Министерство науки и высшего образования
Крымский федеральный университет имени
В.И.Вернадского
Таврическая академия
Факультет математики и информатики

Ю. С. Пашкова

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ

Симферополь - 2020

Оглавление

0.1 Лекция №5. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число e.

0.1.1 Определение монотонных последовательностей. Примеры.

Определение 0.1.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется

- *неубывающей*, если для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство
$$x_n \leqslant x_{n+1}.$$
- *невозрастающей*, если для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство
$$x_n \geqslant x_{n+1}.$$
- *возрастающей* (или строго возрастающей), если для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство
$$x_n < x_{n+1}.$$
- *убывающей* (или строго убывающей), если для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство
$$x_n > x_{n+1}.$$

Определение 0.1.2.
- Невозрастающие и неубывающие последовательности называются монотонными.
- Убывающие и возрастающие последовательности называются строго монотонными.

Замечание 0.1.3.
- Так как имеет место импликация
$$x_n < x_{n+1} \Rightarrow x_n \leq x_{n+1},$$
то если последовательность $\{x_n\}$ возрастающая, то она также неубывающая.

- Так как имеет место импликация

$$x_n > x_{n+1} \Rightarrow x_n \geq x_{n+1},$$

то если последовательность $\{x_n\}$ убывающая, то она также невозрастающая.

Замечание 0.1.4. Монотонные последовательности ограничены либо сверху, либо снизу. А именно:

- Если последовательность $\{x_n\}$ неубывающая (возрастающая), то эта последовательность ограничена снизу. Роль нижней границы может играть x_1.

- Если последовательность $\{x_n\}$ является невозрастающая (убывающая), то эта последовательность ограничена сверху. Роль верхней границы может играть x_1.

Поэтому

- Неубывающая (возрастающая) последовательность ограничена, если она ограничена сверху.

- Невозрастающая (убывающая) последовательность ограничена, если она ограничена снизу.

Примеры 0.1.5. Рассмотрим примеры монотонных последовательностей.

1). Последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ ...$$

является неубывающей. Она ограничена снизу и неограничена сверху.

2). Последовательность

$$1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}, \dots$$

является невозрастающей. Она ограничена сверху и снизу, т.е. ограничена.

3). Последовательность

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \dots\ \frac{n-1}{n},\ \dots$$

является возрастающей. Она ограничена сверху и снизу, т.е. ограничена.

4). Последовательность

$$1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \ldots, -n,\ \ldots$$

является убывающей. Она ограничена сверху и неограничена снизу.

0.1.2 Признак сходимости монотонной последовательности. Теорема Вейерштрасса.

Монотонные последовательности бывают четырех типов. Поэтому нам необходимо рассматривать каждый из них. Однако по структуре, рассуждения для каждого из отдельных типов чаще всего бывают аналогичными. имеет место следующая общая теорема.

Теорема 0.1.6. *(Теорема Вейерштрасса) Для того, чтобы монотонная последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной.*

Мы сформулируем и докажем эту теорему отдельно для каждого из типов монотонных последовательностей.

Теорема 0.1.7. *(Теорема Вейерштрасса для неубывающей последовательности) Для того, чтобы неубывающая последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченна сверху.*

Доказательство. **Необходимость.**

Если неубывающая последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

Достаточность.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ — неубывающая и ограниченная сверху. Тогда существует такое число M, что для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$x_n \leq x_{n+1} \leq M.$$

Следовательно, множество значений

$$E = \{x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ x_{n+1}, \ldots\}$$

последовательности $\{x_n\}$ ограничено сверху. Поэтому по теореме о существовании супремума, существует

$$\sup E = \sup_n x_n = \overline{x}.$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n = \overline{x}.$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно заданное положительное число. По определению супремума, существует такой номер N_ε, что элемент последовательности x_{N_ε} (с номером N_ε) удовлетворяет неравенству

$$\overline{x} - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leq \overline{x}.$$

Тогда для любого $n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\overline{x} - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leq x_n \leq \overline{x}.$$

Следовательно, для любого $n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_n - \overline{x}| = \overline{x} - x_n < \varepsilon.$$

Но это означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} = \sup_n x_n.$$

$\square$

Аналогично доказывается теорема Вейерштрасса для возрастающих последовательностей. Сформулируем этот результат как следствие.

