1. Тип 9 № 27986

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 6,4 километров?

Решение. Задача сводится к решению уравнений $l=4,8$ и $l=6,4$ при заданном значении R:

$$\sqrt{\frac{6400h}{500}}=4,8 \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{24}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{h}{5}=\frac{9}{25} \Leftrightarrow h=\frac{9}{5} \Leftrightarrow h=1,8 \text{ м}.$$
$$\sqrt{\frac{6400h}{500}}=6,4 \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{32}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{h}{5}=\frac{16}{25} \Leftrightarrow h=\frac{16}{5} \Leftrightarrow h=3,2 \text{ м}.$$

Следовательно, чтобы видеть горизонт на более далеком расстоянии, наблюдателю нужно подняться на $3,2-1,8=1,4$ метра. Для этого ему необходимо подняться на $1,4:0,2=14:2=7$ ступенек.

Ответ: 7.

Примечание.

Иногда в физике или технике используют формулы, в которых величины имеют разные единицы измерения. Например, удобно вывести такую формулу, чтобы при ее использовании радиус планеты не приходилось выражать в метрах, а рост человека не надо было вычислять в долях километра. Особенно часто такой подход применяется в инженерных расчётах. В данной задаче величины R и l выражены в километрах, а h — в метрах, о чем сказано в условии. Если бы все величины в этой формуле измерялись в одних и тех же единицах измерения, она выглядела бы так: $l=\sqrt{2Rh}$. Коэффициент 500 отражает то, что все величины, за исключением h, выражены в километрах. Проверьте это.

Вариант № 86541295

2. Тип 9 № 513950

Груз массой 0,2 кг колеблется на пружине. Его скорость υ меняется по закону $\upsilon=\upsilon_0\cos\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T=2$ с — период колебаний, $\upsilon_0=1,8$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\frac{m\upsilon^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, υ — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 40 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение. Найдем скорость груза через 40 секунд после начала колебаний:

$$\upsilon=\upsilon_0\cos\frac{2\pi t}{T}=$$
$$=1,8\cdot\cos\frac{2\pi\cdot 40}{2}=1,8\cdot\cos 40\pi=1,8\cdot 1=1,8$$

Найдем кинетическую энергию груза через 40 секунд после начала колебаний:

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{0,2\cdot 1,8^2}{2}=0,324$$

Ответ: 0,324

3. Тип 9 № 508313

Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия–монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q=100-10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p)=qp$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $r(p)=240$:

$$r(p)=q\cdot p=(100-10p)p=100p-10p^2,$$
$$r(p)=240 \Leftrightarrow -10p^2+100p-240=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p^2-10p+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=4; \\ p=6. \end{array}\right.$$

Ответ: 6.

4. Тип 9 № 517196

Автомобиль, масса которого равна $m = 1500$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $S = 600$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю (тяги двигателя), равно $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, равна 2000 Н. Ответ выразите в секундах.

Решение. Найдем, за какое время автомобиль пройдет путь $S = 600$ метров, учитывая, что сила F при заданном значении массы автомобиля 2000 Н. Задача сводится к решению уравнения $\frac{2mS}{t^2} = 2000$ при заданном значении массы автомобиля $m = 1500$ кг:

$$\frac{2 \cdot 1500 \cdot 600}{t^2} = 2000 \Leftrightarrow t^2 = 900 \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t = 30 \text{ с.}$$

Ответ: 30.

5. Тип 9 № 28015

При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 12,5$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}(^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $l(t^\circ) - l_0 = 6$ мм при заданных значениях длины $l_0 = 12,5$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ\text{C})^{-1}$:

$$l(t^\circ) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0 \alpha t^\circ = 6 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12,5 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} t^\circ = 6 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^\circ = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 12,5} \Leftrightarrow t^\circ = 40\ ^\circ\text{C}.$$

Ответ: 40.

Вариант № 86541295

6. Тип 9 № 28445

Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p (Па) — давление газа, V — объем газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в 16 раз объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 2 раза?

