1. Предел числовой последовательности

1.1. Определение числовой последовательности.Способы задания

Определение 1.1. Если каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность*

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ x_n\ \ldots\ .$$

Итак, числовая последовательность - это функция

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ где } f(n) = x_n.$$

Последовательность обозначается символически

$$\{x_n\},\ (x_n),\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ (x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Определение 1.2. Совокупность чисел $\{x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ x_n\ \ldots\}$ *называется множеством значений числовой последовательности.*
Замечание. Это множество может быть как конечным, так и бесконечным, в то время как число элементов последовательности всегда бесконечно.

Пример 1.
1^0. Рассмотрим последовательность с элементами вида $x_n = (-1)^n$. Множество значений этой последовательности состоит из двух чисел: $\{-1, 1\}$.

2^0. Рассмотрим последовательность с элементами вида $x_n = n^3$. Множество значений этой последовательности бесконечно.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1^0. Аналитический (формулой общего члена):

$$x_n = f(n).$$

2^0. Рекуррентно (арифметические или геометрические прогрессии).
3^0. Графически, точками x_n на прямой $\mathbb{R}$ или на плоскости: (n, x_n).

Определение 1.3. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ две последовательности. Суммой этих последовательностей называется последовательность $\{x_n + y_n\}$, такая что:

$$\{x_n + y_n\} = \{x_n\} + \{y_n\}.$$

Произведением двух последовательностей называется последовательность, образованная по закону:

$$\{x_n \cdot y_n\} = \{x_n\} \cdot \{y_n\}.$$

Произведением числа λ на последовательность $\{x_n\}$ называется последовательность:

$$\{\lambda x_n\} = \lambda\{x_n\}.$$

Если $y_n \neq 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$ можно определить отношение последовательностей:

$$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}.$$

1.2. Предел числовой последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности

Определение 1.4. Число a называется *пределом* числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдётся такой номер N_ε, что для всех $n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

Пишут: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Определение 1.5. Последовательность $\{x_n\}$, имеющая предел называется *сходящейся*. Последовательность не являющаяся сходящейся называется *расходящейся*.

Замечание 1.1.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - a) = 0.$$

Определение 1.6. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой (б.м.п.), если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Замечание 1.2. $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой последовательностью, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ такой, что $\forall n \geq N_\varepsilon\ |\alpha_n| < \varepsilon$.

Замечание 1.3. Если $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, то последовательность $\{x_n\}$ можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность.

Замечание 1.4. Определение предела последовательности можно сформулировать эквивалентным образом на языке ε-окрестностей, а именно:

Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$, что $\forall n \geq N_\varepsilon$ все элементы x_n лежат в ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a:

$$x_n = U_\varepsilon(a).$$

Вне этой окрестности может находиться лишь конечное число элементов последовательности: $x_2,\ x_2,\ \ldots\ x_{N_\varepsilon - 1}$.

Пример 2.

1^0. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер N_ε, начиная с которого элементы последовательности $x_n = \dfrac{1}{n}$ попадают в $U_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$; то есть для которых выполнено неравенство:

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Решая это неравенство, получим: $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Поэтому в качестве N_ε можно брать $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Например, если $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, то $N_\varepsilon = 11$ и для любого $n \geq 11$

$$x_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{10}.$$

Если же $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$, то $N_\varepsilon = 101$.
Итак, N_ε зависит от ε.

2^0. Покажем, что последовательность

$$x_n = \frac{(-1)^n + 1}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетное} \\ 1, & \text{если } n \text{ четное} \end{cases}$$

Рассмотрим $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$ и окрестности $U_{1/3}(0)$ и $U_{1/3}(1)$. Они не пересекаются.

В каждой из этих окрестностей лежат члены последовательности $\{x_n\}$ со сколь угодно большими номерами. Следовательно, нельзя указать ни одну точку $a \in \mathbb{R}$, в окрестности которой лежали бы все элементы x_n, начиная с некоторого номера $N_{1/3}$.

