# Электричество и магнетизм

***Семестр 2***

# ЛЕКЦИЯ № 4

## Электрическое поле в диэлектриках

1. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков.
2. Вектор поляризации и вектор электрического смещения. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость.
3. Теорема Гаусса для электрического поля.
4. Граничные условия для электрического поля на поверхности раздела двух диэлектриков.

Все известные в природе вещества, в соответствии с их способностью проводить электрический ток, делятся на

***три основных класса:***

***диэлектрики:*** $\rho_{д} = 10^{8} - 10^{18}\ \text{Ом} \cdot \text{м}$

***проводники:*** $\rho_{пр} = 10^{-6} - 10^{-8}\ \text{Ом} \cdot \text{м}$

***полупроводники:*** $\rho_{д} > \rho_{п/п} > \rho_{пр}$

Главное отличие **диэлектриков** от **проводников** состоит в том, что в **диэлектриках отсутствуют свободные носители заряда**. Заряженные частицы входят в состав атомов и молекул диэлектриков, но они не могут свободно перемещаться в межмолекулярном пространстве, что доступно, например, свободным электронам в металлических проводниках. Смещение зарядов в молекулах диэлектрика ограничено атомными масштабами.

# Типы диэлектриков

Различают три типа диэлектриков: неполярные, полярные и ионные (из ионов противоположного знака).

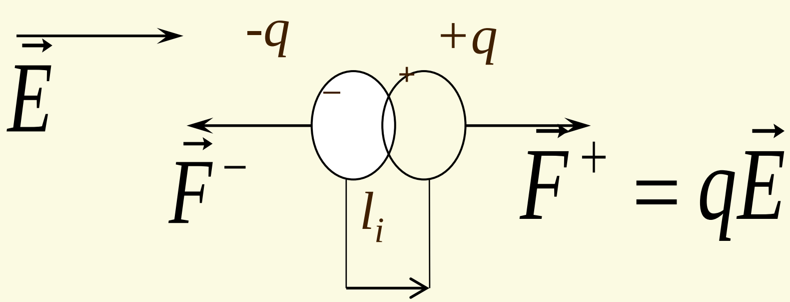
$$\text{Диэлектрики}\begin{cases} 1.\text{Неполярные}(N_2, H_2, O_2, CO_2, ...) \\ 2.\text{Полярные}(H_2O, CO, SO_2, ...) \\ 3.\text{Ионные}(NaCl, KCl, KBr, ...) \end{cases}$$

Молекулы **полярных** диэлектриков обладают **собственным** электрическим **дипольным моментом**, а молекулы неполярных диэлектриков такового не имеют. Однако **при отсутствии внешнего электрического поля** даже в случае полярных диэлектриков всегда **суммарный электрический дипольный момент большого числа молекул равен нулю** поскольку вероятность ориентации электрических дипольных моментов молекул в любом направлении одинакова.

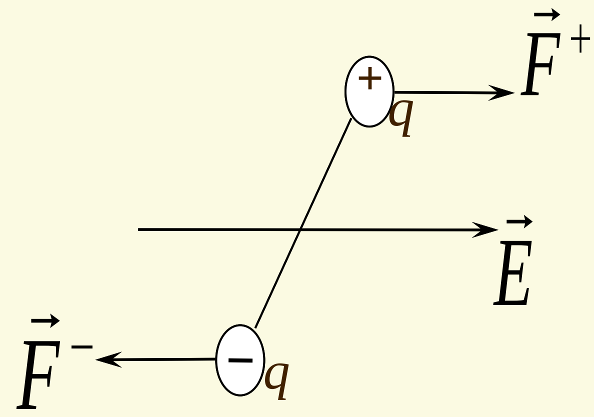
# Поляризация диэлектриков

Поляризация диэлектриков в электростатическом поле

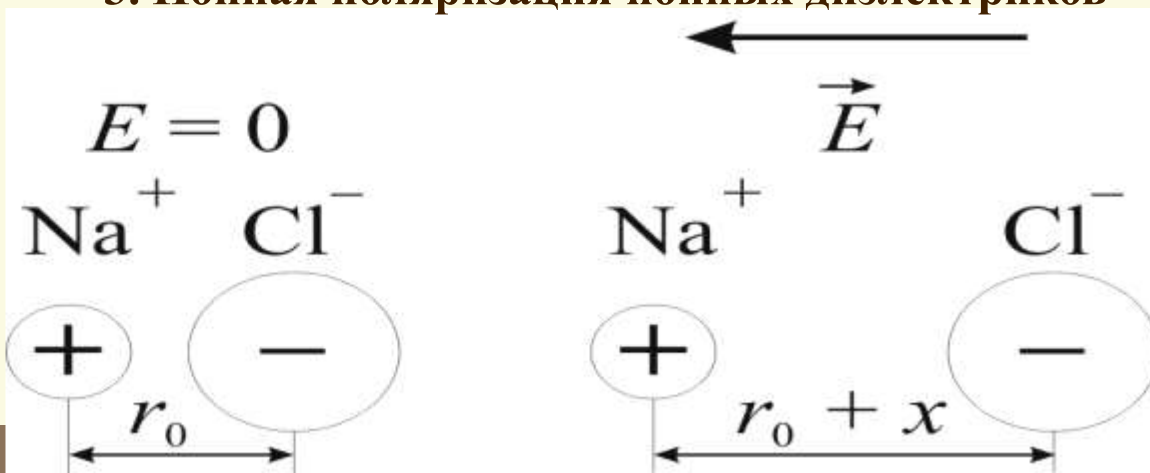
**1. Деформационная поляризация неполярных диэлектриков**

