

Электромагнитная индукция. Самоиндукция.

Энергия магнитного поля

Электрическое и магнитное поля есть проявления одного единого материального объекта - электромагнитного поля. Строго говоря, разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное относительно и зависит от выбора системы отсчета. Вследствие этого между магнитными и электрическими явлениями есть внутренняя генетическая связь, которая была открыта М. Фарадеем. Одно из проявлений этой связи – явление **электромагнитной индукции**.

Допустим, что в некоторой области пространства существует магнитное поле, характеризуемое вектором индукции $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Выберем в этой области произвольный плоский контур l и зададим направление обхода контура. В соответствии с выбранным обходом контура строится единичный вектор нормали \vec{n} к той плоскости, на которой лежит контур l (рис. 8.1).

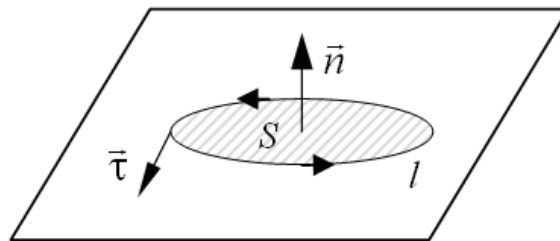


Рис. 8.1

Здесь $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной контура, \vec{n} - единичный вектор нормали, S - площадь поверхности, ограниченной контуром l .

Введем **магнитный поток** Φ , проходящий через поверхность, ограниченную контуром l ,

$$\Phi = \int_S (\vec{B} \vec{n}) dS .$$

Явление электромагнитной индукции наблюдается тогда, когда указанный магнитный поток меняется во времени, и заключается в том, что в контуре l наводится ЭДС $\epsilon_{\text{инд}}$, которая описывается основным законом электромагнитной индукции,

$$\epsilon_{\text{инд}} = +q \cdot \oint_l (\vec{F}_{\text{ст}} \vec{\tau}) dl = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} .$$

Здесь $\vec{F}_{\text{ст}}$ - сторонняя сила, работа которой по перемещению единичного положительного заряда по контуру l определяет величину ЭДС, и $q=+1\text{Кл}$.

В этом случае магнитный процесс – изменение во времени магнитного потока – порождает электрическое явление в виде генерации электродвижущей силы. Возможен и другой процесс, когда электрическое явление сначала порождает магнитное явление, а затем это магнитное явление обуславливает электрическое явление. Рассмотрим виток с током I . Этот электрический ток создает в окружающем пространстве магнитное поле, с которым связан магнитный поток, проходящий через виток,

$$\Phi = LI ,$$

где L - **индуктивность** контура, зависящая от его геометрии и свойств окружающей среды. Если данный магнитный поток меняется во времени, то в витке генерируются ЭДС **самоиндукции**.

При изменении тока I во времени согласно основному закону электромагнитной индукции в контуре возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_{\text{с.инд}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial (LI)}{\partial t},$$

где индуктивность L может зависеть от времени.

В системе СИ **единица магнитного потока** – вебер (**Вб**), **единица индуктивности** – генри (**Гн**).

Задача № 21

Соленоид представляет собой полый прямой круговой цилиндр из немагнитного материала с относительной магнитной проницаемостью $\mu=1$, радиусом $R = 1$ см и длиной $l = 50$ см, на который в один слой плотно намотан тонкий провод с плотностью витков $n = 10$ вит/см. По обмотке соленоида проходит постоянный ток $I=2$ А (рис. 1). Определите: 1) индуктивность L соленоида, 2) плотность энергии w магнитного поля в соленоиде и 3) полную энергию W магнитного поля соленоида.

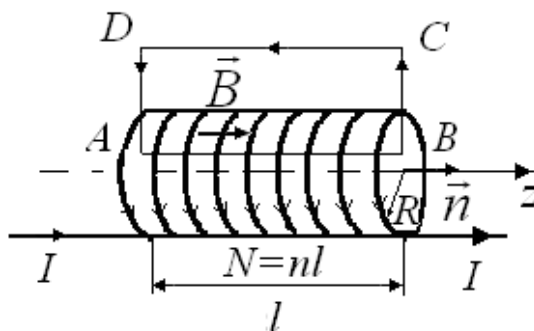


Рис. 1

Решение

Решение задачи основано на определении индуктивности L , связывающей силу I тока, протекающего в обмотке соленоида, с магнитным потоком Φ , проходящим через все $N=nl$ витков обмотки,

$$\Phi = LI . \quad (1)$$

В случае однородного магнитного поля внутри соленоида

$$\Phi = NBS , \quad (2)$$

где $N=nl$, $S=\pi R^2$ - площадь одного витка.

