Семинар №2

Потенциальность электростатического поля. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля. Теорема Гаусса. Энергия взаимодействия неподвижных электрических зарядов в вакууме

Векторное электрическое поле $\overline{E}(\overline{r})$ имеет определенную пространственную структуру, которая описывается с помощью **интегральных соотношений**. Первое такое интегральное соотношение выражает **теорему Гаусса**

$$\oint_s (\vec{E}\vec{n})ds = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

которая связывает поток вектора напряженности электрического поля $\overline{E}$ через замкнутую поверхность S с зарядом q, который находится в области, ограниченной поверхностью S.

Второе интегральное соотношение есть **теорема о циркуляции вектора** $\overline{E}$ по контуру

$$\oint_l (\overline{E}\vec{\tau})dl = 0,$$

где l - произвольный контур, $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к элементу контура, dl - длина бесконечного малого элемента контура.

Физический смысл теоремы о циркуляции заключается в том, что работа сил электростатического поля при перемещении точечного заряда q по любому контуру всегда равна нулю

$$A = \oint_l (\vec{F}\vec{\tau})dl = \oint_l q(\vec{E}\vec{\tau})dl = q\oint_l (\vec{E}\vec{\tau})dl = 0,$$

Отсюда следует, что работа сил электростатического поля при перемещении заряда из одной точки в другую не зависит от выбора траектории этого перемещения. Таким образом, электростатическое поле является **потенциальным** и можно ввести скалярную функцию координат $\varphi(\overline{r})$ которая называется потенциал.

С помощью потенциала работа сил электростатического поля при перемещении точечного заряда q из точки 1 в точку 2 запишется следующим образом

$$A_{12} = \int_1^2 q(\vec{E}\vec{\tau})dl = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где φ_i - потенциал электростатического поля $\overline{E}$ в точке i, $i=1,2$.

Эта формула лежит в основе определения потенциала по заданному вектору напряженности электрического поля:

1) в некоторой точке 1задается произвольное значение потенциала φ_1;
2) потенциал в любой точке 2 находится по формуле

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \int_1^2 (\vec{E}\vec{\tau})dl = \varphi_1 + \int_2^1 (\vec{E}\overleftarrow{\tau})dl = \varphi_1 + A_{21},$$

где A_{21}-работа сил электростатического поля при перемещении единичного положительного заряда из точки 2 в точку 1 по произвольной траектории.

Если задан потенциал $\varphi(\vec{r})$, то вектор напряженности электрического поля в любой точке пространства находится с помощью дифференцирования потенциала по координатам x, y, z:

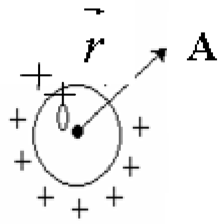
$$\vec{E} = -grad\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ - орты, определяющие направления координатных осей x,y и z соответственно.

Задачи № 6 и №7 посвящены нахождению потенциала электростатического поля по заданному пространственному распределению зарядов.

Задача №6

По сфере радиусом R равномерно распределен заряд q>0. Определите напряженность E и потенциал φ электрического поля как функции расстояния r от центра сферы и постройте графики этих функций. Потенциал бесконечно удаленных точек принять равным нулю.



Решение:

Задача решается с помощью теоремы Гаусса и определения потенциала электрического поля.

Используя формулу для вектора напряженности электрического поля точечного заряда, принцип суперпозиции и симметрию пространственного распределения заряда, можно показать, что в любой точке пространства вектор напряженности электрического поля описывается выражением

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (1)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения А, проведенный из центра заряженной сферы.

