1. Тип 15 № 517822

Решите неравенство $\dfrac{\log_3 x}{\log_3\left(\frac{x}{27}\right)} \geqslant \dfrac{2}{\log_3 x} + \dfrac{5}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}$.

Решение. Пусть $t = \log_3 x$, решим рациональное неравенство:

$$\frac{t}{t-3} \geqslant \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2-3t} \Leftrightarrow \frac{t\cdot t - 2(t-3) - 5}{t(t-3)} \geqslant 0$$

$$\frac{t^2-2t+1}{t(t-3)} \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t(t-3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<0, \\ t=1, \\ t>3. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной, получим: $0<x<1,\ x=3,\ x>27$.

Ответ: $(0;1)\cup\{3\}\cup(27;+\infty)$.

2. Тип 15 № 526326

Решите неравенство $\log_6(21-7x) \geqslant \log_6(x^2-8x+15) + \log_6(x+3)$.

Вариант № 86880753

Решение. Пользуясь свойствами логарифма, преобразуем неравенство:

$$\log_6(21-7x) \geqslant \log_6(x^2-8x+15) + \log_6(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21-7x>0, \\ x^2-8x+15>0, \\ x+3>0, \\ 21-7x \geqslant (x^2-8x+15)(x+3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ (x-3)(x-5)>0, \\ x>-3, \\ 7(3-x) \geqslant (x-3)(x-5)(x+3) \end{cases} \underset{x<3}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{x<3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3<x<3, \\ (x-5)(x+3) \geqslant -7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<3, \\ x^2-2x-8 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<3, \\ (x+2)(x-4) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x\leqslant -2.$$

Ответ: $(-3;-2]$.

Приведём другое решение.

Пользуясь свойствами логарифма, преобразуем неравенство:

$$\log_6(21-7x) \geqslant \log_6(x^2-8x+15) + \log_6(x+3) \Leftrightarrow$$

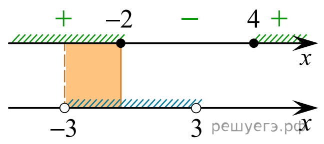
$$\Leftrightarrow \log_6 7 + \log_6(3-x) \geqslant \log_6\left((x-3)(x-5)\right) + \log_6(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_6 7 + \log_6(3-x) \geqslant \log_6(3-x) + \log_6(5-x) + \log_6(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_6 7 \geqslant \log_6(5-x) + \log_6(x+3), \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 \geqslant (5-x)(x+3), \\ x<3, \\ 5-x>0, \\ 3+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-8 \geqslant 0, \\ -3<x<3 \end{cases} \underset{\text{см.рис}}{\Leftrightarrow} -3<x\leqslant -2$$

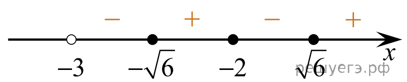


3. Тип 15 № [548480]

Решите неравенство $x^2\log_{343}(x+3) \leqslant \log_7(x^2+6x+9)$.

Решение. Используем свойства логарифма, разложим на множители:

$$x^2\log_{343}(x+3) \leqslant \log_7(x^2+6x+9) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3}\log_7(x+3) \leqslant \log_7(x+3)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3}\log_7(x+3) - 2\log_7(x+3) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-6)\log_7(x+3) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})\log_7(x+3) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})(x+2) \leqslant 0, \\ x+3>0. \end{cases}$$



Применим на луче $x>-3$ метод интервалов (см. рис.) и выпишем ответ: $-3<x\leqslant -\sqrt{6}$, $-2\leqslant x\leqslant \sqrt{6}$.

Ответ: $(-3;\ -\sqrt{6}]\cup[-2;\ \sqrt{6}]$.

4. Тип 15 № [640281]

Решите неравенство: $\log_{5x-5}5+\log_{(x-1)^2}125 \geqslant 2$.

Решение. Перейдём в левой части неравенства к логарифмам по основанию 5:

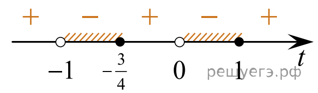
$$\frac{\log_5 5}{\log_5(5x-5)}+\frac{\log_5 125}{\log_5(x-1)^2}=\frac{1}{\log_5(5(x-1))}+\frac{3}{\log_5(x-1)^2}=$$
$$=\frac{1}{\log_5 5+\log_5(x-1)}+\frac{3}{2\log_5|x-1|}.$$

В знаменателе первой дроби стоит выражение $\log_5(x-1)$, которое определено лишь при $x-1>0$. При этом условии раскроем модуль в знаменателе второй дроби, получим:

$$\frac{1}{1+\log_5(x-1)}+\frac{3}{2\log_5(x-1)} \geqslant 2.$$

Пусть $\log_5(x-1)=t$, тогда

$$\frac{1}{1+t}+\frac{3}{2t} \geqslant 2 \Leftrightarrow \frac{2t+3(1+t)-4t(t+1)}{2t(1+t)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-4t^2+t+3}{2t(1+t)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4t^2-t-3}{2t(1+t)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{4(t-1)(t+\frac{3}{4})}{2t(1+t)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<t\leqslant -\dfrac{3}{4}, \\ 0<t\leqslant 1. \end{array}\right.$$



Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} -1<\log_5(x-1)\leqslant -\dfrac{3}{4}, \\ 0<\log_5(x-1)\leqslant 1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^{-1}<x-1\leqslant 5^{-\frac{3}{4}}, \\ 5^0<x-1\leqslant 5^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{5}<x-1\leqslant \dfrac{1}{\sqrt[4]{125}}, \\ 1<x-1\leqslant 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{6}{5}<x\leqslant 1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{125}}, \\ 2<x\leqslant 6. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{6}{5};\,1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{125}}\right]\cup(2;6]$.

5. Тип 15 № [508473]

Решите неравенство: $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}>2\sqrt[4]{3}$.

Решение. Приведем второе слагаемое к основанию 3:

$$x^{\log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = 3^{\log_3^2 x}.$$

Неравенство принимает вид $2\cdot 3^{\log_3^2 x} > 2\sqrt[4]{3} \Leftrightarrow 3^{\log_3^2 x} > 3^{0,25} \Leftrightarrow |\log_3 x| > \dfrac{1}{2}.$

Получаем: $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ или $x > \sqrt{3}.$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup(\sqrt{3};\ +\infty).$

6. Тип 15 № 548802

Решите неравенство $3\cdot 45^x - 3\cdot 27^x - 28\cdot 15^x + 28\cdot 9^x + 9\cdot 5^x - 3^{x+2} \leqslant 0.$

Решение. Сгруппируем и разложим на множители:

$$\Leftrightarrow 3\cdot 45^x - 3\cdot 27^x - 28\cdot 15^x + 28\cdot 9^x + 9\cdot 5^x - 9\cdot 3^x \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x}(5^x-3^x) - 28\cdot 3^x(5^x-3^x) + 9(5^x-3^x) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (5^x-3^x)(3\cdot 3^{2x} - 28\cdot 3^x + 9) \leqslant 0.$$

Решим уравнение $5^x - 3^x = 0.$ Получаем:

$$5^x = 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Решим уравнение $3\cdot 3^{2x} - 28\cdot 3^x + 9 = 0.$ Положим $t = 3^x,$ получим уравнение $3t^2 - 28t + 9 = 0,$ откуда $t = \dfrac{1}{3}$ или $t = 9.$ Тогда $3^x = \dfrac{1}{3}$ или $3^x = 9,$ откуда $x = -1$ или $x = 2.$

Итак, левая часть обращается в нуль в точках -1, 0 и 2. Для решения неравенства применим метод интервалов, находим $x \leqslant -1$ или $0 \leqslant x \leqslant 2.$

Ответ: $(-\infty;\ -1]\cup[0;\ 2].$

Приведем другое решение.

