1. Тип 18 № [628010]

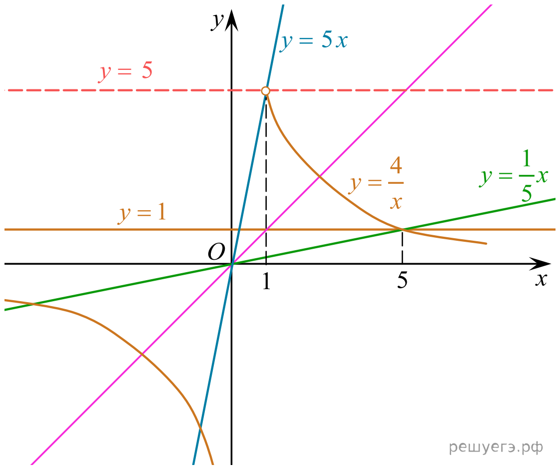
Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - xy - 5y + 5}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет три различных корня.

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\frac{(y-1)(xy-5)}{\sqrt{5-y}} = 0.$$



При $y \geqslant 5$ левая часть не имеет смысла. При $y < 5$ уравнение задаёт прямую $y = 1$ и гиперболу $y = \dfrac{5}{x}$ (см. рис.). При каждом значении a уравнение $y = ax$ задаёт прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через начало координат.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y = 1$ и гиперболы $y = \dfrac{5}{x}$ с прямой $y = ax$ при условии $y < 5$.

Прямая $y = ax$ пересекает прямую $y = 1$ при $a < 0$ и при $a > 0$; пересекает правую ветвь гиперболы при $0 < a < 5$, пересекает левую ветвь гиперболы при $a > 0$, проходит через точку пересечения прямой $y = 1$ и гиперболы при $a = \dfrac{1}{5}$.

Таким образом, исходная система имеет три различных корня при $0 < a < \dfrac{1}{5}$ и при $\dfrac{1}{5} < a < 5$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{5}\right) \cup \left(\dfrac{1}{5}; 5\right)$.

Вариант № 86880801

2. Тип 18 № [620780]

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{a}{25^x} - a = 2 - \frac{25^{-2x}}{5}$$

имеет ровно 2 корня, хотя бы один из которых не менее 0,5.

Решение. Заметим, что

$$x \geqslant 0,5 \Leftrightarrow 25^x \geqslant 5 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{25^x} \leqslant \frac{1}{5}.$$

Пусть $\frac{1}{25^x} = t$, где $t > 0$, тогда

$$at - a = 2 - \frac{1}{5}t^2 \Leftrightarrow t^2 + 5at - 5a - 10 = 0.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + 5at - 5a - 10$. Для того чтобы исходное уравнение имело ровно два корня, хотя бы один из которых не менее 0,5, уравнение $f(t) = 0$ должно иметь два положительных корня, хотя бы один из которых не больше $\frac{1}{5}$. Это достигается в двух случаях.

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ 0 < t_0 < \frac{1}{5}, \\ D > 0, \\ f\left(\frac{1}{5}\right) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(0) > 0, \\ D > 0, \\ f\left(\frac{1}{5}\right) \leqslant 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первую систему:

$$\begin{cases} -5a - 10 > 0, \\ 0 < -\frac{5a}{2} < \frac{1}{5}, \\ 25a^2 + 20a + 40 > 0, \\ \frac{1}{25} + a - 5a - 10 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2, \\ -0,08 < a < 0, \\ a \leqslant -2,49. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Решим вторую систему:

$$\begin{cases} -5a - 10 > 0, \\ 25a^2 + 20a + 40 > 0, \\ \frac{1}{25} + a - 5a - 10 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -2, \\ a \geqslant -2,49 \end{cases} \Leftrightarrow -2,49 \leqslant a < -2.$$

Ответ: $[-2,49; -2)$.

3. Тип 18 № 527254

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$3\sin x + \cos x = a$$

имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 3\sin x + \cos x$. Производная этой функции равна $f'(x) = 3\cos x - \sin x$. Значит, функция *f(x)* возрастает на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \operatorname{arctg} 3\right]$, убывает на отрезке $\left[\operatorname{arctg} 3; \frac{3\pi}{4}\right]$ и достигает максимума в точке $\operatorname{arctg} 3$.

Заметим, что $\sin(\operatorname{arctg} 3) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos(\operatorname{arctg} 3) = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Значит, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, $f(\operatorname{arctg} 3) = \sqrt{10}$. Таким образом, уравнение $f(x) = a$ имеет на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ ровно один корень при $\sqrt{2} \leqslant a < 2\sqrt{2}$ и $a = \sqrt{10}$, имеет ровно два корня при $2\sqrt{2} \leqslant a < \sqrt{10}$ и не имеет корней при остальных значениях a.

Ответ: $\sqrt{2} \leqslant a < 2\sqrt{2}$; $a = \sqrt{10}$.

4. Тип 18 № 629310

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{9}{\sqrt{x+a}} + \frac{16}{\sqrt{y-a}} \leqslant 22 - \sqrt{x+a} - 4\sqrt{y-a}, \\ 2^{x-11} \cdot \log_2(4 - y) = 1 \end{cases}$$

имеет решения.

Решение. Рассмотрим неравенство:

$$\frac{9}{\sqrt{x+a}}+\frac{16}{\sqrt{y-a}}\leqslant 22-\sqrt{x+a}-4\sqrt{y-a}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{\sqrt{x+a}}+\sqrt{x+a}+\frac{16}{\sqrt{y-a}}+4\sqrt{y-a}\leqslant 22\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{x+a}}+\frac{\sqrt{x+a}}{3}\right)+8\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{y-a}}+\frac{\sqrt{y-a}}{2}\right)\leqslant 22.$$

Заметим, что в скобках находятся суммы двух взаимно обратных положительных чисел, каждая из которых не меньше двух, поэтому первое произведение не меньше $3\cdot 2 = 6$, а вторе не меньше $8\cdot 2 = 16$. Следовательно, левая часть полученного неравенства не меньше 22. С другой стороны, по условию она не больше 22. Таким образом, неравенство обращается в равенство

$$3\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{x+a}}+\frac{\sqrt{x+a}}{3}\right)+8\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{y-a}}+\frac{\sqrt{y-a}}{2}\right)=22,$$

а значит, каждая из сумм взаимно обратных чисел равна 2. Это возможно, только если каждое из слагаемых равно 1, откуда получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{x+a}}=1,\\ \dfrac{2}{\sqrt{y-a}}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+a=9,\\ y-a=4\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=13,\\ y-a=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=13-y,\\ a=y-4.\end{cases}$$

Подставив в уравнение исходной системы $x=13-y$, получим уравнение с одной переменной

$$2^{13-y-11}\cdot\log_2(4-y)=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_2(4-y)=\frac{1}{2^{2-y}}\Leftrightarrow\log_2(4-y)=2^{y-2}.$$

Заметим, что $y=2$ — корень полученного уравнения. При этом левая часть уравнения представляет собой убывающую функцию, а правая — возрастающую, значит, уравнение имеет не более одного корня, а потому других корней нет.

Таким образом, решением исходной системы является только одна пара чисел $(11;2)$, и это решение достигается при $a=-2$. При других значениях параметра исходная система не имеет решений.

Ответ: −2.

5. Тип 18 № 635157

Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$a(a-7,5)-2(a-7,5)\left(2^x+2\right)\leqslant\left(2x^2-3x\right)\times$$
$$\times\left(2^x+2\right)-ax^2+1,5ax$$

имеет хотя бы одно решение на промежутке [−1; 0).

Решение. Преобразуем неравенство:

$$a(a-7,5)-2(a-7,5)\left(2^x+2\right)\leqslant\left(2x^2-3x\right)\left(2^x+2\right)-ax^2+1,5ax\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a-7,5)(a-2^{x+1}-4)\leqslant(x^2-1,5x)(2^{x+1}+4-a)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a-2^{x+1}-4)(a+x^2-1,5x-7,5)\leqslant 0.\quad(*)$$

Рассмотрим функцию $f(x)=2^{x+1}+4$. Она непрерывная и возрастающая, $f(-1)=5$, $f(0)=6$, поэтому на промежутке $[-1;0)$ функция принимает все значения из полуинтервала $[5;6)$. Функция $g(x)=-x^2+1,5x+7,5$ на промежутке [−1; 0) также непрерывна и возрастает, $g(-1)=5$, $g(0)=7,5$, поэтому принимает все значения из полуинтервала [5; 7,5).

Из этого следует, что при $a<5$ на промежутке [−1; 0) оба множителя в левой части неравенства (∗) отрицательны, а при $a\geqslant 7,5$ оба множителя положительны, поэтому при таких значениях параметра неравенство не выполняется. В то же время при каждом значении $5\leqslant a<7,5$ множитель $a+x^2-1,5x-7,5=0$ будет обращаться в нуль в какой-то из точек промежутка [−1; 0) и неравенство будет выполнено.

Ответ: [5; 7,5).

6. Тип 18 № 523380

Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases}y=(a+2)x^2+2ax+a-1,\\ x=(a+2)y^2+2ay+a-1\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Система не изменится, если поменять x и y местами. Следовательно, система имеет единственное решение, только если $x=y$. Получаем уравнение:

$$(a+2)x^2+(2a-1)x+a-1=0.$$

Это уравнение должно иметь единственный корень.

Если $a\neq -2$, то уравнение квадратное, значит, его дискриминант должен равняться нулю:

$$(2a-1)^2-4(a+2)(a-1)=0 \Leftrightarrow -8a+9=0, \text{ откуда } a=\frac{9}{8}.$$

При $a=\frac{9}{8}$ получаем $\frac{25}{8}x^2+\frac{10}{8}x+\frac{1}{8}=0$, откуда $x=-0,2$. Решением системы является пара $(-0,2;\ -0,2)$.

Если $a=-2$, получается линейное уравнение $5x+3=0$, которое имеет единственное решение $x=-0,6$. Решением системы является пара $(-0,6;\ -0,6)$.

Покажем, что в этих случаях нет иных решений, где $x\neq y$. Вычтем второе уравнение системы из первого и разделим полученное уравнение почленно на $x-y\neq 0$:

$$-1=(a+2)(x+y)+2a.$$

При $a=-2$ получаем уравнение $-1=0\cdot(x+y)-4$. У этого уравнения решений нет.

При $a=\frac{9}{8}$ получаем $y=-\frac{26}{25}-x$. Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$-\frac{26}{25}-x=\frac{25}{8}x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{8} \Leftrightarrow 25x^2+26x+\frac{233}{25}=0.$$

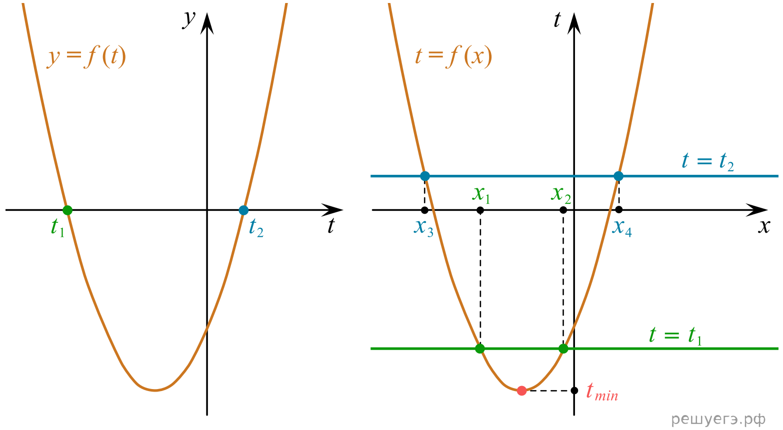
Полученное уравнение не имеет корней.

Ответ: $-2;\ \frac{9}{8}$.

7. Тип 18 № 633186

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для функции $f(x)=x^2-4ax+a^2$ уравнение $f(f(x))=0$ имеет ровно четыре решения.

Решение. Пусть $t=f(x)$. Для того, чтобы уравнение $f(f(x))=0$ имело ровно четыре решения необходимо и достаточно, чтобы меньший из двух различных корней квадратного уравнения $f(t)=0$ был больше наименьшего значения квадратичной функции $t=f(x)$. Тогда каждому из двух различных значений t, будет соответствовать два различных значения x.



