

# ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

## § Элементы теории поля (продолжение)

Пусть  $S$  — поверхность в  $R^3$  и в каждой точке этой поверхности задано векторное поле  $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T$ . Обозначим через  $\vec{n} = (\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu)^T$  — единичную нормаль к  $S$ .

Рассмотрим

$$(\vec{F}, \vec{n}) = |\vec{F}| |\vec{n}| \cos \alpha = |\vec{F}| \cos \alpha = F_n.$$

Здесь  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{n}$ ; величина  $F_n$  равна длине проекции вектора  $\vec{F}$  на нормаль  $\vec{n}$  (см. рисунок 1).

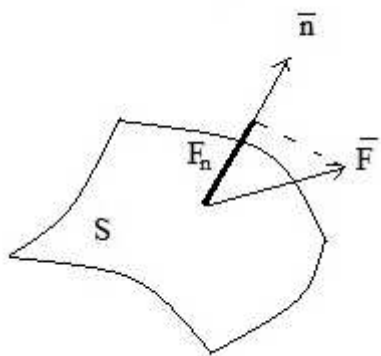


Рис. 1.

**Определение.** Поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} F_n(x, y, z) dS$  называется потоком векторного поля  $\vec{F}$  через поверхность  $S$ .

Получаем

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} F_n(x, y, z) dS &= \iint_{(S)} (\vec{F}, \vec{n}) dS = \\ &= \iint_{(S)} (P(x, y, z) \cos \lambda + Q(x, y, z) \cos \mu + R(x, y, z) \cos \nu) dS. \end{aligned}$$

Предположим, что поверхность  $S$  — замкнутая и ограничивает тело  $T$ . Тогда по формуле Остроградского — Гаусса имеем

$$\oiint_{(S)} F_n(x, y, z) dS = \iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

**Определение.** Величина

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется дивергенцией (расходимостью) векторного поля  $\vec{F}$ .

Дивергенция является скалярной характеристикой векторного поля. Можно доказать, что она не зависит от выбора системы координат. Физически дивергенция характеризует наличие в рассматриваемой области источников (и поглотителей) поля — массы (для гравитационного поля), электрических зарядов (для электромагнитного поля), и т.д.

Формулу Остроградского — Гаусса можно тогда переписать в следующем виде:

$$\oiint_{(S)} F_n(x, y, z) dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz.$$

Схематически можно записать:  $\operatorname{div} \vec{F} = (\vec{\nabla}, \vec{F})$ .

Пусть  $L$  — некоторая кривая в  $R^3$ .

**Определение.** *Криволинейный интеграл*

$$\int_{(L)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_{(L)} (\vec{F}, \vec{dr}),$$

где  $\vec{dr} = (dx, dy, dz)^T$ , называется *линейным интегралом векторного поля  $\vec{F}$  вдоль кривой  $L$* . Если при этом кривая  $L$  является замкнутой, то тогда величина

$$\oint_{(L)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

называется *циркуляцией векторного поля  $\vec{F}$  вдоль контура  $L$* .

Предположим, что контур  $L$  является границей поверхности  $S$ . Тогда по формуле Стокса имеем:

$$\begin{aligned} & \oint_{(L)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ &= \iint_{(S)} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

**Определение.** *Вектор*

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left( \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right)^T$$

называется *ротором (вихрем) векторного поля  $\vec{F}$* .

Ротор является векторной характеристикой векторного поля. Можно доказать, что он не зависит от выбора системы координат. Физически ротор характеризует наличие вращательной компоненты у поля (степень завихрения).

Формулу Стокса можно тогда переписать в следующем виде:

$$\oint_{(L)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \iint_{(S)} \operatorname{rot}_n \vec{F} dS.$$

Схематически можно записать:  $\operatorname{rot} \vec{F} = [\vec{\nabla} \times \vec{F}]$ .

Отметим некоторые свойства дивергенции и ротора:

- 1)  $\operatorname{div} \vec{C} = 0, \operatorname{rot} \vec{C} = \vec{0}$  ( $\vec{C}$  — постоянный вектор);
- 2)  $\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ ;
- 3)  $\operatorname{div} (\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{div} \vec{G}, \operatorname{rot} (\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{rot} \vec{G}$ ;
- 4)  $\operatorname{rot} (f \vec{F}) = f \operatorname{rot} \vec{F} + [\vec{\nabla} f \times \vec{F}]$  ( $f$  — скалярное поле);
- 5)  $\operatorname{div} [\vec{F} \times \vec{G}] = (\vec{G}, \operatorname{rot} \vec{F}) - (\vec{F}, \operatorname{rot} \vec{G})$ ;
- 6)  $\operatorname{rot} (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$  ( $f$  — скалярное поле); и т.д.

