И.В. Блинова, Л.В. Гортинская,
И.А. Лапин, Т.Ф. Панкратова,
В.В. Понятовский, А.И. Попов,
И.Ю. Попов, Л.С. Ратафьева,
В.П. Смирнов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ. ЧАСТЬ 1

Санкт-Петербург
2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

И.В. Блинова, Л.В. Гортинская, И.А. Лапин, Т.Ф. Панкратова, В.В. Понятовский, А.И. Попов, И.Ю. Попов, Л.С. Ратафьева, В.П. Смирнов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ. ЧАСТЬ 1

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 01.03.02, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.04, 12.03.05, 13.03.01, 13.03.02, 14.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01, 16.03.03, 18.03.01, 18.03.02, 19.03.01, 23.03.03, 24.03.02, 27.03.04, 27.03.05
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2025

Блинова И.В., Гортинская Л.В., Лапин И.А., Панкратова Т.Ф., Понятовский В.В., Попов А.И., Попов И.Ю., Ратафьева Л.С., Смирнов В.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Типовой расчет. Часть 1 – СПб: Университет ИТМО, 2025. – 52 с.

Рецензент:
Мирошниченко Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория “ординарный профессор”) института “Высшая инженерно-техническая школа”, Университета ИТМО.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов академического бакалавриата. В пособии рассмотрены следующие темы: “Векторная алгебра”, “Приведение кривой второго порядка к канонической форме”, “Аналитическая геометрия на плоскости”, “Аналитическая геометрия в пространстве”, “Решение систем линеных уравнений”, “Теория квадратичных форм”, “Поверхности второго порядка”.

Университет ИТМО –ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности. В июне 2025 года в Университете ИТМО создан Институт математики, цель которого – усилить математическую подготовку специалистов в области искусственного интеллекта (ИИ) и других высокотехнологичных направлений. Институт работает по сквозной модели, поддерживая факультеты университета и развивая фундаментальные исследования.

Содержание

Общие рекомендации

Типовой расчет по математике за первый модуль включает в себя задачи по темам: «Векторная алгебра», «Приведение кривой второго порядка к канонической форме», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Аналитическая геометрия в пространстве», «Решение систем линеных уравнений», «Теория квадратичных форм», «Поверхности второго порядка».

Каждый студент обязан выполнить семь заданий, одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

Каждый типовой расчет следует выполнить в отдельной тетради, перед выполнением каждого задания написать полное условие, чертежи и рисунки необходимо исполнить на миллиметровке, подклеить затем их в тетрадь и снабдить необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет.

К типовому расчету даются краткие методические указания, принимая во внимание которые и пользуясь указанной литературой, студент может приступить к выполнению типового расчета, не дожидаясь, когда необходимый материал будет изложен на лекции.

1. Векторная алгебра

1.1 Пример выполнения задания 1

Даны четыре точки: $A(2,-1,3)$, $B(4,5,0)$, $C(2,2,-1)$, $D(2,1,0)$. Найти $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, $\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, направляющий вектор биссектрисы угла φ, $S_{\triangle ABC}$, V_{ABCD}, h_D.

Решение. Запишем векторы и найдем их длину:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k},$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+36+9} = 7,$$
$$\overrightarrow{AC} = 3\vec{j} - 4\vec{k},$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+6} = 5.$$

Косинус угла между векторами вычислим с помощью скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AB}|}.$$

Векторы $5\overrightarrow{AB}$ и $7\overrightarrow{AC}$ имеют одинаковую длину, а потому их сумма направлена по биссектрисе угла φ, $\vec{b} = 10\vec{i} + 51\vec{j} - 43\vec{k}$.

Площадь треугольника найдем с помощью векторного произведения:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|,$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 6,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{255+64+36} = \frac{\sqrt{325}}{2}.$$

Объем пирамиды найдем с помощью смешанного произведения:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$h_D = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{6}{\sqrt{325}} = \frac{6\sqrt{13}}{65}.$$

1.2 Варианты задания 1

Даны четыре точки: $A,\ B,\ C,\ D$. Найти $\overrightarrow{AB},\ |\overrightarrow{AB}|,\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC},\ \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, направляющий вектор биссектрисы угла φ, $S_{\triangle ABC},\ V_{ABCD},\ h_D$.

1. $A(1,2,3),\ B(0,0,1),\ C(4,4,-3),\ D(1,2,6)$.

2. $A(-1,2,1),\ B(3,-1,1),\ C(1,4,2),\ D(5,2,1)$.

3. $A(1,-2,3),\ B(-5,0,0),\ C(-3,1,3),\ D(1,1,3)$.

4. $A(2,1,1),\ B(3,3,3),\ C(-4,-1,-2),\ D(6,3,3)$.

5. $A(-2,1,2),\ B(2,1,5),\ C(0,2,4),\ D(-4,0,6)$.

6. $A(-2,-1,1),\ B(4,-3,4),\ C(2,2,1),\ D(2,3,1)$.

7. $A(2,1,3),\ B(4,3,4),\ C(4,-2,-3),\ D(6,3,4)$.

8. $A(2,1,-3),\ B(2,4,1),\ C(3,3,-5),\ D(2,-2,-1)$.

9. $A(2,1,-2),\ B(-4,-4,0),\ C(5,1,2),\ D(3,1,0)$.

10. $A(1,-2,1),\ B(-1,-1,3),\ C(3,1,-5),\ D(-1,2,3)$.

11. $A(1,3,-1),\ B(-2,3,3),\ C(2,5,-1),\ D(2,5,8)$.

12. $A(3,1,2),\ B(1,4,8),\ C(3,4,-2),\ D(1,7,8)$.

13. $A(2,1,3)$, $B(1,3,1)$, $C(-1,7,5)$, $D(1,6,1)$.

14. $A(3,1,-2)$, $B(3,-2,-2)$, $C(2,3,-4)$, $D(3,4,0)$.

15. $A(3,1,1)$, $B(5,7,-2)$, $C(6,1,-3)$, $D(4,2,2)$.

16. $A(1,-2,2)$, $B(2,-4,4)$, $C(4,0,-4)$, $D(5,-4,4)$.

17. $A(2,1,-1)$, $B(2,4,3)$, $C(4,3,0)$, $D(2,4,1)$.

18. $A(2,3,-3)$, $B(-1,1,3)$, $C(2,6,1)$, $D(2,1,-1)$.

19. $A(1,1,-1)$, $B(-1,2,1)$, $C(4,3,5)$, $D(1,4,-1)$.

20. $A(2,-2,1)$, $B(-1,-2,-3)$, $C(4,1,7)$, $D(5,-2,4)$.

21. $A(1,-1,2)$, $B(3,2,-4)$, $C(1,2,6)$, $D(1,2,-1)$.

22. $A(2,-1,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(-4,2,3)$, $D(6,1,-1)$.

23. $A(3,1,4)$, $B(3,-3,1)$, $C(2,3,2)$, $D(3,4,10)$.

24. $A(3,2,-1)$, $B(-3,-1,1)$, $C(3,5,3)$, $D(3,3,0)$.

25. $A(4,1,5)$, $B(2,2,3)$, $C(-2,-1,2)$, $D(5,2,3)$.

26. $A(2,-1,-3)$, $B(2,3,0)$, $C(3,1,-1)$, $D(2,1,0)$.

27. $A(-3,-1,-2)$, $B(3,-3,1)$, $C(1,2,-2)$, $D(1,3,-2)$.

28. $A(-1,-2,3)$, $B(1,0,4)$, $C(3,-2,0)$, $D(2,-2,6)$.

