

Пространственно-временные характеристики в задаче декодирования временных рядов.

Дорин Даниил Дмитриевич

Московский физико-технический институт

16 декабря 2023 г.

Задача декодирования временных рядов

Цель

Построить метод декодирования многомерных временных рядов, использующий пространственно-временные характеристики.

Задача

Применить методы, учитывающие пространственно-временные характеристики в задаче классификации сигнала.

Методы решения

Использование Римановой геометрии при построении модели для учета пространства и времени.

Описание сигналов

Пусть имеется некоторый непрерывный процесс:

$$\mathcal{V}(\tau), \tau \in \mathbb{R}$$

Тогда данные выборки — это регистрируемый сигнал, то есть реализация процесса $\mathcal{V}(\tau)$:

$$\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_T], x_t \in \mathbb{R}^K$$

Здесь K — число каналов. T — число измерений сигнала с частотой μ за время τ :

$$T = \tau\mu$$

$$x_{\tau\mu} \approx \mathcal{V}(\tau)$$

Задача классификации отрезков регистрируемого сигнала

Пусть имеется N зарегистрированных реализаций некоторого процесса:

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N\},$$

$$\mathbf{X}_i = [x_1^i, \dots, x_T^i], \quad x_t^i \in \mathbb{R}^K,$$

$$\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_N]^\top, \quad y_i \in \{1, \dots, C\}$$

$$\mathcal{D} = \{y_i, \mathbf{X}_i\}, \quad i = \overline{1, N}$$

Здесь y_i — целевая метка класса i -го временного ряда. C — число классов.

Требуется построить отображение f_θ , учитывающее пространственно-временные характеристики:

$$f_\theta : \mathbf{X} \rightarrow \{1, \dots, C\}$$

Задача классификации активности

В данной задаче предполагается получение классификации для каждого отсчета времени наблюдения. Формально:

$$\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_T\}, \quad x_t \in \mathbb{R}^K,$$

$$\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_T]^T, \quad y_t \in \{1, \dots, C\}$$

Здесь C — число классов. Выборка

$$\mathcal{D} = \{y_t, x_t\}_{t=1}^T$$

Требуется построить отображение f_θ , которое учитывало бы пространственно-временные характеристики:

$$f_\theta : \mathbf{X} \rightarrow \{1, \dots, C\}$$

Применение Римановой геометрии

Алгоритм **ERPCov TS LR** является примером применения Римановой геометрии в задаче классификации ЭЭГ сигнала.

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^i, \dots, \mathbf{x}_T^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1}^i & x_{1,2}^i & \dots & x_{1,T}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{K,1}^i & x_{K,2}^i & \dots & x_{K,T}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ts_1 \\ \dots \\ ts_K \end{bmatrix},$$

где ts_j — временной ряд с нулевым средним. Ковариационная матрица для одного измерения ЭЭГ имеет вид:

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{T-1} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^\top, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{K \times K}, \quad i = \overline{1, N}$$

Для задачи бинарной классификации в алгоритме используется расширенная матрица ковариации:

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{T-1} \mathbf{P}_i \mathbf{P}_i^\top, \quad \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^0 \\ \mathbf{X}^1 \\ \mathbf{X}_i \end{bmatrix},$$

Применение Римановой геометрии

$\overline{\mathbf{X}^0}$ и $\overline{\mathbf{X}^1}$ — средние по классам $\{0,1\}$ значения:

$$\overline{\mathbf{X}^0} = \frac{\sum_{i=1}^N [y_i = 0] \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^N [y_i = 0]}, \quad c \in \{0,1\}$$

Известно, что пространство, состоящее из матриц ковариации, представляет собой риманово многообразие [1]. Основная идея спроектироваться на общую для ковариационных матриц касательную плоскость. Среднее геометрическое симметричных положительно определенных матриц имеет вид:

$$\mathbf{R} = \mathfrak{G}(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{R}}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i),$$

Применение Римановой геометрии

Риманова метрика определяется следующим образом:

$$\delta_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) = \|\log(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_i)\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{3N} \log^2 \lambda_i},$$

где λ_i — собственные значения матрицы $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_i$. В работе [1] получено, что для каждой ковариационной матрицы \mathbf{R}_i существует проекция π_i на касательное пространство. Таким образом, определено отображение:

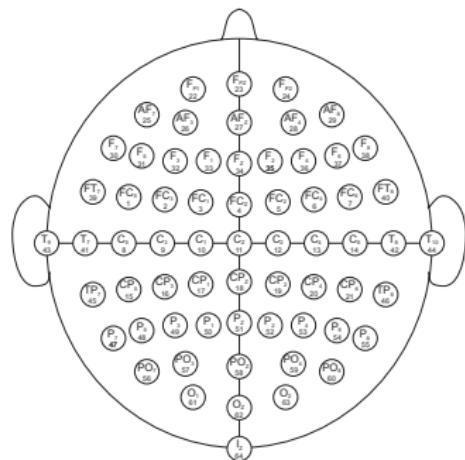
$$\text{Exp}_{\mathbf{R}}(\pi_i) = \mathbf{R}_i = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \exp\left(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \pi_i \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\right) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}_i) = \pi_i = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \log\left(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_i \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\right) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}$$

После векторизации полученные данные используются как новое признаковое описание и могут быть классифицированы, например, моделью логистической регрессии.

