8. Вихревое электрическое поле. Ток смещения

Основной закон электромагнитной индукции связывает ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}}$, возникающей в некотором контуре L, со скоростью изменения во времени магнитного потока

$$\phi = (\vec{B}\vec{n})S \ ,$$

проходящего через поверхность площадью S, которая ограничена контуром L. Здесь контур L считается плоским, а магнитное поле однородным. Вектор $\vec{n}$ есть вектор нормали к рассматриваемой поверхности.

Согласно основному закону электромагнитной индукции

$$\varepsilon_{\text{инд}}(L) = \oint_L (\vec{F}_{\text{ст}}\vec{\tau})dl = -\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Big[(\vec{B}\vec{n})S\Big] = -\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{n}\right)S - \left(\vec{B}\frac{\partial\vec{n}}{\partial t}\right)S - (\vec{B}\vec{n})\frac{\partial S}{\partial t} \ ,$$

где $\vec{F}_{\text{ст}}$ - сторонняя сила, действующая на единичный положительный заряд и работа которой при перемещении этого заряда по контуру L определяет ЭДС индукции.

Величина $\partial\vec{n}/\partial t$ описывает скорость изменения во времени пространственной ориентации плоскости контура L, а величина $\partial S/\partial t$ - скорость изменения площади поверхности, ограниченной данным контуром. В этих случаях сторонней силой является **сила Лоренца**, поэтому для реализации ЭДС индукции контур L должен быть выполнен из проводника, в котором имеются свободные заряды.

Если во времени меняется магнитное поле и $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$, то физическая природа сторонних сил совершенно иная. Переменное во времени магнитное поле порождает в пространстве так называемое **вихревое электрическое поле** с замкнутыми силовыми линиями. Эти силовые линии охватывают линии магнитной индукции $\vec{B}$. Отметим, что вихревое электрическое поле не является потенциальным.

С учетом вихревого электрического поля **теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля** запишется следующим образом:

$$\oint_L (\vec{E}\vec{\tau})dl = -\int_S \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{n}\right)dS \ ,$$

где ориентация вектора нормали $\vec{n}$ и обход контура связаны известным правилом: если смотреть с конца вектора $\vec{n}$ обход контура совершается против хода часовой стрелки.

Опыт показывает, что переменное во времени **электрическое смещение**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

в свою очередь порождает в пространстве магнитное поле. В результате **теорема о циркуляции вектора магнитной индукции** принимает вид:

$$\oint_L (\vec{B}\vec{\tau})dl = \mu_0 (\sum_i I_{\text{пров.}i} + I_{\text{смещ.}}) \ ,$$

где $I_{\text{пров.}i}$ - токи проводимости, протекающие через поверхность, которая ограничена контуром *L*,

$$I_{\text{смещ.}} = \int_S (\vec{j}_{\text{смещ.}} \vec{n}) dS = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{n} \right) dS$$

- **ток смещения**, *S*-площадь поверхности, ограниченной контуром *L*,

$$\vec{j}_{\text{смещ.}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- **вектор плотности тока смещения**. При наблюдении с конца единичного вектора нормали $\vec{n}$ обход контура *L* должен совершаться против хода часовой стрелки.

Таким образом, переменные во времени магнитные и электрические поля взаимно порождают друг друга и могут существовать в пространстве независимо от электрических зарядов и токов проводимости.

Задача №27

По бесконечному прямому соленоиду, имеющему круговое поперечное сечение радиусом *R* и *n* витков на единицу длины, пропускают ток *I*(*t*), нарастающий во времени по линейному закону $I=\alpha t$, где $\alpha=const>0$. Определите зависимость напряженности вихревого электрического поля *E*(*r*) от расстояния *r* между точкой наблюдения и осью соленоида в плоскости, перпендикулярной к оси соленоида.

Решение

Задача решается с помощью **теоремы о циркуляции вектора напряженности электрического поля**.

Согласно решению задачи №21 внутри соленоида возникает однородное магнитное поле с магнитной индукцией

$$B=\mu_0 nI=\mu_0 n\alpha t \ . \qquad (1)$$

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен по оси соленоида.

Поскольку $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$, возникает **вихревое электрическое поле** $\vec{E}$. Силовые линии этого поля представляют собой концентрические окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси соленоида и вектору $\vec{B}$. Центры окружностей находятся в точках пересечения данных плоскостей с осью соленоида. При повороте на любой угол вокруг оси соленоида величина напряженности вихревого электрического поля не должна меняться и $|\vec{E}|$ имеет одинаковое значение во всех точках заданной силовой линии.

