Типовой расчет по линейной алгебре по теме «Матрицы и определители. Векторные пространства»

Оглавление

Задание 1. Матрицы

Пример выполнения задания 1

Задача. Даны две квадратные матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&3&4\\1&2&1\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1&2&-5\\-3&0&1\\2&3&5\end{pmatrix}.$$

1. Вычислить $A\cdot B$, $B\cdot A$. Являются ли матрицы A и B коммутирующими?
2. Найти матрицу A^{-1} с помощью элементарных преобразований строк. Проверить, что $A\cdot A^{-1}=E$;
3. Найти матрицу B^{-1} методом присоединенной (союзной) матрицы. Проверить, что $B^{-1}\cdot B=E$;
4. Найти значение полинома $f(x)=2x^2-3x+5$ от матрицы A.

Решение. 1) Вычислим произведения матриц:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&3&4\\1&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-5\\-3&0&1\\2&3&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-3)+(-1)\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot0+(-1)\cdot3 & 1\cdot(-5)+2\cdot1+(-1)\cdot5\\ -2\cdot1+3\cdot(-3)+4\cdot2 & -2\cdot2+3\cdot0+4\cdot3 & -2\cdot(-5)+3\cdot1+4\cdot5\\ 1\cdot1+2\cdot(-3)+1\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot0+1\cdot3 & 1\cdot(-5)+2\cdot1+1\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-1&-8\\-3&8&33\\-3&5&2\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&-5\\-3&0&1\\2&3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&3&4\\1&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-2)+(-5)\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot3+(-5)\cdot2 & 1\cdot(-1)+2\cdot4+(-5)\cdot1\\ -3\cdot1+0\cdot(-2)+1\cdot1 & -3\cdot2+0\cdot3+1\cdot2 & -3\cdot(-1)+0\cdot4+1\cdot1\\ 2\cdot1+3\cdot(-2)+5\cdot1 & 2\cdot2+3\cdot3+5\cdot2 & 2\cdot(-1)+3\cdot4+5\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&-2&2\\-2&-4&4\\1&23&15\end{pmatrix}$$

Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что $A\cdot B\neq B\cdot A$. Значит, матрицы A и B не коммутируют.

2. Найдем матрицу A^{-1} с помощью элементарных преобразований строк.

Припишем к исходной матрице справа единичную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\-2&3&4&0&1&0\\1&2&1&0&0&1\end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований над строками добьемся того, чтобы слева оказалась единичная матрица. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{5}{14}&-\frac{2}{7}&\frac{11}{14}\\0&1&0&\frac{3}{7}&\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

Таким образом:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{11}{14} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Нетрудно проверить, что $AA^{-1} = E$ (при выполнении типового расчета проверка обязательна).
3) Найдем матрицу B^{-1} методом присоединенной (союзной) матрицы.

Напомним, что матрица $\tilde{B}$ является союзной к матрице B, если ее элементы являются алгебраическими дополнениями соответствующих элементов матрицы B. Для вычисления обратной матрицы воспользуемся свойством $B^{-1} = \frac{1}{\det B}\tilde{B}^T$. Проверим сначала, что матрица B обратима. Действительно, $\det B = 76 \neq 0$. Далее вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы B:

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3;\ B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17;\ B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -25;\ B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15;\ B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 14;\ B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Таким образом, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} -3 & 17 & -9 \\ -25 & 15 & 1 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix}$.

Отсюда

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{76} & -\frac{25}{76} & \frac{1}{38} \\ \frac{17}{76} & \frac{15}{76} & \frac{7}{38} \\ -\frac{9}{76} & \frac{1}{76} & \frac{3}{38} \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что $BB^{-1} = E$ (при выполнении типового расчета проверка обязательна).
4) Найдем значение полинома $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ от матрицы A.

$$f(A) = 2A^2 - 3A + 5E = 2\begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ -4 & 13 & 18 \\ -2 & 10 & 8 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 15 \\ -2 & 22 & 24 \\ -7 & 14 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варианты задания 1

Даны две квадратные матрицы A и B.

1. Вычислить $A \cdot B$, $B \cdot A$. Являются ли матрицы A и B коммутирующими?
2. Найти матрицу A^{-1} с помощью элементарных преобразований строк. Проверить, что $A \cdot A^{-1} = E$;
3. Найти матрицу B^{-1} методом присоединенной (союзной) матрицы. Проверить, что $B^{-1} \cdot B = E$;
4. Найти значение полинома $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ от матрицы A.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix};$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix};$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix};$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$

7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix};$

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix};$

11. $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};$

12. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix};$

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix};$

14. $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix};$

15. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix};$

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix};$

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix};$

18. $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix};$

19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix};$

20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix};$

21. $A=\begin{pmatrix}-5&4&2\\2&-3&6\\1&2&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-9&3&2\\2&4&-5\\1&-7&2\end{pmatrix}$;

22. $A=\begin{pmatrix}1&4&5\\2&-3&6\\1&2&-4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&3&4\\2&7&-5\\2&1&3\end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix}7&4&1\\2&-3&-2\\-1&3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&2&-4\\3&-7&-2\\5&9&3\end{pmatrix}$;

24. $A=\begin{pmatrix}-5&2&3\\8&1&-1\\-2&2&9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&-6\\5&-7&-2\\7&1&2\end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}-3&4&1\\2&2&-5\\-8&7&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&2&-4\\-3&8&-1\\2&-2&3\end{pmatrix}$;

26. $A=\begin{pmatrix}-1&2&-6\\-3&2&-3\\-1&1&9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7&11&-5\\4&2&-3\\-2&3&1\end{pmatrix}$;

27. $A=\begin{pmatrix}8&3&-2\\11&-3&4\\5&4&-3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&-7&8\\5&-2&4\\2&-5&3\end{pmatrix}$;

28. $A=\begin{pmatrix}3&11&-1\\-2&4&-3\\3&4&-5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2&2&8\\3&-4&1\\3&-2&1\end{pmatrix}$;

29. $A=\begin{pmatrix}4&2&-1\\-2&5&-11\\2&3&-8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&5&6\\-2&4&7\\2&1&-4\end{pmatrix}$;

30. $A=\begin{pmatrix}3&4&-2\\1&3&-7\\-1&2&-5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3&4&-8\\5&11&2\\6&-1&8\end{pmatrix}$.

