Цифровая обработка сигналов

Ричард Лайонс

Перевод с английского
под редакцией А.А. Бритова

Москва
Издательство **БИНОМ**
2006

УДК 621.372
ББК 32.811.3
Л18

Ричард Лайонс

Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. — М.: ООО «Бином-Пресс», 2006 г. — 656 с.: ил.

Книга представляет собой учебник по цифровой обработке сигналов, написанный понятным языком, снабженный достаточный количеством иллюстраций и наглядных примеров. Она содержит краткое введение в необходимый математический аппарат (в том числе и z-преобразование, преобразования Лапласа и Гильберта, статистику), в принципы машинного представления сигналов (двоичные форматы), рассматривает вопросы периодической дискретизации. Отдельные главы посвящены дискретному и быстрому преобразованиям Фурье. В разделе цифровой фильтрации подробно рассмотрены фильтры с конечной и бесконечной импульсной характеристикой, фильтры на основе частотной выборки и интерполированные КИХ-фильтры. Описаны квадратурные сигналы и комплексное понижающее преобразование. Разобраны принципы преобразования частоты дискретизации, необходимые для проектирования полифазных и каскадированных интеграторов-гребенчатых фильтров. Усреднению сигналов (во временной и частотной области) — когерентному и некогерентному — посвящена отдельная глава. Значительную часть книги составляет коллекция советов и «маленьких хитростей» в области цифровой обработки сигналов. Полезен начинающим специалистам и терминологический словарь, вынесенный в приложение.

Книга отличается четкостью построения, тщательной выверенностью примеров и сбалансированностью сложности/доступности материала. Для чтения ее достаточно иметь базовые знания из вузовского курса математического анализа.

ISBN 5-9518-0149-4 (рус.)
ISBN 0-13-108989-7 (англ.)

© Pearson Education Inc., 2004
© Издание на русском языке.
Издательство Бином, 2006

Содержание

Предисловие **13**

Глава 1. Дискретные последовательности и системы **21**

1.1. Дискретные последовательности и связанные с ними обозначения. 22

1.2. Мгновенные значения, амплитуда и мощность сигнала 28

1.3. Условные обозначения операций обработки сигналов. 29

1.4. Введение в дискретные линейные инвариантные во времени системы. 32

1.5. Дискретные линейные системы 32

1.6. Инвариантные во времени системы 36

1.7. Свойство коммутативности линейных инвариантных во времени систем 38

1.8. Анализ линейных инвариантных во времени систем. 39

Глава 2. Периодическая дискретизация **41**

2.1. Наложение: неоднозначность представления сигнала в частотной области 41

2.2. Дискретизация низкочастотных сигналов 46

2.3. Дискретизация полосовых сигналов 49

2.4. Инверсия спектра при полосовой дискретизации. 58

Глава 3. Дискретное преобразование Фурье **63**

3.1. Смысл формулы ДПФ. 64

3.2. Симметрия ДПФ 75

3.3. Линейность ДПФ. 77

3.4. Модули ДПФ 78

3.5. Частотная ось ДПФ 79

3.6. Теорема о сдвиге 80

3.7. Обратное ДПФ 82

3.8. Утечка ДПФ 83

3.9. Окна 90
3.10. Гребешковые искажения ДПФ 97
3.11. Разрешающая способность ДПФ, дополнение нулями и дискретизация в частотной области 98
3.12. Коэффициент улучшения ДПФ 103
3.13. ДПФ прямоугольных функций 106
3.14. Частотный отклик ДПФ на комплексный входной сигнал . 125
3.15. Реакция ДПФ на действительный косинусоидальный сигнал 129
3.16. Реакция отдельного бина ДПФ на действительный косинусоидальный сигнал 130
3.17. Интерпретация ДПФ 132

Глава 4. Быстрое преобразование Фурье 139
4.1. Связь БПФ с ДПФ 140
4.2. Советы по практическому использованию БПФ 141
4.3. Программы БПФ 145
4.4. Разработка алгоритма БПФ по основанию 2 145
4.5. БИТ-реверсивная перестановка входных и выходных данных БПФ 152
4.6. Структуры бабочек БПФ по основанию 2 154

Глава 5. Фильтры с импульсной характеристикой конечной длины . 163
5.1. Введение в КИХ-фильтры 164
5.2. Свертка в КИХ-фильтрах 169
5.3. Проектирование КИХ-фильтра нижних частот 179
5.4. Проектирование полосовых КИХ-фильтров 193
5.5. Проектирование КИХ-фильтров верхних частот 194
5.6. Проектирование КИХ-фильтров методом замен Ремеза 197
5.7. Полуполосные КИХ-фильтры 199
5.8. Фазо-частотная характеристика КИХ-фильтров 200
5.9. Обобщенное описание дискретной свертки 205

Глава 6. Фильтры с импульсной характеристикой бесконечной длины 219
6.1. Введение в фильтры с бесконечными импульсными характеристиками 220
6.2. Преобразование Лапласа 223
6.3. *Z*-преобразование 235

6.4. Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики 249
6.5. Метод проектирования БИХ-фильтров с помощью билинейного преобразования 263
6.6. Оптимизационный метод проектирования БИХ-фильтров. . 272
6.7. Подводные камни реализации БИХ-фильтров. 274
6.8. Улучшение БИХ-фильтров с помощью каскадных структур 276
6.9. Краткое сравнение КИХ- и БИХ-фильтров. 281

Глава 7. Специальные КИХ-фильтры нижних частот 285
7.1. Фильтры на основе частотной выборки: утраченное искусство 286
7.2. Интерполированные КИХ ФНЧ 320

Глава 8. Квадратурные сигналы 335
8.1. Почему нас так занимают квадратурные сигналы? 336
8.2. Запись комплексных чисел 336
8.3. Представление действительных сигналов с помощью комплексных фазоров. 342
8.4. Несколько мыслей по поводу отрицательной частоты 345
8.5. Квадратурные сигналы в частотной области 347
8.6. Полосовые квадратурные сигналы в частотной области 349
8.7. Комплексное понижающее преобразование. 351
8.8. Пример комплексного понижающего преобразования 354
8.9. Альтернативый метод понижающего преобразования 356

Глава 9. Дискретное преобразование Гильберта. 361
9.1. Определение преобразования Гильберта 362
9.2. Почему нас так занимает преобразование Гильберта? 364
9.3. Импульсная характеристика преобразователя Гильберта . . . 369
9.4. Проектирование дискретного преобразователя Гильберта . . 371
9.5. Генерация аналитического сигнала во временной области . . 377
9.6. Сравнение методов генерации аналитических сигналов 379

Глава 10. Преобразование частоты дискретизации 381
10.1. Прореживание 382
10.2. Интерполяция 387
10.3. Объединение прореживания и интерполяции 389
10.4. Полифазные фильтры 391
10.5. Каскадные интеграторы-гребенчатые фильтры. 397

Глава 11. Усреднение сигналов 411
11.1. Когерентное усреднение 412
11.2. Некогерентное усреднение 418
11.3. Усреднение результатов быстрого преобразования Фурье . 421
11.4. Фильрующие свойства усреднения во временной области. . 429
11.5. Экспоненциальное усреднение 430

Глава 12. Цифровые форматы данных и их роль в обработке сигналов 437
12.1. Двоичные форматы с фиксированной запятой 438
12.2. Точность и динамический диапазон двоичных чисел 444
12.3. Эффекты конечной длины слова двоичных чисел с фиксированной запятой 445
12.4. Двоичные форматы с плавающей запятой 460
12.5. Двоичный формат с поблочно плавающей запятой 465

Глава 13. Маленькие хитрости цифровой обработки сигналов 467
13.1. Перенос частоты без умножения 467
13.2. Быстрое приближенное вычисление длины вектора 475
13.3. Взвешивание окном в частотной области 479
13.4. Быстрое умножение комплексных чисел. 482
13.5. Эффективное вычисление БПФ действительных последовательностей 483
13.6. Вычисление обратного БПФ с помощью прямого БПФ . . . 494
13.7. Упрощенная структура КИХ-фильтра. 497
13.8. Уменьшение шума квантования АЦП 497
13.9. Методы испытаний аналого-цифровых преобразователей. . 503
13.10. Быстрая реализация КИХ-фильтров с помощью БПФ . . . 507
13.11. Генерация нормально распределенных случайных сигналов 509
13.12. Фильтрация с нулевым сдвигом фаз. 511
13.13. Повышение крутизны АЧХ КИХ-фильтров. 512
13.14. Интерполяция полосовых сигналов 514
13.15. Алгоритм локализации спектральных пиков 515
13.16. Вычисление поворачивающих множителей БПФ 518
13.17. Обнаружение отдельного тона 520
13.18. Скользящее ДПФ 524
13.19. Увеличение масштаба БПФ по частоте 532
13.20. Практическая реализация анализатора спектра. 535

13.21. Эффективная аппроксимация арктангенса. 538
13.22. Алгоритмы демодуляции частотно-модулированных сигналов 540
13.23. Удаление постоянной составляющей 543
13.24. Усовершенствование интеграторов-гребенчатых фильтров. 546
13.25. Сглаживание импульсного шума 551
13.26. Эффективное вычисление полиномов. 553
13.27. Проектирование КИХ-фильтров очень высокого порядка. 554
13.28. Интерполяция во временной области с помощью БПФ. . . 557
13.29. Перенос по частоте с помощью прореживания 561
13.30. Автоматическая регулировка усиления (АРУ) 561
13.31. Оценка огибающей. 563
13.32. Квадратурный генератор 565
13.33. Двухрежимное усреднение. 568

Приложение А. Арифметика комплексных чисел 573
А.1. Графическое представление действительных и комплексных чисел 573
А.2. Арифметическое представление комплексных чисел 574
А.3. Арифметические операции над комплексными числами . . . 576
А.4. Некоторые практические особенности использования комплексных чисел. 580

Приложение В. Сумма геометрической прогрессии 583

Приложение С. Инверсия времени и ДПФ 585

Приложение D. Среднее, дисперсия и стандартное отклонение . . . 589
D.1. Статистические параметры. 589
D.2. Стандартное отклонение или СКЗ непрерывного синусоидального сигнала 592
D.3. Среднее и дисперсия случайных функций 593
D.4. Нормальная функция плотности вероятности. 596

Приложение Е. Децибелы (дБ и дБм) 597
Е.1. Использование логарифмов для сравнения мощности сигналов. 597
Е.2. Некоторые полезные числа, связанные с децибелами 602
Е.3. Задание абсолютной мощности в децибелах 603

Приложение F. Терминология в области цифровой фильтрации . . 605

Приложение G. Вывод соотношений для фильтров на основе частотной выборки 615

G.1. Частотная характеристика гребенчатого фильтра 615

G.2. Частотная характеристика отдельного комплексного ФОЧВ. 616

G.3. ФЧХ многосекционного комплексного ФОЧВ 617

G.4. Частотная характеристика многосекционных комплексных ФОЧВ 618

G.5. Передаточная функция действительного ФОЧВ 620

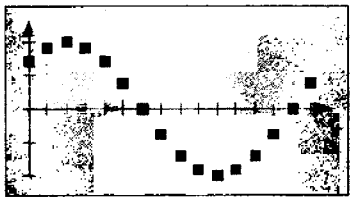
G.6. Частотная характеристика ФОЧВ Типа IV 622

Приложение H. Таблицы расчета фильтров на основе частотной выборки 625

Предметный указатель 641

Глава 1

Дискретные последовательности и системы



Цифровая обработка сигналов никогда раньше не была так широко распространена, и никогда раньше не существовало столько возможностей для ее реализации. Не так давно быстрое преобразование Фурье (БПФ), которое мы будем обсуждать в главе 4, представлялось загадочной математической процедурой, используемой только в крупных исследовательских центрах или университетах. Сейчас, как это ни удивительно, БПФ легко доступно каждому из нас. Оно даже реализуется в виде встроенных функций, предоставляемых недорогими пакетами программ математических расчетов для домашних компьютеров. Доступность более изощренных коммерческих программ обработки сигналов позволяет нам сегодня быстрее и увереннее разрабатывать приложения обработки сигналов. Мы можем выполнять спектральный анализ, проектировать цифровые фильтры, разрабатывать системы распознавания речи, передачи данных, сжатия изображений с использованием программ, которые интерактивны как в части задания алгоритма функционирования, так и в части графического отображения результатов работы. С середины 80-х годов та же технология, которая сделала возможным создание доступных домашних компьютеров, позволила разработать мощные и недорогие аппаратурные системы разработки, которые служат основой реализации различных проектов, использующих цифровую обработку сигналов[1]. Тем не менее, несмотря на простоту применения современных средств разработки систем цифровой обработки сигналов, нам все еще необходим прочный фундамент понимания ее основ. Цель этой книги — построить такой фундамент.

В этой главе мы подготовим базу для тех тем, которые будут изучаться в остальной части книги, определив терминологию, используемую в цифровой обработке

---

[1] Во время телевизионного интервью в начале 90-х один из ведущих ученых в области компьютерных наук заметил, что, если бы автомобильная промышленность развивалась такими же темпами, как компьютерная, наши машины сейчас двигались бы со скорость в полмиллиона миль в час (примерно 800 000 км/ч — *прим. перев.*) и на одном галлоне (примерно 4.5 л — *прим. перев.*) бензина проезжали бы полмиллиона миль. Цена такой машины была бы такой низкой, что ее проще было бы выбросить на свалку, чем заплатить за одни день парковки в Сан-Франциско.

сигналов, показав различные способы графического представления дискретных сигналов, определив понятия, используемые при описании последовательностей значений данных, предложив условные обозначения, используемые для описания операций обработки сигналов, и коротко введя понятие линейных дискретных систем.

1.1. Дискретные последовательности и связанные с ними обозначения

В самом общем смысле термин *обработка сигналов* обозначает область науки, которая занимается анализом физических процессов, изменяющихся во времени. И как таковая, обработка сигналов делится на две ветви: аналоговую обработку сигналов и цифровую обработку сигналов. Термин *аналоговый* используется для описания сигналов, которые непрерывны во времени и могут принимать значения из непрерывного диапазона. Примером аналогового сигнала является некоторое напряжение, которое мы можем подать на вход осциллоскопа, в результате чего на экране мы увидим непрерывную кривую как функцию времени. Аналоговый сигнал можно также подать на обычный анализатор спектра, чтобы определить его частотный состав. Термин *аналоговый*, вероятно, происходит из области аналоговых компьютеров, использовавшихся до начала 80-х. Эти компьютеры решали линейные дифференциальные уравнения с помощью электронных дифференциаторов и интеграторов, соединяемых с помощью телефонных патчкордов[1]. В такой ситуации непрерывное напряжение или ток в реальной цепи представляли собой *аналог* некоторой переменной в дифференциальном уравнении, такой как скорость, давление воздуха, температура и т. п. (Хотя гибкость и производительность современных цифровых компьютеров сделали аналоговые компьютеры устаревшими, хорошее описание короткой жизни аналоговых компьютеров вы можете найти в работе [1].) Поскольку современная обработка непрерывных сигналов с использованием резисторов, конденсаторов, операционных усилителей и т. п. имеет мало общего с аналоговыми компьютерами, термин *аналоговый* сегодня представляется неудачным. Более корректным было бы называть *непрерывной обработкой сигналов* то, что мы сегодня обычно называем аналоговой обработкой сигналов. Соответственно, в этой книге мы сведем к минимуму использование термина *аналоговые сигналы* и заменим его термином *непрерывные сигналы* везде, где это оправдано.

Термин *дискретный сигнал* используется для обозначения сигнала, независимая переменная (чаще всего время) которого квантована, так что мы знаем значения сигнала только в дискретные моменты времени. Таким образом, дискретный сигнал представляется не непрерывной линией, а набором значений. Кроме квантования по времени, дискретные сигналы квантуются еще и по значению. Мы можем пояснить эти понятия на примере. Представим себе непрерывный синусоидальный сигнал с амплитудой, равной 1, и частотой f_o, описываемый уравнением

$$x(t) = \sin(2\pi f_o t) \tag{1-1}$$

[1] Отрезки проводов небольшой длины со штекерами или разъемами на концах, предназначенные для коммутации сигналов на панелях телефонных станций — (*прим. перев.*).

Частота f_0 измеряется в герцах (Гц). (В физических системах мы обычно измеряем частоту в единицах, производных от герца. Один герц — это частота, при которой совершается одно полное колебание или цикл в секунду. Один килогерц (кГц) равен тысяче Гц, а мегагерц — одному миллиону Гц[1].) Если t в уравнении (1-1) представляет собой время в секундах, то произведение $f_0\,t$ имеет размерность циклов (периодов), а полный аргумент $2\pi f_0\,t$ представляет собой угол, измеренный в радианах.

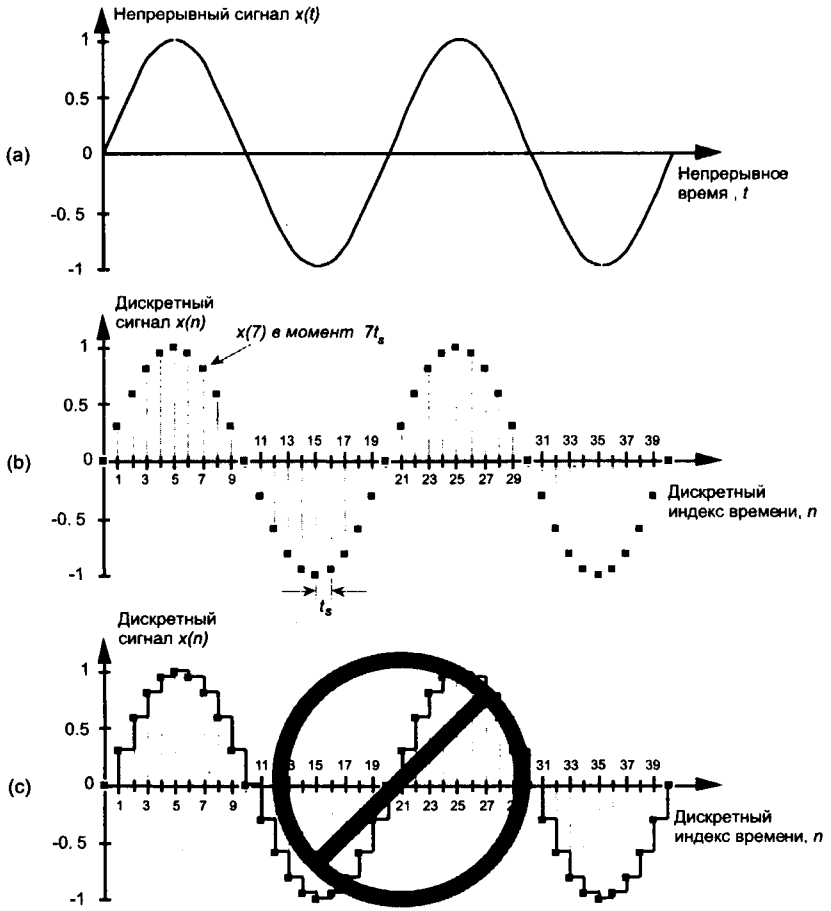


Рис. 1.1. Синусоидальный сигнал во временной области: (a) представление непрерывного сигнала; (b) представление дискретного сигнала; (c) дискретные отсчеты с соединительными линиями

Изобразив (1-1) в виде графика, мы получаем известную синусоидальную кривую, показанную на рисунке 1.1 (a). Если наш непрерывный сигнал физически

[1] Раньше частоту измеряли в *циклах в секунду*; вот почему шкалы настройки старых радиоприемников проградуированы в килоциклах в секунду (kcps) или мегациклах в секунду (Mcps). В 1960 году научное сообщество приняло в качестве единицы измерения частоты Гц в честь немецкого физика Генриха Герца, который в 1887 году впервые продемонстрировал передачу и прием радиоволн.

представляет собой напряжение, мы можем *взять его отсчеты* по одному за каждые t_s секунд с помощью аналого-цифрового преобразователя и представить синусоидальный сигнал в виде последовательности дискретных значений. Изобразив эти значения как точки, мы получим дискретный сигнал, показанный на рисунке 1.1 (b). Мы говорим, что нечто, изображенное на рисунке 1.1 (b), представляет собой «дискретную» версию непрерывного сигнала, показанного на рисунке 1.1 (a). Независимая переменная t в (1-1) и на рисунке 1.1 (a) непрерывна. Независимая *индексная* переменная n на рисунке 1.1 (b) дискретна и может принимать только целые значения. То есть индекс n используется для идентификации отдельных элементов дискретной последовательности на рисунке 1.1 (b).

Не поддавайтесь соблазну соединить точки линиями на рисунке 1.1 (b). По какой-то причине люди (особенно инженеры, имеющие опыт работы с непрерывными сигналами) стремятся соединить точки прямыми линиями или ступенчатой кривой, показанной на рисунке 1.1 (c). Не попадайте в эту с виду невинную ловушку. Соединив точки линиями, вы можете дезориентировать новичка, заставив его забыть, что последовательность $x(n)$ представляет собой всего лишь набор чисел и больше ничего. Помните, что $x(n)$ — дискретная последовательность отдельных значений, и каждое значение изображается как отдельная точка. Дело не в том, что мы не знаем, что лежит между этими точками, а дело в том, что между этими точками *ничего нет*.

Мы можем усилить это представление дискретной последовательности, изображенной на рисунке 1.1 (b), записав эти дискретные значения в следующем виде:

$x(0) = 0$ (1-е значение последовательности, индекс $n = 0$)

$x(1) = 0.31$ (2-е значение последовательности, индекс $n = 1$)

$x(2) = 0.59$ (3-е значение последовательности, индекс $n = 2$)

$x(3) = 0.81$ (4-е значение последовательности, индекс $n = 3$)

... ...

и так далее, (1-2)

где n представляет целочисленную последовательность временного индекса 0, 1, 2, 3 и т. д., а t_s — некоторый постоянный интервал времени. Эти значения отсчетов можно представить кратко и все сразу с помощью дискретного выражения

$$x(n) = \sin(2\pi f_o n t_s) \qquad (1\text{-}3)$$

(Здесь тоже аргумент $2\pi f_o n t_s$ представляет собой угол, измеряемый в радианах.) Обратите внимание на то, что значения индекса n в (1-2) начинаются с 0, а не с 1. В этом нет никакого особого смысла; первым значением с таким же успехом могла быть и единица, но мы начинаем отсчет индекса n с нуля по привычке, потому что, поступая так, мы получаем возможность описывать синусоидальный сигнал, начиная с нулевого момента времени. Переменная $x(n)$ в (1-3) читается как «x от n». Уравнения (1-1) и (1-3) описывают то, что называется *сигналами во временной области*, потому что независимые переменные, непрерывное время t в (1-1) и значения дискретного времени nt_s, используемые в (1-3), являются мерами времени.

Усвоив понятие дискретного сигнала, мы можем сказать, что дискретная система представляет собой набор аппаратурных компонентов или программных

процедур, которые выполняют некоторые операции над дискретными сигналами. Например, дискретная система может представлять собой процесс, который выдает выходную последовательность $y(0), y(1), y(2)$ и т. д., когда на его вход поступает дискретная входная последовательность $x(0), x(1), x(2)$ и т. д., как показано на рисунке 1.2 (a). Снова, чтобы сделать наши обозначения краткими и сохранить контроль над индивидуальными элементами входной и выходной последовательностей, мы используем сокращенные обозначения, показанные на рисунке 1.2 (b), где n представляет собой целочисленную последовательность $0, 1, 2, 3$ и т. д. Таким образом, $x(n)$ и $y(n)$ являются обобщенными переменными, которые обозначают две разные последовательности чисел. Рисунок 1.2 (b) позволяет нам описывать выход системы простыми выражениями, такими как

$$y(n) = 2x(n) - 1 \qquad (1\text{-}4)$$

Для иллюстрации уравнения (1-4) рассмотрим случай, когда $x(n)$ является последовательностью из пяти элементов: $x(0) = 1$, $x(1) = 3$, $x(2) = 5$, $x(3) = 7$ и $x(4) = 9$. В этом случае $y(n)$ также содержит пять элементов $y(0) = 1$, $y(1) = 5$, $y(2) = 9$, $y(3) = 13$ и $y(4) = 17$.

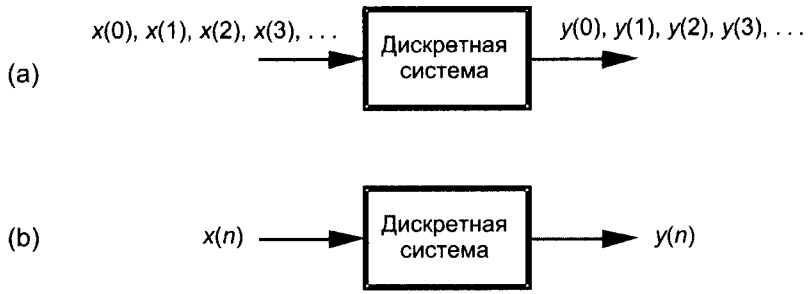


Рис. 1.2. При подаче на вход дискретной системы сигнала система выдает выходной сигнал: (a) входной и выходной сигналы представляют собой последовательности отдельных значений; (b) входной и выходной сигналы обозначаются как $x(n)$ и $y(n)$

Фундаментальное различие в представлении времени в непрерывных и дискретных системах приводит к очень важному различию в том, как представляется частота в непрерывных и в дискретных системах. Чтобы показать это, рассмотрим непрерывный синусоидальный сигнал на рисунке 1.1 (a). Если бы он представлял напряжение между двумя проводами, мы могли бы измерить его частоту, подав его на вход осциллоскопа, анализатора спектра или частотомера. Однако если бы нам дали последовательность значений, подобную приведенной в (1-2), и попросили определить частоту сигнала, который представляется этими числами, мы столкнулись бы с проблемой. Мы построили бы график этих дискретных значений, мы распознали бы на этом графике один период синуса, как на рисунке 1.1 (b). Теперь мы можем сказать, что сигнал повторяется каждые 20 отсчетов, но у нас нет никакого способа определить точное значение частоты только по дискретным отсчетам. Возможно, вы уже догадались, куда я веду. Если бы мы знали интервал времени между отсчетами — период дискретизации t_s — мы могли бы определить абсолютную частоту дискретного синусоидального сигнала.

Если период дискретизации t_s составляет, скажем, 0.05 миллисекунды/отсчет, период синусоидального сигнала равен

$$\begin{aligned} &\textit{Период синусоидального сигнала} = \\ &= (\textit{20 отсчетов/период}) \bullet (\textit{0.05 миллисекунды/отсчет}) = \\ &= \textit{1 миллисекунда} \end{aligned} \tag{1-5}$$

Так как частота синусоидального сигнала обратна его периоду, мы теперь знаем, что абсолютная частота синусоидального сигнала составляет 1/(1 мс) или 1 кГц. С другой стороны, если бы мы установили, что период дискретизации в действительности равен 2 миллисекундам, дискретные отсчеты на рисунке 1.1 (b) представляли бы синусоидальный сигнал, период которого равен 40 миллисекундам, а частота — 25 Гц. Важно здесь то, что в дискретных системах абсолютное значение частоты в Гц зависит от частоты дискретизации $f_s=1/t_s$. Нам придется вспоминать об этой зависимости на протяжении всей оставшейся части книги.

В цифровой обработке сигналов часто бывает необходимо описать частотный состав дискретных сигналов. Когда мы делаем это, такое частотное представление имеет место в так называемой *частотной области*. В качестве примера возьмем дискретную синусоидальную последовательность $x_1(n)$ с произвольной частотой f_o Гц, как показано в левой части рисунка 1.3 (a). Мы можем также описать сигнал $x_1(n)$ так, как показано в правой части рисунка 1.3 (a), показав, что он содержит частоту 1 в единицах f_o и никаких других частот. Хотя мы сейчас на этом не задержимся, обратите внимание на то, что представления в частотной области на рисунке 1.3 сами являются дискретными.

Чтобы проиллюстрировать наши представления во временной и частотной областях дальше, на рисунке 1.3 (b) показан другой дискретный синусоидальный сигнал $x_2(n)$, амплитуда которого равна 0.4, а частота — $2f_o$. Дискретные отсчеты $x_2(n)$ выражаются уравнением

$$x_2(n) = 0.4 \bullet \sin(2\pi\, 2f_o nt_s) \tag{1-6}$$

Когда два синусоидальных сигнала $x_1(n)$ и $x_2(n)$ складываются, давая новый сигнал $x_{sum}(n)$, его уравнение во временной области имеет вид:

$$x_{sum}(n) = x_1(n) + x_2(n) = \sin(2\pi\, 2f_o nt_s) + 0.4 \bullet \sin(2\pi\, 2f_o nt_s) \tag{1-7}$$

а его представления во временной и частотной областях имеют вид, показанный на рисунке 1.3 (c). Рисунок 1.3 (c) помогает нам понять смысл описания в частотной области или спектра $X_{sum}(m)$, показывая, что $X_{sum}(n)$ содержит составляющую с частотой f_o Гц и составляющую пониженной амплитуды с частотой $2f_o$ Гц.

Обратите внимание на три особенности рисунка 1.3. Во-первых, для обозначения временных последовательностей используются строчные буквы, например, "x" в $x_1(n)$, а заглавные буквы используются для обозначения переменных частотной области, например, "X" в $X_1(m)$. Запись $X_1(m)$ читается как «спектральная последовательность икс один от эм». Во-вторых, т. к. представление временной последовательности $x_1(n)$ в частотной области $X_1(m)$ в свою очередь является последовательностью (набором чисел), мы используем индекс "m" для отслеживания отдельных элементов в $X_1(m)$. Можно перечислять члены последовательностей в частотной области точно так же, как мы это делали с членами временной последовательности в (1-2). Например, $X_{sum}(m)$ записывается в виде списка значений как

$X_{sum}(0) = 0$	(1-е значение $X_{sum}(m)$, индекс $m = 0$)
$X_{sum}(1) = 1.0$	(2-е значение $X_{sum}(m)$, индекс $m = 1$)
$X_{sum}(2) = 0.4$	(3-е значение $X_{sum}(m)$, индекс $m = 2$)
$X_{sum}(3) = 0$	(4-е значение $X_{sum}(m)$, индекс $m = 3$)
...	и так далее,

где индекс частоты m представляет собой целочисленную последовательность 0, $1, 2, 3$ и т. д. В-третьих, т. к. синусоидальные сигналы в $x_1(n) + x_2(n)$ имеют равный нулю фазовый сдвиг относительно друг друга, нам нет необходимости беспокоиться об изображении фазовых соотношений в $X_{sum}(m)$ на рисунке 1.3 (с). В общем случае, однако, фазовые соотношения в частотной области имеют большое значение, и мы поговорим на эту тему в главах 3 и 5.

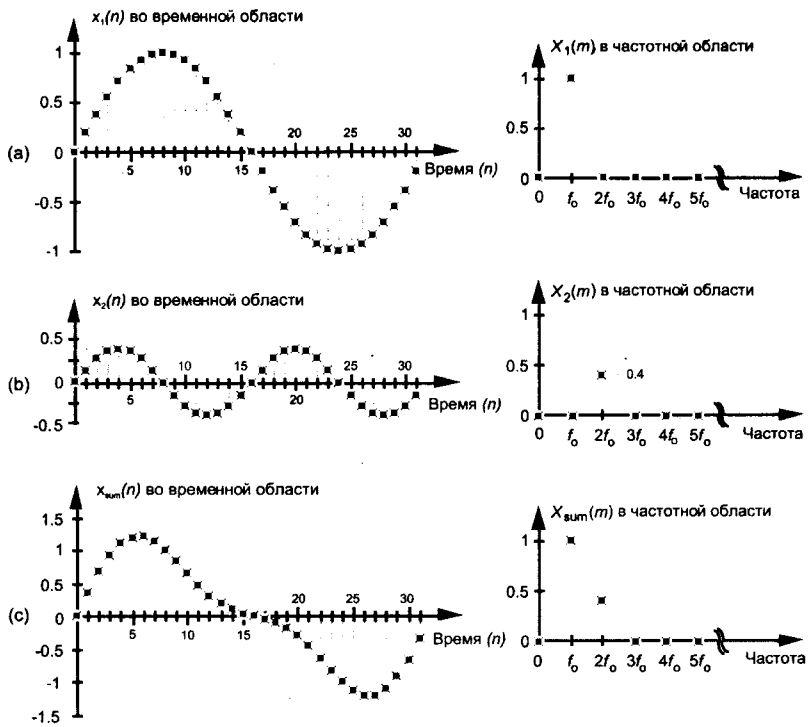


Рис. 1.3. Графические представления во временной и частотной областях: (a) синусоидальный сигнал частотой f_o; (b) синусоидальный сигнал пониженной амплитуды с частотой $2f_o$; (c) сумма первых двух сигналов

Ключевым моментом, о котором нужно помнить, является то, что мы теперь знаем три эквивалентных способа описания дискретных сигналов. Математически мы можем использовать уравнение во временной области, наподобие (1-6). Кроме того, мы можем представлять сигнал во временной области графически, как мы делали это в левой части рисунка 1.3, а также мы можем изобразить соответствующие сигналу дискретные эквиваленты в частотной области, как в правой части рисунка 1.3.

Как оказывается, дискретные сигналы во временной области, которыми мы занимаемся, квантованы не только по времени, их мгновенные значения тоже квантованы. Так как мы представляем все численные значения двоичными числами, разрешающая способность или гранулярность представления значений дискретных чисел ограничена. Хотя квантование мгновенных значений может быть важным моментом — мы рассматриваем его в главе 12 — мы пока не будем беспокоиться о нем.

1.2. Мгновенные значения, амплитуда и мощность сигнала

Определим два важных термина, которые мы будем использовать на протяжении всей книги: мгновенное значение и амплитуда. Не удивительно, что для дилетанта эти термины обычно слабо различимы[1]. В инженерном деле они, однако, обозначают два разных понятия, и мы должны выяснить эту разницу. Мгновенное значение переменной — это мера того, на какую величину и в каком направлении переменная отклоняется от нуля. Таким образом, мгновенные значения сигнала могут быть как положительными, так и отрицательными. Временные последовательности на рисунке 1.3 демонстрировали мгновенные значения отсчетов для трех разных сигналов. Обратите внимание на то, что одни мгновенные значения положительны, а другие — отрицательны.

Модуль переменной — это мера того, насколько ее значение отличается от нуля независимо от направления отклонения. Таким образом, модуль сигнала всегда положителен. На рисунке 1.4 показано, что модуль $x_1(n)$ с рисунка 1.3 (а) равен мгновенному значению, но знак его всегда положительный. Для обозначения модуля $x_1(n)$ мы используем $|x_1(n)|$. Иногда в литературе по цифровой обработке сигналов вместо термина *модуль* употребляется термин *абсолютное значение*. *Амплитудой* сигнала называется модуль наибольшего его отклонения от нуля, следовательно, амплитуда всегда положительна.

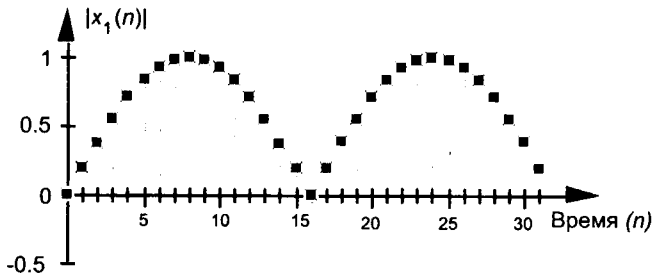


Рис. 1.4. Отсчеты модуля $|x_1(n)|$ сигнала, показанного на рисунке 1.3 (а)

Когда мы изучаем сигналы в частотной области, нас часто интересует уровень мощности этих сигналов. Мощность сигнала пропорциональна квадрату

[1] Конечно, под дилетантами мы понимаем «других людей». Для инженера нейрохирург является дилетантом. Для нейрохирурга инженер является дилетантом.

его амплитуды. Если мы предположим, что коэффициент пропорциональности равен 1, мы можем выразить мощность последовательности во временной или частотной области как

$$x_{pwr}(n) = x(n)^2 = |x(n)|^2 \qquad (1\text{-}8)$$

или

$$X_{pwr}(m) = X(m)^2 = |X(m)|^2 \qquad (1\text{-}8')$$

Очень часто нам требуется знать разницу уровней мощности двух сигналов в частотной области. Из-за квадратичной зависимости мощности от амплитуды два сигнала с небольшой разностью амплитуд будут иметь гораздо большую разность мощностей. На рисунке 1.3, например, амплитуда сигнала $x_1(n)$ в 2.5 раза больше амплитуды сигнала $x_2(n)$, а его мощность в 6.25 раз больше мощности $x_2(n)$. Это показано на рисунке 1.5, где показаны и амплитуда, и мощность $X_{sum}(m)$.

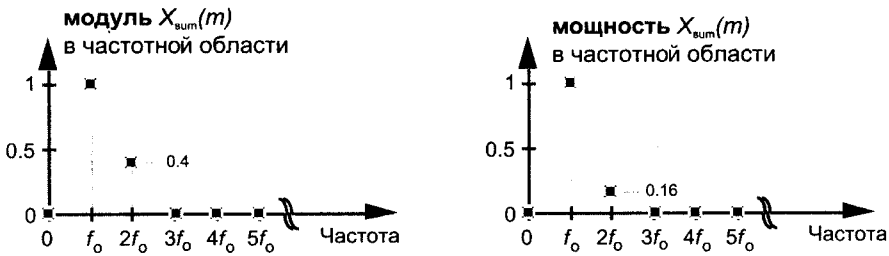


Рис. 1.5. Модуль и мощность сигнала $X_{sum}(n)$ (рисунок 1.3 (c)) в частотной области

На графиках мощности из-за ее квадратичной природы часто приходится отображать в одной системе координат как очень большие, так и очень маленькие значения. Чтобы облегчить построение и восприятие таких графиков, специалисты часто используют значения, выраженные в децибелах, как описано в приложении E.

1.3. Условные обозначения операций обработки сигналов

Для графического изображения реализации операций цифровой обработки сигналов мы будем использовать блок-схемы. Эти блок-схемы будут содержать набор базовых условных обозначений основных операций, наиболее употребительные из которых показаны и определены математически на рисунке 1.6.

На рисунке 1.6 (a) показано поэлементное сложение двух дискретных последовательностей, в результате которого образуется новая последовательность. Если значения индекса времени n нашей последовательности начинаются с 0, мы говорим, что первое значение выходной последовательности равно сумме первого элемента последовательности b и первого элемента последовательности c, или $a(0) = b(0) + c(0)$. Соответственно, второе значение выходной последовательности равно сумме второго элемента последовательности b и второго элемента последовательности c, или $a(1) = b(1) + c(1)$. Уравнение (1-7) дает нам пример сложения двух последовательностей. Операция вычитания, показанная на рисунке 1.6 (b) генерирует выходную последовательность, которая представляет собой

поэлементную разность двух входных последовательностей. Иногда мы должны вычислять элементы новой последовательности, которые являются суммой более чем двух значений. Эта операция, показанная на рисунке 1.6 (с), называется суммированием и встречается очень часто в цифровой обработке сигналов. Обратите внимание на то, что верхнее и нижнее значения индекса суммирования k в выражении на рисунке 1.6 (с) точно указывают нам, какие элементы последовательности b необходимо сложить, чтобы получить требуемое значение $a(n)$. Так как мы будем встречать операцию суммирования очень часто, давайте убедимся в том, что мы правильно поняли ее обозначение. Если мы повторим уравнение операции суммирования здесь, мы получим

$$a(n) = \sum_{k=n}^{n+3} b(k) \tag{1-9}$$

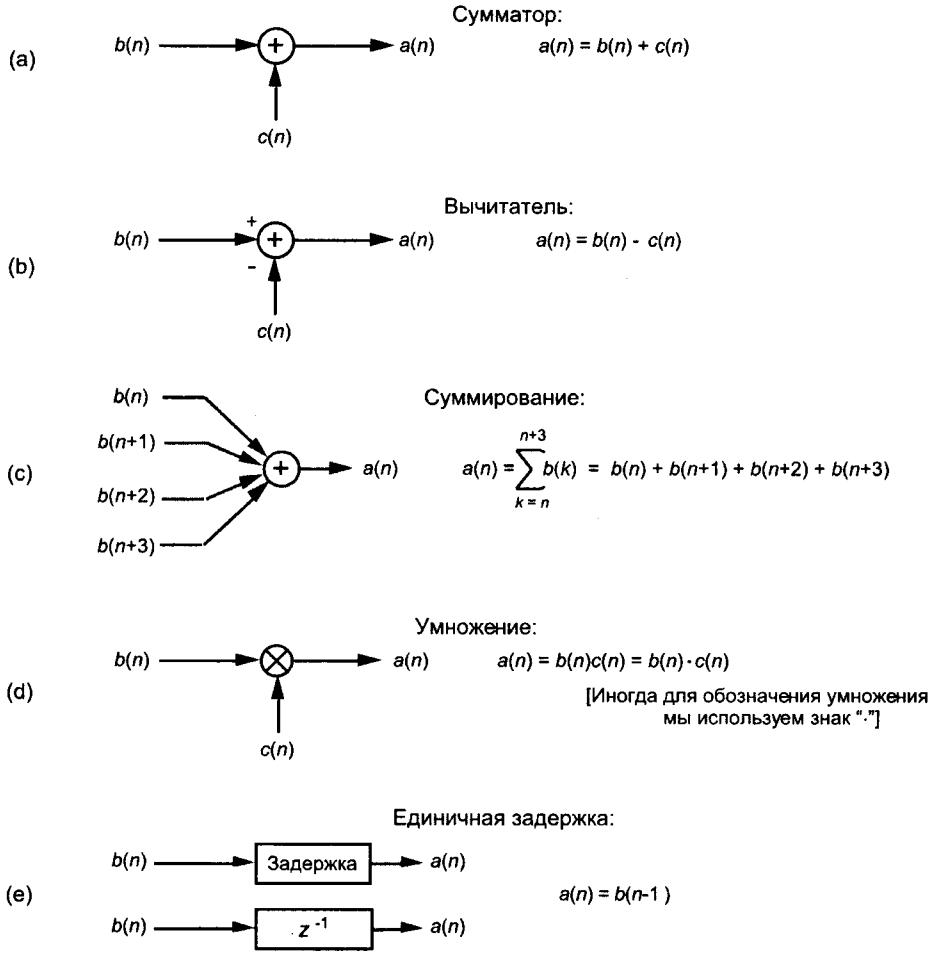


Рис. 1.6. Термины и условные обозначения, используемые в блок-схемах цифровой обработки сигналов

Это значит, что:

при $n = 0$, индекс k принимает значения от 0 до 3, так что
$$a(0) = b(0) + b(1) + b(2) + b(3)$$
при $n = 1$, индекс k принимает значения от 1 до 4, так что
$$a(1) = b(1) + b(2) + b(3) + b(4)$$
при $n = 2$, индекс k принимает значения от 2 до 5, так что
$$a(2) = b(2) + b(3) + b(4) + b(5)$$
при $n = 3$, индекс k принимает значения от 3 до 6, так что
$$a(3) = b(3) + b(4) + b(5) + b(6)$$
$$\ldots$$
и так далее. (1-10)

Мы начнем использовать операцию суммирования всерьез, когда мы будем обсуждать цифровые фильтры в главе 5.

Умножение двух последовательностей показано символически на рисунке 1.6 (d). Умножение генерирует выходную последовательность, которая является поэлементным произведением двух входных последовательностей: $a(0) = b(0)c(0)$, $a(1) = b(1)c(1)$ и так далее. Последняя базовая операция, которую мы будем использовать, на рисунке 1.6 (e) называется *единичной задержкой*. Поскольку в данный момент у нас нет необходимости убеждаться в ее важности, мы просто скажем, что символ единичной задержки обозначает операцию, в результате которой выходная последовательность $a(n)$ равна задержанной входной последовательности $b(n)$. Например, $a(5) = b(4)$, $a(6) = b(5)$, $a(7) = b(6)$ и т. д. Как мы увидим в главе 6, благодаря математическим методам, используемым для анализа цифровых фильтров, единичная задержка часто обозначается как z^{-1}.

Символы на рисунке 1.6 напоминают нам о двух аспектах цифровой обработки сигналов. Первый заключается в том, что операции всегда выполняются над последовательностями отдельных значений, а второй — в том, что элементарные операции сами по себе очень просты. И что интересно, как бы сложно ни выглядели алгоритмы цифровой обработки сигналов, подавляющее большинство их можно реализовать, используя комбинации этих простых операций. Если мы представим себе некоторый алгоритм цифровой обработки сигналов как рецепт, то условные обозначения на рисунке 1.6 — это ингредиенты.

1.4. Введение в дискретные линейные инвариантные во времени системы

Придерживаясь традиции, мы даем введение в линейные инвариантные во времени (ЛИВ) системы в самом начале этой книги. Хотя понимание ЛИВ-систем несущественно для изучения следующих трех глав, при изучении цифровых фильтров мы будем опираться на строгие определения линейности и инвариантности во времени. Мы должны распознавать и понимать понятия линейности и инвариантности во времени не только потому, что огромное большинство дискретных систем, используемых на практике, являются ЛИВ-системами, но и потому, что

ЛИВ-системы очень удобны для анализа. Это хорошая новость для нас, потому что мы можем использовать простые методы для предсказания характеристик любой схемы цифровой обработки сигналов, если только она линейна и инвариантна во времени. Так как линейность и инвариантность во времени — две очень важные характеристики систем, имеющие особые свойства, мы обсудим их в следующих разделах.

1.5. Дискретные линейные системы

Термин линейная определяет особый класс систем, выходной сигнал которых представляет собой суперпозицию, или сумму, отдельных выходных сигналов, полученных при подаче на вход системы составляющих входного сигнала по отдельности. Например, мы можем сказать, что при подаче на вход системы сигнала $x_1(n)$ мы получим на выходе $y_1(n)$. Можно обозначить эту ситуацию символически с помощью следующего выражения:

$$x_1(n) \text{ вызывает реакцию } y_1(n) \tag{1-11}$$

При подаче на вход другого сигнала $x_2(n)$ мы получим на выходе сигнала $y_2(n)$ в соответствии с

$$x_2(n) \text{ вызывает реакцию } y_2(n) \tag{1-12}$$

Чтобы система была линейна, необходимо, чтобы при подаче на ее вход суммы $x_1(n) + x_2(n)$ выходной сигнал был суммой индивидуальных выходных сигналов, так что

$$x_1(n) + x_2(n) \text{ вызывает реакцию } y_1(n) + y_2(n) \tag{1-13}$$

Кроме того, понятие линейности включает в себя такое свойство как *пропорциональность*. Это значит, что если входные сигналы умножаются на коэффициенты c_1 и c_2, то составляющие выходной последовательности также умножаются на эти же коэффициенты, т. е.

$$c_1x_1(n) + c_2x_2(n) \text{ вызывает реакцию } c_1y_1(n) + c_2y_2(n) \tag{1-14}$$

В литературе свойство пропорциональности называют также *свойством гомогенности* или однородности. Запомнив все это, продемонстрируем понятие линейности на примере.

1.5.1. Пример линейной системы

Чтобы продемонстрировать линейность системы, предположим, что мы имеем дискретную систему, показанную на рисунке 1.7 (а), выходной сигнал которой определяется как

$$y(n) = -x(n)/2 \tag{1-15}$$

то есть выходная последовательность равна входной, взятой с обратным знаком и с уменьшенной в 2 раза амплитудой. Если мы подадим на вход последовательность $x_1(n)$, представляющую собой синусоидальный сигнал с частотой 1 Гц, дискретизированный с частотой 32 отсчета на период, мы получим выходную последовательность $y_1(n)$, показанную на рисунке 1.7 (b). График в правой части

рисунка 1.7 (b) представляет частотный спектр выходной последовательности $y_1(n)$, который показывает, что выходной сигнал содержит единственный тон с амплитудой –0.5 и частотой 1 Гц[1]. Далее, подавая входную последовательность $x_2(n)$, представляющую собой синусоидальный сигнал частотой 3 Гц, на выходе получаем последовательность $y_2(n)$, как показано в центре рисунка 1.7 (c). Спектр выходной последовательности $y_2(n)$, $Y_2(m)$, подтверждающий присутствие единственной синусоиды с частотой 3 Гц, показан в правой части рисунка 1.7 (c). Наконец — именно в этот момент проявляется линейность — если мы подаем входную последовательность $x_3(n)$, которая представляет собой сумму двух синусоид с частотами 1 Гц и 3 Гц, мы получаем выходную последовательность $y_3(n)$, показанную в центре рисунка 1.7 (d). Обратите внимание на то, что $y_3(n)$ представляет собой поэлементную сумму $y_1(n)$ и $y_2(n)$. Рисунок 1.7 (d) показывает также, что спектр выходного сигнала $Y_3(m)$ есть сумма $Y_1(m)$ и $Y_2(m)$. Это и есть линейность.

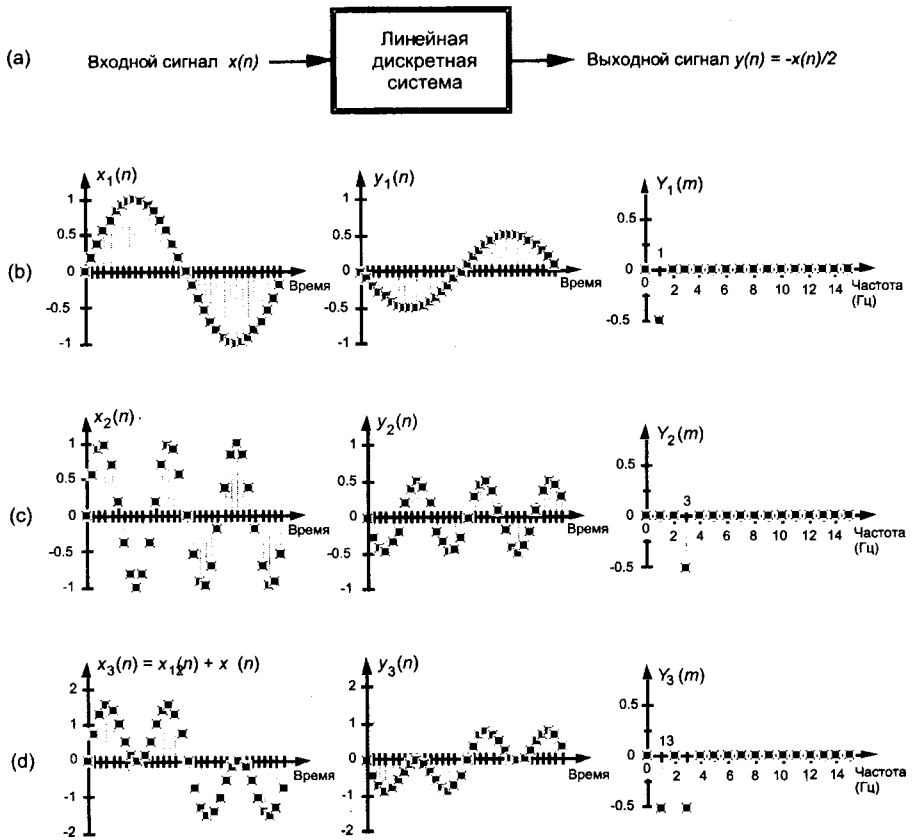


Рис. 1.7. Соотношения вход-выход линейной системы: (a) блок-схема системы, где $y(n) = -x(n)/2$; (b) вход и выход системы при подаче синусоидального сигнала частотой 1 Гц; (c) при подаче синусоиды частотой 3 Гц; (d) при подаче суммы двух синусоидальных сигналов с частотами 1 Гц и 3 Гц

[1] Здесь мы допускаем использование отрицательно амплитуды, чтобы показать, что отсчеты выходного сигнала имеют знак, противоположный знаку входных отсчетов, не прибегая к понятию фазы — (*прим. перев.*).

1.5.2. Пример нелинейной системы

Легко показать, как нелинейная система дает выходной сигнал, не равный сумме $y_1(n)$ и $y_2(n)$, когда у нее на входе $x_1(n) + x_2(n)$. Простой пример нелинейной дискретной системы приведен на рисунке 1.8 (a), где выходной сигнал равен квадрату входного в соответствии с

$$y(n)=[x(n)]^2 \qquad (1\text{-}16)$$

Чтобы предсказать выходной сигнал в случае, когда на вход системы подаются простые синусоидальные сигналы, мы используем хорошо известные тригонометрические тождества и немного аналитических преобразований. Используя форму уравнения (1-3), запишем синусоидальную последовательность с частотой f_o = 1 Гц в виде

$$x_1(n) = \sin(2\pi f_o nt_s) = \sin(2\pi \bullet 1 \bullet nt_s) \qquad (1\text{-}17)$$

Уравнение (1-17) описывает последовательность $x_1(n)$ в левой части рисунка 1.8 (b). При подаче на вход последовательности $x_1(n)$ выходная последовательность нелинейной системы $y_1(n)$ равна квадрату синуса частотой 1 Гц или

$$y_1(n) = [x_1(n)]^2 = \sin(2\pi \bullet 1 \bullet nt_s)\sin(2\pi \bullet 1 \bullet nt_s) \qquad (1\text{-}18)$$

Мы можем упростить выражение для $y_1(n)$ в (1-18), используя следующее тригонометрическое тождество:

$$\sin\alpha \bullet \sin\beta = [\cos(\alpha - \beta)]/2 - [\cos(\alpha + \beta)]/2\,. \qquad (1\text{-}19)$$

Используя (1-19), мы можем $y_1(n)$ выразить как

$$y_1(n) = [\cos(2\pi \bullet 1 \bullet nt_s - 2\pi \bullet 1 \bullet nt_s)]/2 - [\cos(2\pi \bullet 1 \bullet nt_s + 2\pi \bullet 1 \bullet nt_s)]/2 =$$
$$= \cos(0)/2 - \cos(4\pi \bullet 1 \bullet nt_s)/2 = 1/2 - \cos(2\pi \bullet 2 \bullet nt_s)/2\,, \qquad (1\text{-}20)$$

что показано как положительная последовательность в центре рисунка 1.8 (b). Так как, согласно (1-19), умножение двух синусоид приводит к появлению суммы $(\alpha + \beta)$ и разности $(\alpha - \beta)$ частот, выходная последовательность $y_1(n)$ будет представлять собой косинусоидальный сигнал частотой 2 Гц и амплитудой 0.5, сложенный с константой 1/2. Константа 1/2 в (1-20) интерпретируется как составляющая с частотой 0 Гц, что отражено в спектре $Y_1(m)$ на рисунке 1.8 (b). Мы могли бы проделать те же выкладки для последовательности $x_2(n)$ и установить, что выходная последовательность нелинейной системы $y_2(n)$ в этом случае будет содержать составляющие с частотами 0 Гц и 6 Гц, как показано на рисунке 1.8 (c).

Нелинейность системы становится очевидной, когда мы подаем на ее вход последовательность $x_3(n)$, образованную в результате суммирования синусоидальных сигналов с частотами 1 Гц и 3 Гц, как показано на рисунке 1.8 (d). Мы можем предсказать частотный состав выходной последовательности $y_3(n)$, используя алгебраическое тождество

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1\text{-}21)$$

где a и b представляют слагаемые входной последовательности. Из (1-19) следует, что член a^2 в (1-21) приводит к появлению синусоидальных составляющих с частотами 0 Гц и 3 Гц, показанных на рисунке 1.8 (b). Аналогично, член b^2 дает

еще одну составляющую с частотой 0 Гц и синусоиду с частотой 6 Гц, показанные на рисунке 1.8 (с). Но член $2ab$ приводит к появлению в $y_3(n)$ синусоидальных составляющих с частотами 2 Гц и 4 Гц. Мы можем показать это аналитически, используя (1-19) и выражая член $2ab$ в (1-21) как

$$2ab = 2 \bullet \sin(2\pi \bullet 1 \bullet nt_s) \bullet \sin(2\pi \bullet 3 \bullet nt_s) =$$

$$= [2\cos(2\pi \bullet 1 \bullet nt_s - 2\pi \bullet 3 \bullet nt_s)]/2 - [2\cos(2\pi \bullet 1 \bullet nt_s + 2\pi \bullet 3 \bullet nt_s)]/2 =$$

$$= \cos(2\pi \bullet 1 \bullet nt_s) - \cos(2\pi \bullet 4 \bullet nt_s)\,. \qquad (1\text{-}22)^1$$

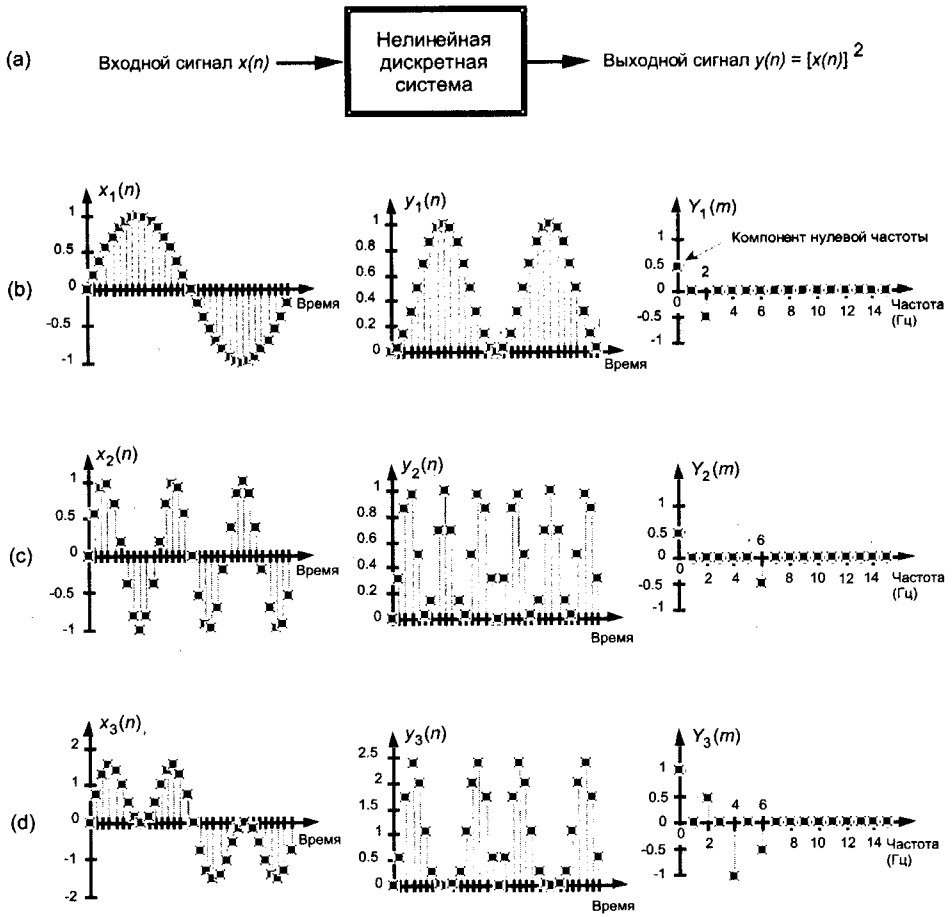


Рис. 1.8. Соотношения вход-выход нелинейной системы: (a) блок-схема системы, где $y(n) = [x(n)]^2$; (b) вход и выход системы при подаче синусоидального сигнала частотой 1 Гц; (c) при подаче синусоидального сигнала частотой 3 Гц; (d) при подаче суммы синусоидальных сигналов с частотами 1 Гц и 3 Гц

---

[1] Первый член в (1-22) выглядит как $\cos(2\pi nt_s - 6\pi nt_s) = \cos(-4\pi nt_s) = \cos(-2\pi 2nt_s)$. Однако, т. к. косинус является четной функцией, т. е. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, мы можем записать этот член как $\cos(2\pi 2nt_s)$.

Уравнение (1-22) говорит нам, что в $y_3(n)$ присутствуют две дополнительные составляющие, обусловленные нелинейностью системы: косинусоидальный сигнал частотой 2 Гц, амплитуда которого равна 1, и косинусоидальный сигнал частотой 4 Гц, имеющий амплитуду 1 и включенный в состав сигнала со знаком минус. Эти спектральные компоненты показаны в составе $Y_3(m)$ в правой части рисунка 1.8 (d).

Обратите внимание на то, что, когда на вход нелинейной системы подается сумма двух синусоид, выходной сигнал содержит синусоиды (см. (1-22)), которых нет в случае, когда каждое из слагаемых подается на вход системы отдельно. Эти дополнительные синусоиды появились в результате взаимодействия двух входных синусоид при выполнении возведения в квадрат. Это и есть нелинейность, условие (1-13) не выполняется. (Инженеры в области электротехники и электроники хорошо знакомы с этим явлением как с *интермодуляционными искажениями*.) Хотя нелинейные системы трудно анализировать, они иногда используются на практике. Например, в работах [2], [3] и [4] описывается их применение при построении нелинейных цифровых фильтров. Напомним еще раз: (1-13) и (1-14) утверждают, что выходной сигнал линейной системы при подаче на ее вход суммы отдельных сигналов представляет собой суперпозицию (сумму) отдельных выходных сигналов. Они также требуют, чтобы выходная последовательность $y_1(n)$ зависела только от $x_1(n)$ и от характеристик системы и не зависела от другой составляющей входного сигнала $x_2(n)$, т. е. чтобы отсутствовало взаимодействие входных сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$ на выходе линейной системы.

1.6. Инвариантные во времени системы

Инвариантная во времени система — это система, для которой задержка (или сдвиг) во времени входной последовательности вызывает эквивалентную временную задержку выходной последовательности. Помня о том, что n — просто индексная переменная, которую мы используем, чтобы отслеживать входные и выходные отсчеты, скажем, что система выдает на выход последовательность $y(n)$ при подаче на вход последовательности $x(n)$ или

$$x(n) \text{ вызывает реакцию } y(n). \qquad (1\text{-}23)$$

Чтобы система была инвариантной во времени, для сдвинутой версии исходного сигнала $x(n)$, $x'(n)$ должно выполняться следующее соотношение:

$$x'(n) = x(n+k) \text{ вызывает реакцию } y'(n) = y(n+k), \qquad (1\text{-}24)$$

где k — некоторое целое число, представляющее задержку в k периодов дискретизации. Чтобы система была инвариантной во времени, условие (1-24) должно выполняться для любого целого k и для любой входной последовательности.

1.6.1. Пример инвариантной во времени системы

Рассмотрим простой пример инвариантности во времени, показанный на рисунке 1.9. Предположим, что исходная входная последовательность представляет собой синусоидальную последовательность единичной амплитуды и частотой 1 Гц, выходная последовательность обозначена как $y(n)$, как показано на рисунке 1.9 (b).

Рассмотрим другую входную последовательность $x'(n)$ вида

$$x'(n) = x(n+4)\,. \qquad (1\text{-}25)$$

Уравнение (1-25) показывает, что входная последовательность $x'(n)$ совпадает с последовательностью $x(n)$, сдвинутой на четыре отсчета влево, то есть $x'(0) = x(4)$, $x'(1) = x(5)$, $x'(2) = x(6)$ и так далее, как показано в левой части рисунка 1.9 (c). Дискретная система инвариантна во времени, потому что выходная последовательность $y'(n)$ равна последовательности $y(n)$, сдвинутой влево на четыре отсчета, или $y'(n) = y(n+4)$. Мы можем видеть, что $y'(0) = y(4)$, $y'(1) = y(5)$, $y'(2) = y(6)$ и так далее, как показано на рисунке 1.9 (c). Для инвариантных во времени систем величина сдвига по времени последовательности y равна величине сдвига по времени последовательности x.

Некоторые авторы поддаются соблазну определять инвариантную во времени систему как такую систему, параметры которой не меняются со временем. Это определение страдает неполнотой и может причинить нам неприятности, если мы не будем достаточно внимательны. Мы просто остановимся на формальном определении, гласящем, что инвариантная во времени система — это система, для которой сдвиг во времени входной последовательности приводит к равному сдвигу во времени выходной последовательности. Между прочим, в литературе инвариантные во времени системы часто называют *инвариантными относительно сдвига* системами[1].

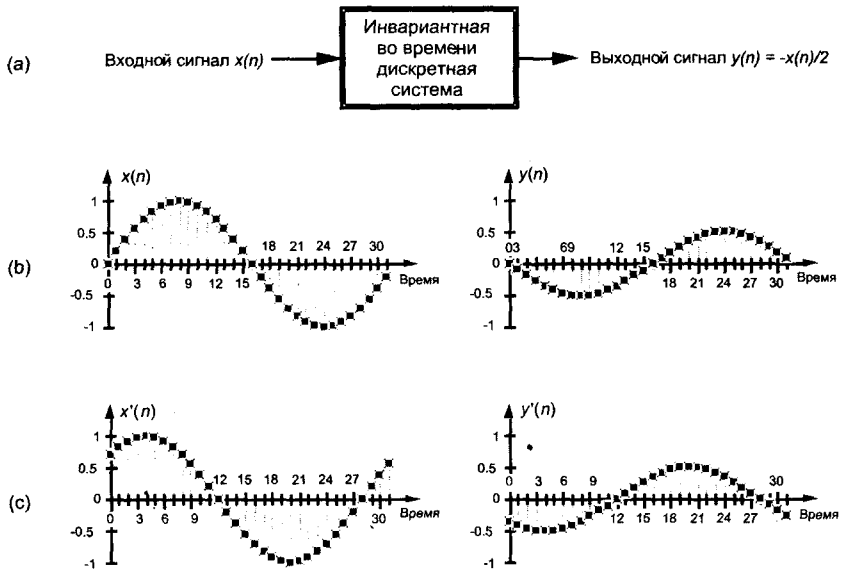


Рис. 1.9. Соотношения вход-выход для инвариантной во времени системы: (a) блок-схема системы, для которой $y(n) = -x(n)/2$; (b) вход и выход системы при подаче синусоидального сигнала частотой 1 Гц; (c) вход и выход системы при подаче синусоидального сигнала частотой 1 Гц, сдвинутого на четыре отсчета. Если $x'(n) = x(n+4)$, то $y'(n) = y(n+4)$

[1] Примером дискретного процесса, который не является инвариантным во времени, является процесс понижения частоты дискретизации или децимация (прореживание), описанный в главе 10.

1.7. Свойство коммутативности линейных инвариантных во времени систем

Хотя мы не будем обосновывать этот факт до раздела 6.8, сейчас вполне можно понять, что ЛИВ-системы обладают полезным свойством коммутативности, согласно которому их порядок следования может быть изменен без изменения результирующего выходного сигнала. Эта ситуация показана на рисунке 1.10, где две разные ЛИВ-системы соединены последовательно.

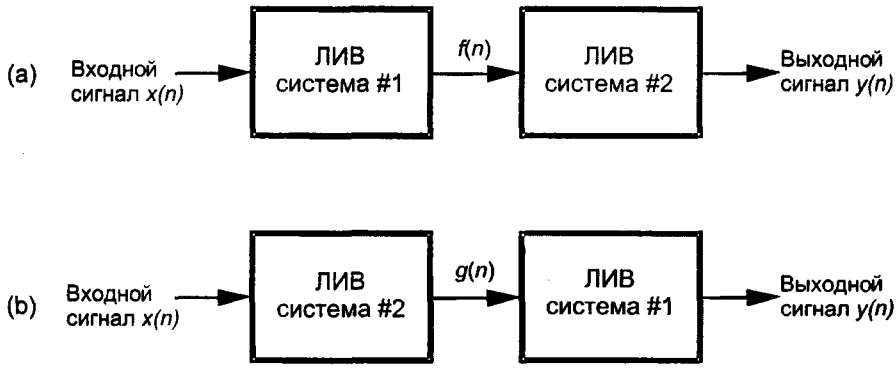


Рис. 1.10. Последовательное включение линейных инвариантных во времени (ЛИВ) систем: (a) исходное соединение ЛИВ-систем; (b) изменение порядка включения двух систем не изменяет результирующий выходной сигнал $y(n)$

Изменение порядка включения каскадированных систем не изменяет окончательный выходной сигнал. Хотя промежуточные последовательности $f(n)$ и $g(n)$ в общем случае не будут совпадать, обе пары ЛИВ-систем будут иметь идентичные выходные последовательности $y(n)$. Это свойство коммутативности приходит на помощь разработчикам цифровых фильтров, как мы увидим в главах 5 и 6.

1.8. Анализ линейных инвариантных во времени систем

Как утверждалось выше, ЛИВ-системы можно анализировать с целью предсказания их свойств. В частности, если мы знаем *импульсную характеристику* некоторой ЛИВ-системы, мы можем вычислить все, что можно узнать об этой системе, т. е. импульсная характеристика системы полностью характеризует ее. Под импульсной характеристикой мы понимаем выходную последовательность системы во временной области при подаче на вход системы единственного импульса, равного единице, (единичного импульса), которому предшествуют и за которым следуют нулевые отсчеты, как показано на рисунке 1.11 (b).

Зная импульсную характеристику ЛИВ-системы, мы можем определить выходную последовательность для любой входной последовательности, т. к. выходная последовательность равна *свертке* входной последовательности и импульсной характеристики. Более того, имея импульсную характеристику во временной области, мы можем найти *частотную характеристику системы*, взяв преобразование Фурье в форме *дискретного преобразования Фурье* от импульсной характеристики [5].

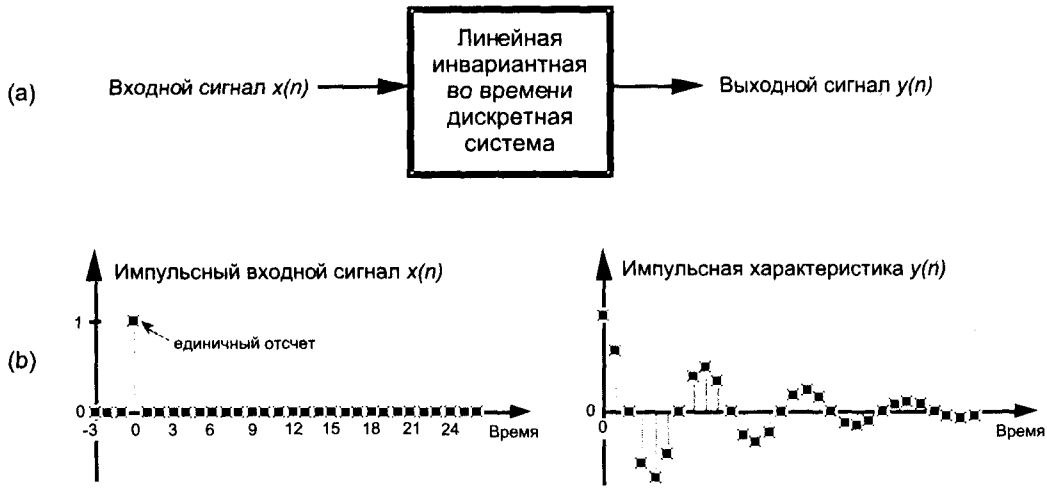


Рис. 1.11. Импульсные характеристики ЛИВ-систем: (a) блок-схема системы; (b) входная последовательность $x(n)$ и импульсная характеристика $y(n)$

Не расстраивайтесь, если вы не совсем четко представляете себе, что такое свертка, частотная характеристика или дискретное преобразование Фурье. Мы введем эти понятия постепенно и аккуратно по мере надобности в последующих главах. Здесь же следует уяснить себе, что ЛИВ-системы могут проектироваться и анализироваться с использованием ряда понятных и мощных методов. Эти методы мы будем добавлять к нашему инструментарию по мере продвижения в изучении цифровой обработки сигналов.

Библиография

1. Karplus, W. J., and Soroka, W. W. *Analog Methods*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1959, p. 117.

2. Mikami, N., Kobayashi, M., and Yokoyama, Y. «A New DSP-Oriented Algorithm for Calculation of the Square Root Using a Nonlinear Digital Filter,» IEEE *Trans. on Signal Processing*, Vol. 40, No. 7, July 1992.

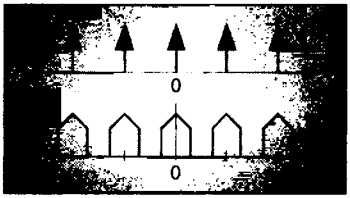
3. Heinen, P., and Neuvo, Y. «FIR-Median Hybrid Filters,» IEEE *Trans. on Acoust. Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, No. 6, June 1987.

4. Oppenheim, A., Schafer, R., and Stockham, T. «Nonlinear Filtering of Multiplied and Convolved Signals,» *Proc. IEEE*, Vol. 56, August 1968.

5. Pickerd, John. «Impulse-Response Testing Lets a Single Test Do the Work of Thousands,» *EDN*, April 27, 1995.

Глава 2

Периодическая дискретизация



Периодическая дискретизация — процесс представления непрерывного сигнала последовательностью дискретных значений — используется во всех областях цифровой обработки сигналов. На практике дискретизация выполняется путем подачи непрерывного сигнала на вход аналого-цифрового преобразователя (АЦП), который выдает на выход последовательность цифровых значений. Поскольку теория дискретизации играет важную роль в определении точности и реализуемости любой схемы цифровой обработки сигналов, нам потребуется уверенное знание эффектов периодической дискретизации, которые часто понимаются не совсем правильно. Первое, что необходимо выяснить в отношении дискретизации — как часто следует брать отсчеты непрерывного сигнала, чтобы сохранить содержащуюся в нем информацию. Мы можем дискретизировать непрерывный сигнал с любой частотой, с какой пожелаем, и получать последовательность дискретных значений, но возникает вопрос: насколько хорошо эти значения представляют исходный сигнал? Давайте получим ответ на этот вопрос и параллельно исследуем различные методы дискретизации, используемые в цифровой обработке сигналов.

2.1. Наложение: неоднозначность представления сигнала в частотной области

Существует неоднозначность в частотной области, связанная с отсчетами дискретных сигналов, которая отсутствует в мире непрерывных сигналов, и мы можем понять влияние этой неопределенности, разобравшись в природе дискретных данных. Для примера предположим, что вы имеете следующую последовательность значений:

$$x(0) = 0$$
$$x(1) = 0.866$$
$$x(2) = 0.866$$
$$x(3) = 0$$

$$x(4) = -0.866$$
$$x(5) = -0.866$$
$$x(6) = 0,$$

и вам сказали, что эти значения представляют мгновенные значения синусоидального сигнала во временной области, взятые через одинаковые интервалы времени. А затем вас попросили начертить график этого синусоидального сигнала. Вы, видимо, начали бы с изображения последовательности значений, показанной на рисунке 2.1 (a), точками. Затем, вероятно, вы начертили бы синусоиду, показанную на рисунке 2.1 (b) сплошной линией, которая проходит через точки, изображающие нашу последовательность.

Другой человек, однако, мог бы начертить синусоиду, показанную на рисунке 2.1 (b) более светлой линией. Мы видим, что исходная последовательность с равной достоверностью могла бы представлять дискретизированные версии обеих синусоид. Главное здесь то, что, если последовательность данных представляет собой равноотстоящие по времени отсчеты синусоиды, мы не можем однозначно определить частоту синусоиды только по этим отсчетам.

Знакомство с математическими истоками этой частотной неоднозначности позволяет нам не только справиться с ней, но и извлечь из неё пользу. Выведем выражение для этой неопределенности в частотной области, а затем посмотрим несколько конкретных примеров. Рассмотрим непрерывный синусоидальный сигнал, определенный как

$$x(t) = \sin(2\pi f_o t). \qquad (2\text{-}1)$$

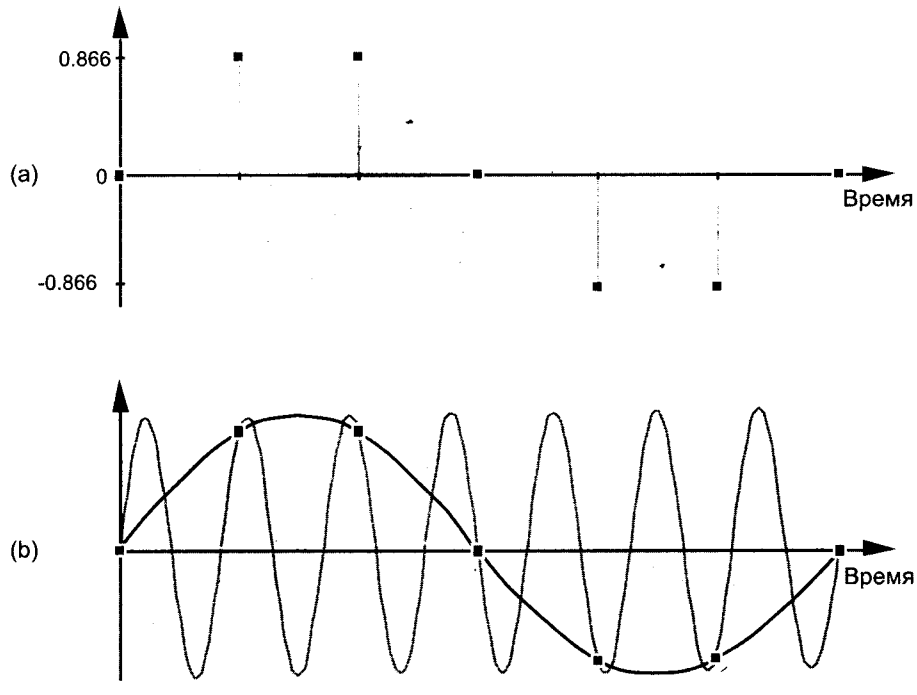


Рис. 2.1. Частотная неоднозначность: (a) дискретная последовательность значений; (b) две разные синусоиды, которые проходят через точки, соответствующие отсчетам дискретной последовательности

Этот сигнал $x(t)$ представляет собой искусственный синусоидальный сигнал, частота которого равна f_o Гц. Теперь дискретизируем $x(t)$ с частотой f_s отсчетов в секунду, т. е. через равные интервалы времени длительностью t_s секунд, где $t_s=1/f_s$. Если мы начинаем дискретизацию в момент $t = 0$, то получим отсчеты в моменты времени $0t_s$, $1t_s$, $2t_s$ и так далее. Таким образом, согласно (2-1), первые n последовательных отсчетов имеют значения

$$\begin{array}{ll} \text{0-й отсчет} & x(0) = \sin(2\pi f_o 0 t_s) \\ \text{1-й отсчет} & x(1) = \sin(2\pi f_o 1 t_s) \\ \text{2-й отсчет} & x(2) = \sin(2\pi f_o 2 t_s) \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ n\text{-й отсчет} & x(n) = \sin(2\pi f_o n t_s) \end{array} \qquad (2\text{-}2)$$

Выражение (2-2) определяет значение n-го отсчета последовательности $x(n)$ как значение исходного сигнала в момент времени nt_s. Поскольку два значения синусоиды идентичны, если соответствующие значения аргумента разнесены на интервал, кратный 2π радиан т. е., $\sin(\phi) = \sin(\phi+2\pi m)$, где m — любое целое число, мы можем модифицировать (2-2) следующим образом:

$$x(n) = \sin(2\pi f_o nt_s) = \sin(2\pi f_o nt_s + 2\pi m) = \sin(2\pi(f_o + m/(nt_s))nt_s) \qquad (2\text{-}3)$$

Если мы выберем m кратным n, $m = kn$, мы можем заменить отношение m/n в (2-3) целочисленной переменной k, так что

$$x(n) = \sin(2\pi(f_o + k/t_s)nt_s)\,. \qquad (2\text{-}4)$$

Поскольку $f_s=1/t_s$, мы можем приравнять последовательности $x(n)$ в (2-2) и (2-4):

$$x(n) = \sin(2\pi f_o nt_s) = \sin(2\pi(f_o + kf_s)nt_s). \qquad (2\text{-}5)$$

Следовательно, множители f_o и $(f_o+ kf_s)$ в (2-5) дают одинаковый результат. Смысл (2-5) имеет критическое значение. Это выражение показывает, что последовательность цифровых отсчетов $x(n)$, представляющая синусоиду частотой f_o Гц, точно так же представляет синусоиды с другими частотами, а именно $f_o + kf_s$. Это одно из важнейших соотношений в области цифровой обработки сигналов. Это нить, которой сшиты все схемы дискретизации. Словами смысл (2-5) можно выразить так:

При дискретизации с частотой f_s отсчетов в секунду мы не можем различить дискретизированные значения синусоиды частотой f_o Гц и синусоиды частотой $(f_o + kf_s)$ Гц, если k — любое положительное или отрицательное целое число.

Это действительно так. Никакая последовательность значений, хранимая в памяти компьютера, например, не может однозначно представлять одну и только одну синусоиду без дополнительной информации. Это положение в равной мере применимо к выходным отсчетам АЦП и к отсчетам сигналов, сгенерированных компьютерными программами. Дискретная природа любой последовательности значений приводит к тому, что эта последовательность представляет бесконечное количество разных синусоид.

Формула (2-5) оказывает влияние на все схемы цифровой обработки сигналов. В этом лежит причина того, что, хотя мы показали это только для синусоидальных сигналов, спектр любой дискретной последовательности значений содержит

периодически повторяющиеся копии исходного спектра непрерывного сигнала (подробнее мы поговорим об этом в главе 3). Период повторения этих копий спектра в частотной области всегда равен f_s, и периодический спектр простирается *от постоянной составляющей до бесконечности* в обоих направлениях частотной оси. Это происходит потому, что k в (2-5) может быть любым положительным или отрицательным целым числом. (В главах 5 и 6 мы узнаем, что (2-5) является причиной периодичности частотных характеристик всех цифровых фильтров в частотной области и играет важную роль при анализе и проектировании популярного типа цифровых фильтров, известных как фильтры с бесконечной импульсной характеристикой.)

Чтобы продемонстрировать влияние (2-5), построим на рисунке 2.2 и рассмотрим процесс дискретизации синусоиды частотой 7 кГц с частотой дискретизации 6 кГц. Отсчеты берутся каждую 1/6000 секунды или один раз за каждые 167 микросекунд, а их значения изображены на рисунке 2.2 (a) точками.

Заметьте, что значения отсчетов вообще не изменились бы, если бы вместо нашей синусоиды мы дискретизировали синусоиду частотой 1 кГц. В этом примере параметры (2-5) равны: $f_0 = 7$ кГц, $f_s = 6$ кГц и $k = -1$, так что $f_0 + kf_s = [7+(-1 \cdot 6)] = 1$ кГц. Проблема состоит в том, что никакой алгоритм обработки не может определить, является ли данная последовательность дискретных отсчетов, значения которых показаны точками, результатом дискретизации синусоиды частотой 7 кГц или синусоиды частотой 1 кГц. Если подать эти значения на некоторый цифровой прибор, который измеряет энергию сигнала на частоте 1 кГц, то выход прибора покажет энергию на частоте 1 кГц. Но мы-то знаем, что в нашем исходном сигнале нет составляющих с частотой 1 кГц — наш входной сигнал представляет собой чистый тон с частотой 7 кГц. Формула (2-5) заставляет синусоиду с именем 7 кГц выступать под *псевдонимом* (alias) 1 кГц. Попросить кого-нибудь определить, синусоида какой частоты дала отсчеты, показанные на рисунке 2.2 (a), — это то же самое, что спросить: «Когда я сложил два числа, я получил сумму четыре. Какие числа я складывал?» Ответ состоит в том, что существует бесконечное количество пар чисел, сумма которых дает четыре.

Рисунок 2.2 (b) показывает другой пример частотной неоднозначности, которую мы будем называть *наложением* (*aliasing*), когда синусоида частотой 4 кГц может быть принята за синусоиду частотой −2 кГц. На рисунке 2.2 (b) параметры (2-5) имеют значения: $f_0 = 4$ кГц, $f_s = 6$ кГц и $k = -1$, так что $f_0 + kf_s = [4+(-1 \cdot 6)] = -2$ кГц. Как и раньше, если мы рассмотрим внимательно последовательность чисел, представляющих точки на рисунке 2.2 (b), то не сможем определить, какая синусоида была дискретизирована — тон частотой 4 кГц или тон частотой −2 кГц. (Хотя понятие отрицательной частоты может показаться несколько странным, оно обеспечивает нам красивую и состоятельную методику предсказания эффектов дискретизации. В главе 8 обсуждаются отрицательные частоты и их связь с действительными и комплексными сигналами.)

Если мы ограничим интересующий нас спектральный диапазон частотами в пределах $\pm f_s/2$ Гц, предыдущие два примера приобретают особое значение. Частота $f_s/2$ в теории дискретизации является важной величиной и в литературе известна под разными названиями[1]: критическая частота Найквиста, половина

[1] В русскоязычной литературе эта частота традиционно не имеет специального названия, но в последнее время под влиянием англоязычной литературы появилась тенденция называть ее частотой Найквиста — (*прим. перев.*).

частоты Найквиста, частота заворота. Графическое изображение двух наших примеров наложения частот приведено на рисунке 2.2 (с). Нас интересуют компоненты сигнала, которые вследствие наложения отображаются в диапазоне частот от $-f_s/2$ до $+f_s/2$. Обратите внимание на то, что в интересующем нас диапазоне частот (±3 кГц, т. к. $f_s = 6$ кГц), имеется энергия на частотах –2 кГц и +1 кГц, полученная вследствие наложения частот 4 кГц и 7 кГц, соответственно. Заметим также, что вертикальные позиции точек на рисунке 2.2 (с) не имеют значения, но их горизонтальные позиции показывают, какие частоты накладываются друг на друга.

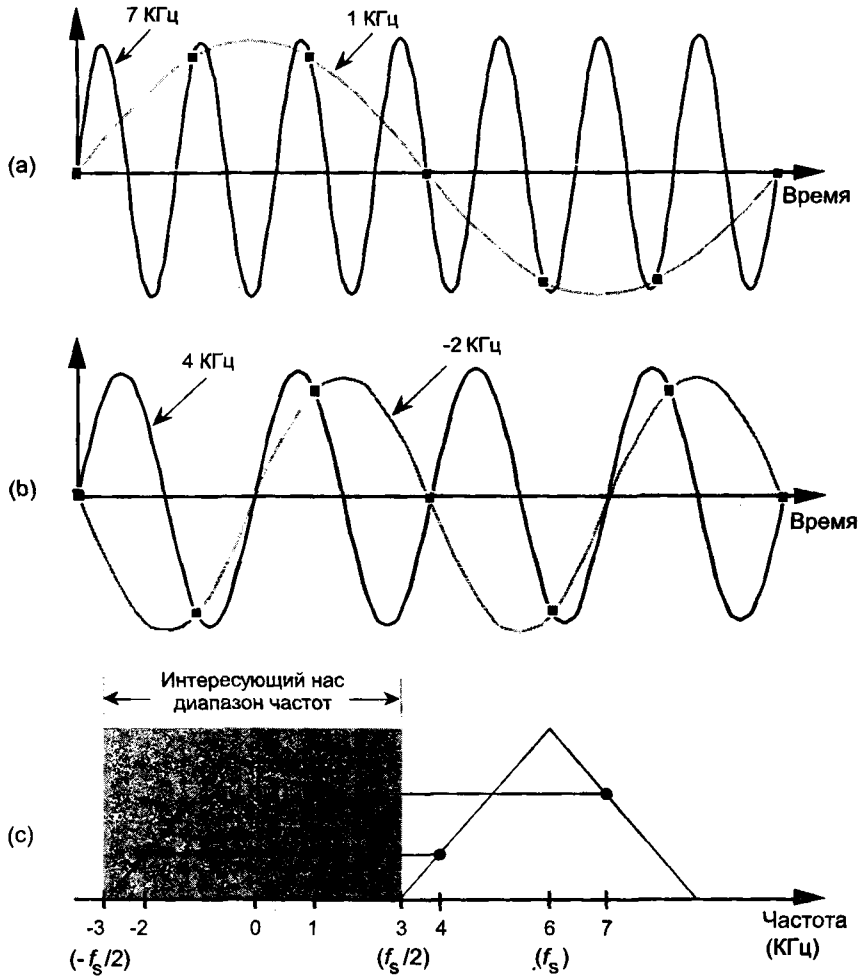


Рис. 2.2. Эффекты частотной неоднозначности, вытекающие из (2-5): (a) дискретизация синусоиды частотой 7 кГц с частотой дискретизации 6 кГц; (b) дискретизация синусоиды частотой 4 кГц с частотой дискретизации 6 кГц; (c) спектральные соотношения, демонстрирующие наложение синусоид с частотами 7 кГц и 4 кГц

Общее изображение наложения имеет вид *зубчатой структуры* на рисунке 2.3 (a). Обратите внимание на то, что пики структуры расположены на частотах,

кратных f_s Гц. Структура показывает, как сигнал, лежащий на пересечении горизонтальной линии с одной из наклонных линий, накладывается на все пересечения этой же горизонтальной линии со всеми другими наклонными линиями с таким же наклоном. Например, структура на рисунке 2.3 (b) показывает, что дискретизация синусоиды частотой 7 кГц с частотой дискретизации 6 кГц дает дискретную последовательность чисел, спектр которых представляет тоны с частотами 1 кГц, 7 кГц, 13 кГц, 19 кГц и т. д. Остановимся на минуту и дадим этим весьма важным понятиям немного устояться. Представление непрерывного сигнала дискретной последовательностью содержит в себе неизбежную неоднозначность в частотной области. Эту неоднозначность необходимо учитывать во всех практических алгоритмах цифровой обработки сигналов.

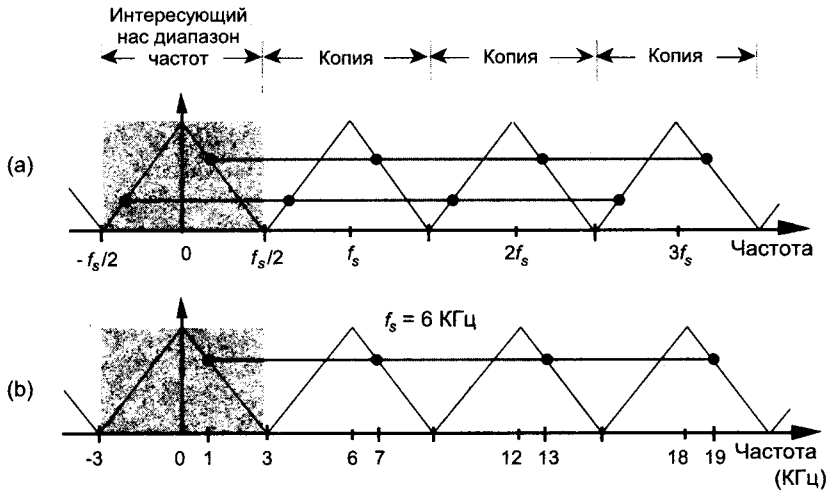


Рис. 2.3. Зубчатая структура: (a) наложение на частотах, кратных частоте дискретизации; (b) наложение синусоиды частотой 7 кГц на 1 кГц, 13 кГц и 19 кГц

А теперь рассмотрим эффекты дискретизации сигналов, которые представляют бо́льший интерес, чем простые синусоиды.

2.2. Дискретизация низкочастотных сигналов

Рассмотрим дискретизацию непрерывного действительного сигнала, спектр которого показан на рисунке 2.4 (a). Заметим, что спектр симметричен относительно частоты 0 Гц и его значения равны 0 для частот выше $+B$ Гц и ниже $-B$ Гц, т. е. это *сигнал с ограниченным спектром*. (С практической точки зрения термин *сигнал с ограниченным спектром* просто означает, что энергия сигнала за пределами диапазона $\pm B$ Гц ниже чувствительности нашей системы.) Задавшись частотой дискретизации f_s отсчетов в секунду, мы можем увидеть эффект размножения спектра при дискретизации на рисунке 2.4 (b), на котором показаны исходный спектр, а также бесконечное количество копий, повторяющихся с периодом f_s Гц.

(Хотя в разделе 1.1 мы установили, что представление дискретных последовательностей в частотной области само является дискретным[1], копии спектра на рисунке 2.4 (b) показаны непрерывными линиями, а не дискретными точками, просто для того, чтобы рисунок не выглядел слишком загроможденным. Мы рассмотрим все особенности дискретного частотного спектра в главе 3.)

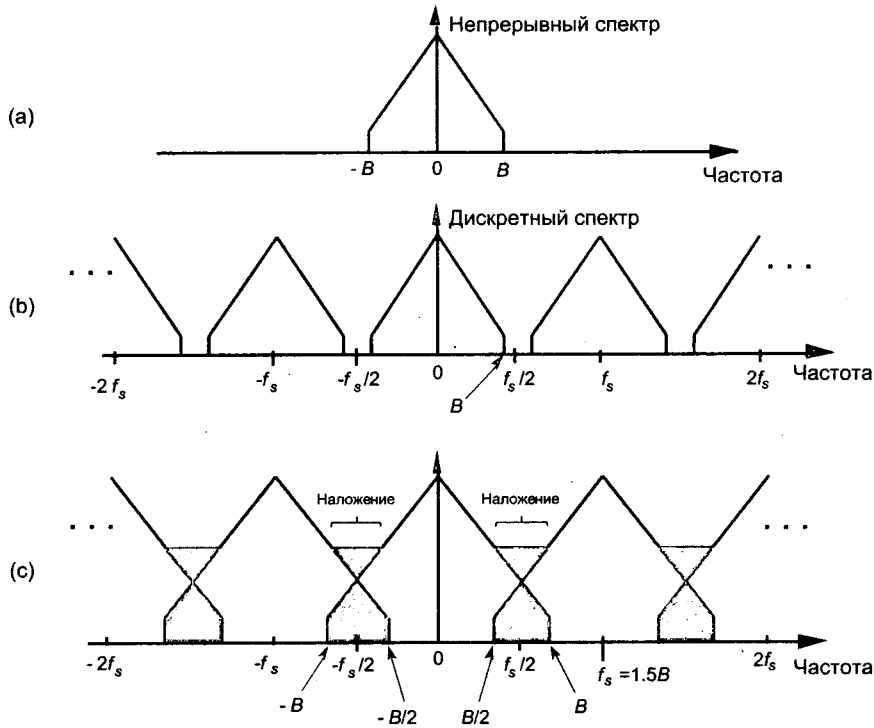


Рис. 2.4. Размножение спектра: (a) спектр исходного непрерывного сигнала; (b) размножение спектра дискретного сигнала при $f_s/2 > B$; (c) наложение частот при слишком низкой частоте дискретизации, потому что $f_s/2 < B$

Вернемся немного назад, чтобы понять всё значение рисунка 2.4. На рисунке 2.4 (a) показан спектр непрерывного сигнала, который может существовать только в одной из двух форм. Либо это непрерывный сигнал, который можно дискретизировать с помощью АЦП, либо это просто абстрактное понятие, такое как математическое выражение для сигнала. Он не может быть представлен в цифровой машине в форме с ограниченным спектром. Как только сигнал представляется последовательностью дискретных значений, его спектр принимает размноженную форму, показанную на рисунке 2.4 (b).

Размноженные спектры — не просто плод воображения математиков; они реально существуют и оказывают глубокое влияние на последующую цифровую обработку сигналов[2]. Размножение спектра может показаться безвредным, и

[1] Это не совсем так, но оставим данное утверждение на совести автора — (*прим. перев.*).

[2] К концу раздела 5.9 в качестве примера использования теоремы о свертке будет приведено другое обоснование размножения спектра при периодической дискретизации.

естественно было бы спросить: «Зачем уделять так много внимания размножению спектра? Нас ведь интересует только диапазон частот в пределах $\pm f_s/2$». Это так, но если мы выполняем операцию переноса по частоте или изменяем частоту дискретизации путем прореживания или интерполяции, размноженный спектр сдвигается как раз в интересующий нас диапазон частот $\pm f_s/2$ и может вызвать проблемы [1]. Рассмотрим, как можно управлять расположением копий спектра.

В практических схемах АЦП f_s всегда берется больше $2B$, чтобы оставить разделительный промежуток в районе частот заворота $\pm f_s/2$. Это очень важное соотношение: $f_s > 2B$ — известно как *критерий Найквиста*[1]. Чтобы показать, почему частота $f_s/2$ называется частотой заворота, понизим частоту дискретизации до величины $f_s = 1.5B$ Гц. Спектральный результат такой дискретизации показан на рисунке 2.4 (с). Копии спектра теперь перекрывают исходный спектр с центром на частоте 0 Гц. Ограничив наше внимание окрестностью частот $\pm f_s/2$ Гц, мы видим два очень интересных эффекта. Во-первых, нижняя и верхняя границы копий спектра с центральными частотами $+f_s$ и $-f_s$ теперь лежат в интересующей нас полосе частот. Эта ситуация эквивалентна заворачиванию исходного спектра влево относительно частоты $+f_s/2$ и вправо относительно частоты $-f_s/2$. Части копий спектра теперь взаимодействуют с исходным спектром, в результате чего появляются ошибки наложения. Дискретные отсчеты, связанные со спектром, показанным на рисунке 2.4 (с), больше не представляют корректно исходный сигнал. Спектральная информация в полосах частот от $-B$ до $-B/2$ и от $B/2$ до B Гц искажена. Мы показываем уровень спектра в областях наложения более бледной линией, поскольку мы точно не знаем, каким он будет.

Второй эффект, иллюстрируемый рисунком 2.4 (с), состоит в том, что весь спектр исходного непрерывного сигнала сосредоточен в полосе частот между $-f_s/2$ и $+f_s/2$. Это ключевое свойство показано на рисунке 2.4 (b) и будет иметь место всегда, независимо от дискретизируемого сигнала и частоты дискретизации. Этот эффект особенно важен, когда мы оцифровываем непрерывные сигналы. Он предупреждает нас о том, что любая энергия, расположенная выше $+B$ Гц и ниже $-B$ Гц в спектре исходного непрерывного сигнала, показанного на рисунке 2.4 (а), всегда после дискретизации окажется в интересующей нас полосе частот, независимо от частоты дискретизации. По этой причине на практике необходимы непрерывные (аналоговые) фильтры *нижних частот*.

Проиллюстрируем сказанное, показывая на рисунке 2.5 (а) непрерывный сигнал с шириной спектра B, сопровождаемый шумом. Дискретизация этой непрерывной смеси с частотой, которая превышает $2B$, позволяет избежать наложения копий спектра полезного сигнала, но вся энергия шума все равно попадает в диапазон частот между $-f_s/2$ и $+f_s/2$ нашего дискретного спектра, показанного на рисунке 2.5 (b).

Практически эта проблема решается применением аналогового *антиэлайзингового* фильтра нижних частот перед АЦП для уменьшения любой нежелательной энергии сигнала на частотах выше $+B$ и ниже $-B$ Гц, как показано на рисунке 2.6. Пример характеристики фильтра нижних частот показан более бледной линией, наложенной на спектр исходного непрерывного сигнала на рисунке 2.6. Заметьте, что спектр выходного сигнала фильтра нижних частот ограничен, и наложений в спектре выходных данных АЦП удается таким образом избежать.

---

[1] В русскоязычной литературе в этом случае ссылаются на теорему Котельникова — (*прим. перев.*).

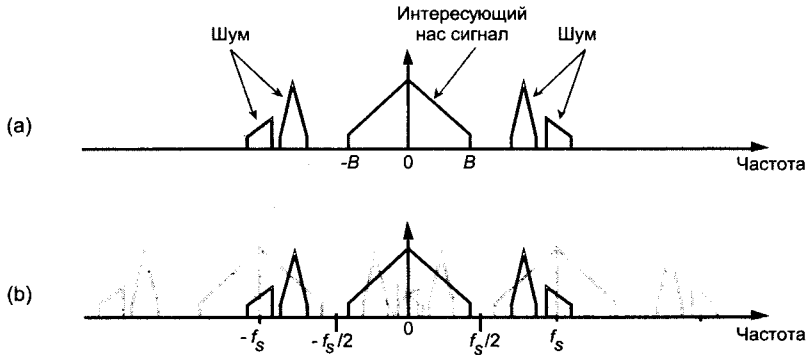


Рис. 2.5. Размножение спектра: (a) спектр смеси сигнала с шумом; (b) спектр дискретного сигнала, в котором шум искажает полезный сигнал

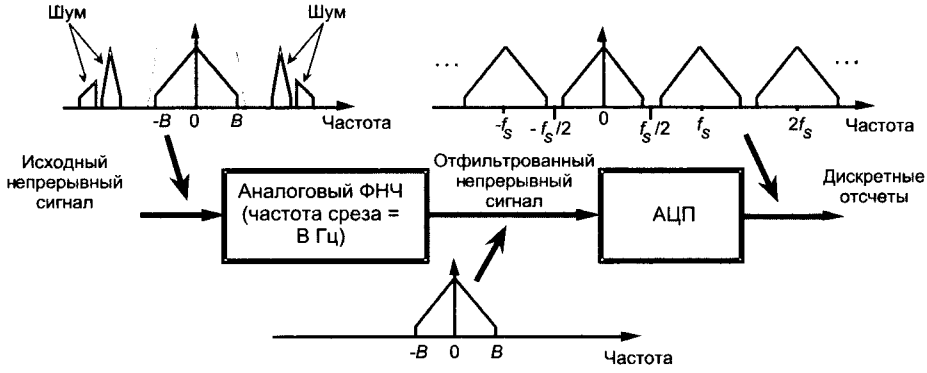


Рис. 2.6. Низкочастотная фильтрация перед дискретизацией с частотой f_s Гц

Этим завершается обсуждение простой низкочастотной дискретизации. Теперь перейдем к более сложной схеме дискретизации, которая оказалась весьма полезной на практике.

2.3. Дискретизация полосовых сигналов

Хотя дискретизация низкочастотных сигналов, иллюстрируемая рисунком 2.6, удовлетворяет большинству требований, это не единственная схема дискретизации, используемая на практике. Для дискретизации непрерывных полосовых сигналов, центральные частоты которых отличны от нуля, мы можем использовать метод, известный как *полосовая дискретизация*. Когда ширина спектра и центральная частота непрерывного входного сигнала позволяют, полосовая дискретизация не только дает возможность снизить требуемое быстродействие АЦП по сравнению с традиционной низкочастотной дискретизацией, но и уменьшает объем памяти, необходимый для хранения сигнала на заданном интервале.

В качестве примера рассмотрим дискретизацию сигнала с ограниченным спектром, показанного на рисунке 2.7 (a), с центральной частотой $f_c = 20$ МГц и шириной спектра $B = 5$ МГц. Мы используем термин полосовая дискретизация для

процесса дискретизации непрерывных сигналов, центральные частоты которых отличны от 0 Гц. То, что мы называем полосовой дискретизацией, в литературе упоминается под различными другими названиями, такими как дискретизация ПЧ, гармоническая дискретизация [2], суб-найквистовская дискретизация и дискретизация с пониженной частотой [3]. В случае полосовой дискретизации нас больше волнует ширина спектра сигнала, чем его наивысшая частота. Заметим, что часть сигнала, соответствующая отрицательным частотам, с центром на частоте $-f_c$, представляет собой зеркальное отражение части, соответствующей положительным частотам, как и должно быть для действительных сигналов. Наивысшая частота в спектре нашего полосового сигнала составляет 22.5 МГц. В соответствии с критерием Найквиста (дискретизация с частотой, превышающей в 2 раза наивысшую частоту в спектре сигнала) частота дискретизации должна составлять не менее 45 МГц. Рассмотрим, что произойдет, если частота дискретизации будет равна 17.5 МГц, как показано на рисунке 2.7 (b). Заметим, что исходные спектральные компоненты остаются на частотах $\pm f_c$, а копии спектра расположены в области низких частот, смыкаясь на нулевой частоте. Рисунок 2.7 (b) показывает, что для того, чтобы избежать наложений спектра, не нужна дискретизация с частотой 45 МГц — вместо этого мы используем эффект размножения спектра (2-5) для достижения своей цели.

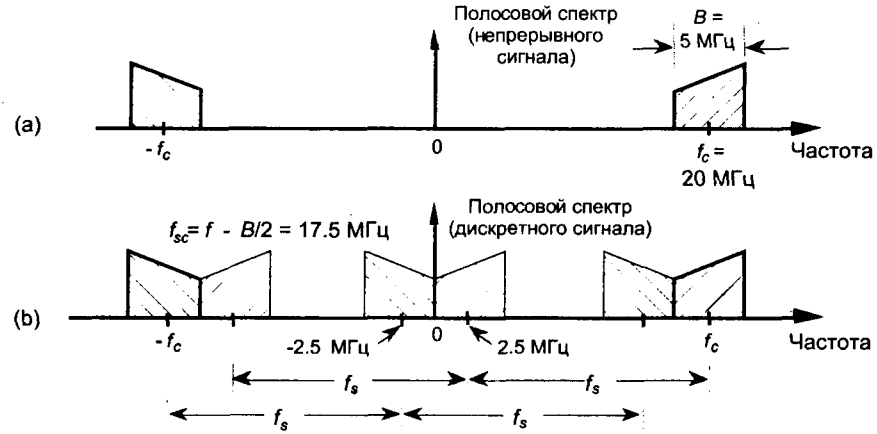


Рис. 2.7. Дискретизация полосового сигнала: (a) спектр исходного непрерывного сигнала; (b) размножение спектра дискретизированного сигнала при частоте дискретизации 17.5 МГц.

Полосовая дискретизация выполняет оцифровку и перенос по частоте как один процесс, который часто называют *дискретизирующим переносом*. В мире цифровой обработки сигналов процессы дискретизации и переноса по частоте тесно связаны друг с другом, а каждая операция дискретизации внутренне приводит к размножению спектра. Любопытный читатель может спросить: «А можем ли мы дискретизировать с еще более низкой частотой и не иметь наложений?» Ответ: да, но чтобы установить, как это сделать, мы должны пробиться сквозь вывод одного важного соотношения полосовой дискретизации. Вознаграждение, однако, будет стоить затраченных усилий, потому что именно здесь полосовая дискретизация действительно становится интересной.

Предположим, что мы имеем непрерывный входной сигнал с шириной спектра B. Его *несущая частота* равна f_c Гц, т. е. центральная частота его спектра равна f_c Гц, а спектр дискретизированного сигнала показан на рисунке 2.8 (a). Мы можем дискретизировать этот непрерывный сигнал с частотой, скажем, f_s Гц, так что копии спектра для положительных и отрицательных частот, P и Q, стыкуются как раз на частоте 0 Гц. Эта ситуация, показанная на рисунке 2.8 (a), напоминает рисунок 2.7 (b). При произвольном количестве копий, например, m в диапазоне $2f_c - B$ мы видим, что

$$mf_{s'} = 2f_c - B \text{ или } f_{s'} = (2f_c - B)/m. \qquad (2\text{-}6)$$

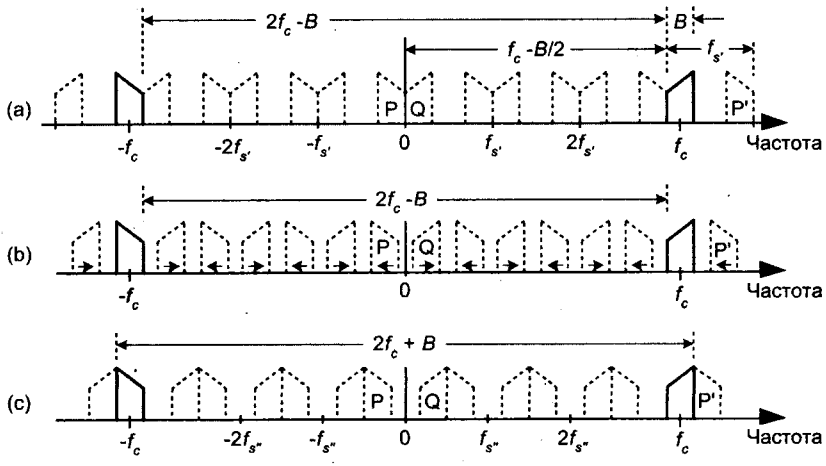


Рис. 2.8. Пределы частоты при полосовой дискретизации: (a) частота дискретизации $f_{s'} = (2f_c - B)/6$; (b) частота дискретизации меньше $f_{s'}$; (c) *минимальная частота дискретизации* $f_{s''} < f_{s'}$

На рисунке 2.8 (a) $m = 6$ принято только для иллюстрации. Конечно, m может быть любым положительным числом, если только $f_{s'}$ не меньше $2B$. Если частота дискретизации $f_{s'}$ повышается, исходный спектр (жирная линия) не смещается, но все его копии смещаются. Вблизи нулевой частоты полоса P сдвигается вправо, а полоса Q — влево. Эти копии перекроются, и возникнут искажения наложения. Таким образом, из (2-6) следует, что для произвольного m существует частота, которую частота дискретизации не должна превосходить, или

$$f_{s'} \le (2f_c - B)/m \text{ или } (2f_c - B)/m \ge f_{s'}\,. \qquad (2\text{-}7)$$

Если мы уменьшим частоту дискретизации ниже значения $f_{s'}$, показанного на рисунке 2.8 (a), промежутки между копиями будут уменьшаться в направлении стрелок на рисунке 2.8 (b). В этом случае исходный спектр тоже не будет смещаться при изменении частоты дискретизации. При некоторой новой частоте дискретизации $f_{s''}$, $f_{s''} < f_{s'}$, копия P' упрется в исходный спектр в области положительных частот с центром на частоте f_c, как показано на рисунке 2.8 (c). В этом случае мы знаем, что

$$(m + 1)f_{s''} = 2f_c + B \text{ или } f_{s''} = (2f_c + B)/(m + 1)\,. \qquad (2\text{-}8)$$

При дальнейшем уменьшении $f_{s''}$ копия P' будет сдвигаться вниз по частоте и начнет накладываться на исходный спектр на частоте f_c, что приведет к искажениям. Следовательно, согласно (2-8) для $m+1$ существует частота, которую частота дискретизации всегда должна превышать, или

$$f_{s''} \geq (2f_c + B)/(m + 1)\,. \qquad (2\text{-}9)$$

Теперь мы можем объединить (2-7) и (2-9) и сказать, что для предотвращения наложений частота f_s должна выбираться в диапазоне от $f_{s''}$ до $f_{s'}$, или

$$(2f_c - B)/m \geq f_s \geq (2f_c + B)/(m + 1)\,, \qquad (2\text{-}10)$$

где m — произвольное положительное целое число, которое выбирается так, чтобы выполнялось соотношение $f_s \geq 2B$. (Для этого типа периодической дискретизации действительных сигналов, известного как действительная дискретизация первого порядка, по-прежнему должен удовлетворяться критерий Найквиста $f_s \geq 2B$.)

Чтобы лучше понять важное соотношение (2-10), вернемся к нашему примеру полосового сигнала, для которого (2-10) позволяет построить таблицу 2.1. Эта таблица говорит нам, что частота дискретизации может находиться в диапазоне от 22.5 до 35 МГц, в диапазоне от 15 до 17.5 МГц или в диапазоне от 11.25 до 11.66 МГц. Никакое значение частоты дискретизации ниже 11.25 МГц неприемлемо, поскольку оно не удовлетворяет ни соотношению (2-10), ни условию $f_s \geq 2B$. Спектры для нашего полосового сигнала при нескольких частотах дискретизации из таблицы 2.1 показаны на рисунке 2.9. Заметим, что, когда f_s равна 7.5 МГц ($m = 5$), мы имеем наложение, потому что ни нижняя граница в (2-10), ни условие $f_s \geq 2B$ не соблюдаются. Значение $m = 4$ также неприемлемо, т. к. условие $f_s \geq 2B$ не удовлетворяется. Последний столбец таблицы 2.1 содержит *оптимальные* значения частоты дискретизации для каждого подходящего значения m. Оптимальная частота дискретизации определяется здесь как частота, при которой копии спектра не соприкасаются друг с другом, за исключением окрестности нулевой частоты. Например, в диапазоне допустимых частот для $m = 1$ гораздо легче выполнять последующую цифровую фильтрацию или другую обработку отсчетов сигнала, спектр которого показан на рисунке 2.9 (b), чем в случае спектра, показанного на рисунке 2.9 (a).

Таблица 2.1. Результат применения (2-10) к примеру полосового сигнала

m	$(2f_c-B)/m$	$(2f_c+B)/(m+1)$	Оптимальная частота дискретизации
1	35.0 МГц	22.5 МГц	22.5 МГц
2	17.5 МГц	15.0 МГц	17.5 МГц
3	11.66 МГц	11.25 МГц	11.25 МГц
4	8.75 МГц	9.0 МГц	—
5	7.0 МГц	7.5 МГц	—

Читатель может поинтересоваться: «Всегда ли оптимальная частота дискретизации равна минимальному допустимому согласно (2-10) значению f_s?» Ответ зависит от конкретного приложения — возможно, имеются некоторые системные ограничения, которые следует учесть. Например, в цифровой телефонии для упрощения дальнейшей обработки частоты дискретизации выбираются кратными 8 кГц [4]. Другим фактором, зависящим от приложения и влияющим на выбор оптимальной f_s, является форма характеристики аналогового антиэлайзингового фильтра [5]. На практике часто компоненты высококачественных АЦП *настраиваются* в процессе производства так, чтобы обеспечить максимальную линейность на высоких частотах (>5 МГц). Их использование на более низких частотах не рекомендуется.

Для иллюстрации природы (2-10) было бы интересно построить график минимальной частоты дискретизации, $(2f_c+B)/(m+1)$, при разных значениях m, как функцию переменной R, определяемой как

$$R = (\textit{наивысшая частота})/(\textit{ширина спектра}) = (f_c + B/2)/B\,. \quad (2\text{-}11)$$

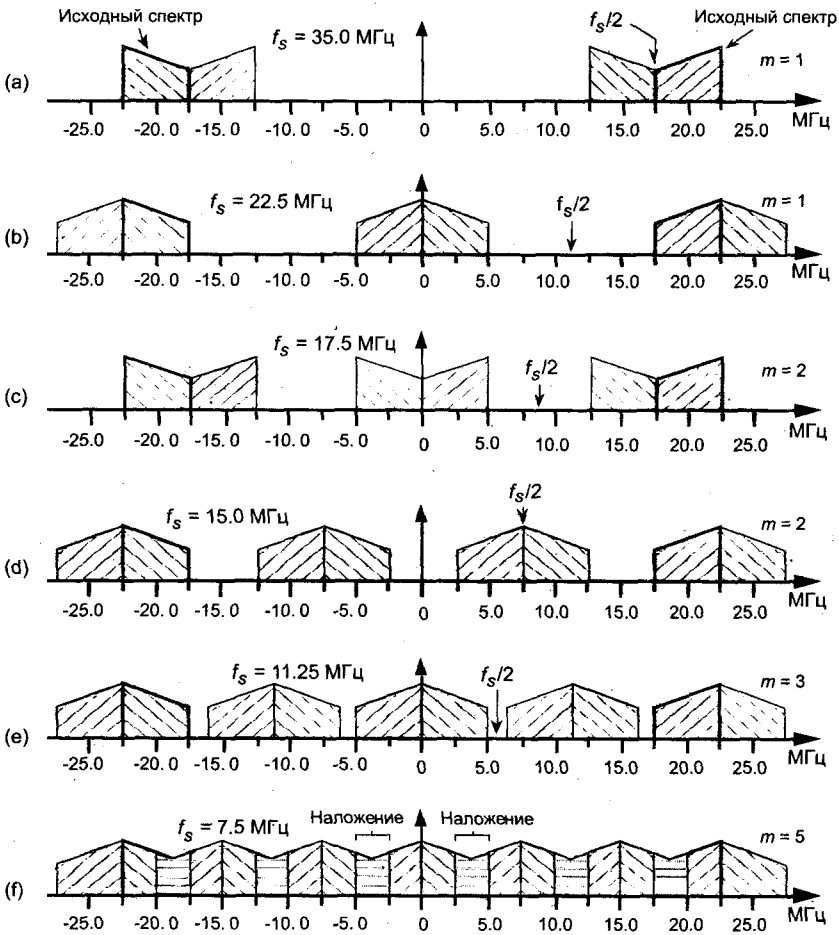


Рис. 2.9. Различные варианты размножения спектра из таблицы 2.1: (a) f_s=*35* МГц; (b) f_s=*22.5* МГц; (c) f_s=*17.5* МГц; (d) f_s=*15* МГц; (e) f_s=*11.25* МГц; (f) f_s=*7.5* МГц

Если мы пронормируем минимальную частоту дискретизации из (2-10), разделив ее на ширину спектра B, мы получим график в нормированных координатах, показанный жирной линией на рисунке 2.10. Этот рисунок показывает минимальную нормированную частоту дискретизации как функцию наивысшей нормированной частоты в спектре полосового сигнала. Заметим, что, независимо от значения R, минимальная частота дискретизации никогда не должна превосходить $4B$ и приближается к $2B$ при увеличении несущей частоты. Как это ни удивительно, минимальная допустимая частота дискретизации в действительности понижается при увеличении несущей частоты полосового сигнала. Мы можем интерпретировать рисунок 2.10, рассмотрев снова наш пример полосового сигнала на рисунке 2.7, где $R = 22.5/5 = 4.5$. Это значение R отмечено на рисунке 2.10 серой линией, показывая, что $m = 3$ и $f_s/B = 2.25$. При $B = 5$ МГц получаем минимальное значение $f_s = 11.25$ МГц, что согласуется с таблицей 2.1. Крайняя левая линия на рисунке 2.10 соответствует случаю низкочастотной дискретизации, когда частота дискретизации f_s должна равняться удвоенной наивысшей частоте в спектре. Таким образом, нормированная частота дискретизации f_s/B равна удвоенной наивысшей частоте, деленной на B, другими словами, равна $2R$.

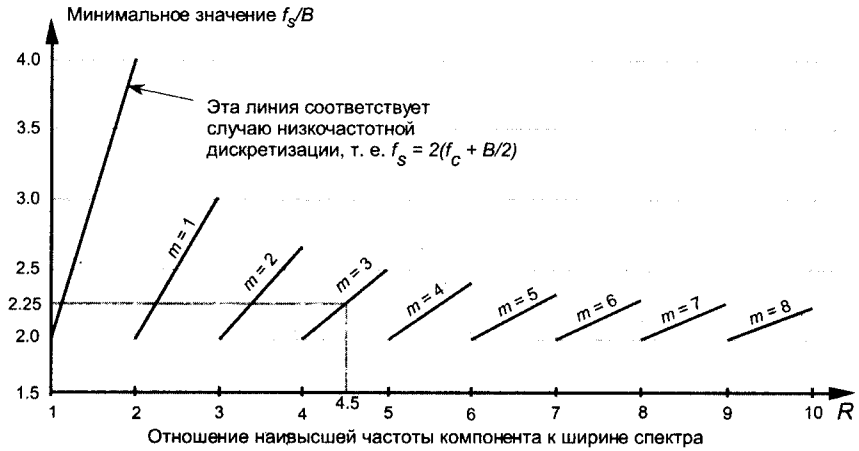


Рис. 2.10. Минимальная частота полосовой дискретизации согласно (2-10)

Рисунок 2.10 хорошо известен по литературе, но его обычное представление позволяет читателю прийти к ложному заключению о том, что допустимой частотой дискретизации будет любая частота выше минимума, показанного на данном рисунке [6-12]. Существует разумный способ избежать недоразумений [13]. Если мы построим график приемлемых диапазонов частоты полосовой дискретизации согласно (2-10) как функцию R, мы получим картину, приведенную на рисунке 2.11. Как мы видели из (2-10), таблицы 2.1 и рисунка 2.9 допустимые частоты полосовой дискретизации образуют ряд частотных диапазонов, разделенных неприемлемыми диапазонами частот дискретизации, т. е. допустимая частота полосовой дискретизации должна быть выше минимума, показанного на рисунке 2.10, но не может быть просто любой частотой, превышающей минимум. Серые области на рисунке 2.11 показывают те нормированные частоты полосовой дискретизации, которые приводят к наложению спектров. Частоты дискретизации в белых

областях рисунка 2.11 допустимы. Таким образом, для полосовой дискретизации мы хотим выбрать частоту дискретизации в одной из белых расходящихся полос, соответствующей некоторому значению m из (2-10). Попробуем понять значение рисунка 2.11с помощью рассмотренного раньше примера полосового сигнала, показанного на рисунке 2.7.

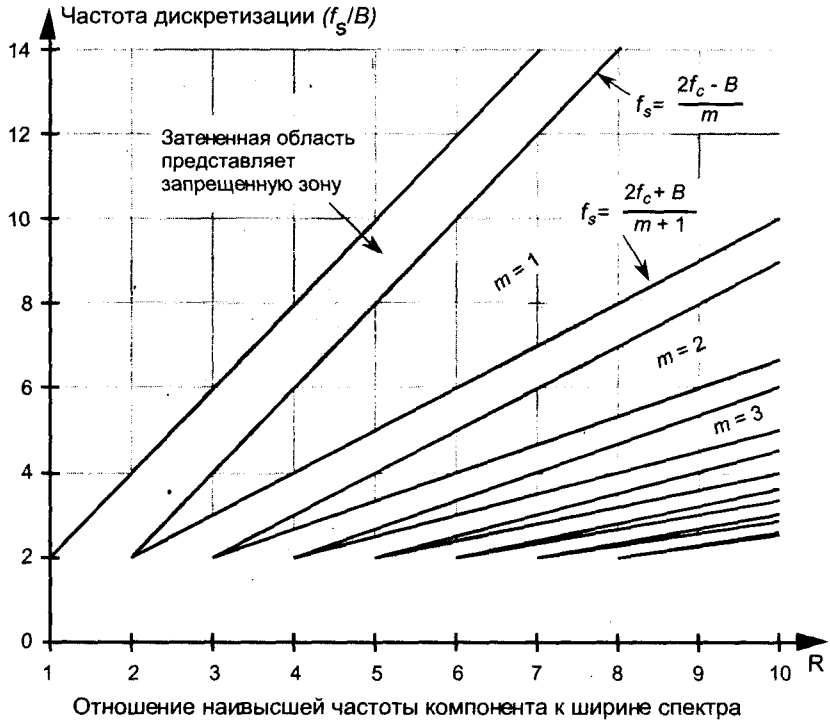


Рис. 2.11. Области допустимых значений частот полосовой дискретизации согласно (2-10), нормализованных относительно ширины спектра сигнала f_s/B

На рисунке 2.12 значение R (наивысшая частота/ширина спектра) для нашего примера, равное 4.5, показано жирной серой вертикальной линией. Поскольку эта линия пересекает всего три белые клинообразные области, можно сделать вывод, что существуют всего три диапазона допустимых частот дискретизации, и это согласуется с результатами, приведенными в таблице 2.1. Пересечение линии $R = 4.5$ с границами белых клинообразных областей дает значения частот дискретизации, приведенные в таблице 2.1. Таким образом, рисунок 2.11 дает значительно более наглядное изображение границ допустимых значений частот полосовой дискретизации, чем рисунок 2.10.

Хотя рисунки 2.11 и 2.12 показывают, что мы можем использовать частоту дискретизации, лежащую на границе между серой и белой областями, этих значений частоты дискретизации на практике следует избегать. Неидеальность аналоговых полосовых фильтров, нестабильность генераторов тактовых сигналов частоты дискретизации, несовершенство имеющихся АЦП делают невозможной точную реализацию этого *идеального* случая. Для уверенности было бы разумно выбирать

значение f_s, несколько удаленное от границ области. Рассмотрим сценарий полосовой дискретизации, показанный на рисунке 2.13. При использовании типового (неидеального) аналогового полосового фильтра, частотная характеристика которого показана серой линией, разумно было бы использовать в наших уравнениях в качестве ширины полосы пропускания не B, а B_{gb}. То есть мы создаем по обе стороны полосы пропускания фильтра защитные полосы, так что становится возможным некоторое наложение спектров, которое не искажает полезный сигнал, как показано в нижней части рисунка 2.13.

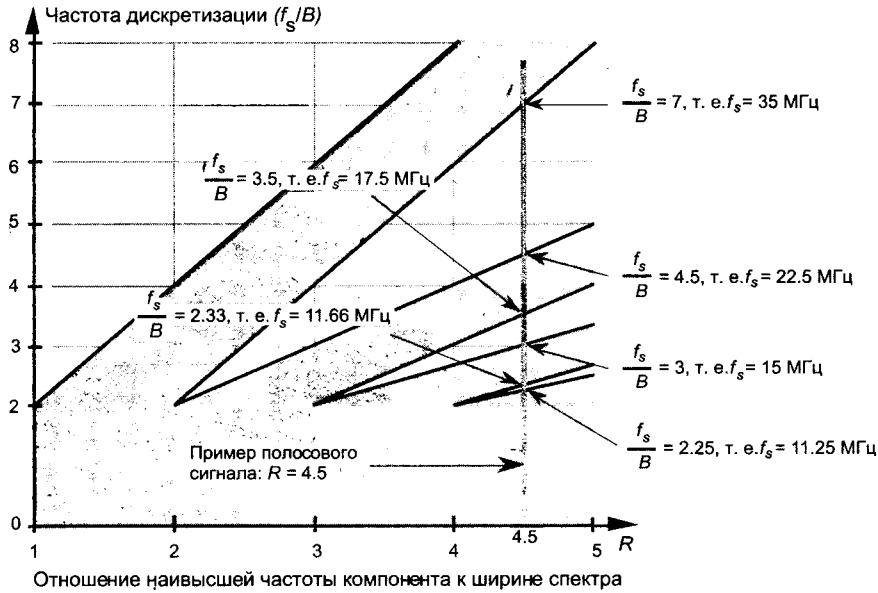


Рис. 2.12. Допустимые частоты дискретизации для примера полосового сигнала (B = 5 MHz) при R = 4.5

Мы можем связать эту идею использования защитных полос с рисунком 2.11, посмотрев более внимательно на один из белых клиньев. Как показано на рисунке 2.14, мы хотели бы выбрать частоту дискретизации как можно ближе к вершине белой области — чем ниже мы смещаемся по клину, тем ниже частота дискретизации. Однако, чем ближе мы находимся к границе затененной области, тем *уже* должны быть защитные полосы, для чего требуется аналоговый полосовой фильтр с более крутыми скатами частотной характеристики, а также более узкие допуски на точность и стабильность частоты задающего генератора нашего АЦП. (Помните, что работа на границе между белой и затененной областями приводит к тому, что копии спектра соприкасаются друг с другом.) Поэтому для безопасности мы работаем в некоторой промежуточной точке, на некотором расстоянии от границ затененных зон, как показано на рисунке 2.14. Дальнейший анализ соотношения ширины защитных полос и параметров синхросигналов АЦП приводится в [13]. В нашем обсуждении мы только констатируем, что хорошим является выбор такой частоты дискретизации, которая лежит не слишком близко к границам между белыми и затененными областями на рисунке 2.11.

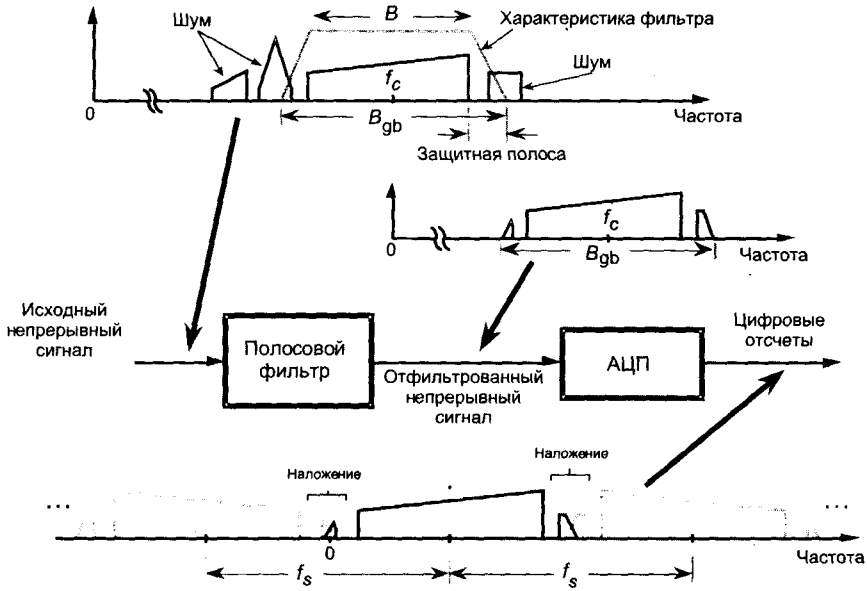


Рис. 2.13. Полосовая дискретизации при наличии наложений только в защитных полосах

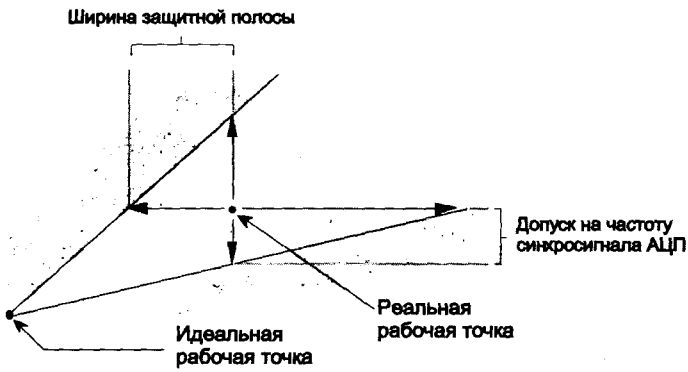


Рис. 2.14. Типовый выбор рабочего значения f_s для компенсации неидеальности аппаратуры

Имеется несколько способов обеспечить работу вдали от границ. Один состоит в том, чтобы установить значение частоты дискретизации посреди белого клина для заданного значения R. Мы делаем это, вычисляя среднее между максимальным и минимальным значениями частоты дискретизации в (2-10) для конкретного значения m, т. е. для центрирования рабочей точки частоты дискретизации внутри клина мы используем выражение

$$f_{s_{cntr}} = [(2f_c - B)/m + (2f_c + B)/(m + 1)]/2 = \\ = (f_c - B/2)/m + (f_c + B/2)/(m + 1). \qquad (2\text{-}12)$$

Другой способ не попасть на границу на рисунке 2.14 состоит в использовании следующего выражения для определения промежуточной рабочей точки f_{s_i}:

$$f_{s_i} = 4f_c / m_{odd}, \qquad (2\text{-}13)$$

где m_{odd} — нечетное целое [14]. Использование (2-13) дает то преимущество, что спектр интересующего нас дискретизированного сигнала будет центрирован относительно частоты, равной четверти частоты дискретизации ($f_{s_i}/4$). Эта ситуация привлекательна, т. к. при этом существенно упрощается последующее комплексное понижающее преобразование (перенос по частоте), используемое во многих приложениях цифровой связи. Конечно, значение m_{odd} должно выбираться так, чтобы выполнялось ограничение Найквиста $f_{s_i} > 2B$. Результаты применения уравнений (2-12) и (2-13) к нашему полосовому сигналу приведены на рисунке 2.15.

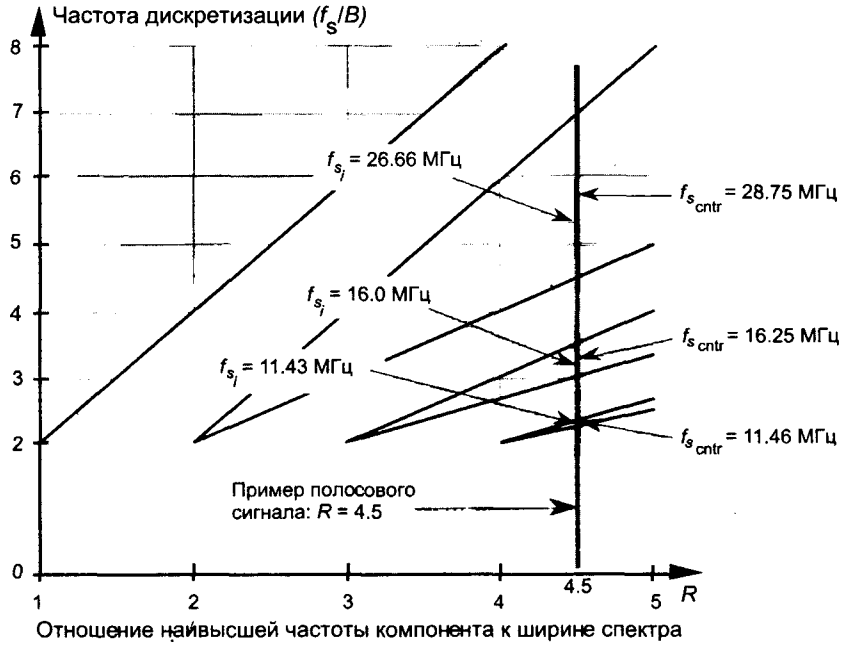


Рис. 2.15. Промежуточные рабочие значения f_{Si} и f_{Scntr} согласно (2-12) и (2-13), позволяющие избежать работы на границах серых зон, для примера полосового сигнала с $B = 5$ МГц и $R = 4.5$

2.4. Инверсия спектра при полосовой дискретизации

Некоторые допустимые значения f_s, удовлетворяющие (2-10), хотя и позволяют избежать проблем с наложением, дают основной спектр (сосредоточенный в районе 0 Гц), который инвертирован по отношению к исходному спектру, т. е. форма спектра в области положительных частот будет совпадать с формой исходного спектра в области отрицательных частот. Эта инверсия спектра происходит

всегда, когда m в (2-10) является нечетным целым, как показано на рисунках 2.9 (b) и 2.9 (e). Когда компоненты исходного спектра, соответствующие положительным частотам, симметричны относительно f_c, инверсия спектра не порождает никаких проблем, и может быть выбрано любое значение f_s из (2-10), не приводящее к наложениям. Однако, когда инверсии спектра следует избегать, например, при обработке однополосных сигналов, минимальная допустимая частота дискретизации, при которой отсутствует инверсия спектра, определяется соотношением (2-10) при одном ограничении: m должно быть наибольшим четным числом, при котором выполняется неравенство $f_s \geq 2B$. При использовании нашего определения оптимальной частоты дискретизации выражение, которое дает оптимальные неинвертирующие частоты дискретизации и не позволяет копиям спектра соприкасаться нигде, кроме нулевой частоты, имеет вид

$$f_{s_o} = (2f_c - B)/m_{even}, \tag{2-14}$$

где $m_{even} = 2, 4, 6$ и т. д. Для нашего примера полосового сигнала (2-14) при $m = 2$ дает оптимальную неинвертирующую частоту дискретизации $f_{s_o} = 17.5$ МГц, как показано на рисунке 2.9 (c). В этом случае обратите внимание на то, что спектр, перемещенный на нулевую частоту, имеет ту же ориентацию, что и исходный спектр, расположенный на центральной частоте 20 МГц. Если же в вашем приложении инверсия спектра не имеет значения, мы можем определить минимальную частоту дискретизации, не выбирая разные значения m в (2-10) и не создавая таблицу, как мы делали в случае таблицы 2.1. Рассматривая рисунок 2.16, вопрос можно поставить так: «Сколько копий положительных и отрицательных частей спектра шириной B можно уместить в полосе частот шириной $2f_c + B$ без наложений?» Количество таких копий составляет

$$R = (\textit{ширина полосы частот})/(\textit{удвоенная ширина спектра}) =$$

$$= (2f_c + B)/(2B) = (f_c + (B/2))/B\,. \tag{2-15}$$

Чтобы избежать перекрытия копий спектра, мы должны быть уверены в том, что количество копий равно целому числу, не превышающему R в (2-15). Таким образом, мы можем определить целое количество копий как R_{int}, где

$$R_{int} \leq R < R_{int}+1,$$

или

$$R_{int} \leq (f_c + (B/2))/B < R_{int}+1. \tag{2-16}$$

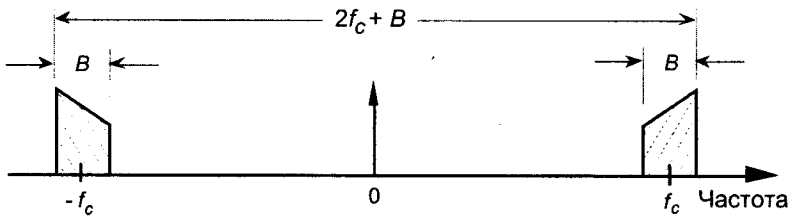


Рис. 2.16. Диапазон частот, занимаемый непрерывным полосовым сигналом

С R_{int} копий спектра в полосе частот $2f_c + B$, следовательно, период повторения спектра, или минимальное значение частоты дискретизации $f_{s_{min}}$, равно

$$f_{s_{min}} = (2f_c + B)/R_{int} \qquad (2\text{-}17)$$

В нашем примере полосового сигнала для вычисления первым делом необходимо найти подходящее значение в (2-16) как

$$R_{int} \le (22.5)/5 < R_{int}+1,$$

так что $R_{int} = 4$. Затем из (2-17) находим частоту дискретизации $f_{s_{min}} = (40+5)/4 =$ 11.25 МГц, которая равна частоте дискретизации, показанной на рисунках 2.9 (е) и 2.12. Таким образом, мы можем использовать (2-17) и избавиться от необходимости использовать разные значения для m в (2-10) и создавать таблицу наподобие таблицы 2.1. (Однако будьте внимательны. Формула (2-17) помещает нашу частоту дискретизации на границу между белой и серой полосами рисунка 2.12, и мы должны прибегнуть к использованию защитных полос, которые мы обсуждали выше.) Коротко говоря, в нашем примере полосового сигнала дискретизация с частотой 11.25 МГц, полученной из (2-17), позволяет избежать наложений и инвертирует спектр, а дискретизация с частотой 17.5 МГц, полученной из (2-14), позволяет избежать наложений без инверсии спектра.

А теперь хорошие новости. Дополнив процедуру дискретизации несложной цифровой обработкой, мы можем дискретизировать с частотой 11.25 МГц, получив инвертированный спектр, а затем легко реинвертировать его, восстановив, таким образом, его исходную ориентацию. Спектр любого цифрового сигнала можно инвертировать, умножив отсчеты сигнала на последовательность чередующихся плюс единиц и минус единиц ($1, -1, 1, -1$ и т. д.), которую в литературе обозначают лаконичным выражением $(-1)^n$. Эта схема позволяет выполнять полосовую дискретизацию с меньшими частотами, удовлетворяющими (2-17), с последующей коррекцией инверсии спектра, избегая, таким образом, необходимости использования более высоких частот дискретизации, получаемых из (2-14). Хотя умножение отсчетов на $(-1)^n$ подробно излагается в разделе 13.1, здесь достаточно помнить простое правило, согласно которому умножение отсчетов действительного сигнала на $(-1)^n$ эквивалентно умножению на косинус, частота которого равна $f_s/2$. В частотной области это умножение зеркально отображает положительные частоты в диапазоне от 0 до $+f_c/2$ Гц относительно частоты $f_s/4$ Гц, а также отображает отрицательные частоты от $-f_s/2$ до 0 Гц зеркально относительно частоты $-f_c/4$ Гц, как показано на рисунке 2.17. Последовательность $(-1)^n$ используется не только для инверсии спектра полосовых последовательностей, ее можно также использовать для инвертирования спектра дискретных низкочастотных сигналов. Имейте ввиду, однако, что в случае дискретизации низкочастотного сигнала любой компонент постоянного тока (нулевой частоты) в исходном сигнале после умножения на $(-1)^n$ будет перенесен как на частоту $+f_c/2$, так и на частоту $-f_c/2$. В литературе по ЦОС вы иногда можете увидеть последовательность $(-1)^n$, представленную эквивалентными выражениями $\cos(\pi n)$ и $e^{j\pi n}$.

Мы завершаем данную тему, собрав в таблице 2.2 все, что нам нужно знать о полосовой дискретизации.

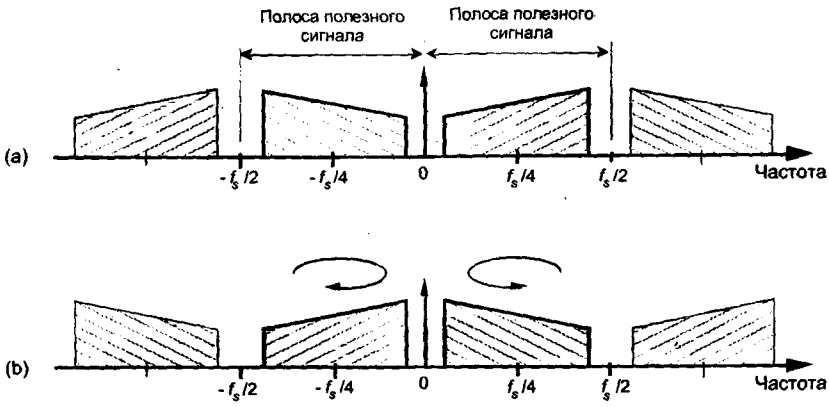


Рис. 2.17. Инверсия спектра посредством умножения на $(-1)^n$: (a) исходный спектр временной последовательности; (b) новый спектр произведения исходной последовательности на последовательность (-1)

Таблица 2.2. Соотношения полосовой дискретизации

Требуемая величина	Выражение для частоты дискретизации	Условия
Допустимые границы f_s для полосовой дискретизации: (2-10)	$(2f_c - B)/m \geq f_s \geq$ $\geq (2f_c + B)/(m+1)$	m — любое положительное целое число, для которого $f_s \geq 2B$
Частота дискретизации в середине полосы допустимых частот: (2-12)	$f_{s_{cntr}} = (f_c - B/2)/m +$ $+ (f_c + B/2)/(m+1)$	m — любое положительное целое число, для которого $f_{s_{cntr}} \geq 2B$
Частота дискретизации, при которой спектр сигнала размещается на одной четвертой частоты дискретизации: (2-13)	$f_{s_i} = 4f_c/m_{odd}$	m_{odd} — любое целое положительное нечетное число, такое, что $f_{s_i} \geq 2B$ (инверсия спектра возникает, когда m_{odd}=3, 7, 11 и т. д.)
Оптимальная частота дискретизации, при которой инверсия отсутствует: (2-14)	$f_{s_o} = (2f_{c-B})/m_{even}$	m_{even} — любое положительное целое число, такое, что $f_{s_o} \geq 2B$
Минимальное значение f_s, при котором отсутствуют наложения: (2-17)	$f_{s_{min}} = (2f_c + B)/R_{int}$	где $R_{int} \leq (f_c + (B/2))/B <$ $< R_{int}+1$

Библиография

1. Crochiere, R.E. and Rabiner, L.R. «Optimum FIR Digital Implementations for Decimation, Interpolation, and Narrow-band Filtering», *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-23, No. 5, October 1975.

