1. Тип 13 № 562936

а) Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow-\cos\frac{x}{2}=\cos x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos x+\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=-1,\\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\pi+2\pi k,\\ \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Найдём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$, решив неравенство:

$$\frac{5\pi}{2}\leqslant\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}\leqslant 4\pi\Leftrightarrow\frac{15}{8}\leqslant\frac{1}{2}+k\leqslant 3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{11}{8}\leqslant k\leqslant 2{,}5\underset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}k=2.$$

Получаем число $\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi\cdot 2}{3}=\frac{10\pi}{3}$.

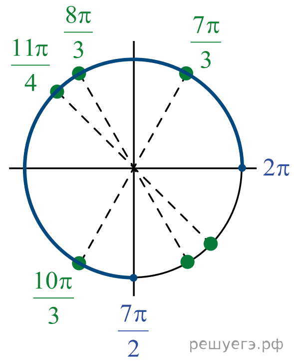
Ответ: а) $\left\{\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}:k\in\mathbb{Z}.\right\}$; б) $\frac{10\pi}{3}$.

2. Тип 13 № 513919

а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^3x+\operatorname{tg}^2x-3\operatorname{tg}x-3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения на интервале $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Последовательно получаем:



$$\operatorname{tg}^3x+\operatorname{tg}^2x-3\operatorname{tg}x-3=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}^2x(\operatorname{tg}x+1)-3(\operatorname{tg}x+1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}^2x-3)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=-1,\\ \operatorname{tg}x=-\sqrt{3},\\ \operatorname{tg}x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\\ x=-\frac{\pi}{3}+\pi k,\\ x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Корни, принадлежащие заданному промежутку, отбираем на тригонометрической окружности (см. рис.). Находим: $\frac{7\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \frac{11\pi}{4},\ \frac{10\pi}{3}$.

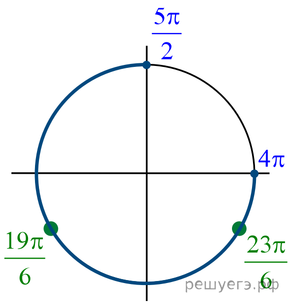
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k,-\frac{\pi}{3}+\pi k,-\frac{\pi}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{10\pi}{3}$.

3. Тип 13 № 630669

а) Решите уравнение $\frac{3\operatorname{tg}^2x-1}{2\sin x-1}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение. а) Уравнение $\dfrac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{2\sin x-1}=0$ равносильно системе $\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{3},\\ \sin x\neq\dfrac{1}{2},\end{cases}$ откуда следует, что $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\ \operatorname{tg}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$ при условии $\sin x\neq\dfrac{1}{2}$. Получаем, что $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z}.$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$. Получаем $\dfrac{19\pi}{6},\ \dfrac{23\pi}{6}.$

Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{19\pi}{6},\ \dfrac{23\pi}{6}.$

4. Тип 13 № 529297

а) Решите уравнение $256^{\sin x\cdot\cos x}-18\cdot16^{\sin x\cdot\cos x}+32=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{9\pi}{2};\ 6\pi\right]$.

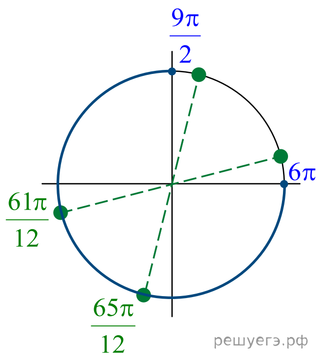
Решение. а) Пусть $t=16^{\sin x\cdot\cos x}$, тогда исходное уравнение примет вид:

$$t^2-18t+32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=16,\\ t=2.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}16^{\sin x\cdot\cos x}=16,\\ 16^{\sin x\cdot\cos x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x\cdot\cos x=1,\\ \sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=2,\\ \sin 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ 2x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+\pi k,\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+\pi k,\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности. Подходят $\dfrac{61\pi}{12},\ \dfrac{65\pi}{12}.$

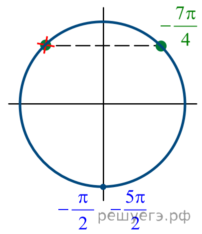
Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{12}+\pi k,\dfrac{5\pi}{12}+\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{61\pi}{12},\ \dfrac{65\pi}{12}.$

5. Тип 13 № 547301

а) Решите уравнение $\log_2\sin 2x+\log_{\frac{1}{2}}\cos x=\dfrac{1}{2}.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Преобразуем уравнение:



$$\log_2\sin 2x+\log_{\frac{1}{2}}\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2(2\sin x\cos x)-\log_2\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2(2\sin x)=\dfrac{1}{2},\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin x=\sqrt{2},\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right]$, при помощи единичной тригонометрической окружности. Получаем число $-\dfrac{7\pi}{4}.$

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{7\pi}{4}.$

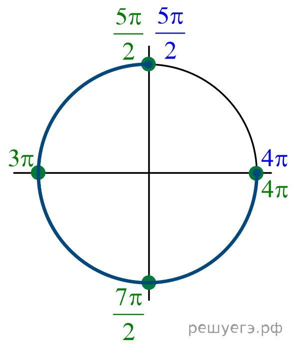
6. Тип 13 № 627043

а) Решите уравнение $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right).$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение. а) Преобразуем уравнение, используя формулу разности квадратов, суммы и разности синусов:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{4}\cos(-x)\cos\frac{\pi}{4}\sin(-x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни при помощи тригонометрической окружности. Подходят $\frac{5\pi}{2}$, 3π, $\frac{7\pi}{2}$, 4π.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi k}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{2}$, 3π, $\frac{7\pi}{2}$, 4π.

7. Тип 13 № 515705

а) Решите уравнение $5\cdot4^{x^2+4x}+20\cdot10^{x^2+4x-1}-7\cdot25^{x^2+4x}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3;\ 1]$.

Решение. а) Пусть $a=2^{x^2+4x}, b=5^{x^2+4x}$, тогда уравнение принимает вид

$$5a^2+2ab-7b^2=0$$

Решим это уравнение, как квадратное относительно a.

$$\frac{D}{4}=b^2+5\cdot7b^2=36b^2$$

$$a=\frac{-b\pm6b}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l}a=-\frac{7b}{5},\\ a=b.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

1) Уравнение $2^{x^2+4x}=-\frac{7}{5}\cdot5^{x^2+4x}$ корней не имеет

2) $2^{x^2+4x}=5^{x^2+4x}\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-4.\end{array}\right.$

б) Из чисел -4 и 0 отрезку $[-3;\ 1]$. принадлежит только число 0

Ответ: а) −4; 0; б) 0.

