ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Элементы теории поля (продолжение)

Пусть S — поверхность в R^3? и в каждой точке этой поверхности задано векторное поле $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$. Обозначим через $\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)^T$ — единичную нормаль к S.

Рассмотрим

$$(\vec{F}, \vec{n}) = |\vec{F}|\,|\vec{n}|\,\cos\alpha = |\vec{F}|\,\cos\alpha = F_n.$$

Здесь α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{n}$; величина F_n равна длине проекции вектора $\vec{F}$ на нормаль $\vec{n}$ (см. рисунок 1).

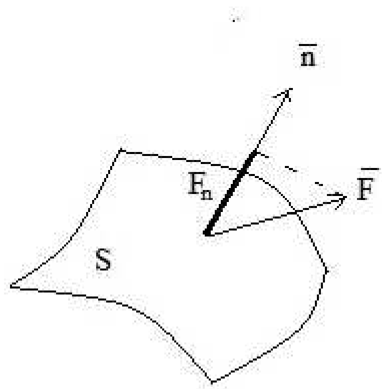

Рис. 1.

Определение. *Поверхностный интеграл* $\iint\limits_{(S)} F_n(x,y,z)\,dS$ *называется потоком векторного поля* $\vec{F}$ *через поверхность* S.

Получаем

$$\iint\limits_{(S)} F_n(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{(S)} (\vec{F}, \vec{n})\,dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(P(x,y,z)\cos\lambda + Q(x,y,z)\cos\mu + R(x,y,z)\cos\nu\right)\,dS.$$

Предположим, что поверхность S — замкнутая и ограничивает тело T. Тогда по формуле Остроградского — Гаусса имеем

$$\oiint\limits_{(S)} F_n(x,y,z)\,dS = \iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\,dxdydz.$$

Определение. *Величина*

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\vec{F}$.

Дивергенция является скалярной характеристикой векторного поля. Можно доказать, что она не зависит от выбора системы координат. Физически дивиргенция характеризует наличие в рассматриваемой области источников (и поглотителей) поля — массы (для гравитационного поля), электрических зарядов (для электромагнитного поля), и т.д.

Формулу Остроградского — Гаусса можно тогда переписать в следующем виде:

$$\oiint\limits_{(S)} F_n(x,y,z)\,dS = \iiint\limits_{T} \mathrm{div}\vec{F}\,dxdydz.$$

Схематически можно записать: $\mathrm{div}\vec{F} = (\vec{\nabla}, \vec{F})$.

Пусть L — некоторая кривая в R^3.

Определение. *Криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int\limits_{(L)} (\vec{F}, \vec{dr}),$$

где $\vec{dr} = (dx, dy, dz)^T$*, называется линейным интегралом векторного поля* $\vec{F}$ *вдоль кривой* L*. Если при этом кривая* L *является замкнутой, то тогда величина*

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{F}$ *вдоль контура* L*.*

Предположим, что контур L является границей поверхности S. Тогда по формуле Стокса имеем:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Определение. *Вектор*

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)^T$$

называется ротором (вихрем) векторного поля $\vec{F}$.

Ротор является векторной характеристикой векторного поля. Можно доказать, что он не зависит от выбора системы координат. Физически ротор характеризует наличие вращательной компоненты у поля (степень завихрения).

Формулу Стокса можно тогда переписать в следующем виде:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \iint\limits_{(S)} \mathrm{rot}_n\vec{F}\,dS.$$

Схематически можно записать: $\mathrm{rot}\vec{F} = [\vec{\nabla} \times \vec{F}]$.

Отметим некоторые свойства дивергенции и ротора:

1) $\operatorname{div}\vec{C}=0$, $\operatorname{rot}\vec{C}=\vec{0}$ ($\vec{C}$ — постоянный вектор);

2) $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)=0$;

3) $\operatorname{div}\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{div}\vec{G}, \quad \operatorname{rot}(\vec{F}+\vec{G})=\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{rot}\vec{G}$;

4) $\operatorname{rot}\left(f\vec{F}\right)=f\operatorname{rot}\vec{F}+[\vec{\nabla}f\times\vec{F}]$ (f — скалярное поле);

5) $\operatorname{div}[\vec{F}\times\vec{G}]=(\vec{G},\operatorname{rot}\vec{F})-(\vec{F},\operatorname{rot}\vec{G})$;

6) $\operatorname{rot}\left(\vec{\nabla}f\right)=\vec{0}$ (f — скалярное поле); и т.д.

