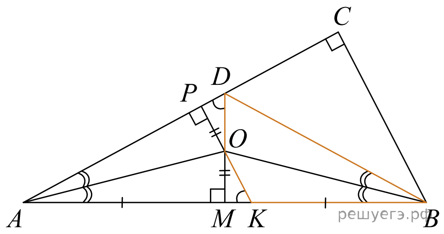
1. Тип 17 № 640523

Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ADB, касается отрезка AD в точке P, а прямая OP пересекает сторону AB в точке K.

а) Докажите, что около четырёхугольника $BDOK$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $BDOK$, если $AB = 8$, $BC = \sqrt{15}$, $AC = 7$.



Решение. а) Пусть точка M — середина стороны AB. Заметим, что DM — медиана и высота, а следовательно, и биссектриса равнобедренного треугольника ADB, значит, точка O принадлежит DM. Треугольники DOP и OKM прямоугольные. При этом $\angle POD = \angle KOM$, значит, $\angle PDO = \angle OKM$. Тогда

$$\angle ODB = \angle PDO = \angle OKM = 180^\circ - \angle OKB,$$

следовательно, четырёхугольник $BDOK$ является вписанным.

б) Заметим, что $AC^2 + CB^2 = 49 + 15 = AB^2$, тогда по обратной теореме Пифагора: $\angle ACB = 90^\circ$. Откуда находим: $\cos\angle CAB = \frac{7}{8}$.

Прямая AO — биссектриса угла DAB. Пусть $\angle OAM = \alpha$. Тогда:

$$\frac{7}{8} = 2\cos^2\alpha - 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{15}{16} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

откуда $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$, тогда $OM = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{15}$.

Так как $\operatorname{tg}\angle CAB = \frac{\sqrt{15}}{7}$, то

$$DM = AM\cdot\frac{\sqrt{15}}{7} = \frac{4\sqrt{15}}{7}.$$

Следовательно,

$$DO = 4\sqrt{15}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{15}\right) = \frac{32\sqrt{15}}{105}.$$

По теореме синусов $\frac{DO}{\sin\angle DBO} = 2R$, где R — радиус окружности, описанной около четырехугольника $BDOK$. Тогда:

$$2R = \frac{32\sqrt{15}}{105} : \sin\alpha = \frac{32\sqrt{15}}{105}\cdot 4.$$

Таким образом, $R = \frac{64\sqrt{15}}{105}$.

Ответ: б) $\frac{64\sqrt{15}}{105}$.

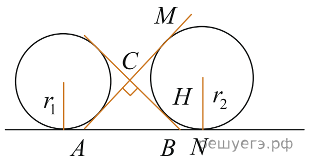
2. Тип 17 № 505568

Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ACB, являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу AB, является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ACB.

б) Найдите площадь треугольника ACB.

Решение. а) Введём обозначения, как показано на рисунке, пусть M, H, N — точки касания. Касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны: $AM = AN$, $CM = CH$, $HB = BN$. Поэтому



$$P = AC + CH + HB + AB = \\ = AC + CM + BN + AB = AM + AN = 2AM,$$

откуда $p = AM$, где P — периметр, p — полупериметр треугольника.

б) Для определения площади треугольника используем формулу, связывающую её с полупериметром, стороной и радиусом вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других сторон треугольника:

$$S = (p - AC) \cdot r_1 = (AM - AC)r_1 = CMr_1 = r_2 r_1 = 8.$$

Ответ: $S_{ACB} = 8$.

Примечание.

Примененная в пункте б) формула может быть получена из следующих соображений: $S_{ACB} = S_{ABCO_1} - S_{ACO_1}$, где O_1 — центр окружности с радиусом r_1. При этом $S_{ACO_1} = \frac{1}{2}AC \cdot r_1$, тогда

$$S_{ABCO_1} = S_{ABO_1} + S_{BCO_1} = \\ = \frac{1}{2}AB \cdot r_1 + \frac{1}{2}BC \cdot r_1 = \frac{1}{2}(AB + BC) \cdot r_1.$$

А потому

$$S_{ACB} = \frac{1}{2}(AB + BC) \cdot r_1 - \frac{1}{2}AC \cdot r_1 = \\ = \frac{1}{2}((AB + BC + AC) - 2AC) \cdot r_1 = \\ = \frac{1}{2}(P_{ABC} - 2AC) \cdot r_1 = (p - AC) \cdot r_1.$$

Вариант № 86880793

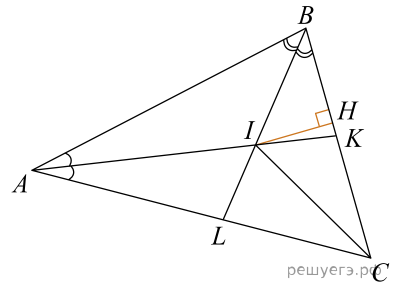
3. Тип 17 № 559604

В треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке I. Известно, что около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность.

а) Докажите, что угол BCA равен 60°.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 12 и $IC = 2$.

Решение. а) Обозначим через α и β углы CAB и ABC соответственно. Тогда углы IAB и ABI равны $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ соответственно. По теореме о сумме углов треугольника получаем, что угол BIA равен $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Такая же величина у вертикального к нему угла LIK. По условию около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность. Следовательно, угол BCA дополняет угол LIK до 180°. С другой стороны, по теореме о сумме углов треугольника угол BCA дополняет до 180° сумму углов α и β. Следовательно, $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \alpha + \beta$ и $\alpha + \beta = 120^\circ$. Значит, угол BCA равен 60°.



б) Поскольку точка I является точкой пересечения биссектрис AK и BL, она также лежит на биссектрисе угла BCA и является центром вписанной в треугольник ABC окружности. Значит, радиус этой окружности равен длине перпендикуляра IH, опущенного из этой точки на BC. По доказанному угол HCI равен половине угла BCA, то есть он равен 30°. В прямоугольном треугольнике HCI против угла в 30° лежит катет IH. Следовательно, $IH = \frac{1}{2} \cdot IC = 1$. Площадь треугольника ABC равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Значит, эта площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 1 = 6$.

Ответ: б) 6.

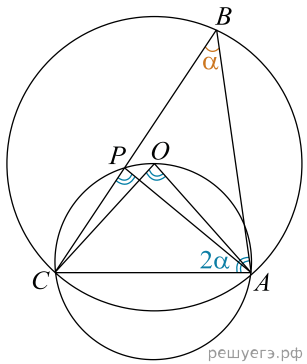
4. Тип 17 № 681169

Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB, если $BC = 6$ и $AC = 4$.

Решение. а) Пусть угол ABC равен α. Центральный угол COA и вписанный угол CBA опираются на одну дугу, значит, угол COA равен 2α. Вписанные в меньшую окружность углы COA и CPA опираются на одну дугу, следовательно, они равны. Тогда углы CPA и BAC равны 2α. Треугольники ABC и PAC с общим углом C подобны по двум углам.



б) Поскольку треугольники ABC и PAC подобны, то угол OAC равен углу ABC, то есть равен α. Тогда отрезок AP — биссектриса. Из подобия треугольников находим, что $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{CP}{AC}$, откуда

$$CP=\frac{AC^2}{CB}=\frac{8}{3}.$$

По свойству биссектрисы $\dfrac{AB}{PB}=\dfrac{AC}{CP}$, тогда

$$AB=\frac{AC\cdot PB}{CP}=\frac{4\cdot\left(6-\frac{8}{3}\right)}{\frac{8}{3}}=5.$$

Ответ: б) 5.

Приведем решение пункта б) Александра Турбанова (Липецк).

По теореме синусов в треугольнике ABC $\dfrac{BC}{\sin 2\alpha}=\dfrac{AC}{\sin\alpha}$, откуда

$$\frac{6}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{4}{\sin\alpha}=\frac{3}{\cos\alpha}=4\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{3}{4},$$

а потому $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Далее последовательно получаем:

$$\sin 2\alpha=2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{8},\qquad \cos 2\alpha=\sqrt{1-\frac{63}{64}}=\frac{1}{8},$$
$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{7}}{8}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3}{32}-\frac{21}{32}=-\frac{9}{16}.$$

Заметим, что $\angle ACB=180^\circ-3\alpha$, поэтому

$$\cos\angle ACB=\cos(180^\circ-3\alpha)=-\cos 3\alpha=\frac{9}{16}.$$

Итак, по теореме косинусов в треугольнике ABC:

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB}=$$
$$=\sqrt{16+36-2\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{9}{16}}=\sqrt{52-27}=\sqrt{25}=5.$$

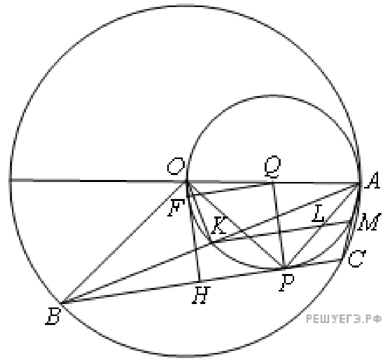
5. Тип 17 № 510109

Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC=12$.

Решение. а) Пусть O — центр большей окружности. Линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания, поэтому OA — диаметр меньшей окружности.



Точка K лежит на окружности с диаметром OA, значит, $\angle AKO=90^\circ$. Отрезок OK — перпендикуляр, опущенный из центра большей окружности на хорду AB. Поэтому K — середина AB. Аналогично, M — середина AC, поэтому KM — средняя линия треугольника ABC. Следовательно, прямые MK и BC параллельны.

б) Отпустим перпендикуляр OH на хорду BC. Тогда H — середина BC. Из прямоугольного треугольника OHB находим, что

$$OH=\sqrt{OB^2-BH^2}=\sqrt{100-36}=8.$$

Пусть Q — центр меньшей окружности. Тогда прямые QP и OH параллельны. Опустим перпендикуляр QF из центра меньшей окружности на OH. Тогда

$$OF=OH-FH=OH-QP=8-5=3;$$
$$PH^2=QF^2=QO^2-OF^2=25-9=16;$$
$$OP^2=OH^2+PH^2=64+16=80,$$

а из прямоугольного треугольника APO находим, что

$$AP=\sqrt{OA^2-OP^2}=\sqrt{100-80}=2\sqrt{5}.$$

Отрезок KM — средняя линия треугольника ABC, поэтому L средняя AP. Следовательно,

$$AL=\frac{1}{2}AP=\sqrt{5}.$$

Ответ: б) $\sqrt{5}$.

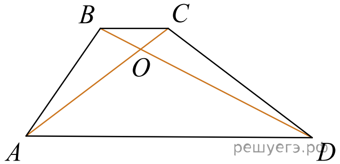
6. Тип 17 № 620779

Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, BC и AD — основания трапеции.

а) Докажите, что $\dfrac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta AOD}} = \dfrac{BC}{AD}$.

б) Найдите площадь трапеции, если $AD = 4BC$, $S_{\Delta AOB} = 2$.

Решение. а) Заметим, что у треугольников AOB и AOD общая высота, проведенная из вершины A. Значит, их площади относятся так же, как основания:



$$S_{AOB} : S_{AOD} = BO : OD = BC : AD.$$

Последнее равенство следует из подобия треугольников BOC и DOA.

б) Из пункта а) следует, что $S_{AOD} = 4S_{AOB} = 8$. Аналогично $S_{COD} : S_{AOD} = BC : AD$, поэтому $S_{COD} = S_{AOB} = 2$. Далее,

$$S_{BOC} : S_{COD} = BO : OD = BC : AD,$$

отсюда $S_{BOC} = \dfrac{1}{2}$. Окончательно получаем, что $S_{ABCD} = 8+2+2+\dfrac{1}{2} = 12{,}5$.

Ответ: 12,5.

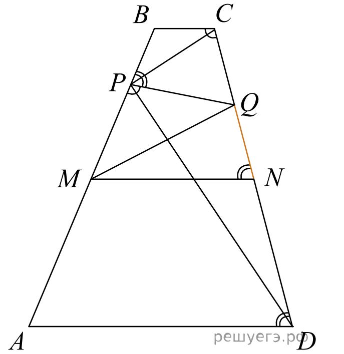
7. Тип 17 № 525243

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите длину отрезка QN, если $BC = 4{,}5$, $AD = 21{,}5$, $AB = 26$, $CD = 25$, а угол CPD — прямой.

Решение. а) Пусть угол BPQ равен γ. Четырёхугольник $PBCQ$ вписанный, сумма его противоположных углов равна $180°$, поэтому $\angle BCQ = 180° - \gamma$. Угол MPQ смежный с углом BPQ, поэтому $\angle MPQ = 180° - \gamma$. Отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$, она параллельна BC, поэтому $\angle MNC = 180° - \angle BCN = 180° - (180° - \gamma) = \gamma$. Тем самым, в четырехугольнике $MPQN$ сумма противоположных углов равна $180°$: $\angle MPQ + \angle MQN = 180° - \gamma + \gamma = 180°$, а значит, он вписанный.



б) В прямоугольном треугольнике CPD проведенная к гипотенузе медиана равна ее половине: $PN = \dfrac{25}{2}$. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований: $MN = \dfrac{21{,}5+4{,}5}{2} = 13$. Через вершину трапеции B проведем прямую, параллельную боковой стороне CD, пусть L — точка ее пересечения с основанием AD. Стороны треугольника ABL равны 26, 17 и 25. Найдем его площадь по формуле Герона, затем найдем высоту h, проведенную к стороне AL, она будет являться также высотой трапеции $ABCD$:

$$h = \frac{2S}{AL} = \frac{2\sqrt{34\cdot 8\cdot 17\cdot 9}}{17} = 24.$$

Отсюда находим: $\sin\angle BAD = \dfrac{h}{AB} = \dfrac{12}{13}$, $\sin\angle CDA = \dfrac{h}{CD} = \dfrac{24}{25}$.