Решим уравнение $f(t)=0$:

$$t^2-4at+a^2=0 \Leftrightarrow t^2-4at+4a^2-3a^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t-2a)^2=3a^2 \Leftrightarrow t-2a=\pm\sqrt{3a^2} \Leftrightarrow t=2a\pm\sqrt{3a^2}.$$

При $a=0$ корни совпадают, что не подходит. При прочих a меньший корень уравнения равен $2a-\sqrt{3a^2}$.

Преобразуем выражение, задающее функцию $t=f(x)$:

$$t=x^2-4ax+a^2=(x-2a)^2-3a^2\geqslant -3a^2.$$

Значение $t=-3a^2$ достигается при $x=2a$, а потому является наименьшим значением функции $t=f(x)$.

Теперь при $a\neq 0$ решим неравенство:

$$2a-\sqrt{3a^2}>-3a^2 \Leftrightarrow 2a+3a^2>\sqrt{3a^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3a^2\geqslant 0, \\ (2a+3a^2)^2>3a^2, \\ 3a^2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2+3a)\geqslant 0, \\ (2+3a)^2>3, \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(2+3a) \geqslant 0, \\ (2+3a-\sqrt{3})(2+3a+\sqrt{3}) > 0, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -\dfrac{2}{3}, \\ a > 0, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a < -\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ a > -\dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ a > 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}\right) \cup (0; +\infty)$.

8. Тип 18 № 559412

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = a$$

имеет единственное решение.

Решение. При $a = 0$ уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = a$ принимает вид $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ и имеет бесконечно много решений.

При $a \neq 0$ выражения $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}$ и $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}$ — имеют смысл при $x \geqslant |a|$. При таких значениях a и x имеем $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} > 0$. Значит, в этом случае уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = a$ равносильно уравнениям

$$(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) = a(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}),$$
$$(x+a) - (x-a) = a(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) \text{ и } \sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = 2.$$

Пусть $a \neq 0$ и $f(x) = \sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}$. Тогда функция $y = f(x)$ определена при $x \in [|a|; +\infty)$, непрерывна и строго возрастает на своей области определения. Следовательно, область значений функции $f(x)$ равна $[\sqrt{2|a|}; +\infty)$, причём каждое своё значение функция $f(x)$ принимает по одному разу. Значит, уравнение $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = 2$ и равносильное ему исходное уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = a$ имеют единственное решение при $\sqrt{2|a|} \leqslant 2$, то есть при $-2 \leqslant a < 0$ и $0 < a \leqslant 2$.

Ответ: $[-2; 0) \cup (0; 2]$.

9. Тип 18 № 526679

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a-1)x - a^3}{\sqrt{3+2x-x^2}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. Заметим, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-2x-3<0, \\ x^2-(a^2-a)x-a^3=0. \end{cases} \quad (*)$$

Для того, чтобы исходное уравнение имело два различных корня, необходимо, чтобы дискриминат уравнения из второй строчки системы был положительным, а корни уравнения принадлежали интервалу $-1<x<3$.

$$\left(a^2-a\right)^2+4a^3>0 \Leftrightarrow a^4-2a^3+a^2+4a^3>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+1)^2>0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\ne -1, \\ a\ne 0. \end{cases}$$

Пусть $f(x)=x^2-(a^2-a)x-a^3$ — квадратичная функция, график которой парабола с ветвями вверх. Для того, чтобы оба корня уравнения системы $(*)$ лежали в интервале $-1<x<3$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} f(-1)>0, \\ f(3)>0, \\ -1<x_0<3, \\ a\ne -1, a\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2-a-a^3>0, \\ 9-3a^2+3a-a^3>0, \\ -1<\dfrac{a^2-a}{2}<3, \\ a\ne -1, a\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1+a^2\right)(1-a)>0, \\ \left(3-a^2\right)(3+a)>0, \\ a^2-a+2>0, \\ a^2-a-6<0, \\ a\ne -1, a\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<1, \\ \left[\begin{array}{l} a<-3, \\ -\sqrt{3}<a<\sqrt{3}, \end{array}\right. \\ -2<a<3, \\ a\ne -1, a\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}<a<1, \\ a\ne -1, a\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3}<a<-1, \\ -1<a<0, \\ 0<a<1. \end{array}\right.$$

Вариант № 86880801

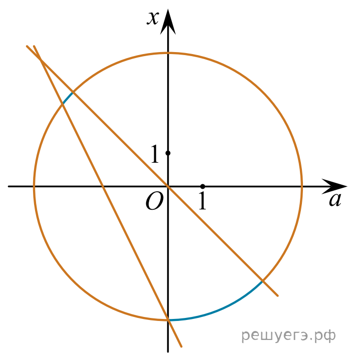
Ответ: $\left(-\sqrt{3};\ -1\right)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$.

10. Тип 18 № 530904

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+3(a+1)x+2a^2+3a<0, \\ x^2+a^2=9 \end{cases}$$

имеет решения.



Решение. Разложим левую часть неравенства на множители: $(x+2a+3)(x+a)<0$. Поэтому неравенство задаёт пару вертикальных углов в плоскости Oax. Уравнение $x^2+a^2=9$ задаёт окружность с центром (0; 0) радиуса 3 в этой же плоскости. Решения системы — точки дуг окружности, лежащие в указанных вертикальных углах.

Абсциссы концов этих дуг находим из систем

$$\begin{cases} x+2a+3=0, \\ x^2+a^2=9 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+a=0, \\ x^2+a^2=9. \end{cases}$$

Из первой системы получаем: $a=-2{,}4$, $a=0$. Из второй системы получаем: $a=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $-2{,}4<a<-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $0<a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

11. Тип 18 № 562215

Найдите все значения a, при каждом из которых любое значение из промежутка [−1,5; −0,5] является решением неравенства

$$(4|x|-a-3)(x^2-2x-2-a)\geqslant 0.$$

Решение. Построим графики множителей $a=4|x|-3$ и $a=x^2-2x-2$ в плоскости $(x;\, a)$.

Найдем координаты точки пересечения построенных графиков. При $x\geqslant 0:$

$$\begin{cases} x^2-2x-2=4x-3, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $x_1=3+2\sqrt{2}$ и $a_1=9+8\sqrt{2}, x_2=3-2\sqrt{2}$ и $a_2=9-8\sqrt{2};$

При $x<0:$

$$\begin{cases} x^2-2x-2=-4x-3, \\ x<0, \end{cases}$$

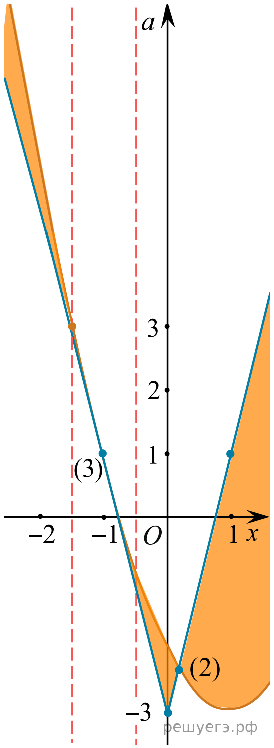
откуда $x_3=-1$ и $a_3=1.$

Далее воспользуемся методом областей. Выделим области, в которых значение

$$f(x,\ a)=(4|x|-a-3)(x^2-2x-2-a)$$

отрицательно. Осталось выяснить, при каких значениях a полоса $-1,5\leqslant x\leqslant -0,5$ не пересекается с выделенными областями. Это происходит при $a\leqslant 4\cdot|-0,5|-3=-1; a=1$ или если

$$a\geqslant(-1,5)^2-2\cdot(-1,5)-2=3,25.$$



Ответ: $(-\infty;-1]\cup\{1\}\cup[3,25;+\infty).$

12. Тип 18 № 514635

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2)(2x-4-y)=|x-2|^3, \\ y=x+a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Сделаем замену $x-2=t$ и заметим, что $y=t+a+2$. Очевидно, число решений системы будет совпадать с числом решений уравнения $t(t-a-2)=|t|^3$. Очевидно, $t=0$ является его решением при всех a.

При $t>0$ уравнение сводится к $t^2=t-a-2,\ (t-0,5)^2=-a-1,75$. Это уравнение имеет два положительных корня, если $-a-1,75\in(0;0,25)$, то есть при $a\in(-2;-1,75)$ и один положительный корень при $a=-1,75$ или $a<-2$.

При $t<0$ уравнение сводится к $-t^2=t-a-2,\ (t+0,5)^2=a+2,25$. Это уравнение имеет два отрицательных корня, если $a+2,25\in(0;\ 0,25)$, то есть при $a\in(-2.25;-2)$ и один отрицательный корень при $a=-2,25$ или $a>-2$.

Поэтому нужное количество корней будет при $a\in(-2;-1,75),\ a\in(-2,25;-2)$.

Ответ: $a\in(-2,25;-2)\cup(-2;-1,75)$.

13. Тип 18 № 526257

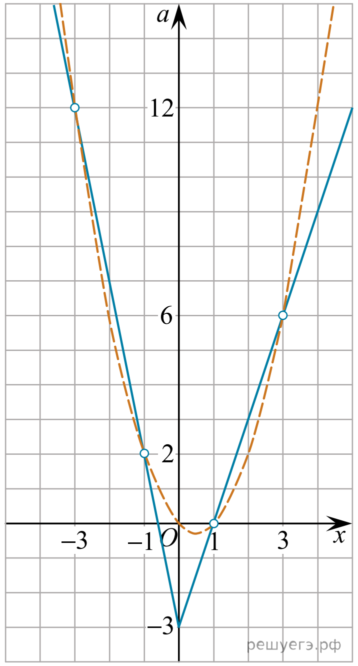
При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{|4x|-x-3-a}{x^2-x-a}=0$$

имеет ровно 2 различных решения.

Решение. В системе координат xOa изобразим ломаную, задаваемую уравнением $a=|4x|-x-3$, все точки которой обращают числитель дроби в нуль, и параболу $a=x^2-x$, точки которой соответствуют нулям знаменателя.

Подставляя $a=x^2-x$ в уравнение $a=|4x|-x-3$ и решая полученное уравнение на x, найдем абсциссы точки пересечения ломаной и параболы:



$$|4x|-x-3=x^2-x \Leftrightarrow |4x|=x^2+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=x^2+3, \\ 4x=-(x^2+3) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0, \\ x^2+4x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3, \\ x=-1, \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Ординаты точек пересечения суть 0, 6, 2 и 12 соответственно. Для найденных значений параметра числитель и знаменатель обращаются в нуль одновременно.

Следовательно, заданное уравнение имеет ровно два решения, когда $a \in (-3;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ 6)\cup(6;\ 12)\cup(12;\ +\infty)$.

Ответ: $a \in (-3;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ 6)\cup(6;\ 12)\cup(12;\ +\infty)$.

14. Тип 18 № 659135

Найдите все целочисленные значения параметра a, при каждом из которых система

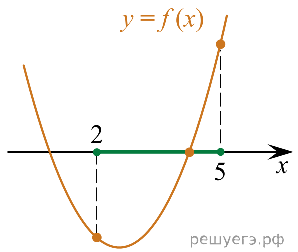
$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-a)^2}=3, \\ x^2-|a+2|x-3a^2=5 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Пусть $(x,\ y)$ — решение системы. Тогда при любом значении параметра a левая часть первого уравнения системы есть сумма расстояний от точки $(x,\ y)$ до точек $(2,\ a)$ и $(5,\ a)$, лежащих на прямой $y=a$, параллельной оси абсцисс. Но расстояние между точками $(2,\ a)$ и $(5,\ a)$ равно 3, и поэтому первое уравнение исходной системы равносильно системе

$$\begin{cases} 2\leqslant x\leqslant 5, \\ y=a. \end{cases}$$

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы второе уравнение исходной системы имело ровно одно решение на отрезке $[2;\ 5]$.



