

## Содержание

Общие рекомендации . . . . .	2
Задание 1	3
Задание 2	6
Задание 3	13
Задание 4	18
Задание 5	23
Задание 6	25
Задание 7	27

## Общие рекомендации

Типовой расчет по математике за первый семестр включает в себя задачи по темам: «Комплексные числа», «Пределы», «Непрерывность функции», «Дифференцирование функций», «Правило Лопиталя», «Исследование функций» и «Приложения производной».

Каждый студент обязан выполнить семь заданий (включая подпункты а), б), с), . . . .), одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

Типовой расчет следует выполнить в отдельной тетради, перед выполнением каждого задания написать полное условие. Все чертежи и рисунки следует сделать на миллиметровке, затем подклеить их в тетрадь и снабдить необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения. По окончании решения написать ответ.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет.

## Задание 1

**a)** Изобразить на комплексной плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих условию:

$$1. \begin{cases} |\operatorname{Re} z| < 1 \\ 0 < \operatorname{Re}(iz) \leq 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2 \leq |z + i| < 3 \\ |z - 2| < |z| \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \leq \arg(i(1-z)) \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \operatorname{Im} \frac{1}{iz} \geq \frac{1}{4} \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$$

$$5. \left| \frac{z-3}{z-2} \right| \geq 1$$

$$6. \begin{cases} \operatorname{Im} \frac{1}{z} \geq \frac{1}{2} \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$7. \operatorname{Im}((1+i)z) = 0$$

$$8. \operatorname{Im}((1-i)(z+i)) = 0$$

$$9. |z| = \operatorname{Re} z + 1$$

$$10. |z - 2| = |1 - 2\bar{z}|$$

$$11. \operatorname{Re}(1+z) = |z|$$

$$12. \begin{cases} 1 < |z| < 2 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$13. \frac{\pi}{4} < \arg(z - i) \leq \frac{3}{4}\pi$$

$$14. \begin{cases} |z + 1| > 1 \\ \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

$$15. \operatorname{Im} z^2 > 2$$

$$16. \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \arg(z + i) < \frac{\pi}{3} \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 0 \leq \arg(iz) \leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{Re} z < 2 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} |z - i - 1| \geq |z + i + 1| \\ |z| \leq 1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \operatorname{Im}(iz + 7) \leq 1 \\ 1 < |z - 1| < 2 \end{cases}$$

$$20. \operatorname{Re}(z^2) \geq 1$$

$$21. \begin{cases} \operatorname{Re}(2z - 4 + 3i) \geq 2 \\ \frac{\pi}{6} \leq \arg(z - 1) \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} |z| > 1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg((i+1)z) \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} |z - i| \leq |z - 1| \\ 1 \leq |z - 2 - 2i| \leq 2 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \operatorname{Im}(z^2) \leq 4 \\ |\operatorname{Re} z| \leq 2 \end{cases}$$

25. 
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z^2) \geq 4 \\ \operatorname{Re} z \leq 4 \end{cases}$$

26. 
$$\begin{cases} |\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Re} z| \geq 1 \\ |z| \leq 1 \end{cases}$$

27. 
$$\begin{cases} |z|^2 \leq \operatorname{Re}(z^2) + 8 \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

28. 
$$\begin{cases} |z|^2 \leq \operatorname{Im}(z^2) + 1 \\ |z| > 2 \end{cases}$$

29. 
$$\begin{cases} \operatorname{Im} \frac{1}{z} \leq \frac{1}{4} \\ \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

30. 
$$\begin{cases} \operatorname{Im}(z^2) \geq 2 \\ |\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Re} z| \leq 4 \end{cases}$$

b) Найти все значения следующих корней и изобразить их на комплексной плоскости:

1.  $\sqrt[4]{-i}$

13.  $\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}$

2.  $\sqrt[3]{27}$

14.  $\sqrt[4]{-1 - i}$

3.  $\sqrt{-16}$

15.  $\sqrt[3]{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 - i \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4}$

4.  $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i}$

16.  $\sqrt[4]{i^{15} + i^{16} + i^{17} + i^{18}}$

5.  $\sqrt{\left|\sqrt{2}i + 1\right| + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{13}}$

17.  $\sqrt[3]{\sqrt{3}i^7 + i^{62}}$

6.  $\sqrt[3]{5 \frac{1+i}{1-3i} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{13}}$

18.  $\sqrt[5]{\frac{5}{1-i}}$

7.  $\sqrt[3]{\left(\frac{1+i}{-1+i}\right)} - | - \sqrt{2} + i |$

19.  $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}} - \sqrt{3}$

8.  $\sqrt[3]{\frac{|4+3i|(1+i^{71})}{2-i^{101}} - (1+i)^2}$

20.  $\sqrt[4]{\frac{16}{1+i}}$

9.  $\sqrt[4]{\frac{|1+\sqrt{15}i|(2-\sqrt{3}i^{33})}{\sqrt{3}-i} + 2\sqrt{3}i^{102}}$

21.  $\sqrt{-1} + \sqrt{i}$

10.  $\sqrt[3]{i}$

22.  $\sqrt[4]{-1} + \sqrt{-1}$

11.  $\sqrt[5]{1 - i}$

23.  $\sqrt[3]{1} - \sqrt[6]{1}$

12.  $\sqrt[6]{-64}$

24.  $\sqrt{\sqrt{-1} + i}$

25.  $\sqrt[4]{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 + i}$

**26.**  $\sqrt[3]{\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^3 + 8}$

**27.**  $\sqrt[4]{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3}$

**28.**  $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{-1}}$

**29.**  $\sqrt{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}$

**30.**  $\sqrt{\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}}$

**c)** Вычислить следующие значения функций комплексной переменной (то есть записать результат в виде:  $a + ib$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ ):

**1.**  $e^{1+\frac{\pi}{4}i}$

**16.**  $\sqrt[3]{1+i}$

**2.**  $(-i)^{-i}$

**17.**  $\ln(2-3i)$

**3.**  $\cos(2i)$

**18.**  $\cos(2-i)$

**4.**  $\sqrt[3]{i}$

**19.**  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}i\right)$

**5.**  $\ln(ie^2)$

**20.**  $e^{1+\frac{9}{4}\pi i}$

**6.**  $\sin i$

**21.**  $i^{\frac{1}{6}}$

**7.**  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}i\right)$

**22.**  $\cos(\pi i)$

**8.**  $e^{1-\frac{\pi}{6}i}$

**23.**  $\sqrt[3]{-2+2i}$

**9.**  $\sin(5-i)$

**24.**  $\ln(3-2i)$

**10.**  $\sqrt[4]{-i}$

**25.**  $(-1)^{\sqrt{2}}$

**11.**  $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{-i}$

**26.**  $\sin(9-2i)$

**12.**  $\cos i$

**27.**  $\operatorname{ctg}(\pi i)$

**13.**  $e^{-1+2i}$

**28.**  $(1+i)^{i+1}$

**14.**  $1^i$

**29.**  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$

**15.**  $\sin(3i)$

**30.**  $\ln(e^3 - e^3i)$

## Задание 2

Найти пределы (без использования правила Лопиталя):

1. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2+5+\dots+(3n-1)}{n+5} - \frac{3}{2}n \right)$  e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32-x^2}-2}{(e^x-e^{2x})\arctgx}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow -1,5} \frac{2x^3+7x^2+4x-3}{2x^3-5x^2-32x-30}$  f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2x^2-1)}{1-\cos \sqrt{x+1}}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{5x+2} \right)^{1-3x}$  \*g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(0,5\sqrt{x^2-3})-\arccos(0,5\sqrt{x+1})}{2x^2-3x-2}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 0,3} \left( \frac{10x}{3} \right)^{\frac{1}{\arcsin(x-0,3)}}$  \*h)  $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\ln(\sqrt[3]{6-2x}+x)}{\sqrt{\sin \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{\pi(1-x)}{4}}}$
  
2. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^5 (\sqrt[3]{2n^9 - 3n} - \sqrt[3]{2n^9})$  e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(\sqrt[5]{1+x^2}-1)}{e^{\pi x}-3x^2-1}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4-4x^2-2x}{3x^3+5x^2+x-1}$  f)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\ln \cos 2x}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{5x+2} \right)^{1+3x}$  \*g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - 1} (\arccos \frac{3x-1}{3x+1} - \frac{\pi}{4})$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x+3)^{\frac{x}{\operatorname{arctg}(x+2)}}$  \*h)  $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x + \sqrt{x^2 - 1})^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$
  
3. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{2}{3^n} \right)$  e)  $\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{1-4x^2}{\sin^2(2x-1)}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+x^2-8x+5}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}$  f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1-x^2}-\sqrt[3]{1+2x}}{3x\sqrt{\sin 2x}}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{4x+1} \right)^{1-3x}$  \*g)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(\sqrt{2+x}-1)}{\arccos \frac{2+x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{\pi}{3}}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 0,2} \left( \frac{5x+1}{2} \right)^{\frac{3x+2}{\sin(x-0,2)}}$  \*h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{10}-2^{10}-10 \cdot 2^9(x-2)}{(x-2)^2}$
  
4. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+8+\dots+(3n+2)}{\sqrt{9n^4-n+3}}$  e)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 3x}{1+x \sin x - \cos 2x}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^3+57^2-41x+7}{36x^4-24x^3+22x^2-12x+2}$  f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\cos(2\pi(x+0,5))}}{2-\sqrt[6]{3x+64}}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+8}{x-2} \right)^{x+4}$  \*g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2-3)+\operatorname{arctg}(x^2-5)}{\ln(x-1)}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 0,4} \left( \frac{5x}{2} \right)^{\frac{2x}{\ln(5x-1)}}$  \*h)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{4} - 4x \right) \right)^{\operatorname{tg} \left( x + \frac{3\pi}{8} \right)}$

5. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2 \cdot 7} + \dots + \frac{3}{(5n-3) \cdot (5n+2)} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{12x^4 - 12x^3 + 23x^2 - 20x + 5}{4x^3 - 4x^2 + x}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{3x-1} \right)^{1-2x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x-2}{2} \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}(x-4)}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 0,5x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{3x}-8}{(2-x)^5-1}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{6}}{x^2 + 4x - 5}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(20x+1)^{30} - (30x+1)^{20}}{\sqrt[20]{1-30x^2-1}}$
6. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 4^n - 3^{n+2}}{4^{n+1} + 3^{n-1}}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3x^3 + 5x^2 + x - 1}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x+7} \right)^{4x+1}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( 2 - \frac{x}{3} \right)^{\left( \cos \frac{\pi x}{6} \right)^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin x - \cos x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[4]{1+x}}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arccos(0,5\sqrt{2x+6}) - \arcsin(0,5\sqrt{-x})}{\sqrt[5]{2x+5} - 1}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{2}{x} - \sin \frac{1}{x} \right)^{3 \operatorname{ctg} \frac{1}{x}}$
7. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n^2+7}{5+8+\dots+(3n+2)} - \frac{2}{n} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12}{5x^3 - 16x^2 + 4x + 16}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{2x-4} \right)^{x+2}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( 2 - \frac{x}{3} \right)^{\frac{5}{\sin(3-x)}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x - \sqrt{2}}{\arcsin(x - \frac{\pi}{4})}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[4]{1+x^2}}{3 \ln(1-2x^2)}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(5x+2)(\operatorname{arctg} \frac{5x+2}{5x-2} - \frac{\pi}{4})}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt[5]{x^4} + 2 \cdot \sqrt[10]{3x^3})}{\ln(1 + \sqrt{x} - \sqrt[10]{5x})}$
8. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{4n^6 + 3n^5 - 1} - \sqrt[3]{4n^6 + 2}}{7n + 2}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - 16x - 20}{4 - 2x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 4x}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-3}{x+11} \right)^{1+3x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x}{5} \right)^{\frac{\operatorname{arctg}(x-5)}{(x-5)^2}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(0,2(\pi-3x))}{1-2 \cos x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} \cdot (e^{\sqrt{x-2}} - 1)}{\sqrt[5]{22+5x} - (x^2-2)}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin \frac{3x-2}{\sqrt{2x-1}} - 0,5\pi}{\operatorname{tg} \sqrt{1-x^2}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^{101} - 101x + 201}{3x^3 - 12x^2 + 12x}$
9. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2(\sqrt{3})^n} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{4x^3 - 4x^2 - 7x - 2}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{3x+17} \right)^{x-1}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{4x}{\pi} \right)^{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{25-5(x-\pi)^2} - 5}{\ln(2+\cos x)}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2-13}}{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x+7}}{3}}{3x^2 + 11x - 4}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x \cdot 2^x) - \cos(x \cdot 2^{-x})}{\ln(1+x^3)}$

- 10.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+7+\dots+(6n-5)}{5n^2-\sqrt{3n}+2}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-x^2-16x-20}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x+19}{2x-1} \right)^{x-5}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x}{x+1} \right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2(x-1)} - e^{3(x-1)}}{\sin \pi x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1+7x}-1+x^2}{\sqrt{2x} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arcsin \frac{\sqrt{2-x}}{2} - \frac{\pi}{3}}{\sin(x+1)}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{7 \operatorname{ctg}(2x)}$
- 11.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{(6n-2) \cdot (6n+4)} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-9x^2+27x-27}{2x^3-12x^2+24x-18}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{9x+12} \right)^{5x+1}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( 2 - \frac{x}{2} \right)^{\frac{3x-6}{\sin^2(2-x)}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\operatorname{tg} 4x + x - \pi) \ln \frac{x}{\pi}}{1 + \cos 5x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27} - \sqrt[3]{27-x}}{6^{2x} - 6^{5x}}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(x+4)}{\arcsin \sqrt{\frac{3}{10+2x}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{x+7}}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin \frac{x+2}{5} + \sin \frac{\pi(2-x)}{4}}{\ln(\sqrt[5]{30-x} + 0,5x)}$
- 12.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,5^{n+2}-0,3^n}{0,5^{n-3}+2 \cdot 0,3^{n+1}}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-5}{3x-14} \right)^{-2x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{4x}{\pi} \right)^{(2 \operatorname{tg} x - 2)^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(x+4)}{7^{x^2-8}-7}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1-x}{\arcsin^2(\sqrt{x+1}-1)}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-1}}{\left( \operatorname{arctg} \frac{2-7x}{2+7x} + \frac{\pi}{4} \right)^{-1}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{\cos 2}{\cos x} \right)^{(\ln(x+3))^{-1}}$
- 13.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5+9+\dots+(4n+1)}{3n-1} - \frac{2n-1}{3} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4+6x^3+8x^2-6x-9}{2x^3+13x^2+24x+9}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{9x+13}{5x-3} \right)^{-4x+1}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 9} \left( \frac{x}{9} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{18}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 1}{\sin \pi x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1-2x-x^2}-1-x^2}{e^{3x}-e^{0,25x^2}}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin \sqrt{x^2-9}}{\arcsin \frac{2}{\sqrt{x^2-5}} - \frac{\pi}{2}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^7-3^7-7 \cdot 3^6(x-3)}{(x-3)^2}$
- 14.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{27n^3-2n^2+1} - 3n)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3x^2-9x+27}{2x^4-12x^3+19x^2-6x+9}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+7}{5x-1} \right)^{3x-7}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( 2 - \frac{x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\operatorname{tg} x - 1}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{\ln((1-x)(1+x+x^2))}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x+3}}-1}{\operatorname{arctg}(\sqrt{9-x^2}+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{9-x^2}-1)}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{x}{4} \right) \right)^{\frac{3}{\cos x}}$

