Электричество и магнетизм

Семестр 2

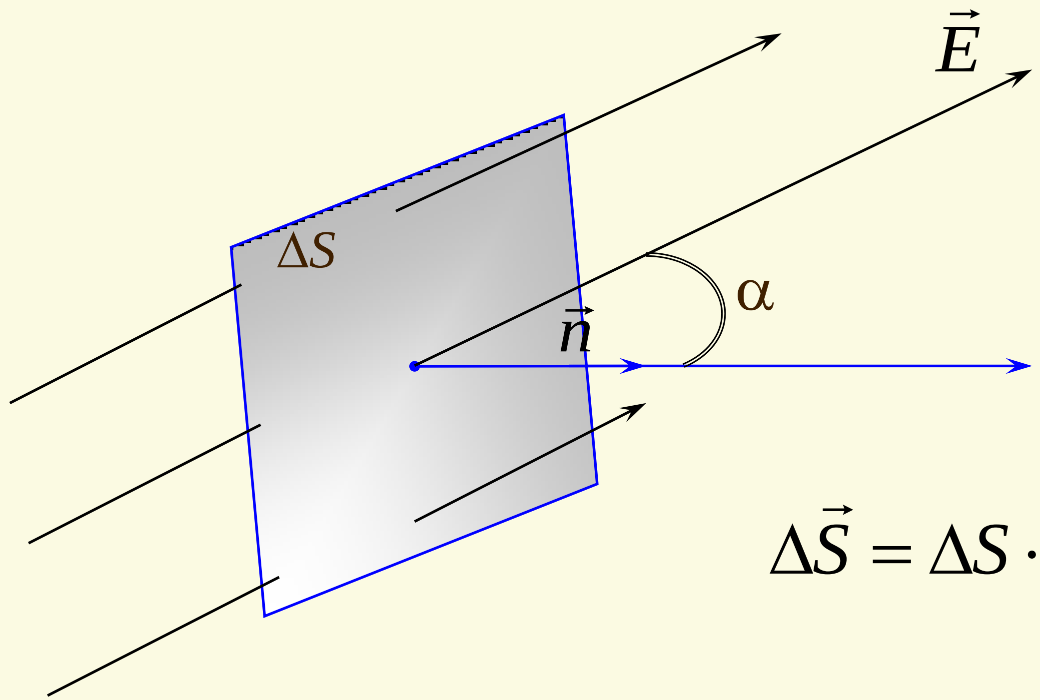
ЛЕКЦИЯ № 2

1. Поток вектора напряженности электрического поля.
2. Теорема Гаусса для электрического поля (в вакууме).
3. Применение теоремы Гаусса для расчёта электрических полей бесконечной равномерно заряженной плоскости и сферической поверхности.

Поток вектора напряжённости электрического поля

Выделим в однородном электрическом поле плоскую поверхность ΔS

Введём вектор, численно равный площади поверхности ΔS на вектор нормали $\vec{n}$ к этой поверхности и назовём его вектор площади: $\Delta\vec{S} = \Delta S \cdot \vec{n}$



$$\Delta\vec{S} = \Delta S \cdot \vec{n}$$

Потоком вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$ ***через выделенную поверхность*** $\Delta\vec{S}$ *называется скалярное произведение этих двух векторов:*

$$\Delta\Phi\left(\vec{E}\right) = \vec{E}\cdot\Delta\vec{S} = E\cdot\Delta S\cdot\cos\alpha$$

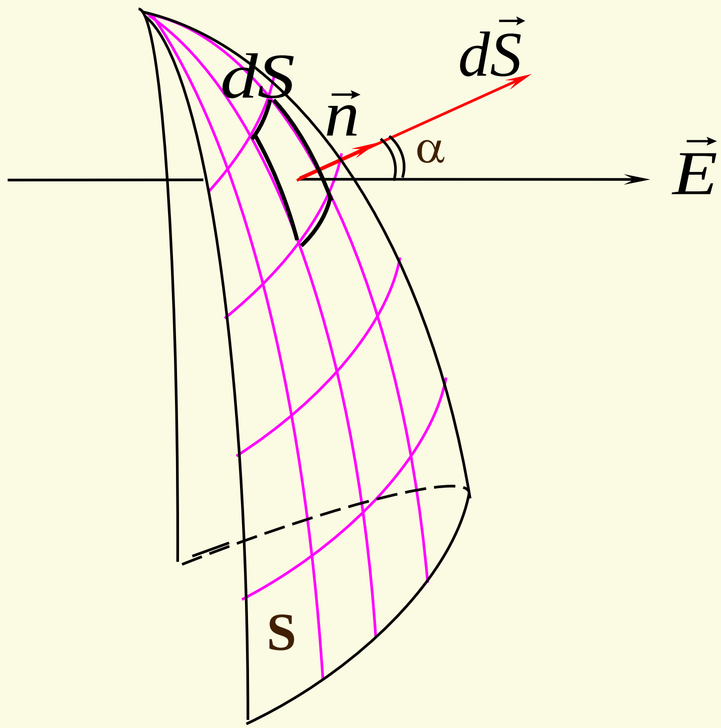
Если поле в общем случае неоднородно, а поверхность S, через которую следует вычислить поток, не плоская, то эту поверхность делят на элементарные участки $d\vec{S}$, в пределах которых напряжённость можно считать неизменённой, а сами участки — плоскими.