Поскольку $\angle PMN = \angle BAD$ по теореме синусов для треугольника MPN найдем радиус окружности, описанной около треугольника MPQ:

$$R = \frac{PN}{2\sin\angle PMN} = \frac{25}{4\cdot\frac{12}{13}} = \frac{325}{48}.$$

$\angle QNM = \angle CDA$, поэтому можно найти MQ по теореме синусов для треугольника MQN:

$$MQ = 2R\sin\angle QNM = 2\cdot\frac{325}{48}\cdot\frac{24}{25} = 13.$$

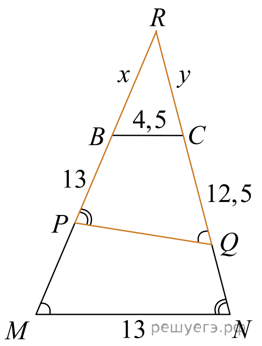
Таким образом, треугольник MQN равнобедренный, тогда

$$QN = 2MN\cos\angle MNQ = 2\cdot 13\cdot\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2} =$$

$$= 26\cdot\frac{\sqrt{25^2-24^2}}{25} = 26\cdot\frac{7}{25} = \frac{182}{25}.$$

Ответ: а) доказано, б) $\dfrac{182}{25}$.

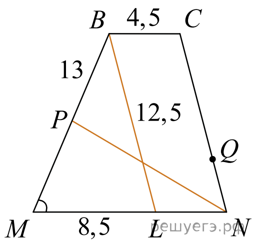
Приведём другое решение пункта б).



Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке R. Заметим, что треугольники MNR и BCR подобны с коэффициентом $k=\dfrac{4,5}{13}=\dfrac{9}{26}$. Тогда $\dfrac{x}{x+13}=\dfrac{9}{26}$, откуда $x=\dfrac{117}{17}$ и $\dfrac{y}{y+12,5}=\dfrac{9}{26}$, откуда $y=\dfrac{225}{34}$.

Через вершину B проведем отрезок BL, параллельный CN, получим треугольник MBL со сторонами 13, 12,5 и 8,5, к которому применим теорему косинусов. Для удобства можно рассмотреть подобный ему треугольник со сторонами 26, 25 и 17, для которого $25^2=26^2+17^2-2\cdot 26\cdot 17\cos A$, откуда $\cos A=\dfrac{5}{13}$.

По условию, треугольник CPD прямоугольный, отрезок PN является в нем медианой, проведенной к гипотенузе. Поэтому $PN=\dfrac{1}{2}CD=12,5$. В треугольнике MPN угол M равен углу A, тогда по теореме косинусов имеем:



$$PN^2=MP^2+MN^2-2MP\cdot MN\cos A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12,5^2=MP^2+13^2-2\cdot 13\cdot MP\cdot\frac{5}{13} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow MP^2-10MP+12,75=0,\text{ откуда } MP=\frac{3}{2}\text{ или } MP=\frac{17}{2}.$$

Далее из подобия получаем:

$$\frac{RQ}{RM}=\frac{RP}{RN}\Leftrightarrow\frac{RQ}{13+\frac{117}{17}}=\frac{13+\frac{117}{17}-\frac{3}{2}}{12,5+\frac{225}{34}}\Leftrightarrow RQ=\frac{325}{17},$$

откуда $QN=RN-RQ=12,5+\dfrac{225}{34}-\dfrac{325}{17}=0$, или

$$\frac{RQ}{RM}=\frac{RP}{RN}\Leftrightarrow\frac{RQ}{13+\frac{117}{17}}=\frac{13+\frac{117}{17}-\frac{17}{2}}{12,5+\frac{225}{34}}\Leftrightarrow RQ=\frac{5031}{425},$$

откуда $QN=RN-RQ=12,5+\dfrac{225}{34}-\dfrac{5031}{425}=\dfrac{182}{25}$.

Приведём ещё одно решение пункта б).

По условию, четырехугольник $PBCQ$ вписанный. Из этого следует, что углы PBQ и PCQ равны, как опирающиеся на одну и ту же дугу.

Заметим, что поскольку углы QNM и CDA равны, сумма противоположных углов APQ и ADQ четырехугольника $APQD$ также равна 180°, а значит, он тоже вписанный. Из этого следует, что

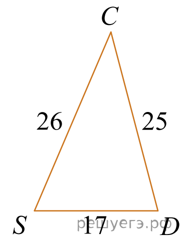
углы PAQ и PDQ равны, как опирающиеся на одну и ту же дугу.

Объединяя эти наблюдения, заключаем, что в треугольниках CPD и BQA есть две пары равных углов:

$$\widehat{ABQ}=\widehat{PBQ}=\widehat{PCQ}=\widehat{PCD},$$
$$\widehat{BAQ}=\widehat{PAQ}=\widehat{PDQ}=\widehat{PDC},$$

Но по условию угол CPD прямой. Следовательно, угол BQA тоже прямой.

В прямоугольном треугольнике BQA проведенная к гипотенузе BA медиана равна ее половине: $MQ=13$. Средняя линия трапеции $ABCD$ равна полусумме оснований: $MN=13$. Следовательно, треугольник MQN равнобедренный. Тогда $QN=2MN\cos\widehat{MNQ}=26\cos\widehat{ADC}$.



Через вершину трапеции C проведем прямую, параллельную боковой стороне AB, и пусть S — точка ее пересечения с основанием трапеции AD. Стороны треугольника SCD равны 26, 17 и 25. Применим теорему косинусов: $CS^2=SD^2+DC^2-2\cdot SD\cdot BC\cdot\cos\widehat{ADC}$, откуда

$$\cos\widehat{ADC}=\frac{17^2+25^2-26^2}{2\cdot 17\cdot 25}=\frac{17^2-51}{2\cdot 17\cdot 25}=\frac{7}{25}.$$

Таким образом, $QN=26\cdot\dfrac{7}{25}=\dfrac{182}{25}$.

8. Тип 17 № 558931

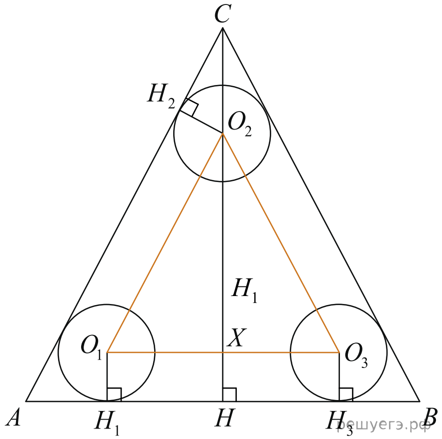
В каждый угол равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB=10$, $AC=BC=13$, вписана окружность единичного радиуса, точки O_1, O_2 и O_3 центры этих окружностей. Найдите:

а) радиус окружности, вписанной в треугольник ABC;

б) площадь треугольника O_1, O_2, O_3.

Решение. а) По теореме Пифагора высота CH треугольника ABC, проведенная к основанию AB, равна 12. Значит, площадь $S_{ABC}=60$. С другой стороны, $S_{ABC}=pr=18r$, откуда $r=\frac{10}{3}$.

б) Высота O_2X треугольника $O_1O_2O_3$ равна $CH-CO_2-XH$. Заметим, что четырехугольник $O_1O_3H_3H_1$ — прямоугольник. Действительно, прямые O_3H_3 параллельны O_1H_1, $O_3H_3=O_1H_1$ как радиусы, прямая O_3H_3 перпендикулярна прямой H_1H_3 как радиус, проведенный в точку касания. Поскольку прямые XH и H_1H_3 перпендикулярны, $XH=1$. Прямая CO_2 — гипотенуза прямоугольного треугольника CO_2H_2. Поскольку $O_2H_2=1$, а



$$\sin\angle H_2CO_2=\frac{O_2H_2}{CO_2}=\frac{AH}{AC}=\frac{5}{13},$$

получаем, что $CO_2=\frac{13}{5}$. Следовательно,

$$O_2X=12-1-\frac{13}{5}=\frac{42}{5}.$$

Треугольник ABC подобен треугольнику $O_1O_2O_3$ по двум углам (поскольку соответствующие стороны параллельны) с коэффициентом подобия, равным

$$k=\frac{CH}{O_2X}=12:\frac{42}{5}=\frac{10}{7}.$$

Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому $k^2=\frac{S_{ABC}}{S_{O_1O_2O_3}}$. Подставляя, получаем $\frac{100}{49}=\frac{60}{S_{O_1O_2O_3}}$, откуда $S_{O_1O_2O_3}=29,4$.

Ответ: б) 29,4.

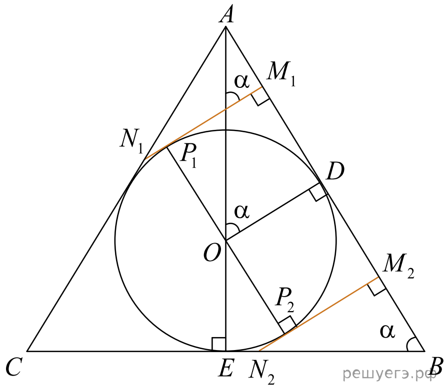
9. Тип 17 № 560733

В треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 10$, $BC = 12$. На стороне AB отметили точки M_1 и M_2 так, что $AM_1 < AM_2$. Через точки M_1 и M_2 провели прямые, перпендикулярные стороне AB и отсекающие от треугольника ABC пятиугольник, в который можно вписать окружность.

а) Докажите, что $AM_1 : BM_2 = 1:3$.

б) Найдите площадь данного пятиугольника.

Решение. а) Заметим, что окружность, вписанная в пятиугольник, о котором говорится в условии задачи, — это окружность, вписанная в треугольник ABC. Пусть вписанная окружность равнобедренного треугольника ABC касается боковой стороны AB в точке D и основания BC в точке E. Тогда AE — высота, медиана и биссектриса треугольника ABC,



$$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{100-36}=8.$$

Пусть O — центр этой окружности, r — её радиус, S — площадь треугольника ABC, p — его полупериметр. Тогда

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AE}{\frac{1}{2}(AB+BC+AC)}=3.$$

Пусть $CN_1M_1M_2N_2$ — данный пятиугольник, а P_1 и P_2 — точки касания окружности со сторонами M_1N_1 и M_2N_2 соответственно (см. рис.). Тогда четырёхугольники P_1M_1DO и M_2P_2OD — это квадраты, стороны которых равны радиусу окружности r. Из треугольника AOD находим, что

$$AD=\sqrt{AO^2-OD^2}=\sqrt{(AE-OE)^2-OD^2}=$$
$$=\sqrt{(8-3)^2-3^2}=4.$$

Тогда получаем, что

$$AM_1=AD-M_1D=4-3=1,$$
$$BM_2=AB-AD-DM_2=10-4-3=3.$$

Значит, $AM_1 : BM_2 = 1:3$.

б) Обозначим $\angle ABC=\alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{AE}{BE}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$. Из треугольника N_2M_2B получаем, что

$$N_2M_2=BM_2\cdot\operatorname{tg}\alpha=3\cdot\frac{4}{3}=4,$$

значит,

$$S_{\Delta N_2M_2B}=\frac{1}{2}N_2M_2\cdot M_2B=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3=6.$$

Из треугольника ABC находим, что $\angle BAC=180^\circ-2\alpha$. Тогда

$$\operatorname{tg}\angle BAC=\operatorname{tg}(180^\circ-2\alpha)=-\operatorname{tg}2\alpha=$$
$$=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{2\cdot\frac{4}{3}}{\frac{16}{9}-1}=\frac{24}{7}.$$

Из треугольника N_1M_1A получаем, что

$$N_1M_1=AM_1\cdot\operatorname{tg}\angle BAC=1\cdot\frac{24}{7}=\frac{24}{7}.$$

Значит,

$$S_{\Delta N_1M_1A}=\frac{1}{2}N_1M_1\cdot M_1A=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{24}{7}=\frac{12}{7}.$$

Следовательно,

$$S_{CN_1M_1M_2N_2}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta N_2M_2B}-S_{\Delta N_1M_1A}=$$
$$=48-6-\frac{12}{7}=40\frac{2}{7}.$$

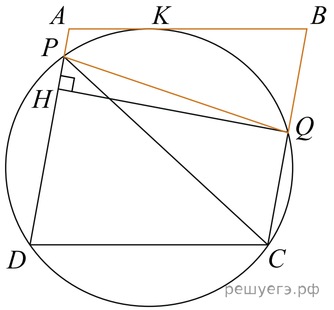
Ответ: б) $40\frac{2}{7}$.

10. Тип 17 № 516763

Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

б) Найдите длину отрезка DQ, если известно, что $AP=a$, $BC=b$, $BQ=c$.



Решение. а) Четырехугольник $CDPQ$ вписан в окружность, и его стороны PD и CQ параллельны, следовательно, $CDPQ$ — либо прямоугольник, либо равнобедренная трапеция, откуда $PQ=CD$, но $CD=AB$, значит, и четырехугольник $ABQP$ — также прямоугольник или равнобедренная трапеция, и, следовательно, около него можно описать окружность, что и требовалось доказать.

б) Поскольку AK — касательная к данной окружности, а AD — секущая, имеем: $AK^2=AD\cdot AP=ba$. Аналогично находим $BK^2=bc$, откуда $AB=\sqrt{ba}+\sqrt{bc}$, и тогда $CD=PQ=\sqrt{ba}+\sqrt{bc}$.

