$

Замечание 2. Для того чтобы функция была самодвойственной, нужно, чтобы значения функции на противоположных наборах переменных (т.е. на наборах, равноудаленных от начала и конца таблицы) были противоположны.

Пример 4. Докажем, что функция f, заданная таблицей 2, самодвойственна.

Таблица 2

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Доказательство. Действительно, инвертируя заданную функцию, получим $\bar{f}(x_1, x_2, x_3)$. Переворачивая столбец значений функции $\bar{f}(x_1, x_2, x_3)$, получим двойственную функцию к $f(x_1, x_2, x_3)$, т.е. $f^*(x_1, x_2, x_3)$:

Таблица 3

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$\bar{f}(x_1, x_2, x_3)$	$f^*(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1

Сравнивая значения функций f и f^*, видим, что $f(x_1, x_2, x_3) = f^*(x_1, x_2, x_3)$ при всех значениях аргументов. Следовательно, согласно (1) заданная функция самодвойственная.

Упражнение 9 (д/з). Доказать, что следующие функции являются самодвойственными: а) тождественная функция x, б) отрицание $\bar{x}$.

Упражнение 10 (д/з). Доказать, что следующие функции не являются самодвойственными: а) конъюнкция $x_1 \wedge x_2$, б) дизъюнкция $x_1 \vee x_2$.

Обозначение. Класс всех самодвойственных логических функций любого числа переменных обозначается S.

Утверждение 3 (без доказательства). *S — замкнутый класс.*

Определение 8. Для двух наборов значений логических переменных $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ будем писать $a \leq b$, если

$$a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n.$$

Пример 5. Для $a = (0, 1, 0, 1)$ и $b = (1, 1, 0, 1)$ выполнено $a \leq b$.

Замечание 3. Следует отметить, что не для любых пар наборов значений переменных имеет место $a \leq b$ или $b \leq a$.

Пример 6. Для $a = (0, 1)$ и $b = (1, 0)$ ни $a \leq b$, ни $b \leq a$ не имеет места.

Упражнение 11 (д/з). Показать, что: а) $(a \leq b) \to (a \prec b)$; б) обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 9. Логическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов значений n переменных a и b таких, что $a \leq b$, имеет место неравенство:

$$f(a) \leq f(b). \tag{2}$$

Правило проверки логических функций, заданных таблицей с лексикографическим порядком наборов значений аргументов, на монотонность:

1. Попытаться найти наборы значений переменных a^* и b^* такие, что

$$\begin{cases} a^* \leq b^*, \\ 1 = f(a^*) > f(b^*) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим, что в силу упражнения 11 при этом с необходимостью имеем $a^* \prec b^*$, т.е. достаточно проверить условие $a^* \leq b^*$ для всех таких a^* и b^*, что

$$\begin{cases} a^* \prec b^*, \\ 1 = f(a^*) > f(b^*) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(строка a^* находится выше строки b^* в таблице задания функции, но значение функции $f(a^*) = 1$ больше, чем $f(b^*) = 0$).

2. Если найдутся a^* и b^*, для которых выполнено (3), то в силу определения 9 функция f не является монотонной.

3. Если не найдутся a^* и b^*, для которых выполнено (3), то в силу определения 9 функция f является монотонной.

Пример 7. Проверить монотонность следующих функций: а) константы 0, б) тождественной функции x, в) конъюнкции $x_1 \wedge x_2$, г) отрицания $\bar{x}$.

Упражнение 12 (д/з). Проверить монотонность следующих функций: а) константы 1, б) дизъюнкции $x_1 \vee x_2$.

Пример 8. Проверить монотонность функций f_1, f_2 и f_3, заданных следующей таблицей:

Таблица 4

x_1	x_2	x_3	$f_1(x_1, x_2, x_3)$	$f_2(x_1, x_2, x_3)$	$f_3(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Решение. а) В таблице задания функции f_1 нет строк, удовлетворяющих (4) (таких, что строка a^* находится выше строки b^* в таблице задания функции, но значение функции $f_1(a^*) = 1$, а $f_1(b^*) = 0$), а следовательно, нет и строк, удовлетворяющих (3). Поэтому функция f_1 монотонна в силу пункта 3 правила.