Рассмотрим квадратичную функцию $f(x)=x^2-|a+2|x-3a^2-5$ с положительным старшим коэффициентом. Заметим, что $f(2)=-2|a+2|-3a^2-1<0$ при всех значениях параметра a. Значит, чтобы уравнение $f(x)=0$ имело ровно один корень на отрезке $[2;\ 5]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f(5)\geqslant 0$. Получаем неравенство

$$25-5|a+2|-3a^2-5\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3a^2+5|a+2|-20\leqslant 0 \Leftrightarrow 5|a+2|\leqslant 20-3a^2.$$

Поскольку любое решение полученного неравенства должно удовлетворять условию $20-3a^2\geqslant 0$, и по условию a — целое число, то решениями неравенства могут быть только $a\in\{0, \pm 1,\ \pm 2\}$. Из этих условий проверкой получаем все решения: −2, −1, 0, 1.

Ответ: $\{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$.

15. Тип 18 № 642753

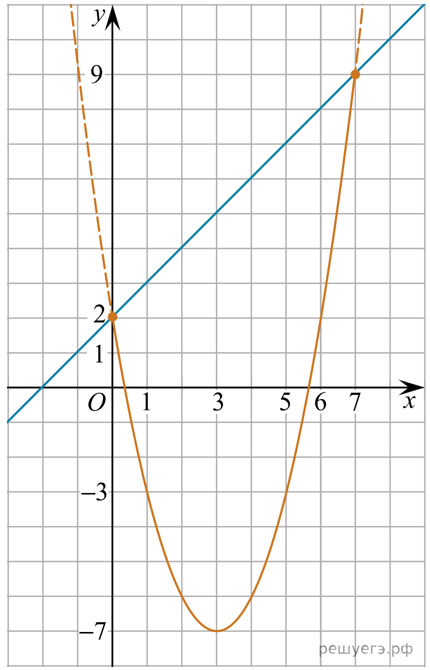
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x^2-6x-y+2)\cdot\sqrt{x-y+2}=0,\\ y=4x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Изобразим первое уравнение на плоскости:

$$\left[\begin{array}{l}x-y+2=0,\\ \begin{cases}x^2-6x-y+2=0,\\ x-y+2\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$



Система задает часть параболы $y=x^2-6x+2$, расположенную не выше прямой $y=x+2$. Найдем абсциссу вершины параболы: $x_{\text{в}}=-\dfrac{-6}{2\cdot 1}=3$, тогда $y_{\text{в}}=-7$.

Найдем точки пересечения функций $y=x^2-6x+2$ и $y=x+2$:

$$x^2-6x+2=x+2\Leftrightarrow x^2-7x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=7.\end{array}\right.$$

Таким образом, абсциссы точек пересечения функций равны 0 и 7, следовательно, ординаты точек пересечения равны $y(0)=2$ и $y(7)=9$.

Прямая $y=4x+a$ имеет всегда одну общую точку с прямой $y=x+2$, так как не параллельна ей, следовательно, система будет иметь два различных решения в двух случаях:

1) если прямая $y=4x+a$ будет являться касательной к параболе $y=x^2-6x+2$ и точка касания будет лежать ниже прямой $y=x+2$;

2) если прямая $y=4x+a$ будет иметь две общие точки с параболой $y=x^2-6x+2$, одна из которых будет лежать ниже прямой $y=x+2$, а вторая не ниже этой прямой (то есть вторая точка либо совпадает с точкой пересечения прямых $y=4x+a$ и $y=x+2$, либо лежит выше прямой $y=x+2$).

Рассмотрим первый случай. Найдем значение a, при котором уравнение $x^2-6x+2=4x+a$ имеет одно решение. Выполним преобразования:

$$x^2-6x+2=4x+a\Leftrightarrow x^2-10x+2-a=0.$$

Квадратное уравнение имеет единственное решение тогда, когда его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$D=0\Leftrightarrow 100-8+4a=0\Leftrightarrow a=-23.$$

При $a=-23$ уравнение $x^2-10x+2-a=0$ имеет единственное решение, $x=5$. Проверим, что при $x=5$ точка касания лежит не ниже прямой $y=x+2$:

$$5^2-6\cdot5+2<5+2 \Leftrightarrow -3<7.$$

Следовательно, точка касания лежит в нужной полуплоскости — значение параметра $a=-23$ подходит.

Рассмотрим второй случай. Если прямая $y=4x+a$ проходит ниже точки (7; 9), но выше точки (5; −3), то обе точки пересечения с параболой будут лежать ниже прямой $y=x+2$, а значит будет еще три различных решения.

Если прямая $y=4x+a$ проходит через точку (0; 2) или выше, то обе точки пересечения с параболой будут лежать не ниже прямой $y=x+2$, а значит, всего будет одно решение. Следовательно, прямая $y=4x+a$ должна проходить ниже точки (0; 2) и не ниже точки (7; 9):

$$\begin{cases}4\cdot0+a<2,\\28+a\geqslant 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<2,\\a\geqslant-19.\end{cases}$$

Ответ: $a\in\{-23\}\cup[-19;2)$.

Приведем другое решение.

Определим, при каких a уравнение $(x^2-6x-4x+2-a)\sqrt{x-4x+2-a}=0$ имеет 2 различных решения. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2-a}{3},\\ \begin{cases}x<\dfrac{2-a}{3},\\x^2-10x+2-a=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2-a}{3},\\ \begin{cases}x<\dfrac{2-a}{3},\\x=5\pm\sqrt{23+a}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим первый случай:

$$5+\sqrt{23+a}=5-\sqrt{23+a}<\frac{2-a}{3},$$

отсюда $a=-23$, $5<\dfrac{25}{3}$ — верно.

Рассмотрим второй случай:

$$\begin{cases}5-\sqrt{23+a}<\dfrac{2-a}{3},\\5+\sqrt{23+a}\geqslant\dfrac{2-a}{3}.\end{cases}$$

Пусть $\sqrt{23+a}=t$, тогда $a=t^2-23$. Имеем:

$$\begin{cases}15-3t<2-t^2+23,\\15+3t\geqslant2-t^2+23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-3t-10<0,\\t^2+3t-10\geqslant0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\in(-2;5),\\t\in(-\infty;-5]\cup[2;+\infty).\end{cases}$$

Так как $t\in[2;5)$, получаем:

$$2\leqslant\sqrt{23+a}<5\Leftrightarrow4\leqslant23+a<25\Leftrightarrow-19\leqslant a<2.$$

16. Тип 18 № 562006

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}2(a+2y)-y^2=(x-2)^2+z^2,\\(xy+4)\sin(x+y)+\cos(y-x)=1,\\\left(2-\dfrac{xyz(a-2)}{\sqrt{1-2xy}}\right)\cdot(a\cdot\operatorname{tg}^2z+x+y)=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем первое уравнение и запишем систему в виде

$$\begin{cases}2a+4=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2,\\(xy+4)\sin(x+y)+\cos(y-x)=1,\\\left(2-\dfrac{xyz(a-2)}{\sqrt{1-2xy}}\right)\cdot(a\cdot\operatorname{tg}^2z+x+y)=0.\end{cases}$$

Заметим, что если тройка чисел $(x_0;y_0;z_0)$ является решением системы, то тройка чисел $(y_0;x_0;z_0)$ тоже является решением системы. Значит, чтобы решение было единственным, должно выполняться равенство $x=y$. Тогда

$$\begin{cases}2a+4=2(x-2)^2+z^2,\\(x^2+4)\sin2x=0,\\\left(2-\dfrac{x^2z(a-2)}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot(a\cdot\operatorname{tg}^2z+2x)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4=2(x-2)^2+z^2,\\x=\dfrac{\pi k}{2},k\in\mathbb{Z},\\\left(2-\dfrac{x^2z(a-2)}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot(a\cdot\operatorname{tg}^2z+2x)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\underset{1-2x^2>0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2a+4=2(x-2)^2+z^2,\\ x=0,\\ \left(2-\dfrac{x^2z(a-2)}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot(a\cdot\operatorname{tg}^2 z+2x)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-4=z^2,\\ x=0,\\ a\cdot\operatorname{tg}^2 z=0.\end{cases}$$

Теперь заметим, что если тройка чисел $(0;0;z_0)$ является решением системы, то тройка чисел $(0;0;-z_0)$ тоже является решением системы. Значит, чтобы решение было единственным, должно выполняться равенство $z_0=-z_0=0$. Таким образом, единственным решением системы может быть только тройка чисел $(0;0;0)$. Эта тройка чисел является решением системы при $a=2$.

Проверим, есть ли при $a=2$ решения системы, отличные от $(0;0;0)$:

$$\begin{cases}2\cdot2+4=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2,\\ (xy+4)\sin(x+y)+\cos(y-x)=1,\\ \left(2-\dfrac{xyz(2-2)}{\sqrt{1-2xy}}\right)\cdot(2\operatorname{tg}^2 z+x+y)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=8-z^2,\ (*)\\ y=-x-2\operatorname{tg}^2 z.\ (**)\end{cases}$$

При $z=0$ графиком уравнения $(*)$ в системе координат xOy является окружность с центром в точке $(2;2)$ и радиусом $r=2\sqrt{2}$, а графиком уравнения $(**)$ — прямая $y=-x$, которая касается этой окружности в точке $(0;0)$.

При любых других допустимых значениях z расстояние от центра окружности до прямой больше $2\sqrt{2}$, а радиус окружности меньше $2\sqrt{2}$, и система не имеет решений. Значит, при $a=2$ система имеет единственное решение $(0;0;0)$.

Ответ: 2.

Примечание Дмитрия Сузана.

Отсутствие решений кроме (0, 0, 0) при $a=2$ можно доказать иначе. Пусть имеется точка с координатами (x,y,z). Если она лежит на сфере, ее координаты должны удовлетворять условию $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=8$, то есть $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$. Тогда $x+y\geqslant0$, однако из уравнения $2\operatorname{tg}^2 z+x+y=0$ следует, что $x+y\leqslant0$. Значит, $x+y=0$, и тогда из третьего уравнения следует, что $z=0$. Подставляя $y=-x$ и $z=0$ в первое уравнение, получим $(x-2)^2+(-x-2)^2=8$, откуда $x=0$. Следовательно, $x=y=z=0$, то есть при $a=2$ других решений нет.

17. Тип 18 № 563599

Найти все значения параметра a при каждом из которых уравнение $(2a|x-1|-2)-(1+2a)|x+1|=0$ имеет ровно два решения.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=(2a|x-1|-2)-(1+2a)|x+1|$, раскроем модули:

$$f(x)=\begin{cases}x+4a-1 & \text{при} & x<-1,\\ -(4a+1)x-3 & \text{при} & -1\leqslant x\leqslant1,\\ -x-4a-3 & \text{при} & x>1.\end{cases}$$

Данная кусочно-линейная функция при $a<-\dfrac{1}{4}$ возрастает на $(-\infty;1]$ и убывает на $[1;\infty)$. А при $a>-\dfrac{1}{4}$ возрастает на $(-\infty;-1]$ и убывает на $[-1;\infty)$. Отдельно проверим, что при $a=-\dfrac{1}{4}$ функция принимает лишь отрицательные значения.

Следовательно, функция f имеет по одному нулю на каждом из двух промежутков возрастания и убывания тогда и только тогда, когда наибольшее значение функции положительно. то есть при $f(-1)>0$ или $f(1)>0$:

$$\left[\begin{array}{l}(4a+1)-3>0,\\ -(4a+1)-3>0\end{array}\right.\Leftrightarrow a<-1\ \text{или}\ a>\frac{1}{2}.$$

Ответ: $a<-1$ или $a>\dfrac{1}{2}$.

18. Тип 18 № 639872

Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{5a+50x-10ax}{25x^2+10ax+a^2+16}$ содержит отрезок [0; 1].

Решение. Запишем функцию в виде $y=f(x)=\dfrac{5a+10(5-a)x}{(5x+a)^2+16}$. Её областью определения является вся числовая прямая, поскольку знаменатель не обращается в ноль. Данная функция непрерывна на всей числовой прямой.

