ЛЕКЦИЯ 7

§15. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

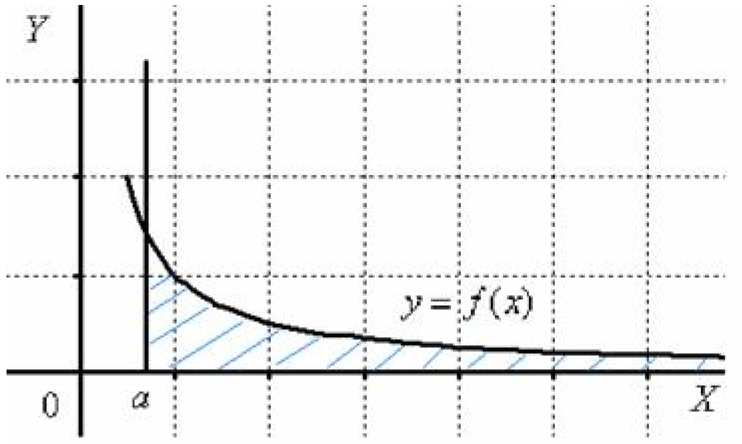
При рассмотрении определённых интегралов мы предполагали, что область интегрирования ограничена (более конкретно, является отрезком $[a,b]$); для существования определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходима ограниченность подынтегральной функции на отрезке $[a,b]$. Будем называть определённые интегралы, для которых выполняются оба эти условия (ограниченность и области интегрирования и подынтегральной функции) ***собственными***; интегралы, для которых нарушаются эти требования (т.е. не ограничена либо подынтегральная функция, либо область интегрирования, либо и то и другое вместе) ***несобственными***.

Определение 1 (несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом). Пусть функция $f(x)$ определена на полуоси $[a,+\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a,b]$, принадлежащему этой полуоси. Предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ называется несобственным интегралом функции $f(x)$ от $\boldsymbol{a}$ до $+\infty$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Итак, по определению,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся; если предел не существует или бесконечен, интеграл называется расходящимся.



Аналогично интегралу с бесконечным верхним пределом интегрирования определяется интеграл в пределах от $-\infty$ до ***b*.**

Определение 2(несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом). Пусть функция $f(x)$ определена на полуоси $(-\infty, b]$ и интегрируема по любому отрезку $[a,b]$, принадлежащему этой полуоси. Предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $a \to -\infty$ называется несобственным интегралом функции $f(x)$ от $-\infty$ до b и обозначается $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

Итак, по определению,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, интеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ называется сходящимся; если предел не существует или бесконечен, интеграл называется расходящимся.

Определение 3 (**несобственного интеграла с бесконечными верхним и нижним пределами**). Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и интегрируема по любому отрезку $[a,b]$; ***c*** - произвольная (конечная) точка числовой оси. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

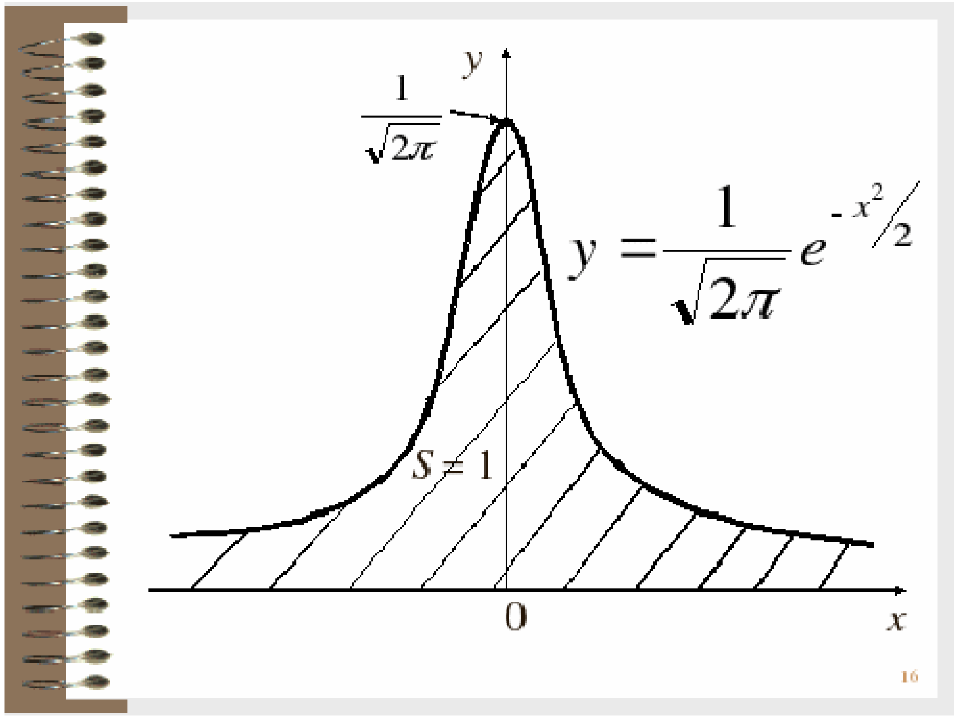
Интеграл называется сходящимся, если существуют и конечны оба входящих в определение предела.

