



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент	Шпиталев Даниил Олегович
Группа	РК6-56Б
Тип задания	лабораторная работа 3 Вариант 4
Тема лабораторной работы	Вынужденные колебания маятника

Студент	<hr/>	<u>Шпиталев Д.О.</u>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о.</i>
Преподаватель	<hr/>	<u>Соколов А.П.</u>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о.</i>

Москва, 2023 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу	3
Цель выполнения лабораторной работы	5
Базовая часть	5
1. Преобразование ОДУ 2-го порядка в систему ОДУ 1-го порядка.	5
2. Разработка функций для решения системы ОДУ	5
Метод Рунге-Кутты	5
Метод Адамса-Моултона	6
Метод Милна-Симпсона	7
3. Нахождение траектории динамической системы	8
4. Сходства и различия реализованных методов численного решения ОДУ	9
5. Нахождение значения шага, при котором численная схема становится неустойчивой	9
Продвинутая часть	11
6. построение фазовых траекторий при различных начальных условиях	11
7. Фазовые траектории для одного и того же набора начальных значений разными методами. ..	13
8. Определение наиболее и наименее затратной с точки зрения времени вычислений численной схемы.	14
9. Асимптотические состояния и их физический смысл.	15
Заключение	17
Список использованных источников	17

Задание на лабораторную работу

Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка активно используются для изучения динамических систем, траектории которых не удаётся найти с помощью аналитических методов. Одним из простейших примеров являются вынужденные колебания маятника без предположения о малости угла отклонения маятника от вертикальной оси. Подобная математическая модель является фундаментальной для робототехники, и отчасти отражает процессы, моделируемые, например, в случае рук-манипуляторов. В данной лабораторной работе исследуются траектории, являющиеся решениями соответствующих задач Коши на основе такой модели, и проанализируем, к каким решениям они сходятся в зависимости от начальных условий.

Задача 3.4 (Вынужденные колебания маятника)

Дано ОДУ 2-го порядка:

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + 0.1\frac{d}{dt}\theta + \sin(\theta) = \cos(t), \quad (1)$$

где $\theta(t)$ обозначает угол отклонения маятника от вертикальной оси как функцию времени t .

Требуется (базовая часть):

1. Преобразовать данное ОДУ в систему ОДУ 1-го порядка.
2. Разработать следующие функции, каждая из которых возвращает дискретную траекторию системы ОДУ с правой частью, заданной функцией f , начальным условием x_0 , шагом по времени h и конечным временем t_n :
 - `runge_kutta(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью явного метода Рунге–Кутты 4-го порядка;
 - `adams_moulton(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью неявного трёхшагового метода Адамса–Моултона (выполняется в рамках продвинутой части);
 - `milne_simpson(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью метода Милна–Симпсона (схема предиктор-корректор).
3. Для каждого из реализованных методов:
 - Численно каждым из методов найти траектории заданной динамической системы, используя шаг $h = 0.1$ и 15 различных начальных условий, для которых: $\theta(0) = 0$ и $\frac{d\theta}{dt}|_{t=0}$ следует выбрать случайно из интервала $[1.85; 2.1]$.
 - Вывести полученные траектории на едином графике как зависимости $\theta(t)$ (для каждого метода на отдельном графике).

4. В чем принципиальные отличия реализованных методов друг от друга?
В чем они схожи?

5. Для каждой из схем каково значение шага, при котором она становится неустойчивой?

Требуется (продвинутая часть):

6. Вывести разными цветами фазовые траектории на едином двумерном графике: по оси абсцисс θ , по оси ординат $-\frac{d\theta}{dt}$, при всех различных начальных условиях (для каждого метода на отдельном графике).

7. Зафиксировать одно начальное условие (произвольно). Вывести фазовые траектории на одном двумерном графике, формируемые разными методами. Сделать вывод.

8. Какая из схем является наиболее затратной с точки зрения времени вычислений при произвольном значении шага, дающем устойчивое решение для каждой из схем? Наименее затратной?

9. Как вы можете охарактеризовать асимптотические состояния, к которым сходится решение в зависимости от начальных условий? Опишите их физический смысл.

Требуется (опциональные задания):

10. Построить области притяжения каждого из асимптотических состояний:

а) Каждому из асимптотических состояний назначить свой цвет.

б) Построить множество начальных условий на основе структурированной сетки, построенной путём разбиения области $[-4\pi; 4\pi] \times [-5, 5]$.

в) Выбрав наименее затратную по времени схему, построить траектории для каждого из начальных условий, соответствующих узлам сетки, и проклассифицировать, к кому асимптотическому состоянию сходится каждая из траекторий. Описать алгоритм, с помощью которого вы определяете, что данная траектория сходится к определённому асимптотическому состоянию.

г) Вывести на экран график начальных условий, имеющих цвет соответствующих им асимптотических состояний.

11. Какие характерные детали полученных областей притяжения вы можете выделить?

Цель выполнения лабораторной работы

Целью лабораторной работы является изучение методов численного решения ОДУ таких, как метод Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона, нахождение траектории заданной динамической системы при разных начальных значениях, определение при каком шаге численные схемы станут неустойчивыми. Также требуется построить графики различных зависимостей фазовой траектории от начальных условий и применяемых методов, определить время, требуемое на вычисление решения ОДУ с помощью реализованных методов.

Базовая часть

1. Преобразование ОДУ 2-го порядка в систему ОДУ 1-го порядка.

Система ОДУ в общем виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Сделаем замену в исходном ОДУ 2-го порядка (1): $\theta' = z$, $\theta'' = z'$. Тогда получим

$$\begin{cases} \theta' = z \\ z' + 0.1z + \sin(\theta) = \cos(t) \end{cases} \quad (3)$$

или:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -0.1z - \sin(y_1) + \cos(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

2. Разработка функций для решения системы ОДУ.

В рамках базовой части требуется разработать функции решения системы ОДУ на основе методов Рунге-Кутты 4 порядка и метода Милна-Симпсона. В рамках продвинутой части дополнительно требуется разработать функцию на основе трехшагового неявного метода Адамса-Моултона.

