Электричество и магнетизм

Семестр 2

ЛЕКЦИЯ № 6

Постоянный электрический ток

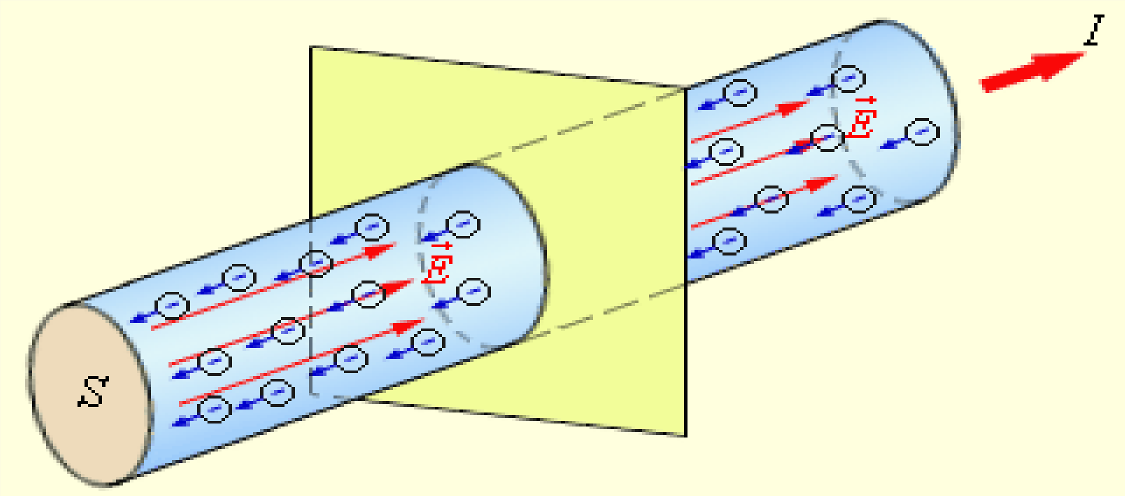
1. Электрический ток. Характеристики электрического тока.
2. Законы Ома для участка цепи в дифференциальной и в интегральной формах.
3. Работа и мощность. Закон Джоуля-Ленца.
4. КПД источника тока.
5. Законы Кирхгофа.

Электрический ток. Характеристики электрического тока

***Электрическим током называется упорядоченное движение заряженных частиц, при котором происходит перенос электрического заряда*.**

В металлическом проводнике такими частицами являются свободные электроны. Они находятся в постоянном тепловом движении. Это движение происходит с высокой средней скоростью, но в силу его хаотичности не сопровождается переносом заряда. Выделим мысленно в проводнике элемент поверхности ΔS. За любой промежуток времени число электронов преодолевших эту поверхность слева направо в среднем будет равно числу частиц прошедших через эту поверхность в обратном направлении. Поэтому заряд, перенесённый через эту поверхность, окажется равным нулю.

Ситуация изменится, если в проводнике появится **электрическое поле**. Теперь носители заряда будут участвовать не только в хаотическом тепловом, но и в упорядоченном, направленном движении. Положительно заряженные носители будут двигаться по направлению поля, а отрицательные — в противоположном направлении.



Упорядоченное движение электронов в металлическом проводнике и ток *I*. S –площадь поперечного сечения проводника, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

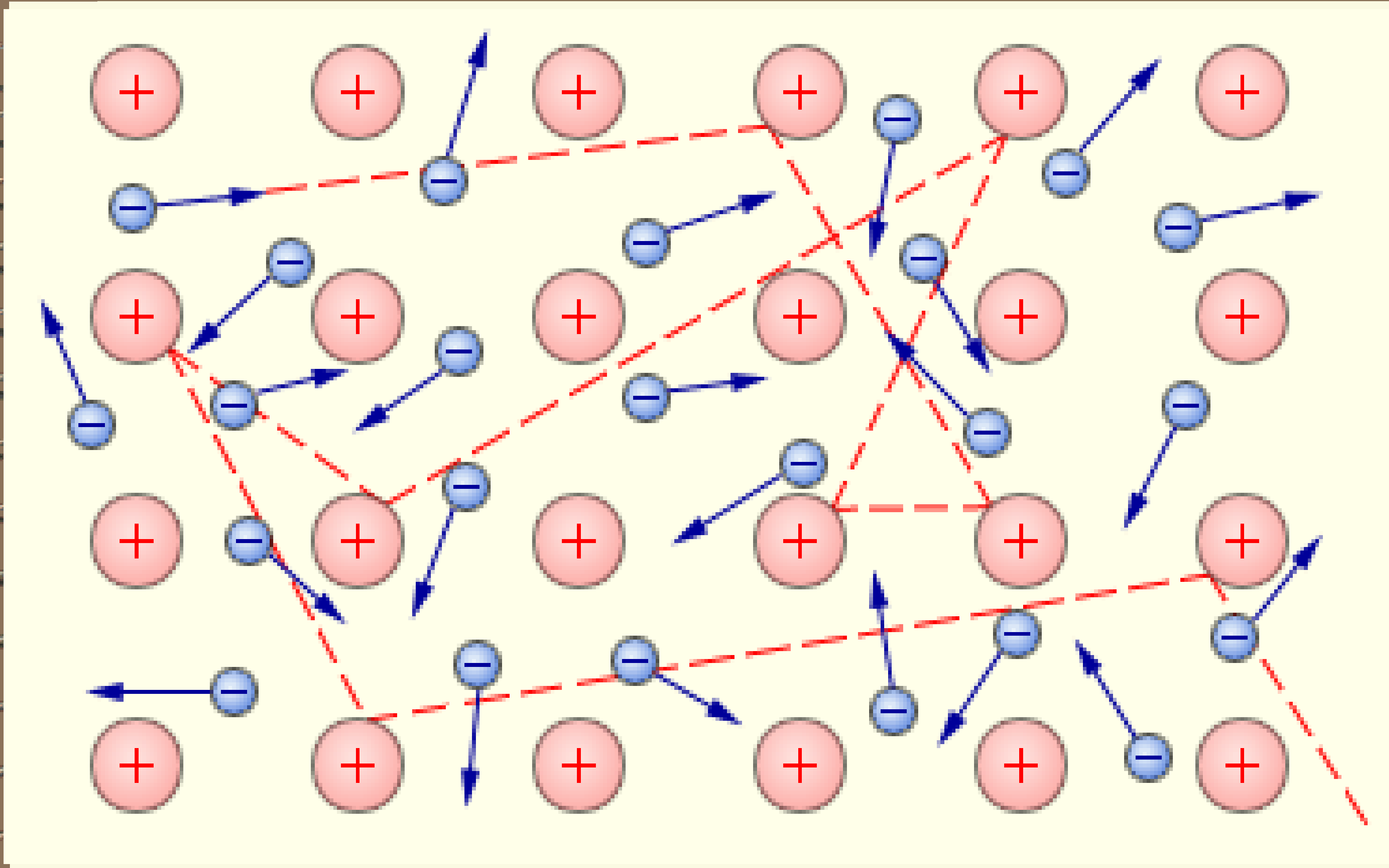
В общем случае в переносе заряда могут принимать участие носители обоих знаков (например, положительные и отрицательные ионы в электролите).

Скорость их движения будет складываться из скорости **теплового** и **направленного (дрейфового) движений**. Хаотичность теплового движения приводит к тому, что **среднее значение вектора скорости теплового движения равно нулю**, поэтому ***среднее значение*** результирующей скорости частиц будет **равно средней скорости направленного (дрейфового) движения**.