При x стремящемся к $+\infty$ или $-\infty$ значение функции $f(x)=\dfrac{5a+10(5-a)x}{(5x+a)^2+16}$ стремится к 0. Учитывая поведение функции на $+\infty$ и $-\infty$ и наличие двух критических точек — точки минимума и точки максимума, следует, что множеством значений функции является отрезок. Тогда, для того чтобы множество значений функции содержало отрезок [0; 1], оно должно содержать точки 0 и 1. Таким образом, условие задачи выполнено для тех и только тех значений a, для которых имеют решения уравнения $f(x)=\dfrac{5a+10(5-a)x}{(5x+a)^2+16}=0$ и $f(x)=\dfrac{5a+10(5-a)x}{(5x+a)^2+16}=1$.

Первое уравнение:

$$\frac{5a+10(5-a)x}{(5x+a)^2+16}=0 \Leftrightarrow 10(a-5)x=5a \Leftrightarrow x=\frac{a}{2(a-5)}.$$

Уравнение имеет решение при любом $a\neq 5$.
Второе уравнение:

$$\frac{5a+10(5-a)x}{(5x+a)^2+16}=1 \Leftrightarrow 25x^2+10(2a-5)x+a^2-5a+16=0.$$

Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$\begin{gathered} D=100(2a-5)^2-100(a^2-5a+16)\geqslant 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 100(4a^2-20a+25-a^2+5a-16)\geqslant 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 300(a^2-5a+3)\geqslant 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(a-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(a-\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\geqslant 0. \end{gathered}$$

Решением этого неравенства являются множества $\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения $a\in\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};5\right)\cup(5;+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};5\right)\cup(5;+\infty)$.

19. Тип 18 № 511316

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2-2x+|y|-15=0, \\ x^2+(y-2a)(y+2a)=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$ имеет ровно 6 решений.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases}(x-1)^2+|y|=16,\\(x-1)^2+y^2=4a^2.\end{cases}$$

Полагая $u=x-1$, получим систему

$$\begin{cases}u^2+|y|=16,\\u^2+y^2=4a^2.\end{cases}$$

имеющую то же количество решений. Кроме того, если пара чисел $(u;\,y)$ — решение системы, то и пары чисел $(u;\,-y)$, $(-u;\,y)$, $(-u;\,-y)$ также является решениями системы. Таким образом, если $u\neq 0$ и $y\neq 0$, то число решений кратно четырем. Значит, если система имеет ровно 6 решений, то либо $u=0$, либо $y=0$.

Если $u=0$, то $y=\pm16$, следовательно, $a=\pm8$. Система

$$\begin{cases}u^2+|y|=16,\\u^2+y^2=256\end{cases}$$

имеет два решения: $(0;\,16)$, $(0;\,-16)$, поэтому этот случай не подходит.

Если $y=0$, то $u^2=16$, следовательно, $a=\pm2$. Получаем систему:

$$\begin{cases}u^2+|y|=16,\\u^2+y^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=|y|,\\u^2+|y|=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=0,\\y=1,\\y=-1,\end{array}\right.\\u^2+|y|=16.\end{cases}$$

Она имеет 6 решений, так как каждому значению y соответствует два разных значения u.

Ответ: $a=-2,\ a=2$.

Приведем идею графического решения.

Преобразуем систему: $\begin{cases}(x-1)^2+|y|=16,\\(x-1)^2+y^2=4a^2.\end{cases}$

Первое уравнение задает части двух парабол: $y=\begin{cases}16-(x-1)^2,\ y\geqslant0,\\(x-1)^2-16,\ y<0.\end{cases}$

(см. рис.).

Второе уравнение задает окружность радиусом $|2a|$ с центром $(1,0)$. На рисунке видно, что шесть решений системы получаются, только если окружность проходит через точки $(-3,0)$ и $(5,\ 0)$, пересекая параболу еще в четырех точках.

При этом радиус окружности равен 4, откуда $a=-2$ или $a=2$.

20. Тип 18 № 511366

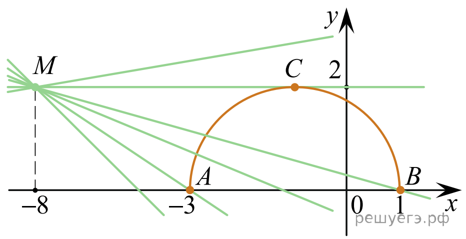
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$-ax+\sqrt{3-2x-x^2}=8a+2$$

имеет единственный корень.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sqrt{3-2x-x^2}=ax+8a+2$ Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ и $g(x)=ax+8a+2=a(x+8)+2.$ Графиком функции $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1,0)$, лежащая в верхней полуплоскости. При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(-8,2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $a>0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MB, заданная уравнением $y=ax+8a+2$, проходит через точки $M(-8,2)$ и $B(1,0)$, следовательно, её угловой коэффициент $a=-\frac{2}{9}$. При $-\frac{2}{9}\leqslant a<0$ прямая, заданная уравнением $y=ax+8a+2$, имеет угловой коэффициент не меньше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в двух точках.

Прямая MA, заданная уравнением $y=ax+8a+2$, проходит через точки $M(-8,2)$ и $A(-3,0)$, следовательно, её угловой коэффициент $a=-\frac{2}{5}$. При $-\frac{2}{5}\leqslant a<-\frac{2}{9}$ прямая, заданная уравнением $y=ax+8a+2$, имеет угловой коэффициент не меньше, чем у прямой MA, и меньше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{5}\leqslant a<-\frac{2}{9}$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $\left[-\frac{2}{5},-\frac{2}{9}\right)\cup\{0\}.$

21. Тип 18 № 530697

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(2y-x)a=1-2a-4a^2, \\ x^2+y^2-4(x-y)a=4-4a-7a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x+a)^2+(y-2a)^2=(1-a)^2, \\ (x-2a)^2+(y+2a)^2=(2-a)^2. \end{cases}$$

Если $a \neq 1,\ a \neq 2$, то каждое уравнение системы есть уравнение окружности. В этом случае система не имеет решений тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих окружностей больше суммы или меньше модуля разности их радиусов. При $a=1$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=0, \\ (x-2)^2+(y+2)^2=1. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Следовательно, $a=1$ удовлетворяет условию задачи. При $a=2$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y-4)^2=1, \\ (x-4)^2+(y+4)^2=0 \end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет. Следовательно, и $a=2$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 1,\ a \neq 2$. Расстояние O_1O_2 между центрами $O_1(-a, 2a)$ и $O_2(2a-2a)$ равно

$$O_1O_2=\sqrt{9a^2+16a^2}=5|a|,$$

а радиусы равны $R_1=|1-a|$ и $R_2=|2-a|$. Решим два неравенства: $(1)\ O_1O_2>R_1+R_2$ и $(2)\ O_1O_2<|R_1-R_2|$. Неравенство (1) имеет вид $5|a|>|1-a|+|2-a|$, неравенство (2) имеет вид $5|a|<||1-a|-|2-a||$. Решением неравенства (1) являются промежутки $(-\infty; -1)$ и $\left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$. Решением неравенства (2) является промежуток $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$.

22. Тип 18 № 526329

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

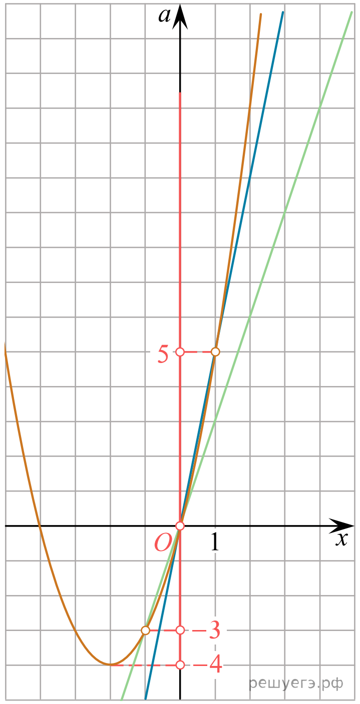
$$\frac{x^2+4x-a}{15x^2-8ax+a^2}=0$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Заметим, что

$$\frac{x^2+4x-a}{15x^2-8ax+a^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-a=0, \\ 15x^2-8ax+a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=x^2+4x, \\ (5x-a)(3x-a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x^2+4x, \\ a \neq 3x, \\ a \neq 5x. \end{cases}$$



Изобразим решение в системе координат xOa. Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.

Ординаты точек пересечения параболы $a=x^2+4x$ и прямой $a=3x$ найдём из уравнения $a=\frac{a^2}{9}+\frac{4a}{3}$. Получаем $a=0$ или $a=-3$.

Ординаты точек пересечения параболы $a=x^2+4x$ и прямой $a=5x$ найдём из уравнения $a=\frac{a^2}{25}+\frac{4a}{5}$. Получаем $a=0$ или $a=5$.

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $-4<a<-3,\ -3<a<0,\ 0<a<5,\ a>5$.

Ответ: $(-4; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty)$.

23. Тип 18 № 508671

Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=x^2-4|x|-ax+a$ на отрезке $[-1; 3]$ не меньшее, чем -5.

Решение. Потребовать, чтобы наименьшее значение функции было не меньше чем −5 это все равно что потребовать, чтобы все ее значения были не меньше чем −5. То есть неравенство $x^2-4|x|-ax+a\geqslant -5$ должно выполняться на всем промежутке $[-1;\ 3]$. То есть

$$x^2+(4-a)x+a+5\geqslant 0 \text{ при } x\in[-1;\ 0] \text{ и } x^2-(4+a)x+a+5\geqslant 0 \text{ при } x\in[0;\ 3].$$

Теперь заметим, что и наоборот — достаточно чтобы эти неравенства выполнялись в нескольких точках, если только одна из них (можно не выяснять какая) будет точкой с наименьшим значением. Поскольку квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом на любом отрезке принимает наименьшее значение либо в абсциссе вершины параболы — его графика (если эта точка лежит на отрезке) либо в одном из концов отрезка (если не лежит), то нужно проверить следующие неравенства:

$$1-(4-a)+a+5\geqslant 0 \text{ (верно при } a\geqslant -1),$$
$$a+5\geqslant 0 \text{ (верно при } a\geqslant -5),$$
$$9-3(4+a)+a+5\geqslant 0 \text{ (верно при } a\leqslant 1).$$

$-\dfrac{(a-4)^2}{4}+a+5\geqslant 0$ при $\dfrac{a-4}{2}\in[-1;\ 0]$, то есть при $a\in[2;\ 4]$ (нас не интересует, поскольку уже установлено, что $a\in[-1;\ 1]$

$-\dfrac{(a+4)^2}{4}+a+5\geqslant 0$ при $\dfrac{a+4}{2}\in[0;\ 3]$, то есть при $a\in[-4;\ 2]$ (то есть это обязательно надо проверить, при $a\in[-1;\ 1]$ указанная точка точно лежит на интересующем нас отрезке).

$$-a^2-8a-16+4a+20\geqslant 0,$$
$$-a^2-4a+4\geqslant 0,$$
$$a^2+4a+4\leqslant 8,$$
$$(a+2)^2\leqslant 8,$$
$$a\in\left[-2-\sqrt{8};\ -2+\sqrt{8}\right].$$

Итак, совмещая все ограничения, получаем $a\in\left[-1;\ -2+\sqrt{8}\right]$.

Ответ: $a\in\left[-1;\ -2+\sqrt{8}\right]$.

24. Тип 18 № 640018

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{x-(2^a+2^{3-a})}{x-(\sin a-1)}<0$$

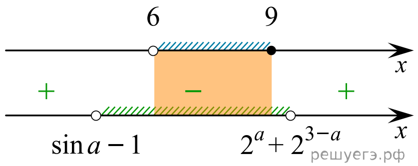
выполнено при всех x, принадлежащих промежутку (6; 9].

Решение. Оценим выражения, стоящие в скобках в числителе и в знаменателе:

$$2^a+2^{3-a}>0,$$
$$-1\leqslant \sin a\leqslant 1 \Leftrightarrow -2\leqslant \sin a-1\leqslant 0.$$

Значит, при любых значениях параметра a: $\sin a-1\leqslant 0<2^a+2^{3-a}$. Тогда

$$\frac{x-(2^a+2^{3-a})}{x-(\sin a-1)}<0 \Leftrightarrow \sin a-1<x<2^a+2^{3-a}.$$



Неравенство будет выполнено при всех x, принадлежащих промежутку (6; 9], если (см. рис.):

$$9<2^a+2^{3-a}\Leftrightarrow 2^{2a}-9\cdot 2^a+8>0 \left[\begin{array}{l}2^a<1,\\ 2^a>8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a<0,\\ a>3.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

25. Тип 18 № 549978

Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sin^4 x+\cos^4 x>a\cdot\sin x\cdot\cos x$$

выполнено при любом значении x.