Пусть QH — высота равнобедренной трапеции $CDPQ$. Тогда

$$DQ^2=DH^2+QH^2=DH^2+PQ^2-PH^2=$$
$$=PQ^2+(DH-PH)(DH+PH)=PQ^2+CQ\cdot DP=$$

$$=(\sqrt{ba}+\sqrt{bc})^2+(b-c)(b-a)=$$
$$=ba+bc+2b\sqrt{ac}+b^2-ba-bc+ca=$$
$$=b^2+2b\sqrt{ac}+ca=(b+\sqrt{ac})^2.$$

Таким образом, $DQ=b+\sqrt{ac}$.

Ответ: $DQ=b+\sqrt{ac}$.

Замечание.

Учащиеся, знающие теорему Птолемея для вписанного четырехугольника, могут привести более короткое решение, сразу написав $DQ^2=PQ^2+CQ\cdot DP$.

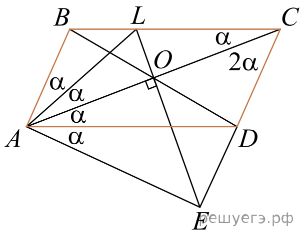
11. Тип 17 № 630123

В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L. На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E, что $AE=CE$.

а) Докажите, что $AL\cdot BC=AB\cdot AC$.

б) Найдите EL, если $AC=8$, $\operatorname{tg}\angle BCA=\frac{1}{2}$.

Решение. а) Из условия следует, что $\angle CAD = \angle CAL = \angle LAB = \alpha$. Пусть площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S = 2S_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin 2\alpha$. Треугольник ALD имеет общие с параллелограммом $ABCD$ высоту и основание, следовательно, $S = 2S_{ALD} = AL \cdot AD \cdot \sin 2\alpha$. Таким образом, $AB \cdot AC = AL \cdot AD = AL \cdot BC$.



б) Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда O делит диагонали пополам. Треугольник ACE равнобедренный, следовательно, EO и AC взаимно перпендикулярны. Из условия следует, что $\angle LCA = \angle CAD = \angle CAL = \alpha$. Таким образом, треугольник ALC равнобедренный, $LO \perp AC$, следовательно, EL проходит через точку O. Получаем:

$$LO = AO \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{2}\operatorname{tg}\alpha = 2,$$
$$EO = AO \cdot \operatorname{tg}2\alpha = AO \cdot \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{16}{3},$$

откуда $EL = LO + EO = \dfrac{22}{3}$.

Ответ: $\dfrac{22}{3}$.

12. Тип 17 № 513267

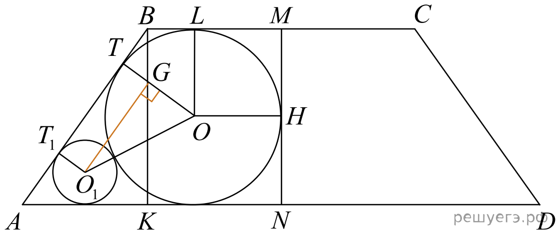
Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

Вариант № 86880793

Решение. а) Из описанности трапеций следует, что $BM + AN = AB + MN$ и $MC + ND = CD + MN$. Поскольку $BM = MC$ и $AN = ND$, получаем, что $AB = CD$.



б) Очевидно, при этих условиях отрезок MN является высотой трапеции и имеет длину 6. Пусть $AN = t$, тогда из описанности трапеции $BMNA$ следует, $AB + 6 = t + 4$, откуда $AB = t - 2$. Опуская высоту BK, получим $BK^2 + KA^2 = BA^2$, откуда $(t-4)^2 + 36 = (t-2)^2$. Решая это уравнение, получаем $t = 12$ и $AB = 10$.

Обозначим O центр окружности, вписанной в $BMNA$, центр второй окружности — O_1, их проекции на сторону AB — за T и T_1 соответственно, радиус второй окружности обозначим r. Тогда TOO_1T_1 — трапеция, в которой $TO = 3$, $T_1O_1 = r$, $OO_1 = 3 + r$.

Опустим из O перпендикуляры OL и OH на BM и MN соответственно. Тогда $OLMH$ — квадрат со стороной 3, поэтому $BT = BL = 4 - 3 = 1$, а $AT = 9$. Из подобия треугольников ATO и AT_1O_1 находим, что $AT_1 = 3r$ и $TT_1 = 9 - 3r$.

Теперь опустим перпендикуляр O_1G на OT. Тогда $OG = 3 - r$, $O_1G = T_1T = 9 - 3r$, получаем уравнение:

$$(9-3r)^2 + (3-r)^2 = (r+3)^2 \Leftrightarrow 9r^2 - 66r + 81 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3r^2 - 22r + 27 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{11 \pm \sqrt{40}}{3}.$$

Из двух корней подходит только меньший, поскольку $r < 3$.

Ответ: $\dfrac{11 - 2\sqrt{10}}{3}$.

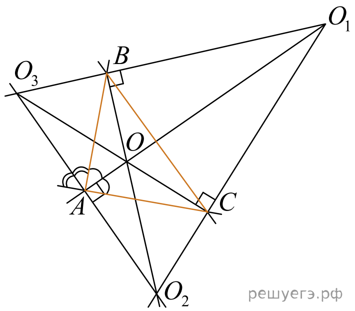
13. Тип 17 № 654702

Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC, точки O_1, O_2, O_3 центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно.

а) Докажите, что точка O является точкой пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$.

б) Найдите угол A треугольника ABC, если отрезок OO_1 короче отрезка O_2O_3 ровно в два раза.

Решение. а) Центр вписанной в угол окружности лежит на биссектрисе этого угла, поэтому центры вневписанных окружностей лежат на пересечении биссектрис внутреннего угла треугольника и двух внешних углов. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $\angle O_1AO_3 = 90^\circ$. Аналогично O_3C и O_2B — высоты треугольника $O_1O_2O_3$.



б) Рассмотрим прямоугольные треугольники O_1O_2B и O_1O_3C, в них

$$\cos\angle BO_1C = \frac{O_1C}{O_3O_1} = \frac{O_1B}{O_2O_1},$$

откуда следует, что треугольниками BO_1C и $O_2O_1O_3$ подобны, причем $\dfrac{BC}{O_2O_3} = \cos\angle BO_1C$.

Отрезок OO_1 — диаметр окружности, описанной около треугольника BCO_1. По теореме синусов $BC = OO_1 \cdot \sin\angle BO_1C$. Тогда

$$\frac{OO_1 \cdot \sin\angle BO_1C}{O_2O_3} = \cos\angle BO_1C,$$

откуда $\operatorname{tg}\angle BO_1C = \dfrac{O_2O_3}{O_1O} = 2$. Значит,

$$\angle BO_1C = \pi - (\angle O_1BC + \angle O_1CB) =$$
$$= \pi - \frac{1}{2}(\pi - \angle ABC + \pi - \angle ACB) =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle BAC,$$

следовательно, $\angle BAC = \pi - 2\angle BO_1C = \pi - 2\operatorname{arctg}2$.

Ответ: б) $\pi - 2\operatorname{arctg}2$.

14. Тип 17 № 628753

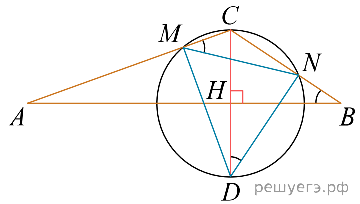
Из вершины тупого угла C треугольника ABC проведена высота CH. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, а прямая CH — эту окружность в точке D.

а) Докажите, что угол MDN равен сумме углов A и B треугольника ABC.

б) Найдите отношение MN к AB, если известно, что $CM : MA = 2 : 25$ и $CN : NB = 2 : 1$.

Решение. а) Четырёхугольник $CMDN$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle MDN = 180^\circ - \angle MCN =$$
$$= 180^\circ - \angle ACB = \angle CAB + \angle CBA.$$



б) Вписанные углы CMN и CDN опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle CMN = \angle CDN$. У прямоугольных треугольников CND и CHB общий острый угол при вершине C, поэтому $\angle CBH = \angle CDN = \angle CMN$. Треугольник ABC подобен треугольнику NMC по двум углам, значит, $\dfrac{CN}{AC} = \dfrac{CM}{BC}$.

Положим, $CN = 2a$, $NB = a$, $MA = 25b$, $CM = 2b$. Тогда $\dfrac{2a}{27b} = \dfrac{2b}{3a}$, следовательно, $\dfrac{a}{b} = 3$.

Значит, коэффициент подобия треугольников ABC и NMC равен $\dfrac{CN}{AC} = \dfrac{2a}{27b} = \dfrac{2}{9}$.

Следовательно, $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CN}{AC} = \dfrac{2}{9}$.

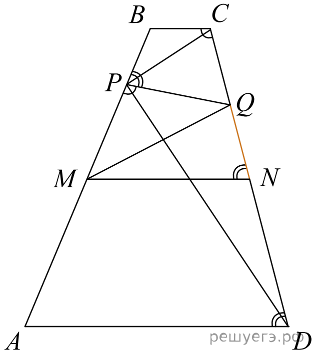
Ответ: б) 2 : 9.

15. Тип 17 № 675946

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN, если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21$, $BC = 4$, $CD = 20$, $AD = 17$.



Решение. а) Пусть угол BPQ равен γ. Четырёхугольник $PBCQ$ — вписанный, сумма его противоположных углов равна 180°, поэтому $\angle BCQ = 180^\circ - \gamma$. Угол MPQ смежный с углом BPQ, поэтому $\angle MPQ = 180^\circ - \gamma$. Отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$, она параллельна BC, а потому

$$\angle MNC = 180^\circ - \angle BCN = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) = \gamma.$$

Тем самым в четырехугольнике $MPQN$ сумма противоположных углов равна 180°:

$$\angle MPQ + \angle MQN = 180^\circ - \gamma + \gamma = 180^\circ,$$

а значит, четырехугольник вписанный.

б) В прямоугольном треугольнике CPD проведенная к гипотенузе медиана равна ее половине: $PN = 10$. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований: $MN = \dfrac{17+4}{2} = \dfrac{21}{2}$. Через вершину трапеции B проведем прямую, параллельную боковой стороне CD, пусть L — точка ее пересечения с основанием AD. Стороны треугольника ABL равны 21, 17 и 20. Найдем его площадь по формуле Герона, затем найдем высоту h, проведенную к стороне AL, она будет являться также высотой трапеции $ABCD$:

$$h = \frac{2S}{AL} = \frac{2\sqrt{29\cdot 8\cdot 12\cdot 9}}{17} = \frac{12\sqrt{174}}{17}.$$

Отсюда находим:

$$\sin\angle BAD = \frac{h}{AB} = \frac{4\sqrt{174}}{119}, \qquad \sin\angle CDA = \frac{h}{CD} = \frac{3\sqrt{174}}{85}.$$

Поскольку $\angle PMN = \angle BAD$ по теореме синусов для треугольника MPN, находим радиус окружности, описанной около треугольника MPQ:

$$R = \frac{PN}{2\sin\angle PMN} = \frac{10}{2\cdot\frac{4\sqrt{174}}{119}} = \frac{595\sqrt{174}}{696}.$$

Так как $\angle QNM = \angle CDA$, можно найти отрезок MQ по теореме синусов для треугольника MQN:

$$MQ = 2R\sin\angle QNM = 2\cdot\frac{595\sqrt{174}}{696}\cdot\frac{3\sqrt{174}}{85} = \frac{21}{2}.$$

Таким образом, треугольник MQN — равнобедренный, тогда

$$QN = 2MN\cos\angle MNQ = 2\cdot\frac{21}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{174}}{85}\right)^2} =$$

$$= 21\cdot\sqrt{\frac{5659}{7225}} = \frac{21\sqrt{5659}}{85}.$$

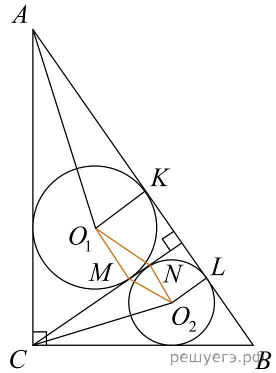
Ответ: б) $\dfrac{21\sqrt{5659}}{85}$.

16. Тип 17 № 517486

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся прямой CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника MO_1NO_2, если $AC = 12$ и $BC = 5$.



Решение. а) Лучи AO_1 и CO_2 являются биссектрисами равных углов HAC и HCB соответственно. Значит, $\angle O_1AC = \angle O_2CB$; $\angle O_1AC = 90^\circ - \angle O_2CA$, то есть прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Пусть прямая AB касается окружностей, вписанных в треугольники ACH и BCH, в точках K и L соответственно. Получаем:

$$AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = 13;\ CH = \frac{AC\cdot BC}{AB} = \frac{60}{13};$$

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \frac{144}{13};$$

$$BH = AB - AH = \frac{25}{13};\ MH = \frac{AH+CH-AC}{2} = \frac{24}{13};$$

$$NH = \frac{BH+CH-BC}{2} = \frac{10}{13};\ MN = MH - NH = \frac{14}{13}.$$

Поскольку O_1KHM и O_2LHN — квадраты, получаем: $O_1M = MH = \dfrac{24}{13}$, $O_2N = NH = \dfrac{10}{13}$.

Значит, площадь четырёхугольника MO_1NO_2 равна

$$S_{MO_1NO_2} = S_{MO_1N} + S_{MO_2N} = \\ = \frac{MO_1\cdot MN}{2} + \frac{NO_2\cdot MN}{2} = \frac{238}{169}.$$

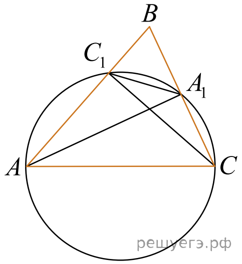
Ответ: б) $\dfrac{238}{169}$.

