

РГР «Интегралы»

Вариант 1

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = e^x$ ,  $y = e$ ,  $x = 0$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = 1 - 2\sqrt{t}$ ,  $y = 2t^3$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = -1$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = 2\sin \varphi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = \frac{1}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}$ ,  $2 \leq x \leq 7$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = t - \sin t$ ,  $y = \cos t - 1$ ,  $\pi \leq t \leq 2\pi$ .
7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x^2+4x+5)}}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ .
8. Шар лежит на дне бассейна глубиной  $H$ . Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды, если его радиус равен  $R$ , плотность равна  $\delta$ , плотность воды  $\delta_v$ .

РГР «Интегралы»

Вариант 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = x^2$ ,  $x + y - 2 = 0$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = \frac{2}{3}t^3$ ,  $y = t^2$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = \frac{2}{3}$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $r = e^\varphi$   
( $0 \leq \varphi \leq 1$ ),  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 1$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ),  $y = 0$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = \sqrt{1 - (x-2)^2}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = \frac{1}{2}(2+t)^{\frac{3}{2}}$ ,  $y = (2-t)^{\frac{3}{2}}$ ,  $-2 \leq t \leq 2$ .
7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $y = \frac{x^2(x^2+2)}{(1+x^2)^2}$  и её асимптотой.
8. Найти кинетическую энергию прямого кругового конуса массы  $M$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  около своей оси, если радиус основания конуса  $R$ , высота  $H$ .  
Указание: момент инерции диска равен  $\frac{1}{2}mr^2$ .

## Вариант 3

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \ln x, y = 0, x = e$ .

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  
 $x = 2 \sin t, y = 3 \cos t$ .

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $r = \frac{3}{\varphi} \quad (1 \leq \varphi \leq 2), \varphi = 1, \varphi = 2$ .

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{4}x^2, y = 0, x = 4.$$

5. Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{1}{2} \left( 1 - (2x)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

6. Найти длину дуги кривой

$$x = \frac{\sqrt{2}}{3}t^3, y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

7. Спрямяема ли кривая  $x = \frac{\cos 2t}{t^2}, y = \frac{\sin 2t}{t^2}, t \geq 1$ ?

8. Вычислить сопротивление при прохождении тока с одного основания усеченного конуса к другому, если радиусы оснований равны  $a$  и  $b$ , высота  $H$ , удельное сопротивление  $\rho$ .

## Вариант 4

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $x = t^3 + 2, y = t^2$  и прямыми  $y = 0, x = 1$ .

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = 4 \cos \varphi$ .

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \frac{6}{x}, y = 0, x = 1, x = 6$ .

5. Найти длину дуги кривой  $y = \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ .

6. Найти длину дуги кривой

$$x = \frac{1}{2}(3-2t)^{\frac{3}{2}}, y = \frac{1}{4}(2t+1)^{\frac{3}{2}}, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}.$$

7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:

$$y = (1+x^2)^{-\frac{5}{4}}, y = 0, x = 0.$$

8. Куб погружен в воду так, что его верхнее основание находится на поверхности воды. Определить работу необходимую для извлечения куба из воды, если его ребро равно  $a$ , удельный вес  $\delta$  ( $\delta > 1$ ). Удельный вес воды принять за 1.

## Вариант 5

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{8x}$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = 4t^2$ ,  $y = \frac{8}{3}t^3$  и прямой  $x = 1$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой:  
 $r = 1 + \cos \varphi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:

$$y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

5. Найти длину дуги кривой  $y = \left(\frac{1-2x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ,  $-4 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .
6. Найти длину дуги кривой

$$x = 2\sin^3 t, y = 2\cos^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

7. Имеет ли конечную площадь фигура, ограниченная линиями:  $y = x^{-\frac{3}{2}} \ln(1+x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ?
8. Цилиндр с высотой  $H$  и радиусом  $R$ , наполненный газом под атмосферным давлением  $p_0$ , закрыт поршнем. Найти работу, затрачиваемую на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на расстояние  $h$  внутрь цилиндра. (Применить закон Бойля-Мариотта).

