# ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

## § Криволинейные интегралы 2-ого рода по замкнутому контуру (продолжение)

**Определение.** *Область $D \subset R^2$ называется односвязной, если любой замкнутый контур $L$, лежащий в $D$, ограничивает область, целиком входящую в $D$ (см. рисунок 3).*

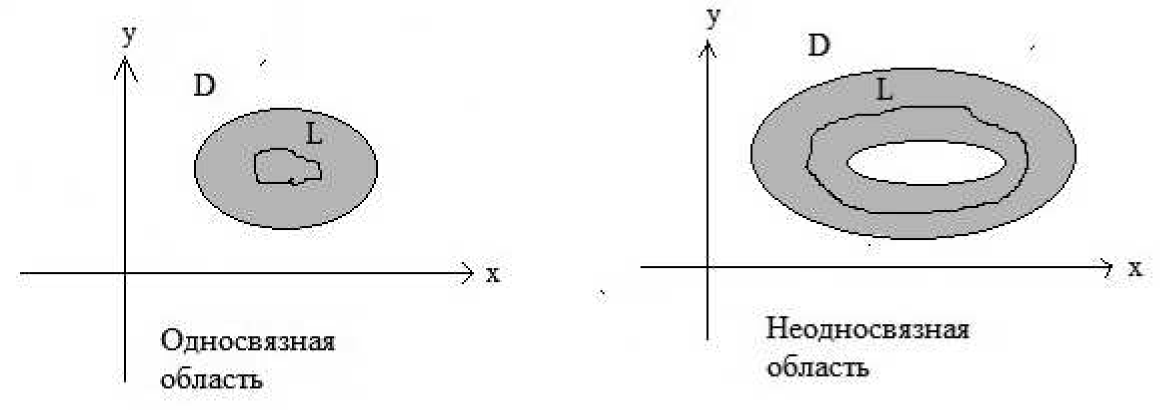


Рис. 3.

**Теорема.** *Пусть область $D$ окружена простым контуром $l$, и пусть в области $D$ заданы непрерывные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные: $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы для любого замкнутого контура $L \subset D$ выполнялось условие:*

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

*необходимо, а если область $D$ односвязная, то и достаточно, чтобы в области $D$ имело место соотношение*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

**Доказательство.** *Достаточность.* Выберем произвольный замкнутый контур $L \subset D$. Тогда по формуле Грина имеем требуемое:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Здесь $D' \subset D$ — область, ограниченная контуром $L$.

*Необходимость.* Предположим, что $\exists(\bar{x},\bar{y}) \in D$: $\frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{(\bar{x},\bar{y})} \neq \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{(\bar{x},\bar{y})}$. Пусть для определенности $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{(\bar{x},\bar{y})} > 0$. Не умаляя общности, считаем, что $(\bar{x},\bar{y})$ — внутренняя точка области $D$. Тогда $\exists\delta > 0$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0, \quad \forall(x,y) \in D',$$

где $D' = U_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ — сферическая $\delta$-окрестность точки $(\bar{x}, \bar{y})$.

Выберем в качестве контура $L$ границу окрестности $D'$. Применяя формули Грина и теорему о среднем, получаем

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bigg|_{(\hat{x},\hat{y})} \pi\delta^2 > 0.$$

Здесь $(\hat{x}, \hat{y}) \in D'$. Приходим к противоречию с условиями теоремы. Теорема доказана.

**Теорема.** *Пусть область $D$ окружена простым контуром $l$, и пусть в области $D$ заданы непрерывные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные: $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы для любых двух точек $A, B \in D$ значение интеграла $\int\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ вдоль кривой $L \subset D$, соединяющей точки $A$ и $B$, не зависело от вида кривой $L$ необходимо, а если область $D$ односвязная, то и достаточно, чтобы в области $D$ имело место соотношение*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

**Доказательство.** *Достаточность.* Выберем две произвольные точки $A, B \in D$ и две произвольные кривые $L_1, L_2 \subset D$, соединяющей точки $A$ и $B$. Тогда кривая $A - L_1 - B - L_2 - A$ образует замкнутый контур в $D$ (см. рисунок 4).