29. $A(4,2,-5)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,0,-3)$, $D(7,2,8)$.

30. $A(3,1,-1)$, $B(6,3,5)$, $C(6,1,3)$, $D(0,-1,-1)$.

2. Приведение кривой второго порядка к канонической форме

2.1 Пример выполнения задания 2

Дано уравнение кривой второго порядка:

$$17x^2 + 8y^2 + 12xy - 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - \sqrt{5} = 0.$$

Выполнив поворот и параллельный перенос координатных осей, получить каноническое уравнение кривой. Построить эту кривую в канонической и исходной системе координат.

Решение. Выполняем поворот осей по формулам:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение и выделим коэффициент при x_1y_1:

$$\begin{gathered} 17(x_1^2 \cos^2\alpha - 2x_1y_1 \cos\alpha \sin\alpha + y_1 \sin^2\alpha)+ \\ +8(x_1^2 \sin^2\alpha + 2x_1y_1 \sin\alpha \cos\alpha + y_1 \cos^2\alpha)+ \\ +12(x_1^2 \sin\alpha \cos\alpha - y_1^2 \sin\alpha \cos\alpha)+ \\ +12x_1y_1(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2\sqrt{5}(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)+ \\ +4\sqrt{5}(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha) - \sqrt{5} = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Приравняем к нулю коэффициент при x_1y_1 получаем:

$$-34\cos\alpha \sin\alpha + 16\cos\alpha \sin\alpha + 12(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -18\cos\alpha\sin\alpha + 12\cos^2\alpha - 12\sin^2\alpha = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin^2\alpha + 3\cos\alpha\sin\alpha - 2\cos^2\alpha = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\mathrm{tg}^2\alpha + 3\mathrm{tg}\alpha - 2 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2},\ \mathrm{tg}\alpha = -2.$$

Выбираем положительный острый угол, то есть $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Зная $\mathrm{tg}\alpha$, по тригонометрическим формула находим

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Подставим эти значения в выражение (2.1). После вычисления коэффициентов получим уравнение:

$$4x_1^2 + y_1^2 + 2y_1 - 3 = 0.$$

Выделим в нем полные квадраты двучленов, получим:

$$4x_1^2 + (y_1+1)^2 - 4 = 0.$$

Выполним параллельный перенос по формулам:

$$\begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1 + 1. \end{cases}$$

Получим в системе $X_2O_2Y_2$ каноническое уравнение кривой:

$$\frac{x_2^2}{1} + \frac{y_2^2}{4} = 1.$$

Это эллипс с полуосями $a = 1,\ b = 2$.

На рисунке 1 изображена эта кривая в канонической и исходной системах координат.

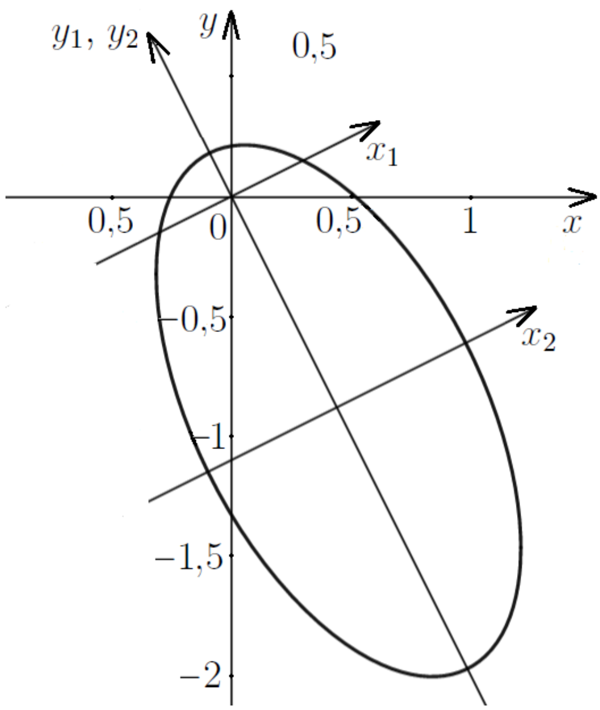

Рис. 1: Схема к задаче 2

2.2 Варианты задания 2

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в канонической и исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

1. $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0.$

2. $17x^2 + 8y^2 + 12xy - 32\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 60 = 0.$

3. $3x^2 + 3y^2 - 20xy + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0.$

4. $13x^2 + 37y^2 + 18xy - 16\sqrt{10}x - 48\sqrt{10}y + 120 = 0.$

5. $4x^2 + 4y^2 - 10xy - 27\sqrt{2}x + 27\sqrt{2}y + 72 = 0.$

6. $13x^2 + 37y^2 - 32xy - 36\sqrt{5}x + 72\sqrt{5}y + 135 = 0.$

7. $3\sqrt{5}x^2 + 4\sqrt{5}xy - 16x - 8y = 0.$

8. $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0.$

9. $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2\sqrt{5}x + \sqrt{5}y + 15 = 0.$

10. $x^2 + 9y^2 + 6xy - 3\sqrt{10}x - 19\sqrt{10}y + 90 = 0.$

11. $5x^2 + 5y^2 - 6\sqrt{2}xy - 16\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 24 = 0.$

12. $7\sqrt{5}x^2 + \sqrt{5}y^2 + 8\sqrt{5}xy + 72x + 36y + 27\sqrt{5} = 0.$

13. $13x^2 + 37y^2 + 18xy + 24\sqrt{10}x - 72\sqrt{10}y + 320 = 0.$

14. $5x^2 + 5y^2 - 8xy - 18\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 27 = 0.$

15. $17x^2 + 8y^2 + 12xy - 16\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y = 0.$

16. $x^2 + y^2 - 2xy - 7\sqrt{2}x + 9\sqrt{2}y + 32 = 0.$

17. $13x^2 + 37y^2 - 32xy - 36\sqrt{5}x + 72\sqrt{5}y + 135 = 0.$

18. $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0.$

19. $35x^2 - 5y^2 + 30xy - 48\sqrt{10}x - 16\sqrt{10}y + 120 = 0.$

20. $x^2 + y^2 + 2xy - 7\sqrt{2}x - 9\sqrt{2}y + 32 = 0.$

21. $x^2 - 2xy + y^2 + 7\sqrt{2}x - 9\sqrt{2}y + 32 = 0.$

22. $\sqrt{5}x^2 + 7\sqrt{5}y^2 - 8\sqrt{5}xy - 36x + 72y + 27\sqrt{5} = 0.$

23. $4x^2 + y^2 + 4xy + \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 15 = 0.$

24. $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 18\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 27 = 0.$

25. $9x^2 + 6xy + y^2 + \sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y + 30 = 0.$

26. $8x^2 + 17y^2 - 12xy + 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0.$

27. $3x^2 + 3y^2 + 10xy - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0.$

28. $x^2 + 9y^2 + 6xy - 3\sqrt{10}x - 19\sqrt{10}y + 90 = 0.$

29. $3x^2 + 3y^2 - 10xy - 16\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 24 = 0.$

30. $5x^2 + 5y^2 - 8xy + 8\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y + 1 = 0.$

3. Аналитическая геометрия на плоскости

3.1 Пример выполнения задания 3

Точка $A(1,3)$ и $B(3,1)$ являются концами одной из диагоналей ромба, длина другой диагонали равна $4\sqrt{2}$. Написать уравнения сторон ромба. Сделать рисунок.

