ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Криволинейные интегралы 2-ого рода по замкнутому контуру (продолжение)

Пусть область D окружена простым контуром l, и пусть в области D за исключением одной особой точки M заданы непрерывные функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Рассмотрим произвольный простой замкнутый контур $L \subset D$. Вычислим

$$\oint\limits_{(L)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = w.$$

Если точка M находится вне этого контура, то, согласно доказанной ранее теореме, $w = 0$ (область D в этом случае можно обрезать, убрав особую точку). Если же точка M находится внутри контура L, то, вообще говоря, $w \neq 0$. Можно доказать, что значение w от вида контура не зависит. Если контур L не простой, то тогда

$$\oint\limits_{(L)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = nw,$$

где n — количество витков, совершенных контуром вокруг точки M (все витки предполагаются совершенными в одну сторону, каждый виток, совершенный в противоположную сторону, изменит значение интеграла на величину $(-w)$). Аналогично можно рассмотреть случай наличия в области D нескольких особых точек (подробнее см. ТФКП).

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\oint\limits_{(x^2+y^2=1)} \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy.$$

Движение по заданной окружности осуществляется против часовой стрелки.

Имеем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

для всех точек $(x, y) \neq (0, 0)$. В точке $(0, 0)$ указанные производные не существуют, причем эта точка находится внутри заданного контура.

Получаем

$$\oint\limits_{(x^2+y^2=1)} \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy = \Big[x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]\Big] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

т.е. каждый виток против часовой стрелки вокруг особой точки $(0, 0)$ прибавляет к значению интеграла величину 2π.

Полученные в настоящем параграфе результаты можно перенести и на трехмерное пространство.

Теорема. *Пусть односвязная область $D \subset R^3$ окружена простой поверхностью, и пусть в этой области заданы непрерывные функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, имеющие там непрерывные частные производные по своим аргументам. Тогда следующие условия являются эквивалентными:*

1) $\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0$ *для любой замкнутой кривой* $L \subset D$*;*

2) $\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ *не зависит от вида кривой, соединяющей точки* $A, B \in D$*;*

3) $\exists \Phi(x,y,z)$*:* $d\Phi = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$*;*

4) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$.

Доказательство теоремы следует из формулы Стокса (см. далее).

При выполнении условий теоремы имеем:

$$\Phi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\,dz,$$

где в качестве (x_0,y_0,z_0) можно взять любую точку из области D. При этом верно:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \Phi(B) - \Phi(A).$$

§ Замена переменных в двойном интеграле

Пусть заданы две плоские прямоугольные системы координат Oxy и $O\xi\eta$, и пусть $D \subset Oxy$, $\Delta \subset O\xi\eta$. Будем считать, что область D ограничена простым кусочно-гладким контуром l, а область Δ — простым кусочно-гладким контуром K (см. рисунок 1). Предположим, что между областями D и Δ установлено взаимно-однозначное соответствие, причем граничным точкам одной области соответствуют граничные точки другой области (т.е. $D \leftrightarrow \Delta$, $l \leftrightarrow K$).

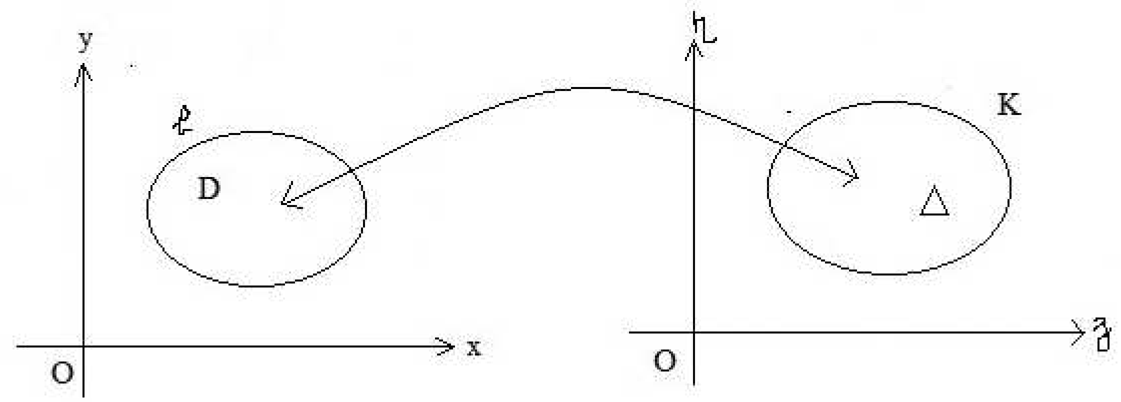

Рис. 1.

