1. Тип 12 № 4023

Найдите точку максимума функции $y=(3x^2-36x+36)e^{x+36}$.

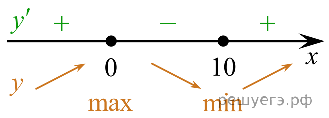
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=(3x^2-36x+36)'e^{x+36}+(3x^2-36x+36)(e^{x+36})'=$$
$$=(6x-36)e^{x+36}+(3x^2-36x+36)e^{x+36}=$$
$$=(3x^2-30x)e^{x+36}=3x(x-10)e^{x+36}.$$

Найдем нули производной:

$$3x(x-10)e^{x+36}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=10.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=0$.

Ответ: 0.

2. Тип 12 № 512355

Найдите наименьшее значение функции $y=4^{x^2-2x+5}$.

Решение. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 1. Функция $y=4^{(x^2-2x+5)}$ в этой точке определена и принимает значение $4^{(1^2-2\cdot1+5)}=256$. Поскольку показательная функция с основанием, равным 4, возрастает, найденное значение является искомым наименьшим значением заданной функции.

Ответ: 256

3. Тип 12 № 26707

Найдите наименьшее значение функции $y=4x-4\operatorname{tg}x+12$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$.

Вариант № 86541352

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=4-\frac{4}{\cos^2x}=-4\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)=-4\operatorname{tg}^2x.$$

Найденная производная неположительна на заданном отрезке, заданная функция убывает на нем, поэтому наименьшим значением функции на отрезке является $y(0)=4\cdot0-4\cdot0+12$.

Ответ: 12.

4. Тип 12 № 77487

Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+5)^5-5x$.

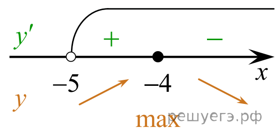
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=\frac{5}{x+5}-5.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{5}{x+5}-5=0\Leftrightarrow x=-4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-4$.

Ответ: −4.

5. Тип 12 № 548529

Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x^2+9}{x}$.

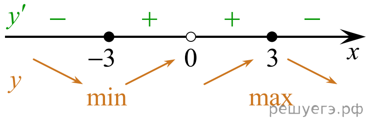
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(-\frac{x^2+9}{x}\right)' = \left(-x-\frac{9}{x}\right)' = -1+\frac{9}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{9}{x^2}-1=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=3$.

Ответ: 3.

6. Тип 12 № 315851

Найдите наибольшее значение функции $y=3x^5-20x^3+16$ на отрезке [–5; –1].

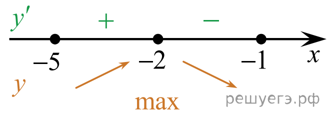
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 15x^4-60x^2 = 15x^2(x^2-4).$$

Найдем нули производной:

$$15x^2(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



На отрезке $[-5;-1]$ функция достигает наибольшего значения в точке максимума. Найдем его:

$$y(-2)=3\cdot(-2)^5-20\cdot(-2)^3+16=$$
$$=-96+160+16=80.$$

Ответ: 80.

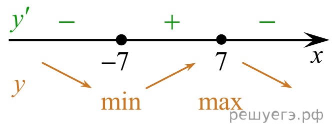
7. Тип 12 № 127943

Найдите точку максимума функции $y=14+49x-\frac{x^3}{3}$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 49-x^2 = (7-x)(7+x).$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке 7 производная меняет знак с плюса на минус, поэтому эта точка является точкой максимума.

Ответ: 7.

8. Тип 12 № 563894

Найдите точку минимума функции $y=2x-\ln(x-3)+5$.

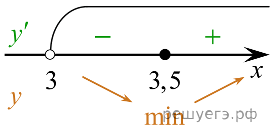
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=2-\frac{1}{x-3}.$$

Найдем нули производной:

$$2-\frac{1}{x-3}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}=2 \Leftrightarrow x-3=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=3,5.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=3,5$.

Ответ: 3,5.

9. Тип 12 № 286715

Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2+24x+153}$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$y=\sqrt{x^2+24x+153}=\sqrt{(x+12)^2+9}.$$

Отсюда имеем:

$$y=\sqrt{(x+12)^2+9}\geqslant\sqrt{9}=3.$$

Поэтому наименьшее значение функции достигается в точке −12, и оно равно 3.

Ответ: 3.

