Лекция 7. равнения движения и основные законы динамики механической системы

Принцип детерминированности и уравнение Ньютона

Пусть $\vec{r_i}$, i ∈ [1 : n] — радиус-векторы точек M_i рассматриваемой системы из n точек относительно некоторого репера. $\vec{r}$ = $\vec{r}$(t) = ($\vec{r_1}$(t), ..., $\vec{r_n}$(t)) для положения этой системы в момент t.

Принцип детерминированности - движение любой такой системы точек однозначно определяется ее положением $\vec{r}$(t) и скоростью $\dot{\vec{r}}$(t) в любой момент t. Существует функция $\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ - *уравнение Ньютона.* Эта функция условиям существования и единственности решения задачи Коши, состоящей из уравнения Ньютона и $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$.

Инерциальные системы координат

Ускорение тел может вызываться двумя причинами: действием на них других тел и/или свойствами системы координат. *Закон инерции Галилея-Ньютона* состоит в том, что существуют системы координат К, удовлетворяющие следующему свойству: точка, не подверженная действию других тел, движется относительно системы координат К прямолинейно и равномерно (по инерции).

Принцип относительности Галилея
$\vec{r} = \vec{r}$(t), $\vec{r}$'=$\vec{r}$'(t) – положение М относительно двух реперов (О, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$), (O, $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$). Взаимное положение этих реперов определяется формулами, связывающими их начала и орты: O' = O, $\begin{pmatrix}\vec{e_1}'\\ \vec{e_2}'\\ \vec{e_3}'\end{pmatrix}$= P$\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\end{pmatrix}$, O' = O + $\vec{a}$, $\vec{e_i}' = \vec{e_i}$, O' = O + $t \cdot \vec{u}$, i=1,2,3, t∈R, где $\vec{a}$, $\vec{u}$ ∈ R^3 - любые постоянные векторы, а Р — любая ортогональная матрица. Данные формулы описывают соответственно поворот репера (О, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) вокруг своего начала, его сдвиг на вектор $\vec{a}$ и семейство его сдвигов на векторы $t \cdot \vec{u}$ при t∈R. Далее выводим формулы для преобразования координат М: $\vec{r}' = P^T\vec{r}$, $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$, $\vec{r}' = \vec{r} - t \cdot \vec{u}$ и $t' = t - t_0$ (сдвиг). Суперпозиция этих преобразований - *преобразованиями Галилея*. Множество преобразований Галилея - *группой Галилея. Принцип относительности Галилея* - существует система координат К, удовлетворяющая следующему свойству: правая часть уравнения Ньютона в системе координат К инвариантна относительно преобразований группы Галилея. Системы координат, удовлетворяющие двум вышеописанным свойствам – *инерциальные*.

Следствия из принципа относительности:

1. *Законы механики Ньютона не меняются во времени*: Если $\vec{r} = \vec{\varphi}(t)$ – решение уравнения Ньютона, то при любом τ ∈ R его решением также является $\vec{\rho} = \vec{\varphi}(t + \tau)$, то есть уравнение для $\ddot{\vec{r}}$ – автономное: $\ddot{\vec{r}} = \Phi(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$
2. *Пространство однородно*: если $\vec{r_i} = \vec{\varphi_i}(t)$, i=1, …,n движения точек M_1, …, M_n, удовлетворяющее уравнению Ньютона, то при любом $\vec{a} = E^3$ движение $\vec{e_i} = \vec{\varphi_i}(t) + \vec{a}$, i=1, …,n также является решением уравнения Ньютона.
3. $\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ может быть записана как функция величин $\dot{\vec{r_j}} - \dot{\vec{r_k}}$, j,k=1, …, n. Таким образом: $\ddot{\vec{r_i}} = f_i(\{\vec{r_j} - \vec{r_k}\}, \{\dot{\vec{r_j}} - \dot{\vec{r_k}}\})$, i,j,k=1, …, n.
4. *Пространство изотропно* – инвариантность уравнения Ньютона относительно преобразования $\vec{r}' = P^T\vec{r}$.