Пусть отображение области Δ в область D задается формулами:

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta), \end{cases} \qquad (\xi,\eta) \in \Delta, \tag{1}$$

а обратное отображение области D в область Δ — формулами:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y), \end{cases} \quad (x,y) \in D. \tag{2}$$

Будем считать, что функции (1), (2) непрерывно-дифференцируемы по своим аргументам. Тогда по теореме о системе неявных функций, взаимная однозначность отображения областей D и Δ друг в друга означает, что

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} \neq 0$$

в области Δ, и

$$\frac{\mathrm{D}(\xi,\eta)}{\mathrm{D}(x,y)} \neq 0$$

в области D, причем, согласно теореме Лапласа:

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} \frac{\mathrm{D}(\xi,\eta)}{\mathrm{D}(x,y)} = 1.$$

Пусть Λ — простая кусочно-гладкая кривая в области Δ, заданная в параметрическом виде:

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

Тогда ей будет взаимно-однозначно соответствовать простая кусочно-гладкая кривая L в области D:

$$x = x(t) = x(\xi(t), \eta(t)), \quad y = y(t) = y(\xi(t), \eta(t)), \qquad t \in [t_1, t_2],$$

причем, если кривая Λ — замкнутая, то и кривая L будет таковой. Однако, если движение по контуру Λ выбрано стандартным, то движение по контуру L, полученному в результате преобразования (1), может оказаться как стандартным, так и не стандартным.

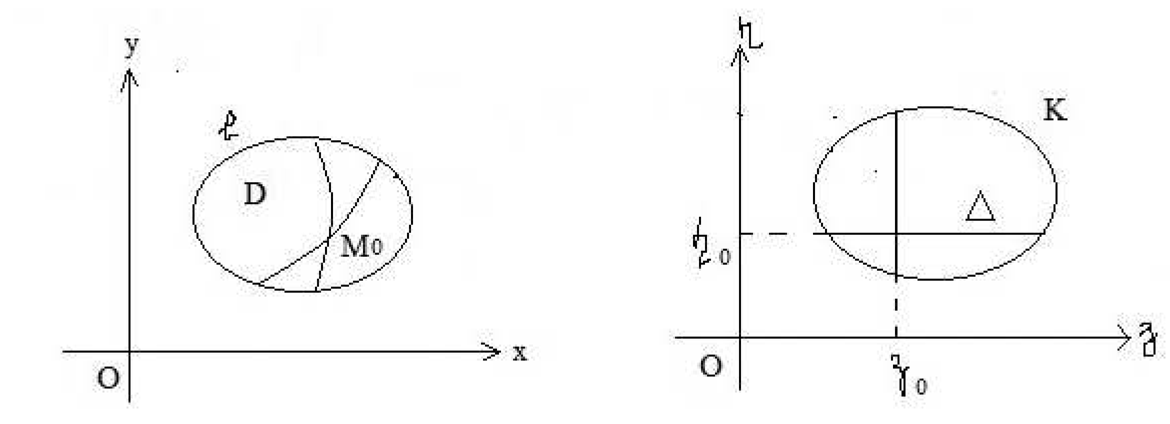

Рис. 2.

Определение. *Пусть* $(\xi_0, \eta_0) \in \Delta$. *Тогда кривые семейств*

$$N_\xi : \begin{cases} x = x(\xi, \eta_0), \\ y = y(\xi, \eta_0), \end{cases} \qquad N_\eta : \begin{cases} x = x(\xi_0, \eta), \\ y = y(\xi_0, \eta), \end{cases}$$

лежащие в области D, называются координатными линиями, а переменные ξ, η — криволинейными координатами.

Кривые семейств N_ξ и N_η целиком заполняют область D (получаем криволинейную координатную сетку), причем в силу взаимной однозначности отображения (1), через каждую точку $M_0 = (x(\xi_0, \eta_0), y(\xi_0, \eta_0)) \in D$ проходит ровно одна кривая из каждого семейства N_ξ и N_η (см. рисунок 2).

Пример. Рассмотрим полярную систему координат:

$$x = \xi \cos \eta, \quad y = \xi \sin \eta, \quad (\xi, \eta) \in \Delta.$$

В этом случае, семейства координатных линий состоят из лучей, выходящих из начала координат (семейство N_ξ), и окружностей с центром в начале координат (семейство N_η).

Предположим, что $(\xi, \eta) \in \Delta$, где

$$\Delta = \{(\xi, \eta)^T : \ 0 < \xi_1 \le \xi \le \xi_2, \ 0 \le \eta_1 \le \eta \le \eta_2 < 2\pi\}.$$

Тогда получим, что $(x, y) \in D$, где область D представляет собой усеченный круговое сектор (см. рисунок 3).

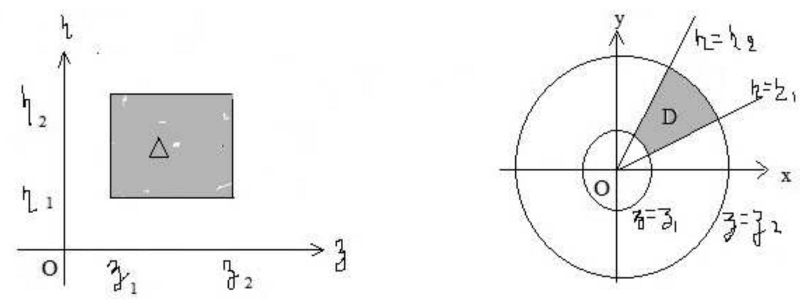

Рис. 3.