## Вариант 6

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = 2x - x^2$ ,  $x + y = 0$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = 2t - 1$ ,  $y = \sqrt{t+4}$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = -1$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = \cos 2\varphi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{x^2 - 1}, y = 0, x = 2.$$

5. Найти длину дуги кривой  $y = \sqrt{2x - x^2}$ .
6. Найти длину дуги кривой

$$x = 3(t-2)^{\frac{3}{2}}, y = (3-t)^{\frac{3}{2}}, 2 \leq t \leq 3.$$

7. Найти длину кривой  $x = \frac{\cos 3t}{t^3}$ ,  $y = \frac{\sin 3t}{t^3}$ ,  $t \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ .
8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферического котла радиуса  $R$ . Удельный вес воды  $\gamma$ .

## Вариант 7

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = x^2, y = \frac{1}{3}x^3$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = t + 1, y = \sqrt{t}(t + 1)$  и прямыми  $y = 0, x = 2, x = 5$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $r = \sqrt{2\sin 2\varphi}$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}, y = 0, x = \frac{1}{2}.$$

5. Найти длину дуги кривой

$$y = 2 - 2(1 - (\frac{x}{2})^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 2.$$

6. Найти длину дуги кривой  $x = 3\sqrt{3} - t^3, y = \frac{3}{2}t^2, 0 \leq t \leq \sqrt{3}$ .
7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, y = 0$ .
8. Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать масло через верхнее отверстие из цистерны (цилиндр с горизонтальной осью, радиус  $R$ , длина  $H$ ). Удельный вес масла  $\gamma$ .

## Вариант 8

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = \sin t, y = 2\cos t$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = \sqrt{1 - \varphi^2}$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = 2\sqrt{x}, y = 0, x = 4$ .

5. Найти длину дуги кривой

$$y = 1 - \sqrt{1 - (x + 1)^2}, -1 \leq x \leq 0.$$

6. Найти длину дуги кривой

$$x = 2(1 - t)^{\frac{3}{2}}, y = 2 - t^{\frac{3}{2}}, 0 \leq t \leq 1.$$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{4}{(x + 3)(x^2 + 4x + 5)}, y = 0, x = -2$$

8. В дне цилиндрического сосуда с площадью основания  $100 \text{ см}^2$  и высотой  $30 \text{ см}$  имеется отверстие. Найти площадь этого отверстия, если вода, наполняющая сосуд, вытекает за 2 мин. ( $V = c\sqrt{2gh}$ ; для воды  $c = 0,6$ )

## Вариант 9

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = \frac{1}{3}t^3 - 1$ ,  $y = \frac{1}{9}t^2$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 8$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = \sin 2\varphi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$ ,  $y = 0$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = 3^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{9}{2}$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 2(1 + \cos 2t)$ ,  $y = 2 \sin 2t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
7. Спряжляема ли кривая  $x = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ ,  $y = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ ,  $t \geq 1$ ?
8. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого  $S$ , а высота  $H$ , плавает на поверхности воды. Какую работу нужно затратить, чтобы вытащить поплавок на поверхность? Удельный вес дерева  $\gamma$ , удельный вес воды – 1.

## Вариант 10

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -\ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{1}{e}$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = t^2 - 4$ ,  $y = t$  и прямой  $x = 0$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $r = 2\sqrt{\cos \varphi}$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \sqrt{x^2 + 4}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = 2 \ln(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})$ ,  
 $\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{5}{3}$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 3(2t - 2)^{\frac{3}{2}}$ ,  $y = (3 - 2t)^{\frac{3}{2}}$ ,  $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ .
7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной кривой  $y = \frac{|x|\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 1}$  и её асимптотой.
8. Найти положение центра масс однородного полушара радиуса  $R$ .

