Разложение Холецкого

Лесников Богдан Сергеевич

МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ММП

16 ноября 2018 г.

Опеределение

Разложение Холецкого — представление симметричной положительно определённой матрицы $A = A^T > 0$ в виде произведения $A = LL^T$, где L — нижняя (Lower) треугольная матрица со строго положительными элементами на диагонали.

Алгоритм вычисления

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \tag{1}$$

$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}, \quad j \in [2, n], \tag{2}$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}^2}, \quad i \in [2, n], \tag{3}$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} l_{jp} \right) / l_{ii}, \quad i \in [2, n-1], j \in [i+1, n]. \tag{4}$$

Приложения

Решение системы линейных уравнений

Разложение Холецкого может применяться для решения системы линейных уравнений $Ax = b$, если матрица A симметрична и положительно определена. Выполнив разложение $A = LL^T$, решение x получается последовательным решением двух треугольных систем уравнений $Ly = b$ и $L^T x = y$.

Решение линейной системы с плотной нижнетреугольной матрицей $Ly = b$ можно представить в виде прямого хода, т.е. цепочки вычислений, начиная с верхнего угла матрицы L по возрастанию номера строки i:

$$y_1 = b_1, \tag{5}$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} y_j, \quad i = 2, ..., n. \tag{6}$$

Решение линейной системы с плотной верхнетреугольной матрицей $Ux = y$ (где, например, $U = L^T$) можно представить в виде обратного хода, т.е. цепочки вычислений, начиная с нижнего угла матрицы U при убываниии номера строки i:

$$x_n = y_n / u_{nn}, \tag{7}$$

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right) / u_{ii}, \quad i = n-1, ..., 1. \tag{8}$$

Пусть X — вектор из независимых стандартных нормальных случайных величин, а $\Sigma = LL^T$ — желаемая ковариационная матрица. Тогда вектор $Y = LX$ будет иметь многомерное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Σ.

Пусть $A = A^T > 0$, $A = LL^T$. Тогда:

$$A^{-1} = (L^{-1})^T(L^{-1})$$

Несимметричная матрица B также может быть обращена с помощью следующего равенства, где BB^T всегда будет симметричной:

$$B^{-1} = B^T(BB^T)^{-1}$$