Лабораторная работа 2
МЕТОДЫ ПОИСКА БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Цель работы

Изучение методов поиска безусловного экстремума, применение этих методов на практике (реализация методов для трех различных функций в какой-либо среде программирования, а также проверка при помощи математических пакетов) и сравнение методов по их эффективности.

Задание

1. Найти локальные минимумы трех функций (по вариантам, см. таблицу 1) с использованием следующих методов: метод нулевого порядка (любой) и метод ненулевого порядка (по вариантам, см. таблицу 2).
2. Дать геометрическую интерпретацию решения для двумерных функций.
3. Проверить решения с помощью математических пакетов.

Содержание отчета

1. Титульный лист с указанием варианта.
2. Цель лабораторной работы.
3. Задание.
4. Постановка задачи.
5. Краткое описание указанного метода.
6. Листинг программы с комментариями.
7. Результаты выполнения программы для указанных функций.
8. Графическая интерпретация для двумерного случая.
9. Проверка вычислений в математических пакетах.
10. Подробные выводы: анализ полученных результатов, сравнение эффективности методов для различных функций.

Таблица 1

Вариант	Функции
1	$f(x_1,x_2) = 4.5x_1^2 - 4.5x_1 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_2$ а) Начальная точка $x^0 = (2,3)$ $f(x_1,x_2,x_3) = 8(x_1-2)^2 + (x_2-5)^2 + 4(x_3-3)^2$ б) Начальная точка $x^0 = (3,6,6)$ в) Функция Биля $f(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{3}\left(c_i - x_1\left(1 - x_2^i\right)\right)^2$ Параметр $c = (1.5, 2.25, 2.625)$ Начальная точка $x^0 = (0,0)$ **P.S.** Функция имеет седлообразную «ловушку».
2	$f(x_1,x_2) = 18x_1^2 + 18x_1 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 - 12x_2 - 8$ а) Начальная точка $x^0 = (-2,-3)$ $f(x_1,x_2,x_3) = 7(x_1-1)^2 + 6(x_2-2)^2 + 8(x_3-5)^2$ б) Начальная точка $x^0 = (2,4,0)$ в) Функция Уайлда – Ремортеля $f(x_1,x_2) = -\alpha\, y_1 + \beta\sqrt{y_1^2 + \delta(y_2^2+1)} - \sqrt{\delta(\beta^2-\alpha^2)}$ $y_1 = \frac{\alpha\, x_1 - x_2}{\beta} + \alpha\sqrt{\frac{\delta}{\beta^2-\alpha^2}},\ y_2 = \frac{x_1 + \alpha\, x_2}{\beta}$ Параметры $\alpha = \sqrt{3}, \quad \beta = 2, \quad \delta = 0.5$ Начальная точка $x^0 = (-178, 710)$ **P.S.** Функция имеет эллипсоидальные линии уровня, ассиметрично сдвинутые относительно экстремума.
3	$f(x_1,x_2) = 9x_1^2 + 9x_1 - 6x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_2 - 4$ а) Начальная точка $x^0 = (-1,3)$ $f(x_1,x_2,x_3) = 8(x_1-1)^2 + (x_2-4)^2 + (x_3+7)^2$ б) Начальная точка $x^0 = (2,6,-10)$ в) Функция Розенброка $f(x_1,x_2) = 100(x_2 - x_1^2) + (1-x_1)^2$ Начальная точка $x^0 = (-1,2,1)$ **P.S.** Функция имеет нелинейный овраг параболического вида.