17. Тип 17 № 548559

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1. Оказалось, что точки A, A_1, C, C_1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AA_1 : CC_1 = 5 : 4$ и $A_1C_1 = 4$.



Решение. а) Угол AC_1C равен 90°, следовательно, угол AA_1C равен 90°, поскольку AC — диаметр окружности. Тогда AA_1 — высота и медиана треугольника ABC. Таким образом, отрезки AB и AC равны, что и требовалось доказать.

б) Треугольники ABA_1 и CBC_1 подобны по двум углам, следовательно, $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AA_1}{CC_1} = \dfrac{5}{4}$. C_1A_1 — медиана в прямоугольном треугольнике BC_1C, поэтому

$$C_1A_1 = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow BC = 8 \Rightarrow AB = 10.$$

Вычислим площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC} = \frac{AA_1 \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{10^2 - 4^2} \cdot 8}{2} = 8\sqrt{21}.$$

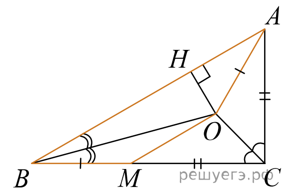
Ответ: $8\sqrt{21}$.

18. Тип 17 № 628276

Дан треугольник ABC. Точка O — центр вписанной в него окружности. На стороне BC отмечена такая точка M, что $CM = AC$ и $BM = AO$.

а) Докажите, что прямые AB и OM параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABMO$, если угол ACB прямой и $AC = 6$.



Решение. а) Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения его биссектрис. Следовательно, треугольники ACO и MCO равны по двум сторонам и углу между ними, а, значит, $OM = AO = BM$. Таким образом, треугольник BOM является равнобедренным, и углы OBM и BOM равны.

С другой стороны, BO — биссектриса угла ABC, поэтому углы ABO и OBM равны. Таким образом, углы ABO и BOM равны, поэтому прямые AB и OM параллельны.

б) Четырёхугольник $ABMO$ — равнобедренная трапеция с основаниями AB и MO, поэтому углы BAO и ABM равны. Отсюда следует, что $\angle BAC = 2 \cdot \angle ABM$. Так как $\angle BCA = 90^\circ$, получаем $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$. Из треугольника ABC находим, что $BC = 6\sqrt{3}$, $AB = 12$. Поскольку $BC = BM + CM$, получаем

$$OM = BM = BC - CM = 6\sqrt{3} - 6.$$

В трапеции $ABMO$ проведём высоту OH. В треугольнике AOH находим, что

$$OH = \frac{AO}{2} = \frac{OM}{2} = 3\sqrt{3} - 3.$$

Найдём площадь трапеции $ABMO$:

$$S_{ABMO} = \frac{AB + OM}{2} \cdot OH = \frac{12 + 6\sqrt{3} - 6}{2} \cdot (3\sqrt{3} - 3) = (3\sqrt{3} + 3)(3\sqrt{3} - 3) = 18.$$

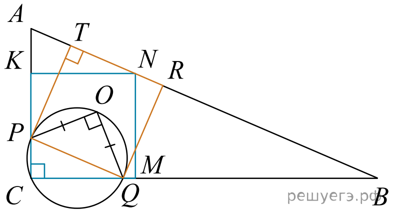
Ответ: б) 18.

19. Тип 17 № 635156

В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $KCMN$ так, что вершины K и M расположены на катетах AC и BC соответственно, а на гипотенузе AB — вершина N. Вершины квадрата $TPQR$ расположены на сторонах треугольника ABC, причём вершины P и Q находятся на катетах AC и BC соответственно, а вершины R и T — на гипотенузе AB.

а) Докажите, что точка C и центры квадратов $KCMN$ и $TPQR$ лежат на одной прямой.

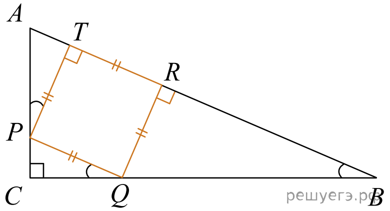
б) Найдите длину стороны квадрата $TPQR$, если $AC = 5$ и $BC = 12$.



Решение. а) Центр квадрата $KCMN$ — это середина отрезка CN. Докажем, что центр квадрата $TPQR$ лежит на той же прямой CN. Пусть этот центр — точка O. Заметим, что $PO = QO$ и $\angle POQ = 90^\circ$, тогда четырёхугольник $POQC$ вписан в окружность. По тереме синусов $\sin\angle PCO = \sin\angle OCQ$, следовательно, точка O лежит на биссектрисе угла ACB, то есть на прямой CN.

б) Пусть $PT = x$. Треугольники APT, QBR и ABC подобны, значит,

$$\frac{AT}{PT} = \frac{5}{12} = \frac{PQ}{RB},$$



откуда $AT = \frac{5}{12}x$ и $RB = \frac{12}{5}x$. Найдем гипотенузу AB:

$$AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Тогда для длины сторона квадрата можно составить уравнение:

$$x + \frac{5}{12}x + \frac{12}{5}x = 13 \Leftrightarrow \frac{60+25+144}{60}x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{780}{229}.$$

Ответ: б) $\frac{780}{229}$.

Приведем замечание Ирины Шраго.

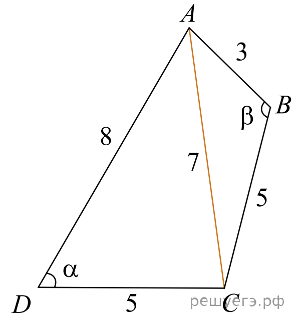
Равенство углов PCO и OCQ в пункте а) можно доказать без использования теоремы синусов. Эти углы являются вписанными, опираются на равные хорды и оба являются острыми, следовательно, они равны.

20. Тип 17 № 519661

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите BD.



Решение. Найдём косинусы углов ABC и ADC в треугольниках ABC и ADC соответственно:

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{9+25-49}{2\cdot 3\cdot 5} = -\frac{1}{2},$$

поэтому $ABC = 120^\circ$. Далее,

$$\cos\widehat{ADC} = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD\cdot DC} = \frac{64+25-49}{2\cdot 8\cdot 5} = \frac{1}{2},$$

поэтому $ADC = 60^\circ$.

Таким образом, сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, поэтому вокруг него можно описать окружность. Для вписанного четырёхугольника справедлива теорема Птолемея: произведение диагоналей четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон. Тогда

$$AC\cdot BD = AB\cdot DC + AD\cdot BC, \quad \text{то есть} \quad 7\cdot BD = 3\cdot 5 + 8\cdot 5,$$

откуда $BD = \frac{55}{7}$.

Ответ: б) $\frac{55}{7}$.

Приведем решение пункта б) Тофига Алиева без использования теоремы Птолемея.

Заметим, что $\cos\angle BAD = -\cos\angle BCD$, поскольку $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$. Пусть $\gamma = \angle BAD$, тогда в треугольнике BAD по теореме косинусов

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2\cdot AD\cdot AB\cdot\cos\gamma = 64 + 9 - 48\cos\gamma.$$

В треугольнике BCD по теореме косинусов

$$BD^2 = CD^2 + CB^2 + 2\cdot CD\cdot CB\cdot\cos\gamma = 25 + 25 + 50\cos\gamma.$$

Приравнивая выражения для BD^2, получим

$$73 - 48\cos\gamma = 50 + 50\cos\gamma \Leftrightarrow \cos\gamma = \frac{23}{98}.$$

Тогда

$$BD = \sqrt{50 + 50\cdot\frac{23}{98}} = \sqrt{\frac{50(98+23)}{98}} = \frac{55}{7}.$$

Приведем идею решения Юрия Зорина.

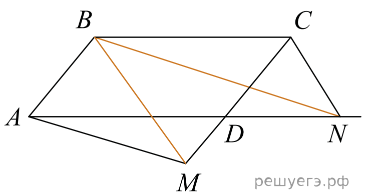
Углы BAC и BDC равны как вписанные углы, опирающиеся на дугу BC. По теореме косинусов найдём косинус угла BAC (он равен 11/14). Далее, зная, что косинусы равных углов равны, из треугольника BDC найдем по теореме косинусов искомый отрезок BD.

21. Тип 17 № 563635

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A. На продолжении стороны AD за точку D взята точка N такая, что $CN = CD$, а на продолжении стороны CD за точку D взята такая точка M, что $AD = AM$.

а) Докажите, что $BM = BN$.

б) Найдите MN, если $AC = 7$, $\sin\angle BAD = \frac{7}{25}$.



Решение. а) Пусть $\angle CDN = \angle CND = \alpha$, тогда $\angle DCN = 180^\circ - 2\alpha$. Углы CDN и ADM равны как вертикальные, тогда $\angle ADM = \angle AMD = \alpha$ и $\angle MAD = 180^\circ - 2\alpha$. Тогда $\angle BAM = \angle BCN = 180^\circ - \alpha$. Таким образом, треугольники ABM и BCN равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $BM = BN$.

б) Равные углы MAN и NCM опираются на отрезок MN, значит, точки M, C, N и A лежат на одной окружности. Рассмотрим треугольник AMN, вписанный в окружность. В нем $\frac{MN}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = 2R$. Треугольник ACM также вписан в окружность, поэтому $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$. Таким образом,

$$\frac{MN}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{AC}{\sin\alpha},$$

$$MN = \frac{AC\cdot\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = AC\cdot 2\cos\alpha = 2\cdot 7\cdot\frac{24}{25} = \frac{336}{25}.$$

Ответ: б) $\frac{336}{25}$.

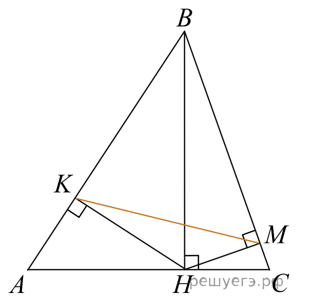
22. Тип 17 № 505495

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 1$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4.

Вариант № 86880793



Решение. а) Пусть угол $BAC = \alpha$. Углы BAC и KHB равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим четырёхугольник $BKHM$: $\angle BKH + \angle BMH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, следовательно, четырёхугольник $BKHM$ вписан в окружность. Значит, $\angle KHB = \angle KMB$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Таким образом, $\angle BAC = \angle KHB = \angle KMB$. Треугольники ABC и MBK имеют общий угол B и $\angle BAC = \angle KMB$, значит, эти треугольники подобны по двум углам.

б) Из прямоугольного треугольника BKH находим, что $BH = \frac{BK}{\sin\angle KHB}$. Для треугольника ABC справедливо равенство $2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC}$. Учитывая, что $\angle KHB = \angle BAC$ получаем: $\frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH}$. Стороны BC и BK — сходственные в подобных треугольниках ABC и MBK, следовательно, их коэффициент подобия $k = \frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH} = 8$. Найдём отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AMKC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{ABC} - S_{MBK}} = \frac{S_{MBK}}{k^2 S_{MBK} - S_{MBK}} = \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{64 - 1} = \frac{1}{63}.$$

Ответ: $\frac{1}{63}$.

23. Тип 17 № 517502

Точки E и K — соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O.

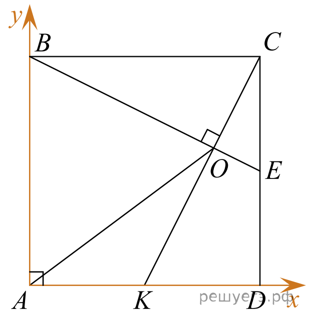
а) Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.

б) Найдите AO, если сторона квадрата равна 1.

Решение. а) Треугольники BCE и CDK равны по двум катетам, следовательно,

$$\angle CBE = \angle DCK = 90^\circ - \angle BCK,$$

то есть прямая BE перпендикулярна прямой CK. Тогда в четырёхугольнике $ABOK$: $\angle BAK = \angle BOK = 90^\circ$. Поэтому вокруг него можно описать окружность.



б) Введём систему координат, как показано на рисунке. В этой системе $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $D(1;\ 0)$, $E\left(1;\ \dfrac{1}{2}\right)$, $K\left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)$.

Уравнение прямой KC: $y = 2x - 1$, уравнение прямой BE: $y = 1 - \dfrac{x}{2}$. Координаты точки O найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = 1 - \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1, \\ 2x - 1 = 1 - \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{5}, \\ x = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Тогда расстояние между $A(0;\ 0)$ и $O\left(\dfrac{4}{5};\ \dfrac{3}{5}\right)$ равно

$$\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1.$$

Ответ: б) 1.

Приведём другое решение п. а).

Повернём треугольник BCE на 90° по часовой стрелке и параллельным переносом совместим точку B с точкой C. Тогда треугольник BCE наложится на CKD, прямая BE совпадет с прямой CK. Поскольку после поворота прямые совпали, до поворота угол между ними был 90°.

Приведём другое решение п. б).

Прямоугольные треугольники BCE и BAK равны по двум катетам, значит, $\angle BKA = \angle BEC = \angle ABE = \angle ABO$, то есть на хорды AO и AB описанной около четырёхугольника $ABOK$ окружности опираются равные углы. Таким образом, $AO = AB = 1$.

Приведём решение п. б) Андрея Плюхина.

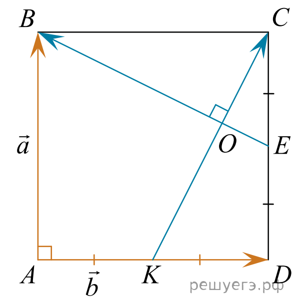
Продолжим отрезок CK до точки F пересечения с прямой AB. Прямоугольные треугольники KDC и KAF равны по катету и острому углу, поэтому $AF = BC = 1$, а точка A — середина BF.

