Электричество и магнетизм

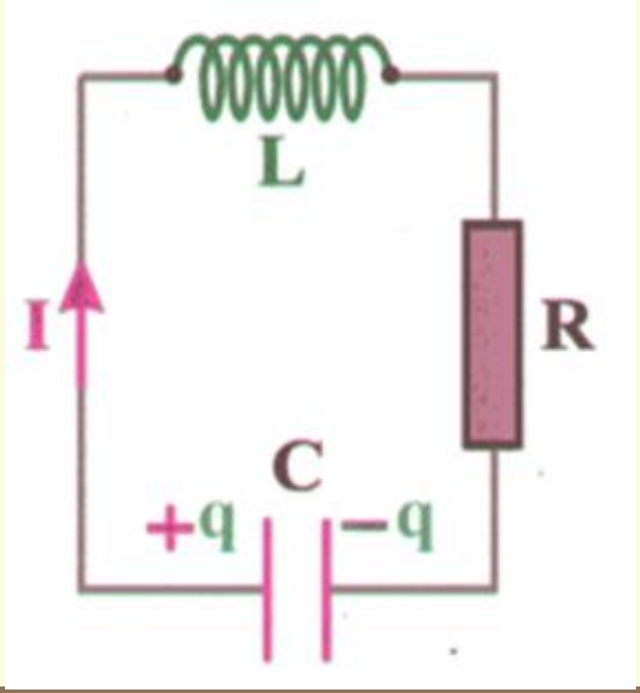
Семестр 2

ЛЕКЦИЯ № 10
Электрические колебания

1. Колебательный контур. Квазистационарные токи.
2. Собственные электрические колебания.
   а) Собственные незатухающие колебания.
   б) Собственные затухающие колебания.
3. Вынужденные электрические колебания. Резонанс. Резонансные кривые.

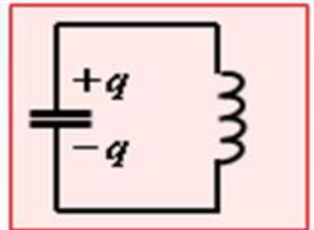
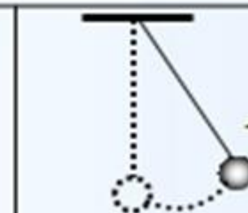
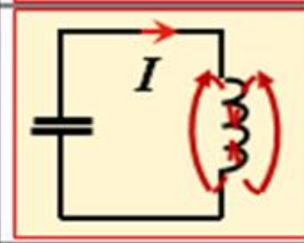
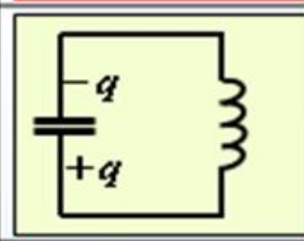
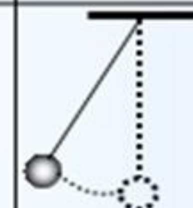
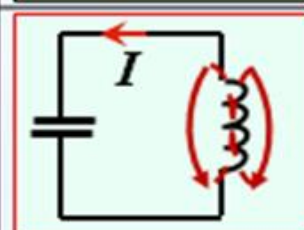
Колебательный контур

Колебания электрических величин — заряда, напряжения, тока — можно наблюдать в цепи, состоящей из последовательно соединённых сопротивления (*R*), ёмкости (*C*) и катушки индуктивности (*L*). Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется ***колебательный контур***.



Колебательный контур – это электрическая цепь, состоящая из последовательно включенных резистора сопротивлением ***R*** катушки индуктивностью ***L*** , и конденсатора емкостью ***C*** .

Колебания, происходящие только за счёт внутренних энергетических ресурсов системы, называются ***собственными***. Первоначально энергия была сообщена конденсатору и локализована в электростатическом поле. При замыкании конденсатора на катушку, в цепи появляется разрядный ток, а в катушке — магнитное поле. Э.д.с. самоиндукции катушки будет препятствовать мгновенной разрядке конденсатора. Через четверть периода конденсатор полностью разрядится, но ток будет продолжать течь, поддерживаемый электродвижущей силой самоиндукции. К моменту $T/2$ эта э.д.с. перезарядит конденсатор. Ток в контуре и магнитное поле уменьшатся до нуля, заряд на обкладках конденсатора достигнет максимального значения. Эти колебания электрических величин в контуре будут происходить неограниченно долго, если сопротивление контура $R = 0$. Такой процесс называют ***собственные незатухающие колебания***.

t	Стадии колебательного процесса		Аналогия между электромагнитными колебаниями в контуре и механическими колебаниями		
	В конденсаторе	**В катушке**			
$t = 0$	Начало разрядки конденсатора	Начинает течь ток		$W = \frac{q^2}{2C}$	 $E = П_{max}$
$t = \frac{1}{4}T$	Конденсатор разряжен	Ток максимален		$W = \frac{LI^2}{2}$	 $E = K_{max}$
$t = \frac{1}{2}T$	Конденсатор перезаряжается	Ток равен нулю		$W = \frac{q^2}{2C}$	 $E = П_{max}$
$t = \frac{3}{4}T$	Конденсатор вновь разряжен	Ток максимален и направлен противопол.		$W = \frac{LI^2}{2}$	 $E = K_{max}$

Собственные незатухающие колебания

Подобные колебания мы наблюдаем в механической колебательной системе, когда в ней отсутствует сила сопротивления.

Собственные незатухающие колебания

Такие колебания возникают в электромагнитном колебательном контуре, если его сопротивление R равно нулю.

