7. Переходные процессы в *RC*- и *RL*-цепях. Квазистационарные токи. Электрические колебания

Переходный процесс, или **процесс релаксации**, есть переход системы из некоторого начального состояния в конечное стационарное состояние, где динамические характеристики системы не меняются со временем. К таким динамическим характеристикам в электрических цепях относятся заряд на конденсаторе, величина постоянного тока, а также частота, амплитуда и фаза колебаний тока, напряжения и заряда на конденсаторе в случае стационарного периодического процесса в электрическом колебательном контуре.

Характерное время переходного процесса называется **временем релаксации**. Если время релаксации много больше времени распространения электромагнитного сигнала по всей длине электрической цепи, то соответствующий переходный процесс называется **квазистационарным**. Скорость распространения электромагнитного сигнала равна скорости света в этой среде, где находится электрическая цепь. Квазистационарные токи зависят только от времени и для них справедливы правила Кирхгофа. Благодаря переменному электромагнитному полю квазистационарный ток может течь через конденсатор при его зарядке или разрядке несмотря на разрыв цепи.

Во всех рассматриваемых ниже задачах переходные процессы и электрические колебания считаются квазистационарными.

Задача № 24

Электрическая цепь, показанная на рис. 1, в начальном состоянии является разомкнутой, а конденсатор не заряжен. В момент времени t=0 ключ K замыкается и конденсатор начинает заряжаться. Определите зависимость заряда $q(t)$ на конденсаторе от времени t и найдите время релаксации τ_c для данного переходного процесса. Параметры всех элементов цепи указаны на схеме.

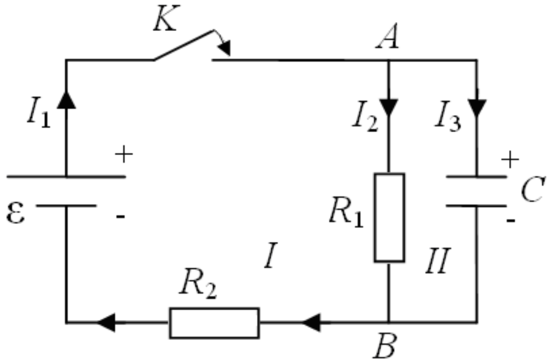

Рис. 1

Решение

Решение задачи основано на правилах Кирхгофа, которые применимы к квазистационарным электрическим процессам.

Введем токи I_1, I_2 и I_3, протекающие через источник постоянной ЭДС, резистор R_1 и конденсатор C, как показано на схеме. Согласно первому правилу Кирхгофа для узла A выполняется следующее соотношение для токов:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \,. \tag{1}$$

Обходя по ходу часовой стрелки контуры I и II и используя второе правило Кирхгофа, получим:

$$I_2R_1 + I_1R_2 = \varepsilon \tag{2}$$

и

$$\frac{q}{C} - I_2R_1 = 0 \,. \tag{3}$$

Система уравнений (1)-(3) содержит 4 неизвестные величины I_1, I_2, I_3 и q, поэтому необходимо добавить четвертое уравнение, связывающее заряд q на конденсаторе с током I_3, протекающим через конденсатор в квазистационарном процессе,

$$I_3 = \frac{dq}{dt} \,. \tag{4}$$

Это уравнение есть следствие закона сохранения электрического заряда и представляет собой уравнение непрерывности. С другой стороны, уравнение (1) выражает одинаковое значение тока I_3 во всех сечениях того участка цепи AB, где включен конденсатор, для произвольного момента времени.

Последовательно исключая из системы уравнений (1) – (4) все токи, можно получить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка по времени t для нахождения временной зависимости заряда q на конденсаторе:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{dq}{\tau_C} = \frac{\varepsilon}{R_2} \,, \tag{5}$$

где постоянная

$$\tau_c = \frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2} \tag{6}$$

имеет размерность времени и может быт принята в качестве времени релаксации для рассматриваемого переходного процесса.

Решение дифференциального уравнения (5) при начальном условии

$$q(t=0) = 0 \tag{7}$$

имеет вид:

$$q = \frac{\varepsilon\tau_C}{R_2}\,(1 - e^{-t/\tau_C}) = q_\infty(1 - e^{-t/\tau_C})\,. \tag{8}$$

График функции $q(t)$ приведен на рис. 2.

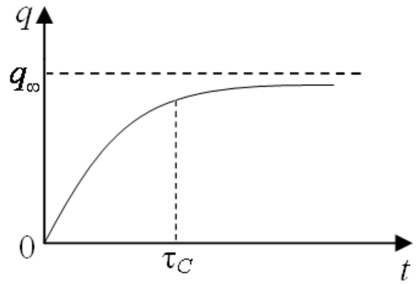

Рис. 2

Здесь

$$q = \frac{\varepsilon\tau_C}{R_2} = \frac{\varepsilon C R_1}{R_1 + R_2}$$

есть предельный (максимальный) заряд на конденсаторе, который определяется падением напряжения на резисторе R_1 при протекании через него постоянного тока

$$I = \frac{\varepsilon C R_1}{R_1 + R_2}\,.$$

Для рассматриваемого переходного процесса время τ_c можно условно считать временем релаксации. За это время заряд на конденсаторе достигает значения

$$q(\tau_c) \approx 0{,}63 q_\infty\,.$$

Ответ: $q = \frac{\varepsilon\tau_C}{R_2}\,(1 - e^{-t/\tau_C})$, $\tau_c = \frac{C R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Задача № 25

Электрическая цепь, изображенная на рис.1, в начальном состоянии разомкнута и ток через катушку индуктивности L не течет. Определите зависимость тока $I_1(t)$, протекающего через катушку индуктивности, от времени t, если в момент времени t=0 замкнуть ключ K. Параметры всех элементов цепи указаны на схеме. Сопротивление катушки индуктивности считать равным нулю.

