

1. Тип 10 № 5703

Моторная лодка прошла против течения реки 195 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 14 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть u км/ч — скорость течения реки, тогда скорость лодки по течению равна $14 + u$ км/ч, а скорость лодки против течения равна $14 - u$ км/ч. На обратный путь лодка затратила на 2 часа меньше, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{195}{14-u} - \frac{195}{14+u} &= 2 \Leftrightarrow \frac{390u}{(14-u)(14+u)} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{390u}{196-u^2} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 390u = 2(196-u^2) \Leftrightarrow 2u^2 + 390u - 392 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-195 + \sqrt{195^2 + 4 \cdot 196}}{2}; \\ u = \frac{-195 - \sqrt{195^2 + 4 \cdot 196}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1; \\ u = -196 \end{cases} \Leftrightarrow v = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, скорость течения реки равна 1 км/ч.

Ответ: 1.

2. Тип 10 № 672867

Две трубы наполняют бассейн за 5 часов 50 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 14 часов. За сколько часов наполняется этот бассейн одна вторая труба?

Решение. За один час обе трубы наполняют $\frac{1}{14}$ часть бассейна, а вторая труба — $\frac{1}{5\frac{5}{6}} = \frac{6}{35}$

часть бассейна. Поэтому одна вторая труба за один час наполняет $\frac{6}{35} - \frac{1}{14} = \frac{12}{70} - \frac{5}{70} = \frac{1}{10}$ часть бассейна. Итак, одна вторая труба наполняет бассейн за 10 часов.

Ответ: 10 часов.

3. Тип 10 № 99600

Часы со стрелками показывают 8 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

Решение. До четвертой встречи стрелок минутная должна сначала пройти 8 разделяющих их часовых делений (поскольку часы показывают 8 часов), затем 3 раза обойти полный круг, то есть пройти 36 часовых делений, и пройти последние L делений, на которые поворачивается часовая стрелка за время движения минутной. Скорость движения минутной стрелки в 12 раз больше часовой: пока часовая обходит один полный круг, минутная проходит 12 кругов. Приравняем время движения часовой и минутной стрелок до их четвертой встречи:

$$\frac{L}{1} = \frac{8 + 36 + L}{12} \Leftrightarrow 12L = L + 44 \Leftrightarrow L = 4.$$

Часовая стрелка пройдет 4 деления, что соответствует 4 часам, то есть 240 минутам.

Ответ: 240.

Приведем арифметическое решение.

Скорость минутной стрелки — 1 круг в час, а часовой — $\frac{1}{12}$ круга в час, поэтому скорость удаления или сближения стрелок равна $\frac{11}{12}$ круга в час. Расстояние между стрелками, отсчитываемое по окружности, в начальный момент составляет 40 минут или $\frac{2}{3}$ круга. С момента первой встречи до момента четвёртой встречи минутная стрелка должна опередить часовую на три круга. Всего $\frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}$ круга. Поэтому необходимое время равно $\frac{11}{3} : \frac{11}{12} = 4$ часа, или 240 минут.

Приведем короткое решение.

Ясно, что в первый раз стрелки встретятся между 8 и 9 часами, второй раз — между 9 и 10 часами, третий — между 10 и 11, четвертый — между 11 и 12 часами, то есть ровно в 12 часов. Таким образом, они встречаются ровно через 4 часа, что составляет 240 минут.

Приведем решение при помощи геометрической прогрессии (Эмиль Бахшинян).

Минутная стрелка движется в 12 раз быстрее, чем часовая. За то время, пока минутная стрелка пройдет 40 минут, часовая отдалится от своего исходного положения на $\frac{40}{12}$ минуты. Пока минутная стрелка пройдет эти $\frac{40}{12}$ минуты, часовая пройдет в 12 раз меньше, то есть $\frac{40}{144}$ минуты. Таким образом, расстояния в минутах между стрелками составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 40$ и знаменателем $q = \frac{1}{12}$. Значит, время до первой встречи стрелок является суммой этой прогрессии:

$$S_1 = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{40}{\frac{11}{12}} = \frac{480}{11} \text{ (мин.)}$$

Аналогично время от момента встречи стрелок до каждой следующей встречи есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b'_1 = 60$ и знаменателем $q = \frac{1}{12}$. Время до четвертой встречи равно сумме времен до первой встречи и до трех следующих:

$$S = \frac{480}{11} + 3 \cdot \frac{b'_1}{1 - q} = \frac{480}{11} + \frac{2160}{11} = \frac{2640}{11} = 240 \text{ (мин.)}$$

Примечание.

Если бы изначально на часах было, к примеру, 8 часов 20 минут, первым членом прогрессии стало бы $(20 + 20/12)$ минуты. Это связано с тем, что пока часовая стрелка проходила от 12-го деления 20 минут, часовая стрелка сдвинулась от 8-го деления на $20/12$ минуты.

Приведем решение в общем виде.

