1. Тип 8 № 119977

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Решение. Скорость — производная координаты по времени:

$$\upsilon(t) = x'(t) = -4t^3 + 18t^2 + 5 \text{ м/с}.$$

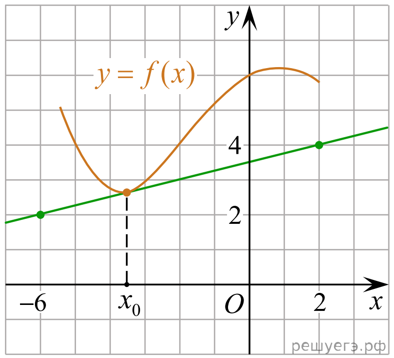
При $t = 3$ имеем:

$$\upsilon(3) = -4 \cdot 3^3 + 18 \cdot 9 + 5 = 59 \text{ м/с}.$$

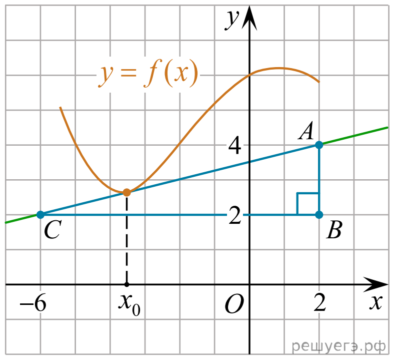
Ответ: 59.

2. Тип 8 № 9053

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (2; 4), B (2; 2), C (−6; 2). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB. Поэтому

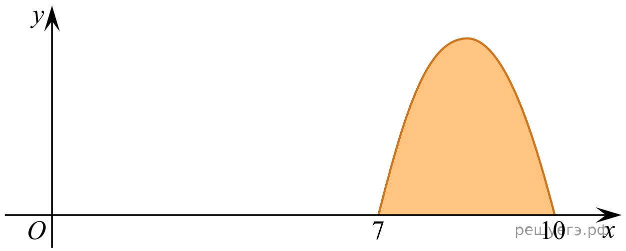


$$y'(x_0) = \mathrm{tg}\,\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

3. Тип 8 № 323475

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{51}{4}x^2 - 105x - 3$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение. Найдем формулу, задающую функцию $f(x)$, график которой изображён на рисунке.

$$f(x) = F'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{51}{2}x - 105 = -\frac{3}{2}(x^2 - 17x + 70) =$$
$$= -\frac{3}{2}\left(\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 + \frac{27}{8}.$$

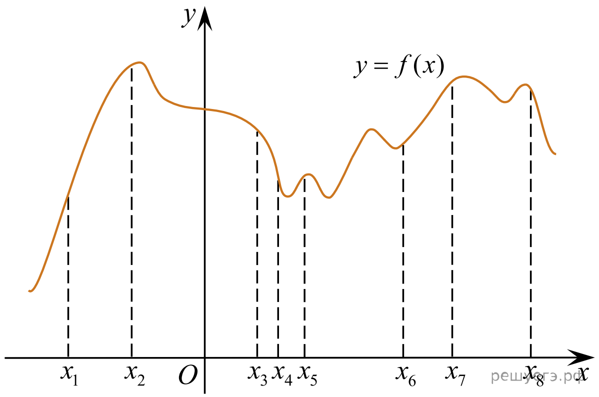
Следовательно, график функции $f(x)$ получен сдвигом графика функции $y = \frac{27}{8} - \frac{3}{2}x^2$ на $\frac{17}{2}$ единиц вправо вдоль оси абсцисс. Поэтому искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{27}{8} - \frac{3}{2}x^2$ и отрезком $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ оси абсцисс. Имеем:

$$S = \int\limits_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{27}{8} - \frac{3}{2}x^2\right)dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{27}{8} - \frac{3}{2}x^2\right)dx =$$
$$= 2\left(\frac{27}{8}x - \frac{1}{2}x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}} = 2\left(\frac{81}{16} - \frac{27}{16}\right) - 0 = 6,75.$$

Ответ: 6,75.

4. Тип 8 № 509619

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

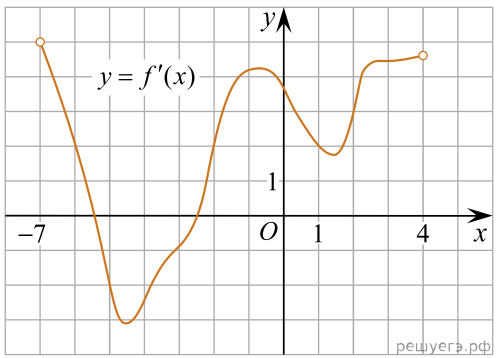


Решение. Положительным значениям производной соответствует интервалы, на которых функция $f(x)$, возрастает. На них лежат точки x_1, x_2, x_5, x_6, x_7. Таких точек 5.

Ответ: 5.

5. Тип 8 № 27497

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 4). Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

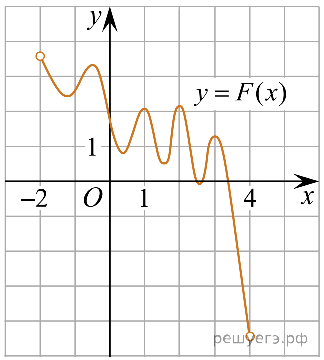


Решение. Промежутки возрастания данной функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна то есть промежуткам (−7; −5,5] и [−2,5; 4). Данные промежутки содержат целые точки −6, −2, −1, 0, 1, 2, 3. Их сумма равна −3.

Ответ: −3.

6. Тип 8 № 323171

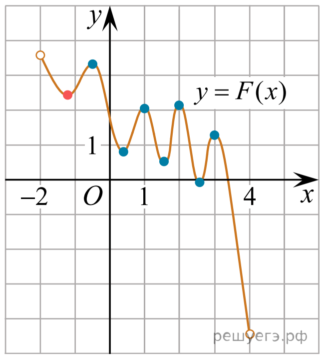
На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2;\ 4)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1;\ 3]$.



Решение. По определению первообразной на интервале (−2; 4) справедливо равенство

$$f(x) = F'(x).$$

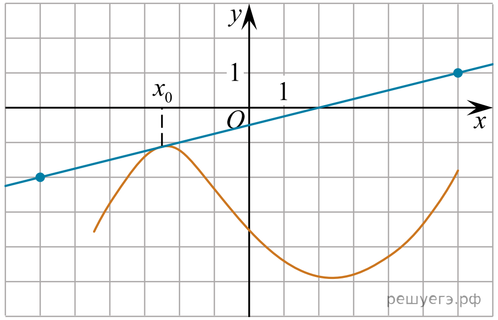
Следовательно, решениями уравнения $f(x) = 0$ являются точки экстремумов изображенной на рисунке функции $F(x)$ Это точки −1,2; −0,4; 0,4; 1; 1,6; 2; 2,6; 3. Из них на отрезке [−1; 3] лежат 7 точек (выделены синим). Таким образом, на отрезке [−1; 3] уравнение $f(x) = 0$ имеет 7 решений.