1.3. Свойства сходящихся последовательностей.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЕДЕЛА ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

Теорема 1.1. *Числовая последовательность может иметь только один предел.*

Доказательство

Предположим, что $\{x_n\}$ имеет два различных предела a и b:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \ \lim_{n\to\infty} x_n = b, \text{ и } a \neq b.$$

Для определенности считаем $a < b$.
Рассмотрим $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$. Тогда $U_\varepsilon(a) \bigcap U_\varepsilon(b) = \varnothing$.

$$\lim_{n\to\infty} = a \ \Rightarrow \ \exists N(\varepsilon)_1 = N_1, \text{ что } \forall n \geq N_1 \ x_n \in U_\varepsilon(a)$$
$$\lim_{n\to\infty} = b \ \Rightarrow \ \exists N(\varepsilon)_2 = N_2, \text{ что } \forall n \geq N_2 \ x_n \in U_\varepsilon(b)$$

$$\text{Пусть } N = \max(N_1, N_2)$$

Тогда $\forall n \geq N$ одновременно $x_n \in U_\varepsilon(a)$ и $x_n \in U_\varepsilon(b)$, что невозможно, так как эти окрестности не пересекаются.

Следовательно наше предположение не верно и $a = b$.

Теорема доказана.

1.3.2. Ограниченные и неограниченные последовательности.

Пусть $\{x_n\}$ - некоторая последовательность и E - множество её значений.

Ограниченность сверху, снизу или просто ограниченность последовательности $\{x_n\}$ определяется через ограниченность сверху, снизу или просто ограниченность множества E.

Определение 1.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое M, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n \leq M \ \ (E \subset (-\infty, \ M]).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое m, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n \geq m \ \ (E \subset [m, \ +\infty)).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу:

$$x_n \in [m, \ M] \ \ E \subset [m, \ M].$$

Замечание 1.5. Последовательность x_n ограничена тогда и только тогда, когда существует такое положительное число A, что $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n| \leq A.$$

Определение 1.8. Последовательность x_n называется *неограниченной*, если для любого положительного A существует такое n_A, что $|n_A| > A$.

Теорема 1.2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Тогда, для $\varepsilon = 1$ существует номер N такой, что $\forall n \geq N \ \ |x_n - a| < 1$. Следовательно

$$\forall n \geq N$$
$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Положим A=$\max\{1 + |a|, \ |x_1|, \ |x_2|, \ldots \ |x_{N-1}|\}$, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leq A.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Теорема доказана.

Замечание. Обратное утверждение неверно.

Пример 3. Пусть последовательность задана по закону: $x_n = (-1)^n + 1$. Множество значений последовательности состоит из двух чисел: $E = \{0,\ 2\}$. Однако, последовательность $\{x_n\}$ расходится.

Лемма. *Если последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, то найдётся номер N такой, что $\forall n \geq N \ \ y_n \neq 0$ и тем самым определяется последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$, которая является ограниченной.*

Доказательство

Пусть $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то найдётся номер N такой, что для всех $n \geq N$

$$|y_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Но

$$|b - y_n| = |y_n - b| \geq |b| - |y_n|.$$

Следовательно

$$|b| - |y_n| < \frac{|b|}{2}.$$

Отсюда

$$|y_n| > \frac{|b|}{2} > 0 \ \ \forall n \geq N.$$

Но тогда

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Таким образом последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ ограничена при $n \geq N$.

Лемма доказана.

1.3.3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Как мы уже отмечали, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. то последовательность x_n представима в виде:

$$x_n = \alpha + \alpha_n,$$

где a_n бесконечно малая последовательность. Поэтому бесконечно малые последовательности играют в теории последовательностей особую роль. В этом пункте мы рассмотрим основные свойства таких последовательностей.

Сформулируем еще раз определение бесконечно малой последовательности.

Определение 1.9. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой последовательностью, если

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \mid \alpha_n \mid < \varepsilon$$

или эквивалентно, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Бесконечно малых последовательностей достаточно много.

