Задача 5.11
Требуется методом Рунге — Кутты найти решения на отрезке $[a, b]$ следующих дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях с указанным шагом:

Требуется найти численное решение одной из представленных задач Коши на отрезке $[a, b]$ с помощью метода Рунге–Кутты 4-го порядка, используя шаг h:

$$1)\quad y' = \frac{1+e^{x/y}}{e^{x/y}(x/y-1)},\ y(0)=1,\ h=0.05,\ a=0,\ b=0.3;$$

$$2)\quad y' = -\frac{y}{x} + \ln x \cdot y^2,\ y(1)=-2,\ h=0.1,\ a=1,\ b=1.5;$$

$$3)\quad y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2},\ y(1)=0,\ h=0.1,\ a=1,\ b=1.5;$$

$$4)\quad y' = \frac{-x}{1+x^2}y - \frac{1}{1+x^2},\ y(0)=0,\ h=0.1,\ a=0,\ b=0.5.$$

В расчётах использовать уравнение с номером $q = (N \bmod 4)+1$ (пояснение в табл. 1). □

Решение

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$y' = \frac{1+e^{\frac{t}{y}}}{e^{\frac{t}{y}}\left(\frac{t}{y}-1\right)}$$

задача Коши: $y(0) = 1$

Шаг h = 0.05

Найти решения на отрезке [0, 0.3]

Метод Рунге-Кутты 4 порядка имеет вид:

$$w_0 = \alpha,$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3),$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), i = 0,1,2, \dots m-1,$$

Где $w_i = w(t_i)$ – приближенные значения в узлах $t_i, w_0 = \alpha$ – постановка задачи Коши, h = $t_{i+1} - t_i$ (растояние между узлами, узлы равноудалены)

Напишем программу на языке python, реализующую метод Рунге-Кутты 4 порядка, так как требуется производить много вычислений с плавающей точкой, что неудобно делать вручную.

Вычисления

Узлы:

t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
0	**0.05**	**0.1**	**0.15**	**0.2**	**0.25**

Получим значение w_1

$$w_0 = 0$$

$$k_1 = hf(t_0, w_0) = hf(0, 1) = -0.1$$

$$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{k_1}{2}\right) = hf(0.025, 0.95) = -0.10136$$

$$k_3 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{k_2}{2}\right) = hf(0.025, 0.94931) = -0.10137$$

$$k_4 = hf(t_0 + h, w_0 + k_3) = hf(0.05, 0.89862\ ) = -0.10302$$

$$w_1 = w_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.89858$$

Получим значение w_2

$$w_1 = 0.89858$$

$$k_1 = hf(t_1, w_1) = hf(0.05, 0.89858) = -0.10302$$

$$k_2 = hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{k_1}{2}\right) = hf(0.075, 0.84706) = -0.10506$$

$$k_3 = hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{k_2}{2}\right) = hf(0.075, 0.84604) = -0.10507$$

$$k_4 = hf(t_1 + h, w_1 + k_3) = hf(0.1, 0.79350\ ) = -0.10764$$

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.79342$$

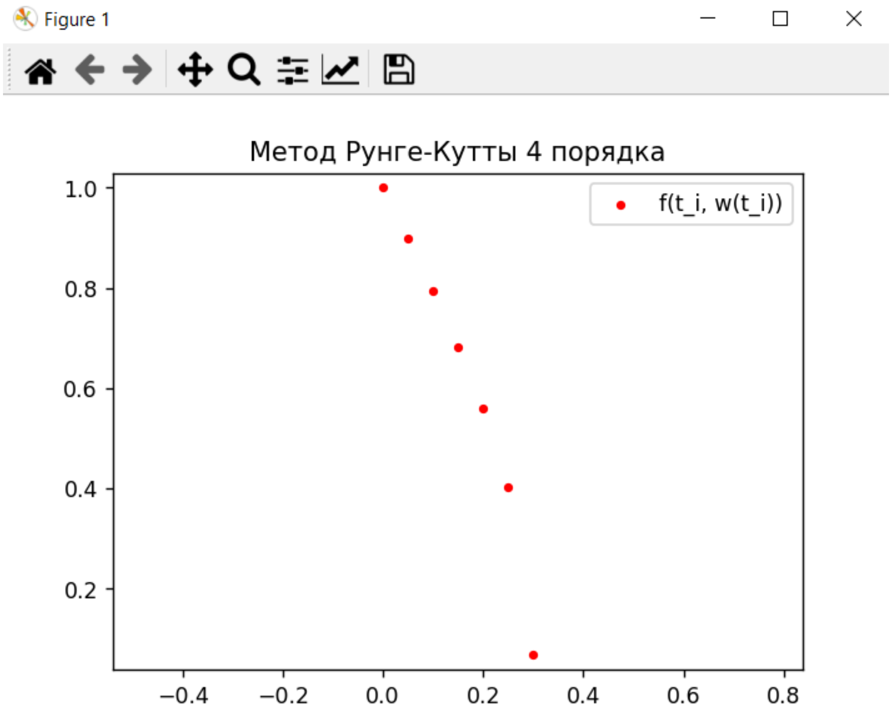
...

