Глава 13. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

13.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СТРАТЕГИЯ РЕШЕНИЯ

Предположим, что в пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ хранится однородный груз в количестве $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц. Этот груз следует доставить в n заданных пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, причем в каждый из них требуется завезти соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц этого груза. Обозначим через c_{ij} стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j.

Транспортные задачи делятся на две группы.

1. Задачи, удовлетворяющие *условию баланса*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

означающему, что общий запас груза на всех пунктах хранения равен суммарной потребности всех пунктов назначения.

2. Задачи с нарушенным балансом, среди которых выделяются два случая:

а) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (суммарные запасы больше суммарных потребностей);

б) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (суммарные запасы меньше суммарных потребностей).

Рассмотрим формализацию транспортной задачи, удовлетворяющей условию баланса.

Обозначим x_{ij} – количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. Тогда *суммарная стоимость перевозок* имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} . \tag{13.1}$$

Ограничения представляются *уравнениями вывоза и привоза* груза:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i , \quad i = 1,2,\ldots,m ; \tag{13.2}$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j , \quad j = 1,2,\ldots,n ; \tag{13.3}$$

$$x_{ij} \ge 0 , \quad i = 1,2,\ldots,m ; \quad j = 1,2,\ldots,n . \tag{13.4}$$

Уравнение (13.2) означает, что из каждого пункта хранения A_i вывозится весь груз, а уравнение (13.3) описывает факт удовлетворения всех потребностей в пункте B_j. Условие (13.4) свидетельствует о том, что груз либо вывозится из пункта A_i в пункт B_j, и тогда $x_{ij} > 0$, либо нет, и в этом случае $x_{ij} = 0$.

Решение x_{ij}, $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,n$, системы (13.2) – (13.4) называется *планом перевозок*.

Требуется найти такой план перевозок, чтобы их суммарная стоимость была минимальной, т.е.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min . \tag{13.5}$$

Условия задачи удобно записывать в виде *матрицы перевозок* (табл. 13.1).

Таблица 13.1

Пункты	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	Запасы
A_1	c_{11}	c_{12}		c_{1j}		c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2j}		c_{2n}	a_2
$\vdots$							$\vdots$
A_i	c_{i1}	c_{i2}		c_{ij}		c_{in}	a_i
$\vdots$							$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mj}		c_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	Сумма

Заметим, что с помощью линейных преобразований можно показать зависимость одного из уравнений в системе (13.2),(13.3) от остальных, т.е. в этой системе имеется $(m + n - 1)$ независимых уравнений. Лишнее уравнение может быть исключено из системы уравнений-ограничений.

В матрице перевозок хранится текущий план перевозок x_{ij}, $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,n$.

Стратегия решения задачи

Так как поставленная задача является частным случаем задачи линейного программирования, то стратегия решения аналогична:

1) находится начальный план перевозок;

2) производится улучшение начального плана, т.е. последовательный переход от одного плана к другому, связанный с уменьшением суммарной стоимости перевозок. Процесс перехода от одного плана к другому завершается, когда уменьшение суммарной стоимости перевозок станет невозможным.

13.2. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК

Клетки матрицы перевозок, где $x_{ij} > 0$, называются *базисными*, а остальные, где $x_{ij} = 0$, – *свободными*. В матрице имеется $(m + n - 1)$ базисных клеток. Их число совпадает с числом независимых уравнений-ограничений.

Значение x_{ij} в матрице перевозок находится по формуле

$$x_{ij} = \min \begin{cases} \text{остаток груза в пункте } A_i, \\ \text{неудовлетворенные потребности в пункте } B_j. \end{cases} \tag{13.6}$$

Значение $x_{ij} = 0$ в свободной клетке не пишется явно, а вместо этого в ней ставится точка.

13.2.1. Метод северо-западного угла

Вычисления осуществляются по формуле (13.6), начиная с элемента x_{11}, стоящего в северо-западном углу матрицы перевозок.

Пример 13.1. Найти начальный план перевозок в транспортной задаче, заданной матрицей перевозок (табл. 13.2).

Таблица 13.2

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	2 10	3 10	4 •	20
A_2	1 •	2 10	5 30	40
Потребности	10	20	30	60

□ Начнем с северо-западного угла, т.е. $x_{11} = \min[20, 10] = 10$. Тогда в пункте B_1 потребности удовлетворены и, следовательно, $x_{21} = 0$ (в табл. 13.2 ставится точка). Первый столбец выбывает из рассмотрения.

Продолжим с северо-западного угла, т.е. $x_{12} = \min[(20-10), 20] = \min[10, 20] = 10$. Тогда запасы в пункте A_1 исчерпаны и $x_{13} = 0$ (в табл. 13.2 ставится точка). При этом первая строка выбывает из рассмотрения.

