ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Поверхностные интегралы 1-ого рода

Пусть в R^3 имеется простая (ограниченная простым кусочно-гладким контуром) двусторонняя поверхность S, в каждой точке которой задана функция $f(x, y, z)$. Будем считать, что площадь поверхности — конечна, и функция $f(x, y, z)$ — ограничена на S.

Разобьем поверхность S на n произвольных простых непересекающихся кусочков:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \quad (S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j).$$

Обозначим через ΔS_i — площадь поверхности S_i, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\omega = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \operatorname{diam} S_i$ — ранг дробления. Выберем $\forall(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Построим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

Определение. *Если существует конечный предел: $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$, причем он не зависит от способа дробления поверхности S и от выбора точек (ξ_i, η_i, ζ_i), $i = 1, \ldots, n$, то он называется поверхностным интегралом 1-ого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S. Обозначим его: $\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS$.*

Для поверхностного интеграла 1-ого рода можно расписать стандартные свойства интегралов и условия существования.

В частности, отметим, что:

1) $\iint\limits_{(S)} dS = \Delta S$, где ΔS — площадь поверхности S;

2) поверхностный интеграл 1-ого рода не зависит от выбора стороны поверхности (от ориентации поверхности).

Пример физического приложения криволинейного интеграла 1-ого рода. Пусть в точке (x, y, z) помещен неподвижный положительный электрический заряд величины q. Тогда если в точке (ξ, η, ζ) поместить единичный отрицательный электрический заряд, то (см. закон Кулона) он будет притягиваться к первому заряду с силой (см. рисунок 1):

$$\vec{F} = -\frac{kq}{r^3}\vec{r},$$

где $k = \text{const} > 0$, $\vec{r} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)^T$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$. Обозначим $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$. Тогда

$$F_x = -\frac{kq(\xi - x)}{r^3}, \quad F_y = -\frac{kq(\eta - y)}{r^3}, \quad F_z = -\frac{kq(\zeta - z)}{r^3},$$

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \frac{kq}{r^2}.$$

Предположим теперь, что имеется заряженная поверхность S, и $\rho(x, y, z)$ — плотность электрического заряда в точке $(x, y, z) \in S$. Если разбить поверхность на маленькие кусочки, то каждый кусочек можно приближенно считать точечным зарядом. Тогда записывая для каждого кусочка закон Кулона, суммируя все по всем кусочкам и устремляя ранг дробления к нулю, можно найти силу, которая будет действовать на единичный электрический заряд противоположного знака, помещенный в точке (ξ, η, ζ) (см. рисунок 1): $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$, где

$$F_x = -\iint\limits_{(S)} \frac{k\rho(x,y,z)(\xi - x)}{r^3}\, dS,$$

$$F_y = -\iint\limits_{(S)} \frac{k\rho(x,y,z)(\eta - y)}{r^3}\, dS,$$

$$F_z = -\iint\limits_{(S)} \frac{k\rho(x,y,z)(\zeta - z)}{r^3}\, dS.$$

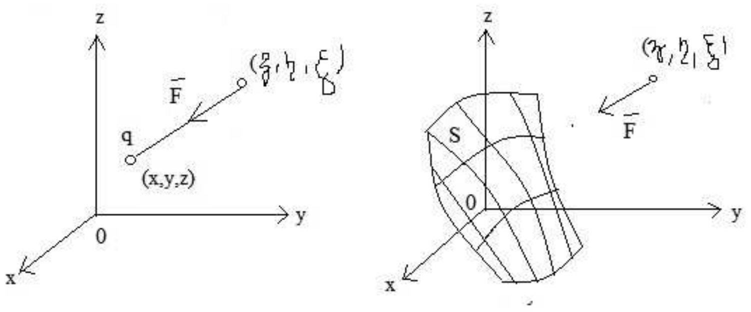

Рис. 1.

Расссмотрим правила вычисления поверхностного интеграла 1-ого рода (сведения его к Риманову интегралу).

1) Предположим, что поверхность S задана в явном виде:

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

причем функция $z(x,y)$ имеет непрерывные частные производные $p = z'_x$, $q = z'_y$ в области D (поверхность гладкая).

