1. Тип 19 № 673267

Из каждого четырёхзначного числа вычли сумму его цифр и полученный результат разделили на 99.

а) Могло ли получиться число 45?

б) Могло ли получиться число 20?

в) Сколько различных натуральных чисел могло получиться?

2. Тип 19 № 501949

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

3. Тип 19 № 518032

Маша и Наташа делают фотографии. Каждый день каждая девочка делает на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. В результате Наташа сделала на 935 фотографий больше, чем Маша.

а) Могло ли это произойти за 5 дней?

б) Могло ли это произойти за 9 дней?

в) Какое максимальное количество фотографий могла сделать Наташа, если Маша в последний день сделала меньше 50 фотографий?

4. Тип 19 № 553318

Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трех членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

5. Тип 19 № 643168

На овощебазу завезли капусту. Каждый из кочанов капусты весит 1, 2 или 3 килограмма.Фермер Иван поехал на овощебазу за капустой. Его сосед Фёдор попросил купить для него столько же капусты (по массе). На овощебазе Ивану составила набор кочанов капусты, суммарная масса которых составила N кг. Нужно разделить эти кочаны поровну (по массе) между Иваном и Федором так, чтобы не пришлось резать кочаны.

а) Существует ли набор кочанов суммарной массой $N = 20$, который невозможно разделить поровну?

б) Существует ли набор кочанов суммарной массой $N = 24$, который невозможно разделить поровну?

в) Найдите все значения N, для которых любой набор кочанов суммарной массы N можно разделить поровну.

6. Тип 19 № 517268

На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?

б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?

в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

7. Тип 19 № 556451

Вася записал на листе бумаги некоторую последовательность из n чисел ($n > 3$), а затем продолжил её, повторив все числа ещё раз в том же порядке. Затем Вася предложил Маше сыграть в игру по следующим правилам. За один ход Маша может спросить у Васи сумму любых трёх подряд идущих чисел. Маша выигрывает, если через несколько ходов узнает все числа.

а) Может ли Маша гарантированно выиграть, если $n = 4$?

б) Может ли Маша гарантированно выиграть, если $n = 6$?

в) За какое наименьшее число ходов Маша может гарантированно выиграть, если $n = 23$?

8. Тип 19 № 689021

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geqslant 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 13?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 500?

в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 57.

9. Тип 19 № 653545

а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра равна произведению двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 5?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

10. Тип 19 № 562813

Последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geqslant 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности, кроме первого и последнего, больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.

б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 6$?

11. Тип 19 № 517583

На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5120.

а) Может ли быть записано число 230?

б) Можно ли обойтись без числа 14?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

12. Тип 19 № 668801

Центр подготовки космонавтов готовит экипажи для работы на МКС в составе четырех человек каждый, причем у любых двух экипажей может быть не более одного общего члена и каждый космонавт может участвовать не более, чем в двух экипажах.

а) Можно ли при этих условиях из 9 человек подготовить 3 экипажа?

б) Можно ли при этих условиях из 9 человек подготовить 4 экипажа?

в) Какое наименьшее количество человек необходимо для подготовки 10 экипажей?

13. Тип 19 № 517425

Дан выпуклый многоугольник *M*, который можно разрезать на 1292 квадрата площади 1.

а) Приведите пример такого многоугольника, если известно, что длина его наименьшей стороны больше 15.

б) Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник *M*?

в) Какое наибольшее и наименьшее значение может иметь периметр этого многоугольника?

14. Тип 19 № 485958

Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Вариант № 86880880

15. Тип 19 № 515768

Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

16. Тип 19 № 514485

На доске написано 10 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается сумма, округлённая до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9, а вместо 3,3 и 5 записывается 8).

а) Приведите пример 10 нецелых чисел и последовательности 9 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.

б) Может ли после 9 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 7?

в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 9 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

17. Тип 19 № 645894

Существуют ли такие восемьсот различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя:

а) ровно в 500 раз?

б) ровно в 400 раз?

в) Найдите наименьшее возможное натуральное число, равное отношению среднего арифметического этих чисел к их наибольшему общему делителю.

18. Тип 19 № 514573

На каждой из 28 костей домино написаны два целых числа, не меньших 0 и не больших 6 так, что они образуют все возможные пары по одному разу (0-0, 0-1, 0-2 и так далее до 6-6).