Вариант	Функции
4	$f(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 9x_1 - 6x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_2$ а) $x^0 = (2, 4)$ Начальная точка $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 3)^2 + 8(x_3 - 5)^2$ б) $x^0 = (2, 4, 1)$ Начальная точка в) Функция Розенброка $\mathrm{f}(x_1, x_2) = 100(x_2 - {x_1}^2)^2 + (x_1 - 1)^2$ Начальная точка $x^0 = (-1,2{,}1)$ **P.S.** Функция имеет кубический овраг. Её гессиан (функция H) меняет свою определенность в области $\lvert x_i \rvert < 3,\ i = 1, 2$.
5	$f(x_1, x_2) = 18x_1^2 - 18x_1 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 - 12x_2$ а) Начальная точка $x^0 = (2, 4)$ $f(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1 - 5)^2 + 2(x_2 - 4)^2 + (x_3 - 1)^2$ $x^0 = (7, 5, 4)$ б) Начальная точка в) Функция Витте - Холста $f(x_1, x_2) = 10^{-4}(x_1 - 3)^2 - (x_2 - x_1) + \exp(20(x_2 - x_1))$ $x^0 = (0, 1)$ Начальная точка **P.S.** Функция имеет резко ассиметричный овраг вблизи точки x^*.
6	$f(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 27x_1 - 18x_1x_2 + 12x_2^2 - 18x_2 - 5$ а) Начальная точка $x^0 = (2, 4)$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 + 2)^2 + 3(x_3 - 1)^2$ б)Начальная точка $x^0 = (4, -5, 2)$ в) Функция Пауэлла $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 10x_2)^2 +$ $+5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$ Начальная точка $x^0 = (3, -1, 0, 1)$ **P.S.** Функция задает «уплощенное» дно оврага (слабовырожденная ситуация). Её гессиан (функция H) вырожден в точке x^*.
7	$f(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 9x_1 - 6x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_2 + 6$ а) Начальная точка $x^0 = (2, 4)$

Вариант	Функции
	$f(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1+2)^2 + 2(x_2+3)^2 + 5(x_3-5)^2$ б) Начальная точка $x^0 = (-3, 4, 1)$ в) Функция Миля-Кантрелла $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\exp(x_1) - x_2)^4 + 100(x_2 - x_3)^6 + (\mathrm{arctg}(x_3 - x_4))^4 + x_1^8$ Начальная точка $x^0 = (1, 2, 2, 2)$ **P.S.** Функция задает «извивающийся» овраг.
8	$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_1 - 2x_1x_2 + \frac{4}{3}x_2^2 - 2x_2$ а) $x^0 = (2, 4)$ Начальная точка $f(x_1, x_2, x_3) = 6(x_1-1)^2 + 4(x_2-3)^2 + 2(x_3-7)^2$ б) $x^0 = (2, 5, 10)$ Начальная точка в) Функция Бокса $f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left(\exp\left(-\frac{i\,\alpha_j}{10}\right) - \exp\left(\frac{-i\,x_i}{10}\right)\right)\right)^2$ Параметры $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 10$ Начальная точка $x^0 = (0, 0)$ Максимальное число итераций: 20 **P.S.** Функция имеет резко ассиметричный овраг в обширной области изменения переменных.
9	а) $f(x_1, x_2) = 4(x_1-5)^2 + (x_2-6)^2$ Начальная точка $x^0 = (2{,}4)$ б) $f(x_1, x_2, x_3) = 5(x_1-4)^2 + (x_2-2)^2 + 3(x_3-4)^2$ Начальная точка $x^0 = (2{,}4{,}1)$ в) Функция Флетчера-Пауэлла $f(x_1, x_2, x_3) = 100\left\{\left[x_3 - 5\left(\left(\frac{1}{\pi}\right) arctg\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{1}{2}(1 - sign(x_1))\right)\right]^2 + \left[(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} - 1\right]^2\right\} + x_3^2$ Начальная точка $x^0 = (-1{,}0{,}0)$

Вариант	Функции
	P.S. Функция имеет резко «извивающийся» овраг. Её производные первого порядка кусочно-непрерывны.
10	а) $f(x_1, x_2) = 4{,}5{x_1}^2 - 4{,}5x_1 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_2 - 4$ Начальная точка $x^0 = (2{,}4)$ б) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 9)^2 + 4(x_2 - 4)^2 + 2(x_3 - 5)^2$ Начальная точка $x^0 = (10{,}4{,}7)$ в) Функция Вуда $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90\left\{\left[x_3 - 5\left(\left(\frac{1}{\pi}\right) arctg\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{1}{2}(1 - sign(x_1))\right)\right]^2 + \left[(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} - 1\right]^2\right\} + x_3^2$ Начальная точка $x^0 = (-1{,}0{,}0)$ **P.S.** Функция имеет резко «извивающийся» овраг. Её производные первого порядка кусочно-непрерывны.

Таблица 2

Вариант	Порядок	Метод
1	первый	покоординатного спуска
2	второй	Ньютона - Рафсона
3	первый	Полака - Рибьера
4	первый	градиентного спуска с постоянным шагом
5	первый	Дэвидона - Флетчера - Пауэлла
6	второй	Марквардта
7	первый	наискорейшего градиентного спуска
8	первый	Гаусса - Зейделя
9	первый	Флетчера - Ривса
10	второй	Ньютона