Продолжим с северо-западного угла:

$$x_{22} = \min[40, (20-10)] = \min[40, 10] = 10.$$

Потребности в пункте B_2 удовлетворены, и второй столбец выбывает из рассмотрения.

Заполним последний элемент, находящийся в северо-западном углу: $x_{23} = \min[(40-10), 30] = 30$. Таким образом, получен начальный план перевозок:

$$x_{11} = 10, \quad x_{12} = 10, \quad x_{13} = 0,$$

$$x_{21} = 0, \quad x_{22} = 10, \quad x_{23} = 30$$

с суммарной стоимостью $f = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 30 = 220$. Число базисных клеток, очевидно, составит $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$. ■

З а м е ч а н и е 13.1. При нахождении начального плана перевозок возможен случай вырождения, когда в результате вычислений значения x_{ij} получается, что потребности в пункте B_j удовлетворены, а запасы в пункте A_i исчерпаны. Тогда одновременно из рассмотрения выбывают строка и столбец. В этом случае рекомендуется поставить в одну из клеток выбывающих строки и столбца (лучше в клетку с наименьшей стоимостью) так называемый *базисный нуль*. Клетка с базисным нулем считается базисной (в ней пишется 0), а общее число базисных клеток остается равным $(m+n-1)$.

Пример 13.2. Методом северо-западного угла найти начальный план перевозок в транспортной задаче, заданной матрицей перевозок (табл. 13.3).

Таблица 13.3

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	1 30	2 20	3 •	5 •	50
A_2	4 •	1 **0**	1 40	2 •	40
A_3	1 •	2 •	5 10	10 50	60
Потребности	30	20	50	50	150

□ Начнем заполнение таблицы с северо-западного угла:

$$x_{11} = \min\,[50, 30] = 30; \quad x_{21} = x_{31} = 0 \text{ (ставится точка).}$$

Далее снова продолжим с северо-западного угла:

$x_{12} = \min\,[(50-30), 20] = \min\,[20, 20] = 20$ (это случай вырождения, так как выбывают первая строка и второй столбец: $x_{13} = x_{14} = x_{22} = x_{32} = 0$.

Базисный нуль поставим в клетку (2,2) с наименьшей стоимостью, равной $\min\,[3; 5; 1; 2] = 1$. В остальных выбывающих клетках ставятся точки.

Продолжим с северо-западного угла:

$$x_{23} = \min\,[40, 50] = 40; \quad x_{24} = 0 \text{ (ставится точка).}$$

Из рассмотрения выбывает вторая строка.

Продолжим с северо-западного угла:

$$x_{33} = \min\,[60, (50-40)] = 10 \quad \text{и} \quad x_{34} = \min\,[(60-10), 50] = 50.$$

Таким образом, получен начальный план перевозок

$$x_{11} = 30, \quad x_{12} = 20, \quad x_{13} = x_{14} = 0,$$

$$x_{21} = x_{22} = 0, \quad x_{23} = 40, \quad x_{24} = 0,$$

$$x_{31} = x_{32} = 0, \quad x_{33} = 10, \quad x_{34} = 50$$

с суммарной стоимостью

$$f = 30 + 40 + 40 + 50 + 500 = 660.$$

Число базисных клеток с учетом базисного нуля, очевидно, составит $m+n-1 = 3+4-1 = 6$.■

Пример 13.3. Методом северо-западного угла найти начальный план перевозок в транспортной задаче, заданной матрицей перевозок (табл. 13.4).

Таблица 13.4

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	3 40	4 •	5 •	1 **0**	1 •	40
A_2	2 •	5 30	6 10	1 10	1 **0**	50
A_3	3 •	1 •	2 •	3 •	4 50	50
A_4	2 •	3 •	5 •	6 •	10 10	10
Потребности	40	30	10	10	60	150

☐ Решим аналогично примеру 13.2:

а) $x_{11} = \min[40, 40] = 40$ (случай вырождения);

$x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{15} = x_{21} = x_{31} = x_{41} = 0$ (базисный нуль ставится в клетку (1,4) с наименьшей стоимостью, а в остальные ставятся точки);

б) $x_{22} = \min[50, 30] = 30$, $x_{32} = x_{42} = 0$ (ставятся точки);

в) $x_{23} = \min[(50-30), 10] = 10$, $x_{33} = x_{43} = 0$ (ставятся точки);

г) $x_{24} = \min[(50-30-10), 10] = \min[10, 10] = 10$ (случай вырождения);

$x_{25} = 0$ (ставится базисный нуль, так как это клетка с наименьшей стоимостью среди выбывающих клеток), $x_{34} = x_{44} = 0$ (ставятся точки);

д) $x_{35} = \min[50, 60] = 50$;

е) $x_{45} = \min[10, (60-50)] = 10$.