Замечание. Пользуясь свойством аддитивности определённого интеграла, можно показать, что существование конечных пределов и их сумма не зависят от выбора точки ***c***.

Другими словами,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

если оба интеграла справа сходятся.



Примеры.

1. $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\sin b - \sin 0\right) = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin b;$

этот предел не существует; следовательно, исследуемый интеграл расходится.

2. $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) = \pi/2.$

Следовательно, интеграл сходится и равен $\pi/2$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 = \lim\limits_{a\to-\infty} \left(1 - e^a\right) = 1$. Интеграл сходится и равен 1.

4. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+4x+5}dx + \int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{-2} \frac{1}{(x+2)^2+1}dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{-2}^{b} \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(x+2)\Big|_a^{-2} + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(x+2)\Big|_{-2}^{b} =$$

$$= \left(\operatorname{arctg}0 - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(a+2)\right) + \left(\lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(a+2) - \operatorname{arctg}0\right) = -(-\pi/2) + \pi/2 = \pi.$$

Следовательно, интеграл сходится и равен.

Утверждение. *Интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* ***c****, удовлетворяющего неравенству* ***c*** > ***a****, сходится интеграл* $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Так как при ***a*** < ***c*** < ***b*** по свойству аддитивности

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx ,$$

и интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx$ от ***b*** не зависит, то конечный предел при $b \to +\infty$ для интеграла в левой части существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел для интеграла в правой части равенства.

Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла

В приведённых примерах мы сначала вычисляли с помощью первообразной функции определённый интеграл по конечному промежутку, а затем выполняли предельный переход. Объединим два этих действия в одной формуле. Положим

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x),\ F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x).$$

Тогда можно записать

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty},\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b},\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

подразумевая в каждом из этих случаев существование и конечность соответствующих пределов. Теперь решения примеров выглядят более просто:

Примеры.

1. $\displaystyle\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Big|_5^{+\infty}=-\left(0-\frac{1}{2\cdot 25}\right)=\frac{1}{50}$, интеграл сходится.

2. $\displaystyle\int_5^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_5^{+\infty}=+\infty$, интеграл расходится.

Для несобственных интегралов применимы формулы интегрирования по частям и замены переменной.

Примеры.

1. $$\int_1^{+\infty} xe^{-x}dx = \left| \begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = e^{-x}dx \\ v = -e^{-x} \end{matrix} \right| = -xe^{-x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-1} - e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1}.$$

2. При замене переменной несобственный интеграл может преобразоваться в собственный интеграл.

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Выполним замену переменной:

$$x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2},\ x = 1 \Rightarrow t = 1,\ x = +\infty \Rightarrow t = 0,$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t} + 1} = \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}.$$

Поэтому

$$J=\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\int_{1}^{0}\frac{t\cdot tdt}{t^2\sqrt{t^2+t+1}}=\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=$$

(это уже собственный интеграл)

$$=\ln\left(t+\tfrac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}}\right)\Bigg|_0^1=\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\ln\frac{3}{2}=\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Признаки сравнения для интегралов от неотрицательных функций

В этом разделе мы будем предполагать, что все подынтегральные функции неотрицательны на всей области определения. До сих пор мы определяли сходимость интеграла, вычисляя его: если существует конечный предел первообразной при стремлении $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то интеграл сходится, в противном случае интеграл расходится. При решении практических задач, однако, важно в первую очередь установить сам факт сходимости, и только затем вычислять интеграл (к тому же первообразная часто не выражается через элементарные функции). Сформулируем и докажем ряд теорем, которые позволяют устанавливать сходимость и расходимость несобственных интегралов от неотрицательных функций, не вычисляя их.