Решение. Чтобы написать уравнения сторон ромба, нам надо найти третью вершину ромба $C(x_0, y_0)$. Для этого составим сначала уравнение диагонали AB как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{1-3}$$

или

$$x + y - 4 = 0.$$

Составим уравнение другой диагонали ромба. По свойству диагоналей она проходит через середину отрезка и перпендикулярная ему. Координаты середины отрезка находим как половину суммы координат его концов, получим: $(2,2)$ – точка пересечения диагоналей. Нормальный вектор прямой имеет координаты $\vec{n}_1 = [1,1]$, следовательно за нормальный вектор второй диагонали можно принять вектор $\vec{n}_2 = [1,-1]$, перпендикулярный вектору $\vec{n}_1$. По координатам точки $(2,2)$ и нормальному вектору $\vec{n}_2$ записываем уравнение второй диагонали CD:

$$x - 2 - (y - 2) = 0.$$

Откуда получаем $x = y$. Пусть координаты точки C равны $C(x_0, y_0)$. В силу $x_0 = y_0$, мы получим $C(x_0, y_0)$. Расстояние от точки до прямой равно половине длины диагонали CD, то есть равно $2\sqrt{2}$ по условию задачи. По формуле расстояния от точки до прямой получаем:

$$\frac{|x_0 + x_0 - 4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$|x_0 - 2| = 2.$$

Получим $x_0 = 0$ или $x_0 = 4$. Таким образом, за точку мы можем взять начало координат $C(0,\ 0)$. Легко теперь составить уравнение двух сторон ромба AC и BC:

$$\begin{cases} 3x - y = 0, \\ x - 3y = 0. \end{cases}$$

Две другие стороны BD и AD параллельны AC и BC соответственно и проходят через точки $A(1,\ 3)$ и $B(3,\ 1)$. Потому

$$\begin{cases} 3(x-3) - (y-1) = 0 \\ 3(x-3) - (y-1) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$$

Рисунок 1 иллюстрирует решение задачи:

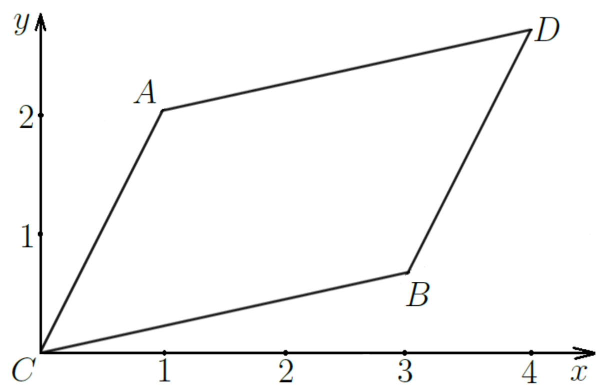

Рис. 2: Схема к задаче 3

3.2 Варианты задания 3

1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - y - 1 = 0$ и $x - 2y = 0$, и точка пересечения его диагоналей $E(3,\ 1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и найти угол между ними. Сделать рисунок.

2. Даны уравнения двух сторон ромба $x+3y+12=0$ и $x+3y-8=0$, и уравнение одной его диагонали $2x+2y+4=0$. Найти координаты вершин ромба. Сделать рисунок.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1,\ 6)$ так, чтобы середина ее отрезка, заключенного между прямыми $x-5y+23=0,\ x-5y+11=0$ и лежала на прямой $2x-y-2=0$. Сделать рисунок.

4. На прямой $x+2y-12=0$ найти точки, равноудаленные от прямых $x+y-5=0$ и $7x-y+11=0$. Сделать рисунок.

5. Через точку $M(2,\ -5)$ проведена прямая так, что ее отрезок, заключенный между прямыми $x-y-1=0$ и $2x-y-18=0$, делится в точке M пополам. Составить уравнение этой прямой. Сделать рисунок.

6. Составить уравнения сторон квадрата, две параллельные стороны которого проходят соответственно через точки $(-1,\ 2)$ и $(0,\ 6)$, а две другие – через точки $(-3,\ 2)$ и $(-6,\ 0)$. Сделать рисунок.

7. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x+5y=0$ и образующей вместе с осями координат треугольник, площадь которого равна 5. Сделать рисунок.

8. Составить уравнения прямых, равноудаленных от трех точек $A_1(1,\ 2),\ A_2(3,\ 0),\ A_3(-4,\ -5)$. Сделать рисунок.

9. Напрямой $x-3y+1=0$ найти точку, равноудаленную от двух точек $(-3,\ 1)$ и $(5,\ 4)$. Сделать рисунок.

10. Точка $(3,\ 1)$ является вершиной равнобедренного треугольника, а прямая $2x + 3y - 1 = 0$ – его гипотенузой. Написать уравнения катетов. Сделать рисунок.

11. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $5x - 12y = 0$ и отстоящей от точки $(1,\ 1)$ на расстоянии 3. Сделать рисунок.

12. На прямой $x - 3y + 13 = 0$ найти точки, отстоящие от прямой $x + 2y + 3 = 0$ на расстоянии $\sqrt{5}$. Сделать рисунок.

13. На осях координат найти точки, равноудаленные от прямых $5x - y + 6 = 0$, $5x + y - 3 = 0$. Сделать рисунок.

14. Даны две вершины $(0,\ 7)$ и $(-2,\ 3)$ треугольника, площадь которого равна 3, и прямая $x = 7$, на которой лежит третья вершина. Составить уравнения сторон треугольника. Сделать рисунок.

15. Даны середины сторон треугольника $A(1,\ 2)$, $B(3,\ -4)$, $C(-5,\ 8)$. Написать уравнения его сторон. Сделать рисунок

16. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $(3,\ 1)$ на расстоянии 2 от точки $(1,\ -2)$. Сделать рисунок.

17. Найти координаты вершин прямоугольного треугольника , если известно, что вершины $(2,\ 3)$ и $(6,\ -1)$ являются концами его гипотенузы, а вершина лежит на прямой $x + y - 3 = 0$. Сделать рисунок.

18. Через точки $(-8,\ 1)$ и $(2,\ 1)$ проведены параллельные прямые, расстояние между которыми равно 6. Написать уравнения этих прямых. Сделать рисунок.

19. Написать уравнения сторон треугольника, у которого $x + y = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$ – высоты, а точка $(1,\ 1)$ – одна из вершин. Сделать рисунок.

20. В равнобедренном треугольнике основание лежит на прямой $3x + 4y - 9 = 0$, длина боковых сторон и равна 6. Найти длину основания BC, если $A(3,\ -5)$. Сделать рисунок.

21. Вычислить длину стороны правильного треугольника, если точка $(2,\ -3)$ является одной из его вершин, а прямая $3x - 4y + 7 = 0$ содержит одну из его сторон. Сделать рисунок.

22. Определить координаты точки, симметричной точке $(2,\ -5)$ относительно прямой $2x + 8y - 15 = 0$. Сделать рисунок.

23. Отрезок AB перпендикулярен к прямой $x - 2y - 8 = 0$ и пересекает ее. Найти координаты конца B отрезка, если он отстоит от данной прямой в четыре раза дальше, чем точка $(2,\ -1)$. Сделать рисунок.

24. Точка $(-1,\ 5)$ является центром окружности, а точка $(1,\ 4)$ – серединой ее хорды. Написать уравнение этой хорды. Сделать рисунок.

25. Через точку $(5,\ 3)$ проведена прямая, составляющая с осями координат треугольник площадью 30. Написать уравнения этой прямой. Сделать рисунок.

26. Точки $(1,\ 2)$, $(-1,\ 4)$, $(3,\ 6)$ являются вершинами треугольника. Написать уравнения его медиан. Сделать рисунок.

