ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Замена переменных в двойном интеграле (продолжение)

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ определена и интегрируема при $(x,y) \in D$. Предположим, что*

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta), \end{cases} \qquad (\xi,\eta) \in \Delta,$$

причем функции $x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$ непрерывно-дифференцируемы в области Δ, и $\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} \neq 0$ при $(\xi,\eta) \in \Delta$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Delta f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) \left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}\right| d\xi\,d\eta. \tag{3}$$

Доказательство. Построим суммы Римана для интегралов, присутствующих в формуле (3). Рассмотрим дробления областей D и Δ:

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i, \quad \Delta = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i \quad (D_i \cap D_j = \emptyset, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j).$$

Поскольку интегралы по условиям теоремы существуют, то предел сумм Римана не зависит от способа дробления областей. Поэтому без потери общности будем считать, что дробления областей D и Δ согласованы друг с другом, в том смысле, что области Δ_i взаимно-однозначно соответствует область D_i, $i = 1,\ldots,n$.

По доказанному ранее: $\exists(\hat{\xi}_i,\hat{\eta}_i) \in \Delta_i$:

$$S(D_i) = J(\hat{\xi}_i,\hat{\eta}_i)S(\Delta_i), \quad i = 1,\ldots,n,$$

где $S(D_i)$, $S(\Delta_i)$ — площади областей D_i и Δ_i, соответственно;

$$J(\hat{\xi}_i,\hat{\eta}_i) = \left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}\right|_{(\hat{\xi}_i,\hat{\eta}_i)}$$

— коэффициент Якобиана.

Поскольку предел сумм Римана не зависит от выбора промежуточных точек, то без потери общности зададим

$$\xi_i = \hat{\xi}_i, \quad \eta_i = \hat{\eta}_i,$$
$$x_i = x(\hat{\xi}_i,\hat{\eta}_i), \quad y_i = y(\hat{\xi}_i,\hat{\eta}_i).$$

Запишем суммы Римана для интегралов из формулы (3):

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)S(D_i),$$

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i))J(\xi_i,\eta_i)S(\Delta_i).$$

Видим, что $\sigma_1 = \sigma_2$. Тогда, переходя к пределу при ранге дробления, стремящимся к нулю, получим формулу (3). Теорема доказана.

Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2).$$

Введем полярную систему координат:

$$x = \xi \cos \eta, \quad y = \xi \sin \eta.$$

Тогда уравнение кривой примет вид:

$$\xi = \sqrt{\sin 4\eta}.$$

График кривой изображен на рисунке 4.

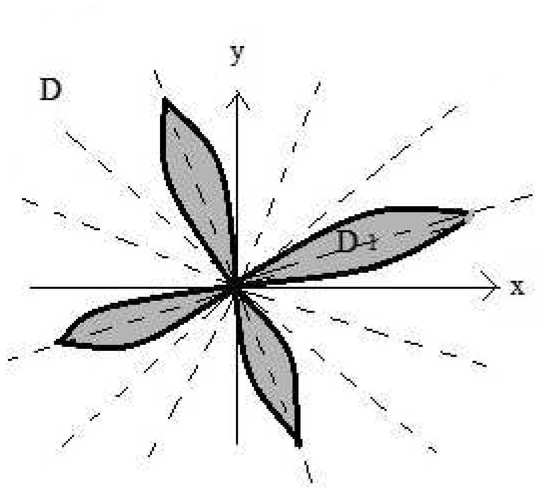

Рис. 4.

Обозначим через D — всю область, ограниченную кривой, а через D_1 — область первого "лепестка". Получаем:

$$S(D) = 4S(D_1) = 4 \iint\limits_{D_1} dxdy = 4 \iint\limits_{\Delta_1} \xi \, d\xi \, d\eta,$$

где

$$\Delta_1 = \{(\xi, \eta)^T : \ 0 \leq \xi \leq \sqrt{\sin 4\eta}, \ 0 \leq \eta \leq \pi/4\}.$$

Значит,

$$S(D) = 4 \int\limits_0^{\pi/4} d\eta \int\limits_0^{\sqrt{\sin 4\eta}} \xi \, d\xi = 1.$$

§ Площадь криволинейной поверхности

Пусть задана поверхность S в явном виде:

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Будем считать, что существуют непрерывные частные производные $p = f'_x$, $q = f'_y$ в области D. Требуется найти площадь поверхности.

Разобьем область D на n произвольных непересекающихся простых кусочков:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Тем самым мы получим дробление поверхности:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

Выберем $\forall (x_i, y_i) \in D_i$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $z_i = f(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $M_i = (x_i, y_i, z_i) \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Построим в точке M_i касательную плоскость и нормаль $\vec{n}_i = (\cos\lambda_i, \cos\mu_i, \cos\nu_i)^T$ к поверхности (здесь λ_i, μ_i, ν_i — углы, которые образует нормаль с осями координат), $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через T_i — часть касательной плоскости, отсекаемой вертикальным цилиндром с основанием D_i, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, область D_i будет являться проекцией областей S_i и T_i на плоскость Oxy, $i = 1, \ldots, n$ (см. рисунок 1).

