Лекция 12

Масса и плотность. Геометрия масс

Рассмотрим сплошную связную неизменяемую механическую систему и жестко связанное с ней подвижное пространство с репером $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, и D область в подвижном пространстве, занимаемая этой механической системой. Любую точку M можно задать радиус вектором (или же её координатами).

Если в области D задана скалярная неотрицательная функция μ, то будем говорить, что на рассматриваемой механической системе задано распределение масс (плотность).

Твердое тело - сплошная связная неизменяемая механическая система с заданным распределением масс на ней.

Если функция плотности тела непрерывна в заданной области, то: можно ввести в рассмотрение величина, называемыми *моментами порядка α=i+j+k*:

$$J(i,j,k) = \iiint\limits_D \mu(x,y,z)x^i y^j z^k \, dxdydz, \quad i,j,k \in [0:+\infty)$$

Момент нулевого порядка (i=j=k=0) – *масса твёрдого тела.*

Геометрические характеристики (зависят только от распределения масс и не меняются во времни):

- *Осевые моменты*:

$$J_{xx} = J(0,2,0) + J(0,0,2), J_{yy} = J(2,0,0) + J(0,0,2), J_{zz} = J(0,2,0) + J(2,0,0)$$

- *Произведение инерции (центробежные моменты инерции твёрдого тела):*

$$J_{yz} = J(0,1,1), J_{zx} = J(1,0,1), J_{xy} = J(1,1,0)$$

- *Центр масс C* – характеристика распределения масс твёрдого тела. Радиус вектор точки центра масс определяется равенством: $\vec{r}_C = m^{-1} \iiint_D \mu(x,y,z)\vec{r} dxdydz$, т.е. координаты этой точки определяются следующими формулами: $x_C = m^{-1}J(1,0,0), y_C = m^{-1}J(0,1,0), z_C = m^{-1}J(0,0,1)$

Моментом инерции материальной точки относительно оси *l* – величина mh^2, где m – масса точки, а h – расстояние до оси *l*. Моментом инерции твердого тела относительно оси *l* – величина $J_l = \iiint_D h^2(x,y,z)\mu(x,y,z)dxdydz$, где D – область подвижного пространства, занимаемая телом, μ - плотность тела, h – расстояние от точки M (принадлежащей области D) с координатами x,y,z, до оси *l*.

Для того, чтобы момент инерции материальной точки массы *m* относительно оси *l* был равен моменту инерции твердого тела той же массы относительно той же оси, эта точка должна находиться на расстоянии $d_l = \sqrt{J_l/m}$ от *l*. Эта величина называется *радиусом инерции твёрдого тела относительно оси l.*

Теорема (Гюйгенс – Штейнер): Если l_C – ось, проходящая через центр масс С твёрдого телапараллельно оси *l* на расстоянии *d* от неё, то $J_l = md^2 + J_{l_C}$, где J_l, J_{l_C} – моменты инерции твёрдого тела относительно осе й *l* и l_C, а m – масса этого тела.

Теорема: Если *l* – ось,, проходящая через начало О репера $(O, \vec{\iota}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, а α, β, γ – её направляющие косинусы в этом репере, то $J_l = J_{xx} \propto^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2(J_{yz}\beta\gamma + J_{zx}\gamma\alpha + J_{xy}\alpha\beta)$, где J_l - момент инерции твердого тела относительно оси *l*, а J_{xx}, $J_{yy}, J_{zz}, J_{yz}, J_{zx}, J_{xy}$ – осевые и центробежные моменты инерции этого тела.

Пусть $J_{xy} = J_{yx}, J_{yz} = J_{zy}, J_{zx} = xz$. Запишем матрицу квадратичной формы формулы $J_l = J_{xx} \propto^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2(J_{yz}\beta\gamma + J_{zx}\gamma\alpha + J_{xy}\alpha\beta)$:

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xz} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

В случае, если $\vec{l}$ – единичный вектор вдоль оси *l*, то равенство $J_l = J_{xx} \propto^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2(J_{yz}\beta\gamma + J_{zx}\gamma\alpha + J_{xy}\alpha\beta)$ можно переписать в виде: $J_l = \vec{l} \cdot J\vec{l}$.

Тензорными оказываются преобразования элементов матрицы J, соответствующие всевозможным преобразованиям базисов по формулам: $\begin{pmatrix} \vec{\iota'} \\ \vec{\jmath'} \\ \vec{k'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\iota} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$, где $(O, \vec{\iota'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$ – репер, полученный из репера $(O, \vec{\iota}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ в результате поворота в подвижном точечном пространстве. Таблица J в заданном базисе вместе с формулами ее преобразования к любому другому базису задает тензор второго ранга, который называют *тензором твёрдого тела для точки О.* В заданном репере $(O, \vec{\iota'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$, матрица J является матрицей некоторого линейного оператора в R^3, его называют *оператором инерции твёрдого тела* в этом репере.