Сгруппируем и разложим на множители:

$$3\cdot 45^x - 3\cdot 27^x - 28\cdot 15^x + 28\cdot 9^x + 9\cdot 5^x - 3^{x+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot 45^x - 3\cdot 27^x - 28\cdot 15^x + 28\cdot 9^x + 9\cdot 5^x - 9\cdot 3^x \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x}(5^x-3^x) - 28\cdot 3^x(5^x-3^x) + 9(5^x-3^x) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3\cdot 3^{2x} - 28\cdot 3^x + 9)(5^x-3^x) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3\cdot 3^x - 1)(3^x - 9)(5^x - 3^x) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3^{-1})(3^x - 3^2)(5^x - 3^x) \leqslant 0.$$

Применим метод рационализации: заменим каждый множитель на рациональный, имеющий с ним тот же знак. Получаем:

$$(x-(-1))(x-2)x \leqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)x \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{array}\right.$$

7. Тип 15 № 517515

Решите неравенство: $\dfrac{8^{x+1} - 40}{2\cdot 64^x - 32} \leqslant 1.$

Решение. Пусть $t = 8^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{4t-20}{t^2-16} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{t^2-4t+4}{t^2-16} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)^2}{(t-4)(t+4)} \geqslant 0,$$

откуда $t < -4;\ t = 2;\ t > 4.$

При $t < -4$ получим $8^x < -4$, решений нет.

При $t = 2$ получим $8^x = 2$, откуда $x = \dfrac{1}{3}.$

При $t > 4$ получим $8^x > 4$, откуда $x > \dfrac{2}{3}.$

Решение исходного неравенства: $x = \dfrac{1}{3};\ x > \dfrac{2}{3}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right).$

8. Тип 15 № 628368

Решите неравенство $\left(\dfrac{1}{x^2-7x+10} - \dfrac{x-2}{5-x}\right)\sqrt{x^3-9x^2+20x} \leqslant 0.$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{1}{(x-2)(x-5)}-\frac{x-2}{5-x}\right)\sqrt{x(x^2-9x+20)}\leqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{1+(x-2)^2}{(x-2)(x-5)}\cdot\sqrt{x(x-5)(x-4)}\leqslant 0.$$

Рассмотрим два случая.

1. При условии $(x-2)(x-5)\neq 0$, выражение $x(x-5)(x-4)=0$, откуда $x = 0$ или $x = 4$.

2. При условии $x(x-5)(x-4)>0$, выражение $\frac{1+(x-2)^2}{(x-2)(x-5)}\leqslant 0$, то есть $(x-2)(x-5)<0$. Получаем $2<x<4$.

Таким образом, решение неравенства: $\{0\}\cup(2;4]$.

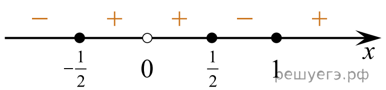
Ответ: $\{0\}\cup(2;4]$.

9. Тип 15 № 508432

Решите неравенство: $\frac{x^5-x^2}{x^2}\geqslant\frac{x^3-1}{4x^2}$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^5-x^2}{x^2}\geqslant\frac{x^3-1}{4x^2}\Leftrightarrow\frac{(x^3-1)(4x^2-1)}{x^2}\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x-1)(2x-1)(2x+1)}{x^2}\geqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-0,5\leqslant x<0,\\ 0<x\leqslant 0,5,\\ x\geqslant 1.\end{array}\right.$$



Ответ: $[-0,5;\ 0)\cup(0;\ 0,5]\cup[1;\ +\infty)$.

10. Тип 15 № 507693

Решите неравенство: $\frac{(x^2+x)\log_8(x^2+4x-4)}{|x-2|}\geqslant\frac{\log_8(-x^2-4x+4)^6}{x-2}$.

Решение. Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{(x^2+x)\log_8(x^2+4x-4)}{|x-2|}\geqslant\frac{\log_8(-x^2-4x+4)^6}{x-2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x^2+x)\log_8(x^2+4x-4)}{|x-2|}\geqslant\frac{6\log_8(x^2+4x-4)}{x-2}.$$

При $x>2$:

$$\begin{cases}\frac{(x^2+x-6)\log_8(x^2+4x-4)}{x-2}\geqslant 0,\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{(x-2)(x+3)\log_8(x^2+4x-4)}{x-2}\geqslant 0,\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_8(x^2+4x-4)\geqslant 0,\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-4\geqslant 1,\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x+5)\geqslant 0,\\ x>2.\end{cases}\Leftrightarrow x>2.$$

При $x<2$:

$$\begin{cases}\frac{(x^2+x+6)\log_8(x^2+4x-4)}{2-x}\geqslant 0,\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\log_8(x^2+4x-4)}{2-x}\geqslant 0,\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_8(x^2+4x-4)\geqslant 0,\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-4\geqslant 1,\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-5\geqslant 0,\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x+5)\geqslant 0,\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leqslant -5,\\ 1\leqslant x<2.\end{array}\right.$$

Таким образом, получаем, что решение неравенства — множество $(-\infty;-5]\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-5]\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$.

11. Тип 15 № 507801

Решите неравенство: $\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\sqrt{2^x-10\sqrt{2^x}+16}\geqslant 0.$

Решение. Найдём, при каких значениях x подкоренное выражение неотрицательно. Пусть $\sqrt{2^x}=t$:

$$t^2-10t+16\geqslant 0\Leftrightarrow (t-2)(t-8)\geqslant 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leqslant 2, \\ t\geqslant 8. \end{array}\right.$$

Тогда:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2^x}\leqslant 2, \\ \sqrt{2^x}\geqslant 8 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x\leqslant 4, \\ 2^x\geqslant 64 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant 2, \\ x\geqslant 6. \end{array}\right.$$

Тем самым, область определения неравенства: $(-\infty;\ 2]\cup[6;\ +\infty)$.
Решим неравенство методом интервалов. Найдём нули левой части:

$$2^{\frac{x-4}{2}}-1=0\Leftrightarrow \frac{x-4}{2}=0\Leftrightarrow x=4, \text{ (не входит в ОДЗ)}$$

$$2^x-10\sqrt{2^x}+16=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Расставим точки на прямой и определим знаки на области определения:

Таким образом, решение исходного неравенства: $\{2\}\cup[6;\ +\infty)$.

Ответ: $\{2\}\cup[6;\ +\infty)$.

12. Тип 15 № 508492

Решите неравенство: $\log_{\frac{x}{3}}\left(3x^2-2x+1\right)\geqslant 0.$

Вариант № 86880753

Решение. Заметим, что $3x^2-2x+1>0$ при всех x. При условиях $x>0$ и $x\neq 3$ методом рационализации получаем неравенство

$$\frac{3x^2-2x+1-1}{\frac{x}{3}-1}\geqslant 0\Leftrightarrow \frac{x(3x-2)}{x-3}\geqslant 0.$$

С учётом указанных условий получаем ответ: $0<x\leqslant\frac{2}{3}$ или $x>3$.

Ответ: $\left(0;\ \frac{2}{3}\right]\cup(3;\ +\infty)$.

13. Тип 15 № 558012

Решите неравенство $\dfrac{2021^{\log_3(2x^2-x)}}{2020+\lg 10^{\sin^2 x+\cos^2 x}}\leqslant\dfrac{1}{2021^{-\log_3(6x-3)+\log_3^2 x}}.$

Решение. Заметим, что $\lg 10^{\sin^2 x+\cos^2 x}=\lg 10=1$, откуда находим, что знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, равен 2021. Далее получаем:

$$\frac{2021^{\log_3(2x^2-x)}}{2021}\leqslant 2021^{\log_3(6x-3)-\log_3^2 x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2021^{\log_3(2x^2-x)-1}\leqslant 2021^{\log_3 3(2x-1)-\log_3^2 x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x(2x-1))-1\leqslant 1+\log_3(2x-1)-\log_3^2 x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3 x+\log_3(2x-1)-1\leqslant 1+\log_3(2x-1)-\log_3^2 x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3^2 x+\log_3 x-2\leqslant 0, \\ 2x-1>0 \end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\leqslant\log_3 x\leqslant 1, \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{9}\leqslant x\leqslant 3, \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow \frac{1}{2}<x\leqslant 3.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};3\right]$.

