1. Тип 19 № 673267

Из каждого четырёхзначного числа вычли сумму его цифр и полученный результат разделили на 99.

а) Могло ли получиться число 45?

б) Могло ли получиться число 20?

в) Сколько различных натуральных чисел могло получиться?

Решение. Пусть цифры числа — это a, b, c и d, тогда число равно $1000a+100b+10c+d$; после вычитания суммы цифр получим $999a+99b+9c$, а после деления на 99 получим

$$10a+b+\frac{9a+9c}{99}=10a+b+\frac{a+c}{11}.$$

Чтобы это число было натуральным, необходимо и достаточно, чтобы $a+c$ делилось на 11. Поскольку

$$a+c\geqslant a>0 \quad \text{и} \quad a+c\leqslant 9+9=18<22,$$

это выполнено лишь при $a+c=11$. Значит, результат деления равен $10a+b+1$. Заметим сразу, что результат деления не зависит от цифры d.

а) Да, например, если $a=4$, $b=4$.Тогда $c=7$, а цифра d произвольная. Итак, подойдет, например, число 4470.

б) Нет. Выражение $10a+b+1=20$ при условии $a\geqslant 1$ и $b\geqslant 0$ дает $a=1$. Значит, $c=10$, что невозможно.

в) Заметим, что при $a=1$ $c=10$, что невозможно, а при остальных $a\in[2;9]$ получаем возможное значение c. Значит, есть 8 вариантов выбора a и независимо от них 10 вариантов выбора b, что дает 80 различных двузначных чисел $\overline{ab}=10a+b$. Поэтому есть 80 возможных ответов — от 21 до 100.

Ответ: а) да, б) нет, в) 80.

2. Тип 19 № 501949

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Решение. а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-9-11=14$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.

3. Тип 19 № 518032

Маша и Наташа делают фотографии. Каждый день каждая девочка делает на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. В результате Наташа сделала на 935 фотографий больше, чем Маша.

а) Могло ли это произойти за 5 дней?

б) Могло ли это произойти за 9 дней?

в) Какое максимальное количество фотографий могла сделать Наташа, если Маша в последний день сделала меньше 50 фотографий?

Решение. Пусть в первый день Наташа и Маша сделали n и m фотографий соответственно, всего они делали снимки в течение k дней. Поскольку Наташа сделала на 935 фотографий больше, чем Маша, получаем: $k(n-m)=935$.

а) Если $k=5$, то $n-m=\frac{935}{5}=187$, то есть в первый и каждый последующий день Наташа делала на 187 фотографий больше, чем Маша, тогда за пять дней Наташа сделала на 935 фотографий больше, чем Маша.

б) Так как $k(n-m)=935$, 935 кратно k, но 935 на 9 без остатка не делится. Таким образом, за девять дней Наташа не сделала бы на 935 фотографий больше, чем Маша.

в) В последний день Маша сделала меньше 50 фотографий, то есть $m+k-1<50\Leftrightarrow m+k<51$, откуда $k<50$. Так как k является делителем числа 935 и $k<50$, либо $k=5$, либо $k=11$, либо $k=17$.

Поскольку количество фотографий Наташи отличается от Машиных на константу, будем максимизировать количество снимков Маши.

Если $k=5$, $m+4<50$, откуда наибольшее возможное значение $m=45$. Найдем общее количество фотографий:

$$\frac{2\cdot 45+4}{2}\cdot 5=235.$$

Если $k = 11,\ m + 10 < 50$, откуда наибольшее возможное значение $m = 39$. Найдем общее количество фотографий:

$$\frac{2 \cdot 39 + 10}{2} \cdot 11 = 484.$$

Если $k = 17,\ m + 16 < 50$, откуда наибольшее возможное значение $m = 33$. Найдем общее количество фотографий:

$$\frac{2 \cdot 33 + 16}{2} \cdot 17 = 697$$

Таким образом, наибольшее количество фотографий, сделанных Машей, равно 697, а Наташей — 697 + 935 = 1632.

Ответ: а) Да; б) Нет; в) 1632.

4. Тип 19 № 553318

Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трех членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение. а) Очевидно, оба числа имеют одинаковую четность, поэтому их сумма четна и не может быть равна 2231.

б) Да, это возможно: $1067 + 97 + 1067 = 2231.$

в) Сумма любых двух соседних членов последовательности не меньше 12. Поскольку $2232 = 12 \cdot 186$, в последовательности меньше $186 \cdot 2 = 372$ членов. Примером последовательности, состоящей из 371 члена может служить $11, \underbrace{1,\ 11,\ 1,\ 11, \ldots,\ 1,\ 11}_{185\,\text{пар}}.$

5. Тип 19 № 643168

На овощебазу завезли капусту. Каждый из кочанов капусты весит 1, 2 или 3 килограмма.Фермер Иван поехал на овощебазу за капустой. Его сосед Фёдор попросил купить для него столько же капусты (по массе). На овощебазе Ивану составила набор кочанов капусты, суммарная масса которых составила N кг. Нужно разделить эти кочаны поровну (по массе) между Иваном и Федором так, чтобы не пришлось резать кочаны.

а) Существует ли набор кочанов суммарной массой $N = 20$, который невозможно разделить поровну?

б) Существует ли набор кочанов суммарной массой $N = 24$, который невозможно разделить поровну?

в) Найдите все значения N, для которых любой набор кочанов суммарной массы N можно разделить поровну.

Решение. а) Да. Заметим, что $20 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2$. При любом делении 7 кочанов на группы в одной из групп будет минимум 4 кочана, а их общая масса будет не менее

$$3 + 3 + 3 + 2 = 11 > 10 = \frac{20}{2}\ \text{кг}.$$

б) Нет. Выделим сколько сможем групп весом 6 кг: 2 кочана по 3 кг, 3 кочана по 2 кг, 6 кочанов по 1 кг. Если очередную группу выделить нельзя, то осталось не более одного кочана в 3 кг, не более двух — по 2 кг и не более 5 кочанов по 1 кг. Итого не более $3 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 12$ кг. Значит, минимум $24 - 12 = 12$ кг капусты выделено группами по 6 кг. Возьмем две такие группы (это ровно половина от общей массы), а другому фермеру отдадим остальную капусту.

в) Если число N нечетно, то половина массы имеет нецелую массу, и разделить нельзя вообще. Для четных N рассмотрим три случая.

Если N четно, но не кратно 4, то есть $N = 2T$ и T нечетно, то набор из T кочанов по 2 кг разделить нельзя: важным будет только количество кочанов у каждого, а оно нечетно. Потому у фермеров кочанов будет не поровну.

Если N не кратно 3, возьмем в набор много кочанов по 3 кг и один кочан в 1 или 2 кг. Одному из фермеров при дележке достанется этот кочан, у него общая масса капусты не будет кратна трем, а у второго фермера будут только кочаны по 3 кг, поэтому у него сумма будет кратна 3. Значит, у фермеров не поровну кочанов.

Если N кратно 4 и 3, то оно кратно 12. Пусть $N = 12T$. Будем, как и в пункте б), выделять группы весом по 6 кг. Их можно выделить $2T - 2$ штуки аналогично пункту б), после чего отдать первому фермеру T таких групп — это будет ровно половина всей капусты. Это можно сделать, если $2T - 2 \geqslant T$, то есть, если $T \geqslant 2$.

Осталось разобрать случай $T = 1$, то есть $N = 12$. Из рассуждения пункта б) очевидно, что за исключением варианта

$$12 = 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

в любом другом выделить группу массой 6 кг можно. Отдадим ее одному фермеру, а остальную капусту второму. В этом же варианте разделим кочаны так:

$$3 + 2 + 1 = 6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) $N \vdots 12$.

6. Тип 19 № 517268

На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?

б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?

в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

Решение. а) Да, например, числа 7, 8, 9, 10, 13.

б) Нет. Пусть a_1 — наименьшее, a_{10} — наибольшее из записанных чисел. Поскольку все 10 чисел различны, $a_{10} \geqslant a_1 + 9$. Поскольку числа отличаются не более чем в 3 раза, $a_{10}/a_1 \leqslant 3 \Leftrightarrow 3a_1 \geqslant a_1 + 9$, откуда $a_1 \geqslant 4{,}5$. Следовательно, наименьшее из записанных чисел не меньше 5. Но тогда сумма записанных чисел не меньше суммы членов арифметической прогрессии 5 + 6 + ... + 14 = 10 · (5 + 14)/2 = 95. Противоречие.

в) Заметим предварительно, что $8000 = 2^6 \cdot 5^3$. Отсюда следует, что записанные числа могут быть только степенями двойки или пятерки или их произведениями.

На доске могут быть записаны два числа: $2^4 \cdot 5 = 80$ и $2^2 \cdot 5^2 = 100$. Могут быть записаны три числа: $2^4 = 16$, $2^2 \cdot 5 = 20$ и $5^2 = 25$. На доске не может быть записано большее количество чисел.

Действительно, если на доске есть число m, кратное 25, то каждое из оставшихся чисел не меньшие 8. Тогда произведение m и трёх таких чисел больше 8000. Следовательно, в этом случае больше трёх чисел на доске быть не может. Если на доске нет чисел, кратных 25, то ровно три из них кратны пяти. Они имеют вид $5a$, $5b$ и $5c$, причём отличаются друг от друга в 2 и в 4 раза, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 2 или 3.

7. Тип 19 № 556451

Вася записал на листе бумаги некоторую последовательность из n чисел ($n > 3$), а затем продолжил её, повторив все числа ещё раз в том же порядке. Затем Вася предложил Маше сыграть в игру по следующим правилам. За один ход Маша может спросить у Васи сумму любых трёх подряд идущих чисел. Маша выигрывает, если через несколько ходов узнает все числа.

а) Может ли Маша гарантированно выиграть, если $n = 4$?

б) Может ли Маша гарантированно выиграть, если $n = 6$?

в) За какое наименьшее число ходов Маша может гарантированно выиграть, если $n = 23$?

Решение. Обозначим числа, записанные Васей, через $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$.

а) Может. Маша должна сначала узнать суммы $x_1+x_2+x_3$, $x_2+x_3+x_4$, $x_3+x_4+x_1$, $x_4+x_1+x_2$. Сложив эти четыре суммы, Маша получит число $3(x_1+x_2+x_3+x_4)$, при делении которого на 3 получается сумма $x_1+x_2+x_3+x_4$. Вычитая из суммы $x_1+\ldots+x_4$ суммы некоторых трёх чисел, Маша узнает каждое из чисел.

б) Не может. Например, Вася может взять в качестве исходной последовательности 2, 2, 2, 2, 2, 2 или 2, 1, 3, 2, 1, 3, и Маша не сможет различить эти два случая — суммы любых трёх подряд идущих чисел в каждом из этих случаев равны 6.

в) Докажем, что Маша может выиграть за 23 хода, узнав значения всех возможных сумм троек подряд идущих чисел. Сложив суммы $x_1+x_2+x_3$, $x_2+x_3+x_4, \ldots$, $x_{22}+x_{23}+x_1$, $x_{23}+x_1+x_2$, Маша получит $3(x_1+\ldots+x_{23})$. Складывая суммы $x_1+x_2+x_3$, $x_4+x_5+x_6, \ldots$, $x_{19}+x_{20}+x_{21}$, Маша узнает сумму всех чисел, кроме x_{22} и x_{23}. Вычитая из суммы $x_1+x_2+\ldots+x_{23}$ сумму $x_1+x_2+\ldots+x_{21}$, Маша узнает, чему равно $x_{22}+x_{23}$. Теперь Маша может узнать x_1, вычитая $x_{22}+x_{23}$ из $x_{22}+x_{23}+x_1$. Действуя аналогично для других чисел вместо x_1, Маша узнает их все.

Вариант № 86880880

Теперь докажем, что Маша не может выиграть за меньшее число ходов. Для этого достаточно привести пример двух различных последовательностей $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{23},\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{23}$ и $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_{23},\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_{23}$, в которых суммы всех последовательных троек чисел равны, кроме одной. Без потери общности можно считать, что

$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \neq y_{21}+y_{22}+y_{23}.$$

В качестве $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{23}$ и $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_{23}$ можно взять $x_i = 0\ (i = 1, \ldots, 23)$ и $\underbrace{-1,\ -1,\ 2, \ldots,\ -1,\ -1,\ 2,}_{-1,\ -1,\ 2\ \text{повторяется7раз}} -1.$

В первой последовательности все суммы нулевые, тогда как во второй $y_{21}+y_{22}+y_{23} = 3$.

Ответ: а) Может; б) не может; в) 23.

8. Тип 19 № 689021

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geqslant 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 13?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 500?

в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 57.

Решение. а) Нет. $S=\dfrac{2n_1+d\,(n-1)}{2}\cdot n$. Если известно, что $S = 13$, то $(2n_1+d\,(n-1))\cdot n=26$. Заметим, что $26=13\cdot 2$, поскольку $n\geqslant 3$, $n = 13$ или $n = 26$. Но сумма 13-ти различных натуральных чисел больше 13.