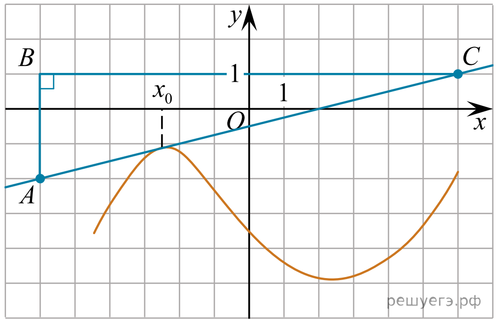
Ответ: 7.

7. Тип 8 № 641998

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−6; −2), B (−6; 1), C (6; 1). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен:



$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{12} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

8. Тип 8 № 122215

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 3t - 29$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Решение. Найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = x'(t) = 2t - 3.$$

Тогда находим:

$$v(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3 \text{ м/с}.$$

Ответ: 3.

Вариант № 86541279

9. Тип 8 № 676928

Прямая $y = x - 15$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 16$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поэтому абсциссы точек касания удовлетворяют уравнению $y' = 1$:

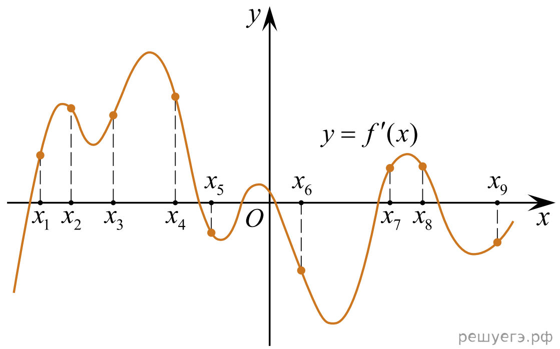
$$3x^2 - 6x + 4 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Абсцисса точки касания должна удовлетворять уравнению $x^3 - 3x^2 + 4x - 16 = x - 15$. Проверка показывает, что число 1 ему удовлетворяет.

Ответ: 1.

10. Тип 8 № 514180

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



Решение. Убыванию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют неположительные значения её производной. Производная неположительна в точках x_5, x_6, x_9: точки лежат ниже оси абсцисс, их ординаты отрицательны. Таких точек 3.

Ответ: 3.

11. Тип 8 № 122745

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^4 + 4t^3 - 3t - 21$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 1$ с.

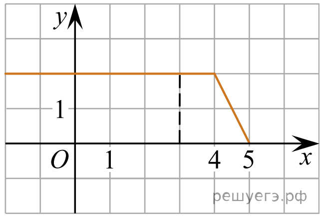
Решение. Найдем закон изменения скорости: $v(t) = x'(t) = 2t^3 + 12t^2 - 3$ м/с. При $t = 1$ имеем:

$$v(1) = 2 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 - 3 = 11 \text{ м/с.}$$

Ответ: 11.

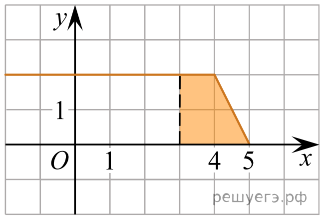
12. Тип 8 № 323185

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



Решение. Разность значений первообразной в точках 5 и 3 равна площади выделенной на рисунке трапеции. Поэтому

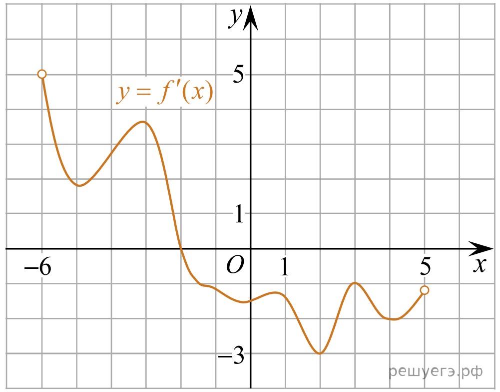
$$F(b) - F(a) = \frac{1+2}{2} \cdot 2 = 3.$$



Ответ: 3.

13. Тип 8 № 641154

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



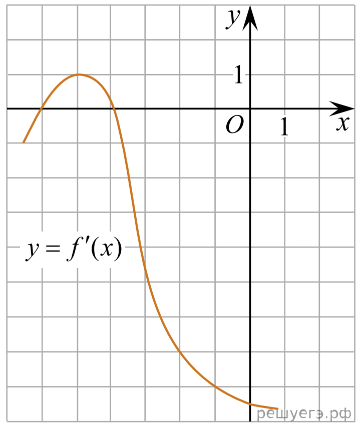
Решение. Функция, дифференцируемая на отрезке $[a; b]$, непрерывна на нем. Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, а её производная положительна (отрицательна) на интервале $(a; b)$, то функция возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

На заданном отрезке производная функции $f(x)$ неотрицательна, функция на этом отрезке возрастает. Следовательно, наименьшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке -5.

Ответ: -5.

14. Тип 8 № 515189

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 10 - 7x$ или совпадает с ней.



Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой или совпадает с ней, её угловой коэффициент равен −7. Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент равен −7, а значит, и производная равна −7. Поэтому искомая точка $x=-2$.

Ответ: −2.

15. Тип 8 № 541254

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{6}t^3-2t+1$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 48 м/с?

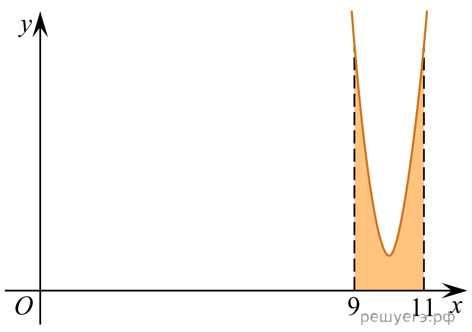
Решение. Найдем закон изменения скорости: $\upsilon(t)=x'(t)=\frac{t^2}{2}-2$ м/с. Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 48 м/с, решим уравнение:

$$\frac{t^2}{2}-2=48 \Leftrightarrow \frac{t^2}{2}=50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-10; \\ t=10 \end{array}\right. \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t=10\text{с}.$$

Ответ: 10.