27. Написать уравнения биссектрис углов, образуемых прямыми $7x + y - 1 = 0$ и $x - y + 2 = 0$, и убедится в их перпендикулярности. Сделать рисунок.

28. Даны основания равнобедренного треугольника $x - y + 5 = 0$ и его боковая сторона $x + 3y + 2 = 0$. Составить уравнение второй боковой стороны, если она проходит через точку $(1,\ 1)$. Сделать рисунок.

29. Даны уравнения сторон треугольника $3x - 2y + 3 = 0$, $2x - 3y + 7 = 0$, $x + y + 1 = 0$. Определить тангенсы внутренних углов. Сделать рисунок.

30. На прямой $x + 3y - 16 = 0$ найти точки, удаленные от прямой $2x + y - 2 = 0$ на расстояние $\sqrt{5}$. Сделать рисунок.

4. Аналитическая геометрия в пространстве

4.1 Пример выполнения задания 4

Даны две плоскости:

$$a_1 : x + 2y - z + 1 = 0,$$
$$a_2 : x - y + z - 2 = 0.$$

Составить уравнение плоскости a_3, перпендикулярной к плоскости a_1 и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости a_2.

Решение. Поскольку линия пересечения плоскостей a_1 и a_3 лежит в плоскости a_2, то плоскость a_3 перпендикулярна множеству плоскостей, проходящих через прямую пересечения плоскостей a_1 и a_2 (пучок плоскостей).

Любую плоскость из этого множества мы можем записать в виде:

$$x + 2y - z + 1 + k(x - y + z - 2) = 0$$

или

$$(1 + k)x + (2 - k)y + (k - 1)z + 1 - 2k = 0.$$

Для того, чтобы плоскости a_1 и a_3 были перпендикулярными, скалярное произведение их нормальных векторов $\vec{n}_1 = (1,\ 2,\ -1)$ и $\vec{n}_3 = (1 + k,\ 2 - k,\ -k - 1)$ должно быть равно 0. Это приводит к уравнению для определения k:

$$(1 + k) + 2(2 - k) - (k - 1) = -2k + 6 = 0.$$

Получаем $k = 3$.

Подставляя найденное значение в уравнение, получим уравнение искомой плоскости:

$$a_3 = 4x - y + 2z - 5 = 0.$$

4.2 Варианты задания 4

1. Точки $A(1,\ 2,\ 3)$ и $B(1,\ 2,\ 2)$ проектируются из точки $C(1,\ 1,\ 2)$ на плоскость $x + y - z - 3 = 0$. Найти координаты проекций точек и и расстояние между ними.

2. Через точку $A(1,\ -1,\ 1)$ проведена прямая, параллельная плоскости $x + y - z + 3 = 0$ и пересекающая прямую $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$. Найти уравнение этой прямой.

3. Прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ проектируется из точки $C(1,\ 1,\ 1)$ на плоскость $2x + y - z - 2 = 0$. Найти уравнение проекции.

4. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(1,\ 0,\ 3)$ пересекающая две прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ и $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{4}$.

5. Из плоскости $x - 2y + 3x - 6 = 0$ координатными плоскостями высекается треугольник. Найти уравнение и длину высоты этого треугольника, опущенной из вершины, лежащей на оси OZ.

6. Найти проекцию точки $A(2,\ 1,\ 1)$ на плоскость $x + y + 3z + 5 = 0$ и точку, симметричную точке A относительно данной плоскости.

7. На прямой

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ x + z - 2 = 0. \end{cases}$$

найти точку, равноудаленную от двух плоскостей: $x - y + z - 2 = 0$ и $x + y - z - 2 = 0$.

8. Через прямую

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} .$$

проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку $(1,\ -1,\ 1)$. Написать уравнения этих плоскостей.

9. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $x - y + 2z - 2 = 0$ и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости OXZ.

10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,\ 0,\ 1)$ и $B(0,\ -1,\ 1)$ и отстоящей от точки $(5,\ 0,\ -3)$ на расстоянии 4.

11. Найти координаты точки, симметричной точке $A(1,\ 0,\ 1)$ относительно прямой $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

12. Найти общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым $x = y = z$ и $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$.

13. Найти уравнение общего перпендикуляра к двум прямым $x = y = z$ и $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ и его длину между заданными прямыми.

14. На прямой

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + 3z = 11 \end{cases}$$

найти точку, одинаково удаленную от двух данных точек $A(1,\ 0,\ -1)$ и $B(-1,\ 2,\ 1)$.

15. Найти расстояние от точки $M(1,\ 2,\ -2)$ до плоскости, проходящей через две прямые: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{1}$ и $\begin{cases} x = 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = -5 + t \end{cases}$.

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

и отсекающей от координатных плоскостей пирамиду объемом $V = 6$.

17. Принадлежат ли две прямые:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 4 \\ x - 2y + z = -5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$

одной плоскости? Если да, то написать уравнение этой плоскости.

18. Убедившись, что данная плоскость $x+y-3z = 10$ параллельна плоскости, проходящей через точки $A(5,\ 4,\ 3)$, $B(1,\ 2,\ 1)$, $C(3,\ 6,\ 3)$, найти расстояние между ними.

19. Составить уравнение проекции прямой

$$\begin{cases} x = -t + 4 \\ y = t - 3 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$

на плоскость $2x + 4y - 3z = -1$.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -19 \\ 2y - 3z = -26 \end{cases}$$

перпендикулярно к плоскости $4x - 3y + 5z = 46$.

21. Найти проекцию точки $M(-2,\ 1,\ 0)$ на плоскость, проходящую через три точки: $A(1,\ 0,\ -1)$, $B(3,\ 1,\ -2)$, $C(2,\ 4,\ -5)$.

22. Даны вершины треугольника $A(3,\ 0,\ 1)$, $B(1,\ 3,\ -2)$, $C(7,\ -1,\ -2)$. Найти параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины . Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника и содержащей указанную медиану.

23. Доказать перпендикулярность прямых:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 9z = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ 2x - 2y - z = -2 \end{cases}.$$

Написать уравнение плоскости, содержащей первую прямую и перпендикулярную второй прямой.

24. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $A(-2,\ -3,\ 1)$ и отсекающих от координатных осей равные отрезки. Написать канонические уравнения перпендикуляров, опущенных из начала координат на эти плоскости.

25. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 4t + 2 \end{cases}$$

перпендикулярно к плоскости $3x + 2y - z - 5 = 0$.

26. Написать уравнения биссектрис углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 6 \\ x - y - z = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y - z = -2 \\ x - y - 3z = -4 \end{cases}.$$

27. Проверить, являются ли две прямые скрещивающими;если да, то составить уравнения двух параллельных плоскостей, проходящих через указанные прямые: $\frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-1}{5}$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

28. Найти уравнение плоскости, содержащей параллельные прямые: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{3}$, $\frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}$.

29. Найти расстояние от точки $M(-3,\ 4,\ -5)$ до плоскости, содержащей в себе прямую $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-2}$ и точку $A(1,\ 2,\ 0)$.

30. Даны вершины треугольника $A(1,\ -1,\ 2)$, $B(2,\ 1,\ 1)$, $C(3,\ -2,\ 3)$. Найти уравнение его биссектрисы, проведенной из угла . Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника и содержащей указанную биссектрису.

