ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Касательные и нормали в пространстве R^3

1. Касательные и нормали к кривым в пространстве R^3. Пусть кривая l в трехмерном пространстве задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

Будем считать, что кривая l — гладкая (функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[\alpha, \beta]$).

Пусть $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Данному значению параметра соответствует точка на кривой: $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, где

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0), \quad z_0 = \chi(t_0).$$

Построим касательную прямую к кривой l в точке M_0.

Зададим приращение параметра: Δt. Обозначим $M = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, где

$$\bar{x} = \varphi(t_0 + \Delta t), \quad \bar{y} = \psi(t_0 + \Delta t), \quad \bar{z} = \chi(t_0 + \Delta t).$$

Проведем прямую через точки M_0 и M:

$$\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0} = \frac{y - y_0}{\bar{y} - y_0} = \frac{z - z_0}{\bar{z} - z_0},$$

или

$$\frac{x - x_0}{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi(t_0 + \Delta t) - \chi(t_0)},$$

или

$$\frac{x - x_0}{\frac{\varphi(t_0+\Delta t) - \varphi(t_0)}{\Delta t}} = \frac{y - y_0}{\frac{\psi(t_0+\Delta t) - \psi(t_0)}{\Delta t}} = \frac{z - z_0}{\frac{\chi(t_0+\Delta t) - \chi(t_0)}{\Delta t}}.$$

Тогда устремляя $\Delta t \to 0$, получим уравнение касательной:

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi'(t_0)}.$$

Плоскость, проходящую через точку M_0 и перпендикулярную касательной прямой, назовем нормальной плоскостью к кривой l в точке M_0:

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \chi'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

2. Касательные и нормали к поверхностям в пространстве R^3. Поверхность в пространстве R^3 может быть задана различными способами. Рассмотрим способы, наиболее часто используемые на практике.

а) Пусть поверхность S задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \chi(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in T \subset R^2.$$

Будем считать, что поверхность S — гладкая (функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам в области T). Пусть

$$\operatorname{rang}\frac{\mathbb{D}(\varphi,\psi,\chi)}{\mathbb{D}(u,v)}=2 \tag{1}$$

(если ранг меньше 2, то поверхность выродится в кривую, или вообще, в точку).

Пусть $(u_0,v_0)\in T$. Данным значениям параметров соответствует точка на поверхности: $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, где

$$x_0=\varphi(u_0,v_0),\quad y_0=\psi(u_0,v_0),\quad z_0=\chi(u_0,v_0).$$

Рассмотрим две кривые:

$$K_u:\begin{cases} x=\varphi(u,v_0),\\ y=\psi(u,v_0),\\ z=\chi(u,v_0),\end{cases}\qquad K_v:\begin{cases} x=\varphi(u_0,v),\\ y=\psi(u_0,v),\\ z=\chi(u_0,v),\end{cases}$$

Эти две кривые лежат на поверхности S, и они проходят через точку M_0. Согласно пункту 1), векторы

$$\vec{n}_u=(\varphi'_u,\psi'_u,\chi'_u)^T\big|_{M_0},\quad \vec{n}_v=(\varphi'_v,\psi'_v,\chi'_v)^T\big|_{M_0}$$

являются направляющими векторами касательных к кривым K_v и K_u, соответственно.

Тогда вектор $\vec{n}=\vec{n}_u\times\vec{n}_v$ будет перпендикулярен векторам $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$. Имеем

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u\\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v\end{vmatrix}_{M_0}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k},$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ — орты осей координат,

$$A=\begin{vmatrix}\psi'_u & \chi'_u\\ \psi'_v & \chi'_v\end{vmatrix}_{M_0},\quad B=\begin{vmatrix}\chi'_u & \varphi'_u\\ \chi'_v & \varphi'_v\end{vmatrix}_{M_0},\quad C=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \psi'_u\\ \varphi'_v & \psi'_v\end{vmatrix}_{M_0}.$$

Плоскость, образуемую векторами $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$, назовем касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0. Уравнение этой касательной плоскости имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Вектор

$$\vec{n}_e=(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu)^T,$$

где

$$\cos\lambda=\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\nu=\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

будет задавать единичную нормаль к поверхности в точке M_0. Здесь λ,μ,ν — углы, которые образует нормаль с осями координат ($\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ — направляющие косинусы нормали). Знак "$\pm$" определяется выбором стороны поверхности.