16. Тип 8 № 323379

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=2x^3-60x^2+601x-\frac{12}{7}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



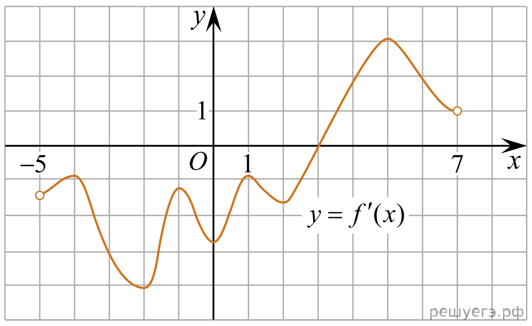
Решение. Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках 11 и 9. Имеем:

$$F(11)=2\cdot 11^3-60\cdot 11^2+601\cdot 11-\frac{12}{7}=2011\frac{2}{7}.$$
$$F(9)=2\cdot 9^3-60\cdot 9^2+601\cdot 9-\frac{12}{7}=2005\frac{2}{7}.$$
$$F(11)-F(9)=2011\frac{2}{7}-2005\frac{2}{7}=6.$$

Ответ: 6.

17. Тип 8 № 522116

На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-1;\ 4]$.

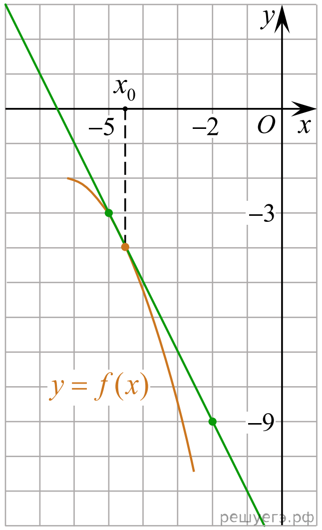


Решение. Если производная в некоторой точке равна нулю, а в ее окрестности меняет знак, то это точка экстремума. На интервале [–1; 4] график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, точка 3 является точкой экстремума.

Ответ: 3.

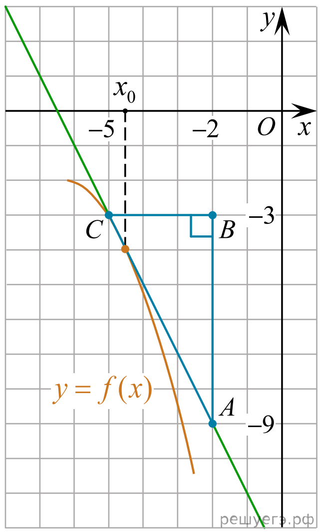
18. Тип 8 № 9101

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A\ (-2; -9)$, $B\ (-2; -3)$, $C\ (-5; -3)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB. Поэтому

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) =$$
$$= -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2.$$



Ответ: −2.

19. Тип 8 № 123711

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{4}t^2 + t - 10$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 5 м/с?

Решение. Найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = x'(t) = \frac{1}{2}t + 1 \text{ м/с.}$$

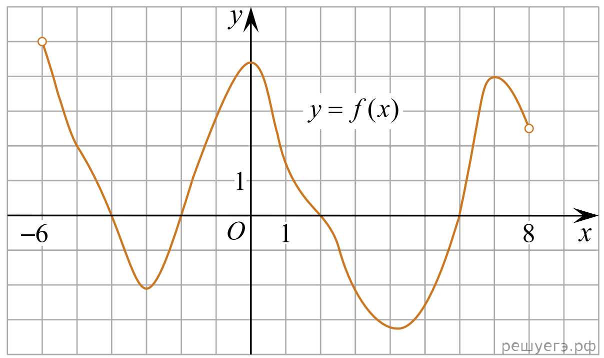
Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 5 м/с, решим уравнение:

$$\frac{1}{2}t + 1 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t = 4 \Leftrightarrow t = 8 \text{ с.}$$

Ответ: 8.

20. Тип 8 № 27487

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Решение. Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах $(-3; 0)$ и $(4{,}2; 7)$. В них содержатся целые точки −2, −1, 5 и 6, всего их 4.

Ответ: 4.

Примечание.

Напомним, что «целые точки» — это точки с целыми абсциссами. Значение функции в этих точках может быть не целым числом.

21. Тип 8 № [6041]()

Прямая $y=-3x-6$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+5x-4$. Найдите абсциссу точки касания.

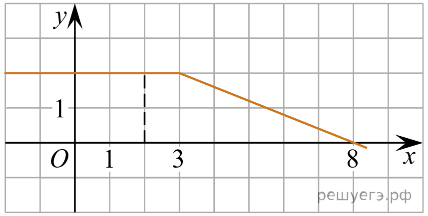
Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y=-3x-6$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y'=-3$:

$$(x^2+5x-4)'=-3 \Leftrightarrow 2x+5=-3 \Leftrightarrow x=-4.$$

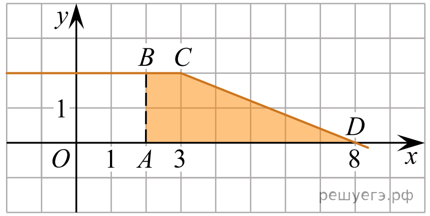
Ответ: −4.

22. Тип 8 № [323078]()

На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8)-F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



Решение. Разность значений первообразной в точках 8 и 2 равна площади выделенной на рисунке трапеции $ABCD$. Поэтому



$$F(b)-F(a)=\frac{1+6}{2}\cdot 2=7.$$

Ответ: 7.

Примечание Д. Д. Гущина.

В связи с возникающими у учителей вопросами приведем аналитическое решение; излишне громоздкое для данной задачи, но раскрывающее смысл констант в записи неопределенного интеграла. Разобраться в нем будет полезно и ученикам, желающим глубже понять тему.

Пользуясь данным в условии графиком, запишем функцию в виде

$$f(x)=\begin{cases} 2, & \text{если } x<3, \\ \dfrac{16}{5}-\dfrac{2}{5}x, & \text{если } 3\leqslant x\leqslant 8. \end{cases}$$

Запишем выражение для первообразной:

$$F(x)=\begin{cases} 2x+C_1, & \text{если } x<3, \\ \dfrac{16}{5}x-\dfrac{1}{5}x^2+C_2, & \text{если } 3\leqslant x\leqslant 8. \end{cases}$$

Заметим, что первообразная является дифференцируемой, а потому и непрерывной функцией в каждой точке своей области определения. Следовательно, непрерывной в точке 3. Поэтому выражения для первообразных в точке 3 должны быть равными. Подставим $x=3$ в уравнение

$$2x+C_1=\frac{16}{5}x-\frac{1}{5}x^2+C_2,$$

получим:

$$6+C_1=\frac{48}{5}-\frac{9}{5}+C_2,$$

откуда $C_2=C_1-\dfrac{9}{5}$. Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases} 2x+C_1, & \text{если } x<3, \\ -\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{16}{5}x-\dfrac{9}{5}+C_1, & \text{если } 3\leqslant x\leqslant 8. \end{cases}$$