## Вариант 11

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = 4x - 3 - x^2$ ,  $y = 0$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = \frac{1}{3}t^3$ ,  $y = 4 - t^2$  и прямой  $y = 0$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой:  
 $r = 1 + \sin \varphi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $xy = 4$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = \left(2^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 3(1 - \cos t)$ ,  $y = 3(1 + \sin t)$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $y = 2 \arctg x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$  ( $x \geq 0$ ) и её асимптотой.
8. Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз. Радиус основания  $R$ , высота  $H$ , плотность воды  $\rho$ .

## Вариант 12

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ ,  $x - y + 1 = 0$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = t^3$ ,  $y = t^2 - 1$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 8$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = \sqrt{\sin \varphi}$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = 1 - x^2$ ,  $y = 0$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = \sqrt{\frac{1}{16} - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2}$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = (t - 1)^{\frac{3}{2}}$ ,  $y = 3(2 - t)^{\frac{3}{2}}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ .
7. Найти длину кривой  $x = e^{3t} \cos 4t$ ,  $y = e^{3t} \sin 4t$ ,  $t \leq 0$ .
8. В дне котла с формой полушара радиуса  $R$  образовалась пробоина площадью  $S$ . За какое время вода, наполняющая котёл, вытечет из него? ( $V = c\sqrt{2gh}$ )

## Вариант 13

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $xy = 6, x + y - 7 = 0$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = t^2 - 4, y = t^3$  и прямой  $x = 0$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $r = \sqrt{3} \sin \varphi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = x^3, y = 0, x = 2$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = \left(\frac{x-5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, 5 \leq x \leq 20$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = \frac{1}{3}t^3 - t, y = t^2, 0 \leq t \leq \sqrt{3}$ .
7. Имеет ли конечный объем тело, образованное вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной кривой  $y = \frac{x^2}{x^2 + 4x + 5}$  и её асимптотой?
8. Капля с начальной массой  $M$  падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя каждую секунду массу, равную  $m$ . Найти работу силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли.

## Вариант 14

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = x^2 + 4x, x - y + 4 = 0$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = -3 \sin t, y = \cos t$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $r = \frac{1}{\varphi} (0 \leq \varphi \leq \pi), \varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \sqrt{(x+2)^3}, y = 0, x = 0$ .
5. Найти длину дуги кривой  
 $y = \sqrt{1 - (x-1)^2} - 1, 0 \leq x \leq 1$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 2 - (2t-1)^{\frac{3}{2}}, y = 2(2-2t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2} \leq t \leq 1$ .
7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $y = \frac{x^2}{(x^2+1)^2} (x \geq 0)$  и её асимптотой.
8. Ветер производит равномерное давление  $p$  на дверь, ширина которой  $b$ , высота  $h$ . Найти момент силы давления ветра, стремящейся повернуть дверь на петлях.

## Вариант 15

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \cos \pi x$ ,  $y = x^2 - \frac{1}{4}$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = t^3$ ,  $y = 1 - t^2$  и прямой  $y = 0$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $r = \frac{\varphi}{\pi}$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ),  $\varphi = 0$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \sqrt{4-x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = 8 - \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ,  $0 \leq x \leq 8$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = \frac{1}{2}t^2 + 1$ ,  $y = \frac{1}{3}t^3$ ,  $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ .
7. Спрямолинейна ли кривая  $x = \frac{\cos 2t}{t}$ ,  $y = \frac{\sin 2t}{t}$ ,  $t \geq 2$ ?
8. Упругий цилиндрический стержень длины  $l$  и с площадью поперечного сечения  $F$  прикреплен верхним основанием к горизонтальной плите. Удельный вес материала стержня равен  $\gamma$ , модуль Юнга –  $E$ . Найти удлинение стержня под действием собственного веса.

