

1. Тип 14 № 628390

В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90° , плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

- Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PDC .
- Найдите объем $PKBC$, если $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 7.

2. Тип 14 № 628273

Точка S лежит вне плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что $AB = 6\sqrt{21}$, $BC = 5$, $SA = 12$, $SB = 30$, $SD = 13$.

- Докажите, что прямая SA перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите расстояние от точки A до плоскости SCB .

3. Тип 14 № 511324

Основанием прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC = 13$, $BC = 24$. Высота призмы равна 5.

- Докажите, что сечение призмы плоскостью, содержащей ребро AA_1 и перпендикулярной плоскости BCC_1 , является квадратом.
- Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1 .

4. Тип 14 № 646482

Дан цилиндр с центрами нижнего и верхнего оснований O_1 и O_2 соответственно. Объём цилиндра, равен $\pi\sqrt{6}$. На окружности нижнего основания выбраны точки A и B , а на боковой поверхности выбрана точка C , равноудалённая от оснований.

- Докажите, что объём тетраэдра O_1ABC не превосходит $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.
- Найдите расстояние между прямыми AO_1 и CO_2 , если отрезки BO_2 и CO_1 пересекаются, $\angle AO_1B = 120^\circ$ и $\angle O_2CA = 90^\circ$.

5. Тип 14 № 643716

В основании прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K — середина ребра DD_1 .

- Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$ и $\angle ADC = 60^\circ$.

6. Тип 14 № 504241

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB .

- Докажите, что плоскости ACL и MDB перпендикулярны.
- Найдите высоту данной пирамиды.

7. Тип 14 № 509627

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

- Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

8. Тип 14 № 521005

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 4\sqrt{6}$.

- Докажите, что угол между прямыми BC и AC_1 равен 60° .
- Найдите расстояние от точки B до AC_1 .

9. Тип 14 № 504416

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ провели сечение плоскостью, проходящей через сторону основания AB перпендикулярно ребру SC .

- Докажите, что площадь этого сечения относится к площади основания так же, как высота пирамиды относится к её боковому ребру.
- Найдите площадь сечения если боковое ребро $SA = 5$, а сторона основания $AB = 4$.

10. Тип 14 № 637854

Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 4 : 7.

- Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 33 : 32, считая от вершины конуса.
- Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 13.

11. Тип 14 № 624081

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S в грани SBC проведена высота SH , а в грани SEF проведена высота SK .

- Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости SHK .
- Найдите угол между прямыми BE и SH , если $SA = 13$, а $BC = 10$.

12. Тип 14 № 556615

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ACC_1 .

13. Тип 14 № 517558

Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $4\sqrt{2}$. Вершина пирамиды S проецируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ .

- Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .
- Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если ребро SD равно 8.

14. Тип 14 № 674024

Плоскость α пересекает плоскости нижнего и верхнего оснований цилиндра по прямым BC и AD соответственно, причем $AD : BC = 5 : 4$, а ось цилиндра — в точке E и делит отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра, в отношении $2 : 1$, считая от нижнего основания.

- Прямая DE пересекает плоскость нижнего основания в точке P . Докажите, что боковая поверхность цилиндра делит отрезок DP в отношении $2 : 1$.
- Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью α , если радиус основания цилиндра равен $\sqrt{7}$, а высота цилиндра равна $\sqrt{6}$.

15. Тип 14 № 671347

В правильной пирамиде $SABC$ с вершиной S на стороне основания AC и боковом ребре SB отметили соответственно точки E и N такие, что $AE : EC = SN : NB = 1 : 2$. Через точки E и N параллельно прямой AB провели плоскость α .

- Докажите, что сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α является равнобедренная трапеция.
- Плоскость α разделила пирамиду $SABC$ на два многогранника. Найдите объем того из них, в котором одной из вершин является точка A , если $AB = 6$, $AS = 3\sqrt{3}$.

16. Тип 14 № 661795

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки K , L и M соответственно так, что $KLMC$ — равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 8.

- Докажите, что точка M — середина ребра B_1C_1 .
- Найдите угол между плоскостями KLM и ABC , если площадь трапеции $KLMC$ равна $12\sqrt{2}$.

17. Тип 14 № 505534

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 20\sqrt{3}$, $SC = 29$.

- Докажите, что $AS \perp BC$.
- Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC .

18. Тип 14 № 660691

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ стороны основания ABC равны 12, а боковые ребра — 25. На ребрах AB , AC и SA отмечены точки F , E и K соответственно. Известно, что $AE = AF = 10$, $AK = 15$.

- Докажите, что объем пирамиды $KAEF$ составляет $\frac{5}{12}$ от объема пирамиды $SABC$.
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью KEF .

19. Тип 14 № 637847

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $BC = \sqrt{14}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 4\sqrt{3}$, $SB = 2\sqrt{21}$ и $SD = \sqrt{62}$.

- Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.
- Найдите угол между прямыми SC и BD .

20. Тип 14 № 507496

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$

- Докажите, что плоскости AB_1D_1 и A_1BC перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1 .

21. Тип 14 № 564703

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 и пересекающая ребра BB_1 и DD_1 в точках F и E соответственно.

- Докажите, что сечение $AFC_1 E$ — параллелограмм.
- Найдите площадь сечения, если известно, что $AFC_1 E$ — ромб и $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 5$.

22. Тип 14 № 503361

В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 17, а высота равна 7, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

- Докажите, что двугранный угол при основании пирамиды больше, чем 30° .
- Найдите площадь вписанной сферы.