Пока найдена непрерывная функция F, которая является первообразной функции f на луче $(-\infty;3)$ и на полуинтервале $(3;8]$. Осталось изучить дифференцируемость F в точке 3. Найдем левостороннюю и правостороннюю производные:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-0}\frac{2x+C_1-(6+C_1)}{x-3}=$$
$$=\lim_{x\to 3-0}\frac{2x-6}{x-3}=2;$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}=$$
$$=\lim_{x\to 3+0}\frac{-\frac{1}{5}x^2+\frac{16}{5}x-\frac{9}{5}+C_1-\left(-\frac{9}{5}+\frac{48}{5}-\frac{9}{5}+C_1\right)}{x-3}=$$
$$=\lim_{x\to 3+0}\frac{-(x^2-16x+39)}{5(x-3)}=$$
$$=\lim_{x\to 3+0}\frac{(x-3)(13-x)}{5(x-3)}=\lim_{x\to 3+0}\frac{13-x}{5}=2.$$

Левосторонняя производная F в точке 3 равна правосторонней, а потому $F'(3)=2=f(3)$. Теперь можно утверждать, что функция F является первообразной для f на всей области определения. Для ответа на вопрос задачи осталось найти разность значений первообразной в точках 8 и 2:

$$F(8)-F(2)=\left(-\frac{1}{5}\cdot 64+\frac{16}{5}\cdot 8+C_1-\frac{9}{5}\right)-(2\cdot 2+C_1)=$$
$$=-\frac{64}{5}+\frac{128}{5}-\frac{9}{5}-4=7.$$

Ответ: 7.

Пытливый читатель мог бы заинтересоваться тем, как «склеены» между собой ветви графика найденной первообразной в точке с абсциссой 3. Говоря более формально, необходимо узнать, каков угол между касательными лучами к ветвям графика функции f, проведенными в их общей точке. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим функции $g(x)=-\frac{1}{5}x^2+\frac{16}{5}x-\frac{9}{5}+C_1$ и $h(x)=2x+C_1$. Из приведенных выше рассуждений следует, что $f(3)=g(3)$ и $f'(3)=g'(3)=2$. Но система уравнений

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0), \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$$

есть условие касания графиков функций f и g в точке x_0. Итак, для любого значения константы C_1 прямая $y=h(x)$ является касательной к параболе $y=g(x)$.

Более простой способ показать касание не связан с производной. Покажем, что прямая $y=2x+C$ является касательной к параболе $g(x)=-\frac{1}{5}x^2+\frac{16}{5}x-\frac{9}{5}+C$ в точке 3. Действительно, уравнение $-\frac{1}{5}x^2+\frac{16}{5}x-\frac{9}{5}+C=2x+C$, то есть уравнение $x^2-6x+9=0$, имеет ровно один корень, равный 3, а значит, для любого значения C эти прямая и парабола имеют единственную общую точку — точку касания.

Отметим дополнительно, что задания указанного типа должны быть знакомы учителям, например, по известной книге Галицкого М. Л., Мошковича М. М., Шварцбурда С. И. Углубленное изучение алгебры и математического анализа (Москва, 1982): см. задание 4 из интересной, кстати, и самой по себе контрольной работы для 10 (11) класса с углубленным изучением математики.

Контрольная работа № 1

Вариант 1 **К-1**

1. Найдите решение дифференциального уравнения $y'=xy^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=-2$.
2. Материальная точка массы $m=1$ движется по прямой под действием силы, которая меняется по закону $F(t)=8-12t$. Найдите закон движения точки $x=x(t)$, если в момент времени $t=0$ ее координата равна 0 и скорость равна 1. В какой момент времени скорость точки будет максимальной?
3. Функция $y=f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+9y=0$ и начальным условиям $f(0)=3$, $f'(0)=9$. Найдите ее наименьшее значение на отрезке $\left[\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{6}\right]$.

4^0. Для функции $f(x)=\begin{cases}2x \text{ при } x<0,\\ \sin x \text{ при } x\geqslant 0\end{cases}$ найдите первообразную F, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$. Постройте график первообразной.

Более простая задача приводится с решением в пособии Саакяна С. М. и др. Задачи по алгебре и началам анализа для 10–11 классов: необходимо найти общий вид первообразных функции $y=|x-1|$. К сожалению, приведенное авторами решение (см. ниже) нельзя признать полностью удовлетворительным, поскольку в нем не проверяется дифференцируемость найденной первообразной в точке 1. Предостерегаем читателя от этой ошибки.

Решение. На промежутке $(-\infty;\ 1)$ значение $f(x)=1-x$, поэтому здесь $F(x)=x-\frac{x^2}{2}+C$, а на промежутке $(1;\ \infty)$ значение $f(x)=x-1$, а значит, $F(x)=\frac{x^2}{2}-x+C_1$. Так как первообразная F непрерывна на $\boldsymbol{R}$, а значит, и в точке $x=1$, то $F(1)=\lim\limits_{x\to 1}F(x)$. Отсюда $1-\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}-1+C_1$, т. е. $C_1=C+1$, и функцию F можно записать:

$$F(x)=\begin{cases} x-\frac{x^2}{2}+C, & x\leqslant 1,\\ \frac{x^2}{2}-x+1+C, & x>1, \end{cases}$$

Из более новых работ рекомендуем обратиться к учебнику М. Я. Пратусевича и др. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс, стр. 96. В этом учебнике вопрос о первообразной функции $y=|x-1|$ разобран полностью без упущений.

Пример 39. Найдём какую-либо первообразную функции $f(x)=|x-1|$ на $\boldsymbol{R}$.

□ По определению модуля $f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ если } x\geqslant 1,\\ 1-x, \text{ если } x\leqslant 1.\end{cases}$

Первообразной данной функции при $x\geqslant 1$ согласно таблице и теореме об элементарных свойствах первообразных может служить любая функция вида $\frac{x^2}{2}-x+C$, где C — произвольная постоянная. Аналогично, первообразной данной функции при $x\leqslant 1$ может служить любая функция вида $x-\frac{x^2}{2}+C_1$.

Функция, являющаяся первообразной на $\boldsymbol{R}$, должна быть непрерывной в любой точке, так как если нет непрерывности в точке, то тем более нет и производной в этой точке. Для непрерывности функции в точке $x=1$ необходимо и достаточно равенства односторонних пределов значению функции в данной точке. Таким образом, необходимо выполнение равенства $\frac{1}{2}-1+C=1-\frac{1}{2}+C_1$, откуда $C=C_1+1$.

Положим, например, $C_1=0$, тогда $C=1$ и «кандидатом в первообразные» для функции $f(x)=|x-1|$ может служить функция

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}-x+1, \text{ если } x\geqslant 1,\\ x-\frac{x^2}{2}, \text{ если } x\leqslant 1\end{cases}$$

(точку $x=1$ можно включить в оба промежутка, так как значения обеих квадратичных функций в этой точке равны).

Во всех точках, кроме точки $x=1$, функция F дифференцируема, поскольку совпадает в некоторой окрестности с дифференцируемой функцией (квадратным трёхчленом) и её производная в точке x равна f. Осталось проверить дифференцируемость функции F в точке $x=1$.