б) Все данные n чисел натуральные, поэтому наименьшее из них больше или равно 1, а поскольку все эти числа различны (отличаются друг от друга не менее чем на 1), то их сумма S не меньше суммы 1 + 2 + 3 + ... + n, то есть $S\geqslant\dfrac{n\,(n+1)}{2}$. Если известно, что $S < 500$, то из неравенства $\dfrac{n\,(n+1)}{2}\leqslant S$ следует, что $\dfrac{n\,(n+1)}{2}\leqslant 500$, $n\,(n+1)<1000$, откуда $n < 32$ (при $n\geqslant 32$ имеем: $n\,(n+1)=32\cdot 33>1000$). При $n=31$ имеем: $n\,(n+1)=31\cdot 32<1000$, натуральные числа от 1 до 31 (без пропусков) составляют арифметическую прогрессию, их количество равно 31, а сумма меньше 500. Таким образом, наибольшее возможное значение n в пункте б) равно 31.

в) Пусть a_1 — наименьшее из данных n чисел, образующих арифметическую прогрессию, d — разность этой прогрессии. Тогда по известной формуле сумма этих n чисел равна $\dfrac{2a_1+d\,(n-1)}{2}\cdot n$. Если известно, что сумма данных n чисел равна 57, то $(2a_1+d\,(n-1))\cdot n=114$. Заметим, что $114=2\cdot 3\cdot 19$ и n — один из делителей числа 114.

Поскольку $n\geqslant 3$, то возможные значения n = 3, 6, 19, 38, 57 и 114. Исходя из неравенства $n\cdot(n+1)\leqslant 114$, получим, что $n\leqslant 10$.

При $n = 3$ получаем равенство $a_1+d=19$, которое выполняются, например, при $a_1=1, d=18$. Прогрессия 1; 19; 37 состоит из 3 членов, сумма равна 57.

При $n = 6$ получаем равенство $2a_1+5d=19$, которое выполняются при $a_1=2, d=3$. Прогрессия 2, 5, 8, 11, 14, 17 состоит из 6 членов, сумма равна 57.

Ответ: а) нет; б) 31; в) 3, 6.

9. Тип 19 № 653545

а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра равна произведению двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 5?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

Решение. а) Да, например, число 363.

б) Нет. Возьмем число $\overline{abc}$. По условию $a+b+c=5$, а потому ни одна из цифр не превышает 5. По признаку делимости на 11 получаем, что $a-b+c=11n$, где n — целое число. Из равенств $a+c=5-b$ и $a+c=11n+b$ находим: $5-2b=11n$, что невозможно при натуральных значениях c, не превышающих 5.

в) Поставим в старшие разряды числа цифры 1 и 2, получим число вида $\overline{12abcdef}$. Попробуем подобрать оставшиеся цифры и расставить их требуемым образом. Чтобы число делилось на 11, число

$$S=(1+a+c+e)-(2+b+d+f)=$$
$$=-1+(a+c+e)-(b+d+f)$$

должно делиться на 11.Найдем наименьшее и наибольшее значения S:

$$S_{min}=-1+(3+4+5)-(7+8+9)=-13,$$
$$S_{max}=-1+(7+8+9)-(3+4+5)=11.$$

Среди цифр 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 ровно три четных, поэтому при любой расстановке знаков + и − между ними получится нечетное число. Значит, $S\neq 0$, а потому возможен лишь случай $S = 11$. Равенство достигается, когда

$$a+c+e=7+8+9,\qquad b+d+f=3+4+5.$$

Следовательно, наименьшее возможное число равно 12 738 495.

Ответ: а) да, б) нет, в) 12 738 495.

10. Тип 19 № 562813

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n\geqslant 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности, кроме первого и последнего, больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.

б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 6$?

Решение. а) Например, последовательность 2, 7, 11, 14, 6.

б) Да, например, последовательность 6, 7, 7, 6, 3.

в) Пусть первый и шестой члены последовательности равны 1, в противном случае сумма членов последовательности возрастет. Рассмотрим последовательность

$$1, a, b, c, d, 1.$$

Если $a = 1$, то удвоенный второй член последовательности не больше суммы первого и третьего. Если $a = 2$, то должно быть выполнено неравенство $4 > 1 + b$, откуда $b = 1$, что невозможно, или $b = 2$. Последний случай тоже невозможен, поскольку тогда последовательность принимает вид 1, 2, 2, c, d, 1, а тогда и $c = 1$, и подобрать d невозможно.

Пусть $a = 3$, тогда $6 > (1 + b)$, откуда $b < 5$. Случаи $b = 1$, $b = 2$, $b = 3$ невозможны, что доказывается аналогично. Если $b = 4$, то $c = 4$, $d = 3$. Сумма членов последовательности 1, 3, 4, 4, 3, 1 наименьшая, она равна 16.

Ответ: а) да; б) да; в) 16.

Примечание 1.

В пункте в) можно было бы упростить перебор, заметив, что для заданной в условии последовательности разности последующего и предыдущего членов уменьшаются с ростом n.

Примечание 2.

Для последовательностей с большим количеством членов приведенный в пункте в) перебор затруднителен. Способ рассуждения для $n = 10$ приведён нами в задании 514525, взятой из основной волны ЕГЭ 2016 года.

11. Тип 19 № 517583

На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5120.

а) Может ли быть записано число 230?

б) Можно ли обойтись без числа 14?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Вариант № 86880880

Решение. а) Пусть на доске написано число 230 и 99 других различных натуральных чисел. Минимально возможная сумма чисел на доске достигается при условии, что сумма 99 различных натуральных чисел минимальна. А это, в свою очередь, возможно, если 99 различных натуральных числа — арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 1$. Сумма S_{99} этих чисел, по формуле суммы арифметической прогрессии, составит:

$$S_{99} = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 4950.$$

Сумма всех чисел на доске S будет равна:

$$S = S_{99} + 230 = 4950 + 230 = 5180.$$

Нетрудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5120, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых есть 230, больше 5120, следовательно, числа 230 на доске быть не может.

б) Пусть на доске не записано число 14. В таком случае, минимально возможная сумма S чисел на доске будет состоять из двух сумм арифметических прогрессий: суммы S_1 первых 13 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$ (то есть ряда 1, 2, 3, ... 13) и суммы первых 87 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 15$, разностью $d = 1$ (то есть ряда 15,16,17,..101). Найдем эту сумму:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1+13}{2} \cdot 13 + \frac{15+101}{2} \cdot 87 = \\ = 91 + 5046 = 5137.$$

Нетрудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5120, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых нет 14, больше 5120, следовательно, без числа 14 на доске обойтись нельзя.

в) Допустим, что на доске выписаны все числа от 1 до 100. Тогда получается, что полученный ряд составляет арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$. По формуле для суммы арифметической прогрессии найдем сумму S_0 всех чисел на доске:

$$S_0 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

Полученная сумма не удовлетворяет условию задачи. Теперь, чтобы увеличить сумму всех чисел, написанных на доске до обозначенной в условии, попробуем заменить числа, кратные 14, на другие числа, следующие за сотней: 70 заменим на 110, 84 — на 104, а 98 — на 108. Полученная сумма S будет равна:

$$S = S_0 - (70 + 84 + 98) + (110 + 104 + 108) = 5120.$$

При дальнейшей замене чисел, кратных 14 на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться и не соответствовать условию задачи. Таким образом, наименьшее количество чисел, кратных 14, равно 4.

Приведем другое решение пункта в).

Приведем пример, когда на доске написано четыре числа, кратных 14 (14, 28, 42, 56):

$$1, 2, \ldots, 69, 71, 72, \ldots, 83, 85, 86, \ldots, 97, 99, 100, 101, 102, 119.$$

Докажем, что не может быть трех чисел, кратных 14. Чтобы убрать максимальное количество чисел, кратных 14, необходимо, чтобы разности между новыми и старыми числами были минимальными. То есть заменять надо наибольшие числа, кратные 14, на наименьшие возможные, большие ста числа. Пусть количество чисел, кратных 14, равно 3. Тогда минимальная сумма записанных на доске чисел равна:

$$S = \\ = 1+2+\ldots+55+57+\ldots+69+71+\ldots+83+85+\ldots+97+99+100+\ldots104 = \\ = 5152.$$

Полученная сумма больше, чем 5120. При дальнейшей замене чисел, кратных 14, на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться, значит, на доске не может быть меньше четырех чисел, кратных 14.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

12. Тип 19 № 668801

Центр подготовки космонавтов готовит экипажи для работы на МКС в составе четырех человек каждый, причем у любых двух экипажей может быть не более одного общего члена и каждый космонавт может участвовать не более, чем в двух экипажах.

а) Можно ли при этих условиях из 9 человек подготовить 3 экипажа?

б) Можно ли при этих условиях из 9 человек подготовить 4 экипажа?

в) Какое наименьшее количество человек необходимо для подготовки 10 экипажей?

Решение. Будем обозначать космонавтов номерами.

а) Да, например, сделать экипажи 1234, 1567, 2589.

б) Нет. Рассмотрим два экипажа с общим членом (ясно, что такие есть). Обозначим их общего космонавта номером 1, а остальных — 234 и 567. Тогда в любой другой экипаж может входить максимум один космонавт из набора 1234 и набора 567. Значит, остальные два в обоих экипажах — космонавты 8 и 9, поэтому остальные два экипажа имеют двух общих членов, что противоречит условию.

в) В десяти экипажах всего 40 человек, причем каждый посчитан максимум дважды, поэтому нельзя использовать менее $\frac{40}{2} = 20$ космонавтов. Для 20 можно построить пример. Разобьем их на два отряда по 10 и в каждом организуем 5 экипажей (то есть экипажи разных отрядов вообще не пересекаются между собой): 1234, 1567, 2589, 3680, 4790. Нетрудно видеть, что каждый космонавт входит ровно в два экипажа и для каждой пары экипажей одного отряда есть ровно один общий космонавт, этих пар как раз тоже 10.

Ответ: а) да; б) нет; в) 20.

13. Тип 19 № 517425

Дан выпуклый многоугольник M, который можно разрезать на 1292 квадрата площади 1.

а) Приведите пример такого многоугольника, если известно, что длина его наименьшей стороны больше 15.

б) Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник M?

в) Какое наибольшее и наименьшее значение может иметь периметр этого многоугольника?

Решение. а) Площадь многоугольника M равна $1292 = 4 \times 17 \times 19$. Например, это может быть прямоугольник 17×76.

б) Докажем, что многоугольник M является прямоугольником. Действительно, всякая вершина выпуклого многоугольника M является вершиной ровно одного из 1292 квадратов. Значит, все углы многоугольника M равны 90°. Пусть n — число вершин многоугольника M. Тогда $180^\circ(n-2) = 90^\circ n$, откуда $n = 4$, значит, многоугольник M — четырёхугольник, все углы которого равны 90°, то есть прямоугольник. Таким образом, многоугольник M имеет 4 стороны.

в) Заметим, что стороны этого прямоугольника — целые числа. Пусть a и b — длины сторон прямоугольника M. Тогда $ab = 1292$, а периметр прямоугольника M равен $2(a+b)$. Заметим, что при фиксированном произведении положительных чисел a и b их сумма тем меньше, чем они ближе друг к другу, то есть чем меньше величина $|a-b|$. Действительно, пусть $ab = cd$ и $|a-b| < |c-d|$. Тогда $(a-b)^2 < (c-d)^2$, откуда $a^2+b^2 < c^2+d^2$, $a^2+2ab+b^2 < c^2+2cd+d^2$, $(a+b)^2 < (c+d)^2$, и, следовательно, $a+b < c+d$.

Можно считать, что $a \geqslant b$. В силу сказанного выше, наибольший периметр имеет прямоугольник со сторонами $a = 1292$, $b = 1$. Периметр такого прямоугольника равен 2586. Наименьший периметр будет иметь прямоугольник, у которого $a-b$ принимает наименьшее возможное значение. Перебирая возможные разложения числа 1292 на два множителя, убеждаемся в том, что наименьшее значение $a-b$ достигается при $a = 38$, $b = 34$. Периметр такого прямоугольника равен 144.

Другое решение пункта в):

Пусть a и b — длины сторон прямоугольника M. Тогда $ab = 1292$, а периметр прямоугольника M равен $2a+2b = 2(a+b) = 2\left(a+\dfrac{1292}{a}\right)$, где a и b — натуральные числа. Исследуем функцию $f(x) = x+\dfrac{1292}{x}$ на отрезке [1; 1292]. Её производная: $f'(x) = 1-\dfrac{1292}{x^2}$. Поскольку на рассматриваемом отрезке $f'(x) = 0$ при $x = \sqrt{1292}$, $f'(x) < 0$ при $1 \leqslant x < \sqrt{1292}$ и $f'(x) > 0$ при $\sqrt{1292} < x \leqslant 1292$, своё наибольшее значение на этом отрезке функция принимает на одном из его концов, а наименьшее — в точке $x = \sqrt{1292}$.

Поскольку $f(1) = f(1292) = 1293$, число 1293 и является наибольшим значением функции, а наибольший периметр прямоугольника M равен 2586. Заметим, что $35 < \sqrt{1292} < 36$ и ближайшие слева и справа к $\sqrt{1292}$ натуральные числа, являющиеся делителями числа 1292, — числа 34 и 38. Поскольку $f(34) = f(38) = 72$, наименьший периметр прямоугольника M равен 144.

Ответ: а) прямоугольник 17×76; б) 4; в) 2586, 144.