**Определение.** Векторное поле  $\vec{F} = (P, Q, R)^T$  называется потенциальным в области  $T \subset R^3$ , если существует скалярное поле  $\Phi$ , такое что в указанной области имеет место соотношение  $\vec{F} = \vec{\nabla} \Phi$ , т.е.

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Функция  $\Phi$  в этом случае называется потенциалом поля  $\vec{F}$ .

**Пример.** Пусть в точке  $O = (0, 0, 0)$  помещена масса  $m$ . Рассмотрим напряженность гравитационного поля, создаваемого этой массой в точке  $M = (x, y, z)$ , т.е. силу, с которой будет притягиваться к точке  $O$  тело массы 1, помещенное в точку  $M$ . Согласно закону Ньютона, имеем:

$$\vec{F} = -k \frac{m}{r^3} \vec{r}.$$

Здесь  $k$  — постоянная всемирного тяготения,  $\vec{r} = (x, y, z)^T$ ,  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Нетрудно проверить, что

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \left( \frac{km}{r} \right).$$

Значит, гравитационное поле — потенциальное (с потенциалом  $\Phi = km/r$ ).

**Теорема.** Пусть  $T$  — односвязная область в  $R^3$ , и компоненты векторной функции  $\vec{F}$  имеют непрерывные частные производные в этой области. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) поле  $\vec{F}$  — потенциально ( $\exists \Phi: \vec{\nabla} \Phi = \vec{F}$ );
- 2) поле  $\vec{F}$  — безвихревое ( $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ );
- 3) циркуляция поля  $\vec{F}$  по любому контуру  $L$  из  $T$  равна нулю ( $\oint_{(L)} (\vec{F}, d\vec{r}) = 0$ );

4) линейный интеграл поля  $\vec{F}$  по кривой, соединяющей две точки  $A, B \in T$ , не зависит от вида кривой, и при этом

$$\int_{(AB)} (\vec{F}, d\vec{r}) = \Phi(B) - \Phi(A).$$

**Определение.** Векторное поле  $\vec{F}$  называется соленоидальным (трубчатым) в области  $T \subset R^3$ , если существует векторное поле  $\vec{G}$ , такое что в указанной области имеет место соотношение  $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{G}$ . Вектор  $\vec{G}$  в этом случае называется векторным потенциалом поля  $\vec{F}$ .

**Теорема.** Пусть  $T$  — односвязная область в  $R^3$ , и компоненты векторной функции  $\vec{F}$  имеют непрерывные частные производные в этой области. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) поле  $\vec{F}$  — соленоидальное ( $\exists \vec{G}: \text{rot} \vec{G} = \vec{F}$ );
- 2) в области  $T$  отсутствуют источники поля  $\vec{F}$  ( $\text{div} \vec{F} = 0$ );
- 3) поток поля  $\vec{F}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  из области  $T$  равен нулю ( $\oint_{(S)} F_n dS = 0$ );
- 4) поток поля  $\vec{F}$  через любые два поперечных сечения  $S_1, S_2$  произвольной векторной трубки один и тот же

$$\iint_{(S_1)} F_n dS = \iint_{(S_2)} F_n dS.$$

**Теорема** (о каноническом разложении силовых полей). Пусть компоненты векторного поля  $\vec{F}$  имеют непрерывные частные производные в области  $T \subset R^3$ . Тогда  $\exists \vec{F}_1, \vec{F}_2: \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , и при этом:  $\text{rot} \vec{F}_1 = \vec{0}$ ,  $\text{div} \vec{F}_2 = 0$  (т.е. векторное поле можно разложить на потенциальную и соленоидальную составляющие).

Будем искать скалярный потенциал  $\Phi$  так, что  $\vec{F}_1 = \vec{\nabla} \Phi$ . Тогда

$$\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{\nabla} \Phi.$$

Требуется выполнение условия:

$$\text{div} \vec{F}_2 = \text{div} \vec{F} - \text{div} (\vec{\nabla} \Phi) = 0.$$

Заметим, что

$$\text{div} (\vec{\nabla} \Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta \Phi.$$

Здесь  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

В результате получаем уравнение для нахождения потенциала  $\Phi$ :

$$\Delta \Phi = \text{div} \vec{F}.$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных (уравнение Пуассона). В частном случае, если  $\text{div} \vec{F} = 0$ , получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0$$

(функция  $\Phi$  в этом случае называется гармонической).