Задание 2. Системы линейных уравнений

Пример выполнения задания 2

Задача. Решить систему линейных уравнений. Записать решение в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить как линейную комбинацию фундаментальной системы решений.

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-3x_4+x_5=0,\\2x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=2,\\x_1-x_2+x_3-x_4+x_5=14,\\2x_1-3x_2+2x_3-4x_4+2x_5=14.\end{cases}$$

Решение. Это система $n=4$ линейных неоднородных уравнений с $m=5$ неизвестными x_1,x_2,x_3,x_4,x_5. Обозначим через A и A^r основную и расширенную матрицы системы соответственно.

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&-3&1\\2&1&-2&1&-1\\1&-1&1&-1&1\\2&-3&2&-4&2\end{pmatrix}, A^r=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&-3&1&0\\2&1&-2&1&-1&2\\1&-1&1&-1&1&14\\2&-3&2&-4&2&14\end{array}\right).$$

Сначала надо определить, имеет ли эта система решения и сколько. Для этого приведем расширенную матрицу A^r элементарными преобразованиями строк (только!) к трапецевидной форме:

$$A^r\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&-3&1&0\\0&1&0&2&0&14\\0&0&-4&-3&-3&-68\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)=\tilde{A}^r.$$

При этом матрица A перейдет в $\tilde{A}$. Размерность линейной оболочки столбцов матрицы A равна $r=3$ и вектор, стоящий в правой части принадлежит данной линейной оболочке. При этом $m>r$.

Согласно теореме Кронекера-Капелли такая система является совместной и имеет бесконечное множество решений.

Решение неоднородной системы в этом случае может быть получено как сумма общего решения соответствующей однородной и какого-либо решения неоднородной. Общее решение однородной системы представляет из себя линейную комбинацию фундаментальной системы решений, которая состоит из $m - r$ векторов, что в рассматриваемом примере равно двум.

Чтобы найти решения однородной системы, запишем сначала эквивалентную ей систему с матрицей $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \\ -4x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

В качестве базисных векторов линейной оболочки системы выберем векторы, состоящие из коэффициентов при базисных неизвестных x_1, x_2 и x_3. Далее, придавая оставшимся переменным x_4 и x_5 любые значения, неизвестные x_1, x_2 и x_3 можно получить единственным образом. Чтобы найти два фундаментальных решения однородной системы, достаточно придать свободным переменным x_4 и x_5 значения $x_4 = 1, x_5 = 0$ и $x_4 = 0,\ x_5 = 1$. При этом значения базисных переменных x_1, x_2, x_3 находятся единственным образом, так как определитель системы уравнений для них отличен от нуля:

Взяв $x_4 = 1, x_5 = 0$ из системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = -2 \\ -4x_3 = 3 \end{cases}$$

получим $x_3 = -3/4, x_2 = -2, x_1 = -1/4$ и вектор решений $X_1 = (-1/4, -2, -3/4, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. Затем, аналогично, взяв $x_4 = 0, x_5 = 1$, получим $X_2 = (-1/4, 0, -3/4, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Общее решение однородной системы имеет вид $Y = c_1X_1 + c_2X_2$, где c_1 и c_2 – произвольные числа.

Теперь найдем какое-либо решение неоднородной системы. Система, соответствующая матрице $\tilde{A^r}$, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_4 = 14, \\ -4x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -68, \end{cases}$$

и эквивалентна исходной. В качестве ее решения выберем то, для которого $x_4 = 0, x_5 = 0$. Тогда получим $x_3 = 17, x_2 = 14, x_1 = 2 \cdot 14 - 17 = 11$, то есть вектор решения неоднородной системы $Z = (11, 14, 17, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Таким образом, общее решение исходной системы будет иметь вид

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -1/4 \\ -2 \\ -3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вводя новые константы $\tilde{c_1} = c_1/4$ и $\tilde{c_2} = c_2/4$ общее решение исходной неоднородной системы можно записать в виде:

$$X = \tilde{c_1}\begin{pmatrix}-1\\-8\\-3\\4\\0\end{pmatrix} + \tilde{c_2}\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}11\\14\\17\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Варианты задания 2

Решить систему линейных уравнений. Записать решение в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить как линейную комбинацию фундаментальной системы решений.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -9, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 4; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -3; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 11; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = -2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -2, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_4 + 3x_5 = 3; \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = -6; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 7; \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = -7; \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_4 = -6, \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = -6; \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 11, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 9; \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_5 = 0; \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = -7; \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 5x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2; \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 7; \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -8, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -15; \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -9, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 = -6; \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -3; \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 5x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 13; \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 11, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 24, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 13; \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_5 = 9; \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = -7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 4x_4 - x_5 = 29; \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 7, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 4; \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3; \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = -3, \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 4x_5 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2; \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 - x_5 = -1; \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 5; \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 4x_5 = -1; \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -4, \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 12. \end{cases}$

Задание 3. Определение линейного пространства

Пример выполнения задания 3

Образует ли линейное пространство заданное множество всех положительных действительных чисел, в котором определены сумма любых двух элементов a и b и произведение любого элемента a на скаляр λ:

$$\text{сумма } a + b = ab, \text{ произведение } \lambda a = a^{\lambda}.$$

Решение.

