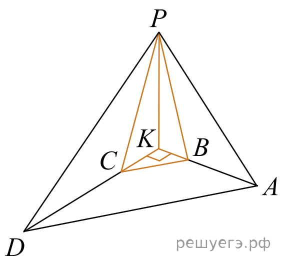
1. Тип 14 № 628390

В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90°, плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PDC.

б) Найдите объем $PKBC$, если $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 7.

Решение. а) Заметим, что PK — линия пересечения плоскостей PAB и PCD,



$$\angle AKD = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ACD) = 90^\circ.$$

Заметим, что KD — линия пересечения плоскостей ABC и PCD, и при этом прямые AK и KD перпендикулярны, следовательно, прямая AK перпендикулярна плоскости PCD и, в частности, прямая AK перпендикулярна прямой PK. Аналогично прямые DK и PK перпендикулярны. Таким образом, угол AKD — линейный угол двугранного угла между плоскостями PAB и PCD и, следовательно, плоскости перпендикулярны.

б) Из п. а) следует, что PK — высота пирамид $PABCD$ и $PKBC$, а в основании пирамиды $PKBC$ лежит прямоугольный треугольник KBC. Заметим, что треугольники KBC и KAD подобны. Пусть коэффициент подобия равен k, $BK = x$, $CK = y$, тогда

$$AK = x+3 = kx \Leftrightarrow x = \frac{3}{k-1},$$
$$DK = y+4 = ky \Leftrightarrow y = \frac{4}{k-1}.$$

Поскольку $x^2+y^2 = 5$, тогда

$$(x+3)^2+(y+3)^2 = k^2\cdot 5^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+bx+9+y^2+8y+16 = 25k^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot 25+\frac{2\cdot 9}{k-1}+\frac{2\cdot 16}{k-1} = 25k^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2+\frac{2}{k-1} = k^2 \Leftrightarrow k^3-k^2-2k = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

Отсюда $x = 3$, $y = 4$. Теперь найдём объём $PKBC$:

$$V_{PKBC} = \frac{1}{3}PK\cdot S_{KBC} = 14.$$

Ответ: б) 14.

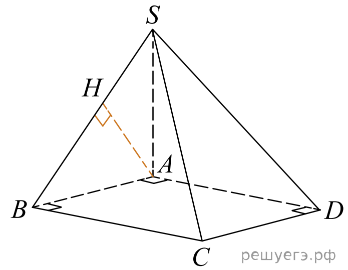
2. Тип 14 № 628273

Точка S лежит вне плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что $AB = 6\sqrt{21}$, $BC = 5$, $SA = 12$, $SB = 30$, $SD = 13$.

а) Докажите, что прямая SA перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости SCB.

Решение. а) Треугольник ABS является прямоугольным по теореме, обратной к теореме Пифагора, так как



$$SA^2+AB^2 = 12^2+(6\sqrt{21})^2 = SB^2.$$

Поэтому прямые SA и AB перпендикулярны. Аналогично треугольник SDA является прямоугольным, так как

$$SA^2+AD^2 = 12^2+5^2 = 13^2 = SD^2.$$

Поэтому прямые SA и SD перпендикулярны. Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая SA перпендикулярна плоскости ABC.

б) В треугольнике ABS опустим высоту AH и докажем, что прямая AH перпендикулярна плоскости SCB. Прямые BC и AB перпендикулярны, так как $ABCD$ — прямоугольник. Прямые BC и SA перпендикулярны, так как прямая SA перпендикулярна плоскости ABC. Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая BC перпендикулярна плоскости SAB. А, значит, прямая BC перпендикулярна и прямой AH, лежащей в плоскости ABS.

Таким образом, прямая AH перпендикулярна пересекающимся прямым SB и CB, значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая AH перпендикулярна плоскости SCB, следовательно, расстояние от точки A до плоскости SCB равно высоте AH треугольника ABS. Из прямоугольного треугольника ABS находим, что

$$AH = \frac{AS\cdot AB}{SB} = \frac{12\cdot 6\sqrt{21}}{30} = \frac{12\sqrt{21}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{21}}{5}$.

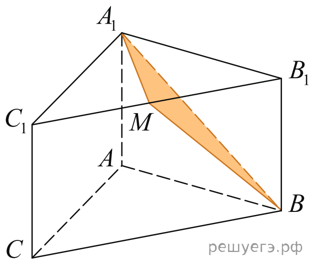
3. Тип 14 № 511324

Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 13$, $BC = 24$. Высота призмы равна 5.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, содержащей ребро AA_1 и перпендикулярной плоскости BCC_1, является квадратом.

б) Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

Решение. а) Пусть A_1M — высота и медиана равнобедренного треугольника $A_1B_1C_1$. Так как $B_1M=12$, $BB_1=5$, имеем: $BM=13$, $A_1M=\sqrt{A_1B_1^2-B_1M^2}=5$. Плоскость AA_1M содержит прямую $A_1M\perp BCC_1$, поэтому эта плоскость искомая. $A_1M=AA_1$, поэтому сечение — квадрат.

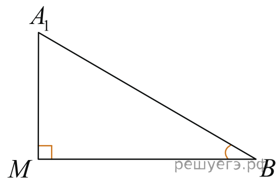


б) Поскольку призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то высота A_1M треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярна плоскости BCC_1. Поэтому прямая BM — проекция прямой A_1B на плоскость BCC_1. Значит, искомый угол равен углу A_1BM.

Так как $B_1M=12$, $BB_1=5$, имеем: $BM=13$, $A_1M=\sqrt{A_1B_1^2-B_1M^2}=5$.

Отсюда $\operatorname{tg}\angle A_1BM=\dfrac{A_1M}{BM}=\dfrac{5}{13}$. Следовательно, $\angle A_1BM=\operatorname{arctg}\dfrac{5}{13}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{13}$.



4. Тип 14 № 646482

Дан цилиндр с центрами нижнего и верхнего оснований O_1 и O_2 соответственно. Объём цилиндра, равен $\pi\sqrt{6}$. На окружности нижнего основания выбраны точки A и B, а на боковой поверхности выбрана, точка С, равноудалённая от оснований.

а) Докажите, что объём тетраэдра O_1ABC не превосходит $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

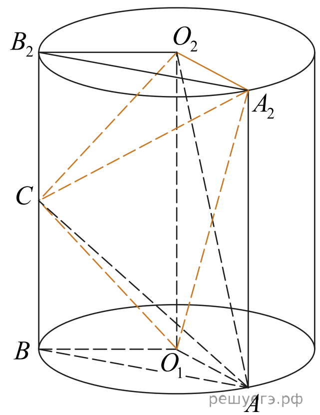
б) Найдите расстояние между прямыми AO_1 и CO_2, если отрезки BO_2 и CO_1 пересекаются, $\angle AO_1B=120^\circ$ и $\angle O_2CA=90^\circ$.

Решение. а) Пусть высота цилиндра равна H, а радиус основания R. Тогда его объем $V=\pi R^2H=\pi\sqrt{6}$, следовательно, $R^2H=\sqrt{6}$. Заметим, что, так как точка C равноудалена от оснований цилиндра, то высота тетраэдра O_1ABC равна $\dfrac{H}{2}$. При этом площадь основания

$$S_{AO_1B}=\frac{1}{2}R^2\sin\angle AO_1B\leqslant\frac{1}{2}R^2,$$

следовательно,

$$V_{O_1ABC}=\frac{1}{3}S_{AO_1B}\frac{H}{2}\leqslant\frac{1}{12}R^2H=\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$



б) Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от одной из них до плоскости проходящей параллельно ей через вторую прямую. Пусть точки A_2 и B_2 лежат на окружности верхнего основания так что AA_2 и BB_2 — образующие цилиндра. Тогда прямые AO_1 и A_2O_2 — параллельны, следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от прямой AO_1 до плоскости CA_2O_2. Например, H_{O_1} — длине высоты пирамиды $O_1CA_2O_2$ опущенной из вершины O_1 на плоскость CA_2O_2. Из треугольника AO_1B и прямоугольных треугольников ABC, BCO_1 и ACO_2 находим: $AB=A_2B_2=R\sqrt{3}$,

$$AC=A_2C=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3R^2+\frac{H^2}{4}},$$

$$O_1C=O_2C=\sqrt{O_1B^2+BC^2}=\sqrt{R^2+\frac{H^2}{4}},\qquad AO_2=\sqrt{AC^2+O_2C^2}=\sqrt{4R^2+\frac{H^2}{2}}.$$

С другой стороны, из прямоугольного треугольника AO_1O_2 получаем:

$$AO_2=\sqrt{AO^2+O_1O_2^2}=\sqrt{R^2+H^2}.$$

Таким образом,

$$4R^2+\frac{H^2}{2}=R^2+H^2\Leftrightarrow 3R^2=\frac{H^2}{2}\Leftrightarrow H=R\sqrt{6},$$

следовательно, учитывая п. а) $R^2H=R^2\sqrt{6}=\sqrt{6}$, то есть $R=1$, $H=\sqrt{6}$.

Вычислим объем пирамиды $O_1CA_2O_2$, считая треугольник $O_1O_2A_2$ основанием. Прямые BB_1 и O_1O_2 параллельны и перпендикулярны основанию, высота h_C, опущенная из вершины C, равна высоте треугольника AO_1B_1, опущенной из вершины B. Таким образом,

$$h_C=BO_1\sin(180^\circ-\angle AO_1B)=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad S_{O_1O_2A_2}=\frac{1}{2}HR=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$V_{O_1CA_2O_2} = \frac{1}{3}S_{O_1O_2A_2}h_C = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Подставляя значения R и H, получаем $O_2C = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$, $A_2C = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. При помощи формулы Герона вычислим площадь треугольника CA_2O_2: $S_{CA_2O_2} = \dfrac{3}{4}$. Тогда

$$H_{O_1} = \frac{3V_{O_1CA_2O2}}{S_{CA_2O_2}} = \sqrt{2}.$$

Ответ: б) $\sqrt{2}$.

5. Тип 14 № 643716

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K — середина ребра DD_1.

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC, если $\angle MKC = 90^\circ$ и $\angle ADC = 60^\circ$.

Решение.

а) Боковая грань CC_1B_1 призмы параллельна грани ADD_1A_1, поскольку составляющие их рёбра соответственно параллельны. Проведём через вершину C прямую, параллельную KM. Пусть эта прямая пересекает ребро BB_1 в точке N, а продолжение ребра B_1C_1 в точке E, а прямая EM пересекает ребро A_1B_1 в точке L (рис. 1).

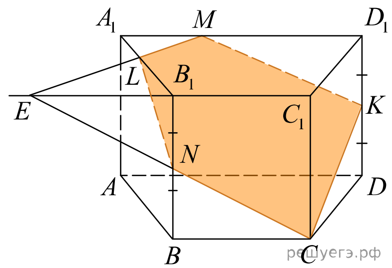


Рис. 1

Прямоугольные треугольники CBN и MD_1K равны, поскольку равны их катеты BC и MD_1, а также острые углы, ввиду параллельности соответствующих сторон. Следовательно,

$$BN = D_1K = \frac{1}{2}DD_1 = \frac{1}{2}BB_1,$$

а значит, точка N — середина ребра BB_1.

б) Пусть высота призмы равна $2x$. Тогда $B_1N = BN = DK = x$. В равнобедренной трапеции с основаниями 3 и 2 и углом 60° боковые стороны равны 1, то есть $A_1B_1 = CD = 1$. Прямоугольные треугольники EB_1N и CBN равны по катету и углу при вершине N. Значит,

$$EN^2 = NC^2 = BN^2 + BC^2 = x^2 + 4.$$

Из прямоугольных треугольников CDK и NCK имеем:

$$CK^2 = CD^2 + DK^2 = x^2 + 1;$$
$$NK^2 = NC^2 + CK^2 = x^2 + 4 + x^2 + 1 = 2x^2 + 5.$$

Для треугольника BCD имеем:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos 120^\circ = 7.$$

Поскольку $NK = BD$, получаем: $2x^2 + 5 = 7$, откуда $x = 1$. Следовательно, $CK = \sqrt{2}$, $EN = NC = MK = \sqrt{5}$.

Площадь прямоугольной трапеции $MKCE$ равна

$$\frac{1}{2} \cdot CK \cdot (MK + EC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

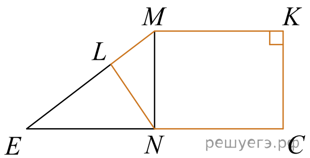


Рис. 2

Треугольники A_1ML и B_1EL подобны, значит,

$$EL : LM = EB_1 : MA_1 = 2 : 1,$$

а площади треугольников ELN и EMN относятся как 2:3 (рис. 2). Тогда площадь треугольника ELN равна

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Площадь сечения $MKCNL$ равна разности площадей трапеции $MKCE$ и треугольника ELN:

$$\frac{3\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{3}=\frac{7\sqrt{10}}{6}.$$

Ответ: б) $\frac{7\sqrt{10}}{6}$.

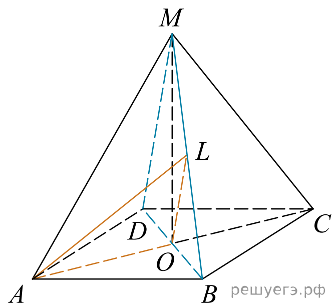
6. Тип 14 № 504241

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB.

а) Докажите, что плоскости ACL и MDB перпендикулярны.

б) Найдите высоту данной пирамиды.

Решение. а) Пусть точка O — точка пересечения AC и BD. Заметим, что $AC\perp BD$ как диагонали квадрата. Кроме того, $AC\perp OM$. Поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $AC\perp MDB$. Значит, по признаку перпендикулярности плоскостей, $ACL\perp MDB$.



б) Обозначим угол между DM и AL буквой α. MO — высота пирамиды $MABCD$. Тогда OL — средняя линия треугольника BDM, следовательно, $OL||MD$. Поэтому $\angle ALO=\alpha$. По условию $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}$.

Основание $ABCD$ — квадрат со стороной, равной $5\sqrt{2}$. Следовательно, $OA\perp OB$, $OL\perp OA$, $OA=5$. Далее, из прямоугольного треугольника AOL находим:

$$OL=\frac{OA}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Боковое ребро $MD=2OL=5\sqrt{2}$, поскольку OL — средняя линия треугольника BDM. Далее, из прямоугольного треугольника MOD находим искомую высоту MO пирамиды $MABCD$:

$$MO=\sqrt{MD^2-OD^2}=\sqrt{MD^2-OD^2}=5.$$

Ответ: 5.