Точка O принадлежит окружности с центром в точке A и диаметром BF, поскольку эта точка — вершина прямого угла, стягивающего диаметр BF. Следовательно, $AO = AB = AF = 1$ — радиус этой окружности.

Второй абзац этого решения можно заменить таким рассуждением: из суммы углов получаем, что угол FOB прямой, следовательно, AO является медианой прямоугольного треугольника и равна половине гипотенузы.

Приведём решение Дениса Чернышева (Тюмень).

а) Вокруг четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противолежащих углов равны 180°. По условию $ABCD$ — квадрат, в нем угол A прямой. Докажем, что угол KOB прямой. Имеем:



$$\overrightarrow{KC} = \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \vec{a}, \qquad \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\cdot\vec{a} - \vec{b}.$$

Значит,

$$\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\cdot\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\cdot\vec{b}^2.$$

Стороны квадрата равны, поэтому $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$. Значит, скалярное произведение равно нулю, а тогда $\angle KOB = \widehat{\overrightarrow{KC},\ \overrightarrow{EB}} = 90^\circ$.

б) Необходимо найти модуль вектора $\overrightarrow{OA}$. Запишем его в виде

$$\overrightarrow{OA} = x\cdot\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = x\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}\right) - \vec{b} - \vec{a},$$

где $x = \dfrac{OC}{KC}$. По теореме Пифагора из треугольника DCK находим:

$$KC = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Прямоугольные треугольники DCK и OCE подобны, поскольку имеют общий острый угол. Значит, $\dfrac{KC}{CE} = \dfrac{CD}{OC}$, откуда

$$OC = \frac{CE\cdot CD}{KC} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{OC}{KC} = \frac{\sqrt{5}\cdot 2}{5\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{5}.$$

Подставим найденный коэффициент x в выражение для вектора $\overrightarrow{OA}$, получим:

$$\overrightarrow{OA} = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot b\vec{+}\vec{a}\right) - \vec{b} - \vec{a} = -\frac{3}{5}\cdot\vec{a} - \frac{4}{5}\cdot\vec{b}.$$

Тогда

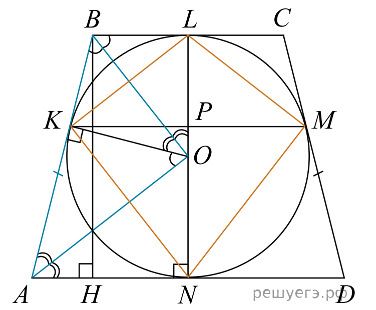
$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\cdot 1\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\cdot 1\right)^2} = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = 1.$$

24. Тип 17 № 639772

Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, K — точка касания окружности со стороной AB.

а) Докажите, что $AB\cdot\sqrt{AK\cdot BK} = AO\cdot BO$.

б) Найдите отношение меньшего основания трапеции к большему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{16}{81}$ площади трапеции $ABCD$.



Решение. а) Центр вписанной в четырехугольник окружности лежит на пересечении его биссектрис. Поэтому $\angle KAO = \frac{1}{2}\angle BAD$ и $\angle KBO = \frac{1}{2}\angle ABC$. Следовательно,

$$\angle KAO + \angle KBO = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = 90^\circ,$$

а значит, треугольник AOB прямоугольный. Пусть отрезок OK — его высота, тогда $KO^2 = AK\cdot BK$. Запишем площадь треугольника AOB двумя способами:

$$S = \frac{KO\cdot AB}{2} = \frac{BO\cdot AO}{2},$$

откуда $\sqrt{AK\cdot BK}\cdot AB = AO\cdot BO$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть точки касания окружности со сторонами BC, CD и DA это точки L, M и N соответственно. Пусть также $BL = BK = b$ и $AK = AN = a$. Обозначим P — точку пересечения отрезков KM и LN, и проведем BH — высоту трапеции. Тогда треугольники ABH и OKP подобны по двум углам, откуда $\frac{KP}{KO} = \frac{BH}{AB}$. Значит,

$$KM = 2KP = \frac{KO\cdot BH}{AB} = \\ = \frac{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Находим:

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2}\cdot LN\cdot KM = \frac{1}{2}\cdot\frac{4ab}{a+b}\cdot LN = \\ = \frac{16}{81}\cdot S_{ABCD} = \frac{16}{81}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2a+2b)\cdot LN,$$

откуда

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{16}{81}\cdot(a+b) \Leftrightarrow 8(a+b)^2 = 81ab \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8a^2 - 65ab + 8b^2 = 0 \Leftrightarrow (8a-b)(a-8b) = 0 \Leftrightarrow \frac{2a}{2b} = \frac{1}{8}.$$

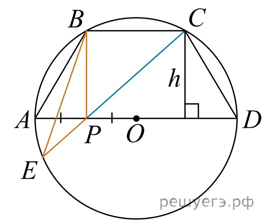
Ответ: б) $\frac{1}{8}$.

25. Тип 17 № 659592

В окружность вписана трапеция, основание AD которой является диаметром, а угол BAD равен 60°. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P так, что $AP : PD = 1 : 3$.

а) Докажите, что CP делит трапецию на две равновеликие части.

б) Найдите площадь треугольника BPE, если радиус окружности равен $2\sqrt{7}$.



Решение. а) Пусть точка O — центр окружности, то есть середина основания AD. Тогда угол BAD равен 60°, значит, треугольник ABO равносторонний. Тогда $\angle OBC = \angle BOA = 60^\circ$, следовательно, и треугольник BOC равносторонний, то есть $BC = \dfrac{AD}{2}$, и тогда

$$PD = \frac{3}{4}AD = \frac{1}{2}(BC + AD).$$

Найдем площадь треугольника CPD:

$$S_{CPD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot PD = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{BC + AD}{2} = \frac{1}{2}S_{ABCD},$$

где h — высота трапеции. Таким образом, $S_{ABCP} = S_{PCD}$.

б) Заметим, что отрезок BP — медиана и высота в равностороннем треугольнике ABO. Поэтому

$$BP = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AO = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{7} = \sqrt{21}.$$

По тереме Пифагора находим:

$$CP^2 = BP^2 + BC^2 = 21 + 28 = 49,$$

откуда $CP = 7$. По теореме о произведении отрезков хорд получаем: $CP = PE = AP \cdot PD$, то есть $7 \cdot PE = \sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7}$, откуда $PE = 3$. Тогда

$$\angle BEC = \frac{1}{2}\angle BOC = 30^\circ.$$

По тереме косинусов для треугольника BPE получаем:

$$BE^2 + 9 - 2BE \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 21 \Leftrightarrow BE^2 - 3\sqrt{3}BE - 12 = 0,$$

откуда, учитывая, что $BE > 0$, получаем: $BE = 4\sqrt{3}$. Таким образом,

$$S_{BEP} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $3\sqrt{3}$.

26. Тип 17 № 514731

Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону BC.

Решение.

а) Пусть окружность делит сторону AB на три равные части (рис. 1)

$$AK_1 = K_1K_2 = K_2B = x$$

и делит сторону BC на три равные части

$$CL_1 = L_1L_2 = L_2B = y.$$

Тогда по свойству секущих

$$BK_1 \cdot BK_2 = BL_1 \cdot BL_2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2y^2 \Leftrightarrow x = y,$$

откуда получаем:

$$AB = BC.$$

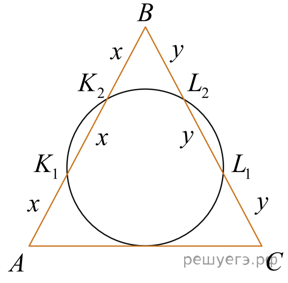


Рис. 1

б) Пусть окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке M (рис. 2). Поскольку

$$AM^2 = AK_1 \cdot AK_2 = 2x^2,$$

получаем:

$$AM = MC = x\sqrt{2}.$$

Пусть AH — высота треугольника, тогда

$$HC = AC \cdot \cos\angle ACB = \frac{AC \cdot MC}{BC} = \frac{4}{3}x;$$

$$BH = BC - HC = \frac{5}{3}x.$$

Таким образом, $BH : HC = 5 : 4$.

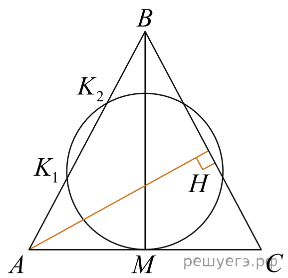


Рис. 2

Ответ: б) 5 : 4.

27. Тип 17 № 646298

Окружности ω_1 и ω_2 радиусов 4 и 1 соответственно касаются внешним образом в точке A. Через точку B, лежащую на окружности ω_1, проведена прямая, касающаяся окружности ω_2 в точке M.

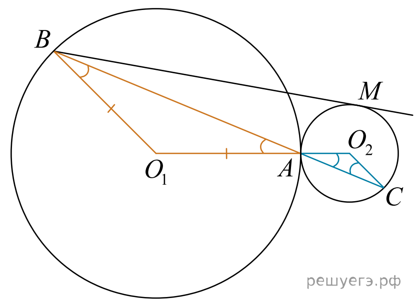
а) Докажите, что отношение отрезков прямой AB, отсекаемых окружностями, равно отношению их радиусов.

б) Найдите BM, если известно, что $AB = 2$.

Решение. а) Пусть C — вторая точка пересечения прямой AB и окружности ω_2, и пусть точки O_1 и O_2 — центры окружностей. Тогда треугольники O_1AB и O_2AC подобны, поскольку $\angle O_1AB = \angle O_2AC$ как вертикальные и

$$\angle O_1BA = \angle O_1AB = \angle O_2AC = \angle O_2CA.$$

Значит, $AB : AC = O_1A : O_2A$. Что и требовалось доказать.



б) По теореме о квадрате касательной $BM^2 = BA \cdot BC$. Из пункта а) следует, что

$$AC = \frac{O_2A}{O_1A} \cdot AB = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Тогда $BC = \frac{5}{2}$, откуда $BM^2 = 2 \cdot \frac{5}{2}$. Следовательно, $BM = \sqrt{5}$.

Ответ: б) $\sqrt{5}$.

Примечание к пункту б).

Из точки B можно провести две касательные к окружности ω_2. Приведенные рассуждения не зависят от положения точки M на окружности, а потому сохраняют свою силу для любой из касательных.

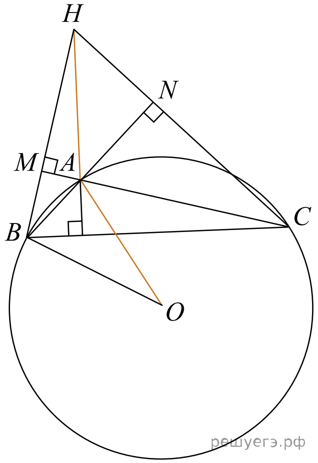
28. Тип 17 № 541381

В треугольнике ABC угол A равен 120°. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45°$.

Решение. а) По теореме синусов имеем: $BC = 2AO\cdot\sin 120^\circ = AO\sqrt{3}$. Четырехугольник $MHNA$ вписан в окружность с диаметром AH, тогда по теореме синусов для треугольника MNA имеем:



$$MN = 2R\cdot\sin 120^\circ = AH\cdot\sin 120^\circ = AH\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Треугольники MAN и BAC подобны, поскольку

$$\frac{MA}{AB} = \frac{AN}{AC} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

тогда $MN = \frac{1}{2}BC$. Подставляя, получаем:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}AH = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot\sqrt{3} \Leftrightarrow AH = AO.$$

б) По теореме о вписанном угле $\angle BOA = 2\angle ACB = 2\cdot 15^\circ = 30^\circ$. Тогда

$$\angle BAO = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

а $\angle BAH = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Тогда $\angle HAO = 360^\circ - 135^\circ - 75^\circ = 150^\circ$. Из доказанного в пункте а) имеем, что

$$AH = AO = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}.$$

Найдем площадь треугольника:

$$S_{AHO} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}^2\cdot\sin 150^\circ = \frac{5}{4}.$$

Ответ: $\frac{5}{4}$.

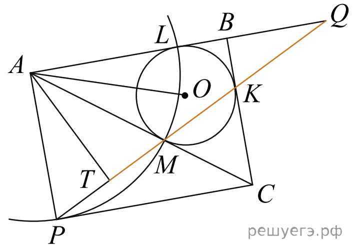
29. Тип 17 № 518961

Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90^\circ$, $AM = 6$, $CM = 4$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45^\circ$. Найдите QT.

Решение. а) Поскольку $CK = CM$ и $AP = AM$, треугольники MCK и PAM равнобедренные, причём $\angle CMK = \angle AMP$ — углы при их основаниях MK и MP. Значит, $\angle MKC = \angle MPA$. Следовательно, прямая AP параллельна прямой BC.



б) Обозначим $BK = BL = x$. Тогда $CK = CM = 4$, $AL = AM = 6$, $BC = 4+x$, $AB = 6+x$.

По теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 + AB^2$, или $100 = (4+x)^2 + (6+x)^2$, откуда $x = 2$. Значит, $BC = 6$, $AB = 8$.

Поскольку $BC = AP = 6$ и $BC \parallel AP$, четырёхугольник $ABCP$ — прямоугольник, значит, $CP = AB = 8$. Треугольник AMQ подобен треугольнику CMP с коэффициентом $\frac{AM}{MC} = \frac{3}{2}$, поэтому $AQ = \frac{3}{2}CP = \frac{3}{2}\cdot 8 = 12$.

По теореме Пифагора $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{36+144} = 6\sqrt{5}$.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle MAO = \frac{\alpha}{2}$, $\angle MAT = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle PAT = 90^\circ - \angle QAT = 90^\circ - \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, поэтому AT — биссектриса, а значит, и высота равнобедренного треугольника MAP.