97 § 59. Неопределённый интеграл

Найдём левостороннюю производную функции F в точке $x=1$:

$$F'(x)\big|_{x=1-}=\lim_{x\to 1-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}{x-1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)^2}{x-1}=0.$$

Найдём правостороннюю производную функции F в точке $x=1$:

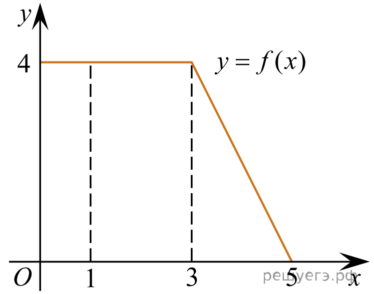
$$F'(x)\big|_{x=1+}=\lim_{x\to 1+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{x^2}{2}-x+1-\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2}{x-1}=0.$$

Таким образом, и в точке $x=1$ функция F дифференцируема, и её производная в этой точке равна нулю, т. е. $f(1)$. Ответ: одна из искомых первообразных равна

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}-x+1, \text{ если } x\geqslant 1,\\ x-\frac{x^2}{2}, \text{ если } x\leqslant 1.\end{cases}$$ ■

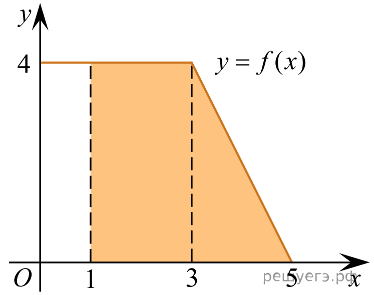
23. Тип 8 № 500890

На рисунке изображен график некоторой функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_1^5 f(x)\,dx$.



Решение. Определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[1;5]$ дает значение площади подграфика функции $f(x)$ на отрезке. Область под графиком разбивается на прямоугольный треугольник, площадь которого $S_{\text{тр}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$, и прямоугольник, площадь которого $S_{\text{пр}}=2\cdot 4=8$. Сумма этих площадей дает искомый интеграл

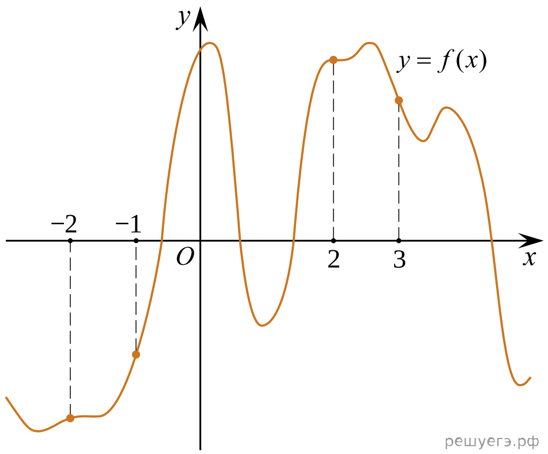
$$\int_1^5 f(x)\,dx=S_{\text{пр}}+S_{\text{тр}}=8+4=12.$$



Ответ: 12.

24. Тип 8 № 318055

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -2, -1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Решение. Точка $x=3$ — единственная, в которой производная отрицательна.

Ответ: 3.

25. Тип 8 № 119976

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^3-3t^2+2t$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 6$ с.

Решение. Найдем закон изменения скорости:

$$\upsilon(t)=x'(t)=\frac{3}{2}t^2-6t+2 \text{ м/с.}$$

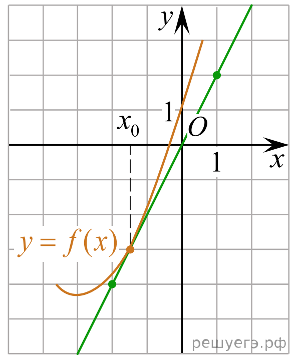
Тогда находим:

$$\upsilon(6)=\frac{3}{2}\cdot 36-6\cdot 6+2=20 \text{ м/с.}$$

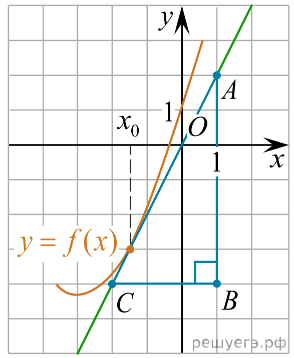
Ответ: 20.

26. Тип 8 № 27503

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (1; 2), B (1; −4), C (−2; −4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB:

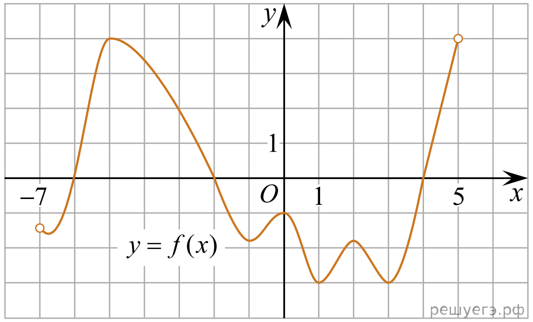


$$y'(x_0)=\operatorname{tg}\angle ACB=\frac{AB}{BC}=\frac{2+4}{1+2}=2.$$

Ответ: 2.

27. Тип 8 № [628266]

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале (−7; 5). Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



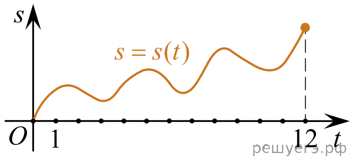
Решение. Из графика видно, что функция убывает на отрезках [−5; −1], [0; 1] и [2; 3]. Наибольший из этих отрезков — [−5; −1], его длина равна 4.

Ответ: 4.

28. Тип 8 № [501059]

Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s.

Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



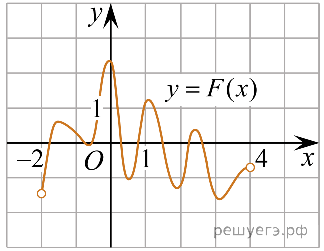
Решение. Мгновенная скорость равна производной перемещения по времени. Значение производной равно нулю в точках экстремума функции $s(t)$. Точек экстремума на графике 6.

Ответ: 6.

Вариант № 86541279

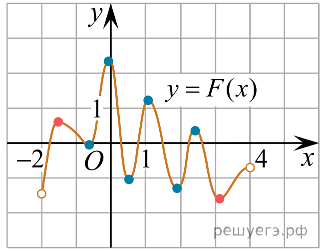
29. Тип 8 № [323173]

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2;\ 4)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1;\ 3]$.