Элементарный поток вектора напряжённости через такой элементарный участок $d\vec{S}$ вычисляется по определению потока: $d\Phi\left(\vec{E}\right) = \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot dS\cdot\cos\alpha = E_n\cdot dS$

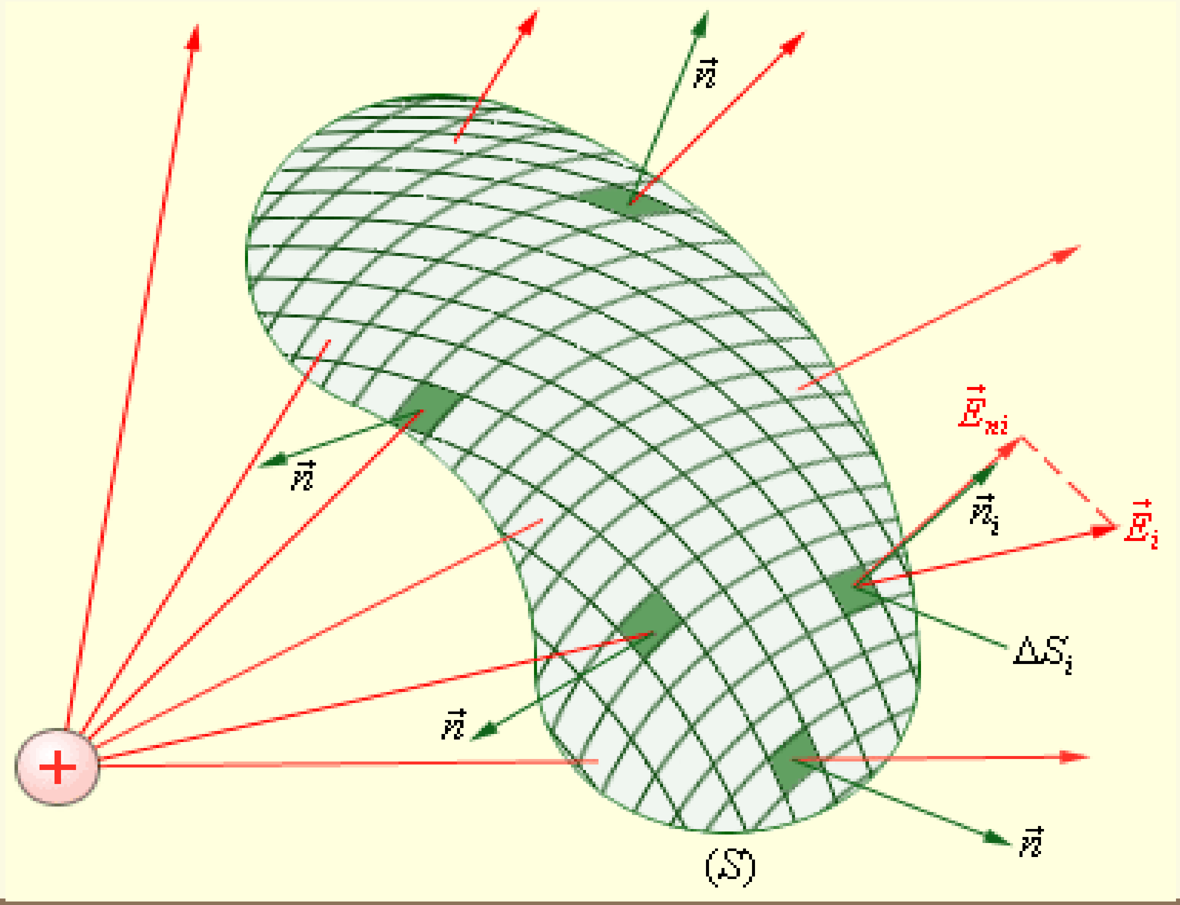
где $E_n = E\cdot\cos\alpha$ — проекция вектора напряжённости на направление нормали $\vec{n}$.

Полный поток через всю поверхность S найдём, проинтегрировав по всей поверхности:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E_n \cdot dS$$



Теперь представим себе ***замкнутую поверхность*** в электрическом поле. Для отыскания потока вектора напряжённости через подобную поверхность проделаем следующие операции: разделим поверхность на участки, а затем проинтегрируем по всей ***замкнутой*** поверхности *S*.



В результате получим полный поток вектора напряжённости через всю замкнутую поверхность S:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS \cdot \cos\alpha = \oint_S E_n dS$$

Кружок на знаке интеграл $(\oint_s)$ означает, что интегрирование берётся по ***замкнутой поверхности.***

Теорема Гаусса для электрического поля

Эта теорема представляет собой только следствие закона Кулона и принципа суперпозиции электрических полей.

Поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме электрических зарядов, заключённых внутри этой поверхности, делённой на электрическую постоянную ε_0.

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0}}$$

- теорема Гаусса (иногда теорема Остроградского- -Гаусса)

Гаусс Карл Фридрих (1777 – 1855)
немецкий математик, астроном и физик.

Исследования посвящены многим разделам физики.

В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), введя три основных единицы: единицу времени – 1 с, единицу длины – 1 мм, единицу массы – 1 мг.

В 1833 г. совместно с В. Вебером построил первый в Германии электромагнитный телеграф.

Еще в 1845 г. пришел к мысли о конечной скорости распростране-ния электромагнитных взаимодействий. Изучал земной магнетизм, изобрел в 1837 г. униполярный магнитометр, в 1838 г. – бифилярный.

В 1829 г. сформулировал принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса).

Один из первых высказал в 1818 г. предположение о возможности существования неевклидовой геометрии.

Остроградский Михаил Васильевич

(1801 – 1862)

российский математик и механик.

