ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Производные сложной функций

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в области $D \subset R^3$ и имеет там непрерывные частные производные по всем аргументам.

Предположим, что

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \chi(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in T \subset R^2,$$

где T — двумерная область, отображаемая данными уравнениями в трехмерную область D.

Будем считать, что функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам в области T.

Рассмотрим сложную функцию (суперпозицию):

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)).$$

Зададим приращение аргумента u: Δu (аргумент v зафиксируем). Тогда

$$\begin{cases} \Delta_u x = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v), \\ \Delta_u y = \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v), \\ \Delta_u z = \chi(u + \Delta u, v) - \chi(u, v), \end{cases}$$

В силу дифференцируемости функции $f(x, y, z)$, имеем

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho)$$

при любых $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ $(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2})$. Положим

$$\Delta x = \Delta_u x, \quad \Delta y = \Delta_u y, \quad \Delta z = \Delta_u z.$$

Тогда полное приращение функции $f(x, y, z)$ совпадет с частным приращением по переменной u функции $F(u, v)$:

$$\Delta f = \Delta_u F = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta_u x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta_u y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta_u z + o(\rho).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_u F}{\Delta u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta_u z}{\Delta u} + \frac{o(\rho)}{\rho}\frac{\rho}{\Delta u}.$$

Переходя к пределу при $\Delta u \to 0$, получим

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Аналогично имеем

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Замечание. В общем случае, пусть имеется функция $f(x_1, \dots, x_n)$, где

$$x_i = x_i(t_1, \dots, t_m), \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда при условии существования и непрерывности соответствующих частных производных получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Пример. Пусть $f(x, y) = \sin(x + y^2)$, где

$$x = uv, \qquad y = u^2 + v^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \cos(x + y^2)v + \cos(x + y^2)2y2u,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \cos(x + y^2)u + \cos(x + y^2)2y2v.$$

Пример. Пусть $f(x, y) = x^2 + y^2$, где

$$x = \sin t, \qquad y = e^t.$$

Тогда

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x\cos t + 2ye^t = 2\sin t\cos t + 2e^{2t}.$$

Проверим: Обозначим $F(t) = f(x(t), y(t)) = \sin^2 t + e^{2t}$. Дифференцируя это выражение по t, убеждаемся, что найденная выше формула верна.

Теорема (Лагранж). *Пусть функция $f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по своим аргументам в окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Тогда при любых приращениях аргументов $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (не выводящих аргументы за пределы указанной окрестности) можно указать такое $\theta \in (0, 1)$, что*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, z_0 + \theta\Delta z)\Delta x +$$

$$+ f'_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, z_0 + \theta\Delta z)\Delta y +$$

$$+ f'_z(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, z_0 + \theta\Delta z)\Delta z$$

(формула конечных приращений).

Доказательство. Построим функцию

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z).$$

Имеем

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta x +$$

$$+ f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta y +$$

$$+ f'_z(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta z.$$

По одномерной теореме Лагранжа найдется такое $\theta \in (0,1)$, что

$$\Delta f = F(1) - F(0) = F'(\theta)(1-0) = F'(\theta).$$

Получили требуемое. Теорема доказана.

Замечание. Аналогичный результат можно доказать для пространства R^n. Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$ определена и имеет непрерывные частные производные по своим аргументам в окрестности точки $M_0 = (x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$. Тогда при любых приращениях аргументов $\Delta x_1,\dots,\Delta x_n$ (не выводящих аргументы за пределы указанной окрестности) можно указать такое $\theta \in (0,1)$, что

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\tilde{M})\Delta x_i.$$

Здесь $M = (x_1^{(0)} + \Delta x_1,\dots,x_n^{(0)} + \Delta x_n)$, $\tilde{M} = (x_1^{(0)} + \theta\Delta x_1,\dots,x_n^{(0)} + \theta\Delta x_n)$.

Следствие. *Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$ определена и непрерывна в связной области $D \subset R^n$, причем $f'_{x_i}(x_1,\dots,x_n) \equiv 0$, $i = 1,\dots,n$, в области D. Тогда $f(x_1,\dots,x_n) \equiv \mathrm{const}$ в области D.*

Снова пусть функция $f(x,y,z)$ определена в области $D \subset R^3$ и имеет там непрерывные частные производные по всем аргументам. Тогда она дифференцируема, и

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz. \tag{1}$$

Предположим теперь, что

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \\ z = \chi(u,v), \end{cases} \qquad (u,v) \in T \subset R^2,$$

причем функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам в области T. Тогда

$$df = f'_u du + f'_v dv = (f'_x x'_u + f'_y y'_u + f'_z z'_u)du + (f'_x x'_v + f'_y y'_v + f'_z z'_v)dv =$$

$$= f'_x(x'_u du + x'_v dv) + f'_y(y'_u du + y'_v dv) + f'_z(z'_u du + z'_v dv) = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), замечаем, что форма первого дифференциала не зависит от того, рассматриваем ли мы аргументы x, y, z как независимые переменные (в этом случае dx, dy, dz — независимые приращения аргументов) или как функции от каких-то других независимых переменных (в этом случае dx, dy, dz — дифференциалы соответствующих функций). Такое свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала. Нетрудно проверить, что оно справедливо для любого числа аргументов.

