Лекция 13

Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки:

- *Динамические уравнения Эйлера*

Теорема об изменении кинетического момента $\vec{\mathcal{K}}_o$ твердого тела относительно его неподвижной точки O под действием сил, главный момент которых относительно этой же точки равен $\vec{\mathcal{M}}_O$, выражается равенством: $\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}}_o = \vec{\mathcal{M}}_O$. Далее получаем: $\frac{d\prime}{dt}\vec{\mathcal{K}}_o + \vec{\omega}\times\vec{\mathcal{K}}_o = \vec{\mathcal{M}}_O$, где $\vec{\omega}$ - угловая скорость твердого тела.

Орты подвижного репера $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, жестко связанного с телом, направлены по главным осям инерции этого тела, и $\omega_x,\omega_y,\omega_z,\mathcal{K}_x,\mathcal{K}_y,\mathcal{K}_z$ и $\mathcal{M}_x,\mathcal{M}_y,\mathcal{M}_z$ – координаты векторов $\vec{\omega},\vec{\mathcal{K}}_o,\vec{\mathcal{M}}_O$ в подвижном репере.

В рассматриваемом случае $\mathcal{K}_x = J_{xx}\omega_x,\ \mathcal{K}_y = J_{yy}\omega_y, \mathcal{K}_x = J_{xx}\omega_x, \mathcal{K}_z = J_{zz}\omega_z$. Относительная производная $d'\vec{\mathcal{K}}_o/dt$ - производная в подвижном репере. Отсюда следует: $\frac{d'\vec{\mathcal{K}}_o}{dt} = J_{xx}\dot{\omega}_x\vec{\imath} + J_{yy}\dot{\omega}_y\vec{\jmath} + J_{zz}\dot{\omega}_z\vec{k}$. Проектируя равенство $\frac{d\prime}{dt}\vec{\mathcal{K}}_o + \vec{\omega}\times\vec{\mathcal{K}}_o = \vec{\mathcal{M}}_O$ на подвижные орты, получаем динамические уравнения Эйлера:

$$J_{xx}\dot{\omega}_x + (J_{zz} - J_{yy})\omega_y\omega_z = \mathcal{M}_x$$

$$J_{yy}\dot{\omega}_y + (J_{xx} - J_{zz})\omega_x\omega_z = \mathcal{M}_y$$

$$J_{zz}\dot{\omega}_z + (J_{yy} - J_{xx})\omega_x\omega_y = \mathcal{M}_z$$

- *Кинематические уравнения Эйлера*

$\mathcal{M}_x,\mathcal{M}_y,\mathcal{M}_z$ - могут быть функциями не только времени и неизвестных $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ динамических уравнений Эйлера, но и других переменных: другими переменными могут быть углы Эйлера φ, ψ, ϑ. Чтобы интегрировать динамические уравнения Эйлера в этих случаях нужно дополнить какими-то уравнениями относительно всех тех переменных, от которых величины $\mathcal{M}_x,\mathcal{M}_y,\mathcal{M}_z$ зависят. Дифференциальные уравнения относительно углов Эйлера (кинематические уравнения Эйлера):

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\varphi\, sin\,\vartheta + \dot{\vartheta}cos\varphi$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\cos\varphi\, sin\,\vartheta + \dot{\vartheta}sin\varphi$$

$$\omega_z = \dot{\psi}cos\varphi + \dot{\varphi}$$

Уравнения движения свободного твердого тела

Рассмотрим движение твердого тела в репере $(O,\ \vec{e}_\xi,\vec{e}_\eta,\vec{e}_\zeta)$. В то же время с телом свяжем подвижный репер $(C,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, где C - центр масс твердого тела, а $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ направлены по его главным центральным осям инерции.

$\omega_x,\omega_y,\omega_z,\mathcal{K}_x,\mathcal{K}_y,\mathcal{K}_z$ и $\mathcal{M}_x,\mathcal{M}_y,\mathcal{M}_z$ - координаты векторов $\vec{\omega},\vec{\mathcal{K}}_C,\vec{\mathcal{M}}_C$ в подвижном репере.
Выведем динамические уравнения Эйлера для данного (свободного) движения:

$$J_{xx}\dot{\omega}_x + (J_{zz} - J_{yy})\omega_y\omega_z = \mathcal{M}_x$$

$$J_{yy}\dot{\omega}_y + (J_{xx} - J_{zz})\omega_x\omega_z = \mathcal{M}_y$$

$$J_{zz}\dot{\omega}_z + (J_{yy} - J_{xx})\omega_x\omega_y = \mathcal{M}_z$$

Также выведем кинематические уравнения Эйлера:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin\varphi\, sin\, \vartheta + \dot{\vartheta} cos\varphi$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \cos\varphi\, sin\, \vartheta + \dot{\vartheta} sin\varphi$$

$$\omega_z = \dot{\psi} cos\varphi + \dot{\varphi}$$

Для определения положения и скоростей точек твердого тела в неподвижном репере достаточно знать радиус-вектор $\vec{r}_c$ и скорость $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$ центра масс С. Эти величины нам дает теорема о движении центра масс твердого тела: $m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}$, где m – масса, $\vec{F}$ - главный вектор действующих на него сил.

