6.5

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad -m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$-m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = M^{(1)} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}, \qquad -m_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$A^{(2)} = M^{(2)} \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$A^{(2)}$ - полученa матрица U, то есть

верхняя треугольная матрица $U = A^{(2)}$

матрица $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

L - нижняя треугольная матрица

$$y = Ux$$
$$Ly = b$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 2$$
$$y_2 = -1 - 2y_1 = -5$$
$$y_3 = 4 - \frac{1}{2}y_2 + y_1 = 8.5$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8.5 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \implies \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8.5 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{8.5}{0.5} = 17$$

$$x_2 = \frac{-5 - 3x_3}{4} = -14$$

$$x_1 = 2 + x_2 = -12$$

Ответ: $x = \begin{bmatrix} -12 \\ -14 \\ 17 \end{bmatrix}$