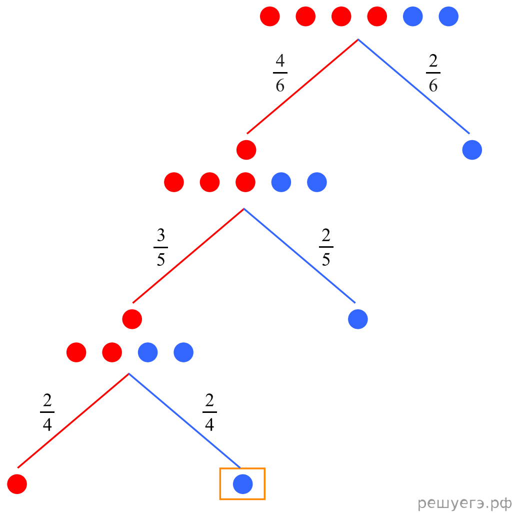
1. Тип 5 № 508840

В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Решение. Изобразим с помощью дерева возможные исходы. Последовательность исходов, приводящая к событию «первый раз синий фломастер появится третьим по счету» выделена оранжевым цветом. Искомая вероятность равна

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{5}=0,2.$$



Ответ: 0,2.

2. Тип 5 № 508893

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 5 и 6 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 5 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Вариант № 86541244

Решение. На первом кубике 5 и 6 в каком-либо порядке могут выпасть следующим образом: при первом бросании 5, при втором 6 или наоборот. Всего 2 способа. Вероятность каждого из них равна $\frac{1}{36}$.

Чтобы 5 и 6 в каком-то порядке выпали на втором кубике, он первый раз может выпасть любой гранью, а второй раз тремя гранями с количеством очков, отличным от выпавшего первый раз. Всего есть $6\cdot3=18$ способов. Вероятность каждого из них также равна $\frac{1}{36}$.

Таким образом, всего есть 20 равновероятных вариантов получить 5 и 6, из них второму кубику соответствует 18 вариантов. Следовательно, вероятность того, что бросали второй кубик, равна $\frac{18}{20}$, то есть 0,9.

Ответ: 0,9.

3. Тип 5 № 320443

В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится чай, равна 0,3. Такова же вероятность, что чай закончится во втором автомате. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

Решение. Вероятность того, что чай останется в первом автомате, равна $1-0,3=0,7$. Вероятность того, что чай останется во втором автомате также равна 0,7. Вероятность того, что чай останется хотя бы в одном автомате, равна $1-0,12=0,88$. Так как

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B),$$

то

$$0,88=0,7+0,7-x\Leftrightarrow x=0,52.$$

Ответ: 0,52.

4. Тип 5 № 508819

При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование.

При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

Решение. Пусть событие A — пациент болен, событие B — тест выявляет наличие заболевания. Тогда $P(A) = x$ — вероятность того, что пациент болен. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86% случаев, значит, вероятность того, что пациент болен и тест подтверждает это, равна $P(AB) = x \cdot 0{,}86$. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в 94% случаев, значит, вероятность того, что пациент не болен, а тест дал положительный результат, равна $(1 - x) \cdot (1 - 0{,}94)$. Тогда вероятность того, что тест окажется положительным, равна $P(B) = x \cdot 0{,}86 + (1-x) \cdot (1-0{,}94) = 0{,}1$. Отсюда выразим x:

$$x \cdot 0{,}86 + (1-x)\cdot(1-0{,}94) = 0{,}1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \cdot 0{,}86 + (1-x)\cdot 0{,}06 = 0{,}1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}86x + 0{,}06 - 0{,}06x = 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}8x = 0{,}04 \Leftrightarrow x = 0{,}05.$$

Тогда вероятность того, что человек, у которого тест оказался положительным, действительно имеет заболевание, равна

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}86}{0{,}1} = \frac{0{,}043}{0{,}1} = 0{,}43.$$

Ответ: 0,43.

Приведем решение Виталия Вяликова.

Пусть x — число больных пациентов и y — число здоровых. Тогда всего имеется $x + y$ пациентов. Общее число положительных ПЦР-тестов по условию равно $0{,}1(x + y)$, из которых $0{,}86x$ тестов приходится на больных пациентов и $0{,}06y$ тестов — на здоровых. Тогда

$$0{,}1(x+y) = 0{,}86x + 0{,}06y \Leftrightarrow y = 19x.$$

Поэтому вероятность того, что положительный ПЦР-тест был взят у больного пациента, равна

$$\frac{0{,}86x}{0{,}1(x+19x)} = \frac{0{,}86x}{2x} = 0{,}43.$$

5. Тип 5 № 530683

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 5 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 4 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

Решение. Команда может получить не меньше 5 очков в двух играх тремя способами: 1+4, 4+4, 4+1. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Каждое из этих событий представляет собой произведение двух независимых событий — результата в первой и во второй игре. Отсюда имеем:

$$P(N \geqslant 5) = P(4+4) + P(4+1) + P(1+4) =$$
$$= P(4)\cdot P(4) + P(4)\cdot P(1) + P(1)\cdot P(4) =$$
$$= 0{,}2\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}6 + 0{,}6\cdot 0{,}2 =$$
$$= 0{,}04 + 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}28.$$

Ответ: 0,28.

6. Тип 5 № 508791

В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «Шеш-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплемент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплемент? Результат округлите до сотых.

Решение. Сначала найдём вероятность того, что при двух бросках игральных костей комбинация 5 и 6 очков не выпадет ни разу. Заметим, что вероятность выбросить комбинацию 5 и 6 очков складывается из двух несовместных событий: на первом кубике выпало 5 очков, а на втором кубике выпало 6 очков или на первом кубике выпало 6 очков, а на втором кубике выпало 5 очков. Тогда вероятность того, что при броске двух игральных костей выпадет комбинация 5 и 6 очков, равна

$$p = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Вероятность противоположного события, состоящего в том, что при одном броске костей комбинация 5 и 6 очков не выпадет, равна

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}.$$

Каждое бросание костей не зависит от предыдущего. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что при двух бросках игральных костей комбинация 5 и 6 очков не выпадет ни разу, равна $\frac{17}{18}\cdot\frac{17}{18} = \frac{289}{324}$. Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что при двух бросаниях игральных костей комбинация 5 и 6 очков выпадет хотя бы один раз, равна

$$1 - \frac{289}{324} = \frac{35}{324} = 0{,}108\ldots$$

Округляя до сотых, получим 0,11.

Ответ: 0,11.

Приведем другое решение.

Пусть событие A состоит в том, что при первом бросании выпала комбинация 5 и 6 очков, а событие B состоит в том, что при втором бросании выпала комбинация 5 и 6 очков. $P(A)=P(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. Событие, состоящее в том, что комбинация 5 и 6 очков выпадет хотя бы один раз из двух попыток, является суммой этих событий. События A и B являются совместными и независимыми, вероятность их суммы вычисляется по формуле:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{18}=0,108...$$

Округляя до сотых, получим 0,11.

Приведем решение Надежды Козловой.

Пусть событие A состоит в том, что при первом бросании выпала комбинация 5 и 6 очков, а событие C состоит в том, что при первом бросании комбинация 5 и 6 очков не выпала, а при втором бросании выпала. Тогда $P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$, $P(C)=\left(1-\frac{1}{18}\right)\cdot\frac{1}{18}=\frac{17}{18^2}$. Эти события являются несовместными, вероятность их суммы равна сумме их вероятностей:

$$P(A+C)=P(A)+P(C)=\frac{1}{18}+\frac{17}{18^2}=\frac{35}{324}=0,108...$$

Округляя до сотых, получим 0,11.

Примечание.

Напомним читателям, что *комплимент* — это приятные слова в чей-то адрес, а *комплемент* это — дополнение, добавление к чему-либо. По условию задачи при удачном исходе игры посетитель ресторана получает бесплатное дополнение к своему заказу — комплемент от ресторана.

7. Тип 5 № 320457

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,3. Такова же вероятность, что кофе закончится во втором автомате. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,14. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется только в одном из автоматов.

Решение. Вероятность того, что кофе останется в первом автомате, равна 0,7. Такая же вероятность того, что кофе останется во втором автомате. Вероятность того, что кофе останется хотя бы в одном автомате, равна 0,86. Используя формулу вероятности совместных событий, найдем вероятность того, что кофе останется в обоих автоматах:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=$$
$$=0,7+0,7-0,86=0,54.$$

Вероятность того, что кофе останется ровно в одном автомате, равна

$$P(A\cup B)-P(A\cap B)=0,86-0,54=0,32.$$

Ответ: 0,32.