Определение. *Поверхность называется двусторонней, если нормаль, проходя по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности, возвращается в исходную точку в том же самом направлении.*

Примером односторонней поверхности является "лист Мебиуса". Далее мы полагаем, что рассматриваемые поверхности являются двусторонними.

б) Пусть поверхность S задана в явном виде:

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Снова считаем, что поверхность — гладкая (в области D существуют непрерывные частные производные функции $z(x, y)$ по своим аргументам).

Пусть $(x_0, y_0) \in D$. Тогда точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = z(x_0, y_0)$, будет принадлежать поверхности S. Обозначим для краткости

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}.$$

Сведем явное задание к параметрическому:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in D.$$

Тогда по уже выведенным формулам имеем:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{vmatrix} = -p, \quad B = \begin{vmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{vmatrix} = -q, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Замечание. Можно и наоборот, параметрическое задание сводить к явному. Действительно, пусть поверхность задана в параметрическом виде. Учитывая (1), получаем, что у матрицы Якоби $\frac{\mathbb{D}(\varphi,\psi,\chi)}{\mathbb{D}(u,v)}$ имеется ненулевой минор второго порядка. Пусть для определенности $\frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)} \neq 0$. Тогда по теореме о системе неявных функций параметры u и v можно выразить через x и y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, откуда приходим к явному заданию поверхности $z = \chi(u(x, y), v(x, y))$.

в) Пусть поверхность S задана в неявном виде:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Снова предполагаем гладкость этой поверхности (существование непрерывных частных производных функции $F(x, y, z)$ по своим аргументам). Считаем, что в каждой точке поверхности хотя бы одна из производных F'_x, F'_y, F'_z отлична от нуля (иначе будем иметь вырожденный случай).

Пусть точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности S, т.е. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Пусть для определенности $F'_z\big|_{M_0} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции уравнение поверхности можно переписать в явном виде:

$$z = z(x, y).$$

По доказанному ранее имеем:

$$A = -\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} = \frac{F'_x}{F'_z}\Big|_{M_0}, \quad B = -\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{F'_y}{F'_z}\Big|_{M_0}, \quad C = 1.$$

из т. о неявной функции

Значит, уравнение касательной плоскости к поверхности S в точке M_0 примет вид:

$$\frac{F'_x}{F'_z}\Big|_{M_0}(x - x_0) + \frac{F'_y}{F'_z}\Big|_{M_0}(y - y_0) + (z - z_0) = 0,$$

или

$$F'_x\big|_{M_0}(x - x_0) + F'_y\big|_{M_0}(y - y_0) + F'_z\big|_{M_0}(z - z_0) = 0.$$

Замечание. Ясно, что явный способ задания поверхности $z = z(x, y)$ может быть сведен к неявному: $z - z(x, y) = 0$. Таким образом, рассмотренные три способа задания поверхности эквивалентны между собой, в том смысле что один может быть сведен к другому. В каждой конкретной задаче можно выбрать наиболее удобный из них. Если поверхность задана каким-то другим образом, то, как правило, ее сводят к одному из рассмотренных выше стандартных способов задания.

Пример. Пусть поверхность S — это сфера радиуса R с центром в начале координат. Тогда ее можно задать следующим образом:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

— неявный вид, или

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

— явный вид (знак "$\pm$" задает верхнюю и нижнюю полусферы), или

$$\begin{cases} x = R\cos u\cos v, \\ y = R\sin u\cos v, \qquad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ z = R\sin v, \end{cases}$$

— параметрический вид (здесь в качестве параметризации выбрана сферическая система координат, в которой u — географическая долгота, v — географическая широта).

Пусть, например, $R = 5$, $M_0 = (3, 0, 4)$. Для построения касательной плоскости и нормали используем неявный способ задания поверхности. Тогда, обозначая $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, имеем

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z.$$

Значит, уравнение касательной плоскости в точке M_0 будет иметь вид:

$$6(x - 3) + 0(y - 0) + 8(z - 4) = 0.$$

Единичная нормаль к рассматриваемой поверхности задается вектором

$$\vec{n}_e = \pm\left(\frac{3}{5},\, 0,\, \frac{4}{5}\right)^T$$

(знак "$+$" соответствует внешней нормали, знак "$-$" — внутренней).

Если для построения касательной плоскости и нормали воспользоваться другими способами задания поверхности, ответ, естественно, окажется тем же самым.