БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра вычислительной математики

Никончик Даниил Викторович

ОТЧЕТ ПО МЕТОДАМ ВЫЧИСЛЕНИЙ

студента 2 курса 12 группы
Лабораторная работа №3

Преподаватель
Бондарь И.В.

Минск 2020

Задание 1. Методы Якоби и Гаусса-Зейделя. Вариант 1.1.21

Дана функция f.

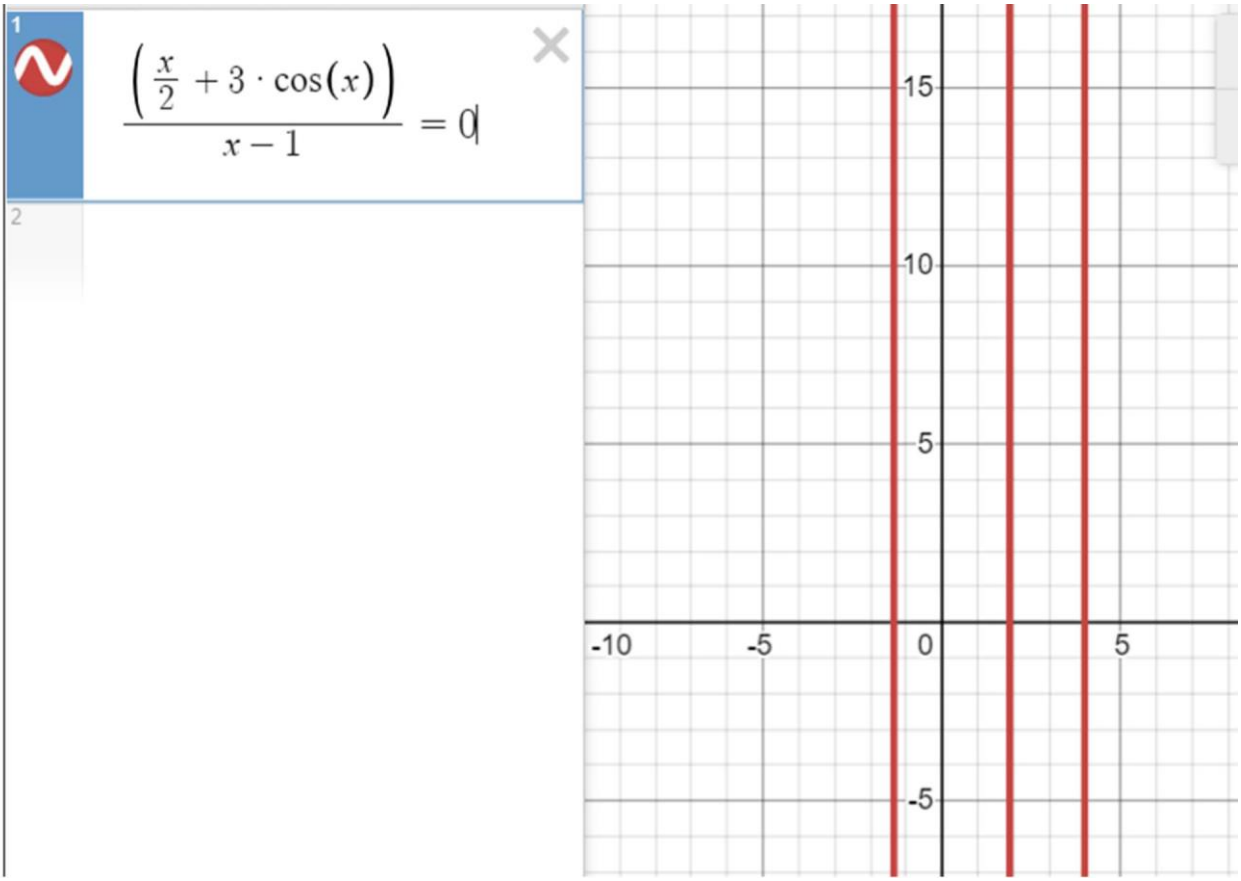
- Определить количество корней уравнения f(x)=0 и отделить каждый корень. При этом разрешается использовать графический способ, однако необходимо доказать, что других корней уравнение не имеет.

- Вычислить все корни с точностью $\varepsilon = 10^{-12}$ методом бисекции и методом, соответствующим вашему варианту (критерий остановки $|f(x_k)| < \varepsilon$.

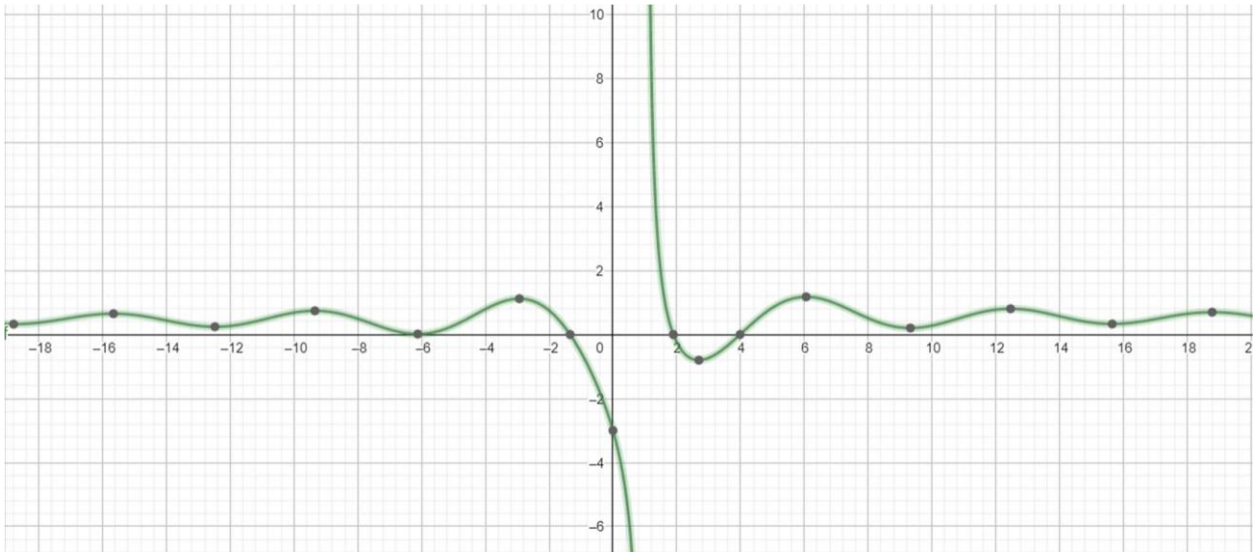
- Экспериментально сравнить скорость сходимости двух использованных методов. - Построить совмещенные диаграммы сходимости для каждого корня. Сделать выводы.

