Деревья.

Дерево - это связный граф без циклов. Граф, не содержащий циклов, называется *ацикличным*. Можно дать другие определения дерева. Пусть граф G содержит n вершин и m ребер. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Граф G – дерево.
2. Граф G – связный и $m = n - 1$.
3. Любая пара вершин в G соединена е*динственным* путем.
4. Граф G – ацикличный и $m = n - 1$.
5. Граф G – ацикличный, но добавляя к нему любое новое ребро, мы получаем ровно один цикл.

Будем обозначать дерево буквой T.

Деревом графа G называется связный ацикличный подграф графа G. Дерево T называется *остовым деревом* графа G, если T – подграф графа G и *каждая вершина в графе G является вершиной в дереве T.* У каждого связного графа существует подграф, который является остовым деревом.

Рассмотрим пример:

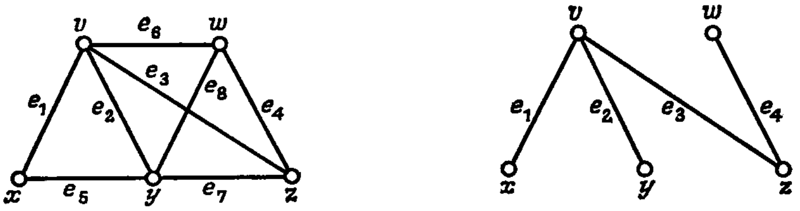


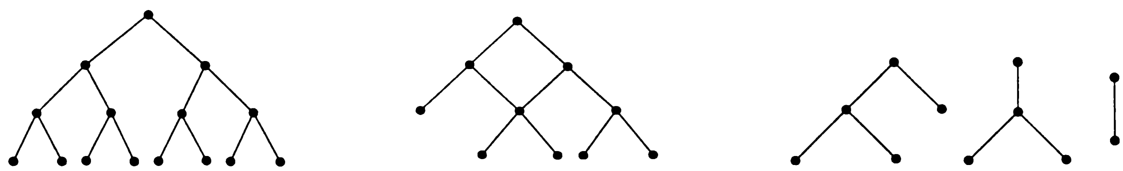
Рис. 1.

На рисунке 1 изображен граф и его остовое дерево.

Лесом называется граф, состоящий из нескольких компонент связности, каждая из которых является деревом.

Заметим, что по определению деревья и леса являются *простыми графами.*

Рассмотрим примеры:



а) б) в)

Рис. 2.

Графы, изображенные на рисунке 2:

1. а – дерево;

2. б – не является деревом, т.к. содержит цикл;
3. в – лес, имеющий 3 компоненты связности.

Дерево должно обязательно иметь *висячие* вершины. Напомним, что висячей называется вершина, степень которой равна единице. Вершины степени 1 называются *листьями*. Другие вершины называются *внутренними* вершинами.

Дерево с *одной выделенной вершиной* называется *корневым деревом* или деревом с корнем. При необходимости можно заменить неориентированное корневое дерево T на корневое ориентированное дерево T', как показано на рисунке 3.

Рис. 3.

Если корень выбран, *уровень* вершины v определяется длиной единственного пути от корня в вершину v . *Высотой* дерева называется длина самого длинного пути от корня дерева до листа. Напомним, что длина пути определяется количеством пройденных ребер, таким образом, путь длиною k имеет k ребер. Если рассматривать корневое ориентированное дерево T', порожденное данным корневым деревом T, то тогда вершина u называется *родителем* вершины v, а v называется *сыном* вершины u , если существует дуга из u в v. Если u – *родитель* v и v', то тогда v,v' называются *братьями*. Если существует ориентированный путь из вершины u в вершину v, то тогда u называется предком вершины v, а v – потомком вершины u . Если наибольшая из степеней *выхода* для вершин дерева равна m, то дерево называется m-арным деревом. При $m = 2$, дерево называется *бинарным* деревом. В бинарном дереве каждый сын обозначается как *левый*, либо как *правый* сын. Рассмотрим пример.

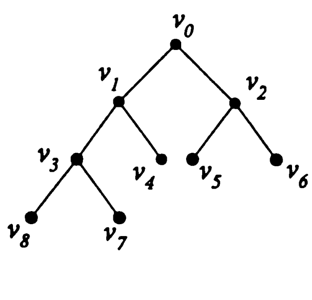


Рис. 4.

Граф на рисунке 4 – бинарное дерево. Уровень вершины v_6 равен 2, уровень вершины v_8 равен 3. Высота дерева равна 3, т. к. длина пути $v_0v_1v_3v_8$ равна 3 и не существует более длинного пути от корня к листу. Вершина v_2 является родителем для вершин v_5 и v_6. Вершины v_5 и v_6, например, братья. Вершина v_1 - предок вершин v_3, v_4, v_7, v_8, соответственно, указанные вершины являются потомками v_1. Вершина v_5 – левый сын вершины v_2, а вершина v_6 – правый сын вершины v_2.

Мы рассмотрели корневое ориентированное дерево, образованное из неориентированного корневого дерева. Теперь дадим общее определение ориентированного корневого дерева. *Ориентированное дерево называется корневым ориентированным деревом, если существует единственная вершина* v_0 *такая, что полустепень входа* $\rho^{-}(v_0) = 0$ *и существует путь из* v_0 *в каждую другую вершину дерева*. Ориентированное дерево T' на рисунке 2. удовлетворяет этому определению. Вместе с тем дерево, приведенное на рисунке 5, не является корневым ориентированным деревом.

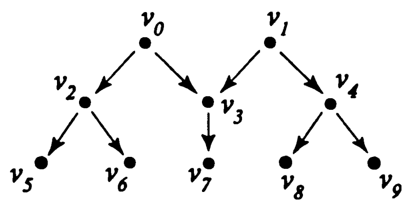


Рис. 5.

На основе бинарного дерева строится *бинарное дерево поиска*, реализуется алгоритм сжатия данных Хаффмана,