Университет ИТМО
Мегафакультет компьютерных технологий и управления
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Вариант №10

Группа: P3211
Студент: Орчиков Даниил Валерьевич
Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна

г. Санкт-Петербург
2022

Оглавление

Цель работы

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов

Вычислительная реализация задачи:

1 часть. Решение нелинейного уравнения

$$x^3 - 3.125x^2 - 3.5x + 2.458$$

Рабочие формулы

Метод Ньютона:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Метод половинного деления:

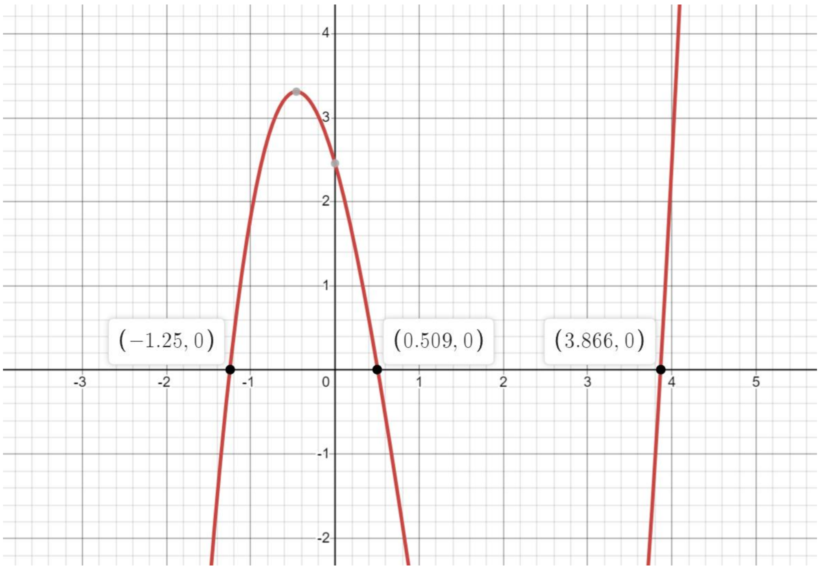
$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Метод простой итерации:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

Решение

1. Графическое отделение корней



2. Интервалы изоляции корней:
   (-2.5; -1), (0; 1), (3.5; 4)
3. Методы, используемые для уточнения корней:
   a. Метод Ньютона
   b. Метод половинного деления
   c. Метод простой итерации
4. Первый корень (метод Ньютона):
   Интервал изоляции - (-2.5; -1)

№ итерации	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\|x_{k+1} - x_k\|$
1	-2.400	-20.966	28.780	-1.672	0.728
2	-1.672	-5.093	15.329	-1.339	0.332
3	-1.339	-0.862	10.251	-1.255	0.084
4	-1.255	-0.050	9.072	-1.250	0.006

5. Второй корень (метод половинного деления):
   Интервал изоляции - (0; 1)

№ итерации	*a*	*b*	*x*	*f(a)*	*f(b)*	*f(x)*	*|a-b|*
1	0.000	1.000	0.500	2.458	-3.167	0.052	1.000
2	0.500	1.000	0.750	0.052	-3.167	-1.503	0.500
3	0.500	0.750	0.625	0.052	-1.503	-0.706	0.250
4	0.500	0.625	0.563	0.052	-0.706	-0.322	0.125
5	0.500	0.563	0.531	0.052	-0.322	-0.133	0.063
6	0.500	0.531	0.516	0.052	-0.133	-0.040	0.031
7	0.500	0.516	0.508	0.052	-0.040	0.006	0.016
8	0.508	0.516	0.512	0.006	-0.040	-0.017	0.008

6. Третий корень (метод простой итерации):
   Интервал изоляции - (3.5; 4)
   Применим 3 способ преобразования уравнения:

$$f^{'}(x) = 3x^2 - 6.25x - 3.5$$
$$\max_{[3.5;4]} \left|f^{'}(x)\right| = 19.5$$
$$\lambda =- 0.051$$