8. Тип 5 № 508780

Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли. Найдем вероятность события А, состоящего в том, что при десяти бросаниях выпадет ровно 5 орлов:

$$P(A)=C_{10}^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Аналогично найдем вероятность события В, состоящего в том, что при десяти бросаниях выпадет ровно 4 орла:

$$P(B)=C_{10}^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

Тогда

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{C_{10}^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{C_{10}^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}=\frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\frac{4!\cdot 6!}{10!}=\frac{6}{5}=1,2.$$

Ответ: 1,2

Приведем решение Ирины Шраго.

Вероятность того, что выпадет ровно 5 орлов, равна отношению количества вариантов, при которых выпадает ровно 5 орлов, к общему количеству вариантов: $P(A)=\frac{N(A)}{N}$. Вероятность того, что выпадет ровно 4 орла, равна отношению количества вариантов, при которых выпадает ровно 5 орлов, к общему количеству вариантов: $P(A)=\frac{N(A)}{N}$. Вероятность того, что выпадет ровно 4 орла, равна отношению количества вариантов, при которых выпадает ровно 4 орла, к общему количеству вариантов: $P(B)=\frac{N(B)}{N}$. Тогда отношение этих вероятностей $\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{N(A)}{N(B)}$.

Количество вариантов, при которых выпадет ровно 5 орлов, равно $C_{10}^5=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5!}$.

Количество вариантов, при которых выпадет ровно 4 орла, равно $C_{10}^4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4!}$.

Тогда

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5!}:\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4!}=$$
$$=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=\frac{6}{5}=1{,}2.$$

9. Тип 5 № 676848

Мастер обслуживает 6 станков. Вероятность поломки одного станка в течение дня равна $\frac{1}{3}$. Во сколько раз вероятность события «в течение дня ровно два станка потребуют ремонта» больше, чем вероятность события «в течение дня ровно 3 станка потребуют ремонта»?

Решение. Вероятность противоположного события, состоящего в том, что поломка не произойдет, равна $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Для нахождения вероятности события «в течение дня ровно два станка потребуют ремонта» воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_6(2)=C_6^2p^2q^4=\frac{6!}{(6-2)!\cdot2!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=$$
$$=15\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

Вероятность события «в течение дня ровно 3 станка потребуют ремонта» равна

$$P_6(3)=C_6^3p^3q^3=\frac{6!}{(6-3)!\cdot3!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=$$
$$=20\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Теперь найдём искомое отношение вероятностей:

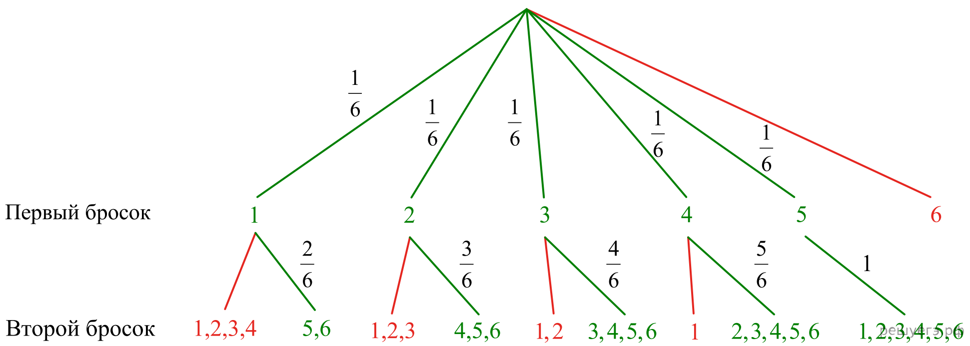
$$\frac{P_6(2)}{P_6(3)}=\frac{15\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4}{20\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{3}{4}\cdot3\cdot\frac{2}{3}=1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

10. Тип 5 № 508802

Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно два броска? Ответ округлите до тысячных.

Решение. Изобразим с помощью дерева возможные исходы. Зелёным цветом отмечены исходы, удовлетворяющие условию «Сумма очков превысила число 5 ровно за два броска». Красным цветом отмечены исходы, неудовлетворяющие этому.



Искомая вероятность равна

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{20}{36}=0,55555...$$

Округляя до тысячных, получаем 0,556.

Ответ: 0,556.

Примечание.

Заметим, что фраза «игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5» означает, что игральную кость продолжали бросать, если сумма всех выпавших очков была меньше или равна пяти, и прекратили бросать, когда эта сумма превысила 5. Следовательно, если потребовалось два броска, то именно на втором броске сумма должна была превысить 5.

Приведем другое решение:

Составим таблицу исходов после двух бросков. Общее число исходов равно 36. Зелёным цветом отмечены исходы удовлетворяющие условию «сумма очков превысила число 4 ровно за два броска». Число благоприятных исходов равно 18.

Тогда искомая вероятность равна:

$$\frac{20}{36}=0,55555...$$

Округляя до тысячных, получаем 0,556.

Ответ: 0,556.

11. Тип 5 № 508796

Правильный игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не стала больше чем 2. Известно, что общая сумма очков оказалась равна 3. Какова вероятность того, что было сделано ровно три броска? Ответ округлите до сотых.

Решение. Рассмотрим все возможные испытания, приводящие на каком-то шаге к сумме 3 очка:

$$111...,\ 12x...,\ 21x...,\ 3xx...,$$

где на месте x может быть любое число от 1 до 6, а на месте многоточия может стоять сколько угодно (одинаково для всех испытаний) x. Максимальное число бросков равно трем, поэтому подходят только варианты 111, 12x, 21x, 3xx, таких вариантов

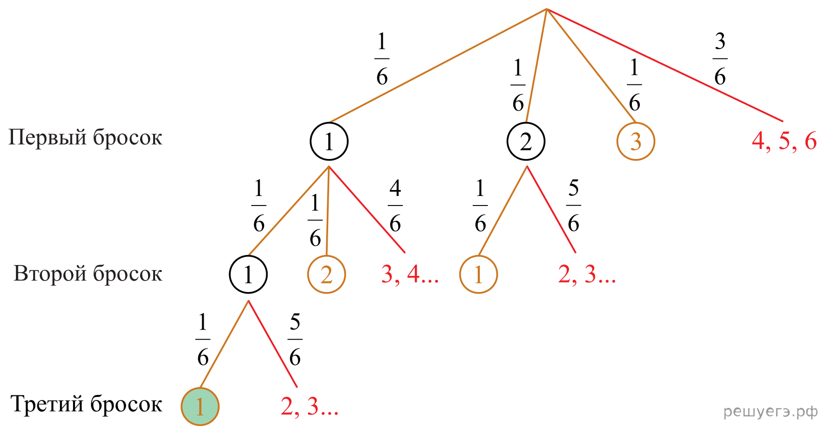
$$1+6+6+36=49.$$

Условию, что были сделаны ровно три броска, удовлетворяет лишь случай 111, такой вариант один. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{49}=0,0204\ldots$ Округляя до сотых, получаем 0,02.

Ответ: 0,02.

Приведем другое решение.

Пусть событие A состоит в том, сумма всех выпавших в результате одного или нескольких бросаний очков равна 3. Построим дерево вариантов, приводящих к этому событию. Исходы приводящие к этому событию отмечены оранжевым цветом.



Найдем вероятность $P(A)$:

$$P(A)=\left(\frac{1}{6}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}.$$

Пусть событие B состоит в том, что было сделано три броска. Тогда искомая вероятность $P(B|A)$ события B при условии, что событие A наступило (вероятность того, что было сделано три броска, при условии что суммарно выпало 3 очка) определяется по формуле условной вероятности $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$. Вероятность произведения событий B и A, то есть события, в котором при третьем бросании кости суммарно выпало 3 очка (выделено салатовым цветом), равна $\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$.

Тогда для искомой вероятности получаем:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3}{\left(\frac{1}{6}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}}=$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3}{\frac{1}{6}\cdot\left(\left(\frac{1}{6}\right)^2+2\cdot\frac{1}{6}+1\right)}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}+1\right)^2}=\frac{1}{49}=0,0204...$$

Округляя до сотых, получаем 0,02.

Ответ: 0,02.

12. Тип 5 № 508830

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

Решение. Вероятность попадания в мишень равна 0,2. Вероятность противоположного события — промаха — равна $1-0,2=0,8$. Заметим, что вероятность поражения цели после n выстрелов равна $1-0,8^n$. Таким образом, задача сводится к решению неравенства

$$1-0,8^n\geqslant 0,6\Leftrightarrow 0,8^n\leqslant 0,4.$$

При $n=2$ получаем $0,8^2=0,64$. При $n=3$ получаем $0,8^3=0,512$. При $n=4$ получаем $0,8^4=0,4096$. При $n=5$ получаем $0,8^5=0,32768$. Таким образом, ответ — 5.

Ответ: 5.

Приведем другое решение.

Решим задачу по действиям.

