Лекция 5.

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

Пусть О – начало подвижного (О, $\overrightarrow{e_\xi}$, $\overrightarrow{e_\eta}$, $\overrightarrow{e_\zeta}$) и неподвижного (О,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$,$\vec{k}$) репера. Из формулы связи координат: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{3,2} \\ p_{1,3} & p_{2,3} & p_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Можно выразить $p_{i,j}$ через углы Эйлера (которые известны из курса геометрии):

$p_{1,1}$ = ($\overrightarrow{e_\xi}$, $\vec{\imath}$) = cosψcosφ − sinψcosθsinφ,

$p_{2,1}$ = ($\overrightarrow{e_\xi}$, $\vec{\jmath}$) = − cosψsinφ − sinψcosθcosφ,

$p_{3,1}$ = ($\overrightarrow{e_\xi}$, $\vec{k}$) = sinψsinθ,

$p_{1,2}$ = ($\overrightarrow{e_\eta}$, $\vec{\imath}$) = sinψcosφ + cosψcosθsinφ,

$p_{2,2}$ = ($\overrightarrow{e_\eta}$, $\vec{\jmath}$) = − sinψsinφ +cosψcosθcosφ,

$p_{3,2}$ = ($\overrightarrow{e_\eta}$, $\vec{k}$) = − cosψsinθ,

$p_{1,3}$ = ($\overrightarrow{e_\zeta}$, $\vec{\imath}$) = sinφsinθ,

$p_{2,3}$ = ($\overrightarrow{e_\zeta}$, $\vec{\jmath}$) = cosφsinθ,

$p_{3,3}$ = ($\overrightarrow{e_\zeta}$, $\vec{k}$) = cosθ.

Теорема: Если $P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}$, $P_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $P_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда P = P_3(ψ)P_1(θ)P_3(φ).

Нулевое перемещение тела - начальное и конечное положения каждой точки этого тела совпадают.

Теорема Эйлера — Даламбера: Для любого ненулевого перемещения П твердого тела вокруг неподвижной точки существует единственная прямая l (ось вращения) такая, что перемещение П можно представить как перемещение в результате поворота этого тела вокруг этой оси на некоторый угол α.

При существовании $\vec{\omega}$ = $\lim_{\Delta t\to 0}(\overrightarrow{\Delta\varphi}/\Delta t)$, то прямая, проходящая через неподвижную точку О (вокруг которой движется точка М), параллельная этому вектору – *мгновенная угловая скорость тела в момент t*, а $\vec{\omega}$ - *мгновенной угловой скоростью в момент t* ($\overrightarrow{\Delta\varphi}$ – угол перемещения от начального состояния до конечного). Геометрическое место мгновенных осей вращения в неподвижном и подвижном реперах - *неподвижный аксоид* и *подвижный аксоид*.

Теорема (Пуансо): При движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному.

Проекции угловой скорости тела с неподвижной точкой:

ω_x = $\dot{\psi}$sinφsinθ + $\dot{\theta}$cosφ, $\quad$ ω_ξ = $\dot{\varphi}$sinψsinθ + $\dot{\theta}$cosψ,

ω_y = $\dot{\psi}$cosφsinθ − $\dot{\theta}$sinφ, $\quad$ ω_η = −$\dot{\varphi}$cosψsinθ + $\dot{\theta}$sinψ,

ω_z = $\dot{\psi}$cosθ + ˙φ. $\quad$ ω_ζ = $\dot{\varphi}$cosθ + ψ.

Ускорение точек тела, имеющего неподвижную точку:

Продифференцируем формулу Эйлера: $\vec{w} = \vec{\varepsilon}\times\ \vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$, где $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$. Векторы $\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{w_1} = \vec{\varepsilon}\times\ \vec{r}, \overrightarrow{w_2} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ - *угловое, вращательное и осестремительное ускорения* тела соответственно. Далее моно получить следующие формулы: $\vec{w} =\ \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_1} = \vec{\varepsilon}\times\ \vec{r}, \overrightarrow{w_2} = -\omega^2\vec{\rho}$

Скорость точек твердого тела в общем случае

Пусть (O′,$\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$) – подвижный репер, (O, $\overrightarrow{e_\xi}$, $\overrightarrow{e_\eta}$, $\overrightarrow{e_\zeta}$) – неподвижный репер, (ξ_0, η_0, ζ_0) — координаты точки O′ в неподвижном репере. Связь координат в разных реперах: $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\\ \zeta_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1}\\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{3,2}\\ p_{1,3} & p_{2,3} & p_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

Перемещение точки M $\Delta\vec{r} = \Delta\overrightarrow{r_{O'}} + \Delta(\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}})$, $\Delta\overrightarrow{r_{O'}} = \overrightarrow{v_{O'}}\Delta t + \vec{o}(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$ и $\Delta(\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}}) = \overrightarrow{\varphi_{O'}} \times (\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}})$ при $\Delta t \to 0$. Далее делим на Δt и переходим к пределу: $\vec{v} = \overrightarrow{v_{O'}} + \overrightarrow{\omega_{O'}} \times (\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}})$, где $\overrightarrow{\omega_{O'}} = \lim_{\Delta t\to 0}(\overrightarrow{\varphi_{O'}}/\Delta t)$ - мгновенная угловая скорость вращения тела вокруг точки O′ , а $\vec{v}$ и $\overrightarrow{v_{O'}}$ — скорости точек M и O′ .

Теорема: Вектор $\overrightarrow{\omega_{O'}}$ не зависит от выбора полюса — точки O'. (Отсюда вектор $\overrightarrow{\omega_{O'}}$ можно обозначить $\vec{\omega}$ - угловая скорость твердого тела в общем случае. Получим формулу $\vec{v} = \overrightarrow{v_{O'}} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}})$ – формула Эйлера в общем случае)
Следствие: Проекции скоростей любых двух различных точек абсолютно твердого тела на направление соединяющего их отрезка равны между собой.

Ускорение точек твердого тела в общем случае

Продифференцируем формулу Эйлера: $\vec{w} = \overrightarrow{w_{O'}} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}}) + \vec{\omega} \times (\vec{v} - \overrightarrow{v_{O'}})$, где $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ - угловое ускорение твердого тела $\overrightarrow{r_{O'}}$ - радиус-вектор точки O′ (полюс); $\overrightarrow{v_{O'}}$, $\overrightarrow{w_{O'}}$ - скорость и ускорение полюса. Представим $(\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}}) = \vec{h} + \vec{\rho}$, где $\vec{h} = h\overrightarrow{\varepsilon_\omega}$, $h = (\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}})\overrightarrow{\varepsilon_\omega}$, $\overrightarrow{\varepsilon_\omega} = \vec{\omega}\omega^{-1}$, а $\vec{\rho}$ - векторное удаление мгновенной оси вращения до точки M. По формуле Эйлера получаем: $\vec{v} - \overrightarrow{v_{O'}} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}}) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$. Вспоминая, что $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = -\omega^2\vec{\rho}$, получаем $\vec{w} = \overrightarrow{w_{O'}} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}}) + (-\omega^2\vec{\rho})$. $\overrightarrow{w_{O'}}$ - ускорение полюса, $\overrightarrow{w_{O'}} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}})$ - вращательным ускорением, $-\omega^2\vec{\rho}$ - осестремительным ускорением.