Электричество и магнетизм

Семестр 2

ЛЕКЦИЯ № 12

Система уравнений Максвелла

1. Полная система уравнений Максвелла и их физический смысл.
2. Свойства уравнений Максвелла.
2. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга.

Полная система уравнений Максвелла и их физический смысл

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений – ***макроскопическую теорию электромагнитного поля.***

Теория Максвелла не только объясняла с единой точки зрения все разрозненные явления электричества и магнетизма, но и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии.

В основе теории - **четыре фундаментальных уравнения**. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Уравнения Максвелла в интегральной форме.

1. $$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q$$ или $$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

Теорема Гаусса о потоке вектора напряженности электрического поля. Источником электростатического поля являются электрические заряды.

Поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность в произвольной среде равен заряду, заключенному внутри поверхности.

Это постулат Максвелла, выражающий закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах. Постулат записан в общем виде, для заряда, распределенного внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью ρ.

$$q = \int_V \rho dV$$

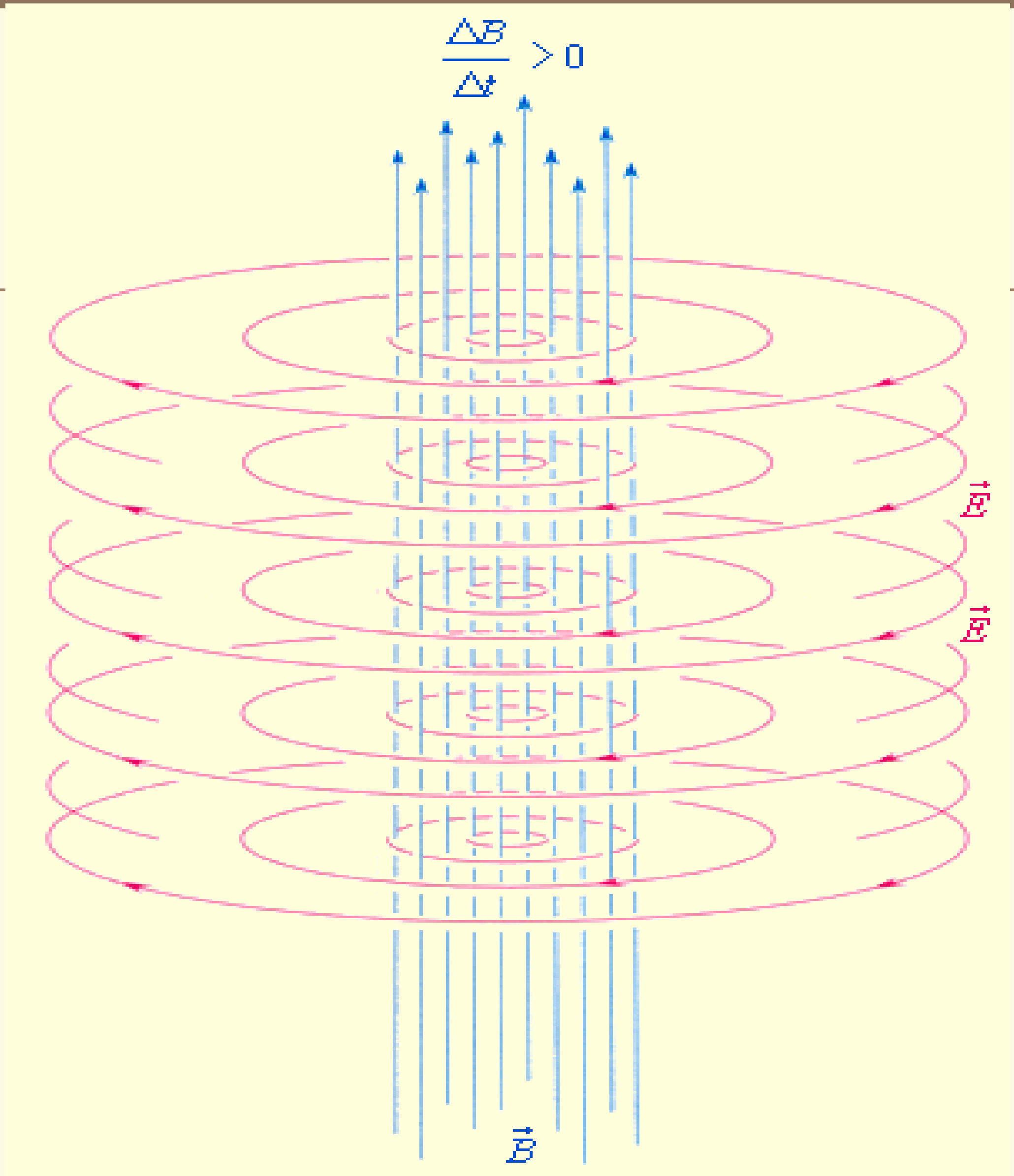
2. Второе уравнение – это по сути, закон Фарадея:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Циркуляция вектора $\vec{\mathbf{E}}$ *по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром.*

Это уравнение показывает, что источником электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

По существу это уравнение выражает фарадеевский закон электромагнитной индукции в трактовке Максвелла.