Таким образом, начальный план перевозок содержит два базисных нуля, следовательно, число базисных клеток составит $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$.■

13.2.2. Метод минимального элемента

Получаемый методом северо-западного угла начальный план перевозок не зависит от их стоимости и поэтому в общем случае далек от наилучшего. В методе минимального элемента учитываются затраты на перевозку, следовательно, соответствующий начальный план, как правило, позволяет обеспечить меньшую суммарную стоимость, более близкую к оптимальной.

В этом методе по формуле (13.6) последовательно заполняются клетки с наименьшей стоимостью перевозок. Если имеется несколько клеток с наименьшей стоимостью, то из них выбирается любая.

Пример 13.4. Найти начальный план перевозок в транспортной задаче, заданной матрицей перевозок (табл. 13.5).

Таблица 13.5

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	2 •	3 •	4 20	20
A_2	1 10	2 20	5 10	40
Потребности	10	20	30	60

□ Заполним клетку с наименьшей стоимостью, равной 1:

$$x_{21} = \min [40, 10] = 10.$$

Тогда потребности в пункте B_1 удовлетворены и $x_{11} = 0$ (в табл. 13.5 ставится точка), первый столбец выбывает из рассмотрения.

Из оставшихся клеток найдем клетку с наименьшей стоимостью и заполним ее: $x_{22} = \min [(40-10), 20] = 20$. Тогда $x_{12} = 0$ (в табл. 13.5 ставится точка), потребности в пункте B_2 удовлетворены и выбывает второй столбец.

Из оставшихся двух клеток заполним клетку с наименьшей стоимостью: $x_{13} = \min [20, 30] = 20$. Тогда первая строка выбывает (запасы в пункте A_1 исчерпаны) и $x_{23} = \min [(40-30), (30-20)] = 10$.

Таким образом, получен начальный план перевозок

$$x_{11} = 0, \quad x_{12} = 0, \quad x_{13} = 20,$$

$$x_{21} = 10, \quad x_{22} = 20, \quad x_{23} = 10$$

с суммарной стоимостью

$$f = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = 180.$$

Заметим, что она меньше полученной с помощью метода северо-западного угла (см. пример 13.1). Число базисных клеток, очевидно, составит $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$. В примере 13.6 будет показано, что найденный план перевозок оптимален. ■

13.3. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Метод обеспечивает улучшение начального плана перевозок. При этом происходит переход от одного плана перевозок к другому (от одной матрицы перевозок к другой) до тех пор, пока уменьшение суммарной стоимости перевозок станет невозможным.

Введем следующие понятия.

1. *Цикл* – замкнутая ломаная с вершинами в клетках и звеньями, расположенными вдоль строк и столбцов матрицы перевозок. В каждой вершине встречаются два звена, причем одно из них располагается по строке, а другое – по столбцу. Число вершин цикла четно. Циклом может быть самопересекающаяся ломаная, но точки ее самопересечения не могут быть вершинами цикла.

2. *Означенный цикл* – цикл, в котором некоторой вершине приписан знак “+”, а затем при обходе цикла в каком-либо направлении знаки чередуются.

3. *Сдвиг по циклу* на число $\theta \ge 0$. При этом значения x_{ij}, стоящие в положительных вершинах цикла, увеличиваются на число θ, а стоящие в отрицательных вершинах, уменьшаются на число θ.

4. *Потенциалы* – числа $\alpha_i, i = 1,2,\dots,m;$ $\beta_j, j = 1,2,\dots,n$. Каждому пункту хранения A_i ставится в соответствие число α_i, пункту потребления B_j – число β_j.

Алгоритм

Шаг 1. Найти начальный план перевозок методом северо-западного угла или методом минимального элемента.

Шаг 2. Для каждой базисной клетки составить уравнение

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}.$$

Так как эти уравнения образуют систему $(m+n-1)$ уравнений с $(m+n)$ неизвестными (она имеет бесконечное множество решений), то для определенности следует положить $\alpha_1 = 0$. Тогда все остальные потенциалы находятся однозначно.

Шаг 3. Для каждой свободной клетки вычислить относительные оценки:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j).$$

Шаг 4. Проанализировать относительные оценки:

а) если все относительные оценки неотрицательные, т.е. выполняется условие

$$\Delta_{ij} \geq 0,$$

то задача решена, и следует выписать полученный оптимальный план перевозок из последней матрицы, подсчитать его стоимость;

б) если среди оценок Δ_{ij} есть отрицательные, найти среди них наименьшую отрицательную оценку и пометить знаком $\otimes$.

Шаг 5. Для свободной клетки (i, j) с выбранной оценкой Δ_{ij}, помеченной $\otimes$, построить означенный цикл. Все его вершины, кроме расположенной в клетке (i, j), должны находиться в базисных клетках. Свободная клетка берется со знаком "+".

Шаг 6. Выполнить сдвиг по построенному на шаге 5 циклу на величину θ, равную наименьшему из чисел, стоящих в отрицательных вершинах. При этом числа, стоящие в положительных вершинах, увеличить на θ, а числа, стоящие в отрицательных вершинах, уменьшить на θ.

