ГЛАВА Интегралы, зависящие от параметра (продолжение)

§ Несобственные интегралы, зависящие от параметра

1. Несобственные интегралы 1-ого рода. Пусть функция $f(x, y)$ определена при $x \in [a, +\infty)$, $y \in [c, d]$ и интегрируема при $x \in [a, A]$, $y \in [c, d]$ для любого $A \geq a$. Тогда интеграл

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \lim_{A \to +\infty} F(A, y), \tag{1}$$

где

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)\, dx,$$

называется несобственным интегралом 1-ого рода, зависящим от параметра. Если предел (1) существует и конечен при любом значении параметра $y \in [c, d]$, то тогда несобственный интеграл $J(y)$ называется сходящимся на отрезке $[c, d]$. Если при этом $F(A, y) \to J(y)$ при $A \to +\infty$ равномерно относительно $y \in [c, d]$, то тогда несобственный интеграл $J(y)$ называется равномерно сходящимся на отрезке $[c, d]$.

Таким образом, сходимость означает, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall y \in [c, d],\ \exists \bar{A}(\varepsilon, y) \geq a:\ \forall A \geq \bar{A} \ \Rightarrow\ |J(y) - F(A, y)| = \left| \int_A^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость означает, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{A}(\varepsilon) \geq a:\ \forall A \geq \bar{A} \ \Rightarrow\ |J(y) - F(A, y)| = \left| \int_A^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon,\ \forall y \in [c, d].$$

Пример. Пусть

$$J(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-xy}\, dx,$$

где $y > 0$.

Заметим, что

$$F(A, y) = \int_0^A y e^{-xy}\, dx = 1 - e^{-Ay} \to 1 \quad \text{при} \quad A \to +\infty.$$

Таким образом, $J(y) = 1$ при $y > 0$. Однако, сходимость на любом интервале вида $(0, d]$ — неравномерная. В то же время, на любом промежутке вида $[c, d]$, где $c > 0$, сходимость — равномерная.

Теорема (Критерий сходимости Коши). *Интеграл $J(y)$ равномерно сходится на отрезке $[c, d]$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{A}(\varepsilon) \geq a:\ \forall A_1, A_2 \geq \bar{A} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |F(A_2, y) - F(A_1, y)| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon,\ \forall y \in [c, d].$$

Теорема (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости). *Пусть*

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x) \quad \textit{при} \quad x \geq a, \quad y \in [c, d].$$

Тогда если интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *равномерно (и абсолютно) сходится на отрезке* $[c,d]$.

Теорема (Признак Дирихле равномерной сходимости). *Пусть функция*

$$F(A,y) = \int_a^A f(x,y)\,dx$$

равномерна ограничена при $A \geq a$, $y \in [c,d]$, *функция* $g(x,y)$ *монотонна по* x *на интервале* $[a,+\infty)$ *при любом фиксированном значении* $y \in [c,d]$, *и* $g(x,y) \to 0$ *при* $x \to +\infty$ *равномерно относительно* $y \in [c,d]$. *Тогда интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

равномерно сходится на отрезке $[c,d]$.

Теорема (Признак Абеля равномерной сходимости). *Пусть интеграл*

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

равномерно сходится на промежутке $[c,d]$, *функция* $g(x,y)$ *монотонна по* x *на интервале* $[a,+\infty)$ *при любом фиксированном значении* $y \in [c,d]$, *и равномерно ограничена при* $x \geq a$, $y \in [c,d]$. *Тогда интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

равномерно сходится на отрезке $[c,d]$.

Теорема (о предельном переходе). *Пусть* $f(x,y) \to \varphi(x)$ *при* $y \to y_0$ *равномерно относительно* $x \in [a,A]$ *для любого* $A \geq a$, *и интеграл* $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *равномерно сходится на промежутке* $[c,d]$. *Тогда*

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. Снова положим $F(A,y) = \int_a^A f(x,y)\,dx$. По теореме о предельном переходе для собственных интегралов имеем:

$$\lim_{y\to y_0} F(A,y) = \int_a^A \varphi(x)\,dx.$$

С другой стороны:

$$\lim_{A\to+\infty} F(A,y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx,$$

причем эта сходимость равномерная относительно $y \in [c,d]$.