Решение. По определению первообразной на интервале (−2; 4) справедливо равенство

$$f(x) = F'(x).$$

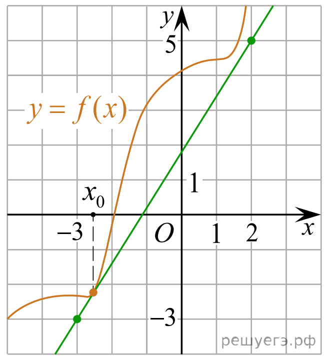


Следовательно, решениями уравнения $f(x) = 0$ являются точки экстремумов изображенной на рисунке функции $F(x)$ На графике соответствующие точки отмечены красным и синим цветом. Из них на отрезке [−1; 3] лежат 6 точек (отмечены синим). Таким образом, на отрезке [−1; 3] уравнение $f(x) = 0$ имеет 6 решений.

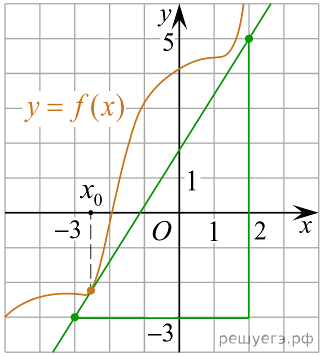
Ответ: 6.

30. Тип 8 № [685363]

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(2;5)$, $B(2;-3)$, $C(-3;-3)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен:



$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

Ответ: 1,6.

31. Тип 8 № 122715

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t + 13$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Решение. Найдем закон изменения скорости:

$$\upsilon(t) = x'(t) = -t^2 + 4t + 5.$$

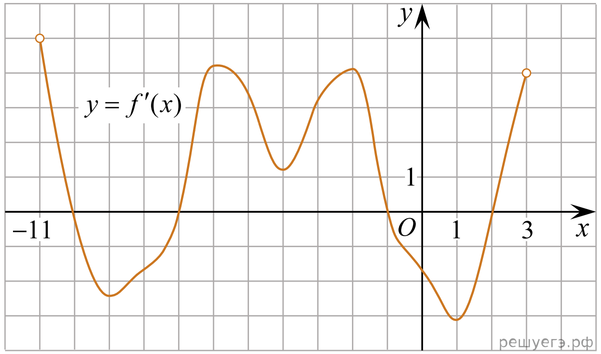
Тогда находим:

$$\upsilon(3) = -9 + 4\cdot 3 + 5 = 8 \text{ м/с}.$$

Ответ: 8.

32. Тип 8 № 8301

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11;3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



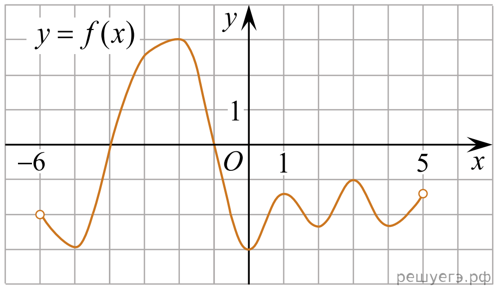
Решение. Функция, дифференцируемая на отрезке [a; b], непрерывна на нем. Если функция непрерывна на отрезке [a; b], а её производная положительна (отрицательна) на интервале (a; b), то функция возрастает (убывает) на отрезке [a; b].

Поэтому промежутки возрастания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции неотрицательна, то есть промежуткам (−11; −10], [−7; −1] и [2; 3). Наибольший из них — отрезок [−7; −1], длина которого равна 6.

Ответ: 6.

33. Тип 8 № 509436

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−6; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.

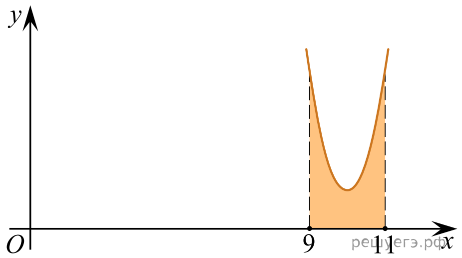


Решение. Касательная параллельна горизонтальной прямой в точках экстремумов, таких точек на графике 7.

Ответ: 7.

34. Тип 8 № 323375

На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=x^3-30x^2+301x-\frac{1}{9}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



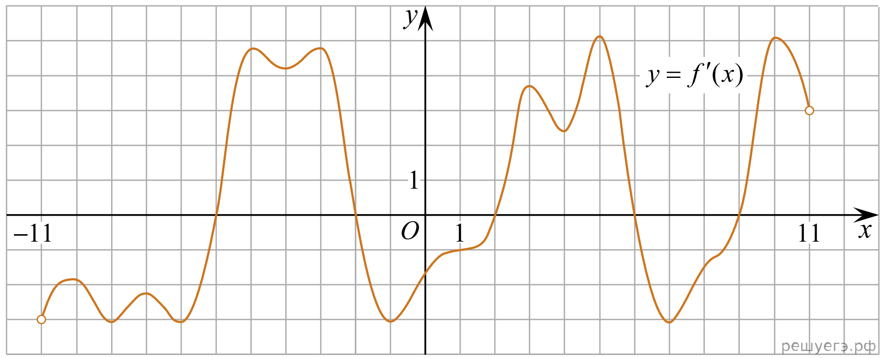
Решение. Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках 11 и 9. Имеем:

$$F(11)=11^3-30\cdot 11^2+301\cdot 11-\frac{1}{9}=$$
$$=1331-3630+3311-\frac{1}{9}=1011\frac{8}{9},$$
$$F(9)=9^3-30\cdot 9^2+301\cdot 9-\frac{1}{9}=$$
$$=729-2430+2709-\frac{1}{9}=1007\frac{8}{9},$$
$$F(11)-F(9)=1011\frac{8}{9}-1007\frac{8}{9}=4.$$

Ответ: 4.

35. Тип 8 № 27496

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11; 11). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке [−10; 10].

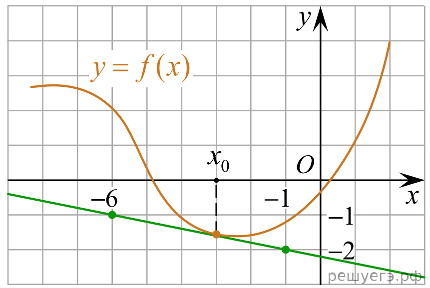


Решение. Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной. Производная меняет знак в точках −6, −2, 2, 6, 9. Таким образом, на отрезке [−10; 10] функция имеет 5 точек экстремума.

Ответ: 5.

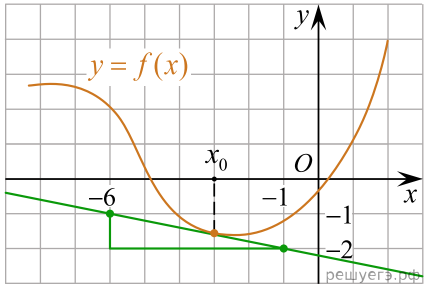
36. Тип 8 № 525700

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0=-3$. Найдите значение производной функции $g(x)=x^3+f(x)$ в точке x_0.