Скорость вращения часовой стрелки равна 0,5 градуса в минуту, а минутной — 6 градусов в минуту. Поэтому когда часы показывают время h часов m минут часовая стрелка повернута на $30h + 0,5m$ градусов, а минутная — на $6m$ градусов относительно 12-часового деления. Пусть в первый раз стрелки встретятся через t_1 минут. Тогда если минутная стрелка еще не опережала часовую в течение текущего часа, то:

$$\begin{aligned} 6m &+ 6t &= 30h &+ 0,5m &+ 0,5 \\ t &1 & t &1 & \text{откуда} \\ \frac{60h - 11m}{11} &= t_1 \end{aligned} \quad (*)$$

В противоположном случае получаем уравнение

$$\begin{aligned} 6m &+ 6t &= 30h &+ 0,5m &+ 0,5 \\ t &1 & t &1 + 360, & \text{откуда} \\ \frac{60h - 11m + 720}{11} &= t_1 \end{aligned} \quad (**)$$

Пусть во второй раз стрелки встретятся через t_2 минут после первого, тогда $0,5t_2 = 6t_2 - 360$, откуда $t_2 = 720/11$ (***) . Это же верно для каждого следующего оборота. Поэтому для встречи с номером n из (*) и (**) с учетом (***) имеем соответственно:

$$t_n = \frac{60h - 11m + 720(n-1)}{11}.$$

4. Тип 10 № 108485

Дима, Антон, Паша и Коля учредили компанию с уставным капиталом 100 000 рублей. Дима внес 22% уставного капитала, Антон — 50 000 рублей, Паша — 0,26 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Коля. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 700 000 рублей причитается Коле? Ответ дайте в рублях.

Решение. Антон внес половину уставного капитала. Тогда Коля внес $100 - 22 - 26 - 50 = 2\%$ уставного капитала. Таким образом, от прибыли 700 000 рублей Коле причитается $0,02 \cdot 700\,000 = 14\,000$ рублей.

Ответ: 14000.

5. Тип 10 № 112397

Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 3000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 100% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 6000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 200% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

Решение. Каждый год прибыль компании «Альфа» составляла 100% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 200% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счёте компании «Альфа» была сумма

$$3000 \cdot 2^{2006-2001} = 3000 \cdot 2^5 = 3000 \cdot 32 = 96\,000.$$

Каждый год прибыль компании «Бета» составила 200% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 300% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счёте компании «Бета» была сумма

$$6000 \cdot 3^{2006-2003} = 6000 \cdot 3^3 = 162\,000.$$

Таким образом, капитал компании «Бета» был на 66 000 долларов больше.

Ответ: 66 000.

6. Тип 10 № 99605

Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Чтобы найти среднюю скорость на протяжении пути, нужно весь путь разделить на все время движения. Пусть $3S$ км — весь путь автомобиля, тогда средняя скорость равна:

$$\begin{aligned} \frac{3S}{\frac{S}{60} + \frac{S}{120} + \frac{S}{110}} &= \frac{3}{\frac{1 \cdot 2 \cdot 11 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 12}{12 \cdot 10 \cdot 11}} = \\ &= \frac{3 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 11}{45} = 4 \cdot 2 \cdot 11 = 88 \text{ км/ч.} \end{aligned}$$

Ответ: 88.

7. Тип 10 № 509924

Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 120 км/ч, вторую треть — со скоростью 50 км/ч, а последнюю — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Чтобы найти среднюю скорость на протяжении пути, нужно весь путь разделить на все время движения. Пусть $3S$ км — весь путь автомобиля, тогда средняя скорость равна:

$$\frac{3S}{\frac{S}{120} + \frac{S}{50} + \frac{S}{75}} = \frac{3 \cdot 600}{5 + 12 + 8} = 72 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 72.

Примечание: Если внимательно посмотреть, S сокращается, поэтому в качестве S можно брать любое число. В данном случае было выбрано число 600, поскольку является наименьшим общим кратным чисел 120, 50 и 75.

8. Тип 10 № 111359

Грузовик перевозит партию щебня массой 360 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 3 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 18 дней.

Решение. Пусть в первый день грузовик перевез $a_1 = 3$ тонны щебня, во второй — a_2, \dots , в последний — a_{18} тонн; всего было перевезено $S_n = 360$ тонн; норма перевозки увеличивалась ежедневно на d тонн. Таким образом,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} n \Leftrightarrow 360 = \frac{2 \cdot 3 + 17d}{2} \cdot 18 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 40 = 6 + 17d \Leftrightarrow d = 2. \end{aligned}$$

Имеем:

$$a_9 = a_1 + 8d = 3 + 8 \cdot 2 = 19.$$

Следовательно, за девятый день было перевезено 19 тонн щебня.

Ответ: 19.

9. Тип 10 № 118587

Игорь и Паша красят забор за 24 часа. Паша и Володя красят этот же забор за 35 часов, а Володя и Игорь — за 40 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Решение. Обозначим выполняемую мальчиками работу по покраске забора за 1. Пусть за $\frac{1}{v_1}$, $\frac{1}{v_2}$, $\frac{1}{v_3}$ часов Игорь, Паша и Володя, соответственно, покрасят забор, работая самостоятельно. Игорь и Паша красят забор за 24 часа, откуда:

$$\frac{1}{v_1 + v_2} = 24 \Leftrightarrow v_1 + v_2 = \frac{1}{24}.$$

Паша и Володя красят этот же забор за 35 часов, откуда:

$$\frac{1}{v_3 + v_2} = 35 \Leftrightarrow v_3 + v_2 = \frac{1}{35}.$$

Володя и Игорь красят забор за 40 часов, откуда:

$$\frac{1}{v_1 + v_3} = 40 \Leftrightarrow v_1 + v_3 = \frac{1}{40}.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \frac{1}{24}, \\ v_3 + v_2 = \frac{1}{35}, \\ v_1 + v_3 = \frac{1}{40}. \end{cases}$$

Суммируя левые и правые части данных уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} 2(v_1 + v_2 + v_3) &= \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{40} \Leftrightarrow 2(v_1 + v_2 + v_3) = \frac{2}{21} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = \frac{1}{21} \Leftrightarrow \frac{1}{v_1 + v_2 + v_3} = 21. \end{aligned}$$

Следовательно, мальчики покрасят забор за 21 час.