Если наименьшее значение θ достигается в нескольких отрицательных вершинах цикла, то при сдвиге следует поставить базисный нуль во всех таких вершинах, кроме одной. Тогда число базисных клеток сохранится и будет равно $(m+n-1)$, что необходимо проверять при расчетах. Базисный нуль рекомендуется ставить в клетку (клетки) с наименьшей стоимостью перевозок.

Элементы матрицы, не входящие в цикл, остаются без изменений.

Перейти к шагу 2.

З а м е ч а н и я 13.2.

1. При решении задач может возникнуть ситуация, когда $\theta = 0$. Тогда при сдвиге свободная клетка становится базисной (точка заменяется на базисный нуль).

2. Значения суммарной стоимости перевозок при переходе от одной матрицы к другой связаны соотношением

$$f^{k+1} = f^k + \theta \cdot \Delta_{ij},$$

где k – номер итерации, f^k – текущее значение суммарной стоимости перевозок, значения θ и Δ_{ij} находятся на шагах 3 и 6 соответственно.

Пример 13.5. Решить транспортную задачу (табл. 13.6).

Таблица 13.6

Пункты	B_1	B_2	Запасы	
A_1	1 ⊖ 30	2 10 ⊕	40	$\alpha_1 = 0$
A_2	3 •	2 30	30	$\alpha_2 = 0$
A_3	1 ⊕ •	4 30 ⊖	30	$\alpha_3 = 2$
Потребности	30	70	100	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 2$		

☐ Решим задачу согласно алгоритму.

1. Найдем начальный план перевозок методом северо-западного угла:

$$x_{11} = \min[40, 30] = 30;\ \ x_{21} = x_{31} = 0 \text{ (в табл. 13.6 ставятся точки)};$$

$$x_{12} = \min[(40-30), 70] = 10,$$

$$x_{22} = \min[30, (70-10)] = 30,$$

$$x_{32} = \min[30, (70-10-30)] = 30.$$

Его стоимость $f = 30 + 20 + 60 + 120 = 230$.

2^1. Найдем потенциалы, составляя для каждой базисной клетки уравнение $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$.

Положим $\alpha_1 = 0$. Тогда для базисных клеток (1,1) и (1,2) получим

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 2.$$

Отсюда $\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2$.

Далее для базисных клеток (2,2) и (3,2) имеем

$$\alpha_2 + \beta_2 = 2,$$

$$\alpha_3 + \beta_2 = 4.$$

Отсюда $\alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 2$.

3^1. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{21} = c_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 3 - (0+1) = 2 > 0,$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 1 - (2+1) = -2 < 0. \otimes$$

4^1. Проанализируем относительные оценки. Так как условие окончания $\Delta_{ij} \geq 0$ не выполнено, то найдем наименьшую отрицательную оценку: Δ_{31}.

5^1. Для клетки (3,1) построим означенный цикл. Все его вершины, кроме данной, находятся в базисных клетках. Знак “+” ставится в свободной клетке (3,1).

6^1. Найдем число $\theta = \min [30, 30] = 30$, равное наименьшему из чисел, стоящих в отрицательных вершинах цикла. Выполним сдвиг по циклу на число $\theta = 30$: числа, стоящие в положительных вершинах, увеличиваются на 30, а числа, стоящие в отрицательных вершинах, уменьшаются на 30. Так как наименьшее значение $\theta = 30$ достигается в двух отрицательных вершинах, то в клетку (3,2) ставится точка, а в клетку (1,1) с наименьшей стоимостью – базисный нуль. Элементы матрицы, не входящие в цикл, остаются без изменений. Результат сдвига представлен в табл. 13.7. Перейдем к шагу 2.

Таблица 13.7

Пункты	B_1	B_2	Запасы	
A_1	1 **0**	2 40	40	$\alpha_1 = 0$
A_2	3 •	2 30	30	$\alpha_2 = 0$
A_3	1 30	4 •	30	$\alpha_3 = 0$
Потребности	30	70	100	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 2$		

2^2. Найдем потенциалы. Для базисных клеток (1,1) и (1,2) получим

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 2.$$

Поскольку $\alpha_1 = 0$, то $\beta_1 = 1, \beta_2 = 2$.

Для базисной клетки (2,2) имеем $\alpha_2 + \beta_2 = 2$, откуда $\alpha_2 = 0$. Для базисной клетки (3, 1) получим $\alpha_3 + \beta_1 = 1$, отсюда $\alpha_3 = 0$.