Вероятность поразить мишень с первого выстрела равна 0,2.

Вариант № 86541244

Вероятность поразить мишень со второго выстрела, то есть промахнуться первый раз и попасть второй раз, равна $0,8\cdot 0,2=0,16$. Тогда вероятность поразить мишень за два выстрела равна $0,2+0,16=0,36$.

Вероятность поразить мишень с третьего выстрела равна $0,8\cdot 0,8\cdot 0,2=0,128$. Тогда вероятность поразить мишень за три выстрела равна $0,36+0,128=0,488$.

Вероятность поразить мишень с четвертого выстрела равна $0,8\cdot 0,8\cdot 0,8\cdot 0,2=0,1024$. Тогда вероятность поразить мишень за четыре выстрела равна $0,488+0,1024=0,5904$.

Вероятность поразить мишень с пятого выстрела равна равна $0,8\cdot 0,8\cdot 0,8\cdot 0,8\cdot 0,2=0,08192$. Тогда вероятность поразить мишень за пять выстрелов равна равна $0,5904+0,08192=0,67232$. Эта вероятность превышает 0,6, следовательно, достаточно пяти выстрелов и, соответственно, пяти патронов.

13. Тип 5 № 561720

При изготовлении подшипников диаметром 72 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше чем на 0,01 мм, равна 0,97. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 71,99 мм или больше чем 72,01 мм.

Решение. По условию, диаметр подшипника будет лежать в пределах от 71,99 до 72,01 мм с вероятностью 0,97. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна $1-0{,}97\ =\ 0{,}03$.

Ответ: 0,03.

14. Тип 5 № 508854

Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

Решение. Сначала найдём вероятность попасть в мишень с первого или второго выстрела: $0,8+0,2\cdot 0,8=0,96$. Соответственно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что стрелок не попадёт в мишень с двух выстрелов, равна 1 − 0,96 = 0,04.

Вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» равна $P_5(5)=0{,}96^5$. Для нахождения вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени» воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_5(4)=C_5^4p^4q^1=$$
$$=\frac{5!}{(5-4)!\cdot 4!}\cdot 0,96^4\cdot 0,04=5\cdot 0,96^4\cdot 0,04.$$

Теперь найдём искомое отношение вероятностей:

$$\frac{P_5(5)}{P_5(4)}=\frac{0,96^5}{5\cdot 0,96^4\cdot 0,04}=\frac{0,96}{0,2}=4,8.$$

Ответ: 4,8.

15. Тип 5 № 663473

В коробке 7 красных и 3 синих шара. Случайным образом из коробки извлекают 5 шаров. Какова вероятность события «среди извлеченных не более 3 красных шаров»?

Решение. При извлечении 5 шаров из 10, находящихся в коробке, среди них может оказаться пять, четыре, три или два красных. Тогда вероятность извлечь два или три красных шара равна вероятности не извлечь два или три красных шара. Следовательно, каждая их этих вероятностей равна 0,5.

Ответ: 0,5.

Изложим это же решение более подробно.

При извлечении 5 шаров наступает одно из четырех несовместных событий A — D, представленных в таблице.

Событие	Извлеченные шары	Шары, оставшиеся в коробке
A	5 красных	2 красных и 3 синих
B	4 красных и 1 синий	3 красных и 2 синих
C	3 красных и 2 синих	4 красных и 1 синий
D	2 красных и 3 синих	5 красных

События A, D и B, C симметричны, их вероятности попарно равны. Пусть $P(A)=P(D)=x$, $P(B)=P(C)=y$, тогда:

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=x+y+y+x=1.$$

Следовательно, $2(x+y)=1$. Событие «среди извлеченных не более 3 красных шаров» является суммой несовместных событий C и D, откуда находим:

$$P(C+D)=P(C)+P(D)=x+y=0,5.$$

Ответ: 0,5.

Приведем другое решение.

Извлечь пять шаров из десяти можно C_{10}^5 способами. Извлечь пять шаров так, чтобы среди них оказалось не более трех красных можно лишь в двух случаях: извлечь три красных шара и два синих или извлечь два красных и три синих. Число элементарных исходов, соответствующих первому случаю, равно $C_7^3\cdot C_3^2$, второму случаю — $C_7^2\cdot C_3^3$.Шары извлекали случайным образом, значит, все элементарные исходы равновероятны, следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{C_7^3\cdot C_3^2+C_7^2\cdot C_3^3}{C_{10}^5}=\frac{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3+\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\cdot 1}{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{126}{252}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

16. Тип 5 № 525014

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате следующих событий: батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или батарейка исправна, но по ошибке забракована. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0,03\cdot 0,95$ и $0,97\cdot 0,04$.

События быть неисправной батарейкой или быть исправной образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно происходит), поэтому можно применить формулу полной вероятности. Получим:

$$0,0285+0,0388=0,0673.$$

Ответ: 0,0673.

17. Тип 5 № 651052

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 55% этих стекол, вторая — 45%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стекол, а вторая — 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Вероятность того, что стекло сделано на первой фабрике и оно бракованное: 0,55 · 0,04 = 0,022.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике и оно бракованное: 0,45 · 0,02 = 0,009.

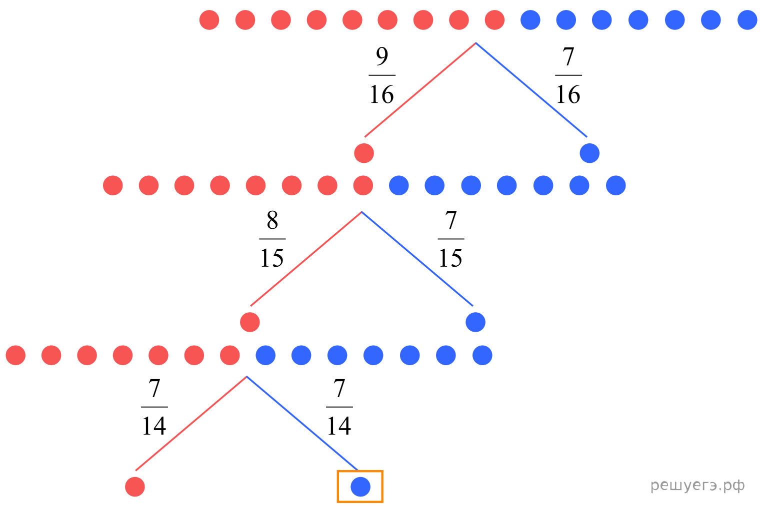
Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна 0,022 + 0,009 = 0,031.

Ответ: 0,031.

18. Тип 5 № 508846

В ящике девять красных и семь синих фломастеров. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Решение. Изобразим с помощью дерева возможные исходы.



Последовательность исходов, приводящая к событию «первый раз синий фломастер появится третьим по счету» выделена оранжевым цветом. Искомая вероятность равна

$$\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}=\frac{3}{20}=0,15.$$

Ответ: 0,15.

19. Тип 5 № 508766

При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 3 очка?

Решение. При двукратном бросании игральной кости 6 очков может получится только в пяти случаях: 1 + 5, 2 + 4, 3 + 3, 4 + 2 и 5 + 1. При этом 3 очка выпадало только в одном из этих случаев. Значит, вероятность того, что хотя бы раз выпало 3 очка равна

$$\frac{N_{\text{благопр.}}}{N_{\text{общ.}}}=\frac{1}{5}=0,2.$$

Ответ: 0,2.

20. Тип 5 № 509313

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что масса буханки меньше, чем 810 г, а событие B состоит в том, что масса буханки больше чем 790 г. Необходимо вычислить вероятность произведения этих событий. Сумма этих событий является событием достоверным, его вероятность равна 1. В то же время $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, поскольку события A и B совместные. Подставляя известные значения, находим искомую вероятность:

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=$$
$$=0,97+0,91-1=0,88.$$

Ответ: 0,88.

21. Тип 5 № 663476

Стрелок стреляет в тире по восьми одинаковым мишеням. Вероятность попасть в каждую мишень при каждом выстреле одна и та же. Чтобы сбить все восемь мишеней, стрелку потребовалось 11 выстрелов. Какова вероятность того, что первыми пятью выстрелами стрелок сбил меньше четырёх мишеней?

Решение. Условие «чтобы сбить восемь мишеней, стрелку потребовалось 11 выстрелов» означает, что последний выстрел был попаданием. Значит, за первые 10 выстрелов стрелок поразил ровно 7 мишеней. В любую из мишеней при каждом выстреле стрелок попадает с неизменной вероятностью. Тогда вероятность сбить две или три мишени первыми пятью выстрелами равна вероятности сбить их последними пятью выстрелами. Следовательно, каждая их этих вероятностей равна 0,5.

Ответ: 0,5.