Ответ: 21.

10. Тип 10 № 109109

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 36 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Решение. Виноград содержит 10% питательного вещества, а изюм — 95%. 36 кг изюма содержат $36 \cdot 0,95 = 34,2$ кг питательного вещества. Таким образом, для получения 36 килограммов изюма требуется $\frac{34,2}{0,1} = 342$ кг винограда.

Ответ: 342.

11. Тип 10 № 114653

Из пункта A круговой трассы выехал велосипедист. Через 10 минут он еще не вернулся в пункт A и из пункта A следом за ним отправился мотоциклист. Через 2 минуты после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 3 минуты после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 5 км. Ответ дайте в км/ч.

Решение. До первой встречи велосипедист провел на трассе 12 минут, то есть $1/5$ часа, а мотоциклист 2 минуты, то есть $1/30$ часа. Пусть скорость мотоциклиста равна v км/ч, тогда скорость велосипедиста равна

$$\frac{\frac{1}{30}v}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{6}v.$$

Еще через $1/20$ часа после первой встречи, мотоциклист догнал велосипедиста во второй раз. Имеем:

$$v \cdot \frac{1}{20} = 5 + \frac{1}{6}v \cdot \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{5}{120}v = 5 \Leftrightarrow v = 120.$$

Таким образом, скорость мотоциклиста была равна 120 км/ч.

Ответ: 120.

12. Тип 10 № 6001

Катер в 10:00 вышел из пункта A в пункт B , расположенный в 30 км от A . Пробыв в пункте B 2 часа 30 минут, катер отправился назад и вернулся в пункт A в 18:00 того же дня. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость катера равна 11 км/ч.

Решение. Пусть u км/ч — скорость течения реки, тогда скорость катера по течению равна $11+u$ км/ч, а скорость катера против течения равна $11-u$ км/ч. Катер вернулся в пункт A через 8 часов, но пробыл в пункте B 2 часа 30 минут, поэтому общее время движения катера дается уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{30}{11-u} + \frac{30}{11+u} &= 8 - 2,5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{30 \cdot (11+u) + 30 \cdot (11-u)}{121-u^2} &= 5,5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 60 \cdot 11 &= 5,5 \cdot 121 - 5,5u^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u^2 &= 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1; \\ u = -1 \end{cases} \xrightarrow{u>0} u = 1. \end{aligned}$$

Поэтому скорость течения реки равна 1 км/ч.

Ответ: 1.

13. Тип 10 № 108701

Смешали 4 литра 20-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 35-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение. Концентрация раствора равна $C = \frac{V_{\text{в-ва}}}{V_{\text{п-ра}}} \cdot 100\%$. Таким образом, концентрация получившегося раствора равна:

$$\frac{0,2 \cdot 4 + 0,35 \cdot 6}{4 + 6} \cdot 100\% = (2,9 \cdot 10)\% = 29\%.$$

Ответ: 29.

14. Тип 10 № 516378

Два гонника участвуют в гонках. Им предстоит проехать 50 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 4 км. Оба гонника стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 30 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонника, если известно, что первый гонник в первый раз обогнал второго на круг через 12 минут? Ответ дайте в км/ч.

Решение. Первый обогнал второго на 4 км за пятую часть часа, это значит, что скорость удаления (сближения) гонников равна $4 : \frac{1}{5} = 20$ км/ч. Обозначим скорость второго гонника x км/ч, тогда скорость первого $(x+20)$ км/ч. Составим и решим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{200}{x} - \frac{200}{x+20} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{200x + 200 \cdot 20 - 200x}{x(x+20)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 20x - 8000 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -100, \\ x = 80. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, скорость второго гонника равна 80 км/ч.

Ответ: 80.

15. Тип 10 № 628362

Первый и второй насосы, работая совместно, наполняют бассейн за 24 минуты, второй и третий — за 35 минут, а первый и третий — за 40 минут. За сколько минут эти три насоса, работая совместно, заполнят бассейн?

Решение. Наименьшее общее кратное чисел 24, 35 и 40 равно 840. За 840 минут первый и второй, второй и третий, первый и третий насосы (каждый учтен дважды) заполнят $35 + 24 + 21 = 80$ бассейнов. Следовательно, работая одновременно, первый, второй и третий насосы заполняют 40 бассейнов за 840 минут, а значит, 1 бассейн за 21 минуту.

Ответ: 21.

16. Тип 10 № 39443

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 247 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 16 км/ч, стоянка длится 7 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 39 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть u км/ч — скорость течения, тогда скорость теплохода по течению равна $16+u$ км/ч, а скорость теплохода против течения равна $16-u$ км/ч, $0 < u < 16$. На весь путь теплоход затратил $39 - 7 = 32$ часа, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{247}{16-u} + \frac{247}{16+u} &= 32 \Leftrightarrow \frac{247 \cdot 32}{256-u^2} = 32 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{247}{256-u^2} &= 1 \underset{0 < u < 16}{\Leftrightarrow} 247 = 256 - u^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u^2 &= 9 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3; \\ u = -3 \end{cases} \underset{u > 0}{\Leftrightarrow} u = 3. \end{aligned}$$

Таким образом, скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 3.

