Лекция 5

§11. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

Будем считать известным понятие площади S многоугольника Р. Отметим, что эта величина обладает следующими свойствами.

1. Площадь неотрицательна: $S(\mathrm{P}) \geq 0$.

2. Площадь аддитивна: если фигура Р разбита на две фигуры P_1 и P_2, то $S(\mathrm{P}) = S(\mathrm{P}_1) + S(\mathrm{P}_2)$.

Следствие. Площадь всей фигуры не меньше площади ее части.

3. Площадь сохраняется при перемещениях фигуры на плоскости.

4. Площадь единичного квадрата (т.е. квадрата со стороной единичной длины) равна единице.

Теория площадей плоских фигур, ограниченных простыми (не пересекающими себя) контурами, может быть построена следующим образом.

Рассмотрим всевозможные многоугольники A, вписанные в фигуру P, и всевозможные многоугольники B, описанные вокруг фигуры P. Очевидно, $S(\mathrm{A}) \le S(\mathrm{B})$. Числовое множество $\{S(\mathrm{A})\}$ ограничено сверху, а числовое множество $\{S(\mathrm{B})\}$ ограничено снизу. Обозначим через $S_* = \sup\{S(\mathrm{A})\}$ наибольшую из площадей вписанных многоугольников, $S^* = \inf\{S(\mathrm{B})\}$ наименьшую из площадей описанных многоугольников. Очевидно, $S_* \le S^*$.

Определение 1. Пусть $S_* = S^* = S$. Тогда величина S называется площадью фигуры P, а сама фигура P называется квадрируемой (измеримой по Жордану).

Теорема 1. *Для того, чтобы плоская фигура* P *была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0$ *можно было указать такой вписанный многоугольник A и такой описанный многоугольник B, что разность* $S(\mathrm{B}) - S(\mathrm{A}) < \varepsilon$.

Определение 2. Будем говорить, что кривая Г имеет площадь, равную нулю, если ее можно покрыть многоугольником со сколь угодно малой площадью.

Можно показать, что этим свойством обладает любая непрерывная кривая, выражаемая уравнением $y = f(x), a \le x \le b$ или $x = g(y), c \le y \le d$, где функции $f(x)$ и $g(y)$ являются непрерывными.

Теорема 2. *Для того, чтобы фигура* P *была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее граница Г имела нулевую площадь.*

Теорема 3. *Если фигура* P *ограничена несколькими кривыми, каждая из которых выражается уравнением* $y = f(x), a \le x \le b$ *или* $x = g(y), c \le y \le d$, *где функции* $f(x)$ *и* $g(y)$ *являются непрерывными, то эта фигура квадрируема.*

Можно показать, что площадь S обладает свойствами 1— 4.

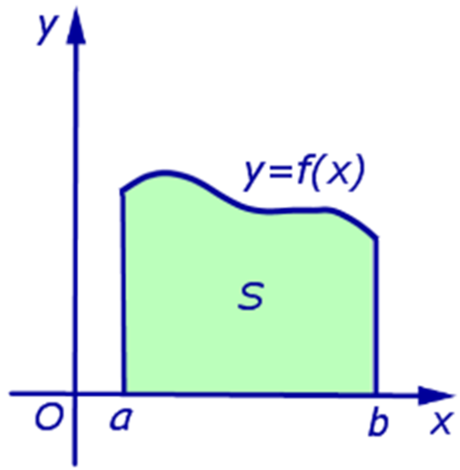
Условие квадрируемости из теоремы 1 удобно использовать в следующем виде.

Теорема 5. *Для того, чтобы фигура* Р *была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность вписанных многоугольников* A_n *и последовательность описанных многоугольников* B_n *такие, что* $\lim\limits_{n\to\infty} S(\mathrm{A}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(B_n) = S(\mathrm{P})$.

1. Вычисление площади криволинейной трапеции

а) Пусть $y = f(x)$, $a \le x \le b$, где функция $f(x)$ является непрерывной и $f(x) \ge 0$ Фигура Р, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox и с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, называется криволинейной трапецией. Тогда площадь этой трапеции выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Доказательство. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей промежуточными точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad (1)$$

Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим через λ наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ldots,n$:

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i.$$

Положим

$$m_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ i = 1,\ldots,n.$$

Тогда

$m_i\Delta x_i$ – площадь прямоугольника с основанием Δx_i и высотой m_i,

$M_i\Delta x_i$ – площадь прямоугольника с основанием Δx_i и высотой M_i

$$S(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

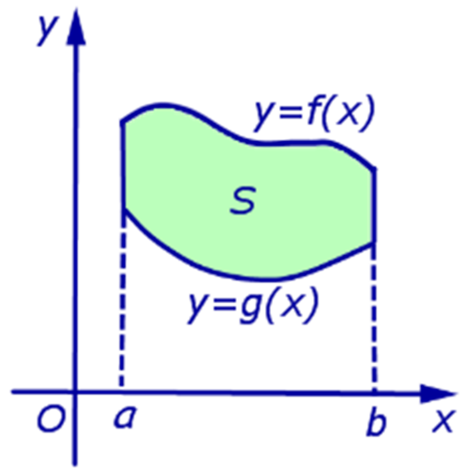
$$S(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

– площади вписанных и описанных многоугольников и одновременно интегральные суммы для интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = S(\mathrm{P}).$$

б) Пусть криволинейная трапеция Р ограничена кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$, $a \le x \le b$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ являются непрерывными и $g(x) \le f(x)$, и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Тогда

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$



Действительно, пусть сначала $0 \le g(x) \le f(x)$. Тогда

$$S(\mathrm{P}) = S(\mathrm{P}_1) - S(\mathrm{P}_2),$$

где P_1 — криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x), a \le x \le b$, и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, P_2 — криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = g(x), a \le x \le b$, и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Следовательно,

$$S(\mathrm{P}) = S(\mathrm{P}_1) - S(\mathrm{P}_2) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

Рассмотрим общий случай. Предположим, что $-C = \min\limits_{x \in [a,b]} g(x) < 0$, тогда $C > 0$. Рассмотрим функции $g_1(x) = g(x) + C$, $f_1(x) = f(x) + C$ и криволинейную трапецию $\tilde{\mathrm{P}}$, ограниченную кривыми $y = f_1(x), y = g_1(x), a \le x \le b$ и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Трапеция $\tilde{\mathrm{P}}$ получена из трапеции Р сдвигом на C единиц вверх вдоль оси Oy, следовательно, $S(\mathrm{P}) = S(\tilde{\mathrm{P}})$. Поскольку $0 \le g_1(x) \le f_1(x)$, то

$$S(\mathrm{P}) = S(\tilde{\mathrm{P}}) = \int_a^b \left(f_1(x) - g_1(x)\right)dx = \int_a^b \left(\left(f(x)+C\right) - \left(g(x)+C\right)\right)dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

в) Пусть криволинейная трапеция P ограничена сверху кривой

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

где функции $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $\psi(t)$ являются непрерывными, $\psi(t) \geq 0$, $\varphi(t)$ монотонно возрастает ($\varphi'(t) \geq 0$), $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Пусть криволинейная трапеция P ограничена снизу осью Ox и с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Тогда

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt,$$

или

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt$$

Действительно, в указанных предположениях существует обратная к $x=\varphi(t)$ функция $t=\varphi^{-1}(x)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $x\in[a,b]$, также монотонно возрастающая. Тогда $y=\psi(t)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)=f(x)$, т.е. сверху трапеция ограничена графиком функции $y=f(x), a\le x\le b$. Значит,

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Сделаем замену переменной $x=\varphi(t)$ в интеграле и получим

$$S=\int_a^b f(x)dx=\left|\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ x=a\Rightarrow t=\alpha \\ x=b\Rightarrow t=\beta \end{matrix}\right|=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Замечание. Если функция $\varphi(t)$ монотонно убывает ($\varphi'(t)\le 0$) при $t\in[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=b$, $\varphi(\beta)=a$, то

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b.

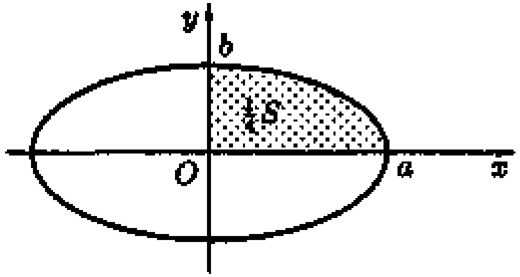


Рис. 179.

◀Параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in[0,2\pi].$$

В силу симметрии фигуры относительно координатных осей достаточно найти площадь четверти фигуры, находящейся в первом квадранте, т.е. $t \in [0, \pi/2]$.