8. Тип 13 № 676856

а) Решите уравнение $\sqrt{1-\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right).$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) По формулам приведения $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+x\right)=\cos x$, откуда находим:

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin x}=\cos x \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \geqslant 0,\\ 1-\dfrac{1}{2}\sin x=\cos^2 x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \geqslant 0,\\ 2-\sin x=2-2\sin^2 x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \geqslant 0,\\ 2\sin^2 x-\sin x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi m,\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi m,\end{array}\right. \quad k, m\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи двойных неравенств. Для первой серии корней получаем:

$$-4\pi \leqslant 2\pi k \leqslant -\frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -2 \leqslant k \leqslant -\frac{5}{4} \underset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} k=-2.$$

Найденному значению k соответствует корень -4π. Рассмотрим вторую серию корней:

$$-4\pi \leqslant \frac{\pi}{6}+2\pi m \leqslant -\frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -2\frac{1}{12} \leqslant m \leqslant -\frac{4}{3} \underset{m\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} m=-2.$$

Найденному значению m соответствует корень $-\dfrac{23\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi m;\ 2\pi k : k, m\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-4\pi,\ -\dfrac{23\pi}{6}$.

9. Тип 13 № 677067

а) Решите уравнение $2\cos^2 x+3\sin 2x=4+3\cos 2x$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi; 6\pi]$.

Решение. а) Заметим, что $\cos x\neq 0$, и преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x+3\sin 2x=4+3\cos 2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+6\sin x\cos x=4(\sin^2 x+\cos^2 x)+3(\cos^2 x-\sin^2 x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x-6\sin x\cos x+5\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x-6\operatorname{tg} x+5=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1,\\ \operatorname{tg} x=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ x=\operatorname{arctg} 5+\pi n,\end{array}\right. \quad k, n\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи двойных неравенств. Для первой серии получаем:

$$5\pi \leqslant \frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant 6\pi \Leftrightarrow 4\frac{3}{4} \leqslant k \leqslant 5\frac{3}{4} \Leftrightarrow k=5.$$

Найденному значению k соответствует корень $\dfrac{21\pi}{4}$. Рассмотрим вторую серию: заметим, что $0<\operatorname{arctg} 5<\dfrac{\pi}{2}$, тогда

$$5\pi \leqslant \operatorname{arctg} 5+\pi n \leqslant 6\pi \Leftrightarrow 4\frac{1}{2}<n<6 \Leftrightarrow n=5.$$

Найденному значению n соответствует корень $\operatorname{arctg} 5+5\pi$.

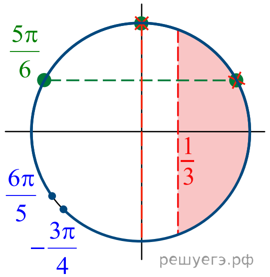
Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ \operatorname{arctg} 5+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{21\pi}{4},\ \operatorname{arctg} 5+5\pi$.

10. Тип 13 № 561193

а) Решите уравнение $\dfrac{16^{\sin x}-3\cdot 4^{\frac{1}{2}+\sin x}+8}{\log_2(1-3\cos x)}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{6\pi}{5}\right]$.

Решение. а) При условии $\cos x < \frac{1}{3}$ и $\cos x \neq 0$ исходное уравнение сводится к квадратному относительно показательной функции:



$$16^{\sin x} - 3\cdot 4^{\frac{1}{2}+\sin x} + 8 = 0 \Leftrightarrow (4^{\sin x})^2 - 6\cdot 4^{\sin x} + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{\sin x} = 2, \\ 4^{\sin x} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

Условию равносильности удовлетворяет только серия $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Подходит только $\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{6}$.

11. Тип 13 № 525377

а) Решите уравнение $\log_7(x+2) = \log_{49}(x^4)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_6 \frac{1}{7};\ \log_6 35\right]$.

Решение. а) Поскольку $\log_{7^2} x^4 = \log_7 x^2$, получаем:

$$\log_7(x+2) = \log_{49} x^4 \Leftrightarrow \log_7(x+2) = \log_7 x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0, \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

б) В силу цепочки соотношений $\log_6 \frac{1}{7} < \log_6 \frac{1}{6} = -1 < \log_6 35 < \log_6 36 = 2$ заданному отрезку принадлежит только число −1.

Ответ: а) {−1, 2}; б) −1.

12. Тип 13 № 519658

а) Решите уравнение $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\sqrt{3};\ \sqrt{30}]$.

Решение. а) Решим уравнение:

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geqslant 0, \\ x^3 - 4x^2 - 10x + 29 = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x^2(x-5) - 4(x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \\ (x-5)(x^2-4) = 0 \end{cases} \begin{cases} x \leqslant 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -2, \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

б) Поскольку $-2 < -\sqrt{3} < 2 < \sqrt{30}$, отрезку $[-\sqrt{3};\ \sqrt{30}]$ принадлежит только число 2.

Ответ: а) $\{-2; 2\}$; б) 2.

13. Тип 13 № 519426

а) Решите уравнение $2\left(\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{25}{(x-2)^2}\right) = \frac{x-2}{2} - \frac{5}{x-2} + 16$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[3; 8]$.

Решение. а) Пусть $t=\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{5}{x-2}$, тогда $t^2=\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{25}{(x-2)^2}-5$. Далее имеем:

$$2(t^2+5)=t+16\Leftrightarrow 2t^2-t-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2,\\ t=-\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{5}{x-2}=2,\\ \dfrac{x-2}{2}-\dfrac{5}{x-2}=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 2,\\ \left[\begin{array}{l}(x-2)^2-10=4x-8,\\ (x-2)^2-10=-3x+6\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ne 2,\\ \left[\begin{array}{l}x^2-8x+2=0,\\ x^2-x-12=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4-\sqrt{14},\\ x=4+\sqrt{14},\\ x=-3,\\ x=4.\end{array}\right.$$

б) Выясним, какие из найденных корней принадлежат отрезку $[3;\,8]$. В силу неравенств

$$4<4+\sqrt{14}<4+4=8 \text{ и } 4-\sqrt{14}<4-3=1<3,$$

из найденных корней уравнения заданному отрезку принадлежат только числа 4 и $4+\sqrt{14}$.

Ответ: а) $\left\{-3;\ 4;\ 4+\sqrt{14};\ 4-\sqrt{14}\right\}$; б) $4;\ 4+\sqrt{14}$.

14. Тип 13 № 503360

а) Решите уравнение $1+\log_3(x^4+25)=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{30x^2+12}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{11}{5},\dfrac{16}{5}\right]$.