- 15.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{48} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 4^n} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{x+11} \right)^{6x+1}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{2x}{\pi} \right)^{\frac{2}{\sin x - 1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-0,3x-1}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})-\cos(x-\frac{\pi}{4})}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{10-3x-2}}{e^{0,5x}-e}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{\pi}{6}-\arcsin \frac{\sqrt{x}}{4}}{\sqrt[3]{2x-7}-1}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x+1)^{20}-(20x+1)^5}{\sqrt[5]{1+20x^2}-1}$
- 16.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+7+\dots+(5n-3)}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{8n^6+n-3}}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+13}{4x-1} \right)^{1-2x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{x+2} \right)^{(\ln(1+x))^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})) \cdot \sin 4x}{\ln \cos 0,5x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(4-x^2)(\sqrt[5]{5+2x}-1)}{(e^{x^2-4}-e^{x+2}) \cdot \sin(2+x)}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arccos\left(\frac{\sqrt{x^2+3}}{4}\right)-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2-x}}{2}\right)}{x^3+1}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \frac{2}{x} + \sin \frac{5}{x})^{(3 \sin \frac{1}{x})^{-1}}$
- 17.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{2 \cdot 9} + \dots + \frac{5}{(7n-5)(7n+2)} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4-8x^3+19x^2-24x+48}{x^3+7x^2-104x+240}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x+5}{x-10} \right)^{5x+2}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( 2 - \frac{4x}{\pi} \right)^{(1-\sin 2x)^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{\ln(1+\cos 3x)}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt[4]{81-5x}}{\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{4})}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x+\sqrt{x^4-1}}}{\left( \operatorname{arctg} \frac{3-2x}{3+2x} + \frac{\pi}{4} \right)^{-1}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^5}-2 \cdot \sqrt[7]{x})}{\ln(1+\sqrt[4]{7x}+2 \cdot \sqrt[11]{x})}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{3^{x+1}-3}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2-9) \cdot \operatorname{arctg}(x-3)}{(e^x-e^3)^2}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arccos(0,5\sqrt{x^2-2})-0,25\pi}{2^{x+2}-x-3}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+3)^{99}+99x+197}{x^3+2x^2-x-2}$
- 18.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 \cdot 5^{n-1} - 4^{n+2}}{13 \cdot 4^{n-1} + 6 \cdot 5^{n+1}}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3+7x^2+8x-16}{x^4+8x^3+20x^2+32x+64}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x+3}{x+4} \right)^{4x-3}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(x+2)^2}{4} \right)^{(\sqrt{1-3x}-1)^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 2x} \right)$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+4x^2)}{(1-2x^3)^8-1}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{\operatorname{arctg} \sqrt{3x+6} + \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2 \cdot 5^x) - \cos(x^2 \cdot 5^{-x})}{\sqrt[3]{1-2x^5}-1}$
- 19.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2+5}{1+5+\dots+(4n-3)} + \frac{5}{n} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^3-3x^2-9x-5}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{14x+5} \right)^{1-3x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 7x)^{(\sqrt[5]{1-9x+x^2}-1)^{-2}}$

- 20.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\left(\sqrt[3]{(3n^2-1)^2} - \sqrt[3]{(3n^2+1)^2}\right)^{-1}}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}{x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-11}{x+6}\right)^{2+3x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg} x}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\cos 2x}-1}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+0,2x^2}-3}{(e-e^{7x+1}) \cdot \ln(1-0,2x)}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2-9)}{\frac{\pi}{3} - \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^{(3x(1-\cos 2x))^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{\ln \cos 4x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\cos x}-1}{(3^{2x}-1) \operatorname{arctg} 0,3x}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \arccos \frac{\sqrt{3x-1}}{2}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(\sqrt{4x+1}-x)}{\sin \frac{x-2}{3} - \sin \frac{\pi x}{2}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3 x}{3 \cos^2 x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25-x^2}-5}{(5^x-3^{2x}) \cdot \ln(1-\operatorname{tg} x)}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+4}}}{\operatorname{arctg} \frac{6-x}{6+x} + \frac{\pi}{4}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\cos x}{\cos 4x}\right)^{(\sin(x-4))^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x - \sin x}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x} \cdot (e^{\sqrt{x^3}} - 1)}{\ln(1-2x) \cdot (\sqrt[7]{1+3x} - 1)}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x^2-3)-0,5\pi}{\sqrt{4-x^2}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^6-4^6-6 \cdot 4^5 \cdot (x-4)}{(x-4)^2}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{(e^{x-0,5\pi}-1) \operatorname{tg} x}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x)-\ln(1-x)) \cdot \ln(1-3x)}{(1+x^2)^5 - 1}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x+2}}{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1} \cdot (x^2-1)}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{16}} (\operatorname{tg} 4x)^{(\sin(14x+\frac{\pi}{8}))^{-1}}$
- 21.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{5}{\sqrt{2^n}} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+5x^2+x-3}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x-1}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\cos x}}}$
- 22.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5-n+3n^2}{2+6+\dots+(4n-2)}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-x^2-16x-20}{x^3+9x^2+24x+20}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x-3}\right)^{-1-x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x^2)^{\frac{1}{x \operatorname{arctg} x}}$
- 23.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{1 \cdot 9} + \dots + \frac{4}{(8n-7)(8n+1)} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+10x^2+33x+36}{x^3-9x^2-27x+27}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x+2}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{3x+2}{2}\right)^{\frac{5x}{\operatorname{arctg} x^2}}$
- 24.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{n+2}+(-7)^{n-1}}{5 \cdot 8^n+(-7)^n}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4-6x^3+13x^2-24x+36}{x^4-6x^3+x^2+48x-72}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{2x+11}\right)^{1-3x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \sin(x - \frac{\pi}{4}))^{\operatorname{tg} 2x}$

- 25.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+8+\dots+(5n-2)}{4+7+\dots+(3n+1)}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^3-3x^2-9x-5}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x-3}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln(1 + 5x))^{(\ln(1-3x))^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{5^{3x^2+1}-5}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x-e^2}{\sqrt{x-1}-1}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{6-x}} + \frac{\pi}{4}}{2x^2+5x+2}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(10x+1)^7-(7x+1)^{10}}{\sqrt[7]{1-10x^2}-1}$
- 26.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^5(5n-3)} - \sqrt[3]{5n^6+2}}{\sqrt{9n^2-2n+3}}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4-13x^2-48}{(x+1)(2x-7)(x-3)-5}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{3x^3+1}\right)^{x^3-3}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)^{\left(\ln\left(1 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)\right)^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\sin 4x)}{4^{x+1}-4}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2-4)}{(2x+5)^9-1}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[4]{5x+1}-2}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-\operatorname{tg}x}{1-\sin x}\right)^{(5x(\cos x-1))^{-1}}$
- 27.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \dots + 3 \cdot \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2)(2x+1)(3x-1)+12}{x^3-3x^2+x+5}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{x+4}{2}\right)^{(\arcsin(x^2-x))^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}} - \sqrt{1+\sin x}}{\ln(1+2x^3)}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5^{x^2-9}-5^{2x-6}}{\sqrt{4-\sin^2(x-3)}-2}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8x^4-2x+3}}{\left(\operatorname{arctg} \frac{x^2-2}{x^2+2} - \frac{\pi}{4}\right)^{-1}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1-\sqrt[9]{4x}+\sqrt{8x^3})}{\ln(1+2 \cdot \sqrt[15]{x}+\sqrt[3]{25x^2})}$
- 28.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^4-1}+\sqrt{3n^2+1}}{7+9+\dots+(2n+5)}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-4x^2-3x-10}{(x+1)(x-4)(3x-14)-6}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{3x+8}\right)^{4x^2+11}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 3x^2)^{(\operatorname{arctg} x^2)^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-\sin 2x}-\cos x}{7^{2x+1}-7}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+3)-\ln x}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[5]{x+4}-1}{\arccos \frac{\sqrt{x^2-6}}{x+5} - \frac{\pi}{6}}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)^{200}-200x+599}{2x^3-9x^2+27}$
- 29.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}\right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{(11-x)(0,1x+1)(2x-19)-2}{x^3-10x^2+2x-20}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3-1}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2x}{x+1}\right)^{(\sqrt{1-\cos 4x})^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{25-3x}-5}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2^{4+2x}-2^{x^2-4}}{\ln(-x)-\ln(x+4)}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1}-\operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}}{\ln(3-x)}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{x} \cdot 3^x)-\cos(\sqrt{x} \cdot 3^{-x})}{\sin(\pi-3x^2)}$

30. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n-1} + (-3)^{n+1}}{5^{n+2} + (-3)^n}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{3x^3 + 17x^2 - 27x + 7}{(2x+13)(x+9)^9 + 4}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5-3x}{1-2x} \right)^{0,3x-3}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \arcsin \frac{x^2}{3} \right)^{(\ln(1+3x^2))^{-1}}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{5x^3 + 1 - 5}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(\sqrt[4]{3x} - 2)}{\sqrt[4]{13 - 4x} - 1}$
- \*g)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\arcsin \frac{\sqrt{x+5}}{2} - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2 + \frac{x}{3}} - 1}$
- \*h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(5^{2x} - x^3)}{\ln(7^{2+x} - x^3)}$

### Задание 3

Исследовать функцию  $f(x)$  на непрерывность и построить её график:

- |  |   |
|--|---|
| $1. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -1 \\ x^3 + 1, &  x  \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$                   | <b>b)</b> $f(x) = \frac{ x+2 }{x^2+3x+2}$<br><b>*c)</b> $f(x) = 3^{\frac{3}{x^2-4}}$                        |
| $2. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq -1 \\ \sqrt[3]{x}, & -1 < x \leq 0 \\ 2x + 3, & x > 0 \end{cases}$        | <b>b)</b> $f(x) = x - \frac{2 x+3 }{x+3}$<br><b>*c)</b> $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$ |
| $3. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x \leq 2 \\ 2 - x, & 2 < x \leq 3 \\ 2e^x, & x > 3 \end{cases}$        | <b>b)</b> $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{ x-2 }$<br><b>*c)</b> $f(x) = \arctg \frac{x}{x-1}$                       |
| $4. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 1, & x < 0 \\ -x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ | <b>b)</b> $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{ x+6 }$<br><b>*c)</b> $f(x) = \sin \frac{x}{x-2}$                         |
| $5. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq -1 \\ x + 3, &  x  < 1 \\ \frac{1}{x-3}, & x \geq 1 \end{cases}$          | <b>b)</b> $f(x) = 2x - \frac{ 1-x }{x-1}$<br><b>*c)</b> $f(x) = \cos \frac{x}{x-1}$                         |
| $6. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4 \\ \lg(x+4), & -4 < x < 2 \\ x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$              | <b>b)</b> $f(x) = \frac{ x-3 }{x^2-x-6}$<br><b>*c)</b> $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-9}}$  |

7. a)  $f(x) = \begin{cases} 2x^{-2}, & x < 0 \\ 2x + 5, & 0 \leq x \leq 3 \\ 2 + x^2, & x > 3 \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x-2|}$   
 \*c)  $f(x) = 2^{\frac{1}{4-x^2}}$
8. a)  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{2}, & x \leq 0 \\ \cos \frac{x}{2}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{x-0,5\pi}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
- b)  $f(x) = 3x + \frac{2|x+1|}{x+1}$   
 \*c)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+2}$
9. a)  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq -2 \\ -x^2, & -2 < x \leq -1 \\ \frac{1}{x+1}, & x > -1 \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{|x-4|}{x^2 - 3x - 4}$   
 \*c)  $f(x) = \sin \frac{x-2}{x}$
10. a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x < -2 \\ |x-1|, & |x| \leq 2 \\ x^2 - 2, & x > 2 \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{|x-1|}$   
 \*c)  $f(x) = \cos \frac{x+1}{x}$
11. a)  $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} x, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
- b)  $f(x) = x - \frac{3|x+2|}{x+2}$   
 \*c)  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$
12. a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \lg(3x+1), & 0 < x \leq 3 \\ 10 - x^2, & x > 3 \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{|x+2|}{2x^2 + 3x - 2}$   
 \*c)  $f(x) = 2^{\frac{2}{1-x^2}}$
13. a)  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & x \leq -1 \\ 3^{-x}, & -1 < x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 5}{|x+1|}$   
 \*c)  $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{x}{x-2}$

14. a)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1 \\ |x - 1|, & |x| < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

b)  $f(x) = 2x + \frac{|x+3|}{x+3}$   
 \*c)  $f(x) = \sin \frac{x}{x+1}$

15. a)  $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ -x^2 - 2x + 4, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$

b)  $f(x) = \frac{|1-x|}{3x-x^2-2}$   
 \*c)  $f(x) = \cos \frac{x}{x+2}$

16. a)  $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

b)  $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{|x-1|}$   
 \*c)  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{1-x^2}}$

17. a)  $f(x) = \begin{cases} 3x^{-1}, & x \leq -3 \\ 3^{x+3}, & -3 < x < 0 \\ |x + 3|, & x \geq 0 \end{cases}$

b)  $f(x) = \frac{x}{|x|} - 3x + 2$   
 \*c)  $f(x) = 2^{\frac{3}{x^2-2}}$

18. a)  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), & x \leq -\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), & -\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

b)  $f(x) = \frac{|2-x|}{3x^2-4x-4}$   
 \*c)  $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{x-2}{x}$

19. a)  $f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 1, & x \leq -1 \\ x^2 - 3x + 2, & -1 < x \leq 2 \\ 3^{\frac{1}{x-2}}, & x > 2 \end{cases}$

b)  $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{|x+1|}$   
 \*c)  $f(x) = \sin \frac{2x}{2x-1}$

20. a)  $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x+2}}, & x < -2 \\ 4x + 2, & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{2-x}, & x > 2 \end{cases}$

b)  $f(x) = 2x - \frac{|2x+1|}{2x+1}$   
 \*c)  $f(x) = \cos \frac{3x}{1-3x}$

- 21.** a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+\pi}, & x < -\frac{\pi}{2} \\ |x|, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2x+\pi}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{|x-4|}{x^2-3x-4}$   
 \*c)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x^2-3}}$
- 22.** a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x < -1 \\ |x-1|, & |x| \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{x^2-x-2}{|x-1|}$   
 \*c)  $f(x) = 3^{\frac{2}{x^2-2}}$
- 23.** a)  $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 0 \\ \ln(3x+1), & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$
- b)  $f(x) = x - \frac{3(x+1)}{|x+1|}$   
 \*c)  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{1-x^2}}$
- 24.** a)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 1, & x \leq 0 \\ |x+1|, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{4}{2-x}, & x > 2 \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{|x+2|}{2x^2+x-6}$   
 \*c)  $f(x) = 4^{\frac{1}{4-x^2}}$
- 25.** a)  $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}}}, & x < -\frac{\pi}{2} \\ \cos 2x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 2^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{|x-1|}$   
 \*c)  $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{x}{x+1}$
- 26.** a)  $f(x) = \begin{cases} 2^{x+\frac{\pi}{2}}, & x < -\frac{\pi}{2} \\ \sin 2x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 2^{x-\frac{\pi}{2}}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
- b)  $f(x) = 3x + \frac{|x-1|}{x-1}$   
 \*c)  $f(x) = \sin \frac{x-1}{x}$
- 27.** a)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}, & x \geq 3 \\ \frac{1}{x-3}, & 0 \leq x < 3 \\ 3x^2 + 1, & x < 0 \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2-4x+3}$   
 \*c)  $f(x) = \cos \frac{x-2}{x}$

$$28. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} \ln(x+2), & -1 \leq x \leq 2 \\ 3x^2 + 2x - 1, & x < -1 \\ 4x - 8, & x > 2 \end{cases} \quad \text{b)} \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{|x-1|}$$

\*c)  $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{x^2-5}}$

$$29. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} x + \pi, & x \leq -\pi \\ \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}), & |x| < \pi \\ x - \pi, & x \geq \pi \end{cases} \quad \text{b)} \quad f(x) = 2x - \frac{|x+3|}{x+3}$$

\*c)  $f(x) = 5^{\frac{1}{5-x^2}}$

**30.** a)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5, & x < -1 \\ \sqrt[3]{x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

b)  $f(x) = \frac{|x+3|}{x^2+3x}$

\*c)  $f(x) = \sin \frac{x+2}{4-x}$

## Задание 4

**a)** Продифференцировать функцию:

$$1. \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1 + e^{2x}} + \ln \left( e^{-x} + \sqrt{1 + e^{-2x}} \right) \right)$$

$$2. \quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x+1}}{x - \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{1-x}$$

$$3. \quad y = x - \ln(1 + e^x) - \frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}} - (\operatorname{arctg} \sqrt{e^x})^2$$

$$4. \quad y = \frac{1}{3} \left( \arcsin \frac{\sin x}{2} - \frac{x \cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} \right)$$

$$5. \quad y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}}$$

$$6. \quad y = \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} - \frac{\ln(1 - x + x^2)}{x}$$

$$7. \quad y = \frac{x \operatorname{arctg} x}{2\sqrt{3x^2 + 2}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{3x^2 + 2}$$

$$8. \quad y = \ln \frac{(x-3)^2}{x^2 - 5x + 7} - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 5}{\sqrt{3}}$$

$$9. \quad y = x \arccos \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$10. \quad y = \frac{\arccos(x\sqrt{x})}{3(1-x^3)} + \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{1-x^3}}$$

$$11. \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left( \sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x - \sin x}$$

$$12. \quad y = \ln \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}$$

$$13. \quad y = \sqrt{1 + \cos^2 x} - \cos x \cdot \ln \left( \cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x} \right)$$

