Лекция 4

§ 9. Интеграл как функция верхнего предела. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,x]$ $\forall x\in[a,b]$. Построим новую функцию

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ x\in[a,b].$$

Такую функцию называют ***интегралом с переменным верхним пределом***.

Теорема 1. *Функция* $\Phi(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$.

Доказательство. Зафиксируем $x_0\in[a,b]$. Пусть $x_0+\Delta x\in[a,b]$. Рассмотрим приращение функции $\Phi(x)$ в точке x_0:

$$\Delta\Phi = \Phi\left(x_0 + \Delta x\right) - \Phi\left(x_0\right) = \int_a^{x_0+\Delta x} f\left(t\right)dt - \int_a^{x_0} f\left(t\right)dt = \int_a^{x_0} f\left(t\right)dt + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\left(t\right)dt - \int_a^{x_0} f\left(t\right)dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\left(t\right)dt.$$

Поскольку функция $f\left(x\right)$ интегрируема на отрезке $\left[a,b\right]$, то функция $f\left(x\right)$ ограничена на отрезке $\left[a,b\right]$. Существует постоянная $M \geq 0$ такая, что $\left|f\left(x\right)\right| \leq M$ $\forall x \in \left[a,b\right]$. Оценим интеграл

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\left(t\right)dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \left|f\left(t\right)\right|dt\right| \leq M\left|\Delta x\right|.$$

Таким образом, $\left|\Delta\Phi\right| \leq M\left|\Delta x\right|$. Следовательно, $\Delta\Phi \to 0$, когда $\Delta x \to 0$, и функция $\Phi\left(x\right)$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 2(о производной интеграла по переменному верхнему пределу). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$*, то функция* $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b]$ *является первообразной функции* $f(x)$ *на* $[a,b]$*, т.е.* $\exists\Phi'(x)=f(x),\ x\in[a,b]$.

◀Доказательство. Зафиксируем $x_0\in[a,b]$ и рассмотрим разностное отношение для функции $\Phi(x)$ в точке x_0:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^{x_0} f(t)dt\right)=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt.$$

Воспользуемся непрерывностью функции $f(x)$ на отрезке $[x_0,x_0+\Delta x]$ и применим теорему о среднем значении. Тогда

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x,$$

где точка c расположена между x_0 и $x_0+\Delta x$. Следовательно,

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(c),\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=f(x_0),\text{ ч.т.д.}\blacktriangleright$$

Замечание 1. Мы доказали, что всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную (теорема 2 §1). Действительно, в качестве первообразной функции $f(x)$ всегда можно взять функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b]$.

Замечание 2. Теорема распространяется и на случай ***интеграла с переменным нижним пределом***

$$\Phi(x)=\int\limits_x^b f(t)dt,\ x\in[a,b].$$

Поскольку $\int\limits_x^b f(t)dt=-\int\limits_b^x f(t)dt$, то $\Phi'(x)=-f(x)$.

Теорема 3(о формуле Ньютона – Лейбница). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* $F(x)$ *- ее первообразная, т.е.* $F'(x)=f(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

◀Доказательство. По теореме 2 функция

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b]$$

является первообразной функции $f(x)$ на $[a,b]$, т.е. $\exists\Phi'(x)=f(x),\ x\in[a,b]$. По теореме об общем виде первообразной $\Phi(x)=F(x)+C,\ C=\text{const}$. Следовательно,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)+C,\ x\in[a,b].$$

Положим $x=a$. Тогда $\int_a^a f(x)dx=0$, следовательно, $F(a)+C=0$, откуда $C=-F(a)$.

Значит,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a),\ x \in [a,b].$$

Положим теперь $x = b$ и получим искомую формулу

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \blacktriangleright$$

Пример 1. $\blacktriangleleft \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$. $\blacktriangleright$

§ 10. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Теорема 1 (о замене переменной в определенном интеграле). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *функция* $x=\varphi(t)$ *имеет непрерывную производную на отрезке* $[\alpha,\beta]$, *причем* $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ *и функция* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ *непрерывна на* $[\alpha,\beta]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. ◄Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует ее первообразная $F(x)$ и выполняется формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Рассмотрим производную функции $F(\varphi(t))$:

$$\left(F(\varphi(t))\right)'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt = F\left(\varphi(t)\right)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F\left(\varphi(\beta)\right) - F\left(\varphi(\alpha)\right) = F(b) - F(a).$$

Получаем искомое равенство

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt\,. \blacktriangleright$$

Пример. Найти интеграл $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$.

◂Сделаем замену переменной:

$$t = \sqrt{e^x - 1},\ e^x = t^2 + 1,\ x = \ln\left(t^2 + 1\right),\ dx = \frac{2tdt}{t+1},\ x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \ln 2 \Rightarrow t = 1.$$

Тогда

$$\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{t \cdot 2tdt}{t^2 + 1} = 2\int_{0}^{1} \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = 2\int_{0}^{1} \frac{\left(t^2 + 1\right) - 1dt}{t^2 + 1} = 2\left(\int_{0}^{1} dt - \int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2 + 1}\right) =$$

$$= 2\left(t - \operatorname{arctg} t\right)\Big|_{0}^{1} = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \blacktriangleright$$

Замечание 1. Пусть функция $f(x)$ – нечетная. Тогда $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Действительно,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \left| x = -t, dx = -dt \right| =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{a} \left(f(-x) + f(x) \right) dx = 0.$$

Пример. Найти интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^{99} \cos x dx$.

◄Функция $f(x) = x^{99} \cos x$ является нечетной, поэтому $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^{99} \cos x dx = 0$.►

Замечание 2. Пусть функция $f(x)$ – четная. Тогда $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Действительно,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \left| x = -t, dx = -dt \right| =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{a} \left(f(-x) + f(x) \right) dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Замечание 3. Пусть функция $f(x)$ – периодическая с периодом T. Тогда

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx.$$

Теорема 2(об интегрировании по частям в определенном интеграле). *Если функции $u(x)$, $v(x)$ и их производные $u'(x)$, $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Доказательство. ◄По формуле дифференцирования произведения

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Проинтегрируем левую и правую части:

$$\int_a^b \left(u(x)v(x)\right)' dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. ▸$$

Пример. Найти интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos x dx$.

◂Функция $f(x) = |x|\cos x$ является четной, поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos x dx = 2\int_0^{\pi} x\cos x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= \pi \cdot \sin\pi - 0 \cdot \sin 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -2.$$

Окончательный ответ: $\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos x dx = -4$. ▸