Пример 4. Если $x_n = q^n$, $\mid q \mid < 1$, то x_n бесконечно малая последовательность. Действительно, так как $\mid q \mid < 1$, то возможны два случая:

1) $q = 0$ и тогда x_n очевидно бесконечно малая

2) $q \neq 0$ и тогда $1/ \mid q \mid = 1 + \delta$, где $\delta > 0$. Отсюда

$$\frac{1}{\mid q^n \mid} = \frac{1}{\mid q \mid^n} = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta > n\delta$$

Следовательно

$$\mid q^n \mid < \frac{1}{n\delta}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем номер N_ε такой, что при $n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство:

$$\frac{1}{n\delta} < \varepsilon$$

.

Так как это неравенство равносильно следующему:

$$n > \frac{1}{\varepsilon\delta}$$

то в качестве номера N_ε можно взять

$$N_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon\delta}] + 1$$

Тогда при $n \geq N_\varepsilon$

$$\mid q^n \mid = \mid q \mid^n \leq \mid q \mid^{N_\varepsilon} < \frac{1}{\delta N} < \varepsilon$$

то есть последовательность q^n бесконечно малая.

Заметим, что если α_n бесконечно малая последовательность, то она сходится ($\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$) , потому что бесконечно малая последовательность ограничена (Свойство 1^0)

Теорема 1.3. Если α_n и β_n б.м.п то их сумма $\{\alpha_n + \beta_n\ \}$ тоже б.м.п

Доказательство.

Так как $\{\alpha_n\}$ б.м.п то $\forall\varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1$

$$\mid \alpha_n \mid < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Так как $\{\beta_n\}$ б.м.п то для того же $\forall\varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2$

$$\mid \beta_n \mid < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geq N$ оба неравенства (1) и (2) выполнены. Следовательно $\forall n \geq N$

$$\mid \alpha_n + \beta_n \mid \leq \mid \alpha_n \mid + \mid \beta_n \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = \{\alpha_m + \beta_n\}$ б.м.п.

Теорема доказана.

Теорема 1.4. Если α_n и β_n б.м.п то их разность $\{\alpha_n - \beta_n\ \}$ тоже б.м.п

Доказательство повторяет доказательство предыдущей теоремы.

Следствие 1.1. Алгебраическая сумма любого конечного числа б.м.п является б.м.п (Свойство 2).
Таким образом, если $\{\alpha_n^{(1)}\}$ . . . . . $\{\alpha_n^{(k)}\}$ б.м.п и $\delta_k = \pm 1$ то $\{\delta_1\alpha_n^{(1)} + \delta_2\alpha_n^{(2)} + ... + \delta_k\alpha_n^{(k)}\}$ тоже б.м.п.

Теорема 1.5. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство.

Пусть $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность, а $\{\alpha_n\}$ - б.м.п.
Тогда существует такое число A>0 что для любого натурального n

$$| x_n |< A$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{A}$ и по нему найдем такой номер N, что $\forall n \geq N$

$$| \alpha_n |< \varepsilon_1$$

Тогда $\forall n \geq N$

$$A \mid \alpha_n |< \varepsilon$$

.

Поэтому $\forall n \geq N$

$$| x_n\alpha_n |=| x_n || \alpha_n |< A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

То есть $\{x_n\alpha_n\}$ - б.м.п.

Теорема доказана.

Следствие 1.2. Произведение любого конечного числа б.м.п. является б.м.п. (Свойство 3^0)

Частное двух бесконечно малых последовательностей может быть какой годно последовательностью и даже может быть неопределено.

Теорема 1.6. Если все элементы б.м.п. $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу C, то $C = 0$ (Свойство 4^0)

Доказательство.

Допустим, что $C \neq 0$. Положим $\varepsilon = \frac{|C|}{2}$. Тогда существует N: что $\forall n \geq N$

$$| \alpha_n |< \varepsilon$$

.

то есть

$$| C |< \frac{| C |}{2}.$$

откуда мы получаем неверное неравенство $1 < \frac{1}{2}$
Полученное противоречие показывает, что $C = 0$.

Теорема доказана.