Изложим это же решение более подробно.

Условие «чтобы сбить восемь мишеней, стрелку потребовалось 11 выстрелов» означает, что последний выстрел был попаданием. Значит, за первые 10 выстрелов стрелок 7 раз попал по мишеням и 3 раза промахнулся. Это могло произойти лишь в результате наступления четырех несовместных событий A — D, представленных в таблице.

Событие	Выстрелы с 1-го по 5-й	Выстрелы с 6-го по 10-й
A	5 попаданий	2 попадания и 3 промаха
B	4 попадания и 1 промах	3 попадания и 2 промаха
C	3 попадания и 2 промаха	4 попадания и 1 промах
D	2 попадания и 3 промаха	5 попаданий

События A, D и B, C симметричны, их вероятности попарно равны. Пусть $P(A) = P(D) = x$, $P(B) = P(C) = y$, тогда:

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = x+y+y+x = 2(x+y).$$

Следовательно, $2(x+y) = 1$. Событие «первыми пятью выстрелами стрелок сбил меньше четырёх мишеней» является суммой несовместных событий C и D, откуда находим:

$$P(C+D) = P(C)+P(D) = x+y = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Приведем другое решение.

Условие «чтобы сбить восемь мишеней, стрелку потребовалось 11 выстрелов» означает, что последний выстрел был попаданием. Значит, за первые 10 выстрелов стрелок поразил ровно 7 мишеней, а промахнулся ровно 3 раза. Промахнуться три раза из десяти можно C_{10}^3 способами.

Сбить три или две мишени первыми пятью выстрелами можно лишь в двух случаях: промахнуться два раза или промахнуться три раза. В первом случае среди оставшихся пяти выстрелов был один промах. Во втором случае из пяти оставшихся выстрелов промахов не было. Все элементарные исходы равновероятны, следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{C_5^2 \cdot C_5^1 + C_5^3 \cdot C_5^0}{C_{10}^3} = \frac{10\cdot 5 + 10\cdot 1}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{60}{120} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

22. Тип 5 № 320187

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

В ответе укажите наименьшее необходимое количество выстрелов.

Решение. Найдем вероятность противоположного события, состоящего в том, что цель не будет уничтожена за n выстрелов. Вероятность промахнуться при первом выстреле равна 1 − 0,4 = 0,6, а при каждом следующем 1 − 0,6 = 0,4. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятности этих событий. Поэтому вероятность промахнуться при n выстрелах равна: $0,6\cdot 0,4^{n-1}$.

Осталось найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$0,6\cdot 0,4^{n-1} < 0,02 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} < \frac{1}{30}.$$

Последовательно проверяя значения n, равные 1, 2, 3 и т. д., находим, что искомым решением является $n = 5$. Следовательно, необходимо сделать 5 выстрелов.

Ответ: 5.

Примечание.

Можно решать задачу «по действиям», вычисляя вероятность уцелеть после ряда последовательных промахов.

$P(1)$ = 0,6.
$P(2)$ = $P(1)$·0,4 = 0,24.
$P(3)$ = $P(2)$·0,4 = 0,096.
$P(4)$ = $P(3)$·0,4 = 0,0384.
$P(5)$ = $P(4)$·0,4 = 0,01536.

Последняя вероятность меньше 0,02, поэтому достаточно пяти выстрелов по мишени.

Приведем другое решение.

Вероятность поразить мишень равна сумме вероятностей поразить ее при первом, втором, третьем и т. д. выстрелах. Поэтому задача сводится к нахождению наименьшего натурального решения неравенства

$$0,4+0,6\cdot 0,6+0,6\cdot 0,4\cdot 0,6+$$
$$+0,6\cdot 0,4\cdot 0,4\cdot 0,6+\ldots+0,6^2\cdot 0,4^{n-2} \geqslant 0,98.$$

В нашем случае неравенство решается подбором, в общем случае понадобится формула суммы геометрической прогрессии, использование которой сведет задачу к простейшему логарифмическому неравенству.

23. Тип 5 № 549306

Стрелок при каждом выстреле поражает мишень с вероятностью 0,3, независимо от результатов предыдущих выстрелов. Какова вероятность того, что он поразит мишень, сделав не более 3 выстрелов?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень поражена стрелком с первого выстрела, B — событие, состоящее в том, что первый раз стрелок промахнулся, а со второго выстрела поразил мишень, а событие C — событие, состоящее в том, что первые два раза стрелок промахнулся, а с третьего выстрела поразил мишень. Вероятность события A равна $P(A) = 0{,}3$. Событие B является произведением двух независимых событий, поэтому его вероятность равна произведению вероятностей этих событий: $P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$. Событие C является произведением трех независимых событий, поэтому его вероятность равна произведению вероятностей этих событий: $P(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}147$. События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}3 + 0{,}21 + 0{,}147 = 0{,}657.$$

Ответ: 0,657.

Приведём еще одно решение.

Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень не поражена.

$$P(A) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,343.$$

Тогда искомая вероятность представляет собой вероятность противоположного события $\overline{A}$– мишень поражена.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,343 = 0,657.$$

Ответ: 0,657.

24. Тип 5 № 508820

При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 91% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 93% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование.

При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

Решение. Пусть событие A — пациент болен, событие B — тест выявляет наличие заболевания. Тогда $P(A) = x$ — вероятность того, что пациент болен. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 91% случаев, значит, вероятность того, что пациент болен и тест подтверждает это, равна $P(AB) = x \cdot 0{,}91$. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в 93% случаев, значит, вероятность того, что пациент не болен, а тест дал положительный результат, равна $(1 - x) \cdot (1 - 0{,}93)$. Тогда вероятность того, что тест окажется положительным, равна $P(B) = x \cdot 0,91 + (1 - x) \cdot (1 - 0,93) = 0,1$. Отсюда выразим x:

$$x \cdot 0,91 + (1 - x) \cdot (1 - 0,93) = 0,1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \cdot 0,91 + (1 - x) \cdot 0,07 = 0,1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,91x + 0,07 - 0,07x = 0,1 \Leftrightarrow 0,84x = 0,03 \Leftrightarrow x = \frac{1}{28}.$$

Тогда вероятность того, что человек, у которого тест оказался положительным, действительно имеет заболевание, равна

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{28} \cdot 0,91}{0,1} = \frac{13}{40} = 0,325.$$

Ответ: 0,325.

25. Тип 5 № 628482

Платежный терминал в течение рабочего дня может выйти из строя. Вероятность этого события 0,04. В торговом центре независимо друг от друга работают два таких платёжных терминала. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них в течение рабочего дня будет исправен.

Решение. Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}04 \cdot 0{,}04 = 0{,}0016$. Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}0016 = 0{,}9984$.

Ответ: 0,9984.

26. Тип 5 № 508808

Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

Решение. Вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток, равна сумме вероятностей того, что сообщение будет передано с первой попытки, и того, что сообщение будет передано со второй попытки. Вероятность неудачной отправки равна $1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Тогда искомая вероятность равна

$$0,4+0,6\cdot 0,4=0,64.$$

Ответ: 0,64.

Приведем другое решение.

Вероятность того, что сообщение не будет отправлено за две попытки, равна $(1-0,4)^2=0,36$. Искомая вероятность противоположного события равна $1-0,36=0,64$.

27. Тип 5 № 525736

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,81. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 19.

Решение. Рассмотрим события A = «в автобусе меньше 12 пассажиров» и B = «в автобусе от 12 до 19 пассажиров». Их сумма — событие A + B = «в автобусе меньше 20 пассажиров». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,81 = 0,56 + P(B), откуда P(B) = 0,81 − 0,56 = 0,25.

Ответ: 0,25.

28. Тип 5 № 508866

В викторине участвуют 6 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трёх играх победила команда A. Какова вероятность того, что эта команда выиграет четвёртый раунд?

Решение. Команда A уже обыграла три команды, поэтому, если расставить их по силе в порядке возрастания, получится

$$\text{П П П } A,$$

где П — проигравшая команда. Следующий соперник может располагаться на одном из пяти равновероятных мест:

$$\text{\_П\_П\_П\_}A\text{\_}$$

Из этих пяти положений четыре находятся слева от A, и в этих случаях команда A победит, а одно справа, при этом команда A проиграет. Значит, вероятность победы команды A в четвёртом раунде равна

$$P(A)=\frac{4}{5}=0,8.$$

Ответ: 0,8.

Решим задачу в общем виде.

Предыдущее решение было прислано нам Дмитрием Казанцевым. Ниже мы обобщим его на случай произвольного числа команд и выигранных партий.