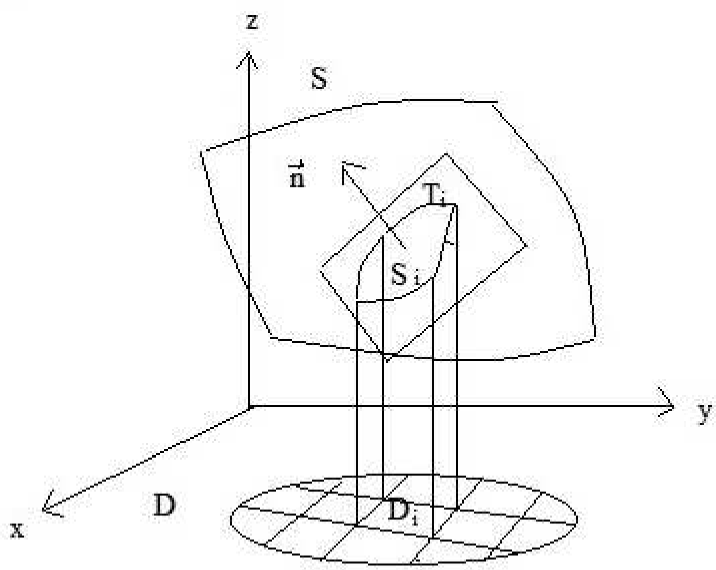

Рис. 1.

Пусть ΔD_i, ΔS_i, ΔT_i — площади областей D_i, S_i, T_i, соответственно, $i = 1, \ldots, n$. Тогда:

$$\Delta S_i \approx \Delta T_i = \frac{\Delta D_i}{|\cos\nu_i|}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

(у поверхности в точке M_i есть две противоположно направленные нормали, отличающиеся знаком; модуль у косинуса в выписанной формуле поставлен, исходя из геометрического смысла площади).

Отсюда можно найти выражение для площади всей поверхности S:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta D_i}{|\cos\nu_i|}.$$

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\Delta S = \iint\limits_D \frac{1}{|\cos\nu|}\, dxdy.$$

Ранее было доказано, что

$$\cos\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Значит,

$$\Delta S = \iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\, dxdy.$$

Предположим теперь, что поверхность S задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \qquad (u,v)\in\Delta, \\ z = \chi(u,v), \end{cases}$$

где функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам в области Δ.

Вспомним, что

$$\cos\nu = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где

$$A = \frac{\mathrm{D}(\psi,\chi)}{\mathrm{D}(u,v)}, \quad B = \frac{\mathrm{D}(\chi,\varphi)}{\mathrm{D}(u,v)}, \quad C = \frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)}.$$

Тогда

$$\Delta S = \iint\limits_D \frac{1}{|\cos\nu|}\, dxdy = \iint\limits_\Delta \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}\, |C|\, dudv = \iint\limits_\Delta \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, dudv.$$

Отметим, что если поверхность S — невырожденная, то

$$\operatorname{rang}\frac{\mathbb{D}(\varphi,\psi,\chi)}{\mathbb{D}(u,v)} = 2.$$

Поэтому в каждой точке поверхности хотя бы одна из величин A, B, C — отлична от нуля. Таким образом, если $C=0$ (это будет означать, что нормаль параллельна плоскости Oxy), то поверхность S следует проектировать не на Oxy, как это было сделано выше, а на какую-то из других координатных плоскостей Oxz или Oyz. В результате придем к той же самой формуле для площади поверхности.

Формулу площади поверхности можно записать в другой форме, используя так называемые Гауссовы коэффициенты:

$$E = (\varphi'_u)^2 + (\psi'_u)^2 + (\chi'_u)^2,$$

$$G = (\varphi'_v)^2 + (\psi'_v)^2 + (\chi'_v)^2,$$

$$F = \varphi'_u\,\varphi'_v + \psi'_u\,\psi'_v + \chi'_u\,\chi'_v.$$

Нетрудно проверить, что

$$A^2+B^2+C^2 = EG - F^2.$$

Тогда

$$\Delta S = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Пример. Найдем площадь параболлоида:

$$z = x^2 + y^2, \quad z \in [0, 4].$$

Имеем:

$$p = 2x, \quad q = 2y,$$

$$\Delta S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy,$$

где

$$D = \{(x, y)^T : \ 0 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$

— проекция параболлоида на плоскость Oxy (в данном случае это будет круг).

Введя полярные координаты $x = \xi \cos \eta$, $y = \xi \sin \eta$, найдем

$$\Delta S = \int\limits_0^{2\pi} d\eta \int\limits_0^2 \xi \sqrt{1 + 4\xi^2}\, d\xi = \frac{(17\sqrt{17} - 1)\pi}{6}.$$

Пример. Найдем площадь сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Введем сферические координаты:

$$\begin{cases} x = R \cos u \cos v, \\ y = R \sin u \cos v, \\ z = R \sin v, \end{cases} \qquad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Нетрудно вычислить:

$$E = (-R \sin u \cos v)^2 + (R \cos u \cos v)^2 + 0^2 = R^2 \cos^2 v,$$

$$G = (-R \cos u \sin v)^2 + (R \sin u \sin v)^2 + (R \cos v)^2 = R^2,$$

$$F = (-R \sin u \cos v)(-R \cos u \sin v) + (R \cos u \cos v)(R \sin u \sin v) + 0(R \cos v) = 0.$$

Значит,

$$\Delta S = \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos v\, dv = 4\pi R^2.$$