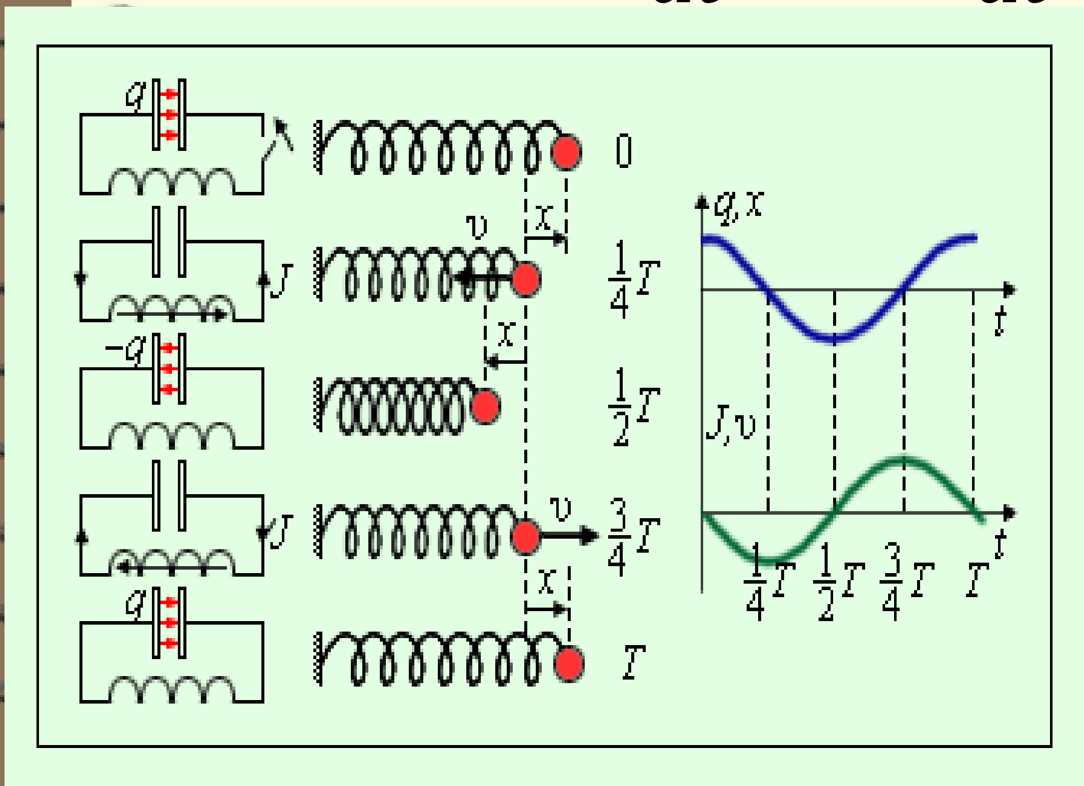
Сначала зарядим конденсатор C и замкнём его на катушку индуктивности L. Начнётся разряд конденсатора. Запишем уравнение II правило Кирхгофа, которое справедливо, строго говоря, для постоянного тока. Но в колебательных системах ток меняется во времени. Однако, и в этом случае можно воспользоваться этим законом для мгновенного значения тока, если скорость изменения тока не слишком высока. Такие токи называются квазистационарными («квази» (лат.) — как будто, почти), т.е. почти постоянные или медленно меняющиеся.

II правило Кирхгофа будет иметь вид:

$$-U_C = \varepsilon_{самоинд}$$

Здесь $U_C = \dfrac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе,

$$\varepsilon_{самоинд} = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2} = -L\ddot{q}$$ - э.д.с. самоиндукции



$$I = -\frac{dq}{dt} = -\dot{q}$$ - ток в контуре.

II правило Кирхгофа теперь будет:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

Учитывая последние соотношения, перепишем II правило Кирхгофа в виде (поделив на ***L***) :

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Обозначив $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ и $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ - *частота собственных незатухающих колебаний гармонического осциллятора.*

Получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка — ***дифференциальное уравнение собственных незатухающих электрических колебаний:***

$$\boxed{\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

Решением этого уравнения является следующая гармоническая функция: $\boldsymbol{q = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$

Постоянные A и φ в решении определяются из начальных условий колебательного процесса. Пусть в момент запуска часов (t = 0) $q(0) = q_0$, а ток в цепи отсутствует $I(0) = 0$. Это означает, что $q(0) = A\cos\varphi = q_0$ и

