ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Условный экстремум

Пусть функция
$$F(x_1, \ldots, x_{n+m}) \tag{1}$$
задана на множестве $D \subset R^{n+m}$, где
$$D : \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, в пространстве R^{n+m} мы имеем область (2), задаваемую набором ограничений в виде равенств (условиями связи). Поведение целевой функции $F(x_1, \ldots, x_{n+m})$ нас интересует лишь в пределах этой области.

Определение. *Точка $\mathbf{x}^{(0)} \in D$ называется точкой условного максимума (минимума) в задаче (1), (2), если*
$$\exists \delta > 0 : \ F(\mathbf{x}) \le F(\mathbf{x}^{(0)}) \ \left(F(\mathbf{x}) \ge F(\mathbf{x}^{(0)})\right), \ \forall \mathbf{x} \in \left(U_\delta(\mathbf{x}^{(0)}) \cap D\right).$$

Замечание. Ранее были установлены необходимые и достаточные условия локального экстремума для случая, когда точка экстремума является внутренней точкой области задания функции. В таком случае принято говорить о безусловном экстремуме. Задача на условный экстремум характеризуется наличием связей между переменными, в результате чего искомая точка экстремума не будет внутренней точкой области задания функции.

В простейших ситуациях задачу поиска условного экстремума можно свести к задаче поиска безусловного экстремума с помощью метода исключения переменных.

Пусть функции $\varphi_1(x_1, \ldots, x_{n+m}), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_{n+m})$ являются независимыми в окрестности точки $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогда
$$\mathrm{rang} \frac{\mathbb{D}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\mathbb{D}(x_1, \ldots, x_{n+m})}\Big|_{\mathbf{x}^{(0)}} = m.$$

Предположим для определенности, что последние m столбцов этой матрицы Якоби образуют ненулевой минор, т.е.
$$\frac{\mathrm{D}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\mathrm{D}(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})}\Big|_{\mathbf{x}^{(0)}} \ne 0. \tag{3}$$

Значит, по теореме о системе неявных функций в окрестности точки $\mathbf{x}^{(0)}$ из уравнений связи (2) можно выразить последние m переменных через первые n:
$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n+m} = f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), выразим целевую функцию через независимые переменные:
$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n, f_1(...), \ldots, f_m(...)). \tag{5}$$

В результате задача (1), (2) на поиск условного экстремума будет сведена к задаче на поиск безусловного экстремума функции (5) (решив ее, найдем оптимальные значения независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, а значения зависимых переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ найдем из условий связи).

Пример. Рассмотрим задачу: найти экстремумы функции

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

при условии связи

$$x + y - 1 = 0.$$

Пользуясь условием связи выразим переменную y через x:

$$y = 1 - x.$$

Сводим задачу к поиску безусловных экстремумов функции

$$\Phi(x) = F(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2.$$

Необходимое условие безусловного экстремума:

$$\Phi'(x) = 2x - 2(1 - x) = 0,$$

откуда находим "подозрительную" точку $x = 1/2$. Производная $\Phi'(x)$ в этой точке меняет знак с "$-$" на "$+$", значит, найденная точка — это точка минимума функции $\Phi(x)$. Определив значение y из условия связи, получаем, что точка (1/2, 1/2) — точка условного минимума в исходной задаче.

Описанный подход требует явного нахождения функций (4), что далеко не всегда удается сделать, если условия связи (2) — сложные. Поэтому рассмотрим более универсальный подход — метод множителей Лагранжа.

Построим функцию

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = F(x_1, \ldots, x_{n+m}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n+m})$$

— функцию Лагранжа. Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — некоторые константы (множители Лагранжа).

Теорема (необходимые условия условного экстремума). *Пусть $\mathbf{x}^{(0)}$ — точка условного экстремума в задаче (1), (2). Предположим, что функции $F, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ непрерыно дифференцируемы по своим аргументам в окрестности этой точки, и выполнено условие (3). Тогда существуют такие постоянные $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что*

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}^{(0)}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} = 0, \quad j = 1, \ldots, n + m. \tag{6}$$

Доказательство. Как и в методе исключения, возьмем систему функций (4) и подставим ее в (1). Получим функцию (5).

Согласно необходимому условию безусловного экстремума, имеем в точке $\mathbf{x}^{(0)}$:

$$d\Phi(x_1, \ldots, x_n) = dF(x_1, \ldots, x_n, f_1(...), \ldots, f_m(...)) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0. \tag{7}$$

Здесь $dx_1, \ldots, dx_n$ — это приращения независимых переменных, а $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$ — это дифференциалы функций (4). Свойство инвариантности формы первого дифференциала позволяет не делать между ними различий.