1.1.21. $f(x) = (x/2 + 3\cos(x))/(x-1)$, метод Ньютона

Для начала найдем решение уравнения графическим методом:



Или, если рассмотреть исключительно график кривой:



При этом, при приближении графика в районе x = -6, становится понятно, что данное приближение к оси OX не является корнем. Оценим поведение функции на промежутках x<-6, x>10.Преобразуем вид функции и оценим её значения:

$$x < -6$$

$$\frac{\frac{1}{2} \times (x + 6\cos(x))}{x - 1}$$

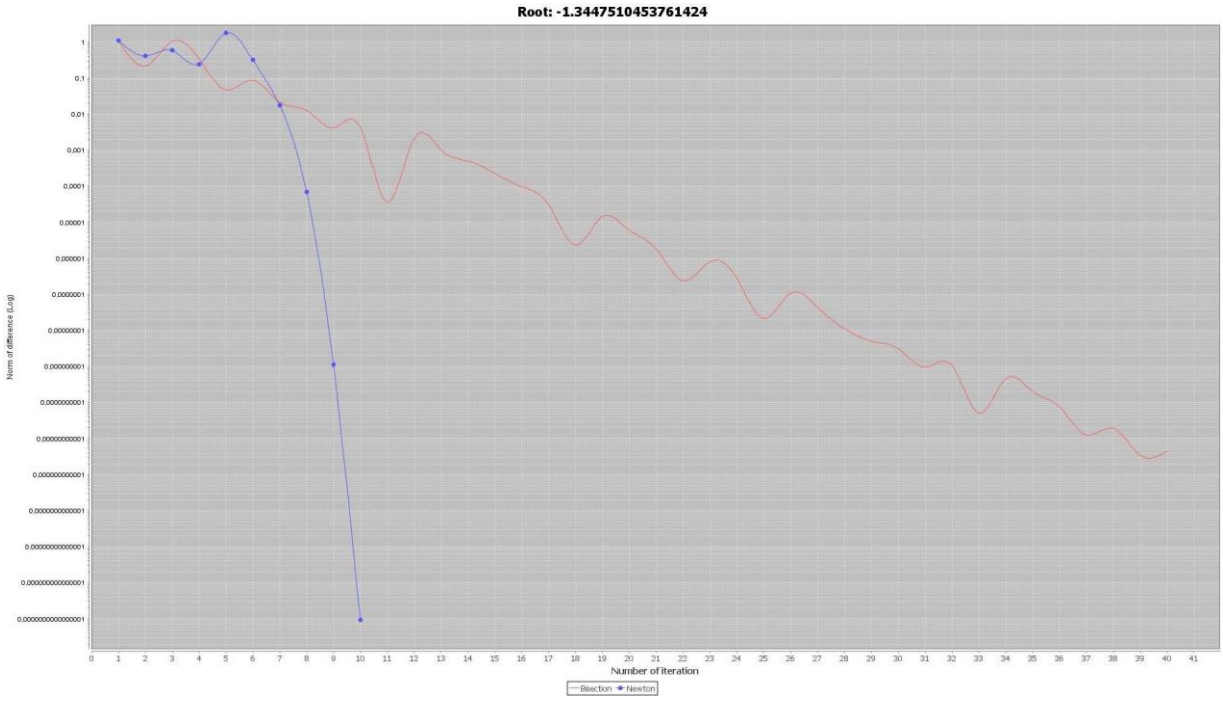
$$|cosx| < 1$$

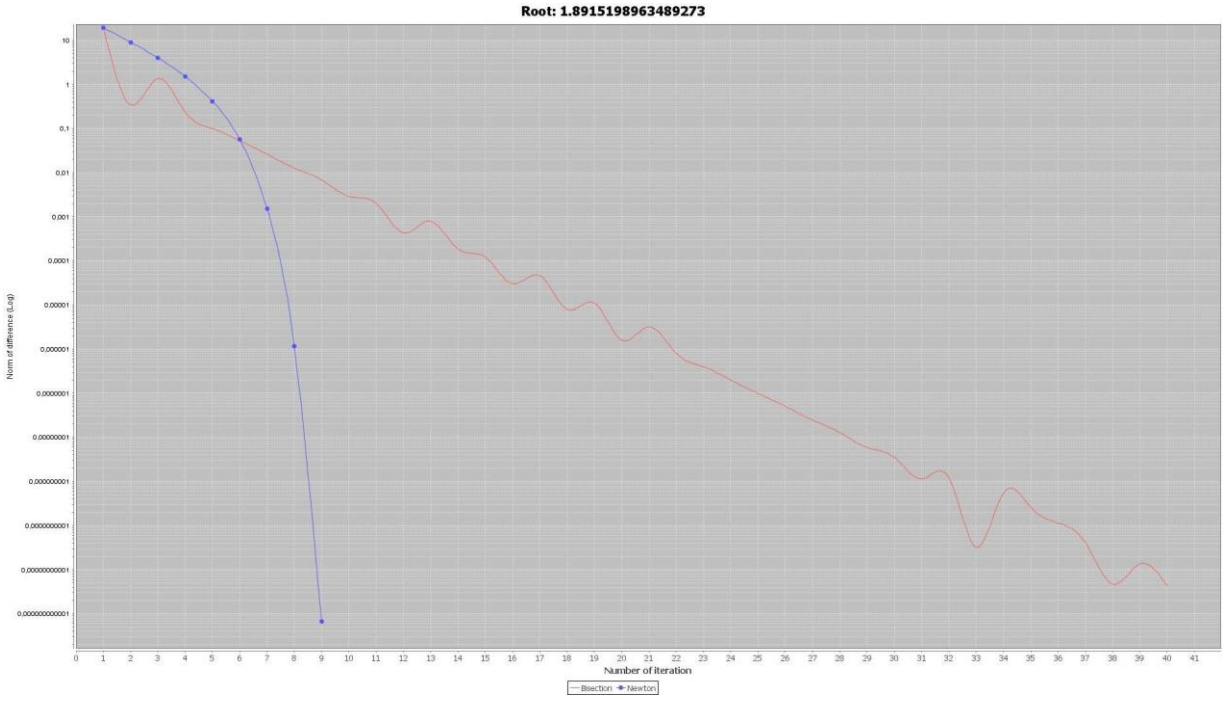
$$x + 6cosx < x + 6$$

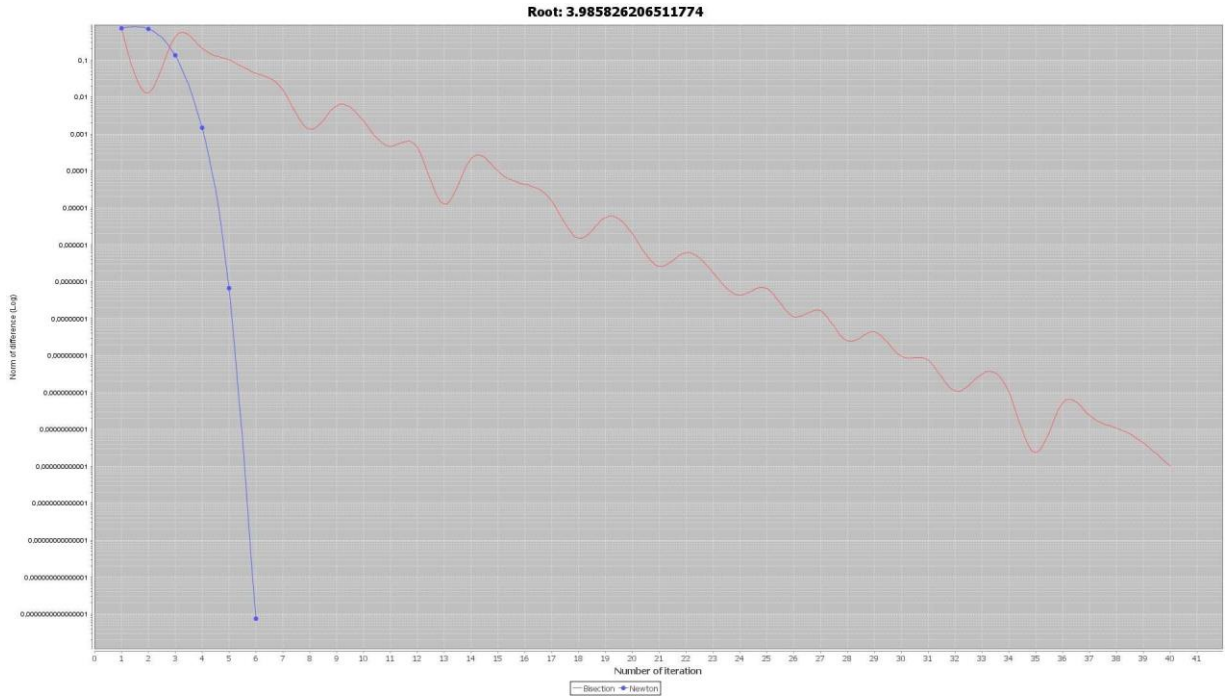
Так как $x + 6 < 0$, то $f(n) \neq 0$ для $x < (-6)$

Таким образом, корней нет на отрезке x<-6. Для x>10 доказательство аналогично.

