Пространственно-временные характеристики в задаче декодирования временных рядов.

Дорин Даниил Дмитриевич

Московский физико-технический институт

15 декабря 2023 г.

Цель работы

Исследуются

Пространственно-временные характеристики в задаче декодирования временных рядов. Основной целью анализа сигнала в данном исследовании является классификация электроэнцефалограммы (ЭЭГ).

Требуется

Предложить метод классификации сигнала, основанный на анализе пространственно-временных характеристик между временными рядами, полученными при регестрации сигнала несколькими датчиками.

Основное предположение

- Зависимость между временными рядами значима в задаче декодирования и ее можно учитывать, переходя в касательное пространство с помощью Римановой геометрии.

Постановка задачи

Исследуется задача декодирования временного ряда. Пусть имеется некоторый непрерывный процесс (активность головного мозга):

$$\mathcal{V}(\tau),\ \tau \in \mathbb{R}$$

Тогда данные выборки — это регистрируемый сигнал, то есть реализация процесса $\mathcal{V}(\tau)$:

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_T],\ \boldsymbol{x}_t \in \mathbb{R}^K$$

Здесь K — число каналов. T — число измерений сигнала с частотой μ за время τ:

$$T = \tau\mu$$

$$\boldsymbol{x}_{\tau\mu} \approx \mathcal{V}(\tau)$$

Задача классификации отрезков регистрируемого сигнала

В данной задаче имеется выборка регистрируемых отрезков сигнала, требуется классифицировать каждый наблюдаемый временной отрезок. Введем следующие обозначения: Пусть имеется N зарегистрированных реализаций некоторого процесса:

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_N\},$$

$$\boldsymbol{X}_i = \left[\boldsymbol{x}_1^i, \dots, \boldsymbol{x}_T^i\right], \ \boldsymbol{x}_t^i \in \mathbb{R}^K,$$

$$\boldsymbol{Y} = [y_1, \dots, y_N]^{\mathsf{T}}, \ y_i \in \{1, \dots, C\}$$

$$\mathcal{D} = \{y_i, \boldsymbol{X}_i\}, \ i = \overline{1, N}$$

Здесь y_i — целевая метка класса i-го зарегистрированного сигнала.
C — число классов в задаче классификации сигнала.
Требуется построить отображение f_θ, которое учитывало бы пространственно-временные характеристиик между временными рядами от датчиков:

$$f_\theta : \boldsymbol{X} \to \{1, \dots, C\}$$

Задача классификации активности

В данной задаче предполагается получение классификации для каждого отсчета времени наблюдения. Пусть имеется некоторый процесс и зарегистрированная реализация данного процесса в виде дискретного числа измерений. Каждому измерению соответствует класс активности. Формально:

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_T\},\ \boldsymbol{x}_t \in \mathbb{R}^K,$$

$$\boldsymbol{Y} = [y_1, \dots, y_T]^{\mathsf{T}},\ y_t \in \{1, \dots, C\}$$

Здесь C — число классов в задаче классификации активности. Выборка $\mathcal{D} = \{y_t, \boldsymbol{x}_t\}_{t=1}^T$

Для набора данных, описанного выше, требуется построить отображение f_θ, которое учитывало бы пространственно-временные характеристик между временными рядами сигнала:

$$f_\theta : \boldsymbol{X} \to \{1, \dots, C\}$$

Применение Римановой геометрии

Одним из успешных традиционных методов классификации наличия потенциала P300 на электроэнцефалограмме (ЭЭГ) является алгоритм **ERPCov TS LR**. Первым этапом данного алгоритма является формирование пространства центрированных признаков.

$$\boldsymbol{X}_i = \left[\boldsymbol{x}_1^i, \ldots, \boldsymbol{x}_T^i\right] = \begin{bmatrix} x_{1,1}^i & x_{1,2}^i & \ldots & x_{1,T}^i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{K,1}^i & x_{K,2}^i & \ldots & x_{K,T}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ts_1 \\ \ldots \\ ts_K \end{bmatrix},$$

где ts_j — временной ряд с нулевым средним, полученный при измерении сигнала j-ым датчиком и последующего центрирования. Тогда ковариационная матрица для одного измерения ЭЭГ имеет вид:

$$\boldsymbol{R}_i = \frac{1}{T-1}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^{\mathsf{T}}, \ \boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{K\times K}, \ i = \overline{1, N}$$