Обозначим $\mathbb{R}^+$ – множество всех положительных действительных чисел. Заданные в условии сумму и умножение на скаляр будем обозначать $\hat{+}$ и $\hat{\cdot}$, чтобы отличать их от стандартных операций.

Поскольку произведение двух положительных чисел положительно и произвольная степень любого положительного числа также положительна, операции определены корректно:

$$a, b \in \mathbb{R}^+, \text{ тогда } a \hat{+} b = ab \in \mathbb{R}^+,$$

$$a \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ тогда } \lambda \hat{\cdot} a = a^{\lambda} \in \mathbb{R}^+.$$

Проверим выполнение аксиом линейного пространства.

1-4. В силу коммутативности и ассоциативности умножения действительных чисел, операция $+$ коммутативна и ассоциативна, а нейтральным элементом для неё является $1 \in \mathbb{R}^+$. Противоположным для элемента $a \in \mathbb{R}^+$ является элемент $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$. Таким образом, множество $\mathbb{R}^+$ является абелевой группой относительно $+$.

5. Унитарность этой операции очевидна: $1 \hat{\cdot} a = a^1 = a$.

6. Выберем произвольные $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и произвольный элемент $a \in \mathbb{R}^+$; тогда

$$\lambda \hat{\cdot} (\mu \hat{\cdot} a) = \lambda \hat{\cdot} (a^{\mu}) = (a^{\mu})^{\lambda} = a^{\lambda\mu} = (\lambda \hat{\cdot} \mu) a,$$

то есть умножение на число ассоциативно.

7-8. Проверим дистрибутивность: пусть λ, μ – произвольные скаляры, а $a, b \in \mathbb{R}^+$. Тогда

$$(\lambda \hat{+} \mu) \hat{\cdot} a = a^{\lambda+\mu} = a^{\lambda} a^{\mu} = a^{\lambda} \hat{+} a^{\mu} = \lambda \hat{\cdot} a + \mu \hat{\cdot} a,$$
$$\lambda \hat{\cdot} (a \hat{+} b) = (ab)^{\lambda} = a^{\lambda} b^{\lambda} = \lambda \hat{\cdot} a \hat{+} \lambda \hat{\cdot} b.$$

Таким образом, множество $\mathbb{R}^+$ является линейным пространством относительно заданных операций.

Варианты задания 3

Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов a и b и произведение любого элемента a на любое число λ ?

1. Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых – целые числа;
   сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot a$.

2. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;
   сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot a$.

3. Множество всех векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей; сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot a$.

4. Множество всех векторов трехмерного пространства;
сумма $a \cdot b$ (скалярное произведение), произведение $\lambda \cdot a$.

5. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;
сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot |a|$.

6. Множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов x, y, z; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.

7. Множество всех функций $a = f(t), b = g(t)$, принимающих положительные значения; сумма $a + b = f(t) \cdot g(t)$, произведение $\lambda \cdot a = f^{\lambda}(t)$.

8. Множество всех непрерывных функций $a = f(t), b = g(t)$, заданных на $[0,1]$;
сумма $a + b = f(t) + g(t)$, произведение $\lambda \cdot a = \lambda \cdot f(t)$.

9. Множество всех четных функций $a = f(t), b = g(t)$, заданных на отрезке $[-1,1]$;
сумма $a + b = f(t) \cdot g(t)$, произведение $\lambda \cdot a = \lambda \cdot f(t)$.

10. Множество всех нечетных функций $a = f(t), b = g(t)$, заданных на отрезке $[-1,1]$;
сумма $a + b = f(t) + g(t)$, произведение $\lambda \cdot a = \lambda \cdot f(t)$.

11. Множество всех линейных функций $a = f(x_1, x_2), b = g(x_1, x_2)$;
сумма $a + b = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$, произведение $\lambda \cdot a = \lambda \cdot f(x_1, x_2)$.

12. Множество всех многочленов третьей степени от переменной x;
сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot a$.

13. Множество всех многочленов степени, меньшей или равной трем от переменных x, y; сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot a$.

14. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $a = (x_1, x_2, \dots, x_n), b = (y_1, y_2, \dots, y_n)$; сумма $a + b = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, произведение $\lambda \cdot a = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$.

15. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $a = (x_1, x_2, \dots, x_n), b = (y_1, y_2, \dots, y_n)$; сумма $a + b = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n)$, произведение $\lambda \cdot a = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$.

16. Множество всех сходящихся последовательностей $a = \{u_n\}, b = \{v_n\}$;
сумма $a + b = \{u_n + v_n\}$, произведение $\lambda a = \{\lambda u_n\}$.

17. Множество всех многочленов от одной переменной степени меньшей или равной n; сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot a$.

18. Множество всех многочленов от одной переменной степени n;
сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot a$.

19. Множество всех диагональных матриц $a = (a_{ij}), b = (b_{ij}), i, j = 1,2, \dots, n$;
сумма $a + b = (a_{ij} + b_{ij})$, произведение $\lambda a = (\lambda a_{ij})$.