Все кости домино разложили на несколько кучек и для каждой кучки подсчитали сумму всех чисел на костях, находящихся в этой кучке. Оказалось, что полученные суммы образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Могло ли быть 7 кучек?

б) Могло ли быть 9 кучек?

в) Какое наибольшее количество кучек могло быть?

19. Тип 19 № 515730

Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 4$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geqslant 3$ выполняться равенство $a_n = 3a_2 - 2a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 667$?

20. Тип 19 № 526258

Есть синие и красные карточки. Всего карточек 50 штук. На каждой карточке написано натуральное число. Среднее арифметическое всех чисел равно 16. Все числа на синих карточках разные. При этом любое число на синей карточке больше, чем любое на красной. Числа на синих увеличили в 2 раза, после чего среднее арифметическое стало равно 31,2.

а) Может ли быть 10 синих карточек?

б) Может ли быть 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть?

21. Тип 19 № 548484

Десять мальчиков и семь девочек пошли в лес за грибами. Известно, что любые две девочки набрали больше грибов, чем любые три мальчика, но любые пять мальчиков набрали больше грибов, чем любые три девочки.

а) Может ли так случиться, что какая-то девочка набрала меньше грибов, чем какой-нибудь мальчик?

б) Может ли так случиться, что количество найденных грибов у всех детей будет различным?

в) Найдите минимальное возможное количество грибов, собранное всеми детьми суммарно.

22. Тип 19 № 660775

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых контейнерах находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75% от общего числа контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 80% от общей массы?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 40% от общей массы?

в) Какую наибольшую долю в процентах может составлять масса контейнеров с сахарным песком от общей массы?

Вариант № 86880880

23. Тип 19 № 627412

Есть желтые и белые карточки, всего — 100 штук. На каждой написано натуральное число, среднее арифметическое всех чисел равно 32. Все числа на желтых карточках разные. При этом любое число на желтой карточке больше, чем любое число на белой. Все числа на желтых карточках увеличили в 3 раза, после чего среднее арифметическое всех чисел стало равно 94,6.

а) Может ли быть ровно 70 желтых карточек?

б) Могут ли все числа на белых карточках быть различными?

в) Какое наибольшее количество желтых карточек может быть?

24. Тип 19 № 520705

Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 2S(n) + 11$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 3S(n) + 11$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n) = 8S(n) + 74$?

25. Тип 19 № 511410

а) Можно ли число 2016 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 197 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы четырех различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

26. Тип 19 № 517584

На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись заканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810.

а) Может ли быть 24 четных числа?

б) Может ли быть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 7?

в) Какое наименьшее количество чисел с последней цифрой 7 может быть на доске?

27. Тип 19 № 562042

У Миши в копилке есть двухрублёвые, пятирублёвые и десятирублёвые монеты. Если взять 10 монет, то среди них обязательно найдется хотя бы одна двухрублёвая. Если взять 15 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна пятирублёвая. Если взять 20 монет, то среди них обязательно найдется хотя бы одна десятирублёвая.

а) Может ли у Миши быть 30 монет?

б) Какое наибольшее количество монет может быть у Миши?

в) Какая наибольшая сумма рублей может быть у Миши?

28. Тип 19 № 502119

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geqslant 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

29. Тип 19 № 562942

На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 8, если изначально по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 39, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 199 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 199 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

30. Тип 19 № 525074

а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 105.

б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное двух соседних чисел равнялось 300, а наибольший общий делитель любых трёх подряд идущих чисел равнялся 1?

в) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 60?

31. Тип 19 № 633757

На острове живут 3 серых, 28 бурых и 29 малиновых хамелеонов. При встрече двух хамелеонов разных цветов оба меняют свой цвет на третий (серый и бурый оба становятся малиновыми и т. п.).

а) Может ли в некоторый момент времени на острове оказаться 15 серых, 28 бурых и 17 малиновых хамелеонов?

б) Может ли некоторый момент времени на острове оказаться 60 серых хамелеонов?

в) Какое наибольшее количество серых хамелеонов может оказаться на острове, при условии, что малиновых хамелеонов в этот момент времени ровно 2?

