# Лекция 1. АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

*Аффинным пространство* - множество E, связанное с векторным пространством $\overrightarrow{E}$ отображением f : E × E → $\overrightarrow{E}$. Обладает свойствами (вместо f(a, b) используются обозначения $\overrightarrow{ab}$ или $\overrightarrow{a, b}$):

1. ($\forall$a, b, c ∈ E) ($\overrightarrow{ab}$ + $\overrightarrow{bc}$ + $\overrightarrow{ca}$ = $\vec{0}$ ∈ $\overrightarrow{E}$ );

2. ($\forall$a ∈ E) (x → $\overrightarrow{ax}$ – биекция на $\overrightarrow{E}$);

3. ($\forall$a ∈ E) ($\overrightarrow{aa}$ = $\vec{0}$ );

4. ($\forall$a, b ∈ E) ($\overrightarrow{ab}$ + $\overrightarrow{ba}$ = $\vec{0}$);

5. ($\forall$a ∈ E) ($\forall\vec{h}$ ∈ $\vec{E}$) ($\exists$!b ∈ E) ($\overrightarrow{ab}$ = $\vec{h}$);

6. ($\forall$a ∈ E) ($\forall\vec{h}$, $\vec{k}$ ∈ $\vec{E}$) (a + ($\vec{h}$ + $\vec{k}$) = (a + $\vec{h}$) + $\vec{k}$ ) .

Если a — точка аффинного пространства E, a $\vec{h}$ — вектор связанного с ним векторного пространства $\overrightarrow{E}$, то пару (a, h) называют вектором $\vec{h}$, *закрепленным* в точке a.

Закрепленный вектор $\overrightarrow{ab}$ изображают на рисунке стрелкой от a к b и называют направленным отрезком. В противоположность названию закрепленный вектор, для векторов из векторного пространства E используют название *свободный вектор.*

Прямой, проходящей через точки A, B аффинного пространства E, назовем множество точек *l* (A, B) = {M ∈ E | M = A + t · $\overrightarrow{AB}$, t ∈ R}.

Размерностью аффинного пространства E называют размерность связанного с ним векторного пространства $\vec{E}$.

Аффинное пространство E - евклидово аффинное пространство или евклидово точечное пространство, если связанное с ним векторное пространство E евклидово (на этом векторном пространстве задано скалярное произведение и, следовательно, норма).

**Аффинные координаты и преобразования:**

Пусть E = $E^n$, тогда вектор $\overrightarrow{OM}$ ∈ $\vec{E}$ = $R^n$ можно разложить по базису ($\overrightarrow{e^1}$, ..., $\overrightarrow{e^n}$) векторного пространства $R^n$:

$$M = O + \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j.$$

Пусть O ∈ $E^n$, а ($\overrightarrow{e^1}$, ..., $\overrightarrow{e^n}$)— базис пространства $R^n$. Упорядоченная последовательность (O, $\overrightarrow{e^1}$, ..., $\overrightarrow{e^n}$) - репером пространства $E^n$.

Вещественные числа $x_1$, ..., $x_n$ в - аффинные координаты точки M ∈ $E^n$ относительно выбранного репера с началом O ∈ $E^n$ и базисом ($\overrightarrow{e^1}$, ..., $\overrightarrow{e^n}$).

Каждому базису аффинного пространства $E^n$ отвечает его репер. Каждому реперу аффинного пространства $E^n$ можно сопоставить базис. Вместо базиса можно задать аффинную систему координат – начало координат и упорядоченный набор прямых (оси).

Пусть (O, $\overrightarrow{e^1}$, ..., $\overrightarrow{e^n}$) — репер в пространстве $E^n$ , и пусть

$$M = O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j, \quad N = O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j$$

- представления точек M, N ∈ $E^n$ в этом репере. Используя $\overrightarrow{MO}$ + $\overrightarrow{ON}$+ $\overrightarrow{NM}$= $\vec{0}$ и $\overrightarrow{MO}$ = -$\overrightarrow{OM}$ , получим:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} (y_j - x_j)\, \vec{e}_j.$$

Связь между координатами точки в различных реперах: пусть

$$M = O + \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j = O_1 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \vec{e}_j, \quad O_1 = O + \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}_j,$$

- тогда:

$$O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} x_j\, \vec{e}_j \;=\; O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_j \vec{e}_j + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \tilde{x}_j\, \vec{e}_j$$

$$x_j = \tilde{x}_j + a_j,\; j \in [1:n].$$

Ортонормированные базисы ($\overrightarrow{e'1}$, ..., $\overrightarrow{e'n}$), ($\overrightarrow{e''1}$, ..., $\overrightarrow{e''n}$) пространства $R^n$ связаны равенствами:

$$\vec{e}''_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} p_{i,j} \vec{e}'_j,\; i \in [1:n],$$

P = ($p_{i,j}$ ) - числовая матрица удовлетворяющая условию ортогональности $P^T = P^{-1}$ или $P^T P = I$.

Если вектор x' = ($x'_1$, ..., $x'_n$), x''= ($x''_1$, ..., $x''_n$) — два разложения одного и того же вектора x по базисам ($\overrightarrow{e'1}$, ..., $\overrightarrow{e'n}$), ($\overrightarrow{e''1}$, ..., $\overrightarrow{e''n}$) соответственно, то x''= P x', x' = P T x''.

Далее если

$$M = O + \sum_{j=1}^{n} x'_j\, \vec{e}'_j = O_1 + \sum_{j=1}^{n} x''_j\, \vec{e}''_j,\; O_1 = O + \sum_{j=1}^{n} a_j\, \vec{e}'_j,$$

получаем

$$O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} x'_j\, \vec{e}'_j = O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_j\, \vec{e}'_j + \sum\nolimits_{i=1}^{n} x''_i\, \vec{e}''_i =$$

$$= O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_j\, \vec{e}'_j + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \vec{e}'_j \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_{i,j} x''_i$$

и, что

$$x'_j = a_j + \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_{i,j} x''_i, \quad j \in [1:n].$$

Аналогично:

$$x''_j = \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_{j,i} (x'_i - a_i), \quad j \in [1:n].$$