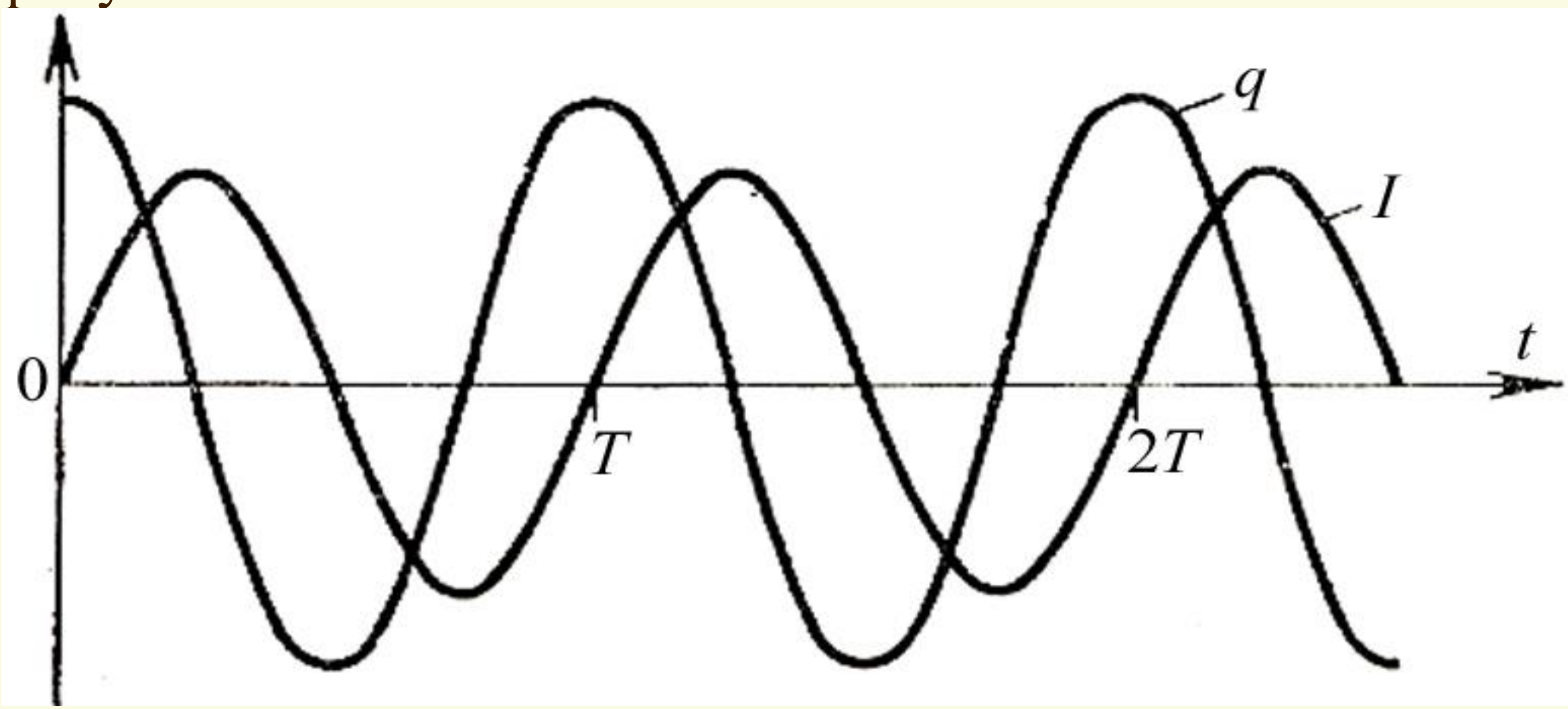
$$I = -\frac{dq}{dt} = A\omega_0 \sin\varphi = 0$$

Из последнего выражения заключаем, что $\varphi = 0$, а из предпоследнего, что $A = q_0$. Окончательно закон изменения заряда конденсатора во времени принимает следующий вид: $q = q_0\cos(\omega_0 t)$. А ток в цепи при этом меняется:

$$I = -\frac{dq}{dt} = q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) = I_0 \cos\left(\omega_0 t - \pi/2\right)$$

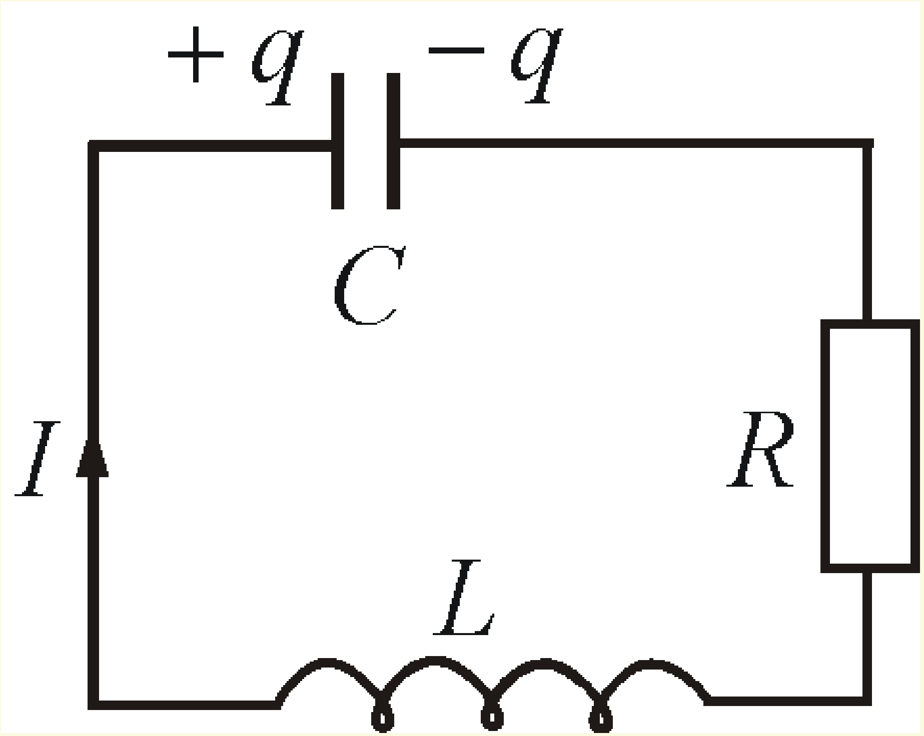
Колебания тока в цепи и заряда конденсатора происходят с одинаковой частотой ω_0, но колебания силы тока отстают по фазе на $\pi/2$.

В последнем выражении $I_0 = q_0\omega_0$ — амплитудное значение силы тока.
Графики зависимостей $q = q(t)$ и $I = I(t)$ приведены на рисунке:



Свободные затухающие электрические колебания

Всякий реальный контур обладает ***активным сопротивлением R***. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.