Разобьем область D на n произвольных простых непересекающихся частей:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Тем самым, получим дробление поверхности S:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

Тогда

$$\Delta S_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\big|_{(\hat{x}_i, \hat{y}_i)} \Delta D_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где ΔS_i, ΔD_i — площади областей S_i, D_i; $(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \in D_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Полагая $\xi_i = \hat{x}_i$, $\eta_i = \hat{y}_i$, $\zeta_i = z(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i, \hat{y}_i, z(\hat{x}_i, \hat{y}_i)) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\big|_{(\hat{x}_i, \hat{y}_i)} \Delta D_i.$$

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = (R) \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy,$$

где символ (R) служит обозначением Риманова интеграла.

2) Предположим теперь, что поверхность S задана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in \Delta,$$

причем функции $\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)$ имеют непрерывные частные производные в области Δ (поверхность гладкая).

Разобьем заданную область Δ на n произвольных простых непересекающихся частей: $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i$. Тем самым, получим дробление поверхности S: $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$.

Тогда

$$\Delta S_i = \iint\limits_{\Delta_i} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \sqrt{EG - F^2}\big|_{(\hat{u}_i, \hat{v}_i)} S(\Delta_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где ΔS_i, $S(\Delta_i)$ — площади областей S_i, Δ_i; $(\hat{u}_i, \hat{v}_i) \in \Delta_i$, $i = 1, \ldots, n$; E, G, F — Гауссовы коэффициенты.

Полагая $\xi_i = \varphi(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$, $\eta_i = \psi(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$, $\zeta_i = \chi(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\hat{u}_i, \hat{v}_i), \psi(\hat{u}_i, \hat{v}_i), \chi(\hat{u}_i, \hat{v}_i)) \sqrt{EG - F^2}\big|_{(\hat{u}_i, \hat{v}_i)} S(\Delta_i).$$

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = (R) \iint\limits_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

где снова символ (R) служит обозначением Риманова интеграла.

§ Поверхностные интегралы 2-ого рода

Пусть в R^3 имеется простая (ограниченная простым кусочно-гладким контуром) двусторонняя поверхность S, в каждой точке которой задана векторная функция $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T$. Будем считать, что площадь поверхности — конечна, и компоненты вектора $\vec{F}(x, y, z)$ — ограничены на S.

Найдем D_x, D_y, D_z — проекции поверхности S на координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy, соответственно.

Разобьем поверхность S на n произвольных простых непересекающихся кусочков:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \quad (S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j).$$

Обозначим ΔS_i — площадь поверхности S_i, $i = 1, \ldots, n$; $\omega = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \operatorname{diam} S_i$ — ранг дробления.

Пусть D_{xi}, D_{y_i}, D_{zi} — проекции поверхности S_i на координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy, а ΔD_{xi}, ΔD_{y_i}, ΔD_{zi} — площади этих проекций, соответственно.

Выберем $\forall (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$. Построим сумму

$$\sigma = \pm \sum_{i=1}^{n} \left(P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta D_{xi} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta D_{y_i} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta D_{zi} \right).$$

Здесь выбор знака "$\pm$" определяется выбором стороны поверхности S.

Определение. *Если существует конечный предел: $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$, причем он не зависит от способа дробления поверхности S и от выбора точек (ξ_i, η_i, ζ_i), $i = 1, \ldots, n$, то он называется поверхностным интегралом 2-ого рода от векторной функции $\vec{F}(x, y, z)$ по поверхности S. Обозначим его:*

$$\iint\limits_{(S)} P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dxdz + R(x, y, z)\, dxdy.$$

Для поверхностного интеграла 2-ого рода можно расписать стандартные свойства интегралов и условия существования.

В частности, отметим, что, согласно определению, поверхностный интеграл 2-ого рода (а точнее, его знак) зависит от выбора стороны поверхности (от ориентации поверхности).

Замечание. Предположим, что поверхность S представляет собой кусок плоскости:

$$z = C = \text{const}, \quad (x, y) \in D_z.$$

Нормаль к поверхности выберем, направленную вертикально вверх (т.е. работаем с верхней стороной поверхности). Тогда интегральная сумма σ для поверхностного интеграла совпадет с суммой Римана для двойного интеграла

$$(R) \iint\limits_{D_z} R(x, y, C)\, dxdy.$$

Здесь (R) — представляет собой обозначение Риманова интеграла. Таким образом, двойной Риманов интеграл — это частный случай поверхностного интеграла (или иначе: поверхностный интеграл — это обобщение Риманова интеграла).