Преобразованное уравнение:

$$\varphi(x) =- 0.051x^3 + 0.16x^2 + 1.179x - 0.125$$
$$\phi^{'}(x) =- 0.153x^2 + 0.32x + 1.179$$
$$\phi^{'}(3.5) = 0.425$$

$$\phi^{'}(4) = 0.011$$

Условие сходимости выполняется

№ итерации	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	3.550	3.795	-1.172	0.245
2	3.795	3.866	0.006	0.071
3	3.886	3.878	0.202	0.011
4	3.878	3.879	0.226	0.001

2 часть. Решение системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \cos(y-2) + x = 0 \\ \sin(x+0.5) - y = 1 \end{cases}$$

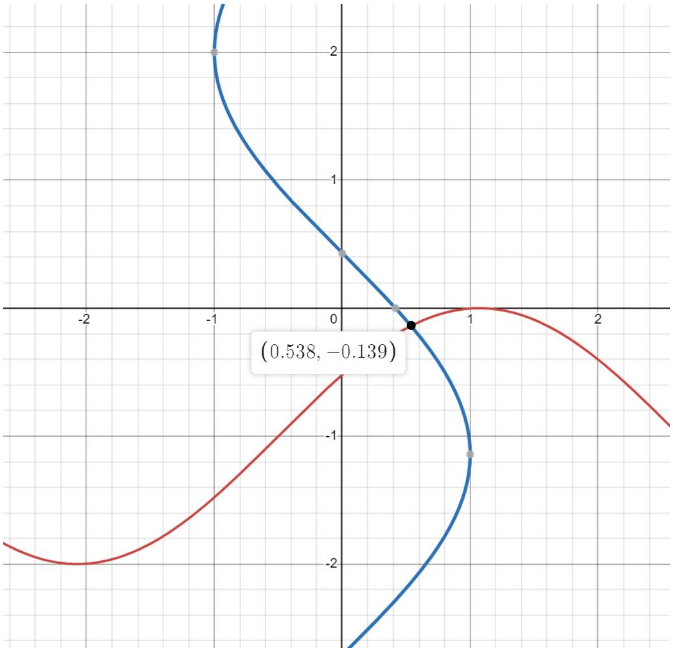
Рабочие формулы

Метод простой итерации

$$\begin{cases} x_1^{i+1} = \varphi_1(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \\ x_2^{i+1} = \varphi_2(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{i+1} = \varphi_n(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \end{cases}$$

Решение

1. Графическое отделение корней



2. Нахождение корня методом простых итераций:

Решение находится в области $0 < x < 1, \quad -1 < y < 0$

$$\begin{cases} x = -\cos(y-2) \\ y = \sin(x+0.5) - 1 \end{cases}$$

Проверим условие сходимости. В области G имеем:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \sin(y-2)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \cos(x+0.5) \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| = |\sin(y-2)|$$

$$0.141 \le |\sin(y-2)| \le 0.909$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| = |\cos(\mathrm{x}+0.5)|$$

$$0.071 \le |\cos(x+0.5)| \le 0.878$$
$$\max_{[x\in G]} |\varphi'(x)| \le 0.909 < 1 \rightarrow \textit{процесс сходящийся}$$