По второму правилу Кирхгофа: $IR + \frac{q}{c} = -L\frac{dI}{dt}$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

Уравнение свободных **затухающих колебаний** в контуре R,L и C

решение этого уравнения имеет вид:

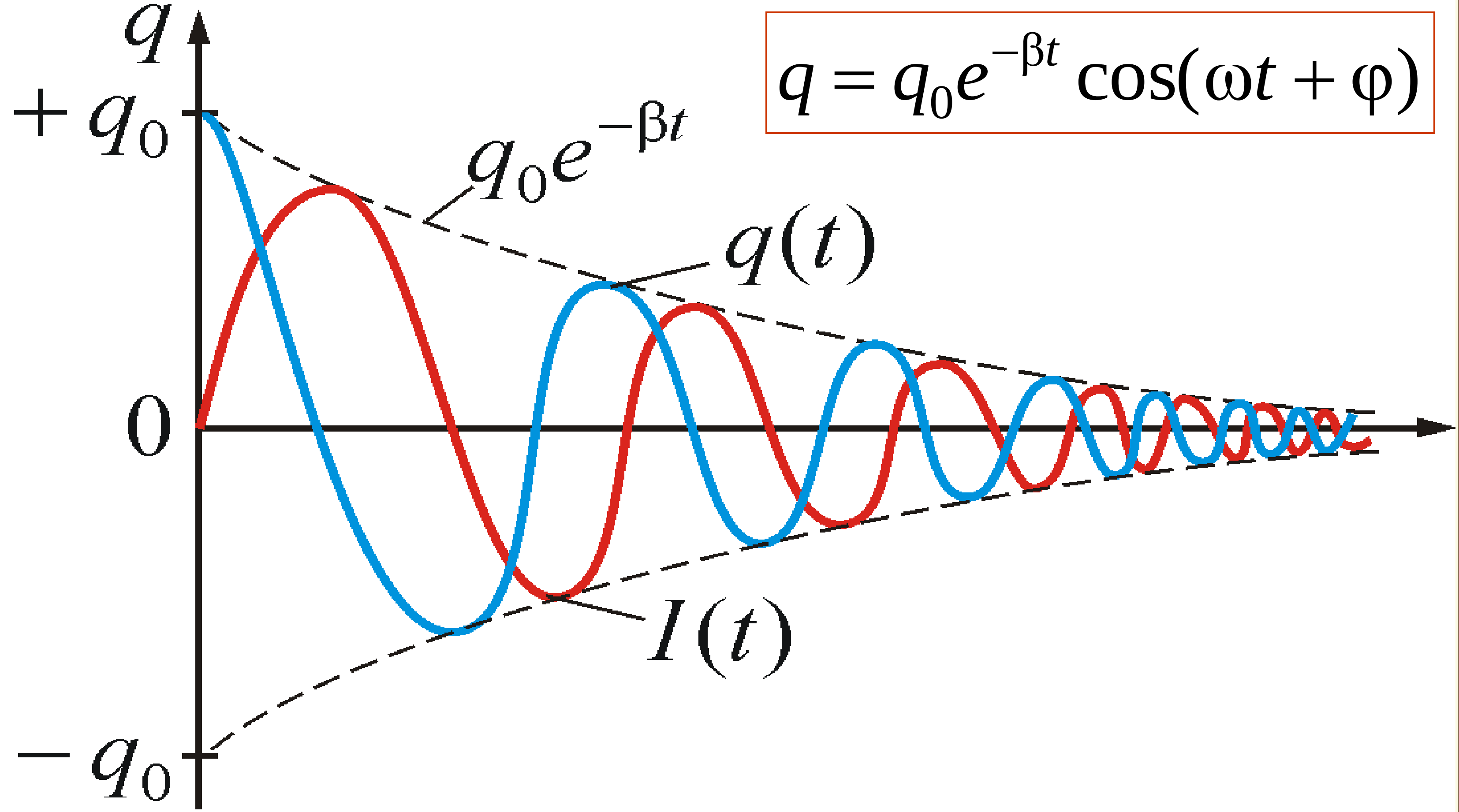
$$\boxed{q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),}$$

$\beta = R/2L,$ ***- коэффициент затухания***

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ***- собственная частота контура***