§ Производные по направлению

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в области $D \subset R^3$ и имеет там непрерывные частные производные по всем аргументам. Возьмем $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$. Пусть $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T$ — вектор единичной длины, выходящий из точки M_0. Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы, задающие вектор $\vec{l}$ (α, β, γ — углы между вектором $\vec{l}$ и тремя осями координат, соответственно).

Проведем луч, выходящий из точки M_0 в направлении вектора $\vec{l}$. Возьмем произвольную точку $M = (x, y, z)$ на этом луче (см. рисунок 1). Тогда

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma, \end{cases}$$

где $t \geq 0$. Имеем

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{h}, \quad \cos\beta = \frac{y - y_0}{h}, \quad \cos\gamma = \frac{z - z_0}{h}.$$

Здесь h — расстояние между точками M_0 и M. Получаем

$$h = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t.$$

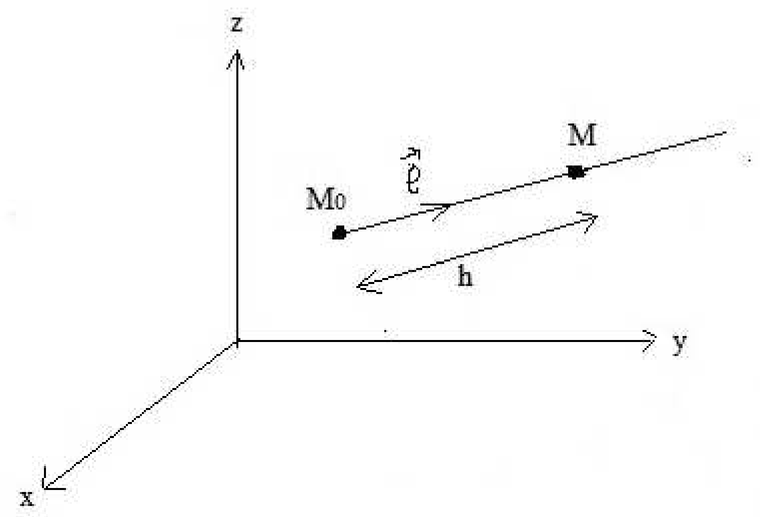

Рис. 1.

Определение. *Производной функции $f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению $\vec{l}$ называется величина*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{h \to +0} \frac{f(M) - f(M_0)}{h}.$$

Построим функцию

$$F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma).$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{t \to +0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma.$$

Определение. *Вектор*

$$\vec{\nabla} f = \mathrm{grad} f = (f'_x, f'_y, f'_z)^T$$

называется градиентом функции $f(x, y, z)$.

Получаем:
$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} = (\vec{\nabla} f(M_0), \vec{l}) = |\vec{\nabla} f(M_0)| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos\omega,$$
где ω — угол между векторами $\vec{\nabla} f(M_0)$ и $\vec{l}$.

Замечание. Вдоль направления $\vec{l}$ функция нескольких переменных $f(x, y, z)$ превращается в функцию одной переменной $F(t)$. Тогда, применяя одномерную теорию, получаем, что $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}$ — это скорость изменения функции в заданной точке в заданном направлении. Так, если $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} > 0$, то функция $f(x, y, z)$ растет в данном направлении, если $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} < 0$, то функция $f(x, y, z)$ убывает в данном направлении. Отметим также, что если в качестве вектора $\vec{l}$ взять орты осей координат (векторы $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$), то производная $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}$ совпадет с частными производными $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$. Таким образом, частные производные — это производные по направлению осей координат.

Поставим задачу: найти такое направление $\vec{l}$, при котором значение $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}$ наибольшее (направление наискорейшего возрастания функции). Поскольку $|\vec{l}| = 1$, а величина $\vec{\nabla} f(M_0)$ не зависит от выбора $\vec{l}$, то значение $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}$ будет наибольшим, если $\omega = 0$, т.е. если направление вектора $\vec{l}$ совпадает с направлением градиента $\vec{\nabla} f(M_0)$. Таким образом, градиент и указывает направление наискорейшего возрастания функции в заданной точке.

Аналогично можно ввести вестор $(-\vec{\nabla} f(M_0))$ антиградиент. Он указывает направление наискорейшего убывания функции в заданной точке.

Замечание. Аналогично все можно расписать для пространства R^n. Пусть задана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая непрерывные частные производные. Вектор $\vec{\nabla} f = (f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n})^T$ называется градиентом. Пусть $\vec{l} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)^T$ — единичный вектор, выходящий из точки M_0 и задаваемый направляющими косинусами. Тогда
$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} = (\vec{\nabla} f(M_0), \vec{l}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(M_0)\cos\alpha_i.$$

Пример. Пусть $f(x, y) = x^2 + 2y^3$, $M_0 = (3, 2)$, $\vec{l} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$. Тогда
$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} = f'_x(M_0)\frac{\sqrt{3}}{2} + f'_y(M_0)\frac{1}{2} = (2x)\big|_{M_0}\frac{\sqrt{3}}{2} + (6y^2)\big|_{M_0}\frac{1}{2} = 3\sqrt{3} + 12.$$