Теорема 1(признак сравнения). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы по любому отрезку* $[a,b]$ *и при* $x \geq a$ *удовлетворяют неравенствам* $0 \leq f(x) \leq g(x)$. *Если сходится интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$*, то сходится и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*;* если *расходится интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*, то расходится и интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Замечание. Эти утверждения имеют простой смысл: если сходится интеграл от большей функции, то сходится интеграл от меньшей функции; если расходится интеграл от меньшей функции, то расходится интеграл от большей функции; в случаях, когда сходится интеграл от меньшей функции или расходится интеграл от большей функции, никаких выводов о сходимости второго интеграла сделать нельзя.

Доказательство. Если $0 \le f(x)$ и $0 \le g(x)$, то функции

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx \text{ и } G(b)=\int_a^b g(x)dx$$

– монотонно возрастающие функции верхнего предела $\boldsymbol{b}$ (вследствие свойств аддитивности и монотонности интеграла) и $F(b)\le G(b)$. Монотонно возрастающая функция имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{b})$ ограничена. Поскольку $F(b)\le G(b)$, то $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{b})$ также ограничена, т.е. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, тогда функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{b})$ неограниченна, следовательно, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{b})$ неограниченна, т.е. $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Примеры.

1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Функция e^{-x^2} не имеет первообразной, выражающейся через элементарные функции, поэтому исследовать сходимость с помощью предельного перехода невозможно.

При $x \geq 1$ имеют место неравенства

$$-x^2 \leq -x, e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = e^{-1}$ сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ также сходится.

В качестве "стандартного" интеграла, с которым сравнивается данный, обычно берётся интеграл типа $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$, часто называемый интегралом Дирихле.

Лемма. *Интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ *сходится, если* $\boldsymbol{p} > 1$, *и расходится, если* $p \le 1$.

◀Доказательство. Пусть $p \neq 1$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, \ p > 1, \\ +\infty, \ p < 1. \end{cases}$$

В случае $p = 1$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty. \blacktriangleright$$

Примеры.

1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^7+1} dx$.

На всём промежутке интегрирования $\frac{1}{x^7+1} < \frac{1}{x^7}$; интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^7} dx$ сходится, так как $p = 7 > 1$. Поэтому исходный интеграл сходится.

2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

При $x \geq 3$ выполняется неравенство $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$; интеграл $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ расходится.

Следовательно, $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ расходится и $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ также расходится.

3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx$.

Здесь сравнить подынтегральную функцию с какой-либо степенью $\boldsymbol{x}$ невозможно, так как числитель - неограниченная функция, поэтому рассуждаем по-другому. При $x \to +\infty$ функция $\ln x$ - бесконечно большая низшего порядка по сравнению с любой положительной степенью $\boldsymbol{x}$, например, $\ln x = o\left(x^{1/4}\right)$, $x \to +\infty$

Поэтому $\frac{\ln x}{x^{1/4}}$ является ограниченной функцией: $\exists C = \text{const} > 0 : \frac{\ln x}{x^{1/4}} \le C$

Следовательно, $\frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x^{3/2}} = \frac{\ln x}{x^{1/4} \cdot x^{5/4}} \le \frac{C}{x^{5/4}}$. Так как интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{C}{x^{5/4}}dx$ сходится, то исходный интеграл также сходится.

Теорема 2 (предельный признак сравнения). *Пусть неотрицательные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы по любому отрезку* $[a,b]$ *и пусть существует конечный* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K, K\neq 0, K\neq\infty$. *Тогда несобственные интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Примеры.

1. $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4x+\ln x}}dx$. Интеграл расходится.

2. $\int\limits_1^{+\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$. Интеграл расходится.

3. $\int\limits_4^{+\infty}\dfrac{x^2-3}{3x^5+4x^4-1}dx$. Интеграл сходится.

Абсолютная сходимость несобственных интегралов по бесконечному промежутку. В предыдущем разделе рассматривались интегралы от неотрицательных (знакопостоянных) функций; мы убедились, что для таких несобственных интегралов существуют хорошие методы исследования их сходимости. Естественен вопрос: нельзя ли свести исследование интеграла от произвольной функции $f(x)$ к исследованию интеграла от неотрицательной функции $|f(x)|$?

