ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Криволинейные интегралы 2-ого рода

Пусть на плоскости Oxy задана кривая l, вдоль которой определена векторная функция $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T$. Полагаем, что кривая l имеет конечную длину, и функция $\vec{F}(x,y)$ ограничена на этой кривой.

Разобьем кривую l на n произвольных кусочков (см. рисунок 1):

$$A = M_0 \smile M_1 \smile \ldots \smile M_n = B.$$

Здесь A — начало кривой, B — конец кривой, $M_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, n$, — точки дробления, лежащие на кривой.

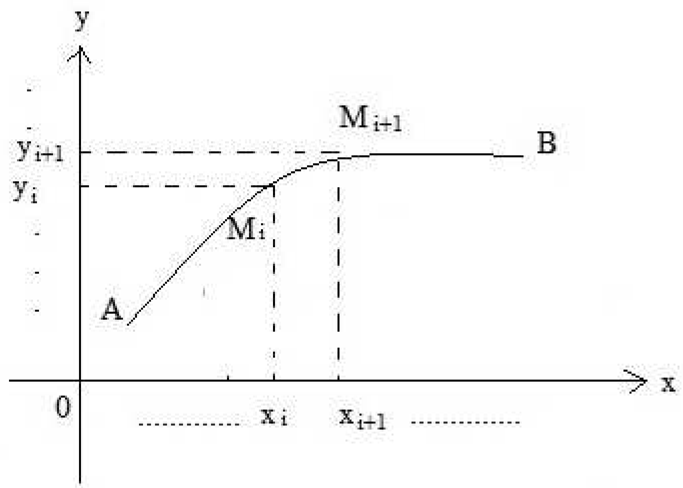

Рис. 1.

Обозначим через ΔS_i — длину дуги $M_i \smile M_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Величину $\omega = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta S_i$ назовем рангом дробления кривой. Положим

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Для каждого $i = 0, \ldots, n-1$, выберем произвольную точку $(\xi_i, \eta_i) \in M_i \smile M_{i+1}$.

Построим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i \right).$$

Определение. *Если существует конечный предел:* $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$, *причем он не зависит от способа дробления кривой* l *и от выбора точек* (ξ_i, η_i), $i = 0, \ldots, n-1$, *то он называется криволинейным интегралом 2-ого рода от функции* $\vec{F}(x,y)$ *по кривой* l. *Обозначим его:* $\int\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

Для криволинейного интеграла 2-ого рода можно сформулировать стандартные свойства интегралов и условия существования.

В частности, отметим, что:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{(BA)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

т.е. криволинейный интеграл 2-ого рода (а точнее, его знак) зависит от направления движения по кривой l (от ориентации кривой).

Замечание. Предположим, что кривая l представляет собой отрезок, параллельный оси Ox: $y \equiv C = \text{const}$, $x \in [a,b]$. Тогда интегральная сумма для криволинейного интеграла 2-ого рода $\int\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ совпадет с суммой Римана для интеграла $\int_a^b P(x,C)\,dx$. Таким образом, интеграл Римана — это частный случай криволинейного интеграла (или иначе, криволинейный интеграл — это обобщение Риманова интеграла).

Пример физического приложения криволинейного интеграла 2-ого рода. Пусть под действием силы $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T$ тело перемещается по кривой l на плоскости. Требуется найти работу, совершенную силой, по перемещению тела от точки A до точки B. Обозначим через ΔW_i работу, совершенную силой, при перемещении тела по дуге $M_i \smile M_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда

$$\Delta W_i \approx |\vec{F}(\xi_i, \eta_i)| \cdot |\vec{\Delta} l_i| \cos\alpha_i, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Здесь $\vec{\Delta} l_i = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$ — вектор (хорда), соединяющий точки M_i и M_{i+1} ($\vec{i}$, $\vec{j}$ — орты осей координат), α_i — угол между векторами $\vec{F}(\xi_i, \eta_i)$ и $\vec{\Delta} l_i$; $i = 0, \ldots, n-1$. Получаем:

$$\Delta W_i \approx (\vec{F}(\xi_i, \eta_i), \vec{\Delta} l_i) = P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Следовательно, вся работа может быть найдена так:

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right).$$

Устремляя ранг дробления кривой к нулю, придем к формуле:

$$W = \int\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Расссмотрим правила вычисления криволинейного интеграла 2-ого рода (сведения его к Риманову интегралу).

1) Предположим, что кривая l задана в явном виде:

$$y = y(x), \quad x \in [a,b],$$

причем функция $y(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ (кривая гладкая).

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Тем самым, получим дробление кривой l точками $M_i = (x_i, y(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$.

Полагая $\xi_i = \tau_i$, $\eta_i = y(\tau_i)$, где $\tau_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\tau_i, y(\tau_i)) + Q(\tau_i, y(\tau_i)) \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) \Delta x_i.$$

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\int\limits_{(l)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = (R) \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x))\ dx,$$

где символ (R) служит обозначением Риманова интеграла.

2) Предположим теперь, что кривая l задана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

причем функции $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$ (кривая гладкая).

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n произвольных частей:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

Тем самым, получим дробление кривой l точками $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $i = 0, \ldots, n$.

Полагая $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, где $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i) \approx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} + Q(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \right) \Delta t_i.$$

Здесь $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$, $\Delta y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\int\limits_{(l)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = (R) \int_\alpha^\beta (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t))\ dt,$$

где снова символ (R) служит обозначением Риманова интеграла.

