ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Правила вычисления двойного интеграла

Пусть требуется вычислить $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Считаем, что он — "собственный".

Предположим, что область D задается условиями (см. рисунок 1 а):

$$D = \{(x,y)^T \in R^2 :\ y_1(x) \le y \le y_2(x),\ a \le x \le b\}.$$

Если область D задана какими-то более сложными условиями, то разобьем ее на части указанного вида.

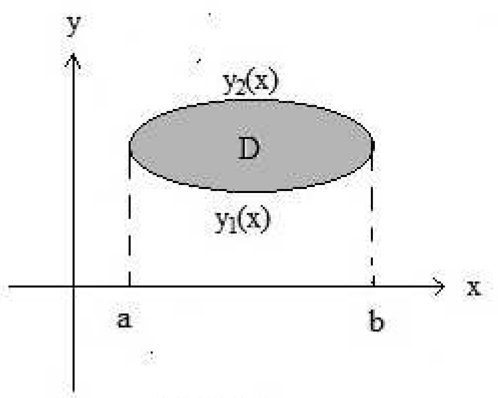

Рис. 1 а.

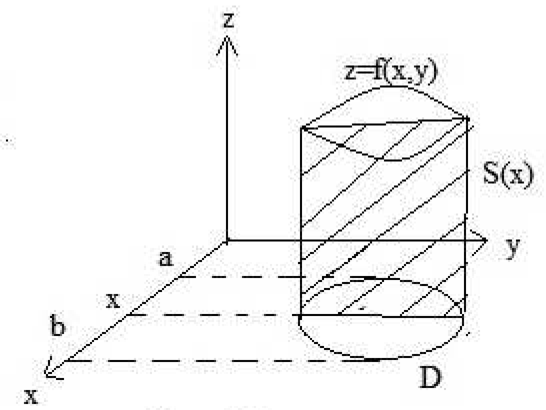

Рис. 1 б.

Допустим, что $f(x,y) \ge 0$ при $(x,y) \in D$. Обозначим через T — криволинейный брус, лежащий под поверхностью $z = f(x,y)$. Зафиксируем $x \in [a,b]$ и проведем сечение бруса плоскостью $x = \mathrm{const}$ (см. рисунок 1 б). Пусть $S(x)$ — площадь указанного сечения. Используя геометрический смысл одномерного определенного интеграла, получаем:

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

С другой стороны, вспоминая приложение одномерных определенных интегралов к вычислению объема тела, имеем:

$$V(T) = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Значит,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = V(T) = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Обычно используют следующую форму записи в виде так называемого повторного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Здесь внутренний интеграл вычисляется по переменной y (переменная x при этом рассматривается как постоянный параметр), а внешний интеграл вычисляется по переменной x.

Аналогично, предположим, что та же самая область D представлена в виде:

$$D = \{(x,y)^T \in R^2 : \ x_1(y) \le x \le x_2(y), \ c \le y \le d\}.$$

Тогда, проделывая такие же рассуждения, придем к другому повторному интегралу:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Ясно, что обе найденные формулы дают один и тот же ответ. Какой из них удобнее пользоваться, зависит от специфики конкретной задачи.

Пример. Снова, как и в прошлом параграфе, рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_D (1-x-y)\,dxdy,$$

где область D изображена на рисунке 2 а.

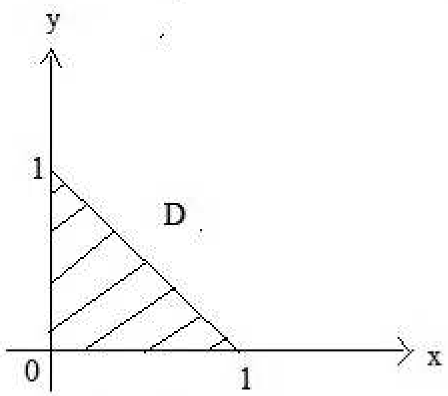

Рис. 2 а.