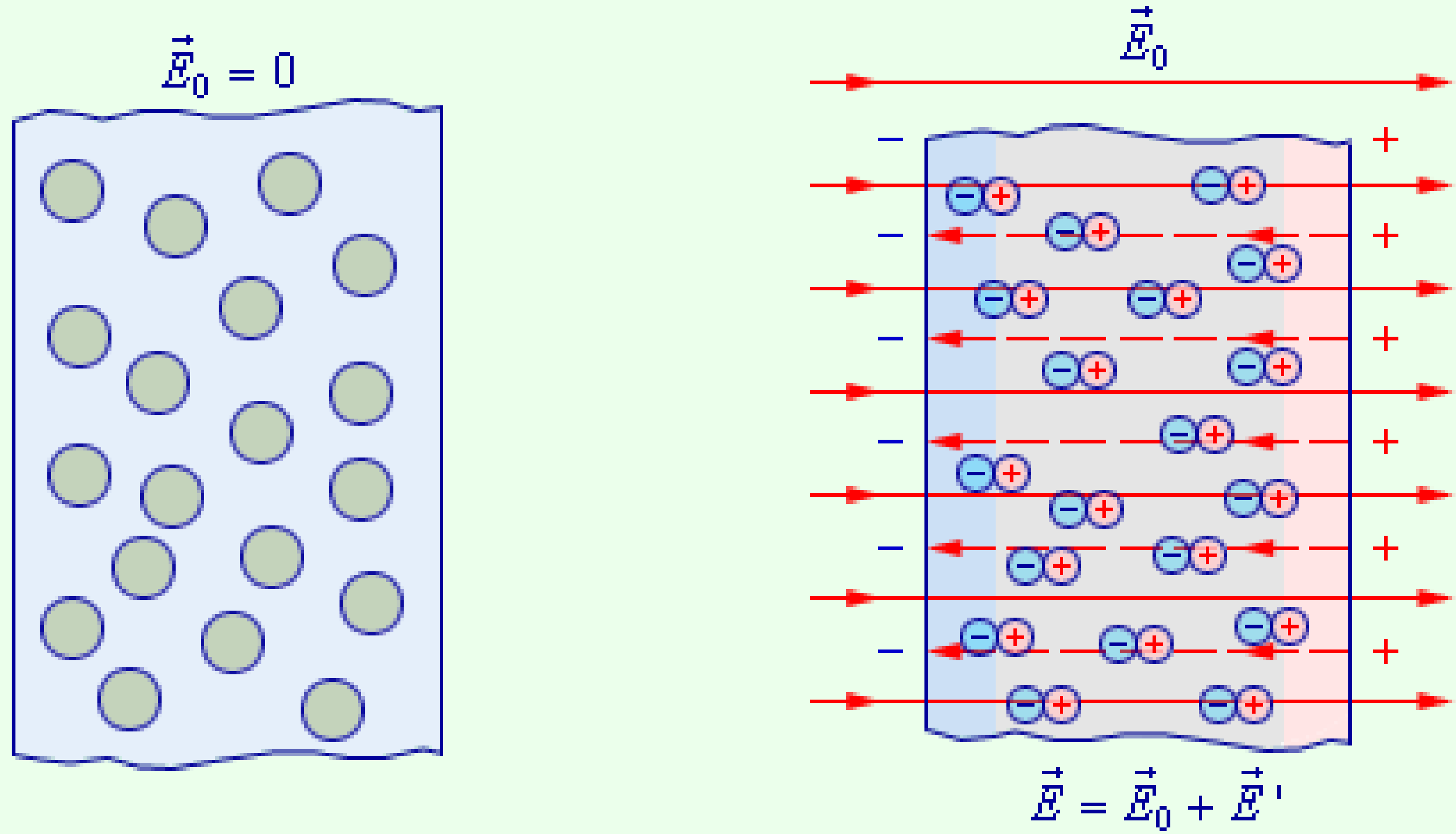



**2. Ориентационная поляризация полярных диэлектриков**

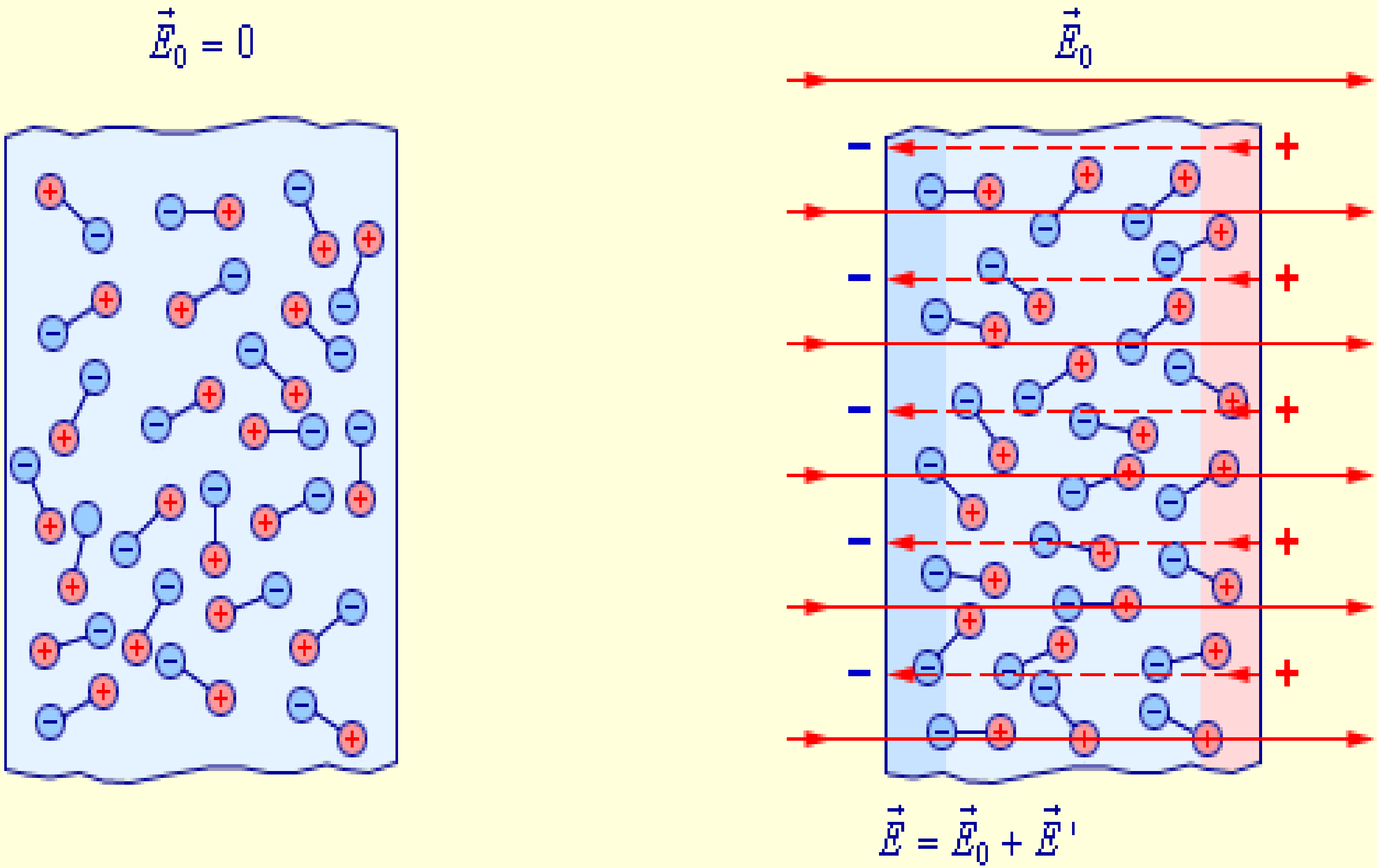



**3. Ионная поляризация ионных диэлектриков**






**Поляризация неполярного диэлектрика**

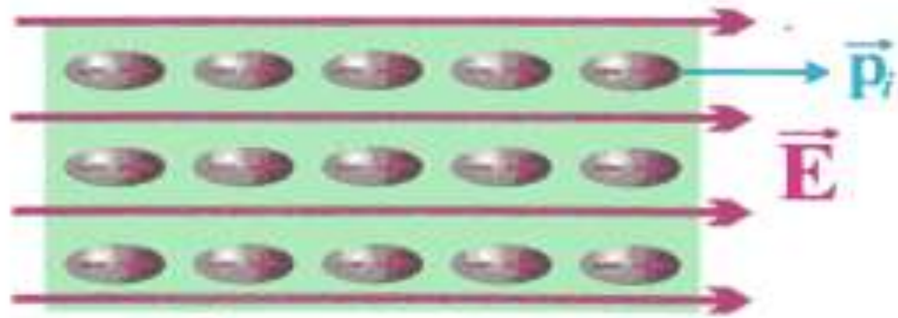



**Поляризации полярного диэлектрика**

# Поляризация диэлектриков

Диэлектрики с неполярными молекулами в электрическом поле приобретают электрический момент, направленный строго вдоль поля (деформационная поляризация)