Решение. Пусть p_1 и V_1 − начальные, а p_2 и V_2 − конечные значения объема и давления газа, соответственно. Условие $pV^a = const$ означает, что $p_1 V_1^a = p_2 V_2^a$, откуда $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1^a}{V_2^a} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a$. Задача сводится к решению неравенства $\frac{p_2}{p_1} \geqslant 2$, причем по условию $\frac{V_1}{V_2} = 16$:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a \geqslant 2 \Leftrightarrow 16^a \geqslant 2 \Leftrightarrow a \geqslant 0,25.$$

Ответ: 0,25.

7. Тип 9 № 630179

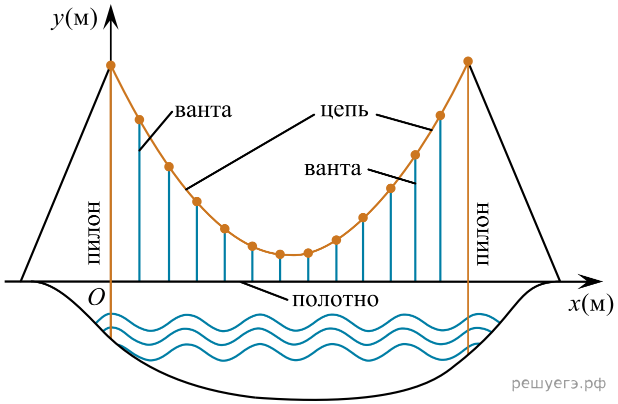
Водолазный колокол, содержащий $\upsilon = 5$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 14,9\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К температура воздуха. Найдите, какое давление (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 22 350 Дж.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $\alpha\upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1} = 22350$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 14,9$, температуры воздуха $T = 300$ К, количества вещества воздуха $\upsilon = 5$ моль и давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы:

$$14,9 \cdot 5 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,5} = 22350 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{p_2}{1,5} = 1 \Leftrightarrow \frac{p_2}{1,5} = 2 \Leftrightarrow p_2 = 3 \text{ атм.}$$

Ответ: 3.

8. Тип 9 № 325730



На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.

В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0025x^2 - 0{,}53x + 33$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 90 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

Решение. Задача сводится к вычислению значения $y(90)$, найдём его:

$$y(90) = 0{,}0025 \cdot 90^2 - 0{,}53 \cdot 90 + 33 = \\ = 20{,}25 - 47{,}7 + 33 = 5{,}55.$$

Ответ: 5,55.

Примечание 1.

Заметим, что мы вычислили длину ванты, находящейся на расстоянии 90 м от левого пилона (см. рис.), в силу симметрии она равна длине ванты, находящейся на расстоянии 90 м от правого пилона.

Примечание 2.

На самом деле линия, по которой провисает цепь в поле силы тяжести, является «цепной линией», которая похожа на параболу, но отличается от неё. Уравнение цепной линии: $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, где a — параметр, зависящий от материала.

9. Тип 9 № 624075

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полета мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{\upsilon_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $\upsilon_0 = 24$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 13,4 м на расстоянии 1 м?

Решение. Задача сводится к решению неравенства $H \geqslant 14{,}4$ на интервале $(0^\circ;\ 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости $\upsilon_0 = 24$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2:

$$\frac{24^2}{40}(1 - \cos 2\alpha) \geqslant 14{,}4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - \cos 2\alpha \geqslant 1 \Leftrightarrow \cos 2\alpha \leqslant 0 \underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow} \\ \underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow} 90^\circ \leqslant 2\alpha < 180^\circ \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 45^\circ \leqslant \alpha < 90^\circ.$$

Значит, наименьший угол, при котором мячик пролетит над стеной высотой 13,4 м на расстоянии 1 м, равно 45 градусам.

Ответ: 45.

10. Тип 9 № 27991

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $m(t) = 5$ при заданных значениях параметров $m_0 = 40$ мг и $T = 10$ мин:

$$m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = 5 \Leftrightarrow 40 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} = 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{10}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} = -3 \Leftrightarrow t = 30 \text{ мин}.$$

Ответ: 30.

Приведем решение Ильи Князева.

За каждый период полураспада $t = T$ масса изотопа уменьшается вдвое. Следовательно, за первый период масса уменьшилась с 40 мг до 20 мг, за второй период — с 20 мг до 10 мг, за третий период — с 10 мг до 5 мг. Всего прошло три периода полураспада, или 30 минут.