Начальные приближение

$$x^0 = 1,\ y^0 = 0$$

1 шаг

$x^1 =- \cos(-2) = 0.416$ $\quad |x^0 - x^1| = 0.584 > \varepsilon$

$y^1 = \sin(1.5) - 1 =- 0.003$ $\quad |y^0 - y^1| = 0.003 < \varepsilon$

2 шаг

$x^2 =- \cos(-2.003) = 0.419$ $\quad |x^1 - x^2| = 0.003 < \varepsilon$

$y^2 = \sin(0.916) - 1 =- 0.207$ $\quad |y^1 - y^2| = 0.204 > \varepsilon$

3 шаг

$x^3 =- \cos(-2.207) = 0.594$ $\quad |x^2 - x^3| = 0.175 > \varepsilon$

$y^3 = \sin(0.919) - 1 =- 0.205$ $\quad |y^2 - y^3| = 0.002 < \varepsilon$

4 шаг

$x^4 =- \cos(-2.205) = 0.593$ $\quad |x^3 - x^4| = 0.001 < \varepsilon$

$y^4 = \sin(1.094) - 1 =- 0.112$ $\quad |y^3 - y^4| = 0.093 > \varepsilon$

5 шаг

$x^5 =- \cos(-2.112) = 0.515$ $\quad |x^4 - x^5| = 0.077 > \varepsilon$

$y^5 = \sin(1.093) - 1 =- 0.112$ $\quad |y^4 - y^5| = 0.000 < \varepsilon$

6 шаг

$x^6 =- \cos(-2.112) = 0.515$ $\quad |x^5 - x^6| = 0.000 < \varepsilon$

$y^6 = \sin(1.015) - 1 =- 0.151$ $\quad |y^5 - y^6| = 0.039 > \varepsilon$

7 шаг

$x^7 =- \cos(-2.151) = 0.548$ $\quad |x^6 - x^7| = 0.033 > \varepsilon$

$y^7 = \sin(1.015) - 1 =- 0.151$ $\quad |y^6 - y^7| = 0.000 < \varepsilon$

8 шаг

$x^8 =- \cos(-2.151) = 0.548$ $\quad |x^7 - x^8| = 0.000 < \varepsilon$

$y^8 = \sin(1.048) - 1 =- 0.134$ $\quad |y^7 - y^8| = 0.017 > \varepsilon$

9 шаг

$x^9 =- \cos(-2.134) = 0.534$ $\quad |x^8 - x^9| = 0.014 > \varepsilon$

$y^9 = \sin(1.048) - 1 =- 0.134$ $\quad |y^8 - y^9| = 0.000 < \varepsilon$

10 шаг

$x^9 =- \cos(-2.134) = 0.534$ $\quad |x^8 - x^9| = 0.000 < \varepsilon$

$y^9 = \sin(1.034) - 1 =- 0.141$ $\quad |y^8 - y^9| = 0.007 < \varepsilon$

Программная реализация задачи

Рабочие формулы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} =- \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

