1. Тип 16 № 507218

31 декабря 2014 года Никита взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на а%), затем Никита переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 073 600 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 3 513 600 рублей, то за 2 года. Под какой процент Никита взял деньги в банке?

Решение. Пусть S — сумма кредита. Обозначим ежегодные платежи A_1 и A_2 соответственно. Сумма долга каждый год увеличивается на $a\%$, то есть сумма долга умножается на коэффициент $b=1+0,01a$. После первой выплаты сумма долга станет равной $S_1=Sb-A_1$, после второй выплаты: $S_2=(Sb-A_1)b-A_1$, после третье выплаты: $S_3=((Sb-A_1)b-A_1)b-A_1$, после четвёртой выплаты: $S_4=(((Sb-A_1)b-A_1)b-A_1)b-A_1$. Причём долг будет погашен полностью, получаем, то есть $(((Sb-A_1)b-A_1)b-A_1)b-A_1=0$. Аналогично получаем уравнение для случая, когда выплаты совершаются платежами размером A_2: $S_2'=(Sb-A_2)b-A_2$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} Sb^4-A_1b^3-A_1b^2-A_1b-A_1=0, \\ Sb^2-A_2b-A_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Sb^2\cdot b^2-A_1b^3-A_1b^2-A_1b-A_1=0, \\ Sb^2=A_2b+A_2. \end{cases}$$

Подставим выражение для Sb^2 в первое уравнение: $(A_2+A_2b)\cdot b^2-A_1b^3-A_1b^2-A_1b-A_1=0$. Преобразуем это уравнение:

$$(A_2-A_1)b^3+(A_2-A_1)b^2-A_1b-A_1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b^2(A_2-A_1)(b+1)-A_1(b+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+1)((A_2-A_1)b^2-A_1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1, \\ b^2=\dfrac{A_1}{A_2-A_1}. \end{array}\right.$$

Подставляя числовые значения получаем:

$$\left[\begin{array}{l} b=-1, \\ b=-1,2, \\ b=1,2. \end{array}\right.$$

Отрицательные корни не подходят по условию задачи, значит, $b=1,2$, откуда $a=20$, то есть Никита взял деньги в банке под 20%.

Ответ: 20%.

2. Тип 16 № 514724

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 5 млн рублей.

Решение. Пусть первоначальный вклад равен S (млн рублей). Тогда в конце первого года вклад составит $1{,}1S$, а в конце второго — $1{,}21S$. В начале третьего года вклад составит $1{,}21S+3$, а в конце $1{,}331S+3{,}3$. В начале четвёртого года вклад составит $1{,}331S+6{,}3$, а в конце — $1{,}4641S+6{,}93$.

По условию, нужно найти наименьшее целое S, для которого начисления банка составят более 5 млн рублей, то есть разность итоговой суммы вклада и всех внесенных средств должна быть больше 5:

$$(1,4641S+6,93)-S-6>5 \Leftrightarrow S>\frac{4,07}{0,4641} \Leftrightarrow S>8\frac{3572}{4641}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства — число 9. Значит, размер первоначального вклада составляет 9 млн рублей.

Ответ: 9 млн рублей.

3. Тип 16 № 515785

У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение. Доход за 1 га картофеля на первом поле: $300\cdot 10000=3\cdot 10^6$ руб.

Доход за 1 га свеклы на первом поле: $200\cdot 13000=2,6\cdot 10^6$ руб.
Таким образом, первое поле выгодно полностью засадить картофелем.

Доход за 1 га картофеля на втором поле: $200\cdot 10000=2\cdot 10^6$ руб.

Доход за 1 га свеклы на втором поле: $300\cdot 13000=3,9\cdot 10^6$ руб.
Таким образом, второе поле выгодно полностью засадить свеклой. Суммарно получаем:

$$10\cdot(3\cdot 10^6+3,9\cdot 10^6)=6,9\cdot 10^7=69000000 \text{ руб.}$$

Ответ: 69 млн. рублей.

4. Тип 16 № 508581

В одной стране в обращении находилось 1 000 000 долларов, 20% из которых были фальшивыми. Некая криминальная структура стала ввозить в страну по 100 000 долларов в месяц, 10% из которых были фальшивыми. В это же время другая структура стала вывозить из страны 50 000 долларов ежемесячно, из которых 30% оказались фальшивыми. Через сколько месяцев содержание фальшивых долларов в стране составит 5% от общего количества долларов?

Решение. Ежемесячное увеличение валютной массы, находящейся в обращении, составляет 100 − 50 = 50 тыс. долларов, поэтому через n месяцев в стране будет $(1000 + 50n)$ тыс. долларов.

Количество фальшивых долларов ежемесячно уменьшается на $50\cdot 0,3-100\cdot 0,1=15-10=5$ тыс. долларов. Изначально их было 1 000 000 · 0,2 = 200 000, поэтому через n месяцев в стране будет $(200 - 5n)$ тыс. фальшивых долларов.

Через n месяцев фальшивые доллары составили 5% от общего количества долларов. Имеем:

$$(1000+50n)\cdot 0,05=200-5n\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 50+2,5n=200-5n\Leftrightarrow 7,5n=150\Leftrightarrow n=20.$$

Ответ: через 20 месяцев.

5. Тип 16 № 544253

Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими начинками: ягодная, творожная и мясная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость за тонну	Отпускная цена за тонну	Производственные возможности
Ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 тонн в мес.
Творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 тонн в мес.
Мясо	145 тыс. руб.	145 тыс. руб.	60 тонн в мес.

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

Решение. Пусть x — доля всех мощностей фабрики за месяц, которые выпускают блинчики с ягодами, y — доля всех мощностей фабрики за месяц, которые выпускают блинчики с творогом, z — доля всех мощностей фабрики, которые выпускают блинчики с мясом. Значит, $x+y+z=1$. При этом для выполнения условий ассортиментности должны быть выполнены условия:

$$90x\geqslant 15\Leftrightarrow x\geqslant \frac{1}{6};$$
$$75y\geqslant 15\Leftrightarrow y\geqslant \frac{1}{5};$$
$$60z\geqslant 15\Leftrightarrow z\geqslant \frac{1}{4}.$$

Прибыль в тыс. руб., которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц равна

$$\Pi=(100-70)\cdot 90x+(135-100)\cdot 75y+(145-145)\cdot 60z=$$
$$=30\cdot 90x+35\cdot 75y=$$
$$=75(36x+35y)=75(35(x+y)+x)=$$
$$=75(35(1-z)+x)=75(35-35z+x)$$

Прибыль возрастает с уменьшением z и с увеличением x. Заметим, что

$$y+z\geqslant \frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{9}{20}\ \Leftrightarrow\ x=1-(y+z)\leqslant 1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}.$$

Значит,

$$\Pi=75(35-35z+x)\leqslant 75\cdot\left(35-35\cdot\frac{1}{4}+\frac{11}{20}\right)=$$
$$=\frac{75\cdot(35\cdot 15+11)}{20}=2010\text{ тыс. руб.},$$

причем равенство достигается при $x=\frac{11}{20},\ y=\frac{1}{5},\ z=\frac{1}{4}.$

Ответ: 2010 тыс. руб.

Примечание.

Рекомендуем сравнить это задание с заданием 509426 одного из пробных экзаменов.

6. Тип 16 № 514641

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы

− каждый январь долг увеличивается на 17,5% по сравнению с концом предыдущего года;

− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

− в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Решение. Долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на июль каждого года должен уменьшиться до нуля следующим образом:

$$S;\ 0,9S;\ 0,4S;\ 0.$$

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 17,5% значит, долг в январе каждого года равен:

$$1,175S;\ 1,0575S;\ 0,47S.$$

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

$$0,275S;\ 0,6575S;\ 0,47S.$$

По условию, числа

$$S;\ \frac{11S}{40};\ \frac{263S}{400};\ \frac{47S}{100}$$

должны быть целыми. Значит, число S должно делиться на 40, 400 и 100. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 400.

Ответ: 400.

7. Тип 16 № 677074

Полтора года назад Ольга Александровна открыла вклад на сумму 1 млн руб. в банке под r% годовых на следующих условиях:

— проценты по вкладу начисляются через каждые 6 месяцев на сумму, которая была на счете на момент конца дня предыдущего начисления процентов;

— можно внести сумму на счет и снять деньги со счета в день очередного начисления процентов;

— срок действия договора составляет 1,5 года.

Через полгода после открытия счета Ольга Александровна внесла 330 тыс. руб., а еще через полгода она сняла со счета 1098 тыс. руб. К концу договора на счете осталось 428 тыс. руб. Найдите r.

Решение. Пусть $k=1+\frac{r}{200}$, где r — годовая процентная ставка по вкладу. Через полгода на вклад будет внесено 330 тыс. руб., а проценты будут начислены на первоначальную сумму вклада — 1000 тыс. руб. Через полгода на вкладе будет находиться $1000k+330$ тыс. руб. Еще через 6 месяцев со счета будут сняты 1098 тыс. руб., а проценты будут начислены на сумму $1000k+330$ тыс. руб. Таким образом, через год после открытия вклада на нем будет находиться $(1000k+330)k-1098$ тыс. руб. Еще через 6 месяцев будут начислены проценты на оставшуюся на вкладе сумму, и к концу договора сумма на вкладе будет равна $((1000k+330)k-1098)k$ тыс. рублей, что равно 428 тыс. руб. Получаем уравнение:

$$((1000k+330)k-1098)k=428 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1000k^2+330k-1098)k=428 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1000k^3+330k^2-1098k=428 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 500k^3+165k^2-549k-214=0.$$

Нетрудно заметить, что число $k=-1$ является решением данного уравнения. Делением многочлена $500k^3+165k^2-549k-214$ на многочлен $k+1$ получаем многочлен $500k^2-335k-214$, корни которого суть $k=-\frac{2}{5}$ и $k=\frac{107}{100}$. Известно, что $k>1$, поэтому получаем, что $k=\frac{107}{100}$, откуда $r=14$.

Ответ: 14.

8. Тип 16 № 506954

В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена барреля сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объема закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти?

Решение. Пусть сумма, которой первоначально располагала администрация края, составляла S у. е., а цена барреля сырой нефти M у. е. Тогда первоначально возможный объем закупок составлял S/M баррелей. Этот объем примем за 100 процентов. За 2 месяца хранения в банке положенная сумм выросла до $1,26^2S$ у. е., а цена барреля сырой нефти за это же время убыла до $0,9^2M$ у. е. Следовательно, 1 ноября 2001 г. руководство края на эту сумму могла закупить $\dfrac{1,26^2S}{0,9^2M}$ баррелей сырой нефти. Процентное отношение этого объема к первоначально возможному объему закупок составит:

$$\frac{1,26^2S}{0,9^2M}:\frac{S}{M}\cdot 100\,\% \text{ то есть } 1,4^2\cdot 100\,\% = 196\,\%.$$

Значит, руководство края смогло пополнить 1 ноября 2001 г. нефтяные запасы края на 96% больше, чем 1 сентября того же года.

