Университет ИТМО
Мегафакультет компьютерных технологий и управления
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Вариант №10

Группа: P3211
Студент: Орчиков Даниил Валерьевич
Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна

г. Санкт-Петербург
2024

Оглавление

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Вычислительная реализация задачи:

Рабочие формулы

Метод прямоугольников

- Левых $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$
- Правых $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_i$
- Средних $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)$$

Формула Ньютона-Котеса

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)c_n^i$$

Интеграл

$$\int_{2}^{4}(x^3 - 3x^2 + 7x - 10)dx$$

Точное значение:

$$\int_{2}^{4}(x^3 - 3x^2 + 7x - 10)dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{7x^2}{2} - 10x\right)\Bigg|_2^4 = 16 - (-10) = 26$$

Формула Ньютона-Котеса

$$\mathrm{n} = 6$$

$$h = \frac{4-2}{6} = 0.334$$

$\int_2^4 f(x)dx \approx \mathrm{c}_6^0 * \mathrm{f(a)} + \mathrm{c}_6^1 * f(a+h) + c_6^2 * f(a+2h) + c_6^3 * f(a+3h) + c_6^4 * f(a+4h) + c_6^5 * f(a+5h) + c_6^6 * f(b) = \frac{41}{840} * 2f(2) + \frac{216}{840} * 2f(2.334) + \frac{27}{840} * 2f(2.667) + \frac{272}{840} * 2f(3) + \frac{27}{840} * 2f(3.334) + \frac{216}{840} * 2f(3.667) + \frac{41}{840} * 2f(4) = 26$

Значение, вычисленное по формуле, полностью соответствует точному значению интеграла.

Формула средних прямоугольников

$$n = 10$$

$$h = \frac{4-2}{10} = 0.2$$

$\int_2^4 f(x)dx = 0.2\big(f(2.1) + f(2.3) + f(2.5) + f(2.7) + f(2.9) + f(3.1) + f(3.3) + f(3.5) + f(3.7) + f(3.9)\big) = 0.2(0.731 + 2.397 + 4.375 + 6.713 + 9.459 + 12.661 + 16.367 + 20.625 + 25.483 + 30.989) = 25.96$

$$R = 26 - 25.96 = 0.04$$

Формула Симпсона

$$n = 10$$

$$h = \frac{4-2}{10} = 0.2$$

$\int_2^4 f(x)dx = \frac{0.2}{3}\Big(f(2) + 4\big(f(2.2) + f(2.6) + f(3) + f(3.4) + f(3.8)\big) + 2\big(f(2.4) + f(2.8) + f(3.2) + f(3.6)\big) + f(4)\Big) = \frac{0.2}{3}(0 + 4(1.528 + 5.496 + 11 + 18.424 + 28.152) + 2(3.344 + 8.032 + 14.448 + 22.976) + 34) = 26$

Значение, вычисленное по формуле, полностью соответствует точному значению интеграла.

Программная реализация задачи

Листинг программы

Представлен только код, непосредственно выполняющий вычисления

Весь код можно посмотреть [тут (GitHub)]