Закон электромагнитной индукции в трактовке Максвелла.

3. $$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$ - теорема Гаусса для магнитного поля.

Поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

Магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии поля не имеют ни начала ни конца. Магнитное поле называют ***соленоидальным*** или ***вихревым***.

Физический смысл этого уравнения:

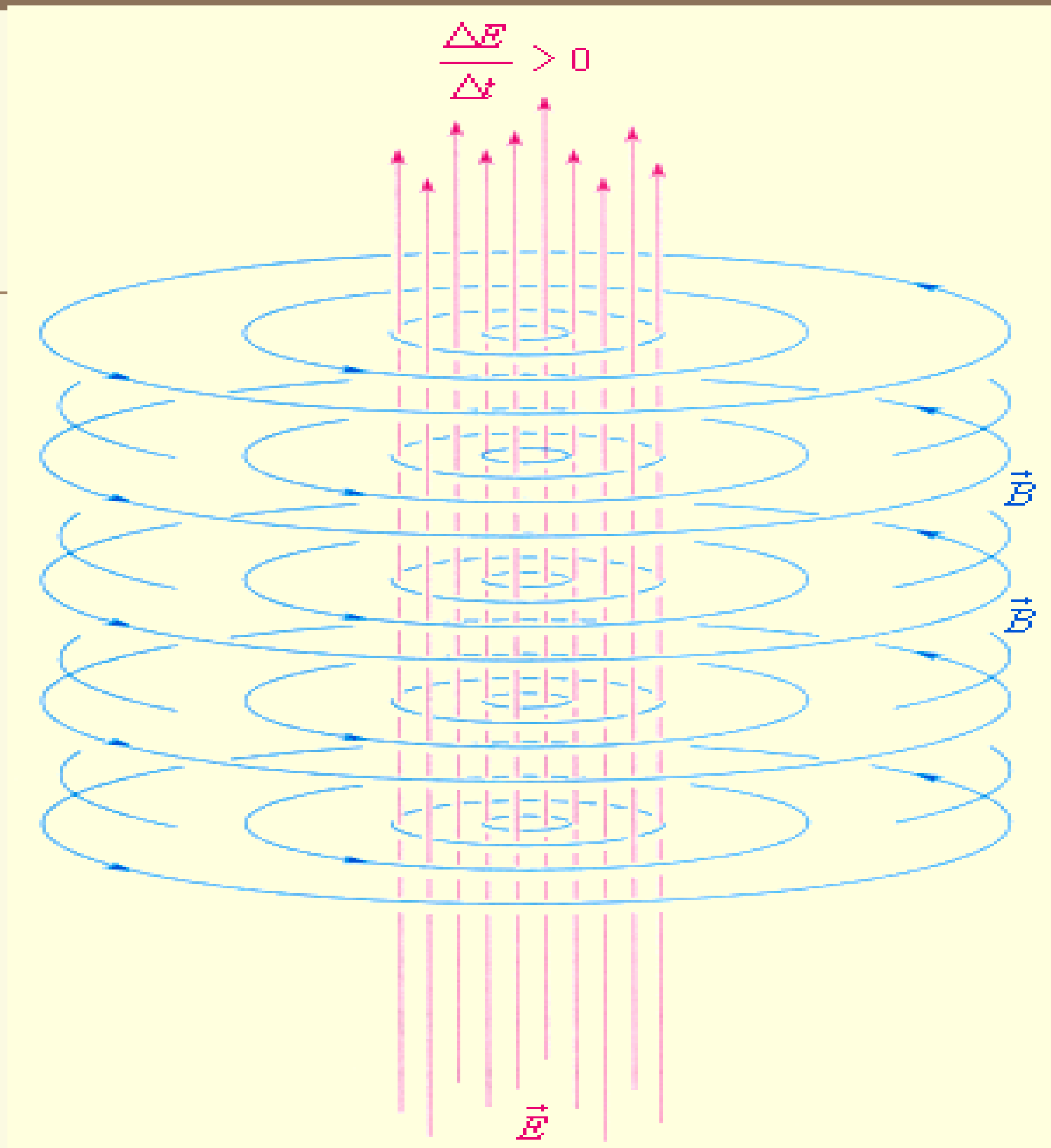
в природе не существуют магнитные заряды.