Ответ: 96.

9. Тип 16 № 548811

Планируется открыть вклад на 4 года, положив на счет целое число млн рублей. В конце каждого года он увеличивается на 10%, а в начале третьего и четвертого года вклад пополняется на 5 млн рублей. Найдите наименьший первоначальный вклад, при котором начисленные проценты за весь срок будут более 10 млн рублей.

Вариант № 86880789

Решение. Пусть в банк был положено x миллионов рублей. После двух лет сумма вклада составит:

$$1,1\cdot 1,1x = 1,21x.$$

В начале третьего года вклад пополнили на 5 миллионов. Затем банк начисляет проценты и сумма вклада станет равна:

$$1,1(1,21x+5) = 1,331x+5,5.$$

В начале четвертого года вклад пополняется еще раз на 5 миллионов. После начисления процентов за четвертый год сумма вклада станет равна:

$$1,1(1,331x+10,5) = 1,4641x+11,55.$$

Это превосходит положенную вкладчиком сумму $x + 5 + 5$ млн руб. на $0,4641x + 1,55$ млн руб.

По условию задачи:

$$0,4641x+1,55>10,$$

откуда

$$x>\frac{8,45}{0,4641}=\frac{84500}{4641}=18,2\ldots.$$

Наименьшее целое решение неравенства равно 19. Тем самым наименьший первоначальный вклад, при котором начисленные проценты за весь срок будут более 10 миллионов рублей, составляет 19 миллионов рублей.

Ответ: 19 000 000 руб.

10. Тип 16 № 517470

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:

− 1-го числа k-ого месяца долг возрастёт на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

− со 2-го по 14-е число k-того месяца необходимо выплатить часть долга;

− 15-го числа k-того месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит?

Решение. По формуле для переплаты П при выплате суммы кредита S дифференцированными платежами имеем:

$$\Pi=\frac{n+1}{200}rS,$$

где n — искомое число месяцев, а $r=1$ — величина платежной ставки в поцентах (см. Гущин Д. Д. «Встречи с финансовой математикой»; для получения полного балла доказательство этих формул необходимо приводить на экзамене). По условию, переплата П равна $0{,}2S$, тогда:

$$0,2S=\frac{n+1}{200}\cdot 1\cdot S,$$

откуда $n=39$.

Приведем другое решение.

Долг уменьшается на 15-е число равномерно: $S,\ \frac{S}{n}(n-1),\ \ldots\frac{2S}{n},\ \frac{S}{n},\ 0.$

Первого числа долг возрастает на 1%, значит, долг на первое число: $1,01S,\ \frac{1,01S(n-1)}{n},\ \ldots\ \frac{2,02S}{n},\ \frac{1,01S}{n}.$

Выплаты:

$$0,01S+\frac{S}{n},\ \frac{0,01S(n-1)}{n}+\frac{S}{n},\ \ldots\frac{0,02S}{n}+\frac{S}{n},\ \frac{0,01S}{n}+\frac{S}{n}.$$

Тогда

$$S+0,01S\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ \ldots\ +\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=S\left(1+\frac{0,01(n+1)}{2}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{0,01(n+1)}{2}=0,2\Leftrightarrow n=39.$$

Ответ: 39.

11. Тип 16 № 513301

В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая — никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, а рабочие первой области одинаково эффективно добывают и алюминий, и никель, они могут добывать любой из металлов. За сутки ими будет добыто $160\cdot 5\cdot 0{,}1=80$ кг металла.

Пусть во второй области алюминий добывают t рабочих, а никель — $160-t$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5t}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160-t)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции $f(t)=\sqrt{5t}+\sqrt{800-5t}$ для натуральных t, не больших 160. Имеем:

$$f'(t)=\frac{5}{2\sqrt{5t}}-\frac{5}{2\sqrt{800-5t}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{800-5t}-\sqrt{5t}}{\sqrt{5t}\cdot\sqrt{800-5t}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800-5t}=\sqrt{5t}\underset{t\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}800-5t=5t\Leftrightarrow t=80.$$

При t меньших 80 производная положительна, а при t больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{max}=40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Таким образом, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 120 кг металла.

Ответ: 120 кг.

12. Тип 16 № 508582

Банк планирует вложить на 1 год 30% имеющихся у него средств клиентов в акции золотодобывающего комбината, а остальные 70% — в строительство торгового комплекса. В зависимости от обстоятельств первый проект может принести банку прибыль в размере от 32% до 37% годовых, а второй проект — от 22 до 27% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться в пределах от 10% до 20% годовых. Определите, какую наименьшую и наибольшую чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в покупку акций и строительство торгового комплекса может при этом получить банк.

Решение. Пусть сумма находящихся в банке средств клиентов составляет S денежных единиц. Банк получит наименьшую прибыль, если его доходы по обоим вложениям окажутся минимальными, а выплаты клиентам максимальными. Величина минимальных доходов составляет

$$0,3S\cdot 1,32+0,7S\cdot 1,22-S=0,396S+0,854S-S=0,25S.$$

Выплата клиентам по высшей ставке (20%) составляет 0,2 . Следовательно, наименьшая возможная чистая прибыль равна

$$\frac{0,25S-0,2S}{S}\cdot 100\%=0,05\cdot 100\%=5\%.$$

Банк получит наибольшую прибыль, если его доходы по обоим вложениям окажутся максимальными, а выплаты клиентам минимальными. Величина максимальных доходов составляет

$$0,3S\cdot 1,37+0,7S\cdot 1,27-S=0,411S+0,889S-S=0,3S.$$

Выплата клиентам по низшей ставке (10%) составляет 0,1 . Поэтому наибольшая возможная чистая прибыль равна

$$\frac{0,3S-0,1S}{S}\cdot 100\%=0,2\cdot 100\%=20\%.$$

Ответ: 5%; 20%.

Примечание.

Эта задача, взятая нами из вариантов А. Ларина № 93 и № 239, впервые, по-видимому, была предложена на вступительном экзамене по математике для поступающих на отделение менеджмента экономического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова в июле 1997 года. Составляя парную задачу к этой, авторы, по всей вероятности, допустили ошибку, распространенную потом при цитировании в методических публикациях. Интересующемуся читателю рекомендуем самостоятельно решить эту (несложную) задачу, а затем проверить себя.

> Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект X, а остальные 60% — проект Y. Проект X может принести прибыль в размере от 19% до 24% годовых, а проект Y — от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наименьший и наибольший возможные уровни процентной ставки, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y.

Решение и комментарии приведены в задании 621856.

13. Тип 16 № 642376

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2030 года долг должен составлять 800 тыс. руб.;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;

Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2090 тысяч рублей.

Решение. Пусть S тысяч рублей — сумма кредита. Так как сумма ежегодно должна уменьшаться на одну и ту же величину, то каждый год она уменьшается на $\frac{(S-800)}{5}$ тысяч рублей в первые 5 лет и на 160 тысяч рублей в последние 5 лет. Каждая выплата состоит из суммы, на которую уменьшается долг, и суммы начисленных процентов. Составим таблицу.

Год	Начисленный процент в январе (тыс. руб.)	Выплата (тыс. руб.)	Сумма долга в июле (тыс. руб.)
2025			S
2026	$0,1\cdot S$	$\frac{(S-800)}{5}+0,1\cdot S$	$800+4\cdot\frac{(S-800)}{5}$
2027	$0,1\cdot\left(800+4\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$\frac{(S-800)}{5}+0,1\cdot\left(800+4\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$800+3\cdot\frac{(S-800)}{5}$
2028	$0,1\cdot\left(800+3\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$\frac{(S-800)}{5}+0,1\cdot\left(800+3\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$800+2\cdot\frac{(S-800)}{5}$
2029	$0,1\cdot\left(800+2\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$\frac{(S-800)}{5}+0,1\cdot\left(800+2\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$800+\frac{(S-800)}{5}$
2030	$0,1\cdot\left(800+\frac{(S-800)}{5}\right)$	$\frac{(S-800)}{5}+0,1\cdot\left(800+\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	800
2031	$0,1\cdot 800$	$160+80$	640
2032	$0,1\cdot 640$	$160+64$	480
2033	$0,1\cdot 480$	$160+48$	320
2034	$0,1\cdot 320$	$160+32$	160
2035	$0,1\cdot 160$	$160+16$	0

Общая сумма выплат состоит из суммы кредита (S тысяч рублей) и суммы начисленных процентов за каждый год и по условию равна 2090 тысяч рублей:

$$S+0,1\cdot\left(S+800\cdot 4+\frac{(S-800)}{5}\cdot(4+3+2+1)\right)+80+64+48+32+16=$$
$$=S+0,1\cdot(S+3200+(S-800)\cdot 2)+240=$$
$$=S+0,1\cdot(3S+1600)+240=$$
$$=S+0,3S+160+240=1,3S+400=2090,$$

откуда $1,3S=1690$. Таким образом, находим: $S=\frac{1690}{1,3}=1300$ тысяч рублей.

Вариант № 86880789

Ответ: 1300 тысяч рублей.

14. Тип 16 № 650558

Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог в два с половиной раза (до $t_1=2,5t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $9000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

Решение. Сумма отличных от нуля налоговых сборов равна произведению величины налога за единицу продукции на количество произведенных единиц, то есть дается функцией $f(t)=(9000-2t)t$, где $0<t<4500$. Функция $f(t)$ — квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом. На интервале (0; 4500) она достигает наибольшего значения в точке максимума t_{max}. По условию $f(t_0)=f(2,5t_0)$, значит,

$$t_{max}=\frac{t_0+2,5t_0}{2}=1,75t_0.$$

Составим пропорцию:

$$\begin{array}{lcr} \text{налог } 2,5t_0, & — & 100\% \\ \text{налог } 1,75t_0, & — & x\% \end{array}$$

откуда

$$x=\frac{1,75t_0\cdot 100}{2,5t_0}=\frac{1750}{25}=70.$$

Значит, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, государству следует уменьшить налог на $100\%-70\%=30\%$.

Ответ: 30.

15. Тип 16 № 522126

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 30% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 15 млн в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 190 млн, а к концу проекта — больше 360 млн рублей.