17. Тип 10 № 99612

По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 65 км/ч и 35 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 700 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 36 секундам. Ответ дайте в метрах.

Решение. Относительная скорость поездов равна

$$65 + 35 \text{ км/ч} = 100 \text{ км/ч} = \frac{100000}{3600} \text{ м/с} = \frac{1000}{36} \text{ м/с.}$$

За 36 секунд один поезд проходит мимо другого, то есть вместе поезда преодолевают расстояние, равное сумме их длин:

$$\frac{1000}{36} \cdot 36 = 1000 \text{ м,}$$

поэтому длина скорого поезда $1000 - 700 = 300$ м.

Ответ: 300.

18. Тип 10 № 110309

Бригада маляров красит забор длиной 150 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 75 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение. Пусть в первый день бригада покрасила a_1 метров забора, во второй — a_2, \dots , в последний — a_n метров забора. Тогда $a_1 + a_n = 75$ м, а за n дней было покрашено

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 37,5n \text{ метров забора.}$$

Поскольку всего было покрашено 150 метров забора, имеем: $37,5n = 150$, откуда $n = 4$. Таким образом, бригада красила забор в течение 4 дней.

Ответ: 4.

19. Тип 10 № 525743

Первый садовый насос перекачивает 8 литров воды за 2 минуты, второй насос перекачивает тот же объём воды за 7 минут. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 36 литров воды?

Решение. Скорость совместной работы насосов

$$\left(\frac{8}{2} + \frac{8}{7} \right) \text{ л/мин} = \frac{72}{14} \text{ л/мин.}$$

Для того, чтобы перекачать 36 литров воды, понадобится

$$\frac{36}{\frac{72}{14}} \text{ мин} = 7 \text{ мин}$$

Ответ: 7.

20. Тип 10 № 114145

Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 8 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 114 км/ч, и через 20 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть скорость второго автомобиля равна v км/ч. За $1/3$ часа первый автомобиль прошел на 8 км больше, чем второй, отсюда имеем

$$114 \cdot \frac{1}{3} = v \cdot \frac{1}{3} + 8 \Leftrightarrow v = 114 - 8 \cdot 3 \Leftrightarrow v = 90.$$

Ответ: 90.

21. Тип 10 № 635961

Расстояние между пристанями A и B равно 168 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 3 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B , тотчас повернула обратно и возвратилась в A . К этому времени плот проплыл 32 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Скорость плота равна скорости течения реки 2 км/ч. Пусть u км/ч — скорость яхты, тогда скорость яхты по течению равна $u + 2$ км/ч, а скорость яхты против течения равна $u - 2$ км/ч. Яхта, прибыв в пункт B , тотчас повернула обратно и возвратилась в A , а плоту понадобилось на три часа больше времени, чтобы пройти 32 км. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{168}{u+2} + \frac{168}{u-2} + 3 &= \frac{32}{2} \Leftrightarrow \frac{336u}{u^2-4} = 13 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 13u^2 - 336u - 52 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{168 + \sqrt{168^2 + 13 \cdot 52}}{13}; \\ u = \frac{168 - \sqrt{168^2 + 13 \cdot 52}}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = 26; \\ u = -\frac{2}{13} \end{cases} &\Leftrightarrow u = 26. \end{aligned}$$

Ответ: 26.

22. Тип 10 № 116353

Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, следующие 100 км — со скоростью 100 км/ч, а затем 110 км — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Чтобы найти среднюю скорость на протяжении пути, нужно весь путь разделить на все время движения. Пройденный путь равен $120 + 100 + 110 = 330$ км. Средняя скорость автомобиля равна

$$\frac{330}{\frac{120}{90} + \frac{100}{100} + \frac{110}{110}} = 99 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 99.

23. Тип 10 № 642327

Смешали некоторое количество 19-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 17-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение. Процентная концентрация раствора (массовая доля) равна $\omega = \frac{m_{\text{в-ва}}}{m_{\text{п-ра}}} \cdot 100\%$.

Пусть масса получившегося раствора $2m$. Таким образом, концентрация полученного раствора равна:

$$\omega = \frac{0,19m + 0,17m}{2m} \cdot 100\% = \frac{0,36}{2} \cdot 100\% = 18\%.$$

Ответ: 18.

24. Тип 10 № 110543

Рабочие прокладывают тоннель длиной 39 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 4 метра туннеля. Определите, сколько метров туннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 6 дней.

Решение. Пусть рабочие в первый день проложили a_1 метров туннеля, во второй — a_2 , ..., в последний — a_6 метров туннеля. Длина туннеля $S_n = 39$ метров. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$, $n = 6$ дней. Тогда в последний день рабочие проложили

$$a_6 = \frac{2S_n}{n} - a_1 = \frac{78}{6} - 4 = 9 \text{ метров.}$$

Ответ: 9.

25. Тип 10 № 116739

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метров, за 39 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Решение. Скорость поезда равна

$$60 \text{ км/ч} = \frac{60 \cdot 1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = \frac{50}{3} \text{ м/с.}$$

За 39 секунд поезд проходит мимо лесополосы, то есть проходит расстояние, равное сумме длин лесополосы и самого поезда, и это расстояние равно

$$\frac{50}{3} \cdot 39 = 650 \text{ м.}$$

Поэтому длина поезда равна $650 - 400 = 250$ метров.

Ответ: 250.

26. Тип 10 № 118605

Катя и Настя пропалывают грядку за 24 минуты, а одна Настя — за 42 минуты. За сколько минут пропалывает грядку одна Катя?