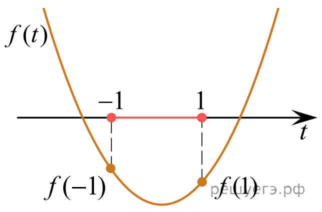
Решение. Заметим, что $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x,$

$$\sin^4 x + \cos^4 x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Тогда получаем:

$$\sin^4 x + \cos^4 x > a\sin x\cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x > \frac{1}{2}a\sin 2x \Leftrightarrow \sin^2 2x + a\sin 2x - 2 < 0.$$

Пусть $t = \sin 2x$, тогда $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Для того, чтобы исходное неравенство было выполнено при любом значении x, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $t^2 + at - 2 < 0$ было выполнено для всех $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = t^2 + at - 2$ с положительным старшим коэффициентом, эскиз графика которой приведен на рисунке. Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система



$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2 - a - 2 < 0, \\ 1^2 + a - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > -1, \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < a < 1.$$

Ответ: $(-1; 1)$.

26. Тип 18 № 552515

Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left|\cos^2 x + 0,5\sin 2x + (1-a)\sin^2 x\right| \leqslant 1,5$$

выполняется для любого действительного числа x.

Решение. Заметим, что если $\sin x = 0$, то неравенство верно при любом значении параметра a. Рассмотрим случай $\sin x \neq 0$:

$$\left|\cos^2 x + 0,5\sin 2x + (1-a)\sin^2 x\right| \leqslant 1,5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|1 + \sin x\cos x - a\sin^2 x\right| \leqslant 1,5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin x\cos x - a\sin^2 x \leqslant 1,5, \\ 1 + \sin x\cos x - a\sin^2 x \geqslant -1,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\sin^2 x \geqslant \sin x\cos x - 0,5, \\ a\sin^2 x \leqslant \sin x\cos x + 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\underset{\sin x \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2a \geqslant 2\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\sin^2 x}, \\ 2a \leqslant 2\operatorname{ctg} x + \dfrac{5}{\sin^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \geqslant 2\operatorname{ctg} x - 1 - \operatorname{ctg}^2 x, \\ 2a \leqslant 2\operatorname{ctg} x + 5 + 5\operatorname{ctg}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a \geqslant -(\operatorname{ctg} x - 1)^2, \\ 2a \leqslant 5\left(\operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{24}{5}. \end{cases}$$

При $0 \leqslant 2a \leqslant \dfrac{24}{5}$ и первое, и второе неравенства системы имеют решения для любого значения переменной, удовлетворяющего условию $\sin x \neq 0$, причем правая часть второго неравенства не меньше правой части первого, а потому и вся система в целом имеет решения.

Таким образом, исходное неравенство выполняется для любого действительного числа x, если $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{12}{5}$.

Ответ: $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{12}{5}$.

Примечание Ирины Шраго.

Нагляднее было бы изобразить множество решений системы

$$\begin{cases} 2a \geqslant -(\operatorname{ctg} x - 1)^2, \\ 2a \leqslant 5\left(\operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{24}{5} \end{cases}$$

в координатах (a, t), где $t = \operatorname{ctg} x$. Это часть плоскости между двумя параболами с разнонаправленными ветвями. Параметр принимает значения от ординаты нижней вершины до ординаты верхней, поэтому $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{12}{5}$.

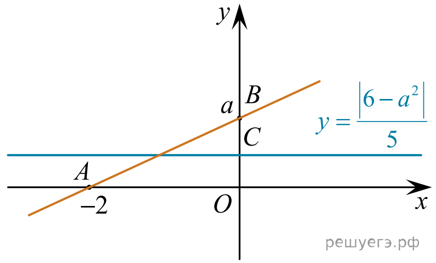
27. Тип 18 № 514030

Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\sqrt{4+a^2},\\ 5y=|6-a^2|\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Первому уравнению системы удовлетворяют те и только те точки $(x;y)$, которые лежат на отрезке AB прямой, соединяющей точки $A(-2;\ 0)$ и $B(0;\ a)$, поскольку уравнение задаёт множество точек $(x;\ y)$, сумма расстояний от каждой из которых до точек A и B равна $\sqrt{4+a^2}$, что равно длине отрезка AB.



Второму уравнению системы удовлетворяют те и только те точки $(x;\ y)$, которые лежат на прямой $y=\dfrac{|6-a^2|}{5}$, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $C\left(0;\ \dfrac{|6-a^2|}{5}\right)$.

По условию $a\geqslant 0$. Если $a=0$, то точки B и O совпадают, и система не имеет решений. Для $a>0$ условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда точка C лежит между точками O и B, причём если точка C совпадает с точкой O или с точкой B, то условие задачи выполнено.

Решим неравенство $0\leqslant\dfrac{|6-a^2|}{5}\leqslant a$. Имеем:

$$0\leqslant\frac{|6-a^2|}{5}\leqslant a\Leftrightarrow|6-a^2|\leqslant 5a\Leftrightarrow\begin{cases}6-a^2\leqslant 5a,\\ 6-a^2\geqslant -5a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(a+6)\geqslant 0,\\ (a+1)(a-6)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\geqslant 1,\\ a\leqslant 6\end{cases}\Leftrightarrow 1\leqslant a\leqslant 6.$$

Ответ: $1\leqslant a\leqslant 6$.

Вариант № 86880801

Примечание.

Задача станет интереснее, если отказаться от условия неотрицательности параметра. При $a<0$ все точки отрезка AB, кроме точки A, лежат ниже оси абсцисс. Поэтому прямая, заданная уравнением $y=\dfrac{|6-a^2|}{5}$, может пересекать отрезок AB только в точке A. Тогда $|6-a^2|=0$, единственным отрицательным корнем этого уравнения является $a=-\sqrt{6}$.

28. Тип 18 № 484627

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\dfrac{x+ax+a}{x-2a-2}\geqslant 0,\\ x+ax>8\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы

$$(1+a)x>8.$$

Если $a=-1$, то неравенство, а значит, и система не имеет решений.
Если $a>-1$, то решение неравенства — луч

$$x>\frac{8}{1+a}.$$

Если $a<-1$, то решение неравенства — луч

$$x<\frac{8}{1+a}.$$

При $a\neq -1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases}(1+a)\left(x+\dfrac{a}{1+a}\right)(x-2(1+a))\geqslant 0,\\ x\neq 2(1+a).\end{cases}$$

Если $a>-1$, то решением первого неравенства исходной системы будут два луча с концами в точках $-\dfrac{a}{1+a}$, $2(1+a)$. Очевидно, что при $a>-1$ решение системы будет содержать луч вида $(b,+\infty)$, где b — большее из чисел $\dfrac{8}{1+a}, -\dfrac{a}{1+a}$ и $2(1+a)$, а значит, система будет иметь решение.

Если $a<-1$, то, в случае $-\dfrac{a}{1+a}=2(1+a)\underset{a<-1}{\Leftrightarrow} a=-2$ первое неравенство исходной системы, а значит, и система не будет иметь решений. В остальных случаях решением первого неравенства исходной системы будет полуинтервал с концами в точках $-\dfrac{a}{1+a}, 2(1+a)$. Отметим, что точки $x=2(1+a)$ нет во множестве решений первого неравенства.

Для того чтобы система в этом случае не имела решений, необходимо и достаточно:

Вариант № 86880801

$$\begin{cases}a<-1,\\ a\neq -2,\\ -\dfrac{a}{1+a}\geqslant\dfrac{8}{1+a},\\ 2(1+a)\geqslant\dfrac{8}{1+a}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq -2,\\ -8\leqslant a<-1,\\ (1+a)^2\leqslant 4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\leqslant a<-2,\\ -2<a<-1\end{array}\right..$$

Учитывая случаи $a=-1$, $a=-2$, получаем ответ.

Ответ: $-3\leqslant a\leqslant -1$.

29. Тип 18 № 679796

Найдите все значения a, при которых уравнение $|\sin^2 x+2\cos x+a|=\sin^2 x+\cos x-a$ имеет на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ единственный корень.

Решение. Первый случай: $\sin^2 x+2\cos x+a\geqslant 0$. Тогда

$$\sin^2 x+2\cos x+a=\sin^2 x+\cos x-a\Leftrightarrow \cos x=-2a.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ единственный корень при $-1<-2a\leqslant 0$, откуда $0\leqslant a<\frac{1}{2}$.

Подставив $\cos x=-2a$ в неравенство $\sin^2 x+2\cos x+a\geqslant 0$, получим:

$$1-4a^2-4a+a\geqslant 0\Leftrightarrow 4a^2+3a-1\leqslant 0\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}.$$

В этом случае уравнение $\cos x=-2a$ при условии $\sin^2 x+2\cos x+a\geqslant 0$ имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ единственный корень $x=\arccos(-2a)$ при $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$ и не имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ корней при $a<0$ и при $a>\frac{1}{4}$.

Второй случай: $\sin^2 x+2\cos x+a<0$. Тогда из исходного уравнения получаем:

$$\sin^2 x+2\cos x+a=-\sin^2 x-\cos x+a\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\cos x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos x-2)(2\cos x+1)=0\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{2}.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ единственный корень $x=\frac{2\pi}{3}$. Подставив $x=\frac{2\pi}{3}$ в неравенство $\sin^2 x+2\cos x+a<0$ получим: $\frac{3}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+a<0$, откуда $a<\frac{1}{4}$.

В этом случае уравнение $2\sin^2 x+3\cos x=0$ при условии $\sin^2 x+2\cos x+a<0$ имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ единственный корень $x=\frac{2\pi}{3}$ при $a<\frac{1}{4}$ и не имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ корней при $a\geqslant\frac{1}{4}$.

Ответ: $a<0,\ a=\frac{1}{4}$.

30. Тип 18 № 645893

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2x^2+2a(\sqrt{2}-1)x+\sqrt{x-2}=2\sqrt{2}-3$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Выделим полный квадрат, получим:

$$(ax)^2+2ax\cdot(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})+\sqrt{x-2}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(ax+(\sqrt{2}-1))^2+\sqrt{x-2}=0.$$

Сумма неотрицательных выражений равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю, поэтому уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}ax+(\sqrt{2}-1)=0,\\ \sqrt{x-2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ax=1-\sqrt{2},\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2},\\ x=2.\end{cases}$$

Таким образом, при $a=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ уравнение имеет единственное решение $x=2$, при прочих a решений нет.

Ответ: $a=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

31. Тип 18 № 555972

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}y(y+1)\leqslant 0,\\ 3x^2+3y^2-6a(x+y)+5a^2-6x+4a+3=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

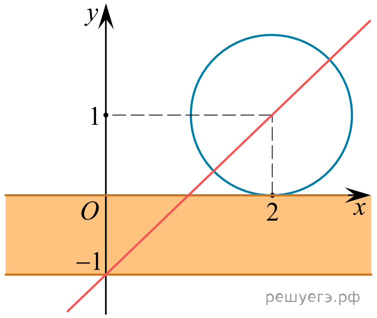
Решение. Выделим в уравнении системы полные квадраты:

$$3x^2-6ax+3a^2+3y^2-6ay+3a^2-6x+4a+3-a^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(x-a)^2+3(y-a)^2-6(x-a)+3-2a-a^2=0.$$

Ещё раз выделим полный квадрат:

$$3(x-a)^2-6(x-a)+3+3(y-a)^2=a^2+2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-a-1)^2+(y-a)^2=\frac{a^2+2a}{3}.$$

Уравнение определяет окружность с центром $(a+1;a)$ и радиусом $\sqrt{\dfrac{a^2+2a}{3}}$. Неравенство $y(y+1)\leqslant 0$ определяет горизонтальную полосу $-1\leqslant y\leqslant 0$.



