УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 9

Студент
Быx Даниил Максимович
P3109

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2025 г.

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $3 < (x_4x_5 + x_1x_2x_3) < 8$ и неопределенное значение при $(x_1x_2x_3) = 1$.

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_4x_5	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	2	0	0	0
3	0	0	0	1	1	3	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	1	1	d
5	0	0	1	0	1	1	1	1	d
6	0	0	1	1	0	2	1	1	d
7	0	0	1	1	1	3	1	1	d
8	0	1	0	0	0	0	2	2	0
9	0	1	0	0	1	1	2	2	0
10	0	1	0	1	0	2	2	2	1
11	0	1	0	1	1	3	2	2	1
12	0	1	1	0	0	0	3	3	0
13	0	1	1	0	1	1	3	3	1
14	0	1	1	1	0	2	3	3	1
15	0	1	1	1	1	3	3	3	1
16	1	0	0	0	0	0	4	4	1
17	1	0	0	0	1	1	4	4	1
18	1	0	0	1	0	2	4	4	1
19	1	0	0	1	1	3	4	4	1
20	1	0	1	0	0	0	5	5	1
21	1	0	1	0	1	1	5	5	1
22	1	0	1	1	0	2	5	5	1
23	1	0	1	1	1	3	5	5	0
24	1	1	0	0	0	0	6	6	1
25	1	1	0	0	1	1	6	6	1
26	1	1	0	1	0	2	6	6	0
27	1	1	0	1	1	3	6	6	0
28	1	1	1	0	0	0	7	7	1
29	1	1	1	0	1	1	7	7	0
30	1	1	1	1	0	2	7	7	0
31	1	1	1	1	1	3	7	7	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$
\begin{aligned}
f = {} & \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \\
& \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee \\
& \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}
\end{aligned}
$$

Каноническая КНФ:

$$
\begin{aligned}
f = {} & (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\
& (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\
& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\
& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})
\end{aligned}
$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$		
m_{16}	10000	✓
m_4	00100	✓
m_{10}	01010	✓
m_{17}	10001	✓
m_{18}	10010	✓
m_{20}	10100	✓
m_{24}	11000	✓
m_5	00101	✓
m_6	00110	✓
m_{11}	01011	✓
m_{13}	01101	✓
m_{14}	01110	✓
m_{19}	10011	✓
m_{21}	10101	✓
m_{22}	10110	✓
m_{25}	11001	✓
m_{28}	11100	✓
m_7	00111	✓
m_{15}	01111	✓

$K^1(f)$		
m_4-m_5	0010X	✓
m_4-m_6	001X0	✓
m_{16}-m_{17}	1000X	✓
m_{16}-m_{18}	100X0	✓
m_{16}-m_{20}	10X00	✓
m_{16}-m_{24}	1X000	✓
m_4-m_{20}	X0100	✓
m_6-m_7	0011X	✓
m_5-m_7	001X1	✓
m_{10}-m_{11}	0101X	✓
m_{10}-m_{14}	01X10	✓
m_5-m_{13}	0X101	✓
m_6-m_{14}	0X110	✓
m_{18}-m_{19}	1001X	✓
m_{17}-m_{19}	100X1	✓
m_{20}-m_{21}	1010X	✓
m_{20}-m_{22}	101X0	✓
m_{17}-m_{21}	10X01	✓
m_{18}-m_{22}	10X10	✓
m_{24}-m_{25}	1100X	✓
m_{24}-m_{28}	11X00	✓
m_{17}-m_{25}	1X001	✓
m_{20}-m_{28}	1X100	✓
m_5-m_{21}	X0101	✓
m_6-m_{22}	X0110	✓
m_{14}-m_{15}	0111X	✓
m_{13}-m_{15}	011X1	✓
m_{11}-m_{15}	01X11	✓
m_7-m_{15}	0X111	✓

$K^2(f)$	
m_4-m_5-m_6-m_7	001XX
m_{16}-m_{17}-m_{18}-m_{19}	100XX
m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}	10X0X
m_{16}-m_{18}-m_{20}-m_{22}	10XX0
m_{16}-m_{17}-m_{24}-m_{25}	1X00X
m_{16}-m_{20}-m_{24}-m_{28}	1XX00
m_4-m_5-m_{20}-m_{21}	X010X
m_4-m_6-m_{20}-m_{22}	X01X0
m_{10}-m_{11}-m_{14}-m_{15}	01X1X
m_6-m_7-m_{14}-m_{15}	0X11X
m_5-m_7-m_{13}-m_{15}	0X1X1