Решение. Обозначим выполняемую девочками работу по прополке грядки за 1. Пусть Катя пропалывает грядку за $\frac{1}{v}$ минут. Катя и Настя пропалывают грядку за 24 минуты. Таким образом,

$$\frac{1}{v + \frac{1}{42}} = 24 \Leftrightarrow \frac{42}{42v + 1} = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{56}.$$

Тем самым, Катя за минуту пропалывает $1/56$ грядки, значит, одна Катя прополет грядку за 56 минут.

Ответ: 56.

27. Тип 10 № 39507

От пристани A к пристани B , расстояние между которыми равно 209 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним со скоростью, на 8 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть u км/ч — скорость первого теплохода, тогда скорость второго теплохода по течению равна $u + 8$ км/ч. Первый теплоход находился в пути на 8 часов больше, чем второй, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{209}{u} - \frac{209}{u+8} &= 8 \Leftrightarrow \frac{209 \cdot 8}{u^2 + 8u} = 8 \Leftrightarrow \frac{209}{u^2 + 8u} = 1 \underset{u>0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = 11; \\ u = -19 \end{cases} \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u = 11. \end{aligned}$$

Таким образом, скорость первого теплохода равна 11 км/ч.

Ответ: 11.

28. Тип 10 № 109113

Имеются два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Решение. Пусть масса первого сплава m_1 кг, а масса второго — m_2 кг. Тогда массовое содержание никеля в первом и втором сплавах $0,1m_1$ и $0,35m_2$, соответственно. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 25% никеля. Получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} m_1 + m_2 = 225, \\ 0,1m_1 + 0,35m_2 = 0,25 \cdot 225, \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 225 - m_1, \\ 0,1m_1 + 0,35(225 - m_1) = 56,25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 225 - m_1, \\ 0,25m_1 = 22,5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 90, \\ m_2 = 135 \end{cases} &\Leftrightarrow m_2 - m_1 = 45. \end{aligned}$$

Ответ: 45.

29. Тип 10 № 112207

Бизнесмен Печенов получил в 2000 году прибыль в размере 1 000 000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 16% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Печенов за 2002 год?

Решение. Бизнесмен Печенов получил в 2000 году прибыль в размере $b_1 = 1 000 000$ рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 16%, следовательно, она составляла 116% от прибыли предыдущего года, то есть увеличивалась в $q = 1,16$ раза, по сравнению с предыдущим годом. В 2002 году прибыль составила

$$b_3 = b_1 \cdot q^2 = 1 000 000 \cdot 1,16^2 = 1 345 600 \text{ рублей.}$$

Сумма, заработанная бизнесменом Печеновым за год, равна его прибыли за этот год, следовательно, в 2002 году Печенов заработал 1 345 600 рублей.

Ответ: 1 345 600.

30. Тип 10 № 114773

Часы со стрелками показывают 1 час 35 минут. Через сколько минут минутная стрелка в десятый раз поравняется с часовой?

Решение. Пусть в первый раз стрелки встретятся через x часов. За это время часовая стрелка пройдет $1x$ делений, а минутная $12x$ делений. В начальный момент времени 1 час 35 минут минутная стрелка не доходит 5 часовых делений до отметки 12 часов ровно, а часовая стрелка находится на отметке $1\frac{35}{60}$ после отметки 12 часов ровно. Таким образом, расстояние между стрелками составляет $5 + 1\frac{35}{60} = 6\frac{7}{12}$ часового деления, откуда

$$12x - 1x = 6\frac{7}{12} \Leftrightarrow x = \frac{79}{12 \cdot 11} \text{ часа.}$$

После первой встречи стрелки должны встретиться еще 9 раз. При движении по кругу в одном направлении время между встречами определяется по формуле $t = \frac{S}{v_1 - v_2}$, где S — длина круга, в данном случае 12 делений, а v_1 и v_2 — скорости движущихся объектов: $t = \frac{12}{12 - 1} = \frac{12}{11}$ часа.

Тогда время до момента встречи часовой и минутной стрелок в десятый раз составит

$$9t + x = 9 \cdot \frac{12}{11} + \frac{79}{12 \cdot 11} = \frac{125}{12} \text{ часа,}$$

или $\frac{125}{12} \cdot 60 = 625$ минут.

Сделаем проверку: в десятый раз стрелки встретятся в 12 часов ровно, с момента 1 час 35 минут до 12 часов ровно пройдет 10 часов 25 минут, то есть 625 минут.

Ответ: 625 минут.

Приведем другое решение.

Скорость движения минутной стрелки в 12 раз больше часовой: пока часовая обходит один полный круг, минутная проходит 12 кругов. Поэтому за то время, что минутная стрелка поворачивается на 35 минут, часовая стрелка

вращается $\frac{35}{12}$ минуты или на $\frac{35}{60} = \frac{7}{12}$ часового деления. Из этого следует, что когда часы показывают 1 час 35 минут между минутной и часовой стрелкой шесть полных делений (см. рис.) и еще $\frac{7}{12}$ деления, всего $\frac{79}{12}$ деления.



До десятой встречи стрелок минутная должна сначала пройти разделяющие их $\frac{79}{12}$ деления, затем 9 раз обойти полный круг, то есть пройти 108 часовых делений, и пройти последние L делений, на которые поворачивается часовая стрелка за время движения минутной. Приравняем время движения часовой и минутной стрелок до их десятой встречи:

$$\begin{aligned} \frac{L}{1} &= \frac{\frac{79}{12} + 108 + L}{12} \Leftrightarrow 12L = L + \frac{1375}{12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 11L = 125 \Leftrightarrow L = \frac{125}{11} \text{ часа,} \end{aligned}$$

что составляет $\frac{125}{12} \cdot 60 = 625$ минут.

