ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных

§ Двойной интеграл

Пусть функция $f(x,y)$ определена в связной и простой (т.е. ограниченной простым, несамопересекающимся замкнутым контуром) области $D \subset R^2$.

Будем считать, что D — ограниченная область, и функция $f(x,y)$ ограничена там.

Разобьем область D на n произвольных простых, связных, непересекающихся кусочков:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \qquad (D_i \cap D_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j).$$

Обозначим $d_i = \operatorname{diam} D_i$, $i = 1, \ldots, n$. Величину $\omega = \max\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$ назовем рангом дробления области D.

Найдем ΔS_i — площадь области D_i, $i = 1, \ldots, n$. Выберем произвольные точки: $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Построим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

и назовем ее суммой Римана.

Определение. *Если существует конечный предел:* $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$*, причем он не зависит от способа дробления области* D *и от выбора точек* (ξ_i, η_i)*,* $i = 1, \ldots, n$*, то он называется двойным (Римановым) интегралом от функции* $f(x,y)$ *по области* D*. Обозначим его:* $\iint\limits_D f(x,y)\, dS$.

Замечание. Если двойной интеграл существует, то предел суммы Римана, согласно определению, не зависит от способа дробления области D. Тогда без потери общности можно выбрать самый простой способ дробления — с помощью прямых, параллельных осям координат. В этом случае область D разобьется на прямоугольники (на границе области данные прямоугольники могут быть обрезанными, но при ранге дробления, стремящимся к нулю, этим можно пренебречь). Тогда, если D_i — прямоугольник со сторонами Δx_i, Δy_i, то получим $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Поэтому в двойном интеграле часто используют также следующее обозначение: $dS = dxdy$, и пишут: $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$.

Рассмотрим свойства двойного интеграла:

1) пусть $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = I$, и $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$ в области D, за исключением точек, лежащих на некоторой кривой в D, причем $\tilde{f}(x,y)$ — ограничена в D. Тогда получаем, что $\iint\limits_D \tilde{f}(x,y)\, dxdy = I$;

2) $\iint\limits_D 0\, dxdy = 0$;

3) $\iint\limits_D 1\, dxdy = S(D)$, где $S(D)$ — площадь области D;

4) если $S(D) = 0$, то $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = 0$;

5) если $f(x,y) \geq 0$ в области D, то $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \geq 0$;

6) если $D = D_1 \cup D_2$ $(D_1 \cap D_2 = \emptyset)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy;$$

7) если $f(x,y) = c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)$, где $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = c_1 \iint\limits_D f_1(x,y)\,dxdy + c_2 \iint\limits_D f_2(x,y)\,dxdy;$$

8) если $f(x,y) \geq g(x,y)$ в области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy;$$

9) $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy;$

10) если $m \leq f(x,y) \leq M$ в области D, где $m, M = \mathrm{const}$, то

$$m\,S(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq M\,S(D).$$

Во всех выписанных свойствах предполагается, что соответствующие интегралы существуют. Доказательство свойств вытекает непосредственно из определения двойного интеграла.

Теорема (о среднем). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области D. Тогда найдется такая точка $(a,b) \in D$, что*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(a,b)\,S(D).$$

Доказательство. В силу свойства 1), без потери общности можно считать, что область D замкнута (функцию $f(x,y)$ можно доопределить на границе области D). Тогда по теореме Вейерштрасса, функция $f(x,y)$ ограничена в области D и достигает там своих максимального и минимального значений. Пусть

$$m = \min_D f(x,y), \quad M = \max_D f(x,y).$$

Согласно свойству 10) имеем:

$$m\,S(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq M\,S(D).$$

Если $S(D) = 0$, то доказательство очевидно. Предположим, что $S(D) > 0$. Тогда

$$m \leq \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq M.$$

По теореме Коши — Больцано (о промежуточных значениях функции): $\exists (a,b) \in D$:

$$\frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(a,b).$$

Получили требуемое. Теорема доказана.