2. Steyskal, H. «Digital Beamforming Antennas», *Microwave Journal*, January 1987.

3. Hill, G. «The Benefits of Undersampling», *Electronic Design*, July 11,1994.

4. Yam, E., and Redman, M. «Development of a 60-channel FDM-TDM Transmultiplexer», *COMSAT Technical Review*, Vol. 13, No. 1, Spring 1983.

5. Floyd, P., and Taylor, J. «Dual-Channel Space Quadrature-Interferometer System», *Microwave System Designer's Handbook*, Fifth Edition, Microwave Systems News, 1987.

6. Lyons, R. G. «How Fast Must You Sample», *Test and Measurement World*, November 1988.

7. Stremler, F. *Introduction to Communication Systems*, Chapter 3, Second Edition, Addison Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, p. 125.

8. Webb, R. C. «IF Signal Sampling Improves Receiver Detection Accuracy», *Microwaves & RF*, March 1989.

9. Haykin, S. *Communications Systems*, Chapter 7, John Wiley and Sons, New York, 1983, p. 376.

10. Feldman, C. B., and Bennett, W. R. «Bandwidth and Transmission Performance», *Bell System Tech. Journal*, Vol. 28, 1989, p. 490.

11. Panter, P. F. *Modulation Noise, and Spectral Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965, p. 527.

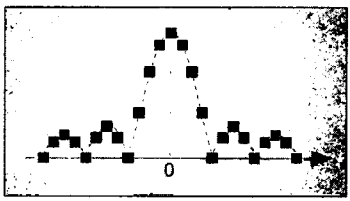
12. Shanmugam, K. S. *Digital and Analogue Communications Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1979, p. 378.

13. Vaughan, R., Scott, N. and White, D. «The Theory of Bandpass Sampling», *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 39, No. 9, September 1991, pp. 1973-1984.

14. Xenakis B., and Evans, A. «Vehicle Locator Uses Spread Spectrum Technology», *RF Design*, October 1992.

Глава 3

Дискретное преобразование Фурье



Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) – одна из двух наиболее распространенных и мощных процедур цифровой обработки сигналов. (Другая процедура — цифровая фильтрация.) ДПФ позволяет анализировать, преобразовывать и синтезировать сигналы такими способами, которые невозможны при непрерывной (аналоговой) обработке. Хотя сегодня ДПФ используется практически во всех областях инженерной деятельности, мы увидим, что сфера его применения продолжает расширяться по мере того, как расширяется понимание его полезности. По этой причине основательное понимание ДПФ необходимо всем, кто работает в области цифровой обработки сигналов.

ДПФ — это математическая процедура, используемая для определения гармонического, или частотного, состава дискретных сигналов. Хотя для нас дискретный сигнал представляет собой набор значений, полученных в результате периодической дискретизации непрерывного сигнала во временной области, мы увидим, что ДПФ полезно для анализа любых дискретных последовательностей, независимо от того, что на самом деле эти последовательности представляют. Истоком ДПФ, конечно же, является непрерывное преобразование Фурье $X(f)$, которое определяется как

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \qquad (3\text{-}1)$$

где $x(t)$ — некоторый непрерывный сигнал во временной области.[1]

В области обработки непрерывных сигналов (3-1) используется для преобразования аналитического выражения для непрерывной временной функции $x(t)$ в непрерывную функцию $X(f)$ в частотной области. Последующее вычисление значений выражения $X(f)$ дает нам возможность определить частотный состав любого сигнала, используемого на практике, и открывает широкий спектр воз-

[1] В английском языке фамилия Фурье пишется Fourier и произносится примерно как four year (англ. «четыре года»). В институте мы называли (3.1) преобразованием four year, потому что для решения одной домашней задачи нужно было примерно четыре года.

можностей для анализа и обработки сигналов в физике и технике. Несомненно, преобразование Фурье — наиболее значительный и широко распространенный математический механизм для анализа физических систем. (Это мнение лучше сформулировано в знаменитой цитате лорда Кельвина: «Теорема Фурье — не только один из наиболее красивых результатов современного анализа, можно сказать, что она предоставляет нам необходимый инструмент для рассмотрения почти каждого трудного вопроса в современной физике». Кстати, история оригинальной работы Фурье по гармоническому анализу, относящейся к проблеме теплопроводности, поистине захватывающая. Тем, кто интересуется этим вопросом, неплохо было бы начать с [1] и [2].)

С приходом в нашу жизнь цифровых компьютеров усилия пионеров цифровой обработки привели к разработке ДПФ, которое определяется как дискретная последовательность $X(m)$ в частотной области,

Формула ДПФ (экспоненциальная → форма):

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (3\text{-}2)$$

В нашем обсуждении формулы (3-2) $x(n)$ представляет собой дискретную последовательность значений, полученных дискретизацией во временной области непрерывной переменной $x(t)$. Символ "e" в (3-2), конечно же, обозначает основание натуральных логарифмов, а $j = \sqrt{(-1)}$.

3.1. Смысл формулы ДПФ

Уравнение (3-2) имеет замысловатый и не слишком воодушевляющий вид, но не стоит отчаиваться. К концу этой главы формула (3-2) станет для вас одним из самых доступных и мощных инструментов в цифровой обработке сигналов. Начнем с того, что запишем формулу (3-2) другим способом и внимательно рассмотрим ее. Из *тождества Эйлера* $e^{-j\phi} = \cos(\phi) - j\sin(\phi)$ следует, что (3-2) эквивалентно следующему выражению:

Формула ДПФ (тригонометрическая форма):

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[\cos(2\pi nm/N) - j\sin(2\pi nm/N)]. \qquad (3\text{-}3)$$

Мы разделили комплексную экспоненту в (3-2) на действительную и мнимую части, где

$X(m)$ — m-й компонент ДПФ, т. е. $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$ и т. д.,

m — индекс ДПФ в частотной области,

$m = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$,

$x(n)$ — последовательность входных отсчетов $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$ и т. д.,

n — временной индекс входных отсчетов $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$,

$j = \sqrt{(-1)}$

N — количество отсчетов входной последовательности и количество частотных отсчетов результата ДПФ.

Хотя (3-3) выглядит более сложно, чем (3-2), его легче понять. (Если вы чувствуете себя не слишком уверенно по отношению к $j = \sqrt{(-1)}$, не стоит отчаиваться.

Это просто удобная абстракция, которая помогает нам сравнивать фазовые соотношения между различными синусоидальными компонентами сигнала. В главе 8 оператор j обсуждается несколько подробнее.)[1] В стандартной записи ДПФ индексы входных значений (n) и выходных отсчетов ДПФ (m) всегда принимают значения от 0 до $N-1$. Это значит, что при наличии N входных отсчетов во временной области ДПФ определяет спектральный состав входного сигнала в N равномерно распределенных точках частотной оси. Значение N является важным параметром, т. к. оно определяет необходимое количество входных отсчетов, разрешающую способность результата по частоте, а также время, необходимое для вычисления N-точечного ДПФ.

Полезно рассмотреть структуру выражения (3-3), записав слагаемые суммы по отдельности. Например, при $N = 4$ и n, и m принимают значения от 0 до 3, а (3-3) превращается в

$$X(m) = \sum_{n=0}^{3} x(n)[\cos(2\pi nm/4) - j\sin(2\pi nm/4)] \ . \qquad \text{(3-4a)}$$

Запишем все слагаемые первого отсчета ДПФ, которому соответствует $m = 0$,

$$\begin{aligned} X(0) = {} & x(0)\cos(2\pi \cdot 0 \cdot 0/4) - jx(0)\sin(2\pi \cdot 0 \cdot 0/4) \\ & + x(1)\cos(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) - jx(1)\sin(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) \\ & + x(2)\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 0/4) - jx(2)\sin(2\pi \cdot 2 \cdot 0/4) \\ & + x(3)\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 0/4) - jx(3)\sin(2\pi \cdot 3 \cdot 0/4) \end{aligned} \qquad \text{(3-4b)}$$

Для второго выходного отсчета ДПФ, соответствующего $m = 1$, (3-4a) принимает вид

$$\begin{aligned} X(1) = {} & x(0)\cos(2\pi \cdot 0 \cdot 1/4) - jx(0)\sin(2\pi \cdot 0 \cdot 1/4) \\ & + x(1)\cos(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) - jx(1)\sin(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) \\ & + x(2)\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 1/4) - jx(2)\sin(2\pi \cdot 2 \cdot 1/4) \\ & + x(3)\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 1/4) - jx(3)\sin(2\pi \cdot 3 \cdot 1/4) \end{aligned} \qquad \text{(3-4c)}$$

Для третьего выходного отсчета, соответствующего $m = 2$, (3-4a) превращается в

$$\begin{aligned} X(2) = {} & x(0)\cos(2\pi \cdot 0 \cdot 2/4) - jx(0)\sin(2\pi \cdot 0 \cdot 2/4) \\ & + x(1)\cos(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) - jx(1)\sin(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) \\ & + x(2)\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 2/4) - jx(2)\sin(2\pi \cdot 2 \cdot 2/4) \\ & + x(3)\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 2/4) - jx(3)\sin(2\pi \cdot 3 \cdot 2/4) \end{aligned} \qquad \text{(3-4d)}$$

Наконец, для четвертого, и последнего, выходного отсчета, которому соответствует индекс $m = 3$, (3-4a) превращается в

---

[1] Имейте ввиду, что для представления оператора $\sqrt{(-1)}$ математики часто используют букву i вместо j.

$$\begin{aligned} X(2) = {} & x(0)\cos(2\pi \cdot 0 \cdot 3/4) - jx(0)\sin(2\pi \cdot 0 \cdot 3/4) \\ & + x(1)\cos(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) - jx(1)\sin(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) \\ & + x(2)\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 3/4) - jx(2)\sin(2\pi \cdot 2 \cdot 3/4) \\ & + x(3)\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 3/4) - jx(3)\sin(2\pi \cdot 3 \cdot 3/4) \end{aligned} \tag{3-4e}$$

Символ умножения "•" в (3-4) используется просто для разделения сомножителей в синусных и косинусных слагаемых. Структура выражений (3-4b) – (3-4e) теперь понятна, и мы ясно видим, почему в (3-3) удобнее использовать символ суммирования. Каждый выходной отсчет ДПФ $X(m)$ представляет собой сумму почленных произведений входной последовательности отсчетов сигнала на последовательность отсчетов комплексной синусоиды (гармоники) вида $\cos(\phi) - j\sin(\phi)$. Точные значения частоты разных синусоид зависят как от частоты дискретизации f_s, с которой был дискретизирован исходный сигнал, так и от количества отсчетов N. Например, если мы дискретизуем непрерывный сигнал с частотой 500 отсчетов в секунду, а затем выполняем 16-точечное ДПФ дискретизированных данных, основная частота синусоид будет равна $f_s/N = 500/16$ или 31.25 Гц. Другие частоты, соответствующие $X(m)$, кратны основной частоте, т. е.

$X(0)$ = 1-й частотный отсчет, частота анализа которого = $0 \cdot 31.25 = 0$ Гц,
$X(1)$ = 2-й частотный отсчет с частотой анализа = $1 \cdot 31.25 = 31.25$Гц,
$X(2)$ = 3-й частотный отсчет с частотой анализа = $2 \cdot 31.25 = 62.5$ Гц,
$X(3)$ = 4-й частотный отсчет с частотой анализа = $3 \cdot 31.25 = 93.75$ Hz,

...

...

$X(15)$ = 16-й частотный отсчет с частотой анализа = $15 \cdot 31.25 = 468.75$ Гц.

N разных частот анализа ДПФ определяются выражением

$$f_{analysis}(m) = (mf_s)/N. \tag{3-5}$$

Таким образом, в этом примере отсчет ДПФ $X(0)$ сообщает нам амплитуду компонента входного сигнала, имеющего частоту 0 Гц (постоянной составляющей), отсчет $X(1)$ задает амплитуду компонента с частотой 31.25 Гц, $X(2)$ — амплитуду компонента с частотой 62.5 Гц и т. д. Более того, как мы увидим дальше на примере, отсчеты ДПФ определяют также фазовые соотношения между частотными составляющими входного сигнала.

Довольно часто нас интересует как амплитуда, так и мощность (амплитуда в квадрате) каждого отсчета $X(m)$, и для их вычисления, как показано на рисунке 3.1, применимы стандартные соотношения в прямоугольном треугольнике.

Если мы представим произвольный отсчет ДПФ $X(m)$ как сумму действительной и мнимой частей:

$$X(m) = X_{real}(m) + jX_{imag}(m) = X_{mag} \text{ с углом } X_{\phi}(m), \tag{3-6}$$

то амплитуда $X(m)$ вычисляется как

$$X_{mag}(m) = |X(m)| = \sqrt{X_{real}(m)^2 + X_{imag}(m)^2}. \tag{3-7}$$

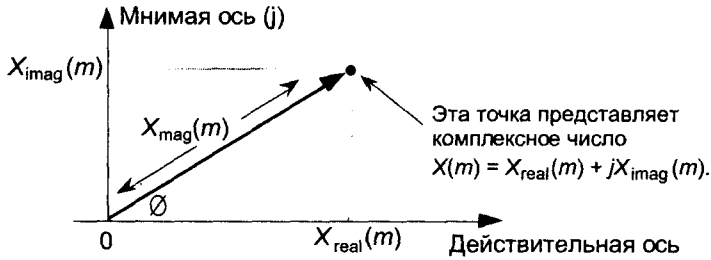


Рис. 3.1. Тригонометрические соотношения для отдельного комплексного значения $X(m)$

По определению, фазовый угол $X(m)$, $X_\phi(m)$, вычисляется как

$$X_\phi(m) = tan^{-1}[X_{imag}(m)/X_{mag}(m)]\,. \qquad (3\text{-}8)$$

Мощность отсчетов $X(m)$, которая называется спектром мощности, представляют собой амплитуду, возведенную в квадрат:

$$X_{PS}(m) = X_{mag}(m)^2 = X_{real}(m)^2 + X_{imag}(m)^2\,. \qquad (3\text{-}9)$$

3.1.1. Пример ДПФ №1

Смысл выражений (3-2) и (3-3) станет более ясным на примере, так что давайте подробно, по шагам, рассмотрим простую ситуацию. Допустим, мы хотим дискретизировать непрерывный сигнал, содержащий компоненты с частотами 1 кГц и 2 кГц следующего вида:

$$x_{in}(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + 0.5\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + 3\pi/4)\,, \qquad (3\text{-}10)$$

а затем выполнить 8-точечное ДПФ этого сигнала.

Чтобы сделать входной сигнал несколько более интересным, мы сдвинули компонент с частотой 2 кГц по фазе на 135° ($3\pi/4$ радиан) по отношению к компоненту с частотой 1 кГц. При частоте дискретизации f_s мы берем отсчеты входного сигнала каждые $1/f_s = t_s$ секунд. Поскольку N = 8, нам нужно взять 8 входных отсчетов, над которыми необходимо выполнить ДПФ. Таким образом, 8-элементная последовательность $x(n)$ равна $x_{in}(t)$, отсчеты которого берутся в моменты времени nt_s:

$$x(n) = x_{in}(nt_s) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot nt_s) + 0.5\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot nt_s + 3\pi/4)\,. \qquad (3\text{-}11)$$

Если мы выберем частоту дискретизации f_s = 8000 отсчетов в секунду, то, согласно (3-5), результат ДПФ будет показывать амплитуды составляющих, содержащихся в $x(n)$, с частотами анализа mf_s/N, или 0 кГц, 1 кГц, 2 кГц, . . ., 7 кГц. При f_s = 8000 отсчетов/с наши восемь отсчетов $x(n)$ равны:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0.3535, & x(1) &= 0.3535, \\ x(2) &= 0.6464, & x(3) &= 1.0607, \\ x(4) &= 0.3535, & x(5) &= -1.0607, \\ x(6) &= -1.3535, & x(7) &= -0.3535. \end{aligned} \qquad (3\text{-}11')$$

Эти значения отсчетов $x(n)$ показаны точками на сплошной непрерывной кривой, изображающей $x_{in}(t)$ на рисунке 3.2 (а). (Обратите внимание на то, что сумма синусоидальных составляющих в (3-10), изображенных штриховыми линиями на рисунке 3.2 (а), равна $x_{in}(t)$.)

Теперь мы готовы использовать (3-3) для вычисления ДПФ нашего входного сигнала $x(n)$. Мы начнем с $m = 1$, потому что случай $m = 0$ дает особый результат, который мы вкратце обсудим позже. Итак, для $m = 1$, или для отсчета ДПФ с частотой 1 кГц ($mf_s/N = 1 \bullet 8000/8$), (3-3) в этом примере преобразуется в

$$X(1) = \sum_{n=0}^{7} [x(n)\cos(2\pi n/8) - jx(n)\sin(2\pi n/8)]. \qquad (3\text{-}12)$$

Затем мы умножим $x(n)$ на последовательные отсчеты косинуса и синуса первой частоты анализа, которые на восьми отсчетах проходят полный период. В нашем примере для $m = 1$ мы просуммируем произведения отсчетов последовательности $x(n)$ на отсчеты косинусоиды частоты 1 кГц и на отсчеты синусоиды частоты 1 кГц, вычисленные для значений аргумента $2\pi n/8$. Эти гармоники анализа показаны на рисунке 3.2 (b) штриховыми линиями. Обратите внимание на то, что на нашем интервале анализа косинусоида и синусоида имеют $m = 1$ полный период.

Подставляя значения отсчетов $x(n)$ в (3-12) и записывая косинусоидальные члены в левом столбце, а синусоидальные — в правом, получаем:

$$\begin{aligned}
X(1) = \; & 0.3535 \cdot 1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) && \text{<– это слагаемое с } n=0 \\
& +0.3535 \cdot 0.707 && -j(0.3535 \cdot 0.707) && \text{<– это слагаемое с } n=1 \\
& +0.6464 \cdot 0.0 && -j(0.6464 \cdot 1.0) && \text{<– это слагаемое с } n=2 \\
& +1.0607 \cdot -0.707 && -j(1.0607 \cdot 0.707) && \ldots \\
& +0.3535 \cdot -1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) && \ldots \\
& -1.0607 \cdot -0.707 && -j(-1.0607 \cdot -0.707) && \ldots \\
& -1.3535 \cdot 0.0 && -j(-1.3535 \cdot -1.0) && \ldots \\
& -0.3535 \cdot 0.707 && -j(-0.3535 \cdot -0.707) && \text{<– это слагаемое с } n=7 \\
= \; & 0.3535 && +j0.0 \\
& +0.250 && -j0.250 \\
& +0.0 && -j0.6464 \\
& -0.750 && -j0.750 \\
& -0.3535 && -j0.0 \\
& +0.750 && -j0.750 \\
& +0.0 && -j1.3535 \\
& -0.250 && -j0.250 \\
= \; & 0.0 - j4.0 && = \; 4 \angle -90^\circ.
\end{aligned}$$

Итак, мы теперь видим, что входной сигнал $x(n)$ содержит компонент с частотой 1 кГц. Используя (3-7), (3-8) и (3-9) для $X(1)$ получаем: $X_{mag}(1) = 4, X_{PS}(1) = 16$ и фазовый угол $X(1)$ по отношению к косинусоиде с частотой 1 кГц составляет $X_\phi(1) = -90^\circ$.

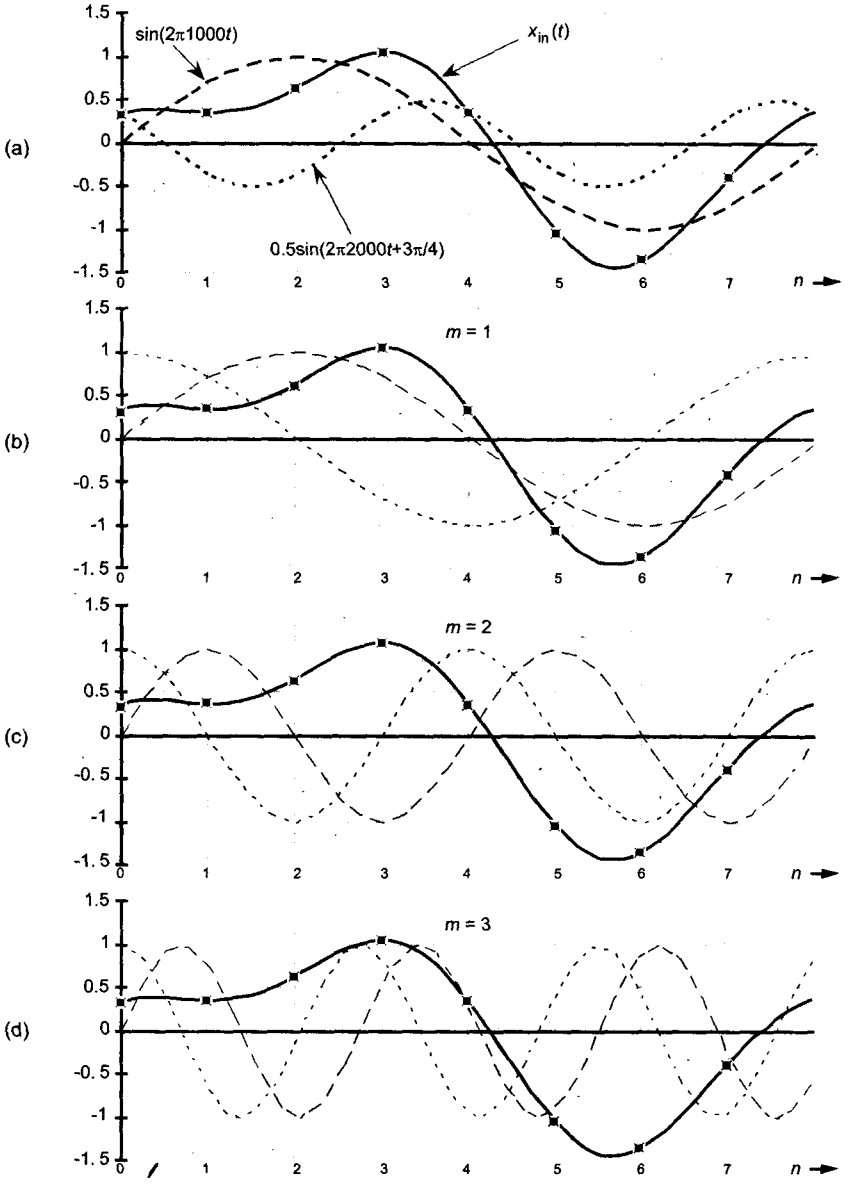


Рис. 3.2. Пример ДПФ №1: (a) входной сигнал; (b) входной сигнал и гармоники для $m = 1$; (c) входной сигнал и гармоники для $m = 2$; (d) входной сигнал и гармоники для $m = 3$

Для частотной составляющей с $m = 2$ мы находим корреляцию $x(n)$ с косинусоидой и синусоидой с частотой 2 кГц. Эти сигналы изображаются штриховыми линиями на рисунке 3.2 (c). Заметьте, что косинусоидальный и синусоидальный сигналы на нашем интервале анализа на рисунке 3.2 (c) имеют ровно $m = 2$ полных периода. Подставляя значения отсчетов $x(n)$ в (3-3) для $m = 2$, получаем

$$
\begin{aligned}
X(2) = \; & 0.3535 \cdot 1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& +0.3535 \cdot 0.0 && -j(0.3535 \cdot 1.0) \\
& +0.6464 \cdot -1.0 && -j(0.6464 \cdot 0.0) \\
& +1.0607 \cdot 0.0 && -j(1.0607 \cdot -1.0) \\
& +0.3535 \cdot 1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& -1.0607 \cdot 0.0 && -j(-1.0607 \cdot 1.0) \\
& -1.3535 \cdot -1.0 && -j(-1.3535 \cdot 0.0) \\
& -0.3535 \cdot 0.0 && -j(-0.3535 \cdot -1.0) \\
= \; & 0.3535 && +j0.0 \\
& +0.0 && -j0.3535 \\
& -0.6464 && -j0.0 \\
& -0.0 && +j1.0607 \\
& +0.3535 && -j0.0 \\
& +0.0 && +j1.0607 \\
& +1.3535 && -j0.0 \\
& -0.0 && -j0.3535 \\
= \; & 1.414 + j1.414 && = \; 2 \angle 45^\circ.
\end{aligned}
$$

В этом случае входной сигнал $x(n)$ содержит составляющую с частотой 2 кГц, относительная амплитуда которой равна 2, а фазовый угол по отношению к косинусоиде с частотой 2 кГц составляет 45°. Для $m = 3$ мы находим корреляцию $x(n)$ с косинусоидой и синусоидой с частотой 3 кГц. Эти составляющие на рисунке 3.2 (d) показаны штриховыми линиями. На интервале наблюдения на рисунке 3.2 (d) и косинусоида, и синусоида имеют $m = 3$ полных периода. Подставляя значения отсчетов $x(n)$ в (3-3) для $m = 3$ получаем:

$$
\begin{aligned}
X(3) = \; & 0.3535 \cdot 1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& +0.3535 \cdot -0.707 && -j(0.3535 \cdot 0.707) \\
& +0.6464 \cdot 0.0 && -j(0.6464 \cdot -1.0) \\
& +1.0607 \cdot 0.707 && -j(1.0607 \cdot 0.707) \\
& +0.3535 \cdot -1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& -1.0607 \cdot 0.707 && -j(-1.0607 \cdot -0.707) \\
& -1.3535 \cdot 0.0 && -j(-1.3535 \cdot 1.0) \\
& -0.3535 \cdot -0.707 && -j(-0.3535 \cdot -0.707) \\
= \; & 0.3535 && +j0.0 \\
& -0.250 && -j0.250 \\
& +0.0 && +j0.6464 \\
& +0.750 && -j0.750 \\
& -0.3535 && -j0.0 \\
& -0.750 && -j0.750 \\
& +0.0 && +j1.3535
\end{aligned}
$$

$$+0.250 \qquad\qquad -j0.250$$

$$= \quad 0.0 - j0.0 \quad = \quad 0 \angle 0^{\circ}.$$

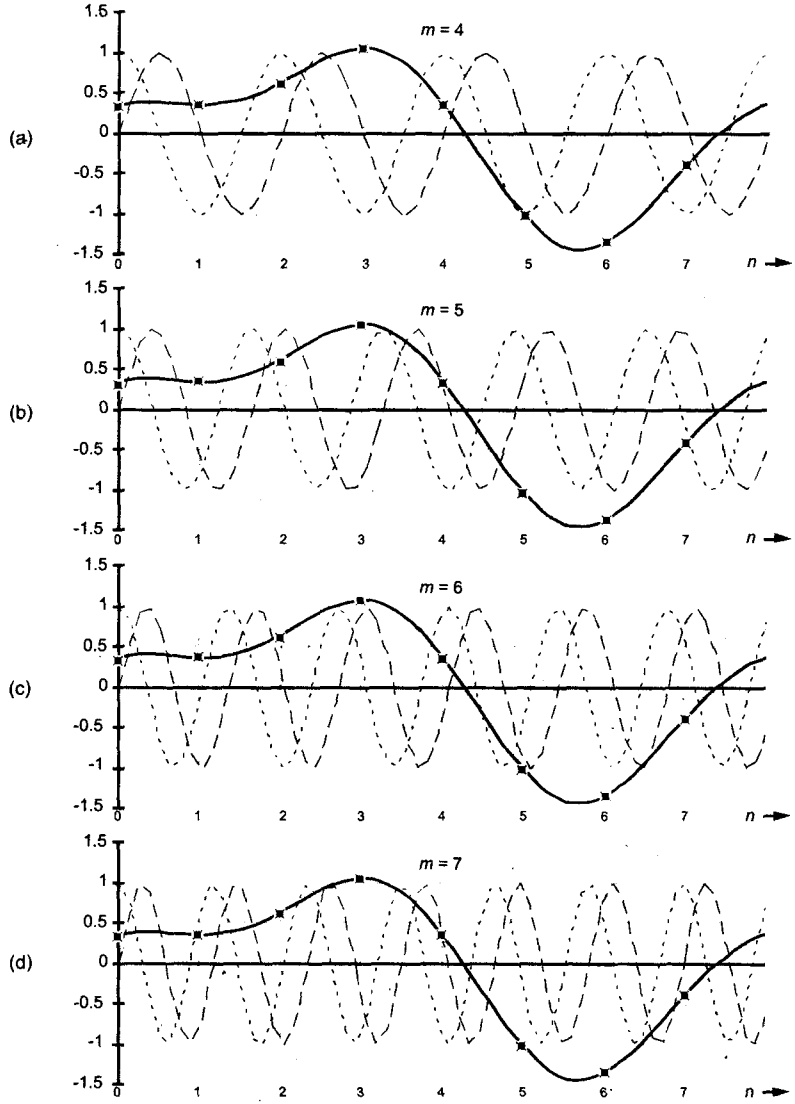


Рис. 3.3. Пример ДПФ №1: (a) входной сигнал и синусоиды для $m = 4$; (b) входной сигнал и синусоиды для $m = 5$; (c) входной сигнал и синусоиды для $m = 6$; (d) входной сигнал и синусоиды для $m = 7$

ДПФ показывает, что $x(n)$ не содержит компонентов с частотой 3 кГц. Продолжим вычисление ДПФ для $m = 4$ с использованием синусоид, показанных на рисунке 3.3 (a).

Итак, (3-3) приобретает вид:

$$
\begin{aligned}
X(4) = \; & 0.3535 \cdot 1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& +0.3535 \cdot -1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& +0.6464 \cdot 1.0 && -j(0.6464 \cdot 0.0) \\
& +1.0607 \cdot -1.0 && -j(1.0607 \cdot 0.0) \\
& +0.3535 \cdot 1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& -1.0607 \cdot -1.0 && -j(-1.0607 \cdot 0.0) \\
& -1.3535 \cdot 1.0 && -j(-1.3535 \cdot 0.0) \\
& -0.3535 \cdot -1.0 && -j(-0.3535 \cdot 0.0) \\
= \; & 0.3535 && -j0.0 \\
& -0.3535 && -j0.0 \\
& +0.6464 && -j0.0 \\
& -1.0607 && -j0.0 \\
& +0.3535 && -j0.0 \\
& +1.0607 && -j0.0 \\
& -1.3535 && -j0.0 \\
& +0.3535 && -j0.0 \\
= \; & 0.0 - j0.0 && = \quad 0 \angle 0^\circ.
\end{aligned}
$$

Для частотного отсчета $m = 5$ с использованием синусоид, приведенных на рисунке 3.3 (b) ДПФ дает:

$$
\begin{aligned}
X(5) = \; & 0.3535 \cdot 1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& +0.3535 \cdot -0.707 && -j(0.3535 \cdot -0.707) \\
& +0.6464 \cdot 0.0 && -j(0.6464 \cdot 1.0) \\
& +1.0607 \cdot 0.707 && -j(1.0607 \cdot -0.707) \\
& +0.3535 \cdot -1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& -1.0607 \cdot 0.707 && -j(-1.0607 \cdot 0.707) \\
& -1.3535 \cdot 0.0 && -j(-1.3535 \cdot -1.0) \\
& -0.3535 \cdot -0.707 && -j(-0.3535 \cdot 0.707) \\
= \; & 0.3535 && -j0.0 \\
& -0.250 && +j0.250 \\
& +0.0 && -j0.6464 \\
& +0.750 && +j0.750 \\
& -0.3535 && -j0.0 \\
& -0.750 && +j0.750 \\
& +0.0 && -j1.3535 \\
& +0.250 && +j0.250 \\
= \; & 0.0 - j0.0 && = \quad 0 \angle 0^\circ.
\end{aligned}
$$

Для частотного отсчета $m = 6$ с использованием синусоид с рисунка 3.3 (c), (3-3) дает

$$
\begin{aligned}
X(6) = \; & 0.3535 \cdot 1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& +0.3535 \cdot 0.0 && -j(0.3535 \cdot -1.0) \\
& +0.6464 \cdot -1.0 && -j(0.6464 \cdot 0.0) \\
& +1.0607 \cdot 0.0 && -j(1.0607 \cdot 1.0) \\
& +0.3535 \cdot 1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& -1.0607 \cdot 0.0 && -j(-1.0607 \cdot -1.0) \\
& -1.3535 \cdot -1.0 && -j(-1.3535 \cdot 0.0) \\
& -0.3535 \cdot 0.0 && -j(-0.3535 \cdot 1.0) \\
= \; & 0.3535 && -j0.0 \\
& +0.0 && +j0.3535 \\
& -0.6464 && -j0.0 \\
& +0.0 && -j1.0607 \\
& +0.3535 && -j0.0 \\
& +0.0 && -j1.0607 \\
& +1.3535 && -j0.0 \\
& +0.0 && +j0.3535 \\
= \; & 1.414 - j1.414 && = \; 2 \angle -45^\circ
\end{aligned}
$$

Для $m = 7$ и синусоид с рисунка 3.3 (d) (3-3) дает:

$$
\begin{aligned}
X(7) = \; & 0.3535 \cdot 1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& +0.3535 \cdot 0.707 && -j(0.3535 \cdot -0.707) \\
& +0.6464 \cdot 0.0 && -j(0.6464 \cdot -1.0) \\
& +1.0607 \cdot -0.707 && -j(1.0607 \cdot -0.707) \\
& +0.3535 \cdot -1.0 && -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
& -1.0607 \cdot -0.707 && -j(-1.0607 \cdot 0.707) \\
& -1.3535 \cdot 0.0 && -j(-1.3535 \cdot 1.0) \\
& -0.3535 \cdot 0.707 && -j(-0.3535 \cdot 0.707) \\
= \; & 0.3535 && +j0.0 \\
& +0.250 && +j0.250 \\
& +0.0 && +j0.6464 \\
& -0.750 && +j0.750 \\
& -0.3535 && -j0.0 \\
& +0.750 && +j0.750 \\
& +0.0 && +j1.3535 \\
& -0.250 && +j0.250 \\
= \; & 0.0 + j4.0 && = \; 4 \angle 90^\circ.
\end{aligned}
$$

Если мы построим график модулей $X(m)$, как функции частоты, мы получим амплитудный *спектр* входной последовательности $x(n)$, приведенный на рисунке 3.4 (a). Фазовые углы отсчетов $X(m)$ изображены на рисунке 3.4 (b).

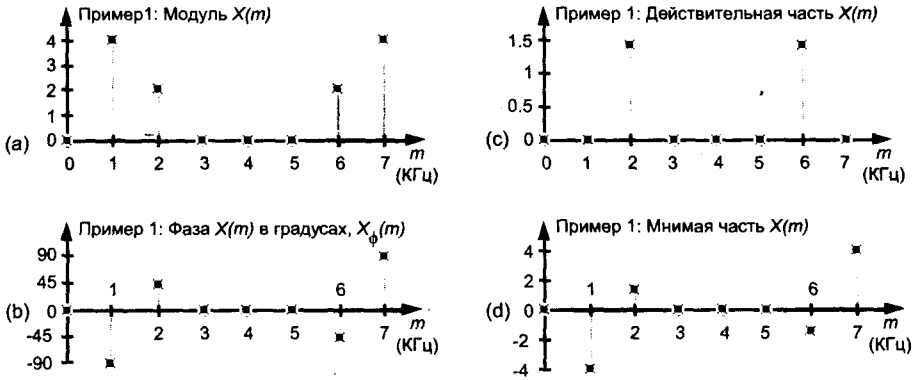


Рис. 3.4. Результат ДПФ из примера №1: (a) модуль $X(m)$; (b) фаза $X(m)$; (c) действительная часть $X(m)$; (d) мнимая часть $X(m)$

Сделаем последнее усилие, мы уже почти закончили с этим примером. Мы оставили вычисление отсчета с $m = 0$ напоследок, т. к. он имеет особое значение. Когда $m = 0$, мы находим корреляцию $x(n)$ с $\cos(0) - j\sin(0)$, так что (3-3) превращается в

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[\cos(0) - j\sin(0)]. \tag{3-13}$$

Поскольку $\cos(0) = 1$, а $\sin(0) = 0$,

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n). \tag{3-13'}$$

Мы можем видеть, что (3-13') представляет собой сумму отсчетов $x(n)$. Эта сумма, конечно же, пропорциональна среднему значению $x(n)$. (Точнее, отсчет $X(0)$ равен среднему значению $x(n)$, умноженному на N.) Это не случайно, т. к. отсчет $X(0)$ в частотной области представляет собой не изменяющийся во времени (постоянный) компонент $x(n)$. Если бы $X(0)$ был отличен от нуля, это подсказало бы нам, что последовательность $x(n)$ имеет некоторое постоянное смещение, и ее среднее значение не равно нулю. Для нашего конкретного примера (3-10) сумма равна 0. Входная последовательность не имеет постоянной составляющей, так что мы знаем, что $X(0)$ будет равным нулю. Но не поленимся, и для успокоения совести все-таки вычислим $X(0)$.

Вычисляя значение (3-3) или (3-13') при $m = 0$, мы видим, что

$$\begin{aligned} X(0) = \; & 0.3535 \cdot 1.0 \quad - j(0.3535 \cdot 0.0) \\ & + 0.3535 \cdot 1.0 \quad - j(0.3535 \cdot 0.0) \\ & + 0.6464 \cdot 1.0 \quad - j(0.6464 \cdot 0.0) \\ & + 1.0607 \cdot 1.0 \quad - j(1.0607 \cdot 0.0) \\ & + 0.3535 \cdot 1.0 \quad - j(0.3535 \cdot 0.0) \\ & - 1.0607 \cdot 1.0 \quad - j(-1.0607 \cdot 0.0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -1.3535 \cdot 1.0 && -j(-1.3535 \cdot 0.0) \\
& -0.3535 \cdot 1.0 && -j(-0.3535 \cdot 0.0) \\
X(0) = \; & 0.3535 && -j0.0 \\
& +0.3535 && -j0.0 \\
& +0.6464 && -j0.0 \\
& +1.0607 && -j0.0 \\
& +0.3535 && -j0.0 \\
& -1.0607 && -j0.0 \\
& -1.3535 && -j0.0 \\
& -0.3535 && -j0.0 \\
= \; & 0.0-j0.0 && = \; 0 \angle 0^{\circ}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $x(n)$ не имеет постоянной составляющей, и, следовательно, его среднее значение равно нулю. Заметим, что рисунок 3.4 показывает, что $x_{in}(t)$ из (3-10) имеет компоненты с частотами 1 кГц ($m = 1$) и 2 кГц ($m = 2$). Более того, амплитуда тона с частотой 1 кГц в два раза выше амплитуды тона с частотой 2 кГц. Результат ДПФ, показанный на рисунке 3.4, показывает нам точный спектральный состав сигнала, определяемого уравнениями (3-10) и (3-11).

Наблюдательный читатель должен был бы задать здесь два вопроса. Во-первых, что означают ненулевые значения амплитуды при $m = 6$ и $m = 7$ на рисунке 3.4 (а)? А во-вторых, почему амплитуды оказались в четыре раза больше, чем мы ожидали? Это хорошие вопросы, и мы вскоре на них ответим. Приведенный пример 8-точечного ДПФ, хотя и довольно простой, иллюстрирует две очень важные особенности ДПФ, которые мы не должны забывать никогда. Во-первых, любое отдельное значение $X(m)$ — не более чем сумма почленных произведений входной последовательности отсчетов на косинусоиду и синусоиду (или корреляция), частота которых такова, что на интервале наблюдения из N отсчетов укладывается m их полных периодов. Это справедливо независимо от того, какова частота дискретизации f_s, и независимо от величины N в N-точечном ДПФ. Второй важной особенностью ДПФ действительного сигнала является симметрия выходных отсчетов ДПФ.

3.2. Симметрия ДПФ

Взглянув на рисунок 3.4 (а), можно увидеть явную симметрию результатов ДПФ. Хотя стандартное ДПФ предназначено для обработки комплексных входных последовательностей, большинство реальных входных сигналов (таких как оцифрованные отсчеты некоторого непрерывного сигнала) относятся к действительным сигналам: действительные входные сигналы имеют отличные от нуля действительные части, а их мнимые части полагаются равными 0. Когда входная последовательность $x(n)$ действительна, как это будет во всех наших примерах, комплексные отсчеты ДПФ для m от 1 до $(N/2) - 1$ тесно связаны с частотными

отсчетами с $m > (N/2)$. m-й отсчет ДПФ имеет тот же модуль, что и $(N-m)$-й отсчет ДПФ. Фазовый угол m-го отсчета ДПФ равен фазовому углу $(N-m)$-го отсчета, взятому с противоположным знаком. Таким образом, m-й и $(N-m)$-й отсчеты связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} X(m) &= |\, X(m) \,| \text{ с углом } X_\phi(m) \text{ градусов} \\ &= |\, X(N-m) \,| \text{ с углом } -X_\phi(N-m) \text{ градусов.} \end{aligned} \tag{3-14}$$

Мы можем утверждать, что, когда входная последовательность ДПФ действительна, $X(m)$ и $X(N-m)$ образуют комплексно-сопряженную пару, или

$$X(m) = X^*(N-m), \tag{3-14'}$$ [1]

где верхний индекс * обозначает комплексную сопряженность.

Обратите внимание на то, что в нашем примере, рассмотренном выше на рисунках 3.4 (b) и 3.4 (d) отсчеты $X(5)$, $X(6)$ и $X(7)$ комплексно сопряжены отсчетам $X(3)$, $X(2)$ и $X(1)$ соответственно. Аналогично симметрии модуля ДПФ действительная часто $X(m)$ обладает тем, что называется четной симметрией, как показано на рисунке 3.4 (c), а мнимая часть ДПФ обладает нечетной симметрией, как показано на рисунке 3.4 (d). Именно это соотношение имеют ввиду, когда в литературе называют ДПФ сопряженно-симметричным. Это значит, что, если мы выполняем N-точечное ДПФ действительной последовательности, мы получим N отдельных комплексных отсчетов, но только $N/2+1$ отсчетов будут независимыми. Следовательно, чтобы получить ДПФ последовательности $x(n)$, нам необходимо вычислить только первые $N/2+1$ отсчетов $X(m)$ при $0 \le m \le (N/2)$; отсчеты от $X(N/2+1)$ до $X(N-1)$ не дают дополнительной информации о спектре действительной последовательности $x(n)$.

Хотя (3-2) и (3-3) эквивалентны, экспоненциальная форма ДПФ (3-2) имеет огромное преимущество перед формой (3-3).Форма (3-2) не только позволяет сэкономить чернила и бумагу, экспонентами в (3-2) гораздо легче манипулировать, когда мы пытаемся анализировать соотношения, связанные с ДПФ. При использовании (3-2) умножение членов сводится к сложению показателей степени и, при всем нашем уважении к Эйлеру, нам не нужно запоминать все необходимые тригонометрические тождества. Продемонстрируем это, доказав справедливость выражения (3-14) и симметрию ДПФ действительных последовательностей. Подставляя $N-m$ вместо m в (3-2), мы получаем выражение для $(N-m)$-го компонента ДПФ:

$$\begin{aligned} X(N-m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n(N-m)/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nN/N} e^{-j2\pi n(-m)/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n} e^{j2\pi nm/N}. \end{aligned} \tag{3-15}$$

Так как $e^{-j2\pi n} = \cos(2\pi n) - j\sin(2\pi n) = 1$ для всех целых значений, то выражение (3-15) приобретает вид

[1] С учетом наших обозначений, число, комплексно сопряженное числу $x = a + jb$, определяется как $x^* = a - jb$; т. е. мы просто меняем знак мнимой части x. В эквивалентной форме, если $x = e^{j\phi}$, то $x^* = e^{-j\phi}$.

$$X(N-m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j2\pi nm/N}. \qquad (3\text{-}15')$$

Мы видим, что $X(N-m)$ в (3-15') — это просто $X(m)$ в (3-2) с инвертированным знаком показателя степени — а это не что иное, как определение комплексной сопряженности. Это иллюстрируется графиком фазовых углов ДПФ на рисунке 3.4 (b) для нашего примера ДПФ №1. Попробуйте вывести (3-15'), используя косинусы и синусы в (3-3), и вы увидите, почему экспоненциальная форма ДПФ так удобна для аналитических выкладок.

Существует еще одно свойство симметрии ДПФ, которое заслуживает упоминания здесь. На практике нам иногда приходится вычислять ДПФ действительных последовательностей, для которых индекс n принимает как положительные, так и отрицательные значения. Если такая действительная последовательность четна, то последовательность $X(m)$ всегда действительна и четна; т. е., если действительная последовательность такова, что $x(n) = x(-n)$, то величина $X_{real}(m)$ в общем случае отлична от нуля, а $X_{imag}(m)$ равна 0. И наоборот, если действительная последовательность нечетна, т. е. $x(n) = -x(-n)$, то $X_{real}(m)$ всегда равна 0, а $X_{imag}(m)$ в общем случае отлична от 0. Это свойство ДПФ, связанное с симметрией входных последовательностей, присуще не только ДПФ, но и непрерывному преобразованию Фурье — мы рассмотрим конкретные его примеры позже в разделе 3.13 и главе 5.

3.3. Линейность ДПФ

ДПФ обладает очень важным свойством, известным как линейность. Это свойство заключается в том, что ДПФ суммы двух сигналов равно сумме преобразований отдельных сигналов; т. е., если входная последовательность $x_1(n)$ имеет ДПФ $X_1(m)$, а другая входная последовательность $x_2(n)$ имеет ДПФ $X_2(m)$, то ДПФ суммы этих последовательностей $x_{sum}(n) = x_1(n) + x_2(n)$ равно

$$X_{sum}(m) = X_1(m) + X_2(m). \qquad (3\text{-}16)$$

Это достаточно легко доказать. Если мы подставим $x_{sum}(n)$ в (3-2), чтобы получить $X_{sum}(m)$, то

$$X_{sum}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} [x_1(n) + x_2(n)]\, e^{-j2\pi nm/N} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j2\pi nm/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)\, e^{-j2\pi nm/N} = X_1(m) + X_2(m).$$

Без этого свойства линейности ДПФ было бы бесполезным как аналитический инструмент, потому что мы могли бы преобразовывать только те сигналы, которые содержат единственную синусоиду. Сигналы реального мира, которые мы хотим анализировать, значительно сложнее, чем отдельные синусоиды.

3.4. Модули ДПФ

Результаты примера ДПФ №1 $|X(1)| = 4$ и $|X(2)| = 2$ могут озадачить читателя, потому что входной сигнал $x(n)$ вида (3-11) содержит гармоники с амплитудами, равными 1.0 и 0.5 соответственно. Имеется важная особенность, о которой всегда следует помнить, рассматривая ДПФ, определяемое соотношением (3-2). Когда действительный входной сигнал содержит синусоидальный компонент с амплитудой A_o и целым количеством периодов на N отсчетах, амплитуда выходного отсчета ДПФ, соответствующего конкретной синусоиде, равна $M_г$, где

$$M_г = A_o N/2 . \qquad (3\text{-}17)$$

Если на вход ДПФ поступает комплексная синусоида амплитуды A_o (т. е. $A_o e^{j2\pi ft}$) с целым количеством периодов на N отсчетах, модуль соответствующего отсчета ДПФ равен M_c, где

$$M_c = A_o N . \qquad (3\text{-}17')$$

Как утверждалось в связи с (3-13'), если входной сигнал имеет постоянную составляющую D_o, то модуль отсчета ДПФ $X(0)$ равен $D_o N$.

В случае действительного входного сигнала частотой 1000 Гц из (3-11) $A_o = 1$ и $N = 8$, так что $M_{real} = 1 \cdot 8/2 = 4$, что совпадает с результатом, полученным в примере. Соотношение (3-17) может быть не столь важным, когда мы выполняем ДПФ программно или аппаратно, используя числа с плавающей точкой, но если мы реализуем ДПФ в целочисленной арифметике, мы должны отдавать себе отчет в том, что результат может принимать значения, которые в $N/2$ раз превышают пиковое значение входного сигнала. Это значит, что для действительного сигнала аппаратные регистры должны быть достаточно длинными, чтобы в них помещались большие числа, которые в $N/2$ раз больше максимальной амплитуды входного сигнала. Несколько позже в этой главе мы обсудим вопрос об амплитуде отсчетов ДПФ подробнее. Выражения (3-17) и (3-17') являются причиной того, что мы часто видим в литературе определение ДПФ в форме:

$$X'(m) = (1/N)\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi nm/N} . \qquad (3\text{-}18)$$

Масштабирующий коэффициент $1/N$ в (3-18) делает модули $X'(m)$ равными половине пикового значения синусоиды во временной области ценой дополнительной операции деления на N. Программные и аппаратурные реализации ДПФ обычно используют (3-2), а не (3-18). Конечно, как всегда, имеются исключения. Существуют коммерческие пакеты программ, в которых используется следующая формула прямого и обратного ДПФ:

$$X''(m) = (1/\sqrt{N})\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi nm/N} .$$

и

$$x(n) = (1/\sqrt{N})\sum_{n=0}^{N-1} X''(m)\, e^{j2\pi nm/N} . \qquad (3\text{-}18')$$

(В разделе 3.7, мы обсудим смысл и значение обратного ДПФ.) Масштабирующие множители в (3-18') кажутся несколько странными, но они позволяют выполнять вычисления так, что при последовательном выполнении прямого и обратного ДПФ масштаб сигнала не изменяется. На практике при анализе спектра сигнала нас больше интересуют относительные значения отсчетов ДПФ, а не их абсолютные значения, поэтому обычно масштабные множители для нас не имеют значения.

3.5. Частотная ось ДПФ

Частотная ось m результатов ДПФ на рисунке 3.4 заслуживает того, чтобы мы обратили на нее внимание еще раз. Предположим, что мы не видели наш пример №1, нам дали восемь отсчетов входного сигнала из (3-11') и попросили выполнить 8-точечное ДПФ. Мы выполнили сложные расчеты согласно (3-2) и получили значения $X(m)$, показанные на рисунке 3.4. Затем мы спрашиваем: «Какова частота в Герцах компонента $X(m)$ с наибольшим модулем?» Ответ 1 будет ошибочным. Ответ зависит от частоты дискретизации f_s. Не зная ее заранее, мы не можем ничего сказать о том, с каким временным интервалом брались отсчеты, следовательно, мы не знаем масштаб частотной оси. Правильный ответ состоит в том, чтобы взять f_s и подставить ее в (3-5) при $m=1$. Таким образом, если $f_s = 8000$ отсчетов в секунду, то частота, соответствующая отсчету ДПФ наибольшей величины, равна

$$f_{analysis}(m) = mf_s/N = f_{analysis}(1) = (1 \cdot 8000)/8 = 1000 \text{ Гц}$$

Если бы нам сказали, что частота дискретизации f_s равна 75 отсчетам в секунду, мы бы знали, благодаря (3-5), что частота, соответствующая наибольшему отсчету, равна

$$f_{analysis}(1) = (1 \cdot 75)/8 \text{ Гц}$$

Ну ладно, пока хватит об этом, просто помните, что расстояние по частоте между отсчетами ДПФ (разрешение) равно f_s/N.

Итак, подведем итог тому, что мы узнали:

- каждый выходной отсчет ДПФ есть сумма почленных произведений входной последовательности на последовательности, представляющие синусоидальный и косинусоидальный сигналы;
- для действительных сигналов N-точечное ДПФ дает только $N/2+1$ независимых отсчетов;
- ДПФ представляет собой линейную операцию;
- модули результатов ДПФ прямо пропорциональны N;
- разрешающая способность ДПФ по частоте составляет f_s/N.

Важно также понимать, что согласно (3-5) отсчет $X(N/2+1)$, для которого $m = N/2+1$, соответствует половине частоты дискретизации, т. е. частоте заворота (частоте Найквиста) $f_s/2$.

3.6. Теорема о сдвиге

ДПФ обладает важным свойством, которое выражают теоремой о сдвиге. Теорема утверждает, что сдвиг периодической последовательности $x(n)$ во времени проявляется в результатах ДПФ как добавка к их фазовым углам. (Здесь мы не будем доказывать эту теорему, т. к. доказательство имеется практически в любом учебнике по ЦОС.) Если мы берем отсчеты $x(n)$, начиная с некоторого n, равного целому k, а не с $n = 0$, ДПФ этой сдвинутой последовательности будет $X_{shifted}(m)$

$$X_{shifted}(m) = e^{j2\pi km/N} X(m) . \qquad (3\text{-}19)$$

Выражение (3-19) показывает, что, если начало взятия отсчетов $x(n)$ смещается вправо на k отсчетов, то спектр $X_{shifted}(m)$ состоит из комплексных отсчетов $X(m)$, умноженных на фазовый множитель , что приводит просто к сдвигу фазы на $2\pi km/N$ радиан, или на $360km/N$ градусов. Если же начало взятия отсчетов $x(n)$ сдвигается на k отсчетов влево, спектр $X_{shifted}(m)$ получается умножением $X(m)$ на $e^{-j2\pi km/N}$. Проиллюстрируем (3-19) примером.

3.6.1. Пример ДПФ №2

Предположим, что мы начали брать отсчеты сигнала из примера №1 на $k = 3$ отсчета позже. На рисунке 3.5 показан исходный входной сигнал:

$$x_{in}(t) = \sin(2\pi 1000t) + 0.5\sin(2\pi 2000t + 3\pi/4).$$

Легко увидеть, что график на рисунке 3.5 является продолжением графика на рисунке 3.2 (а). Новая последовательность $x(n)$ содержит отсчеты, показанные на рисунке 3.5 жирными черными точками.

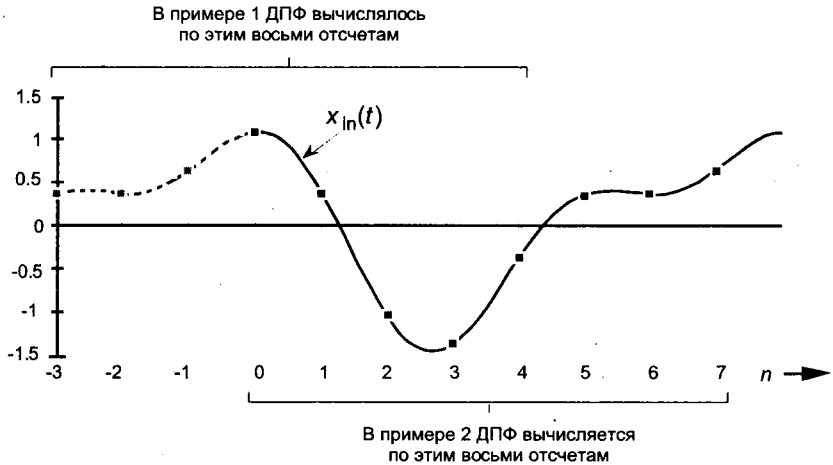


Рис. 3.5. Сравнение моментов взятия отсчетов в примерах ДПФ №1 и №2

Значения этих отсчетов следующие:

$$
\begin{aligned}
&x(0) = 1.0607, && x(1) = 0.3535,\\
&x(2) = -1.0607, && x(3) = -1.3535,\\
&x(4) = -0.3535, && x(5) = 0.3535,\\
&x(6) = 0.3535, && x(7) = 0.6464.
\end{aligned}
\tag{3-20}
$$

Выполнив ДПФ последовательности (3-20), получаем следующие значения $X_{shifted}(m)$

$X_{shifted}(m) =$ (3-21)

m	Модуль $X_{shifted}(m)$	Фаза $X_{shifted}(m)$	Действительная часть $X_{shifted}(m)$	Мнимая часть $X_{shifted}(m)$
0	0	0	0	0
1	4	+45	2.8284	2.8284
2	2	–45	1.4142	–1.4142
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	2	+45	1.4142	1.4142
7	4	–45	2.8284	–2.8284

Значения из (3-21) показаны точками на рисунке 3.6. Обратите внимание на то, что рисунок 3.6 (а) идентичен рисунку 3.4 (а). Соотношение (3-19) говорит нам, что модули $X_{shiited}(m)$ равны модулям $X(m)$. Не следует ожидать изменения модуля ДПФ исходного периодического сигнала $x_{in}(t)$ просто потому, что мы дискретизуем его на другом интервале времени. Фазы же ДПФ меняются в зависимости от момента, с которого мы начинаем брать отсчеты $x_{in}(t)$.

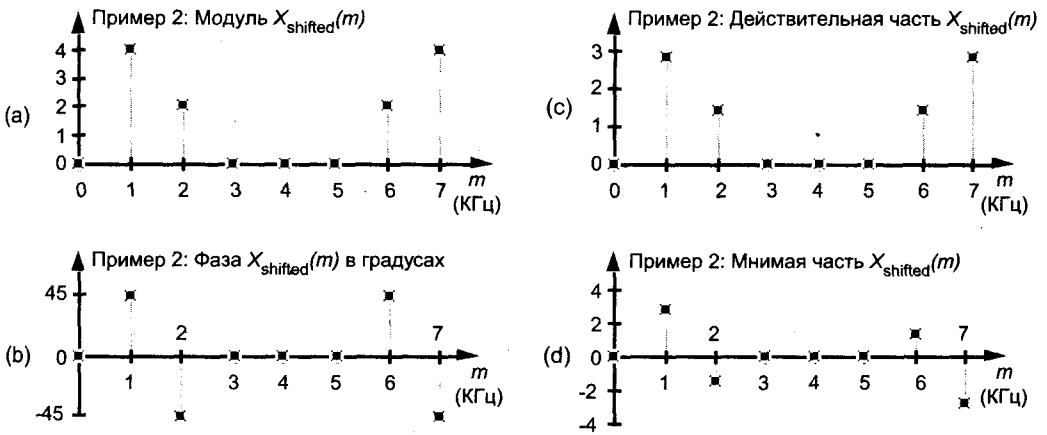


Рис. 3.6. Результат ДПФ примера №2: (а) модуль $X_{shifted}(m)$; (b) фаза $X_{shifted}(m)$; (c) действительная часть $X_{shifted}(m)$; (d) мнимая часть $X_{shifted}(m)$

Посмотрев на компонент $X_{shifted}(m)$ с $m = 1$, например, мы можем проверить правильность значений фаз, показанных на рисунке 3.6 (b). Используя (3-19) и вспомнив, что в примере №1 $X(1)$ имел модуль 4 и фазу −90° (или $-\pi/2$ радиан), а $k = 3$ и $N = 8$, получаем

$$X_{shifted}(1) = e^{j2\pi km/N}X(1) = e^{j2\pi 3 \cdot 1/8} \cdot 4e^{-j\pi/2} = 4e^{j(6\pi/8-4\pi)} = 4e^{j\pi/4}. \quad (3\text{-}22)$$

Таким образом, $X_{shifted}(1)$ имеет модуль, равный 4, и фазовый угол, равный $\pi/4$, или +45°, что и требовалось для обоснования использования (3-19).

3.7. Обратное ДПФ

Хотя главной темой этой главы является ДПФ, сейчас уместно ввести обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ). Обычно мы считаем, что ДПФ преобразует данные временной области в представление в частотной области. Но мы можем обратить этот процесс и получить исходный сигнал во временной области, выполнив ОДПФ отсчетов $X(m)$ в частотной области. Стандартные выражения для ОДПФ имеют вид:

$$x(n) = (1/N)\sum_{m=0}^{N-1} X(m)\, e^{j2\pi nm/N} \quad (3\text{-}23)$$

или

$$x(n) = (1/N)\sum_{m=0}^{N-1} X(m)\,[\cos(2\pi mn/N) + j\sin(2\pi mn/N)]\,. \quad (3\text{-}23')$$

Вспомним наше утверждение из раздела 3.1 о том, что дискретный сигнал во временной области можно рассматривать как сумму синусоид с разными аналитическими частотами и что результат ДПФ, $X(m)$, представляет собой набор N комплексных отсчетов, которые отражают амплитуды и фазы этих синусоид. Формулы (3-23) и (3-23') представляют собой математические выражения этого утверждения. Читателю очень важно понять это. Если мы выполняем ОДПФ, подставляя результаты ДПФ из примера №1 в (3-23), мы возвращаемся из частотной области обратно во временную и получаем исходные действительные отсчеты $x(n)$ из (3-11'), имеющие значения

x(0) = 0.3535 + j0.0	x(1) = 0.3535 + j0.0
x(2) = 0.6464 + j0.0	x(3) = 1.0607 + j0.0
x(4) = 0.3535 + j0.0	x(5) = −1.0607 + j0.0
x(6) = −1.3535 + j0.0	x(7) = −0.3535 + j0.0

Обратите внимание на то, что выражение (3-23) отличается от ДПФ (3-2) только масштабирующим множителем $1/N$ и знаком показателя степени. Кроме модуля результатов, все характеристики, которые мы до сих пор рассматривали для ДПФ, также присущи и ОДПФ.

3.8. Утечка ДПФ

А теперь держитесь за стул покрепче. Именно сейчас ДПФ становится действительно интересным. Два предыдущих примера дали корректные результаты потому, что входные последовательности $x(n)$ представляли собой специально подобранные синусоиды. Оказывается, ДПФ дискретизированных сигналов реального мира дает в частотной области результаты, которые могут сбивать с толку. Особенность ДПФ, известная как утечка, приводит к тому, что результаты ДПФ представляют собой только аппроксимацию истинного спектра исходного непрерывного сигнала. Хотя существуют способы минимизации утечки, мы не можем устранить ее полностью. Таким образом, нам необходимо точно понять, как она влияет на результат ДПФ[1].

Начнем с начала. ДПФ применяется к конечным множествам N отсчетов, полученным дискретизацией сигнала с частотой f_s, с целью получить N-точечное преобразование, дискретные отсчеты которого ассоциируются с отдельными аналитическими частотами $f_{analysis}(m)$, где

$$f_{analysis}(m) = mf_s/N \tag{3-24}$$

при m= 0, 1, 2, ..., N−1.

Выражение (3-24), которое мы использовали в примере №1, может выглядеть совершенно безобидно, хотя на самом деле оно таит в себе проблему. ДПФ дает правильный результат только тогда, когда входная последовательность данных содержит энергию точно на аналитической частоте (3-24), на частоте, кратной фундаментальной частоте f_s/N. Если входной сигнал содержит компонент с некоторой промежуточной частотой, лежащей между аналитическими частотами mf_s/N, скажем $1.5f_s/N$, то этот входной сигнал проявится в некоторой степени на всех N частотах анализа! (Мы обычно говорим, что энергия входного сигнала проявляется на всех выходных бинах ДПФ, и мы скоро увидим, почему фраза «выходные бины» подходит для этого случая.) Попробуем понять значение этой проблемы на следующем примере.

Предположим, что мы вычисляем 64-точечное ДПФ последовательности, показанной точками на рисунке 3.7 (a). Последовательность представляет собой синусоидальный сигнал, имеющий ровно 3 периода, содержащихся в $N = 64$ отсчетах. На рисунке 3.7 (b) показана первая половина ДПФ входной последовательности, которая показывает, что последовательность имеет нулевое среднее значение ($X(0) = 0$) и не содержит никаких компонентов ни на каких частотах, кроме частоты, соответствующей $m = 3$. Пока ничего удивительного. На рисунке 3.7 (a) показана для примера аналитическая синусоида с $m = 4$, наложенная на входную последовательность, которая напоминает нам, что аналитические синусоиды всегда имеют целое количество периодов на всем интервале в 64 отсчета. Сумма произведений отсчетов входной последовательности на отсчеты синусоиды $m = 4$ равна 0. (Другими словами, мы можем сказать, что корреляция входной последовательности с аналитической синусоидой $m = 4$ равна 0.) Сумма произведений этой конкретной входной последовательности, содержащей три перио-

[1] Явление утечки имеет место не только для ДПФ, но и для обычного интегрального преобразования Фурье — *(прим. перев.)*.

да сигнала, на отсчеты любой аналитической синусоиды, кроме синусоиды с $m = 3$, равна 0. В качестве продолжения нашего примера утечки на рисунке 3.8 (a) точками показана входная последовательность, имеющая 3.4 периода на $N = 64$ отсчетах. Речь идет о входной последовательности, которая не имеет целого количества периодов на интервале в 64 отсчета, входная энергия «протекает» во все другие выходные бины ДПФ, как показано на рисунке 3.8 (b).

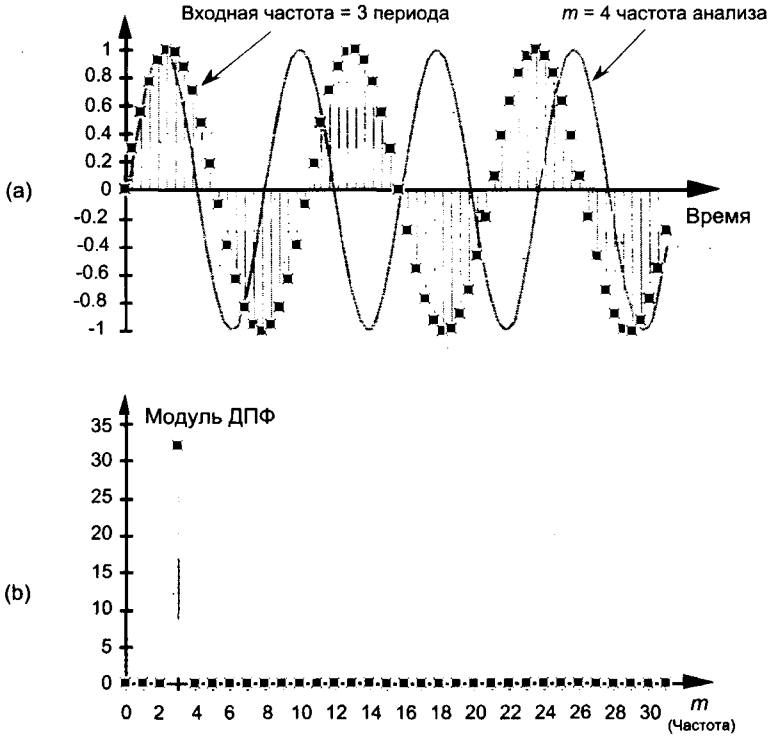


Рис. 3.7. 64-точечное ДПФ: (a) входная последовательность из трех периодов и аналитическая синусоида с $m = 4$; (b) модуль ДПФ

Бин $m = 4$, например, не равен нулю, потому что сумма произведений отсчетов входной последовательности на отсчеты анализирующей синусоиды с $m = 4$ уже не равна 0. В этом и состоит утечка спектра — она приводит к тому, что спектр входного сигнала, частота которого не равна точно центральной частоте одного из бинов, «растекается» по всем остальным бинам. Более того, утечка — неизбежный эффект при выполнении ДПФ реальных последовательностей конечной длины.

Теперь, как сказал бы английский философ Дуглас Адамс: «Не паникуйте». Чтобы узнать, как предсказывать и минимизировать неприятное влияние утечки, взглянем на ее причину. Чтобы понять влияние утечки, нам необходимо определить амплитудно-частотную характеристику ДПФ при подаче на его вход произвольной реальной синусоиды. Подробно этот вопрос обсуждается в разделах 3.14 и 3.15, а сейчас достаточно сказать, что для действительного косинусоидального входного сигнала, имеющего k периодов на N отсчетах, амплитудно-частотная

характеристика бина N-точечного ДПФ в зависимости от индекса бина m аппроксимируется фукцией sinc

$$X(m) = (N/2) \cdot \{\sin[\pi(k-m)]/[\pi(k-m)]\} \qquad (3\text{-}25)$$

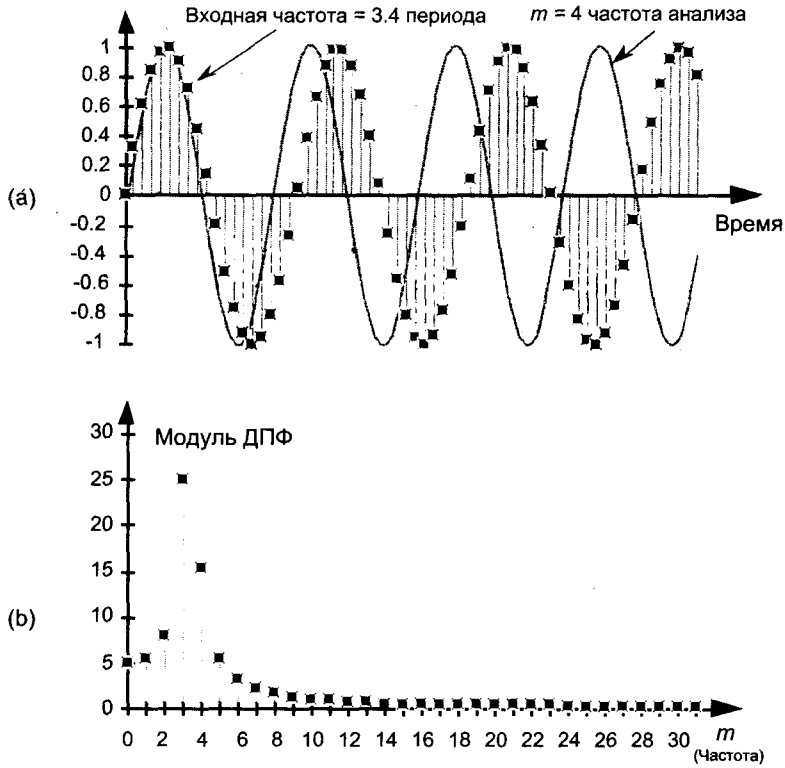


Рис. 3.8. 64-точечное ДПФ: (a) входная последовательность из 3.4 периодов и аналитическая синусоида с $m = 4$; (b) модуль ДПФ

Мы используем функцию (3-25), график которой приведен на рисунке 3.9 (a), чтобы определить уровень утечки, возникающей при ДПФ. Мы можем рассматривать кривую на рисунке 3.9 (a), состоящую из главного лепестка и периодически повторяющихся пиков и впадин, которые называют боковыми лепестками, как непрерывный положительный спектр действительной косинусоидальной последовательности, состоящей из N отсчетов и содержащей k полных периодов. Результатом ДПФ являются дискретные отсчеты, которые лежат на кривой, изображенной на рисунке 3.9; т. е. результат ДПФ будет представлять собой дискретизированную версию этого непрерывного спектра. (На рисунке 3.9 (b) мы приводим амплитудно-частотную характеристику ДПФ при подаче действительного входного сигнала как функцию частоты в Гц.) Когда входная последовательность ДПФ имеет ровно k полных периодов (т. е. центральная частота ее спектра точно совпадает с бином $m = k$), утечка не возникает, как на рисунке 3.9, потому что, когда значение аргумента в знаменателе (3-25) отлично от 0 и кратно π, синус этого аргумента равен нулю.

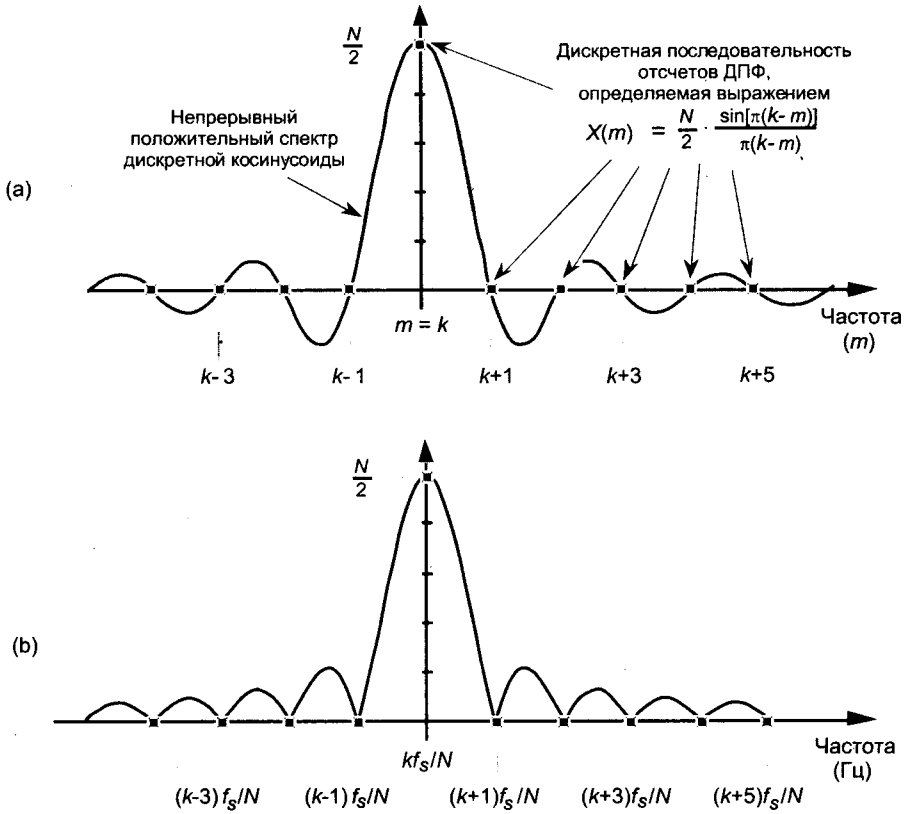


Рис. 3.9. Положительная частотная характеристика ДПФ, обусловленная N-точечной входной последовательностью, содержащей k периодов действительной косинусоиды: (a) амплитудно-частотная характеристика как функция индекса бина m; (b) амплитудно-частотная характеристика как функция частоты в Гц

Мы можем показать на примере, что происходит, когда частота входного сигнала не совпадает с центром бина. Предположим, что действительная синусоида с частотой 8 кГц, амплитуда которой равна единице, дискретизирована с частотой $f_s = 32000$ отсчетов/с. Если мы вычислим 32-точечное ДПФ этой последовательности, то разрешение по частоте, или интервал между бинами, составит $f_s/N = 32000/32$ Гц $= 1.0$ кГц. Мы можем предсказать АЧХ ДПФ, поместив центр спектра входной синусоиды на частоту 8 кГц, как показано на рисунке 3.10 (a). Точки изображают модули отсчетов ДПФ.

Здесь следует запомнить важный факт: результат ДПФ представляет собой дискретизированную версию непрерывного спектра, показанного на рисунке 3.10 (a). Эти дискретные отсчеты в частотной области, расположенные на частотах mf_s/N, и есть точки на рисунке 3.10 (a). Поскольку частота входного сигнала точно совпадает с частотой бина ДПФ, результат ДПФ содержит только одно ненулевое значение. Другими словами, когда выборка из N отсчетов содержит целое количество периодов входного сигнала, отсчеты ДПФ ложатся точно на максимум непрерыв-

ного спектра и точно на точки, в которых этот спектр равен нулю. Из (3-25) мы знаем, что пиковое значение амплитуды выходного отсчета равно 32/2 = 16. (Если входная действительная синусоида имела амплитуду, равную 2, пиковое значение кривой спектра будет равно 2 • 32/2, или 32.) На рисунке 3.10 (b) показана утечка ДПФ, возникающая при частоте входного сигнала 8.5 кГц, и здесь мы видим, что в результате дискретизации в частотной области модули всех бинов ДПФ отличны от 0. Входной сигнал с частотой 8.75 кГц даст результат ДПФ с утечкой, показанный на рисунке 3.10 (c). Если мы сидим за компьютером и изучаем утечку, строя графики модуля ДПФ, мы, конечно, получим точки, изображенные на рисунке 3.10, но не увидим непрерывные спектральные кривые.

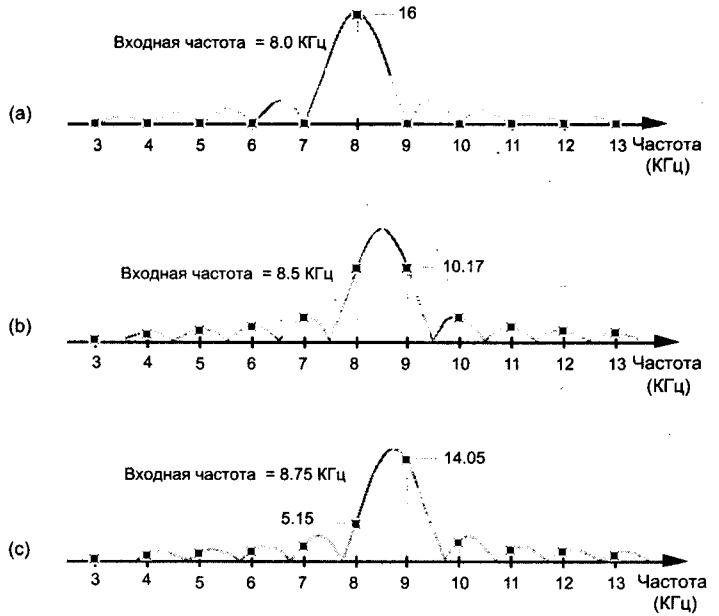


Рис. 3.10. Частотные отклики ДПФ: (a) частота входного сигнала ДПФ = 8.0 кГц; (b) частота входного сигнала ДПФ = 8.5 кГц; (c) частота входного сигнала ДПФ = 8.75 kHz

Здесь внимательный читатель должен был бы подумать: «Если непрерывный спектр, который мы дискретизуем, симметричен, то почему результат ДПФ на рисунке 3.8 (b) такой асимметричный?» На рисунке 3.8 (b) модули бинов справа от третьего бина уменьшаются быстрее, чем модули бинов слева от третьего бина. «И, кроме того, вычисление значения непрерывного спектра $X(f)$ для аргумента, равного 0.4, дает относительное значение амплитуды 0.75. Умножая на этот коэффициент пиковое значение спектра 32, мы должны были бы иметь модуль третьего бина, равный примерно 32 • 0.75 = 24. но на рисунке 3.8 (b) этот модуль несколько больше 25. Что здесь происходит?» Мы можем ответить на этот вопрос, вспомнив, что на самом деле представляет собой рисунок 3.8 (b). Изучая результат ДПФ, мы обычно интересуемся бинами от $m = 0$ до $m = (N/2-1)$. Следовательно, при наших 3.4 периодах на интервал выборки на рисунке 3.8 (b),

показаны только первые 32 бина. Результат ДПФ периодичен в частотной области, как показано на рисунке 3.11. (Мы поговорим об этой периодичности в разделе 3.17.) Изучая результат ДПФ для все более и более высоких частот, мы как бы ходим по кругу, и спектр повторяется бесконечно.

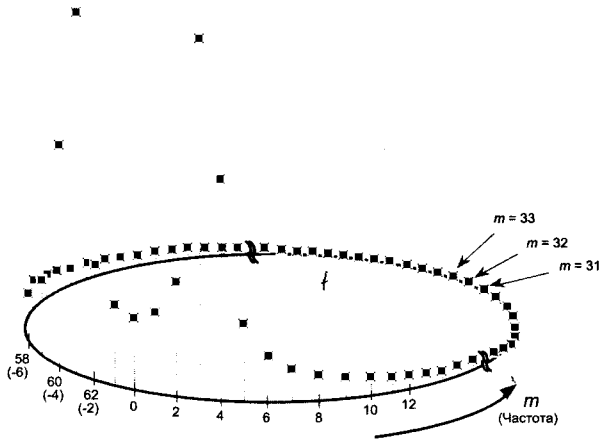


Рис. 3.11. Циклическое представление копий спектра при вычислении ДПФ сигнала, имеющего 3.4 периода на интервале наблюдения

Более обычный путь изображения результата ДПФ состоит в том, что спектр на рисунке 3.11 разворачивают и получают спектр, показанный на рисунке 3.12. На рисунке 3.12 показаны некоторые из копий спектра для сигнала, имеющего 3.4 периода на интервале наблюдения. Что же касается проблемы асимметрии ДПФ, заметим, что в случае нашего сигнала утечка возникает во 2-м, в 3-м, в 1-м, в 0-м бинах и продолжается в –1-м, –2-м и т. д. бинах. Вспомним, что 63-й бин — это то же, что и –1-й, 62-й бин — это тоже, что и –2-й, и т. д. Эта эквивалентность бинов позволяет нам рассматривать бины ДПФ так, как если бы они продолжались в область отрицательных частот, как показано на рисунке 3.13 (a). Результат состоит в том, что утечка заворачивается вокруг бина $m = 0$, а также вокруг бина $m = N$. Это не удивительно, потому что частота $m = 0$ — это и есть частота $m = N$. Заворот утечки относительно частоты $m = 0$ и несет ответственность за асимметрию ДПФ относительно бина $m = 3$ на рисунке 3.8 (b).

Вспомним обсуждение симметрии ДПФ действительной последовательности $x(n)$, когда отсчеты ДПФ от $m = 0$ до $m = (N/2-1)$ симметричны бинам с $m > (N/2)$, где N — размер ДПФ. m-й отсчет ДПФ будет иметь тот же модуль, что и $(N-m)$-й отсчет, т. е. $|X(m)| = |X(N-m)|$. Это значит, что заворот утечки возникает также и вокруг бина $m = N/2$. Это можно показать, взяв входной сигнал, имеющий 28.6 (32 - 3.4) периодов на интервале накопления, спектр которого показан на рисунке 3.13 (b). Отметим сходство рисунков 3.13 (a) и 3.13 (b). Таким образом, ДПФ демонстрирует заворот утечки относительно бинов $m = 0$ и $m = N/2$. Минимальная асимметрия, вызванная утечкой, будет в районе $N/4$-го бина, как показано на рисунке 3.14 (a), на котором приведен полный спектр входного сигнала, содержащего 16.4 периода на интервале наблюдения. Рисунок 3.14 (b) содержит первые 32 бина спектра этого сигнала в увеличенном масштабе.

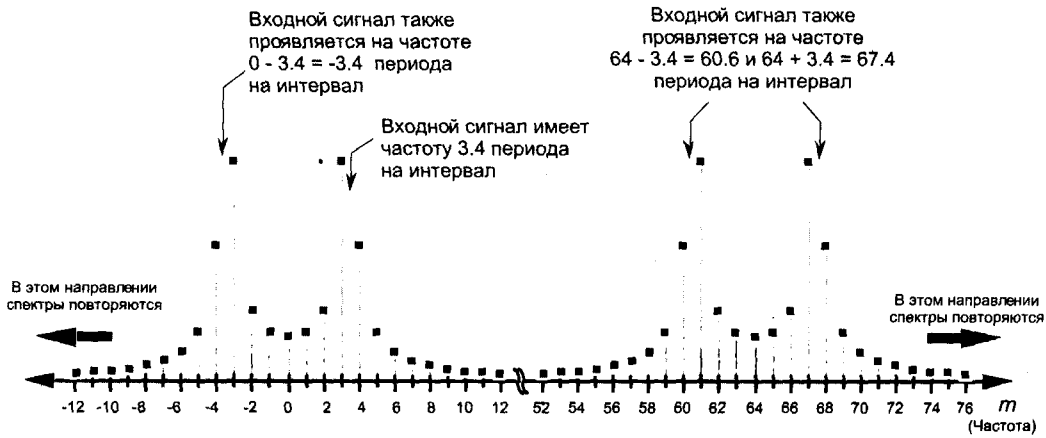


Рис. 3.12. Размножение спектра для сигнала, имеющего 3.4 периода на интервале наблюдения

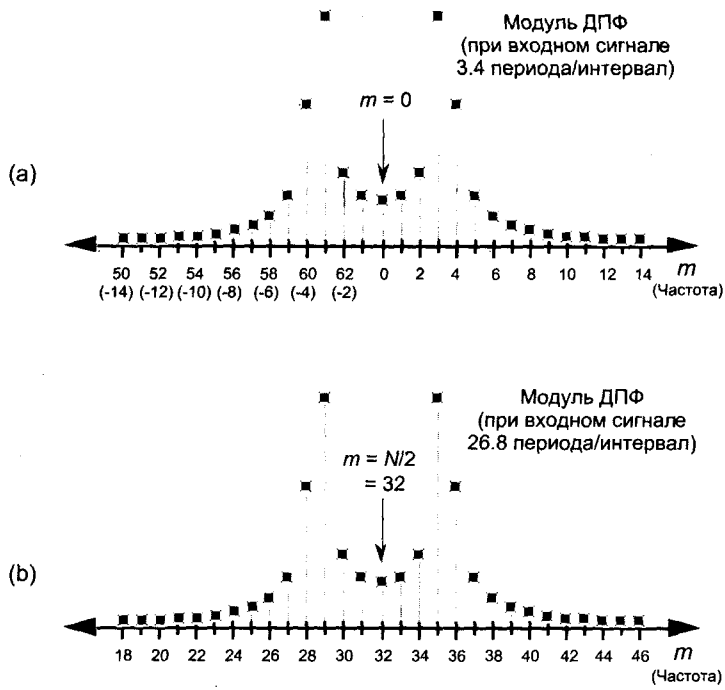


Рис. 3.13. Модуль ДПФ: (a) для сигнала, имеющего 3.4 периода на интервале наблюдения; (b) для сигнала, имеющего 28.6 периодов на интервале наблюдения

Читать об утечке спектра можно целый день. Однако наилучший способ оценить ее влияние — сесть за́ компьютер и использовать программу ДПФ в форме быстрого преобразования Фурье (БПФ) для обработки ваших собственных тестовых сигналов, подобных показанным на рисунках 3.7 и 3.8. При этом вы сможете экспериментировать с разными комбинациями частот входных сигналов и разными размерами ДПФ.

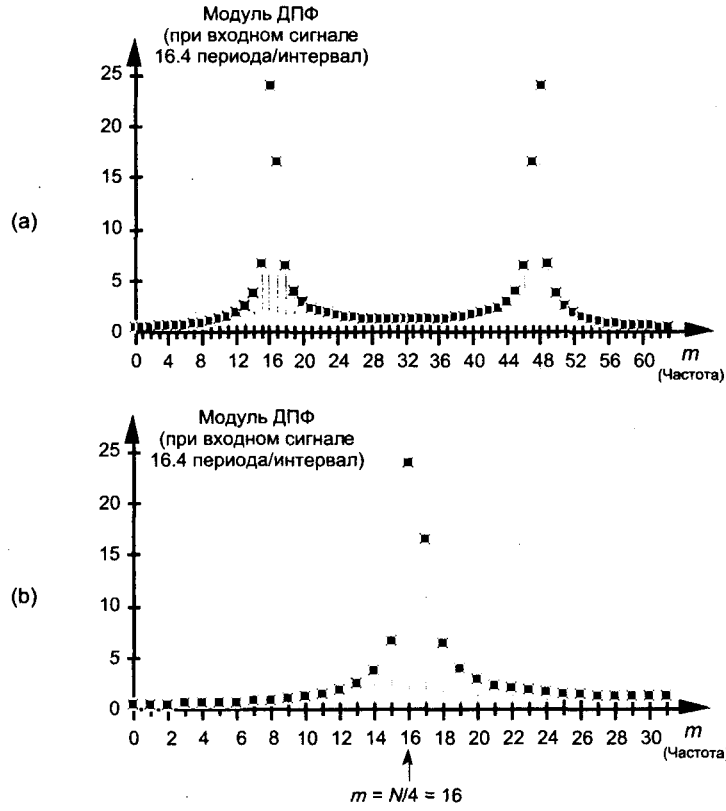


Рис. 3.14. Модуль ДПФ для сигнала, имеющего 16,4 периода на интервале наблюдения: (a) полный спектр; (b) спектр в увеличенном масштабе, демонстрирующий асимметрию, вызванную утечкой, относительно частоты $m = N/4$

Вы сможете показать, что утечка ДПФ не безобидна, т. к. бины, содержащие сигналы низкого уровня, могут оказаться искаженными боковыми лепестками соседних бинов, содержащих сигналы большой амплитуды.

Хотя утечку невозможно устранить полностью, для уменьшения ее вредного влияния можно использовать часто применяемый метод взвешивания окном. Рассмотрим несколько примеров окон.

3.9. Окна

Взвешивание окном уменьшает утечку ДПФ за счет уменьшения уровня боковых лепестков функции (3-25), показанных на рисунке 3.9. Это достигается тем, что отсчеты в начале и конце последовательности постепенно приводятся к одному общему значению. Рисунок 3.15 демонстрирует, как работает описанный механизм. Если мы рассмотрим сигнал бесконечной длительности во временной области, показанный на рисунке 3.15 (a), ДПФ можно выполнить только над интервалом конечной длительности, подобным показанному на рисунке 3.15 (c).

Мы можем рассматривать входной сигнал ДПФ на рисунке 3.15 (c) как произведение входного сигнала, существующего на всей оси времени (рисунок 3.15 (a)) и прямоугольного окна, отсчеты которого равны 1 на всем интервале анализа, показанного на рисунке 3.15 (b). Каждый раз, когда мы вычисляем ДПФ от последовательности конечной длительности, мы по умолчанию умножаем эту последовательность на окно, все отсчеты которого равны единице, и, по существу, умножаем все отсчеты последовательности за пределами окна на 0. Оказывается, форма функции $\sin(x)/x$ в (3-25), показанной на рисунке 3.9, объясняется этим прямоугольным окном, потому что непрерывное преобразование Фурье этого прямоугольного окна (рисунок 3.15 (b)) и есть эта самая функция sinc.

Как мы скоро увидим, именно резкие переходы прямоугольного окна от 0 к 1 являются причиной появления боковых лепестков функции $\sin(x)/x$. Чтобы минимизировать утечку спектра, обусловленную этими боковыми лепестками, нам необходимо уменьшить их амплитуду, используя отличные от прямоугольного окна. Представим себе, что мы умножаем входную последовательность ДПФ, показанную на рисунке 3.15 (c), на треугольное окно (рисунок 3.15(d)), чтобы получить взвешенный сигнал, показанный на рисунке 3.15(e). Заметьте, что значения отсчетов сигнала, как показывает рисунок 3.15 (e), оказываются одинаковыми в начале и в конце интервала наблюдения. Уменьшенный разрыв снижает уровень относительно высокочастотных составляющих в отсчетах ДПФ; т. е. уровни боковых лепестков ДПФ при использовании треугольного окна уменьшаются. Существуют и другие окна, которые снижают уровень утечки больше, чем треугольное окно, такие как окно Хэннинга, показанное на рисунке 3.15 (f). Произведение этого окна на входную последовательность дает сигнал, показанный на рисунке 3.15 (g). Другое часто используемое окно — это окно Хэмминга, показанное на рисунке 3.15 (h). Оно очень похоже на окно Хэннинга, но имеет подставку.

Прежде, чем мы узнаем точно, насколько хорошо эти окна минимизируют утечку спектра, давайте определим их математически. Предполагая, что N отсчетов сигнала индексируются переменной n, причем $0 < n < N-1$, мы обозначим N отсчетов окна как $w(n)$; таким образом, перед выполнением ДПФ входная последовательность $x(n)$ умножается на соответствующие отсчеты окна $w(n)$. Следовательно, ДПФ взвешенной окном последовательности $x(n)$, $X_w(m)$, приобретает форму

$$X_w(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \cdot x(n) e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (3\text{-}26)$$

Чтобы использовать окна, нам необходимы их математические описания, как функции n. Отсчеты окон определяются следующими выражениями:

Прямоугольное окно	$w(n) = 1, n = 1, 2, ..., N-1$	(3-27)
Треугольное окно (очень похоже на окна Бартлетта [3] и Парзена [4,5]),	$w(n) = n/(N/2)$ при $N = 1, 2,..., N/2,$ $w(n) = 2 - n/(N/2)$ при $n = N/2+1, N/2+2, ..., N-1$	(3-28)
Окно Хэннинга (его еще называют приподнятым косинусом, а также окном Ханна, или фон Ханна)	$w(n) = 0.5 - 0.5\cos(2\pi n/N-1)$ при $n = 1, 2, ..., N-1$	(3-29)

Окно Хэмминга $w(n) = 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/N-1)$ (3-30)
при $n = 1, 2, ..., N-1$

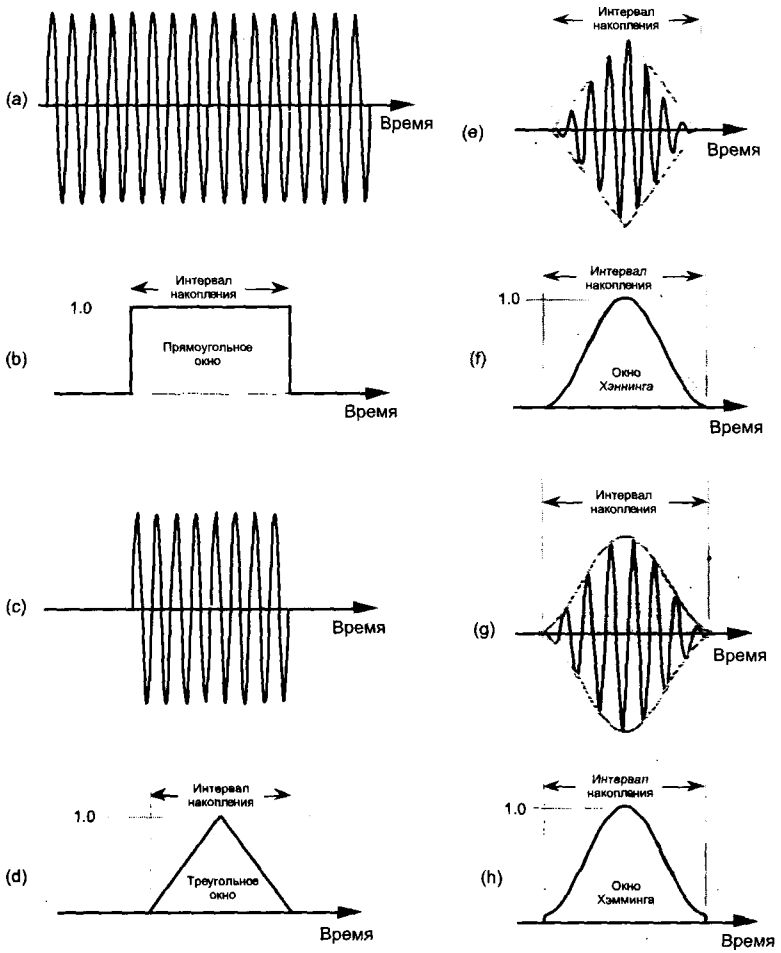


Рис. 3.15. Минимизация разрывов на концах интервала наблюдения: (a) бесконечная синусоида; (b) прямоугольное окно для конечного интервала наблюдения; (c) произведение прямоугольного окна и бесконечной синусоиды; (d) треугольное окно; (e) произведение треугольного окна и бесконечной синусоиды; (f) окно Хэннинга; (g) произведение окна Хэннинга и бесконечной синусоиды; (h) окно Хэмминга

Если мы теперь построим графики $w(n)$ по выражениям (3-27)–(3-30), мы получим соответствующие окна, похожие на те, что изображены на рисунках 3.15 (b), 3.15 (d), 3.15 (f) и 3.15 (h)[1].

[1] В литературе уравнения для функций окон зависят от диапазона изменения индекса n. Мы приняли, что n изменяется в диапазоне $0 < n < N-1$. Некоторые авторы определяют n в диапазоне $-N/2 < n < N/2$, и в этом случае, например, выражение для окна Хэмминга будет иметь вид $w(n) = 0.5 + 0.5\cos(2\pi n/N-1)$.

Спектр прямоугольного окна используется как эталон для оценки спектров других окон; т. е. мы обычно оцениваем спектр некоторого окна, сравнивая его со спектром прямоугольного окна, амплитудный спектр которого выглядит так, как показано на рисунке 3.9 (b). Мы повторяем этот спектр, $|W(m)|$, на рисунке 3.16 (a). Кроме того, рисунок 3.16 (a) содержит амплитудные спектры окон Хэмминга, Хэннинга и треугольного окна. (Ось частот на рисунке 3.16 построена так, что кривые изображают характеристику одного бина N-точечного ДПФ при использовании разных окон.) Можно видеть, что последние три окна обладают пониженным уровнем боковых лепестков по сравнению с прямоугольным окном. Поскольку окна Хэмминга, Хэннинга, а также треугольное окно снижают уровень сигнала, который подвергается ДПФ, пиковое значение их главного лепестка оказывается меньше, чем у прямоугольного окна. (Из-за близких к 0 значений $w(n)$ на концах анализируемого интервала эти потери сигнала называют коэффициентом обработки или коэффициентом потерь окна.) Как бы то ни было, мы в первую очередь интересуемся боковыми лепестками окна, которые на рисунке 3.16 (a) увидеть трудно из-за линейного его масштаба. Мы преодолеем эту трудность, построив амплитудные спектры в логарифмическом масштабе в дБ и нормализовав каждый график так, чтобы пиковое значение главного лепестка было равно 0 дБ. (В приложении E обсуждается происхождение логарифмического масштаба и польза от измерения частотных характеристик в логарифмическом масштабе с использованием децибелов.) Обозначив логарифмический спектр как $|W_{db}(m)|$, мы вычисляем его по формуле

$$|W_{dB}(m)| = 20 \cdot \log_{10}[|W_{dB}(m)| / |W_{dB}(0)|] \qquad (3\text{-}31)$$

(Отсчет $|W(0)|$ в знаменателе (3-31) есть значение $W(m)$, соответствующее пику главного лепестка, для которого $m = 0$.) Кривые $|W_{dB}(m)|$ для разных окон показаны на рисунке 3.16 (b). Теперь мы действительно видим, как соотносятся боковые лепестки спектров разных окон.

Глядя на спектр прямоугольного окна, мы видим, что его главный лепесток самый узкий из всех, и его ширина равна f_s/N. Но, к сожалению, его первый боковой лепесток имеет уровень всего −13 дБ по отношению к пику главного лепестка, что не так хорошо. (Имейте ввиду, что на рисунке 3.16 мы показываем только часть спектра, соответствующую положительным частотам.) Боковые лепестки треугольного окна ниже, но за это мы заплатили тем, что ширина главного лепестка увеличилась в два раза по сравнению с шириной главного лепестка прямоугольного окна. Широкие главные лепестки различных непрямоугольных окон ухудшают разрешающую способность взвешенного ДПФ почти в два раза. Однако, как мы увидим, выгоды от снижения утечки обычно перевешивают потерю разрешающей способности.

Обратите внимание на еще меньший уровень первого бокового лепестка и быстрое уменьшение боковых лепестков окна Хэннинга. Окно Хэмминга имеет еще более низкий первый боковой лепесток, но скорость спада боковых лепестков у него меньше, чем у окна Хэннинга. Это значит, что утечка на расстоянии трех или четырех бинов от центрального бина будет ниже для окна Хэмминга, чем для окна Хэннинга, а утечка на расстоянии полудюжины, или около того, бинов от центрального бина будет ниже для окна Хэннинга, чем для окна Хэмминга.

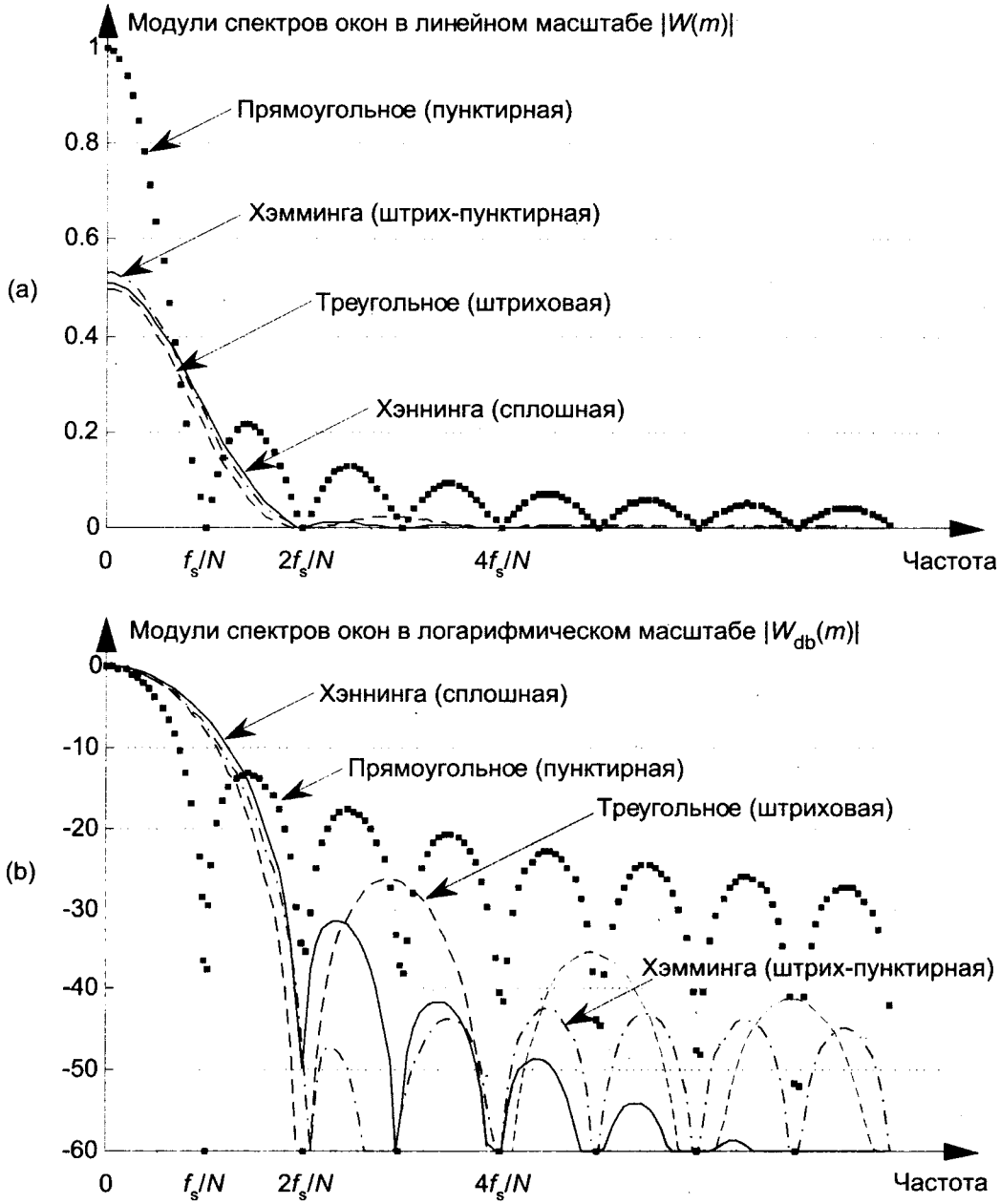


Рис. 3.16. Амплитудные спектры окон: (a) $|W(m)|$ в линейном масштабе; (b) $|W_{dB}(m)|$ в нормированном логарифмическом масштабе

Когда мы применим окно Хэннинга к сигналу, имеющему 3.4 периода на анализируемом интервале, показанному на рисунке 3.8 (a), мы получим на входе ДПФ сигнал, показанный на рисунке 3.17 (a) под огибающей окна Хэннинга. Результат ДПФ взвешенного окном сигнала показан на рисунке 3.17 (b) вместе с результатом

ДПФ невзвешенного сигнала, т. е. сигнала, взвешенного прямоугольным окном. Как мы и ожидали, спектр в случае использования окна Хэннинга оказывается шире и имеет более низкий максимум, но утечка по боковым лепесткам существенно ниже, чем в случае прямоугольного окна.

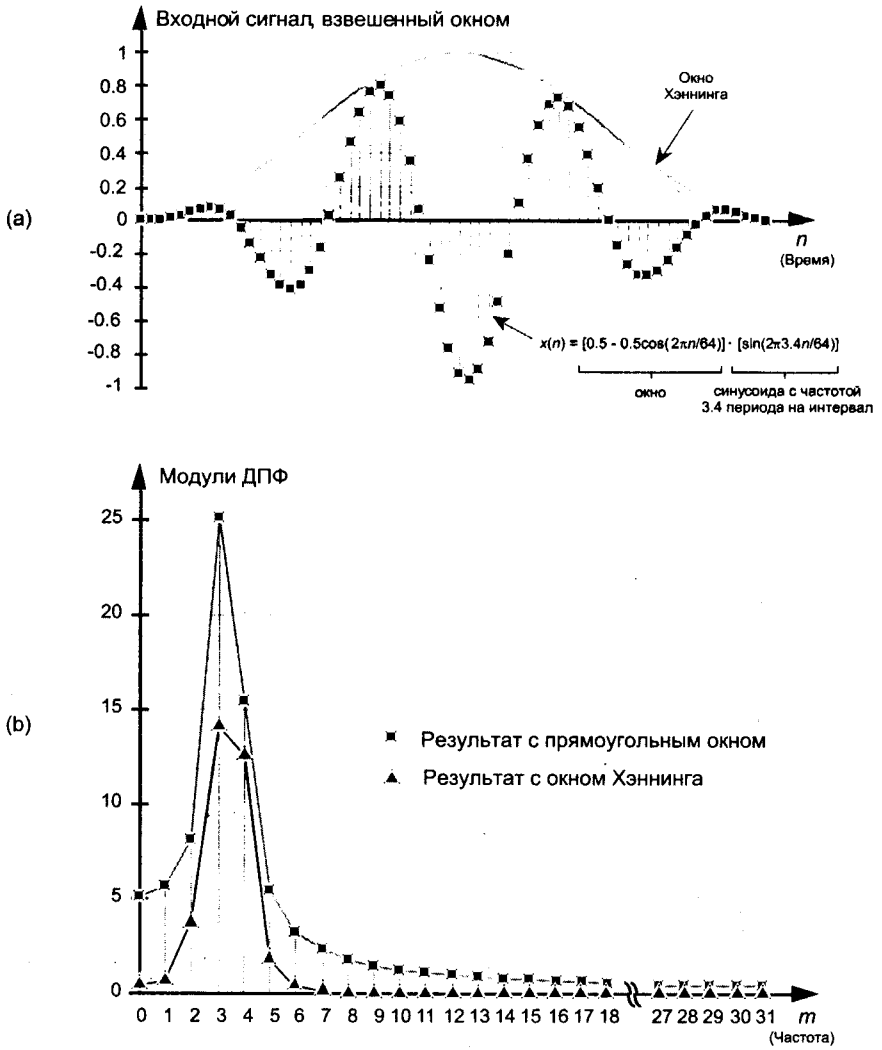


Рис. 3.17. Окно Хэннинга: (a) 64 отсчета произведения окна Хэннинга на синусоидальный сигнал, имеющий 3.4 периода на интервале анализа; (b) результат ДПФ с окном Хэннинга в сравнении с ДПФ с прямоугольным окном

Мы можем продемонстрировать, как использование окна помогает обнаружить слабый сигнал в присутствии близкого по частоте мощного сигнала. Прибавим к сигналу, изображенному на рисунке 3.8 (a), 64 отсчета синусоидального сигнала, имеющего на анализируемом интервале 7 периодов, с амплитудой 0.1. Применяя окно Хэннинга к сумме сигналов, получим входной сигнал, показанный

на рисунке 3.18 (a). Если бы мы не применяли взвешивание, результат ДПФ был бы таким, какой показан на рисунке 3.18 (b) квадратиками, и в этом случае утечка спектра сделала бы компонент сигнала с $m = 7$ едва различимым. Но результат ДПФ взвешенных данных, показанный треугольниками на рисунке 3.18 (b), позволяет нам проще обнаружить присутствие компонента $m = 7$. На практике специалисты, которые используют ДПФ для обнаружения реальных сигналов, выяснили, что общая разрешающая способность и чувствительность к сигналам зависят больше от размера и формы используемого окна, чем просто от размера ДПФ.

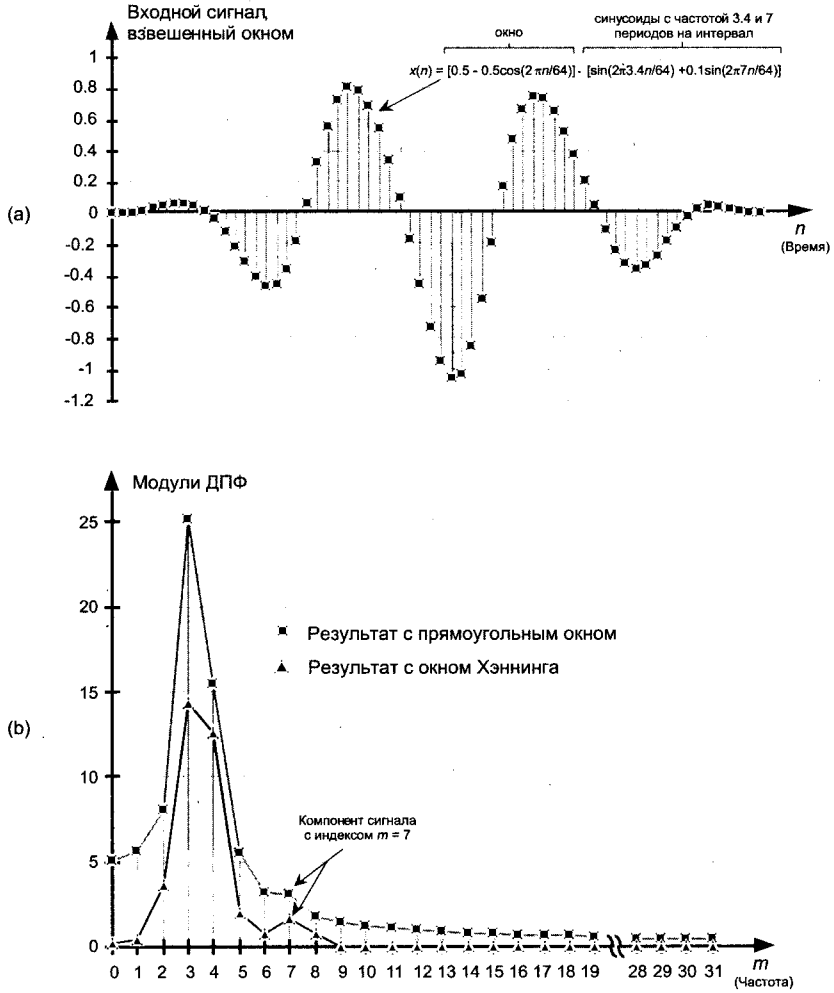


Рис. 3.18. Повышение чувствительности обнаружения сигнала при использовании окна: (a) 64 отсчета произведения окна Хэннинга и суммы синусоидальных сигналов, имеющих 3.4 и 7 периодов на интервале анализа; (b) результат ДПФ с пониженной благодаря окну Хэннинга утечкой в сравнении с результатом ДПФ с прямоугольным окном

Когда мы станем более опытными в использовании окон, мы увидим, что разные окна имеют свои индивидуальные преимущества и недостатки. Кроме того, независимо от используемого окна, мы понижаем уровень утечки спектра по сравнению с утечкой прямоугольного окна. Имеется множество разных окон, описанных в литературе по ЦОС. Их так много, что для обозначения этих окон использованы имена всех, кто имел отношение к ЦОС. Не совсем ясно, сильно ли отличаются многие из этих окон. Единственное, что мы твердо знаем, это то, что выбор окна — всегда компромисс между шириной главного лепестка, уровнем первого бокового лепестка и скоростью убывания боковых лепестков с ростом частоты. Использование того или иного конкретного окна зависит от приложения [5], а приложений имеется великое множество.

Окна используются для улучшения точности спектрального анализа с помощью ДПФ [6], при проектировании цифровых фильтров [7,8], для моделирования диаграмм направленности антенн и даже для улучшения качества некоторых преобразователей механических сил в напряжение [9]. Таким образом, для читателей, жаждущих дальнейшего изучения данной области, информация об окнах имеется в избытке. (Праматерью всех технических публикаций об окнах является работа Харриса [10]. А полезная работа Нутталла внесла коррективы и дополнения к некоторым разделам статьи Харриса[11].) Наилучший способ изучить влияние окон — сесть за компьютер, запустить программу, реализующую ДПФ (БПФ), и начать анализировать взвешенные окнами сигналы. (Кстати, имеются еще две обычно используемые функции окна, которые можно использовать для уменьшения утечки ДПФ, хотя их обсуждение мы отложили до раздела 5.3. Это окна Чебышева и Кайзера, которые имеют параметры, позволяющие находить компромисс между расширением главного лепестка и снижением боковых лепестков.)

3.10. Гребешковые искажения ДПФ

Гребешковые искажения — это флуктуации общего амплитудного спектра при N-точечном ДПФ. Мы подробно разберем их в разделе 3.16, а сейчас отметим только, что, когда окна не используются, все бины ДПФ дают составляющие, имеющие форму вида $\sin(x)/x$. На рисунке 3.19 (a) показан общий спектр, полученный в результате наложения составляющих вида $\sin(x)/x$ от нескольких бинов[1].(Поскольку боковые лепестки функции sinc в данном случае не играют роли, на рисунке 3.19 (a) они не показаны.) На рисунке 3.19 (b) общая реакция ДПФ в частотной области показана толстой линией, огибающей главные лепестки бинов. Эта пульсирующая кривая, причину которой также называют эффектом частокола, отображает потери, возникающие для частот, лежащих между центрами бинов.

По рисунку 3.19 (b) мы можем определить, что модуль ДПФ изменяется от 1 в центре бина до 0.637 на равном удалении от двух соседних бинов. С точки зрения энергетического спектра эти пульсации приведут к гребешковым искажениям почти в −4 дБ на равном удалении от соседних бинов. На рисунке 3.19 показан

[1] Возможно, картина на рисунке 3.19 (a) послужила причиной того, что отдельные отсчеты ДПФ называют бинами. Вся энергия сигнала под кривой $\sin(x)/x$ попадает в «хранилище» данного отсчета ДПФ. (*«Bin» по-английски значит «ларь», «бункер» — прим. перев.*)

случай, когда окна не используются (т. е. мы имеем дело с прямоугольным окном). Поскольку непрямоугольные окна расширяют главный лепесток, их использование приводит к менее серьезным гребешковым искажениям [10,12]. Их более широкие главные лепестки перекрываются в большей степени и заполняют провалы, имеющиеся на рисунке 3.19 (b). Например, гребешковые искажения для окна Ханнинга составляют примерно 0.82, или −1.45 дБ посредине между центрами соседних бинов. На практике, однако, гребешковые искажения не являются серьезной проблемой. Реальные сигналы обычно имеют спектр, занимающий несколько бинов, так что пульсации спектра могут оказаться практически незаметными. Рассмотрим схему, которую называют дополнением нулями и которая используется как для уменьшения гребешковых искажений, так и для улучшения разрешающей способности по частоте.

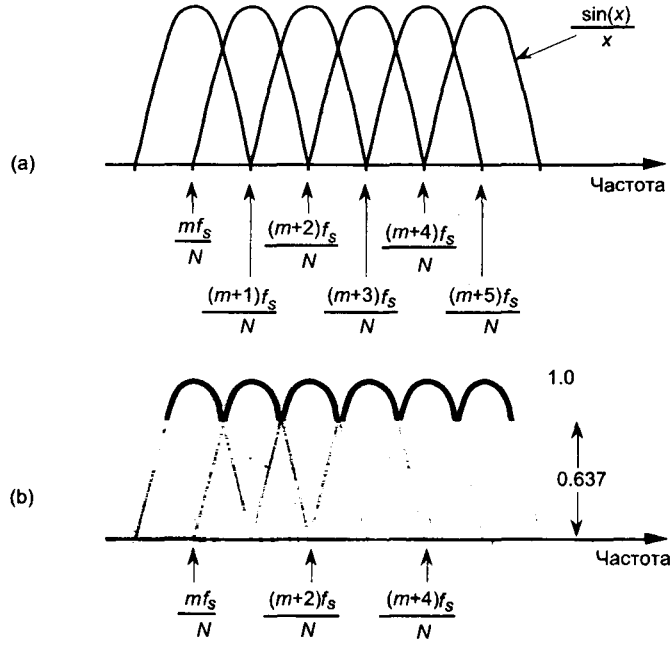


Рис. 3.19. Амплитудно-частотная характеристика бинов ДПФ: (a) отдельные кривые вида sin(*x*)/*x* для каждого бина ДПФ; (b) общая амплитудно-частотная характеристика

3.11. Разрешающая способность ДПФ, дополнение нулями и дискретизация в частотной области

Один популярный метод, используемый для улучшения оценки спектра с помощью ДПФ известен как дополнение нулями. Суть его заключается в добавлении нулевых отсчетов к исходной анализируемой последовательности для увеличения общего количества отсчетов входных данных. Исследование метода дополнения

нулями иллюстрирует важное свойство ДПФ — дискретизацию по частоте, о которой мы упоминали при обсуждении утечки спектра. Когда мы дискретизируем непрерывный сигнал во временной области, имеющий непрерывный спектр, и затем берем ДПФ от полученных отсчетов, ДПФ дает в частотной области дискретизированную аппроксимацию непрерывного спектра. Чем больше точек в ДПФ, тем точнее ДПФ аппроксимирует непрерывное преобразование Фурье.

Чтобы проиллюстрировать эту мысль, предположим, что мы хотим аппроксимировать непрерывное преобразование Фурье непрерывной функции $f(t)$, показанной на рисунке 3.20 (a). Колебание $f(t)$ простирается до бесконечности в обоих направлениях по времени, но отлично от нуля только на интервале в T секунд. Если ненулевая часть функции представляет собой синусоиду, имеющую три периода на интервале в T секунд, ее непрерывный амплитудный спектр выглядит так, как показано на рисунке 3.20 (b). (Поскольку непрерывное преобразование Фурье вычисляется на бесконечном интервале времени, шаг изменения частоты бесконечно мал, так что спектр является непрерывным.) Этот спектр мы будем аппроксимировать с помощью ДПФ.

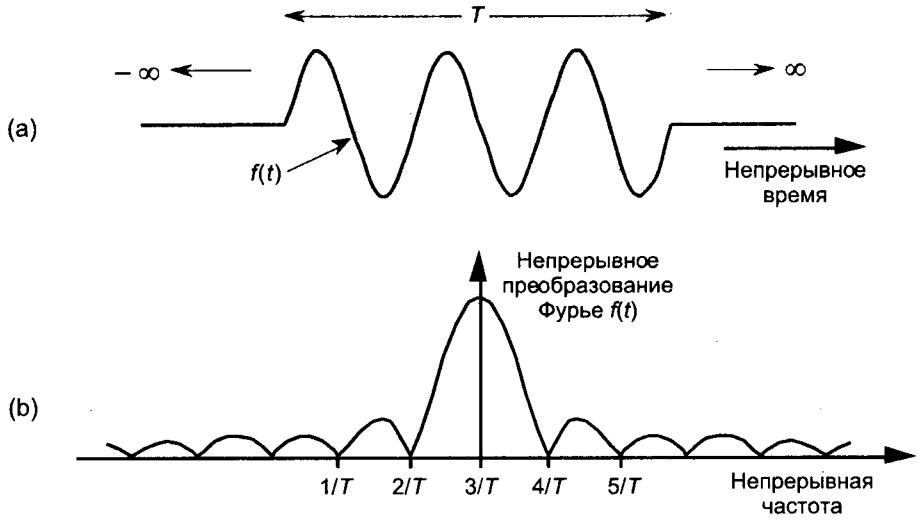


Рис. 3.20. Непрерывное преобразование Фурье: (a) непрерывная функция времени $f(t)$, состоящая из усеченной синусоиды частотой $3/T$; (b) модуль непрерывного преобразования Фурье функции $f(t)$

Предположим, что мы хотим использовать 16-точечное ДПФ для аппроксимации непрерывного преобразования функции $f(t)$, показанной на рисунке 3.20 (a). 16 отсчетов $f(t)$, охватывающих три периода синусоиды в $f(t)$, показаны в левой части рисунка 3.21 (a). Подавая эти отсчеты на вход 16-точечного ДПФ, получаем дискретные отсчеты в частотной области. Часть отсчетов, соответствующая положительным частотам, показана точками в правой части рисунка 3.21 (a). Мы можем видеть, что выходные отсчеты ДПФ являются отсчетами непрерывного преобразования Фурье, показанного на рисунке 3.20 (b). Если мы добавим в конец исходной входной последовательности 16 нулей (дополним ее нулями) и вычислим 32-точечное ДПФ, мы получим результат, приведенный в правой части

рисунка 3.21 (b), из которого видно, что мы уменьшили интервал дискретизации в частотной области в 2 раза. Теперь ДПФ чаще дискретизует непрерывное преобразование Фурье. Добавив еще 32 нуля и беря 64-точечное ДПФ, мы получаем результат, показанный в правой части рисунка 3.21 (c). Результат 64-точечного ДПФ теперь начинает проявлять истинную форму непрерывного спектра сигнала. Добавив еще 64 нуля и вычислив 128-точечное ДПФ, мы получаем результат, показанный в правой части рисунка 3.21 (d). Способность ДПФ дискретизировать спектр в частотной области теперь очевидна, но заметьте, что индексы бина, соответствующего центру главного лепестка для всех случаев, показанных на рисунке 3.21, разные.

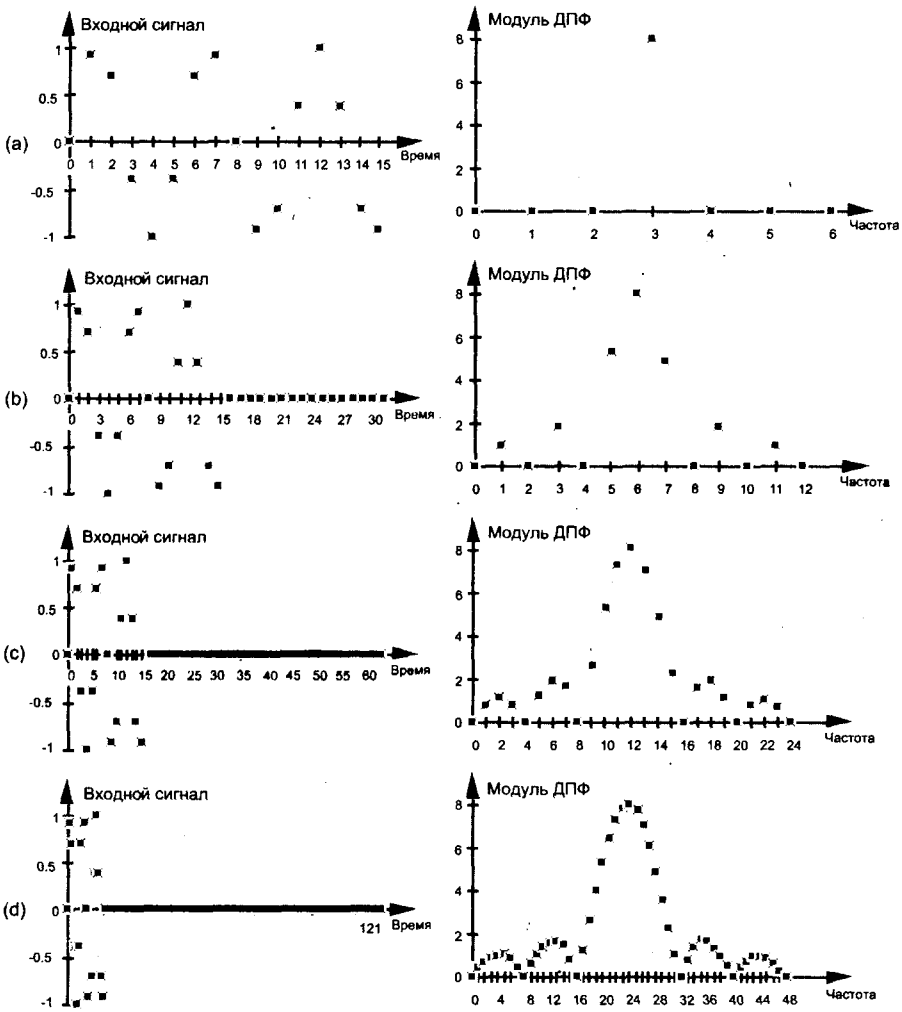


Рис. 3.21. Дискретизация в частотной области при вычислении ДПФ: (a) 16 входных отсчетов и $N = 16$; (b) 16 входных отсчетов, 16 добавленных нулей и $N = 32$; (c) 16 входных отсчетов, 48 добавленных нулей и $N = 64$; (d) 16 входных отсчетов, 112 добавленных нулей и $N = 128$

Значит ли это, что мы должны переопределять частотную ось ДПФ при использовании дополнения нулями? На самом деле, нет. Если мы дополняем нулями L ненулевых отсчетов и получаем всего N отсчетов во временной области для N-точечного ДПФ, средние частоты бинов ДПФ дополненной последовательности связаны с исходной частотой дискретизации давно знакомым нам выражением (3-5), или

$$\textit{центральная частота } m\textit{-го бина} = mf_s/N. \qquad (3\text{-}32)$$

Таким образом, в примере, иллюстрируемом рисунком 3.21 (a), мы используем (3-32), чтобы показать, что, хотя индекс бина ДПФ дополненной нулями последовательности, соответствующего максимуму главного лепестка, изменяется с ростом N, частота этого бина остается неизменной. Следующая таблица показывает, что при этом происходит:

№ рисунка	Максимум главного лепестка соответствует m =	L =	N =	Частота максимума главного лепестка по отношению к f_s =
3.21 (a)	3	16	16	$3f_s/16$
3.21 (b)	6	16	32	$6f_s/32 = 3f_s/16$
3.21 (c)	12	16	64	$12f_s/64 = 3f_s/16$
3.21 (d)	24	16	128	$24f_s/128 = 3f_s/16$

Выиграем ли мы что-нибудь, еще дополнив последовательность нулями и вычислив ДПФ еще большего размера? Выиграем, но мало, потому что 128-точечное ДПФ дискретизует непрерывный спектр достаточно подробно на рисунке 3.21 (d). Брать отсчеты чаще с помощью ДПФ большего размера бесполезно, т. к. это не улучшит наше понимание частотной структуры спектра. Суть здесь в том, что добавление нулей к входной последовательности улучшает разрешение[1] по частоте, но существует практический предел того, что мы можем достичь с его помощью. В нашем примере 128-точечное ДПФ выявляет подробную структуру спектра. Здесь мы столкнулись с законом убывающей отдачи. Выполнение 256- или 512-точечногоо ДПФ в нашем случае дало бы мало новой информации[2]. Для этой конкретной последовательности нет смысла существенно уменьшать интер-

[1] В отечественной литературе под разрешающей способностью по частоте понимают минимальную разность частот гармоник, при которой в спектре эти гармоники различаются как отдельные составляющие. В этом смысле разрешающая способность по частоте определяется только длительностью дискретизированной выборки сигнала. Дополнение нулями позволяет лишь уменьшить интервал дискретизации по частоте и подробнее рассмотреть спектр сигнала. — *(прим. перев.)*

[2] Обратите внимание на то, что размер ДПФ (N) в наших примерах равен целой степени 2 (64, 128, 256, 512). Это объясняется тем, что для выполнения ДПФ мы на самом деле используем специальных алгоритм, известный как быстрое преобразование Фурье (БПФ). Как мы увидим в главе 4, типовая реализация БПФ требует, чтобы N было целой степенью двойки.

вал дискретизации непрерывного спектра по частоте. Конечно, и 128-точечное ДПФ в данном случае не является незыблемым пределом. В зависимости от количества отсчетов в некоторой произвольной входной последовательности и частоты дискретизации на практике могло бы потребоваться дополнение каким угодно количеством нулей для получения требуемого разрешения по частоте.

Относительно дополнения нулями следует сделать два последних замечания. Первое, выражения для модуля ДПФ (3-17) и (3-17') неприменимы в случае дополнения нулями. Если мы дополняем нулями L ненулевых отсчетов синусоиды, частота которой совпадает с частотой бина, в результате чего получаем общее количество N входных отсчетов и выполняем N-точечное ДПФ, то для вычисления величины отсчетов ДПФ мы должны в (3-17) и (3-17') заменить N на L. И второе, если мы хотим выполнить дополнение нулями и взвешивание окном, мы не должны накладывать окно на всю последовательность, включая и добавленные нули. Окно должно накладываться только на исходные ненулевые отсчеты, иначе нулевые отсчеты приведут к тому, что часть окна будет фактически обнулена и искажена, что приведет к ошибочным результатам. (В разделе 4.5 даются дополнительные практические указания по выполнению ДПФ с использованием алгоритма БПФ при анализе сигналов реального мира.)

Чтобы немного отвлечься, сейчас подходящий момент для определения *дискретно-временного преобразования Фурье* (ДВПФ), которое читатель может встретить в литературе. ДВПФ представляет собой непрерывное преобразование Фурье дискретной L-точечной последовательности, и некоторые авторы используют ДВПФ для описания многих понятий цифровой обработки сигналов, о которых мы говорили в этой главе. Мы не можем выполнить ДВПФ на компьютере, потому что оно обладает бесконечным разрешением по частоте, но мы можем аппроксимировать его с помощью N-точечного ДПФ L-точечной последовательности при $N > L$. Фактически речь идет о том, что мы делали на рисунке 3.21, когда дополняли нулями исходную последовательность из 16-отсчетов. (Когда $N = L$, аппроксимация ДВПФ совпадает с ДПФ.)

Чтобы увидеть связь между ДВПФ и ДПФ, вспомним, что модуль ДВПФ (т. е. модуль непрерывного преобразования Фурье) последовательности из 16 ненулевых отсчетов, показанной на рисунке 3.21 (а), представляет собой функцию вида $\sin(x)/x$, обозначенную серыми линиями на рисунке 3.21. Наши ДПФ аппроксимируют (дискретизируют) эту функцию. При увеличении количества нулей, которыми дополняются исходные 16 ненулевых отсчетов, просто выполняется интерполяция дискретизированной посредством ДПФ версии ДВПФ с уменьшающимся шагом дискретизации по частоте.

Запомните, пожалуйста, что дополнение нулями не улучшает нашу способность различать два близко расположенных по частоте сигнала. (Например, главные лепестки спектров, изображенных на рисунке 3.21, не меняются по ширине, выраженной в Герцах, при увеличении количества добавляемых нулей.) Чтобы улучшить спектральное разрешение двух сигналов, необходимо анализировать больше ненулевых отсчетов. Правило, по которому мы должны жить, заключается в следующем: чтобы реализовать разрешающую способность по частоте на уровне F_{res} Гц, мы должны накопить отсчеты сигнала на интервале времени $1/F_{res}$ секунд.

Применения дополнения нулями во временной области мы обсудим в разделе 13.15, дополнения нулями в частотной области в разделе 13.28 и вернемся к ДВПФ в разделе 3.17.

3.12. Коэффициент улучшения ДПФ

С ДПФ связаны два коэффициента улучшения. Те, кто использует ДПФ для обнаружения сигнала в шуме, часто говорят о коэффициенте улучшения ДПФ потому, что ДПФ может выделить сигнал на фоне шума. Это возможно благодаря усилению сигнала, связанному с вычислением внутренней корреляции, которое имеет место при вычислении N-точечного ДПФ. Кроме этого естественного улучшения отношения сигнал/шум можно получить дополнительное интегральное улучшение при усреднении результатов ДПФ. Рассмотрим сначала внутренний коэффициент улучшения.

3.12.1. Коэффициент улучшения отдельного ДПФ

Понятие коэффициента улучшения ДПФ очевидно, если мы рассматриваем отдельный бин ДПФ как узкополосный фильтр. Поскольку частотная характеристика бина ДПФ имеет вид функции $\sin(x)/x$, значение этого бина определяется главным образом энергией сигнала, попадающей в его главный лепесток. Бин ДПФ можно рассматривать как полосовой фильтр, центр полосы пропускания которого находится на частоте mf_s/N. Из (3-17) мы знаем, что максимально возможное значение отсчетов ДПФ возрастает при увеличении длины преобразования N. Кроме того, при увеличении N главный лепесток бина становится уже. Таким образом, бин ДПФ можно рассматривать как полосовой фильтр, коэффициент передачи которого можно увеличить, а ширину полосы пропускания уменьшить, увеличивая значение N. Уменьшение ширины полосы пропускания полезно при обнаружении энергии сигнала, потому что в дополнение к уменьшению энергии шума, попадающей в пределы его полосы пропускания, улучшается и разрешающая способность по частоте. Мы можем продемонстрировать это, рассмотрев ДПФ тона (синусоиды постоянной частоты), смешанного со случайным шумом. На рисунке 3.22 (a) в логарифмическом масштабе показаны первые 32 отсчета 64-точечного ДПФ, при этом частота тона совпадает с центром бина $m = 20$. Уровни мощности (квадрат модуля ДПФ) на рисунке 3.22 (a) нормированы так, что мощность наибольшего бина принята за 0 дБ. Поскольку мощность исходного тона меньше мощности шума, при $N = 64$ обнаружить его не так просто. (Шум во временной области, использованный для генерации сигнала, представленного на рисунке 3.22 (a), имеет нулевое среднее, т. е. не содержит постоянной составляющей, или смещения уровня.) Если же мы увеличим количество отсчетов в четыре раза и размер ДПФ до $N = 256$, мы увидим, как мощность тона поднимается над уровнем шума на бине $m = 80$ на рисунке 3.22 (b). Повышение размера ДПФ до $N = 1024$ дает дополнительное улучшение, так что спектр тона еще больше поднимается над уровнем шума, как показано на рисунке 3.22 (c).

Чтобы численно оценить улучшение ДПФ, мы можем определить отношение сигнал/шум как отношение уровня мощности сигнала к уровню мощности шума в частотной области. (Конечно же, на практике нам хотелось бы, чтобы это отношение было как можно больше.) Есть ряд причин, по которым трудно предсказать, каким будет отношение сигнал/шум для любого конкретного ДПФ. Это объясняется

тем, что мы не можем точно предсказать энергию данных N отсчетов случайного шума. Кроме того, если частота сигнала не совпадает с центральной частотой бина, возникающая при этом утечка приводит к повышению уровня шума и снижает отношение сигнал/шум. В дополнение к этому, любое используемое окно оказывает влияние на уровень утечки и, следовательно, на отношение сигнал/шум. Единственное, что мы можем сказать наверняка, это то, что отношение сигнал/шум растет с ростом N, потому что стандартное отклонение (СКЗ) шума для бина ДПФ пропорционально $\sqrt{N}$, а величина бина, в котором находится сигнал, пропорциональна N. В более общем виде для действительного входного сигнала, если $N > N'$, отношение сигнал/шум при N-точечном ДПФ SNRN возрастает по сравнению с отношением сигнал/шум N'-точечного ДПФ SNRN' в соответствии с соотношением:

$$SNR_N = SNR_{N'} + 20\log_{10}(\sqrt{N/N'}) \qquad (3\text{-}33)$$

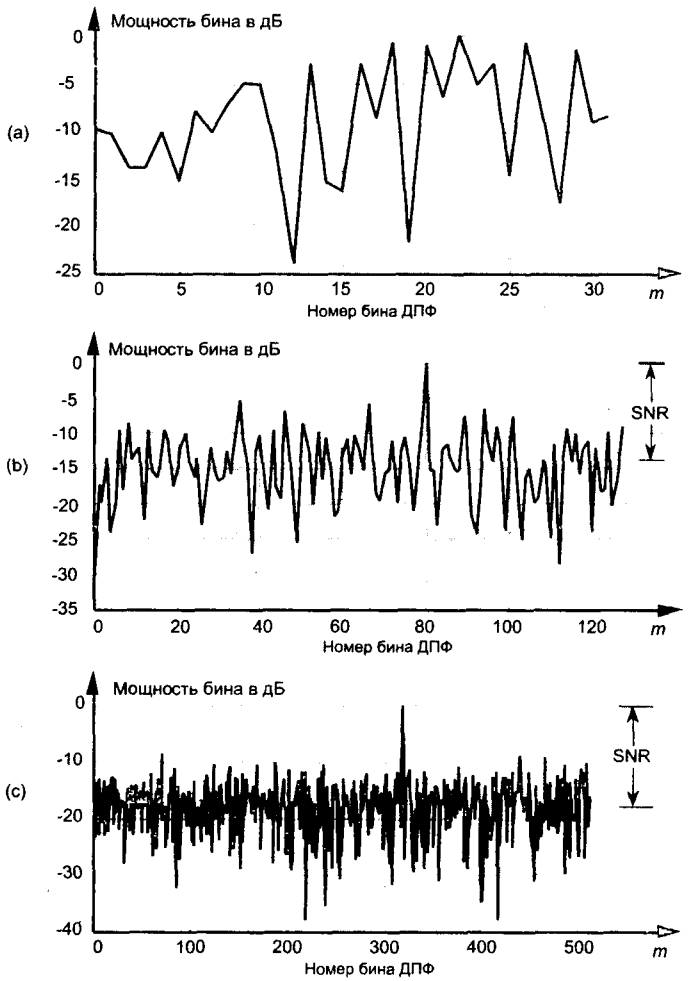


Рис. 3.22. Улучшение отношения сигнал/шум при одном ДПФ: (a) *N=64*; (b) *N=256*; (c) *N= 1024*

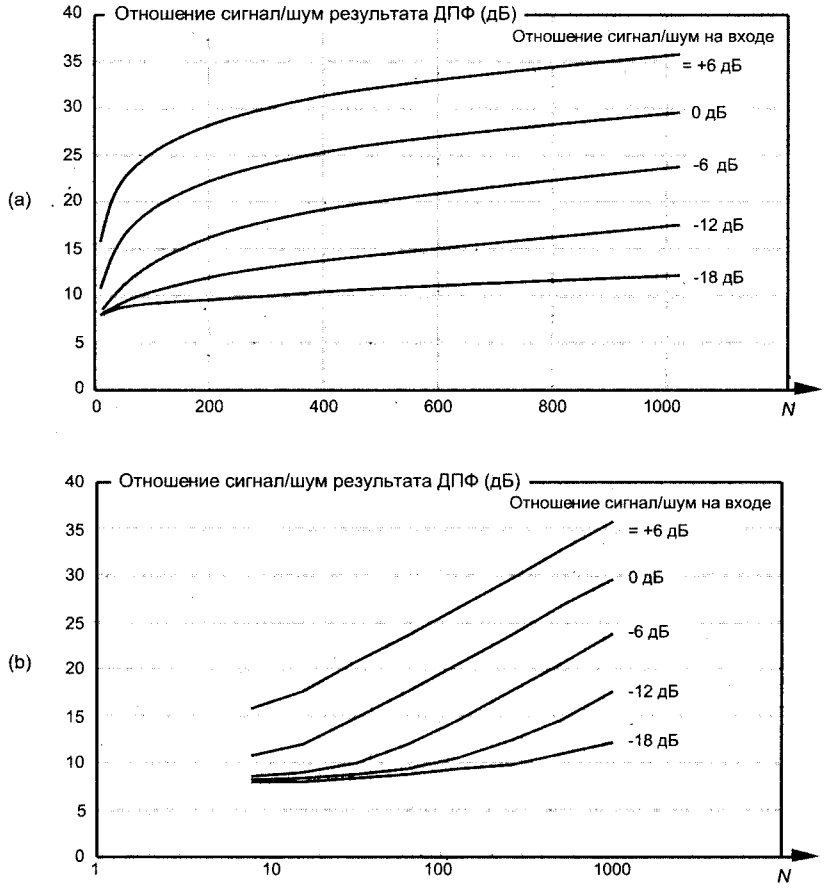


Рис. 3.23. Коэффициент улучшения ДПФ в зависимости от размера ДПФ N для разных значений отношения сигнал/шум на входе: (a) линейный масштаб по оси N; (b) логарифмический масштаб по оси N

Если мы повышаем размер ДПФ с N' до $N = 2N'$, согласно (3-33) отношение сигнал/шум возрастает на 3 дБ. Мы поэтому говорим, что коэффициент улучшения ДПФ увеличивается на 3 дБ при каждом удвоении N. Имейте ввиду, что в присутствии случайного шума удвоение размера ДПФ может увеличить отношение сигнал/шум меньше, чем на 3 дБ. С другой стороны, мы можем получить улучшение немного больше, чем 3 дБ. Это зависит от природы случайного шума. Если мы выполняем много ДПФ, мы можем получить средний коэффициент улучшения для разных отношений сигнал/шум на входе, как показано на рисунке 3.23 (a). Поскольку нас интересует наклон кривых на рисунке 3.23 (a), мы начертили их в логарифмическом масштабе для N на рисунке 3.23 (b), при этом кривые линии превратились в прямые. Глядя на графики рисунка 3.23 (b), мы можем ясно видеть увеличение отношения сигнал/шум на 3 дБ при удвоении N, если N превышает 20 — 30, а сигнал не слишком сильно спрятан в шуме. Абсолютные значения, изображаемые графиками на рисунках 3.23 (a) и 3.23 (b) не являются незыблемыми. Они были получены путем моделирования шума и тона,

частота которого совпадала с центром бина. Если бы частота тона была расположена между центрами бинов, эти кривые опустились бы ниже, но их форма осталась бы такой же[1], т. е. (3-33) выполняется независимо от частоты тона.

