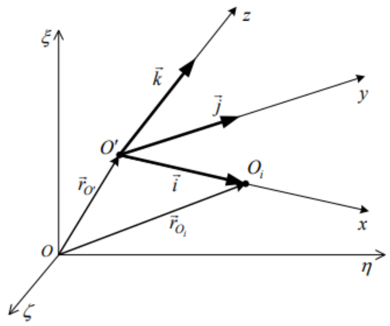
Лекция 6. Сложное движение

Сложное движение точки.

(O, $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$, $\vec{e}_\zeta$), (O' , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) –неподвижный и подвижный реперы. Связанные с ним пространства - *абсолютное* и *относительное* соответственно. Движения, скорости и ускорения точек относительно заданных реперов – абсолютные и относительные соответственно.
Движение, скорость и ускорение точки подвижного пространства в момент t относительно абсолютного репера называют *переносными* для точки неподвижного пространства в этот момент.

Относительная производная

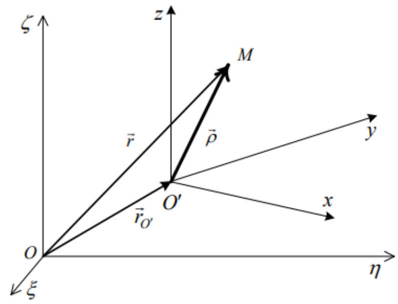
Задана вектор функция $\vec{C} = C_x\vec{\imath} + C_y\vec{\jmath} + C_z\vec{k}$ => $\dot{\vec{C}} = \dot{C}_x\vec{\imath} + \dot{C}_y\vec{\jmath} + \dot{C}_z\vec{k} + \dot{C}_x\dot{\vec{\imath}} + \dot{C}_y\dot{\vec{\jmath}} + \dot{C}_z\dot{\vec{k}}$.
Производные зависят от рассматриваемого пространства.



Теорема (Формулы Пуассона): Подвижный репер (O' , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$), жестко связанный с твердым телом, движется относительно неподвижного репера (O, $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$, $\vec{e}_\zeta$) с угловой скоростью Производные подвижных ортов в неподвижном репере вычисляются по формулам: $\dot{\vec{\imath}} = \vec{\omega} \times \vec{\imath}, \dot{\vec{\jmath}} = \vec{\omega} \times \vec{\jmath}$, $\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}$.

Производная функции $\vec{C}$ в подвижном репере называют *относительной* производной (обозначение: d'$\vec{C}$/dt). Производная функции $\vec{C}$ в неподвижном репере называют *абсолютной* производной (обозначение: d$\vec{C}$/dt).

Теорема (формула относительной производной): (в условиях предыдущей теоремы)
Относительная и абсолютная производные вектор-функции связаны равенством: d$\vec{C}$/dt = d'$\vec{C}$/dt + $\vec{\omega} \times \vec{C}$.



Теорема сложения скоростей: Абсолютная, переносная и относительная скорости движения точки связаны следующим равенством: $\vec{u} = \vec{u}_e + \vec{u}_r$, где $\vec{u}_e$- переносная скорость точки, а $\vec{u}_r$- относительная скорость точки.

Теорема сложения ускорений (Формула Криолиса): Абсолютное, переносное, относительное и вращательное ускорения в сложном движении точки связаны следующим равенством: $\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c$, где $\vec{w}_c = 2\vec{w} \times \vec{u}_r$, $\vec{w}_e$- переносное ускорение, $\vec{w}_r$- относительное ускорение.

Теорема о сложении угловых скоростей:
Рассмотрим n + 1 репер (O, $\vec{e}_{i,1}$, $\vec{e}_{i,2}$, $\vec{e}_{i,3}$), i ∈ [1 : n + 1] с центром в неподвижной точке O твердого тела, и предположим, что первый и последний из этих реперов совпадают с неподвижным и подвижным реперами (O, $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$, $\vec{e}_\zeta$), (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) соответственно, а подвижный репер жестко связан с движущимся твердым телом. При i ∈ [1 : n] репер (O, $\vec{e}_{i+1,1}$, $\vec{e}_{i+1,2}$, $\vec{e}_{i+1,3}$) движется относительно репера (O, $\vec{e}_{i,1}$, $\vec{e}_{i,2}$, $\vec{e}_{i,3}$) с угловой скоростью $\vec{\omega}_i$. В этом случае говорят, что твердое тело совершает одновременное вращение с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1$, ..., $\vec{\omega}_n$ вокруг осей $\vec{\omega}_1/\omega_1, \ldots, \vec{\omega}_n/\omega_n$.

(Формула сложения угловых скоростей) Если твердое тело совершает одновременное вращение вокруг неподвижной точки с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1$, ..., $\vec{\omega}_n$, то его угловая скорость вычисляется по формуле: $\vec{\omega} = \ \vec{\omega}_1 + \cdots + \vec{\omega}_n$.