Решение. а) Заметим, что аргументы логарифмов положительны при всех значениях переменной. Преобразуем исходное уравнение:

$$\log_3(x^4+25)=\log_3(30x^2+12)-\log_3 3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x^4+25)=\log_3(10x^2+4)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4+25=10x^2+4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4-10x^2+21=0\Leftrightarrow (x^2-3)(x^2-7)=0.$$

Значит, либо $x^2-3=0$, откуда $x=-\sqrt{3}$ или $x=\sqrt{3}$, либо $x^2-7=0$, откуда $x=-\sqrt{7}$ или $\sqrt{7}$.

б) Поскольку $-\sqrt{7}<-\dfrac{11}{5}<-\sqrt{3}<\sqrt{3}<\sqrt{7}<\dfrac{16}{5}$ отрезку $\left[-\dfrac{11}{5},\dfrac{16}{5}\right]$ принадлежат корни $x=\pm\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{7}$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{7},\pm\sqrt{3}$; б) $\pm\sqrt{3},\sqrt{7}$.

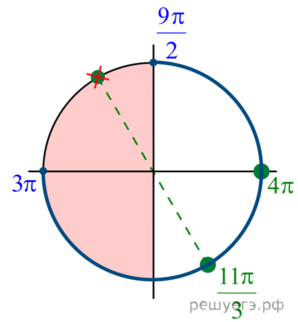
15. Тип 13 № 507644

а) Решите уравнение: $(\cos x-1)(\operatorname{tg} x+\sqrt{3})\sqrt{\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x>0$. Поэтому множитель $\sqrt{\cos x}$ положителен. Тогда

$$(\cos x-1)(\operatorname{tg} x+\sqrt{3})\sqrt{\cos x}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x>0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x-1=0,\\ \operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x>0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ \operatorname{tg} x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x>0,\\ \left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}$$



б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\dfrac{9\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $\dfrac{11\pi}{3}$ и 4π.

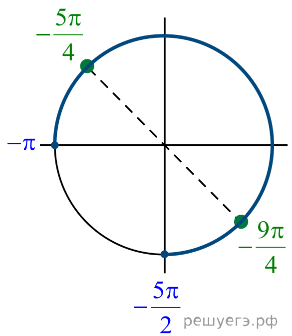
Ответ: а) $\left\{2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{11\pi}{3}$, 4π.

16. Тип 13 № 501944

а) Решите уравнение $10^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{-5\pi}{2},-\pi\right]$.

Решение. а) Преобразуем исходное уравнение:



$$2^{\sin x}\cdot 5^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x}\Leftrightarrow 5^{\sin x}=5^{-\cos x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x=-\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{-5\pi}{2},-\pi\right]$. Получим числа: $-\dfrac{9\pi}{4},-\dfrac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{9\pi}{4};-\dfrac{5\pi}{4}$.

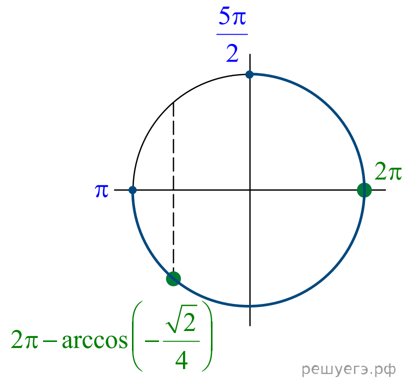
17. Тип 13 № 639688

а) Решите уравнение: $\log_3(\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+2\sin 2x+81)=4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Преобразуем исходное уравнение:

$$\log_3(\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+2\sin 2x+81)=4\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x+2\sin 2x+81=3^4\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x+4\sin x\cos x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x(\sqrt{2}+4\cos x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sqrt{2}+4\cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)+2\pi k,\\ x=-\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)+2\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}+2\pi k,\\ x=-\pi+\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) Выясним, какие из найденных корней принадлежат отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$, при помощи тригонометрической окружности. Подходят: π, 2π и $\pi+\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\pi k;\pm(\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4})+2\pi k\ :\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) π, $\pi+\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, 2π.

18. Тип 13 № 519514

а) Решите уравнение $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+2\cos 2x=1.$

б) Найдите его корни на промежутке $[3\pi;\ 4\pi]$.

Решение. Имеем:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+2\cos 2x=1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$

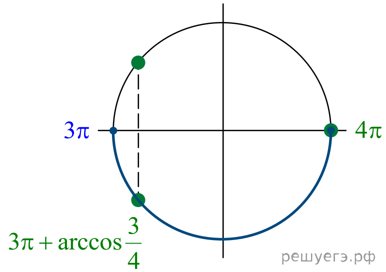
$$-\cos x+4\cos^2 x-2=1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad (0)$$

$$\cos^2 x-\cos x-3=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad (0)$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ \cos x=-\dfrac{3}{4}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\quad k\in Z,\\ x=\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{3}{4}\right)+2\pi k,\quad k\in Z.\end{array}\right.$$

Условию $x\in[3\pi;\ 4\pi]$ удовлетворяют числа 4π и $3\pi+\arccos\frac{3}{4}$.

Ответ: а) $2\pi k, \pm\left(\pi-\arccos\frac{3}{4}\right)+2\pi k, k\in Z$; б) $3\pi+\arccos\frac{3}{4}, 4\pi$.

19. Тип 13 № 511588

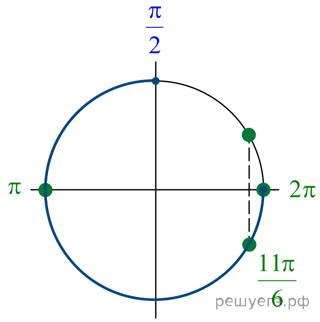
а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos x=\sqrt{3}\sin x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$, имеем:

$$2\sin x\cos x=\sqrt{3}\sin x\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$



б) Отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$ принадлежат корни $\pi,\ \frac{11\pi}{6},\ 2\pi$.

Ответ: а) $\left\{\pi k,\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k: k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\pi,\ \frac{11\pi}{6},\ 2\pi$.

20. Тип 13 № 511374

а) Решите уравнение $4^{x-\frac{1}{2}}-6\cdot 2^{x-1}+3=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(0;2)$.

Решение. а) Преобразуем исходное уравнение, получим: $4^x-6\cdot 2^x+6=0$. Пусть $t=2^x$, тогда уравнение запишется в виде $t^2-6t+6=0$, откуда $t=3\pm\sqrt{3}$. Возвращаясь к исходной переменной, имеем: $2^x=3\pm\sqrt{3}$, откуда $x=\log_2(3\pm\sqrt{3})$.

б) Корень $x=\log_2(3+\sqrt{3})$ не принадлежит промежутку $(0;2)$, поскольку $2^2<3+\sqrt{3}$, корень $x=\log_2(3-\sqrt{3})$ принадлежит промежутку $(0;2)$.

Ответ: а) $x=\log_2(3\pm\sqrt{3})$, б) $\log_2(3-\sqrt{3})$.

