Министерство науки и высшего образования
Крымский федеральный университет имени
В.И.Вернадского
Таврическая академия
Факультет математики и информатики

Ю.С.Пашкова

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ

Симферополь - 2020

Оглавление

Глава 1

Вещественные числа

1.1 Лекция №1. Основные понятия и определения

1.1.1 Введение

Сегодня мы начинаем изучать один из самых основных курсов факультета математики и информатики — *курс математического анализа.* Материал курса рассчитан на 4 семестра.

Основными понятиями математического анализа являются понятия предела, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости функций одной и многих переменных. С некоторыми понятиями математического анализа вы уже сталкивались в школе. Однако практически каждое вводимое в школе понятие требует дальнейшего математического уточнения. Это – задача нашего курса.

Прежде чем перейти к изложению основного материала, приведем список литературы, которой мы будем пользоваться. Отметим, что литература по математическому анализу весьма разнообразна. Мы остановимся на нескольких монографиях и задачниках.

1. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3.

2. В. А. Ильин, Э. Г. Позднякюк. Основы математического анализа. Части I и II.

3. А. М. Тер-Крикоров, М. Н. Шабунин. Курс математического анализа

4. Б. П. Демидович Задачи и упражнения по математическому анализу

5. Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.

1.1.2 Логическая символика

При изложении курса мы будем пользоваться логическими символами, заменяющими целые фразы и позволяющими сделать математическую запись более короткой.

К таким символам относятся

- $\forall$ — знак (квантор) общности. Этот знак заменяет слова и фразы: для любого; любой; для каждого; каждый; для всех.

- $\exists$ — знак (квантор) существования. Этот знак заменяет слова: существует; найдется.

- $\Longrightarrow$ — знак следования (импликации). Запись

  $$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$$

  означает, что $\mathcal{A}$ влечет $\mathcal{B}$, или что $\mathcal{B}$ следует из $\mathcal{A}$.

- $\Longleftrightarrow$ — знак равносильности (эквивалентности). Запись

  $$\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$$

  означает, что одновременно $\mathcal{B}$ следует из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$ следует из $\mathcal{B}$; или что условие $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно для условия $\mathcal{B}$; или что $\mathcal{A}$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется $\mathcal{B}$.

- $\bigvee$ — знак дизъюнкции. Этот знак заменяет союз "или". Он означает, что выполняется или условие $\mathcal{A}$ или условие $\mathcal{B}$ (Возможно, но не обязательно, что эти условия выполняются одновременно).

- $\bigwedge$ — знак конъюнкции. Этот знак заменяет союз "и". Он означает, что условия $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выполняются одновременно.

- $\exists!$ — этот знак заменяет фразу: существует и единственный.

1.1.3 Множества и элементарные операции над множествами

В конце 19 и начале 20 столетий наиболее универсальным языком математики стал язык теории множеств. Это проявилось даже в одном из определений математики как науки, изучающей различные структуры на множествах (Николай Бурбаки).

Как известно, понятие множества является неопределяемым. Мы чаще всего будем смотреть на множества как на математические объекты, обладающие определенными свойствами.

Множества мы чаще всего будем обозначать прописными буквами:

$$A,\ B,\ C, \ldots, X,\ Y,\ Z.$$

Объекты, составляющие множества, принято называть элементами этих множеств. Элементы множеств мы будем обозначать строчными буквами:

$$a,\ b,\ c, \ldots, x,\ y,\ z.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими понятиями и операциями теории множеств.

- Запись $a \in A$ будет означать, что элемент a принадлежит множеству A.

- Запись $b \notin A$ или $b \overline{\in} A$ будет означать, что элемент b не принадлежит множеству A.

- Запись $B \subset A$ означает, что множество B является подмножеством множества A. На языке математических символов это можно записать следующим образом:

$$(B \subset A) \Longleftrightarrow \{(b \in B) \Rightarrow (b \in A)\}.$$

- Два множества A и B мы будем называть равными и писать $A = B$, если они состоят из одних и тех же элементов. По определению,

$$(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

- Объединение $A \cup B$ множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих либо A, либо B. По определению,

$$A \cup B = \{x \colon (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

- Пересечение $A \cap B$ множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих одновременно как A, так и B. По определению,

$$A \cap B = \{x\colon (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

- Разность $A \setminus B$ множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B. По определению,

$$A \setminus B = \{x\colon (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

- Множество. не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\emptyset$. Полагают, что

$$\emptyset \subset A$$

  для любого множества A.

- Декартово произведение $A \times B$ определяется как множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b)\colon (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

1.1.4 Числовые множества

Мы будем рассматривать следующие основные числовые множества:

- Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел.
- Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел.
- Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.
- Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Рассмотрим сначала подробнее первые три из этих множеств.

