Основные понятия теории графов

1 Основные определения графов

Существует два основных определения графа:

1. **Комбинаторное** (используется далее)
2. **Топологическое**

Определение 1. *Граф G — это тройка $G = (V, E, f)$, где:*

- V — *множество вершин,*
- E — *множество рёбер,*
- $f : E \to V_1 \cup V_2$ — *отображение инцидентности (V_k — множество k-элементных подмножеств V).*

Определение 2. *Вершина v инцидентна ребру e, если $v \in f(e)$ (и наоборот).*

1.1 Обозначения

- $G(n, m)$ — граф с n вершинами и m рёбрами.
- $V(G)$, $E(G)$ — число вершин и рёбер в G.

1.2 Дополнительные определения

- **Кратные рёбра** — рёбра, инцидентные одной и той же паре вершин.
- **Петля** — ребро, инцидентное одной вершине.
- **Простой граф** — граф без петель и кратных рёбер.
- **Степень вершины** — количество инцидентных ей рёбер.

Лемма 1 (О рукопожатиях)**.** *Сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер:*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

2 Основные матрицы графов

1. **Матрица смежности** A:

$$A_{i,j} = \text{число рёбер между вершинами } i \text{ и } j.$$

Лемма 2. *$A^k(i,j)$ — число путей длины k из i в j.*

2. **Матрица Лапласа** L:

$$L = D - A,$$

где D — диагональная матрица степеней вершин.

3. **Матрица инцидентности** B:

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } j \text{ выходит из } i, \\ -1, & \text{если входит в } i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 3. *$L = BB^T$.*

3 Связность графов

3.1 Типы связности

- **Слабая**: неориентированный вариант ориентированного графа связен.
- **Полная**: для любых u, v существует путь $u \to v$ **или** $v \to u$.
- **Сильная**: для любых u, v существуют пути $u \to v$ **и** $v \to u$.

Определение 3. ***Компонента связности*** *— максимальный связный подграф.*

Теорема 1. *Если в неориентированном графе $G(n,m)$ выполняется $m > \binom{n-1}{2}$, то граф связен.*

Лемма 4. *Для неориентированного $G(n,m)$:*

$$\operatorname{rank}(B) = n - \textit{число компонент связности.}$$

4 Гамильтоновы и эйлеровы циклы

Определение 4.
- ***Гамильтонов цикл*** *— проходит все вершины ровно по одному разу.*
- ***Эйлеров цикл*** *— проходит все рёбра ровно по одному разу.*

Теорема 2 (Критерий эйлеровости). *Связный граф эйлеров* $\Leftrightarrow$ *степени всех вершин чётны.*

Теорема 3 (Оре). *Если для любых несмежных* u, v *верно* $\deg(u)+\deg(v) \geq n$*, то граф гамильтонов.*

Теорема 4 (Дирака). *Если* $\deg(v) \geq n/2$ *для всех вершин, граф гамильтонов.*

5 Деревья

Определение 5. ***Дерево*** *— связный граф без циклов.*

5.1 Свойства

- **Лист** — вершина степени 1.
- **Лемма о двух листьях**: В любом дереве есть минимум два листа.
- **Остовное дерево** — подграф с n вершинами, являющийся деревом.

Теорема 5 (Критерий дерева). $G(n, m)$ *— дерево* $\Leftrightarrow$ $m = n - 1$.

Теорема 6 (Кирхгофа). *Для связного неориентированного графа любое алгебраическое дополнение матрицы Лапласа равно числу остовных деревьев.*

6 Планарные графы

Определение 6. *Граф* ***планарен****, если его можно нарисовать на плоскости без пересечений рёбер.*

Теорема 7 (Эйлера). *Для планарного графа:*

$$V - E + F = 2,$$

где F *— число граней (включая внешнюю).*

Теорема 8 (Понтрягина-Куратовского). *Граф планарен* $\Leftrightarrow$ *не содержит подграфов* K_5 *и* $K_{3,3}$.

7 Многогранники

7.1 Основные определения

Определение 7. *Пусть* L *– замкнутая не самопересекающаяся ломаная. По теореме Жордана, она разбивает плоскость на две компоненты (ограниченную и неограниченную).* ***Многоугольником*** *называется замкнутая не самопересекающаяся ломаная вместе с ограниченной компонентой.*

Определение 8. *Два плоских многоугольника, расположенных в пространстве, называются* ***смежными по ребру*** *a, если отрезок a является их общей стороной.*

Определение 9. ***Многогранной поверхностью*** *называется набор многоугольников, расположенных в пространстве так, что:*

- *Для каждой стороны каждого многоугольника существует ровно один смежный многоугольник по этому ребру*
- *Отношение смежности симметрично*

Определение 10. *Многогранная поверхность называется* ***вложенной****, если:*

1. *Любая внутренняя точка грани принадлежит только этой грани*
2. *Любая внутренняя точка ребра принадлежит ровно двум граням*
3. *Для любой вершины все содержащие её грани образуют замкнутую цепочку*

Определение 11. ***Многогранником*** *называется связная вложенная многогранная поверхность вместе с одной из двух компонент (на которые она разбивает пространство), которая ограничена.*

7.2 Свойства многогранников

Определение 12. *Многогранник называется* ***выпуклым****, если множество его точек образует выпуклое подмножество в* $\mathbb{R}^3$.

Теорема 9 (Эйлера для выпуклых многогранников)**.** *Для любого выпуклого многогранника выполняется:*

$$V - E + F = 2$$

где:

- V *– число вершин*
- E *– число рёбер*
- F *– число граней*

Определение 13. ***Правильный многогранник*** *– многогранник, у которого:*

- *Все грани – одинаковые правильные n-угольники*
- *Все двугранные углы равны*

Теорема 10 (О правильных многогранниках)**.** *Существует ровно 5 типов правильных многогранников (Платоновых тел):*

1. *Тетраэдр (4 треугольные грани)*
2. *Куб (6 квадратных граней)*
3. *Октаэдр (8 треугольных граней)*
4. *Додекаэдр (12 пятиугольных граней)*
5. *Икосаэдр (20 треугольных граней)*

7.3 Связь с теорией графов

Определение 14. ***Граф многогранника*** *– граф, образованный вершинами и рёбрами многогранника.*

Теорема 11. *Граф любого выпуклого многогранника является:*

- *Планарным*
- *3-связным*
- *Гамальтоновым*

Теорема 12 (Штайница)**.** *Граф является графом выпуклого многогранника тогда и только тогда, когда он планарен и 3-связен.*