11. Тип 9 № 319860

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности *In*, оперативности *Op*, объективности публикаций *Tr*, а также качества сайта *Q*. Каждый отдельный показатель — целое число от –2 до 2.

Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R=\dfrac{5In+Op+3Tr+Q}{A}$.

Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число *A*, при котором это условие будет выполняться.

Решение. Обозначим совпадающую оценку по разным показателям x. Поскольку все показатели равны друг другу, все они равны x. Подставим значения в формулу, учитывая, что рейтинг равен *x*:

$$x=\frac{5x+x+3x+x}{A}\Leftrightarrow A=10.$$

Ответ: 10.

12. Тип 9 № 517156

Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$$T(t)=T_0+bt+at^2,$$

где t — время (в мин.), T_0 = 1380 К, a = −15 К/мин^2, b = 165 К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1800 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Решение. Найдем, в какой момент времени после начала работы температура станет равной 1800 К. Задача сводится к решению уравнения $T(t)=1800$ при заданных значениях параметров *a* и *b*:

$$1380+165t-15t^2=1800\Leftrightarrow t^2-11t+28=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=7. \end{array}\right.$$

Через 4 минуты после включения прибор нагреется до 1800 К, и при дальнейшем нагревании может испортиться. Таким образом, прибор нужно выключить через 4 минуты.

Ответ: 4.

Вариант № 86541295

13. Тип 9 № 509497

Водолазный колокол, содержащий υ = 2 моля воздуха при давлении p_1 = 1,75 атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A=\alpha\upsilon T\log_2\dfrac{p_2}{p_1}$, где $\alpha=13{,}3\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, T = 300 К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15 960 Дж.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $A=15960$:

$$13{,}3\cdot2\cdot300\log_2\frac{p_2}{1{,}75}=15960\Leftrightarrow 7980\log_2\frac{p_2}{1{,}75}=15960\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_2\frac{p_2}{1{,}75}=2\Leftrightarrow\frac{p_2}{1{,}75}=4\Leftrightarrow p_2=7.$$

14. Тип 9 № 505445

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч^2. Скорость вычисляется по формуле $\upsilon=\sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 250 метров, приобрести скорость 60 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

Решение. Выразим ускорение из формулы для скорости и найдём его:

$$a=\frac{\upsilon^2}{2l}=\frac{60^2}{2\cdot0{,}25}=7200\ \text{км/ч}^2.$$

Ответ: 7200.

15. Тип 9 № 42113

В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1=72$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление дается формулой $R_{\text{общ}}=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 18 Ом. Ответ выразите в омах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $R_{общ} \geqslant 18$ Ом при известном значении сопротивления приборов $R_1 = 72$ Ом:

$$R_{общ} \geqslant 18 \Leftrightarrow \frac{72R_2}{72+R_2} \geqslant 18 \Leftrightarrow 54R_2 \geqslant 1296 \Leftrightarrow R_2 \geqslant 24 \text{ Ом}.$$

Таким образом, наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя — 24 Ом.

Ответ: 24.

16. Тип 9 № 689032

Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $\upsilon = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 600\ 000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $g(q) = q(p - \upsilon) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 900 000 руб.

Решение. Задача сводится к нахождению решения уравнения $\pi(q) = 900\ 000$ руб. при заданных значениях цены за единицу $p = 400$ руб., переменных затрат на производство одной единицы продукции $\upsilon = 200$ руб. и постоянных расходов предприятия $f = 600\ 000$ руб. в месяц:

$$\pi(q) = 900\ 000 \Leftrightarrow q(p-\upsilon) - f_0 = 900\ 000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q(400-200) - 600\ 000 = 900\ 000 \Leftrightarrow q = 7500.$$

Ответ: 7500.

17. Тип 9 № 28321

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ульт-развуковые импульсы частотой 187 МГц. Скорость погружения батискафа вычисляется по формуле $\upsilon = c\dfrac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмни-ком (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 4 м/с.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $\upsilon = 4$ м/с при известных значениях $c = 1500$ м/с — скорости звука в воде и $f_0 = 187$ МГц — частоты испускаемых импульсов:

$$\upsilon = 4 \Leftrightarrow 1500 \cdot \frac{f-187}{f+187} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 375 \cdot \frac{f-187}{f+187} = 1 \Leftrightarrow 375f - 375 \cdot 187 = f + 187 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 374f = 187 \cdot 376 \Leftrightarrow f = 188 \text{ МГц}.$$

Ответ: 188.