5. Решение систем линейных уравнений

5.1 Пример выполнения задания 5

а) Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Найдем следующие определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 - 21 - 2(-3 - 6) + 21 + 10 = 33,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(5 - 21) - 2(-1 - 24) + 7 + 40 = 33,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -40 - 7 - 2(24 - 2) + 4(21 + 10) = 33,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -40 - 7 - 2(24 - 2) + 4(21 + 10) = 33.$$

По формулам Крамера вычислим неизвестные:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Выполним проверку:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4, \\ 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 1, \\ 3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 1 = 8. \end{cases}$$

Таким образом, решением является столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

б) Проверить систему на совместность. В случае, если система совместна, построить ее решение.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 14, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 14. \end{cases}$$

Обозначим через A и A^r основную и расширенную матрицы системы соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad A^r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 14 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 14 \end{array}\right).$$

Сначала надо определить, имеет ли эта система решения и сколько. Для этого возьмем расширенную матрицу A^r и элементарными преобразованиями строк (только!) приведем ее к трапециевидной форме.

Умножим первую строку на (-2) и прибавим ко второй и четвертой строке, умножим на (-1) и прибавим к третьей. Получим:

$$A^r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 14 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку на (-1) и прибавим к четвертой, таким образом, мы получили нулевую строку:

$$A^r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выбираем третью строку, умножаем на 2 и прибавляем к первой, умножаем на (-5) и прибавляем ко второй:

$$A^r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 28 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -68 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на $\frac{3}{4}$:

$$A^r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на (-1) и прибавим к первой:

$$A^r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Поменяем местами строки 2 и 3. Получим:

$$A^r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \tilde{A}^r .$$

При этом матрица A перейдет в $\tilde{A}^r$.

Отсюда $rankA = rankA^r = 3$. Обозначим $rankA$ через r. Так как ранги A и A^r совпадают, то система совместна, а так как ранг меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Решение неоднородной системы в этом случае может быть получено как сумма общего решения соответствующей однородной и какого-либо решения неоднородной. Общее решение однородной системы представляет из себя линейную комбинацию фундаментальной системы решений, которая состоит из $m - r$ векторов, что в нашем примере равно одному.

Чтобы найти решения, запишем сначала полученную систему:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_4 = 11, \\ x_2 + 2x_4 = 14, \\ x_3 + \frac{3}{4}x_4 = 17. \end{cases}$$

За базисный минор возьмем минор, стоящий в левом верхнем углу матрицы $\tilde{A}^r$, то есть минор, составленный из коэффициентов при неизвестных $x_1,\ x_2,\ x_3$. Тогда, придавая оставшейся переменной x_4 любые значения, неизвестных $x_1,\ x_2,\ x_3$ можно получить единственным образом.
Выразим все переменные через x_4:

$$\begin{cases} x_1 = 11 - \frac{1}{4}x_4, \\ x_2 = 14 - 2x_4, \\ x_3 = 17 - \frac{3}{4}x_4. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение системы будет иметь вид:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -2 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.2 Варианты задания 5

а) Решить систему уравнений методом Крамера:

1. $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0, \\ x + 5y + 3z = 1, \\ 2x - 3y - 4z = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 1, \\ x - 5y + 2z = -15, \\ 2x - y - 7z = -1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 1y + 4z = -5, \\ x + 3y - 6z = 2, \\ 3x - 2y + 2z = 9. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x - y - z = 3, \\ 3x - 4y + z = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ x - 3y - 2z = 0, \\ 2x + y + 3z = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 3y - 2z = -3, \\ x + 3y + 2z = 2, \\ 2x + 2y + z = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x + 2y - 2z = -3, \\ 3x - y + 4z = 13, \\ x + 3y + 5z = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1, \\ 2x - 5y - 4z = 1, \\ x + 3y - 4z = 2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1, \\ 2x - 5y - 4z = 1, \\ x + 3y - 4z = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 7, \\ x - 3y + 2z = -2, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x + 2y + z = 1, \\ x + y + z = -2, \\ 2x + y + 3z = 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2, \\ x + 3y + 4z = 2, \\ 2x + 3y + z = -1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x + y + 2z = -9, \\ 5x + 3y + 5z = -12, \\ 8x + 3y + 7z = -20. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x + 2y + 4z = 29, \\ 5x + y - z = 21, \\ 2x + y + 9z = 76. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + 2z = -2, \\ 3x + y + z = -3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + 8y + z = 80, \\ x - y + 6z = 17, \\ 3x + 4y - 5z = 22. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x + 3y + z = 4, \\ 2x - 5y + 2z = 11, \\ x + 2y - 3z = -7. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 7x + 8y + 6z = 14, \\ 2x - 5y + z = 23, \\ 3x + 4y - z = -10. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x + 3y - 5z = 1, \\ 2x - 5y + 2z = 7, \\ 7x - 12y + 3z = 19. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ 2x + 3y + 7z = 22, \\ 4x + 3y - 10z = 11. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x + y + 2z = 9, \\ 3x + 4y + 7z = 18, \\ 8x + y + z = 11. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -3, \\ 4x + 4y + 2z = 4, \\ 2x + 3y + 2z = 5. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x - 3y + 5z = 26, \\ 5x + 3y - 11z = -26, \\ 8x + 2y - z = 22. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x + 5y - 2z = 15, \\ 2x + y + 3z = -5, \\ x - 5y + 7z = -30. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -23, \\ 7x - 8y + 3z = -15, \\ 4x - 5y - z = -23. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x - 2y - 5z = -20, \\ -3x + 7y + 7z = 28, \\ x + 9y - 4z = 18. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 6x + 8y + 3z = -9, \\ -x + 4y + 9z = -24, \\ 5x - 2y - 7z = 28. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + 5y - 6z = 7, \\ 2x - 2y + 5z = 15, \\ 7x - 3y + 9z = 38. \end{cases}$

б) Проверить систему на совместность. В случае, если система совместна, построить решение:

1. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -9, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 4. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 6. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -8. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_4 = -6. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 5x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -7. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - x_4 = 4. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 6. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -9. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 11, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 24. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 5x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 15, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 17. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -7. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 1. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -1. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 - 2x_3 = 9. \end{cases}$$

6. Теория квадратичных форм

6.1 Пример выполнения задания 6

В данном задании предлагается привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм и сделать рисунок этой поверхности.
Приведём сведения из теории квадратичных форм, которыми мы воспользуемся при решении данной задачи.

Пусть в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ выбран произвольный базис $\vec{e_1}^0,\ \vec{e_2}^0,\ \vec{e_3}^0$. Мы будем рассматривать частный случай такого линейного пространства – привычное для нас геометрическое пространство $\mathbb{R}^3$, а в качестве базиса возьмем координатные орты $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$, с помощью которых зафиксирована пространственная декартова система координат $OXYZ$.

Любой вектор пространства $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ имеет относительно данного базиса координаты $x,\ y,\ z$, то есть мы можем написать: $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Вектору $\vec{x}$ можно также поставить в соответствие одностолбцовую матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

которую также называют вектором.
Рассмотрим теперь выражение вида:

$$\Phi(x,\ y,\ z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2. \qquad (6.1)$$

Это выражение содержит в качестве слагаемых только квадраты координат $x,\ y,\ z$ и все их попарные произведения и называется квадратичной формой координат $x,\ y,\ z$; а числа a_{ij} $(i = 1,\ 2,\ 3;$ $j = 1,\ 2,\ 3)$ – коэффициентами квадратичной формы. Положим $a_{ij} = a_{ji}$. Тогда ясно, что $2a_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$, и квадратичную форму (6.1) можно записать так:

$$\Phi(x,\ y,\ z) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz +$$

$$+a_{21}yx + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{31}zx + a_{32}zy + a_{33}z^2. \tag{6.2}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов этой квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется матрицей квадратичной формы; так как $a_{ij} = a_{ji}$, то ясно, что эта матрица симметрична относительно своей главной диагонали, то есть $A^T = A$, где A^T – матрица, которая получается из матрицы A, если в ней поменять местами строчки со столбцами (то есть транспонировать её). Очевидно, что квадратичную форму в матричном виде можно записать так:

$$\Phi(x,\ y,\ z) = X^T AX. \tag{6.3}$$

Заметим, что здесь $x^T = (x,\ y,\ z)$ – транспонированная матрица X. Найдем теперь единичные собственные векторы матрицы A. Напомним, что ненулевой вектор

