

Университет ИТМО
Мегафакультет компьютерных технологий и управления
Факультет программной инженерии и компьютерной техники



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ
Вариант №10

Группа: Р3211
Студент: Орчиков Даниил Валерьевич
Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна

г. Санкт-Петербург
2024

Оглавление

| | |
|---|---|
| Цель работы..... | 2 |
| Вычислительная реализация задачи:..... | 2 |
| Рабочие формулы | 2 |
| Интеграл | 3 |
| Формула Ньютона-Котеса | 3 |
| Формула средних прямоугольников | 3 |
| Формула Симпсона | 3 |
| Программная реализация задачи | 4 |
| Листинг программы | 4 |
| Примеры и результаты работы программы | 4 |
| Пример 1 | 5 |
| Пример 2 | 5 |
| Вывод..... | 5 |

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Вычислительная реализация задачи:

Рабочие формулы

Метод прямоугольников

- Левых $\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n y_{i-1}$
- Правых $\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n y_i$
- Средних $\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})$

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n)$$

Формула Ньютона-Котеса

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) c_n^i$$

Интеграл

$$\int_2^4 (x^3 - 3x^2 + 7x - 10)dx$$

Точное значение:

$$\int_2^4 (x^3 - 3x^2 + 7x - 10)dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{7x^2}{2} - 10x \right) \Big|_2^4 = 16 - (-10) = 26$$

Формула Ньютона-Котеса

$$n = 6$$

$$h = \frac{4 - 2}{6} = 0.334$$

$$\begin{aligned} \int_2^4 f(x)dx &\approx c_6^0 * f(a) + c_6^1 * f(a + h) + c_6^2 * f(a + 2h) + c_6^3 * f(a + 3h) + c_6^4 * f(a + 4h) + c_6^5 * \\ &f(a + 5h) + c_6^6 * f(b) = \frac{41}{840} * 2f(2) + \frac{216}{840} * 2f(2.334) + \frac{27}{840} * 2f(2.667) + \frac{272}{840} * 2f(3) + \frac{27}{840} * \\ &2f(3.334) + \frac{216}{840} * 2f(3.667) + \frac{41}{840} * 2f(4) = \mathbf{26} \end{aligned}$$

Значение, вычисленное по формуле, полностью соответствует точному значению интеграла.

Формула средних прямоугольников

$$n = 10$$

$$h = \frac{4 - 2}{10} = 0.2$$

$$\begin{aligned} \int_2^4 f(x)dx &= 0.2(f(2.1) + f(2.3) + f(2.5) + f(2.7) + f(2.9) + f(3.1) + f(3.3) + f(3.5) + f(3.7) + \\ &f(3.9)) = 0.2(0.731 + 2.397 + 4.375 + 6.713 + 9.459 + 12.661 + 16.367 + 20.625 + 25.483 + \\ &30.989) = \mathbf{25.96} \end{aligned}$$

$$R = 26 - 25.96 = 0.04$$

Формула Симпсона

$$n = 10$$

$$h = \frac{4 - 2}{10} = 0.2$$

$$\begin{aligned} \int_2^4 f(x)dx &= \frac{0.2}{3} (f(2) + 4(f(2.2) + f(2.6) + f(3) + f(3.4) + f(3.8)) + 2(f(2.4) + f(2.8) + \\ &f(3.2) + f(3.6)) + f(4)) = \frac{0.2}{3} (0 + 4(1.528 + 5.496 + 11 + 18.424 + 28.152) + 2(3.344 + \\ &8.032 + 14.448 + 22.976) + 34) = 26 \end{aligned}$$

Значение, вычисленное по формуле, полностью соответствует точному значению интеграла.

Программная реализация задачи

Листинг программы

Представлен только код, непосредственно выполняющий вычисления

Весь код можно посмотреть [тут \(GitHub\)](#)

```
function calc(fun, a, b, accuracy, method) {
  function f() {
    let I = 0
    let h = (b - a) / k
    switch (method) {
      case "left":
        for (let i = a; i <= b - h; i += h)
          I += fun(i)
        break
      case "right":
        for (let i = a + h; i <= b; i += h)
          I += fun(i)
        break
      case "middle":
        for (let i = a + h / 2; i < b; i += h)
          I += fun(i)
        break
      case "trapezoid":
        for (let i = 1; i < Math.abs(b - a) / h; i += 1)
          I += fun(a + i * h)
        I += (fun(a) + fun(b)) / 2
        break
      case "Simpson":
        for (let i = 1; i <= Math.abs(b - a) / h - 1; i += 1)
          I += fun(a + i * h) * (i % 2 ? 4 : 2)
        I += fun(a) + fun(b)
        I /= 3
        break
    }
    return I * h
  }

  let k = 4
  let Ik, Ik1
  Ik = f()
  Ik1 = Ik
  do {
    Ik = Ik1
    k *= 2
    Ik1 = f()
  } while (Math.abs(Ik - Ik1) >= accuracy)
  return {res: Ik1, intervals: k}
}
```

Примеры и результаты работы программы

Отмечу, что формулы для отображения графика и отрезков на которые он разбивается генерируются. Их не нужно вводить в калькулятор вручную.