Следствие 0.1.8. *(Теорема Вейерштрасса для возрастающей последовательности) Для того, чтобы возрастающая последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху.*

Замечание 0.1.9. Для неубывающей (возрастающей) ограниченной сверху последовательности $\{x_n\}$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} = \sup_n x_n.$$

Переходим к рассмотрению невозрастающих и убывающих последовательностей.

Теорема 0.1.10. *(Теорема Вейерштрасса для невозрастающей последовательности) Для того, чтобы невозрастающая последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченна снизу.*

Доказательство. **Необходимость.**

Если невозрастающая последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ — невозрастающая и ограниченная снизу. Тогда существует такое число m, что для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$m \leq x_{n+1} \leq x_n.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$-x_n \leq -x_{n+1} \leq -m.$$

Рассмотрим числовую последовательность с общим членом

$$y_n = -x_n.$$

и обозначим $-m = M$. Так как

$$-x_n \leq -x_{n+1} \leq -m \Rightarrow y_n \leq y_{n+1} \leq M,$$

то последовательность y_n является неубывающей и ограниченной сверху. Поэтому, по теореме 0.1.7, она сходится и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sup_n y_n.$$

Но тогда последовательность

$$x_n = (-1)y_n$$

тоже сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (-1)y_n = -\lim_{n\to\infty} y_n = -\sup_n y_n = \inf_n(-y_n) = \inf_n x_n.$$

□

Аналогично доказывается теорема Вейерштрасса для убывающих последовательностей. Сформулируем этот результат как следствие.

Следствие 0.1.11. *(Теорема Вейерштрасса для убывающей последовательности) Для того, чтобы убывающая последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченна снизу.*

Замечание 0.1.12. Для невозрастающей (убывающей) ограниченной снизу последовательности $\{x_n\}$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{x} = \inf_n x_n.$$

Замечание 0.1.13. Теорема Вейерштрасса остается справедливой и в том случае, если последовательность $\{x_n\}$ монотонна начиная с некоторого номера N_0.

Замечание 0.1.14. Теорема Вейерштрасса является прекрасным инструментом при доказательстве многих теорем, формул и решении многих примеров и задач. Некоторые из них мы рассмотрим в последующих параграфах.

0.1.3 Примеры

Пример 0.1.15. Пусть $q > 1$. Покажем, что тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0. \tag{0.1.1}$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n}{q^n}$$

Так как

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}},$$

То
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{n+1}{q^{n+1}}}{\dfrac{n}{q^n}} = \frac{n+1}{nq} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{q}$$
Поэтому
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1.$$
Следовательно, начиная с некоторого номера,
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n,$$
т.е. начиная с некоторого номера, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает. Так как, кроме того, для любого натурального $n \in \mathbb{N}$
$$x_n = \frac{n}{q^n} > 0,$$
то последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, эта последовательность имеет предел.

Обозначим
$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$
Переходя к пределу в равенстве
$$x_{n+1} = \frac{n+1}{nq}\cdot x_n,$$
получим
$$c = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{nq}\cdot x_n\right) = \frac{1}{q}\cdot c$$
Следовательно,
$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\cdot c = 0.$$
Так как
$$1-\frac{1}{q} \neq 0,$$
то
$$c = 0.$$
Таким образом,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{q^n} = \lim_{n\to\infty} x_n = c = 0.$$

Пример 0.1.16. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное положительное число и $q = 1 + \varepsilon$. Так как при $q = 1 + \varepsilon > 1$, в силу 0.1.1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n} = \infty$$

Тогда существует такой номер N, начиная с которого выполняется неравенство

$$1 \leq n < q^n = (1 + \varepsilon)^n.$$

Следовательно, для любого $n \geq N$ выполняется неравенство

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < q = 1 + \varepsilon,$$

или

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon.$$

Последнее неравенство означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Пример 0.1.17. Покажем. что для любого числа $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Рассмотрим два случая.