Упорядочим по силе в порядке возрастания команду A и k проигравших команд П. Для следующей команды есть $k + 2$ равновероятных места, из них $k + 1$ место, где она слабее A.

$$\overbrace{\underbrace{\text{\_П\_П\_}\ldots\text{\_П\_}}_{k+1\ \text{промежуток}}A\text{\_}}^{k+2\ \text{промежутка}}$$

Поэтому вероятность выиграть в следующем раунде равна $\frac{k+1}{k+2}$, а вероятность проиграть равна $\frac{1}{k+2}$. Эти вероятности зависят лишь от количества выигранных ранее партий и не зависит от общего числа команд.

Другое доказательство приведено в работе И. В. Яковлева ЕГЭ-викторина.

Приведем решение Дмитрия Сузана.

Обозначим команды А, Б, В, Г, Д, Е, и пусть Б, В, Г — уже проигравшие команды. Отсортируем команды по возрастанию силы слева направо. Тогда команды Б, В, Г точно находятся слева от А, но неясно, в каком порядке по отношению друг к другу. Команды Д и Е могут находиться как левее, так и правее команды А.

$$\text{\_Б\_В\_Г\_}A\text{\_ \_}$$

Найдем количество возможных перестановок команд: команда Б стоит слева от А; команда В находится или левее от Б, или между Б и А; команда Г — или справа от В, или между Б и В, или между А и Б и так далее. Всего 1 · 2 · 3 · 5 · 6 вариантов. (1)

Если в четвертом раунде команда А выиграет у Д, то Д займет место слева от А.

_Б_В_Г_Д_*А*_

Количество таких мест $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6$ вариантов. (2)

Разделив (2) на (1), получим 0,8.

Приведем решение Олега Гайнуллина.

Найдем, с какой вероятностью победит команда X, против которой играет A в четвёртом раунде. Она побеждает тогда и только тогда, когда она является более сильной, чем все команды, которые играли до неё (так как до команды X дойдет самая сильная команда из всех уже сыгравших). Следовательно, X побеждает, если она является сильнейшей командой в списке из пяти случайных команд, вероятность такого события $\frac{1}{5}$. Поэтому вероятность того, что в игре с X победит A, равна $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

Примечание.

Из этого решения следует, что вероятность победы X над любой дошедшей до четвёртого тура командой равна $\frac{1}{5}$. Ещё из этого решения становится очевидно, что количество команд не имеет значения, важно только количество раундов, а потому легко выводится формула для общего случая: $1-1/(n+1)=n/(n+1)$, где n — количество раундов.

Приведем другое решение.

Поскольку команда A победила в первых трёх играх, она является либо сильнейшей среди всех команд, либо второй по силе, либо третьей по силе. Рассмотрим три случая.

Первый случай — команда A — сильнейшая. Выпишем все команды в порядке возрастания силы: *xxxxxA*, где x — некоторая команда. Тогда есть $1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ способов расположить по силе остальные команды. Поскольку команда A является сильнейшей, вероятность выигрыша в четвёртом раунде равна 1.

Второй случай — команда A является второй по силе среди всех команд. Выпишем все команды в порядке возрастания силы: *xxxxAx*, где x — некоторая команда. Заметим, что справа от команды A может располагаться одна из двух ещё не проигравших ей команд, значит, есть $2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 48$ способов расположить по силе остальные команды. Поскольку к четвёртому раунду в игре, кроме команды A, остались ещё две команды, одна из которых слабее команды A, вероятность победы команды A в четвёртом раунде равна 0,5.

Третий случай — команда A является третьей по силе среди всех команд. Выпишем все команды в порядке возрастания силы: *xxxAxx*, где x — некоторая команда. Заметим, что справа от команды A могут располагаться две ещё не проигравшие ей команды, а слева — три проигравших ей команды, значит, есть $2\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 12$ способов расположить по силе остальные команды. Поскольку к четвёртому раунду в игре, кроме команды A, остались ещё две команды, обе из которых сильнее команды A, вероятность победы команды A в четвёртом раунде равна 0.

Таким образом, поскольку известно, что некоторые три команды слабее команды A, всего имеется $120 + 48 + 12 = 180$ способов расположить шесть команд по силе. Поскольку три вышеперечисленных случая — несовместные события, вероятность победы команды A в четвёртом раунде равна

$$\frac{120}{180}\cdot 1+\frac{48}{180}\cdot\frac{1}{2}+\frac{12}{180}\cdot 0=\frac{144}{180}=0,8.$$

Приведем еще одно решение.

Пронумеруем команды по возрастанию их силы, так что 1 — самая слабая команда, а 6 — самая сильная. Заметим, что если команда играет с командой с большим номером, то она проигрывает, а если с меньшим номером, то выигрывает. Команда A победила в трех первых играх, следовательно, она имеет номер 4, 5 или 6. При этом команды, с которыми играла команда A в первых трех играх, имеют меньшие номера. Следовательно, возможны всего 15 вариантов наборов номеров команд, принимавших участие в первых четырех играх, и каждый из этих вариантов может быть реализован с вероятностью $\dfrac{1}{15}$ (в наборах команда A записана последней). Сведем варианты в таблицу.

Первые три игры	**Команда, с которой играет *A* в четвертой игре**	**Вероятность выигрыша *A* в четвертой игре**
123**4**	5 или 6	0
123**5**	4 или 6	0,5
123**6**	4 или 5	1
124**5**	3 или 6	0,5
124**6**	3 или 5	1
125**6**	3 или 4	1
134**5**	2 или 6	0,5
134**6**	2 или 5	1
135**6**	2 или 4	1
145**6**	2 или 3	1
234**5**	1 или 6	0,5
234**6**	1 или 5	1
235**6**	1 или 4	1
245**6**	1 или 3	1
345**6**	1 или 2	1

Таким образом, вероятность выиграть в четвертой игре равна

$$P(A)=$$
$$=\frac{1}{15}\cdot(0+0,5+1+0,5+1+1+0,5+1+1+1+0,5+1+1+1+1)=$$
$$=\frac{1}{15}\cdot 12=0,8.$$

Примечание к этому решению.

Можно не перебирать в явном виде все варианты, а только подсчитывать их количество. В первых трех играх, кроме команды A, принимают участие три команды, их номера надо выбрать среди номеров команд, меньших, чем у команды A.

Если команда A имеет номер 4, то в первых трех играх кроме нее могли участвовать только команды с номерами 1, 2 и 3, и есть лишь один набор номеров команд: $C_3^3=1$. При этом в четвертой игре команда A заведомо проигрывает.

Если команда A имеет номер 5, в первых трех играх кроме нее могли участвовать только команды с номерами 1, 2, 3 и 4, и есть четыре набора номеров команд: $C_4^3=4$. При этом в четвертой игре команда A выигрывает с вероятностью 0,5.

Если команда A имеет номер 6, в первых трех играх кроме нее могли участвовать только команды с номерами 1, 2, 3, 4 и 5, и есть десять наборов номеров команд: $C_5^3=10$. При этом в четвертой игре команда A заведомо выигрывает.

Таким образом, вероятность выигрыша команды A в четвертой игре равна

$$P(A)=\frac{1}{15}\cdot 0+\frac{4}{15}\cdot 0,5+\frac{10}{15}\cdot 1=0,8.$$

Приведем решение Анны Малковой (Москва).

Пронумеруем команды по возрастанию их силы, так что 1 — самая слабая команда, а 6 — самая сильная. В трех сыгранных раундах сыграло 4 команды. Рассмотрим все варианты: 1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1256, 1345, 1346, 1356, 1456, 2345, 2346, 2356, 2456, 3456. Получаем 15 различных вариантов. Победить в трех раундах могут только команды 4, 5 и 6. Команда 4 побеждает только в одном из 15 вариантов, следовательно, вероятность ее победы равна $\frac{1}{15}$. Команда 5 побеждает в 4 из 15 вариантов, следовательно, вероятность ее победы равна $\frac{4}{15}$. Тогда вероятность победы команды 6 равна $\frac{10}{15}$. Команда 4 не может победить в четвертом раунде, так как с командами, уступающими ей по силе, она уже сыграла. Команда 6 побеждает в четвертом раунде с вероятностью 1, так как она является самой сильной. Вероятность победы команды 5 в четвертом раунде равна $\frac{1}{2}$, так как она с равной вероятностью может сыграть как с командами, уступающими ей, так и с командой 6. Поэтому вероятность победы команды A в четвертом раунде равна

$$p=0+\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{2}+\frac{10}{15}\cdot 1=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}.$$

Приведем решение Александра Соколихина.