б) В соответствии с правилом для функции f_2 вторую строку ($f_2(a_1^*, a_2^*, a_3^*) = f(0,0,1) = 1$) можно сравнивать с третьей, шестой и седьмой строками, где $f_2(b_1, b_2, b_3) = 0$. Набор значений переменных второй строки не находится в отношении $\leq$ с набором третьей строки, а с набором шестой строки находится в этом отношении, т.е. $(0,0,1) \leq (1,0,1)$ (выполнено первое из условий (3)). Сравнивая значения функции f_2 для этих строк, получим: $1 = f_2(0,0,1) > f_2(1,0,1) = 0$, т.е. второе из условий (3) также выполнено. Следовательно, функция f_2 не является монотонной в силу пункта 2 правила.

в) Для функции f_3 наборы значений переменных третьей и четвертой строк, где $f_3(a_1, a_2, a_3) = 1$, можно было бы сравнить с наборами пятой строки, для которой $f_3(b_1^*, b_2^*, b_3^*) = f_3(1,0,0) = 0$. Но наборы значений переменных этих строк не находятся в отношении $\leq$ с набором пятой строки (второе из условий (3) не выполнено для них), поэтому эти строки не следует сравнивать. Другие строки также не следует сравнивать, т.к. для них значение функции в предшествующей строке не больше значения функции в последующей строке (не выполнено первое из условий (3)). Следовательно, функция f_3 монотонна в силу пункта 3 правила.

Класс всех монотонных логических функций обозначается M.

Утверждение 4 (без доказательства). *M — замкнутый класс.*

Определение 10. Логическая функция называется *линейной*, если полином Жегалкина, представляющий данную функцию, содержит только линейные слагаемые, т.е.

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \wedge x_1 \oplus a_2 \wedge x_2 \oplus \dots \oplus a_n \wedge x_n, \tag{5}$$

где $a_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \dots, n$.

Пример 9. Проверить, являются ли линейными следующие функции: а) константа 0, б) тождественная функция x, в) дизъюнкция $x_1 \vee x_2$.

Упражнение 13 (д/з). Проверить, являются ли линейными следующие функции: а) константа 1, б) отрицание $\bar{x}$, в) сложение по модулю 2 $x_1 \oplus x_2$.

Для проверки функции на линейность полезна следующая теорема.

Теорема (без доказательства). *Если в таблице задания функции количество значений функции, равных 1, не равно количеству значений функции, равных 0, то функция не является линейной. Если равно, то надо проверять функцию на линейность.*

Класс всех линейных логических функций обозначается L.

Утверждение 5 (без доказательства). *L — замкнутый класс.*

Теорема Поста (без доказательства). *Для того чтобы система функций была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L.*

Из данной теоремы следует, что при проверке системы на полноту надо все функции системы проверить на принадлежность одному классу, затем другому и т.д. При этом достаточно найти хотя бы одну функцию, не принадлежащую данному классу. Тогда остальные функции системы на принадлежность этому классу можно не проверять. Если при проверке окажется, что все функции системы принадлежат данному классу, то проверку надо закончить, т.к. по теореме Поста такая система не будет полной.

Пример 10. Проверить на полноту следующую систему функций: $\{x_1 \to x_2, x_1 \wedge x_2\}$. Для проверки составим следующую таблицу (см. предыдущие примеры и упражнения).

Таблица 5

f	T_0	T_1	S	M	L
$\to$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\wedge$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$

В данной таблице знак $+$ означает, что функция принадлежит соответствующему классу, а знак $-$, что не принадлежит. Из таблицы видно, что все функции данной системы принадлежат классу $_1$. Следовательно, по теореме Поста данная система функций не является полной.

Пример 11. Проверить на полноту следующую систему функций: $\{\bar{x}_1, x_1 \vee x_2\}$.

Решение. Функция x не сохраняет 0, не сохраняет 1 и не является монотонной. Функция $x_1 \vee x_2$ не является ни самодвойственной, ни линейной. Из этого следует, что в данной системе функций есть хотя бы одна функция, не принадлежащая каждому из пяти замкнутых классов. Следовательно, данная система функций полна.

Замечание 4. Можно показать, что если функция не принадлежит классам T_0, T_1 и S, то она не принадлежит и классам M и L. Следовательно, по теореме Поста любая система, содержащая хотя бы одну такую функцию, полна.

Упражнение 14 (д/з). Исследовать на полноту следующие системы функций: а) $\{x, 1\}$, б) $\{x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$, в) $\{x_1 \oplus x_2, x_1\}$.