Приведённые выше уравнения - уравнениями движения свободного твердого тела.

Динамика точки с переменной массой

Материальной точкой переменной массы - геометрическая точка, снабженная массой, величина которой зависит от времени. *Тело переменной массы* - твердое тело, плотность которого есть функция не только координат, но и времени.

Уравнение Мещерского

Рассматриваем на промежутке времени $[t, t + \Delta t]$ механическую систему, образованную частицами, из которых состоит материальная точка в момент времени t, и частицами, которые присоединяются к этой точке за этот промежуток времени. Пусть:

$m(t)$ - масса материальной точки в момент t

Δm_1 - суммарная масса всех присоединившихся частиц за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$

Δm_2 - суммарная масса всех отсоединившихся частиц за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$

$\vec{v}(t)$ - скорость материальной точки в момент t

$\vec{v}_1(t)$ - скорость центра масс всех присоединившихся частиц в момент t

$\vec{v}_2(t)$ - скорость центра масс всех присоединившихся частиц в момент t

Если $\vec{Q}(t)$ - главный вектор количества движения рассматриваемой системы, то $\vec{Q}(t) = m(t)\vec{v}(t) + \Delta m_1 \vec{u}_1(t)$ и $\vec{Q}(t + \Delta t) = m(t + \Delta t)\vec{v}(t + \Delta t) + \Delta m_2 \vec{u}_2(t + \Delta t)$, откуда можно получить: $\frac{d\vec{Q}(t)}{dt} = \vec{F}(t)$ и $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{Q}(t+\Delta t) - \vec{Q}(t)}{\Delta t} = \vec{F}(t)$ ($\vec{F}(t)$ - главный вектор внешних сил, приложенных к системе)

Из полученных выше уравнений получаем уравнение Мещерского движения материальной точки переменной массы:

$$m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) + \vec{R}(t),$$

а $\vec{R}(t) = \frac{dm_1(t)}{dt}\vec{u}_1^r(t) - \frac{dm_2(t)}{dt}\vec{u}_2^r(t)$ (реактивная сила)

и $\vec{u}_1^r(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}(t)$,

$$\vec{u}_2^r(t) = \vec{v}_2(t) - \vec{v}(t)$$

(относительные скорости центров масс присоединяющихся и отделяющихся частиц в момент t).

Первая задача Циолковского:

Тяга – реактивная сила, возникающая в результате истечения некоторого вещества из сопел ракеты. Рассмотрим такую модель движения ракеты, в которой все силы, кроме тяги, равны нулю, а сама ракета принимается за точку переменной массы.

Относительная скорость выброса частиц из сопел ракеты: $\vec{u}^r(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}(t) = -u^r\vec{\imath}$, ($\vec{\imath}$ – орт вектора тяги). Первая задача Циолковского состоит в том, чтобы по заданному изменению массы ракеты за время от t0 до t найти приращение ее скорости за это же время.

Здесь движение точки переменной массы определяется уравнением: $m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\frac{dm(t)}{dt}u^r\vec{\imath}$ <=> $d\vec{v} = -u^r\frac{dm}{dt}\vec{\imath}$. Далее интегрируем от t_0 до t и получаем форму Циолковского: $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + (u^r \ln\frac{m(t_0)}{m(t)})\vec{\imath}$

Вторая задача Циолковского:

Рассмотрим движение ракеты вертикально вверх в однородном поле силы тяжести планеты. Рассмотрим модель движения ракеты, в которой на неё действует тяга, направленная вертикально вверх и сила тяжести, направленная вертикально вниз. Сама ракета - точка переменной массы.

Относительная скорость выброса частиц из сопел ракеты: $\vec{u}^r(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}(t) = -u^r\vec{\imath}$, ($\vec{\imath}$ – орт вектора тяги). Закон изменения массы ракеты как функции времени: $m(t) = m(0)\exp(-\alpha t)$, где α не зависит от времени. Пусть $s(t)$ - путь, пройденный ракетой за время t ($s(t_0) = 0$).

Вторая задача Циолковского состоит в том, чтобы найти закон изменения пути, пройденного ракетой за данное время, используя величины α, $m(t_0)$ и начальному значению её скорости в начальный момент времени.

Здесь движение точки переменной массы определяется уравнением: $m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m(t)\vec{g} + \frac{dm(t)}{dt}\vec{u}^r$, где $\vec{g}$ - ускорение свободного падения в данном однородном поле силы тяжести (направленно вертикально вниз).

Находим ускорение, скорость и путь точки:

$$\frac{dv(t)}{dt} = (q-1)g$$

$$v(t) = (q-1)gt + v(0)$$

$$s(t) = (q-1)\frac{gt^2}{2} + v(0)t$$