Метод Рунге-Кутты 4 порядка для систем ОДУ имеет вид:

$$w_0 = \alpha,$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad (5)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3),$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где α – вектор начальных условий, то есть постановка задачи Коши, w_i – вектор решения системы ОДУ на i -ом узле, h – расстояние между узлами.

Метод Рунге-Кутты 4 порядка является явным одношаговым методом.

Реализация метода Рунге-Кутты представлена в листинге 1. На вход функция получает вектор начальных условий, границу интервала для t до которой следует вычислять решения, список функций, содержащий определение из правой части системы ОДУ (1), шаг. Коэффициенты и значения функции $\theta(t)$ и ее производной рассчитываются по (5).

Листинг 1: метод Рунге-Кутты 4 порядка

```
def runge_kutta(init_0, t_n, f, h):
    num_steps = int(t_n / h)
    t = np.linspace(0, t_n, num_steps + 1)
    x = np.zeros((num_steps + 1), 2)
    x[0] = init_0

    for i in range(num_steps):
        k1 = h * f(t[i], x[i])
        k2 = h * f(t[i] + h/2, x[i] + k1/2)
        k3 = h * f(t[i] + h/2, x[i] + k2/2)
        k4 = h * f(t[i] + h, x[i] + k3)
        x[i+1] = x[i] + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6

    return x, t
```

Неявный трехшаговый метод Адамса-Моултона имеет вид:

$$w_0 = x_0, w_1 = x_1, w_2 = x_2,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} \left(9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2}) \right), \quad (6)$$

где x_0, x_1, x_2 – вектора начальных значений для первых трех узлов.

w_{i+1} присутствует в равенстве и слева и справа, поэтому метод неявный, и выражение (6) для нахождения w_{i+1} является нелинейным уравнением относительно w_{i+1} . В общем случае, не все нелинейные уравнения и системы линейных уравнений возможно решить аналитически. Для решения будет использована функция `root` библиотеки `scipy`. Реализация метода Адамса-Моултона выполнена в соответствии с (6) и представлена в листинге 2. Набор параметров совпадает с предыдущей функцией (метода Рунге-Кутты 4

порядка). Начальные условия находятся с помощью одношагового метода – метода Рунге-Кутты.

Листинг 2: метод Адамса-Моултона

```
def adams_moulton(init_0, t_n, f, h):
    num_steps = int(t_n / h)
    t = np.linspace(0, t_n, num_steps + 1)
    x = np.zeros((num_steps + 1), 2)
    initial_conditions, _ = runge_kutta(init_0, 3*h, f, h)
    for i in range(3):
        x[i] = initial_conditions[i]
    for i in range(2, num_steps):
        def equation(x_i_plus_1):
            return x[i] + h/24. * (9. * f(t[i+1], x_i_plus_1) + 19. * f(t[i],
x[i]) - 5. * f(t[i-1], x[i-1]) + f(t[i-2], x[i-2])) - x_i_plus_1
        x[i+1] = root(equation, init_0).x
    return x, t
```

Метод Милна-Симпсона представляет из себя составной метод, построенный по схеме предиктор-корректор. Предиктором будет выступать метод Милна, а корректором – метод Симпсона. С помощью метода Милна находится приближенное значение функции в $i + 1$ шаге, и далее оно корректируется методом Симпсона. Метод Милна-Симпсона имеет вид:

$$w_0 = x_0, w_1 = x_1, w_2 = x_2, w_3 = x_3,$$

$$\tilde{w}_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})), \quad (7)$$

$$w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}(f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, \tilde{w}_{i+1})),$$

где \tilde{w}_{i+1} – вектор приближенных значений функции, высчитанных с помощью предиктора, w_{i+1} – вектор приближенных значений функции, высчитанных с помощью корректора.

Фрагмент реализации метода Милна-Симпсона, выполненной в соответствии с формулами (7), представлен в листинге 3. Начальные условия для первых четырех узлов вычисляются с помощью одношагового метода – метода Рунге-Кутта 4 порядка.

Листинг 3: метод Милна-Симпсона

```
x[0] = initial_conditions[0]
x[1] = initial_conditions[1]
for i in range(4):
    x_approx_by_milne[i] = initial_conditions[i]

for i in range(1, 3):
    x[i+1] = x[i-1] + h/3. * (f(t[i-1], x[i-1]) + 4*f(t[i], x[i]) + f(t[i+1],
x_approx_by_milne[i+1]))

for i in range(3, num_steps):
    x_approx_by_milne[i+1] = x[i-3] + 4*h/3. * (2*f(t[i], x[i]) - f(t[i-1],
x[i-1]) + 2*f(t[i-2], x[i-2]))
```

```

        x[i+1] = x[i-1] + h/3. * (f(t[i-1], x[i-1]) + 4*f(t[i], x[i]) + f(t[i+1],
x_approx_by_milne[i+1]))
    return x, t

```

3. Нахождение траектории динамической системы.

Для нахождения траектории динамической системы следует выбрать шаг, начальные условия. Будет взят шаг $h = 0.1$ и начальные условия: $\theta(0) = 0$ и $\frac{d\theta}{dt}|_{t=0}$ выбирается случайным образом из интервала $[1.85; 2.1]$. Далее используются ранее описанные методы численного решения ОДУ и находятся координаты узлов функции $\theta(t)$.

В листинге 4 представлена одна из трех функций, строящая траекторию динамической системы, в данном случае с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка. Функции, строящие траекторию с помощью других методов, выглядят схожим образом. Данная функция принимает на вход лист из 15 наборов начальных условий, для каждого из них высчитывается набор значений в узлах функции, **все** выводится на одном графике. Результат работы функции на рис. 1. Для функций, использующих методы Адамса-Моултона и Милна-Симпсона, результат на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

Листинг 4: функция построения траектории динамической системы с помощью метода Рунге-Кутта

```

def plot_runge_kutta(x_0_arr):
    fig = plt.figure()
    fig.canvas.manager.window.setGeometry(420, 30, 700, 250)
    plt.title('Метод Рунге-Кутта')
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('θ')
    plt.gca().xaxis.set_label_coords(1.05, 0.0)
    for x_0 in x_0_arr:
        x, t = runge_kutta(x_0, t_n, f, h)
        y = []
        for i in range(len(x)):
            y.append(x[i][0])
        plt.plot(t, y, linewidth=1)