1). $a \geq 1$.

По аксиоме Архимеда, существует такой номер N, что для любого натурального $n \geq N$ выполняется неравенство

$$1 \leq a \leq n.$$

Следовательно, для любого $n \geq N$ выполняется неравенство

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Так как
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$
то в силу теоремы **??**, последовательность с общим членом $\sqrt[n]{a}$ тоже сходится и
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

2). $0 < a < 1$. В этом случае
$$\frac{1}{a} > 1.$$
Поэтому
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1.$$
Отсюда
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}} = 1.$$

0.1.4 Число e

Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$, заданную формулой общего члена
$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

Теорема 0.1.18. *Последовательность*
$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$
сходится.

Доказательство. Покажем, что последовательность $\{y_n\}$ является убывающей. Для этого для $n \geq 2$ рассмотрим отношение
$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n^n \cdot n^{n+1}}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{(n^2)^n \cdot n}{(n^2-1)^n \cdot (n+1)} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geq |\text{По неравенству Бернулли}| \geq$$

$$\geq \left(1 + n \cdot \frac{1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} >$$

$$> |\text{Увеличиваем знаменатель дроби}| > \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Таким образом,

$$y_{n-1} > y_n$$

при $n \geq 2$, т.е. последовательность $\{y_n\}$ — убывающая.

Кроме того, по тому же неравенству Бернулли имеем

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2$$

для любого натурального $n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность $\{y_n\}$ — ограниченная снизу. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, последовательность $\{y_n\}$ — сходящаяся, т.е. существует

$$\lim_{n\to\infty} y_n.$$

□

Следствие 0.1.19. *Последовательность*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Так как существуют

$$\lim_{n\to\infty} y_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1,$$

то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

$\square$

Определение 0.1.20. Предел последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

называется *числом e*

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Замечание 0.1.21. Число e играет очень большую роль в математике. Поэтому приведем некоторые его свойства, которые представляют собой либо известные факты, либо теоремы, либо задачи, которые рассматриваются на практике.

- Число e удовлетворяет неравенству

$$2 < e < 3.$$

- Число e — иррациональное:

$$e = 2,71828\ldots.$$

- Логарифм числа b по основанию e обозначается

$$\ln b$$

и называется натуральным логарифмом.

- Если последовательность $\{c_n\}$ задана формулой общего члена

$$c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} c_n = e.$$

При этом, если

$$r_n = e - c_n,$$

то имеет место неравенство

$$0 < r_n < \frac{1}{n \cdot n!}$$

0.1.5 Интерполяционная формула Герона

Теорема 0.1.22. *Пусть $a > 0$ — произвольное положительной число. Тогда последовательность $\{x_n\}$, заданная рекуррентно следующим образом:*

$$x_1 - \text{ произвольное положительное число},$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \geq 1,$$

сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

Доказательство. Легко видеть, что для любого натурального $n \in \mathbb{N}$

$$x_n > 0.$$

1). Докажем сначала, что при $n \geq 2$ выполняется неравенство

$$x_n \geq \sqrt{a}.$$

Действительно,

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} - \sqrt{a} =$$

$$= \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + (\sqrt{a})^2}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \geq 0.$$

2). Докажем теперь, что последовательность $\{x_n\}$, является невозрастающей при $n \geq 2$. Действительно,

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_n - \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0,$$

3). Последовательность $\{x_n\}$ невозрастает при $n \geq 2$ и ограничена снизу. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, она сходится. Допустим, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Так как $x_n \geq \sqrt{a}$ при $n \geq 2$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \geq \sqrt{a}.$$

Переходя к пределу в равенстве

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right).$$

Следовательно,

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow 2x^2 = x^2 + a \Rightarrow x^2 = a.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \sqrt{a}.$$

□

0.1.6 Лемма о вложенных промежутках (отрезках).