Поскольку $x' = (a\cos t)' = -a\sin t \le 0$ для $t \in [0, \pi/2]$, то

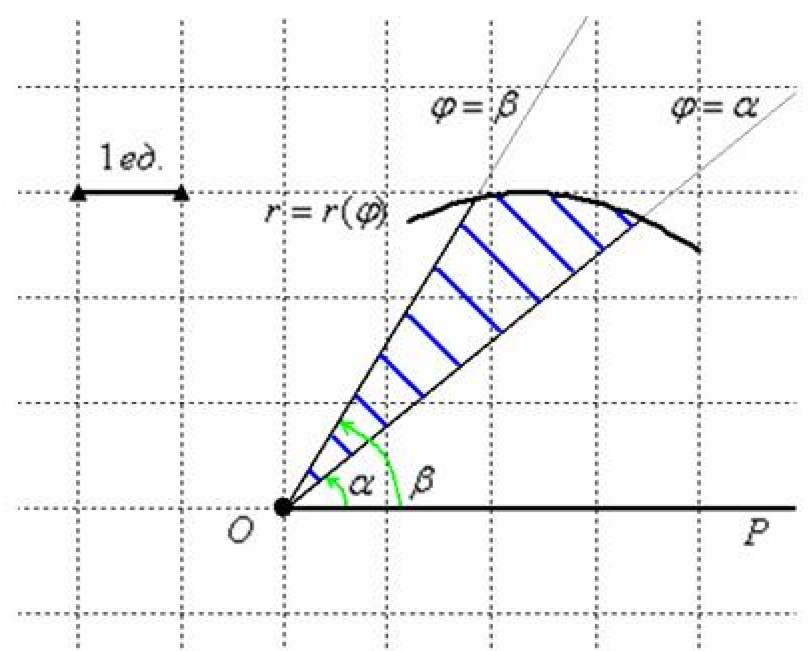
$$\frac{1}{4}S = -\int_0^{\pi/2} b\sin t\,(a\cos t)'\,dt = ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt =$$

$$= ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}ab\left(\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt\right) = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Ответ: $S = \pi ab$.▸

2. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах

Пусть O ─ полюс, OP─ полярный луч. Криволинейный сектор ограничен лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и линией $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$.



Тогда площадь сектора выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi .$$

Доказательство. Площадь сектора круга радиуса R с центральным углом $\Delta\varphi$ равна $\frac{1}{2}R^2\Delta\varphi$. Приблизим криволинейный сектор фигурами А и В, составленными из круговых секторов.

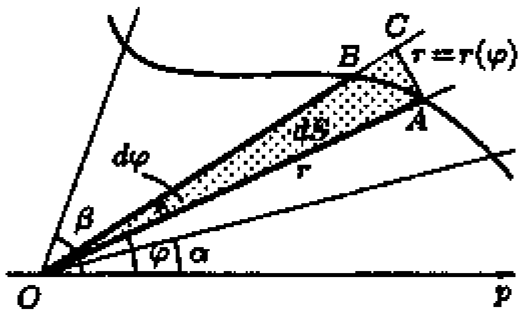


Рис. 180.

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n частей промежуточными точками

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

Обозначим через $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим через $\lambda = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta\varphi_i$. Положим

$$m_i = \min_{\varphi\in[\varphi_{i-1},\varphi_i]} r(\varphi),\ M_i = \max_{\varphi\in[\varphi_{i-1},\varphi_i]} r(\varphi),\ i = 1,\ldots,n.$$

Круговые сектора ограничены лучами $\varphi = \varphi_{i-1}$, $\varphi = \varphi_i$ и дугами окружностей радиусов $R = m_i$ и $R = M_i$, $i = 1,\ldots,n$, соответственно. Тогда

$\dfrac{1}{2} m_i^{\,2} \Delta\varphi_i$ – площадь сектора с радиусом m_i и центральным углом $\Delta\varphi_i$,

$\dfrac{1}{2} M_i^{\,2} \Delta\varphi_i$ – площадь сектора с радиусом M_i и центральным углом $\Delta\varphi_i$,

$$S(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^{\,2} \Delta\varphi_i,$$

$$S(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^{\,2} \Delta\varphi_i$$

– площади вписанной в сектор и описанной около сектора фигур A и B и одновременно интегральные суммы для интеграла

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Следовательно,

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^{\;2}\Delta\varphi_i=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^{\;2}\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$.

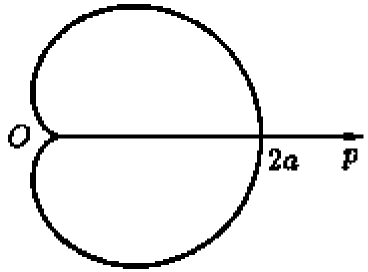


Рис. 187.