Приведем устное решение.

Ясно, что в первый раз стрелки встретятся между 2 и 3 часами, второй раз — между 3 и 4 часами, ..., десятый — между 11 и 12 часами, то есть ровно в 12 часов. Таким образом, они встретятся ровно через 10 часов 25 минут, что составляет 625 минут.

31. Тип 10 № 39867

Первая труба пропускает на 10 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 200 литров она заполняет на 10 минут дольше, чем вторая труба?

Решение. Обозначим x — литров воды в минуту, пропускает первая труба, тогда вторая труба пропускает $x + 10$ литров воды в минуту. Резервуар объемом 200 литров первая труба заполняет на 10 минут дольше, чем вторая труба, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{200}{x} - \frac{200}{x+10} &= 10 \Leftrightarrow \frac{2000}{x^2 + 10x} = 10 \Leftrightarrow 200 = x^2 + 10x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 10x - 200 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10; \\ x = -20 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10. \end{aligned}$$

Таким образом, первая труба пропускает 10 литров воды в минуту.

Ответ: 10.

32. Тип 10 № 26584

Два велосипедиста одновременно отправились в 88-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть v км/ч — скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, тогда скорость первого велосипедиста равна $v + 3$ км/ч. Первый велосипедист прибыл к финишу на 3 часа раньше второго, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{88}{v} &= \frac{88}{v+3} + 3 \Leftrightarrow \frac{88}{v} = \frac{88+3v+9}{v+3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 88v + 3 \cdot 88 = 88v + 3v^2 + 9v \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow v^2 + 3v - 88 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 8; \\ v = -11 \end{cases} \Leftrightarrow v = 8.$$

Таким образом, скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, равна 8 км/ч.

Ответ: 8.

33. Тип 10 № 5737

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 513 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 54 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть u км/ч — собственная скорость теплохода, тогда скорость теплохода по течению равна $u+4$ км/ч, а скорость теплохода против течения равна $u-4$ км/ч, $0 < u$. На весь путь теплоход затратил $54 - 8 = 46$ часов, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{513}{u+4} + \frac{513}{u-4} = 46 &\Leftrightarrow \frac{513 \cdot 2u}{u^2 - 16} = 46 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{513u}{u^2 - 16} &= 23 \quad 0 < u < 4 \Leftrightarrow 513u = 23u^2 - 368 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 23u^2 - 513u - 368 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 23; \\ u = -\frac{16}{23} \end{cases} \quad u > 0 \end{aligned}$$

Таким образом, скорость теплохода в неподвижной воде равна 23 км/ч.

Ответ: 23.

34. Тип 10 № 514463

Имеются два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 12% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Решение. Пусть масса первого сплава m кг, а масса второго — $m+10$ кг, масса третьего сплава — $2m+10$ кг. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди, третий сплав — 12% меди. Тогда:

$$\begin{aligned} 0,05m + 0,14(m+10) &= 0,12(2m+10) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,19m + 1,4 &= 0,24m + 1,2 \Leftrightarrow m = 4 \Leftrightarrow 2m + 10 = 18. \end{aligned}$$

Таким образом, масса третьего сплава равна 18 кг

Ответ: 18.

35. Тип 10 № 111913

Лена надо подписать 972 открытки. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Лена подписала 20 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за седьмой день, если вся работа была выполнена за 18 дней.

Решение. В первый день Лена подписала $a_1 = 20$ открыток, во второй — a_2 , ..., в последний — a_{18} открыток. Всего было подписано $S_n = 972$ открыток. Если количество подписываемых открыток увеличивалось на d каждый день, то

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} n \Leftrightarrow 972 = \frac{2 \cdot 20 + 17d}{2} \cdot 18 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 108 &= 40 + 17d \Leftrightarrow d = 4. \end{aligned}$$

Тогда

$$a_7 = a_1 + 6d = 20 + 6 \cdot 4 = 44.$$

Следовательно, за седьмой день было подписано 44 открытки.

Ответ: 44.

36. Тип 10 № 113443

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 22 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого?

Решение. Пусть v км/ч — скорость первого мотоциклиста, тогда скорость второго мотоциклиста равна $v + 20$ км/ч. Пусть первый раз мотоциклисты поравняются через t часов. Для того, чтобы мотоциклисты поравнялись, более быстрый должен преодолеть изначально разделяющее их расстояние, равное половине длины трассы. Поэтому

$$(v + 20)t - vt = 11 \Leftrightarrow 20t = 11 \Leftrightarrow t = \frac{11}{20}.$$

Таким образом, мотоциклисты поравняются через $t = \frac{11}{20}$ часа или через 33 минуты.

Ответ: 33.

Приведём другое решение.

Быстрый мотоциклист движется относительно медленного со скоростью 20 км в час, и должен преодолеть разделяющие их 11 км. Следовательно, на это ему потребуется 33 минуты.

37. Тип 10 № 112519

Расстояние между городами A и B равно 440 км. Из города A в город B со скоростью 50 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Решение. Пусть автомобили встретятся на расстоянии S км от города A , тогда второй автомобиль пройдет расстояние $440 - S$ км. Второй автомобиль находился в пути на 1 час меньше первого, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{S}{50} = \frac{440 - S}{80} + 1 &\Leftrightarrow \frac{S}{50} = \frac{440 - S + 80}{80} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 80S = 50 \cdot 520 - 50S \Leftrightarrow 130S = 26000 \Leftrightarrow S = 200. \end{aligned}$$

Ответ: 200.