3^2. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{21} = c_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 3 - (0 + 1) = 2 > 0,$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 4 - (0 + 2) = 2 > 0.$$

4^2. Поскольку условие окончания $\Delta_{ij} \ge 0$ выполнено, задача решена. Оптимальный план перевозок

$$x_{11} = 0, \quad x_{12} = 40,$$

$$x_{21} = 0, \quad x_{22} = 30,$$

$$x_{31} = 30, \quad x_{32} = 0$$

имеет суммарную стоимость $f = 80 + 60 + 30 = 170$. Согласно п.2 замечаний 13.2 это же значение может быть найдено по формуле $f^1 = f^0 + \theta \cdot \Delta_{31} = 230 + 30 \cdot (-2) = 170$. ■

Пример 13.6. Решить транспортную задачу, заданную матрицей перевозок (табл. 13.8).

Таблица 13.8

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	^{2}	^{3}	^{4}	20
A_2	^{1}	^{2}	^{5}	40
Потребности	10	20	30	60

☐ Решим задачу согласно алгоритму аналогично примеру 13.5.

Начальный план перевозок методом северо-западного угла найден в примере 13.1 (табл. 13.2).

Последовательный переход от матрицы к матрице отображен в табл. 13.9 – 13.11.

Таблица 13.9

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы	
A_1	^{2} 10	^{3} $\ominus$ 10	^{4} $\bullet$ $\oplus$	20	$\alpha_1 = 0$
A_2	^{1} $\bullet$	^{2} $\oplus$ 10	^{5} 30 $\ominus$	40	$\alpha_2 = -1$
Потребности	10	20	30	60	
	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	$\beta_3 = 6$		

Получим: $f = 20 + 30 + 20 + 150 = 220$; $\Delta_{13} = c_{13} - (\alpha_1 + \beta_3) = 4 - (0 + 6) = -2 < 0$; $\Delta_{21} = c_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 1 - (-1 + 2) = 0$. Для клетки (1,3) построим означенный цикл и найдем значение $\theta = \min[10, 30] = 10$. Выполним сдвиг по циклу на число 10.

Таблица 13.10

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы	
A_1	^{2} $\ominus$ 10	^{3} $\bullet$	^{4} 10 $\oplus$	20	$\alpha_1 = 0$
A_2	^{1} $\oplus$ $\bullet$	^{2} 20	^{5} 20 $\ominus$	40	$\alpha_2 = 1$
Потребности	10	20	30	60	
	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 4$		

Получим: $f = 20 + 40 + 40 + 100 = 200$; $\Delta_{12} = 3 - (0 + 1) = 2 > 0$, $\Delta_{21} = 1 - (1 + 2) = -2 < 0$. Для клетки (2,1) построим означенный цикл и найдем значение $\theta = \min[10, 20] = 10$. Выполним сдвиг по циклу на число 10.

Таблица 13.11

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы	
A_1	^{2} $\bullet$	^{3} $\bullet$	^{4} 20	20	$\alpha_1 = 0$
A_2	^{1} 10	^{2} 20	^{5} 10	40	$\alpha_2 = 1$
Потребности	10	20	30	60	
	$\beta_1 = 0$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 4$		

Получим: $f = 80 + 10 + 40 + 50 = 180$; $\Delta_{11} = 2 - (0 + 0) = 2 > 0$;

$$\Delta_{12} = 3 - (0 + 1) = 2 > 0.$$

Условие окончания $\Delta_{ij} \geq 0$ выполнено, получен оптимальный план перевозок

$$x_{11} = x_{12} = 0, \quad x_{13} = 20, \ x_{21} = 10, x_{22} = 20, x_{23} = 10$$

с суммарной стоимостью 180.

Заметим, что этот же план получен методом минимального элемента в примере 13.4.■

З а м е ч а н и я 13.3.

1. Задачи с нарушенным балансом решаются путем сведения к задачам, удовлетворяющим условию баланса. Далее применяется метод потенциалов. Оптимальный план перевозок новой задачи содержит оптимальный план перевозок исходной задачи.

Как отмечено в разд. 13.1, здесь могут быть два случая.

Первый случай. Суммарные запасы больше суммарных потребностей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

В этом случае следует:

1) ввести фиктивный пункт потребления B_{n+1} с потребностью

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j ;$$

2) положить стоимости перевозок единицы груза в фиктивный пункт потребления равными нулю: $c_{i,n+1} = 0, \ i = 1,2,\ldots,m$.

Второй случай. Суммарные запасы меньше суммарных потребностей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

В данном случае следует:

1) ввести фиктивный пункт хранения A_{m+1} с запасом груза, равным

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i ;$$

2) положить стоимости перевозок единицы груза из фиктивного пункта хранения равными нулю: $c_{m+1,j} = 0, \ j = 1,2,\ldots,n$.