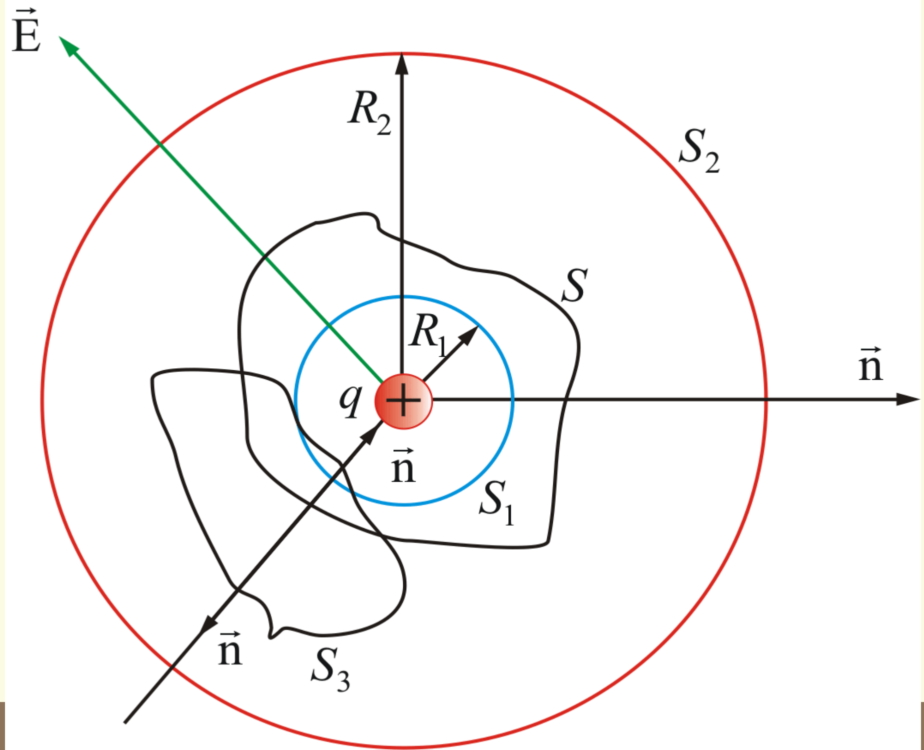
Учился в Харьковском ун-те (1816 – 1820), совершенствовал знания в Париже (1822 – 1827).

Основные работы в области математического анализа, математической физики, теоретической механики. Решил ряд важных задач гидродинамики, теории теплоты, упругости, баллистики, электростатики, в частности задачу распространения волн на поверхности жидкости (1826 г.). Получил дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых телах и жидкостях. Известен теоремой Остроградского-Гаусса в электростатике (1828 г.).

Для доказательства теоремы Гаусса рассмотрим сначала сферическую поверхность S, радиусом R_1, в центре которой находится точечный заряд q.

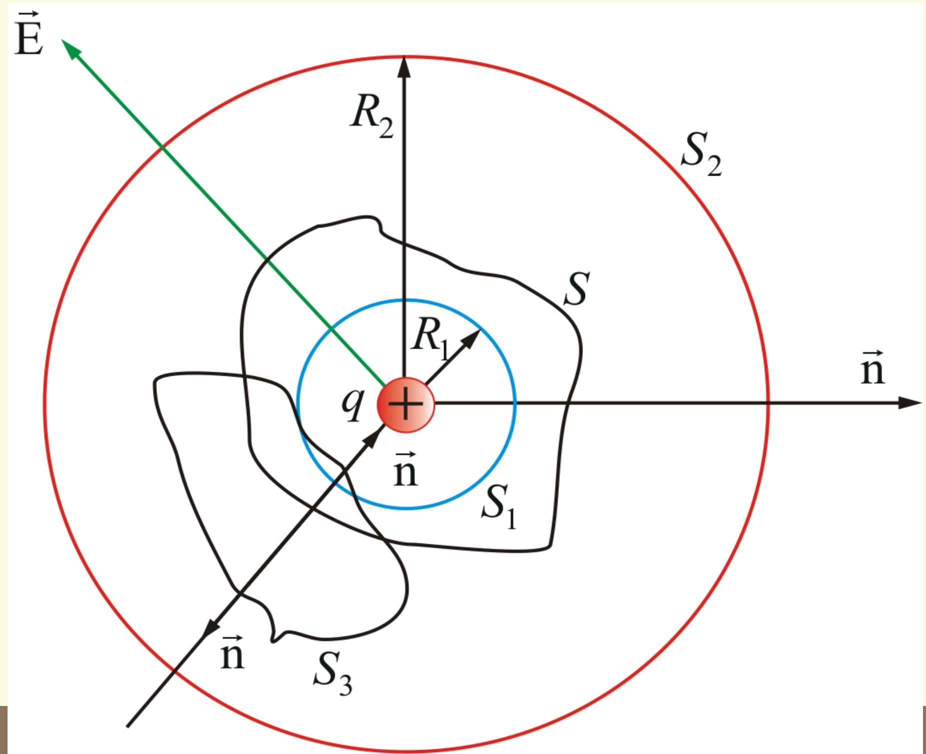
Напряжённость поля точечного заряда равна:

$$\vec{E} = k_0 \frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



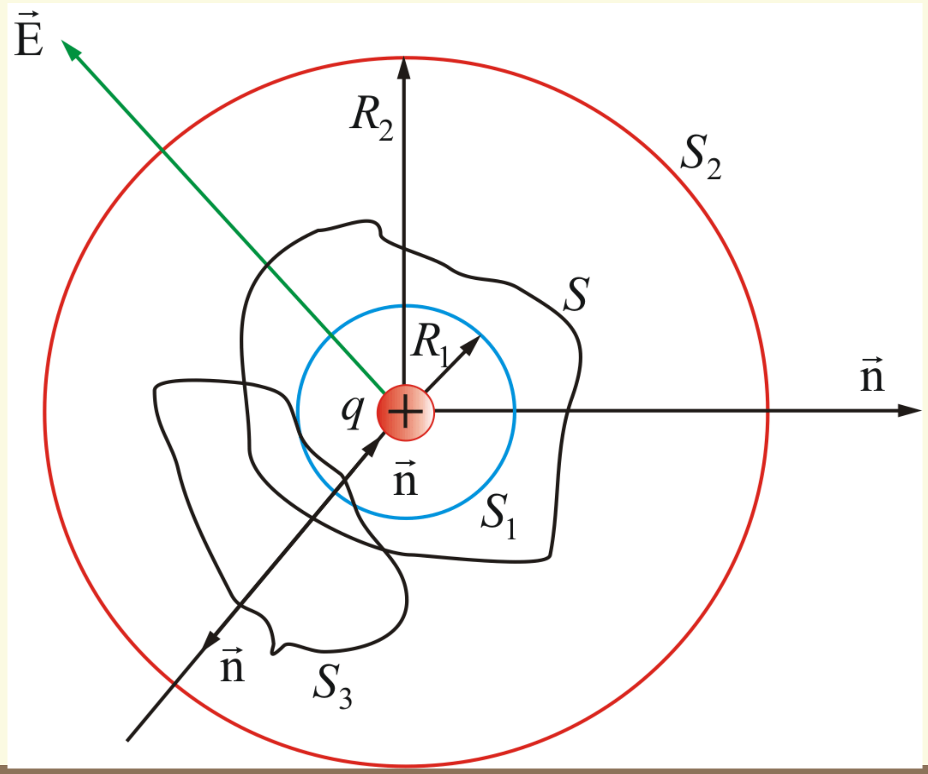
Учитывая сферическую симметрию поля, выберем вначале в качестве гауссовой замкнутой поверхности сферу радиусом R_1 , с центром в той точке, где находится заряд q. Поток вектора напряжённости через эту поверхность вычислить легко:

$$\Phi_{S_1}(\vec{E}) = \oint_{S_!} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E \oint_{S} dS = E \cdot 4\pi R_1^2$$



В каждой точке поверхности S_1 проекция $\vec{E}$ на направление внешней нормали одинакова и равна:

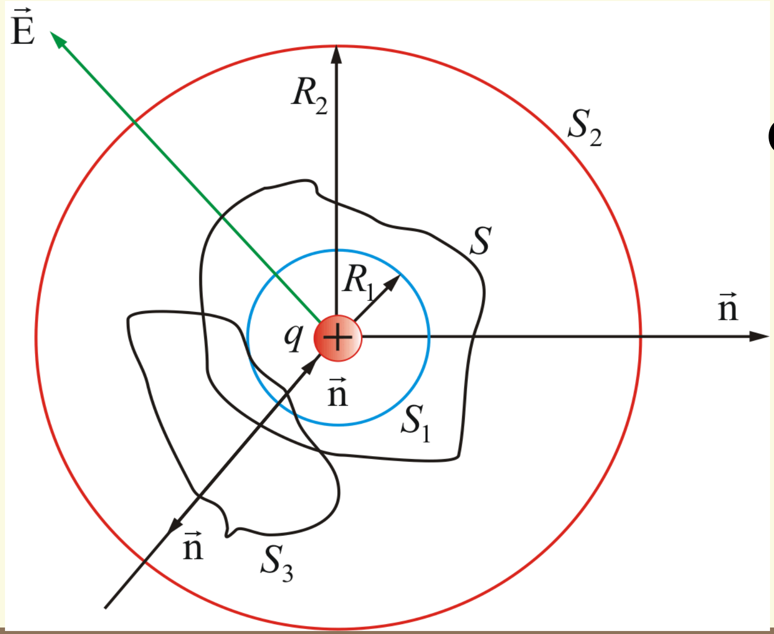
$$E_n = E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}$$



Подставляем значение $E_n = E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}$ получаем

поток вектора напряжённости через поверхность S_1:

$$\Phi_{S_1}(\vec{E}) = \oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi R_1^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



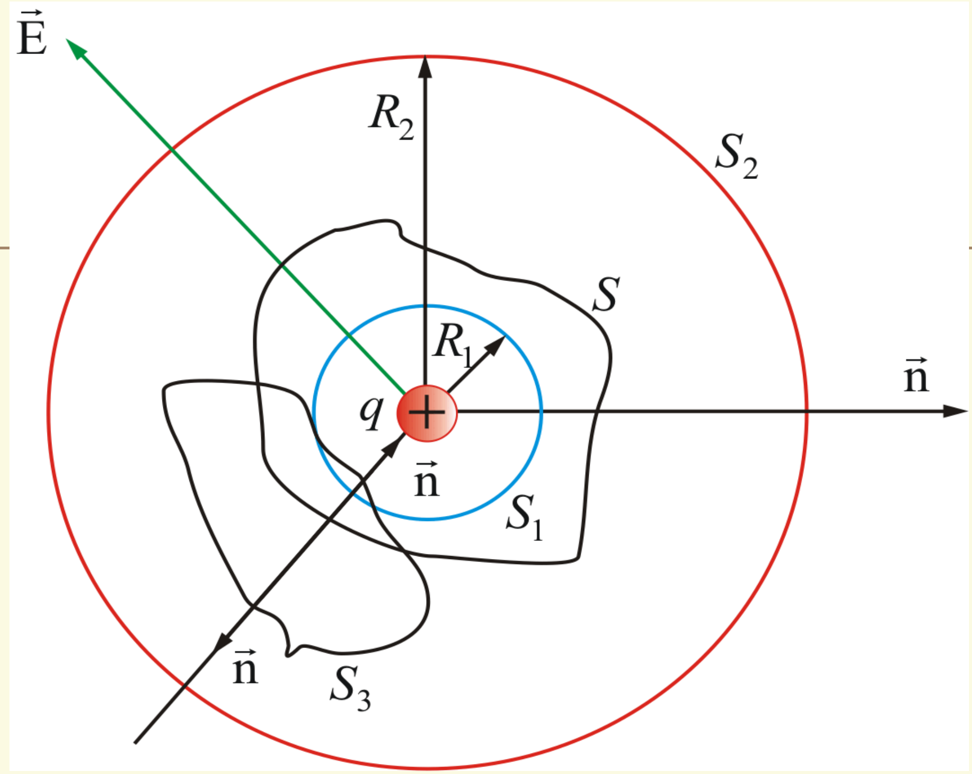
$$\Phi_{S_1}(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Из непрерывности линии $\vec{E}$ следует, что поток и через любую *произвольную* поверхность **S** будет равен этой же величине:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