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_{(l)} (1 + x)\, dx + y\, dy$, где l — полуокружность:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0.$$

1) Используем явное задание кривой: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Тогда

$$\int\limits_{(l)} (1 + x)\, dx + y\, dy = (R) \int_{-1}^{1} \left(1 + x + \sqrt{1 - x^2} \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \right)\ dx = \int_{-1}^{1} dx = 2.$$

2) Используем параметрическое задание кривой: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi]$. Тогда

$$\int\limits_{(l)} (1 + x)\, dx + y\, dy = (R) \int_0^\pi ((1 + \cos t)(-\sin t) + \sin t \cos t)\ dt = \int_0^\pi (-\sin t)\, dt = -2.$$

Заметим, что знак в ответе получился разный, поскольку в первом способе мы использовали движение по кривой по часовой стрелке, а во втором — против.

Замечание. Аналогично можно ввести понятие криволинейного интеграла 2-ого рода в трехмерном пространстве: $\int\limits_{(l)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$. Здесь l — кривая в R^3, $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z)\,Q(x,y,z)\,R(x,y,z))^T$ — векторная функция, заданная вдоль кривой l. Если кривая l записана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$, то тогда

$$\int\limits_{(l)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= (R)\int_\alpha^\beta \left(P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)\right)\,dt.$$

§ Криволинейные интегралы 2-ого рода по замкнутому контуру

В данном параграфе рассмотрим интеграл $\oint\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Здесь символ "круга" на интеграле означает, что кривая l — замкнутая. Пусть $D \subset R^2$ — область, ограниченная контуром l. Без потери общности, будем считать, что контур l — простой (несамопересекающийся). В противном случае, его можно разбить на простые куски. Поскольку знак интеграла зависит от направления движения по кривой, то договоримся, что стандартным считается направление, когда область D находится по левую сторону от направления движения. Далее, если не оговорено противное, во всех формулах будем использовать стандартную ориентацию замкнутой кривой.

Теорема. *Пусть область D окружена простым контуром l, и пусть в области D заданы непрерывные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные: $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда справедлива формула:*

$$\oint\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy$$

— формула Грина.

Доказательство. Без потери общности, будем считать, что область D задается условиями (см. рисунок 1):

$$D = \{(x,y)^T \in R^2 : \; y_1(x) \le y \le y_2(x), \; a \le x \le b\}.$$

Если область D задана какими-то более сложными условиями, то ее можно разбить на части указанного вида.

Тогда

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\right) dx = -\int\limits_{(y_2(x))} P(x,y)dx - \int\limits_{(y_1(x))} P(x,y)dx.$$

Здесь в первом интеграле знак поменялся, поскольку в Римановом интеграле мы двигались вдоль оси Ox слева-направо, а нас интересует движение по кривой $y_2(x)$ — справа-налево. Получаем:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = -\int\limits_{(l)} P(x,y)dx.$$

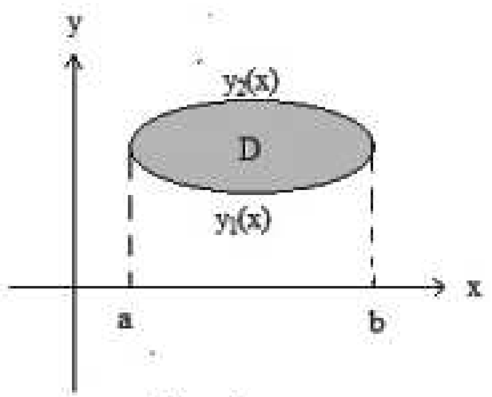

Рис. 1

Аналогично можно доказать, что

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \int\limits_{(l)} Q(x,y)dy.$$

Вычитая из второй формулы первую, получим требуемое. Теорема доказана.

С помощью формулы Грина можно вычислять площади плоских фигур. Положим $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$. Тогда формула Грина примет вид:

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy = -\oint\limits_{(l)} y\, dx.$$

Аналогично, если положить $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = x$, то получим

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy = \oint\limits_{(l)} x\, dy.$$

Можно также записать:

$$S(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_{(l)} x\, dy - y\, dx.$$

Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривой l:

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

(лист Декарта). Здесь $a > 0$. Полагая $y = tx$, запишем уравнение кривой в параметрическом виде:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

График кривой l изображен на рисунке 2.

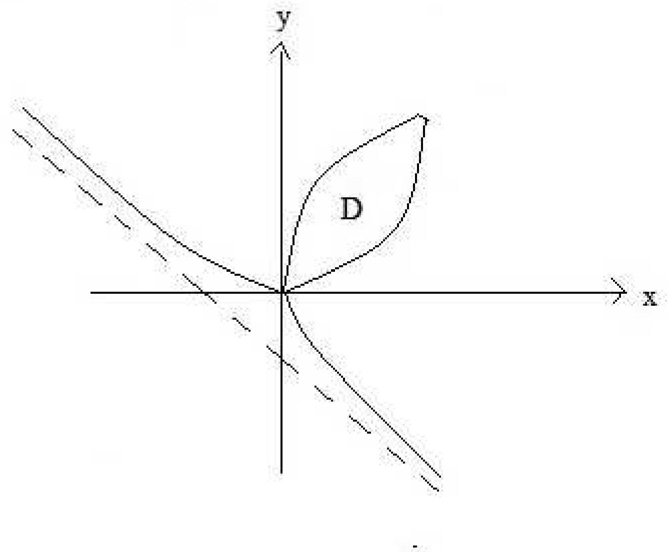

Рис. 2.

Нетрудно заметить, что "петля" на графике соответствует изменению параметра: $t \in [0, +\infty)$. Следовательно,

$$S(D) = \left| \oint\limits_{(l)} x\,dy \right| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{3at}{1+t^3} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} \right)' dt \right| = \ldots .$$

Модуль здесь поставлен на тот случай, если мы не угадали со стандартным движением по контуру, образуемому петлей кривой l.