Пусть $Max5$ — событие, состоящее в том, что команда A победила в четырех играх, то есть она самая сильная из первых пяти команд в случайном списке. Пусть $Max4$ — событие, состоящее в том, что команда A победила в трех играх, то есть она самая сильная из первых четырех команд в случайном списке. Любая из первых пяти команд с одинаковой вероятностью может оказаться самой сильной: $P(Max5)=\frac{1}{5}$. Аналогично $P(Max4)=\frac{1}{4}$. Событие $Max5$ содержится в событии $Max4$, их пересечение составляет $Max5$.Тогда по формуле условной вероятности:

$$P(Max5|Max4)=\frac{P(Max5\cdot Max4)}{P(Max4)}=$$
$$=\frac{P(Max5)}{P(Max4)}=\frac{1}{5}:\frac{1}{4}=\frac{4}{5}.$$

29. Тип 5 № 508836

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,4 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,9?

Решение. Вероятность попадания в мишень равна 0,4. Вероятность противоположного события — промаха — равна 1 − 0,4 = 0,6. Заметим, что вероятность попадания с n-го раза равна $1-0{,}6^n$. Таким образом, задача сводится к решению неравенства

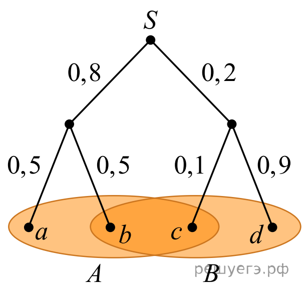
$$1-0,6^n\geqslant 0,9\Leftrightarrow 0,6^n\leqslant 0,1.$$

При $n=2$ получаем $0,6^2=0,36$. При $n=3$ получаем $0,6^3=0,216$. При $n=4$ получаем $0,6^4=0,1296$. При $n=5$ получаем $0,6^5=0,07776$. Таким образом, ответ — 5.

Ответ: 5.

30. Тип 5 № 509344

На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b и c, а событию B благоприятствуют элементарные события b, c и d. Найдите $P(A\,|\,B)$ — условную вероятность события A при условии B.



Решение. По рисунку находим вероятности элементарных событий a, b и c:

$$P(a) = P(b) = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4, \qquad P(c) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02,$$
$$P(d) = 0,2 \cdot 0,9 = 0,18.$$

Вероятность события A равна сумме вероятностей событий a, b и c

$$P(A) = P(a) + P(b) + P(c) = 0,4 + 0,4 + 0,02 = 0,82.$$

Вероятность события B равна сумме вероятностей событий b, c и d

$$P(B) = P(b) + P(c) + P(d) = 0,4 + 0,02 + 0,18 = 0,6.$$

Вероятность произведения событий A и B равна сумме вероятностей событий b и c

$$P(AB) = P(b) + P(c) = 0,4 + 0,02 = 0,42.$$

По формуле условной вероятности

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,42}{0,6} = 0,7.$$

Ответ: 0,7.

31. Тип 5 № 320999

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,4. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение. Джон промахнется, если схватит пристрелянный револьвер и промахнется из него, или если схватит непристрелянный револьвер и промахнется из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно 0,2·(1 − 0,9) = 0,02 и 0,8·(1 − 0,4) = 0,48. События схватить пристрелянный или непристрелянный револьвер образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно наступает), поэтому, по формуле полной вероятности, Джон промахнется с вероятностью 0,02 + 0,48 = 0,5.

Ответ: 0,5.

32. Тип 5 № 508879

Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{2}{3}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью 1 – p на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен −1?

Решение. Для наглядности будем считать, что на числовой прямой в точке 0 находится частица, которая из любой точки с вероятностью $\frac{2}{3}$ смещается на единицу вправо, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ смещается на единицу влево. Пусть $P(A)$ — искомая вероятность того, что частица из точки 0 попадет в точку −1, и пусть $P(B)$ — вероятность того, что частица из точки 1 попадет в точку −1. Из точки 0 частица может либо сразу попасть в точку −1, либо сначала попасть в точку 2, а затем попасть в точку −1, следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot P(B).$$

Сместиться на две единицы влево означает дважды сместиться на одну единицу влево, а потому $P(B) = P(A)^2$ в силу независимости каждого из шагов. Отсюда получаем:

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot P(A)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2P(A)^2 - 3P(A) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(A) = 1, \\ P(A) = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Поскольку вероятность p увеличения члена последовательности больше вероятности противоположного события, окончательный ответ — 0,5.

Ответ: 0,5.

33. Тип 5 № 500998

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя не глядя переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Решение. Рассмотрим эквивалентную задачу. Представим, что Петя вынул из кармана все монеты, а потом случайным образом положил пятирублевую монету в какой-то карман. Для другой пятирублевой монеты в карманах осталось 5 мест, из них в пустом кармане — 3 места. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{3}{5}$.

Ответ: 0,6.

Приведем другое решение.

Чтобы пятирублевые монеты оказались в разных карманах, Петя должен взять из кармана одну пятирублевую и две десятирублевые монеты. Это можно сделать тремя способами: 5, 10, 10; 10, 5, 10 или 10, 10, 5. Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}.$$

Приведем еще одно решение.

Вероятность того, что Петя взял пятирублевую монету, затем десятирублевую, и затем еще одну десятирублевую (в указанном порядке), равна

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{5}.$$

Поскольку Петя мог достать пятирублевую монету не только первой, но и второй или третьей, вероятность достать набор из одной пятирублевой и двух десятирублевых монет в 3 раза больше. Таким образом, она равна 0,6.

Ответ: 0,6.

Приведем решение при помощи формул комбинаторики.

Количество способов взять 3 монеты из 6, чтобы переложить их в другой карман, равно C_6^3. Количество способов выбрать 1 пятирублевую монету из 2 пятирублевых монет и взять вместе с ней еще 2 десятирублевых монеты из имеющихся 4 десятирублевых монет по правилу произведения равно $C_2^1\cdot C_4^2$. Поэтому искомая вероятность того, что пятирублевые монеты лежат в разных карманах, равна

$$\frac{C_2^1\cdot C_4^2}{C_6^3}=\frac{2\cdot 6}{20}=0,6.$$

34. Тип 5 № 508868

В викторине участвуют 10 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых шести играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет седьмой раунд?

Решение. Упорядочим по силе в порядке возрастания команду A и $k=6$ проигравших команд П. Для следующей команды есть $k+2$ равновероятных места, из них $k+1$ место, где она слабее A.

$$\overbrace{\underbrace{\_\text{П}\_\text{П}\_\ldots\_\text{П}\_}_{k+1\text{ промежуток}}A\_}^{k+2\text{ промежутка}}$$

Поэтому вероятность выиграть в следующем раунде равна $\left.\frac{k+1}{k+2}\right|_{k=6}=\frac{7}{8}$.

Ответ: 0,875.

35. Тип 5 № 627986

Биатлонист четыре раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые два раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение. Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью $1-0,8=0,2$. События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна

$$0,8\cdot 0,8\cdot 0,2\cdot 0,2=0,0256\approx 0,03.$$

Ответ: 0,03.

36. Тип 5 № 508870

Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определён жребием. Всего в турнире участвует 16 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга — Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом?

Решение. Заметим, что поскольку в турнире участвуют 16 игроков, всего будет четыре тура, в каждом из которых будут играть 16, 8, 4 и 2 человека соответственно. Пусть событие A — Иван с Алексеем сыграли друг с другом в первом туре, событие B — они не сыграли друг с другом в первом туре, но выиграли свои игры в первом туре и встретились во втором, событие C — они не сыграли друг с другом в первом и втором туре, но выиграли свои игры в первом и втором туре и встретились в третьем, D — они не сыграли друг с другом в первом, втором и третьем туре, но выиграли свои игры в первом, втором и третьем туре и встретились в четвёртом.

Вероятность того, что Иван с Алексеем сыграют в первом туре, равна $P(A)=\frac{1}{15}$. Вероятность события, при котором Иван с Алексеем не сыграли друг с другом в первом туре, но оба выиграли в первом туре и встретились во втором туре, равна

$$P(B)=\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{30}.$$

Аналогично, вероятность события C:

$$P(C)=\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{60}.$$

Осталось найти вероятность того, что Иван с Алексеем сыграют в четвёртом туре:

$$P(D)=\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{120}.$$

Теперь найдём искомую вероятность:

$$P=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=$$
$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}=\frac{8+4+2+1}{120}=0,125.$$

Ответ: 0,125.

Приведем другое решение.

В первом туре турнира участвуют 16 игроков, разбить их на произвольные пары можно $\frac{16\cdot 15}{2}=120$ способами. Пусть n — число всех возможных вариантов прохождения игр турнира. В первом туре встречаются 8 пар игроков, поэтому во всех возможных n вариантах первого тура может быть $8n$ пар. Все эти пары равновозможны, поэтому вероятность того, что одну из них составляют два выбранных игрока равна $\frac{8n}{120n}$, то есть $\frac{8}{120}$.