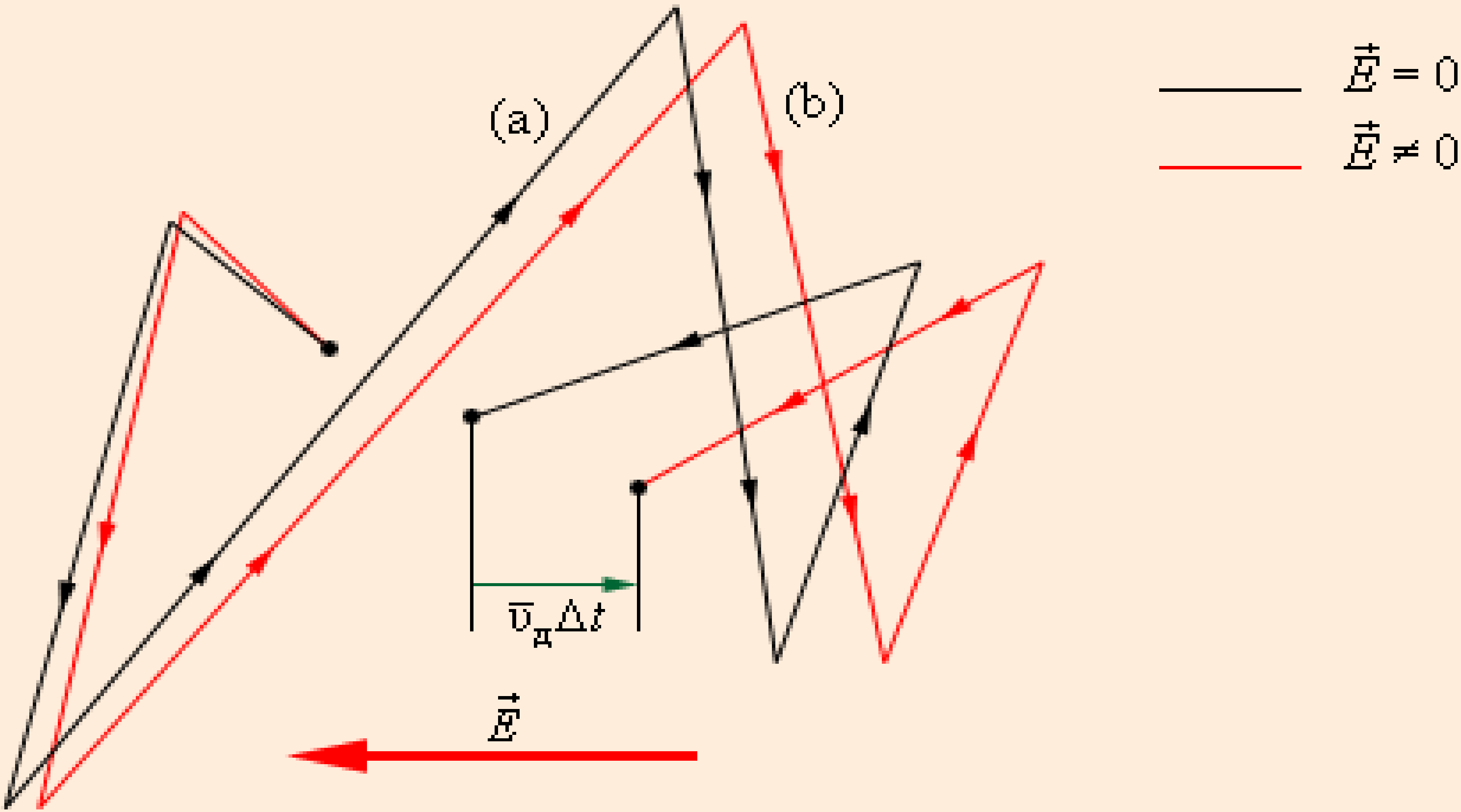
$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{тепл.}} + \vec{V}_{\text{др.}}$$

$$\left\langle \vec{V} \right\rangle = \left\langle \vec{V}_{\text{тепл.}} \right\rangle + \left\langle \vec{V}_{\text{др.}} \right\rangle = \left\langle \vec{V}_{\text{др.}} \right\rangle$$

$$\text{т.к.} \left(\left\langle \vec{V}_{\text{тепл.}} \right\rangle = 0 \right)$$



Газ свободных электронов в кристаллической решетке металла. Показана траектория одного из электронов.



Движение свободного электрона в кристаллической решетке: а – хаотическое теплового движение электрона в кристаллической решетке металла; b – хаотическое движение с дрейфом, обусловленным электрическим полем. Масштабы дрейфа $\bar{\upsilon}_д \Delta t$ сильно преувеличены.

Основной количественной характеристикой электрического тока является ***сила тока.*** Сила тока в проводнике численно равна **величине заряда, переносимого через полное сечение проводника в единицу времени:**

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

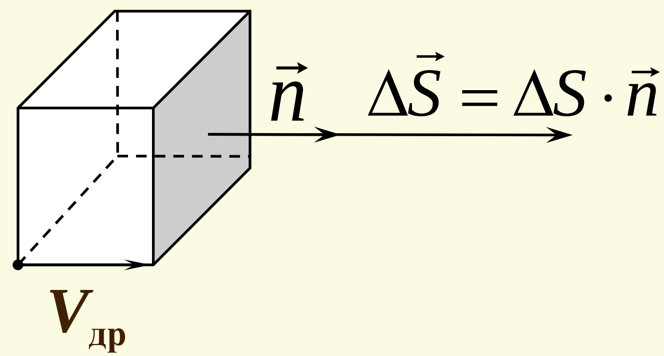
\- **Сила тока**

Сила тока в системе СИ измеряется в Амперах: $\left[\frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}\right]$

Это скалярная характеристика. Сила тока может быть как положительной, так и отрицательной. Если направление тока совпадает с условно принятым положительным направлением обхода вдоль проводника, то сила такого тока $I > 0$. В противном случае сила тока отрицательна.

Плотность электрического тока

Важной характеристикой электрического тока является **плотность тока** $\vec{j}$. Выделим мысленно в проводнике поверхность ΔS, перпендикулярную скорости направленного движения $\vec{V}_{\text{др}}$ носителей заряда. Построим на этой поверхности параллелепипед с высотой, численно равной скорости $\vec{V}_{\text{др}}$.



Все частицы, находящиеся внутри этого параллелепипеда за одну секунду пройдут через поверхность ΔS. Число таких частиц:

$$\Delta N = n \cdot \Delta S \cdot V_{\text{др}}$$, где n — концентрация частиц

Заряд, который будет перенесён этими частицами через поверхность ΔS, определит силу тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = e \cdot \Delta N = e \cdot n \cdot \Delta S \cdot V_{\text{др}}$$

Здесь *e* — заряд одного носителя (электрона). Разделив силу тока на площадь сечения ΔS, получим заряд, который протекает за единицу времени через поверхность единичной площади. Это и есть **плотность тока** :

$$j = \frac{I}{\Delta S} = e \cdot n \cdot V_{\text{др}} \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2} \right]$$

Скорость направленного движения заряженных частиц — векторная величина, это выражение записывают в векторном виде:

$$\boxed{\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{V}_{\text{др}}}$$

Плотность электрического тока

По величине плотность тока $\vec{j}$ есть заряд, переносимый в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к току. Направление вектора $\vec{j}$ совпадает с направлением упорядоченного течения положительного электричества. Поэтому:

$$dq = j \cdot dS \cdot dt$$

Если площадка dS не перпендикулярна к $\vec{j}$ (а значит и к $\vec{V}_{\text{др}}$), то в этом случае вместо j нужно взять составляющую плотности тока j_n , перпендикулярную к dS

$$dq = j_n \cdot dS \cdot dt = \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt = \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot dt$$