32. Тип 19 № 635158

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность натуральных чисел. Обозначим $M_{<c}(a_n)$ среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, которые меньше некоторого числа C, которое больше наименьшего, но не больше наибольшего члена этой последовательности. Обозначим $M_{\geqslant C}(a_n)$ — среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, которые не меньше числа C. Среднее арифметическое одного числа равно самому числу. К каждому члену последовательности $\{a_n\}$ прибавили 4. Получилась новая последовательность, которую обозначим $\{a_n+4\}$.

а) Существует ли последовательность $\{a_n\}$, состоящая из трёх членов, для которой $M_{<79}(a_n+4)<M_{<79}(a_n)$?

б) Существует ли последовательность $\{a_n\}$, состоящая из трёх членов, для которой $M_{<79}(a_n+4)<M_{<79}(a_n)$ и $M_{\geqslant 79}(a_n+4)<M_{\geqslant 79}(a_n)$?

в) Известно, что среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, равняется 84, $M_{\geqslant 79}(a_n)=94$, $M_{<79}(a_n)=70$, $M_{\geqslant 79}(a_n+4)=96$ и $M_{<79}(a_n+4)=72$. Какое наименьшее число членов может быть в последовательности $\{a_n\}$?

33. Тип 19 № 668215

Из четырёхзначного натурального числа вычитают сумму всех его цифр, затем полученное число делят на 3.

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 3111?

б) Могло ли в результате такой операций получиться число 2075?

в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 5200 до 6000 включительно?

34. Тип 19 № 526019

Готовясь к экзамену, Вася и Петя решали задачи из сборника, и каждый из них решил все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 10 дней?

в) Какое наименьшее число задач могло быть в сборнике, если известно, что каждый из них решал задачи более 6 дней, в первый день Вася решил больше задач, чем Петя, а за семь дней Петя решил больше задач, чем Вася?

35. Тип 19 № 669779

Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 60 монет достоинством 1 дукат и 60 монет достоинством 5 дукатов. Других монет у пиратов нет.

а) Получится ли поделить все деньги поровну между 18 пиратами, если каждому должно достаться целое число монет?

б) Получится ли поделить все деньги поровну между 40 пиратами, если каждому должно достаться целое число монет?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану удастся поделить между ними все деньги любым способом, каким бы ему не захотелось (например, при каком-то способе кому-то из пиратов может ничего не достаться)?

36. Тип 19 № 637852

Сначала Маша написала на доске 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 30. Затем вместо некоторых из чисел (возможно, одного) она написала на доске числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, она с доски стёрла.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 24. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 30?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 24. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

37. Тип 19 № 672199

Дано четырехзначное число $\overline{abcd}$, где a, b, c и d — соответственно цифры разрядов тысяч, сотен, десятков и единиц, причём $a \neq 0$.

а) Может ли произведение цифр этого числа быть больше суммы цифр этого числа в 3 раза?

б) Цифры a, b, c и d попарно различны. Сколько существует различных чисел $\overline{abcd}$ таких, что произведение цифр меньше суммы цифр?

в) Известно, что $a \cdot b \cdot c \cdot d = k(a+b+c+d)$, где k — двузначное число. При каком наименьшем значении $\overline{abcd}$ число k будет наибольшим?

38. Тип 19 № 506025

Рассматривается набор гирек, масса каждой из которых — целое число граммов, а общая масса всех гирек равна 500 граммам. Такой набор называется правильным, если любое тело, имеющее массу, выраженную целым числом граммов от 1 до 500, может быть уравновешено некоторым количеством гирек набора и притом единственным образом (тело кладется на одну чашу весов, гирьки — на другую; два способа уравновешивания, различающиеся лишь заменой некоторых гирек на другие той же массы, считаются одинаковыми).

а) Является ли правильным набор, состоящий из 167 гирек массой по одному грамму, одной гирьки массой 165 граммов и одной гирьки массой 168 граммов?

б) Приведите пример правильного набора, в котором не все гирьки по одному грамму.

в) Сколько существует различных правильных наборов? (Два набора различны, если некоторая гирька участвует в этих наборах неодинаковое число раз.)

39. Тип 19 № 512876

а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

40. Тип 19 № 519638

На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стерли.