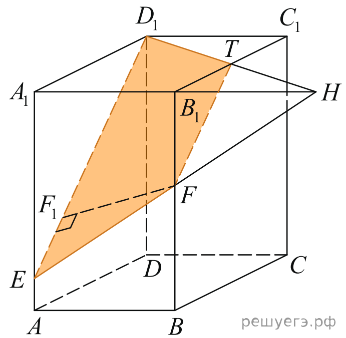
7. Тип 14 № 509627

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E=6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=4\sqrt{2}$, $AD=12$, $AA_1=14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Решение. а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны, как треугольники с параллельными сторонами, следовательно,



$$\frac{B_1F}{B_1T}=\frac{A_1E}{A_1D_1}=\frac{6A_1A}{7AD}=\frac{6\cdot14}{7\cdot12}=1.$$

Таким образом, $B_1F=B_1T=\frac{1}{2}B_1C_1=6$. Тогда $FB=14-6=8$ и $BF:FB_1=4:3$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны, то четырёхугольник ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H. Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H=EH$, откуда $D_1T=EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1=EA_1\sqrt{2}=12\sqrt{2},\quad FT=FB_1\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2},$$

$$EF=D_1T=\sqrt{D_1C_1^2+TC_1^2}=2\sqrt{17}.$$

Высота равнобедренной трапеции $FF_1=\sqrt{EF^2-EF_1^2}=\sqrt{(2\sqrt{17})^2-(3\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}.$

Тогда $S_{EFTD_1}=5\sqrt{2}\cdot\frac{12\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2}=90.$

Ответ: б) 90.

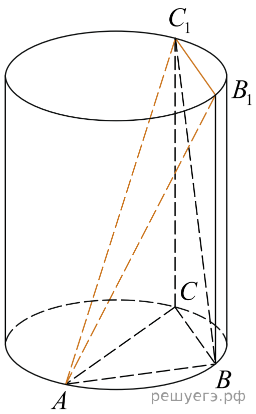
8. Тип 14 № 521005

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 4\sqrt{6}$.

а) Докажите, что угол между прямыми BC и AC_1 равен 60°.

б) Найдите расстояние от точки B до AC_1.

Решение. а) Пусть BB_1 — образующая цилиндра. Тогда BB_1C_1C — прямоугольник, поэтому угол между прямыми AC_1 и BC равен углу AC_1B_1.



Угол ABC опирается на диаметр основания цилиндра, поэтому он прямой. Значит, прямая B_1C_1, параллельная прямой BC, перпендикулярная прямым AB и BB_1. Таким образом, прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости ABB_1, а значит, угол AB_1C_1 прямой.

В прямоугольном треугольнике AB_1C_1:

$$B_1C_1 = BC = \sqrt{3}\cdot AB = \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 6,$$
$$AC = 2AB = 4\sqrt{3}.$$

Тогда $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = 12$. Таким образом, гипотенуза AC_1 прямоугольного треугольника AB_1C_1 вдвое больше катета. Следовательно, $\angle B_1AC_1 = 30^\circ$, а искомый $\angle AC_1B_1 = 60^\circ$.

б) Наклонная C_1B перпендикулярна прямой AB по теореме о трёх перпендикулярах. Тогда треугольник ABC_1 прямоугольный, а искомое расстояние равно длине высоты, проведенной из вершины прямого угла треугольника ABC_1 к гипотенузе AC_1. Она равна

$$\frac{AB\cdot BC_1}{AC_1} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{33}}{12} = \sqrt{11}.$$

Ответ: $\sqrt{11}$.

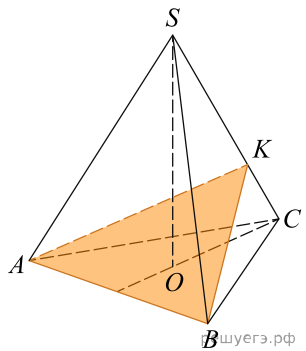
9. Тип 14 № 504416

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ провели сечение плоскостью, проходящей через сторону основания AB перпендикулярно ребру SC.

а) Докажите, что площадь этого сечения относится к площади основания так же, как высота пирамиды относится к её боковому ребру.

б) Найдите площадь сечения если боковое ребро $SA = 5$, а сторона основания $AB = 4$.

Решение. а) В треугольнике BCS проведём высоту BK, тогда искомое сечение — треугольник ABK. Пусть Q — площадь треугольника ABK. Сечение из условия разбивает пирамиду на тетраэдры $CAKB$ и $SAKB$. Их суммарный объём



$$\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SK + \frac{1}{3}\cdot Q\cdot CK = \frac{1}{3}\cdot Q\cdot SC$$

равен объёму пирамиды $SABC$. С другой стороны $V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABC}$. Тогда $Q\cdot SC = SO\cdot S_{ABC} \Leftrightarrow Q/S_{ABC} = SO/SC$.

б) Пусть SO — высота пирамиды. В треугольнике SCO имеем:

$$CO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{25 - \frac{16}{3}} = \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{3}}$$

Вычислим объём пирамиды $SABC$:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{59}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{16\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{59}}{3}$$

Приравнивая два найденных значения для объёма, получаем

$$Q = \frac{4\sqrt{59}}{5}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{59}}{5}$.

Примечание Дмитрия Гущина.

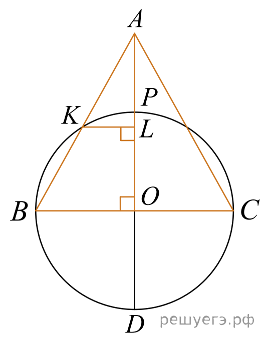
По сути, решение основано на вычислении объема двумя способами: $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$ и $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3}S_{\text{перп}}l$.

10. Тип 14 № 637854

Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 4 : 7.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 33 : 32, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 13.



Решение. а) Построим осевое сечение конуса, достроим полуокружность до окружности и введем обозначения, как показано на рисунке. Пусть радиус основания равен $4t$, тогда высота конуса равна $7t$. По теореме Пифагора в треугольнике ABO найдем $AB = t\sqrt{65}$. Далее воспользуемся свойством секущих: $AK \cdot AB = AP \cdot AD$, откуда

$$AK \cdot t\sqrt{65} = 3t \cdot 11t \Leftrightarrow AK = \frac{33\sqrt{65}}{65}t.$$

Тогда

$$AK : KB = \frac{33\sqrt{65}}{65} : \frac{65\sqrt{65} - 33\sqrt{65}}{65} = 33 : 32,$$

что и требовалось доказать.

б) Площадь сферического сегмента вычисляется по формуле $S = 2\pi rh$, где r — радиус сферы, h — высота сферического сегмента. Чтобы найти высоту, проведем перпендикуляр KL из точки K на отрезок AO. Прямоугольные треугольники ABO и AKL подобны по острому углу. Из пункта а) сразу следует, что коэффициент подобия этих треугольников равен 33/65. Тогда:

$$h = PL = AL - AP =$$
$$= \frac{33}{65}AO - \frac{3}{4}r = \frac{33}{65} \cdot \frac{7}{4}r - \frac{3}{4}r = \frac{9}{65}r,$$

По условию $r = 13$, откуда получаем:

$$S = 2\pi rh = 2\pi \cdot r \cdot \frac{9}{65}r = \frac{18}{65}\pi r^2 = 46,8\pi.$$

Ответ: б) $46,8\pi$.

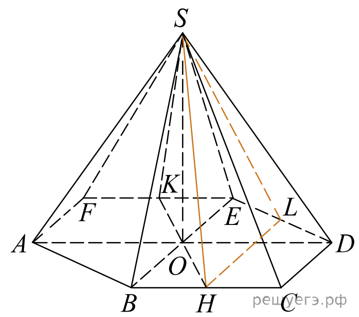
11. Тип 14 № 624081

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S в грани SBC проведена высота SH, а в грани SEF проведена высота SK.

а) Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости SHK.

б) Найдите угол между прямыми BE и SH, если $SA = 13$, а $BC = 10$.

Вариант № 86880703



Решение. а) Пусть O — центр основания пирамиды. Прямая SO перпендикулярна плоскости основания, поэтому она перпендикулярна прямой AD. Прямая HK также перпендикулярна прямой AD, по свойству правильного шестиугольника. Поэтому прямая AD перпендикулярна плоскости SHK, содержащей пересекающиеся прямые SO и HK.

б) Через точку H, которая является серединой BC, проведем прямую, параллельную BE. Эта прямая пересекает отрезок DE в точке L, которая является серединой этого отрезка. Угол между прямыми BE и SH равен углу SHL между прямыми HL и SH. По теореме Пифагора в треугольнике SBH находим $SH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Средняя линия HL трапеции $BEDC$ параллельна её основаниям и равна их полусумме: $HL = \frac{1}{2} \cdot (BE + CD) = 15$, а $SL = SH = 12$. В равнобедренном треугольнике SHL находим $\cos \angle SHL = \frac{HL}{2 \cdot SH} = \frac{5}{8}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{5}{8}$.

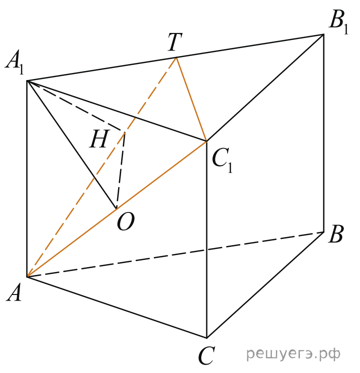
12. Тип 14 № 556615

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ACC_1.

Решение. а) Прямая C_1T перпендикулярна прямой A_1B_1, поскольку C_1T — медиана равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$. Прямые C_1T и A_1A перпендикулярны, так как прямая A_1A перпендикулярна плоскости $A_1B_1C_1$. Следовательно, прямая C_1T перпендикулярна плоскости AA_1B_1. Значит, прямая C_1T перпендикулярна прямой AT. Следовательно, треугольник ATC_1 прямоугольный.



б) В плоскости AC_1T проведём прямую через середину O отрезка AC_1 перпендикулярно этому отрезку. Эта прямая пересекает AT в некоторой точке H. Угол A_1OH — линейный угол искомого угла. Треугольники AOH и ATC_1 подобны. Следовательно,

$$OH = \frac{AO \cdot TC_1}{AT} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

Прямые A_1O и OH перпендикулярны прямой AC_1, значит, плоскость A_1OH перпендикулярна прямой AC_1, и прямая A_1H тоже перпендикулярна прямой AC_1. Прямая C_1T перпендикулярна плоскости ABB_1A_1, следовательно, прямая A_1H перпендикулярна прямой C_1T. Из этого следует, что прямая A_1H перпендикулярна плоскости AC_1T, а значит, и прямой OH. Тогда

$$\cos A_1OH = \frac{OH}{A_1O} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{3}{5}}$.

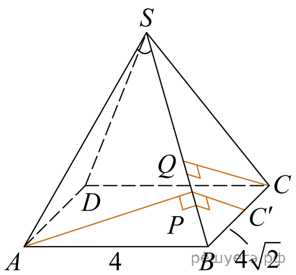
13. Тип 14 № 517558

Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $4\sqrt{2}$. Вершина пирамиды S проецируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ.

а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ.

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC, если ребро SD равно 8.

Решение. а) Пусть $AS = BS = CS = DS = x$: вершина S проектируется в точку пересечения диагоналей, поэтому боковые ребра равны между собой. По теореме косинусов в треугольнике ABS:



$$AB^2 = AS^2 + SB^2 - 2AS \cdot SB \cdot \cos ASB \Leftrightarrow \cos ASB = \frac{x^2-8}{x^2}.$$

В треугольнике ASP: $\cos ASB = \frac{x-PB}{x}$, тогда $\frac{x-PB}{x} = \frac{x^2-8}{x^2}$, откуда $PB = \frac{8}{x}$. Аналогично находим $QB = \frac{16}{x}$.Тогда:

$$\frac{PQ}{QB} = \frac{\frac{8}{x}}{\frac{16}{x}} = \frac{1}{2},$$

откуда $QP = PB$, что и требовалось доказать.

б) Из пункта а) следует, что

$$PB = \frac{8}{8} = 1, \qquad QB = \frac{16}{8} = 2.$$

Проведем PC' параллельно QC, C' принадлежит BC, тогда угол APC' — искомый. Поскольку PC' параллельно QC и P — середина QB, то PC' — средняя линия, тогда $PC' = \frac{1}{2}QC$, $CC' = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{2}$. В треугольнике CBQ: угол Q — прямой, $QC = \sqrt{CB^2 - QB^2} = \sqrt{28}$, тогда $PC' = \sqrt{7}$. В треугольнике APB: угол P — прямой, $AP = \sqrt{AB^2 - PB^2} = \sqrt{15}$. В треугольнике ABC': угол B — прямой, $AC' = \sqrt{AB^2 + BC'^2} = \sqrt{24}$.

По теореме косинусов в треугольнике APC':

$$AC'^2 = AP^2 + PC'^2 - 2AP \cdot PC' \cdot \cos APC' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos APC' = -\frac{1}{\sqrt{105}}.$$

Тогда угол между плоскостями SBA и SBC равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{105}}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{105}}$.

Приведем решение Дениса Чернышева (Тюмень).

а) Введем базисные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, как показано на рисунке. По правилам сложения векторов получаем: $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+x\cdot\overrightarrow{BS}$. Запишем условие перпендикулярности: $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BS}=0$, откуда ##

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BS}+x\cdot\overrightarrow{BS}^2=0.$$

Выразим нужные векторы через базис и подставим в условие перпендикулярности:

$$2\vec{b}\cdot(-\vec{b}+\vec{a}+\vec{c})+x\cdot(-\vec{b}+\vec{a}+\vec{c})^2=0.$$

Внесем множитель в скобки и раскроем квадрат суммы, учитывая, что косинус угла между векторами базиса равен нулю:

$$-2\vec{b}^2+2|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot 0+2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot 0+x\cdot(\vec{b}^2+\vec{a}^2+\vec{c}^2-2|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot 0-2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot 0+2|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot 0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2\vec{b}^2+x\cdot(\vec{b}^2+\vec{a}^2+\vec{c}^2)=0\Leftrightarrow x=\frac{2\vec{b}^2}{\vec{b}^2+\vec{a}^2+\vec{c}^2}.$$

Подставив длины векторов базиса, получаем $x=\dfrac{8}{12+\vec{c}^2}$.

Аналогично рассуждая, получаем: $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CB}+y\cdot\overrightarrow{BS}$ и $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{BS}=0$. Значит, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BS}+y\cdot\overrightarrow{BS}^2=0$. Применим выражения векторов через базис и упростим получившиеся уравнение так же, как это сделано выше. В результате получаем:

$$-2\vec{a}^2+y\cdot(\vec{b}^2+\vec{a}^2+\vec{c}^2)=0.$$

Отсюда

$$y=\frac{2\vec{a}^2}{\vec{b}^2+\vec{a}^2+\vec{c}^2}.$$

Подставив длины базисных векторов, получаем: $y=\dfrac{16}{12+\vec{c}^2}$. Сравнивая коэффициенты, находим, что $y=2x$. Следовательно, точка P делит пополам отрезок BQ, что и требовалось доказать.

б) Искомый угол между плоскостями есть угол прямыми AP и CQ, перпендикулярными линии пересечения этих плоскостей. Найдем вначале угол между векторами $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{CQ}$. По условию $BS = 8$. Применим теорему Пифагора к треугольнику BSO, получаем длину базисного вектора: $|\vec{c}|=\sqrt{52}$. Теперь воспользуемся выражениями векторов, которые из п. а), откуда получим: $x=\dfrac{1}{8}$ и $y=\dfrac{1}{4}$.

