Лекция 2

Задача о минимальном пути

Определение 1. Последовательность $v_i x_{j_1} v_{i_1} \dots v_{i_{n-1}} x_{j_n} v_j$ вершин орграфа G(V,X) и соединяющих их ребер, начинающаяся с вершины v_i и заканчивающаяся вершиной v_j, называется *путем* в орграфе G(V,X) из v_i в v_j или сокращенно путем $p_k(v_i,v_j)$, где индекс k обозначает номер пути из v_i в v_j в орграфе G(V,X).

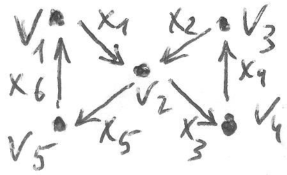

Рис. 1.

Пример 1. Для орграфа, изображенного на рис. 1, путем будет, например, следующая последовательность: $v_1\ x_1\ v_2\ x_3\ v_4\ x_4\ v_3$.

Замечание 1. Путь можно записать по последовательности ребер, которые входят в данный путь. Для приведенного выше пути это будет последовательность: $x_1\ x_3\ x_4$. Если две любые вершины соединены не более чем одним ребром, то путь можно записать по последовательности вершин, входящих в данный путь. Для приведенного выше пути это будет последовательность: $v_1\ v_2\ v_4\ v_3$.

Определение 2. Путь в орграфе G(V,X) из v_i в v_i называется *контуром*.

Пример 2. Для орграфа, изображенного на рис. 1, контуром будет, например, следующая последовательность: $v_2\ x_3\ v_4\ x_4\ v_3\ x_2\ v_2$.

Определение 3. Орграф называется *взвешенным,* если для каждого его ребра x_i, задано действительное (положительное или отрицательное) число $s(x_i)$, называемое *весом* ребра. (тогда оно наз.)

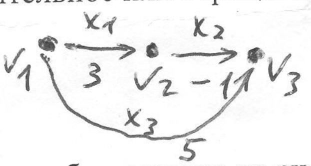

Рис. 2.

Пример 3. Для орграфа, изображенного на рис. 2, вес ребра x_1 равен 3, вес ребра x_2 равен –1, а вес ребра x_3 равен 5. $s(x_1)=3,\ s(x_2)=-1,\ s(x_3)=5.$

Замечание 2. Вес ребра может иметь смысл длины или пропускной способности дороги (в транспортных задачах), продолжительности технологической операции или величины затрат каких-либо ресурсов на нее (в задачах о планировании технологических операций) и т.д.

Определение 4. Сумма весов ребер, входящих в путь $p_k(v_i,v_j)$ во взвешенном орграфе G(V,X), называется *длиной пути* $p_k(v_i,v_j)$ и обозначается $l_k(v_i,v_j)$.

Пример 4. Для орграфа, изображенного на рис. 2, длина пути $v_1\ x_1\ v_2\ x_2\ v_3$ равна сумме весов ребер x_1 и x_2, т.е. 3+(–1)=2.

Определение 5. Если веса ребер не заданы, то орграф называется *невзвешенным*.

Определение 6. Длина пути $p_k(v_i,v_j)$ в невзвешенном орграфе определяется как число входящих в него ребер.

Замечание 3. Определение 6 соответствует случаю, когда вес каждого ребра равен 1.

Определение 7. Любой путь $p_k(v_i,v_j)$, длина которого меньше или равна длине любого другого пути $p_m(v_i,v_j)$, называется *минимальным* и обозначается $p_{min}(v_i,v_j)$, а длина такого пути – $l_{min}(v_i,v_j)$.

Пример 5. Для орграфа, изображенного на рис. 2, путь v_1 x_1 v_2 x_2 v_3 является минимальным, так как его длина равна 2 (см. пример 4), что меньше длины альтернативного пути v_1 x_3 v_3, равной 5, а других путей из v_1 в v_3 в рассматриваемом орграфе нет.

Теорема (без доказательства). *Для существования минимального пути во взвешенном орграфе* G(V,X) *из любой вершины* v_i *в любую вершину* v_j *необходимо и достаточно отсутствие в орграфе контуров отрицательной длины.*

Определение 8. Нумерация вершин орграфа такая, что для любого ребра, соединяющего вершину v_i с вершиной v_j, имеет место неравенство $j > i$ (т.е. у каждого ребра номер конца больше номера начала), называется *правильной*.