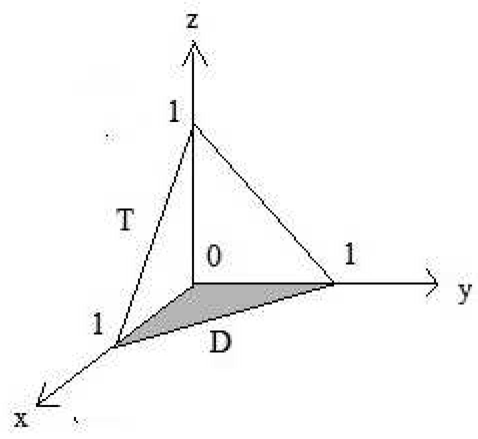

Рис. 2 б.

Тогда имеем:

$$\iint\limits_D (1-x-y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy = \int_0^1 (y - xy - \frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2})\,dx = (\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})\Big|_0^1 = \frac{1}{6},$$

или, что то же самое:

$$\iint\limits_D (1-x-y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1-x-y)\,dx = \ldots = \frac{1}{6}.$$

Пример. Сведем двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к повторному, для области D, изображенной на рисунке 3.

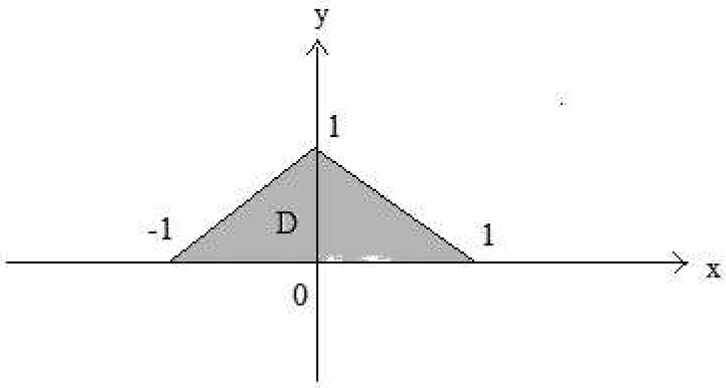

Рис. 3.

Получаем:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_0^{x+1} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy,$$

или

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

Формулы сведения двойного интеграла к повторным были выведены выше, исходя из геометрического смысла. При этом предполагалось, что $f(x,y) \geq 0$ в области D. На самом деле, данное предположение излишнее. Те же самые формулы могут быть выведены и без него.

Лемма. *Пусть функция $f(x,y)$ задана в прямоугольнике:*

$$P = \{(x,y)^T : \ c \leq y \leq d, \ a \leq x \leq b\},$$

и пусть существуют интегралы $\int_c^d f(x,y)\,dy$ при $\forall x \in [a,b]$ и $\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy$. Тогда справедлива формула:

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Для доказательства леммы достаточно прямоугольник P разбить на маленькие прямоугольники и расписать суммы Римана и Дарбу для используемых в формуле интегралов. Тогда с учетом того, что площади прямогугольников вычислять легко, установим требуемое.

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ задана в области*

$$D = \{(x,y)^T \in R^2 : \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \ a \leq x \leq b\},$$

и пусть существуют интегралы $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ при $\forall x \in [a,b]$ и $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Тогда справедлива формула:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. Область D — ограничена (мы рассматриваем "собственные" интегралы). Значит, можно построить прямоугольник

$$P = \{(x, y)^T : \ c \le y \le d, \ a \le x \le b\},$$

такой что $D \subset P$. Зададим функцию

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{при} \quad (x, y) \in D, \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) \in P \setminus D. \end{cases}$$

Тогда

$$\iint\limits_P f^*(x, y)\, dxdy = \iint\limits_D f^*(x, y)\, dxdy + \iint\limits_{P \setminus D} f^*(x, y)\, dxdy = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

Отсюда, применяя лемму, находим:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_P f^*(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y)\, dy =$$

$$= \int_a^b dx \left(\int_c^{y_1(x)} f^*(x, y)\, dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x, y)\, dy + \int_{y_2(x)}^d f^*(x, y)\, dy \right) =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Теорема доказана.

§ Криволинейные интегралы 1-ого рода

Пусть на плоскости Oxy задана кривая l, вдоль которой определена функция $f(x, y)$. Полагаем, что кривая l имеет конечную длину, и функция $f(x, y)$ ограничена на этой кривой.