```

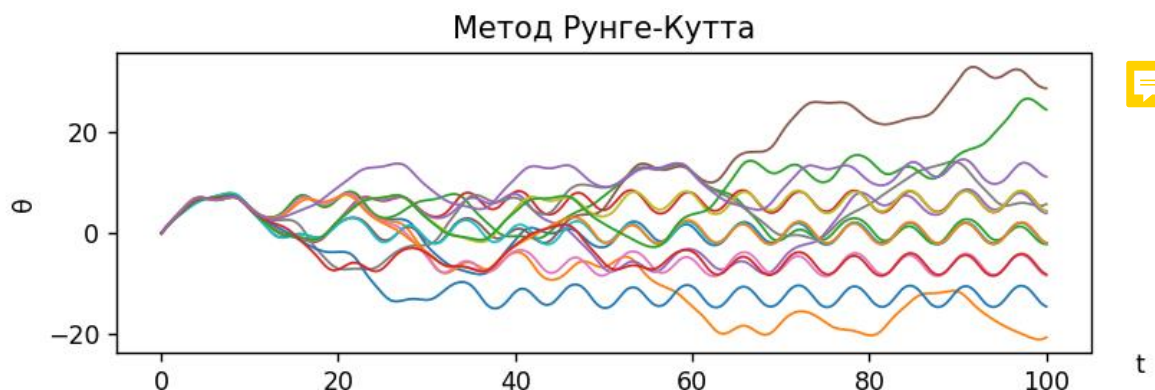


Рис. 1 – результат построения траектории динамической системы по методу Рунге-Кутты 4 порядка

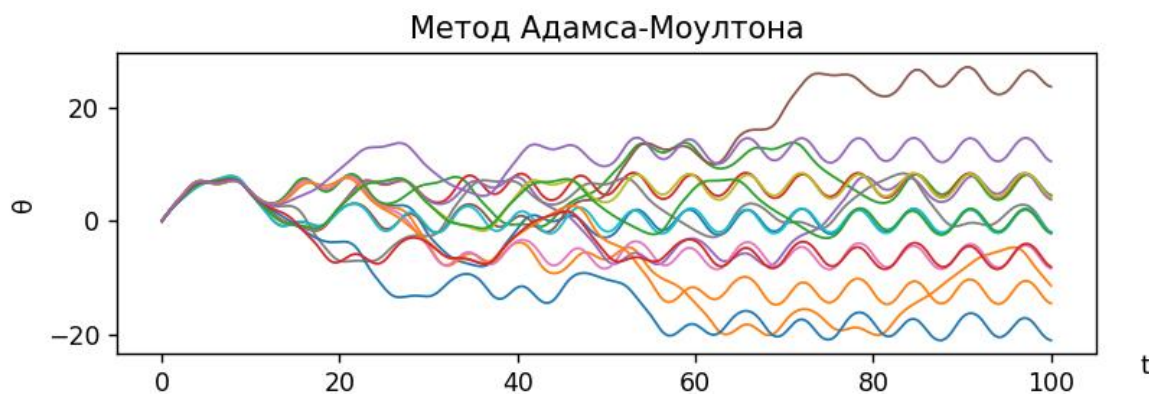


Рис. 2 – результат построения траектории динамической системы по 3хшаговому методу Адамса-Моултона

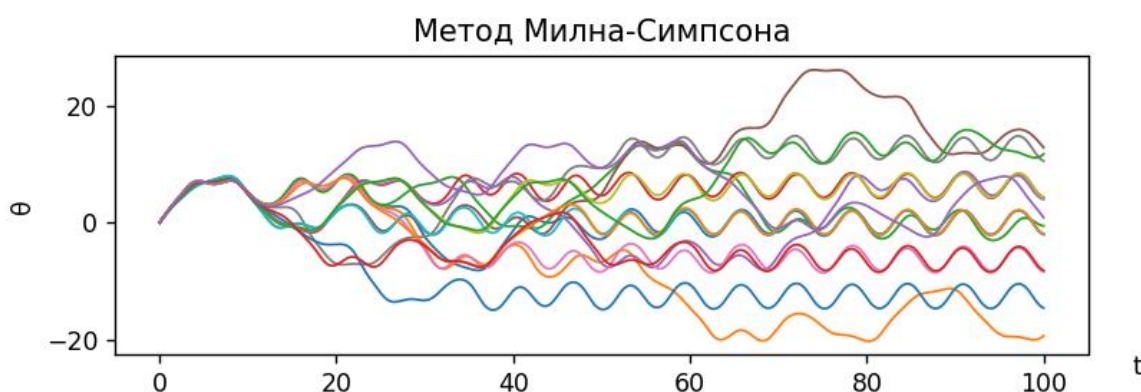


Рис. 3 – результат построения траектории динамической системы по методу Милна-Симпсона

4. Сходства и различия реализованных методов численного решения ОДУ.

В первую очередь, метод Рунге-кутта является явным, метод Адамса-Моултона – неявным, метод Милна-Симпсона построен по схеме предиктор-корректор. Другим отличием является то, что метод Рунге-Кутта одношаговый (использует информацию только с одного предыдущего шага), метод Адамса-Моултона в данном случае использован трехшаговый, метод Милна-Симпсона является четырехшаговым.

Сходства ограничиваются тем, что все методы являются численными, итерационными, с аналитическим порядком точности $O(h^4)$.

5. Нахождение значения шага, при котором численная схема становится неустойчивой.

Построим графики траектории динамической системы, полученные при разных h с помощью метода Рунге-Кутта (рис. 4). Графики траектории при разных h совпадают и численная схема остается устойчивой, по крайней мере пока не будет достигнут шаг $h > 0.95$. Полученные значения узлов перестают быть схожими при больших h , и погрешности значительно возрастают, так как

методы итерационные, погрешности начинают накапливаться, что приводит к неустойчивости. То есть под неустойчивостью в данном случае подразумевается ситуация, когда возникает значительное отклонение относительно решений с меньшим шагом. Так как методы численного решения ОДУ основаны на численном интегрировании, то уменьшение шага только делает решение более точным и не приводит к неустойчивости, поэтому можно считать решения с меньшим шагом верными. Графики траектории, построенные по методу Адамса-Моултона отображены на рис. 5, по методу Милна-Симпсона на рис. 6, 7.