- теорема Гаусса
(для одного заряда)



Полный поток проходящий через S_3, не охватывающую заряд q, равен нулю:

$$\Phi_3 = 0$$

Таким образом, для точечного заряда q, полный поток через любую замкнутую поверхность S будет равен:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

– если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;

$$\Phi_E = 0$$

– если заряд расположен вне замкнутой поверхности;

этот результат не зависит от формы поверхности, и знак потока совпадает со знаком заряда.

Для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности **S** :

$$\oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

– ***теорема Гаусса для нескольких зарядов*:**

Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на ε_0.

Электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой ***объемной плотностью*** различной в разных местах пространства:

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Здесь **dV** – ***физически бесконечно малый объем***, под которым следует понимать такой *объем, который с одной стороны достаточно мал, чтобы в пределах его плотность заряда считать одинаковой, а с другой – достаточно велик, чтобы не могла проявиться дискретность заряда*, т.е. то, что любой заряд кратен целому числу элементарных зарядов электрона или протона .

Суммарный заряд объема dV будет равен:

$$\sum q_i = \int_V \rho dV.$$

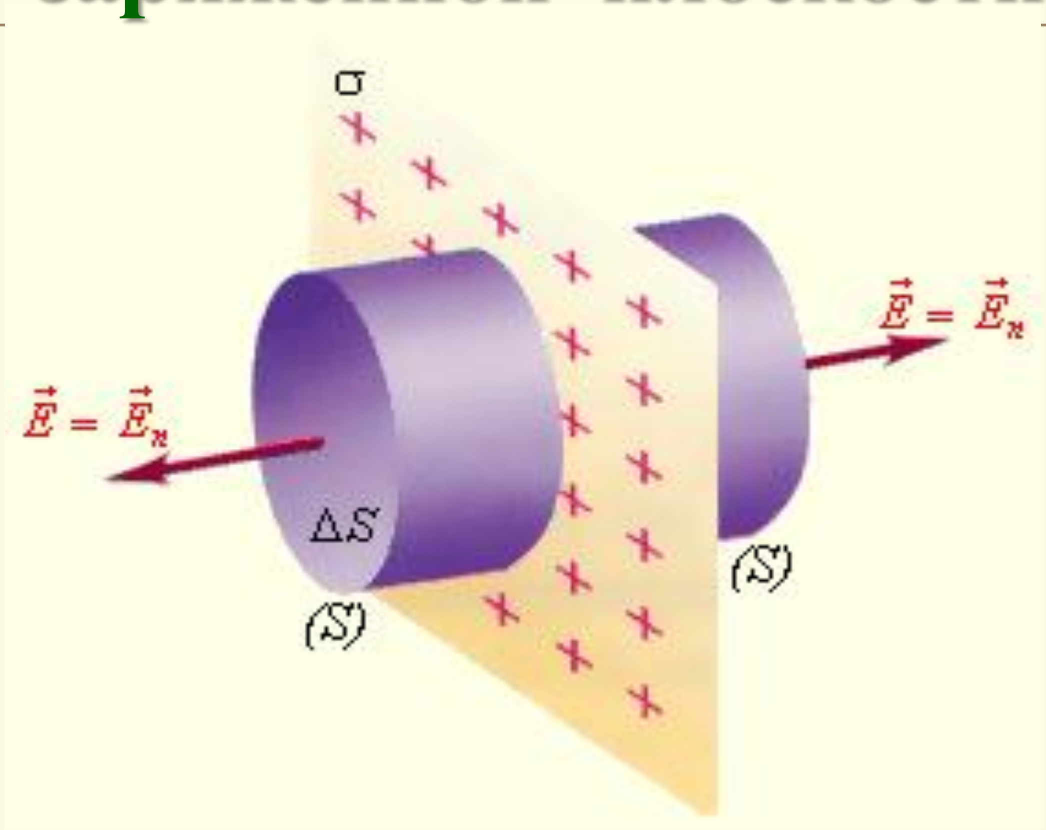
Тогда из теоремы Гаусса можно получить:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