21. Тип 13 № 552510

а) Решите уравнение $3^{2x+1}-4\cdot 3^x+4=\sqrt{-x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}^{\,2}+x^2+\frac{x}{2}+\frac{5}{2}.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\log_2\frac{1}{6};\log_2\frac{2}{3}\right]$.

Решение. а) На области определения квадратного корня справедливо равенство $\sqrt{a}^2 = a$. Поэтому при условии

$$-x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \qquad (*)$$

правая часть уравнения равна 3. Получаем:

$$3^{2x+1} - 4\cdot 3^x + 4 = 3 \Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x} - 4\cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = \dfrac{2-1}{3}, \\ 3^x = \dfrac{2+1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1, \\ 3^x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Оба корня удовлетворяют условию $(*)$. Итак, $x = 0, x = -1$.

б) Заметим, что $\frac{1}{6} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$, следовательно, $\log_2 \frac{1}{6} < -1 < \log_2 \frac{2}{3} < 0$. На отрезке $\left[\log_2 \frac{1}{6}; \log_2 \frac{2}{3}\right]$ лежит число -1.

Ответ: а) $\{0; -1\}$; б) -1.

Примечание.

Заметим, что запись $\sqrt{a}^2$ эквивалентна записи $\left(\sqrt{a}\right)^2$.

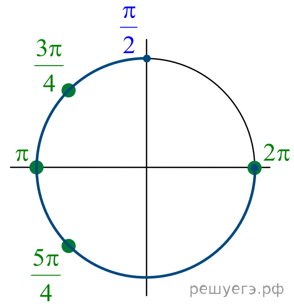
22. Тип 13 № 563715

а) Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow -\sin 2x - \sqrt{2}\sin x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$. Получим числа: $\pi,\ 2\pi,\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\pi k; \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\pi,\ 2\pi,\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}$.

23. Тип 13 № 507428

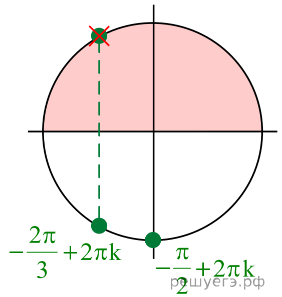
а) Решите уравнение: $(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Решим уравнение:

$$(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\sin x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0, \\ \sqrt{-\sin x} - 1 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2\cos x = -1, \\ -\sin x = 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2}, \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$



б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{3\pi}{2}.$

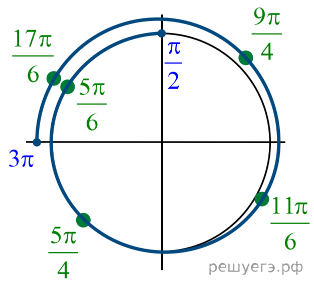
24. Тип 13 № 628639

а) Решите уравнение $\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-1\right)\cdot\left(\cos^2 x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\,3\pi\right].$

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\right)\cdot\left(\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\operatorname{tg}x-1)(\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\operatorname{tg}x-1)(\cos x+\sqrt{3}\sin x)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=1,\\ \operatorname{tg}x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\end{array}\right.\ k\in\mathbb{Z}.$$



б) Отберём корни при помощи единичной окружности. Подходят $\dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{11\pi}{6},\ \dfrac{9\pi}{4},\ \dfrac{17\pi}{6}.$

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ -\dfrac{\pi}{6}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{11\pi}{6},\ \dfrac{9\pi}{4},\ \dfrac{17\pi}{6}.$

Примечание.

Заметим, что точки единичной окружности, в которых $\cos x=0$, не являются решениями уравнения, поскольку в них не существует $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, поэтому преобразование

$$(\operatorname{tg}x-1)(\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x)=0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (\operatorname{tg}x-1)(\cos x+\sqrt{3}\sin x)=0$$

является верным.

25. Тип 13 № 549170

а) Решите уравнение $\sqrt{x^3+4x^2+9}-3=x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9}{2};\,\dfrac{7}{5}\right].$

Решение. а) Запишем уравнение в виде $\sqrt{x^3+4x^2+9}=x+3$ и воспользуемся тем, что

$$\sqrt{x}=y\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant 0,\\ x=y^2.\end{cases}$$

Получим:

$$\sqrt{x^3+4x^2+9}=x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+4x^2+9=x^2+6x+9,\\ x\geqslant -3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2+3x-6)=0,\\ x\geqslant -3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2},\end{array}\right.\\ x\geqslant -3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}.\end{array}\right.$$

б) Число 0 принадлежит отрезку $\left[-\dfrac{9}{2};\,\dfrac{7}{5}\right]$. Чтобы сравнить $\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$ и $\dfrac{7}{5}$, сравним разность этих чисел с нулем:

$$\frac{-3+\sqrt{33}}{2}-\frac{7}{5}=\frac{-15+5\sqrt{33}-14}{10}=$$
$$=\frac{-29+5\sqrt{33}}{10}=\frac{-\sqrt{841}+\sqrt{825}}{10}<0.$$

Значит, $\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}<\dfrac{7}{5}.$

Ответ: а) $0,\ \dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$; б) $0,\ \dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}.$

26. Тип 13 № 519828

а) Решите уравнение $3^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=4.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;\,-\dfrac{\pi}{2}\right].$

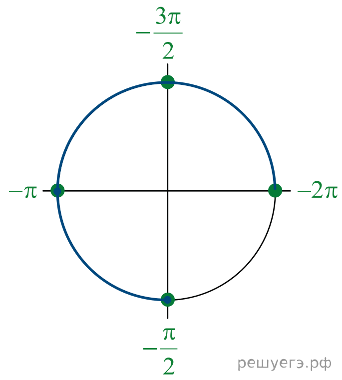
Решение. а) Запишем уравнение в виде $3^{1-\cos^2 x}+3^{\cos^2 x}=4$. Сделаем замену $y=3^{\cos^2 x}$.

Получаем $\dfrac{3}{y}+y=4 \Leftrightarrow \dfrac{y^2-4y+3}{y}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=3. \end{array}\right.$

Тогда $3^{\cos^2 x}=1$ или $3^{\cos^2 x}=3$, откуда $\cos^2 x=0$ или $\cos^2 x=1$.

Тогда $\cos x=0$, $\cos x=-1$ или $\cos x=1$, откуда $x=\dfrac{\pi n}{2}$, где $n\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни на отрезке $\left[-2\pi;\, -\dfrac{\pi}{2}\right]$ с помощью единичной окружности. Получаем $-2\pi,\ -\dfrac{3\pi}{2},\ -\pi$ и $-\dfrac{\pi}{2}$.