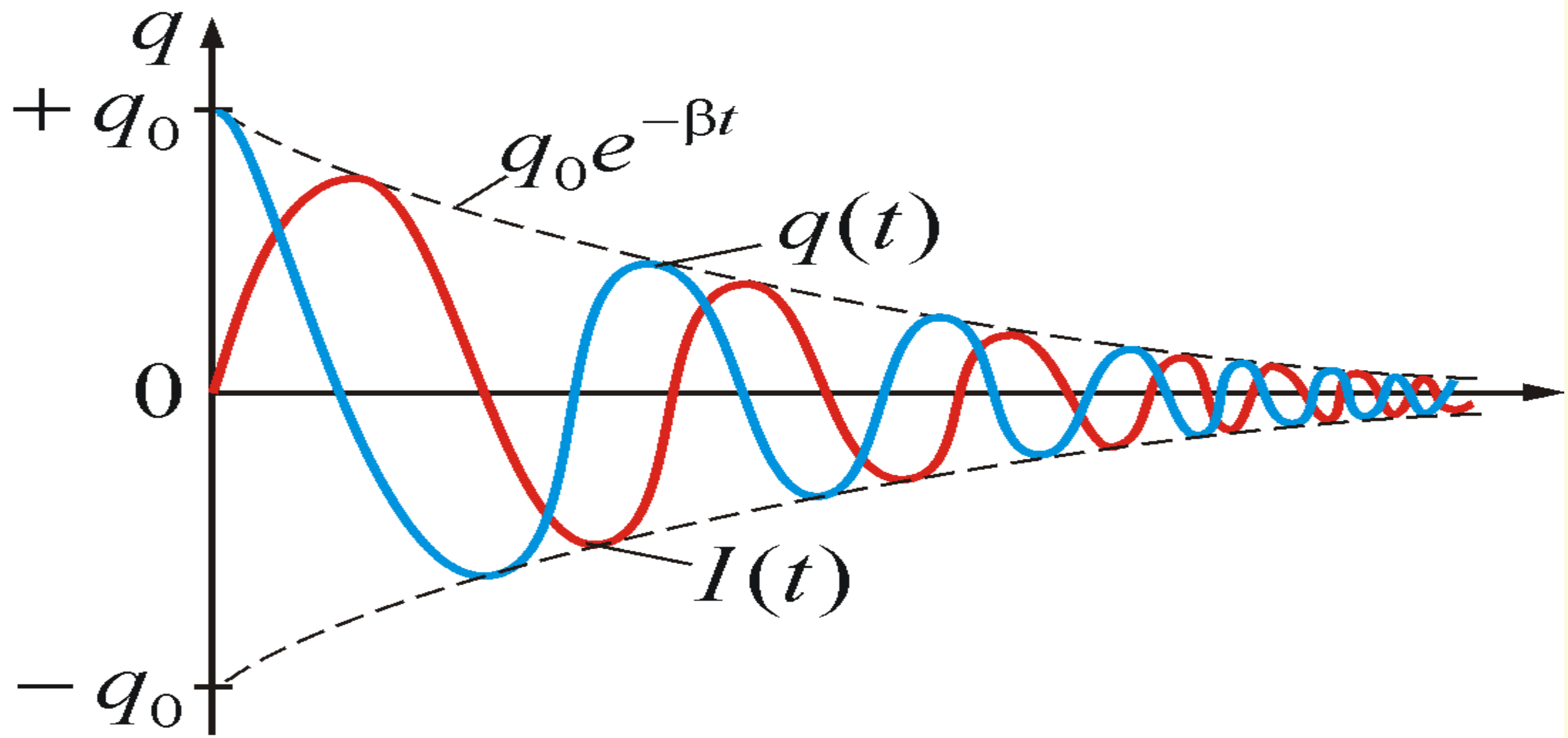
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ или $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ ***Частота затухающих колебаний***

Вид затухающих колебаний заряда q и тока I:



$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Колебаниям ***q соответствует x*** – смещение маятника из положения равновесия, силе тока ***I – скорость υ***.



$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

Декремент затухания

$$\boxed{\chi = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T}$$

Логарифмический декремент затухания

Коэффициент затухания: $\beta = \dfrac{R}{2L}$

Период затухающих колебаний: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$;

Тогда

$$\boxed{\chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}}$$

Логарифмический декремент затухания

R, L, ω – определяются параметрами контура, следовательно, и χ является характеристикой контура.

Если затухание невелико (слабозатухающие колебания):

$\beta^2 << \omega_0^2$ или чаще $\beta << \omega_0$

$$\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\boxed{\chi = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Добротность колебательного контура Q определяется как величина обратно пропорциональная χ (***чем меньше затухание, тем выше добротность***)

$$Q = \frac{\pi}{\chi}$$

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Время затухания – время за которое амплитуда колебаний уменьшается в ***e*** раз

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}$$

Число колебаний совершаемых за время затухания

$$\chi = \frac{1}{N_e}$$ то $$Q = \pi N_e$$

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$$

W – энергия контура в данный момент,
ΔW – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом

При $\boxed{\beta^2 \geq \omega_0^2,}$ т.е. при $R^2 / 4L^2 \geq 1/LC$ $(T \to \infty)$:

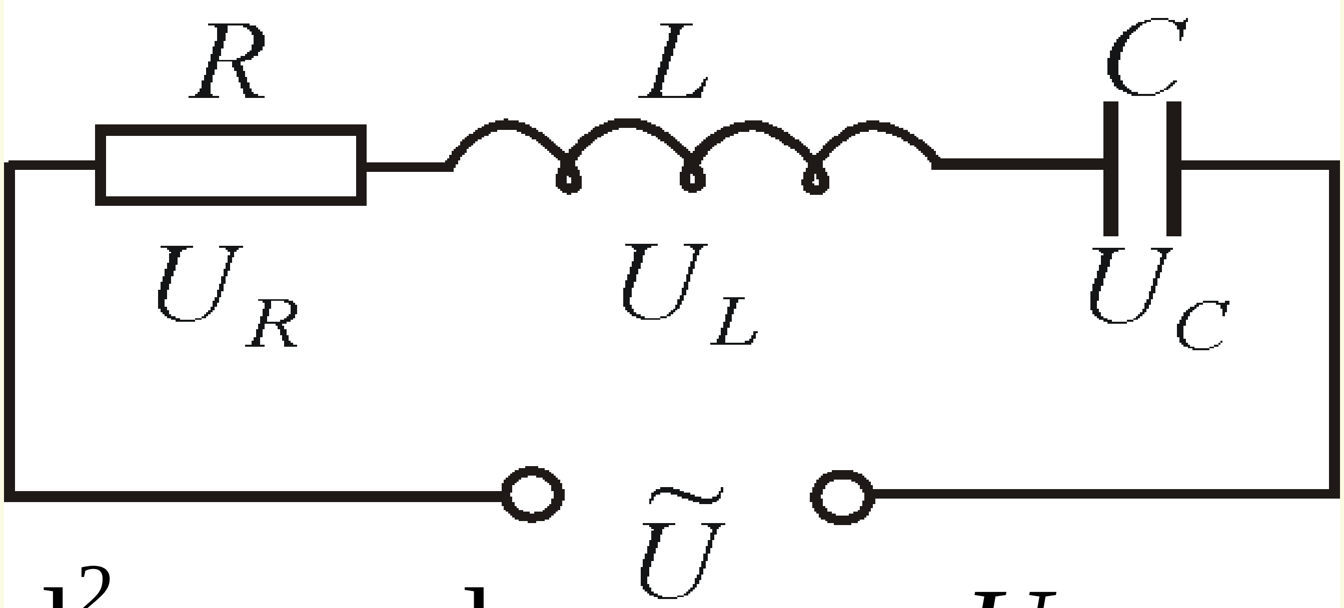
Сопротивление контура, при котором колебательный $\boxed{\beta = \omega_0}$ процесс переходит в апериодический, называется ***критическим сопротивлением:***

$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \qquad \boxed{R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Критическое сопротивление

Вынужденные электрические колебания

К контуру, изображенному на рис. подадим переменное напряжение U: $U = U_m \cos \omega t$



$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t$$

уравнение вынужденных электрических колебаний

(совпадает с вынужденными механическими колебаниями)

Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением механических колебаний.