$Z(f)$
001XX
100XX
10X0X
10XX0
1X00X
1XX00
X010X
X01X0
01X1X
0X11X
0X1X1

Таблица импликант

Необходимо вычеркнуть строки, соответствующие существенным импликантам (те, что покрывают вершины, которые не покрыты другими импликантами), столбцы, которые соответствуют вершинам, покрываемым существенными импликантами. Кроме того, вычеркнем импликанты, которые не покрывают ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы														
		0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
		0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
		1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
		0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
		10	11	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	24	25	28
	~~001XX~~															
	~~100XX~~						X	X	X	X						
A	10X0X						X	X			X	X				
B	10XX0						X		X		X		X			
	~~1X00X~~						X	X						X	X	
	~~1XX00~~						X				X			X		X
C	X010X										X	X				
D	X01X0										X		X			
	~~01X1X~~	X	X		X	X										
	~~0X11X~~				X	X										
	~~0X1X1~~			X		X										

Ядро покрытия:

$$T = \begin{Bmatrix} 0X1X1 \\ 01X1X \\ 100XX \\ 1X00X \\ 1XX00 \end{Bmatrix}$$

В результате получаем упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы	
		1	1
		0	0
		1	1
		0	1
		1	0
		21	22
A	10X0X	X	
B	10XX0		X
C	X010X	X	
D	X01X0		X

Метод Петрика:

Сначала запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$Y = (A \vee C)\ (B \vee D)$

Затем приведем выражение в ДНФ:

$Y = A\,B \vee A\,D \vee B\,C \vee C\,D$

Тогда возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0X1X1 \\ 01X1X \\ 100XX \\ 1X00X \\ 1XX00 \\ 10X0X \\ 10XX0 \end{Bmatrix} \qquad C_2 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0X1X1 \\ 01X1X \\ 100XX \\ 1X00X \\ 1XX00 \\ 10X0X \\ X01X0 \end{Bmatrix} \qquad C_3 = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0X1X1 \\ 01X1X \\ 100XX \\ 1X00X \\ 1XX00 \\ 10XX0 \\ X010X \end{Bmatrix}$$

$$S_1^a = 21 \qquad S_2^a = 21 \qquad S_3^a = 21$$
$$S_1^b = 28 \qquad S_2^b = 28 \qquad S_3^b = 28$$

$$C_4 = \begin{Bmatrix} T \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0X1X1 \\ 01X1X \\ 100XX \\ 1X00X \\ 1XX00 \\ X010X \\ X01X0 \end{Bmatrix}$$

$$S_4^a = 21$$
$$S_4^b = 28$$

Рассмотрим минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 0X1X1 \\ 01X1X \\ 100XX \\ 1X00X \\ 1XX00 \\ 10X0X \\ 10XX0 \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 21$$
$$S^b = 28$$

Данному покрытию соответствует МДНФ:

$$f = \overline{x_1}\,x_3\,x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5}$$

Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ

$x_1 = 0$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00				
01	d	d	d	d
11		1	1	1
10			1	1

$x_1 = 1$

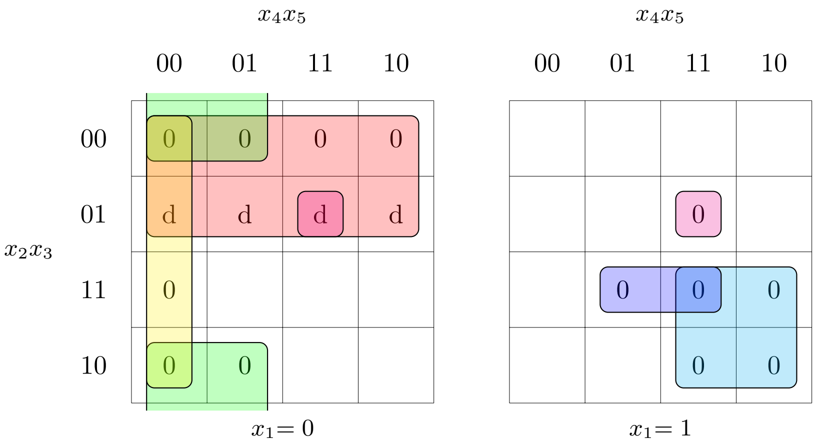
x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1		1
11	1			
10	1	1		

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 0X1X1 \\ 01X1X \\ 100XX \\ 1X00X \\ 1XX00 \\ 10X0X \\ 10XX0 \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 21$$
$$S^b = 28$$

$$f = \overline{x_1}\,x_3\,x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5}$$