...

В результате получено:

i	0	1	2	3	4	5	6
t_i	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.30
w_i	1	0.89858	0.79342	0.68223	0.55958	0.40358	0.06732

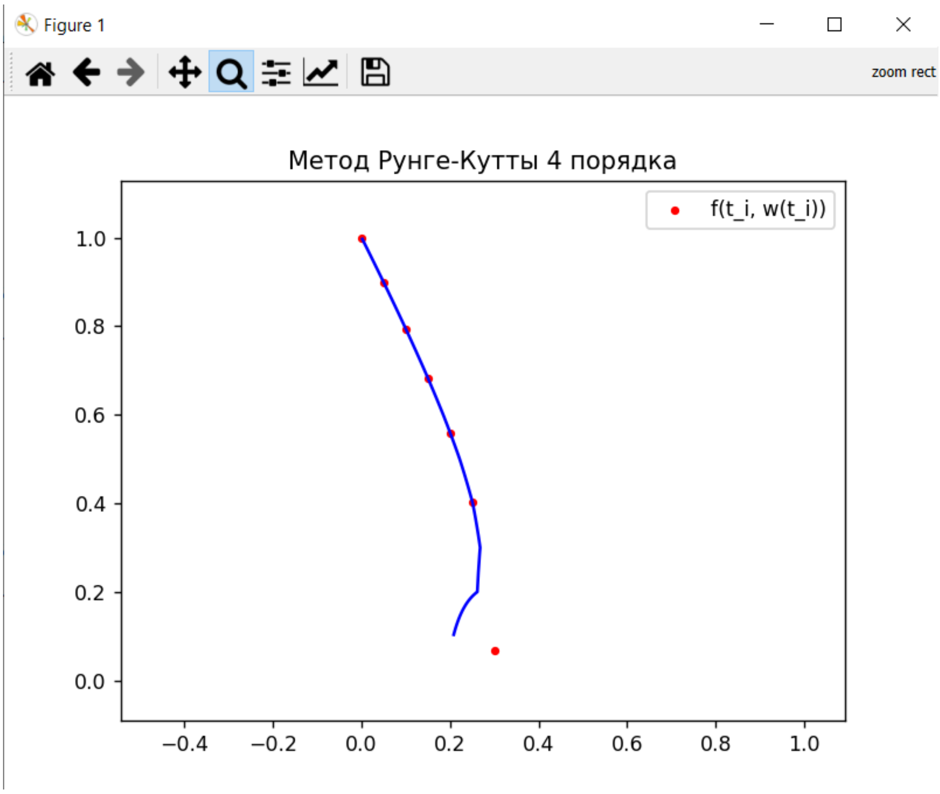
Отобразим точки на графике:



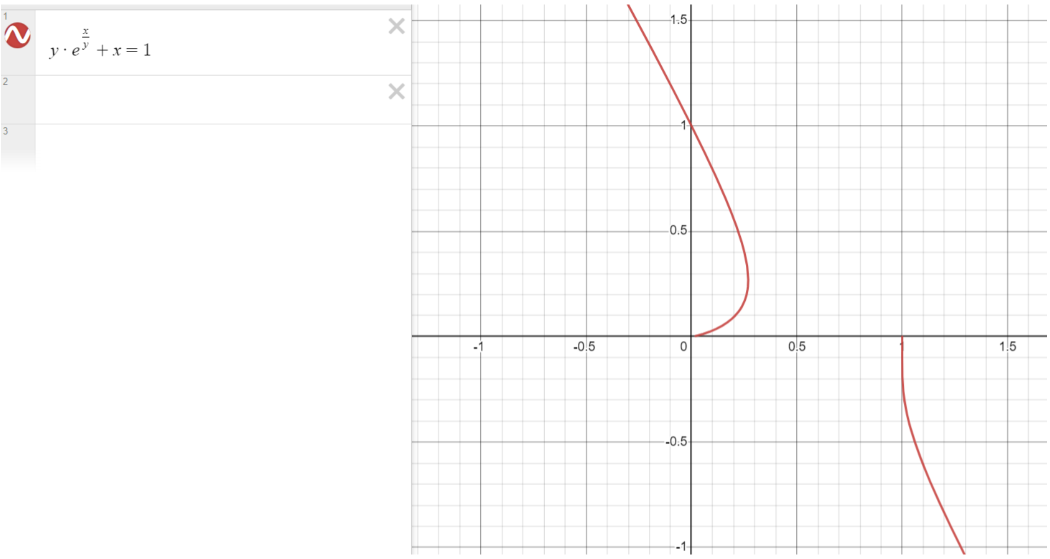
Аналитическим решением данного ОДУ является следующая неявно заданная функция:

$$ye^{t/y} + t = 1$$

Отобразим фрагмент ее графика вместе с полученными с помощью метода Рунге-Кутты значениями:



Сравним с графиком, построенным с помощью Desmos:



Как видно в узле $t_i = 0.3$ наблюдается некоторая погрешность, это связано, с тем что $f(\mathrm{t}, \mathrm{y})$ не является непрерывной функцией, в остальных узлах вычисленные значения очень близки к фактическим.