Если выбранные игроки не встретились в первом туре, они могут встретиться во втором. В нем примут участие 4 команды, вероятность встречи игроков равна $\frac{4n}{120n}$ или $\frac{4}{120}$.

В третьем туре примут участие 4 человека, из них можно составить две пары, в четвертой игре участвуют 2 человека, пара только одна; искомые вероятности суть $\frac{2n}{120n}$ и $\frac{n}{120n}$ соответс

твенно.

Перечисленные события несовместны, поэтому искомая вероятность равна $\frac{8+4+2+1}{120}=\frac{1}{8}$.

Решим задачу в общем виде.

Пусть в турнире по олимпийской системе (игра навылет, плей-офф) участвуют n игроков (n — степень двойки, всего в турнире проводится $n-1$ игра). Разбить n игроков на произвольные пары можно $k=\frac{n(n-1)}{2}$ способами. Для каждого возможного турнира построим дерево игр, в вершинах которого укажем имена двух встретившихся в соответствующей игре игроков. Любая пара игроков в турнире может сыграть друг с другом не больше одного раза. Выберем один из турниров, рассмотрим событие, состоящее в том, что двое наперед выбранных игроков встретились в первой игре первого тура. Вероятность этого события равна $1/k$, то есть $\frac{2}{n(n-1)}$. Выбираем вторую игру первого тура, третью и так далее до последней $n-1$ -ой игры последнего тура. Эти события равновероятны и несовместны, а потому искомая вероятность их суммы равна $(n-1)\cdot\frac{2}{n(n-1)}=\frac{2}{n}$.

37. Тип 5 № 508865

В коробке 7 синих, 3 красных и 5 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Решение. Возможны два случая: сначала выбрали синий фломастер, потом красный, или сначала выбрали красный фломастер, потом синий. Эти события несовместны, поэтому искомая вероятность равна:

$$P(C,K)+P(K,C)=\frac{7}{15}\cdot\frac{3}{14}+\frac{3}{15}\cdot\frac{7}{14}=$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}=0,2.$$

Ответ: 0,2.

38. Тип 5 № 508797

Игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно два броска? Ответ округлите до тысячных.

Решение. Получить в сумме больше 3 очков при двух бросаниях можно в следующих случаях:

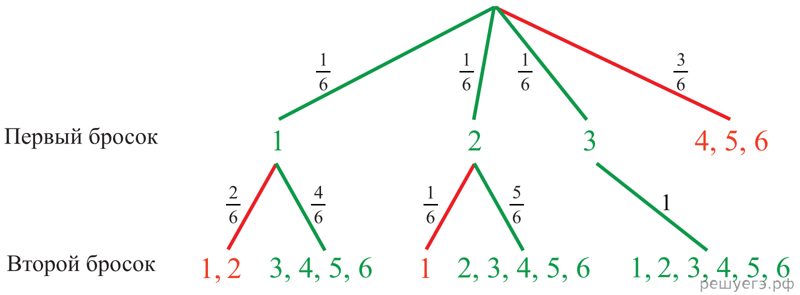
$$13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,$$

где первая цифра — число очков, выпавших первый раз, вторая цифра — число очков, выпавших второй раз. Вероятность каждого из этих 15 вариантов равна $\frac{1}{36}$, а искомая вероятность равна $\frac{15}{36}$, то есть $\frac{5}{12}$. Разделив в столбик, получаем $0,4166...$, округляя до тысячных, получаем 0,417.

Ответ: 0,417.

Приведем другое решение.

Изобразим с помощью дерева возможные исходы. Зелёным цветом отмечены исходы, удовлетворяющие условию «Сумма очков превысила число 3 ровно за два броска». Красным цветом отмечены исходы, неудовлетворяющие этому.



Искомая вероятность равна

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}=0,41666...$$

Округляя до тысячных, получаем 0,417.

Приведем еще одно решение.

Составим таблицу исходов после двух бросков. Общее число исходов равно 36. Зелёным цветом отмечены исходы удовлетворяющие условию «сумма очков превысила число 3 ровно за два броска». Число благоприятных исходов равно 15. Искомая вероятность равна:

$$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}=0,41(6).$$

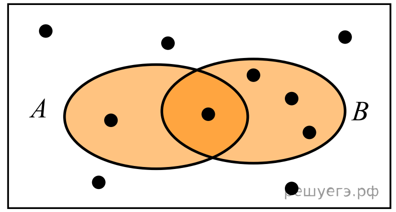
Округляя до тысячных, получаем 0,417.

Примечание.

Фраза «игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3» означает, что игральную кость продолжали бросать, пока сумма всех выпавших очков была меньше или равна трем, и прекратили бросать, когда эта сумма превысила 3. Если было сделано два броска, то на втором броске сумма должна была превысить 3.

39. Тип 5 № 509334

На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A.



Решение. Из диаграммы определяем, что:

$$P(A)=\frac{2}{10},\qquad P(B)=\frac{4}{10},\qquad P(AB)=\frac{1}{10}.$$

Подставим найденные значения в формулу условной вероятности, получим:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1\cdot 10}{10\cdot 2}=\frac{1}{2}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

40. Тип 5 № 661015

Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,7. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение. Найдем вероятность того, что перегорят три лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: 0,7·0,7·0,7 = 0,343.

Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа — противоположное. Следовательно, его вероятность равна 1 − 0,343 = 0,657.

Ответ: 0,657.

41. Тип 5 № 508817

Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,5. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше трёх попыток.

Решение. Вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше трех попыток, равна сумме вероятностей того, что сообщение будет передано с первой попытки, того, что сообщение будет передано со второй попытки и того, что сообщение будет передано с третьей попытки. Тогда:

Вероятность отправить сообщение с первой попытки равна 0,5.

Вероятность отправить сообщение со второй попытки равна $(1-0,5)\cdot 0,5=0,25.$

Вероятность отправить сообщение с третьей попытки равна $(1-(0,5+0,25))\cdot 0,5=0,125.$

Искомая вероятность равна $0,5+0,25+0,125=0,875.$

Ответ: 0,875.

Приведем решение Надежды Козловой.

Вероятность противоположного события, то есть того, что сообщение не будет отправлено за три попытки, равна $(1-0,5)^3=0,125.$ Тогда вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не более трех попыток, равна $1-0,125=0,875.$

42. Тип 5 № 663474

В коробке 5 красных и 4 синих шара. Случайным образом извлекают четыре шара из коробки. Какова вероятность того, что среди них окажется не более одного красного шара? Результат округлите до тысячных.

Решение. Извлечь четыре шара из девяти можно C_9^4 способами.

Извлечь четыре шара так, чтобы среди них оказалось не более одного красного можно лишь двумя способами: извлечь один красный шар и три синих или извлечь четыре синих и ни одного красного. Число элементарных исходов, соответствующих первому способу, равно $C_5^1\cdot C_4^3$, второму способу — $C_5^0\cdot C_4^4$.Шары извлекали случайным образом, значит, все элементарные исходы равновероятны, следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{C_5^1\cdot C_4^3+C_5^0\cdot C_4^4}{C_9^4}=\frac{5\cdot 4+1\cdot 1}{\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{21}{126}=\frac{1}{6}=0,1(6).$$

Округляя до тысячных, получаем 0,167.

Ответ: 0,167.

Изложим это же решение более подробно.

При извлечении 5 шаров наступает одно из четырех несовместных событий A — D, представленных в таблице.

Событие	Извлеченные шары	Шары, оставшиеся в коробке
A	4 красных	1 красный и 4 синих
B	3 красных и 1 синий	2 красных и 3 синих
C	2 красных и 2 синих	3 красных и 2 синий
D	1 красный и 3 синих	4 красных и 1 синий
E	4 синих	5 красных

Событие «среди извлеченных шаров окажется не более одного красного» является суммой несовместных событий D и E. Число элементарных исходов, соответствующих событию D, равно $C_5^1\cdot C_4^3$, событию E — $C_5^0\cdot C_4^4$. Общее число элементарных исходов равно C_9^5. Шары извлекали случайным образом, значит, все элементарные исходы равновероятны, следовательно, искомая вероятность равна:

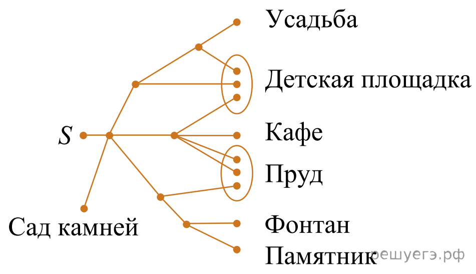
$$\frac{C_5^1\cdot C_4^3+C_5^0\cdot C_4^4}{C_9^4}=\frac{5\cdot 4+1\cdot 1}{\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=$$
$$=\frac{21}{126}=\frac{1}{6}=0,16666\ldots.$$

Округляя до тысячных, получаем 0,167.