$\vec{E} = 0 \quad \sum \vec{p}_i = 0$

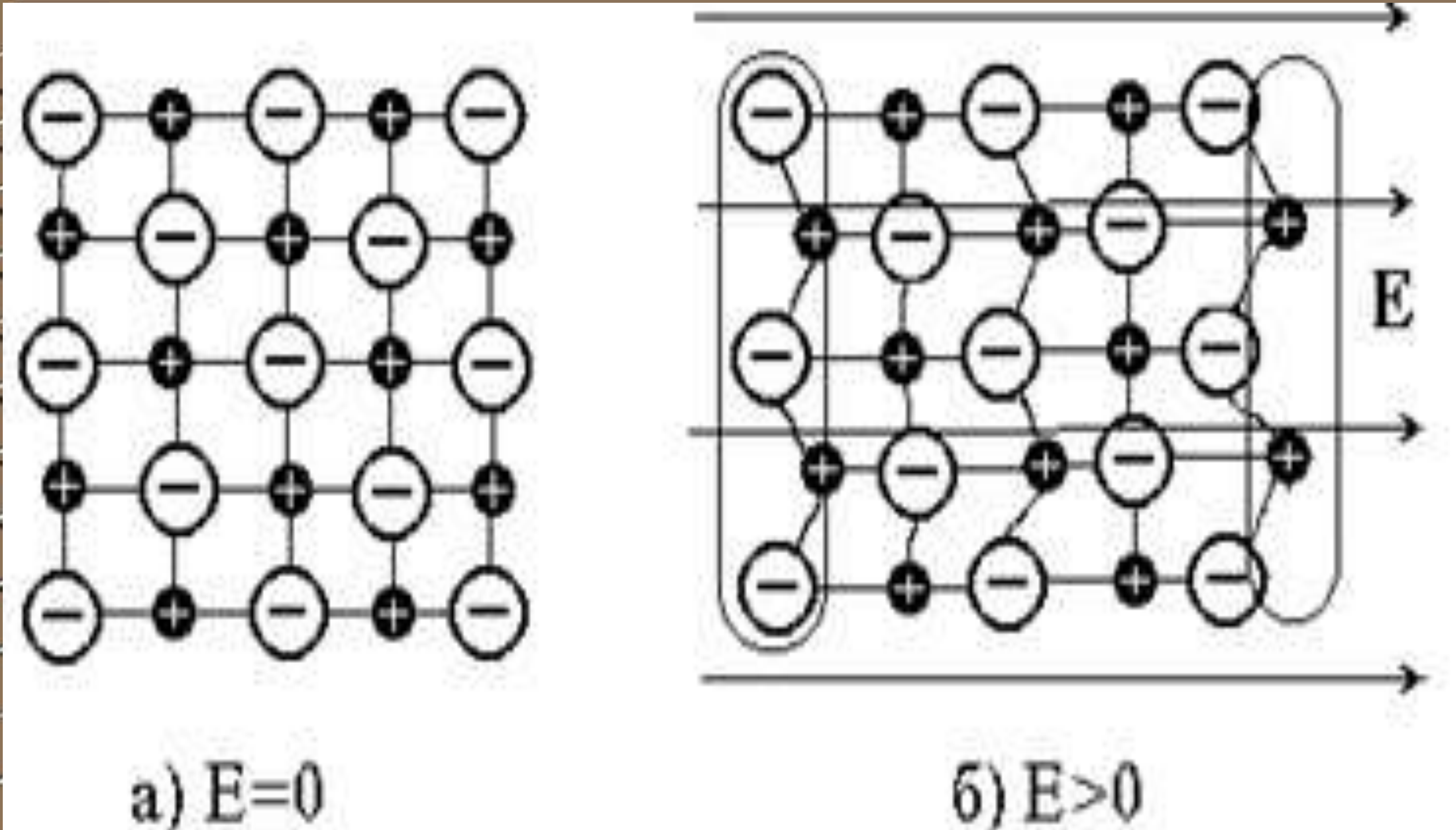



$\vec{E} \neq 0 \quad \sum \vec{p}_i \neq 0$

У диэлектриков с полярными молекулами в электрическом поле наблюдается преимущественная ориентация электрических моментов молекул вдоль поля (ориентационная поляризация)

$\vec{E} = 0 \quad \sum \vec{p}_i = 0$


$\vec{E} \neq 0 \quad \sum \vec{p}_i \neq 0$




**Поляризация ионных диэлектриков**

# Вектор поляризация

Под действием электрического поля **все диэлектрики поляризуются**, приобретая отличный от нуля суммарный электрический дипольный момент.

**Степень поляризованности** диэлектрика **характеризуется** векторной макроскопической величиной, называемой **вектором поляризации**, равным суммарному электрическому дипольному моменту молекул единицы объёма вещества:

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i}$$ - **вектор поляризации**

где $\vec{p}_i$ - электрический дипольный момент $i$ - ой частицы, $V$ – объём вещества.

# Поляризация неполярных диэлектриков

**Во внешнем электрическом поле неполярные молекулы приобретают**, благодаря деформации их электронных оболочек под действием электрического поля, **индуцированный дипольный момент**

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$$

где $\alpha$ - поляризуемость **отдельной** молекулы.

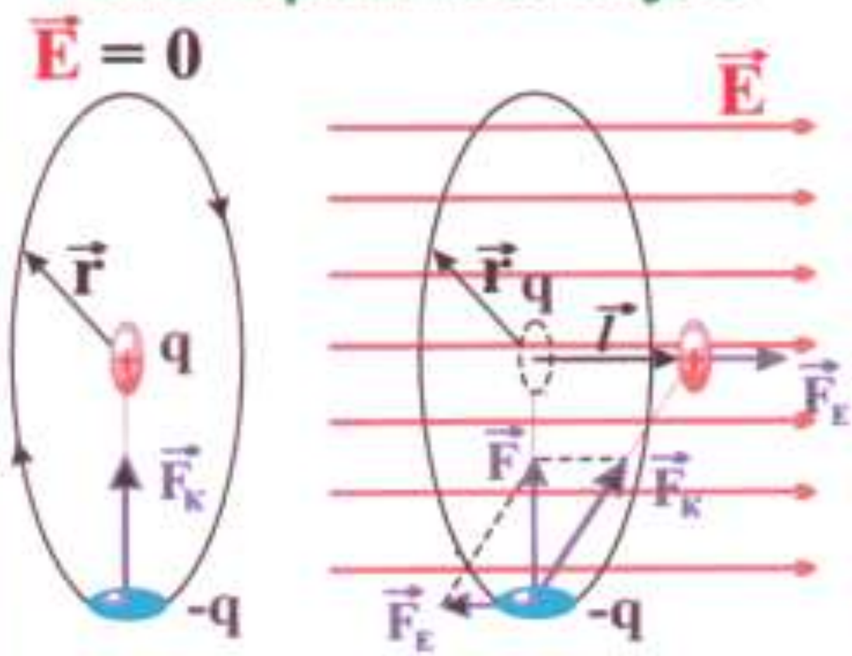
Для однородного и изотропного неполярного диэлектрика диэлектрическая восприимчивость вещества

$$\chi_d = n\alpha$$

где $n$ - концентрация частиц (молекул) вещества.

# Молекулы в электрическом поле

## Неполярная молекула




$$\vec{F} = \vec{F}_к + \vec{F}_E$$

плечо, образовавшееся в результате деформации диполя:

$$l = \frac{F_E}{F_к} r \qquad l << r$$

$$l = \frac{4\pi\varepsilon_0 r^3 E}{q}$$

Наведенный дипольный момент

$$\vec{p} = q\vec{l} = 4\pi\varepsilon_0 r^3 \vec{E}$$

$$\vec{F}_к = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} \qquad \vec{F}_E = q\vec{E}$$

Неполярная молекула в электрическом поле деформируется, приобретая наведенный (индуцированный) электрический момент

$$\boxed{\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}}$$

$\alpha = 4\pi r^3$ - поляризуемость неполярных молекул - величина, характеризующая способность молекул приобретать электрический момент