Таким образом, AT — высота прямоугольного треугольника PAQ, проведённая из вершины прямого угла, следовательно, $QT = \frac{AQ^2}{PQ} = \frac{144}{6\sqrt{5}} = \frac{24}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\frac{24}{\sqrt{5}}$.

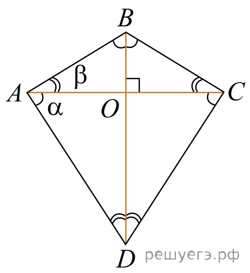
30. Тип 17 № 561854

В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус вписанной окружности, если $AC = 10$, $BD = 26$.

Решение. а) Рассмотрим треугольники ABO и COD: углы ABD и BDC при секущей BD не равны. Тогда, так как треугольники ABO и COD подобны, углы ABO и DCO, а также BAO и CDO равны. Аналогично для треугольников AOD и BDC. Сумма углов ABO и OBC не равна 90°, следовательно, конфигурацию можно представить приведенным рисунком. Заметим, что $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$, следовательно, вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.



б) Пусть $BO = a,\ OC = b$, тогда: $OD = OC \cdot \dfrac{b}{a} = \dfrac{b^2}{a}$,

$$BO = OA \cdot \frac{AO}{OD} \Leftrightarrow a = \frac{AO^2}{b^2} \Leftrightarrow AO = b.$$

Из этого следует, что стороны AO и OC равны: $AO = OC = 5$.

Пусть $OB = x$, тогда $OD = \dfrac{25}{x} = 26 - x$ при $x > 0$. Тогда

$$x^2 - 26x + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 25. \end{array}\right.$$

С учетом симметрии можно выбрать любое из найденных значений x. Пусть длина OB равна 1, длина OD равна 25, тогда

$$AB = BC = \sqrt{25+1} = \sqrt{26},$$
$$AD = DC = \sqrt{25+625} = \sqrt{650} = 5\sqrt{26}.$$

Найдем полупериметр четырехугольника $ABCD$:

$$p_{ABCD} = \frac{2 \cdot \sqrt{26} + 2 \cdot 5\sqrt{26}}{2} = 6\sqrt{26}.$$

Найдем площадь четырехугольника $ABCD$:

$$S_{ABCD} = 2S_{BAD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BD = 5 \cdot 26 = 130.$$

Вычислим искомый радиус:

$$r = \frac{S_{ABCD}}{p_{ABCD}} = \frac{130}{6\sqrt{26}} = \frac{65\sqrt{26}}{3 \cdot 26} = \frac{5\sqrt{26}}{6}.$$

Осталось отметить, что диагональ AC может является другой диагональю дельтоида и биссектрисой его углов. В этом случае аналогичное приведенному выше квадратное уравнение имеет вид $x^2 - 5x + 169 = 0$, и не имеет корней. Следовательно, такая конфигураций невозможна.

Вариант № 86880793

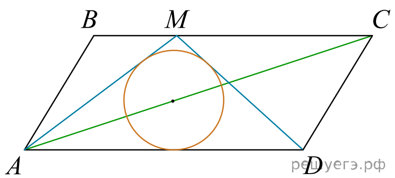
Ответ: $\dfrac{5\sqrt{26}}{6}$.

31. Тип 17 № 630220

На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM = MC$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC.

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 5,\ BC = 10,\ \angle BAD = 60°$.



Решение. а) Треугольник AMC равнобедренный, следовательно, $\angle MAC = \angle MCA$. Прямые AD и BC параллельны, следовательно, накрест лежащие углы BCA и CAD при секущей AC равны. Получаем, что $\angle MAC = \angle MCA = \angle CAD$, а значит, луч AC является биссектрисой угла MAD, на которой лежит центр вписанной в треугольник AMD окружности.

б) Обозначим $AM = MC$ через x, тогда $BM = 10 - x$.

По теореме косинусов в треугольнике ABM:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 120^\circ,$$

то есть

$$x^2 = 25 + (10-x)^2 + 5(10-x),$$

откуда $x = 7$. По теореме косинусов в треугольнике CMD, в котором $\angle MCD = 60^\circ$,

$$MD = \sqrt{MC^2 + CD^2 - MC \cdot CD} = \sqrt{39}.$$

Треугольник AMD и параллелограмм $ABCD$ имеют общую высоту, равную расстоянию между прямыми AD и BC, и общую сторону AD, перпендикулярную этой высоте. Значит, площадь S_{AMD} треугольника AMD равна половине площади параллелограмма $ABCD$:

$$S_{AMD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

С другой стороны, площадь треугольника AMD равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Отсюда найдём радиус r вписанной в треугольник AMD окружности:

$$r = \frac{2S_{AMD}}{AM + MD + AD} = \frac{25\sqrt{3}}{7 + \sqrt{39} + 10} = \frac{25\sqrt{3}}{17 + \sqrt{39}} = \frac{17\sqrt{3} - 3\sqrt{13}}{10}.$$

Ответ: б) $\frac{17\sqrt{3} - 3\sqrt{13}}{10}$.

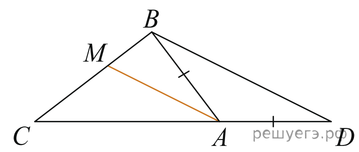
Вариант № 86880793

32. Тип 17 № 556588

В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за вершину A отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 216 и известно отношение $AC : AB = 5 : 4$.



Решение. а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABD + \angle ADB = \alpha$. Треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\alpha}{2}$, а так как AM параллельна BD,

$$\angle MAC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Следовательно, AM — биссектриса угла BAC.

б) По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$, значит,

$$\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CB} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow S_{ACM} = \frac{5}{9}S_{ABC} = \frac{5}{9} \cdot 216 = 120.$$

Треугольник DCB подобен треугольнику ACM с коэффициентом $\frac{9}{5}$, поэтому

$$S_{DCB} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 S_{ACM} = \frac{81}{25} \cdot 120 = 388,8.$$

Следовательно,

$$S_{AMBD} = S_{DCB} - S_{ACM} = 388,8 - 120 = 268,8.$$

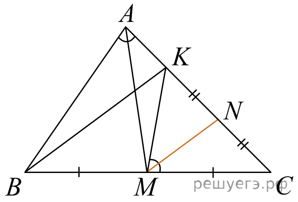
Ответ: 268,8.

33. Тип 17 № 628370

Прямая, проходящая через середину M стороны BC треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K, причём $\angle CMK = \angle BAC$.

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle BKM$.

б) Найдите медиану MN треугольника CKM, если $BC = 20$, $AB = \sqrt{87}$, $CK = 8$.



Решение. а) Поскольку

$$\angle BMK = 180^\circ - \angle CMK = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BAK,$$

около четырёхугольника $ABMK$ можно описать окружность. Вписанные в эту окружность углы BAM и BKM опираются на одну и ту же дугу, следовательно, они равны.

б) Треугольники MKC и ABC подобны по двум углам (угол при вершине C общий), поэтому $\frac{CK}{BC} = \frac{MK}{AB}$, откуда следует, что

$$MK = \frac{AB \cdot CK}{BC} = \frac{2\sqrt{87}}{5}.$$

По формуле для медианы треугольника находим, что

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{2MK^2 + 2MC^2 - KC^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot \frac{4 \cdot 87}{25} + 2 \cdot 100 - 64} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4096}{25}} = \frac{32}{5} = 6{,}4.$$

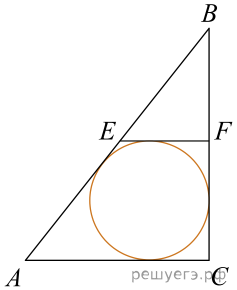
Ответ: б) 6,4.

34. Тип 17 № 674808

Периметр треугольника ABC равен 30. На сторонах AB и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $BE : EA = BF : FC = 3 : 2$. Прямая EF касается окружности, вписанной в треугольник.

а) Докажите, что $AC = 6$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle ACB = 90^\circ$.



Решение. а) Четырехугольник $AEFC$ описан около окружности, поэтому $AE + FC = AC + EF$. Треугольники BEF и BAC подобны с коэффициентом подобия $\frac{3}{5}$. Значит,

$$AE = \frac{2}{5}AB, \qquad FC = \frac{2}{5}BC, \qquad EF = \frac{3}{5}AC.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{5}AB + \frac{2}{5}BC = AC + \frac{3}{5}AC \Leftrightarrow \frac{2}{5}(AB + BC) = \frac{8}{5}AC.$$

Периметр треугольника ABC равен 30, поэтому $AB + BC = 30 - AC$, откуда получаем

$$\frac{2}{5}(30 - AC) = \frac{8}{5}AC \Leftrightarrow AC = 6.$$

б) Пусть $BC = x$. Тогда получаем $AB = 24 - x$. По теореме Пифагора

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow 36 + x^2 = (24 - x)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 36 + x^2 = x^2 - 48x + 576,$$

откуда находим $x = \frac{45}{4}$. Значит, $BC = \frac{45}{4}$, и площадь треугольника ABC равна $S = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{135}{4}$.

Ответ: б) $\frac{135}{4}$.

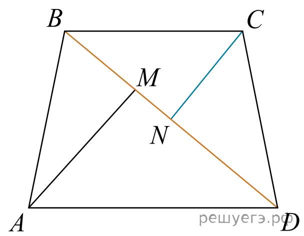
35. Тип 17 № 564706

В равнобедренной трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC соответственно равны 4 и 3. Точки M и N лежат на диагонали BD, причем точка M расположена между точками B и N, а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD.

а) Докажите, что $BN : DM = 3 : 4$.

б) Найдите длину отрезка CN, если известно, что $BM : DN = 2 : 3$.

Решение. а) Заметим, что углы CBN и MDA равны как накрест лежащие. Поэтому прямоугольные треугольники CBN и ADM подобны по острому углу. Значит, $BN : DM = BC : AD = 3 : 4$. Что и требовалось доказать.



б) Пусть $BM = x$, $MN = y$, $ND = z$. Тогда из условия $3x = 2z$ и $4(x + y) = 3(y + z)$. Отсюда $x = 2y$, $z = 3y$. Пусть $AM = 4t$, $CN = 3t$. Тогда из теоремы Пифагора следует, что

$$(4t)^2+(2y)^2=AB^2=CD^2=(3t)^2+(3y)^2.$$

Отсюда $7t^2=5y^2$.

Запишем теорему Пифагора для треугольника BNC: $(3t)^2+(3y)^2=3^2$. Значит, $t^2+y^2=1$, поэтому $\frac{12}{5}t^2=1$, следовательно, $t=\sqrt{\frac{5}{12}}$, а $CN=3t=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Ответ: б) $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

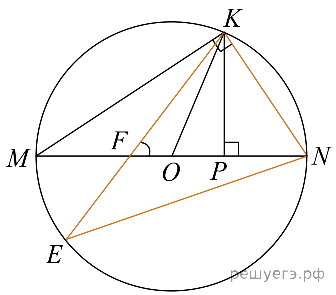
36. Тип 17 № 561773

На окружности с центром O и диаметром MN, равным 26, взята точка K на расстоянии 12 от этого диаметра. Хорда KE пересекает радиус OM в точке F под углом, равным $\arccos\frac{3}{5}$.

а) Докажите, что $KF : FE = 25 : 17$.

б) Найдите площадь треугольника KEN.

Решение. а) Пусть KP — высота треугольника MKN. Из прямоугольных треугольников KOP и KPF находим, что



$$OP=\sqrt{OK^2-KP^2}=5,$$
$$KF=\frac{KP}{\sin\angle KFN}=15,$$
$$PF=KF\cdot\cos\angle KFN=9.$$

Сумма длин отрезков OP и PF больше, чем радиус окружности. Значит, точки F и P лежат по разные стороны от точки O. Тогда

$$NF=NO+OF=17,$$
$$FM=MN-NF=9.$$

По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд получаем, что

$$KF\cdot FE=NF\cdot FM,$$

откуда находим, что

$$FE=\frac{NF\cdot FM}{KF}=\frac{17\cdot 9}{15}=\frac{51}{5}\Leftrightarrow\frac{KF}{FE}=\frac{25}{17}.$$

б) Для нахождения площади треугольника KEN воспользуемся формулой

$$S_{KEN}=\frac{1}{2}\cdot KE\cdot EN\cdot\sin\angle KEN.$$

Имеем

$$KE=KF+FE=25,2.$$

Из треугольника KOP находим, что

$$\cos\angle KOP=\frac{OP}{OK}=\frac{5}{13}.$$

Так как

$$\angle KEN=\frac{1}{2}\angle KON=\frac{1}{2}\angle KOP,$$

получаем, что

$$\sin\angle KEN=\sqrt{\frac{1-\cos\angle KOP}{2}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Из треугольника EFN получаем, что

$$EN^2=EF^2+FN^2-2\cdot EF\cdot FN\cdot\cos\angle EFN\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow EN^2=601,12\Leftrightarrow EN=6,8\sqrt{13}.$$

Тогда

$$S_{KEN}=\frac{1}{2}\cdot 25,2\cdot 6,8\sqrt{13}\cdot\frac{2\sqrt{13}}{13}=171,36.$$

Ответ: б) 171,36.