23. Тип 14 № 520822

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 6.

- Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60° .
- Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1 .

24. Тип 14 № 656543

Все грани призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равные ромбы со стороной, равной 2. Плоские углы при вершине A равны 60° каждый. Через середину диагонали $A_1 C$ проведена плоскость α , перпендикулярная этой диагонали.

- Докажите, что сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α — квадрат.
- Найдите расстояние от точки A до плоскости α .

25. Тип 14 № 510966

Длины ребер AB , AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15.

- Докажите, что объем пирамиды $A_1 BDC_1$ втрое меньше объема параллелепипеда.
- Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 .

26. Тип 14 № 520879

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 , если $AB = 21$, $BB_1 = 12$, $B_1 C_1 = 16$.

27. Тип 14 № 640280

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AB = BC = 6$ и $AA_1 = 12$, точки M и K — середины AB и BC соответственно. Точка N лежит на ребре BB_1 , причем $BN = 6$. Через точку D провели плоскость α параллельно плоскости kmN .

- Докажите, что плоскость α проходит через точки A_1 и C_1 .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью α .

28. Тип 14 № 504945

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5.

- Докажите, что сечение шара плоскостью есть круг.
- Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .

29. Тип 14 № 555619

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка K — середина ребра $C_1 D_1$.

- Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.
- Найдите угол между плоскостями KBA_1 и ADD_1 .

30. Тип 14 № 517738

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите объем пирамиды $PABC$.

31. Тип 14 № 635750

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM : MD_1 = 3 : 2$. Плоскость α параллельна прямой $A_1 F_1$ и проходит через точки M и E .

- Докажите, что сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.
- Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка F , а основанием сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α .

32. Тип 14 № 507788

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6.

- Докажите, что плоскость, содержащая прямую AB_1 и параллельная прямой CA_1 проходит через середину ребра BC .
- Найти угол между прямыми CA_1 и AB_1 .

33. Тип 14 № 531558

Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $BC = 2AB$. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Отрезок SO является высотой пирамиды $SABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что $BP : PQ = 1 : 3$.
- Найдите двугранный угол пирамиды при ребре SB , если $SB = BC$.

34. Тип 14 № 630217

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N являются серединами рёбер AB и AD соответственно.

- Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.
- Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1N = 6$.

35. Тип 14 № 563896

В основании правильной треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 — середина AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 — середина B_1E .

- Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 4$, а $AA_1 = 1$.

36. Тип 14 № 670480

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 21. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 6$, $SK = 3$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K .

- Докажите, что плоскость α содержит точку C .
- Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

37. Тип 14 № 689037

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 4EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 16$, $AA_1 = 20$.

- Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 3 : 2.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

38. Тип 14 № 507490

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Точки M и T — середины ребер AD и A_1B_1 соответственно.

- Докажите, что $A_1C_1 \perp MT$.
- Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT .

39. Тип 14 № 511368

В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 5, а высота равна 3, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

- Докажите, что площадь боковой поверхности пирамиды относится к площади основания как $\sqrt{7} : 2$.
- Найдите площадь этой сферы.

40. Тип 14 № 562806

Шар проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба.

- Докажите, что сфера касается ребер в их серединах.
- Найдите объём шара, если ребро куба равно 1.

41. Тип 14 № 546443

Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — трапеция с основаниями $AB = 2CD$.

- Докажите, что плоскость BA_1D_1 проходит через середину бокового ребра CC_1 .
- Найдите угол между боковым ребром AA_1 и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция $ABCD$ прямоугольная с прямым углом при вершине B , а $BC = CD$ и $AA_1 = \sqrt{6}CD$.

42. Тип 14 № 505103

Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3.

- Докажите, что угол $\angle APB$ меньше 60° .
- Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP .

43. Тип 14 № 563560

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AD = 14$, высота $SH = 24$. Точка P — середина бокового ребра SD , а точка N — середина ребра CD . Плоскость ABP пересекает боковое ребро SC в точке K .

- Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.
- Найдите расстояние от точки K до плоскости ABS .

44. Тип 14 № 507778

В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1.

- Докажите, что точки A_1 и B равноудалены от плоскости AB_1C_1 .
- Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 .

45. Тип 14 № 514045

Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.
- Найдите площадь сечения.

46. Тип 14 № 656194

В правильной треугольной пирамиде $DABC$ углы боковых граней при вершине пирамиды D — прямые. Внутри пирамиды находится куб, диагональ которого совпадает с высотой пирамиды.

- Докажите, что ребро куба в три раза меньше бокового ребра пирамиды.
- Найдите площадь поверхности пирамиды $DABC$, если площадь поверхности куба равна 96.

47. Тип 14 № 648011

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S точки M и N середины ребер SC и AD соответственно. Плоскость α проходит через прямую BM параллельно SN .

- Докажите, что плоскость α делит ребро CD в отношении $1 : 2$.
- Найдите расстояние от прямой SN до плоскости α , если сторона основания пирамиды равна 6, а боковое ребро равно 12.

48. Тип 14 № 500025

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны $AB = 1$, $AD = AA_1 = 2$.

- Пусть B_1E — высота треугольника BB_1C_1 . Докажите, что AE — проекция AB_1 на плоскость ABC_1 .
- Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .

49. Тип 14 № 511342

Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной равной 1.

- Докажите, что $B_1D \perp AC$.
- Найдите угол между прямыми BE и B_1D .

50. Тип 14 № 508391

В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 6, точка K — середина бокового ребра AP .

- Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной плоскости BCP .
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.