18. Тип 9 № 509418

При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 450$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол β (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin\beta = k\lambda$. Под каким минимальным углом β (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решётке с периодом, не превосходящим 1800 нм.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $d \leqslant 1800$ нм на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях длины волны света $\lambda = 450$ нм и номера максимума $k = 2$:

$$\frac{k\lambda}{\sin\varphi} \leqslant 1800 \Leftrightarrow 1800\sin\varphi \geqslant 900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\varphi \geqslant \frac{1}{2} \underset{0°<\varphi<90°}{\Leftrightarrow} 30° \leqslant \alpha < 90°.$$

Значит, минимальный угол равняется 30°.

Ответ: 30.

19. Тип 9 № 510825

Гоночный автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением а км/ч^2. Скорость υ в конце пути вычисляется по формуле $\upsilon = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь в км. Определите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 250 метров, приобрести скорость 60 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

Решение. Выразим ускорение из формулы для скорости и найдём его:

$$a = \frac{\upsilon^2}{2l} = \frac{60^2}{2 \cdot 0,25} = 7200 \text{ км/ч}^2.$$

Ответ: 7200.

20. Тип 9 № 27967

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_{\text{A}} = \rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ выразите в метрах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $F_{\text{A}} \leqslant 78400$ при заданных значениях плотности воды и ускорении свободного падения:

$$F_{\text{A}} \leqslant 78400 \Leftrightarrow 1000 \cdot 9{,}8 \cdot l^3 \leqslant 78400 \Leftrightarrow l^3 \leqslant 8 \Leftrightarrow l \leqslant 2 \text{ м}.$$

Ответ: 2.

21. Тип 9 № 43097

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\upsilon = 4$ моля воздуха объемом $V_1 = 14$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 11,6$ постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 27 840 Дж?

Решение. Задача сводится к решению уравнения $\alpha\upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2} = 27\,840$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 11{,}6$, температуры воздуха $T = 300$ К, количества воздуха $\upsilon = 4$ моль и объема воздуха $V_1 = 14$ л:

$$11,6 \cdot 4 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{14}{V_2} = 27\,840 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{14}{V_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{14}{V_2} = 4 \Leftrightarrow V_2 = 3,5 \text{ л}.$$

Значит, объем, который будет занимать воздух, равен 3,5 л.

Ответ: 3,5.

22. Тип 9 № 559404

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель — целое число от −2 до 2.

Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 1.

Решение. Поскольку показатели максимальны, они равны 2. Подставим значения в формулу:

$$1 = \frac{8+2+6+2}{A} \Leftrightarrow A = 18.$$

Ответ: 18.

23. Тип 9 № 42831

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, где m_0 − начальная масса изотопа, t − время, прошедшее от начального момента, T − период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 136 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 17 мг.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $m(t) = 17$ при заданных значениях параметров $m_0 = 136$ мг и $T = 10$ мин:

$$m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = 17 \Leftrightarrow 136 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} = 17 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{10}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} = -3 \Leftrightarrow t = 30 \text{ мин}.$$

Ответ: 30.

24. Тип 9 № 514183

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 4500 \text{ км}/\text{ч}^2$. Скорость υ (в км/ч) вычисляется по формуле $\upsilon = \sqrt{2la}$ где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 90 км/ч.

Решение. Выразим путь из формулы для скорости и найдём его:

$$l=\frac{\upsilon^2}{2a}=\frac{90^2}{2\cdot 4500}=0{,}9\ \text{км}.$$

Ответ: 0,9.