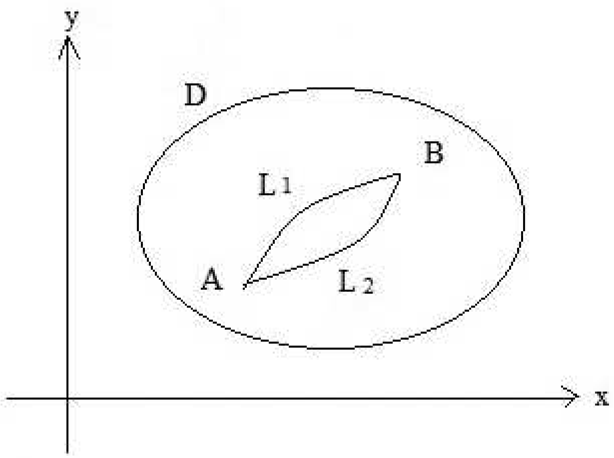


Рис. 4.

С учетом предыдущей теоремы, имеем

$$0 = \oint\limits_{(A-L_1-B-L_2-A)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$\int\limits_{(A-L_1-B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int\limits_{(B-L_2-A)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{(A-L_1-B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \int\limits_{(A-L_2-B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{(A-L_1-B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{(A-L_2-B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

*Необходимость.* Пусть $\exists(\bar{x},\bar{y}) \in D$: $\frac{\partial Q}{\partial x}\big|_{(\bar{x},\bar{y})} \neq \frac{\partial P}{\partial y}\big|_{(\bar{x},\bar{y})}$. Тогда, как это показано в предыдущей теореме, найдется замкнутый контур $L \subset D$ такой, что

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \neq 0.$$

Выберем две точки $A$ и $B$ на этом контуре. Тогда, проделывая те же рассуждения, что и при доказательстве достаточности, придем к противоречию. Теорема доказана.

**Теорема.** *Пусть область $D$ окружена простым контуром $l$, и пусть в области $D$ заданы непрерывные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные: $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы существовала такая функция $\Phi(x,y)$, что*

$$d\Phi(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

*необходимо, а если область $D$ односвязная, то и достаточно, чтобы в области $D$ имело место соотношение*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть $\exists\Phi(x,y)$: $d\Phi = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Тогда

$$P(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

По теореме о равенстве смешанных производных получаем требуемое.

*Достаточность.* Пусть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в области $D$. Функцию $\Phi(x,y)$ построим в виде криволинейного интеграла с переменным верхним пределом:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Здесь $(x_0,y_0)$ — произвольная точка из области $D$, а интеграл считается по произвольной кривой, лежащей в $D$ и соединяющей точки $(x_0,y_0)$ и $(x,y)$ (согласно предыдущей теореме, от вида кривой значение интеграла не зависит).

Получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x, y) - \Phi(x,y)}{\Delta x} = (\text{см. рис. 5 а}) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left( \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(x,y)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x,y),$$

где точка $\xi$ находится между точками $x$ и $x + \Delta x$.

Аналогично показывается, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y).$$

Значит, $d\Phi = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Теорема доказана

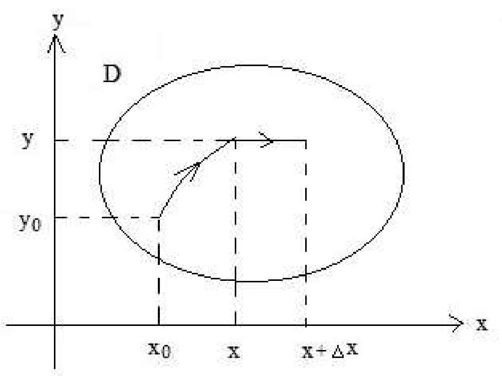


Рис. 5 а.

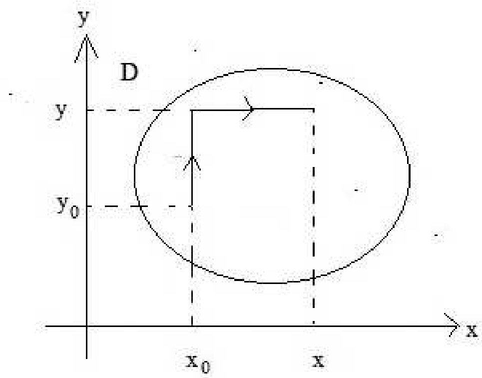


Рис. 5 б.