Подставив эти числа, находим:

$$\overrightarrow{AP}=2\vec{b}+\frac{1}{8}\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{8}\cdot\vec{a}+\frac{15}{8}\cdot\vec{b}+\frac{1}{8}\cdot\vec{c}.$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{CQ}=-2\vec{a}+\frac{1}{4}\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=-\frac{7}{4}\cdot\vec{a}-\frac{1}{4}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}\cdot\vec{c}.$$

Найдем косинус угла между векторами:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{CQ}})=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CQ}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{CQ}|}=$$
$$=\frac{-2}{\frac{1}{8}\cdot\sqrt{960}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{448}}=-\frac{1}{\sqrt{105}}.$$

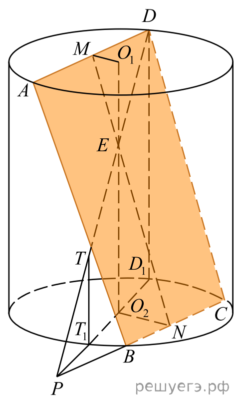
Косинус меньше нуля, то есть векторы образуют тупой угол. Следовательно, искомый угол между плоскостями есть смеждый с найденным угол, а потому он равен $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{105}}$.

14. Тип 14 № 674024

Плоскость α пересекает плоскости нижнего и верхнего оснований цилиндра по прямым BC и AD соответственно, причем $AD : BC = 5 : 4$, а ось цилиндра — в точке E и делит отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра, в отношении 2 : 1, считая от нижнего основания.

а) Прямая DE пересекает плоскость нижнего основания в точке P. Докажите, что боковая поверхность цилиндра делит отрезок DP в отношении 2 : 1.

б) Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью α, если радиус основания цилиндра равен $\sqrt{7}$, а высота цилиндра равна $\sqrt{6}$.



Решение. а) Пусть прямая DP пересекает поверхность цилиндра в точке T. Пусть также точка M — середина отрезка AD, точка N — середина BC, точки O_1 и O_2 — центры верхнего и нижнего оснований цилиндра соответственно. Пусть D_1 и T_1 — проекции точек D и T на нижнее основание.

Треугольники DO_1E и PO_2E подобны, причем

$$DO_1 : PO_2 = O_1E : O_2E = 1 : 2,$$

и тогда $PT_1=\dfrac{1}{2}T_1D_1$. Следовательно,

$$PT : TD = PT_1 : T_1D_1 = 1 : 2.$$

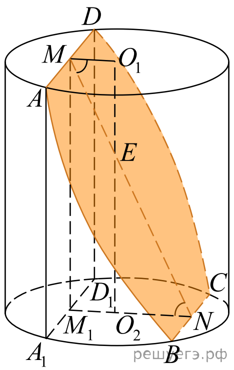
б) Найдем угол наклона плоскости α к плоскости основания цилиндра. Пусть он равен φ. Из условия $\dfrac{MO_1}{NO_2}=\dfrac{1}{2}$, $AM=5x$, $BN=4x$. Тогда:

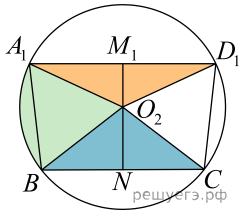
$$\frac{\sqrt{7-25x^2}}{\sqrt{7-16x^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 28-100x^2=7-16x^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 84x^2=21\Leftrightarrow 4x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Далее $NO_2=\sqrt{7-4}=\sqrt{3}$ и $O_2E=\frac{2}{3}O_2O_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{O_2E}{O_2N}=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

откуда $\cos\varphi=\frac{3\sqrt{17}}{17}$.





Площадь сечения равна площади ее проекции, деленной на $\cos\varphi$ и

$$S_{\text{проекции}}=S_{A_1O_2D_1}+S_{O_2BC}+2S_{\text{сектора } A_1O_2B}.$$

Далее $M_1O_2=MO_1=\frac{1}{2}NO_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$, значит, $M_1N=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. По теореме Пифагора:

$$A_1B^2=M_1N^2+\left(\frac{A_1D_1-BC}{2}\right)^2=\frac{27}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=7,$$

то есть $A_1B=A_1O_2=O_2B=\sqrt{7}$, а отсюда $\angle A_1O_2B=60^\circ$. Последовательно находим площади:

$$S_{\text{сектора } A_1O_2B}=\frac{360^\circ}{60^\circ}\cdot\pi\cdot(\sqrt{7})^2=\frac{7\pi}{6},\qquad S_{A_1O_2D_1}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4},$$

Вариант № 86880703

$$S_{O_2BC}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3},\qquad S_{\text{проекции}}=\frac{5\sqrt{3}}{4}+2\sqrt{3}+2\cdot\frac{7\pi}{6}=\frac{28\pi+39\sqrt{3}}{12}.$$

Окончательно получаем площадь сечения:

$$S_{\text{сеч}}=\frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}=\frac{\sqrt{17}(28\pi+39\sqrt{3})}{36}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{17}(28\pi+39\sqrt{3})}{36}$.

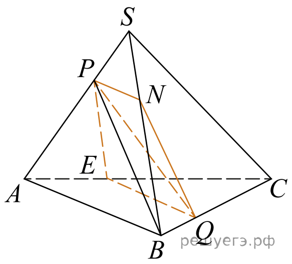
15. Тип 14 № 671347

В правильной пирамиде $SABC$ с вершиной S на стороне основания AC и боковом ребре SB отметили соответственно точки E и N такие, что $AE:EC=SN:NB=1:2$. Через точки E и N параллельно прямой AB провели плоскость α.

а) Докажите, что сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α является равнобедренная трапеция.

б) Плоскость α разделила пирамиду $SABC$ на два многогранника. Найдите объем того из них, в котором одной из вершин является точка A, если $AB=6$, $AS=3\sqrt{3}$.

Решение. а) Пусть плоскость α пересекает ребро AS в точке P, тогда отрезок PN параллелен ребру AB — в противном случае плоскость α и ребро AB имели бы общие точки. Пусть плоскость α пересекает ребро BC в точке Q, откуда аналогично получаем, что отрезок EQ параллелен ребру AB.



Треугольники SPN и CEQ — равнобедренные с углом $60°$ при вершине, то есть равносторонние, значит, $AE = BQ$ и $AP = BN$. Треугольники APE и BNQ равны по трем сторонам, $PE = NQ$. Учитывая, что $PN < AB$ и они параллельны, получаем, что $EPNQ$ — равнобокая трапеция.

б) Пусть h — высота пирамиды, проведенная из вершины S. Тогда по теореме Пифагора

$$h = \sqrt{AS^2 - \left(\frac{AB}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{27 - 12} = \sqrt{15}.$$

Значит, $h_1 = \frac{2}{3}h = \frac{2\sqrt{15}}{3}$, где h_1 — высота пирамиды $PAEBQ$, проведенная из вершины P. Найдем площадь основания $AEQB$:

$$S_{AEQB} = S_{ABC} - S_{EQC} = S_{ABC} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{5}{9}S_{ABC} = \frac{5}{9} \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}.$$

Вычислим объем пирамиды $PAEQB$:

$$V_{PAEQB} = \frac{1}{3} \cdot h_1 \cdot S_{AEQB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{15}}{3} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{5}}{3}.$$

Пусть h_2 — высота пирамиды $SABC$, проведенная из вершины C. Значит, $h_3 = \frac{1}{3}h_2$, где h_3 — высота пирамиды $QNBP$, проведенная из вершины Q. Найдем площадь основания PBN: $S_{PBN} = \frac{2}{3}S_{SPB} = \frac{2}{9}S_{ABS}$. Теперь можно вычислить объем $QNBP$:

$$V_{QNBP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}h_2 \cdot \frac{2}{9}S_{ABS} = \frac{2}{27}V_{SABC} =$$
$$= \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{15} \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Итак, $V_{APNQBE} = \frac{12\sqrt{5}}{3} = 4\sqrt{5}$.

Ответ: б) $4\sqrt{5}$.

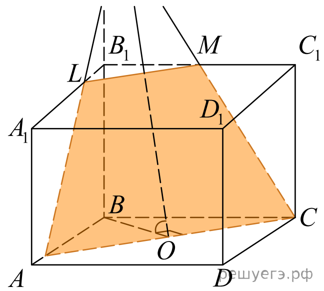
16. Тип 14 № 661795

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки K, L и M соответственно так, что $KLMC$ — равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 8.

а) Докажите, что точка M — середина ребра B_1C_1.

б) Найдите угол между плоскостями KLM и ABC, если площадь трапеции $KLMC$ равна $12\sqrt{2}$.

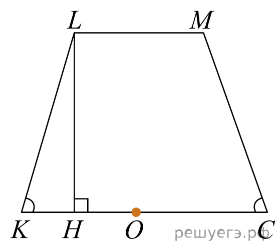
Решение. а) Плоскость $KLMC$ пересекает плоскости оснований по параллельным прямым, поэтому прямые LM и KC — основания трапеции. Пусть прямые KL и MC пересекаются в точке P. Отрезок KL лежит в плоскости грани AA_1BB_1, поэтому точка P может лежать только на прямой пересечения этих граней, то есть на прямой BB_1. Далее $LM = \frac{1}{2}KC$, значит, прямая LM — средняя линия треугольника KPC, то есть точка M — середина отрезка PC. Тогда равны треугольники PB_1M и CC_1M, а отрезки B_1M и MC_1 равны как соответствующие элементы.



б) Площадь трапеции равна $S_{KLMC} = \frac{LM + KC}{2} \cdot LH$, где отрезок LH — высота трапеции. Имеем:

$$12\sqrt{2} = \frac{4+8}{2} \cdot LH \Leftrightarrow LH = 2\sqrt{2}.$$

Треугольник PKC — равнобедренный, потому что $PK = 2LK = 2MC = KC$, значит, равны треугольники PBK и PBC, а тогда $BK = BC$ и, аналогично, $B_1L = B_1M = \frac{BC}{2}$. Пусть точка O — середина отрезка KC, тогда отрезок BO — медиана и высота прямоугольного равнобедренного треугольника BKC, откуда следует $BO = \frac{1}{2}KC = 4$. Угол POB равен углу между плоскостями KLM и ABC,



$$\cos\angle POB = \frac{BO}{PO} = \frac{BO}{2LH} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то есть искомый угол равен $45°$.

Ответ: б) $45°$.

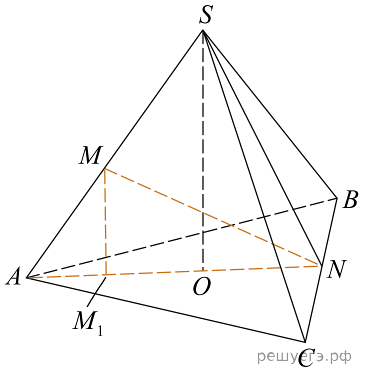
17. Тип 14 № 505534

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 20\sqrt{3}$, $SC = 29$.

а) Докажите, что $AS \perp BC$.

б) Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

Решение. а) Спроецируем вершину S на плоскость ABC. Получится точка O — центр правильного треугольника ABC. Значит, $AO \perp BC$, а тогда, по теореме о трех перпендикулярах $AS \perp BC$.



б) Пусть M и N — середины ребер AS и BC соответственно. AN — медиана правильного треугольника ABC, следовательно, находится по формуле $AN = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 30$. Прямая AS проецируется на плоскость основания и прямую AN. Поэтому проекция точки M — точка M_1 — лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой MN, следовательно, угол MNM_1 — искомый.
$MM_1 \parallel SO$, где O — центр основания, значит, MM_1 — средняя линия треугольника ASO поэтому $AM_1 = \frac{1}{2}AO$. Тогда $AM_1 = \frac{1}{3}AN = 10$ и $M_1N = \frac{2}{3}AN = 20$. Из прямоугольного треугольника AMM_1 находим:

$$MM_1 = \sqrt{AM^2 - AM_1^2} = \sqrt{\frac{841}{4} - 100} = \frac{21}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим:

$$\operatorname{tg}\angle MNM_1 = \frac{MM_1}{M_1N} = \frac{21}{40}.$$

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{21}{40}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{21}{40}$.

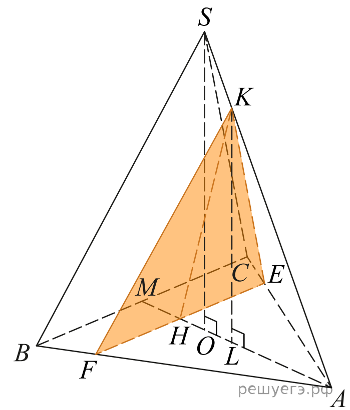
18. Тип 14 № 660691

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ стороны основания ABC равны 12, а боковые ребра — 25. На ребрах AB, AC и SA отмечены точки F, E и K соответственно. Известно, что $AE = AF = 10$, $AK = 15$.

а) Докажите, что объем пирамиды $KAEF$ составляет $\frac{5}{12}$ от объема пирамиды $SABC$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью KEF.

Решение. а) Пусть точка M — середина ребра BC, точка O — центр основания, L — проекция точки K на отрезке AO. Заметим, что треугольники AEF и ABC подобны. При этом коэффициент подобия $k = \frac{AF}{AB} = \frac{5}{6}$, следовательно,



$$S_{AEF} = k^2 S_{ABC} = \frac{25}{36}S_{ABC}.$$

Прямоугольные треугольники KLA и SOA тоже подобны, с коэффициентом подобия $k = \frac{AK}{AS} = \frac{3}{5}$, следовательно, $KL = \frac{3}{5}SO$. Тогда

$$V_{KAEF} = \frac{1}{3}S_{AEF} \cdot KL = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{36}S_{ABC} \cdot \frac{3}{5}SO = \frac{5}{12}V_{SABC}.$$

б) Треугольники AKE и AKF равны, поэтому сечением пирамиды будет являться равнобедренный треугольник KEF. Пусть H — точка пересечения EF и отрезок AM — середина EF. Тогда отрезок KH — высота треугольника KEF. Из п. а) следует, что

$$EF = \frac{5}{6}BC = 10, \quad AM = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 6\sqrt{3}, \quad AH = \frac{5}{6}AM = 5\sqrt{3},$$
$$AO = \frac{2}{3}AM = 4\sqrt{3}, \quad AL = \frac{3}{5}AO = \frac{12}{5}\sqrt{3}.$$

Откуда

$$LH = AH - AL = \frac{13}{5}\sqrt{3}, \quad SO = \sqrt{AS^2 - AH^2} = \sqrt{577}, \quad KL = \frac{3}{5}SO = \frac{3}{5}\sqrt{577},$$
$$KH = \sqrt{KL^2 + LH^2} = 2\sqrt{57}.$$

Таким образом, площадь треугольника KEF равна

$$S_{KEF} = \frac{1}{2}EF \cdot KH = 10\sqrt{57}.$$

Ответ: б) $10\sqrt{57}$.