Теорема 0.1.23. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ две такие последовательности, что*

1). Последовательность $\{x_n\}$ — неубывающая;

2). Последовательность $\{y_n\}$ — невозрастающая;

3). Для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$x_n \leq y_n.$$

Тогда обе последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящимися и имеет место неравенство

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Последовательность $\{x_n\}$ —неубывает, последовательность $\{y_n\}$ — невозрастает, и

$$x_n \leq y_n.$$

Поэтому для любого натурального $n \in \mathbb{N}$

$$x_1 \leq x_n \leq y_n \leq y_1.$$

Следовательно, обе последовательности являются ограниченными. Тогда по теореме Вейерштрасса эти последовательности сходятся, т.е существуют

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Переходя к пределу в неравенстве

$$x_n \leq y_n,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \leq b = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

□

Замечание 0.1.24. Утверждение теоремы 0.1.23 остается справедливым и в случае, когда неравенство

$$x_n \leq y_n.$$

выполняется начиная с некоторого номера N.

Теорема 0.1.25. *Если к условиям теоремы 0.1.23 добавить условие*

4).

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0,$$

то имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из

$$0 = \lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n.$$

□

Напомним несколько определений.

Определение 0.1.26. Пусть a и b два числа, связанные неравенством

$$a \le b.$$

Отрезком (промежутком) с концами a и b называется множество точек

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \le x \le b\}.$$

Число $(b - a)$ называется *длиной* отрезка $[a, b]$.

Если $a = b$, то отрезок

$$[a, b] = [a, a]$$

называется *вырожденным.*

Определение 0.1.27. Говорят, что отрезок $[a_1, b_1]$ *вложен* в отрезок $[a, b]$, если

$$[a_1, b_1] \subset [a, b].$$

В этом случае

$$a \le a_1 < b_1 \le b.$$

Теорема 0.1.28. *(Лемма о вложенных промежутках.)*

1). Если $\{[a_n, b_n]\}$ — последовательность вложенных друг в друга отрезков:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

то пересечение этих отрезков не пусто:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \ne \emptyset.$$

2). Если кроме того

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

(такая последовательность отрезков называется стягивающейся в точку), то общая точка этих отрезков единственная.

Доказательство. 1). Если $\{[a_n, b_n]\}$ — последовательность вложенных друг в друга отрезков:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

то последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ концов этих отрезков удовлетворяют условиям теоремы 0.1.23. Поэтому эти последовательности сходятся и имеет место неравенство

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leq b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Следовательно,

$$[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

и потому

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

2). Если

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

то в силу теоремы 0.1.25,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

В этом случае отрезок $[a, b]$ вырождается в точку

$$a = b = c,$$

т.е. общая точка этих отрезков единственная:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

$\square$

0.2 Подпоследовательности и частичные пределы последовательности

0.2.1 Подпоследовательности

Определение 0.2.1. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность, а

$$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}: \ n_1 < n_2 < n_3 \ ... < n_k < ...$$

возрастающая (б.б.п.) последовательность натуральных чисел, то последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} \ , ...$$

называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. А этом случае пишут

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \ \text{ или } \ \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}.$$

Пример 0.2.2. Пусть задана последовательность $x_n = \dfrac{1}{n}$:

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, ...$$

Выберем $n_k = 2k$. Тогда

$$x_{n_k} = \frac{1}{2k}.$$

Следовательно, подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет вид:

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{6}, ...$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{6}, \ \frac{1}{4}, ...$$

не является подпоследовательностью.

Теорема 0.2.3. *Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

то любая ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ также сходится и

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для любого натурального $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство:

$$\mid x_n - a \mid < \varepsilon.$$

Пусть $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Поскольку последовательность $\{n_k\}$ возрастающая и б.б.п., то

$$n_k \to \infty.$$

Следовательно, по числу N_ε найдется такой номер K, что при $k \geqslant K$ выполняется неравенство

$$n_k \geqslant N_\varepsilon,$$

а значит, и неравенство

$$\mid x_{n_k} - a \mid < \varepsilon.$$

Но это и означает, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ — сходится и

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

□

Теорема 0.2.4. *Из каждой сходящейся последовательности можно выделить монотонную сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть x_n сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Пусть

$$E = \{x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n, \ldots\}$$

множество значений последовательности $\{x_n\}$.