Ответ: а) $x=\left\{\dfrac{\pi n}{2};\, n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-2\pi,\ -\dfrac{3\pi}{2},\ -\pi,\ -\dfrac{\pi}{2}$.

27. Тип 13 № 627406

а) Решите уравнение $\dfrac{(x^2-x-12)^2}{x+\sqrt{13}}=\dfrac{(2x^2+x-27)^2}{x+\sqrt{13}}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{15}-1;\, \sqrt{17}-1]$.

Решение. а) При условии $x\neq-\sqrt{13}$ отбросим знаменатели, затем применим формулу разности квадратов:

$$(x^2-x-12)^2=(2x^2+x-27)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x-12)^2-(2x^2+x-27)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x^2-x-12)-(2x^2+x-27))((x^2-x-12)+(2x^2+x-27))=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-x^2-2x+15)(3x^2-39)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-15=0, \\ 3(x^2-13)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=3, \\ x=\pm\sqrt{13}. \end{array}\right.$$

По условию подходят только $x=-5$, $x=3$, $x=\sqrt{13}$.

б) Заметим, что $3<\sqrt{15}<4 \Leftrightarrow 2<\sqrt{15}-1<3$. Кроме того,

$$\sqrt{17}-1<\sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{17}<\sqrt{13}+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 17<(\sqrt{13}+1)^2 \Leftrightarrow 3<2\sqrt{13}.$$

Последнее неравенство верно, так как $3<\sqrt{13}$, следовательно, подходит только $x=3$.

Ответ: а) $\left\{-5;\, 3;\, \sqrt{13}\right\}$; б) $x=3$.

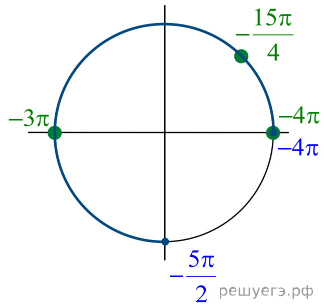
28. Тип 13 № 563678

а) Решите уравнение $2\sin x\cos^2 x-\sqrt{2}\sin 2x+\sin x=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\, -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Используем формулу синуса двойного угла, вынесем общий множитель за скобки, выделим полный квадрат:

$$2\sin x\cos^2 x-\sqrt{2}\sin 2x+\sin x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x-2\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x-2\sqrt{2}\cos x+1\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x(\sqrt{2}\cos x-1)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$



б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\, -\dfrac{5\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности. Получаем числа: $-4\pi,\ -\dfrac{15\pi}{4},\ -3\pi$.

Ответ: а) $\left\{\pi k;\, \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-4\pi,\ -\dfrac{15\pi}{4},\ -3\pi$.

29. Тип 13 № 500131

а) Решите уравнение $\cos 2x+0,5=\cos^2 x$.

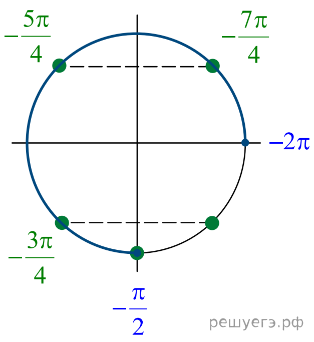
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x-\sin^2 x+0,5=\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi k, \\ x=\frac{3\pi}{4}+\pi k, \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{7\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}$.



Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}$.

30. Тип 13 № 507694

Дано уравнение $\operatorname{tg}x+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=0$.

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант № 86880691

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\operatorname{tg}x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow$$

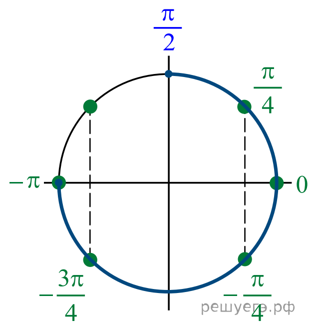
$$\Leftrightarrow \sin x\left(\frac{1}{\cos x}-2\cos x\right)=0.$$

Если $\sin x=0$, то $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
Второй случай:

$$\frac{1-2\cos^2 x}{\cos x}=0 \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Заметим, что обе найденные серии удовлетворяют условию $\cos x\neq 0$ и поэтому входят в ответ.

б) Отметим решения на единичной окружности.



Отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $-\pi,\ -\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4};\ 0$ и $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\pi,-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\ 0,\ \frac{\pi}{4}$.

31. Тип 13 № 643677

а) Решите уравнение $\log_3(x^3+6x^2-3x-19)=\log_3(x+5)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_{0,5}100;\ \log_{0,5}0,3]$.

Решение. а) Преобразуем уравнение

$$\log_3(x^3+6x^2-3x-19)=\log_3(x+5)\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+6x^2-3x-19=x+5, \\ x+5>0. \end{cases}$$

Решим отдельно уравнение полученной системы:

$$x^3+6x^2-3x-19=x+5 \Leftrightarrow x^3+6x^2-4x-24=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2(x+6)-4(x+6)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x+6)=0.$$

Значит, возвращаясь к системе, получаем

$$\begin{cases} (x-2)(x+2)(x+6)=0, \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=-2, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=2. \end{array}\right.$$

б) Заметим, что

$$\log_{0,5}100=-\log_2 100<-2<\log_{0,5}0,3=\log_2\frac{10}{3}<2.$$

Значит, отрезку $[\log_{0,5}100; \log_{0,5}0,3]$ принадлежит корень −2.

Ответ: а) $\{-2; 2\}$; б) −2.

Примечание: переход $(*)$ равносилен по правилу 1.

32. Тип 13 № 517825

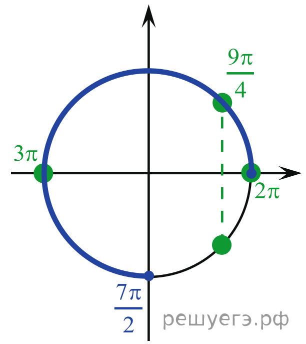
а)Решите уравнение $25^{\sin x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2}\sin(2x)}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$5^{2\sin x}=5^{\sqrt{2}\sin(2x)} \Leftrightarrow 2\sin x=\sqrt{2}\sin(2x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x=2\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi k, \\ x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k, \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



Получаем: $2\pi,\ \frac{9\pi}{4}\ 3\pi.$

Ответ: а) $\left\{\pi k; \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $2\pi,\ \frac{9\pi}{4},\ 3\pi.$

33. Тип 13 № 514540

а) Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=0.$

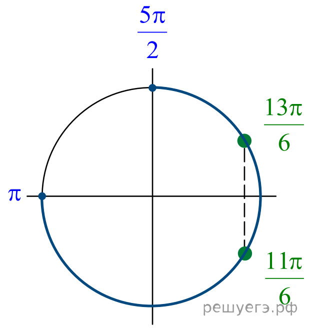
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Пусть $t=\log_3(2\cos x)$, тогда исходное уравнение запишется в виде $2t^2-5t+2=0$, откуда $t=2$ или $t=\frac{1}{2}$.