Таким образом получено, что точно неустойчивой численная схема будет при h :

- для метода Рунге-Кутты 4 порядка: $h > 0.95$
- для трехшагового метода Адамса-Моултона: $h > 0.575$
- для метода Милна-Симпсона: $h > 0.291$

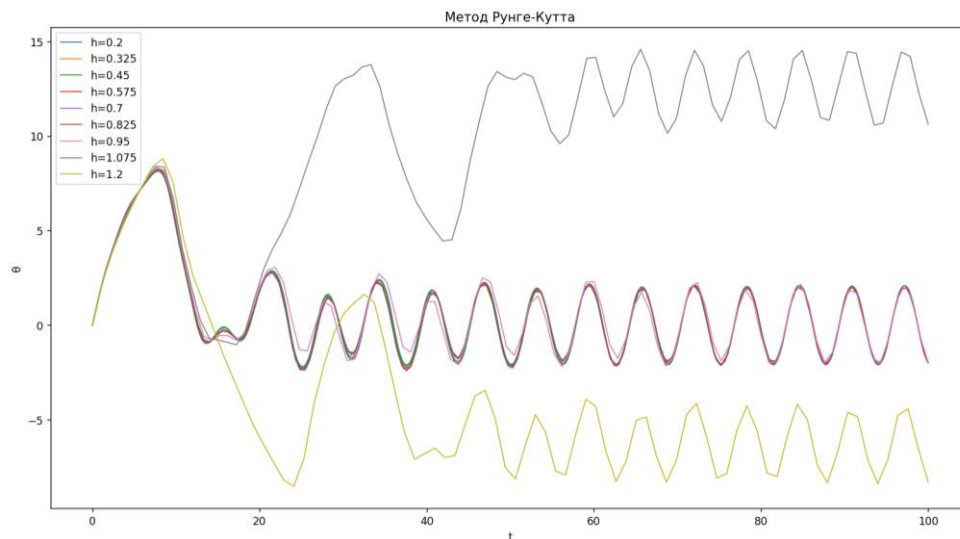


Рис. 4 – результат построения траектории по методу Рунге-Кутты при разных h

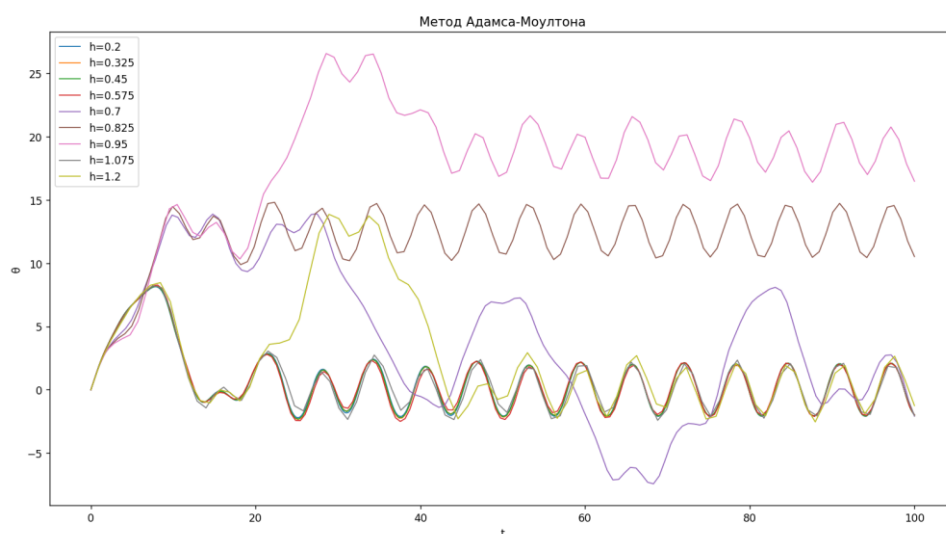


Рис. 5 – результат построения траектории по методу Адамса-Моултона при разных h

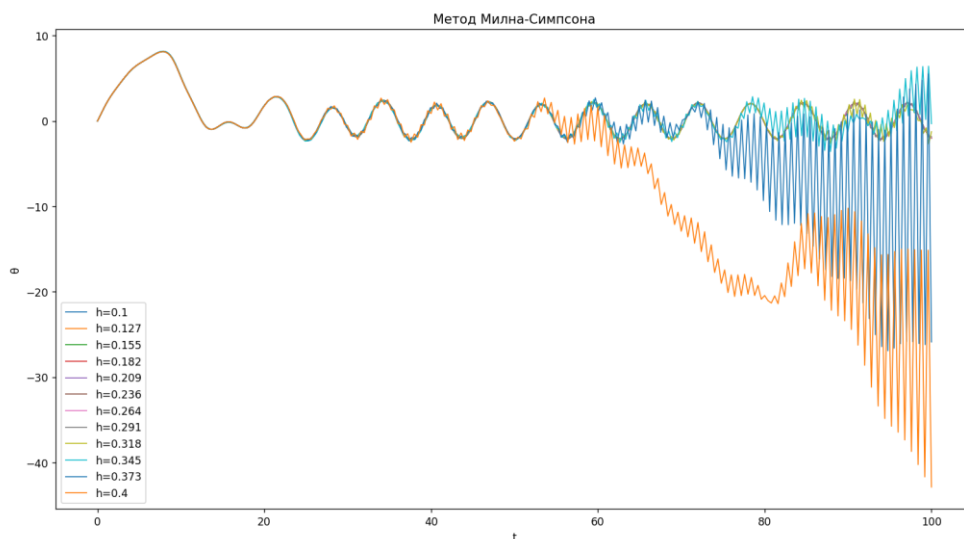


Рис. 6 – результат построения траектории по методу Милна-Симпсона при разных h

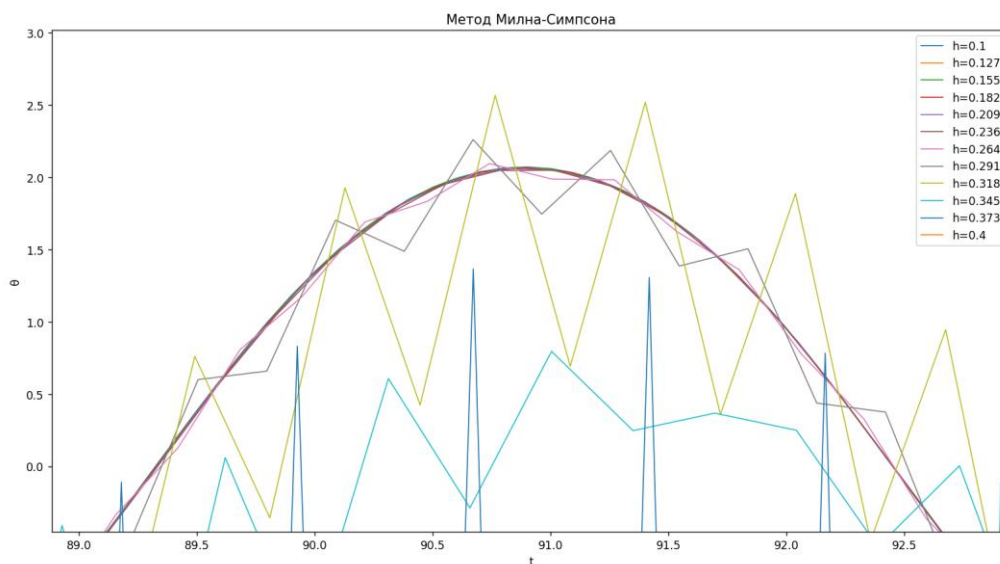


Рис. 7 – результат построения траектории по методу Милна-Симпсона при разных h (увеличено)

Продвинутая часть

6. построение фазовых траекторий при различных начальных условиях

Фазовые траектории характеризуют состояние и движение динамической системы. Они представляют собой кривые в фазовом пространстве, которые отображают изменение переменных состояния системы со временем. Фазовые траектории могут показывать различные свойства системы, такие как