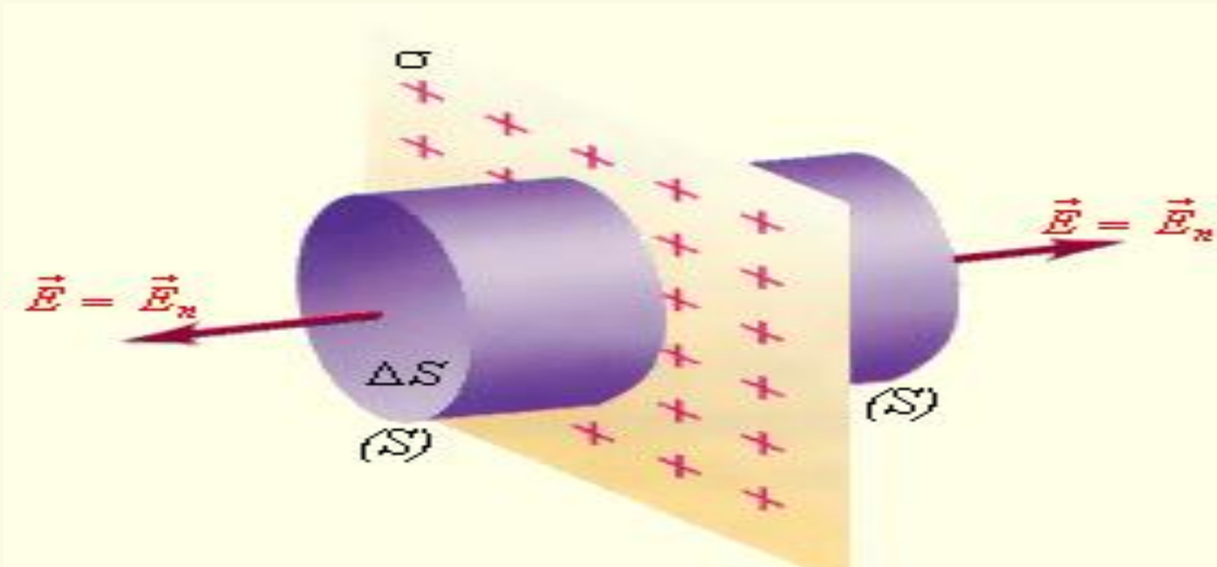
– это ещё одна форма записи ***теоремы Гаусса****, если заряд неравномерно распределен по объему.*

Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости



Поле равномерно заряженной плоскости. $\sigma = \dfrac{q}{S}$ - поверхностная плотность заряда, замкнутая гауссова поверхность в виде симметричных цилиндров.

Эти цилиндры с образующими, перпендикулярными заряженной плоскости, и основаниями ΔS, расположенными симметрично относительно плоскости.



Полный поток через замкнутую цилиндрическую поверхность можно записать как поток через два основания цилиндра ΔS:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{бок}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + 2 \int_{S_{\text{осн}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E \int_{S_{\text{осн}}} dS = 2E \cdot \Delta S$$

Суммарный **поток** через два основания ΔS замкнутых поверхностей (цилиндров) будет равен (через боковую поверхность 0):

$$\Phi_E = 2E \cdot \Delta S$$

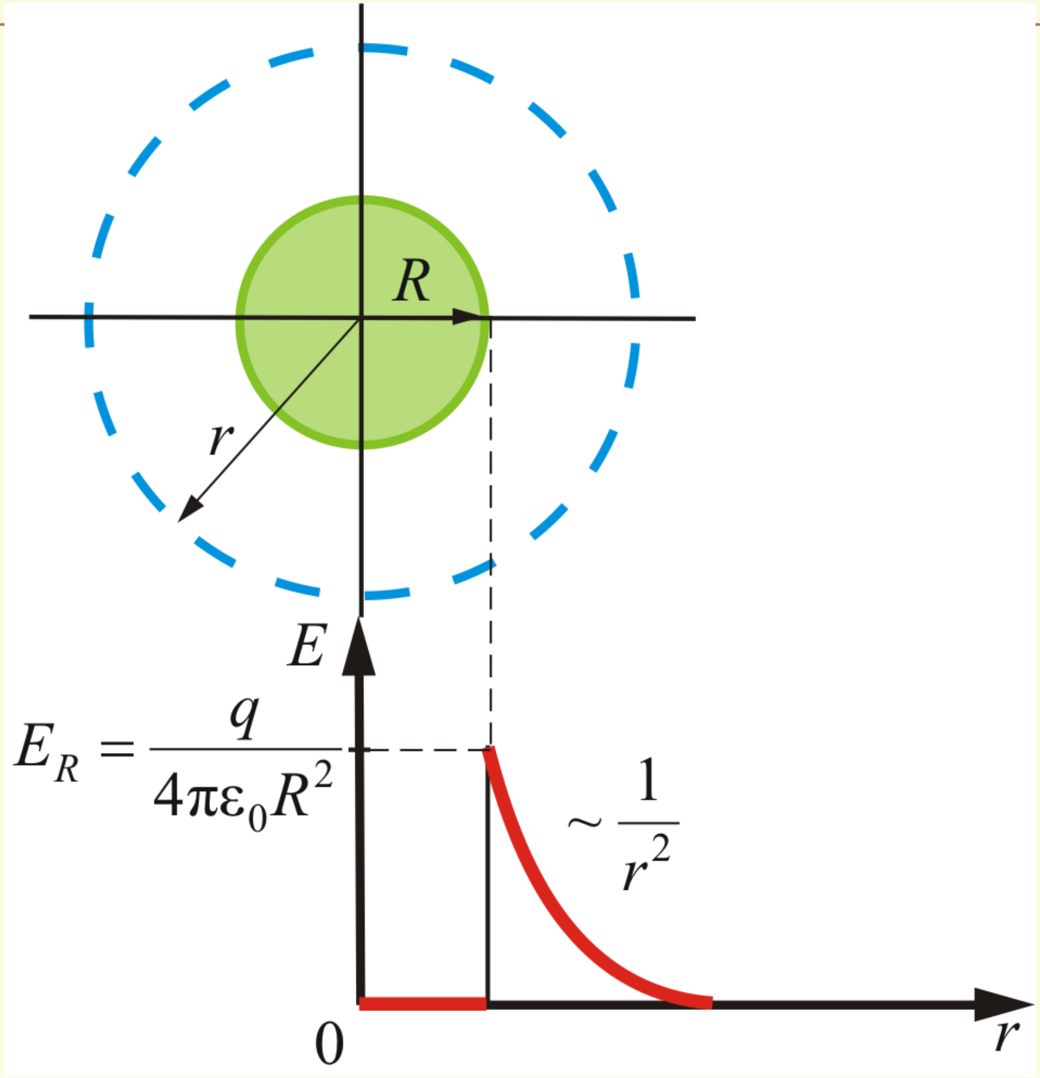
Внутри поверхности заключен заряд q. Следовательно, из теоремы Гаусса получим:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \sigma \cdot \Delta S \frac{1}{\varepsilon_0} = 2E \cdot \Delta S$$