Решение. Пусть S млн — первоначальные вложения. К началу 2-го года получится $1{,}3S+20$ млн, а к началу 3-го года — $1,3(1,3S+20)+20=1,69S+46$. По условию $1,69S+46>190$, откуда $S>\dfrac{144}{1,69}=85,2...$

К началу 4-го года имеем $1,3(1,69S+46)+15$, а в конце проекта:

$$1,3(1,3(1,69S+46)+15)+15=$$
$$=2,8561S+77,74+34,5=2,8561S+112,24.$$

По условию $2,8561S+112,24>360$, откуда $S>\dfrac{247,76}{2,8561}=86,7...$

А значит, минимальное возможное целое значение: $S=87$.

Ответ: 87 млн. рублей.

16. Тип 16 № 511919

Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 40 руб., второго сорта — по 30 руб., третьего сорта — по 20 руб. за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 2170 руб. Известно, что масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта. Сколько килограммов яблок второго сорта продал садовод?

Решение. Пусть x кг — масса яблок 1-го сорта, y кг — масса яблок 2-го сорта, оставшиеся $91-(x+y)$ кг — масса яблок 3-го сорта. Для величины выручки имеем:

$$40x+30y+20\cdot(91-x-y)=2170 \Leftrightarrow 2x+y=35,$$

откуда $y=35-2x$ (*).

Поскольку масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта имеем:

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{91-(x+y)}.$$

Подставим условие (*) в полученную пропорцию и решим ее:

$$\frac{x}{35-2x}=\frac{35-2x}{x+56} \underset{0<x<17,5}{\Leftrightarrow} x(x+56)=(35-2x)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-196x+1225=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=\dfrac{175}{3} \end{array}\right. \underset{x<17,5}{\Leftrightarrow} x=7.$$

Таким образом, садовод продал 7 кг яблок первого сорта и, следовательно, 35 − 14 = 21 кг яблок второго сорта.

Ответ: 21.

Приведём другое решение.

Пусть x кг — масса яблок первого сорта, проданных садоводом, а масса яблок второго сорта составляет tx кг. Тогда масса проданных яблок третьего сорта составит $tx\cdot t = t^2x$ кг. По условию задачи:

$$t^2x+tx+x=91 \Leftrightarrow (t^2+t+1)x=91 \qquad (1)$$
$$20t^2x+30tx+40x=2170 \Leftrightarrow (2t^2+3t+4)x=217 \qquad (2)$$

Поделив почленно равенство (2) на равенство (1), получим:

$$\frac{2t^2+3t+4}{t^2+t+1}=\frac{217}{91} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2+\frac{t+2}{t^2+t+1}=2+\frac{35}{91} \Leftrightarrow \frac{t+2}{t^2+t+1}=\frac{5}{13} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5t^2+5t+5-13t-26=0 \Leftrightarrow 5t^2-8t-21=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{16+105}}{5} \Leftrightarrow t=\frac{4\pm 11}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=-\dfrac{7}{5}. \end{array}\right.$$

Значение $t=-\dfrac{7}{5}$ не подходит по смыслу задачи. Значение x найдем из уравнения $(t^2+t+1)x=91$.

$$x=\frac{91}{9+3+1}=7. \qquad tx=21.$$

Ответ: 21 кг.

17. Тип 16 № 560783

По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 9% в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение. Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10%, т. е. увеличивается в 1,1 раза. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1,1^3 \cdot S = 1,331 \cdot S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1,09 \cdot \left(1+\frac{n}{100}\right)^2 \cdot S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов. По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1,09 \cdot \left(1+\frac{n}{100}\right)^2 \cdot S > 1,331 \cdot S \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{n}{100}\right)^2 > \frac{1331}{1090} = 1,22\ldots$$

При $n = 11$ неравенство

$$1,11^2 > 1,22\cdots \Leftrightarrow 1,2321 > 1,22\ldots$$

верно, а при $n = 10$ неравенство

$$1,1^2 > 1,22\cdots \Leftrightarrow 1,21 > 1,22\ldots$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 11.

18. Тип 16 № 656584

Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 300 рублей. Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на первом заводе рабочие суммарно будут работать x^2 часов, тогда они произведут x единиц товара, а на заработную плату рабочим первого завода пойдёт $200x^2$ рублей. Пусть на втором заводе рабочие суммарно будут работать y^2 часов, тогда они произведут y единиц товара, а на заработную плату рабочим второго завода пойдёт $300y^2$ рублей. Тогда

$$200x^2+300y^2 = 1\,200\,000 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 6000-\frac{3y^2}{2} \underset{x\geqslant 0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{6000-\frac{3y^2}{2}}.$$

Общее количество единиц товара, производимое двумя заводами, равно

$$S(y)=\sqrt{6000-\frac{3y^2}{2}}+y,$$

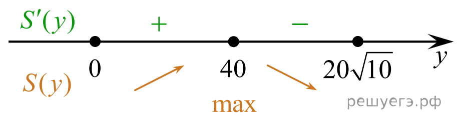
где $0 \leqslant y \leqslant 20\sqrt{10}$. Определим наибольшее значение функции $S(y)$ для таких значений переменной. Возьмём производную:

$$S'(y)=\frac{-3y}{2\sqrt{6000-\frac{3y^2}{2}}}+1.$$

Найдём стационарные точки:

$$\frac{-3y}{2\sqrt{6000-\frac{3y^2}{2}}}+1=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{6000-\frac{3y^2}{2}}=3y \underset{y\geqslant 0}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 24\,000-6y^2=9y^2 \Leftrightarrow y^2=1600 \underset{y\geqslant 0}{\Leftrightarrow} y=40.$$

Отметим на рисунке промежутке монотонности функции:



Значит, наибольшее значение функции $S(y)$ на заданном отрезке достигается в точке максимума:

$$S(40)=\sqrt{6000-\frac{3\cdot 40^2}{2}}+40=60+40=100.$$

Ответ: 100.

19. Тип 16 № 508300

1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

Решение. Заметим, что за 4 месяца Александр Сергеевич выплатит 1,1 млн рублей. Таким образом, он не покроет долг с процентами. Каждый месяц долг увеличивается не более, чем на 1 100 000 · 0,01 = 11 000 рублей. Значит, за пять месяцев Александр Сергеевич должен будет выплатить не более 1 100 000 + 5 · 11 000 = 1 155 000 рублей, что менее чем 5 · 275 000 = 1 375 000 рублей. Таким образом, Александр Сергеевич сможет выплатить кредит за 5 месяцев.

Ответ: 5.

20. Тип 16 № 506955

Транснациональная компания Amako Inc. решила провести недружественное поглощение компании First Aluminum Company (FAC) путем скупки акций миноритарных акционеров. Известно, что Amako было сделано три предложения владельцам акций FAC, при этом цена покупки одной акции каждый раз повышалась на 1/3. В результате второго предложения Amako сумела увеличить число выкупленных акций на 20% (после второй скупки общее число выкупленных акций увеличилось на 20%), а в результате скупки по третьей цене — еще на 20%. Найдите цену за одну акцию при третьем предложении и общее количество скупленных акций, если начальное предложение составляло $27 за одну акцию, а по второй цене Amako скупила 15 тысяч акций.

Решение.

Предложения	Цена одной акции ($)	Количество выкупленных акций	
		При данном предложении	Общее количество выкупленных акций
1	**27**		**75 000** $15000:0,2=75000$
2	**36** $27+\frac{1}{3}\cdot 27=27+9=36$	**15 000**	**90 000** $75000+15000=90000$
3	**48** $36+\frac{1}{3}\cdot 36=36+12=48$		**108 000** $90000\cdot 1,2=108000$

Ответ: цена третьего предложения составила $48 за одну акцию; всего было выкуплено 108 000 акций.

21. Тип 16 № 626507

Банк предоставляет кредит на срок 3 года на следующих условиях: проценты начисляются в конце каждого полугодия из расчета: I год — по 10% за полугодие, II год — по 20% за полугодие, III год — по 25% за полугодие. Платежи вносятся равными суммами в конце каждого полугодия, кроме первого, после начисления процентов. Чему равен полугодовой платеж при кредите в 2,54 млн рублей?

Решение. Операции по данному кредиту приведем в следующей таблице (все единицы измерения приведены в тыс. руб.).

Полугодия	Долг в начале платежного полугодия	Выплата	Долг после очередной выплаты
1	$2540\cdot 1,1=2794$	—	2794
2	$2794\cdot 1,1=3073,4$	x	$3073,4-x$
3	$(3073,4-x)\cdot 1,2=3688,08-1,2x$	x	$3688,08-2,2x$
4	$(3688,08-2,2x)\cdot 1,2=4425,696-2,64x$	x	$4425,696-3,64x$
5	$(4425,696-3,64x)\cdot \dfrac{5}{4}=5532,12-4,55x$	x	$5532,12-5,55x$
6	$(5532,12-5,55x)\cdot \dfrac{5}{4}=6915,15-6,9375x$	x	$6915,15-7,9375x=0$

Решим уравнение:

$$6915,15-7,9375x=0\Leftrightarrow 7,9375x=6915,15=871,2.$$

Ответ: 871,2 тыс. руб.

22. Тип 16 № 515747

В двух областях есть по 250 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая — никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

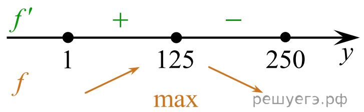
Вариант № 86880789

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, необходимо, чтобы в каждой области независимо от другой было добыто наибольшее количество металла. Поэтому всех рабочих первой области необходимо направить на добычу алюминия — за единицу времени они добывают его в два раза больше, чем никеля. За сутки они добудут: $0,2\cdot 5\cdot 250=250$ кг алюминия.

Пусть во второй области y человек заняты на добыче алюминия, за 5 часов они добудут $\sqrt{5y}$ кг. Тогда остальные 250 $-y$ человек заняты на добыче никеля, за 5 часов они добудут его $\sqrt{5(250-y)}$ кг.

Найдем наибольшее на значение функции $f(y)=\sqrt{5y}+\sqrt{1250-5y}$ для натуральных y, не превосходящих 250. Имеем:

$$f'(y)=\frac{5}{2\sqrt{5y}}-\frac{5}{2\sqrt{1250-5y}}=0.$$



Найденная производная равна нулю, если $\sqrt{1250-5y}=\sqrt{5y}$, то есть при $1250-5y=5y$, откуда $y=125$. Изобразим поведение функции на рисунке. Заметим, что f возрастает на [0; 125] и убывает на [125; 250]. Следовательно, $f_{\text{наиб}}=f_{max}=f(125)=50$ кг.

Тем самым, во второй области 125 рабочих необходимо направить на добычу алюминия, и 125 — на добычу никеля. За смену они добудут 50 кг металлов.

Общая масса металлов составляет 250 + 50 = 300 (кг).

Ответ: 300 кг.

23. Тип 16 № 643685

Вклад в размере 20 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает размер вклада на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x — целое число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 13 млн рублей.

