ГЛАВА Интегралы, зависящие от параметра (продолжение)

§ Эйлеровы интегралы

Функция вида

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

называется "Бетта-функцией" или Эйлеровым интегралом 1-ого рода.

Этот интеграл сходится при $a > 0$, $b > 0$ (если $a \geq 1$ и $b \geq 1$, то интеграл будет собственным, в противном случае, возникнет несобственность 2-ого рода в точках $x = 0$ и/или $x = 1$). Заметим, что подынтегральное выражение представляет собой дифференциальный бином. Следовательно, согласно теореме Чебышева, если хотя бы одно из чисел a, b, $a+b$ является целым, то "Бетта-функция" задается "берущимся" интегралом, и ее можно записать в явном виде с помощью формулы Ньютона — Лейбница. Если ни одно из указанных чисел не целое, то рассматриваемый интеграл — "неберущийся".

Свойства "Бетта-функции":

1) $B(a,b) = B(b,a)$;

2) если $b > 1$, то

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a,b-1).$$

Применяя свойства 1) и 2), получаем, что если $b > n$, $a > m$ ($m, n \in \mathbb{N}$), то

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} \cdots \frac{b-n}{a+b-n} B(a,b-n),$$

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} \cdots \frac{a-m}{a+b-m} B(a-m,b).$$

Таким образом, без потери общности, "Бетта-функцию" достаточно рассматривать при значениях параметров $a \in (0,1]$, $b \in (0,1]$.

Функция вида

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx$$

называется "Гамма-функцией" или Эйлеровым интегралом 2-ого рода.

Этот интеграл сходится при $a > 0$ (если $a \geq 1$, то имеется только несобственность 1-ого рода, при $a < 1$ возникает еще несобственность 2-ого рода в точке $x = 0$).

Свойства "Гамма-функции":

1) $\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \ln^n x\, e^{-x}\,dx$;

2) $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ (как следствие, достаточно рассматривать "Гамма-функцию" при $a \in (0,1]$, более того, используя данную рекуррентную формулу, можно доопределить "Гамма-функцию" при $a < 0$);

3) $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0, 1, \ldots$;

3) существует $c \in (1,2)$, такое что "Гамма-функция убывает на интервале $(0,c]$ и возрастает на интервале $[c,+\infty)$, при этом $\lim\limits_{a\to+0} \Gamma(a) = +\infty$ и $\lim\limits_{a\to+\infty} \Gamma(a) = +\infty$;

4) $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$;

5) $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ при $a \in (0,1]$ (формула дополнения);

6) $\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$ при $a > 0$ (формула Лежандра).

§ Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty, +\infty)$. Тогда при определенных условиях ее можно разложить в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$ ($l = \mathrm{const} > 0$):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

где

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi t}{l}\, dt, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l}\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \left(\cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi t}{l} + \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi t}{l} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi(t-x)}{l}\, dt. \tag{1}$$

Предположим, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Тогда первое слагаемое в (1) будет стремиться к нулю при $l \to +\infty$.

Второе слагаемое в (1) можно формально понимать как сумму Римана для интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} F(\lambda)\, d\lambda,$$

где

$$F(\lambda) = \int_{-l}^{l} f(t) \cos \lambda(t-x)\, dt.$$

В самом деле, разбивая интервал $[0, +\infty)$ на части:

$$0 < \frac{\pi}{l} < \frac{2\pi}{l} < \ldots < \frac{k\pi}{l} < \ldots,$$

полагая $\Delta\lambda_k = \frac{\pi}{l}$, и выбирая $\xi_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, получим

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} F(\xi_k)\Delta\lambda_k = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi(t-x)}{l}\, dt.$$

Таким образом, переход к пределу при $l \to +\infty$ в формуле (1) приведет к соотношению

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x)\, dt, \tag{2}$$

называемому представлением функции $f(x)$ в виде интеграла Фурье. Интеграл Фурье является распространением понятия ряда Фурье на бесконечный интервал.

Формулу (2) можно переписать в виде

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left(a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right)\, d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\, dt,$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\, dt.$$

Заметим, однако, что формула (2) была получена формальным образом. Она нуждается в обосновании. Присутствующие в ней несобственные интегралы требуют исследования сходимости.

Из абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ следует сходимость внутреннего интеграла в (2). Установим достаточные условия сходимости внешнего интеграла (в выбранной точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$).

Положим

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{A} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t - x_0)\, dt.$$

Исследуем поведение этой функции при $A \to +\infty$. По теореме об интегральном переходе поменяем порядок интегрирования:

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \int_0^{A} \cos\lambda(t - x_0)\, d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin A(t - x_0)}{t - x_0}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 + z)\frac{\sin Az}{z}\, dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \left(f(x_0 + z) + f(x_0 - z)\right)\frac{\sin Az}{z}\, dz.$$

Пришли к интегралу типа Дирихле (см. ряды Фурье).

Лемма 1. *Верно равенство*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin Az}{z}\, dz = 1.$$

Доказательство — см. ранее.

Лемма 2 (Риман). *Пусть функция $g(t)$ абсолютно интегрируема на интервале $[a, +\infty)$. Тогда*

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\sin pt\, dt = 0, \qquad \lim_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\cos pt\, dt = 0.$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 или имеет там разрыв 1-ого рода. Обозначим

$$S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Тогда

$$|J(A) - S_0| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} |\varphi(z)|\frac{\sin Az}{z}\, dz,$$

где
$$\varphi(z) = f(x_0+z) + f(x_0-z) - 2S_0.$$

Теорема (Дини). *Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, а в точке x_0 она непрерывна или терпит там разрыв 1-ого рода. Тогда если существует такое $h > 0$, что функция $\varphi(z)/z$ абсолютно интегрируема на промежутке $[0, h]$, то тогда интеграл Фурье (2) сходится к среднему значению S_0.*

Аналогично можно доказать следующую теорему.

Теорема (Дирихле — Жордан). *Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, а в точке x_0 она непрерывна или терпит там разрыв 1-ого рода. Тогда если существует такое $h > 0$, что функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$, то тогда интеграл Фурье (2) сходится к среднему значению S_0.*

Интеграл Фурье можно переписать в комплексной форме.

Обозначим
$$G_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(t-x)\, dt, \qquad G_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x)\, dt.$$
Заметим, что
$$G_1(-\lambda) = -G_1(\lambda), \qquad G_2(-\lambda) = G_2(\lambda).$$
Значит,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\lambda)\, d\lambda = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\lambda)\, d\lambda = 2\int_{0}^{+\infty} G_2(\lambda)\, d\lambda.$$
Получаем
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} G_2(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\lambda)\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\lambda)\, d\lambda - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(G_2(\lambda) - iG_1(\lambda)\right)\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}\, dt.$$
Здесь i — мнимая единица.

Данную формулу можно представить в виде суперпозиции двух формул:
$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\, dt$$
— преобразование Фурье (образ Фурье), и
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}\, d\lambda$$
— обратное преобразование Фурье (праобраз Фурье).

Преобразование Фурье обладает рядом свойств, позволяющих его активно использовать для решения многих практических задач. В частности, оно активно применяется для решения сложных уравнений (дифференциальных, интегральных, в частных производных, с запаздывающим аргументом, и т.д.).