38. Тип 10 № 517216

Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними равно 280 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B . На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B . Найдите скорость баржи на пути из A в B . Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть u км/ч — скорость баржи на пути из A в B , тогда скорость баржи на пути из B в A $u + 4$ км/ч. На обратном пути баржа сделала остановку на 8 часов, и в результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько и на прямой, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{280}{u} = \frac{280}{u+4} + 8 &\Leftrightarrow \frac{280}{u} = \frac{280 + 8u + 32}{u+4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot 280 = 32u + 8u^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8u^2 + 32u - 8 \cdot 140 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u^2 + 4u - 140 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 10; \\ u = -14 \end{cases} \Leftrightarrow u = 10. \end{aligned}$$

Поэтому собственная скорость баржи равна 10 км/ч.

Ответ: 10.

39. Тип 10 № 518909

Вася надо решить 245 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Вася решил 11 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 7 дней.

Решение. В первый день Вася решил $a_1 = 11$ задач, в последний — a_7 задач. Всего надо решить $S_7 = 245$ задач. Поскольку $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$, где $a_1 = 11, n = 7$ имеем:

$$S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = 3,5(11 + a_7).$$

Тогда

$$3,5(11 + a_7) = 245 \Leftrightarrow 11 + a_7 = 70 \Leftrightarrow a_7 = 59 \text{ задач.}$$

Ответ: 59.

40. Тип 10 № 513425

На изготовление 780 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 840 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Решение. Обозначим n — число деталей, которые изготавливает за час первый рабочий. Тогда второй рабочий за час изготавливает $n - 2$ деталей. На изготовление 780 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 840 таких же деталей, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{840}{n-2} - 4 &= \frac{780}{n} \Leftrightarrow \frac{848 - 4n}{n-2} = \frac{780}{n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (848 - 4n)n = 780(n-2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 - 17n - 390 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = \frac{17 + \sqrt{289 + 4 \cdot 1 \cdot 390}}{2} = 30; \\ n = \frac{17 - \sqrt{289 + 4 \cdot 1 \cdot 390}}{2} = -13 \end{array} \right] \stackrel{n>0}{\Leftrightarrow} n = 30. \end{aligned}$$

Таким образом, первый рабочий делает 30 деталей в час.

Ответ: 30.

41. Тип 10 № 107391

В 2008 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 7%, а в 2010 году — на 8% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Решение. В 2009 году число жителей стало $40\ 000 + 0,07 \cdot 40\ 000 = 42\ 800$ человек, а в 2010 году число жителей стало $42\ 800 + 0,08 \cdot 42\ 800 = 46\ 224$ человек.

Ответ: 46224.

42. Тип 10 № 114117

Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 10 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 78 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть скорость второго автомобиля равна v км/ч. За $\frac{2}{3}$ часа первый автомобиль прошел на 10 км больше, чем второй, отсюда имеем

$$78 \cdot \frac{2}{3} = v \cdot \frac{2}{3} + 10 \Leftrightarrow 2v = 78 \cdot 2 - 10 \cdot 3 \Leftrightarrow v = 63.$$

Ответ: 63.

43. Тип 10 № 118281

Один мастер может выполнить заказ за 45 часов, а другой — за 36 часов. За сколько часов выполняют заказ оба мастера, работая вместе?

Решение. Обозначим выполняемую работу за 1. Скорость работы первого мастера $1/45$ работы в час, а второго — $1/36$ работы в час. Время работы равно отношению объема к скорости её выполнения. Поэтому два мастера, работая вместе, выполняют заказ за

$$\frac{1}{\frac{1}{45} + \frac{1}{36}} = \frac{180}{4+5} = 20 \text{ часов.}$$

Ответ: 20.

44. Тип 10 № 525021

Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 15 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 25 часов после отплытия из него. Сколько километров проходит теплоход за весь рейс?

Решение. Пусть весь путь теплохода равен $2S$ км. Время в пути составляет 25 часов, из которых 5 часов — стоянка. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{S}{15-3} + \frac{S}{15+3} &= 25 - 5 \Leftrightarrow \frac{S}{12} + \frac{S}{18} = 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3S+2S}{36} = 20 \Leftrightarrow \frac{S}{36} = 4 \Leftrightarrow S = 144. \end{aligned}$$

Следовательно, весь путь составляет $2S = 288$ км.

Ответ: 288.

45. Тип 10 № 99578

Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение. Пусть концентрация первого раствора кислоты — c_1 , а концентрация второго — c_2 . Если смешать эти растворы кислоты, то получится раствор, содержащий 68% кислоты: $30c_1 + 20c_2 = 50 \cdot 0,68$. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты: $mc_1 + mc_2 = 2m \cdot 0,7$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1,4, \\ 30c_1 + 20c_2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1,4 - c_1, \\ 30c_1 + 28 - 20c_1 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1,4 - c_1, \\ 10c_1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0,8, \\ c_1 = 0,6. \end{cases}$$

Поэтому $m_1 = 0,6 \cdot 30 = 18$.

Ответ: 18.

46. Тип 10 № 548528

Из двух городов, расстояние между которыми равно 390 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 50 км/ч и 80 км/ч?