откуда видно, что ***напряженность поля заряженной плоскости*** :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Электростатическое поле равномерно заряженной сферической поверхности



1. Если $r \geq R$, то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд q, распределенный по сфере, тогда:

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

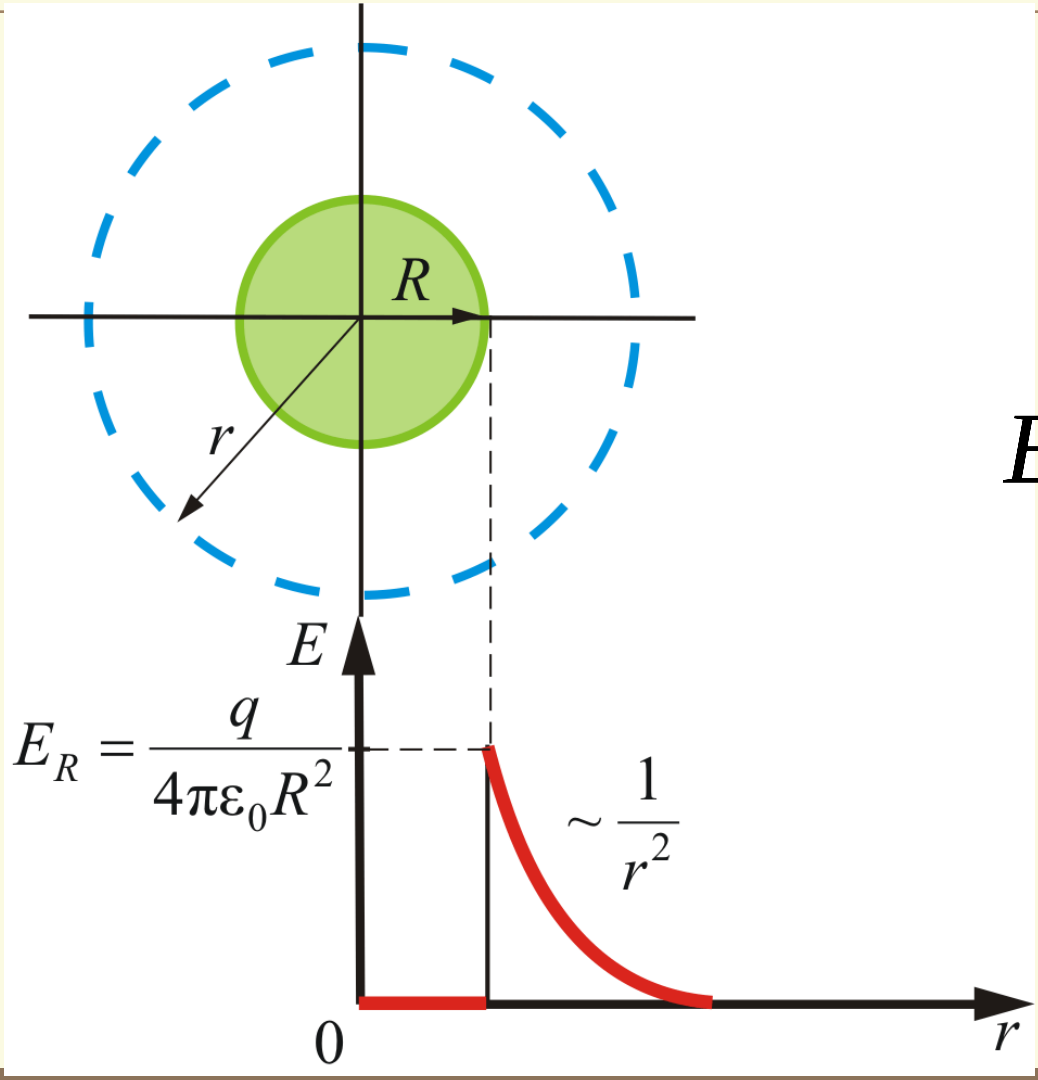
откуда ***поле вне и на поверхности сферы***:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2. ***Внутри сферы***, при $r < R$, поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:

$$E(r) = 0.$$

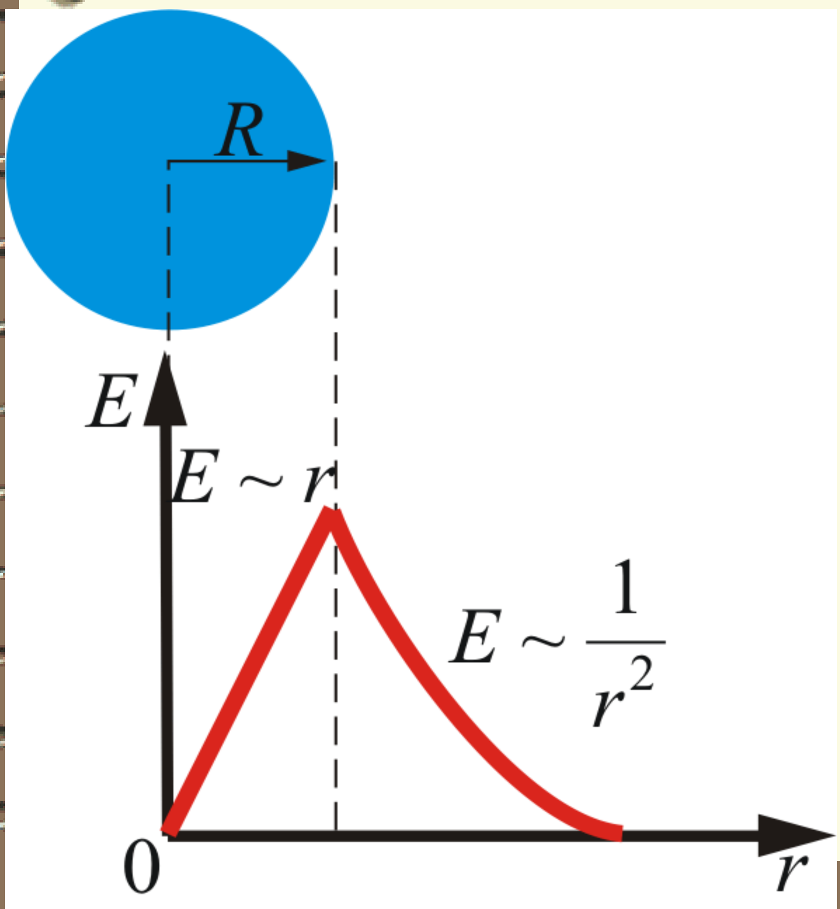
Как видно, ***вне сферы*** поле тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы, внутри поля нет.