14. Тип 15 № 645665

Решите неравенство: $\dfrac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6}\geqslant 0.$

Решение. Числитель дроби имеет вид $a^2-2ab-3b^2$ и раскладывается на множители $(a-3b)(a+b)$. Действительно,

$$\begin{aligned}&(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2=\\&=(x^2+x+1)^2-2|x|\cdot|x^2+x+1|-3|x|^2=\\&=\left(|x^2+x+1|-3|x|\right)\left(|x^2+x+1|+|x|\right).\end{aligned}$$

Множитель $\left(|x^2+x+1|+|x|\right)$ положителен при любых значениях переменной x, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

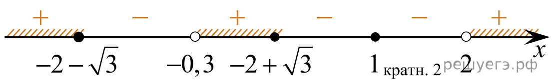
$$\frac{|x^2+x+1|-3|x|}{10x^2-17x-6}\geqslant 0.$$

Разность модулей двух выражений имеет тот же знак, что разность квадратов этих выражений, а потому

$$\begin{aligned}&\frac{|x^2+x+1|-3|x|}{10x^2-17x-6}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{(x^2+x+1)^2-(3x)^2}{10x^2-17x-6}\geqslant 0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\frac{(x^2+x+1-3x)(x^2+x+1+3x)}{(10x+3)(x-2)}\geqslant 0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2(x^2+4x+1)}{(10x+3)(x-2)}\geqslant 0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(10x+3)(x-2)}\geqslant 0.\end{aligned}$$

Сравним корень числителя $-2+\sqrt{3}$ и корень знаменателя $-0,3$, и решим неравенство методом интервалов:

$$\begin{aligned}&3>2,89\Rightarrow\sqrt{3}>\sqrt{2,89}\Rightarrow\sqrt{3}>1,7\Rightarrow\\&\Rightarrow -2+\sqrt{3}>-2+1,7\Rightarrow -2+\sqrt{3}>-0,3.\end{aligned}$$



Таким образом, решением неравенства является совокупность

$$\left[\begin{array}{l}x\leqslant -2-\sqrt{3},\\ -0,3<x\leqslant -2+\sqrt{3},\\ x=1,\\ x>2.\end{array}\right.$$

Вариант № 86880753

Ответ: $(-\infty;\,-2-\sqrt{3}]\cup(-0,3;\,-2+\sqrt{3}]\cup\{1\}\cup(2;\,+\infty)$.

15. Тип 15 № 669745

Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x^2+2x}+x-2}{\log_5(1,5-x)+\log_5 2}\leqslant 0.$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\frac{\sqrt{1-x^2+2x}+x-2}{\log_5(1,5-x)+\log_5 2}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2-(x-1)^2}+x-2}{\log_5(3-2x)}\leqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов.

1. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 2-(x-1)^2\geqslant 0, \\ \log_5(3-2x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{2}, \\ x<\dfrac{3}{2}, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2}\leqslant x<\dfrac{3}{2}, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

2. Найдём значения x, при которых числитель левой части обращается в нуль:

$$\sqrt{1-x^2+2x}+x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2+2x}=2-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2+2x=x^2-4x+4, \\ 2-x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-6x+3=0, \\ x\leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, \\ x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}, \end{array}\right. \\ x\leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

3. Отметим на числовой оси ОДЗ неравенства и найденный корень, методом пробных точек определим знаки выражения на каждом из получившихся промежутков.

При $x=1,01$ получаем:

$$\frac{\sqrt{2-(1,01-1)^2}+1,01-2}{\log_5(3-2\cdot 1,01)}<0,$$

поскольку числитель положителен, а знаменатель отрицателен.

При $x=0,99$ получаем:

$$\frac{\sqrt{2-(0,99-1)^2}+0,99-2}{\log_5(3-2\cdot 0,99)}>0,$$

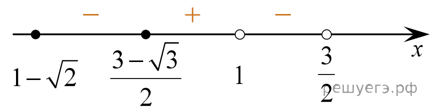
поскольку числитель и знаменатель положительны.

При $x=1-\sqrt{2}$ получаем:

$$\frac{0+1-\sqrt{2}-2}{\log_5(3-2\cdot(1-\sqrt{2}))}<0,$$

поскольку числитель отрицателен, а знаменатель положителен.

Расставим найденные знаки на числовой оси:



Таким образом, $1-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ или $1<x<\dfrac{3}{2}$.

Ответ: $\left[1-\sqrt{2};\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left(1;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Примечание.

Число $x=1-\sqrt{2}$ является границей ОДЗ, но не обращает левую часть неравенства в нуль, поэтому его можно использовать для определения знака левой части на промежутке $\left[1-\sqrt{2};\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Приведём другое решение.

Воспользуемся методом рационализации:

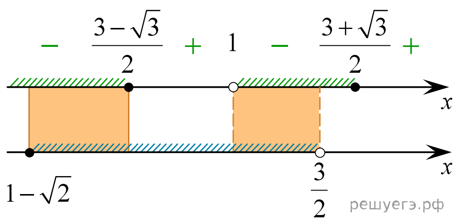
$$\frac{\sqrt{1-x^2+2x}+x-2}{\log_5(3-2x)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x^2+2x}+x-2}{3-2x-1}\leqslant 0, \\ x<\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

При $x<\dfrac{3}{2}$ верно равенство $x-2=-\sqrt{(x-2)^2}$. Тогда получим

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x^2+2x}-\sqrt{(x-2)^2}}{2-2x}\leqslant 0,\\ x<\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-x^2+2x-(x-2)^2}{1-x}\leqslant 0,\\ 1-x^2+2x\geqslant 0,\\ x<\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-x^2+6x-3}{1-x}\leqslant 0,\\ 1-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{2},\\ x<\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+3}{x-1}\leqslant 0,\\ 1-\sqrt{2}\leqslant x<\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\\ 1<x<\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[1-\sqrt{2};\,\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left(1;\,\dfrac{3}{2}\right)$.

16. Тип 15 № 513100

Решите неравенство $\dfrac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geqslant 0.$

Решение. Пусть $y=2^{2-x^2}-1$, тогда

$$\frac{3}{y^2}-\frac{4}{y}+1\geqslant 0.$$

Введём замену $t=\dfrac{1}{y}$, решим квадратное неравенство:

$$3t^2-4t+1\geqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\leqslant\dfrac{1}{3},\\ t\geqslant 1.\end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной y:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{y}\leqslant\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{y}\geqslant 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-y}{3y}\leqslant 0,\\ \dfrac{1-y}{y}\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y<0,\\ y\geqslant 3,\\ 0<y\leqslant 1.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}2^{2-x^2}-1<0,\\ 2^{2-x^2}-1\geqslant 3,\\ 0<2^{2-x^2}-1\leqslant 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{2-x^2}<1,\\ 2^{2-x^2}\geqslant 4,\\ 1<2^{2-x^2}\leqslant 2\end{array}\right.\underset{2>1}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{2>1}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}2-x^2<0,\\ 2-x^2\geqslant 2,\\ 0<2-x^2\leqslant 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2>2,\\ x^2\leqslant 0,\\ 1\leqslant x^2<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\sqrt{2},\\ x>\sqrt{2},\\ x=0,\\ 1\leqslant x<\sqrt{2},\\ -\sqrt{2}<x\leqslant -1.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\ -1]\cup\{0\}\cup[1;\ \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ +\infty)$.