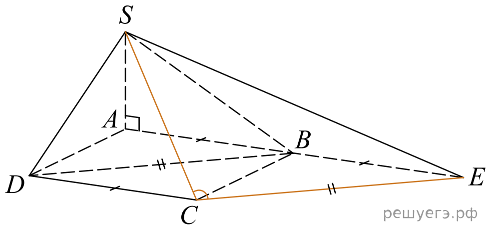
19. Тип 14 № 637847

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $BC = \sqrt{14}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 4\sqrt{3}$, $SB = 2\sqrt{21}$ и $SD = \sqrt{62}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

Решение. а) В треугольнике SAB имеем



$$SB^2 = 84 = 48 + 36 = SA^2 + AB^2,$$

поэтому треугольник SAB прямоугольный с гипотенузой SB и прямым углом SAB. Аналогично в треугольнике SAD из равенства

$$SD^2 = 62 = 48 + 14 = SA^2 + AD^2$$

получаем, что $\angle SAD = 90^\circ$. Прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD, поэтому прямая SA перпендикулярна плоскости ABD. Получили, что ребро SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) На прямой AB отметим такую точку E, что $BDCE$ — параллелограмм, тогда $BE = DC = AB$ и $DB = CE$. Угол SCE — искомый. В прямоугольных треугольниках ABD, SAC и SAE

$$AC = BD = CE = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5\sqrt{2};$$
$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 7\sqrt{2}, \qquad SE^2 = SA^2 + AE^2 = 192.$$

По теореме косинусов в треугольнике SCE

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cdot \cos\angle SCE,$$

следовательно,

$$192 = 98 + 50 - 140\cos\angle SCE \Leftrightarrow \cos\angle SCE = -\frac{11}{35}.$$

Искомый угол равен $\arccos\frac{11}{35}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{11}{35}$.

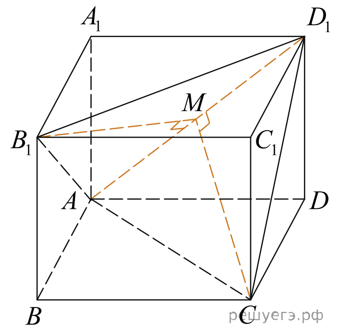
20. Тип 14 № 507496

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$

а) Докажите, что плоскости AB_1D_1 и A_1BC перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

Решение. а) В квадрате ABB_1A_1 диагонали перпендикулярны, поэтому $AB_1 \perp A_1B$. Кроме того, $AB_1 \perp BC$, так как BC перпендикулярна плоскости ABB_1. Отсюда получаем, что прямая AB_1 перпендикулярна плоскости A_1BC. А тогда, по признаку перпендикулярности плоскостей, получаем требуемое (ведь плоскость AB_1D_1 содержит прямую, перпендикулярную плоскости A_1BC).



б) Пусть точка M — середина отрезка AD_1 Примем длины ребер куба за a. Из прямоугольного треугольника ABB_1 по теореме Пифагора найдём AB_1 :

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = a\sqrt{2}.$$

Аналогично, $B_1D_1 = CD_1 = AD_1 = AC = B_1C = a\sqrt{2}$. Опустим перпендикуляры B_1H и CK на сторону AD_1 треугольники AB_1D_1 и ACD_1 равносторонние, поэтому перпендикуляры B_1H и CK также являются биссектрисами и медианами, поэтому точки H, K и M совпадают. Угол B_1MC — искомый. Из прямоугольного треугольника AB_1M :

$$B_1M = \sqrt{AB_1^2 - AM^2} =$$
$$= \sqrt{AB_1^2 - \left(\frac{AD_1}{2}\right)^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

По теореме косинусов из треугольника B_1MC :

$$\cos\angle B_1MC = \frac{B_1M^2 + MC^2 - B_1C^2}{2B_1M \cdot MC} = \frac{\frac{3a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} - 2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, угол между плоскостями равен $\arccos\frac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Примечание.

Укажем другой путь нахождения угла B_1MC. В прямоугольнике CDA_1B_1 проведём через точку M — середину боковой стороны DA_1 — отрезок MK, параллельный стороне CD (см. рис.). Тогда:

$$\widehat{B_1MC} = 2\widehat{KMC} = 2\widehat{MCD} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{MD}{DC} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

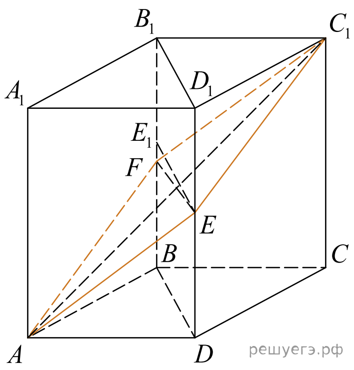
21. Тип 14 № 564703

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 и пересекающая ребра BB_1 и DD_1 в точках F и E соответственно.

а) Докажите, что сечение AFC_1E — параллелограмм.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что AFC_1E — ромб и $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 5$.

Решение. а) При пересечении двух параллельных плоскостей третьей линии пересечения представляют из себя параллельные прямые, следовательно, прямые AF и EC_1 параллельны, прямые AE и FC_1. Таким образом, AFC_1E — параллелограмм.



б) Пусть $DE = x$, тогда, поскольку AFC_1E — ромб,

$$AE^2 = EC_1^2 \Leftrightarrow AD^2 + ED^2 = ED_1^2 + C_1D_1^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^2 + x^2 = 3^2 + (5-x)^2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Таким образом, $DE = B_1F = 3$, $BF = ED_1 = 2$. Проведём прямую EE_1 параллельно прямой BD, $B_1E = ED_1 = 2$, $FE_1 = 1$. Тогда

$$EE_1 = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{13},$$
$$FE = \sqrt{EE_1^2 + FE_1^2} = \sqrt{14},$$
$$AC_1 = \sqrt{AD^2 + CD^2 + CC_1^2} = \sqrt{38},$$
$$S_{AFC_1E} = \frac{1}{2}AC_1 \cdot FE = \frac{1}{2}\sqrt{38} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{133}.$$

Ответ: б) $\sqrt{133}$.

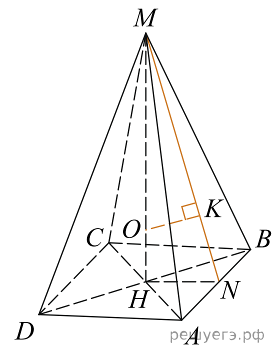
22. Тип 14 № 503361

В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 17, а высота равна 7, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

а) Докажите, что двугранный угол при основании пирамиды больше, чем $30°$.

б) Найдите площадь вписанной сферы.

Решение. а) Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M, тогда треугольник AMH — прямоугольный, $MA = 17$, $MH = 7$, откуда



$$AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 4\sqrt{15}.$$

Треугольник ABH — прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB = AH\sqrt{2} = 4\sqrt{30}$. В треугольнике AMB высота

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 13.$$

Заметим, что угол MNH -- линейный угол искомого двугранного угла. Его синус равен $\dfrac{MH}{MN} = \dfrac{7}{13} > \dfrac{1}{2}$. Поэтому $\angle MNH > 30°$.

б) В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота $HN = \dfrac{AB}{2} = 2\sqrt{30}$.

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO : OK = MN : HN \Leftrightarrow \frac{7-r}{r} = \frac{13}{2\sqrt{30}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (7-r) \cdot 2\sqrt{30} = 13 \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{26\sqrt{30} - 120}{7},$$

где r — радиус сферы.

Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = \dfrac{480(289 - 52\sqrt{30})\pi}{49}$.

Ответ: $\dfrac{480(289 - 52\sqrt{30})\pi}{49}$.

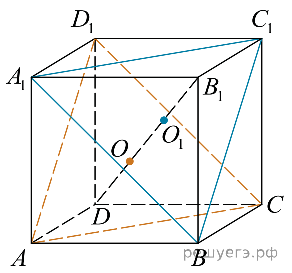
23. Тип 14 № 520822

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен $60°$.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.

Решение. а) Прямые BC_1 и AD_1 параллельны, поэтому угол между прямыми AC и BC_1 равен углу CAD_1. Треугольник CAD_1 равносторонний, поэтому все его углы равны 60°.



б) Заметим, что прямые AC и BC_1 содержатся в параллельных плоскостях ACD_1 и BC_1A_1. Значит, искомое расстояние равно расстоянию между этими плоскостями.

Обозначим центры треугольников ACD_1 и BC_1A_1 через точки O и O_1 соответственно. Точка D равноудалена от вершин треугольника ACD_1, поэтому проекция точки D на плоскость ACD_1 совпадает с O. Аналогично проекция точки D на плоскость BC_1A_1 совпадает с O_1, а проекции точки B_1 на плоскости ACD_1 и BC_1A_1 также совпадают с точками O и O_1 соответственно. Значит, прямая DB_1 перпендикулярна плоскостям ACD_1 и BC_1A_1 и содержит точки O и O_1.

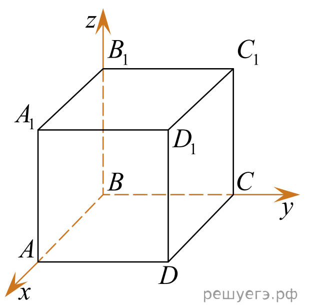
Объем тетраэдра $DACD_1$ равен 36, а площадь его основания $S_{ACD_1} = AC^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$. Значит, высота $DO = 2\sqrt{3}$. Аналогично $B_1O_1 = 2\sqrt{3}$. Кроме того, $DB_1 = AB\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. Значит, $OO_1 = DB_1 - B_1O_1 - DO = 2\sqrt{3}$.

Ответ: б) $2\sqrt{3}$.

Приведем решение Александра Турбанова (Липецк).

а) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B, как показано на рисунке. В этой системе координат:

$$B(0;0;0),\quad A(6;0;0),\quad C(0;6;0),$$
$$C_1(0;6;6),\quad \overrightarrow{AC}(-6;6;0),\quad \overrightarrow{BC_1}(0;6;6).$$



Пусть φ — угол между прямыми AC и BC_1. Имеем:

$$\cos\varphi = \frac{|-6\cdot 0 + 6\cdot 6 + 0\cdot 6|}{\sqrt{0+36+36}\sqrt{0+36+36}} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2},$$

откуда φ = 60°.

б) Рассмотрим плоскость α, проходящую через AC и параллельную BC_1. Вектор $\overrightarrow{BC_1}$ параллелен плоскости α, а значит, перпендикулярен нормали к ней. Пусть вектор нормали имеет координаты $\vec{n} = (A, B, C)$, тогда $\overrightarrow{BC_1}\cdot\vec{n} = 6B + 6C = 0$, откуда $C = -B$. Подставим координаты точек A и C в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, получим:

$$\begin{cases} 6A + D = 0, \\ 6B + D = 0, \\ C = -B. \end{cases}$$

Вариант № 86880703

Тогда: $A = -\dfrac{D}{6},\ B = -\dfrac{D}{6},\ C = \dfrac{D}{6}$. Плоскость α не проходит через начало координат, а потому коэффициент D можно положить любым, отличным от нуля. Пусть $D = -6$, тогда уравнение плоскости имеет вид $x + y - z - 6 = 0$. Расстояние между прямыми AC и BC_1 равно

$$\rho(AC; BC_1) = \rho(B;\alpha) = \frac{|0+0+0-6|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

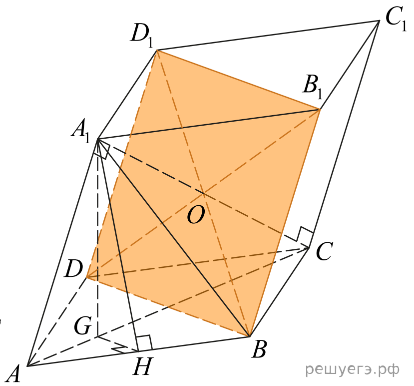
24. Тип 14 № [656543]

Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы со стороной, равной 2. Плоские углы при вершине A равны 60° каждый. Через середину диагонали A_1C проведена плоскость α, перпендикулярная этой диагонали.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α — квадрат.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α.

Решение. а) Заметим, что каждая грань призмы составлена из двух равносторонних треугольников. Из вершины A_1 опустим перпендикуляр A_1H на ребро AB. В силу симметрии G — проекция A_1 на грань $ABCD$ будет лежать на ее диагонали AC. Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, GH перпендикулярна AB. Заметим, что $AG = 2GH$, как гипотенуза и катет прямоугольного треугольника с углом 30°, тогда $AH = \frac{1}{2}AB = 1$, откуда



$$AH^2 + GH^2 = AG^2 \Leftrightarrow 1 + GH^2 = 4GH^2 \Leftrightarrow GH = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$AG = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \qquad AC = AB\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$CG = AC - AG = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$A_1G^2 = AA_1^2 - AG^2 = \frac{8}{3},$$

$$A_1C = \sqrt{CG^2 + A_1G^2} = 2\sqrt{2}.$$

Заметим, что

$$AA_1^2 + A_1C^2 = 4 + 8 = 12 = AC^2,$$

следовательно, треугольник ACA_1 — прямоугольный, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны диагонали призмы A_1C. Кроме того, по теореме о трех перпендикулярах, прямая A_1C перпендикулярна диагоналям оснований призмы BD и B_1D_1.

Таким образом, плоскость BDD_1B_1 перпендикулярна диагонали A_1C. В силу симметрии призмы эта плоскость проходит через середину указанной диагонали, то есть совпадает с плоскостью α, и, следовательно, четырехугольник BDD_1B_1 является искомым сечением. Заметим, что указанная фигура — ромб с равными (в силу симметрии) диагоналями, а следовательно, квадрат.

б) Из п. а) следует, что прямая AA_1 параллельна плоскости α, то есть расстояния до нее от точек A и A_1 равны, а расстояние до нее от точки A_1 равно половине диагонали A_1C, то есть $\sqrt{2}$.

Ответ: б) $\sqrt{2}$.

25. Тип 14 № 510966

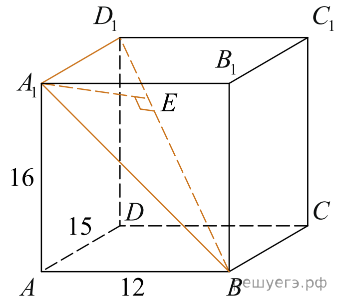
Длины ребер AB, AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15.

а) Докажите, что объем пирамиды A_1BDC_1 втрое меньше объема параллелепипеда.

б) Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1.

Решение. а) Заметим, что

$$V_{A_1ADB} = \frac{1}{3} \cdot A_1A \cdot S_{ADB} = \frac{1}{6} \cdot 16 \cdot 15 \cdot 12 = \frac{1}{6}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}.$$



Полностью аналогично

$$V_{C_1CBD} = V_{BA_1B_1C_1} = V_{DA_1D_1C_1} = \frac{1}{6}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}.$$

Тогда

$$V_{A_1BDC_1} = \left(1 - 4 \cdot \frac{1}{6}\right)V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1},$$

что и требовалось доказать.

б) Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1E на прямую BD_1. Так как ребро A_1D_1 перпендикулярно плоскости (A_1AB), то ребро A_1D_1 перпендикулярно отрезку A_1B, а, значит, отрезок A_1E — высота прямоугольного треугольника A_1BD_1, откуда

$$A_1E = \frac{A_1B \cdot A_1D_1}{BD_1}.$$

Далее находим:

$$A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = 20, \qquad BD_1 = \sqrt{A_1A^2 + AB^2 + A_1D_1^2} = 25,$$

следовательно, $A_1E = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$

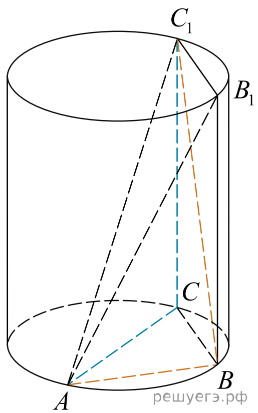
Ответ: б) 12.

26. Тип 14 № 520879

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1, если $AB = 21$, $BB_1 = 12$, $B_1C_1 = 16$.



Решение. а) Рассмотрим плоскость, проходящую через ось цилиндра и прямую AC_1. Обозначим точку пересечения этой плоскости и окружности основания цилиндра, содержащую точку A, через точку C. Тогда CC_1 — образующая цилиндра. Отрезок AC пересекает ось цилиндра. Значит, он проходит через центр окружности основания цилиндра, то есть является ее диаметром. Следовательно, угол ABC прямой.

Прямая CC_1 является образующей цилиндра, поэтому она перпендикулярна прямой AB. Таким образом, прямая AB перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости BCC_1 (BC и CC_1), а значит, прямая AB перпендикулярна плоскости BCC_1 и любой прямой, лежащей в этой плоскости. Значит, угол ABC_1 прямой.

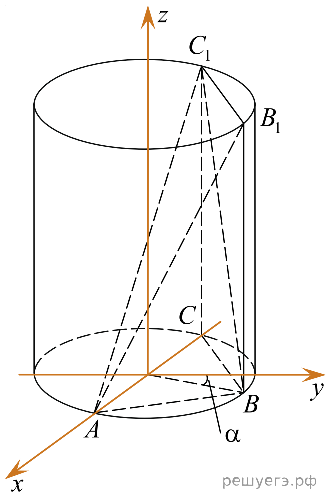
б) Треугольник ABC_1 прямоугольный, поэтому искомое расстояние равно его высоте h, проведённой к гипотенузе. Получаем:

$$BC_1=\sqrt{BB_1^2+B_1C_1^2}=20;\ AC_1=$$
$$=\sqrt{AB^2+BC_1^2}=29;\ h=\frac{AB\cdot BC_1}{AC_1}=\frac{420}{29}.$$

Ответ: б) $\frac{420}{29}$.

Приведем другое решение пункта а).

Введем систему координат, как показано на рисунке. Пусть $BB_1=h$, а радиус основания равен r. Найдем координаты точек A, B и C_1:



$$A\ (r;\ 0;\ 0),\qquad B\ (r\sin\alpha;\ r\cos\alpha;\ 0),$$
$$C_1\ (-r;\ 0;\ h).$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC_1}$:

$$\overrightarrow{AB}=(r\sin\alpha-r;\ r\cos\alpha;\ 0),$$
$$\overrightarrow{BC_1}=(-r\sin\alpha+r;\ -r\cos\alpha;\ h).$$

Тогда скалярное произведение равно:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC_1}=$$
$$=r(\sin\alpha-1)\cdot(-r)(\sin\alpha+1)+r\cos\alpha\cdot(-r)\cos\alpha+0\cdot h=$$
$$=r^2(1-\sin^2\alpha)-r^2\cos^2\alpha=r^2\cos^2\alpha-r^2\cos^2\alpha=0$$

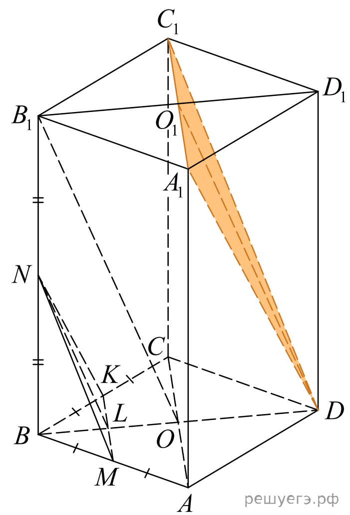
Значит, угол ABC_1 прямой.

27. Тип 14 № 640280

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB=BC=6$ и $AA_1=12$, точки M и K — середины AB и BC соответственно. Точка N лежит на ребре BB_1, причем $BN=6$. Через точку D провели плоскость α параллельно плоскости KMN.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точки A_1 и C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α.



Решение. а) Пусть точки O и O_1 — центры нижнего и верхнего оснований призмы соответственно, а L — точка пересечения прямых BD и KM. Заметим, что отрезок KM — средняя линия треугольника ABC, следовательно, прямые KM, AC и A_1C_1 параллельны между собой.

Кроме того, точка L — середина отрезка BO, поэтому отрезок NL — средняя линия треугольника BOB_1. Значит, прямая NL параллельна прямой OB_1. Покажем, что прямая OB_1 также параллельна прямой DO_1. Действительно, четырехугольник ODO_1B_1 — параллелограмм, так как стороны его противоположные стороны OD и O_1B_1 параллельны и равны. Итак, прямые NL, OB_1 и DO_1 параллельны между собой.

Таким образом, плоскости KMN и DA_1C_1 содержат две пары пересекающихся параллельных прямых и, следовательно, параллельны. Заметим, что, таким образом, плоскости α и DA_1C_1 — параллельны и обе эти плоскости проходят через точку D. Поэтому плоскость DA_1C_1 совпадает с плоскостью α.

б) Из п. а) следует, что сечением является треугольник DA_1C_1. По теореме о трех перпендикулярах отрезки DO_1 и A_1C_1 перпендикулярны, поскольку отрезок D_1O_1 перпендикулярен диагонали A_1C_1. Отсюда находим:

$$A_1C_1=AC=BD=B_1D_1=AB\sqrt{2}=6\sqrt{2},$$

значит,

$$O_1D_1=\frac{1}{2}B_1D_1=3\sqrt{2}.\qquad DO_1=\sqrt{DD_1^2+D_1O_1^2}=9\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь сечения призмы плоскостью α равна:

$$S_{DA_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot DO_1 = 54.$$

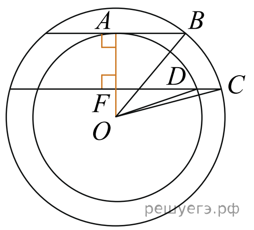
Ответ: б) 54.

28. Тип 14 № [504945](504945)

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5.

а) Докажите, что сечение шара плоскостью есть круг.

б) Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.



Решение. а) Пусть α — секущая плоскость и O — центр шара. Опустим перпендикуляр из центра шара на плоскость α и обозначим через F основание этого перпендикуляра.

Пусть X — произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α. По теореме Пифагора $OX^2 = OF^2 + FX^2$. Так как OX не больше радиуса R шара, то $FX \leqslant \sqrt{R^2 - OF^2}$, т. е. любая точка сечения шара плоскостью α находится от точки F на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2 - OF^2}$, следовательно, она принадлежит шару. Это значит, что сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке F.

Обратно: любая точка X этого круга принадлежит шару. А это значит, что сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке F. Теорема доказана.

б) Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов. Введём обозначения центра шаров, точек касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β, как показано на рисунке.

Отрезок FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α, тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 7$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью α. Отрезок AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β, тогда $S_{beta} = \pi \cdot AB^2 = 5$ — площадь сечения большего шара плоскостью β. Отрезок CF — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α.

Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF. Тогда из прямоугольных треугольников получаем:

$$OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2,$$

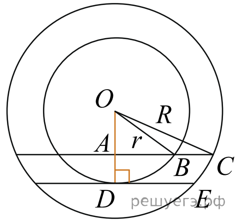
откуда

$$CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 =$$
$$= OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2.$$

Площадь сечения большего шара плоскостью α:

$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 12.$$

Исследуем случай, когда плоскости расположены по одну сторону от центра шара. Рассуждая аналогично, получаем:



$$DE^2 = \frac{5}{\pi}; \qquad AB^2 = \frac{7}{\pi};$$
$$S = \pi(R^2 - OA^2).$$

А тогда

$$\left.\begin{array}{l} S = \pi(R^2 - OA^2), \\ R^2 = r^2 + DE^2, \\ OA^2 = r^2 - AB^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \pi(r^2 + DE^2 - r^2 + AB^2) = \pi\left(\frac{5}{\pi} + \frac{7}{\pi}\right) = 12.$$

Ответ: 12.

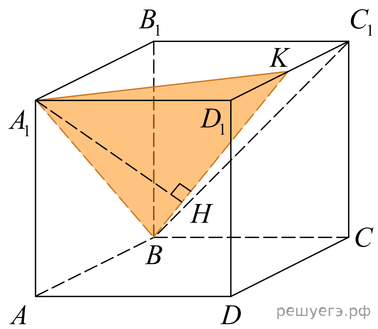
29. Тип 14 № [555619](555619)

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра C_1D_1.

а) Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.

б) Найдите угол между плоскостями KBA_1 и ADD_1.

Решение. а) Пусть $AB = a$, тогда $A_1B = a\sqrt{2}$, $A_1K = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ и $BK = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}$.



В треугольнике A_1BK по теореме косинусов

$$\cos\angle A_1BK = \frac{A_1B^2 + BK^2 - A_1K^2}{2\cdot A_1B\cdot BK} = $$

$$= \frac{2a^2 + \frac{9}{4}a^2 - \frac{5}{4}a^2}{2\cdot\frac{3}{2}a\cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Опустим перпендикуляр A_1H из вершины A_1 на прямую BK. Отрезок A_1H — высота треугольника A_1BK.
Тогда

$$A_1H = A_1B\cdot\sin\angle A_1BK = a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = a.$$

Следовательно, расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.

б) Найдём площадь треугольника A_1BK.

$$S_{\Delta A_1BK} = \frac{1}{2}A_1H\cdot BK = \frac{1}{2}a\cdot\frac{3}{2}a = \frac{3}{4}a^2.$$

Проекцией этого треугольника на плоскость ADD_1 является треугольник AA_1D_1.

Площадь этого треугольника $S_{\Delta AA_1D_1} = \frac{1}{2}a^2$. Отношение площадей треугольников AA_1D_1 и A_1BK. является косинусом угла α между плоскостями KBA_1 и ADD_1.Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{S_{\Delta AA_1D_1}}{S_{\Delta A_1BK}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{2}{3}.$$

Тогда искомый угол $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{2}{3}$.

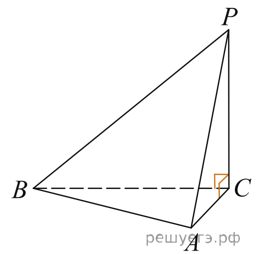
30. Тип 14 № 517738

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos\angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды $PABC$.

Решение. а) Прямая BC перпендикулярна плоскости APC, поскольку она перпендикулярна прямым PA и PC. Значит, прямые AC и BC перпендикулярны.



б) По теореме косинусов $PA = \sqrt{PB^2 + BA^2 - 2PB\cdot BA\cdot\cos\angle PBA} = \sqrt{106}.$

По теореме Пифагора:

$$AC^2 + BC^2 = 169,\ AC^2 + PC^2 = 106,\ BC^2 + PC^2 = 225,\ PC^2 = 81,$$
$$BC^2 = 144,\ AC^2 = 25;\ PC = 9,\ BC = 12,\ AC = 5.$$

Значит, объем пирамиды равен $\frac{1}{3}PC\cdot\frac{AC\cdot BC}{2} = 90.$

Ответ: б) 90.

31. Тип 14 № 635750

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM : MD_1 = 3:2$. Плоскость α параллельна прямой A_1F_1 и проходит через точки M и E.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка F, а основанием сечение призмы $ABCDEFAB_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α.

Решение. а) Возьмем на ребре CC_1 точку N так, чтобы прямые MN и CD были параллельны. Тогда прямая MN параллельна стороне A_1F_1. Прямые BE и AF параллельны, а значит, отрезки MN и BE параллельны. Таким образом, четырехугольник $BNME$ — трапеция, так как $BE > MN$. Поскольку

$$EM = BN = \sqrt{4^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{43},$$

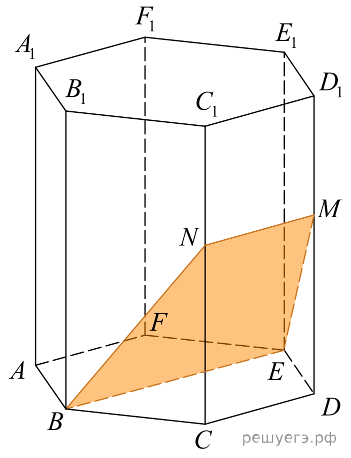
трапеция $BNME$ равнобедренная.

б) Рассмотрим проекцию призмы на плоскость, перпендикулярную прямой AF, (см. нижний рис.). Расстояние от точки F до плоскости α равно расстоянию от точки C до плоскости α. Найдем это расстояние, учитывая, что

$$AC^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 48,$$

откуда $AC = 4\sqrt{3}$. Тогда высота будет равна

$$h = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{12+27}} = \frac{18}{\sqrt{39}}.$$



Площадь трапеции $BNME$ можно найти по формуле $S_{BMNE} = \dfrac{MN + BE}{2} \cdot x$, где x — высота трапеции. Зная, что $BE = 2CD = 8$, получаем:

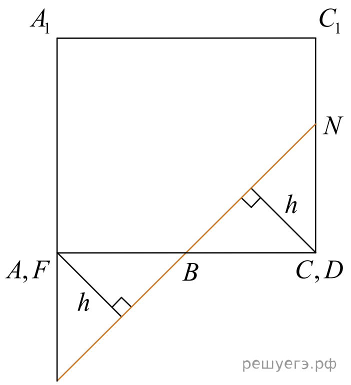
$$x = \sqrt{43 - \left(\frac{8-4}{2}\right)^2} = \sqrt{39}.$$

Отсюда находим площадь трапеции $BNME$:

$$S_{BMNE} = \frac{8+4}{2} \cdot \sqrt{39} = 6\sqrt{39}.$$

Тогда

$$V_{FBNME} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{BMNE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{\sqrt{39}} \cdot 6\sqrt{39} = 36.$$



Ответ: б) 36.

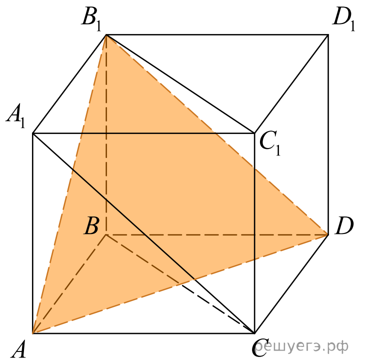
32. Тип 14 № 507788

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AB_1 и параллельная прямой CA_1 проходит через середину ребра BC.

