ГЛАВА Интегралы, зависящие от параметра

Пример. Рассмотрим интеграл
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$
Это несобственный интеграл 1-ого рода. Он сходится по признаку Дирихле. Данный интеграл — неберущийся, т.е. вычислить его по формуле Ньютона — Лейбница не получится. Тем не менее, есть другие подходы к его вычислению.

Положим
$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\, dx.$$
Тогда получаем, что $I = J(0)$.

Имеем
$$J'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\, dx = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$
Тогда
$$J(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\operatorname{arctg}\alpha + C,$$
где C — некоторая постоянная.

Поскольку $J(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to +\infty$, то находим, что $C = \pi/2$. Значит,
$$J(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + \frac{\pi}{2},$$
и следовательно,
$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, однако, что некоторые из сделанных в данном примере преобразований (дифференцирование интеграла по параметру, предельный переход при $\alpha \to +\infty$) нуждаются в обосновании.

§ Равномерная сходимость функций

Будем все расписывать для функции двух переменных, однако, аналогичные результаты можно получить и для функций большего числа аргументов.

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную в области $D = X \times Y \subset R^2$.

Определение. *Пусть y_0 — предельная точка множества Y. Будем говорить, что функция $f(x,y)$ сходится при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in X$ (пишут $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$), если*
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall y \in Y:\ |y - y_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

Равномерность сходимости означает, что величина δ в выписанном выше определении не зависит от выбора аргумента x.

Отметим некоторые свойства равномерной сходимости.

Теорема (критерий сходимости Коши). *Для того чтобы функция $f(x,y)$ сходилась при $y \to y_0$ к некоторой конечной функции равномерно относительно $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall y_1, y_2 \in Y:\ \big(|y_1 - y_0| < \delta\big)\ \&\ \big(|y_2 - y_0| < \delta\big)\ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Теорема. *Функция $f(x,y)$ сходится при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in X$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности аргументов $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \in Y$, такой что $y_n \to y_0$ при $n \to +\infty$, последовательность значений функции $f(x,y_n)$ при $n \to +\infty$ сходится к значению $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in X$.*

Данная теорема позволяет свести анализ равномерной сходимости функций к анализу равномерной сходимости функциональных последовательностей. В результате, теоремы, доказанные ранее для последовательностей, удается перенести на функции.

Теорема. *Пусть $X = [a,b]$, и функция $f(x,y)$ — непрерывна (интегрируема) по x на данном отрезке при любом фиксированном значении $y \in Y$ из некоторой окрестности точки y_0. Тогда если функция $f(x,y)$ сходится при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in [a,b]$, то функция $\varphi(x)$ будет непрерывной (интегрируемой) на указанном отрезке $[a,b]$.*

Теорема. *Пусть x_0 — предельная точка множества X, а y_0 — предельная точка множества Y. Тогда если функция $f(x,y)$ сходится при $x \to x_0$ к некоторой функции $\psi(y)$, а также сходится при $y \to y_0$ к некоторой функции $\varphi(x)$, причем хотя бы одна из этих сходимостей является равномерной (относительно второго аргумента), то тогда*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y).$$

Лемма. *Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в прямоугольной области $D = [a,b] \times [c,d]$. Тогда при любом $y_0 \in [c,d]$ функция $f(x,y)$ будет сходиться при $y \to y_0$ к значению $f(x,y_0)$ равномерно относительно $x \in [a,b]$.*

Доказательство. По теореме Кантора функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна в области D. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x', x'' \in [a,b], \ \forall y', y'' \in [c,d] :$$

$$\big(|x' - x''| < \delta\big) \ \& \ \big(|y' - y''| < \delta\big) \quad \Rightarrow \quad |f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon.$$

Тогда, полагая $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y$, получаем требуемое. Лемма доказана.

Отметим, что результаты, сформулированные выше для области вида $D = X \times Y$ (например, если $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$, то область D будет тогда представлять собой прямоугольник), допускают распространение на двумерные области более общего вида. В частности, последнюю лемму можно переформулировать для произвольной замкнутой ограниченной области D.

§ Собственные интегралы, зависящие от параметра

В настоящем параграфе будем исследовать случай, когда интеграл зависит только от одного параметра. Однако, аналогичные результаты можно получить и для случая, когда имеется большее число параметров.

1. Интегралы с фиксированными границами. Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольной области $D = [a,b] \times [c,d]$ (см. рисунок 1). Будем считать, что эта функция интегрируема по x на промежутке $[a,b]$ при любом фиксированном значении $y \in [c,d]$. Тогда интеграл

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

называется интегралом, зависящим от параметра $y \in [c, d]$.