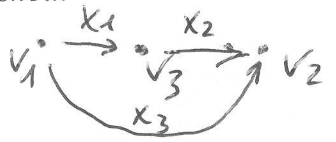

Рис. 3

Пример 6. Нумерация вершин орграфа, изображенного на рис. 2, правильная, а орграфа, изображенного на рис. 3 – неправильная, так как ребро x_2 соединяет вершину v_3 с v_2 и 3>2.

Упражнение 1 (д/з). Доказать, что если в орграфе правильная нумерация, то он не содержит контуров.

Определение 9. Два и более ребра, соединяющие одну и ту же вершину v_i с одной и той же вершиной v_j, называются *кратными*.

Далее будем рассматривать алгоритм, разработанный для взвешенных орграфов с правильной нумерацией и без кратных ребер.

Пусть задан взвешенный орграф G(V,X) из n + 1 вершины, в котором выделены две вершины – вход (вершина v_0) и выход (вершина v_n).

Предположим, что орграф G(V,X) удовлетворяет следующим условиям:

1) не содержит кратных ребер (т.е. любые две вершины соединены не более чем одним ребром);
2) имеет правильную нумерацию вершин, а следовательно, не содержит контуров (см. упражнение 1).

Задача: найти минимальный путь во взвешенном орграфе G(V,X) от входа до выхода, т.е. $p_{min}(v_0,v_n)$, и его длину $l_{min}(v_0,v_n)$.

Замечание 4. Минимальных путей в орграфе G(V,X) может быть несколько (см. рис. 4).

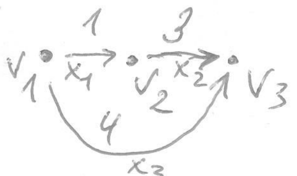

Рис. 4.

$l(v_1 x_1 v_2 x_2 v_3) = 1+3=4$

$= l(v_1 x_3 v_3) = 4$

Так как в силу 1) никакое ребро x_k, соединяющее вершину v_i с вершиной v_j, не является кратным, можно обозначить его вес $s(x_k)$ через s_{ij}.

Минимальный путь из v_0 в v_n в орграфе G(V,X), удовлетворяющем условиям 1)-2), определяется в соответствии с алгоритмом 1, приведенным ниже.

Алгоритм 1.

I. **Прямой ход** ($l_{min}(v_0,v_n)$ - ?)

Правило действия прямого хода алгоритма 1: каждой вершине v_j орграфа G(V,X) на j-м шаге сопоставляется индекс λ_j, равный наименьшей из сумм $\lambda_i + s_{ij}$, где i<j.

Замечание 5. $\lambda_j == l_{min}(v_0,v_j)$.

Шаг 0. Сопоставляем вершине v_0 индекс $\lambda_0 = 0 = l_{min}(v_0,v_0)$.

Шаг 1. Сопоставляем вершине v_1 индекс $\lambda_1 = \min\limits_{i<1}(\lambda_i + s_{i1}) = \lambda_0 + s_{01} = s_{01} = l_{min}(v_0,v_1)$.

Шаг 2. Сопоставляем вершине v_2 индекс

$$\lambda_2 = \min_{i<2}(\lambda_i + s_{i2}) = \min(\lambda_0 + s_{02}; \lambda_1 + s_{12}) = \min(s_{02}; s_{01} + s_{12}) = l_{min}(v_0,v_2).$$

…

Шаг *m*. Сопоставляем вершине v_m индекс $\lambda_m = \min\limits_{i<m}(\lambda_i + s_{im}) = l_{min}(v_0,v_m)$.

…

Шаг *n*. Сопоставляем вершине v_n индекс $\lambda_n = \min\limits_{i<n}(\lambda_i + s_{in}) = l_{min}(v_0,v_n)$.

В соответствии с замечанием 5 длина минимального пути $l_{min}(v_0,v_n)$ будет равна индексу выхода λ_n.

Выстроив индексы λ_j (j=0,…,n) и тем самым определив длину минимального пути $l_{min}(v_0,v_n)$, далее будем определять минимальный путь $p_{min}(v_0,v_n)$ методом обратного хода от выхода к входу.

II. **Обратный ход алгоритма 1 ($p_{min}(v_0,v_n)$ - ?)**

Правило действия обратного хода алгоритма 1: на произвольном (j-м) шаге находим вершину с индексом i_{j+1} (т.е. $v_{i_{j+1}}$) такую, что $s_{i_j i_{j+1}} = \lambda_{i_{j+1}} - \lambda_{i_j}$..

