

$$7.4. \begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix} = [U \quad \beta = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 9.7 \end{bmatrix}]$$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m_{21} & 1 \end{bmatrix}, \quad -m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{6.8}{3.9} \approx -1.74$$

$$U = M^{(1)} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1.74 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 0 & 0.12 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.74 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ly = \beta$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.74 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 5.5 \quad y_2 = \frac{9.7 - 1.74 \cdot 5.5}{1} = 0.13$$

$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 0 & 0.12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 0.13 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{0.13}{0.12} \approx 1.08 \quad x_1 = \frac{5.5 - 1.6 \cdot 1.08}{3.9} \approx 0.97$$

$$\tilde{x}^0 = \begin{bmatrix} 0.97 \\ 1.08 \end{bmatrix}$$

метод итерационного уточнения.

$\bar{r}^{(k)} = b - A\tilde{x}^{(k)}$ - вектор невязки

$$\tilde{y}^{(k)} = A^{-1} \bar{r}^{(k)}$$

$$\tilde{x}^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)} + \tilde{y}^{(k)}$$

$$A^{-1} \approx \begin{bmatrix} 6.74 & -3.72 \\ -15.81 & 9.07 \end{bmatrix}$$

1 итерация:

$$\bar{r}^0 = b - A\tilde{x}^0 = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 9.7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.92 \\ 1.08 \end{bmatrix}$$

$$\bar{r}^1 \approx \begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.03 \end{bmatrix}, \tilde{y}^0 = A^{-1} \bar{r}^0 = \begin{bmatrix} 6.74 & -3.72 \\ -15.81 & 9.07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.03 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y}^0 \approx \begin{bmatrix} 0.04 \\ -0.11 \end{bmatrix}, \tilde{x}^1 = \tilde{x}^0 + \tilde{y}^0 = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 0.97 \end{bmatrix}$$

2 итерация:

$$\bar{r}^1 = b - A\tilde{x}^1 = \begin{bmatrix} 0.009 \\ 0.019 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y}^1 = A^{-1} \bar{r}^1 = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}^2 = \tilde{x}^1 + \tilde{y}^1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.99 \end{bmatrix}$$

3 итерация:

$$\bar{r}^2 = b - A\tilde{x}^2 = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.03 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y}^2 = A^{-1} \bar{r}^2 = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.04 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}^3 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 0.95 \end{bmatrix}$$

$K(A)$ - число обусловленности A

для $K(A)$ верно: $\frac{\|\tilde{x} - \tilde{x}^*\|}{\|\tilde{x}\|} \leq K(A) \frac{\|\bar{r}\|}{\|b\|}$

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ - 2-мерная (евклидова) норма
двумерного линейного пространства

$$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 8.51$$

Функция относительной погрешности:

$$\frac{\|\bar{x} - \tilde{x}\|}{\|\bar{x}\|} \approx K(A) \cdot 10^{-t} = 8.51 \cdot 10^{-2} = 0,0851$$

A обладает не очень хорошей обусловленностью