Вариант № 86880880

14. Тип 19 № 485958

Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение. Случай а). Пусть числа $\dfrac{b}{q^2}, \dfrac{b}{q}, b, bq, bq^2$, где по условию b — натуральное число, $q > 0, b \geqslant 2, q \neq 1$ — искомые члены прогрессии. Их произведение равно b^5 но уравнение $b^5 = 1512$ не имеет натуральных решений. Итак, необходимой прогрессии из 5 чисел не существует.

Случай б). Пусть прогрессия состоит из четырех членов $\dfrac{b}{q}, b, bq, bq^2$, а пятое натуральное число равно k. Поскольку $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$, имеем: $b^4q^2k = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$, что невозможно для натуральных b^4, q^2 и k поскольку разложение числа 1512 не содержит четвертых степеней простых сомножителей отличных от 1. Заметим, однако, что знаменатель прогрессии q может не быть натуральным числом и исследуем этот случай. Пусть $q = \dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда $bq^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow b \,\vdots\, n^2 \Rightarrow b^4 \,\vdots\, n^8 \Rightarrow b^4q^2k \,\vdots\, n^6$, что невозможно, поскольку разложение числа 1512 не содержит шестых степеней простых сомножителей отличных от 1.

Случай в). Пусть прогрессия состоит из трех членов $\dfrac{b}{q}, b, bq$, а четвертое и пятое натуральные числа равны k и l. Тогда $b^3kl = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$. Положим в этом равенстве $b = 6, k = 7, l = 1$. Далее, полагая $q = 2$, получим один из требуемых наборов чисел: 3, 6, 12, 7, 1.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

15. Тип 19 № 515768

Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

Решение. а) Да, например, 16 красных и 16 синих — всего 480 рублей.

б) Пусть x — количество синих карандашей. Поскольку синие карандаши дешевле, то для наибольшего количества карандашей надо купить их больше, чем красных.

$$13x+17(x-5)\leqslant 495 \Leftrightarrow 13x+17x-85\leqslant 495 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 30x\leqslant 580 \Leftrightarrow x\leqslant 19{,}3 \underset{x\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} x=19.$$

Тогда всего $2x-5=33$.

Получили нецелый x. Проверим другой случай:

$$13x+17(x-4)\leqslant 495 \Leftrightarrow 30x\leqslant 563 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\leqslant 18{,}8 \underset{x\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} x=18.$$

Тогда всего $2x-4=36-4=32.$ Таким образом, возможно купить 33 карандаша максимум. Следовательно, 35 карандашей купить нельзя.

в) В пункте б) доказано, что возможно купить максимум 33 карандаша.

Ответ: а) да; б) нет; в) 33.

16. Тип 19 № 514485

На доске написано 10 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается сумма, округлённая до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9, а вместо 3,3 и 5 записывается 8).

а) Приведите пример 10 нецелых чисел и последовательности 9 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.

б) Может ли после 9 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 7?

в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 9 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

Решение. Назовём результатом число, написанное на доске после 9 ходов.

а) Если на доске написаны числа

$$0{,}99;\ 0{,}01;\ 0{,}99;\ 0{,}01;\ 0{,}99;\ 0{,}01;\ 0{,}99;\ 0{,}01;\ 0{,}99;\ 0{,}01,$$

то при любой последовательности ходов результат равен 5 и равен сумме чисел.

б) Заметим, что за каждый ход вновь написанное число отличается от суммы стёртых не более чем на 0,5. Значит, результат будет отличаться от суммы исходных чисел не более чем на 4,5. Значит, не существует 10 чисел таких, что результат отличается от их суммы на 7.

в) Можем считать, что все числа меньше 1 и не меньше 0, поскольку целые части каждого из чисел при сложении не влияют на разницу между их суммой и её округлённым значением.

Каждое изначальное число участвует ровно в одном ходе. Если в этом ходе также участвовало целое число, не написанное на доске изначально, то назовём вкладом изначально числа в результат разность записанного после хода числа и стёртого целого числа. Если оба числа, участвовавших в ходе, были написаны на доске изначально, то назовём вкладом каждого из них в результат половину записанного после хода числа.

Вариант № 86880880

Заметим, что результат равен сумме вкладов изначальных чисел. С другой стороны, вклад каждого числа, меньшего 0,5, равен 0 или 0,5, а вклад каждого числа, не меньшего 0,5, равен 0,5 или 1.

Пусть n — количество чисел, не меньших 0,5.

Тогда сумма вкладов будет не меньше $\dfrac{n}{2}$ и не больше $\dfrac{10-n}{2}+n=\dfrac{n}{2}+5.$

То есть наибольшая разность двух различных результатов не превосходит 5.

Рассмотрим 10 чисел: два числа 0,5 и восемь чисел 0,4. Если вначале сложить два числа 0,5, а затем делать ходы с полученной единицей и числом 0,4, то результат будет равен 1. Если сделать четыре хода, попарно сложив числа 0,4, затем сложить четыре полученные единицы, а потом делать ходы с полученным числом и числом 0,5, то результат будет равен 6.

Таким образом, наибольшая возможная разность двух различных результатов равна 5.

Ответ: а) например, числа 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01 и любая последовательность ходов; б) нет; в) 5.

17. Тип 19 № 645894

Существуют ли такие восемьсот различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя:

а) ровно в 500 раз?

б) ровно в 400 раз?

в) Найдите наименьшее возможное натуральное число, равное отношению среднего арифметического этих чисел к их наибольшему общему делителю.

Решение. Сократим все эти числа на их наибольший общий делитель. От этого их сумма (а значит и среднее арифметическое) уменьшатся во столько же раз. Итак, можно считать, что наибольший общий делитель чисел равен 1.

а) Сумма этих чисел должна быть равна $500 \cdot 800 = 400\,000$. Возьмем числа 1, 2, ..., 799, их сумма равна

$$\frac{1+799}{2} \cdot 799 = 319\,600,$$

и еще число $400\,000 - 319\,600 = 80\,400$. Этот набор удовлетворяет условию задачи.

б) Нет. Сумма этих чисел должна быть равна $400 \cdot 800 = 320\,000$. Но сумма даже самых маленьких 800 чисел равна

$$319\,600 + 800 = 320\,400.$$

в) Из доказательства пункта б) ясно, что быть меньше 400 среднее арифметическое тоже не может. Если же оно равно 401 (то есть сумма чисел равна $401 \cdot 800 = 320\,800$), то можно взять числа 1, 2, ..., 799 и

$$320\,800 - 319\,600 = 1200.$$

Наборы чисел в пунктах а) и в) действительно имеют наибольший общий делитель 1, поскольку содержат число 1.

Ответ: а) да; б) нет; в) 401.

18. Тип 19 № 514573

На каждой из 28 костей домино написаны два целых числа, не меньших 0 и не больших 6 так, что они образуют все возможные пары по одному разу (0-0, 0-1, 0-2 и так далее до 6-6).

Все кости домино разложили на несколько кучек и для каждой кучки подсчитали сумму всех чисел на костях, находящихся в этой кучке. Оказалось, что полученные суммы образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Могло ли быть 7 кучек?

б) Могло ли быть 9 кучек?

в) Какое наибольшее количество кучек могло быть?

Решение. Сумма всех чисел на доминошках равна 8(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 168.

а) Да, это возможно. Например

6-0

6-6

6-5, 6-1

6-4, 6-3, 5-0

6-2, 5-5, 5-4, 3-0

5-3, 5-2, 5-1, 4-4, 4-3

Остальные.

б) Если сумма в пятой кучке равна x, то сумма всех чисел равна $9x$, но 168 не кратно 9.

в) Пусть в первой кучке сумма x, всего кучек n и разность прогрессии равна d. Тогда

$$(2x + (n-1)d)n = 168 \cdot 2 = 336.$$

Если число кучек нечетно, то 168 должно делиться на n. Из нечетных чисел, больших 8, оно делится лишь на 21, однако если есть 21 кучка, то средняя из них имеет размер 8, что невозможно.

Если же это число четно, то 336 должно делиться на n. При этом $336 > n(n-1)$, откуда $n \leqslant 18$. Но на 18 число 336 не делится.

Пусть $n = 16$, тогда $2x + (n-1)d = 21$, возьмем $d = 1, x = 3$. Это возможно, вот разбиение на кучки:

0-3

0-4

0-5

0-6

1-6

2-6

3-6

4-6

5-6

6-6

5-5, 1-2

5-4, 1-4

5-3, 5-2

5-1, 4-4, 1-1

4-3, 4-2, 2-2,

3-3, 3-2, 3-1, 2-0, 1-0, 0-0

Ответ: а) да; б) нет; в) 16.

19. Тип 19 № 515730

Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 4$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geqslant 3$ выполняться равенство $a_n = 3a_2 - 2a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 667$?

Решение. а) Например, 9, 18, 24, 28.

б) Поскольку $a_{k+2} = a_{k+1} + \frac{2}{3}(a_{k+1} - a_k)$, числа a_{k+1} и a_k дают одинаковые остатки при делении на 3. Значит, все члены последовательности (кроме, может быть, последнего — он не нужен для дальнейших вычислений) дают одинаковые остатки от деления на 3. Будем сразу считать, что если такое возможно, то a_n — последний член последовательности (выкинем остальные). Тогда $a_n = 3(a_2 - a_1) + a_1$, поэтому и оно дает тот же остаток при делении на 3.

Заметим, что если вычесть из всех членов последовательности одно и то же число, то соотношение $a_{k+2} = a_{k+1} + \frac{2}{3}(a_{k+1} - a_k)$, эквивалентное соотношению из условия, останется верным и для новой последовательности, а соотношение $a_n = 3a_2 - 2a_1$ будет выполнено, если было выполнено ранее. Вычтем тогда из всех членов последовательности a_1. Теперь мы можем считать, что $a_1 = 0$, а остальные члены последовательности — натуральные числа. Значит, они все делятся на 3. Поделим. Опять же соотношение из условия будет выполнено и для новой последовательности, а соотношение $a_n = 3a_2 - 2a_1$ будет выполнено, если было выполнено ранее. Значит, все ее члены опять делятся на 3. Поделим. Поскольку этот процесс можно продолжать бесконечно, все члены нашей последовательности делятся на любую степень тройки, что невозможно, для отличных от нуля чисел.

в) Обозначим $b_k = a_k - a_{k-1}$. Поскольку $a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{2}{3}(a_{k+1} - a_k)$, то $b_{k+2} = \frac{2}{3}b_{k+1}$. Обозначая $a_1 = a,\ b_2 = b$ имеем $b_3 = \frac{2}{3}b,\ b_4 = \frac{4}{9}b, \ldots,\ b_{k+2} = \frac{2^k}{3^k}b.$ Далее, $a_{k+2} = b_{k+2} + b_{k+1} + \ldots + b_2 + a_1 = a + b(1 + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{2^k}{3^k})$, поэтому b делится на 3^k. Теперь разберем несколько случаев.

1. $k = 1$, тогда $b = 3x$, $a_3 = a + 5x = 667$, откуда $a \geqslant 2$. При $a = 2$ имеем $x = 133$, $b = 399$ и последовательность имеет вид 2, 401, 667. Осталось выяснить, может ли быть $a = 1$.
2. $k = 2$, тогда $b = 9x,\ a_3 = 1 + 19x \neq 667$.
3. $k = 3$, тогда $b = 27x,\ a_4 = 1 + 65x \neq 667$.
4. $k = 4$, тогда $b = 81x,\ a_5 = 1 + 211x \neq 667$.
5. $k = 5$, тогда $b = 243x,\ a_6 = 1 + 665x \neq 667$.
6. $k > 5$, тогда b кратно 729 и $a_n > a_2 = a + b > 729 > 667$.

Ответ: а) 9, 18, 24, 28; б) нет; в) 2.

Примечание.

Использованная при решении пункта б) идея носит название метода бесконечного спуска.

20. Тип 19 № 526258

Есть синие и красные карточки. Всего карточек 50 штук. На каждой карточке написано натуральное число. Среднее арифметическое всех чисел равно 16. Все числа на синих карточках разные. При этом любое число на синей карточке больше, чем любое на красной. Числа на синих увеличили в 2 раза, после чего среднее арифметическое стало равно 31,2.

а) Может ли быть 10 синих карточек?

б) Может ли быть 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть?

Решение. Пусть S_1 — сумма на синих карточках, S_2 — сумма на красных карточках. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{S_1+S_2}{50}=16, \\ \dfrac{2S_1+S_2}{50}=31,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1=760, \\ S_2=40. \end{cases}$$

а) Приведем пример. На каждой из сорока красных карточек написана 1. На синих карточках написаны числа: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 706 (760 − 54). Эти числа удовлетворяют системе.

б) Если красных карточек 10, то наибольшее число на красных карточках не может быть меньше 4 (иначе сумма на красных карточках не превосходит $3\cdot 10=30$, что неверно). Тогда минимальное число на синих карточках не меньше 5. Тогда сумма на 40 синих карточках не меньше, чем $5+6+\ldots+44=980$. Противоречие.

в) Приведем пример для 35 синих карточек и 15 красных. На двенадцати красных карточках написано 3, на двух 1, и на одной 2. На синих карточках написано: $4,5,\ldots,37,760-(4+37)\cdot 34/2=63$.

Если же синих карточек больше 35, то красных меньше 15. Наибольшее число на красных карточках не может быть меньше 3 (иначе сумма на красных карточках не превосходит $2\cdot 14=28$, что неверно). Тогда минимальное число на синих карточках не меньше 4. Тогда сумма на синих карточках не меньше, чем $4+5+\ldots+39=774$. Противоречие.