Шаг *n*. Находим вершину с индексом i_{n-1} такую, что $s_{i_{n-1}n} = \lambda_n - \lambda_{i_{n-1}}$.

Шаг *n*-1. Находим вершину с индексом i_{n-2} такую, что $s_{i_{n-2}i_{n-1}} = \lambda_{i_{n-1}} - \lambda_{i_{n-2}}$.

…

Шаг *m*+1. Находим вершину с индексом i_m такую, что $s_{i_m i_{m+1}} = \lambda_{i_{m+1}} - \lambda_{i_m}$.

…

Шаг 1. Возвращаемся в вершину v_0. На этом выполнение алгоритма заканчивается.

Путь $p_{min}(v_0,v_n) = v_0 v_{i_1} \ldots v_{i_{n-1}} v_n$.

Пример 7. Найти с использованием алгоритма 1 минимальный путь $p_{min}(v_0,v_n)$ в графе на рисунке ~~4~~ 5 (числа у ребер равны весам ребер, путь $p_{min}(v_0,v_n)$ будем выделять двойными линиями).

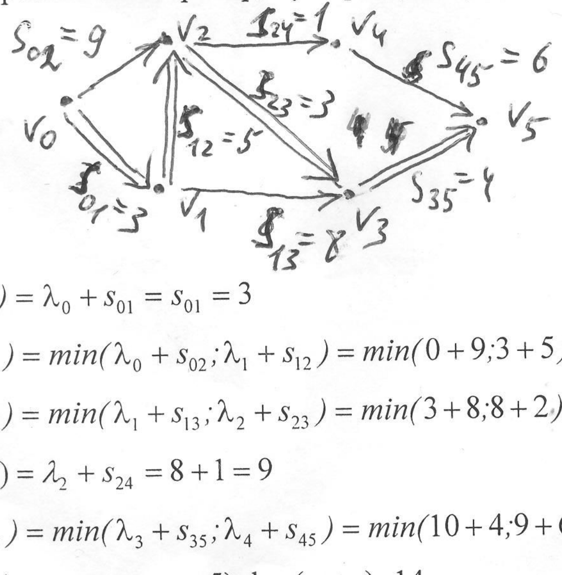

Рис. 5.

Прямой ход:

$\lambda_0 = 0$

$\lambda_1 = \min\limits_{i<1}(\lambda_i + s_{i1}) = \lambda_0 + s_{01} = s_{01} = 3$

$\lambda_2 = \min\limits_{i<2}(\lambda_i + s_{i2}) = \min(\lambda_0 + s_{02}; \lambda_1 + s_{12}) = \min(0+9; 3+5) = 8$

$\lambda_3 = \min\limits_{i<3}(\lambda_i + s_{i3}) = \min(\lambda_1 + s_{13}; \lambda_2 + s_{23}) = \min(3+8; 8+2) = 10$

$\lambda_4 = \min\limits_{i<4}(\lambda_i + s_{i4}) = \lambda_2 + s_{24} = 8 + 1 = 9$

$\lambda_5 = \min\limits_{i<5}(\lambda_i + s_{i5}) = \min(\lambda_3 + s_{35}; \lambda_4 + s_{45}) = \min(10+4; 9+6) = 14$

Таким образом (см. замечание 5), $l_{min}(v_0,v_n)$=14.

Обратный ход:

v_5; 1) $\lambda_5 - \lambda_4 = 5 < 6 = s_{45} \Rightarrow v_4$ не подходит

$\lambda_5 - \lambda_3 = 4 = s_{35} \Rightarrow v_3$ подходит $\Rightarrow v_3 v_5$

2) $\lambda_3 - \lambda_1 = 7 < 8 = s_{13} \Rightarrow v_1$ не подходит

$\lambda_3 - \lambda_2 = 7 = s_{23} \Rightarrow v_2$ подходит $\Rightarrow v_2 v_3 v_5$

3) $\lambda_2 - \lambda_0 = 8 < 9 = s_{02} \Rightarrow v_0$ не подходит

$\lambda_2 - \lambda_1 = 5 = s_{12} \Rightarrow v_1$ подходит

4) $\lambda_1 - \lambda_0 = 3 = s_{01} \Rightarrow v_0$ подходит $\Rightarrow v_1 v_2 v_3 v_5$

Ответ: $v_0 v_1 v_2 v_3 v_5$ – минимальный путь длины 14.