1.1.4.1. **Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел**

По определению. натуральными называются числа. используемые для счета предметов:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

На множестве $\mathbb{N}$ определены операции сложения "$+$" и умножения "$\times$" (или "$\cdot$"), удовлетворяющие свойствам:

(N1). Для любых $m, n \in \mathbb{N}$
$$m + n = n + m.$$

(N2). Для любых $m, n, k \in \mathbb{N}$
$$(m + n) + k = m + (n + k).$$

(N3). Для любых $m, n \in \mathbb{N}$
$$m \times n = n \times m.$$

(N4). Для любых $m, n, k \in \mathbb{N}$
$$(m \times n) \times k = m \times (n \times k).$$

(N5). Для любого $m \in \mathbb{N}$
$$m \times 1 = m.$$

(N6). Для любых $m, n, k \in \mathbb{N}$
$$(m + n) \times k = m \times k + n \times k.$$

Замечание 1.1.1. Заметим, что чаще всего используют более простую запись умножения натуральных чисел (и не только натуральных):
$$m \times n = m \cdot n = mn.$$

Определение 1.1.2. По определению считают, что
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$
и
$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k.$$

Определение 1.1.3. Натуральное число m называется делителем натурального числа n, если
$$n = mk$$
для некоторого натурального числа k. В этом случае говорят, что n делится на m или что число n является кратным для m.

Обозначим через $D(n)$ множество всех делителей числа n, а через $K(m)$ — множество всех кратных числа m.

Замечание 1.1.4. Любое натуральное число n делится на 1 и на n. При этом,

- Если $n = 1$, то $D(1) = \{1\}$, т.е. состоит из одного элемента.
- Если $n \neq 1$, то $D(n)$ содержит хотя бы два элемента.

Определение 1.1.5. Если $n \neq 1$ и $D(n)$ содержит ровно два элемента, т.е.

$$D(n) = \{1; n\},$$

то натуральное число n называется простым.

Примерами простых чисел служат числа

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

Заметим, что среди простых чисел только одно — четное. Это число 2. Все остальные простые числа — нечетные.

Определение 1.1.6. Если $D(n)$ содержит более двух элементов, то натуральное число n называется составным.

Имеет место следующая очень важная теорема:

Теорема 1.1.7. *Любое натуральное число n можно представить в виде*

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k},$$

где числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые, а $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — натуральные.

Это разложение единственно с точностью до порядка слагаемых.

Определение 1.1.8. Натуральное число k называется общим делителем чисел n и m, если

$$k \in D(n) \cap D(m).$$

Обозначим множество общих делителей чисел n и m через

$$D(n) \cap D(m) = D(n, m).$$

На множестве $\mathbb{N}$ вводится отношение порядка.

Определение 1.1.9. Если

$$n = m + k, \quad m, n, k \in \mathbb{N},$$

то говорят, что $n > m$ или $m < n$.

Утверждение 1.1.10. *Для любых двух натуральных чисел m и n имеет место одно и только одно из следующих соотношений:*

$$n > m,\ m > n,\ n = m.$$

Замечание 1.1.11. Если $n > m$ или $n = m$, то пишут

$$n \geq m.$$

Если $n < m$ или $n = m$, то аналогично пишут

$$n \leq m.$$

Утверждение 1.1.12.

1. *Если $k \in D(n, m)$, то $k \leq n$ и $k \leq m$.*
2. *Для любых натуральных чисел m и n в $D(n, m)$ существует наибольший элемент.*

Определение 1.1.13. Для любых натуральных чисел m и n элемент

$$\max D(n, m) = \max\{k \colon k \in D(n, m)\}$$

называется наибольшим общим делителем чисел m и n и обозначается

$$HOD(n, m)$$

Определение 1.1.14. Если

$$HOD(n,m) = 1,$$

то натуральные числа n и m называются взаимно простыми. В этом случае также

$$D(n,m) = 1.$$

Замечание 1.1.15. Множество кратных любого натурального числа m имеет вид

$$K(m) = \{m, 2m, 3m, \dots\}.$$

Ясно, что $K(m)$ бесконечно.

Обозначим через $K(n,m)$ множество общих кратных натуральных числа n и m. Ясно, что

$$nm \in K(n,m).$$

Поэтому в $K(n,m)$ существует наименьший элемент.

Определение 1.1.16. Для любых натуральных чисел m и n элемент

$$\min K(n,m) = \min\{k\colon k \in K(n,m)\}$$

называется наименьшим общим кратным чисел m и n и обозначается

$$HOK(n,m).$$

1.1.5 Числовые множества

Основными числовыми множествами являются:
$\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел.
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ множество всех целых чисел.
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ множество рациональных чисел.
$\mathbb{R}$ множество действительных чисел.

Стандартно отрезки, полуинтервалы, замкнутые и открытые лучи обозначаются так:

$$
\begin{gathered}
[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x\leq b\}\\
[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x<b\}\\
(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\leq b\}\\
(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}\\
[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x\leq a\}\\
(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x>a\}\\
(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}:x\leq b\}\\
(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}:x<b\}\\
(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}
\end{gathered}
$$

Определение 1.1.17. Пусть ε , $a\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0:\varepsilon$ - окрестностью точки a называется интеграл

$$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=U_\varepsilon(a)$$

1.1.6 Ограниченные и неограниченные числовые множества.