Ответ: а) да; б) нет; в) 35.

21. Тип 19 № 548484

Десять мальчиков и семь девочек пошли в лес за грибами. Известно, что любые две девочки набрали больше грибов, чем любые три мальчика, но любые пять мальчиков набрали больше грибов, чем любые три девочки.

а) Может ли так случиться, что какая-то девочка набрала меньше грибов, чем какой-нибудь мальчик?

б) Может ли так случиться, что количество найденных грибов у всех детей будет различным?

в) Найдите минимальное возможное количество грибов, собранное всеми детьми суммарно.

Решение. а) Пусть какая-то девочка собрала меньше грибов, чем какой-то мальчик. Добавим к ним пять других мальчиков и трёх других девочек. Получаем, что четыре девочки собрали меньше грибов, чем шесть мальчиков, что противоречит условию, поскольку любые две девочки собрали больше грибов, чем любые три мальчика.

б) Пусть десять мальчиков собрали 91, 92, ..., 100 грибов соответственно, а семь девочек 149, 150 ..., 155 грибов. Тогда условия задачи выполнены.

в) Пусть десять мальчиков собрали $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_{10}$ грибов соответственно, а семь девочек $b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_7$ грибов. По условию

$$(a_8+a_9+a_{10})+1\leqslant b_1+b_2 \text{ и } b_5+b_6+b_7+1\leqslant a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.$$

Получаем:

$$3(a_8+a_9+a_{10})+5\leqslant 3(b_1+b_2)+ \\ +2\leqslant 2(b_5+b_6+b_7+1)\leqslant 2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\leqslant a_1+ \\ +3(a_8+a_9+a_{10}),$$

откуда $5\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_{10}$.

Аналогично,

$$3(b_5+b_6+b_7)+8\leqslant 3(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+ \\ +5\leqslant 5(a_8+a_9+a_{10}+1)\leqslant 5(b_1+b_2)\leqslant b_1+3(b_5+b_6+b_7),$$

откуда $8\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_7$.

Следовательно, суммарное число грибов не меньше 10 · 5 + 7 · 8 = 106. Если десять мальчиков собрали по 5 грибов, а семь девочек по 8 грибов, то условия задачи выполнены, а суммарное число грибов равно 106. Таким образом, наименьшее суммарное число грибов равно 106.

Ответ: а) нет; б) да; в) 106.

22. Тип 19 № 660775

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых контейнерах находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75% от общего числа контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 80% от общей массы?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 40% от общей массы?

в) Какую наибольшую долю в процентах может составлять масса контейнеров с сахарным песком от общей массы?

Решение. Поскольку можно найти 75% контейнеров, общее число контейнеров должно быть кратно 4. Пусть оно равно $4x$, тогда $3x$ из них содержат сахарный песок.

а) Пусть есть 2 контейнера по 20 тонн и шесть по 60 тонн, при этом сахарным песком заполнены один контейнер в 20 тонн и пять по 60 тонн. Это дает 320 тонн, то есть ровно 80% от

$$2\cdot 20+6\cdot 60=400\text{ тонн.}$$

б) Заменим все контейнеры с сахарным песком на двадцатитонные, а все остальные — на шестидесятитонные. От этого доля массы сахарного песка среди массы всего груза только уменьшится и станет минимальной. Но даже теперь она составит не менее

$$\frac{3x\cdot 20}{x\cdot 60+3x\cdot 20}=\frac{60x}{120x}=0,5,$$

что больше 40%, значит, масса контейнеров с сахарным песком не может составлять 40% от общей массы.

в) Теперь наоборот, заменим все контейнеры с сахарным песком на шестидесятитонные, а все остальные — на двадцатитонные. От этого доля массы сахарного песка среди массы всего груза только увеличится, значит, это вариант с наибольшей массовой долей сахарного песка. В нем получаем, что доля массы сахарного песка равна

$$\frac{3x\cdot 60}{x\cdot 20+3x\cdot 60}=\frac{180x}{200x}=\frac{9}{10},$$

то есть 90%. Это значение достигается, например, для трех контейнеров с сахарным песком по 60 тонн и одного другого контейнера в 20 тонн.

Ответ: а) да; б) нет; в) 90%.

23. Тип 19 № 627412

Есть желтые и белые карточки, всего — 100 штук. На каждой написано натуральное число, среднее арифметическое всех чисел равно 32. Все числа на желтых карточках разные. При этом любое число на желтой карточке больше, чем любое число на белой. Все числа на желтых карточках увеличили в 3 раза, после чего среднее арифметическое всех чисел стало равно 94,6.

а) Может ли быть ровно 70 желтых карточек?

б) Могут ли все числа на белых карточках быть различными?

в) Какое наибольшее количество желтых карточек может быть?

Решение. Пусть было x желтых карточек и $100 - x$ белых. Общая сумма чисел составляла $32 \cdot 100 = 3200$. Пусть также сумма чисел на желтых карточках была равна n, тогда сумма на белых была $3200 - n$. После увеличения сумма на желтых будет $3n$, а общая сумма $3n+3200-n=2n+3200$. По условию, $2n+3200=100\cdot 94,6=9460$, откуда $2n=6260$, $n=3130$, $3200-n=70$.

а) Наибольшее из чисел на белых карточках не меньше трех (поскольку $30 \cdot 2 = 60 < 70$), значит, все числа на желтых карточках не меньше 4. Сумма наименьших семидесяти различных таких чисел равна

$$4+5+\ldots+73=77\cdot 35=2695<3130.$$

Значит, можно взять 20 белых карточек с двойкой, 10 белых карточек с тройкой, желтые карточки с числами от 5 до 73 и желтую карточку с числом $3130-(2695-4)=439$, все условия будут выполнены.

б) В таком случае числа на всех карточках были бы различны (желтые между собой различны по условию, белые по условию п. б), желтые больше белых), но сумма наименьших 100 различных чисел равна

$$1+2+\ldots+100=101\cdot 50=5050>3200.$$

в) Из п. а) есть пример на 70 желтых (и 30 белых) карточек. Если увеличить число желтых и уменьшить число белых, то условие о том, что все числа на желтых карточках не меньше 4, сохранится. Поскольку

$$4+5+\ldots+78=41\cdot 75=3075<3130,$$
$$4+5+\ldots+79=3075+79>3130,$$

взять больше чем 75 чисел на желтых карточках нельзя. Пример для 75 строится аналогично п. а). На 20 белых карточках напишем тройку, на 5 двойку, на желтых напишем числа 4, 5, ..., 77 с суммой $3075-78=2997$ и возьмем последним числом $3130-2997=133$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 75.

24. Тип 19 № 520705

Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 2S(n) + 11$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 3S(n) + 11$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n) = 8S(n) + 74$?

Решение. а) Такое число существует. Например, при $n = 34$ имеем $S(n) = 7$ и $K(n) = 25 = 2 \cdot 7 + 11$.

б) Предположим, что такое число существует. Тогда если число $S(n)$ чётное, то число $K(n) = 3S(n) + 11$ нечётное. Если же число $S(n)$ нечётное, то число $K(n) = 3S(n) + 11$ чётное. С другой стороны, любая цифра и её квадрат имеют одинаковую чётность (то есть чётны или нечётны одновременно). Значит, $S(n)$ и $K(n)$ также имеют одинаковую чётность. Пришли к противоречию.

в) Пусть n — искомое число, m — количество всех девяток в десятичной записи числа n. Тогда сумма всех отличных от девятки цифр числа n равна $S(n) - 9m$, а сумма их квадратов не более $8(S(n) - 9m)$. Значит,

$$8S(n) + 74 = K(n) \le 81m + 8(S(n) - 9m) = 8S(n) + 9m.$$

Следовательно, $m \ge 9$.

Поскольку искомое число n является наименьшим натуральным из удовлетворяющих равенству $K(n) = 8S(n) + 74$, среди его цифр нет нулей (иначе их можно было бы вычеркнуть), и все его цифры расположены по возрастанию (иначе перестановкой цифр n можно было бы уменьшить). Значит, все девятки в десятичной записи числа n стоят в конце.

Из равенства $K(n) = 8S(n) + 74$ следует, что либо $S(n)$, либо $K(n)$ не делится на 9 и в числе n есть отличные от девяток цифры. Поэтому $n \ge 1\,999\,999\,999$. При этом $K(1\,999\,999\,999) = 730 = 8 \cdot 82 + 74 = 8S(1\,999\,999\,999) + 74$. Значит, число $n = 1\,999\,999\,999$ и есть искомое.

Ответ: а) да; б) нет; в) 1 999 999 999.

25. Тип 19 № 511410

а) Можно ли число 2016 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 197 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы четырех различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

Решение. а) Да, можно. Это верно, например, для чисел 2007 и 9, их сумма равна 2016, а сумма цифр в каждом числе равна 9.

б) Да, можно. Это верно, например, для чисел 139 и 58, их сумма равна 197, а сумма цифр в каждом числе равна 13. Другие примеры: 139+58 или 148 + 49.

в) Наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы четырёх различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр, равно сумме четырёх наименьших чисел с этой суммой цифр.

Для сумм 1, 2, 3 и 4 имеем соответственно:

$$\begin{gathered}1+10+100+1000=1111,\\ 2+11+20+101=134,\\ 3+12+21+30=66,\\ 4+13+22+31=70.\end{gathered}$$

Если сумма цифр равна 5 или больше, обозначим её через a. Тогда наименьшее из таких чисел − как минимум a. Числа с одинаковой суммой цифр дают одинаковые остатки при делении на 9, поэтому идут минимум через 9. Значит, их сумма не меньше чем

$$a+(a+9)+(a+18)+(a+27)=4a+54 \geqslant 74.$$

Получаем, что искомое число равно 66.

Ответ: а) да; б) да; в) 66.

26. Тип 19 № 517584

На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись заканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810.

а) Может ли быть 24 четных числа?

б) Может ли быть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 7?

в) Какое наименьшее количество чисел с последней цифрой 7 может быть на доске?

Решение. а) Да, например:

$$2+4+\ \dots\ +44+46+66+7+17+27+37+47+57=$$
$$=\frac{2+46}{2}\cdot 23+66+192=810.$$

б) Пусть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 7. Тогда на доске написано 28 четных чисел. Их сумма не меньше, чем:

$$2+4+\ \dots\ +54+56=\frac{58\cdot 28}{2}=812.$$

Это противоречит тому, что сумма равна 810, то есть на доске не может быть двух чисел, оканчивающихся на 7.

в) Заметим, что число 810 кратно 2, сумма четных чисел кратна двум, тогда и сумма чисел, оканчивающихся на 7, тоже кратна двум. Чтобы сумма нечетных чисел делилась на два, слагаемых должно быть четное количество. В пункте б) показано, что на доске не может быть два числа, оканчивающихся на 7, тогда наименьшее возможное количество таких чисел — 4.

Приведем пример, когда на доске написано четыре числа, оканчивающихся на 7:

$$(2+4+\ \dots\ +30+32)+(36+38+\ \dots\ +52+54)+7+17+27+37=$$
$$=\frac{2+32}{2}\cdot 16+\frac{36+54}{2}\cdot 10+88=810.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 4.

27. Тип 19 № 562042

У Миши в копилке есть двухрублёвые, пятирублёвые и десятирублёвые монеты. Если взять 10 монет, то среди них обязательно найдется хотя бы одна двухрублевая. Если взять 15 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна пятирублёвая. Если взять 20 монет, то среди них обязательно найдется хотя бы одна десятирублёвая.

а) Может ли у Миши быть 30 монет?

б) Какое наибольшее количество монет может быть у Миши?

в) Какая наибольшая сумма рублей может быть у Миши?

Решение. а) Пусть у него x двухрублевых, y пятирублевых и z десятирублевых монет. По условию $y+z<10$, $x+z<15$, $x+y<20$. Значит, $y+z\le 9$, $x+z\le 14$, $x+y\le 19$. Сложив эти неравенства и поделив на 2, получим $x+y+z\le 21$, поэтому 30 монет быть не может.

б) В копилке может быть 21 монета — при $x=12$, $y=7$, $z=2$. Отметим, что это единственное решение системы уравнений $y+z=9$, $x+z=14$, $x+y=19$.

в) По условию $x+y+z\ge 20$, то есть $x+y+z=20$ или $x+y+z=21$. Если $x+y+z=21$, то $x=12$, $y=7$, $z=2$ и общая сумма денег равна

$$12\cdot 2+7\cdot 5+2\cdot 10=79.$$

Если же $x+y+z=20$, то поскольку $y+z\le 9$, получаем что $x\ge 20-9=11$. Аналогично, $y\ge 20-14=6$. Значит,

$$z=20-x-y\leqslant 20-11-6=3.$$

Сумма денег у Миши равна

$$2x+5y+10z=$$
$$=10(x+y+z)-8x-5y\leqslant 10\cdot 20-8\cdot 11-5\cdot 6=82\ \text{рубля}.$$

Это значение достигается при $x=11$, $y=6$, $z=3$.

Ответ: а) нет; б) 21; в) 82.

Приведем еще одно решение (Ирина Шраго).

а) Нет. Если в копилке 30 монет, то по условию: двухрублёвых не меньше 21, пятирублёвых не меньше 16, десятирублевых не меньше 11. Таким образом, всего монет не меньше 48. Противоречие.