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

называется <u>собственным</u> вектором матрицы A, если выполняется условие

$$A\Gamma = \lambda\Gamma. \tag{6.4}$$

Отсюда следует, что

$$(A - \lambda E)\Gamma = 0. \tag{6.5}$$

Это соотношение можно записать в координатной форме так:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Нетрудно заметить, что соотношение (6.3) представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений, записанную в матричном виде, которая имеет ненулевые решения (которые являются собственными векторами матрицы A), если ее определитель равен нулю, то есть должно быть:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{6.7}$$

что более компактно можно записать так:

$$\det(A-\lambda E)=0. \tag{6.8}$$

Уравнение (6.7) (или (6.8)) называется характеристическим уравнением, его корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ – характеристические числа или собственные числа матрицы A.

Найдя характеристические числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ подставляем их по очереди в уравнение (6.6) и, решая его, находим соответствующие им ненулевые собственные векторы $\Gamma^{(1)},\ \Gamma^{(2)},\ \Gamma^{(3)}$. Нормируем теперь найденные собственные векторы, то есть делим каждый собственный вектор $\Gamma^{(i)}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ на его длину и находим единичные собственные векторы матрицы A: $\Gamma^{(1,\ 0)},\ \Gamma^{(2,\ 0)},\ \Gamma^{(3,\ 0)}$.

Сформируем теперь матрицу T' – матрицу преобразования координат, взяв в качестве её столбцов координаты найденных единичных собственных векторов $\Gamma^{(1,\ 0)},\ \Gamma^{(2,\ 0)},\ \Gamma^{(3,\ 0)}$.

Замечание. Отметим, что при формировании матрицы T столбцы следует переставить таким образом, чтобы выполнялось равенство $\det T = 1$, ибо, если окажется, что $\det T = -1$, то это будет означать, что мы перейдем от правой к левой системе координат.
После того, как найдена матрица T, остаётся только сделать преобразование координат

$$X = TX', \tag{6.9}$$

то есть подставить X, определённый соотношением (6.9), в выражение квадратичной формы (6.3). Очевидно, что относительно новой системы координат квадратичная форма будет иметь вид:

$$\Gamma(x,\ y,\ z) = \Gamma'(x',\ y',\ z') =$$

$$= (TX')^T A (TX') = (X')^T (T^T A T) X'. \tag{6.10}$$

Здесь матрица $B = T^T AT$ представляет собою матрицу квадратичной формы в новой системе координат. Теперь остаётся вернуться к данному уравнению поверхности, получить его относительно новой системы координат в соответствии с преобразованием (6.9) и сделать рисунок.

Рассмотрим теперь конкретный пример.

Задача. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $2xz - 3y^2 = 0$ с помощью теории квадратичных форм.

Решение. Левая часть данного уравнения представляет собою квадратичную форму

$$\Gamma(x,\ y,\ z) = 0\cdot x^2 + 0\cdot xy + 1\cdot xz + 0\cdot yx - 3\cdot y^2 + 0\cdot yz + 1\cdot zx + 0\cdot zy + 0\cdot z^2.$$

Сделаем преобразование координат $X = TX'$, где T – матрица поворота координатных осей $OXYZ$, которая преобразует данные уравнения к новой системе координат $OX'Y'Z'$. Ясно, что матрица данной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решая его, получим характеристические числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -3$. Найдем теперь соответствующие им собственные векторы $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(3)}$.

1. Подставим $\lambda_1 = 1$ в уравнение (6.6), сформировав его для нашей квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

Систему линейных уравнений (6.11) запишем в координатной форме

$$\begin{cases} -\lambda_1^{(1)} + \lambda_3^{(1)} = 0 \\ -4\lambda_2^{(1)} = 0 \\ \lambda_1^{(1)} - \lambda_3^{(1)} = 0 \end{cases} \tag{6.12}$$

Решаем систему (6.12), получаем $\lambda_2^{(1)} = 0$, $\lambda_2^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = t$, t – может принимать любое конечное ненулевое значение, те есть мы нашли первый собственный вектор:

$$\Gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Полагая здесь $t = 1$, получим:

$$\Gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остаётся пронормировать его; тогда будет:

$$\Gamma^{(1,\ 0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

2. Аналогично, возьмем $\lambda_2 = -1$, подставим в уравнение (6.6), получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Откуда следует: $\lambda_2^{(2)} = 0, \lambda_1^{(2)} = \lambda_3^{(2)} = t$. При $t = -1$ будет:

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя $\Gamma^{(2)}$ получим:

$$\Gamma^{(2,\ 0)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. И, наконец, берём $\lambda_3 = -3$ и подставляем λ_3 в уравнение (6.12). Аналогично, получим $\lambda_1^{(3)} = \lambda_3^{(3)} = 0,\ \lambda_2^{(3)} = t$. Полагаем $t = 1$, тогда будет:

$$\Gamma^{(3,\ 0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, мы нашли три единичных собственных вектора:

$$\Gamma^{(1,\ 0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \Gamma^{(2,\ 0)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \Gamma^{(3,\ 0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из этих векторов сформируем матрицу поворота T таким образом, чтобы было $\det T = 1$, ибо если окажется $\det T = -1$, то это будет означать, что мы перешли от правой системы координат к левой системе координат. Очевидно, что в качестве матрицы преобразования координат можно принять матрицу:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Подставляя сформированную матрицу T в соотношение (6.9),получим:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}z', \\ y = y', \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}z'. \end{cases} \tag{6.14}$$

Нетрудно заметить, что при таком преобразовании ось остается на месте, а исходная система координатных осей поворачивается вокруг неё на некий угол α (рисунок 3).

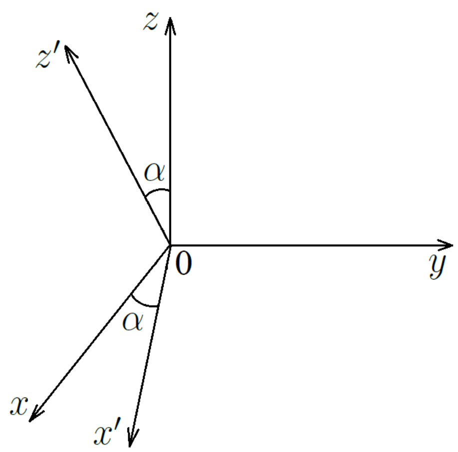

Рис. 3: Поворот системы координат относительно оси OY

Напомним формулы преобразования координат при повороте координатных осей (рисунок 2):

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

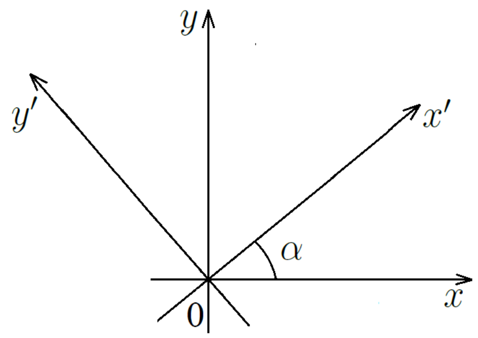

Рис. 4: Поворот координатных осей на угол α

Откуда следует, что $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть угол поворота $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Найдем теперь матрицу нашей квадратичной формы относительно новой системы координат $OX'Y'Z'$ – матрицу $B = T^TAT$:

$$T^AT = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -3 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, квадратичная форма относительно новой системы координат имеет вид:

$$\Phi'(x',\ y',\ z') = (X')^TBX' = (x',\ y',\ z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= (x')^2 - 3(y')^2 - (z')^2.$$

Это означает, что в новой системе координат данное уравнение поверхности 2-го порядка $2xz - 3y^2 = 0$ имеет вид:

$$(x')^2 - 3(y')^2 - (z')^2,$$

что можно записать как

$$(x')^2 = 3(y')^2 + (z')^2.$$

Ясно, что это конус с вершиной в начале координат, вытянутый вдоль оси OX' (рисунок 5).

