МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, 2-й семестр

Лектор: Петросян Наталия Семеновна,
к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики

Основные разделы курса:
Интегральное исчисление функций одной переменной
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных
Дифференциальные уравнения

Контрольные мероприятия 2-го семестра:
1-й модуль –
1) контрольная работа «Интегралы»,
2) контрольная работа «Приложения определенных интегралов»
2-й модуль –
1) контрольная работа «Функции нескольких переменных»,
2) контрольная работа «Дифференциальные уравнения».

Экзамен

Учебные пособия

1. Задачи и контрольные вопросы по математике. Второй семестр: контрольные задания / Н.С. Петросян, Н.Н. Холщевникова, Л.Б. Шуманская ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Московский государственный технологический университет "СТАНКИН". - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : МГТУ "СТАНКИН", 2008. - 93 с.; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=4638437.
2. Задачи и контрольные вопросы по математике для студентов 3 семестра : контрольные задания / А.В. Боголюбов, О.К. Иванова ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Московский государственный технологический университет "СТАНКИН". - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», 2008. - 102 с.; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=463847
3. Консевич, Н.Н. Интегральное исчисление функции одной переменной / Н.Н. Консевич, Н. Холщевникова ; мин. обр. и науки РФ ; моск. гос. тех. универ. «СТАНКИН» . - Москва : ФГБОУ ВО МГТУ «СТАНКИН» : Янус-К, 2005. - 69 с. То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=463770

4. Боголюбов, А.В. Дифференциальные уравнения. 3-й семестр / А.В. Боголюбов; мин. обр. и науки РФ ; моск. гос. тех. универ. «СТАНКИН» . - Москва : ФГБОУ ВО МГТУ «СТАНКИН»: Янус-К, 2005. - 80 с. 300 экз. То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=463756

5. Кадымов, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Методы решения : учебное пособие / В.А. Кадымов, О.К. Иванова, Е.А. Яновская ; под ред. Л.А. Уваровой ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Московский государственный технологический университет "СТАНКИН", Кафедра прикладной математики. - Москва : Янус-К, 2016. - 92 с. : ил. - ISBN 978-5-8037-0702-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=452901

Учебники

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1, 2.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник для вузов.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов.

4. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа : учебник : в 2-х т. / Л.Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - Москва : Физматлит, 2009. - Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. - 400 с. - ISBN 978-5-9221-0184-4 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82814

5. Ильин, В.А. Основы математического анализа : учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 7-е изд., стер. - Москва : Физматлит, 2009. - Ч. I. - 647 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 1). - ISBN 978-5-9221-0902- 4 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76686

6. Ильин, В.А. Основы математического анализа. В 2-х частях : учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 5-е изд. - Москва : Физматлит, 2009. - Ч. II. - 464 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 2). - ISBN 978-5- 9221-0537-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83225

Лекция 1

ГЛАВА 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Первообразная. Теорема об общем виде первообразной. Неопределенный интеграл и его свойства

Определение 1. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на данном промежутке *I*, если $F'(x) = f(x)$ для всех x из этого промежутка.

Примеры.

1) $f(x) = 2x$, $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 + 5$.

2) $f(x) = \cos x$, $F_1(x) = \sin x$, $F_2(x) = \sin x + 10$.

Первообразная определена неединственным образом.

Разыскание для функции всех ее первообразных называется ***интегрированием*** функции и составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

Теорема 1 (***об общем виде первообразной***). Если функция $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на промежутке I , то и функция $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$ на I. Обратно, любая первообразная функции $f(x)$ на промежутке I представляется в виде $F(x)+C$.

Доказательство. По определению первообразной $\left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = F'(x) = f(x)$. Следовательно, функция $F(x)+C$ является первообразной функции $f(x)$ наряду с функцией $F(x)$. Пусть теперь $\Phi(x)$ — другая первообразная функции $f(x)$ на промежутке I. Рассмотрим функцию $g(x)=\Phi(x)-F(x)$. Тогда $g'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0\ \forall x\in I$, следовательно, $g(x)=C, C=\mathrm{const}$, т.е. $\Phi(x)=F(x)+C$.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функций $f(x)$ на промежутке I называется ***неопределенным интегралом*** функции $f(x)$ на I и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где $F(x)$ - какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, а C - произвольная постоянная.

Читается: неопределенный интеграл функции $f(x)$ по dx.

Терминология:

$\int$ – знак неопределенного интеграла,

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования.

Можно записать $\int 2xdx = x^2 + C$, $\int \cos xdx = \sin x + C$.

Основные свойства неопределенного интеграла:

а) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

б) $\int F'(x)dx = F(x) + C$,

$\int dF(x) = F(x) + C$;

в) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, $A \neq 0$;

г) $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке *I*, то $f(x)$ имеет первообразную на промежутке *I*.

Доказательство далее.

Замечание. Если производная любой элементарной функции снова является элементарной функцией, то первообразная элементарной функции не обязательно будет элементарной функцией. Например, неопределенные интегралы

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x}$$

и другие не выражаются через элементарные функции. Операция взятия неопределенного интеграла приводит к появлению новых функций, не являющихся элементарными.

§ 2. Таблица основных интегралов

1. $\int 0dx = C$.

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\left(n \neq -1\right)$,

(в частности, $\int dx = x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$).