Запишем теорему Гаусса, выбрав в качестве замкнутой поверхности сферу S, которая проходит через точку наблюдения, а ее центр совпадает с центром O заряженной сферы.

$$\oint\limits_S (\vec{E}\vec{n})ds = \oint\limits_S E(r)(\frac{\vec{r}}{r}\frac{\vec{r}}{r})ds = \oint\limits_S E(r)ds = E(r)\oint\limits_S ds = E(r)4\pi^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad (2)$$

Отсюда находим, что

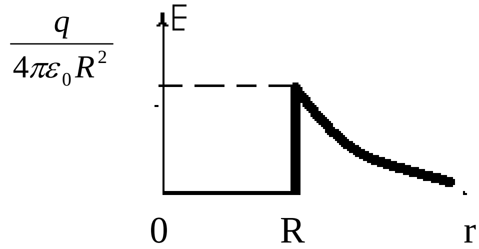
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad (3)$$

где Q- заряд, находящийся в области, ограниченной выбранной сферой.
Если $\infty \geq r \geq R$, то

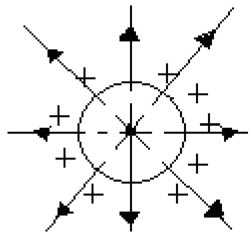
$$\mathrm{Q} = \mathrm{q} \text{ и } \mathrm{E} = \mathrm{q}/4\pi\varepsilon_0 r^2, \quad (4)$$

если $R > r \geq 0$, то

$$\mathrm{Q} = 0 \text{ и } \mathrm{E} = 0, \quad (5)$$



Силовые линии, касательные к которым определяют положение вектора напряженности электрического поля в пространстве, представляют собой прямые, начинающиеся на заряженной сфере, а их продолжения пересекаются в центре этой сферы



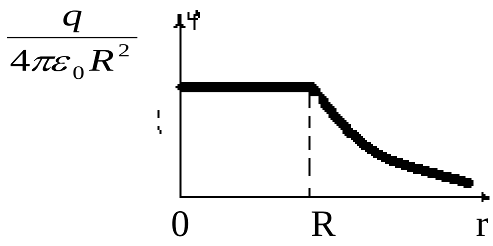
Определим потенциал φ_A в некоторой точке A на силовой линии, когда $r_A > R$. Согласно условиям задачи и определению потенциала

$$\varphi_A = \varphi(\infty) + \int\int\limits_{r_A}^{\infty} (\vec{E}\vec{\tau})dl = \int\limits_{r_A}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r_A}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\Big|_{r_A}^{\infty}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}, \quad (6)$$

Если выбрана точка A внутри заряженной сферы, где $r_A < R$, то

$$\varphi_A = \varphi(\infty) + \int\limits_{r_A}^{\infty}\left(\vec{E}\vec{\tau}\right)dr = \int\limits_{r_A}^{R}\left(\vec{E}\vec{\tau}\right)dr + \int\limits_{R}^{\infty}\left(\vec{E}\vec{\tau}\right)dr = \int\limits_{R}^{\infty}\left(\vec{E}\vec{\tau}\right)dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = const, \quad (7)$$

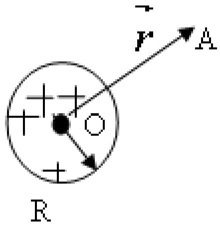
Потенциал внутри равномерно заряженной сферы во всех точках одинаковый.



Ответ: R>r≥0; $\vec{E}=0$; $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$; ∞>r≥R; $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$; $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Задача№7

Шар радиусом R равномерно заряжен с объемной плотностью заряда $\rho\rangle 0$. Определить разность потенциалов электрического поля между точками О и А, где т. О – центр шара, а точка А находится на расстоянии 2R от т. О.



Решение:

Вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ равномерно заряженного шара имеет вид:

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}, R>r\geq 0;\\[2mm] \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, \infty>r\geq r.\end{cases} \tag{1}$$

Согласно определению разности потенциалов

$$\varphi_0-\varphi_A=\int_0^A(\vec{E}\vec{\tau})dr=\int_0^{r_A}E(r)\left(\frac{\vec{r}}{r}\frac{\vec{r}}{r}\right)dr=\int_0^{r_A}E(r)dr, \tag{2}$$

где интегрирование ведется вдоль силовой линии, проходящей через центр заряженного шара и т. А. Отметим, что силовые линии представляют собой прямые, выходящие из центра шара.