Теорема (о предельном переходе). *Пусть функция $f(x, y)$ сходится при $y \to y_0$ ($y_0 \in [c, d]$) к функции $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in [a, b]$. Тогда*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Доказательство. Согласно результатам предыдущего параграфа, функция $\varphi(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Из равномерной сходимости имеем:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall y \in [c, d] :\ |y - y_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a, b].$$

Тогда при $|y - y_0| < \delta$ получаем

$$\left| \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon(b - a).$$

Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

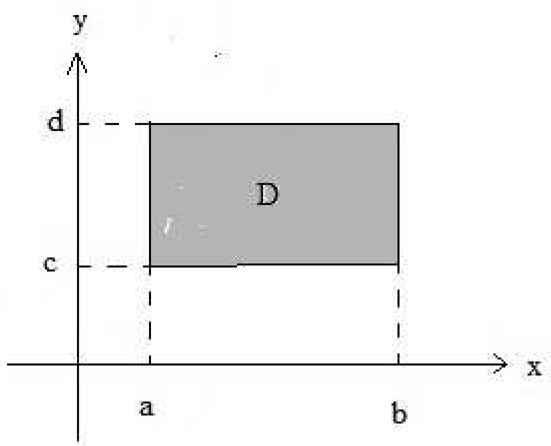

Рис. 1.

Теорема (о непрерывности). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D. Тогда функция $J(y)$ будет непрерывной на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство. Выберем произвольное $y_0 \in [c, d]$. Зададим приращение аргумента Δy ($(y_0 + \Delta y) \in [c, d]$). Имеем, что $f(x, y_0 + \Delta y) \to f(x, y_0)$ при $\Delta y \to 0$, равномерно относительно $x \in [a, b]$ (см. лемму из прошлого параграфа). Тогда по теореме о предельном переходе получаем

$$\lim_{\Delta y \to 0} J(y_0 + \Delta y) = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b f(x, y_0 + \Delta y)\, dx = \int_a^b f(x, y_0)\, dx = J(y_0),$$

следовательно, функция $J(y)$ непрерывна в точке y_0. Теорема доказана.

Теорема (об интегральном переходе). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D. Тогда функция $J(y)$ будет интегрируемой на отрезке $[c, d]$, и*

$$\int_c^d J(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

Доказательство теоремы следует из свойств двойного интеграла.

Теорема (о дифференциальном переходе) (правило Лейбница). *Пусть функция* $f(x,y)$ *непрерывна в области* D *, и в этой области существует непрерывная частная производная* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. *Тогда функция* $J(y)$ *будет дифференцируемой на отрезке* $[c,d]$, *и*

$$J'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx.$$

Доказательство. Имеем

$$J'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{J(y+\Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\, dx =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b \frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\, dx.$$

Здесь $\theta \in (0,1)$. Применяя теорему о предельном переходе, и учитывая лемму из предыдущего параграфа, находим требуемое:

$$J'(y) = \int_a^b \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx.$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть

$$J(y) = \int_0^1 xy^2\, dx.$$

Вычислим производную этой функции двумя способами. С одной стороны,

$$J(y) = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 y^2 = \frac{y^2}{2},$$

и значит,

$$J'(y) = y.$$

С другой стороны,

$$J'(y) = \int_0^1 \frac{\partial (xy^2)}{\partial y}\, dx = \int_0^1 2xy\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 2y = y.$$

Получили то же самое.

2. Интегралы с подвижными границами. Пусть функция $f(x,y)$ определена в области

$$D = \{(x,y)^T \in R^2 : \quad x \in [a(y), b(y)], \quad y \in [c,d]\}.$$

Здесь $a(y)$, $b(y)$ — некоторые ограниченные функции, заданные на отрезке $[c,d]$. Положим

$$\bar{a} = \min_{[c,d]} a(y), \qquad \bar{b} = \max_{[c,d]} b(y)$$

(см. рисунок 2). Будем считать, что функция $f(x,y)$ интегрируема по x на промежутке $[a(y), b(y)]$ при любом фиксированном значении $y \in [c,d]$. Тогда интеграл получим следующий интеграл, зависящий от параметра:

$$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx.$$

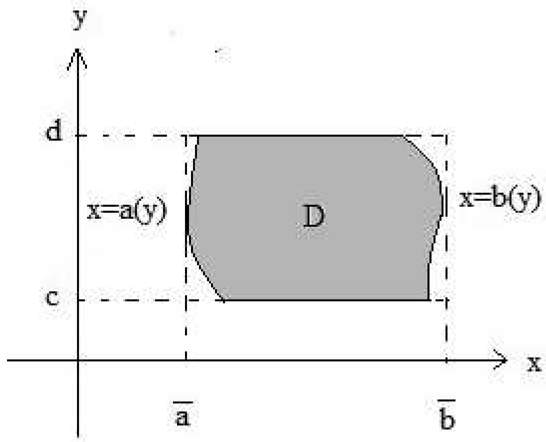

Рис. 2.