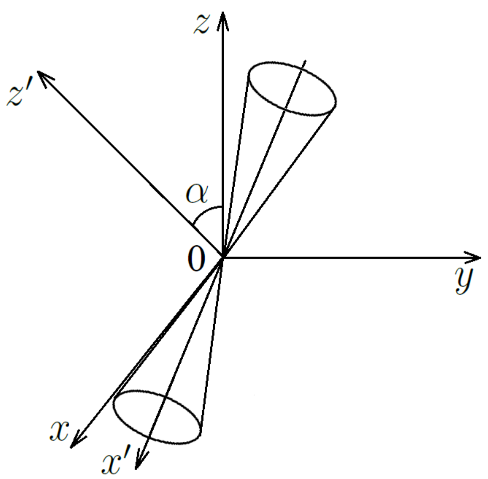

Рис. 5: Поверхность 2-го порядка $2xz - 3y^2 = 0$

6.2 Варианты задания 6

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм. Сделать рисунок.

1. $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - 1 = 0.$

2. $x^2 + 4xy + y^2 + z^2 + 3 = 0.$

3. $3x^2 - 2yz = 0.$

4. $x^2 + y^2 - 6yz + z^2 + 3 = 0.$

5. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 - 3 = 0.$

6. $x^2 + 3xz + y^2 + z^2 = 0.$

7. $x^2 + 4xz + 5y^2 + z^2 - 15 = 0.$

8. $x^2 - y^2 - yz - z^2 - 6 = 0.$

9. $3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4z^2 - 20 = 0.$

10. $x^2 + 8xy + y^2 + z^2 = 0.$

11. $2xy - 5z^2 - 4 = 0.$

12. $x^2 + 4xy + y^2 + z^2 - 3 = 0.$

13. $3x^2 - 2yz - 6 = 0.$

14. $x^2 + y^2 - 6yz + z^2 - 3 = 0.$

15. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 + 3 = 0.$

16. $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 2z^2 + 5 = 0.$

17. $x^2 + 4xz + 5y^2 + z^2 + 15 = 0.$

18. $x^2 + 4xz + 2y^2 + z^2 = 0.$

19. $2xy - 5z^2 + 4 = 0.$

20. $x^2 - y^2 - yz - z^2 + 6 = 0.$

21. $x^2 + 8xy + y^2 + z^2 - 15 = 0.$

22. $x^2 + 4xy + y^2 + z^2 = 0.$

23. $3x^2 - 2yz + 6 = 0.$

24. $x^2 + y^2 - 6yz + z^2 = 0.$

25. $x^2 + 4xz + y^2 - 2z^2 = 0.$

26. $2x^2 + 6xz + 2y^2 + 2z^2 + 1 = 0.$

27. $x^2 + y^2 + 3xz + z^2 = 0.$

28. $x^2 + 4xz + 5y^2 + z^2 = 0.$

29. $2xy - 5z^2 = 0.$

30. $x^2 - y^2 - yz - z^2 = 0.$

7. Поверхности второго порядка

7.1 Пример выполнения задания 7

Поверхностями второго порядка являются: эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды, эллиптические параболоиды и конусы, эллиптические, параболические и гиперболические цилиндры, гиперболические параболоиды. В общем случае произвольного расположения этих поверхностей относительно координатных осей уравнения этих поверхностей имеют вид ($a_{ik},\ b_i,\ c$ – числовые коэффициенты):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1y + b_2y + b_3z + c = 0.$$

При симметричном расположении поверхностей относительно координатных осей их уравнения (они называются каноническими) приобретают вид:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ – эллипсоид;
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ – однополостный эллиптический гиперболоид;
3. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ – двуполостный эллиптический гиперболоид;
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$ – эллиптический конус;
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = z$ – эллиптический параболлоид;
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ – эллиптический цилиндр;
7. $y^2 = 2px$ – параболлический цилиндр;
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ – гиперболический цилиндр;
9. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = z$ – гиперболический цилиндр;

Это канонические уравнения поверхностей второго порядка, “вытянутых” вдоль оси OZ. Легко сообразить, как выглядят канонические уравнения поверхностей, “вытянутых” вдоль осей OX и OY. Поверхности с уравнениями 1 – 6 при $b = a$ называют поверхностями вращения.

В задании приведены поверхности, ограничивающие в пространстве некоторые тела вращения конечных размеров. Следует назвать типы этих поверхностей, нарисовать сечение этого тела плоскостью XOZ (при $x \geq 0$) и само тело в исходной координатной системе. Уравнения поверхностей либо уже имеют форму канонических уравнений, либо приводятся к ним путем сдвига вдоль координатной оси и (или) избавления от радикалов путем возведения уравнения в квадрат.

Пример. Приведенные поверхности ограничивают в пространстве некоторые тела вращения конечных размеров. Следует назвать типы этих поверхностей, нарисовать сечение этого тела плоскостью XOZ (при $x \geq 0$) и само тело в исходной координатной системе:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (0 \leq y \leq 4), \quad y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, \quad y = 6 - \sqrt{x^2 + x^2}.$$

В плоскости OXZ уравнение $x^2+y^2 = 4$ задает окружность радиуса 2 с центром в начале координат. В пространстве этому уравнению соответствует цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны OY, а направляющей служит вышеупомянутая окружность. Неравенство $0 \leq y \leq 4$ указывает, что берется часть этой поверхности, ограниченная плоскостями $y = 0$ и $y = 4$.

Рассмотрим уравнение $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$. Возведя в квадрат левую и правую части, получим $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Это сфера радиуса $r = 2$ с центром в начале координат. Значит, уравнение $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$ задает левую половину сферы.

Наконец, уравнение $y = 6 - \sqrt{x^2 + x^2}$ преобразуем так:

$$(y - 6)^2 = (-\sqrt{x^2 + z^2})^2.$$

Получим $x^2 + z^2 = (y - 6)^2$ – это конус с вершиной в точке $M(0,\ 6,\ 0)$, вытянутый вдоль оси OY.
Уравнение $y = 6 - \sqrt{x^2 + z^2}$ задает его левую часть.

А теперь только остается нарисовать тело, ограниченное рассмотренными поверхностями (рисунок 6):

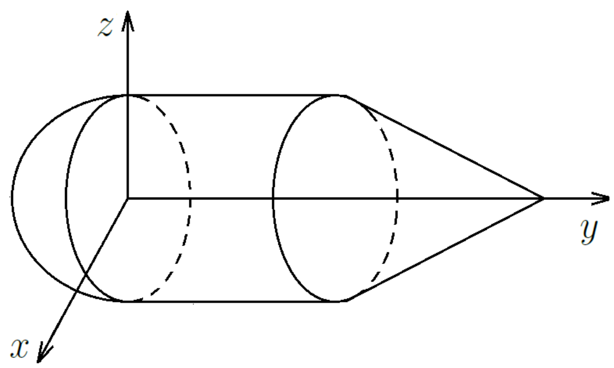

Рис. 6: Тело, ограниченное поверхностями

В плоскости XOZ сечение представляет собой окружность с центром в точке O радиуса 2.

