Лекция 4. Кинематика твёрдого тела.

Движение механической системы

Пространством обозначим аффинное евклидово пространство E^n. *Механическая система* в момент t^0 или *положение системы* в момент t_0 - семейство $M = \{M_\tau\}_{\tau \in T}$ точек в E^n.
Движение этой системы - семейство $DM = \{D_\tau : J \to E_n\}_{\tau \in T}$ дважды непрерывно дифференцируемых функций от времени t причём $(\forall \tau \in T)$ $(D_\tau(t_0) = M_\tau)$. *Перемещение* механической системы за время от t_1 до t_2 - семейство векторов $\left\{\overrightarrow{D_\tau(t_1), D_\tau(t_2)}\right\}_{\tau \in T}$.

Твердое тело

Различные множества движений DM - *класс движений*. Неизменяемая на классе движений система - механическую система, причём $(\forall t \in J)$ $(\forall \tau_1, \tau_2 \in T)$ $(\rho((D_{\tau_1}(t), D_{\tau_2}(t)) = \rho(M_{\tau_1}, M_{\tau_2})$ для любого движения этого класса. Механическая система - *сплошная связная среда на классе движений*, если каждое ее положение есть область или замкнутая область в E^n. *Твердое тело* или *абсолютно твердое тело на классе движений* - сплошная связная неизменяемая механическая система на этом классе движений.

Число степеней свободы

Движение $DM = \{D_\tau\}_{\tau \in T}$ может быть выражено через систему скалярных функций $q_i : J \to R$, i = 1,...,m, если: $(\forall \tau \in T)$ $(\exists (q_1, \ldots, q_m) \to f_\tau(q_1, \ldots, q_m))$ и
$(\forall t \in J)$ $(D_\tau(t) = f_\tau(q_1(t), \ldots, q_m(t)))$.
Механическая система имеет s степеней свободы положения на классе движений, если всякое движение этого класса может быть выражено через некоторую систему скалярных функций $q_i : J \to R$, i = 1, ..., s и если хотя бы одно движение этого класса не может быть выражено ни через какую систему из меньшего числа скалярных функций.

Упражнение 1.1: Движение в E^2 системы, состоящей из N точек равноудалённых от некоторого центра на радиус r (фактически, точки образуют окружность). Тогда голономная связь выглядит следующим образом: $f = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 - r^2 = 0$, где (x_i, y_i), (x_j, y_j) $i, j = 1 \ldots N$ – координаты двух точек системы в E^2. Число степеней свободы системы равно: $s = 2 \cdot \mathrm{N} - 1$

Группа движений твердого тела

Всякое движение твердого тела может быть задано через шесть скалярных функций a_1, a_2, a_3, φ, ψ, θ (φ, ψ, θ - углы Эйлера) по формулам

$$x_j^\tau(t) = a_j(t) + \sum_{k=1}^{3} p_{k,j}(t)\, y_k^\tau,\ j = 1,2,3,$$

следовательно, значит всякому перемещению соответствует преобразование D: $E^3 \to E^3$. Задавая всевозможные движения и фиксируя всевозможные моменты $t \in J$, мы будем получать те или иные перемещения твердого тела и соответствующие ему биекции D: $E^3 \to E^3$. Семейство D^3 всех таких биекций называют группой движений в E^3.

Подгруппы движений

В механике изучают различные подгруппы группы D^3. Рассмотрим четыре из них (*поступательное, вращение вокруг неподвижной оси, плоско-параллельное движение, вращение вокруг неподвижной точки*) подробнее.

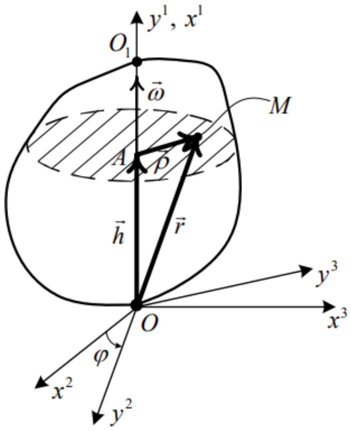
Поступательное движение твердого тела

Движение твердого тела - *поступательное*, если направленный отрезок, соединяющий любые две несовпадающие точки этого тела, перемещается параллельно самому себе во все время движения. Есть иное (но эквивалентное данному) определение: движение твердого тела называют *поступательным*, если у подвижного репера, связанного с этим телом, с течением времени может изменяться только начало репера.