Решение уравнения при больших t:

$$\boxed{q = q_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

Здесь амплитуда колебаний заряда и фаза φ:

$$q_m = U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

$$\mathbf{q_{max}} = \frac{U_{max} / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\varphi = arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Величина:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

называется ***полным сопротивлением цепи*** (***импеданс***)

а величина:

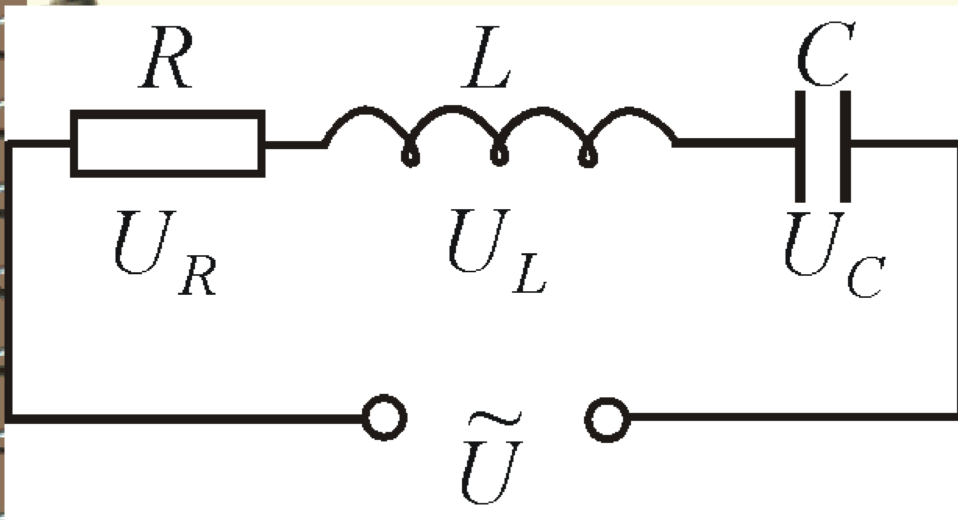
$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

– реактивным сопротивлением.

R – активное сопротивление отвечает за потерю мощности в цепи.

X – реактивное сопротивление, определяет величину энергии пульсирующей в цепи с частотой 2ω.

Резонанс напряжений (последовательный резонанс).



При последовательном соединении R, L, C, при

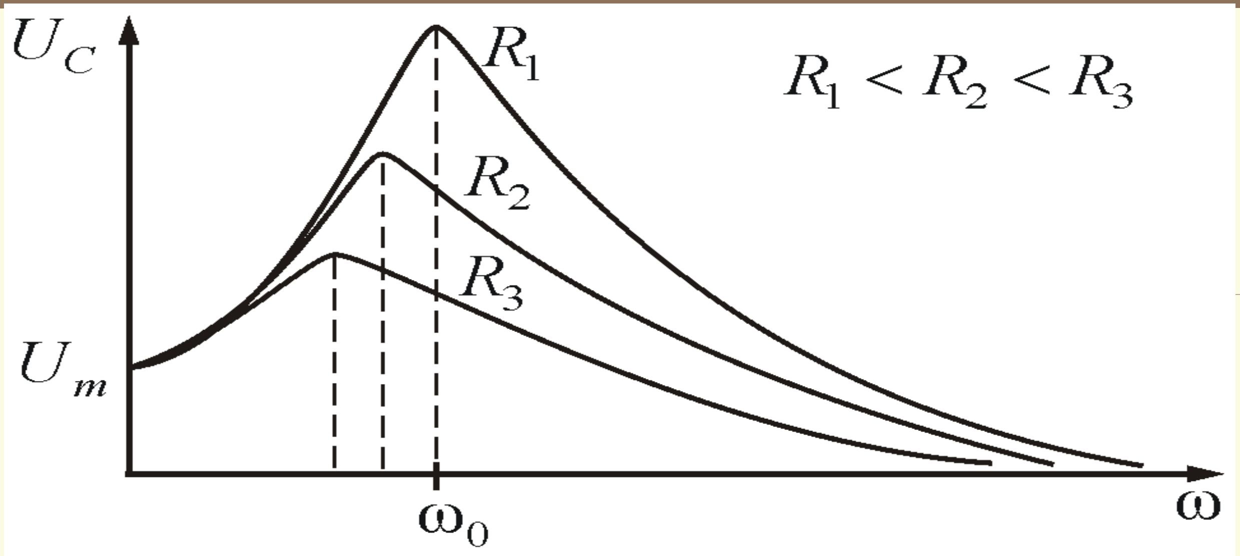
$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

– наблюдается ***резонанс.*** При этом угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль ($\varphi = 0$) и

$$Z = R$$

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Тогда $U = U_R$, а U_C и U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Такой вид резонанса называется ***резонансом напряжения*** или ***последовательным резонансом.***