17. Тип 15 № 643157

Решите неравенство $\dfrac{\log_3 x}{\log_3\dfrac{x}{27}}\geqslant\dfrac{2}{\log_3 x}+\dfrac{5}{\log_3^2 x-\log_3 x^3}.$

Решение. Пусть $\log_3 x = t$, тогда

$$\frac{t}{t-3} \geqslant \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2-3t} \Leftrightarrow \frac{t^2-2(t-3)-5}{t(t-3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-2t+1}{t(t-3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t(t-3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<0, \\ t=1, \\ t>3. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x<0, \\ \log_3 x=1, \\ \log_3 x>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ x=3, \\ x>27. \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;1)\cup\{3\}\cup(27;+\infty)$.

18. Тип 15 № 555969

Решите неравенство $\dfrac{-2x^2+19x+10}{5x+2x^2+2} \geqslant 1+\dfrac{2}{x}$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\frac{x+2}{x}+\frac{2x^2-19x-10}{2x^2+5x+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x}+\frac{(2x+1)(x-10)}{(x+2)(2x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)((x+2)^2+x(x-10))}{x(x+2)(2x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-1)(x-2)}{x(x+2)(2x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x<-\dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{2}<x<0, \\ 1\leqslant x\leqslant 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-2;-0,5)\cup(-0,5;0)\cup[1;2]$.

19. Тип 15 № 513274

Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0$.

Решение. Определим область допустимых значений:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ 3-x>0, \\ 2-x>0, \\ x+3>0, \\ 2-x\neq 1, \\ x+3\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x<3, \\ x<2, \\ x>-3, \\ x\neq 1, \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Таким образом, $x \in (-2;1)\cup(1;2)$.

Воспользуемся функцией перехода логарифма к другому основанию, получим:

$$\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}\cdot\frac{\ln(3-x)}{\ln(x+3)} \leqslant 0$$

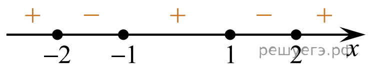
И учитывая правило декомпозиции $\log_a f \to (a-1)\cdot(f-1)$, где множитель $a-1>0$ можно сразу отбросить, получим

$$\frac{(x+2-1)\cdot(3-x-1)}{(2-x-1)\cdot(x+3-1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x+2)}{(-x+1)(x+2)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0,$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} x=-1, \\ x\neq 1, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2. \end{cases}$$



Ответ: $x \in (-2;-1]\cup(1;2)$.

20. Тип 15 № 677447

Решите неравенство: $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant x^2+x+1$.

Решение. Для положительных a выражения a^b-a^c и $(a-1)(b-c)$ имеют один знак, а потому

$$(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant (x^2+x+1)^1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1>0, \\ (x^2+x+1-1)\cdot\left(\dfrac{x+5}{x+2}-1\right)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2+x)\cdot\frac{3}{x+2}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{x+2}\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x\leqslant -1, \\ x\geqslant 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-2;-1]\cup[0;+\infty)$.

Приведем другое решение.

Заметим, что при любом значении x

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0. \ (*)$$

Значит, обе части неравенства положительны. Логарифмируем обе части неравенства по основанию 10:

$$(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant x^2+x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lg(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant \lg(x^2+x+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+5}{x+2}\cdot\lg(x^2+x+1)-\lg(x^2+x+1)\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lg(x^2+x+1)\cdot\left(\frac{x+5}{x+2}-1\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\lg(x^2+x+1)-\lg 1\right)\cdot\frac{3}{x+2}\geqslant 0 \underset{(*)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (x^2+x+1-1)\cdot\frac{1}{x+2}\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{x+2}\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x\leqslant -1, \\ x\geqslant 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-2;-1]\cup[0;+\infty)$.

Вариант № 86880753

21. Тип 15 № 507652

Решите неравенство $5^{-|x-2|}\cdot\log_2(4x-x^2-2)\geqslant 1$.

Решение. Покажем, что наибольшее значение левой части неравенства равно 1. Действительно,

$$0<5^{-|x-2|}\leqslant 5^0=1.$$

В силу тождества $4x-x^2-2=2-(x-2)^2$ имеем:

$$\log_2(4x-x^2-2)=\log_2(2-(x-2)^2)\leqslant\log_2 2=1.$$

Поскольку левая часть не больше 1, а правая равна 1, неравенство выполнено тогда и только тогда, когда оба множителя равны 1, откуда

$$\begin{cases}\log_2(4x-x^2-2)=1, \\ 5^{-|x-2|}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-(x-2)^2=2, \\ |x-2|=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

22. Тип 15 № 689038

Решите неравенство $\dfrac{8\cdot 7^x-4^{x\log_2 7}-11}{(2x-1)^2}\geqslant 0$.

Решение. Точка $x=\dfrac{1}{2}$ не является решением неравенства. При $x\neq\dfrac{1}{2}$ получаем:

$$8\cdot 7^x-49^x-11\geqslant 0.$$

Пусть $y=7^x$, тогда $4-\sqrt{5}\leqslant y\leqslant 4+\sqrt{5}$. Получаем $4-\sqrt{5}\leqslant 7^x\leqslant 4+\sqrt{5}$, откуда $\log_7(4-\sqrt{5})\leqslant x\leqslant\log_7(4+\sqrt{5})$.

Нужно сравнить границы полученного отрезка с $\dfrac{1}{2}$. Имеем:

$$4-\sqrt{5}<2<\sqrt{7}<6<4+\sqrt{5}.$$

Следовательно, $\log_7(4-\sqrt{5})<\dfrac{1}{2}<\log_7(4+\sqrt{5})$, и поэтому решением неравенства являются два промежутка: $\log_7(4-\sqrt{5})\leqslant x<\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{2}<x\leqslant\log_7(4+\sqrt{5})$.

Ответ: $\left[\log_7(4-\sqrt{5});\ \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ \log_7(4+\sqrt{5})\right]$.

23. Тип 15 № 508542

Решите неравенство: $\sqrt{3\cdot 4^x-5\cdot 2^{x+1}+3}\geqslant 2^x-3.$

Решение. Пусть $2^x=t,\ t>0$, тогда данное неравенство принимает вид:

$$\sqrt{3t^2-10t+3}\geqslant t-3.$$

Область определения этого неравенства задается условием:

$$3t^2-10t+3\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leqslant \dfrac{1}{3}, \\ t\geqslant 3. \end{array}\right.$$

При $t\leqslant \dfrac{1}{3}$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, следовательно, неравенство выполняется при всех $t\leqslant \dfrac{1}{3}$.

При $t\geqslant 3$ имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{3t^2-10t+3}\geqslant t-3, \\ t\geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)(3t-1)\geqslant (t-3)^2, \\ t\geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)(2t+2)\geqslant 0, \\ t\geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow t\geqslant 3.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x\leqslant 3^{-1}, \\ 2^x\geqslant 3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant -\log_2 3, \\ x\geqslant \log_2 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -\log_2 3]\cup[\log_2 3;\ +\infty).$

24. Тип 15 № 484593

Решите неравенство $3\log_{11}(x^2+8x-9)\leqslant 4+\log_{11}\dfrac{(x-1)^3}{x+9}.$

Решение. Найдём значения x, при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2+8x-9>0, \\ \dfrac{(x-1)^3}{x+9}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-1)>0, \\ \dfrac{(x-1)^3}{x+9}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-9, \\ x>1. \end{array}\right.$$

Для таких x получаем:

$$3\log_{11}(x+9)(x-1)+\log_{11}\frac{x+9}{(x-1)^3}=$$

$$=\log_{11}\frac{(x+9)^3(x-1)^3(x+9)}{(x-1)^3}=\log_{11}(x+9)^4.$$

Тогда исходное неравенство примет вид: $\log_{11}(x+9)^4\leqslant 4$. Учитывая, что неравенство определено на множестве $(-\infty,\ -9)\cup(1,\ +\infty)$, имеем:

$$2\log_{11}(x+9)^2\leqslant 4 \Leftrightarrow (x+9)^2\leqslant 11^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+20)\leqslant 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} -20\leqslant x<-9, \\ 1<x\leqslant 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-20;\ -9)\cup(1;\ 2].$

25. Тип 15 № 508535

Решите неравенство: $\log_{3-x}\dfrac{x+4}{(x-3)^2}\geqslant -2.$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\geqslant -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-x}(x+4)-\log_{3-x}(x-3)^2\geqslant -2 \Leftrightarrow \log_{3-x}(x+4)\geqslant 0.$$

Рассмотрим два случая.