Расссмотрим правила вычисления поверхностного интеграла 2-ого рода (сведения его к Риманову интегралу).

1) Предположим, что поверхность S задана в явном виде:

$$S: \; z = z(x, y), \quad (x, y) \in D_z.$$

Тогда

$$\iint\limits_{(S)} R(x, y, z)\, dxdy = (R) \iint\limits_{D_z} R(x, y, z(x, y))\, dxdy.$$

Аналогично, если
$$S: \ y = y(x,z), \quad (x,z) \in D_y,$$
то
$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz = (R)\iint\limits_{D_y} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz.$$
А если
$$S: \ x = x(y,z), \quad (y,z) \in D_x,$$
то
$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz = (R)\iint\limits_{D_x} P(x(y,z),y,z)\,dydz.$$
В самом деле, достаточно заметить, что интегральные суммы у интегралов в левых и правых частях соответствующих равенств совпадают.

Значит,
$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$
$$= (R)\iint\limits_{D_x} P(x(y,z),y,z)\,dydz + (R)\iint\limits_{D_y} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz +$$
$$+ (R)\iint\limits_{D_z} R(x,y,z(x,y))\,dxdy.$$
Заметим, однако, что данную формулу редко когда удается применить на практике, поскольку она предполагает явное выражение всех трех переменных x, y и z из уравнения поверхности, а это возможно только для самых простейших поверхностей.

2) Предположим теперь, что поверхность S задана в параметрическом виде:
$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \quad (u,v) \in \Delta,$$
причем функции $\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные в области Δ (поверхность гладкая).

Пусть $\vec{n}_i = (\cos\lambda_i, \cos\mu_i, \cos\nu_i)^T$ — единичная нормаль к поверхности S в точке (ξ_i, η_i, ζ_i); $i = 1, \ldots, n$. Тогда
$$\Delta S_i \approx \frac{\Delta D_{xi}}{|\cos\lambda_i|} \approx \frac{\Delta D_{y_i}}{|\cos\mu_i|} \approx \frac{\Delta D_{zi}}{|\cos\nu_i|}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$
Эти соотношения позволяют сводить поверхностные интегралы 2-ого рода к поверхностным интегралам 1-ого рода:
$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz = \pm\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\cos\lambda\,dS, \quad dydz = \Delta D_x$$
$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz = \pm\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\cos\mu\,dS, \quad dxdz = \Delta D_y$$
$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\cos\nu\,dS. \quad dxdy = \Delta D_z$$

Отсюда имеем:

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{(S)} (P(x,y,z)\cos\lambda + Q(x,y,z)\cos\mu + R(x,y,z)\cos\nu)\ dS =$$

$$= \pm\,(R) \iint\limits_{\Delta} \Big(P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)) \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} +$$

$$+ Q(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)) \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} +$$

$$+ R(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)) \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \Big) \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv =$$

$$= \pm\,(R) \iint\limits_{\Delta} (P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))A +$$

$$+ Q(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))B + R(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))C)\ dudv.$$

Здесь

$$A = \frac{\mathrm{D}(\psi,\chi)}{\mathrm{D}(u,v)}, \quad B = \frac{\mathrm{D}(\chi,\varphi)}{\mathrm{D}(u,v)}, \quad C = \frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)}.$$

Пример. Найдем

$$I = \iint\limits_{(S)} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy,$$

где S — внешняя сторона сферы: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Введем сферические координаты:

$$\begin{cases} x = R\cos u\cos v, \\ y = R\sin u\cos v, \\ z = R\sin v, \end{cases} \qquad u\in[0,2\pi], \quad v\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

Тогда

$$A = R^2\cos u\cos^2 v, \quad B = R^2\sin u\cos^2 v, \quad C = R^2\sin v\cos v.$$

Заметим, что внешней стороне сферы соответствует в выведенной выше формуле знак "+". Получаем:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \big((R\cos u\cos v)(R^2\cos u\cos^2 v) +$$

$$+ (R\sin u\cos v)(R^2\sin u\cos^2 v) + (R\sin v)(R^2\sin v\cos v)\big)\ dv =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3\cos v\,dv = 4\pi R^3.$$