Данные для задачи классификации отрезков сигнала

- EEG Motor Movement/Imagery Dataset состоит из данных 109 испытуемых
- Данные каждого испытуемого состоят из 14 выполненных тестов
- Сосредоточимся на заданиях 1 и 2 с классификацией открытых/закрытых глаз
- Задание 1 – бег с открытыми глазами
- Задание 2 – бег с закрытыми глазами



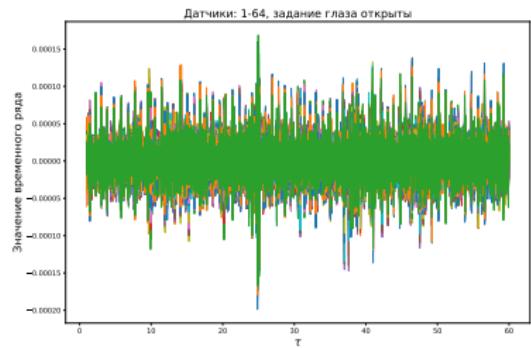
Данные для задачи классификации отрезков сигнала

Основные характеристики выборки для одного испытуемого в ходе фиксированного задания представлены в Таблице 1.

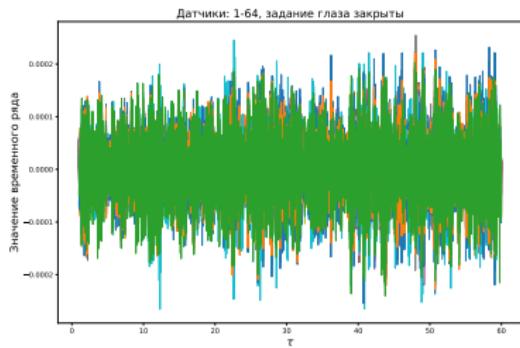
Таблица: Описание выборки

Название	Обозначение	Значение
Продолжительность обследования	τ	61 с
Частота измерения сигнала	μ	160 с^{-1}
Число каналов (датчиков)	K	64
Число измерений сигнала	T	9760

Визуализация данных выборки



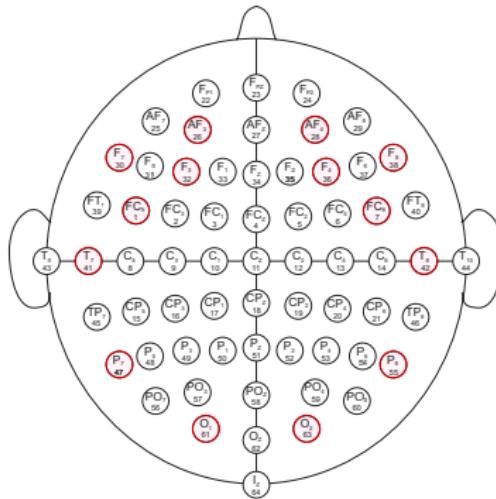
(a) Открытые глаза



(b) Закрытые глаза

Данные для задачи классификации активности

Для проведения экспериментов были выбраны данные бинарной классификации состояния глаз испытуемого (открыты или закрыты), представленная в [2]. Набор данных получен в результате одного непрерывного измерения неинвазивного ЭЭГ с помощью нейроголовки Emotiv EEG с использованием 14 датчиков, на рисунке задействованные датчики изображены красным цветом.



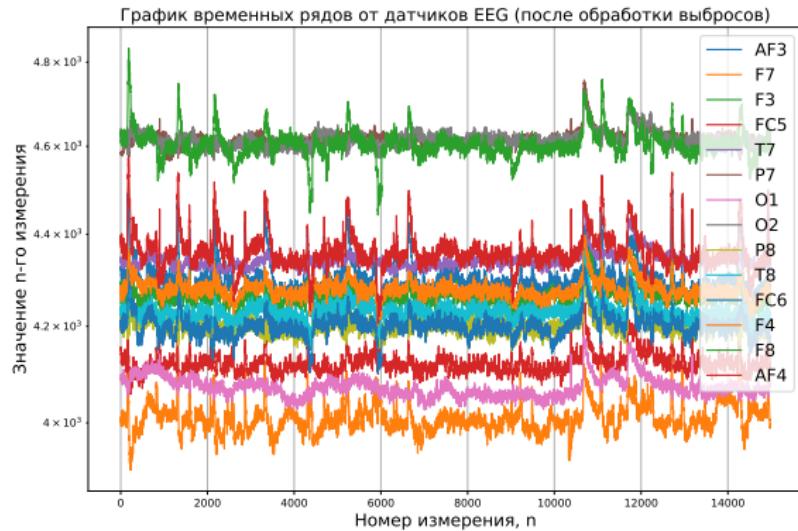
Данные для задачи классификации активности

Основные характеристики выборки представлены в Таблице 2.

Таблица: Описание выборки

Название	Обозначение	Значение
Продолжительность обследования	τ	117 с
Частота измерения сигнала	μ	128.03 с^{-1}
Число каналов (датчиков)	K	14
Число измерений сигнала	T	14980

Визуализация данных выборки



Литература

-  Alexandre Barachant, Stéphane Bonnet, Marco Congedo, and Christian Jutten.
Riemannian geometry applied to bci classification.
In *International conference on latent variable analysis and signal separation*, pages 629–636. Springer, 2010.
-  Oliver Roesler.
EEG Eye State.
UCI Machine Learning Repository, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.24432/C57G7J>.
-  Marco Congedo, Alexandre Barachant, and Anton Andreev.
A new generation of brain-computer interface based on riemannian geometry.
arXiv preprint arXiv:1310.8115, 2013.