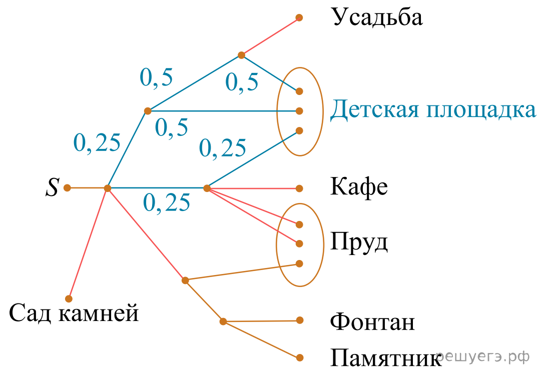
Ответ: 0,167.

43. Тип 5 № 562240

Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к детской площадке.



Решение.



Выйти к детской площадке Артём может тремя разными путями. Верхний путь: на первой развилке нужно выбрать одну из четырёх дорожек, на второй — одну из двух, на третьей — одну из двух. Вероятность этого способа равна $0,25\cdot 0,5\cdot 0,5=0,0625$. Нижний путь: на первой развилке нужно выбрать одну из четырёх дорожек и на второй — одну из четырёх. Вероятность этого способа равна $0,25\cdot 0,25=0,0625$. Средний путь: на первой развилке нужно выбрать одну из четырёх дорожек, на второй — одну из двух. Вероятность этого способа равна $0,25\cdot 0,5=0,125$.

Значит, вероятность того, что Артём выйдет к детской площадке, равна $0,0625+0,0625+0,125=0,25$.

Ответ: 0,25.

44. Тип 5 № 509316

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,94. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что масса буханки меньше, чем 810 г, а событие B состоит в том, что масса буханки больше чем 790 г. Необходимо вычислить вероятность произведения этих событий. Сумма этих событий является событием достоверным, его вероятность равна 1. В то же время $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, поскольку события A и B совместные. Подставляя известные значения, находим искомую вероятность:

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=$$
$$=0,97+0,94-1=0,91.$$

Ответ: 0,91.

45. Тип 5 № 676925

Компания обслуживает 5 серверов. Вероятность отключения одного сервера в течение дня равна $\frac{1}{5}$. Во сколько раз вероятность события «в течение дня ровно один сервер потребуют ремонта» больше, чем вероятность события «в течение дня ровно 3 сервера потребуют ремонта».

Решение. Вероятность противоположного события, состоящего в том, что поломка не произойдет, равна 1 − 0,2 = 0,8.

Для нахождения вероятности события «в течение дня ровно один сервер потребуют ремонта» воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_5(1)=C_5^1p^1q^4=\frac{5!}{(5-1)!\cdot 1!}\cdot 0,2^1\cdot 0,8^4=5\cdot 0,2\cdot 0,8^4.$$

Вероятность события «в течение дня ровно 3 сервера потребуют ремонта» равна

$$P_5(3)=C_5^3p^3q^2=$$
$$=\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}\cdot 0,2^3\cdot 0,8^2=10\cdot 0,2^3\cdot 0,8^2.$$

Теперь найдём искомое отношение вероятностей:

$$\frac{P_6(2)}{P_6(3)}=\frac{5\cdot 0,2\cdot 0,8^4}{10\cdot 0,2^3\cdot 0,8^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0,8^2}{0,2^2}=8.$$

Ответ: 8.

46. Тип 5 № 320206

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение. Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды:

$$P(\text{ХХО})=0,8\cdot 0,8\cdot 0,2=0,128,\qquad P(\text{ХОО})=0,8\cdot 0,2\cdot 0,8=0,128,$$
$$P(\text{ОХО})=0,2\cdot 0,2\cdot 0,2=0,008,\qquad P(\text{ООО})=0,2\cdot 0,8\cdot 0,8=0,128.$$

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

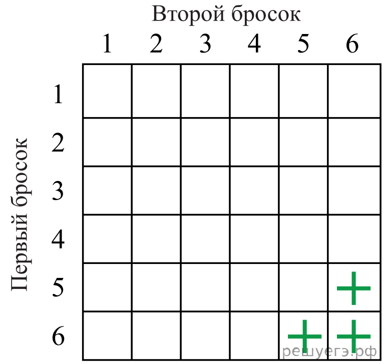
$$P(\text{ХХО})+P(\text{ХОО})+P(\text{ОХО})+P(\text{ООО})=$$
$$=0,128+0,128+0,008+0,128=0,392.$$

Ответ: 0,392.

47. Тип 5 № 508807

Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 10. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно два броска? Ответ округлите до тысячных.

Решение. Составим таблицу исходов после двух бросков. Общее число исходов равно 36. Зелёным цветом отмечены исходы удовлетворяющие условию «сумма очков превысила число 10 за два броска». Число благоприятных исходов равно 3.



Тогда искомая вероятность равна:

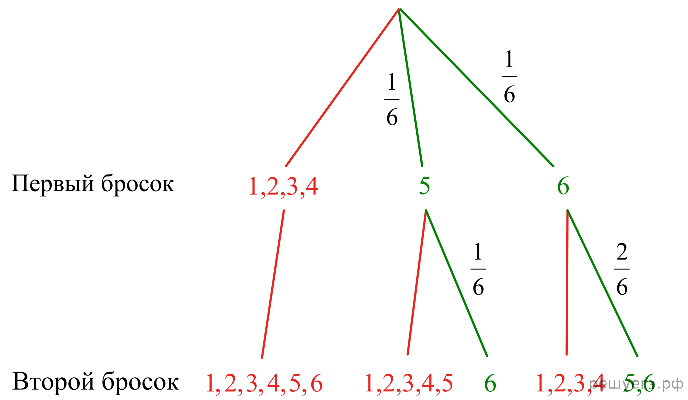
$$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=0,08333...$$

Округляя до тысячных, получаем 0,083.

Ответ: 0,083.

Приведем решение с помощью дерева событий.

Изобразим с помощью дерева возможные исходы.
Зелёным цветом отмечены исходы, удовлетворяющие условию «Сумма очков превысила число 10 ровно за два броска». Красным цветом отмечены исходы, неудовлетворяющие этому.



Искомая вероятность равна

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=0,08333...$$

Округляя до тысячных, получаем 0,083.

Ответ: 0,083.

Примечание.

Заметим, что фраза «игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 10» означает, что игральную кость продолжали бросать, если сумма всех выпавших очков была меньше или равна десяти, и прекратили бросать, когда эта сумма превысила

10. Следовательно, если потребовалось два броска, то именно на втором броске сумма должна была превысить 10.

48. Тип 5 № 319553

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение. Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $0{,}56 \cdot 0{,}3 = 0{,}168$.

Ответ: 0,168.

Примечание.

Другой способ решения данной задачи приведен здесь.

49. Тип 5 № 508851

Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

Решение. Сначала найдём вероятность попасть в мишень с первого или второго выстрела: $0,6+0,4\cdot 0,6=0,84$. Соответственно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что стрелок не попадёт в мишень с двух выстрелов, равна $1 - 0{,}84 = 0{,}16$.

Для нахождения вероятности события «стрелок поразит ровно три мишени» воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_5(3)=C_5^3p^3q^2=$$
$$=\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}\cdot 0,84^3\cdot 0,16^2=10\cdot 0,84^3\cdot 0,16^2.$$

Аналогично находим вероятность события «стрелок поразит ровно две мишени»:

$$P_5(2)=C_5^2p^2q^3=$$
$$=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}\cdot 0,84^2\cdot 0,16^3=10\cdot 0,84^2\cdot 0,16^3.$$

Теперь найдём искомое отношение вероятностей:

$$\frac{P_5(3)}{P_5(2)}=\frac{10\cdot 0,84^3\cdot 0,16^2}{10\cdot 0,84^2\cdot 0,16^3}=\frac{0,84}{0,16}=5,25.$$

Ответ: 5,25.

50. Тип 5 № 672816

Садовник принес две корзинки фруктов. В одной из них 3 яблока и 9 персиков, а в другой — 12 яблок и 18 персиков. Хозяйка, не глядя, взяла из каждой корзинки по одному фрукту. Какова вероятность того, что она достала два яблока или два персика?

Решение. Вероятность того, что хозяйка достала два яблока равна

$$\frac{3}{12}\cdot\frac{12}{30}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{10}.$$

Вероятность того, что хозяйка достала два персика равна

$$\frac{9}{12}\cdot\frac{18}{30}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}.$$

Вероятность того, что хозяйка достала два яблока или два персика равна сумме вероятностей этих событий:

$$\frac{1}{10}+\frac{9}{20}=\frac{11}{20}=0,55.$$

Ответ: 0,55.