# *Поляризация полярных диэлектриков*

## Полярная молекула

В результате совместного действия электрического поля $\vec{E}$ и хаотичного теплового движения электрические моменты полярных молекул $\vec{p}_i$ преимущественно ориентируются вдоль поля

Среднее значение момента связано с напряженностью поля выражением

$$<\vec{p}_i> = \frac{p^2}{3kT}\vec{E}$$ (П.ЛАНЖЕВЕН)

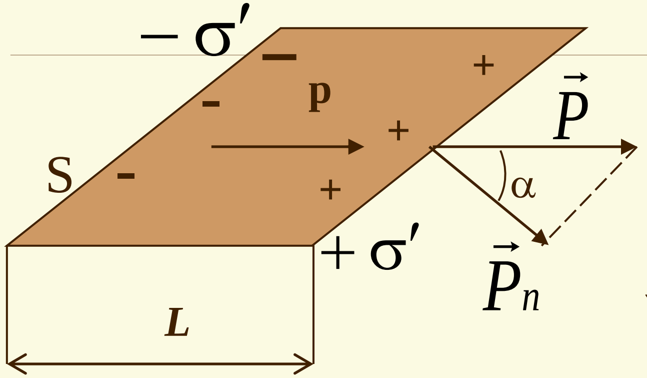
где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К- постоянная Больцмана, $T$ - температура

$$<\vec{p}> = \alpha\,\varepsilon_0\,\vec{E}$$

где $\alpha = \dfrac{p^2}{3\varepsilon_0 kT}$ - поляризуемость полярных молекул

Из последней формулы видна **зависимость поляризуемости** молекул **и** соответственно **диэлектрической восприимчивости** вещества у полярных диэлектриков **от температуры**.

# Рассмотрим однородно поляризованный диэлектрик в виде призмы




Электрический момент призмы

$$p = q' \cdot L = \sigma' \cdot S \cdot L .$$

Здесь $q'$ и $\sigma'$ — связанный заряд и плотность связанного заряда на основании призмы S.

Объем призмы $V = S \cdot L \cdot \cos\alpha$

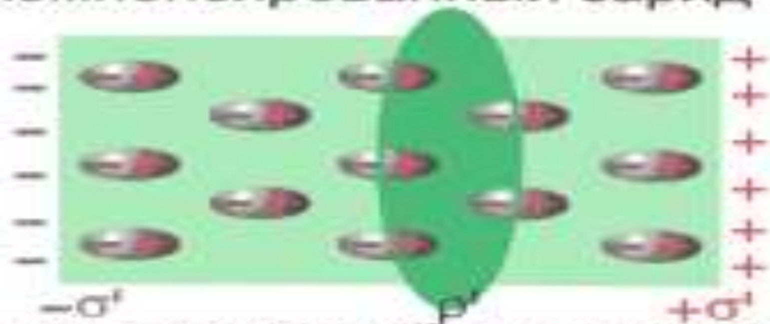
$$p = \sigma' \cdot S \cdot L = \frac{\sigma' \cdot V}{\cos\alpha} = PV \rightarrow \boxed{\sigma' = P \cdot \cos\alpha = P_n}$$

Поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma'$ равна нормальной составляющей вектора поляризации $P_n$

# Поверхностная плотность связанных зарядов

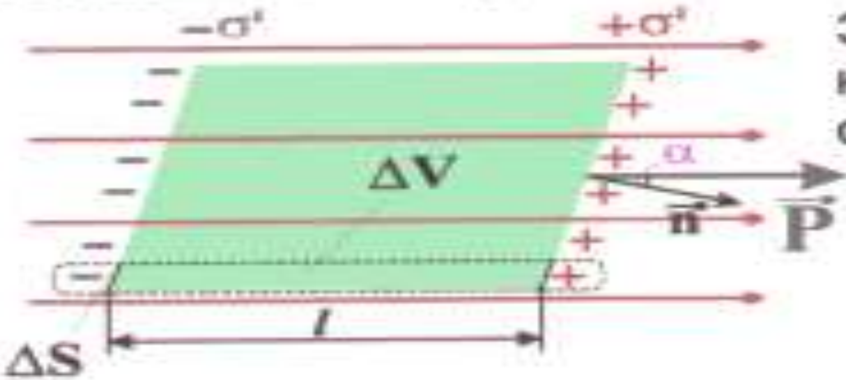
Поляризация диэлектрика сопровождается появлением нескомпенсированных связанных зарядов $\sigma'$ на его поверхности. Если дэлектрик неоднородный, то появляется и объемный нескомпенсированный заряд $\rho'$

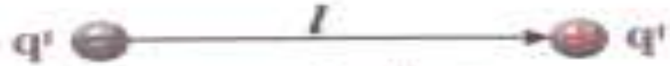
однородный диэлектрик



неоднородный диэлектрик

Выделим в поляризованном диэлектрике объем $\Delta V = \Delta S l \cos\alpha$




$$q' = |\sigma'|\Delta S$$

Этот объем можно рассматривать как электрический диполь с электрическим моментом:

$$p = q' l$$

Тогда вектор поляризации

$$P = \frac{q' l}{\Delta V} = \frac{|\sigma'| S l}{S l \cos\alpha} = \frac{|\sigma'|}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{\sigma' = P\cos\alpha = P_n}$$

$P_n$ - нормальная составляющая вектора поляризации

# Поляризационные заряды и вектор электрического смещения

При поляризации диэлектриков возникают **нескомпенсированные макроскопические связанные или поляризационные заряды** внутри вещества, которые связаны с вектором поляризации на поверхности (в силу закона сохранения заряда) соотношением:

$$\oint_S \vec{P}d\vec{S} = -q_{поляр.}$$

Поле внутри диэлектрика создается как поляризационными, так и свободными зарядами, поэтому согласно **теореме Гаусса** для вектора напряженности электрического поля:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q_{свод.} + q_{поляр.}}{\varepsilon_0}$$