б) Пусть в копилке лежит n монет, тогда: двухрублёвых не меньше $n-9$, пятирублёвых не меньше $n-14$, десятирублёвых не меньше $n-19$. Всего монет n, откуда $n\geqslant 3n-42$, то есть $n\leqslant 21$. Следовательно, наибольшее количество монет 21: 12 двухрублевых, 7 пятирублёвых и 2 десятирублёвых.

в) По условию количество монет не меньше 20, то есть кроме примера из б), в котором сумма равна 79 руб., возможен вариант $n=20$. При наименьших возможных значениях количеств двухрублёвых (11) и пятирублёвых монет (6), десятирублёвых монет может быть $20-11-6=3$. Тогда в копилке будет 82 руб., это наибольшая возможная сумма в копилке.

Ответ: а) нет; б) 21; в) 82.

28. Тип 19 № 502119

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n\geqslant 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что числа составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть a — первый член этой прогрессии, d её разность. Тогда сумма её членов $S_n = \frac{2a+(n-1)d}{2}n.$

а) Да, может. Числа 1, 2, 3, 4 составляют арифметическую прогрессию, и их сумма равна 10.

б) Для суммы членов арифметической прогрессии верно неравенство

$$\frac{2a+(n-1)d}{2}\cdot n \geqslant \frac{2+(n-1)}{2}\cdot n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Значит, $\frac{n(n+1)}{2} < 1000$, откуда находим $n \leqslant 44$. Сумма арифметической прогрессии 1, 2, …, 44 равна 990 < 1000. Значит, наибольшее значение n равно 44.

в) Для суммы членов арифметической прогрессии имеем:

$$\frac{2a+d(n-1)}{2}\cdot n = 129;\ (2a+d(n-1))n = \\ = 258 = 2\cdot 3\cdot 43.$$

Таким образом, число n является делителем числа 258. Если $n \geqslant 43$, то $(2a+d(n-1))n \geqslant 44\cdot 43 > 258$, следовательно, $n < 43$. Поскольку $n \geqslant 3$, получаем, что $n = 3$ или $n = 6$. Прогрессии из 3 и 6 членов с суммой 129 существуют: например, 42, 43, 44 и 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Ответ: а) да; б) 44; в) 3, 6.

29. Тип 19 № 562942

На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 8, если изначально по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 39, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 199 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 199 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Решение. а) Пусть стирали следующие пары чисел: 10 и 11, 3 и 9, 4 и 8, 5 и 7. Тогда на доске останутся числа 2 и 6, сумма которых равна 8.

б) Среди чисел от 100 до 199 ровно 33 числа делится на 3, ровно 33 числа дают при делении на 3 остаток 2 и ровно 34 числа дают при делении на 3 остаток 1. По условию каждый раз с доски стирали два числа, сумма которых делится на 3. Значит, в каждой из пар стёртых чисел либо оба числа делятся на 3, либо при делении на 3 одно из них даёт в остатке 1, а другое даёт в остатке 2. Поэтому на доске обязательно останется число, которое делится на 3, и число, которое при делении на 3 даёт остаток 1. Разность между ними не делится на 3 и, следовательно, не может равняться 39.

в) Как было доказано в предыдущем пункте, если на доске осталось ровно два числа, то одно из них делится на 3, а второе при делении на 3 даёт остаток 1. Первое из этих чисел не меньше 102 и не больше 198, второе — не меньше 100 и не больше 199. Поэтому если первое из этих чисел поделить на второе, то получится не больше $\frac{198}{100}$, а если второе из этих чисел поделить на первое, то получится не больше $\frac{199}{102}$. Поскольку $198\cdot 102 > 199\cdot 100$, получаем, что $\frac{198}{100} > \frac{199}{102}$ и наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, не превосходит $\frac{198}{100}$. На доске могли остаться только числа 100 и 198, так как остальные числа от 100 до 199 можно разбить на такие пары: 16 пар чисел, делящихся на 3, и 33 пары чисел, в каждой из которых при делении на 3 одно из чисел даёт в остатке 1, а другое даёт в остатке 2. Значит, наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, равно $\frac{198}{100} = 1{,}98.$

Ответ: а) да; б) нет; в) 1,98.

30. Тип 19 № 525074

а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 105.

б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное двух соседних чисел равнялось 300, а наибольший общий делитель любых трёх подряд идущих чисел равнялся 1?

в) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 60?

Решение. а) 105; 3; 35; 21; 5.

б) Нет. Каждое число в круге должно являться делителем числа 300. Поскольку $300=2^2\cdot3\cdot5^2$, делителей всего $2\cdot3\cdot3=18$, включая 1 и 300. Наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел должно равняться 300, поэтому рядом с числом 1 может стоять только 300 и число 1 не может находиться в круге. Среди делителей числа 300 есть 6 делителей, кратных 2 и не кратных 4, 6 делителей, кратных 5 и не кратных 25, и 2 делителя, кратных 10 и не кратных 4 и 25. Поэтому 10 чисел среди делителей числа 300 кратны 2 или 5 и не кратны их квадратам. Среди 8 чисел, выписанных в круг, не будет числа 1, поэтому там будет хотя бы одно число, кратное 2 или 5 и не кратное их квадратам. Рядом с таким числом с обеих сторон будут стоять числа, кратные тому же простому числу (2 или 5), поэтому наибольший общий делитель этих трёх подряд идущих чисел будет больше 1.

в) Каждое число, выписанное в круг, обязано быть делителем числа 60. У числа $60=2^2\cdot3\cdot5$ всего 12 делителей, считая 60 и 1. Среди этих делителей есть простое число 2, на квадрат которого делится 60. Рядом с числом 2 может стоять только число 60, чтобы их наименьшее общее кратное равнялось 60 (число, стоящее рядом с 2, должно делиться и на 4, и на 3, и на 5), поэтому число 2 не может быть написано. Рядом с числами 5 и 10 могут быть написаны только числа 12 и 60, поэтому если в круге больше 4 чисел, то 5 и 10 не могут одновременно находиться в круге. Аналогично 3 и 6 не могут быть написаны одновременно, поскольку рядом с ними могут быть написаны только числа 20 и 60. Значит, всего может быть выписано в круг не более 8 чисел. Пример чисел 60; 6; 20; 30; 4; 15; 12; 10 показывает, что наибольшее искомое количество чисел равно 8.

Ответ: а) например, 105; 3; 35; 21; 5; б) нет; в) 8.

31. Тип 19 № 633757

На острове живут 3 серых, 28 бурых и 29 малиновых хамелеонов. При встрече двух хамелеонов разных цветов оба меняют свой цвет на третий (серый и бурый оба становятся малиновыми и т. п.).

а) Может ли в некоторый момент времени на острове оказаться 15 серых, 28 бурых и 17 малиновых хамелеонов?

б) Может ли некоторый момент времени на острове оказаться 60 серых хамелеонов?

в) Какое наибольшее количество серых хамелеонов может оказаться на острове, при условии, что малиновых хамелеонов в этот момент времени ровно 2?

Решение. Сразу заметим, что количества хамелеонов разных цветов дают различные остатки от деления на 3, и эта ситуация сохраняется — можно считать, что при встрече количество всех видов хамелеонов уменьшается на 1 (и все остатки по-прежнему разные), а затем количество хамелеонов одного из цветов увеличивается на 3, что не влияет на остатки. Более того, сохраняются разности между остатками. То есть если изначально разность между числом малиновых и числом бурых давала при делении на 3 остаток 1, то это свойство сохранится и в дальнейшем (при «правильном» понимании остатков для отрицательных чисел — например, −10 при делении на 3 дает остаток 2, поскольку $-10=-4\cdot3+2$).

а) Если встретятся малиновый и бурый хамелеоны, потом снова малиновый и бурый, а потом малиновый и серый, то за эти три встречи число бурых хамелеонов не изменится, число серых вырастет на 3, а число малиновых уменьшится на 3. Повторяя такую последовательность встреч 4 раза, получим требуемое.

б) Количества хамелеонов должны стать равными 60, 0, 0, то есть все должны давать одинаковые остатки от деления на 3, что невозможно.

в) В силу замечания в начале решения, разность между количествами малиновых и бурых хамелеонов при делении на 3 всегда дает остаток 1, поэтому если малиновых хамелеонов 2, то бурых не может быть 0. Значит, серых не более $60-2-1=57$. Такого количества легко добиться, обеспечив 27 встреч между бурым и малиновым хамелеонами.

Ответ: а) да; б) нет; в) 57.

32. Тип 19 № 635158

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность натуральных чисел. Обозначим $M_{<c}(a_n)$ среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, которые меньше некоторого числа C, которое больше наименьшего, но не больше наибольшего члена этой последовательности. Обозначим $M_{\geqslant C}(a_n)$ — среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, которые не меньше числа C. Среднее арифметическое одного числа равно самому числу. К каждому члену последовательности $\{a_n\}$ прибавили 4. Получилась новая последовательность, которую обозначим $\{a_n+4\}$.

а) Существует ли последовательность $\{a_n\}$, состоящая из трёх членов, для которой $M_{<79}(a_n+4)<M_{<79}(a_n)$?

б) Существует ли последовательность $\{a_n\}$, состоящая из трёх членов, для которой $M_{<79}(a_n+4)<M_{<79}(a_n)$ и $M_{\geqslant79}(a_n+4)<M_{\geqslant79}(a_n)$?

в) Известно, что среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, равняется 84, $M_{\geqslant79}(a_n)=94$, $M_{<79}(a_n)=70$, $M_{\geqslant79}(a_n+4)=96$ и $M_{<79}(a_n+4)=72$. Какое наименьшее число членов может быть в последовательности $\{a_n\}$?

Решение. а) Да, например, для последовательности 1, 77, 80 имеем: $M_{<79}(a_n) = 39$. После увеличения чисел на 4 получаем последовательность 5, 81, 84, для которой $M_{<79}(a_n+4) = 5$.

б) Да, например, для последовательности 1, 77, 1001 получим:

$$M_{<79}a_n = 39, \qquad M_{<79}(a_n+4) = 5, \qquad M_{\geqslant 79}a_n = 1001,$$
$$M_{\geqslant 79}(a_n+4) = 543.$$

в) Пусть в последовательности имеется x членов, не превосходящих 74 (прибавление 4 к ним оставит их меньшими 79), y членов от 75 до 78 (они станут не меньше 79 после прибавки) и z членов, не меньших 79. Будем называть их маленькими, средними и большими соответственно. Поскольку сумма чисел равна их количеству, умноженному на их среднее арифметическое, получаем:

— сумма всех чисел равна $84(x+y+z)$;

— сумма всех больших чисел равна $94z$;

— сумма всех маленьких и средних равна $70(x+y)$;

— сумма всех больших и средних чисел равна $(96-4)(y+z) = 92(y+z)$ (при увеличении каждого числа на 4 среднее тоже растет на 4);

— сумма всех маленьких равна $(72-4)x = 68x$.

Значит,

$$84(x+y+z) = 94z + 70(x+y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10z = 14(x+y) \Leftrightarrow 5z = 7(x+y)$$

и

$$84(x+y+z) = 92(y+z) + 68x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8(y+z) = 16x \Leftrightarrow y+z = 2x,$$

откуда $z = 2x - y$. Тогда предыдущее уравнение дает

$$5(2x-y) = 7(x+y) \Leftrightarrow 10x - 5y = 7x + 7y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = 12y \Leftrightarrow x = 4y$$

и $z = 2x - y = 7y$. Таким образом, всего чисел не меньше $4y + y + 7y = 12y \geqslant 12$.

Осталось привести пример для 12 чисел. Пусть было 4 числа, равных 68, 7 чисел, равных 94, и число 78. Тогда все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 12.

33. Тип 19 № 668215

Из четырёхзначного натурального числа вычитают сумму всех его цифр, затем полученное число делят на 3.

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 3111?

б) Могло ли в результате такой операций получиться число 2075?

в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 5200 до 6000 включительно?

Решение. Пусть число записывалось цифрами a, b, c, d. Тогда оно было равно $1000a + 100b + 10c + d$. Из него получилось

$$\frac{1}{3}(1000a + 100b + 10c + d - a - b - c - d) =$$
$$= \frac{1}{3}(999a + 99b + 9c) = 3(111a + 11b + c).$$

а) Уравнение $3(111a + 11b + c) = 3111$ сводится к $111a + 11b + c = 1037$. Взяв, например, $a = 9$, $b = 3$, $c = 5$ и любое d (например, 0) получим $9350 \to 3111$.

б) Уравнение $3(111a + 11b + c) = 2075$ неразрешимо, поскольку 2075 не кратно трем.

в) Сразу заметим, что числа, отличающиеся лишь последней цифрой, дают одинаковый ответ. Кроме того, $6000 \to 1998$ и других таких чисел нет, поскольку для остальных чисел $a = 5$, $b \leqslant 9$, $c \leqslant 9$, а тогда

$$3(111a + 11b + c) \leqslant 3(555 + 99 + 9) = 3 \cdot 664 = 1992.$$

Теперь исследуем числа $5200, 5210, 5220, \ldots 5990$. У всех у них $a = 5$, и потому они дают ответы $3(555 + 11b + c)$. Докажем, что разные числа не могут дать одинаковый ответ. В самом деле, пусть $3(555 + 11b + c) = 3(555 + 11b_1 + c_1)$, тогда

$$11b + c = 11b_1 + c_1, \; 11(b - b_1) = c_1 - c.$$

Разность двух цифр может быть кратна 11 только если эти цифры равны, то есть $c_1 = c$, а тогда и $b_1 = b$. Итак, все эти числа (их $599 - 520 + 1 = 80$) дают разные ответы. Значит, всего ответов 81 (учитывая 1998).