Тогда по теореме о перестановке пределов (см. первый параграф данной главы) получаем:

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{y\to y_0} \lim_{A\to+\infty} F(A,y) = \lim_{A\to+\infty} \lim_{y\to y_0} F(A,y) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \varphi(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Теорема (о непрерывности). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна при $x \geq a$, $y \in [c,d]$, и интеграл $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на промежутке $[c,d]$. Тогда функция $J(y)$ будет непрерывной на отрезке $[c,d]$.*

Доказательство. Выберем произвольное $y_0 \in [c,d]$. В силу непрерывности, $f(x,y) \to f(x,y_0)$ при $y \to y_0$, причем, согласно лемме из первого параграфа настоящей главы, эта сходимость будет равномерной относительно $x \in [a,A]$ для любого $A \geq a$. Тогда по теореме о предельном переходе:

$$\lim_{y \to y_0} J(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx = J(y_0).$$

Значит, функция $J(y)$ непрерывна в точке y_0. С учетом произвольности выбора этой точки, приходим к требуемому. Теорема доказана.

Теорема (об интегральном переходе). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна при $x \geq a$, $y \in [c,d]$, и интеграл $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на промежутке $[c,d]$. Тогда*

$$\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. По теореме об интегральном переходе для собственных интегралов имеем:

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x,y)\,dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

для любого $A \geq a$. Перейдем в этой формуле к пределу при $A \to +\infty$. Получим

$$\lim_{A \to +\infty} \int_c^d dy \int_a^A f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Заметим, что функция $F(A,y) = \int_a^A f(x,y)\,dx$ сходится к $J(y)$ при $A \to +\infty$ равномерно относительно $y \in [c,d]$. Значит, знак предела в левой части формулы можно внести под знак внешнего интеграла (по теореме о предельном переходе). В результате приходим к требуемому:

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Теорема доказана.

Теорема (о дифференциальном переходе). *Пусть при $x \geq a$, $y \in [c,d]$ функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Пусть также интеграл $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится на промежутке $[c,d]$, а интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ равномерно сходится на этом промежутке. Тогда*

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Доказательство. Выберем произвольное $y_0 \in [c,d]$. Имеем

$$J'(y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{J(y_0+k) - J(y_0)}{k} = \lim_{k \to 0} \int_a^{+\infty} \frac{f(x,y_0+k) - f(x,y_0)}{k}\,dx.$$

Для доказателства теоремы достаточно только обосновать возможность внесения знака предела в полученной формуле под знак интеграла. Тогда придем к требуемому:

$$J'(y_0) = \int_a^{+\infty} \lim_{k\to 0} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\, dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y}\, dx.$$

Для применения теоремы о предельном переходе надо проверить выполнение двух условий:

1) $\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k} \to \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y}$ при $k \to 0$ равномерно относительно $x \in [a, A]$ для любого $A \geq a$;

2) интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}\, dx$ равномерно сходится при $k > 0$.

Условие 1) выполняется, исходя из определения частной производной и леммы из первого параграфа данной главы.

Проверим условие 2). Поскольку интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx$ равномерно сходится на промежутке $[c, d]$, то по критерию Коши имеем:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{A}(\varepsilon) \geq a :\ \forall A_1, A_2 \geq \bar{A}\ \Rightarrow\ \left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx \right| < \varepsilon,\ \forall y \in [c, d].$$

Положим $\Phi(y) = \int_{A_1}^{A_2} f(x, y)\, dx$. По теореме о дифференциальном переходе для собственных интегралов находим, что

$$\Phi'(y) = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx.$$

Значит, $|\Phi'(y)| < \varepsilon$ при $y \in [c, d]$.