Возможны следующие случаи:

1). Имеется бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, равных a. Пусть это члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

т.е.
$$x_{n_1} = a,\ x_{n_2} = a, \ldots, x_{n_k} = a, \ldots.$$
Тогда
$$\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$$
и конечно существует
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

2). В любой ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ существует бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющих неравенству
$$x_n < a,$$
т.е. существует бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющих неравенству
$$a - \varepsilon < x_n < a.$$
Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ множество
$$E \cap (a - \varepsilon, a)$$
бесконечно.

Начинаем процесс построения подпоследовательности $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Так как множество
$$E \cap (a - \varepsilon, a)$$
бесконечно, то можно выбрать элемент последовательности $\{x_n\}$ с номером n_1 такой, что
$$x_{n_1} \in E \cap (a - \varepsilon, a).$$
Пусть теперь $\varepsilon_1 = a - x_{n_1} > 0$. Так как множество
$$E \cap (x_{n_1}, a)$$
бесконечно, то можно выбрать элемент последовательности $\{x_n\}$ с номером $n_2 > n_1$ такой, что
$$x_{n_2} \in E \cap (x_{n_1}, a).$$
Полагаем теперь $\varepsilon_2 = a - x_{n_2} > 0$. Так как множество
$$E \cap (x_{n_2}, a)$$

бесконечно, то можно выбрать элемент последовательности $\{x_n\}$ с номером $n_3 > n_2 > n_1$ такой, что

$$x_{n_3} \in E \cap (x_{n_2}, a).$$

Продолжая процесс, мы построим возрастающую подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, которая сходится к a:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

3). В любой ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ существует бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющих неравенству

$$x_n > a,$$

т.е. существует бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющих неравенству

$$a < x_n < a + \varepsilon.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$E \cap (a, a + \varepsilon)$$

бесконечно. Рассуждая, как и в предыдущем случае, построим убывающую подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, которая сходится к a:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

□

Теорема 0.2.5. *Любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ является бесконечно большой последовательностью.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно большая:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда для любого $A > 0$ существует такой номер N_A, что для любого натурального $n \geqslant N_A$ выполняется неравенство:

$$| \, x_n \, | > A.$$

Пусть $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Поскольку последовательность $\{n_k\}$ возрастающая и б.б.п., то

$$n_k \longrightarrow \infty.$$

Следовательно, по числу N_ε найдется такой номер K, что при $k \geqslant K$ выполняется неравенство

$$n_k \geqslant N_\varepsilon,$$

а значит, и неравенство

$$| x_{n_k} |> A.$$

Но это и означает, что

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \infty.$$

□

Замечание 0.2.6. Из любой бесконечно большой последовательности можно выделить подпоследовательность, монотонно возрастающую к $+\infty$, или подпоследовательность, монотонно убывающую к $-\infty$.

0.2.2 Частичные пределы последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.

Определение 0.2.7. Число a (или символы $\pm\infty$) называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, если в ней есть подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, сходящаяся к этому числу, т.е. такая, что

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a \quad (\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = +\infty \ \text{ или } \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = -\infty)$$

Пример 0.2.8. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ с общим членом

$$x_n = (-1)^n.$$

Частичными пределами этой последовательности являются числа 1 и -1. Действительно, если $n_k = 2k$, то

$$x_{n_k} = x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$$

и потому

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1.$$

С другой стороны, если $n_k = 2k-1$, то

$$x_{n_k} = x_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1$$

и потому

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = -1.$$

Других частичных пределов эта последовательность не имеет.

Замечание 0.2.9. Если $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то a — единственный ее частичный предел. Если же $\{x_n\}$ последовательность расходится, то у нее частичных пределов не менее двух.

Определение 0.2.10. Наибольший из частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ называется верхним пределом этой последовательности и обозначается:

$$\overline{x} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Наименьший из частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ называется нижним пределом этой последовательности и обозначается:

$$\underline{x} = \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

Замечание 0.2.11. Ясно, что если $\{x_n\}$ ограничена, то $\overline{x}$ и $\underline{x}$ существуют и конечны. Если же $\{x_n\}$ неограничена, то $\overline{x}$ и $\underline{x}$ могут быть равны $\pm\infty$.