20. Множество всех невырожденных матриц $a = (a_{ij}), b = (b_{ij}), i, j = 1,2, \dots, n$;
сумма $a + b = (a_{ij}) \cdot (b_{ij})$, произведение $\lambda a = (\lambda a_{ij})$.

21. Множество всех квадратных матриц $a = (a_{ij}), b = (b_{ij}), i, j = 1,2, \dots, n$;
сумма $a + b = (a_{ij} + b_{ij})$, произведение $\lambda a = (\lambda a_{ij})$.

22. Множество всех диагональных матриц $a = (a_{ij}), b = (b_{ij})$ размера $n \times n$;
сумма $a + b = (a_{ij}) \cdot (b_{ij})$, произведение $\lambda a = (\lambda a_{ij})$.

23. Множество всех прямоугольных матриц $a = (a_{ij}), b = (b_{ij}), i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n$; сумма $a + b = (a_{ij} + b_{ij})$, произведение $\lambda a = (\lambda a_{ij})$.

24. Множество всех симметрических матриц $a = (a_{ij})$, где $a_{ij} = a_{ji}, b = (b_{ij})$, где $b_{ij} = b_{ji}, i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n$; сумма $a + b = (a_{ij} + b_{ij})$, произведение $\lambda a = (\lambda a_{ij})$.

25. Множество всех целых чисел;
сумма $a + b$, произведение $[\lambda \cdot a]$.
[] – обозначается целая часть числа.

26. Множество всех действительных чисел; сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot a$.

27. Множество всех положительных действительных чисел; сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot a$.

28. Множество всех отрицательных действительных чисел;
сумма $-|a| \cdot |b|$, произведение $-|a|^{\lambda}$.

29. Множество всех действительных чисел; сумма $a + b$, произведение $\lambda \cdot a$.

30. Множество всех дифференцируемых функций $a = f(t), b = g(t)$;
сумма $a + b = f(t) + g(t)$, произведение $\lambda \cdot a = \lambda \cdot f(t)$.

Задание 4. Базис, координаты вектора в базисе

Пример выполнения задания 4

Задача. Доказать, что векторы p, q, r образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора x в базисе p, q, r.

$$x = (-15,5,6), p = (0,5,1), q = (3,2,-1), r = (-1,1,0).$$

Решение.

Даны векторы: $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Любые три линейно независимых вектора образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$. Для линейной независимости векторов p, q, r, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r = 0$ выполнялось только при $\lambda_i = 0, i = 1,2,3$. Запишем это равенство в виде

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оно эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг $r(A) = 3$ и совпадает с числом неизвестных, значит, однородная система имеет единственное решение: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Таким образом, векторы p, q, r линейно независимы, а значит, образуют базис $\mathbb{R}^3$.

Найдем координаты вектора x в базисе p, q, r, то есть коэффициенты разложения вектора x по векторам p, q, r:

$$x = \lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r.$$

Как и ранее это выражение можно представить в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3\lambda_2 - \lambda_3 = -15 \\ 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

Решая систему, находим $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 3$, то есть $x = 2p - 4q + 3r$.

Варианты задания 4

Доказать, что векторы p, q, r образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора x в базисе p, q, r.

1. $x = (-2,4,7), p = (0,1,2), q = (1,0,1), r = (-1,2,4)$.
2. $x = (6,12,-1), p = (1,3,0), q = (2,-1,1), r = (0,-1,2)$.
3. $x = (1,-4,4), p = (2,1,-1), q = (0,3,2), r = (1,-1,1)$.
4. $x = (-9,5,5), p = (4,1,1), q = (2,0,-3), r = (-1,2,1)$.
5. $x = (-5,-5,5), p = (-2,0,1), q = (1,3,-1), r = (0,4,1)$.
6. $x = (13,2,7), p = (5,1,0), q = (2,-1,3), r = (1,0,-1)$.
7. $x = (-19,-1,7), p = (0,1,1), q = (-2,0,1), r = (3,1,0)$.
8. $x = (3,-3,4), p = (1,0,2), q = (0,1,1), r = (2,-1,4)$.
9. $x = (3,3,-1), p = (3,1,0), q = (-1,2,1), r = (-1,0,2)$.
10. $x = (-1,7,-4), p = (-1,2,1), q = (2,0,3), r = (1,1,-1)$.
11. $x = (6,5,-14), p = (1,1,4), q = (0,-3,2), r = (2,1,-1)$.
12. $x = (6,-1,7), p = (1,-2,0), q = (-1,1,3), r = (1,0,4)$.
13. $x = (5,15,0), p = (1,0,5), q = (-1,3,2), r = (0,-1,1)$.

14. $x = (2,-1,11), p = (1,1,0), q = (0,1,-2), r = (1,0,3)$.
15. $x = (11,5,-3), p = (1,0,2), q = (-1,0,1), r = (2,5,-3)$.
16. $x = (8,0,5), p = (2,0,1), q = (1,1,0), r = (4,1,2)$.
17. $x = (3,1,8), p = (0,1,3), q = (1,2,-1), r = (2,0,-1)$.
18. $x = (3,1,12), p = (1,2,-1), q = (3,0,2), r = (-1,1,1)$.
19. $x = (-9,-8,-3), p = (1,4,1), q = (-3,2,0), r = (1,-1,2)$.
20. $x = (-5,9,-13), p = (0,1,-2), q = (3,-1,1), r = (4,1,0)$.
21. $x = (-15,5,6), p = (0,5,1), q = (3,2,-1), r = (-1,1,0)$.
22. $x = (8,9,4), p = (1,0,1), q = (0,-2,1), r = (1,3,0)$.
23. $x = (23,-14,-30), p = (2,1,0), q = (1,-1,0), r = (-3,2,5)$.
24. $x = (3,1,3), p = (2,0,1), q = (1,0,1), r = (4,2,1)$.
25. $x = (-1,7,0), p = (0,3,1), q = (1,-1,2), r = (2,-1,0)$.
26. $x = (11,-1,4), p = (1,-1,2), q = (3,2,0), r = (-1,1,1)$.
27. $x = (-13,2,18), p = (1,1,4), q = (-3,0,2), r = (1,2,-1)$.
28. $x = (0,-8,9), p = (0,-2,1), q = (3,1,-1), r = (4,0,1)$.
29. $x = (8,-7,-13), p = (0,1,5), q = (3,-1,2), r = (-1,0,1)$.
30. $x = (2,7,5), p = (1,0,1), q = (1,-2,0), r = (0,3,1)$.

