ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Производные и дифференциалы старшего порядка

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $D \subset R^2$ и имеет там частные производные по своим аргументам:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Предположим, что эти функции также, в свою очередь, имеют в области D частные производные. Тогда получим частные производные второго порядка

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Последние две производные называются смешанными.

Аналогино, если продифференцировать полученные частные производные второго порядка еще раз, то получим частные производные третьего порядка, и т.д.

Нетрудно заметить, что если имеется функция от n переменных, то у нее может быть n^k частных производных k-ого порядка.

Пример. Пусть $f(x,y) = 4x^2y^3$. Тогда

$$f'_x = 8xy^3, \quad f'_y = 12x^2y^2,$$

$$f''_{x^2} = 8y^3, \quad f''_{xy} = 24xy^2, \quad f''_{yx} = 24xy^2, \quad f''_{y^2} = 24x^2y.$$

В данном примере оказалось, что $f''_{xy} = f''_{yx}$. Это случайность или нет?

Теорема (о равенстве смешанных производных). *Пусть функция $f(x,y)$ определена в окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ и имеет там непрерывные частные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$. Тогда $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.*

Доказательство. Зададим произвольные (малые) значения $h, k \neq 0$ и построим величину

$$W = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0,y_0)}{hk}.$$

Положим

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k}.$$

Тогда

$$W = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(c_1) = \frac{f'_x(c_1, y_0+k) - f'_x(c_1, y_0)}{k} = f''_{xy}(c_1, c_2).$$

Здесь мы дважды применили одномерную теорему Лагранжа (сначала по переменной x, затем по переменной y); c_1 — некоторая точка, лежащая между x_0 и x_0+h; c_2 — некоторая точка, лежащая между y_0 и y_0+k.

Аналогично, пусть

$$\psi(y) = \frac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y)}{h}.$$

Тогда

$$W = \frac{\psi(y_0+k) - \psi(y_0)}{k} = \psi'(c_3) = \frac{f'_y(x_0+h, c_3) - f'_y(x_0, c_3)}{h} = f''_{yx}(c_4, c_3).$$

Здесь мы снова дважды применили одномерную теорему Лагранжа (теперь сначала по переменной y, затем по переменной x); c_4 — некоторая точка, лежащая между x_0 и x_0+h; c_3 — некоторая точка, лежащая между y_0 и y_0+k.

Получили
$$W = f''_{xy}(c_1, c_2) = f''_{yx}(c_4, c_3).$$
Переходя к пределу при $h, k \to 0$ и учитывая непрерывность вторых смешанных производных в точке M_0, получим требуемое равенство $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. Теорема доказана.

Замечание. Аналогично можно доказать, что если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и имеет непрерывные частные производные до k-ого порядка в некоторой области, то тогда в этой области при вычислении указанных производных важно лишь учитывать количество дифференцирований по каждой из переменной. При этом порядок, в котором ведется дифференцирование, не важен.

Пример. Пусть $f(x, y, z) = xy^2e^z$. Получаем
$$f'_x = y^2e^z, \quad f''_{xy} = 2ye^z, \quad f'''_{xy^2} = 2e^z, \quad f^{(4)}_{xy^2z} = 2e^z.$$
Поскольку никаких проблем с непрерывностью здесь не возникает, то тогда можно утверждать, что
$$f^{(4)}_{xy^2z} = f^{(4)}_{y^2xz} = f^{(4)}_{xyzy} = f^{(4)}_{zxy^2} = f^{(4)}_{zyxy} = \ldots = 2e^z.$$

Пусть функция $f(x, y)$ имеет в области D непрерывные частные производные первого порядка. Тогда она дифференцируема в данной области, и
$$df = f'_x dx + f'_y dy.$$
Предположим теперь, что $f(x, y)$ имеет в области D также непрерывные частные производные второго порядка. Зафиксируем приращения аргументов dx, dy. В этом случае первый дифференциал будет являться функцией только переменных x, y. Тогда выражение
$$d^2f = d(df)$$
назовем вторым дифференциалом функции $f(x, y)$. Имеем
$$d^2f = d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy =$$
$$= (f''_{x^2} dx + f''_{yx} dy)dx + (f''_{xy} dx + f''_{y^2} dy)dy = f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2$$
(здесь мы воспользовались теоремой о равенстве смешанных производных).

Аналогично, если функция $f(x, y)$ имеет в области D непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, то зафиксировав dx, dy, можно ввести понятие третьего дифференциала:
$$d^3f = d(d^2f) = (f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2)'_x dx + (f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2)'_y dy =$$
$$= f'''_{x^3} dx^3 + 3f'''_{x^2y} dx^2dy + 3f'''_{xy^2} dxdy^2 + f'''_{y^3} dy^3.$$

По индукции нетрудно доказать, что при наличии у функции $f(x, y)$ в области D непрерывных частных производных до k-ого порядка включительно верно:
$$d^kf = d(d^{k-1}f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}} dx^i dy^{k-i}.$$

Для случая функции n переменных также можно получить формулу:

$$d^k f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f$$

(здесь снова используется предположение о непрерывности частных производных до k-ого порядка включительно).