25. Тип 9 № [513901]

Груз массой 0,05 кг колеблется на пружине. Его скорость υ меняется по закону $\upsilon=\upsilon_0\sin\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $\upsilon_0=1{,}2$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\frac{m\upsilon^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, υ — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 11 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение. Найдем скорость груза через 11 секунд после начала колебаний:

$$\upsilon=\upsilon_0\sin\frac{2\pi t}{T}=$$
$$=1{,}2\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 11}{12}=1{,}2\cdot\sin\frac{11\pi}{6}=1{,}2\cdot\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-1{,}2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=-1{,}2\cdot 0{,}5=-0{,}6$$

Найдем кинетическую энергию груза через 11 секунд после начала колебаний:

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{0{,}05\cdot(-0{,}6)^2}{2}=0{,}009$$

Ответ: 0,009

26. Тип 9 № [28123]

Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega=40^\circ/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=4^\circ/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 3000°. Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

Решение. Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства $\varphi\leqslant 3000$ при заданных значениях параметров ω и β:

$$\varphi\leqslant 3000\Leftrightarrow 2t^2+40t\leqslant 3000\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^2+20t-1500\leqslant 0\Leftrightarrow -50\leqslant t\leqslant 30\ \text{мин}$$

Учитывая то, что время — неотрицательная величина, получаем $t\leqslant 30$. Угол намотки достигнет значения 3000° при $t = 30$ мин.

Ответ: 30.

27. Тип 9 № [27970]

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f=30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

Решение. Поскольку $f=30$, имеем:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{30}\Leftrightarrow\frac{1}{d_1}=\frac{1}{30}-\frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному d_1 значению соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30}-\frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2. Поэтому $d_2=180$, откуда

$$\frac{1}{d_1}=\frac{1}{30}-\frac{1}{180}\Leftrightarrow\frac{1}{d_1}=\frac{5}{180}\Leftrightarrow\frac{1}{d_1}=\frac{1}{36}\Leftrightarrow d_1=36\ \text{см}.$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение удовлетворяет условию.

Ответ: 36.

28. Тип 9 № 42787

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 1,2 \cdot 10^8$ Па $\cdot$ м^5, где p − давление газа в паскалях, V − объем газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $3,75 \cdot 10^6$ Па.

Решение. Поскольку произведение давления на степень объёма постоянно, а давление не ниже $3,75 \cdot 10^6$, при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и $\mathrm{const} = 1,2 \cdot 10^8$ Па $\cdot$ м^5 имеем неравенство:

$$3,75 \cdot 10^6 V^{\frac{5}{3}} \leqslant 1,2 \cdot 10^8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow V^{\frac{5}{3}} \leqslant 32 \Leftrightarrow V \leqslant 32^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow V \leqslant 8 \text{ м}^3.$$

Значит, наибольший объем, который может занимать газ, равен 8 м^3.

Ответ: 8.

29. Тип 9 № 28017

При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $l(t^\circ) - l_0 = 9$ мм при заданных значениях длины $l_0 = 20$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ\mathrm{C})^{-1}$:

$$l(t^\circ) - l_0 = 9 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ) - l_0 = 9 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0 \alpha t^\circ = 9 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} t^\circ = 9 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^\circ = \frac{9 \cdot 10^{-3}}{2,4 \cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^\circ = 37,5\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Ответ: 37,5.

30. Тип 9 № 680770

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности *In*, оперативности *Op*, объективности публикаций *Tr*, а также качества сайта *Q*. Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 4.

Составители рейтинга считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — втрое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3In + Op + 2Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

Решение. Обозначим совпадающую оценку по разным показателям x. Поскольку все показатели равны друг другу, все они равны x. Подставим значения в формулу, учитывая, что рейтинг равен x:

$$x = \frac{3x + x + 2x + x}{A} \Leftrightarrow Ax = 7x \Leftrightarrow A = 7.$$

Ответ: 7.

31. Тип 9 № 28463

В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,4$ — постоянная. Определите (в киловольтах), наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 28 с. Ответ дайте в киловольтах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $t \geqslant 28$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ, сопротивления резистора $R = 4 \cdot 10^6$ Ом и ёмкости конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф:

$$t \geqslant 28 \Leftrightarrow 1,4 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot \log_2 \frac{12}{U} \geqslant 28 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{12}{U} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{12}{U} \geqslant 2 \Leftrightarrow U \leqslant 6 \text{ кВ}.$$

Ответ: 6.

32. Тип 9 № 28365

Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 5,6 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 10,4 километров?