$$14. \quad y = \frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{3}}$$

$$15. \quad y = \frac{1}{14} \ln \frac{(x+1)^2}{9x^2 + 6x + 4} + \frac{2}{7\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{3x+1}{\sqrt{3}}$$

$$16. \quad y = \sin x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin^2 x)$$

$$17. \quad y = (x - 1) \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{x-1} \right) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2)$$

$$18. \quad y = \frac{1}{10\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{6}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{10(1+5x^2)}$$

$$19. \quad y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+2x} + x}{\sqrt[4]{1+2x} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+2x^4}}{x}$$

$$20. \ y = x - e^{-x} \cdot \arcsin e^x - \ln \left( 1 + \sqrt{1 - e^{2x}} \right)$$

$$21. \ y = \ln(1+x) - 3 \ln(1+\sqrt[3]{1+x}) - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{1+x}$$

$$22. \ y = \frac{1}{8} \ln(2x^2 - x + 2) + \frac{\sqrt{15}}{12} \operatorname{arctg} \frac{4x-1}{\sqrt{15}} + \frac{3}{2} \ln(x-2) + \frac{x}{2}$$

$$23. \ y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \arcsin e^x + \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \sqrt{1 - e^{2x}} \right)$$

$$24. \ y = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{1-x} - 2 \arcsin \frac{1}{x-2}$$

$$25. \ y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^2-2x+4}{(x+2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}}$$

$$26. \ y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{x}$$

$$27. \ y = x - \frac{1}{2} \ln \left( (1+e^x) \sqrt{1+e^{2x}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^x$$

$$28. \ y = \sqrt{e^{2x} + e^{4x} - 1} + \ln \left( 2 + e^x + \sqrt{e^{2x} + e^{4x} - 1} \right) - \arcsin \frac{2-e^{-x}}{\sqrt{5}}$$

$$29. \ y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$$

$$30. \ y = e^x \cdot \arcsin e^x + \sqrt{1-e^{2x}}$$

b) Продифференцировать функцию, используя предварительное логарифмирование:

$$1. \ y = \frac{(2x+3)^5 (\sin 3x+1)^7}{(3x^3-2)(7x-1)^6}$$

$$2. \ y = \sqrt[10]{\frac{(2x-1)^9 (x+3)^3}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sin^7(x+1)}}$$

$$3. \ y = \frac{(\cos^3 5x-2x)^4 (x^2+2)^3}{\arcsin^2 x \cdot (3x^3+2x+1)^5}$$

$$4. \ y = \sqrt[11]{\frac{\arccos^5(3x+1) \cdot (x^2+1)^2}{(x^4+x^3)(7x+3)^2}}$$

$$5. \ y = \frac{(x^2+3)^5 (\operatorname{arctg} 3x+1)^2}{(\sqrt[3]{x}-2)(5x-2)^4}$$

$$6. \ y = \frac{\sqrt[3]{(2x^3+3)^5} \cos^7(3x-2)}{(3x-1)^5 (6x^2+3x+1)^3}$$

$$7. \ y = \frac{(e^{2x}+1)^3 (x^5+3x)^4}{\arcsin^3 2x (2x^3+x^2)^5}$$

$$8. \ y = \sqrt[12]{\frac{\arcsin^5 3x \cdot (x^2+5)^7}{(6x^3-2)^3 (2^x+1)^2}}$$

$$9. \ y = \frac{\operatorname{ctg}^3(0,2x) \cdot (4\sqrt{x}+2)^2}{(x^2+\sqrt{10})^7 (3x^5+4x^2+1)^4}$$

$$10. \ y = \sqrt[15]{\frac{\sin^6(3x-4) \cdot \cos^2(2x-1)}{(\sqrt{x}-3)^4 (3x^6+2)^3}}$$

$$11. \ y = \frac{(7x+2)^5 (3x^2-1)^3}{(\cos^2 5x+1)(2\sqrt[5]{x}-1)^2}$$

$$12. \ y = \sqrt[11]{\frac{(5x+2)^2 (x-7)^3}{\sqrt[3]{x} \cdot \arcsin^5(2x+1)}}$$

$$13. \ y = \frac{(\sin^2(7x)+2)^3 (x^4-1)^2}{\operatorname{arctg}^7(6x-1) (x^3+2x+1)^4}$$

$$14. \ y = \sqrt[17]{\frac{(\sqrt[3]{x}+2x)(2x-3)^3}{\operatorname{tg}^6(7x+1) \cdot (x+1)^2}}$$

$$15. \ y = \frac{(2x^5-3)^2(\operatorname{arcctg}(5x)-\sqrt{3})^2}{(3x+2)^2(x-2)^5}$$

$$16. \ y = \frac{\sqrt[7]{(x^2+3)^2} \cdot \sin^5(2x+1)}{(4x+1)^3(3x^2+2\sqrt{x+1})^4}$$

$$17. \ y = \frac{(3^{5x}+1)^4(x^3+2)^2}{\arccos^3(2x+1) \cdot (\sqrt{x+2})^5}$$

$$18. \ y = \sqrt[19]{\frac{(2x+1)^5(3x^2+2)^7}{\operatorname{arctg}^5(0,3x) \cdot (\sqrt[4]{x+1})^2}}$$

$$19. \ y = \frac{\operatorname{tg}^3(0,5x) \cdot (3\sqrt[5]{x+2})^2}{(2x^7+\sqrt{3})^2(3x+x^2)}$$

$$20. \ y = \sqrt[17]{\frac{\cos^7(0,2x) \cdot \operatorname{tg}^2(3x)}{(\sqrt[5]{x+2})^3(x^8+3)^2}}$$

$$21. \ y = \frac{(3x+1)^5(2x^3+5)^7}{(\sin^3 5x+2)(3\sqrt[7]{x+2})^4}$$

$$22. \ y = \sqrt[9]{\frac{(7x^2+3)^2(x+\sqrt{5})^4}{\sqrt[3]{x^4} \cdot \arccos^2(3x-2)}}$$

$$23. \ y = \frac{(\cos^3(5x)+2)^2(x^5+2)^3}{\operatorname{arcctg}(2\sqrt{x}) \cdot (x^4+3\sqrt[4]{x})^2}$$

$$24. \ y = \sqrt[7]{\frac{(6x+5)^3(\sqrt[4]{x+3})^2}{\sin^5(0,3x) \cdot (2x-\sqrt{7})^2}}$$

$$25. \ y = \frac{(3x^4-2)^{11}(\operatorname{arctg}^3(2x+1))}{(5x-1)^3(x+3)^6}$$

$$26. \ y = \frac{\sqrt[9]{(x^3+3)^2 \cdot \cos^7(2x-1)}}{(3\sqrt{x-1})^2(5x^3+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{2})^2}$$

$$27. \ y = \frac{(5\sqrt{x}+2)^3(x^4-\sqrt{5})^2}{\arcsin^5(\sqrt{2x}) \cdot (\sqrt[3]{x+2})^4}$$

$$28. \ y = \sqrt[5]{\frac{(3x+1)^3(2\sqrt{x+5})^4}{\operatorname{arcctg}^3(0,1x) \cdot (\sqrt[5]{x+1})^3}}$$

$$29. \ y = \frac{\operatorname{ctg}^5(2\sqrt{x}) \cdot (7\sqrt[4]{x^3}+2)^2}{(3x^5+2)^2(7^x-2x)^3}$$

$$30. \ y = \sqrt[7]{\frac{\sin^5(2x+3) \operatorname{ctg}^2(x+1)}{(x^9+3)^2(\sqrt[7]{x^3}-\sqrt{3})^3}}$$

c) Продифференцировать функцию:

$$1. \ y = x^{\operatorname{tg}(2x+1)}$$

$$12. \ y = (\cos x^2)^{\frac{1}{x+2}}$$

$$2. \ y = \sqrt[3]{3x^7 - 2}$$

$$13. \ y = (x^2 + 3)^{\frac{1}{\cos 3x}}$$

$$3. \ y = \left(\frac{x^2+1}{2}\right)^x$$

$$14. \ y = (7x + 1)^{\arcsin(\sqrt{2}x)}$$

$$4. \ y = (2x + 1)^{2^x}$$

$$15. \ y = (4x - 3)^{\arccos(\sqrt{3}x)}$$

$$5. \ y = x^{3^x+x}$$

$$16. \ y = (2x)^{\operatorname{ctg} 3x}$$

$$6. \ y = (\sin 2x)^{0,5x}$$

$$17. \ y = \sqrt[2x]{x^5 + 2}$$

$$7. \ y = 2x^{x^3-x}$$

$$18. \ y = (2x)^{2^x}$$

$$8. \ y = (\ln(x^2 + 2))^x$$

$$19. \ y = (x^3 + x)^{3x}$$

$$9. \ y = (5x + 1)^{\frac{1}{3x+2}}$$

$$20. \ y = (3x + 1)^{\operatorname{arcctg}(\sqrt{5}x)}$$

$$10. \ y = (\sin x^2)^{\cos 2x}$$

$$21. \ y = (\ln(x + 2))^{3^x}$$

$$11. \ y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\sin 2x}$$

$$22. \ y = (x^3)^{\operatorname{arctg}(2\sqrt{x})}$$

**23.**  $y = (3x)^{e^{x^3}}$

**27.**  $y = (4x^5 - 5)^{\operatorname{tg}(\sqrt{x})}$

**24.**  $y = (2x - 1)^{\sin x^5}$

**28.**  $y = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\sqrt{x-2}}$

**25.**  $y = (\sqrt{x} + 2)^{(\sqrt{3}x-1)}$

**29.**  $y = (\operatorname{tg} 5x)^{5^x}$

**26.**  $y = (\sqrt[3]{x})^{\operatorname{ctg}(3x)}$

**30.**  $y = (6x)^{\cos x^6}$

**\*д)** Найти производную функции, пользуясь непосредственно определением производной:

**1.**  $y = \sqrt{5x^2 - x}$

**16.**  $y = \frac{1}{4(4x+3)}$

**2.**  $y = e^{3x-2}$

**17.**  $y = (3x + 1)^3$

**3.**  $y = \sin(4x + 3)$

**18.**  $y = e^{\cos(4x+1)}$

**4.**  $y = \log_2(5x + 2)$

**19.**  $y = \operatorname{ctg}\frac{4x}{5}$

**5.**  $y = 7^{2x-1}$

**20.**  $y = \frac{5}{(x+3)^2}$

**6.**  $y = \frac{1}{3(3x-7)}$

**21.**  $y = \sqrt{2x^2 + 5x}$

**7.**  $y = (2x - 5)^3$

**22.**  $y = e^{0,5x+9}$

**8.**  $y = e^{\sin(2x-1)}$

**23.**  $y = \sin(7 - 3x)$

**9.**  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{4}\right)$

**24.**  $y = \log_3(4 - 3x)$

**10.**  $y = 3(x - 2)^{-2}$

**25.**  $y = 8^{6x+1}$

**11.**  $y = \sqrt{6x - x^2}$

**26.**  $y = \frac{1}{7(5-7x)}$

**12.**  $y = e^{7-2x}$

**27.**  $y = (3 - 2x)^3$

**13.**  $y = \cos(0, 5x - 3)$

**28.**  $y = e^{\sin(3-2x)}$

**14.**  $y = \log_5(2x - 1)$

**29.**  $y = \operatorname{tg}\frac{2x}{7}$

**15.**  $y = 9^{3-2x}$

**30.**  $y = \frac{4}{(x-4)^2}$

**\*e)** Написать и доказать по индукции формулу для производной  $n$ -го порядка указанной функции:

$$1. \ y = \sqrt[7]{e^{3x+1}}$$

$$16. \ y = \cos(0, 5x + 1) - \sin(4x - 1)$$

$$2. \ y = \log_3(4x - 1)$$

$$17. \ y = \frac{x^2}{(3-2x)(x-3)^2}$$

$$3. \ y = \frac{7x}{2x^2-5x-3}$$

$$18. \ y = (x + 3)^3 \ln(x + 3)$$

$$4. \ y = 5^{6x+7}$$

$$19. \ y = (x - 2)e^{x+2}$$

$$5. \ y = \frac{4x-1}{11(3x+2)}$$

$$20. \ y = \frac{11x-1}{3x^2-5x-2}$$

$$6. \ y = \cos(2x - 1) + \sin(3x + 1)$$

$$21. \ y = \sqrt[3]{e^{7x-1}}$$

$$7. \ y = \frac{-x^2}{(2x+1)(x+1)^2}$$

$$22. \ y = \log_4(2x - 3)$$

$$8. \ y = (x - 2)^3 \ln(x - 2)$$

$$23. \ y = \frac{5x}{2x^2+9x-18}$$

$$9. \ y = (x + 3)e^{x-3}$$

$$24. \ y = 3^{4x+5}$$

$$10. \ y = \frac{4x-7}{2x^2+3x-2}$$

$$25. \ y = \frac{7x-2}{15(4x+1)}$$

$$11. \ y = \sqrt[5]{e^{2-3x}}$$

$$26. \ y = \sin\left(\frac{x}{5} + 1\right) - \cos(3x - 1)$$

$$12. \ y = \log_2(5x + 3)$$

$$27. \ y = \frac{x^2}{(1-2x)(x-1)^2}$$

$$13. \ y = \frac{-14x}{3x^2+16x+5}$$

$$28. \ y = (x + 1)^3 \ln(x + 1)$$

$$14. \ y = 7^{3x-2}$$

$$29. \ y = (x + 1)e^{x-1}$$

$$15. \ y = \frac{9x+1}{23(5x-2)}$$

$$30. \ y = \frac{x+2}{2x^2-7x+5}$$

## Задание 5

**a)** Найти предел, используя правило Лопиталя:

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x}{x+1} - \frac{1}{\ln(x+2)} \right)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} - \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)} \right)$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{6}{1-x^3} - \frac{10}{1-x^5} \right)$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{e^x}{e^x - e} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{\operatorname{arctg}(x-1)} - \frac{2}{x-1} \right)$

6.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{x^7 + 1} - \frac{3}{x^{21} + 1} \right)$

7.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{\ln(x-2)} - \frac{x}{x-3} \right)$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x + \sin^2 x} - \frac{1}{x} \right)$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{3}{x^3 + 3x} \right)$

10.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{x^9 - 1} - \frac{4}{x^{12} - 1} \right)$

11.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} \right)$

12.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2e^x}{x^2 - 1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

13.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{1-x^5} - \frac{6}{x^{15}-1} \right)$

14.  $\lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{4}{\ln(x+4)} - \frac{4x}{x+3} \right)$

15.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{5}{x^5 + 1} - \frac{7}{x^7 + 1} \right)$

16.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3}{x-2} - \frac{3}{\ln(x-1)} \right)$

17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right)$

18.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{4}{1-x^4} - \frac{10}{x^{10}-1} \right)$

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x}{2^x - 1} - \frac{1}{x^2} \right)$

20.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{\operatorname{arctg}(x+1)} - \frac{1}{x+1} \right)$

21.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{7}{x^7 + 1} - \frac{3}{x^3 + 1} \right)$

22.  $\lim_{x \rightarrow -4} \left( \frac{2}{\ln(x+5)} - \frac{2x}{x+4} \right)$

23.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{1}{x^2 - \frac{\pi^2}{16}} \right)$

24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{e^x - 1} - \frac{2}{x^2 + x} \right)$

25.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{6}{x^4 - 1} - \frac{9}{1 - x^6} \right)$

26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x^2} \right)$

27.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x}{2x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right)$

28.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{3}{x^3 + 1} - \frac{11}{x^{11} + 1} \right)$

29.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x}{x-3} - \frac{2}{\ln(x-2)} \right)$

30.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^{10} - 1} - \frac{3}{x^{15} - 1} \right)$

**b)** Найти предел, используя правило Лопиталя:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{(e^x - 5x - 1)^{-1}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{\sin x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + x)^{\frac{1}{x}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arctg} x)^{2x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x-2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arctg} 2x)^{3x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\cos^{-1}(0,5\pi x)}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{(2e^x - 2 + 3x)^{-1}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^x$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 1)^x$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{tg}^{-1} x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} (3^{-x} + 3x)^{\frac{2}{3x}}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x)^{\sin x}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{\sqrt{x^2+x}}\right)^{x-10}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 5)^{\frac{5}{\ln x}}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\frac{x}{x+1}}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -1} (2 + x)^{\sin^{-1}(\pi x)}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{(3e^x - 3 + 5x)^{-1}}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x + 2^{-x})^{(3x+2)^{-1}}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^{2x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 2^x + 3x)^{\frac{1}{2x}}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} (5^{-x} + 3x)^{\frac{2}{5x}}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{\frac{x}{x+1}}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)^{(x^2+3x)^{-1}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 2)^{\frac{4}{\ln x}}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x)^{\frac{2}{3 \sin(\pi x)}}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} (4^x + 2^{-x})^{3(2x-5)^{-1}}$$