Резонансные кривые

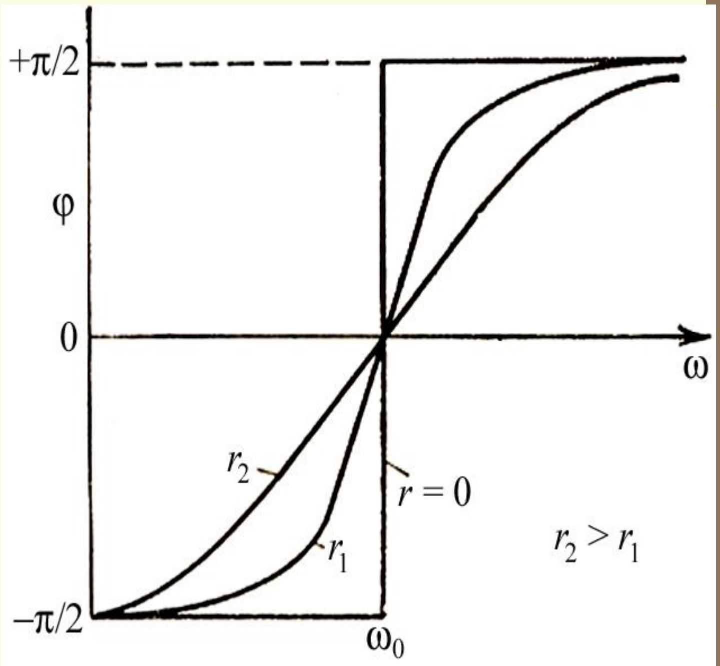
$$U_{L\,рез} = U_{C\,рез} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} U_m = QU_m$$

Таким образом, ***при последовательном резонансе***, на ёмкости можно получить напряжение с амплитудой $QU >> U$ в узком диапазоне частот.

Этот эффект ***широко используется в различных усилительных устройствах.***

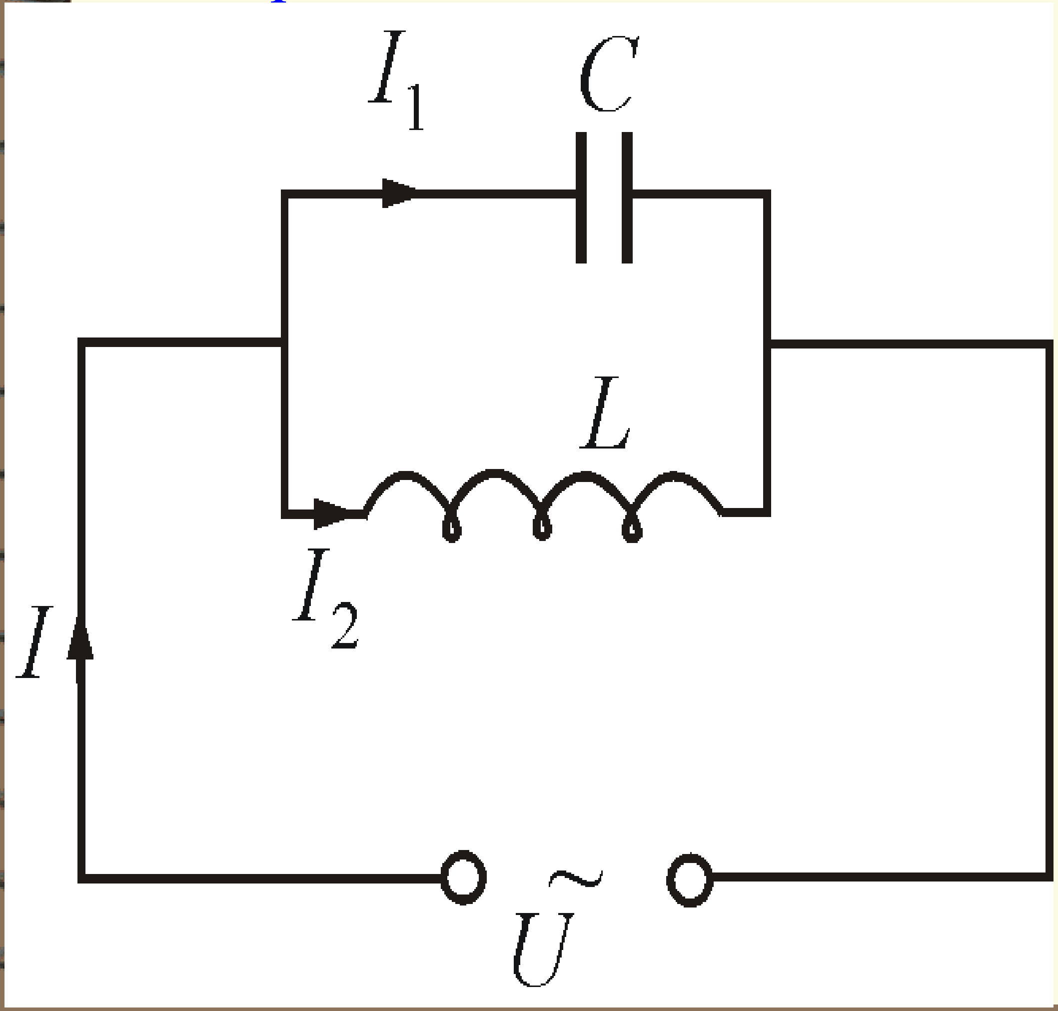
Наибольший интерес представляет момент резонанса, когда частота вынуждающего сигнала равна частоте ω_0. Тогда амплитуда тока достигает своего максимума, а разность фаз между током и приложенным напряжением равна $\varphi = \pi/2$. Контур в этом случае выступает как чисто активное сопротивление. Этот важный частный случай вынужденных колебаний называется ***резонансом напряжений***.