3.12.2. Улучшение интегрирования при усреднении нескольких ДПФ

Теоретически мы могли бы получать неограниченно большие коэффициенты улучшения, увеличивая размер ДПФ. Проблема состоит в том, что количество операций умножения при выполнении БПФ растет пропорционально N^2, и вычисление ДПФ длинных последовательностей становиться трудоемким. Поскольку операция сложения выполняется проще и быстрее, чем умножение, мы можем усреднять результаты нескольких ДПФ для повышения коэффициента улучшения и чувствительности при обнаружении сигналов. Усреднение результатов ДПФ рассматривается в разделе 11.3.

3.13. ДПФ прямоугольных функций

Мы завершаем эту главу, предлагая вашему вниманию математические детали двух важных аспектов ДПФ. В первую очередь мы получим выражения для ДПФ прямоугольной функции (прямоугольного окна), а затем мы используем эти результаты для иллюстрации частотной характеристики ДПФ. Частотная характеристика ДПФ интересует нас потому, что она дает альтернативную точку зрения для понимания утечки, которая возникает при использовании ДПФ как инструмента анализа сигналов.

Вычисление ДПФ прямоугольной функции является наиболее распространенной и важной операцией в области цифровой обработки сигналов. Мы встречаемся с ним в теории дискретизации, теории окон, в обсуждении свертки, в спектральном анализе и в проектировании цифровых фильтров. Несмотря на такое широкое распространение ДПФ прямоугольных функций, литература, посвященная этому предмету, может оказаться слишком сложной для начинающих в области цифровой обработки сигналов по нескольким причинам. На первых порах стандартные математические обозначения воспринимаются трудно, а выкладки иногда подаются со слишком скудными пояснениями. Проблема для новичков усугубляется тем, что для ДПФ существуют разные выражения. В литературе мы можем найти все перечисленные ниже формы ДПФ прямоугольной функции:

$$DFT_{прямоуг.функции} = [\sin(x)/\sin(x/N)]\,,$$

$$\text{или } \sin(x)/x\,, \text{ или } \sin(Nx/2)/\sin(x/2)\,. \qquad (3\text{-}34)$$

В этом разделе мы покажем, как получены все формы в (3-34), увидим, как они связаны друг с другом и создадим таблицу, которая призвана сыграть роль

[1] Графики сместятся вниз, свидетельствуя о понижении отношения сигнал/шум, потому что утечка приведет к повышению средней мощности шума, а гребешковые искажения понизят мощность бина.

Розеттского камня[1] и позволяет переходить от одной формы выражения для ДПФ к другой. Вдохните поглубже, и начнем с определения прямоугольной функции.

3.13.1. ДПФ обобщенной прямоугольной функции

Обобщенную прямоугольную функцию $x(n)$ можно определить как N отсчетов, среди которых имеется K отсчетов, равных единице, как показано на рисунке 3.24. Полная N-точечная последовательность $x(n)$ и есть прямоугольная функция, которую мы хотим преобразовать. Мы называем эту форму обобщенной формой прямоугольной функции, потому что пакет K единичных отсчетов начинается в произвольный момент времени $-n_0$. Вычислим ДПФ последовательности $x(n)$, показанной на рисунке 3.24 и получим требуемый результат $X(m)$. Используя индекс m для нумерации отсчетов в частотной области, мы можем записать выражение для N-точечного ДПФ в виде

$$X(m) = \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} x(n)e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (3\text{-}35)$$

Поскольку отсчеты $x(n)$ отличны от нуля только в диапазоне $-n_0 \le n \le -n_0 + (K-1)$, мы можем изменить пределы суммирования в (3-35) и выразить $X(m)$ как

$$X(m) = \sum_{n=-n_0}^{-n_0+(K-1)} x(n)e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (3\text{-}36)$$

потому что только K отсчетов вносят вклад в значение $X(m)$. Этот последний шаг важен, т. к. он позволяет нам избавиться от $x(n)$ и сделать (3-36) более простым для последующих манипуляций. Чтобы немного облегчить восприятие последующих выражений, введем обозначение $q = 2\pi m/N$.

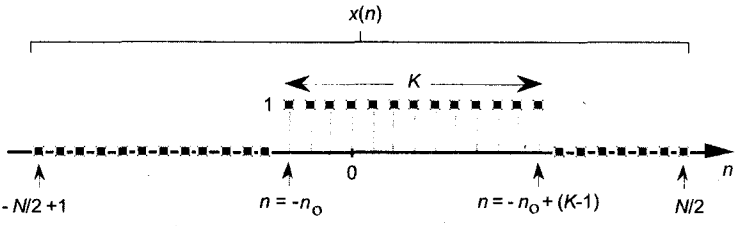


Рис. 3.24. Прямоугольная функция шириной K отсчетов на интервале в N отсчетов, где $K < N$

Итак, теперь на сцену выходит алгебра. Опускаем множитель 1 под знаком суммы и получаем

$$X(q) = \sum_{n=-n_0}^{-n_0+(K-1)} e^{-jqn} =$$

$$= e^{-jq(-n_0)} + e^{-jq(-n_0+1)} + e^{-jq(-n_0+2)} + \ldots + e^{-jq[-n_0+(K-1)]} =$$

[1] См. примечание в конце раздела 8.3 — (*прим. ред. перев.*).

$$= e^{-jq(-n_0)} e^{-j0q} + e^{-jq(-n_0)} e^{-j1q} + e^{-jq(-n_0)} e^{-j2q} + \ldots + e^{-jq(-n_0)} e^{-jq(K-1)} =$$

$$= e^{jq(n_0)} [e^{-j0q} + e^{-j1q} + e^{-j2q} + \ldots + e^{-jq(K-1)}]. \qquad (3\text{-}37)$$

Ряд в квадратных скобках в (3-37) можно просуммировать, так что

$$X(q) = e^{jq(n_0)} \sum_{p=0}^{K-1} e^{-jpq} \qquad (3\text{-}38)$$

Выражение (3-38), конечно же, выглядит ничуть не проще, чем (3-36), но на самом деле оно проще. Выражение (3-38) есть не что иное, как *сумма геометрической прогрессии* и, согласно сказанному в приложении В, ее можно выразить в замкнутой форме вида

$$\sum_{p=0}^{K-1} e^{-jpq} = (1 - e^{-jqK})/(1 - e^{-jq}) \qquad (3\text{-}39)$$

Теперь мы можем упростить (3-39), что вполне уместно здесь. Если мы умножим и разделим числитель и знаменатель в правой части (3-39) на экспоненту, показатель степени которой разделен на два, мы разделим экспоненты на две части каждую и получим

$$\sum_{p=0}^{K-1} e^{-jpq} = [e^{-jqK/2}(e^{jqK/2} - e^{-jqK/2})]/[e^{-jq/2}(e^{jq/2} - e^{-jq/2})]$$

$$= e^{-jq(K-1)/2}(e^{jqK/2} - e^{-jqK/2})/(e^{jq/2} - e^{-jq/2}). \qquad (3\text{-}40)$$

Задержимся здесь на мгновение, чтобы вспомнить, куда мы движемся. Мы стараемся придать выражению (3-40) пригодную для использования форму, потому что оно является частью выражения (3-38), которое мы используем для вычисления $X(m)$ в (3-36) в нашем неустанном поиске понятного выражения для ДПФ прямоугольной функции.

Выражение (3-40) выглядит еще сложнее, чем (3-39), но мы можем упростить выражения в скобках. Согласно тождествам Эйлера $\sin(\phi) = (e^{j\phi} - e^{-j\phi})/2j$ (3-40) превращается в

$$\sum_{p=0}^{K-1} e^{-jpq} = e^{-jq(K-1)/2}[2j\sin(qK/2)]/[2j\sin(q/2)] =$$

$$= e^{-jq(K-1)/2}[\sin(qK/2)]/[\sin(q/2)] \qquad (3\text{-}41)$$

Подставляя (3-41) вместо суммы в (3-38), получаем выражение для $X(q)$

$$X(q) = e^{jq(n_0)} e^{-jq(K-1)/2}[\sin(qK/2)]/[\sin(q/2)] =$$

$$= e^{jq[n_0(K-1)/2]} [\sin(qK/2)]/[\sin(q/2)]. \qquad (3\text{-}42)$$

Возвращая переменной q значение $2\pi m/N$, приходим к

$$X(m) = e^{j(2\pi m/N)[n_0(K-1)/2]} [\sin(2\pi mK/2)]/[\sin(2\pi m/2)],$$

или

Общая форма ядра Дирихле:

$$X(m) = e^{j(2\pi m/N)[n_0(K-1)/2]}\,[\sin(\pi mK/N)]/[\sin(\pi m/N)] \qquad (3\text{-}43)$$

Вот и готово. Формула (3-43) представляет собой общее выражение для ДПФ прямоугольной функции, показанной на рисунке 3.24. Отсчеты $X(m)$ описываются комплексными выражениям, в которых отношение синусов дает амплитуду $X(m)$, а показатель степени экспоненты — фазовый угол $X(m)$[1]. График множителя, содержащего отношение синусов в (3-43), представляет собой периодическую кривую на рисунке 3.25 (a), и, как и во всех представлениях N-точечного ДПФ, период $X(m)$ равен N. Эта кривая известна как ядро Дирихле (или совокупность наложенных функций sinc) и подробно описана в литературе [10,13,14]. (Она названа в честь немецкого математика девятнадцатого века Петера Дирихле, который изучал сходимость тригонометрических рядов, используемых для представления произвольных функций.)

Мы можем увеличить изображение этой кривой вблизи точки $m = 0$ и рассмотреть ее более подробно на рисунке 3.25 (b). Точки на этом рисунке напоминают нам, что ДПФ прямоугольной функции дает дискретные отсчеты, лежащие на кривой. Таким образом, когда мы выполняем ДПФ, дискретный его результат является дискретизированной версией непрерывной кривой функции sinc, показанной на рисунке 3.25 (a). Как мы покажем позже, в (3-43) нас в первую очередь интересует абсолютное значение, или модуль, ядра Дирихле. Этот модуль, $|X(m)|$, показан на рисунке 3.25 (c). Мы впервые увидели график функции sinc на рисунке 3.9 в разделе 3.8, где мы познакомились с утечкой ДПФ, и мы будем часто встречать эту кривую при изучении цифровой обработки сигналов.

На данный момент нам известно всего несколько фактов, касающихся ядра Дирихле, которые необходимо помнить. Первое: ДПФ прямоугольной функции имеет главный лепесток, центр которого находится в точке $m = 0$. Пиковое значение главного лепестка равно K. В этом пиковом значении заложен некоторый смысл, не правда ли? Отсчет ДПФ $X(0)$ равен сумме исходных отсчетов, а сумма K единиц равна K. Мы можем показать это более строго, вычислив (3-43) при $m = 0$. Когда мы подставляем $m = 0$ в (3-43), возникает трудность, т. к. мы получаем выражение $\sin(0)/\sin(0)$, которое представляет собой неопределенное отношение 0/0. Придется призвать на помощь высшую математику. Используя правило Лопиталя, мы можем взять производную числителя и знаменателя (3-43), и после этого подставить $m = 0$ для определения пикового значения ядра Дирихле. Это выполняется следующим образом

$$|X(m)|_{m\to 0} = (d/dm)X(m) = \{d[\sin(\pi mK/N)]/dm\}/\{d[\sin(\pi m/N)]/dm\} =$$

$$=[\cos(\pi mK/N)/\cos(\pi m/N)]\cdot[d(\pi mK/N)/dm]/[d(\pi m/N)/dm] =$$

$$[\cos(0)/\cos(0)]\cdot(\pi mK/N)/(\pi m/N) = 1\cdot K = K, \qquad (3\text{-}44)$$

---

[1] На рисунке 3.24, изображающем $x(n)$, N было четным. Если бы N было нечетным числом, пределы суммирования в (3-35) были бы такими: $-(N-1)/2 \le n \le (N-1)/2$. Использование таких пределов суммирования привело бы нас точно к такому же выражению для $X(m)$, как и (3-43).

что и требовалось показать. (Мы могли бы быть сообразительнее и вычислить (3-35) при $m = 0$, чтобы получить этот результат. Попробуйте сделать это, помня, что $e^{j0} = 1$.) Если бы значения ненулевых отсчетов были равны не единице, а некоторому A_0, то, конечно же, пиковое значение ядра Дирихле было бы равно A_0K вместо K. Следующий важный момент, касающийся ядра Дирихле, который следует отметить — это ширина главного лепестка. Первый ноль выражения (3-43) возникает на частоте, на которой аргумент числителя равен π, т. е. когда $\pi mK/N = \pi$. Таким образом, значение m для первого нулевого отсчета равно

$$m_{первого\ нуля} = \pi N/\pi K = N/K \qquad (3\text{-}45)$$

как показано на рисунке 3.25 (b). Таким образом, ширина главного лепестка равна $2N/K$, как показано на рисунке 3.25 (c), и обратно пропорциональна K[1].

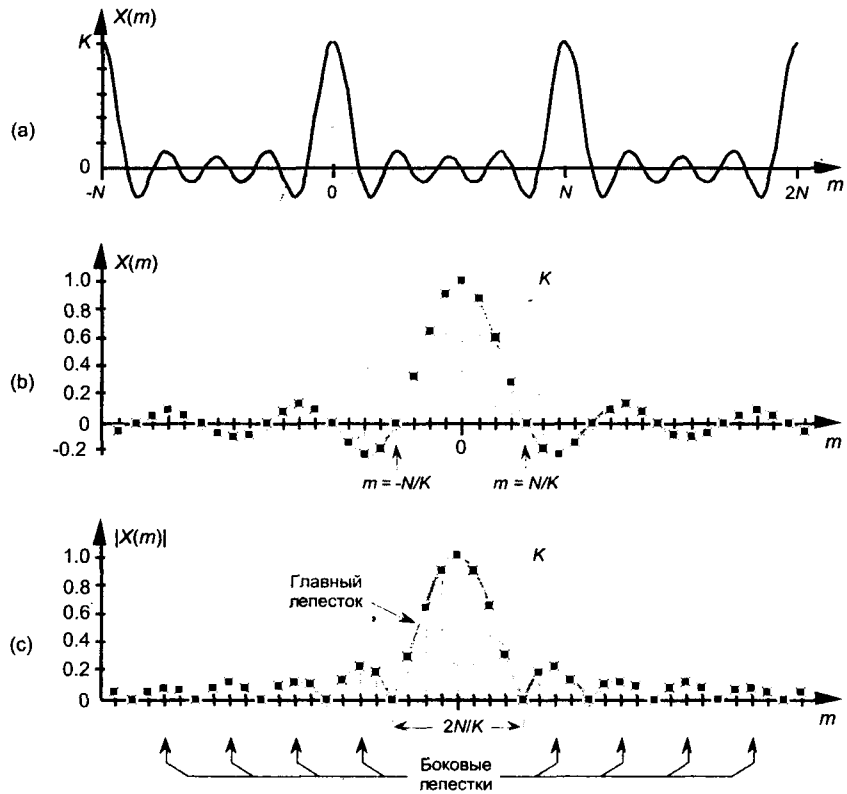


Рис. 3.25. Ядро Дирихле: (a) периодическая непрерывная кривая, на которой лежат отсчеты $X(m)$; (b) значения отсчетов $X(m)$ вблизи $m = 0$; (c) модули $|X(m)|$ в окрестности $m = 0$

Посмотрите, главный лепесток на рисунке 3.25 (a) окружен рядом волн, которые называются боковыми лепестками, как на рисунке 3.25 (c). Амплитуды этих

[1] Это фундаментальное свойство преобразования Фурье. Чем уже функция в одной области, тем шире ее преобразование в другой области.

боковых лепестков уменьшаются по мере удаления от главного лепестка. Но как бы далеко боковые лепестки ни удалялись от главного, их амплитуда никогда не становится в точности равной 0 — и они представляют собой источник изрядной головной боли для специалистов по ЦОС. Боковые лепестки вызывают маскирование сигналов небольшой амплитуды мощными сигналами по соседству при спектральном анализе и создают определенные трудности при проектировании цифровых фильтров. Как мы увидим в главе 5, нежелательные пульсации АЧХ в полосе пропускания и небольшое ослабление в полосе задерживания простых цифровых фильтров обусловлены боковыми лепестками ДПФ прямоугольной функции. (Для минимизации вредного влияния боковых лепестков, которые хорошо видны на рисунке 3.25, пришлось прибегнуть к проектированию и анализу окон, а также к разработке рекомендаций по их применению.)

Продемонстрируем использование (3-45) на простом конкретном примере. Предположим, что мы вычисляем 64-точечное ДПФ прямоугольной функции, содержащей 64 отсчета, показанной на рисунке 3.26 (a). В этом примере $N = 64$ и $K = 11$. В результате вычисления ДПФ этой последовательности мы получаем последовательность $X(m)$, действительная и мнимая части которой $X_{real}(m)$ и $X_{imag}(m)$ изображены на рисунках 3.26 (b) и 3.26 (c) соответственно. Рисунок 3.26 (b) дает хорошую иллюстрацию того, что действительная часть ДПФ действительной последовательности обладает четной симметрией, а рисунок 3.26 (c) подтверждает, что мнимая часть ДПФ действительной последовательности обладает нечетной симметрией.

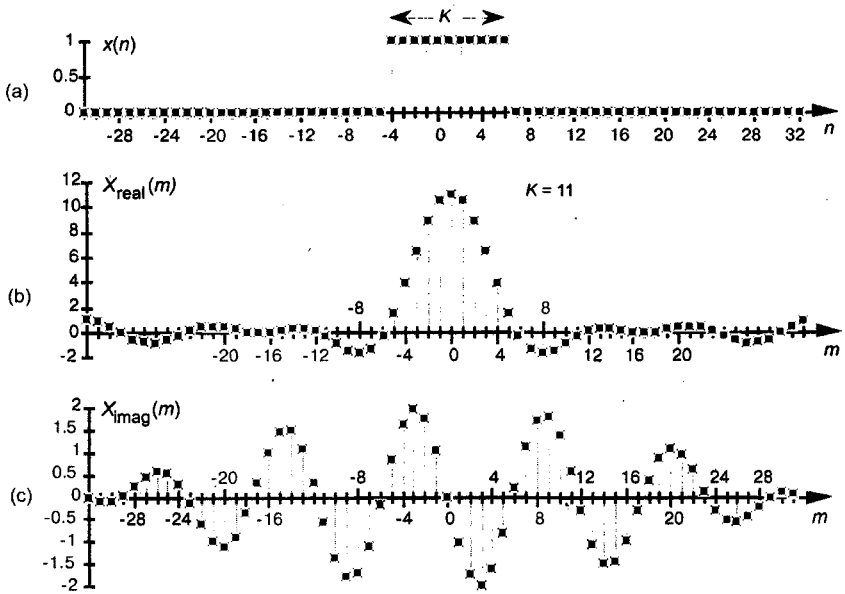


Рис. 3.26. ДПФ прямоугольной функции: (a) исходная функция $x(n)$; (b) действительная часть ДПФ $x(n)$, $X_{real}(m)$; (c) мнимая часть ДПФ $x(n)$, $X_{imag}(m)$

Хотя $X_{real}(m)$ и $X_{imag}(m)$ могут сообщить нам все, что можно узнать о ДПФ последовательности $x(n)$, об истинной природе спектра $X(m)$ легче судить, рассматривая его абсолютное значение (модуль). Модуль спектра, рассчитанный

согласно (3-7), приведен на рисунке 3.27 (а), на котором хорошо видны главный и боковые лепестки. Как мы и ожидали, пиковое значение главного лепестка равно 11, потому что мы имеем $K = 11$ единичных отсчетов $x(n)$. Ширина главного лепестка, согласно (3-45), равна 64/11, или 5.82. Следовательно, первая положительная частота, на которой модуль уменьшается до 0, лежит немного ниже отсчета дискретного спектра $|X(m)|$, показанного квадратиками на рисунке 3.27 (а) с индексом $m = 6$. Фазовые углы спектра, определенные выражениями (3-6) и (3-8), показаны на рисунке 3.27 (b).

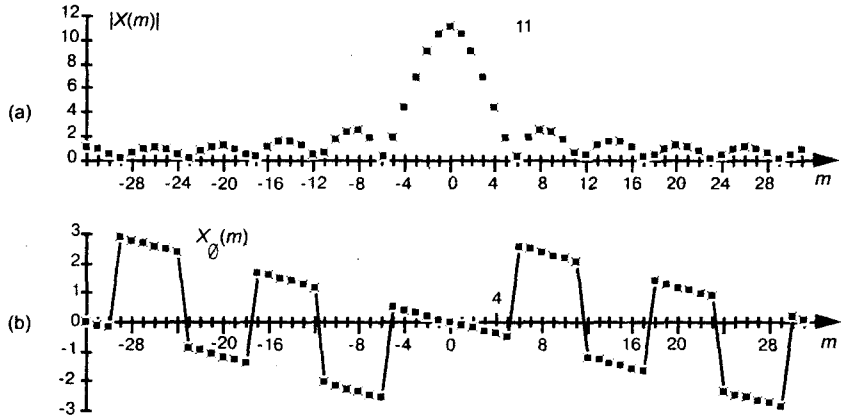


Рис. 3.27. ДПФ обобщенной прямоугольной функции: (а) модуль $|X(m)|$; (b) фаза в радианах

Чтобы глубже понять природу ДПФ прямоугольных функций, обсудим еще несколько примеров менее общих прямоугольных функций, которые в цифровой обработке сигналов встречаются чаще, чем $x(n)$ с рисунка 3.24.

3.13.2. ДПФ симметричной прямоугольной функции

Выражение (3-43) сложновато, т. к. исходная функция $x(n)$ задана в самом общем виде. На практике частные случаи прямоугольных функций приводят к более простым версиям (3-43). Рассмотрим симметричную прямоугольную функцию $x(n)$, показанную на рисунке 3.28. Как показано на этом рисунке, нам необходимо вычислить ДПФ прямоугольной функции, центр которой совпадает с индексом $n = 0$. Такую задачу приходится решать на практике довольно часто. В этом случае последовательность из K единичных отсчетов начинается с индекса $n = -n_0 = -(K-1)/2$. Соответственно, подстановка $(K-1)/2$ вместо n_0 в (3-43) дает

$$X(m) = e^{j(2\pi m/N)[(K-1)/2-(K-1)/2]} \cdot [\sin(\pi mK/N)/\sin(\pi m/N)] =$$

$$= e^{j(2\pi m/N)(0)} \cdot [\sin(\pi mK/N)/\sin(\pi m/N)]\,. \qquad (3\text{-}46)$$

Поскольку $e^{j0} = 1$, (3-46) превращается в

Симметричная форма ядра Дирихле:

$$X(m) = \sin(\pi mK/N)/\sin(\pi m/N)\,. \qquad (3\text{-}47)$$

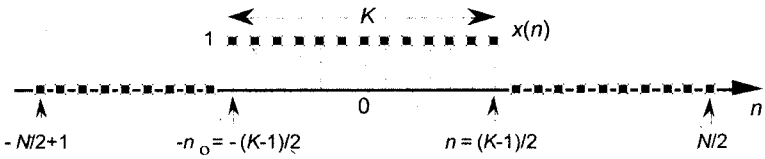


Рис. 3.28. Прямоугольная функция $x(n)$, содержащая K отсчетов с центром в точке $n = 0$

Формула (3-47) показывает, что ДПФ симметричной прямоугольной функции является действительной функцией, т. е. комплексная экспонента в (3-47) отсутствует, так что в этом частном случае ДПФ не имеет мнимой части или фазового множителя. Как мы установили в разделе 3.2, если $x(n)$ — действительная и четная функция, т. е. $x(n) = x(-n)$, то $X_{real}(m)$ отлична от 0, а $X_{imag}(m)$ всегда равна 0. Мы покажем это, вычислив 64-точечное ДПФ последовательности, показанной на рисунке 3.29 (a). $x(n)$ в этом случае содержит 11 единичных отсчетов, центр которых приходится на индексе $n = 0$. ДПФ этой последовательности дает последовательность $X(m)$, действительная и мнимая части которой показаны на рисунках 3.29 (b) и 3.29 (c) соответственно. Как и предсказывало выражение (3-47), $X_{real}(m)$ отлична от 0, а $X_{imag}(m)$ равна 0. Графики модуля и фазы $X(m)$ приведены на рисунках 3.29(d) и 3.29(e).

Обратите внимание на то, что модули, показанные на рисунках 3.27 (a) и 3.29(d), идентичны. Это подтверждает очень важную теорему о сдвиге, т. е. модуль $|X(m)|$ зависит только от количества ненулевых отсчетов в $x(n)$, K, и не зависит от их позиции по отношению к $n = 0$. Сдвиг K единичных отсчетов при центрировании их относительно индекса $n = 0$ влияет только на фазу отсчетов $X(m)$ и не влияет на их модуль.

Говоря о фазовых углах, здесь интересно будет отметить, что, хотя $X_{imag}(m)$ на рисунке 3.29 (c) равна 0, фазовый угол $X(m)$ отличен от нуля. В этом случае фазовые углы отсчетов $X(m)$ на рисунке 3.29 (e) принимают значения $+\pi$, 0 или $-\pi$ радиан. При необходимости мы легко можем восстановить $X_{real}(m)$ по $|X(m)|$ и фазовому углу $X_{\phi}(m)$, поставив в соответствие углам $+\pi$ и $-\pi$ радиан множитель -1. Отсчеты $X_{real}(m)$ равны отсчетам $|X(m)|$, взятым со знаком, который меняется на противоположный при переходе из одного бокового лепестка в другой[1]. Чтобы яснее представить себе, что ДПФ прямоугольной последовательности является дискретизированной версией ядра Дирихле, увеличим количество ненулевых отсчетов последовательности $x(n)$. На рисунке 3.30 (a) показана 64-точечная последовательность $x(n)$, содержащая пакет из 31 единичного отсчета с центром в точке $n = 0$. Модуль $X(m)$ приведен на рисунке 3.30 (b). Расширяя прямоугольную функцию $x(n)$, т. е. увеличивая K, мы сделали ядро Дирихле $X(m)$ *уже*. Это следует из (3-45), не так ли? Частота первого нуля ядра обратно пропорциональна K, следовательно, по мере увеличения K мы сжимаем $|X(m)|$ в направлении к $m = 0$. В этом примере $N = 64$ и $K = 31$. Из (3-45) следует, что положительная частота первого нуля $X(m)$ равна 64/31, т. е. расположена немного правее отсчета с $m=2$ на рисунке 3.30 (b). Заметьте также, что пиковое значение $|X(m)| = K = 31$, как и должно быть согласно (3-44).

[1] Конкретная картина распределения значений $+\pi$ и $-\pi$ на рисунке 3.29 (e) определяется программой, которую использовали для получения этого рисунка. Другие программы могут показать другую картину, но пока ненулевые значения фазовых углов равны $+\pi$ и $-\pi$, результат будет правильным.

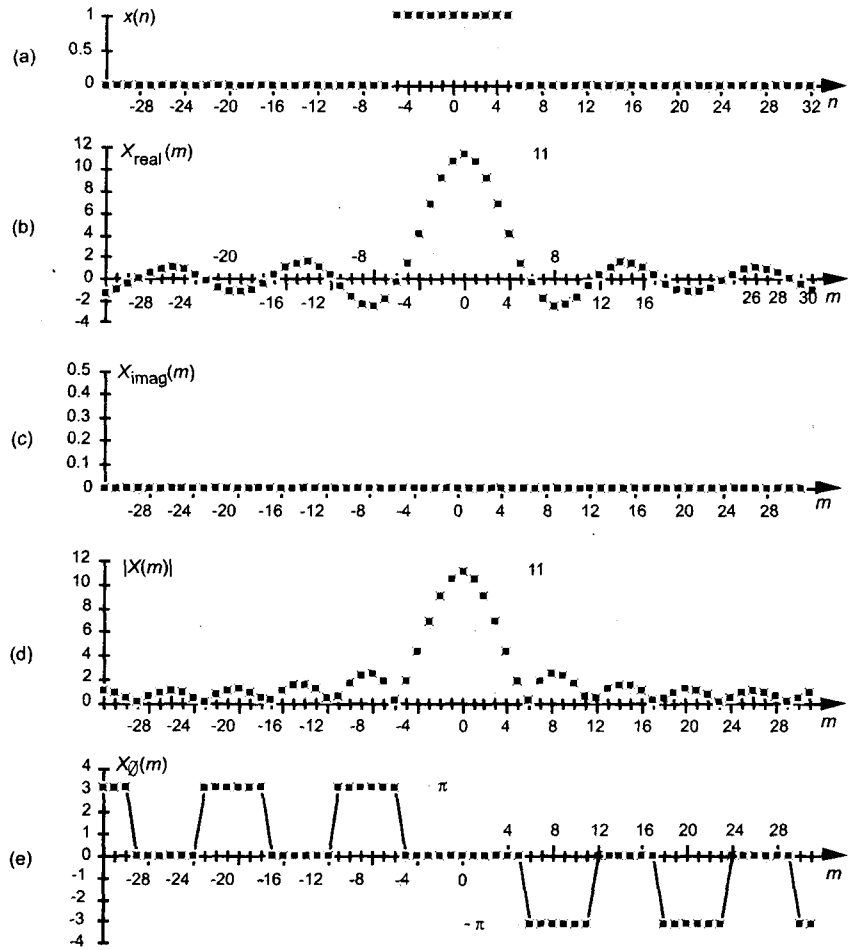


Рис. 3.29. ДПФ прямоугольной функции, центр которой приходится на $n = 0$: (a) исходная последовательность $x(n)$; (b) $X_{real}(m)$; (c) $X_{imag}(m)$; (d) модуль $X(m)$; (e) фазовый угол $X(m)$ в радианах

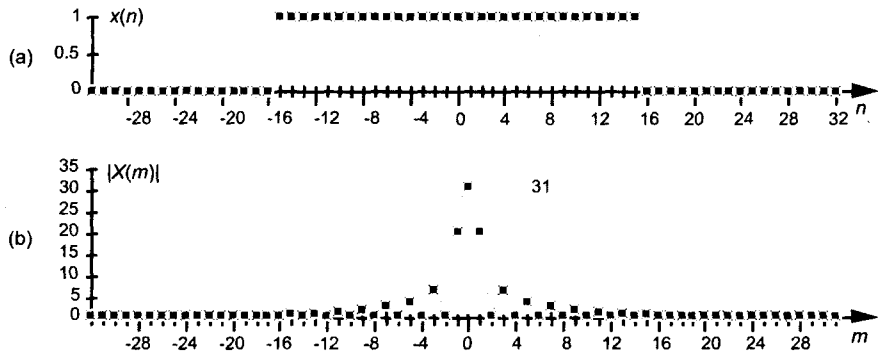


Рис. 3.30. ДПФ симметричной прямоугольной функции, содержащей 31 единичный отсчет: (a) исходная последовательность $x(n)$; (b) модуль $X(m)$

3.13.3. ДПФ прямоугольной функции, все отсчеты которой равны 1

Как и раньше, мы вычисляем ДПФ частного случая последовательности x(n), в результате чего приходим к еще одной упрощенной форме выражения (3-43). В литературе мы часто встречаем прямоугольную функцию, для которой $K = N$; т. е. N отсчетов $x(n)$ отличны от нуля, как показано на рисунке 3.31. В этом случае пакет из N единичных отсчетов начинается при $n = -n_0 = -(N-1)/2$. Мы получим выражение для ДПФ функции, показанной на рисунке 3.31, подставив $K = N$ и $n_0 = (N-1)/2$ в (3-43), что дает

$$X(m) = e^{j(2\pi m/N)[(N-1)/2-(N-1)/2]} \cdot$$
$$\cdot [\sin(\pi mN/N)/\sin(\pi m/N)] =$$
$$= e^{j(2\pi m/N)(0)} \cdot [\sin(\pi m)/\sin(\pi m/N)], \text{ или}$$

Форма ядра Дирихле для функции, все отсчеты которой равны 1 (Тип 1):

$$X(m) = [\sin(\pi m)/\sin(\pi m/N)] \qquad (3\text{-}48)$$

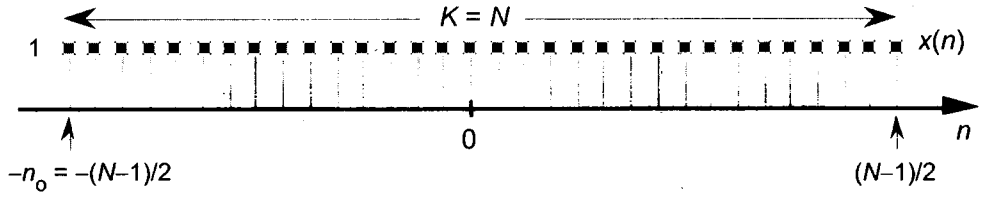


Рис. 3.31. Прямоугольная функция, содержащая N единичных отсчетов

Формула (3-48) соответствует одной из форм выражения (3-34), которую мы упоминали в начале раздела 3.13[1]. Рисунок 3.32 показывает смысл выражения (3-48). Модуль ДПФ последовательности $x(n)$, состоящей из единичных отсчетов и показанной на рисунке 3.32 (a), показан на рисунках 3.32 (b) и 3.32 (c). Обратите внимание на то, что если бы переменная m была непрерывной, (3-48) описывало бы графики, нарисованные серыми линиями на рисунках 3.32 (b) и 3.32 (c). Если же m может принимать только целые значения, то (3-48) описывает точки на этих рисунках.

Ядро Дирихле $X(m)$ на рисунке 3.32 (b) теперь имеет наименьшую возможную ширину. Первый ноль на положительной оси частот возникает на отсчете $m = 64/64 = 1$ на рисунке 3.32 (b), а пиковое значение $|X(m)| = N = 64$. Когда все отсчеты $x(n)$ равны 1, $|X(m)| = 0$ для всех значений $m \neq 0$. Функция sinc в (3-48) имеет важнейшее значение, как мы увидим в конце этой главы, она определяет общую частотную характеристику ДПФ при подаче на его вход синусоидальной последовательности, кроме того, она представляет собой АЧХ одного бина.

[1] Кстати, название «Ядро Дирихле типа 1» для (3-48) не является общепринятым. Мы использовали слова «типа 1» просто для того, чтобы отличать (3-48) от других математических выражений, с которыми мы вскоре встретимся.

Форма (3-48) позволяет нам продвинуться на один шаг вперед и определить выражение для содержащей только единичные отсчеты ДПФ последовательности, которая наиболее часто встречается в литературе. Чтобы сделать это, нам необходимо использовать принцип аппроксимации, применяемый в тригонометрии, о котором, возможно, вы уже слышали раньше. Согласно этому принципу при малых α значение $\sin(\alpha)$ примерно равно α, т. е. $\sin(\alpha) \approx \alpha$. Это соотношение приходит на помощь, когда мы рассматриваем круговой сектор радиуса 1, показанный на рисунке 3.33 (a). Этот сектор определяется длиной дуги α, измеренной в радианах, и ее хордой b. Если мы начертим внутри сектора прямоугольный треугольник, то мы можем сказать, что $a = \sin(\alpha)$. При уменьшении α длинные стороны нашего треугольника становятся почти параллельными, длина хорды b приближается к длине дуги α, а длина отрезка a приближается к длине b. Итак, как показано на рисунке 3.33 (b), при малом $\alpha \approx b \approx a = \sin(\alpha)$. Мы используем приближенное равенство $\sin(\alpha) \approx \alpha$, рассматривая знаменатель выражения (3-48). Когда значение $\pi m/N$ мало, $\sin(\pi m/N)$ примерно равен $\pi m/N$. Следовательно, при больших N мы можем утверждать, что

Форма ядра Дирихле для функции, все отсчеты которой равны 1 (Тип 2):

$$X(m) \approx \sin(\pi m)/(\pi m/N) = N \cdot \sin(\pi m)/(\pi m) \qquad (3\text{-}49)$$

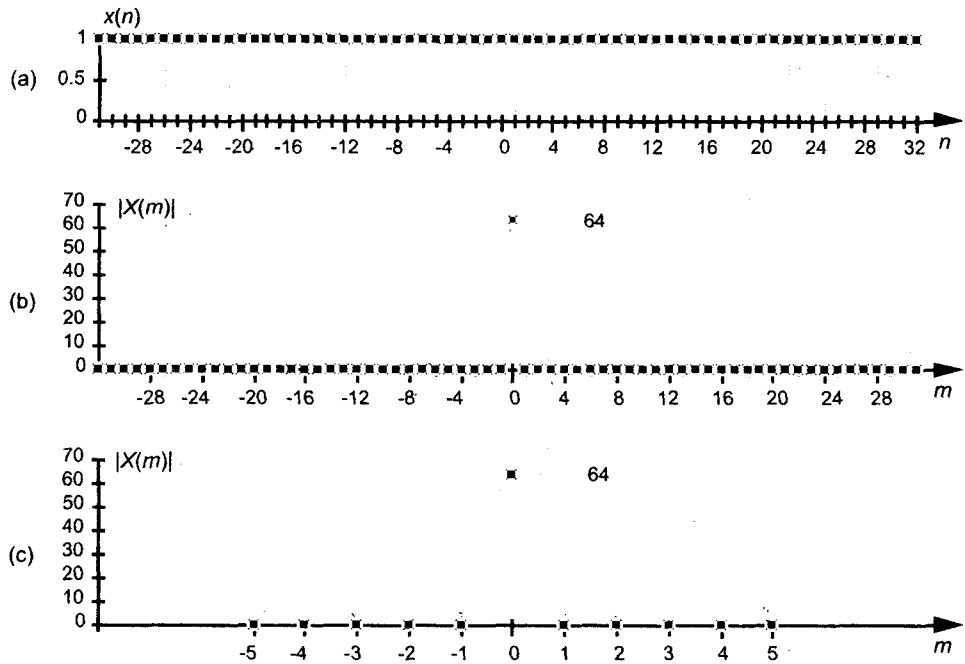


Рис. 3.32. Функция, все отсчеты которой равны 1: (a) прямоугольная функция с $N = 64$ единичными отсчетами; (b) модуль ДПФ функции, состоящей только из единичных отсчетов; (c) укрупненный вид модуля ДПФ функции, состоящей только из единичных отсчетов

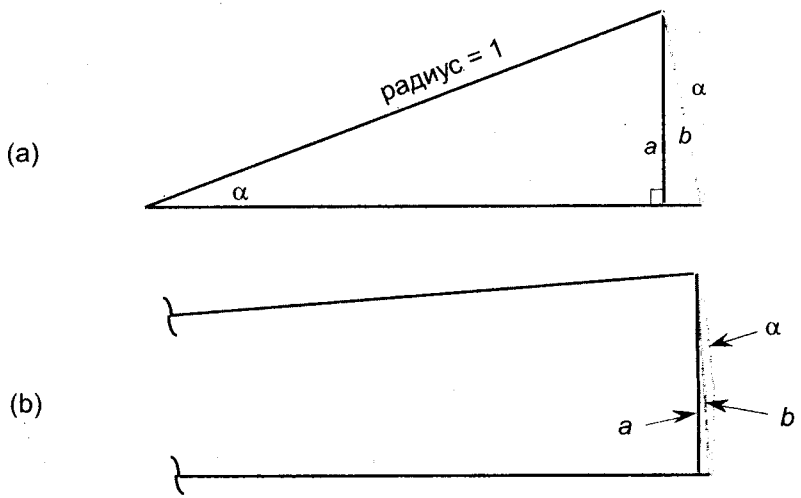


Рис. 3.33. Соотношение угла α, длины отрезка $a = \sin(\alpha)$ и хорды b: (a) при большом угле α; (b) при малом угле α

Было показано, что если в (3-48) N превышает, скажем, 10, (3-49) достаточно точно описывает значения отсчетов ДПФ[1]. (3-49) часто нормализуют, разделив на N, так что мы можем выразить нормализованное ДПФ прямоугольной функции, содержащей только единичные отсчеты, в виде

Форма ядра Дирихле для функции, все отсчеты которой равны 1 (Тип 3):

$$X(m) = \sin(\pi m)/\pi m \qquad (3\text{-}50)$$

Соотношение (3-50), принимая вторую форму (3-34), которая часто встречается в литературе, также дает модуль ДПФ, показанный на рисунках 3.32 (b) и (c).

3.13.4. Частотная и временная оси, связанные с прямоугольными функциями

Определим физические размерности, связанные со значениями индексов n и m. До сих пор в наших рассуждениях индекс n был просто целым числом, позволяющим нам различать отдельные отсчеты последовательности $x(n)$. Если индекс n представляет моменты времени, мы можем задать интервал времени, разделяющий соседние отсчеты $x(n)$, чтобы определить масштаб оси времени для $x(n)$ и масштаб частотной оси для $X(m)$. Рассмотрим прямоугольную функцию во временной области, показанную на рисунке 3.34 (a). Эта функция содержит N отсчетов, полученных с интервалом t_s секунд, при этом полный интервал накопления составляет Nt_s секунд. Отсчет $x(n)$ для некоторого значения n берется в момент времени nt_s секунд. Например, значение отсчета с индексом $n = 9$, $x(9) = 0$, появляется в момент времени $9t_s$ секунд.

[1] Мы можем принять этот результат со спокойной душой, потому что, если положить $K=N$, мы увидим, что пиковое значение $X(m)$ в (3-49) при $m = 0$ получается равным N, что согласуется с выражением (3-44).

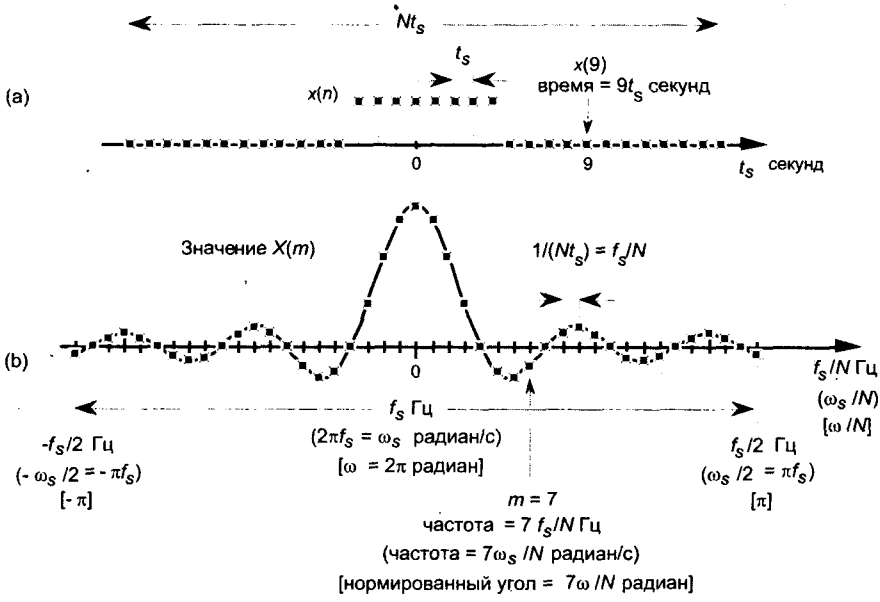


Рис. 3.34. Размерности временной и частотной осей ДПФ: (a) временная ось использует индекс времени n; (b) различные представления частотной оси ДПФ

Частотная ось $X(m)$ может быть представлена несколькими разными способами. Три популярных способа маркировки частотной оси ДПФ показаны на рисунке 3.34 (b) и перечислены в таблице 3.1. Рассмотрим каждое представление в отдельности.

Таблица 3.1. Характеристики различных представлений частотной оси ДПФ

Представление частотной оси ДПФ	Частотная переменная X(m)	Разрешающая способность	Период повторения X(m)	Диапазон изменения частоты
Частота в Гц	mf_s/N	f_s/N	f_s	от $-f_s/2$ до $f_s/2$
Частота в радианах	$m\omega_s/N$ или $2\pi mf_s/N$	ω_s/N или $2\pi f_s/N$	ω_s или $2\pi f_s$	от $-\omega_s/2$ до $\omega_s/2$ или от $-\pi f_s$ до πf_s
Нормированный угол в радианах	$2\pi m/N$	$2\pi/N$	2π	от $-\pi$ до π

3.13.4.1. Частотная ось ДПФ в Герцах (Гц)

Если мы хотим связать $X(m)$ с периодом дискретизации по времени t_s, или с частотой $f_s = 1/t_s$, то частота будет принимать значения $m/Nt_s = mf_s/N$. Таким

образом, каждый отсчет $X(m)$ соответствует частоте mf_s/N Гц. В этом случае разрешение по частоте составляет f_s/N. Период повторения ДПФ равен f_s Гц, как показано на рисунке 3.34 (b). Если мы в (3-47) подставим частоту mf_s/N вместо m/N, мы получим выражение для ДПФ симметричной прямоугольной функции при $K < N$, в котором частоты выражены через частоту дискретизации f_s в Гц. Это выражение имеет вид

$$X(mf_s) = [\sin(\pi mKf_s/N)/\sin(\pi mf_s/N)]\,. \qquad (3\text{-}51)$$

Для прямоугольной функции при $K = N$ нормированная по амплитуде аппроксимация функции $\sin(x)/x$ в (3-50) может быть выражена через частоту дискретизации f_s в Гц как

$$X(mf_s) = [\sin(\pi mf_s)/\sin(\pi mf_s)]\,. \qquad (3\text{-}52)$$

3.13.4.2 Частотная ось ДПФ в радианах в секунду

Мы можем измерять частоту отсчетов спектра $X(m)$ в радианах/с, выразив частоту дискретизации во временной области в радианах/с как $\omega_s = 2\pi f_s$. В этом случае каждому отсчету $X(m)$ соответствует круговая частота $\omega_s/N = 2\pi mf_s/N$ радиан/с. При этом разрешение по частоте составляет $\omega_s/N = 2\pi f_s/N$ радиан/с, а период повторения ДПФ равен $\omega_s = 2\pi f_s$ радиан/с, как показано на рисунке 3.34 (b) в скобках. Поскольку $\omega_s = 2\pi f_s$, $\pi f_s = \omega_s/2$. Если мы подставим в (3-51) $\omega_s/2$ вместо πf_s, мы получим выражение для ДПФ симметричной прямоугольной функции при $K < N$ как функцию частоты дискретизации ω_s в радианах/с:

$$X(m\omega_s) = \sin(\pi mK\omega_s/2N)/\sin(\pi m\omega_s/2N)\,. \qquad (3\text{-}53)$$

Для прямоугольной функции при $K = N$ нормированная по амплитуде аппроксимация $\sin(x)/x$ в (3-50) может быть выражена как функция частоты дискретизации ω_s в радиан/с как

$$X(m\omega_s) = 2\sin(m\omega_s/2)/m\omega_s\,. \qquad (3\text{-}54)$$

3.13.4.3 Частотная ось ДПФ при использовании нормированной угловой переменной

Многие авторы упрощают запись выражений, используя нормированную переменную для круговой частоты $\omega_s = 2\pi f_s$. Под нормированием мы понимаем то, что частота дискретизации f_s полагается равной 1, вследствие чего нормированная круговая частота ω_s принимает значение 2π. Следовательно, частотная ось $X(m)$ теперь размечена значениями нормированного угла ω, и каждому отсчету $X(m)$ соответствует угол $m\omega/N$ радиан. При использовании этого соглашения разрешение по частоте равно ω/N радиан, а период повторения ДПФ составляет $\omega = 2\pi$ радиан, как показывает выражение в квадратных скобках на рисунке 3.34 (b).

К сожалению, использование этих трех представлений частотной оси ДПФ иногда ставит новичков в тупик. При изучении литературы читатель может переводить одно представление в другое с помощью рисунка 3.34 и таблицы 3.1.

3.13.5. Альтернативная форма ДПФ прямоугольной функции, состоящей из одних единиц.

Использование нормированной формы частотной оси, показанной в последней строке таблицы 3.1, приводит к другой часто используемой форме ДПФ прямоугольной функции, все отсчеты которой равны 1, показанной на рисунке 3.31. Если мы примем дискретную переменную в частотной области в форме $\omega_m = 2\pi m/N$, то $\pi m = N\omega_m/2$. Подставляя $N\omega_m/2$ вместо πm в (3-48), мы получаем

Форма ядра Дирихле для прямоугольной функции, все отсчеты которой равны 1 (Тип 4):

$$X(m\omega_s) = \sin(N\omega_m/2)/\sin(\omega_m/2) \qquad (3\text{-}55)$$

Выражение (3-55), соответствующее третьей форме выражения (3-34), иногда встречается в литературе и также имеет модуль, изображенный на рисунках 3.32 (b) и 3.32 (c).

Мы рассмотрели так много разных форм ДПФ различных прямоугольных функций, что здесь уместно свести их все в одну общую таблицу 3.2.

3.13.6. Обратное ДПФ обобщенной прямоугольной функции

Теперь подумаем о вычислении обратного ДПФ прямоугольной функции в частотной области. Имея прямоугольную функцию $X(m)$, найдем соответствующую функцию во временной области $x(n)$. Мы можем определить обобщенную форму прямоугольной функции в частотной области так, как мы это делали на рисунке 3.24, получив результат, показанный на рисунке 3.35.

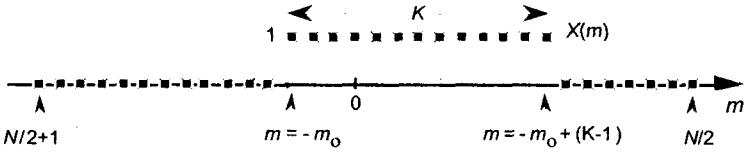


Рис. 3.35. Обобщенная прямоугольная функция в частотной области длительность в K отсчетов на интервале в N отсчетов при $K < N$

Обратное ДПФ прямоугольной функции $X(m)$, показанной на рисунке 3.35 имеет вид

$$x(n) = (1/N) \sum_{m=-(N/2)+1}^{N/2} X(m)\, e^{j2\pi mn/N}. \qquad (3\text{-}56)$$

Те же алгебраические преобразования, которые мы использовали в (3-43), можно применить к (3-56), что приводит нас к

$$x(n) = e^{-j(2\pi n/N)[m_0-(K-1)/2]} \cdot (1/N) \cdot [\sin(2\pi nK/N)/\sin(\pi n/N)] \qquad (3\text{-}57)$$

для обратного ДПФ прямоугольной функции, показанной на рисунке 3.35. Все, что мы говорили о (3-43), в равной степени применимо и к (3-57), за исключением масштабирующего множителя $1/N$ и изменения знака показателя экспоненты. Воспользуемся уравнением (3-57), чтобы вычислить 64-точечное обратное ДПФ прямоугольной функции, содержащей 64 отсчета, которая показана на рисунке 3.36 (a). Обратное ДПФ последовательности, показанной на рисунке 3.36 (a), дает нам последовательность $x(n)$, действительная и мнимая части которой, $x_{real}(n)$ и $x_{imag}(n)$, показаны на рисунках 3.36 (b) и 3.36 (c) соответственно. Положив в этом примере $N = 64$ и $K = 11$, мы получили возможность легко сравнить функции, полученные в результате обратного ДПФ и показанные на рисунке 3.36, с функциями, полученными в результате прямого ДПФ и показанными на рисунке 3.26. Замечаете подобие действительных частей, $X_{real}(m)$ и $x_{real}(n)$, на рисунках 3.26 (b) и 3.36 (b)? Обратите также внимание на противоположность знаков мнимых частей на рисунках 3.26 (c) и 3.36 (c).

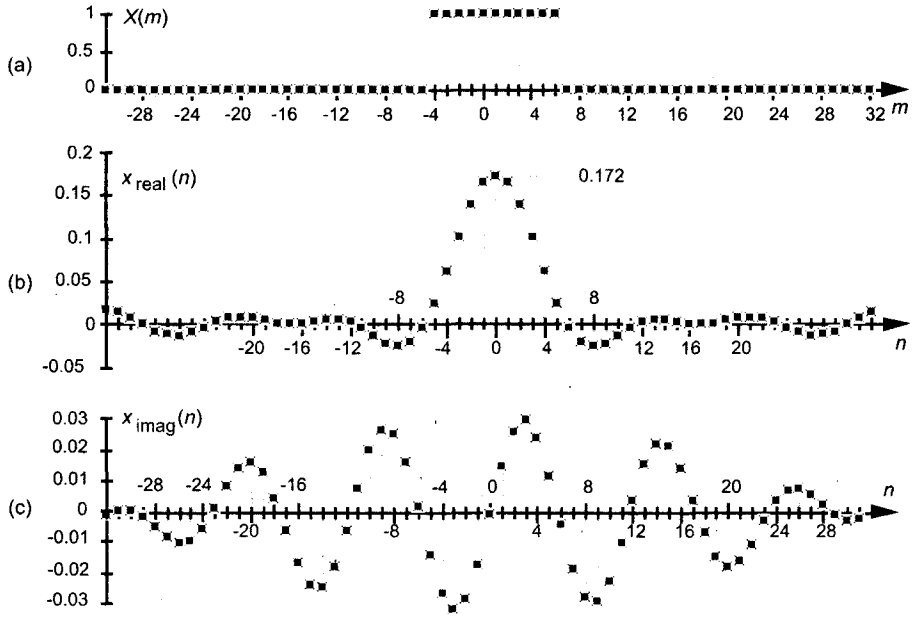


Рис. 3.36. Обратное ДПФ обобщенной прямоугольной функции: (a) исходная функция $X(m)$; (b) действительная часть $x_{real}(n)$; (c) мнимая часть $x_{imag}(n)$

Модуль и аргумент $x(n)$ показаны на рисунках 3.37 (a) и 3.37 (b). Обратите внимание на разность пиковых значений главных лепестков на рисунках 3.27 (a) и 3.37 (a). Пиковое значение на рисунке 3.37 (a) равно $K/N = 11/64$ или 0.172. Обратите также внимание на то, что знаки фазовых углов на рисунках 3.27 (b) и 3.37 (b) противоположны. Графики на рисунках 3.26, 3.27, 3.36 и 3.37 дают хороший пример фундаментальной дуальности прямого и обратного ДПФ.

Таблица 3.2. ДПФ различных прямоугольных функций

Описание	Выражение	
ДПФ обобщенной прямоугольной функции при $K<N$ как функция целого индекса m	$X(m) = [\sin(\pi mK/N)/\sin(\pi m/N)] \cdot e^{j(2\pi m/N)(n_0-(K-1)/2)}$	(3-46)
ДПФ симметричной прямоугольной функции при $K<N$ как функция целого индекса m	$X(m) = \sin(\pi mK/N)/\sin(\pi m/N)$	(3-47)
ДПФ прямоугольной функции, все отсчеты которой равны 1, как функция целого индекса m (ядро Дирихле типа 1)	$X(m) = \sin(\pi m)/\sin(\pi m/N)$	(3-48)
ДПФ прямоугольной функции, все отсчеты которой равны 1, как функция целого индекса m (ядро Дирихле типа 2)	$X(m) \approx N \cdot \sin(\pi m)/(\pi m)$	(3-49)
Нормированное по амплитуде ДПФ прямоугольной функции, все отсчеты которой равны 1, как функция целого индекса m (ядро Дирихле типа 3)	$X(m) \approx \sin(\pi m)/(\pi m)$	(3-50)
ДПФ симметричной прямоугольной функции при $K<N$, выраженное через частоту дискретизации f_s в Гц	$X(mf_s) = \sin(\pi mKf_s/N)/\sin(\pi mf_s/N)$	(3-51)
Нормированное по амплитуде ДПФ прямоугольной функции, все отсчеты которой равны 1, выраженное через частоту дискретизации f_s в Гц	$X(mf_s) \approx \sin(\pi mf_s)/(\pi mf_s)$	(3-52)
ДПФ симметричной прямоугольной функции при $K<N$, выраженное через круговую частоту дискретизации ω_s в радианах/с	$X(m\omega_s) = \sin(m\omega_s K/2N)/\sin(m\omega_s/2N)$	(3-53)
Нормированное по амплитуде ДПФ прямоугольной функции, все отсчеты которой равны 1, выраженное через круговую частоту дискретизации ω_s в радианах/с	$X(m\omega_s) \approx 2\sin(m\omega_s/2)/(m\omega_s)$	(3-54)
ДПФ прямоугольной функции, все отсчеты которой равны 1, выраженное через нормированную дискретную частотную переменную ω_m(ядро Дирихле типа 4)	$X(\omega) = \sin(N\omega_m/2)/\sin(\omega_m/2)$	(3-55)

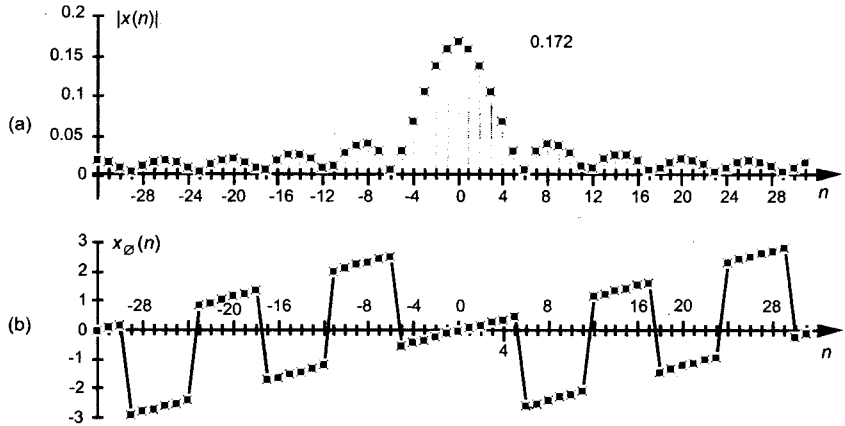


Рис. 3.37. Обратное ДПФ обобщенной прямоугольной функции: (a) модуль $|x(n)|$; (b) фаза $x(n)$ в радианах

3.13.7. Обратное ДПФ симметричной прямоугольной функции

Обратное ДПФ обобщенной прямоугольной функции, приведенной на рисунке 3.36, не часто встречается в цифровой обработке сигналов. Но при обсуждении вопросов, связанных с цифровыми фильтрами, мы будем иметь дело с обратным ДПФ симметричных прямоугольных функций. С обратным ДПФ такой функции мы сталкиваемся при изучении проектирования цифровых КИХ-фильтров нижних частот методом окон. Расчет фильтра этим методом начинается с определения симметричной функции $H(m)$ в частотной области, такой же, как на рисунке 3.38. Затем для вычисления коэффициентов КИХ ФНЧ вычисляется обратное ДПФ этой последовательности. (Коэффициенты КИХ-фильтра во временной области обычно обозначаются как $h(n)$ вместо $x(n)$, так что в оставшейся части книги, посвященной обратному ДПФ, мы будем использовать обозначение $h(n)$.)

В случае функции $H(m)$ в частотной области, имеющей вид, приведенный на рисунке 3.38, пакет из K отсчетов, равных единице, начинается при $m = -m_o = -(K-1)/2$. Подставляя $(K-1)/2$ вместо m_o в (3-57) получаем

$$h(n) = e^{j(2\pi n/N)[(K-1)/2-(K-1)/2]} \bullet (1/N) \bullet [\sin(\pi nK/N)/\sin(\pi n/N)]$$

$$= e^{j(2\pi n/N)(0)} \bullet (1/N) \bullet [\sin(\pi nK/N)/\sin(\pi n/N)]\,. \qquad (3\text{-}58)$$

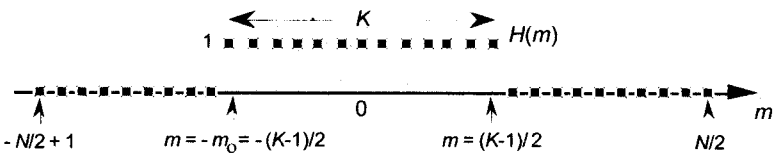


Рис. 3.38. Прямоугольная функция в частотной области шириной K отсчетов, определенная на N отсчетах

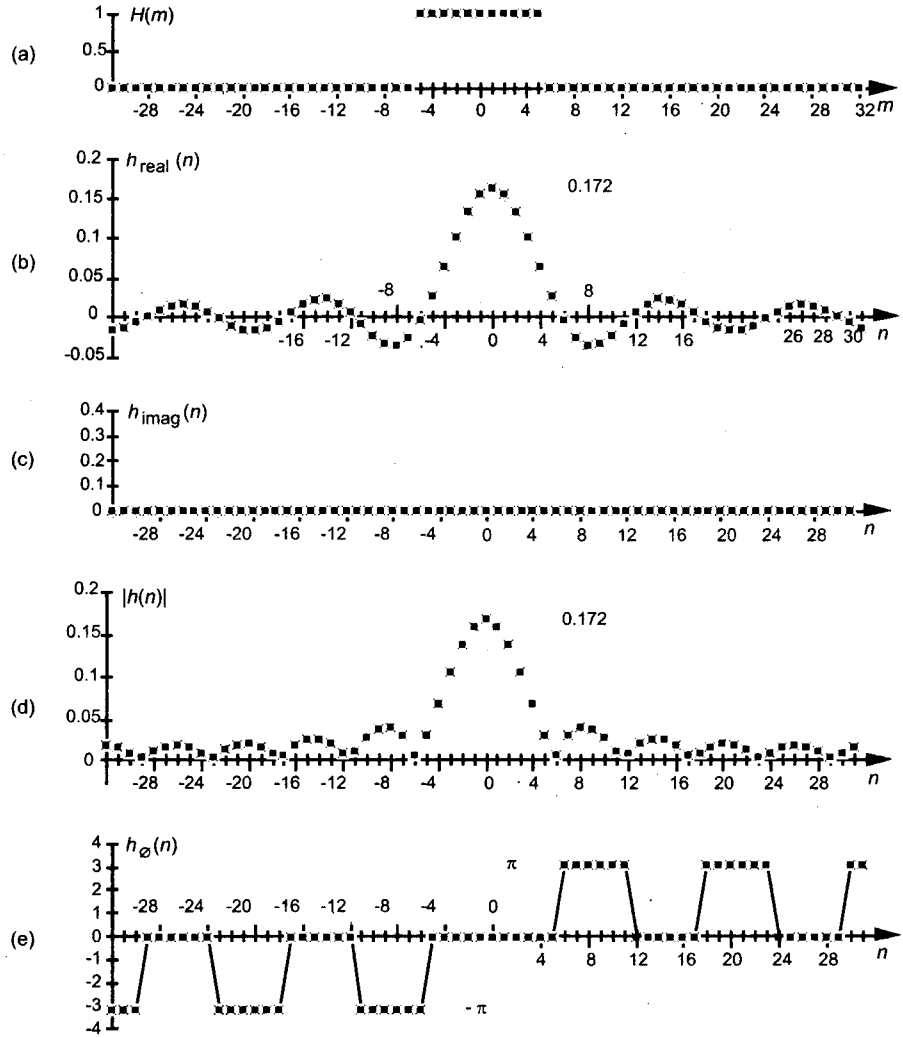


Рис. 3.39. Обратное ДПФ прямоугольной функции, центр которой находится в точке $m = 0$: (a) исходная функция $H(m)$; (b) $h_{real}(n)$; (c) $h_{imag}(n)$; (d) модуль $h(n)$: (e) фаза $h(n)$ в радианах

И, т. к. $e^{j0} = 1$, (3-58) превращается в

$$h(n) = (1/N) \cdot [\sin(\pi nK/N)/\sin(\pi n/N)] . \qquad (3\text{-}59)$$

Выражение (3-59) говорит нам, что обратное ДПФ симметричной прямоугольной функции, показанной на рисунке 3.38, тоже является действительной функцией, и это мы можем показать на примере. Мы выполним 64-точечное обратное ДПФ последовательности, показанной на рисунке 3.39 (a). Здесь функция $H(m)$ представляет собой 11 отсчетов, равных единице и центрированных относительно индекса $m = 0$. В этом случае обратное ДПФ дает последовательность $h(n)$, действительная и мнимая части которой приведены на рисунках 3.39 (b) и 3.39 (c)

соответственно. Как и предсказывает (3-47), $h_{real}(n)$ отлична от нуля, а $h_{imag}(n)$ равна нулю. Модуль и фаза последовательности $h(n)$ показаны на рисунках 3.39 (d) и 3.39 (e). (Здесь мы тоже сделали функции на рисунке 3.39 более удобными для сравнения с прямым ДПФ на рисунке 3.29.) На самом деле нам нужна действительная часть $h(n)$. Значения $h_{real}(n)$ используются как коэффициенты фильтра при проектировании КИХ-фильтров нижних частот, которые мы будем рассматривать в разделе 5.3.

3.14. Частотный отклик ДПФ на комплексный входной сигнал

В этом разделе мы определим частотный отклик N-точечного ДПФ, когда входная последовательность представляет собой дискретную комплексную синусоиду, обозначенную как $x_c(n)$. Под частотным откликом мы имеем ввиду выходные отсчеты ДПФ при преобразовании комплексной синусоидальной последовательности. Мы начнем с графика входной последовательности $x_c(n)$, приведенного на рисунке 3.40. Эта последовательность имеет форму

$$x_c(n) = e^{j2\pi nk/N}, \tag{3-60}$$

где k — количество полных циклов на интервале в N отсчетов. На рисунке 3.40 показана $x_c(n)$ для случая $k = 2$. Если мы обозначим выходную последовательность ДПФ как $X_c(m)$ и подставим наш сигнал $x_c(n)$ в формулу ДПФ (3-2), то получим

$$\begin{aligned} X_c(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_c(n) e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi nk/N} e^{-j2\pi nm/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(k-m)/N}. \end{aligned} \tag{3-61}$$

Если мы положим $N = K$, $n = p$ и $q = -2\pi(k-m)/N$, выражение (3-61) превращается в

$$X_c(m) = \sum_{p=0}^{K-1} e^{-jpq}. \tag{3-62}$$

Почему мы сделали подстановки в (3-61) с целью получить (3-62)? Потому, что мы уже работали с выражением (3-62), когда оно имело номер (3-39). Результат в замкнутой форме был представлен выражением (3-41), которое мы повторяем здесь в виде

$$X_c(m) = \sum_{p=0}^{K-1} e^{-jpq} = e^{-jq(K-1)/2} \cdot \sin(qK/2)/\sin(q/2). \tag{3-63}$$

Возвращая переменные из (3-61), мы получаем окончательный результат:

ДПФ комплексной синусоиды:

$$\begin{aligned} X_c(m) &= e^{j[\pi(k-m)-\pi(k-m)/N]} \cdot \\ &\cdot \sin[\pi(k-m)]/\sin[\pi(k-m)/N]. \end{aligned} \tag{3-64}$$

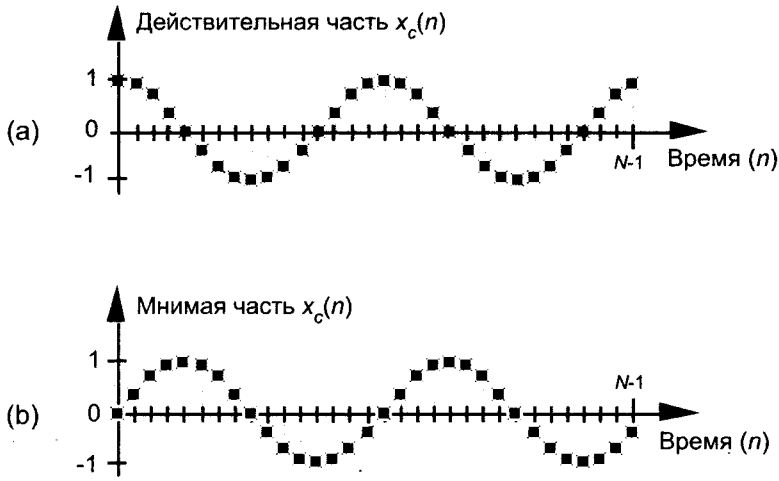


Рис. 3.40. Комплексная последовательность $x_c(n) = e^{j2pnk/N}$ во временной области, имеющая два полных периода ($k = 2$) на интервале в N отсчетов: (a) действительная часть $x_c(n)$; (b) мнимая часть $x_c(n)$

Как и ядро Дирихле в (3-43), $X_c(m)$ в (3-64) представляет собой комплексное выражение, в котором отношение синусов есть амплитуда $X_c(m)$, а экспоненциальный сомножитель дает фазовый угол $X_c(m)$. В данный момент в (3-64) нас интересует только отношение синусов. Его модуль показан на рисунке 3.41. Заметьте, что, т. к. $x_c(n)$ является комплексным, в $X_c(m)$ отсутствуют компоненты с отрицательными частотами. Сосредоточимся на серой кривой на рисунке 3.41. Эта кривая представляет собой непрерывное преобразование Фурье комплексной последовательности $x_c(n)$ и может рассматриваться как непрерывный спектр последовательности $x_c(n)$[1]. Под непрерывным спектром мы понимаем спектр, который определен для всех значений частоты, а не только для частот анализа N-точечного ДПФ, кратных f_s/N. Форма этого спектра с главным и боковыми лепестками является прямым и неизбежным следствием анализа последовательности ограниченной длительности, подобной последовательности $x_c(n)$ на рисунке 3.40.

Мы можем получить этот непрерывный спектр аналитически, взяв непрерывное преобразование Фурье нашей дискретной последовательности $x_c(n)$, которое некоторые авторы называют дискретно-временным преобразованием Фурье (ДВПФ), но мы не можем практически вычислить непрерывный спектр на компьютере. Поэтому ДВПФ определено только для бесконечно длинных последовательностей, а его частотная переменная непрерывна при бесконечно малом разрешении по частоте. Но мы можем, однако, использовать ДПФ для вычисления аппроксимации непрерывного спектра последовательности $x_c(n)$. Результатом ДПФ, представленным точками на рисунке 3.41, является дискретизированная версия непрерывного спектра. Мы могли бы брать отсчеты непрерывного спектра более

[1] Точно так же, как мы вычислили пиковое значение ядра Дирихле в (3-44) с помощью правила Лопиталя, мы можем показать, что пиковое значение $X_c(m)$ вида (3-64) равно N при $m = k$.

часто, т. е. получать более точную аппроксимацию, дополнив исходную последовательность $x_c(n)$ нулями и вычисляя ДПФ большей длины. Мы проделывали это на рисунке 3.21.

Рисунок 3.41 показывает, почему, когда частота входной последовательности точно совпадает с центром бина $m = k$, выходные отсчеты ДПФ равны нулю для всех бинов за исключением бина $m = k$. Если бы частота нашей входной последовательности была такой, что на том же интервале умещалось бы $k+0.25$ периодов, ДПФ дискретизировало бы непрерывный спектр так, как показано на рисунке 3.42, где все выходные отсчеты ДПФ отличны от 0. Это иллюстрация утечки спектра, описанной в разделе 3.8.

Рис. 3.41. Модуль реакции ДПФ на комплексную синусоиду, имеющую k полных периодов на интервале в N отсчетов, вида $x_c(n) = e_{j2pnk}/N$

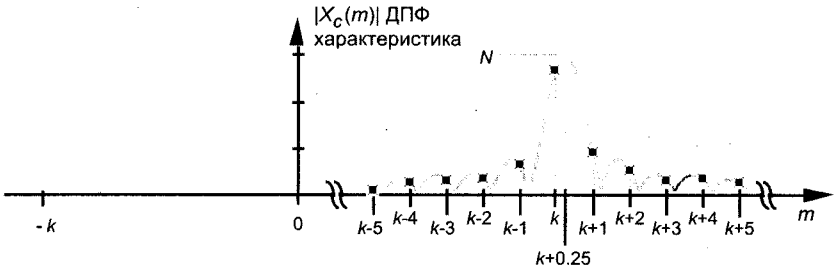


Рис. 3.42. Модуль N-точечного ДПФ комплексной синусоиды, имеющей $k+0.25$ периодов на N отсчетах последовательности $x_c(n)$, демонстрирующий утечку спектра

Аналогично тому, как для ДПФ прямоугольных функций мы построили несколько выражений, собранных в таблице 3.2, можно выразить амплитуду отсчетов ДПФ комплексной синусоиды разными способами и получить таблицу 3.3.

Здесь вдумчивый читатель может заметить, что реакция ДПФ на комплексную синусоиду, имеющую k периодов на интервале накопления, на рисунке 3.41 выглядит подозрительно похожей на реакцию ДПФ на прямоугольную функцию, все отсчеты которой равны единице, приведенную на рисунке 3.32 (с). Причина, по которой формы этих двух кривых на рисунках так похожи, состоит в том, что эти кривые одинаковы. Если бы наша входная последовательность была комплексной синусоидой, имеющей $k = 0$ периодов, т. е. представляла бы собой последовательность одинаковых отсчетов, то отношение синусов в (3-64) было бы равно

Таблица 3.3. Различные формы реакции ДПФ на комплексную синусоиду, имеющую k периодов на интервале накопления

Описание	Выражение	
Амплитудная характеристика ДПФ комплексной последовательности в терминах целого частотного индекса m [из (3-64)]	$X_c(m) = \sin[\pi(k-m)]/\sin[\pi(k-m)/N]$	(3-65)
Альтернативная форма амплитудной характеристики ДПФ комплексной последовательности в терминах целого частотного индекса m [на основе (3-49)]	$X_c(m) \approx N\sin[\pi(k-m)]/[\pi(k-m)]$	(3-66)
Нормированная амплитудная характеристика ДПФ комплексной последовательности в терминах целого частотного индекса m	$X_c(m) \approx \sin[\pi(k-m)]/[\pi(k-m)]$	(3-67)
Амплитудная характеристика ДПФ комплексной последовательности в терминах частоты дискретизации f_s в Гц	$X_c(mf_s) \approx N\sin[\pi(k-m)f_s]/[\pi(k-m)f_s]$	(3-68)
Нормированная амплитудная характеристика ДПФ комплексной последовательности в терминах частоты дискретизации f_s в Гц	$X_c(mf_s) \approx \sin[\pi(k-m)f_s]/[\pi(k-m)f_s]$	(3-69)
Нормированная амплитудная характеристика ДПФ комплексной последовательности в терминах круговой частоты дискретизации ω_s	$X_c(m\omega_s) \approx 2\sin[(k-m)\,\omega_s/2]/[(k-m)\,\omega_s]$	(3-70)

$$\sin[\pi(0-m)]/\sin[\pi(0-m)/N] = \sin(\pi m)/[-\sin(\pi m/N)] =$$
$$= \sin(\pi m)/[\sin(\pi m/N)]\ ',$$

что идентично форме ядра Дирихле для последовательности, состоящей из одних единиц, в (3-48). Форма отклика ДПФ $X_c(m)$ представляет собой функцию sinc ядра Дирихле.

3.15. Реакция ДПФ на действительный косинусоидальный сигнал

Теперь, когда мы знаем, как выглядит ДПФ комплексной синусоидальной последовательности, легко определить ДПФ действительной косинусоидальной последовательности. Допустим, мы хотим получить ДПФ действительной дискретной косинусоиды, подобной показанной на рисунке 3.40 (а) и выражаемой в виде

$$x_г(n) = \cos(2\pi nk/N), \tag{3-71}$$

где k — целое количество полных периодов, умещающихся в N отсчетах. Вспомнив тождество Эйлера $\cos(\phi) = (e^{j\phi} + e^{-j\phi})/2$, мы можем представить требуемое ДПФ $X_г(m)$ как

$$X_г(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi nk/N)e^{-j2\pi nm/N} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j2\pi nk/N} + e^{-j2\pi nk/N})/2 \bullet e^{-j2\pi nm/N} =$$
$$= (1/2)\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(k-m)/N} + (1/2)\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n(k+m)/N}. \tag{3-72}$$

К счастью, мы только что закончили вывод замкнутой формулы для суммы вида (3-72), так что мы можем записать $X_г(m)$ в замкнутом виде

ДПФ действительной косинусоиды

$$\begin{aligned} X_г(m) = {} & e^{j[\pi(k-m)-\pi(k-m)/N]} \bullet \\ & \bullet (1/2)\sin[\pi(k-m)]/\sin[\pi(k-m)/N] + \\ & + e^{j[\pi(k+m)-\pi(k+m)/N]} \bullet \\ & \bullet (1/2)\sin[\pi(k+m)]/\sin[\pi(k+m)/N]. \end{aligned} \tag{3-73}$$

Модули двух отношений синусов показаны в виде функций sinc на рисунке 3.43. Здесь, как и раньше, ДПФ дает дискретизированную версию непрерывного спектра входной косинусоиды, и т. к. $k = m$, только один бин ДПФ отличен от нуля. Поскольку входная последовательность ДПФ действительна, $X_г(m)$ содержит компоненты как на положительных, так и на отрицательных частотах. Первое слагаемое в (3-73) описывает часть спектра, соответствующую положительной частоте на рисунке 3.43, а второе слагаемое описывает компоненты $X_г(m)$, соответствующие отрицательным частотам.

Если изменить частоту анализируемого косинусоидального сигнала так, что она не будет соответствовать центру k-го бина и станет соответствовать, например, $k+0.25$, то мы снова увидим утечку спектра, как показано на рисунке 3.44. (Мы использовали это представление о ДПФ действительной последовательности, чтобы показать утечку спектра, в разделе 3.8.)

Приведенные в таблице 3.4 различные математические выражения для реакции ДПФ в области положительных частот на входную действительную косинусоидальную последовательность представляют собой просто выражения из таблицы 3.3 с дополнительным множителем 1/2.

Рис. 3.43. Модуль N-точечного ДПФ действительной косинусоидальной последовательности $x_r(n) = \cos(2\pi nk/N)$, k полных периодов которой укладываются на интервале в N отсчетов

3.16. Реакция отдельного бина ДПФ на действительный косинусоидальный сигнал

Теперь, когда мы разобрались с реакцией N-точечного ДПФ на действительную косинусоиду, мы завершаем эту главу, рассматривая реакцию отдельного бина ДПФ. Мы можем рассматривать отдельный бин ДПФ как своего рода полосовой фильтр и это полезное представление используется, например, для описания гребешковых потерь (раздел 3.10), при проектировании банков фильтров в частотной области, а также при реализации метода частотного мультиплексирования в телефонии, известного как трансмультиплексирование [15]. Чтобы определить частотную характеристику отдельного бина, рассмотрим случай, когда на вход ДПФ подается действительная косинусоидальная последовательность $x_r(n)$, и будем фиксировать модуль единственного бина $m = k$. Пусть частота входной косинусоидальной последовательности изменяется от частоты, при которой на интервале накопления укладывается $k<m$ периодов косинусоиды, до частоты, при которой на интервале накопления укладывается $k>m$ периодов косинусоиды. Если мы при этом измеряем значение бина $m = k$, мы увидим, что его модуль должен изменяться в соответствии с непрерывным спектром входной косинусоиды, показанным на рисунке 3.45 серой линией.

Таблица 3.4. Разные формы реакции ДПФ в области положительных частот на входную действительную косинусоиду, имеющую период, который на интервале накопления укладывается k раз

Описание	Выражение	
Реакция ДПФ на действительный входной сигнал в терминах целого частотного индекса m [из (3-73)]	$X_r(m) = \sin[\pi(k-m)]/\{2\sin[\pi(k-m)/N]\}$	(3-74)
Альтернативная форма реакции ДПФ на действительный входной сигнал в терминах целого частотного индекса m [из (3-49)]	$X_r(m) \approx N\sin[\pi(k-m)]/[2\pi(k-m)]$	(3-75)
Нормированная реакция ДПФ на действительный входной сигнал в терминах целого частотного индекса m	$X_r(m) \approx \sin[\pi(k-m)]/[2\pi(k-m)]$	(3-76)
Реакция ДПФ на действительный входной сигнал в терминах частоты дискретизации f_s в Гц	$X_r(mf_s) \approx N\sin[\pi(k-m)f_s]/[2\pi(k-m)f_s]$	(3-77)
Нормированная реакция ДПФ на действительный входной сигнал в терминах частоты дискретизации f_s в Гц	$X_r(mf_s) \approx \sin[\pi(k-m)f_s]/[2\pi(k-m)f_s]$	(3-78)
Нормированная реакция ДПФ на действительный входной сигнал в терминах круговой частоты дискретизации ω_s	$X_r(m\omega_s) \approx \sin[\pi(k-m)\omega_s/2]/[(k-m)\omega_s]$	(3-79)

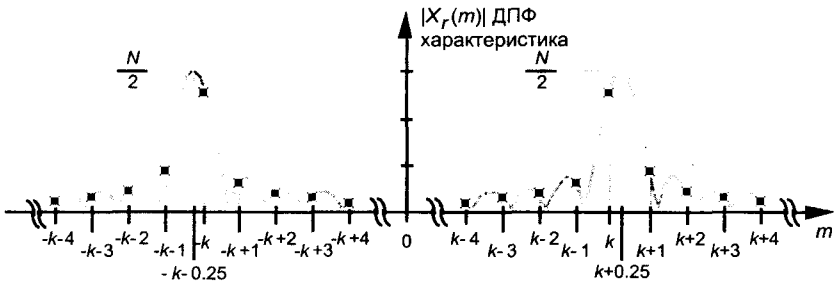


Рис. 3.44. Модуль N-точечного ДПФ, демонстрирующий утечку спектра действительной косинусоиды $x_r(n)$, которая на N отсчетах имеет $k+0.25$ периода

На рисунке 3.45 (a) показано значение бина $m = k$, когда частота входного сигнала $x_r(n)$ равна $k = m-2.5$ периодов на интервал накопления. Повышая частоту $x_r(n)$ до $k = m-1.5$ периодов на интервал накопления, мы получаем значение бина $m = k$, показанное на рисунке 3.45 (b). Продолжая повышать частоту $x_r(n)$, при $k = m$ мы получаем значение бина $m = k$, показанное на рисунке 3.45 (c). Изменяя частоту входного сигнала, мы можем заметить, что модуль бина $m = k$ должен изменяться по тому же закону, что и непрерывный спектр косинусоидальной последовательности, показанной на рисунке 3.45(d) черной линией. Это значит, что частотная характеристики отдельного бина при подаче на вход ДПФ действительной синусоиды описывается функцией sinc, которая определяется выражениями (3-74) — (3-79).

3.17. Интерпретация ДПФ

Теперь, когда мы кое-что узнали о ДПФ, самое время убедиться в том, что мы правильно понимаем, что в действительности представляет собой ДПФ, и постараться избежать обычных заблуждений относительно его поведения. В литературе по ЦОС мы найдем разделы, посвященные *непрерывному преобразованию Фурье, рядам Фурье, дискретно-временному преобразованию Фурье, дискретному преобразованию Фурье и периодическим спектрам.* Чтобы не запутаться во всех этих понятиях, требуется приложить определенные усилия, особенно когда вы читаете или слышите что-то вроде «ДПФ предполагает, что его входная последовательность периодична во времени». (Вы удивляетесь, почему это так, поскольку ничего не стоит вычислить ДПФ апериодической последовательности.) Такое замечание в лучшем случае сбивает с толку, т. е. ДПФ не требует подобных предположений. Далее я постараюсь изложить свое понимание природы периодичности последовательностей во времени и по частоте.

Рассмотрим непрерывный сигнал бесконечной длительности, содержащий единственный импульс конечной длительности, показанный на рисунке 3.46 (a). Модуль непрерывного преобразования Фурье (НПФ) такого сигнала представляет собой непрерывную функцию частоты $X_f(\omega)$. Если этот импульс можно описать аналитически (математической формулой), то функцию $X_f(\omega)$ можно также найти аналитически, взяв интеграл Фурье. (Весьма вероятно, что вы делали это в

качестве домашней или контрольной работы.) Непрерывная частота ω измеряется в радианах в секунду. Если мы возьмем НПФ бесконечного по длительности сигнала, представляющего собой периодическую последовательность импульсов, показанную на рисунке 3.46 (b), мы получим линейчатый спектр, известный как ряд Фурье[1] $X_2(\omega)$. Линии этого спектра имеют бесконечно малую ширину, а $X_2(\omega)$ хорошо определен в промежутках между этими линиями, т. к. $X_2(\omega)$ является непрерывной функцией частоты.

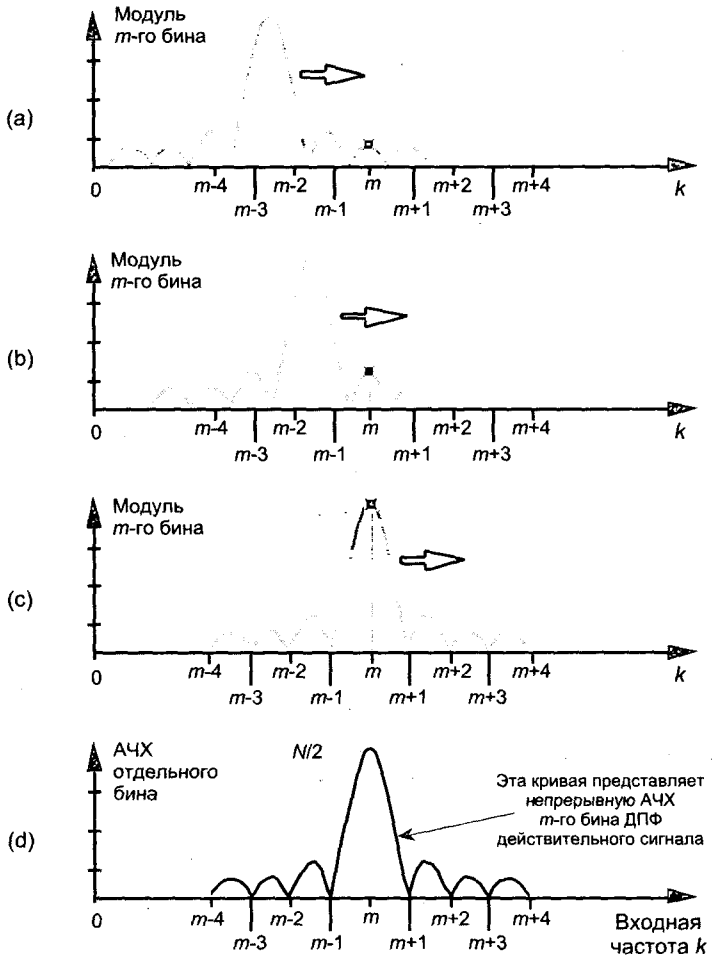


Рис. 3.45. Определение модуля m-го бина N-точечного ДПФ: (a) действительная последовательность $x_r(n)$ имеет $k = m-2.5$ периодов на анализируемом интервале; (b) действительная последовательность $x_r(n)$ на анализируемом интервале имеет $k = m-1.5$ периодов; (c) действительная последовательность $x_r(n)$ на анализируемом интервале имеет $k = m$ периодов; (d) частотная характеристика отдельного бина ДПФ $m = k$

[1] Точнее, спектр представляет собой коэффициенты ряда Фурье — (*прим. перев.*).

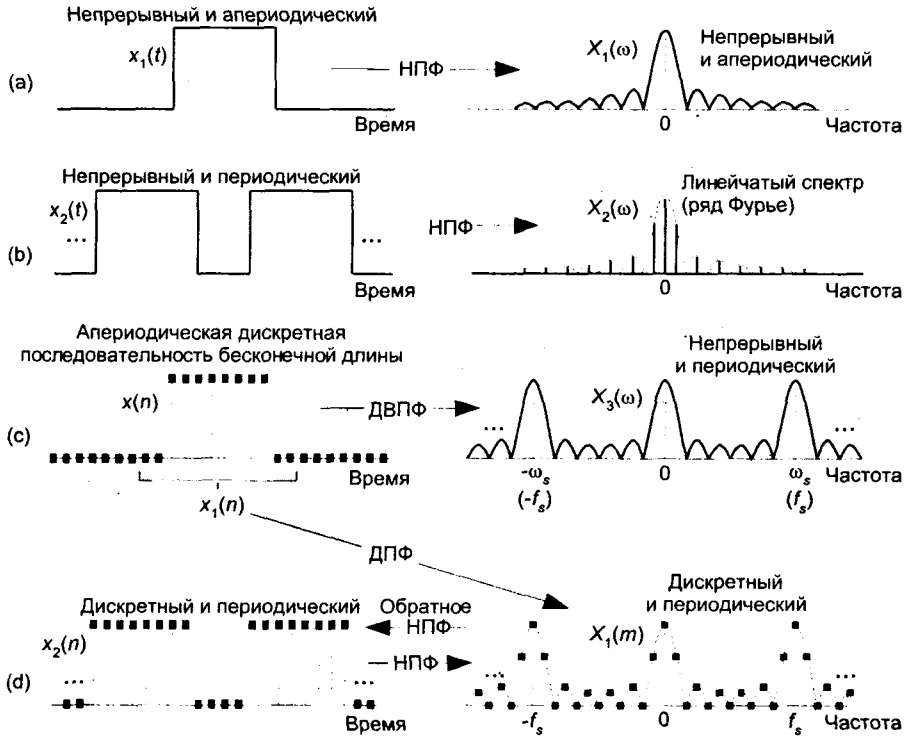


Рис. 3.46. Сигналы и последовательности во временной области и модули их преобразований в частотной области

Рисунок 3.46 (b) показывает пример непрерывной периодической функции, спектр которой содержит ряд дискретных компонентов. Вы можете считать ряд Фурье $X_2(\omega)$ дискретизированной версией непрерывного спектра на рисунке 3.46 (a). Это соотношение между временным и частотным представлением сигнала $x_2(t)$ и $X_2(\omega)$ показывает, что периодической функции в одной области соответствует дискретная по своей природе функция в другой области.

Далее, рассмотрим бесконечную по длительности дискретную последовательность $x(n)$, содержащую несколько ненулевых отсчетов, показанную на рисунке 3.46 (c). Мы можем вычислить НПФ $x(n)$, которое описывает спектр в виде непрерывной функции $X_3(\omega)$. Этот непрерывный спектр называется дискретно-временным преобразованием Фурье (ДВПФ), которое определено как [см. стр. 48 в 16]

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{3-80}$$

Чтобы проиллюстрировать ДВПФ, предположим, что у нас есть последовательность вида $x_o(n) = (0.75)^n$ при $n \geq 0$. Ее ДВПФ имеет вид

$$X_o(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.75^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0.75e^{-j\omega})^n. \tag{3-81}$$

Выражение (3-81) представляет собой геометрическую прогрессию (см. приложение B) сумма которой равна

$$X_0(\omega) = 1/(1-0.75e^{-j\omega}) = e^{j\omega}/(e^{j\omega}-0.75)\,. \qquad (3\text{-}82)$$

Спектр $X_0(\omega)$ непрерывен и периодичен с периодом 2π, его модуль показан на рисунке 3.47. Это пример дискретной функции времени, имеющей периодический спектр. Для особо любознательного читателя мы можем проверить периодичность ДВПФ, используя целое число k в следующем выражении:

$$X(\omega + 2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega + 2\pi k)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(\omega) \qquad (3\text{-}83)$$

потому что $e^{-j2\pi kn} = 1$ для целых значений k.

$X_3(\omega)$ на рисунке 3.46 (c) также имеет период 2π, если представить его как функцию круговой частоты $\omega_s = 2\pi f_s$, где частота f_s представляет собой величину, обратную периоду отсчетов $x(n)$. Непрерывная периодическая функция $X_3(\omega)$ представляет собой то, что мы хотели бы иметь на практике, но мы не можем этого добиться. Мы используем компьютеры, и как это ни грустно, не можем выполнять анализ непрерывных сигналов из-за дискретной природы самих компьютеров. Любые операции обработки данных выполняются над дискретными числами, хранящимися в памяти компьютера, и вследствие этого все сигналы во временной области и все частотные спектры представляют собой дискретные последовательности, полученные в результате дискретизации. Следовательно, НПФ и обратное НПФ последовательностей, с которыми мы работаем, будут периодическими.

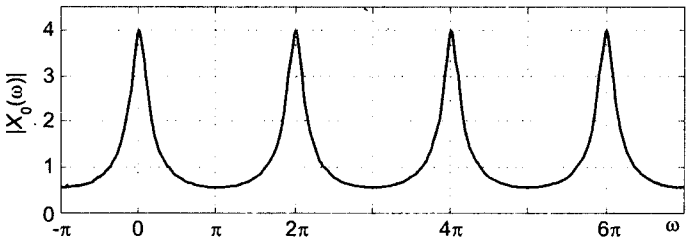


Рис. 3.47. Модуль ДВПФ $|X_0(\omega)|$

Преобразования, показанные на рисунках 3.46 (a) – (c) представляют собой результат математических выкладок на бумаге. В компьютере, использующем дискретные последовательности конечной длины, мы можем только аппроксимировать НПФ (ДВПФ) последовательности $x(n)$ бесконечной длины, показанное на рисунке 3.46 (c). Эта аппроксимация называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ), и это единственный инструмент Фурье, который нам доступен. Вычисляя ДПФ последовательности $x_1(n)$, которая является конечной частью $x(n)$, мы получаем дискретные периодические отсчеты $X_1(m)$, показанные на рисунке 3.46 (d). Обратите внимание на то, что $X_1(m)$ есть дискретизированная

версия непрерывного периодического спектра $X_3(\omega)$. Однако спектр $X_1(m)$ в точности равен НПФ периодической последовательности $x_2(n)$ на рисунке 3.46 (d). Так что, когда кто-нибудь говорит: «ДПФ предполагает, что входная последовательность периодична во времени», — он имеет ввиду, что ДПФ равно непрерывному преобразованию Фурье (которое называется ДВПФ) периодической дискретной последовательности. Итог всего сказанного заключается в следующем: если функция периодична, ее прямое/обратное ДВПФ будет дискретным; если функция дискретна, ее прямое/обратное ДВПФ будет периодическим.

Библиография

1. Bracewell, R. «The Fourier Transform», *Scientific American*, June 1989.
2. Struik, D. A *Concise History of Mathematics*, Dover Publications Inc., New York, 1967, p. 142 (неоднократно издавались русские переводы, например: Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. М. Наука, 1990, 256 с.).
3. Williams, C. S. *Designing Digital Filters*. Section 8.6, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986, p. 122.
4. Press, W., et al. *Numerical Recipes—The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1989, p. 426.,
5. Geckinli, N. C., and Yavuz, D. «Some Novel Windows and a Concise Tutorial Comparison of Window Families,» *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-26, No. 6, December 1978. (Кстати, на странице 505 этой статьи фраза «такой, что W(f) ≥ 0∀f» означает, что функция W(f) никогда не бывает отрицательной. Символ ∀ значит «для всех».)
6. O'Donnell, J. «Looking Through the Right Window Improves Spectral Analysis,» *EDN*, November 1984.
7. Kaiser, J. F. «Digital Filters,» in *System Analysis by Digital Computer*. Ed. by F. F. Kuo and J. F. Kaiser, John Wiley and Sons, New York, 1966, pp. 218-277.
8. Rabiner, L. R., and Gold, B. *The Theory and Application of Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, p. 88 (есть русский перевод: Рабинер Л., Голд Б. «Теория и применение цифровой обработки сигналов», М.: Мир, 1978, доступен по адресу http://geogin.narod.ru/arhiv/dsp/dsp3.htm. Кстати на этом сайте по адресу http://geogin.narod.ru/readall.htm есть неплохая подборка книг по ЦОС в электронном виде.).
9. Schoenwald, J. «The Surface Acoustic Wave Filter: Window Functions», *RF Design*, March 1986.
10. Harris, F. «On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform,» *Proceedings of the IEEE*, Vol. 66, No. 1, January 1978.

11. Nuttall, A. H. «Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior», *IEEE Trans. on Acoust. Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-29, No. 1, February 1981.

12. Yanagimoto, Y. «Receiver Design for a Combined RF Network and Spectrum Analyzer», *Hewlett-Packard Journal*, October, 1993.

13. Gullemin, E. A. *The Mathematics of Circuit Analysis.* John Wiley and Sons, New York, 1949, p. 511.

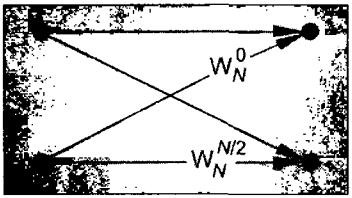
14. Lanczos, C. *Discourse on Fourier Series*, Chapter 1, Hafner Publishing Co., New York, 1966, p. 7-47.

15. Freeny, S. «TDM/FDM Translation As an Application of Digital Signal Processing,» *IEEE Communications Magazine*, January 1980.

16. Oppenheim, A., et al., *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999, pp. 48-51.

Глава 4

Быстрое преобразование Фурье



Хотя ДПФ представляет собой наиболее простую математическую процедуру определения частотного состава временных последовательностей, оно ужасно неэффективно. При увеличении количества точек ДПФ до сотен и тысяч количество выполняемых операций превышает все разумные пределы. В 1965 году была опубликована статья Кули и Тьюки, описывающая очень эффективный алгоритм реализации ДПФ [1]. Этот алгоритм сегодня известен как быстрое преобразование Фурье (БПФ)[1]. До появления БПФ ДПФ длиной в несколько тысяч точек требовало так много времени, что его применение ограничивалось крупными исследовательскими и университетскими вычислительными центрами. Благодаря Кули и Тьюки, а также полупроводниковой промышленности сегодня 1024-точечное ДПФ может быть вычислено за несколько секунд на домашнем компьютере.

О БПФ написаны тома, и, как никакое другое изобретение, разработка этого алгоритма изменила цифровую обработку сигналов, сделав доступной всю мощь анализа Фурье. В этой главе мы покажем, почему наиболее популярные алгоритмы БПФ (которые называют *БПФ по основанию 2*) имеют преимущества над классическим алгоритмом ДПФ, дадим ряд рекомендаций, позволяющих получить больше практической пользы от БПФ, и приведем ссылки на листинги исходных текстов программ на разных языках программирования. Для читателей, желающих узнать некоторые детали, мы завершаем эту главу выводом алгоритма БПФ по основанию 2 и демонстрацией нескольких способов реализации БПФ.

---

[1] В действительности БПФ имеет интересную историю. Исследуя рассеяние рентгеновских лучей, два физика в 1940-х годах воспользовались преимуществами симметрии синусов и косинусов, применив математический метод, основанный на опубликованном в начале 1900-х приеме. Прошло более 20 лет, прежде чем алгоритм БПФ был открыт заново. Полную историю вы найдете в [2].

4.1. Связь БПФ с ДПФ

Существует ряд различных алгоритмов БПФ. В этом разделе мы увидим, почему алгоритм БПФ по основанию 2 так популярен, и узнаем, как он связан с классическим ДПФ. Алгоритм БПФ по основанию 2 — это очень эффективный алгоритм вычисления ДПФ, когда длина ДПФ равна целой степени двух. (То есть количество точек преобразования равно $N = 2^k$, где k – некоторое положительное число.) Посмотрим, почему практикующие специалисты по ЦОС предпочитают БПФ по основанию 2.

Вспомните пример 1 главы 3, в котором мы отметили некоторое количество избыточных операций при выполнении 8-точечного ДПФ. (Например, мы вычисляли произведение 1.0607•0.707 четыре раза.) БПФ по основанию 2 устраняет эту избыточность и существенно снижает количество необходимых арифметических операций. Чтобы оценить эффективность БПФ, рассмотрим количество комплексных умножений, необходимых для выполнения давно знакомого нам N-точечного ДПФ

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2\pi nm/N}. \qquad (4\text{-}1)$$

В случае 8-точечного ДПФ из (4-1) следует, что нам необходимо выполнить N^2, или 64, комплексных умножений. (Потому что для каждого из восьми отсчетов $X(m)$ мы должны просуммировать восемь комплексных произведений при изменении n от 0 до 7.) Как мы убедимся в последних разделах этой главы, количество комплексных умножений для N-точечного БПФ равно примерно

$$(N/2) \cdot \log_2 N. \qquad (4\text{-}2)$$

(Мы говорим «примерно», потому что некоторые умножения выполняются на +1 или −1 и сводятся к простой перемене знака.) Величина $(N/2) \log_2 N$ указывает на значительное снижение количества комплексных умножений по сравнению с N^2 операций, необходимых для реализации (4-1), особенно при больших N. Насколько значительно это снижение, показывает рисунок 4.1, на котором сравнивается количество комплексных умножений, необходимых для реализации ДПФ и БПФ по основанию 2 при разных значениях N. При $N = 512$, например, ДПФ требует в 200 раз больше комплексных умножений, чем БПФ. При $N = 8192$ ДПФ требует 1000 комплексных умножений на *каждое* комплексное умножение в алгоритме БПФ! А вот мой любимый пример эффективности БПФ по основанию 2. Если мы выполняем БПФ длиной в два миллиона точек ($N = 2\,097\,152$) на нашем персональном компьютере, оно занимает 10 секунд. С другой стороны, вычисление ДПФ такой последовательности на настольном компьютере займет более трех недель! Публикация и распространение алгоритма БПФ по основанию 2 были, наверное, самым важным событием в цифровой обработке сигналов.

Здесь уместно подчеркнуть, что БПФ не является аппроксимацией ДПФ. Это *в точности* ДПФ. Более того, все характеристики ДПФ, описанные в предыдущей главе: симметрия, линейность, утечки, гребешковые искажения и прочие, — присущи также и БПФ.

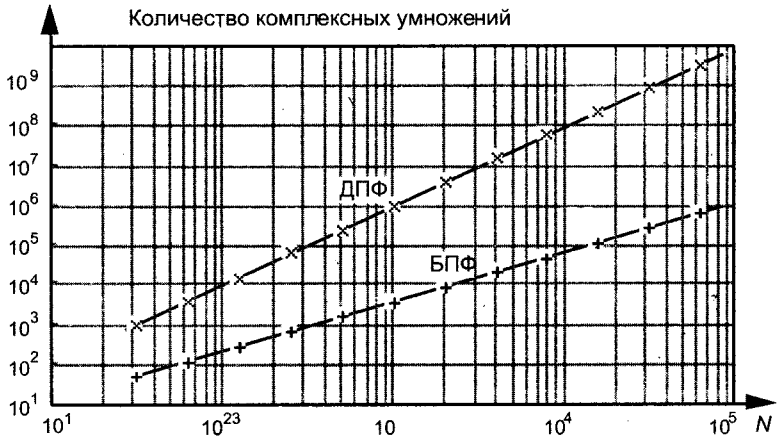


Рис. 4.1. Количество комплексных умножений, как функция N, при реализации ДПФ и БПФ по основанию 2

4.2. Советы по практическому использованию БПФ

Учитывая ценность БПФ для практики, мы приводим здесь ряд практических указаний по накоплению данных и использованию БПФ по основанию 2 для анализа сигналов реального мира.

4.2.1. Дискретизируйте достаточно часто и достаточно долго

Как мы знаем из главы 2, при преобразовании непрерывных сигналов в цифровую форму с помощью АЦП частота дискретизации должна быть не менее чем в два раза больше ширины спектра непрерывного сигнала, чтобы предотвратить наложения в частотной области. На практике в зависимости от приложения используют частоту дискретизации, которая в два с половиной — четыре раза превышает ширину спектра сигнала. Если мы знаем, что ширина спектра преобразуемого сигнала не очень велика по сравнению с максимальной частотой преобразования нашего АЦП, от наложений легко избавиться. Если мы не знаем, какова ширина спектра непрерывного сигнала, как нам определить, имеются ли наложения или нет? В этом случае нам следует с недоверием относиться к результатам БПФ, если имеются спектральные компоненты значительного уровня на частотах вблизи половины частоты дискретизации. В идеале нам хотелось бы работать с сигналами, спектр которых убывает с ростом частоты. Будьте очень осторожны, когда в спектре обнаруживаются компоненты, частоты которых зависят от частоты дискретизации. Если у нас есть подозрение, что возникает наложение или что непрерывный сигнал содержит широкополосный шум, необходимо перед АЦП включить аналоговый ФНЧ. Частота среза ФНЧ должна быть несколько выше максимальной интересующей нас частоты и ниже половины частоты дискретизации.

Хотя мы знаем, что БПФ по основанию 2 требует $N = 2^k$ входных отсчетов, сколько же именно отсчетов должны мы накопить для анализа? Ответ состоит в том, что интервал времени, на котором выполняется накопление, должен соответствовать требуемой разрешающей способности БПФ при заданной частоте дискретизации f_s. Длительность интервала накопления данных является величиной, обратной требуемой разрешающей способности, и чем больше мы берем отсчетов с фиксированной частотой дискретизации f_s, тем выше разрешение по частоте; т. е. общий интервал накопления равен N/f_s секунд, а разрешающая способность N-точечного БПФ равна f_s/N Гц. Следовательно, если нам необходима разрешающая способность 5 Гц, то $f_s/N = 5$ Гц и

$$N = f_s/(\textit{требуемое разрешение}) = f_s/5 = 0.2f_s. \qquad (4\text{-}3)$$

В этом случае, если f_s равна, скажем, 10 кГц, то N должно быть не меньше 2000, и нам придется взять $N = 2048$, потому что это ближайшее число, равное целой степени 2.

4.2.2. Предварительная обработка данных

Если при использовании БПФ по основанию 2 мы не можем повлиять на количество получаемых отсчетов, и длина последовательности не равна целой степени двойки, можно применить один из двух подходов. Мы можем отбросить часть отсчетов данных так, чтобы длина оставшейся последовательности была равна целой степени двойки. Использование этого варианта не рекомендуется, т. к. игнорирование части отсчетов данных приведет к ухудшению разрешения по частоте. (Чем больше N, тем лучше разрешение, не правда ли?) Лучше дополнить последовательность нулями так, чтобы получить необходимое общее количество отсчетов. Например, если у нас есть 1000 отсчетов, которые необходимо преобразовать, вместо того, чтобы анализировать 512 из этих отсчетов, нам следует добавить в конец последовательности 24 нулевых отсчета и использовать 1024-точечное БПФ. (Метод *дополнения нулями* более подробно обсуждается в разделе 3.11.)

БПФ подвержено тем же эффектам утечки спектра, которые мы обсуждали в разделе 3.8 для ДПФ. Для уменьшения утечки мы можем умножить исходную последовательность на окно. Будьте, однако, готовы к тому, что использование окон уменьшает разрешение по частоте. Кстати, при дополнении последовательности нулями мы должны умножать последовательность на окно *до* добавления нулей. Применение окна к дополненной нулями последовательности приведет к искажению окна и ухудшит утечку спектра.

Хотя взвешивание окном и уменьшает утечку спектра, оно не устраняет проблему полностью. Даже при использовании окна мощные спектральные составляющие могут замаскировать слабые компоненты спектра. Это особенно заметно, когда исходные данные содержат постоянную составляющую. При вычислении БПФ в этом случае постоянная составляющая высокого уровня на частоте 0 Гц закрывает соседние компоненты спектра. Мы можем устранить эту проблему, вычислив среднее значение исходных данных и вычтя его из исходной последовательности. (Усреднение и вычитание должны выполняться до взвешивания окном.) Этот

подход позволяет сделать постоянную составляющую равной нулю и удаляет составляющую с частотой 0 Гц из результата БПФ.

4.2.3. Улучшение результатов БПФ

Если мы используем БПФ для обнаружения энергии сигнала в присутствии шума, и у нас есть достаточно данных, мы можем улучшить чувствительность нашего обнаружителя, применяя усреднение результатов нескольких БПФ. Этот метод, рассматриваемый в разделе 11.3, может быть использован для обнаружения сигналов, мощность которых ниже среднего уровня шума. Другими словами, имея достаточно данных во временной области, мы можем обнаруживать компоненты сигнала при отрицательном отношении сигнал/шум.

Если данные во временной области имеют действительные значения, мы можем воспользоваться преимуществами метода $2N$-точечного действительного БПФ, описанного в разделе 13.5, для ускорения обработки; т. е. $2N$-точечная действительная последовательность может быть преобразована с помощью одного N-точечного комплексного БПФ по основанию 2. Таким образом, мы можем получить частотное разрешение $2N$-точечного БПФ по цене стандартного N-точечного БПФ. Другая возможность ускорения БПФ состоит в применении взвешивания окном в частотной области, описанного в разделе 13.3. Если нам нужно БПФ невзвешенных данных и одновременно мы хотим иметь БПФ тех же данных, взвешенных окном, нам нет необходимости выполнять два разных БПФ. Мы можем вычислить БПФ невзвешенных данных, а затем выполнить взвешивание в частотной области, чтобы уменьшить утечку на всех или на некоторых бинах БПФ.

4.2.4. Интерпретация результатов БПФ

Первый шаг при интерпретации результатов БПФ состоит в вычислении абсолютных частот центров бинов. Как и в случае ДПФ, расстояние по частоте между бинами БПФ равно частоте дискретизации f_s, деленной на количество точек БПФ, или f_s/N. Обозначим результат БПФ как $X(m)$, где $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$, при этом абсолютная частота центра m-го бина равна mf_s/N. Если отсчеты входной последовательности БПФ действительны, только отсчеты $X(m)$ с индексами от $m = 0$ до $m = N/2$ независимы. Следовательно, в этом случае нам необходимо определить только частоты бинов для m в диапазоне $0 \le m \le N/2$. Если же входные отсчеты комплексные, все N отсчетов БПФ независимы, и нам потребуется вычислить частоты бинов для m во всем диапазоне $0 \le m \le N-1$.

Если необходимо, мы можем определить истинные амплитуды сигналов по их спектрам. Для этого мы должны помнить, что выходные отсчеты БПФ по основанию 2 – комплексные величины вида

$$X(m) = X_{real}(m) + jX_{imag}(m). \tag{4-4}$$

А все модули отсчетов БПФ

$$X_{mag}(m) = |X(m)| = \sqrt{X_{real}(m)^2 + jX_{imag}(m)^2} \tag{4-5}$$

в результате преобразования, когда входные отсчеты действительны, оказываются умноженными на $N/2$, как сообщалось в разделе 3.4. Если же входные отсчеты комплексные, масштабирующий коэффициент равен N. Следовательно, чтобы определить правильные амплитуды синусоидальных составляющих, нам необходимо разделить модули отсчетов БПФ на соответствующий коэффициент: $N/2$ для действительных последовательностей и N для комплексных последовательностей.

Если исходные данные были взвешены окном, некоторые входные отсчеты оказываются ослабленными. Это уменьшает уровень выходных отсчетов БПФ. Чтобы вычислить правильные амплитуды синусоидальных составляющих в этом случае, мы должны разделить модули отсчетов БПФ еще и на некоторый коэффициент потерь, соответствующий используемому окну. Коэффициенты потерь для наиболее популярных окон приведены в [3].

В случае, когда мы хотим определить спектр мощности $X_{ps}(m)$, нам необходимо вычислить квадрат модуля БПФ, используя соотношение

$$X_{ps}(m) = |X(m)|^2 = X_{real}(m)^2 + X_{imag}(m)^2. \qquad (4\text{-}6)$$

Это позволит нам вычислить спектр мощности в логарифмическом масштабе

$$X_{dB}(m) = 10 \cdot \log_{10}(|X(m)|^2)\ дБ \qquad (4\text{-}7)$$

Нормированный спектр мощности в логарифмическом масштабе можно вычислить с помощью выражения

$$Нормированный\ X_{dB}(m) = 10 \cdot \log_{10}(|X(m)|^2 / (|X(m)|_{max})^2) \qquad (4\text{-}8)$$

или

$$Нормированный\ X_{dB}(m) = 20 \cdot \log_{10}(|X(m)| / (|X(m)|_{max})) \qquad (4\text{-}9)$$

В (4-8) и (4-9) член $|X(m)|_{max}$ представляет собой максимальный модуль отсчета. На практике график $X_{dB}(m)$ очень информативен благодаря улучшенному разрешению составляющих низкого уровня при использовании логарифмического масштаба, как показано в приложении Е. Если используется (4-8) или (4-9), описанная выше компенсация масштаба БПФ и потерь, связанных с окном, не нужна. Нормирование путем деления на $(|X(m)|_{max})^2$ или $|X(m)|_{max}$ устраняет влияние всех масштабных коэффициентов.

Зная, что фазы $X_\phi(m)$ отдельных отсчетов БПФ вычисляются по формуле

$$X_\phi(m) = \tan^{-1}(X_{imag}(m)/X_{real}(m)), \qquad (4\text{-}10)$$

мы должны особое внимание обратить на те отсчеты, для которых $X_{real}(m)$ равны нулю. В этом случае вычисление фазы по (4-10) невозможно из-за деления на ноль. На практике необходимо, чтобы программа расчета обнаруживала отсчеты, для которых $X_{real}(m) = 0$, и устанавливала $X_\phi(m) = 90°$ если $X_{imag}(m) > 0$, $X_\phi(m) = 0°$ если $X_{imag}(m) = 0$, и $X_\phi(m) = -90°$ если $X_{imag}(m) < 0$. Рассматривая фазовые углы отсчетов БПФ, имейте ввиду, что шумовые компоненты высокого уровня могут вызвать значительные флуктуации вычисленных $X_\phi(m)$. Это значит, что отсчеты $X_\phi(m)$ имеют смысл только тогда, когда соответствующий $|X(m)|$ намного превышает средний уровень шума.

4.3. Программы БПФ

Для тех читателей, которые хотят получить программы БПФ без необходимости платить за дорогостоящие пакеты обработки сигналов, имеется ряд бесплатных программ, реализующих БПФ по основанию 2. В [4-7] приведен листинг программы на Фортране, реализующей стандартный алгоритм БПФ. В [8] представлена эффективная программа, написанная на Фортране, для действительных последовательностей. В [9] предлагается стандартная программа БПФ, написанная на HP BASIC™, а в [10] представлена процедура БПФ, написанная на Applesoft BASIC™. Читатели, интересующиеся языком Ada, могут найти процедуры, связанные с БПФ, в работе [11].

4.4. Разработка алгоритма БПФ по основанию 2

Этот и следующие разделы содержат подробное описание внутренних структур данных и операций БПФ по основанию 2 для тех читателей, которые интересуются разработкой программ БПФ или проектированием аппаратурных процессоров БПФ. Чтобы увидеть, как БПФ вырастает из ДПФ, напомним формулу N-точечного ДПФ:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (4\text{-}11)$$

Простой и понятный способ получения алгоритма БПФ состоит в том, что исходная последовательность данных $x(n)$ делится на две части. Выделив отсчеты $x(n)$ с четными и нечетными индексами в две отдельные последовательности, мы можем разбить (4-11) на две части вида

$$X(m) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)e^{-j2\pi(2n)m/N} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1)e^{-j2\pi(2n+1)m/N}. \qquad (4\text{-}12)$$

Вынося за знак второй суммы экспоненту с постоянным показателем степени, получаем

$$X(m) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)e^{-j2\pi(2n)m/N} + e^{-j2\pi m/N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1)e^{-j2\pi(2n)m/N}. \qquad (4\text{-}13)$$

Для упрощения этих длинных и сложных выражений мы используем стандартные обозначения. Пусть $W_N = e^{-j2\pi/N}$ обозначает комплексный поворачивающий множитель, который постоянен для заданного N. Тогда (4-13) приобретает вид

$$X(m) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)(W_N)^{2nm} + (W_N)^m \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1)(W_N)^{2nm}. \qquad (4\text{-}14)$$

Поскольку $(W_N)^2 = e^{-j2\pi 2/(N)} = e^{-j2\pi/(N/2)}$, мы можем в формулу (4-14) подставить $W_{N/2}$ вместо $(W_N)^2$

$$X(m) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)(W_{N/2})^{nm} + (W_N)^m \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1)(W_{N/2})^{nm}. \qquad (4\text{-}15)$$

Итак, мы имеем две суммы $N/2$ слагаемых, результаты которых можно объединить в N-точечное ДПФ. В (4-15) мы сократили количество операций над данными по сравнению с (4-11), потому что множители W в обеих суммах уравнения (4-15) идентичны. Дополнительный выигрыш от разбиения N-точечного ДПФ на две части мы получаем благодаря тому, что вторая половина отсчетов ДПФ вычисляется очень просто. Рассмотрим отсчет $X(m+N/2)$. Если мы подставим $m+N/2$ вместо m в (4-15), то

$$X(m+N/2) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)(W_{N/2})^{n(m+N/2)} + \\ + (W_N)^{(m+N/2)} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1)(W_{N/2})^{n(m+N/2)}. \qquad (4\text{-}16)$$

Кажется, мы усложнили нашу задачу? Ничего, потерпите немного. Мы можем упростить поворачивающие множители под знаками сумм, потому что

$$(W_{N/2})^{n(m+N/2)} = (W_{N/2})^{nm}(W_{N/2})^{nN/2} = (W_{N/2})^{nm}(e^{-j2\pi n2N/2N}) = \\ = (W_{N/2})^{nm}(1) = (W_{N/2})^{nm} \qquad (4\text{-}17)$$

для любого целого n. Внимательно проанализировав *поворачивающий множитель* перед второй суммой в (4-16), мы можем упростить его как

$$(W_N)^{(m+N/2)} = (W_N)^m (W_N)^{N/2} = (W_N)^m (e^{-j2\pi N/2N}) = \\ = (W_N)^m(-1) = -(W_N)^m \qquad (4\text{-}18)$$

Далее, используя (4-17) и (4-18), мы представляем $X(m+N/2)$ из (4-16) как

$$X(m+N/2) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)(W_{N/2})^{nm} - (W_N)^m \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1)(W_{N/2})^{nm}. \qquad (4\text{-}19)$$

Теперь повторим (4-15) и (4-19), чтобы увидеть, насколько они схожи:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)(W_{N/2})^{nm} + (W_N)^m \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1)(W_{N/2})^{nm}. \qquad (4\text{-}20)$$

и

$$X(m+N/2) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)(W_{N/2})^{nm} - (W_N)^m \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1)(W_{N/2})^{nm}. \qquad (4\text{-}20')$$

Ну вот, мы и получили то, что хотели. Для вычисления $X(m+N/2)$ нам не нужно выполнять никаких умножений на синусы и косинусы. Мы просто изменяем знак поворачивающего множителя $(W_N)^m$ и используем две суммы, полученные для $X(m)$, для вычисления $X(m+N/2)$. Конечно, в (4-20) m принимает значения от 0 до $(N/2)-1$, а это значит, что для N-точечного ДПФ мы выполняем два $N/2$-точечных ДПФ, получая первые $N/2$ отсчетов, а затем используем уже полученные результаты для вычисления последних $N/2$ отсчетов. При $N = 8$ (4-20) и (4-20') реализуются так, как показано на рисунке 4.2.

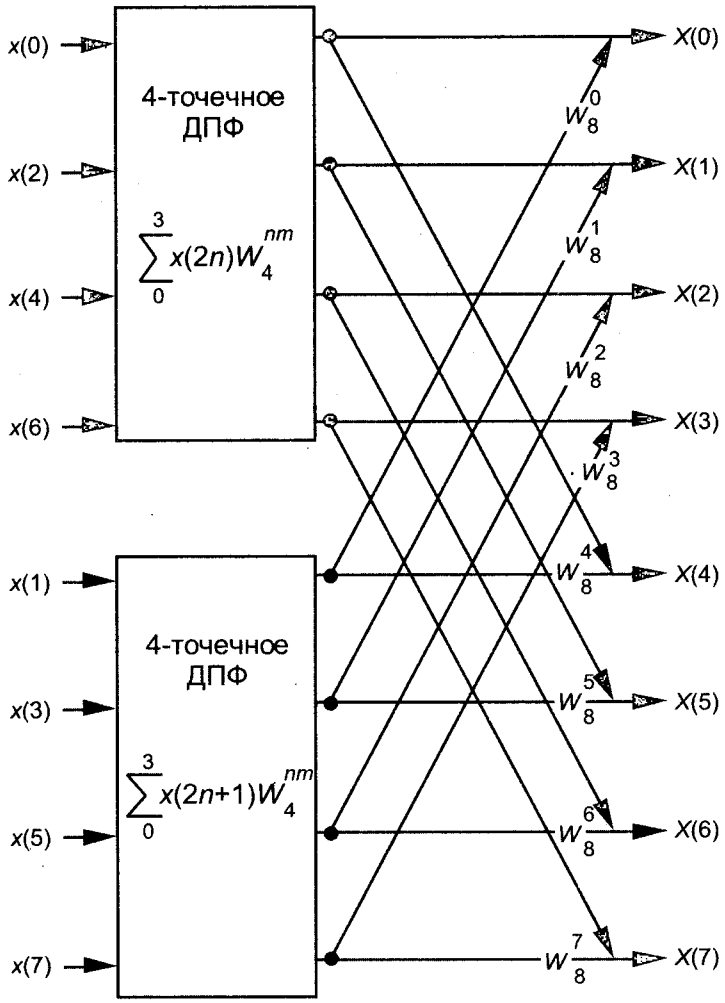


Рис. 4.2. Реализация БПФ для 8-точечного ДПФ с использованием двух 4-точечных ДПФ

Если мы запишем (4-20) и (4-20') в более простой форме

$$X(m) = A(m) + (W_N)^m B(m), \qquad (4\text{-}21)$$

и

$$X(m+N/2) = A(m) - (W_N)^m B(m), \qquad (4\text{-}21')$$

мы можем пойти дальше и разбить два 4-точечных ДПФ на четыре 2-точечных ДПФ. Посмотрим, как можно разделить верхнее 4-точечное ДПФ на рисунке 4.2, четыре выхода которого равны $A(m)$ в (4-21) и (4-21'). Мы можем разделить четные и нечетные входные отсчеты верхнего 4-точечного ДПФ:

$$A(m) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)(W_{N/2})^{nm} =$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(4n)(W_{N/2})^{2nm} + \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(4n+2)(W_{N/2})^{(2n+1)m}. \qquad (4\text{-}22)$$

Поскольку $(W_{N/2})^{2nm} = (W_{N/4})^{nm}$, мы можем выразить $A(m)$ через два $N/4$-точечных ДПФ как

$$A(m) = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(4n)(W_{N/4})^{nm} + (W_{N/2})^m \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(4n+2)(W_{N/4})^{nm}. \qquad (4\text{-}23)$$

Обратите внимание на сходство выражений (4-23) и (4-20). Эта возможность деления $N/2$-точечного ДПФ на два $N/4$-точечных ДПФ и сообщает алгоритму БПФ способность существенно уменьшать количество необходимых умножений при реализации ДПФ. (Мы это вскоре продемонстрируем на примере.) Выполняя те же шаги, которые мы выполняли для получения $A(m)$, можно показать, что $B(m)$ в (4-21) имеет вид

$$B(m) = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(4n+1)(W_{N/4})^{nm} + (W_{N/2})^m \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x(4n+3)(W_{N/4})^{nm}. \qquad (4\text{-}24)$$

При $N = 8$ (4-23) и (4-24) реализуются так, как показано на рисунке 4.3. Здесь отчетливо видна структура сигнального графа, содержащая хорошо известные *бабочки*, и мы видим дальнейшую перетасовку входных данных. Поворачивающий множитель $(W_{N/2})^m$ в (4-23) и (4-24) в нашем примере с $N = 8$ изменяется от $(W_4)^0$ до $(W_4)^3$, потому что индекс m для $A(m)$ и $B(m)$ изменяется от 0 до 3. Для любого N-точечного ДПФ мы можем разбить каждое из $N/2$-точечных ДПФ на два $N/4$-точечных ДПФ с целью дальнейшего уменьшения количества умножений на синусы и косинусы. В конце концов мы дойдем до ряда 2-точечных ДПФ, после чего дальнейшее сокращение количества операций уже невозможно. Именно по этой причине количество точек БПФ может быть равно только целой степени двойки, а этот алгоритм БПФ называется БПФ по основанию 2.

Двигаясь в том же направлении, сделаем еще один шаг вперед и закончим с рассматриваемым $N = 8$-точечным ДПФ. Двухточечные ДПФ на рисунке 4.3 нельзя разделить на более мелкие части — мы дошли до конца в процессе уменьшения длины последовательности и пришли к бабочке одного 2-точечного ДПФ, показанной на рисунке 4.4. Из определения W_N следует, что $(W_N)^0 = e^{-j2\pi 0/N} = 1$, и

$(W_N)^{N/2} = e^{-j2\pi N/2N} = e^{-j\pi} = 1$. Следовательно, блоки 2-точечного ДПФ на рисунке 4.3 можно заменить бабочкой, показанной на рисунке 4.4, получив, таким образом, полную реализацию 8-точечного БПФ, показанную на рисунке 4.5.

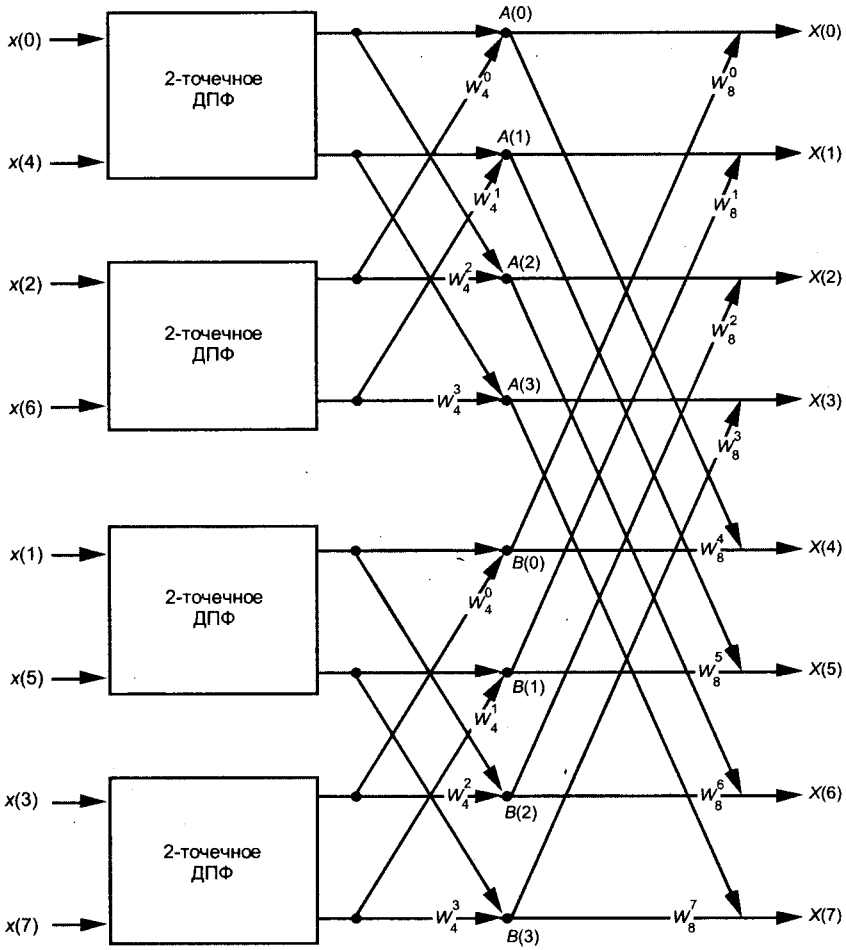


Рис. 4.3. Быстрая реализация 8-точечного ДПФ в виде двух 4-точечных ДПФ и четырех 2-точечных ДПФ

Итак, мы прошли через изрядное количество алгебраических манипуляций. Чтобы проверить правильность нашего вывода алгоритма БПФ, мы можем взять 8-точечную последовательности из примера 1 в главе 3 и обработать ее в соответствии с алгоритмом 8-точечного БПФ, представленным на рисунке 4.5. Последовательность данных, представляющая сигнал $x(n) = \sin(2\pi 1000nt_s) + 0.5\sin(2\pi 2000nt_s + 3\pi/4)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} &x(0) = 0.3535, && x(1) = 0.3535,\\ &x(2) = 0.6464, && x(3) = 1.0607,\\ &x(4) = 0.3535, && x(5) = -1.0607,\\ &x(6) = -1.3535, && x(7) = -0.3535. \end{aligned} \qquad (4\text{-}25)$$

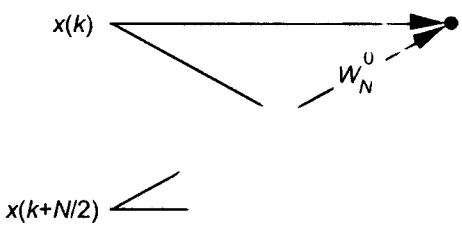


Рис. 4.4. Бабочка для одного 2-точечного ДПФ

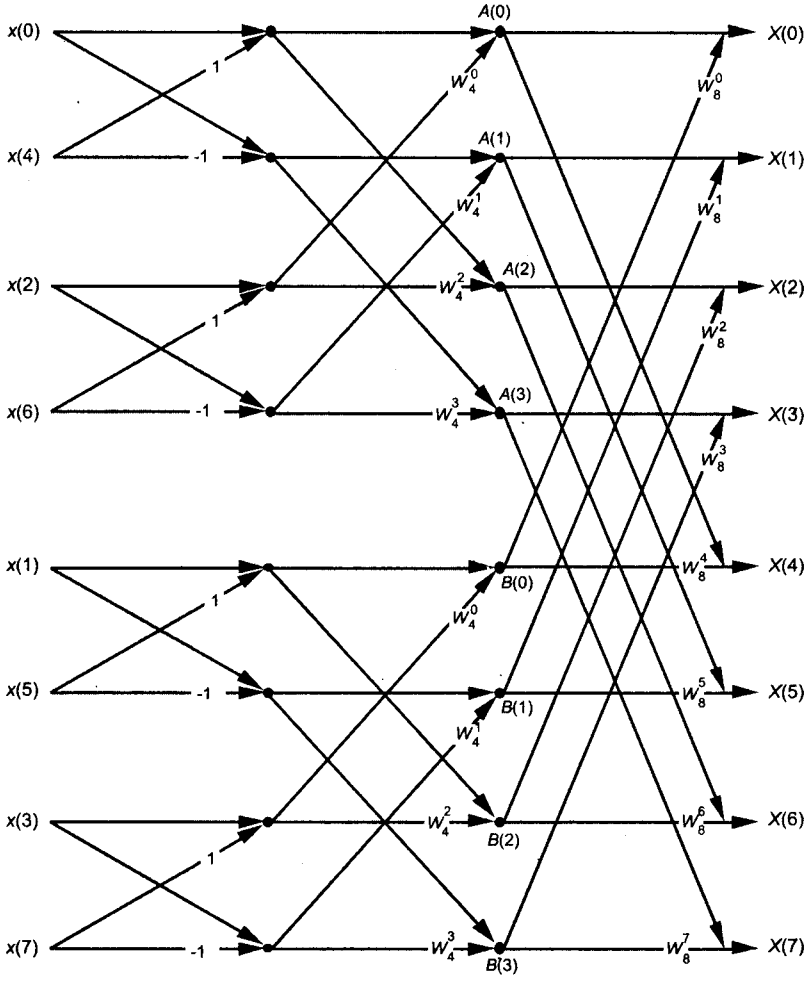


Рис. 4.5. Полная реализация алгоритма БПФ с прореживанием во времени для 8-точечного ДПФ

Начнем перемалывать эти данные, наложив входные значения из (4-25) на рисунок 4.5, в результате чего получим значения, показанные в левой части рисунка 4.6. Выходные значения второго каскада БПФ равны

$$A(0) = 0.707 + (W_4)^0(-0.707) = 0.707 + (1 + j0)(-0.707) = 0 + j0,$$
$$A(1) = 0.0 + (W_4)^1(1.999) = 0.0 + (0 - j1)(1.999) = 0 - j1.999,$$
$$A(2) = 0.707 + (W_4)^2(-0.707) = 0.707 + (-1 + j0)(-0.707) = 1.414 + j0,$$
$$A(3) = 0.0 + (W_4)^3(1.999) = 0.0 + (0 + j1)(1.999) = 0 + j1.999,$$
$$B(0) = 0.707 + (W_4)^0(0.707) = -0.707 + (1 + j0)(0.707) = 0 + j0,$$
$$B(1) = 1.414 + (W_4)^1(1.414) = 1.414 + (0 - j1)(1.414) = 1.414 - j1.414,$$
$$B(2) = -0.707 + (W_4)^2(0.707) = -0.707 + (-1 + j0)(0.707) = -1.414 + j0,$$
$$B(3) = 1.414 + (W_4)^3(1.414) = 1.414 + (0 + j1)(1.414) = 1.414 + j1.414.$$

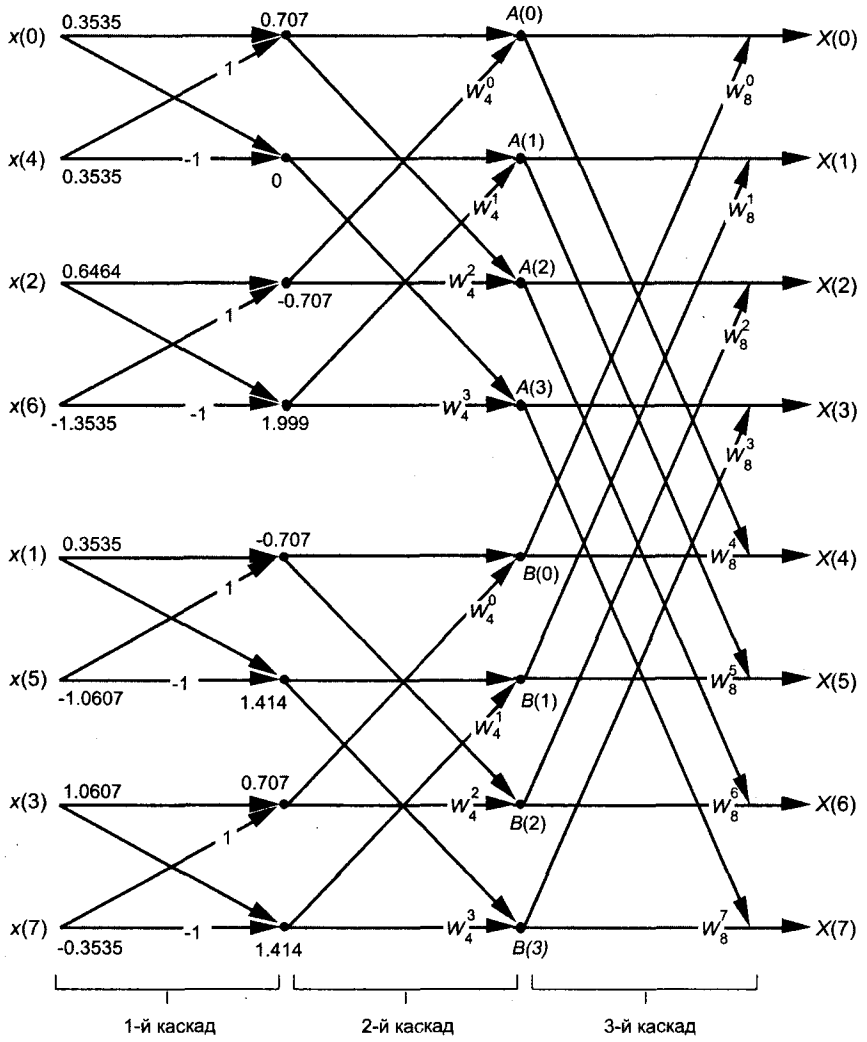


Рис. 4.6. 8-точечное БПФ последовательности примера 1 из раздела 3.1

Вычисляя результат третьего каскада БПФ, получаем окончательный ответ

$$X(0) = A(0) + (W_8)^0 B(0) = 0 + j0 + (1 + j0)(0 + j0) = 0 + j0 + 0 + j0 = 0 \angle 0°,$$

$$X(1) = A(1) + (W_8)^1 B(1) = 0 - j1.999 + (0.707 - j0.707)(1.414 - j1.414) = \\ = 0 - j1.999 + 0 - j1.999 = 0 - j4 = 4 \angle -90°$$

$$X(2) = A(2) + (W_8)^2 B(2) = 1.414 + j0 + (0 - j1)(-1.414 + j0) = \\ = 1.414 + j0 + 0 + j1.4242 = 1.414 + j1.414 = 2 \angle 45°,$$

$$X(3) = A(3) + (W_8)^3 B(3) = 0 + j1.999 + (-0.707 - j0.707)(1.414 + j1.414) = \\ = 0 + j1.999 + 0 - j1.999 = 0 \angle 0°,$$

$$X(4) = A(0) + (W_8)^4 B(0) = 0 + j0 + (-1 + j0)(0 + j0) = \\ = 0 + j0 + 0 + j0 = 0 \angle 0°,$$

$$X(5) = A(1) + (W_8)^5 B(1) = 0 - j1.999 + (-0.707 + j0.707)(1.414 - j1.414) = \\ = 0 - j1.999 + 0 + j1.999 = 0 \angle 0°,$$

$$X(6) = A(2) + (W_8)^6 B(2) = 1.414 + j0 + (0 + j1)(-1.414 + j0) = \\ = 1.414 + j0 + 0 - j1.414 = 1.414 - j1.414 = 2 \angle -45°$$

$$X(7) = A(3) + (W_8)^7 B(3) = 0 + j1.999 + (0.707 + j0.707)(1.414 + j1.414) = \\ = 0 + j1.999 + 0 + j1.999 = 0 + j4 = 4 \angle 90°.$$

Итак, к счастью, БПФ дает правильный результат, и это позволяет нам снова напомнить читателю, что БПФ не является аппроксимацией ДПФ, а представляет собой ДПФ с уменьшенным количеством арифметический операций. В приведенном выше примере вы могли видеть, что вычисление 8-точечного БПФ требует меньших затрат, чем 8-точечное ДПФ из первого примера в разделе 3.1. Некоторые авторы предпочитают объяснять это уменьшение количества арифметических операций избыточностью поворачивающих множителей . Они показывают это с помощью *звездной диаграммы*, приведенной на рисунке 4.7, которая демонстрирует эквивалентность некоторых поворачивающих множителей в 8-точечном ДПФ.

4.5. БИТ-реверсивная перестановка входных и выходных данных БПФ

Рассмотрим некоторые особые свойства БПФ, которые имеют большое значение для разработчиков программ и аппаратурных процессоров БПФ. Заметим, что рисунок 4.5 назван «Полная реализация БПФ с прореживанием по времени для 8-точечного ДПФ». Слова *с прореживанием по времени* относятся к способу разбиения входной последовательности отсчетов на четные и нечетные, который мы использовали при выводе соотношений (4-20), (4-23) и (4-24). Такое прореживание приводит к перемешиванию входных отсчетов на рисунке 4.5. Принцип перемешивания можно понять с помощью таблицы 4.1. Это перемешивание называют *бит-реверсивным*, потому что порядок следования отсчетов в перемешанной последовательности можно получить путем изменения порядка следования битов в двоичном представлении индексов отсчетов в неперемешанной последовательности на обратный.

Это звучит несколько запутанно, но на самом деле все просто — таблица 4.1 иллюстрирует реверс битов для рассматриваемого примера 8-точечного БПФ. Обратите внимание на то, что индексы в левом столбце таблицы 4.1 расположены в нормальном порядке, а в правом столбце индексы приведены в перемешанном порядке, который совпадает с окончательным порядком следования прореженных входных отсчетов на рисунке 4.5. Мы перевернули биты двоичного представления нормальных индексов, поменяв их порядок следования на обратный. Старший бит стал младшим, а младший стал старшим, следующий за старшим бит стал следующим за младшим, и т. д.[1]

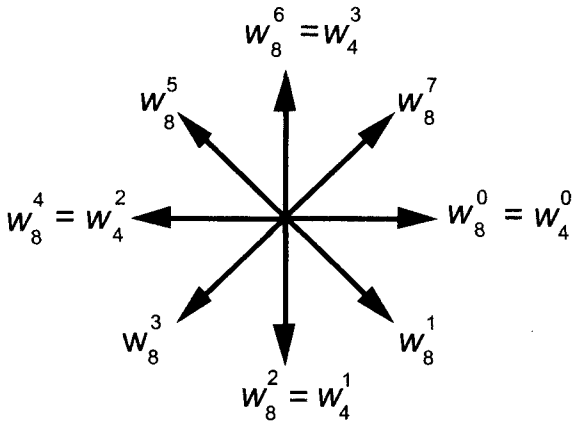


Рис. 4.7. Избыточность поворачивающих множителей для 8-точечного БПФ

Таблица 4.1. Бит-реверсивная перестановка входных отсчетов 8-точечного БПФ

Нормальный порядок индексов *n*	Двоичное представление индекса *n*	Перестановка битов индекса *n*	Бит-реверсивный порядок индекса *n*
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

[1] Многие же будут первые последними, и последние первыми. [Марк 10:31]

4.6. Структуры бабочек БПФ по основанию 2

Исследуем подробнее сигнальный граф бабочки БПФ с прореживанием по времени. Чтобы упростить сигнальный граф, заменим на рисунке 4.5 поворачивающие множители их эквивалентными значениями, обозначенными как $(W_N)^m$, где $N = 8$. Мы можем показывать только показатели степени m множителей $(W_N)^m$, чтобы получить структуру БПФ, показанную на рисунке 4.8. Например, $(W_4)^1$ на рисунке 4.5 равен $(W_8)^2$ и на рисунке 4.8 показан как 2, $(W_4)^2$ на рисунке 4.5 равен $(W_8)^4$ и на рисунке 4.8 показан как 4 и т. д. Значения 1 и –1 в первом каскаде рисунка 4.5 на рисунке 4.8 заменены на 0 и 4 соответственно. За исключением обозначения поворачивающих множителей, рисунок 4.8 идентичен рисунку 4.5. Мы можем перетасовать на рисунке 4.5 сигнальные узлы и получить 8-точечное БПФ с прореживанием по времени, показанное на рисунке 4.9. Заметьте, что входные данные на рисунке 4.9 расположены в нормальном порядке, а биты индексов выходных отсчетов переставлены в обратном порядке. В этом случае необходимо выполнять операцию реверсии порядка битов над выходными отсчетами БПФ, чтобы представить частотные отсчеты в нормальном порядке.

