Лекция 4. Алгоритм Краскала

Рассмотрим задачу о строительстве сети дорог, которая связывала бы n данных городов так, чтобы из любого города можно было проехать в любой другой. Пусть для каждой пары городов известна стоимость строительства дороги между ними. Как построить сеть дорог так, чтобы стоимость ее строительства была минимальной?

Для описания алгоритма решения этой задачи введем следующие понятия.

Определение 1. Граф, у которого любые две вершины соединены хотя бы одним путем, называется *связным.*

Пример 1. Граф со следующей матрицей смежности является связным:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Граф со следующей матрицей смежности не является связным, так как вершина 3 не соединена с 1 и 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 1 (д/з). Привести примеры связных графов и графов, не являющихся связными (с обоснованием).

Определение 2. Связный граф, в котором нет контуров, называется *деревом.*

Пример 3. Граф со следующей матрицей смежности является деревом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 4. Граф со следующей матрицей смежности не является деревом, так как содержит контур, соединяющий вершины 1, 2 и 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Упражнение 2 (д/з). Привести примеры деревьев и графов, не являющихся деревьями (с обоснованием).

Теорема 1. *Пусть задан граф G с n вершинами. Следующие утверждения эквивалентны:*

а) граф G является деревом;

б) граф G является связным и имеет $n-1$ ребро;

в) граф G не содержит контуров и имеет $n-1$ ребро.

Упражнение 3 (д/з). Доказать теорему 1.

Определение 3. Пусть $V' \subset V$ и $X' \subset X$. Тогда граф $G' = G'(V', X')$ называется *подграфом* графа $G(V, X)$.

Пример 5. Граф из примера 3 является подграфом графа из примера 4.

Упражнение 4 (д/з). Выделить другие подграфы графа из примера 4.

Определение 4. Подграф $G'(V, X')$ связного графа $G(V, X)$, содержащий все его вершины и являющийся деревом, называется *остовом* графа $G(V, X)$.

Пример 6. Граф из примера 3 является остовом графа из примера 4.

Замечание 1. Связный граф может иметь более одного остова.

Упражнение 5 (д/з). Имеет ли граф из примера 4 другие остовы, кроме графа из примера 3? Ответ обосновать.

Определение 5. *Матрицей весов* графа G с n вершинами, не содержащего кратных ребер, называется квадратная матрица размера $n \times n$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит вес s_{ij} ребра, соединяющего вершины v_i и v_j, если оно существует, и 0 в противном случае $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Определение 6. Если граф $G = G(V, X)$ является взвешенным, то *весом* $w(G)$ графа G называется сумма весов всех ребер, входящих в X. Соответственно *весом* $w(G')$ подграфа $G' = G'(V', X')$ (в частности, остова $G' = G'(V, X')$) называется сумма весов всех ребер, входящих в X'.

Пример 7. Взвешенный граф с матрицей весов

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет остов с матрицей весов

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

вес которого равен $w_{12} + w_{23} + w_{34} = 2 + 1 + 4 = 7$.

Упражнение 6 (д/з). Найти все остальные остовы взвешенного графа из примера 7 и вычислить их вес.

Представим сеть всевозможных дорог между n городами в виде связного взвешенного графа, вершинами которого являются города, ребрами – дороги, а весами ребер – стоимости строительства дорог. Тогда задача о соединении городов с минимальными расходами сводится к нахождению остова наименьшего веса в этом графе.

Теорема 2. *Пусть $G(V, X)$ – связный взвешенный граф с n вершинами. Тогда его остов наименьшего веса можно найти следующим образом:*

а) выбрать (любое) ребро x_1 наименьшего веса в $G(V, X)$;

б) определить по индукции последовательность ребер $x_2, \dots, x_{n-1}$, выбирая на каждом шаге ребро, удовлетворяющее трем условиям:

1) отличное от предыдущих,

2) не образующее контуров с предыдущими ребрами,

3) имеющее наименьший вес среди ребер, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Подграф $T = G'(V, X')$ с множеством ребер $X' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ и будет искомым остовом наименьшего веса.

Упражнение 8 (д/з). Доказать теорему 2.

Замечание 2. Описанный алгоритм называется *алгоритмом Краскала.*

Пример 8. Пусть имеется следующая матрица стоимостей строительства дорог:

$$\begin{pmatrix} 0 & 13 & 14 & 12 & 15 & 16 \\ 13 & 0 & 9 & 7 & 5 & 6 \\ 14 & 9 & 0 & 8 & 11 & 10 \\ 12 & 7 & 8 & 0 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 11 & 1 & 0 & 2 \\ 16 & 6 & 10 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Требуется решить задачу о соединении городов с помощью алгоритма Краскала.

Решение. Сначала выбираем ребро $x_1 = v_4v_5$ наименьшего веса 1. Далее берем ребро $x_2 = v_4v_6$ веса 2. Следующим ребром наименьшего веса является ребро v_5v_6. Но оно образует контур с двумя предыдущими ребрами. Поэтому мы его пропускаем и берем следующее ребро наименьшего веса v_2v_5. Далее ребра v_2v_6 и v_2v_4 образуют контуры с предыдущими ребрами. Мы их пропускаем и берем ребро $x_4 = v_3v_4$. Ребра v_2v_3, v_3v_6, v_3v_5 мы взять не можем, поэтому следующим ребром, удовлетворяющим условиям алгоритма, будет ребро $x_5 = v_1v_4$. Ребра x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 образуют остов наименьшего веса $\sum\limits_{i=1}^{5} w(x_i) = 1 + 2 + 5 + 8 + 12 = 28$.

Упражнение 8 (д/з). Решить задачу о соединении городов с помощью алгоритма Краскала, если дана следующая матрица стоимостей строительства дорог:

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 12 & 0 & 11 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 11 & 0 & 2 & 8 & 3 \\ 4 & 13 & 2 & 0 & 9 & 2 \\ 7 & 14 & 8 & 9 & 0 & 10 \\ 6 & 15 & 3 & 2 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$