Силу тока dI, протекающего через элементарную площадку dS теперь можно записать в виде скалярного произведения двух векторов:

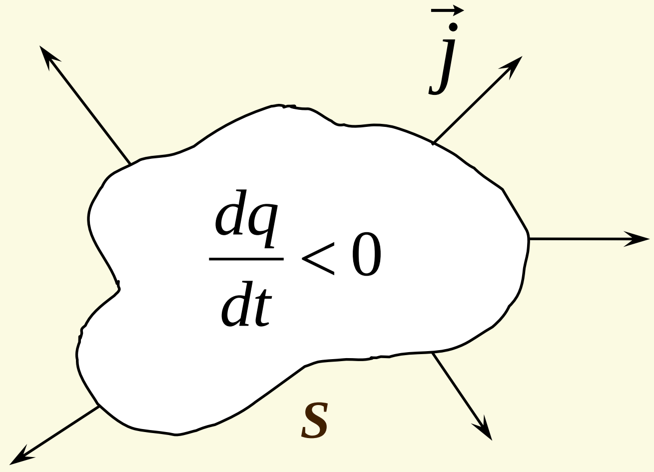
$$dI = \vec{j}\,d\vec{S} = j \cdot dS \cdot \cos\alpha = j_n dS$$

Для того, чтобы вычислить силу тока I через сечение S, нужно просуммировать все токи, протекающие через элементы этого сечения, то есть взять интеграл:

$$I = \int_S \vec{j}\,d\vec{S} = \int_S j_n dS$$

Теперь в проводящей среде выделим *замкнутую* поверхность S. Если известен вектор плотности тока в каждой точке этой поверхности, то легко вычислить заряд, покидающий объём, ограниченный этой поверхностью, в единицу времени: $\oint_S \vec{j}\,d\vec{S}$

Пусть внутри поверхности S находится заряд q, а изменение заряда связано с его истечением из объёма, то есть:



Уравнение непрерывности

Закон сохранения электрического заряда

$$\boxed{-\frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{j}\,d\vec{S}}$$

Классическая электронная теория металлов

Носителями тока в металлах являются электроны проводимости, возникающие вследствие того, что валентные электроны атомов металла являются обобществлёнными, т.е. не принадлежащими определённому атому. В классическом приближении эти электроны (электроны проводимости) рассматриваются как электронный газ, частицы которого обладают тремя степенями свободы.

Рассмотрим образец проводника, концентрация свободных электронов, являющихся носителями тока, в котором равна ***n*** и для одновалентного металла в классическом приближении будет:

$$n = \frac{N_A}{\mu}\delta$$

, где $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{-23}\,моль^{-1}$,

μ - молярная масса, δ - плотность.

Под воздействие внешнего электрического поля $\vec{E}$ электроны проводимости придут в упорядоченное движение. Действующая на электрон сила $\vec{F} = e\vec{E}$ вызывает его ускоренное движение с ускорением:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_e} = \frac{e\vec{E}}{m_e}$$

Но электрон в металле движется не свободно, из-за хаотического движения электроны соударяются с атомами, находящимися в в узлах кристаллической решётки. Между последовательными столкновениями электрон движется свободно в течение времени τ (времени свободного пробега). Пусть электрон движется в постоянном электрическом поле $\vec{E}$. Потерпев столкновение электрон начинает двигаться с постоянным ускорением $\vec{a} = \dfrac{e\vec{E}}{m_e}$

К следующему столкновению электрон приходит со скоростью $\vec{\upsilon} = \vec{a} \cdot \tau$, так, что его средняя скорость между двумя последовательными столкновениями будет:

$$\vec{\upsilon}_{др} = \frac{\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_0}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \tau}{2}$$

а плотность тока:

$$\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{\upsilon}_{\text{др}} = n \cdot e \frac{e\vec{E} \cdot \tau}{2m_e} = \frac{n \cdot e^2 \tau}{2m_e} \vec{E}$$

Для обычных напряженностей поля концентрация электронов n не зависит от $\vec{E}$ и τ не зависит от температуры. В этом приближении $\vec{j} \sim \vec{E}$, т.е.

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}}$$

- **закон Ома в дифференциальной форме**

Закон Ома связывает плотность тока и напряжённость поля в каждой точке образца. Коэффициент пропорциональности σ называется удельной электропроводностью проводника:

$$\sigma = \frac{n \cdot e^2 \tau}{2 m_e}$$

$\sigma = 1/\rho$, где ρ - удельное сопротивление.

Электропроводность зависит только от свойств материала и его температуры и не зависит от напряженности поля $\vec{E}$. В очень сильных полях $E \sim 10^8$ В/м наблюдается зависимость электропроводности σ от напряжённости поля E и будет наблюдаться отклонения от закона Ома и появятся нелинейные эффекты (при таких полях металл превращается в пар).

- **Георг Симон Ом** (1787 – 1854) – немецкий физик.
- В 1826 г. Ом открыл свой основной закон электрической цепи. Этот закон не сразу нашел признание в науке, а лишь после того, как Э. Х. Ленц, Б. С. Якоби, К. Гаусс, Г. Кирхгоф и другие ученые положили его в основу своих исследований.

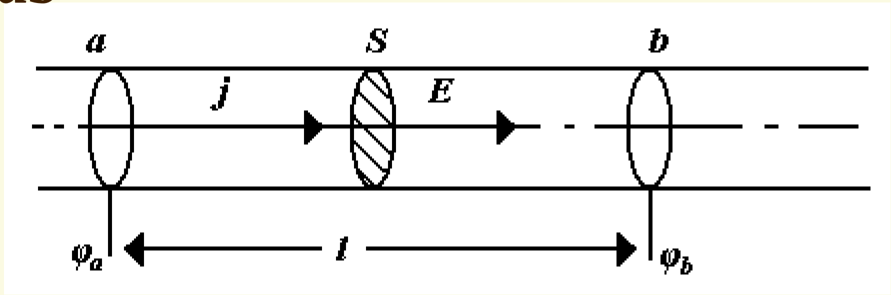
Именем Ома была названа единица электрического сопротивления (Ом).

Ом вел также исследования в области акустики, оптики и кристаллооптики.

Будем считать, что электрический ток в проводнике возбуждается только силами однородного электрического поля. Воспользуемся законом Ома в дифференциальной форме и запишем для напряженности электрического поля выражение:

$$E = \rho \cdot j$$

Умножим это соотношение на элемент длины провода ***dl*** и проинтегрируем полученное выражение по участку проводника ***ab***



$$\int\limits_{a \to b} E\,dl = I \int\limits_{a \to b} \rho \frac{dl}{S}$$

Левая часть последней формулы есть не что иное, как разность потенциалов (напряжение **U** на участке **ab**):

$$\varphi a - \varphi b = U$$

$$U = \varphi_a - \varphi_b = \int_{a \to b} E dl$$

Интеграл в правой части, определяется:

$$R = \int_{a \to b} \rho \frac{dl}{S}$$

Величина ***R*** называется электрическим сопротивлением или просто сопротивлением участка проводника. Если проводник изготовлен из однородного материала постоянного поперечного сечения, то

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Таким образом, получаем закон Ома для участка цепи проводника в интегральной форме: $U = I \cdot R$