## Вариант 16

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = x^3$ ,  $y = 8$ ,  $x = 0$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = t^3 + 1$ ,  $y = \frac{2}{3}t^2$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 0$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $r = 1 - \cos \varphi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = x\sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ .
5. Найти длину дуги кривой  $x = \ln \cos x$ ,  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ .
6. Найти длину кривой  
 $x = \frac{3}{4}(2-t)^{\frac{3}{2}}$ ,  $y = \frac{1}{4}(t+2)^{\frac{3}{2}}$ ,  $-2 \leq t \leq 2$ .
7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной кривой  $y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+1}$  и её асимптотой.
8. Найти положение центра масс однородного прямого кругового конуса с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ .



## Вариант 17

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = x$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = 1 - \frac{1}{2}t^2$ ,  $y = \frac{1}{2}t^3$  и прямой  $x = -1$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $r = \sqrt{\frac{\varphi}{\pi}}$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ),  $\varphi = \pi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ),  $y = 0$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = \frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}$ ,  $0 \leq x \leq 3$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 1 + \cos t$ ,  $y = t - \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .
7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2}$ ,  $y = 0$ .
8. Найти момент инерции однородного шара радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через его центр. Масса шара равна  $M$ . (Момент инерции диска  $= \frac{1}{2}mr^2$ )

## Вариант 18

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = 4 - 4x^2$ ,  $y = 2 - 2x^2$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = \frac{1}{2}t^2$ ,  $y = t^3$  и прямыми  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = 2$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = 1 - \sin \varphi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = \sqrt{4-x^2}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 1 - 2(2t)^{\frac{3}{2}}$ ,  $y = (1 - 2t)^{\frac{3}{2}}$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ .
7. Найти длину кривой  
 $x = \frac{\cos t + t \sin t}{t^4}$ ,  $y = \frac{\sin t - t \cos t}{t^4}$ ,  $t \geq 1$ .
8. Найти силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.

## Вариант 19

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = 3 - 2x - x^2$ ,  $y = 0$ .

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$x = t^2 + 1, y = \sqrt{t^3} \text{ и прямыми } y = 0, x = 2.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $r = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$ .

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^3 + 1, y = 0, x = 0, x = 1.$$

5. Найти длину дуги кривой

$$y = \left(1 - (x - 1)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, 1 \leq x \leq 2.$$

6. Найти длину дуги кривой

$$x = 3 - t^2, y = \frac{2}{3}t^3, 0 \leq t \leq \sqrt{3}.$$

7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = (x^4 + 5x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $y = 0$ .

8. Найти момент инерции относительно оси вращения однородного тела массы  $M$ , ограниченного параболоидом вращения и плоскостью, перпендикулярной оси. Радиус основания  $R$ . (Момент инерции диска  $= \frac{1}{2}mr^2$ ).

## Вариант 20

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \sin x$ ,  $y = \frac{2}{\pi}x$ .

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = \frac{1}{4}t^2 - 1$ ,  $y = \frac{1}{8}t^3$  и прямой  $x = 0$ .

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $r = \varphi^2$  ( $0 \leq \varphi \leq 1$ ),  $\varphi = 1$ .

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{2}{x\sqrt{x}}, y = 0, x = 1, x = 2.$$

5. Найти длину дуги кривой  $y = \frac{1}{2}\sqrt{1 - (2x - 1)^2}$ .

6. Найти длину дуги кривой

$$x = 2(3 - t)^{\frac{3}{2}}, y = (t - 2)^{\frac{3}{2}}, 2 \leq t \leq 3.$$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = (x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}}$ ,  $y = 0$ .

8. Найти положение центра масс однородного тела, ограниченного параболоидом вращения и плоскостью, перпендикулярной его оси.

## Вариант 21

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{x^2}{4}, y = 2\sqrt{x}.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$x = t^2 - 4, y = 2\sqrt{t^3} \text{ и прямой } y = 0, x = 0.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r = \sqrt{3} \cos \varphi.$$

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, y = 0, x = 0, x = 2.$$

5. Найти длину дуги кривой  $y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 2.$

6. Найти длину дуги кривой

$$x = 3 - t^2, y = t - \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq \sqrt{3}.$$

7. Спрямяема ли кривая  $x = \frac{\sin 3t}{t}, y = \frac{\cos 3t}{t}, t \geq 3?$

8. Найти работу, которую надо затратить на преодоление силы тяжести, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ . Удельный вес песка  $\gamma$ .