$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Электростатическое поле равномерно заряженного шара

Для поля ***вне шара*** радиусом R получается тот же результат, что и для пустотелой сферы, т.е. справедлива формула:



$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Внутри шара при $r < R$, сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad \rho = \frac{q}{V}$$

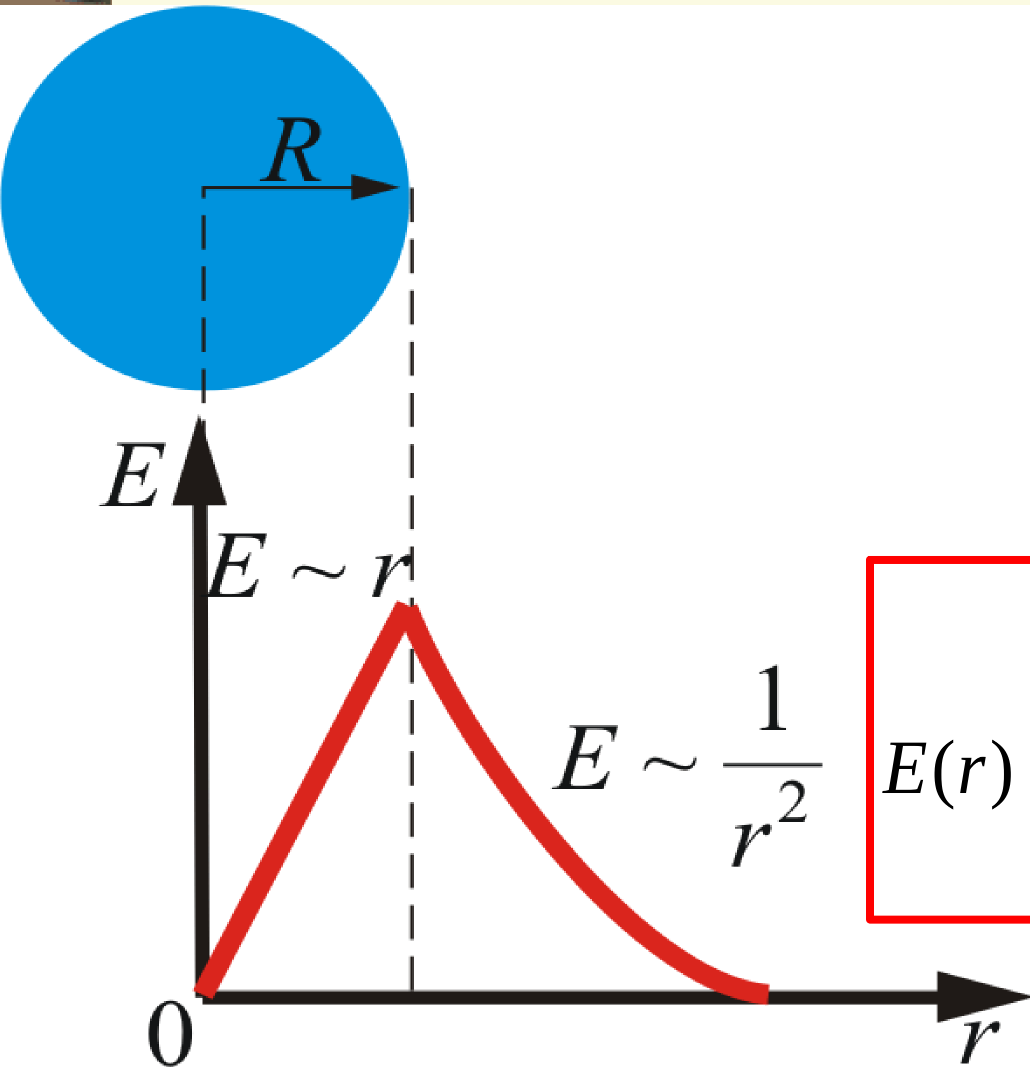
где $\boldsymbol{\rho}$ – объемная плотность заряда:

объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Тогда, по теореме Гаусса:

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

Тогда внутри шара $E(r) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}$



Т.е., внутри шара имеем

$$E \sim r.$$

Вне шара:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho \dfrac{4\pi R^3}{3}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho \cdot R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Таким образом, имеем: поле заряженного по объёму шара

$$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \text{внутри шара} (r < R) \\ \dfrac{\rho \cdot R}{3\varepsilon_0} - \text{на поверхности шара} (r = R) \\ \dfrac{\rho \cdot R^3}{3\varepsilon_0 r^2} - \text{вне шара} (r > R) \end{cases}$$


Лекция закончена!