Закон Ома в интегральной форме для однородного участка цепи (не содержащего ЭДС)

$$\boxed{I = \frac{U}{R}}$$

Для однородного линейного проводника ***R*** через **ρ**

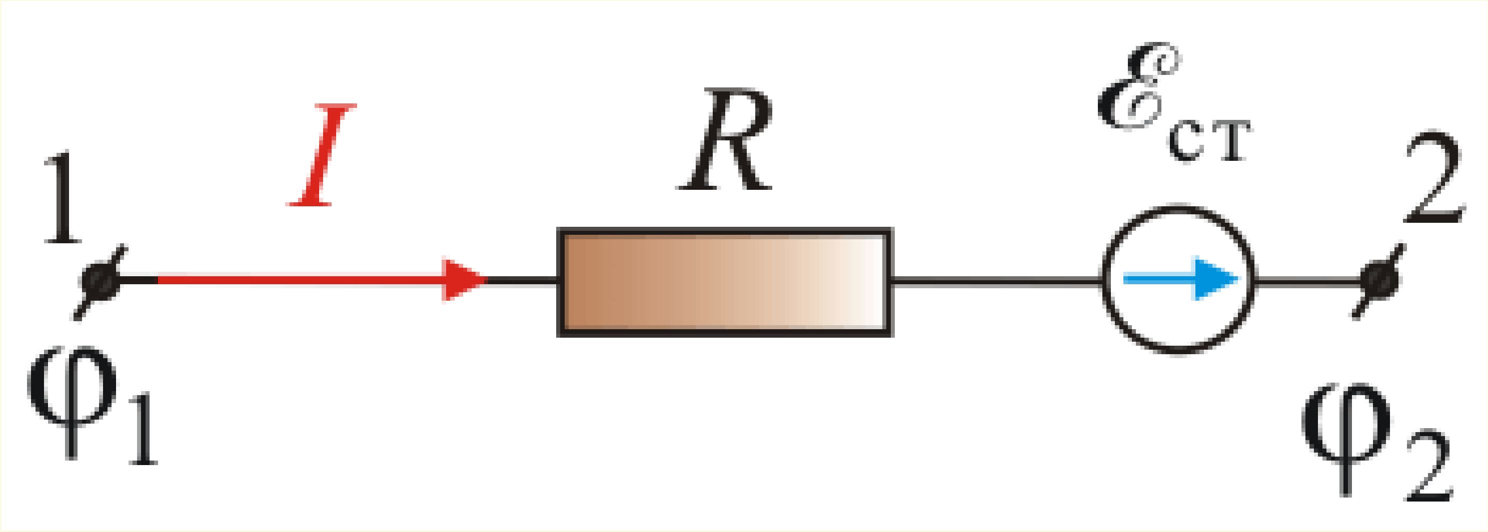
$$R = \rho \frac{l}{S},$$

$[\rho] = [\text{Ом} \cdot \text{м}]$

Рассмотрим неоднородный участок цепи, участок, содержащий источник ЭДС

(т.е. участок, где действуют неэлектрические силы).

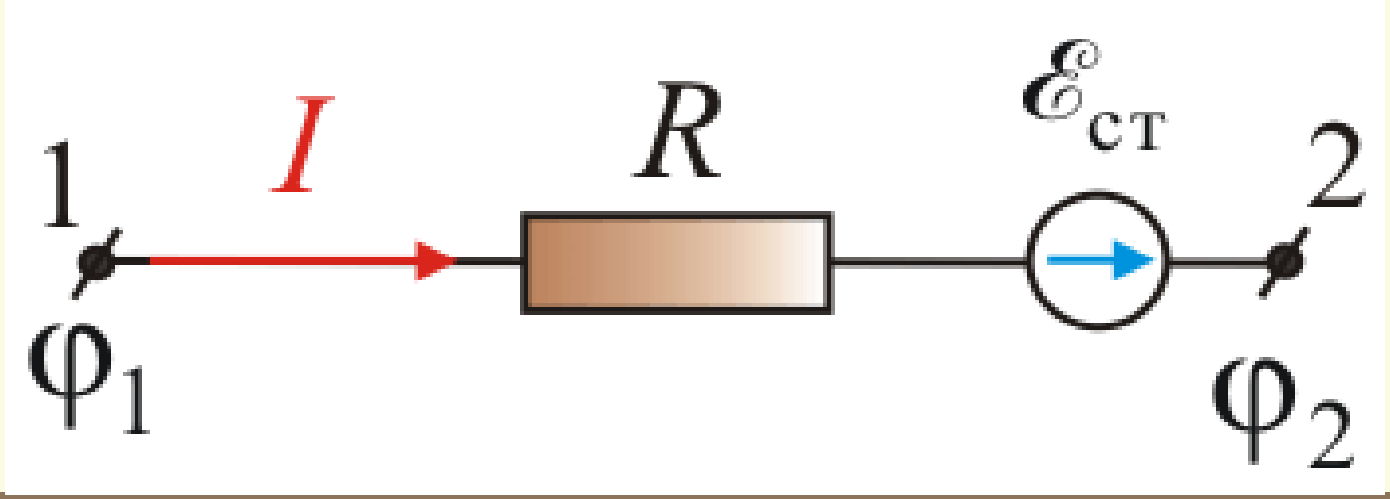
Напряженность $\vec{E}$ ***поля в любой точке цепи равна векторной сумме поля кулоновских сил и поля сторонних сил:*** $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{ст}.$



Т.к. $\vec{E}_q d\vec{l} = -d\varphi$, или

$$\int_1^2 \vec{E}_q d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$$, тогда

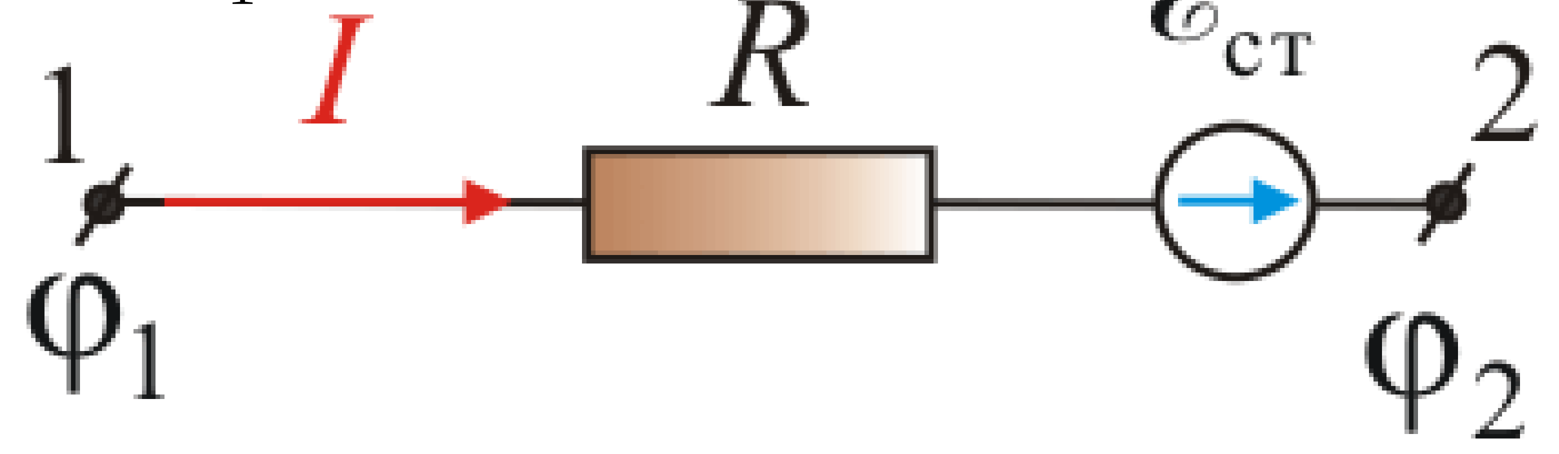
$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}$$