Анализ зависимости фазового сдвига φ от частоты приводит к выводу, который графически представлен на рисунке.



Резонанс токов (параллельный резонанс).

В цепях переменного тока содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность наблюдается другой тип резонанса:



$$I_1 = I_{m1}\cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$I_2 = I_{m2}\cos(\omega t - \varphi_2)$$

$$\omega \to \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \pi}$$

$$\boxed{I_m \to 0}$$

$$\boxed{I_{mL} \to \infty}$$

При $R = 0$, $L = 0$:

$$\boxed{I_1 = I_{m1}\cos(\omega t - \varphi_1)}$$

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C},$$

tg φ_1 = - ∞ *т.к.* $\varphi_1 = (2n + 3/2)\pi$,

где n = 1,2,3….

Аналогично, при $R = 0$, $C = \infty$: $I_2 = I_{m2}\cos(\omega t - \varphi_2)$

$I_{m2} = U/\omega L$ *tg* $\varphi_2 = +\infty$, *т.е.* $\varphi_2 = (2n + 1/2)\pi$

где n = 1,2,3…..

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \pi}$$

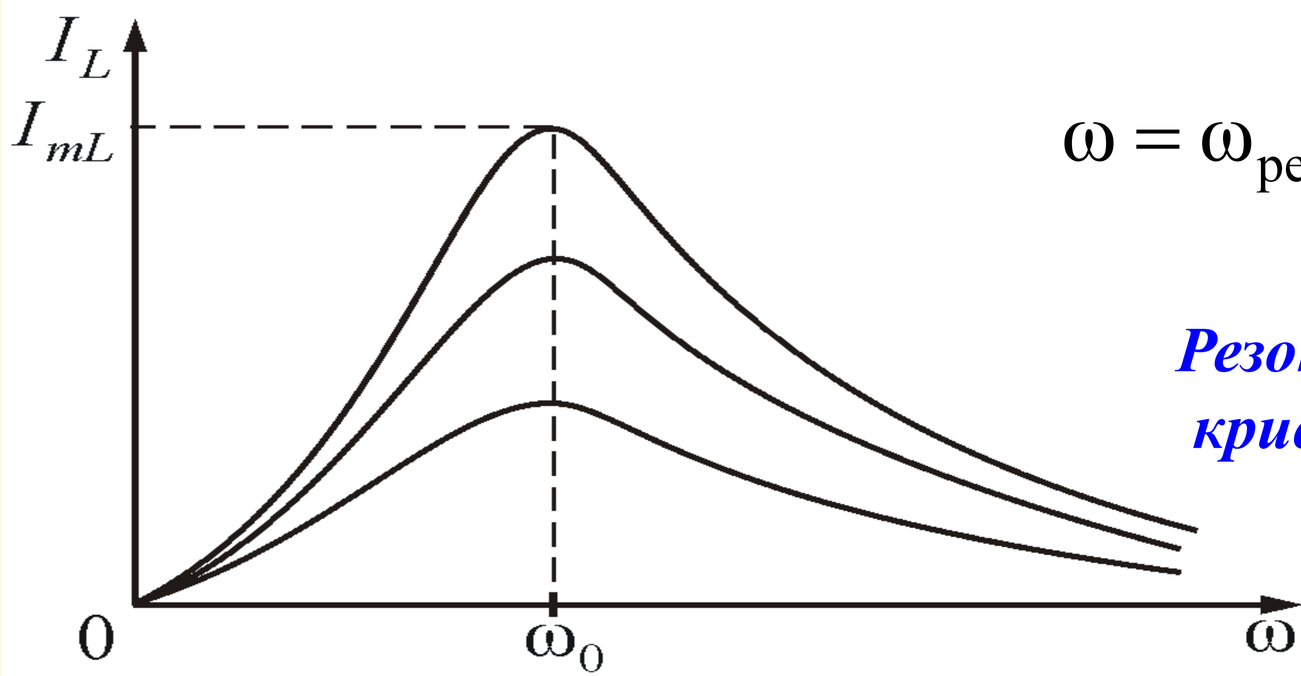
Из сравнения двух последних уравнений вытекает, что разность фаз в ветвях цепи $\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \pi}$ т.е. токи противоположны по фазе

$$I_m = \left| I_{m1} - I_{m2} \right| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|$$

Если $\omega = \omega_{рез} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$,

то $I_{m1} = I_{m2}$ и $\boxed{I_m \to 0}$

Ёмкость конденсатора можно подобрать так, что ***в результате резонанса ток в подводящих цепях резко уменьшается, зато ток через индуктивность возрастёт.***



$$\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Резонансные кривые

Явление уменьшения амплитуды тока во внешней цепи и резкого увеличения тока в катушке индуктивности, при приближении частоты приложенного напряжения ω к $\omega_{\text{рез}}$ называется ***резонансом токов,*** или ***параллельным резонансом.***

(Используется в резонансных усилителях, приемниках, а также в индукционных печах для разогрева металла).

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний **от частоты вынуждающей силы** приводит к тому, что при некоторой определенной для системы частоте амплитуда колебаний достигает **максимального значения**. Колебательная система оказывается наиболее отзывчивой на действие вынуждающей силы именно на этой частоте.

Это явление называется ***резонансом***, а соответствующая частота – ***резонансной частотой.***

Явление резонанса часто оказывается полезным, особенно в акустике, радиотехнике. Вместе с тем, это явление необходимо учитывать. Например, собственная частота вибраций корпуса корабля или крыльев самолета должны сильно отличаться от частоты колебаний, которые могут возбуждаться вращением гребного винта или пропеллера. В противном случае могут возникнуть опасные вибрации.

ЛЕКЦИЯ ЗАКОНЧЕНА!