## Вариант 22

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{2}{x-1} - 2, x + y - 2 = 0.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$x = 1 - t^2, y = \frac{1}{4}t^3 \text{ и прямыми } x = -3, x = 0.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$r = \frac{2}{\varphi} \left( \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \right), \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi.$$

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \sqrt{\ln x}, y = 0, x = 4.$

5. Найти длину дуги кривой  $y = \ln \frac{1}{\sin x}, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}.$

6. Найти длину дуги кривой

$$x = 2(1 - 2t)^{\frac{3}{2}}, y = (2t)^{\frac{3}{2}} + 1, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной кривой  $y = \frac{1}{1+x^2}$  и её асимптотой.

8. При обработке на станке деталь нагрелась до  $120^\circ$ . Сколько времени потребуется для остывания детали до  $20^\circ$ , если через 3 мин. после окончания обработки температура детали была  $77^\circ$ , а температура воздуха в цехе  $18^\circ$ ? (Скорость охлаждения пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды)

## Вариант 23

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = 1 - x^2$ ,  $y = x^2 - x$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = 1 - t^2$ ,  $y = \sqrt{t}$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 0$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $r = \operatorname{tg} \varphi$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = (x - 1)^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = \frac{1}{3}(2x - 2)^{\frac{3}{2}}$ ,  $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 3 \sin t + 2$ ,  $y = 1 - 3 \cos t$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ .
7. Имеет ли конечную площадь фигура, ограниченная линиями  $y = (x - 1)^{-\frac{5}{4}} \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ?
8. Найти количество тепла, выделяемое переменным током  $I = I_0 \cos \omega t$  в течение периода  $\frac{2\pi}{\omega}$  в проводнике сопротивлением  $R$ . (При  $I = \operatorname{const}$   $Q = 0.24IR^2t$ )

## Вариант 24

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = 4 - \sqrt[3]{x^2}$ ,  $y = 0$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = -2 \sin t$ ,  $y = 4 \cos t$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $r = \varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ),  $\varphi = \pi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ .
5. Найти длину дуги кривой  
 $x = 2 - \frac{1}{4}(4 - (4x)^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 3t^2$ ,  $y = 6\sqrt{3} - 2t^3$ ,  $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ .
7. Спрямяема ли кривая  
 $x = te^{-t} \cos t$ ,  $y = te^{-t} \sin t$ ,  $t \geq 0$ ?
8. Найти массу круглой пластинки радиуса  $R$ , если поверхностная плотность её пропорциональна расстоянию точки от центра и равна  $\delta$  на краю пластинки.

## Вариант 25

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = x^3$ ,  $y = 4x$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = 1 - t^2$ ,  $y = \sqrt{t^3} + 1$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $r = e^{\frac{\varphi}{2}} \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \frac{4}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = (2 - t)^{\frac{3}{2}}$ ,  $y = 2(t - 1)^{\frac{3}{2}}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ .
7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = (x^2 + x + 1)^{-\frac{3}{4}}$ ,  $y = 0$ .
8. Однородный стержень длины  $l$  и массы  $M$  притягивает точку массы  $m$ , которая лежит на его продолжении на расстоянии  $a$  от его ближайшего конца. Найти силу взаимодействия стержня и точки. Гравитационная постоянная равна  $k$ .

## Вариант 26

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \frac{1}{1 + x^2}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = 4 - 2t$ ,  $y = \sqrt{t + 1}$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 4$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $r = \frac{\varphi}{2}$  ( $0 \leq \varphi \leq 2$ ),  $\varphi = 2$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \frac{4}{x + 2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$ .
5. Найти длину кривой  $y = 6\sqrt{3} - 2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ,  $0 \leq x \leq 9$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 2 \cos t + 1$ ,  $y = 2 - 2 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$  и её асимптотой.
8. Найти кинетическую энергию кругового цилиндра плотности  $\rho$  с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ , вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси.