На рисунке видно, что единственное решение получается в двух случаях.

1. Окружность касается полосы внешним образом. Это происходит тогда и только тогда, когда центр расположен вне полосы, а её радиус равен расстоянию от центра до ближайшей границы полосы:

$$\begin{cases} a<-1, \\ (a+1)^2=\dfrac{a^2+2a}{3} \end{cases} \text{или} \begin{cases} a>0, \\ a^2=\dfrac{a^2+2a}{3}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a<-1, \\ 2a^2+4a+3=0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} a>0, \\ 2a^2-2a=0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Вторая система имеет решение $a=1$.

2. Окружность превращается в точку и при этом принадлежит полосе:

$$\begin{cases} -1\leqslant a\leqslant 0, \\ a^2+2a=0 \end{cases} \text{откуда } a=0.$$

Ответ: 0; 1.

Вариант № 86880801

32. Тип 18 № 513230

Найдите все a, при каждом из которых функция

$$f(x)=\frac{16ax^3}{(x^2+1)^3}-\frac{12x^2}{(x^2+1)^2}-\frac{12(a+1)x}{x^2+1}.$$

будет убывающей на всей области определения.

Решение. Заметим, что при стремлении переменной к плюс и минус бесконечности график функции приближается к оси абсцисс (сверху или снизу — в зависимости от параметра). Убывающая функция так себя вести не может.

Ответ: ни при каких.

Приведём решение Дмитрия Гущина.

Заметим, что для всех отличных от нуля значений переменной $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Это означает, что, например, множество значений функции на отрезках $[1;2]$ и $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ совпадают. Но это невозможно для убывающей функции.

Примечание Владислава Франка.

Отметим, что применённый в первом решении подход носит достаточно общий характер. Применим его в чуть более сложном случае для анализа функции $g(x)=\dfrac{16ax^3}{(x^2+1)^3}-\dfrac{12x^2+12(a+1)x}{x^2+1}$. Выделим целую часть:

$$g(x)=\frac{16ax^3}{(x^2+1)^3}-12+\frac{12-12(a+1)x}{x^2+1}.$$

Далее заметим, что при $x\to\pm\infty$ имеем $g(x)\to-12$, то есть график функции имеет горизонтальную асимптоту $y=-12$. Но в то же время $g(0)=0$, что невозможно для убывающей функции.

33. Тип 18 № 520850

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+ay^2-(4a-6)x+4ay+1=0, \\ x^2+y=xy+x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Второе уравнение приводится к виду $(x-1)(x-y)=0$, откуда $x=1$ или $y=x$.

При $a = 0$ исходная система имеет одно решение.

При $a \neq 0$ при подстановке в первое уравнение системы $x=1$ или $y=x$ получаются квадратные уравнения. Значит, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда каждое из этих уравнений имеет ровно два корня и пара чисел (1; 1) не является решением исходной системы.

При $x=1$ получаем:

$$ay^2+4ay+7-3a=0.$$

Это квадратное уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$16a^2+12a^2-28a>0 \Leftrightarrow a^2-a>0,$$

откуда $a<0$; $a>1$.

При $y=x$ получаем:

$$2ax^2+6x+1=0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня при положительном дискриминанте:

$$36-8a>0,$$

откуда, учитывая условие $a \neq 0$, получаем $a<0$ и $0<a<\dfrac{9}{2}$.

Пара чисел (1; 1) является решением исходной системы при $2a+7=0$, то есть при $a=-\dfrac{7}{2}$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при $a<-\dfrac{7}{2}$; $-\dfrac{7}{2}<a<0$; $1<a<\dfrac{9}{2}$.

Ответ: $a<-\dfrac{7}{2}$; $-\dfrac{7}{2}<a<0$; $1<a<\dfrac{9}{2}$.

34. Тип 18 № 674204

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a\cdot(y^2+2)=x+1-y^4, \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$

имеет ровно пять различных решений.

Решение. Заметим, что если пара чисел $(x;\,y)$ является решением системы, то и пара чисел $(x;\,-y)$ тоже является решением системы. Значит, нечетное число решение возможно только если одним из решений является пара чисел $(x;\,0)$. Найдём при каких значениях параметра a, пара $(x;\,0)$ является решением системы:

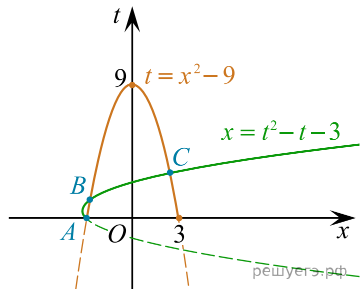
$$\begin{cases} a\cdot(0+2)=x+1-0, \\ x^2+0=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=x+1, \\ \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3, \\ a=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3, \\ a=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пусть $y^2=t \geqslant 0$.

Определим число решений исходной системы при найденных значениях параметра a. При $a=-1$ получаем:

$$\begin{cases} -(y^2+2)=x+1-y^4, \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^4-y^2-3, \\ y^2=9-x^2. \end{cases}$$

тогда каждому значению $t>0$ соответствуют два значения y, а $t=0$ — одно значение $y=0$. Изобразим в системе координат xOt графики уравнений системы



$$\begin{cases} x=t^2-t-3, \\ t=9-x^2, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

При $t \geqslant 0$ графики уравнений имеют три общие точки $A(x_A;t_A)$, $B(x_B;t_B)$ и $C(x_C;t_C)$, где $t_A=0$, а $t_C>t_B>0$. Тогда, исходная система имеет ровно пять решений:

$$(-3;\,0),\qquad (x_B;\,-\sqrt{t_B}),\qquad (x_B;\,\sqrt{t_B}),\qquad (x_C;\,-\sqrt{t_C}),\qquad (x_C;\,\sqrt{t_C}),$$

значит, $a=-1$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=2$ получаем

$$\begin{cases} 2\cdot(y^2+2)=x+1-y^4, \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^4+2y^2+3, \\ y^2=9-x^2. \end{cases}$$

Пусть $y^2=t \geqslant 0$, тогда каждому значению $t>0$ соответствуют два значения y, а значению $t=0$ — одно значение $y=0$. Изобразим в системе координат xOt графики уравнений системы

$$\begin{cases} x=t^2+2t+3, \\ t=9-x^2, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

При $t \geqslant 0$ графики уравнений имеют одну общую точку $D(3;0)$. Тогда исходная система тоже имеет ровно одно решение $(-3;0)$, значит, $a=2$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: −1.

35. Тип 18 № 513272

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|\log_{0,5}(x^2)-a|-|\log_{0,5}x+2a|=(\log_{0,5}x)^2$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

Вариант № 86880801

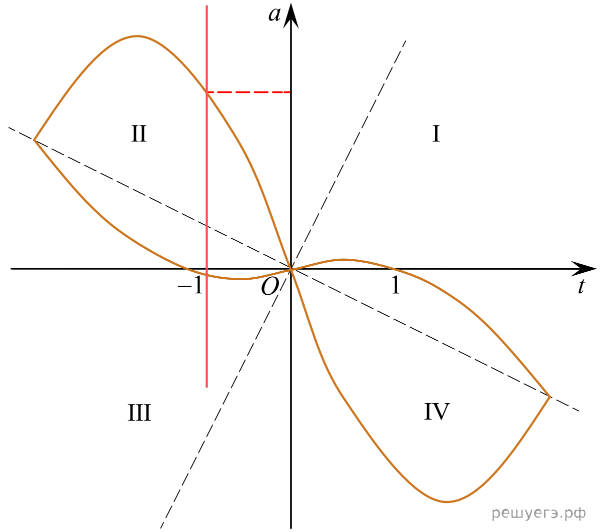
Решение. Сделаем замену $\log_{0.5}x=t$. Поскольку $0<x<2$, то $t>-1$ и каждому такому t соответствует единственное x.

Получаем задачу — при каких a уравнение $|2t-a|-|t+2a|=t^2$ имеет корень, больший чем -1?

Построим график этого уравнения в плоскости tOa.

Прямые $a=2t$ и $a=-\frac{t}{2}$ разбивают плоскость на четыре части (I, II, III и IV), в каждой из которых график уравнения $|2t-a|-|t+2a|=t^2$ представляет собой часть параболы.

В области I оба подмодульных выражения положительны и уравнение принимает вид



$$2t-a-t-2a=t^2 \Leftrightarrow a=-\frac{t^2-t}{3}.$$

Графиком $a=-\frac{t^2-t}{3}$ является парабола с вершиной в точке с координатами $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{12}\right)$.

В области II выражение $2t-a$ отрицательно, а выражение $t+2a$ положительно и уравнение принимает вид

$$-2t+a-t-2a=t^2 \Leftrightarrow a=-t^2-3t.$$

Графиком $a=-t^2-3t$ является парабола с вершиной в точке с координатами $\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$.

Для области III получим

$$-2t+a+t+2a=t^2 \Leftrightarrow a=\frac{t^2+t}{3}.$$

Графиком $a=\frac{t^2+t}{3}$ является парабола с вершиной в точке с координатами $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{12}\right)$.

Для области IV получим

$$2t-a+t+2a=t^2 \Leftrightarrow a=t^2-3t.$$

Графиком $a=t^2-3t$ является парабола с вершиной в точке с координатами $\left(\frac{3}{2};-\frac{9}{4}\right)$.

Задача свелась к ответу на вопрос: при каких значениях a, горизонтальная прямая имеет пересечение с графиком функции правее вертикальной прямой $t=-1$ (красная линия).

Получаем ответ: при $-\frac{9}{4}\leqslant a<2$.

36. Тип 18 № 642008

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5^x-a}+\frac{a-2}{\sqrt{5^x-a}}=1$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. Исходное уравнение имеет ровно два различных корня тогда и только тогда, когда уравнение

$$\sqrt{t-a}+\frac{a-2}{\sqrt{t-a}}=1$$

имеет ровно два различных положительных корня. При $t\leqslant a$ левая часть уравнения не определена, а при $t>a$ уравнение принимает вид $t-2=\sqrt{t-a}$. При $t<2$ левая часть полученного уравнения отрицательна, а правая неотрицательна, поэтому полученное уравнение не имеет корней, меньших 2.

При $t>a$ и $t\geqslant 2$ получаем:

$$t^2-4t+4=t-a \Leftrightarrow t^2-5t+(a+4)=0.$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения равен $25-4(a+4)=9-4a$. Значит, уравнение имеет ровно два корня при $a<\frac{9}{4}$.

При каждом из значений $a<\frac{9}{4}$ графиком функции $f(t)=t^2-5t+(a+4)$ является парабола с ветвями, направленными вверх, и вершиной в точке $\left(\frac{5}{2};a-\frac{9}{4}\right)$.

Пусть t_0 — меньший корень уравнения $f(t)=0$. Поскольку $2<\frac{5}{2}$ и $a<\frac{9}{4}<\frac{5}{2}$, неравенства $t_0\geqslant 2$ и $t_0>a$ выполняются тогда и только тогда, когда $f(2)\geqslant 0$ и $f(a)>0$. Получаем: $a-2\geqslant 0$ и $a^2-4a+4>0$, следовательно, $a>2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $2<a<\frac{9}{4}$.

Ответ: $2<a<\frac{9}{4}$.

37. Тип 18 № 484629

Известно, что значение параметра a таково, что система уравнений

$$\begin{cases}2^{\ln y}=4^{|x|},\\ \log_2(x^4y^2+2a^2)=\log_2(1-ax^2y^2)+1\end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это значение параметра a и решите систему при найденном значении параметра.

Решение. Из первого уравнения системы получаем

$$2^{\ln y}=4^{|x|}\Leftrightarrow y=e^{2|x|}.$$

Заметим, что если пара $(x;y)$ — решение системы, то пара $(-x;y)$ — также решение этой системы. Поскольку система имеет единственное решение, то этим решением может быть только пара $(0;y)$. Таким образом, $x=0$ и из второго уравнения получаем:

$$\log_2(2a^2)=\log_2 1+1\Leftrightarrow \log_2(2a^2)=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2a^2=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1,\\ a=-1.\end{array}\right.$$

Проверим, действительно ли система при найденных значениях a имеет единственное решение.