Приближенное нахождение магнитной индукции внутри соленоида основано на следующей простой модели. Будем считать, что внутри соленоида магнитное поле однородное и

$$\vec{B} = const , \quad (3a)$$

а за пределами соленоида магнитное поле равно нулю и

$$\vec{B} = 0 . \quad (3b)$$

Поскольку согласно принятому приближению в любом поперечном сечении соленоида магнитное поле в области $r>R$ считается равным нулю, график зависимости магнитной индукции $B(r)$ для $0<z<l$ имеет вид, показанный на рис.2.

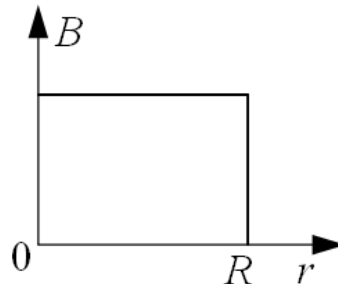


Рис. 2

Вектор магнитной индукции \vec{B} направлен по оси соленоида (оси z), что следует из симметрии системы витков обмотки соленоида. Для нахождения величины B используем теорему о циркуляции вектора \vec{B} по контуру $ABCD$ на рис.1

$$\oint_{ABCD} (\vec{B}\vec{\tau})dl = B \oint_{AB} dl = Bl = \mu_0 n l I . \quad (4a)$$

Отсюда находим величину магнитной индукции внутри соленоида

$$B = \mu_0 n I . \quad (4b)$$

Из (1)-(4) следует, что

$$L = \mu_0 n^2 S l = \mu_0 n^2 V = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Гн} . \quad (5)$$

Здесь $V=Sl$ - объём соленоида.

Плотность энергии магнитного поля соленоида:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 = 2,5 \text{ Дж/м}^3. \quad (6)$$

Полная энергия магнитного поля в соленоид может быть записана в двух различных формах:

$$W = V \cdot w = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 V I^2 = \frac{1}{2} L I^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}, \quad (7)$$

которые эквивалентны в численном отношении, но совершенно различны по своему физическому содержанию.

Ответ: $L = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}$; $w = 2,5 \text{ Дж/м}^3$; $W = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$.

Задача № 22

Проволочный виток площадью S и сопротивлением R находится во внешнем однородном магнитном поле, линии индукции которого образуют угол α с плоскостью витка (рис. 1). Величина магнитной индукции меняется во времени согласно закону $B(t) = B_0 \cdot \beta t$, где $B_0 > 0$ и $\beta > 0$ – постоянные. Определите: 1) величину и направление индукционного тока $I_{\text{инд}}$ в витке, 2) мощность $P_{\text{т}}$ тепловых потерь в витке.

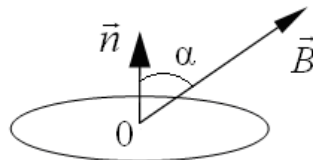


Рис. 1

Решение

Задача решается на основе закона электромагнитной индукции и закона Джоуля – Ленца.

Согласно закону электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} [(B_0 \cdot \beta t) \cdot S \cdot \cos \alpha] = -\beta \cdot S \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

и закону Ома для замкнутой цепи:

$$I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = -\frac{\beta S}{R} \cdot \cos \alpha. \quad (2)$$

Знак минус означает, что индукционный ток течёт против направления обхода контура, который в соответствии с выбором ориентации единичного вектора нормали \vec{n} к плоскости происходит против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \vec{n} .