б) Найти угол между прямыми CA_1 и AB_1.

Решение. Достроим треугольную прямую призму до четырехугольной прямой призмы, в основании которой ромб $ABDC$, составленный из двух равносторонних треугольников.



Полученная призма является прямым параллелепипедом. Поэтому $B_1D \parallel A_1C$.

а) Плоскость AB_1D параллельна прямой A_1C по признаку параллельности. Диагонали ромба $ABDC$ пересекают друг друга посередине, поэтому плоскость AB_1D проходит через середину ребра BC.

б) $B_1D \parallel A_1C$, значит, искомый угол AB_1D. Рассмотрим ромб $ABDC$: площадь ромба равна произведению квадрата его стороны на синус угла ромба $S_{ABDC} = 64\sin 60^\circ = 32\sqrt{3}$. С другой стороны, площадь ромба можно найти как полупроизведение длин его диагоналей: $S_{ABCD} = \dfrac{BC \cdot AD}{2} = 4AD$, следовательно, $AD = 8\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника AA_1B_1 по теореме Пифагора находим: $AB_1 = 10$. Аналогично $B_1D = 10$. Значит, из равнобедренного треугольника
AB_1D, получаем

$$\angle AB_1D = 2\arcsin\frac{AD}{2 \cdot AB_1} = 2\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Примечание 1.

Диагональ ромба можно было найти по теореме косинусов для треугольника ABD.

Примечание 2.

Для нахождения угла AB_1D можно применить в треугольнике AB_1D теорему косинусов:

$$AD^2 = AB_1^2 + B_1D^2 - 2AB_1 \cdot B_1D \cdot \cos\angle AB_1D \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 64 \cdot 3 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos\angle AB_1D \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\angle AB_1D = \frac{1}{25},$$

откуда $\angle AB_1D = \arccos 0{,}04$.

Ответ: $2\arcsin\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ или $\arccos\dfrac{1}{25}$.

33. Тип 14 № 531558

Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $BC = 2AB$. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезок SO является высотой пирамиды $SABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.

а) Докажите, что $BP : PQ = 1 : 3$.

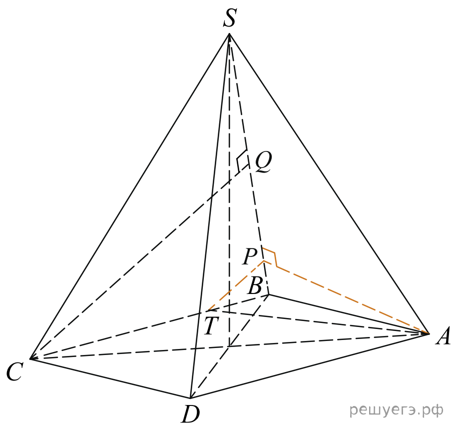
б) Найдите двугранный угол пирамиды при ребре SB, если $SB = BC$.

Решение. а) Вычислим $\cos\angle SBA = \frac{AB}{2SB} = \frac{PB}{AB},$ следовательно, $PB = \frac{AB^2}{2SB}$. Теперь вычислим

$$\cos\angle SBC = \frac{BC}{2SB} = \frac{AB}{SB} = \frac{QB}{CB} = \frac{QB}{2AB},$$

откуда $QB = \frac{2AB^2}{SB}$, следовательно, $QB = 4PB$ и $BP : PQ = 1 : 3$.

б) Проведем из точки P отрезок PT параллельно CQ, T лежит на ребре BC. Тогда APT — линейный угол двугранного угла при ребре SP, то есть искомый. Пусть $AB = a$, $BC = SB = 2a$. Тогда



$$CQ = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \text{ и } \frac{PT}{CQ} = \frac{BP}{BQ} = \frac{1}{4},$$

следовательно, $PT = \frac{1}{4}CQ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Вычислим:

$$BP = \frac{1}{4}BQ = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}SB = \frac{a}{4},\ AP = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4},\ \frac{TB}{BC} = \frac{BP}{BQ} = \frac{1}{4},$$

следовательно, $TB = \frac{a}{2}$, $AT = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Найдем угол APT из теоремы косинусов для треугольника APT:

$$\frac{5a^2}{4} = \frac{15a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} - 2\frac{a\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}\cos\angle APT,$$

откуда $\cos\angle APT = -\frac{\sqrt{5}}{15}$. Таким образом, $\angle APT = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{15}\right)$.

Ответ: б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{15}\right)$.

34. Тип 14 № 630217

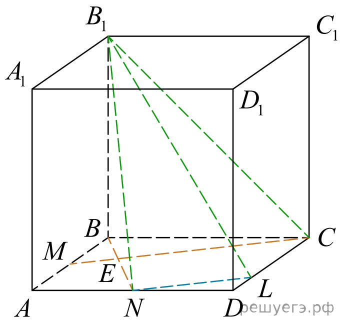
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N являются серединами рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N = 6$.

Решение. а) Пусть отрезки NB и MC пересекаются в точке E. Прямоугольные треугольники NAB и MBC равны по двум катетам, значит,

$$\angle MEB = 180^\circ - (\angle EMB + \angle EBM) = \\ = 180^\circ - (\angle EMB + \angle MCB) = 90^\circ.$$



Отрезок BN — проекция отрезка NB_1 на плоскость ABC. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Пусть плоскость α пересекает ребро CD в точке L. Прямые NL и CM, лежащие в плоскости ABC, параллельны, поскольку прямая NL лежит в плоскости α, параллельной прямой CM. Следовательно, $\angle DLN = \angle DCM = \angle BMC$, а значит, прямоугольные треугольники DLN и BMC подобны по острому углу. Получаем:

$$DL = BM \cdot \frac{DN}{BC} = \frac{AB}{2} \cdot \frac{AD}{2BC} = \frac{CD}{4}.$$

Заметим, что $\angle LNB_1 = 90^\circ$, поскольку прямая B_1N перпендикулярна прямой NL, параллельной прямой CM. Пусть ребро куба равно a. Получаем:

$$36 = B_1N^2 = AN^2 + AB^2 + BB_1^2 = \frac{9a^2}{4}, \quad \text{откуда} \quad a = 4,$$

$$BB_1 = a = 4, \qquad DN = 2, \qquad CL = 3, \qquad LN = \frac{a\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}.$$

Выразим объём пирамиды $CNLB_1$ двумя способами:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} CL \cdot DN\right) \cdot BB_1 = 4, \qquad V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} NB_1 \cdot LN\right) \cdot x = x\sqrt{5},$$

где x — расстояние от точки C до плоскости α. Из равенства $x\sqrt{5} = 4$ получаем: $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Приведем решение Александра Турбанова (Липецк).

а) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B (см. рис.). Пусть ребро куба равно a. В этой системе координат имеем:

$$B(0;0;0), \quad A(a;0;0), \quad D(a;a;0), \quad C(0;a;0), \quad B_1(0;0;a),$$
$$M\left(\frac{a}{2};0;0\right), \quad N\left(a;\frac{a}{2};0\right), \quad \overrightarrow{B_1N}\left(a;\frac{a}{2};-a\right), \quad \overrightarrow{CM} = \left(\frac{a}{2};-a;0\right).$$

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{B_1N}$ и $\overrightarrow{CM}$:

$$\overrightarrow{B_1N} \cdot \overrightarrow{CM} = a \cdot \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2} - a \cdot 0 = 0,$$

следовательно, отрезки B_1N и CM перпендикулярны.

б) Найдем ребро куба. В прямоугольном треугольнике ABN по теореме Пифагора находим:

$$BN^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}.$$

В прямоугольном треугольнике BB_1N по теореме Пифагора находим:

$$B_1N^2 = BN^2 + BB_1^2 = a^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}.$$

$B_1N = 36$, поэтому $\frac{9a^2}{4} = 36$, откуда $a^2 = 16$, то есть $a = 4$, и тогда $N(4;2;0)$, $B_1(0;0;4)$, $\overrightarrow{CM}(2;-4;0)$.

Найдем вектор нормали $\vec{n} = (A;B;C)$ к плоскости α, уравнение которой запишем в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Нормаль перпендикулярна вектору $\overrightarrow{CM}$, а потому их скалярное произведение равно нулю: $2A - 4B = 0$. Подставим в уравнение плоскости координаты точек N, B_1 и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4A + 2B + D = 0, \\ 4C + D = 0, \\ 2A - 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8B + 2B + D = 0, \\ C = -\frac{D}{4}, \\ A = 2B, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{D}{10}, \\ C = -\frac{D}{4}, \\ A = -\frac{D}{5}. \end{cases}$$

Положим, $D = -20$, тогда $\vec{n} = (4;2;5)$.

Найдем расстояние от точки C до плоскости α:

$$\rho(C;\alpha) = \frac{|4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 - 20|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 5^2}} = \\ = \frac{|8 - 20|}{\sqrt{16 + 4 + 25}} = \frac{12}{\sqrt{45}} = \frac{12}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

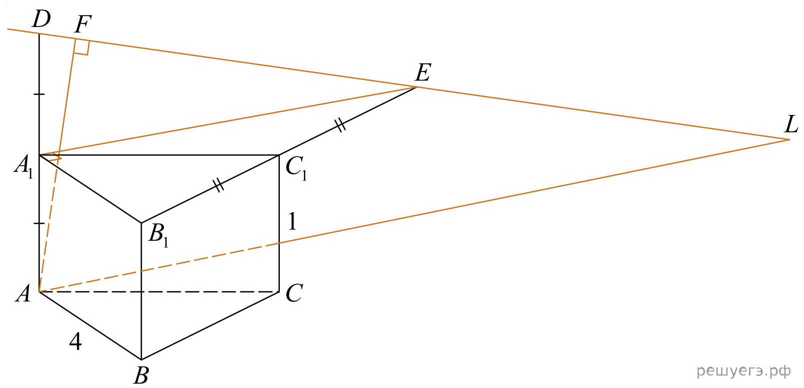
35. Тип 14 № 563896

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC. На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 — середина AD. На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 — середина B_1E.

а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE, если $AB = 4$, а $AA_1 = 1$.

Решение. а) Прямая AD перпендикулярна плоскости $A_1B_1C_1$, поэтому проекцией прямой DE на эту плоскость является прямая A_1E. Заметим, что в треугольнике A_1EB_1 медиана A_1C_1 равна половине стороны B_1E, поэтому треугольник A_1EB_1 прямоугольный с прямым углом A_1. Отсюда по теореме о трех перпендикулярах получаем, что ребро A_1B_1 перпендикулярно прямой DE.



б) В прямоугольном треугольнике A_1EB_1 найдем катет $A_1E = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$. Далее, пусть L — точка пересечения прямой DE и плоскости ABC. Тогда отрезки AL и A_1E параллельны, следовательно, $AL = 2A_1E = 8\sqrt{3}$ по теореме о средней линии треугольника. $A_1C_1 = B_1C_1 = C_1E$, поэтому угол B_1A_1E прямой, следовательно, прямая AB перпендикулярна плоскости ADE, поэтому расстояние между прямыми DE и AB равно расстоянию от точки A до прямой DE, то есть высоте AF прямоугольного треугольника с катетами $AD = 2$ и $AL = 8\sqrt{3}$. Далее вычислим расстояние между прямыми AB и DE:

$$AF = \frac{AD \cdot AL}{DL} = \frac{2 \cdot 8\sqrt{3}}{\sqrt{4+192}} = \frac{8\sqrt{3}}{7}.$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{7}$.

Вариант № 86880703

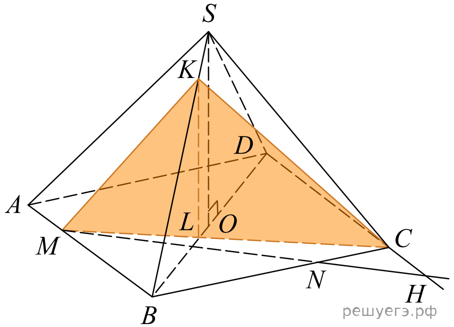
36. Тип 14 № 670480

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 21. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 6$, $SK = 3$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α.

Решение. а) Проведем прямую KL перпендикулярно плоскости ABC, и прямую ML, пересекающуюся с BC в точке N. Тогда плоскость α это плоскость KMN.



Пусть отрезок SO — высота пирамиды. Треугольники SOB и KLB подобны по двум углам, следовательно:

$$\frac{BK}{KS}=\frac{BL}{LO}=\frac{6}{1},\qquad \frac{BL}{LD}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Треугольники MBL и LHD также подобны по двум углам, поэтому:

$$\frac{MB}{DH}=\frac{BL}{LD}=\frac{3}{4},$$
$$DH=\frac{3}{4}MB=\frac{4}{3}\cdot 18=24.$$

Поскольку $DH = DC$, точки H и C совпадают, а тогда совпадают также точки N и C. Следовательно, точка C принадлежит плоскости α.

б) Заметим, что

$$CO=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{24^2+24^2}}{2}=\frac{24\sqrt{2}}{2}=12\sqrt{2}.$$

По теореме Пифагора для треугольника SCO получаем:

$$SO=\sqrt{SC^2-CO^2}=\sqrt{441-288}=\sqrt{153}=3\sqrt{17}.$$

Из подобия треугольников SOB и KBL следует, что $\dfrac{KL}{SO}=\dfrac{6}{7}$, а тогда

$$KL=\frac{6}{7}SO=\frac{18\sqrt{17}}{7}.$$

По теореме Пифагора, в треугольнике MBC:

$$MC=\sqrt{BC^2+BM^2}=\sqrt{24^2+18^2}=30,$$

Следовательно,

$$S_{MKC}=\frac{1}{2}MC\cdot KL=\frac{1}{2}\cdot 30\cdot\frac{18\sqrt{17}}{7}=\frac{270\sqrt{17}}{7}.$$

Ответ: б) $\dfrac{270\sqrt{17}}{7}$.

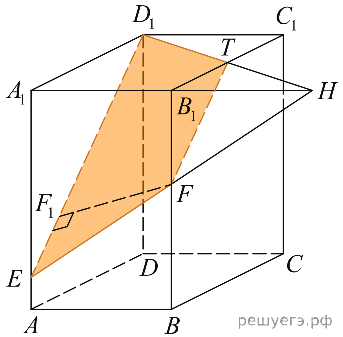
37. Тип 14 № 689037

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 4EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=3\sqrt{2}$, $AD = 16$, $AA_1 = 20$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 3 : 2.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Решение. а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1 и делит BB_1 на две части. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны. Следовательно,



$$\frac{B_1F}{B_1T}=\frac{A_1E}{A_1D_1}=\frac{4A_1A}{5AD}=\frac{4\cdot 20}{5\cdot 16}=1.$$

Таким образом, $B_1F=B_1T=\dfrac{1}{2}B_1C_1=8.$ Тогда $FB=20-8=12$ и $BF:FB_1=3:2.$

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны. Четырёхугольник ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H. Точка T — середина B_1C_1, и, следовательно, T — середина D_1H, поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H=EH$, откуда $D_1T=EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1=EA_1\sqrt{2}=16\sqrt{2},\quad FT=FB_1\cdot\sqrt{2}=8\sqrt{2},$$

$$EF=D_1T=\sqrt{D_1C_1^2+TC_1^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+8^2}=\sqrt{82}.$$

Проведём в трапеции высоту FF_1. Имеем:

$$EF_1=\frac{ED_1-FT}{2}=4\sqrt{2},\quad FF_1=$$
$$=\sqrt{EF^2-EF_1^2}=\sqrt{82-(4\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}.$$

Тогда $S_{ED_1TF}=5\sqrt{2}\cdot\dfrac{16\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{2}=120.$

Ответ: б) 120.