а) $0<3-x<1.$

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+4)\geqslant 0, \\ 0<3-x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x+4\leqslant 1, \\ 2<x<3. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

б) $3-x>1.$

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\geqslant 0,\\ 3-x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4\geqslant 1,\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow -3\leqslant x<2.$$

Ответ: $-3\leqslant x<2$

26. Тип 15 № 525728

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2(x^2-9)-2\right)\geqslant -1.$

Решение. Последовательно получаем:

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2(x^2-9)-2\right)\geqslant -1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0<\log_2(x^2-9)-2\leqslant 3\Leftrightarrow 2<\log_2(x^2-9)\leqslant 5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4<x^2-9\leqslant 32\Leftrightarrow 13<x^2\leqslant 41\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{41}\leqslant x<-\sqrt{13},\\ \sqrt{13}<x\leqslant\sqrt{41}.\end{array}\right.$$

Ответ: $[-\sqrt{41};\ -\sqrt{13})\cup(\sqrt{13};\ \sqrt{41}]$.

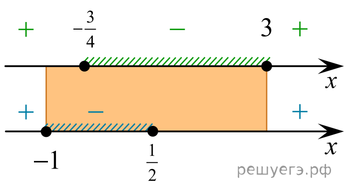
27. Тип 15 № 508433

Решите неравенство: $\left|2x^2+\frac{19}{8}x-\frac{1}{8}\right|\geqslant 3x^2+\frac{1}{8}x-\frac{19}{8}$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+\frac{19}{8}x-\frac{1}{8}\geqslant 3x^2+\frac{1}{8}x-\frac{19}{8},\\ -2x^2-\frac{19}{8}x+\frac{1}{8}\geqslant 3x^2+\frac{1}{8}x-\frac{19}{8}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}\leqslant 0,\\ x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-3)\left(x+\frac{3}{4}\right)\leqslant 0,\\ (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 3.$$



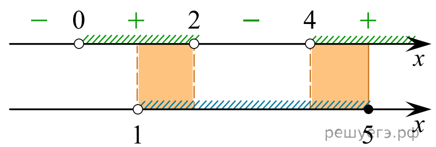
Ответ: $[-1;\ 3]$.

28. Тип 15 № 507833

Решите неравенство $\sqrt{5-x}<\frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{5-x}<\frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{x-1}<\sqrt{x^3-7x^2+14x-5},\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\cdot(5-x)<x^3-7x^2+14x-5,\\ 1<x\leqslant 5\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-6x^2+8x>0,\\ 1<x\leqslant 5\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)(x-4)>0,\\ 1<x\leqslant 5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2,\\ 4<x\leqslant 5.\end{array}\right.$$



Ответ: $(1;\ 2)\cup(4;\ 5]$.

29. Тип 15 № 552115

Решите неравенство $\sqrt{1-\log_5(x^2-2x+2)}<\log_5(5x^2-10x+10)$.

Решение. Пусть $\log_5(x^2-2x+2)=t$, тогда

$$\sqrt{1-t}<1+t \Leftrightarrow \begin{cases}1-t<(1+t)^2,\\ 1+t\geqslant 0,\\ 1-t\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t^2+3t>0,\\ -1\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}t<-3,\\ t>0,\end{array}\right.\\ -1\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow 0<t\leqslant 1.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$0<\log_5(x^2-2x+2)\leqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<x^2-2x+2\leqslant 5 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+1>0,\\ x^2-2x-3\leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2>0,\\ (x+1)(x-3)\leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leqslant x<1,\\ 1<x\leqslant 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $[-1;1)\cup(1;3]$.

30. Тип 15 № 526809

Решите неравенство $4\log_4^2\left(\sin^3 x\right)+8\log_2(\sin x)\geqslant 1$.

Решение. Заметим, что

$$\log_{a^2}^2 b^3=\left(\log_{a^2} b^3\right)^2=\left(\frac{3}{2}\log_a b\right)^2=\frac{9}{4}(\log_a b)^2,$$

а потому при условии $\sin x>0$ неравенство можно записать в виде

$$9\log_2^2(\sin x)+8\log_2(\sin x)\geqslant 1.$$

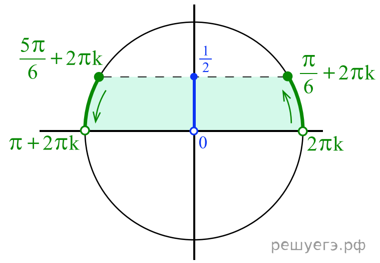
Пусть $\log_2(\sin x)=t$, тогда

$$9t^2+8t-1\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\leqslant -1,\\ t\geqslant \frac{1}{9}.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(\sin x)\leqslant -1,\\ \log_2(\sin x)\geqslant \frac{1}{9}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<\sin x\leqslant \frac{1}{2},\\ \sin x\geqslant 2^{\frac{1}{9}}\end{array}\right. \underset{\sin x\leqslant 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\sin x\leqslant 1}{\Leftrightarrow} 0<\sin x\leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\pi k<x\leqslant \frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\leqslant x<\pi+2\pi k,\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$



Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)$.

31. Тип 15 № 508364

Решите неравенство: $\dfrac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\leqslant\dfrac{(3x+1)^2}{4}$.

Решение. Решим первое неравенство:

$$\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\leqslant\frac{(3x+1)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2+8(x+1)^2\leqslant(3x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2+8x^2+16x+8\leqslant 9x^2+6x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9\leqslant 0 \Leftrightarrow (x+3)^2\leqslant 0 \Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ: $\{-3\}$.

32. Тип 15 № 517461

Решите неравенство: $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\geqslant\dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}$.

Решение. Пусть $3^x=t$, тогда

$$\frac{t+9}{t-9}+\frac{t-9}{t+9}\geqslant\frac{12t+144}{t^2-81}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{t^2+18t+81}{(t-9)(t+9)}+\frac{t^2-18t+81}{(t-9)(t+9)}-\frac{12t+144}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{2t^2-12t+18}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-9,\\ t=3,\\ t>9.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}3^x<-9,\\ 3^x=3,\\ 3^x>9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x>2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{1\}\cup(2;\ +\infty)$.

33. Тип 15 № 673232

Решите неравенство: $\dfrac{2\log_6^2 x+31}{2\log_{36}216x}\leqslant 10+\log_{\frac{1}{6}}x^2$.

Решение. Пусть $t=\log_6 x$, тогда $\log_{\frac{1}{6}}x^2=-2t$, а $2\log_{36}216x=t+3$. Получаем:

$$\frac{2t^2+31}{t+3}\leqslant 10-2t\Leftrightarrow\frac{2t^2+31-(10-2t)(t+3)}{t+3}\leqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{4t^2-4t+1}{t+3}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{(2t-1)^2}{t+3}\leqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2},\\ t<-3.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\log_6 x=\frac{1}{2},\\ \log_6 x<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{6},\\ 0<x<\frac{1}{216}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{216}\right)\cup\left\{\sqrt{6}\right\}$.

34. Тип 15 № 520785

Решите неравенство: $\log_5(3x+1)+\log_5\left(\dfrac{1}{72x^2}+1\right)\geqslant\log_5\left(\dfrac{1}{24x}+1\right)$.

