# ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

## § Формула Стокса

Пусть в $R^3$ имеется простая двусторонняя поверхность $S$, в каждой точке которой задана векторная функция $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$. Будем считать, что площадь поверхности — конечна, и компоненты вектора $\vec{F}(x,y,z)$ — ограничены на $S$.

Запишем уравнение поверхности в параметрическом виде:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \quad (u,v) \in \Delta. \tag{1}$$

Будем считать, что функции $\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)$ дважды непрерывно дифференцируемы в области $\Delta$ по своим аргументам.

Введем обозначения: $K$ — граница (контур) области $\Delta$; $L$ — граница (контур) поверхности $S$. Полагаем, что в результате отображения (1) точки плоской кривой $K$ переходят в точки пространственной кривой $L$. Для определенности знака предположим, что стандартному движению по контуру $K$ соответствует стандартное движение по контуру $L$, и кроме того, выбор стороны поверхности $S$ согласован со стандартным движением по контуру $L$.

Пусть уравнение контура $K$ задается формулами:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

Тогда уравнение контура $L$ запишется в виде:

$$x = x(t) = \varphi(u(t), v(t)), \quad y = y(t) = \psi(u(t), v(t)), \quad z = z(t) = \chi(u(t), v(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Рассмотрим цепочку преобразований:

$$dx = \left(\frac{dx}{du}\frac{du}{dt} + \frac{dx}{dv}\frac{dv}{dt}\right)dt$$

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} P(x(t),y(t),z(t)) \left(\frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t)\right) dt =$$

$$= \oint\limits_{(K)} P\frac{\partial x}{\partial u}\,du + P\frac{\partial x}{\partial v}\,dv = (\text{формула Грина}) =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left( \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)} \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left( \frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C \right) dudv = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\,dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy.$$

Таким образом, получили, что

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\,dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\oint\limits_{(L)} Q(x,y,z)\,dy = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dydz,$$

$$\oint\limits_{(L)} R(x,y,z)\,dz = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y}\,dydz - \frac{\partial R}{\partial x}\,dxdz.$$

Складывая полученные три формулы, находим формулу Стокса:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Отметим, что формула Стокса является распространением формулы Грина на трехмерное пространство.

Формулу Стокса можно записать через поверхностный интеграл 1-ого рода:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left( \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\lambda + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\mu + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\nu \right) dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS.$$

Здесь $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ — направляющие косинусы нормали к поверхности $S$.

**Замечание.** Случай, когда на поверхности $S$ выполняются соотношения:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

называется потенциальным. В этом случае имеет место ряд свойств (см. ранее).

## § Тройной интеграл

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в связной и простой (т.е. ограниченной простой, несамопересекающейся замкнутой поверхностью) области $T \subset R^3$.

Будем считать, что $T$ — ограниченная область, и функция $f(x, y, z)$ ограничена там.

Разобьем область $T$ на $n$ произвольных простых, связных, непересекающихся кусочков:

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} T_i \qquad (T_i \cap T_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j).$$

Обозначим $d_i = \operatorname{diam} T_i$, $i = 1, \ldots, n$. Величину $\omega = \max\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$ назовем рангом дробления области $T$.

Найдем $\Delta V_i$ — объем области $T_i$, $i = 1, \ldots, n$. Выберем произвольные точки: $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in T_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Построим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

и назовем ее суммой Римана.

**Определение.** *Если существует конечный предел:* $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$*, причем он не зависит от способа дробления области* $T$ *и от выбора точек* $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$*,* $i = 1, \ldots, n$*, то он называется тройным (Римановым) интегралом от функции* $f(x, y, z)$ *по области* $T$*. Обозначим его:* $\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dV$.

**Замечание.** Если тройной интеграл существует, то предел суммы Римана, согласно определению, не зависит от способа дробления области $T$. Тогда без потери общности можно выбрать самый простой способ дробления — с помощью плоскостей, параллельных координатным плоскостям. В этом случае область $T$ разобьется на прямоугольные параллелепипеды (на границе области данные параллелепипеды могут быть обрезанными, но при ранге дробления, стремящимся к нулю, этим можно пренебречь). Тогда, если $T_i$ — параллелепипед со сторонами $\Delta x_i$, $\Delta y_i$, $\Delta z_i$, то получим $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$. Поэтому в тройном интеграле часто используют также следующее обозначение: $dV = dxdydz$, и пишут: $\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dxdydz$.

Отметим, что для тройного интеграла будут справедоивы все стандартные свойства интегралов. Также можно сформулировать условия существования интеграла.