Пример физического приложения двойного интеграла. Пусть имеется плоская пластина D, и $\rho(x, y)$ — плотность пластины в точке $(x, y) \in D$. Требуется найти массу пластины. Приближенно массу пластины можно вычислить так:

$$M(D) \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

Здесь использованы те же обозначения, что и при введении суммы Римана. Тогда, устремляя ранг дробления к нулю, придем к точной формуле:

$$M(D) = \iint\limits_{D} \rho(x, y)\, dxdy.$$

Аналогично можно вычислить значение электрического заряда, "размазанного" по плоской пластине, и т.д.

Рассмотрим условия существования двойного интеграла.

Снова дробим область D, как при построении суммы Римана. Положим

$$m_i = \inf_{D_i} f(x, y), \quad M_i = \sup_{D_i} f(x, y), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Построим суммы

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i,$$

и назовем их нижней и верхней суммами Дарбу, соответственно.

Суммы Дарбу обладают следующими свойствами:

1) На любом дроблении области D верно:

$$s \leq \sigma \leq S.$$

2) Пусть дробление τ_2 области D мельче дробления τ_1 (т.е. τ_2 получено путем дальнейшего размельчения τ_1). Тогда если s_1, S_1 — суммы Дарбу, построенные для дробления τ_1, s_2, S_2 — суммы Дарбу, построенные для дробления τ_2, то

$$s_2 \geq s_1, \quad S_2 \leq S_1,$$

т.е. при ранге дробления, стремящимся к нулю, нижняя сумма растет, а верхняя — убывает.

3) Пусть τ_1 и τ_2 — произвольные дробления области D (не обязательно, что одно мельче другого), и пусть s_1, S_1 и s_2, S_2 — суммы Дарбу, построенные для этих двух дроблений. Тогда:

$$s_1 \leq S_2, \quad s_2 \leq S_1,$$

т.е. любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней.

Из указанных свойств сумм Дарбу вытекает следующий критерий интегрируемости:

Теорема. *Для существования интеграла* $\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\lim_{\omega \to 0} (S - s) = 0.$$

КАК В одномерном случае

Доказательство теоремы, также как и доказательство свойств сумм Дарбу, проводится аналогично одномерному случаю.

Можно сформулировать более простое достаточное условие существования интеграла:

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то она там интегрируема, т.е.* $\exists \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.

Доказательство. Как и ранее, без потери общности считаем, что D — замкнутая область. Тогда по теореме Кантора функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна в области D, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall\omega:\ 0 < \omega < \delta\ \Rightarrow\ 0 \le (M_i - m_i) < \varepsilon,\ i = 1,\dots,n.$$

Отсюда имеем:

$$0 \le S - s = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta S_i < \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i = \varepsilon\, S(D).$$

Получили, что $\lim\limits_{\omega\to 0}(S - s) = 0$. Теорема доказана.

Отметим, что непрерывность функции — это только достаточное условие интегрируемости, но не необходимое.

Установим теперь геометрический смысл двойного интеграла.

Пусть $f(x,y) \ge 0$ при $(x,y) \in D$. Зададим поверхность $z = f(x,y)$. Тогда тело:

$$T = \{(x,y,z)^T \in R^3:\ 0 \le z \le f(x,y),\quad (x,y) \in D\},$$

расположенное под указанной поверхностью, называется криволинейным брусом.