## Вариант 27

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = e^x + e^{-x} - 2, y = 0, x = 1$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = 4 - t^2, y = 3\sqrt{t}$  и прямыми  $y = 0, x = 0$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $r = \sqrt{1 + \cos \varphi} \ (0 \leq \varphi \leq \pi), \varphi = 0$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \sqrt{(1-x)^3}, y = 0, x = 0$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 2t^{\frac{3}{2}}, y = 4(1-t)^{\frac{3}{2}}, 0 \leq t \leq 1$ .
7. Найти длину кривой  $x = \frac{\sin t}{t^3}, y = \frac{\cos t}{t^3}, t \geq \sqrt{3}$
8. Электрический заряд  $e_0$ , сосредоточенный в начале координат отталкивает заряд  $e$  из точки  $(a, 0)$  в точку  $(b, 0)$ . Определить работу силы отталкивания, считая, что взаимодействие происходит в вакууме.

## Вариант 28

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \sqrt[3]{x}, y = x^3$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = t^3 + 1, y = \sqrt{t}$  и прямыми  $y = 0, x = 2$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $r = 2e^{-\varphi} \ (0 \leq \varphi \leq 2), \varphi = 0, \varphi = 2$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = \sqrt{x^2 + 1}, y = 0, x = 1, x = 2$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = 1 + \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 1$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = \sin^3 t - 2, y = 1 - \cos^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной кривой  $y = \frac{x}{x^2 + 1} \ (x \geq 0)$  и её асимптотой.
8. Определить удлинение упругого стержня конической формы, прикрепленного основанием к горизонтальной плите и обращенного вершиной вниз, под действием собственного веса. Радиус основания стержня  $R$ , высота  $H$ , удельный вес  $\gamma$ , модуль Юнга материала равен  $E$ .

## Вариант 29

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = x^2 - 2x$ ,  $y = \frac{1}{3}x^2$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = 2\sqrt{t} + 2$ ,  $y = t^3$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 4$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $r = 1 + \varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2$ ),  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 2$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = \left(\frac{2}{3}x + 2\right)^{\frac{3}{2}}$ ,  $-3 \leq x \leq \frac{3}{2}$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = t^2 + 1$ ,  $y = \frac{1}{3}t(t^2 - 3)$ ,  $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ .
7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $y = \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4}$  и её асимптотой.
8. Напряжение на клеммах электрической цепи  $U = 120\text{В}$ . В цепь равномерно вводится сопротивление со скоростью  $0,1\text{ Ом в секунду}$ . Кроме того в цепь включено постоянное сопротивление  $r = 10\text{ Ом}$ . Сколько кулонов электричества пройдет через цепь в течение 2-х минут?

## Вариант 30

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = 3 - x$ ,  $x = 0$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  
 $x = 1 - t^3$ ,  $y = 2\sqrt{t}$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = -7$ .
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $r = \sqrt{1 + \sin \varphi}$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ),  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$ .
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $x$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = \sqrt{x^2 - 4}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ .
5. Найти длину дуги кривой  $y = 3\left(1 - \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ,  $0 \leq x \leq 3$ .
6. Найти длину дуги кривой  
 $x = 2\cos 2t$ ,  $y = 2(1 - \sin 2t)$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ .
7. Спрямяема ли кривая  
 $x = \frac{\cos t + t \sin t}{t^2}$ ,  $y = \frac{\sin t - t \cos t}{t^2}$ ,  $t \geq 1$ ?
8. Найти силу давления на вертикальную треугольную пластинку с основанием  $a$  и высотой  $h$ , погруженную в воду так, что вершина находится на поверхности, а основание параллельно поверхности воды. (Указание: закон Паскаля).