10. Тип 12 № 132517

Найдите наибольшее значение функции $y=18\sin x-9\sqrt{3}x+1,5\sqrt{3}\pi+21$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

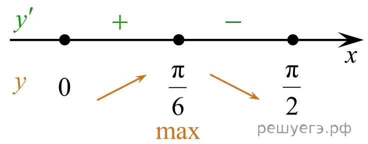
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=18\cos x-9\sqrt{3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases}18\cos x-9\sqrt{3}=0,\\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=\frac{\pi}{6}$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=18\sin\frac{\pi}{6}-9\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}+1,5\sqrt{3}\pi+21=30.$$

Ответ: 30.

11. Тип 12 № 130063

Найдите наименьшее значение функции $y=2x+\frac{288}{x}+14$ на отрезке $[0,5;25]$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

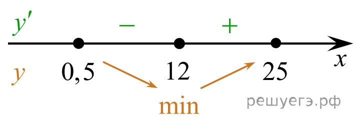
$$y' = 2 - \frac{288}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 2 - \dfrac{288}{x^2} = 0, \\ 0,5 \leqslant x \leqslant 25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 144, \\ 0,5 \leqslant x \leqslant 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 12, \\ x = -12, \end{array} \right. \\ 0,5 \leqslant x \leqslant 25 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 12$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(12) = 24 + 24 + 14 = 62.$

Ответ: 62.

12. Тип 12 № 284121

Найдите наименьшее значение функции $y = (x-7)^2(x+6)$ на отрезке $[-1;\ 20]$.

Вариант № 86541352

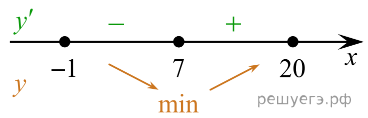
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x-7)^2)'(x+6) + (x-7)^2(x+6)' =$$
$$= 2(x-7)(x+6) + (x-7)^2 = (x-7)(3x+5).$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} (x-7)(3x+5) = 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = -\dfrac{5}{3}, \end{array} \right. \\ -1 \leqslant x \leqslant 20 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 7$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(7) = (7-7)^2(7+6) = 0.$$

Ответ: 0.

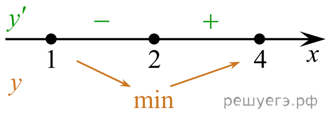
13. Тип 12 № 77425

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[1;4]$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Производная обращается в нуль в точках 0 и 2, заданному отрезку принадлежит число 2. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(2) = 8 - 3 \cdot 4 + 2 = -2.$$

Ответ: −2.

14. Тип 12 № 513364

Найдите наименьшее значение функции $y = x + \frac{81}{x} + 14$ на отрезке [0,5; 17].

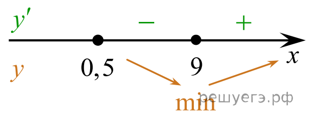
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 1 - \frac{81}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 1 - \frac{81}{x^2} = 0, \\ 0,5 \leqslant x \leqslant 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = -9, \end{array} \right. \\ 0,5 \leqslant x \leqslant 17 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 9$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(9) = 9 + 9 + 14 = 32.$$

Ответ: 32.

15. Тип 12 № 77495

Найдите наименьшее значение функции $y = -14x + 7\operatorname{tg} x + \frac{7\pi}{2} + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

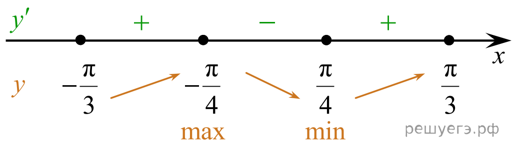
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=\frac{7}{\cos^2 x}-14=\frac{-7(2\cos^2 x-1)}{\cos^2 x}=-\frac{7\cos 2x}{\cos^2 x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases}7\cos 2x=0,\\ -\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z},\\ -\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4},\\ x=-\frac{\pi}{4}.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Функция может принимать наименьшее значение в точках $x=-\frac{\pi}{3}$ или $x=\frac{\pi}{4}$. Найдем их:

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-7\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+14\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{2}+11=-7\sqrt{3}+\frac{49}{6}\pi+11,$$
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=7\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-3,5\pi+3,5\pi+11=18.$$

Поскольку $y(-\pi/3)>-14+24+11=21$, наименьшее из найденных чисел равно 18.

Ответ: 18.

