Лабораторная работа №3

Методы поиска условного экстремума.

Оформление лабораторной работы

1 Цель работы

Целью данной лабораторной работы является изучение методов поиска условного экстремума, применение этих методов на практике (реализация методов для различных функций в какой-либо среде программирования, а также проверка при помощи математических пакетов) и сравнение методов по их эффективности.

2 Формирование отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) постановку задачи,
2) краткое описание метода,
3) листинг программы; результаты расчетов по программе для указанных функций,
4) графическую интерпретацию в двумерном случае,
5) проверка вычислений в математических пакетах,
6) выводы: анализ результатов и сравнение методов по эффективности.
7) список использованной литературы.

1. Постановка задачи

Требуется найти минимум функции многих переменных $Y = F(\vec{x})$, то есть, такую точку $\vec{x}^* \in U$, что

$$F(\vec{x}^*) = min \min_{x \in U} f(\vec{x}), \qquad (1)$$

где множество точек U определяется ограничениями вида

$$g_j(\vec{x}) = 0,\ j = 1, \dots, m,\ m < n,$$
$$g_j(\vec{x}) \le 0,\ j = m + 1, \dots, p\ . \qquad (2)$$

2. Методы условной оптимизации

Применение необходимых и достаточных условий условного экстремума эффективно для решения ограниченного числа задач, в которых имеются аналитические решения. Для решения большинства практических задач используются численные методы, которые можно разделить на две группы:
- методы последовательной безусловной оптимизации;
- методы возможных направлений.

Методы последовательной безусловной оптимизации основаны на преобразовании задачи условной оптимизации в последовательность задач безусловной оптимизации путем введения в рассмотрение вспомогательных функций.

Основная идея методов первой группы состоит в том, чтобы аппроксимировать исходную задачу условной оптимизации некоторой вспомогательной задачей, решение которой менее сложно, чем решение исходной. Однако, при этом приходится решать последовательность таких задач, сходящихся к исходной. Причем, результаты решения предыдущей задачи используются в качестве начальных приближений при решении последующей задачи. Получение решений с практически необходимой точностью может быть достигнуто за конечное число шагов.

Ко второй группе методов относятся:
- метод проекции градиента;
- метод возможных направлений Зойтендейка.

Методы возможных направлений, используемые для решения задачи условной оптимизации, основаны на движении из одной допустимой точки, где выполнены все ограничения, к другой допустимой точке с лучшим значением целевой функции.

3. Методы последовательной безусловной оптимизации

К методам последовательной безусловной оптимизации относят:
- метод штрафов;
- метод барьеров;
- метод множителей;

- метод точных штрафных функций.

В методе штрафов (внешних штрафов) к целевой функции добавляется функция, интерпретируемая как штраф за нарушение каждого из ограничений. В результате генерируется последовательность точек, которая сходится к решению исходной задачи.

В методе барьеров (внутренних штрафов) к целевой функции исходной задачи добавляется слагаемое, которое не позволяет генерируемым точкам выходить за пределы допустимой области.

В методе множителей штрафная функция добавляется не к самой целевой функции, а к ее функции Лагранжа . В результате исследование на экстремум сводится к исследованию модифицированной функции Лагранжа.

В методе точных штрафных функций задача сводится к решению одной задачи безусловной оптимизации.

3.1. Метод штрафов

Алгоритм метода штрафов состоит из следующих этапов.

1 этап. Задать начальную точку $\bar{x}^0$ вне области допустимых решений, начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$, число $C > 1$ для увеличения параметра штрафа, погрешность расчета $\varepsilon > 0$. Принять $k = 0$.

2 этап. Составить вспомогательную функцию

$$F(\bar{x}, r^k) = f(\bar{x}) + \frac{r^k}{2}\{\sum_{j=1}^{m}[g_j(\bar{x})]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}[g_j^+(\bar{x})]^2\},$$

где функция штрафа $P(\bar{x}, r^k) = \frac{r^k}{2}\{\sum_{j=1}^{m}[g_j(\bar{x})]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}[g_j^+(\bar{x})]^2\}$ - квадрат срезки.

$g_j^+(\bar{x})$ - срезка функции:

$$g_j^+(\bar{x}) = max\{0, g_j(\bar{x})\} = \begin{cases} g_j(\bar{x}), при\ g_j(\bar{x}) > 0, \\ 0, при\ g_j(\bar{x}) \le 0. \end{cases}$$

3 этап. Найти точку $\bar{x}^*(r^k)$ безусловного минимума функции $F(\bar{x}, r^k)$ по $\bar{x}$ с помощью какого либо метода (нулевого, первого или второго порядка): $F(\bar{x}^*(r^k), r^k) = \min\limits_{x \in R^n} F(\bar{x}, r^k)$. При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять $\bar{x}^k$. Вычислить функцию штрафа $P(\bar{x}^*(r^k), r^k) = \frac{r^k}{2}\{\sum_{j=1}^{m}[g_j(\bar{x}^*)]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}[g_j^+(\bar{x}^*)]^2\}$.