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,(a > 0,\, a \neq 1); \int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C(\ a \neq 0)$.

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\ (a \ne 0).$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\ (a > 0).$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\ (a \ne 0).$

Чтобы убедиться в справедливости этих формул, достаточно продифференцировать правые части.

Остановимся на формуле 3 . Пусть $x \in I \subset (0,+\infty)$. Тогда $\ln|x| + C = \ln x + C$, $(\ln x + C)' = \dfrac{1}{x}$. Пусть $x \in I \subset (-\infty, 0)$. Тогда $\ln|x| + C = \ln(-x) + C$, $\left(\ln(-x) + C\right)' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

§ 3. Замена переменной в неопределенном интеграле: подведение под знак дифференциала, метод подстановки

Вспомним формулу дифференцирования сложной функции:

$$\left(G\left(\omega(x)\right)\right)' = G'\left(\omega(x)\right)\omega'(x).$$

Обозначим $G'(t) = g(t)$, тогда получим

$$\left(G\left(\omega(x)\right)\right)' = g\left(\omega(x)\right)\omega'(x).$$

Сформулируем интегральную версию этой формулы.

Утверждение. Если $\int g(t)\,dt = G(t) + C$, то $\int g\left(\omega(x)\right)\omega'(x)\,dx = G\left(\omega(x)\right) + C$ где $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$ – непрерывные функции.

Таким образом, если при нахождении неопределенного интеграла $\int f(x)\,dx$ мы замечаем, что функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = g\left(\omega(x)\right)\omega'(x)$, и интеграл $\int g(t)\,dt$ нам известен, то

$$\int f(x)\,dx = \int g\left(\omega(x)\right)\omega'(x)\,dx = G\left(\omega(x)\right) + C.$$

Такая замена переменной носит название ***подведения под знак дифференциала***, в связи с тем, что $\omega'(x)dx = d\omega(x) = dt$. При этом в интеграле также применяется запись

$$\int f(x)dx = \int g(\omega(x))\omega'(x)dx = \int g(\omega(x))d\omega(x) = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\omega(x)) + C.$$

Примеры.

1. $\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d \sin x = |\sin x = t| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

2. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d \ln x = |t = \ln x| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

3. $\int e^{\operatorname{tg}^2 x} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int e^{\operatorname{tg}^2 x} \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int e^{\operatorname{tg}^2 x} \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} \mathrm{x} = |\operatorname{tg} x = t| =$

$$= \int e^{t^2} t dt = \int \frac{1}{2} e^{t^2} dt^2 = |y = t^2| = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y + C = \frac{1}{2} e^{t^2} + C = \frac{1}{2} e^{\operatorname{tg}^2 x} + C.$$

В других случаях в подынтегральное выражение $f(x)dx$ непосредственно подставляют вместо x дифференцируемую функцию $x = s(t)$ от новой переменной t и получают выражение

$$f(x)dx = f(s(t))s'(t)dt = g(t)dt.$$

Если $t=\omega(x)$ — обратная функция для $x=s(t)$, то

$$\int f(x)dx=\int g(t)dt=G(t)+C=G(\omega(x))+C.$$

Такой метод замены переменной называют также ***подстановкой***.

Пример 4. Найти $\int x(2x+1)^{2017}dx$.

◄ Сделаем подстановку $t=2x+1$. Тогда $x=(t-1)/2$, $dx=\frac{1}{2}dt$,

$$\int x(2x+1)^{2017}dx=\int\frac{t-1}{2}t^{2017}\frac{dt}{2}=\frac{1}{4}\int t^{2018}dt-\frac{1}{4}\int t^{2017}dt=\frac{t^{2019}}{4\cdot 2019}-\frac{t^{2018}}{4\cdot 2018}+C=$$

$$=\frac{(2x+1)^{2019}}{4\cdot 2019}-\frac{(2x+1)^{2018}}{4\cdot 2018}+C.$$ ►

Пример 5. $\int\sin xdx=-\cos x+C$,

$$\int\sin(x+1)dx=\int\sin(x+1)d(x+1)=-\cos(x+1)+C,$$

$$\int\sin(2x)dx=\frac{1}{2}\int\sin(2x)d(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C,$$

$$\int\sin(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)d(2x+1)=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C.$$

§ 4. Метод интегрирования по частям

Теорема. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют непрерывные производные* $u'(x)$ *и* $v'(x)$. *Тогда*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

или, короче,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эти формулы носят название ***формул интегрирования по частям***.

Доказательство. По формуле дифференцирования произведения

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Возьмем неопределенный интеграл от обеих частей этого равенства:

$$\int \left(u(x)v(x)\right)' dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

или

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

откуда

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Формулы интегрирования по частям применяются к интегралам вида

$$\int x^n e^{\alpha x} dx,\ \int x^n \cos\beta x dx,\ \int x^n \sin\beta x dx,\ \int x^n \ln x dx,\ n\in\mathbb{N};$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx,\ \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx \quad \text{и т.д.}$$

Примеры.

1. Найти $\int xe^x dx$.

$$◄ \int xe^x dx = \left| \begin{array}{c} u = x, \\ du = dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C. ►$$

2. Найти $\int x\sin x dx$.

$$◄ \int x\sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = x, \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C. ►$$

3. Найти $\int \operatorname{arctg} x dx$.

$$◄\int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \\ v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

Действительно,

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C. ►$$