Лекция 10.

Движение точки в центральном поле сил

Движение механической системы, состоящей из одной точки M с массой m, определяется действующей на нее внешней силой, а также ее начальным положением и скоростью. Если уравнение Ньютона автономно ($m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$), то в каждый момент времени t сила $\vec{F}$ однозначно определяется положением $\vec{r}$ точки M. Вектор функция $\vec{F}$ – *силовое поле*, а точка M движется в *поле сил* $\vec{F}$.

Центральное поле сил в $D \in E^3$ – такое поле, что при существовании точки O (центр сил) и материальной точки единичной массы, находящейся в D, действует сила, направленная вдоль прямой, проходящей через точки O и M. Уравнение Ньютона для движения данной точки в центральном поле сил: $m\ddot{\vec{r}} = \delta\Phi(r)\frac{\vec{r}}{r}$, где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}, r = |\vec{r}|$, $\Phi(r) = \left|\vec{F}(\vec{r})\right|$, $\delta = \pm 1$.

Уравнения Ньютона для:

- *Двух гравитирующих точек*

Рассмотрим инерциальную систему координат с началом O и две материальные точки M и M_0, с массами m и m_0. Обозначим: $\vec{r}^0 = \overrightarrow{OM_0}, \vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{\varrho} = \overrightarrow{M_0M}$, $r^0 = |\vec{r}^0|$, $r = |\vec{r}|$, $\varrho = |\vec{\varrho}|$. Используя второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения, получаем: $\ddot{\vec{r}}^0 = \gamma\frac{m}{\varrho^3}\vec{\varrho}, \ddot{\vec{r}} = -\gamma\frac{m_0}{\varrho^3}\vec{\varrho}$ (γ - всемирная гравитационная постоянная). Вычитая первое уравнение из второго, получаем уравнения движения точки M в центральном силовом поле с центром в M_0: $m\ddot{\vec{\varrho}} = -\frac{\gamma m(m_0+m)}{\varrho^2}\frac{\vec{\varrho}}{\varrho}$.

- Для двух электрических зарядов

Рассмотрим инерциальную систему координат с началом O и две материальные точки M и M_0, с массами m и m_0 и зарядами q и q_0 соответственно. Введём: $\vec{r}^0 = \overrightarrow{OM_0}, \vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{\varrho} = \overrightarrow{M_0M}$, $r^0 = |\vec{r}^0|$, $r = |\vec{r}|$, $\varrho = |\vec{\varrho}|$. Используя второй закон Ньютона и закон Кулона, получаем: $\ddot{\vec{r}}^0 = \pm k\frac{q_0q}{m_0\varrho^3}\vec{\varrho}$, $\ddot{\vec{r}} = \mp k\frac{q_0q}{m_0\varrho^3}\vec{\varrho}$ ($k -$ положительная постоянная). Вычитая первое уравнение из второго, получаем уравнения движения точки M в центральном силовом поле с центром в M_0: $m\ddot{\vec{\varrho}} = \mp\frac{km(m^{-1}-m^{-1})q_0q}{\varrho^2}\frac{\vec{\varrho}}{\varrho}$ (минус в соответствует случаю притягивающихся точек).

- *Для точки в поле силы Гука*

Рассмотрим движение материальной точки M массы m относительно системы координат с началом O под действием силы Гука ($\vec{F} = -\chi\vec{r}, \vec{r} = \overrightarrow{OM}, \chi$ – зависящая от контекста задачи постоянная). Используя второй закон Ньютона и формулу для силы Гука, получаем уравнение движения точки M в центральном силовом поле с центром силы в точке равновесия O: $m\ddot{\vec{r}} = -\chi r\frac{\vec{r}}{r}$.

При движении материальной точки в центральном поле, главный момент внешних сил относительно центра сил O равен нулю. Следовательно: $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ - интегралом площадей, c_1, c_2, c_3 – постоянные площадей. Если x, y, z — координаты радиус-вектора $\vec{r}$, то данное уравнение можно переписать: $y\dot{z} - \dot{y}z = c_1$, $z\dot{x} - \dot{z}x = c_2$, $x\dot{y} - \dot{x}y = c_3$. Умножив эти равенства на x, y, z и сложив их, получаем плоскость Лапласа: $c_1x + c_2y + c_3z = 0$. Следовательно, если $\vec{c} \neq \vec{0}$, то движение точки происходит в плоскости Лапласа, проходящей через центр сил O.