Решение. Задача сводится к решению уравнений $l=5,6$ и $l=10,4$ при заданном значении R:

$$\sqrt{\frac{6400h}{500}}=5,6 \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{28}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{7}{10} \Leftrightarrow \frac{h}{5}=\frac{49}{100} \Leftrightarrow h=\frac{245}{100} \Leftrightarrow h=2,45.$$
$$\sqrt{\frac{6400h}{500}}=10,4 \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{52}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{13}{10} \Leftrightarrow \frac{h}{5}=\frac{169}{100} \Leftrightarrow h=\frac{845}{100} \Leftrightarrow h=8,45.$$

Следовательно, чтобы видеть горизонт на более далеком расстоянии, наблюдателю нужно подняться на $8,45-2,45=6$ метров.

Ответ: 6.

Примечание.
Условие неправдоподобно: уровень глаз стоящего человека не может находиться на уровне 2,5 метра.

33. Тип 9 № 27969

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P=\sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma=5,7\cdot10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{16}\cdot10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $9,12\cdot10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $P=9,12\cdot10^{25}$ при известном значениях постоянной $\sigma=5,7\cdot10^{-8}$ и заданной площади звезды $S=\frac{1}{16}\cdot10^{20}$:

$$\sigma ST^4=9,12\cdot10^{25} \Leftrightarrow T^4=\frac{9,12\cdot10^{25}}{\sigma S} \Leftrightarrow T=\sqrt[4]{\frac{9,12\cdot10^{25}}{\sigma S}},$$

откуда

$$T=\sqrt[4]{\frac{9,12\cdot10^{25}}{5,7\cdot10^{-8}\cdot\frac{1}{16}\cdot10^{20}}}=$$
$$=\sqrt[4]{25,6\cdot10^{13}}=\sqrt[4]{256\cdot10^{12}}=4000\text{ К}.$$

Ответ: 4000.

34. Тип 9 № 43741

Два тела массой $m=2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $\upsilon=10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q=m\upsilon^2\sin^2\alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 100 джоулей?

Решение. Задача сводится к решению неравенства $Q\geqslant100$ Дж на полуинтервале $2\alpha\in(0^\circ;180^\circ]$ при заданных значениях массы тел $m=2$ кг и их скоростей $\upsilon=10$ м/с:

$$m\upsilon^2\sin^2\alpha\geqslant100 \Leftrightarrow 200\sin^2\alpha\geqslant100 \Leftrightarrow \sin^2\alpha\geqslant\frac{1}{2} \underset{0^\circ<\alpha\leqslant90^\circ}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{0^\circ<\alpha\leqslant90^\circ}{\Leftrightarrow} \sin\alpha\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2} \underset{0^\circ<\alpha\leqslant90^\circ}{\Leftrightarrow} 45^\circ\leqslant\alpha\leqslant90^\circ.$$

Значит, наименьший угол $2\alpha=2\cdot45^\circ=90^\circ$.

Ответ: 90.

35. Тип 9 № 317096

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель — целое число от −2 до 2.

Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R=\frac{3In+Op+2Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 30.

Решение. Поскольку показатели максимальны, они все равны 2. Подставим значения в формулу и учтем, что рейтинг равен 30:

$$30=\frac{6+2+4}{A}\Leftrightarrow 30A=12\Leftrightarrow A=0,4.$$

Ответ: 0,4.

36. Тип 9 № 42255

Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m=1400$ тонн представляют собой две пустотелые балки длиной $l=14$ метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p=\frac{mg}{2ls}$, где m — масса экскаватора (в тоннах), l — длина балок в метрах, s — ширина балок в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g=10$ м/с^2). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 250 кПа. Ответ выразите в метрах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $p\leqslant 250$ кПа при известных значениях длины балок $l=14$ м, массы экскаватора $m=1400$ т:

$$p\leqslant 250\Leftrightarrow\frac{1400\cdot 10}{2\cdot 14s}\leqslant 250\Leftrightarrow s\geqslant 2 \text{ м}.$$

Ответ: 2.

37. Тип 9 № 41177

Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p=400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $\upsilon=200$ руб., постоянные расходы предприятия $f=500000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q)=q(p-\upsilon)-f$. Определите месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 1 000 000 руб.