Вводим **вспомогательный вектор электрического смещения**, или **вектор электрической индукции**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_d) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_{абс.} \vec{E}$$

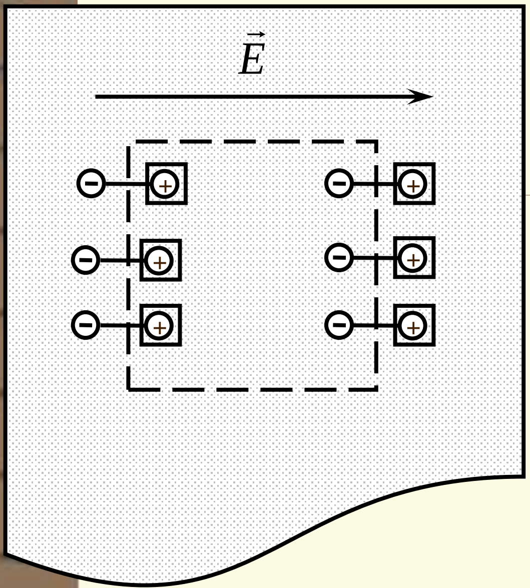
где $1 + \chi_d = \varepsilon$ - **относительная диэлектрическая проницаемость вещества**, и

$\varepsilon_{абс.} = \varepsilon_0 \varepsilon$ - **абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества**.

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}}$$

- **вектор электрического смещения** или **вектор электрической индукции**

# Теорема Гаусса для диэлектрика




$$q' = \oint_S \sigma' dS = \oint_S P_n dS = \oint_S \vec{P} d\vec{S},$$

$q'$ — заряд, *покинувший* объём.

Поляризационный заряд $\quad q_{\text{пол}} = -q' = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}$ .

Теорема Гаусса для диэлектрика

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q_{своб.} + q_{\text{поляр.}}\right) .$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint \vec{P} d\vec{S} \Rightarrow \quad \oint \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) d\vec{S} = q .$$

Вектор электрического смещения $\quad \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \vec{D}$

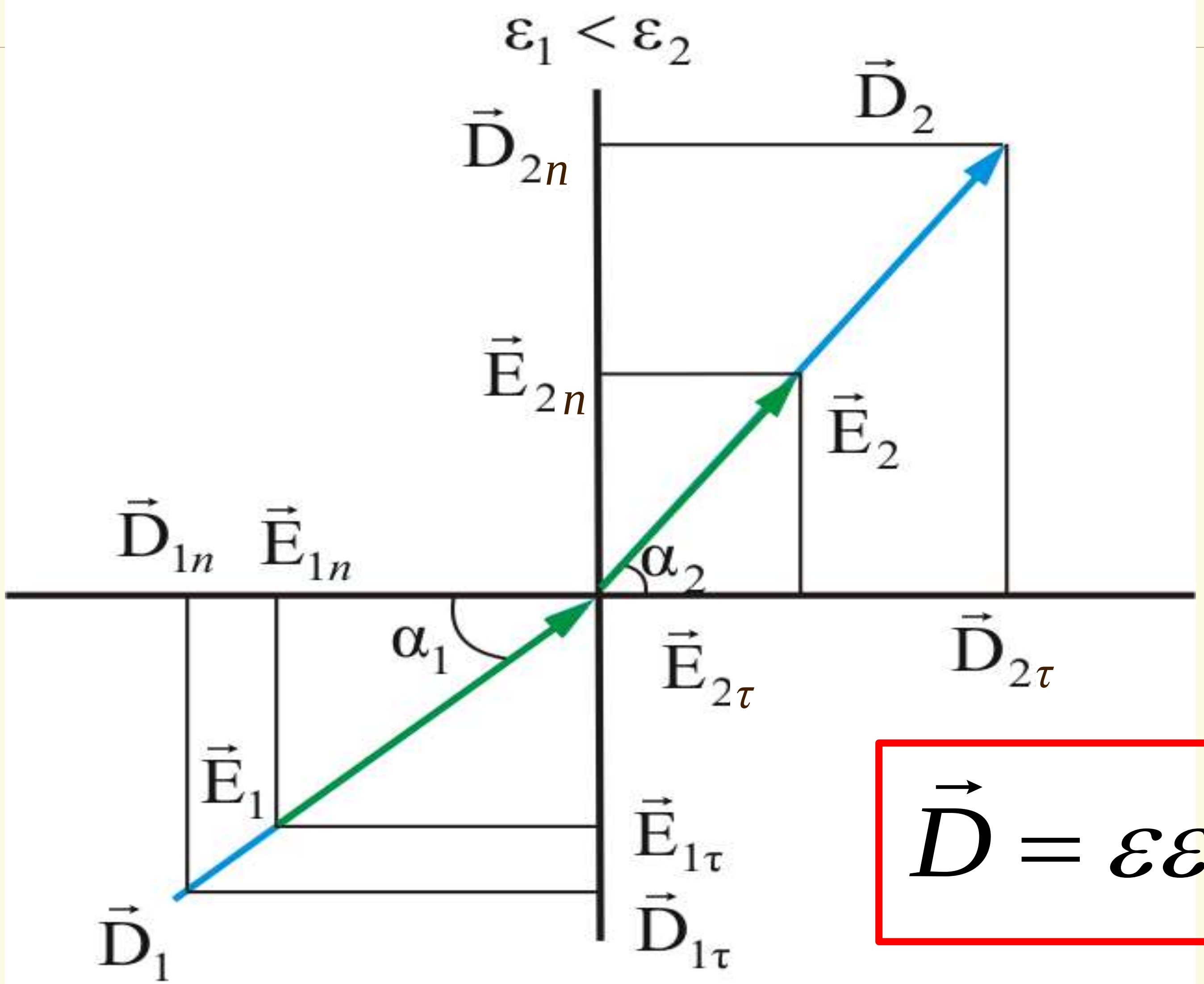
$$\boxed{\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q}$$

# Теорема Гаусса для диэлектрика

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \oint_S D_n dS = q_{\text{свободн}}$$

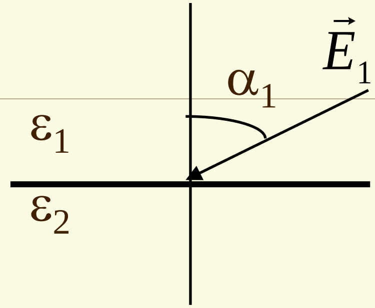
Поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов внутри этой поверхности.