Задание 5. Матрица перехода от одного базиса к другому.

Пример выполнения задания 5

Задача. Два базиса $f = (f_1, f_2, f_3)$ и $g = (g_1, g_2, g_3)$ заданы своими координатами в некотором третьем базисе e в $\mathbb{R}^3$: $f_1 = (1,1,0), f_2 = (1,0,1), f_3 = (0,1,1), g_1 = (1,1,1), g_2 = (1,2,0), g_3 = (-1,0,0)$.
Вектор x задан координатами в базисе g: $x_g = \left(\frac{3}{2}, -2,3\right)$. Найти матрицу перехода от базиса f к базису g. Найти координаты вектора x в базисе f.

Решение.

$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от e к f,

$T_{e\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от e к g.

Чтобы найти матрицу перехода от f к g, воспользуемся формулой $T_{e\to g} = T_{e\to f} \cdot T_{f\to g}$.

Из этой формулы получим: $T_{f\to g} = T_{e\to f}^{-1} \cdot T_{e\to g}$.

Найдем матрицы $T_{e\to f}^{-1}$ и $T_{f\to g}$:

$$T_{e\to f}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; T_{f\to g} = T_{e\to f}^{-1} \cdot T_{e\to g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти координаты вектора x в базисе f, воспользуемся формулой: $x_f = T_{f\to g} \cdot x_g$

$$x_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $T_{f\to g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $x_f = \begin{pmatrix} -\frac{15}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Варианты задания 5

Два базиса $f = (f_1, f_2, f_3)$ и $g = (g_1, g_2, g_3)$ заданы своими координатами в некотором третьем базисе e в $\mathbb{R}^3$. Вектор x задан координатами в базисе g. Найти матрицу перехода от базиса f к базису g. Найти координаты вектора x в базисе f.

1. $f_1 = (1,0,0), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,1,1), g_1 = (1,2,3), g_2 = (0,1,2), g_3 = (0,0,1), x_g = (1,-1,2)$
2. $f_1 = (2,0,1), f_2 = (1,1,0), f_3 = (0,1,2), g_1 = (1,0,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (0,1,1), x_g = (2,1,3)$
3. $f_1 = (1,-1,0), f_2 = (1,0,-1), f_3 = (0,1,1), g_1 = (2,1,1), g_2 = (1,2,1), g_3 = (1,1,2), x_g = (1,1,1)$
4. $f_1 = (1,2,3), f_2 = (0,1,2), f_3 = (0,0,1), g_1 = (1,0,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (1,1,1), x_g = (4,3,2)$
5. $f_1 = (1,0,0), f_2 = (1,2,0), f_3 = (0,1,3), g_1 = (2,0,1), g_2 = (1,1,0), g_3 = (0,1,2), x_g = (3,2,1)$
6. $f_1 = (2,1,1), f_2 = (1,2,1), f_3 = (1,1,2), g_1 = (1,0,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (1,1,1), x_g = (1,0,2)$
7. $f_1 = (2,0,1), f_2 = (1,1,0), f_3 = (0,2,1), g_1 = (1,1,1), g_2 = (1,-1,0), g_3 = (0,1,-1), x_g = (3,1,2)$
8. $f_1 = (1,-1,0), f_2 = (1,0,1), f_3 = (0,1,-1), g_1 = (1,1,1), g_2 = (1,-1,1), g_3 = (-1,1,1), x_g = (2,1,0)$
9. $f_1 = (1,0,1), f_2 = (0,1,1), f_3 = (1,1,0), g_1 = (2,1,0), g_2 = (1,2,0), g_3 = (0,0,1), x_g = (1,-1,2)$
10. $f_1 = (1,1,0), f_2 = (1,0,1), f_3 = (0,1,1), g_1 = (1,1,1), g_2 = (-1,-2,0), g_3 = (1,0,0), x_g = \left(\frac{3}{2},-1,3\right)$.
11. $f_1 = (-2,0,0), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,1,1), g_1 = (-1,-2,-3), g_2 = (0,1,2), g_3 = (0,0,1), x_g = (1,1,2)$
12. $f_1 = (2,0,1), f_2 = (1,2,0), f_3 = (0,1,2), g_1 = (-1,0,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (0,1,1), x_g = (-2,1,3)$
13. $f_1 = (1,1,0), f_2 = (1,0,-1), f_3 = (0,1,2), g_1 = (2,1,1), g_2 = (1,2,1), g_3 = (1,1,2), x_g = (1,2,1)$
14. $f_1 = (1,-2,3), f_2 = (0,1,2), f_3 = (0,0,1), g_1 = (2,1,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (1,1,1), x_g = (1,3,2)$
15. $f_1 = (-1,0,0), f_2 = (1,2,0), f_3 = (0,1,3), g_1 = (-2,0,-1), g_2 = (1,1,0), g_3 = (0,1,2), x_g = (-3,2,1)$
16. $f_1 = (2,1,1), f_2 = (1,2,1), f_3 = (1,1,2), g_1 = (-2,0,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (1,1,1), x_g = (1,0,-2)$
17. $f_1 = (2,0,1), f_2 = (-1,-1,0), f_3 = (0,2,1), g_1 = (1,1,1), g_2 = (1,1,0), g_3 = (0,1,-1), x_g = (3,-1,2)$
18. $f_1 = (1,-1,0), f_2 = (-1,0,1), f_3 = (0,1,1), g_1 = (1,1,1), g_2 = (1,-1,1), g_3 = (-1,1,1), x_g = (2,1,0)$

