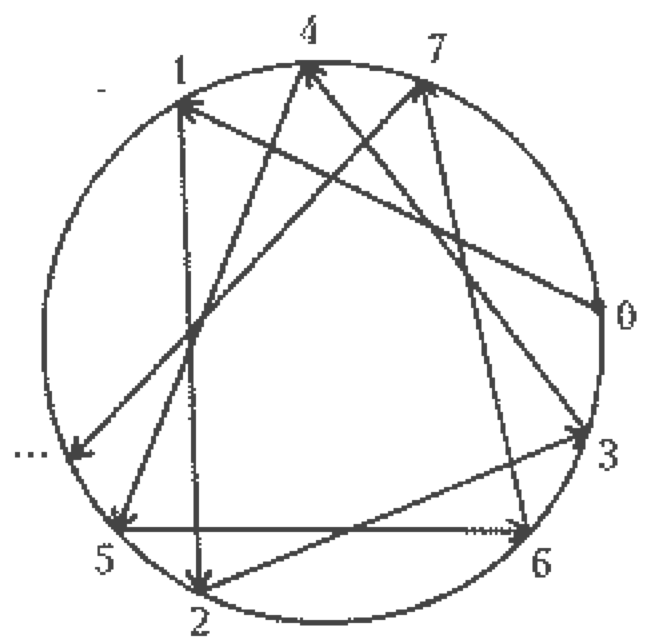

Рис.1. Траектория точки при итерациях поворота окружности

бой дуге окружности, асимтотически (при большом времени наблюдения) пропорционально длине дуги (и не зависит ни от положения дуги на окружности, ни от начальной точки, ни даже от величины угла поворота).

Распределение первых цифр чисел 2^n получается теперь следующим образом. Рассмотрим последовательность чисел $\lg(2^n) = nx$. Число $x = \lg 2$ иррационально (здесь и далее lg — логарифм по основанию 10). По теореме последовательность дробных долей чисел nx равномерно распределена на интервале (0, 1).

Но первая цифра i числа 2^n определяется тем, в какой из интервалов между числами $\lg(i+1)$ и $\lg i$ попадает дробная доля числа $\lg(2^n)$. По теореме, доли чисел 2^n, начинающихся с i (= 1, 2, ..., 9) составляют $p_i = \lg(i+1) - \lg i$. Например, для первой цифры $i = 1$ эта доля составляет $\lg 2 \approx 0{,}301$ (близость этого логарифма к 3/10 отражает близость $2^{10} = 1024$ к $1000 = 10^3$). Поэтому доля единиц среди первых цифр чисел 2^n составляет примерно 30%. Доли всех цифр (в процентах) даются таблицей 1.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5
$100\ p_i$	30	17	12	10	8
i	6	7	8	9	
$100\ p_i$	7	6	5	5	

Девяток примерно в 6 раз меньше, чем единиц (рис.2).

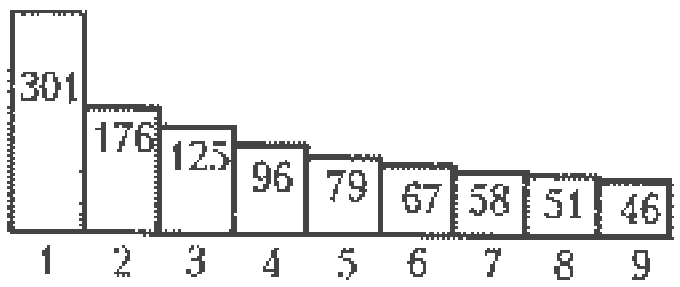

Рис.2. Распределение первых цифр степеней двойки

Из всего сказанного для дальнейшего важен такой вывод: приведенное в таблице странно неравномерное распределение первых цифр чисел последовательности 2^n объясняется равномерным распределением дробных долей логарифмов чисел нашей последовательности.

Этот вывод приводит к одинаковому распределению первых цифр для многих различных последовательностей (например, для геометрических прогрессий 2^n или 3^n, но не только для них).

Население стран мира

Лет двадцать назад Н.Н.Константинов сообщил мне, что первые цифры населений стран мира распределены так же, как первые цифры степеней двойки (табл. 2).

Таблица 2

первая цифра	1	2	3	4	5
процент числа стран, 1995	29	21	10	11	6
первая цифра	6	7	8	9	
процент числа стран, 1995	6	8	3	6	

Вот мое тогдашнее объяснение этого факта.

Согласно теории Мальтуса, население каждой страны растет в геометрической прогрессии. Из теоремы Вейля (см. предыдущий раздел) следует, что первые цифры населения фиксированной страны в последовательные годы распределены как первые цифры степеней двойки (см. рис.2). Согласно «эргодической теореме» (или, лучше сказать, согласно эргодическому принципу), временное среднее можно заменить пространственным: распределение по странам в один и тот же год должно совпадать с распределением в одной стране в разные годы.

Для контроля теории я рассмотрел числа страниц в книгах моей библиотеки, длины рек и высоты гор. Во всех этих случаях доли единиц и доли девяток среди первых цифр полученных чисел оказались практически одинаковыми: $p_i = 1/9$. Книги, реки и горы не растут в геометрической прогрессии, теория Мальтуса к ним не применима. Поэтому различие статистик первых цифр в числах, выражающих населения и, скажем, длины рек, служит своеобразным косвенным подтверждением формулы Мальтуса (согласно которой население растет в геометрической прогрессии).

Однако лет десять назад М.Б.Севрюк обнаружил, что не только населения, но и площади стран мира подчиняются такому же закону распределения первых цифр, как степени двойки! К площадям теория Мальтуса, по-видимому, неприменима, так что возник вопрос — как объяснить это поведение площадей. Ниже я пытаюсь дать ответ на этот вопрос.

Площади стран мира

Предыдущие примеры подсказывают, что следует искать причину странного распределения первых цифр площадей стран мира либо в их росте, либо в убывании (в геометрической прогрессии). История мира показывает, что площади стран (особенно империй) иногда растут, а иногда убывают за счет то присоединения одних стран к другим, то распада. Рассмотрим вначале самую примитивную модель этого явления. Предположим, что за единицу времени страна с вероятностью половина делится пополам, а с вероятностью половина присоединяет к себе другую страну такой же площади, как она сама.

Теорема. *Распределение дробных долей логарифмов площадей, занимаемых такой случайной страной в момент n, стремится к равномерному распределению на интервале (0, 1) при n, стремящемся к бесконечности.*

Иными словами, вероятность того, что первая цифра площади окажется единицей, стремится при $n \to \infty$ к $\lg 2 \approx 0{,}301$, ..., что она окажется девяткой — примерно к 0,046.

Действительно, рассмотрим последовательность $l_n = \lg S(n)$, где S — площадь в момент n. Точка l_n в следующий момент $n+1$ с одинаковой вероятностью сдвигается влево или вправо на $\lg 2$ (причем, конечно, выбор, что делать — делиться или объединяться, — в каждый момент времени независим от выбора в другие моменты времени). По законам теории вероятностей, распределение величины l_n при больших n будет в основном сосредоточено на