Аналогично, подставим (4) в (2). Дифференцируя полученные тождества и опять пользуясь свойством инвариантности формы первого дифференциала, получим в точке $\mathbf{x}^{(0)}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m} = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Умножим i-ое равенство в (8) на некоторое λ_i и прибавим к (7), $i = 1, \ldots, m$. Получим

$$\sum_{j=1}^{n+m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} dx_j = 0. \qquad (9)$$

Выберем постоянные $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, исходя из условий:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} = 0, \quad j = n+1, \ldots, n+m$$

(такие постоянные существуют, в силу условия (3)).

Тогда условие (9) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} dx_j = 0.$$

Для того чтобы данное условие выполнялось при любых независимых $dx_1, \ldots, dx_n$, необходимо, чтобы имели место равенства

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Получили требуемое. Теорема доказана.

Систему равенств (6) решаем совместно с условиями связи (2) (тогда получаем $(n+2m)$ уравнений с $(n+2m)$ неизвестными). В результате находим точки, "подозрительные" на условный экстремум.

Теорема (достаточные условия условного экстремума). *Пусть в точке* $\mathbf{x}^{(0)}$ *выполнены условия предыдущей теоремы. Предположим, что функции* $F, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам в окрестности этой точки. Тогда если второй дифференциал*

$$d^2L(\mathbf{x}^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

при множителях Лагранжа, выбранных согласно условиям предыдущей теоремы, сохраняет положительное (отрицательное) значение при любых $dx_1, \ldots, dx_{n+m}$, *не равных одновременно нулю и удовлетворяющих соотношениям (8), то тогда точка* $\mathbf{x}^{(0)}$ *является точкой условного минимума (максимума) в задаче (1), (2).*

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что при выполнении соотношений (8) и при выбранных значениях множителей Лагранжа имеет место условие: $d^2\Phi(\mathbf{x}^{(0)}) = d^2L(\mathbf{x}^{(0)})$. Тогда требуемое будет следовать из достаточных условий безусловного экстремума.

Замечание. Поскольку второй дифференциал функции свойством инвариантности формы, вообще говоря, не обладает, то при проверке достаточных условий условного экстремума приходится явно задействовать соотношения (8), вытекающие из условий связи.

Замечание. Условие (3) предполагает, что условия связи в окрестности точки условного экстремума независимы между собой. Если независимость условий связи не очевидна, то можно использовать функцию Лагранжа вида

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda_0 F(x_1, \ldots, x_{n+m}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n+m}).$$

Рассматриваем ее при $\lambda_0 = 1$ (в этом случае имеем все установленные выше результаты) и при $\lambda_0 = 0$ (в этом случае находим точки, в которых условия связи — зависимы; данные точки нуждаются в отдельном исследовании).

Замечание. Можно рассмотреть более общую задачу, когда условия связи имеют вид не только равенств, но и неравенств. Метод Лагранжа можно адаптировать для такого более общего случая. Задачи такого рода рассматриваются в курсе "Математическое программирование".

Пример. Снова рассмотрим задачу: найти экстремумы функции

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

при условии связи

$$x + y - 1 = 0.$$

Строим функцию Лагранжа:

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

Составляем уравнения (6):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0.$$

Решаем эти уравнения совместно с условием связи. Находим "подозрительную" точку $(1/2,\, 1/2)$ и значение множителя Лагранжа $\lambda = -1$.

Проверяем знак выражения

$$d^2L(1/2,\, 1/2) = 2dx^2 + 2dy^2$$

при условии

$$(2xdx + 2ydy)\big|_{(1/2,1/2)} = dx + dy = 0.$$

Видим, что $d^2L(1/2,\, 1/2) > 0$ при любых dx, dy, не равных одновременно нулю. Значит, точка $(1/2,\, 1/2)$ — точка условного минимума.

Пример. Решим теперь такую задачу: найти экстремумы функции

$$F(x, y) = xy$$

при условии связи

$$x - y = 0.$$

Строим функцию Лагранжа:

$$L = xy + \lambda(x - y)$$

Составляем уравнения (6):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda = 0.$$

Решаем эти уравнения совместно с условием связи. Находим "подозрительную" точку $(0, 0)$ и значение множителя Лагранжа $\lambda = 0$.

Проверяем знак выражения

$$d^2L(0, 0) = 2dxdy$$

при условии

$$(dx - dy)\big|_{(0,0)} = dx - dy = 0.$$

Видим, что тогда $d^2L(0, 0) = dx^2 > 0$ при любом dx, не равном нулю. Значит, точка $(0, 0)$ — точка условного минимума.