## *Поведение электрических векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на незаряженных границах диэлектриков*




$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}}$$

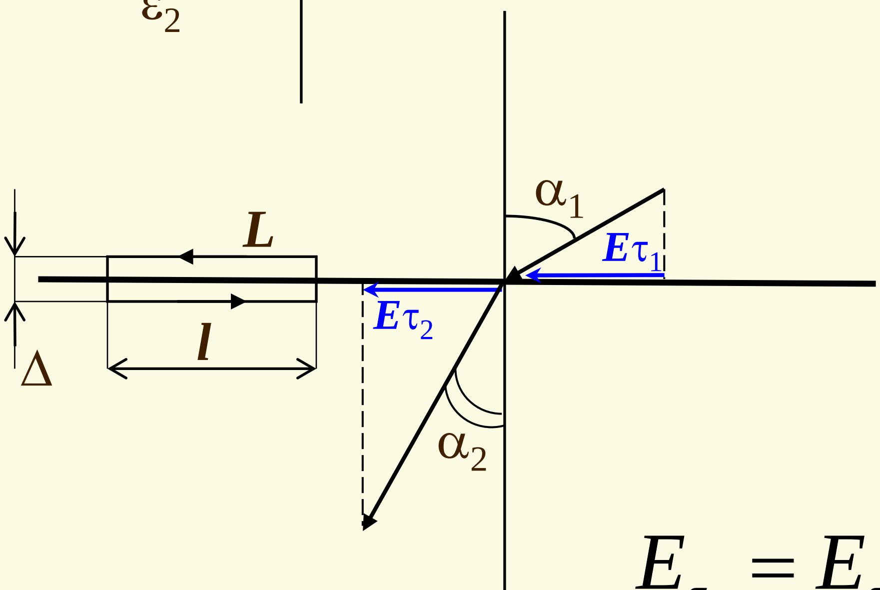
# Граничные условия для электрического поля на поверхности раздела двух диэлектриков




Теорема о циркуляции электрического поля

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0 \cdot$$

$(\Delta \ll l\,)$



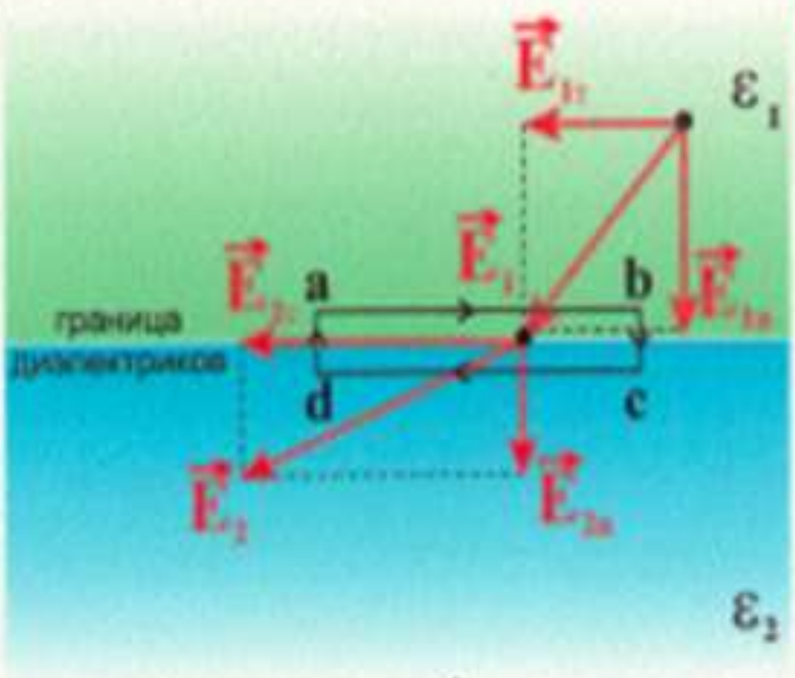

$$\oint_L \vec{E}d\bar{l} = E_{\tau_1} l - E_{\tau_2} l = 0 \;.$$

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2} = E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \;.$$