Для классификации потенциала P300 в алгоритме используется расширенная матрица ковариации:

$$\boldsymbol{R}_i = \frac{1}{T-1}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_i^{\mathsf{T}}, \ \boldsymbol{P}_i = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{X}^0} \\ \overline{\boldsymbol{X}^1} \\ \boldsymbol{X}_i \end{bmatrix},$$

Применение Римановой геометрии

$\overline{\boldsymbol{X}^c}$ и $\overline{\boldsymbol{X}^1}$ — средние по классам $\{0{,}1\}$ значения:

$$\overline{\boldsymbol{X}^0} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [y_i = c]\,\boldsymbol{X}_i}{\sum_{i=1}^{N} [y_i = c]},\ c \in \{0{,}1\}$$

Известно, что пространство, состоящее из матриц ковариации, представляет собой риманово многообразие[1]. В каждой точке данного риманова многообразия имеется касательная плоскость с определенным скалярным произведением на ней. Среднее геометрическое симметричных положительно определенных матриц имеет вид:

$$\boldsymbol{R} = \mathfrak{G}\left(\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_N\right) = \underset{\boldsymbol{R}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N} \delta_R^2(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}_i),$$

Применение Римановой геометрии

где риманова метрика определяется следующим образом:

$$\delta_R(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}_i) = \| \log(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}_i)\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{3N} \log^2 \lambda_i},$$

где λ_i — собственные значения матрицы $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}_i$. В работе [1] получено, что для каждой ковариационной матрицы $\boldsymbol{R}_i$ существует проекция $\boldsymbol{\pi}_i$ на касательное пространство. Таким образом, определено отображение:

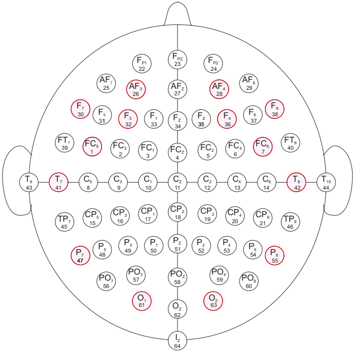
$$\mathrm{Exp}_R(\boldsymbol{\pi}_i) = \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}} \exp\left(\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\pi}_i\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\right)\boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_R(\boldsymbol{R}_i) = \boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}} \log\left(\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\right)\boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}}$$

На практике построение ковариационных матриц и получение их образов в касательном пространстве выполняется при помощи библиотеки **PyRiemann** [2].

Данные для вычислительного эксперимента

Для проведения экспериментов были выбраны данные бинарной классификации состояния глаз испытуемого (открыты или закрыты), представленная в [3] Набор данных получен в результате одного непрерывного измерения неинвазивного ЭЭГ с помощью нейроголовки Emotiv EEG с использованием 14 датчиков, на рисунке задействованные датчики изображены красным цветом.



Данные для вычислительного эксперимента

Основные характеристики выборки представлены в Таблице 1.

Таблица: Описание выборки

Название	Обозначение	Значение
Продолжительность обследования	τ	117 с
Частота измерения сигнала	μ	128.03 с$^{-1}$
Число каналов (датчиков)	K	14
Число измерений сигнала	T	14980

Временные ряда в выборке

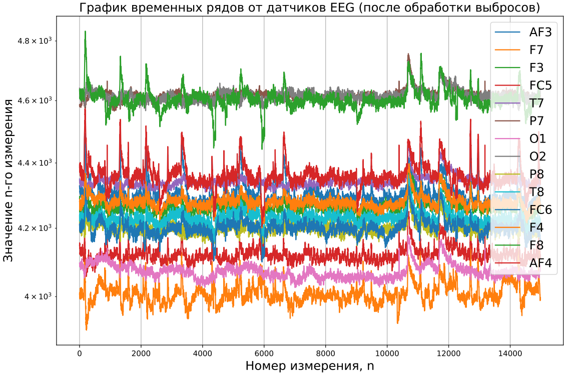


Рис.: График временных рядов

Литература

Alexandre Barachant, Stéphane Bonnet, Marco Congedo, and Christian Jutten.
Riemannian geometry applied to bci classification.
In *International conference on latent variable analysis and signal separation*, pages 629–636. Springer, 2010.

Marco Congedo, Alexandre Barachant, and Anton Andreev.
A new generation of brain-computer interface based on riemannian geometry.
arXiv preprint arXiv:1310.8115, 2013.

Oliver Roesler.
EEG Eye State.
UCI Machine Learning Repository, 2013.
DOI: https://doi.org/10.24432/C57G7J.