Определение 1.10. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой последовательностью, если $\forall A > 0 \exists N_A$, что $n \geq N_A$

$$| x_n |> A.$$

Замечание 1.6. Если $\{x_n\}$ - б.б.п. то она неограничена. Однако не всякая неограниченная последовательность является б.б.п.

Пример 5.

$$x_n = \{n, n - \textit{нечетное}\}$$

Пример 6. Если $x_n = q^n$, $| q |< 1$, то $\{x_n\}$ - б.б.п.

Теорема 1.7. Если $\{x_n\}$ - б.б.п., то начиная с некоторого номера определена последовательность $\{\frac{1}{x_n}\}$ которая является б.м.п.

Если все элементы б.м.п. $\{\alpha_n\}$ отличны от нуля, то последовательность $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ бесконечно большая.

Доказательство.

1. Заметим, что если $\{x_n\}$ - б.б.п., то лишь конечное число ее элементов может быть равно нулю.
Действительно, пусть $A > 0$, тогда существует N_1, что что $n \geq N_1$

$$x_n > A.$$

то есть

$$x_n \neq 0 при, n \geq N_1$$

Тогда для $n \geq N_1$ определена последовательность $\{\frac{1}{x_n}\}$

$$\alpha_n = \frac{1}{x_n + N_1 - 1}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует $N_\varepsilon \geq N_1$ такой, что при $n \geq N_\varepsilon$

$$\mid x_n \mid > \frac{1}{\varepsilon}$$

.
Следовательно

$$\mid \frac{1}{x_n} \mid < \varepsilon.$$

то есть $\{\alpha_n\} < \varepsilon$. Следовательно $\{\alpha_n\}$ - б.м.п.
2. Пусть $\{\alpha_n\}$ - б.м.п. $\alpha_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.
Рассмотрим $A > 0$ и $\varepsilon = \frac{1}{A}$. Так как $\{\alpha_n\}$ - б.м.п. то существует $N : \forall n \geq N$

$$\mid \alpha_n \mid < \varepsilon = \frac{1}{A}.$$

и последовательность $\{\frac{1}{\alpha_n}\} - б.б.п.$

Теорема доказана.

1.3.4. Арифметические свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 1.8. Сумма сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, причем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство.

Так как $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся, то существуют α, b, α_n, β_n, такие. что

$$x_n = \alpha + \alpha_n$$

$$y_n = b + \beta_n$$

($\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности.)
Следовательно

$$x_n + y_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

но последовательности $\{\alpha_n + \beta_n\}$ - бесконечно малая. Следовательно последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.9. Разность сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, причем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 1.10. Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, причем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n$$

где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности.
Следовательно

$$x_n y_n = (\alpha + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n \alpha + \alpha_n \beta_n)$$

.

Но $(\alpha_n b + \beta_n \alpha + \alpha_n \beta_n)$ - бесконечно малая последовательность. Следовательно последовательность $\{x_n y_n\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема доказана.

Замечание 1.7. Очевидно, что если $\{x_n\}$ - стационарная, начиная с некоторого номера последовательность (то есть существует номер N: $\forall n \geq N$, $x_n = c$), то $\{x_n\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c$$

.

Следствие 1.3. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то $\forall c$ последовательность $\{cx_n\}$ также сходится и

$$\lim_{n\to\infty} (cx_n) = c \lim_{n\to\infty} x_n$$

.

Теорема 1.11. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - две сходящиеся последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, то начиная с некоторого номера определена последовательность $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ которая является сходящейся причем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

Доказательство.

Пусть $\forall n \geqslant N$ определена последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$. Следовательно $\forall n \geqslant N$ определена последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

Так как существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Тогда

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - y_n a}{b y_n} = \frac{(a+\alpha_n)b - (b+\beta_n)a}{b y_n} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Последовательность $\{\beta_n\} = \dfrac{1}{\beta_n}\left\{\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right\}$ является бесконечно малой, следовательно $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b} + \beta_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Таким образом, существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

Теорема доказана.