Для применения теоремы о циркуляции возьмем силовую линию радиусом $0<r<R$, находящуюся внутри соленоида. Направим единичный вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости силовой линии по вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Если смотреть с конца вектора $\vec{n}$, обход силовой линии должен совершаться против хода часовой стрелки. Применяя теорему о циркуляции вектора напряженности электрического поля, для выбранной силовой линии получим

$$\oint_L (\vec{E}\vec{\tau})dl = \oint_L E_\tau dl = E_\tau \oint_L dl = E_\tau 2\pi r = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\vec{n}\right) dS = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS = -\frac{\partial B}{\partial t}\int_S dS = -\frac{\partial B}{\partial t}\pi r^2 \quad (2)$$

Здесь E_τ - проекция вектора $\vec{E}$ на направление единичного вектора касательной $\vec{\tau}$, имеющая одинаковую величину и знак во всех точках силовой линии.

Из (1) и (2) следует, что для точек внутри соленоида

$$E_\tau = -\frac{1}{2}\mu_0 n\alpha r \;, \quad 0<r<R \;, \qquad (3)$$

Таким образом, вихревое электрическое поле не зависит от времени, а его величина линейно растет с расстоянием r от оси соленоида. Знак «-» означает, что вектор $\vec{E}$ в каждой точке силовой линии направлен против вектора $\vec{\tau}$.

Аналогичным образом для точек вне соленоида получим:

$$\oint_L (\vec{E}\vec{\tau})dl = E_\tau 2\pi r = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\vec{n}\right) dS = -\frac{\partial B}{\partial t}\pi R^2 \qquad (4)$$

и с учетом (1) находим, что

$$E_\tau = -\frac{1}{2}\mu_0 n\alpha \frac{R^2}{r} \;, \quad R<r<\infty \;. \qquad (5)$$

Следовательно, вихревое электрическое поле отлично от нуля за пределами соленоида, где магнитное поле считается равным нулю.

Ответ: $E_\tau = -\frac{1}{2}\mu_0 n\alpha r$, $0<r<R$; $E_\tau = -\frac{1}{2}\mu_0 n\alpha \frac{R^2}{r}$, $R<r<\infty$.

Задача №28

Плоский воздушный конденсатор состоит из двух параллельных металлических дисков радиусом *R*, расположенных на расстоянии *d* друг от друга. На конденсатор подается переменное напряжение $U = U_0 \sin \omega t,$ где $U_0 = const > 0$, ω - частота и *t* – время. Пренебрегая краевыми эффектами, определите зависимость магнитной индукции *B*(*r*) от расстояния *r* между точкой наблюдения и осью конденсатора в плоскости, параллельной обкладкам конденсатора.

Решение

Задача решается на основе теоремы о **циркуляции вектора магнитной индукции** с учетом **тока смещения**. Кроме того, будим считать, что электрическое поле отлично от нуля только внутри конденсатора.

При подаче переменного напряжения на конденсатор в нем возникает однородное электрическое поле с напряженностью

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{d} \sin \omega t \qquad (1)$$

и электрическим смещением

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E = \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_0 U_0}{d} \sin \omega t \ , \qquad (2)$$

где для воздуха ε=1 Векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ направлены по оси конденсатора перпендикулярно его пластинам.

Электрическое смещение(2) определяет **плотность тока смещения**

$$j = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 U_0 \omega}{d} \cos \omega t \ , \qquad (3)$$

который является источником магнитного поля.

В случае однородного электрического поля внутри конденсатора, что справедливо при условии пренебрежения краевыми эффектами, и круглых обкладок конденсатора силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности. Эти окружности лежат в плоскостях, перпендикулярных к оси конденсатора и вектору $\vec{D}$, а их центры находятся в точках пересечения данных плоскостей с осью конденсатора. Величина магнитной индукции во всех точках одной силовой линии одинаковая, что следует из цилиндрической симметрии электрического поля конденсатора.