Листинг программы

Представлен только код, непосредственно выполняющий вычисления

Весь код можно посмотреть тут (GitHub)

```
function chordMethod(a, b, accuracy) {
    function runA() {
        let v = 1
        document.getElementById("res").innerHTML = "<tr><th>№ Шага</th><th>a</th><th>b</th><th>x</th><th>f(a)</th><th>f(b)</th><th>f(x)</th><th>|x_k - x_{k+1}|</th></tr>"
        let x0 = a
        while (true) {
            let fx0 = f["function"](x0)
            let fb = f["function"](b)
            x = x0 - (b - x0) / (fb - fx0) * fx0
            let fx = f["function"](x)
            document.getElementById("res").innerHTML += `<tr><td>${v}</td><td>${x0}</td><td>${b}</td><td>${x}</td><td>${fx0}</td><td>${fb}</td><td>${fx}</td><td>${Math.abs(x0 - x)}</td></tr>`
            if (Math.abs(x0 - x) < accuracy) return
            v++
            x0 = x
            if (v > 100) {
                document.getElementById("res").innerHTML = ""
                document.getElementById("info").innerHTML = "<br>На данном интервале метод хорд не может получить решение"
                return
            }
        }
    }

    function runB() {
        let v = 1
        document.getElementById("res").innerHTML = "<tr><th>№ Шага</th><th>a</th><th>b</th><th>x</th><th>f(a)</th><th>f(b)</th><th>f(x)</th><th>|x_k - x_{k+1}|</th></tr>"
        let x0 = b
        while (true) {
            let fx0 = f["function"](x0)
            let fa = f["function"](a)
            x = x0 - (a - x0) / (fa - fx0) * fx0
            let fx = f["function"](x)
            document.getElementById("res").innerHTML += `<tr><td>${v}</td><td>${a}</td><td>${x0}</td><td>${x}</td><td>${fa}</td><td>${fx0}</td><td>${fx}</td><td>${Math.abs(x0 - x)}</td></tr>`
            if (Math.abs(x0 - x) < accuracy) return
            v++
            x0 = x
            if (v > 100) {
                document.getElementById("res").innerHTML = ""
                document.getElementById("info").innerHTML = "<br>На данном интервале метод хорд не может получить решение"
                return
            }
        }
    }

    if (root(a, b, f["derivative"]) || root(a, b, f["derivative2"])) {
        alert("На заданном интервале применение метода может дать некорректный результат")
```

```
    }
    let x
    if (ƒ["derivative"]((a + b) / 2) * ƒ["derivative2"]((a + b) / 2) > 0) {
        runA()
    }
    if (ƒ["derivative"]((a + b) / 2) * ƒ["derivative2"]((a + b) / 2) < 0 || a > x || b < x) {
        runB()
    }
    if (a > x || b < x) {
        runA()
    }
}

function newtonMethod(a, b, accuracy) {
    document.getElementById("res").innerHTML = "<tr><th>№
Шага</th><th>x_k</th><th>f(x_k)</th><th>f'(x_k)</th><th>x_{k+1}</th><th>|x_k - x_{k+1}|</th></tr>"

    function run() {
        let v = 1
        while (true) {
            let fx0 = ƒ["function"](x0)
            let dfx0 = ƒ["derivative"](x0)
            x = x0 - fx0 / dfx0
            document.getElementById("res").innerHTML +=
`<tr><td>${v}</td><td>${x0}</td><td>${fx0}</td><td>${dfx0}</td><td>${x}</td><td>${Math.abs(x0 -
x)}</td></tr>`
            if (Math.abs(x0 - x) < accuracy) return
            v++
            x0 = x
            if (v > 100) {
                document.getElementById("res").innerHTML = ""
                document.getElementById("info").innerHTML = "<br>На данном интервале метод Ньютона
не может получить решение"
                return
            }
        }
    }

    if (root(a, b, ƒ["derivative2"])) {
        alert("На заданном интервале применение метода Ньютона может дать некорректный результат")
    }
    let x0, x
    if (ƒ["function"](a) * ƒ["derivative2"](a)) {
        x0 = a
    } else x0 = b
    run()
    if (a > x || b < x) {
        document.getElementById("res").innerHTML = "<tr><th>№
Шага</th><th>x_k</th><th>f(x_k)</th><th>f'(x_k)</th><th>x_{k+1}</th><th>|x_k - x_{k+1}|</th></tr>"
        if (ƒ["function"](a) * ƒ["derivative2"](a)) {
            x0 = b
        } else x0 = a
        run()
    }
}

function simpleIterationMethod(a, b, accuracy) {
    document.getElementById("res").innerHTML = "<tr><th>№