Геометрическая интерпретация интеграла площадей, говорит о том, что в задаче о движении материальной точки в центральном поле сил наличие этого интеграла является обобщением закона Кеплера о постоянстве секторной скорости планеты.

Если $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$ - радиус-вектор точки M(t) в момент t > t_0 , то ее *секторная скорость* – вектор $\overrightarrow{\sum(t)} = \dot{S}(t)\vec{l}$, S(t) — площадь фигуры, лежащей в плоскости Лапласа, между векторами $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t)$ и дугой $(M(t_0), M(t))$ траектории этой точки. Вектор $\vec{l} = \left(\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t_0)\right)/\left|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t_0)\right|$ (ортагонален плоскости Лапласа)

Теорема: Пусть материальная точка M(t) массы m движется в центральном поле сил с центром сил O ∈ E^3 и $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$ - радиус-вектор этой точки. Если $\overrightarrow{\sum(t)}$ - секторная скорость точки M(t), то: $\overrightarrow{\sum(t)} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t_0)\right) = \frac{1}{2}\vec{c}$, где $\vec{c}$ - постоянная площадей.

Изменение кинетического момента, вычисляемого относительно подвижного полюса

Помня вышеописанные определения, введём новые: радиус-вектор центра масс системы - $\vec{r}_c = m^{-1}\sum_j m_j\vec{r}_j$, $m = \sum_j m_j$, главный вектор ее количества движения - $\vec{Q} = \sum_j m_j\vec{v}_j$, радиус вектор точки A - $\vec{r}_A$, скорость точки A - $\vec{v}_A$, ускорение точки A - $\vec{w}_A$, A∈E^3 – движется относительно некоторого репера с началом в O, главным моментом внешних сил - $\overrightarrow{\mathcal{M}_A} = \sum_j(\vec{r}_j \times \vec{r}_A) \times \vec{F}_j$ и главный момент количества движения - $\overrightarrow{\mathcal{K}_A} = \sum_j(\vec{r}_j \times \vec{r}_A) \times m_j(\vec{v}_j - \vec{v}_A)$ механической системы относительно подвижного полюса A.

Теорема об изменении кинетического момента: Производная кинетического момента механической системы относительно подвижного полюса A и ее главный момент внешних сил относительно того же полюса связаны равенством: $\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathcal{K}_A} + m(\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{w}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}$.

Следствие: Если при любом t полюс A = A(t) совпадает с центром масс системы или движется прямолинейно и равномерно, то $\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathcal{K}_A} + m(\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{w}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}_A} <=> \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathcal{K}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}$

Работа силы и изменение кинетической энергии материальной точки

Рассмотрим уравнение движения в E^3 материальной точки M массы m, на которую действует сила $\vec{F}$: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$.

Умножив скалярно данное уравнение на $d\vec{r}$, получим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме: $dT = \vec{F}d\vec{r}$. Это уравнение записано в терминах бесконечно малых величин, но можно получить его в терминах относительно конечных величин, умножив скалярно $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ на $\vec{v}$ или разделив $dT = \vec{F}d\vec{r}$ на dt: $\frac{dT}{dT} = \vec{F}\vec{v}$.

A - *работа по перемещению материальной точки* под действием силы $\vec{F}$ из точки M_0 в точку M вдоль дуги (M_0, M), где $M_0 = M(t_0)$, $M = M(t)$, t > t_0: $T - T_0 = A, A = \int_{(M_0,M)}\vec{F}d\vec{r}$, где $T_0 = T|_{t=t_0}$. Обозначая символами X, Y, Z координаты вектора $\vec{F}$, получим: $A = \int_{(M_0,M)}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$

Если задать дугу (M_0, M) в параметрической форме, то работу можно записать как определенный интеграл по параметру (обычно используется время t или естественная координата s): $A = \int_{t_0}^{t}\vec{F}\vec{v}dt = \int_{s_0}^{s}\vec{F}\vec{\tau}ds = \int_{s_0}^{s}Fcos\angle(\vec{F};\vec{v})ds$, где $F = |\vec{F}|$, $\vec{\tau} = \vec{v}/v$.

Мощность - $N = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v}$. Используя $\frac{dT}{dT} = \vec{F}\vec{v}$ получаем, что *производная кинетической энергии материальной точки равна мощности работы, выполняемой главным вектором сил, действующих на эту точку.*