Решение. Задача сводится к нахождению решения уравнения $\pi(q)=1000000$ руб. при заданных значениях цены за единицу $p=400$ руб., переменных затрат на производство одной единицы продукции $\upsilon=200$ руб. и постоянных расходов предприятия $f=500000$ руб. в месяц:

$$\pi(q)=1000000\Leftrightarrow q(p-\upsilon)-f_0=1000000\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q(400-200)-500000=1000000\Leftrightarrow q=7500.$$

Значит, месячный объем производства, при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 1 000 000 руб, равен 7500 единиц.

Ответ: 7500.

38. Тип 9 № 28453

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением $pV^{1,4}=const$, где p (атм.) — давление газа, V — объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 16 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объема можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

Решение. Пусть p_1 и V_1 - начальные, а p_2 и V_2 - конечные значения объема и давления газа, соответственно. Тогда задача сводится к решению неравенства

$$V_2 \geqslant \left(\frac{p_1 V_1^{1,4}}{p_2}\right)^{\frac{1}{1,4}}, \text{ где } p_1 = 1 \text{ атм.}, V_1 = 16 \text{ л.}, p_2 = 128 \text{ атм.}$$

Тогда

$$V_2 \geqslant \left(\frac{16^{\frac{7}{5}}}{128}\right)^{\frac{5}{7}} \Leftrightarrow V_2 \geqslant \left(2^{-7}\right)^{\frac{5}{7}} \cdot 16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow V_2 \geqslant \frac{16}{32} \Leftrightarrow V_2 \geqslant 0,5.$$

Ответ: 0,5.

39. Тип 9 № 530554

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{64} \cdot 10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $2,28 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Решение. Выразим температуру звезды из формулы Стефана-Больцмана и найдём её:

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}} = \sqrt[4]{\frac{2,28 \cdot 10^{25} \cdot 64}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{20}}} = 4000.$$

Ответ: 4000.

40. Тип 9 № 43049

Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 15°\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды m = 0,6 кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 91°\text{C}$ до температуры T, причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot °\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 28 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot °\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,8$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 144 м.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $\alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}} = 144$ при заданных значениях теплоёмкости воды $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °\text{C}}$, коэффициента теплообмена $\gamma = 28 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot °\text{C}}$, постоянной $\alpha = 0{,}8$, температуры помещения $T_{\text{п}} = 15\ °\text{C}$ и расхода воды $m = 0{,}6$ кг/с:

$$0,8 \cdot \frac{4200 \cdot 0,6}{28} \log_2 \frac{91 - 15}{T - 15} = 144 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{76}{T - 15} = 2 \Leftrightarrow \frac{76}{T - 15} = 4 \Leftrightarrow T = 34°\text{C}.$$

Ответ: 34.

41. Тип 9 № 28007

Двигаясь со скоростью $\upsilon = 3$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 50$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = F\upsilon\cos\alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 75 кВт $\left(\text{кВт — это } \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{с}}\right)$.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $F\upsilon\cos\alpha = 75$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях силы $F = 50$ кН и скорости $\upsilon = 3$ м/с:

$$50 \cdot 3\cos\alpha = 75 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} \alpha = 60°.$$

Ответ: 60.

42. Тип 9 № 516397

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$, где $m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 15, их средняя оценка равна $0,5$, а оценка экспертов равна $0,42$.

Решение. Подставим значения в формулу:

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^{\frac{0.02K}{r_{\text{пок}}+0.1}}} = 0,5 - \frac{0,5-0,42}{(15+1)^{\frac{0.02\cdot 15}{0.5+0.1}}} =$$
$$= 0,5 - \frac{0,08}{16^{0,5}} = 0,5 - 0,02 = 0,48.$$

Ответ: 0,48.

43. Тип 9 № 642324

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки используется линза с фокусным расстоянием f, равным 20 см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 20 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 100 до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. На каком наименьшем расстоянии d_1 (в см) от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким.

Вариант № 86541295

Решение. Поскольку $f = 20$ имеем:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{20} - \frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному d_1 значению соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{20} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2. Поэтому $d_2 = 120$, откуда

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{20} - \frac{1}{120} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{5}{120} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{24} \Leftrightarrow d_1 = 24 \text{ см}.$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 20 до 50 см от линзы. Найденное значение удовлетворяет условию.