Ответ: а) да; б) нет; в) 81.

34. Тип 19 № 526019

Готовясь к экзамену, Вася и Петя решали задачи из сборника, и каждый из них решил все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 10 дней?

в) Какое наименьшее число задач могло быть в сборнике, если известно, что каждый из них решал задачи более 6 дней, в первый день Вася решил больше задач, чем Петя, а за семь дней Петя решил больше задач, чем Вася?

Решение. Пусть Вася в первый день решил a задач, а Петя — b задач. Вася решал задачи n дней, а Петя — m дней. Воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии. Получим, что за n дней Вася решил $S_n=\frac{a+a+n-1}{2}\cdot n$ задач, а Петя за m дней решил $S_m=\frac{b+b+2(m-1)}{2}\cdot m$ задач.

а) Проверим, могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 5 дней.

Вася за 5 дней решил $\frac{2a+5-1}{2}\cdot 5$ задач, а Петя $\frac{2b+2(5-1)}{2}\cdot 5$ задач. Приравняем эти значения: $\frac{2a+4}{2}\cdot 5=\frac{2b+8}{2}\cdot 5$. Откуда получаем, что $a=b+2$. Таким образом, мальчики могли решить все задачи сборника ровно за пять дней, если Вася в первый день решил на две задачи больше, чем Петя.

б) Проверим, могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за десять дней.

Вася за 10 дней решил $\frac{2a+10-1}{2}\cdot 10$ задач, а Петя $\frac{2b+2(10-1)}{2}\cdot 10$ задач. Приравняем эти значения: $\frac{2a+9}{2}\cdot 10=\frac{2b+18}{2}\cdot 10$. Откуда получаем, что $a=b+\frac{9}{2}$. Это равенство не может быть выполнено ни при каких целых a и b, следовательно, мальчики не могли решить все задачи сборника ровно за десять дней.

в) Пусть Вася решал задачи k дней, а Петя — l дней. Тогда

$$\frac{2a+k-1}{2}\cdot k=\frac{2b+2(l-1)}{2}\cdot l.\ (*)$$

По условию $a<b$, но при этом

$$\frac{2a+7-1}{2}\cdot 7<\frac{2b+2(7-1)}{2}\cdot 7\Leftrightarrow a<b+3.$$

Количество задач в сборнике будет минимальным при минимальных значениях l и b.

Минимальное возможное $l=7$. Значение a должно удовлетворять условию $b<a<b+3$, значение k — условию $k>6$.

Проверим возможные значения и занесём их в таблицу:

l	*b*	*S*	*a*	*Уравнение* (*)	*Натуральные решения*
7	1	49	2	$\frac{2\cdot2+k-1}{2}\cdot k=49$	нет натуральных k
7	1	49	3	$\frac{2\cdot3+k-1}{2}\cdot k=49$	нет натуральных k
7	2	56	3	$\frac{2\cdot3+k-1}{2}\cdot k=56$	нет натуральных k
7	2	56	4	$\frac{2\cdot4+k-1}{2}\cdot k=49$	нет натуральных k
7	3	63	4	$\frac{2\cdot4+k-1}{2}\cdot k=63$	нет натуральных k
7	3	63	5	$\frac{2\cdot5+k-1}{2}\cdot k=49$	нет натуральных k
7	4	70	5	$\frac{2\cdot5+k-1}{2}\cdot k=70$	нет натуральных k
7	4	70	6	$\frac{2\cdot6+k-1}{2}\cdot k=70$	нет натуральных k
7	5	77, что больше 72	...		
8	1	64	2	$\frac{2\cdot2+k-1}{2}\cdot k=64$	нет натуральных k
8	1	64	3	$\frac{2\cdot3+k-1}{2}\cdot k=64$	нет натуральных k
8	2	72	3	$\frac{2\cdot3+k-1}{2}\cdot k=72$	нет натуральных k
8	2	72	4	$\frac{2\cdot4+k-1}{2}\cdot k=72$	$k=9$
8	3	80 (что больше 72)			
9	1	81 (что больше 72)			
...	...	больше, чем 72			

Таким образом, наименьшее число задач в сборнике равно 72, и все условия задачи выполняются при $k = 9$, $a = 4$, $l = 8$, $b = 2$.

О т в е т : а) да; б) нет; в) 72.

35. Тип 19 № 669779

Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 60 монет достоинством 1 дукат и 60 монет достоинством 5 дукатов. Других монет у пиратов нет.

а) Получится ли поделить все деньги поровну между 18 пиратами, если каждому должно достаться целое число монет?

б) Получится ли поделить все деньги поровну между 40 пиратами, если каждому должно достаться целое число монет?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану удастся поделить между ними все деньги любым способом, каким бы ему не захотелось (например, при каком-то способе кому-то из пиратов может ничего не достаться)?

Решение. Всего в сундуке сокровищ на $60\cdot 1+60\cdot 5=360$ дукатов.

а) Да. Чтобы разделить 360 дукатов на 18 человек поровну, каждый должен получить по 20 дукатов. Можно раздать пятнадцати пиратам по 4 монеты достоинством 5 дукатов каждому, а оставшимся трем пиратам — по 20 монет достоинством 1 дукат.

б) Нет. Если 40 пиратов получают поровну, то каждый должен получить по 9 дукатов, то есть не больше одной монеты достоинством 5 дукатов, а значит, не меньше 4 монет достоинством 1 дукат. Но монет достоинством 1 дукат всего 60, а потому их хватит только на 15 пиратов.

в) Если пиратов больше 17, то существует дележ, который не получится реализовать. Например, капитан не сможет взять себе 296 дукатов, шестнадцати пиратам дать по 4 дуката, а оставшимся пиратам ничего не дать, поскольку имеется только 60 монет по одному дукату, а при таком способе нужно иметь 64 монеты по одному дукату.

Если же пиратов 16, то 360 дукатов получится распределить между ними любым наперед заданным способом. Действительно, придумаем, сколько денег выдать каждому пирату и, начиная с наибольшей причитающейся суммы, будем каждому пирату выдавать сначала максимально возможное число монет по 5 дукатов, затем добавлять необходимое число монет по 1 дукату. Тогда каждый, кроме последнего, получит не более 4 монет по одному дукату. Всего таких монет 60, поэтому получится обеспечить не менее 15 человек. Последний получает оставшиеся в сундуке деньги.

О т в е т : а) да; б) нет; в) 16.

36. Тип 19 № 637852

Сначала Маша написала на доске 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 30. Затем вместо некоторых из чисел (возможно, одного) она написала на доске числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, она с доски стёрла.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 24. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 30?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 24. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение. а) Пусть первоначально на доске было 19 чисел, равных 10, и одно число, равное 1. Их среднее арифметическое равно

$$\frac{19\cdot 10+1}{20}=9{,}55.$$

Пусть число, равное 1, уменьшилось на 1 (после чего было стёрто с доски), а остальные числа не изменились. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно

$$\frac{19\cdot 10}{19}=10.$$

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна S, а после уменьшения стала равна $S-n$, где n — количество чисел, которые были уменьшены на 1, но не были стёрты с доски. По условию $\frac{S+k}{20}=24$, то есть $S=480-k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно

$$\frac{S-n}{20-k}=30,$$

тогда получим

$$\frac{480-k-n}{20-k}=30.$$

Из этого равенства находим $29k=120+n$. Число n лежит в пределах от 0 до 20, поэтому $120+n$ лежит в пределах от 120 до 140. В этом промежутке нет целых чисел, делящихся на 29.

в) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна S, а после уменьшения стала равна $S-n$. По условию $\frac{S+k}{20}=24$, то есть $S=480-k$. Необходимо найти наибольшее возможное значение числа

$$A=\frac{S-n}{20-k}.$$

Имеем

$$A=\frac{S-n}{20-k}=\frac{480-k-n}{20-k}\leqslant\frac{480-k}{20-k}=1+\frac{460}{20-k}.$$

Число A будет наибольшим, если $n=0$ и число k будет принимать наибольшее возможное значение. Оценим это значение.

Так как каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 30 и на доске осталось $20-k$ чисел, для суммы S выполняется неравенство

$$480-k=S\leqslant 30(20-k),$$

откуда следует, что

$$480-k \leqslant 30(20-k) \Leftrightarrow 29k \leqslant 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k \leqslant \frac{120}{29} < 5 \Leftrightarrow k \leqslant 4.$$

Значит,

$$A \leqslant 1+\frac{460}{20-k} \leqslant 1+\frac{460}{16} = 29,75.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным 29,75. Пусть первоначально на доске было написано 4 единицы, 15 чисел, равных 30, и одно число, равное 26. Тогда их среднее арифметическое было равно

$$\frac{4+15\cdot 30+26}{20} = 24.$$

Пусть 4 числа, равные единице, уменьшились на 1 (после чего были стёрты с доски), а остальные числа не изменились. Тогда среднее арифметическое оставшихся чисел равно

$$\frac{15\cdot 30+26}{16} = 29,75.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 29,75.

37. Тип 19 № 672199

Дано четырехзначное число $\overline{abcd}$, где a, b, c и d — соответственно цифры разрядов тысяч, сотен, десятков и единиц, причём $a \neq 0$.

а) Может ли произведение цифр этого числа быть больше суммы цифр этого числа в 3 раза?

б) Цифры a, b, c и d попарно различны. Сколько существует различных чисел $\overline{abcd}$ таких, что произведение цифр меньше суммы цифр?

в) Известно, что $a\cdot b\cdot c\cdot d = k(a+b+c+d)$, где k — двузначное число. При каком наименьшем значении $\overline{abcd}$ число k будет наибольшим?

Решение. а) Да, например, число 1236 удовлетворяет условиям задачи.

б) Во-первых, подходит любое число с нулем в записи. Можно тремя способами выбрать место для этого нуля, потом девятью способами выбрать первую цифру, восьмью и семью — остальные две. Итак, таких чисел $3\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 1512$. Другие варианты не подходят. В самом деле, пусть $0 < a < b < c < d$. Тогда

$$a+b+c+d < 4d < 6d = 1\cdot 2\cdot 3\cdot d \leqslant a\cdot b\cdot c\cdot d.$$

От порядка цифр это неравенство не зависит.

в) Будем искать подходящий набор цифр и упорядочим потом цифры по возрастанию. Ни одна из цифр не может быть равна нулю. Ясно, что $k \neq 99$, поскольку $a\cdot b\cdot c\cdot d$ не может быть кратно 11. Если $k = 98$, то две цифры в числе должны быть семерками. Пусть $c = d = 7$, тогда

$$a\cdot b\cdot 7\cdot 7 = 98(a+b+7+7) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ab = 2(a+b+14) \Leftrightarrow ab-2a-2b = 28 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ab-2a-2b+4 = 32, \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 32.$$

Значит, одно из чисел $a-2$ и $b-2$ не меньше 8, то есть a или b — не цифры.

Если $k = 97$, то $a\cdot b\cdot c\cdot d$ должно быть кратно 97, что невозможно.

Если $k = 96$, то

$$a\cdot b\cdot c\cdot d = 96(a+b+c+d),$$

значит одна из цифр кратна 3, то есть равна или 3, или 6 или 9. Рассмотрим эти случаи.

Пусть $d = 3$, значит,

$$a\cdot b\cdot c = 32(a+b+c+3),$$

тогда хотя бы одна из оставшихся цифр кратна 4, то есть равна или 4, или 8. Если $c = 4$, то $a\cdot b = 8(a+b+7)$, тогда одна из оставшихся цифр тоже кратна 4. Если $b = 4$, то $a = 2(a+11)$, что невозможно. Если $b = 8$, то $a = a+15$, что тоже невозможно. Если $c = 8$, то $a\cdot b = 4(a+b+11)$, тогда одна из оставшихся цифр кратна 2. Если $b = 2$, то $a = 2(a+13)$, что невозможно. Если $b = 4$, то $a = a+15$ — невозможно. Если $b = 8$, то $2a = a+19$, что тоже невозможно. Значит, среди цифр числа $\overline{abcd}$ нет цифры 3.

Пусть $d = 6$, значит,

$$a\cdot b\cdot c = 16(a+b+c+6),$$

тогда хотя бы одна из оставшихся цифр кратна 4, то есть равна или 4, или 8. Если $c = 4$, то $a\cdot b = 4(a+b+10)$, тогда одна из оставшихся цифр кратна 2. Если $b = 2$, то $a = 2(a+12)$, что невозможно. Если $b = 4$, то $a = a+14$, что тоже невозможно. Если $c = 8$, то $a\cdot b = 2(a+b+14)$, тогда одна из оставшихся цифр кратна 2. Если $b = 2$, то $a = a+16$, что невозможно. Если $b = 4$, то $2a = a+18$ — невозможно. Если $b = 8$, то $4a = a+22$, что тоже невозможно. Значит, среди цифр числа $\overline{abcd}$ нет цифры 6.