Ограниченные сверху множества.Верхняя грань.Супремум.Теорема существования супремума.

Пусть E некоторое подмножество в $\mathbb{R}:E\subset\mathbb{R}$

Определение 1.1.18. Множество E называется *ограниченным сверху*, если существует такое число $M\in\mathbb{R}$, что

$$\forall x\in E\Rightarrow x\leq M.$$

В этом случае число M называется верхней гранью или верхней границей множества E

Если E – ограниченное сверху множество и M – его верхняя граница, то

$$E \subset (-\infty, M]$$

Если M – верхняя граница множества E и $M_1 > M$, то M_1 тоже верхняя граница E. Таким образом наибольшей верхней границы у ограниченного множества нет.

Определение 1.1.19. Пусть E ограничено сверху. Наименьшая из всех верхних граней множества E называется точной верхней гранью или супремумом и обозначается

$$\sup E$$

Пусть $\bar{x} = \sup E$.

Тогда можно сформулировать следующие свойства $\bar{x}$.

1°. $\forall x \in E, x \leq \bar{x}$ ($\bar{x}$верхняя грань множества E).

2°. $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}]$, то есть $\bar{x} - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \bar{x}$ ($\bar{x}$ наименьшая верхняя грань).

Теорема 1. (о существовании супремума). *Если непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то существует $\bar{x} = \sup E$*

Замечание 1. Пусть E ограничено сверху и $\bar{x} = \sup E$. Тогда $\bar{x}$ может как принадлежать E, так и не принадлежать E

Пример 1.1.20. $E = [1, 2) \cup \{3\}, \sup E = 3, 3 \in E$

Замечание 2. Если у множества E существует $\sup E = \bar{x}$, то он единственный

Ограниченные снизу множества.Нижняя грань.Инфинум.Теорема о существовании инфинума. Свойства инфинума.

Определение 1.1.21. Множество E называется *ограниченным снизу*, если существует такое число $m \in \mathbb{R}$, что

$$\forall x \in E \Rightarrow m \leq x$$

В этом случае число m называется *нижней гранью* (нижней границей) множества E

Замечание 3. Если E ограничена снизу и m его нижняя грань, то

$$E \subset [m, +\infty)$$

Замечание 4. m Если $m-$ нижняя граница множества E и $m_1 < m$, то m_1 тоже нижняя граница E . Наименьшей нижней границы у ограниченного снизу множества нет.

Определение 1.1.22. Пусть E ограничено снизу. Наибольшая из всех нижних границ множества E называется точной нижней гранью или инфинумом и обозначается $\inf E$

$$\underline{x} = \inf E$$

Сформулируем свойства $\underline{x}$.

1°. $\forall x \in E, \underline{x} \leq x$ ($\underline{x}$ нижняя грань множества E).

2°. $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [\underline{x}, \underline{x} + \varepsilon)$, то есть $\underline{x} < x_\varepsilon \leq \ \underline{x} + \varepsilon$ ($\underline{x}$ наибольшая нижняя грань).

Теорема 2. (о существовании инфимума). *Если непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, то существует $\underline{x} = \inf E$*

Замечание 5. Пусть E ограничено снизу и $\underline{x} = \inf E$. Тогда $\underline{x}$ может как принадлежать множеству E, так и не принадлежать ему.

Пример 1.1.23. Пусть $E = [-1, 5)$, тогда $\inf E = -1$. Очевидно , что $-1 \notin E$.

Пример 1.1.24. Пусть $E = [7, +\infty)$, тогда $\inf E = 7$. Очевидно , что $7 \in E$.

Замечание 6. Если у множества E существует $\inf E = \underline{x}$, то он единственный.

Ограниченные и неограниченные множества.

Определение 1.1.25. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.

Замечание 7. Если E ограничено, то существует отрезок $[m, M]$ такой, что

$$E \subset [m, M]$$

Следствие 1.1.26. *Множество E является ограниченным тогда и только тогда, когда существует такое число $A > 0$, что $\forall x \in E - A \leq x \leq A$, то есть $|x| \leq A$*

Доказательство

Необходимость Пусть E ограничено, тогда существует нижняя грань mи верхняя грань M , то есть $E \subset [m, M]$

Обозначим через $A = \max\{|m|, |M|\}$.

Тогда $-A \leq m \leq M \leq A$, следовательно $x \in [-A, A] \forall x \in E$. То есть $|x| \leq A$.

Достаточность очевидна. Действительно , можно положить $m = -A, M = A$

Теорема доказана.

Определение 1.1.27. Множество E называется неограниченным сверху, если $\forall M \in \mathbb{R} \exists x_M \in E$ такой, что $x_M > M$

Определение 1.1.28. Множество E называется неограниченным снизу, если $\forall m \in \mathbb{R} \exists x_m \in E$ такой, что $x_m < m$.

Определение 1.1.29. Множество E называется неограниченным, если оно неограниченно либо снизу, либо сверху.