Определение МКНФ



$$C_{\min} = \left\{ \begin{matrix} 00XXX \\ 0X00X \\ 0XX00 \\ 11X1X \\ 111X1 \\ X0111 \end{matrix} \right\}$$

$$S^a = 19$$
$$S^b = 25$$

$$f = (x_1 \vee x_2)\,(x_1 \vee x_3 \vee x_4)\,(x_1 \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5})\,(x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1}\,x_3\,x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5} \qquad S_Q = 28 \quad \tau = 2$$

$$f = \overline{x_1}\,(x_3\,x_5 \vee x_2\,x_4) \vee x_1\,(\overline{x_2} \vee \overline{x_4})\,(\overline{x_3} \vee \overline{x_5}) \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \qquad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = (\overline{x_3} \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_2} \vee \overline{x_4})$$

$$\overline{\varphi} = x_3\,x_5 \vee x_2\,x_4$$

$$f = \overline{x_1}\,\overline{\varphi} \vee \varphi\,x_1 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \qquad S_Q = 17 \quad \tau = 5$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_2)\,(x_1 \vee x_3 \vee x_4)\,(x_1 \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5})\,(x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \qquad S_Q = 25 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_1 \vee x_2\,(x_4 \vee x_3\,x_5))\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}\,(\overline{x_3} \vee \overline{x_5}))\,(x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \qquad S_Q = 22 \quad \tau = 5$$

$$\varphi = x_2\,(x_4 \vee x_3\,x_5)$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_4}\,(\overline{x_3} \vee \overline{x_5})$$

$$f = (x_1 \vee \varphi)\,(\overline{\varphi} \vee \overline{x_1})\,(x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \qquad S_Q = 18 \quad \tau = 6$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = \overline{x_1}\,\overline{\varphi} \vee \varphi\, x_1 \vee x_1\, \overline{x_2}\,\overline{x_4} \quad (S_Q = 17, \tau = 5)$$

$$\varphi = (\overline{x_3} \vee \overline{x_5})\ (\overline{x_2} \vee \overline{x_4})$$

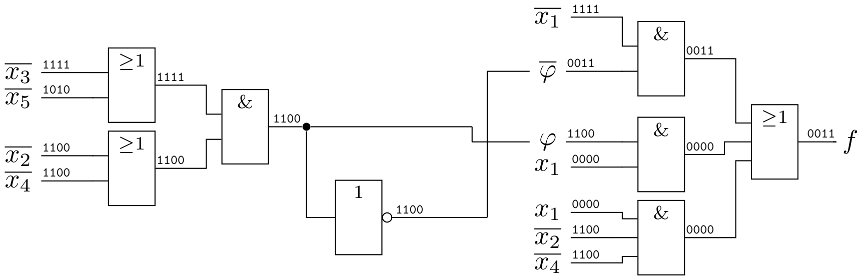
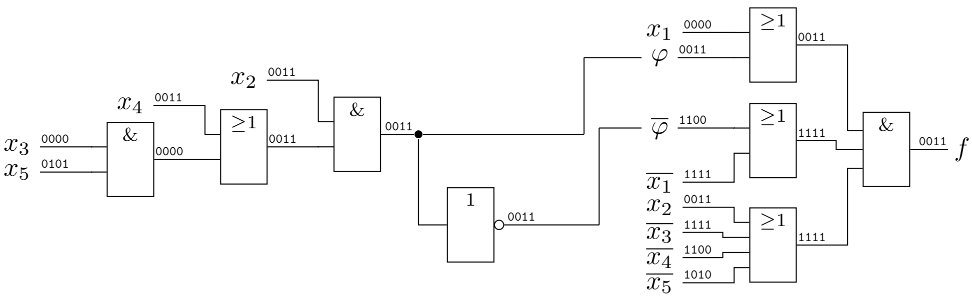


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee \varphi)\ (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1})\ (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad (S_Q = 18, \tau = 6)$$

$$\varphi = x_2\ (x_4 \vee x_3\, x_5)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1}\,\overline{\varphi}}\;\overline{\varphi\, x_1}\;\overline{x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}}} \quad (S_Q = 23, \tau = 8)$$