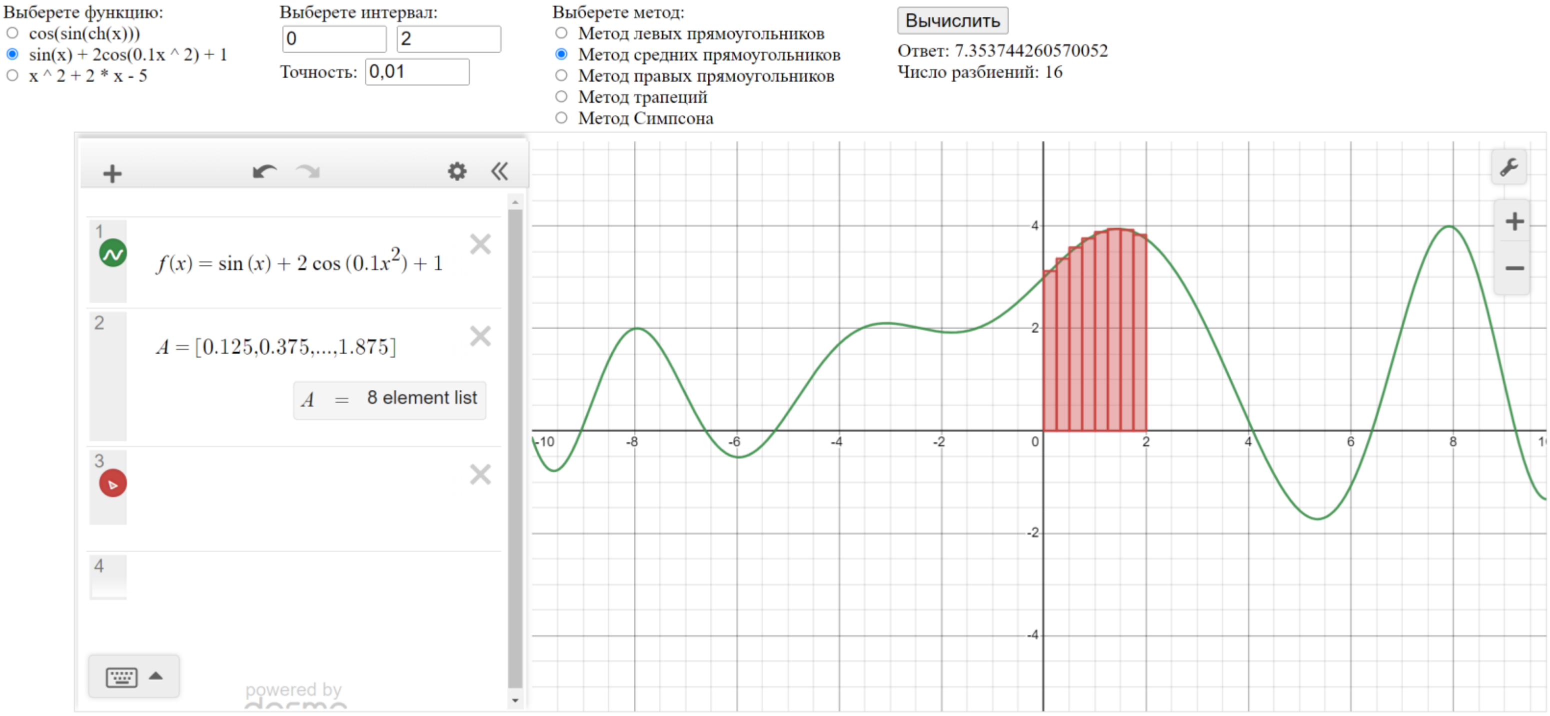
```
function calc(fun, a, b, accuracy, method) {
  function f() {
    let I = 0
    let h = (b - a) / k
    switch (method) {
      case "left":
        for (let i = a; i <= b - h; i += h)
          I += fun(i)
        break
      case "right":
        for (let i = a + h; i <= b; i += h)
          I += fun(i)
        break
      case "middle":
        for (let i = a + h / 2; i < b; i += h)
          I += fun(i)
        break
      case "trapezoid":
        for (let i = 1; i < Math.abs(b - a) / h; i += 1)
          I += fun(a + i * h)
        I += (fun(a) + fun(b)) / 2
        break
      case "Simpson":
        for (let i = 1; i <= Math.abs(b - a) / h - 1; i += 1)
          I += fun(a + i * h) * (i % 2 ? 4 : 2)
        I += fun(a) + fun(b)
        I /= 3
        break
    }
    return I * h
  }

  let k = 4
  let Ik, Ik1
  Ik = f()
  Ik1 = Ik
  do {
    Ik = Ik1
    k *= 2
    Ik1 = f()
  } while (Math.abs(Ik - Ik1) >= accuracy)
  return {res: Ik1, intervals: k}
}
```