Величина, численно равная работе по переносу единичного положительного заряда суммарным полем кулоновских и сторонних сил на участке цепи (1 – 2), называется напряжением на этом участке U_{12}

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E}_q d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{ст} d\vec{l}$$

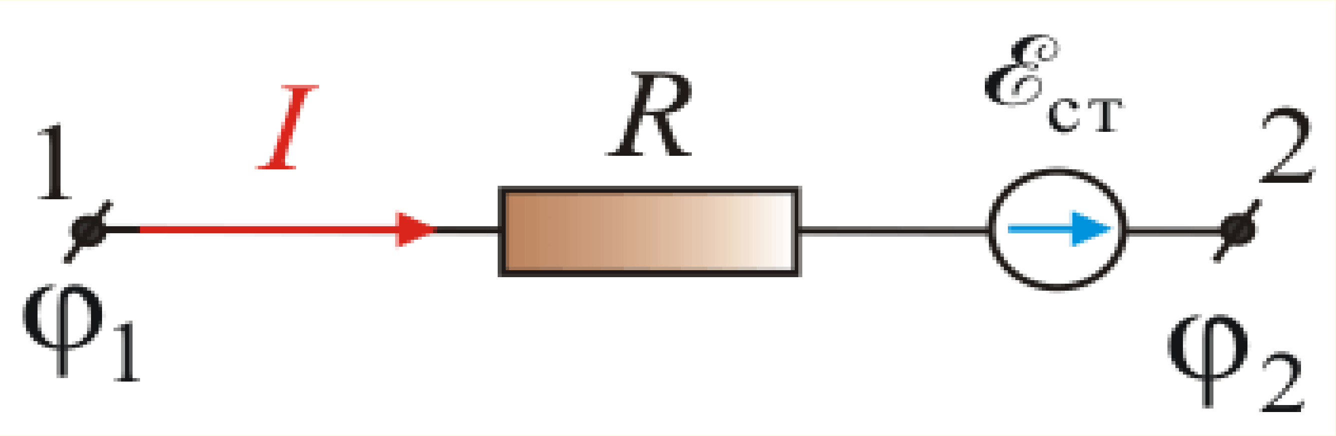
$$\varepsilon_{СТ} = \int_1^2 \vec{E}_{СТ} d\vec{l}$$



Напряжение на концах участка цепи совпадает с разностью потенциалов только в случае, если на этом участке нет ЭДС, т.е. на однородном участке цепи.

Обобщенный закон Ома для участка цепи содержащей источник ЭДС:

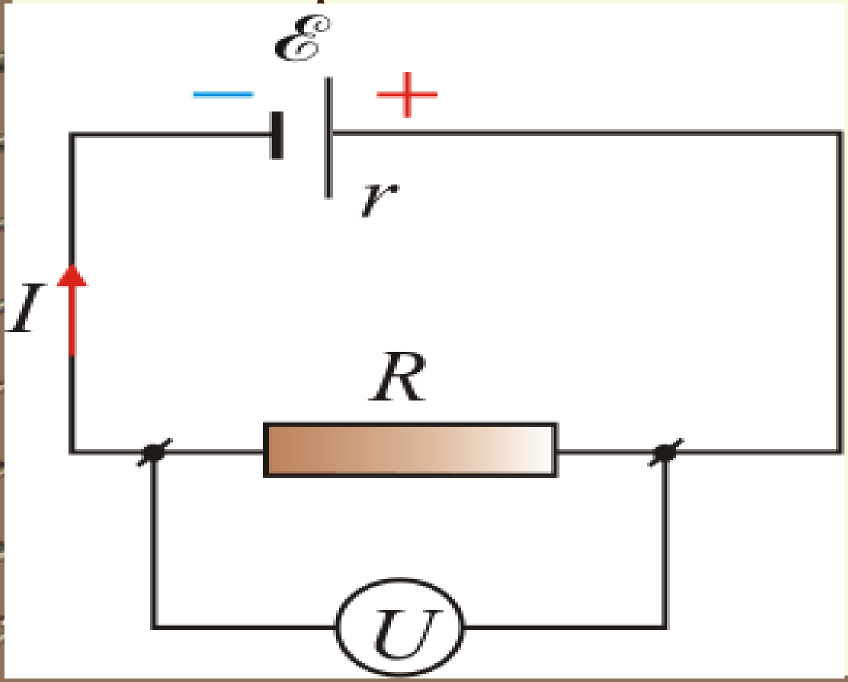
$$I \cdot R = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}.$$



В замкнутой цепи: $\varphi_1 = \varphi_2$; $I = \dfrac{\varepsilon}{R_\Sigma}$, или $IR_\Sigma = \varepsilon$

где $R_\Sigma = R + r$; r – внутреннее сопротивление источника

Тогда ***закон Ома*** для замкнутого участка цепи, содержащего источник ЭДС запишется в виде



$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R + r}.}$$

Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим произвольный участок цепи, к концам которого приложено напряжение *U*. За время d*t* через каждое сечение проводника проходит заряд

$$\mathrm{d}q = I\mathrm{d}t.$$

При этом силы электрического поля, действующего на данном участке, совершают работу:

$$\mathrm{d}A = U\mathrm{d}q = UI\mathrm{d}t.$$

Общая работа:

$$\boxed{A = I \cdot U \cdot t}$$

Разделив работу на время, получим выражение для мощности: $N = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = UI.$

Полезно вспомнить и другие формулы для мощности и работы:

$$N = I^2 R$$

$$A = I^2 R \cdot t$$

В 1841 г. манчестерский пивовар Джеймс Джоуль и в 1843 г. петербургский академик Эмилий Ленц установили закон теплового действия электрического тока.

Джоуль Джеймс Пресскотт (1818 – 1889) – английский физик, один из первооткрывателей закона сохранения энергии. Первые уроки по физике ему давал Дж. Дальтон, под влиянием которого Джоуль начал свои эксперименты. Работы посвящены электромагнетизму, кинетической теории газов.

Ленц Эмилий Христианович (1804 – 1865) – русский физик. Основные работы в области электромагнетизма. В 1833 г. установил правило определения электродвижущей силы индукции (закон Ленца), а в 1842 г. (независимо от Дж. Джоуля) – закон теплового действия электрического тока (закон Джоуля-Ленца). Открыл обратимость электрических машин. Изучал зависимость сопротивление металлов от температуры. Работы относятся также к геофизике.

При протекании тока, в проводнике выделяется количество теплоты:

$$Q = I^2 Rt.$$

Если ток изменяется со временем:

$$Q = \int_1^2 I^2 \mathrm{R} \mathrm{d}t$$

Это закон ***Джоуля – Ленца в интегральной форме***.

Отсюда видно, что ***нагревание происходит за счет работы, совершаемой силами поля над зарядом.***

Последнее соотношение имеет интегральный характер и относится ко всему проводнику с сопротивлением R, по которому течет ток I.

Получим **закон Джоуля-Ленца** в локальной - **дифференциальной форме**, характеризуя тепловыделение в произвольной точке.

Тепловая мощность тока в элементе проводника Δl, сечением ΔS, объемом

$\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S$ равна:

$$\Delta N = I^2 R = I\Delta\varphi = j\Delta S E \Delta l = \vec{\mathrm{j}}\vec{\mathrm{E}}\Delta V$$

Удельная мощность тока

$$\omega = \frac{\Delta N}{\Delta V} = \vec{\mathrm{j}}\vec{\mathrm{E}}$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, получим

закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме, характеризующий плотность выделенной энергии.

$$\omega = \sigma E^2$$

Так как выделенная теплота равна работе сил электрического поля

$$A = IUt$$

то мы можем записать для мощности тока:

$$N = IU = I^2 R$$

Мощность, выделенная в единице объема проводника .

$$\omega = \rho j^{2}$$

где ρ - удельное сопротивление. Приведенные формулы справедливы для однородного участка цепи и для неоднородного.

