5. Магнитное поле в вакууме. Силы Лоренца и Ампера. Закон Био – Савара - Лапласа. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме

Движущиеся электрические заряды в окружающем пространстве кроме электрического поля создают так же **магнитное** поле, которое обнаруживает себя посредством действия на движущиеся электрические заряды и электрически нейтральные проводники с током. Сила, с которой магнитное поле действует на электрический заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$, называется **силой Лоренца** и описывается формулой

$$\vec{F}_Л = q[\vec{v}\vec{B}] \ ,$$

где $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции. Размерность магнитной индукции в СИ – тесла (Тл).

Сила, с которой магнитное поле действует на проводник с током, называется **силой Ампера.** На элемент проводника длиной dl, по которому течет ток I, действует сила Ампера

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}\vec{B}] \ ,$$

где dl=$dl\vec{\tau}$, $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к данному элементу проводника, направление которого определяется направлением протекающего тока, $\vec{B}$ - вектор магнитной индукции в центре рассматриваемого элемента.

Ток I, протекающий по проводнику, создает в окружающем пространстве магнитное поле, описываемое **законом Био-Савара-Лапласа**

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3} \ ,$$

где $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, $d\vec{l} = dl\vec{\tau}$, dl – длина элемента проводника с током, создающего магнитное поле с вектором магнитной индукции $d\vec{B}$, $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к проводнику, направленный по току, и $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный из центра элемента проводника dl в точку наблюдения (см. рис. 6.1).

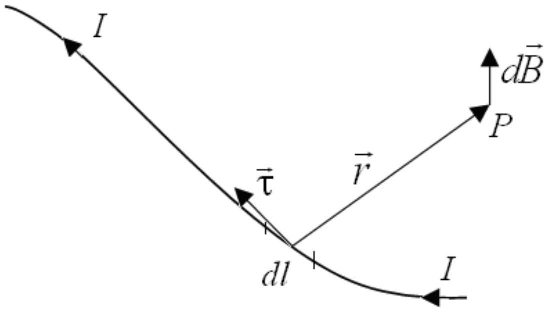

Рис. 6.1

Вектор магнитной индукции полного магнитного поля, созданного всеми элементами проводника с током, находится с помощью **принципа суперпозиции** для магнитного поля, т.е. путем суммирования вкладов в магнитное поле всех элементов проводника с током,

$$\vec{B} = \int_l \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3} ,$$

где интегрирование ведется по всей длине l проводника. Принцип суперпозиции справедлив для относительно слабых магнитных полей.

Если проводник обладает высокой симметрией, магнитное поле можно найти с помощью **теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции**

$$\oint_L (\vec{B}\vec{\tau})dl = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i .$$

Здесь в правой части равенства стоит алгебраическая сумма токов проводимости, пересекающих поверхность, которая натянута на контур L. Для определения знака этих токов в соответствии с выбранным направлением обхода контура L строится вектор нормали к натянутой поверхности таким образом, чтобы при наблюдении с конца этого вектора обход контура совершался против хода часовой стрелки. Если ток течёт в направлении данного вектора нормали, то он берется со знаком «+», а если ток течёт в противоположном направлении – со знаком «-».

Все приведенные выше формулы относятся к постоянному магнитному полю в вакууме.

Задача №16

В масс-спектрографе заряженные частицы с пренебрежимо малой начальной скоростью ускоряются в постоянном электрическом поле с напряжением U и затем попадают в постоянное однородное магнитное поле с вектором магнитной индукции $\vec{B}$, перпендикулярным к вектору скорости частиц. Под действием силы Лоренца частицы описывают в плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{B}$, полуокружность радиусом R. Считая величины U, B и R известными, определите удельный заряд частицы q/m, где q - электрический заряд и m - масса частицы.

Решение

Ускоренные частицы движутся по окружности в плоскости, задаваемой вектором напряженности электрического поля $\vec{E}$. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ перпендикулярен вектору $\vec{E}$, поэтому при действии силы Лоренца частицы остаются в исходной плоскости.

Уравнение движения частицы по окружности радиусом R под действием силы Лоренца имеет вид:

$$m\frac{V^2}{R} = qVB \ . \tag{1}$$

Отсюда находим удельный заряд частицы

$$\frac{q}{m} = \frac{V}{RB} \ . \tag{2}$$

Скорость V частицы определяется с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2} = qU \ . \tag{3}$$

Из формул (2) и (3) следует, что искомый удельный заряд описывается формулой

$$\frac{q}{m} = \frac{2U}{R^2B^2} \ . \tag{4}$$

Ответ: $\dfrac{q}{m} = \dfrac{2U}{R^2B^2}$.

Задача № 17

По круговому проволочному витку радиусом R течет постоянный ток I (рис. 1). Определите вектор магнитной индукции $\vec{B}$ в точке на оси витка, находящейся на расстоянии z_1 от центра витка, и постройте график зависимости $B(z)$.

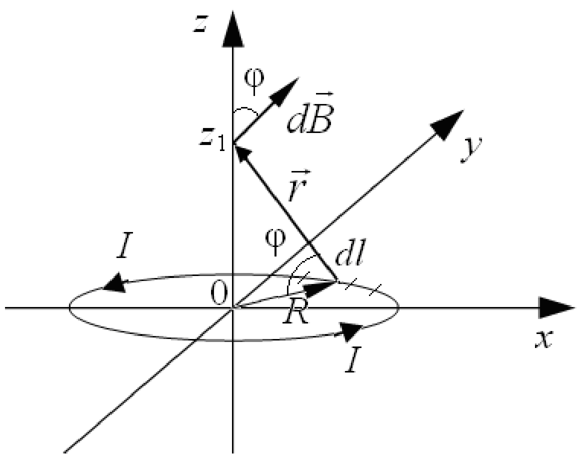

Рис.1

Решение

Задача решается с помощью закона Био-Савара-Лапласа и принципа суперпозиции для магнитного поля.

