

Цель

Изучить и сделать анализ различных методов векторной алгебры, аналитической геометрии, сравнить эти методы для решения задачи на определение принадлежности точки тетраэдру. Рассмотреть варианты расположения этой точки: внутри, снаружи, на грани, на ребре, совпадение с вершиной. Оценить эффективность и применимость каждого исследуемого метода.

Постановка задачи

Установить, принадлежит ли точка $P(x, y, z)$ тетраэдра $ABCD$, который определяется вершинами A, B, C, D . Исследовать случаи:

1. точка находится внутри тетраэдра
2. точка находится на грани тетраэдра
3. точка находится на ребре тетраэдра
4. точка совпадает с вершиной тетраэдра
5. точка находится снаружи тетраэдра

Вершины пирамиды

Вершина	Координаты
A	(1, 1, 1)
B	(2, 2, 0)
C	(0, 2, 2)
D	(2, 0, 2)

Тетраэдр не является вырожденным т.к.:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1, -1, 1)$$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \cdot |4| = \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{тетраэдр задан верно}$$

Методы решения

Метод 1: Метод объёмов (через смешанное произведение)

Основная идея Вычисляем объём тетраэдра $ABCD$ и объёмы четырёх тетраэдров с вершиной в точке P : $PBCD$, $APCD$, $ABPD$, $ABCP$ с помощью смешанного произведения векторов. Сравниваем сумму объёмов $V_{PBCD} + V_{APCD} + V_{ABPD} + V_{ABCP}$ с объёмом V_{ABCD} . Каждый объём должен быть больше 0.

Описание математической реализации Метод основан на геометрическом свойстве: точка P принадлежит тетраэдру $ABCD$ тогда и только тогда, когда сумма объёмов четырёх тетраэдров с общей вершиной P равна объёму исходного тетраэдра.

1. Точка внутри тетраэдра

Возьмём точку $P\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ (центроид)

Вычисляем векторы:

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

$$\overrightarrow{PB} = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4} \right)$$

$$\overrightarrow{PC} = \left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

$$\overrightarrow{PD} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1, -1, 1)$$

Вычисляем объёмы:

$$V_{PBCD} = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} > 0$$

$$V_{APCD} = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} > 0$$

$$V_{ABPD} = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} > 0$$

$$V_{ABCP} = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} > 0$$

Проверяем: $V_{PBCD} + V_{APCD} + V_{ABPD} + V_{ABCP} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = V_{ABCD}$

2. Точка на грани (правильный пример)

Точка $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ в грани (ABC)

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Тогда возьмём $\alpha=0.4$, $\beta=0.3$, $\gamma=0.3$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$$

$P(1, 1.6, 1)$ на грани ABC (получена как $P = 0.4A + 0.3B + 0.3C$)

Вычисляем векторы:

$$\overrightarrow{AP} = (0, 0.6, 0)$$

$$\overrightarrow{PB} = (1, 0.4, -1)$$

$$\overrightarrow{PC} = (-1, 0.4, 1)$$

$$\overrightarrow{PD} = (1, -1.6, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1, -1, 1)$$

Вычисляем объёмы:

$$V_{PBCD} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0.4 & -1 \\ -1 & 0.4 & 1 \\ 1 & -1.6 & 1 \end{vmatrix} \right| > 0$$

$$V_{APCD} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0.6 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| > 0$$

$$V_{ABPD} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| > 0$$

$$V_{ABCP} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{vmatrix} \right| = 0 \quad (\text{точка в плоскости ABC})$$

Проверяем: $V_{PBCD} + V_{APCD} + V_{ABPD} + 0 = V_{ABCD}$

3. Точка на грани тетраэдра

Точка $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ в грани (ABC)

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Тогда $\alpha=0.2, \beta=0.3, \gamma=0.5$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$$