Если мы начнем обходить область Δ по границе в стандартном направлении, то тогда соответствующее движение по границе области D также будет идти в стандартном направлении. Заметим, что если использовать полярные координаты в виде:

$$x = \xi \sin \eta, \quad y = \xi \cos \eta, \quad (\xi, \eta) \in \Delta,$$

то область D не изменится, однако, направление движения по контурам из этой области будет противоположно направлениям движения по контурам из Δ (т.е. в результате замены переменных стандартное направление изменится на нестандартное, и наоборот). Поэтому для удобства обычно используют полярные координаты в первом указанном варианте.

Найдем Якобиан преобразования для полярных координат:

$$\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \cos \eta & -\xi \sin \eta \\ \sin \eta & \xi \cos \eta \end{vmatrix} = \xi.$$

Отметим, что если

$$\Delta = \{(\xi, \eta)^T : \ 0 \le \xi \le \xi_2, \ 0 \le \eta \le 2\pi\},$$

то отображение области Δ в область D будет не взаимно-однозначным. Однако, если взять область

$$\Delta_\delta = \{(\xi,\eta)^T:\ 0<\delta\le\xi\le\xi_2,\ 0\le\eta\le 2\pi-\delta\},$$

где $\delta>0$, то получим $\Delta_\delta\to\Delta$ при $\delta\to 0$, т.е. не взаимно-однозначное преобразование в данном случае можно представить как предел взаимно-однозначного. Поэтому результаты, которые будут установлены далее для взаимно-однозначных отображений, можно применять и для некоторых типов не взаимно-однозначных отображений, например, для полярных координат в упомянутом выше случае.

Предположим далее, что уравнение контура K (границы области Δ) задается формулами:

$$\xi=\xi(t),\quad \eta=\eta(t),\qquad t\in[t_1,t_2].$$

Тогда уравнение контура l (границы области D) запишется в виде:

$$x=x(t)=x(\xi(t),\eta(t)),\quad y=y(t)=y(\xi(t),\eta(t)),\qquad t\in[t_1,t_2].$$

Дополнительно предположим, что функции (1) дважды непрерывно-дифференцируемы по своим аргументам. Будем считать, что движение по контуру l стандартное.

Рассмотрим цепочку преобразований:

$$S(D)=\iint\limits_D dxdy = (\text{формула Грина}) = \oint\limits_{(l)} x\,dy =$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2} x(\xi(t),\eta(t))\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial\eta}\eta'(t)\right)dt =$$

$$=\oint\limits_{(K)} x(\xi,\eta)\frac{\partial y}{\partial\xi}\,d\xi + x(\xi,\eta)\frac{\partial y}{\partial\eta}\,d\eta = (\text{формула Грина}) =$$

$$=\pm\iint\limits_\Delta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(x(\xi,\eta)\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(x(\xi,\eta)\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right)d\xi\,d\eta =$$

$$=\pm\iint\limits_\Delta\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}+x\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}-x\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}\right)d\xi\,d\eta =$$

$$=\pm\iint\limits_\Delta\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)d\xi\,d\eta =$$

$$=\pm\iint\limits_\Delta\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta = \iint\limits_\Delta\left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}\right|d\xi\,d\eta =$$

$$=J(\hat\xi,\hat\eta)\iint\limits_\Delta d\xi\,d\eta = J(\hat\xi,\hat\eta)S(\Delta).$$

Здесь $S(D)$, $S(\Delta)$ — площади областей D и Δ, соответственно; $(\hat\xi,\hat\eta)\in\Delta$,

$$J(\hat\xi,\hat\eta)=\left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}\right|_{(\hat\xi,\hat\eta)}$$

— коэффициент Якобина (коэффициент сжатия). Знак "$\pm$" в преобразованиях появился из-за того, что при переходе от системы координат Oxy к системе координат $O\xi\eta$ стандартное направление обхода контуров могло поменяться (или не поменяться) на нестандартное. Из полученных соотношений можно сделать вывод, что если $\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} > 0$ в области Δ, то стандартное направление сохраняется при замене координат (в преобразованиях надо использовать знак "$+$"), если же $\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} < 0$ в области Δ, то стандартное направление меняется на нестандартное при замене координат (в преобразованиях надо использовать знак "$-$"). Нулю Якобиан $\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}$ равняться не может в области Δ, в силу сделанного предположения о взаимной однозначности отображения. Чтобы не задумываться о выборе правильного знака, можно использовать (как это было сделано в преобразованиях) знак модуля.