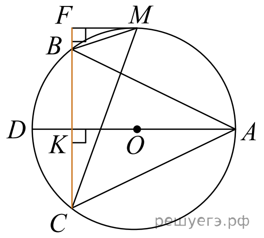
37. Тип 17 № 556721

Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении 1 : 9, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM \cdot CM < BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

Решение. а) Площадь треугольника BMC меньше площади треугольника ABC, поскольку у них общая сторона BC, но высота, проведённая к этой стороне, у первого треугольника меньше. Пусть $\angle BMC = \angle BAC = \alpha$. Тогда

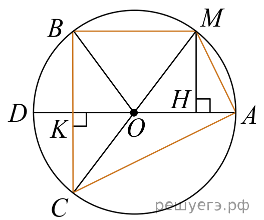


$$\frac{1}{2}BM \cdot MC \cdot \sin\alpha < \frac{1}{2}BA \cdot AC \cdot \sin\alpha \Leftrightarrow BM \cdot CM < BA^2.$$

б) Имеем

$$BO = 5,\ KD = 1,\ OK = OD - KD = 5 - 1 = 4,$$
$$BK = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,\ BC = 6.$$

Проведём из точки M перпендикуляр MH к отрезку AD. Отрезок KH равен высоте треугольника BMC, проведённой из точки M. Значит, площадь треугольника BCM равна



$$S_{BCM} = \frac{HK \cdot BC}{2} = \frac{HK \cdot 6}{2} = 24,$$

откуда

$$HK = 8,\ HO = HK - OK = 8 - 4 = 4,\ OK = OH.$$

Прямоугольные треугольники OKB и OHM равны по гипотенузе и катету, откуда $MH = BK = 3$, а значит, $KBMH$ — прямоугольник, $MB = KH = 8$. Вписанный угол CBM прямой, значит, CM — диаметр окружности. Медиана AO делит треугольник ACM на два треугольника равной площади,

$$AO = 5,\ S_{AOC} = S_{AOM} = \frac{AO \cdot MH}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7,5.$$

Значит,

$$S_{ACBM} = S_{BCM} + S_{ACM} =$$
$$= S_{BCM} + 2S_{AOM} = 24 + 2 \cdot 7,5 = 39.$$

Ответ: б) 39.

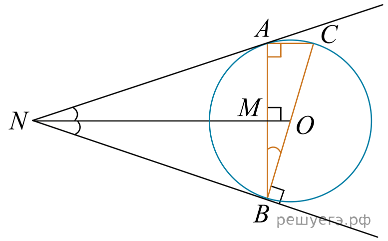
38. Тип 17 № 660764

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла ANB.

б) Найдите NO, если $AB = 24$ и $AC = 10$.

Решение. а) Точка O лежит на биссектрисе угла ANB, так как она равноудалена от AN и BN. Пусть AB пересекается с NO в точке M. Треугольники ANM и BNM равны: отрезки AN и BN равны, как отрезки касательных, проведенных из одной точки, углы ANM и BNM равны, поскольку NM — биссектриса угла ANB, MN — общая сторона. Следовательно, углы AMN и BMN равны, но они также являются смежными, поэтому они равны по 90°.



Потому NO перпендикулярна AB. Так как BC — диаметр окружности, то угол BAC прямой, значит, AC перпендикулярна AB. Отсюда следует, что AC параллельна NO — биссектрисе угла ANB.

б) Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора найдем BC:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 26.$$

Треугольники ABC и MBO подобны с коэффициентом 2, значит, $MO = 5$ и $BO = 13$. Проекция катета на гипотенузу равна отношению квадрата этого катета к гипотенузе, поэтому:

$$MO = \frac{BO^2}{NO} \Leftrightarrow NO = \frac{BO^2}{MO} = 33,8.$$

Ответ: б) 33,8.

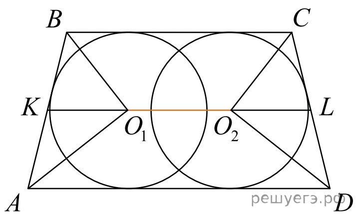
39. Тип 17 № 520805

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Найдите O_1O_2.

Решение. а) Точка O_1 равноудалена от прямых AD и BC. Значит, точка O_1 лежит на средней линии трапеции $ABCD$. Аналогично точка O_2 лежит на средней линии трапеции $ABCD$, а значит, прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.



б) Пусть K — середина стороны AB, а L — середина стороны CD. Точка O_1 равноудалена от прямых AB, BC и AD, поэтому лучи AO_1 и BO_1 являются биссектрисами углов DAB и ABC соответственно. Значит,

$$\angle BAO_1 + \angle ABO_1 = \frac{\angle BAD + \angle ABC}{2} = 90^\circ,$$

то есть $\angle AO_1B = 90^\circ$. Следовательно, KO_1 — медиана, проведенная к гипотенузе AB прямоугольного треугольника AO_1B.

Аналогично треугольник CO_2D прямоугольный, а LO_2 — медиана, проведенная к его гипотенузе CD. Точки K, O_1, O_2 и L лежат на средней линии трапеции $ABCD$. Значит,

$$O_1O_2 = |KL - (KO_1 + LO_2)| = \\ = \left| \frac{AD+BC}{2} - \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} \right| = 4.$$

Ответ: 4.

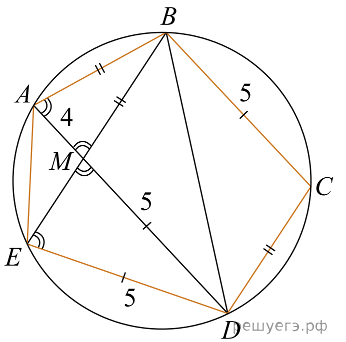
40. Тип 17 № 660701

Пятиугольник $ABCDE$ — вписанный, точка M — пересечение диагоналей BE и AD. Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что две стороны пятиугольника равны.

б) Найдите AB, если известно, что $BE = 12$, $BC = 5$, $AD = 9$.

Решение. а) Так как четырёхугольник $BCDM$ — параллелограмм, стороны CD и BM параллельны. При этом сторона BC не параллельна отрезку DE, поскольку иначе DM и DE были бы параллельны, а они пересекаются. Значит, $BCDE$ — вписанная трапеция, а потому она равнобедренная. Следовательно, $BC = DE$.



б) Из пункта а) известно, что $BC = DE = 5$. Четырехугольник $BCDM$ — параллелограмм, поэтому $BC = DM$. Таким образом, $DE = DM = 5$, а потому треугольник DEM равнобедренный, откуда следует, что углы DEM и DME равны. Углы DME и BMA также равны как вертикальные. Углы DEM и BAM равны, так как опираются на одну дугу. Следовательно, треугольник BMA равнобедренный, а потому $AB = BM$. Треугольники BMA и DEM подобны по двум равным углам, а значит,

$$\frac{AB}{DM} = \frac{AM}{ME} \Leftrightarrow \frac{AB}{DM} = \frac{AD - DM}{BE - AB},$$

откуда

$$\frac{AB}{5} = \frac{4}{12 - AB} \Leftrightarrow AB^2 - 12AB + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB = 10, \\ AB = 2. \end{array}\right.$$

Заметим, что если $AB = 2$, то неравенство $AB + BM > AM$ для треугольника ABM не выполняется, поэтому $AB = 10$.

Ответ: б) 10.

41. Тип 17 № 629507

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

Решение. а) Треугольники AMH и AKH — прямоугольные, с общей гипотенузой AH. Значит, точки A, M, K, H лежат на одной окружности, центр которой — середина AH. Пусть $\angle BCA = \angle AHM = \alpha$. Тогда $\angle ABH = \angle AHK = 2\alpha$. Отсюда

$$\angle AHM = \angle MHK = \angle MAK = \angle MKA,$$

Тогда треугольник AMK равнобедренный и $AM = MK$. Что и требовалось доказать.

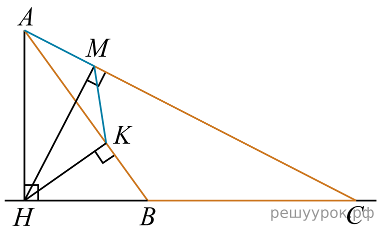


Рис. 1

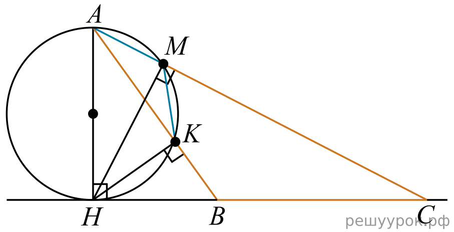


Рис. 2

б) Из треугольника ABC получаем, что $\cos\angle BCA = \frac{4}{5}$. Значит, $\sin\angle BCA = \frac{3}{5}$. Тогда

$$HA = 8\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{5}, \qquad MK = AM = HA\cdot\sin\angle AHM = \frac{24}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{72}{25}.$$

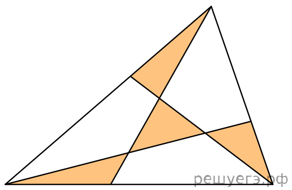
Ответ: б) $\frac{72}{25}$.

42. Тип 17 № 505721

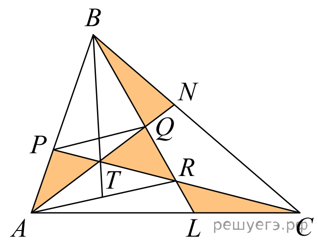
Все четыре треугольника, заштрихованные на рисунке, равновелики.

а) Докажите, что все три четырехугольника, не заштрихованные на нем, тоже равновелики.

б) Найдите площадь одного четырехугольника, если площадь одного заштрихованного треугольника равна 1.



Решение. а) Введем обозначения, как показано на рисунке. Так как $S_{APT} = S_{TQR}$, площади треугольников APR и AQR будут равны друг другу. Из этого следует, что $APQR$ — трапеция. По замечательному свойству трапеции BT делит PQ и AR пополам. Получаем, что $S_{ABT} = S_{BTR}$ и $S_{ABT} = S_{BTN}$, откуда $AT = TN$. Следовательно, $S_{ATC} = S_{CTN}$, а значит, $S_{ATRL} = S_{CRQN}$. Аналогично $S_{PBQT} = S_{ATRL}$. Что и требовалось доказать.



б) Пусть $S_{BPTQ} = S$, тогда $S_{BPT} = S_{BQT} = \frac{S}{2}$. Имеем:

$$\frac{\frac{s}{2}}{\frac{3s}{2}+2} = \frac{PT}{TC} = \frac{1}{s+1},$$

откуда

$$s(s+1) = 3s+4 \Leftrightarrow s^2 - 2s - 4 = 0 \Leftrightarrow s = \sqrt{5}+1.$$

Ответ: б) $\sqrt{5}+1$.

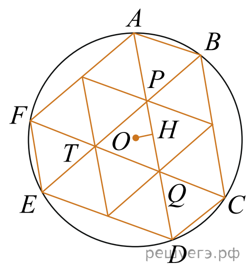
43. Тип 17 № 511502

Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $6\sqrt{21}$.

Решение. а) Пусть две хорды равны $3x$ и $3y$. По теореме о произведении пересекающихся хорд $2x\cdot x = 2y\cdot y$. Отсюда находим, что $x = y$, значит, эти хорды равны. Аналогично докажем, что третья хорда равна каждой из первых двух.



б) Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому центр равностороннего треугольника с вершинами в точках попарного пересечения хорд совпадает с центром данной окружности. Пусть хорды BE и CF пересекают хорду AD в точках P и Q соответственно, хорды BE и FC пересекаются в точке T, а H — проекция центра O на хорду AD. Тогда H — общая середина отрезков AD и PQ, а OH — радиус вписанной окружности равностороннего треугольника PQT со стороной PQ.

Через точку T проведём прямую, параллельную AD, через точку P — прямую, параллельную CF, а через точку Q — прямую, параллельную BE. Эти прямые и хорды AD, BE и CF разбивают шестиугольник $ABCDEF$ на 13 одинаковых равносторонних треугольников.

Обозначим $PQ = 2a$. Тогда

$$OH = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ 6\sqrt{21} = OA =$$
$$= \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 9a^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим, что $a = 9$, значит, $PQ = 2a = 18$, $S_{PQT} = a^2\sqrt{3} = 81\sqrt{3}$. Следовательно,

$$S_{ABCDEF} = 13S_{PQT} = 13 \cdot 81\sqrt{3} = 1053\sqrt{3}.$$

Ответ: $1053\sqrt{3}$.

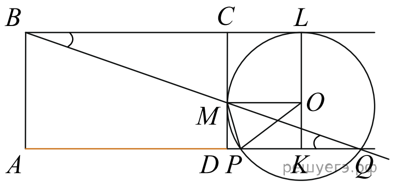
44. Тип 17 № 514718

Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причём точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD.

Решение. а) Заметим, что $\angle CBM = \angle MQD$, поскольку прямые BC и AQ параллельны. Углы $\angle DMP$ и $\angle MQD$ равны, поскольку оба равны половине дуги MP (первый — угол между касательной и хордой, второй — вписанный угол), откуда и следует утверждение задачи.



б) Обозначим центр окружности за O, а основание перпендикуляра из точки O на прямую AD за K, на прямую BC — за L. Тогда $CMOL$ — квадрат и, значит, радиус окружности равен 17. Тогда в треугольнике OPK имеем

$$PK = \sqrt{OP^2 - OK^2} = \sqrt{OP^2 - MD^2} =$$
$$= \sqrt{17^2 - (25-17)^2} = 15.$$

Значит, $PQ = 2PK = 30$. Тогда $DK = 17$, $PD = DK - PK = 2$.

Тогда $DQ = 32$ и $\operatorname{tg}\angle DQM = \frac{MD}{DQ} = \frac{1}{4}$, откуда

$$AD = BC = CM \cdot \operatorname{ctg}\angle CBM =$$
$$= 17 \cdot \operatorname{ctg}\angle MQD = 17 \cdot 4 = 68.$$

Ответ: 68.