Теорема 3. *Если сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, *то обязательно сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Идея доказательства: разобьем отрезок $[a,b]$ на два множества, $X^+ = \{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\}$ и $X^- = \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$, т.е. к первому множеству отнесены точки, в которых функция неотрицательна, ко второму - в которых функция неположительна. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{X^+} f(x)dx + \int\limits_{X^-} f(x)dx, \quad \int\limits_a^b |f(x)|dx = \int\limits_{X^+} f(x)dx - \int\limits_{X^-} |f(x)|dx.$$

В последней сумме оба слагаемые - монотонно возрастающие с ростом ***b***, ограниченные сверху функции, следовательно, имеющие конечный предел при $b \to +\infty$. Отсюда следует, что имеет конечный предел и предыдущая сумма.

Замечание. Обратное утверждение неверно, т.е. при сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ может расходиться.

Введём важное понятие **абсолютной сходимости**.

Определение 4. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся абсолютно. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся условно.

Пример. Исследовать на абсолютную сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Выполняется неравенство $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится, следовательно, $\int\limits_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ сходится по признаку сравнения, исходный интеграл сходится абсолютно.

Приведённые примеры показывают, что переход от интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ к интегралу $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ и применение к последнему интегралу методов исследования на сходимость несобственных интегралов от неотрицательных функций, в случае его сходимости, позволяет сделать вывод и о сходимости (притом, абсолютной) исходного интеграла. Если же интеграл от функции $|f(x)|$ расходится, то решение задач значительно усложняется.

Пример условно сходящегося интеграла.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$.

Докажем, что этот интеграл сходится. Интегрируем его по частям:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{d\sin x}{x} = \left.\frac{\sin x}{x}\right|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = -\sin 1 + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

Последний интеграл сходится абсолютно, следовательно, исходный интеграл сходится.

Докажем, что для исходного интеграла абсолютной сходимости нет, т.е. что $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ расходится. Так как $|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$,

то

$$\int_1^b \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx = \int_1^b \frac{|\cos x|}{x} dx \geq \int_1^b \frac{\cos^2 x}{x} dx = \int_1^b \frac{1+\cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2}\int_1^b \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\cos 2x dx}{x}.$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x}$ сходится, следовательно, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ расходится.

Вывод – исходный интеграл сходится условно.

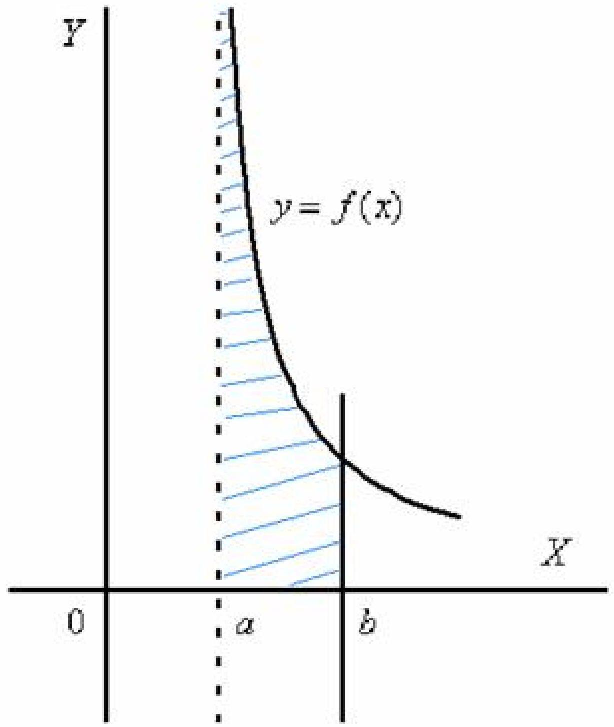
§16. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Определение 1(особенность на левом конце промежутка интегрирования). Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a,b]$, интегрируема по любому отрезку $[a+\varepsilon,b]$, $0<\varepsilon<b-a$, и функция $f(x)$ не ограничена на $(a,b]$. Несобственным интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ по полуинтервалу $(a,b]$ называется

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если предел справа конечен, говорят, что интеграл сходится; если предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Примером функции, неограниченной на промежутке $(a,b]$, может служить функция $f(x)$, непрерывная на $(a,b]$ и такая, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$.



Примеры.

1. $\int\limits_0^2 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\Bigg|_{\varepsilon}^{2}\right) = \infty$. Интеграл расходится.

2. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0} = \frac{\pi}{2}$. Интеграл сходится.