Решение. В конце первого года вклад составит 22 млн рублей, а в конце второго 24,2 млн рублей. В начале третьего года вклад (в млн рублей) составит $24,2+x$, а в конце — $26,62+1,1x$. В начале четвёртого года вклад составит $26,62+2,1x$, а в конце — $29,282+2,31x$. По условию нужно найти наименьшее целое x, для которого выполнено неравенство:

$$(29,282+2,31x)-20-2x>13\Leftrightarrow x>11\frac{154}{155}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства — число 12.

Ответ: 12.

24. Тип 16 № 519586

Цена производителя на некоторое изделие составляет 25 рублей. Прежде чем попасть на прилавок магазина, изделие проходит через несколько фирм-посредников, каждая из которых увеличивает цену в 1,5 или 2 раза, осуществляя услуги по хранению и транспортировке изделий. Магазин делает наценку 20%, после чего изделие поступает в продажу по цене 405 рублей. Сколько посредников было между магазином и производителем?

Решение. Магазин приобрёл у последнего посредника по цене $\dfrac{405}{1,2}=337,5$ рублей. Тогда за счёт посредников цена возросла в $\dfrac{337,5}{25}=13,5$ раз. Пусть x посредников увеличивали цену в 1,5 раза, y посредников — в 2 раза. Тогда $1,5^x\cdot 2^y=13,5,$ тогда $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\cdot 2^y=\dfrac{27}{2},$ откуда $3^x\cdot 2^{y-x}=3^3\cdot 2^{-1}.$ Учитывая, что числа 2 и 3 взаимно простые, получаем, что $x=3,\ y-x=-1,$ то есть $x=3, y=2.$ Отсюда общее количество посредников равно $x+y=5.$

Ответ: 5.

25. Тип 16 № 509583

Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна вносить в банк часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна выплатит банку в течение первого года кредитования?

Решение. Пусть B_i — размер долга Жанны на конец месяца i, X_i — платеж Жанны в конце месяца i. Мы знаем, что имеет место соотношение $B_i = 1{,}02B_{i-1} - X_i$. Кроме того, мы знаем, что последовательность (B_i) является арифметической прогрессией. При этом $B_0 = 1200$ тыс. руб., а $B_{24} = 0$, поскольку в конце срока кредитования долг Жанны должен быть равен нулю. Этих двух точек достаточно, чтобы узнать всю последовательность B_i: $b_i=\dfrac{24-i}{24}\cdot 1200.$ Значит,

$$X_i=1,02B_{i-1}-B_i=$$
$$=\left(1,02\cdot\frac{25-i}{24}-\frac{24-i}{24}\right)\cdot 1200=\frac{1,5-0,02i}{24}\cdot 1200.$$

Поскольку X_i линейно зависит от i, последовательность X_i также является арифметической прогрессией. Значит,

$$X_1+X_2+...+X_{12}=\frac{(X_1+X_{12})\cdot 12}{2}=$$
$$=6(50\cdot 1,48+50\cdot 1,26)=$$
$$=300\cdot(1,48+1,26)=300\cdot 2,74=822 \text{ тыс. рублей.}$$

Ответ: 822 тыс. рублей.

Приведём другое решение.

Ежемесячно Жанна возвращает банку по 1,2 млн : 24 = 50 тыс. руб. тела долга и выплачивает равномерно уменьшающуюся от максимального значения до нуля сумму процентов за пользование кредитом. За первый месяц это 0,02 · 1,2 млн = 24 тыс. руб. За второй месяц на 1/24 меньше то есть 23 тыс. руб., затем 22 тыс. руб. и так далее. Поэтому выплаты за 12 первых месяцев составят арифметическую прогрессию с первым членом 74, последним — 63 тыс. руб. Ее сумма равна 12(74 + 63)/2 = 822 тыс. руб.

26. Тип 16 № 509824

Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей.

Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на оплату труда рабочих первого завода выделено x руб., а второго — оставшиеся $(900\,000 - x)$ руб. Тогда на первом заводе можно оплатить $\frac{x}{250}$ часов работы, а на втором — $\frac{900000-x}{200}$ часов работы. Количество произведённого за неделю товара равно квадратным корням из этих величин, поэтому для ответа на вопрос задачи требуется найти наибольшее целое значение функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{250}} + \sqrt{\frac{900000-x}{200}} =$$
$$= \frac{\sqrt{10x}}{50} + \frac{\sqrt{1800000-2x}}{20} = \frac{1}{100}(2\sqrt{10x} + 5\sqrt{1800000-2x})$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 900000$. Найдём ее производную:

$$f'(x) = \frac{1}{100}\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{1800000-2x}}\right) =$$
$$= \frac{1}{100}\frac{\sqrt{18000000-20x} - 5\sqrt{x}}{\sqrt{1800000-2x}\sqrt{x}}.$$

Решая уравнение $f'(x) = 0$, получаем:

$$\sqrt{18000000-20x} - 5\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 18000000 - 20x = 25x \Leftrightarrow x = 400000.$$

Поскольку производная непрерывной функции $f(x)$ положительна на интервале (0; 400 000), равна нулю в точке 400 000 и отрицательна на интервале (400 000; 900 000), функция $f(x)$ достигает наибольшего на отрезке [0; 900 000] значения в точке 400 000. Найдём его:

$$f(400000) = \sqrt{\frac{400000}{250}} + \sqrt{\frac{500000}{200}} =$$
$$= \sqrt{1600} + \sqrt{2500} = 40 + 50 = 90.$$

Таким образом, наибольшее возможное количество товара, которое могут произвести рабочие за неделю при заданном размере оплаты труда, равно 90 единицам.

Ответ: 90.

27. Тип 16 № 559605

Михаил хочет купить пакет акций компании. 15 февраля он отложил определённую сумму денег и планирует откладывать такую же сумму денег 15 числа каждого месяца. Первого февраля пакет акций стоил 160 000 рублей. Первого числа каждого месяца пакет акций дорожает на 25%. Какую наименьшую сумму нужно Михаилу откладывать каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

Решение. Пусть Михаил откладывает в середине каждого месяца x рублей. К середине n-го месяца у Михаила скопится nx рублей, а акции будут стоить не более $160\,000 \cdot 1{,}25^{n-1}$ рублей. Для того чтобы Михаил смог купить пакет акций в этом месяце, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $x \geqslant \frac{160000 \cdot 1,25^{n-1}}{n}$. Положим $a_n = \frac{160000 \cdot 1,25^{n-1}}{n}$. Для того что бы Михаил смог через некоторое время купить пакет акций, необходимо и достаточно откладывать сумму, большую либо равную наименьшему из чисел a_n. Сравним два последовательных таких числа. Для этого вычислим их отношение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1,25 \cdot n}{n+1} = \frac{5n}{4n+4}.$$

Отсюда получаем, что при $n \leqslant 4$ выполнено неравенство $a_{n+1} \leqslant a_n$, причём равенство достигается только при $n = 4$, а при $n \geqslant 4$ выполнено неравенство $a_{n+1} \geqslant a_n$. Значит, наименьшим из чисел a_n будет число

$$a_4 = a_5 = \frac{160000 \cdot 1,25^3}{4} = 78125.$$

Поэтому наименьшая сумма, которую нужно откладывать Михаилу, равна 78 125 рублям.

Ответ: 78 125 рублей.

28. Тип 16 № 672512

Семен Семенович хочет положить определенную сумму денег в разные банки под некоторые проценты. $\frac{4}{5}$ этой суммы он помещает на вклад «Райский» под r% годовых, а оставшуюся часть денег на вклад «Южный» под q% годовых (проценты начисляются в конце года и добавляются к сумме вклада). Через год сумма вкладов (с учетом процентов) равна 212 000 рублей, а через два года — 224 800 рублей. Если бы Семен Семенович изначально $\frac{4}{5}$ суммы положил на вклад «Южный», а оставшиеся средства на вклад «Райский», то через год сумма вкладов (с учетом добавленных процентов) была бы равна 218 000 рублей. Чему в этом случае была бы равна сумма вкладов через 2 года?

Решение. Пусть $5S$ — сумма, которую хочет положить Семен Семенович, $k_1 = 1 + \frac{r}{100}$, $k_2 = 1 + \frac{q}{100}$. Так как $\frac{4}{5}$ всей суммы Семен Семенович помещает на вклад «Райский» под r% годовых, а оставшуюся часть денег на вклад «Южный» под q% годовых, при этом сумма вкладов равна 212 000 рублей, получаем:

$$4S \cdot k_1 + S \cdot k_2 = 212\,000 \Leftrightarrow S(4k_1 + k_2) = 212\,000.$$

Если бы Семен Семенович изначально $\frac{4}{5}$ суммы положил на вклад «Южный», а оставшиеся средства на вклад «Райский», сумма вкладов была бы равна 218 000 рублей. Имеем:

$$4S \cdot k_2 + S \cdot k_1 = 218\,000 \Leftrightarrow 4S\left(\frac{k_1}{4} + k_2\right) = 218\,000.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} S(4k_1 + k_2) = 212\,000, \\ 4S\left(\frac{k_1}{4} + k_2\right) = 218\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k_1 + k_2 = \frac{212\,000}{S}, \\ \frac{k_1}{4} + k_2 = \frac{54\,500}{S} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{4}k_1 = \frac{157\,500}{S}, \\ 4k_1 + k_2 = \frac{212\,000}{S} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{42\,000}{S}, \\ k_2 = \frac{44\,000}{S}. \end{cases}$$

Через 2 года сумма вкладов равна 224 800 рублей, поэтому получаем:

$$4S \cdot k_1^2 + S \cdot k_2^2 = 224\,800 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4S \cdot \left(\frac{42\,000}{S}\right)^2 + S \cdot \left(\frac{44\,000}{S}\right)^2 = 224\,800 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{7\,056\,000\,000}{S} + \frac{1\,936\,000\,000}{S} = 224\,800 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{8\,992\,000\,000}{S} = 224\,800 \Leftrightarrow S = 40\,000.$$

Тогда $k_1 = \frac{42\,000}{S} = \frac{21}{20}$, $k_2 = \frac{44\,000}{S} = \frac{11}{10}$.

Найдем, чему была бы равна сумма вкладов, если бы Семен Семенович изначально $\frac{4}{5}$ суммы положил на вклад «Южный», а оставшиеся средства на вклад «Райский»:

$$4S \cdot k_2^2 + S \cdot k_1^2 =$$
$$= 4 \cdot 40\,000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 + 40\,000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^2 = 237\,700.$$

Ответ: 237 700 рублей.

29. Тип 16 № 558622

В каждом из двух комбинатов работает по 1000 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену три детали A или одну деталь B. На втором комбинате для изготовления $10t$ деталей (как A, так и B) требуется t^2 человеко-смен. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны одна деталь A и три детали B. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену?