На рисунке 4.10 показана структура сигнального графа БПФ, которая не требует перестановки вообще, но элегантное переплетение линий обычной бабочки превратилось в запутанную, хоть и эффективную, конфигурацию.

Не так давно большая часть времени при аппаратурной реализации БПФ тратилась на выполнение умножений, а процесс бит-реверсивной перестановки, необходимый для доступа к данным в памяти, не составлял значительной части в общем объеме вычислений. Теперь, когда аппаратурные умножители-аккумуляторы в интегральном исполнении могут умножать два числа за один такт синхросигнала, мультиплексирование и адресация данных БПФ приобретают больше значение. Это стимулировало разработку ряда эффективных алгоритмов бит-реверсивной перестановки [12-15].

Существует другой способ получения алгоритма БПФ, который приводит к похожим структурам бабочек, но с другими поворачивающими множителями. Эта разновидность алгоритмов БПФ известна как БПФ с прореживанием по частоте. Если алгоритм БПФ с прореживанием по времени основан на разделении входных данных на четные и нечетные отсчеты, алгоритм БПФ с прореживанием по частоте основан на раздельном вычислении четных и нечетных отсчетов в частотной области. Вывод алгоритма с прореживанием по частоте достаточно прост и включен во многие статьи и учебники, поэтому здесь мы не будем заниматься этим [4, 5, 15, 16]. Но мы приводим структуры бабочек с прореживанием по частоте на рисунках 4.11 – 4.13 (аналогичные структурам, показанным на рисунках 4.8 – 4.10).

Для каждой структуры БПФ с прореживанием по времени существует эквивалентная структура с прореживанием по частоте. Важно отметить, что количество умножений при реализации алгоритма БПФ с прореживанием по частоте совпадает с количеством умножений при реализации БПФ с прореживанием по времени.

Существует так много разных структур бабочек БПФ, описанных в литературе, что легко можно спутать бабочки с прореживанием по частоте и с прореживанием по времени. В зависимости от того, как подается материал, начинающий читатель может легко прийти к выводу, что БПФ с прореживанием по времени всегда требует бит-реверсивной перестановки входных отсчетов, а БПФ с прореживанием по частоте всегда выдает результат в бит-реверсивном порядке. Как показывают приведенные структуры, это не так. Прореживание по времени или частоте определяется тем, какая последовательность — входная или выходная, подвергается разделению при выводе той или иной структуры бабочек БПФ из формулы ДПФ.

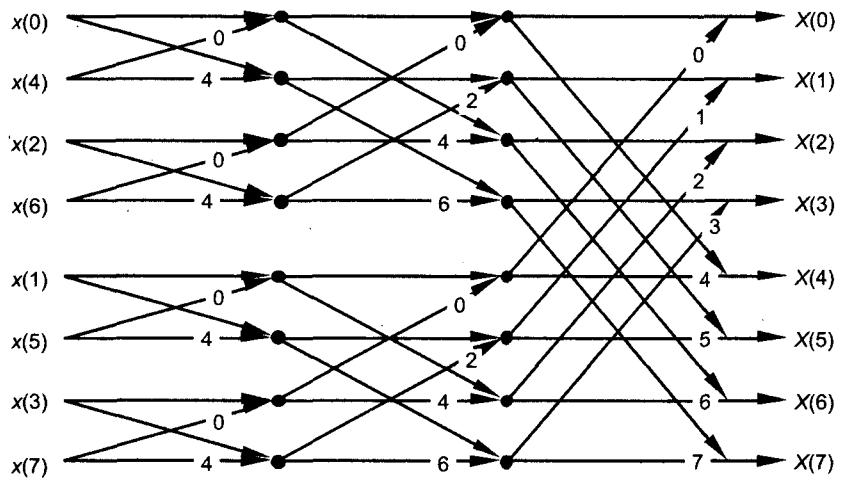


Рис. 4.8. 8-точечное БПФ с прореживанием по времени, входные отсчеты которого подвергнуты бит-реверсивной перестановке

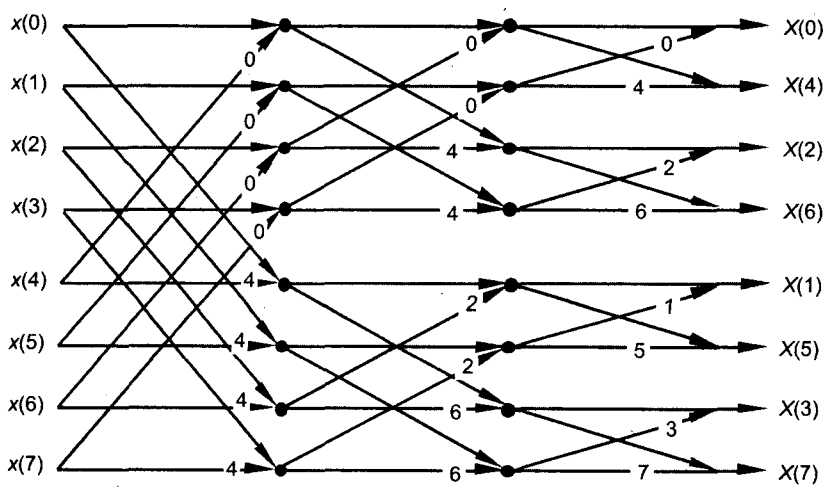


Рис. 4.9. 8-точечное БПФ с прореживанием по времени с бит-реверсивным порядком выходных отсчетов

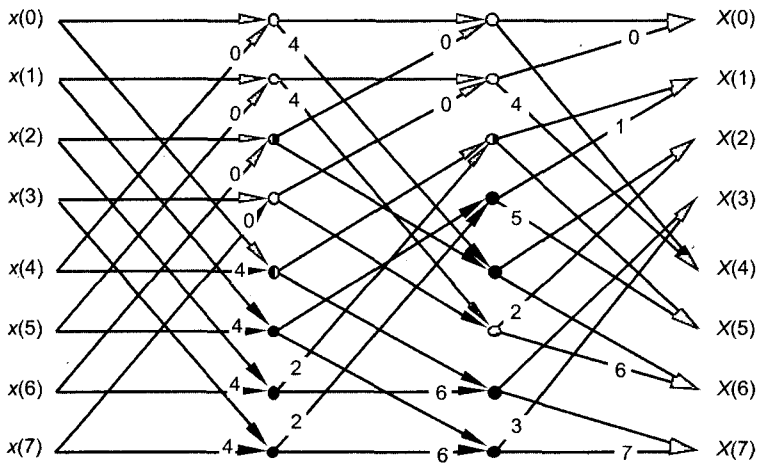


Рис. 4.10. 8-точечное БПФ с прореживанием по времени, входная и выходная последовательность которого расположены в нормальном порядке

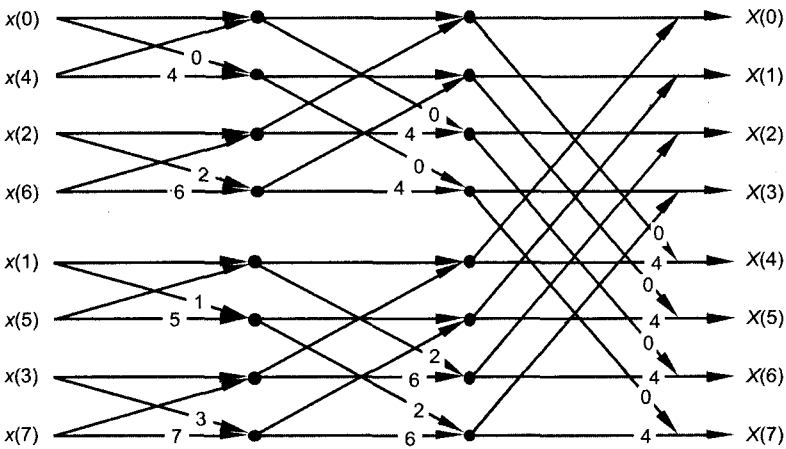


Рис. 4.11. 8-точечное БПФ с прореживанием по частоте и бит-реверсивным порядком входных отсчетов

Рассмотрим еще раз отдельную бабочку. Структуры БПФ на рисунках 4.8, 4.9, 4.11 и 4.12 являются прямым результатом вывода алгоритмов с прореживанием по времени и по частоте. Хотя сначала это не очевидно, но показатели степени поворачивающих множителей, приведенные на этих рисунках, распределены по определенной системе. Обратите внимание на то, что они всегда принимают обобщенные формы, показанные на рисунке 4.14 (а)[1]. Для реализации бабочки с прореживанием по времени, показанной на рисунке 4.14 (а), нам потребуется

[1] Помните, что для простоты в структурах бабочек, показанных на рисунках 4.8 — 4.13, приведены только показатели степени поворачивающих множителей, k и $k+N/2$, а не полные комплексные поворачивающие множители.

выполнить два комплексных умножения и два комплексных сложения. Конечно же, есть лучший способ реализации. Рассмотрим бабочку с прореживанием по времени на рисунке 4.14 (а). Если обозначить верхний вход как x, а нижний — как y, верхний выход бабочки будет равен

$$x' = x + (W_N)^k y, \tag{4-26}$$

а нижний выход бабочки будет равен

$$y' = x + (W_N)^{k+N/2} y. \tag{4-27}$$

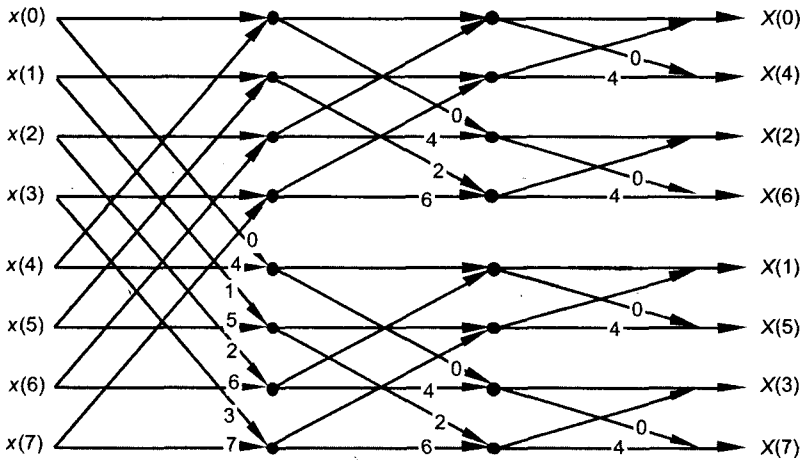


Рис. 4.12. 8-точечное БПФ с прореживанием по частоте и бит-реверсивным порядком выходной последовательности

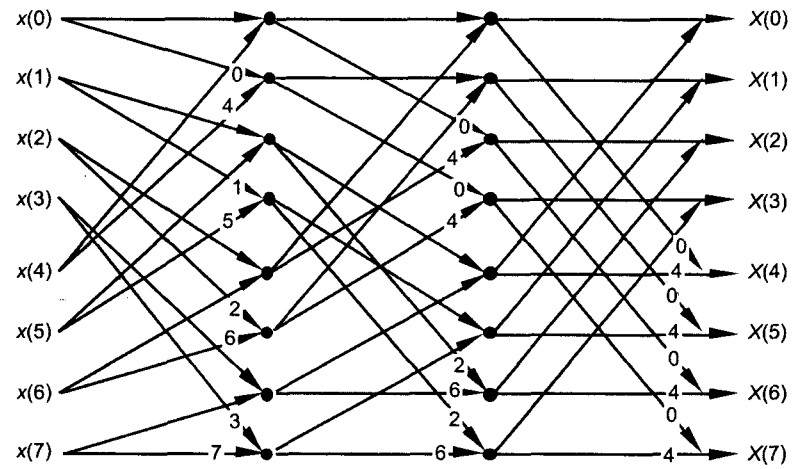


Рис. 4.13. 8-точечное БПФ с прореживанием по частоте и нормальным порядком входных и выходных отсчетов

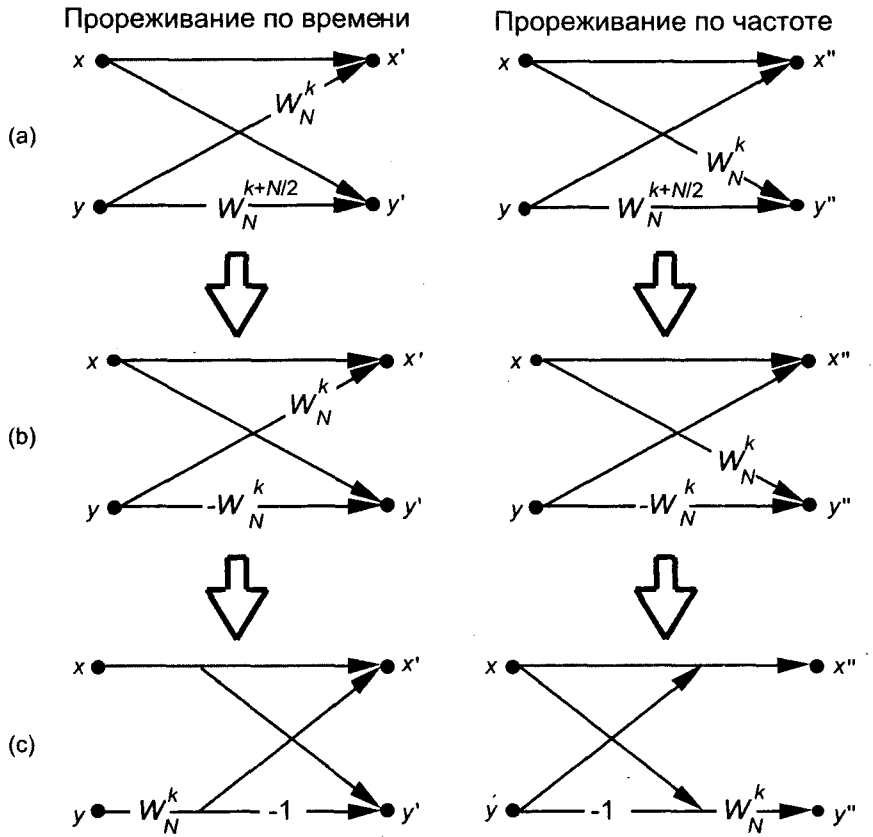


Рис. 4.14. Структуры бабочек с прореживанием по времени и частоте: (a) исходная форма; (b) упрощенная форма; (c) оптимизированная форма

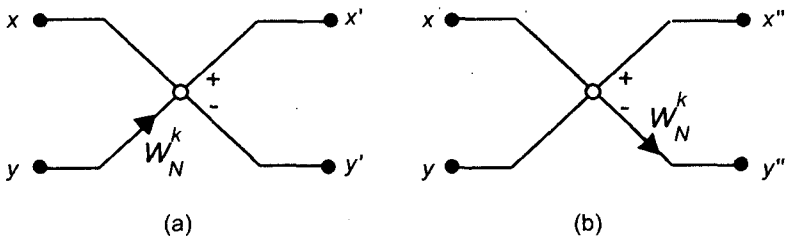


Рис. 4.15. Другой способ изображения бабочки: (a) с прореживанием по времени; (b) с прореживанием по частоте

К счастью, операции в (4-26) и (4-27) можно упростить, потому что два поворачивающих множителя связаны соотношением

$$(W_N)^{k+N/2} = (W_N)^k (W_N)^{N/2} = (W_N)^k (e^{-j2\pi N/2N}) = (W_N)^k (-1) = -(W_N)^k. \quad (4\text{-}28)$$

Следовательно, мы можем заменить поворачивающие множители $(W_N)^{k+N/2}$ на рисунке 4.14 (a) множителями $-(W_N)^k$, что дает нам упрощенную форму бабочек, показанную на рисунке 4.14 (b). Поняв, что поворачивающие множители на

рисунке 4.14 (b) отличаются только знаками, мы приходим к *оптимизированной* форме бабочек, показанной на рисунке 4.14 (c). Заметьте, что такие оптимизированные бабочки требую два комплексных сложения, но всего одно комплексное умножение, что уменьшает общее количество операций[1].

В литературе вы будете часто встречать оптимизированные структуры бабочек, приведенные на рисунке 4.14 (c), вместо структур, показанных на рисунке 4.14 (a). Эти оптимизированные бабочки позволяют нам легко распознавать алгоритмы с прореживанием по времени и по частоте. Если мы видим оптимизированные бабочки, подобные приведенным на рисунке 4.14 (c), мы знаем, что это алгоритм с прореживанием по времени, если поворачивающий множитель стоит перед -1, в противном случае, если поворачивающий множитель стоит после -1, это алгоритм с прореживанием по частоте.

Иногда мы будем встречать в литературе структуры БПФ, в которых используются обозначения, показанные на рисунке 4.15 [5, 17]. Эти бескрылые бабочки эквивалентны показанным на рисунке 4.14 (c). В этих сигнальных графах используется соглашение о том, что выход узла, обозначенного кружочком, помеченный плюсом, представляет собой сумму отсчетов, входящих в узел слева, а выход, помеченным минусом, представляет собой разность этих отсчетов. Таким образом, выходные отсчеты бабочек с прореживанием по времени, показанных на рисунках 4.14 (c) и 4.15 (a) вычисляются как

$$x' = x + (W_N)^k y \text{ и } y' = x - (W_N)^k y. \qquad (4\text{-}29)$$

Выходы бабочек с прореживанием по частоте, показанных на рисунках 4.14 (c) и 4.15 (b) равны

$$x'' = x + y \text{ и } y'' = (W_N)^k (x - y) = (W_N)^k x - (W_N)^k y. \qquad (4\text{-}30)$$

Так какая же структура лучше? Это зависит от приложения, аппаратурной реализации и соображений удобства. Если для выполнения БПФ мы используем программу на компьютере общего назначения, выбор у нас обычно невелик. Большинство специалистов просто используют существующие подпрограммы БПФ, включенные в коммерческие пакеты программ. Их код может быть оптимизирован по скорости выполнения, но вы этого никогда не узнаете. Чтобы разобраться в том, как они реализуют БПФ, может потребоваться изучение этого кода. Если для нас *важна скорость работы*, первым делом нужно проверить, вычисляются ли синусы и косинусы каждый раз, когда требуется поворачивающий множитель. Обычно вычисление тригонометрических функций занимает множество машинных тактов. Скорость вычисления БПФ можно повысить, вычислив поворачивающие множители заранее и сохранив их таблицу в памяти. В этом случае вычисление поворачивающего множителя заменяется выборкой из таблицы. Если мы пишем собственную процедуру выполнения БПФ, мы можем реализовать алгоритм в целочисленной арифметике, которая на большинстве машин работает быстрее, но при этом мы должны принять меры против возможных переполнений на выходах бабочек и внимательно отнестись к масштабированию

[1] Мы говорим, что количество комплексных умножений при реализации БПФ равно $(N/2)\log_2 N$ (см. (4-2)) именно потому, что N-точечное БПФ содержит $(N/2)\log_2 N$ бабочек.

результатов[1]. При использовании целочисленной арифметики следует быть внимательным: некоторые RISC процессоры в действительности выполняют целочисленные операции медленнее, т. к. они оптимизированы для выполнения операций над числами с плавающей запятой.

Если мы используем для вычислений векторный процессор, программы для этих процессоров *всегда* оптимизированы, т. к. их главная цель — высокая скорость вычислений. Изготовители векторных процессоров обычно рекламируют свои изделия, указывая скорость выполнения на них 1024-точечного БПФ.

Посмотрим теперь, какие возможности есть у нас при выборе структуры БПФ для реализации в виде специализированной аппаратуры.

Обсуждавшиеся ранее структуры бабочек БПФ обычно попадают в одну из двух категорий: алгоритмы БПФ с замещением и алгоритмы БПФ с удвоенной памятью. Алгоритм с замещением показан на рисунке 4.5. Выход бабочки запоминается в той же ячейке памяти, в которой хранились входные отсчеты. Память для хранения промежуточных результатов не нужна. В этом случае для N-точечного БПФ требуется только $2N$ ячеек памяти (коэффициент 2 учитывает то, что операция бабочки выполняется над комплексными числами, имеющими действительную и мнимую части). Камнем преткновения при реализации алгоритмов с замещением является довольно сложная адресация памяти. Структура БПФ с двойной памятью изображена на рисунке 4.10. В этом случае необходима промежуточная память, т. к. в структуре уже нет стандартной бабочки, и требуется дополнительно $4N$ ячеек памяти. Но доступ к данным и адресация памяти в этих структурах намного проще, чем в случае алгоритма с замещением. Высокоскоростные интегральные схемы с плавающей запятой, реализующие конвейерные структуры БПФ, более полно используют преимущества конвейерной архитектуры при использовании алгоритмов с двойной памятью [18].

Существует еще один класс структур БПФ, известный как алгоритмы с постоянной геометрией, которые делают адресацию памяти не только простой, но и одинаковой для всех каскадов БПФ. Эти структуры особенно интересны тем, кто проектирует специализированные аппаратурные процессоры БПФ [4, 19]. С точки зрения аппаратуры в общем случае алгоритмы с прореживанием по времени являются оптимальными для действительных входных последовательностей, а алгоритмы с прореживанием по частоте больше подходят для обработки комплексных входных последовательностей [8]. Когда входная последовательность БПФ симметрична во времени, для устранения ненужных операций используются специальные структуры БПФ. Эти специальные структуры, основанные на симметрии данных, описаны в литературе [20].

В случае двумерного БПФ, например, при обработке изображений, алгоритмы с прореживанием по частоте считаются оптимальными [21]. Ваше приложение может оказаться таким, что бит-реверсивная перестановка входной и выходной последовательности не важна. Некоторые приложения позволяют манипулировать выходной последовательностью БПФ в бит-реверсивном порядке без восстановления нормального порядка отсчетов. Затем обратное преобразование,

---

[1] Переполнением называется то, что происходит, когда результат арифметической операции содержит слишком много бит или разрядов и не может быть представлен в предназначенных для его хранения регистрах. Переполнение данных БПФ рассматривается в разделе 12.3.

которое использует входную последовательность в бит-реверсивном порядке, даст результат во временной области в нормальном порядке. В этой ситуации бит-реверсивная перестановка не нужна вообще. Примером подобного использования БПФ является перемножение двух преобразований Фурье в частотной области для получения свертки или корреляции во временной области[1]. Как можно видеть, выбор оптимального алгоритма и аппаратурной архитектуры БПФ представляет собой достаточно сложную проблему, но, к счастью, литература может дать нам указания по ее решению [4, 22, 23].

Библиография

1. Cooley, J. and Tukey, J. «An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series», *Math. Comput.*, Vol. 19, No. 90, Apr. 1965, pp. 297-301.

2. Cooley, J., Lewis, P., and Welch, P. «Historical Notes on the Fast Fourier Transform», *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, No. 2, June 1967.

3. Harris, F. J. «On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform», *Proceedings of the IEEE*, Vol. 66, No. 1, p. 54, January 1978.

4. Oppenheim, A. V., and Schafer, R. W. *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, New Jersey, 1989, p. 608 (имеется русский перевод одного из предыдущих изданий: Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. «Цифровая обработка сигналов», пер. с англ. / под ред. С. Я. Шаца, М.: Связь, 1979, доступен по адресу dsp-book.narod.ru/OpShDSP.djvu).

5. Rabiner, L. R. and Gold, B. *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, p. 367 (есть русский перевод: Рабинер Л., Голд Б. «Теория и применение цифровой обработки сигналов», М.: Мир, 1978, доступен по адресу http://geogin.narod.ru/arhiv/dsp/dsp3.htm).

6. Stearns, S. *Digital Signal Analysis*, Hayden Book Co., Rochelle Park, New Jersey, 1975, p. 265.

7. *Programs for Digital Signal Processing*, Chapter 1, IEEE Press, New York, 1979.

8. Sorenson, H. V., Jones, D. L., Heideman, M. T., and Burrus, C. S. «Real-Valued Fast Fourier Transform Algorithms» *IEEE Trans. on Acoust. Speech, and Signal Proc*, Vol. ASSP-35, No. 6, June 1987.

9. Bracewell, R. *The Fourier Transform and Its Applications*, 2nd Edition, Revised, McGraw-Hill, New York, 1986, p. 405.

10. Cobb, F. «Use Fast Fourier Transform Programs to Simplify, Enhance Filter Analysis», *EDN*, 8 March 1984.

11. Carlin, F. «Ada and Generic FFT Generate Routines Tailored to Your Needs», *EDN*, 23 April 1992.

[1] Пример использования БПФ для выполнения свертки приведен в разделе 13.10.

12. Evans, D. «An Improved Digit-Reversal Permutation Algorithm for the Fast Fourier and Hartley Transforms», *IEEE Trans. on Acoust. Speech, and Signal Proc*, Vol. ASSP-35, No. 8, August 1987.

13. Burrus, C. S. «Unscrambling for Fast DFT Algorithms», *IEEE Trans. on Acoust. Speech, and Signal Proc*, Vol. 36, No. 7, July 1988.

14. Rodriguez, J. J. «An Improved FFT Digit-Reversal Algorithm», *IEEE Trans. on Acoust. Speech, and Signal Proc*, Vol. ASSP-37, No. 8, August 1989.

15. Land, A. «Bit Reverser Scrambles Data for FFT», *EDN*, March 2,1995.

16. JG-AE Subcommittee on Measurement Concepts, «What Is the Fast Fourier Transform?», *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, No. 2, June 1967.

17. Cohen, R., and Perlman, R. «500 kHz Single-Board FFT System Incorporates DSP-Optimized Chips», *EDN*, 31 October 1984.

18. Eldon, J., and Winter, G. E. «Floating-point Chips Carve Out FFT Systems», *Electronic Design*, 4 August 1983.

19. Lamb, K. «CMOS Building Blocks Shrink and Speed Up FFT Systems», *Electronic Design*, 6 August 1987.

20. Markel, J. D. «FFT Pruning», *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-19, No. 4, December 1971.

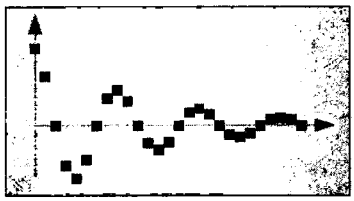
21. Wu, H. R., and Paoloni, F. J. «The Structure of Vector Radix Fast Fourier Transforms», *IEEE Trans. on Acoust. Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-37, No. 8, August 1989.

22. Ali, Z. M. «High Speed FFT Processor», *IEEE Trans. on Communications*, Vol. COM-26, No. 5, May 1978.

23. Bergland, G. «Fast Fourier Transform Hardware Implementations—An Overview» *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-17, June 1969.

Глава 5

Фильтры с импульсной характеристикой конечной длины



Фильтрация цифровых данных, если и не фундаментальная, то, по крайней мере, старейшая область цифровой обработки сигналов. Истоки цифровой фильтрации уходят в прошлое на 50 лет. Растущая популярность цифровых компьютеров в начале 50-х годов стимулировала усилия исследователей в области сглаживания дискретных данных и анализа дискретных систем управления. Однако по-настоящему анализ и проектирование цифровых эквивалентов аналоговых фильтров вошли в нашу жизнь в начале-середине 60-х годов, примерно в то время, когда Биттлз приехали в Америку. Именно в это время специалисты по цифровой обработке сигналов осознали, что компьютеры способны перейти от простого анализа оцифрованных сигналов к изменению их характеристик посредством фильтрации. Сегодня цифровая фильтрация распространена так широко, что объем посвященной ей литературы превосходит объем литературы по любой другой области цифровой обработки сигналов. В этой главе вы познакомитесь с основными атрибутами цифровых фильтров, узнаете, как численно оценить их эффективность и изучите принципы проектирования цифровых фильтров с импульсной характеристикой конечной длины.

Итак, начнём с иллюстрации понятия фильтрации во временной области на рисунке 5.1.

Вообще, фильтрация представляет собой обработку сигнала во временной области, в результате которой изменяется спектральный состав исходного сигнала. Изменения обычно заключаются в ослаблении или подавлении некоторых нежелательных спектральных компонентов входного сигнала. Фильтры пропускают определенные компоненты сигнала, ослабляя в то же время другие компоненты. На рисунке 5.1 показаны как аналоговая, так и цифровая версии процесса фильтрации. Если аналоговый фильтр обрабатывает непрерывные сигналы, то цифровой фильтр обрабатывает последовательности дискретных отсчетов. Цифровой фильтр на рисунке 5.1 (b), конечно же, может представлять собой компьютерную

программу, программируемый аппаратурный процессор или специализированную интегральную схему. Традиционно линейные цифровые фильтры делятся на два больших класса: фильтры с импульсной характеристикой конечной длины (КИХ-фильтры) и фильтры с импульсной характеристикой бесконечной длины (БИХ-фильтры). Поскольку КИХ-фильтры проще поддаются анализу, мы изучим в этой главе именно их, а БИХ-фильтрам посвятим главу 6.

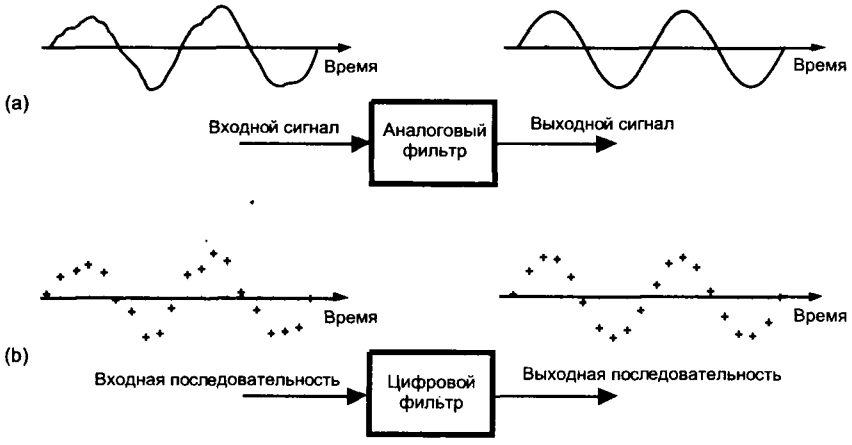


Рис. 5.1. Фильтры: (a) аналоговый фильтр, на входе которого мы видим зашумленный тоновый сигнал, а на выходе — тон, очищенный от шума; (b) цифровой эквивалент аналогового фильтра

5.1. Введение в КИХ-фильтры

Прежде всего, для вычисления текущего отсчета выходного сигнала КИХ-фильтры используют только текущий и предыдущие отсчеты входного сигнала и совсем не используют выходные отсчеты. (По этой причине КИХ-фильтры иногда называют также *нерекурсивными* фильтрами[1].) Это приводит к тому, что, если входная последовательность содержит конечное количество ненулевых отсчетов, то выходная последовательность такого фильтра также будет содержать последовательность ненулевых отсчетов конечной длительности, благодаря чему КИХ-фильтры и получили свое имя. Итак, если входная последовательность, начиная с некоторого момента, превращается в последовательность нулевых отсчетов, то через некоторое время выходная последовательность также будет содержать только нулевые отсчеты. Хотя эта особенность фильтра не представляется необычной, она очень важна, и мы выясним, почему, когда узнаем больше о цифровых фильтрах.

Для вычисления выходных отсчетов КИХ-фильтры используют сложение примерно так же, как мы используем сложение в процессе усреднения. И действительно, усреднение представляет собой КИХ-фильтр, что мы можем продемонстрировать

[1] Для полноты картины следует заметить, что КИХ-фильтры могут быть реализованы и с использованием рекурсивной схемы, что продемонстрировано в главе 10 — (*прим. перев.*).

на примере. Допустим, мы считаем количество машин, проходящих по мосту за минуту, и нам необходимо узнать среднее количество машин в минуту за интервал в пять минут; т. е. каждую минуту мы вычисляем количество машин в минуту за последние пять минут. Если результаты подсчета машин за первые десять минут приведены в среднем столбце таблицы 5.1, то среднее количество машин в минуту за предыдущие пять одноминутных интервалов приведено в правом столбце таблицы. Чтобы получить первое среднее значение, мы сложили данные для первых пяти одноминутных интервалов и разделили сумму на пять, $(10 + 22 + 24 + 42 + 37)/5 = 27$. Затем мы вычислили среднее значение количества машин в минуту для одноминутных интервалов со второго по шестой и получили второе среднее значение за пять минут, равное 40.4. Продолжая в том же духе, мы усреднили количество машин в минуту для интервалов с третьего по седьмой и получили третье среднее 53.8 и так далее. На рисунке 5.2 мы изобразили график количества машин за одноминутные интервалы серой линией, график среднего количества машин в минуту за пятиминутный интервал выделили черной линией. (На рисунке 5.2 показаны входные значения количества машин в минуту за пределами десятиминутного интервала, данные для которого приведены в таблице 5.1, чтобы продемонстрировать некоторые важные идеи, которые следует коротко обсудить.)

Таблица 5.1. Численные значения для примера усреднения

Индекс минуты	Количество машин за последнюю минуту	Среднее за последние пять минут количество машин в минуту
1	10	—
2	22	—
3	24	—
4	42	—
5	37	27
6	77	40.4
7	89	53.8
8	22	53.4
9	63	57.6
10	9	52

Из этого примера можно сделать много полезных выводов. На рисунке 5.2 заметно, что резкие изменения входной последовательности в процессе усреднения сглаживаются. Выходная последовательность оказывается намного более гладкой, чем входная. Зная, что быстрые изменения последовательности обусловлены высокочастотными компонентами, мы можем сказать, что наше устройство усреднения ведет себя как фильтр нижних частот, сглаживая быстрые изменения

входной последовательности. Является ли наше устройство усреднения КИХ-фильтром? Конечно, да — для вычисления текущего выходного значения не используются предыдущие выходные отсчеты; только входные отсчеты используются для вычисления выходных значений. Кроме того, мы видим, что, если мост закрывается в конце 19-й минуты, то серая линия быстро опускается до 0 машин в минуту в конце 20-й минуты, а выходные отсчеты устройства усреднения на рисунке 5.2 постепенно уменьшаются до нуля к концу 24-й минуты.

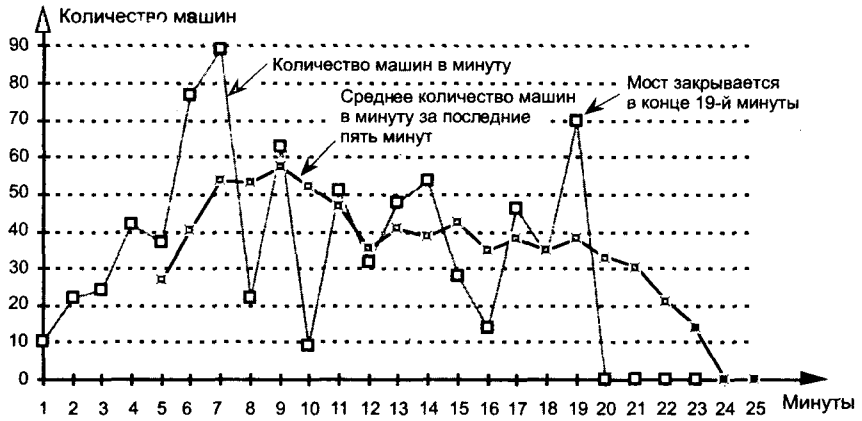


Рис. 5.2. Усреднение количества машин в минуту. Серая линия показывает количество машин за каждую минуту, а черная линия показывает количество машин в минуту, усредненное за последние пять минут

Рисунок 5.2 показывает, что первый выходной отсчет появляется в конце 5-й минуты, потому что именно в этот момент мы получаем первые пять отсчетов, которые позволяют нам вычислить правильное среднее. 5-й выходной отсчет можно обозначить как $y_{ave}(5)$, где

$$y_{ave}(5) = [x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5)]/5 . \qquad (5\text{-}1)$$

В общем случае, если k-й входной отсчет есть $x(k)$, то n-й выходной отсчет вычисляется как

$$y_{ave}(n) = [x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)]/5 = \sum_{k=n-4}^{n} x(k)/5 . \qquad (5\text{-}2)$$

Теперь посмотрите на выражение (5-2) внимательно. Оно утверждает, что n-й выходной отсчет представляет собой сумму n-го и четырех предыдущих входных отсчетов.

Мы можем проявить фильтрующую сущность нашего устройства усреднения, начертив его блок-схему, показанную на рисунке 5.3. Она показывает, как устройство усреднения вычисляет выходные отсчеты.

Эта блок-схема, которую называют *структурой* фильтра, представляет собой изображение того, как мы могли бы вычислять выходные отсчеты усредняющего фильтра, используя сдвиг входной последовательности по порядку слева направо вдоль верхней части фильтра при вычислении каждого нового выходного отсчета.

Эта структура, которая реализует уравнения (5-1) и (5-2), показывает используемые значения отсчетов в момент, когда мы получили первые пять входных отсчетов. Элементы задержки на рисунке 5.3, которые называют *единичными задержками*, образуют регистр сдвига, в котором входные отсчеты запоминаются на время вычисления выходного отсчета.

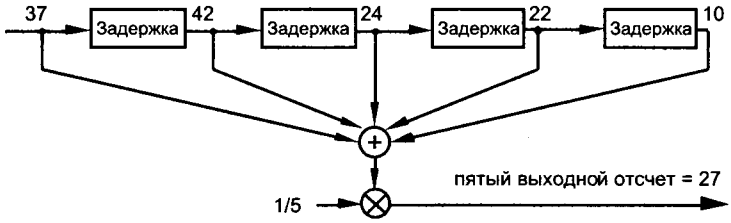


Рис. 5.3. Блок-схема усредняющего фильтра в момент, когда на вход поступает пятый отсчет, 37

При усреднении мы складываем пять отсчетов и делим сумму на пять. В реализации КИХ-фильтра мы можем с таким же успехом умножить каждый входной отсчет на коэффициент 1/5, а затем вычислить сумму, как показано на рисунке 5.4 (a). Конечно же, фильтры на рисунках 5.3 и 5.4 (a) эквивалентны, потому что уравнение (5-2), описывающее структуру, показанную на рисунке 5.3, эквивалентно уравнению

$$y_{ave}(n) = x(n-4)/5 + x(n-3)/5 + x(n-2)/5 + x(n-1)/5 + x(n)/5 = \sum_{k=n-4}^{n} x(k)/5, \quad (5\text{-}3)$$

которое описывает структуру на рисунке 5.4 (a)[1].

Давайте убедимся в том, что мы правильно понимаем то, что происходит на рисунке 5.4 (a). Каждый из пяти входных отсчетов умножается на 1/5, и пять произведений суммируются, давая значение 5-го выходного отсчета. Сдвиг отсчетов слева направо иллюстрируется на рисунках 5.4(b) и 5.4(c). Чтобы вычислить 6-й выходной отсчет фильтра, входная последовательность сдвигается вправо, при этом 1-й отсчет, имеющий значение 10, выпадает из регистра сдвига и теряется безвозвратно, а 6-й отсчет со значением 77 поступает на вход слева. Аналогично, при вычислении 7-го выходного отсчета входная последовательность сдвигается вправо, в результате чего 2-й отсчет, равный 22, теряется, а 7-й входной отсчет, имеющий значение 89, поступает на вход слева. Таким образом, когда на вход приходит новый отсчет, фильтр отбрасывает самый старый отсчет, умножает отсчеты на 1/5 и суммирует произведения, давая в результате один новый выходной отсчет. Структура фильтра, использующая этот процесс сдвига типа пожарной цепочки часто называют трансверсальным фильтром из-за поперечного перемещения входных отсчетов[2]. Поскольку для вычисления выходного значения мы «*ответвляем*» отдельные входные отсчеты, структуру на рисунке 5.4 на жаргоне цифровой обработки называют КИХ-фильтром с 5 ответвлениями.

---

[1] При переносе множителя 1/5 в (5-2) под знак суммы в (5-3) мы используем дистрибутивный закон умножения и сложения скаляров $a(b+c+d) = ab+ac+ad$.

[2] Английское слово *transversal* (*трансверсальный*) переводится буквально как *поперечный, секущий* — (*прим. перев.*).

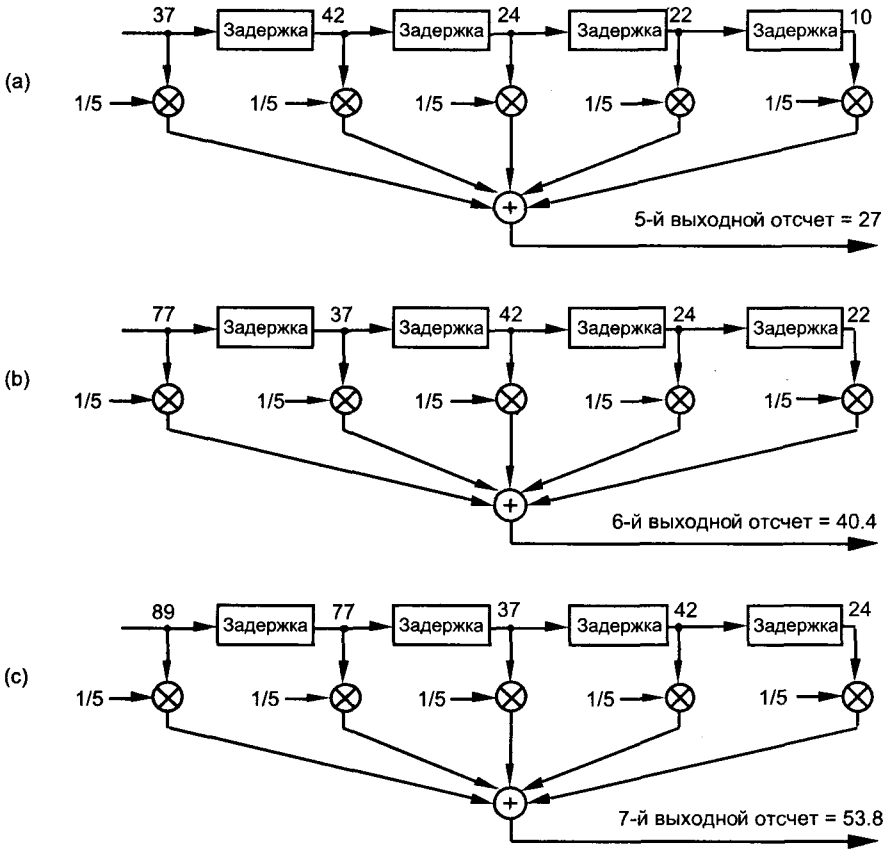


Рис. 5.4. Альтернативная структура усредняющего фильтра: (a) входные отсчеты, используемые для вычисления значения 5-го выходного отсчета; (b) входные значения, используемые для вычисления 6-го выходного отсчета; (c) входные отсчеты, используемые для вычисления 7-го выходного отсчета

Один важный и, вероятно, наиболее интересный аспект в понимании сущности КИХ-фильтров связан с предсказанием их поведения при подаче на вход синусоидальных последовательностей разных частот, т. е. с оценкой их частотной характеристики. На частотную характеристику КИХ-фильтров влияют два фактора: количество ответвлений и значения коэффициентов, используемые при умножении. Мы исследует эти два фактора на нашем примере усредняющего фильтра, а затем увидим, как можно использовать их при проектировании КИХ-фильтров. Это приводит нас к необходимости ввести новое понятие: свертка. (На самом деле мы уже представили читателю уравнение свертки, не говоря об этом. Это было уравнение (5-3), и сейчас мы изучим его подробнее.)

5.2. Свертка в КИХ-фильтрах

Сейчас мы всерьез возьмемся за математику, описывающую КИХ-фильтры. Мы можем графически представить вычисления по формуле (5-3), показанные на рисунке 5.4, так, как на рисунке 5.5. Кроме того, будем придерживаться общепринятых в теории цифровых фильтров обозначений для индексов входных отсчетов и коэффициентов фильтра, когда первый индекс последовательности принимается равным 0; т. е. мы будем обозначать первый входной отсчет как $x(0)$. Следующий входной отсчет обозначается $x(1)$, следующий — $x(2)$ и т. д. Аналогично, значения пяти рассматриваемых коэффициентов будут индексироваться от нуля до четырех, т. е. от $h(0)$ до $h(4)$. (Эта схема индексирования позволяет сделать описывающие наш пример уравнения совместимыми с общепринятыми в литературе по цифровым фильтрам.)

В (5-3) в качестве коэффициентов фильтра, на которые умножаются отсчеты входной последовательности, мы использовали множитель 1/5. В левой части рисунка 5.5 показана схема соответствия этих коэффициентов (черные квадратики) отсчетам входного сигнала фильтра, представленным пустыми квадратиками. Обратите внимание на то, что на рисунках 5.5(а) — 5.5(е) мы сдвигаем входные отсчеты вправо и на каждом шаге вычисляем значение выходного отсчета с помощью (5-3). Выходные отсчеты в правой части рисунка 5.5 совпадают с первыми пятью отсчетами, показанными черными квадратиками на рисунке 5.2.

Входные отсчеты на рисунке 5.5 — это те же значения, которые на рисунке 5.2 представлены белыми квадратиками. Заметьте, что порядок следования входных отсчетов во времени на рисунке 5.5 изменен на обратный по отношению к порядку отсчетов на рисунке 5.2! То есть входная последовательность на рисунке 5.5 перевернута во времени. Эта инверсия порядка следования отсчетов во времени обусловлена структурой фильтра, показанной на рисунке 5.4.

Повторяя первую часть (5-3) и опуская подстрочный индекс выходного сигнала, можно записать выходной отсчет исходного КИХ-фильтра $y(n)$ в виде

$$y(n) = [x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)]/5 . \qquad (5\text{-}4)$$

Поскольку мы будем исследовать фильтры, коэффициенты которых принимают разные значения, нам необходимо представить их некоторой переменной, например, $h(k)$. Таким образом, мы можем переписать уравнение для выходного отсчета усредняющего фильтра (5-4) в более общем виде

$$y(n) = h(4)x(n-4) + h(3)x(n-3) + h(2)x(n-2) + h(1)x(n-1) + h(0)x(n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{4} h(k)x(n-k) , \qquad (5\text{-}5)$$

где все коэффициенты $h(0)$ — $h(4)$ равны 1/5. Выражение (5-5) представляет собой компактный способ описания структуры фильтра, показанной на рисунке 5.4 и процесса вычисления, иллюстрируемого рисунком 5.5.

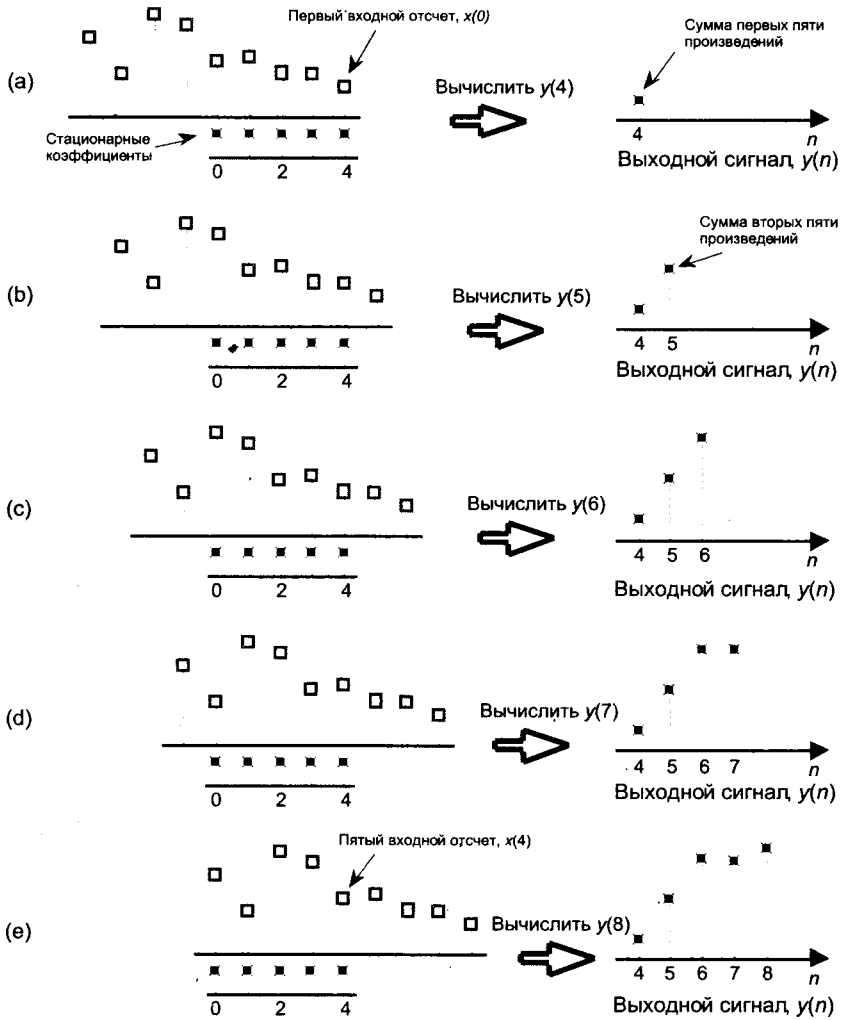


Рис. 5.5. Свертка в усредняющем фильтре: (a) первые пять входных отсчетов, выровненные относительно неподвижных коэффициентов фильтра, индекс $n = 4$; (b) сдвиг входных отсчетов вправо, индекс $n = 5$; (c) индекс $n = 6$; (d) индекс $n = 7$; (e) индекс $n = 8$

Сделаем еще одни шаг вперед и запишем n-й отсчет КИХ-фильтра с M ответвлениями:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k), \qquad (5\text{-}6)$$

Итак, мы получили то, что хотели. Выражение (5-6) и есть печально известное уравнение свертки в приложении к цифровым КИХ-фильтрам. Начинающие в области цифровой обработки сигналов часто испытывают трудности в усвоении понятия свертки. Эти трудности совсем не обязательны. Уравнение

(5-6) представляет собой просто некоторое количество умножений с последующим суммированием произведений. В действительности процесс достаточно прост. Мы просто инвертируем порядок следования отсчетов входной последовательности и сдвигаем инвертированную последовательность относительно коэффициентов фильтра, как показано на рисунке 5.5. Для каждого нового входного отсчета мы суммируем произведения и получаем выходной отсчет.

Задержимся на минуту и введем новое понятие, которое важно хорошо усвоить — *импульсную характеристику*. Импульсная характеристика фильтра — это именно то, что значит ее название, это выходная последовательность фильтра во временной области при подаче на вход фильтра единственного отсчета, равного единице (единичного импульса), которому предшествуют и за которым следуют нулевые отсчеты. Рисунок 5.6 иллюстрирует это понятие точно таким же образом, как рисунок 5.5 иллюстрирует получение выходной последовательности фильтра. Левая часть рисунка 5.6 показывает соответствие коэффициентов фильтра, черных квадратиков, отсчетам входного импульса, отмеченным белыми (пустыми) квадратиками. На рисунках 5.6 (а) — 5.6 (е) мы сдвигаем входные отсчеты вправо и на каждом шаге вычисляем выходной отсчет фильтра с помощью выражения (5-4). Выходные отсчеты в правой части рисунка 5.6 представляют собой импульсную характеристику фильтра. Обратите внимание на важную особенность: импульсная характеристика КИХ-фильтра идентична последовательности пяти коэффициентов. По этой причине термины *коэффициенты КИХ-фильтра* и *импульсная характеристика* являются синонимами. Следовательно, когда кто-то говорит об импульсной характеристике некоторого КИХ-фильтра, он также говорит и о его коэффициентах.

Возвращаясь к усредняющему фильтру, вспомним, что все коэффициенты, или отсчеты импульсной характеристики, $h(0)$ — $h(4)$ равны 1/5. Оказывается, качество нашего фильтра можно улучшить, если использовать неравные значения коэффициентов. Под качеством фильтра мы понимаем то, насколько хорошо фильтр пропускает требуемые сигналы и насколько хорошо он подавляет нежелательные сигналы. Мы оцениваем качество фильтра по форме его частотной характеристики, которую мы получаем посредством использования свойства свертки линейных систем. Для описания этого понятия повторим (5-6), используя сокращенную запись

$$y(n) = h(k) * x(n), \tag{5-7}$$

где символ * обозначает свертку. (Формула 5-7 читается так: «y от n равно свертке h от k и x от n».) Свойство свертки в приложении к КИХ-фильтрам формулируется следующим образом: ДПФ свертки импульсной характеристики фильтра и входной последовательности равно произведению спектра входной последовательности и ДПФ импульсной характеристики. Идея, которую мы стараемся донести до вас, состоит в том, что, если две последовательности во временной области $h(k)$ и $x(n)$ имеют ДПФ $H(m)$ и $X(m)$ соответственно, то ДПФ последовательности $y(n) = h(k) * x(n)$ будет равно $H(m) \cdot X(m)$. Формулируя более компактно, мы представляем это утверждение в форме выражения

$$y(n) = h(k) * x(n) \underset{ОДПФ}{\overset{ДПФ}{\rightleftarrows}} H(m) \cdot X(m) \tag{5-8}$$

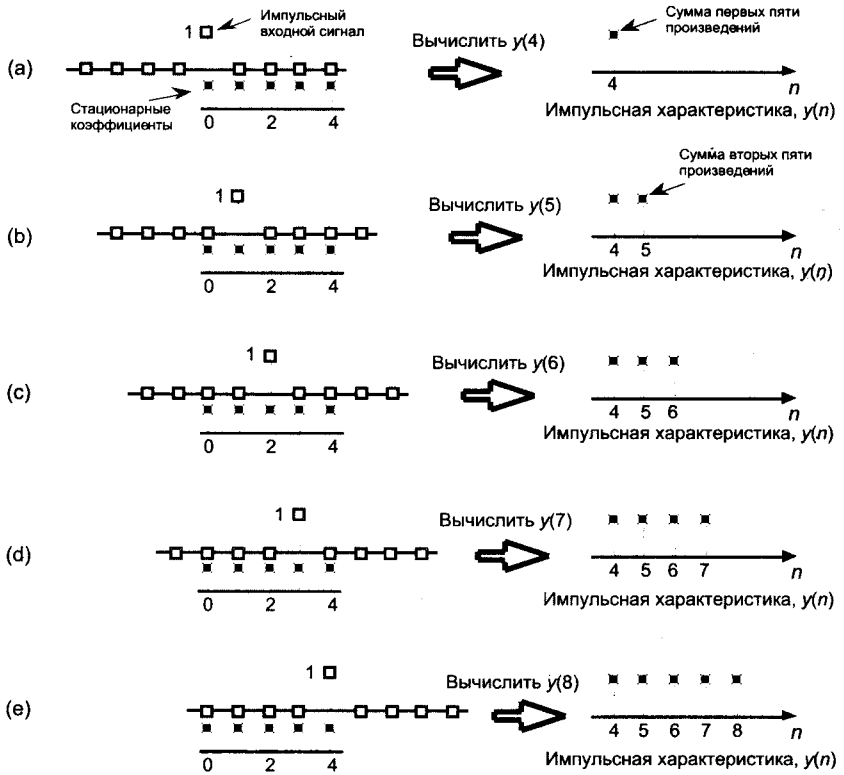


Рис. 5.6. Свертка коэффициентов фильтра и входного импульса для получения импульсной характеристики фильтра: (a) единичный отсчет импульса выровнен с первым коэффициентом фильтра, индекс $n = 4$; (b) импульс сдвинут вправо и индекс $n = 5$; (c) индекс $n = 6$; (d) индекс $n = 7$; (e) индекс $n = 8$

Здесь ОДПФ обозначает обратное ДПФ, и (5-8) показывает, что две последовательности, образованные в результате выполнения операций $h(k) * x(n)$ и $H(m) \bullet X(m)$, связаны парой преобразований Фурье. Таким образом, вычисляя ДПФ от свертки $h(k) * x(n)$, мы получаем произведение $H(m) \bullet X(m)$, т. е. спектр выходного сигнала нашего фильтра $Y(m)$. Аналогично, мы можем получить свертку $h(k) * x(n)$, вычисляя обратное ДПФ произведения $H(m) \bullet X(m)$. Из (5-8) можно сделать важное заключение о том, что свертка во временной области эквивалентна умножению в частотной области. Чтобы помочь вам понять этот принцип, на рисунке 5.7 наглядно представлено соотношение между сверткой во временной области и произведением в частотной области. Операция свертки для линейных систем обсуждается подробнее в разделе 5.9. Мы настоятельно рекомендуем начинающему читателю просмотреть этот материал, чтобы получить общее представление о том, как и когда операция сверки может быть использована для анализа цифровых фильтров.

Выражение (5-8) и соотношения на рисунке 5.7 подсказывают нам, что необходимо сделать, чтобы получить частотную характеристику некоторого КИХ-фильтра. Произведение $X(m) \bullet H(m)$ — это ДПФ выходного сигнала фильтра. Поскольку

$X(m)$ является ДПФ входной последовательности, отсюда следует, что частотная характеристика фильтра есть $H(m)$, ДПФ импульсной характеристики фильтра $h(k)$[1]. Возвращаясь опять к нашей задаче, мы можем определить частотную характеристику усредняющего фильтра, вычислив ДПФ последовательности коэффициентов фильтра (импульсной характеристики) в (5-4). Если мы возьмем пять коэффициентов $h(k)$, равных 1/5, и дополним их 59 нулями, мы получим последовательность, изображенную на рисунке 5.8 (a). Выполнив 64-точеное ДПФ этой последовательности и пронормировав модули ДПФ, мы получаем амплитудно-частотную характеристику фильтра $|H(m)|$, показанную на рисунке 5.8 (b), и фазо-частотную характеристику, показанную на рисунке 5.8 (c)[2]. Мы видим, что $H(m)$ — наша старая знакомая, функция $\sin(x)/x$ из раздела 3.13.

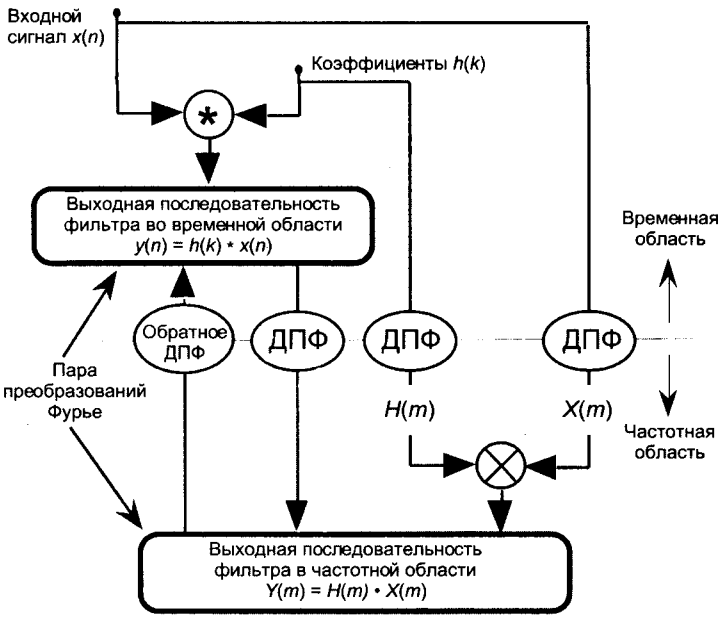


Рис. 5.7. Соотношения свертки в приложении к цифровым КИХ-фильтрам

Теперь установим связь отсчетов дискретной частотной характеристики, показанной на рисунках 5.8 (b) и 5.8 (c), с физической размерностью частоты дискретизации f_s. Из раздела 3.5 и нашего опыта манипуляций с ДПФ мы знаем, что отсчет $m = N/2 = 32$ в этом случае соответствует частоте заворота, равной половине частоты дискретизации, $f_s/2$. Учитывая это, мы можем преобразовать частотную

[1] Здесь мы говорим *«импульсная характеристика»* вместо *«коэффиценты»*, потому что эта концепция применима также и к БИХ-фильтрам. Частотная характеристика БИХ-фильтра также равна ДПФ импульсной характеристики.

[2] Использовать здесь именно 64-точечное ДПФ совсем не обязательно. Мы могли дополнить импульсную характеристику нулям до 16 или 32 отсчетов. Мы выбрали 64 отсчета, чтобы обеспечить разрешение по частоте, которое позволяет нам получить достаточно гладкую форму характеристики на рисунке 5.8 (b). Вспомните: чем больше отсчетов используется для БПФ, тем выше разрешение по частоте — не так ли?

ось рисунка 5.8 в частотную ось рисунка 5.9. Заметим, что на рисунке 5.9 (a) АЧХ фильтра, конечно же, периодична в частотной области, и период повторения равен частоте дискретизации f_s. Поскольку нас в первую очередь интересует частотная характеристика фильтра в диапазоне частот от 0 до половины частоты дискретизации, рисунок 5.9 (c) показывает этот диапазон в увеличенном масштабе, чем подтверждает, что операция усреднения ведет себя как фильтр нижних частот. Это довольно плохой ФНЧ по сравнению с *идеальным*, характеристика которого показана на рисунке 5.9 (c) штриховой линией, но наш усредняющий фильтр будет ослаблять высокочастотные составляющие входного сигнала по сравнению с низкочастотными составляющими.

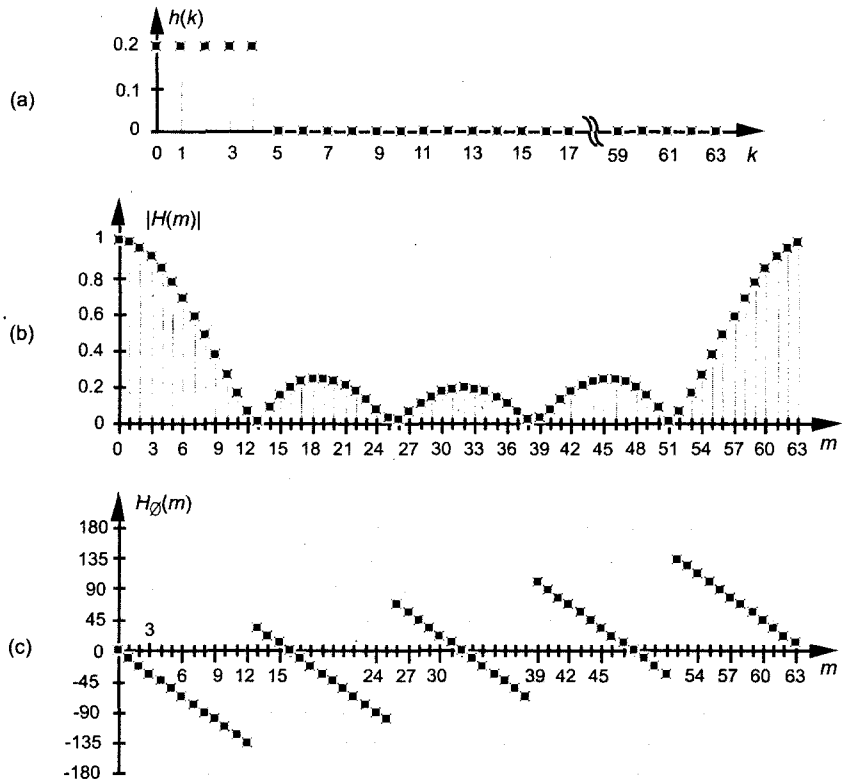


Рис. 5.8. Усредняющий КИХ-фильтр: (a) последовательность коэффициентов фильтра $h(k)$, дополненная нулями; (b) нормированная дискретная АЧХ $|H(m)|$; (c) ФЧХ в градусах

Это можно продемонстрировать на примере. Предположим, что мы подаем на вход усредняющего фильтра низкочастотную синусоиду, показанную белыми квадратиками на рисунке 5.10 (a), при этом частота синусоиды равна $f_s/32$, а амплитуда равна 1. Выходной сигнал в этом случае представляет собой синусоиду частотой $f_s/32$, амплитуда которой уменьшена до 0.96, при этом выходная синусоида оказывается задержанной по фазе на 22.5°. Далее, если мы подадим на вход фильтра синусоиду с более высокой частотой, равной $3f_s/32$, как показано на рисунке 5.10 (b), выходной сигнал фильтра будет синусоидой частотой $3f_s/32$, амплитуда которой

уменьшена еще больше, до 0.69. Кроме того, выходной сигнал на рисунке 5.10 (b) имеет еще больший фазовый сдвиг, равный 67.5°. Хотя значения амплитуд и фаз выходных сигналов на рисунке 5.10 были измерены при реализации КИХ-фильтра с 5 ответвлениями, обрабатывающего входные синусоидальные сигналы, мы могли бы получить их прямо по рисункам 5.8 (a) и 5.8 (b). Здесь мы хотим подчеркнуть, что для того, чтобы узнать, какова частотная характеристика фильтра, нам нет необходимости реализовать его и подавать на его вход синусоиды разных частот. Чтобы получить частотную характеристику КИХ-фильтра, нам достаточно вычислить ДПФ последовательности его коэффициентов (его импульсной характеристики), как мы делали для получения характеристик, приведенных на рисунке 5.8.

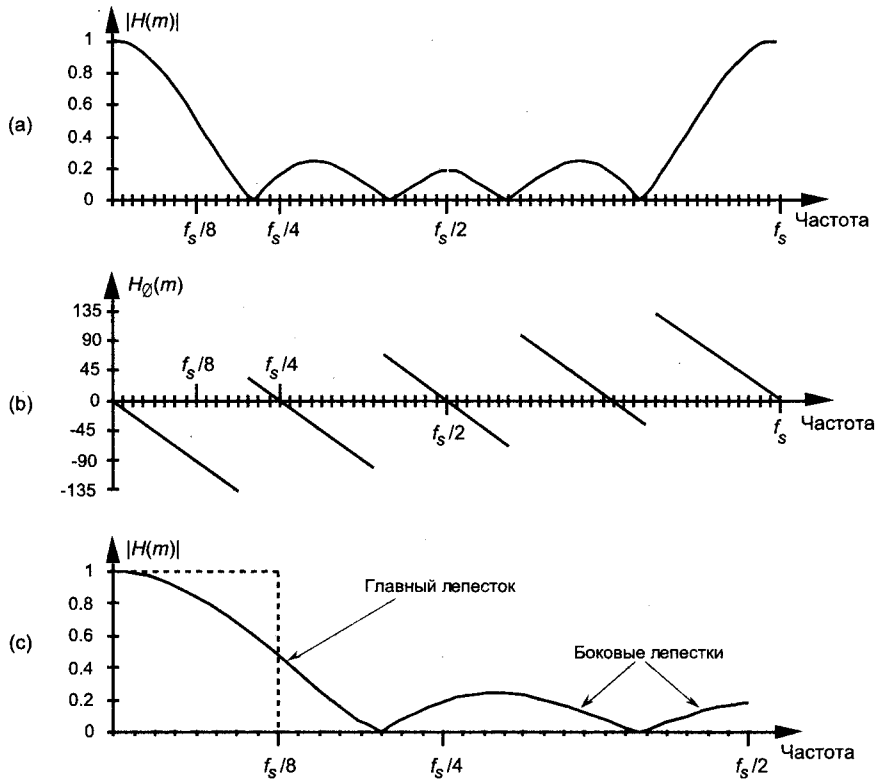


Рис. 5.9. Частотная характеристика усредняющего КИХ-фильтра в виде непрерывных кривых: (a) нормированная АЧХ $|H(m)|$; (b) ФЧХ в градусах; (c) АЧХ в диапазоне частот от 0 Гц до половины частоты дискретизации, $f_s/2$ Гц

На рисунке 5.11 показан другой способ оценки качества фильтра. Здесь светло-серой линией показана АЧХ фильтра, $|H(m)|$, а темно-серой линией показан $|X(m)|$, амплитудный спектр входного сигнала (обозначенного белыми квадратиками на рисунке 5.2). Черная линия изображает амплитудный спектр выходного сигнала, который на рисунке 5.2 показан черными квадратиками. Таким образом, на рисунке 5.11 спектр выходного сигнала получается как произведение графика характеристики фильтра, показанной светло-серой линией, на темно-серый

график спектра входного сигнала, или $|X(m) \cdot H(m)|$. Мы снова можем убедиться в том, что усредняющий фильтр действительно ослабляет высокочастотные составляющие входного сигнала.

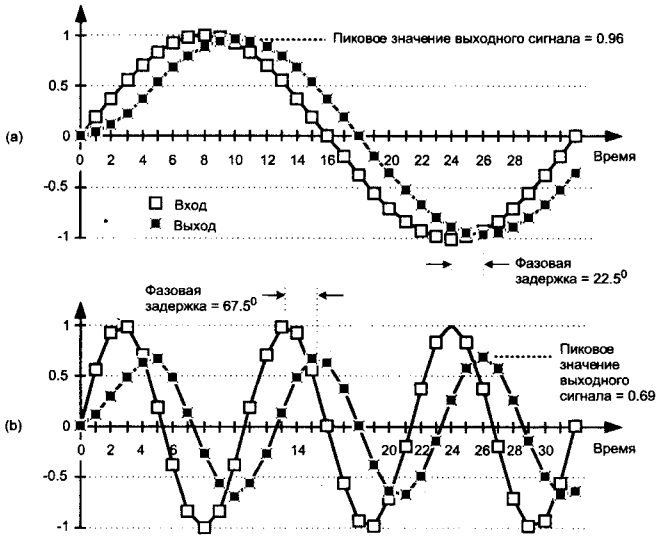


Рис. 5.10. Входные и выходные последовательности усредняющего КИХ-фильтра: (a) при подаче на вход синусоиды частотой $f_s/32$; (b) при подаче на вход синусоиды частотой $3f_s/32$

Остановимся на минуту, чтобы приведенные сведения улеглись в памяти. Мы рассмотрели пример с усредняющим фильтром и в результате установили, что:

- КИХ-фильтры выполняют операцию свертки, суммируя произведения отсчетов сдвинутой входной последовательности на коэффициенты фильтра;
- выходная последовательность КИХ-фильтра равна свертке входной последовательности с импульсной характеристикой (последовательностью коэффициентов) фильтра;
- частотная характеристика КИХ-фильтра представляет собой ДПФ импульсной характеристики фильтра;
- спектр выходного сигнала КИХ-фильтра представляет собой произведение спектра входного сигнала и частотной характеристики фильтра;
- свертка во временной области и произведение в частотной области связаны парой преобразований Фурье.

А теперь начинается самое интересное. Изменим значения пяти коэффициентов фильтра, чтобы модифицировать частотную характеристику нашего ФНЧ с пятью ответвлениями. На рисунке 5.12 (a) показаны исходные пять коэффициентов и еще два произвольных набора из пяти коэффициентов каждый. На рисунке 5.12 (b) сравниваются амплитудно-частотные характеристики для этих трех

наборов. Частотные характеристики вычисляются как ДПФ трех наборов коэффициентов, затем строятся графики модуля ДПФ, как мы делали это для получения графиков на рисунке 5.9 (с). На рисунке 5.12 мы можем заметить три важные особенности. Во-первых, как мы и ожидали, разные наборы коэффициентов дают разные частотные характеристики. Во-вторых, резкие изменения значений соседних коэффициентов, такие как переход от 0.2 к 0 в первом наборе коэффициентов, вызывают появление пульсаций, или боковых лепестков, частотной характеристики. В-третьих, если мы уменьшим эти скачки значений коэффициентов, как в третьем наборе на рисунке 5.12 (а), мы уменьшим эти пульсации. Однако уменьшение уровня боковых лепестков приводит к увеличению ширины главного лепестка нашего ФНЧ. (Как мы увидим, это тот же самый эффект, с которым мы сталкивались при обсуждении окон, используемых с ДПФ, в разделе 3.9.)

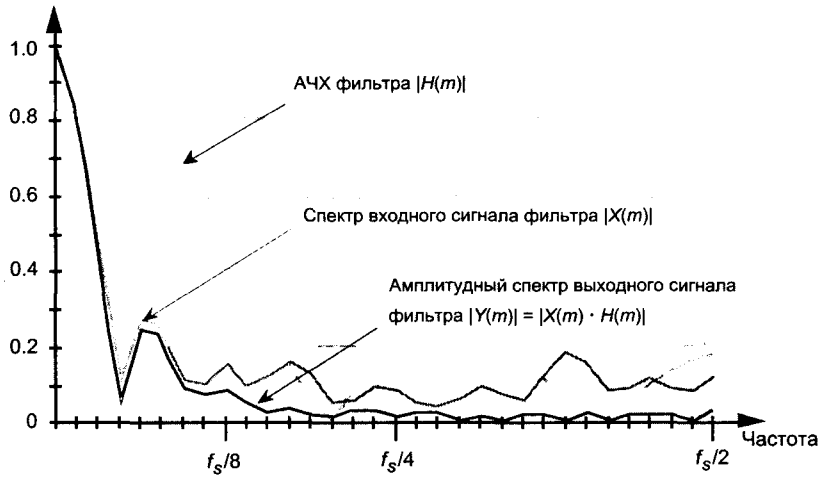


Рис. 5.11. Модуль спектра входной последовательности усредняющего КИХ-фильтра, АЧХ фильтра и модуль спектра выходной последовательности

Чтобы напомнить, как используются коэффициенты фильтра, на рисунке 5.13 показана структура КИХ-фильтра с пятью ответвлениями, использующая третий набор коэффициентов с рисунка 5.12. Реализация трансверсального КИХ-фильтра с постоянными коэффициентами ничуть не сложнее, чем структуры, показанной на рисунке 5.13. Это так просто. Мы можем иметь фильтр с количеством ответвлений, превышающим 5, но сдвиг входных отсчетов, умножение на постоянные коэффициенты и суммирование остаются неизменными. (Под постоянными коэффициентами мы понимаем не коэффициенты, имеющие одинаковые значения, а коэффициенты, значения которых не меняются, или инвариантны, во времени. Существует класс цифровых фильтров, так называемые адаптивные фильтры, коэффициенты которых периодически изменяются, чтобы подстроиться под изменяющиеся параметры входного сигнала. Мы не собираемся обсуждать адаптивные фильтры в этом вводном курсе, но их описание имеется в литературе [1-5].)

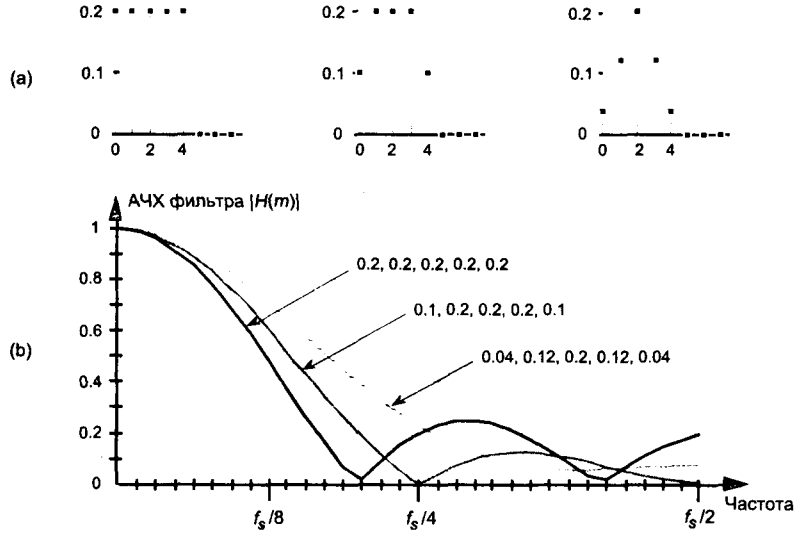


Рис. 5.12. Три набора коэффициентов фильтра с пятью ответвлениями: (a) наборы коэффициентов: 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2; 0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1 и 0.04, 0.12, 0.2, 0.12, 0.04; (b) частотные характеристики трех КИХ ФНЧ, использующих эти наборы коэффициентов

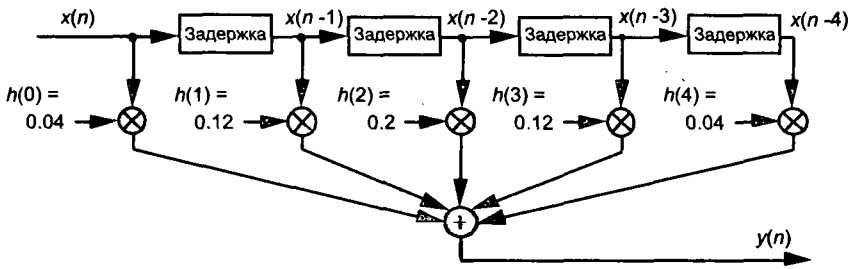


Рис. 5.13. Реализация КИХ ФНЧ с пятью ответвлениями с набором коэффициентов 0.04, 0.12, 0.2, 0.12 и 0.04

До сих пор наше описание построения КИХ-фильтров представлялось с точки зрения аппаратурной реализации. Согласно рисунку 5.13, для вычисления одного выходного отсчета фильтра необходимо выполнить пять умножений и пять сложений до прихода следующего входного отсчета. В программной реализации КИХ-фильтра с пятью ответвлениями все входные отсчеты должны быть предварительно записаны в память. Работа процедуры, реализующей программный фильтр, состоит в том, чтобы выбирать различные сегменты из пяти отсчетов из массива входных данных $x(n)$, выполнять вычисления, показанные на рисунке 5.13, и запоминать результирующую выходную последовательность $y(n)$ в массив, расположенный в памяти[1].

[1] Просматривая литературу, посвященную КИХ-фильтрам, читатель часто будет встречать символ z^{-1} вместо блока задержки на рисунке 5.13. Эквивалентность этих обозначений объясняется в следующей главе при изучении БИХ-фильтров.

Теперь, когда мы в основном понимаем, что представляют из себя КИХ-фильтры, посмотрим, чего можно добиться использованием свыше пяти ответвлений фильтра, научившись проектировать КИХ-фильтры.

5.3. Проектирование КИХ-фильтра нижних частот

А теперь, вместо того, чтобы использовать заданный заранее набор коэффициентов КИХ-фильтра и анализировать его частотные характеристики, попробуем выполнить обратную процедуру и спроектировать свой собственный КИХ-фильтр нижних частот. Процедура проектирования начинается с задания *требуемой* частотной характеристики с последующим вычислением коэффициентов фильтра, которые дают эту характеристику. Существует два наиболее распространенных метода проектирования КИХ-фильтров: метод окон и так называемый оптимизационный метод. Рассмотрим их в упомянутом порядке.

5.3.1. Метод проектирования с помощью окон

Проектирование КИХ-фильтров методом окон (который также называют методом разложения в ряд Фурье) начинается с принятия решения о том, какой должна быть частотная характеристика проектируемого фильтра нижних частот. Мы можем начать с рассмотрения непрерывного фильтра нижних частот с последующим моделированием этого фильтра цифровым фильтром. В качестве исходной возьмем идеальную непрерывную частотную характеристику $H(f)$, т. е. характеристику, которая равна единице на низких частотах и равна 0 (имеет бесконечное подавление) на частотах, превышающих некоторую *частоту среза*, как показано на рисунке 5.14 (а). Представление этой характеристики $H(f)$ дискретной частотной характеристикой достаточно очевидно, поскольку идея дискретной частотной характеристики по существу та же, что и непрерывной частотной характеристики — при одном важном отличии. Как говорилось в разделах 2.2 и 3.13, дискретные представления в частотной области всегда периодичны с периодом, равным частоте дискретизации f_s. Дискретным представлением нашего идеального непрерывного фильтра нижних частот $H(f)$ является периодическая характеристика $H(m)$, изображенная на рисунке 5.14(b) отсчетами в частотной области.

Есть два способа определения коэффициентов фильтра нижних частот. Первый способ — аналитический:

1. Записать выражение для дискретной частотной характеристики $H(m)$.
2. Подставить это выражение в формулу обратного ДПФ, чтобы получить коэффициенты $h(k)$.
3. Вывести выражение для $h(k)$, как функции индекса времени k.

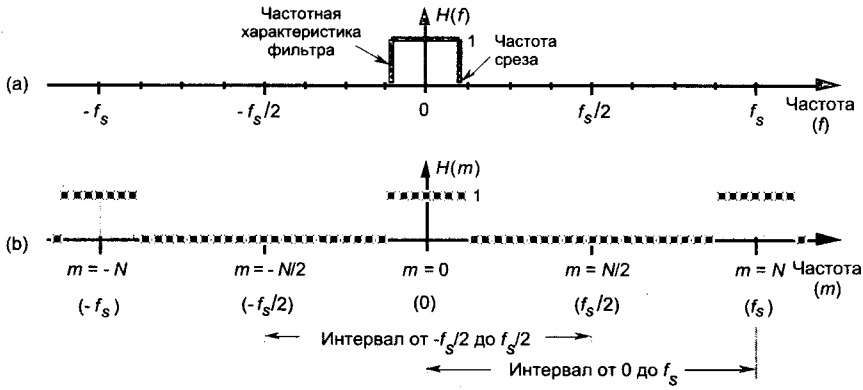


Рис. 5.14. Частотные характеристики фильтра нижних частот: (a) непрерывная частотная характеристика $H(f)$; (b) периодическая дискретная частотная характеристика $H(m)$

Второй способ состоит в том, чтобы задать отсчеты $H(m)$ в частотной области, а затем с помощью программы, реализующей обратное ДПФ, получить коэффициенты КИХ-фильтра. В любом случае нам необходимо задать периодическую $H(m)$ на одном периоде f_s Гц. С точки зрения последующих преобразований при аналитическом вычислении коэффициентов нам удобнее определить $H(m)$ на рисунке 5.14 (b) в диапазоне частот от $-f_s/2$ до $f_s/2$, а при численном вычислении ОДПФ удобнее задавать $H(m)$ для частот от 0 до f_s. Попробуем использовать оба метода для вычисления коэффициентов фильтра.

При аналитическом вычислении мы можем определить произвольную дискретную частотную характеристику $H(m)$, используя N отсчетов на интервале частот от $-f_s/2$ до $f_s/2$ и задав K единичных отсчетов, соответствующих полосе пропускания проектируемого фильтра, как показано на рисунке 5.15. Чтобы определить $h(k)$ аналитически, необходимо взять ОДПФ функции $H(m)$ в следующей форме

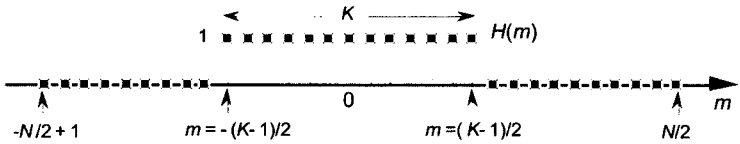


Рис. 5.15. Частотная характеристика произвольного дискретного КИХ ФНЧ, определенная в N точках частотной оси в диапазоне частот f_s Гц

$$h(k) = (1/N)\sum_{m=-(N/2)+1}^{N/2} H(m)e^{j2\pi mk/N}, \qquad (5\text{-}9)$$

где k – временной индекс. Результат преобразования (5-9), полученный в разделе 3.13 как (3-59), мы повторяем здесь в виде

$$h(k) = (1/N)[\sin(\pi kK/N)]/[N\sin(\pi k/N)]\,. \qquad (5\text{-}10)$$

Если мы вычислим (5-10) как функцию k, мы получим последовательность, показанную на рисунке 5.16, которая имеет форму классической функции $\sin(x)/x$. Просмотрев материал раздела 3.13, легко заметить, что переход от (5-9) к (5-10) требует достаточно большого количества аналитических выкладок. На деле такой большой объем аналитических преобразований, создающих много возможностей для внесения ошибок, приводит к тому, что разработчики цифровых фильтров стараются избегать аналитических преобразований выражения (5-9). Они предпочитают использовать для вычисления $h(k)$ программы, выполняющие ОДПФ (в форме обратного БПФ), так же будем поступать и мы.

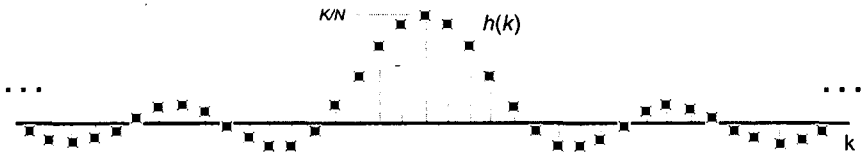


Рис. 5.16. Коэффициенты $h(k)$, полученные в результате вычислений по (5-10)

Продемонстрируем проектирование КИХ-фильтра с помощью программного ОДПФ на примере. Допустим, мы хотим спроектировать КИХ-фильтр, моделирующий непрерывную частотную характеристику, показанную на рисунке 5.17 (a). Дискретный вариант частотной характеристики фильтра $H(m)$ показан на рисунке 5.17 (b), где мы использовали $N = 32$ точки на частотной оси. На рисунке 5.17 (c) приведены отсчеты частотной характеристики в диапазоне от 0 до f_s. Этот рисунок эквивалентен рисунку 5.27 (b), изображающему отсчеты характеристики в диапазоне $-f_s/2$ до $+f_s/2$, но содержит только отсчеты, соответствующие положительным частотам. Итак, мы почти у цели. Использовав 32-точечное ОБПФ для вычисления 32-точечного обратного ДПФ последовательности $H(m)$, показанной на рисунке 5.17 (c), мы получаем 32 отсчета $h(k)$, показанных точками на рисунке 5.18 (a) для диапазона индексов от $k = -15$ до $k = 16$[1]. Нам нужно сделать еще один шаг. Поскольку мы хотим сделать последовательность коэффициентов фильтра симметричной относительно отсчета с наибольшим значением, мы опустим коэффициент с индексом $k = 16$ и сдвинем индекс k влево, в результате чего получим требуемую форму $h(k)$ вида $\sin(x)/x$, как показано на рисунке 5.18 (b). Этот сдвиг индекса k не изменяет амплитудно-частотную характеристику КИХ-фильтра. (Вспомните, что согласно теореме о сдвиге ДПФ в разделе 3.6 сдвиг во временной области проявляется в частотной области как линейный фазовый сдвиг без изменения модуля спектра.) Последовательность на рисунке 5.18 (b) и есть последовательность коэффициентов, которые мы используем в операции свертки для реализации КИХ ФНЧ.

Здесь важно показать, что, чем больше отсчетов $h(k)$ мы используем в качестве коэффициентов фильтра, тем ближе наша частотная характеристика к идеальной. Используем девять центральных отсчетов $h(k)$ и посмотрим, как будет выглядеть при этом частотная характеристика. АЧХ и в этом случае вычисляется как ДПФ этих девяти отсчетов, как показано в правой части рисунка 5.19 (a). Частотная характеристика идеального фильтра для сравнения показана здесь же серой линией. (Чтобы подробнее показать ее форму, мы начертили $|H(m)|$ на рисунке 5.19 (a) сплошной

[1] Если вы хотите использовать этот метод проектирования КИХ-фильтров, но у вас есть только программа прямого БПФ, в разделе 13.6 вы найдете способ использования алгоритма прямого БПФ для вычисления обратного БПФ.

линией, но мы должны помнить, что на самом деле $|H(m)|$ есть последовательность дискретных отсчетов.) Заметьте, что при использовании девяти отсчетов мы определенно получаем фильтр нижних частот, но он явно далек от идеала. Использование большего количества коэффициентов позволяет улучшить ситуацию: на рисунке 5.19 (b) показаны 19 коэффициентов и соответствующая АЧХ, которая выглядит более похожей на требуемую прямоугольную характеристику. Обратите внимание на то, что в полосе пропускания хорошо видны флуктуации, или пульсации, частотной характеристики фильтра $H(m)$. Использование всех 31 отсчетов последовательности $h(k)$ дает частотную характеристику, показанную на рисунке 5.19 (c). Частотная характеристика нашего фильтра стала еще лучше (приблизилась к идеалу), но подозрительные пульсации в полосе пропускания по-прежнему присутствуют.

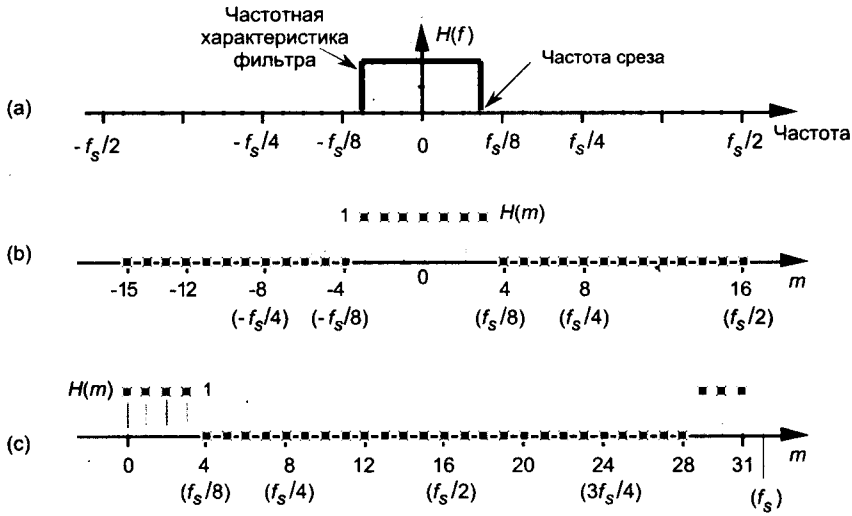


Рис. 5.17. Идеальный фильтр нижних частот: (a) непрерывная частотная характеристика $H(f)$; (b) дискретная характеристика $H(m)$ в диапазоне частот от $-f_s/2$ до $f_s/2$ Гц; (c) дискретная характеристика $H(m)$ в диапазоне частот от 0 до f_s Гц

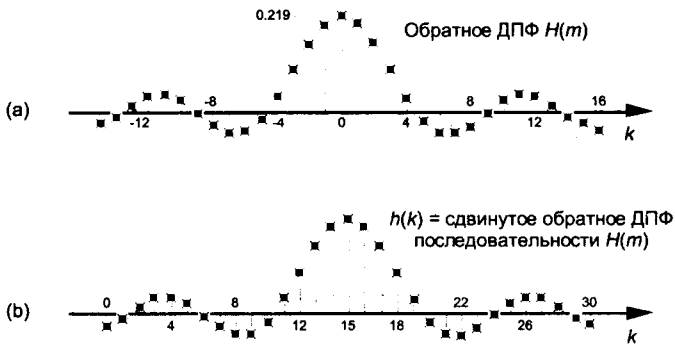


Рис. 5.18. Обратное ДПФ дискретной характеристики, показанной на рисунке 5.17(c): (a) нормальная индексация отсчетов обратного ДПФ; (b) симметричная последовательность коэффициентов, используемая для реализации КИХ-фильтра с 31 ответвлением

Нам важно понять, откуда берутся эти пульсации в полосе пропускания КИХ-фильтра нижних частот на рисунке 5.19. Вспомним сказанное выше о свертке коэффициентов, или импульсной характеристики, усредняющего фильтра с пятью ответвлениями с последовательностью входных данных для получения выходного сигнала. Мы установили, что свертка во временной области соответствует умножению в частотной области, что мы представили символически в (5-8) и повторяем здесь в виде

$$h(k) * x(n) \underset{ОДПФ}{\overset{ДПФ}{\rightleftarrows}} H(m) \bullet X(m) \qquad (5\text{-}11)$$

Эта связь между сверткой во временной области и умножением в частотной области, изображенная на рисунке 5.7, показывает, что, если две последовательности во временной области $h(k)$ и $x(n)$ имеют ДПФ $H(m)$ и $X(m)$ соответственно, то ДПФ свертки $h(k) * x(n)$ будет равно $H(m) \bullet X(m)$. Не существует никаких ограничений относительно того, что в действительности представляют последовательности $h(k)$ и $x(n)$ в (5-11). В разделе 5.9 мы выясним, что свертка в одной области эквивалентна умножению в другой области. Это позволяет нам утверждать, что умножение во временной области эквивалентно свертке в частотной области или

$$h(k) \bullet x(n) \underset{ОДПФ}{\overset{ДПФ}{\rightleftarrows}} H(m) * X(m) \qquad (5\text{-}12)$$

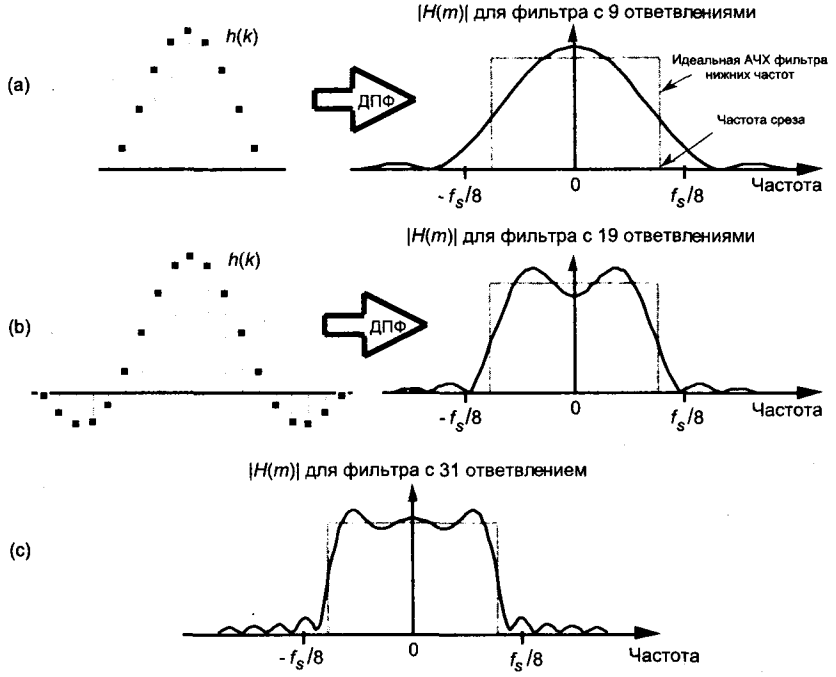


Рис. 5.19. Коэффициенты и частотные характеристики трех фильтров нижних частот: (a) КИХ-фильтра с 9 ответвлениями; (b) КИХ-фильтра с 19 ответвлениями; (c) частотная характеристика полного фильтра с 31 ответвлением

Теперь мы готовы понять, откуда берутся пульсации АЧХ, заметные на рисунке 5.19.

Переписывая (5-12) и заменяя $h(k)$ и $x(n)$ последовательностями $h^{\infty}(k)$ и $w(k)$ соответственно, получаем

$$h^{\infty}(k) \cdot w(k) \underset{ОДПФ}{\overset{ДПФ}{\rightleftarrows}} H^{\infty}(m) * W(m) \qquad (5\text{-}13)$$

Будем считать, что $h^{\infty}(k)$ представляет бесконечно длинную последовательность коэффициентов идеального КИХ-фильтра нижних частот вида $\sin(x)/x$, а $w(k)$ представляет окно, которое мы используем для усечения последовательности $\sin(x)/x$, как показано на рисунке 5.20. Таким образом, $w(k)$ представляет собой последовательность конечной длины единичных отсчетов, и ее ДПФ есть $W(m)$. Длина $w(k)$ равна количеству коэффициентов, или ответвлений, которые мы намерены использовать при реализации нашего КИХ ФНЧ. При принятом определении $h^{\infty}(k)$ произведение $h^{\infty}(k) \cdot w(k)$ представляет собой усеченную последовательность коэффициентов $h(k)$ на рисунках 5.19 (а) и 5.19 (b). Следовательно, согласно (5-13), реальная частотная характеристика КИХ-фильтра $H(m)$ есть свертка

$$H(m) = H^{\infty}(m) * W(m) \qquad (5\text{-}14)$$

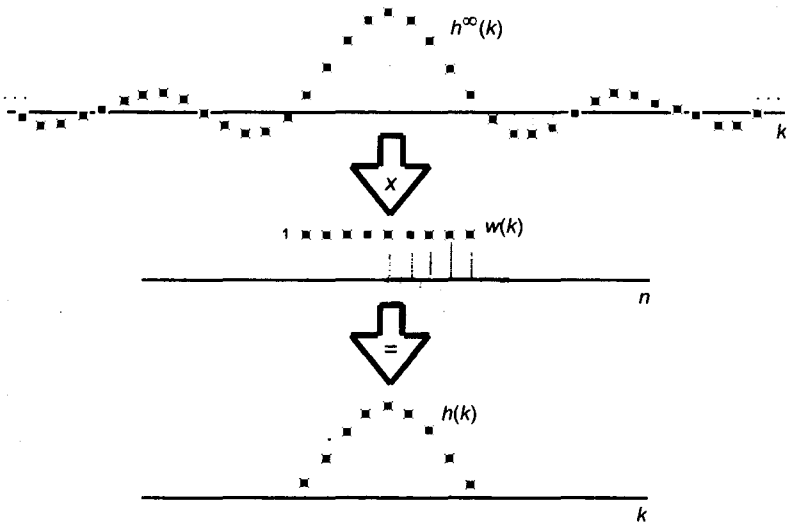


Рис. 5.20. Бесконечная последовательность $h^{\infty}(k)$, взвешенная окном $w(k)$ для получения коэффициентов фильтра $h(k)$

Мы изображаем эту свертку на рисунке 5.21, где для того, чтобы не загромождать картинку, мы показываем $H^{\infty}(m)$ (ДПФ коэффициентов $h^{\infty}(k)$) как серый прямоугольник. Помните, что это в действительности последовательность отсчетов с одинаковыми значениями.

Посмотрев на рисунок 5.21 (а) очень внимательно, можно увидеть, почему все три $|H(m)|$ на рисунке 5.19 имеют пульсации в полосе пропускания. Мы можем рассматривать конкретный отсчет свертки $H(m) = H^{\infty}(m) * W(m)$ как сумму произведений $H^{\infty}(m)$ на $W(m)$ для соответствующего сдвига $W(m)$ по частоте. $H^{\infty}(m)$ и несдвинутая последовательность $W(m)$ показаны на рисунке 5.21 (а.).

Если предполагается, что все отсчеты $H^{\infty}(m)$ равны единице, то значение конкретного отсчета $H(m)$ является просто суммой отсчетов $W(m)$, которые накладываются на прямоугольник $H^{\infty}(m)$. Следовательно, при сдвиге $W(m)$ на 0 Гц сумма отсчетов $W(m)$, которые накладываются на прямоугольник $H^{\infty}(m)$ на рисунке 5.21 (a), дает значение $H(m)$ на частоте 0 Гц. По мере сдвига $W(m)$ вправо, что дает нам дополнительные значения $H(m)$ для положительных частот, мы можем видеть, что сумма положительных и отрицательных отсчетов $W(m)$ под прямоугольником колеблется. Рисунок 5.21 (b) показывает, как в процессе сдвига при вычислении свертки появляются пульсации в полосе пропускания $H(m)$ — сумма положительных и отрицательных отсчетов $W(m)$, попадающих под прямоугольник $H^{\infty}(m)$, изменяется при каждом сдвиге функции $W(m)$. Сдвиг $W(m)$ по частоте, показанный на рисунке 5.21 (c), когда вершина главного лепестка $W(m)$ выходит за пределы прямоугольника $H^{\infty}(m)$, соответствует частоте, на которой полоса пропускания начинает переходить в полосу задерживания. Рисунок 5.21 (d) показывает, что при продолжении сдвига $W(m)$ мы получим пульсации $H(m)$ за пределами положительной частоты среза[1]. Кратко итог можно выразить так: пульсации $H(m)$ вызваны боковыми лепестками $W(m)$.

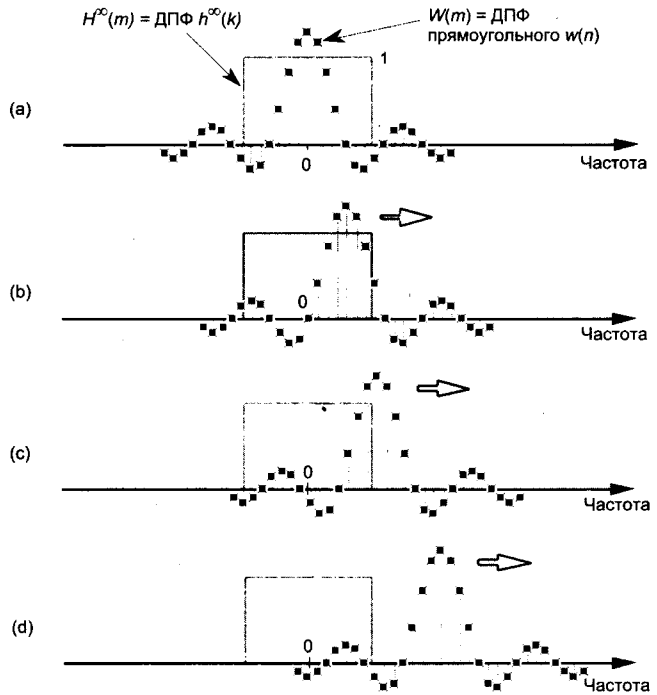


Рис. 5.21. Свертка $W(m) * H^{\infty}(m)$: (a) $W(m)$ и $H^{\infty}(m)$ в отсутствие сдвига; (b) сдвиг $W(m)$, порождающий пульсации в полосе пропускания $H(m)$ на положительных частотах; (c) сдвиг $W(m)$, приводящий к началу переходной полосы вблизи положительной частоты среза $H(m)$; (d) сдвиг $W(m)$, вызывающих пульсации за пределами частоты среза $H(m)$

[1] Если бы мы начали сдвигать $W(m)$ на рисунке 5.21 (b) влево, чтобы получить ту часть $H(m)$, которая соответствует отрицательным частотам, мы получили бы зеркальное отображение части $H(m)$, соответствующей положительным частотам.

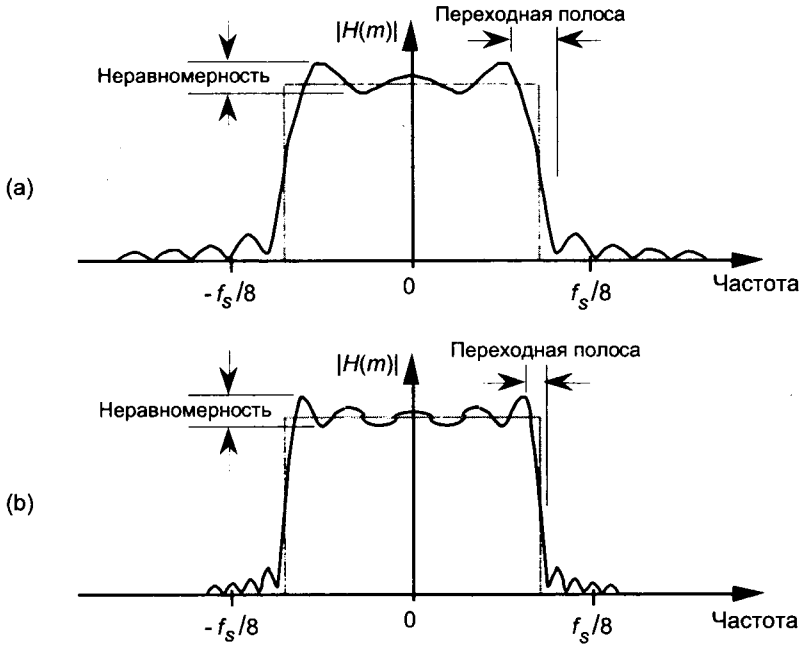


Рис. 5.22. Пульсации в полосе пропускания и переходные полосы: (a) для ФНЧ с 31 ответвлением; (b) для ФНЧ с 63 ответвлениями

Рисунок 5.22 помогает ответить на следующий вопрос. Сколько коэффициентов вида $\sin(x)/x$ следует использовать (или какой должна быть длительность $w(k)$) для получения красивой крутой переходной полосы и устранения пульсаций в полосе пропускания $H(m)$? Ответ состоит в том, что мы не можем получить и то, и другое одновременно. Не имеет значения, сколько коэффициентов $\sin(x)/x$ (ответвлений фильтра) мы используем, пульсации в полосе пропускания будут присутствовать всегда. Пока $w(k)$ содержит конечное количество единичных отсчетов (т. е. прямоугольное окно имеет конечную длительность), $W(m)$ будет содержать боковые лепестки, а они будут вызывать пульсации в полосе пропускания в результирующей частотной характеристике $H(m)$. Чтобы показать, что увеличение количества коэффициентов $\sin(x)/x$ не уменьшает размах пульсаций, мы повторяем график частотной характеристики ФНЧ с 31 ответвлением на рисунке 5.22 (a). На рисунке 5.22 (b) показана частотная характеристика фильтра в 63 коэффициентами, и пульсации в ней остались. Используя дополнительные коэффициенты фильтра $h(k)$, мы можем сделать переходную полосу более узкой, но мы не можем устранить пульсации в полосе пропускания. Эти пульсации, известные как явление Гиббса, проявляются всегда, когда некоторая функция (в данном случае $w(k)$), содержащая разрыв, представляется рядом Фурье [6-8]. Никакой конечный набор синусоид не может изменяться достаточно быстро, чтобы образовать разрыв. Иначе можно сказать, что явление Гиббса состоит в том, что независимо от длительности окна $w(k)$, его ДПФ $W(m)$ всегда будет иметь боковые лепестки. Как показано на рисунке 5.22 (b), мы можем использовать больше коэффициентов, увеличив ширину прямоугольного окна $w(k)$, чтобы сделать переходную полосу уже, но более широкое окно $w(k)$ не только не избавляет нас от пульсаций, но даже не уменьшает их размах, если $w(k)$ содержит разрывы.

5.3.2. Окна в проектировании КИХ-фильтров

Но есть и хорошая новость: мы можем минимизировать пульсации в полосе пропускания с помощью окон, точно так же, как мы минимизировали утечку спектра в разделе 3.9. Вот как это делается. На рисунке 5.20 видно, что в результате усечения бесконечной последовательности $h^{\infty}(k)$ путем умножения ее на прямоугольное окно $w(k)$ получаются коэффициенты $h(k)$, которым соответствует частотная характеристика с пульсациями в полосе пропускания. Рисунок 5.21 показывает, что пульсации в полосе пропускания вызваны боковыми лепестками $W(m)$, которые, в свою очередь, являются следствием разрывов от нуля до единицы и от единицы до нуля на концах $w(k)$. Если мы будем считать, что $w(k)$ на рисунке 5.20 — прямоугольное окно, то именно разрывы на концах этого окна являются источником пульсаций в полосе пропускания. Метод проектирования КИХ-фильтров с помощью окон представляет собой метод уменьшения разрывов окна $w(k)$ путем использования окон, отличных от прямоугольного.

Рассмотрим рисунок 5.23, чтобы понять, как можно использовать непрямоугольные окна для проектирования цифровых фильтров с низким уровнем пульсаций. Представим себе, что мы заменили прямоугольное окно $w(k)$ на рисунке 5.20 окном Блэкмана, дискретные отсчеты которого определяются формулой [1]

$$w(k) = 0.42 - 0.5\cos(2\pi k/N) + 0.08\cos(4\pi k/N) \quad \text{при } k=0, 1, 2, ..., N-1 \qquad (5\text{-}15)$$

Эта ситуация показана для $N = 31$ на рисунке 5.23 (a), где $w(k)$ (5-15) выглядит очень похоже на окно Хэмминга на рисунке 3.17 (a). Окно Блэкмана дает нам 31 коэффициент, значения которых постепенно уменьшаются к концам окна в нижней части рисунка 5.23 (a). Обратите внимание на два момента, касающихся результирующей последовательности $H(m)$ на рисунке 5.23 (b). Во-первых, хорошая новость. Пульсации в полосе пропускания существенно уменьшились по сравнению с хорошо заметными пульсациями на рисунке 5.22 (a) — так что окно Блэкмана свою функцию выполнило. Во-вторых, за уменьшение пульсаций в полосе пропускания мы заплатили расширением переходной полосы $H(m)$. Мы можем повысить крутизну характеристики в переходной полосе, увеличив количество ответвлений КИХ-фильтра. Рисунок 5.23 (c) демонстрирует улучшенную частотную характеристику при использовании 63 коэффициентов. Следовательно, использование непрямоугольных окон уменьшает уровень пульсаций в полосе пропускания за счет более плавного перехода от полосы пропускания к полосе подавления.

---

[1] Как мы упоминали в разделе 3.9, точные выражения для оконных функций зависят от диапазона изменения индекса k. Если мы примем диапазон изменения индекса, например, равным $-N/2 < k < N/2$, то выражение для окна Блэкмана изменится и будет выглядеть как $w(k) = 0.42 + 0.5\cos(2\pi k/N) + 0.08\cos(4\pi k/N)$.

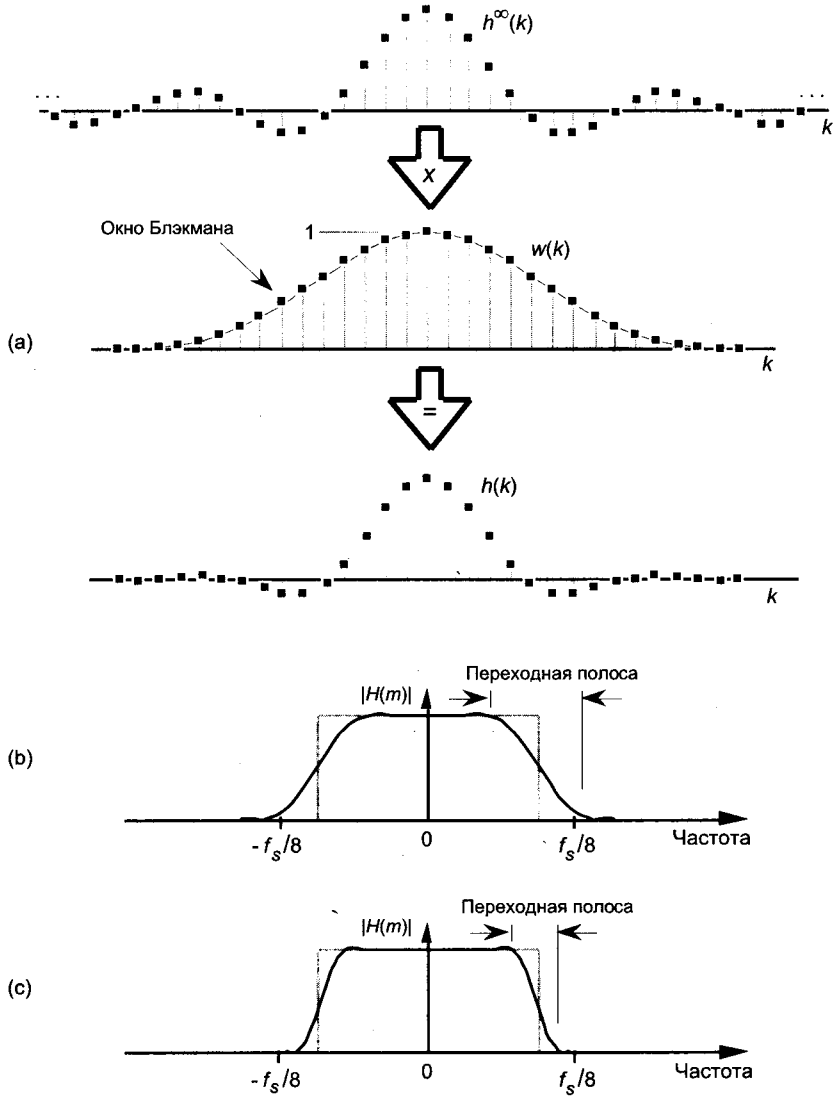


Рис. 5.23. Коэффициенты и частотная характеристика КИХ-фильтра с 31 ответвлением при использовании окна Блэкмана: (a) вычисление взвешенных коэффициентов фильтра $h(k)$; (b) частотная характеристика с пониженным уровнем пульсаций; (c) частотная характеристика фильтра с 63 ответвлениями и пониженным уровнем пульсаций

Графическое сравнение частотных характеристик для прямоугольного окна и окна Блэкмана выполняется на рисунке 5.24. (Кривые на рисунке 5.24 были получены для окон, содержащих 32 отсчета, к которым были добавлены 480 нулей с последующим вычислением 512-точечного ДПФ.) Амплитуды боковых лепестков спектра окна Блэкмана $|W(m)|$ слишком малы, чтобы их можно было увидеть в линейном масштабе. Мы можем рассмотреть эти боковые лепестки в деталях, построив оба графика частотных характеристик в логарифмическом масштабе и

пронормировав графики относительно максимальных значений главных лепестков спектров, так что эти значения в логарифмическом масштабе равны 0 дБ. Для заданного окна мы можем получить логарифмический спектр $W_{dB}(m)$ с помощью выражения

$$W_{dB}(m) = 20 \cdot \log_{10}(|W(m)| \,/\, |W(0)|). \qquad (5\text{-}16)$$

(Значение $|W(0)|$ в (5-16) представляет собой модуль вершины главного лепестка $W(m)$, когда $m = 0$.) Рисунок 5.24 (b) демонстрирует существенно уменьшенный уровень боковых лепестков окна Блэкмана, а также то, что ширина главного лепестка почти в три раза больше, чем ширина главного лепестка прямоугольного окна.

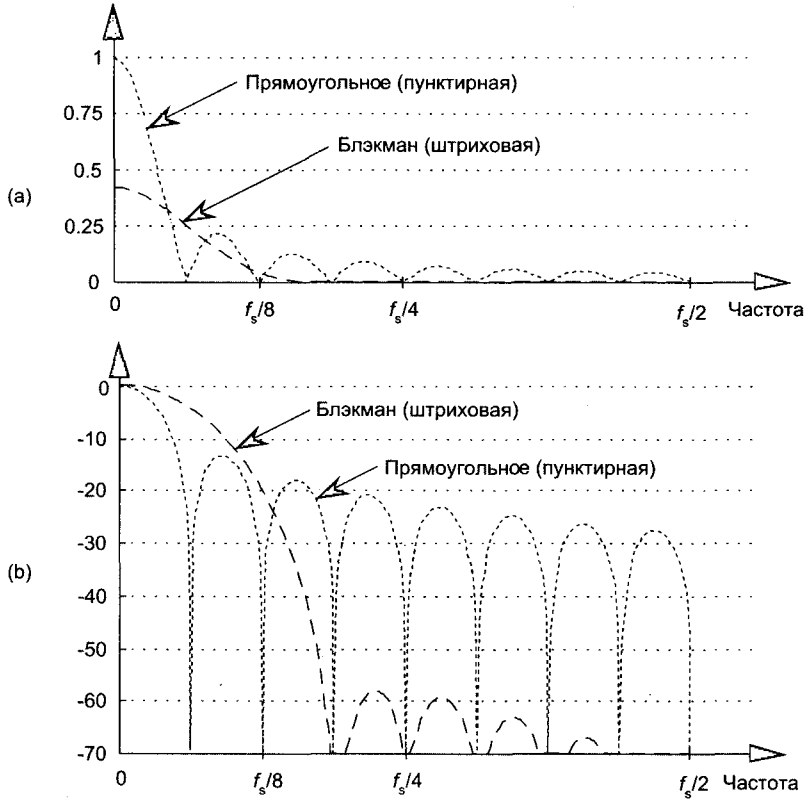


Рис. 5.24. Сравнение спектров прямоугольного окна и окна Блэкмана: (a) $|W(m)|$ в линейном масштабе; (b) графики в нормированном логарифмическом масштабе $W_{dB}(m)$

Мы, конечно же, могли бы использовать для расчета нашего КИХ ФНЧ любое другое окно из рассмотренных в разделе 3.9. Поэтому данный метод проектирования фильтров называется методом окон. Мы выбираем окно и умножаем на него функцию $h^{\infty}(k)$ вида $\sin(x)/x$, показанную на рисунке 5.23 (a), в результате чего получаем окончательный набор коэффициентов фильтра $h(k)$. Это так просто.

Прежде чем закончить описание метода окон, рассмотрим две новые оконные функции.

Хотя окно Блэкмана и другие окна, описанные в разделе 3.9, полезны для проектирования КИХ-фильтров, при их использовании доступно мало возможностей для регулирования частотных характеристик, т. е. мы можем только выбирать тип окна и довольствоваться той частотной характеристикой, которая при этом получается. Наверное, было бы очень неплохо иметь возможность гибкого выбора вариантов компромисса между шириной главного лепестка и уровнем боковых лепестков. К счастью, существуют два популярных окна, которые предоставляют такую возможность. Они называются окном Чебышева и окном Кайзера и определяются следующими внушительными выражениями:

Окно Чебышева → (его также называют окном Дольфа-Чебышева)

$w(k)$ — N-точечное ОДПФ последовательности

$$\cos\{N \cdot \cos^{-1}[\alpha \cdot \cos(\pi m/N)]\}/$$
$$/\cosh[N \cdot \cosh^{-1}(\alpha)],$$

где (5-17)

$$\alpha = \cosh[(1/N)\cosh^{-1}(10^{\gamma})]$$

и $m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

Окно Кайзера → (его называют также окном Кайзера-Бесселя)

$$w(k) = I_0\{\beta\sqrt{(1-[(k-p)/p]^2)}\}/I_0(\beta), \quad (5\text{-}18)$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ и $p = (N-1)/2$

Два типовых окна Чебышева и Кайзера и их амплитудные спектры показаны на рисунке 5.25. Для сравнения там же приведены прямоугольное окно и окно Блэкмана. (Графики на рисунке 5.25 (b) были получены для окон, рассчитанных в 32 точках с добавлением 480 нулей и последующим 512-точечным ДПФ.)

Первоначально выражение (5-17) было выведено в теории антенных решеток с использованием полиномов Чебышева [9-11]. Выражение (5-18) происходит из выполненной Кайзером аппроксимации вытянутых сфероидальных функций с помощью функций Бесселя нулевого порядки [12-13]. Пусть вас не смущает сложность выражений (5-17) и (5-18) — в данный момент нас не интересуют математические подробности их вывода. Нам только нужно убедиться в том, что *управляющие* параметры γ и β в (5-17) и (5-18) дают возможность регулировать ширину главного лепестка окна и уровень его боковых лепестков.

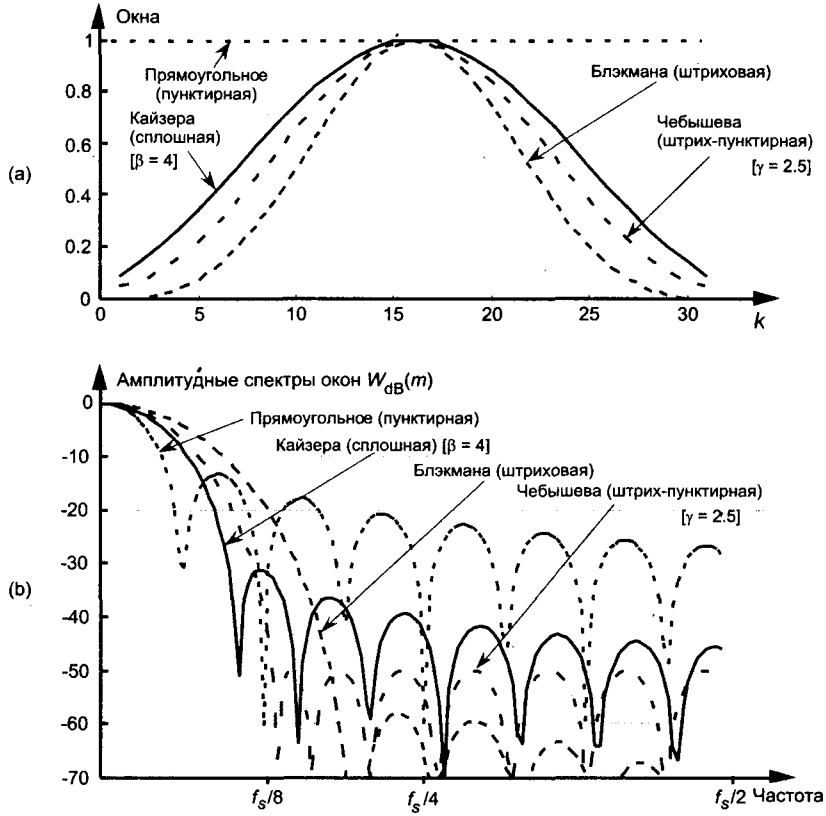


Рис. 5.25. Типовые оконные функции, используемые для проектирования ЦФ: (a) отсчеты окон во временной области; (b) модули спектров окон в дБ

Посмотрим, как выглядит эта зависимость в случае окна Чебышева, задав четыре разных значения γ и построив их спектры на рисунке 5.26. Разработчики ЦФ для расчета значений отсчетов окна Чебышева обычно используют специальные программы. Коммерческие пакеты программ ЦОС позволяют пользователю задать три параметра: вид оконной функции (в данном случае Чебышева), требуемое количество коэффициентов (количество ответвлений КИХ-фильтра) и значение γ. Задание разных значений γ дает нам возможность установить требуемый уровень боковых лепестков и посмотреть, как это влияет на ширину главного лепестка, в то время как при использовании окна Блэкмана и других окон, рассмотренных в разделе 3.9, мы лишены такой возможности. Уровень боковых лепестков окна Чебышева в децибелах составляет

$$Atten_{Cheb} = -20\gamma \qquad (5\text{-}19)$$

Следовательно, если мы хотим, например, чтобы уровень боковых лепестков не превышал −60 дБ по отношению к главному лепестку, мы в соответствии с (5-19) задаем $\gamma=3.0$ и запускаем программу, генерирующую отсчеты окна Чебышева[1].

[1] Кстати, некоторые пакеты программ ЦОС требуют задания $Atten_{Cheb}$ вместо γ. В этом случае (5-19) нам не нужно вообще.

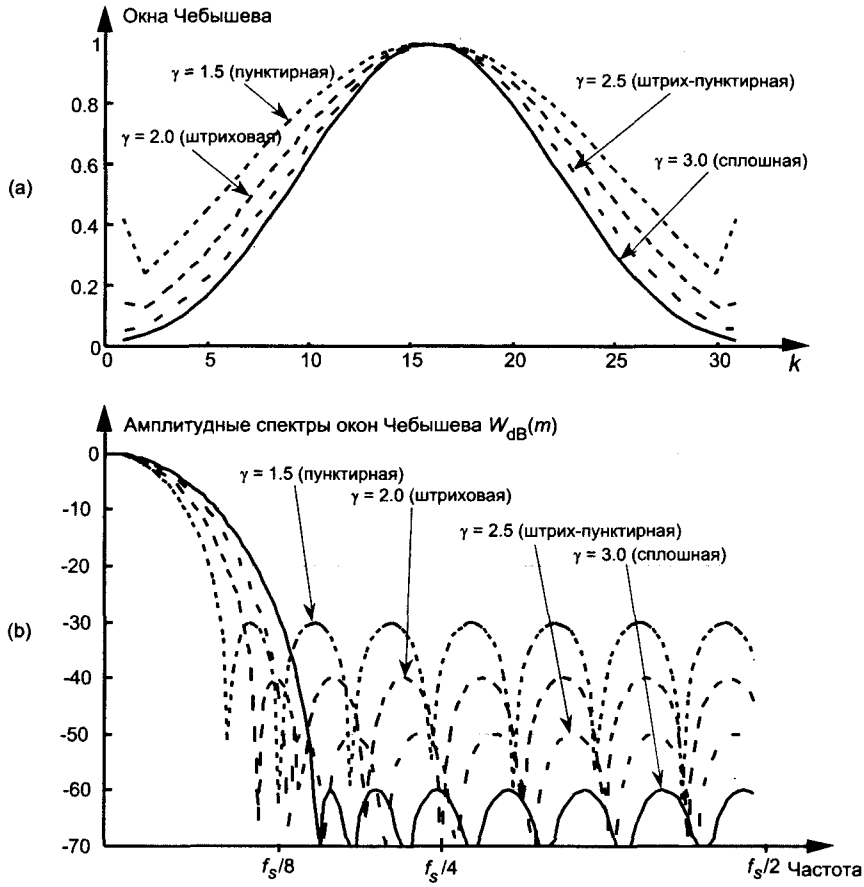


Рис. 5.26. Окно Чебышева при разных значениях γ: (a) отсчеты окна во временной области; (b) модуль спектра в дБ

То же относится и к окну Кайзера, показанному на рисунке 5.27. Коммерческие пакеты программ позволяют нам задавать значение β в (5-18) и выдают соответствующие отсчеты окна. Графики на рисунке 5.27 (b), полученные для окна Кайзера, содержащего 32 отсчета, показывают, что мы можем устанавливать требуемый уровень боковых лепестков и проследить его влияние на ширину главного лепестка.

Какое окно лучше использовать — Чебышева или Кайзера? Это зависит от решаемой задачи. Возвращаясь к рисунку 5.25 (b), заметим, что в отличие от боковых лепестков окна Чебышева, имеющих постоянный уровень, боковые лепестки окна Кайзера уменьшаются с ростом частоты. Однако вблизи главного лепестка боковые лепестки окна Кайзера выше боковых лепестков окна Чебышева. Наша главная задача — уменьшить уровень боковых лепестков, насколько это возможно без слишком сильного расширения главного лепестка. Разработчики ЦФ обычно экспериментируют с разными значениями γ и β для окон Чебышева и Кайзера, стараясь получить оптимальную форму $W_{dB}(m)$ для конкретного приложения. (С этой точки зрения низкий уровень боковых лепестков окна Блэкмана во многих

приложениях перевешивает ширину его главного лепестка.) Отдельные разновидности окон имеют свои собственные преимущества и недостатки с точки зрения проектирования КИХ-фильтров. Независимо от того, какое непрямоугольное окно используется, оно всегда уменьшает пульсации АЧХ КИХ-фильтра в полосе пропускания по сравнению с прямоугольным окном. Заинтересованный читатель может найти очень подробное описание окон в работе [14].

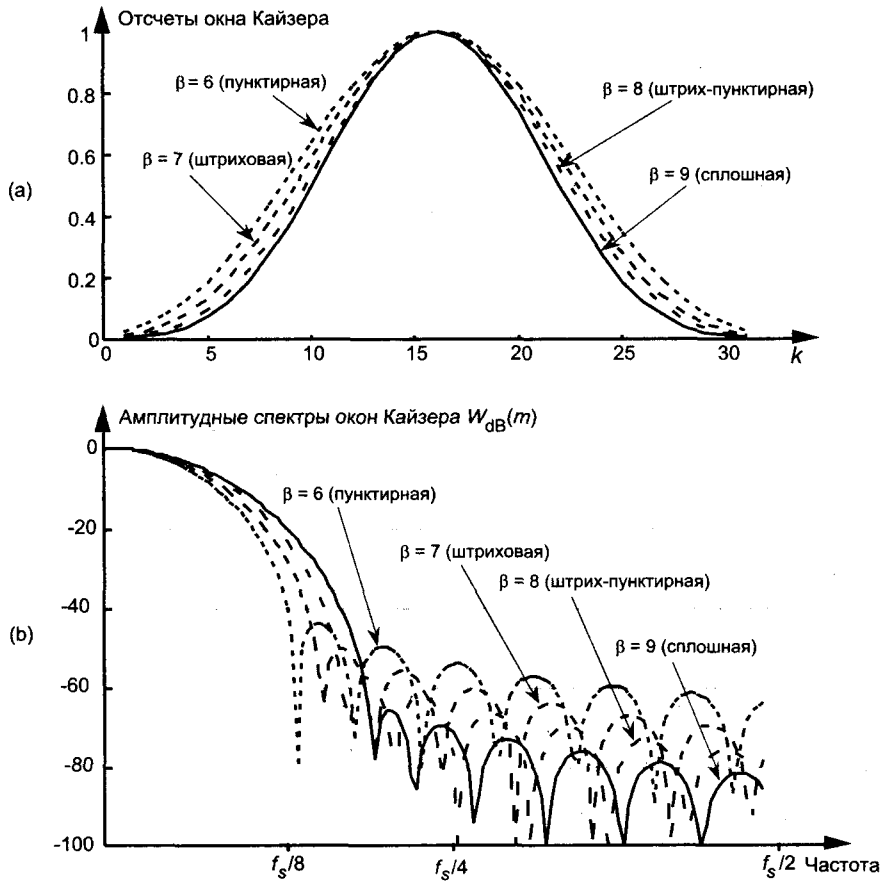


Рис. 5.27. Окна Кайзера для разных значений β: (a) отсчеты окна во временной области; (b) логарифмический амплитудный спектр в дБ

5.4. Проектирование полосовых КИХ-фильтров

В качестве первого шага проектирования полосовых КИХ-фильтров можно использовать проектирование ФНЧ методом окон. Допустим, нам необходимо рассчитать КИХ-фильтр с 31 ответвлением и с АЧХ, показанной на рисунке 5.22 (a), центр которой вместо 0 Гц приходится на $f_s/4$ Гц. Если мы обозначим

коэффициенты КИХ ФНЧ как $h_{lp}(k)$, наша задача сводится к вычислению коэффициентов полосового фильтра $h_{bp}(k)$. Как показано на рисунке 5.28, мы можем сдвинуть частотную характеристику $H_{lp}(m)$, умножив коэффициенты $h_{lp}(k)$ на синусоиду частотой $f_s/4$ Гц. Эта синусоида представлена на рисунке 5.28 (а) последовательностью $s_{shift}(k)$, отсчеты которой получены путем дискретизации синусоиды с частотой четыре отсчета на период. В результате получаем коэффициенты $h_{bp}(k)$ полосового фильтра

$$h_{bp}(k) = h_{lp}(k) \cdot s_{shift}(k), \qquad (5\text{-}20)$$

частотная характеристика которого $|H_{bp}(m)|$ показана на рисунке 5.28 (b) сплошной черной линией. Уровень АЧХ $|H_{bp}(m)|$ вдвое ниже уровня исходной АЧХ $|H_{lp}(m)|$, потому что, когда $s_{shift}(k)$ соответствует частоте $f_s/4$, половина значений коэффициентов $h_{bp}(k)$ оказываются равными нулю. Данный эффект имеет важное практическое следствие. Это значит, что, когда мы реализуем полосовой КИХ-фильтр с N-ответвлениями, центральная частота АЧХ которого равна $f_s/4$ Гц, нам необходимо выполнить только $N/2$ умножений на каждый выходной отсчет. (Нет необходимости умножать входной отсчет $x(n-k)$ на 0 перед суммированием произведений в (5-6) и на рисунке 5.13, не правда ли? Мы просто не выполняем такие умножения вообще.) Конечно, когда центральная частота полосового КИХ-фильтра отлична от $f_s/4$, мы вынуждены выполнять все N умножений на каждый выходной отсчет КИХ-фильтра.

Обратите здесь внимание на то, что коэффициенты ФНЧ $h_{lp}(k)$ на рисунке 5.28 (а) не были взвешены каким-нибудь окном. На практике следовало бы в (5-20) использовать взвешенные коэффициенты $h_{lp}(k)$, чтобы уменьшить пульсации в полосе пропускания. Если бы мы хотели получить центральную частоту АЧХ полосового фильтра, равную другой частоте вместо $f_s/4$, нам просто нужно было бы модифицировать $s_{shift}(k)$ так, чтобы она представляла дискретные отсчеты синусоиды, частота которой равна требуемой центральной частоте. Эту новую последовательность $s_{shift}(k)$ следует использовать затем в (5-20) для получения новых коэффициентов $h_{bp}(k)$.

5.5. Проектирование КИХ-фильтров верхних частот

Двигаясь дальше, мы можем использовать метод проектирования полосовых КИХ-фильтров для проектирования КИХ-фильтров верхних частот (ФВЧ). Чтобы получить коэффициенты ФВЧ, нам необходимо только изменить сдвигающую последовательность $s_{shift}(k)$ так, чтобы она представляла собой дискретизованную синусоиду частотой $f_s/2$. Этот процесс показан на рисунке 5-29. Коэффициенты результирующего КИХ ФВЧ $h_{hp}(k)$ равны

$$h_{hp}(k) = h_{lp}(k) \cdot s_{shift}(k) = h_{lp}(k) \cdot (1, -1, 1, -1, 1, -1 \text{ и т. д.}), \qquad (5\text{-}21)$$

а АЧХ фильтра $|H_{hp}(m)|$ показана на рисунке 5.29 (b) черной линией. Поскольку $s_{shift}(k)$ на рисунке 5.29 (a) содержит единицы чередующегося знака, мы видим, что $h_{hp}(k)$ получается из $h_{lp}(k)$ простым изменением знака каждого второго коэффициента на противоположный.

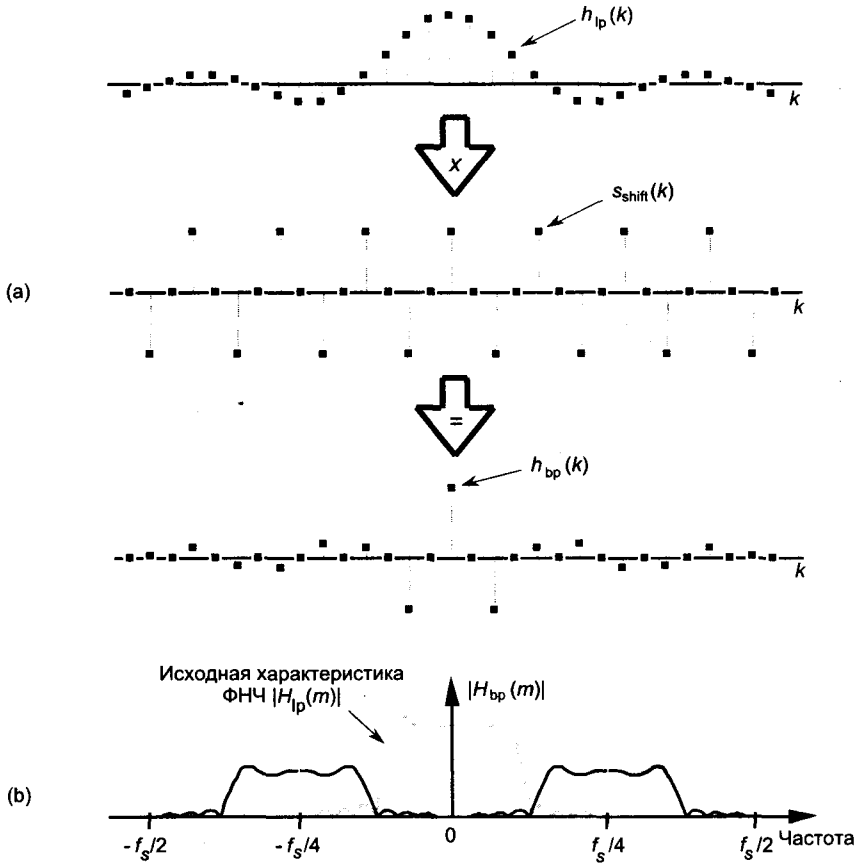


Рис. 5.28. Полосовой фильтр, центральная частота АЧХ которого равна $f_s/4$: (a) генерация коэффициентов $h_{bp}(k)$ для 31 ответвления: (b) АЧХ $|H_{bp}(m)|$

В отличие от $|H_{bp}(m)|$ на рисунке 5.28 (b), характеристика $|H_{hp}(m)|$ на рисунке 5.29 (b) имеет тот же уровень, что и исходная $|H_{lp}(m)|$.

Здесь тоже обратите внимание на то, что коэффициенты ФНЧ $h_{lp}(k)$ на рисунке 5.29 (a) не были модифицированы посредством окна. На практике, мы бы использовали взвешенные коэффициенты $h_{lp}(k)$ для уменьшения неравномерности АЧХ в полосе пропускания перед использованием (5-21).

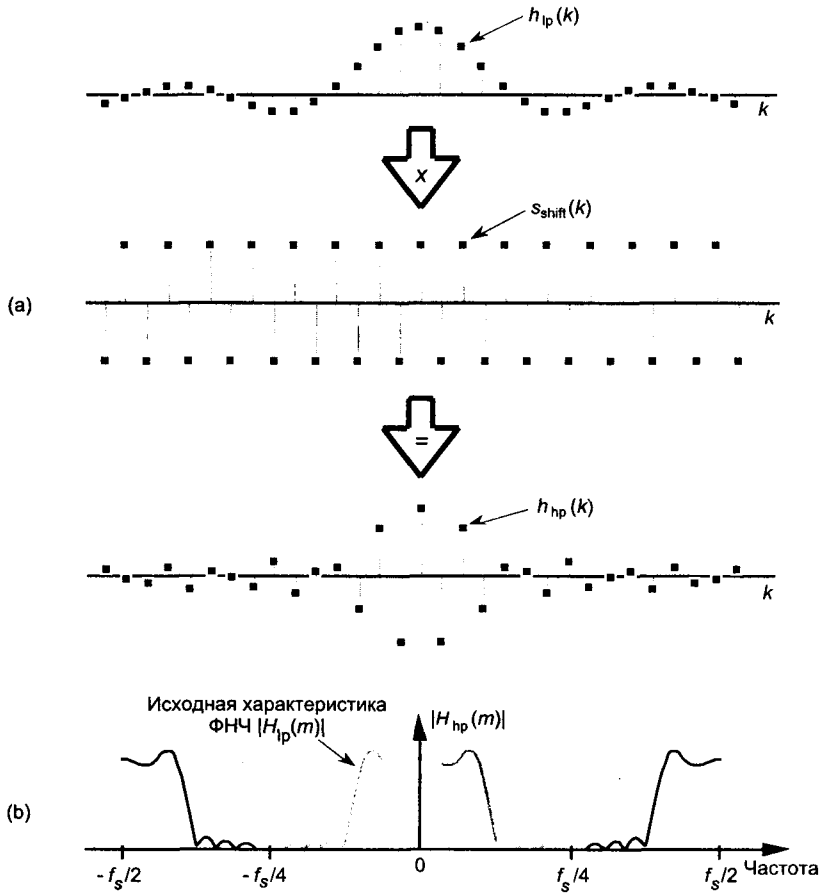


Рис. 5.29. Фильтр верхних частот, АЧХ которого центрирована относительно частоты $f_s/2$: (a) генерация 31 коэффициента фильтра $h_{hp}(k)$; (b) АЧХ $|H_{hp}(m)|$

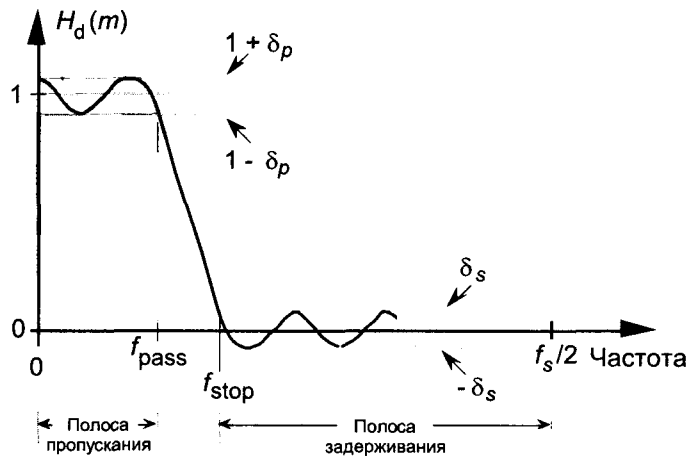


Рис. 5.30. Задание требуемой АЧХ КИХ ФНЧ при проектировании методом замен Ремеза

5.6. Проектирование КИХ-фильтров методом замен Ремеза

Познакомимся с еще одним методом проектирования КИХ-фильтров, который широко используется на практике. Метод замен Ремеза (который также называют методом Паркса-Маклеллана или оптимальным методом) — это популярный метод, используемый для проектирования высококачественных КИХ-фильтров. Чтобы использовать этот метод, мы должны изобразить требуемую АЧХ $H_d(m)$, подобную той, которая показана на рисунке 5.30.

Мы должны задать требуемую границу полосы пропускания (частоту среза) f_{pass} и частоту, на которой начинается полоса задерживания, f_{stop}. Кроме того, мы должны задать значения переменных δ_p и δ_s, которые задают требуемые неравномерность АЧХ в полосе пропускания и подавление в полосе задерживания. Неравномерности АЧХ в полосах пропускания и задерживания в децибелах связаны с δ_p и δ_s выражениями [15]

$$\textit{Пульсации в полосе пропускания} = 20 \bullet \log_{10}(1 + \delta_p), \qquad (5\text{-}22)$$

и

$$\textit{Пульсации в полосе задерживания} = -20 \bullet \log_{10}(\delta_s). \qquad (5\text{-}22')$$

(Некоторые ранние журнальные статьи, описывающие метод Ремеза, для определения пульсаций в полосе пропускания в децибелах использовали другое допустимое выражение $-20 \bullet \log_{10}(\delta_p)$. Но сегодня наиболее часто используется (5-22).) Затем мы вводим эти параметры в компьютерную программу, которая выдает N коэффициентов фильтра $h(k)$, при этом N задает минимальное количество ответвлений, необходимое для получения заданной АЧХ.