устойчивость, наличие периодических или аperiodических колебаний, а также сходимость к точкам равновесия (Точки равновесия в динамической системе – это асимптотические состояния, в которых система остается стационарной, то есть не изменяет свое состояние со временем).

С помощью ранее реализованных методов численного решения ОДУ построим фазовые траектории на едином двумерном графике: по оси абсцисс

будет θ , по оси ординат – $d\theta/dt$. На рисунке 8 показано как будет выглядеть фазовая траектория для 1 набора случайных начальных условий, на рисунке 9 – для 15 наборов, с помощью метода Рунге-Кутты. На рисунке 10 и 11 показано как будут выглядеть фазовые траектории для 15 наборов различных начальных значений, полученных по методу Адамса-Моултона и методу Милна-Симпсона соответственно.

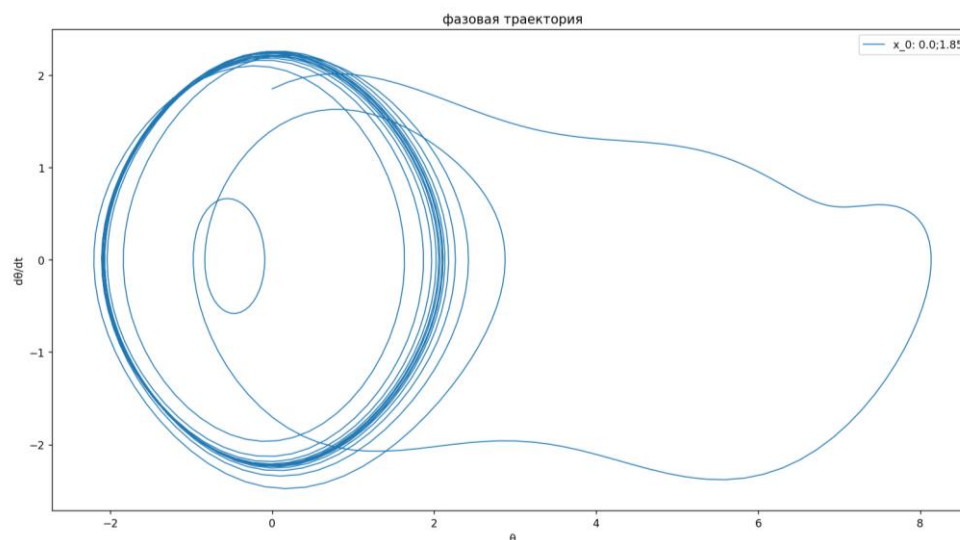


Рис. 8 – результат построения фазовой траектории по методу Рунге-Кутта для 1 набора начальных условий

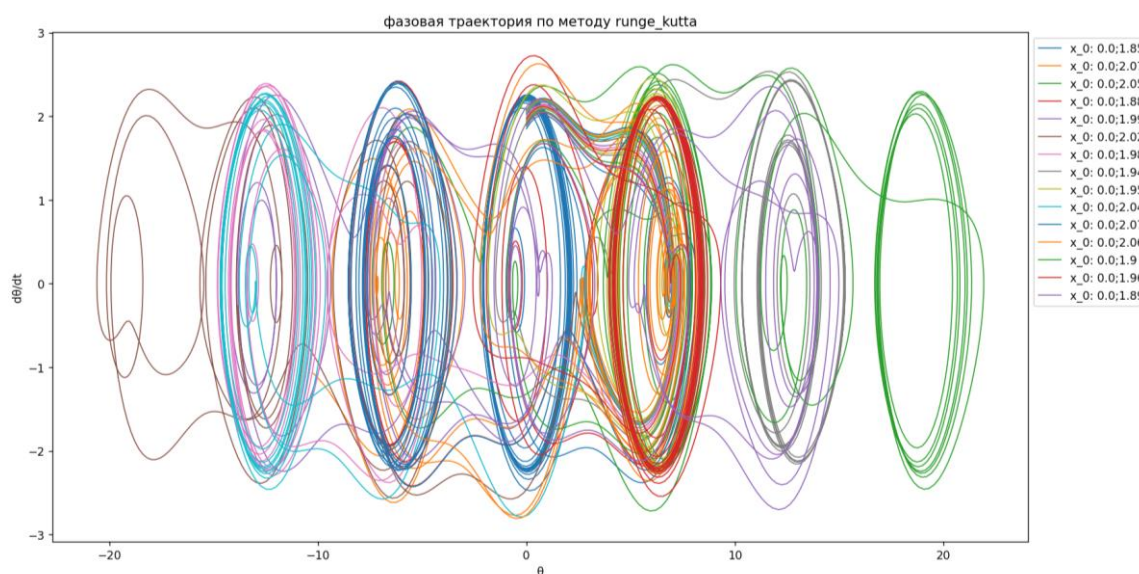


Рис. 9 – результат построения фазовой траектории по методу Рунге-Кутта для 15 наборов начальных условий