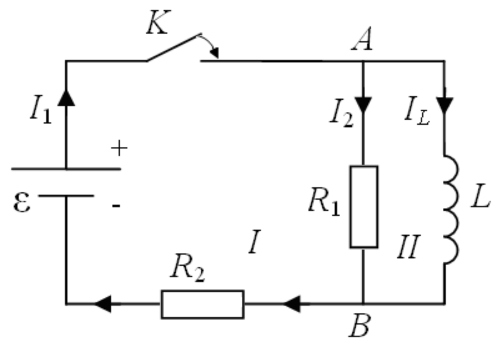

Рис. 1

Решение

Решение задачи основано на правилах Кирхгофа и законе электромагнитной индукции.

Введем токи I_1, I_2 и I_L, протекающие через источник постоянной ЭДС, резистор R_1 и катушку индуктивности L, как показано на схеме. Для узла A согласно первому правилу Кирхгофа выполняется следующее соотношение для токов:

$$I_1 - I_2 - I_L = 0\ . \tag{1}$$

Обходя по ходу часовой стрелки контуры I и II и используя второе правило Кирхгофа, получим:

$$I_2 R_1 + I_1 R_2 = \varepsilon \tag{2}$$

и

$$-I_2 R_2 = \varepsilon_{\text{с. инд}} = -L\,\frac{dI_L}{dt}\ . \tag{3}$$

Система независимых уравнений (1)-(3) является полной для нахождения 3 токов I_1, I_2 и I_L. Последовательно исключая из нее токи I_1 и I_2, можно получить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка по времени для нахождения тока $I_L(t)$:

$$\frac{dI_L}{dt} + \frac{I_L}{\tau_L} = \frac{\varepsilon}{\tau_L R_2}\ , \tag{4}$$

где введено время релаксации

$$\tau_L = \frac{L(R_1+R_2)}{R_1 R_2} = \frac{L}{R_{\text{экв}}}\ ,\quad R_{\text{экв}} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\ . \tag{5}$$

Решение дифференциального уравнения (4) при начальном условии

$$I_L\,(t=0)=0 \tag{6}$$

имеет вид:

$$I_L = \frac{\varepsilon}{R_2}(1\text{-}e^{-t/\tau_L}) = I_{L\infty}(1\text{-}e^{-t/\tau_L})\ . \tag{7}$$

График функции $I_L\,(t)$ приведен на рис.2. Предельный максимальный ток

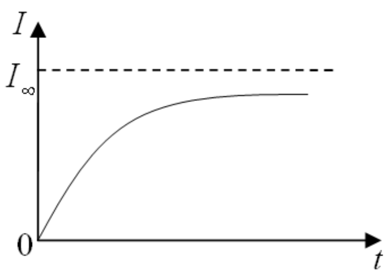

Рис. 2

$I_{L\infty}$ протекает через катушку индуктивности с нулевым сопротивлением и резистор с сопротивлением R_2. Таким образом, катушка индуктивности «закорачивает» резистор с сопротивлением R_1 (I_2=0).

Ответ: $I_L = \dfrac{\varepsilon}{R_2}(1\text{-}e^{-t/\tau_L})$, $\tau_L = \dfrac{L(R_1+R_2)}{R_1R_2}$.

Задача № 26

Определите соотношение между амплитудами тока I_0 и напряжения V_0 на конденсаторе в случае свободных электрических колебаний без затухания, происходящих в LC-контуре, изображенном на рис. 1. Параметры элементов указаны на схеме.

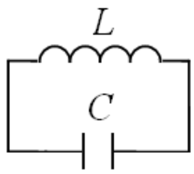

Рис. 1

Решение

Задача решается на основе закона сохранения энергии, согласно которому при колебаниях максимальная энергия электрического поля в конденсаторе преобразуется в максимальную энергию магнитного поля в катушке индуктивности, поэтому

$$W_{c\,max}=W_{L\,max}\ , \tag{1}$$

где

$$W_{C\,max}=\frac{1}{2}CV_0^2 \tag{2}$$

– максимальная энергия электрического поля в конденсаторе и

$$W_{L\,max}=\frac{1}{2}LI_0^2 \tag{3}$$

– максимальная энергия магнитного поля в катушке индуктивности.

Из (1) – (3) следует, что

$$\frac{I_0}{V_0}=\sqrt{\frac{C}{L}}\ .$$

Ответ: $\dfrac{I_0}{V_0}=\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.