19. $f_1 = (1,0,1), f_2 = (0,-1,-1), f_3 = (1,1,0), g_1 = (2,1,0), g_2 = (1,2,0), g_3 = (0,0,1), x_g = (1,1,2)$

20. $f_1 = (-1,-1,0), f_2 = (1,0,1), f_3 = (0,1,1), g_1 = (1,1,1), g_2 = (1,2,0), g_3 = (1,0,0);\ x_g = (1,-1,3)$.

21. $f_1 = (-1,0,0), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,1,1), g_1 = (1,2,3), g_2 = (0,-1,-2), g_3 = (0,0,1), x_g = (1,1,2)$

22. $f_1 = (2,0,1), f_2 = (1,-1,0), f_3 = (0,1,2), g_1 = (-1,0,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (0,1,1), x_g = (2,-1,3)$

23. $f_1 = (-1,1,0), f_2 = (1,0,-1), f_3 = (0,1,1), g_1 = (2,1,1), g_2 = (1,2,1), g_3 = (1,1,2), x_g = (1,3,1)$

24. $f_1 = (1,-2,3), f_2 = (0,1,2), f_3 = (0,0,1), g_1 = (-1,0,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (1,1,1), x_g = (4,-3,2)$

25. $f_1 = (-1,0,0), f_2 = (1,2,0), f_3 = (0,1,3), g_1 = (2,0,1), g_2 = (-1,-1,0), g_3 = (0,1,2), x_g = (-3,2,1)$

26. $f_1 = (2,1,-1), f_2 = (1,2,1), f_3 = (1,1,2), g_1 = (-3,0,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (1,1,1), x_g = (-1,0,2)$

27. $f_1 = (2,0,-1), f_2 = (1,1,0), f_3 = (0,2,2), g_1 = (1,1,1), g_2 = (1,1,0), g_3 = (0,1,-1), x_g = (3,-1,2)$

28. $f_1 = (-1,1,0), f_2 = (1,0,1), f_3 = (0,1,-1), g_1 = (1,1,1), g_2 = (1,-1,1), g_3 = (-1,1,1), x_g = (2,1,0)$

29. $f_1 = (1,0,1), f_2 = (0,1,1), f_3 = (-1,1,1), g_1 = (2,1,0), g_2 = (1,2,0), g_3 = (0,0,1), x_g = (1,1,2)$

30. $f_1 = (1,1,0), f_2 = (-1,0,-1), f_3 = (0,1,1), g_1 = (1,1,1), g_2 = (-1,-2,0), g_3 = (3,0,0), x_g = (0,-1,3)$.

Задание 6. Сумма и пересечение подпространств

Пример выполнения задания 6

Задача. Подпространство L_1 задано как линейная оболочка векторов a_1 и a_2. Подпространство L_2 задано как линейная оболочка векторов b_1, b_2 и b_3. Найти базис и размерность суммы и пересечения этих подпространств.

$a_1 = (1 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \quad -1)^T, a_2 = (0 \quad -4 \quad 7 \quad 4 \quad -4)^T,$

$b_1 = (1 \quad 1 \quad -2 \quad -3 \quad 3)^T,\ b_2 = (1 \quad 6 \quad -7 \quad -10 \quad 7)^T,\ b_2 = (2 \quad -3 \quad 1 \quad 1 \quad 2)^T$

Решение. Для нахождения базиса суммы подпространств L_1 и L_2 запишем векторы данных двух линейных оболочек по столбцам в матрицу, которую затем элементарными преобразованиями приведем к трапецевидной форме $\tilde{A}$:

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 6 & -3 \\ 3 & 7 & -2 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & -10 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \tilde{A}$$

Таким образом, число базисных векторов суммы подпространств равно четырем. Их можно выбрать, например, так: a_1, a_2, b_1, b_2.

Далее, найдем базис пересечения данных подпространств. Для этого необходимо сначала найти условия, при которых произвольный вектор x с координатами $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принадлежит линейной оболочкам L_1 и L_2, а затем объединить эти условия. Положим $x \in L_1$, тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \bigg| & x_1 \\ 0 & -4 & \bigg| & x_2 \\ 3 & 7 & \bigg| & x_3 \\ 2 & 4 & \bigg| & x_4 \\ -1 & -4 & \bigg| & x_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bigg| & x_1 \\ 0 & -4 & \bigg| & x_2 \\ 0 & 0 & \bigg| & -12x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ 0 & 0 & \bigg| & -2x_1 + x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & \bigg| & x_1 - x_2 + x_5 \end{pmatrix}$$