## Задание 6

**a)** Провести полное исследование функции и построить её график:

1.  $y = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$

16.  $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$

2.  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

17.  $y = \frac{13 - 4x - x^2}{4x + 3}$

3.  $y = \frac{x^3 - 32}{x^2}$

18.  $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$

4.  $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

19.  $y = \frac{2x^2 + 4x + 2}{2-x}$

5.  $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$

20.  $y = \frac{x^2}{(x+2)^2}$

6.  $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$

21.  $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$

7.  $y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}$

22.  $y = \frac{4x^2 + 9}{4x + 8}$

8.  $y = \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^3}$

23.  $y = \frac{(x^2 - 4)x}{3x^2 - 4}$

9.  $y = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$

24.  $y = \frac{(x^2 - 5)x}{5 - 3x^2}$

10.  $y = \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$

25.  $y = \frac{3x^2 - 7}{2x + 1}$

11.  $y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$

26.  $y = \frac{2x^3 - 2x}{x^4 - 1}$

12.  $y = \frac{5x}{4 - x^2}$

27.  $y = \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

13.  $y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2}$

28.  $y = \frac{x^3}{9(x-3)^2}$

14.  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

29.  $y = \frac{4x^3}{(1 - 2x)^2}$

15.  $y = \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^3$

30.  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

\*б) Провести полное исследование функции и построить её график:

$$1. \ y = 5x \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

$$16. \ y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$2. \ y = \cos x + \frac{1}{\cos x}$$

$$17. \ y = \sqrt[3]{(x^2+5x)^2}$$

$$3. \ y = 2x + 4 - 3 \sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$18. \ y = \sin x (1 - \cos x)$$

$$4. \ y = 0,5e^{\sqrt{2} \cos x}$$

$$19. \ y = -\sqrt[3]{(x^2-6x+5)^2}$$

$$5. \ y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$$

$$20. \ y = \frac{10 \sin x}{2+\cos x}$$

$$6. \ y = \sqrt[3]{1 + \sin x}$$

$$21. \ y = \frac{(x+2)^{\frac{2}{3}}}{x-1}$$

$$7. \ y = 2 \sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$$

$$22. \ y = (2 + \sin x) \cos x$$

$$8. \ y = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$23. \ y = (x+1)^{\frac{2}{3}} (x-2)^3$$

$$9. \ y = \sqrt[3]{8 - x^3}$$

$$24. \ y = \sqrt[3]{1 - \cos x}$$

$$10. \ y = \ln(2 \cos^2 x)$$

$$25. \ y = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x}}$$

$$11. \ y = (x+2) \sqrt[3]{(1-x)^2}$$

$$26. \ y = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{2}}$$

$$12. \ y = 2x - \sin \frac{x}{2}$$

$$27. \ y = \frac{x}{\sqrt[3]{8-x^2}}$$

$$13. \ y = 3 \sqrt[3]{(x-3)^2} - 2x$$

$$28. \ y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

$$14. \ y = \sqrt[3]{1 + \cos x}$$

$$29. \ y = (4 - x) \sqrt[3]{x}$$

$$15. \ y = \sqrt[3]{(x+1)(x-3)^2}$$

$$30. \ y = \ln(\sin x) + \sin x$$

## Задание 7

**a)** Решите задачу:

1. Известно, что сумма двух положительных чисел  $x$  и  $y$  равна 15. При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $xy^2$  будет наибольшей?
2. Известно, что произведение двух положительных чисел  $x$  и  $y$  равно 16. При каких значениях  $x$  и  $y$  их сумма будет наименьшей?
3. Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2 + y^2 = 18$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  их произведение будет наибольшим?
4. Известно, что сумма двух положительных чисел  $2x$  и  $y$  равна 15. При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^2y$  будет наибольшей?
5. Известно, что удвоенное произведение двух положительных чисел  $x$  и  $y$  равно 18. При каких значениях  $x$  и  $y$  их сумма будет наименьшей?
6. Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2 + y^2 = 50$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  их произведение будет наибольшим?
7. Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x + 3y = 12$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $xy^3$  будет наибольшей?
8. Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2y = 2$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^2(y^2 + 4)$  будет наименьшей?
9. Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2 + y^2 = 27$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^2y$  будет наибольшей?
10. Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $3x + y = 15$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^4y$  будет наибольшей?
11. Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2y = 3$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^2(y^2 + 9)$  будет наименьшей?

- 12.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2 + y^2 = 48$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $xy^2$  будет наибольшей?
- 13.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x + 2y = 3$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $xy^2$  будет наибольшей?
- 14.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $xy^2 = 5$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $y^2(x^2 + 25)$  будет наименьшей?
- 15.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2 + y^2 = 32$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $xy$  будет наибольшей?
- 16.** Известно, что сумма двух положительных чисел  $x$  и  $y$  равна 21. При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^2y$  будет наибольшей?
- 17.** Известно, что произведение двух положительных чисел  $x$  и  $y$  равно 25. При каких значениях  $x$  и  $y$  их сумма будет наименьшей?
- 18.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2 + y^2 = 72$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  их произведение будет наибольшим?
- 19.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x + 2y = 36$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $xy$  будет наибольшей?
- 20.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2y = 1$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^2 + 9y$  будет наименьшей?
- 21.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2 + y^2 = 8$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  их произведение будет наибольшим?
- 22.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $3x + y = 18$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^2y$  будет наибольшей?
- 23.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^3y = 4$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $y(x^4 + 12)$  будет наименьшей?

- 24.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2 + y^2 = 48$ .  
При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $xy^2$  будет наибольшей?
- 25.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $6x + y = 8$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^3y$  будет наибольшей?
- 26.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^3y^2 = 4$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^2(y^2 + 1)$  будет наименьшей?
- 27.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2 + y^2 = 15$ .  
При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^3y^2$  будет наибольшей?
- 28.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $5x + y = 60$ .  
При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $x^3y$  будет наибольшей?
- 29.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2y^3 = 16$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $y^2(x^2 + 4)$  будет наименьшей?
- 30.** Для двух положительных чисел  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2 + y^2 = 96$ .  
При каких значениях  $x$  и  $y$  величина  $xy$  будет наибольшей?
- b)** Определите наибольшее отклонение от нуля функции на отрезке:
- |  |  |
|--|--|
| <b>1.</b> $y = x + \sin 2x$ , $[\pi, 2\pi]$                                      | <b>8.</b> $y = e^x \sin x$ , $[0, \pi]$                              |
| <b>2.</b> $y = \operatorname{tg} x$ , $[0, \frac{\pi}{3}]$                       | <b>9.</b> $y = x - \cos 2x$ , $[0, \pi]$                             |
| <b>3.</b> $y = e^x \cos x$ , $[0, \pi]$  | <b>10.</b> $y = \operatorname{tg} x - x$ , $[0, \frac{\pi}{3}]$      |
| <b>4.</b> $y = e^{4x} \operatorname{tg} x$ , $[-\frac{\pi}{3}, 0]$               | <b>11.</b> $y = e^{-x} \cos x$ , $[0, \pi]$                          |
| <b>5.</b> $y = \operatorname{tg} 4x - 16x$ , $[-\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{24}]$ | <b>12.</b> $y = \sqrt{3}x + \sin 2x$ , $[\pi, 2\pi]$                 |
| <b>6.</b> $y = x + \cos 2x$ , $[0, \pi]$   | <b>13.</b> $y = e^{2x} \operatorname{tg} 2x$ , $[-\frac{\pi}{6}, 0]$ |
| <b>7.</b> $y = \operatorname{ctg} x + 2x$ , $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$     | <b>14.</b> $y = e^{2x} \sin^2 x$ , $[0, \pi]$                        |