Шага</th><th>x_i</th><th>x_{i+1}</th><th>phi(x_{i + 1})</th><th>f(x_{k+1})</th><th>|x_k -
x_{k+1}|</th></tr>"
```

```
    function run() {
        let v = 1
        let x0 = a
        while (true) {
            x = x0 + lambda * (f["function"](x0))
            document.getElementById("res").innerHTML +=
`<tr><td>${v}</td><td>${x0}</td><td>${x}</td><td>${x0 + lambda *
(f["function"](x))}</td><td>${f["function"](x)}</td><td>${Math.abs(x0 - x)}</td></tr>`
            if (Math.abs(x0 - x) < accuracy) return
            v++
            x0 = x
            if (v > 100) {
                document.getElementById("info").innerHTML += "<br>Не удалось добиться нужной
точности за вменяемое количество итераций. Метод расходится"
                return
            }
        }
    }

    if (root(a, b, f["derivative"])) {
        alert("На заданном интервале применение метода простых итераций может дать некорректный
результат")
    }
    let mx = Number.MIN_VALUE
    for (let i = a; i <= b; i += Math.abs(a - b) / 100)
        if (mx < Math.abs(f["derivative"](i)))
            mx = Math.abs(f["derivative"](i))
    let lambda = 1 / mx
    lambda *= f["derivative"](mx) > 0 ? -1 : 1
    document.getElementById("info").innerHTML = "Достаточное условие" + (lambda *
f["derivative"](mx) + 1 < 1 ? " " : " не ") + "выполняется"
    console.log(lambda * f["derivative"](mx) + 1)
    let x
    run()
    if (a > x || b < x) {
        document.getElementById("res").innerHTML = "<tr><th>№
Шага</th><th>x_i</th><th>x_{i+1}</th><th>phi(x_{i + 1})</th><th>f(x_{k+1})</th><th>|x_k -
x_{k+1}|</th></tr>"
        lambda *= -1
        console.log(lambda * f["derivative"](mx) + 1)
        document.getElementById("info").innerHTML = "Достаточное условие" + (lambda *
f["derivative"](mx) + 1 < 1 ? " " : " не ") + "выполняется"
        run()
    }
}

function root(a, b, func) {
    const step = Math.abs(b - a) / 100;
    let previousSign = Math.sign(func(a));
    let currentSign;

    for (let x = a; x <= b; x += step) {
        currentSign = Math.sign(func(x));
        if (currentSign !== previousSign || currentSign === 0) {
            return x;
        }
        previousSign = currentSign;
    }

    return 0;
}
```

```
function hasMoreThat1Root(a, b) {
    a = root(a, b, ƒ["function"])
    return root(a, b, ƒ["function"])
}

function systemNewtonMethod(x0, y0, accuracy) {
    document.getElementById("info").innerHTML = ""
    document.getElementById("check").innerHTML = ""
    document.getElementById("res").innerHTML = "<tr><th>№ Шага</th><th>x_i</th><th>yi</th><th>|x_k
- x_{k+1}|</th><th>|y_k - y_{k+1}|</th></tr>"

    let v = 1
    let x, y
    while (true) {
        let a11 = ƒ["derivative1X"](x0, y0)
        let a12 = ƒ["derivative1Y"](x0, y0)
        let a21 = ƒ["derivative2X"](x0, y0)
        let a22 = ƒ["derivative2Y"](x0, y0)
        let b1 = -ƒ["function1"](x0, y0)
        let b2 = -ƒ["function2"](x0, y0)
        let d = a11 * a22 - a12 * a21
        if (Math.abs(d) < Number.EPSILON) {
            document.getElementById("res").innerHTML = ""
            document.getElementById("info").innerHTML = "Определитель матрицы равен нулю"
            return
        }
        if (d === 0) break
        let d1 = b1 * a22 - b2 * a12
        let d2 = a11 * b2 - a21 * b1
        let dx = d1 / d
        let dy = d2 / d
        document.getElementById("res").innerHTML +=
`<tr><td>${v}</td><td>${x0}</td><td>${y0}</td><td>${Math.abs(dx)}</td><td>${Math.abs(dy)}</td></tr>
`
        x = x0 + dx
        y = y0 + dy
        if (Math.abs(dx) <= accuracy && Math.abs(dy) <= accuracy) {
            break
        }
        x0 = x
        y0 = y
        v++
        if (v > 300) {
            document.getElementById("info").innerHTML += "<br>Не удалось добиться нужной точности
за вменяемое количество итераций."
            return
        }
    }
    document.getElementById("check").innerHTML = `f1(${x}, ${y}) = ${ƒ["function1"](x, y)} ≈
${Math.round(ƒ["function1"](x, y))}`
    document.getElementById("check").innerHTML += `<br>f2(${x}, ${y}) = ${ƒ["function2"](x, y)} ≈
${Math.round(ƒ["function2"](x, y))}`
}
```