Диаграммы сходимости для каждого корня:


Root: -1.3447510453761424
Norm of difference (Log)
Number of iteration
Bisection
Newton


Root: 1.8915198963489273
Norm of difference (Log)
Number of iteration
Bisection
Newton



По графику видно, что метод ньютона сходится явно быстрее метода бисекций.

Код подсчета значения и производной функции:

```
public class MyFunction implements Function{

@Override
public double getFunctionResult(double x) throws Exception{ if(x == 1)
throw new Exception("incorrect x"); return ((x/2)+3*Math.cos(x))/(x-1);
}

@Override
public double getDerivativeResult(double x) throws Exception {
return ((0.5-3*Math.sin(x))*(x-1)-(x/2+3*Math.cos(x)))/Math.pow((x-1),2);
}
}
```

Код итерации метода бисекций:

```
public class BisectionCalculator extends Calculator { public
BisectionCalculator(Function function){
super(function);
}

@Override
protected double getNextApproximation(double x) throws Exception {

if(function.getFunctionResult(a)*function.getFunctionResult(x)<0) b = x;
else
a = x;
return (a+b)/2;
}

}
```

Код итерации метода Ньютона:

```
public class NewtonCalculator extends Calculator { public
NewtonCalculator(Function function) {
super(function);
}

@Override
protected double getNextApproximation(double x) throws Exception { return x-
function.getFunctionResult(x)/function.getDerivativeResult(x);
}
}
```

Общий код вычисления по методам:

```
public abstract class Calculator {
protected final double PRECISION = 1E-12; protected ArrayList<Double>
statistics; protected Function function;
protected double a,b;

public Calculator(Function function){ this.function = function;
}

public double calculate(Interval interval) throws Exception { a = interval.a();
b = interval.b();
statistics = new ArrayList<>(); double x = interval.a();
double functionFromA = function.getFunctionResult(a); double functionFromB =
function.getFunctionResult(b); if(functionFromA*functionFromB>=0)
throw new Exception("incorrect interval"); int iteration = 1;
double functionFromX = function.getFunctionResult(x);
while(Math.abs(functionFromX)>PRECISION && iteration<100){

statistics.add(Math.abs(functionFromX)); iteration++;
x = getNextApproximation(x);
functionFromX = function.getFunctionResult(x);
}
statistics.add(Math.abs(functionFromX)); return x;
}

protected abstract double getNextApproximation(double x) throws Exception;

public Double[] getStatistic(){
return statistics.toArray(Double[]::new);
}
}
```

Интервалы вычислений:

```
static Interval[] bisectionIntervals = new Interval[]{ new Interval(-3,0),
new Interval(1.1,3), new Interval(3,5),
};
```

Класс, производящий работу:

```
class CalculationsProcessor{ double[]results;

Double[][]statistics; Calculator calculator;
public CalculationsProcessor(Calculator calculator){ this.calculator =
calculator;
}
```

```
public void calculate(Interval[]intervals) throws Exception { results = new
double[intervals.length];
statistics = new Double[results.length][0]; for(int i = 0;i<
results.length;i++){
results[i] = calculator.calculate(intervals[i]); var localStatistic =
calculator.getStatistic();
statistics[i] = Arrays.copyOf(localStatistic,localStatistic.length);
}
}

public double[] getPrecisionsWithIndex(int i){ double[]result = new
double[statistics[i].length]; for(int j = 0;j<statistics[i].length;j++)

result[j] = statistics[i][j]; return result;
}

public int getIterationsNumberWithIndex(int i){ return statistics[i].length;
}
}
```

Задание 2. Вариант 2.3

2.3. Рассмотрим систему уравнений

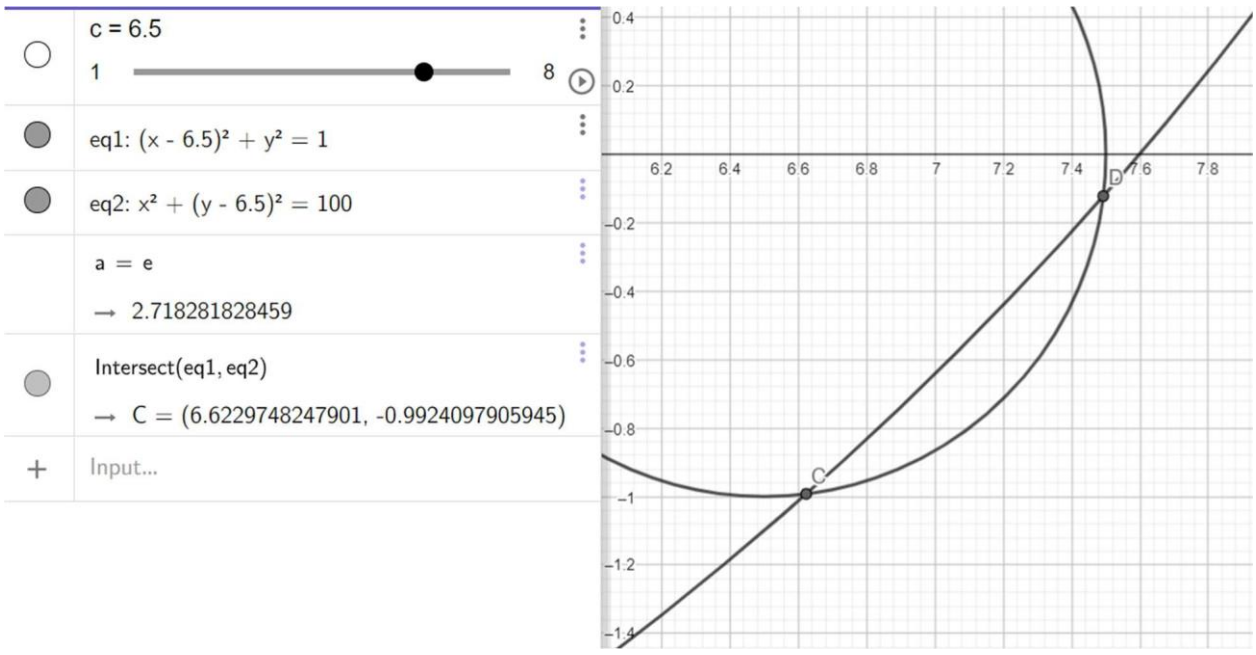
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (x-c)^2 + y^2 - 1 \\ x^2 + (y-c)^2 - 100 \end{pmatrix} = 0.$$

Сколько корней может иметь эта система в зависимости от параметра c?

Напишите программу, которая для данного c находит все корни этой системы методом Ньютона с точностью, обеспечивающей норму невязки не более 10^{-10}.

Привести результаты работы программы (диаграммы сходимости), со значениями параметра, соответствующими всем возможным типам решений (количествам корней). Каждый из таких случаев необходимо сопроводить графиками компонент функции f с выделенными точками-корнями уравнения.