2. В задачах с нарушенным балансом может встречаться дополнительное требование к оптимальному плану перевозок. В первом случае: полностью вывезти продукцию из заданного пункта хранения, а во втором – полностью удовлетворить потребности заданного пункта потребления. В обоих случаях действия при решении аналогичны описанным в п.1 замечаний 13.3, только стоимости перевозок единицы груза для заданных пунктов следует положить равными M, где M – достаточно большое положительное число. Однако следует заметить, что такие задачи могут не иметь решения, например, в следующих случаях:

- суммарные запасы больше суммарных потребностей, требуется полностью вывезти груз из заданного пункта хранения, но запасы в нем превышают суммарные потребности;
- суммарные запасы меньше суммарных потребностей, требуется полностью обеспечить потребности данного пункта потребления, но потребности в нем превышают суммарные запасы.

Пример 13.7. Решить транспортную задачу, заданную матрицей перевозок (табл. 13.12).

Таблица 13.12

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	1	2	3	20
A_2	2	3	3	40
Потребности	30	30	20	80 \ 60

☐ Поставленная задача является задачей с нарушенным балансом. Поскольку суммарные запасы меньше суммарных потребностей, то введем фиктивный пункт хранения A_3 с запасами, равными $80-60=20$ единиц груза. Стоимость перевозок из фиктивного пункта хранения положим равной нулю (см. п.1 замечаний 13.3). В результате перейдем к задаче, в которой выполняется условие баланса.

Начальный план перевозок найдем методом минимального элемента:

$x_{31}=\min[20,30]=20$; $x_{32}=x_{33}=0$ (в табл. 13.13 здесь и далее ставятся точки);

$$x_{11}=\min[20,(30-20)]=10,\ \ x_{21}=0;$$

$$x_{12}=\min[(20-10),30]=10,\ \ x_{13}=0;$$

$$x_{22}=\min[40,(30-10)]=20;\ \ x_{23}=\min[20,(40-20)]=20.$$

Его стоимость составляет $f=10+20+60+60=150$.

Решим полученную задачу методом потенциалов. Результаты решения приведены в табл. 13.13 – 13.15.

Таблица 13.13

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы	
A_1	1 $\oplus$ 10	2 10 $\ominus$	3 •	20	$\alpha_1=0$
A_2	2 •	3 20	3 20	40	$\alpha_2=1$
A_3	0 $\ominus$ 20	0 • $\oplus$	0 •	20	$\alpha_3=-1$
Потребности	30	30	20	80	
	$\beta_1=1$	$\beta_2=2$	$\beta_3=2$		

Получим: $\Delta_{13}=3-(0+2)=1$, $\Delta_{21}=2-(1+1)=0$, $\Delta_{32}=0-(-1+2)=-1\otimes$, $\Delta_{33}=0-(-1+2)=-1$. Для клетки (3,2) построим означенный цикл и найдем значение $\theta=\min[10,20]=10$. Выполним сдвиг по циклу на число $\theta=10$.

Таблица 13.14

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы	
A_1	1 20	2 •	3 •	20	$\alpha_1 = 0$
A_2	2 ⊕ •	3 20⊝	3 20	40	$\alpha_2 = 2$
A_3	0 ⊝ 10	0 10 ⊕	0 •	20	$\alpha_3 = -1$
Потребности	30	30	20	80	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 1$		

Получим: $f = 20 + 60 + 60 = 140$; $\Delta_{12} = 2 - (0+1) = 1$, $\Delta_{13} = 3 - (0+1) = 2$, $\Delta_{21} = 2 - (2+1) = -1 \otimes$, $\Delta_{33} = 0 - (-1+1) = 0$. Для клетки (2,1) построим означенный цикл и найдем значение $\theta = \min[10, 20] = 10$. Выполним сдвиг по циклу на число $\theta = 10$.

Таблица 13.15

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы	
A_1	1 20	2 •	3 •	20	$\alpha_1 = 0$
A_2	2 10	3 10	3 20	40	$\alpha_2 = 1$
A_3	0 •	0 20	0 •	20	$\alpha_3 = -2$
Потребности	30	30	20	80	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 2$		

Получим: $f = 20 + 20 + 30 + 60 = 130$; $\Delta_{12} = 2 - (0+2) = 0$, $\Delta_{13} = 3 - (0+2) = 1$,

$$\Delta_{31} = 0 - (-2+1) = 1, \quad \Delta_{33} = 0 - (-2+2) = 0.$$

Поскольку все $\Delta_{ij} \ge 0$, условие окончания выполнено. Оптимальный план перевозок исходной задачи содержится в найденном оптимальном плане:

$$x_{11} = 20,\ x_{12} = x_{13} = 0,\ x_{21} = 10,\ x_{22} = 10,\ x_{23} = 20.$$

Значение $x_{32} = 20$ свидетельствует о том, что в п. B_2 на эту величину не удовлетворены потребности.■

Пример 13.8. Решить транспортную задачу, заданную матрицей перевозок (табл. 13.16).