Решение. На каждом комбинате в день может быть затрачено 1000 человеко-смен труда. Пусть на первом комбинате на изготовление детали A ежедневно будет затрачено x человеко-смен, а на втором комбинате $- y^2$ человеко-смен. Составим таблицу по данным задачи.

	Деталь *A*		**Деталь *B***	
	Количество человеко-смен	Количество деталей за смену, шт	Количество человеко-смен	Количество деталей за смену, шт
Первый комбинат	x	$3x$	$1000 - x$	$1000 - x$
Второй комбинат	y^2	$10y$	$1000 - y^2$	$10\sqrt{1000 - y^2}$
Всего		$3x + 10y$		$1000 - x + 10\sqrt{1000 - y^2}$

Для производства изделия количество изготовленных деталей B должно быть ровно в три раза больше количества изготовленных деталей A:

$$3(3x + 10y) = 1000 - x + 10\sqrt{1000 - y^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x = 1000 - 30y + 10\sqrt{1000 - y^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 100 - 3y + \sqrt{1000 - y^2}. \qquad (*)$$

Пусть n — количество изделий, которые соберёт завод за смену, оно равно количеству деталей A. $n = 3x + 10y$. Учитывая равенство $(*)$, имеем:

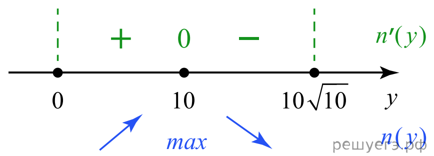
$$n(y) = 3\left(100 - 3y + \sqrt{1000 - y^2}\right) + 10y =$$
$$= y + 3\sqrt{1000 - y^2} + 300.$$

Найдём наибольшее значение функции $n(y)$, где $0 \leqslant y \leqslant 10\sqrt{10}$. Для этого исследуем функцию с помощью производной:

$$n'(y) = 1 + \frac{3\cdot(-2y)}{2\sqrt{1000-y^2}} = \frac{\sqrt{1000-y^2}-3y}{\sqrt{1000-y^2}}.$$

Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:

$$n'(y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1000-y^2} - 3y = 0 \Leftrightarrow y = 10$$



Заметим, что при $y = 10$ равенство $(*)$ выполняется, если $x = 100$.

Таким образом, наибольшее значение функции $n(y)$ равно $n(10) = 10 + 3\sqrt{1000-10^2} + 300 = 400$. Значит, завод сможет собирать 400 изделий за смену.

Ответ: 400.

Примечание.

Прочтите решение задания 513302 и примечания к нему.

30. Тип 16 № 541382

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн руб. на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн руб.?

Вариант № 86880789

Решение. Пусть кредит взят на n лет, сумма кредита равна $S = 5$ млн руб. Составим таблицу по данным задачи.

Номер года	Долг в январе (с учетом процентов), руб.	Платёж, руб.	Долг в июле (после платежа), руб.
			S
1	$1,2S$	$0,2S+\frac{S}{n}$	$S-\frac{S}{n}$
2	$1,2\left(S-\frac{S}{n}\right)$	$0,2\left(S-\frac{S}{n}\right)+\frac{S}{n}$	$S-\frac{S}{n}-\frac{S}{n}$
...	...	...	...
$n-1$	...	...	$\frac{S}{n}$
n	$1,2\cdot\frac{S}{n}$	$0,2\cdot\frac{S}{n}+\frac{S}{n}$	0

Суммируем все выплаты:

$$B_n =$$

$$= \underbrace{\left(0,2S+\frac{S}{n}\right)}_{\text{первая выплата}} + \underbrace{\left(0,2\cdot\frac{(n-1)S}{n}+\frac{S}{n}\right)}_{\text{вторая выплата}} + \ldots + \underbrace{\left(0,2\cdot\frac{S}{n}+\frac{S}{n}\right)}_{n\text{−я выплата}} =$$

$$= n\cdot\frac{S}{n} + \underbrace{0,2\cdot\frac{S+\frac{S}{n}}{2}\cdot n}_{\text{сумма арифм. прогрессии}} = S + 0,1S\cdot(n+1).$$

По условию сумма выплат составит 7,5 млн рублей:

$$5 + 0,1\cdot5\cdot(n+1) = 7,5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,5\cdot(n+1) = 2,5 \Leftrightarrow n+1 = 5 \Leftrightarrow n = 4.$$

Значит, кредит планируется взять на 4 года.

Ответ: 4 года.

31. Тип 16 № 508664

Семья Ивановых ежемесячно вносит плату за коммунальные услуги, телефон и электричество. Если бы коммунальные услуги подорожали на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 35%. Если бы электричество подорожало на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Какой процент от общей суммы платежа приходится на телефон?

Решение. При удорожании коммунальных услуг на 100%, общая сумма увеличилась бы на 70%. А если бы электричество подорожало на 100%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 20%. Значит, в общем платеже на коммунальные услуги приходится 70%, а на электричество — 20%. Поэтому на телефон приходятся оставшиеся 10%.

Приведём другие решения.

1. Алгебраический подход.

Пусть плата за коммунальные услуги и электричество составляет x руб. в месяц, а за телефон — y руб. Если плата и за коммунальные услуги, и за электричество увеличится на 50%, эта часть оплаты составит 1,5x руб., что повлечет увеличение общей суммы платежа на 35% + 10% = 45%. Тогда

$$1,5x+y=1,45\cdot(x+y)\Leftrightarrow 1,5x+y=1,45x+1,45y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,05x=0,45y\Leftrightarrow x=9y.$$

Следовательно, $x+y=10y$, откуда $\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{1}{10}$. Это означает, что на телефон приходится $\dfrac{1}{10}$ часть от общей суммы платежа, а это составляет 10%.

2. Арифметика помогает алгебре.

Если все три вида предоставляемых услуг подорожают на 50%, то общая сумма платежа увеличится на 50%. Но из-за того, что платеж за услуги телефонии останется неизменным, общая сумма платежа после подорожания по остальным двум видам услуг будет на 50% − 35% −10% = 5% меньше. Эти 5% — доля телефонии в числе 50% оплаты за все услуги. Тем самым, доля оплаты за телефон составляет 5/50 или 10% от общей суммы.

3. Система линейных уравнений.

Обозначим за x долю общей оплаты, приходящейся на коммунальные услуги, за y — на электричество и за z — на телефон. Составим систему уравнений. Сумма всех оплат $x+y+z=1$ — первое уравнение. Увеличиваем в 1,5 раза коммунальные услуги: $1,5x+y+z=1,35$ — второе уравнение. Увеличиваем в 1,5 раза оплату за электричество: $x+1,5y+z=1,1$ — третье уравнение. Затем вычитаем из третьего уравнения первое, получаем $0,5y=0,1$, отсюда $y=0,2$. Затем вычитаем из второго уравнения первое, получаем $0,5x=0,35$, отсюда $x=0,7$. Подставляем в первое уравнение: $0,7+0,2+z=1$, отсюда $z=0,1$ или 10%.

Ответ: 10%.

32. Тип 16 № 512005

Владимир поместил в банк 3600 тысяч рублей под 10% годовых. В конце каждого из первых двух лет хранения после начисления процентов он дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу третьего года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 48,5%. Какую сумму Владимир ежегодно добавлял к вкладу?

Решение. Арифметический подход к решению.

1. 3600 · 1,485 = 5346 тыс. руб. — размер вклада к концу третьего года хранения.
2. 3600 · 1,1 · 1,1 · 1,1 = 4791,6 тыс. руб. — размер вклада к концу третьего года хранения, зависящего от первоначально внесенной суммы.
3. 5346 − 4791,6 = 554,4 тыс. руб. составляют ежегодные дополнительно внесенные вклады, включая начисленные процентные надбавки.
4. Пусть одну часть из суммы 554,4 тыс. руб. составляет дополнительно внесенная сумма в третий год хранения вклада вместе с процентной надбавкой, начисленной на ту же сумму. Тогда 1,1 часть составит размер дополнительно внесенной суммы во второй год хранения вклада с учетом процентной надбавки, начисленной дважды (два года подряд).
5. Всего 1+1,1 = 2,1 (части).
6. 554,4 : 2.1 = 264 тыс. руб. — доля одной части от 554, 4 т. р. вместе с ежегодной процентной надбавкой.
7. 264 : 1,1 = 240 тыс. руб. — сумма, ежегодно добавленная к вкладу.

Алгебраический подход к решению.

Пусть Владимир ежегодно вносил на счет x тыс. руб.

К концу первого года хранения размер вклада стал 3600 · 1,1 = 3960 тыс. руб.

Владимир дополнительно внес x р. Размер вклада стал 3960 + x тыс. руб.

К концу второго года хранения размер вклада стал (3960 + x) · 1,1 = 4356 + 1,1x тыс. руб.

Владимир вновь сделал дополнительный взнос x тыс. руб.

Размер вклада стал 4356 + 1,1x + x = 4356 + 2,1x тыс. руб.

К концу года были начислены проценты на сумму 4356 + 2,1x тыс. руб.

Размер вклада стал (4356 + 2,1x) · 1,1 = 4791,6 + 2,31x тыс. руб., который равен 3600 · 1,485 =5346 тыс. руб.

Таким образом, составим и решим уравнение: 4791,6 + 2,31x = 5346 ⇔ 2,31x = 554,4 ⇔ x = 240.

Ответ: 240 тыс. рублей.

33. Тип 16 № 513109

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 17 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 3,4 млн рублей?

Решение. Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$17,\ \frac{17(n-1)}{n},\ldots,\frac{17\cdot 2}{n},\ \frac{17}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 10%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$18,7,\ \frac{18,7(n-1)}{n},\ldots,\frac{18,7\cdot 2}{n},\ \frac{18,7}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1,7+\frac{17}{n},\ \frac{1,7(n-1)+17}{n},\ldots,\frac{1,7\cdot 2+17}{n},\ \frac{1,7+17}{n}.$$

Получаем: $1,7+\frac{17}{n}=3,4$, откуда $n=10$. Значит, всего следует выплатить

$$17+1,7\left(1+\frac{9}{10}+\ldots+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\right)=17+1,7\cdot\frac{11}{2}=26,35 \text{ (млн. рублей).}$$

Ответ: 26,35.

Приведём другое решение.

По условию долг уменьшается по арифметической прогрессии:

$$17,\ 17-d,\ 17-2d,\ldots,0.$$

Первая выплата равна $17\cdot 1,1-(17-d)=1,7+d$.
Вторая выплата равна $(17-d)\cdot 1,1-(17-2d)=1,7+0,9d$.
Третья выплата равна $(17-2d)\cdot 1,1-(17-3d)=1,7+0,8d$.
Четвертая выплата равна $(17-3d)\cdot 1,17-(17-4d)=1,7+0,7d$ и так далее.
Значит, наибольшая выплата — первая, d = 1,7, выплат — 10 штук и они составляют арифметическую прогрессию, но с разностью $-0,1d=-0,17$.
Общая выплата равна $3,4+3,23+3,06+\ldots+1,87=5,27\cdot 5=26,35$.

