Лекция 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Криволинейная система координат в области $D \subset R^n(y)$ - система гладких функций $(x_1(y_1, ..., y_n), ..., x_n(y_1, ..., y_n))$, задающих взаимно-однозначное отображение области D на некоторую область $D_1 \subset R^n{}_1(x)$, причем эти функции таковы, что якобиан отличен от нуля во всех точках области D

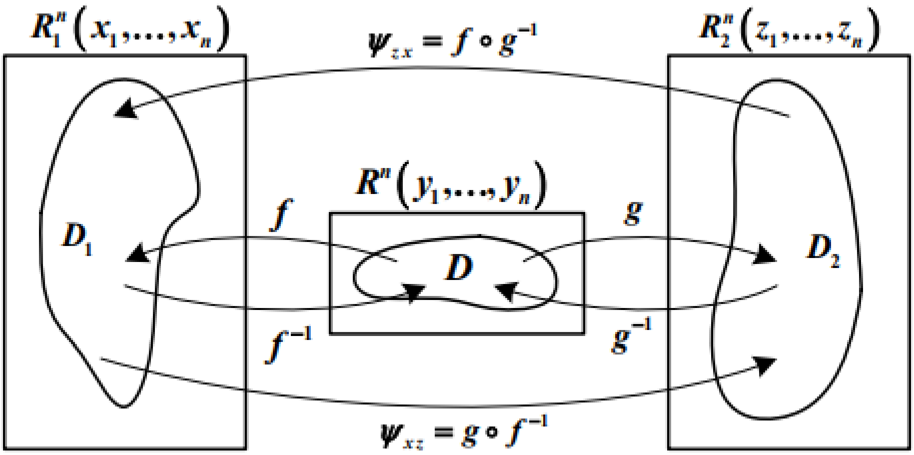
$$J(y) = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial y_1 & \dots & \partial x_n/\partial y_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial x_1/\partial y_n & \dots & \partial x_n/\partial y_n \end{vmatrix}$$

Отличие от нуля якобиана J(y) при всех $y \in D$ гарантирует, что отображение $f^{-1}(x)$, обратное к f(y) также является гладким.

Отображение $f: D \to R^n$ 1 - гладкое отображением класса $C^r(D)$ при $1 \le r < \infty$, или $r = \infty$, или $r = \omega$, если оно дифференцируемо до порядка r включительно, или бесконечно дифференцируемо (аналитично соответственно).

Замена координат:

Пусть $y = (y_1, ..., y_n) \in R^n(y)$, и в области $D \subset R^n(y)$ две системы координат $x(y) = (x_1(y), ..., x_n(y))$ и $z(y) = (z_1(y), ..., z_n(y))$ заданы отображениями $f: D \to D_1 \subset R^n{}_1(x)$ и $g: D \to D_2 \subset R^n{}_2(z)$. *Заменой координат* x на z (или z на x) - отображение $\psi_{xz}: D_1 \to D_2 (\psi_{zx}: D_2 \to D_1)$, задаваемое формулой $\psi_{xz} = g \circ f^{-1}$ (соответственно, $\psi_{zx} = f \circ g^{-1}$), то есть $\psi_{xz}(x) = g(f^{-1}(x))$ $(\psi_{zx}(z) = f(g^{-1}(z))$.

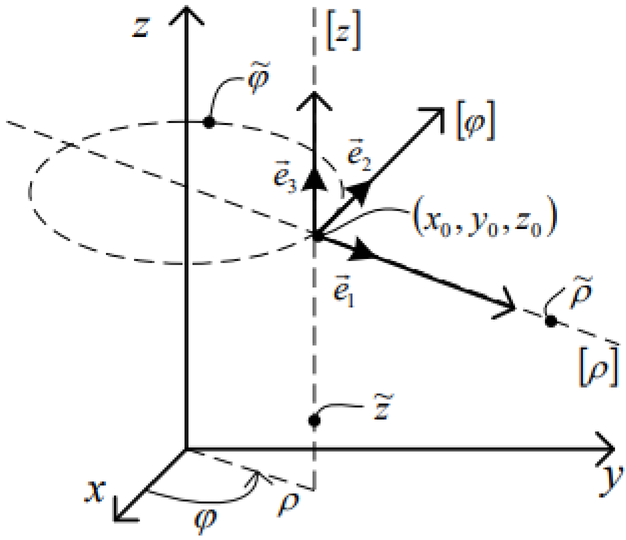


Локальные базисы:

В механике фиксированную декартову систему координат в R^3 часто обозначают O_{xyz}, а упорядоченный набор координат точки рассматривают как радиус-вектор $\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, где $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ — орты системы O_{xyz}. Криволинейные координаты обозначим $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ и будем задавать их формулами $q_i = q_i(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y, z) \in D$, i = 1, 2, 3, то есть $\vec{q} = \vec{q}(\vec{r})$, или $x = x(\vec{q})$, $y = y(\vec{q})$, $z = z(\vec{q})$, $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q})$ при $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \in Q = \{ \vec{q} \mid \vec{q} = \vec{q}(\vec{r}), \vec{r} \in D \}$, причем предполагается, что $\vec{q}(\vec{r}(\vec{q})) = \vec{q}$, $\vec{r}(\vec{q}(\vec{r})) = \vec{r}$ в областях Q и D соответственно.

Пусть $\overrightarrow{q_0} = (q_{1,0}, q_{2,0}, q_{3,0}) \in Q$, $\overrightarrow{r_0} = \vec{r}(\overrightarrow{q_0}) = (x_0, y_0, z_0)$, тогда множества $(q_{i,0}) = \{(x, y, z) \in D \mid q_i(x, y, z) = q_{i,0}\}$, i = 1, 2, 3 - координатные поверхности криволинейной системы координат $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ в точке $(q_{1,0}, q_{2,0}, q_{3,0})$, а $\widetilde{q_3} = (q_{1,0}) \cap (q_{2,0})$, $\widetilde{q_2} = (q_{1,0}) \cap (q_{3,0})$, $\widetilde{q_1} = (q_{2,0}) \cap (q_{3,0})$ - ее координатными линиями в этой точке. Ясно, что $(q_{1,0}) \cap (q_{2,0}) \cap (q_{3,0}) = \{(x_0, y_0, z_0)\}$.

Вектора $\overrightarrow{\partial r}/\overrightarrow{\partial q_1}$, $\overrightarrow{\partial r}/\overrightarrow{\partial q_2}$, $\overrightarrow{\partial r}/\overrightarrow{\partial q_3}$ составляют строки матрицы якобиана и должны быть ненулевыми. Эти векторы являются касательными в точке $\overrightarrow{q_0}$ = ($q_{1,0}$, $q_{2,0}$, $q_{3,0}$) ∈ Q к линиям $\widetilde{q_1}$, $\widetilde{q_2}$, $\widetilde{q_3}$ соответственно.



Совокупность трех векторов ($\overrightarrow{\tau_1}, \overrightarrow{\tau_2}, \overrightarrow{\tau_3}$) единичной длины, определяемых формулой $\overrightarrow{\tau_i} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, i = 1, 2, 3 - локальный базис в точке $\overrightarrow{q_0}$= ($q_{1,0}$, $q_{2,0}$, $q_{3,0}$) рассматриваемой криволинейной системы координат. Пусть векторы $\overrightarrow{\tau_1}, \overrightarrow{\tau_2}, \overrightarrow{\tau_3}$ взаимно ортогональны в точке $\overrightarrow{q_0}$= ($q_{1,0}$, $q_{2,0}$, $q_{3,0}$), тогда базис и сама криволинейная система - ортогональные в этой точке.

Условия ортогональности локального базиса: $\overrightarrow{\tau_1}\overrightarrow{\tau_2}$= 0, $\overrightarrow{\tau_1}\overrightarrow{\tau_3}$= 0, $\overrightarrow{\tau_2}\overrightarrow{\tau_3}$ = 0, что эквивалентно $(\overrightarrow{\partial r}/\overrightarrow{\partial q_1})/(\overrightarrow{\partial r}/\overrightarrow{\partial q_2})$= 0, $(\overrightarrow{\partial r}/\overrightarrow{\partial q_1})/(\overrightarrow{\partial r}/\overrightarrow{\partial q_3})$ = 0, $(\overrightarrow{\partial r}/\overrightarrow{\partial q_2})/(\overrightarrow{\partial r}/\overrightarrow{\partial q_3})$ = 0, и равенствам $(\overrightarrow{\partial x}/\overrightarrow{\partial q_i})/(\overrightarrow{\partial x}/\overrightarrow{\partial q_j})$+ $(\overrightarrow{\partial y}/\overrightarrow{\partial q_i})/(\overrightarrow{\partial y}/\overrightarrow{\partial q_j})$+ $(\overrightarrow{\partial z}/\overrightarrow{\partial q_i})/(\overrightarrow{\partial z}/\overrightarrow{\partial q_j})$=0, i,j=1,2,3, i≠j.