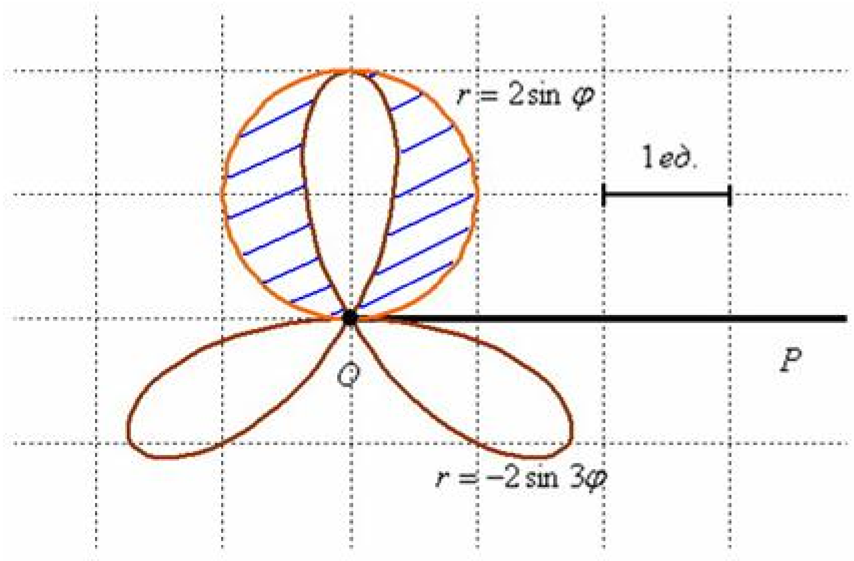
◄Находим

$$r^2(\varphi) = a^2(1+\cos\varphi)^2 = a^2\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right) = a^2\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 + 2a^2\cos\varphi + \frac{a^2}{2}\cos 2\varphi.$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{3}{2}a^2 + 2a^2\cos\varphi + \frac{a^2}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{3\pi}{2}a^2.$$ ►

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r = -2\sin 3\varphi$, $r = 2\sin\varphi$.



◀Первая линия представляет собой трехлепестковую розу, вторая линия представляет собой окружность радиуса 1. Верхний лепесток соответствует изменению угла φ от $\pi/3$ до $(2\pi)/3$, окружность соответствует изменению угла φ от 0 до π. Искомая площадь S равна разности площадей круга S_1 и лепестка S_2 Площадь круга равна $S_1 = \pi$, площадь лепестка

$$S_2 = 2\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} r^2(\varphi)\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/3} 4\sin^2 3\varphi d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi/3} \frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

$$S = S_1 - S_2 = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

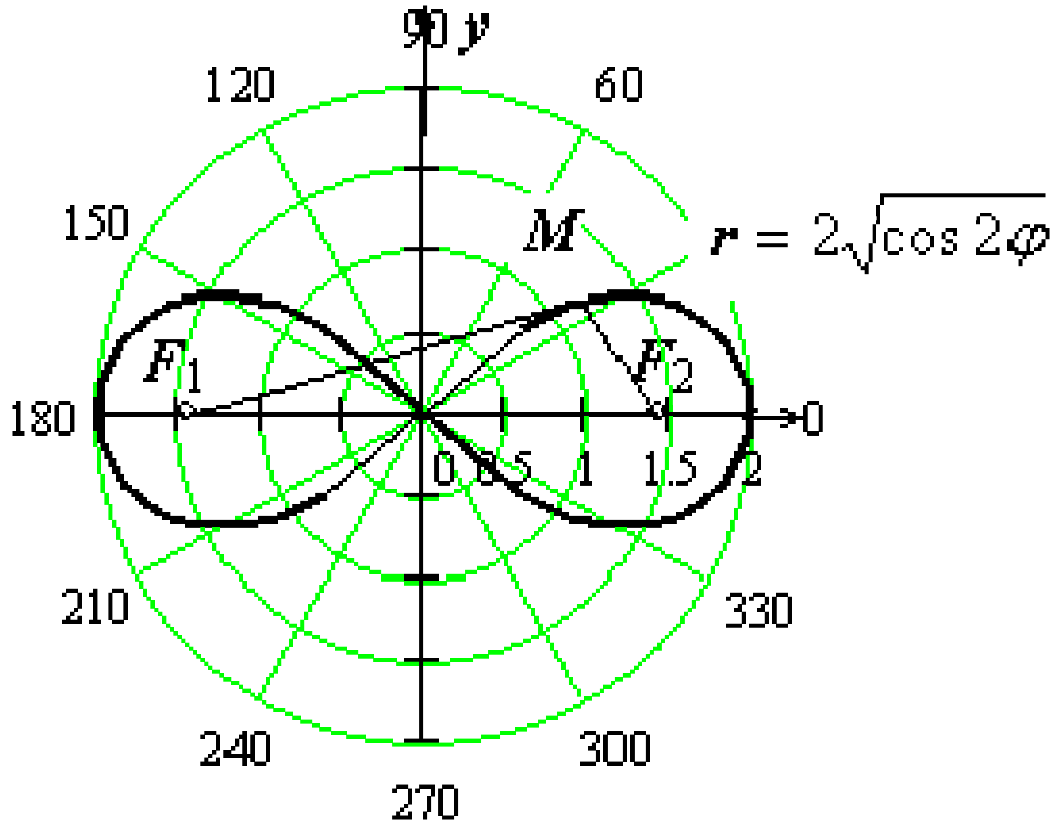
Ответ: $\frac{\pi}{3}$►.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$.