**Замечание.** При доказательстве последней теоремы была предложена формула для нахождения функции $\Phi(x,y)$. Упростим ее. Поскольку значение криволинейного интеграла не зависит от вида кривой, соединяющей точки $(x_0, y_0)$ и $(x,y)$, то выберем кривую, указанную на рисунке 5 б. Тогда получим

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy.$$

Здесь в последнем выражении присутствуют обычные Римановы интегралы.

**Замечание.** Если выполнены условия последней теоремы, то тогда для любых точек $A, B \in D$ интеграл по кривой, соединяющей эти точки, будет равен:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{(AB)} d\Phi(x,y) = \Phi(B) - \Phi(A).$$

**Пример.** Пусть $P(x,y) = xy^2$, $Q(x,y) = x^2y$. Эти функции непрерывны в $R^2$ и имеют непрерывные частные производные, причем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy.$$

Значит, интеграл по любому замкнутому контуру будет равен нулю. Например,

$$\oint\limits_{x^2+y^2=1} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \Big[x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi]\Big] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(\cos t\sin^2 t(-\sin t) + \cos^2 t\sin t\cos t\big)\ dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin 4t\,dt = 0.$$

Найдем теперь $\int\limits_{(L)} xy^2\,dx + x^2y\,dy$, где $L$ — кривая, соединяющая две точки $A=(0,0)$ и $B=(1,1)$. Поскольку от вида кривой значение интеграла не зависит, то можно, например, взять $L$: $y=x$ (или $y=x^2$, или $y=x^3$, и т.д.). Получим

$$\int\limits_{(L)} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_0^1 (x^3+x^3)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Можно вычислить интеграл по-другому. Выберем $x_0=y_0=0$. Найдем

$$\Phi(x,y) = \int_0^x xy^2\,dx + \int_0^y 0^2y\,dy = \frac{1}{2}x^2y^2.$$

Тогда

$$\int\limits_{(L)} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \Phi(1,1)-\Phi(0,0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

**Замечание.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$, уравнение можно переписать в дифференциальной форме:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Если $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, то уравнение называется уравнением в полных дифференциалах. Найдем $\Phi(x,y)$: $d\Phi = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$. Тогда семейство кривых $\Phi(x,y)=C$, где $C$ — произвольная константа, задает общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения.

**Замечание.** Пусть в области $D$ действует сила $\vec{F} = (P(x,y),Q(x,y))^T$. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в области $D$, то тогда сила $\vec{F}$ называется потенциальной, а скалярная функция $\Phi(x,y)$: $d\Phi = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, называется потенциалом. В этом случае, работа, совершенная силой по перемещению тела от точки $A$ до точки $B$, равна

$$W = \int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \Phi(B)-\Phi(A)$$

(она зависит от начального и конечного положения тела, и не зависит от пути перемещения). Примеры потенциальных сил: гравитационная сила (сила Ньютона), электростатическая сила (сила Кулона), и т.п. Всевозможные силы сопротивления, трения, и т.п., потенциальными не являются.

**Пример.** Пусть шарик скатывается с горы, высоты $H$. Начальная скорость шара равна 0. Найти скорость, которую приобретет шар, скатившись с горы. Трением и сопротивлением воздуха пренебрежем.

Поскольку в задаче учитывается только потенциальная гравитационная сила, то от формы горки ничего не зависит. Все определяется начальной высотой ($H$) и конечной (0). Решить задачу можно, например, используя закон сохранения энергии. Пусть $\Pi_A$, $K_A$, $\Pi_B$, $K_B$ — потенциальная и кинетическая энергия тела в начальной точке $A$ и конечной точке $B$, соответственно. Тогда

$$\Pi_A + K_A = \Pi_B + K_B.$$

Отсюда находим, что

$$mgH = \frac{mv^2}{2},$$

где $v$ — искомая скорость тела в точке $B$. Получаем $v = \sqrt{2gH}$.