Если R>r≥0, то

$$\varphi_0-\varphi_A=\int_0^{r_A}\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dr=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_0^{r_A}rdr=\frac{\rho {r_A}^2}{6\varepsilon_0}, \tag{3}$$

если ∞>r_A≥R, то

$$\varphi_0 - \varphi_A = \int_0^{r_A} E(r)dr = \int_0^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dr + \int_R^{r_A} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_0^R r dr + \frac{\rho R^3}{\varepsilon_0}\int_R^{r_A}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{\rho(R^2)}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\Bigg|_R^{r_A} = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} - \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r_A} + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_A}. \qquad \mathbf{(4)}$$

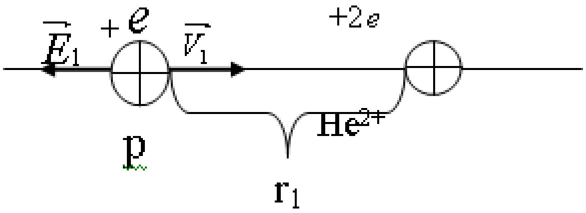
В нашем случае r_A=2R>R, поэтому согласно формуле (4)

$$\varphi_0 - \varphi_A = \frac{\rho(R^2)}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho(R^3)}{3\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho(R^2)}{3\varepsilon_0}, \qquad (5)$$

Ответ: $\varphi_0 - \varphi_A = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$.

Задача №8

Протон, летящий к неподвижному ядру двукратно ионизированному атома гелия He^{2+}, имеет скорость $V_1=10^6$ см/с в некоторой точке на расстоянии r_1 от иона гелия, где величина напряженности электрического поля E_1=100 В/см. На какое минимальное расстояние r_{min} протон может приблизитmся к иону гелия?



Решение:

Задача решается на основе закона сохранения энергии.

Полная энергия системы протон + ион гелия описывается выражением

$$W = m_p V^2/2 + q_1 q_2/4\pi\varepsilon_0 r, \qquad (1)$$

где

$$W_{вз} = q_1 q_2/4\pi\varepsilon_0 r = e2e/4\pi\varepsilon_0 r = e^2/2\,\pi\varepsilon_0 r \qquad (2)$$

есть потенциальная энергия кулоновского взаимодействия протона с ионом гелия в вакууме.

Полная энергия системы при движении протона сохраняется постоянной

$$W = const = W_1 = m_p V^2/2 + e^2/2\,\pi\varepsilon_0 r_1, \qquad (3)$$

где величина r_1 находится из условия задачи:

$$E_1 = 2e/4\,\pi\varepsilon_0 r_1^2 = e/\,2\,\pi\varepsilon_0 r_1^2 \qquad (4)$$

или

$$r_1=\sqrt{\frac{e}{2\pi\varepsilon_0 E_1}}\ ,$$

Согласно формуле (1) минимальное расстояние достигается в момент остановки протона, когда V=0, поэтому из (1)-(5) получается, что

$$r_{min}=e^2/2\pi\varepsilon_0 W_1= e^2/2\pi\varepsilon_0 * 1/\ ((m_p V^2/2)+ e^2/2\pi\varepsilon_0 * \sqrt{\frac{2e}{2\pi\varepsilon_0 E_1}}\ )=$$

$$=(\ (\pi\varepsilon_0\ m_p V^2/e^2) + \sqrt{\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 E_1}}\ )^{-1}=5*10^{-9}\text{м.} \qquad (5)$$

Ответ: $r_{min}=(\ (\pi\varepsilon_0\ m_p V^2/e^2) + \sqrt{\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 E_1}}\ )^{-1}=5*10^{-9}$м.