Решение. Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = 3x^2 + f'(x).$$



По рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Поэтому $f'(x_0) = f'(-3) = -\frac{1}{5} = -0{,}2.$

Тогда для искомого значения получаем

$$g'(x_0) = g'(-3) = 3 \cdot x_0^2 + f'(x_0) =$$
$$= 3 \cdot (-3)^2 + f'(-3) = 3 \cdot 9 - 0{,}2 = 26{,}8.$$

Ответ: 26,8.

37. Тип 8 № 641902

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^2 + 6t - 11$ где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 2 м/с?

Решение. Найдем закон изменения скорости:

$$\upsilon(t) = x'(t) = -\frac{2}{3}t + 6 \text{ м/с}.$$

Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 2 м/с, решим уравнение:

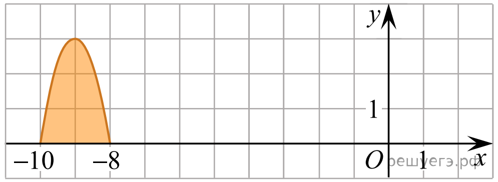
$$-\frac{2}{3}t + 6 = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}t = 4 \Leftrightarrow t = 6 \text{ с}.$$

Ответ: 6.

Вариант № 86541279

38. Тип 8 № 323080

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение. Найдем формулу, задающую функцию $f(x)$, график которой изображён на рисунке.

$$f(x) = F'(x) = -3x^2 - 54x - 240 =$$
$$= -3(x^2 + 18x) - 240 = 3 - 3(x + 9)^2.$$

Следовательно, график функции $f(x)$ получен сдвигом графика функции $y = 3 - 3x^2$ на 9 единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3 - 3x^2$ и отрезком $[-1;\ 1]$ оси абсцисс. Имеем:

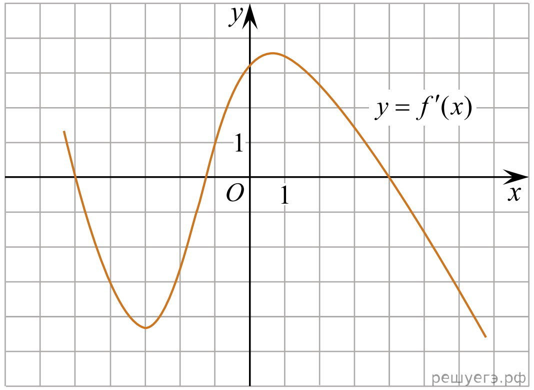
$$S = \int_{-1}^{1}(3 - 3x^2)dx = 2\int_{0}^{1}(3 - 3x^2)dx =$$
$$= 2(3x - x^3)\Big|_0^1 = 2(3 - 1) - 0 = 4.$$

Ответ: 4.

Еще несколько способов рассуждений покажем на примере следующей задачи.

39. Тип 8 № 508383

На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. При каком значении x эта функция принимает свое наибольшее значение на отрезке $[-4; -2]$?

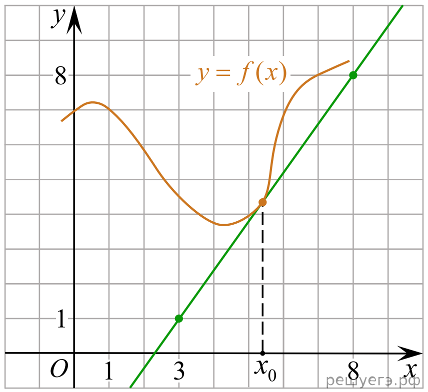


Решение. На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −4.

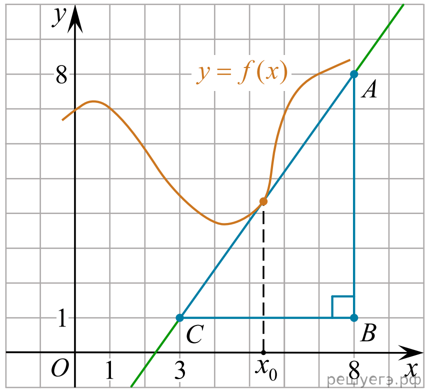
Ответ: −4.

40. Тип 8 № 541372

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(8;\ 8)$, $B(8;\ 1)$, $C(3;\ 1)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB:

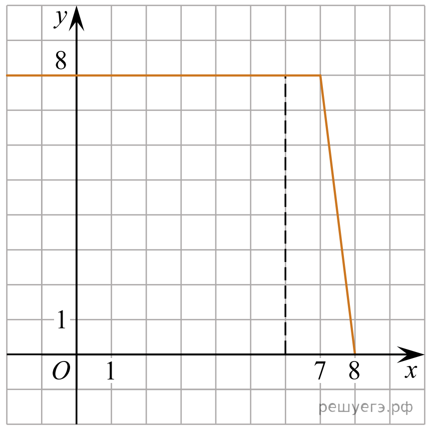


$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

Ответ: 1,4.

41. Тип 8 № 323275

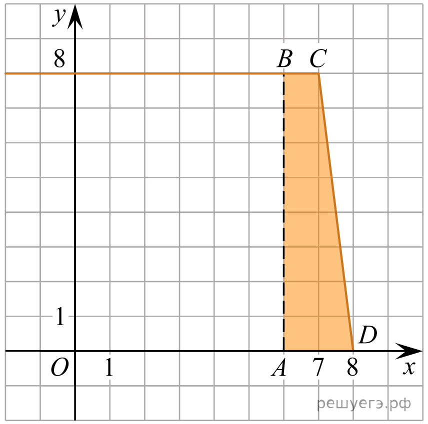
На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(6)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



Решение. Разность значений первообразной в точках 8 и 6 равна площади выделенной на рисунке трапеции $ABCD$. Поэтому

$$F(b) - F(a) = \frac{1+2}{2} \cdot 8 = 12.$$

Ответ: 12.



42. Тип 8 № 124215

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 - 4t + 3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 38 м/с?

Решение. Найдем закон изменения скорости:

$$\upsilon(t) = x'(t) = \frac{1}{2}t^2 - 4t - 4.$$

Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 38 м/с, решим уравнение:

$$\frac{1}{2}t^2 - 4t - 4 = 38 \Leftrightarrow t^2 - 8t - 84 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 14; \\ t = -6 \end{array}\right. \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t = 14 \text{ с}.$$

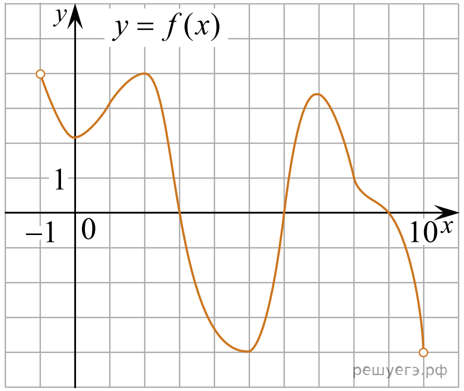
Следовательно, скорость точки была равна 38 м/с на четырнадцатой секунде движения.