Рассмотрим правила вычисления тройного интеграла. Предположим, что область $T$ задается условиями (см. рисунок 1):

$$a \leq x \leq b,$$

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$
$$z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y).$$

Если область $T$ имеет какую-то более сложную форму, то ее можно разбить на куски подобного типа.

Область $D \subset R^2$, задаваемая условиями

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

представляет собой проекцию тела $T$ на плоскость $Oxy$.

Аналогично двумерному случаю нетрудно доказать, что:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

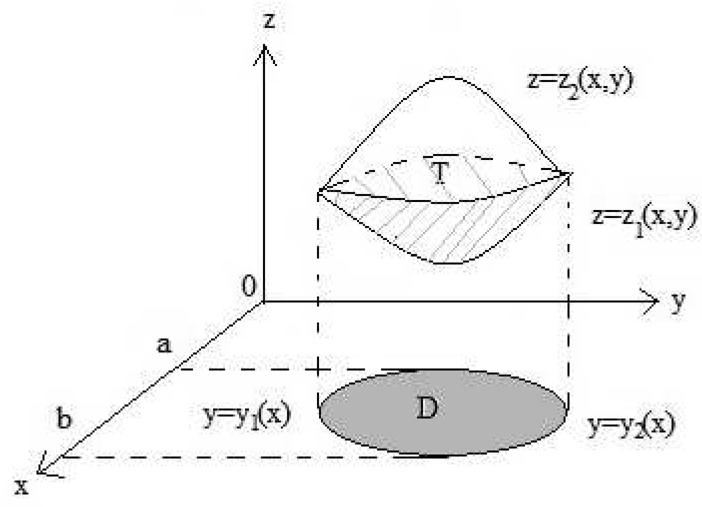


Рис. 1.

Заметим, что тело $T$ можно проектировать на другие координатные плоскости и перебирать переменные $x$, $y$, $z$ в другом порядке. Тогда будем приходить к аналогичным повторным интегралам (всего их в трехмерном случае, очевидно, будет 6).

Предположим, что отображение

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases} \qquad (u,v,w) \in T_1,$$

взаимно-однозначно отображает область $T_1$ в область $T$. Пусть функции $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ имеют непрерывные частные производные в $T_1$. Тогда

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{T_1} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)} \right| dudvdw.$$

**Пример.** Сферические координаты (см. рисунок 2 а):

$$\begin{cases} x &= w\cos u\cos v, \\ y &= w\sin u\cos v, \\ z &= w\sin v. \end{cases}$$

Здесь: $w$ — расстояние до начала координат, $u$ — "географическая долгота", $v$ — "географическая широта". В этом случае

$$\left| \frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)} \right| = w^2\cos v.$$

**Пример.** Цилиндрические координаты (см. рисунок 2 б):

$$\begin{cases} x = w\cos u, \\ y = w\sin u, \\ z = v. \end{cases}$$

Здесь переменную $z$ не меняем, а к переменным $x$, $y$ применяем полярное преобразование. В этом случае

$$\left|\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)}\right| = w.$$

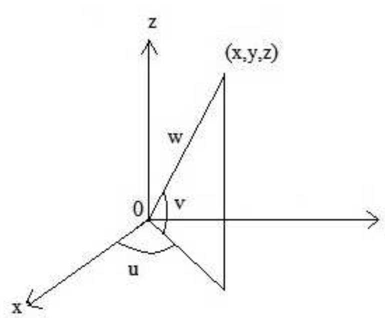

Рис. 2 а.

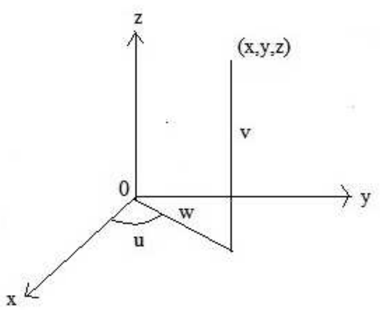

Рис. 2 б.

**Пример.** Найдем объем шара $T$:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2.$$

Имеем

$$V(T) = \iiint\limits_T dxdydz.$$

Тело $T$ можно описать условиями:

$$-R \le x \le R,$$

$$-\sqrt{R^2 - x^2} \le y \le \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Первые два условия задают проекцию шара на плоскость $Oxy$. Это будет круг:

$$x^2 + y^2 \le R^2.$$

Тогда

$$V(T) = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz.$$

Сделаем сферическую замену координат. Получим

$$V(T) = \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_0^{R} dw \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} w^2 \cos v \, dv = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**Замечание.** Аналогичным образом можно ввести понятие $n$-мерного Риманова интеграла:

$$\int\limits_{T} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Здесь $T \subset R^n$.