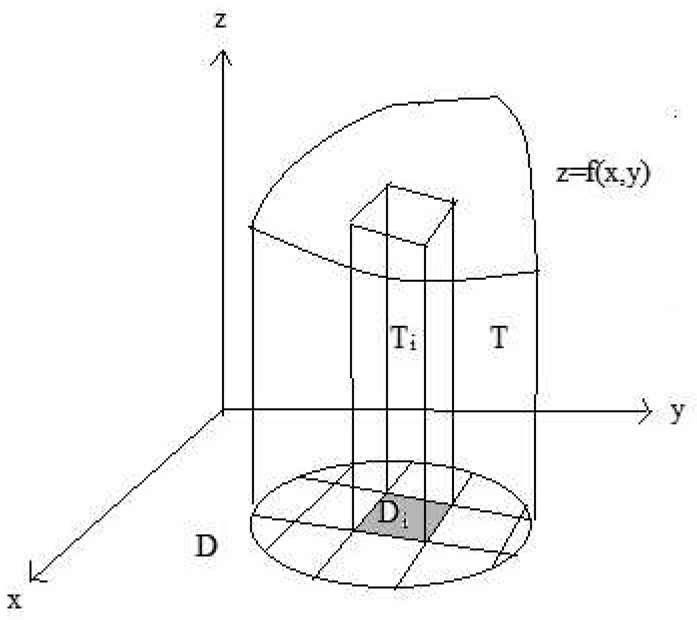

Рис. 1.

Дроблению области $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ соответствует дробление тела $T = \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$, т.е.

$$T_i = \{(x,y,z)^T \in R^3:\ 0 \le z \le f(x,y),\quad (x,y) \in D_i\}$$

(см. рисунок 1).

Обозначим ΔV_i — объем тела T_i, $i = 1, \ldots, n$. Имеем:

$$m_i \Delta S_i \le \Delta V_i \le M_i \Delta S_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть $V(T)$ — объем всего криволинейного бруса T. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i \le V(T) = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i.$$

Устремляя ранг дробления области D к нулю, с учетом критерия интегрируемости функций, получим:

$$V(T) = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy,$$

т.е. значение двойного интеграла равно объему соответствующего криволинейного бруса.

Пример. Рассмотрим интеграл $\iint\limits_D (1 - x - y)\, dxdy$, где область D изображена на рисунке 2 а.

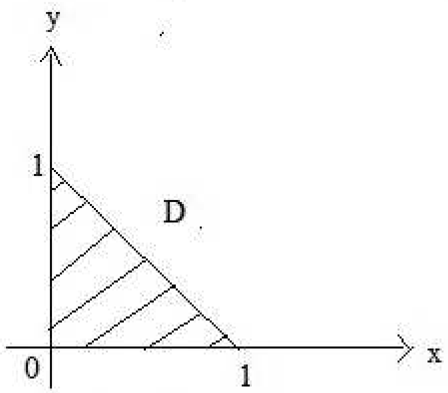

Рис. 2 а.

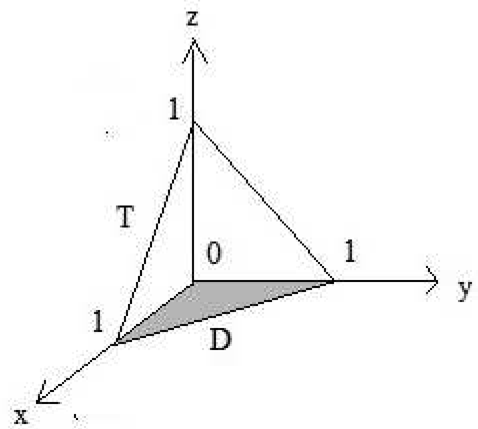

Рис. 2 б.

Криволинейный брус в данном случае — это пирамида (см. рисунок 2 б). Вспоминая, чему равен объем пирамиды, получаем, что

$$\iint\limits_D (1 - x - y)\, dxdy = V(T) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Аналогично можно установить более общие результаты. Пусть задано тело:

$$T = \{(x, y, z)^T : \ f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y), \ (x, y) \in D\}.$$

Здесь знак функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ может быть произвольным. Тогда:

$$V(T) = \iint\limits_D \left(f_2(x, y) - f_1(x, y)\right)\, dxdy.$$

Замечание. Если область D является неограниченной и/или функция $f(x,y)$ не ограничена в D, то тогда интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ называется несобственным. Выберем произвольную ограниченную область $D' \subset D$, такую что функция $f(x,y)$ ограничена в D'. Тогда положим

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{D' \to D} \iint\limits_{D'} f(x,y)\,dxdy.$$

Если данный предел существует, конечен и не зависит от выбора области D' и от способа стремления D' к D, то говорят, что несобственный интеграл сходится (в противном случае, интеграл называется расходящимся).