Пусть $d = 9$, значит,

$$3a \cdot b \cdot c = 32(a+b+c+9),$$

тогда хотя бы одна из оставшихся цифр кратна 4, то есть равна или 4, или 8. Если $c = 4$, то $3a \cdot b = 8(a+b+13)$, тогда одна из оставшихся цифр тоже кратна 4. Если $b = 4$, то $3a = 2(a+17)$, что невозможно. Если $b = 8$, то $3a = a+21$, что тоже невозможно. Если $c = 8$, то $3a \cdot b = 4(a+b+17)$, тогда одна из оставшихся цифр кратна 2. Если $b = 2$, то $a = a+16$, что невозможно. Если $b = 4$, то $2a = a+18$ — невозможно. Если $b = 8$, то $6a = a+25 \Leftrightarrow a = 5$. Значит, единственный возможный набор цифр это 9, 8, 8 и 5. Наименьшее число, составленное из этих цифр, — число 5889.

Ответ: а) да, б) 1512, в) 5889.

38. Тип 19 № 506025

Рассматривается набор гирек, масса каждой из которых — целое число граммов, а общая масса всех гирек равна 500 граммам. Такой набор называется правильным, если любое тело, имеющее массу, выраженную целым числом граммов от 1 до 500, может быть уравновешено некоторым количеством гирек набора и притом единственным образом (тело кладется на одну чашу весов, гирьки — на другую; два способа уравновешивания, различающиеся лишь заменой некоторых гирек на другие той же массы, считаются одинаковыми).

а) Является ли правильным набор, состоящий из 167 гирек массой по одному грамму, одной гирьки массой 165 граммов и одной гирьки массой 168 граммов?

б) Приведите пример правильного набора, в котором не все гирьки по одному грамму.

в) Сколько существует различных правильных наборов? (Два набора различны, если некоторая гирька участвует в этих наборах неодинаковое число раз.)

Решение. а) Этот набор не универсальный, поскольку массу 165 г можно уравновесить двумя способами: 165 гирек массой по 1 г или одна гирька массой 165 г.

б) Например, две гирьки массой 167 граммов и 166 гирек массой по 1 грамму.

в) Пусть наибольшая масса гирьки в некотором правильном наборе равен *M,* а общая масса всех остальных гирек равна *m*. Ясно, что любую массу, меньшую *M*, можно уравновесить меньшими гирьками, значит, $m \geqslant M-1$. Пусть $m \geqslant M$, тогда есть минимум два способа уравновесить массу $M+r$, где r — это остаток от деления *m* на *M*. Значит, $m = M-1$.

Пусть гирек максимальной массы *k* штук, тогда общая масса всех гирек $kM+m = 500$, значит, 501 делится на *M.* Найдя *M,* можно определить массу второй по тяжести гирьки. Аналогичными рассуждениями получаем, что она должна быть делителем *M.* Разложим 501 на простые множители: $501 = 3 \cdot 167$. Значит, существует всего два набора, кроме состоящего из одних однограммовых гирек. Первый набор состоит из двух гирек массой 167 граммов и 166 гирек массой по 1 грамму. Второй набор состоит из 166 гирек массой по 3 грамма и двух гирек массой по 1 грамму.

Ответ: а) нет; б) две гирьки массой 167 граммов и 166 гирек массой по 1 грамму; в) три набора.

Примечание редакции Решу ЕГЭ.

Мы отредактировали задание, добавив третий вопрос — пункт а).

39. Тип 19 № 512876

а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Решение. Обозначим a — первый член прогрессии, n — количество членов, d — её разность. Числа a и n — натуральные. Без ограничения общности можно считать прогрессию неубывающей, тогда число d — натуральное либо равно нулю.

а) Сумма первого и пятого членов этой прогрессии равна $2a + 4d$ и является чётным числом, оно не может быть равно 99.

б) Сумма первого и шестого членов этой прогрессии равна $2a + 5d = 9$. Если $d = 0$, то $2a = 9$, что невозможно. Если d — натуральное число, то возможен единственный случай: $d = 1$. Тогда $a = 2$, и искомые числа: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

в) Среднее арифметическое прогрессии равно полусумме её крайних членов, поэтому $2a+(n-1)d = 13$. Случай $d = 0$ невозможен, поэтому $d \geqslant 1$. Кроме того $a \geqslant 1$, значит, $(n-1)d \leqslant 11$, откуда $n-1 \leqslant 11$, то есть $n \leqslant 12$.

Приведем пример, доказывающий точность оценки. Натуральные числа от 1 до 12 составляют прогрессию, среднее арифметическое членов которой равно 6,5, а количество членов равно 12.

Ответ: а) нет; б) 2, 3, 4, 5, 6, 7; в) 12.

40. Тип 19 № 519638

На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стерли.

а) Пусть среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 7. Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Пусть среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 7. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение. Заметим, что стирают те числа, которые исходно были единицами. Пусть изначально на доске были написаны n единиц и $30-n$ других чисел.

а) Да, могло быть. Заметим, что сумма этих других чисел равна $210-n$. Тогда получим неравенство: $\dfrac{210-n}{2(30-n)}>14$. Годится, например, $n=25$. Тогда подходят такие числа: 25 единиц и числа 35, 36, 37, 38, 39.

б) Нет, не могло. Теперь сумма всех чисел равна 810. Аналогично решению пункта а) получим двойное неравенство: $12<\dfrac{810-n}{2(30-n)}<13$. Отсюда получаем систему двух неравенств: $720-24n<810-n$ и $810-n<780-26n$. Тогда $23n>-90$ и одновременно $25n<-30$. Эта система не имеет решений.

в) Пусть M — среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске. Тогда

$$M=\frac{210-n}{2(30-n)}=\frac{1}{2}+\frac{180}{2(30-n)}=\frac{1}{2}+\frac{90}{30-n}.$$

Ясно, что M максимально, если n максимально. Вспомним, что исходные числа не превосходят 40. Значит. $210-n\leqslant 40(30-n)$, откуда $39n\leqslant 990\Rightarrow n\leqslant 25$. Таким образом, пример из пункта а) дает максимально возможное значение среднего арифметического: $M=\dfrac{210-25}{2(30-25)}=18{,}5.$

Ответ: а) да; б) нет; в) 18,5.

41. Тип 19 № 509953

Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого участника является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл учеников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл учеников, сдавших тест, понизился, и средний балл учеников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл учеников, сдавших тест, составил 100, а средний балл учеников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл учеников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших — 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение. а) Пусть было 3 ученика, которые набрали 100, 82 и 2 балла. Средний балл учеников, не сдавших тест $\dfrac{82+2}{2}=42$ балла. После добавления баллов у учеников оказалось 105, 87 и 7 баллов. Средний балл учеников, не сдавших тест, составил 7 баллов.

б) В примере предыдущего пункта средний балл учеников, сдавших тест, первоначально составил 100 баллов, а после добавления баллов составил $\dfrac{105+87}{2}=96$ баллов.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a учеников, после добавления баллов сдали тест b учеников. Заметим, что средний балл после добавления составил 95. Имеем два уравнения:

$$90N=75(N-a)+100a \text{ и } 95N=79(N-b)+103b,$$

откуда $15N=25a$, то есть $3N=5a$, и $16N=24b$, то есть $2N=3b$. Таким образом, $N\geq 15$.

Покажем, что N могло равняться 15. Пусть изначально 5 учеников набрали по 74 балла, 1 ученик — 80 баллов и 9 учеников по 100 баллов. Тогда средний балл был равен 90, средний бал учеников, сдавших тест, был равен 100, а средний балл учеников, не сдавших тест, был равен 75. После добавления средний балл учеников, сдавших тест, стал равен 103, средний балл учеников, не сдавших тест, стал равен 79. Таким образом, все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 15.

42. Тип 19 № 642379

Даны числа A и B. Из них можно сделать числа $A+2$ и $B-1$ или $B+2$ и $A-1$, только если следующая пара этих чисел будет натуральной. Известно, что $A=7$, $B=11$.

а) Можно ли за 20 ходов создать пару, где одно из чисел равно 50?

б) За сколько ходов можно сделать пару, где сумма чисел будет равна 600?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать, чтобы оба числа не превышали 50?

Решение. Поскольку $A+2+B-1=A+B+1$, с каждым ходом сумма чисел будет возрастать на 1.

а) После 20 ходов сумма станет $7+11+20=38<50$, значит, второе число пары не будет натуральным. Это запрещено.

б) Понадобится $600-(7+11)=582$ ходов. Такая ситуация возможна, если каждый раз на роль уменьшаемого выбирать большее из двух чисел — если оно равно 1, то оба числа должны быть единицами, что невозможно, поскольку сумма чисел постоянно растет и в самом начале равна $7+11>1+1$.

в) Заметим, что разность между числами всегда меняется на 3 (была равна $A-B$, а станет равна

$$(A+2)-(B+1)=(A-B)-3.$$

Изначально эта разность равна $11-7=4$ и не кратна трем, поэтому она никогда не станет равна нулю. Значит, сделать числа 50 и 50 не получится.

Поэтому сумма двух этих чисел будет не больше $49+50=99$ и будет сделано не более $99-18=81$ хода. Сделать столько ходов можно например так: $(7,11)\mapsto(9,10)$. Затем 40 раз повторить пару ходов

$$(x, x+1) \mapsto (x+2, x) \mapsto (x+1, x+2),$$

увеличивающую оба числа на 1, если наибольшее не превосходило 49.

Ответ: а) нет; б) 582; в) 81.

43. Тип 19 № 561776

На доске разрешается написать n таких ненулевых целых чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, для которых при каждом натуральном числе $k = 2, ..., n-1$ выполнено равенство $a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$.

а) Можно ли при $n = 5$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось равенство $a_2 = a_5$?

б) Можно ли при $n = 100$ написать на доске такие числа, сумма которых равна 2020?

в) При $n = 10$ на доске написаны такие числа, сумма которых равна 15. Какое наименьшее значение может принимать сумма их квадратов?

Решение. а) Пусть такие числа написаны. Поскольку по условию выполнены равенства $a_4 = a_3 + a_5$ и $a_3 = a_2 + a_4$, получаем

$$a_5 = a_4 - a_3 = (a_3 - a_2) - a_3 = -a_2.$$

Следовательно, если также выполняется равенство $a_2 = a_5$, то $a_2 = 0$. Пришли к противоречию.

б) Пусть такие числа написаны. Поскольку при каждом натуральном числе $k = 1, \ldots, 97$ по условию выполнены равенства $a_{k+2} = a_{k+1} + a_{k+3}$ и $a_{k+1} = a_k + a_{k+2}$, получаем

$$a_{k+3} = a_{k+2} - a_{k+1} = (a_{k+1} - a_k) - a_{k+1} = -a_k,$$

и, следовательно,

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} + a_{k+5} = 0$$

при каждом натуральном числе $k = 1, \ldots, 95$. Значит,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + a_3.$$

При $a_1 = 2$, $a_2 = 1011$, $a_3 = 1009$ и $a_{k+1} = a_{k-1} - a_k$ при каждом натуральном числе $k = 3, \ldots, 99$ имеем

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = a_2 + a_3 = 2020.$$

в) Пусть такие числа написаны. Аналогично доказанному в п. б) получаем

$$15 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + a_3.$$

С другой стороны,

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{10}^2 = 4a_1^2 + 3(a_2^2 + a_3^2) = \\ = 4(a_2 - a_3)^2 + 3(a_2^2 + a_3^2).$$

Следовательно,

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{10}^2 = 7a_2^2 - 8a_2a_3 + 7a_3^2 = \\ = 7(a_2 + a_3)^2 - 22a_2a_3 = 1575 - 22a_2a_3.$$

Значит, сумма квадратов всех написанных чисел будет минимальна тогда и только тогда, когда максимально выражение $a_2a_3 = a_2(15 - a_2)$. Поскольку функция $f(x) = x(15 - x)$ возрастает при $x \leqslant \frac{15}{2}$ и убывает при $x \geqslant \frac{15}{2}$, наибольшее значение выражения $a_2(15 - a_2)$ для целых a_2 равно 56. Оно достигается при $a_2 = 7$ и $a_2 = 8$. Таким образом, получаем, что сумма квадратов всех написанных чисел принимает наименьшее значение при $a_1 = -1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 8$ и $a_{k+1} = a_{k-1} - a_k$ при каждом натуральном числе $k = 3, \ldots, 9$, а также при $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 7$ и $a_{k+1} = a_{k-1} - a_k$ при каждом натуральном числе $k = 3, \ldots, 9$. Это значение равно

$$1575 - 22a_2a_3 = 1575 - 1232 = 343.$$

Ответ: а) нет; б) да; в) 343.

44. Тип 19 № 636748

На доске разрешается в одну строку так написать $n \geqslant 3$ различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, чтобы для любого $k = 1, 2, \ldots, (n-2)$ число a_{k+2} равнялось либо сумме, либо разности, либо произведению, либо частному взятых в некотором порядке чисел a_{k+1} и a_k. Например, этим правилам удовлетворяют 4 числа 3, 12, 4, 8, а также 5 чисел 8, 2, 4, 6, 24, написанные в указанном порядке.

а) Можно ли по этим правилам так написать $n = 5$ чисел, чтобы среди них в некотором порядке встретились четыре числа 1, 2, 3 и 4?