Ответ: 14.

Вариант № 86541279

43. Тип 8 № 656079

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 10)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[4;\ 8]$.



Решение. Нулям производной соответствуют касательные, параллельные оси абсцисс. На отрезке $[4;\ 8]$ горизонтальные касательные к графику можно провести через 2 точки, это точки с абсциссами 5 и 7.

Ответ: 2.

44. Тип 8 № 121211

Прямая $y = -7x - 5$ является касательной к графику функции $f(x) = 28x^2 + bx + 2$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение. Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+l$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x)=k, \\ f(x)=kx+l. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 56x+b=-7, \\ 28x^2+bx+2=-7x-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-7-56x, \\ 28x^2+(-7-56x)x+2=-7x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-7-56x, \\ x^2=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому $x=0,5$, откуда $b=-35$.

Ответ: −35.

45. Тип 8 № 123215

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-\frac{1}{4}t^4+t^3+6t^2+7t+11$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t=4$ с.

Решение. Найдем закон изменения скорости:

$$\upsilon(t)=x'(t)=-t^3+3t^2+12t+7.$$

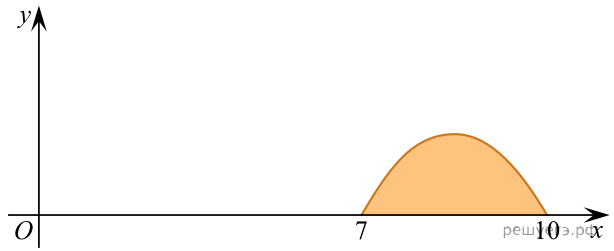
Тогда находим:

$$\upsilon(4)=-4^3+3\cdot 16+12\cdot 4+7=39 \text{ м/с}.$$

Ответ: 39.

46. Тип 8 № 323477

На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=-\frac{1}{5}x^3+\frac{51}{10}x^2-42x-\frac{7}{11}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение. Функция непрерывна и положительна на отрезке от 7 до 10, поэтому площадь закрашенной фигуры в данном случае можно вычислить по формуле: $S=F(b)-F(a)$, где b и a — это соответственно координаты правого и левого концов отрезка. Вычислим:

$$S=$$
$$=-\frac{1}{5}\cdot 10^3+\frac{51}{10}\cdot 10^2-42\cdot 10-\frac{7}{11}+\frac{1}{5}\cdot 7^3-\frac{51}{10}\cdot 7^2+42\cdot 7+\frac{7}{11}=$$
$$=-\frac{1}{5}\cdot(1000-343)+\frac{51}{10}\cdot(100-49)-42(10-7)=$$
$$=\frac{-1314+2601-1260}{10}=2{,}7.$$

Ответ: 2,7.

Приведём другое решение.

Найдем формулу, задающую функцию $f(x)$, график которой изображён на рисунке.

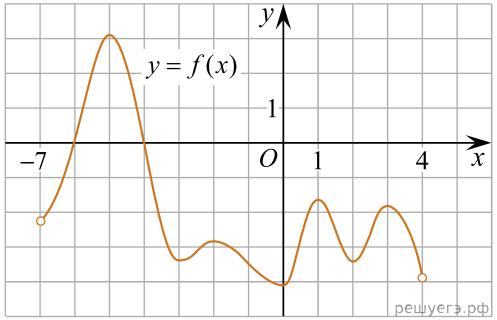
$$f(x)=F'(x)=-\frac{3}{5}x^2+\frac{51}{5}x-42=-\frac{3}{5}(x^2-17x+70)=$$
$$=-\frac{3}{5}\left(\left(x-\frac{17}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{27}{20}.$$

Следовательно, график функции $f(x)$ получен сдвигом графика функции $y=\frac{27}{20}-\frac{3}{5}x^2$ на $\frac{17}{2}$ единиц вправо вдоль оси абсцисс. Поэтому искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{27}{20}-\frac{3}{5}x^2$ и отрезком $\left[-\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$ оси абсцисс. Имеем:

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{27}{20}-\frac{3}{5}x^2\right)dx=2\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{27}{20}-\frac{3}{5}x^2\right)dx=$$
$$=2\left(\frac{27}{20}x-\frac{1}{5}x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}}=2\left(\frac{81}{40}-\frac{27}{40}\right)-0=2{,}7.$$

47. Тип 8 № 7545

На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 4)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

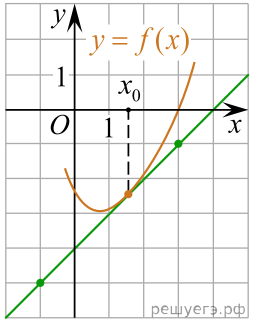


Решение. Заданная функция имеет максимумы в точках −5, −2, 1, 3 и минимумы в точках −3, 0, 2. Поэтому сумма точек экстремума равна $-5-2+1+3-3+0+2=-4$.

Ответ: −4.

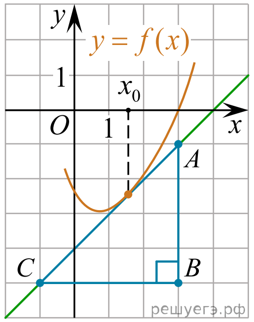
48. Тип 8 № 9629

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (3; −1), B (3; −5), C(−1; −5). Тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс будет равен тангенсу угла ACB:

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{4} = 1.$$



Ответ: 1.

49. Тип 8 № 119975

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

Решение. Найдем закон изменения скорости:

$$\upsilon(t) = x'(t) = 12t - 48.$$

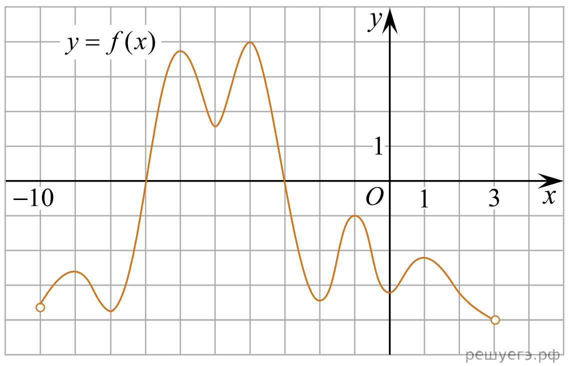
При $t = 9$ с имеем:

$$\upsilon(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60 \text{ м/с}.$$

Ответ: 60.

50. Тип 8 № 679992

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (–10; 3). Определите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Вариант № 86541279

Решение. Производная изображенной на рисунке функции $f(x)$ равна нулю в точках экстремумов: –9, –8, –6, –5, –4, –2, –1, 0 и 1. Производная равна нулю в 9 точках.

Ответ: 9.