$$\boxed{E_{\tau_1} = E_{\tau_2}}$$

***При переходе через границу раздела сред,***
***касательная составляющая вектора напряжённости не меняется.***

# Граничные условия для векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$




$\vec{E}_1$ - напряженность поля в диэлектрике с $\varepsilon_1$

$\vec{E}_2$ - напряженность поля в диэлектрике с $\varepsilon_2$

**abcd** - замкнутый контур

**ad=bc → 0, ab=cd=*l***

Для любого электрического поля

$$\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

$$-E_{1\tau} l + E_{2\tau} l = 0$$

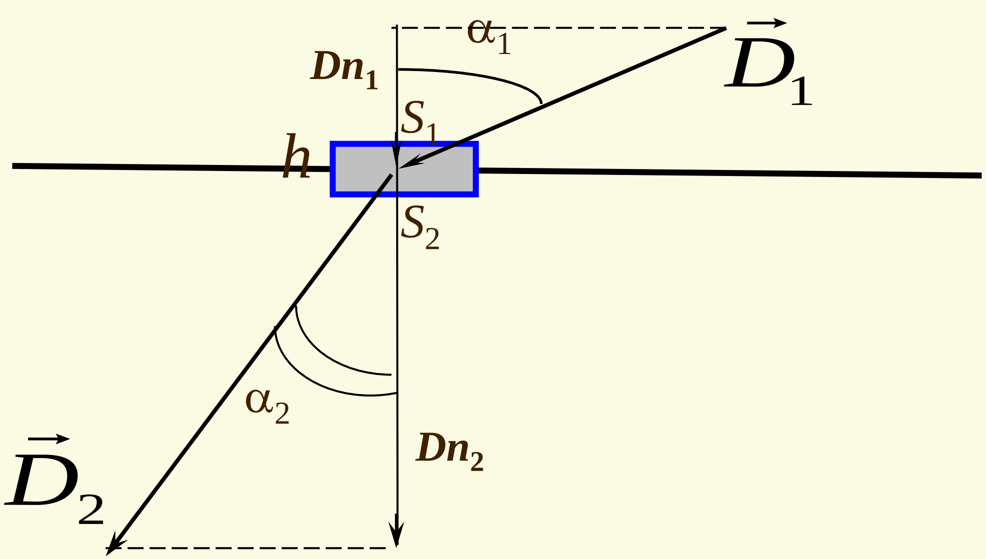
$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$$

Учитывая, что $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$, получим

$$\boxed{\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Чтобы узнать как меняется нормальная составляющая вектора напряжённости на границе сред, воспользуемся теоремой Гаусса. Выберем на границе сред замкнутую цилиндрическую поверхность высоты *h* и с основаниями $S_1 = S_2 = S$, лежащими по разные стороны границы раздела диэлектриков. Согласно теореме Гаусса:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = q_{\text{свободн}}$$



Свободные заряды на границе раздела сред отсутствуют $q_{\text{свободн}} = 0$, поэтому: $\oint_S D_n dS = 0$

Устремляя высоту цилиндра $h$ к нулю, придём к выводу, что к нулю будет стремиться и поток вектора электрической индукции через боковую поверхность цилиндра. Искомый поток будет складываться только из потоков через основания:

$$\oint_S D_n dS = -\int_{S_1} D_{n_1} dS + \int_{S_2} D_{n_2} dS + \int_{S_{\text{бок}}} D_\tau dS = 0$$

$$\left(-D_{n_1} + D_{n_2}\right) \cdot S = 0$$

$$\boxed{D_{n_2} = D_{n_1}}$$

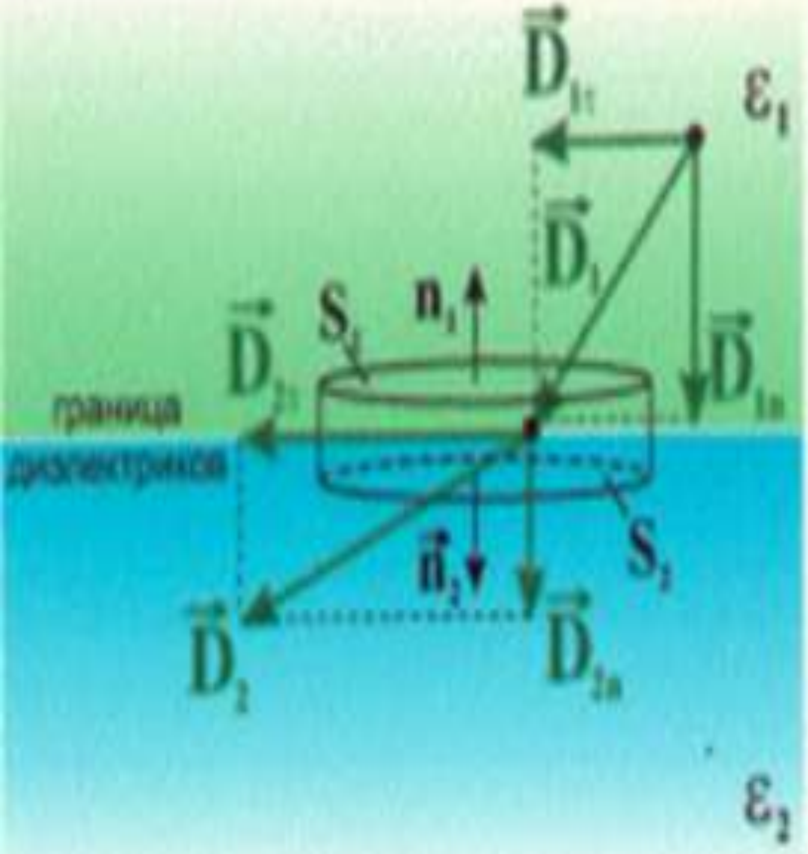
$$\boxed{D_{n_2} = D_{n_1}}$$

**Нормальная составляющая вектора электрического смещения непрерывна.**

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E$$

$$E_{n_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 \cos\alpha_1$$

**Нормальная составляющая вектора напряжённости электрического поля испытывает на границе раздела скачок.**




$D_1$ - вектор смещения в диэлектрике $\varepsilon_1$

$D_2$ - вектор смещения в диэлектрике $\varepsilon_2$

Для любого электрического поля

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho\, dV$$

$$-D_{1n}S_1 + D_{2n}S_2 = 0$$

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$$

Учитывая, что $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$, получим

$$\boxed{\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$S_1$ и $S_2$ - основания цилиндра

$h \to 0$ - образующая цилиндра

$\rho = 0$ - диэлектрики однородны
(объемный заряд отсутствует)


# Лекция закончена!