Решение. Правая часть неравенства определена при $x<-\dfrac{1}{24}$ и $x>0$. При этих условиях выражение $\dfrac{1}{72x^2}+1$ принимает только положительные значения, а потому неравенство можно записать в виде

$$(3x+1)\cdot\left(\frac{1}{72x^2}+1\right)\geqslant\frac{1}{24x}+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x+1+\frac{1}{24x}+\frac{1}{72x^2}\geqslant\frac{1}{24x}+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x+\frac{1}{72x^2}\geqslant 0\underset{(*)}{\Leftrightarrow}216x^3+1\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant-\frac{1}{6}.$$

$(*)$ Мы воспользовались тем, что на ОДЗ выражение $72x^2$ положительно, а потому можно умножить на него обе части неравенства, не меняя знака неравенства. Учитывая условия $x<-\dfrac{1}{24}$ и $x>0$, получаем: $-\dfrac{1}{6}\leqslant x<-\dfrac{1}{24}$ или $x>0$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{6};-\frac{1}{24}\right)\cup(0;+\infty)$.

Примечание.

Внимательный читатель отметит, что мы не находили область существования первого логарифма. Однако все преобразования равносильны: из неравенств $AB\geqslant C$, $B>0$ и $C>0$ следует неравенство $A>0$. Иными словами, множество решений неравенства $(3x+1)\cdot\left(\dfrac{1}{72x^2}+1\right)\geqslant\dfrac{1}{24x}+1$ при условии положительности правой части будет содержать только такие значения переменной, для которых $3x+1>0$.

35. Тип 15 № 507894

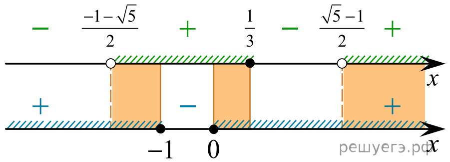
Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1}\leqslant 0$.

Решение. Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} x^2+x \geqslant 0, \\ x^2-2x+1 \geqslant 0, \\ \dfrac{(x^2-2x+1)-(x^2+x)}{x^2+x-1} \leqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) \geqslant 0, \\ (x-1)^2 \geqslant 0, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+x-1} \geqslant 0, \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $x \leqslant -1$ или $x \geqslant 0$.
Второе неравенство выполняется при всех x.

Из третьего неравенства получаем $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} < x \leqslant \dfrac{1}{3}$ или $x > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.



Таким образом, множество решений исходного неравенства: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ -1\right] \cup \left[0;\ \dfrac{1}{3}\right] \cup \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\ +\infty\right)$.

Ответ: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ -1\right] \cup \left[0;\ \dfrac{1}{3}\right] \cup \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\ +\infty\right)$.

36. Тип 15 № 511573

Решите неравенство: $3^{x+1}+9\cdot 3^{-x} \leqslant 28$.

Решение. Сделаем замену $y=3^x$.

$$3y+\frac{9}{y} \leqslant 28 \Leftrightarrow \frac{3y^2-28y+9}{y} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-9)(3y-1)}{y} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<0, \\ \dfrac{1}{3} \leqslant y \leqslant 9. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x>0$, получаем: $\dfrac{1}{3} \leqslant 3^x \leqslant 9$, откуда находим решение неравенства: $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $[-1;\ 2]$.

37. Тип 15 № 508565

Решите неравенство: $\log_{3x+1}(4x-6)+\log_{4x-6}(3x+1) \leqslant 2$.

Решение. Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\log_{3x+1}(4x-6)+\frac{1}{\log_{3x+1}(4x-6)} \leqslant 2.$$

Сделаем замену $y=\log_{3x+1}(4x-6)$:

$$y+\frac{1}{y} \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{(y-1)^2}{y} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, \\ y<0. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной.
Первый случай:

$$\log_{3x+1}(4x-6)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=4x-6, \\ 3x+1>0, \\ 3x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=7.$$

Второй случай:

$$\log_{3x+1}(4x-6)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-7}{3x}<0, \\ 3x+1>0, \\ 4x-6>0, \\ 3x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-7}{x}<0, \\ x>\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}<x<\frac{7}{4}.$$

Итак, решение неравенства: $\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{7}{4}$ или $x=7$.

Ответ: $\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{7}{4}\right) \cup \{7\}$.

38. Тип 15 № 562251

Решите неравенство $(3-x)\cdot\left(49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\right) \geqslant 0$.

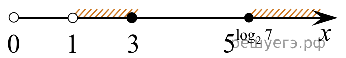
Решение. Обозначая $t=7^{\log_x 5}$, во второй скобке получим $t^2-t-2=(t-2)(t+1)$, откуда

$$(3-x)\cdot\left(49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3-x)\left(7^{\log_x 5}-2\right)\left(7^{\log_x 5}+1\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3-x)\left(7^{\log_x 5}-2\right)\geqslant 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов.
ОДЗ неравенства: $x>0,\ x\neq 1$. Найдём нули левой части:

$$(3-x)\left(7^{\log_x 5}-2\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x=0, \\ 7^{\log_x 5}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ \log_2 7\log_x 5=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ \log_2 7=\dfrac{1}{\log_x 5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ \log_2 7=\log_5 x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=5^{\log_2 7}. \end{array}\right.$$

Отметим на числовой прямой ОДЗ и корни на оси, выберем пробные точки:



— при $x=125$ получаем $(3-125)\left(7^{\log_{125} 5}-2\right)\geqslant 0$ — верно;
— при $x=5$ получаем $(3-5)\left(7^{\log_5 5}-2\right)\geqslant 0$ — неверно;
— при $x=2$ получаем $(3-2)\left(7^{\log_2 5}-2\right)\geqslant 0$ — верно;
— при $x=\dfrac{1}{5}$ получаем $\left(3-\dfrac{1}{5}\right)\left(7^{\log_{\frac{1}{5}} 5}-2\right)\geqslant 0$ — неверно.

Получаем, что $1<x\leqslant 3$ или $x\geqslant 5^{\log_2 7}$.

Ответ: $(1;3]\cup\left[5^{\log_2 7};+\infty\right)$.

39. Тип 15 № 546984

Решите неравенство $\sqrt{25^x-2^{3-x}}<7\cdot 2^{-\frac{x}{2}}-2\cdot 5^x$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\sqrt{25^x-2^{3-x}}<7\cdot 2^{-\frac{x}{2}}-2\cdot 5^x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{50^x-8}{2^x}}<\frac{7-2\sqrt{50^x}}{\sqrt{2^x}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{50^x-8}{2^x}<\dfrac{49-28\sqrt{50^x}+4\cdot 50^x}{2^x}, \\ 50^x-8\geqslant 0, \\ 7-2\sqrt{50^x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 50^x-8<49-28\sqrt{50^x}+4\cdot 50^x, \\ 50^x-8\geqslant 0, \\ 7-2\sqrt{50^x}>0. \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{50^x}=t>0$, тогда имеем

$$\begin{cases} t^2-8<49-28t+4t^2, \\ t^2-8\geqslant 0, \\ 7-2t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2-28t+57>0, \\ (t-\sqrt{8})(t+\sqrt{8})\geqslant 0, \\ 2t<7 \end{cases} \underset{t>0}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{t>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (t-3)(3t-19)>0, \\ t\geqslant\sqrt{8}, \\ t<3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t<3, \\ t>\dfrac{19}{3} \end{array}\right. \\ t\geqslant\sqrt{8}, \\ t<3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{8}\leqslant t<3.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\sqrt{8}\leqslant\sqrt{50^x}<3 \Leftrightarrow 8\leqslant 50^x<9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{50}8\leqslant x<\log_{50}9 \Leftrightarrow 3\log_{50}2\leqslant x<2\log_{50}3.$$

Ответ: $[3\log_{50}2;\ 2\log_{50}3)$.

40. Тип 15 № 520497

Решите неравенство $\log_{(x+4)^2}\left(3x^2-x-1\right)\leqslant 0$.