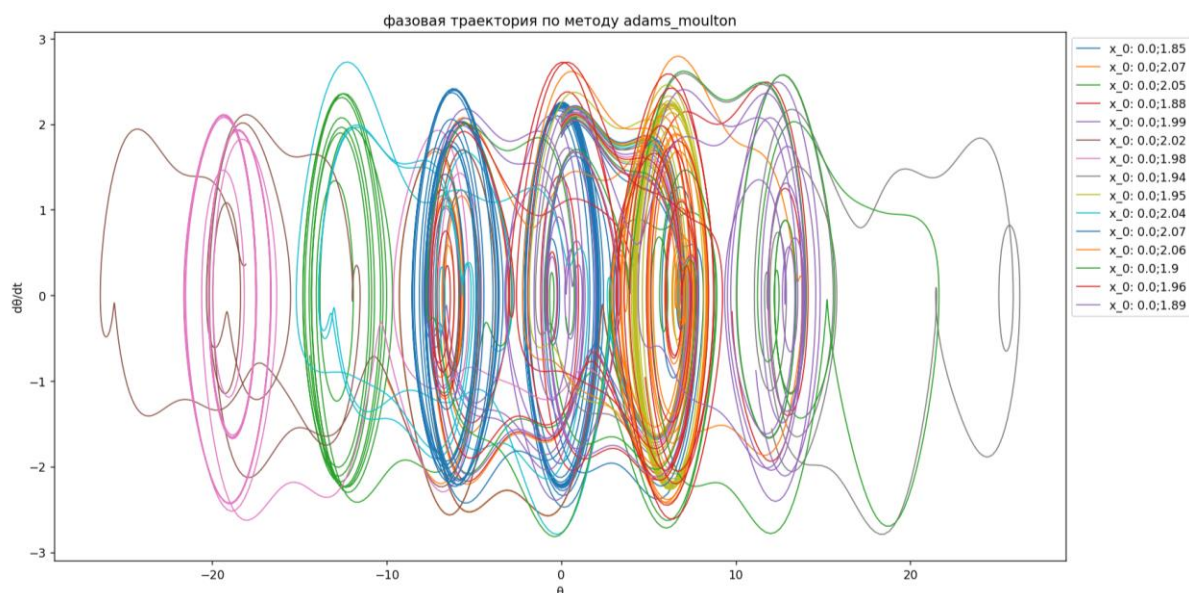


Рис. 10 – результат построения фазовой траектории по методу Адамса-Моултона для 15 наборов начальных условий

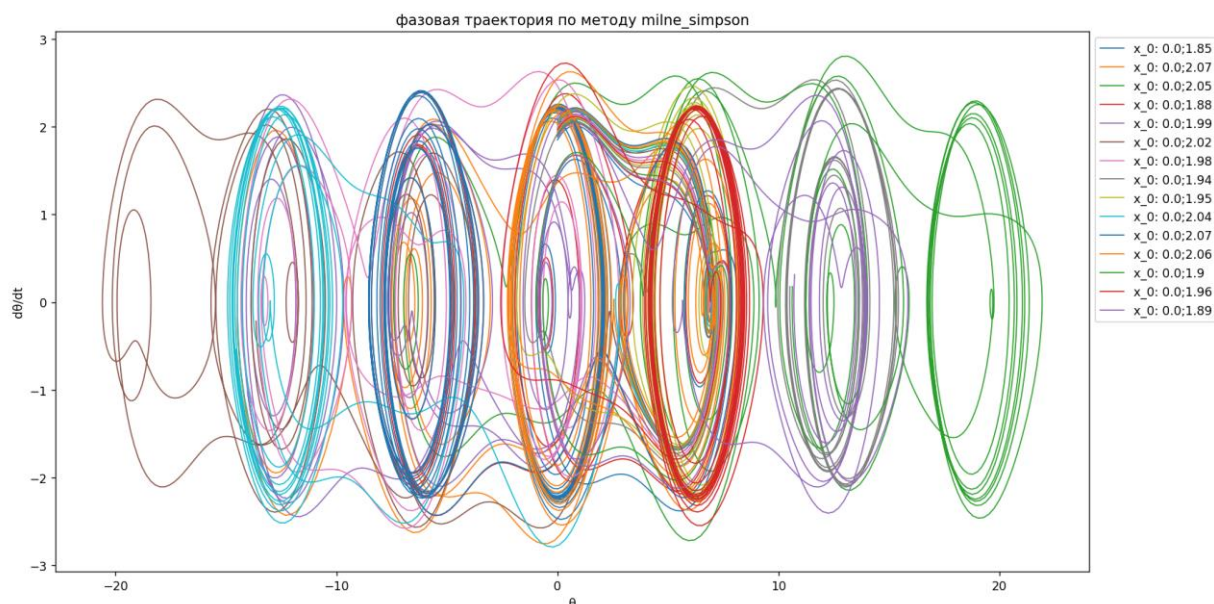


Рис. 11 – результат построения фазовой траектории по методу Милна-Симпсона для 15 наборов начальных условий

7. Фазовые траектории для одного и того же набора начальных значений разными методами.

Теперь зафиксируем один набор начальных значений, например, $\theta = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 2.06$. Построим фазовые траектории с помощью разных методов на одном графике. Результат на рисунке 12, 13.