С другой стороны, некоторые программы, реализующие метод Ремеза, предполагают, что мы стремимся сделать δ_p и δ_s как можно меньше и требуют задания только требуемой АЧХ $H_d(m)$, пример которой показан на рисунке 5.31 черными точками. Программа сама определяет незаданные значения (серые точки на графике) $H_d(m)$ так, чтобы минимизировать отклонение АЧХ фильтра от требуемой характеристики при минимальных значениях δ_p и δ_s. Разработчик фильтра имеет возможность определить некоторые значения $H_d(m)$ в переходной полосе, и программа сама рассчитывает незаданные значения $H_d(m)$ в переходной полосе. В этой версии алгоритма Ремеза наибольшее значение приобретает способ, которым мы определяем переходную полосу. Мы хотим минимизировать ее ширину и в то же время минимизировать пульсации АЧХ в полосах пропускания и задерживания. Таким образом, точный способ проектирования КИХ-фильтра с помощью метода замен Ремеза зависит от используемой программы проектирования фильтров. Поскольку математика, используемая методом замен Ремеза, достаточно сложна, мы не будем касаться ее здесь [16-20]. Просто запомните, что метод замен Ремеза дает фильтры, похожие на фильтры Чебышева, АЧХ которых настолько приближена к требуемой характеристике $H_d(m)$, насколько это возможно при заданном количестве ответвлений.

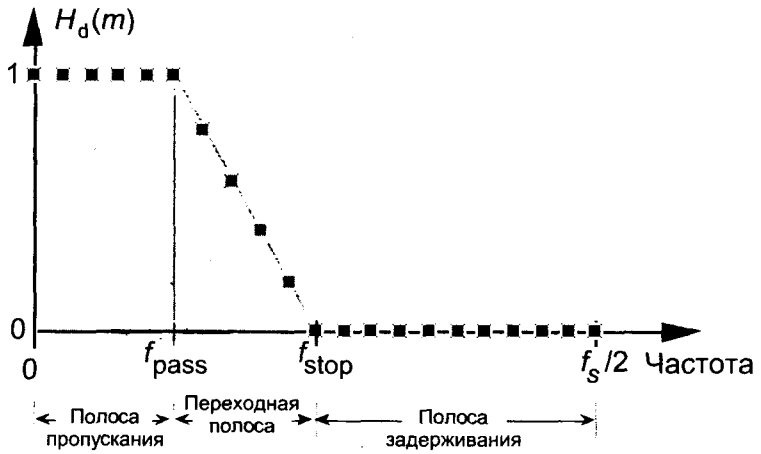


Рис. 5.31. Другой метод задания требуемой АЧХ для КИХ ФНЧ при использовании метода замены Ремеза

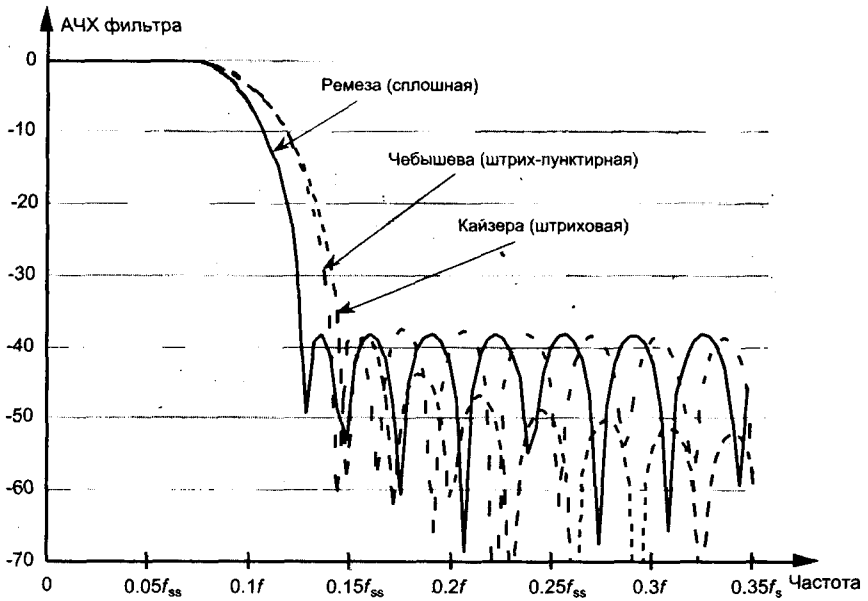


Рис. 5.32. Сравнение частотных характеристик КИХ-фильтров с 31 ответвлением: Ремеза, с окном Чебышева и с окном Кайзера

Преимущества метода Ремеза хорошо видны на рисунке 5.32 при сравнении характеристик фильтров, полученных разными методами. На этом рисунке показаны характеристики КИХ-фильтров с 31 ответвлением, имеющих одинаковую полосу пропускания, полученных методом Ремеза, а также методом окон с использованием окон Чебышева и Кайзера. Обратите внимание на то, что все фильтры имеют примерно одинаковые боковые лепестки вблизи главного лепестка, но фильтр Ремеза имеет самую крутую переходную полосу.

5.7. Полуполосные КИХ-фильтры

Существует особый вид КИХ-фильтров, который оказался полезным в схемах прореживания [21-25]. Называется такой фильтр *полуполосным КИХ-фильтром*, его частотная характеристика симметрична относительно частоты $f_s/4$, как показано на рисунке 5.33 (a). При этом сумма f_{pass} и f_{stop} равна $f_s/2$. Фильтр с такой частотной характеристикой обладает одним прекрасным свойством: каждый второй отсчет его импульсной характеристики, кроме центрального, равен нулю. Это позволяет сократить количество умножений при реализации такого фильтра примерно в два раза. В качестве примера на рисунке 5.33 (b) показаны коэффициенты полуполосного фильтра с 31 ответвлением, для которого Δf была задана равной примерно $f_s/32$ и использовался метод замен Ремеза. (Для сохранения симметрии параметры δ_p и δ_s были заданы равными друг другу.)

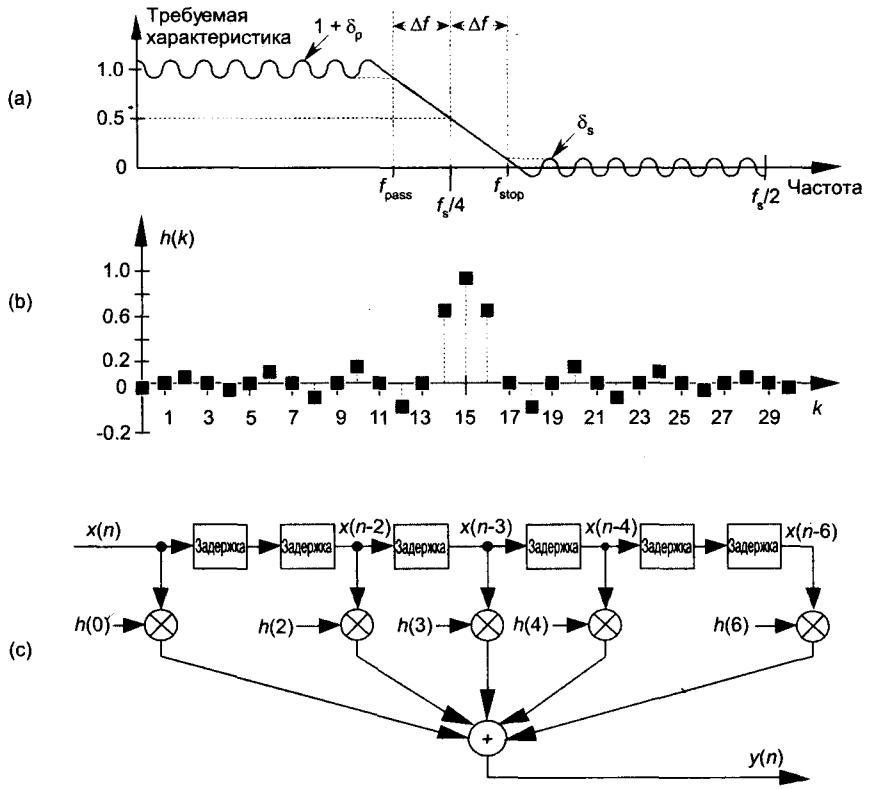


Рис. 5.33. Полуполосный КИХ-фильтр: (a) АЧХ (центр переходной полосы находится на частоте $f_s/4$): (b) коэффициенты фильтра с 31 ответвлением; (c) структура полуполосного фильтра с семью ответвлениями

Обратите внимание на то, что каждый второй коэффициент $h(k)$ равен нулю, так что мы выполняем только 17 умножений на выходной отсчет вместо ожидаемых 31 умножения. Для полуполосного фильтра с S ответвлениями нам потребуется

выполнить только $(S + 1)/2 + 1$ умножений на выходной отсчет[1]. Однако, будьте внимательны, количество коэффициентов не может быть произвольным. Чтобы построить полуполосный КИХ-фильтр с линейной ФЧХ, сумма $S + 1$ *должна* делиться на 4 без остатка. На рисунке 5.33 (с) показана структура простого полуполосного КИХ-фильтра с семью ответвлениями, в этой структуре умножители для $h(1)$ и $h(5)$ отсутствуют.

5.8. Фазо-частотная характеристика КИХ-фильтров

Хотя мы привели несколько примеров сдвига фазы выходного сигнала для усредняющего КИХ-фильтра на рисунке 5.10, фазо-частотная характеристика (ФЧХ) КИХ-фильтра заслуживает дополнительного рассмотрения. Одной из замечательных особенностей КИХ-фильтров является линейность их ФЧХ. Продемонстрируем ее на примере. Имея 25 коэффициентов КИХ-фильтра $h(k)$, показанных на рисунке 5.34 (a), мы можем выполнить ДПФ и найти частотную характеристику фильтра $H(m)$. Нормированные действительная и мнимая части, а также модуль $H(m)$ показаны на рисунках 5.34 (b) и 5.34 (c) соответственно[2]. Поскольку каждый отсчет $H(m)$ является комплексным числом, отсчеты можно представить действительной и мнимой частями или, что эквивалентно, модулем $|H(m)|$ и аргументом $H_\phi(m)$, показанным на рисунке 5.35 (a).

Аргумент комплексного числа вычисляется как арктангенс отношения мнимой части к действительной части, или $\phi = \tan^{-1}(imag/real)$. Отсчеты ФЧХ $H_\phi(m)$ определяются по отсчетам, приведенным на рисунке 5.34 (b).

ФЧХ на рисунке 5.35 (a) выглядит линейной на отдельных участках частотной оси, но что делать с многочисленными скачками, или разрывами, характеристики? Если мы построим в комплексной плоскости векторы одинаковой длины, углы которых относительно действительной оси совпадают с аргументами $H_\phi(m)$, начиная с $m = 0$, то мы получим диаграмму, показанную на рисунке 5.35 (b). Поскольку действительная часть $H(0)$ отлична от нуля, а мнимая часть $H(0)$ равна 0, $H_\phi(0)=0$, и соответствующий радиус-вектор лежит на действительной оси, как показано в правой части рисунка 5.35 (b). Углы всех последующих фазоров изменяются с шагом −33.75°, так что фазоры образуют последовательность, разворачивающуюся в направлении движения часовой стрелки. Причину первого разрыва на рисунке 5.35 (a) мы обнаруживаем при построении вектора с углом $H_\phi(6)$. Исходя из действительной и мнимой частей $H(6)$, мы должны построить соответствующий фазор под углом −202.5° к действительной оси.

---

[1] В разделе 13.7 приводится метод дальнейшего снижения количества умножений для КИХ-фильтров с линейной ФЧХ на основе линии задержки с ответвлениями, включая и полуполосные фильтры.

[2] Для получения $H(m)$ достаточно взять любой размер ДПФ, превышающий длину импульсной характеристики $h(k)$, равную 25. Мы дополнили последовательность $h(k)$ нулями, чтобы взять 128-точечное ДПФ и получить значения отсчетов $H(m)$, показанные на рисунке 5.34.

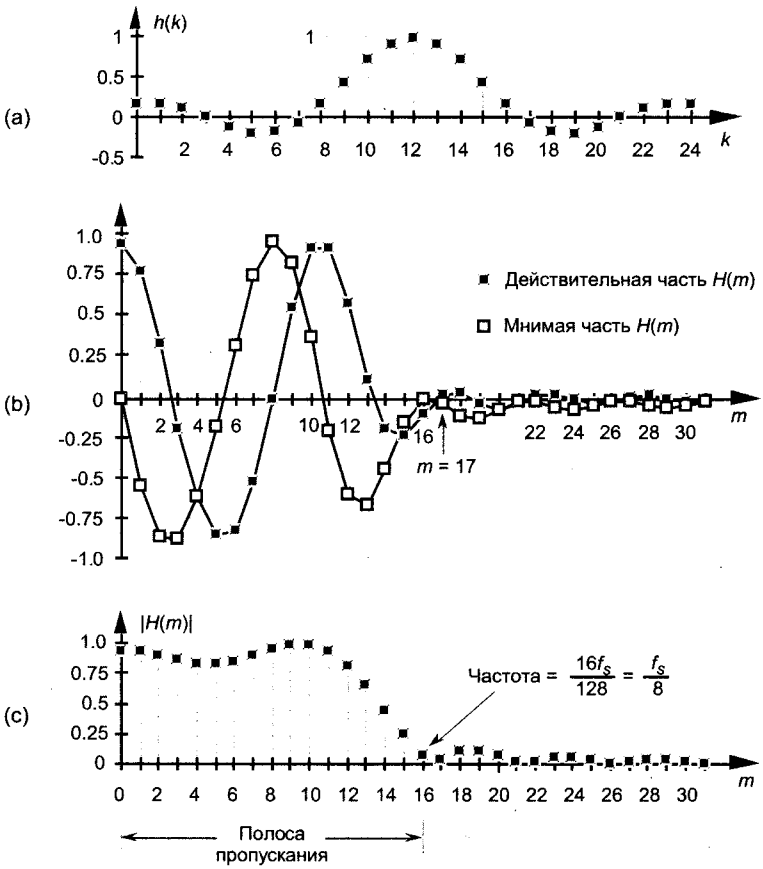


Рис. 5.34. Частотная характеристика КИХ-фильтра $H(m)$: (a) коэффициенты фильтра $h(k)$; (b) действительная и мнимая части $H(m)$; (c) модуль $H(m)$

Но на рисунке 5.35 (a) $H_\phi(6) = 157.5°$. Проблема заключается в программе, вычисляющей значения арктангенса, показанные на рисунке 5.35 (a). Программа добавляет 360° ко всем отрицательным углам, лежащим в пределах $-180° > \phi \geq -360°$, т. е. к углам, лежащим в верхней полуплоскости. Это делает ϕ положительным углом в диапазоне $0° < \phi \leq 180°$, и этот результат изображен на графике. (Этот явный разрыв между $H_\phi(5)$ и $H_\phi(6)$ называется *заворотом фазы*.) Следовательно, истинное значение $H_\phi(6) = -202.5°$ преобразуется в +157.5°, как показано в скобках на рисунке 5.35 (b).

Если мы продолжим нашу диаграмму для последующих отсчетов $H_\phi(m)$, мы увидим, что углы наклона векторов будут продолжать уменьшаться с шагом −33.75°. Если мы компенсируем добавку, вносимую программой, и построим на графике углы, которые меньше −180°, *развернув* таким образом фазу, мы получим истинные значения $H_\phi(m)$, показанные на рисунке 5.35 (c)[1]. Заметим, что $H_\phi(m)$

[1] Если при построении графика ФЧХ фильтра мы встречаем угол ϕ, который выглядит как подозрительный разрыв, следует добавить к нему 360°, если ϕ меньше нуля или −360°, когда ϕ положителен, чтобы проверить, удается ли таким образом компенсировать особенности программы.

действительно линейна в полосе пропускания $H(m)$. На отсчете $H_\phi(17)$ наша частотная характеристика $H(m)$ претерпевает инверсию знака действительной части, в то время как мнимая часть остается отрицательной — это приводит к появлению истинного разрыва в ФЧХ, который является неотъемлемой характеристикой отсчета $H(m)$ при $m = 17$. (Каждый раз, когда действительная часть $H(m)$ меняет знак, возникают дополнительные разрывы ФЧХ, как показано на рисунке 5.35 (c).) Читатель может задуматься над тем, почему мы так озабочены линейностью ФЧХ $H(m)$. Ответ на этот вопрос очень важен и требует введения понятия групповой задержки.

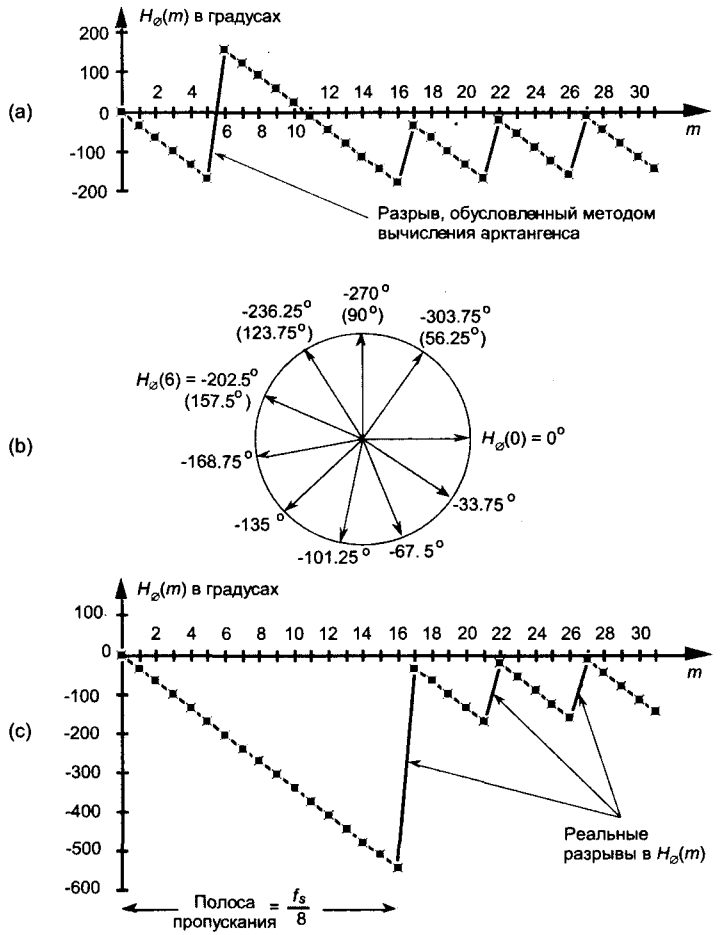


Рис. 5.35. ФЧХ КИХ-фильтра $H_\phi(m)$ в градусах: (a) вычисленная ФЧХ $H_\phi(m)$; (b) первые десять фаз $H_\phi(m)$ в полярных координатах в градусах; (c) реальная $H_\phi(m)$

Групповая задержка определяется как производная ФЧХ по частоте, взятая с обратным знаком, или $G = -\Delta\phi/\Delta f$. Следовательно, для КИХ-фильтров групповая задержка представляет собой наклон ФЧХ $H_\phi(m)$. Когда групповая задержка постоянна, как в полосе пропускания всех КИХ-фильтров, имеющих симметричные коэффициенты, все частотные компоненты входного сигнала фильтра задер-

живаются на его выходе на одно и то же время G. Это значит, что выходной сигнал фильтра не подвергается фазовым искажениям, а это критически важно для коммуникационных сигналов. Для сигналов с амплитудной модуляцией (АМ) постоянная групповая задержка позволяет сохранить форму огибающей, несущей информацию о модулирующем сигнале. Нелинейная ФЧХ приводит к искажению звукового сигнала, восстановленного из амплитудно-модулированного несущего сигнала, используемого в радиовещании, приводит к смазыванию границ телевизионных изображений, размывает крутые фронты радиолокационных импульсов и повышает вероятность ошибок в цифровых системах связи. (Групповую задержку иногда называют *задержкой огибающей*, потому что первоначально групповая задержка исследовалась с точки зрения ее влияния на огибающую, или модулирующий сигнал, в системах с амплитудной модуляцией.) Конечно, групповая задержка за пределами полосы пропускания нас мало волнует, поскольку всю энергию сигналов, выходящую за пределы полосы пропускания, мы стараемся подавить посредством фильтрации.

Было показано, что групповая задержка в полосе пропускания цифрового КИХ-фильтра с S ответвлениями определяется выражением

$$G = (S - 1)t_s/2, \tag{5-23}$$

где t_s — период дискретизации $(1/f_s)$[1]. Эта групповая задержка измеряется в секундах. Если убрать из (5-23) множитель t_s, то групповая задержка будет измеряться в отсчетах. Задержка G, измеренная в отсчетах, всегда принимает целые значения для фильтров с нечетным количеством ответвлений и нецелые значения для фильтров четной длины.

Хотя для получения частотных характеристик на рисунках 5.34 и 5.35 мы использовали 128-точечное ДПФ, мы с таким же успехом могли бы использовать $N = 32$ или $N = 64$ точки. Эти ДПФ с меньшим количеством точек дают фазовые характеристики, показанные на рисунках 5.36 (a) и 5.36 (b). Обратите внимание на отличие ФЧХ при $N = 32$ на рисунке 5.36 (a) от ФЧХ с $N = 128$ на рисунке 5.36 (c).

На рисунке 5.36 (c) приращение фазы намного меньше. Приращение фазы в полосе пропускания $\Delta\phi$ определяется выражением

$$\Delta\phi = (-G \cdot 360°)/N \tag{5-24}$$

где N — количество точек ДПФ. Таким образом, для нашего фильтра с $S = 25$ ответвлениями на рисунке 5.34 (a), $G = 12$ и $\Delta\phi$ на рисунке 5.36 (a) равно $-12 \cdot 360°/32 = -135°$ а на рисунке 5.36 (c) $\Delta\phi$ равно $-33.75°$. Если мы посмотрим внимательно на значения отсчетов, показанные на рисунке 5.36 (a), то увидим, что они встречаются среди отсчетов на рисунках 5.36 (b) и 5.36 (c).

Закончим это обсуждение ФЧХ КИХ-фильтров напоминанием сути фазо-частотной характеристики. Фаза, или фазовая задержка, на выходе КИХ-фильтра представляет собой фазу первого выходного отсчета относительно фазы первого входного отсчета фильтра. В полосе пропускания фазовый сдвиг является линейной функцией частоты. Это справедливо только для фильтров с симметричными коэффициентами. Хорошая иллюстрация фазовой задержки КИХ-фильтра приведена на рисунке 5.10.

---

[1] Это выражение получено в разделе 3.4 работы [16] и на странице 597 работы [19].

Для КИХ-фильтров выходной сдвиг фазы, измеренный в градусах, для сигнала с частотой, лежащей в полосе пропускания $f = mf_s/N$, выражается как

$$\textit{Фазовая задержка} = H_\phi(mf_s/N) = m \cdot \Delta\phi = (-m \cdot G \cdot 360°)/N. \quad (5\text{-}25)$$

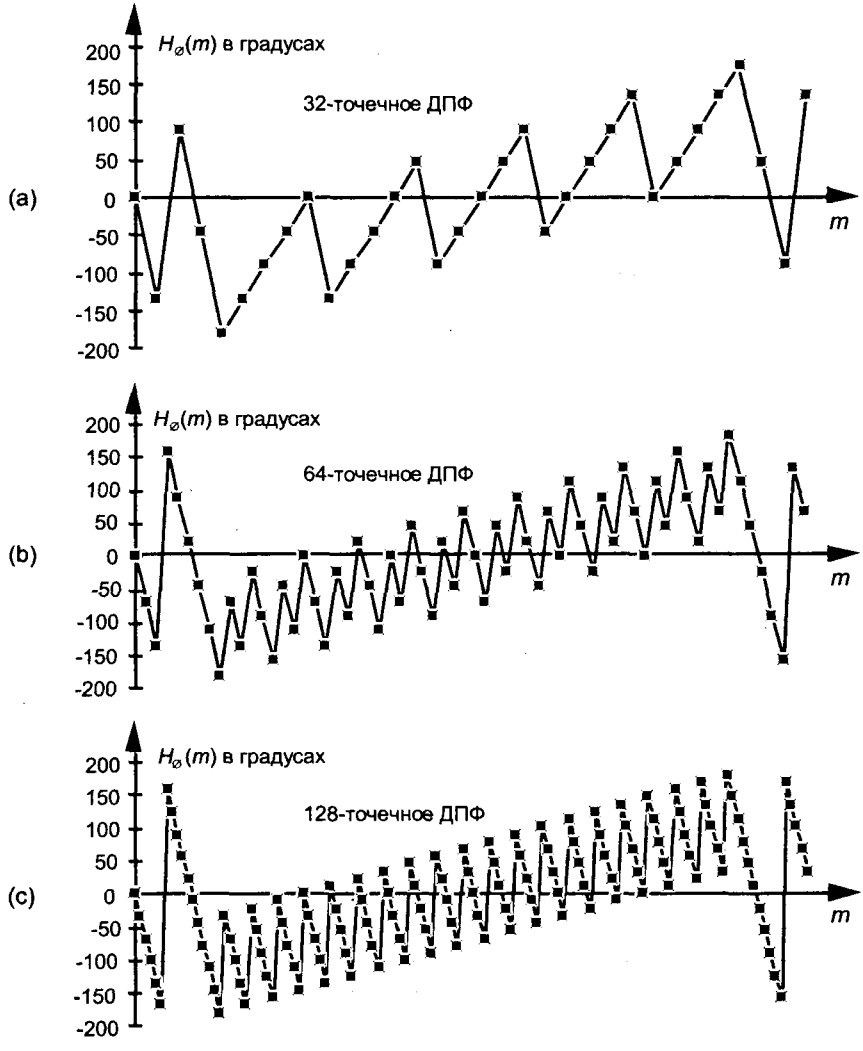


Рис. 5.36. ФЧХ КИХ-фильтра $H_\phi(m)$ в градусах: (a) вычисленная с помощью 32-точечного ДПФ; (b) с использованием 64-точечного ДПФ; (c) с использованием 128-точечного ДПФ

Мы можем проиллюстрировать (5-25) и показать соотношение между фазовыми характеристиками на рисунке 5.36, рассмотрев фазовую задержку, связанную с частотой $f_s/32$, в таблице 5.2. Групповая задержка описывается подробнее в приложении F, где продемонстрировано искажение огибающей, вызванное нелинейностью ФЧХ фильтра.

Таблица 5.2. Значения, использованные в (5-25) для частоты $f_s/32$

Размер ДПФ, N	Индекс m	$H_\phi(mf_s/N)$
32	1	−135°
64	2	−135°
128	4	−135°

5.9. Обобщенное описание дискретной свертки

Хотя первоначально свертка использовалась как инструмент анализа непрерывных систем, мы теперь знаем, что свертка проявляется во всех аспектах цифровой обработки сигналов. Свертка влияет на полученные нами результаты всегда, когда мы анализируем или фильтруем какое-либо конечное множество отсчетов данных, полученных от линейной инвариантной системы. Свертка не только сводит ДПФ к простой аппроксимации непрерывного преобразования Фурье; она представляет собой причину, по которой дискретные спектры периодичны в частотной области. Интересно отметить, что, хотя мы используем свертку для реализации цифровых КИХ-фильтров, именно ее влияние несет ответственность за появление пульсаций частотной характеристики, препятствующих построению идеального цифрового фильтра. Ее влияние столь обширно, что отказ от свертки перевернул бы всю цифровую обработку с ног на голову.

Понятие свертки всегда было сложным для понимания начинающими. Это не удивительно по нескольким причинам. Влияние свертки на дискретную обработку сигналов не так очевидно для людей, не имеющих опыта работы с дискретными сигналами, а математика свертки на первых порах кажется головоломной. Более того, многие авторы с их поспешностью, иногда оправданной, представляют уравнение свертки и сразу переходят к его использованию в качестве инструмента анализа, не объяснив его происхождения и смысла. Например, автор этой книги однажды обнаружил в профессиональном журнале статью, объявленную как введение в БПФ, в которой свертка определялась просто как нечто подобное рисунку 5.37 без каких либо дальнейших объяснений!

К сожалению, немногие новички могут самостоятельно извлечь какое-либо понимание смысла свертки из рисунка 5.37. Здесь мы разрешим эту проблему, дав определение свертки и разобрав несколько простых примеров. Мы завершим эту главу обсуждением мощной теоремы о свертке и демонстрацией того, почему она так полезна для качественного анализа дискретных систем.

$$Y_j = \sum_{k=0}^{N-1} P_k \cdot Q_{j-k},$$

или

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} Q_0 & Q_{N-1} & Q_{N-2} & \cdots & Q_1 \\ Q_1 & Q_0 & Q_{N-1} & \cdots & Q_2 \\ Q_2 & Q_1 & Q_0 & \cdots & Q_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{N-1} & Q_{N-2} & Q_{N-3} & \cdots & Q_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{N-1} \end{bmatrix}$$

Теорема: если

$$P_j \leftarrow ДПФ \rightarrow A_n,$$
$$Q_j \leftarrow ДПФ \rightarrow B_n \quad \text{и}$$
$$Y_j \leftarrow ДПФ \rightarrow C_n,$$

то

$$C_n = N \cdot A_n \cdot B_n$$

Рис. 5.37. Один очень эффективный, но обескураживающий способ определения свертки

5.9.1. Дискретная свертка во временной области

Дискретная свертка представляет собой процесс, на вход которого поступают две последовательности и результатом которого является новая последовательность. На вход свертки могут поступать две последовательности во временной области, при этом результат будет тоже последовательностью во временной области или две последовательности в частотной области, преобразуемые в последовательность в частотной области. (Хотя для того, чтобы свертка имела какой-то практический смысл, обе последовательности должны принадлежать одной области, их длины не обязательно должны быть равными.) Допустим, мы имеем две последовательности $h(k)$ длины P и $x(k)$ длины Q во временной области. Выходная последовательность свертки $y(n)$ двух входных последовательностей определяется формулой

$$y(n) = \sum_{k=0}^{P+Q-2} h(k)x(n-k), \qquad (5\text{-}26)$$

Рассмотрим (5-26) на примере, используя последовательности $h(k)$ и $x(k)$, показанные на рисунке 5.38. В этом примере мы можем записать слагаемые для каждого $y(n)$ в (5-26) как

$$y(0) = h(0)x(0-0) + h(1)x(0-1) + h(2)x(0-2) + h(3)x(0-3) + h(4)x(0-4) + h(5)x(0-5),$$
$$y(1) = h(0)x(1-0) + h(1)x(1-1) + h(2)x(1-2) + h(3)x(1-3) + h(4)x(1-4) + h(5)x(1-5),$$
$$y(2) = h(0)x(2-0) + h(1)x(2-1) + h(2)x(2-2) + h(3)x(2-3) + h(4)x(2-4) + h(5)x(2-5),$$
$$y(3) = h(0)x(3-0) + h(1)x(3-1) + h(2)x(3-2) + h(3)x(3-3) + h(4)x(3-4) + h(5)x(3-5),$$
$$y(4) = h(0)x(4-0) + h(1)x(4-1) + h(2)x(4-2) + h(3)x(4-3) + h(4)x(4-4) + h(5)x(4-5),$$

и

$$y(5) = h(0)x(5-0) + h(1)x(5-1) + h(2)x(5-2) + h(3)x(5-3) + h(4)x(5-4) + h(5)x(5-5). \qquad (5\text{-}27)$$

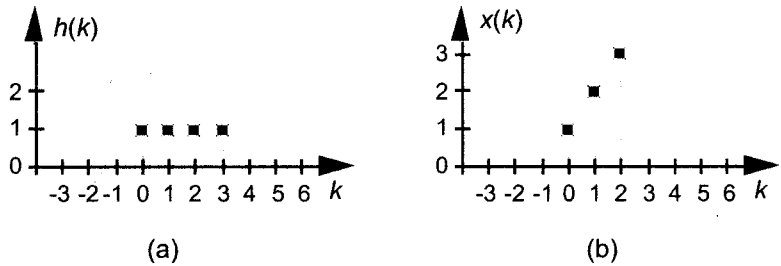


Рис. 5.38. Входные последовательности для примера свертки: (a) первая последовательность $h(k)$ длины $P = 4$; (b) вторая последовательность $x(k)$ длины $Q = 3$

При $P = 4$ и $Q = 3$ мы должны вычислить только $4 + 3 - 1 = 6$ отдельных слагаемых $y(n)$. Поскольку $h(4)$ и $h(5)$ равны нулю, мы можем отбросить некоторые слагаемые в (5-27) и вычислить оставшиеся, представив $y(n)$ в виде:

$$
\begin{aligned}
y(0) &= h(0)x(0) + h(1)x(-1) + h(2)x(-2) + h(3)x(-3),\\
y(1) &= h(0)x(1) + h(1)x(0) + h(2)x(-1) + h(3)x(-2),\\
y(2) &= h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) + h(3)x(-1),\\
y(3) &= h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0),\\
y(4) &= h(0)x(4) + h(1)x(3) + h(2)x(2) + h(3)x(1),
\end{aligned}
$$

и

$$
y(5) = h(0)x(5) + h(1)x(4) + h(2)x(3) + h(3)x(2). \qquad (5\text{-}28)
$$

Рассматривая индексы переменных $h(k)$ и $x(k)$ в (5-28), мы видим два важных момента. Во-первых, свертка представляет собой просто сумму поэлементных произведений, так что это не очень сложный процесс. Во-вторых, заметьте, что для заданного $y(n)$, индекс $h(k)$ возрастает при уменьшении индекса $x(k)$. Это дает основание некоторым авторам ввести новую последовательность $x(-k)$ и использовать ее для графического изображения процесса свертки. Последовательность $x(-k)$ представляет собой просто нашу исходную последовательность $x(k)$, зеркально отображенную относительно индекса 0, как показано на рисунке 5.39. Такое определение $x(-k)$ дает нам возможность изобразить процесс перемножения и суммирования в (5-28) так, как показано на рисунке 5.40; т. е. мы теперь можем для вычисления $y(n)$ расположить отсчеты $x(-k)$ напротив соответствующих отсчетов $h(k)$ при текущем значении индекса n. Как показано на рисунке 5.40 (a), выравнивание отсчетов $h(k)$ и $x(n-k)$ при $n = 0$ дает $y(0) = 1$. Это совпадает с результатом вычисления в первой строке (5-28), которую мы повторили в правой части рисунка 5.40 (a). Вычисление $y(1)$, при $n = 1$, изображено на рисунке 5.40 (b), где последовательность $x(n-k)$ сдвинута на один элемент вправо, в результате чего получаем $y(1) = 3$. Мы продолжает этот сдвиг последовательности $x(n-k)$ и увеличение индекса n до тех пор, пока не получим последний ненулевой отсчет свертки $y(5)$, показанный на рисунке 5.40 (f). Итак, выполнение свертки $h(k)$ и $x(k)$ состоит из следующих шагов:

Шаг 1: построение графиков последовательностей $h(k)$ и $x(k)$.

Шаг 2: зеркальное отображение последовательности $x(k)$ относительно значения $k = 0$ для получения $x(-k)$.

Шаг 3: суммирование произведений $h(k)$ и $x(0-k)$ для всех k для получения $y(0)$.

Шаг 4: сдвиг $x(-k)$ на один отсчет вправо.

Шаг 5: суммирование произведений $h(k)$ и $x(1-k)$ для всех k для получения $y(1)$.

Шаг 6: сдвиг последовательности и суммирование произведений до тех пор, пока последовательность $h(k)$ перекрывается сдвинутой последовательностью $x(n-k)$, после чего все дальнейшие отсчеты $y(n)$ остаются равными нулю, и вычисления заканчиваются.

Полная свертка последовательностей $h(k)$ и $x(k)$ представляет собой последовательность $y(n)$, показанную в правой части рисунка 5.40 (f). Мы прошли последовательностью $x(-k)$ вдоль последовательности $h(k)$ и просуммировали произведения перекрывающихся отсчетов. Кстати, обратите внимание на то, что последовательность $y(n)$ на рисунке 5.40 (f) содержит шесть ненулевых отсчетов, тогда как $h(k)$ имела четыре таких отсчета, а последовательность $x(k)$ — три. В общем случае, если $h(k)$ имеет длину P, а $x(k)$ имеет длину Q, $y(n)$ будет иметь длину L, где

$$L=(P+Q-1) \tag{5-29}$$

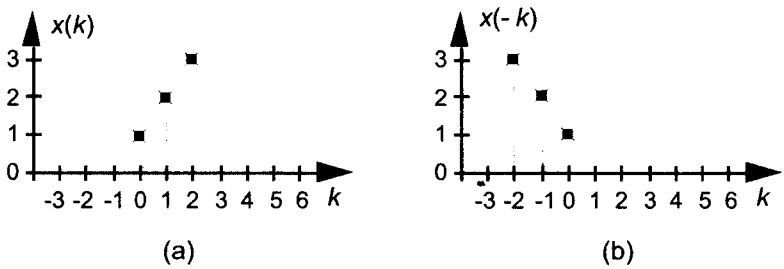


Рис. 5.39. Входная последовательность для примера вычисления свертки: (a) вторая последовательность $x(k)$ длины 3; (b) зеркальное отображение второй последовательности относительно индекса $k = 0$

Здесь начинающий читатель вполне может задать вопрос: «Хорошо, ну и что из этого? Какое отношение этот странный процесс вычисления свертки имеет к цифровой обработке сигналов?» Ответ на этот вопрос опирается на понимание значения теоремы о свертке.

5.9.2. Теорема о свертке

Теорема о свертке представляет собой краеугольный камень цифровой обработки сигналов. Она проявляет себя всегда, когда мы фильтруем дискретные данные или выполняем ДПФ. Чтобы увидеть, почему это так, упростим запись (5-26) и будем использовать сокращенную форму

$$y(n)=h(k)*x(k), \tag{5-30}$$

где символ $*$ обозначает операцию свертки.

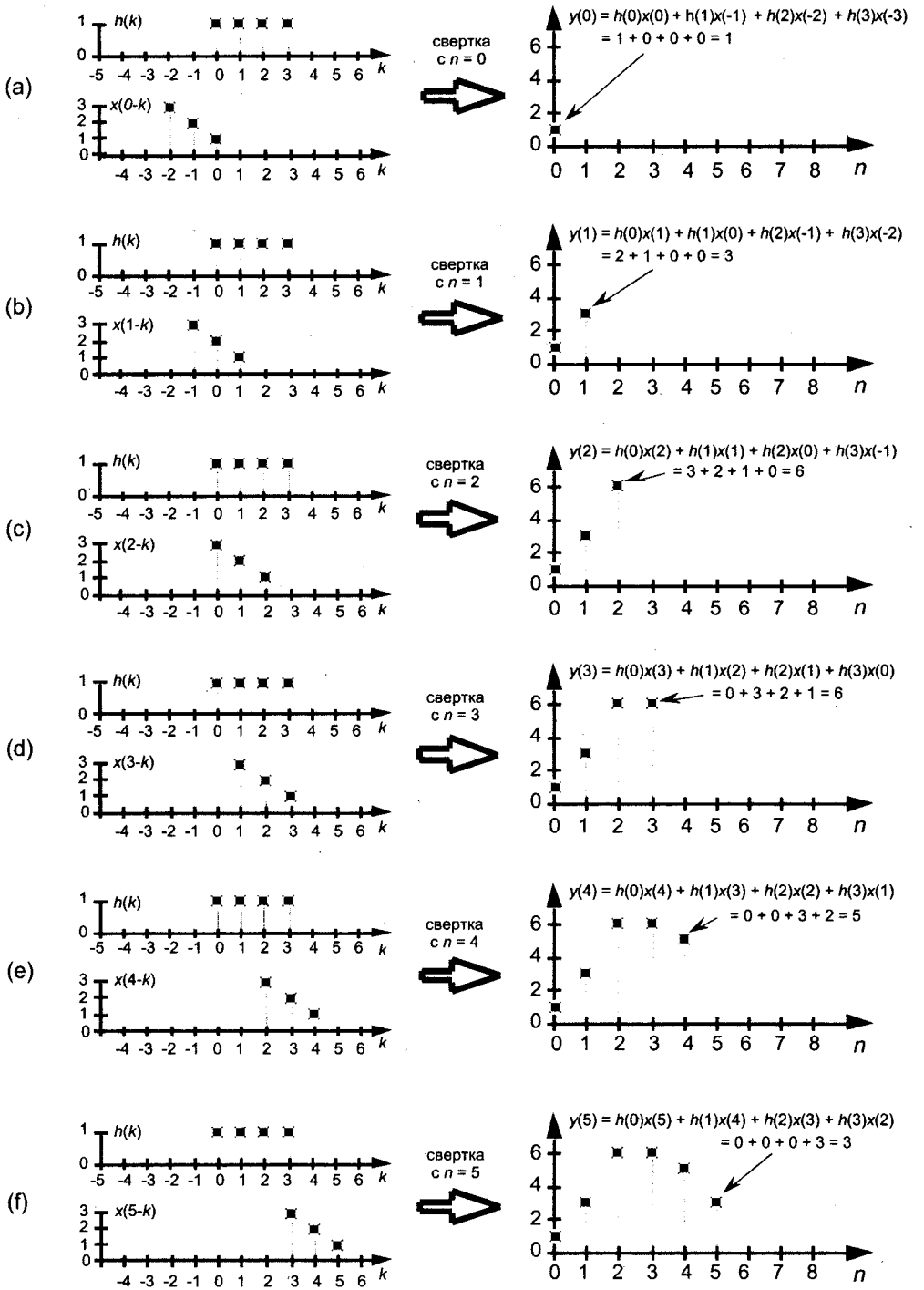


Рис. 5.40. Графическое изображение процесса вычисления свертки последовательностей $h(k)$ и $x(k)$, приведенных на рисунке 5.38

Теорему о свертке можно сформулировать следующим образом: если две последовательности во временной области $h(k)$ и $x(k)$ имеют ДПФ $H(m)$ и $X(m)$ соответственно, то ДПФ свертки $h(k) * x(k)$ представляет собой произведение $H(m) \cdot X(m)$. Аналогично, обратное ДПФ произведения $H(m) \cdot X(m)$ дает свертку $h(k) * x(k)$. Мы можем представить это соотношение как

$$h(k) * x(n) \underset{ОДПФ}{\overset{ДПФ}{\rightleftarrows}} H(m) \cdot X(m) \qquad (5\text{-}31)$$

Соотношение (5-31) говорит о том, что две последовательности $h(k)*x(k)$ и $H(m) \cdot X(m)$ образуют пару преобразований Фурье. Таким образом, ДПФ свертки $h(k)*x(k)$ всегда дает произведение $H(m) \cdot X(m)$. Мы можем также вычислить свертку $h(k)*x(k)$, выполнив обратное ДПФ последовательности $H(m) \cdot X(m)$. Мы должны усвоить важный вывод из (5-31), который состоит в том, что выполнение свертки во временной области эквивалентно умножению в частотной области. (Мы не будем здесь доказывать теорему о свертке, потому что ее доказательство имеется в ряде доступных книг [26-29].) Чтобы помочь нам в этом, на рисунке 5.41 в наглядной форме показано соотношение между сверткой во временной области и умножением в частотной области.

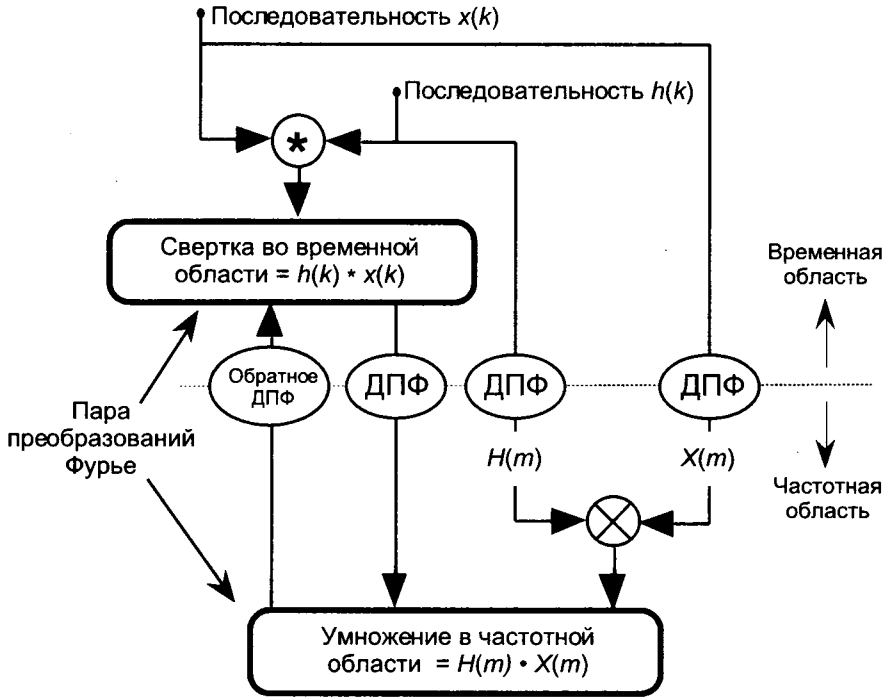


Рис. 5.41. Соотношения теоремы о свертке

Мы можем легко продемонстрировать теорему о свертке, вычислив 8-точечные ДПФ последовательностей $h(k)$ и $x(k)$ для получения $H(m)$ и $X(m)$ соответственно и записав полученные значения в таблицу 5.3. (Конечно, мы должны дополнить последовательности $h(k)$ и $x(k)$ нулями так, чтобы обе они имели длину 8.) Вычисление и занесение в таблицу обратного ДПФ произведения $H(m) \cdot X(m)$ позволяет

нам проверить (5-31) по данным, приведенным в двух последних колонках таблицы 5.3, где аббревиатура ОДПФ обозначает обратное ДПФ. Значения, приведенные в таблице 5.3, показаны на рисунке 5.42. (Для простоты на рисунке приведены только модули $H(m)$, $X(m)$ и $H(m) \cdot X(m)$.) Нам необходимо освоить свертку во временной области, потому что, как мы уже знаем, она используется в КИХ- фильтрах. Как подробно описано в разделе 5.2, мы выполняем дискретную фильтрацию с помощью КИХ-фильтра, вычисляя свертку входной последовательности $x(n)$ с импульсной характеристикой фильтра $h(k)$, а в случае КИХ-фильтра отсчеты его импульсной характеристики оказываются равными коэффициентам фильтра[1]. Результат этой свертки представляет собой отфильтрованную последовательность во временной области, спектр которой модифицирован умножением на частотную характеристику фильтра $H(m)$. В разделе 13.10 описывается остроумная схема эффективной реализации КИХ-фильтра с использованием БПФ для выполнения свертки.

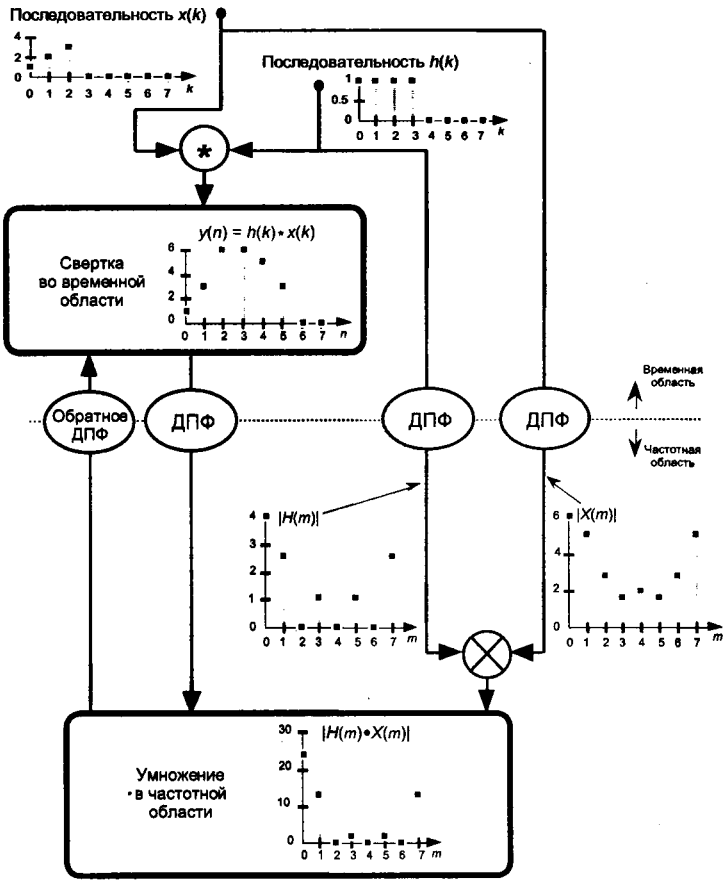


Рис. 5.42. Соотношения между $h(k)$, $x(k)$, $H(m)$ и $X(m)$, показанными на рисунке 5.38, в процессе вычисления свертки

[1] Как мы увидим в главе 6, коэффициенты фильтра с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ) не равны отсчетам импульсной характеристики.

Таблица 5.3. Значения переменных при вычислении свертки $h(k)$ и $x(k)$, показанных на рисунке 5.38

Индекс k или m	$h(k)$	$x(k)$	ДПФ $h(k) = H(m)$	ДПФ $x(k) = X(m)$	$H(m) \cdot X(m)$	ОДПФ $H(m) \cdot X(m)$	$h(k) * x(k)$
0	1	1	$4.0 + j0.0$	$6.0 + j0.0$	$24.0 + j0.0$	$1.0 + j\,0.0$	1
1	1	2	$1.00 - j2.41$	$2.41 - j4.41$	$-8.24 - j10.24$	$3.0 + j\,0.0$	3
2	1	3	0	$-2.0 - j2.0$	0	$6.0 + j\,0.0$	6
3	1	0	$1.00 - j0.41$	$-0.41 + j1.58$	$0.24 + j1.75$	$6.0 + j\,0.0$	6
4	0	0	0	$2.0 + j0.0$	0	$5.0 + j\,0.0$	5
5	0	0	$1.00 + j0.41$	$-0.41 - j1.58$	$0.24 - j1.75$	$3.0 + j\,0.0$	3
6	0	0	0	$-2.00 + j2.00$	0	$0.0 + j\,0.0$	0
7	0	0	$1.00 + j2.41$	$2.41 + j4.41$	$-8.24 + j10.24$	$0.0 + j\,0.0$	0

Вследствие дуальности теоремы о свертке мы можем в наших рассуждениях о свертке и произведении как паре преобразований Фурье поменять местами временную и частотную области. Это значит, что подобно (5-31) мы можем написать

$$h(k) \cdot x(k) \underset{ОДПФ}{\overset{ДПФ}{\rightleftarrows}} H(m) * X(m) \qquad (5\text{-}32)$$

Следовательно, теорему о свертке можно сформулировать в более общем виде так: *Свертка в одной области эквивалентна произведению в другой области.* На рисунке 5.43 показано соотношение между умножением во временной области и сверткой в частотной области. Соотношение (5-32) представляет собой фундаментальное соотношение, используемое в процессе взвешивания данных с помощью окон для уменьшения утечки спектра, описанного в разделе 3.9.

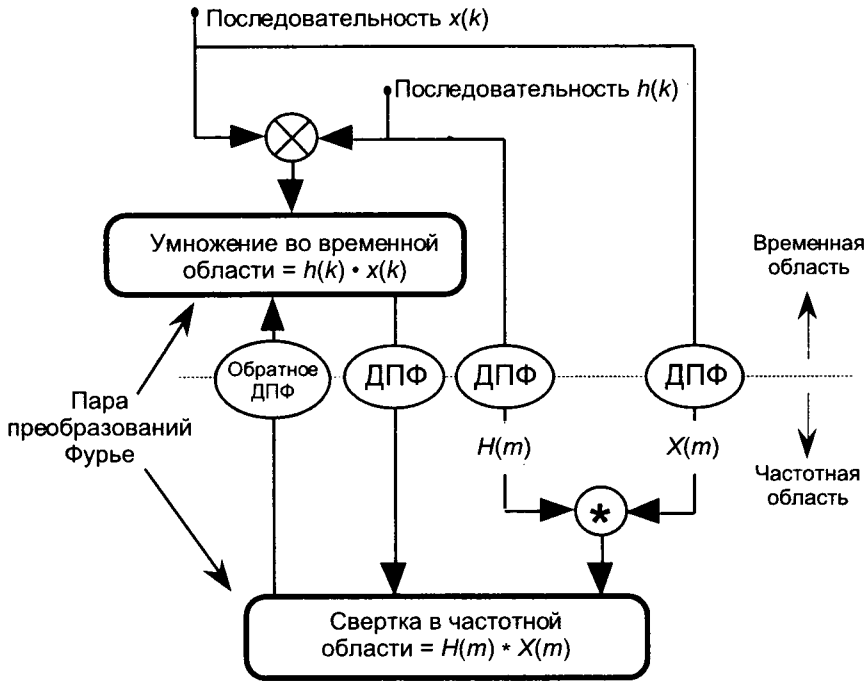


Рис. 5.43. Соотношения теоремы о свертке для умножения во временной области

5.9.3. Применение теоремы о свертке

Теорема о свертке полезна как инструмент качественного предсказания результатов различных операций в дискретных линейных инвариантных во времени системах. Например, многие авторы используют теорему о свертке, чтобы показать, почему периодическая дискретизация непрерывных сигналов дает дискретные сигналы с периодическими по частоте спектрами. Рассмотрим действительный непрерывный сигнал, показанный на рисунке 5.44 (а), односторонний спектр которого имеет ширину B.

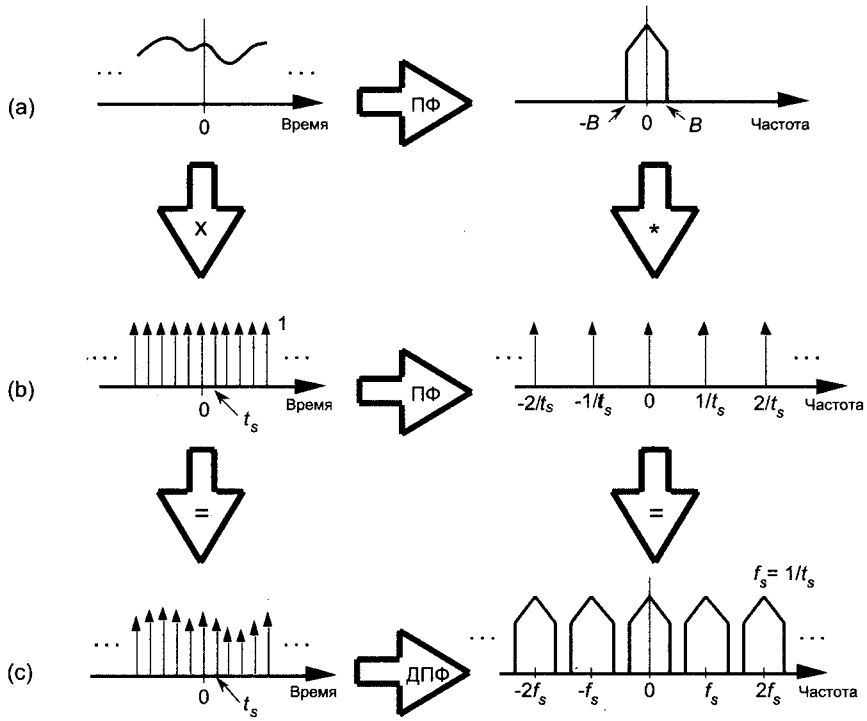


Рис. 5.44. Использование теоремы о свертке для предсказания размножения спектра при периодической дискретизации

Поскольку это действительный сигнал, его спектр, конечно же, симметричен относительно 0 Гц. (На рисунке 5.44 широкие стрелки, показывающие вправо, обозначают операции преобразования Фурье.) Дискретизация этого сигнала эквивалентна умножению его на периодическую последовательность импульсов, показанную на рисунке 5.44 (b), отсчеты которой равны единице. Если частота дискретизации равна f_s отсчетов в секунду, то период дискретизации $t_s = 1/f_s$ секунд. Результатом этого перемножения является последовательность дискретных импульсов, показанная на рисунке 5-44 (c). Для предсказания того, какие эффекты в частотной области будут вызваны этим перемножением во временной области, мы можем использовать теорему о свертке. Согласно этой теореме, как мы теперь знаем, спектр произведения во временной области должен быть сверткой спектров сомножителей. Хорошо, мы знаем, каков спектр непрерывного сигнала. А что можно сказать о спектре последовательности импульсов? Было показано, что спектр периодической последовательности импульсов, период которой равен t_s секунд, представляет собой периодическую последовательность импульсов в частотной области, расстояние между которыми равно f_s Гц, как показано на рисунке 5-44 (b) [30].

Теперь нам остается только вычислить свертку двух спектров. В нашем случае это выполняется просто, поскольку оба спектра симметричны относительно частоты 0 Гц, и зеркальное отображение одного из них относительно 0 Гц будет излишним. Таким образом, мы просто смещаем один спектр относительно другого и

рисуем график их произведения. Свертка спектра исходного сигнала и импульсов в частотной области приводит к тому, что спектр сигнала повторяется через каждые f_s Гц, как показано на рисунке 5.44 (c). Это напоминает нам о том, что ДПФ всегда периодично с периодом f_s Гц.

А вот еще один пример того, как теорема о свертке может прийти на помощь, когда мы пытаемся разобраться в операциях цифровой обработки сигналов. Автор однажды использовал эту теорему, чтобы разобраться в том, почему первый ноль спектра треугольного окна приходится на частоту, которая в два раза превышает частоту первого нуля прямоугольного окна. Вопрос формулировался следующим образом: «Если прямоугольное окно длительностью T имеет первый ноль спектра на частоте $1/T$ Гц, почему треугольное окно такой же длительности T имеет первый ноль спектра на частоте $2/T$ Гц?» Мы можем ответить на этот вопрос, рассмотрев свертку во временной области.

Посмотрите на две прямоугольные функции времени, показанные на рисунках 5.45 (a) и 5.45 (b). Если длительность каждой из них равна T секунд, их спектры имеют первые нули на частоте $1/T$ Гц, как показано на графиках, приведенных на рисунках 5.45 (a) и 5.45 (b). Мы знаем, что модуль спектра представляет собой абсолютную величину классической функции $\sin(x)/x$[1].

Если мы выполним свертку этих двух прямоугольных функций длительностью T, мы получим треугольную функцию, показанную на рисунке 5.45 (c). Здесь тоже зеркальное отображение одной из прямоугольных функций относительно нулевого времени не обязательно. Нам нужно просто сдвигать одну функцию относительно другой и вычислять площадь их перекрытия. Наибольшая площадь перекрытия будет при нулевом сдвиге. Следовательно, свертка будет иметь максимум при нулевом сдвиге по времени, поскольку при этом имеется стопроцентное перекрытие. Если мы будем сдвигать одну из прямоугольных функций в любом направлении, свертка будет линейно уменьшаться до нуля. При сдвиге $T/2$ секунд, прямоугольники перекрываются на 50 %. Свертка станет равной нулю при сдвиге на T секунд, когда перекрытие прямоугольников прекратится.

Заметьте, что длительность треугольника, полученного в результате свертки, равна $2T$, и это ключ к ответу на наш вопрос. Поскольку свертка во временной области эквивалентна умножению в частотной области, модуль преобразования Фурье нашей треугольной функции длительностью $2T$ равен произведению функции $|\sin(x)/x|$, показанной на рисунке 5.45 (a), на функцию $|\sin(x)/x|$, показанную на рисунке 5.45 (b), или $(\sin(x)/x)^2$, как показано на рисунке 5.45 (c). Если треугольная функция длительностью $2T$ имеет первый ноль на частоте $1/T$ Гц, то та же функция длительностью T должна иметь частоту первого нуля, равную $2/T$ Гц, как показано на рисунке 5.45 (d), и это как раз то, что требовалось показать. Сравнение рисунков 5.45 (c) и 5.45 (d) демонстрирует фундаментальное свойство преобразования Фурье, которое состоит в том, что сжатие функции во времени приводит к растягиванию ее спектра в частотной области.

---

[1] Мы познакомились с функцией $\sin(x)/x$ во время обсуждения функций окон в разделе 3.9 и более подробно описали ее в разделе 3.13.

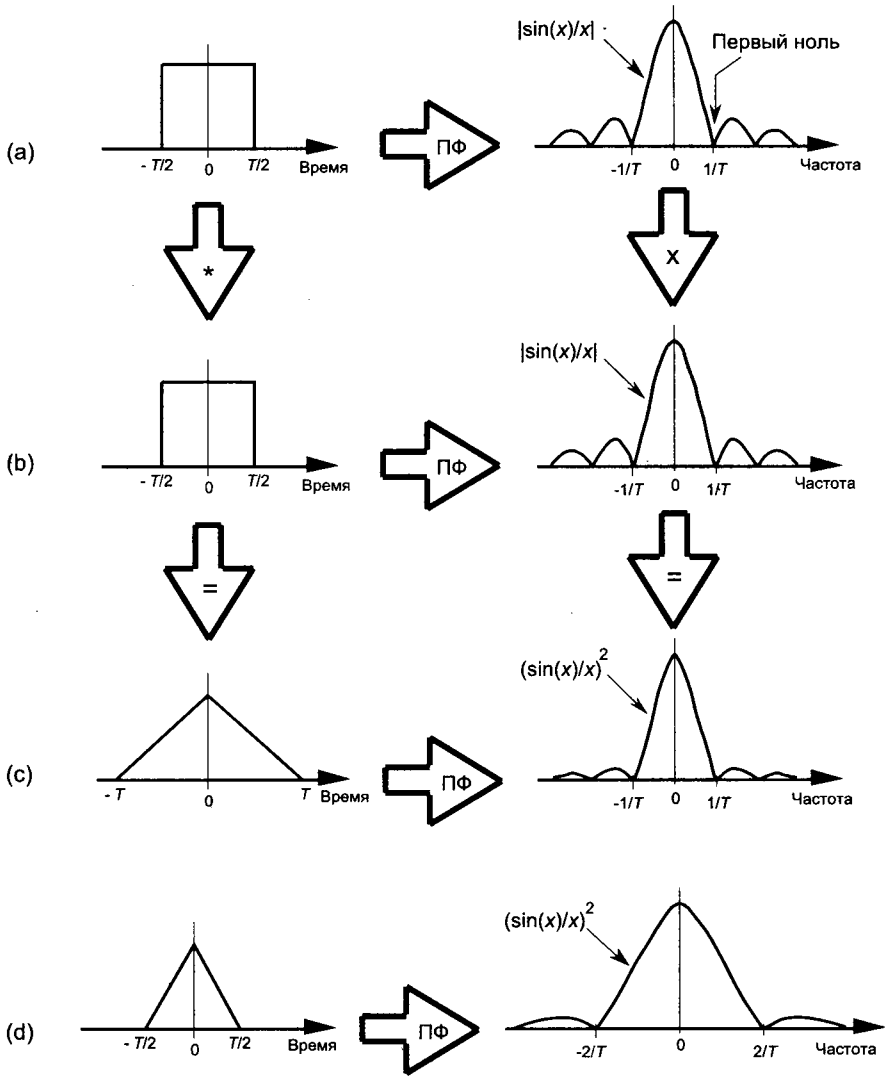


Рис. 5.45. Использование свертки для того, чтобы показать, что преобразование Фурье треугольной функции имеет первый ноль спектра на частоте, равной удвоенной частоте первого нуля преобразования Фурье прямоугольной функции

Библиография

1. Shynk, J. J. «Adaptive IIR Filtering», *IEEE ASSP Magazine*, April 1989.
2. Laundrie, A. «Adaptive Filters Enable Systems to Track Variations», *Microwaves & RF*, September 1989.
3. Bullock, S. R. «High Frequency Adaptive Filter», *Microwave Journal*, September 1990.

4. Haykin, S. S. *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.
5. Goodwin, G. C, and Sin, K. S. *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
6. Gibbs, J. W. *Nature*, Vol. 59,1899, p. 606.
7. Stockham, T. G. «High-Speed Convolution and Correlation with Applications to Digital Filtering», Chapter 7 in *Digital Processing of Signals.* Ed. by B. Gold et al., McGraw-Hill, New York, 1969, pp. 203-232.
8. Wait, J. V «Digital Filters», in *Active Filters: Lumped, Distributed, Integrated, Digital, and Parametric.* Ed. by L. P. Huelsman. McGraw-Hill, New York, 1970, pp. 200-277.
9. Dolph, C. L. «A Current Distribution for Broadside Arrays Which Optimizes the Relationship Between Beam Width and Side-Lobe Level», *Proceedings of the IRE*, Vol. 35, June 1946.
10. Barbiere, D. «A Method for Calculating the Current Distribution of Chebyshev Arrays», *Proceedings of the IRE*, Vol. 40, January 1952.
11. Cook, C. E., and Bernfeld, M. *Radar Signals*, Academic Press, New York, 1967, pp. 178-180.
12. Kaiser, J. F. «Digital Filters», in *System Analysis by Digital Computer.* Ed. by F. F. Kuo and J. F. Kaiser, John Wiley and Sons, New York, 1966, pp. 218-277.
13. Williams, C. S. *Designing Digital Filters*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986, p. 117.
14. Harris, F. J. «On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform», *Proceedings of the IEEE*, Vol. 66, No. 1, January 1978.
15. McClellan, J. H., Parks, T. W, and Rabiner, L. R. «A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters», *IEEE Trans, on Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-21, No. 6, December 1973, p. 515.
16. Rabiner, L. R. and Gold, B. *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, p. 136.
17. Parks, T. W., and McClellan, J. H. «Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase», *IEEE Trans, on Circuit Theory*, Vol. CT-19, March 1972.
18. McClellan, J. H., and Parks, T. W. «A Unified Approach to the Design of Optimum FIR Linear Phase Digital Filters», *IEEE Trans, on Circuit Theory*, Vol. CT-20, November 1973.
19. Rabiner, L. R., McClellan, J. H., and Parks, T. W. «FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation», *Proc. IEEE*, Vol. 63, No. 4, April 1975.
20. Oppenheim, A. V, and Schafer, R. W. *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989, p. 478 (имеется русский перевод

одного из предыдущих изданий: Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. «Цифровая обработка сигналов», пер. с англ. / под ред. С. Я. Шаца, М.: Связь, 1979, доступен по адресу dsp-book.narod.ru/OpShDSP.djvu).

21. Funderburk, D. M., and Park, S. «Implementation of a C-QUAM AM-Stereo Receiver Using a General Purpose DSP Device», *RF Design*, June 1993.

22. Harris Semiconductor Inc. «A Digital, 16-Bit, 52 Msps Halfband Filter», *Microwave Journal*, September 1993.

23. Ballanger, M. G. «Computation Rate and Storage Estimation in Multirate Digital Filtering with Half-Band Filters», *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc*, Vol. ASSP-25, No. 4, August 1977.

24. Crochiere, R. E., and Rabiner, L. R. «Decimation and Interpolation of Digital Signals — A Tutorial Review», *Proceedings of the IEEE*, Vol. 69, No. 3, March 1981, p. 318.

25. Ballanger, M. G., Daguet, J. L., and Lepagnol, G. P. «Interpolation, Extrapolation, and Reduction of Computational Speed in Digital Filters», *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc*, Vol. ASSP-22, No. 4, August 1974.

26. Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., and Young, I. T. *Signals and Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983, p. 212.

27. Stearns, S. *Digital Signal Analysis*, Hayden Book Co., Rochelle Park, New Jersey, 1975, p. 93.

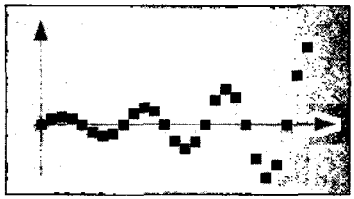
28. Oppenheim, A. V., and Schafer, R. W. *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, New Jersey, 1989, p. 58 (имеется русский перевод одного из предыдущих изданий: Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. «Цифровая обработка сигналов», пер. с англ. / под ред. С. Я. Шаца, М.: Связь, 1979, доступен по адресу dsp-book.narod.ru/OpShDSP.djvu).

29. Rabiner, L. R., and Gold, B. *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, p. 59 (есть русский перевод: Рабинер Л., Голд Б. «Теория и применение цифровой обработки сигналов», М.: Мир, 1978, доступен по адресу http://geogin.narod.ru/arhiv/dsp/dsp3.htm).

30. Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., and Young, I. T. *Signals and Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983, p. 201.

Глава 6

Фильтры с импульсной характеристикой бесконечной длины



Фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры) коренным образом отличаются от КИХ-фильтров из-за наличия обратной связи. Если выходные отсчеты КИХ-фильтров зависят только от предыдущих и текущего входных отсчетов, то каждый выходной отсчет БИХ-фильтра зависит от предыдущих и текущего входных отсчетов, а также от предыдущих выходных отсчетов. Способность БИХ-фильтров запоминать и использовать предыдущие выходные отсчеты является и проклятием и благословением в одно и то же время. Как и для всех систем с обратной связью, возмущения входного сигнала в некоторых случаях могут сделать БИХ-фильтр неустойчивым и превратить его в генератор. Эта способность выдавать на выход последовательности ненулевых отсчетов бесконечной длины, даже когда все входные отсчеты равны нулю, и послужила причиной, по которой в названии этих фильтров присутствуют слова «*с бесконечной импульсной характеристикой*». Здесь мы можем отметить, что по сравнению с КИХ-фильтрами БИХ-фильтры имеют более сложную структуру (блок-схему), их труднее проектировать и анализировать, их фазо-частотная характеристика принципиально нелинейна. Почему же тогда ими пользуются? Потому, что они очень эффективны. БИХ-фильтры требуют намного меньше умножений на один выходной отсчет, чтобы реализовать требуемую частотную характеристику. С точки зрения аппаратуры это значит, что БИХ-фильтры могут быть очень быстрыми, они позволяют нам строить фильтры реального времени, которые работают на значительно более высоких частотах дискретизации, чем КИХ-фильтры[1].

[1] Мы коротко сравним преимущества и недостатки БИХ и КИХ-фильтров в конце этой главы.

Чтобы продемонстрировать эффект от использования БИХ-фильтров, на рисунке 6.1 приводится сравнение амплитудно-частотных характеристик БИХ-фильтра четвертого порядка и КИХ-фильтра с *19* ответвлениями с рисунка 5.19 (b) из пятой главы. Если КИХ-фильтр с *19* ответвлениями требует *19* умножений на один выходной отсчет фильтра, то БИХ-фильтр четвертого порядка требует только *9* умножений на каждый выходной отсчет. БИХ-фильтр не только имеет меньшую неравномерность АЧХ в полосе пропускания и более крутую переходную полосу, он обеспечивает эти достоинства при вдвое меньшем количестве умножений по сравнению с КИХ-фильтром.

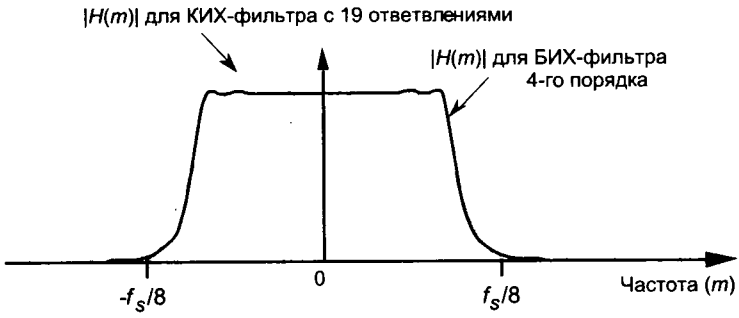


Рис. 6.1. Сравнение АЧХ КИХ-фильтра с *19* ответвлениями и БИХ-фильтра 4-го порядка

Вспомним раздел 5.3, где для получения очень крутой переходной полосы нам пришлось проектировать КИХ-фильтр с очень длинной импульсной характеристикой. Чем длиннее импульсная характеристика, тем ближе АЧХ фильтра к идеальной. С точки зрения аппаратуры максимальное количество ответвлений КИХ-фильтра (длина его импульсной характеристики) зависит от того, как быстро наша аппаратура выполняет требуемые для вычисления выходного отсчета умножения и сложения и способна ли она выполнить все эти операции до прихода на вход фильтра следующего отсчета входного сигнала. БИХ-фильтры могут иметь импульсную характеристику, длина которой намного превышает количество ответвлений линии задержки! Таким образом, БИХ-фильтры способны обеспечить гораздо лучшую фильтрацию при том же количестве умножений на выходной отсчет, чем КИХ-фильтры. Имея это ввиду, вдохнем поглубже, разомнем наши математические мускулы и постараемся узнать кое-что о БИХ-фильтрах.

6.1. Введение в фильтры с бесконечными импульсными характеристиками

Свое название БИХ-фильтры получили благодаря тому, что они используют некоторые предыдущие выходные отсчеты для вычисления текущего выходного отсчета. В результате, при подаче на вход фильтра конечной последовательности ненулевых отсчетов реакция БИХ-фильтра может оказаться бесконечной последовательностью ненулевых выходных отсчетов. Таким образом, если входной сигнал БИХ-фильтра в какой-то момент времени превращается в последовательность

нулевых отсчетов, выходной сигнал, в принципе, может оставаться ненулевым бесконечно долго. Эта необычная особенность БИХ-фильтров объясняется способом их реализации, а именно, наличием обратных связей. Понимание структуры БИХ-фильтров не вызовет затруднения, если мы начнем с того, что вспомним строительные блоки КИХ-фильтров. На рисунке 6.2 (a) показана уже знакомая нам структура цифрового КИХ-фильтра с четырьмя ответвлениями, которая реализует следующее уравнение КИХ-фильтра во временной области

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + h(3)x(n-3) + h(4)x(n-4)\,. \qquad (6\text{-}1)$$

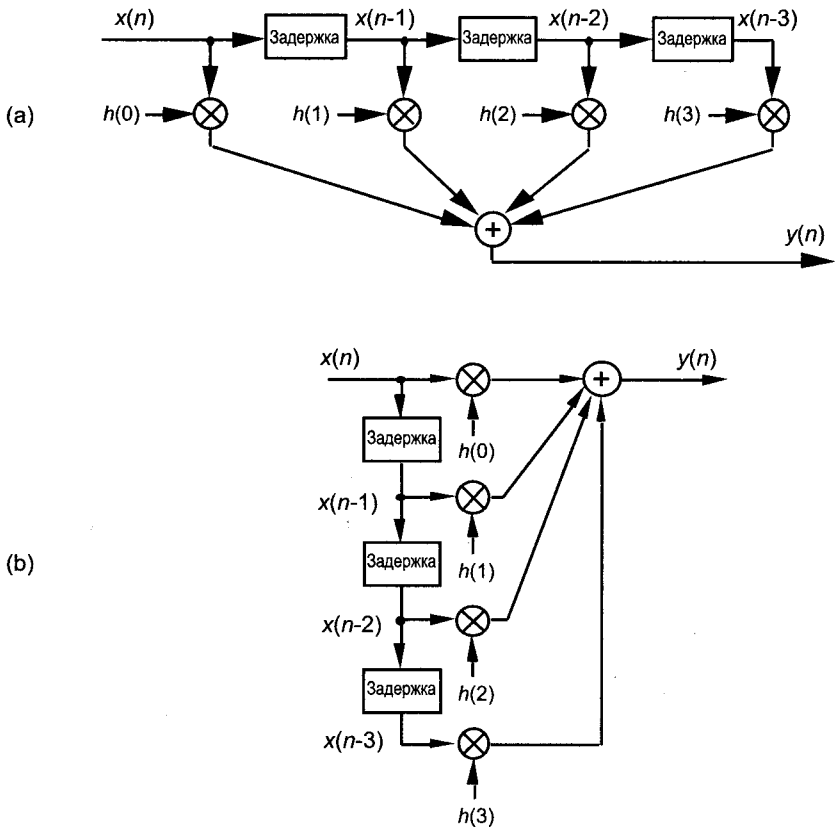


Рис. 6.2. Структуры КИХ-фильтра: (a) традиционное представление структуры КИХ-фильтра; (b) измененная, но эквивалентная структура КИХ-фильтра

Это уравнение известно как *разностное уравнение*, хотя в главе 5 мы его так не называли. Чтобы понять, как прошлые выходные отсчеты используются в структуре БИХ-фильтра, начнем с того, что переупорядочим структуру КИХ-фильтра, показанную на рисунке 6.2 (a) и получим структуру на рисунке 6.2 (b). Заметьте, что структуры на рисунке 6.2 идентичны с точки зрения вычислений и обе являются реализациями уравнения (6-1).

Теперь мы можем показать, как прошлые выходные отсчеты фильтра комбинируются с прошлыми входными отсчетами в структуре БИХ-фильтра, показанной

на рисунке 6.3. Поскольку БИХ-фильтры имеют два набора коэффициентов, мы будем использовать стандартные обозначения $b(k)$ для коэффициентов прямой связи и $a(k)$ для коэффициентов обратной связи. Итак, разностное уравнение, описывающее БИХ-фильтр, изображенный на рисунке 6.3, имеет вид:

$$y(n)=b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + b(2)x(n-2) + b(3)x(n-3) + \\ + a(1)y(n-1) + a(2)y(n-2) + a(3)y(n-3) \qquad (6\text{-}2)$$

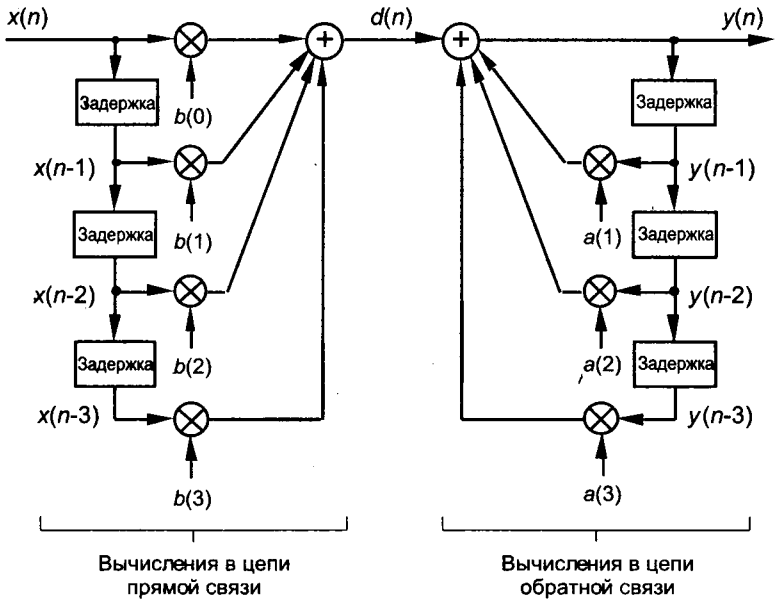


Рис. 6.3. Структура БИХ-фильтра, показывающая вычисления в цепях прямой и обратной связи

Посмотрите внимательно на рисунок 6.3 и уравнение (6-2). Нам важно убедиться в том, что рисунок 6.3 действительно является правильной реализацией уравнения (6-2), и наоборот, разностное уравнение (6-2) исчерпывающим образом описывает структуру, показанную на рисунке 6.3. Помните, что последовательность $y(n)$ на рисунке 6.3 — это не то же самое, что последовательность $y(n)$, показанная на рисунке 6.2. Последовательность $d(n)$ на рисунке 6.3 равна последовательности $y(n)$ на рисунке 6.2.

Сейчас вы, вероятно, задаетесь вопросом «Как же рассчитать коэффициенты БИХ-фильтра $a(k)$ и $b(k)$, если мы хотим спроектировать БИХ-фильтр?» Застегните привязные ремни, потому что именно здесь начинается серьезное изучение БИХ-фильтров. Вспомните метод проектирования КИХ-фильтров нижних частот с помощью окон, рассмотренный в предыдущей главе, где мы определяли требуемую АЧХ КИХ-фильтра, вычисляли ее обратное преобразование Фурье, а затем сдвигали результат преобразования во времени, чтобы получить нужную нам импульсную характеристику фильтра. К счастью, благодаря природе КИХ-фильтров, коэффициенты фильтра $h(k)$ оказались в точности равными отсчетам импульсной характеристики. Используя такую же процедуру для БИХ-фильтров, мы могли

бы задать требуемую АЧХ, взять обратное преобразование Фурье этой характеристики и получить импульсную характеристику. Увы, не существует простого метода вычисления коэффициентов БИХ-фильтра $a(k)$ и $b(k)$ по импульсной характеристике! К несчастью, методы проектирования КИХ-фильтров, которые мы изучали до сих пор, оказываются непригодными для проектирования БИХ-фильтров. К счастью для нас, мы можем преодолеть этот недостаток, используя один из нескольких методов проектирования БИХ-фильтров.

Стандартные методы проектирования БИХ-фильтров делятся на три базовых класса: метод инвариантного преобразования импульсной характеристики, метод билинейного преобразования и оптимизационные методы. Эти методы используют математический метод преобразования дискретных последовательностей, известный как z-преобразование, истоки которого восходят к преобразованию Лапласа, используемому для анализа непрерывных систем. Имея все это ввиду, начнем обсуждение анализа и проектирования БИХ-фильтров с краткого напоминания основ преобразования Лапласа.

6.2. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа представляет собой математический метод решения линейных дифференциальных уравнений, который оказался очень полезным в технике и физике. Этот метод преобразования, в том виде, в каком его используют сегодня, берет начало в работах блестящего английского физика Оливера Хэвисайда[1]. Применение преобразования Лапласа можно представить в виде следующей последовательности шагов:

Шаг 1. Записывается дифференциальное уравнение во временной области, описывающее соотношение вход/выход физической системы (нам необходимо найти выходную функцию, которая соответствует этому уравнению и заданной входной функции).

Шаг 2. Дифференциальное уравнение подвергается преобразованию Лапласа, которое превращает его в алгебраическое уравнение.

Шаг 3. Для определения преобразования Лапласа от выходной функции используются стандартные алгебраические методы.

Шаг 4. Полученное преобразование Лапласа от выходной функции подвергается обратному преобразованию Лапласа, в результате чего получается уравнение выходной функции во временной области.

---

[1] Хэвисайд (1850-1925), который интересовался электрическими явлениями, разработал эффективный аналитический метод решения дифференциальных уравнений. Ему пришлось вынести множество нападок со стороны современников, которые считали, что предложенный подход недостаточно обоснован с математической точки зрения. Однако открытие тесной связи методов Хэвисайда со строго математическим изложением операционного исчисления французского математика маркиза Пьера Симона де Лапласа (1749-1827) подтвердило обоснованность методов Хэвисайда.

Это процедура на первый взгляд кажется несколько обременительной, поскольку заставляет нас *идти в обход* вместо того, чтобы решать дифференциальное уравнение прямо. Оправданием использованию преобразования Лапласа служит то, что, хотя решение дифференциальных уравнений классическими методами представляет собой очень мощный метод анализа любых систем, кроме самых простых, оно может быть очень трудоемким и порождать ошибки. Уменьшение сложности выкладок при использовании алгебраических методов оправдывает дополнительные усилия, затраченные на прямое и обратное преобразование Лапласа. Это в особенности справедливо сегодня, когда существуют таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа для всех обычно встречающихся на практике функций. Хорошо изученные свойства преобразования Лапласа также позволяют раскладывать сложные функции на комбинации более простых функций и затем использовать таблицы. (Таблицы преобразований Лапласа позволяют нам быстро переходить от функций времени к их преобразованиям Лапласа и обратно — аналогично тому, как мы пользуемся англо-русским и русско-английским словарем при изучении английского языка[1,2].) Рассмотрим коротко наиболее важные свойства преобразования Лапласа, которые будут полезны при нашем переходе к дискретному z-преобразованию, используемому для анализа и проектирования цифровых БИХ-фильтров. Преобразование Лапласа непрерывной функции времени $f(t)$, которая определена только для положительного времени ($t > 0$), математически выражается как

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\,. \tag{6-3}$$

Функцию $F(s)$ называют «преобразованием Лапласа от $f(t)$», а переменная s представляет собой комплексное число вида

$$s = \sigma + j\omega\,. \tag{6-4}$$

Более общее выражение для преобразования Лапласа, которое называют *двухсторонним преобразованием*, в качестве нижнего предела интегрирования использует отрицательную бесконечность ($-\infty$). Но в системах, которые мы будем рассматривать, анализ при отрицательном времени ($t < 0$) не нужен, и используется *одностороннее* преобразование (6-3). Такие системы, которые часто называют каузальными, могут иметь начальные условия при $t = 0$, которые необходимо учитывать (скорость тела, заряд конденсатора, температура тела и т. д.), но нам нет необходимости знать, что система делала до момента времени $t = 0$.

В уравнении (6-4) σ — действительное число, а ω — частота в радианах в секунду. Поскольку e^{-st} не имеет размерности, сомножитель s должен иметь размерность 1/время, или размерность частоты. Поэтому переменную Лапласа s часто называют комплексной частотой.

---

[1] Хотя таблица часто используемых функций можно найти почти в каждом учебнике по системному анализу, очень подробные таблицы приведены в работах [1-3].

[2] Отечественному читателю можно посоветовать многократно издававшийся в СССР и России «Справочник по математике (для научных работников и инженеров)», Г. Корн, Т. Корн, который доступен и в Интернете в различных электронных форматах — (*прим. ред. перев.*)

Выразив формулу (6-3) словами, можно сказать, что она требует умножать точку за точкой функцию $f(t)$ на комплексную функцию e^{-st} при различных значениях s. (Скоро мы увидим, что использование функции e^{-st} здесь не случайно; e^{-st} используется потому, что она представляет собой общую форму решения линейных дифференциальных уравнений.) После поточечного умножения мы находим площадь под графиком функции $f(t)e^{-st}$ путем суммирования всех произведений. Это площадь, которая является комплексным числом, дает значение преобразования Лапласа для текущего значения $s = \sigma + j\omega$, использованного при первоначальном умножении. Если мы проделаем эту процедуру для всех значений s, мы будем иметь полное описание $F(s)$ для всех s.

Мне нравится рассматривать преобразование Лапласа как непрерывную функцию, комплексное значение которой при некотором s представляет собой корреляцию функции $f(t)$ и затухающей комплексной синусоиды e^{-st}, частота которой равна ω, а коэффициент затухания равен σ. Как выглядят комплексные синусоиды? Они представляют собой вращающиеся фазоры[1], описываемые выражением

$$e^{-st} = e^{-(\sigma + j\omega)t} = e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} = e^{-j\omega t}/e^{\sigma t}. \qquad (6\text{-}5)$$

Из того, что мы знаем о комплексных числах, следует, что $e^{-j\omega t}$ представляет собой фазор единичной длины, вращающийся в направлении по часовой стрелке вокруг начала координат комплексной плоскости с частотой ω радиан в секунду. Знаменатель (6-5) представляет собой действительное число, равное единице при $t = 0$. С ростом t знаменатель $e^{\sigma t}$ увеличивается (при положительном σ), и модуль комплексного фазора e^{-st} уменьшается одновременно с его вращением на комплексной плоскости. Конец этого фазора описывает спираль по направлению к началу координат комплексной плоскости. Один из способов наглядного представления комплексной синусоиды состоит в рассмотрении ее действительной и мнимой частей по отдельности. Мы делаем это, выражая комплексную синусоиду e^{-st} в (6-5) в алгебраической форме как

$$e^{-st} = e^{-j\omega t}/e^{\sigma t} = \cos(\omega t)/e^{\sigma t} - j\sin(\omega t)/e^{\sigma t}. \qquad (6\text{-}5')$$

На рисунке 6.4 показаны действительные части нескольких комплексных синусоид с разными частотами и разными коэффициентами затухания. На рисунке 6.4 (а) выбраны произвольные частота ω' и коэффициент затухания σ' комплексной синусоиды. Следовательно, действительная часть функции $F(s)$ при $s = \sigma' + j\omega'$ равна корреляции $f(t)$ и колебания, изображенного на рисунке 6.4 (а). Для разных значений s мы будем находить корреляцию $f(t)$ с разными комплексными синусоидами, как показано на рисунке 6.4. (Как мы увидим, эта корреляция очень похожа на корреляцию $f(t)$ и различных синусоидальных и косинусоидальных колебаний при вычислении дискретного преобразования Фурье.) Здесь опять действительная часть $F(s)$ при заданном значении s представляет собой корреляцию $f(t)$ и косинусоиды с частотой ω и коэффициентом затухания σ, а мнимая часть $F(s)$ представляет собой корреляцию $f(t)$ и синусоиды с частотой ω и коэффициентом затухания σ.

Теперь, если мы поставим в соответствие каждому значению переменной s точку на комплексной плоскости, которую по праву называют s-плоскостью, мы

[1] Радиус-векторы в комплексной плоскости — (*прим. перев.*).

сможем построить графики действительной и мнимой части $F(s)$ как поверхности над или под этой s-плоскостью. Мы не можем построить на бумаге график полной комплексной функции $F(s)$, поскольку для этого потребовалось бы четыре измерения. Это объясняется тем, что, поскольку переменная s комплексная, для ее изображение необходимы два измерения, а для изображения самой комплексной функции $F(s)$ требуется еще два измерения. Но мы можем построить график модуля $|F(s)|$ в функции s, поскольку этот график требует только трех измерений. Давайте так и будем делать всякий раз, когда нам потребуется наглядно изобразить результат преобразования Лапласа.

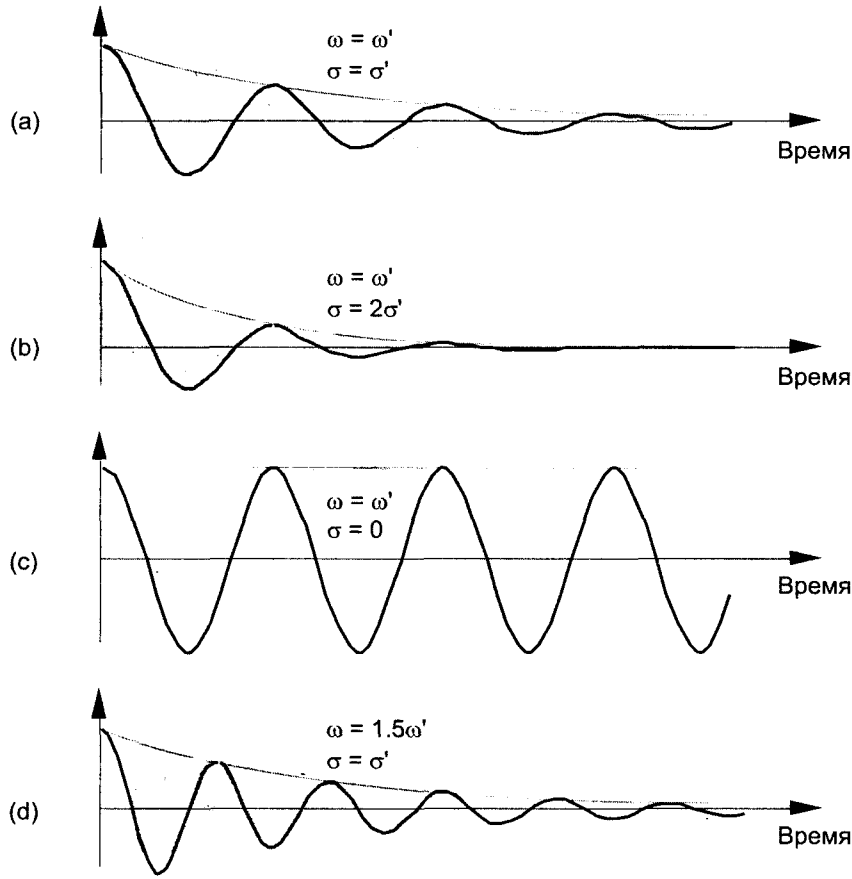


Рис. 6.4. Действительная (косинусная) часть различных функций e^{-st}, где $s = \sigma + j\omega$, участвующих в вычислении корреляции с $f(t)$

Допустим, имеется линейная система, показанная на рисунке 6.5. Предположим также, что мы можем связать вход $x(t)$ и выход $y(t)$ линейной инвариантной во времени системы, показанной на рисунке 6.5, посредством следующего однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

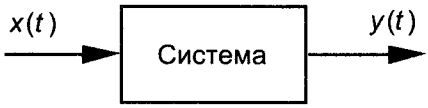


Рис. 6.5. Система, описываемая уравнением (6-6). Входной и выходной сигналы системы $x(t)$ и $y(t)$ являются непрерывными функциями времени

$$a_2[d^2y(t)]/dt^2 + a_1[dy(t)]/dt + a_0y(t) = b_1[dx(t)]/dt + b_0x(t)\,. \qquad (6\text{-}6)$$

Мы используем преобразование Лапласа для достижения поставленной цели — понять, как будет вести себя система при подаче на ее вход различных сигналов, т. е. каким будет выходной сигнал $y(t)$ для любого заданного сигнала $x(t)$.

Давайте немного притормозим и посмотрим, о чем нам говорят рисунок 6.5 и уравнение (6-6). Во-первых, поскольку система инвариантна во времени, коэффициенты уравнения (6-6) a_n и b_n постоянны. Они могут быть положительными или отрицательными, равными нулю, действительными или комплексными, но они не меняются со временем. Если это электрическая система, то коэффициенты могут быть связаны с емкостью, индуктивностью и сопротивлением. Если система механическая, состоящая из масс и пружин, коэффициенты могут быть связаны с массой, коэффициентом демпфирования и коэффициентом упругости. Если же система термическая, состоящая из масс и теплоизоляторов, коэффициенты могут быть связаны с теплоемкостью и теплопроводностью. Чтобы не ограничивать общность наших рассуждений, мы не будем здесь уточнять, какие физические величины представляют наши коэффициенты.

Уравнение (6-6) показывает также, что, если не обращать внимания на коэффициенты, то сумма выходного сигнала $y(t)$ и его производных равна сумме входного сигнала $x(t)$ и его производных. Наша задача состоит в том, чтобы точно определить, какие функции удовлетворяют соотношению (6-6). (Упрямцы могут использовать здесь классические методы решения дифференциальных уравнений, но для нас преобразование Лапласа сделает задачу намного проще.) Благодаря Лапласу, мы будем использовать комплексную экспоненту e^{st}. Она обладает одним замечательным свойством: ее можно дифференцировать неограниченное количество раз, и при этом ее форма остается неизменной:

$$d(e^{st})/dt = se^{st},\ d^2(e^{st})/dt^2 = s^2e^{st},\ d^3(e^{st})/dt^3 = s^3e^{st}, \ldots,$$
$$d^n(e^{st})/dt^n = s^ne^{st}, \qquad (6\text{-}7)$$

Благодаря этому свойству в результате преобразования Лапласа уравнение (6-6) преобразуется в

$$a_2s^2y(e^{st}) + a_1sy(e^{st}) + a_0y(e^{st}) = b_1sx(e^{st}) + b_0x(e^{st})\,,$$

или

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)\,y(e^{st}) = (b_1s + b_0)\,x(e^{st})\,. \qquad (6\text{-}8)$$

Хотя это уравнение проще, чем (6-6), мы можем еще больше упростить уравнение в последней строке (6-8), рассматривая отношение $y(e^{st})$ и $x(e^{st})$ как лапласовскую передаточную функцию системы, показанной на рисунке 6.5. Если мы назовем это отношение полиномов передаточной функцией $H(s)$, то

$$H(s) = y(e^{st})/x(e^{st}) = (b_1 s + b_0)/(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) \ . \qquad (6\text{-}9)$$

Мы можем использовать стандартные обозначения и представить передаточную функцию в виде

$$H(s) = Y(s)/X(s) = (b_1 s + b_0)/(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) \ , \qquad (6\text{-}10)$$

где выходная функция $Y(s)$ определяется выражением

$$Y(s) = X(s)(b_1 s + b_0)/(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = X(s)H(s) \ . \qquad (6\text{-}11)$$

Уравнение (6-11) приводит нас к необходимости перерисовать исходную блок-схему системы в форме, которая подчеркивает определение передаточной функции $H(s)$, как показано на рисунке 6.6.

Осторожный читатель может спросить нас: «Насколько правомерно использование анализа с помощью преобразования Лапласа, который основан на представлении реального входного сигнала системы $x(t)$ в виде некоторой функции от e^{st}, или $x(e^{st})$?» Ответ на этот вопрос состоит в следующем. Метод анализа с помощью преобразования Лапласа, основанный на комплексных экспонентах, обоснован, поскольку все входные функции $x(t)$, встречающиеся на практике, могут быть представлены комплексными экспонентами. Например,

- константа $c = ce^{0t}$;
- синусоида $\sin(\omega t) = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})/2j$ или $\cos(\omega t) = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$;
- монотонная экспонента e^{at};
- экспоненциально затухающая синусоида $e^{-at}\cos(\omega t)$.

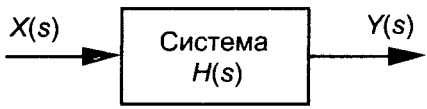


Рис. 6.6. Линейная система, описываемая уравнениями (6-10) и (6-11). На вход системы поступает преобразование Лапласа входного сигнала, $X(s)$, на выходе получаем преобразование Лапласа выходного сигнала $Y(s)$, передаточная функция системы $H(s)$

Из сказанного следует, что, если мы знаем передаточную функцию системы $H(s)$, то мы можем взять преобразование Лапласа от входного сигнала $x(t)$ и определить $X(s)$, умножить $X(s)$ на $H(s)$ и получить $Y(s)$, а затем взять обратное преобразование Лапласа от $Y(s)$, получив в результате выражение для выходного сигнала $y(t)$. В практических ситуациях, однако, мы обычно не выполняем все эти шаги, потому что наибольший интерес для нас представляет сама передаточная функция $H(s)$. Если мы можем выразить $H(s)$ аналитически или построить график поверхности $|H(s)|$ как функции переменной s, то это позволяет нам определить два наиважнейших свойства анализируемой системы и ответить на вопрос: устойчива ли система и, если да, то какова ее частотная характеристика?

«Но постойте,» — говорите вы. — «Уравнения (6-10) и (6-11) показывают, что для получения $H(s)$ нужно знать $Y(s)$!» На самом деле это не так. Нам необходимо знать только дифференциальное уравнение, подобное (6-6). Затем мы берем

преобразование Лапласа этого дифференциального уравнения и комбинируем его члены так, чтобы получить $H(s)$ в форме (6-10). Имеющие практический опыт разработчики систем могут просто посмотреть на блок-схему (механическую, электрическую и любую другую) системы и сразу написать выражение для $H(s)$. Используем же теперь понятие передаточной функции $H(s)$, чтобы определить устойчивость и частотную характеристику простой непрерывной системы.

6.2.1. Полюсы и нули на *s*-плоскости и условие устойчивости

Одной из важнейших характеристик системы является ее устойчивость. Мы можем считать систему устойчивой, если при ограниченном сигнале на входе она всегда выдает ограниченных выходной сигнал. Кажется, что легко достичь выполнения этого условия, потому что большинство окружающих нас в повседневной жизни систем являются устойчивыми. Тем не менее, мы все имеем опыт наблюдения неустойчивости системы, содержащей обратные связи. Вспомните вой, который раздается, когда микрофон громкоговорящей системы подносится слишком близко к громкоговорителю. Сенсационный пример нестабильной системы наблюдался в западном Вашингтоне, когда первый мост Такома Нэрроуз (Tacoma Narrows Bridge) начал колебаться в полдень 7 ноября 1940 г. Эти колебания были вызваны ветром со скоростью 42 мили в час, их амплитуда нарастала до тех пор, пока мост не разрушился. Для БИХ-фильтров с их внутренней обратной связью неустойчивость может привести к тому, что состояние выхода фильтра перестанет отражать состояние его входа; т. е. выходные отсчеты при этом не являются фильтрованными версиями входных отсчетов; они представляю собой какие-то непонятные колебания или псевдослучайные значения. Таких ситуаций следует по возможности избегать, не так ли? Посмотрим, как этого добиться.

Мы можем разобрать понятие устойчивости непрерывной системы, изучив несколько разных примеров передаточных функций $H(s)$, описывающих линейные инвариантные во времени системы. Предположим, что у нас есть система, передаточная функция которой имеет форму (6-10), при этом коэффициенты ее действительны, а коэффициенты b_1 и a_2 равны нулю. Обозначим эту передаточную функцию как $H_1(s)$:

$$H_1(s) = b_0/(a_1 s + a_0) = (b_0/a_1)/(s + a_0/a_1)\,. \qquad (6\text{-}12)$$

Заметьте, что при $s = -a_0/a_1$ знаменатель в (6-12) обращается в ноль, а модуль $H_1(s)$ устремляется в бесконечность. Эту точку $s = -a_0/a_1$ называют *полюсом*, и на рисунке 6.7 (a) он отмечен значком "x". Обратите внимание на то, что полюс расположен в левой полуплоскости, соответствующей отрицательной части действительной оси. Если бы система, описываемая функцией H_1, находилась в состоянии покоя и в момент времени $t=0$ мы подали на ее вход импульс $x(t)$, ее непрерывный выходной сигнал $y(t)$ представлял бы собой затухающую экспоненту, показанную на рисунке 6.7 (b). Мы можем видеть, что $H_1(s)$ устойчива, потому что выходной сигнал $y(t)$ с течением времени стремится к 0. Кстати, расстояние полюса от оси $\sigma = 0$, a_0/a_1 для нашей передаточной функции $H_1(s)$, определяет скорость затухания импульсной характеристики $y(t)$. Чтобы показать, почему эту точку называют полюсом, на рисунке 6.8 (b) изображена трехмерная поверхность

$|H_1(s)|$. Посмотрите на этот рисунок внимательно и обратите внимание на то, что мы изменили ориентацию осей s-плоскости. При такой ориентации осей мы можем увидеть, как по этой трехмерной поверхности можно получить АЧХ системы. Если мы рассмотрим поверхность $|H_1(s)|$ при $\sigma = 0$, то получим характеристику, показанную на рисунке 6.8 (b) толстой линией. Эта толстая линия, представляющая собой сечение поверхности $|H_1(s)|$ вертикальной плоскостью $\sigma = 0$, и есть АЧХ нашей системы $|H_1(\omega)|$ — таким образом, мы достигли одной из наших целей. В более привычном виде АЧХ $|H_1(\omega)|$ приведена на рисунке 6.8 (c). Рисунки 6.8 (b) и 6.8 (c) выявляют одно важное обстоятельство: преобразование Лапласа представляет собой обобщение преобразования Фурье, потому что при $\sigma = 0$ значение $s = j\omega$. Поверхность $|H_1(s)|$ при $\sigma = 0$ превращается в функцию частоты $|H_1(\omega)|$, показанную на рисунке 6.8 (c).

Другая известная передаточная функция приводит к колебательной импульсной характеристике. Рассмотри другой частный случай передаточной функции (6-10), когда $b_0 = 0$, а корни полинома знаменателя принимают комплексные значения. Мы обозначим этот частный случай передаточной функции как $H_2(s)$:

$$H_2(s) = b_1 s/(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = [(b_1/a_2)s]/[s^2 + (a_1/a_2)s + a_0/a_2]\,. \qquad (6\text{-}13)$$

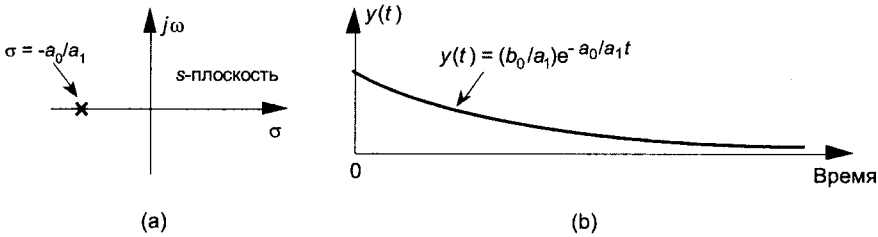


Рис. 6.7. Представления функции $H_1(s)$: (a) полюс, расположенный в точке $s = \sigma + j\omega = -a_0/a_1 + j0$ на s-плоскости; (b) импульсная характеристика системы $y(t)$

(Кстати, когда переменная s входит как в числитель, так и в знаменатель передаточной функции, *порядок* функции определяется наибольшей степенью s в знаменателе. Следовательно, наша $H_2(s)$ имеет второй порядок.) Чтобы несколько упростить последующие уравнения, разложим знаменатель передаточной функции на множители и перепишем (6-13) в виде:

$$H_2(s) = As/[(s + p)(s + p^*)]\,. \qquad (6\text{-}14)$$

где $A = b_1/a_2$, $p = p_{real} + jp_{imag}$ и $p^* = p_{real} - jp_{imag}$ (комплексно-сопряженный p). Заметим, что если s принимает значение $-p$ или $-p^*$, один из сомножителей в знаменателе (6-14) обращается в ноль, а модуль $H_2(s)$ становится бесконечным. Два комплексных полюса, показанные на рисунке 6.9 (a), лежат в стороне от отрицательной части действительной оси. Если бы система H_2 находилась в состоянии покоя и в момент времени $t=0$ мы подали на ее вход импульс $x(t)$, то выходной сигнал системы $y(t)$ представлял бы собой затухающую синусоиду, показанную на рисунке 6.9 (b). Мы видим, что $H_2(s)$ устойчива, потому что ее осциллирующий выходной сигнал с течением времени затухает подобно задетой гитарной струне. Здесь тоже расстояние полюсов от оси $\sigma = 0$ ($-p_{real}$) определяет скорость затухания синусоидальной импульсной характеристики $y(t)$. Аналогично, расстояние

полюсов от оси $j\omega = 0$ ($\pm p_{imag}$) определяет частоту колебания синусоидальной импульсной характеристики $y(t)$. Обратите внимание на одну новую деталь на рисунке 6.9 (а). Когда $s = 0$, числитель (6-14) равен нулю, в результате чего $H_2(s) = 0$. Любое значение s, при котором $H_2(s) = 0$, часто представляет определенный интерес и обычно отмечается на s-плоскости небольшим кружочком, называемым «нулем», показанным на рисунке 6.9 (а). Здесь нас не очень интересует то, как выразить p и p^* через коэффициенты знаменателя (6-13). Но настойчивый читатель может выразить значения p и p^* через a_0, a_1 и a_2 с помощью известной формулы корней квадратного уравнения: заданный полином второго порядка $f(s) = as^2 + bs + c$ можно представить в виде произведения сомножителей

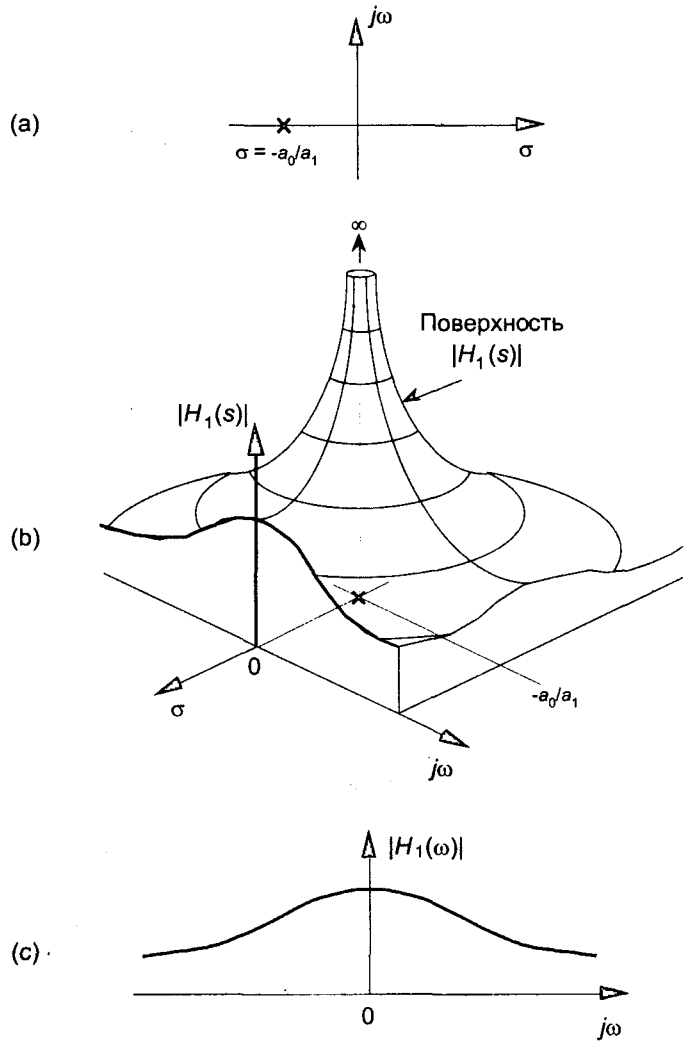


Рис. 6.8. Подробное представление $H_1(s)$: (а) полюс в точке $\sigma = -a_0/a_1$ на s-плоскости; (b) поверхность $|H_1(s)|$; (c) кривая сечения поверхности $|H_1(s)|$ вертикальной плоскостью $\sigma = 0$. Это обычное изображение АЧХ системы $|H_1(\omega)|$

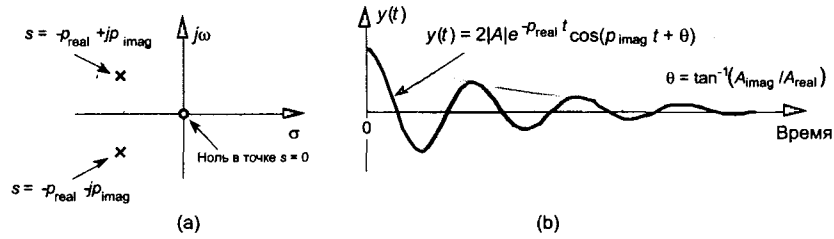


Рис. 6.9. Представления $H_2(s)$: (a) полюсы в точках $s = p_{real} \pm jp_{imag}$ s-плоскости; (b) импульсная характеристика системы $y(t)$

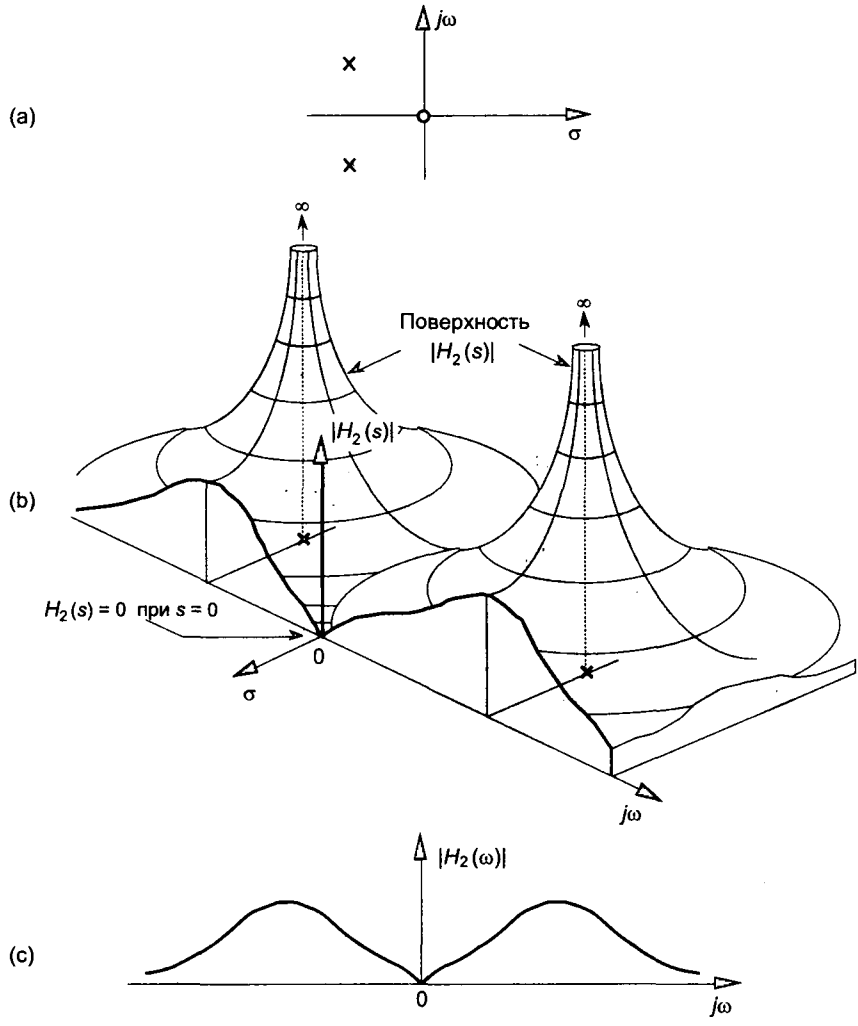


Рис. 6.10. Подробное изображение $H_2(s)$: (a) расположение полюсов и нулей на s-плоскости; (b) поверхность $|H_2(s)|$; (c) график АЧХ $|H_2(\omega)|$

$$f(s) = as^2 + bs + c = \\ = [s + b/2a + \sqrt{(b^2 - 4ac)/4a^2}][s + b/2a - \sqrt{(b^2 - 4ac)/4a^2}]\,. \tag{6-15}$$

На рисунке 6.10 (b) показана поверхность $|H_2(s)|$ над s-плоскостью. Толстая линия на этом рисунке показана на рисунке 6.10 (c) в более привычном виде, она представляет собой АЧХ системы, описываемой уравнением (6-13). Хотя трехмерные поверхности на рисунках 6.8 (b) и 6.10 (b) весьма информативны, они в то же время громоздки и не всегда необходимы. Мы можем оценить устойчивость системы, просто рассмотрев расположение полюсов на двухмерной s-плоскости.

На рисунке 6.11 показаны карты расположения полюсов для нескольких различных передаточных функций и соответствующие им импульсные характеристики. Мы видим, что рисунки 6.11 (a) и 6.11 (b), которые мы уже обсуждали, демонстрируют нам характеристики устойчивых систем. Будучи выведены из состояния покоя входным сигналом, они реагируют на него, а затем постепенно возвращается в состояние покоя. Единственный полюс $s = 0$ на рисунке 6.11 (c) соответствует передаточной функции $1/s$. В электрических системах передаточная функция $1/s$ может описывать конденсатор, заряженный импульсом тока при отсутствии цепи разряда. Для механической системы 6.11 (c) может описывать некоторую пружину, которая сжата импульсом силы и по какой-то причине остается в этом состоянии. Обратите внимание на то, что, когда $H(s)$ имеет сопряженные полюсы, лежащие точно на оси $j\omega$ ($\sigma = 0$), как на рисунке 6.11 (d), система превращается в генератор, если она выведена из состояния покоя. Эта ситуация, которую называют условной устойчивостью, описывает передаточные функции электронных генераторов. Неустойчивые системы показаны на рисунках 6.11 (e) и 6.11 (f). Здесь полюсы лежат справа от оси $j\omega$. Когда импульсный входной сигнал выводит такую систему из состояния покоя, ее выходной сигнал неограниченно возрастает[1]. Вы видите, что σ, действительная часть полюса, здесь играет ключевую роль. Когда $\sigma < 0$, система ведет себя хорошо и устойчива; когда $\sigma = 0$, система условно устойчива; и когда $\sigma > 0$, система неустойчива. Итак, мы можем сказать, что, когда полюсы расположены в правой полуплоскости комплексной плоскости, система неустойчива. Для линейных непрерывных систем это продемонстрировано на рисунке 6.12. Помните, что реальные системы часто имеют более двух полюсов, и устойчивость системы определяется полюсом с наименьшей устойчивостью. Чтобы система была устойчивой, все ее полюсы должны лежать в левой полуплоскости s-плоскости.

Итак, подытожим коротко то, что мы узнали: $H(s)$ определяется путем записи дифференциального уравнения линейной системы с последующим взятием преобразования Лапласа от этого уравнения, в результате чего получаем выражения, содержащие преобразования Лапласа $X(s)$, $Y(s)$, s и коэффициенты системы. За-

[1] Исследование импульсной характеристики в лаборатории может быть важной частью процесса проектирования. Трудность здесь состоит в генерации действительно импульсного сигнала. Если мы исследуем электрическую систему, в качестве входного импульса $x(t)$ можно использовать очень короткий импульс напряжения или тока, хотя его не всегда просто получить. Если же система механическая, в качестве входного импульса $x(t)$ можно использовать удар молотком. Для цифровых систем импульсный входной сигнал генерируется легко, он представляет собой один единичный отсчет, которому предшествуют и за которым следуют нулевые отсчеты.

тем мы группируем члены преобразования Лапласа так, чтобы получить отношение $H(s)$ в виде (6-10). (Действительно удивительно здесь то, что для анализа линейной системы нам не нужно знать, что на самом деле представляет собой входной сигнал $x(t)$!) Мы можем получить выражение для непрерывной частотной характеристики системы, просто подставив $j\omega$ вместо s в уравнение для $H(s)$. Чтобы оценить устойчивость системы, необходимо разложить полином знаменателя $H(s)$ на множители, содержащие его корни. Затем следует найти расположение полюсов системы на s-плоскости. Любой полюс, расположенный справа от оси $j\omega$, служит признаком неустойчивости системы.

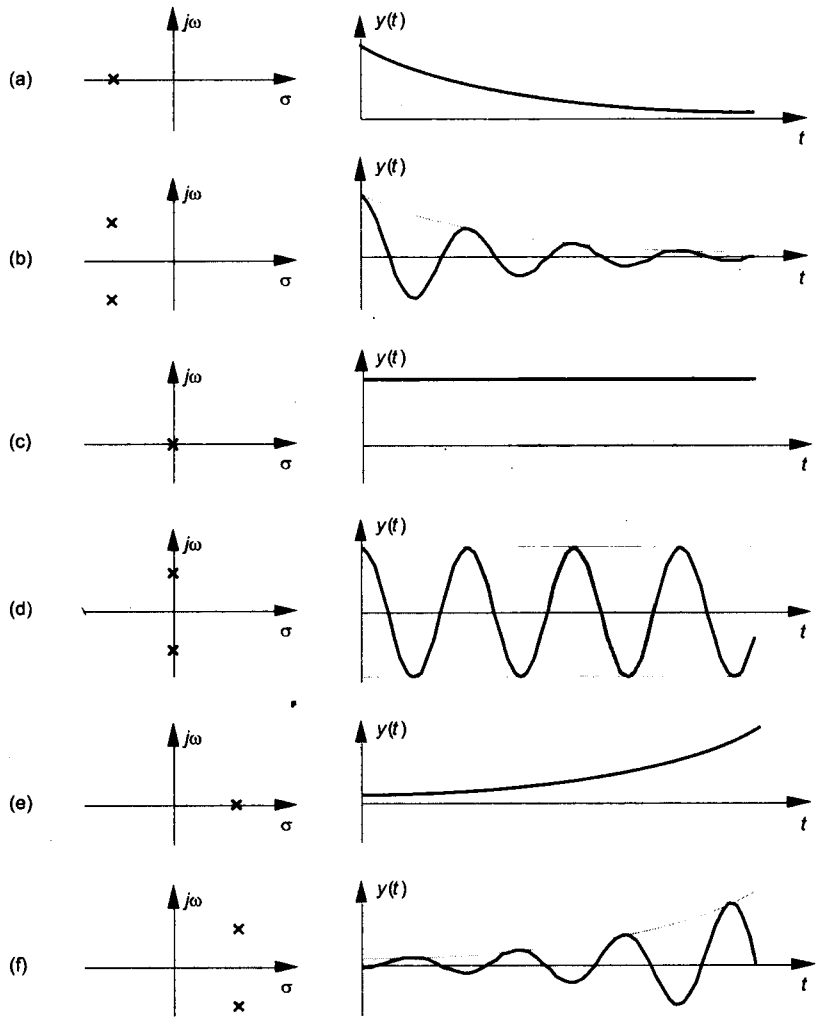


Рис. 6.11. Различные варианты расположения полюсов $H(s)$ и соответствующие импульсные характеристики: (a) единственный полюс в точке $\sigma < 0$; (b) сопряженные полюсы при $\sigma < 0$; (c) единственный полюс $\sigma = 0$; (d) сопряженные полюсы с $\sigma = 0$; (e) единственный полюс при $\sigma > 0$; (f) сопряженные полюсы при $\sigma > 0$

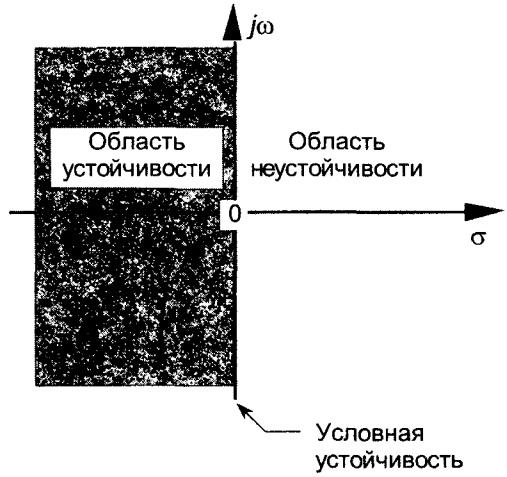


Рис. 6.12. s-плоскость, области устойчивости и неустойчивости расположения полюсов линейной непрерывной системы

Теперь вернемся к нашей главной цели — z-преобразованию. Процесс анализа БИХ-фильтров требует, чтобы мы заменили преобразование Лапласа z-преобразованием, а s-плоскость — z-плоскостью. Давайте познакомимся с z-преобразованием, узнаем, что представляет собой новая для нас z-плоскость, обсудим устойчивость БИХ-фильтров и выполним проектирование и анализ нескольких простых БИХ-фильтров.

6.3. Z-преобразование

z-преобразование — близкий родственник преобразования Лапласа[1]. В то время как преобразование Лапласа используется для упрощения анализа непрерывных дифференциальных уравнений, z-преобразование облегчает анализ дискретных разностных уравнений. Давайте дадим определение z-преобразования и исследуем его важные свойства, чтобы понять, как оно используется при анализе цифровых БИХ-фильтров.

z-преобразование дискретной последовательности $h(n)$, обозначенное как $H(z)$, определяется следующим образом:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}, \qquad (6\text{-}16)$$

где переменная z — комплексная. Если (6-3) давало нам преобразование Лапласа непрерывного сигнала, то z-преобразование выполняется над дискретной последовательностью $h(n)$, преобразуя ее в непрерывную функцию $H(z)$ непрерывной

[1] В начале 1960-х Джеймс Кайзер (James Kaiser), в честь которого названо окно Кайзера, разработал теорию цифровых фильтров, используя математическое описание, известное как z-преобразование [4, 5]. До этого времени использование z-преобразования ограничивалось областью дискретных систем управления [6-9].

комплексной переменной z. Подобно тому, как функция e^{-st} является общей формой решения линейных дифференциальных уравнений, z^{-n} представляет собой общую форму решения линейных разностных уравнений. Более того, как преобразование Лапласа $F(s)$ представляет непрерывную поверхность над s-плоскостью, так и z-преобразование $H(z)$ представляет непрерывную поверхность над z-плоскостью. Чтобы подогреть ваш интерес, скажем, что, если $H(z)$ представляет собой передаточную функцию БИХ-фильтра, то расчет поверхности $H(z)$ даст нам АЧХ фильтра, а расположение полюсов и нулей $H(z)$ позволит оценить устойчивость фильтра.

Мы можем вычислить частотную характеристику БИХ-фильтра, выразив z в полярных координатах как $z = re^{j\omega}$, где r — модуль, а ω — аргумент комплексной переменной. В этой форме z-преобразование приобретает вид

$$H(z) = H(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) r^{-n} e^{-jn\omega}, \qquad (6\text{-}17)$$

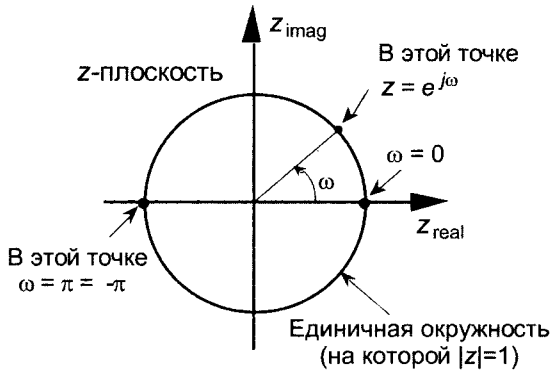


Рис. 6.13. Единичная окружность в комплексной z-плоскости

Уравнение (6-17) можно рассматривать как преобразование Фурье произведения исходной последовательности $h(n)$ на экспоненциальную последовательность r^{-n}. Если $r = 1$, (6-17) превращается в преобразование Фурье. Следовательно, на z-плоскости контур поверхности $H(z)$ при $|z| = 1$ есть преобразование Фурье последовательности $h(n)$. Если $h(n)$ представляет собой импульсную характеристику фильтра, вычисление $H(z)$ при $|z| = 1$ дает частотную характеристику фильтра. Где же на комплексной z-плоскости располагается контур $|z| = 1$? Это окружность с радиусом, равным единице, центр которой совпадает с началом координат $z = 0$. Эта окружность, которая так важна, что ей дали собственное имя *единичная окружность*, показана на рисунке 6.13. Вспомним, что частотная ось $j\omega$ на s-плоскости преобразования Лапласа прямолинейна и проходит от $-\infty$ до $+\infty$ радиан/сек. Частотная же ось ω на комплексной z-плоскости охватывает только диапазон от $-\pi$ до $+\pi$ радиан. Это соотношение между осью $j\omega$ на s-плоскости преобразования Лапласа и единичной окружностью на z-плоскости позволяет нам увидеть, что частотная ось z-плоскости эквивалентна наматыванию оси $j\omega$ в s-плоскости на единичную окружность в z-плоскости, как показано на рисунке 6.14.

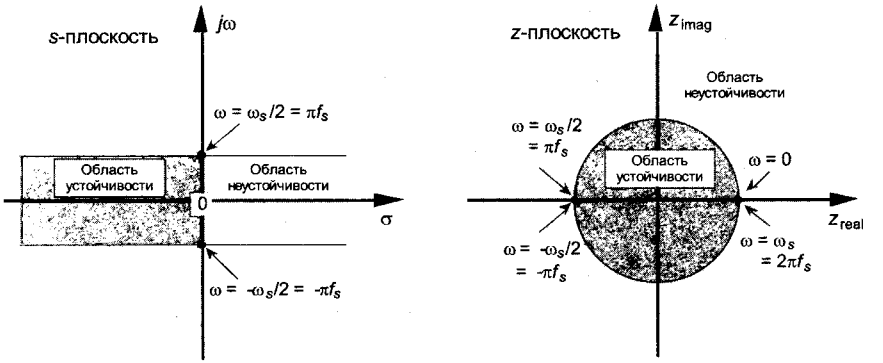


Рис. 6.14. Отображение s-плоскости преобразования Лапласа на z-плоскость. Все частоты даны в радианах/сек

Далее, частота ω на z-плоскости не является расстоянием по прямой, а представляет собой угол. Если ω на рисунке 6.13 представляет собой обобщенный нормированный угол в радианах, изменяющийся в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, мы можем связать его с частотой дискретизации f_s, определив новую частотную переменную $\omega_s = 2\pi f_s$ в радианах в секунду. На рисунке 6.14 показана периодичность представления дискретной частоты с периодом $\omega_s = 2\pi f_s$ радиан/сек или f_s Гц. При продвижении по оси частот $j\omega$ в s-плоскости в любом направлении мы можем уйти в бесконечность, при движении же по оси частот ω в z-плоскости мы будем наматывать круги по единичной окружности. Рисунок 6.14 показывает, что можно рассматривать только диапазон частот ω от $-\pi f_s$ до $+\pi f_s$ радиан/с, и это еще одна иллюстрация универсальной периодичности частотной области дискретных сигналов. (Диапазон от $-\pi f_s$ до $+\pi f_s$ радиан/сек соответствует, конечно же, диапазону частот от $-f_s/2$ до $+f_s/2$ Гц.) Имея выражение для единичной окружности $z = e^{j\omega}$, позже мы покажем, что для получения частотной характеристики фильтра нужно подставить в передаточную функцию $H(z)$ фильтра $e^{j\omega}$ вместо z.

6.3.1. Полюсы и нули на z-плоскости и условие устойчивости

Одной из важных особенностей z-плоскости является то, что область устойчивости фильтров совпадает с внутренней частью единичного круга на z-плоскости. Имея передаточную функцию цифрового фильтра $H(z)$, мы можем изучить расположение ее полюсов и нулей и сделать вывод об устойчивости фильтра. Если все полюсы находятся внутри единичного круга, фильтр устойчив. Но если хотя бы один какой-нибудь полюс оказывается за пределами единичного круга, фильтр неустойчив. На рисунке 6.15 показаны примеры размещения полюсов в z-плоскости и соответствующие им дискретные импульсные характеристики. Было бы хорошо, если бы вы сравнили карты z-плоскости и дискретные импульсные характеристики на рисунке 6.15 с картами s-плоскости и непрерывными характеристиками на рисунке 6.11. Выходной сигнал $y(n)$ на рисунках 6.15 (d) и (e) показывает нам пример неограниченного нарастания выходного сигнала неустойчивого фильтра всякий раз, когда входной сигнал $x(n)$ становится отличным от нуля. Чтобы избежать

такой ситуации, любой БИХ-фильтр должен проектироваться так, чтобы все полюсы его передаточной функции $H(z)$ лежали внутри единичного круга. Как и цепь, прочность которой определяется самым слабым звеном, БИХ-фильтр лишь настолько устойчив, насколько устойчив самый неустойчивый из его полюсов.

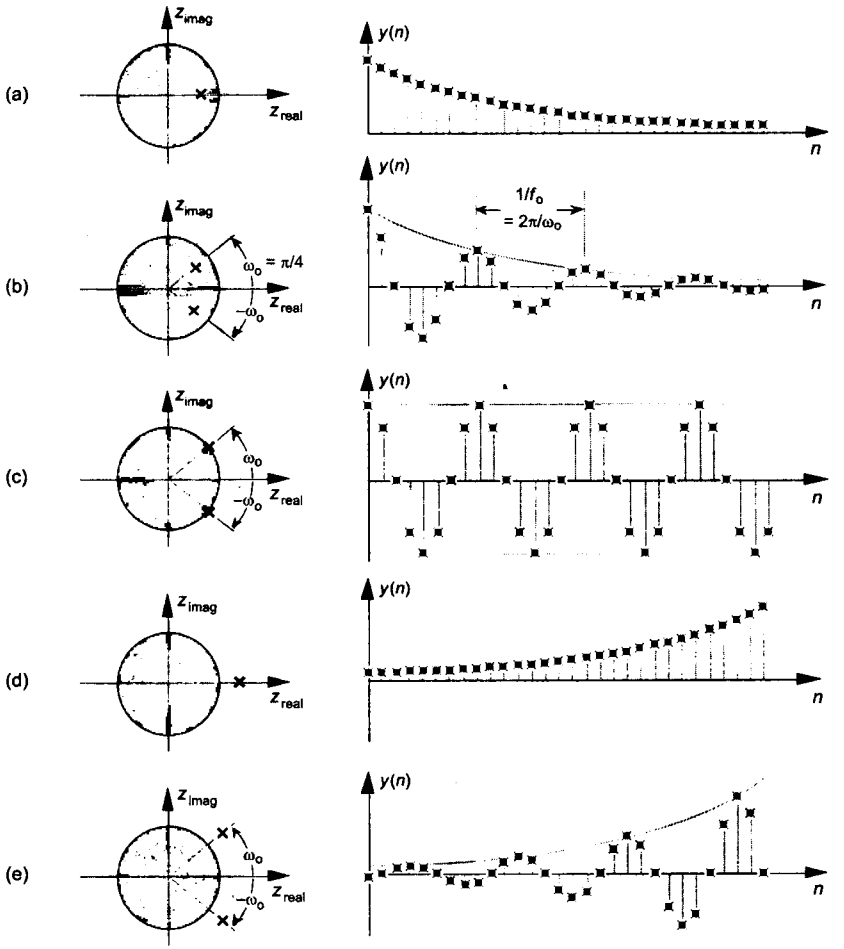


Рис. 6.15. Различные карты расположения полюсов $H(z)$ и соответствующие им импульсные характеристики: (a) единственный полюс внутри единичного круга; (b) сопряженные полюсы внутри единичного круга; (c) сопряженные полюсы на единичной окружности; (d) единственный полюс за пределами единичного круга; (e) сопряженные полюсы за пределами единичного круга

Частота осцилляции ω_o импульсных характеристик на рисунках 6.15 (c) и (e), конечно же, пропорциональна углу полюса относительно действительной оси z_{real}, или ω_o радиан/сек соответствуют $f_o = \omega_o / 2\pi$ Гц. Поскольку точка пересечения оси $-z_{real}$ с единичной окружностью $z = -1$ соответствует π радиан (или πf_s радиан/сек $= f_s/2$ Гц), угол $\omega_o = \pi/4$ на рисунке 6.15 показывает, что $f_o = f_s/8$, и наша импульсная характеристика $y(n)$ имеет восемь отсчетов на период частоты f_o.

6.3.2. Использование z-преобразования для анализа БИХ-фильтров

Прежде, чем мы сможем добавить z-преобразование к набору инструментов цифровой обработки сигналов, следует рассмотреть еще один вопрос. Нам необходимо определить, что представляет собой операция задержки на рисунке 6.3 по отношению к z-преобразованию. Для этого предположим, что у нас есть последовательность $x(n)$, z-преобразование которой есть $X(z)$, и последовательность $y(n) = x(n-1)$, z-преобразование которой есть $Y(z)$, как показано на рисунке 6.16. z-преобразование $y(n)$ по определению имеет вид

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-1)z^{-n}. \qquad (6\text{-}18)$$

Теперь, если мы положим $k = n-1$, то $Y(z)$ принимает форму

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-(k+1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}z^{-1}, \qquad (6\text{-}19)$$

которую мы можем переписать как

$$Y(z) = z^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = z^{-1}[X(z)], \qquad (6\text{-}20)$$

Рис. 6.16. Выходная последовательность $y(n)$ представляет собой задержанную на один период дискретизации входную последовательность $x(n)$

Следовательно, одна единица задержки во временной области приводит к умножению z-преобразования на z^{-1}.

Рассматривая единичную задержку по времени как эквивалент оператора z^{-1}, мы приходим к соотношениям, показанным на рисунке 6.17, о которых можно сказать, что $X(z)z^0 = X(z)$ — это z-преобразование $x(n)$, $X(z)z^{-1}$ — z-преобразование последовательности $x(n)$, задержанной на один отсчет, $X(z)z^{-2}$ — z-преобразование последовательности $x(n)$, задержанной на два отсчета, а $X(z)z^{-k}$ — z-преобразование последовательности $x(n)$, задержанной на k отсчетов. Таким образом, передаточная функция вида z^{-k} эквивалентна задержке на kt_s секунд, где t_s — период времени между последовательными отсчетами, или единица, деленная на частоту дискретизации, $t_s = 1/f_s$. Поскольку задержка на один отсчет эквивалентна множителю z^{-1}, символ единичной задержки, использованный на рисунках 6.2 и 6.3, обычно помечают оператором z^{-1}.

Задержимся на минуту и посмотрим, где мы находимся в данный момент. Наше знакомство с преобразованием Лапласа и его s-плоскостью, понятие устойчивости, основанное на расположении полюсов $H(s)$, введение z-преобразования с его полюсами в z-плоскости, и концепция оператора z^{-1}, обозначающего единичную задержку по времени, привели нас к поставленной цели: мы можем теперь изучить разностное уравнение или структуру БИХ-фильтра и сразу

записать передаточную функцию фильтра $H(z)$. Вычислив соответствующим образом передаточную функцию БИХ-фильтра $H(z)$, мы можем получить частотную характеристику фильтра и проверить его устойчивость. Помня об этой амбициозной цели, займемся выводом уравнений в z-области, необходимых для анализа БИХ- фильтров.

Используя соотношения, приведенные на рисунке 6.17, начертим схему, приведенную на рисунке 6.3, как обобщенный БИХ-фильтр M-го порядка, используя оператор z^{-1}, как показано на рисунке 6.18. (В аппаратуре операции задержки z^{-1} реализуются как регистры сдвига, хранящие последовательные входные и выходные отсчеты. При программной реализации БИХ-фильтра операция z^{-1} просто указывает на последовательные ячейки памяти, в которых хранятся входная и выходная последовательности.) Структуру БИХ-фильтра на рисунке 6.18 часто называют *Прямой формой I*.

Разностное уравнение во временной области, описывающее обобщенный БИХ-фильтр M-го порядка, имеющий N секций прямой связи и M секций обратной связи, показанный на рисунке 6.18, имеет вид

Выражение для БИХ-фильтра M-го порядка во временной области

$$\begin{aligned} y(n) &= b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + \\ &+ b(2)x(n-2) + \ldots + b(N)x(n-N) + \\ &+ a(1)y(n-1) + a(2)y(n-2) + \ldots + \\ &+ a(M)y(n-M)\,. \end{aligned} \tag{6-21}$$

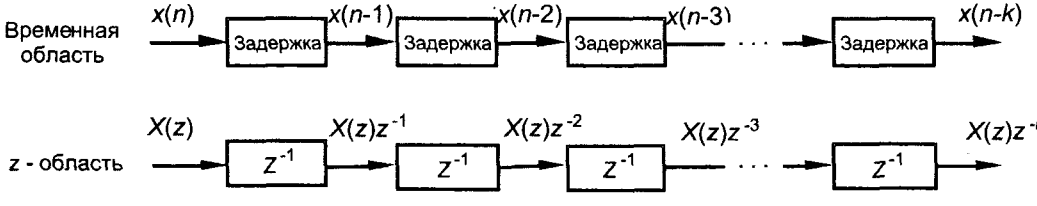


Рис. 6.17. Соответствие операции задержки по времени и операции z^{-k} в z-области

В z-области выходной сигнал такого БИХ-фильтра можно записать как

$$\begin{aligned} Y(z) &= b(0)X(z) + b(1)X(z)z^{-1} + b(2)X(z)z^{-2} + \ldots + b(N)X(z)z^{-n} + \\ &+ a(1)Y(z)z^{-1} + a(2)Y(z)z^{-2} + \ldots + a(M)Y(z)z^{-M}\,, \end{aligned} \tag{6-22}$$

где $Y(z)$ и $X(z)$ представляют собой z-преобразования последовательностей $y(n)$ и $x(n)$ соответственно. Рассмотрите уравнения (6-21) и (6-22) внимательно и обратите внимание на то, что единичные задержки по времени преобразуются в отрицательные степени z в z-области. Более компактная форма выражения для $Y(z)$ выглядит так

Выражение для БИХ-фильтра M-го порядка в z-области

$$Y(z) = X(z)\sum_{k=0}^{N} b(k)z^{-k} + Y(z)\sum_{k=1}^{M} a(k)z^{-k}\,. \tag{6-23}$$

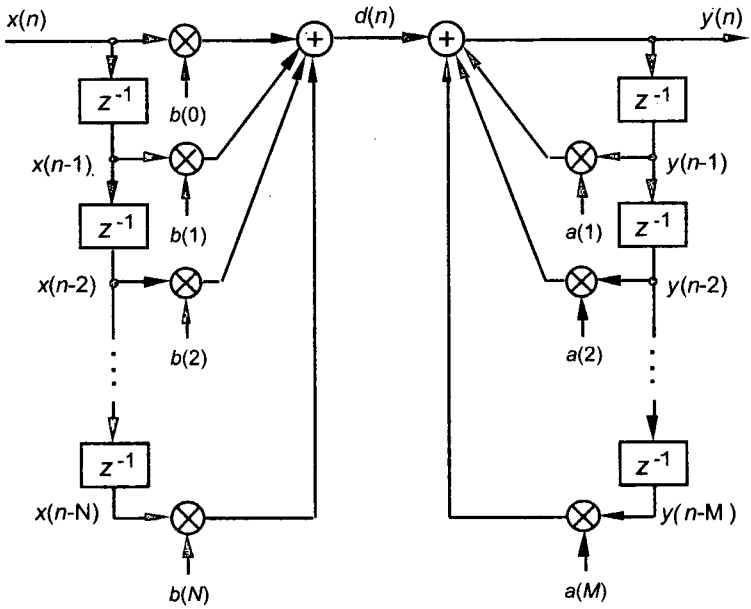


Рис. 6.18. Обобщенная структура (Прямая форма I) БИХ-фильтра M-го порядка, имеющего N секций прямой связи и M секций обратной связи, оператор z^{-1} символизирует задержку по времени на один отсчет

Итак, мы достигли места, где можно описать передаточную функцию обобщенного БИХ-фильтра. Приведя подобные члены в (6-23), получаем:

$$Y(z)\left[1-\sum_{k=1}^{M} a(k)z^{-k}\right] = X(z)\sum_{k=0}^{N} b(k)z^{-k}. \qquad (6\text{-}24)$$

И, наконец, мы получаем передаточную функцию фильтра в z-области $H(z) = Y(z)/X(z)$, где $H(z)$ имеет вид

Передаточная функция БИХ-фильтра M-го порядка в z-области

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \\ = \left[\sum_{k=0}^{N} b(k)z^{-k}\right]\Big/\left[1-\sum_{k=1}^{M} a(k)z^{-k}\right]. \qquad (6\text{-}25)$$

(Как и в случае передаточных функций Лапласа, порядок нашей передаточной функции в z-области определяется наибольшим показателем степени при z в знаменателе, в рассматриваемом случае — это M.) Уравнение (6-25) говорит нам все, что необходимо знать о БИХ-фильтре. Мы можем вычислить корни знаменателя, чтобы определить расположение полюсов фильтра на z-плоскости, которое необходимо для проверки устойчивости.

