Лекция 5. Логические переменные в двузначной логике

Определение 1. *Логической переменной* в двузначной логике называется переменная величина x, принимающая значения из некоторого двухэлементного множества.

Пример 1. Логические переменные могут принимать значения из следующих двухэлементных множеств:

1) $E_2 = \{0, 1\}$;

2) $E^* = \{\text{истина}, \text{ложь}\}$ (при доказательстве теорем);

3) $E^{**} = \{\text{да}, \text{нет}\}$ (в так называемых экспертных системах, используемых для автоматического анализа информации с целью решения проблем);

4) $E^{***} = \begin{array}{l}\{\text{наличие потенциала в } +5 \text{ вольт в определенной точке схемы,} \\ \text{отсутствие потенциала в } +5 \text{ вольт в той же точке}\}\end{array}$

(в электронике).

Упражнение 1 (д/з). Привести другие примеры логических переменных, принимающих значения из некоторых двухэлементных множеств.

Замечание 1. В дальнейшем, кроме специально оговоренных случаев, будем рассматривать логические переменные, принимающие значения из множества $E_2 = \{0, 1\}$.

Пусть n – натуральное число. Далее будем рассматривать n логических переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем x_i принимает значения из $E_2 = \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Определение 2. *Наборами значений* n логических переменных называются упорядоченные наборы вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Каждый набор значений $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется также *двоичным вектором.*

Пример 2. Составить всевозможные наборы значений логических переменных и найти их количество при следующих значениях n:

а) $n = 1$: для 1 логической переменной x_1 имеется $N_1 = 2$ различных набора значений, каждый из которых состоит из 1 значения: (0) и (1).

б) $n = 2$: для 2 логических переменных x_1 и x_2 имеется $N_2 = 4$ различных набора значений, каждый из которых состоит из 2 значений: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$.

в) $n = 3$:

Упражнение 2 (д/з). $n = 3$. N_3 – ?

Утверждение. *Количество всех возможных наборов значений n логических переменных равно $N_n = 2^n$.*

Доказательство (методом математической индукции).

1. Очевидно, что для одной переменной $(n = 1)$ имеется $N_1 = 2^1 = 2$ различных набора значений: (0) и (1) (см. пример 2а).

2. Предположим, что для $n = k$ переменных имеется 2^k возможных наборов значений: $N_k = 2^k$.

3. Докажем, что $N_{k+1} = 2^{k+1}$. Для этого добавим к набору k переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ $(k+1)$–ю переменную x_{k+1}. Тогда каждому набору значений k переменных $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_k^*)$ будут соответствовать 2 набора значений $k + 1$ переменной: $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_k^*, 0)$ и $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_k^*, 1)$. Следовательно, количество наборов значений $k + 1$ переменной равно $N_{k+1} = 2 \cdot N_k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, ч.т.д.

Множества наборов значений логических переменных часто для определенности выстраивают в некотором порядке, что обозначается

$$(c_1, \dots, c_n) \prec \dots \prec (a_1, \dots, a_n) \prec (b_1, \dots, b_n) \prec \dots \prec (d_1, \dots, d_n).$$

Знак $\prec$ читается как “предшествует”.

В частности, нередко используется так называемый лексикографический порядок.

Определение 3. *Лексикографическим переходом* между наборами значений логических переменных $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ называется переход, при котором выполняется одно из следующих соотношений:

$$\left[\begin{array}{ll} a_1 < b_1, & (1) \\ \exists m:\ 1 \le m \le n-1, \begin{cases} a_1 = b_1, \\ \dots \\ a_m = b_m, \\ a_{m+1} < b_{m+1}. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Определение 3'. *Лексикографическим порядком* наборов значений логических переменных называется порядок, при котором переход между любыми двумя наборами $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ такими, что $(a_1, \dots, a_n) \prec (b_1, \dots, b_n)$, является лексикографическим.

Определение 3". *Нелексикографическим порядком* наборов значений логических переменных называется порядок, при котором существуют такие наборы $(a_1^*, \dots, a_n^*)$ и $(b_1^*, \dots, b_n^*)$, что $(a_1^*, \dots, a_n^*) \prec (b_1^*, \dots, b_n^*)$, для которых не выполняется ни одно из соотношений (1) и (2).

Пример 3.

а) $n = 1$: $(0) \prec (1)$ – лексикографический порядок в силу определений 3 и 3' (выполняется соотношение (1)), $(1) \prec (0)$ – нелексикографический порядок в силу определения 3" (не выполняется ни одно из соотношений (1) и (2)).

б) $n = 2$:

1°. $(0,0) \prec (0,1) \prec (1,0) \prec (1,1)$ – лексикографический порядок: $(a_1, a_2) = (0,0) \prec (0,1) = (b_1, b_2)$, так как в этих наборах $a_1 = 0$; $b_1 = 0$ и $a_2 = 0 < 1 = b_2$ (выполняется соотношение (2)), и аналогично $(0,1) \prec (1,0)$ (выполняется (1)), $(1,0) \prec (1,1)$ (выполняется (2)).

2°. $(0,0) \prec (0,1) \prec (1,1) \prec (1,0)$ – нелексикографический порядок: $(a_1, a_2) = (1,1) \prec (1,0) = (b_1, b_2)$, хотя $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ (не выполняется (1)) и $a_2 = 1 > 0 = b_2$ (не выполняется (2)).

Упражнение 3 (д/з). Привести другие примеры нелексикографического порядка наборов значений 2 логических переменных.

в) $n = 3$:

Упражнение 4 (д/з). Привести примеры лексикографического и нелексикографического порядка наборов значений 3 логических переменных.

Замечание 3. Отметим, что лексикографический порядок совпадает с порядком возрастания наборов $(a_1, \dots, a_n)$, рассматриваемых как числа, записанные в двоичной системе счисления, например: $(0,0) \sim 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0 < 1 = 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \sim (0,1)$.

Упражнение 5 (д/з). Проиллюстрировать с помощью записи в двоичной системе счисления соотношения $(0,1) \prec (1,0)$, $(1,0) \prec (1,1)$.