16. Тип 12 № 505448

Найдите точку максимума функции $y=2\ln(x+4)^3-8x-19$.

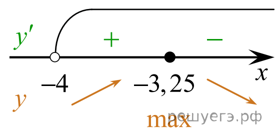
Решение. Заметим, что $y=6\ln(x+4)-8x-19$ при $x>-4$. Найдем производную этой функции:

$$y'=\frac{6}{x+4}-8.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{6}{x+4}-8=0\Leftrightarrow x=-3,25.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-3,25$.

Ответ: −3,25.

17. Тип 12 № 26711

Найдите точку максимума функции $y=(9-x)e^{x+9}$.

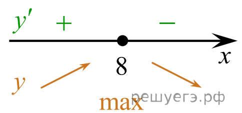
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=(9-x)'e^{x+9}+(9-x)(e^{x+9})'=$$
$$=-e^{x+9}+(9-x)e^{x+9}=(8-x)e^{x+9}.$$

Найдем нули производной:

$$(8-x)e^{x+9}=0\Leftrightarrow x=8.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=8$.

Ответ: 8.

18. Тип 12 № 501194

Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2+6x+29}$.

Решение. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке −3. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума подкоренное выражение.

Ответ: −3.

19. Тип 12 № 3475

Найдите наименьшее значение функции $y=9\cos x+14x+7$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдем производную заданной функции: $y'=-9\sin x+14$. Найденная производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0)=9\cos 0+14\cdot 0+7=16.$$

Ответ: 16.

20. Тип 12 № 129147

Найдите точку минимума функции $y=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-3x+1$.

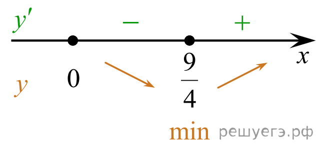
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=2\sqrt{x}-3.$$

Найдем нули производной:

$$2\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{9}{4}.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=\frac{9}{4}$.

Ответ: 2,25.

21. Тип 12 № 513682

Найдите наименьшее значение функции $y=9x-\ln(9x)+3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]$.

Решение. На заданном промежутке производная функции $y'=9-\frac{1}{x}=\frac{9x-1}{x}$ меняет знак с минуса на плюс в точке $\frac{1}{9}$, поэтому в этой точке достигается наименьшее значение функции, равное 4.

Ответ: 4

22. Тип 12 № 71841

Найдите точку минимума функции $y=(x^2-31x+31)e^{15-x}$.

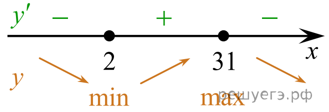
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x^2-31x+31)'\cdot e^{15-x} + (x^2-31x+31)\cdot(e^{15-x})' =$$
$$= (2x-31)e^{15-x} + (x^2-31x+31)e^{15-x}\cdot(-1) =$$
$$= -(x^2-33x+62)e^{15-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x^2-33x+62)e^{15-x} = 0 \Leftrightarrow x^2-33x+62 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=31, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 2$.

Ответ: 2.

23. Тип 12 № 287105

Найдите наименьшее значение функции $y = \log_4(x^2+14x+305)+9$.

Решение. Квадратный трехчлен $y = ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке -7. Функция $y = \log_4(x^2+14x+305)+9$ в этой точке определена и принимает значение $\log_4((-7)^2+14\cdot(-7)+305)+9 = 13$. Поскольку логарифмическая функция с основанием, большим 1, возрастает, найденное значение является искомым наименьшим значением заданной функции.

Ответ: 13.

24. Тип 12 № 525095

Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2+169}$.

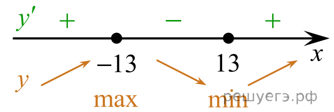
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x}{x^2+169}\right)' =$$
$$= -\frac{(x^2+169)-x(2x)}{(x^2+169)^2} = \frac{x^2-169}{(x^2+169)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2-169 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 169 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=13, \\ x=-13. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 13$.

Ответ: 13.

25. Тип 12 № 124217

Найдите точку максимума функции $y = x^3-192x+14$.

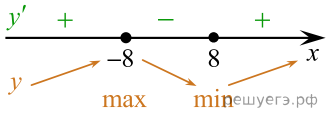
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 192 = 3(x^2 - 64) = 3(x-8)(x+8).$$

Найдем нули производной:

$$3(x-8)(x+8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -8, \\ x = 8. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума: −8.