Значит $\dim L_1 = 2$, а координаты x должны удовлетворять линейной однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} -12x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Пусть теперь $x \in L_2$, тогда имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \bigg| & x_1 \\ 1 & 6 & -3 & \bigg| & x_2 \\ -2 & -7 & 1 & \bigg| & x_3 \\ -3 & -10 & 1 & \bigg| & x_4 \\ 3 & 7 & 2 & \bigg| & x_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \bigg| & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & \bigg| & 2x_1 + x_2 - x_5 \\ 0 & 0 & 0 & \bigg| & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & \bigg| & 17x_1 + 7x_2 + x_4 - x_5 \\ 0 & 0 & 0 & \bigg| & -11x_1 - 4x_2 + 5x_5 \end{pmatrix}$$

откуда получаем $\dim L_2 = 2$ и

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 17x_1 + 7x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ -11x_1 - 4x_2 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Векторы фундаментальной системы решений линейной системы уравнений, являющейся объединением двух полученных систем, образуют базис пересечения двух линейных подпространств L_1 и L_2. В рассматриваемом случае получим только тривиальное решение, что согласуется с теоремой о размерностях:

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2).$$

Действительно, $2 + 2 = 4 + 0$ и размерность подпространства-пересечения равна нулю.

Варианты задания 6

Подпространство L_1 задано как линейная оболочка векторов a_1 и a_2.
Подпространство L_2 задано как линейная оболочка векторов b_1, b_2 и b_3.
Найти базис и размерность суммы и пересечения этих подпространств.

1. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2)^T$,
   $a_2 = (2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad -3)^T$,
   $b_1 = (1 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \quad -2)^T$,
   $b_2 = (-1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2)^T$,
   $b_3 = (1 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad -1)^T$.
2. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 7)^T$,
   $a_2 = (1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 4)^T$,
   $b_1 = (1 \quad -1 \quad 2 \quad 3 \quad 2)^T$,
   $b_2 = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0)^T$,
   $b_3 = (1 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \quad -2)^T$.
3. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad -1 \quad 4)^T$,
   $a_2 = (1 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 2)^T$,
   $b_1 = (2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 1)^T$,
   $b_2 = (-2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -3)^T$,
   $b_3 = (1 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \quad -3)^T$.
4. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 5 \quad 1 \quad 3)^T$,
   $a_2 = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 2 \quad -2)^T$,
   $b_1 = (0 \quad 1 \quad -2 \quad -4 \quad -2)^T$,
   $b_2 = (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 3)^T$,
   $b_3 = (1 \quad -1 \quad 2 \quad 4 \quad 0)^T$.

5. $a_1 = (2 \quad -1 \quad 1 \quad 4 \quad 3)^T$,
$a_2 = (-3 \quad -1 \quad -1 \quad -3 \quad -1)^T$,
$b_1 = (1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2)^T$,
$b_2 = (-1 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 0)^T$,
$b_3 = (2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1)^T$.

6. $a_1 = (1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2)^T$,
$a_2 = (1 \quad 2 \quad 5 \quad 3 \quad 5)^T$,
$b_1 = (2 \quad -1 \quad 0 \quad -4 \quad -5)^T$,
$b_2 = (-1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 7)^T$,
$b_3 = (1 \quad -1 \quad -1 \quad -3 \quad -4)^T$.

7. $a_1 = (3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1)^T$,
$a_2 = (3 \quad -2 \quad 1 \quad 3 \quad 2)^T$,
$b_1 = (1 \quad -2 \quad 1 \quad 3 \quad 0)^T$,
$b_2 = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1)^T$,
$b_3 = (1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad -1)^T$.

8. $a_1 = (2 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 3)^T$,
$a_2 = (-1 \quad 1 \quad -2 \quad -1 \quad 0)^T$,
$b_1 = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 3)^T$,
$b_2 = (-1 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad -1)^T$,
$b_3 = (0 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1)^T$.

9. $a_1 = (1 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 3)^T$,
$a_2 = (2 \quad -1 \quad 3 \quad 4 \quad 1)^T$,
$b_1 = (3 \quad -3 \quad -3 \quad 0 \quad -6)^T$,
$b_2 = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1)^T$,
$b_3 = (-1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0)^T$.

10. $a_1 = (1 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 2)^T$,
$a_2 = (3 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 4)^T$,
$b_1 = (-1 \quad -4 \quad 1 \quad -5 \quad 7)^T$,
$b_2 = (2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -4)^T$,
$b_3 = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1)^T$.

11. $a_1 = (1 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 2)^T$,
$a_2 = (3 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 4)^T$,
$b_1 = (-1 \quad -4 \quad 1 \quad -5 \quad 7)^T$,
$b_2 = (2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -4)^T$,
$b_3 = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1)^T$.

12. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 1)^T$,
$a_2 = (-1 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad -3)^T$,
$b_1 = (-2 \quad -1 \quad -3 \quad 1 \quad 2)^T$,
$b_2 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 1)^T$,
$b_3 = (-2 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0)^T$.

13. $a_1 = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \quad 2)^T$,
$a_2 = (3 \quad 1 \quad -1 \quad 5 \quad 4)^T$,
$b_1 = (1 \quad -2 \quad 2 \quad 4 \quad -1)^T$,
$b_2 = (-2 \quad 1 \quad -1 \quad -5 \quad -1)^T$,
$b_3 = (1 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \quad 0)^T$.

14. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 1)^T$,
$a_2 = (-1 \quad 1 \quad 2 \quad -2 \quad -3)^T$,
$b_1 = (2 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0)^T$,
$b_2 = (1 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \quad 2)^T$,
$b_3 = (-1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad -1)^T$.

15. $a_1 = (2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2)^T$,
$a_2 = (1 \quad -1 \quad 2 \quad 3 \quad 3)^T$,
$b_1 = (-2 \quad 3 \quad 2 \quad -6 \quad -4)^T$,
$b_2 = (2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 0)^T$,
$b_3 = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1)^T$.

