Семинар №1

Закон Кулона. Электрическое поле. Принцип суперпозиции.

Если в вакууме находятся 2 частицы с электрическими зарядами q_1 и q_2, то между ними действуют силы взаимодействия, описываемые законом Кулона. Величина сил взаимодействия

$$F_{12}=F_{21}=\frac{|q_1 \times q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2_{12}},$$

где r_{12} – расстояние между частицами, которые считаются точечными, и $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}$Ф/м.

Векторы сил $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ лежат на прямой, проходящей через частицы. Если заряды одного знака, частицы отталкиваются, если заряды противоположенных знаков, частицы притягиваются.

Согласно 3ему закону Ньютона

$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$$

$\vec{F}_{12}$ $\vec{F}_{21}$ q_1 q_2

$q_1\times q_2<0$

$\vec{F}_{12}$ $\vec{F}_{21}$ q_1 q_2

$q_1\times q_2>0$

По теории близкодействия, взаимодействие электрических зарядов осуществляется с помощью особого материального объекта, который непрерывным образом заполняет всё пространство и называется электрическим полем. Силовой характеристикой электрического поля является вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$. Сила, с которой электрическое поле действует на заряд q, имеющий радиус-вектор $\vec{r}$, описывается формулой

$$\vec{F}=q\vec{E}(\vec{r}).$$

Вектор напряжённости электрического поля в случае точечного заряда q, находящегося в вакууме, имеет вид

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Здесь $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведённый из точки, где находиться заряд, в точку наблюдения.

В случае относительно слабых электрических полей выполняется принцип суперпозиции: вектор напряжённости полного электрического поля $\vec{E}$, созданного несколькими зарядами q_1, q_2,…q_n, равен векторной сумме

$$\vec{E}=\vec{E}(q_1)+\vec{E}(q_2)+\ldots+\vec{E}(q_n),$$

где $\vec{E}_i(q_i)$ - вектор напряжённости электрического поля, создаваемого зарядом q_i в отсутствие других зарядов.

Задача №1

Определите силу F_k кулоновского притяжения электрона к ядру в атоме водорода, ели принять, что диаметр атома водорода $d=10^{-8}$ см. Сравните величину кулоновской силы с величиной гравитационной силы притяжения электрона к протону. Масса электрона $m_e=9{,}1\times10^{-31}$ кг, масса протона $m_p=1{,}67\times10^{-27}$кг, гравитационная постоянная $G=6{,}67\times10^{-11}$ Н×м^2/ кг^2, заряд электрона $e=1{,}6\times10^{-19}$ Кл.

Решение:

Ядро атома водорода состоит из одного протона, имеющий положительный заряд $e=1{,}6\times10^{-19}$ Кл.

Согласно закону Кулона

$$F_k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (d/2)^2} \approx 9\times10^{-8}\,\text{Н} \qquad (1)$$

Сила гравитационного притяжения между электроном и протоном

$$F_{гр} = G\frac{m_e \times m_p}{(d/2)^2} \approx 4{,}4\times10^{-47}\,\text{Н} \qquad (2)$$

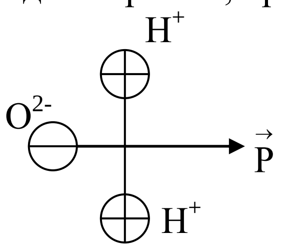
Таким образом, отношение этих сил

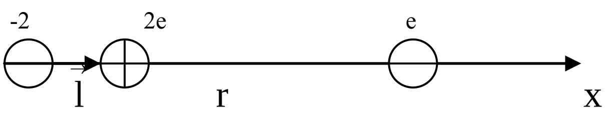
$$\frac{F_{гр}}{F_k} = \frac{4\times10^{-47}}{9\times10^{-8}} \approx 4{,}4\times10^{40}.$$

Ответ: $F_k=9\times10^{-8}$Н, $F_{гр}=4\times10^{-47}$Н.

Задача №2

Молекула воды H_2O имеет постоянный электрический дипольный момент $p=6{,}2\times10^{-30}$ Кл×м, направленный от центра иона O^{2-} к середине отрезка прямой, соединяющий центры ионов H^+. Определите силу F, с которой молекула воды взаимодействует с электроном, находящимся от молекулы на расстоянии r=10 нм. Дипольный момент молекулы направлен вдоль прямой, проходящей через молекулу и электрон.





$$\vec{P} = 2e\,\vec{l}$$

Решение:

Согласно принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \qquad (1)$$

где $\vec{E}_1$ - вектор напряжённости электрического поля положительного заряда -2e молекулы и $\vec{E}_2$- вектор напряжённости электрического поля отрицательного заряда -2e молекулы.