◄Кривая обладает симметрией относительно осей Ox и Oy, поэтому достаточно найти площадь той части фигуры, которая лежит в первом квадранте. Из неравенства $\cos 2\varphi \geq 0$ находим, что $\varphi \in [0, \pi/4]$. Далее вычисляем:

$$r^2 = 4\cos 2\varphi,$$

$$S = 4\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} r^2(\varphi)\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/4} 4\cos 2\varphi d\varphi = 8\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 4.$$ ►



Лемниската Бернулли

§12. Вычисление объемов тел «через» площади поперечных сечений. Вычисление объема тела вращения

Телом будем называть ограниченную замкнутую область в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Будем считать известным понятие объема V многогранника Т. Определение объема тела сводится к понятию объема многогранника (прямой призмы) подобно тому, как понятие площади фигуры сводится к понятию площади многоугольника.

Отметим, что объем тела $V(\mathrm{T})$ обладает следующими свойствами.

1.Объем неотрицателен: $V(\mathrm{T}) \geq 0$.

2. Объем аддитивен: если тело Т разбито на две тела T_1 и T_2, то $V(\mathrm{T}) = V(\mathrm{T}_1) + V(\mathrm{T}_2)$.

Следствие. Объем всего тела не меньше объема его части.

3. Объем сохраняется при перемещениях тела в пространстве.

4. Объем единичного куба (т.е. куба со стороной единичной длины) равен единице.

Границей тела является поверхность или несколько поверхностей. Рассмотрим поверхности, задаваемые явными уравнениями одного из трех типов:

$$z = f(x, y),\ y = g(x, z),\ x = h(y, z), \tag{1}$$

где функции $f(x, y)$, $g(x, z)$, $h(y, z)$ являются непрерывными функциями своих аргументов.

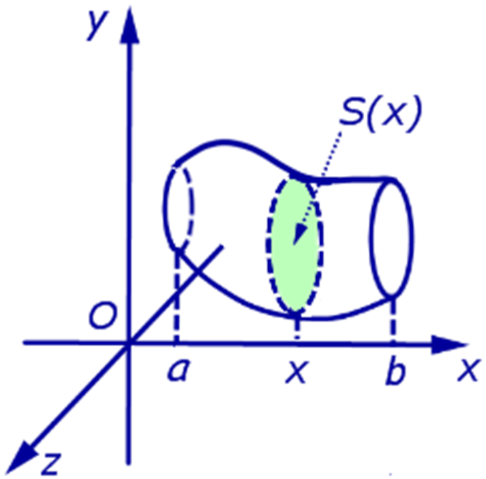
Теорема 1. *Если тело* Т *ограничено несколькими поверхностями, каждая из которых задается явными уравнениями вида (1), то это тело имеет объем.*