б) Можно ли по этим правилам так написать $n = 4$ нечетных числа, чтобы среди них в некотором порядке встретились три числа 3, 5 и 7?

в) Какое наименьшее значение может принимать n, если на доске в некотором порядке встречаются числа 1, 2 и 8?

Решение. а) Например, для записи 2, 3, 1, 4, 5 получаем: $1 = 3-2$, $4 = 3+1$ и $5 = 4+1$..

б) Сумма и разность нечетных чисел четны, значит, разрешены только умножение и деление. Ни одно из данных чисел не делится на другое. Поэтому они не могут занимать места 1, 2, 3 или 2, 3, 4, так как ни одно из них не является произведением или частным двух других.

Если они занимают места 1, 2, 4, то на третьем месте записано произведение первых двух чисел. Оно больше последнего, значит, последнее не получается умножением. Но деление третьего на второе снова даст первое.

Если же они занимают места 1, 3, 4, то третье число является частным второго и первого, а тогда второе число — произведение первого и третьего. В этом случае четвертое не может быть ни произведением второго на третье, так как оно не кратно третьему, ни частным от деления, поскольку оно равно первому.

в) Например, для записи 1, 2, 3, 5, 8 получаем: $3 = 2+1$, $5 = 2+3$ и $8 = 3+5$. Заметим предварительно, что если три числа связаны соотношением $a?b = c$, где ? — одно из арифметических действий, то можно написать и соотношения $a?c = b$ и $b?c = a$ с другим действием (возможно придется поменять местами числа в левой части. (Например, для $2 \cdot 3 = 6$ получаем $6:3 = 2$.)

Ни одно из чисел не может быть результатом действия с двумя другими, поэтому трех чисел точно не хватит. Допустим, можно обойтись четырьмя числами. Они не могут занимать места 1, 2, 3 или 2, 3, 4. Если они занимают места 1, 2, 4 или 1, 3, 4, то есть две тройки чисел, включающих неизвестное нам число. Значит, оно должно быть результатом арифметического действия с двумя парами чисел из набора 1, 2, 8. Но $1?2 = 1, 2, 3$, $1?8 = 7, 8, 9$, $8?2 = 4, 6, 10, 16$ — ни один ответ не повторился. Поэтому четыре числа тоже не подобрать.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

45. Тип 19 № 633985

В натуральном числе n между всеми парами соседних цифр вставили одну и ту же цифру c. Получилось число m, которое делится на n. Их частное равно k.

а) Может ли быть $k = 10$?

б) Может ли быть $k = 2$?

в) Чему может быть равно наименьшее значение числа k?

Решение. а) Да. Например, $10 \mapsto 100$.

б) Нет. У старого и нового чисел одинаковая первая цифра. Но при умножении на 2 первая цифра обязательно меняется (в пункте в), мы это докажем) — противоречие.

в) Аналогично пункту а) при умножении некоторого числа на число k, где $2 \leqslant k \leqslant 5$, первая цифра числа обязательно меняется (если число было t-значным и имело первую цифру a, то его можно было записать в виде $a \cdot 10^{t-1} + N$, где $N < 10^{t-1}$. Тогда

$$2\left(a \cdot 10^{t-1} + N\right) > 2a \cdot 10^{t-1} \geqslant (a+1) \cdot 10^{t-1}$$

и

$$5\left(a \cdot 10^{t-1} + N\right) < 5\left(a \cdot 10^{t-1} + 10^{t-1}\right) =$$
$$= 5(a+1)10^{t-1} = \frac{a+1}{2}10^t \leqslant a \cdot 10^t,$$

поэтому число больше всех t-значных с первой цифрой a и меньше всех $t+1$-значных с первой цифрой a).

Пусть $k = 6$, а число n — двузначное цифрами a и b. Тогда $n = 10a + b$, $m = 100a + 10c + b$ и $100a + 10c + b = 6(10a + b)$, откуда $40a + 10c = 5b$ или $8a + 2c = b$, что возможно при $a = 1$, $c = 0$ и $b = 8$, то есть для варианта $18 \mapsto 108$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

46. Тип 19 № 509932

Последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 9a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $3na_{n+1} = (n^2-1)a_n$?

Решение. а) Пусть $a_1 = 3$ и $a_2 = 1$. Тогда $a_3 = 3 + 1 = 4$, $a_4 = 1 + 4 = 5$, $a_5 = 4 + 5 = 9$ и $5a_5 = 9a_4$.

б) Предположим, что $5a_5 = 7a_4$. Тогда $a_5 = 7a$ и $a_4 = 5a$, где $a = \frac{a_5}{7} > 0$. Имеем $a_3 = a_5 - a_4 = 2a$, $a_2 = a_4 - a_3 = 3a$ и $a_1 = a_3 - a_2 = -a < 0$. Получаем противоречие.

в) Пример последовательности 3, 3, 6, 9, 15, 24, ... показывает, что равенство $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$ может выполняться при $n = 5$. Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и $15a_6 = 24a_5$.

Пусть $n \geq 6$ и $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$. Положим $a = \frac{a_n}{3n} > 0$. Тогда $a_n = 3na$ и $a_{n+1} = (n^2 - 1)a$. Имеем

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = (n^2 - 3n - 1)a;$$
$$a_{n-2} = a_n - a_{n-1} = (-n^2 + 6n + 1)a;$$
$$a_{n-3} = a_{n-1} - an - 2 = (2n^2 - 9n - 2)a;$$
$$a_{n-4} = a_{n-2} - a_{n-3} = -3(n^2 - 5n - 1)a.$$

$a_{n-4} > 0$, поэтому $n^2 - 5n - 1 < 0$. Следовательно, $n < 6$. Полученное противоречие показывает, что при $n \geq 6$ равенство $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$ выполняться не может.

Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

Приведём идею решения п. в) Леонида Колмогорцева.

Если равенство выполняется то $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 - 1}{3n}$, откуда в силу того, что $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, после почленного деления получаем:

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n}{3} - \frac{1}{3n},$$

Левая часть полученного равенства меньше 2 для всех n, так как $a_{n-1} < a_n$. Правая часть равенства является возрастающей функцией от n. Поэтому решениями неравенства могут быть только такие значения переменной, для которых правая часть меньше 2. Следовательно, $n \leqslant 6$. Далее рассмотрим возможность существования решения при $n = 5$ и $n = 6$ аналогично пунктам а) и б).

47. Тип 19 № 674205

В спортивной секции занимается более 20 и менее 45 школьников. На областное соревнование было заявлено более половины ребят из секции, но потом ровно один из них отказался участвовать.

а) Могло ли получиться так, что теперь на соревнование заявлено менее половины школьников из этой секции?

б) Известно, что и до, и после отказа одного из ребят процент заявленных на соревнование выражался целым числом. Найдите все возможные значения числа занимающихся в этой секции.

в) Какое наименьшее целое значение мог принять процент заявленных спортсменов после отказа одного из школьников?

Решение. а) Да. Например, если было заявлено 15 школьников из 29, а поехало 14.

б) Один школьник также составляет целое число процентов от общего числа ребят в секции, поскольку и с ним и без него число процентов целое, а разность этих чисел — число процентов, приходящееся на одного школьника. Значит, численность секции — делитель 100. Учитывая ограничения $20 < n < 45$, получаем что $n = 25$. Могло быть заявлено, например, 13 человек.

в) Если в секции было 25 человек, из них собирались ехать 13, а теперь поедет 12, то искомый процент составляет $\frac{12}{25} \cdot 100 = 48\%$. Докажем, что это наилучший вариант. Сразу отметим, что если число школьников в секции четно, то при отчислении одного школьника из состава делегации (когда их было больше половины), получится не меньше половины от состава секции, то есть 50%. Значит, можно рассматривать только нечетные числа. Далее, один школьник составляет не более $\frac{1}{21} \cdot 100 < 5\%$ от состава секции, а раньше ехало более 50%, значит, теперь едет более $50\% - 5\% = 45\%$. Осталось разобрать варианты 46% и 47%.

Если в секции n человек и 46% из них целое число, то $\frac{23n}{50}$ — целое число, откуда $n \geqslant 50$. Аналогично для 47% получим, что $\frac{47n}{100}$ — целое число, откуда $n \geqslant 100$. Ни то, ни другое невозможно.

Ответ: а) да, б) 25, в) 48.

48. Тип 19 № 642958

На столе лежит три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных цифр трехзначное число A. Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число B и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трех карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число C (возможно то же самое, что и Петя).

а) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если $A < 150$?

б) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если числа B и C делятся на 3?

в) Найдите наибольшее число A, для которого может быть верным равенство $A = B + C$.

Решение. а) Да, например $109 = 90 + 19$.

б) Сразу заметим, что

$$A = B + C \leqslant 99 + 99 = 198,$$

поэтому A начинается с цифры 1. Далее, если B и C кратны 3, то и их сумма A кратна 3. Делимость на 3 определяется суммой цифр числа (она должна быть кратна трем), поэтому убирать из A единицу нельзя (от этого остаток от деления на 3 изменится). Значит, и B и C содержат в записи единицу. Тогда вторая их цифра должна быть 2, 5 или 8. Если в числе A были бы две такие цифры, то их сумма с единицей давала бы остаток 2 от деления на 3. Значит, там одна такая цифра, а B и C состоят из одних и тех же двух цифр, одна из которых единица. Осталось разобрать варианты:

— не трехзначные:

$$12 + 12, \quad 12 + 21, \quad 21 + 21, \quad 15 + 15,$$
$$15 + 51, \quad 18 + 18, \quad 18 + 81;$$

— не содержат нужных цифр: $51 + 51 = 102$ и $81 + 81 = 162$.

в) Заметим, что $98 + 91 = 189$. Докажем, что это наилучший пример. Если хоть одно из чисел B и C меньше 90, то

$$A = B + C \leqslant 99 + 90 = 189,$$

поэтому такие примеры рассматривать не нужно.

Если же они оба начинаются с девятки, то $B = 90 + b$, $C = 90 + c$ и $A = 180 + b + c$, где b и c — цифры. Поскольку $A \geqslant 190$, его последняя цифра равна $b + c - 10$. Ясно, что это не 9, поскольку

$$b + c \leqslant 9 + 9 = 18 > 19,$$

не b и не c (если например $b = b + c - 10$, то $c = 10$). Значит, эта цифра в числах B и C не используется. Поэтому $B = C = 91$, что тоже невозможно, так как $b + c < 10$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 189.

49. Тип 19 № 520979

За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трёх звёзд, на 6 пунктов при получении двух звёзд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 32 пункта?

б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

в) За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трёх звёзд, 5000 — при получении двух звёзд и 2000 — при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

Примечание редакции Решу ЕГЭ.

В п. а) считайте начальный заряд достаточно большим.

Решение. а) Заметим, что при прохождении уровня игры заряд аккумулятора уменьшается на число пунктов, делящееся на 3. Значит, он не мог уменьшиться ровно на 32 пункта.

б) Обозначим количества уровней, за которые были получены одна, две или три звезды через a, b и c соответственно. Тогда получаем: $a + 2b + 3c = 17$ и $9a + 6b + 3c = 33$, откуда $4a + 4b + 4c = 28$; $a + b + c = 7$. То есть было пройдено 7 уровней.

в) Из уравнений $3a + 2b + c = 11$ и $a + b + c = 7$ получаем, что $2a + b = 4$. Значит, имеются три возможности: $a = 0$, $a = 1$ или $a = 2$.

Если $a = 0$, то $b = 4, c = 3$ и было получено 47 000 очков.

Если $a = 1$, то $b = 2, c = 4$ и было получено 48 000 очков.

Если $a = 2$, то $b = 0, c = 5$ и было получено 49 000 очков.

Значит, наибольшее количество полученных очков равно 49 000.

Ответ: а) нет; б) 7; в) 49 000.

50. Тип 19 № 514594

На проекте «Мисс Чмаровка — 2016» выступление каждой участницы оценивают шесть судей. При этом каждый судья выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что за выступление Изольды Кабановой все члены жюри выставили различные оценки. По старой системе оценивания итоговый балл за выступление определяется как среднее арифметическое всех оценок судей. По новой системе оценивания итоговый балл вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и считается среднее арифметическое четырех оставшихся оценок.

а) Могут ли итоговые баллы, вычисленные по старой и новой системам оценивания, оказаться одинаковыми?

б) Может ли разность итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, оказаться равной $\frac{1}{8}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Решение. Упорядочим оценки судей: $a<b<c<d<e<f$. Тогда изучаемая величина равна

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6}-$$
$$-\frac{b+c+d+e}{4}=\frac{2(a+f)-(b+c+d+e)}{12}.$$

а) Да. Например, при $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5,\ f=6$ эта разность равна нулю.

б) Нет. Очевидно, при умножении разности на 12 получается целое число, но $12\cdot\frac{1}{8}=1{,}5.$

в) Возьмем любые баллы и попробуем их изменить так, чтобы разность выросла. Если $f<10$, то заменим его на 10. Если $b>a+1$, то заменим *b* на $a+1$. Потом также заменим *c*, *d*, *e* на $a+2,\ a+3,\ a+4$. Получим

$$\frac{2(a+10)-(4a+10)}{12}=\frac{5-a}{6}\leqslant\frac{5}{6}.$$

Значение $\frac{5}{6}$ достигается при оценках 0, 1, 2, 3, 4, 10.

Ответ: а) да; б) нет; в) $\frac{5}{6}$.