Подобно тому, как передаточная функция Лапласа $H(s)$ в (6-9) описывала комплекснозначную поверхность над или под s-плоскостью, так и $H(z)$ описывает комплекснозначную поверхность над или под z-плоскостью. Пересечение поверхности $H(z)$ с боковой поверхностью цилиндра, построенного на единичной окружности $z = e^{j\omega}$ дает нам комплексную частотную характеристику фильтра. Это значит,

что подстановка $e^{j\omega}$ вместо z в передаточной функции (6-25) даст нам выражение для частотной характеристики БИХ-фильтра $H_{IIR}(\omega)$ вида

Частотная характеристика БИХ-фильтра *M*-го порядка в экспоненциальной форме

$$H_{IIR}(\omega) = H(z)\,|_{z=e^{j\omega}} = \\ = \sum_{k=0}^{N} b(k)e^{-jk\omega} \Big/ \Big[1 - \sum_{k=1}^{M} a(k)e^{-jk\omega}\Big]. \tag{6-26}$$

Изменим форму (6-26) и получим более полезные выражения для модуля и аргумента $H_{IIR}(\omega)$ (АЧХ и ФЧХ фильтра). Поскольку $H_{IIR}(\omega)$ является отношением комплексных величин, мы можем представить $H_{IIR}(\omega)$ в алгебраической форме:

$$H_{IIR}(\omega) = \sum_{k=0}^{N} b(k)[\cos(k\omega) - j\sin(k\omega)] \Big/ \{1 - \sum_{k=1}^{M} a(k)[\cos(k\omega) - j\sin(k\omega)]\}, \tag{6-27}$$

или

Частотная характеристика БИХ-фильтра *M*-го порядка в алгебраической форме

$$H_{IIR}(\omega) = \Big[\sum_{k=0}^{N} b(k)\cos(k\omega) - j\sum_{k=0}^{N} b(k)\sin(k\omega)\Big] \Big/ \\ \Big/ \Big[1 - \sum_{k=1}^{M} a(k)\cos(k\omega) + j\sum_{k=1}^{M} a(k)\sin(k\omega)\Big] \tag{6-28}$$

Обычно проще и полезнее рассматривать комплексную частотную характеристику в виде модуля и аргумента. Давайте получим соответствующие выражения, представив числитель и знаменатель (6-28) в виде двух комплексных функций круговой частоты ω. Обозначив числитель (6-28) как $Num(\omega)$, запишем

$$Num(\omega) = Num_{real}(\omega) + jNum_{imag}(\omega), \tag{6-29}$$

где

$$Num_{real}(\omega) = \sum_{k=0}^{N} b(k) \bullet \cos(k\omega),$$

и

$$Num_{imag}(\omega) = -\sum_{k=0}^{N} b(k) \bullet \sin(k\omega), \tag{6-30}$$

Аналогично знаменатель (6-28) можно представить в виде

$$Den(\omega) = Den_{real}(\omega) + jDen_{imag}(\omega), \tag{6-31}$$

где

$$Den_{real}(\omega) = 1 - \sum_{k=1}^{M} a(k) \bullet \cos(k\omega),$$

и

$$Den_{imag}(\omega) = \sum_{k=1}^{M} a(k) \bullet \sin(k\omega), \tag{6-32}$$

Такое представление $Num(\omega)$ и $Den(\omega)$ позволяет нам записать $H_{IIR}(\omega)$ в более простой форме

$$H_{IIR}(\omega) = Num(\omega)/Den(\omega) =$$

$$[Num_{real}(\omega) + jNum_{imag}(\omega)] / [Den_{real}(\omega) + jDen_{imag}(\omega)] = \tag{6-33}$$

$$= [\,|Num(\omega)|\,\angle\phi_{Num}(\omega)] / [\,|Den(\omega)|\,\angle\phi_{Den}(\omega)] \tag{6-33'}$$

Используя (6-33) и правила деления комплексных чисел (А-2) и (А-19'), приведенные в приложении А, мы получаем АЧХ БИХ-фильтра в виде

$$|H_{IIR}(\omega)| = |Num(\omega)| / |Den(\omega)| =$$

$$= \{\sqrt{[Num_{real}(\omega)]^2 + [Num_{imag}(\omega)]^2}\} / \{\sqrt{[Den_{real}(\omega)]^2 + [Den_{imag}(\omega)]^2}\} \tag{6-34}$$

Далее, фазо-частотная характеристика фильтра $\phi_{IIR}(\omega)$ равна разности аргументов числителя и знаменателя, или

$$\phi_{IIR}(\omega) = \phi_{Num}(\omega) - \phi_{Den}(\omega) =$$

$$= \tan^{-1}[Num_{imag}(\omega)/Num_{real}(\omega)] - \tan^{-1}[Den_{imag}(\omega)/Den_{real}(\omega)]. \tag{6-35}$$

Напомним, что мы проделали все эти алгебраические упражнения с целью вывода выражений для расчета АЧХ $|H_{IIR}(\omega)|$ и ФЧХ $\phi_{IIR}(\omega)$ БИХ-фильтров через коэффициенты фильтра в (6-30) и (6-32). Скоро мы воспользуемся этими выражениями для анализа реального БИХ-фильтра.

Следует отметить, что мы можем использовать (6-34) и (6-35) для вычисления АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтров как функции частоты ω. Так что же такое ω? Это нормированная круговая частота, представленная углом на комплексной плоскости, как на рисунке 6.13, принимающая значения в диапазоне $-\pi \le \omega \le +\pi$. В единицах круговой частоты дискретизации ω_s (см. рисунок 6.14) ω перекрывает диапазон $-\omega_s/2 \le \omega \le +\omega_s/2$. В единицах нашей старой знакомой f_s выражения (6-34) и (6-35) справедливы для диапазона от $-f_s/2$ до $+f_s/2$ Гц. Так, например, если цифровые данные поступают на вход фильтра с частотой $f_s = 1000$ отсчетов в секунду, мы можем использовать (6-34), чтобы построить график АЧХ фильтра в диапазоне частот от -500 Гц до $+500$ Гц.

Хотя выражения, описывающие комплексную частотную характеристику $H_{IIR}(\omega)$, амплитудно-частотную характеристику $|H_{IIR}(\omega)|$ и фазо-частотную характеристику $\phi_{IIR}(\omega)$, на первый взгляд выглядят сложновато, мы продемонстрируем их простоту и полезность на примере анализа простого БИХ ФНЧ второго порядка, показанного на рисунке 6.19, частота среза которого равна $\omega_s/10$. Рассмотрев структуру фильтра, мы можем записать его разностное уравнение в виде

$$y(n) = 0.0605x(n) + 0.121x(n-1) + 0.0605x(n-2) +$$

$$+ 1.194y(n-1) - 0.436y(n-2), \tag{6-36}$$

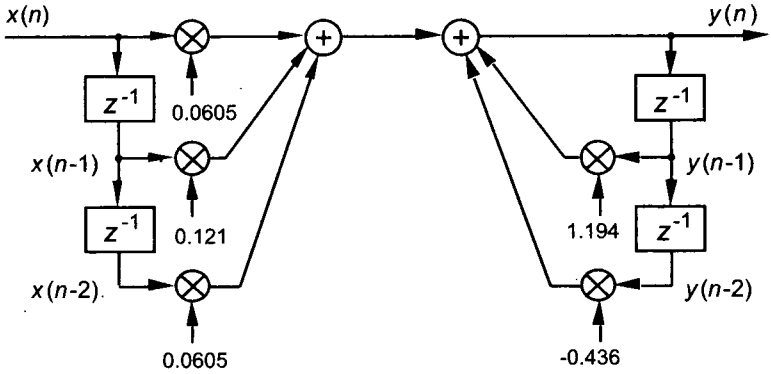


Рис. 6.19. Пример БИХ ФНЧ второго порядка

или в z-области:

$$Y(z) = 0.0605X(z) + 0.121X(z)z^{-1} + 0.0605X(z)z^{-2} + \\ + 1.194Y(z)z^{-1} - 0.436Y(z)z^{-2}, \tag{6-37}$$

Используя (6-25), записываем передаточную функцию фильтра $H(z)$:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = [0.0605z^{0} + 0.121z^{-1} + 0.0605z^{-2}] / \\ /[1 - 1.194z^{-1} + 0.436z^{-2}]. \tag{6-38}$$

Подставив $z = e^{j\omega}$, мы видим, что частотная характеристика нашего БИХ-фильтра описывается выражением

$$H_{IIR}(\omega) = [0.0605e^{-j0\omega} + 0.121e^{-j1\omega} + 0.0605e^{-j2\omega}]/ \\ /[1 - 1.194e^{-j1\omega} + 0.436e^{-j2\omega}]. \tag{6-39}$$

Мы почти у цели. Вспомнив тождества Эйлера, а также то, что $\cos(0) = 1$ и $\sin(0) = 0$, мы можем записать $H_{IIR}(\omega)$ в алгебраической форме:

$$H_{IIR}(\omega) = \tag{6-40}$$

$$= \{0.0605 + 0.121\cos(1\omega) + 0.0605\cos(2\omega) - j[0.121\sin(1\omega) + 0.0605\sin(2\omega)]\}/ \\ /\{1 - 1.194\cos(1\omega) + 0.436\cos(2\omega) + j[1.194\sin(1\omega) - 0.436\sin(2\omega)]\}.$$

Выражение (6-40) и есть то, к чему мы стремились, и если мы вычислим его модуль для частот в диапазоне $-\pi \le \omega \le \pi$, мы получим АЧХ $|H_{IIR}(\omega)|$, показанную черной линией на рисунке 6.20 (а). Для сравнения на этом же рисунке показана АЧХ КИХ-фильтра с 5 ответвлениями. Хотя оба фильтра требуют одинакового количества операций (пять умножений на один выходной отсчет), АЧХ БИХ-фильтра выглядит лучше. Обратите внимание на более крутую переходную полосу и более низкий уровень боковых лепестков характеристики БИХ-фильтра по сравнению с характеристикой КИХ-фильтра[1].

[1] Чтобы это сравнение БИХ и КИХ-фильтров имело смысл, коэффициенты обоих фильтров выбирались так, чтобы каждый из них аппроксимировал идеальную частотную характеристику, показанную на рисунке 5.17 (а).

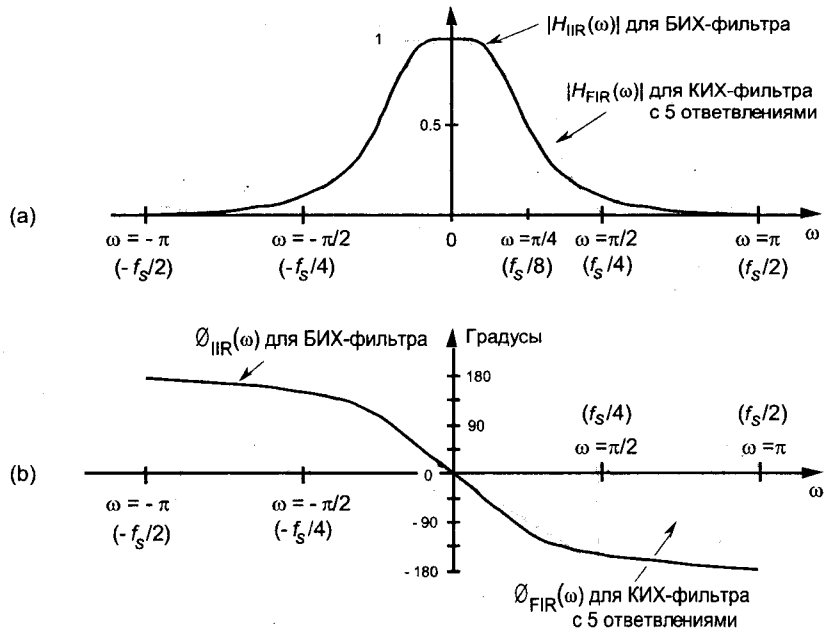


Рис. 6.20. Частотные характеристики БИХ-фильтра (черная линия), показанного на рисунке 6.19, и КИХ-фильтра с 5 ответвлениями (серая линия): (a) Амплитудно-частотные характеристики; (b) фазо-частотные характеристики

А теперь небольшое предупреждение. Знаки коэффициентов знаменателя (6-40) легко изменить на обратные, поэтому будьте внимательны, когда будете выполнять эти вычисления самостоятельно. Некоторые авторы обходят эту трудность, показывая коэффициенты $a(k)$ на рисунке 6.18 со знаком минус, так что члены знаменателя (6-25) всегда суммируются. Кроме того, многие коммерческие программы проектирования БИХ-фильтров выдают значения коэффициентов $a(k)$, знаки которых при подстановке в структуру на рисунке 6.18 необходимо изменить на противоположные. (Если, используя программы расчета и анализа БИХ-фильтров, вы получили странный и неожиданный результат, попробуйте поменять знаки коэффициентов $a(k)$ и посмотреть, решает ли эта операция вашу проблему.)

Черная кривая на рисунке 6.20 (b) — это фазо-частотная характеристика нашего БИХ-фильтра $\phi_{IIR}(\omega)$. Обратите внимание на ее нелинейность по сравнению с ФЧХ КИХ-фильтра. (Помните, что нас интересует фазо-частотная характеристика только в полосе пропускания. Так что разрывы фазы КИХ-фильтра не имеют значения.) Нелинейность ФЧХ БИХ-фильтров является неотъемлемым их свойством и, помня о негативных последствиях этой нелинейности, описанных при обсуждении групповой задержки в разделе 5.8, следует внимательно рассматривать возможные ее проявления, когда мы решаем использовать БИХ-фильтры вместо КИХ-фильтров в каждом конкретном случае. Каждый разработчик должен задать себе следующий вопрос: «Какая величина искажения фазы допустима при выигрыше в количестве операций и скорости обработки данных от применения БИХ-фильтров?» И найти ответ на него.

Чтобы проверить устойчивость БИХ-фильтра, мы должны вычислить корни полинома знаменателя второго порядка в (6-38). Эти корни являются полюсами

$H(z)$, и если их модули меньше единицы, фильтр будет устойчивым. Чтобы вычислить эти два полюса z_{p1} и z_{p2}, сначала умножим $H(z)$ на z^2/z^2, чтобы получить полиномы по положительным степеням z. После этого знаменатель $H(z)$ приобретает вид

$$\textit{Знаменатель } H(z)\text{:}\quad z^2 - 1.194z + 0.436\,. \tag{6-41}$$

Находя корни (6-41) с использованием квадратного уравнения из (6-15), мы получаем сомножители

$$\begin{aligned}&\textit{Знаменатель } H(z)\text{:}\quad (z + z_{p1})(z + z_{p2}) = \\ &= (z - 0.597 + j0.282)(z - 0.597 - j0.282)\end{aligned} \tag{6-42}$$

Итак, когда $z = -z_{p1} = 0.597 - j0.282$ или $z = -z_{p2} = 0.597 + j0.282$, знаменатель передаточной функции фильтра $H(z)$ обращается в ноль, а $H(z)$ становится бесконечной. На рисунке 6.21 (а) мы показываем расположение полюсов $0.597 + j0.282$ и $0.597 - j0.282$ вместе с поверхностью $|H(z)|$. Поскольку эти полюсы расположены внутри единичного круга (их модули меньше единицы), БИХ-фильтр из нашего примера устойчив. На рисунке 6.21 (b) толстой черной линией показана линия пересечения поверхности $|H(z)|$ с боковой поверхностью цилиндра, основанием которого служит единичная окружность. Поскольку на единичной окружности $z = e^{j\omega}$, уравнение этой кривой имеет вид $|H(z)|_{|z|=1} = |H(\omega)|$, т. е. эта кривая представляет собой АЧХ фильтра на z-плоскости. Кривая $|H(\omega)|$ соответствует $|H_{IIR}(\omega)|$ на рисунке 6.20 (а).

6.3.3. Другие структуры БИХ-фильтров

Прямая форма I БИХ-фильтра на рисунке 6.18 может быть преобразована в ряд других структур. Нам будет легче развить эту мысль, предположив, что количество прямых и обратных связей одинаково, а именно $M = N = 2$, как на рисунке 6.22 (а), и рассматривая части фильтра, содержащие прямые и обратные связи, как два отдельных фильтра. Поскольку обе половины фильтра линейны, мы можем поменять их местами, как показано на рисунке 6.22 (b), при этом выходной сигнал $y(n)$ не изменится.

Цель такой перестановки состоит в том, что мы получаем две одинаковые цепочки задержек на рисунке 6.22 (b). Поскольку на рисунке 6.22 (b) одна и та же последовательность $g(n)$ сдвигается по обеим цепям задержки, мы можем убрать одну из них и получить упрощенную Прямую форму II, показанную на рисунке 6.22 (с), которая требует только половину элементов задержки по сравнению с Прямой формой I.

Другой популярной структурой БИХ-фильтров является Транспонированная прямая форма II. Мы получаем эту структуру, исходя из Прямой формы II, преобразовав ее узлы в сумматоры, а сумматоры в узлы, изменив направление стрелок и поменяв местами $x(n)$ и $y(n)$. (Операцию транспонирования можно также применять к структурам КИХ-фильтров.) Выполнение этих операций дает Транспонированную прямую форму II, показанную на рисунке 6.22(d)[1].

[1] В других работах, а также в отечественной литературе Прямую форму II и ее транспонированный вариант называют также Каноническими структурами I и II. — (*прим. перев.*).

Фильтры на рисунке 6.22 обладают абсолютно одинаковыми характеристиками до тех пор, пока рассматривается их реализация в арифметике с неограниченной точностью представления чисел. Однако при использовании квантованных коэффициентов, округления или усечения, используемых для устранения ошибок двоичного переполнения, разные структуры фильтров дают разные шумовые характеристики и разную устойчивость. В действительности Транспонированная прямая форма II была разработана, потому что ведет себя лучше, чем Прямая форма II, при реализации в целочисленной арифметике. Разработчики БИХ-фильтров пришли к общему мнению, что Прямая форма I наименее чувствительна к квантованию коэффициентов и наиболее устойчива. Мы вернемся к арифметике конечной точности в разделе 6.7.

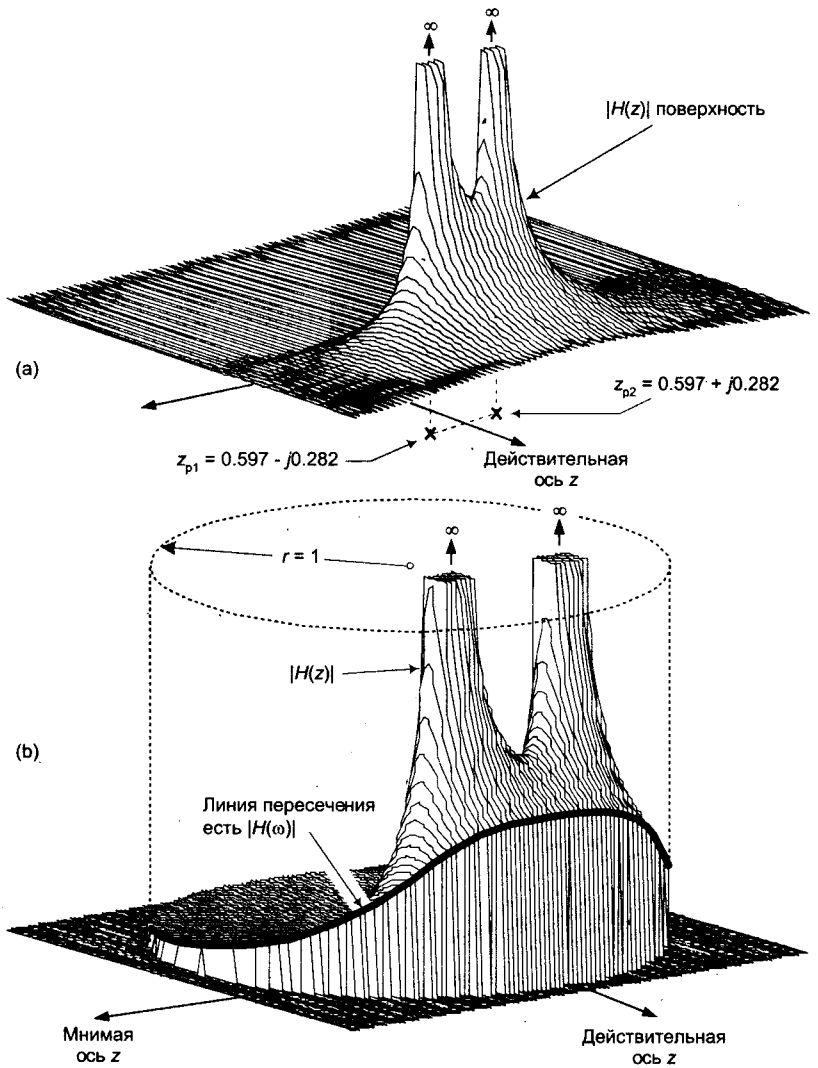


Рис. 6.21. Характеристики БИХ-фильтра в z-области: (a) расположение полюсов; (b) АЧХ

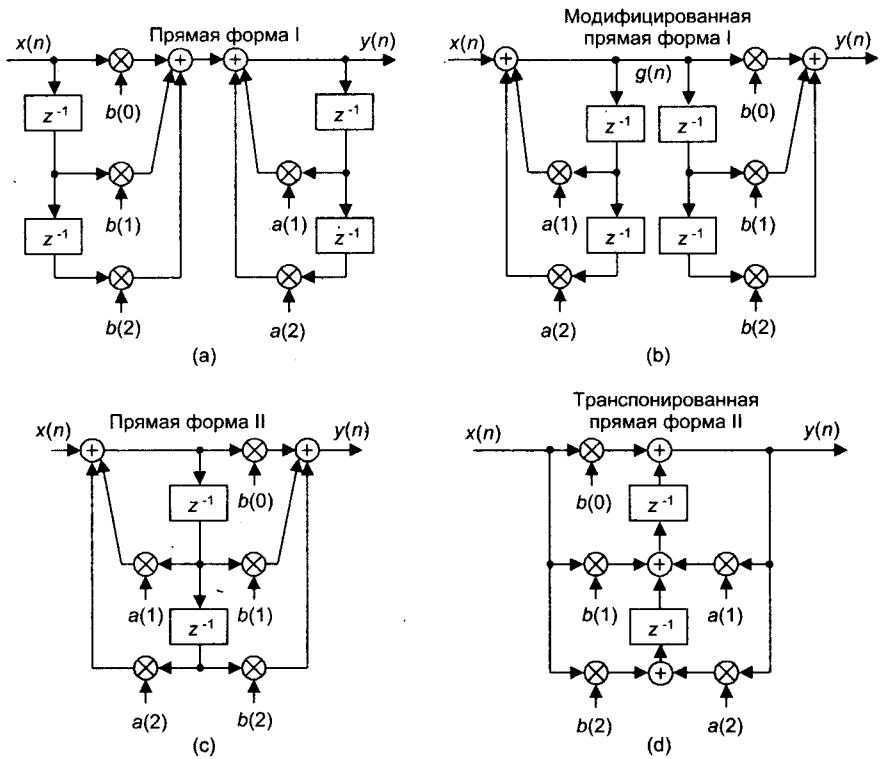


Рис. 6.22. Измененные структуры БИХ-фильтров 2-го порядка: (a) Прямая форма I; (b) Модифицированная прямая форма I; (c) Прямая форма II; (d) Транспонированная прямая форма II

Кстати, из-за наличия обратных связей БИХ-фильтры часто называют *рекурсивными* фильтрами. Соответственно, КИХ-фильтры называют *нерекурсивными*. Общее заблуждение здесь состоит в том, что все *рекурсивные* фильтры приравниваются к БИХ-фильтрам. А это не так, поскольку КИХ-фильтры могут быть реализованы и в рекурсивных структурах (см. раздел 7.1). Следовательно, термины *рекурсивный* и *нерекурсивный* следует применять по отношению к структуре фильтра, а термины БИХ или КИХ следует использовать для описания длительности импульсной характеристики фильтра [10, 11].

Теперь, когда мы представляем себе, какими характеристиками обладают и в каких структурах реализуются БИХ-фильтры, познакомимся коротко с тремя методами их проектирования. Эти методы проектирования БИХ-фильтров известны под впечатляющими названиями: метод *инвариантного преобразования импульсной характеристики*, метод *билинейного преобразования* и *оптимизационный* метод. Первые два метода используют аналитические (выведенные с помощью пера и бумаги) процедуры аппроксимации аналоговых фильтров[1]. Поскольку методы расчета аналоговых фильтров очень хорошо разработаны, разработчики могут воспользоваться

[1] В оставшейся части этой главы мы будем использовать термин аналоговый фильтр, благодаря его популярности, для обозначения фильтров, реализуемых аппаратно с помощью резисторов, конденсаторов и (возможно) операционных усилителей.

преимуществами многочисленных методов проектирования аналоговых фильтров для проектирования, скажем, фильтров Баттерворта с их очень гладкой АЧХ или фильтров Чебышева с их пульсирующей в полосе пропускания АЧХ и более крутой переходной полосой. *Оптимизационные* методы (безусловно, самые популярные методы проектирования БИХ-фильтров) используют инструментарий линейной алгебры, предоставляемый коммерческими пакетами программ проектирования фильтров.

Методы *инвариантного преобразования импульсной характеристики* и *билинейного преобразования* требуют определенной базовой подготовки, так что начинающий в области ЦОС читатель при первом чтении этой книги может их пропустить. Однако эти методы могут быть очень полезными в будущем, когда ваши знания, опыт и сложность решаемых задач в области ЦОС вырастут.

6.4. Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики

Метод проектирования БИХ-фильтров с помощью инвариантного преобразования импульсной характеристики основан на предположении, что мы можем спроектировать дискретный фильтр, импульсная характеристика которого является дискретизированной версией импульсной характеристики некоторого аналогового фильтра. Если этот *аналоговый фильтр* (который часто называют *фильтром-прототипом*) имеет требуемую частотную характеристику, то наш проектируемый БИХ-фильтр должен обеспечивать аппроксимацию этой требуемой характеристики. Эквивалентность импульсных характеристик при таком методе проектирования изображена на рисунке 6.23, где для обозначения импульса мы использовали обычное обозначение δ, а $h_c(t)$ — импульсная характеристика аналогового фильтра. На рисунке 6.23 (a) мы используем нижний индекс "c"[1], чтобы подчеркнуть непрерывный характер аналогового фильтра. Рисунок 6.23 (b) иллюстрирует определение импульсной характеристики дискретного фильтра как выходной последовательности фильтра при подаче на его вход одного отсчета единичной величины, которому предшествуют и за которым следуют нулевые отсчеты. Нашей задачей является проектирование цифрового фильтра, импульсная характеристика которого является дискретизированной версией непрерывной импульсной характеристики аналогового фильтра. Соответствие непрерывной и дискретной импульсных характеристик предполагает, что мы можем отобразить каждый полюс передаточной функции аналогового фильтра $H_c(s)$ в s-плоскости на полюс передаточной функции дискретного фильтра $H(z)$ в z-плоскости. Разработчики обнаружили, что метод инвариантного преобразования импульсной характеристики действительно дает полезные БИХ-фильтры, если только частота дискретизации намного превосходит ширину спектра фильтруемых сигналов. Другими словами, БИХ-фильтры, рассчитанные этим методом, подвержены влиянию наложений спектра, поскольку частотные характеристики реальных

[1] От английского continuous, что значит непрерывный — (*прим. перев.*).

аналоговых фильтров не являются строго ограниченными в частотной области. Наложение может проявиться в АЧХ фильтра, как показано на рисунке 6.24.

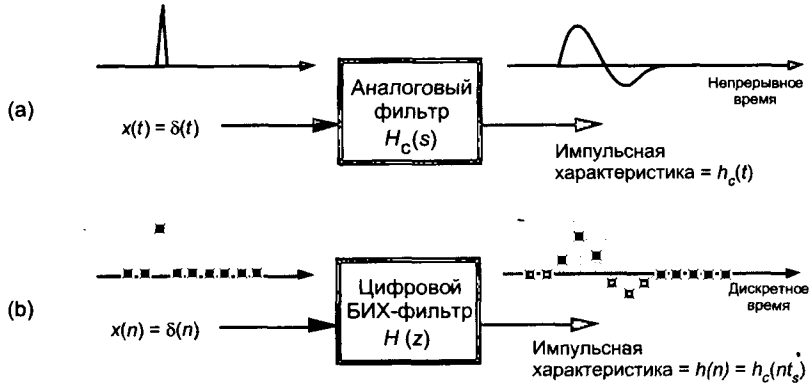


Рис. 6.23. Инвариантность импульсной характеристики: (a) непрерывная импульсная характеристика аналогового фильтра; (b) дискретная импульсная характеристика цифрового фильтра

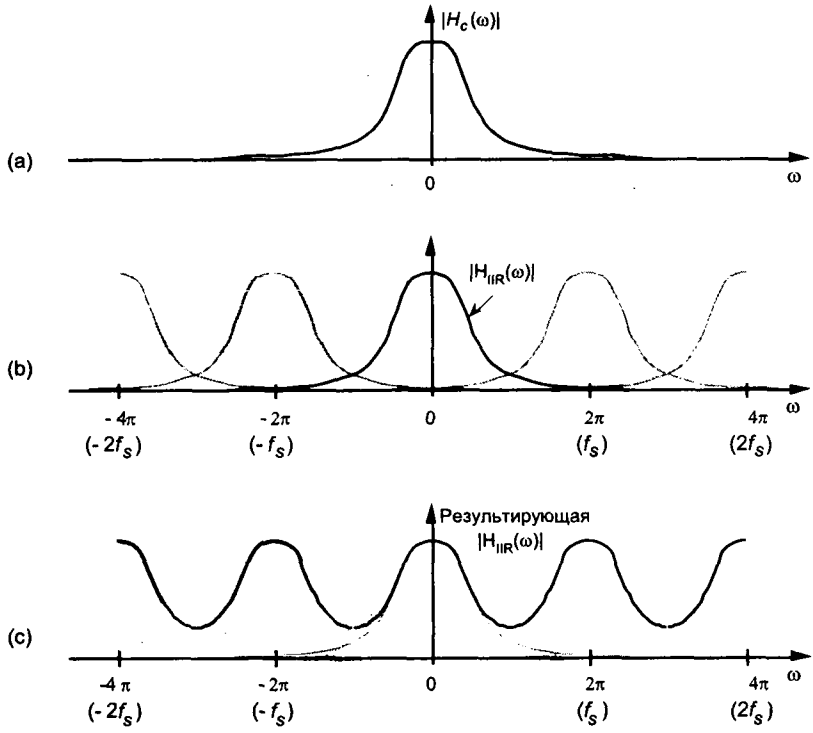


Рис. 6.24. Наложения в частотной области при инвариантном преобразовании импульсной характеристики: (a) АЧХ аналогового фильтра-прототипа; (b) копии АЧХ, где $H_{IIR}(\omega)$ — дискретное преобразование Фурье последовательности $h(n) = h_c(nt_s)$; (c) возможная результирующая АЧХ с наличием наложения

Из того, что мы узнали в главе 2 о размножении спектра при дискретизации, следует, что, если функция на рисунке 6.24 (a) представляет собой спектр непрерывной импульсной характеристики $h_c(t)$, то спектр дискретной импульсной характеристики $h_c(nt_s)$ представляет собой размноженный спектр на рисунке 6.24 (b).

На рисунке 6.24 (c) мы показываем возможный результат наложения, здесь серая линия изображает требуемую частотную характеристику $H_{\mathrm{IIR}}(\omega)$. При использовании метода инвариантного преобразования импульсной характеристики реальная АЧХ может оказаться такой, какая показана на рисунке 6.24 (c) черной линией. По этой причине мы стараемся сделать частоту дискретизации f_s как можно больше, чтобы минимизировать перекрытие первичной частотной характеристики и ее спектральных изображений, разнесенных на расстояние, кратное $\pm f_s$ Гц. Чтобы понять, как наложение может влиять на БИХ-фильтры, проектируемые этим методом, рассмотрим последовательность необходимых шагов процедуры проектирования, а затем рассмотрим пример проектирования фильтра.

Существует два разных метода проектирования БИХ-фильтров с использованием инвариантного преобразования импульсной характеристики. Первый метод, который мы назовем Метод 1, требует использования как обратного преобразования Лапласа, так и z-преобразования [12, 13]. Второй метод, Метод 2, использует прямую подстановку, чтобы избежать использования обратного преобразования Лапласа и z-преобразования за счет разложения на простейшие дроби [14-17]. Оба метода кажутся сложными при словесном описании, но на практике они не так сложны. Сравним эти методы, перечислив шаги, необходимые при реализации каждого из них. Метод 1 состоит в следующем:

Метод 1, шаг 1: Спроектировать (или найти готовый) аналоговый фильтр-прототип с требуемой частотной характеристикой[1]. Результатом выполнения этого шага будет передаточная функция $H_c(s)$ в виде отношения полиномов, такая как

$$H_c(s) = [b(N)s^N + b(N-1)s^{N-1} + \ldots + b(1)s + b(0)]/$$
$$/[a(M)s^M + a(M-1)s^{M-1} + \ldots + a(1)s + a(0)] =$$
$$= \Big[\sum_{k=0}^{N} b(k)s^k\Big]/\Big[\sum_{k=0}^{M} a(k)s^k\Big] \qquad (6\text{-}43)$$

которая является общей формой (6-10) при $N < M$ и постоянных коэффициентах $a(k)$ и $b(k)$.

Метод 1, шаг 2: По передаточной функции $H_c(s)$ определить непрерывную импульсную характеристику $h_c(t)$. Надеюсь, что это можно сделать с помощью таблиц преобразования Лапласа, не выполняя обратное преобразование.

[1] При проектировании ФНЧ, например, на этом шаге необходимо определить тип фильтра (Чебышева, Баттерворта, эллиптический и т. п.), его порядок (количество полюсов) и частоту среза.

Метод 1, шаг 3: Определить частоту дискретизации f_s и вычислить период дискретизации $t_s = 1/f_s$. Частота дискретизации f_s выбирается в зависимости от абсолютной частоты аналогового фильтра-прототипа в Гц. Из-за проблем наложения, свойственных этому методу, f_s должна быть как можно выше, как мы покажем позже.

Метод 1, шаг 4: Найти z-преобразование непрерывной $h_c(t)$ и получить передаточную функцию БИХ-фильтра $H(z)$ в форме отношения полиномов от z.

Метод 1, шаг 5: Подставить значение (не переменную!) t_s вместо непрерывной переменной t в передаточную функцию $H(z)$, полученную на шаге 4. Выполняя этот шаг, мы обеспечиваем равенство отсчетов дискретной импульсной характеристики БИХ-фильтра $h(n)$ значениям непрерывной импульсной характеристики в моменты времени $t=nt_s$, как на рисунке 6.23, так что $h(n) = h_c(nt_s)$, для $0 \le n \le \infty$.

Метод 1, шаг 6: $H(z)$, полученная на шаге 5, будет иметь общую форму

$$H(z) = [b(N)z^{-N} + b(N-1)z^{-(N-1)} + ... + b(1)z^{-1} + b(0)]/$$
$$/[a(M)z^{-M} + a(M-1)z^{-(M-1)} + ... + a(1)z^{-1} + a(0)] =$$
$$= \Big[\sum_{k=0}^{N} b(k)z^{-k}\Big]/\Big[1-\sum_{k=1}^{M} a(k)z^{-k}\Big] \qquad (6\text{-}44)$$

Поскольку при дискретизации непрерывной импульсной характеристики частотная характеристика цифрового фильтра оказывается умноженной на коэффициент $1/t_s$, многие разработчики фильтров считают необходимым включить множитель t_s в (6-44). Итак, мы можем переписать (6-44) как

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \Big[t_s\sum_{k=0}^{N} b(k)z^{-k}\Big]/\Big[1-\sum_{k=1}^{M} a(k)z^{-k}\Big] \qquad (6\text{-}45)$$

Подстановка значения t_s в (6-45) делает масштаб характеристики БИХ-фильтра независимым от частоты дискретизации, и коэффициент передачи цифрового фильтра будет таким же, как и у аналогового фильтра-прототипа[1].

Метод 1, шаг 7: Поскольку (6-44) представлено в форме (6-25), мы можем по аналогии записать разностное уравнение в общей форме (6-21) как

$$y(n) = b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + b(2)x(n-2) + ... + b(N)x(n-N) +$$
$$+ a(1)y(n-1) + a(2)y(n-2) + ... + a(M)y(n-M) \qquad (6\text{-}46)$$

[1] Некоторые авторы предпочитают вводить множитель t_s в дискретную импульсную характеристику $h(n)$ на шаге 4, т. е. сделать $h(n) = t_s h_c(nt_s)$ [14, 18]. Окончательный результат в этом случае получится такой же.

Включение множителя t_s в (6-45), чтобы сделать коэффициент передачи цифрового фильтра равным коэффициенту передачи прототипа, дает следующую форму разностного уравнения

$$y(n) = t_s\,[b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + b(2)x(n-2) + \ldots + b(N)x(n-N)] +$$
$$+ a(1)y(n-1) + a(2)y(n-2) + \ldots + a(M)y(n-M) \qquad (6\text{-}47)$$

Обратите внимание на изменение знака коэффициентов $a(k)$ при переходе от (6-44) и (6-45) к (6-46) и (6-47). Эти изменения являются источником проблем для начинающих, так что будьте внимательны. Помните также, что (6-46) и (6-47) применимы только к структуре фильтра на рисунке 6.18. Коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$, или $t_s b(k)$, однако, можно использовать в улучшенной структуре на рисунке 6.22

Прежде, чем перейти к практическому примеру, рассмотрим второй метод проектирования с использованием инвариантного преобразования импульсной характеристики. Метод 2, который также называют стандартным z-преобразованием, использует другой подход. Он разбивает математически аналоговый фильтр-прототип на несколько фильтров с одним полюсом, а затем аппроксимирует каждый из этих фильтров однополюсным цифровым фильтром. Набор из M однополюсных фильтров затем аналитически объединяется в БИХ-фильтр M-го порядка, имеющий M полюсов. Этот процесс показан на рисунке 6.25. При расчете фильтра этим методом необходимо выполнить следующие шаги:

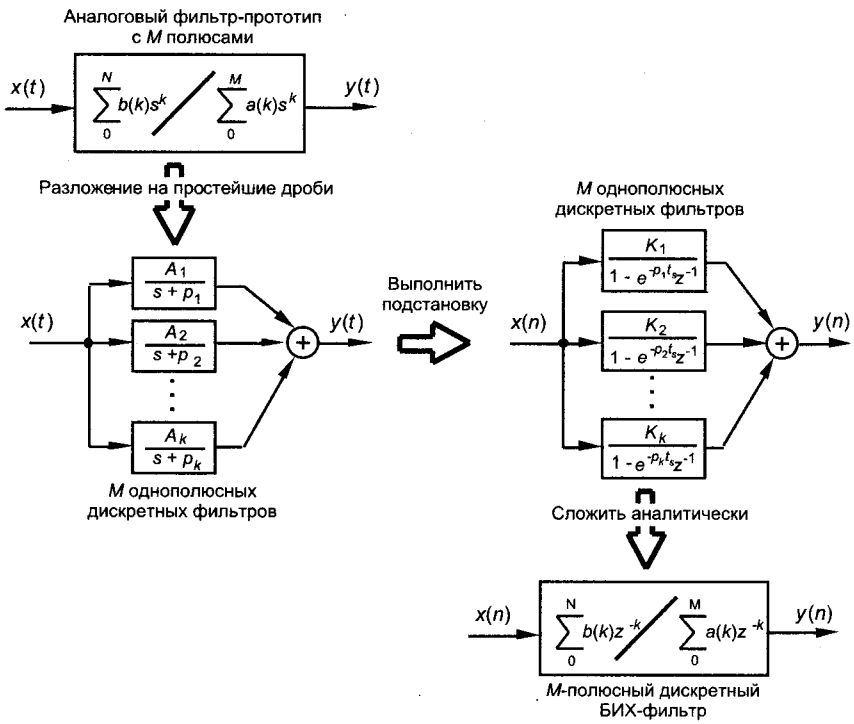


Рис. 6.25. Математические операции Метода 2

Метод 2, шаг 1: Получить передаточную функцию $H_c(s)$ аналогового фильтра-прототипа в форме (6-43). (То же, что Метод 1, шаг 1.)

Метод 2, шаг 2: Выбрать подходящую частоту дискретизации f_s и вычислить период дискретизации $t_s = 1/f_s$. (То же, что Метод 1, шаг 3.)

Метод 2, шаг 3: Выразить передаточную функцию $H_c(s)$ в виде суммы однополюсных передаточных функций. Это требует использования разложения отношения полиномов в (6-43) на простейшие дроби вида

$$H_c(s) = [b(N)s^N + b(N-1)s^{N-1} + ... + b(1)s + b(0)]/$$
$$/[a(M)s^M + a(M-1)s^{M-1} + ... + a(1)s + a(0)] =$$
$$= \sum_{k=1}^{M} A_k/(s+p_k) =$$
$$= A_1/(s+p_1) + A_2/(s+p_2) + ... + A_M/(s+p_M), \qquad (6\text{-}48)$$

где коэффициенты A_k представляют собой константы, а k-й полюс находится в точке $-p_k$ на s-плоскости. Мы обозначим k-ю однополюсную передаточную функцию как $H_k(s)$, или

$$H_k(s) = A_k/(s+p_k). \qquad (6\text{-}49)$$

Метод 2, шаг 4: В (6-48) подставить $1-e^{-p_k t_s}z^{-1}$ вместо $s + pk$. Это отображение каждого полюса $H_k(s)$, расположенного в точке $s = -pk$ на s-плоскости, в точку $z = e^{-p_k t_s}$ на z-плоскости представляет собой аппроксимацию импульсной характеристики каждого однополюсного аналогового фильтра однополюсным цифровым фильтром. (Читатель может найти вывод этой подстановки $1-e^{-p_k t_s}z^{-1}$, показанной на рисунке 6.25, в работах [14 - 16].) Итак, каждый однополюсный аналоговый фильтр $H_k(s)$ аппроксимируется однополюсным цифровым фильтром, передаточная функция которого имеет вид

$$H_k(z) = A_k/(1-e^{-p_k t_s}z^{-1}). \qquad (6\text{-}50)$$

Результирующая общая передаточная функция дискретного фильтра $H(z)$ является суммой передаточных функция однополюсных дискретных фильтров, или

$$H(z) = \sum_{k=1}^{M} H_k(z) = \sum_{k=1}^{M} A_k/(1-e^{-p_k t_s}z^{-1}). \qquad (6\text{-}51)$$

Помните, что эта функция $H(z)$ не является функцией времени. Множитель t_s в (6-51) представляет собой константу, равную периоду дискретизации.

Метод 2, шаг 5: Вычислить сумму M однополюсных передаточных функций в виде отношения двух полиномов от z. Поскольку $H(z)$ в (6-51)

будет суммой простейших дробей, нам будет необходимо привести их к общему знаменателю, чтобы получить результат в виде

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \\ = \Big[\sum_{k=0}^{N} b(k)z^{-k}\Big]\Big/\Big[1-\sum_{k=1}^{M} a(k)z^{-k}\Big]. \qquad (6\text{-}52)$$

Метод 2, шаг 6: Так же, как в Методе 1 на шаге 6, мы можем по аналогии записать разностное уравнение в обобщенной форме

$$y(n) = b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + b(2)x(n-2) + \ldots + b(N)x(n-N) + \\ + a(1)y(n-1) + a(2)y(n-2) + \ldots + a(M)y(n-M). \qquad (6\text{-}53)$$

Здесь тоже обратите внимание на изменение знака коэффициентов $a(k)$ при переходе от (6-52) к (6-53). Как было описано в шагах 6 и 7 Метода 1, если мы хотим сделать коэффициент передачи цифрового фильтра равным коэффициенту передачи аналогового прототипа путем умножения коэффициентов $b(k)$ на период дискретизации t_s, то разностное уравнение БИХ-фильтра будет выглядеть так:

$$y(n) = t_s \bullet [b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + b(2)x(n-2) + \ldots + b(N)x(n-N)] + \\ + a(1)y(n-1) + a(2)y(n-2) + \ldots + a(M)y(n-M), \qquad (6\text{-}54)$$

а окончательная передаточная функция будет иметь вид

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \\ = t_s \bullet \Big[\sum_{k=0}^{N} b(k)z^{-k}\Big]\Big/\Big[1-\sum_{k=1}^{M} a(k)z^{-k}\Big]. \qquad (6\text{-}54')$$

Наконец, мы можем реализовать фильтр в виде улучшенной структуры на рисунке 6.22, используя коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ из (6-53) или $a(k)$ и $t_s \bullet b(k)$ из (6-54).

Для более наглядного сравнения двух описанных методов разберем примеры проектирования БИХ-фильтров с их использованием.

6.4.1. Пример проектирования Методом 1

Предположим, что нам необходимо рассчитать БИХ-фильтр, который аппроксимирует аналоговый прототип Чебышева, для которого неравномерность АЧХ в полосе пропускания составляет 1 дБ. Частота дискретизации f_s равна 100 Гц ($t_s = 0.01$), а частота среза фильтра по уровню 1 дБ равна 20 Гц. Наш аналоговый фильтр-прототип будет иметь АЧХ, подобную показанной на рисунке 6.26.

Допустим, что в результате расчета аналогового фильтра-прототипа в соответствии с перечисленными требованиями мы получили передаточную функцию $H_c(s)$ вида

$$H_c(s) = 17410.145/(s^2 + 137.94536s + 17410.145). \qquad (6\text{-}55)$$

Именно эту передаточную функцию мы собираемся аппроксимировать дискретным БИХ-фильтром. Чтобы найти импульсную характеристику аналогового фильтра, следует представить $H_c(s)$ в такой форме, которая позволила бы нам воспользоваться таблицами преобразования Лапласа для нахождения $h_c(t)$.

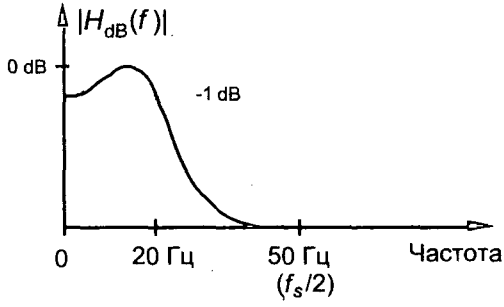


Рис. 6.26. АЧХ аналогового фильтра-прототипа для примера

Порывшись в справочниках по операционному исчислению, мы находим следующую пару преобразований Лапласа:

$X(s)$, преобразование Лапласа $x(t)$: $x(t)$:

$$A\omega/[(s+\alpha)^2+\omega^2] \qquad Ae^{-\alpha t} \bullet \sin(\omega t)\,. \tag{6-56}$$

Итак, мы хотим модифицировать (6-55) так, чтобы привести его к форме, показанной в левой части (6-56). Заметим, что выражение для преобразования Лапласа (6-56) можно переписать как

$$A\omega/[(s+\alpha)^2+\omega^2] = A\omega/(s^2+2\alpha s+\alpha^2+\omega^2) \tag{6-57}$$

Если мы теперь приравняем (6-55) и правую часть (6-57), то мы сможем решить систему уравнений относительно A, α и ω:

$$\begin{aligned} H_c(s) &= 17410.145/(s^2+137.94536s+17410.145) = \\ &= A\omega/(s^2+2\alpha s+\alpha^2+\omega^2). \end{aligned} \tag{6-58}$$

Решая (6-58) относительно A, α и ω, мы сначала находим

$$\alpha = 137.94536/2 = 68.972680\,; \tag{6-59}$$

$$\alpha^2+\omega^2 = 17410.145\,, \tag{6-60}$$

так что

$$\omega = \sqrt{(17410.145-\alpha^2)} = 112.485173\,; \tag{6-61}$$

и

$$A = 17410.145/\omega = 154.77724\,. \tag{6-62}$$

Отлично, теперь мы можем выразить $H_c(s)$ в требуемой форме левой части (6-57):

$$H_c(s) = (154.77724)(112.485173)/[(s+68.972680)^2+(112.485173)^2]. \tag{6-63}$$

Используя пару преобразований Лапласа в (6-56), находим импульсную характеристику аналогового фильтра-прототипа в виде

$$h_c(t) = Ae^{-\alpha t} \bullet \sin(\omega t) = 154.77724e^{-68.972680t} \bullet \sin(112.485173t)\,. \qquad (6\text{-}64)$$

Итак, мы готовы выполнить Шаг 4 Метода 1, чтобы найти передаточную функцию дискретного БИХ-фильтра $H(z)$ с помощью z-преобразования $h_c(t)$. И опять порывшись в учебниках по ЦОС или в хорошем справочнике по математике, мы находим следующую пару z-преобразований, в которой выражение во временной области имеет ту же форму, что и импульсная характеристика $h_c(t)$ в (6-64):

$x(t)$: $\qquad$ $X(z)$, z-преобразование $x(t)$

$$Ce^{-\alpha t} \bullet \sin(\omega t) \qquad Ce^{-\alpha t} \bullet \sin(\omega t)\, z^{-1}/\{1-2[e^{-\alpha t} \bullet \cos(\omega t)]\, z^{-1} + e^{-2\alpha t} z^{-2}\} \qquad (6\text{-}65)$$

Помните, что α и ω — просто общие обозначения и не имеют никакого отношения к значениям α и ω в (6-59) и (6-61). Подставляя константы из (6-64) в правую часть (6-65), мы получаем передаточную функцию БИХ-фильтра

$$H(z) = [154.77724e^{-68.972680t} \bullet \sin(112.485173t)\, z^{-1}]/$$
$$/\{1-2[e^{-68.972680t} \bullet \cos(112.485173t)]\, z^{-1} + e^{-2 \bullet 68.972680t} z^{-2}\} \qquad (6\text{-}66)$$

Выполняя Шаг 5 Метода 1, мы подставляем $t_s = 0.01$ вместо непрерывной переменной t в (6-66), что дает окончательное выражение для передаточной функции $H(z)$:

$$H(z) = [154.77724e^{-68.972680 \bullet 0.01} \bullet \sin(112.485173 \bullet 0.01)\, z^{-1}]/$$
$$/\{1-2[e^{-68.972680 \bullet 0.01} \bullet \cos(112.485173 \bullet 0.01)]\, z^{-1} + e^{-2 \bullet 68.972680 \bullet 0.01} z^{-2}\} =$$
$$= [154.77724e^{-0.68972680} \bullet \sin(1.12485173) z^{-1}]/$$
$$/\{1-2[e^{-0.68972680} \bullet \cos(1.12485173)]\, z^{-1} + e^{-2 \bullet 0.68972680} z^{-2}\} =$$
$$= Y(z)/X(z) = 70.059517z^{-1}/(1-0.43278805z^{-1} + 0.25171605z^{-2})\,. \qquad (6\text{-}67)$$

Отлично, сделаем еще усилие, мы почти закончили. Вот завершающие шаги Метода 1. Избавившись от знаменателей в (6-67), получаем

$$Y(z) \bullet (1 - 0.43278805z^{-1} + 0.25171605\, z^{-2}) = X(z) \bullet (70.059517\, z^{-1})$$

или

$$Y(z) = 70.059517\, X(z)\, z^{-1} + 0.43278805\, Y(z)\, z^{-1} - 0.25171605\, Y(z)\, z^{-2} \qquad (6\text{-}68)$$

Рассмотрев (6-68), мы можем записать разностное уравнение БИХ-фильтра. Выполняя Шаги 6 и 7 Метода 1, мы умножаем коэффициент при $x(n-1)$ на период дискретизации $t_s = 0.01$ для соответствующего масштабирования:

$$y(n) = 0.01 \bullet 70.059517 \bullet x(n-1) + 0.43278805 \bullet y(n-1) - 0.25171605 \bullet y(n-2)$$
$$= 0.70059517 \bullet x(n-1) + 0.43278805 \bullet y(n-1) - 0.25171605 \bullet y(n-2)\,, \qquad (6\text{-}69)$$

Наконец, мы получили то, что нужно. Для аппроксимации исходного аналогового ФНЧ Чебышева мы используем коэффициенты из (6-69) при реализации улучшенной структуры БИХ-фильтра на рисункее 6.22.

Посмотрим, получим ли мы такой же результат, используя Метод 2.

6.4.2. Пример использования Метода 2 проектирования с помощью инвариантного преобразования импульсной характеристики

Пусть передаточная функция прототипа задана в виде

$$H_c(s) = 17410.145/(s^2 + 137.94536s + 17410.145)\,, \qquad (6\text{-}70)$$

а период дискретизации $t_s = 0.01$. Теперь мы готовы выполнить Шаг 3 Метода 2. Чтобы представить $H_c(s)$ в виде суммы однополюсных функций, нам потребуется разложить знаменатель (6-70) на множители и использовать методы разложения на простейшие дроби. Для удобства начнем с того, что заменим константы в (6-70) переменными, так чтобы

$$H_c(s) = c/(s^2 + bs + c)\,, \qquad (6\text{-}71)$$

где $b = 137.94536$, $c = 17410.145$. Далее, используя (6-15) при $a = 1$, мы можем факторизовать квадратичный знаменатель (6-71) как

$$H_c(s) = c/\{(s + b/2 + \sqrt{[(b^2 - 4c)/4]}) \bullet (s + b/2 - \sqrt{[(b^2 - 4c)/4]})\} \qquad (6\text{-}72)$$

Если мы подставим значения b и c в (6-72), мы обнаружим, что под корнем получилось отрицательное значения. Это значит, что сомножители знаменателя в (6-72) комплексные. Поскольку нам придется выполнять много аналитических преобразований, заменим радикалы в (6-72) *мнимой* величиной jR, где $j = \sqrt{(-1)}$ и $R = |(b^2 - 4c)/4|$, так что

$$H_c(s) = c/[(s + b/2 + jR)(s + b/2 - jR)]\,, \qquad (6\text{-}73)$$

Методы разложения на простейшие дроби позволяют нам разбить (6-73) на две отдельные дроби в виде

$$\begin{aligned} H_c(s) &= c/[(s + b/2 + jR)(s + b/2 - jR)] = \\ &= K_1/(s + b/2 + jR) + K_2/(s + b/2 - jR)\,, \end{aligned} \qquad (6\text{-}74)$$

где, как можно убедиться, константа $K_1 = jc/2R$, а константа K_2 комплексно сопряжена K_1, или $K_2 = -jc/2R$. (Чтобы узнать больше о разложении на простейшие дроби, заинтересованный читатель может просмотреть учебники по институтскому курсу математики или справочники по математике для инженеров.) Следовательно, $H_c(s)$ может быть выражена в форме (6-48), или

$$H_c(s) = (jc/2R)/(s + b/2 + jR) + (-jc/2R)/(s + b/2 - jR)\,. \qquad (6\text{-}75)$$

Из (6-75) мы можем видеть, что наш фильтр-прототип второго порядка имеет два полюса, один из которых расположен в точке $p_1 = -b/2 - jR$, а другой — в точке $p_2 = -b/2 + jR$. Теперь мы готовы отобразить эти два полюса из s-плоскости в z-плоскость, как того требует Шаг 4 Метода 2. Выполняя подстановку $1-e^{-p_k t_s} z^{-1}$ вместо $s+p_k$ в (6-75), мы получаем следующее выражение для однополюсных цифровых фильтров:

$$H(z) = (jc/2R)/(1-e^{-(b/2+jR)t_s} z^{-1}) + (-jc/2R)/(1-e^{-(b/2-jR)t_s} z^{-1}) . \qquad (6\text{-}76)$$

Цель шага 5 состоит в том, чтобы преобразовать (6-76) в форму (6-52), чтобы мы могли определить коэффициенты прямых и обратных связей БИХ-фильтра. Складывая дроби в (6-76), получаем

$$H(z) = \{(jc/2R)[1-e^{-(b/2-jR)t_s} z^{-1}] - (jc/2R)[1-e^{-(b/2+jR)t_s} z^{-1}]\}/$$
$$/\{[1-e^{-(b/2+jR)t_s} z^{-1}][1-e^{-(b/2-jR)t_s} z^{-1}]\} . \qquad (6\text{-}77)$$

Приводя подобные члены в числителе и перемножая сомножители в знаменателе, приходим к

$$H(z) = (jc/2R)[1-e^{-(b/2-jR)t_s} z^{-1} - 1 + e^{-(b/2+jR)t_s} z^{-1}]/$$
$$/[1-e^{-(b/2-jR)t_s} z^{-1} - e^{-(b/2+jR)t_s} z^{-1} + e^{-bt_s} z^{-2}] . \qquad (6\text{-}78)$$

Раскладывая экспоненты на множители и приводя подобные члены с одинаковыми степенями z, получаем:

$$H(z) = (jc/2R)[e^{-(b/2+jR)t_s} - e^{-(b/2-jR)t_s}] z^{-1}/$$
$$/\{1-[e^{-(b/2-jR)t_s} + e^{-(b/2+jR)t_s}] z^{-1} + e^{-bt_s} z^{-2}\} . \qquad (6\text{-}79)$$

Продолжая упрощать выражение $H(z)$, вынося действительные составляющие экспонент, получим

$$H(z) = (jc/2R)e^{-bt_s/2}(e^{-jRt_s} - e^{jRt_s}) z^{-1}/$$
$$/[1-e^{-bt_s/2}(e^{jRt_s} + e^{-jRt_s}) z^{-1} + e^{-bt_s} z^{-2}] . \qquad (6\text{-}80)$$

Теперь в $H(z)$ одинаковые степени z приведены, и (6-80) выглядит похожим на требуемую форму (6-52). Зная, что окончательные коэффициенты БИХ-фильтра должны быть действительными числами, мы задаем себе вопрос: «Что нам делать с членами, содержащими j, в (6-80)?» И опять на помощь приходит Эйлер[1]. Используя тождества Эйлера для синусоид, мы можем убрать комплексные экспоненты, при этом (6-80) превращается в

$$H(z) = (jc/2R)e^{-bt_s/2}[-2j\sin(Rt_s)] z^{-1}/\{1-e^{-bt_s/2}[2\cos(Rt_s)] z^{-1} + e^{-bt_s} z^{-2}\} =$$
$$= (c/R)e^{-bt_s/2}[\sin(Rt_s)] z^{-1}/\{1-e^{-bt_s/2}[2\cos(Rt_s)] z^{-1} + e^{-bt_s} z^{-2}\} . \qquad (6\text{-}81)$$

Если теперь мы подставим значения $c = 17410.145$, $b = 137.94536$, $R = 112.48517$ и $t_s = 0.01$ в (6-81), то мы получим следующую передаточную функцию БИХ-фильтра:

[1] Согласно тождествам Эйлера $\sin(\phi)=(e^{j\phi} - e^{-j\phi})/2j$ и $\cos(\phi)=(e^{j\phi} + e^{-j\phi})/2$

$$H(z) = (154.77724)(0.50171312)(0.902203655)\, z^{-1}/$$
$$/[1 - (0.50171312)(0.86262058)\, z^{-1} + 0.25171605z^{-2}] =$$
$$= 70.059517z^{-1}/[1-0.43278805z^{-1}+0.25171605z^{-2}]\,. \qquad (6\text{-}82)$$

Поскольку $H(z) = Y(z)/X(z)$, избавляясь от знаменателей по обе стороны знака равенства, мы можем переписать (6-82) в виде

$$Y(z) \bullet (1 - 0.43278805z^{-1} + 0.25171605z^{-2}) = X(z)\,(70.059517z^{-1})$$

или

$$Y(z) = 70.059517 \bullet X(z)\, z^{-1} + 0.43278805 \bullet Y(z)\, z^{-1} - 0.25171605 \bullet Y(z)\, z^{-2} \quad (6\text{-}83)$$

А теперь по аналогии берем обратное z-преобразование от (6-83) и получаем разностное уравнение БИХ-фильтра

$$y(n) = 70.059517 \bullet x(n-1) + 0.43278805 \bullet y(n-1) - 0.25171605 \bullet y(n-2) \quad (6\text{-}84)$$

Остается завершающий шаг. Чтобы коэффициент передачи БИХ-фильтра был равен коэффициенту передачи прототипа, мы умножаем коэффициент при $x(n-1)$ на период дискретизации t_s, как предлагалось на Шаге 6 Метода 2. В этом случае имеется только один коэффициент при $x(n)$, в результате чего имеем

$$y(n) = 0.01 \bullet 70.059517 \bullet x(n-1) + 0.43278805 \bullet y(n-1) - 0.25171605 \bullet y(n-2) =$$
$$= 0.70059517 \bullet x(n-1) + 0.43278805 \bullet y(n-1) - 0.25171605 \bullet y(n-2) \qquad (6\text{-}85)$$

Это совпадает в результатом, полученным Методом 1 в (6-69). (Не правда ли, приятно решить задачу двумя разными способами и получить один и тот же результат?)

На рисунке 6.27 в графической форме показаны результаты проектирования фильтра. Расположение полюсов прототипа в s-плоскости и полюсов БИХ-фильтра в z-плоскости показано на рисунке 6.27 (а). Поскольку полюсы прототипа находятся в левой полуплоскости, а полюсы БИХ-фильтра находятся внутри единичного круга, оба фильтра устойчивы. Мы находим полюсы прототипа из (6-75). При $s = -b/2 - jR$ знаменатель первого слагаемого в (6-75) становится равным нулю, а $H_c(s)$ становится бесконечно большой. Это значение $s = -b/2 - jR$ представляет собой полюс в нижней полуплоскости на рисунке 6.27 (а). Когда $s = -b/2 + jR$, знаменатель второго слагаемого обращается в 0, а $s = -b/2 + jR$ дает позицию второго полюса на s-плоскости.

Позиции полюсов БИХ-фильтра на z-плоскости находятся из (6-76). Если мы умножим числители и знаменатели в (6-76) на z, то получим

$$H(z) \bullet z/z = z(jc/2R)/[z(1-e^{-(b/2+jR)t_s}z^{-1})] + z(-jc/2R)/[z(1-e^{-(b/2-jR)t_s}z^{-1})] =$$
$$= (jc/2R)\, z/[z - e^{-(b/2+jR)t_s}] + (-jc/2R)\, z/[z - e^{-(b/2-jR)t_s}]\,. \qquad (6\text{-}86)$$

Если в (6-86) $z = e^{(-b/2+jR)t_s}$, знаменатель первого слагаемого обращается в ноль, а $H(z)$ становится бесконечно большой. Значение z, равное

$$z = e^{(-b/2+jR)t_s} = e^{(-bt_s/2)}\, e^{-jRt_s} = e^{(-bt_s/2)} \angle -Rt_s \text{ радиан} \qquad (6\text{-}87)$$

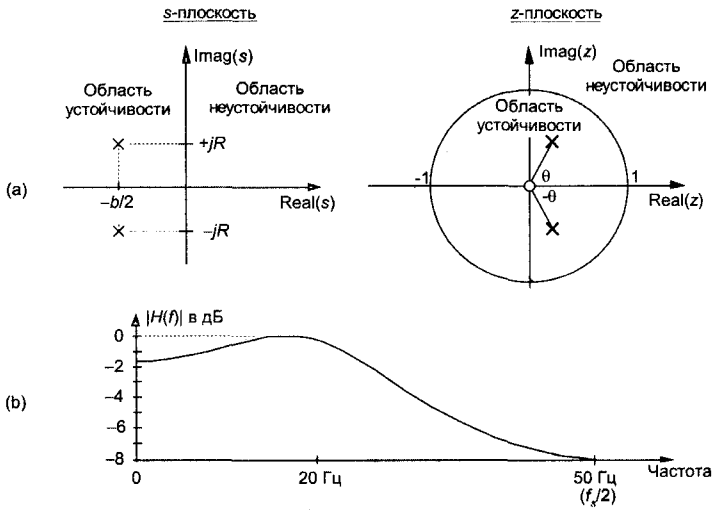


Рис. 6.27. Характеристики фильтров, использованных в примере расчета с помощью инвариантного преобразования импульсной характеристики: (a) расположение полюсов аналогового фильтра-прототипа на s-плоскости и полюсов дискретного БИХ-фильтра на z-плоскости; (b) АЧХ дискретного БИХ-фильтра

определяет положение полюса, лежащего в нижней полуплоскости z-плоскости на рисунке 6.27 (a). В частности, этот полюс расположен на расстоянии $e^{(-bt_s/2)} = 0.5017$ от начала координат, а угол его радиус-вектора с действительной осью составляет $\theta = -Rt_s$ радиан, или $-64.45°$. Поскольку полюсы комплексно-сопряженные, полюс в верхней полуплоскости z-плоскости расположен на том же расстоянии от начала координат, а угол его радиус-вектора равен $\theta = Rt_s$ радиан, или $+64.45°$. На рисунке 6.27 (b) показана АЧХ БИХ-фильтра как функция частоты в Гц.

На рисунке 6.28 показаны две разные реализации БИХ-фильтра. Рисунок 6.28 (a) предлагает реализацию нашего БИХ-фильтра второго порядка, основанную на обобщенной структуре БИХ-фильтра, показанной на рисунке 6.22, а на рисунке 6.28 (b) показана реализация БИХ-фильтра второго порядка на основе альтернативной структуры, показанной на рисунке 6.22 (b). Зная, что коэффициент $b(0)$ в левой части рисунка 6.28 (b) равен нулю, мы приходим к упрощенной структуре, приведенной в правой части рисунка 6.28 (b). Посмотрев внимательно на рисунок 6.28 (a) и правую часть рисунка 6.28 (b), мы можем увидеть, что они эквивалентны.

Хотя в литературе рассматриваются оба метода проектирования с использованием инвариантного преобразования импульсной характеристики, мы можем спросить: «Какой из них предпочтительней?» Определенного ответа на этот вопрос не существует, потому что он зависит от $H_c(s)$ фильтра-прототипа. Хотя рассмотренный выше пример использования Метода 2 требует большего количества аналитических выкладок, чем Метод 1, если бы полюсы прототипа в s-области лежали только на действительной оси, Метод 2 был бы намного проще, поскольку не пришлось бы манипулировать комплексными числами. Вообще, Метод 2 более популярен по двум причинам: (1) обратное преобразование Лапласа и обратное z-преобразование, хотя и весьма просты в нашем примере использования Метода 1, могут оказаться довольно сложными для фильтров высокого порядка, и (2) в отличие от Метода 1, Метод 2 может быть реализован программно.

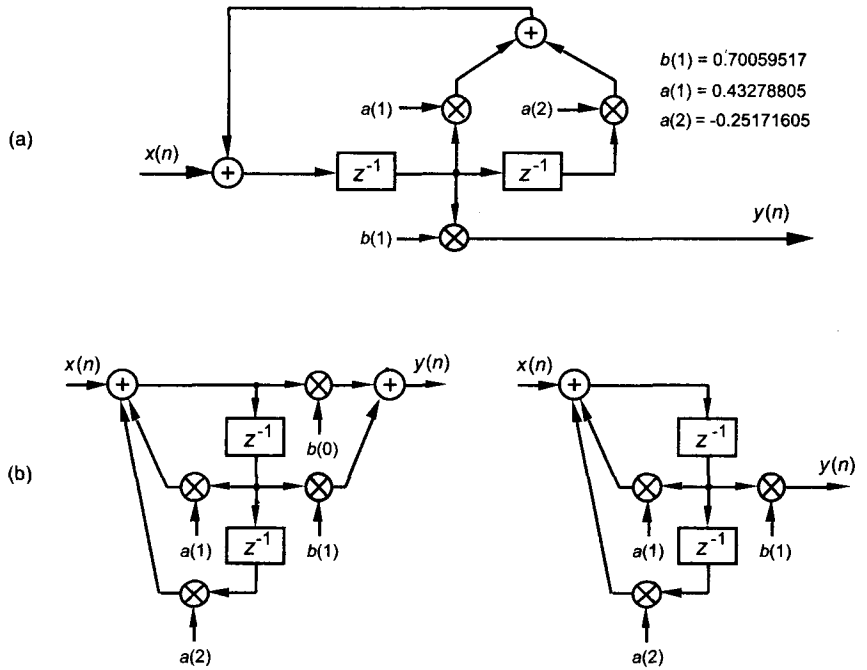


Рис. 6.28. Реализации фильтра, полученного методом инвариантного преобразования импульсной характеристики

Изучая АЧХ фильтра, приведенную на рисунке 6.27 (b), мы можем заметить, что крутизна переходной полосы этого БИХ-фильтра второго порядка не слишком велика. Это простой фильтр второго порядка, но наклон его АЧХ в полосе подавления такой незначительный, что этот фильтр вряд ли может принести какую-то пользу на практике[1]. Мы можем также заметить, что уровень пульсаций в полосе пропускания больше требуемого значения в 1 дБ на рисунке 6.26. Мы можем обнаружить, что такие плохие характеристики фильтра объясняются не столько его низким порядком, сколько используемой частотой дискретизации. Характеристики фильтра второго порядка повторно показаны на рисунке 6.29 серой линией. Если мы повысим частоту дискретизации до 200 Гц, мы получим частотную характеристику, показанную на рисунке 6.29 штриховой линией. Повышение частоты дискретизации до 400 Гц дает существенно улучшенную частотную характеристику, показанную черной сплошной линией на том же рисунке. Изменения частоты дискретизации не влияют на порядок фильтра или структуру его реализации. Помните, что если мы изменяем частоту дискретизации, в наших уравнениях меняется только значение периода дискретизации t_s, в результате чего мы получаем другие наборы коэффициентов для каждой частоты дискретизации. Итак, мы можем заметить, что чем меньше выбранный нами t_s (больше f_s), тем лучше результирующий фильтр независимо от применяемого метода расчета, использующего инвариантное преобразование импульсной характеристики, потому

[1] Небольшой совет: всякий раз, когда вы встречаете какое-либо частотное представление (будь то АЧХ фильтра или спектр какого-либо сигнала), значение которого на частоте $+f_s/2$ отлично от 0, будьте осторожны и внимательны — вы имеет дело с наложением.

что перекрытие копий частотной характеристики, показанных на рисунке 6.24 (b), уменьшается благодаря увеличению частоты дискретизации f_s. Вывод из всего сказанного следует такой: методы проектирования БИХ-фильтров на основе инвариантного преобразования импульсной характеристики больше всего подходят для проектирования узкополосных фильтров, т. е. фильтров нижних частот[1], частоты среза которых намного меньше частоты дискретизации.

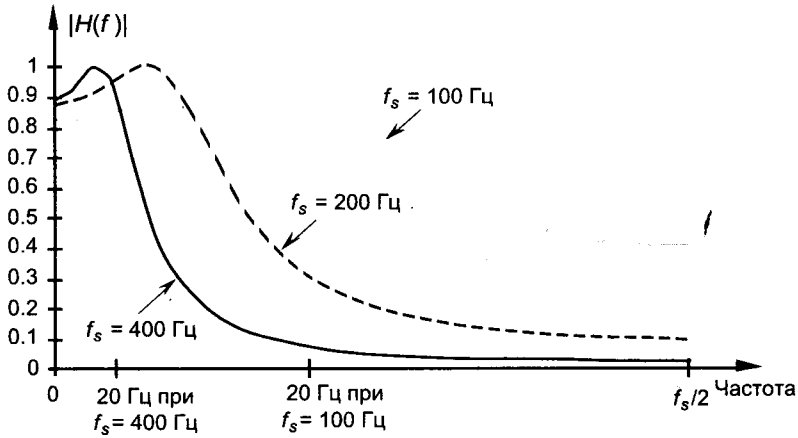


Рис. 6.29. АЧХ БИХ-фильтра в линейном масштабе при трех значениях частоты дискретизации. Заметьте, что абсолютная частота среза фильтра 20 Гц сдвигается относительно разных частот дискретизации f_s

Второй аналитический метод аппроксимации аналоговых фильтров, метод билинейного преобразования, снимает проблемы наложения, присущие методам инвариантного преобразования импульсной характеристики, за счет деформации частотной оси. Точнее, при использовании билинейного преобразования соотношение между частотной осью аналогового прототипа и частотной осью аппроксимирующего БИХ-фильтра является нелинейным. Давайте посмотрим, почему.

6.5. Метод проектирования БИХ-фильтров с помощью билинейного преобразования

Существует популярный аналитический метод проектирования БИХ-фильтров, известный как метод *билинейного преобразования*. Как и метод инвариантного преобразования импульсной характеристики, этот метод проектирования аппроксимирует аналоговый фильтр-прототип, задаваемый передаточной функцией $H_c(s)$, дискретным фильтром с передаточной функцией $H(z)$. Но метод билинейного преобразования применяется очень широко потому, что:

[1] А также полосовых ЦФ — (*прим. перев.*).

- он позволяет для получения $H(z)$ просто подставлять некоторую функцию от z вместо s в $H_c(s)$, благодаря чему устраняется необходимость в преобразовании Лапласа и в z-преобразовании, а также необходимость разложения передаточных функций на простейшие дроби;
- он отображает всю s-плоскость на z-плоскость, полностью устраняя наложения в частотной области, которые создают проблемы при использовании метода инвариантного преобразования импульсной характеристики;
- он вносит нелинейные искажения частотной оси $H(z)$ относительно частотной оси аналогового фильтра, что делает переходную полосу цифровых ФНЧ более крутой.

Не беспокойтесь, если что-то сейчас не понятно, мы объясним все перечисленные моменты и покажем, что они значат для нас с точки зрения проектирования БИХ-фильтров.

Если передаточная функция аналогового прототипа есть $H_c(s)$, то мы можем получить передаточную функцию дискретного БИХ-фильтра $H(z)$, подставив вместо s в $H_c(s)$ следующее выражение

$$s = (2/t_s)[(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})], \tag{6-88}$$

где t_s — период дискретизации дискретного фильтра ($1/f_s$). Так же, как и при использовании метода инвариантного преобразования импульсной характеристики, при использовании метода билинейного преобразования нас интересует, в какую область z-плоскости отобразятся полюсы прототипа в результате преобразования. Именно это отображение полюсов из s-плоскости в z-плоскость и делает билинейное преобразование таким привлекательным[1].

Давайте исследуем основные характеристики отображения s-плоскости на z-плоскость в результате билинейного преобразования. Сначала покажем, что любой полюс в левой полуплоскости s-плоскости будет отображаться во внутреннюю часть единичного круга на z-плоскости. Это легко показать, решая (6-88) относительно z. Умножив (6-88) на $(t_s/2)(1+z^{-1})$ и собрав члены, содержащие z, мы можем получить

$$z = [1 + (t_s/2)s]/[1 - (t_s/2)s]. \tag{6-89}$$

Если мы запишем s как

$$s = \sigma + j\omega_a, \tag{6-90}$$

где нижний индекс круговой частоты ω_a значит *аналоговая*, (6-89) превращается в

$$z = [1 + \sigma t_s/2 + j\omega_a t_s/2]/[1 - \sigma t_s/2 - j\omega_a t_s/2] =$$
$$= [(1 + \sigma t_s/2) + j\omega_a t_s/2]/[(1 - \sigma t_s/2) - j\omega_a t_s/2]. \tag{6-91}$$

[1] Билинейное преобразование представляет собой метод, используемый в теории функций комплексной переменной для отображения функции на комплексной плоскости одной переменной на комплексную плоскость другой переменной. Он отображает окружности и прямые линии на прямые линии и окружности соответственно.

Из (6-91) следует, что z является комплексной величиной, равной отношению двух комплексных выражений. Следовательно, если мы выразим z в форме модуля и аргумента $z = |z|\angle\theta_z$, то модуль z будет иметь вид

$$|z| = Mag_{numerator}/Mag_{denominator} =$$

$$= \sqrt{[(1+\sigma t_s/2)^2 + (\omega_a t_s/2)^2]/[(1-\sigma t_s/2)^2 + (\omega_a t_s/2)^2]}\,. \qquad (6\text{-}92)$$

Итак, если действительная часть σ отрицательна ($\sigma < 0$), числитель отношения в правой части (6-92) будет меньше знаменателя, и $|z|$ будет меньше 1. С другой стороны, если σ положительна ($\sigma > 0$), числитель будет больше знаменателя, и $|z|$ будет больше 1. Это значит, что при использовании билинейного преобразования (6-88), любой полюс, расположенный в левой части s-плоскости ($\sigma < 0$) будет отображаться на внутреннюю часть единичного круга z-плоскости. Эта особенность обеспечивает преобразование любого устойчивого полюса прототипа в s-плоскости в устойчивый полюс дискретного БИХ-фильтра в z-плоскости. Аналогично, любой полюс аналогового фильтра, расположенный в правой полуплоскости s-плоскости ($\sigma > 0$), при использовании билинейного преобразования будет отображаться на точку z-плоскости, лежащую вне единичного круга. Это подтверждает еще раз, что для устранения неустойчивости при проектировании БИХ-фильтров мы должны не допускать появления в z-плоскости полюсов, лежащих за пределами единичного круга. А теперь покажем, что ось частоты s-плоскости $j\omega_a$ отображается на единичную окружность z-плоскости. Мы можем сделать это, положив в (6-91) $\sigma = 0$ и получив

$$z = (1 + j\omega_a t_s/2)/(1 - j\omega_a t_s/2) \qquad (6\text{-}93)$$

Здесь снова мы видим, что переменная z представляет собой отношение комплексных чисел, следовательно, ее модуль равен

$$|z|_{\sigma=0} = Mag_{numerator}/Mag_{denominator} =$$

$$= \sqrt{[(1)^2 + (\omega_a t_s/2)^2]/[(1)^2 + (\omega_a t_s/2)^2]}\,. \qquad (6\text{-}94)$$

Модуль z в (6-94) *всегда* равен 1. Таким образом, как мы утверждали, при использовании билинейного преобразования, ось $j\omega_a$ в s-плоскости отображается на единичную окружность в z-плоскости. Но это отображение частот нелинейно. Важно знать, почему эта нелинейность, или деформация, возникает и к чему она приводит. Мы узнаем это, выведя соотношение между частотой s-плоскости и частотой z-плоскости, которую мы обозначим как ω_d.

Если мы представим z на единичной окружности в полярных координатах как $z = re^{-j\omega_d}$, как мы делали это для рисунка 6.13, где $r = 1$, а ω_d — угол, мы можем подставить $z = e^{j\omega_d}$ в (6-88) и получить

$$s = (2/t_s)\,[(1 - e^{-j\omega_d})/(1 + e^{-j\omega_d})]\,. \qquad (6\text{-}95)$$

Если мы представим s в алгебраической форме и вынесем за скобки экспоненту половинного угла, мы получим

$$s = \sigma + j\omega_a = (2/t_s)[e^{-j\omega_d/2}(e^{j\omega_d/2} - e^{-j\omega_d/2})]/[e^{-j\omega_d/2}(e^{j\omega_d/2} + e^{-j\omega_d/2})]\,. \qquad (6\text{-}96)$$

Используя тождества Эйлера $\sin(\phi) = (e^{j\phi} - e^{-j\phi})/2j$ и $\cos(\phi) = (e^{j\phi} + e^{-j\phi})/2$, мы можем преобразовать правую часть (6-96) в

$$s = \sigma + j\omega_a = (2/t_s)\{e^{-j\omega_d/2}[2j\sin(\omega_d/2)]\}/\{e^{-j\omega_d/2}[2\cos(\omega_d/2)]\} =$$
$$= (2/t_s)(2e^{-j\omega_d/2}/2e^{-j\omega_d/2}) \bullet [j\sin(\omega_d/2)/\cos(\omega_d/2)] =$$
$$= (j2/t_s)\tan(\omega_d/2)\,. \qquad (6\text{-}97)$$

Если мы теперь приравняем действительные и мнимые части (6-97), мы увидим, что $\sigma = 0$ и

$$\omega_a = (2/t_s)\tan(\omega_d/2)\,. \qquad (6\text{-}98)$$

Из (6-98) мы получаем полезное соотношение, выражающее частоту z-области ω_d через частоту s-области ω_a

$$\omega_d = 2\tan^{-1}(\omega_a t_s/2)\,. \qquad (6\text{-}99)$$

Важное соотношение (6-99), которое несет ответственность за деформацию частот при билинейном преобразовании, показано графически на рисунке 6.30.

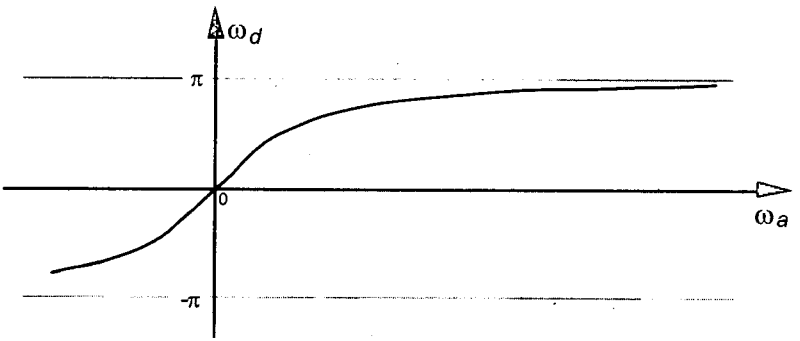


Рис. 6.30. Нелинейное соотношение между частотой z-области ω_d и частотой s-области ω_a

Заметим, что, поскольку при больших ω_a значение $\tan^{-1}(\omega_a t_s/2)$ приближается к $\pi/2$, ω_d должна приближаться к вдвое большему значению, или π. Это значит, что, какой бы большой ни была частота ω_a, частота z-плоскости ω_d никогда не превысит π.

Помните, как мы рассматривали рисунок 6.14 и утверждали, что достаточно рассматривать только диапазон частот от $-\pi f_s$ до $+\pi f_s$ радиан/сек на z-плоскости? Наше новое отображение, связанное с билинейным преобразованием, отображает всю s-плоскость на z-плоскость, а не только полосу, показанную на рисунке 6.14. Теперь, если продвижение по оси $j\omega_a$ на s-плоскости в любом направлении приводит нас в бесконечность, то перемещение по половине единичной окружности в направлении против движения часовой стрелки соответствует нашему перемещению от $\omega_a = 0$ до $\omega_a = +\infty$ радиан/сек. Итак, билинейное преобразование отображает всю ось частот $j\omega_a$ в s-плоскости на единичную окружность в z-плоскости. Мы иллюстрируем эти свойства отображения билинейного преобразования на рисунке 6.31.

Чтобы показать практические последствия деформации частот, свяжем частоты s-плоскости и z-плоскости с более практичной мерой частоты дискретизации f_s. Мы делаем это, вспомнив, что

$$f = \omega/2\pi\,. \tag{6-100}$$

Используя (6-100) в (6-99) получаем

$$2\pi f_d = 2\tan^{-1}(2\pi f_a t_s/2)\,. \tag{6-101}$$

Подставляя $1/f_s$ вместо t_s, мы решаем (6-101) относительно f_d и получаем

$$f_d = (2/2\pi)\tan^{-1}[(2\pi f_a/f_s)/2] = [\tan^{-1}(\pi f_a/f_s)]/\pi\,. \tag{6-102}$$

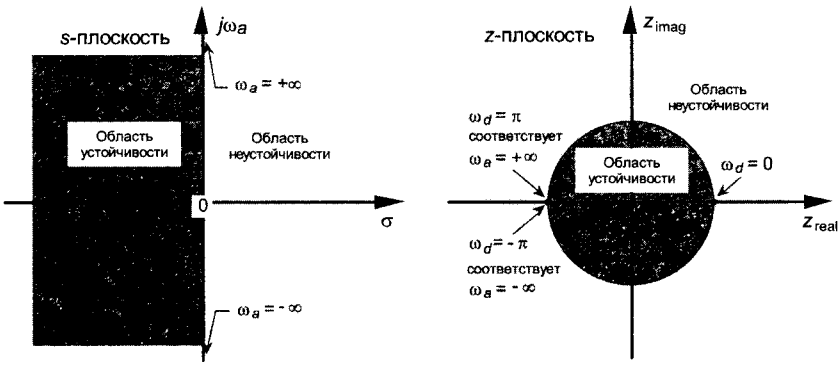


Рис. 6.31. Отображение s-плоскости на z-плоскость при билинейном преобразовании

Соотношение (6-102), связывающее частоты f_a и f_d, показано графически на рисунке 6.32 (a) в долях частоты дискретизации f_s.

Искажение частоты f_a при преобразовании в f_d показано на рисунке 6.32 (b), где полосовая АЧХ аналогового фильтра $|H_a(f_a)|$ подвергается сжатию по частоте при преобразовании в $|H_d(f_d)|$. Обратите внимание на то, что низкочастотная часть $|H_d(f_d)|$ БИХ-фильтра примерно линейна, а высокочастотная часть сильно сжата. Это и есть проявление деформации оси частот. Этот рисунок показывает, почему при билинейном преобразовании наложения возникнуть не могут. Независимо от формы и ширины АЧХ $|H_a(f_a)|$ аналогового прототипа никакая ее часть не может выйти за пределы половины частоты дискретизации $f_s/2$ в $|H_d(f_d)|$, и это делает билинейное преобразование таким популярным.

Проектирование БИХ-фильтров с помощью билинейного преобразования выполняется в следующей последовательности:

Шаг 1. Получить передаточную функцию аналогового фильтра-прототипа $H_c(s)$ в форме (6-43).

Шаг 2. Определить частоту дискретизации цифрового фильтра f_s и вычислить период дискретизации $t_s = 1/f_s$.

Шаг 3. Подставить в передаточную функцию $H_c(s)$ вместо s выражение

$$(2/t_s)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})] \tag{6-103}$$

и получить передаточную функцию БИХ-фильтра $H(z)$.

Шаг 4. Умножить числитель и знаменатель $H(z)$ на $(1+z^{-1})$ в соответствующей степени и выполнить преобразования, чтобы получить передаточную функцию в виде

$$H(z) = \Big[\sum_{k=0}^{N} b(k)z^{-k}\Big] \Big/ \Big[1-\sum_{k=1}^{M} a(k)z^{-k}\Big]. \tag{6-104}$$

Шаг 5. Как и в случае метода инвариантного преобразования импульсной характеристики, мы можем прямо по передаточной функции записать разностное уравнение БИХ-фильтра

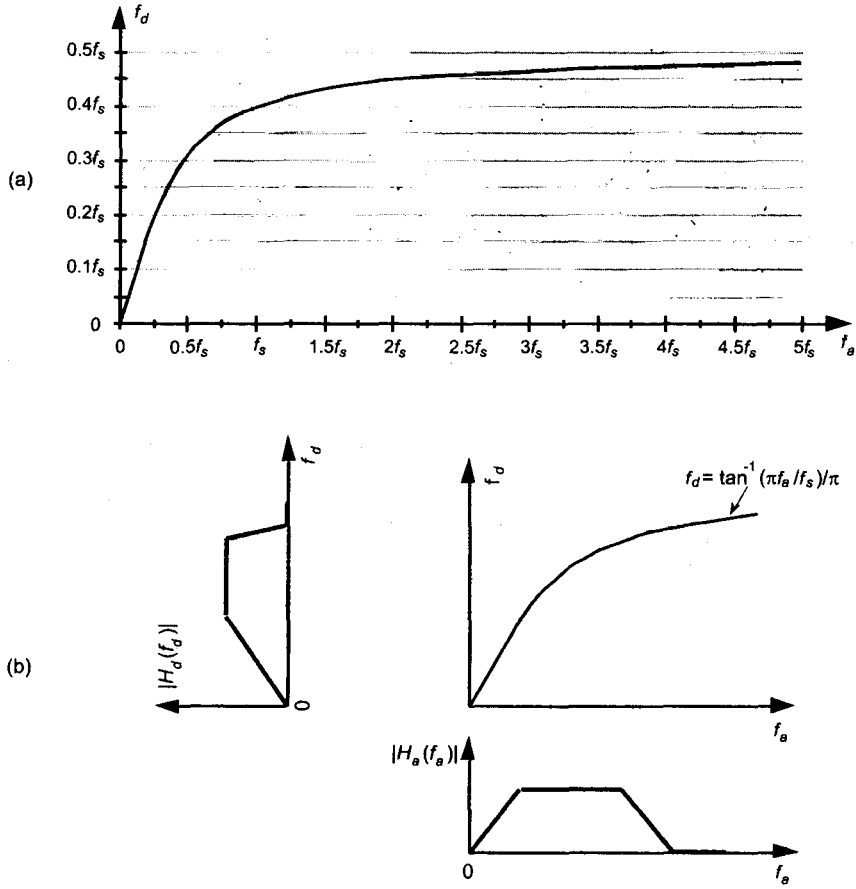


Рис. 6.32. Нелинейность соотношения частот f_d и f_a: (a) кривая искажения частот, промасштабированная относительно частоты дискретизации БИХ-фильтра f_s; (b) преобразование частотной характеристики аналогового прототипа $H_a(f_a)$ в частотную характеристику дискретного БИХ-фильтра $H_d(f_d)$

$$y(n) = b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + b(2)x(n-2) + ... + b(N)x(n-N) +$$
$$+ a(1)y(n-1) + a(2)y(n-2) + ... + a(M)y(n-M) \qquad (6\text{-}105)$$

Хотя уравнение (6-105) справедливо только для структуры фильтра на рисунке 6.18, для завершения проектирования мы можем использовать коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ в улучшенной структуре БИХ-фильтра, показанной на рисунке 6.22.

Чтобы показать, насколько прост метод билинейного преобразования, применим его для проектирования фильтра, заданного в примерах использования метода инвариантного преобразования импульсной характеристики.

6.5.1. Пример проектирования с помощью билинейного преобразования

И снова наша цель — спроектировать БИХ-фильтр, который аппроксимирует аналоговый прототип Чебышева второго порядка, показанный на рисунке 6.26, неравномерность АЧХ которого в полосе пропускания равна 1 дБ. Частота дискретизации f_s равна 100 Гц ($t_s = 0.01$), а частота среза по уровню 1 дБ равна 20 Гц. Как и раньше, имеем передаточную функцию прототипа вида

$$H_c(s) = 17410.145/(s^2 + 137.94536s + 17410.145)\,. \qquad (6\text{-}106)$$

и $t_s = 0.01$, что позволяет нам перейти к Шагу 3. Для удобства заменим числовые константы в (6-106) переменными:

$$H_c(s) = c/(s^2 + bs + c)\,, \qquad (6\text{-}107)$$

где $b=137.94536$, $c=17410.145$. Подставив (6-103) в (6-107), получаем

$$H(z) = c/\{[(2/t_s)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]^2 + b(2/t_s)(1-z^{-1})/(1+z^{-1}) + c\}\,. \qquad (6\text{-}108)$$

Чтобы упростить немного наши выкладки, обозначим буквой a отношение $2/t_s$, в результате чего получаем:

$$H(z) = c/\{a^2[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]^2 + ab[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})] + c\}\,. \qquad (6\text{-}109)$$

Выполняя Шаг 4, умножаем числитель и знаменатель (6-109) на $(1 + z^{-1})^2$ и получаем

$$H(z) = c(1+z^{-1})^2/[a^2(1-z^{-1})^2 + ab(1+z^{-1})(1-z^{-1}) + c(1+z^{-1})^2]\,. \qquad (6\text{-}110)$$

Перемножая сомножители в знаменателе и объединяя члены с одинаковыми степенями z, приходим к

$$H(z) = c(1 + 2z^{-1} + z^{-2})/$$
$$/[(a^2 + ab + c) + (2c - 2a^2)z^{-1} + (a^2 + c - ab)z^{-2}]\,. \qquad (6\text{-}111)$$

Мы почти у цели. Чтобы представить (6-111) в форме (6-104), где свободный член знаменателя равен 1, разделим числитель и знаменатель (6-111) на $(a^2 + ab + c)$, что даст нам выражение

$$H(z) = [c/(a^2 + ab + c)](1 + 2z^{-1} + z^{-2})/ \qquad (6\text{-}112)$$
$$/\{1 + [(2c - 2a^2)/(a^2 + ab + c)]\, z^{-1} + [(a^2 + c - ab)/(a^2 + ab + c)]\, z^{-2}\}.$$

Теперь (6-112) выглядит похоже на требуемую форму (6-104). Если мы подставим значения переменных $a = 2/t_s = 200$, $b = 137.94536$ и $c = 17410.145$ в (6-112), мы получим передаточную функцию БИХ-фильтра:

$$H(z) = 0.20482712(1 + 2z^{-1} + z^{-2})/(1 - 0.53153089z^{-1} + 0.35083938z^{-2}) =$$
$$= (0.20482712 + 0.40965424z^{-1} + 0.20482712z^{-2})/ \qquad (6\text{-}113)$$
$$/(1 - 0.53153089z^{-1} + 0.35083938z^{-2})$$

Рассмотрев (6-113), мы можем записать разностное уравнение БИХ-фильтра:

$$y(n) = 0.20482712 \bullet x(n) + 0.40965424 \bullet x(n-1) + 0.20482712 \bullet x(n-2) +$$
$$+ 0.53153089 \bullet y(n-1) - 0.35083938 \bullet y(n-2). \qquad (6\text{-}114)$$

АЧХ спроектированного методом билинейного преобразования фильтра показана черной линией на рисунке 6.33 (a), где для сравнения мы показали серой линией результат использования метода инвариантного преобразования импульсной характеристики. Обратите внимание на то, что АЧХ фильтра, полученного с помощью билинейного преобразования, стремится к нулю по мере приближения частоты к частоте заворота $f_s/2 = 50$ Гц. Так и должно быть — в этом и состоит главная задача метода билинейного преобразования. Рисунок 6.33 (b) демонстрирует нелинейную ФЧХ БИХ-фильтра.

Нам так и хочется сказать, что билинейное преобразование не только проще реализуется, чем инвариантное преобразование импульсной характеристики, но оно еще и дает фильтры нижних частот со значительно более крутой переходной полосой. Да, деформация частотной оси сжимает, делает более крутой, переходную полосу фильтра, как мы видели на рисунке 6.32, но дополнительной причиной улучшения АЧХ является увеличение сложности реализации БИХ-фильтра. Мы видим это, изучая структуру фильтра, показанную на рисунке 6.34. Заметьте, что наш новый фильтр требует пять умножений на выходной отсчет, тогда как фильтр, полученный методом инвариантного преобразования импульсной характеристики, на рисунке 6.28 (a) требует всего трех умножений на выходной отсчет. Дополнительные умножения необходимы для дополнительных цепей прямой связи. Дополнительные коэффициенты $b(k)$ в $H(z)$ соответствуют нулям на z-плоскости, созданным билинейным преобразованием, которые отсутствуют при инвариантном преобразовании импульсной характеристики.

Поскольку аналоговый прототип, использованный в примерах, имел частоту среза, равную $f_s/5$, на рисунке 6.33 мы не заметили влияния искажения частот. (Действительно, Кайзер показал, что, когда f_s достаточно велика, методы инвариантного преобразования импульсной характеристики и билинейного преобразования дают почти идентичные передаточные функции $H(z)$ [19].) Если бы частота среза нашего фильтра была побольше, искажение частот было бы заметнее, и частота среза результирующей АЧХ $|H_d(f_d)|$ была бы ниже требуемой. Чтобы обойти эту трудность, профессионалы прибегают к *предыскажению* частоты среза прототипа перед вычислением его передаточной функции $H_c(s)$ на Шаге 1.

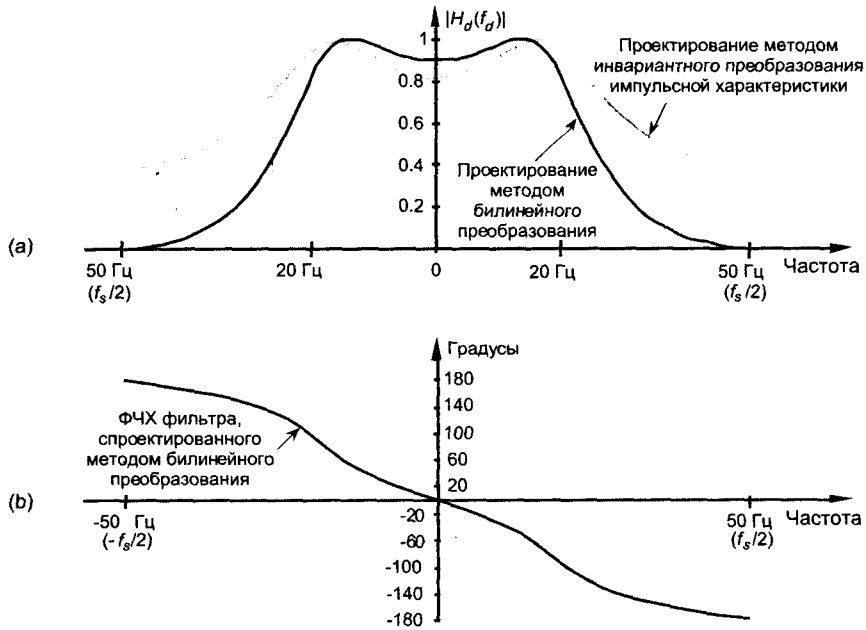


Рис. 6.33. Сравнение билинейного преобразования и инвариантного преобразования импульсной характеристики при проектировании БИХ-фильтров: (a) АЧХ; (b) ФЧХ БИХ-фильтра, полученного методом билинейного преобразования

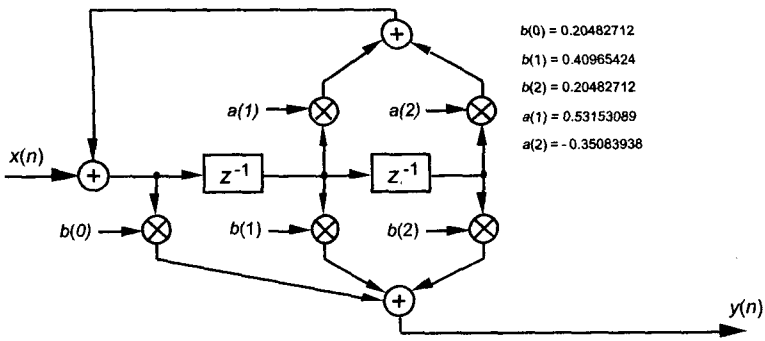


Рис. 6.34. Реализация фильтра, полученного в примере методом билинейного преобразования

Таким способом они компенсируют искажение оси частот до того, как оно возникнет. Чтобы определить предыскаженную частоту среза прототипа, которая преобразуется в требуемую частоту среза БИХ-фильтра, мы можем использовать (6-98). Мы подставим требуемую частоту среза БИХ-фильтра ω_d в (6-98) и вычислим частоту среза аналогового прототипа ω_a, используемую для расчета его передаточной функции $H_c(s)$.

Хотя мы объяснили, что билинейное преобразование позволяет избавиться от проблем наложения частотных характеристик при проектировании БИХ-фильтров, важно не забывать, что мы по-прежнему должны избегать наложения во

входном сигнале фильтра. Независимо от того, какой фильтр используется или какой метод расчета применялся, входные данные всегда должны получаться с использованием такой схемы дискретизации, которая исключает наложения, описанные в главе 2. Если входной сигнал содержит искажения, обусловленные наличием наложений спектров, никакой фильтр исправить эти искажения не сможет.

Наше изложение методов проектирования с помощью инвариантного преобразования импульсной характеристики и с помощью билинейного преобразования по необходимости затронуло только самые существенные моменты этих двух методов. Строго математическое изложение этих методов неуместно во вводном курсе сродни данному, но заинтересованный читатель может найти более детальное описание в работах [13-16]. Работы [13] и [15], между прочим, содержат прекрасный материал по различным типам аналоговых прототипов. Хотя наши примеры проектирования БИХ-фильтров аппроксимировали фильтры-прототипы нижних частот, важно понимать, что эти методы также применимы для проектирования полосовых фильтров и фильтров верхних частот. Для проектирования БИХ-фильтров верхних частот, например, достаточно просто взять передаточную функцию аналогового фильтра верхних частот. Затем описанный метод проектирования цифровых БИХ-фильтров даст нам аппроксимацию этого фильтра верхних частот[1].

Как мы видели, оба рассмотренных метода проектирования БИХ-фильтров являются мощными и достаточно сложными в применении. Их математика сложна, а вычисления по формулам довольно громоздки даже для достаточно простых фильтров. В связи с этим мы хотим представить вам третий класс методов проектирования БИХ-фильтров, основанный на программах *численной оптимизации*. В этом случае разработчик задает требуемую частотную характеристику фильтра, а алгоритм генерирует последовательные приближения коэффициентов до тех пор, пока они не сойдутся (будем надеяться) к некоторому оптимальному решению.

6.6. Оптимизационный метод проектирования БИХ-фильтров

Последний класс методов проектирования БИХ-фильтров, с которым мы вас познакомим, в самом широком смысле называют классом оптимизационных методов. Эти методы разработаны для ситуаций, когда требуемая АЧХ БИХ-фильтра отличается от стандартных характеристик фильтров нижних, верхних частот, полосовых и режекторных. Когда требуемая частотная характеристика имеет произвольную форму, замкнутые выражения для передаточной функции не существуют, и у нас нет уравнений, позволяющих вычислить коэффициенты фильтра. Для решения такой обобщенной проблемы проектирования были разработаны алгоритмы решения систем линейных или нелинейных уравнений с помощью компьютера. Эти программы требуют, чтобы разработчик описал некоторым образом требуемую частотную характеристику БИХ-фильтра. Затем эти алгорит-

[1] Это справедливо для метода билинейного преобразования, но при использовании метода инвариантного преобразования импульсной характеристики наложения не позволят получить БИХ-фильтр верхних частот — (*прим. перев*).

мы, предполагая, что передаточная функция $H(z)$ представляет собой отношение полиномов, вычисляют частотную характеристику фильтра. Основываясь на некотором критерии ошибки, алгоритм итерационно модифицирует коэффициенты фильтра таким образом, что ошибка между требуемой и текущей характеристиками сводится к минимуму. Процесс заканчивается, когда дальнейшее уменьшение ошибки невозможно или когда выполнено заданное количество итераций, и коэффициенты фильтра выдаются разработчику. Хотя эти алгоритмы оптимизации математически слишком сложны, чтобы рассматривать их здесь, описание наиболее популярных методов оптимизации легко доступно в литературе [14, 16, 20-25].

Читатель может спросить: «Если мы не собираемся рассматривать алгоритмы оптимизации, то зачем вообще говорить здесь об оптимизационных методах?» Ответ на этот вопрос следующий: Если мы тратим много времени на проектирование БИХ-фильтров, то рано или поздно мы придем к тому, что будем в большинстве случаев использовать оптимизационные методы в форме компьютерных программ. Огромное количество коммерческих пакетов программ цифровой обработки сигналов включают одну или более программ проектирования БИХ-фильтров, которые основаны на методах оптимизации. Когда доступен компьютерный метод проектирования, разработчики фильтров склонны использовать его для расчета, в том числе и простых ФНЧ, ФВЧ и полосовых фильтров, даже если существуют аналитические методы. При всем должном уважении к Лапласу, Хэвисайду и Кайзеру, зачем продираться сквозь все эти уравнения, z-преобразования и прочие сложности, когда требуемую частотную характеристику можно ввести в программу и получить приемлемый результат в течение нескольких секунд?

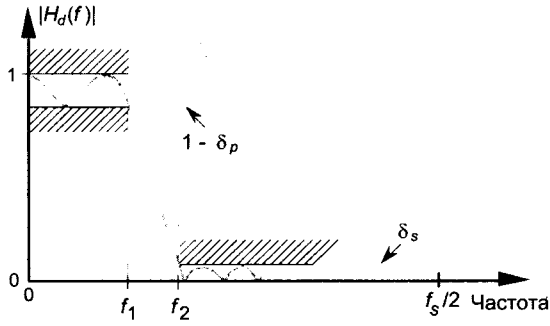


Рис. 6.35. Пример задания параметров при проектировании БИХ ФНЧ оптимизационными методами

Как оказывается, использование коммерческих программ оптимизационного проектирования БИХ-фильтров совсем несложно. Большинство оптимизационных программ требуют задания всего нескольких параметров по амплитуде и частоте, требуемого порядка БИХ-фильтра (количества ответвлений обратной связи), после чего они рассчитывают коэффициенты цепей прямой и обратной связи. При задании, например, БИХ ФНЧ программа проектирования может запросить у нас значения δ_p, δ_s, f_1 и f_2, показанные на рисунке 6.35. Некоторые программы оптимизационного проектирования требуют, чтобы пользователь задал порядок БИХ-фильтра. Эти программы рассчитывают коэффициенты фильтра, которые наилучшим образом аппроксимируют заданную характеристику. Некоторые

программы, с другой стороны, не требую задания порядка фильтра. Они вычисляют минимальный порядок фильтра, который может обеспечить соответствие частотной характеристики фильтра заданной характеристике.

6.7. Подводные камни реализации БИХ-фильтров

Инженерам хорошо известна истина: «Одно дело — спроектировать систему на бумаге, и совсем другое дело — построить ее в железе и заставить работать» (Вспомните, что произошло с мостом Такома Нэрроуз!) Изготовление работающей системы на основе теоретического проекта на практике может оказаться весьма сложным. Давайте разберемся, почему это во многих случаях справедливо по отношению к БИХ-фильтрам.

Структуры БИХ-фильтров, показанные на рисунках 6.18 и 6.22, называются реализациями в прямой форме, потому что они непосредственно реализуют разностное уравнение БИХ-фильтра M-го порядка, приведенное в (6-21). Как оказывается, при реализации в прямой форме фильтров высокого порядка могут возникнуть проблемы с устойчивостью, а также искажения частотной характеристики. Эти проблемы вызваны тем, что мы вынуждены представлять коэффициенты фильтра и промежуточные результаты вычислений двоичными числами, состоящими из конечного количества битов. Различают три основных категории ошибок конечной длины слова, которые затрудняют реализацию БИХ-фильтров: ошибки квантования коэффициентов, ошибки переполнения и ошибки округления.

Квантование коэффициентов (представление коэффициентов с ограниченной точностью) приводит к смещению нулей и полюсов на z-плоскости, в результате чего частотная характеристика может не удовлетворять заданным при проектировании требованиям. Искажения частотной характеристики оказываются более значительными для БИХ-фильтров высокого порядка.

Переполнение, второй эффект конечной разрядности, который доставляет неприятности при реализации БИХ-фильтров, — это то, что происходит, когда результат арифметической операции оказывается слишком большим и не может быть представлен в аппаратурных регистрах ограниченной разрядности, предназначенных для его хранения. Поскольку при реализации БИХ-фильтров мы выполняем много операций сложения, переполнение всегда возможно. Без специальных мер предосторожности, учитывающих возможность переполнений, в выходных отсчетах могут возникнуть ошибки значительной величины, часто в форме *колебаний переполнения*.

Наиболее распространенный способ борьбы с ошибками переполнения — это округление данных, когда значение отсчета данных представляется b-битовым двоичным числом, которое ближе всего к неокругленному значению. Обычно рассматривают ошибки округления как случайный процесс, но в БИХ-фильтрах возникают такие условия, при которых ошибки округления могут вызвать бесконечные колебания выходного сигнала, даже если входной сигнал равен нулю. Такие ситуации, вызванные шумом округления, который тесно коррелирован с сигналом (это явление часто называют *предельными циклами* или *эффектами мертвой зоны*) подробно проанализированы в литературе [26, 27].

Мы можем продемонстрировать предельные циклы, рассматривая на рисунке 6.36 (a) БИХ-фильтр второго порядка, который описывается разностным уравнением вида

$$y(n) = x(n) + 1.3y(n-1) - 0.76y(n-2)\,. \qquad (6\text{-}115)$$

Допустим, этот фильтр округляет сумму до ближайшего целого числа. Если в какой-то момент времени возникнет ситуация, когда $y(-2) = 0, y(-1) = 8$ и $x(0)$, а также все последующие входные отсчеты $x(n)$ равны нулю, выходной сигнал фильтра превращается в колебание бесконечной длительности, как показано на рисунке 6.36 (b). Если бы этот фильтр использовался для воспроизведения звука, при уменьшении входного сигнала до нуля слушатель обнаружил бы, что вместо тишины он слышит какой-то тон. Штриховая линия на рисунке 6.36 (b) показывает реакцию фильтра в данной ситуации, если округление не выполняется. При наличии округления этот БИХ-фильтр полностью оправдывает свое название.

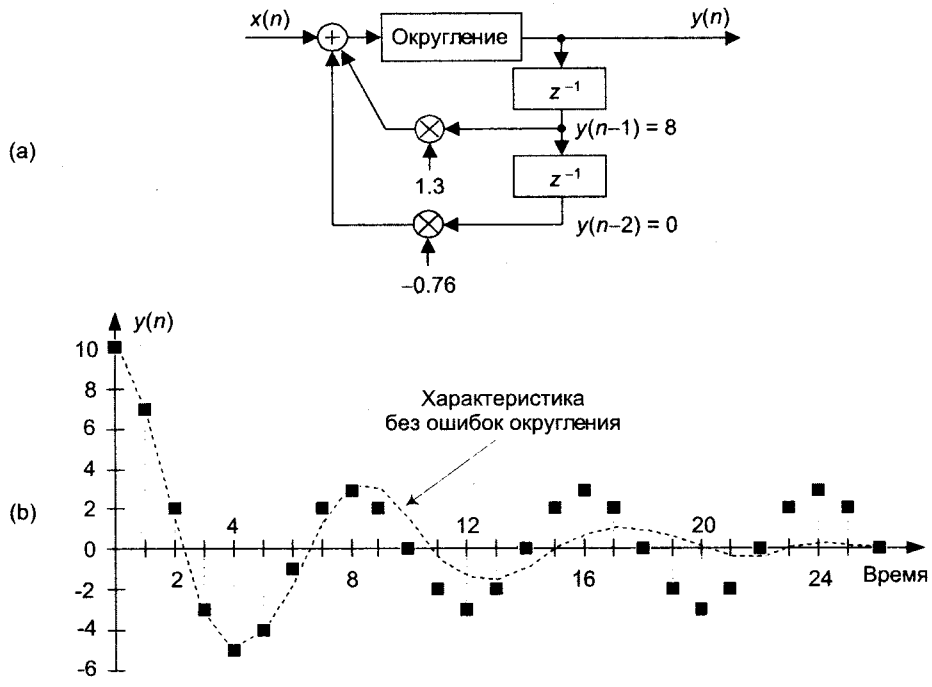


Рис. 6.36. Колебания предельного цикла, вызванные округлением результатов операций: (a) БИХ-фильтр второго порядка; (b) один из возможных откликов БИХ-фильтра во временной области

Существует несколько способов уменьшения вредного влияния ошибок квантования коэффициентов и предельных циклов. Мы можем увеличить длину регистров, содержащих результаты промежуточных операций. Поскольку предельные циклы влияют на младшие биты результатов арифметических операций, увеличение длины слова приведет к уменьшению их влияния, если они возникнут. Чтобы не подавать на вход фильтра последовательность, все отсчеты которой равны нулю, некоторые разработчики добавляют к входной последовательности *возмущающую*

псевдослучайную последовательность низкого уровня, которая препятствует возникновению колебаний предельного цикла и позволяет выходному сигналу фильтра уменьшиться до нуля, если входной сигнал стал нулевым. Возмущающая последовательность, однако, ухудшает отношение сигнал/шум на выходе фильтра [11]. Наконец, чтобы избежать проблем с предельными циклами, мы можем просто использовать КИХ-фильтр. Поскольку КИХ-фильтры по определению имеют импульсную характеристику конечной длительности и не содержат цепей обратной связи, они не могут поддерживать никакие колебания выходного сигнала.

Мы можем устранить ошибки переполнения, если увеличим длину слова регистров настолько, что они никогда не будут переполняться. Входной сигнал фильтра можно промасштабировать (понизить его амплитуду, умножив на коэффициент, значение которого меньше единицы), чтобы устранить возможность переполнения, но при этом ухудшается отношение сигнал/шум. Колебания переполнения можно устранить, используя арифметику с насыщением, когда при возникновении условий переполнения значение сигнала ограничивается на некотором фиксированном уровне [28,29]. Читателю будет полезно запомнить, что, когда данные представлены в двоичном дополнительном коде, переполнения промежуточных результатов в последовательных сложениях не оказывают влияния на окончательный результат, если мы можем гарантировать, что этот результат не выходит за пределы диапазона, который может принять регистр результата. Конечно, вычисления с плавающей точкой или с поблочно плавающей точкой могут существенно уменьшить ошибки, связанные с колебаниями переполнения и предельными циклами [30]. (Форматы чисел с плавающей точкой мы рассматриваем в разделе 12.4.)

Ошибки квантования коэффициентов и переполнения, обусловленные конечной длиной слова, оказываются разными в разных структурах реализации БИХ-фильтров. Практика показала, что Прямая форма II (см. рисунок 6.22) наиболее склонна к возникновению ошибок.

Наиболее популярный метод минимизации ошибок, связанных с конечной длиной слова, состоит в проектировании БИХ-фильтров, состоящих из ряда последовательно или параллельно соединенных фильтров более низкого порядка. В следующем разделе мы узнаем, почему.

6.8. Улучшение БИХ-фильтров с помощью каскадных структур

Разработчики БИХ-фильтров минимизируют проблемы устойчивости и шумов квантования, разрабатывая высококачественные фильтры в виде комбинаций фильтров более низкого качества. Перед тем, как рассмотреть эту идею, освежим в памяти важные моменты, касающиеся поведения комбинаций нескольких фильтров.

6.8.1. Свойства каскадных и параллельных структур фильтров

В этом разделе приведен обзор *совместного* поведения линейных фильтров (будь то БИХ- или КИХ-фильтры), соединенных последовательно (каскадно) или параллельно. Как показано на рисунке 6.37 (a), результирующая передаточная функция двух фильтров, соединенных последовательно, является произведением передаточных функций этих фильтров, или

$$H_{cas}(z) = H_1(z)H_2(z) \tag{6-116}$$

при общей частотной характеристике

$$H_{cas}(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)\,. \tag{6-117}$$

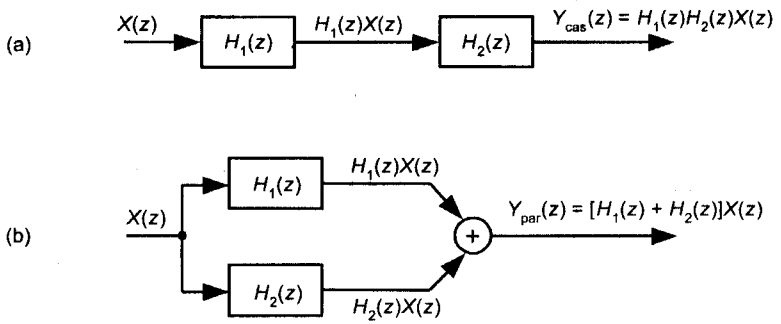


Рис. 6.37. Комбинации двух фильтров: (a) каскадная; (b) параллельная

Важно также знать, что импульсная характеристика каскадного соединения фильтров равна свертке импульсных характеристик отдельных фильтров.

Как показано на рисунке 6.37 (b), общая передаточная функция двух фильтров, соединенных параллельно, представляет собой сумму передаточных функций отдельных фильтров, или

$$H_{par}(z)=H_1(z) + H_2(z)\,, \tag{6-118}$$

а общая частотная характеристика определяется как

$$H_{par}(\omega)=H_1(\omega) + H_2(\omega)\,. \tag{6-119}$$

Результирующая импульсная характеристика параллельно соединенных фильтров равна сумме индивидуальных импульсных характеристик фильтров.

Давайте разработаем правило приближенной оценки неравномерности АЧХ в полосе пропускания двух каскадно-соединенных фильтров, показанных на рисунке 6.37 (a). Величина неравномерности АЧХ каскадного соединения фильтров есть функция неравномерности отдельных фильтров. Изобразив пульсации АЧХ какого-либо фильтра в линейном масштабе, как это сделано на рисунке 6.38, мы можем приступить к оценке неравномерности АЧХ каскадного соединения фильтров.

Согласно (6-117), верхняя граница АЧХ каскадного соединения, $1 + R_{cas}$, является произведением двух пиковых значения характеристик $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$, или

$$1+R_{cas}=(1+R_1)(1+R_2)=1+R_1+R_2+R_1R_2 . \qquad (6\text{-}120)$$

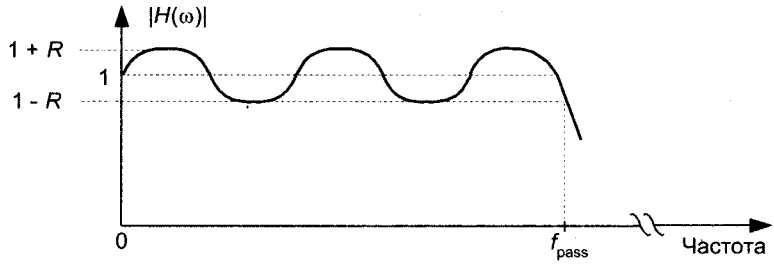


Рис. 6.38. Определение неравномерности *R* АЧХ в полосе пропускания

Для малых значений R_1 и R_2 слагаемое R_1R_2 пренебрежимо мало, и мы можем сформулировать наше оценочное правило следующим образом:

$$R_{cas} \approx R_1 + R_2 . \qquad (6\text{-}121)$$

Таким образом, в проектах, в которых используется последовательное соединение фильтров, необходимо задавать неравномерность АЧХ каждого фильтра не больше половины требуемого значения R_{cas} для комбинированного фильтра, или

$$R_1 = R_2 \approx R_{cas}/2 . \qquad (6\text{-}122)$$

6.8.2. Каскадное соединение БИХ-фильтров

Опытные разработчики фильтров обычно разбивают БИХ-фильтры высокого порядка на ряд последовательно соединенных БИХ-фильтров второго порядка, потому что эти фильтры низкого порядка проще проектировать, они менее чувствительны к ошибкам квантования коэффициентов, более устойчивы, а их реализация позволяет проще масштабировать данные для устранения переполнений. Оптимизация разбиения фильтра высокого порядка на множество секций второго порядка представляет собой довольно сложную задачу. Пусть, например, мы имеем фильтр шестого порядка Прямой формы I, показанный на рисунке 6.39 (a), который мы хотим разделить на три секции второго порядка. Разбивая передаточную функцию фильтра шестого порядка $H(z)$ на множители, мы можем получить до трех наборов коэффициентов прямой связи в числителе факторизованной $H(z)$: $b'(k)$, $b''(k)$ и $b'''(k)$. Аналогично, мы можем иметь до трех наборов коэффициентов обратной связи в факторизованном знаменателе: $a'(k)$, $a''(k)$ и $a'''(k)$. Поскольку имеется три секции второго порядка, мы имеем 3!, или шесть, способов *объединения* наборов коэффициентов. На рисунке 6.39 (b) первая секция использует коэффициенты $a'(k)$ и $b'(k)$, вторая секция использует коэффициенты $a''(k)$ и $b''(k)$. Мы могли бы также перетасовать коэффициенты так, чтобы в первой секции использовались коэффициенты $a'(k)$ и $b''(k)$, а во второй — коэффициенты $a''(k)$ и $b''(k)$. Итак, имеется шесть математически равноправных способов объе-

динения наборов коэффициентов. Добавьте к этому то, что для каждой комбинации наборов коэффициентов имеется 3!, или шесть, разных последовательностей включения этих секций второго порядка.

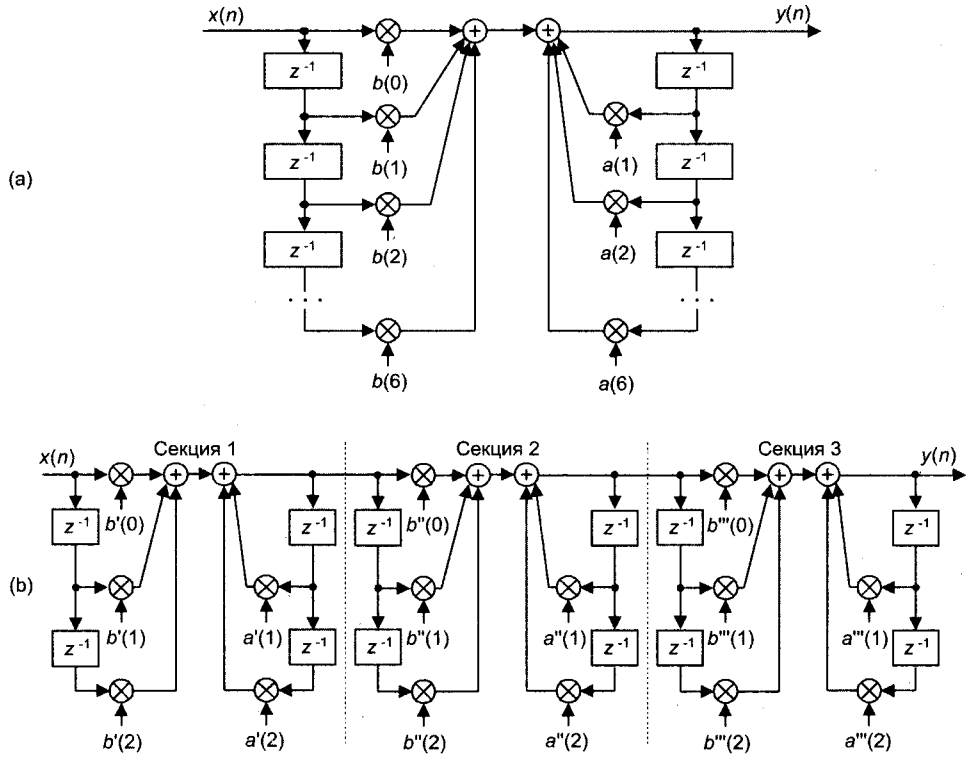


Рис. 6.39. Разбиение БИХ-фильтра на секции: (a) исходный БИХ-фильтр шестого порядка; (b) три секции второго порядка

Это значит, что, если мы хотим разбить фильтр порядка $2M$ на M секций второго порядка, то мы должны проанализировать $(M!)^2$ способов такого разбиения. Таким образом, при переходе от рисунка 6.39 (a) к рисунку 6.39 (b) мы можем получить $(3!)^2 = 36$ разных фильтров. Еще больше усложняет проблему разбиения фильтра то, что ошибки, вызванные квантованием коэффициентов, будут в общем случае для всех этих фильтров разные. Хотя полное описание данного предмета выходит за рамки этого вводного курса, любознательный читатель может найти материал по оптимизации секций каскадных фильтров в работах [19, 27] и в части 3 работы [31].

Один простой (и, вероятно, не оптимальный) выбора порядка следования секций фильтра предложен в [14]. Первым делом разложим передаточную функцию БИХ-фильтра высокого порядка $H(z)$ на множители вида

$$H(z) = (z + z_0)(z + z_1)(z + z_2)(z + z_3)(z + z_4)(z + z_5)\ldots/$$
$$/(z + p_0)(z + p_1)(z + p_2)(z + p_3)(z + p_4)(z + p_5)\ldots \qquad (6\text{-}123)$$

где z_k — нули, а p_k — полюсы. (К счастью, у вас, наверное, есть пакет программ обработки сигналов, позволяющий выполнить такую факторизацию.) Затем сформируем секции второго порядка, выполнив следующие шаги:

1. Найдем полюс или пару полюсов, лежащих ближе всех к единичной окружности.

2. Найдем ноль или пару нулей, лежащих ближе всего к полюсу или паре полюсов, найденных на первом шаге.

3. Объединим эти нули и полюсы в одной секции второго порядка. Это значит, что первая секция фильтра может выглядеть как:

$$H(z) = (z + z_4)(z + z_5)/(z + p_0)(z + p_1)\,. \qquad (6\text{-}124)$$

4. Будем повторять шаги 1 — 3 до тех пор, пока все нули и полюсы не окажутся объединенными в секции второго порядка.

5. Окончательный порядок следования секций основан на том, как далеко от единичной окружности находятся полюсы. Расположите секции в порядке возрастания или убывания расстояния полюсов от единичной окружности.

6. Реализуйте фильтр как последовательно соединенные секции второго порядка, включенные в порядке, заданном на шаге 5.

На сленге цифровой обработки сигналов БИХ-фильтр второго порядка называется «биквадратным», и тому есть две причины. Во-первых, передаточная функция фильтра состоит из двух полиномов второй степени. Во-вторых, слово биквадратный звучит стильно.

Между прочим, мы начали обсуждение разбиения фильтра на секции второго порядка с Прямой формы I высокого порядка, показанной на рисунке 6.39 (а). Мы выбрали эту форму реализации фильтра, поскольку она представляет собой структуру, наименее чувствительную к ошибкам округления и переполнения. Как видно на рисунке 6.39 (а), у нас имеются избыточные элементы задержки. Их можно объединить, как показано на рисунке 6.40, уменьшив таким образом требуемый объем памяти, как мы сделали в Прямой форме II, показанной на рисунке 6.22.

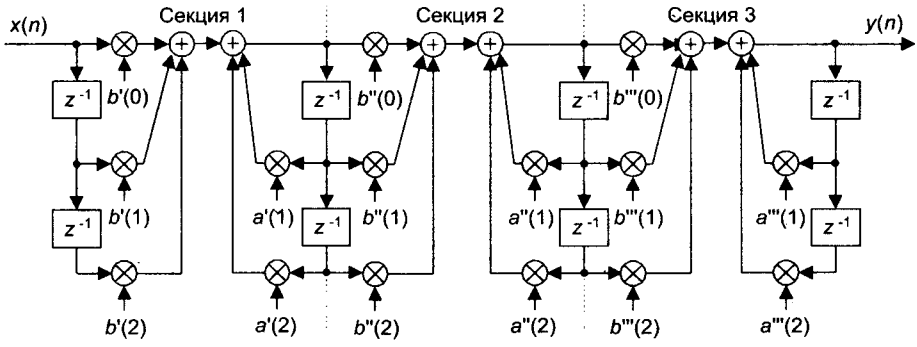


Рис. 6.40. Каскадные фильтры в Прямой форме I с уменьшенным объемом памяти

В литературе доступно множество материалов, посвященных эффектам конечной разрядности в БИХ-фильтрах. (В работах [14,16] и [19] обсуждаются подробности влияния шумов квантования, а также приводится обширный список литературы по этой теме.) Указания по масштабированию БИХ-фильтров для устранения переполнений можно найти в [32,33].

6.9. Краткое сравнение КИХ- и БИХ-фильтров

Вполне естественно, что часто возникает вопрос о том, какой фильтр, БИХ или КИХ наилучшим образом подходит для того или иного применения. На этот вопрос в общем случае ответить нелегко, но мы можем указать несколько факторов, которые следует иметь ввиду. Во-первых, мы можем предположить, что различная трудоемкость расчета этих типов фильтров не имеет значения. Как правило, имеются более важные аспекты, которые необходимо рассмотреть, принимая решение в пользу БИХ- или КИХ-фильтра. Одно из соображений, которое может оказаться существенным, состоит в том, что БИХ-фильтры могут аппроксимировать заданные аналоговые фильтры. *КИХ-фильтры такой возможности не предоставляют.*

С точки зрения аппаратуры, при таких существенных фундаментальных различиях между БИХ- и КИХ-фильтрами, наш выбор должен базироваться на тех характеристиках фильтров, которые имеют для нас наибольшее значение. Например, если нам необходим фильтр со строго линейной ФЧХ, то единственным выбором может быть только КИХ-фильтр. Если, с другой стороны, нам требуется фильтр, обрабатывающий очень быстрый поток данных, а небольшая нелинейность фазы допустима, мы можем склониться к реализации БИХ-фильтра с его меньшим количеством умножений на выходной отсчет.

Одно предупреждение: то, что КИХ-фильтр требует, скажем, в три раза больше умножений на выходной отсчет, чем БИХ-фильтр, не значит, что БИХ-фильтры будет выполняться быстрее на программируемом ЦПОС. Типовые ЦПОС имеют возможность организации *циклов без накладных расходов* и параллельного выполнения инструкций *умножения-накопления* (MAC), которые и составляют КИХ-фильтр. Код для БИХ-фильтров содержит больше операций по обслуживанию указателей на данные и коэффициенты, чем код КИХ-фильтров. Так что, если вы хотите сделать выбор между БИХ-фильтром, требующим К умножений на выходной отсчет, и КИХ-фильтром, требующим *2К* (или *3К*) умножений на выходной отсчет, напишите программы реализации обоих и измерьте скорость их выполнения.

В таблице 6.1 приводятся данные для БИХ- и КИХ-фильтров, позволяющие сравнивать эти два типа фильтров с точки зрения характеристик и реализации.

Таблица 6.1. Сравнение характеристик БИХ- и нерекурсивных КИХ-фильтров

Характеристика	БИХ-фильтры	КИХ-фильтры (нерекурсивные)
Количество умножений	Наименьшее	Наибольшее
Чувствительность к квантованию коэффициентов	Может быть высокой[1] (для высококачественных аудио систем требуются коэффициенты длиной 24 бита)	Очень низкая (для большинства применений достаточно иметь 16-битовые коэффициенты)
Вероятность переполнений	Может быть высокой[2]	Очень низкая
Устойчивость	Должна обеспечиваться при проектировании	Гарантирована
Линейность ФЧХ	Невозможна	Гарантирована[3]
Может аппроксимировать аналоговые фильтры	Да	Нет
Память коэффициентов	Наименьшая	Наибольшая
Аппаратурное управление фильтром	Средней сложности	Очень простое
Распространенность программ проектирования	Широкая	Очень широкая
Сложность проектирования или сложность программ проектирования	Умеренная	Низкая
Сложность анализа шумов квантования	Более высокая	Более низкая
Поддержка адаптивной фильтрации	Да	Да

[1] Чувствительность можно уменьшить в каскадных или параллельных реализациях.

[2] См. предыдущую сноску.

[3] Гарантируется, если коэффициенты КИХ-фильтра симметричны.

Библиография

1. Churchill, R. V. *Modern Operational Mathematics in Engineering,* McGraw-Hill, New York, 1944, pp. 307-334.
2. Aseltine, J. A. *Transform Method in Linear System Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1958, pp. 287-292.
3. Nixon, F. E. *Handbook of Laplace Transformation,* Tables and Examples, Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, New Jersey, 1960.
4. Kaiser, J. F. «Digital Filters» in *System Analysis by Digital Computer.* Ed. by F. F. Kuo and J. F. Kaiser, John Wiley and Sons, New York, 1966, pp. 218-277.
5. Kaiser, J. F. «Design Methods for Sampled Data Filters», Chapter 7, in *S1963 Proc. 1st Allerton Conference,* pp. 221-236.
6. Ragazzini, J. R. and Franklin, G. F. *Sampled-Data Control Systems,* McGraw-Hill, New York, 1958, pp. 52-83.
7. Milne-Thomson, L. M. *The Calculus of Finite Differences,* Macmillan, London, 1951, pp. 232-251.
8. Truxal, J. G. 1955. *Automatic Feedback Control System Synthesis,* McGraw-Hill, New York, 1955, p. 283.
9. Blackman, R. B. *Linear Data-Smoothing and Prediction in Theory and Practice,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965, pp. 81-84.
10. Gold, B. and Jordan, K. L., Jr. «A Note on Digital Filter Synthesis», *Proceedings of the IEEE,* Vol. 56, October 1968, p. 1717.
11. Rabiner, L. R., et al. «Terminology in Digital Signal Processing», *IEEE Trans, on Audio and Electroacoustics,* Vol. AU-20, No. 5, December 1972, p. 327.
12. Stearns, S. D. *Digital Signal Analysis,* Hayden Book Co. Inc., Rochelle Park, New Jersey, 1975, p. 114.
13. Stanley, W. D., et al., *Digital Signal Processing,* Reston Publishing Co. Inc., Reston, Virginia, 1984, p. 191.
14. Oppenheim, A. V, and Schafer, R. W. *Discrete-Time Signal Processing,* Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, New Jersey, 1989, p. 406 (имеется русский перевод одного из предыдущих изданий: Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. «Цифровая обработка сигналов», пер. с англ. / под ред. С. Я. Шаца, М.: Связь, 1979, доступен по адресу dsp-book.narod.ru/OpShDSP.djvu).
15. Williams, C. S. *Designing Digital Filters,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986, pp. 166-186.
16. Rabiner, L. R., and Gold, B. *Theory and Application of Digital Signal Processing,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, p. 216 (есть русский перевод: Рабинер Л., Голд Б. «Теория и применение цифровой обработки сигналов», М.: Мир, 1978, доступен по адресу http://geogin.narod.ru/arhiv/dsp/dsp3.htm).
17. Johnson, M. «Implement Stable IIR Filters Using Minimal Hardware», *EDN,* 14 April 1983.

18. Oppenheim, A. V, Willsky, A. S., and Young, I. T. *Signals and Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983, p. 659.

19. Kaiser, J. F. «Some Practical Considerations in the Realization of Linear Digital Filters», Proc. *Third Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory*, 1965, pp. 621-633.

20. Deczky, A. G. «Synthesis of Digital Recursive Filters Using the Minimum P Error Criterion», *IEEE Trans, on Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-20, No. 2, October 1972, p. 257.

21. Steiglitz, K. «Computer-Aided Design of Recursive Digital Filters», *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, Vol. 18, No. 2,1970, p. 123.

22. Richards, M. A. «Application of Deczky's Program for Recursive Filter Design to the Design of Recursive Decimators», *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-30, October 1982, p. 811.

23. Parks, T. W., and Burrus, C. S. *Digital Filter Design*, John Wiley and Sons, New York, 1987, p. 244.

24. Rabiner, L., Graham, Y, and Helms, H. «Linear Programming Design of IIR Digital Filters with Arbitrary Magnitude Functions», *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing.*, Vol. ASSP-22, No. 2, April 1974, p. 117.

25. Friedlander, B., and Porat, B. «The Modified Yule-Walker Method of ARMA Spectral Estimation», *IEEE Trans. on Aerospace Electronic Systems*, Vol. AES-20, No. 2, March 1984, pp. 158-173.

26. Jackson, L. B. «On the Interaction of Roundoff Noise and Dynamic Range and Dynamic Range in Digital Filters», *Bell System Technical Journal* Vol. 49, February 1970, pp. 159-184.

27. Jackson, L. B. «Roundoff Noise Analysis for Fixed-Point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, June 1970, pp. 107-122.

28. Sandberg, I. W. «A Theorem Concerning Limit Cycles in Digital Filters», Proc. *Seventh Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory*, Monticello, Illinois, October 1969.

29. Ebert, P. M., et al. «Overflow Oscillations in Digital Filters», *Bell Sys. Tech. Journal*, Vol. 48, November 1969, pp. 2999-3020.

30. Oppenheim, A. V. «Realization of Digital Filters Using Block Floating Point Arithmetic», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, June 1970, pp. 130-136.

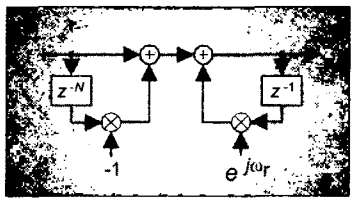
31. Rabiner, L. R., and Rader, C. M., Eds., Digital Signal Processing, *IEEE Press*, New York, 1972, p. 361.

32. Grover, D. «Subject: Re: *How to arrange the (gain, -pole, zero) of the cascaded biquad filter». Usenet group comp.dsp* post, Dec. 28, 2000.

33. Grover, D. and Deller, J. *Digital Signal Processing and the Microcontroller*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1998.

Глава 7

Специальные КИХ-фильтры нижних частот



В этой главе мы предлагаем вашему вниманию две реализации эффективных КИХ-фильтров нижних частот с линейной ФЧХ. Мы обсуждаем эти специальные фильтры здесь, потому что их поведение легче понять, используя z-преобразование, которое мы рассмотрели в предыдущей главе.

Первый тип фильтра, который мы представляем вам, называется *фильтром на основе частотной выборки*. Эти фильтры принадлежат к классу КИХ-фильтров с линейной ФЧХ, построенных на основе рекурсивной структуры (использующей обратную связь). Материал раздела 7.1 новичкам может показаться сложным, но он заслуживает изучения по двум причинам. Во-первых, эти фильтры могут быть очень эффективными (с минимальным объемом вычислений) при реализации узкополосных ФНЧ; и, во-вторых, понимание принципа их работы и проектирования будет способствовать более глубокому усвоению теории ЦОС, изложенной в предыдущих разделах.

В разделе 7.2 обсуждаются *интерполированные КИХ ФНЧ*. В этих фильтрах, реализованных по нерекурсивной схеме (без обратных связей), для уменьшения объема вычислений используется последовательное соединение нескольких КИХ-фильтров. Их реализация представляет собой новый подход, при котором умножители в традиционной структуре на основе линии задержки с ответвлениями разделены несколькими элементами задержки.

Эти типы фильтров похожи друг на друга тем, что они представляют собой фильтрующие машины, из которых удалено все лишнее. Они буквально по капле выжимают эффективность из гарантированно устойчивых фильтров с линейной ФЧХ. Во многих применениях эти фильтры могут обеспечить очень существенное уменьшение вычислительной сложности по сравнению с обычными КИХ-фильтрами, рассчитанными методом Паркса-Маклеллана, которые мы рассматривали в главе 5.

7.1. Фильтры на основе частотной выборки: утраченное искусство

В этом разделе обсуждается класс цифровых фильтров, которые называются *фильтрами на основе частотной выборки* (ФОЧВ) и которые используются для реализации КИХ-фильтров с линейной ФЧХ. Хотя фильтры на основе частотной выборки были разработаны более 35 лет тому назад, распространение мощного метода проектирования нерекурсивных КИХ-фильтров Паркса-Маклеллана оттеснило их в тень. В 1970-е годы фильтры на основе частотной выборки настолько утратили популярность, что в современных курсах лекций и учебниках по ЦОС они либо упоминаются вскользь, либо не упоминаются вообще. Однако мы покажем, что фильтры на основе частотной выборки остаются *более эффективными с вычислительной точки зрения*, чем фильтры Паркса-Маклеллана, в определенных приложениях, где требуемая ширина полосы пропускания составляет меньше примерно одной пятой частоты дискретизации. Для специалиста-практика в области ЦОС этот материал может послужить введением в структуру, характеристики и проектирование фильтров на основе частотной выборки, а также дать подробное сравнение предлагаемой реализации высококачественных фильтров на основе частотной выборки с их нерекурсивными КИХ эквивалентами. Кроме того, мы дополним информацию о ФОЧВ практическими соображениями относительно линейности ФЧХ, устойчивости фильтров, нормирования коэффициента передачи и вычислительной сложности, рассмотрев примеры их проектирования.

В основе ФОЧВ лежит тот факт, что традиционный нерекурсивный КИХ-фильтр с N ответвлениями, показанный на рисунке 7.1 (a), может быть реализован в виде гребенчатого фильтра, соединенного последовательно с банком из N комплексных резонаторов, как показано на рисунке 7.1 (b). Мы называем фильтр на рисунке 7.1 (b) обобщенным фильтром на основе частотной выборки (ФОЧВ), и его эквивалентность нерекурсивному КИХ-фильтру была доказана в [1-3]. Хотя коэффициенты нерекурсивных КИХ-фильтров с N ответвлениями $h(k)$, $0 < k < N-1$, обычно имеют действительные значения, в общем случае они могут быть комплексными. Это начальное предположение, которое принимается при сравнении двух фильтров на рисунке 7.1. Коэффициенты усиления $H(k)$, которые представляют собой отсчеты ДПФ последовательности коэффициентов $h(k)$, в общем случае принимают комплексные значения вида $|H(k)|\, e^{j\phi(k)}$.

В основе проектирования ФОЧВ лежит определение требуемой АЧХ КИХ-фильтра в виде отсчетов $H(k)$ в частотной области, модули которых показаны на рисунке 7.2 точками. Далее эти комплексные $H(k)$ используются как множители, на которые умножаются выходные сигналы резонаторов ФОЧВ (см. блок-схему). Если вы не встречались с этой структурой раньше, не пугайтесь ее внешней сложности. Мы скоро разберемся со всеми ее частями и с тем, как эти части взаимодействуют.

Позже мы выведем математическое выражение для определения интерполированной (истинной) АЧХ ФОЧВ $|H(e^{j\omega})|$, которая показана сплошной линией на рисунке 7.2. На этом рисунке по оси абсцисс отложена круговая частота ω в диапазоне от 0 до 2π радиан, нормированная относительно π радиан, что соответствует диапазону частот 0 до f_s, где f_s — частота дискретизации в Гц.