Так как данные два уравнения задают две окружности с центрами в точках (c,0) и (0,c) то в зависимости от расположение окружностей могут иметь место 1, 2 или ни одной точек пересечения, которые и являются решениями уравнений. Найдем графическим методом одни из значений параметра c, при которых это достигается:



И, соответственно, для одного корня (точки касания):

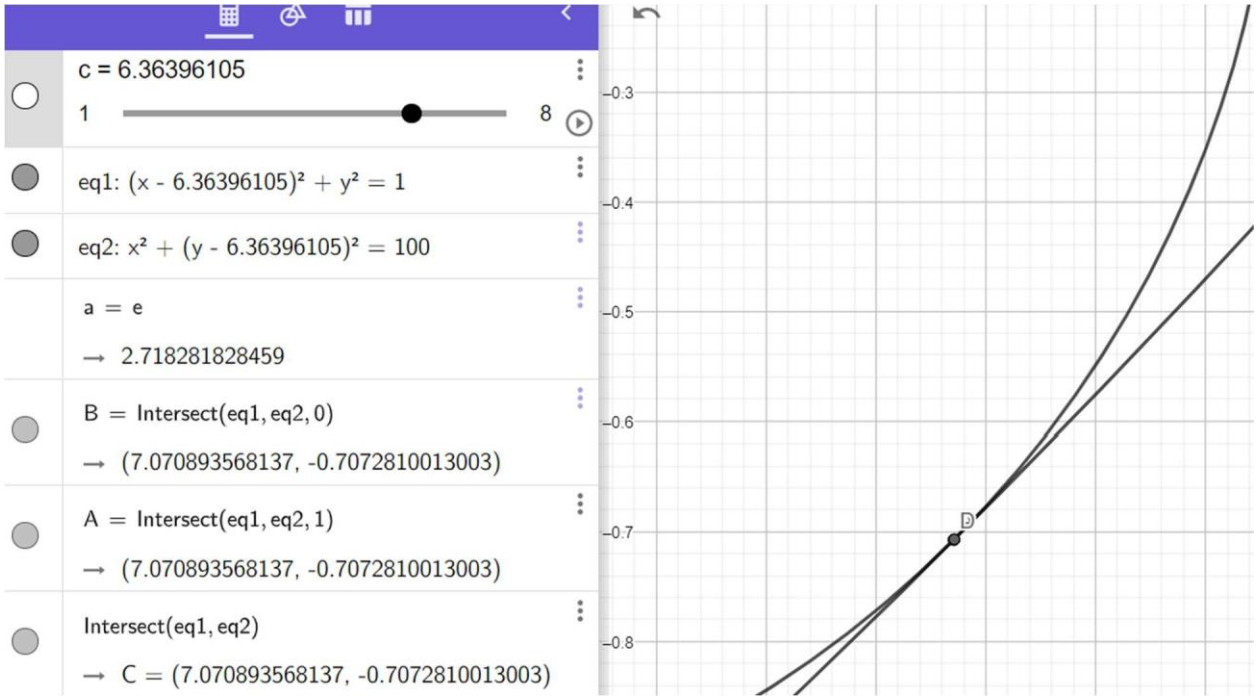
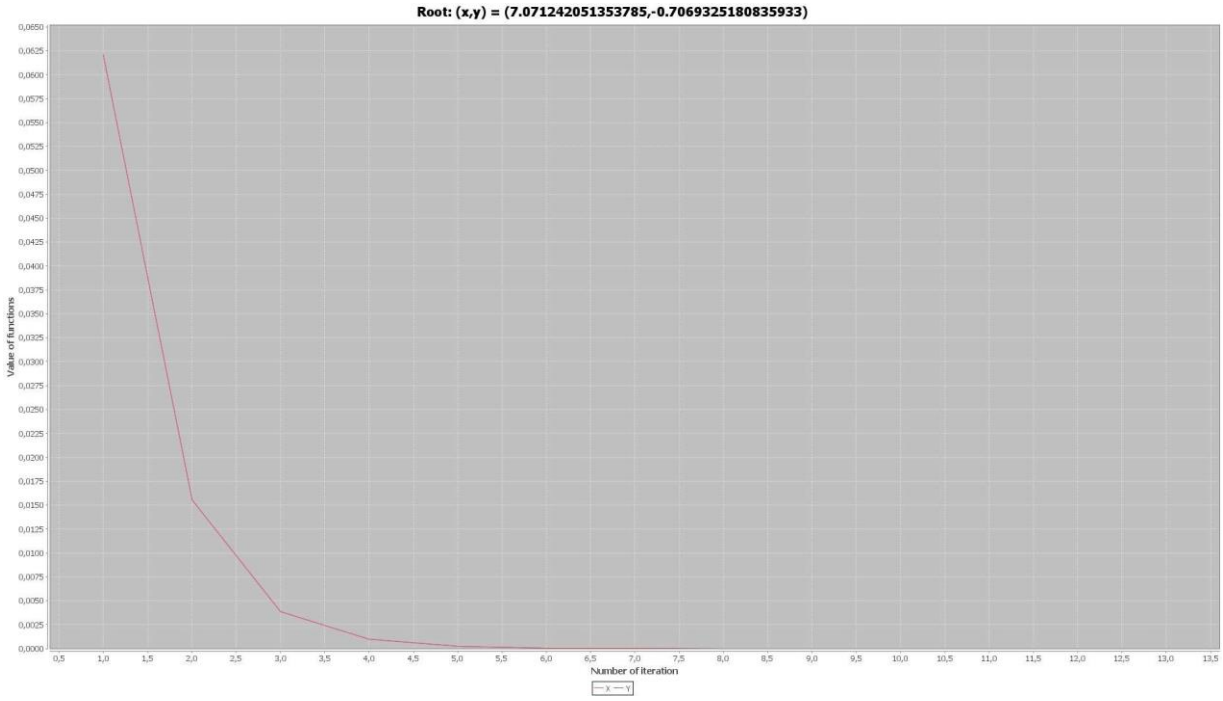


Диаграмма сходимости и График компонент функции для первого корня:



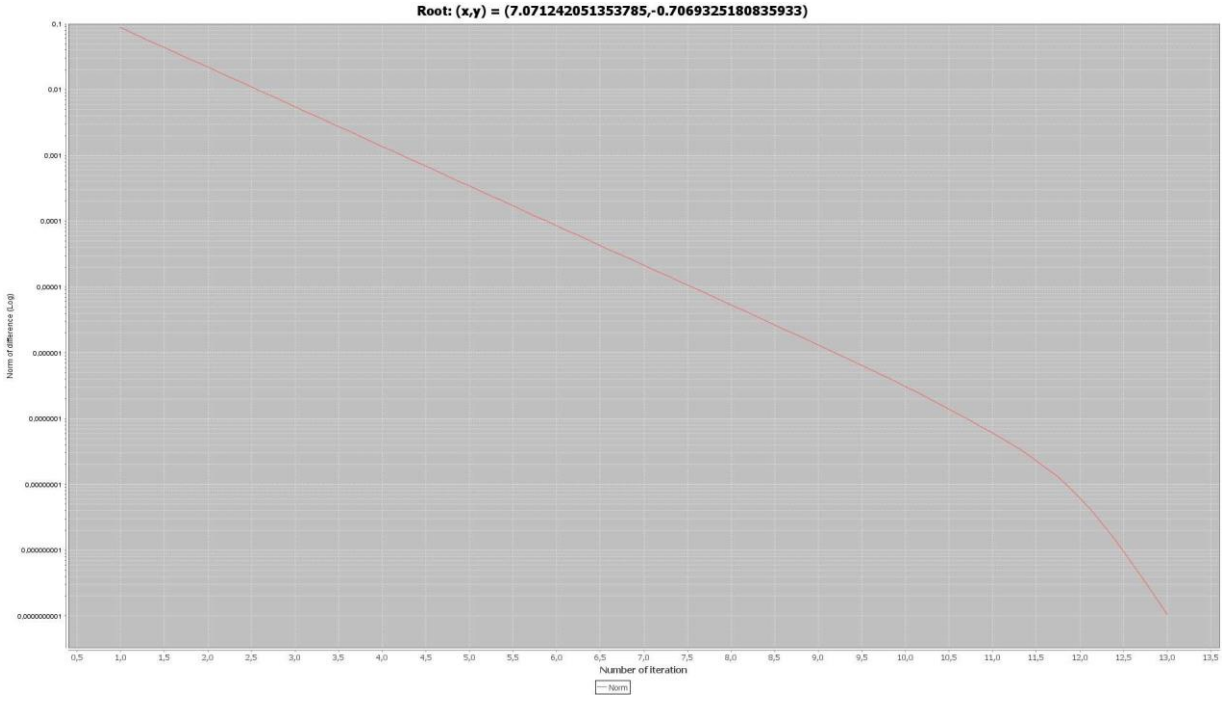
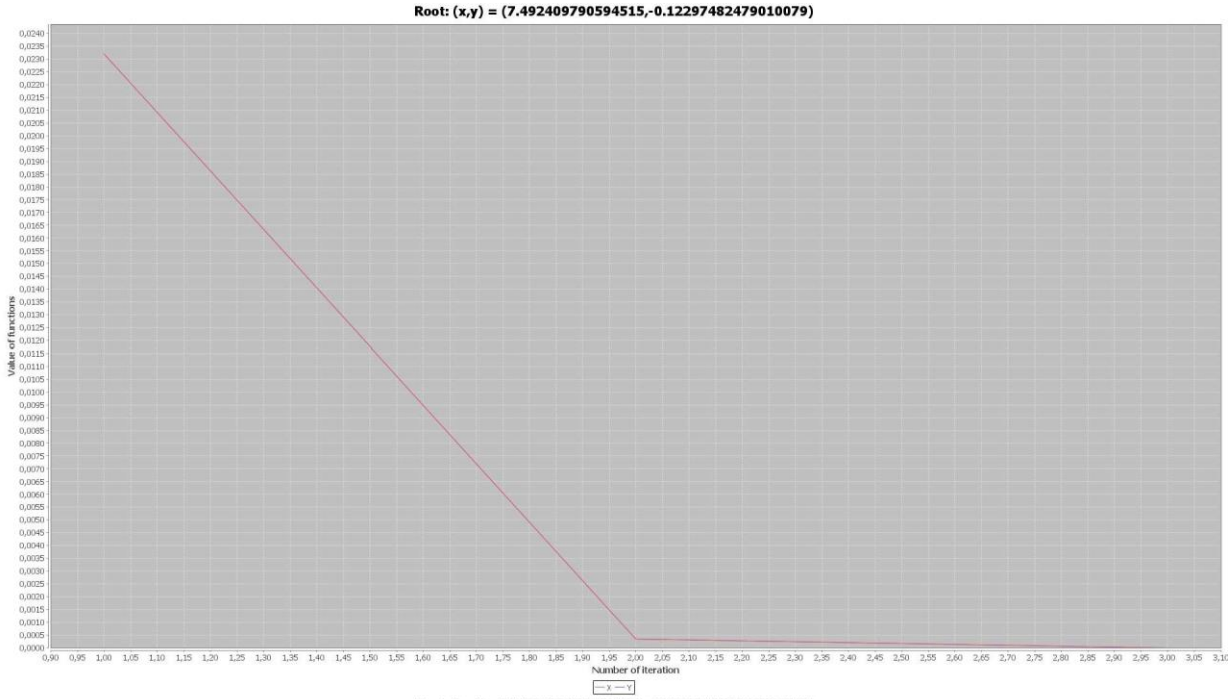


Диаграмма сходимости и График компонент функции для первого корня из случай с двумя точками пересения:



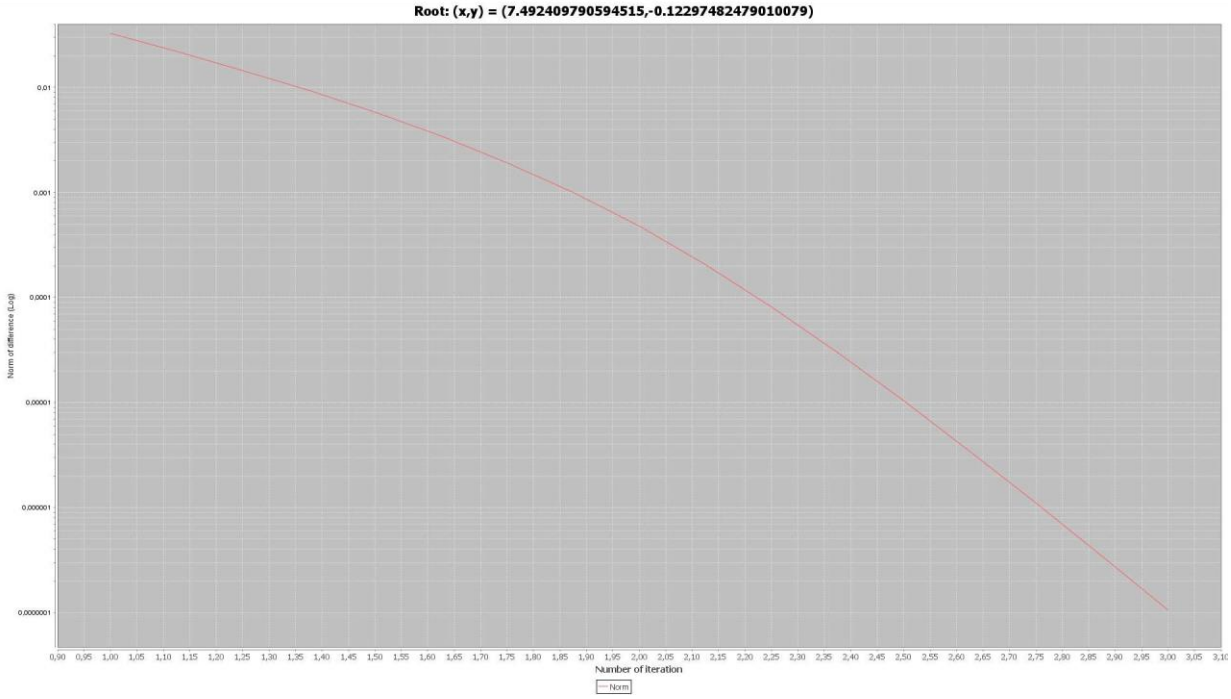
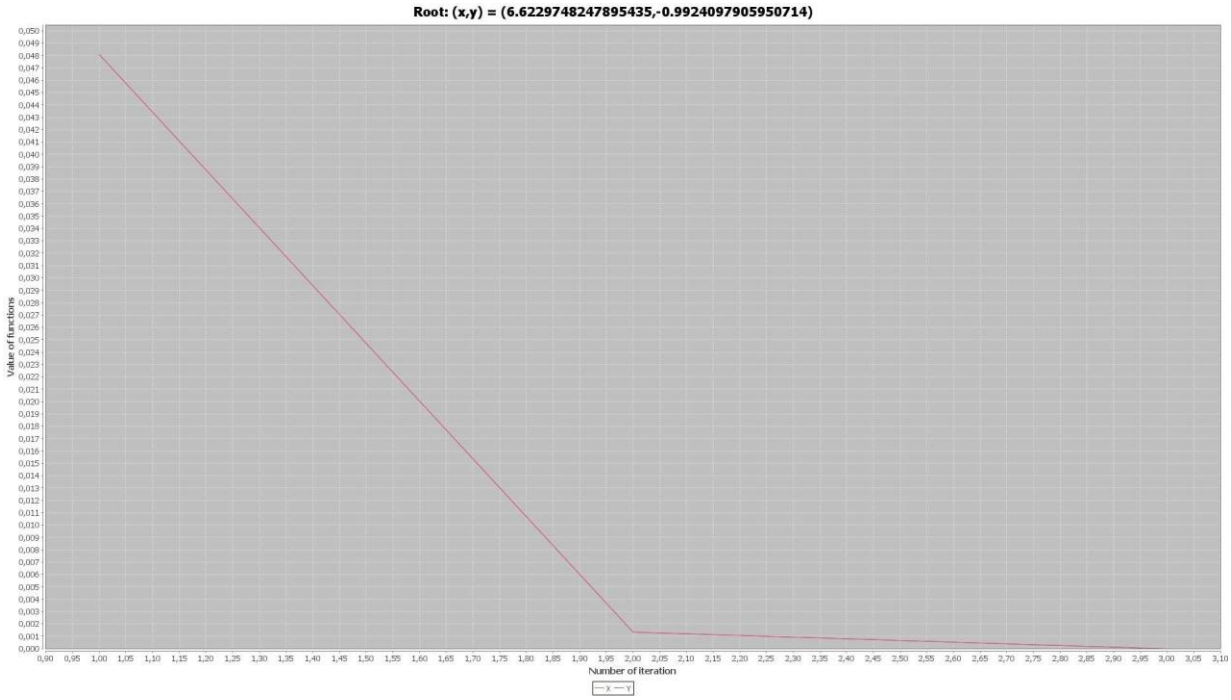
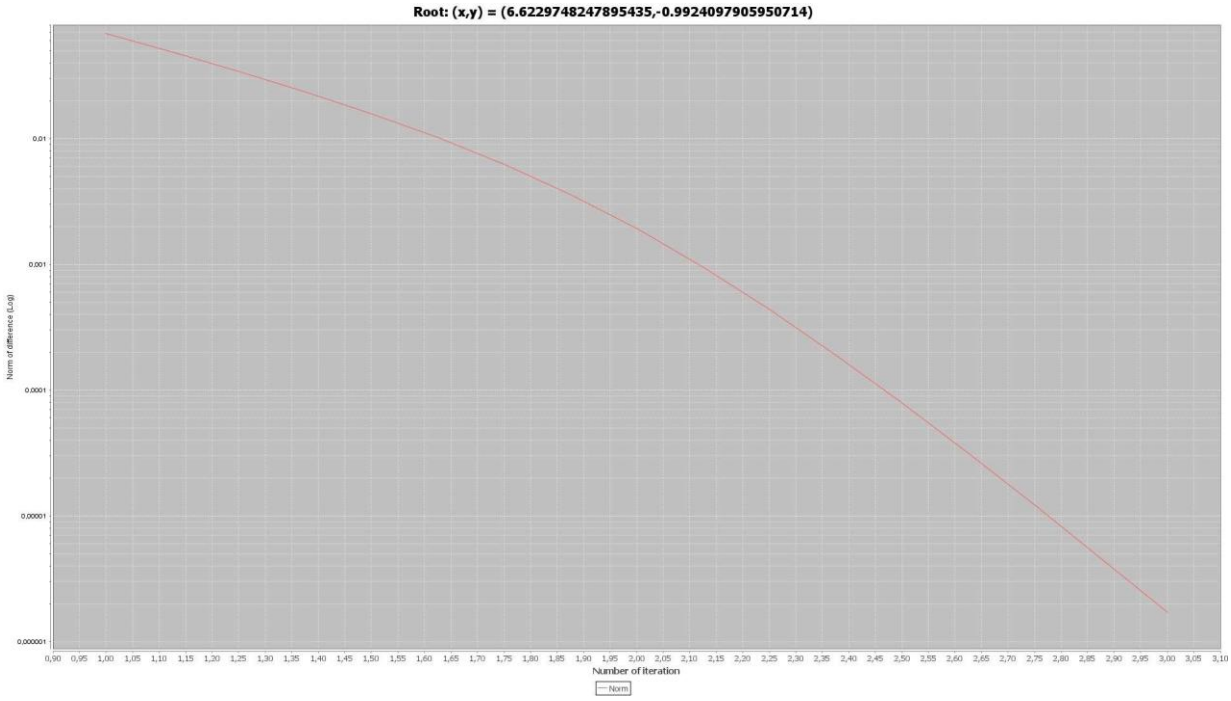


Диаграмма сходимости и График компонент функции для второго корня для случая двумя точками пересечения:





Базовый код подсчета:

```
public class NewtonSystemCalculator {

protected final double PRECISION = 1E-10; protected ArrayList<Double>
statistics; ArrayList<Double>functionXValuesStatistic;
ArrayList<Double>functionYValuesStatistic; protected MultiFunction function;

public NewtonSystemCalculator(MultiFunction function) {

this.function = function;
}

public double[] calculate(DoubleInterval interval) { statistics = new
ArrayList<>(); functionXValuesStatistic = new ArrayList<>();
functionYValuesStatistic = new ArrayList<>();
double[] point = new double[]{interval.x1(), interval.y1()}; double max;
```

```
int iteration = 1; do {
double[] functionValues = function.getFunctionResult(point); for (int i = 0; i <
functionValues.length; i++)
functionValues[i] = -functionValues[i];
double[][] derivativeValues = function.getDerivativeFunctionResult(point);
double[] differences = getSolvesOfSystem(derivativeValues, functionValues); for
(int i = 0; i < differences.length; i++)
point[i] += differences[i];
double[] residual = function.getFunctionResult(point);
functionXValuesStatistic.add(residual[0]);
functionYValuesStatistic.add(residual[1]);
max = Math.sqrt(DoubleStream.of(residual).map(a->Math.pow(a,2)).sum());
if(max!=0)
statistics.add(max); iteration++;
} while (max > PRECISION && iteration<102); return point;
}

public ArrayList<Double> getStatistics() { return statistics;
}

public double[] getFunctionXValuesStatistic() {
return
functionXValuesStatistic.stream().mapToDouble(Double::doubleValue).toArray();
}

public double[] getFunctionYValuesStatistic() {
return
functionYValuesStatistic.stream().mapToDouble(Double::doubleValue).toArray();
}

private double[] getSolvesOfSystem(double[][] A, double[] b) { double[] result =
new double[b.length];
for (int k = 0; k < A.length; k++) {
for (int i = k + 1; i < A[0].length; i++) { double l = A[i][k] / A[k][k];
for (int j = 0; j < A[0].length; j++) { A[i][j] -= l * A[k][j];
}
b[i] -= l * b[k];

}
}
for (int i = result.length - 1; i >= 0; i--) { double sum = 0;
for (int j = i + 1; j < result.length; j++) sum += result[j] * A[i][j];
result[i] = (b[i] - sum) / A[i][i];
}
return result;
}
}
```