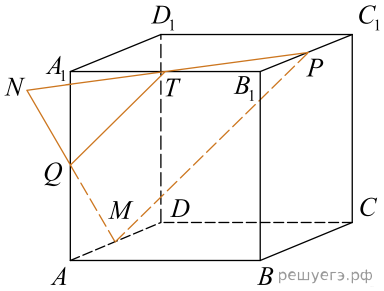
38. Тип 14 № 507490

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Точки M и T — середины ребер AD и A_1B_1 соответственно.

а) Докажите, что $A_1C_1 \perp MT$.

б) Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT.

Решение. а) Проекция точки M на плоскость $A_1B_1C_1$ — это середина ребра A_1D_1. Поэтому проекция прямой MT на плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна прямой B_1D_1 по теореме о средней линии. Значит, она перпендикулярна прямой A_1C_1, тогда по теореме о трех перпендикулярах и прямая MT перпендикулярна прямой A_1C_1.

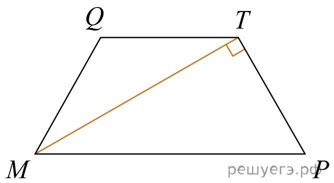


б) Пусть P — середина ребра B_1C_1, а Q — середина ребра AA_1. Заметим, что $PMQT$ — трапеция, поскольку $QT \parallel B_1A \parallel PM$.

Получаем:

$$TQ = QM = PT = \frac{1}{2}B_1A =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}AB = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2.$$

Заметим, что $MP = 4$. Продлим прямые MQ и PT и обозначим точку их пересечения N. В треугольнике MNP $QT||MP$, $QT = \frac{1}{2}MP$, значит, QT является средней линией, и T — середина NP. Треугольник MNP правильный. MT — медиана и высота. Значит, PT — перпендикуляр к MT и искомое расстояние равно $PT = 2$.



Ответ: 2.

39. Тип 14 № 511368

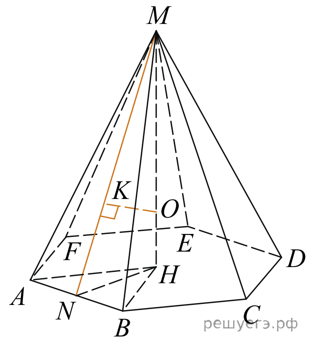
В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 5, а высота равна 3, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

а) Докажите, что площадь боковой поверхности пирамиды относится к площади основания как $\sqrt{7} : 2$.

б) Найдите площадь этой сферы.

Решение. а) Пусть MH — высота правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$ с вершиной M, тогда треугольник AMH прямоугольный, $MA = 5$, $MH = 3$, откуда

$$AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 4.$$



Треугольник ABH равносторонний, следовательно, $AB = AH = 4$. В треугольнике AMB высота

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{21}.$$

В правильном треугольнике AHB высота $NH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Тогда косинус двугранного угла при основании пирамиды равен $\frac{NH}{MN} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$. А площадь основания пирамиды есть площадь боковой поверхности пирамиды умножить на косинус двугранного угла при основании. Отсюда и следует требуемое.

б) Центр O сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO : OK = MN : HN \Leftrightarrow (3 - r) \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{21} \cdot r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{6}{2 + \sqrt{7}} \Leftrightarrow r = 2\sqrt{7} - 4,$$

где r — радиус сферы. Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = 16(11 - 4\sqrt{7})\pi$.

Ответ: $16\left(11 - 4\sqrt{7}\right)\pi$.

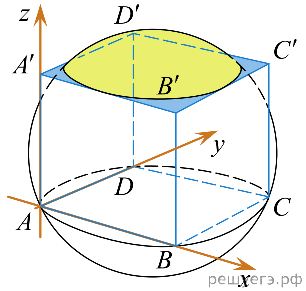
40. Тип 14 № 562806

Шар проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба.

а) Докажите, что сфера касается ребер в их серединах.

б) Найдите объем шара, если ребро куба равно 1.

Решение. а) Шар касается сторон одной из граней куба. Сечение шара плоскостью этой грани представляет собой круг, вписанный в квадрат. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается всех его сторон в их серединах. Это и доказывает требуемое.



б) Введем обозначения так, как показано на рисунке. Введем прямоугольную систему координат с центром в вершине куба A, оси направим вдоль ребер, и пусть центр сферы имеет координаты (x_0, y_0, z_0), а радиус сферы равен R. Тогда уравнение сферы будет

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

а лежащие на сфере точки $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$ и точка касания сферы с серединой ребра $A'B'$, имеющая координаты $\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=R^2, \\ (1-x_0)^2+y_0^2+z_0^2=R^2, \\ x_0^2+(1-y_0)^2+z_0^2=R^2, \\ \left(\frac{1}{2}-x_0\right)^2+y_0^2+(1-z_0)^2=R^2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2, \\ (1-x_0)^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2, \\ x_0^2+(1-y_0)^2+z_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2, \\ \left(\frac{1}{2}-x_0\right)^2+y_0^2+(1-z_0)^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2, \\ 1-2x_0=0, \\ 1-2y_0=0, \\ x_0+1-2z_0+\frac{1}{4}=0, \end{cases}$$

откуда $x_0=y_0=\frac{1}{2}$, $z_0=\frac{3}{8}$, $R^2=\frac{41}{64}$, то есть $R=\frac{\sqrt{41}}{8}$.

Тогда объем шара равен

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{41\sqrt{41}}{384}\pi.$$

Вариант № 86880703

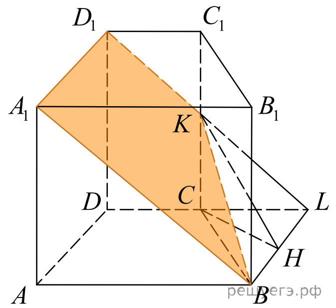
Ответ: $\frac{41\sqrt{41}}{384}\pi$.

41. Тип 14 № 546443

Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — трапеция с основаниями $AB = 2CD$.

а) Докажите, что плоскость BA_1D_1 проходит через середину бокового ребра CC_1.

б) Найдите угол между боковым ребром AA_1 и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция $ABCD$ прямоугольная с прямым углом при вершине B, а $BC = CD$ и $AA_1=\sqrt{6}CD$.



Решение. а) Пусть плоскость BA_1D_1 пересекает ребро CC_1 в точке K. Параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым, поэтому параллельные грани AA_1B_1B и CC_1D_1D сечение пересекает по параллельным прямым A_1B и D_1K.

Следовательно, углы BA_1B_1 и KD_1C_1 равны и треугольники B_1A_1B и C_1D_1K подобны и коэффициент подобия $k=\dfrac{1}{2}$, то есть $C_1K=\dfrac{1}{2}BB_1$ и K — середина CC_1.

б) Пусть L — точка пересечения D_1K и CD, тогда BL — прямая пересечения плоскостей $ABCD$ и BA_1D_1. Опустим из K и C перпендикуляры KH и CH на BL. Они попадут в одну точку по теореме о трех перпендикулярах. BL параллельно A_1D_1 и параллельно AD. Следовательно, $ABLD$ — параллелограмм. Тогда $CL = CD = BC$ и треугольник BCL — прямоугольный и равнобедренный и его высота равна $CH=\dfrac{CD}{\sqrt{2}}$, при этом $CK=\dfrac{\sqrt{6}}{2}CD$. Следовательно, $\operatorname{tg}\angle KHC=\sqrt{3}$.

Тогда $\angle KHC=60^\circ$ и равен углу между плоскостью BA_1D_1 и плоскостью основания. AA_1 перпендикулярно $ABCD$, следовательно, угол между AA_1 и BA_1D_1 равен $90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

Ответ: б) 30°.

Приведём решение п. б) Ирины Шраго.

Решим задание координатно-векторным методом. Начало координат в точке C, ось Ox вдоль луча CB, ось Oy вдоль луча CL, ось Oz вдоль луча CC_1. Уравнение плоскости (BA_1D_1) в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{2z}{a\sqrt{6}}=1,$$

где $CB=CL=a$ и

$$CK=\frac{1}{2}CC_1=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Таким образом, вектор нормали $\left\{\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{a};\dfrac{2}{a\sqrt{6}}\right\}$, а вектор $AA_1\,\{0;0;1\}$, поскольку он сонаправлен с осью Oz. Синус искомого угла равен модулю косинуса угла между этими векторами, то есть

$$\sin x=\frac{\left(\frac{2}{a\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{a^2}+\frac{4}{6a^2}\right)}}=\frac{1}{2}.$$

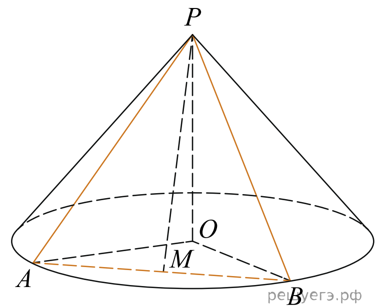
Следовательно, $x=30^\circ$.

42. Тип 14 № 505103

Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3.

а) Докажите, что угол $\angle APB$ меньше 60°.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP.



Решение. а) Пусть O — центр основания конуса, M — середина хорды AB. Дуга AB составляет четверть окружности основания, поэтому $\angle AOB = 90^\circ$. Треугольник AOB равнобедренный, следовательно,

$$AB=2AM=2AO\sin\frac{\angle AOB}{2}=6\sqrt{2}.$$

$6\sqrt{2}=\sqrt{72}<9$, поэтому в равнобедренном треугольнике APB основание меньше боковой стороны, значит, угол при вершине наименьший, поэтому он меньше 60°.

Равнобедренный треугольник APB — искомое сечение. Отрезок PM — его высота, $PM=\sqrt{AP^2-AM^2}=3\sqrt{7}$.

Площадь искомого сечения равна

$$\frac{1}{2}PM\cdot AB=9\sqrt{14}.$$

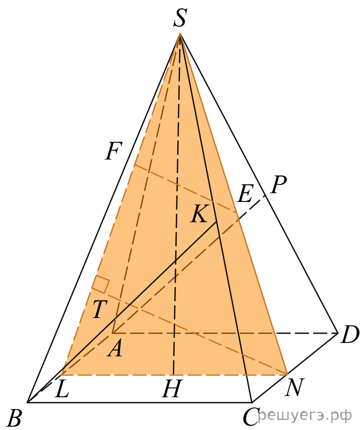
Ответ: $9\sqrt{14}$.

43. Тип 14 № 563560

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AD = 14$, высота $SH = 24$. Точка P — середина бокового ребра SD, а точка N — середина ребра CD. Плоскость ABP пересекает боковое ребро SC в точке K.

а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости ABS.



Решение. а) Поскольку $ABCD$ — квадрат, то $AB \parallel CD$, а значит, прямая CD параллельна плоскости ABP и поэтому CD не имеет общих точек с прямой PK, лежащей в плоскости сечения. Так как PK и CD не имеют общих точек и лежат в плоскости SCD, они параллельны.

В треугольнике SND прямая PK проходит через середину SD параллельно ND, то есть содержит среднюю линию треугольника, а значит, пересекает SN в её середине. Это и требовалось доказать.

б) Из того, что $PK \parallel CD$ и $CD \parallel AB$, следует, прямая PK параллельна прямой AB, а следовательно, и всей плоскости ABS. Значит, расстояние от любой точки прямой PK до плоскости ABS будет одинаковым. Найдём это расстояние от точки пересечения PK и SN — точки E. $ABCD$ — квадрат, поэтому его диагонали равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому треугольник CHD прямоугольный и равнобедренный, а медиана HN перпендикулярна CD. Через точки S, N и H проведём плоскость, которая пересекает ребро AB в точке L. LN содержит HN, поэтому $LN \perp CD$ и $LN \perp AB$, откуда следует, что четырехугольник $ADNL$ — прямоугольник и $LA = ND = \frac{1}{2}CD$, то есть L — середина AB.

Отрезок SL — медиана в равнобедренном треугольнике SAB с основанием AB, поэтому $SL \perp AB$. Поскольку прямая AB перпендикулярна пересекающимся прямым LN и SL, она перпендикулярна плоскости SNL, а раз AB лежит в плоскости ABS, плоскости ABS и SNL перпендикулярны. Тогда перпендикуляры NT и EF к плоскости ABS из точек N и E плоскости SNL попадут на прямую их пересечения SL.

Прямоугольные треугольники SAL и SDN равны по гипотенузе ($SA = SD$) и катету ($LA = ND$), поэтому другие катеты SN и SL также равны. Рассмотрим равнобедренный треугольник SNL, в котором $SN = SL$, основание $NL = AD = 14$, а высота и медиана к нему $SH = 24$. По теореме Пифагора для треугольника LHS найдём

$$SL = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25.$$

Теперь найдём высоту NT треугольника SNL, для чего выразим его площадь двумя способами: $\frac{1}{2}SH \cdot NL = \frac{1}{2}NT \cdot SL$, откуда $24 \cdot 14 = NT \cdot 25$, поэтому $NT = \frac{336}{25}$. В прямоугольном треугольнике SNT с прямым углом T отрезок EF перпендикулярен ST и проходит через середину SN, а значит, является средней линией треугольника SNT, поэтому $EF = \frac{1}{2}NT = \frac{168}{25}$.

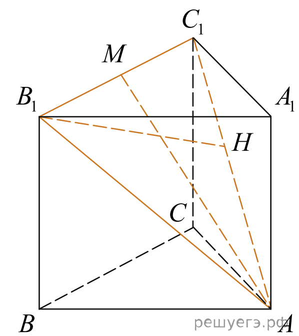
Ответ: $\frac{168}{25}$.

44. Тип 14 № 507778

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1.

а) Докажите, что точки A_1 и B равноудалены от плоскости AB_1C_1.

б) Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1.



Решение. а) Проведем A_1B. Этот отрезок делится плоскостью AB_1C_1 пополам (диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам). Наклонные, проведенные из концов данного отрезка к плоскости, равны, поэтому и расстояния от этих этих концов до данной плоскости равны.

б) Искомое расстояние равно высоте B_1H треугольника AB_1C_1. Треугольник равнобедренный, поскольку $B_1A = AC_1 = \sqrt{5}$. Дополнительно проведём высоту и медиану AM. Найдём её длину: $AM = \sqrt{B_1A^2 - B_1M^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

Тогда, $S_{AB_1C_1} = \frac{1}{2}B_1C_1 \cdot AM = \frac{1}{2}AC_1 \cdot B_1H$, откуда получаем уравнение $\frac{\sqrt{19}}{2} = \sqrt{5} \cdot B_1H$. Следовательно, $B_1H = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{95}}{10}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{95}}{10}$.