Теорема: Поступательное движение твердого тела обладает свойствами:
α) положение тела определяется положением любой его точки
β) перемещения всех точек тела за время от t_0 до t_1 равны между собой
γ) скорости всех точек тела равны между собой
δ) ускорения всех точек тела равны между собой
ε) твердое тело на классе поступательных движений имеет три степени свободы.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращение вокруг неподвижной оси - движение твердого тела, для которого в пространстве, связанном с этим телом, существует прямая, все точки которой имеют постоянные координаты в неподвижном репере. Если точка M тела имеет координаты y_1, y_2, y_3 и $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ в подвижном и неподвижном реперах соответственно, то из этих формул можно получить равенство $x_2^2(t) + x_3^2(t) = y_2^2 + y_3^2$. Таким образом, траектория любой точки твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси - окружность с центром на оси вращения.



Допустим A — точка пересечения оси вращения с плоскостью, перпендикулярной этой оси вращения и проходящей через точку M тела, а $\vec{\rho} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{h} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$, $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ и введем в рассмотрение векторы: скорости $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ точки M , угла поворота $\overrightarrow{\Delta\varphi} = (\Delta\varphi)\vec{\iota_1}$ и угловой скорости $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{\iota_1} = \lim_{\Delta t \to 0}(\overrightarrow{\Delta\varphi}/\Delta t)$.

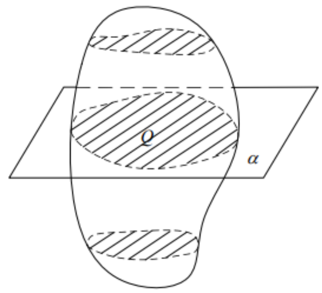
Теорема: В принятых обозначениях истинны формулы:

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{\Delta\varphi} \times \vec{r} + \vec{o}(\Delta t) \text{ при } \Delta t \to 0,$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \text{(формула Эйлера).}$$

Угловая скорость $\vec{\omega}$ не зависит от выбора точки твердого тела. Она называется *угловой скоростью твердого тела* в момент t при его вращении вокруг неподвижной оси.

Плоское движение твердого тела



Плоским или *плоско-параллельным* называют такое движение твердого тела, при котором в неподвижном пространстве существует плоскость α (плоскость параллелизма) такая, что сечение, состоящее из точек твердого тела, лежащих в α в момент $t_0 \in J$, принадлежит α при всех $t \in J$.

Связь между координатами точки M в подвижном и неподвижном репере: (ξ(t), η(t), ζ(t) – в подвижном репере; x,y,z – в неподвижном базисе)

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & 0 \\ p_{2,1} & p_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

ζ остается постоянной во времени, а преобразование координат ξ, η происходит по формулам: $\xi = a_1 + p_{1,1}x + p_{1,2}y$, $\eta = a_2 + p_{2,1}x + p_{2,2}y$. При изучении плоского движения твердого тела можно ограничиться рассмотрением движения плоской фигуры Q на плоскости α, то есть твердого тела в E^2. Для того, чтобы найти a_i, $p_{i,j}$, получим связь между ξ, η и x, y непосредственно для плоского движения.

Полагая $\vec{\rho} = \overrightarrow{M_0M}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$, получаем $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{\rho}$. Проектируя это равенство на неподвижные оси приходим к искомым соотношениям: $\xi = \xi_0 + x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $\eta = \eta0 + x\sin\varphi + y\cos\varphi$, где $(\xi_0, \eta_0) \sim M_0$, а φ — угол между $\vec{e_\xi}$ и $\vec{\iota}$.

Теорема: Пусть П — некоторое перемещение твердого тела в E^2 и С — произвольная точка этого тела в E^2, а C_1, C_2 — ее начальное и конечное положения в перемещении П. Тогда:
1) Перемещение П представимо в виде композиции $П = П_{пост}(C) \circ П_{вращ}(C_1) = П_{вращ}(C_2) \circ П_{пост}(C)$, где $П_{пост}(C)$ — поступательное перемещение тела вместе с точкой С , а $П_{вращ}(C_i)$ — вращательное перемещение тела вокруг точки C_i ;
2) Углы поворота перемещений $П_{вращ}(C_1)$, $П_{вращ}(C_2)$ равны и их общее значение не зависит от выбора полюса С.

Теорема: Любое непоступательное перемещение твердого тела в E^2 - вращательное перемещение вокруг некоторого полюса (центра вращения).

Формула Эйлера и ее следствие

Пусть $\vec{r} = \vec{r}$ (t) — радиус-вектор произвольной точки плоского сечения твердого тела в неподвижной системе координат. Рассмотрим значение перемещения этой точки $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. По теореме Шаля, эта величина складывается из $\Delta\vec{r}_A = \vec{r}_A(t + \Delta t) - \vec{r}_A(t)$ — величины поступательного перемещения вместе с полюсом А, и $\Delta\vec{r}_{вращ}$ — величины перемещения вращения вокруг оси, проходящей через полюс А и перпендикулярной плоскости параллелизма. Получаем: $\Delta\vec{r}_{вращ} = \overrightarrow{\Delta\varphi} \times (\vec{r} - \vec{r}_A) + \vec{o}(\Delta t)$, откуда: $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_A + \overrightarrow{\Delta\varphi} \times (\vec{r} - \Delta\vec{r}_A) + \vec{o}(\Delta t)$.