Решение. Пусть t ч — время движения автомобилей до встречи. Первый автомобиль пройдет расстояние $50 \cdot t$ км, а второй — $80t$ км. Тогда имеем:

$$50t + 80t = 390 \Leftrightarrow 130t = 390 \Leftrightarrow t = 3.$$

Таким образом, автомобили встретятся через 3 часа.

Ответ: 3.

47. Тип 10 № 99582

Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Решение. В первый день турист прошел $a_1 = 10$ км, во второй — a_2 , ..., в последний — a_6 км. Всего он прошел $S_n = 120$ км. Если каждый день турист проходил больше, чем в предыдущий день, на d км, то

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} n,$$

где $n = 6$ дней, $a_1 = 10$ км. Таким образом,

$$\frac{2 \cdot 10 + 5d}{2} \cdot 6 = 120 \Leftrightarrow 5d = 20 \Leftrightarrow d = 4.$$

Тогда за третий день турист прошел

$$a_3 = a_1 + 2d = 10 + 2 \cdot 4 = 18 \text{ км.}$$

Ответ: 18.

48. Тип 10 № 99597

Первый велосипедист выехал из поселка по шоссе со скоростью 15 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же поселка в том же направлении выехал второй велосипедист, а еще через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 часа 20 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть v км/ч — скорость третьего велосипедиста, а t ч — время, которое понадобилось ему, чтобы догнать второго велосипедиста. Таким образом,

$$vt = 10 \cdot (t + 1) \Leftrightarrow v = \frac{10 \cdot (t + 1)}{t}.$$

А через 2 часа 20 минут после этого третий велосипедист догнал первого. Таким образом,

$$\begin{aligned} v \cdot \left(t + \frac{7}{3}\right) &= 15 \cdot \left(t + \frac{7}{3} + 2\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{10 \cdot (t + 1) \cdot (3t + 7)}{3t} &= \frac{15}{3} \cdot (3t + 13) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6t^2 + 20t + 14 &= 9t^2 + 39t \Leftrightarrow 3t^2 + 19t - 14 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-19 + \sqrt{19^2 + 4 \cdot 3 \cdot 14}}{6} = \frac{2}{3}; \\ t = \frac{-19 - \sqrt{19^2 + 4 \cdot 3 \cdot 14}}{6} = -7 \end{cases} &\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, $v = \frac{10 \cdot \frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = 25$.

Ответ: 25.

Приведем другое решение.

Примем за x км/ч скорость третьего велосипедиста. Тогда скорость сближения второго и третьего велосипедистов равна $x - 10$ км/ч, а скорость сближения первого и третьего велосипедистов равна $x - 15$ км/ч. Второй велосипедист выехал на час раньше третьего, поэтому изначально их разделяло 10 км. Чтобы преодолеть это расстояние, третьему велосипедисту понадобилось $\frac{10}{x - 10}$ часа. Первый велосипедист выехал на два часа раньше третьего, поэтому изначально их разделяло 30 км. Следовательно, третий велосипедист догнал первого за $\frac{30}{x - 15}$ часа. Третий велосипедист догнал первого через $\frac{7}{3}$ часа после того, как он догнал второго, поэтому можно составить уравнение:

$$\frac{10}{x - 10} + \frac{7}{3} = \frac{30}{x - 15}.$$

При условии $x > 15$, избавляясь от знаменателей, получаем:

$$\begin{aligned} 30(x - 15) + 7(x - 10)(x - 15) &= 90(x - 10) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7x^2 - 235x + 1500 &= 0. \end{aligned}$$

Найдем дискриминант:

$$\begin{aligned} 235^2 - 4 \cdot 7 \cdot 1500 &= (47 \cdot 5)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (25 \cdot 60) = \\ &= 25 \cdot (47^2 - 4 \cdot 7 \cdot 60) = 25 \cdot (2209 - 1680) = \\ &= 25 \cdot 529 = (5 \cdot 23)^2 = 115^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $x = \frac{235 \pm 115}{14}$.

Меньший корень $x = \frac{60}{7}$ меньше 15, а потому не подходит. Большой корень, равный 25, подходит. Скорость третьего велосипедиста равна 25 км/ч.

49. Тип 10 № 99604

Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Чтобы найти среднюю скорость на протяжении пути, нужно весь путь разделить на все время движения. Пусть $2S$ км — весь путь путешественника, тогда средняя скорость равна:

$$2S : \left(\frac{S}{20} + \frac{S}{480} \right) = 2S : \frac{24S + S}{480} = \frac{2S \cdot 480}{25S} = 38,4 \text{ км/ч.}$$

Поэтому средняя скорость путешественника — 38,4 км/ч.

Ответ: 38,4.

50. Тип 10 № 99599

Из пункта A круговой трассы выехал велосипедист. Через 30 минут он еще не вернулся в пункт A и из пункта A следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

Решение. К моменту первого обгона мотоциклист за 10 минут проехал столько же, сколько велосипедист за 40 минут, следовательно, его скорость в 4 раза больше. Поэтому, если скорость велосипедиста принять за x км/ч, то скорость мотоциклиста будет равна $4x$, а скорость их сближения — $3x$ км/ч.

С другой стороны, второй раз мотоциклист догнал велосипедиста за 30 минут, за это время он проехал на 30 км больше. Следовательно, скорость их сближения составляет 60 км/ч.

Итак, $3x = 60$ км/ч, откуда скорость велосипедиста равна 20 км/ч, а скорость мотоциклиста равна 80 км/ч.

Ответ: 80.