Примеры 0.2.12. 1^0. Рассмотрим последовательность

$$x_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Как уже отмечалось в примере 0.2.8, частичными пределами этой последовательности являются числа 1 и -1. Поэтому верхний предел этой последовательности равен

$$\overline{x} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1,$$

а а нижний предел равен

$$\underline{x} = \varliminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

2^0. Рассмотрим последовательность

$$x_n = n^{(-1)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

При $n_k = 2k$ имеем:

$$x_{n_k} = x_{2k} = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k$$

и потому

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (2k) = +\infty.$$

С другой стороны, если $n_k = 2k - 1$, то

$$x_{n_k} = x_{2k-1} = (2k-1)^{(-1)^{2k-1}} = \frac{1}{2k-1}$$

и потому

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k-1} = 0.$$

Поэтому эта последовательность имеет верхний предел, равный

$$\overline{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty,$$

и нижний предел, равный

$$\underline{x} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0.$$

3^0. Последовательность

$$x_n = n, n \in \mathbb{N}$$

имеет один предел, равный $+\infty$. Поэтому

$$\overline{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty, \ \underline{x} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

4^0. Последовательность

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \ n \in \mathbb{N}$$

имеет один предел, равный 0. Поэтому

$$\overline{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0, \ \underline{x} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0.$$

5^0. Последовательность

$$x_n = -n^2, n \in \mathbb{N}$$

имеет один предел, равный $-\infty$. Поэтому

$$\overline{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty, \underline{x} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

6^0. Рассмотрим последовательность

$$x_n = (-1)^n n,\ n \in \mathbb{N}.$$

При $n_k = 2k$ имеем:

$$x_{n_k} = x_{2k} = (-1)^{2k}(2k) = 2k$$

и потому

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty}(2k) = +\infty.$$

С другой стороны, если $n_k = 2k - 1$, то

$$x_{n_k} = x_{2k-1} = (-1)^{2k-1}(2k-1) = -2k - 1$$

и потому

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty}[-(2k-1)] = -\infty.$$

Поэтому эта последовательность имеет верхний предел, равный

$$\overline{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$$

и нижний предел, равный

$$\underline{x} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

0.3 Лекция №6. Необходимые и достаточные условия сходимости последовательности.

0.3.1 Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Как уже отмечалось, если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена. Однако существую ограниченные последовательности, которые не являются сходящимися. В то же время имеет место очень важная для приложений теорема.

Теорема 0.3.1. *(Теорема Больцано-Вейерштрасса.) Из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Рассмотрим множество ее значений

$$E = \{x_1,\ x_2,\ \dots x_n,\ \dots\}$$

Возможны следующие случаи.

1). Множество E — конечное, т.е. состоит из конечного числа точек

$$E = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots \lambda_m\}.$$

Так как последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечная, то хотя бы одно из этих значений λ_{i_0} она принимает бесконечное число раз. Допустим, что

$$x_{n_1} = \lambda_{i_0},\ x_{n_2} = \lambda_{i_0},\ x_{n_3} = \lambda_{i_0}, \dots,$$

где

$$n_1 < n_2 < n_3 \dots .$$

Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — стационарная. Поэтому она сходится и

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lambda_{i_0}.$$

2). Множество E — бесконечное.

2.1). Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существует такой отрезок $[a, b]$, что для любого натурального $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in [a, b].$$

Рассмотрим середину отрезка $[a, b]$:

$$d = \frac{a+b}{2}.$$

Хотя бы на одной из половин $[a, d]$ или $[d, b]$ лежит бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$.

Обозначим

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [a, d], & \text{если множество } \ E \cap [a, d] - \text{ бесконечно,} \\ [d, b], & \text{если множество } \ E \cap [a, d] - \text{ конечно.} \end{cases}$$

Тогда

$$[a, b] \supset [a_1, b_1]$$

и

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

2.2). На отрезке $[a_1, b_1]$ лежит бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$.

Рассмотрим середину отрезка $[a_1, b_1]$:

$$d_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Хотя бы на одной из половин $[a_1, d_1]$ или $[d_1, b_1]$ лежит бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$.