Пример 1

Выберете функцию:

- ☐ $\cos(\sin(\sin(x)))$
- ☒ $\sin(x) + 2\cos(0.1x^2) + 1$
- ☐ $x^2 + 2 \cdot x - 5$

Выберете интервал:

0 2
Точность: 0,01

Выберете метод:

- ☐ Метод левых прямоугольников
- ☒ Метод средних прямоугольников
- ☐ Метод правых прямоугольников
- ☐ Метод трапеций
- ☐ Метод Симпсона

Вычислить

Ответ: 7.353744260570052

Число разбиений: 16

+

↶ ↷ ⚙ ⏪

1 $f(x) = \sin(x) + 2\cos(0.1x^2) + 1$ ✕

2 $A = [0.125, 0.375, \dots, 1.875]$ ✕

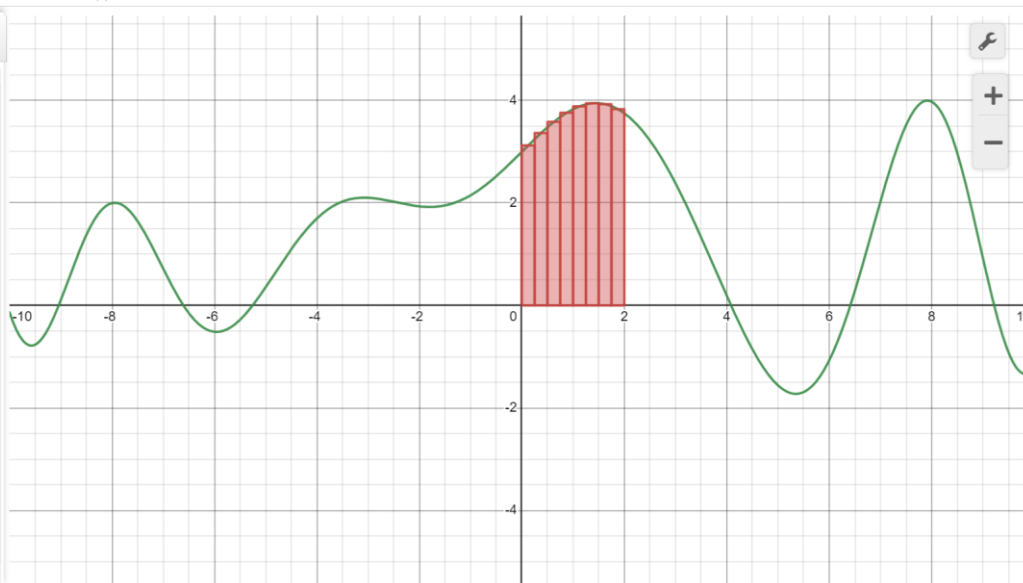
$A = 8$ element list

3 ✕

4

⬆

powered by



Пример 2

Выберете функцию:

- ☐ $\cos(\sin(\sin(x)))$
- ☐ $\sin(x) + 2\cos(0.1x^2) + 1$
- ☒ $x^2 + 2 \cdot x - 5$

Выберете интервал:

-1 2
Точность: 0,00001

Выберете метод:

- ☐ Метод левых прямоугольников
- ☐ Метод средних прямоугольников
- ☐ Метод правых прямоугольников
- ☐ Метод трапеций
- ☒ Метод Симпсона

Вычислить

Ответ: -9

Число разбиений: 8

+

↶ ↷ ⚙ ⏪

1 $f(x) = x^2 + 2x - 5$ ✕

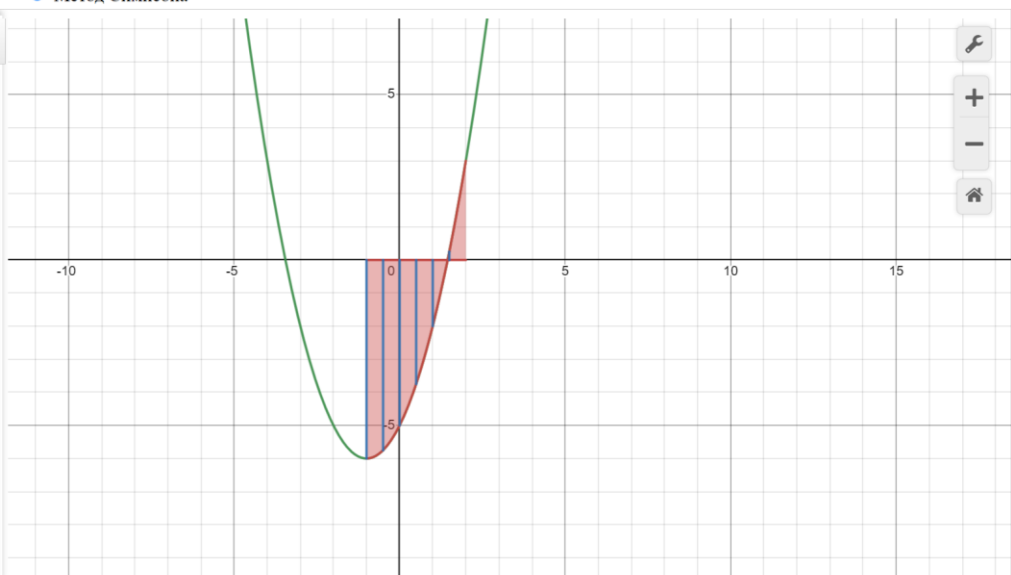
2 $A = [-0.75, -0.25, \dots, 1.75]$ ✕

$A = 6$ element list

3 $\min(0.5(16)(x - A)(x - A - 0.25)$ ✕

4 $x = A - 0.25 \left\{ \min(f(A - 0.25), 0) \right\}$ ✕

⬆



Вывод

Во время выполнения данной лабораторной работы я познакомился с различными численными методами вычисления интегралов и написал реализацию некоторых из них на языке JavaScript.