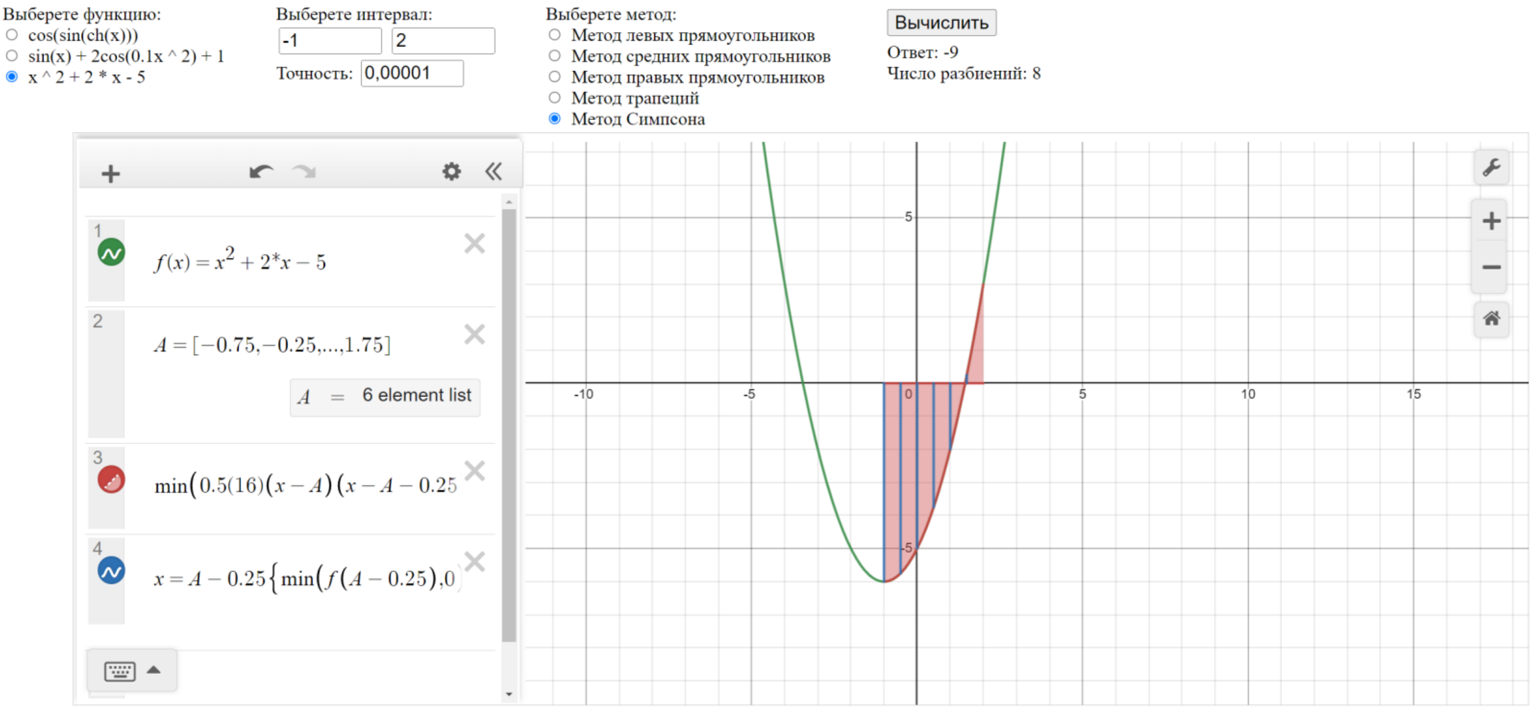
Примеры и результаты работы программы

Отмечу, что формулы для отображения графика и отрезков на которые он разбивается генерируются. Их не нужно вводить в калькулятор вручную.

Пример 1



Пример 2



Вывод

Во время выполнения данной лабораторной работы я познакомился с различными численными методами вычисления интегралов и написал реализацию некоторых из них на языке JavaScript.