Согласно закону Био-Савара-Лапласа вектор $d\vec{B}$ магнитной индукции, определяемый элементом dl витка, лежит в плоскости, задаваемой осью z и радиусом R, перпендикулярно к радиус – вектору $\vec{r}$ точки z_1 (см.рис.1). Совершая обход витка с током и суммируя вклады всех элементов витка, легко получить, что результирующий вектор $\vec{B}$ направлен по оси *z*:

$$\vec{B} = (0, 0, B_z) \; . \tag{1}$$

Вклад одного элемента витка с током в магнитную индукцию описывается законом Био-Савара-Лапласа

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2 + z^2} \cos\varphi \; , \tag{2}$$

где $\cos\varphi = R/\sqrt{R^2 + z^2}$.

Согласно принципу суперпозиции полная магнитная индукция в точке z_1

$$B_z = \int\limits_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 R I}{4\pi} \frac{dl}{(R^2 + z_1^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z_1^2)^{3/2}} \; . \tag{3}$$

График зависимости $B_z = B_z(z)$ приведен на рис. 2.

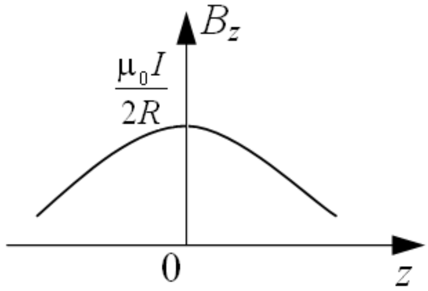

Рис. 2

Отметим, что вектор $\vec{B}$ имеет одинаковое направление во всех точках оси *z*.

Ответ: $B_x = B_y = 0$, $B_z = \dfrac{\mu_0 I}{2} \dfrac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$.

Задача № 18

По бесконечному прямому цилиндрическому проводнику радиусом *R* течет ток с постоянной плотностью $\vec{j}$ (рис. 1). Определите величину магнитной индукции *B* как функцию расстояния *r* от оси проводника и постройте график этой функции.

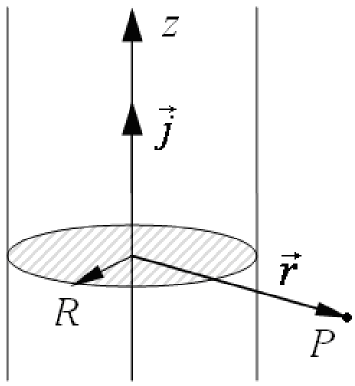

Рис. 1

Решение

Решение этой задачи основано на известном магнитном поле бесконечного прямого тонкого проводника, по которому течет постоянный ток, и теореме о циркуляции вектора $\vec{B}$ в вакууме.

С помощью закона Био-Савара-Лапласа, принципа суперпозиции и теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ можно показать, что для прямого тонкого проводника вектор $\vec{B}$ в любой точке пространства вне проводника лежит в плоскости, проходящей через точку наблюдения перпендикулярно проводнику. Вектор $\vec{B}$ направлен по касательной к окружности, лежащей в этой плоскости, имеющей центр на проводнике и проходящей через точку наблюдения. Если смотреть с конца вектора нормали $\vec{n}$ к данной плоскости, направленного по

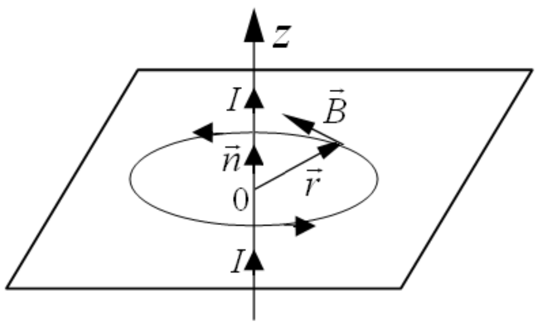

Рис. 2

току *I*, вектор магнитной индукции в любой точке окружности, являющейся силовой линией магнитного поля, ориентирован против хода часовой стрелки (рис.2). Силовые линии представляют собой концентрические окружности с центром, лежащим на тонком проводнике с током.

Выбирая замкнутую кривую *L* в виде такой окружности радиусом *r* и применяя теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$, получим:

$$\oint_L (\vec{B}\vec{\tau})dl = B2\pi r = \mu_0 I, \qquad (1)$$

где обход окружности совершается по направлению вектора $\vec{B}$.

Отсюда следует, что во всех точках окружности, совпадающей с силовой линии магнитного поля,

$$B(r) = \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \ . \qquad (2)$$

В силу цилиндрической симметрии условий задачи величина *B* не зависит ни от *z*, ни от угла поворота вокруг проводника.

Магнитное поле цилиндрического проводника конечного радиуса обладает точно такой же пространственной структурой силовых линий, как магнитное поле бесконечно тонкого проводника. Применяя теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ к окружности радиусом *r*, имеющей центр на оси проводника и лежащей в плоскости, перпендикулярной к этой оси, получим:

а) $0 \le r < R$

$$\oint_L (\vec{B}\vec{\tau})dl = 2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j \qquad (3)$$

и

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 j r \ , \qquad (4)$$

б) $R \le r < \infty$

$$\oint_L (\vec{B}\vec{\tau})dl = 2\pi r B = \mu_0 \pi R^2 j \qquad (5)$$

и

$$B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \ . \qquad (6)$$

Ответ: $0 \le r < R$, $B = \frac{1}{2}\mu_0 j r$; $R \le r < \infty$, $B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$.