1. Если $a=1$, то второе уравнение системы имеет единственное решение:

$$\log_2(x^4y^2+2)=\log_2(1-x^2y^2)+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4y^2+2=2-2x^2y^2\Leftrightarrow y^2(x^4+2x^2)=0\underset{y>0}{\Leftrightarrow} x=0.$$

Тогда $y=e^0=1$, а значит, пара (0; 1) является единственным решением системы.

2. Если $a=-1$, то второе уравнение системы имеет три решения:

$$\log_2(x^4y^2+2)=\log_2(1+x^2y^2)+1\Leftrightarrow x^4y^2+2=2+2x^2y^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^2(x^4-2x^2)=0\underset{y>0}{\Leftrightarrow} x^2(x^2-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\sqrt{2},\\ x=-\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Каждому из найденных значений x соответствует значение $y=e^{2|x|}$, а потому система имеет три решения.

Ответ: система имеет единственное решение $(0;\,1)$ при $a=1$.

38. Тип 18 № 530460

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции

$$y=\frac{5a+150x-10ax}{100x^2+20ax+a^2+25}$$

содержит отрезок [0; 1].

Вариант № 86880801

Решение. Запишем функцию в виде $y=\dfrac{5a+10(15-a)x}{(10x+a)^2+25}$. Если при некоторых значениях a существуют такие числа x_0, x_1, что выполняются равенства $0=\dfrac{5a+10(15-a)x_0}{(10x_0+a)^2+25}$ и $1=\dfrac{5a+10(15-a)x_1}{(10x_1+a)^2+25}$, то отрезок [0; 1] будет принадлежать множеству значений данной функции.

Первое уравнение:

$$0=\frac{5a+10(15-a)x}{(10x+a)^2+25}\Leftrightarrow 10(a-15)x=5a.$$

Уравнение имеет решение при любом $a\neq 15$.

Второе уравнение:

$$1=\frac{5a+10(15-a)x}{(10x+a)^2+25}\Leftrightarrow 100x^2+30(a-5)x+a^2-5a+25=0.$$

Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D=900(a-5)^2-400(a^2-5a+25)\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 500(a^2-14a+25)\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-7+2\sqrt{6})(a-7-2\sqrt{6})\geqslant 0.$$

Решением этого неравенства является множество $(-\infty;\,7-2\sqrt{6}],\ [7+2\sqrt{6};\,+\infty)$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют только все значения

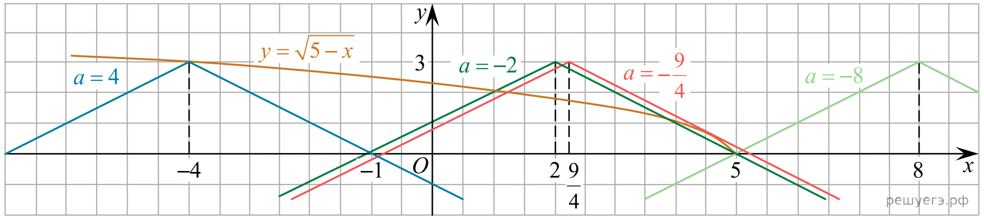
$$a\in(-\infty;\,7-2\sqrt{6}]\cup[7+2\sqrt{6};\,15)\cup(15;\,+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;\,7-2\sqrt{6}]\cup[7+2\sqrt{6};\,15)\cup(15;\,+\infty)$.

39. Тип 18 № 484643

Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x}+|x+a|\leqslant 3$ является отрезок.

Решение. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{5-x} \leqslant 3-|x+a|$, и нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.



Из рисунка видно, что график правой части неравенства лежит выше графика левой при $a \in(-8,4)$. Заметим, что при $a=-2$, решением кроме отрезка становится еще и точка $x=5$, что противоречит условию.

При дальнейшем уменьшении a в решение будет попадать еще один отрезок с правым концом в точке $x=5$. Левый конец будет сдвигаться вплоть до случая касания при котором решение снова превратится в один отрезок.

Рассмотрим случай касания:

$$(\sqrt{5-x})'=-1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{5-x}}=-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5-x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=4\frac{3}{4},$$

тогда

$$\sqrt{5-4\frac{3}{4}}=3-\left(4\frac{3}{4}+a\right) \Leftrightarrow a=-2\frac{1}{4}.$$

Итак, интервал $\left(-2\frac{1}{4};-2\right]$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a \in\left(-8;-2\frac{1}{4}\right] \cup(-2,4)$.

40. Тип 18 № 502026

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-7a+7\sqrt{2x^2+49}=3|x-7a|-6|x|$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим две функции:

$$f(x)=a^2-7a+7\sqrt{2x^2+49} \quad \text{и} \quad g(x)=3|x-7a|-6|x|.$$

Функция f непрерывна, убывает при $x \leqslant 0$, возрастает при $x \geqslant 0$, достигает в нуле наименьшего значения, $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Функция g непрерывна, является кусочно-линейной, при $x<0$ ее угловой коэффициент равен либо 3, либо 9, при $x>0$ угловой коэффициент равен либо –3, либо –9. Значит, функция g возрастает при $x \leqslant 0$, убывает при $x \geqslant 0$, в нуле достигает наибольшего значения, $g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Следовательно, исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда наименьшее значение функции f не превосходит наибольшего значения функции g, то есть тогда и только тогда, когда $f(0) \leqslant g(0)$. Имеем:

$$a^2-7a+49 \leqslant 21|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2-28a+49 \leqslant 0,\\ a \geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+14a+49 \leqslant 0,\\ a<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}14-7\sqrt{3} \leqslant a \leqslant 14+7\sqrt{3},\\ a=-7.\end{array}\right.$$

Ответ: $a \in\{-7\} \cup\left[14-7\sqrt{3}, 14+7\sqrt{3}\right]$.

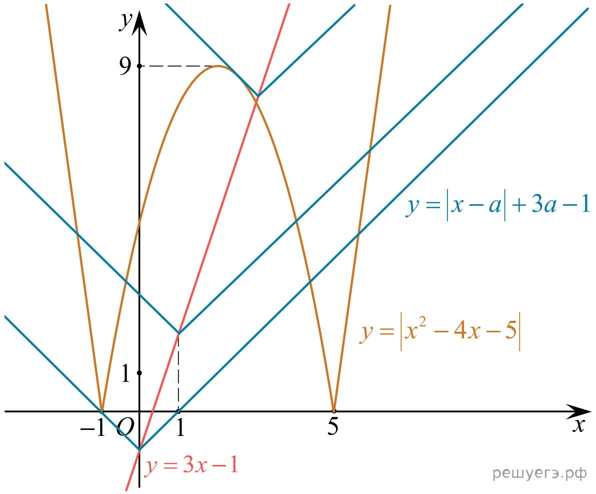
Примечание.

Исследование поведения на бесконечности существенно. Например, если $f(x)=-\frac{1}{|x|+1}$ и $g(x)=\frac{1}{|x|+1}$, то условия $f(0) \leqslant g(0)$ выполнено, но уравнение $f(x)=g(x)$ решений не имеет.

41. Тип 18 № 515767

При каких значениях a уравнение $\left|x^2-4x-5\right|-3a=|x-a|-1$ имеет ровно три корня?

Решение. График функции $y=|x^2-4x-5|$ — парабола, отраженная относительно оси Ox. Вершина $y=|x-a|+3a-1$ — это точка $(a;\,3a-1)$, она перемещается по прямой $y=3x-1$.



Ясно, что три решения будет при $a=0$ и в случае касания прямой $y=4a-x-1$ и $y=-x^2+4x+5$:

$$\begin{cases}-2x+4=-1,\\4a-x-1=-x^2+4x+5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\4a=5\cdot\dfrac{5}{2}+6-\dfrac{25}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\a=\dfrac{49}{16}.\end{cases}$$

Ответ: $0;\ \dfrac{49}{16}$.

42. Тип 18 № 484640

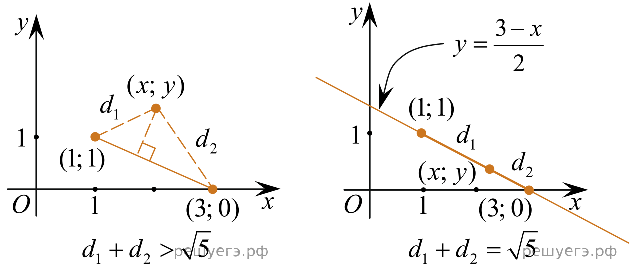
При каждом a решите систему уравнений

$$\begin{cases}2^{1+x}=32a\sqrt{2},\\\sqrt{x^2+a^2+2-2x-2a}+\sqrt{x^2+a^2-6x+9}=\sqrt{5}.\end{cases}$$

Решение. Запишем второе уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)^2+(a-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+a^2}=\sqrt{5}.$$

Геометрический смысл уравнения состоит в том, что сумма расстояний от точек $(x;\ a)$ до точек $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$ равно $\sqrt{5}$. Поскольку расстояние между точками $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$ тоже равно $\sqrt{5}$, это означает, что точка $(x;\ a)$ должна лежать на отрезке, соединяющем точки $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$. Другими словами, она удовлетворяет уравнению $a=\dfrac{3-x}{2}$ и условию $x\in[1;\ 3]$.



Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}2^{1+x}=32a\sqrt{2},\\2a=3-x,\ x\in[1;\ 3].\end{cases}$$

Подставив $2a$ в первое уравнение, получаем

$$2^{1+x}=16(3-x)\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}}=3-x\Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}}+x=3.$$

Поскольку функция $y=2^{x-\frac{7}{2}}+x$ возрастающая (как сумма двух возрастающих), каждое значение она принимает ровно один раз. Поэтому решение $x=\dfrac{5}{2}$ — единственное, ему соответствует $a=\dfrac{1}{4}$.

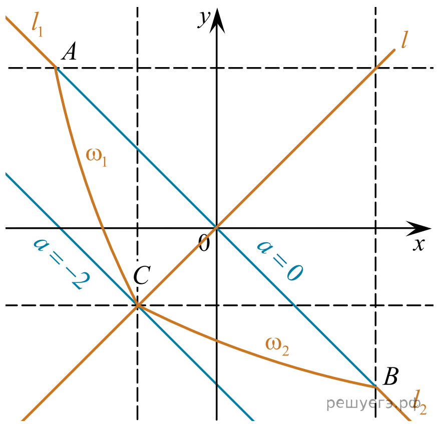
Ответ: если $a=\dfrac{1}{4}$, то $x=\dfrac{5}{2}$, при остальных a нет решений.

43. Тип 18 № 643687

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+x+|x^2-x-2|=y^2+y+|y^2-y-2|, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет больше двух решений.



Решение. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы. Рассмотрим четыре случая.

1. Если $x^2-x-2\leqslant 0$ и $y^2-y-2\leqslant 0$, то получаем уравнение:

$$x^2+x-x^2+x+2=y^2+y-y^2+y+2 \Leftrightarrow x=y.$$

Назовем l прямую, задаваемую полученным уравнением.

2. Если $x^2-x-2\leqslant 0$ и $y^2-y-2\geqslant 0$, то получаем уравнение:

$$x^2+x-x^2+x+2=y^2+y+y^2-y-2 \Leftrightarrow x=y^2-2.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $x=y^2-2$.

3. Если $x^2-x-2\geqslant 0$ и $y^2-y-2\leqslant 0$, то получаем уравнение:

$$x^2+x+x^2-x-2=y^2+y-y^2+y+2 \Leftrightarrow y=x^2-2.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $y=x^2-2$.

4. Если $x^2-x-2\geqslant 0$ и $y^2-y-2\geqslant 0$, то получаем уравнение:

$$x^2+x+x^2-x-2=y^2+y+y^2-y-2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=0.$$

Полученное уравнение задает две прямые: $y=x$ и $y=-x$.