16. $a_1 = (1 \quad 5 \quad 2 \quad 1 \quad 3)^T$,
$a_2 = (2 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 2)^T$,
$b_1 = (-1 \quad 10 \quad 3 \quad 4 \quad 2)^T$,
$b_2 = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2)^T$,
$b_3 = (-1 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \quad -2)^T$.

17. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 2)^T$,
$a_2 = (3 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 2)^T$,
$b_1 = (-1 \quad 2 \quad -2 \quad -1 \quad -4)^T$,
$b_2 = (1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1)^T$,
$b_3 = (2 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 2)^T$.

18. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2)^T$,
$a_2 = (-1 \quad 2 \quad -2 \quad -4 \quad -5)^T$,
$b_1 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)^T$,
$b_2 = (-1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -2)^T$,
$b_3 = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T$.

19. $a_1 = (1 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 2)^T$,
$a_2 = (-1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 3)^T$,
$b_1 = (-1 \quad -5 \quad 2 \quad -4 \quad -7)^T$,
$b_2 = (1 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \quad 3)^T$,
$b_3 = (-1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad -3)^T$.

20. $a_1 = (1 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 2)^T$,
$a_2 = (3 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 4)^T$,
$b_1 = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 4 \quad 0)^T$,
$b_2 = (-1 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 0)^T$,
$b_3 = (1 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 3)^T$.

21. $a_1 = (3 \quad 5 \quad 1 \quad 2)^T$,
$a_2 = (1 \quad -2 \quad -1 \quad -3)^T$,
$b_1 = (1 \quad -1 \quad 2 \quad -2)^T$,
$b_2 = (-2 \quad 1 \quad -1 \quad 3)^T$,
$b_3 = (1 \quad 0 \quad 2 \quad -1)^T$.

22. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2)^T$,
$a_2 = (2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad -3)^T$,
$b_1 = (1 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \quad -2)^T$,
$b_2 = (-1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2)^T$,
$b_3 = (1 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad -1)^T$.

23. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad -1 \quad 4)^T$,
$a_2 = (1 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \quad 0)^T$,
$b_1 = (2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 1)^T$,
$b_2 = (1 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 2)^T$,
$b_3 = (-2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -3)^T$.

24. $a_1 = (2 \quad -3 \quad 1 \quad -1 \quad 2)^T$,
$a_2 = (-1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad 1)^T$,
$b_1 = (1 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \quad 1)^T$,
$b_2 = (4 \quad -3 \quad 1 \quad 0 \quad 2)^T$,
$b_3 = (3 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 1)^T$.

25. $a_1 = (1 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad 1)^T$,
$a_2 = (1 \quad -2 \quad -2 \quad 1 \quad 0)^T$,
$b_1 = (1 \quad 3 \quad 3 \quad -1 \quad 2)^T$,
$b_2 = (3 \quad 3 \quad 1 \quad -1 \quad 1)^T$,
$b_3 = (2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2)^T$.

26. $a_1 = (-1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0)^T$,
$a_2 = (2 \quad -1 \quad 3 \quad 4 \quad 1)^T$,
$b_1 = (1 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 3)^T$,
$b_2 = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1)^T$,
$b_3 = (3 \quad -3 \quad -3 \quad 0 \quad -6)^T$.

27. $a_1 = (2 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1)^T$,
$a_2 = (2 \quad 1 \quad 3 \quad -1 \quad -1)^T$,
$b_1 = (7 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad -2)^T$,
$b_2 = (4 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad -2)^T$,
$b_3 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1)^T$.

28. $a_1 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1)^T$,
$a_2 = (2 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1)^T$,
$b_1 = (5 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad 2)^T$,
$b_2 = (1 \quad 2 \quad -4 \quad 1 \quad 4)^T$,
$b_3 = (3 \quad -2 \quad -2 \quad 3 \quad 0)^T$.

29. $a_1 = (2 \quad 5 \quad -5 \quad 7 \quad -4)^T$,
$a_2 = (1 \quad 3 \quad -4 \quad 5 \quad -3)^T$,
$b_1 = (1 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad 1)^T$,
$b_2 = (1 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \quad -1)^T$,
$b_3 = (3 \quad 5 \quad 0 \quad 3 \quad -1)^T$.

30. $a_1 = (3 \quad -2 \quad 1 \quad 2 \quad -1)^T$,
$a_2 = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 3 \quad -1)^T$,
$b_1 = (3 \quad 0 \quad 3 \quad -1 \quad 1)^T$,
$b_2 = (2 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 0)^T$,
$b_3 = (1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 1)^T$.

Использованная литература

Афанасьева С.С., Гортинская Л.В., Рыжков А.Е., Трифанов А.И. Типовой расчет «Линейная алгебра». 3 модуль. Учебно-методическое пособие. СПб: Университет ИТМО, 2014.

Гайфуллин А.А., Пенской А.В., Смирнов С.В. Задачи по линейной алгебре и геометрии. МЦНМО, 2014. 150 с.

Гортинская Л.В., Лапин И.А., Рыжков А.Е., Смирнов В.П., Трифанов А.И. Типовой расчет «Линейная алгебра». 2 модуль. Учебно-методическое пособие. СПб: НИУ ИТМО, 2012. 40 с.

Кузнецова С.Н., Лукина М.В., Милованович Е.В. Типовые расчеты для студентов экономических специальностей. I курс (модуль 1-2). Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебно-методическое пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. 48 с.