Таблица 13.16

Пункты	B_1	B_2	Запасы
A_1	9	7	20
A_2	6	9	80
A_3	1	2	20
Потребности	50	20	70 \ 120

□ Так как в поставленной задаче нарушен баланс и суммарные запасы больше суммарных потребностей, то согласно п.1 замечаний 13.3:

1) введем фиктивный пункт потребления B_3 с потребностью, равной $120-70=50$;

2) положим стоимости перевозки единицы груза в фиктивный пункт потребления равными нулю.

В результате перейдем к задаче, в которой выполняется условие баланса.

Начальный план перевозок найдем методом минимального элемента:

$x_{13}=\min[20,50]=20$; $x_{11}=x_{12}=0$ (в табл. 13.17 здесь и далее ставятся точки);

$$x_{23}=\min[80,(50-20)]=30,\quad x_{33}=0;$$

$$x_{31}=\min[20,50]=20,\quad x_{32}=0;$$

$$x_{21}=\min[(80-30),(50-20)]=30;$$

$$x_{22}=\min[20,20]=20.$$

Его стоимость составляет $f=180+180+20=380$.

Решим полученную задачу методом потенциалов. Результаты решения приведены в табл. 13.17, 13.18.

Таблица 13.17

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы	
A_1	9 •	7 ⊕ •	0 20 ⊖	20	$\alpha_1=0$
A_2	6 30	9 ⊖ 20	0 30 ⊕	80	$\alpha_2=0$
A_3	1 20	2 •	0 •	20	$\alpha_3=-5$
Потребности	50	20	50	120	
	$\beta_1=6$	$\beta_2=9$	$\beta_3=0$		

Получим: $\Delta_{11}=3-(0+6)=3,\qquad \Delta_{12}=7-(0+9)=-2,\ \otimes$

$$\Delta_{32}=2-(-5+9)=-2,\qquad \Delta_{33}=0-(-1+2)=-1.$$

Для клетки (1,2) построим означенный цикл и найдем значение $\theta=\min[20,20]=20$. Выполним сдвиг по циклу на число $\theta=20$. Поскольку наименьшее значение $\theta=20$ достигается сразу в двух отрицательных клетках, то согласно шагу 6 алгоритма в одной из этих клеток ставится базисный нуль (выбрана клетка (1,3) с наименьшей стоимостью).

Таблица 13.18

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы	
A_1	^{9} •	^{7} 20	^{0} 0	20	$\alpha_1 = 0$
A_2	^{6} 30	^{9} •	^{0} 50	80	$\alpha_2 = 0$
A_3	^{1} 20	^{2} •	^{0} •	20	$\alpha_3 = -5$
Потребности	50	20	50	120	
	$\beta_1 = 6$	$\beta_2 = 7$	$\beta_3 = 0$		

Получим: $\Delta_{11} = 3 - (0+6) = 3$, $\Delta_{22} = 9 - (0+7) = 2$,

$$\Delta_{32} = 2 - (-5+7) = 0 \ , \quad \Delta_{33} = 0 - (-5+0) = 5 , \quad f = 140 + 180 + 20 = 340 .$$

Поскольку $\Delta_{ij} \geq 0$, условие окончания выполнено. Оптимальный план перевозок исходной задачи содержится в найденном оптимальном плане:

$$x_{11} = 0,\ x_{12} = 20,\ x_{21} = 30,\ x_{22} = 0,\ x_{31} = 20,\ x_{32} = 0 .$$

Значение $x_{23} = 50$ свидетельствует о том, что в п. A_2 остается неперевезенным груз в количестве 50 единиц.■

Пример 13.9. Решить транспортную задачу, заданную матрицей перевозок (табл. 13.19), при дополнительном требовании полного вывоза груза из п. A_2.

Таблица 13.19

Пункты	B_1	B_2	Запасы
A_1	^{1}	^{2}	25
A_2	^{3}	^{4}	15
Потребности	10	20	30 \ 40

□ Так как в поставленной задаче нарушен баланс и суммарные запасы больше суммарных потребностей, то согласно п.1 и п.2 замечаний 13.3:

1) введем фиктивный пункт потребления B_3 с потребностью, равной $40 - 30 = 10$;

2) положим стоимости перевозки единицы груза в фиктивный пункт потребления равными: $c_{13} = 0$ (из пункта A_1), $c_{23} = M$ (из пункта A_2, из которого требуется обеспечить полный вывоз груза).

В результате получим задачу, удовлетворяющую условию баланса. Решим ее методом потенциалов. Начальный план перевозок найдем методом северо-западного угла (табл. 13.20). Последовательный переход от матрицы к матрице приведен в табл. 13.20 и 13.21.