Удельное сопротивление вещества ρ зависит от температуры. В не слишком широком диапазоне температур удельное сопротивление многих проводников является линейной функцией температуры:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$$

Здесь: ρ_0 — удельное электрическое сопротивление вещества при 0°С; α — температурный коэффициент сопротивления.

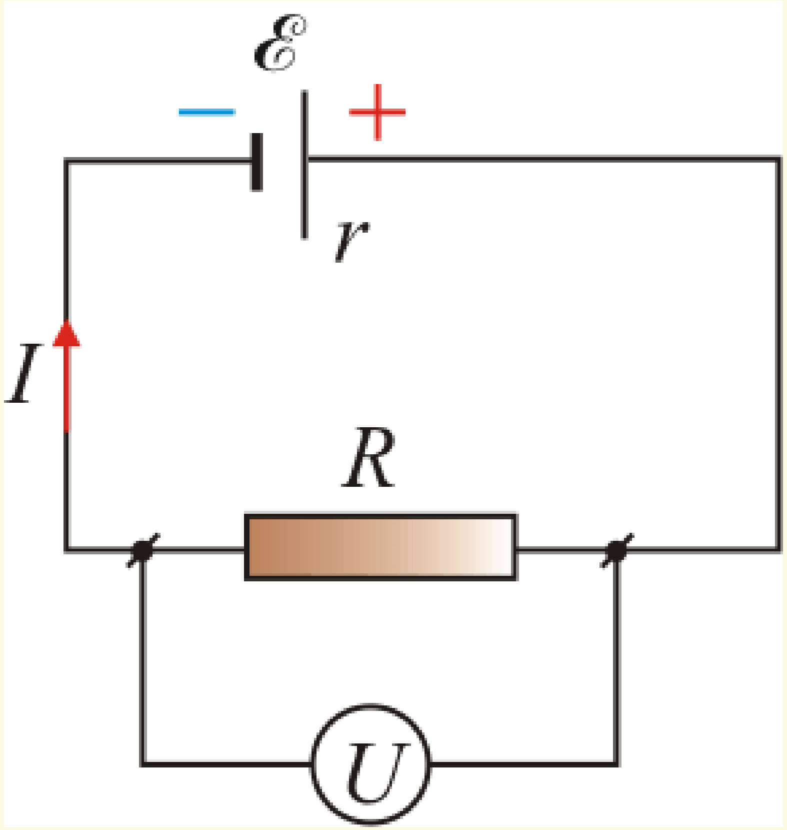
Для всех чистых металлов $\alpha = \frac{1}{273} \approx 0.037$, то есть температурный коэффициент их удельного сопротивления близок к температурному коэффициенту расширения идеальных газов. Температурный коэффициент сопротивления проводников 1 рода (металлов) $\alpha_I > 0$, а II рода (электролитов)

$\alpha_{II} < 0$. Это означает, что с понижением температуры удельное сопротивление металлов уменьшается, а электролитов — растёт.

При температурах близких к абсолютному нулю (0.2 ÷ 20 К) сопротивление многих металлов и их сплавов скачком уменьшается до нуля. Это состояние вещества называется сверхпроводящим. Впервые *явление сверхпроводимости* было обнаружено для ртути в 1911 году голландским физиком Камерлинг-Оннесом.

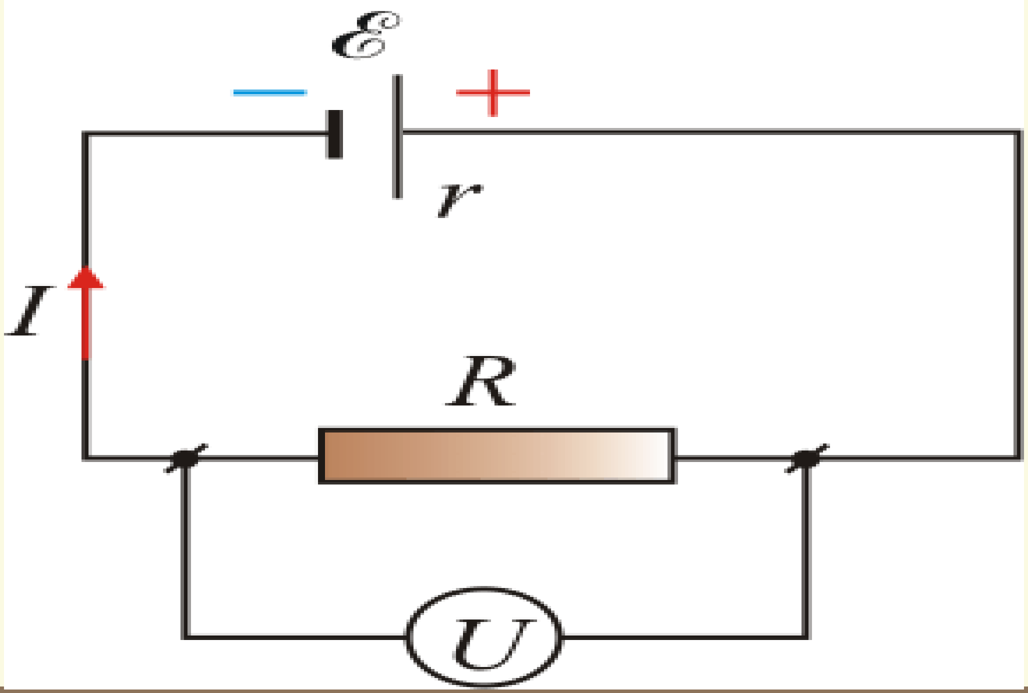
КПД источника тока

Рассмотрим элементарную электрическую цепь, содержащую источник ЭДС с внутренним сопротивлением *r*, и внешним сопротивлением *R*



КПД всегда определяем как отношение полезной работы к затраченной:

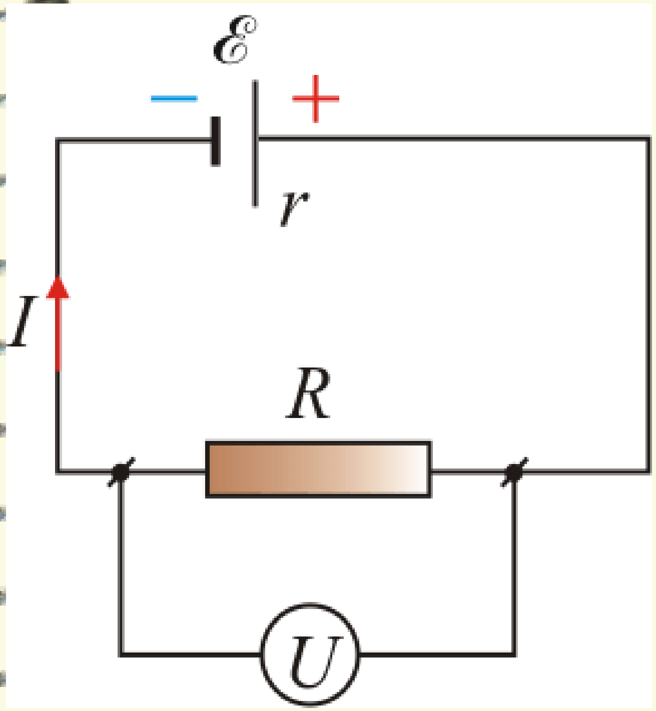
$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{з}}} = \frac{UI}{\varepsilon I} = \frac{U}{\varepsilon}.$$



Полезная работа – мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении *R* в единицу времени.

