ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Системы функций

Пусть в области $D \subset R^n$ задан набор функций

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m = y_m(x_1, \ldots, x_n). \end{array} \right. \tag{1}$$

Пусть в указанной области существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Определение. *Матрица*

$$\frac{\mathbb{D}(y_1, \ldots, y_m)}{\mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби системы функций (1).

Предположим теперь, что

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_1(t_1, \ldots, t_l), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = x_n(t_1, \ldots, t_l), \end{array} \right.$$

где $(t_1, \ldots, t_l) \in T \subset R^l$. Пусть в области T существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial x_j}{\partial t_k}$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, l$.

Тогда

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, l.$$

Данные соотношения можно переписать в матричном виде:

$$\frac{\mathbb{D}(y_1, \ldots, y_m)}{\mathbb{D}(t_1, \ldots, t_l)} = \frac{\mathbb{D}(y_1, \ldots, y_m)}{\mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n)}\frac{\mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n)}{\mathbb{D}(t_1, \ldots, t_l)}.$$

Определение. *Пусть $m = n$. Тогда определитель матрицы Якоби*

$$\frac{\mathrm{D}(y_1, \ldots, y_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)} = \det \frac{\mathbb{D}(y_1, \ldots, y_n)}{\mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n)}$$

называется Якобианом системы (1). Система (1) при этом называется неособой в области D, если ее Якобиан в этой области не равен нулю.

Пусть $m = n$, и система (1) разрешима в области D относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда система функций

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_1(y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = x_n(y_1, \ldots, y_n) \end{array} \right. \tag{2}$$

называется системой, обратной к системе (1).

Замечание. Вопрос о существовании обратной системы будет рассмотрен в следующем параграфе. Будет доказано, что если $m = n$, и система (1) — неособая в области D, то у у этой системы в данной области существует однозначная обратная система (2).

Теорема (Лаплас). *Пусть $m = n$, и система (1) — неособая. Тогда*

$$\frac{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}\,\frac{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)} = 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)} = \frac{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathbb{D}(x_1,\ldots,x_n)}\,\frac{\mathbb{D}(x_1,\ldots,x_n)}{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)}.$$

Тогда

$$\frac{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)} = \frac{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}\,\frac{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)}.$$

Учитывая, что $\frac{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)}$ — это единичная матрица, и ее определитель равен 1, получаем требуемое. Теорема доказана.

Определение. *Система функций (1) называется независимой в области D, если не существует функции $F \not\equiv 0$ такой, что*

$$F\left(y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_m(x_1,\ldots,x_n)\right) \equiv 0. \tag{3}$$

Продифференцируем тождество (3):

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} \equiv 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Данные тождества можно переписать в матричном виде:

$$\mathbf{A}h \equiv 0.$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_m)}{\mathbb{D}(x_1,\ldots,x_n)}\right)^T, \quad h = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial F}{\partial y_m}\right)^T.$$

Определение. *Рангом функциональной матрицы $\mathbf{A}$ в области D называется максимальный порядок минора матрицы, не равный тождественно нулю в указанной области.*

Теорема. *Для того чтобы система функций (1) была независимой в области D необходимо и достаточно, чтобы в этой области выполнялось условие*

$$\mathrm{rang}\mathbf{A} = m.$$

Следствие. *Пусть $m = n$. Тогда для независимости системы функций (1) в области D необходимо и достаточно, чтобы в этой области выполнялось условие*

$$\frac{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)} \not\equiv 0.$$

Следствие. *Пусть $\mathrm{rang}\mathbf{A} = r < m$. Тогда среди функций системы (1) можно выбрать r независимых функций, а остальные будут через них выражаться.*

Пример. Рассмотрим систему функций:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 x_3, \quad y_3 = x_1^2 + x_2 x_3.$$

Составим матрицу Якоби:

$$\frac{\mathbb{D}(y_1, y_2, y_3)}{\mathbb{D}(x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ 2x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы (Якобиан) тождественно равен нулю, т.е. это особая система в пространстве R^3. Нетрудно заметить, что ранг этой матрицы равен 2, т.е. из данной системы функций можно выбрать две независимые (например, y_1 и y_2), а третья через них выразится ($y_3 = y_1^2 + y_2$).