Ответ: −8.

26. Тип 12 № 517158

Найдите наименьшее значение функции $y = 10\cos x + \frac{36x}{\pi} - 6$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Решение. Найдем производную заданной функции: $y' = \frac{36}{\pi} - 10\sin x$. Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{36}{\pi}\cdot\frac{-2\pi}{3} - 6 = -35.$$

Ответ: −35.

27. Тип 12 № 41087

Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + \ln x + 5$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

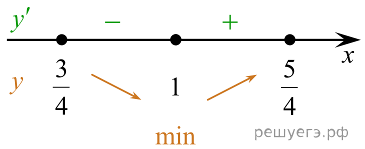
Решение. Область определения функции: $x > 0$.
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = 0, \\ \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции.



В точке $x = 1$ функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(1) = 1\cdot 1 - 3\cdot 1 + 5 = 3.$$

Ответ: 3.

28. Тип 12 № 677170

Найдите наименьшее значение функции $y = (3x^2 + 21x - 21)e^x$ на отрезке [−5; 3].

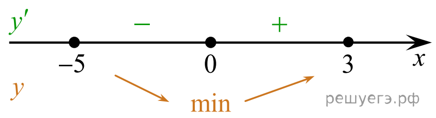
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=(3x^2+21x-21)'e^x+(3x^2+21x-21)(e^x)'=$$
$$=(6x+21)e^x+(3x^2+21x-21)e^x=(3x^2+27x)e^x.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases}(3x^2+27x)e^x=0,\\ -5\leqslant x\leqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+9)=0,\\ -5\leqslant x\leqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-9,\end{array}\right.\\ -5\leqslant x\leqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=0$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(0)=(-21)\cdot e^0=-21.$$

Ответ: −21.

29. Тип 12 № 245181

Найдите точку максимума функции $y=11^{6x-x^2}$.

Решение. Поскольку функция $y=11^x$ возрастающая, заданная функция достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимума выражение $6x-x^2$. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3.

Ответ: 3.

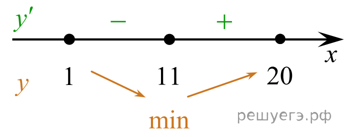
30. Тип 12 № 129931

Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{x^2+121}{x}$ на отрезке $[1;20]$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=\left(\frac{x^2+121}{x}\right)'=\left(x+\frac{121}{x}\right)'=$$
$$=1-\frac{121}{x^2}=\frac{x^2-121}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 11 и −11. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет $y(11)$. Найдем его:

$$y(11)=\frac{121+121}{11}=22.$$

Ответ: 22.

31. Тип 12 № 621773

Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{12+8x-x^2}$.

Решение. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 4. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимума подкоренное выражение.

Ответ: 4.

32. Тип 12 № 26731

Найдите наименьшее значение функции $y=13x-9\sin x+9$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдем производную заданной функции: $y' = 13 - 9\cos x$. Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей.

Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0) = 13 \cdot 0 - 9\sin 0 + 9 = 9.$$

Ответ: 9.

33. Тип 12 № 284025

Найдите точку минимума функции $y = (x-7)^2(x+6)+3$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

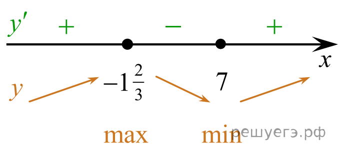
$$y' = ((x-7)^2)'(x+6) + (x-7)^2(x+6)' + 3' =$$

$$= 2(x-7)(x+6) + (x-7)^2 = (x-7)(3x+5).$$

Найдем нули производной:

$$(x-7)(3x+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = -1\frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 7$.

Ответ: 7.

34. Тип 12 № 77455

Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

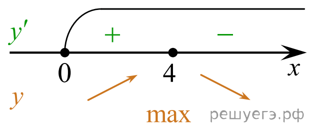
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 6 - 3\sqrt{x}.$$

Найдем нули производной:

$$6 - 3\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 4$.

Ответ: 4.

35. Тип 12 № 526012

Найдите точку максимума функции $y = 2x^2 - 25x + 39\ln x - 54$.