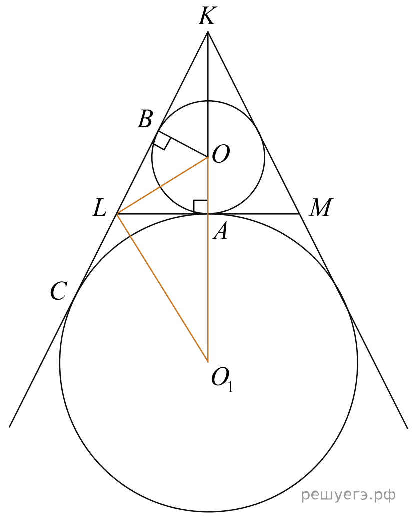
45. Тип 17 № 513349

Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML — в точке A. Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и $AK = 16$.

Решение. а) Пусть окружность с центром O_1 касается продолжения боковой стороны KL в точке C. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому LO и LO_1 — биссектрисы смежных углов KLM и CLM. Следовательно, $\angle OLO_1 = 90°$.



б) Прямоугольные треугольники KBO и KAL подобны, поэтому

$$\frac{AL}{OB} = \frac{AK}{KB}.$$

Значит,

$$AL = \frac{AK \cdot OB}{KB} = \frac{AK \cdot OB}{\sqrt{OK^2 - OB^2}} =$$
$$= \frac{16 \cdot 6}{\sqrt{10^2 - 6^2}} = \frac{16 \cdot 6}{8} = 12.$$

Пусть радиус окружности с центром O_1 равен r_1. Треугольник KLM равнобедренный, поэтому окружности с центрами O и O_1 касаются основания ML в одной и той же точке A. Значит, точка A лежит на отрезке OO_1, причём LA — высота прямоугольного треугольника OLO_1, проведённая из вершины прямого угла. Следовательно,

$$r_1 = O_1A = \frac{AL^2}{OA} = \frac{12^2}{6} = 24.$$

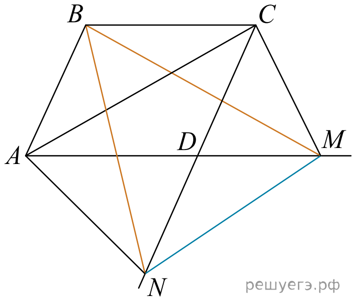
Ответ: б) 24.

46. Тип 17 № 563666

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A. На продолжении стороны AD за точку D взята точка M, такая, что $CM = CD$, а на продолжении стороны CD за точку D взята такая точка N, что $AD = AN$.

а) Докажите, что $BM = BN$.

б) Найдите MN, если $AC = 4$, $\sin\angle BAD = \frac{8}{17}$.



Решение. а) Рассмотрим треугольники NAB и BCM. По условию $AN = AD = BC$, $AB = CD = CM$. В равнобоких трапециях $NABC$ и $ABCM$ равны углы A и C, а значит, равны и углы NAB и BCM. Таким образом, треугольники NAB и BCM равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, равны соответственные стороны BN и BM этих треугольников. Это и требовалось доказать.

б) Заметим, что $ABCM$ и $NABC$ — равнобокие трапеции, поэтому равны их диагонали. Тогда $AC = BM = BN = 4$. Имеем:

$$\angle MBN = \angle CBA - \angle NBA - \angle CBM = \\ = \angle CBA - (180^\circ - \angle CBA) = \\ = 2\angle CBA - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle BAD.$$

Отсюда

$$\cos\angle MBN = -\cos 2\angle BAD = \\ = 2\sin^2 BAD - 1 = 2\cdot\frac{64}{289} - 1 = -\frac{161}{289}.$$

Теперь применим теорему косинусов для треугольника MBN:

$$MN^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot\left(-\frac{161}{289}\right) = \frac{14\,400}{289},$$

а тогда $MN = \dfrac{120}{17}$.

Ответ: $\dfrac{120}{17}$.

Примечание.

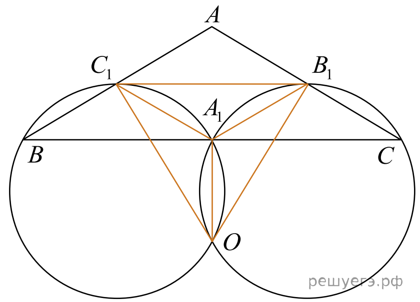
Рассматривая аналогичную задачу 563667, мы привели и другое решение.

47. Тип 17 № 514515

Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB треугольника ABC, в котором угол A тупой.

а) Докажите, что отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, лежит на окружности, описанной около треугольника B_1AC_1.

б) Известно, что $AB = AC = 13$ и $BC = 24$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.



Решение. а) Пусть O — отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1 (рис. 1).

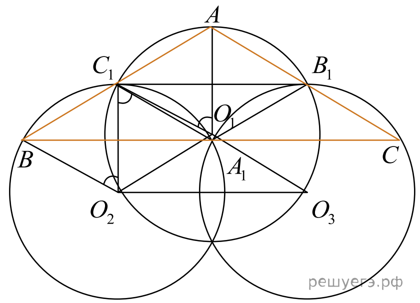
Тогда

$$\angle A_1OB_1 = \angle A_1CB_1, \\ \angle A_1OC_1 = \angle A_1BC_1,$$

откуда $\angle B_1OC_1 = \angle ABC + \angle ACB$.

Значит, $\angle B_1OC_1 + \angle B_1AC_1 = 180^\circ$, следовательно, точки A, B_1, O и C_1 лежат на одной окружности.

б) Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей, описанных около треугольников B_1AC_1, A_1BC_1 и A_1CB_1 соответственно (рис. 2). Заметим, что $AO_1 = C_1O_2 = C_1O_1 = BO_2$ как радиусы описанных окружностей около равных треугольников. Значит, треугольники AO_1C_1 и C_1O_2B равны. Кроме того, треугольник $O_2C_1O_1$ также равен этим треугольникам, поскольку

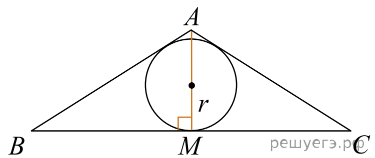


$$\angle AO_1C_1 = \angle C_1O_2B = \angle O_2C_1O_1.$$

Таким образом, $O_1O_2 = AC_1 = \dfrac{AB}{2}$. Аналогично, $O_1O_3 = \dfrac{AC}{2}$, $O_2O_3 = \dfrac{BC}{2}$, поэтому треугольник $O_1O_2O_3$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$ и радиус вписанной в него окружности равен половине радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

Пусть M — середина BC, а радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r (рис. 3). Тогда площадь треугольника ABC равна

$$\frac{AB + BC + AC}{2}\cdot r = 25r.$$



С другой стороны, высота равнобедренного треугольника ABC равна $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 5$, поэтому площадь треугольника ABC равна 60. Значит, $r = 2{,}4$. Искомый радиус равен $\dfrac{r}{2} = 1{,}2$.

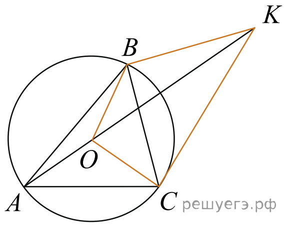
Ответ: 1,2.

48. Тип 17 № 689018

Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.

а) Докажите, что четырехугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KBC, если известно, что радиус описанной окружности треугольника ABC равен 12, а $\cos\angle BAC = 0{,}6$.



Решение. а) Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle OBC = \angle BCO = $ $= \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$, как углы при основании равнобедренного треугольника OBC. Из условия $\angle BAC + \angle AKC = 90°$, следует, что $\angle AKC = 90° - \alpha$. Тогда $\angle OBC = \angle AKC$. Откуда, по свойству вписанных углов, следует, что точки O, B, K, C лежат на одной окружности.

б) По условию, $\cos\angle BAC = 0{,}6$, тогда $\sin\angle BAC = 0{,}8$. Рассмотрим ΔABC : в нем $\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R$, $BC = 2\cdot 12\cdot 0{,}8 = 19{,}2$. В обозначениях пункта а): $\angle A = \alpha$, $\angle BOC = 2\alpha$, тогда $\angle BKC = 180° - 2\alpha$, так как четырехугольник $OBKC$ вписанный.

$$\sin(180° - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

тогда

$$\sin\angle BKC = 2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}96.$$

Рассмотрим треугольник KBC:

$$\frac{BC}{\sin\angle BKC} = 2R,\ R = \frac{19{,}2}{2\cdot 0{,}96} = 10.$$

Ответ: 10.

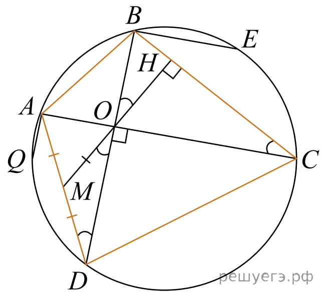
49. Тип 17 № 638595

Четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей четырехугольника перпендикулярно стороне BC, делит пополам сторону AD.

б) Найдите стороны четырехугольника $ABCD$, если известно, что $AC = 84$ и $BD = 77$, а диаметр окружности равен 85.

Вариант № 86880793



Решение. а) Пусть прямая, проходящая через точку O, пересекает хорду BC в точке H, а сторону AD в точке M. Тогда $\angle BCA = \angle BDA$ как вписанные. Следовательно, $\angle BOH = \angle BCO = \angle MOD$, поскольку

$$\angle BOH = 90° - \angle HOC = \angle BCO.$$

Значит, $OM = MD$, следовательно, отрезок OM — медиана прямоугольного треугольника AOD.

б) Рассмотрим хорду BE, параллельную диагонали AC: $\angle DBE = 90°$, откуда $BE = \sqrt{85^2 - 77^2} = 36$. Четырехугольник $ABEC$ — равнобокая трапеция, значит,

$$AO = \frac{AC - BE}{2} = 24.$$

Путь отрезок AQ — хорда, параллельная диагонали BD. Тогда $AQ = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$, следовательно,

$$BO = \frac{BD - AQ}{2} = \frac{77 - 13}{2} = 32.$$

Теперь мы знаем, что $OC = AC - AO = 60$ и $OD = BD - BO = 45$. Тогда:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2;\quad BC^2 = BO^2 + OC^2;\quad CD^2 = CO^2 + OD^2.$$

То есть

$$AB = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{1600} = 40,$$
$$BC = \sqrt{32^2 + 60^2} = \sqrt{4624} = 68,$$
$$CD = \sqrt{60^2 + 45^2} = \sqrt{75^2} = 75,$$
$$AD = \sqrt{24^2 + 45^2} = \sqrt{2601} = \sqrt{51^2} = 51.$$

Ответ: б) 40, 68, 75, 51.

50. Тип 17 № 668209

Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Через точку B и середину отрезка OD проведена прямая, пересекающая сторону ED в точке T.

а) Докажите, что прямая BT делит площадь шестиугольника в отношении 5 : 13.

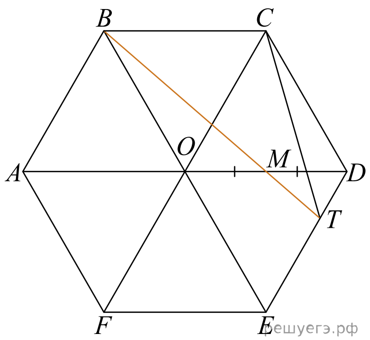
б) Найдите расстояние между точками касания окружностей, вписанных в треугольники BET и BCT с прямой BT, если сторона шестиугольника $ABCDEF$ равна $\sqrt{13} - 1$.

Решение. а) Используем теорему Менелая для треугольника ODE. Тогда

$$\frac{ET}{TD}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{BO}{BE}=1,$$

откуда $\dfrac{ET}{TD}=\dfrac{2}{1}$. Площадь треугольника BOM равна

$$\frac{1}{2}S_{BOD}=\frac{1}{2}S_{ABO}=\frac{1}{12}S_{ABCDEF}.$$



Пусть M — середина OD. Имеем:

$$\frac{S_{MDT}}{S_{ODE}}=\frac{MD\cdot DT}{OD\cdot DE}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}.$$

Тогда

$$S_{BCDT}=S_{BCDM}+S_{MDT}=$$
$$=\frac{1}{3}S_{ABCDEF}-\frac{1}{12}S_{ABCDEF}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}S_{ABCDEF}=$$
$$=\frac{10}{36}S_{ABCDEF}=\frac{5}{18}S_{ABCDEF}.$$

Таким образом, прямая BT делит площадь шестиугольника $ABCDEF$ в отношении 5 : 13.

б) Пусть вписанная в треугольник BTE окружность касается прямой BT в точке R, а вписанная в треугольник BCT окружность касается прямой BT в точке Q. Тогда

$$BR=\frac{BT+TE+BE}{2}-TE \quad \text{и} \quad BQ=\frac{BC+CT+BT}{2}-CT,$$

откуда

$$|RQ|=|BR-BQ|=\left|\frac{BE+CT-TE-BC}{2}\right|.$$

Из пункта а) $TE=\dfrac{2}{3}DE=\dfrac{2}{3}BC$, $BE = 2BC$. По теореме косинусов для треугольника CDT получим, что

$$CT^2=CD^2+DT^2-2\cdot CD\cdot TD\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=CD^2+\left(\frac{1}{3}CD\right)^2-2\cdot CD\cdot\frac{1}{3}CD\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=CD^2\cdot\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{9}CD^2,$$

Вариант № 86880793

следовательно, $CT=\dfrac{\sqrt{13}}{3}CD=\dfrac{\sqrt{13}}{3}BC$. Тем самым

$$RQ=\left|\frac{2BC+\frac{\sqrt{13}}{3}BC-\frac{2}{3}BC-BC}{2}\right|=$$
$$=BC\cdot\left|\frac{\sqrt{13}+1}{6}\right|=\frac{(\sqrt{13}-1)(\sqrt{13}+1)}{6}=2.$$

Ответ: 2.