$$\varphi = \overline{x_2\, x_4}\;\overline{x_3\, x_5}$$

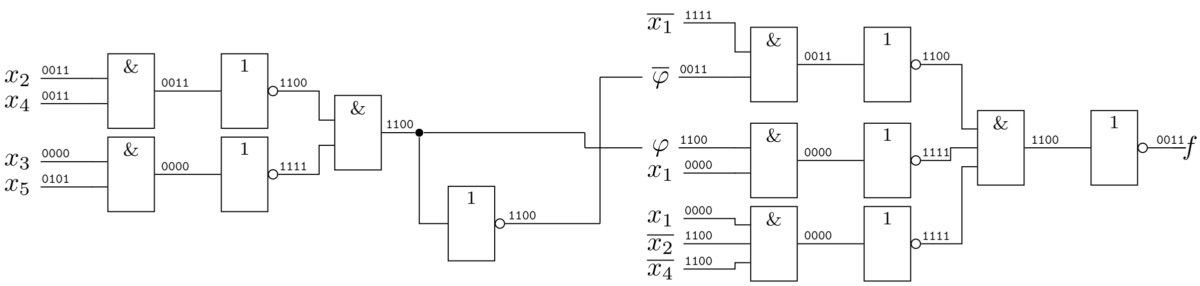
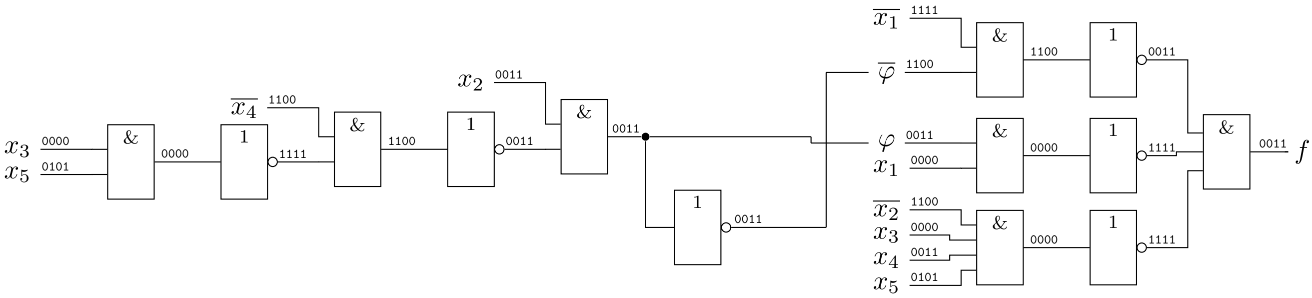


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1}\,\overline{\varphi}}\;\overline{\varphi\, x_1}\;\overline{\overline{x_2}\, x_3\, x_4\, x_5} \quad (S_Q = 23, \tau = 9)$$

$$\varphi = x_2\,\overline{\overline{x_4}\;\overline{x_3\, x_5}}$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1}\,\varphi}\;\overline{\overline{\overline{\overline{\varphi}\,x_1}\;\overline{x_1\,\overline{\overline{\overline{x_2}\,\overline{x_4}}}}}}} \quad (S_Q = 24, \tau = 7)$$

$$\varphi = \overline{\overline{x_3\, x_5}\;\overline{x_2\, x_4}}$$

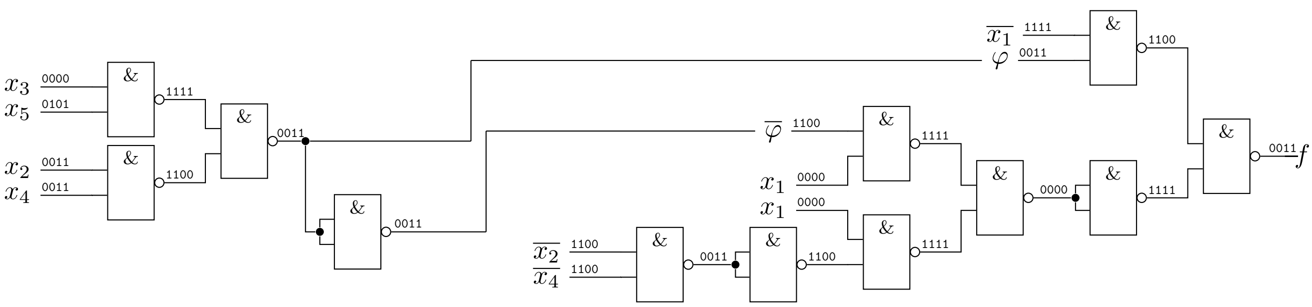


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{x_1}\,\varphi}\;\overline{\overline{\overline{\varphi}\,x_1}\;\overline{\overline{\overline{\overline{x_2}\,x_3}}\;\overline{\overline{x_4\,x_5}}}}}} \quad (S_Q = 30, \tau = 9)$$

$$\varphi = \overline{\overline{x_2\,\overline{\overline{x_4}\;\overline{x_3\, x_5}}}}$$