а) Пусть среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 7. Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Пусть среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 7. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

41. Тип 19 № 509953

Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого участника является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл учеников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл учеников, сдавших тест, понизился, и средний балл учеников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл учеников, сдавших тест, составил 100, а средний балл учеников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл учеников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших — 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

42. Тип 19 № 642379

Даны числа A и B. Из них можно сделать числа $A + 2$ и $B - 1$ или $B + 2$ и $A - 1$, только если следующая пара этих чисел будет натуральной. Известно, что $A = 7$, $B = 11$.

а) Можно ли за 20 ходов создать пару, где одно из чисел равно 50?

б) За сколько ходов можно сделать пару, где сумма чисел будет равна 600?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать, чтобы оба числа не превышали 50?

43. Тип 19 № 561776

На доске разрешается написать n таких ненулевых целых чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, для которых при каждом натуральном числе $k = 2, ..., n - 1$ выполнено равенство $a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$.

а) Можно ли при $n = 5$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось равенство $a_2 = a_5$?

б) Можно ли при $n = 100$ написать на доске такие числа, сумма которых равна 2020?

в) При $n = 10$ на доске написаны такие числа, сумма которых равна 15. Какое наименьшее значение может принимать сумма их квадратов?

44. Тип 19 № 636748

На доске разрешается в одну строку так написать $n \geqslant 3$ различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, чтобы для любого $k = 1, 2, \ldots, (n-2)$ число a_{k+2} равнялось либо сумме, либо разности, либо произведению, либо частному взятых в некотором порядке чисел a_{k+1} и a_k. Например, этим правилам удовлетворяют 4 числа 3, 12, 4, 8, а также 5 чисел 8, 2, 4, 6, 24, написанные в указанном порядке.

а) Можно ли по этим правилам так написать $n = 5$ чисел, чтобы среди них в некотором порядке встретились четыре числа 1, 2, 3 и 4?

б) Можно ли по этим правилам так написать $n = 4$ нечетных числа, чтобы среди них в некотором порядке встретились три числа 3, 5 и 7?

в) Какое наименьшее значение может принимать n, если на доске в некотором порядке встречаются числа 1, 2 и 8?

45. Тип 19 № 633985

В натуральном числе n между всеми парами соседних цифр вставили одну и ту же цифру c. Получилось число m, которое делится на n. Их частное равно k.

а) Может ли быть $k = 10$?

б) Может ли быть $k = 2$?

в) Чему может быть равно наименьшее значение числа k?

46. Тип 19 № 509932

Последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 9a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$?

47. Тип 19 № 674205

В спортивной секции занимается более 20 и менее 45 школьников. На областное соревнование было заявлено более половины ребят из секции, но потом ровно один из них отказался участвовать.

а) Могло ли получиться так, что теперь на соревнование заявлено менее половины школьников из этой секции?

б) Известно, что и до, и после отказа одного из ребят процент заявленных на соревнование выражался целым числом. Найдите все возможные значения числа занимающихся в этой секции.

в) Какое наименьшее целое значение мог принять процент заявленных спортсменов после отказа одного из школьников?

48. Тип 19 № 642958

На столе лежит три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных цифр трехзначное число A. Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число B и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трех карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число C (возможно то же самое, что и Петя).

а) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если $A < 150$?

б) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если числа B и C делятся на 3?

в) Найдите наибольшее число A, для которого может быть верным равенство $A = B + C$.

49. Тип 19 № 520979

За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трёх звёзд, на 6 пунктов при получении двух звёзд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 32 пункта?

б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

в) За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трёх звёзд, 5000 — при получении двух звёзд и 2000 — при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

Примечание редакции Решу ЕГЭ.

В п. а) считайте начальный заряд достаточно большим.

50. Тип 19 № 514594

На проекте «Мисс Чмаровка — 2016» выступление каждой участницы оценивают шесть судей. При этом каждый судья выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что за выступление Изольды Кабановой все члены жюри выставили различные оценки. По старой системе оценивания итоговый балл за выступление определяется как среднее арифметическое всех оценок судей. По новой системе оценивания итоговый балл вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и считается среднее арифметическое четырех оставшихся оценок.

а) Могут ли итоговые баллы, вычисленные по старой и новой системам оценивания, оказаться одинаковыми?

б) Может ли разность итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, оказаться равной $\frac{1}{8}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.