4. $$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Теорема о циркуляции магнитного поля.

Циркуляция вектора $\vec{\mathbf{H}}$ *по любому замкнутому контуру равна полному току через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром.*

Под полным током понимается сумма токов проводимости и смещения. Уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями (токами смещения).



Гипотеза Максвелла. Изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле.

Из уравнений Максвелла следует:

- источниками электрического поля являются электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля.

- источниками магнитного поля являются движущиеся заряды (электрические токи), либо переменные электрические токи.

Уравнения Максвелла не симметричны относительно магнитных и электрических полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

Для ***стационарных полей*** ($\boldsymbol{E} = const$ и $\boldsymbol{B} = const$) уравнения Максвелла примут вид:

1. $\boxed{\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q}$ 2. $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$ 3. $\boxed{\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0}$

4. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$

В уравнении 2 подчёркивается потенциальный характер <u>электростатических полей:</u>

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Уравнение 4 означает, что источником <u>стационарного магнитного поля</u> являются только токи проводимости:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$$

Получаем, что в основе максвелловской теории классической электродинамики лежат следующие четыре **уравнения Максвелла** в интегральном виде:

1. $$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q$$

2. $$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$$

3. $$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

4. $$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Величины, входящие в уравнения Максвелла, не являются независимыми. Между ними существуют следующие связи:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Здесь: μ, ε — магнитная и диэлектрическая проницаемость вещества; $\vec{j}$ — вектор плотности тока проводимости; σ —удельная электропроводность среды.

Последние уравнения называются ***материальными***, поскольку величины μ, ε и σ входят в уравнения Максвелла как материальные константы.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

В электродинамике наряду с интегральными уравнениями Максвелла применяются и уравнения в дифференциальной форме.

Вспомним некоторые сведения из векторного анализа. В лекции 3, определяя связь между напряженностью поля $\vec{E}$ и потенциалом φ, мы ввели в рассмотрение оператор ∇ (набла) или оператор градиента (*grad*):

$$\vec{E} = -\,grad\,(\varphi) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla\varphi$$

Рассмотрим подробнее свойства этого оператора.

Оператор набла - это вектор с компонентами $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Оператор набла имеет смысл в сочетании со скалярной или векторной величиной, на которую он умножается. Если умножить этот вектор на скаляр φ, получится вектор, представляющий собой градиент функции φ - $grad(\varphi)$

Если вектор ∇ умножить скалярно на вектор $\vec{D}$, получится скаляр, который имеет смысл дивергенции (*div*) вектора $\vec{D}$:

$$\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\equiv\nabla\vec{D}=\nabla_x D_x+\nabla_y D_y+\nabla_z D_z=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\mathrm{div}\,\vec{D}$$

Если умножить вектор ∇ на вектор $\vec{E}$ векторно $\left[\nabla\times\vec{E}\right]$, получится вектор с компонентами $\left[\nabla\times\vec{E}\right]_x, \left[\nabla\times\vec{E}\right]_y, \left[\nabla\times\vec{E}\right]_z$

Этот вектор называют «ротор вектора $\vec{E}$ » - $\mathrm{rot}\,\vec{E}$

Теоремы векторного анализа, которые позволят осуществить переход от интегральных величин к дифференциальным:

1. Теорема Остроградского – Гаусса. Устанавливает связь между дивергенцией вектора $\vec{D}$ и потоком этого вектора через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V div\,\vec{D}\cdot dV$$

2. Теорема Стокса. Устанавливает связь между ротором вектора $\vec{E}$ в каждой точке некоторой поверхности S и циркуляцией этого вектора по контуру L, ограничивающему S:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S rot\,\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

1. $$\boxed{\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV}$$

В соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V div\,\vec{D}\cdot dV$$

В итоге можно записать: $$\int_V div\,\vec{\mathbf{D}}\cdot \mathbf{d}\mathbf{V} = \int_V \rho \mathbf{d}\mathbf{V}$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно:

$$\boxed{div\,\vec{\mathbf{D}} = \rho}$$

2. $$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

В соответствии с теоремой Стокса:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S rot\,\vec{E} \cdot d\vec{S}$$

В итоге можно записать:

$$\int_S rot\vec{E} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно:

$$\boxed{rot\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \boldsymbol{t}}}$$

3. $$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

В соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \int_V div\,\vec{B}\cdot dV$$

В итоге можно записать:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{B}\cdot dV = 0$$