Тогда

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\, dx \right| = \left| \frac{\Phi(y_0 + k) - \Phi(y_0)}{k} \right| = |\Phi'(y_0 + \theta k)| < \varepsilon.$$

Здесь $\theta \in (0, 1)$. Таким образом, интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}\, dx$ равномерно сходится при $k > 0$ по критерию Коши. Теорема доказана.

2. Несобственные интегралы 2-ого рода. Пусть функция $f(x, y)$ определена при $x \in [a, b)$, $y \in [c, d]$ и интегрируема при $x \in [a, b - \eta]$, $y \in [c, d]$ для любого $0 < \eta < b - a$. Пусть при $x = b$ и хотя бы при одном значении параметра $y \in [c, d]$ функция $f(x, y)$ терпит бесконечный разрыв второго рода. Тогда интеграл

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx = \lim_{\eta\to+0} F(\eta, y), \tag{2}$$

где

$$F(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y)\, dx,$$

называется несобственным интегралом 2-ого рода, зависящим от параметра. Если предел (2) существует и конечен при любом значении параметра $y \in [c, d]$, то тогда несобственный интеграл $J(y)$ называется сходящимся на отрезке $[c, d]$. Если при этом $F(\eta, y) \to J(y)$ при $\eta \to +0$ равномерно относительно $y \in [c, d]$, то тогда несобственный интеграл $J(y)$ называется равномерно сходящимся на отрезке $[c, d]$.

Таким образом, сходимость означает, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall y \in [c, d],\ \exists \delta(\varepsilon, y) > 0 :\ \forall 0 < \eta < \delta\ \Rightarrow\ |J(y) - F(\eta, y)| = \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость означает, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall 0 < \eta < \delta\ \Rightarrow\ |J(y) - F(\eta, y)| = \left| \int_{b-\eta}^{b} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon,\ \forall y \in [c, d].$$

Для несобственных интегралов 2-ого рода, зависящих от параметра, можно сформулировать теоремы, аналогичные тем, что были сформулированы выше для несобственных интегралов 1-ого рода.

§ Интегралы Лапласа

Рассмотрим несобственные интегралы 1-ого рода

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2}\, dx, \qquad I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{k^2 + x^2}\, dx,$$

назывемые интегралами Лапласа. Здесь $k > 0$, $a > 0$. Оба интеграла равномерно сходятся по признаку Дирихле.

Зафиксируем параметр k и будем рассматривать интегралы J и I, как функции от a. Тогда

$$\frac{dJ}{da} = -I.$$

Ранее было показано, что

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{ax}\, d(ax) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx.$$

Получаем

$$\frac{dJ}{da} + \frac{\pi}{2} = -I + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{x \sin ax}{k^2 + x^2} + \frac{\sin ax}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{k^2 \sin ax}{x(k^2 + x^2)}\, dx.$$

Отсюда

$$\frac{d^2 J}{da^2} = \int_0^{+\infty} \frac{k^2 \cos ax}{k^2 + x^2}\, dx = k^2 J.$$

Значит, функция J удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 J}{da^2} - k^2 J = 0.$$

Решая его, находим

$$J = C_1 e^{ak} + C_2 e^{-ak},$$

где C_1, C_2 — некоторые постоянные.

Имеем

$$|J| \le \int_0^{+\infty} \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{\pi}{2k}.$$

Следовательно, $J \to 0$ при $k \to +\infty$, и тогда $C_1 = 0$.

С другой стороны,

$$J \to \int_0^{+\infty} \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{\pi}{2k} \quad \text{при} \quad a \to 0.$$

Таким образом, $C_2 = \frac{\pi}{2k}$.

В результате приходим к выражениям

$$J = \frac{\pi}{2k} e^{-ak}, \qquad I = \frac{\pi}{2} e^{-ak}.$$

Заметим, что при вычислении этих интегралов мы пользовались теоремами о предельном и дифференциальном переходах.