Вектор $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ и вектор $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}(\overrightarrow{\Delta\varphi}/\Delta t) = d\vec{\varphi}(t)/dt$ не зависят от выбора полюса А и точки М. Здесь $\vec{\varphi}(t)$ - полярный угол $\uparrow\uparrow \overrightarrow{\Delta\varphi}$. Вектор $\vec{\omega}$ ($\omega(t) = d\varphi(t)/dt$, $\uparrow\uparrow \overrightarrow{\Delta\varphi}$)- угловая скорость твердого тела при его плоском движении. Разделив полученное ранее равенство на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим формулу Эйлера: $\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_A)$.

Следствие: При плоском движении твердого тела, проекции скоростей концов отрезка, расположенного в плоскости параллелизма, на направление этого отрезка равны между собой.

Центр скоростей. Центроиды. Теорема Пуансо

Теорема: Если движение твердого тела является плоскопараллельным, и плоскость Q жестко связана с этим телом, двигаясь в плоскости параллелизма α, то, если в данный момент времени угловая скорость тела не равна нулю, существует единственная точка С плоскости Q, скорость которой равна нулю в этот момент. Точка С - *мгновенным центром скоростей* в плоском движении твердого тела. По формуле Эйлера, можно сказать, что С – *центр вращения*.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей в неподвижной плоскости α (в подвижной плоскости Q) называют *неподвижной центроидой* (соответственно *подвижной центроидой*). Обе центроиды — некоторые кривые.

Теорема Пуансо: При плоском непоступательном движении твердого тела подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной.

Ускорение точек твердого тела в плоском движении

Продифференцировав формулу Эйлера по t, получим: $\vec{w} = \vec{w}_A + \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, где $\vec{w}_1 = \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_A)$, $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$, $\vec{w}_2 = \vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_A)$. В силу $\vec{\omega} \perp (\vec{r} - \vec{r}_A)$ получаем: $\vec{w}_2 = -\omega^2 (\vec{r} - \vec{r}_A)$. Векторы $\vec{\varepsilon}$, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ - угловое ускорение, вращательное ускорение и осестремительное ускорение твердого тела в плоском движении.

Спроектируем продифференцированную по t формулу Эйлера на неподвижные орты $\vec{\varepsilon}_\xi$, $\vec{\varepsilon}_\eta$ и на подвижные орты $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$: $w_\xi = \ddot{\xi}_A - \ddot{\varphi}(\eta - \eta_A) - \dot{\varphi}^2(\xi - \xi_A)$, $w_\eta = \ddot{\eta}_A + \ddot{\varphi}(\xi - \xi_A) - \dot{\varphi}^2(\eta - \eta_A)$, $w_x = w_{A,x} - \ddot{\varphi}y - \dot{\varphi}^2x$, $w_y = w_{A,y} + \ddot{\varphi}x - \dot{\varphi}^2y$. Так как проекции $w_{A,\xi}$, $w_{A,\eta}$ вектора $\overrightarrow{w_A}$ на неподвижные орты равны $\ddot{\xi}_A$, $\ddot{\eta}_A$, то его проекции $w_{A,x}$, $w_{A,y}$ на подвижные орты, повернутые относительно неподвижных ортов на угол φ, равны: $w_{A,x} = \ddot{\xi}_A\cos\varphi + \ddot{\eta}_A\sin\varphi$, $w_{A,y} = -\ddot{\xi}_A\sin\varphi + \ddot{\eta}_A\cos\varphi$. Запишем вышенаписанные формулы в комплексной форме: $W = W_A + (i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)z$, $W = w_x + iw_y$, $z = x + iy$.

Мгновенный центр ускорений в плоском движении твердого тела - точка D(t) плоскости Q ускорение которой в данный момент t равно нулю.

Теорема: Если движение твердого тела является плоскопараллельным, плоскость Q жестко связана с этим телом и движется в плоскости параллелизма α, φ — угол между подвижными и неподвижными ортами, и, вспомнив формулы $W = W_A + (i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)z$, $W = w_x + iw_y$, $z = x + iy$, получаем, что при $\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4 \neq 0$, существует единственный мгновенный центр ускорений с координатами $z = z_D$, и имеют место формулы: $z_D = W_A \cdot (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)^{-1} \cdot (\dot{\varphi}^2 + i\ddot{\varphi})$, $\left|\overrightarrow{AD}\right| = w_A(\varepsilon^2 + \omega^4)^{-1/2}$, $\mathrm{tg}\psi = \varepsilon\omega^{-2}$, где $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ — угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{w_A}$.