1.3.5. Свойства сходящихся последовательностей,связанные с неравенствами

Теорема 1.12. Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ таковы, что

$$1.)\ \ x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$2.)\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

то $\{y_n\}$ тоже сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Доказательство.

Пусть N – номер такой, что для всех номеров n , начиная с него выполняется неравенство

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

Тогда

$$x_n - a \leqslant y_n - a \leqslant z_n - a \quad \forall n \geqslant N.$$

Следовательно
$$| y_n - a | \leqslant \max\{| x_n - a |, | z_n - a |\}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_1$ и N_2 такие, что

$$\forall n \geqslant N_1 \quad | x_n - a | < \varepsilon$$

$$\forall n \geqslant N_2 \quad | z_n - a | < \varepsilon$$

Тогда для всех $n :\ n \geqslant \max\{N_1, N_2, N\}$ выполняется неравенство

$$| y_n - a | < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{y_n - a\}$ — бесконечно малая. Следовательно последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Теорема доказана.

Теорема 1.13. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и

$$a < b,$$

то $\exists N$ такое, что $\forall n \geqslant N$ выполняется неравенство:

$$x_n < y_n.$$

Следствие 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a < b$, то $\exists N$ такой, что $\forall n \geqslant N$ выполнено неравенство:
$$x_n < b$$

Следствие 1.4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $b > a$, то $\exists N$ такой, что $\forall n \geqslant N$ выполнено неравенство:
$$y_n > a$$

Следствие 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_n \geqslant y_n,$$

то

$$a \geqslant b.$$

Следствие 1.5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и

$$m \leqslant x_n \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

то

$$m \leqslant a \leqslant M$$

Следствие 5.

1) Если $x_n > b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $a \geqslant b$.
2) Если $x_n \geqslant b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $a \geqslant b$.
3) Если $x_n < b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $a \leqslant b$.
4) Если $x_n \leqslant b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $a \leqslant b$.

1.4. Последовательность и частный предел последовательности

1.4.1. Подпоследовательности

Определение 1.11. Если $\{x_n\}$ — некоторая последовательность, а $\{n_k\}$: $n_1 < n_2 < n_3 \ldots < n_k < \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}$, ... называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{n_k}\}$ (или $y_k = x_{n_k}$).

Пример 7. Пусть $x_n = \dfrac{1}{n} \colon 1 \colon \dfrac{1}{2} \colon \dfrac{1}{3} \colon \dfrac{1}{4}, \ldots$ — последовательность. Выберем $n_k = 2k$. Тогда $x_{n_k} = \dfrac{1}{2k}$. Следовательно подпоследовательность имеет вид: $\dfrac{1}{2} \colon \dfrac{1}{6} \colon \dfrac{1}{4} \colon, \ldots$

Заметим, что $\dfrac{1}{2} \colon \dfrac{1}{6} \colon \dfrac{1}{4} \colon, \ldots$ не является подпоследовательностью.

Теорема 1.14. Если $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то любая ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ также сходится и $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Доказательство.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n(\varepsilon)$ такое что $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется неравенство:

$$| x_n - a | < \varepsilon,$$

поскольку $\{n_k\}$ возрастающая и, значит, $n_k \longrightarrow \infty$, то найдется такой номер L, что при $k \geqslant L$

$$n_k \geqslant N.$$

Следовательно $\mid x_{n_k} - a \mid < \varepsilon$.

Но это и означает, что $\lim\limits_{n_k \to \infty} x_{n_k} = a$.

Теорема доказана.

Замечание. Часто вместо $n_k \longrightarrow \infty$ пишут $k \longrightarrow \infty$.

Аналогично может быть доказана теорема 2:

Теорема 1.15. Каждая подпоследовательность бесконечно большой последовательности является бесконечно большой последовательностью.

1.4.2. Частичный предел последовательности. Верхний и нижний предел.

Определение 1.12. Число a (или символы $\pm\infty$) называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ если в ней есть подпоследовательность, сходящаяся к этому числу.

Пример 8. Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$. Частичными пределами этой последовательности являются числа 1 и -1.