Вычисление значений функции и производных:

```
public class MultiFunction { double c;

public MultiFunction(double parameter){ this.c = parameter;
}

public double[]getFunctionResult(double[]points){ double[]result = new
double[points.length];
result[0] = Math.pow(points[0]-c,2)+Math.pow(points[1],2)-1; result[1] =
Math.pow(points[0],2)+Math.pow(points[1]-c,2)-100; return result;
}
```

```
public double[][]getDerivativeFunctionResult(double[]points){ double[][]result =
new double[points.length][points.length]; result[0][0] = 2*(points[0]-c);
result[0][1] = 2*points[1]; result[1][0] = 2*points[0]; result[1][1] =
2*(points[1]-c); return result;
}
}
```

Код организации вычислений:

```
public static void calculateSystem(double parameter,DoubleInterval interval){
NewtonSystemCalculator calculator = new NewtonSystemCalculator(new
MultiFunction(parameter)); var result = calculator.calculate(interval);
var functionXValues = calculator.getFunctionXValuesStatistic(); var
functionYValues = calculator.getFunctionYValuesStatistic(); var statistic =
calculator.getStatistics();
int[]iterations = IntStream.range(1,functionXValues.length).toArray();
Painter.drawSimpleGraphics(iterations, new
double[][]{functionXValues,functionYValues},
new String[]{"X","Y"},
"Root: (x,y) = ("+result[0]+","+result[1]+")");

double[]curStatistic =
statistic.stream().mapToDouble(Double::doubleValue).toArray();
Painter.drawLogarithmicGraphics(iterations, new double[][]{curStatistic},new
String[]{"Norm"},
"Root: (x,y) = ("+result[0]+","+result[1]+")");
}
```

Интервалы вычислений:

```
static DoubleInterval[] systemIntervals = new DoubleInterval[]{
new DoubleInterval(7,8,-0.5,-1),
new DoubleInterval(7.4,7.6,0,-0.2), new DoubleInterval(6.6,6.8,-0.8,-1),
};
```

Код всего приложения:

Класс BisectionCalculator:

```
package com.company.calculators;

import com.company.Function;

public class BisectionCalculator extends Calculator {

    public BisectionCalculator(Function function){
        super(function);
    }

    @Override
    protected double getNextApproximation(double x) throws Exception {
        if(function.getFunctionResult(a)*function.getFunctionResult(x)<0)
            b = x;
        else
            a = x;
        return (a+b)/2;
```

```
    }

}
```

Абстрактный класс Calculator:

```
package com.company.calculators;

import com.company.Function;
import com.company.Interval;

import java.util.ArrayList;

public abstract class Calculator {
    protected final double PRECISION = 1E-12;

    protected ArrayList<Double> statistics;

    protected Function function;

    protected double a,b;

    public Calculator(Function function){
        this.function = function;
    }

    public double calculate(Interval interval) throws Exception {
        a = interval.a();
        b = interval.b();
        statistics = new ArrayList<>();
        double x = interval.a();
        double functionFromA = function.getFunctionResult(a);
        double functionFromB = function.getFunctionResult(b);
        if(functionFromA*functionFromB>=0)
            throw new Exception("incorrect interval");
        int iteration = 1;
        double functionFromX = function.getFunctionResult(x);
        while(Math.abs(functionFromX)>PRECISION && iteration<100){
            statistics.add(Math.abs(functionFromX));
            iteration++;
            x = getNextApproximation(x);
            functionFromX = function.getFunctionResult(x);
        }
        statistics.add(Math.abs(functionFromX));
        return x;
    }

    protected abstract double getNextApproximation(double x) throws Exception;

    public Double[] getStatistic(){
        return statistics.toArray(Double[]::new);
    }
}
```

Класс MultiFunction:

```
package com.company.calculators;

public class MultiFunction {
    double c;
```

```
    public MultiFunction(double parameter){
        this.c = parameter;
    }

    public double[]getFunctionResult(double[]points){
        double[]result = new double[points.length];
        result[0] = Math.pow(points[0]-c,2)+Math.pow(points[1],2)-1;
        result[1] = Math.pow(points[0],2)+Math.pow(points[1]-c,2)-100;
        return result;
    }

    public double[][]getDerivativeFunctionResult(double[]points){
        double[][]result = new double[points.length][points.length];
        result[0][0] = 2*(points[0]-c);
        result[0][1] = 2*points[1];
        result[1][0] = 2*points[0];
        result[1][1] = 2*(points[1]-c);
        return result;
    }
}
```

Класс NewtonCalculator:

```
package com.company.calculators;

import com.company.Function;

public class NewtonCalculator extends Calculator {
    public NewtonCalculator(Function function) {
        super(function);
    }

    @Override
    protected double getNextApproximation(double x) throws Exception {
        return x-function.getFunctionResult(x)/function.getDerivativeResult(x);
    }
}
```

Интерфейс Function:

```
package com.company;

public interface Function {
    double getFunctionResult(double point) throws Exception;
    double getDerivativeResult(double point) throws Exception;
}
```

Класс MyFunction:

```
package com.company;

public class MyFunction implements Function{

    @Override
    public double getFunctionResult(double x) throws Exception{
        if(x == 1)
            throw new Exception("incorrect x");
        return ((x/2)+3*Math.cos(x))/(x-1);
    }

    @Override
    public double getDerivativeResult(double x) throws Exception {
        return ((0.5-3*Math.sin(x))*(x-1)-(x/2+3*Math.cos(x)))/Math.pow((x-
1),2);
    }
}
```

Класс NewtonSystemCalculators:

```
package com.company;

import com.company.calculators.MultiFunction;

import java.util.ArrayList;
import java.util.stream.DoubleStream;

public class NewtonSystemCalculator {

    protected final double PRECISION = 1E-10;
    protected ArrayList<Double> statistics;
    ArrayList<Double>functionXValuesStatistic;
    ArrayList<Double>functionYValuesStatistic;
    protected MultiFunction function;

    public NewtonSystemCalculator(MultiFunction function) {
        this.function = function;
    }

    public double[] calculate(DoubleInterval interval) {
        statistics = new ArrayList<>();
        functionXValuesStatistic = new ArrayList<>();
        functionYValuesStatistic = new ArrayList<>();
        double[] point = new double[]{interval.x1(), interval.y1()};
        double max;
        int iteration = 1;
        do {
            double[] functionValues = function.getFunctionResult(point);
            for (int i = 0; i < functionValues.length; i++)
                functionValues[i] = -functionValues[i];
            double[][] derivativeValues =
function.getDerivativeFunctionResult(point);
            double[] differences = getSolvesOfSystem(derivativeValues,
functionValues);
            for (int i = 0; i < differences.length; i++)
                point[i] += differences[i];
            double[] residual = function.getFunctionResult(point);
            functionXValuesStatistic.add(residual[0]);
            functionYValuesStatistic.add(residual[1]);
            max = Math.sqrt(DoubleStream.of(residual).map(a-
>Math.pow(a,2)).sum());
            if(max!=0)
                statistics.add(max);
            iteration++;
        } while (max > PRECISION && iteration<102);
        return point;
    }

    public ArrayList<Double> getStatistics() {
        return statistics;
    }

    public double[] getFunctionXValuesStatistic() {
        return
functionXValuesStatistic.stream().mapToDouble(Double::doubleValue).toArray();
    }

    public double[] getFunctionYValuesStatistic() {
        return
functionYValuesStatistic.stream().mapToDouble(Double::doubleValue).toArray();
    }
```

```
    private double[] getSolvesOfSystem(double[][] A, double[] b) {
        double[] result = new double[b.length];
        for (int k = 0; k < A.length; k++) {
            for (int i = k + 1; i < A[0].length; i++) {
                double l = A[i][k] / A[k][k];
                for (int j = 0; j < A[0].length; j++) {
                    A[i][j] -= l * A[k][j];
                }
                b[i] -= l * b[k];
            }
        }
        for (int i = result.length - 1; i >= 0; i--) {
            double sum = 0;
            for (int j = i + 1; j < result.length; j++)
                sum += result[j] * A[i][j];
            result[i] = (b[i] - sum) / A[i][i];
        }
        return result;
    }
}
```