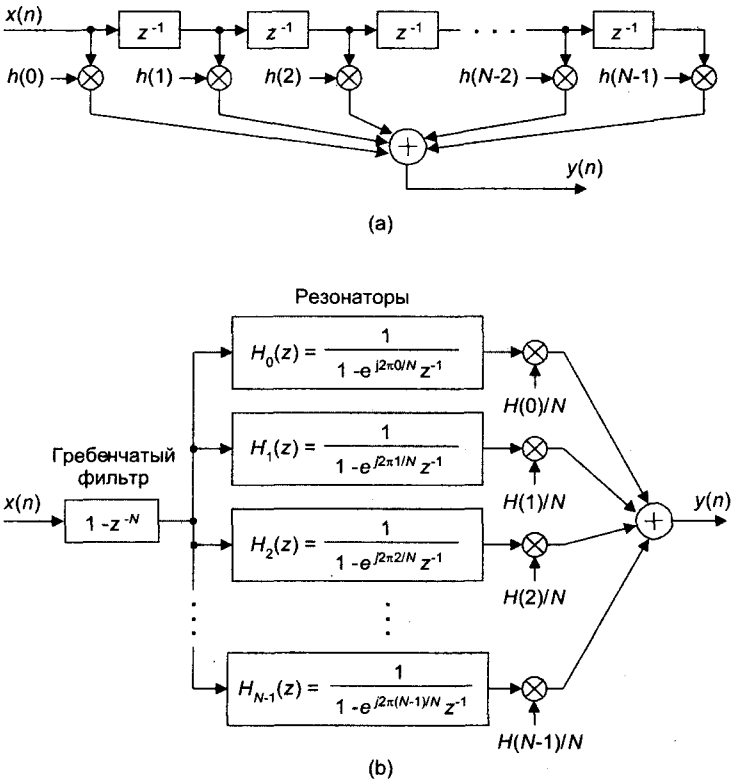


Рис. 7.1. КИХ-фильтры: (a) нерекурсивный с N ответвлениями; (b) эквивалентный фильтр на основе частотной выборки из N секций

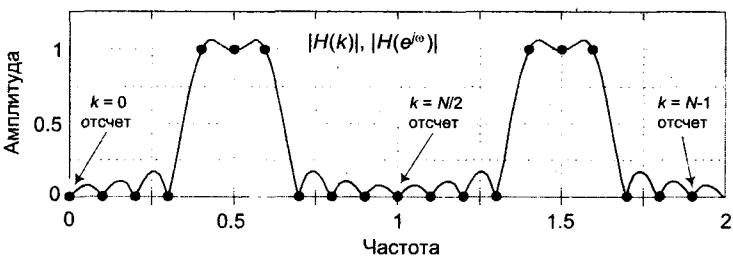


Рис. 7.2. Определение требуемой частотной характеристики с помощью частотной выборки

Чтобы избежать путаницы, мы напоминаем читателю, что существует популярный метод проектирования нерекурсивных КИХ-фильтров, известный как метод проектирования по дискретизированной частотной характеристике, описанный в литературе по ЦОС. Проектирование этим методом начинается (подобно проектированию ФОЧВ) с определения отсчетов требуемой АЧХ $H(k)$, затем выполняется ОДПФ этих отсчетов с целью получить отсчеты импульсной характеристики $h(k)$, используемые в качестве коэффициентов в структуре нерекурсивных КИХ-фильтров на рисунке 7.1 (a). В описываемом методе проектирования ФОЧВ

отсчеты требуемой АЧХ $H(k)$ являются коэффициентами структуры ФОЧВ, приведенной на рисунке 7.1 (b), которую обычно называют реализацией КИХ-фильтра на основе частотной выборки.

Хотя ФОЧВ сложнее, чем нерекурсивные КИХ-фильтры, они заслуживают изучения, т. к. во многих ситуациях, когда необходима узкополосная фильтрация, они могут обеспечить реализацию КИХ-фильтров с линейной ФЧХ, требующую значительно меньше операций, чем нерекурсивные КИХ-фильтры с N ответвлениями. Уменьшение количества операций происходит благодаря тому, что, в то время как в реализации нерекурсивных КИХ-фильтров используются все коэффициенты $h(k)$, большинство отсчетов $H(k)$, соответствующие полосе задерживания, принимают нулевое значение и не требуют реализации умножителя. Чтобы понять принцип работы и преимущества ФОЧВ, мы начнем с рассмотрения поведения гребенчатого фильтра, а затем рассмотрим характеристики отдельного цифрового резонатора.

7.1.1. Гребенчатый фильтр и комплексный цифровой резонатор

Одна секция комплексного ФОЧВ представляет собой гребенчатый фильтр, последовательно с которым включен комплексный цифровой резонатор, как показано на рисунке 7.3.

Умножитель на коэффициент $1/N$, следующий за резонатором на рисунке 7.1 (b), для простоты опущен. (Влияние этого коэффициента мы рассмотрим позже.) Чтобы понять работу отдельной секции ФОЧВ, мы рассмотрим сначала характеристики нерекурсивного гребенчатого фильтра, разностное уравнение которого имеет вид

$$v(n) = x(n) - x(n-N), \tag{7-1}$$

т. е. выход этого фильтра равен разности входной последовательности и ее же, но задержанной на N отсчетов. Передаточная функция гребенчатого фильтра имеет вид

$$H_{comb}(z) = V(z)/X(z) = 1 - z^{-N} \tag{7-2}$$

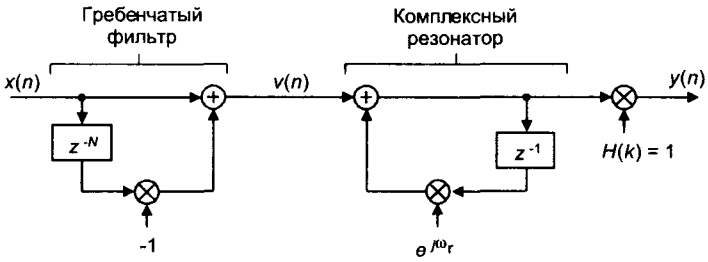


Рис. 7.3. Одна секция комплексного ФОЧВ

Частотная характеристика гребенчатого фильтра, вывод которой вы можете найти в разделе 1 приложения G, описывается выражением

$$H_{comb}(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega N-\pi)/2}\, 2\sin(\omega N/2) \tag{7-3}$$

при этом АЧХ выглядит как $|H_{comb}(e^{j\omega})| = 2|\sin(\omega N/2)|$, имея максимальное значение 2. Полезно будет рассмотреть импульсную характеристику гребенчатого фильтра и его АЧХ, приведенные на рисунке 7.4 для $N = 8$. Вид АЧХ ясно показывает, почему этот фильтр называется гребенчатым.

Соотношение (7-2) объясняет ключевую особенность гребенчатого фильтра: его передаточная функция имеет N нулей, распределенных равномерно по единичной окружности в z-плоскости, как показано на рисунке 7.4 (c). Каждый из этих нулей, расположенный в точке $z(k) = e^{j2\pi k/N}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, соответствует нулю АЧХ на рисунке 7.4 (b), где нормированная частота меняется от $-\pi$ до $+\pi$ радиан. Эти значения $z(k)$ представляют собой N корней уравнения, которое мы получаем, приравняв (7-2) единице: $z(k)^N = (e^{j2\pi k/N})^N = 1$. Мы можем показать АЧХ (в линейном масштабе) над z-плоскостью в виде трехмерного графика, приведенного на рисунке 7.5, где мы видим пересечение поверхности $|H_{comb}(z)|$ с цилиндром, в основании которого лежит единичная окружность. Разрезав цилиндр по образующей, проходящей через точку $z = -1$, и выпрямив его поверхность, мы получим график, приведенный на рисунке 7.4 (b).

Наша цель — построить ФОЧВ, соединив последовательно гребенчатый фильтр и цифровой резонатор, полюс передаточной функции которого совпадает с одним из нулей гребенчатого фильтра, в результате чего получается полосовой фильтр с линейной ФЧХ. Имея это ввиду, рассмотрим характеристики цифрового резонатора, показанного на рисунке 7.3.

Во временной области комплексный резонатор описывается разностным уравнением

$$y(n) = v(n) + e^{j\omega_r} y(n-1), \tag{7-4}$$

где аргумент ω_r, $-\pi < \omega_r < \pi$, определяет резонансную частоту резонатора. Мы покажем это, рассмотрев передаточную функцию резонатора

$$H_{res}(z) = Y(z)/V(z) = 1/(1 - e^{j\omega_r} z^{-1}) \tag{7-5}$$

и его комплексную импульсную характеристику для $\omega_r = \pi/4$ на рисунке 7.6.

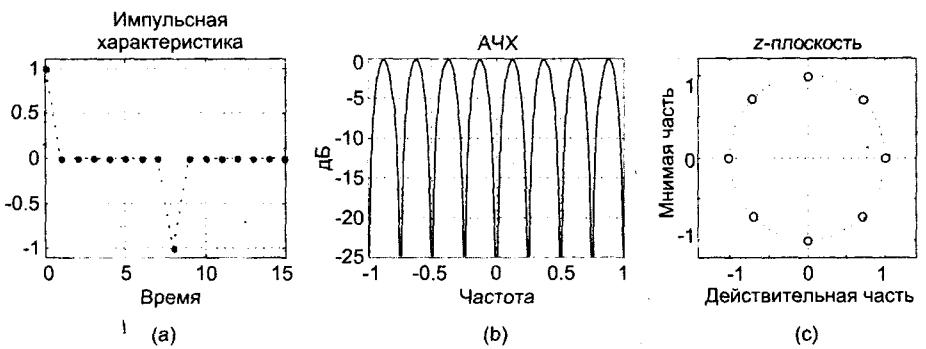


Рис. 7.4. Характеристики гребенчатого фильтра при $N = 8$

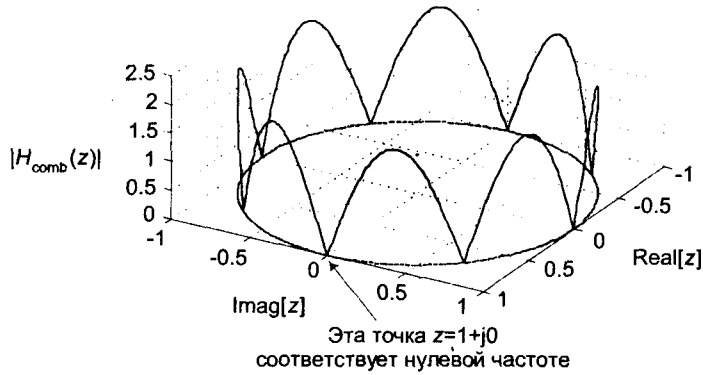


Рис. 7.5. АЧХ гребенчатого фильтра при $N=8$ над z-плоскостью

Импульсная характеристика резонатора с $\omega_r = \pi/4$ представляет собой комплексную синусоиду, действительная часть которой (косинусоида) изображена на рисунке 7.7 (а), и длительность ее не ограничена. (Мнимая часть импульсной характеристики, как мы и ожидали, является синусоидальной последовательностью.) АЧХ в этом случае является очень узкой, с центром на частоте ω_r. *Передаточная функция резонатора* $H_{res}(z)$ имеет единственный ноль в точке $z = 0$, но нас больше интересует его полюс в точке на единичной окружности, аргумент которого равен ω_r, как показано на рисунке 7-7(с). Мы можем представлять себе резонатор как БИХ-фильтр, который условно устойчив, потому что его полюс не находится ни внутри, ни снаружи единичного круга.

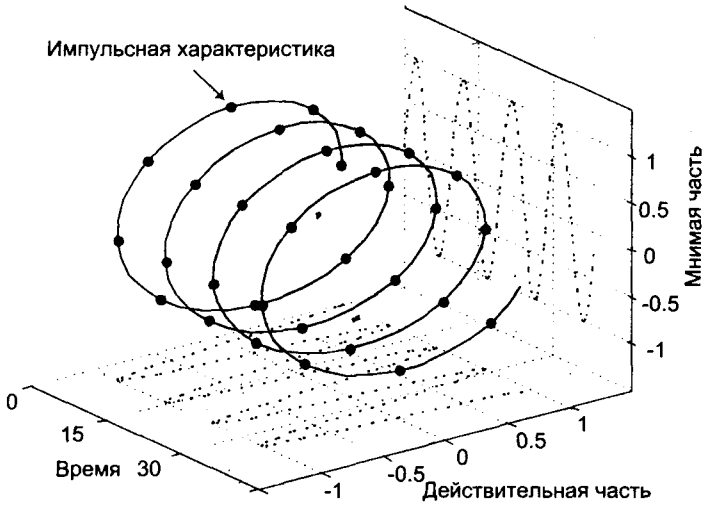


Рис. 7.6. Импульсная характеристика одного цифрового комплексного резонатора с $\omega_r = \pi/4$

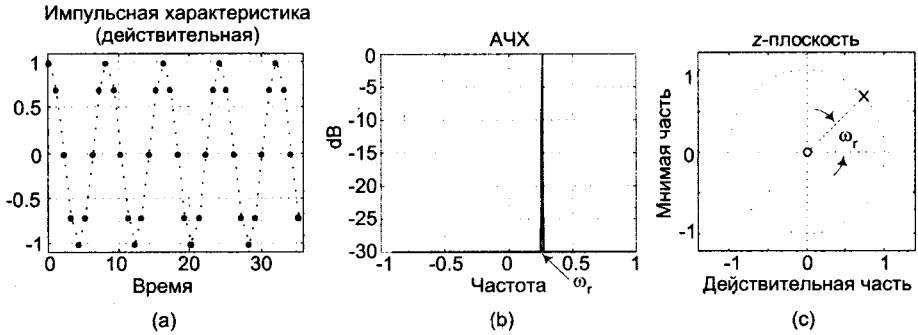


Рис. 7.7. Характеристики цифрового комплексного резонатора при $\omega_r = \pi/4$

Теперь проанализируем одну секцию ФОЧВ, показанную на рисунке 7.3. Ее передаточная функция представляет собой произведение трех сомножителей:

$$H(z) = H_{comb}(z)H_{res}(z)H(k) = (1 - z^{-N})H(k)/(1 - e^{j\omega_r}z^{-1}) . \quad (7\text{-}6)$$

Если мы примем резонансную частоту ω_r равной $2\pi k/N$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, то полюс передаточной функции наложится на ее ноль, и мы будем иметь передаточную функцию вида

$$H_{ss}(z) = (1 - z^{-N})H(k)/(1 - e^{j2\pi k/N}z^{-1}) , \quad (7\text{-}7)$$

где нижний индекс "ss" обозначает ФОЧВ с одной секцией. Разобраться в этом односекционном ФОЧВ мы можем, рассмотрев его показанные на рисунке 7.8 временные и частотные характеристики при $N = 32$, $k = 2$ и $H(2) = 1$.

Рисунок 7.8 содержит много информации. Мы видим, что комплексная импульсная характеристика ФОЧВ представляет собой усеченную комплексную синусоиду, действительная часть которой показана на рисунке 7.8 (а). Положительный импульс, полученный от гребенчатого фильтра, запускает колебания резонатора в нулевой момент времени. Затем в нужный момент, а именно через $N = 32$ отсчета, что составляет $k = 2$ периода синусоиды, отрицательный импульс на выходе гребенчатого фильтра гасит колебания резонатора. АЧХ, которая является преобразованием Фурье ограниченной синусоидальной импульсной характеристики, имеет форму функции $\sin(x)/x$. На карте нулей и полюсов (рисунок 7.8 (с)) видно, что полюс резонатора попадает точно на ноль гребенчатого фильтра $k = 2$, лежащий на единичной окружности, устраняя ноль частотной характеристики на частоте $2\pi k/N = \pi/8$. (Вспомним, что нормированная угловая частота $2\pi k/N$ радиан соответствует частоте kf_s/N, где f_s — частота дискретизации в Гц. Следовательно, фильтр на рисунке 7.8 имеет резонансную частоту $f_s/16$ Гц.)

Мы можем определить интерполированную частотную характеристику ФОЧВ, вычислив $H_{ss}(z)$ на единичной окружности. Подстановка $e^{j\omega}$ вместо z в $H_{ss}(z)$ в (7-7), как подробно описано в разделе 2 приложения G, дает частотную характеристику вида

$$\begin{aligned} H_{ss}(e^{j\omega}) &= H_{ss}(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \\ &= e^{-j\omega(N-1)/2}\, e^{-j\pi k/N} H(k) \sin(\omega N/2)/\sin(\omega/2 - \pi k/N) . \end{aligned} \quad (7\text{-}8)$$

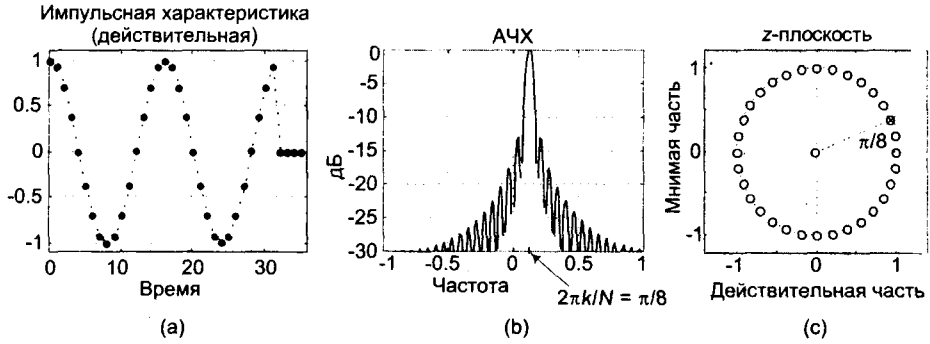


Рис. 7.8. Характеристики односекционного комплексного ФОЧВ при $N = 32$, $k = 2$ и $H(2) = 1$

Вычисление $|H_{ss}(e^{j\omega})|$ в диапазоне частот $-\pi < \omega < \pi$ дает кривую, показанную на рисунке 7.8 (b). Наш односекционный ФОЧВ имеет линейную ФЧХ, т. к. член $e^{-j\pi k/N}$ в (7-8) дает постоянный сдвиг фаз, определяемый константами N и k, фазовый угол $H(k)$ фиксирован, а фаза члена $e^{-j\omega(N-1)/2}$ представляет собой линейную функцию частоты ω. Как показано в разделе 2 приложения G, максимум АЧХ односекционного комплексного ФОЧВ равен N при $|H(k)| = 1$. Это продемонстрировано на рисунке 7.9.

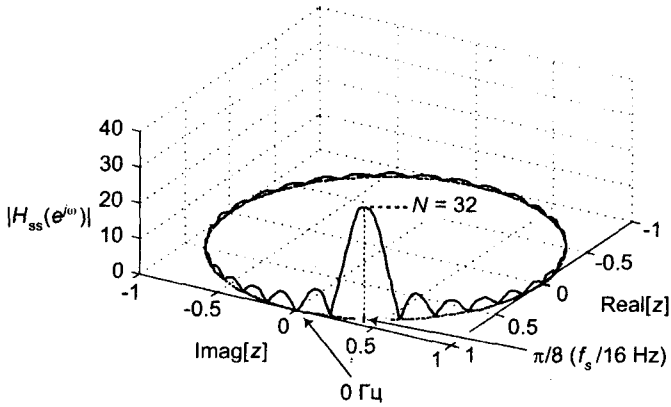


Рис. 7.9. АЧХ односекционного комплексного ФОЧВ при $N=32$ и $k=2$ над z-плоскостью

7.1.2. Многосекционные комплексные ФОЧВ

Чтобы построить практически полезный ФОЧВ, мы используем несколько секций резонаторов, как показано на рисунке 7.1 (b), для реализации полосового КИХ-фильтра. Построим, например, трехсекционный комплексный полосовой ФОЧВ, задав $N = 32$ и взяв ненулевые значения отсчетов $H(2)$, $H(3)$ и $H(4)$. Требуемая частотная характеристика показана на рисунке 7.10 (a), структура полосового фильтра приведена на рисунке 7.10 (b).

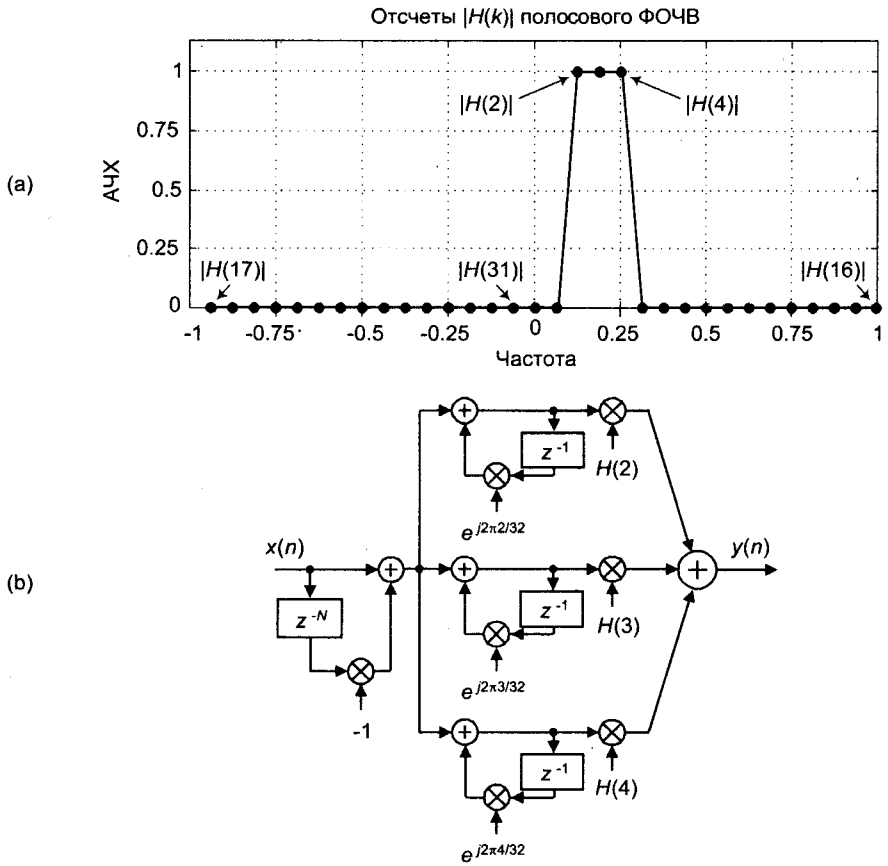


Рис. 7.10. Трехсекционный комплексный ФОЧВ с $N = 32$: (a) требуемая АЧХ; (b) реализация

Анализируя этот случай, вспомним, что передаточная функция параллельно соединенных фильтров равна сумме отдельных передаточных функций. Итак, передаточная функция N-секционного комплексного ФОЧВ с учетом (7-7) имеет вид

$$H_{cplx}(z) = (1 - z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} H(k)/(1 - e^{-j\pi k/N} z^{-1}), \qquad (7\text{-}9)$$

где нижний индекс "*cplx*" обозначает комплексный многосекционный ФОЧВ.

Задержимся на минуту, чтобы осмыслить выражение (7-9). Первый сомножитель в правой части представляет гребенчатый фильтр, второй — сумму дробных членов. Суммирование отношений (каждое из которых представляет резонатор) означает, что эти резонаторы включены параллельно. Вспомним раздел 6.8.1, где говорилось, что передаточная функция параллельно соединенных фильтров равна сумме передаточных функций фильтров. Очень важно разобраться в выражении (7-9), потому что ниже мы встретим много подобных выражений.

Итак, гребенчатый фильтр возбуждает банк резонаторов. Для комплексного ФОЧВ с $N = 32$ мы могли бы иметь до 32 резонаторов, но на практике для узкополосных фильтров их требуется всего несколько. На рисунке 7.10 мы исполь-

зовали только три резонатора. В этом и состоит красота ФОЧВ: большинство значений множителей $H(k)$ в (7-9) равны нулю, и соответствующие резонаторы не реализуются, что позволяет сделать ФОЧВ эффективным с вычислительной точки зрения.

Выполняя те же шаги, что и в разделе 2 приложения G, мы можем записать частотную характеристику многосекционного ФОЧВ, такого как на рисунке 7.10, в виде

$$H_{cplx}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)e^{-j\pi k/N}\sin(\omega N/2)/\sin(\omega/2-\pi k/N)\,. \qquad (7\text{-}10)$$

Разработчик многосекционного комплексного ФОЧВ может получить любую требуемую ФЧХ, задав фазовые углы $\phi(k)$ всех ненулевых комплексных коэффициентов передачи $H(k) = |H(k)|\,e^{j\phi(k)}$. Однако чтобы построить комплексный ФОЧВ с линейной ФЧХ, разработчик должен: (a) Задать $\phi(k)$ как линейную функцию частоты и (b) определить последовательность фаз $\phi(k)$ так, чтобы ее наклон был равен $-(N-1)/2$. Второе условие требует, чтобы ФОЧВ имел положительную задержку по времени, равную $(N-1)/2$ отсчетам, как и нерекурсивный КИХ-фильтр с N ответвлениями, показанный на рисунке 7.1 (a). Этим условиям удовлетворяют следующие выражения для $\phi(k)$ при четном N.

$$\phi(k) = k(2\pi/N)[-(N-1)/2] = -k\pi(N-1)/N,\ k = 0, 1, 2, \ldots, (N/2)-1\,. \qquad (7\text{-}11)$$

$$\phi(N/2) = 0\,. \qquad (7\text{-}11')$$

$$\phi(k) = (N-k)(2\pi/N)(N-1)/2 = \pi(N-k)(N-1)/N,\ k = N/2+1, \ldots, N-1\,. \qquad (7\text{-}11'')$$

При нечетном N значения фаз $H(k)$ для обеспечения линейности ФЧХ должны быть

$$\phi(k) = k(2\pi/N)[-(N-1)/2] = -k\pi(N-1)/N,\ k = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)/2\,. \qquad (7\text{-}12)$$

$$\phi(k) = (N-k)(2\pi/N)(N-1)/2 = \pi(N-k)(N-1)/N,\ k = (N+1)/2, \ldots, N-1\,. \qquad (7\text{-}12')$$

Два примера последовательностей $\phi(k)$ с линейной ФЧХ для $N = 19$ и $N = 20$ показаны на рисунке 7.11. Значение $\phi(0) = 0$ устанавливает нулевую фазу на частоте 0 Гц, а $\phi(N/2) = 0$ на частоте $f_s/2$ на рисунке 7.11 (b) обеспечивает симметрию импульсной характеристики.

Присвоение соответствующих фаз ненулевым коэффициентам $H(k)$ — это, однако, только половина дела. Есть хорошая новость. Изучение частотной характеристики (7-10) показывает нам простой способ получения линейной ФЧХ на практике. Подстановка $|H(k)|\,e^{j\phi(k)}$ со значениями $\phi(k)$, определяемыми приведенным выше выражением (7-11), вместо $H(k)$ в (7-10) дает выражение для частотной характеристики комплексного многосекционного ФОЧВ при четном N вида

$$H_{cplx,\,lp}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2}\sin(\omega N/2)\times$$
$$\times\Big[\,|H(N/2)|\,e^{-j\pi/2}/\sin(\omega/2-\pi/2) + \sum_{k=0}^{(N/2)-1}|H(k)|(-1)^k/\sin(\omega/2-\pi k/N) -$$
$$-\sum_{k=(N/2)+1}^{N-1}|H(k)|(-1)^k/\sin(\omega/2-\pi k/N)\Big]\,, \qquad (7\text{-}13)$$

где нижний индекс "lp" говорит о линейности ФЧХ.

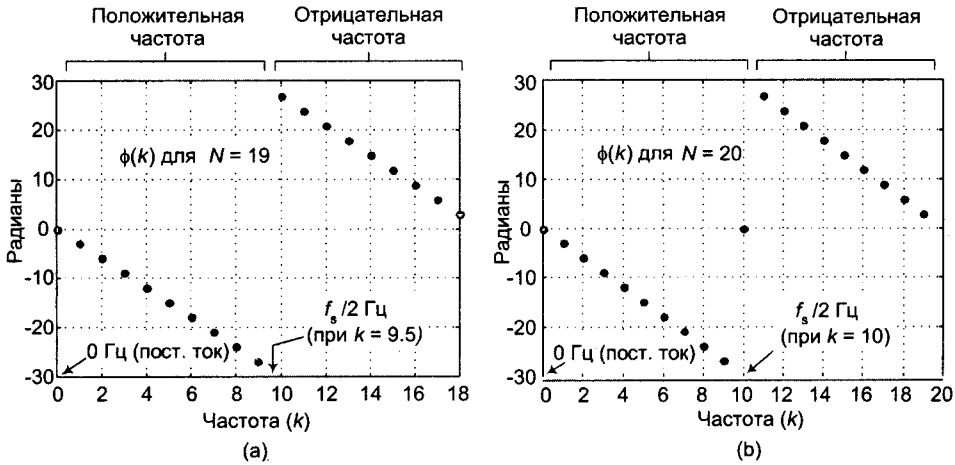


Рис. 7.11. Линейность фазы $H(k)$ для односекционного ФОЧВ: (a) для $N = 19$; (b) $N = 20$

Выражение (7-13) не такое сложное, каким кажется. Оно просто говорит о том, что общая частотная характеристика ФОЧВ равна сумме $\sin(x)/x$–подобных частотных характеристик отдельных резонаторов. Первое слагаемое в квадратных скобках представляет собой резонатор, центральная частота которого равна $k = N/2$ $(f_s/2)$. Первая сумма в квадратных скобках представляет резонаторы с положительными резонансными частотами, а вторая сумма — резонаторы с отрицательными резонансными частотами.

Множители $(-1)^k$ в числителях (7-13) заслуживают нашего внимания, поскольку они представляют собой последовательность чередующихся положительных и отрицательных элементов. Таким образом, частотная характеристика одной секции будет сдвинута по фазе на 180° относительно характеристик соседних резонаторов. То есть выходные сигналы соседних односекционных ФОЧВ будут иметь фиксированную разность фаз в π радиан в полосе пропускания, общей для обоих фильтров, как показано на рисунке 7.12. (Появление множителей $(-1)^k$ в (7-13) обосновано в разделе 3 приложения G.)

Эти множители $(-1)^k$ оказывают глубокое влияние, которое недостаточно подчеркивается в литературе по ФОЧВ. Вместо того, чтобы задавать ненулевые комплексные множители $H(k)$ с линейно нарастающей фазой $\phi(k)$, мы можем построить многосекционный ФОЧВ, используя только модули $|H(k)|$ и присваивая этим действительным коэффициентам чередующиеся знаки. Кроме того, если все ненулевые коэффициенты $|H(k)|$ равны единице, нам не нужно выполнять умножение, показанное на рисунке 7.10, как на рисунке 7.13 (a).

Единичные коэффициенты $|H(k)|$ и чередующиеся знаки слагаемых позволяют заменить комплексные умножения на рисунке 7.10 (b) сложениями и вычитаниями на рисунке 7.13 (a). Мы прибавляем выходные сигналы резонаторов с четными k и вычитаем выходные сигналы резонаторов с нечетными k. Рисунок 7.13 (b) подтверждает, что мы получили линейную ФЧХ с разрывами в точках, в которых АЧХ равна нулю, для многосекционного комплексного ФОЧВ.

Передаточная функция упрощенного комплексного ФОЧВ с линейной ФЧХ имеет вид

$$H_{cplx}(z) = (1-z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k / (1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}) . \qquad (7\text{-}14)$$

(В (7-14) мы не использовали индекс "*lp*", потому что здесь и далее все наши комплексные ФОЧВ будут иметь линейную ФЧХ.)

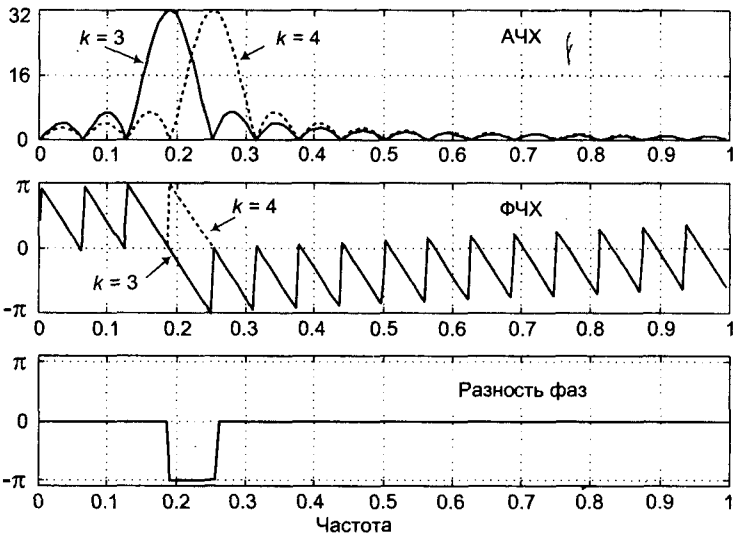


Рис. 7.12. Сравнение АЧХ, ФЧХ и разности фаз секций ФОЧВ *k=3* и *k = 4* при *N = 32*

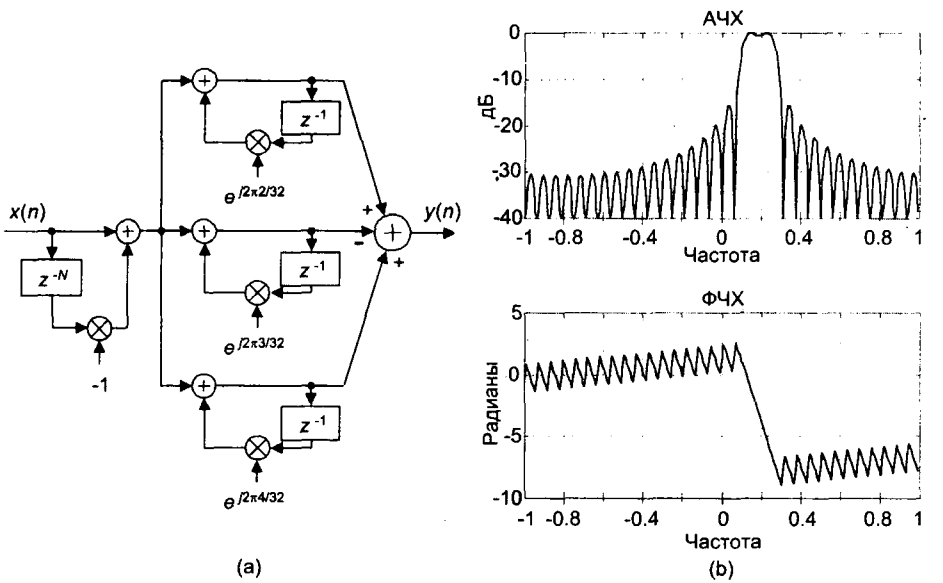


Рис. 7.13. Упрощенный трехсекционный комплексный полосовой ФОЧВ с линейной ФЧХ при *N = 32*: (a) реализация; (b) частотная характеристика

7.1.3. Обеспечение устойчивости ФОЧВ

До сих пор мы обсуждали комплексные ФОЧВ с взаимным уничтожением нулей и полюсов на единичной окружности. Однако на практике точное взаимное уничтожение требует вычислений с неограниченной разрядностью. Ошибки квантования коэффициентов ФОЧВ могут привести к тому, что полюсы фильтра сместятся за пределы единичного круга. В результате фильтр получится неустойчивым, его импульсная характеристика будет иметь неограниченную длительность, чего следует избегать. (Это прекрасный пример фразы, подтвержденной временем: «Теоретически, разницы между теорией и практикой нет. На практике теория иногда не работает».) Даже если полюс сместился очень незначительно за пределы единичного круга, шум округления со временем будет нарастать, искажая выходные отсчеты фильтра. Мы предотвращаем это явление, слегка смещая нули гребенчатого фильтра и полюсы резонаторов внутрь единичного круга, как показано на рисунке 7.14 (a). Здесь нули и полюс расположены на окружности радиуса r, при этом коэффициент затухания r лишь немного меньше 1.

Мы называем r коэффициентом затухания, потому что импульсная характеристика однокаскадного ФОЧВ превращается в затухающую синусоиду. Например, действительная часть импульсной характеристики однокаскадного комплексного ФОЧВ при $N = 32, k = 2, H(2) = 2$ и $r = 0.95$ показана на рисунке 7.14 (b). Сравните эту импульсную характеристику с изображенной на рисунке 7.8 (a). Структура односекционного ФОЧВ с нулями и полюсами, лежащими внутри единичного круга, показана на рисунке 7.14 (c).

Коэффициент гребенчатого фильтра равен $-r^N$, потому что его новая передаточная функция имеет вид

$$H_{comb,\,r<1}(z) = V(z)/X(z) = 1 - r^N z^{-N} \tag{7-15}$$

при этом N нулей гребенки лежат в точках $z_{r<1}(k) = re^{j2\pi k/N}$, где $k = 0, 1, 2, ..., N-1$.

Эти значения $z_{r<1}(k)$ представляют собой N корней уравнения, полученного приравниванием (7-15) к нулю, при этом $z_{r<1}(k)^N = (re^{j2\pi k/N})^N = r^N$. Передаточная функция резонатора, показанного на рисунке 7.14 (b), полюс которого имеет модуль r и аргумент $2\pi k/N$, имеет вид

$$H_{res,\,r<1}(z) = 1/(1 - re^{j2\pi k/N}z^{-1}), \tag{7-16}$$

что приводит нас к передаточной функции односекционного комплексного ФОЧВ с гарантированной устойчивостью вида

$$\begin{aligned} H_{gs,ss}(z) &= H_{comb,\,r<1}(z)H_{res,\,r<1}(z)H(k) = \\ &= (1 - r^N z^{-N})H(k)/(1 - re^{j2\pi k/N}z^{-1}), \end{aligned} \tag{7-17}$$

реализация которой показана на рисунке 7.14 (c). Нижний индекс "gs,ss" обозначает односекционный ФОЧВ с гарантированной устойчивостью. Передаточная функция N-секционного комплексного ФОЧВ имеет вид

$$H_{gs,cplx}(z) = (1 - r^N z^{-N})\sum_{k=0}^{N-1} H(k)/(1 - re^{j2\pi k/N}z^{-1}), \tag{7-18}$$

где нижний индекс "*gs,cplx*" обозначает многосекционный комплексный ФОЧВ с гарантированной устойчивостью. Частотная характеристика многосекционного комплексного ФОЧВ с гарантированной устойчивостью (выведенная в разделе 3 приложения G) определяется выражением

$$H_{gs,cplx}(e^{j\omega}) =$$

$$= \sqrt{r^{N-1}}\, e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{-j\pi k/N} \sinh[N \ln(r)/2 - jN\omega/2] \,/ \qquad (7\text{-}19)$$

$$/\, \sinh[\ln(r)/2 - j(\omega - 2\pi k/N)/2] \;,$$

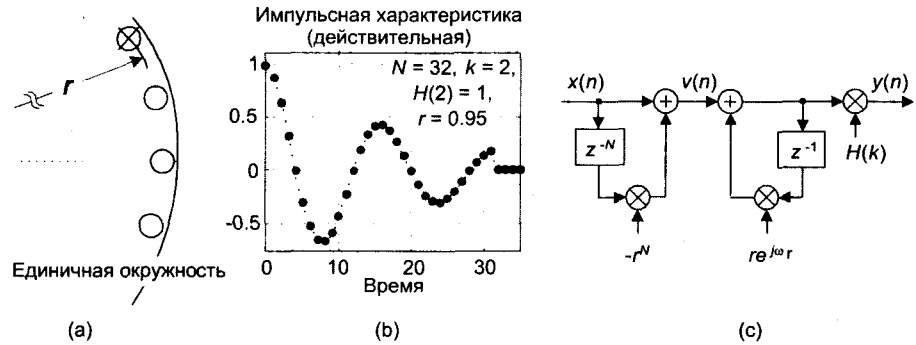


Рис. 7.14. Обеспечение устойчивости ФОЧВ: (a) полюсы и нули находятся внутри единичного круга; (b) действительная часть импульсной характеристики устойчивого односекционного ФОЧВ; (c) структура ФОЧВ

Если мы модифицируем структуру полосового ФОЧВ на рисунке 7.13 (a), чтобы переместить нули и полюсы внутрь единичного круга, то мы получим структуру, показанную на рисунке 7.15 (a). Влияние этого перемещения нулей и полюсов на частотную характеристику значительно, как можно видеть на рисунке 7.15 (b) для двух случаев, когда $r = 0.95$ и $r = 0.9999$.

На рисунке 7.15 (b) видно, что значение $r = 0.95$ сильно исказило характеристики нашего комплексного полосового ФОЧВ; подавление в полосе задерживания ухудшилось, явно видна нелинейность ФЧХ. Значения коэффициента затухания r, меньшие единицы, приводят к нелинейности ФЧХ, т. к. нули фильтра больше не являются взаимно обратными. Вспомните ключевую характеристику КИХ-фильтров: чтобы обеспечить линейную ФЧХ, каждый ноль, лежащий внутри единичного круга, в точке $z = z_{r<1}(k)$, где $z_{r<1}(k)$ не равно 0, должен сопровождаться нулем в точке $z = 1/z_{r<1}(k)$, лежащим за пределами единичного круга. Здесь это условие нарушено, что и привело к нелинейности ФЧХ. (Читатель мог предвидеть эту нелинейность, исходя из асимметрии импульсной характеристики на рисунке 7.14 (b).) Чем ближе к единичной окружности мы размещаем нули, тем более линейной является ФЧХ. Следовательно, рекомендуется выбирать r как можно ближе к единице, насколько позволяет двоичный формат представления коэффициентов [4]. Если используется целочисленная арифметика, можно задать $r = 1 - 1/2^B$, где B — количество бит в представлении коэффициентов.

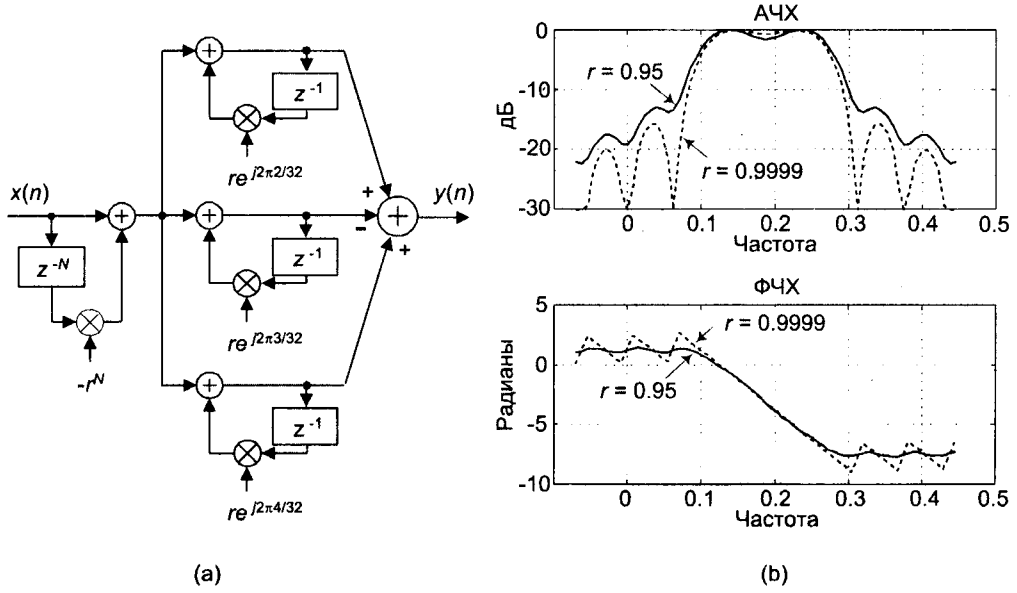


Рис. 7.15. Трехсекционный комплексный полосовой ФОЧВ с линейной ФЧХ и гарантированной устойчивостью при $N = 32$: (a) реализация; (b) частотная характеристика для двух значений коэффициента затухания r

Другой способ стабилизации, заслуживающий внимания, состоит в уменьшении наибольшей составляющей (действительной или мнимой) коэффициента обратной связи резонатора $e^{j2\pi k/N}$ на единицу младшего разряда. Этот метод можно применять избирательно к резонаторам, вызывающим опасения, он эффективен в устранении неустойчивости, вызванной ошибками округления, которые приводят к тому, что коэффициенты $e^{j2\pi k/N}$, рассчитанные с ограниченной точностью, имеют модуль больше единицы.

До сих пор мы рассматривали ФОЧВ с комплексными коэффициентами, АЧХ которых несимметрична относительно 0 Гц. Далее мы исследуем ФОЧВ с действительными коэффициентами, имеющими частотную характеристику, которая является сопряженно-симметричной.

7.1.4. Многосекционные ФОЧВ с действительными коэффициентами

Мы можем получить структуры ФОЧВ с действительными коэффициентами, задав для наших комплексных N-секционных ФОЧВ при четном N полюсы, образующие комплексно-сопряженные пары, путем задания для каждого ненулевого коэффициента $H(k)$ комплексно-сопряженного ему коэффициента $H(N-k)$, так чтобы $H(N-k) = H^*(k)$. То есть мы можем построить действительный ФОЧВ, если будем использовать комплексно-сопряженные пары полюсов, аргументы которых равны $\pm 2\pi k/N$ радиан. Передаточная функция такого ФОЧВ (вывод ее приведен в разделе 5 приложения G) имеет вид

$$H_{gs,real}(z) = \tag{7-20}$$

$$= (1-r^N z^{-N})\{H(0)/(1-rz^{-1}) + H(N/2)/(1+rz^{-1}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N/2-1} 2|H(k)|[\cos(\phi_k) - r\cos(\phi_k - 2\pi k/N)z^{-1}]/[1-2r\cos(2\pi k/N)z^{-1} + r^2 z^{-2}]\},$$

где нижний индекс "*gs,real*" обозначает многосекционный действительный ФОЧВ с гарантированной устойчивостью, а ϕ_k — требуемый фазовый сдвиг k-й секции. Выражение (7-20) определяет структуру действительного ФОЧВ Типа I в виде, представленном на рисунке 7.16 (a). Эта структура требует пять умножений на выходной отсчет резонатора. Реализация действительного двухполюсного резонатора с использованием действительной арифметики показана на рисунке 7.16 (b).

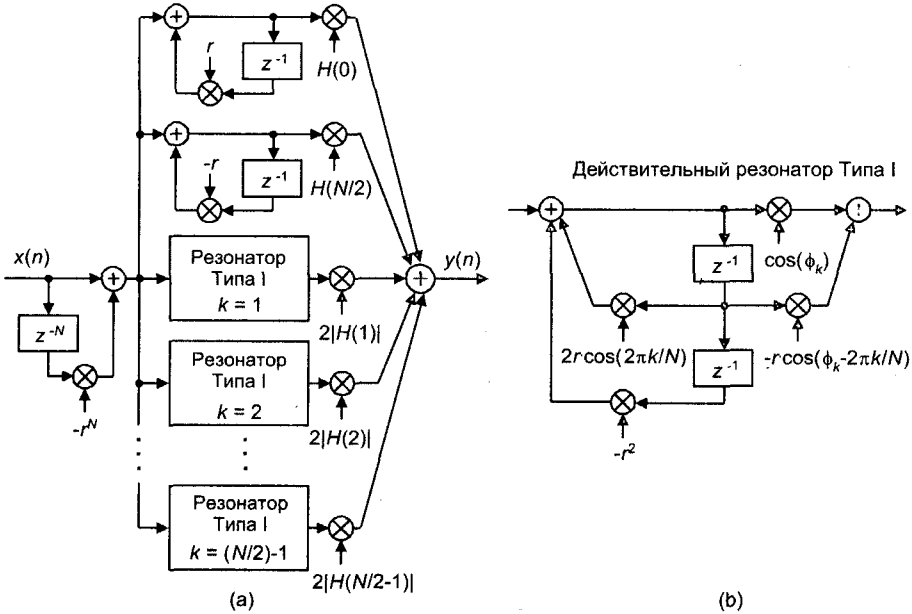


Рис. 7.16. Действительный ФОЧВ Типа I с гарантированной устойчивостью при четном N: (a) структура; (b) резонатор с действительными коэффициентами

Конечно, для ФОЧВ нижних частот секция, соответствующая коэффициенту $H(N/2)$ на рисунке 7.16, не будет реализована, а для полосовых фильтров не будут реализованы секции, соответствующие коэффициентам $H(0)$ и $H(N/2)$. Характеристики односекционного действительного ФОЧВ Типа I при $N = 32$, $k = 3$, $H(3) = 1$, $r = 0.99999$ и $\phi_3 = 0$ приведены на рисунке 7.17.

Другая версия ФОЧВ Типа I с упрощенной структурой резонатора может быть получена путем установки всех ϕ_k в ноль и перемещения множителя 2 внутрь резонаторов. Затем мы учитываем чередующиеся знаки при окончательном суммировании, как показано на рисунке 7.18, чтобы получить линейную ФЧХ, точно так же, как мы делали это при построении многосекционного комплексного ФОЧВ с линейной ФЧХ на рисунке 7.13 (a), т. е. мы прибавляем выходные

отсчеты резонаторов с четным k и вычитаем выходные отсчеты резонаторов с нечетным k. Символ "±" на рисунке 7.18 (а) предупреждает нас о том, что при четном N значение $k = (N/2)-1$ может быть как нечетным, так и четным.

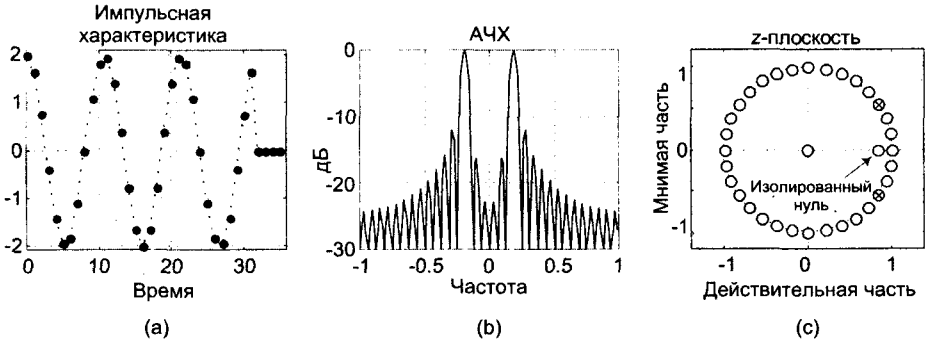


Рис. 7.17. Характеристики односекционного ФОЧВ Типа I при $N = 32$, $k = 3$, $H(3) = 1$, $r = 0.99999$ и $\phi_3 = 0$

Если ненулевые коэффициенты $|H(k)|$ равны единице, этот ФОЧВ Типа II требует только трех умножений на выходной отсчет секции. Если умножение на 2 в резонаторе может быть реализовано аппаратурным сдвигом влево, то требуется всего два умножения на выходной отсчет. Передаточная функция этого ФОЧВ с действительными коэффициентами имеет вид

$$H_{Type\text{-}II}(z) = \tag{7-21}$$

$$= (1-r^N z^{-N})\{|H(0)|/(1-rz^{-1}) + |H(N/2)|/(1+rz^{-1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N/2-1}(-1)^k|H(k)|[2-2r\cos(2\pi k/N)\,z^{-1}]/[1-2r\cos(2\pi k/N)\,z^{-1}+r^2z^{-2}]\}.$$

Ни ФОЧВ Типа I, ни ФОЧВ Типа II не имеют линейной ФЧХ. В то время как нелинейность ФЧХ относительно невелика, в многосекционных структурах групповая задержка в полосе пропускания может иметь флуктуации, размах которых (от пика до пика) может достигать двух периодов дискретизации ($2/f_s$). Такая нелинейность ФЧХ неизбежна, поскольку эти ФОЧВ имеют изолированные нули, расположенные в точках $z = r\cos(2\pi k/N)$, когда $\phi_k = 0$, как показано на рисунке 7.17 (с). Поскольку изолированные нули внутри единичного круга не имеют обратных нулей, расположенных за пределами единичного круга в точках $z = 1/[r\cos(2\pi k/N)]$, к сожалению, это приводит к нелинейности ФЧХ.

Несмотря на то, что ФОЧВ Типа I чаще всего описываются в литературе по ФОЧВ, их неспособность обеспечить в точности линейную ФЧХ не подвергалась достаточному анализу. В следующем разделе мы предпринимаем шаги для получения линейной ФЧХ путем смещения изолированного нуля.

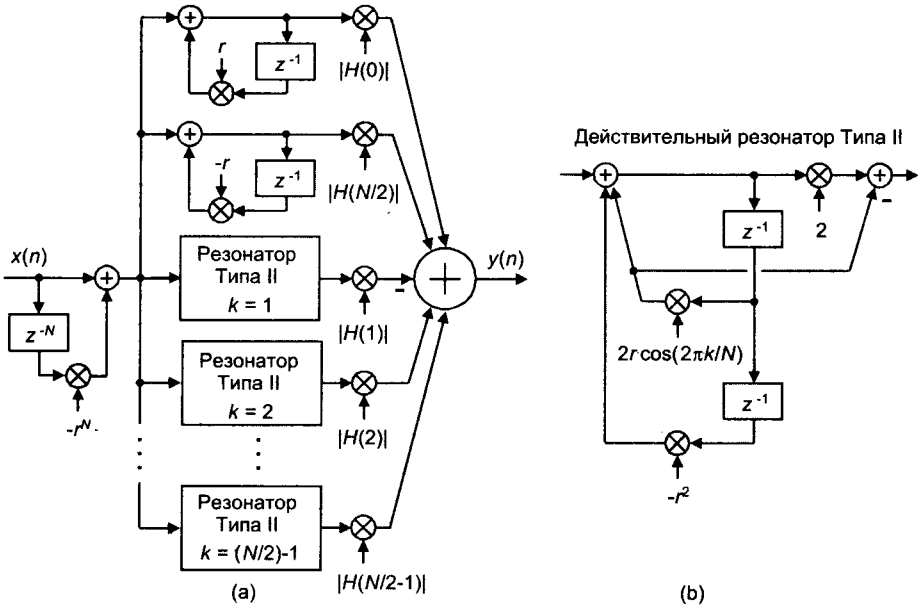


Рис. 7.18. Действительный ФОЧВ Типа II с четным N: (a) структура; (b) реализация резонатора с действительными коэффициентами

7.1.5. Действительные многосекционные ФОЧВ с линейной ФЧХ

Мы можем получить линейную ФЧХ, модифицировав коэффициенты прямой связи резонатора действительного ФОЧВ Типа I, показанного на рисунке 7.16 (b), так, чтобы сдвинуть изолированный ноль в точку, в которой находится ноль гребенчатого фильтра $z = r$. Мы достигаем этого, присвоив $\phi_k = \pi k/N$. Числитель передаточной функции одной секции действительного ФОЧВ, согласно (7-20), равен $\cos(\phi_k) - r\cos(\phi_k - 2\pi k/N)\, z^{-1}$. Если мы приравняем это выражение нулю и положим $\phi_k = \pi k/N$, то мы найдем позицию сдвинутого нуля z_o:

$$\cos(\phi_k) - r\cos(\phi_k - 2\pi k/N)z_o^{-1} = \cos(\pi k/N) - r\cos(\pi k/N - 2\pi k/N)z_o^{-1} = 0$$

или

$$z_o = r\cos(\pi k/N)/\cos(\pi k/N) = r\,.$$

Подстановка $\pi k/N$ вместо ϕ_k в (7-20) дает передаточную функцию действительного ФОЧВ Типа III с линейной ФЧХ в форме

$$H_{Type\text{-}III}(z) = (1 - r^N z^{-N})\{|H(0)|/(1 - rz^{-1}) + \\ + \sum_{k=1}^{N/2-1} 2(-1)^k |H(k)| \cos(\pi k/N)(1 - rz^{-1})/[1 - 2r\cos(2\pi k/N)z^{-1} + r^2 z^{-2}]\}. \quad (7\text{-}22)$$

Реализация ФОЧВ Типа III с линейной ФЧХ показана на рисунке 7.19 и требует четыре умножения на выходной отсчет секции.

Обратите внимание, секция $H(N/2)$, $(f_s/2)$ на рисунке 7.19 (а) отсутствует. Мы объясняем это следующим образом: секции ФОЧВ Типов I, II и III с четным N имеют импульсные характеристики, содержащие N ненулевых отсчетов. При этом импульсная характеристика секции $k = N/2$, состоящая из четного количества чередующихся положительных и отрицательных элементов, несимметрична. Эта асимметрия исказит линейную ФЧХ, если будет включена секция $k = N/2$. Следовательно, как и в случае нерекурсивных КИХ-фильтров четной длины, действительные ФОЧВ Типов I, II и III при четном N нельзя использовать для реализации ФВЧ с линейной ФЧХ.

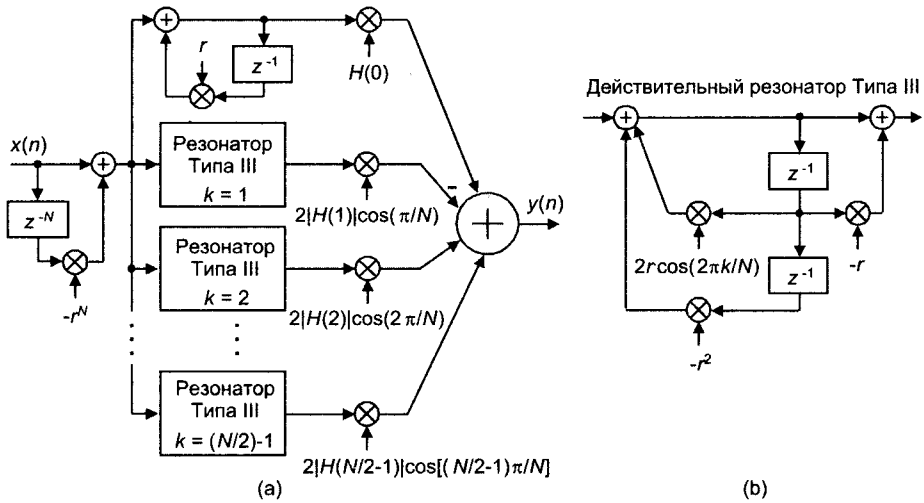


Рис. 7.19. Действительный ФОЧВ Типа III с линейной ФЧХ при четном N: (а) структура; (b) реализация резонатора с действительными коэффициентами

На рисунке 7.20 показаны частотные характеристики восьмисекционного ФОЧВ Типа III при $N=32$, в котором реализованы секции $0 \le k \le 7$. Рисунок 7.20 (с) позволяет сравнить групповую задержку ФОЧВ Типа III и эквивалентного восьмисекционного ФОЧВ Типа II. Результат сравнения показывает значительное улучшение ФЧХ для ФОЧВ типа III, который имеет постоянную групповую задержку в полосе пропускания, равную $(N-1)/2$ отсчетов.

7.1.6. Откуда мы вышли и куда идем

Мы рассмотрели структуру и характеристики комплексного ФОЧВ, каскады комплексного резонатора которого имеют полюсы, совпадающие с нулями гребенчатого фильтра, в результате чего получается рекурсивный КИХ-фильтр. Далее, для гарантированной устойчивости фильтра мы смещали полюсы и нули внутрь единичного круга. Мы изучили действительный ФОЧВ Типа I с гарантированной устойчивостью при четном N, имеющий резонатор с парой комплексно-сопряженных полюсов, приводящий к ФОЧВ с действительными коэффициентами. Далее мы модифицировали структуру действительного ФОЧВ Типа I, получив более эффективную с вычислительной точки зрения, но имеющую слегка нелинейную

ФЧХ структуру действительного ФОЧВ Типа II. Наконец, мы модифицировали коэффициенты действительного ФОЧВ Типа I и добавили после резонаторов умножение на коэффициенты, что позволило получить действительный ФОЧВ Типа III с линейной ФЧХ. В процессе получения этих структур мы пришли к выводу, что действительные ФОЧВ Типов I, II и III с четным N нельзя использовать для реализации фильтров верхних частот с линейной ФЧХ.

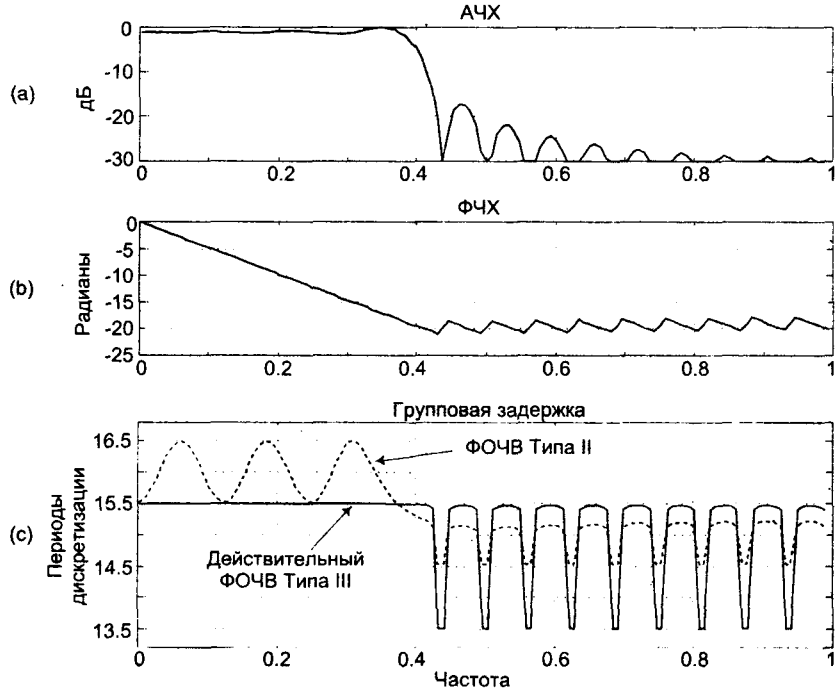


Рис. 7.20. Интерполированная частотная характеристика ФОЧВ Типа III, содержащего восемь секций, при $N = 32$: (a) АЧХ; b) ФЧХ; (c) групповая задержка в сравнении с групповой задержкой эквивалентного ФОЧВ Типа II

В оставшейся части этого раздела мы предлагаем структуру резонатора, которая обеспечивает лучшие характеристики, чем резонаторы Типов I, II, III. Затем мы познакомимся с использованием ненулевых секций переходных полос для улучшения пульсаций в полосе пропускания и подавления в полосе задерживания, после чего обсудим ряд моментов, относящихся к моделированию и проектированию ФОЧВ. Мы сравним характеристики реальных ФОЧВ с характеристиками эквивалентных нерекурсивных КИХ-фильтров, рассчитанных методом Паркса-Маклеллана, с N ответвлениями. Наконец, мы познакомимся с подробной процедурой проектирования ФОЧВ.

7.1.7. Эффективный действительный ФОЧВ

Существует множество резонаторов с действительными коэффициентами, которые можно использовать в ФОЧВ, но для нас особенно интересен резонатор

Типа IV, показанный на рисунке 7.21 (а). Этот резонатор заслуживает внимания потому, что он:

- гарантированно устойчив,
- обладает высоко линейной ФЧХ,
- использует действительные коэффициенты,
- эффективен с точки зрения количества операций,
- может реализовать КИХ ФВЧ,
- дает лучшее подавление в полосе задерживания, чем ФОЧВ типов I, II и III.

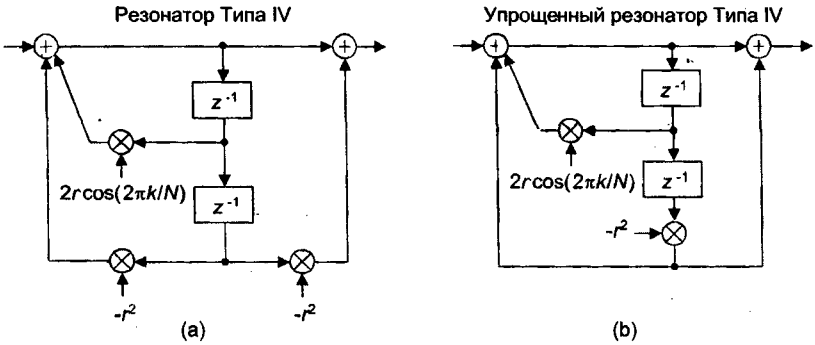


Рис. 7.21. Резонатор Типа IV: (а) исходная структура; (b) упрощенная версия

Отныне и навеки Тип IV будет нашим избранным типом ФОЧВ.

Последовательное включение резонаторов Типа IV после гребенчатого фильтра дает действительный ФОЧВ Типа IV с передаточной функцией

$$H_{Type\text{-}IV}(z) = (1 - r^N z^{-N}) \sum_{k=0}^{N/2} (-1)^k |H(k)| (1 - r^2 z^{-2}) / \\ / [1 - 2r\cos(2\pi k/N)\, z^{-1} + r^2 z^{-2}] \,, \tag{7-23}$$

где N — четное. (Заметьте, что при нечетном N величина $k = N/2$ не является целым числом, и член $|H(N/2)|$ не существует.) Как показано в разделе 6 приложения G, частотная характеристика ФОЧВ Типа IV имеет вид

$$H_{Type\text{-}IV}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2} \sum_{k=0}^{N/2} (-1)^k |H(k)| [\cos(\omega N/2 - \omega) - \cos(\omega N/2 + \omega)] / \\ / [\cos(2\pi k/N) - \cos(\omega)] \,, \tag{7-24}$$

При четном N частотная характеристика и ее модуль на частоте резонанса для отдельной секции ФОЧВ Типа IV определяются выражениями

$$H_{Type\text{-}IV}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2} [\cos(\omega N/2 - \omega) - \cos(\omega N/2 + \omega)] / \\ / [\cos(2\pi k/N) - \cos(\omega)] \,, \tag{7-25}$$

и

$$|H_{Type\text{-}IV}(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = N,\ k = 1, 2, \ldots, (N/2)-1. \qquad (7\text{-}26)$$

Модули этой частотной характеристики при $k = 0$ (постоянная составляющая) и $k = (N/2)(f_s/2)$ равны

$$|H_{Type\text{-}IV}(e^{j\omega})|_{\omega=0} = |H_{Type\text{-}IV}(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 2N. \qquad (7\text{-}27)$$

Для уменьшения количества умножений при реализации резонатора кажется естественным объединить два умножителя на коэффициент $-r^2$ на рисунке 7.21 (a), что упростит резонатор Типа IV, как показано на рисунке 7.21 (b). Однако для уменьшения количества как умножений, так и сложений следует реализовать множитель $(1-r^2z^{-2})$ в числителе (7-23) как гребенчатый фильтр второго порядка, что и показано на рисунке 7.22 (a)[5]. При этом резонатор Типа IV преобразуется в форму, показанную на рисунке 7.22 (b). Множители $|H(0)|/2$ и $|H(N/2)|/2$ компенсируют коэффициент передачи резонатора Типа IV, равный $2N$ согласно (7-27).

Символы "±" на рисунке 7.22 (a) снова напоминают о том, что при четном N значение $k = N/2$ может быть четным или нечетным. Этот ФОЧВ обладает одним полезным свойством, а именно: длина его импульсной характеристики равна $N+1$ отсчетов. Следовательно, в отличие от ФОЧВ Типов I, II и III ФОЧВ Типа IV с четным N имеет симметричную импульсную характеристику секции $k = N/2$ (чередующиеся ±1) и может быть использован для построения ФВЧ с линейной ФЧХ. При нечетном N секция $k = N/2$ на рисунке 7.22 отсутствует, и передаточная функция ФОЧВ Типа IV при нечетном N идентична (7-23) при верхнем пределе суммирования $(N-1)/2$ вместо $N/2$.

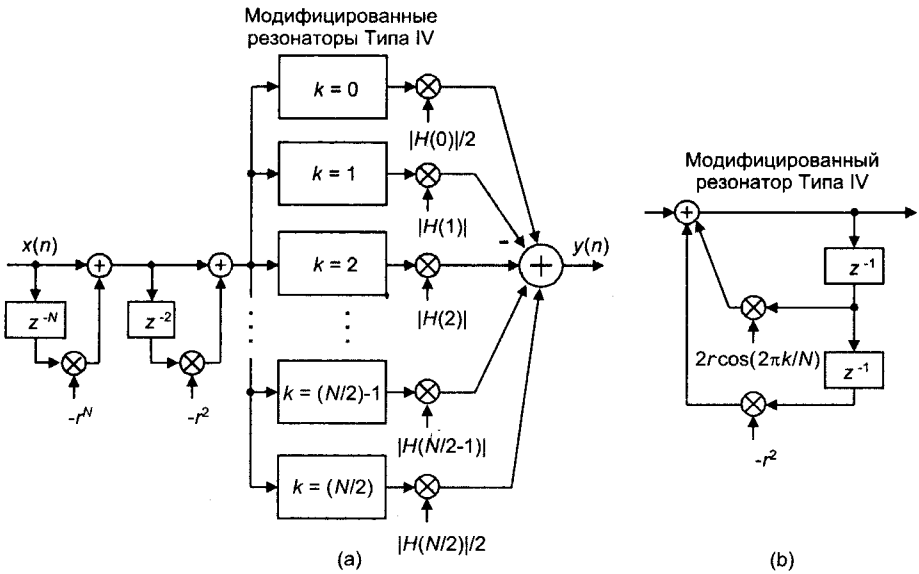


Рис. 7.22. Действительный ФОЧВ Типа IV при четном N: (a) структура; (b) модифицированный резонатор

Мы уже прошли долгий путь. В таблице 7.1 подводится итог тому, что мы узнали о действительных ФОЧВ. В таблице приводятся средняя групповая задержка в полосе пропускания, измеренная в периодах дискретизации, количество умноже-

ний и сложений на выходной отсчет для одной секции ФОЧВ и несколько замечаний о характеристиках разных действительных ФОЧВ. Коэффициенты передачи секций на их резонансных частотах в предположении, что требуемые коэффициенты $|H(k)|$ равны единице, равны N для всех четырех действительных ФОЧВ.

Таблица 7.1. Сводка свойств действительных ФОЧВ с четным N

Тип действительного ФОЧВ	Групповая задержка	Количество умножений	Количество сложений	Замечания
I (рисунок 7.16)	$N/2$	5	3	ФОЧВ с действительными коэффициентами. ФЧХ примерно линейная
II (рисунок 7.18)	$N/2$	3	3	Модифицированная и более эффективная версия ФОЧВ типа I. ФЧХ примерно линейная. Одно из умножений резонатора можно заменить двоичным сдвигом влево
III (рисунок 7.19)	$(N+1)/2$	4	3	Очень линейная ФЧХ. Не может использоваться для построения ФВЧ с линейной ФЧХ
IV (рисунок 7.22)	$N/2$	2	2	Очень линейная ФЧХ. Улучшенное подавление в полосе задерживания. Может использоваться для реализации фильтров нижних и верхних частот, а также полосовых

7.1.8. Моделирование ФОЧВ

Мы вывели несколько разных выражений для частотной характеристики $H(e^{j\omega})$ не столько для того, чтобы использовать их для моделирования поведения ФОЧВ, сколько для того, чтобы изучить их и помочь построить структуры ФОЧВ. Напри-

мер, анализ свойств $H_{Type\text{-}IV}(e^{j\omega})$ привел нас к использованию множителя 1/2 в структуре ФОЧВ Типа IV.

При моделировании ФОЧВ, к счастью, нет необходимости писать программу вычисления частотных характеристик с использованием разных выражений для $H(e^{j\omega})$, приведенных здесь. Достаточно написать программу вычисления импульсной характеристики моделируемого ФОЧВ, дополнить ее достаточным количеством нулей, чтобы длина расширенной последовательности была в 10-20 раз больше длины исходной, вычислить ДПФ дополненной последовательности и построить графики полученных интерполированных АЧХ и ФЧХ. Конечно, если длина дополненной последовательности равна целой степени двойки, вы сможете использовать для вычисления частотных характеристик эффективный алгоритм БПФ. С другой стороны, многие коммерческие пакеты программ имеют встроенные функции вычисления частотных характеристик только по коэффициентам передаточных функций.

7.1.9. Улучшение характеристик с помощью коэффициентов переходной полосы

Мы можем повысить подавление в полосе задерживания ФОЧВ, если тщательно определим значения отсчетов АЧХ $|H(k)|$ в переходной полосе, между полосами пропускания и задерживания. Например, рассмотрим ФОЧВ НЧ Типа IV, имеющий семь секций с единичным усилением при $N = 32$, требуемая характеристика которого показана на рисунке 7.23 (a), а реальная АЧХ — на рисунке 7.23(b).

Задание переходного отсчета характеристики, коэффициента T_1, значение которого лежит в пределах от 0 до 1, как на рисунке 7.23 (c), уменьшает разрыв при переходе требуемой характеристики от полосы пропускания к полосе задерживания. Задание $T_1 = 0.389$ приводит к уменьшению пульсаций АЧХ в полосе пропускания и улучшает подавление боковых лепестков в полосе задерживания, как показано на рисунке 7.23 (d). Это улучшение достигается ценой появления дополнительной секции ФОЧВ и расширения переходной полосы.

Значение $T_1 = 0.389$ выбрано не произвольно и не по каким-то магическим правилам. Измерение максимального уровня боковых лепестков в полосе задерживания для разных значений $0 \le T_1 \le 1$ показало наличие оптимального значения для T_1. На рисунке 7.24 показано, что максимальный уровень боковых лепестков минимизируется, когда $T_1 = 0.389$. Минимальный уровень бокового лепестка – 46 дБ (при $T_1 = 0.389$) соответствует высоте максимального бокового лепестка в полосе задерживания на рисунке 7.23 (d). Этот общепризнанный метод использования коэффициентов в переходной полосе для уменьшения пульсаций АЧХ в полосе пропускания и минимизации боковых лепестков в полосе задерживания применим также к полосовым ФОЧВ, когда переходные отсчеты размещаются непосредственно перед и сразу за единичными отсчетами полосы пропускания.

Еще большее подавление боковых лепестков возможно при использовании двух переходных коэффициентов, T_1 и T_2, таких что $0 \le T_2 \le T_1 \le 1$. (Примечание: в случае ФНЧ, если T_1 есть отсчет $|H(k)|$, то T_2 есть отсчет $|H(k+1)|$.) Каждый дополнительный переходной коэффициент улучшает подавление в полосе задерживания примерно на 25 дБ. Однако поиск оптимальных значений коэффициентов T представляет собой серьезную задачу. Значения оптимальных коэффициентов пере-

ходной полосы зависят от количества секций ФОЧВ с единичными коэффициентами, от значения N и количества используемых коэффициентов. К сожалению, замкнутой формулы для вычисления оптимальных значений переходных коэффициентов не существует, мы вынуждены искать их эмпирически.

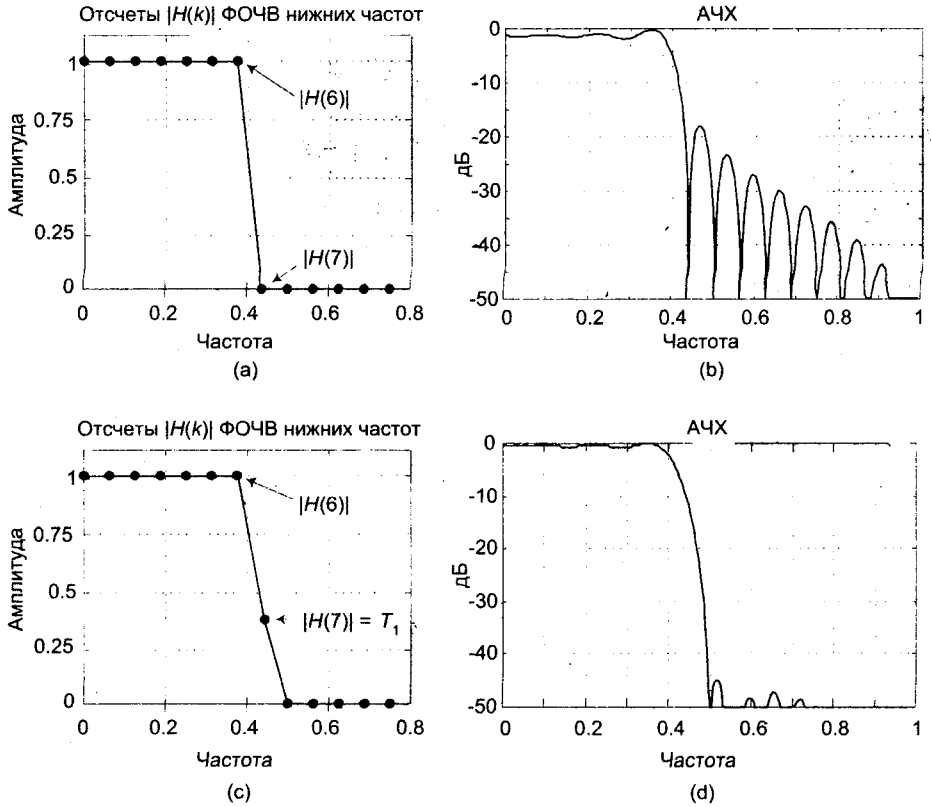


Рис. 7.23. ФОЧВ Типа IV с $N = 32$: (a) требуемая АЧХ; (b) реальная характеристика; (c) использование одного переходного отсчета; (d) улучшенное подавление в полосе задерживания

Если используется один коэффициент (T_1), поиск его оптимального значения можно выполнить с помощью одномерного поиска. Для двух коэффициентов поиск становится двумерным и т. д. К счастью, в литературе имеются описания метода поиска на основе линейной алгебры [1, 6-8], а коммерческие математические пакеты программ содержат встроенные функции оптимизации, облегчающие такой трудоемкий поиск. Для ФОЧВ Типа I/II опубликованы таблицы оптимальных коэффициентов переходной полосы для разных N, при разном количестве секций ФОЧВ [1], подмножество этих таблиц приведено в качестве приложения к учебнику [2]. Для более качественных ФОЧВ Типа IV таблицы оптимальных коэффициентов подготовлены автором этой книги и приведены в приложении Н. Приняв к сведению эти обнадеживающие новости, мы скоро рассмотрим пример проектирования реального ФОЧВ, который позволит оценить преимущества ФОЧВ.

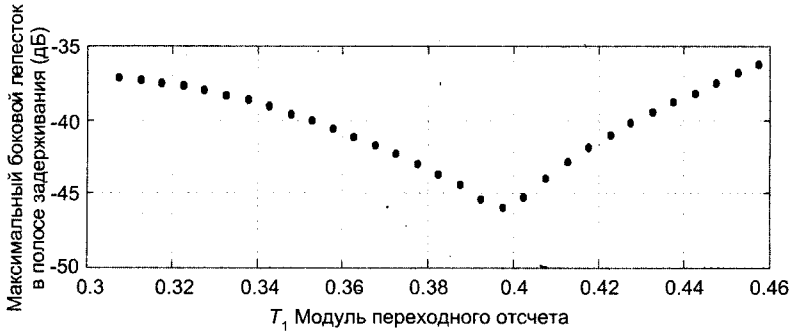


Рис. 7.24. Максимальный уровень бокового лепестка как функция значения коэффициента переходной полосы для действительного ФОЧВ Типа IV с семью секциями при $N = 32$

7.1.10. Другие структуры ФОЧВ

Если коэффициент прямой связи гребенчатого фильтра на рисунке 7.22 равен $-r^N$ (N — четное), N нулей его передаточной функции распределены равномерно на окружности, радиус которой меньше единицы, как показано на рисунках 7.4 (c) и 7.25 (a), так что ноль $k = 1$ имеет аргумент, равный $2\pi/N$ радиан. В этом случае при нечетном N нули гребенки распределены так, как показано на рисунке 7.25 (b). Возможна другая ситуация, когда коэффициент прямой связи гребенчатого фильтра равен $+r^N$. В этом случае нули при четном N располагаются на окружности в направлении, обратном ходу часовой стрелки, с шагом π/N радиан, как показано на рисунке 7.25 (c), где ноль $k = 1$ имеет аргумент $3\pi/N$ радиан [5]. Нули $k = 0$ показаны на рисунках черными точками.

Структура ФОЧВ во втором случае идентична структуре ФОЧВ в первом случае. Однако во втором случае коэффициенты резонаторов должны быть изменены так, чтобы полюсы повернулись на π/N радиан и сохранилось взаимное уничтожение полюса и нуля. Во втором случае передаточная функция ФОЧВ Типа IV при четном N имеет вид

$$H_{Case\ II,\ Type\text{-}IV}(z) = \tag{7-28}$$

$$= (1+r^N z^{-N})\sum_{k=0}^{N/2}(-1)^k|H(k)|(1-r^2z^{-2})/\{1-2r\cos[2\pi(k+1/2)/N]\,z^{-1}+r^2z^{-2}\}.$$

Поскольку во втором случае ФОЧВ не может иметь ноль или полюс в точке $z = 1$, эти фильтры нельзя использовать для построения ФНЧ. В таблице 7.2 перечислены возможности различных ФОЧВ Типа IV для первого и второго случаев.

Применение ФОЧВ во втором случае ограничивается невозможностью реализовать ФНЧ, но смещение центральных частот резонаторов дает дополнительные возможности задания частот среза полосовых фильтров и фильтров верхних частот. В оставшейся части материала мы будем рассматривать только ФОЧВ Типа IV для первого случая.

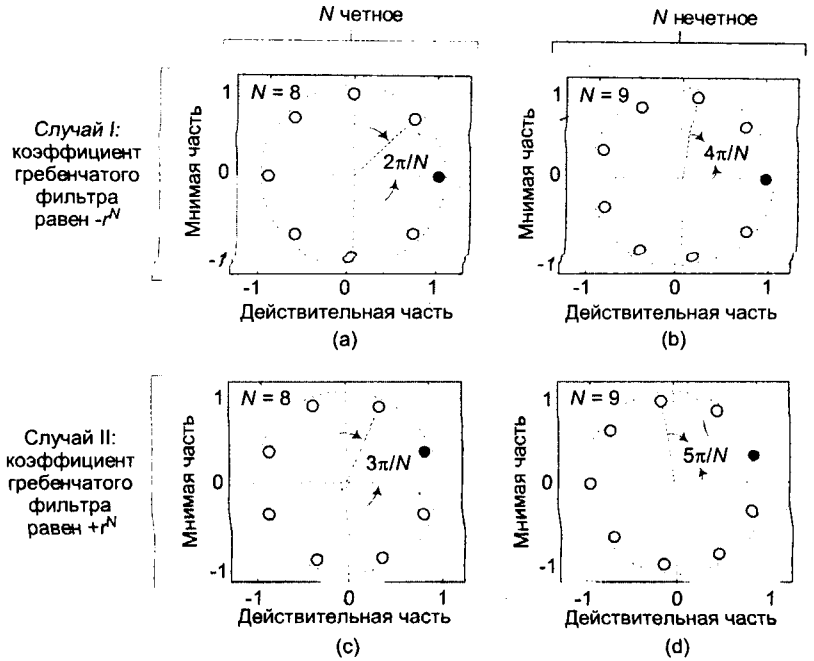


Рис. 7.25. Четыре возможных варианта расположения нулей гребенчатого фильтра вблизи единичной окружности

7.1.11. Достоинства ФОЧВ

В годы становления теории КИХ-фильтров (начало 1970-х) была распространена программа проектирования нерекурсивных КИХ-фильтров, использующая метод Паркса-Маклеллана (Parks-McClellan — PM) [9]. Этот метод проектирования фильтров давал полный контроль над неравномерностью АЧХ в полосе пропускания, подавлением в полосе задерживания и шириной переходной полосы. (КИХ-фильтры, рассчитанные этим методом, часто называют *оптимальными КИХ-фильтрами, фильтрами Ремеза, фильтрами чебышевской аппроксимации, равноволновыми фильтрами.*) Многие из ранних описаний метода PM содержат графическое сравнение различных методов проектирования КИХ ФНЧ, подобное приведенному на рисунке 7.26 [7, 10-11]. На этом рисунке нормированная (по отношению к длине импульсной характеристики N и частоте дискретизации f_s) ширина переходной полосы для того или иного фильтра построена как функция минимального подавления в полосе задерживания. (Размах пульсаций АЧХ в полосе пропускания в дБ приводится в качестве параметра графиков.)

Поскольку нормированная мера ширины переходной полосы D на рисунке 7.26 почти не зависит от N, этот график рассматривается как корректное сравнение трех методов проектирования КИХ-фильтров. При заданных уровне пульсаций в полосе пропускания и подавлении в полосе задерживания КИХ-фильтр, рассчитанный методом PM, может иметь наименьшую ширину переходной полосы и, следовательно, обладать наилучшими характеристиками. Широкое распространение графиков, приведенных на рисунке 7.26, вполне оправданно настроило раз-

работчиков фильтров в пользу метода РМ. (Во время одной из дискуссий по поводу рисунка 7.26 один автор безапелляционно заявил «Чем меньше D, тем лучше фильтр.» [10]) Обладающий гибкостью, улучшенными характеристиками и простой в использовании метод РМ быстро стал господствующим методом проектирования КИХ-фильтров. Вследствие этого в 1970-е годы реализации ФОЧВ утратили популярность до такой степени, что сегодня они редко упоминаются в лекциях и учебниках.

Таблица 7.2. Режимы работы ФОЧВ Типа IV

ФОЧВ Типа IV	НЧ	Полосовой	ВЧ
Первый случай, N четное	Да	Да	Да
Первый случай, N нечетное	Да	Да	Нет
Второй случай, N четное	Нет	Да	Нет
Второй случай, N нечетное	Нет	Да	Да

Рис. 7.26. Сравнение методов проектирования КИХ-фильтров с помощью окна Кайзера, на основе частотной выборки и Паркса-Маклеллана

Однако с точки зрения вычислительной нагрузки рисунок 7.26 похож на современный купальник: то, что он показывает, важно, а то, что он не показывает, жизненно необходимо. Это сравнение методов проектирования не принимает в расчет те случаи, когда и фильтры на основе частотной выборки, и фильтры, рассчитанные методом РМ, удовлетворяют требованиям к их характеристикам, но реализации на основе частотной выборки оказываются более экономичными с точки зрения объема вычислений. Следующий пример проектирования КИХ-

фильтра демонстрирует это положение и показывает, почему следует включить ФОЧВ в наш набор инструментов проектирования КИХ-фильтров.

7.1.12. Пример ФОЧВ Типа IV

Рассмотрим проектирование КИХ-фильтра нижних частот с линейной ФЧХ, частота среза которого равна $0.05f_s$. Полоса задерживания должна начинаться с частоты $0.095f_s$, неравномерность АЧХ в полосе пропускания не должна превышать 0.3 дБ от пика до пика и минимальное подавление в полосе задерживания должно быть не менее 65 дБ. Если мы спроектируем ФОЧВ Типа IV при $N = 62$ и $r = 0.99999$, его частотная характеристика будет удовлетворять заданным требованиям и иметь форму, показанную сплошной линией на рисунке 7.27 (а).

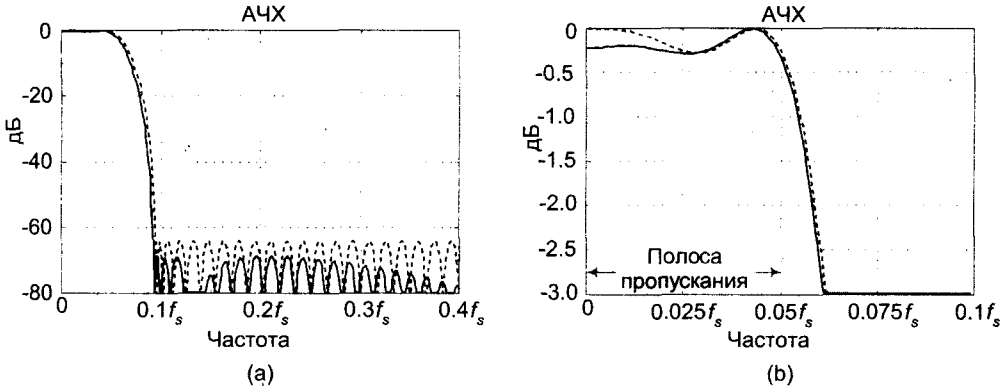


Рис. 7.27. Шестисекционный ФОЧВ Типа IV с $N = 62$ (сплошная линия) против фильтра с 60 ответвлениями, рассчитанного методом РМ (штриховая линия): (a) АЧХ; (b) полоса пропускания в увеличенном масштабе

Для этого ФОЧВ были использованы два отсчета в переходной полосе: $|H(4)| = T_1 = 0.589921$ и $|H(5)| = T_2 = 0.104964$. Штриховой линией на рисунке 7.27 (а) показана АЧХ нерекурсивного КИХ-фильтра с 60 ответвлениями, рассчитанного методом РМ. Оба фильтра удовлетворяют требованиям и имеют линейную ФЧХ. Структура ФОЧВ Типа IV приведена на рисунке 7.28. Фильтр, рассчитанный методом РМ, реализуется в виде *сложенной* структуры, использующей симметрию его импульсной характеристики для двукратного уменьшения количества умножителей, вследствие чего для его реализации требуется 30 умножений и 59 сложений на выходной отсчет. Мы видим уменьшение количества операций в случае ФОЧВ Типа IV, который требует выполнения только 17 умножений и 19 сложений на один выходной отсчет. (Заметим, что коэффициенты ФОЧВ $H(k)$ равны нулю при $6 \le k \le 31$.)

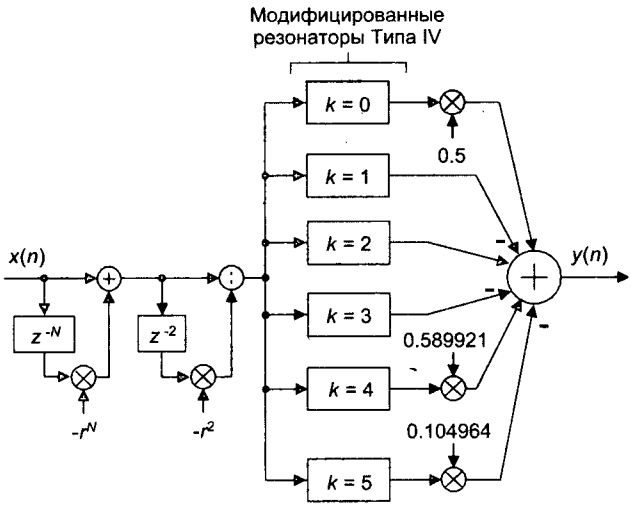


Рис. 7.28. Структура шестисекционного ФОЧВ Типа IV нижних частот с $N = 62$ и двумя коэффициентами переходной полосы

7.1.13. Когда следует использовать ФОЧВ

В этом разделе мы ответим на жгучий вопрос: Когда выгоднее использовать ФОЧВ Типа IV вместо КИХ-фильтра, рассчитанного методом РМ? Вычислительная сложность КИХ-фильтра, рассчитанного методом РМ, прямо связана с длиной его импульсной характеристики, которая в свою очередь обратно пропорциональна ширине переходной полосы фильтра. Чем уже переходная полоса, тем больше операций необходимо выполнить на один выходной отсчет фильтра. С другой стороны, количество операций для ФОЧВ примерно пропорционально ширине полосы пропускания. Чем больше требуется секций ФОЧВ для расширения полосы пропускания и чем больше используется коэффициентов переходной полосы, тем больше объем вычислений при реализации фильтра. Таким образом, при сравнении вычислительной сложности ФОЧВ и фильтров, рассчитанных методом РМ, следует рассматривать как ширину полосы пропускания, так и ширину переходной полосы.

На рисунке 7.29 приведено сравнение ФОЧВ Типа IV с четным N и нерекурсивных КИХ ФНЧ, рассчитанных методом РМ, с точки зрения объема вычислений. Графики представляют требуемые параметры фильтра, когда ФОЧВ Типа IV и фильтр, рассчитанный методом РМ, имеют примерно одинаковое количество операций на выходной отсчет. (Значения ширины полос, отложенные по осям графиков, нормированы относительно частоты дискретизации, так что, например, значение 0.1 соответствует $f_s/10$.) Если комбинация требуемых ширины переходной полосы и ширины полосы пропускания задает точку, лежащую ниже кривых на рисунке 7.29, то ФОЧВ Типа IV более эффективен, чем фильтр, рассчитанные методом РМ. Графики на рисунке 7.29 (а) построены с учетом только операций умножения. Для реализаций фильтров, в которых для умножения и

сложения требуется одинаковое время, на рисунке 7.29 (b) приведены графики с учетом количества обеих операций. Отдельная черная точка на рисунке соответствует рассмотренному выше примеру ФОЧВ Типа IV. (Пример расчета ФОЧВ Типа IV с использованием кривых рисунка 7.29 будет приведен ниже.)

При построении графиков на рисунке 7.29 предполагалось, что ФОЧВ Типа IV с четным N имеет коэффициент затухания $r = 0.99999$, а масштабирующий множитель $1/N$ не используется. Реализация фильтра, рассчитанного методом РМ, использованная при сравнении, представляет собой сложенную структуру с M ответвлениями, применимую в случае симметричной импульсной характеристики и требующую $M/2$ умножений и $M-1$ сложение. Для расчета фильтра методом РМ задавались требования, соответствующие типовому ФОЧВ Типа IV (с коэффициентами в формате с плавающей точкой), приведенные в таблице 7.3.

Резонаторы Типа IV имеют коэффициент усиления, равный N, следовательно, коэффициент усиления ФОЧВ на рисунке 7.28 равен N. Для реализации ФОЧВ с использованием чисел в формате с плавающей запятой это усиление может не представлять серьезной проблемы. При реализации с фиксированной запятой усиление в N раз может вызвать ошибки переполнения, поэтому понадобится уменьшить коэффициент усиления с помощью масштабного множителя $1/N$. В литературе иногда масштабирующие множители $1/N$ показывают как один умножитель, включенные перед гребенчатым фильтром [2, 12]. Такая реализация может привести к недопустимому ухудшению отношения сигнал/шум квантования. Более практичным представляется размещение масштабирующего множителя $1/N$ на выходе каждой секции ФОЧВ, перед окончательным суммированием, как показано на рисунке 7.1 (b). Таким образом, выход каждого резонатора умножается на неединичный коэффициент, что повышает количество требуемых операций. Сравнение ФОЧВ Типа IV с четным N и фильтров, рассчитанных методом РМ, для этой ситуации приведено на рисунке 7.30.

Конечно, если N равно целой степени двойки, некоторые аппаратурные реализации могут выполнять масштабирование $1/N$ в виде аппаратурного сдвига числа вправо, делая, таким образом, умножитель ненужным. В этой ситуации применимо сравнение фильтров по вычислительной сложности, приведенное на рисунке 7.29.

Таблица 7.3. Типовые свойства ФОЧВ Типа IV при четном N

Параметр	1-й коэффициент	2-й коэффициент	3-й коэффициент
Размах пульсаций в полосе пропускания (от пика до пика), дБ	0.7	0.35	0.16
Минимальное подавление в полосе задерживания, дБ	−45	−68	−95

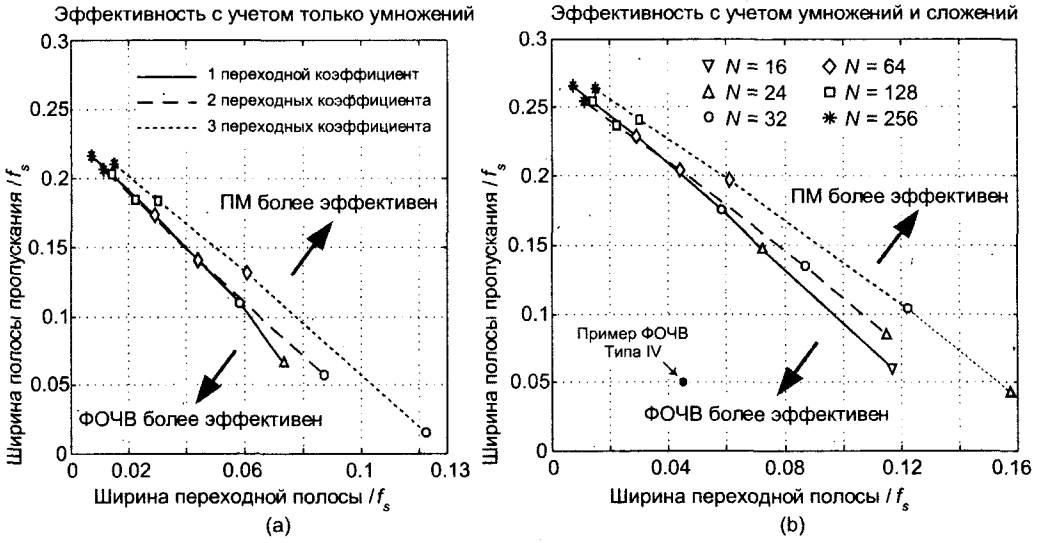


Рис. 7.29. Сравнение ФОЧВ Типа IV с четным N и нерекурсивных КИХ-фильтров, рассчитанных методом РМ, по количеству операций: (a) с учетом только умножений; (b) с учетом и умножений, и сложений. (Масштабирующий коэффициент $1/N$ не учитывается.)

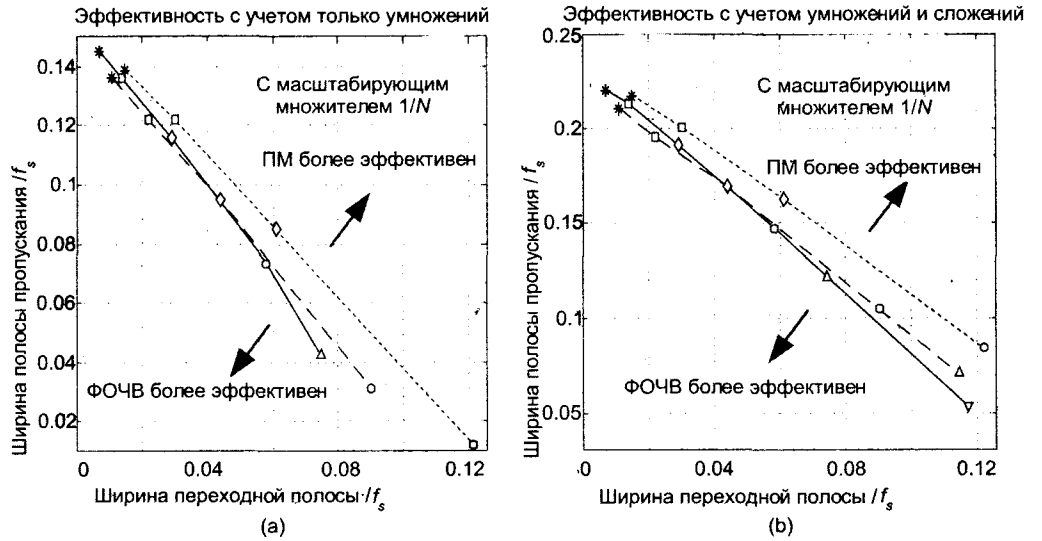


Рис. 7.30. Сравнение ФОЧВ Типа IV с четным N и нерекурсивных КИХ-фильтров, рассчитанных методом РМ, по количеству операций с учетом масштабирующего множителя $1/N$ на выходах резонаторов: (a) с учетом только умножений; (b) с учетом и умножений, и сложений

Следует заметить, что программируемые ЦПОС не могут использовать преимущества сложенной структуры реализации КИХ-фильтров, которую мы использовали для сравнения на рисунках 7.29 и 7.30. В этом случае КИХ-фильтр с M

ответвлениями, реализуемый прямой сверткой, имеет тот недостаток, что он должен выполнять все M умножений на выходной отсчет. Однако ЦПОС имеют команды циклов без накладных расходов и однотактные команды умножения с накоплением (МАС), что делает их более эффективными при реализации КИХ-фильтров с помощью прямой свертки, чем при реализации рекурсивных структур ФОЧВ. Таким образом, недостаток реализаций на основе ЦПОС, требующих больше операций, и преимущество в скорости выполнения этих операций компенсируют друг друга. Имея это ввиду, мы можем пользоваться рисунками 7.29 и 7.30 при выборе варианта реализации фильтра с использованием ЦПОС.

Наконец, рассматривая последние два рисунка, мы можем сделать вывод, что ФОЧВ Типа IV более эффективны с вычислительной точки зрения, чем КИХ-фильтры, спроектированные методом РМ, для реализации фильтров нижних частот, когда ширина полосы пропускания меньше, чем примерно $f_s/5$, а ширина переходной полосы меньше, чем примерно $f_s/8$.

7.1.14. Проектирование ФОЧВ

Практическое проектирование ФОЧВ Типа IV включает три этапа: (1) следует определить, может ли ФОЧВ реализовать заданные характеристики фильтров, (2) необходимо определить, является ли выбранный ФОЧВ более эффективным с вычислительной точки зрения, чем эквивалентный фильтр, рассчитанный методом РМ и (3) надлежит рассчитать ФОЧВ и проверить его характеристики. При выполнении первого этапа могут помочь показанные на рисунке 7.31 данные о минимальном подавлении в полосе задерживания ФОЧВ Типа IV как функции ширины переходной полосы при разном числе коэффициентов переходной полосы. (Различные значения N и типовые значения неравномерности АЧХ в полосе пропускания на рисунке 7.31 приведены как параметры.)

При проектировании ФОЧВ мы находим, что значение N является функцией требуемой ширины переходной полосы. Необходимое количество секций ФОЧВ определяется как значением N, так и требуемой шириной полосы пропускания. При заданных для КИХ-фильтра с линейной ФЧХ параметрами ширины полосы пропускания, неравномерности АЧХ в полосе пропускания, ширины переходной полосы и минимального подавления в полосе задерживания проектирование ФОЧВ Типа IV нижних частот с линейной ФЧХ выполняется следующим образом:

1. Используя рисунок 7.31, определяем, какая из полос удовлетворяет заданному минимальному подавлению в полосе задерживания. На этом шаге определяется количество переходных коэффициентов, необходимое для достижения заданного подавления.

2. Убеждаемся в том, что заданная ширина переходной полосы лежит в пределах выбранной полосы. (Если значение ширины переходной полосы лежит справа от полосы, фильтр, рассчитанный методом РМ, будет более эффективным по количеству операций, чем ФОЧВ Типа IV, поэтому продолжать проектирование ФОЧВ не следует.)

3. Определяем, приемлем ли уровень пульсаций ФЧХ в полосе пропускания, полученный по графикам рисунка 7.31 для выбранной полосы. Если да, то ФОЧВ Типа IV способен реализовать заданные требования. Если нет — следует попробовать метод РМ.

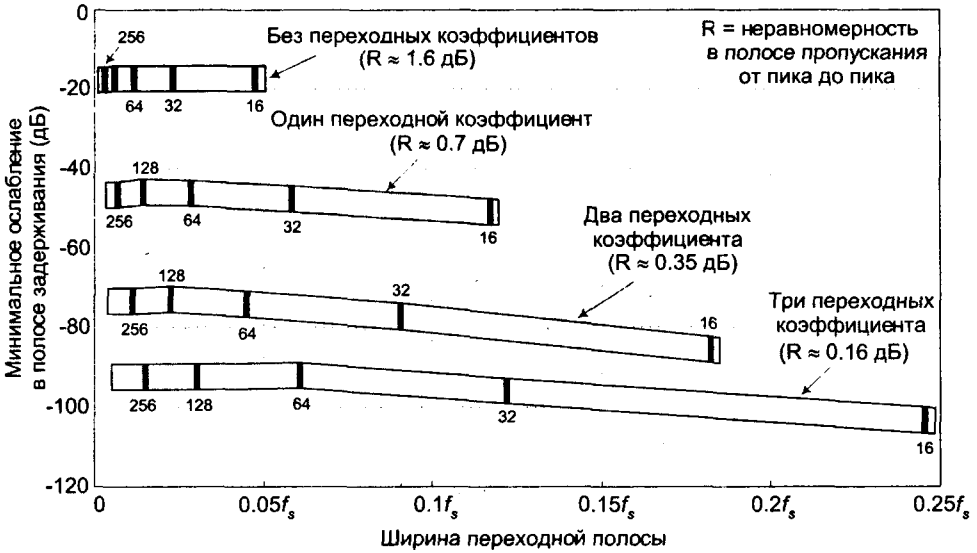


Рис. 7.31. Типовые значения подавления ФОЧВ Типа IV нижних частот в полосе задерживания как функция ширины переходной полосы

4. Выбрав способ реализации арифметических операций, выполняем сравнение объема вычислений для ФОЧВ и нерекурсивного фильтра, рассчитанного методом РМ, с помощью рисунков 7.29 или 7.30.

5. Используя заданные значения ширины переходной полосы и полосы пропускания как координаты точки на выбранном графике сравнения вычислительной сложности фильтров, определяем, лежит ли эта точка ниже соответствующей кривой. Если да, то ФОЧВ может реализовать заданные параметры с меньшим количеством операций на выходной отсчет фильтра, чем фильтр, спроектированный методом РМ. (Если точка, определяемая шириной переходной полосы и полосы пропускания, лежит выше соответствующей кривой, следует применить метод РМ.)

6. Если мы в процессе проектирования дошли до этого этапа, следующим шагом является выбор порядка фильтра N. Значение N зависит от заданной ширины переходной полосы и количества переходных коэффициентов, полученного на шаге 1, и может быть оценено по нормированной относительно f_s ширине переходной полосы с помощью выражения

$$N \approx f_s\,(\textit{количество переходных коэффициентов} + 1)/$$
$$/(\textit{ширина переходной полосы}) \qquad (7\text{-}29)$$

7. Необходимое количество секций ФОЧВ с единичными коэффициентами — это целое число M, которое примерно равно удвоенной заданной ширине полосы пропускания, деленной на разрешение по частоте (f_s/N). Величина M оценивается по формуле

$$M \approx 2N(\textit{ширина полосы пропускания})/f_s\,. \qquad (7\text{-}30)$$

8. Имея начальные значения N и M, по таблицам приложения Н находим оптимальные значения коэффициентов переходной полосы. Если в таблицах нет значений коэффициентов для заданных N и M, разработчик может вычислить их приближенные значения, используя линейную интерполяцию табличных значений. Как альтернативу для нахождения оптимальных значений переходных коэффициентов можно использовать программу оптимизации.

9. Используя значения N, M и оптимальных переходных коэффициентов, вычисляем интерполированную (действительную) частотную характеристику фильтра как функцию этих параметров фильтра. Эту частотную характеристику можно получить с помощью (7-24). Удобнее вычислять частотную характеристику с помощью коммерческого пакета программ обработки сигналов как ДПФ импульсной характеристики ФОЧВ или по коэффициентам передаточной функции (7-23).

10. Далее начинается увлекательный процесс небольших модификаций значений N и M и повторения шагов 8 и 9 до тех пор, пока процесс не сойдется к минимальному значению M для минимизации количества операций и к оптимальным значениям переходных коэффициентов, максимизирующим подавление в полосе задерживания.

11. Когда оптимальные параметры фильтра получены, мы используем их в реализации ФОЧВ Типа IV, как на рисунке 7.28.

12. Заключительный шаг — откинуться на спинку кресла и насладиться хорошо сделанной работой.

Пример ФОЧВ Типа IV, представленный на рисунках 7.27 и 7.28, дает нам иллюстрацию шагов 6 и 7. Начальные оценки для N и M равны

$$N_{init} \approx f_s(2+1)/[(0.095 - 0.05)f_s] \approx 66$$

и

$$M_{init} \approx (2)(62)(0.05f_s)/f_s \approx 6.2.$$

При повторном выполнении шагов 8-11 значения N и M сходятся к $N = 62$ и $M = 6$, которые позволяют выполнить требования к параметрам проектируемого фильтра.

7.1.15. Резюме

Мы познакомились со структурой, с характеристиками и методом проектирования КИХ-фильтров на основе частотной выборки. Особое внимание мы уделили практическим вопросам линейности ФЧХ, устойчивости и вычислительной сложности этих фильтров. Кроме того, мы привели подробное сравнение высококачественных ФОЧВ Типа IV и их нерекурсивных КИХ эквивалентов. Были приведены графики параметров, призванные помочь разработчику сделать выбор между ФОЧВ Типа IV и КИХ-фильтрами, спроектированными методом Паркса-Маклеллана, в случае реализации узкополосных фильтров с линейной ФЧХ.

Мы установили, что:

- ФОЧВ Типа IV при некоторых уровнях подавления в полосе задерживания более эффективны с точки зрения количества операций, чем нерекурсивные КИХ-фильтры, спроектированные методом Паркса-Маклеллана, в реализациях ФНЧ (или ФВЧ), для которых ширина полосы пропускания меньше $f_s/5$ и ширина переходной полосы меньше $f_s/8$ (см. рисунки 7.29 и 7.30).
- ФОЧВ строятся по модульному принципу. Их компоненты (секции) имеют одинаковую структуру и их работа хорошо изучена.
- Можно сгенерировать таблицы оптимальных коэффициентов переходной полосы (как в приложении Н) и использовать их для улучшения характеристик ФОЧВ.
- Несмотря на то, что ФОЧВ представляют собой рекурсивные структуры, их можно сделать гарантированно устойчивыми и обладающими линейной ФЧХ.

7.2. Интерполированные КИХ ФНЧ

В этом разделе мы познакомимся с другим классом цифровых фильтров, которые называются интерполированными КИХ-фильтрами и используются для построения узкополосных ФНЧ, которые могут оказаться более экономичными, чем традиционные КИХ-фильтры, рассчитанные методом Паркса-Маклеллана. Интерполированные КИХ-фильтры способны снизить количество операций при реализации узкополосных ФНЧ более чем на 80 % по сравнению с традиционными КИХ-фильтрами. Мы представим интерполированные КИХ-фильтры на простом примере, обсудим, как выбираются параметры фильтра, приведем графики параметров фильтра и рассмотрим пример проектирования простого ФНЧ, показывающий экономию вычислений по сравнению с традиционными фильтрами [13, 14].

Интерполированные КИХ (ИКИХ) фильтры используют особенности поведения нерекурсивных фильтров с N ответвлениями с линейной ФЧХ в случае, когда элементы задержки на один такт заменяются элементами задержки на M тактов, причем коэффициент расширения M является целым числом, как показано на рисунке 7.32 (a). Если $h_p(k)$ — импульсная характеристика КИХ-фильтра с 9 ответвлениями, показанная на рисунке 7.32 (b), то импульсная характеристика $h_{sh}(k)$ расширенного КИХ-фильтра при $M = 3$ имеет вид, показанный на рисунке 7.32 (c). Элементы задержки на M отсчетов приводят к появлению в $h_{sh}(k)$ нулевых отсчетов, отмеченных белыми кружочками. Переменная k представляет собой просто индекс времени в диапазоне $0 \le k \le N-1$. Мы будем называть исходный КИХ-фильтр прототипом, поэтому в $h_p(k)$ мы использовали индекс "p", а фильтр с расширенными элементами задержки – формирующим субфильтром. Скоро мы увидим, чем объясняется такая терминология.

Мы можем выразить передаточную функцию КИХ-прототипа в виде

$$H_p(z) = \sum_{k=0}^{N_p-1} h_p(k) z^{-k}, \qquad (7\text{-}31)$$

где N_p — длина h_p. Передаточная функция формирующего КИХ-фильтра при замене z в (7-31) на z^M имеет вид

$$H_{sh}(z) = \sum_{k=0}^{N_p-1} h_p(k) z^{-kM}, \qquad (7\text{-}32)$$

Если количество коэффициентов прототипа равно N_p, то формирующий фильтр имеет N_p ненулевых коэффициентов и длину расширенной импульсной характеристики

$$K_{sh} = M(N_p - 1) + 1. \qquad (7\text{-}33)$$

Позже мы увидим, насколько существенное влияние оказывает K_{sh} на реализацию ИКИХ-фильтров.

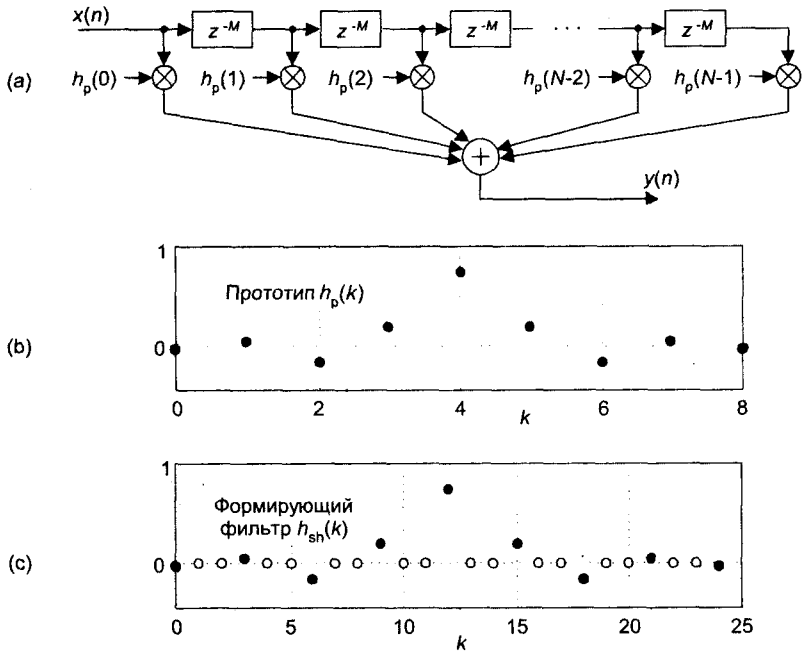


Рис. 7.32. Соотношения фильтров: (a) формирующий КИХ-фильтр с M единичными задержками между ответвлениями; (b) импульсная характеристика КИХ-прототипа; (c) импульсная характеристика формирующего КИХ-фильтра с расширенными задержками при $M = 3$

Влияние задержек на M отсчетов в частотной области показано на рисунке 7.33. Как и следовало ожидать, M-кратное удлинение импульсной характеристики приводит к M-кратному сжатию (и повторению) АЧХ $|H_p(f)|$, как на рисунке 7.33 (b). Частотная ось этих графиков нормирована относительно частоты дискретизации входного сигнала f_s. Например, нормированная частота f_{pass} эквивалентна абсолютной частоте $f_{pass} f_s$ Гц. Повторяющиеся полосы пропускания $|H_{sh}(f)|$, центры которых лежат на частотах $1/M$ (f_s/M Гц), называются изображениями, и именно на них мы сейчас обратим внимание.

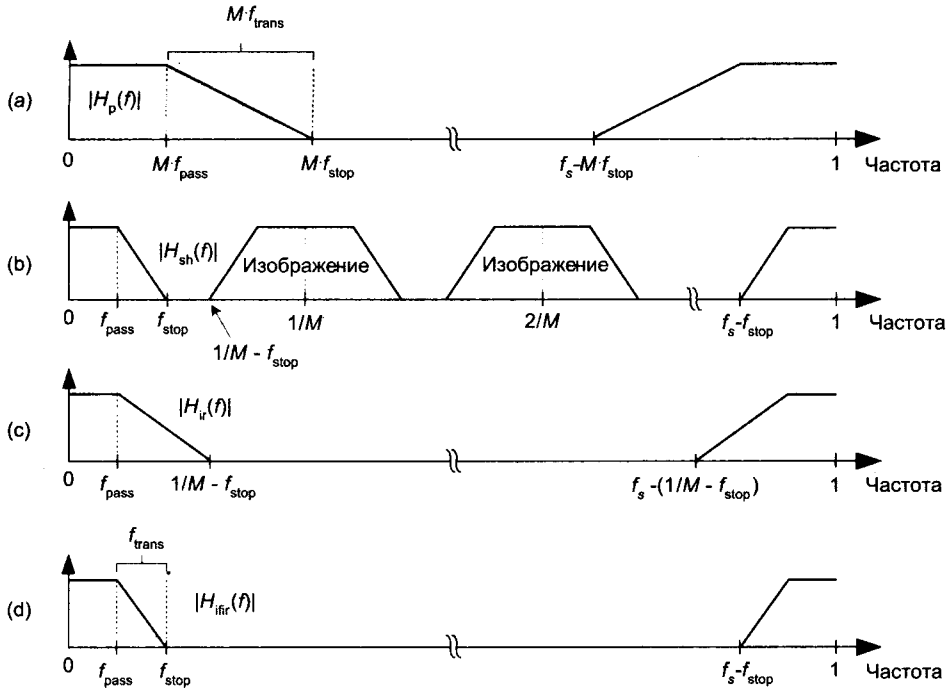


Рис. 7.33. Амплитудно-частотные характеристики ИКИХ-фильтра: (a) фильтра-прототипа; (b) формирующего субфильтра; (c) субфильтра подавления изображений; (d) результирующего ИКИХ-фильтра

Если мы последовательно с формирующим субфильтром включим низкочастотный субфильтр подавления изображений (его АЧХ показана на рисунке 7.33 (c)), задачей которого является ослабление полос пропускания изображений, мы можем получить многокаскадный фильтр, частотная характеристика которого показана на рисунке 7.33 (d). Результирующая АЧХ $|H_{ifir}(f)|$ является произведением

$$|H_{ifir}(f)| = |H_{sh}(f)|\,|H_{ir}(f)|\,. \qquad (7\text{-}34)$$

Структура из включенных последовательно субфильтров представляет собой так называемый ИКИХ-фильтр, показанный на рисунке 7.34 (a), интерполированная импульсная характеристика которого приведена на рисунке 7.34 (b).

Если требуемая ширина полосы пропускания ФНЧ равна f_{pass}, его полоса задерживания начинается на частоте f_{stop} и ширина переходной полосы равна $f_{trans} = f_{stop} - f_{pass}$, то нормированные параметры прототипа определяются как

$$f_{p\text{-}pass} = M f_{pass} \qquad (7\text{-}35)$$

$$f_{p\text{-}stop} = M f_{stop} \qquad (7\text{-}35')$$

$$f_{p\text{-}trans} = M f_{trans} = M\,(f_{stop} - f_{pass})\,. \qquad (7\text{-}35'')$$

Частотные параметры субфильтра подавления изображений определяются как

$$f_{ir\text{-}pass} = f_{pass} \qquad (7\text{-}36)$$

$$f_{ir\text{-}stop} = (1/M) - f_{stop}\,. \qquad (7\text{-}36')$$

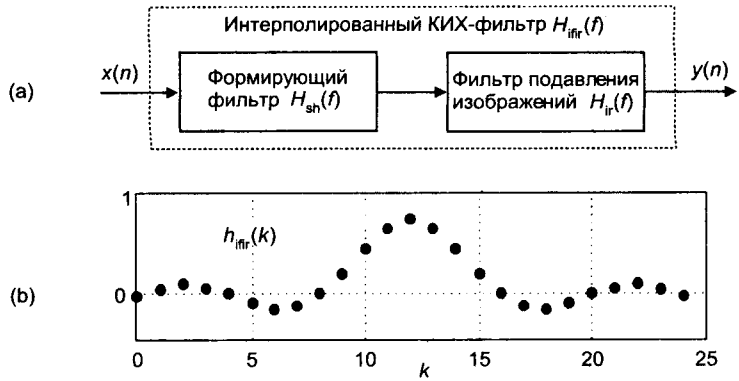


Рис. 7.34. Интерполированный КИХ-фильтр: (a) каскадная структура; (b) результирующая импульсная характеристика

Подавление в полосе задерживания прототипа и субфильтра подавления изображений идентичны и равны требуемому подавлению ИКИХ-фильтра. Слово «интерполированный» в названии ИКИХ-фильтров используется потому, что субфильтр подавления изображений интерполирует нулевые отсчеты импульсной характеристики формирующего субфильтра $h_{sh}(k)$, в результате чего общая импульсная характеристика $h_{ifir}(k)$ ИКИХ-фильтра на рисунке 7.34 (b) оказывается почти эквивалентной импульсной характеристике длины K_{sh} нерекурсивного КИХ-фильтра. (Вы заметили, что $h_{ifir}(k)$ представляет собой интерполированную версию $h_p(k)$на рисунке 7.32 (b)?) Некоторые авторы подчеркивают это обстоятельство, называя субфильтр подавления изображений *интерполятором*. Частота дискретизации в пределах ИКИХ-фильтра не меняется, поэтому никакой интерполяции на самом деле нет.

Чтобы дать вам стимул для дальнейшего чтения, рассмотрим следующий пример, который демонстрирует огромное преимущество ИКИХ-фильтра с точки зрения количества операций. Рассмотрим проектирование КИХ-фильтра с линейной ФЧХ, нормированная ширина полосы пропускания которого равна $f_{pass} = 0.1$, неравномерность АЧХ в полосе пропускания равна 0.1 дБ, ширина переходной полосы $f_{trans} = 0.02$, а подавление в полосе задерживания не меньше 60 дБ. (Неравномерность АЧХ в полосе пропускания представляет собой размах пульсаций от пика до пика в дБ.) АЧХ прототипа $|H_p(f)|$ при коэффициенте расширения $M = 3$ показана на рисунке 7.35 (a). Ось частот этих графиков пронормирована так, что значение 0.5 на оси абсцисс представляет частоту $f_s/2$ Гц, т. е. половину частоты дискретизации. Частотная характеристика формирующего субфильтра при $M = 3$ приведена на рисунке 7.35 (b), при этом центр изображения находится на частоте $1/M$. Характеристика субфильтра подавления изображений на рисунке 7.35 (c) показана сплошной линией, а характеристика всего фильтра приведена на рисунке 7.35 (d).

Чтобы реализовать требования к исходному фильтру, соответствующие рисунку 7.35 (d), потребовался бы традиционный КИХ-фильтр с $N_{tfir} = 137$ ответвлениями; где индекс "*tfir*" обозначает традиционный КИХ-фильтр. В нашем ИКИХ-фильтре формирующий и подавляющий изображения субфильтры требуют $N_p = 45$ и $N_{ir} = 25$ ответвлений соответственно, при этом общее количество ответвлений составляет $N_{ifir} = 70$.

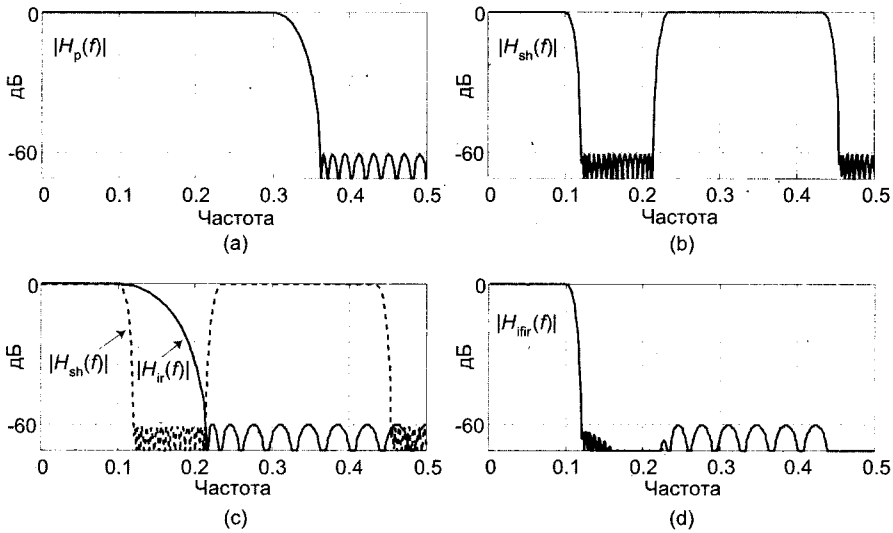


Рис. 7.35. Амплитудно-частотные характеристики для примера ИКИХ-фильтра нижних частот: (a) характеристика прототипа; (b) характеристика формирующего субфильтра; (c) характеристика субфильтра подавления изображений; (d) характеристика окончательного ИКИХ-фильтра

Мы можем определить относительное уменьшение количества операций в процентах в случае использования ИКИХ-фильтра по сравнению с традиционным КИХ-фильтром как

$$\%\ \text{уменьшения количества операций} = 100(N_{ifir} - N_p - N_{ir})/N_{ifir}. \quad (7\text{-}37)$$

При этом ИКИХ-фильтр из рассмотренного примера обеспечил снижение количества операций по сравнению с традиционным КИХ-фильтром, равное

$$\%\ \text{уменьшения количества операций} = 100(137 - 70)/137 = 49\ \%. \quad (7\text{-}37')$$

Рисунок 7.35 показывает, что ширина переходной полосы (форма) $|H_{ifir}(f)|$ определяется шириной переходной полосы $|H_{sh}(f)|$, и этим оправдывается решение назвать $h_{sh}(k)$ «формирующим» фильтром

7.2.1. Выбор оптимального значения коэффициента расширения *M*

Коэффициент расширения M заслуживает нашего внимания, т. к. он может оказывать существенное влияние на вычислительную эффективность ИКИХ-фильтров. Чтобы показать это, предположим, что в нашем примере на рисунке 7.35 мы приняли $M = 2$. В этом случае мы реализовали бы ИКИХ-фильтр, параметры которого приведены в строке $M = 2$ таблицы 7.4 и который обеспечивает уменьшение объема вычислений на 43 %. При $M = 2$ коэффициент сжатия $H_{sh}(f)$ в частотной области меньше, что потребовало увеличения количества ответвлений $h_{sh}(k)$ по сравнению со случаем $M = 3$.

Таблица 7.4. Зависимость снижения количества операций ИКИХ-фильтра от M

Коэффициент расширения	Количество ответвлений			Уменьшение количества операций в %
	$h_{sh}(k)$	$h_{ir}(k)$	Общее для ИКИХ-фильтра	
2	69	8	77	43
3	45	25	70	49
4	35	95	130	8

Если бы мы взяли $M = 4$, уменьшение объема вычислений составило бы всего 8%, как показано в таблице 7.4. Это объясняется тем, что изображения $H_{sh}(f)$ располагаются так близко друг к другу, что требуется фильтр подавления изображений повышенного качества (с увеличенным количеством ответвлений). Как часто бывает в обработке сигналов, здесь требуется найти разумный компромисс. Нам хотелось бы использовать большие значения M, чтобы как можно сильнее сжать переходную полосу $H_{sh}(f)$, но увеличение M требует уменьшения ширины переходной полосы субфильтра подавления изображений, что приводит к увеличению количества ответвлений $h_{ir}(k)$ и требуемого объема вычислений. В нашем примере ИКИХ-фильтра на рисунке 7.35 значение $M = 3$ является оптимальным, потому что оно дает наибольший коэффициент уменьшения объема вычислений по сравнению с традиционным нерекурсивным однокаскадным КИХ-фильтром.

Как показано на рисунке 7.33 (b), максимальное значение M равно наибольшему целому числу, удовлетворяющему условию $1/M - f_{stop} \geq f_{stop}$, которое обеспечивает отсутствие перекрытия изображений. Следовательно, верхняя граница M определяется выражением

$$M_{max} = \lfloor 1/(2f_{stop}) \rfloor . \qquad (7\text{-}38)$$

где $\lfloor x \rfloor$ обозначает усечение x до целого числа. Таким образом, приемлемыми будут целые значения коэффициента расширения в диапазоне $2 \leq M \leq M_{max}$. Вычисляя (7-38) для примера ИКИХ-фильтра, приведенного на рисунке 7.35, получаем

$$M_{max} = \lfloor 1/[2(0.1 + 0.02)] \rfloor = 4 , \qquad (7\text{-}38')$$

что объясняет диапазон значений M, использованных в таблице 7.4.

7.2.2. Оценка количества ответвлений КИХ-фильтра

Для оценки уменьшения количества операций при использовании ИКИХ-фильтров необходим алгоритм вычисления количества ответвлений N традиционного нерекурсивного КИХ-фильтра. Ряд авторов предлагали эмпирические формулы для оценки значения N традиционных нерекурсивных КИХ-фильтров на основе неравномерности АЧХ в полосе пропускания, подавления в полосе задерживания и ширины переходной полосы [8, 15-17]. Наиболее простое выражение для расчета

N, дающее результаты, согласующиеся с другими оценками при неравномерности АЧХ в полосе пропускания в районе 0.1 дБ, имеет вид

$$N_{tfir} \approx Atten/[22(f_{stop} - f_{pass})], \qquad (7\text{-}39)$$

где $Atten$ — подавление в полосе задерживания в дБ, f_{pass} и f_{stop} — нормированные (относительные) частоты, показанные на рисунке 7.33 (d) [17]. Аналогично, количество ответвлений прототипа и субфильтра подавления изображений можно оценить по формуле

$$N_p \approx Atten/[22(M)(f_{stop} - f_{pass})] \qquad (7\text{-}39')$$

$$N_{ir} \approx Atten/[22(1/M - f_{stop} - f_{pass})]. \qquad (7\text{-}39'')$$

7.2.3. Моделирование характеристик ИКИХ-фильтров

Уменьшение объема вычислений ИКИХ-фильтра зависит от коэффициента расширения M, ширины полосы пропускания и ширины переходной полосы разрабатываемого ИКИХ-фильтра. Чтобы продемонстрировать эту зависимость, подставим выражения (7-39) в (7-37) и запишем

$$\%\ уменьшения\ количества\ операций =$$

$$= 100[(M-1)/M - Mf_{trans}/(1 - Mf_{trans} - 2Mf_{pass})]. \qquad (7\text{-}40)$$

График, построенный согласно (7-40) для ширины полосы пропускания, равной одной десятой частоты дискретизации ($f_{pass} = 0.1$), показан на рисунке 7.36 (a) и показывает достижимые значения коэффициента уменьшения объема вычислений как функцию ширины переходной полосы для коэффициентов расширения 2, 3 и 4. Рассмотрев внимательно рисунок 7.36 (a), мы видим, что при большой ширине переходной полосы (скажем, $f_{trans} = 0.07$) сумма ширины полосы пропускания и ширины переходной полосы так велика по сравнению с шириной полосы пропускания, что только коэффициент расширения $M = 2$ позволит избежать перекрытия изображений.

При меньших значениях ширины переходной полосы можно использовать значения коэффициента 3 и 4. Например, когда ширина переходной полосы лежит в диапазоне от 0.005 до 0.028, коэффициент расширения $M = 3$ дает большее уменьшение количества операций, чем $M = 2$. Оптимальное значение (обеспечивающее наибольшее уменьшение объема вычислений) коэффициента расширения как функция ширины переходной полосы приведено на рисунке 7.36 (b). Черные точки на рисунке 7.36 представляют пример ИКИХ-фильтра, показанный на рисунке 7.35, с шириной переходной полосы $f_{trans} = 0.02$.

Чтобы показать, как процент снижения количества операций ИКИХ-фильтров изменяется в зависимости от заданной ширины полосы пропускания, на рисунке 7.37 приведены характеристики ИКИХ-фильтра при ширине полосы пропускания, составляющей 5% частоты дискретизации ($f_{pass} = 0.05$). Числа на графиках на рисунке 7.37 (a) представляют значения коэффициента расширения.

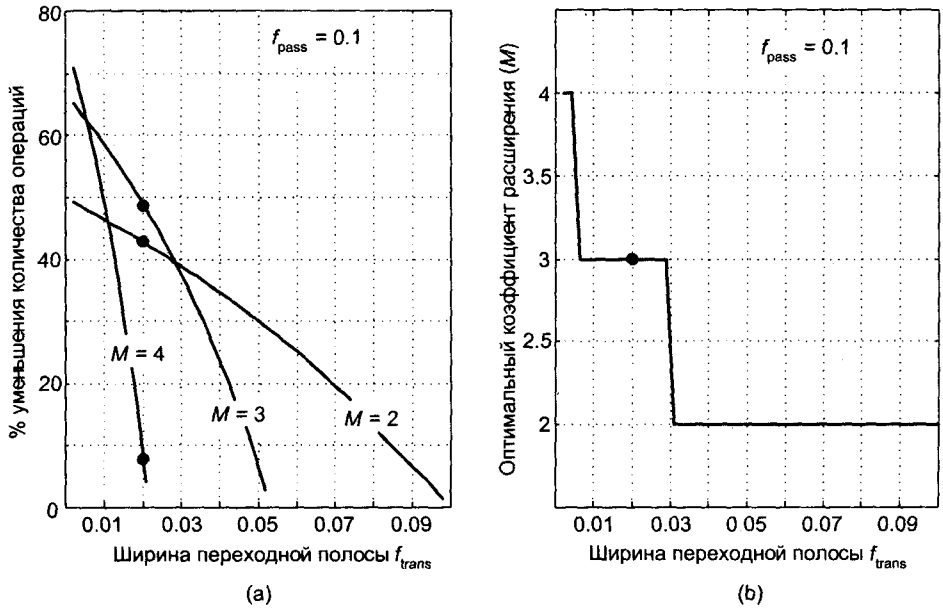


Рис. 7.36. Параметры ИКИХ-фильтра как функции ширины переходной полосы при $f_{pass} = 0.1$: (a) процентное уменьшение количества операций; (b) оптимальные значения коэффициента расширения

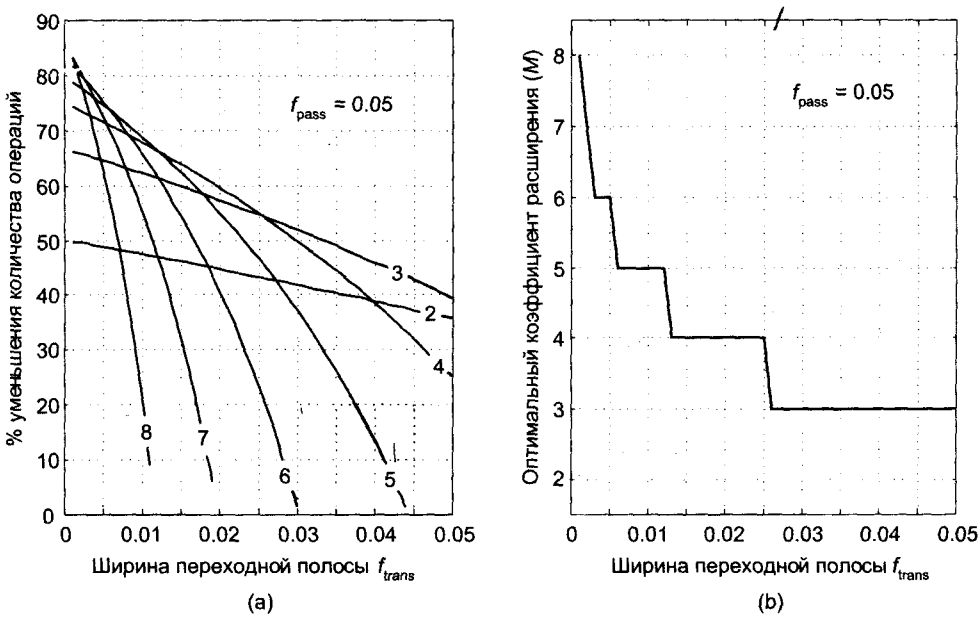


Рис. 7.37. Параметры ИКИХ-фильтра как функции ширины переходной полосы при $f_{pass} = 0.05$: (a) процентное уменьшение количества операций; (b) оптимальные значения коэффициента расширения

Оптимальные значения M в зависимости от ширины переходной полосы показаны на рисунке 7.37 (b). Кривые на рисунке 7.37 (a) показывают, в соответствии с отношением в квадратных скобках (7-40), что при приближении ширины переходной полосы к нулю процент снижения количества операций приближается к $100(M-1)/M$.

Мы продолжаем обсуждение эффективности ИКИХ-фильтров, рассматривая жирную кривую на рисунке 7.38 (a), которая представляет максимальное уменьшение количества операций как функцию ширины переходной полосы для ИКИХ-фильтра с $f_{pass} = 0.1$, аналогично рисунку 7.36 (a). Чтобы показать *максимальное* уменьшение количества операций в более широком диапазоне значений ширины переходной полосы, на рисунке 7.38 (b) этот график показан в логарифмическом масштабе по оси частот.

Далее, мы повторяем график рисунка 7.38 (b) на рисунке 7.39 (a), и добавляем кривые зависимости уменьшения объема вычислений от ширины переходной полосы для пяти других ИКИХ-фильтров, имеющих разные значения ширины полосы пропускания, которые показывают, насколько значительным может быть уменьшение количества операций при использовании ИКИХ-фильтров нижних частот. Оптимальные значения коэффициентов расширения, использованные для построения кривых на рисунке 7.39 (a), показаны на рисунке 7.39 (b). Чтобы не загромождать нижнюю часть рисунка 7.39 (b), ступенчатые кривые были заменены гладкими. Скоро мы увидим, как кривые рисунка 7.39 (b) используются в примере проектирования ИКИХ-фильтра.

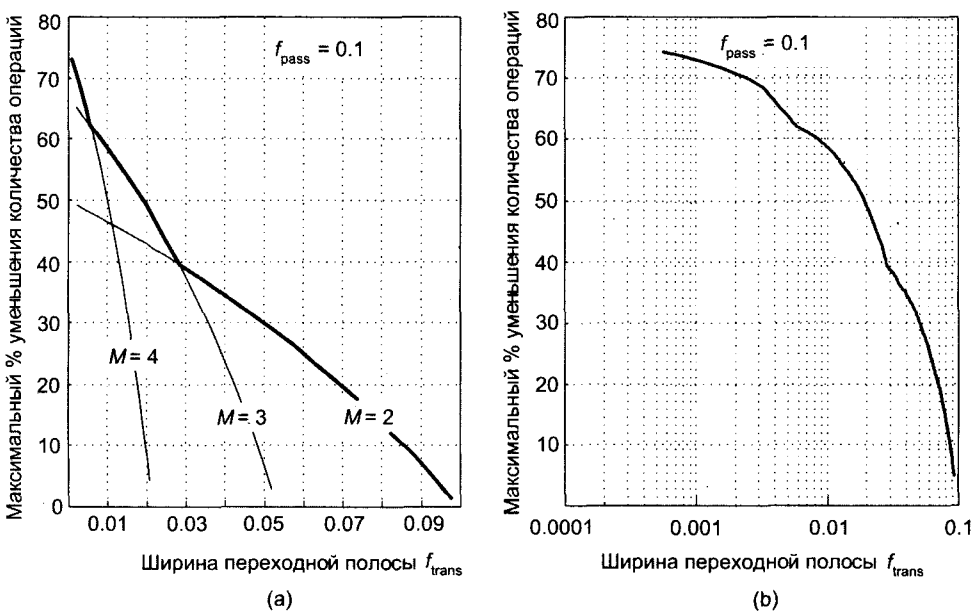


Рис. 7.38. Максимальное уменьшение объема вычислений в процентах в зависимости от ширины переходной полосы при $f_{pass} = 0.1$: (a) в линейном масштабе; (b) в логарифмическом масштабе оси частот

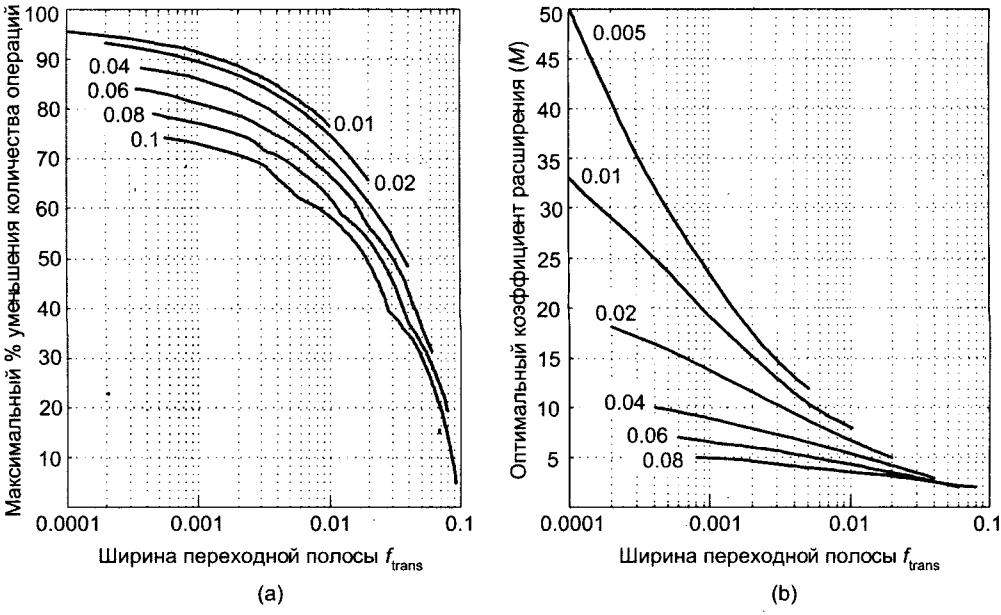


Рис. 7.39. Параметры ИКИХ-фильтра в зависимости от ширины переходной полосы при разных значениях ширины полосы пропускания: (a) максимальное уменьшение объема вычислений в процентах; (b) оптимальные значения коэффициентов расширения

7.2.4. Вопросы реализации ИКИХ-фильтров

Рассмотренное уменьшение вычислительной сложности ИКИХ-фильтров основано на предположении, что фильтры реализуются в виде двух отдельных субфильтров, как показано на рисунке 7.34. Мы не поддались искушению объединить эти два фильтра в один, коэффициенты которого являются сверткой импульсных характеристик субфильтров. Такой маневр лишил бы нас нулевых коэффициентов формирующего субфильтра, и мы потеряли бы часть эффективности.