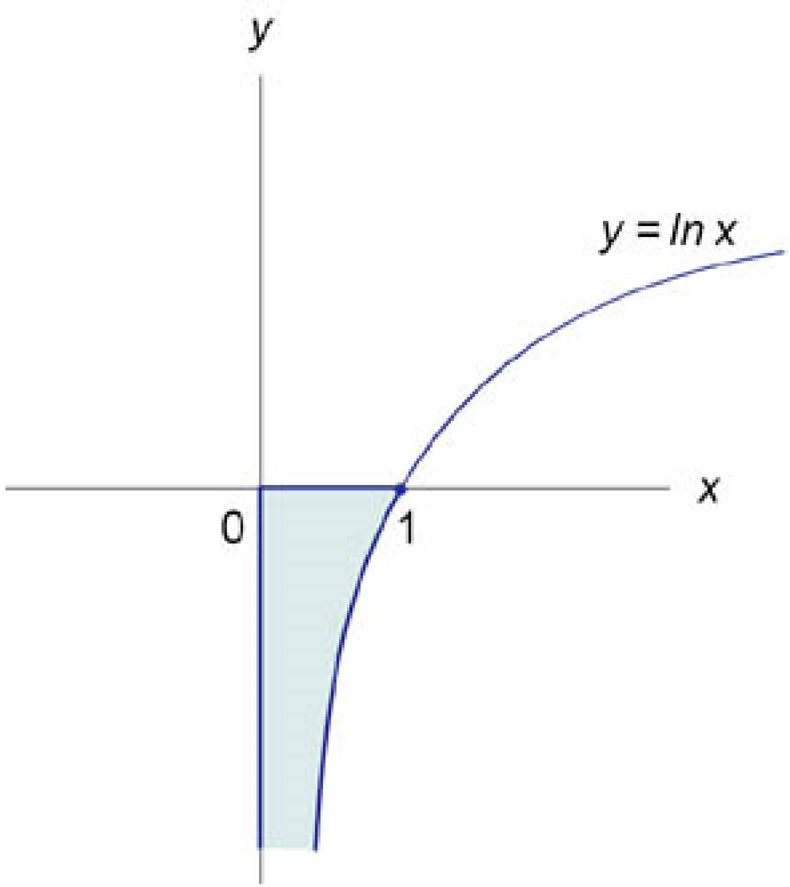
Теорема 1 (формула Ньютона-Лейбница). Если для функции $f(x)$ на полуинтервале $(a,b]$ существует первообразная $F(x)$, $F(a)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}F(a+\varepsilon)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Если $F(a)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}F(a+\varepsilon)$ конечен, то интеграл сходится, если $F(a)=\infty$, то интеграл расходится.

Примеры.

1. $\int_0^1 \ln x dx = x \ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx = -x\Big|_0^1 = -1$.Интеграл сходится.

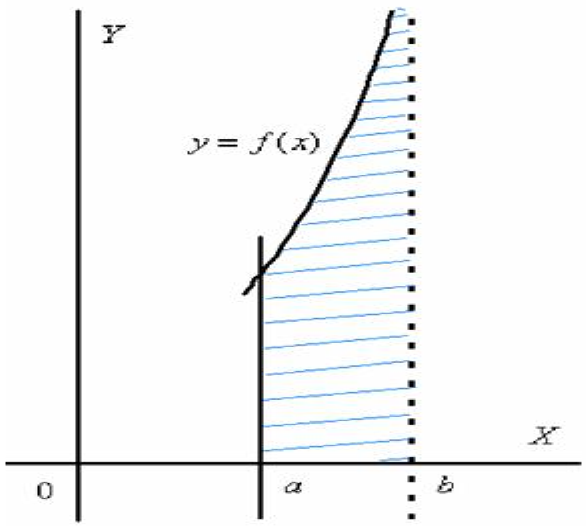


2. $\int_{-3}^{1} \frac{dx}{x+3} = \ln(x+3)\Big|_{-3}^{1} = +\infty$. Интеграл расходится.

Определение 2(особенность на правом конце промежутка интегрирования). Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a,b)$, интегрируема по любому отрезку $[a,b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a,$ и функция $f(x)$ не ограничена на $[a,b)$. Несобственным интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ по полуинтервалу $[a,b)$ называется

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел справа конечен, говорят, что интеграл сходится; если предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.



Примером функции, неограниченной на промежутке $\left[a,b\right)$, может служить функция $f\left(x\right)$, непрерывная на промежутке $\left[a,b\right)$ и такая, что $\lim\limits_{x\to b-0} f\left(x\right)=\infty$.