Рассмотрим пучок всех прямых (осей), проходящих через точку О. Относительно каждой оси *l* пучка данное твёрдое тело имеет свой момент инерции J_l. Картину распределения момента инерции твердого тела в зависимости от выбора оси пучка дает *эллипсоид инерции*.

Если на каждой из осей *l* пучка выберем точку М с координатами x,y,z такую, что расстояние до точки О равно $1/\sqrt{J_l}$. Таким образом $x = r \propto, y = r\beta, z = r\gamma$. Получим уравнение *эллипсоида инерции твёрдого тела в точке О*:

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2(J_{yz}yz + J_{zx}zx + J_{xy}xy) = 1$$

Наименьшая (наибольшая) из главных осей эллипсоида инерции – та его главная ось, которой соответствует наименьший (наибольший) из его главных диаметров. Наименьший момент инерции тело имеет относительно наибольшей оси его эллипсоида инерции, а наибольший — относительно наименьшей оси этого эллипсоида. Главные оси эллипсоида называют *главными осями инерции твердого тела* для точки О. В случае, когда орты $\vec{\iota}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ репера направлены по главным осям эллипсоида инерции, то центробежные моменты инерции равны нулю, а осевые моменты инерции равны моментам инерции относительно главных осей, — их называют главными моментами инерции твердого тела для точки О. В данном репере уравнение эллипсоида принимает вид: $J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 = 1$. Если начало O репера совпадает с центром масс C твердого тела, то эллипсоид инерции называют его *центральным эллипсоидом инерции*, его главные оси называют *главными центральными осями инерции*, а величины J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}— его *главными центральными моментами инерции*.

Основные законы динамики твердого тела

Зададим неподвижный репер $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ и подвижный репер $\left(M_0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, жестко связанный с телом, ξ, η, ζ и x, y, z – координаты точки M твёрдого тела в этих реперах. Пусть $\vec{r}$ – радиус вектор, $\vec{v}$ – скорость, $v = |\vec{v}|$ – величина скорости этой точки твёрдого тела в неподвижном репере, $\vec{r}_A$, $\vec{v}_A$ - радиус-вектор и скорость некоторой точки A (полюса) в этом же репере. Если μ = μ(x, y, z) — распределение масс твердого тела, то его *количество движения* $\vec{Q}$, *кинетический момент* $\vec{\kappa}_A$ *относительно полюса A и кинетическую энергию T твёрдого тела* определяют формулами:

$$\vec{Q} = \iiint_D \mu(x,y,z)\vec{v}dxdydz,$$

$$\vec{\kappa}_A = \iiint_D \mu(x,y,z)(\vec{r} - \vec{r}_A) \times (\vec{v} - \vec{v}_A)dxdydz,$$

$$T = \frac{1}{2}\iiint\limits_D \mu(x,y,z)v^2dxdydz$$

Так как подынтегральные выражения в этих формулах зависят от скоростей точек твердого тела, а распределение скоростей этих точек дается формулой Эйлера, то используя эту формулу можно преобразовать выражения для этих величин.

Пусть $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ – координаты векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\kappa}_O$ (кинетический момент твёрдого тела относительно неподвижной точки) в подвижном репере. Проектируя $\vec{\kappa}_O$ на орты подвижного репера, получаем:

$$\begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xz} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Таким образом $\vec{\kappa}_O = J\vec{\omega}$. В главных осях инерции для точки O матрица оператора J диагональна.

Закон (теорема) о движении центра масс твердого тела: $m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}$, где $\vec{r}_c$ – радиус-вектор центра масс твёрдого тела, *m* – его масса, а $\vec{F}$ – главный вектор действующих на него сил. Таким образом, центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе этого твердого тела, под действием силы, равной главному вектору действующих на него сил.

Закон (теорема) об изменении главного вектора количества движения твердого тела: $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}, d\vec{Q} = \vec{F}dt, \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$, где $\vec{Q}$ – количество движения твёрдого тела, $\vec{Q}_0 = \vec{Q}|_{t=t_0}$, а $\vec{F}$ – главный вектор сил, действующих на твёрдое тело.

Закон (теорема) об изменении кинетического момента твердого тела - производная кинетического момента этого тела относительно подвижного полюса A и главный момент $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}$, действующих на тело внешних сил относительно того же полюса связаны равенством: $\frac{d}{dt}\vec{\kappa}_A +$

$m(\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{w}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A$, где $\vec{r}_c$ – радиус вектор центра масс тела, $\vec{r}_A$, $\vec{w}_A$ – радиус вектор и ускорение полюса А, а m – масса тела.

Закон (теорема) об изменении кинетической энергии твердого тела: $T - T_0 = \mathcal{A}$, T - кинетическая энергия твердого тела в момент времени t, $T_0 = T|_{t=t_0}$, а $\mathcal{A}$ – работа всех сил, действующих на тело, на промежутке времени $[t_0, t]$.