Окончательно получим: $$\boxed{div\,\vec{\mathbf{B}} = 0}$$

4. $$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

В соответствии с теоремой Стокса:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S rot\vec{H} \cdot d\vec{S}$$

В итоге можно записать:

$$\int_S rot\vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно:

$$\boxed{rot\,\vec{\boldsymbol{H}} = \left(\vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial \boldsymbol{t}} \right)}$$

Таким образом, получили полную систему **уравнений Максвелла в дифференциальной форме**:

$$\boxed{div\,\vec{\mathbf{D}} = \rho}$$

$$\boxed{rot\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}}$$

$$\boxed{div\,\vec{\mathbf{B}} = 0}$$

$$\boxed{rot\,\vec{\mathbf{H}} = \left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right)}$$

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах имеет вид:

$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{D}} = \rho$	$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \int\limits_V \rho dV$	- теорема Гаусса
$\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\dfrac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_S \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$	- закон Фарадея
$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{B}} = 0$	$\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0$	- отсутствие магнитных зарядов
$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}} + \dfrac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$	$\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \int\limits_S \left(\vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S}$	- обобщенный закон Б-С-Л

Материальные уравнения:

1. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ 2. $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ 3. $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

Свойства уравнений Максвелла.

1. *Уравнения Максвелла линейны*. Свойство линейности уравнений Максвелла непосредственно связано с принципом суперпозиции: если два каких-нибудь поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это относится и к сумме этих полей.

2. *Уравнения Максвелла содержат уравнение непрерывности,* выражающее закон сохранения электрического заряда.

3. *Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета*. Уравнения релятивистски инвариантны. Их вид не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, хотя величины в них преобразуются по определенным правилам. Отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл.

4. *Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей*. Это обусловлено тем, что в природе существуют электрические заряды, но не обнаружены магнитные.

5. *Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов*. Изменение состояния этого поля имеет волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света. Этот вывод и теоретическое исследование электромагнитных волн привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, в соответствии с которой свет также представляет собой электромагнитные волны.

Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга.

Объемная плотность энергии ω электромагнитного поля:

$$\omega = \omega_{\text{эл}} + \omega_{\text{маг}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0{}^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H_0{}^2}{2}$$

Полная энергия: $W = \omega \cdot V$ ***, где V – объём.***

Поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны в единицу времени:

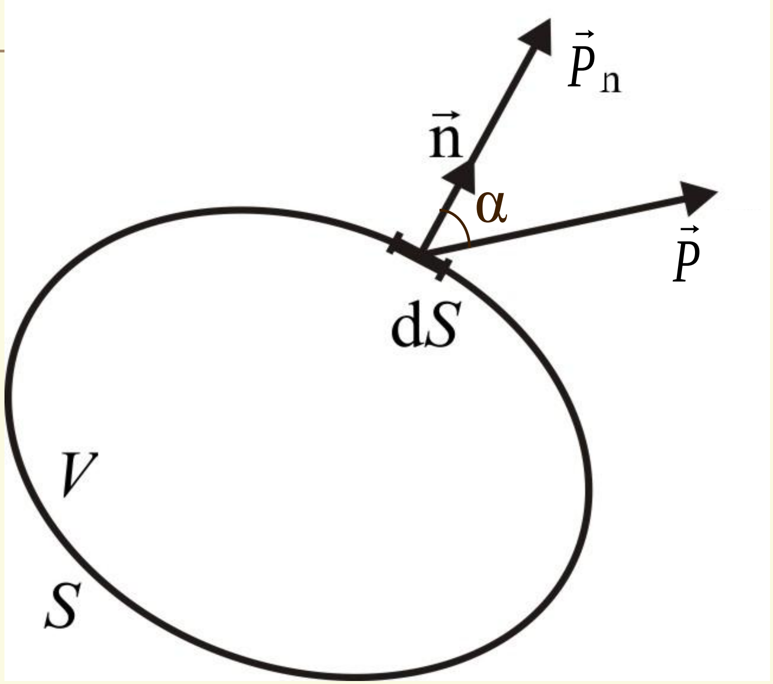
$$P = \omega \cdot \upsilon = EH$$ ***, где υ – скорость.***

Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется вектором Умова – Пойнтинга или чаще <u>вектором Пойнтинга</u>:

$$\boxed{\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]}$$

Поток энергии через площадку *dS*:

$$d\Phi = P_n \cdot dS$$, где $P_n = P \cdot \cos\alpha$



Теорема Умова - Пойнтинга:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S P_n dS$$

- уменьшение полной энергии внутри объема *V* за единицу времени должно быть равно энергии, выходящей через поверхность S за единицу времени наружу – ***закон сохранения э/м энергии***.


Лекция закончена !