

# Пространственно-временные характеристики в задаче декодирования временных рядов.

Дорин Даниил Дмитриевич

Московский физико-технический институт

5 марта 2024 г.

# Цель работы

## Исследуются

Пространственно-временные характеристики в задаче декодирования временных рядов. Основной целью анализа сигнала в данном исследовании является классификация электроэнцефалограммы (ЭЭГ).

## Требуется

Предложить метод классификации сигнала, основанный на анализе пространственно-временных характеристик между временными рядами, полученными при регистрации сигнала несколькими датчиками.

## Основное предположение

- Зависимость между временными рядами значима в задаче декодирования и ее можно учитывать, переходя в касательное пространство с помощью Римановой геометрии.

## Постановка задачи

Исследуется задача декодирования временного ряда. Пусть имеется некоторый непрерывный процесс (активность головного мозга):

$$\mathcal{V}(\tau), \tau \in \mathbb{R}$$

Тогда данные выборки — это регистрируемый сигнал, то есть реализация процесса  $\mathcal{V}(\tau)$ :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T], \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^K$$

Здесь  $K$  — число каналов.  $T$  — число измерений сигнала с частотой  $\mu$  за время  $\tau$ :

$$T = \tau\mu$$

$$\mathbf{x}_{\tau\mu} \approx \mathcal{V}(\tau)$$

## Задача классификации отрезков регистрируемого сигнала

В данной задаче имеется выборка регистрируемых отрезков сигнала, требуется классифицировать каждый наблюдаемый временной отрезок. Введем следующие обозначения: Пусть имеется  $N$  зарегистрированных реализаций некоторого процесса:

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N\},$$

$$\mathbf{X}_i = [\mathbf{x}_1^i, \dots, \mathbf{x}_T^i], \quad \mathbf{x}_t^i \in \mathbb{R}^K,$$

$$\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_N]^T, \quad y_i \in \{1, \dots, C\}$$

$$\mathcal{D} = \{y_i, \mathbf{X}_i\}, \quad i = \overline{1, N}$$

Здесь  $y_i$  — целевая метка класса  $i$ -го зарегистрированного сигнала.

$C$  — число классов в задаче классификации сигнала.

Требуется построить отображение  $f_\theta$ , которое учитывало бы пространственно-временные характеристики между временными рядами от датчиков:

$$f_\theta : \mathbf{X} \rightarrow \{1, \dots, C\}$$

## Задача классификации активности

В данной задаче предполагается получение классификации для каждого отсчета времени наблюдения. Пусть имеется некоторый процесс и зарегистрированная реализация данного процесса в виде дискретного числа измерений. Каждому измерению соответствует класс активности. Формально:

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T\}, \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^K,$$
$$\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_T]^T, y_t \in \{1, \dots, C\}$$

Здесь  $C$  — число классов в задаче классификации активности. Выборка  $\mathcal{D} = \{y_t, \mathbf{x}_t\}_{t=1}^T$

Для набора данных, описанного выше, требуется построить отображение  $f_\theta$ , которое учитывало бы пространственно-временные характеристики между временными рядами сигнала:

$$f_\theta : \mathbf{X} \rightarrow \{1, \dots, C\}$$

## Применение Римановой геометрии

Одним из успешных традиционных методов классификации наличия потенциала Р300 на электроэнцефалограмме (ЭЭГ) является алгоритм **ERPCov TS LR**. Первым этапом данного алгоритма является формирование пространства центрированных признаков.

$$\mathbf{X}_i = [\mathbf{x}_1^i, \dots, \mathbf{x}_T^i] = \begin{bmatrix} x_{1,1}^i & x_{1,2}^i & \dots & x_{1,T}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{K,1}^i & x_{K,2}^i & \dots & x_{K,T}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ts_1 \\ \dots \\ ts_K \end{bmatrix},$$

где  $ts_j$  — временной ряд с нулевым средним, полученный при измерении сигнала  $j$ -ым датчиком и последующего центрирования. Тогда ковариационная матрица для одного измерения ЭЭГ имеет вид:

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{T-1} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^\top, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{K \times K}, \quad i = \overline{1, N}$$

Для классификации потенциала Р300 в алгоритме используется расширенная матрица ковариации:

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{T-1} \mathbf{P}_i \mathbf{P}_i^\top, \quad \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^0 \\ \overline{\mathbf{X}^1} \\ \mathbf{X}_i \end{bmatrix},$$

## Применение Римановой геометрии

$\overline{X^c}$  и  $\overline{X^1}$  — средние по классам  $\{0,1\}$  значения:

$$\overline{X^c} = \frac{\sum_{i=1}^N [y_i = c] X_i}{\sum_{i=1}^N [y_i = c]}, \quad c \in \{0,1\}$$

Известно, что пространство, состоящее из матриц ковариации, представляет собой риманово многообразие[1]. В каждой точке данного риманова многообразия имеется касательная плоскость с определенным скалярным произведением на ней. Среднее геометрическое симметричных положительно определенных матриц имеет вид:

$$R = \mathfrak{G}(R_1, \dots, R_N) = \operatorname{argmin}_R \sum_{i=1}^N \delta_R^2(R, R_i),$$

## Применение Римановой геометрии

где риманова метрика определяется следующим образом:

$$\delta_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) = \|\log(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_i)\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{3N} \log^2 \lambda_i},$$

где  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_i$ . В работе [1] получено, что для каждой ковариационной матрицы  $\mathbf{R}_i$  существует проекция  $\pi_i$  на касательное пространство. Таким образом, определено отображение:

$$\text{Exp}_R(\pi_i) = \mathbf{R}_i = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \exp\left(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \pi_i \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\right) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}$$

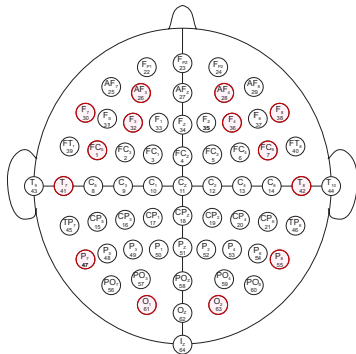
$$\log_R(\mathbf{R}_i) = \pi_i = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \log\left(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_i \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\right) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}$$

На практике построение ковариационных матриц и получение их образов в касательном пространстве выполняется при помощи библиотеки **PyRiemann** [2].



## Данные для вычислительного эксперимента

Для проведения экспериментов были выбраны данные бинарной классификации состояния глаз испытуемого (открыты или закрыты), представленная в [3] Набор данных получен в результате одного непрерывного измерения неинвазивного ЭЭГ с помощью нейроголовки Emotiv EEG с использованием 14 датчиков, на рисунке задействованные датчики изображены красным цветом.



## Данные для вычислительного эксперимента

Основные характеристики выборки представлены в Таблице 1.

**Таблица:** Описание выборки

Название	Обозначение	Значение
Продолжительность обследования	$\tau$	117 с
Частота измерения сигнала	$\mu$	$128.03 \text{ с}^{-1}$
Число каналов (датчиков)	$K$	14
Число измерений сигнала	$T$	14980

# Временные ряды в выборке

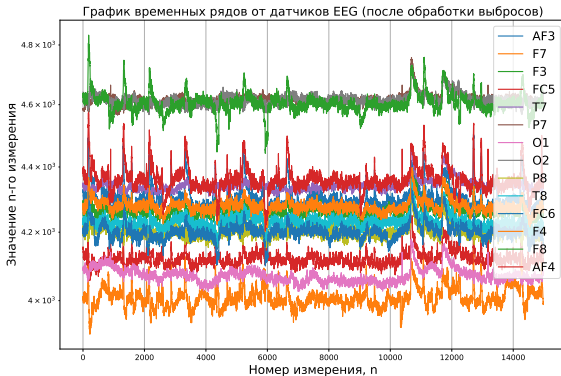


Рис.: График временных рядов

# Литература



Alexandre Barachant, Stéphane Bonnet, Marco Congedo, and Christian Jutten.

Riemannian geometry applied to bci classification.

In *International conference on latent variable analysis and signal separation*, pages 629–636. Springer, 2010.



Marco Congedo, Alexandre Barachant, and Anton Andreev.

A new generation of brain-computer interface based on riemannian geometry.

*arXiv preprint arXiv:1310.8115*, 2013.



Oliver Roesler.

EEG Eye State.

UCI Machine Learning Repository, 2013.

DOI: <https://doi.org/10.24432/C57G7J>.