По закону Ома имеем: $U = IR,$

$$\varepsilon = (R + r)I,$$



тогда

$$\eta = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{IR}{I(R+r)} = \frac{R}{R+r}$$

Таким образом, имеем, что ***при*** $R \to \infty$, $\eta \to 1$, но при этом ***ток в цепи мал*** и ***полезная мощность мала***.

Вот парадокс – мы всегда стремимся к повышенному КПД, а в данном случае нам это не приносит пользы.

Найдем условия, при которых полезная мощность будет максимальна. Для этого нужно, чтобы

$$\frac{\mathrm{d}N_{\text{п}}}{\mathrm{d}R} = 0.$$

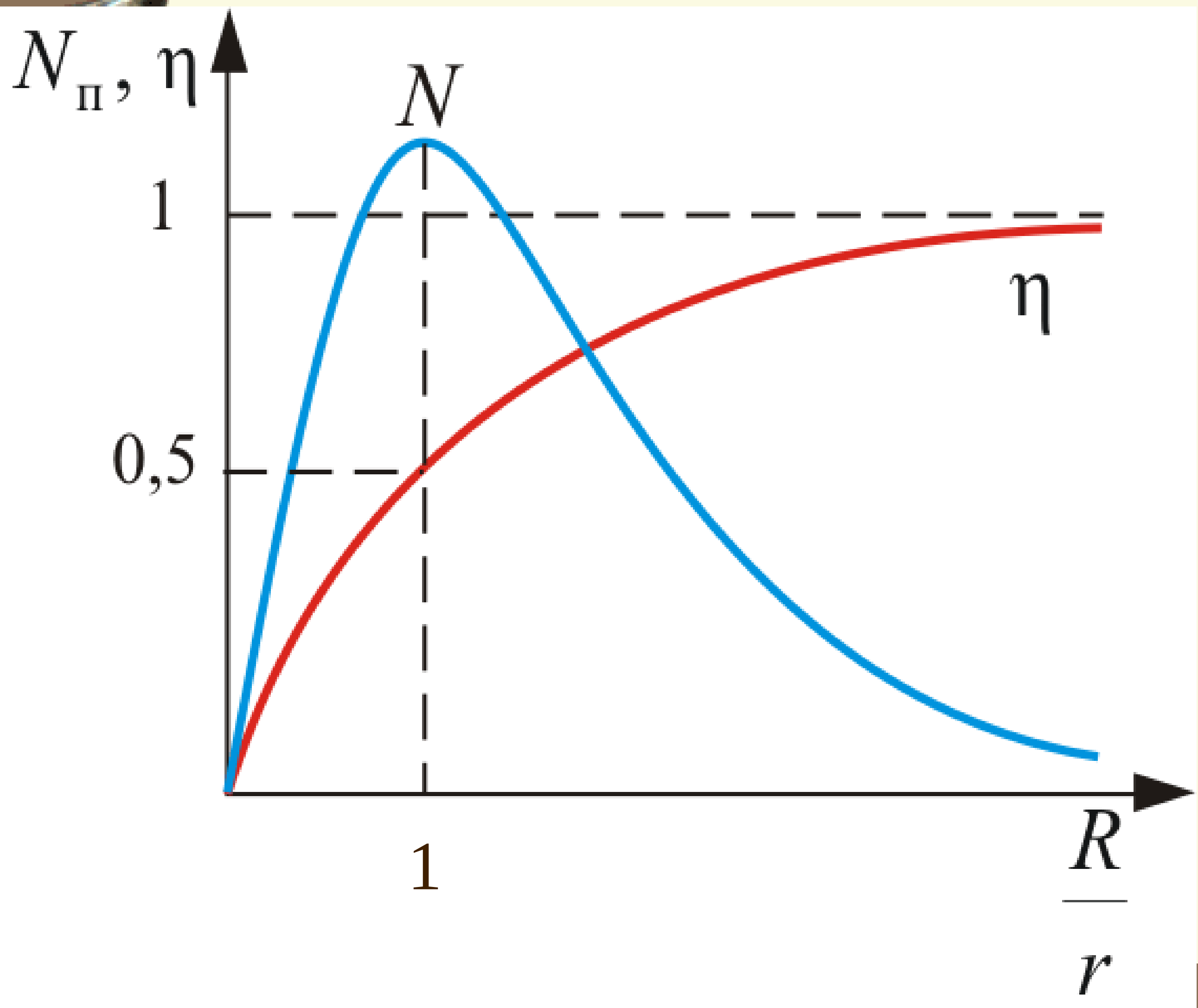
$$N_{\text{п}} = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{\text{п}}}{\mathrm{d}R} = \frac{\varepsilon^2 (R+r)^2 - 2(r+R)\varepsilon^2 R}{(R+r)^4} = 0$$

$$\varepsilon^2\left[(R+r) - 2R\right] = 0$$

Это возможно при R = r

В последнем выражении $\varepsilon \neq 0$ и $R + r \neq 0$ следовательно, должно быть равно нулю выражение в квадратных скобках, т.е. ***r* = *R***.

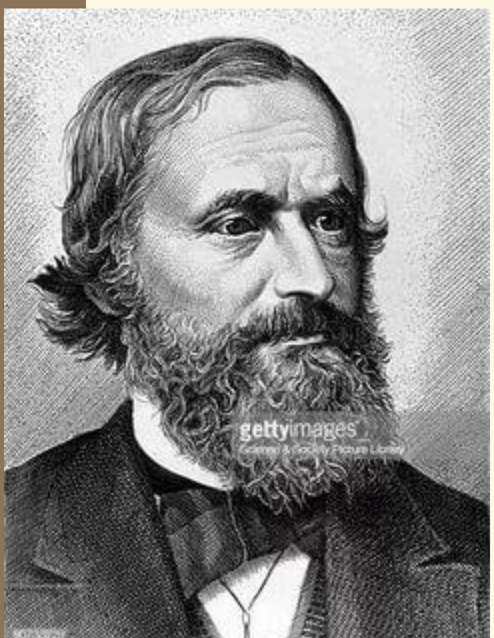


r* = *R

При этом условии выделяемая мощность максимальна, а КПД равен 50%.

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

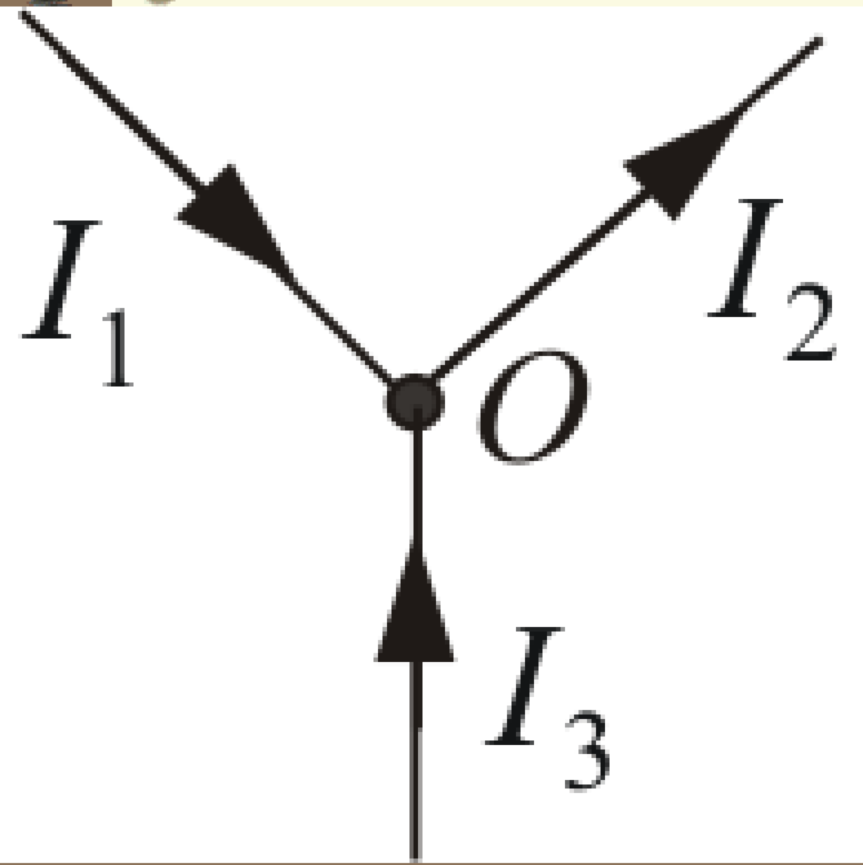
Расчет разветвленных цепей с помощью закона Ома довольно сложен.