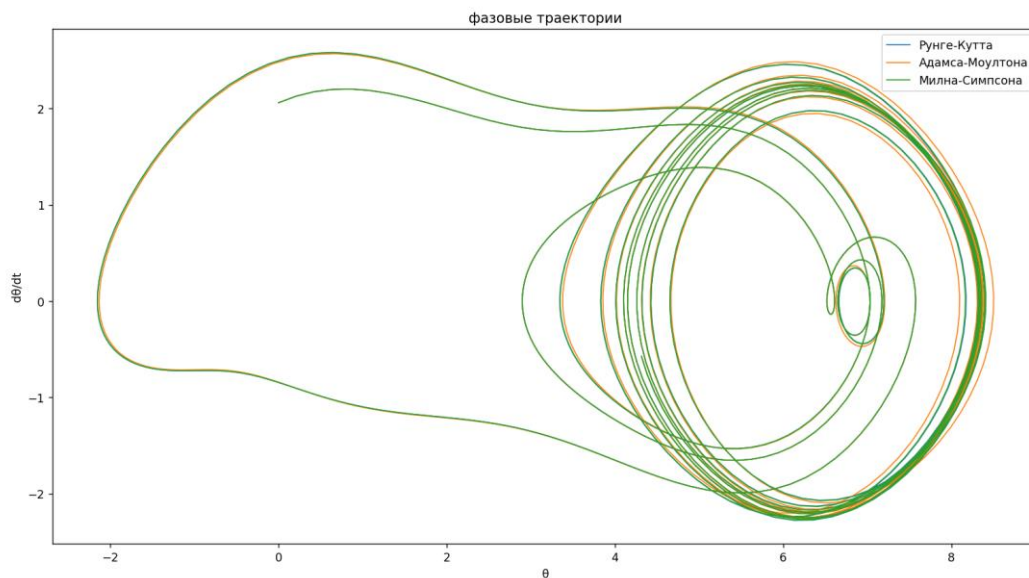


Рис. 12 – результат построения траектории разными методами, набор начальных значений зафиксирован

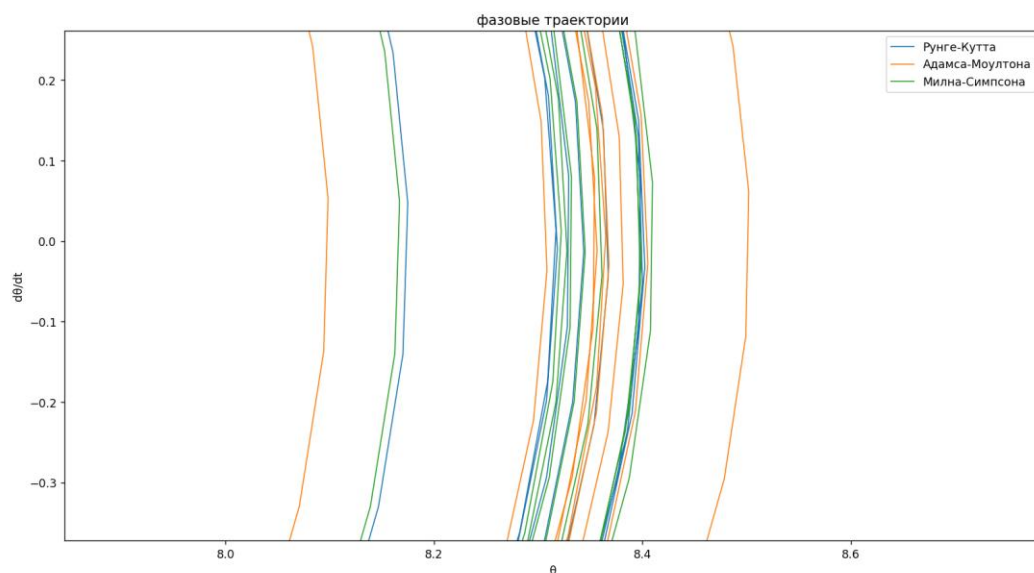


Рис. 13 – результат построения траектории разными методами, набор начальных значений зафиксирован (увеличено)

Расстояние между полученными фазовыми траекториями для разных методов достаточно мало.

8. *Определение наиболее и наименее затратной с точки зрения времени вычислений численной схемы.*

Для определения времени, затрачиваемого на вычисления, будет использоваться функция `default_timer` библиотеки `timeit`. Рассчитаем время выполнения функций `runge_kutta`, `adams_moulton`, `milne_simpson`, при шаге $h = 0.1$ и одинаковом количестве просчитываемых узлов. Полученное время работы 3 методов отображено ниже.

- Метод Рунге-Кутты: **309мс.**
- Метод Адамса-Моултона: **2182мс.**

- Метод Милна-Симпсона: **311мс.**

Таким образом, наиболее затратным оказался метод Адамса-Моултона, а наименее затратным – метода Рунге-Кутты. Это объясняется тем, что в методе Адамса-Моултона требуется решать нелинейные системы уравнений. В методе же Рунге-Кутты, являющемся явным, этого не требуется, более того, в методе требуется меньше всего раз вычислять вектора правой части системы ОДУ f , что является задачей, на которую уходит основная часть времени при вычислениях, потому что эта операция более трудоемкая, чем единичное умножение, и тем более сложение.

9. Асимптотические состояния и их физический смысл.

Асимптотические состояния - это состояния, к которым система стремится с течением времени. Существуют некоторые типичные асимптотические состояния, такие как устойчивые точки равновесия, предельные циклы и др. В физическом контексте, устойчивые точки равновесия могут представлять стабильные состояния системы, в которых все силы, действующие на систему, сбалансированы. Предельные циклы, в физическом контексте, могут представлять периодические колебания или повторяющиеся процессы в системе. На графике фазовых траекторий предельные циклы будут представлять область с большим количеством наложенных друг на друга замкнутых кривых.

Построим фазовые траектории по методу Рунге-Кутты для одного и того же начального условия. В первом случае (рис. 14), расчёт произведен для интервала времени от 0 до 100 секунд, во втором случае (рис. 15), для интервала времени – от 0 до 10000 секунд. Полученные фазовые траектории соответствуют предельным циклам, физический смысл которых – периодические колебания, что согласуется по смыслу с заданной динамической системой вынужденных колебаний маятника.