Для применения теоремы о циркуляции выберем силовую линию радиусом $0<r<R$, находящуюся внутри конденсатора. Направим единичный вектор нормали $\vec{n}$ по вектору электрического смещения $\vec{D}$ и выберем соответствующий обход силовой линии. Применяя теорему о циркуляции вектора магнитной индукции, получим:

$$\oint_L (\vec{B}\vec{\tau})dl = \oint_L B_\tau dl = B_\tau \oint_L dl = B_\tau 2\pi r = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\vec{n}\right) dS = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS = \frac{\partial D}{\partial t}\int_S dS = \frac{\partial D}{\partial t}\pi r^2. \qquad (4)$$

Здесь B_τ - проекция вектора $\vec{B}$ на направление единичного вектора касательной, имеющая одинаковую величину и знак во всех точках силовой линии.

Из (3) и (4) следует, что

$$B_\tau = \frac{\varepsilon_0 U_0 \omega}{2d} r\cos\omega t \ , \quad 0 < r < R \ . \qquad (5)$$

Таким образом, амплитуда колебаний магнитной индукции прямо пропорциональна расстоянию r от оси конденсатора. Из конденсатора (1) и (5) следует, что колебания E и B сдвинуты по фазе на $\pi/2$.

Совершенно аналогичным образом для силовой линии радиусом $R<r<\infty$, находящейся за пределом конденсатора, с помощью теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции можно доказать, что

$$B_\tau = \frac{\varepsilon_0 U_0 \omega}{2d}\frac{R^2}{r}\cos\omega t \ , \quad R < r < \infty \ . \qquad (6)$$

Таким образом, магнитное поле, созданное током смещения за пределами конденсатора, также отлично от нуля, а амплитуда колебаний магнитной индукции убывает с ростом расстояния от оси конденсатора как $1/r$.

Ответ: $B_\tau = \dfrac{\varepsilon_0 U_0 \omega}{2d} r\cos\omega t$, $0 < r < R$; $B_\tau = \dfrac{\varepsilon_0 U_0 \omega}{2d}\dfrac{R^2}{r}\cos\omega t$, $R < r < \infty$.

Задача №29

Изолированный заряженный плоский конденсатор медленно разряжается за счет протекания через диэлектрик конденсатора объемного тока проводимости. Диэлектрик конденсатора имеет электропроводность σ и относительную диэлектрическую проницаемость ε. Определите магнитное поле, возникающее при разрядке конденсатора.

Решение

Задача решается с помощью закона Ома, уравнения непрерывности для электрического заряда и определения плотности тока смещения.

Согласно закону Ома в дифференциальной форме плотность $j_{\text{пров}}$ тока проводимости, протекающего через диэлектрик, описывается формулой:

$$j_{\text{пров}} = \sigma E = \sigma\frac{U}{d} \ , \qquad (1)$$

где E - напряженность электрического поля в диэлектрике, U - напряжение на конденсаторе и d - расстояние между пластинами конденсатора.

Полный ток проводимости

$$I_{\text{пров}} = j_{\text{пров}} S = \sigma \frac{SU}{d} = \sigma \frac{SQ}{dC} \ , \tag{2}$$

где S - площадь пластин конденсатора, C - емкость конденсатора и Q - заряд на конденсаторе.

Согласно уравнению непрерывности для электрического заряда

$$\frac{dQ}{dt} = -I_{\text{пров}} = -\frac{\sigma S}{dC} Q \ . \tag{3}$$

или

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{\sigma S}{dC} dt \ . \tag{4}$$

Интегрируя левую часть равенства по Q от начального заряда Q_0 до текущего заряда $Q(t)$, а правую часть по t от начального момента времени t=0 до текущего момента времени t, получим:

$$\ln \frac{Q(t)}{Q_0} = -\frac{\sigma S}{dC} t \tag{5}$$

или

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma S}{dC} t} = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \ . \tag{6}$$

Здесь

$$\tau = \frac{dC}{\sigma S} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma} \tag{7}$$

-время релаксации для процесса разрядки конденсатора с емкостью

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \ . \tag{8}$$

через диэлектрик с характеристиками ε и σ.

Плотность тока смещения с учетом (6) записывается в виде

$$j_{\text{смещ}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{d} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{dC} \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{dC\tau} Q = -\frac{\sigma U}{d} \ , \tag{9}$$

где использована формулы U=Q/C и (7).

Полная плотность тока согласно (1) и (9)

$$j_{\text{полн}} = j_{\text{пров}} + j_{\text{смещ}} = 0 \ , \tag{10}$$

поэтому магнитное поле при разрядке конденсатора не возникает.

Ответ: магнитное поле равно нулю.