Класс Painter:

```
package com.company;

import org.jfree.chart.ChartFactory;
import org.jfree.chart.JFreeChart;
import org.jfree.chart.axis.LogarithmicAxis;
import org.jfree.chart.axis.NumberAxis;
import org.jfree.chart.plot.PlotOrientation;
import org.jfree.chart.renderer.xy.XYSplineRenderer;
import org.jfree.data.xy.XYSeries;
import org.jfree.data.xy.XYSeriesCollection;

import java.io.File;
import java.io.IOException;

import static org.jfree.chart.ChartUtilities.saveChartAsJPEG;

class Painter {

    static int index = 34;

    public static void drawLogarithmicGraphics(int[] numbers,
double[][]differences, String[] graphicNames,String title){
        XYSeriesCollection dataSet = new XYSeriesCollection();
        for(int i =0;i< differences.length;i++){
            final XYSeries series = new XYSeries(graphicNames[i], false, true);
            for(int j = 0;j<numbers.length;j++){
                if(differences[i].length == j)
                    break;
                series.add(numbers[j], differences[i][j]);
            }
            dataSet.addSeries(series);
        }

        JFreeChart lineChart = ChartFactory.createXYLineChart(title, "Number of
iteration",
                "Norm of difference",
                dataSet, PlotOrientation.VERTICAL, true, true, false);
        var plot = lineChart.getXYPlot();
        XYSplineRenderer r1 = new XYSplineRenderer();
        r1.setPrecision(8);
        r1.setSeriesShapesVisible(0, false);
```

```
        final NumberAxis rangeAxis = new LogarithmicAxis("Norm of difference
(Log)");
        plot.setRangeAxis(rangeAxis);
        plot.setRenderer(r1);
        int width = 1920;    /* Width of the image */
        int height = 1080;   /* Height of the image */
        File jFreeChart = new File(String.format("LineChart%s.jpeg", index));
        index++;
        try {
            saveChartAsJPEG(jFreeChart, lineChart, width, height);
        } catch (IOException e) {
            e.printStackTrace();
        }
    }

    public static void drawSimpleGraphics(int[] numbers, double[][]differences,
String[] graphicNames,String title){
        XYSeriesCollection dataSet = new XYSeriesCollection();
        for(int i =0;i< differences.length;i++){
            final XYSeries series = new XYSeries(graphicNames[i], false, true);
            for(int j = 0;j<numbers.length;j++){
                if(differences[i].length == j)
                    break;
                series.add(numbers[j], differences[i][j]);
            }
            dataSet.addSeries(series);
        }

        JFreeChart lineChart = ChartFactory.createXYLineChart(title, "Number of
iteration",
                "Value of functions",
                dataSet, PlotOrientation.VERTICAL, true, true, false);
        XYSplineRenderer r1 = new XYSplineRenderer();
        r1.setPrecision(8);
        r1.setSeriesShapesVisible(0, false);
        int width = 1920;
        int height = 1080;
        File jFreeChart = new File(String.format("LineChart%s.jpeg", index));
        index++;
        try {
            saveChartAsJPEG(jFreeChart, lineChart, width, height);
        } catch (IOException e) {
            e.printStackTrace();
        }
    }
}
```

Класс Main:

```
package com.company;

import com.company.calculators.BisectionCalculator;
import com.company.calculators.Calculator;
import com.company.calculators.MultiFunction;
import com.company.calculators.NewtonCalculator;

import java.util.Arrays;
import java.util.stream.IntStream;

    public static void main(String[] args) {
        CalculationsProcessor bisectionProcessor = new CalculationsProcessor(new
BisectionCalculator(new MyFunction()));
        bisectionProcessor.calculate(bisectionIntervals);
```

```
        CalculationsProcessor newtonProcessor = new CalculationsProcessor(new
NewtonCalculator(new MyFunction()));
        newtonProcessor.calculate(bisectionIntervals);

        for(int i = 0;i< bisectionIntervals.length;i++){
            double[][]precisions = new double[2][0];
            precisions[0] = bisectionProcessor.getPrecisionsWithIndex(i);
            precisions[1] = newtonProcessor.getPrecisionsWithIndex(i);
            int bisectionIterationsNumber =
bisectionProcessor.getIterationsNumberWithIndex(i);
            int newtonIterationNumber =
newtonProcessor.getIterationsNumberWithIndex(i);
            int max =
Integer.max(bisectionIterationsNumber,newtonIterationNumber);
            int[]iterations = IntStream.range(1,max).toArray();
            Painter.drawLogarithmicGraphics(iterations,precisions,new
String[]{"Bisection","Newton"},
                    "Root: "+bisectionProcessor.results[i]);
        }

        for(int i = 0;i< parameters.length;i++)
            calculateSystem(parameters[i],systemIntervals[i]);
        calculateSystem(parameters[parameters.length-
1],systemIntervals[systemIntervals.length-1]);

    }
}
```

Класс CalculationsProcessor:

```
package com.company;

import com.company.calculators.BisectionCalculator;
import com.company.calculators.Calculator;
import com.company.calculators.MultiFunction;
import com.company.calculators.NewtonCalculator;

import java.util.Arrays;
import java.util.stream.IntStream;
class CalculationsProcessor{
    double[]results;

    Double[][]statistics;

    Calculator calculator;

    public CalculationsProcessor(Calculator calculator){
        this.calculator = calculator;
    }

    public void calculate(Interval[]intervals) throws Exception {
        results = new double[intervals.length];
        statistics = new Double[results.length][0];
        for(int i = 0;i< results.length;i++){
            results[i] = calculator.calculate(intervals[i]);
            var localStatistic = calculator.getStatistic();
            statistics[i] = Arrays.copyOf(localStatistic,localStatistic.length);
        }
    }

    public double[] getPrecisionsWithIndex(int i){
        double[]result = new double[statistics[i].length];
        for(int j = 0;j<statistics[i].length;j++)
            result[j] = statistics[i][j];
```

```
        return result;
    }

    public int getIterationsNumberWithIndex(int i){
        return statistics[i].length;
    }
}

public class Main {

    static double[] parameters = new double[]{
            6.36396105,
            6.5,
    };

    static DoubleInterval[] systemIntervals = new DoubleInterval[]{
        new DoubleInterval(7,8,-0.5,-1),
        new DoubleInterval(7.4,7.6,0,-0.2),
        new DoubleInterval(6.6,6.8,-0.8,-1),
    };

    public static void calculateSystem(double parameter,DoubleInterval
interval){
        NewtonSystemCalculator calculator = new NewtonSystemCalculator(new
MultiFunction(parameter));
        var result = calculator.calculate(interval);
        var functionXValues = calculator.getFunctionXValuesStatistic();
        var functionYValues = calculator.getFunctionYValuesStatistic();
        var statistic = calculator.getStatistics();
        int[]iterations = IntStream.range(1,functionXValues.length).toArray();
        Painter.drawSimpleGraphics(iterations, new
double[][]{functionXValues,functionYValues},
                new String[]{"X","Y"},
                "Root: (x,y) = ("+result[0]+","+result[1]+")");
        double[]curStatistic =
statistic.stream().mapToDouble(Double::doubleValue).toArray();
        Painter.drawLogarithmicGraphics(iterations, new
double[][]{curStatistic},new String[]{"Norm"},
                "Root: (x,y) = ("+result[0]+","+result[1]+")");
    }
```