Примеры и результаты работы программы

Пример 1

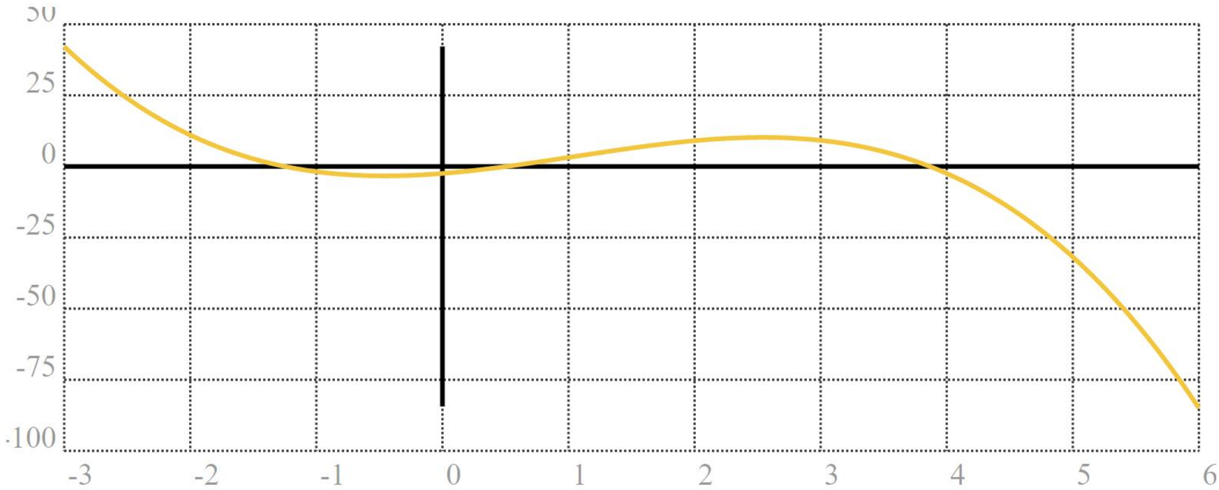
x^3 - 3.125x^2 - 3.5x + 2.458 | Метод Ньютона

Точность: 0,001

Введите интервал

(-2 ; -1)

Рассчитать



№ Шага	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|x_k - x_{k+1}|
1	-2	11.042	-21	-1.474190476190476	0.525809523809524
2	-1.474190476190476	2.377466822201919	-12.233403156462582	-1.2798482484559175	0.19434222773455856
3	-1.2798482484559175	0.2777233892523787	-9.413086170076525	-1.250344280869257	0.029503967586660407
4	-1.250344280869257	0.0060368427531747315	-9.004734217540236	-1.24967387321398	0.0006704076552770388

Пример 2

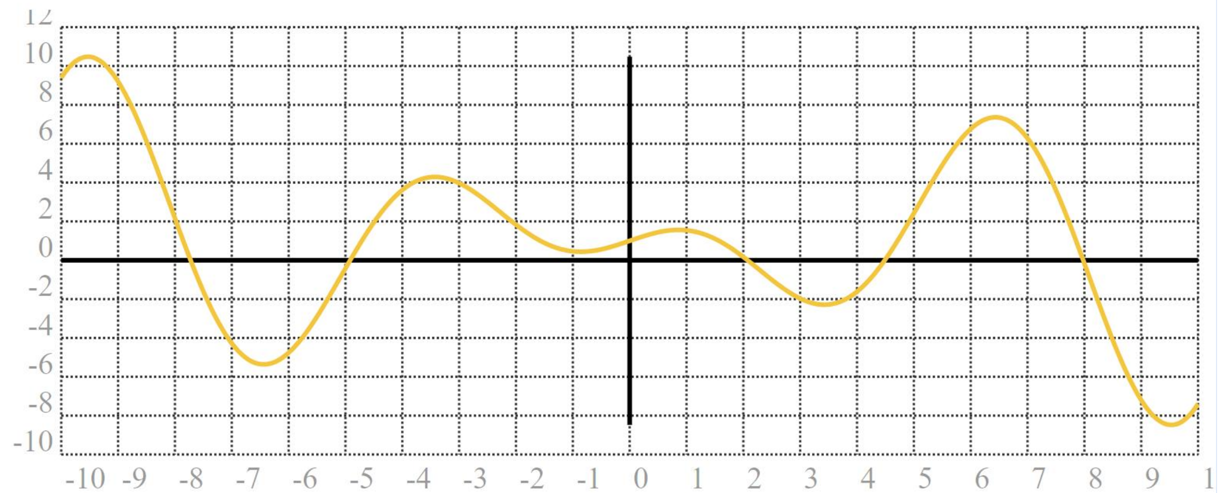
cos(x) * x + 1 | Метод простой итерации

Точность: 0,001

Введите интервал

(-6 ; 2)