Замечание. Дифференциал k-ого порядка функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в заданной точке можно рассматривать как однородную форму k-ого порядка относительно приращений аргументов $dx_1, \ldots, dx_n$. Также стоит отметить, что дифференциалы старшего порядка (выше первого) свойством инвариантности формы, вообще говоря, не обладают.

Снова рассмотрим функцию $f(x, y)$. Будем считать, что у нее существуют непрерывные частные производные в области D до порядка k включительно. Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ — внутренние точки области D, причем отрезок, соединяющий эти две точки, не выходит за границы области D. Обозначим

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

Тогда уравнение отрезка, соединяющего точки M_0 и M, можно записать в виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x, \\ y = y_0 + t\Delta y, \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

Построим функцию

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Согласно одномерной формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}(1 - 0) + \frac{F''(0)}{2!}(1 - 0)^2 + \ldots + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}(1 - 0)^{k-1} +$$

$$+ \frac{F^{(k)}(\theta)}{k!}(1 - 0)^k,$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Имеем

$$F(0) = f(M_0),$$

$$F'(0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y = df(M_0).$$

Аналогично по индукции нетрудно доказать, что

$$F^{(i)}(0) = d^i f(M_0), \quad i = 1, \ldots, k - 1,$$

$$F^{(k)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(\tilde{M}),$$

где $\tilde{M} = (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$ — точка, лежащая на отрезке, соединяющем M_0 и M.

Тогда, учитывая что

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = F(1) - F(0),$$

получаем формулу Тейлора для функции двух переменных:

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^{k-1} f(M_0)}{(k-1)!} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(\tilde{M}).$$

Замечание. Формулу Тейлора можно составить и для функции n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^{k-1} f(M_0)}{(k-1)!} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^k f(\tilde{M}).$$

Здесь $M_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $M = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, n$, $\tilde{M} = (x_1^{(0)} + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \theta\Delta x_n)$, $\theta \in (0,1)$. При $k = 1$ получим формулу конечных приращений Лагранжа (см. ранее).

Пример. Пусть $f(x,y) = \sin(x-y)$, $M_0 = (0,0)$. Тогда

$$\Delta x = x - 0 = x, \quad \Delta y = y - 0 = y.$$

Вычислим

$$f'_x = \cos(x-y), \quad f'_y = -\cos(x-y),$$

$$f''_{x^2} = -\sin(x-y), \quad f''_{xy} = \sin(x-y), \quad f''_{y^2} = -\sin(x-y),$$

$$f'''_{x^3} = -\cos(x-y), \quad f'''_{x^2y} = \cos(x-y), \quad f'''_{xy^2} = -\cos(x-y), \quad f'''_{y^3} = \cos(x-y),$$

и т.д. Тогда

$$f(0,0) = 0,$$

$$df(0,0) = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y = x - y,$$

$$d^2 f(0,0) = f''_{x^2}(0,0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(0,0)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(0,0)(\Delta y)^2 = 0,$$

$$d^3 f(0,0) = f'''_{x^3}(0,0)(\Delta x)^3 + 3f'''_{x^2y}(0,0)(\Delta x)^2\Delta y + f'''_{xy^2}(0,0)\Delta x(\Delta y)^2 + f'''_{y^3}(0,0)(\Delta y)^3 =$$

$$= -x^3 + 3x^2 y - 3xy^2 - y^3 = -(x-y)^3,$$

и т.д. Получаем, что

$$\sin(x-y) = (x-y) - \frac{(x-y)^3}{3!} + \ldots.$$

Данную формулу можно было бы получить сразу, вспомнив одномерную формулу Тейлора дл синуса:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

и полагая $z = x - y$.

Пример. Пусть $f(x,y) = e^{1+x+y}$, $M_0 = (0,0)$. Если вспомнить одномерную формулу Тейлора для экспоненты

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

и, полагая $z = 1 + x + y$, записать

$$e^{1+x+y} = 1 + (1 + x + y) + \frac{(1 + x + y)^2}{2!} + \ldots,$$

то это будет не верно, поскольку указанная формула — это разложение экспоненты в точке $z_0 = 0$ (а при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ получается $z_0 = 1 + x_0 + y_0 = 1 \neq 0$). Правильно записать так:

$$e^{1+x+y} = e \cdot e^{x+y} = e \left(1 + (x + y) + \frac{(x + y)^2}{2!} + \ldots \right).$$