Эта задача решается более просто с помощью ***двух правил*** немецкого физика ***Г. Кирхгофа*** (1824 – 1887).

Первое правило Кирхгофа

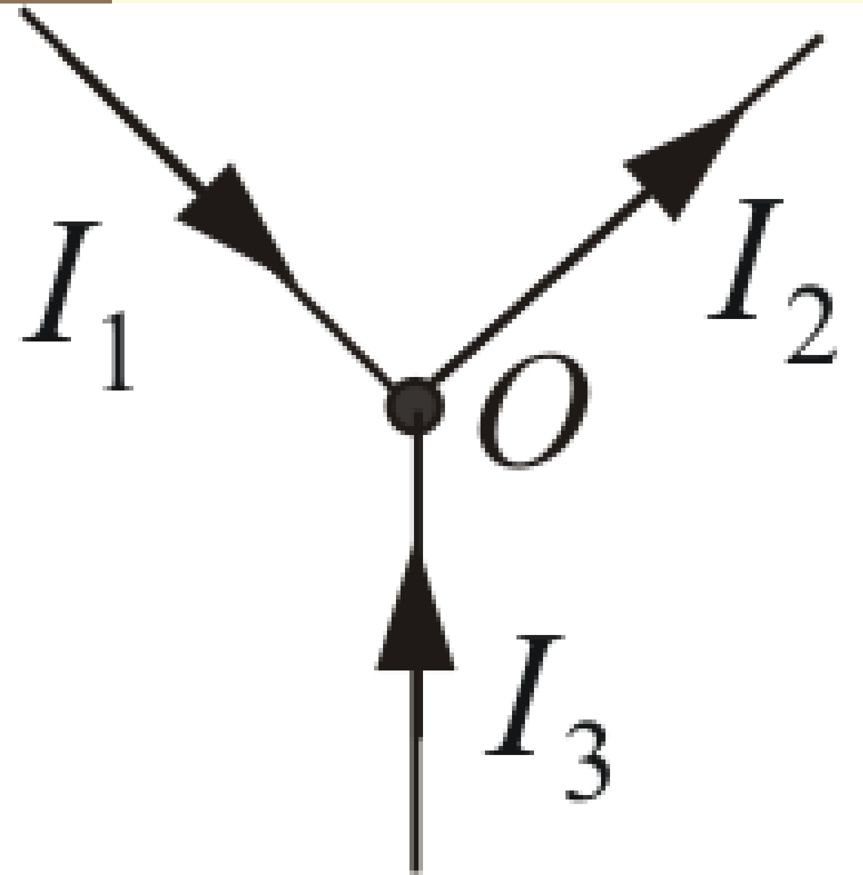
утверждает, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле цепи равна нулю:



$$\sum_{k=3}^{n} I_k = 0$$

(*узел* – любой участок цепи, где сходятся более двух проводников)

В случае установившегося постоянного тока в цепи ни в одной точке проводника, ни на одном из его участков не должны накапливаться электрические заряды

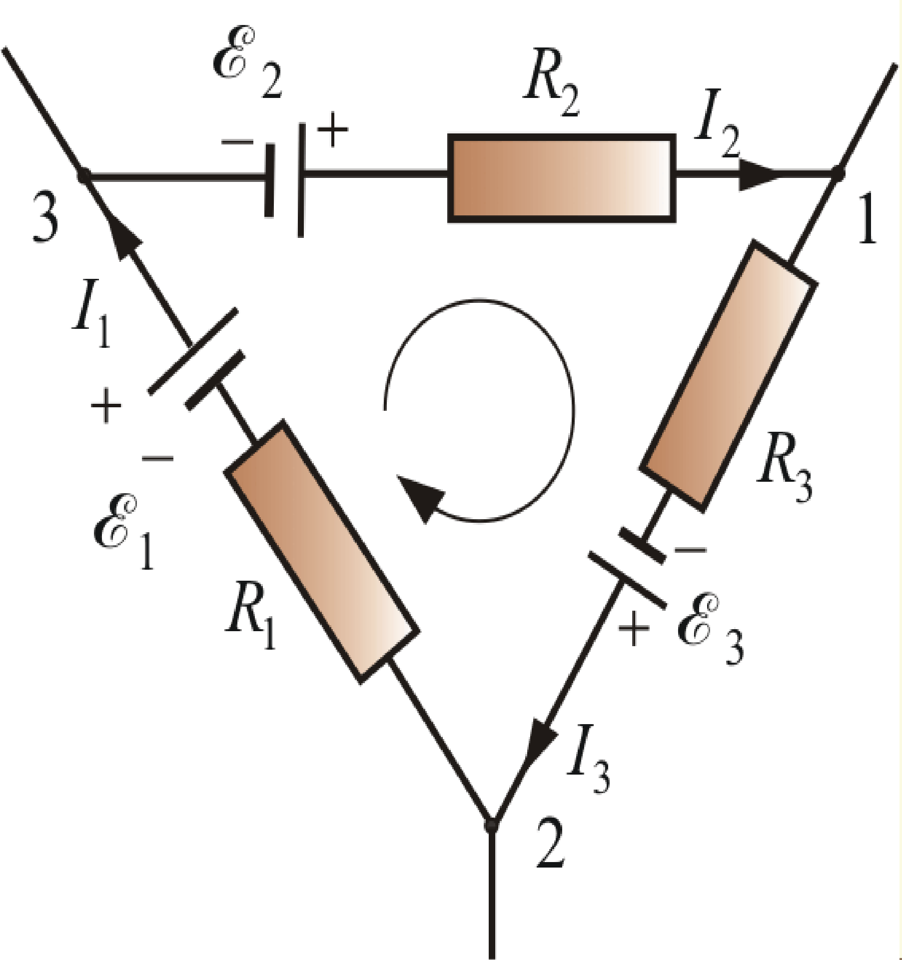


Токи, сходящиеся к узлу, считаются положительными:

$$\boxed{I_1 - I_2 + I_3 = 0}$$

Второе правило Кирхгофа

(обобщение закона Ома для разветвленной цепи).



$$\varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_1 = I_1 R_1$$

$$\varphi_3 - \varphi_1 + \varepsilon_2 = I_2 R_2$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_3 = I_3 R_3$$

Складывая получим:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \varepsilon_k .$$

В любом замкнутом контуре электрической цепи ***алгебраическая сумма произведения тока на сопротивление равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом же контуре***.

$$\boxed{\sum_k I_k R_k = \sum_k \varepsilon_k .}$$

Обход контуров осуществляется по часовой стрелке, если направление обхода совпадает с направлением тока, то ток берется со знаком «плюс».

Лекция закончена!