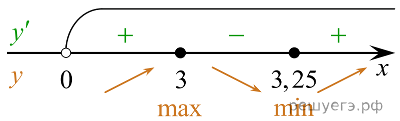
Решение. Функция определена на $(0; +\infty)$. Найдём её производную:

$$y'(x) = 4x - 25 + \frac{39}{x} = \frac{4x^2 - 25x + 39}{x}.$$

Найдем нули производной:

$$4x^2 - 25x + 39 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 3,25. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x_{max} = 3$.

Ответ: 3.

36. Тип 12 № 77500

Найдите точку максимума функции $y=-\dfrac{x}{x^2+289}$.

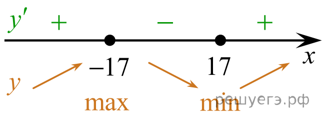
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=-\left(\frac{x}{x^2+289}\right)'=$$
$$=-\frac{1\cdot\left(x^2+289\right)-x\cdot(2x)}{\left(x^2+289\right)^2}=\frac{x^2-289}{\left(x^2+289\right)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2-289=0\Leftrightarrow x^2=289\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=17,\\x=-17.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-17$.

Ответ: −17.

37. Тип 12 № 77460

Найдите наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x}-3x+1$ на отрезке $[1;9]$.

Вариант № 86541352

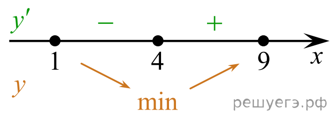
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}-3.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



В точке $x=4$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(4)=8-12+1=-3.$$

Ответ: −3.

38. Тип 12 № 130161

Найдите наибольшее значение функции $y=2x+\dfrac{50}{x}+15$ на отрезке $[-10;-0,5]$.

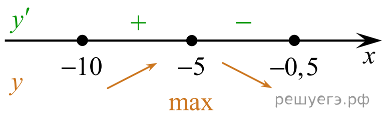
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2 - \frac{50}{x^2}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 2 - \dfrac{50}{x^2} = 0, \\ -10 \leqslant x \leqslant -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25, \\ -10 \leqslant x \leqslant -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -5, \end{array}\right. \\ -10 \leqslant x \leqslant -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -5$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-5) = -10 - 10 + 15 = -5.$$

Ответ: −5.

39. Тип 12 № 4101

Найдите точку минимума функции $y = (x-2)^2 e^{x-5}$.

Вариант № 86541352

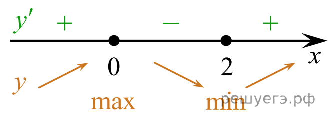
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x-2)^2)' e^{x-5} + ((x-2)^2)(e^{x-5})' =$$
$$= (2(x-2))e^{x-5} + ((x-2)^2)e^{x-5} = x(x-2)e^{x-5}.$$

Найдем нули производной:

$$x(x-2)e^{x-5} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 2$.

Ответ: 2.

40. Тип 12 № 70337

Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x + \frac{21}{\pi}x - 10$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Решение. Найдем производную заданной функции $y' = -6\sin x + \frac{21}{\pi}$. Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей.

Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 6\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{21}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - 10 =$$
$$= -3 - 14 - 10 = -27.$$

Ответ: −27.

41. Тип 12 № 521993

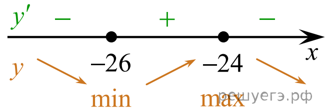
Найдите наименьшее значение функции $y = (x+26)^2 e^{-26-x}$ на отрезке $[-27; -25]$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2(x+26)e^{-26-x} + (x+26)^2 e^{-26-x} \cdot (-1) =$$
$$= (x+26)e^{-26-x}(-x-24).$$

Найдём критические точки и исследуем функцию:

$$-(x+26)e^{-26-x}(x+24) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -26, \\ x = -24 \end{array}\right.$$



Наименьшим значением функции на отрезке [−27; −25] является $y(-26) = 0 \cdot e^0 = 0$.

Ответ: 0.

42. Тип 12 № [245178]

Найдите точку минимума функции $y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$.

Решение. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min} = -\dfrac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3. Поскольку функция $y = \log_5 x$ возрастает и заданная функция $y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$ определена в точке 3, она также достигает в ней минимума.

Ответ: 3.

43. Тип 12 № [674930]

Найдите точку максимума функции $y = (73 - x)e^{x+73}$.