Решение. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0<(x+4)^2<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-5<x<-4, \\ -4<x<-3.\end{array}\right.$

Тогда $3x^2-x-1 \geqslant 1 \Leftrightarrow (3x+2)(x-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \leqslant -\dfrac{2}{3}, \\ x \geqslant 1.\end{array}\right.$

При $0<(x+4)^2<1$ получаем $\left[\begin{array}{l}-5<x<-4, \\ -4<x<-3.\end{array}\right.$

Второй случай: $(x+4)^2>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-5, \\ x>-3.\end{array}\right.$

Тогда

$$\begin{cases}3x^2-x-1>0, \\ 3x^2-x-1 \leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x-\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right)>0, \\ (3x+2)(x-1) \leqslant 0,\end{cases}$$

откуда $\left[\begin{array}{l}-\dfrac{2}{3} \leqslant x<\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}, \\ \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}<x \leqslant 1.\end{array}\right.$

Найденные решения удовлетворяют условию $(x+4)^2>1$.
Решение исходного неравенства: $(-5;-4) \cup(-4;-3) \cup\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\right) \cup\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}; 1\right]$.

Ответ: $(-5;-4) \cup(-4;-3) \cup\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\right) \cup\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}; 1\right]$.

41. Тип 15 № 629116

Решите неравенство: $\log_{625x} 25 \cdot \log_{0,2}^2(25x) \leqslant 2$.

Решение. Преобразуем неравенство, используя свойства логарифмов:

$$\log_{625x} 25 \cdot \log_{0,2}^2(25x) \leqslant 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_5 25 \cdot \log_5^2(25x)}{\log_5 625x} \leqslant 2. \Leftrightarrow \frac{2\cdot(2+\log_5 x)^2}{4+\log_5 x} \leqslant 2.$$

Положим, $t=\log_5 x$, получим:

$$\frac{(2+t)^2}{4+t} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{4+4t+t^2-4-t}{4+t} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{t^2+3t}{4+t} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(t+3)t}{4+t} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t<-4, \\ -3 \leqslant t \leqslant 0.\end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной, находим:

$$\left[\begin{array}{l}\log_5 x<-4, \\ -3 \leqslant \log_5 x \leqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<\dfrac{1}{625}, \\ \dfrac{1}{125} \leqslant x \leqslant 1.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{625}\right) \cup\left[\dfrac{1}{125}; 1\right]$.

42. Тип 15 № 562695

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{7}} \log_3 \dfrac{|-x+1|+|x+1|}{2x+1} \geqslant 0$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\log_{\frac{1}{7}} \log_3 \frac{|x-1|+|x+1|}{2x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0<\log_3 \frac{|x-1|+|x+1|}{2x+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow 1<\frac{|x-1|+|x+1|}{2x+1} \leqslant 3.$$

Раскроем модули, рассмотрев три случая. При $x \geqslant 1$ имеем:

$$1<\frac{x-1+x+1}{2x+1} \leqslant 3 \Leftrightarrow 1<\frac{2x}{2x+1} \leqslant 3.$$

В полученной дроби положительный числитель меньше положительного знаменателя, значит, решений нет.

При $x \leqslant -1$ имеем:

$$1<\frac{-x+1-x-1}{2x+1} \leqslant 3 \Leftrightarrow 1<\frac{-2x}{2x+1} \leqslant 3.$$

В полученной дроби числитель положителен, знаменатель отрицателен, значит, решений нет.

При $-1 < x < 1$ имеем:

$$1 < \frac{-x+1+x+1}{2x+1} \leqslant 3 \Leftrightarrow 1 < \frac{2}{2x+1} \leqslant 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 < 2 \leqslant 6x+3, \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 < 2, \\ 2 \leqslant 6x+3, \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x \geqslant -\frac{1}{6}, \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leqslant x < \frac{1}{2}.$$

Полученное решение лежит в рассматриваемом промежутке $-1 < x < 1$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$.

Примечание.

Приведя уравнение к виду

$$1 < \frac{|x-1|+|x+1|}{2x+1} \leqslant 3,$$

можно заметить, что $2x+1 > 0$, тогда $|x+1| = x+1$. Поэтому, умножив на положительный знаменатель и снимая модуль, получаем на луче $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$:

$$2x+1 < |x-1|+x+1 \leqslant 6x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| \leqslant 5x+2, \\ |x-1| > x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(5x+2) \leqslant x-1 \leqslant 5x+2, \\ x-1 < -x \text{ или } x-1 > x \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leqslant x < \frac{1}{2}.$$

43. Тип 15 № 548295

Решите неравенство $4^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-10x+25}} < 1$.

Решение. Запишем исходное неравенство в виде

$$4^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-10x+25}} < 1 \Leftrightarrow 4^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-10x+25}} < 4^0 \Leftrightarrow \frac{x^2-7|x|+6}{x^2-10x+25} < 0.$$

Случай $x \geqslant 0$:

$$\frac{x^2-7x+6}{x^2-10x+25} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-6)}{(x-5)^2} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 5, \\ 5 < x < 6. \end{array}\right.$$

Случай $x < 0$:

$$\frac{x^2+7x+6}{x^2-10x+25} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+6)}{(x-5)^2} < 0 \Leftrightarrow -6 < x < -1.$$

Ответ: $(-6; -1) \cup (1; 5) \cup (5; 6)$.

44. Тип 15 № 668797

Решите неравенство: $\log_x(5x-3) - 2 \geqslant \sqrt{\log_x^2(5x-3) + 4\log_x \frac{x}{5x-3}}$.

Решение. При условиях $x > \frac{3}{5},\ x \neq 1$, справедливо преобразование:

$$4\log_x \frac{x}{5x-3} = 4(\log_x x - \log_x(5x-3)) = 4(1-\log_x(5x-3)).$$

Заменим переменную: $t = \log_x(5x-3)$, тогда исходное неравенство примет вид:

$$t-2 \geqslant \sqrt{t^2-4t+4} \Leftrightarrow t-2 \geqslant |t-2| \Leftrightarrow t \geqslant 2.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\log_x(5x-3) \geqslant 2 \Leftrightarrow \log_x(5x-3) \geqslant \log_x x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5}, \\ x \neq 1, \\ (x-1)(5x-3-x^2) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5}, \\ \frac{x^2-5x+3}{x-1} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \\ 1 < x \leqslant \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3}{5} < x \leqslant \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \\ 1 < x \leqslant \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{array} \right.$$

Выше мы воспользовались тем, что

$$\frac{3}{5} < \frac{5-\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow 6 < 25 - 5\sqrt{13} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\sqrt{13} < 19 \Leftrightarrow 25 \cdot 13 < 361 \Leftrightarrow 325 < 261.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{5},\ \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left(1,\ \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$.

45. Тип 15 № 508498

Решите неравенство: $\log_{x^2}(x+2) \leqslant 1$.

Вариант № 86880753

Решение. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 < x+2 \leqslant x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2 \geqslant 0, \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2) \geqslant 0, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x \leqslant -1, \\ x \geqslant 2. \end{array} \right.$$

Учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $-2 < x < -1$ или $x \geqslant 2$.

Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow x+2 \geqslant x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем: $-1 < x < 0$ или $0 < x < 1$.

Множество решений исходного неравенства: $(-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup [2;\ +\infty)$.

Ответ: $(-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup [2;\ +\infty)$.

46. Тип 15 № 627183

Решите неравенство: $(x^2+2x-3) \cdot \log_{1+\cos x}(9+2x-x^2) \geqslant 0$.

Решение. Воспользуемся методом рационализации:

$$(x^2+2x-3) \cdot \log_{1+\cos x}(9+2x-x^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-1) \cdot \lg(9+2x-x^2)}{\lg(1+\cos x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

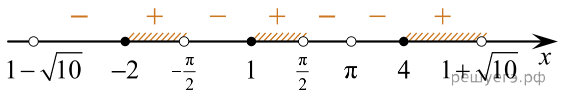
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+3)(x-1)(9+2x-x^2-1)}{1+\cos x - 1} \geqslant 0, \\ 9+2x-x^2 > 0, \\ 1+\cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+3)(x-1)(4-x)(x+2)}{\cos x} \geqslant 0, \\ 1-\sqrt{10} < x < 1+\sqrt{10}, \\ \cos x \neq -1. \end{cases}$$

Заметим, что на интервале $1-\sqrt{10} < x < 1+\sqrt{10}$ знаменатель первого неравенства системы обращается в нуль только в двух точках, а именно в точках $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$, а $\cos x = -1$

— только в точке $x = \pi$.