Ответ: 26,35.

34. Тип 16 № 508659

При рытье колодца глубиной свыше 10 м за первый метр заплатили 1000 руб., а за каждый следующий на 500 руб. больше, чем за предыдущий. Сверх того за весь колодец дополнительно было уплачено 10 000 руб. Средняя стоимость 1 м оказалась равной 6250 руб. Определите глубину колодца.

Решение. Пусть x м — глубина колодца. Тогда часть выплат, зависящих от глубины колодца, образует арифметическую прогрессию с разностью 500, первый член которой равен 1000. Найдем сумму первых x членов прогрессии, последний член которой равен $1000+500(x-1)$. Она (сумма) будет равна

$$\frac{(1000+1000+500(x-1))x}{2}=$$
$$=\frac{2000x+500x^2-500x}{2}=250x^2+750x.$$

Поскольку, кроме указанной суммы, было выплачено еще 10 000 руб, а средняя стоимость 1 м при этом составила 6250 руб, то имеет место уравнение, которое решим, имея в виду, глубина колодца свыше 10 м.

$$\begin{cases}x>10,\\250x^2+750x+10000=6250x\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>10,\\250x^2-5500x+10000=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>10,\\x^2-22x+40=0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>10,\\x^2-22x+40=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>10,\\\left[\begin{array}{l}x=2,\\x=20\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=20.$$

Ответ: 20.

35. Тип 16 № 675945

Паром грузоподъемностью 111 тонн перевозит микроавтобусы и грузовики при условии полной загрузки. Количество загруженных на паром микроавтобусов составляет не более 70% от количества загруженных на паром грузовиков. Вес и стоимость одного микроавтобуса составляют 5 тонн и 5 тысяч условных единиц, грузовика — 9 тонн и 4 тысячи условных единиц соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех микроавтобусов и грузовиков, перевозимых паромом при данных условиях.

Решение. Пусть a — количество загруженных микроавтобусов, а b — количество загруженных грузовиков. Поскольку паром перевозит микроавтобусы и грузовики при условии полной загрузки, $5a+9b=111.$ Частное решение данного уравнения — $a_0=222,$ $b_0=-111,$ тогда $a=222+9k,$ $b=-111-5k,$ где k — целое число. Так как a и b — натуральные числа, возможны только два значения k: $k=-23,$ тогда $a=15,$ $b=4,$ или $k=-24,$ тогда $a=6,$ $b=9.$ Так как количество загруженных на паром микроавтобусов составляет не более 70% от количества загруженных на паром грузовиков, получаем, что $a=6,$ $b=9.$ В таком случае суммарная стоимость всех микроавтобусов и грузовиков, перевозимых паромом, равна $6\cdot5+9\cdot4=66$ тысяч условных единиц.

Ответ: 66 тысяч условных единиц.

36. Тип 16 № 506949

В начале года 5/6 некоторой суммы денег вложили в банк А, а то, что осталось — в банк Б. Если вклад находится в банке с начала года, то к концу года он возрастает на определённый процент, величина которого зависит от банка. Известно, что к концу первого года сумма вкладов стала равна 670 у. е., к концу следующего — 749 у. е. Если первоначально 5/6 суммы было бы вложено в банк Б, а оставшуюся вложили бы в банк А, то по истечении одного года сумма выросла бы до 710 у. е. Определите сумму вкладов по истечении второго года в этом случае.

Решение. Пусть в банк А, у которого исходя из годовой процентной ставки коэффициент повышения вклада равен y, вложено $5x$ у. е. денег. Тогда в банк Б, у которого аналогичный коэффициент равен t, вложено x у. е. денег.

В соответствии с условием задачи будем иметь:

$$\begin{cases}5xy+xt=670, & (1)\\5xy^2+xt^2=749. & (2)\end{cases}$$

Если бы те же суммы были вложены в банки Б и А соответственно, то имели бы уравнение $xy+5xt=710.$ (3)

А искомая сумма будет равна значению выражения $xy^2+5xt^2.$

Рассмотрим систему уравнений (1) и (3):

$$\begin{cases}5xy+xt=670,\\xy+5xt=710\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-25xy-5xt=-3350,\\xy+5xt=710\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}24xy=2640,\\xy+5xt=710\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=110,\\5xt=710-110\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=110,\\5xt=600\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=110,\\xt=120.\end{cases}$$

Отсюда: $\frac{y}{t}=\frac{11}{12}\Leftrightarrow y=\frac{11t}{12}$.

Подставим найденное значение y в уравнение (2):

$$5x\cdot\frac{121t^2}{144}+xt^2=749\Leftrightarrow 605xt^2+144xt^2=749\cdot 144\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 749xt^2=749\cdot 144\Leftrightarrow xt^2=144.$$

$$5xy^2+xt^2=749\Leftrightarrow 5xy^2=749-xt^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5xy^2=749-144\Leftrightarrow 5xy^2=605\Leftrightarrow xy^2=121.$$

Искомая сумма имеет вид: $xy^2+5xt^2=121+5\cdot 144=841$.

Ответ: 841.

37. Тип 16 № 512665

Леонид является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, они производят t приборов.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Леонид платит рабочему 1 тысячу рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение. Пусть рабочие первого завода за неделю производят x приборов, второго завода — y приборов, и пусть выполнено условие. $x+y=20$. Тогда доля человеко-часов, затраченных на первом заводе, составит $4x^3$, а на втором — y^3. Таким образом, Леониду придется запланировать на оплату труда рабочих обоих заводов $1\cdot(4x^3+y^3)=S$ тысяч рублей в неделю. Так как $y=20-x$, то $S(x)=4x^3+(20-x)^3,\ 0\leqslant x\leqslant 20$.

Найдем наименьшее значение функции $S(x)=4x^3+(20-x)^3$ на $[0;20]$:

$$S(x)=4x^3+8000-3\cdot 400x+3\cdot 20x^2-x^3=$$
$$=3x^3+60x^2-1200x+8000.$$
$$S'(x)=9x^2+120x-1200;$$
$$S'(x)=0\Leftrightarrow 9x^2+120x-1200=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+40x-400=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-20\pm\sqrt{400+1200}}{3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-20\pm\sqrt{1600}}{3}\Leftrightarrow x=\frac{-20\pm 40}{3}.$$

Искомый корень положителен, он равен $\frac{20}{3}$. Заметим, что на $[0;\ 20]$ это единственная точка экстремума. Если она окажется точкой минимума функции, то функция именно в этой точке и достигает наименьшего значения. Найдем

$$S'(6)=9\cdot 36+120\cdot 6-1200=$$
$$=36(9+20)-1200=1044-1200<0;$$
$$S'(7)=9\cdot 49+120\cdot 7-1200=$$
$$=441+840-1200=1281-1200>0.$$

Итак, критическая точка функции точка $x=\frac{20}{3}$ является точкой минимума функции $S(x)$.

Поскольку количество изготовленных приборов будет выражаться числом натуральным, то наименьшая сумма, необходимая для выплаты рабочим, будет достигнута либо при $x=6$, либо при $x=7$. Сравним эти значения:

$$S(6)=4\cdot 216+14^3=864+2744=3608\ (\text{тыс. руб.});$$
$$S(7)=4\cdot 343+13^3=1372+2197=3569\ (\text{тыс. руб.}).$$

Итак, искомая сумма 3 569 000 рублей.

Ответ: 3 569 000 рублей.

38. Тип 16 № 526293

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 3 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 0,24 млн рублей? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся).

Решение. Пусть кредит взят на n лет. Тогда долг (в млн руб) уменьшается каждый июль равномерно:

$$3,\ \frac{3}{n}(n-1),\ \ldots,\ \frac{2\cdot 3}{n},\ \frac{3}{n},\ 0.$$

В январе долг возрастает на 20%, значит, долг (в млн руб) в январе:

$$1,2\cdot 3,\ \frac{1,2\cdot 3(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{2\cdot 1,2\cdot 3}{n},\ \frac{1,2\cdot 3}{n}.$$

Выплаты (в млн руб):

$$0,2\cdot 3+\frac{3}{n},\ \frac{0,2\cdot 3(n-1)}{n}+\frac{3}{n},\ \ldots,\ \frac{0,2\cdot 3\cdot 2}{n}+\frac{3}{n},\ \frac{0,2\cdot 3}{n}+\frac{3}{n}.$$

Тогда сумма выплат (в млн руб) равна

$$3+0,2\cdot 3\cdot\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ \ldots\ +\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=3+3\cdot 0,2\cdot\frac{(n+1)}{2}.$$

Наименьшим годовым платежом является последний платёж, значит, $\frac{0,2\cdot 3}{n}+\frac{3}{n}=0,24$, откуда $n=15$.

Тогда сумма выплат за 15 лет равна: $3+3\cdot 0,2\cdot\frac{(15+1)}{2}=7,8$ (млн руб).

Ответ: 7,8 млн руб.

Примечание.

По сути решения это задание аналогично заданию 517480 из ЕГЭ 2017 года.

Вариант № 86880789

39. Тип 16 № 622099

Трейдер потратил треть своих денег на приобретение акций одного акционерного общества (АО), а остальные деньги — на акции второго АО. Спустя три месяца цены акций обоих АО выросли на определенные для каждого АО проценты, а еще через три месяца цены акций выросли на столько же процентов, что и в предыдущий период. В результате за полгода общая стоимость акций трейдера выросла на 98%. Если бы после первых трех месяцев трейдер продал все акции первого АО по новой цене и на все полученные деньги приобрел бы акции второго АО, то общий прирост инвестиций за полгода составил бы 110%. Какой процент прибыли получит трейдер за полгода, вложив всю сумму в акции первого АО?

Решение. Пусть общая сумма инвестированных денег равна $3S$, и пусть каждые три месяца акции первого АО росли на a%, а акции второго АО — на b%. Обозначим повышающие коэффициенты $x=1+\frac{a}{100}$ и $y=1+\frac{b}{100}$. Тогда

$$\begin{cases}Sx^2+2Sy^2=3S\cdot 1,98,\\ Sxy+2Sy^2=3S\cdot 2,1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2y^2=5,94,\\ xy+2y^2=6,3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=0,36+x^2,\\ 2y^2=5,94-x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2y^2=2(0,36+x^2)^2,\\ 2y^2=5,94-x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2(5,94-x^2)=0,2592+1,44x^2+2x^4,\\ 2y^2=5,94-x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-1,5x^2+0,0864=0,\\ 2y^2=5,94-x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2=0,06,\\ x^2=1,44\end{array}\right.\\ 2y^2=5,94-x^2.\end{cases}\underset{x>1,\,y>1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=1,2,\\ y=1,5.\end{cases}$$

Если трейдер вложит всю сумму в акции первого АО, то вложенная сумма увеличится в x^2 раз, то есть в 1,44 раза, или на 44%.