- |  |   |
|--|---|
| <b>15.</b> $y = \operatorname{tg} 3x + 4x$ , $[-\frac{\pi}{12}, 0]$              | <b>23.</b> $y = e^{2x} \cos^2 x$ , $[0, \pi]$   |
| <b>16.</b> $y = \operatorname{ctg} x + 2x$ , $[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$ | <b>24.</b> $y = \operatorname{tg} x + 8 \sin x$ , $[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$ |
| <b>17.</b> $y = e^{-x} \sin x$ , $[0, \pi]$                                      | <b>25.</b> $y = \operatorname{ctg} 2x + 4x$ , $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$     |
| <b>18.</b> $y = \sqrt{3}x + \cos 2x$ , $[0, \pi]$                                | <b>26.</b> $y = -e^{4x} \operatorname{tg} x$ , $[0, \frac{\pi}{3}]$                   |
| <b>19.</b> $y = \operatorname{tg} 2x - 4x$ , $[0, \frac{\pi}{6}]$                | <b>27.</b> $y = \operatorname{ctg} x + 8 \cos x$ , $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}]$  |
| <b>20.</b> $y = e^{2x} \sin 2x$ , $[0, \pi]$                                     | <b>28.</b> $y = \operatorname{tg} 3x - 4x$ , $[0, \frac{\pi}{12}]$                    |
| <b>21.</b> $y = \sqrt{3}x - \cos 2x$ , $[-\pi, 0]$                               | <b>29.</b> $y = -e^{2x} \operatorname{tg} x$ , $[0, \frac{\pi}{3}]$                   |
| <b>22.</b> $y = 4x - \operatorname{tg} 2x$ , $[-\frac{\pi}{6}, 0]$               | <b>30.</b> $y = e^{2x} \cos 2x$ , $[\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{6}]$                   |

c) Решите задачу. Сделайте поясняющий рисунок:

1. В прямой круговой конус с углом  $30^\circ$  в осевом сечении и радиусом основания  $r$  вписан цилиндр. Определить радиус основания и высоту цилиндра, при которых его полная поверхность будет наибольшей.
2. Найти наибольшее значение площади прямоугольного треугольника  $ABC$ , в котором угол  $C$  прямой, если одной вершиной является точка  $(0, 0)$ , вершина  $B$  лежит на графике функции  $y = 5x^3 e^{4-3x} + \frac{8}{x}$ , а вершина  $C$  расположена на оси абсцисс, и её абсцисса удовлетворяет соотношению  $0,5 \leq x \leq 10$ .
3. Определить радиус цилиндра, вписанного в шар радиуса  $R$ , который имеет наибольшую боковую поверхность. Указать значение площади полной поверхности такого цилиндра.
4. При подготовке к экзамену студент за  $t$  дней изучает  $\frac{t}{t+m}$ -ую часть курса, а забывает  $at$ -ую часть. Сколько дней надо затратить на

подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса, если  $m = 0,5$  и  $a = \frac{2}{49}$ ?

5. Найти радиус основания конуса с заданной площадью боковой поверхности  $S$ , который имеет наибольший объём.
6. Криволинейная трапеция ограничена кривой  $y = e^{-x}$  и отрезками прямых  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ . В какой точке кривой следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади? Указать значение этой площади.
7. Найти радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в конус с высотой  $h$  и радиусом  $r$ , боковая поверхность которого будет наибольшей.
8. В пространстве задана стандартная прямоугольная система координат  $OXYZ$ . Нужно пройти кратчайшим путем от точки  $C(-1, -1, 1)$  до точки  $D(2, -2, 0)$ , обязательно заходя по пути на ось  $OZ$ . Определить длину такого кратчайшего пути.
9. Найти размеры правильной треугольной пирамиды заданного объема  $V$ , которая имеет наименьшую сумму рёбер.
10. Провести через заданную точку  $A(a, b)$ , лежащую внутри некоторого угла  $\varphi$ , прямую, которая отсечёт от этого угла треугольник наименьшей площади. Указать значение этой площади.
11. По двум прямолинейным дорогам, составляющим угол в  $60^\circ$ , в направлении их пересечения одновременно начинают двигаться два пешехода: один со скоростью  $v_1$  км/ч, а другой –  $v_2$  км/ч. В начальный момент первый пешеход находится на расстоянии  $a$  км от перекрестка, а другой на расстоянии  $b$  км. Через какое время по-

сле начала движения расстояние между ними будет наименьшим?  
Определить это расстояние.

12. Найти наибольшее возможное значение отношения объёма конуса, вписанного в шар радиуса  $R$ , к объёму шара. Определить расстояние от центра шара до основания конуса.
13. В прямоугольник  $ABCD$  со сторонами 24 и 27 см вписаны две касающиеся друг друга окружности. Одна окружность касается сторон  $AB$  и  $AD$ , а другая — сторон  $BC$  и  $CD$ . Найти наименьшее значение суммы площадей, ограниченных этими окружностями.
14. Проволокой длины  $L$  необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Найти радиус круга, при котором площадь клумбы будет наибольшей.
15. В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $BC$  и  $AC$  взяты точки  $D$  и  $E$  соответственно так, что прямая  $DE$  параллельна стороне  $AB$ . Точка  $P$  делит сторону  $AB$  на части так, что  $BP = 8AP$ . Площадь треугольника  $ABC$  равна 1. Определить значение  $k = \frac{DC}{BC}$ , чтобы площадь трапеции  $APDE$  была наибольшей.
16. Найти радиус и высоту цилиндра, имеющего наибольший объём, который вписан в куб с ребром  $a$  так, что его ось совпадает с диагональю куба, а окружности оснований касаются граней куба.
17. Вершинами треугольника  $ABC$  являются точки  $A(3, 5)$  и  $B(0, 5)$ , а третья вершина  $C$  лежит на параболе  $y = 3x^2 - 48x + 20$ . Найти наименьшее возможное значение площади такого треугольника.
18. Определить высоту конуса, вписанного в шар радиуса  $R$ , который имеет наибольшую площадь полной поверхности. Указать значение площади полной поверхности такого конуса.

- 19.** В какой точке (абсцисса которой равна  $x_0$ ) графика функции  $y = -4x^4 + x$  следует провести касательную, чтобы площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, касательной к графику функции и прямой  $x = x_0 + 2$ , была наименьшей?
- 20.** Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного симметрично в сектор круга радиуса  $R$  с центральным углом  $\varphi$ .
- 21.** В прямом круговом конусе произведение высоты и радиуса основания равно  $a$ . Какое наименьшее значение может принимать радиус шара, описанного вокруг этого конуса?
- 22.** Найти наибольший объём правильного параллелепипеда, который можно вписать в эллипсоид вращения  $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
- 23.** Определить высоту конуса, описанного около полушара радиуса  $R$ , который имеет наименьший объём, если его основание и основание полушара лежат в одной плоскости и концентричны.
- 24.** На координатной плоскости  $OXY$  задано множество всех равносторонних треугольников, две вершины которых лежат на прямой  $y = -3x + 3$ , а координаты третьей вершины удовлетворяют неравенству  $0,5x^2 \leq y \leq -3x + 3$ . Найти наибольшее возможное значение площади таких треугольников.
- 25.** В сферу вписаны правильная треугольная пирамида со стороной основания 9 и правильная четырехугольная призма, нижние плоскости оснований которых совпадают. Центр сферы делит высоту призмы в отношении  $\sqrt{5} : 1$ , считая от вершины. Найти наибольшее возможное значение объёма призмы.
- 26.** Провести через заданную точку  $A(a, b)$ , лежащую внутри некоторого угла  $\alpha$ , прямую, которая отсечёт от этого угла два отрезка, сум-

марная длина которых будет наименьшей. Указать значение этой суммы.

27. Из фигуры, ограниченной кривой  $y = 3\sqrt{x}$  и прямыми  $x = 4$  и  $y = 0$  нужно вырезать прямоугольник наибольшей площади. Определить стороны этого прямоугольника.
28. Найти кратчайшее расстояние между кривыми  $y = e^{\alpha x}$  и  $y = \frac{\ln x}{a}$ ,  $a > 0$ .
29. В треугольной пирамиде  $PABC$  расстояние от каждой из вершин до середины ребра  $AB$  равно  $a$  см. При какой величине двугранного угла при ребре  $PC$  объём пирамиды будет наибольшим? Найти этот объём.
30. В какой точке (абсцисса которой равна  $x_0$ ) графика функции  $y = x^4 + 2x^2$  следует провести касательную, чтобы площадь фигуры, ограниченной графиком, касательной и прямой  $x = x_0 - 1$  была наименьшей?