Сила, с которой молекула воды действует на электрон,

$$\vec{F} = -e\vec{E}. \tag{2}$$

Согласно условиям задачи

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = \frac{+2e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{-2e}{4\pi\varepsilon_0 (r+d)^2} = \frac{2e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(d^2+2rd)}{r^2(r+d)^2} \approx \frac{2ed}{2\pi\varepsilon_0 r^3}, \tag{3}$$

$$E_y = E_z = 0$$

Здесь учтено, что r » d

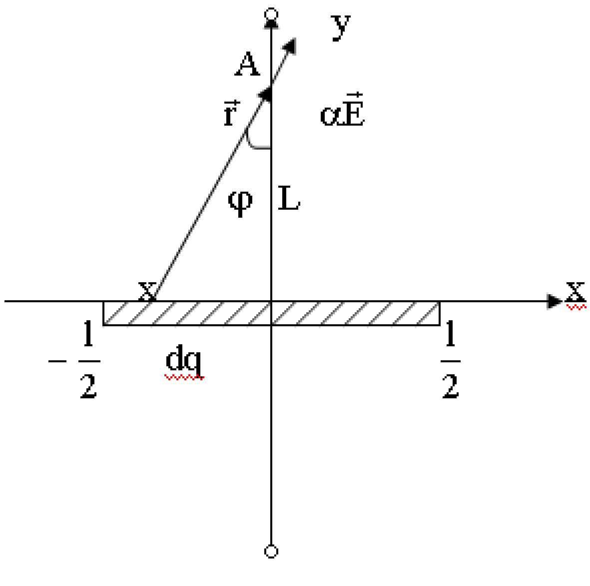
Величина силы взаимодействия молекулы и электрона

$$F = |F_x| = \frac{eP}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \approx 1{,}8 \times 10^{14}\,\text{Н} \tag{4}$$

Ответ: F = $1{,}8 \times 10^{-14}$ Н.

Задача №3

Тонкий стержень длиной l=20см, заряжен равномерно зарядом q=10^{-9} Кл. Определите вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ в точке А, находящейся на расстоянии L=10см от центра стержня О (отрезок прямой АО перпендикулярен стержню). Исследуете зависимость величины Е от расстояния L и проанализируйте предельные случаи L» l и L«l.



Решение:

Задача решается с помощью формулы для вектора напряжённости электрического поля точечного заряда и принципа суперпозиции.

В силу симметрии пространственного распределения заряда относительно оси у вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ направлен по оси у

$$\vec{E} = (0, E_y, 0). \qquad (1)$$

Для нахождения величины E_y разобьём стержень на совокупность бесконечно малых элементов длиной dx, имеющих бесконечно малый заряд

$$dq = \frac{q}{l} dx, \qquad (2)$$

который можно считать точечным.

Вклад отдельного такого заряда, имеющего координату x, описывается следующими формулами

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}, dE_y = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\varphi = \frac{ydq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \qquad (3)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y=L

На основе принципа суперпозиции и формул (3) получаем

$$E_y = \int_o^{E_y} dE_y = \int_0^q \frac{L}{4\pi\varepsilon_0 r^3} dq = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{qL}{4\pi\varepsilon_0 l r^3} dx = \frac{qL}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{(L^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2qL}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_0^{l/2} \frac{dx}{(L^2 + x^2)^{3/2}} \qquad (4)$$

Здесь использовано, очевидно, равенство

$$\int_{-l/2}^{0} \frac{dx}{(L^2 + x^2)^{3/2}} = \int_0^{l/2} \frac{dx}{(L^2 + x^2)^{3/2}}$$

Подставляя в (4) значение табличного интеграла

$$\int_0^{l/2} \frac{dx}{(L^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{l}{L^2 (l^2 + 4L^2)^{1/2}} \qquad (5)$$

находим окончательное выражение

$$E_y = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L (l^2 + 4L^2)^{1/2}} \qquad (6)$$

При L» l

$E_y \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}$ (поле точечного заряда),

а при L«l

$E_y \approx \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 l L}$ (поле равномерно заряженного бесконечного стержня с линейной плоскостью заряда q\l).

Ответ: $E_y = E_z = 0$; $E_y = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 L (l^2 + 4L^2)^{1/2}}$.