Определение. *Векторное поле $\vec{F}=(P,Q,R)^T$ называется потенциальным в области $T\subset R^3$, если существует скалярное поле Φ, такое что в указанной области имеет место соотношение $\vec{F}=\vec{\nabla}\Phi$, т.е.*

$$P=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad R=\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Функция Φ в этом случае называется потенциалом поля $\vec{F}$.

Пример. Пусть в точке $O=(0,0,0)$ помещена масса m. Рассмотрим напряженность гравитационного поля, создаваемого этой массой в точке $M=(x,y,z)$, т.е. силу, с которой будет притягиваться к точке O тело массы 1, помещенное в точку M. Согласно закону Ньютона, имеем:

$$\vec{F}=-k\frac{m}{r^3}\vec{r}.$$

Здесь k — постоянная всемирного тяготения, $\vec{r}=(x,y,z)^T$, $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Нетрудно проверить, что

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\left(\frac{km}{r}\right).$$

Значит, гравитационное поле — потенциальное (с потенциалом $\Phi=km/r$).

Теорема. *Пусть T — односвязная область в R^3, и компоненты векторной функции $\vec{F}$ имеют непрерывные частные производные в этой области. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) поле $\vec{F}$ — потенциально ($\exists\Phi\colon\ \vec{\nabla}\Phi=\vec{F}$);

2) поле $\vec{F}$ — безвихревое ($\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$);

3) циркуляция поля $\vec{F}$ по любому контуру L из T равна нулю ($\oint\limits_{(L)}(\vec{F},\vec{dr})=0$);

4) линейный интеграл поля $\vec{F}$ по кривой, соединяющей две точки $A,B\in T$, не зависит от вида кривой, и при этом

$$\int\limits_{(AB)}(\vec{F},\vec{dr})=\Phi(B)-\Phi(A).$$

Определение. *Векторное поле $\vec{F}$ называется соленоидальным (трубчатым) в области $T\subset R^3$, если существует векторное поле $\vec{G}$, такое что в указанной области имеет место соотношение $\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{G}$. Вектор $\vec{G}$ в этом случае называется векторным потенциалом поля $\vec{F}$.*

Теорема. *Пусть T — односвязная область в R^3, и компоненты векторной функции $\vec{F}$ имеют непрерывные частные производные в этой области. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) поле $\vec{F}$ — соленоидальное ($\exists \vec{G}$: $\mathrm{rot}\vec{G} = \vec{F}$);

2) в области T отсутствуют источники поля $\vec{F}$ ($\mathrm{div}\vec{F} = 0$);

3) поток поля $\vec{F}$ через любую замкнутую поверхность S из области T равен нулю ($\oint\!\!\oint_{(S)} F_n\,dS = 0$);

4) поток поля $\vec{F}$ через любые два поперечных сечения S_1, S_2 произвольной векторной трубки один и тот же

$$\iint_{(S_1)} F_n\,dS = \iint_{(S_2)} F_n\,dS.$$

Теорема (о каноническом разложении силовых полей). *Пусть компоненты векторного поля $\vec{F}$ имеют непрерывные частные производные в области $T \subset R^3$. Тогда $\exists \vec{F}_1, \vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, и при этом: $\mathrm{rot}\vec{F}_1 = \vec{0}$, $\mathrm{div}\vec{F}_2 = 0$ (т.е. векторное поле можно разложить на потенциальную и соленоидальную составляющие).*

Будем искать скалярный потенциал Φ так, что $\vec{F}_1 = \vec{\nabla}\Phi$. Тогда

$$\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{\nabla}\Phi.$$

Требуется выполнение условия:

$$\mathrm{div}\vec{F}_2 = \mathrm{div}\vec{F} - \mathrm{div}\left(\vec{\nabla}\Phi\right) = 0.$$

Заметим, что

$$\mathrm{div}\left(\vec{\nabla}\Phi\right) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi.$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

В результате получаем уравнение для нахождения потенциала Φ:

$$\Delta\Phi = \mathrm{div}\vec{F}.$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных (уравнение Пуассона). В частном случае, если $\mathrm{div}\vec{F} = 0$, получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0$$

(функция Φ в этом случае называется гармонической).