При $t=2$ получим: $\log_3(2\cos x)=2$, значит, $\cos x=\frac{9}{2}$, что невозможно.

При $t=\frac{1}{2}$ получим: $\log_3(2\cos x)=\frac{1}{2}$, значит, $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

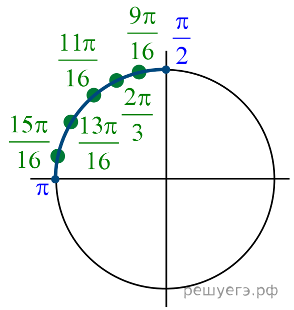
34. Тип 13 № 627637

а) Решите уравнение $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=\frac{3}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Решение. а) Используем формулы понижения порядка:

$$\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}+\frac{1+\cos 10x}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3+\cos 6x+\cos 8x+\cos 10x=3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos 6x+\cos 8x+\cos 10x=\cos 8x+2\cos 8x\cos 2x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos 8x(1+2\cos 2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 8x=0,\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8},\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$



б) Отберём корни при помощи единичной окружности. Подходят $\frac{9\pi}{16}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{16}$, $\frac{13\pi}{16}$, $\frac{15\pi}{16}$.

Ответ: а) $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{9\pi}{16}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{16}$, $\frac{13\pi}{16}$, $\frac{15\pi}{16}$.

Приведем другое решение пункта а).

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos^2(4x-x)+\cos^2 4x+\cos^2(4x+x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos 4x\cos x+\sin 4x\sin x)^2+\cos^2 4x+(\cos 4x\cos x-\sin 4x\sin x)^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x\cos^2 x+2\sin^2 4x\sin^2 x+\cos^2 4x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^2 4x\cos^2 x+4(1-\cos^2 4x)(1-\cos^2 x)+2\cos^2 4x-3=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\cos^2 4x\cos^2 x-4\cos^2 x-2\cos^2 4x+1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(4\cos^2 x-1)(2\cos^2 4x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\cos^2 x-1=0,\\ 2\cos^2 4x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos^2 x=\frac{1}{4},\\ \cos^2 4x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\pm\frac{1}{2},\\ \cos 4x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\\ x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8},\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

35. Тип 13 № 511441

а) Решите уравнение $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=6$.

б) Найдите решения уравнения, принадлежащие отрезку $[4\sqrt{7}-1;\ 19]$.

Решение. а) Сделаем замену переменной: $y=\sqrt{x-9}$. Получаем:

$$\sqrt{y^2+6y+9}+\sqrt{y^2-6y+9}=6 \Leftrightarrow |y+3|+|y-3|=6 \underset{y\geqslant 0}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{y\geqslant 0}{\Leftrightarrow} y+3+|y-3|=6 \Leftrightarrow |y-3|=3-y \Leftrightarrow y\leqslant 3.$$

Здесь мы воспользовались тем, что равенство $|a|=-a$ верно только для неположительных значений a. Таким образом,

$$\sqrt{x-9}\leqslant 3 \Leftrightarrow 0\leqslant x-9\leqslant 9 \Leftrightarrow 9\leqslant x\leqslant 18.$$

б) Среди найденных решений найдем те, которые лежат на отрезке $[4\sqrt{7}-1;\,19]$. Для этого сравним числа $4\sqrt{7}-1$ и 9:

$$4\sqrt{7}-1>4\sqrt{6,25}-1=4\cdot 2,5-1=10-1=9.$$

Следовательно, корнями уравнения, лежащими на отрезке $[4\sqrt{7}-1;\,19]$, являются все числа из отрезка $[4\sqrt{7}-1;\,18]$.

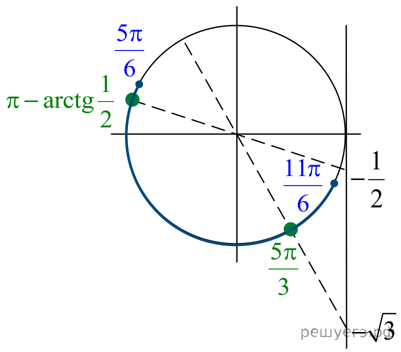
Ответ: а) $[9;\,18]$, б) $[4\sqrt{7}-1;\,18]$.

36. Тип 13 № 560711

а) Решите уравнение $2\sin^2 x+\sin x\cos x+\sqrt{3}(\sin 2x+\cos^2 x)=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{6};\,\dfrac{11\pi}{6}\right]$.

Решение. а) Используем формулу синуса двойного угла, сгруппируем слагаемые, разложим на множители:



$$2\sin^2 x+\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)+\cos x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\sqrt{3}\cos x)(2\sin x+\cos x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\sqrt{3}\cos x=0,\\ 2\sin x+\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-\sqrt{3},\\ \operatorname{tg} x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\\ x=-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi k,\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни при помощи тригонометрической окружности. Получим: $\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+\pi k;\,-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi k: k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{5\pi}{3}$.

37. Тип 13 № 513605

а) Решите уравнение $27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$.

Решение. а) Разложим левую часть на множители:

$$27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0 \Leftrightarrow 27^x-5\cdot 9^x-9\cdot 3^x+45=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9^x(3^x-5)-9(3^x-5)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3^x-5)(9^x-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=5,\\ 9^x=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_3 5,\\ x=1.\end{array}\right.$$

б) Поскольку $1<\log_3 4<\log_3 5<\log_3 10$, отрезку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$ принадлежит только корень $\log_3 5$.

Ответ: а) $\{1;\ \log_3 5\}$; б) $\log_3 5$.

Примечание.

Можно было ввести замену $t=3^x$, получить уравнение и решить его разложением на множители:

$$t^3-5t^2-9t+45=0 \Leftrightarrow (t^2-9)(t-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=5,\\ t=\pm 3.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем решение.

38. Тип 13 № 528987

а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}^{\sin^2 x+\sqrt{\cos x}}\right)^2+2^{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}=3\cdot 2^{\sqrt{\cos x}}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{11\pi}{2};\ -4\pi\right]$.