Определение 3(особенность во внутренней точке промежутка интегрирования). Пусть функция $f\left(x\right)$ определена на полуинтервалах $\left[a,c\right)$ и $\left(c,b\right]$ где $\boldsymbol{c}$ – внутренняя точка этого отрезка. Пусть функция $f\left(x\right)$ не ограничена на $\left[a,c\right)$ и функция $f\left(x\right)$ не ограничена на $\left(c,b\right]$. Пусть функция $f\left(x\right)$интегрируема на каждом отрезке $\left[a,c-\varepsilon\right]$ и на каждом отрезке $\left[c+\delta,b\right]$, $\delta>0$. Несобственным интегралом $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ от функции $f\left(x\right)$ по отрезку [***a***, ***b***] называется

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f\left(x\right)dx+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f\left(x\right)dx.$$

Интеграл сходится, если оба предела справа существуют и конечны, в противном случае интеграл расходится.

Примером функции, удовлетворяющей условиям определения 3, служит такая функция $f\left(x\right)$, что $\lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)=\infty$.

Признаки сравнения для неотрицательных функций. Как и для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования, для интегралов от неограниченных функций вводится понятие абсолютной сходимости, позволяющее в ряде случаев свести исследование сходимости интегралов от произвольных функций к исследованию сходимости интегралов от неотрицательных функций, и рассматриваются признаки сравнения для таких интегралов. Ввиду того, что принципиальная сторона вопроса изучена для случая интегралов с бесконечными пределами интегрирования, кратко перечислим основные факты. Будем предполагать, что подынтегральная функция имеет особенность на левом конце промежутка интегрирования.

Теорема 2(признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по любому отрезку $[a+\varepsilon, b]$, $0<\varepsilon<b-a$ и при $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{a}$ удовлетворяют неравенствам $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда:

если сходится интеграл $\int_a^b g(x)dx$, то сходится интеграл $\int_a^b f(x)dx$;

если расходится интеграл $\int_a^b f(x)dx$, то расходится интеграл $\int_a^b g(x)dx$.

Теорема 3 (предельный признак сравнения). *Пусть положительные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы по любому отрезку* $[a+\varepsilon, b]$, $0<\varepsilon<b-a$ *и пусть существует конечный* предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K, K\neq 0, K\neq\infty$. *Тогда несобственные интегралы* $\int_a^b f(x)dx$ *и* $\int_a^b g(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Лемма. *Интеграл* $\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ *сходится, если* $\boldsymbol{p} < 1$, *и расходится, если* $p \geq 1$.

◀Доказательство. Если $p \leq 0$, то интеграл является собственным. Пусть $p \neq 1$:

$$\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \left.\frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\right|_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, 0 < p < 1, \\ +\infty, \ p > 1. \end{cases}$$

В случае $p = 1$

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x-a}dx = \ln(x-a)\Big|_a^b = +\infty. \blacktriangleright$$

Примеры.

1. $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}}dx$.

Так как $\frac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ сходится, то данный интеграл сходится.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$. Интеграл расходится.

3. $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{x}\cdot\sin x}dx$. Интеграл расходится.

4. $\int\limits_0^1 \frac{x}{x-\sin x}dx$. Интеграл расходится.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов от неограниченных функций определяется аналогично тому, как это было сделано для несобственных интегралов по бесконечному промежутку.

Определение 6. Несобственный интеграл от неограниченной функции $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, и условно сходящимся, если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ расходится.

(если сходится $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ тоже обязательно сходится).

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Так как $\left|\frac{\cos(1/x)}{\sqrt[3]{x}}\right| = \frac{|\cos(1/x)|}{\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ и $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ сходится, то исходный интеграл сходится абсолютно по признаку сравнения.

При отсутствии абсолютной сходимости установить условную сходимость можно с помощью признаков Абеля и Дирихле:

Признак сходимости Абеля. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[a,+\infty)$, причём $f(x)$ интегрируема в этом промежутке, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится (условно или абсолютно). Пусть функция $g(x)$ монотонна и ограничена. Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Признак сходимости Дирихле. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[a,+\infty)$. Пусть функция $f(x)$ интегрируема в любом конечном промежутке $[a,b]$ и интеграл по этому промежутку ограничен (как функция верхнего предела b). Пусть функция $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Применим, например, признак Дирихле к $\int_1^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x}dx, \alpha \neq 0$. Здесь $f(x) = \cos\alpha x$, $g(x) = 1/x$, условия признака выполнены, поэтому интеграл сходится условно.