Теорема (о предельном переходе). *Пусть функция $f(x,y)$ сходится при $y \to y_0$ (здесь $y_0 \in [c,d]$) к функции $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in [\bar{a},\bar{b}]$ (таких что $(x,y) \in D$), и кроме того, $a(y) \to \hat{a}$ и $b(y) \to \hat{b}$ при $y \to y_0$. Тогда*

$$\lim_{y \to y_0} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. Согласно условиям теоремы, имеем

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall y \in [c,d] :\ |y - y_0| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [\bar{a},\bar{b}]\ \big((x,y) \in D\big),$$

и кроме того,

$$|a(y) - \hat{a}| < \varepsilon, \qquad |b(y) - \hat{b}| < \varepsilon.$$

Тогда при $|y - y_0| < \delta$ получаем

$$\left| \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx - \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \varphi(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_{a(y)}^{\hat{a}} f(x,y)\,dx + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} f(x,y)\,dx + \int_{\hat{b}}^{b(y)} f(x,y)\,dx - \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \varphi(x)\,dx \right| \le$$

$$\le \left| \int_{a(y)}^{\hat{a}} f(x,y)\,dx \right| + \left| \int_{\hat{b}}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right| + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} |f(x,y) - \varphi(x)|\,dx <$$

$$< \varepsilon \left(2M + (\hat{b} - \hat{a}) \right).$$

Здесь $M = \sup\limits_D f(x,y)$ (мы в данном параграфе исследуем собственные интегралы, значит, $M \ne \infty$). Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Теорема (о непрерывности). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, и функции $a(y)$, $b(y)$ непрерывны на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $J(y)$ будет непрерывной на отрезке $[c,d]$.*

Доказательство. Выберем произвольное $y_0 \in [c, d]$. Зададим приращение аргумента Δy ($(y_0 + \Delta y) \in [c, d]$). Имеем, что $f(x, y_0 + \Delta y) \to f(x, y_0)$ при $\Delta y \to 0$, равномерно относительно аргумента x (см. лемму из прошлого параграфа), и кроме того, $a(y_0 + \Delta y) \to a(y_0)$ и $b(y_0 + \Delta y) \to b(y_0)$ при $\Delta y \to 0$. Тогда по теореме о предельном переходе получаем

$$\lim_{\Delta y \to 0} J(y_0 + \Delta y) = \lim_{\Delta y \to 0} \int_{a(y_0+\Delta y)}^{b(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)\, dx = J(y_0),$$

следовательно, функция $J(y)$ непрерывна в точке y_0. Теорема доказана.

Теорема (об интегральном переходе). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, и функции $a(y)$, $b(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$. Тогда функция $J(y)$ будет интегрируемой на отрезке $[c, d]$, и*

$$\int_c^d J(y)\, dy = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

Доказательство теоремы следует из свойств двойного интеграла.

Теорема (о дифференциальном переходе) (обобщенное правило Лейбница). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D и имеет там непрерывную частную производную $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Пусть также функции $a(y)$, $b(y)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[c, d]$. Тогда функция $J(y)$ будет дифференцируемой на отрезке $[c, d]$, и*

$$J'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx - f(a(y), y)a'(y) + f(b(y), y)b'(y).$$

Доказательство. Построим функцию

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)\, dx.$$

Тогда $J(y) = F(y, a(y), b(y))$. Используя правило дифференцирования сложных функций, а также учитывая теорему Барроу и доказанное ранее частное правило Лейбница, получаем

$$J'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} a'(y) + \frac{\partial F}{\partial v} b'(y) =$$

$$= \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx - f(a(y), y)a'(y) + f(b(y), y)b'(y).$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть

$$J(y) = \int\limits_{\sin y}^{1+y^2} \frac{e^{xy}}{x}\, dx.$$

Тогда

$$J'(y) = \int\limits_{\sin y}^{1+y^2} e^{xy}\, dx - \frac{e^{y \sin y}}{\sin y} \cos y + \frac{e^{y^3}}{y^2} 2y =$$

$$= \frac{e^{xy}}{y}\Big|_{\sin y}^{y^2} - \frac{e^{y \sin y} \cos y}{\sin y} + \frac{2e^{y^3}}{y} = \frac{3e^{y^3}}{y} - \frac{e^{y \sin y}(1 + \cos y)}{\sin y}.$$