Обозначим

$$[a_2, b_2] = \begin{cases} [a_1, d_1], & \text{если множество } \ E \cap [a_1, d_1] - \text{ бесконечно,} \\ [d_1, b_1], & \text{если множество } \ E \cap [a_1, d_1] - \text{ конечно.} \end{cases}$$

Тогда

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$$

и

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

2.3). Продолжая процесс, мы получим последовательность $\{[a_n, b_n]\}$ вложенных друг в друга отрезков, такую, что

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \ldots,$$

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n} \to 0,$$

и на каждом из которых лежит бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$.

По лемме о вложенных промежутках (теорема 0.1.28), существует единственная общая точка c этих отрезков

$$\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

2.4). Построим теперь подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ такую, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

Так как множество $E \cap [a_1, b_1]$ — бесконечно, то существует такой номер n_1, что

$$x_{n_1} \in [a_1, b_1].$$

Так как множество $E \cap [a_2, b_2]$ — бесконечно, то существует такой номер $n_2 > n_1$, что

$$x_{n_2} \in [a_2, b_2].$$

И так далее.

Так как множество $E \cap [a_k, b_k]$ — бесконечно, то существует такой номер $n_k > n_{k-1}$, что

$$x_{n_k} \in [a_k, b_k].$$

Продолжая процесс, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k.$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty} a_k = c = \lim_{k\to\infty} b_k,$$

то подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится и

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

$\square$

Аналогичный факт имеет место для неограниченных последовательностей.

Теорема 0.3.2. *Из любой неограниченной последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *можно выделить бесконечно большую подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

0.3.2 Необходимые и достаточные условия сходимости ограниченной последовательности.

Следующая теорема связывает понятия частичных пределов и сходимости ограниченной последовательности.

Теорема 0.3.3. *Для того, чтобы ограниченная последовательность* $\{x_n\}$ *была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы ее верхний и нижний пределы совпадали:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{x} = \underline{x} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Доказательство. **Необходимость.** Если ограниченная последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она имеет единственный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{x} = a = \underline{x} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{x} = a = \underline{x} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Покажем, что

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Допустим, что это не так. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что вне интервала

$$(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$$

содержится бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существую такие m и M, что

$$x_n \in [m, M]$$

для любого натурального $n \in \mathbb{N}$.

Пусть

$$E = \{x_1,\ x_2, \ldots\}$$

Множество значений последовательности $\{x_n\}$.

В силу нашего предположения, либо

$$E \cap [m, a - \varepsilon_0],$$

либо

$$E \cap [a + \varepsilon, M]$$

содержат бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$.

Без ограничения общности, считаем, что

$$E \cap [m, a - \varepsilon_0]$$

бесконечно.

Тогда существует подпоследовательность

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$x_{n_k} \in [m, a - \varepsilon_0]$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Итак, подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — ограничена. Следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$:

$$\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty} \subset \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty},$$

и

$$\lim_{l \to \infty} x_{n_{k_l}} = c \in [m, a - \varepsilon_0].$$

Но тогда c — частичный предел последовательности $\{x_n\}$ такой, что

$$c \le a - \varepsilon_0 < a = \underline{x}.$$

что невозможно, так как $\underline{x}$ — наименьший из всех возможных частичных пределов.

Получили противоречие.

Предположение о бесконечности

$$E \cap [a + \varepsilon, M]$$

аналогично приводит к противоречию.

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится и

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

□

0.3.3 Фундаментальные последовательности.

Определение 0.3.4. Последовательность $\{x_n\}$ называют *фундаментальной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N_\varepsilon$, что для любого натурального $n \geq N_\varepsilon$ и любого натурального $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Это понятие можно было сформулировать эквивалентным образом, положив

$$n + p = m.$$

Определение 0.3.5. Последовательность $\{x_n\}$ называют *фундаментальной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N_\varepsilon$, что для любых натуральных $n \geq N_\varepsilon$ и $m \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Отметим важное свойство фундаментальной последовательности.