4 этап. Проверить выполнение условия окончания:

А) если $P(\bar{x}^*(r^k), r^k) \le \varepsilon$, процесс поиска закончить: $\bar{x}^* = \bar{x}^*(r^k)$, $f(\bar{x}^*) = f(\bar{x}^*(r^k))$;

Б) если $P(\bar{x}^*(r^k), r^k) > \varepsilon$, то принять $r^{k+1} = Cr^k$, $\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^*(r^k)$, $k = k + 1$ и перейти к этапу 2.

Примечание. Рекомендуемые значения $r^0 = 0.01, 0.1, 1$, параметра $C = 4 - 10$.

3.2. Метод барьерных функций

Алгоритм метода барьерных функций состоит из следующих этапов.

1 этап. Задать начальную точку $\bar{x}^0$ внутри области U, начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$, число $C > 1$ для уменьшения величины параметра штрафа, погрешность расчета $\varepsilon > 0$. Принять $k = 0$.

2 этап. Составить вспомогательную функцию

$$F(\bar{x}, r^k) = f(\bar{x}) - r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\bar{x})} \text{ или } F(\bar{x}, r^k) = f(\bar{x}) - r^k \sum_{j=1}^{m} ln(-g_j(\bar{x})).$$

3 этап. Найти точку $\bar{x}^*(r^k)$ безусловного минимума функции $F(\bar{x}, r^k)$ по $\bar{x}$ с помощью какого либо метода (нулевого, первого или второго порядка): $F(\bar{x}^*(r^k), r^k) = \min\limits_{x \in R^n} F(\bar{x}, r^k)$ с проверкой принадлежности текущей точки внутренности множества U. При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять $\bar{x}^k$.

Вычислить функцию штрафа $P(\bar{x}^*(r^k), r^k) = -r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\bar{x}^*(r^k))}$ (обратная функция штрафа) или $P(\bar{x}^*(r^k), r^k) = -r^k \sum_{j=1}^{m} ln[-g_j(\bar{x}^*(r^k))]$ (логарифмическая функция штрафа).

4 этап. Проверить выполнение условия окончания:

А) если $\left|P(\bar{x}^*(r^k), r^k)\right| \le \varepsilon$, то процесс поиска закончить, приняв $\bar{x}^* = \bar{x}^*(r^k)$, $\quad f(\bar{x}^*) = f(\bar{x}^*(r^k))$;

Б) если $\left|P(\bar{x}^*(r^k), r^k)\right| > \varepsilon$, то принять $r^{k+1} = \frac{r^k}{C}$, $\quad \bar{x}^{k+1} = \bar{x}^*(r^k)$, $k = k + 1$ и перейти к этапу 2.

Примечание. Рекомендуемые значения $r^0 = 1{,}10{,}100$, параметра $C = 10{,}12{,}16$.

Блок вариантов заданий

Реализовать следующие методы поиска условного экстремума.

Вариант	Метод
1, 4, 7, 10	Штрафов (внешних штрафов)
2, 5, 8	Барьеров (внутренних штрафов)
3, 6, 9	Комбинированный метод штрафных функций

Примерные функции для проверки программ.

1. $f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $x_1 - x_2 \le -1$.

2. $f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $x_2 \ge 2$.

3. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $\bar{x} \le \bar{0}$.

4. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 5(1 - x_1)^2$, $x_1 + x_2 \ge 5$.

5. $f(\bar{x}) = 10(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$, $x_1 - x_2 \le -1$.

6. $f(\bar{x}) = 50(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $x_2 \ge 2$

7. $f(\bar{x}) = (x_1 - x_2)^2 + 100(x_1 + x_2 - 4)^2$, $-0.1x_1^2 + x_2 \le 0$;

   $q_2(x) = x_2 \le -2;$, $\bar{x} \le \bar{0}$.

8. $f(\bar{x}) = (3 - x_1)^2 + 100(x_2 + (x_1 - 2)^2 - 5)^2$, $q_1(\bar{x}) = 9(x_1 - 2)^2 + 25x_2^2 \ge 500$;

   $q_2(\bar{x}) = x_1 \le -10$; $q_3(\bar{x}) = x_2^{\ 2} \ge 17$;

Литература

1. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высш. шк., 2002. -544с.

2. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 352 с.