Решение. а) Преобразуем исходное уравнение:

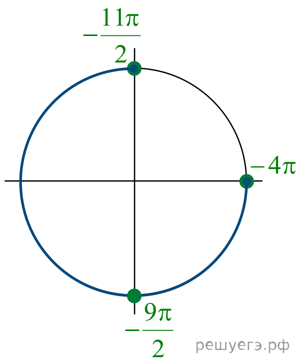
$$2^{\sin^2 x+\sqrt{\cos x}}+2^{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}=3\cdot 2^{\sqrt{\cos x}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}-3\right)\cdot 2^{\sqrt{\cos x}}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2^{1-\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}-3=0,\\ \cos x\geqslant 0.\end{cases}$$

Сделаем замену $t=2^{\cos^2 x}$ и решим полученное уравнение:

$$\frac{2}{t}+t-3=0\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1,\\ t=2.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2^{\cos^2 x}=1,\\ 2^{\cos^2 x}=2,\end{array}\right.\\ \cos x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos^2 x=0,\\ \cos^2 x=1,\end{array}\right.\\ \cos x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=\pm 1,\end{array}\right.\\ \cos x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=2\pi k,\end{array}\right.k\in\mathbb{Z}.$$



б) Произведем отбор корней при помощи единичной окружности (см. рис.) Подходят корни $-\dfrac{11\pi}{2},\ -\dfrac{9\pi}{2},\ -4\pi$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ 2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{11\pi}{2},\ -\dfrac{9\pi}{2},\ -4\pi$.

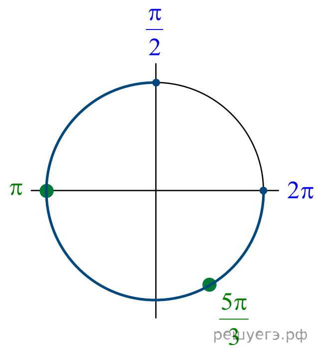
39. Тип 13 № 485987

а) Решите уравнение $\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}=\cos 2x$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2},2\pi\right]$.

Решение. а) Преобразуем уравнение: $-\cos x=\cos 2x\Leftrightarrow\cos(x+\pi)=\cos 2x$. Значит, $x+\pi=2x+2\pi k$ или $x+\pi=-2x+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

В первом случае $x=\pi+2\pi k$, во втором случае $x=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. Первая серия решений входит во вторую.



б) Отметим решения на тригонометрической окружности. Отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2},2\pi\right]$ принадлежат корни π и $\dfrac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3} : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) π; $\dfrac{5\pi}{3}$.

40. Тип 13 № 563297

а) Решите уравнение $x^2-12+\dfrac{36}{x^2}+2\cdot\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2,5;2]$.

Решение. а) Внесем число 2 в скобки и обозначим $t=x-\dfrac{6}{x}$. Заметим, что $x^2-12+\dfrac{36}{x^2}=t^2$, а значит, уравнение записывается в виде $t^2+t=0$, откуда $t=-1$ или $t=0$. Далее, при условии $x\neq 0$ имеем:

$$\left[\begin{array}{l}x-\dfrac{6}{x}=0,\\ x-\dfrac{6}{x}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6=0,\\ x^2+x-6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{6},\\ x=-3,\\ x=2.\end{array}\right.$$

б) Заметим, что $-3<-2{,}5<-\sqrt{6}<2<\sqrt{6}$. Подходят $-\sqrt{6}$ и 2.

Ответ: а) $\{-\sqrt{6};-3;2;\sqrt{6}\}$; б) $-\sqrt{6}$; 2.

41. Тип 13 № 676259

а) Решите уравнение $\dfrac{25^{\sin x}+5^{\sin x+1}-6}{\sqrt{(2\cos x-1)\left(\sqrt{3}-2\sin x\right)}}=0.$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Найдем нули числителя дроби:

$$25^{\sin x}+5^{\sin x+1}-6=0 \Leftrightarrow 5^{2\sin x}+5\cdot 5^{\sin x}-6=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(5^{\sin x}+6\right)\left(5^{\sin x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5^{\sin x}=-6,\\ 5^{\sin x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\\ x=\pi+2\pi k,\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Для всех чисел серии $x=\pi+2\pi k$ знаменатель не определен, а для всех чисел $x=2\pi k$ определен.

б) Отберем корни при помощи двойного неравенства:

$$-3\pi\leqslant 2\pi k\leqslant \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leqslant k\leqslant\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=-1,\\ k=0.\end{array}\right.$$

Найденным значениям k соответствуют корни -2π и 0.

Ответ: а) $\{2\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$; б) -2π, 0.

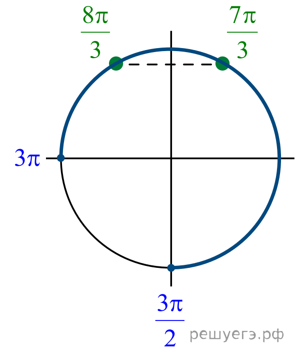
42. Тип 13 № 517483

а) Решите уравнение: $\log_8(7\sqrt{3}\sin x-\cos 2x-10)=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$7\sqrt{3}\sin x+2\sin^2 x-11=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\sin x-\sqrt{3})(\sin x+4\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x=-4\sqrt{3},\ \text{решений нет}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Получим числа: $\dfrac{7\pi}{3}$; $\dfrac{8\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{7\pi}{3}$; $\dfrac{8\pi}{3}$.

43. Тип 13 № 659588

а) Решите уравнение $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{9x}{2}\right)\cos\dfrac{x}{2}+\sin\left(\pi+\dfrac{x}{2}\right)\cos\dfrac{9x}{2}=\sin^2 4x.$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Применим формулы приведения и формулу синуса разности, получим:

$$\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{9x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{9x}{2}-\frac{x}{2}\right)=\sin 4x.$$

Отсюда имеем:

$$\sin 4x=\sin^2 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=0,\\ \sin 4x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\pi k,\\ 4x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi k}{4},\\ x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2},\end{array}\right. \quad k,n\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи двойных неравенств. Для первой серии получаем:

$$\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{\pi k}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{\pi k}{4}\leqslant\frac{6\pi}{4}=3,4,5,6.$$

Для второй серии находим:

$$\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{\pi+4\pi n}{8}\leqslant\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{6\pi}{8}\leqslant\frac{\pi+4\pi n}{8}\leqslant\frac{12\pi}{8}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\pi\leqslant\pi+4\pi n\leqslant 12\pi\Leftrightarrow n=2.$$

Найденным значениям параметров соответствуют корни: $\frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{9\pi}{8}.$

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi k}{4};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$, б) $\frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{9\pi}{8}.$

44. Тип 13 № 681242

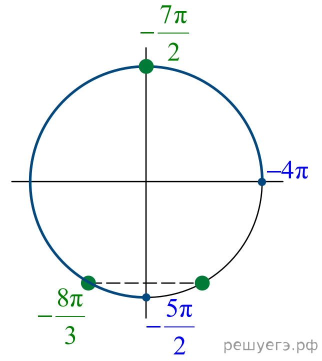
а) Решите уравнение $2-2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}-2\sin(x+\pi)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Вариант № 86880691