Ответ: 44.

40. Тип 16 № 531309

В аграрной стране A производство пшеницы на душу населения в 2015 году составляло 192 кг и ежегодно увеличивалось на 20%. В аграрной стране B производство пшеницы на душу населения в 2015 году составляло 375 кг. В течение трех лет производство зерна в стране B увеличивалось на 14% ежегодно, а ее население увеличивалось на m% ежегодно. В 2018 году производство зерна на душу населения в странах A и B стало одинаковым. Найдите m.

Решение. Пусть производство пшеницы на душу населения в 2015 году в стране A равнялось A_{2015}, а в 2018 году — A_{2018}. Пусть также производство пшеницы на душу населения в 2015 году в стране B равнялось B_{2015}, а в 2018 году — B_{2018}. Тогда $A_{2018}=A_{2015}\cdot 1,2^3$,

$$B_{2018}=B_{2015}\cdot\frac{1,14^3}{\left(1+\frac{m}{100}\right)^3}.$$

По условию в 2018 году производство зерна на душу населения в странах A и B стало одинаковым. Значит,

$$A_{2015}\cdot 1,2^3=B_{2015}\cdot\frac{1,14^3}{\left(1+\frac{m}{100}\right)^3}\Leftrightarrow\left(1+\frac{m}{100}\right)^3=\frac{B_{2015}\cdot 1,14^3}{A_{2015}\cdot 1,2^3}.$$

Подставим значения A_{2015} и B_{2015}, получим:

$$\left(1+\frac{m}{100}\right)^3=\frac{375\cdot 1,14^3}{192\cdot 1,2^3}=$$
$$=\frac{5^3\cdot 3\cdot 1,14^3}{4^3\cdot 3\cdot 1,2^3}=\left(\frac{5\cdot 1,14}{4\cdot 1,2}\right)^3=1,1875^3.$$

Следовательно, $1+\dfrac{m}{100}=1,1875$, откуда $m=18,75$.

Ответ: 18,75.

41. Тип 16 № 515709

В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором 1 кг алюминия приходится на 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. В каждой области в день может быть затрачено 500 человеко-часов труда.

Пусть в первой области на добыче алюминия ежедневно будет затрачено x человеко-часов, а во второй области − y^2 человеко-часов. Составим таблицу по данным задачи.

	Алюминий		**Никель**	
	Количество человеко-часов	Масса металла за день, кг	Количество человеко-часов	Масса металла за день, кг
Первая область	x	$0,2x$	$500-x$	$0,1\cdot(500-x)$
Вторая область	y^2	y	$500-y^2$	$\sqrt{500-y^2}$
Всего		$0,2x+y$		$50-0,1x+\sqrt{500-y^2}$

Для производства сплава масса добытого алюминия должна быть вдвое меньше массы добытого никеля:

$$2\cdot(0,2x+y)=50-0,1x+\sqrt{500-y^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,5x=50-2y+\sqrt{500-y^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,1x=10-\frac{2y}{5}+\frac{\sqrt{500-y^2}}{5}.\qquad(*)$$

Пусть m — масса сплава, она равна сумме масс добытых металлов:

$$m=(0,2x+y)+\left(50-0,1x+\sqrt{500-y^2}\right)=$$
$$=0,1x+y+50+\sqrt{500-y^2}.$$

Учитывая равенство $(*)$, имеем:

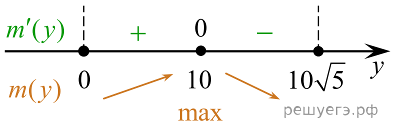
$$m(y)=\left(10-\frac{2y}{5}+\frac{\sqrt{500-y^2}}{5}\right)+y+50+\sqrt{500-y^2}=$$
$$=\frac{3y}{5}+\frac{6\sqrt{500-y^2}}{5}+60.$$

Найдём наибольшее значение функции $m(y)$, где $0\leqslant y\leqslant 10\sqrt{5}$. Для этого исследуем функцию с помощью производной:

$$m'(y)=\frac{3}{5}+\frac{6\cdot(-2y)}{5\cdot 2\sqrt{500-y^2}}=\frac{3\sqrt{500-y^2}-6y}{5\sqrt{500-y^2}}.$$

Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:

$$m'(y)=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{500-y^2}-6y=0 \Leftrightarrow y=10$$



Заметим, что при $y=10$ равенство $(*)$ выполняется, если $x=100$.

Таким образом, наибольшее значение функции *m(y)* равно $m(10)=\frac{3\cdot 10}{5}+\frac{6\sqrt{500-10^2}}{5}+60=90.$ Значит, завод сможет производить 90 кг сплава ежедневно.

Ответ: 90.

42. Тип 16 № 674026

Аристарх открывает банковский вклад «Стабильный» на 1 год, по условиям которого выплата процентов производится ежемесячно на отдельный счет из расчета 15% годовых. При досрочном расторжении договора вклада банк пересчитывает выплаченные проценты из расчета 1% годовых. После шестой выплаты процентов Аристарх узнал, что банк предлагает новый вклад «Стабильно Стабильный» на тех же условиях, но только под 25% годовых. Слегка подумав, Аристарх закрывает вклад «Стабильный» и всю сумму переводит на вклад «Стабильно Стабильный». Сколько рублей потерял Аристарх вследствие своих непродуманных действий по итогам года, если сумма вклада — 1 млн рублей? После какой по счету выплаты процентов действия Аристарха не принесли бы убытка?

Решение. Посчитаем, сколько бы Аристарх заработал на вкладе, если бы не закрыл вклад «Стабильный»:

$$1\,000\,000\cdot 0,15=150\,000 \text{ рублей.}$$

Закрыв этот вклад через 6 месяцев и открыв вклад «Стабильно Стабильный» на оставшиеся 6 месяцев, он заработал

$$\frac{0,01}{2}\cdot 1\,000\,000+\frac{0,25}{2}\cdot 1\,000\,000=$$
$$=1\,000\,000\cdot 0,13=130\,000 \text{ рублей.}$$

Таким образом, Аристарх потерял 150 000 − 130 000 = 20 000 рублей.

Определим, после какой выплаты действия Аристарха не принесли бы убытка. Пусть n — число месяцев, которое деньги лежали на первом вкладе, тогда на втором вкладе деньги лежали $12-n$ месяцев, S — сумма вклада. Таким образом, прибыль Аристарха с обоих вкладов за один год можно выразить как

$$\frac{0,01}{12}\cdot S\cdot n+\frac{0,25}{12}\cdot S\cdot(12-n)=\frac{0,01Sn}{12}+\frac{0,25S(12-n)}{12}=$$
$$=\frac{3S-0,24Sn}{12}=0,25S-0,02Sn.$$

Подставляя значение $S=1\,000\,000$, получаем: $250000-20000n$. Если бы Аристарх не закрывал вклад «Стабильный», он получил бы доход в размере 150 000 рублей. Определим, после какого месяца Аристарху следовало бы закрыть первый вклад, чтобы не понести убыток:

$$250000-20000n\geqslant 150000 \Leftrightarrow 100000\geqslant 20000n \Leftrightarrow n\leqslant 5.$$

Таким образом, Аристарх не понес бы убытка, если бы закрыл первый вклад после одной из пяти первых выплат процентов.

Ответ: 20 000 рублей; после первых пяти выплат.

43. Тип 16 № 517449

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.

Решение. Пусть сумма кредита S ежегодные выплаты x, $k=1+\frac{r}{100}$. По условию долг на июль меняется так:

$$S,\ kS-x,\ k^2S-kx-x,\ k^3S-k^2x-$$
$$-kx-x,\ k^4S-k^3x-k^2x-kx-x.$$

Если долг выплачен двумя равными платежами x_2, то $k^2S-kx_2-x_2=0$, откуда

$$x_2=\frac{k^2(k-1)}{k^2-1}S=106\,964.$$

Если долг выплачен четырьмя равными платежами x_4, то $k^4S-k^3x_4-k^2x_4-kx_4-x_4=0$, откуда

$$x_4=\frac{k^4(k-1)}{k^4-1}S=58\,564.$$

Тогда

$$\frac{x_4}{x_2} = \frac{k^2}{k^2+1} = \frac{58\,564}{106\,964} = \frac{121}{221},$$

откуда $k^2 = \frac{121}{100} \Leftrightarrow k = 1,1$. Следовательно, $r = 10$.

Ответ: 10.

44. Тип 16 № 550265

Борис и Иван вложили деньги в общий бизнес. После этого один из них добавил ещё 1 миллион рублей, в результате чего его доля в бизнесе увеличилась на 0,05, а когда он добавил ещё 1 миллион рублей, его доля увеличилась ещё на 0,04. Сколько миллионов рублей ему ещё нужно добавить, чтобы увеличить свою долю ещё на 0,06?

Вариант № 86880789

Решение. Пусть один из бизнесменов вложил в дело a млн руб., а вместе они вложили b млн руб., тогда доля этого бизнесмена равна $\frac{a}{b}$. Пусть этот бизнесмен после дополнительно вложил t млн руб., тогда его доля вырастет на

$$\Delta(t) = \frac{a+t}{b+t} - \frac{a}{b} = \frac{t(b-a)}{b(b+t)}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \Delta(1) = 0,05, \\ \Delta(2) = 0,05+0,04 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b-a}{b(b+1)} = 0,05, \\ \dfrac{2(b-a)}{b(b+2)} = 0,09 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b-a}{b} = 0,05(b+1), \\ \dfrac{b-a}{b} = 0,09(0,5b+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4,4, \\ b = 8. \end{cases}$$

Изначально доля этого бизнесмена составляла $\frac{4,4}{8} = 0,55$. После внесения первого дополнительного миллиона его доля составила $\frac{4,4+1}{8+1} = \frac{5,4}{9} = 0,60$, после внесения второго — $\frac{5,4+1}{9+1} = \frac{6,4}{10} = 0,64$. Пусть в третий раз он внёс дополнительно x млн руб. Для ответа на вопрос задачи решим уравнение

$$\frac{6,4+x}{10+x} = 0,64+0,06 \Leftrightarrow 6,4+x = 7+0,7x \Leftrightarrow x = 2.$$

Чтобы увеличить свою долю еще на 0,06, бизнесмену нужно ещё добавить 2 млн рублей.