Замечание. Если $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то a — единственный ее частичный предел. Если же $\{x_n\}$ последовательность расходится, то у нее частичных пределов не менее двух.

Определение 1.13. Наибольший из частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ называется верхним пределом этой последовательности и обозначается:

$$\overline{x} = \overline{\lim_{n \to \infty}} x_n.$$

Наименьший из частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ называетс нижним пределом этой последовательности и обозначается:

$$\underline{x} = \underline{\lim}_{n \to \infty} x_n.$$

Ясно, что если $\{x_n\}$ ограничена, то $\overline{x}$ и $\underline{x}$ существуют и конечны. Если же $\{x_n\}$ неограничена, то $\overline{x}$ и $\underline{x}$ могут быть равны $\pm\infty$.

Пример 9.

1^0. Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$. Верхний предел этой последовательности равен $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, а нижний предел $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

2^0. Последовательность $x_n = n^{(-1)^n},\ n \in \mathbb{N}$ имеет верхний предел, равный $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и нижний предел, равный $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

3^0. Последовательность $x_n = n,\ n \in \mathbb{N}$ имеет один предел, равный $+\infty$: $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

4^0. Последовательность $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}$ имеет один предел, равный 0: $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

5^0. Последовательность $x_n = -n^2,\ n \in \mathbb{N}$ имеет один предел, равный $-\infty$: $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

6^0. Последовательность $x_n = (-1)^n n,\ n \in \mathbb{N}$ имеет верхний предел, равный $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и нижний предел, равный $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

1.5. Монотонные последовательности

1.5.1. Определение монотонных последовательностей. Примеры.

Определение 1.14. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_n \leqslant x_{n+1}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *невозрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_n \geqslant x_{n+1}.$$

Невозрастающие и неубывающие последовательности называются монотонными.

Определение 1.15. Если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$, то последовательность называется *возрастающей* (или строго возрастающей).

Если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n > x_{n+1}$, то последовательность называется *убывающей* (или строго убывающей).

Убывающие и возрастающие последовательности называются строго монотонными.

Замечание 1.8. Монотонные последовательности ограничены либо сверху, либо снизу. А именно:

неубывающая последовательность ограничена снизу;

невозрастающая последовательность ограничена сверху.

Поэтому неубывающая последовательность ограничена, если она ограничена сверху, а невозрастающая последовательность ограничена, если она ограничена снизу.

Пример 10. 1). $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, ...$ — ограниченная невозрастающая последовательность.

2). $1, 1, 2, 2, ...$ — монотонная, неубывающая, ограниченная только снизу последовательность.

3). $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ... \frac{n-1}{n},$ — возрастающая, ограниченная с обеих сторон последовательность.

Замечание 1.9. Из каждой сходящейся последовательности можно выделить монотонную сходящуюся подпоследовательность.

Пусть x_n сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Имеют место три случая:

1). Имеется бесконечное число членов последовательности, равных a.

2). В любой ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ найдется бесконечное число элементов, удовлетворяющих неравенству $x_n < a$.

3). В любой ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ найдется бесконечное число элементов, удовлетворяющих неравенству $x_n > a$.

1.6. Необходимые и достаточные условия сходимости последовательности.

Первая теорема этого пункта связывает понятие частичных пределов в понятием сходимости последовательности.

Теорема 1.16. *Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и чтобы ее верхний и нижний пределы совпадали:*

$$\overline{x} = \underline{x}.$$

Доказательство

Необходимость. Пусть $\{x_n\}$ сходится, тогда $\{x_n\}$ ограничена и $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ - единственный предел $\{x_n\}$. Следовательно,

$$a = \overline{x}, \quad a = \underline{x},$$

то есть
$$\overline{x} = \underline{x}.$$

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ ограничена и $a = \overline{x} = \underline{x}$.

Покажем, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Допустим, что это не так.

Тогда $\exists \ \ \varepsilon > 0$, что вне интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ содержится бесконечное число членов последовательности. Следовательно, в $[m, a-\varepsilon]$ или $[a+\varepsilon, M]$ (m и M - наибольшее и наименьшее значения ограничивающие последовательность) содержится бесконечное число членов последовательности.

Следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса, в каждом из указанных интервалов:
$$\exists x_{n_k} \to x_0 \in [m, a-\varepsilon]([a+\varepsilon, M]).$$

Следовательно, либо
$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{n_k} < \underline{x},$$

либо
$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{n_k} > \overline{x}.$$

Но $\underline{x}$ и $\overline{x}$ наименьший и наибольший из всех возможных частичных пределов. Таким образом получено противоречие.

Теорема доказана.

1.6.1. Фундаментальная последовательность.

Определение 1.16. Последовательность $\{x_n\}$ называют *фундаментальной*, если она удовлетворяет следующему условию: для каждого $\varepsilon > 0 \ \ \exists N$, что $\forall n \geq N$ и $\forall p \in \mathbb{N}:$
$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Это понятие можно было сформулировать эквивалентным образом, положив $n + p = m$.

Определение 1.17. Последовательность $\{x_n\}$ называют *фундаментальной*, если для каждого $\varepsilon > 0 \ \ \exists N$, что $\forall n \geq N$ и $\forall m \geq N:$
$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Отметим важное свойство фундаментальной последовательности.

Утверждение. *Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то $\forall \varepsilon > 0$ существует такой номер N,что $\forall n \geq N$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ находятся в интервале $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$.*

Доказательство

Так как $\{x_n\}$ фундаментальна, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$, что $\forall n \geq N$ и $\forall m \geq N$:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Положим $m = N$. Тогда

$$|x_N - x_n| < \varepsilon, \forall n \geq N.$$

Следовательно

$$-\varepsilon < x_n - x_N < \varepsilon,$$

или

$$x_N - \varepsilon < x_n < x_N + \varepsilon.$$

Окончательно имеем, что

$$\forall n \geq N, x_n \in (x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon).$$

Утверждение доказано.

Следствие 1.6. *Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то она ограничена.*

Доказательство

Действительно, если последовательность фундаментальна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n \in (x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon).$$

Пусть $A = max\{|x_1| \cdot |x_2| \ldots |x_{N-1}| \cdot |x_N - \varepsilon| \cdot |x_N + \varepsilon|\}$.

Тогда для любого натурального $n : |x_n| \leq A$. То есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Следствие доказано.

1.6.2. Критерий Коши сходимости последовательности.

Теорема 1.17. (Критерий Коши). *Для того, чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство

Необходимость. Пусть $\{x_n\}$ имеет конечный предел, равный a. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall p \geq N$$

выполняется

$$|x_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Будем считать, вначале, что $p = n$, а затем,что $p = m$ и используя неравенство для модуля суммы(разности), получаем :

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $n \geq N$ и для любого $m \geq N$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

то есть выполняется условие фундаментальности последовательности.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет конечный предел. По определению фундаментальной последовательности

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M : \forall n \geq M \quad \forall m \geq M$$

выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, то по теореме Больцано-Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть ее предел равен a, то есть

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a.$$

Покажем, что число a является пределом исходной последовательности $\{x_n\}$. По определению предела :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K : \quad \forall k \geq K$$

выполняется
$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $N = max(M, K)$. Фиксируем в предыдущем неравенстве номер $n_k \geq N$ (такой номер найдется, так как $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$). Тогда при $m = n_k$ и при всех $n \geq N$ в силу условия фундаментальности выполняется неравенство:

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим теперь разность

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

То есть
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Теорема доказана.

Пример 11. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$,где

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

расходится.

Последовательность $\{x_n\}$ расходится, если не выполняется условие Коши, то есть
$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \quad \forall k \in N \quad \exists n \geq k. \quad \exists m \geq k :$$
$$|x_n - x_m| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть задано любое $k \in \mathbb{N}$, положим $n = 2k, m = k$. Тогда

$$|x_n - x_m| = |x_{2k} - x_k| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, выполнено условие противоположное условию Коши при $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и в силу критерия Коши последовательность $\{x_n\}$ расходится.

$x_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$

$x_{2k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k}$