Разобьем кривую l на n произвольных кусочков:

$$A = M_0 \smile M_1 \smile \ldots \smile M_n = B.$$

Здесь A — начало кривой, B — конец кривой, $M_0, \ldots, M_n$ — точки дробления, лежащие на кривой.

Обозначим через ΔS_i — длину дуги $M_i \smile M_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Величину $\omega = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta S_i$ назовем рангом дробления кривой.

Для каждого $i = 0, \ldots, n-1$, выберем произвольную точку $(\xi_i, \eta_i) \in M_i \smile M_{i+1}$.

Построим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

Определение. *Если существует конечный предел: $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$, причем он не зависит от способа дробления кривой l и от выбора точек (ξ_i, η_i), $i = 0, \ldots, n-1$, то он называется криволинейным интегралом 1-ого рода от функции $f(x, y)$ по кривой l. Обозначим его: $\int\limits_{(l)} f(x, y)\, dS$.*

Для криволинейного интеграла 1-ого рода можно расписать стандартные свойства интегралов и условия существования, по аналогии с тем, как мы это делали для одномерного и двойного Римановых интегралов.

В частности, отметим, что:

1) $\int\limits_{(l)} dS = L(l)$, где $L(l)$ — длина кривой l;

2) $\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,dS = \int\limits_{(BA)} f(x,y)\,dS$, т.е. криволинейный интеграл 1-ого рода не зависит от направления движения по кривой l (от ориентации кривой).

Пример физического приложения криволинейного интеграла 1-ого рода. Пусть l — плоская кривая, $\rho(x,y)$ — плотность кривой в точке (x,y). Тогда нетрудно заметить, что масса кривой может быть вычислена по формуле: $M(l) = \int\limits_{(l)} \rho(x,y)\,dS$.

Расссмотрим правила вычисления криволинейного интеграла 1-ого рода (сведения его к Риманову интегралу).

1) Предположим, что кривая l задана в явном виде:

$$y = y(x), \quad x \in [a,b],$$

причем функция $y(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ (кривая гладкая).

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Тем самым, получим дробление кривой l точками $M_i = (x_i, y(x_i))$, $i = 0,\ldots,n$.

Полагая $\xi_i = \tau_i$, $\eta_i = y(\tau_i)$, где $\tau_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\ldots,n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i, y(\tau_i))\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Здесь $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y(x_{i+1}) - y(x_i)$, $i = 0,\ldots,n$.

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\int\limits_{(l)} f(x,y)\,dS = (R)\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx,$$

где символ (R) служит лишь обозначением Риманова интеграла.

2) Предположим теперь, что кривая l задана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha,\beta],$$

причем функции $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$ (кривая гладкая).

Разобьем отрезок $[\alpha,\beta]$ на n произвольных частей:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

Тем самым, получим дробление кривой l точками $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $i = 0,\ldots,n$.

Полагая $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, где $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,\ldots,n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2}\,\Delta t_i.$$

Здесь $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$, $\Delta y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\int\limits_{(l)} f(x,y)\,dS = (R)\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t)^2}\,dt,$$

где снова символ (R) служит обозначением Риманова интеграла.

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_{(l)} (x^2+y^2)\,dS$, где l — полуокружность:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0.$$

1) Используем явное задание кривой: $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$. Тогда

$$\int\limits_{(l)} (x^2+y^2)\,dS = (R)\int_{-1}^{1} (x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2)\sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

2) Используем параметрическое задание кривой: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0,\pi]$. Тогда

$$\int\limits_{(l)} (x^2+y^2)\,dS = (R)\int_0^{\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,dt = \int_0^{\pi} dt = \pi$$

Замечание. Аналогично можно ввести понятие криволинейного интеграла 1-ого рода в трехмерном пространстве: $\int\limits_{(l)} f(x,y,z)\,dS$. Здесь l — кривая в R^3, $f(x,y,z)$ — функция, заданная вдоль кривой l. Если кривая l записана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$, то тогда

$$\int\limits_{(l)} f(x,y,z)\,dS = (R)\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t)^2 + (\chi'(t))^2}\,dt.$$