Ответ: 2.

45. Тип 16 № 673603

Дмитрий владеет двумя промышленными заводами, выпускающими одинаковую продукцию. На первом заводе установлено современное оборудование, поэтому на нем может быть выпущено больше единиц продукции. Известно, что если рабочие второго завода суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то выпускают $3t$ единиц продукции, а если рабочие первого завода трудятся по t^2 часов в неделю, то выпускают $6t$ единиц продукции. Ставка заработной платы рабочего составляет 600 рублей за час. Дмитрий готов платить рабочим 1 875 000 рублей в неделю. На какое максимальное число единиц продукции он может рассчитывать?

Решение. Пусть на первом заводе работают суммарно x^2, а на втором — y^2 часов в неделю. Требуется найти максимум суммы $s=6x+3y$ при условии

$$600(x^2+y^2)=1\,875\,000 \Leftrightarrow x^2+y^2=3125. \qquad (*)$$

Выразим y из первого соотношения: $y=\frac{1}{3}(s-6x)$, подставим в (*), получим уравнение:

$$x^2+\left(\frac{1}{3}(s-6x)\right)^2=3125 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 45x^2-(12s)x+(s^2-28\,125)=0. \qquad (**)$$

Полученное уравнение имеет решения, если неотрицателен его дискриминант, а значит, и четверть дискриминанта:

$$\frac{D}{4}=36s^2-45(s^2-28\,125)\geqslant 0 \Leftrightarrow -375\leqslant s\leqslant 375.$$

Тем самым наибольшее возможное значение $s=6x+3y$ равно 375. Покажем, что оно достигается при натуральных значениях переменных: действительно, из (**) находим, что значению $s=375$ соответствует $x=50$, а тогда $y=25$.

Ответ: 375 единиц товара.

46. Тип 16 № 660760

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 720 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— в июле 2027, 2028, 2029 годов долг остается равным 720 тыс. руб.;
— выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму платежей за пять лет.

Решение. Пусть $k=1+\frac{25}{100}=1,25$, а x тыс. руб. — платежи 2030 и 2031 годов. В июле 2027, 2028, 2029 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют $720(k-1)$ тыс. руб. В январе 2030 года долг (в тыс. руб.) будет равен $720k$, а в июле — $720k-x$. В январе 2031 года долг будет равен $720k^2-kx$, а в июле — $720k^2-(k+1)x$. По условию к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью. Значит,

$$720k^2-(k+1)x=0 \Leftrightarrow 720k^2=(k+1)x \Leftrightarrow x=\frac{720k^2}{k+1}.$$

Таким образом, общая сумма выплат составляет $3\cdot 720(k-1)+2x$, то есть

$$3\cdot 720(k-1)+2\cdot\frac{720k^2}{k+1}=$$
$$=3\cdot 720\cdot 0,25+2\cdot\frac{720\cdot 1,5625}{2,25}=1540 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 1540 тыс. руб.

47. Тип 16 № 645891

Банк предлагает два типа вкладов — «Удачный» и «Прибыльный». По вкладу «Удачный» предоставляется 5% годовых; по вкладу «Прибыльный» — 2% за первый год и p%, начиная со второго года. Проценты по обоим вкладам начисляются в конце года и прибавляются к текущей сумме вклада. При каком наименьшем целом значении p трехлетний вклад «Прибыльный» окажется выгоднее трехлетнего вклада «Удачный» при условии, что первоначально вклады были равны?

Решение. Пусть начальные суммы вкладов равны S. Тогда

	Вклад «Удачный»	**Вклад «Прибыльный»**
Начальная сумма вклада	S	S
Сумма вклада в конце первого года, после начисления процентов	$1,05S$	$1,02S$
Сумма вклада в конце второго года, после начисления процентов	$1,05^2S$	$1,02\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)S$
Сумма вклада в конце третьего года, после начисления процентов	$1,05^3S$	$1,02\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2S$

Трехлетний вклад «Прибыльный» окажется выгоднее трехлетнего вклада «Удачный» при выполнении неравенства

$$1,05^3 S < 1,02 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^2 S \Leftrightarrow 105^3 < 102\cdot(100+p)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 105\cdot 105^2 < 102\cdot(100+p)^2 .$$

Заметим, что при $0 < p \leqslant 5$ неравенство не выполняется. Проверим целые значения p, большие 5.

При $p = 6$ получаем:

$$1\,157\,625 < 102\cdot 106^2 = 1\,146\,072 \text{ — неверно,}$$

значит, $p = 6$ не подходит. При $p = 7$ получаем:

$$1\,157\,625 < 102\cdot 107^2 = 1\,167\,798 \text{ — верно.}$$

Значит, 7 — наименьшее целое значение p, при котором трехлетний вклад «Прибыльный» окажется выгоднее трехлетнего вклада «Удачный».

Ответ: 7.

48. Тип 16 № 513717

Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 2 млн руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 260% превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды – 14 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За сколько месяцев в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Решение. Пусть Вася купил квартиру в кредит. Тогда он должен погасить кредит за 20 лет, то есть за 240 одинаковых ежемесячных платежей. Сумма, которую он должен выплатить банку, по условию на 260% превышает исходные 2 млн. руб., то есть, равна $2000\cdot 3,6 = 7200$ тыс. руб. Разделив эту сумму на 240, получаем ежемесячный платеж, равный 30 тыс. руб.

Далее, если вместо этого Вася снимал квартиру, то после оплаты аренды у него будет оставаться ежемесячно 16 тыс. руб. Поскольку 2000 : 16 = 125 месяцев то есть за 10 лет и 5 месяцев.

Ответ: 125 месяцев.

49. Тип 16 № 560937

Сергей хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Сергея не было денег на покупку акций, а пакет стоил 160 000 рублей. В середине каждого месяца Сергей откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 25%. Какую наименьшую сумму (в рублях) нужно откладывать Сергею каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

Решение. Обозначим начальную цену пакета акций $S = 160\ 000$ рублей, ежемесячный повышающий коэффициент стоимости пакета акций $k = 1,25$, и пусть ежемесячно откладываемая сумма составляет a рублей. Тогда в конце $(n-1)$-го месяца пакет акций будет стоить не больше Sk^{n-1} рублей. К середине n-го месяца Сергей накопит сумму an рублей. Чтобы иметь возможность купить этот пакет акций во второй половине n-го месяца необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$an \geqslant Sk^{n-1} \Leftrightarrow a \geqslant \frac{Sk^{n-1}}{n}.$$

Минимальное значение будет соответствовать равенству $a = \dfrac{Sk^{n-1}}{n}$.

Рассмотрим последовательность $a_n = \dfrac{Sk^{n-1}}{n}$ и найдем наименьший член этой последовательности. Для этого исследуем, как меняется частное двух соседних членов последовательности в зависимости от n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{Sk^n}{n+1} : \frac{Sk^{n-1}}{n} = k\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

Полученное выражение монотонно возрастает с ростом n, оно меньше 1 при $n < 4$, равно 1 при $n = 4$ и больше 1 при $n > 4$. Это означает, что наименьшим членом последовательности является a_4, а потому искомая наименьшая сумма равна

$$\frac{Sk^{4-1}}{4} = \frac{160000\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3}{4} = \frac{40000\cdot 5^3}{4^3} =$$
$$= \frac{10000\cdot 125}{16} = 25\cdot 25\cdot 125 = 78\,125 \text{ рублей.}$$

Ответ: 78 125 рублей.

Примечание.

Чтобы найти наименьшее значение суммы, можно было рассмотреть не частное, а разность последовательных сумм:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{Sk^{n-1}}{n} - \frac{Sk^n}{n+1} = \frac{(n+1)Sk^{n-1} - nSk^n}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{Sk^{n-1}(n+1-nk)}{n(n+1)} = \frac{Sk^{n-1}\left(n(1-k)+1\right)}{n(n+1)}.$$

Знак разности $a_n - a_{n+1}$ совпадает со знаком выражения $n(1-k)+1$, которое при подстановке $k = 1,25$ принимает вид $-0,25n+1$. Это выражение положительно при $n < 4$, равно нулю при $n = 4$ и отрицательно при $n > 4$. Это означает, что

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 = a_5 < a_6 < a_7 \ldots < a_n.$$

Значит, наименьшая сумма, которую необходимо ежемесячно откладывать, равна

$$a_4 = \frac{Sk^{4-1}}{4} = \frac{160000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3}{4} = \frac{40000 \cdot 5^3}{4^3} = \\ = \frac{10000 \cdot 125}{16} = 25 \cdot 25 \cdot 125 = 78\,125 \text{ рублей.}$$

50. Тип 16 № 633393

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 2466 тысячи рублей. Какую сумму (в тыс. руб.) нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

Решение. Пусть сумма кредита равна $24S$ тыс. руб. и $k = 1 + \frac{2}{100}$. Заполним таблицу:

Номер месяца	**Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.**	**Выплата, тыс. руб.**	**Долг на 15-е число, тыс. руб.**	
			$24S$	
1	$24kS$	$24kS-23S$	$23S$	первый год
2	$23kS$	$23kS-22S$	$22S$	
...	...	...	...	
12	$13kS$	$13kS-12S$	$12S$	
13	$12kS$	$12kS-11S$	$11S$	второй год
...	...	...	...	
24	kS	$kS-0$	0	

Из таблицы находим сумму выплат в первые 12 месяцев:

$$B_{1-12} = \underbrace{24kS-23S}_{1-\text{й месяц}} + \underbrace{23kS-22S}_{2-\text{й месяц}} + \ldots + \underbrace{13kS-12S}_{12-\text{й месяц}} = \\ = \frac{24kS-23S+13kS-12S}{2} \cdot 12 = (37kS-35S)\cdot 6,$$

По условию эта сумма равна 2466 тыс. руб., откуда, подставляя $k = 1{,}02$, получаем:

$$(37 \cdot 1{,}02 \cdot S - 35S) \cdot 6 = 2466 \Leftrightarrow 2{,}74S = 411 \Leftrightarrow S = 150.$$

Сумма выплат в последние 12 месяцев равна

$$B_{13-24} = \underbrace{12kS-11S}_{13-\text{й месяц}} + \underbrace{11kS-10S}_{14-\text{й месяц}} + \ldots + \underbrace{kS-0}_{24-\text{й месяц}} = \\ = \frac{12kS-11S+kS-0}{2} \cdot 12 = (13kS-11S)\cdot 6.$$

Подставляя $k = 1{,}02$ и $S = 150$, находим:

$$B_{13-24} = (13 \cdot 1{,}02 \cdot 150 - 11 \cdot 150) \cdot 6 = \\ = 2{,}26 \cdot 150 \cdot 6 = 226 \cdot 9 = 2034 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 2034.