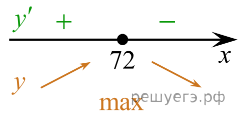
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = (73 - x)' e^{x+73} + (73 - x)(e^{x+73})' =$$
$$= -e^{x+73} + (73 - x)e^{x+73} = (72 - x)e^{x+73}.$$

Найдем нули производной:

$$(72 - x)e^{x+73} = 0 \Leftrightarrow x = 72.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 72$.

Ответ: 72.

44. Тип 12 № [124365]

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 147x + 19$ на отрезке $[0; 8]$.

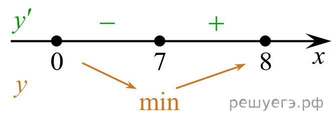
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 147 = 3(x^2 - 49) = 3(x+7)(x-7).$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3(x+7)(x-7) = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = -7, \end{array}\right. \\ 0 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 7$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(7) = 7^3 - 147 \cdot 7 + 19 = 343 - 1029 + 19 = -667.$$

Ответ: −667.

45. Тип 12 № 71087

Найдите наибольшее значение функции $y=\ln(x+11)^{12}-12x$ на отрезке $[-10,5;0]$.

Решение. На заданном отрезке имеем:

$$y=\ln(x+11)^{12}-12x=$$
$$=12\ln|x+11|-12\underset{-10,5\leqslant x\leqslant 0}{=}12\ln(x+11)-12x.$$

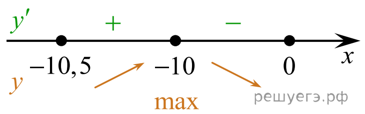
Найдем производную заданной функции:

$$y'=\frac{12}{x+11}-12.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases}\dfrac{12}{x+11}-12=0,\\ -10,5\leqslant x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+11}=1,\\ -10,5\leqslant x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-10,\\ -10,5\leqslant x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow x=-10.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=-10$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-10)=\ln 1+12\cdot 10=120.$$

Ответ: 120.

46. Тип 12 № 500916

Найдите точку максимума функции $y=\log_3(11+4x-x^2)-2$.

Решение. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $x=-\dfrac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 2. Функция $y=\log_3(11+4x-x^2)$ в этой точке определена. Поскольку логарифмическая функция с основанием, большим единицы, возрастает, то 2 — точка максимума функции.

Ответ: 2.

47. Тип 12 № 3531

Найдите наибольшее значение функции $y=10\sin x-\dfrac{36}{\pi}x+7$ на отрезке $\left[-\dfrac{5\pi}{6};0\right]$.

Решение. Найдем производную заданной функции: $y'=10\cos x-\dfrac{36}{\pi}$. Уравнение $y'=0$ не имеет решений, производная отрицательна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является убывающей. Следовательно, наибольшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=10\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{36}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{6}+7=$$
$$=-5+30+7=32.$$

Ответ: 32.

48. Тип 12 № 129901

Найдите точку минимума функции $y=-\dfrac{x^2+676}{x}$.

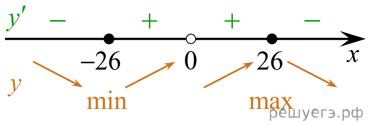
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x^2+676}{x}\right)' = -\left(x+\frac{676}{x}\right)' =$$
$$= -\left(1-\frac{676}{x^2}\right) = -1+\frac{676}{x^2} = \frac{676-x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$676-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=676 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=26, \\ x=-26. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=-26$.

Ответ: −26.

49. Тип 12 № 70837

Найдите точку минимума функции $y=(x+54)e^{x-54}$.

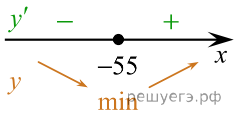
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x+54)'e^{x-54}+(x+54)(e^{x-54})' =$$
$$= e^{x-54}+(x+54)e^{x-54} = (x+55)e^{x-54}.$$

Найдем нули производной:

$$(x+55)e^{x-54}=0 \Leftrightarrow x=-55.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=-55$.

Ответ: −55.

Вариант № 86541352

50. Тип 12 № 127783

Найдите точку максимума функции $y=\frac{x^3}{3}-x+14$.

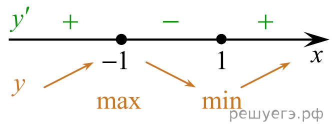
Решение. \vec{a}Найдем производную заданной функции:

$$y' = x^2-1 = (x-1)(x+1).$$

Найдем нули производной:

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-1$.

Ответ: −1.