§ Теорема о системе неявных функций

Пусть имеется система уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Определение. *Говорят, что система уравнений (1) задает неявно функции* $y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)$, *если*

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема (о системе неявных функций). *Пусть*

$$\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T, \quad \mathbf{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})^T,$$

точка $M_0 = (\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)})$ *удовлетворяет системе уравнений (1), функции* $F_1, \ldots, F_m$ *непрерывны в окрестности точки* M_0 *и имеют там непрерывные частные производные* $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \ldots, m$, *причем*

$$\frac{\mathrm{D}(F_1, \ldots, F_m)}{\mathrm{D}(y_1, \ldots, y_m)}\Big|_{M_0} \neq 0.$$

Тогда можно найти такое $\delta > 0$, *что в* δ*-окрестности точки* $\mathbf{x}^{(0)}$ *существует единственный набор непрерывных функций* $y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющий там условиям:*

1) $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, m$,

2) $y_j(\mathbf{x}^{(0)}) = y_j^{(0)}$, $j = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $m = 1$ получаем теорему о неявной функции, доказанную ранее. Предположим, что теорема верна для $(m-1)$-ой неявной функции. Покажем, что тогда она будет верна и для m неявных функций.

Имеем

$$\frac{\mathrm{D}(F_1,\ldots,F_m)}{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_m)}\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0. \tag{3}$$

Значит, в последней строке данного определителя есть хотя бы один ненулевой элемент. Пусть для определенности $\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\Big|_{M_0} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции в окрестности точки M_0 из последнего уравнения в системе (1) можно выразить y_m:

$$y_m = \varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1}), \tag{4}$$

Подставим (4) в (1). Получим

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1}) = F_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1},\varphi(\ldots)) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{m-1}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1}) = F_{m-1}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1},\varphi(\ldots)) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$\Phi_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1}) = F_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1},\varphi(\ldots)) \equiv 0.$$

Обозначим

$$\Delta = \frac{\mathrm{D}(\Phi_1,\ldots,\Phi_{m-1})}{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_{m-1})}\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}_{M_0}.$$

Имеем

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad i,k = 1,\ldots,m-1,$$

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial y_k} = \frac{\partial F_m}{\partial y_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \equiv 0, \quad k = 1,\ldots,m-1.$$

Умножим последний столбец определителя (3) на $\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\Big|_{M_0}$ и прибавим к k-ому столбцу, $k = 1,\ldots,m-1$. Получим

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0} = \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\Big|_{M_0}\Delta.$$

Значит, $\Delta \neq 0$. Тогда по индуктивному предположению в окрестности точки M_0 систему (5) можно разрешить относительно $y_1,\ldots,y_{m-1}$:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1,\ldots,x_n). \end{cases}$$

Подставляя эти функции в (4), найдем

$$y_m = \varphi(x_1,\ldots,x_n,\varphi_1(\ldots),\ldots,\varphi_{m-1}(\ldots)).$$

Теорема доказана.

Замечание. Если дополнительно предположить, что функции $F_1, \dots, F_m$ имеют в окрестности точки M_0 непрерывные частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, тогда найденный в теореме набор функций $y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)$ будет в окрестности точки $\mathbf{x}^{(0)}$ иметь частные производные $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$. Найти эти производные можно путем непосредственного дифференцирования тождеств (2):

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n.$$

Отсюда имеем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} + \frac{\mathbb{D}(F_1, \dots, F_m)}{\mathbb{D}(y_1, \dots, y_m)} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \ldots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

или

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \ldots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = -\left(\frac{\mathbb{D}(F_1, \dots, F_m)}{\mathbb{D}(y_1, \dots, y_m)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Замечание. Из теоремы о системе неявных функций следует, что если в некоторой области $D \subset R^n$ задана неособая система гладких функций

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = y_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

то у нее в этой области существует однозначная обратная система

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, \dots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = x_n(y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$