ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Дифференцируемость функций

В этом и последующих параграфах для простоты записи будем все выкладки подробно расписывать для функций двух или трех аргументов. Тем не менее, все, то же самое, будет справедливо и для функций произвольного числа аргументов.

Рассмотрим функцию $f(x, y, z)$, определенную в области $D \subset R^3$. Пусть $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — внутренняя точка области D. В данной точке придадим аргументу x некоторое приращение Δx (остальные аргументы y и z считаем фиксированными). Тогда величина

$$\Delta_x f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$$

называется частным приращением функции $f(x, y, z)$ в точке M_0 по переменной x.

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x},$$

то он называется частной производной функции $f(x, y, z)$ в точке M_0 по переменной x (пишут $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{M_0}$ или $f'_x(M_0)$).

Аналогично можно ввести частные приращения и частные производные для функции по другим аргументам:

$$\Delta_y f(M_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta_z f(M_0) = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{M_0} = f'_y(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(M_0)}{\Delta y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{M_0} = f'_z(M_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z f(M_0)}{\Delta z}.$$

Поскольку при вычислении частной производной по какой-то переменной все остальные переменные мы рассматриваем, как константы, то при работе с частными производными можно использовать всю теорию дифференциального исчисления функций одной переменной.

Пример. Пусть $f(x, y, z) = xe^{y+z^2}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y+z^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{y+z^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xe^{y+z^2} 2z.$$

Зададим теперь в точке M_0 приращения сразу одновременно по всем трем аргументам: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Тогда величина

$$\Delta f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

называется полным приращением функции $f(x, y, z)$ в точке M_0.

Определение. *Функция $f(x, y, z)$ называется дифференцируемой в точке M_0, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде:*

$$\boxed{\Delta f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),}$$

где A, B, C — некоторые постоянные (зависящие от выбора точки M_0),

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}, \qquad \lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

Теорема (необходимое условие дифференцируемости). *Для того, чтобы функция $f(x,y,z)$ была дифференцируемой в точке M_0 необходимо, чтобы в этой точке у нее существовали частные производные по всем аргументам.*

Доказательство. Пусть функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке M_0. Положим $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = \Delta z = 0$. Тогда из определения дифференцируемости следует, что

$$\Delta f(M_0) = \Delta_x f(M_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Перейдем в данном выражении к пределу при $\Delta x \to 0$. Правая часть равенства имеет предел, значит, и левая тоже должна иметь предел. Получим

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = A.$$

Таким образом, функция $f(x,y,z)$ дифференцируемой в точке M_0 по переменной x. Аналогично показывается, что она будет дифференцируема и по другим переменным y и z, причем

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}, \qquad C = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0}.$$

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует, что если функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке M_0, то

$$\Delta f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0}\Delta z + o(\rho).$$

Замечание. Существование частных производных является только необходимым условием дифференцируемости, но не достаточным.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости). *Для того, чтобы функция $f(x,y,z)$ была дифференцируемой в точке M_0 достаточно, чтобы в окрестности этой точки у нее существовали непрерывные частные производные по всем аргументам.*

Доказательство. Имеем

$$\Delta f(M_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0) =$$
$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) +$$
$$+ f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) +$$
$$+ f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0) =$$
$$= \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)}{\Delta x}\Delta x +$$
$$+ \frac{f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)}{\Delta y}\Delta y +$$
$$+ \frac{f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}\Delta z =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} + \beta\right)\Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0} + \gamma\right)\Delta z,$$

где

$$\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)}{\Delta x} - \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0},$$

$$\beta = \frac{f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)}{\Delta y} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0},$$

$$\gamma = \frac{f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z} - \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0}.$$

Тогда

$$\Delta f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0}\Delta z + \varepsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z).$$

Здесь

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z.$$

Учитывая непрерывность частных производных в точке M_0, находим, что

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = o(\rho).$$

Получили, что функция $f(x, y, z)$ является дифференцируемой в точке M_0. Теорема доказана.

Замечание. Непрерывность частных производных является только достаточным условием дифференцируемости, но не необходимым.

Определение. *Линейная (относительно приращений аргументов) часть полного приращения функции называется первым дифференциалом функции в заданной точке M_0 (пишут $df(M_0)$).*

Обозначим $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$. Тогда

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}dx + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}dy + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0}dz,$$

т.е.

$$\Delta f(M_0) = df(M_0) + o(\rho).$$

Легко доказать следующие арифметические свойства первого дифференциала:

1) $d(f \pm g) = df \pm dg$,

2) $d(fg) = gdf + fd$,

3) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$ (если $g(M_0) \neq 0$).

Замечание. Аналогично, пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в области $D \subset R^n$, и $M_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — внутренняя точка области D. Тогда

$$\Delta_{x_i} f(M_0) = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)} + \Delta x_i, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{M_0} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(M_0)}{\Delta x_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta f(M_0) = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Дифференцируемость означает, что

$$\Delta f(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{M_0}\Delta x_i + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}$. При этом

$$df(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{M_0} dx_i.$$

Здесь $dx_i = \Delta x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Для n-мерного случая верны все те же теоремы, что были доказаны ранее.

Замечание. Сточностью до слагаемых большего порядка имеем $\Delta f(M_0) \approx df(M_0)$. Этот факт можно использовать для приближенных вычислений.

Пример. Вычислить приближенно $I = \sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$.

Пусть $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$. Выберем $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = -0,03$. Получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I = f(1,02;\, 1,97) = f(1,2) + \Delta f(1,2) \approx f(1,2) + df(1,2) = \\ = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,2)} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,2)} \Delta y = \\ = 3 + 0,5 \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) = 2,95. \end{aligned}$$

Чтобы оценить точность полученного значения, а также чтобы получить более точное значение, следует воспользоваться формулой Тейлора (см. далее).