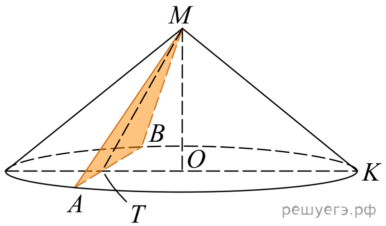
45. Тип 14 № 514045

Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом $120°$ при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.

б) Найдите площадь сечения.

Решение. а) Пусть треугольник MAB — искомое сечение, перпендикулярное образующей MK, и пусть T — точка его пересечения с диаметром, проходящим через точку K. В треугольнике MTK угол K равен 30°. Следовательно, $MT = 2, TK = 4$.



В треугольнике MTB образующая конуса $MB = 2\sqrt{3}$,

$$AB = 2TB = 2\sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 4\sqrt{2},$$

$$AM^2 + BM^2 = 2\cdot(2\sqrt{3})^2 = 24 < 32 = (4\sqrt{2})^2 = AB^2.$$

Следовательно, $\angle AMB > 90°$.

б) Площадь треугольника MBA равна

$$S_{MBA} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot MT = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2 = 4\sqrt{2}$$

Ответ: б) $4\sqrt{2}$.

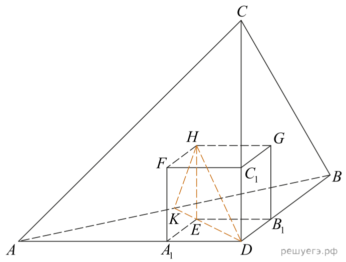
46. Тип 14 № 656194

В правильной треугольной пирамиде $DABC$ углы боковых граней при вершине пирамиды D — прямые. Внутри пирамиды находится куб, диагональ которого совпадает с высотой пирамиды.

а) Докажите, что ребро куба в три раза меньше бокового ребра пирамиды.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды $DABC$, если площадь поверхности куба равна 96.

Решение. а) Пусть точки A_1, B_1 и C_1 — вершины куба, лежащие на ребрах DA, DB и DC соответственно, пусть точки E, F и G — вершины куба, лежащие в боковых гранях DAB, DAC и DBC соответственно, и пусть точка H — центр треугольника ABC, являющийся основанием высоты пирамиды.



На продолжении диагонали DE грани куба DA_1EB_1 возьмем точку K так, что угол DHK прямой. Тогда прямая HK лежит на основании пирамиды, перпендикулярна стороне AB, а точка K — середина стороны AB. По теореме о трех перпендикулярах DK также перпендикулярна AB.

Пусть ребро куба равно a, тогда $DE = a\sqrt{2}$, $DH = a\sqrt{3}$. Из подобия прямоугольных треугольников KEH и HED получаем $\dfrac{KE}{HE} = \dfrac{HE}{ED}$, откуда находим:

$$KE = \frac{HE^2}{ED} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad KD = KA = KB = \frac{3a\sqrt{2}}{2}, \qquad AD = KD\sqrt{2} = 3a.$$

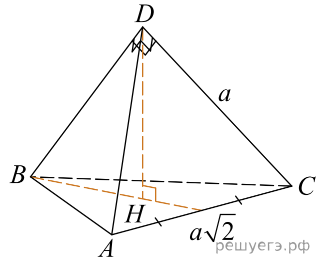
б) Пусть ребро куба равно a, по условию площадь поверхности куба $S_{\text{куба}} = 6a^2 = 96$, откуда $a^2 = 16$. Из п. а) боковые ребра пирамиды равны $3a$, ребра основания — $3a\sqrt{2}$. Таким образом, площадь боковой грани $S_{\text{бок}} = \dfrac{9a^2}{2}$, площадь основания $S_{\text{осн}} = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{2}$, следовательно,

$$S_{\text{пов}} = 3S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \frac{27a^2}{2} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{2} = 216 + 72\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $216 + 72\sqrt{3}$.

Приведем другую идею для пункта а).

Пусть длины ребер, исходящих из вершины D, равны a, и пусть точка H — центр равностороннего треугольника ABC. Найдем высоту пирамиды:



$$DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

По условию высота пирамиды является диагональю куба. Ребро куба в $\sqrt{3}$ меньше диагонали, поэтому оно равно $\dfrac{a}{3}$, то есть в три раза меньше бокового ребра пирамиды.

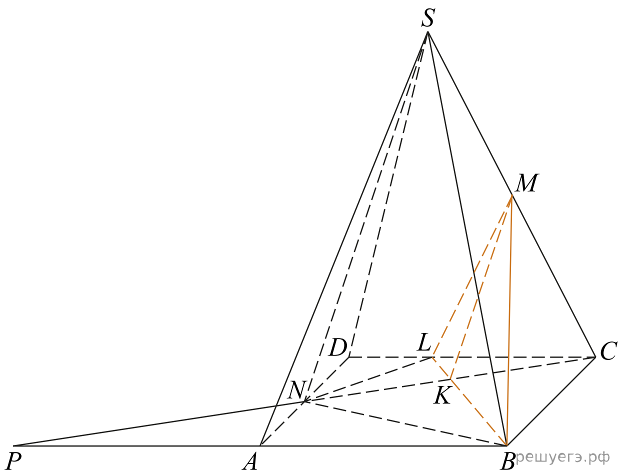
47. Тип 14 № 648011

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S точки M и N середины ребер SC и AD соответственно. Плоскость α проходит через прямую BM параллельно SN.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро CD в отношении 1 : 2.

б) Найдите расстояние от прямой SN до плоскости α, если сторона основания пирамиды равна 6, а боковое ребро равно 12.

Решение. а) В треугольнике CSN через точку M проведем среднюю линию MK. Тогда K — середина CN, а прямая MK лежит в плоскости α. Пусть L — точка пересечения прямой BK (а вместе с ней — и плоскости α) с ребром CD. Тогда треугольник BLM — сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α.



Пусть P — точка пересечения прямых CN и AB. Прямоугольные треугольники CDN и PAN равны по катету и острому углу, следовательно, $CN = PN$ и $CD = PA$. Треугольники CLK и PBK подобны по двум углам, следовательно,

$$\frac{CL}{2AB}=\frac{CL}{BP}=\frac{CK}{KP}=\frac{\frac{1}{2}CN}{KN+NP}=\frac{CN}{3CN}=\frac{1}{3},\qquad \frac{CL}{AB}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{DL}{CL}=\frac{CD-CL}{CL}=\frac{CD-\frac{2}{3}CD}{\frac{2}{3}CD}=\frac{1}{2}.$$

б) Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости равно расстоянию от какой-либо точки этой прямой до этой плоскости. Найдем расстояние от точки N до плоскости α как длину высоты h_N, пирамиды $MNLB$, проеденной из точки N на основание MLB. Находим:

$$S_{ABN}=\frac{1}{2}AN\cdot AB=\frac{1}{4}AB^2=9,\qquad S_{DNL}=\frac{1}{2}DN\cdot DL=\frac{1}{12}AB^2=3,$$

$$S_{ABLD}=\frac{1}{2}(AB+LD)\cdot AD=\frac{2}{3}AB^2=24,\qquad S_{NLB}=S_{ABLD}-S_{ABN}-S_{DNL}=12.$$

Высота h_M пирамиды $MNLB$, опущенная из вершины M, равна половине высоты h_S пирамиды $SABCD$, опущенной из вершины S. Получаем:

$$DN=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}AB=3,\qquad SN=\sqrt{SD^2-DN^2}=3\sqrt{15},$$

$$h_S=\sqrt{SN^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=3\sqrt{14},\qquad h_M=\frac{1}{2}h_S=\frac{3\sqrt{14}}{2},$$

$$V_{MNLB}=\frac{1}{3}S_{NLB}\cdot h_M=6\sqrt{14}.$$

Вычислим площадь треугольника MLB. Пусть угол между боковым ребром пирамиды и прилежащей стороной основания равен β. Заметим, что:

$$\cos\beta=\frac{AB}{2SA}=\frac{1}{4},\qquad CM=\frac{1}{2}SC=6,\qquad CL=\frac{2}{3}CD=4.$$

Тогда

$$MB=\sqrt{BC^2+CM^2-2BC\cdot CM\cos\beta}=3\sqrt{6},$$

$$ML=\sqrt{CL^2+CM^2-2CL\cdot CM\cos\beta}=2\sqrt{10},\qquad BL=\sqrt{BC^2+CL^2}=2\sqrt{13}.$$

Применим формулу Герона:

$$S_{MLB}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}+\sqrt{10}+\sqrt{13}\right)\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}+\sqrt{10}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13}+\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{10}\right)\right)\left(\sqrt{13}-\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{1\ldots}\right.\right.}$$

$$=\sqrt{\left(6\sqrt{15}+\frac{21}{2}\right)\left(6\sqrt{15}-\frac{21}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{36\cdot 15-\frac{441}{4}}=\frac{\sqrt{1719}}{2}=\frac{3\sqrt{191}}{2}.$$

Следовательно,

$$h_N=\frac{3V_{MNLB}}{S_{MLB}}=\frac{3\cdot 6\sqrt{14}\cdot 2}{3\sqrt{191}}=\frac{12\sqrt{14}}{\sqrt{191}}.$$

Ответ: б) $\dfrac{12\sqrt{14}}{\sqrt{191}}$.

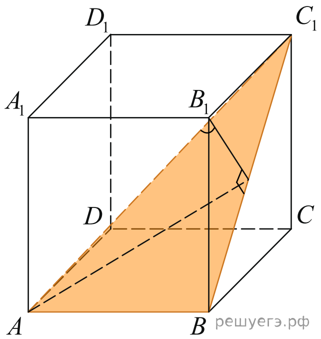
48. Тип 14 № 500025

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны $AB = 1$, $AD = AA_1 = 2$.

а) Пусть B_1E — высота треугольника BB_1C_1. Докажите, что AE — проекция AB_1 на плоскость ABC_1.

б) Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Решение. а) Плоскости ABC_1 и BCC_1 перпендикулярны. Перпендикуляр из точки B_1 к плоскости ABC_1 лежит в плоскости BCC_1 и пересекает прямую BC_1 в точке E. Значит, AE − проекция AB_1 на плоскость ABC_1.



б) по пункту а) искомый угол равен углу B_1AE. В прямоугольном треугольнике B_1AE с катетом $B_1E=\sqrt{2}$ и гипотенузой $AB_1=\sqrt{5}$ имеем:

$$\sin\angle B_1AE=\frac{B_1E}{AB_1}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Следовательно,

$$\angle B_1AE=\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Примечание.

Возможны другие формы записи ответа:

$$\angle B_1AE=\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}=\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

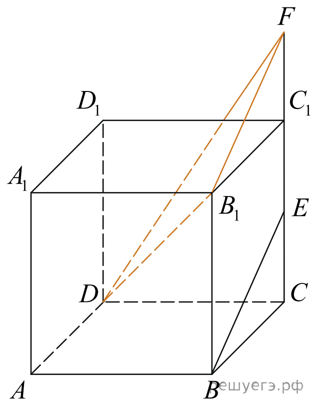
49. Тип 14 № 511342

Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной равной 1.

а) Докажите, что $B_1D\perp AC$.

б) Найдите угол между прямыми BE и B_1D.

Решение. а) Проекция прямой B_1D на плоскость $ABCD$ − прямая BD. $BD\perp AC$, как диагонали квадрата. Значит, по теореме о трех перпендикулярах $B_1D\perp AC$.



б) $DB_1=\sqrt{3}$. Проведём через точку B_1 прямую, параллельную BE. Она пересекает продолжение ребра CC_1 в точке F, причём $C_1F=\frac{1}{2}$. Искомый угол равен углу DB_1F (или смежному с ним).

В прямоугольном треугольнике B_1C_1F с прямым углом C_1 имеем:

$$B_1F=\sqrt{B_1C_1^2+C_1F^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике DCF с прямым углом C имеем:

$$DF=\sqrt{DC^2+CF^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

В треугольнике DB_1F по теореме косинусов получаем:

$$DF^2=DB_1^2+B_1F^2-2\cdot\cos\angle DB_1F\cdot DB_1\cdot B_1F,$$

откуда $\cos\angle DB_1F=\dfrac{DB_1^2+B_1F^2-DF^2}{2\cdot DB_1\cdot B_1F}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$, а тогда $\angle DB_1F=\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Приведем решение пункта б) Адама Арутюнова.

Введем систему координат с началом в точке B так, чтобы направление оси Ox совпадало с направлением вектора $\overrightarrow{BC}$, направление оси Oy — с направлением вектора $\overrightarrow{BA}$ и направление оси Oz — с направлением вектора $\overrightarrow{BB_1}$. Тогда $B(0;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;\ 0;\ 1)$, $D(1;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 0;\ 0)$, $C_1(1;\ 0;\ 1)$, $E(1;\ 0;\ \frac{1}{2})$. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BE}(1;\ 0;\ \frac{1}{2})$ и $\overrightarrow{B_1D}(1;\ 1;-1)$. Косинус угла между векторами:

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot1+1\cdot0-1\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{15}{4}}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

Тогда искомый угол между прямыми BE и B_1D равен $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

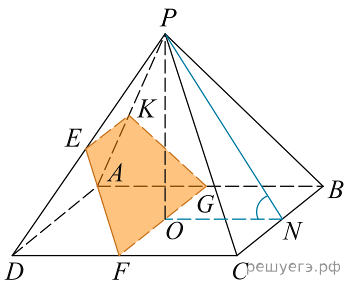
50. Тип 14 № 508391

В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 6, точка K — середина бокового ребра AP.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной плоскости BCP.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.

Решение. а) В плоскости ABP через точку K проведем прямую, параллельную прямой BP до пересечения ее с прямой AB в точке G, а в плоскости ABC через точку G проведем прямую, параллельную прямой BC до пересечения ее с прямой DC в точке F. По признаку параллельности двух плоскостей плоскость KFG параллельна плоскости BCP. Прямая FG параллельна прямой AD, следовательно, она параллельна плоскости APD, а, значит, плоскость KFG пересекает плоскость APD по прямой, параллельной FG. Обозначим через E точку пересечения этой прямой с ребром DP.



Таким образом, искомое сечение — трапеция $EFGK$.

б) Плоскость EFG параллельна плоскости BCP, значит, $\angle((EFG);(ABC)) = \angle((BCP);(ABC))$. Проведем высоту PN треугольника BCP и соединим точку N с основанием O высоты пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах отрезок ON также перпендикулярен BC, а, значит, угол PNO — линейный угол двугранного угла $PBCO$.

Поскольку $ON = \frac{AB}{2} = 3$, $PN = \frac{PB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ из прямоугольного треугольника PNO находим $\cos\angle PNO = \frac{ON}{PN} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда окончательно получаем $\angle((EFG);(ABC)) = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.