Решение. а) Используя формулу приведения и основное тригонометрическое тождество, получим:

$$2-2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}-2\sin(x+\pi)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2-2+2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}+2\sin x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-2\sin x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x+\sqrt{3})-(2\sin x+\sqrt{3})=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\sin x+\sqrt{3})(\sin x-1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Отрезку принадлежат числа $-\frac{7\pi}{2},\ -\frac{8\pi}{3}.$

Ответ: а) $\left\{-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{2},\ -\frac{8\pi}{3}.$

45. Тип 13 № 532281

а) Решите уравнение $\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}(1-\cos x)}=-\sin(-x)-5\cos x.$

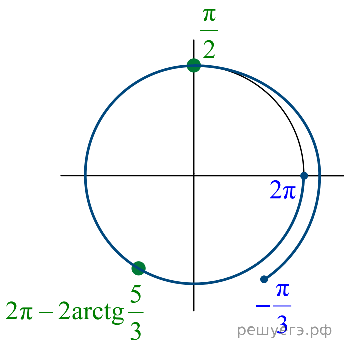
б) Укажите корни этого уравнения принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{3};\ 2\pi\right]$.

Решение. а) Заметим, что $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, получим в левой части

$$\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}(1-\cos x)}=\sqrt{4\sin^4\frac{x}{2}}=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Далее, используя формулы $-\sin(-x)=\sin x,$ $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$ $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$, перейдем к половинному аргументу в правой части и сведем уравнение к однородному тригонометрическому второй степени:

$$2\sin^2\frac{x}{2}=\sin x-5\cos x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-5\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-5\cos^2\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{5}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\\ \frac{x}{2}=-\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x=-2\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности, подходят $\frac{\pi}{2}$ и $2\pi-2\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ -2\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{\pi}{2},\ 2\pi-2\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$.

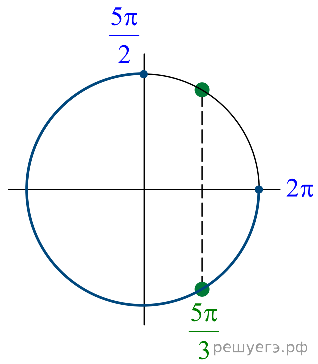
46. Тип 13 № 641932

а) Решите уравнение $7^{2\log_2^2(\cos x)}=\frac{7}{7^{\log_2(\cos x)}}$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Решение. а) Получим степени с равными основаниями:

$$7^{2\log_2^2(\cos x)}=\frac{7}{7^{\log_2(\cos x)}}\Leftrightarrow 7^{2\log_2^2(\cos x)}=7^{1-\log_2(\cos x)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\log_2^2(\cos x)=1-\log_2(\cos x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\log_2^2(\cos x)+\log_2(\cos x)-1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2(\cos x)=-1,\\ \log_2(\cos x)=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2},\\ \cos x=\sqrt{2}\end{array}\right.\underset{|\cos x|\leqslant 1}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{|\cos x|\leqslant 1}{\Leftrightarrow}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Подходит корень $\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{3}$.

47. Тип 13 № 516779

а) Решите уравнение: $9^x-3^{x+2}+14=0$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[1;\ \sqrt{5}]$.

Решение. а) Пусть $t=3^x$, тогда исходное уравнение принимает вид $t^2-9t+14=0$, откуда $t=2$ или $t=7$. Следовательно,

$$9^x-9\cdot 3^x+14=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=2,\\ 3^x=7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3 2,\\ x=\log_3 7.\end{array}\right.$$

б) Поскольку $\log_3 2<\log_3 3=1$, корень $\log_3 2$ не принадлежит отрезку $[1;\ \sqrt{5}]$. Поскольку $1=\log_3 3<\log_3 7<\log_3 9=2<\sqrt{5}$, корень $\log_3 7$ принадлежит отрезку $[1;\ \sqrt{5}]$.

Ответ: а) $\{\log_3 2;\ \log_3 7\}$, б) $\log_3 7$.

48. Тип 13 № 673034

а) Решите уравнение $\frac{1+\sin\left(\frac{2025\pi}{2}-2x\right)+\cos(2025\pi-x)}{\sqrt{2025-2025\sin x}}=0.$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$.

Решение. а) Уравнение определено при условии

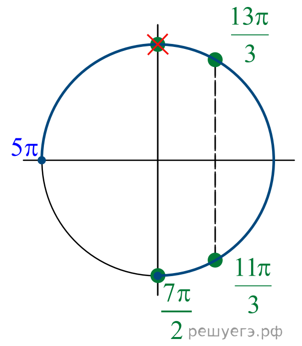
$$2025-2025\sin x>0\Leftrightarrow 1-\sin x>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x<1\Leftrightarrow \sin x\neq 1.$$

Применим формулы приведения, получим:

$$\frac{1+\sin\left(\frac{2025\pi}{2}-2x\right)+\cos(2025\pi-x)}{\sqrt{2025-2025\sin x}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 1,\\ 1+\cos 2x-\cos x=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 1,\\ 2\cos^2 x-\cos x=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 1,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.\\ x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right.$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности. Подходят числа: $\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi k; -\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.

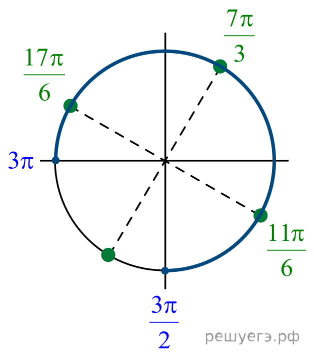
49. Тип 13 № 501044

а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение. а) Если $\cos 2x=0$, то из уравнения следует, что $\sin 2x=0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Поэтому $\cos 2x$ отличен от 0, на него можно поделить обе части уравнения:

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2x+3=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}\,2x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{3}+\pi k\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}.$$



б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Получим числа: $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{3}$ и $\frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}; \frac{17\pi}{6}$.

50. Тип 13 № 518113

а) Решите уравнение $\log_2^2(x^2)-16\log_2(2x)+31=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3;\ 6]$.

Решение. а)Запишем исходное уравнение в виде:

$$(2\log_2 x)^2-16(1+\log_2 x)+31=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\log_2^2(x)-16\log_2(x)+15=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\log_2 x-3)(2\log_2 x-5)=0$$

Значит, $\log_2 x=\frac{3}{2}$, откуда $x=2\sqrt{2}$, или $\log_2 x=\frac{5}{2}$, откуда $x=4\sqrt{2}$.

б) Заметим, что $2\sqrt{2}=\sqrt{8}<\sqrt{9}=3<4\sqrt{2}=\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$. Значит, указанному отрезку принадлежит корень $4\sqrt{2}$.

Ответ: а) $2\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$; б) $4\sqrt{2}$.