ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Формула Остроградского — Гаусса

Пусть в R^3 имеется тело T, ограниченное простой поверхностью S. Пусть в теле T задана ограниченная векторная функция $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$, имеющая там непрерывные частные производные по своим аргументам.

Предположим, что область T задается условиями (см. рисунок 1):

$$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), \quad (x,y) \in D.$$

Здесь D — проекция тела T на плоскость Oxy.

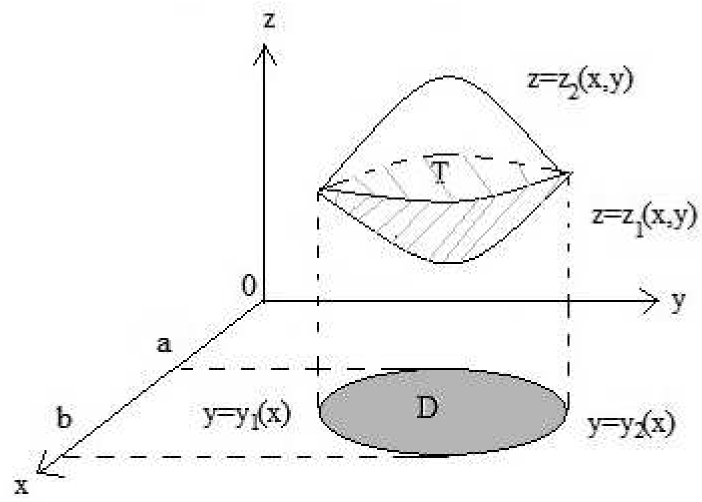

Рис. 1.

Найдем

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_D \left(R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))\right)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S_2)} R(x,y,z)\,dxdy + \iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)\,dxdy = \oiint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy.$$

Здесь S_1 — нижняя граница тела T: $z = z_1(x,y)$, S_2 — верхняя граница тела T: $z = z_2(x,y)$; $(x,y) \in D$. Круг на символе интеграла по поверхности S подчеркивает, что эта поверхность — замкнутая. Для определения знака поверхностного интеграла 2-ого рода, надо определиться с выбором стороны поверхности. Для замкнутых поверхностей стандартной является внешняя сторона поверхности. Если не оговорено противное, то далее все формулы выписываем именно для такой стороны. В Римановом интеграле $\iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy$ используется направление по z

от меньшего к большему. Поэтому, когда мы переходим к поверхностному интегралу $\iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)\,dxdy$, мы меняем знак интегралв, чтобы далее иметь дело с нижней стороной поверхности S_1 (нормаль должна смотреть вниз).

Таким образом, получили

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy.$$

Аналогичным образом, можно доказать, что

$$\iiint\limits_T \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz,$$

$$\iiint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz.$$

Складывая эти три формулы, приходим к формуле Остроградского — Гаусса:

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} (P(x,y,z)\cos\lambda + Q(x,y,z)\cos\mu + R(x,y,z)\cos\nu)\;dS.$$

Здесь $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Замечание. С помощью формулы Остроградского — Гаусса можно вычислять объемы тел. Положим $P = x$, $Q = R = 0$. Тогда получим:

$$V(T) = \iiint\limits_T dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} x\,dydz.$$

Аналогично, если положить $P = R = 0$, $Q = y$, то получим:

$$V(T) = \iiint\limits_T dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} y\,dxdz,$$

или если положить $P = Q = 0$, $R = z$, то

$$V(T) = \iiint\limits_T dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} z\,dxdy.$$

Также можно записать:

$$V(T) = \frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy.$$

Пример. Найдем

$$I = \oiint\limits_{(S)} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy,$$

где S — внешняя сторона сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Этот пример мы рассматривали ранее в параграфе про поверхностные интегралы 2-ого рода. Используя формулу Остроградского - Гаусса, можно сразу получить:

$$I = 3\iiint\limits_T dxdydz = 3V(T) = 4\pi R^3.$$

Здесь T — шар: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

Пример. Пусть тело T, ограниченное поверхностью S, целиком погружено в жидкость плотности ρ. Найти результирующую силу давления жидкости на тело. В качестве плоскости Oxy возьмем поверхность жидкости, а ось Oz направим вертикально вниз (т.е. переменная z будет означать глубину погружения).