Применив метод интервалов (см. рис.), получаем: $-2 \leqslant x < -\dfrac{\pi}{2}$, $1 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ или $4 \leqslant x < 1+\sqrt{10}$.



Ответ: $\left[-2; -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[1; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[4; 1+\sqrt{10}\right)$.

47. Тип 15 № 559904

Решите неравенство $\log_{2-5x} 3 + \dfrac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}$.

Вариант № 86880753

Решение. Приведем логарифмы в левой части неравенства к основанию $2-5x$, сложим их, затем перейдем к основанию 6 и вычтем из полученной левой части правую часть неравенства; затем применим метод рационализации:

$$\log_{2-5x} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2-5x} 3 + \log_{2-5x} 2 \leqslant \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2-5x} 6 \leqslant \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_6(2-5x)} - \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_6(6x^2-6x+1) - \log_6(2-5x)}{\log_6(2-5x)\log_6(6x^2-6x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6x^2-6x+1-2+5x}{(2-5x-1)(6x^2-6x+1-1)} \leqslant 0, \\ 6x^2-6x+1>0, \\ 2-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6x^2-x-1}{(1-5x)(x^2-x)} \leqslant 0, \\ 6x^2-6x+1>0, \\ 2-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x-1)(3x+1)}{(1-5x)x(x-1)} \leqslant 0, \\ 6\left(x-\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)>0, \\ x<\dfrac{2}{5} \end{cases} \underset{x<\frac{2}{5}}{\Leftrightarrow}$$

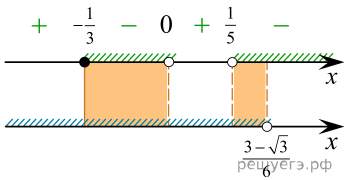
$$\underset{x<\frac{2}{5}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{(3x+1)}{x(1-5x)} \leqslant 0, \\ x-\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}<0, \\ x<\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Заметим, что $0,36 < 3 < 3,24$, тогда

$$0,6<\sqrt{3}<1,8 \Leftrightarrow -1,8<-\sqrt{3}<-0,6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,2<3-\sqrt{3}<2,4 \Leftrightarrow \frac{1}{5}<\frac{3-\sqrt{3}}{6}<\frac{2}{5}.$$

Теперь применим метод интервалов. Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{(3x+1)}{x(1-5x)} \leqslant 0, \\ x<\dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{3} \leqslant x<0, \\ \dfrac{1}{5}<x<\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}. \end{array}\right.$$



Ответ: $\left[-\dfrac{1}{3}; 0\right) \cup\left(\dfrac{1}{5}; \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

48. Тип 15 № 515177

Решите неравенство: $\dfrac{15}{\left(4^{2-x^2}-1\right)^2}-\dfrac{16}{4^{2-x^2}-1}+1 \geqslant 0.$

Решение. Пусть $y=4^{2-x^2}-1$, тогда

$$\frac{15}{y^2}-\frac{16}{y}+1 \geqslant 0.$$

Введём замену $t=\dfrac{1}{y}$, решим квадратное неравенство:

$$15 t^2-16 t+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leqslant \dfrac{1}{15}, \\ t \geqslant 1. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной y:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{15}, \\ \dfrac{1}{y} \geqslant 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{15-y}{15 y} \leqslant 0, \\ \dfrac{1-y}{y} \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<0, \\ y \geqslant 15, \\ 0<y \leqslant 1. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 4^{2-x^2}-1<0, \\ 4^{2-x^2}-1 \geqslant 15, \\ 0<4^{2-x^2}-1 \leqslant 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{2-x^2}<1, \\ 4^{2-x^2} \geqslant 16, \\ 1<4^{2-x^2} \leqslant 2 \end{array}\right. \underset{2>1}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{2>1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 2-x^2<0, \\ 2-x^2 \geqslant 2, \\ 0<2-x^2 \leqslant \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2>2, \\ x^2 \leqslant 0, \\ \dfrac{3}{2} \leqslant x^2<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{2}, \\ x>\sqrt{2}, \\ x=0, \\ \sqrt{\dfrac{3}{2}} \leqslant x<\sqrt{2}, \\ -\sqrt{2}<x \leqslant-\sqrt{\dfrac{3}{2}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty ;\ -\sqrt{2}) \cup\left(-\sqrt{2} ;\ -\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right] \cup\{0\} \cup\left[\sqrt{\dfrac{3}{2}} ;\ \sqrt{2}\right) \cup(\sqrt{2} ;\ +\infty)$.

49. Тип 15 № 484585

Решите неравенство: $\dfrac{14^{1+\lg x}}{7 \lg ^2(100 x) \lg (0,1 x)} \geqslant \dfrac{\left(4 \cdot 2^{\lg (10 x)}\right)^{1+\lg x}}{4 \lg ^2(100 x) \lg (0,1 x)}.$

Решение. Заметим, что

$$(4\cdot 2^{\lg(10x)})^{1+\lg x}=(4\cdot 2^{1+\lg x})^{1+\lg x}=4^{1+\lg x}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}=$$
$$=2^{2(1+\lg x)}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}=2^{1+\lg x}\cdot 2^{1+\lg x}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}=$$
$$=2^{1+\lg x}\cdot 2^{1+\lg x}\cdot 2^{\lg^2 x+2\lg x+1}=$$
$$=2^{1+\lg x}\cdot 2^{1+\lg x+\lg^2 x+2\lg x+1}=2^{1+\lg x}\cdot 2^{\lg^2 x+3\lg x+2}.$$

Преобразуем обе части неравенства:

$$\frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\geqslant\frac{2^{2(1+\lg x)}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}}{4(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\geqslant\frac{2^{(1+\lg x)}\cdot 2^{\lg x^2+3\lg x+2}}{4(\lg x+2)^2(\lg x-1)}.$$

Разделив обе части на $2^{1+\lg x}$ и сократив левую часть на 7, а правую — на 4, получим:

$$\frac{7^{\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\geqslant\frac{2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{7^{\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{2^{\log_2 7\cdot\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\geqslant 0.$$

Сделаем замену: $y=\lg x$, тогда получим

$$\frac{2^{y\log_2 7}-2^{y^2+3y}}{(y+2)^2(y-1)}\geqslant 0,$$

откуда методом рационализации получим

$$\frac{y\cdot\log_2 7-(y^2+3y)}{(y+2)^2(y-1)}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{y(y-(\log_2 7-3))}{(y+2)^2(y-1)}\leqslant 0.$$

Решим полученное рациональное неравенство:

$$\left[\begin{array}{l}y<-2,\\-2<y\leqslant\log_2 7-3,\\0\leqslant y<1.\end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l}0<x<\dfrac{1}{100},\\\dfrac{1}{100}<x\leqslant 10^{\log_2 7-3},\\1\leqslant x<10.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{100}\right)\cup\left(\dfrac{1}{100};\ 10^{\log_2 7-3}\right]\cup[1;\ 10).$

50. Тип 15 № 562235

Решите неравенство $20\log_4^2\cos x+4\log_2\cos x\leqslant 1.$

Решение. Упростим неравенство:

$$20\log_4^2\cos x+4\log_2\cos x\leqslant 1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{20}{4}\log_2^2\cos x+4\log_2\cos x\leqslant 1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\log_2^2\cos x+4\log_2\cos x-1\leqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(5\log_2\cos x-1)(\log_2\cos x+1)\leqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1\leqslant\log_2\cos x\leqslant\frac{1}{5}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant\sqrt[5]{2}\Leftrightarrow\cos x\geqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right].$