Теорема 0.3.6. *Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N_\varepsilon$, что для любого $n \geq N$ элементы последовательности $\{x_n\}$ находятся в интервале*

$$(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon).$$

Доказательство. Так как $\{x_n\}$ фундаментальна, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N_\varepsilon$, что для любых натуральных $n \geq N$ и $m \geq N$ выполняется неравенство

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Положим $m = N$.

Тогда для любого натурального $n \geq N$ выполняется неравенство

$$|x_N - x_n| = |x_n - x_N| < \varepsilon.$$

Следовательно

$$-\varepsilon < x_n - x_N < \varepsilon \Rightarrow x_N - \varepsilon < x_n < x_N + \varepsilon.$$

Это означает, что для любого $n \geq N$ элементы последовательности $\{x_n\}$ находятся в интервале

$$(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon).$$

$\square$

Следствие 0.3.7. *Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то она ограничена.*

Доказательство. Действительно, если последовательность фундаментальна, то по предыдущей теореме, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N_\varepsilon$, что для любого $n \geq N$ элементы последовательности $\{x_n\}$ находятся в интервале

$$(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon).$$

Пусть, например, $\varepsilon = 1$. Тогда существует такой номер $N = N_1$, что для любого $n \geq N$ элементы последовательности $\{x_n\}$ находятся в интервале

$$(x_N - 1, x_{N_1} + 1).$$

Обозначим

$$m = \min\{x_1,\ x_2 \dots x_{N-1},\ x_N - 1\}$$

и

$$M = \max\{x_1,\ x_2 \dots x_{N-1},\ x_N + 1\}.$$

Тогда для любого натурального $n \in \mathbb{N}$

$$m \leq x_n \leq M,$$

то есть, последовательность $\{x_n\}$ ограничена. □

0.3.4 Критерий Коши сходимости последовательности.

Теорема 0.3.8. *(Критерий Коши). Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $\{x_n\}$ имеет конечный предел, равный a. По определению предела, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N_\varepsilon$, что для любого натурального $p \geq N$ выполняется неравенство

$$|x_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть сначала $p = n \geq N$. Тогда

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь $p = m \geq N$, то
$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Следовательно, для $n, m \geq N$ имеем:
$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет конечный предел.

Так как фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, то по теореме Больцано-Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность
$$\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$$
Пусть предел этой подпоследовательности равен a:
$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a.$$

Покажем, что число a является пределом и последовательности $\{x_n\}$, т.е. что
$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$
Так как последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N_\varepsilon$, что для любых натуральных $n \geq N_\varepsilon$ и $m \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство
$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
С другой стороны, так как последовательность n_k возрастающая и б.б.п., то существует такой номер K, что для любого натурального $k \geq K$ выполняется неравенство
$$n_k \geq N_\varepsilon.$$
Поэтому для любых натуральных $n \geq N_\varepsilon$ и $k \geq K$ выполняется неравенство
$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим:
$$|x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, мы для каждого $\varepsilon > 0$ нашли такой номер $N = N_\varepsilon$, что для любых натуральных $n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

то есть получили, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

□

Замечание 0.3.9. Последовательность $\{x_n\}$ является расходящейся тогда и только тогда, когда она не является фундаментальной, т.е когда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого номера N существуют натуральные числа $n_0 \geq N$ и $m_0 \geq N$ такие, что выполняется неравенство

$$|x_{m_0} - x_{n_0}| \geq \varepsilon_0.$$

Пример 0.3.10. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, заданная формулой общего члена

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

расходится.

Последовательность $\{x_n\}$ расходится, если не выполняется условие Коши, то есть когда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого номера N существуют натуральные числа $n_0 \geq N$ и $m_0 \geq N$ такие, что выполняется неравенство

$$|x_{m_0} - x_{n_0}| \geq \varepsilon_0.$$

Рассмотрим

$$x_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Пусть задано любое $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$m_0 = 2k,\ n_0 = k.$$

Тогда

$$|x_{m_0} - x_{n_0}| = x_{2k} - x_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, при $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ для любого $k \in \mathbb{N}$

$$|x_{2k} - x_k| = x_{2k} - x_k \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ расходится.