Точки $A(-2;\,2)$, $B(2;\,-2)$ и $C(-1;\,-1)$ являются точками пересечения этих парабол с этих парабол и прямых, они лежат на прямых $y=2$, $x=2$ или $x=-1$ и $y=-1$ соответственно, поэтому искомое множество состоит из прямой l, лучей l_1 и l_2, лежащих на прямой $y=-x$, с началами в точках A и B соответственно, дуги ω_1 параболы $y=x^2-2$ с концами в точках A и C и дуги ω_2 параболы $x=y^2-2$ с концами в точках B и C (см. рис.).

Второе уравнение системы задаёт прямую, параллельную прямой AB или совпадающую с ней; назовем ее m. Заметим, что при $a=-2,25$ прямая m касается парабол $y=x^2-2$ и $x=y^2-2$ в точках, не лежащих на дугах ω_1 и ω_2, поэтому прямая m имеет с каждой из дуг ω_1 и ω_2 не больше одной общей точки.

При $a=0$ прямая m содержит лучи l_1 и l_2 то есть исходная система имеет бесконечное число решений.

При $a=-2$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке C, пересекает прямую l в точке C и не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2, а потому исходная система имеет единственное решение.

При $-2 < a < 0$ прямая m не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2, пересекает прямую l в точке, отличной от точки C, пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в одной точке, отличной от точки C, то есть исходная система имеет ровно три решения.

При $a < -2$ или $a > 0$ прямая m пересекает прямую l в одной точке и не имеет общих точек с дугами ω_1 и ω_2 и лучами l_1 и l_2, то есть исходная система имеет единственное решение. Значит, исходная система имеет больше двух решений при $-2 < a \leqslant 0$.

Ответ: $-2 < a \leqslant 0$.

44. Тип 18 № 672805

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a-1)\cdot 25^x+(2a-14)\cdot 15^x=(3a-15)\cdot 9^x$ имеет единственный корень.

Вариант № 86880801

Решение. Преобразуем уравнение, поделив обе части на положительное выражение 9^x :

$$(a-1)\cdot 25^x+(2a-14)\cdot 15^x=(3a-15)\cdot 9^x=(3a-15)\cdot 9^x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-1)\cdot \frac{25^x}{9^x}+(2a-14)\cdot \frac{15^x}{9^x}=(3a-15)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-1)\cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x}+(2a-14)\cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x}-(3a-15)=0.$$

Пусть $t=\left(\frac{5}{3}\right)^{x}$, тогда каждому положительному значению t соответствует ровно одно значение x, при $t \leqslant 0$ нет соответствующих значений x. Требуется найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-1)t^2+(2a-14)t-(3a-15)=0$$

имеет ровно один положительный корень.

При $a=1$ получаем:

$$(1-1)t^2+(2\cdot 1-14)t-(3\cdot 1-15)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -12t+12=0 \Leftrightarrow t=1,$$

значит, условие задачи выполнено. При $a \neq 1$, заметив, что сумма коэффициентов уравнения равна нулю, находим корни:

$$t=1 \quad \text{или} \quad t=-\frac{3a-15}{a-1}=\frac{12}{a-1}-3.$$

Корень $t=1$ положителен при любых значениях параметра a, поэтому условие задачи выполнено в двух случаях:

— если два найденных корня совпадают, то есть

$$1=\frac{12}{a-1}-3 \Leftrightarrow 4=\frac{12}{a-1}\Leftrightarrow a-1=3 \Leftrightarrow a=4;$$

— если второй корень не является положительным:

$$\frac{12}{a-1}-3 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-3a+15}{a-1}\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geqslant 5, \\ a < 1. \end{array}\right.$$

Объединяя результаты всех рассмотренных случаев, получаем, что $a \leqslant 1$, $a=4$ и $a \geqslant 5$.

Ответ: $(-\infty; 1]\cup\{4\}\cup[5; +\infty)$.

45. Тип 18 № 516765

Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{a\sin x+\cos x}=\sqrt{a\cos x+\sin x}$ имеет решения на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right]$.

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{a\sin x+\cos x}=\sqrt{a\cos x+\sin x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\sin x+\cos x=a\cos x+\sin x,\\ a\sin x+\cos x\geqslant 0.\end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

$$a\sin x+\cos x=a\cos x+\sin x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a-1)\sin x-(a-1)\cos x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a-1)(\sin x-\cos x)=0.$$

Рассмотрим два случая.

Пусть $a=1$, тогда из неравенства

$$\sin x+\cos x\geqslant 0\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2\pi k$$

отрезку $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right]$ принадлежат два числа $\frac{3\pi}{4}$и $\frac{7\pi}{4}$.

Пусть $a\neq 1$, тогда имеем:

$$\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\\ x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\end{array}\right.\quad n\in\mathbb{Z}.$$

В первой серии не содержится корней, лежащих на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right]$. Среди корней, содержащихся во второй серии, отрезку $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right]$ принадлежит одно число $\frac{5\pi}{4}$. Подставляя его в неравенство, получаем: $-a\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\geqslant 0$, откуда $a\leqslant -1$.

Ответ: $a\leqslant -1,\ a=1$.

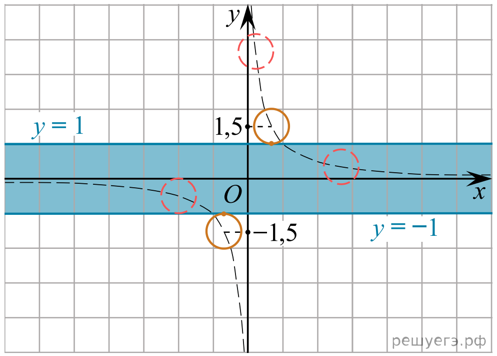
46. Тип 18 № 629508

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система:

$$\begin{cases}(x-a)^2+\left(y-\frac{1}{a}\right)^2=\frac{1}{4},\\ |y|\leqslant 1\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. В системе координат xOy неравенство $|y|\leqslant 1$ задаёт полосу, ограниченную горизонтальными прямыми $y=-1$ и $y=1$. Уравнение в системе задаёт окружность радиусом $R=\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(a;\ \frac{1}{a}\right)$. Последнее означает, что центр окружности принадлежит гиперболе $y=\frac{1}{x}$.



Система имеет будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда окружность касается полосы, т. е. когда ордината центра окружности равна $1+\frac{1}{2}$ или $-1-\frac{1}{2}$. Отсюда находим:

$$\frac{1}{a}=\pm\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=\pm\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\pm\frac{2}{3}$.

47. Тип 18 № 507678

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sin(x-3a)+\sin\left(\frac{x^2-6x+7a}{2}\right)=4x-x^2-a$$

не имеет действительных решений.

Решение. Пусть $y=\frac{x^2-6x+7a}{2}$. Тогда $x^2=2y+6x-7a$, и уравнение принимает вид

$$\sin(x-3a)+\sin y=4x-2y-6x+6a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-6a+\sin(x-3a)=-2y-\sin y.$$

Синус — нечётная функция, поэтому $2(3a-x)+\sin(3a-x)=2y+\sin y$. Рассмотрим функцию $f(t)=2t+\sin t$. Тогда уравнение принимает вид $f(3a-x)=f(y)$. Эта функция определена при всех t, и её производная $f'(t)=2+\cos t$ положительна при всех t. Следовательно, функция $f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой. Тогда уравнение $f(3a-x)=f(y)$ равносильно уравнению $3a-x=y$.

Сделаем обратную замену:

$$3a-x=\frac{x^2-6x+7a}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6a-2x=x^2-6x+7a \Leftrightarrow x^2-4x+a=0.$$

Уравнение не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен: $4^2-4a<0$, откуда $a>4$.

Ответ: $a>4$.

48. Тип 18 № 525028

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2+\sqrt{a-x})^2=(2x+1+\sqrt{a-x})^2$$

имеет единственный корень на отрезке $[-1;\ 1]$.

Решение. Уравнение $x^2+\sqrt{a-x}=2x+1+\sqrt{a-x}$ равносильно системе $\begin{cases} x^2-2x-1=0, \\ x\leqslant a. \end{cases}$ Эта система имеет единственный корень $x=1-\sqrt{2}$ на отрезке $[-1;\ 1]$ при $a\geqslant 1-\sqrt{2}$ и не имеет корней на этом отрезке при других значениях a.

Уравнение $x^2+\sqrt{a-x}=-2x-1-\sqrt{a-x}$ равносильно уравнению $(x+1)^2+2\sqrt{a-x}=0$. Оно имеет единственный корень $x=-1$ на отрезке $[-1;\ 1]$ при $a=-1$ и не имеет корней на этом отрезке при других значениях a.

Поскольку $-1<1-\sqrt{2}$, уравнение $(x^2+\sqrt{a-x})^2=(2x+1+\sqrt{a-x})^2$ имеет единственный корень на отрезке $[-1;\ 1]$ при $a\geqslant 1-\sqrt{2}$ и $a=-1$.

Ответ: $a\geqslant 1-\sqrt{2}$; $a=-1$.

49. Тип 18 № 640524

Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{10-a-(a^2-3a+2)\sin x}{\cos^2 x+a^2+3}<1$$

содержит отрезок $\left[0;\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Сделаем замену: $z=\sin x$. Тогда $-1\leqslant z\leqslant 1$, и неравенство принимает вид

$$\frac{10-a-(a^2-3a+2)z}{a^2+4-z^2}<1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{z^2-(a^2-3a+2)z-a^2-a+6}{a^2+3-z^2}<0.$$

При $-1\leqslant z\leqslant 1$ знаменатель положителен. Если $x\in\left[0;\,\frac{3\pi}{4}\right]$, то $z\in[0;\,1]$, поэтому достаточно найти все a, при каждом из которых неравенство

$$z^2-(a^2-3a+2)z-a^2-a+6<0$$

справедливо при всех z из отрезка $[0;\,1]$.

Рассмотрим функцию

$$f(z)=z^2-(a^2-3a+2)z-a^2-a+6.$$

Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Получаем, что $f(z)<0$ при всех $0\leqslant z\leqslant 1$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases}f(0)<0,\\ f(1)<0.\end{cases}$ Решим эту систему:

$$\begin{cases}-a^2-a+6<0,\\ -2a^2+2a+5<0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<-3,\\ a>2,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a>\dfrac{1+\sqrt{11}}{2},\\ a<\dfrac{1-\sqrt{11}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<-3,\\ a>\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}.\end{array}\right.$$

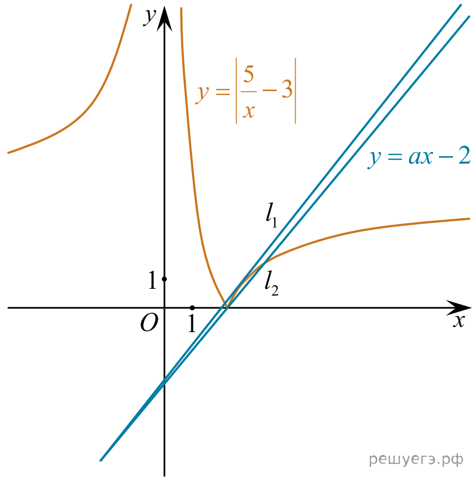
Ответ: $(-\infty;\,-3)\cup\left(\frac{1+\sqrt{11}}{2};\,+\infty\right)$.

50. Тип 18 № 507479

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-2$$

на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.



Решение. Левая часть уравнения — гипербола, а правая — прямые, проходящие через точку $(0;\,-2)$. Уравнение имеет более двух решений, когда прямые лежат между l_1 и l_2.

Найдем точку пересечения гиперболы и оси абсцисс: $\frac{5}{x}-3=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$. Заметим, что точка $\left(\frac{5}{3};\,0\right)\in l_2$, тогда $0=\frac{5}{3}a-2\Leftrightarrow a=\frac{6}{5}$.

Поскольку график отображен, то $3-\frac{5}{x}=ax-2\Leftrightarrow ax^2-5x+5=0$. Чтобы была единственная точка касания, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного уравнения был равен нулю: $25-20a=0\Leftrightarrow a=\frac{5}{4}$. Но $a\neq\frac{5}{4}$ и $a\neq\frac{6}{5}$, поскольку требуется, чтобы уравнение имело более двух корней.

Ответ: $\left(\frac{6}{5};\frac{5}{4}\right)$.