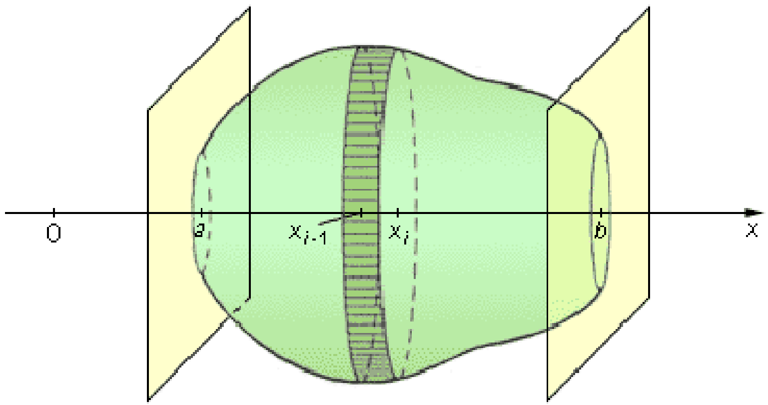
Рассмотрим прямой цилиндр высоты *H*, в основании которого лежит квадрируемая фигура Р. Тогда объем цилиндра вычисляется по формуле

$$V = S(\mathrm{P}) \cdot H.$$

Теорема 2 (вычисление объема тела через площадь поперечных сечений). *Пусть тело заключено между плоскостями* $x=a$ *и* $x=b$. *Если площадь* $S(x)$ *сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке* $[a,b]$, *то объем тела равен*

$$V=\int_a^b S(x)\,dx.$$





◄Доказательство. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей промежуточными точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,. \qquad (1)$$

Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим через λ наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ldots,n$:

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i.$$

Проведем плоскости $x = x_i$, $i = 1,\ldots,n$. Тело разделится на слои, которые при малых λ можно считать прямыми цилиндрами. Объем i –го слоя(между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$) равен $V_i = S(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i$. Сумма объемов слоев равна

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} S\left(x_{i-1}\right) \cdot \Delta x_i$$

и является интегральной суммой для интеграла

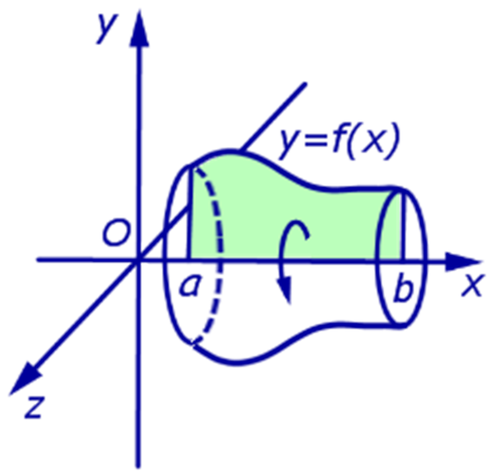
$$\int_a^b S\left(x\right) dx.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$ получаем

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S\left(x_{i-1}\right) \cdot \Delta x_i = \int_a^b S\left(x\right) dx . \blacktriangleright$$

Теорема 3(вычисление объема тела вращения). *Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции* $a \le x \le b$, $0 \le y \le f\left(x\right)$, *где* $f\left(x\right)$ *непрерывная на отрезке* $\left[a, b\right]$ *функция, равен*

$$V = \pi \int_a^b f^2\left(x\right) dx .$$



◀Доказательство. Сечение тела плоскостью $x = c$, $a \le c \le b$, перпендикулярной оси Ox, является кругом радиуса $f^2(c)$, поэтому площадь сечения $S(x)$ в теореме 2 равна площади круга:

$$S(x) = \pi f^2(x).$$

По теореме 2 получаем искомую формулу

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \blacktriangleright$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного трехосным эллипсоидом, заданным каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

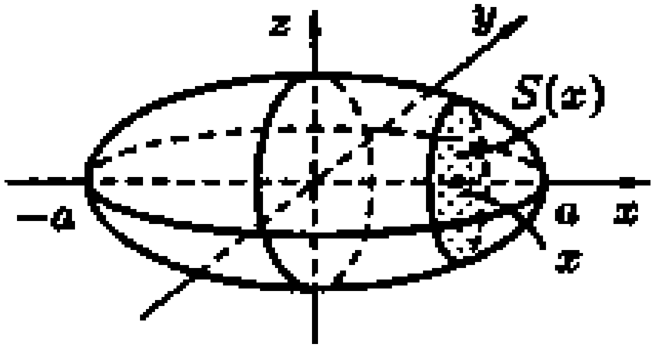


Рис. 189.

Сечения эллипсоида плоскостями, перпендикулярными оси Ox являются эллипсами, заданными уравнениями вида

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},\ -a\le x\le a.$$

Приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

Полуоси эллипса равны

$$b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)},\ c\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)},$$

площадь сечения равна

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}\left(a^2-x^2\right).$$

Следовательно, объем тела равен

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\int_{-a}^{a}\frac{\pi bc}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Ответ: $\frac{4}{3}\pi abc$.

Замечание. Если $a=b=c=R$, то эллипсоид превращается в сферу, а объем соответствующего шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.