Рассмотрим элементарный участок поверхности тела площади dS. На него давит столбик жидкости с силой $\vec{dF} = (dF_x, dF_y, dF_z)^T$, где

$$dF_x = -g\rho z\cos\lambda dS, \quad dF_y = -g\rho z\cos\mu dS, \quad dF_z = -g\rho z\cos\nu dS.$$

Здесь $\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)^T$ — внешняя нормаль к поверхности. Знак "$-$" стоит, потому что сила давления действует по отношению к телу — "снаружи-внутрь".

Суммируя полученные формулы по всей поверхности, найдем результирующую силу $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$, где

$$F_x = -g\rho\oiint\limits_{(S)} z\cos\lambda dS = (\text{ф-ла О.-Г.}) = 0,$$

$$F_y = -g\rho\oiint\limits_{(S)} z\cos\mu dS = (\text{ф-ла О.-Г.}) = 0,$$

$$F_z = -g\rho\oiint\limits_{(S)} z\cos\nu dS = (\text{ф-ла О.-Г.}) = -g\rho\iiint\limits_T dxdydz = -g\rho V(T) = -Mg,$$

где M — масса жидкости объема $V(T)$. В результате пришли к закону Архимеда (на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная по величине весу жидкости в объеме заданного тела).

Замечание. Если в теле T выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$, то такой случай называется соленоидальным, и тогда будет иметь место ряд свойств (см. далее).

Замечание. Формулы Грина, Гаусса, Остроградского — Гаусса являются аналогами формулы Ньютона — Лейбница для многомерных пространств.

§ Элементы теории поля

Определение. *Пусть в каждой точке области $D \subset R^3$ определена скалярная функция $f(x, y, z)$. Тогда говорят, что в области D задано скалярное поле f.*

Примерами скалярных полей, используемых в физике, являются поле температур, давлений, высот, и т.п.

Определение. *Поверхности вида: $f(x, y, z) = C$, где $C = const$, называются поверхностями уровня, или эквипотенциальными поверхностями.*

Например, в физике используются изобары, изотермы, изокосты, и т.п.

Определение. *Скалярное поле f называется плоским, если его эквипотенциальные поверхности представляют собой набор плоскостей, параллельных друг другу.*

Производная по направлению:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma = (\vec{\nabla} f, \vec{l}),$$

где $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T$, показывает скорость изменения поля в заданной точке в направлении $\vec{l}$. Вектор градиента $\vec{\nabla} f = (f'_x, f'_y, f'_z)^T$ указывает направление наискорейшего возрастания поля, в то время как вектор антиградиента $(-\vec{\nabla} f)$ — направление наискорейшего убывания поля.

Свойства градиента:

1) $\vec{\nabla}(f + C) = \vec{\nabla} f$ $(C = \text{const})$;

2) $\vec{\nabla}(fC) = C\vec{\nabla} f$ $(C = \text{const})$;

3) $\vec{\nabla}(f \pm g) = \vec{\nabla} f \pm \vec{\nabla} g$;

4) $\vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} g$;

5) $\vec{\nabla}(f/g) = (g\vec{\nabla} f - f\vec{\nabla} g)/g^2$ $(g \neq 0)$;

6) $\vec{\nabla} F(f) = F'(f)\vec{\nabla} f$.

Определение. *Пусть в каждой точке области $D \subset R^3$ определена векторная функция*

$$\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T.$$

Тогда говорят, что в области D задано векторное поле $\vec{F}$.

Примерами векторных полей, используемых в физике, являются гравитационное поле, электромагнитное поле, поле скоростей, и т.п.

Определение. *Векторной (силовой) линией поля $\vec{F}$ называется кривая, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением векторного поля.*

Определение. *Векторное поле $\vec{F}$ называется однородным, если $P, Q, R = const$ (силовые линии в этом случае представляют собой набор прямых, параллельных друг другу).*

Определение. *Векторное поле $\vec{F}$ называется плоским, если все векторы $\vec{F}$ расположены в плоскостях, параллельных друг другу, и на каждой из этих плоскостей поле одно и то же.*

Определение. *Пусть L — некоторый замкнутый контур в D. Через каждую точку контура L проведем силовую линию векторного поля $\vec{F}$. Тогда поверхность, образованная этими линиями, называется векторной трубкой поля $\vec{F}$.*