7.2 Варианты задания 7

Приведенные поверхности ограничивают в пространстве некоторые тела вращения конечных размеров. Следует назвать типы этих поверхностей, нарисовать сечение этого тела плоскостью XOZ (при $x \geq 0$) и само тело в исходной координатной системе.

1. a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \ z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2;$

b) $y = x^2 + z^2, \ y = 4;$

c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \ z = -1 + x^2 + y^2, \ z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$

2. a) $z = x^2 + y^2, \ z = 4;$

b) $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, \ y = 0;$

c) $z = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \ z = -1 + x^2 + y^2, \ z = 1 - x^2 - y^2,$ $z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

3. a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ z = 4;$

b) $x^2 + z^2 = 4 (0 \leq y \leq 4), \ y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, \ y = 4;$

c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \ z = -1 + x^2 + y^2, \ z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$

4. a) $x^2+y^2=4,\ z=2-y,\ z=0;$

b) $y^2=x^2+z^2,\ y=-2,\ y=4;$

c) $z=\frac{1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2}{2},\ x^2+y^2=2,\ z=-1-\sqrt{2-x^2-y^2}.$

5. a) $x^2+y^2+z^2=4,\ z=y(z\geq y);$

b) $y=2\sqrt{x^2+z^2},\ y=4;$

c) $z=1-x^2-y^2,\ z=1-x^2-y^2,\ z=-1-\sqrt{2-x^2-y^2}.$

6. a) $z^2=x^2+y^2,\ z=-2,\ z=4;$

b) $x^2+z^2=4,\ y=\sqrt{4-x^2-z^2},\ y=-4;$

c) $z=1+\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2=2,\ z=-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)).$

7. a) $z=-\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=-2\sqrt{x^2+y^2}+4;$

b) $y=x^2+z^2-4,\ y=-0;$

c) $z=1+\sqrt{2-x^2-y^2},\ x^2+y^2=2,\ z=-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)).$

8. a) $z=x^2+y^2-4,\ z=\sqrt{4-x^2-y^2};$

b) $x^2+z^2=4,\ z=6-y,\ y=0;$

c) $z=1+\sqrt{2-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2-1},\ z=-\sqrt{x^2+y^2-1},$

$z=-1-\sqrt{2}+\sqrt{x^2+y^2}.$

9. a) $x^2+y^2=4,\ z-y=4,\ z=0;$

b) $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=4-x^2-y^2;$

c) $z=1+\sqrt{2-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2-1},\ z=-1+\sqrt{x^2+y^2}.$

10. a) $z=4-\sqrt{x^2+y^2},\ z=0;$

b) $x^2+y^2=1,\ z=1-y,\ y=0;$

c) $z=1+\sqrt{2-x^2-y^2},\ z=-1+x^2+y^2,\ z=1-x^2-y^2,$

$z=-1-\sqrt{2}+\sqrt{x^2+y^2}.$

11. a) $x^2+y^2=4,\ z=y+2,\ z=0;$

b) $y=2\sqrt{x^2+z^2},\ y=-4-\sqrt{4-x^2-z^2};$

c) $z=1-\sqrt{2-x^2-y^2},\ z=-\sqrt{x^2+y^2-1},$

$z=-1-\sqrt{2}+\sqrt{x^2+y^2}.$

12. a) $z = x^2 + y^2,\ z = 8 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$;

b) $y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2},\ y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$;

c) $z = -1 + x^2 + y^2,\ z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1},\ z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

13. a) $x^2 + y^2 - z = 0,\ z = 2 - y$;

b) $x^2 + y^2 = 4,\ z + y = 4,\ y = 0$;

c) $z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1},\ z = -1 + x^2 + y^2,\ z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

14. a) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

b) $x^2 + z^2 = 4,\ y = x^2 + z^2 - 4,\ y = 3$;

c) $z = -1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2},\ z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,

$z = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

15. a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z = \pm 4$;

c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},\ z = 1 - x^2 - y^2$.

16. a) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 6 - x^2 - y^2$;

b) $x^2 + z^2 = 4,\ z = 2 + y,\ y = 2 - z$;

c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1},\ z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,

$z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

17. a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = x^2 + y^2 - 4,\ y = 0\ (y \le 0)$;

b) $x^2 + z^2 = 4,\ y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2},\ y = -4$;

c) $z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 = 2,\ z = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

18. a) $x^2 + y^2 = 4,\ z = 8 - x^2 - y^2,\ z = 0$;

b) $x^2 + z^2 = 4,\ z = 4 + y,\ y = 0$;

c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = 2,\ z = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

19. a) $z = x^2 + y^2 - 8,\ z = -2\sqrt{x^2 + y^2}$;

b) $x^2 + z^2 = 4,\ y = \sqrt{x^2 + z^2} - 2,\ y = 2$;

c) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z = -(1 + \sqrt{2})(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)$,

$z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

20. a) $z = x^2 + y^2,\ z = 2 - x^2 - y^2;$

b) $y = 2\sqrt{x^2 + z^2} - 4,\ y = \sqrt{4 - x^2 - y^2};$

c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1},\ x^2 + y^2 = 2,\ z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

21. a) $z = 4 - x^2 - y^2,\ z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2};$

b) $x^2 + z^2 = 4,\ z = -y,\ z = y + 4;$

c) $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = 2,\ z = -3 + x^2 + y^2.$

22. a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2;$

b) $x^2 + z^2 = 4,\ y = 4 - x^2 - z^2,\ y = -4;$

c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1},\ x^2 + y^2 = 2,\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

23. a) $2y = x^2 + z^2 + y^2,\ y + z = 1\ (z \leq 1 - y);$

b) $y = x^2 + z^2 - 4,\ y = \sqrt{4 - x^2 - z^2};$

c) $z = -1 - \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 = 2,$

$z = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$

24. a) $x^2 + y^2 = 4,\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + 4,\ z = 0;$

b) $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2},\ y = -\sqrt{x^2 + z^2} + 2;$

c) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1},\ z = 1 - x^2 - y^2,\ z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

25. a) $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2};$

b) $x^2 + z^2 = 4,\ z = y + 6,\ y = 6;$

c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1},\ z = -1 + x^2 + y^2,\ z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

26. a) $z^2 = x^2 + y^2,\ z = 2,\ z = 4;$

b) $x^2 + z^2 = 4,\ y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2},\ y = 4;$

c) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1},\ z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1},$

$z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

27. a) $z = 4 - x^2 - y^2,\ z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2};$

b) $x^2 + y^2 = 1,\ z = \sqrt{1 - x^2 - z^2} + 2,\ z = 0;$

c) $z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2},\ z = -1 + x^2 + y^2,\ z = -\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$

28. a) $z = x^2 + y^2,\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

b) $y^2 = x^2 + y^2,\ y = -4,\ y = 2$;

c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = -1 + x^2 + y^2,\ z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

29. a) $x^2 + y^2 = 4,\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = 4$;

b) $y = -2 + \sqrt{x^2 + z^2},\ y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$;

c) $z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2},\ z = -1 + x^2 + y^2,\ z = -1 + x^2 + y^2$.

30. a) $z = 4 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$;

b) $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2} + 3,\ x^2 + z^2 = 9,\ y = 0$;

c) $z = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1},\ z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,

$z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.