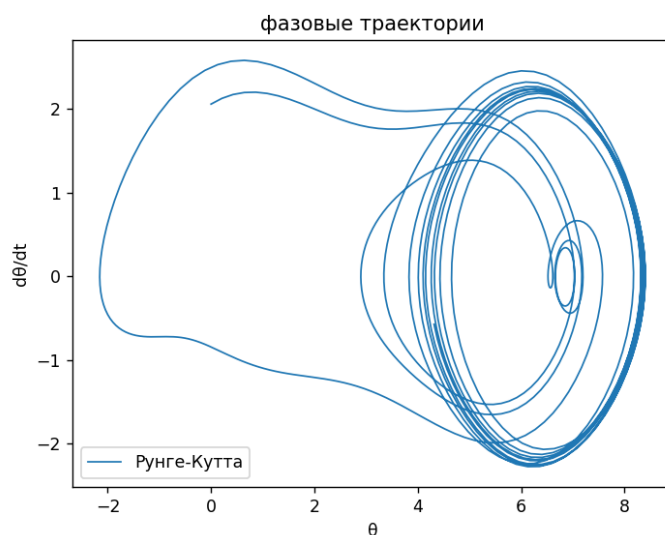


Рис. 14 – фазовые траектории на интервале времени t от 0 до 100 с.

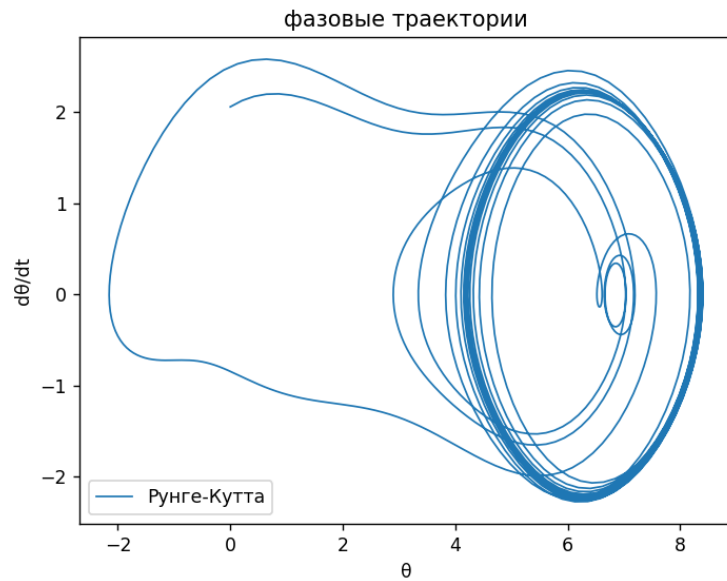


Рис. 15 – фазовые траектории на интервале времени t от 0 до 10000 с.

Сравнив рис. 14 и рис. 15, можно заметить, что все фазовые траектории, полученные на более длинном интервале, накладываются друг на друга и образуют некоторую область притяжения.

Выведем фазовые траектории для времени t от 100 до 10000 секунд (рис. 16). Как можно заметить, все фазовые траектории расположены очень близко друг другу, рис. 16 можно считать областью притяжения решений ОДУ (1).

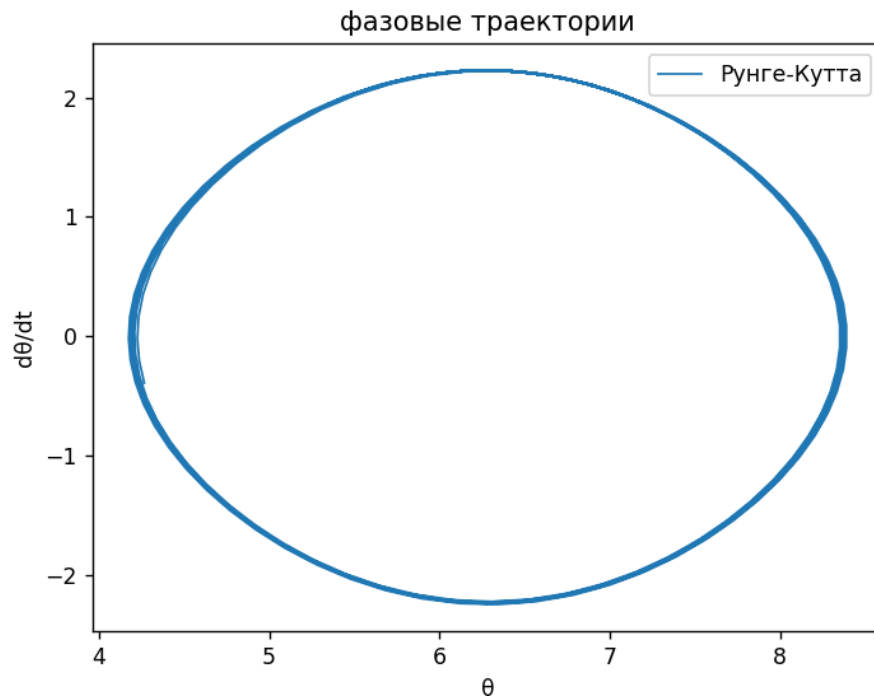


Рис. 16 – область притяжения решений для заданной динамической системы при $\theta = 0, \frac{d\theta}{dt} = 2.06$

Заключение

В данной лабораторной работе были реализованы такие методы численного решения ОДУ, как метод Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона. С помощью них были построены дискретные траектории решения системы ОДУ, являющейся математической моделью системы вынужденных колебаний маятника, при чем для различных наборов начальных условий. В продвинутой части были построены фазовые траектории, по графику были визуально определены асимптотические состояния. Был эмпирически определен шаг для каждого метода, при котором численная схема становится неустойчивой. Произведено сравнение затрат по времени на решение системы ОДУ при одинаковых условиях (одинаковые начальные условия, шаг, интервал, на котором вычисляются значения в узлах) для каждого метода.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018- 2021. С. 140. URL: <https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046>.
2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
4. Першин А.Ю. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. / Под редакцией Соколова А.П. [Электронный ресурс]. Москва, 2018-2021. С. 20. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
5. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2021. С. 54. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6)