Ответ: 24.

44. Тип 9 № 28357

Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 8 километров? Ответ выразите в метрах.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $l = 8$ при заданном значении R:

$$\sqrt{\frac{6400h}{500}} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{64h}{5}} = 8 \Leftrightarrow \frac{64h}{5} = 64 \Leftrightarrow h = 5 \text{ м}.$$

Ответ: 5.

45. Тип 9 № 563892

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 224 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Решение. Подставим в формулу $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, данные из условия: $p_1 = 1$ атм, $V_1 = 224$ л, $p_2 = 128$ атм. Решим полученное уравнение, заметив, что $1,4 = \frac{7}{5}$ и возведя обе части уравнения в степень $\frac{5}{7}$:

$$1 \cdot 224^{\frac{7}{5}} = 128 \cdot V_2^{\frac{7}{5}} \Leftrightarrow 224 = (2^7)^{\frac{5}{7}} \cdot V_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 224 = 32V_2 \Leftrightarrow V_2 = 7\,(\text{л}).$$

Ответ: 7.

46. Тип 9 № 27955

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t − время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Решение. Пусть h_1 — расстояние до воды до дождя, h_2 — расстояние до воды после дождя. После дождя уровень воды в колодце повысится, расстояние до воды уменьшится, и время падения уменьшится, станет равным $t = 0,6 - 0,2 = 0,4$ с. Уровень воды поднимется на $h_1 - h_2$ метров.

$$h_1 - h_2 = 5 \cdot 0,6^2 - 5 \cdot 0,4^2 = 1.$$

Ответ: 1.

47. Тип 9 № 42685

Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 2400$ кг — общая масса навеса и колонны, D — диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, а $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 800 000 Па. Ответ выразите в метрах.

Решение. Найдем, при котором диаметре колонны давление, оказываемое на опору, станет равным 800 000 Па. Задача сводится к решению уравнения $\frac{4mg}{\pi D^2} = 800000$ при заданном значении массы навеса и колонны $m = 2400$ кг:

$$\frac{4 \cdot 2400 \cdot 10}{3 \cdot D^2} = 800000 \Leftrightarrow \frac{4}{D^2} = 100 \Leftrightarrow D^2 = 0,04 \underset{D>0}{\Leftrightarrow} D = 0,2.$$

Если диаметр колонны будет меньше найденного, то давление, оказываемое на опору, будет больше 800 000 Па, поэтому наименьший возможный диаметр колонны равен 0,2 м.

Ответ: 0,2.

48. Тип 9 № 27954

Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $\upsilon = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - \upsilon) - f$. Определите месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 300 000 руб.

Решение. Задача сводится к нахождению решения уравнения $\pi(q) = 300\ 000$ руб. при заданных значениях цены за единицу $p = 500$ руб., переменных затрат на производство одной единицы продукции $\upsilon = 300$ руб. и постоянных расходов предприятия $f = 700\ 000$ руб. в месяц:

$$\pi(q) = 300\ 000 \Leftrightarrow q(p - \upsilon) - f_0 = 300\ 000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q(500 - 300) - 700\ 000 = 300\ 000 \Leftrightarrow q = 5000.$$

Ответ: 5000.

49. Тип 9 № 510067

Водолазный колокол, содержащий $\upsilon = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}75$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 13,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15 960 Дж.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $A=15\,960$:

$$13,3\cdot 2\cdot 300\log_2\frac{p_2}{1,75}=15\,960\Leftrightarrow 7980\log_2\frac{p_2}{1,75}=15\,960\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_2\frac{p_2}{1,75}=2\Leftrightarrow\frac{p_2}{1,75}=4\Leftrightarrow p_2=7.$$

50. Тип 9 № 43175

Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t=\frac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полета составит 2,6 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $\upsilon_0=13$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $t(\alpha)\geqslant 2,6$ на интервале $(0^\circ;90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости и ускорения свободного падения:

$$\frac{2\cdot 13\cdot\sin\alpha}{10}\geqslant 2,6\Leftrightarrow\sin\alpha\geqslant 1\underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow}\alpha=90^\circ.$$

Таким образом, наименьшее значение угла α равно 90°.

Ответ: 90.