Мощность тепловых потерь равна количеству теплоты, которое выделяется в витке в единицу времени и описывается законом Джоуля – Ленца,

$$P_T = Q_T = I_{\text{инд}}^2 \cdot R = \frac{\beta^2 S^2}{R} \cdot \cos^2 \alpha . \quad (3)$$

Ответ: $I_{\text{инд}} = -\frac{\beta S}{R} \cdot \cos \alpha$; $P_T = \frac{\beta^2 S^2}{R} \cdot \cos^2 \alpha$.

Задача № 23

В однородном вертикальном магнитном поле с вектором магнитной индукции \vec{B} (0, 0, B) расположен металлический прут, изогнутый в виде буквы Π . Плоскость прута образует угол α с горизонтом (рис. 1). По пруту без трения и нарушения электрического контакта может скользить проводящая перемычка MN массой m и длиной L . Сопротивление перемычки R много больше сопротивления прута. Ускорение свободного падения \vec{g} . Определить величину силы F , которую необходимо приложить в плоскости прута к перемычке, чтобы перемычка скользила вверх по пруту с постоянной скоростью \vec{V} .

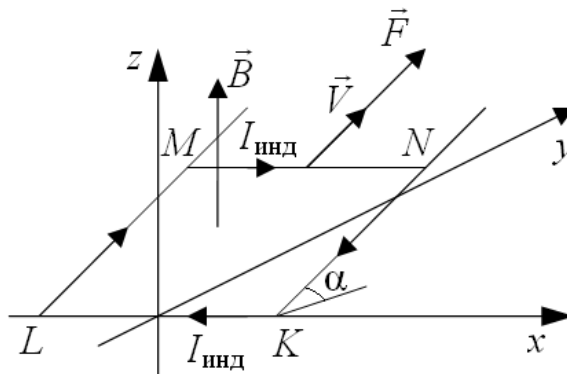


Рис. 1

Решение

Задача решается на основе второго закона Ньютона, основного закона электромагнитной индукции и формулы для силы Ампера.

Согласно второму закону Ньютона равномерное движение перемычки по наклонной плоскости возможно, если сумма всех сил, действующих на перемычку, равна нулю:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_A = 0 . \quad (1)$$

Здесь \vec{F} - внешняя сила, заставляющая перемычку скользить вверх по пруту, $m\vec{g}$ - сила тяжести, \vec{N} - сила реакции опоры (прута) и \vec{F}_A - сила Ампера. При движении перемычки

меняется магнитный поток Φ , проходящий через контур $MNLKM$, поэтому в этом контуре возникает ЭДС $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ и течет индукционный ток $I_{\text{инд}}$, с которым связана сила Ампера \vec{F}_A .

Проекция векторного уравнения (1) на вектор скорости \vec{V} перемычки, направленный по вектору силы \vec{F} , имеет вид:

$$F - mg \sin \alpha - F_{A1} = 0 . \quad (2)$$

Здесь учтено, что согласно правилу Ленца сила Ампера должна тормозить движение перемычки и индукционный ток $I_{\text{инд}}$ должен течь по контуру $MNLKM$, как показано на рис. 1. Отсюда следует, что

$$\vec{F}_A = I_{\text{инд}} [\vec{L} \vec{B}] = (0, -I_{\text{инд}} LB, 0) , \quad (3)$$

где вектор \vec{L} направлен по току I , текущему по перемычке MN , а его длина равна длине L перемычки.

Для нахождения индукционного тока $I_{\text{инд}}$ используем основной закон электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} , \quad (4)$$

где

$$\Phi = BS \cos \alpha = BLVt \cdot \cos \alpha , \quad (5)$$

- магнитный поток через контур $MNKLM$.

Согласно закону Ома

$$I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{BLV}{R} \cos \alpha , \quad (6)$$

и

$$F_{A1} = F_A \cdot \cos \alpha = LI_{\text{инд}} B \cos \alpha = \frac{B^2 L^2 \cos^2 \alpha}{R} V . \quad (7)$$

Из (1) и (4) следует, что:

$$F = mg \sin \alpha + \frac{B^2 L^2 \cdot \cos^2 \alpha}{R} V . \quad (8)$$

Здесь не учитывается явление самоиндукции, которое приводит к некоторому уменьшению силы Ампера.

Ответ: $F = mg \sin \alpha + \frac{B^2 L^2 \cdot \cos^2 \alpha}{R} V .$