Рассчитать



Достаточное условие выполняется

№ Шага	x_i	x_{i+1}	phi(x_{i + 1})	f(x_{k+1})	|x_k - x_{k+1}|
1	-6	-5.065905513615052	-5.852105029037262	-0.7538115033126536	0.9340944863849483
2	-5.065905513615052	-4.918010542652314	-5.065093636504922	-0.004138087325813	0.14789497096273774
3	-4.918010542652314	-4.917198665542184	-4.917998000203651	-0.00006392808369382053	0.0008118771101299771

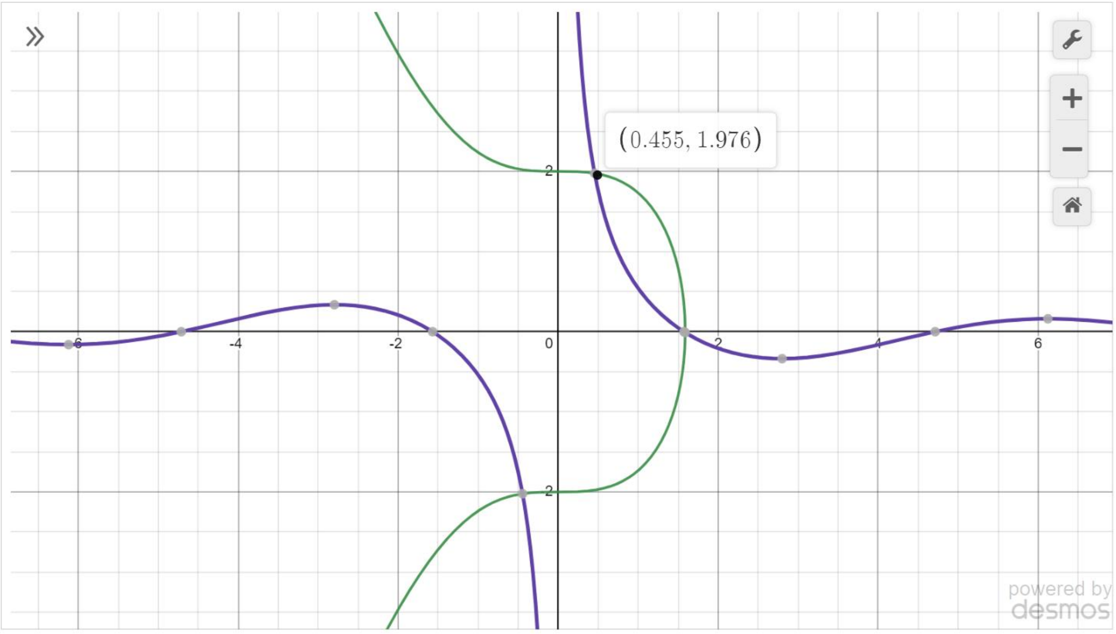
Пример 3

- ○ {x ^ 2 + cos(y) = 1; y = x ^ 4}
- ○ {y = cos(x) - x; (x + 1) ^ 2 + y ^ 10 = 3)}
- ● {x ^ 3 + y ^ 2 = 4; xy = cos(x)}
- ○ {cos(x * cos(1) + y * sin(1)) = y * cos(1); sinh(3x) = cosh(y * sinh(x)) - sin(8x)}

Точность: 0,00001

Введите начальные приближения: { 0.5 ; 2 }

Рассчитать



№ Шага	x_i	yi	|x_k - x_{k+1}|	|y_k - y_{k+1}|
1	0.5	2	0.044764024437333474	0.022856745417999973
2	0.45523597556266654	1.977143254582	0.0006453857993140507	0.0007680803649039132
3	0.4545905897633525	1.976375174217096	2.3442900696558874e-7	2.5632558997838516e-7

f1(0.4545903553343455, 1.976374917891506) = 1.4033219031261979e-13 ≈ 0

f2(0.4545903553343455, 1.976374917891506) = 8.471001677889944e-14 ≈ 0

Вывод

Во время выполнения данной лабораторной работы я познакомился с различными итерационными методами решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений и запрограммировал некоторые из них.