Таблица 13.20

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы	
A_1	^{1} 10	^{2} $\ominus 15$	^{0} $\bullet \oplus$	25	$\alpha_1 = 0$
A_2	^{3} $\bullet$	^{4} $\oplus 5$	^{M} $10 \ominus$	15	$\alpha_2 = 2$
Потребности	10	20	10	40	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = M - 2$		

Получим: $\Delta_{13} = 0 - (0 + M - 2) = -M + 2 < 0$ $\otimes$ (поскольку M – достаточно большое положительное число), $\Delta_{21} = 3 - (2 + 1) = 0$. Для клетки (1,3) построим означенный цикл и найдем значение $\theta = \min[10, 15] = 10$. Выполним сдвиг по циклу на число $\theta = 10$.

Таблица 13.21

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы	
A_1	^{1} 10	^{2} 5	^{0} 10	25	$\alpha_1 = 0$
A_2	^{3} $\bullet$	^{4} 15	^{M} $\bullet$	15	$\alpha_2 = 2$
Потребности	10	20	10	40	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 0$		

Получим: $\Delta_{21} = 3 - (2 + 1) = 0$, $\Delta_{23} = M - (2 + 0) = M - 2 > 0$ (поскольку M – достаточно большое положительное число). Условие окончания $\Delta_{ij} \geq 0$ выполнено, решение исходной задачи содержится в оптимальном плане решенной задачи: $x_{11} = 10, x_{12} = 5, x_{21} = 0, x_{22} = 15$. Очевидно, из пункта A_2 весь груз вывозится, а значение $x_{13} = 10$ свидетельствует об остающемся грузе в пункте A_1.■

Пример 13.10. Решить транспортную задачу, заданную матрицей перевозок (табл. 13.22), при дополнительном требовании полного удовлетворения потребностей в п. B_1.

Таблица 13.22

Пункты	B_1	B_2	Запасы
A_1	^{1}	^{2}	10
A_2	^{3}	^{4}	20
Потребности	25	15	40 \ 30

□ Так как в поставленной задаче нарушен баланс и суммарные запасы меньше суммарных потребностей, то согласно п.1 и п.2 замечаний 13.3:

1) введем фиктивный пункт хранения A_3 с запасами, равными $40 - 30 = 10$;

2) положим стоимости перевозки единицы груза из фиктивного пункта хранения равными: $c_{11} = M$ (в пункт B_1, потребности которого должны быть полностью удовлетворены), $c_{21} = 0$ (в пункт B_2).

В результате получим задачу, удовлетворяющую условию баланса. Решим ее методом потенциалов. Начальный план перевозок найдем методом минимального элемента (табл. 13.23).

Таблица 13.23

Пункты	B_1	B_2	Запасы	
A_1	1 10	2 •	10	$\alpha_1 = 0$
A_2	3 15	4 5	20	$\alpha_2 = 2$
A_3	M •	0 10	10	$\alpha_3 = -2$
Потребности	25	15	40	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 2$		

Результаты нахождения начального плана перевозок методом минимального элемента: $x_{32} = \min[10, 15] = 10$, $x_{31} = 0$; $x_{11} = \min[10, 25] = 10$, $x_{12} = 0$;

$$x_{21} = \min[20, (25-10)] = 15; \qquad x_{22} = \min[(20-15), (15-10)] = 5.$$

Его стоимость $f = 10 + 45 + 20 = 75$. Далее получим: $\Delta_{12} = 2 - (0+2) = 0$, $\Delta_{31} = M - (-2+1) = M + 1$. Поскольку M – достаточно большое положительное число, то условие окончания $\Delta_{ij} \geq 0$ выполнено, решение исходной задачи содержится в оптимальном плане решенной задачи: $x_{11} = 10$, $x_{12} = 0$, $x_{21} = 15$, $x_{22} = 5$. Очевидно, в пункте B_1 потребности полностью удовлетворены, а значение $x_{32} = 10$ свидетельствует о том, что в п. B_2 на эту величину потребности не удовлетворены.■

Задачи для самостоятельного решения

Решить транспортные задачи, заданные матрицами перевозок.

1.

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Потребности	30	30	10	20	90

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	280
A_3	3	8	1	2	160
Потребности	130	220	60	70	480 \ 560

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 70 \end{pmatrix}$.

3.

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	2	3	4	3	90
A_2	5	3	1	2	30
A_3	2	1	4	2	40
Потребности	70	30	20	40	160

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 30 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

4.

Пункты	B_1	B_2	Запасы
A_1	1	2	40
A_2	3	2	30
A_3	1	4	30
Потребности	30	70	100

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 40 \\ 0 & 30 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$.

5.

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	1	2	4	90
A_2	1	3	4	30
A_3	2	2	3	40
Потребности	50	60	10	120\160

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 10 \end{pmatrix}$, в п. A_1 останется 40 единиц груза.

6.

Пункты	B_1	B_2	Запасы
A_1	1	2	10
A_2	3	4	20
Потребности	25	15	40 \ 30

Имеется дополнительное требование удовлетворения потребностей в п. B_2.

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$, в п. B_1 не удовлетворены потребности в 10 единиц.