Графики на рисунке 7.39 (b) указывают на важную особенность реализации при использовании ИКИХ-фильтров. При уменьшении ширины полосы пропускания ИКИХ-фильтра можно использовать бо́льшие значения коэффициента расширения M. При использовании ЦПОС бо́льшие значения M требуют использования более объемного блока памяти в форме циклического буфера для хранения достаточного количества входных отсчетов $x(n)$ формирующего субфильтра. Объем этой памяти должен быть равен K_{sh} в (7-33). Некоторые авторы считают это требование по выделению памяти для хранения всех промежуточных нулей импульсной характеристики $h_{sh}(k)$ недостатком ИКИХ-фильтров. Это ошибочное утверждение, т. к. оказывается, что длина $h_{sh}(k)$, K_{sh}, только на несколько процентов больше, чем длина импульсной характеристики традиционного КИХ-фильтра, имеющего такие же характеристики, как и ИКИХ-фильтр. Таким образом, с точки зрения памяти данных цена, которую мы платим при использовании ИКИХ-фильтров, состоит в небольшом увеличении объема памяти для хранения данных субфильтров. На практике для узкополосных ИКИХ ФНЧ K_{ir} обычно составляет

меньше 10 % от K_{sh}. Выделение блока памяти размером K_{sh} слов для формирующего фильтра не требуется при реализации ИКИХ-фильтров на ПЛИС класса FPGA, т. к. площадь FPGA не является жесткой функцией коэффициента расширения M [18].

При реализации ИКИХ-фильтра на ЦПОС уменьшение объема вычислений может быть реализовано только в случае, когда архитектура ЦПОС включает команды работы с циклическими буферами, свободные от накладных расходов, при инкременте адреса, равном коэффициенту расширения М. Такая возможность обеспечивает выполнение операций умножения только с ненулевыми коэффициентами формирующего фильтра $h_{sh}(k)$.

На практике формирующий субфильтр и субфильтр подавления изображений следует реализовать в виде КИХ-фильтра сложенной структуры, используя симметрию их импульсных характеристик для уменьшения количества выполняемых умножений в два раза (см. раздел 13.7). Использование сложенной структуры не меняет графиков параметров фильтров, приведенных на рисунке 7.39. Что же касается реализации ИКИХ-фильтров с использованием арифметики с фиксированной запятой, то их чувствительность к ошибкам квантования коэффициентов не больше, чем чувствительность традиционных КИХ-фильтров [13].

7.2.5. Пример проектирования ИКИХ-фильтра

Проектирование реального ИКИХ ФНЧ не представляет сложности и состоит из четырех шагов:

1. Задать требования к характеристикам проектируемого ФНЧ.
2. Выбрать начальное значение коэффициента расширения M.
3. Спроектировать формирующий субфильтр и субфильтр подавления изображений и оценить их характеристики.
4. Исследовать характеристики ИКИХ-фильтра при других значениях коэффициента расширения, близких к начальному значению M.

В качестве примера проектирования рассмотрим рисунок 7.33 (d) и предположим, что мы хотим построить ИКИХ ФНЧ с $f_{pass} = 0.02$, размахом пульсаций в полосе пропускания 0.5 дБ, шириной переходной полосы $f_{trans} = 0.01$ (следовательно, $f_{stop} = 0.03$) и подавлением в полосе задерживания 50 дБ. Прежде всего, найдем точку $f_{trans} = 0.01$ на оси абсцисс рисунка 7.39 (b) и проведем через нее вертикальную линию до пересечения с кривой, соответствующей $f_{pass} = 0.02$. Эта точка пересечения показывает, что мы должны начать проектирование с коэффициентом расширения $M = 7$. (Аналогичная точка пересечения на рисунке 7.39 (a) подсказывает, что мы можем получить уменьшение количества операций примерно на 80 %.)

При $M = 7$, воспользовавшись (7-35), мы используем нашу любимую программу проектирования традиционных КИХ-фильтров для проектирования КИХ-фильтра-прототипа с линейной ФЧХ и следующими параметрами:

$f_{p-pass} = M(0.02) = 0.14$,
неравномерность в полосе пропускания $= (0.5)/2$ *дБ* $= 0.25$ *дБ*,
$f_{p-stop} = M(0.03) = 0.21$ и
подавление в полосе задерживания $= 50$ *дБ*.

(Заметьте, что для задания уровня пульсаций в полосе пропускания мы воспользовались приближенным методом для каскадного соединения фильтров из раздела 6.8.1 и задали уровень пульсаций в полосе пропускания для прототипа, равный половине общей заданной неравномерности. Мы сделаем то же для субфильтра подавления изображений.) Такой КИХ-прототип будет иметь $N = 33$ ответвления и, в соответствии с (7-33), при расширении в $M = 7$ раз формирующий субфильтр будет иметь импульсную характеристику длиной в $K_{sh} = 225$ отсчетов.

Далее, используя (7-36), мы рассчитываем субфильтр подавления изображений, обладающий следующими параметрами:

$f_{ir-pass} = f_{pass} = 0.02$,
неравномерность в полосе пропускания $= (0.5)/2$ *дБ* $= 0.25$ *дБ*,
$f_{ir-stop} = 1/M - f_{stop} = 1/7 - 0.03 = 0.113$, и
подавление в полосе задерживания $= 50$ *дБ*.

Этот субфильтр подавления изображений будет иметь $N_{ir} = 27$ ответвлений и при последовательном соединении с формирующим субфильтром образует ИКИХ-фильтр, требующий 60 умножений на один выходной отсчет. Частотная характеристика этого ИКИХ-фильтра показана на рисунке 7.40 (a), а полоса пропускания в увеличенном масштабе — на рисунке 7.40 (b).

Традиционный КИХ-фильтр, удовлетворяющий нашим требованиям потребовал бы примерно $N_{tfir} = 240$ отсчетов. Поскольку ИКИХ-фильтр требует только 60 умножений на выходной отсчет, используя (7-37), мы находим, что реализовано уменьшение объема вычислений на 75 %. И последний шаг проектирования ИКИХ-фильтра — откиньтесь на спинку кресла и насладитесь хорошо сделанной работой.

Дальнейшее моделирование нашего фильтра при разных значениях коэффициента расширения дает параметры ИКИХ-фильтра, приведенные в таблице 7.5. Здесь мы видим, что значения коэффициента расширения от 5 до 8 дают очень близкие значения коэффициента уменьшения количества операций и требуемого объема памяти для формирующего фильтра.

ИКИХ-фильтры подходят для применений, в которых требуются узкополосные фильтры с линейной ФЧХ, например, при фильтрации перед прореживанием для узкополосного выделения каналов в приемниках беспроводных систем связи или в цифровом телевидении. ИКИХ-фильтры являются важными компонентами в маскирующих КИХ-фильтрах с широкополосными частотными характеристиками с резкими переходами [19, 20]. Кроме того, ИКИХ-фильтры можно использовать в узкополосных двумерных фильтрах.

В литературе описаны и другие, более сложные методы проектирования ИКИХ-фильтров. Улучшенная вычислительная эффективность, на 30-40 % выше представленной здесь, заявлена для замысловатой схемы, в которой субфильтр подавления изображений заменен многокаскадным фильтром [21].

В заключение обсуждения узкополосных ИКИХ-фильтров с линейной ФЧХ мы напомним: они могут обеспечить значительное уменьшение объема вычислений (до 90 %) по сравнению с традиционными нерекурсивными КИХ-фильтрами за счет повышения требуемого объема памяти менее чем на 10 %. Отрадно также то, что реализация ИКИХ-фильтра образуется как простое последовательное соединение фильтров, которые рассчитываются с помощью легкодоступных программ проектирования традиционных КИХ-фильтров.

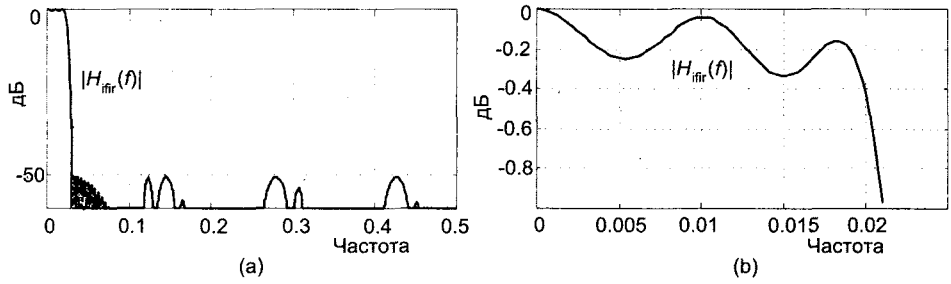


Рис. 7.40. АЧХ ИКИХ-фильтра из примера проектирования: (a) полная характеристика; (b) полоса пропускания в увеличенном масштабе.

Таблица 7.5. Уменьшение объема вычислений в примере проектирования ИКИХ-фильтра как функция *M*

Коэффициент расширения *M*	Количество ответвлений			Количество ячеек памяти K_{sh}	Уменьшение объема вычислений, %
	$h_{sh}(k)$	$h_{ir}(k)$	Общее для ИКИХ-фильтра		
3	76	8	84	226	65
4	58	12	70	229	71
5	46	17	63	226	74
6	39	22	61	229	75
7	33	27	60	225	75
8	29	33	62	225	74
9	26	41	67	226	72
10	24	49	73	231	70
11	21	60	81	221	66

Библиография

1. Rabiner, L., et al, «An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters,» *IEEE Transactions Audio Electroacoust.*, Vol. AU-18, June 1970, pp. 83-106.

2. Proakis. J. and Manolakis, D. *Digital Signal Processing—Principles, Algorithms, and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996, pp. 506-507.

3. Taylor, F. and Mellott, J. *Hands-On Digital Signal Processing*, McGraw-Hill, New York, 1998, pp. 325-331.

4. Rader, C. and Gold, B. «Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain,» *Proceedings of the IEEE*, Vol. 55, February 1967, pp. 149-171.

5. Rabiner, L. and Schafer, R. «Recursive and Nonrecursive Realizations of Digital Filters Designed by Frequency Sampling Techniques,» *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, Vol. AU-19, September 1971, pp. 200-207.

6. Gold, B. and Jordan, K. «A Direct Search Procedure for Designing Finite Duration Impulse Response Filters,» *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, Vol. AU-17, March 1969, pp. 33-36.

7. Rabiner, L. and Gold, B. *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1975, pp. 105-112 (есть русский перевод: Рабинер Л., Голд Б. «Теория и применение цифровой обработки сигналов,» М.: Мир, 1978, доступен по адресу http://geogin.narod.ru/arhiv/dsp/dsp3.htm).

8. Rorabaugh, C. *DSP Primer*, McGraw-Hill, New York, 1999.

9. Parks, T. and McClellan, J. «A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Digital Filters,» *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, Vol. AU-20, August 1972, pp. 195-199.

10. Herrmann, O. «Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase,» *Electron. Lett*, Vol. 6, May 28,1970, pp. 328-329.

11. Rabiner, L. «Techniques for Designing Finite-Duration-Impulse-Response Digital Filters,»*IEEE Trans, on Communication Technology*, Vol. COM-19, April 1971, pp. 188-195.

12. Ingle, V and Proakis, J. *Digital Signal Processing Using MATLAB*, Brooks/Cole Publishing, Pacific Grove, CA, 2000, pp. 202-208.

13. Mitra, S. K., et al, «Interpolated Finite Impulse Response Filters,» *IEEE Trans. Acoust, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-32, June 1984, pp. 563-570.

14. Vaidyanathan, P. Multirate Systems and Filter Banks, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

15. Crochiere, R. and Rabiner, L. «Interpolation and Decimation of Digital Signals—A Tutorial Review,» *Proceedings of the IEEE*, Vol. 69, No. 3, March 1981, pp. 300-331.

16. Kaiser, J. «Nonrecursive Digital Filter Design Using Io-sinh Window Function, » *Proc. 1974 IEEE Int. Symp. Circuits Systems*, April 1974, pp. 20-23.

17. Harris, F. «Digital Signal Processing for Digital Modems», *DSP World Spring Design Conference*, Santa Clara, CA, April 1999.

18. Dick, C. «Implementing Area Optimized Narrow-band FIR Filters Using Xilinx FPGAs», *SPIE International Symposium on Voice, Video and Data Communications*, Boston, Massachusetts, pp. 227-238, Nov. 1998. [http://www.xilinx.com/products/logicore/dsp/ifir.pdf \]

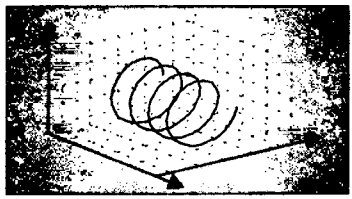
19. Lim, Y. «Frequency-Response Masking Approach for the Synthesis of Sharp Linear Phase Digital Filters,» *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Vol. 33, April 1986, pp. 357-364.

20. Yang, R., et al, «A New Structure of Sharp Transition FIR Filters Using Frequency-Response Masking,» *IEEE Transfctions Circuits and Systems*, Vol. 35, August 1988, pp. 955-966.

21. Saramaki, T., et al, «Design of Computationally Efficient Interpolated FIR Filters», *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Vol. 35, January 1988, pp. 70-88.

Глава 8

Квадратурные сигналы



Теория квадратурных сигналов строится с использованием комплексных чисел. Вероятно, никакая другая тема не причинила столько головной боли новичкам в ЦОС, сколько эти числа и связанные с ними странные термины, такие как *j-оператор, комплексный, аналитический, мнимый, действительный* и *ортогональный*. Если от вас ускользает физический смысл комплексных чисел и оператора $j = \sqrt{-1}$, не стоит отчаиваться, поскольку вы находитесь в достойной компании. Итальянский математик шестнадцатого века Джироламо Кардано писал, что комплексные числа «настолько же непонятны, насколько бесполезны».

В XVII веке Готфрид Лейбниц описывал мнимые числа как «амфибии, проживающие на грани существующего и несуществующего». (Термин «мнимый» впервые был использован блестящим математиком и философом Рене Декартом в XVII веке, и при этом он имел пренебрежительный оттенок. Это объясняется тем, что не только понятие квадратного корня из отрицательного числа было в лучшем случае сомнительным, но и, как ни удивительно, в то время не существовало единого мнения о смысле отрицательных действительных чисел.) Даже Карл Фридрих Гаусс, один из величайших математиков мира, называл j-оператор «тенью теней». Далее мы прольем немного света на эти тени, чтобы вам никогда не приходилось прибегать к помощи специалистов-психоаналитиков телефонной службы *Psychic Hotline*.

Квадратурные сигналы, представленные комплексными числами, используются практически во всех областях науки и техники[1]. Нам они интересны тем, что используются в анализе Фурье, а также в квадратурной обработке и в реализации современных систем связи. В этой главе мы дадим обзор основ комплексных чисел и познакомимся с тем, как они используются для описания квадратурных сигналов. Затем мы познакомимся с понятием отрицательной частоты, т. к. оно тесно связано с алгебраической записью квадратурных сигналов, а также научимся говорить на языке квадратурной обработки. Кроме того, чтобы прояснить понятие квадратурных сигналов и придать ему физический смысл, мы будем использовать трехмерные графики в пространстве время-частота.

---

[1] Это объясняется тем, что комплексные синусоиды являются решениями линейных дифференциальных уравнений второго порядка, используемых для описания множества явлений природы.

8.1. Почему нас так занимают квадратурные сигналы?

Квадратурные сигналы, которые также называют *комплексными сигналами*, используются во многих применениях цифровой обработки сигналов, таких как:

- системы связи,
- радиолокационные системы,
- системы измерения разности времен прихода сигналов в радионавигации,
- когерентные измерительные системы,
- системы формирования луча антенны,
- однополосные модуляторы.

Эти приложения попадают в одну общую категорию, известную как *квадратурная обработка*, и обеспечивают дополнительные возможности обработки сигналов благодаря когерентному измерению фазы синусоидальных сигналов.

Квадратурный сигнал — это двухмерный сигнал, значение которого в некоторый момент времени может быть задано одним комплексным числом, содержащим две части, которые мы называем действительной частью и мнимой частью. (Термины *действительная* и *мнимая*, хотя и общеприняты, неудачны из-за смысла, который они имеют в повседневной речи. Инженеры систем связи используют термины *синфазная* и *квадратурная составляющие*. Подробнее об этом поговорим позже.) Рассмотрим математическую запись комплексных чисел.

8.2. Запись комплексных чисел

Чтобы сформировать терминологию, определим действительные числа как числа, которые мы используем в повседневной жизни для выражения таких величин, как напряжение, температура или баланс банковского счета. Эти одномерные числа могут быть либо положительными, либо отрицательными, как показано на рисунке 8.1 (a). На этом рисунке мы изобразили одномерную ось координат и показываем, что действительное число можно представить точкой на этой оси. По традиции давайте называть эту ось *действительной осью*.

Комплексное число c показано на рисунке 8.1 (b), где оно изображено как точка. Расположение комплексных чисел не ограничено одномерной прямой, они могут располагаться где угодно на двухмерной плоскости. Эту плоскость называют *комплексной плоскостью* (некоторым математикам нравится называть ее диаграммой Аргана), и она дает нам возможность изображать комплексные числа, имеющие как действительную, так и мнимую части. Например, на рисунке 8.1(b) комплексное число $c = 2.5 + j2$ изображается точкой, не лежащей ни на действительной, ни на мнимой оси. Мы приходим в эту точку, продвинувшись от начала координат на +2.5 единицы вдоль действительной оси и поднявшись на +2 единицы вдоль мнимой оси. Вы можете представлять себе действительную и мнимую оси точно так же, как вы представляете себе направления Восток-Запад и Север-Юг на карте автомобильных дорог.

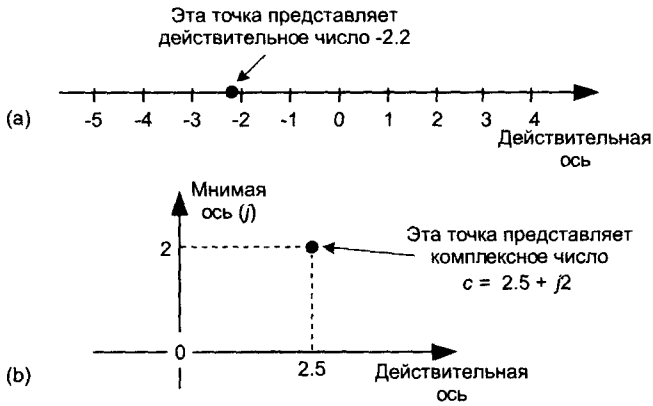


Рис. 8.1. Графическая интерпретация: (a) действительного числа; (b) комплексного числа

Мы будем использовать геометрические представления для объяснения арифметики комплексных чисел. Посмотрев на рисунок 8.2, мы можем использовать тригонометрию прямоугольного треугольника для получения нескольких различных способов представления комплексного числа *c*.

Комплексное число c в литературе записывается несколькими различными способами, показанными в таблице 8.1.

Таблица 8.1. Формы записи комплексных чисел

Название формы записи	Математическое выражение	Примечание	
Прямоугольная форма	$c = a + jb$	Используется для пояснений. Наиболее понятная форма. (Ее называют также *декартовой формой.*)[1]	(8-1)
Тригонометрическая форма	$c = M[\cos(\phi) + j\sin(\phi)]$	Широко используется для описания квадратурных сигналов в системах связи.	(8-2)
Полярная форма	$c = Me^{j\phi}$	Самая непонятная, но главная форма, используемая в математических выкладках. (Называется также *экспоненциальной формой.* Иногда записывается в виде $Mexp(j\phi)$.)	(8-3)
Модуль-аргумент	$c = M\angle\phi$	Используется в описаниях, но слишком неудобна для использования в алгебраических выражениях. (По существу, представляет собой сокращенную запись выражения (8-3).)	(8-4)

[1] В отечественной литературе эту форму часто называют также *алгебраической формой* — (*прим. перев.*).

Уравнения (8-3) и (8-4) напоминают нам, что с можно также рассматривать как координаты на комплексной плоскости конца фазора длиной M, направленного под углом ϕ градусов к положительной полуоси действительной оси, как показано на рисунке 8.2. Помните при этом, что c — комплексное число, а значения a, b, M и ϕ — действительные числа. Абсолютная величина или модуль c есть величина

$$M = |c| = \sqrt{a^2 + b^2} \ . \tag{8-5}$$

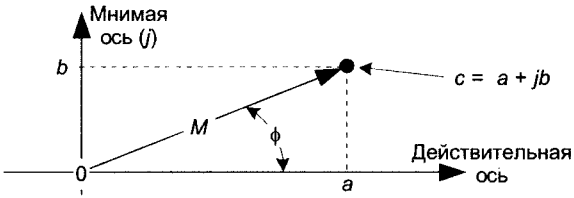


Рис. 8.2. Представление комплексного числа $c = a + jb$ в виде фазора на комплексной плоскости

Фазовый угол ϕ, т. е. *аргумент* числа c, вычисляется как арктангенс отношения мнимой части к действительной, или

$$\phi = \tan^{-1}(b/a) \ . \tag{8-6}$$

Если мы приравняем (8-3) к (8-2), $Me^{j\phi} = M[\cos(\phi) + j\sin(\phi)]$, то сможем получить соотношение, которое в настоящее время называется тождеством Эйлера и выглядит следующим образом:

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi) \ . \tag{8-7}$$

Недоверчивый читатель сейчас должен спросить: «На каком основании мы представляем комплексное число этим странным выражением, содержащим основание натуральных логарифмов e, возводимое в мнимую степень?» Мы можем подтвердить правильность (8-7) так, как это сделал европейский кудесник бесконечных рядов Леонард Эйлер, подставив $j\phi$ вместо z в разложении e^z в ряд, которое приведено в верхней строке рисунка 8.3[1]. Эта подстановка показана во второй строке. Далее, чтобы получить ряд, приведенный в третьей строке, мы вычисляем высшие степени j. Те из вас, кто обладает развитыми математическими способностями, как Эйлер (или кто обратится к какому-нибудь справочнику по математике), увидят, что четные и нечетные члены ряда в третьей строке образуют разложения в ряд для косинуса и синуса.

Рисунок 8.3 подтверждает правильность (8-7) и обосновывает представление комплексного числа в полярной форме (8-3): $Me^{j\phi}$. Если вместо z в верхней строке рисунка 8.3 мы подставим $-j\phi$ мы придем к несколько отличной, но очень полезной форме тождества Эйлера:

$$e^{-j\phi} = \cos(\phi) - j\sin(\phi) \ . \tag{8-8}$$

[1] Леонард Эйлер (Leonhard Euler), который родился в Швейцарии в 1707 году, считается многими историками величайшим математиком мира. Между прочим, фамилия Euler произносится как «Ойлер».

$$e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{j\phi} = 1 + j\phi + \frac{(j\phi)^2}{2!} + \frac{(j\phi)^3}{3!} + \frac{(j\phi)^4}{4!} + \frac{(j\phi)^5}{5!} + \frac{(jf)^6}{6!} + \ldots$$

$$e^{j\phi} = 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - j\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + j\frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^6}{6!} + \ldots$$

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$$

Рис. 8.3. Один из способов вывода тождества Эйлера с использованием разложений e^z, $\cos(\phi)$ и $\sin(\phi)$ в ряд

Полярная форма (8-7) и (8-8) выгодна нам по следующим причинам:

- она упрощает математические выкладки и анализ, преобразуя тригонометрические уравнения в более простые показательные, математические операции над комплексными числами подчиняются тем же правилам, что и операции над действительными числами;
- она преобразует сложение сигналов в простое сложение комплексных чисел (векторное сложение);
- это самая короткая форма;
- она показывает, как реализуются и описываются в литературе системы связи.

Вот вам пример того, как полярная форма комплексных чисел может упростить математический анализ. Допустим, мы хотим разобраться в процессе умножения комплексного числа $c_1 = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$ на другое комплексное число $c_2 = \cos(2\phi) - j\sin(2\phi)$, аргумент которого равен удвоенному значению аргумента первого числа, взятому с обратным знаком. Произведение имеет вид:

$$c_1 c_2 = [\cos(\phi) + j\sin(\phi)][\cos(2\phi) - j\sin(2\phi)] =$$

$$= \cos(\phi)\cos(2\phi) + \sin(\phi)\sin(2\phi) + j[\sin(\phi)\cos(2\phi) - \cos(\phi)\sin(2\phi)]. \qquad (8\text{-}9)$$

Используя *тригонометрические тождества* для произведения функций, мы можем записать (8-9) как

$$c_1 c_2 = (1/2)[\cos(-\phi) + \cos(3\phi) + \cos(-\phi) - \cos(3\phi)] +$$

$$+ j(1/2)[\sin(3\phi) + \sin(-\phi) - \sin(3\phi) + \sin(-\phi)] =$$

$$= \cos(-\phi) + j\sin(-\phi) = \cos(\phi) - j\sin(\phi). \qquad (8\text{-}10)$$

Таким образом, произведение c_1c_2 есть число, комплексно-сопряженное сомножителю c_1. Это не слишком впечатляет, гораздо больше впечатляет простота данной операции в полярной форме.

Мы можем записать все это одной короткой строкой:

$$c_1 c_2 = e^{j\phi} e^{-j2\phi} = e^{-j\phi}, \qquad (8\text{-}11)$$

которая эквивалентна (8-10). Для математического анализа обычно выбирают полярную форму.

Вернемся к квадратурным сигналам. Чтобы понять природу квадратурных сигналов во временной области, мы будем использовать уравнения (8-7) и (8-8). Но прежде вдохнем поглубже и войдем в Сумеречную Зону оператора j.

Выше уже приводилось определение $j = \sqrt{-1}$. Словами его можно выразить так: j представляет собой число, которое при умножении само на себя дает –1. Да, это определение для новичка создает определенные трудности, т. к. все мы знаем, что любое число, умноженное само на себя, дает положительный результат. (К несчастью, технические учебники часто именно так определяют j, а затем с поспешностью, впрочем, оправданной, переключаются на способы использования оператора j для анализа синусоидальных сигналов. Читатели быстро забывают о вопросе: «Что на самом деле значит $j = \sqrt{-1}$?») Символ $\sqrt{-1}$ уже был известен математикам в течение некоторого времени, но не принимался всерьез до тех пор, пока в XVI веке они не были вынуждены использовать его для решения кубических полиномиальных уравнений [1, 2]. Математики неохотно начали принимать абстрактное понятие $\sqrt{-1}$, не имея потребности в его визуализации, т. к. его математические свойства были совместимы с арифметикой обычных действительных чисел.

Именно идея Эйлера совместить комплексные числа и действительные косинусы и синусы, а также блестящая идея комплексной плоскости, предложенная Гауссом, окончательно узаконили понятие $\sqrt{-1}$ для европейских математиков в XVIII веке. Эйлер, выходя за пределы области действительных чисел, показал, что комплексные числа имеют четкую связь с хорошо известными действительными тригонометрическими функциями синус и косинус. Подобно тому, как Эйнштейн показал эквивалентность массы и энергии, Эйлер показал эквивалентность действительных синусов и косинусов комплексным числам. Беря пример с современных физиков, которые не знают, что собой представляет электрон, но хорошо понимают его свойства, мы не будем беспокоиться о том, что такое j, а удовлетворимся пониманием его поведения. Мы будем рассматривать j не как число, а как операцию над числом, точно так же, как мы рассматриваем операции изменения знака или умножения. С нашей точки зрения оператор j обозначает поворот комплексного числа на 90° против часовой стрелки. Давайте посмотрим, почему.

Мы освоимся с представлением мнимых чисел на комплексной плоскости, изучив математические свойства оператора $j = \sqrt{-1}$, как показано на рисунке 8.4.

Умножение любого числа, лежащего на действительной оси, на j дает мнимое значение, лежащее на мнимой оси. Пример в левой части рисунка 8.4 показывает, что если $+8$ представлено точкой, лежащей на положительной полуоси действительной оси, то умножение $+8$ на j дает мнимое число $+j8$, расположенное на положительной полуоси мнимой оси. Аналогично, умножение $+j8$ на j приводит еще к одному повороту на 90° и дает число –8, лежащее на отрицательной полуоси действительной оси, потому что $j^2 = -1$. Умножение –8 на j приводит к дальнейшему повороту на 90° и дает число $-j8$, лежащее на отрицательной полуоси мнимой оси. Когда любое число умножается на j, результатом становится поворот на 90° против часовой стрелки. (В противоположность этому умножение на $-j$ приводит на комплексной плоскости к повороту в направлении по ходу часовой стрелки на 90°.)

Если мы в (8-7) положим $\phi = \pi/2$, то мы можем сказать, что

$$e^{j\pi/2} = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = 0 + j1,$$

или

$$e^{j\pi/2} = j \qquad (8\text{-}12)$$

Это следует запомнить. Если у вас есть одно комплексное число, представленное точкой на комплексной плоскости, то умножение его на j или на $e^{j\pi/2}$ даст новое комплексное число, повернутое на 90° против часовой стрелки на комплексной плоскости. Не забывайте об этом, т. к. это пригодится при чтении литературы по системам квадратурной обработки!

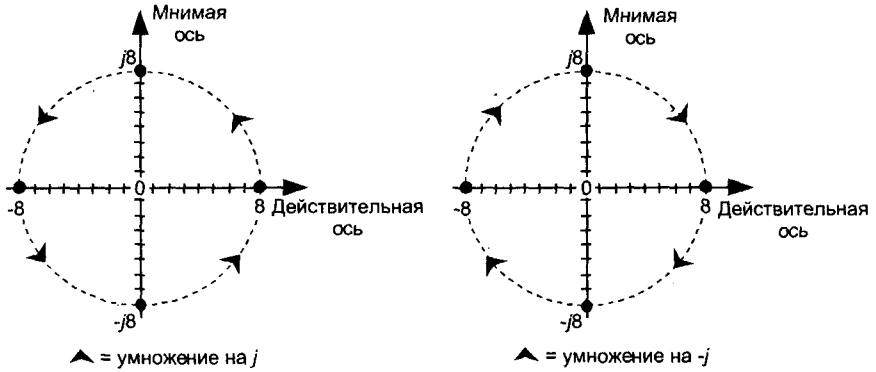


Рис. 8.4. Преобразования числа 8 при умножении на j и $-j$

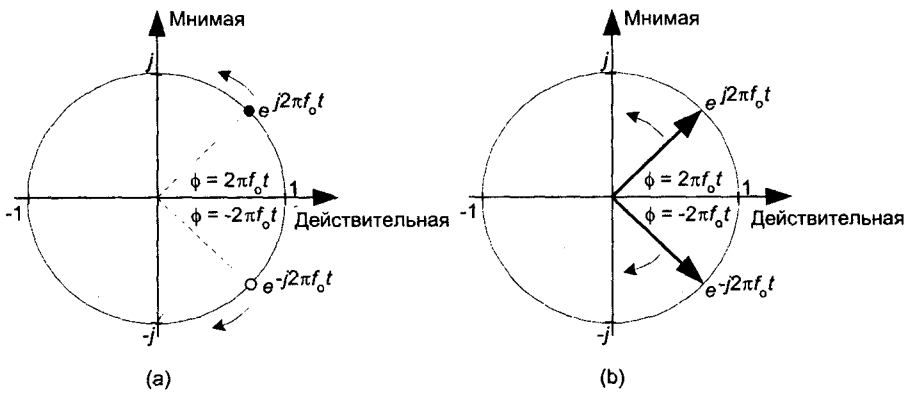


Рис. 8.5. Мгновенное фото двух комплексных чисел, показатели степени которых меняются со временем: (a) числа показаны точками; (b) числа изображаются в виде фазоров

Возьмем таймаут, чтобы перевести дыхание. Не унывайте, если идеи мнимых чисел и комплексной плоскости кажутся несколько загадочными. Вначале так бывает со всеми — вы будете осваиваться с ними тем больше, чем больше вы будете их использовать. (Помните, что оператор j озадачивал самых маститых математиков Европы в течение многих лет.) Конечно, не только математика комплексных чисел кажется поначалу несколько странной, но и применяемая терминология

весьма необычна. Тогда как использование термина «мнимый» просто неудачно, термин «комплексный» совершенно сбивает с толку. При первой встрече с ним выражение «комплексные числа» заставляет нас думать о неких сложных числах. Это тем более достойно сожаления, что понятие комплексных чисел в действительности не так сложно[1]. Просто знайте, что целью приведенных выше математических рассуждений было обоснование выражений (8-2), (8-3), (8-7) и (8-8). Теперь (наконец-то!) поговорим о сигналах во временной области.

8.3. Представление действительных сигналов с помощью комплексных фазоров

Теперь рассмотрим комплексную величину, которая является функцией времени. Рассмотрим число, модуль которого равен единице и фазовый угол которого увеличивается со временем. Это комплексное число представлено точкой $e^{j2\pi f_o t}$, показанной на рисунке 8.5 (a). (Член $2\pi f_o$ представляет собой частоту в радианах в секунду, которая соответствует частоте f_o периодов в секунду, измеряемой в Герцах.) По мере увеличения времени t фазовый угол комплексного числа растет, и число описывает окружность с центром в начале координат комплексной плоскости в направлении против хода часовой стрелки. На рисунке 8.5 (a) показано это число, представленное жирной точкой, зафиксированное в некоторый произвольный момент времени. Если, скажем, частота $f_o = 2$ Гц, то точка будет обходить окружность два раза в секунду. Мы можем также представить себе другое комплексное число $e^{-j2\pi f_o t}$ (белая точка), которое вращается по ходу часовой стрелки, т. к. его фазовый угол с увеличением времени становится все более отрицательным.

Назовем два комплексных выражения $e^{j2\pi f_o t}$ и $e^{-j2\pi f_o t}$ *квадратурными сигналами*. Каждое из них имеет действительную и мнимую части, и оба они являются функциями времени. Эти выражения $e^{j2\pi f_o t}$ и $e^{-j2\pi f_o t}$ в литературе часто называют *комплексными экспонентами*.

Мы можем также представить квадратурные сигналы $e^{j2\pi f_o t}$ и $e^{-j2\pi f_o t}$ как концы фазоров, вращающихся в противоположных направлениях, как показано на рисунке 8.5 (b). Дальше мы будем придерживаться этого фазорного представления, т. к. оно позволит нам достигнуть цели — представления действительных синусоид в контексте комплексной плоскости.

Для более полного понимания поведения простого квадратурного сигнала на рисунке 8.6 изображена трехмерная траектория сигнала $e^{j2\pi f_o t}$, которую он описывает с течением времени. Чтобы показать, что $e^{j2\pi f_o t}$ описывает спиральную траекторию, ориентированную в соответствии с правилом буравчика, ось которой совпадает с осью времени, мы добавили временную ось, направленную от страницы к читателю. Действительная и мнимая части $e^{j2\pi f_o t}$ на рисунке 8.6 показаны как синусная и косинусная проекции, что позволяет лучше понять соотношение (8-7).

---

[1] Блестящий американский инженер Чарльз П. Стейнмец (Charles P. Steinmetz) который в начале двадцатого века первый использовал мнимые числа для анализа электрических цепей, избегал использования термина «комплексные числа» — он называл их *общими числами* (general numbers).

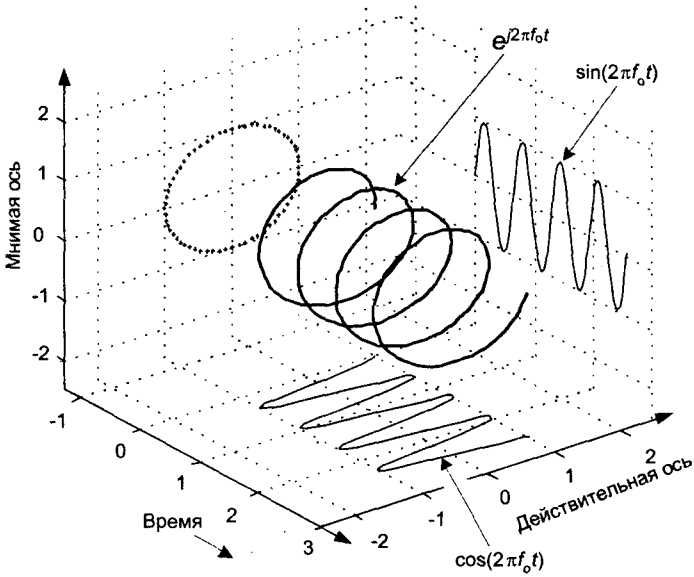


Рис. 8.6. Движение $e^{j2\pi f_o t}$ со временем

Чтобы понять физический смысл всего сказанного, вспомним, что непрерывный квадратурный сигнал $e^{j2\pi f_o t} = \cos(2\pi f_o t) + j\sin(2\pi f_o t)$ – не просто математическая абстракция. Мы можем генерировать $e^{j2\pi f_o t}$ в нашей лаборатории и передавать его в другую лабораторию. Для этого достаточно двух генераторов синусоидальных сигналов одинаковой частоты f_o. (Однако мы должны каким-то образом синхронизировать эти два генератора так, чтобы разность фаз генерируемых сигналов составляла ровно 90°.) Далее мы подсоединяем коаксиальные кабели к выходным разъемам генераторов и протягиваем эти кабели к месту назначения, пометив их надписями *cos* для косинусоидального сигнала и *sin* для синусоидального, в соответствии с рисунком 8.7.

А теперь мы предлагаем вам небольшую анкету из двух вопросов. Первый вопрос: что мы увидим в другой лаборатории на экране осциллоскопа, если подадим непрерывные действительные сигналы $\cos(2\pi f_o t)$ и $\sin(2\pi f_o t)$ и на входы каналов горизонтального и вертикального отклонения осциллоскопа соответственно? (Не забыв, естественно, переключить канал горизонтального отклонения на внешний вход.) Правильно, мы увидим, как электронный луч осциллоскопа вращается на экране по кругу против хода часовой стрелки.

Следующий вопрос: что мы увидим на экране осциллоскопа, если кабели помечены неправильно и наши сигналы поменялись местами? Мы снова увидим окружность, но луч будет вращаться по ходу часовой стрелки. Этот опыт был бы особенно наглядным, если бы мы установили частоту f_o, равную, например, 1 Гц.

Этот опыт имеет большое значение и помогает нам ответить на важный вопрос: «Как аппратурно реализуется оператор j, когда мы работаем с квадратурными сигналами?» Реализация оператора j заключатся в том, как мы интерпретируем два сигнала по отношению друг к другу. Мы должны рассматривать их как ортогональные, так что действительный сигнал $\cos(2\pi f_o t)$ представляет направление

восток-запад, а действительный сигнал $\sin(2\pi f_o t)$ представляет ортогональное ему направление север-юг. (Под ортогональностью я понимаю то, что угол между направлениями север-юг и восток-запад составляет ровно 90°.) Таким образом, в нашем примере с осциллоскопом оператор j реализуется просто порядком подключения наших кабелей к осциллоскопу. Действительный косинусоидальный сигнал управляет отклонением луча по горизонтали, а действительный синусоидальный сигнал управляет отклонением луча по вертикали. В результате формируется двухмерный квадратурный сигнал, значение которого представляется мгновенным положением точки на экране осциллоскопа. Пример, приведенный на рисунке 8.7, напоминает нам об одной важной характеристике квадратурных сигналов: в то время, как действительные сигналы могут передаваться по одному проводу, для передачи квадратурных (комплексных) сигналов всегда требуется два провода.

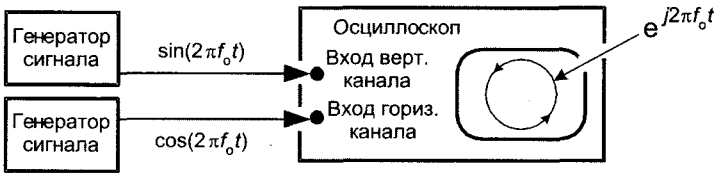


Рис. 8.7. Визуализация квадратурного сигнала с помощью осциллоскопа

Возвращаясь к рисунку 8.5 (b), спросим себя: «Чему равна векторная сумма этих двух фазоров, когда они вращаются в противоположных направлениях?» Подумайте об этом... Правильно, действительные части фазоров всегда суммируются с одинаковыми знаками, а мнимые части всегда взаимно уничтожаются. Это значит, что сумма фазоров $e^{j2\pi f_o t}$ и $e^{-j2\pi f_o t}$ всегда будет действительным числом. Именно на этом свойстве основаны реализации современных систем связи!

Чтобы подчеркнуть важность действительной суммы этих двух комплексных синусоид, мы нарисуем еще один рисунок. Рассмотрим сигнал на трехмерном рисунке 8.8, полученный как сумма двух комплексных фазоров $e^{j2\pi f_o t}/2$ и $e^{-j2\pi f_o t}/2$ половинной амплитуды, вращающихся в противоположных направлениях вокруг оси времени и движущихся вдоль нее.

Рассматривая эти фазоры, легко понять, почему косинусный сигнал можно приравнять сумме двух комплексных экспонент в соответствии с формулой

$$\cos(2\pi f_o t) = e^{j2\pi f_o t}/2 + e^{-j2\pi f_o t}/2 = (e^{j2\pi f_o t} + e^{-j2\pi f_o t})/2 . \qquad (8\text{-}13)$$

Соотношение (8-13) хорошо известно, его также называют одним из тождеств Эйлера. Мы могли бы вывести это тождество, решив уравнения (8-7) и (8-8) относительно $j\sin(\phi)$, приравняв полученные выражения и решив результирующее уравнение относительно $\cos(\phi)$. Мы могли бы проделать аналогичные выкладки и показать, что действительный синус также представляет собой сумму двух комплексных экспонент вида

$$\sin(2\pi f_o t) = (e^{j2\pi f_o t} - e^{-j2\pi f_o t})/(2j) = j(e^{-j2\pi f_o t} - e^{j2\pi f_o t})/2 . \qquad (8\text{-}14)$$

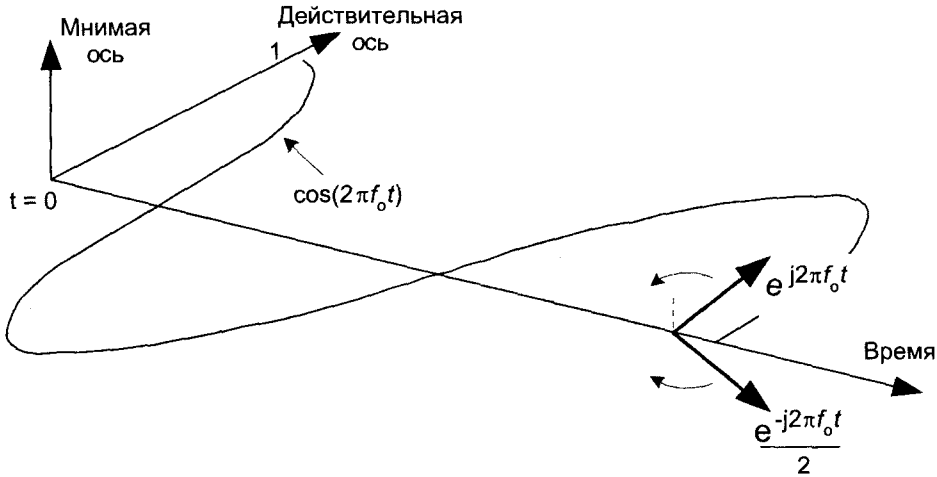


Рис. 8.8. Косинус, представленный суммой двух вращающихся комплексных фазоров

Посмотрите внимательно на выражения (8-13) и (8-14) — они представляют собой стандартные выражения для косинусоидального и синусоидального сигналов в комплексной записи и часто встречаются в литературе по квадратурным системам связи. Чтобы ваша голова не закружилась, подобно этим комплексным фазорам, осознайте, пожалуйста, что единственной целью рисунков 8.5 — 8.8 является обоснование комплексных выражений для синусоидального и косинусоидального сигналов, приведенных в (8-13) и (8-14). Эти два уравнения вместе с уравнениями (8-7) и (8-8) представляют собой Розеттский камень квадратурной обработки сигналов[1]. Теперь мы можем легко переводить синусоиды в комплексные экспоненты и наоборот.

Теперь отступим немного назад и напомним себе, что же мы делаем. Мы изучаем, как действительные сигналы, которые можно передавать по коаксиальному кабелю, оцифровывать и сохранять в памяти компьютера, могут быть представлены комплексными числами. Да, каждая из составных частей комплексного числа действительна, но мы рассматриваем эти части особым образом — как квадратуры.

8.4. Несколько мыслей по поводу отрицательной частоты

Для нас важно освоиться с понятием отрицательной частоты, т. к. оно существенно для понимания эффектов размножения спектра при периодической дискретизации, дискретного преобразования Фурье и различных методов обработки

[1] Розеттский камень представляет собой древнюю базальтовую плиту, найденную в Египте в 1799 году. На ней сохранился один и тот же текст, написанный на трех языках, два из которых — греческий и египетские иероглифы. Это позволило ученым расшифровать наконец древние иероглифы.

квадратурных сигналов, обсуждаемых в главе 9. Соглашение об отрицательной частоте служит как состоятельный и мощный инструмент в анализе сигналов. Использование отрицательной частоты становится обязательным, когда мы представляем *действительные сигналы*, такие как косинусы и синусы, в комплексной записи.

Трудности понимания идеи отрицательной частоты для некоторых, наверное, сродни тому оцепенению, которое ощущалось в кабинетах средневековых математиков, когда они впервые столкнулись с отрицательными числами. Вплоть до тринадцатого века отрицательные числа рассматривались как *фиктивные*, потому что числа обычно использовались для счета и измерения. Соответственно, до того времени отрицательные числа просто не имели смысла. В те времена допустимо было спросить: «Как вы можете держать в руке нечто, которое меньше, чем ничто?» Идея вычитания шести из четырех должна была казаться бессмысленной. Историки математики предполагают, что отрицательные числа впервые были введены в оборот в Италии. Как свидетельствует история, около 1200 года итальянский математик Леонардо Пизанский (более известный как Фибоначчи) работал над некой финансовой проблемой, единственное допустимое решение которой включало отрицательные числа. Отважный Лео писал: «В отношении этой проблемы я показал, что она неразрешима, если только не допустить, что первый человек имел долг.»

Так отрицательные числа появились на математическом горизонте и никогда больше с него не уходили.

Современные мужчины и женщины теперь могут понять, что с отрицательными числами связано направление. Направление назад от нуля в том смысле, что положительные числа показывают направление вперед от нуля. Например, отрицательные числа могут представлять температуру, измеряемую в градусах ниже нуля, время в минутах до текущего момента, если текущий момент принят за 0, или сумму денег, которую мы должны сборщику налогов, когда наш доход представляется положительной суммой. Таким образом, понятие отрицательного числа вполне состоятельно, если мы определяем его соответствующим образом. Как бы ни были для нас привычны отрицательные числа, отрицательная частота остается трудным и сомнительным понятием для многих инженеров [3, 4]. Автор однажды встретил статью в техническом журнале, которая утверждала: «т. к. отрицательные частоты не могут существовать...» Ладно, как и отрицательные числа, отрицательная частота представляет собой вполне состоятельное понятие, если мы правильно определяем ее по отношению к тому, что мы называем положительной частотой. Запомнив это, мы назовем сигнал $e^{j2\pi f_o t}$ на рисунке 8.5 *комплексной экспонентой положительной частоты*, потому что он вращается вокруг начала координат по кругу в положительном направлении с частотой f_o оборотов в секунду. Аналогично, сигнал $e^{-j2\pi f_o t}$ будем называть *комплексной экспонентой отрицательной частоты* из-за отрицательного направления его вращения.

Таким образом, мы определили отрицательную частоту в частотной области. Если мои коллеги по ЦОС хотят заявить, что отрицательная частота не существует во временной области, я не буду спорить. Однако наше определение отрицательной частоты в частотной области является однозначным, совместимым с действительными сигналами, очень полезным, и мы будем его придерживаться.

8.5. Квадратурные сигналы в частотной области

Теперь, когда нам известно достаточно о временной природе квадратурных сигналов, мы готовы взглянуть на их описание в частотной области. Будем использовать полное трехмерное изображение частотной области, так что ни одно из фазовых соотношений не останется невидимым. Рисунок 8.9 подсказывает нам правила представления комплексных экспонент в частотной области.

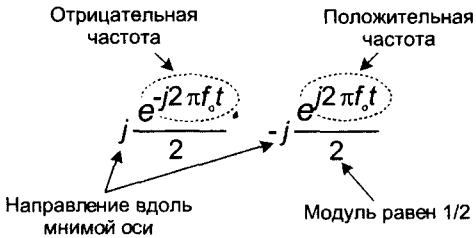


Рис. 8.9. Интерпретация комплексных экспонент в частотной области

Мы будем представлять одну экспоненту как узкий импульс, расположенный на частоте экспоненты. Кроме того, мы будем изображать фазовые соотношения между комплексными экспонентами на действительной и мнимой осях в частотной области. Чтобы показать эти фазовые соотношения, необходимо комплексное представление в частотной области. Приняв во внимание все это, посмотрим на рисунок 8.10.

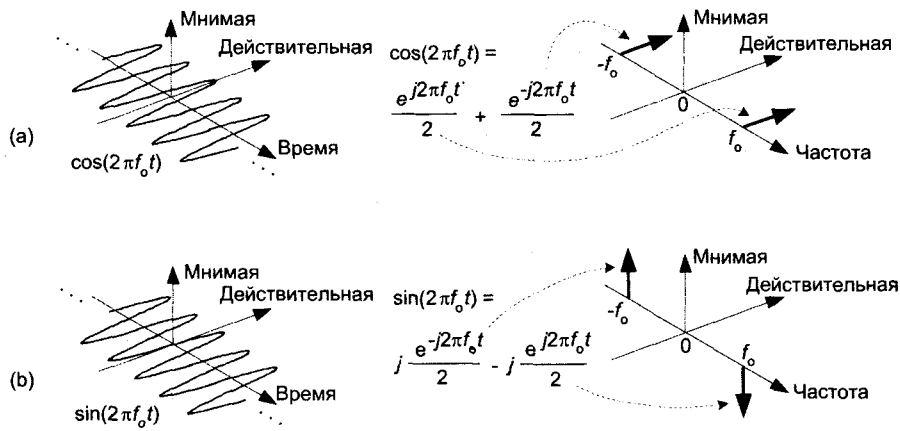


Рис. 8.10. Комплексное представление во временной и частотной областях: (a) косинусоидального колебания; (b) синусоидального колебания

Посмотрите, как действительные косинусоидальный и синусоидальный сигналы изображены в нашем комплексном представлении частотной области в правой части рисунка 8.10. Толстые стрелки справа на рисунке 8.10 не являются вращающимися фазорами, а представляют собой символы импульсов в частотной области, изображающие отдельные спектральные линии, соответствующие

отдельным комплексным экспонентам, таким как $e^{j2\pi f_o t}$. Направления, в которых показывают эти спектральные импульсы, определяют относительные фазы спектральных компонентов. Амплитуды этих спектральных импульсов равны 1/2. Обратите внимание на то, каким образом спектр $\cos(2\pi f_o t)$ оказывается чисто действительным. Это происходит потому, что $\cos(2\pi f_o t)$ является *четной* функцией времени, его значение при отрицательных значениях времени t равно значению при положительных t, или

$$\cos[2\pi f_o(-t)] = \cos(2\pi f_o t) \qquad (8\text{-}15)$$

Функция $\sin(2\pi f_o t)$, с другой стороны, имеет чисто мнимый спектр, потому что она является *нечетной*. Значение нечетной функции при отрицательном значении времени t равно ее значению при положительном t, взятому с обратным знаком, или

$$\sin[2\pi f_o(-t)] = -\sin(2\pi f_o t) \qquad (8\text{-}16)$$

Почему мы так много внимания уделяем этому 3-мерному представлению частотной области? Потому что оно представляет собой инструмент, который мы будем использовать для того, чтобы понять принципы генерации (модуляции) и детектирования (демодуляции) квадратурных сигналов в цифровых (и некоторых аналоговых) системах связи, а это одна из целей данной главы. Прежде чем перейти к ней, проверим приведенное частотное представление на небольшом примере.

Рисунок 8.11 представляет собой непосредственный пример того, как мы используем комплексную частотную область. Мы начинаем с действительного синусоидального сигнала, умножаем его на j, а затем прибавляем его к действительному косинусоидальному сигналу той же частоты. В результате получаем одну комплексную экспоненту $e^{j2\pi f_o t}$, что графически иллюстрирует тождество Эйлера, которое мы вывели аналитически в (8-7).

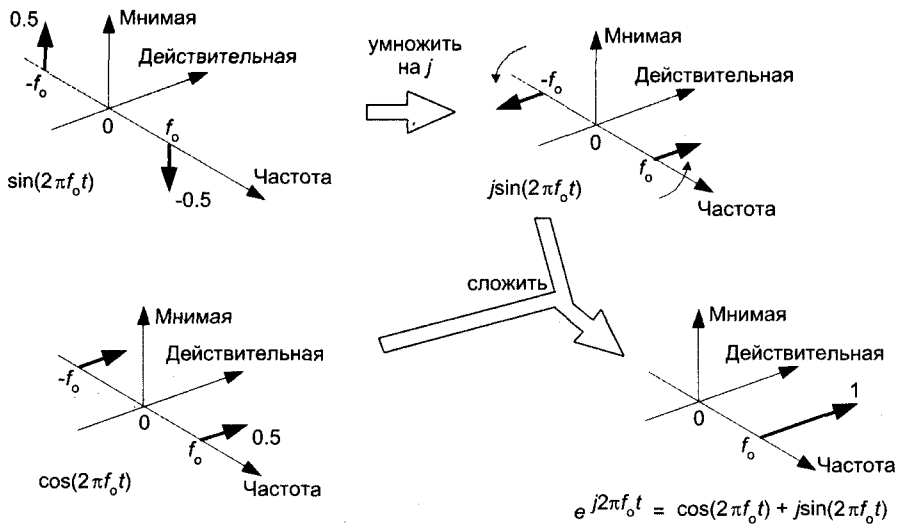


Рис. 8.11. Изображение тождества Эйлера $e^{j2\pi f_o t} = \cos(2\pi f_o t) + j\sin(2\pi f_o t)$ в комплексной частотной области

На частотной оси отрицательные частоты проявляются как спектральные импульсы, расположенные в точках $-2\pi f_o$ радиан/с. Этот рисунок показывает, какую цену мы платим: когда мы используем комплексную запись, общие комплексные экспоненты $e^{j2\pi ft}$ и $e^{-j2\pi ft}$ представляют собой фундаментальные составляющие действительных синусоид $\sin(2\pi ft)$ или $\cos(2\pi ft)$. Это объясняется тем, что как $\sin(2\pi ft)$, так и $\cos(2\pi ft)$ образуются из компонентов $e^{j2\pi ft}$ и $e^{-j2\pi ft}$. Если бы потребовалось вычислить дискретное преобразование Фурье от набора дискретных во времени отсчетов синусоидального сигнала $\sin(2\pi f_o t)$, косинусоидального сигнала $\cos(2\pi f_o t)$ или комплексной синусоиды $e^{j2\pi f_o t}$ и построить графики комплексных результатов, вы получили бы в точности такие же узкие импульсы в частотной области, какие изображены на рисунке 8.11.

Если вы поняли обозначения и операции, изображенные на рисунке 8.11, похвалите себя — вы знаете уже довольно много о природе и математическом описании квадратурных сигналов.

8.6. Полосовые квадратурные сигналы в частотной области

В квадратурной обработке принято называть действительную часть спектра *синфазной составляющей*, а мнимую часть спектра — *квадратурной составляющей*. Сигналы, комплексные спектры которых приведены на рисунках 8-12 (a), (b) и (c) действительны, и во временной области они могут быть представлены как комплексные значения, действительная часть которых отлична от 0, а мнимая тождественно равна 0. Никто не заставляет нас использовать комплексное представление для таких сигналов во временной области — эти сигналы просто действительные.

Действительные сигналы всегда содержат спектральные компоненты с положительными и отрицательными частотами. Для любого действительного сигнала компоненты с положительными и отрицательными частотами его синфазной (действительной) составляющей всегда обладают четной симметрией относительно нулевой частоты. Это значит, что компоненты синфазной части с положительной и с отрицательной частотой представляют собой зеркальное отражение друг друга. Компоненты же квадратурной (мнимой) составляющей с положительной и с отрицательной частотой всегда имеют противоположные знаки. Это значит, что фазовый угол любого данного квадратурного компонента с положительной частотой равен фазовому углу соответствующего квадратурного компонента с отрицательной частотой, взятому с противоположным знаком, как показано тонкими сплошными стрелками на рисунке 8.12 (a). Эта *сопряженная симметрия* является неотъемлемым свойством действительных сигналов и становится очевидной, когда их спектр представляется в комплексной записи.

Комплекснозначный сигнал, спектр которого может иметь вид, показанный на рисунке 8.12 (d), не обязательно должен обладать описанной сопряженной симметрией. Мы будем называть такой комплексный сигнал *аналитическим сигналом*, показывая, что он не содержит спектральных компонентов с отрицательными частотами.

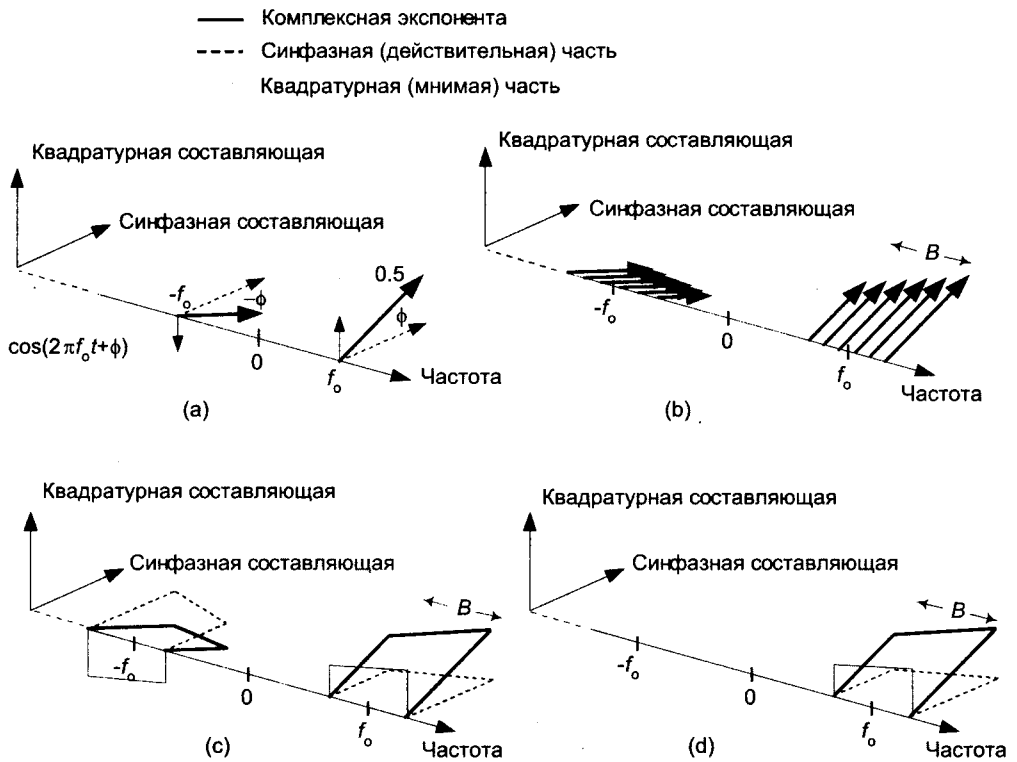


Рис. 8.12. Квадратурное представление сигналов: (a) действительной синусоиды $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$; (b) действительного полосового сигнала, содержащего шесть синусоид в полосе B Гц; (c) действительного полосового сигнала, содержащего бесконечное количество синусоид в полосе B Гц; (d) комплексного полосового сигнала в полосе B Гц

Напомним себе еще раз: жирные стрелки на рисунках 8.12 (a) и (b) не являются вращающимися фазорами. Они представляют собой импульсы в частотной области, изображающие отдельные комплексные экспоненты $e^{j2\pi ft}$. Направления, указываемые стрелками, показывают относительные фазы спектральных компонентов.

Существует один важный принцип, о котором следует помнить, чтобы двигаться дальше. Умножение сигнала на комплексную экспоненту $e^{j2\pi f_0 t}$, которое мы называем *квадратурным смешиванием* (его также называют *комплексным смешиванием*), сдвигает спектр сигнала вверх по частоте на f_0 Гц, как показано на рисунках 8.13 (a) и (b). Аналогично, умножение сигнала на $e^{-j2\pi f_0 t}$ (которое также называют *комплексным понижающим преобразованием* или *переносом в основную полосу*) сдвигает спектр сигнала вниз так, что центральная частота становится равной 0 Гц, как показано на рисунке 8.13 (c). Процесс квадратурного смешивания используется во многих применениях ЦОС и в самых современных системах связи.

Все наши рассуждения о квадратурных сигналах до сих пор относились к непрерывным сигналам, но описанные принципы в равной мере применимы и к дискретным сигналам. Рассмотрим влияние комплексного понижающего преобразования на спектр дискретного сигнала.

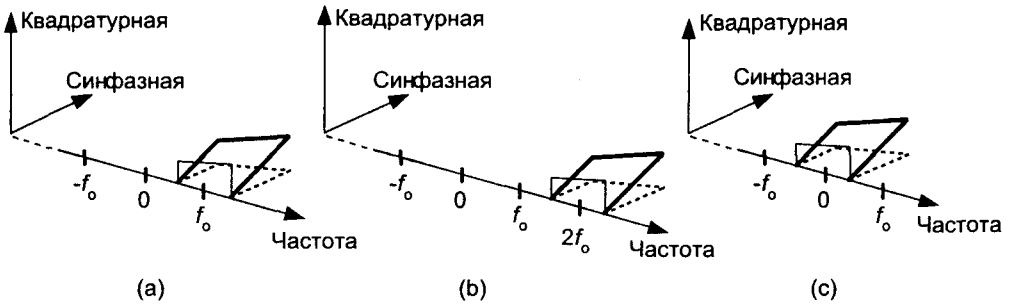


Рис. 8.13. Квадратурное смешивание полосовых сигналов: (a) спектр комплексного сигнала $x(t)$; (b) спектр $x(t)e^{j2\pi f_o t}$; (c) спектр $x(t)e^{-j2\pi f_o t}$

8.7. Комплексное понижающее преобразование

Комплексное понижающее преобразование дискретного сигнала представляет собой простой процесс, и описывать его лучше всего на примере. Рассмотрим действительную дискретную последовательность $x(n)$, имеющую модуль спектра $|X(m)|$, ненулевые отсчеты которого показаны как черные точки на рисунке 8.14 (a).

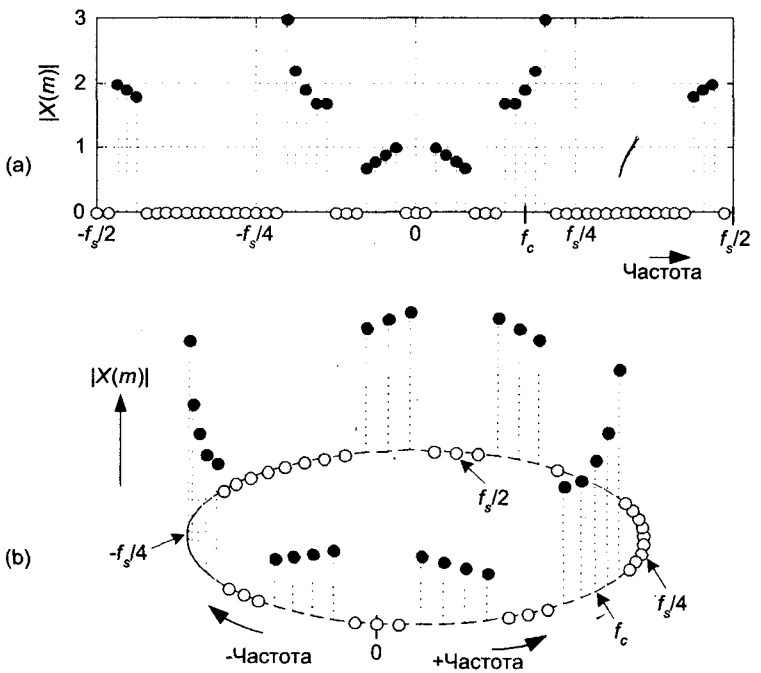


Рис. 8.14. Дискретный спектр $X(m)$ действительной последовательности: (a) традиционное изображение; (b) изображение циклической частотной оси

Вследствие периодичности спектра дискретного сигнала, которую мы обсуждали в разделах 2.1 и 3.17 (а также вследствие того, что частотная ось БПФ лежит на единичной окружности в z-плоскости, о чем шла речь в разделе 6.3), мы можем изобразить спектр $|X(m)|$ в виде трехмерного циклического графика, приведенного на рисунке 8.14 (b). На этом рисунке мы свернули линейную ось частот, изображенную на рисунке 8.14 (a), в окружность, длина которой равна частоте дискретизации f_s, таким образом, что частотам $f_s/2$ и $-f_s/2$ соответствует одна и та же точка на циклической оси.

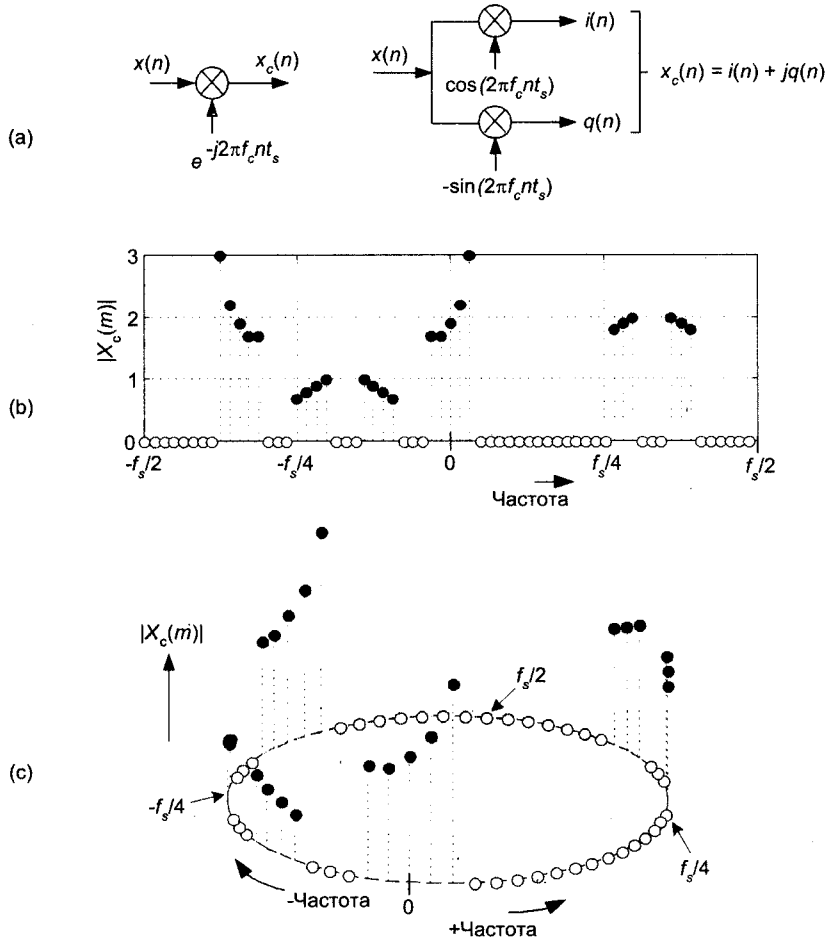


Рис. 8.15. Дискретный спектр $|X_C(m)|$ временной последовательности, подвергнутой понижающему преобразованию: (a) условные обозначения понижающего преобразования; (b) традиционное изображение частотной оси; (c) циклическое изображение частотной оси

Если $x(n)$ — действительная последовательность, содержащая N отсчетов, ее амплитудный спектр $|X(m)|$ симметричен относительно нулевой частоты. Если мы теперь выполним комплексное понижающее преобразование (умножив $x(n)$ на $e^{-j2\pi f_c nt_s}$, где

$t_s=1/f_s$, используя любую из эквивалентных схем, показанных на рисунке 8.15 (a)), результатом будет комплексная последовательность $x_c(n) = i(n) + jq(n)$, спектр которой показан на рисунке 8.15 (b). Знак минус в экспоненте $e^{-j2\pi f_c nt_s}$ приводит к сдвигу спектра $|X(m)|$ на f_c Гц в направлении отрицательных частот. Конечно, т. к. последовательность $x_c(n)$ комплексная, $|X_c(m)|$ не обладает симметрией относительно нулевой частоты. Циклическое изображение $|X_c(m)|$ приведено на рисунке 8.15 (c). Говорят, что составляющие $i(n)$ и $q(n)$ последовательности $x_c(n)$ *ортогональны*, и это значит, что они независимы и не влияют друг на друга, при этом выполняется следующее условие:

$$\sum_{n=0}^{N-1} i(n)q(n) = 0. \qquad (8\text{-}17)$$

Рисунки 8.14 и 8.15 приведены,чтобы показать, как перенос по частоте с помощью комплексного понижающего преобразования приводит к завороту спектральных компонентов вокруг точки $f_s/2$.

Рисунок 8.15 (a) демонстрирует метод понижающего преобразования действительной временной последовательности $x(n)$. Для полноты рисунок 8.16 показывает, что для переноса комплексной временной последовательности $x_c(n) = i(n)+jq(n)$ вверх или вниз по частоте на f_c Гц требуется комплексный умножитель.

Этот комплексный умножитель вычисляет

$$i'(n) + jq'(n) = x_c(n)e^{\pm j2\pi f_c nt_s} = \qquad (8\text{-}18)$$

$$= [i(n) + jq(n)][\cos(2\pi f_c nt_s) \pm j\sin(2\pi f_c nt_s)]$$

Если вы используете этот умножитель, не забывайте о знаке минус в верхнем сумматоре на рисунке 8.16. (Эту ошибку легко допустить. Поверьте мне.)

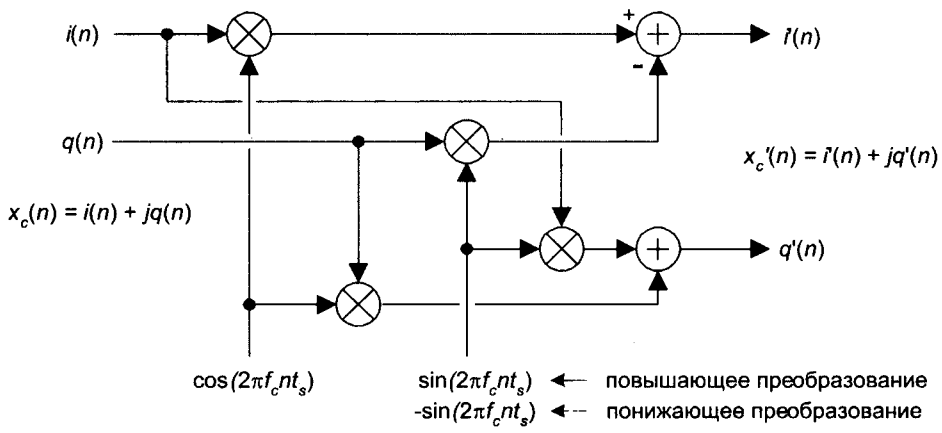


Рис. 8.16. Комплексный умножитель, используемый для повышающего и понижающего преобразований

8.8. Пример комплексного понижающего преобразования

Мы можем использовать все, что узнали до сих пор о квадратурных сигналах, исследуя процесс квадратурной дискретизации. Квадратурая дискретизация — это процесс оцифровки непрерывного (аналогового) полосового сигнала с одновременным понижающим преобразованием его спектра, в результате которого центральная частота спектра сигнала становится равной 0 Гц. Посмотрим, как работает этот популярный процесс, на примере непрерывного полосового сигнала, ширина спектра которого равна B, а центр спектра находится на несущей частоте, равной f_c Гц в соответствии с рисунком 8.17 (a).

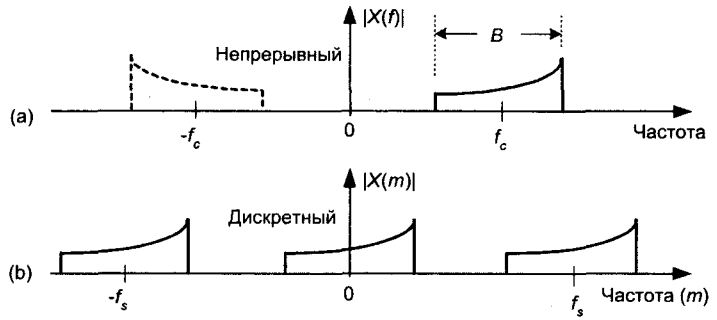


Рис. 8.17. Спектр квадратурно-дискретизированного сигнала до и после преобразования

Наша цель при квадратурной дискретизации состоит в том, чтобы получить оцифрованную версию аналогового полосового сигнала, но мы хотим также, чтобы центральная частота спектра оцифрованного сигнала была равна 0 Гц, а не f_c Гц, так, как показано на рисунке 8.17 (b). То есть мы хотим смешать сигнал с $e^{-j2\pi f_c t}$, чтобы выполнить комплексное понижающее преобразование. Частота f_s представляет собой частоту дискретизации аналого-цифрового преобразователя в отсчетах в секунду. На рисунке 8.17 (b) мы показываем размноженный спектр, чтобы напомнить себе о том, что при аналого-цифровом преобразовании имеет место это явление.

Мы можем решить поставленную задачу с помощью схемы блока квадратурной дискретизации (известного также как *квадратурный демодулятор*), приведенной на рисунке 8.18 (a). Устройство, состоящее из двух синусоидальных генераторов, дающих сигналы с разностью фаз 90°, часто называют *квадратурным генератором*. Прежде всего, исследуем синфазную (верхнюю) часть квадратурного дискретизатора. Если входной сигнал $x_{bp}(t)$ имеет спектр, показанный на рисунке 8.18 (b), спектр выходного сигнала верхнего смесителя будет выглядеть в соответствии с рисунком 8.18 (c).

Присутствующие на рисунке 8.18 экспоненты $e^{-j2\pi f_c t}$ и $e^{j2\pi f_c t}$ напоминают нам в соответствии с (8-13), что комплексные экспоненты, образующие действительный косинус, приводят к раздвоению и смещению каждой копии спектра $|X_{bp}(f)|$, давая в результате спектр $|X_i(f)|$. При этом происходит уменьшение модуля спектра $|X_i(f)|$ в 2 раза, но сейчас нас это не волнует. На рисунке 8.18 (d) показан спектр выходного сигнала фильтра нижних частот (ФНЧ) синфазного канала.

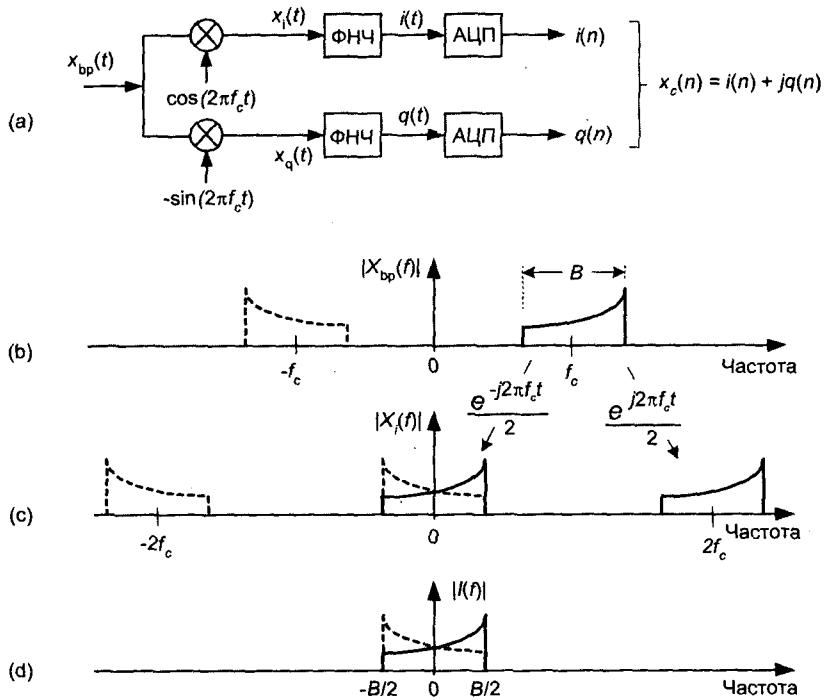


Рис. 8.18. Квадратурная дискретизация: (a) блок-схема; (b) спектр входного сигнала; (c) спектр выходного сигнала синфазного смесителя; (d) спектр выходного сигнала синфазного фильтра

Точно так же рисунок 8.19 показывает, как мы получаем отфильтрованную непрерывную квадратурную составляющую (нижняя часть схемы) требуемого комплексного сигнала путем смешивания $x_{bp}(t)$ с $-\sin(2\pi f_c t)$. Из (8-14) мы знаем, что действительный $-\sin(2\pi f_c t)$ образуется из двух комплексных экспонент $e^{j2\pi f_c t}$ и $-e^{-j2\pi f_c t}$. Знак минус в члене $-e^{-j2\pi f_c t}$ учитывает то, что переносимый вниз по частоте спектр в $|X_q(f)|$ сдвинут по фазе на 180° относительно спектра, переносимого вверх.

Это описание квадратурной дискретизации можно сделать более наглядным, если посмотреть на него в трехмерном пространстве, как на рисунке 8.20. Здесь множитель $+j$ поворачивает «чисто мнимый» $Q(f)$ на 90°, делая его «чисто действительным». Величина $jQ(f)$ прибавляется затем к $I(f)$, давая спектр комплексного непрерывного сигнала $x(t) = i(t) + jq(t)$. Подавая этот сигнал на два АЦП, мы, наконец, получаем требуемый дискретный сигнал $x_c(n) = i(n) + jq(n)$, изображенный на рисунке 8.18 (a) и имеющий спектр, показанный на рисунке 8.17 (b).

Такая схема квадратурной дискретизации обладает рядом достоинств, некоторые из которых приведены ниже:

- каждый АЦП работает на частоте, равной половине частоты, необходимой при обычной дискретизации действительных сигналов;
- часто работа на пониженной частоте позволяет снизить потребляемую мощность;
- при заданной частоте дискретизации f_s мы можем обрабатывать более широкополосные сигналы;

- квадратурные последовательности делают использование БПФ более эффективным благодаря охвату более широкого диапазона частот;
- квадратурная дискретизация облегчает измерение мгновенных амплитуд и фаз сигнала в процессе демодуляции;
- зная мгновенные фазы сигналов, мы можем выполнять когерентную обработку.

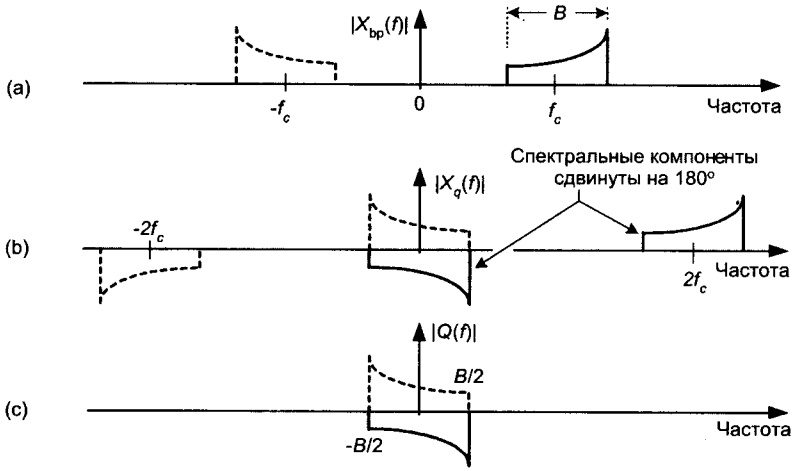


Рис. 8.19. Спектры сигналов в квадратурном (нижнем) канале блок-схемы

В то время как квадратурный дискретизатор, изображенный на рисунке 8.18 (а), выполняет комплексное понижающее преобразование, легко реализовать комплексное повышающее преобразование, просто заменив последовательность $x_c(n)$ комплексно сопряженной последовательностью, что, по существу, приводит к зеркальному отображению спектра последовательности $x_c(n)$ относительно нулевой частоты, как показано на рисунке 8.21.

8.9. Альтернативый метод понижающего преобразования

Метод квадратурной дискретизации с использованием комплексного понижающего преобразования, изображенный на рисунке 8.18 (а) хорошо работает на бумаге, но на практике на высоких частотах и для широкополосных сигналов трудно выдержать точную разность фаз в 90°. Обычно ошибка составляет один или два градуса. В идеале нам нужны точно согласованные по фазовым характеристикам коаксиальные кабели, два генератора, сигналы которых разнесены по фазе точно на 90°, два идеальных смесителя с идентичными характеристиками и полным отсутствием постоянной составляющей на выходе, два аналоговых фильтра нижних частот с идентичными амплитудно-частотными и фазо-частотными характеристиками и два АЦП с идентичными характеристиками. (Как это ни грустно, но таких электронных компонентов у нас нет.) К счастью, существует более простой для реализации метод квадратурной дискретизации [5].

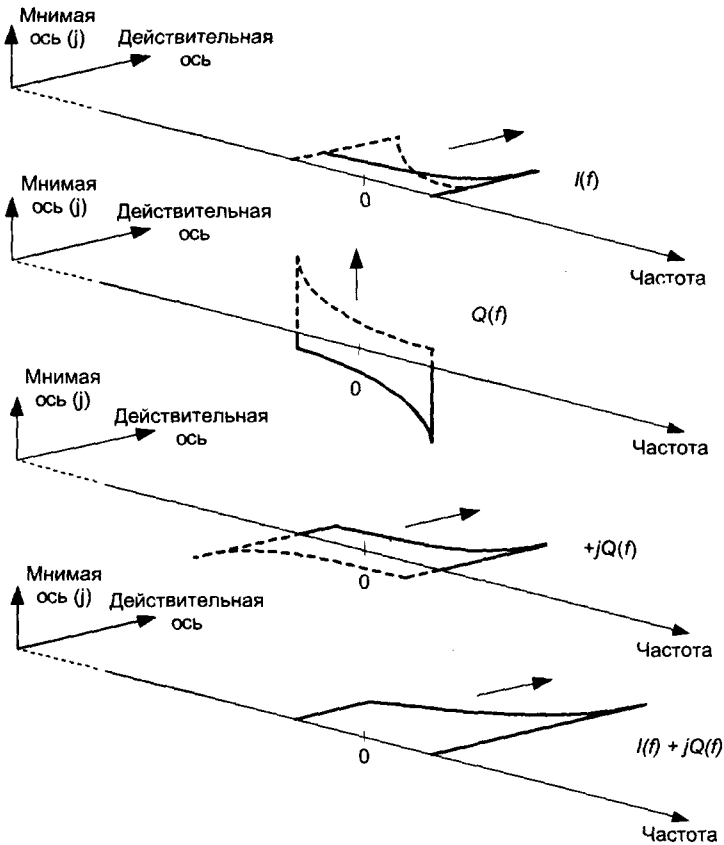


Рис. 8.20. Трехмерное изображение процесса объединения спектров $I(f)$ и $Q(f)$ в спектр $I(f) + jQ(f)$

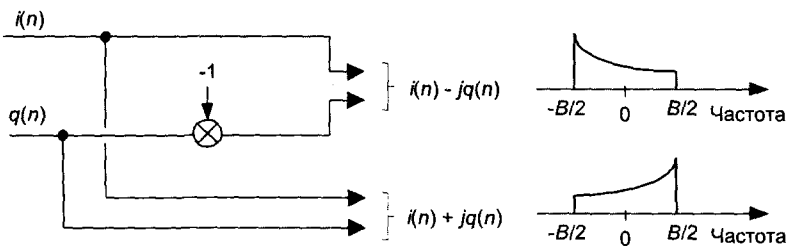


Рис. 8.21. Использование операции комплексного сопряжения для управления ориентацией спектра

Рассмотрим процесс, изображенный на рисунке 8.22, где аналоговый сигнал $x_{bp}(t)$ сначала оцифровывается, а затем подвергается смешиванию и фильтрации, которые выполняются уже в цифровой форме. Такая *квадратурная дискретизация с применением цифрового смесителя* полностью устраняет проблемы, связанные с реализацией метода квадратурной дискретизации, изображенного на рисунке 8.18 (а) и избавляет нас от одного из АЦП.

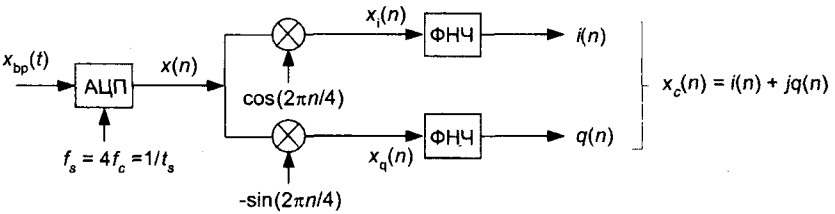


Рис. 8.22. Квадратурная дискретизация с цифровым смешиванием

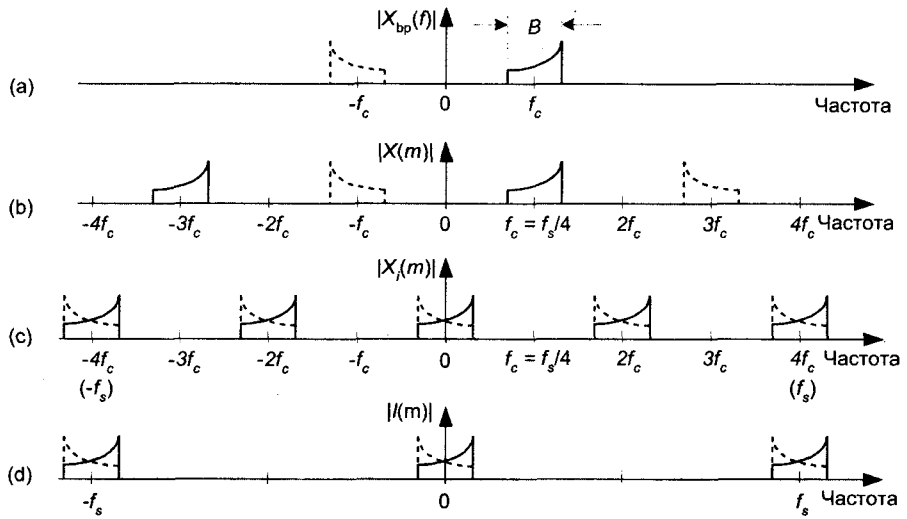


Рис. 8.23. Спектры при квадратурной дискретизации с цифровым смешиванием в синфазном (верхнем) канале

На рисунке 8.23 показаны спектры в синфазном канале квадратурного дискретизатора с цифровым смесителем. Обратите внимание на подобие аналогового $|I(f)|$ на рисунке 8.18 (d) и дискретного $|I(m)|$ на рисунке 8.23 (d). Приятной особенностью этого процесса является то, что при $f_c = f_s/4$ выходы генераторов косинуса и синуса представляют собой последовательности из четырех значений $\cos(\pi n/2) = 1, 0, -1, 0$ и $-\sin(\pi n/2) = 0, -1, 0, 1$, которые периодически повторяются. (Подробности об этих особых опорных последовательностях см. в разделе 13.1.) Для переноса спектра на нулевую частоту в действительности никакой смеситель (или умножитель) не нужен! После низкочастотной фильтрации последовательности $i(n)$ и $q(n)$ обычно прореживаются в два раза, чтобы уменьшить поток данных для последующей обработки. (Тема прореживания рассматривается в разделе 10.1.)

При всех присущих ему преимуществах вы должны были обратить внимание на один недостаток этого метода квадратурной дискретизации с цифровым смешиванием: частота дискретизации f_s должна быть ровно в четыре раза больше центральной частоты сигнала f_c. На практике значение $4f_c$ может оказаться обескураживающе большим. К счастью, мы можем воспользоваться особенностями полосовой дискретизации для снижения частоты дискретизации. Вот вам пример: рассмотрим действительный аналоговый сигнал, центральная частота которого составляет 50 МГц, показанный на рисунке 8.24 (a). Вместо того чтобы

дискретизировать этот сигнал с частотой 200 МГц, мы используем полосовую дискретизацию и в соответствии с (2-13) при $m_{odd} = 5$ установим частоту дискретизации, равную 40 МГц. Это приводит к тому, что одна из копий спектра дискретного сигнала $|X(m)|$ переносится на частоту $f_s/4$, как показано на рисунке 8.24 (b), чего мы и добивались. Выходной сигнал АЦП $x(n)$ теперь готов для комплексного понижающего преобразования на $f_s/4$ (10 МГц) и цифровой фильтрации.

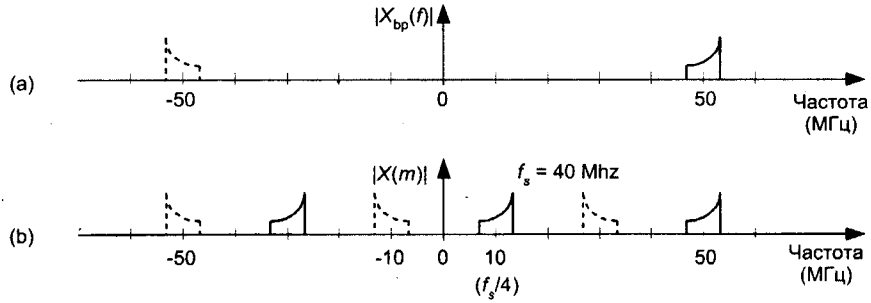


Рис. 8.24. Эффекты полосовой дискретизации, используемые для понижения частоты дискретизации при квадратурной дискретизации с цифровым смешиванием: (a) спектр входного аналогового сигнала; (b) спектр на выходе АЦП

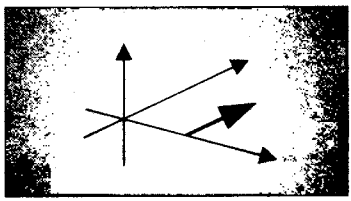
В разделе 13.1 описан остроумный прием снижения вычислительной сложности фильтров нижних частот, использованных на рисунке 8.22, когда этот метод понижающего преобразования на $f_s/4$ используется вместе с прореживанием в два раза.

Библиография

1. Struik, D. *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications, New York, 1967 (неоднократно издавались русские переводы, например: Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. М. Наука, 1990, 256 с.).
2. Bergamini, D. *Mathematics*, Life Science Library, Time Inc., New York, 1963.
3. Lewis.L. J., et al. *Linear Systems Analysis*, McGraw-Hill Inc., New York, 1969, p. 193.
4. Schwartz, M. *Information, Transmission, Modulation, and Noise*, McGraw-Hill Inc., New York, 1970, p. 35.
5. Considine, V. «Digital Complex Sampling», *Electronics Letters*, 19, August 4,1983.

Глава 9

Дискретное преобразование Гильберта



Дискретное преобразование Гильберта представляет собой процедуру, используемую для генерации комплексных сигналов из действительных сигналов. Использование комплексных сигналов вместо действительных упрощает многие операции обработки сигналов и повышает их эффективность. Если вы читали о дискретном преобразовании Гильберта в книгах по ЦОС, вы, вероятно, с трудом продирались сквозь математические описания аналитических функций с ограничениями на их z-преобразования в областях сходимости и, возможно, встречали интегральную теорему Коши, используемую в определении преобразования Гильберта[1]. В действительности дискретное преобразование Гильберта не так сложно, как кажется в первый раз, и в этой главе делается попытка подтвердить данное заявление.

Здесь мы вводим преобразование Гильберта с практической точки зрения, объясняем математические основы его описания и показываем, как оно используется в системах ЦОС. В дополнение к изложению некоторых аналитических выкладок, отсутствующих в ряде учебников, мы покажем характеристики преобразования во временной и частотной областях с упором на физический смысл квадратурных (комплексных) сигналов, связанных с применениями преобразования Гильберта. В конце приводятся примеры проектирования нерекурсивного преобразователя Гильберта и примеры генерации комплексных, так называемых аналитических, сигналов. (Если вы не слишком сведущи в описании и поведении комплексных сигналов, здесь было бы полезно просмотреть главу 8.)

[1] Преобразование Гильберта названо в честь великого немецкого математика Давида Гильберта (1862-1943). На его могиле в Геттингене, Германия, написано «Wir mussen wissen, wir werden wissen.» (Нам необходимо знать, мы будем знать.)

9.1. Определение преобразования Гильберта

Как показано на рисунке 9.1, преобразование Гильберта (ПГ) — это математическая процедура, выполняемая над действительным сигналом $x_r(t)$ и дающая новый действительный сигнал $x_{ht}(t)$.

При этом наша цель состоит в том, чтобы $x_{ht}(t)$ представлял собой сдвинутую по фазе на 90° версию сигнала $x_r(t)$. Итак, прежде чем двигаться дальше, убедимся в том, что мы понимаем обозначения, использованные на рисунке 9.1. Переменные определены следующим образом:

- $x_r(t)$ = действительный непрерывный входной сигнал во временной области;
- $h(t)$ = импульсная характеристика преобразователя Гильберта;
- $x_{ht}(t)$= ПГ $x_r(t)$, ($x_{ht}(t)$ — тоже действительный сигнал во временной области);
- $X_r(\omega)$ = преобразование Фурье действительного входного сигнала $x_r(t)$;
- $H(\omega)$ = частотная характеристика (комплексная) преобразователя Гильберта;
- $X_{ht}(\omega)$ = преобразование Фурье выходного сигнала $x_{ht}(t)$;
- ω = непрерывная частота в радианах в секунду;
- t = непрерывное время в секундах.

Мы покажем, что $x_{ht}(t) = h(t)*x_r(t)$, где символ $*$ обозначает свертку. Кроме того, мы можем определить спектр $x_{ht}(t)$ как $X_{ht}(\omega) = H(\omega)X_r(\omega)$. (Конечно, эти соотношения делают ПГ похожим на фильтр, не так ли? Мы поразмышляем об этом позже в данной главе.)

Самое короткое описание того, чем отличается новый сигнал $x_{ht}(t)$, ПГ сигнала $x_r(t)$, от исходного сигнала $x_r(t)$, можно получить, связав преобразования Фурье этих сигналов $X_r(\omega)$ и $X_{ht}(\omega)$. Выражая это описание словами, мы можем сказать, что все компоненты $x_{ht}(t)$ с положительными частотами равны компонентам $x_r(t)$ с положительными частотами, сдвинутым по фазе на −90°. А все компоненты $x_{ht}(t)$ с отрицательными частотами равны компонентам $x_r(t)$ с отрицательными частотами, сдвинутым по фазе на +90°. Напомним:

$$X_{ht}(\omega) = H(\omega)X_r(\omega)\,, \qquad (9\text{-}1)$$

где $H(\omega) = -j$ для положительных частот и $H(\omega) = j$ для отрицательных частот. Отличная от 0 мнимая часть $H(\omega)$ показана на рисунке 9.2 (a).

Чтобы полностью описать комплексную $H(\omega)$, на рисунке 9.2 (b) мы представляем ее плавающей в трехмерном пространстве. Толстая линия изображает рассматриваемую комплексную $H(\omega)$. В правой части расположена вертикальная плоскость, на которую мы можем проецировать мнимую часть $H(\omega)$.

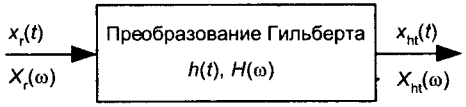


Рис. 9.1. Обозначение, используемое для определения непрерывного преобразования Гильберта

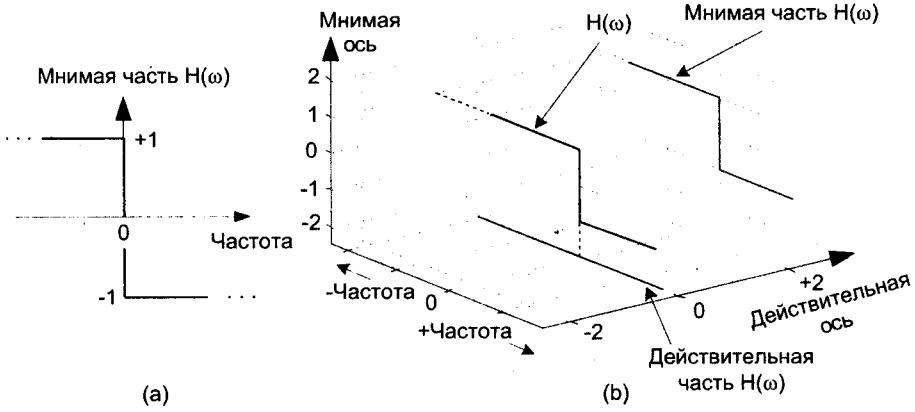


Рис. 9.2. Комплексная частотная характеристика $H(\omega)$

В нижней части рисунка 9.2 (b) показана горизонтальная плоскость, на которую мы можем проецировать действительную часть $H(\omega)$. В терминах декартовых координат мы говорим, что $H(\omega) = 0 + j1$ для отрицательных частот и $H(\omega) = 0 - j1$ для положительных частот. (Мы вводим трехмерные оси на рисунке 9.2 (b) потому, что позже мы будем использовать их для рассмотрения других комплексных функций в частотной области.)

Чтобы привести простой пример ПГ и укрепить нашу графическую точку зрения, мы показываем на рисунке 9.3 (a) трехмерные представления действительного косинусоидального сигнала $\cos(\omega t)$ во временной и частотной областях. Рисунок 9.3 (b) показывает, что ПГ $\cos(\omega t)$ дает синусоидальный сигнал $\sin(\omega t)$.

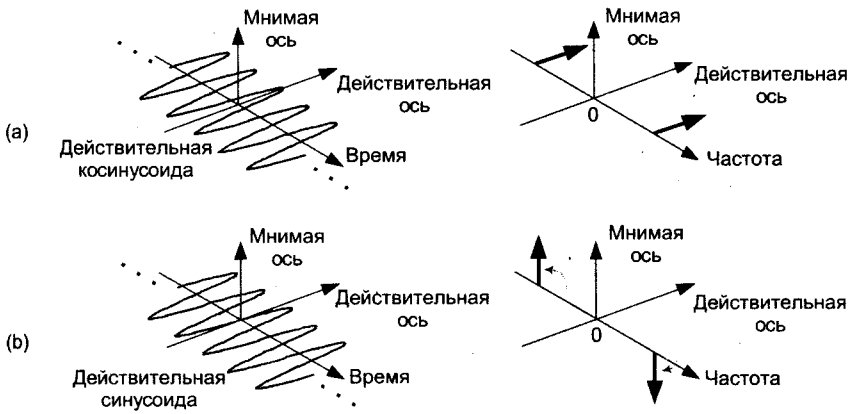


Рис. 9.3. Преобразование Гильберта: (a) $\cos(\omega t)$; (b) его преобразование $\sin(\omega t)$

Комплексный спектр в правой части рисунка 9.3 (b) демонстрирует, как ПГ поворачивает компонент косинусоидального сигнала с положительной частотой на $-j$, а его компонент с отрицательной частотой – на $+j$. Вы можете убедиться в том, что по нашему определению операция умножения на $+j$ есть просто поворот спектрального компонента на +90° против часовой стрелки вокруг частотной оси. (Длина вектора спектрального компонента равна половине амплитуды исходного косинусоидального сигнала.) Мы предполагаем, что синусоиды в правой части рисунка 9.3 существуют для всех значений времени, и это позволяет нам изображать их спектр в виде бесконечно узких импульсов в частотной области.

Теперь, когда мы определили частотную характеристику ПГ, новичок имеет полное право спросить: «Зачем кому-то понадобилась такая частотная характеристика, как эта причудливая $H(\omega)$ на рисунке 9.2 (b)?»

9.2. Почему нас так занимает преобразование Гильберта?

Ответ: нам необходимо понимать ПГ потому, что оно оказывается полезным во множестве приложений обработки комплексных (квадратурных) сигналов. Даже простой поиск в Интернете выявляет методы обработки сигналов, связанные с ПГ, применяющиеся в следующих областях:

- квадратурная модуляция и демодуляция (связь);
- автоматическая регулировка усиления (АРУ);
- анализ двух- и трехмерных комплексных сигналов;
- построение изображений в медицине, анализ сейсмических данных и океанических волн;
- оценка мгновенной частоты;
- обработка сигналов в радарах/сонарах и анализ сигналов во временной области с использованием вейвлетов;
- измерение задержки приема сигналов;
- приемники телевидения высокой четкости (HDTV);
- акустические системы, комнатная акустика и анализ механических вибраций;
- сжатие аудиосигналов и цветных изображений;
- анализ нелинейных и нестационарных систем.

Во всех этих приложениях ПГ используется либо для генерации, либо для измерения комплексных сигналов во временной области, и именно здесь проявляется сила ПГ. ПГ дает нам в буквальном смысле другое измерение возможностей обработки сигналов, т. к. мы переходим от двухмерных действительных сигналов к трехмерным комплексным сигналам. Уясним, как это делается.

Рассмотрим несколько математических определений. Если мы имеем действительный сигнал $x_r(t)$, мы можем связать с ним некоторый комплексный сигнал $x_c(t)$, определяемый как

$$x_c(t) = x_r(t) + jx_i(t)\,. \qquad (9\text{-}2)$$

Комплексный сигнал $x_c(t)$ известен как *аналитический сигнал* (потому что он не содержит спектральных компонентов с отрицательными частотами), а его действительная часть равна исходному действительному сигналу $x_r(t)$. Ключевым моментом здесь является то, что мнимая часть $x_i(t)$ сигнала $x_c(t)$ есть ПГ исходного сигнала $x_r(t)$, как показано на рисунке 9.4.

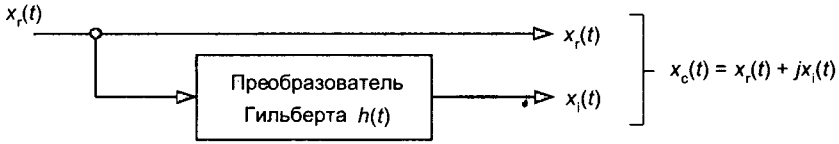


Рис. 9.4. Функциональное соотношение между $x_c(t)$ и $x_r(t)$

Как мы вскоре увидим, во многих практических ситуациях работа с $x_c(t)$ оказывается более простой и понятной, чем работа с исходным сигналом $x_r(t)$. Прежде чем мы увидим, почему это так, продолжим исследование $x_c(t)$ и попытаемся придать ему некоторый физический смысл. Рассмотрим действительный сигнал $x_r(t) = \cos(\omega_o t)$, точнее четыре его периода, и его ПГ $x_i(t)$, представляющее собой синусоидальный сигнал, изображенные на рисунке 9.5. Аналитический сигнал $x_c(t)$ изображен толстой спиралью, ориентированной в соответствии с правилом буравчика.

Мы можем описать $x_c(t)$ как комплексную экспоненту, используя одно из тождеств Эйлера:

$$x_c(t) = x_r(t) + jx_i(t) = \cos(\omega_o t) + j\sin(\omega_o t) = e^{j\omega_o t}\,. \qquad (9\text{-}3)$$

Спектры этих сигналов показаны на рисунке 9.6. Обратите внимание на три особенности рисунка 9.6. Во-первых, в соответствии с (9-3), если мы повернем $X_i(\omega)$ на +90° против часовой стрелки ($+j$) и прибавим результат к $X_r(\omega)$, мы получим $X_c(\omega) = X_r(\omega) + jX_i(\omega)$. Во-вторых, заметьте, что модуль $X_c(\omega)$ равен удвоенному модулю компонентов $X_r(\omega)$. В-третьих, обратите внимание на то, что $X_c(\omega)$ равен нулю на всех отрицательных частотах. Именно благодаря тому, что отсутствуют спектральные компоненты с отрицательными частотами, $x_c(t)$ назван *аналитическим сигналом*. Некоторые называют $X_c(\omega)$ *односторонним спектром*.

Чтобы разобраться в физическом смысле приведенных выкладок, вспомним, что сигнал $x_c(t)$ — не просто математическая абстракция. Мы можем генерировать $x_c(t)$ в нашей лаборатории и передавать его по кабелям в другую лабораторию. (Эта идея описана в разделе 8.3.)

Для иллюстрации полезности понятия аналитического сигнала $x_c(t)$, посмотрим, как аналитический сигнал помогает при измерении мгновенных параметров некоторого сигнала во временной области, таких как амплитуда, фаза или частота в некоторый заданный момент времени. Идея измерения мгновенных значений кажется не такой значительной, когда мы имеем ввиду описание, скажем, чистой

синусоиды. Но когда мы говорим о более сложных сигналах, таких как модулированный синусоидальный сигнал, измерение мгновенных значений может быть очень важным. Если действительный сигнал $x_r(t)$ промодулирован по амплитуде, так что в его *огибающей* содержится какая-то информация, то с помощью аналитической версии сигнала мы можем измерять мгновенные значения огибающей $E(t)$, используя соотношение:

$$E(t) = |x_c(t)| = \sqrt{x_r(t)^2 + x_i(t)^2}. \qquad (9\text{-}4)$$

Огибающая сигнала совпадает с модулем $x_c(t)$. На рисунке 9.7 (a) мы приводим простой пример демодуляции АМ сигнала, где синусоидальный сигнал модулирован по амплитуде низкочастотной синусоидой (штриховая кривая). Для восстановления модулирующего сигнала по традиционной схеме потребовалось бы выпрямить модулированный сигнал $x_r(t)$ и пропустить результат выпрямления через фильтр нижних частот. Выходной сигнал фильтра показан на рисунке 9.7 (b) сплошной линией, которая представляет модулирующий сигнал. Вместо этого мы можем вычислить ПГ $x_r(t)$, получив в результате $x_i(t)$, и использовать последний для формирования аналитического сигнала $x_c(t) = x_r(t) + jx_i(t)$. Наконец, для выделения модулирующего сигнала, показанного на рисунке 9.7 (c) толстой сплошной линией, мы вычисляем с помощью (9-4) модуль $x_c(t)$. Функция $|x_c(t)|$ значительно *точнее* представляет модулирующий сигнал, чем сплошная линия на рисунке 9.7 (b).

Предположим, с другой стороны, что некоторый действительный синусоидальный сигнал $x_r(t)$ модулирован по фазе. Мы можем оценить мгновенную фазу $\phi(t)$ сигнала $x_c(t)$, используя выражение:

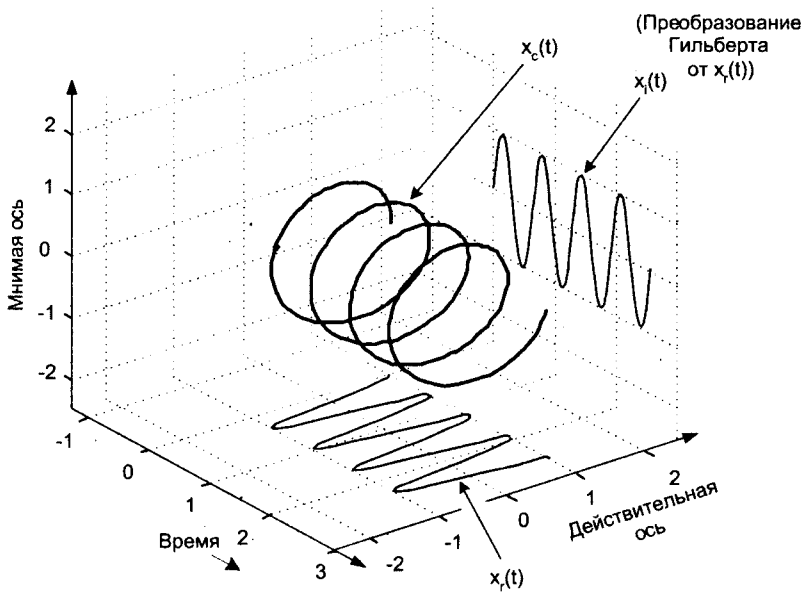
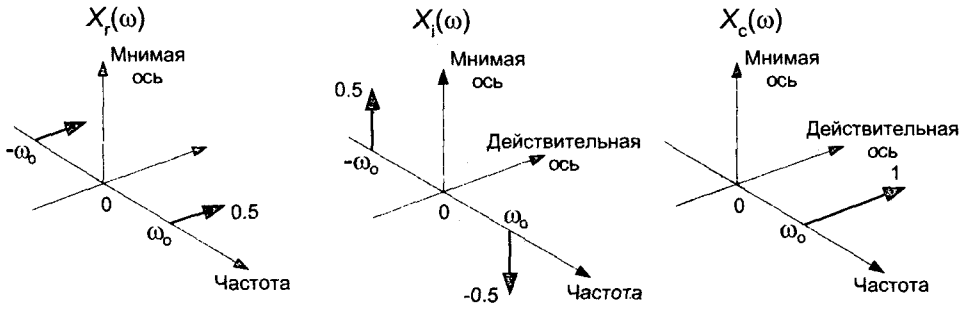


Рис. 9.5. Преобразование Гильберта и аналитический сигнал для $\cos(\omega_0 t)$



9.6. Спектры ПГ: (a) спектр $\cos(\omega_o t)$; (b) спектр ПГ $\cos(\omega_o t)$, $\sin(\omega_o t)$; (c) спектр аналитического сигнала, соответствующего $\cos(\omega_o t)$, $e^{j\omega_o t}$

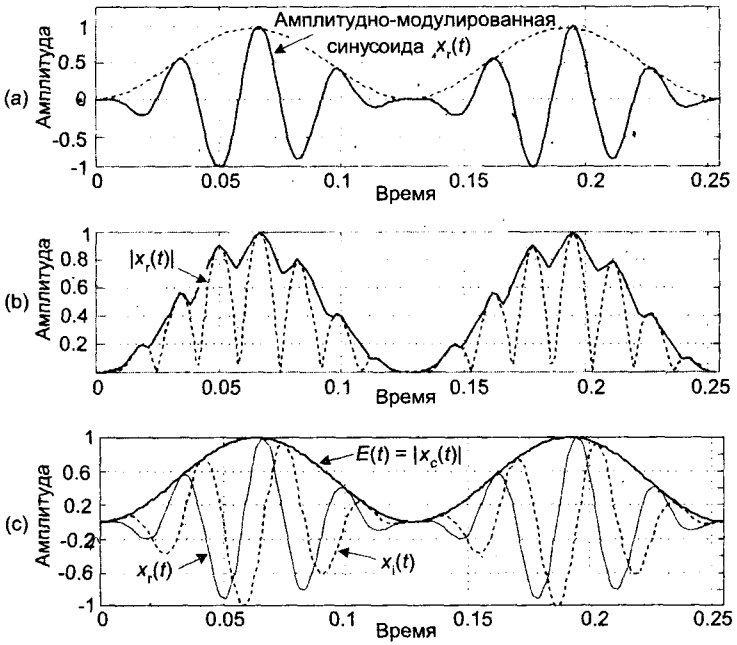


Рис. 9.7. Выделение огибающей: (a) входной сигнал $x_r(t)$; (b) результат традиционной фильтрации $|x_r(t)|$; (c) результат выделения огибающей с помощью комплексного сигнала, $|x_c(t)|$

$$\phi(t) = \tan^{-1}[x_i(t)/x_r(t)]\,. \qquad (9\text{-}5)$$

Вычисление $\phi(t)$ эквивалентно фазовой демодуляции сигнала $x_r(t)$. Аналогично, если действительный синусоидальный несущий сигнал модулирован по частоте, мы можем измерять его мгновенную частоту $F(t)$, вычисляя мгновенную скорость изменения мгновенной фазы $x_c(t)$ (а чаще всего реализуется именно этот способ), используя выражение:

$$F(t) = d[\phi(t)]/dt = d\{\tan^{-1}[x_i(t)/x_r(t)]\}/dt\,. \qquad (9\text{-}6)$$

Вычисление $F(t)$ эквивалентно частотной демодуляции сигнала $x_r(t)$. Кстати, если $\phi(t)$ измеряется в радианах, то единицей измерения $F(t)$ в (9-6) будет радиан в секунду. Разделив $F(t)$ на 2π, мы получаем частоту в Гц. (Другой метод частотной демодуляции обсуждается в разделе 13.22.)

В качестве еще одного примера применения ПГ рассмотрим действительный сигнал $x_r(t)$, модуль спектра которого $|X_r(\omega)|$ располагается в окрестности центральной частоты 25 кГц (рисунок 9.8 (a)). Допустим, мы хотим перенести этот спектр на центральную частоту 20 кГц. Мы могли бы умножить $x_r(t)$ на действительную синусоиду $\cos(2\pi 5000t)$, чтобы получить действительный сигнал, спектр которого показан на рисунке 9.8 (b). Проблема такого подхода состоит в том, что для подавления высокочастотных копий спектра нам потребовался бы фильтр с практически нереализуемой частотной характеристикой (штриховая линия).

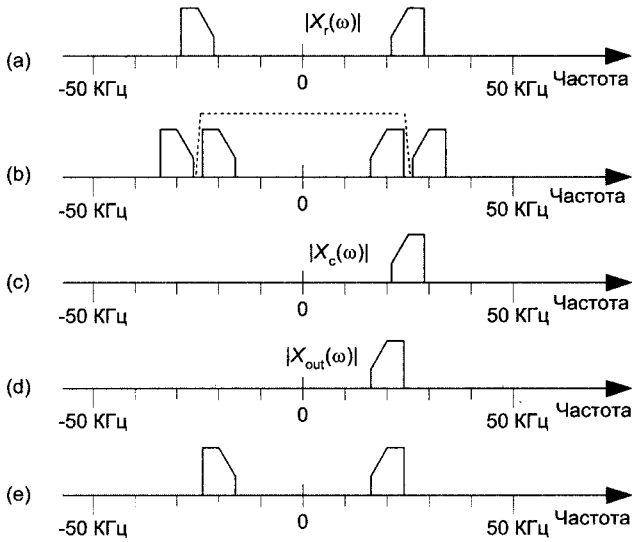


Рис. 9.8. Спектры, связанные с переносом сигнала $x_r(t)$ по частоте

С другой стороны, если мы вычислим ПГ $x_r(t)$ и получим $x_i(t)$, затем сформируем из этих двух сигналов аналитический сигнал $x_c(t) = x_r(t) + jx_i(t)$, мы будем иметь комплексный сигнал $x_c(t)$, односторонний спектр которого показан на рисунке 9.8 (c). Затем мы умножим комплексный $x_c(t)$ на комплексную экспоненту $e^{-j2\pi 5000t}$, получив сдвинутый по частоте комплексный сигнал $x_{out}(t)$, спектр которого показан на рисунке 9.8 (d). Нам остается взять действительную часть $x_{out}(t)$, чтобы получить действительный сигнал с требуемым спектром, центральная частота которого равна 20 кГц, как показано на рисунке 9.8 (e).

Теперь, когда мы убедились в полезности ПГ, определим импульсную характеристику преобразователя Гильберта и используем ее для построения такого преобразователя.

9.3. Импульсная характеристика преобразователя Гильберта

Вместо того чтобы в соответствии с традицией просто написать уравнение импульсной характеристики для прибора, который выполняет ПГ, мы покажем, как получить это выражение. Чтобы получить выражение для импульсной характеристики преобразователя Гильберта, мы берем обратное преобразование Фурье от частотной характеристики ПГ $H(\omega)$. Одна из разновидностей непрерывного обратного преобразование Фурье произвольной функции частоты $X(f)$ по определению имеет вид:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft}\, df, \qquad (9\text{-}7)$$

где f — это частота в периодах в секунду (Герцах). В это уравнение мы внесем три изменения. Во-первых, поскольку мы используем круговую частоту $\omega = 2\pi f$ радиан в секунду, а также потому, что $df = d\omega/2\pi$, вместо члена df мы подставим $d\omega/2\pi$. Во-вторых, т. к. мы знаем, что частотная характеристика дискретной системы периодична с периодом повторения, равным частоте дискретизации ω_s, мы будем вычислять интеграл на интервале, равном периоду повтрения с границами $-\omega_s/2$ и $+\omega_s/2$. В-третьих, мы разделим исходный интеграл на два отдельных интеграла. Эти математические манипуляции приводят к следующему результату:

$$h(t) = (1/2\pi)\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = (1/2\pi)\int_{-\omega_s/2}^{0} j e^{j\omega t}\, d\omega + (1/2\pi)\int_{0}^{\omega_s/2} -j e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= (1/2\pi t)\left(\left[e^{j\omega t}\right]_{-\omega_s/2}^{0} - \left[e^{j\omega t}\right]_{0}^{\omega_s/2}\right) = (1/2\pi t)\left(e^{j0} - e^{-j\omega_s t/2} - e^{j\omega_s t/2} + e^{j0}\right) =$$

$$= (1/2\pi t)[2 - 2\cos(\omega_s t/2)] = (1/\pi t)[1 - \cos(\omega_s t/2)]\,. \qquad (9\text{-}8)$$

Скоро мы сможем начертить график этой импульсной характеристики, но сначала нужно преодолеть одно препятствие. Подстановка $t = 0$ в (9-8) может вызвать сердечный приступ, так как мы приходим к неопределенному отношению 0/0. Здесь придется призвать на помощь чистую математику. Чтобы получить $h(0)$, мы просто извлекаем из памяти правило маркиза де Лопиталя, берем производные по времени от числителя и знаменателя (9-8), а затем подставляем $t = 0$. Следующие выкладки подводят итог сказанному:

$$h(0) = \frac{d/dt\,[\cos(\omega_s t/2)]}{d/dt\,(\pi t)}\Big|_{t\to 0} = [\omega_s t \sin(\omega_s t/2)/2\pi]\Big|_{t\to 0} = 0\,. \qquad (9\text{-}9)$$

Таким образом, мы теперь знаем, что $h(0) = 0$. Найдем дискретную версию (9-8), т. к. именно ее можно промоделировать программно и использовать в практических системах ЦОС. Мы можем перейти к *цифровой* системе, подставив дискретную переменную nt_s вместо непрерывной переменной времени t в (9-8).

Используя следующие обозначения:

- n = дискретный индекс во временной области (..., $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$),
- f_s = частота дискретизации в отсчетах в секунду,
- t_s = период времени между отсчетами в секундах ($t_s = 1/f_s$),
- $\omega_s = 2\pi f_s$,

мы можем переписать (9-8) в дискретной форме:

$$h(n) = (1/\pi n t_s)[1 - \cos(\omega_s n t_s/2)]\,. \qquad (9\text{-}10)$$

Подставляя $2\pi f_s$ вместо ω_s и $1/f_s$ вместо t_s, получим:

$$h(n) = (1/\pi n t_s)[1 - \cos(2\pi f_s n/2f_s)] = f_s/\pi n\,[1 - \cos(\pi n)]\,. \qquad (9\text{-}11)$$

$$\text{для } n \neq 0 \text{ и } [h(n) = 0\,, \text{ для } n=0]\,.$$

Наконец, построим импульсную характеристику ПГ $h(n)$ на рисунке 9.9. Член f_s в (9-11) — просто масштабирующий множитель, его значение не влияет на форму $h(n)$. Информированный читатель мог бы сейчас сказать: «Погодите минуту. Уравнение (9-11) выглядит совсем не так, как уравнение для импульсной характеристики, которое я нашел в другой книге по ЦОС. Которое из них правильно?» И читатель будет прав, потому что в литературе популярно следующее выражение для $h(n)$:

$$\text{Альтернативная форма: } h(n) = 2\sin^2(\pi n/2)/(\pi n)\,. \qquad (9\text{-}12)$$

Ответ состоит в следующем. Во-первых, вывод уравнения (9-12) основан на предположении, что частота дискретизации f_s равна единице. Кроме того, если вы стряхнете пыль с вашего старого справочника по математике, то внутри него вы найдете тригонометрическое *тождество*: $\sin^2(\alpha) = [1 - \cos(2\alpha)]/2$. Если в (9-11) мы подставим 1 вместо f_s и подставим $2\sin^2(\pi n/2)$ вместо $[1 - \cos(\pi n)]$, то мы увидим, что (9-11) и (9-12) идентичны.

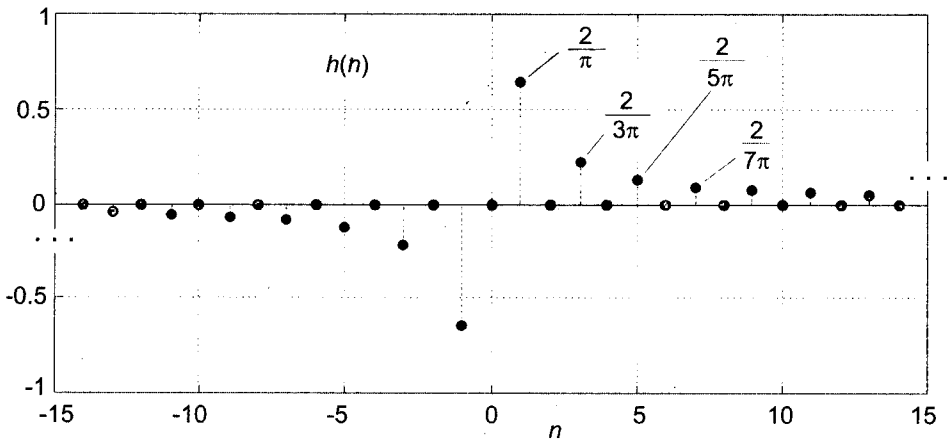


Рис. 9.9. Дискретная импульсная характеристика преобразования Гильберта при $f_s = 1$

Посмотрев снова на рисунок 9.9, мы можем усилить обоснованность нашего вывода $h(n)$. Заметим, что при $n > 0$ значения $h(n)$ отличны от нуля только для нечетных значений n. Кроме того, эти ненулевые значения уменьшаются как ряд чисел 1/1, 1/3, 1/5, 1/7 и т. д. Что это вам напоминает? Правильно, ряд Фурье для периодического прямоугольного сигнала! Это не случайно, т. к. $h(n)$ представляет собой обратное преобразование Фурье прямоугольной функции $H(\omega)$, показанной на рисунке 9.2. Более того, $h(n)$ антисимметрична, и это согласуется с тем, что $H(\omega)$ — чисто мнимая. (Если бы нам требовалось сделать $h(n)$ симметричной, проинвертировав ее значения при $n < 0$, новая последовательность была бы пропорциональна ряду Фурье действительного периодического прямоугольного колебания.)

Теперь, когда мы имеем выражение для импульсной характеристики ПГ $h(n)$, используем его для построения дискретного преобразователя Гильберта.

9.4. Проектирование дискретного преобразователя Гильберта

Дискретное преобразование Гильберта может быть реализовано как во временной, так и в частотной области. Сначала рассмотрим преобразователь Гильберта во временной области.

9.4.1. Преобразование Гильберта во временной области: реализация в виде КИХ-фильтра

Взгляните снова на рисунок 9.4. Имея $h(n)$, мы хотим узнать, как получить дискретный сигнал $x_i(n)$. Вспомнив, что в (9-1) используется умножение в частотной области, мы можем сказать, что $x_i(n)$ образуется в результате свертки $x_r(n)$ с $h(k)$. Аналитически это выглядит так:

$$x_i(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, x_r(n-k)\,. \qquad (9\text{-}13)$$

Это значит, что мы можем реализовать преобразователь Гильберта в виде дискретного нерекурсивного фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ), как показано на рисунке 9.10.

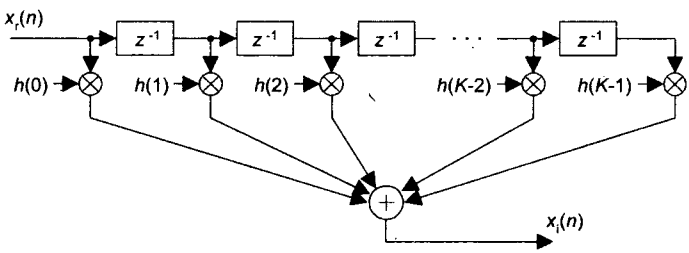


Рис. 9.10. Реализация преобразователя Гильберта с K ответвлениями в виде КИХ-фильтра

Проектирование традиционного КИХ-преобразователя Гильберта сводится к вычислению значений $h(k)$, благодаря чему становится возможной реализация схемы, приведенной на рисунке 9.4. А, может быть, просто взять коэффициенты $h(n)$ согласно (9-11) или рисунку 9.9, и использовать их в качестве $h(k)$ на рисунке 9.10? Это почти правильный подход. К сожалению, последовательность $h(n)$ на рисунке 9.9 имеет бесконечную длину. И все усилия при проектировании сосредоточиваются на выяснении того, как следует усекать $h(n)$.

Для начала мы должны решить, должна ли усеченная $h(n)$ иметь четную или нечетную длину. Мы принимаем это решение, вспомнив, что реализации КИХ-фильтров, имеющих антисимметричные коэффициенты и нечетную или четную длину, называются системами III или IV типа соответственно [1 - 3]. Частотные характеристики антисимметричных фильтров этих типов удовлетворяют непреодолимым ограничениям:

Длина $h(n)$ нечетна (тип III)	**Длина $h(n)$ четна (тип IV)**
$\lvert H(0)\rvert = 0$	$\lvert H(0)\rvert = 0$
$\lvert H(\omega_s/2)\rvert = 0$	$\lvert H(\omega_s/2)\rvert$ без ограничений

Эта маленькая табличка говорит нам, что амплитудно-частотная характеристика преобразователей Гильберта с нечетным числом ответвлений равна нулю как на частоте 0 Гц, так и на частоте, равной половине частоты дискретизации. Преобразователи Гильберта с четным количеством ответвлений всегда имеют АЧХ, равную 0 на нулевой частоте. Рассмотрим несколько примеров.

На рисунке 9.11 показана частотная характеристика КИХ-преобразователя Гильберта длиной в 15 ответвлений (Тип III, нечетная длина), коэффициенты которого обозначены как $h_1(k)$. Эти графики могут многому научить нас.

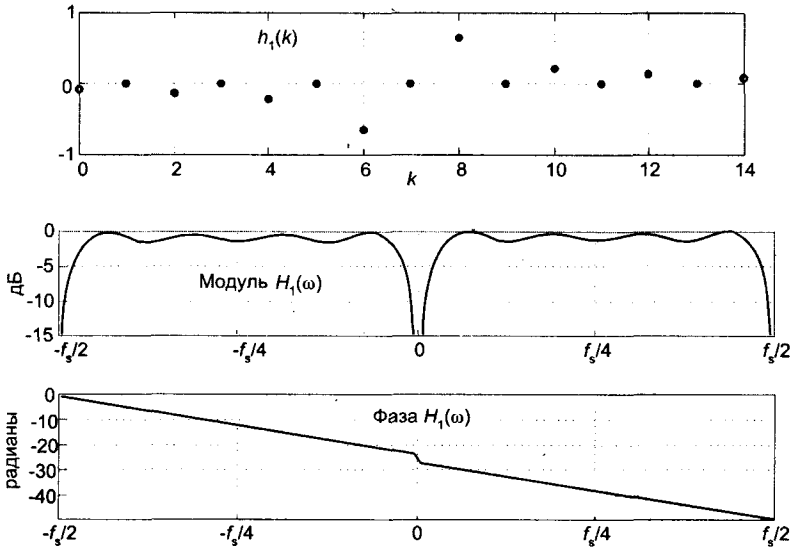


Рис. 9.11. Частотная характеристика $H_1(\omega)$ преобразователя Гильберта с 15 ответвлениями, имеющего импульсную характеристику $h_1(k)$

1. Например, КИХ-реализация нечетной длины действительно имеет нулевую АЧХ на частотах 0 Гц и $\pm f_s/2$ Гц. Это значит, что КИХ-реализации нечетной длины (III-го типа) ведут себя как полосовые фильтры.

2. $H_1(\omega)$ имеет пульсации в полосе пропускания. Нам следовало этого ожидать, т. к. мы не можем использовать последовательность $h_1(k)$ бесконечной длины. Здесь, точно так же, как и при проектировании стандартных КИХ-фильтров нижних частот, усечение импульсной характеристики во временной области приводит к появлению пульсаций в частотной области. (Когда мы резко обрываем функцию в одной области, Природа мстит нам, вводя в действие явление Гиббса, результатом которого являются пульсации в другой области.) Как вы, видимо, уже догадались, мы можем уменьшить пульсации $|H_1(\omega)|$, умножив усеченную последовательность $h_1(k)$ на окно. Однако умножение коэффициентов на окно приведет к некоторому сужению полосы пропускания $H_1(\omega)$, поэтому может потребоваться увеличение количества коэффициентов. Попробуйте убедиться в том, что взвешивание усеченной последовательности $h_1(k)$ окном дает положительный эффект.

3. Очень трудно рассчитать ПГ для низкочастотных сигналов. Мы можем несколько расширить полосу пропускания и уменьшить ширину переходной полосы $H_1(\omega)$, но это потребует существенного увеличения длины фильтра.

4. Фазо-частотная характеристика $H_1(\omega)$ линейна, как и должно быть при симметричной импульсной характеристике. Наклон ФЧХ (который в нашем случае постоянен) пропорционален задержке, которую испытывает сигнал, проходя через КИХ-фильтр. Ниже мы поговорим об этом подробнее. Разрыв ФЧХ на частоте 0 Гц соответствует π радианам, как и должно быть в соответствии с рисунком 9.2. Отлично, это как раз то, чего мы добивались в первую очередь!

В нашем неустанном стремлении к точным результатам при генерации аналитического сигнала $x_c(n)$ мы должны компенсировать линейный фазовый сдвиг, присутствующий в $H_1(\omega)$ – а именно, постоянную задержку во времени, равную групповой задержке фильтра. Мы делаем это, задерживая во времени исходный сигнал $x_r(n)$ на время, равное групповой задержке КИХ-преобразователя Гильберта с импульсной характеристикой $h_1(k)$. Напомним, что групповая задержка G КИХ-фильтра длиной в K ответвлений, измеряемая в отсчетах, равна $G = (K-1)/2$ отсчетов. Так что блок-схема процесса генерации комплексного сигнала $x_c(n)$ с помощью КИХ-фильтра приобретает вид, показанный на рисунке 9.12 (а). Мы задерживаем $x_r(n)$ на $G = (7-1) / 2 = 3$ отсчета, получая при этом задержанную последовательность $x'_r(n)$. Эта задержанная последовательность теперь корректно выровнена по времени с $x_i(n)$.

Если вы реализуете КИХ-преобразователь Гильберта с нечетным количеством ответвлений в аппаратуре, простейший способ получения $x'_r(n)$ состоит в том, чтобы взять копию задержанной исходной последовательности $x_r(n)$ со среднего ответвления линии задержки КИХ-преобразователя Гильберта, как

показано на рисунке 9.12 (b). Если вы моделируете схему, приведенную на рисунке 9.12 (a), программно, то последовательность $x'_r(n)$ можно получить, введя $G = 3$ нулевых отсчета в начало исходной последовательности $x_r(n)$.

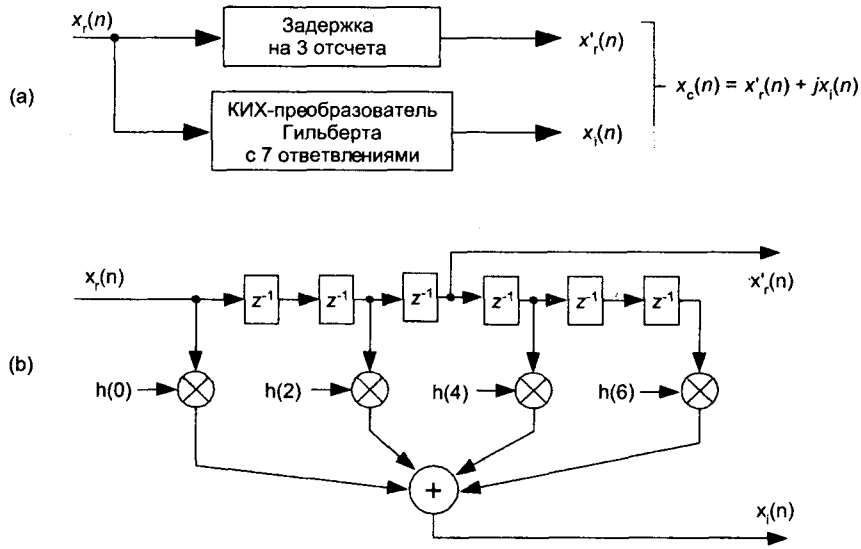


Рис. 9.12. Генерация последовательности $x_c(n)$ с помощью КИХ-фильтра Гильберта, имеющего 7 ответвлений: (a) схема обработки; (b) структура фильтра

Мы можем, например, реализовать КИХ-преобразователь Гильберта, используя структуру IV типа с четным количеством ответвлений. На рисунке 9.13 изображен этот случай, причем коэффициенты обозначены как $h_2(k)$. Обратите внимание на то, что АЧХ отлична от нуля на частотах $\pm f_s/2$ Гц. Следовательно, этот фильтр четной длины аппроксимирует идеальный преобразователь Гильберта несколько лучше, чем фильтр нечетной длины.

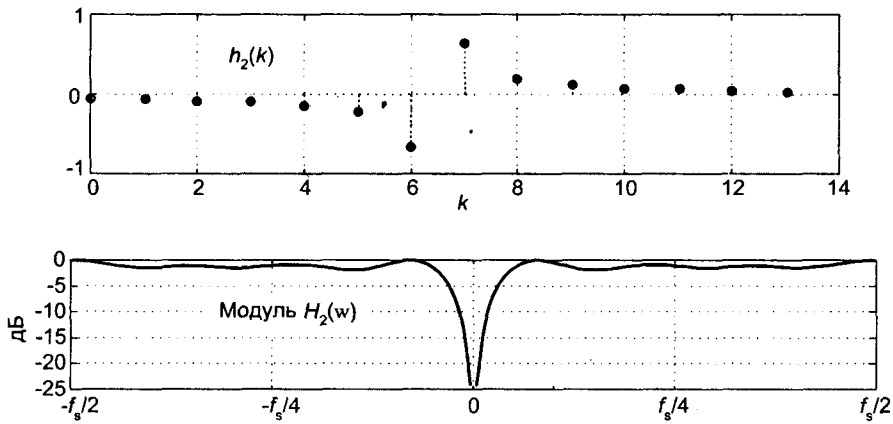


Рис. 9.13. Частотная характеристика $H_2(\omega)$ преобразователя Гильберта с 14 ответвлениями и коэффициентами $h_2(k)$

Одна из проблем, связанных с этой традиционной реализацией преобразователя Гильберта состоит в том, что коэффициент передачи в полосе пропускания $|H_2(\omega)|$ равен единице не на всех частотах, в отличие от коэффициента передачи канала $x'_г(n)$ на рисунке 9.12. Поэтому для минимизации ошибок мы вынуждены увеличивать количество коэффициентов $h_2(k)$ (или использовать взвешивание с помощью окон), чтобы сделать $|H_2(\omega)|$ в полосе пропускания как можно более гладкой.

Хотя на рисунке это не показано, отрицательный наклон ФЧХ $H_2(\omega)$ соответствует групповой задержке $G = (14-1)/2 = 6.5$ отсчетов. Это заставляет нас задерживать исходную последовательность $x_г(n)$ на нецелое (дробное) количество отсчетов, чтобы достичь выравнивания по времени с $x_i(n)$. Фильтры с дробными задержками выходят за рамки данной книги, но вы можете получить дополнительную информацию по этой теме, прочитав статью [4].

Давайте вспомним теперь, что каждый второй коэффициент в структуре типа III равен нулю. Таким образом, преобразователь Гильберта с нечетным количеством ответвлений более привлекателен с точки зрения объема вычислений, чем преобразователь четной длины. Почти половина умножений, показанных на рисунке 9.10, для структуры преобразователя Гильберта типа III может быть отброшена. Разработчики могут уменьшить количество умножений еще в два раза, применив *сложенную* структуру КИХ-фильтра (которая обсуждается в разделе 13.7). Это возможно благодаря тому, что коэффициенты симметричны (с учетом того, что половина из них отрицательны).

Краткое предупреждение: здесь возможна ошибка, которую иногда допускают даже профессионалы. Когда мы рассчитываем стандартные КИХ-фильтры с линейной ФЧХ, мы вычисляем коэффициенты, а затем используем их в программной или аппаратурной реализации. Иногда мы забываем *изменить* порядок следования коэффициентов на обратный перед использованием их в КИХ-фильтре. Эта забывчивость обычно не приводит к тяжелым последствиям, т. к. коэффициенты большинства обычных КИХ-фильтров обладают зеркальной симметрией.

В случае КИХ-фильтров Гильберта это не так, поэтому, пожалуйста, не забывайте изменить порядок следования коэффициентов перед использованием их для фильтрации. Если вы этого не сделаете, фазо-частотная характеристика вашего ПГ будет искажена.

Между прочим, преобразователи Гильберта могут строиться также на основе БИХ-фильтров, и в некоторых случаях такая реализация оказывается более эффективной с точки зрения объема вычислений, чем КИХ реализация, за счет некоторого отклонения сдвига фаз между $x_г(n)$ и $x_i(n)$ от 90° [5, 6].

9.4.2. Преобразование Гильберта в частотной области

Существует также схема вычисления преобразования Гильберта в частотной области, заслуживающая упоминания потому, что ПГ $x_г(n)$ и аналитический сигнал $x_c(n)$ генерируются одновременно. Мы просто берем N-точечное ДПФ действительной последовательности $x_г(n)$ четной длины N, получая дискретный спектр $X_г(m)$, показанный на рисунке 9.14 (a). Затем мы создаем новый спектр $X_c(m) = 2X_г(m)$. Приравниваем отсчеты $X_c(m)$, соответствующие отрицательным частотам, т. е. отсчеты с номерами $(N/2)+1 \le m \le N-1$, нулю, в результате чего у нас остается односторонний спектр $X_c(m)$, показанный на рисунке 9.14 (b). Затем

делим отсчеты спектра $X_c(0)$ (постоянную составляющую) и $X_c(N/2)$ на два. Наконец, выполняем N-точечное обратное ДПФ нового спектра $X_c(m)$, результатом которого является требуемая аналитическая последовательность $x_c(n)$ во временной области. Действительная часть $x_c(n)$ представляет собой исходный сигнал $x_г(n)$, а мнимая часть $x_c(n)$ представляет собой ПГ $x_г(n)$. Готово!

Есть несколько моментов, касающихся описанной схемы прямой генерации аналитического сигнала в частотной области, о которых необходимо помнить:

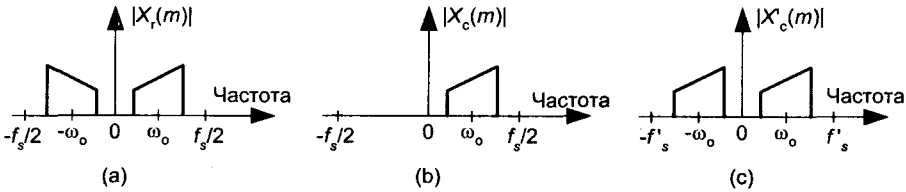


Рис. 9.14. Спектр исходной последовательности $x_г(n)$ и односторонний спектр аналитической последовательности $x_c(n)$

1. Если возможно, выбирайте длину входной последовательности $x_г(n)$ равной степени двойки, чтобы для эффективного вычисления ДПФ можно было использовать алгоритм БПФ по основанию 2.

2. Длина последовательности $X_c(m)$ должна быть равна длине исходной последовательности $X_г(m)$. Помните, что обнуление составляющих $X_c(m)$ с отрицательными частотами не означает их выбрасывание из массива.

3. Множитель 2 в присвоении $X_c(m) = 2X_г(m)$ компенсирует снижение амплитуды в 2 раза, связанное с потерями энергии спектра на отрицательных частотах.

4. Если ваше применение ПГ ориентировано на блочную обработку данных в том смысле, что вам необходимо генерировать аналитическую последовательность для действительной последовательности фиксированной длины, стоит подумать об использовании этого метода, т. к. он избавляет от головной боли, связанной с необходимостью выравнивания задержек при КИХ реализации во временной области. С появлением быстрых микросхем ЦОС и конвейерных методов БПФ эта схема генерации аналитических сигналов может оказаться жизнеспособной в целом ряде применений. Одна из возможностей, которые следует рассмотреть, состоит в использовании для вычисления прямого ДПФ действительного сигнала $x_г(n)$ эффективного метода $2N$-точечного действительного БПФ, описанного в разделе 13.5.2. Конечно, вдумчивый инженер проведет также поиск в литературе, чтобы выяснить, какие алгоритмы эффективного вычисления обратного БПФ есть для случая, когда многие отсчеты в частотной области равны нулю.

Допустим, вам необходимо получить прореженную в два раза аналитическую последовательность $x'_c(n)$, основанную на $x_г(n)$. Это легко сделать благодаря [7].

Во-первых, вычисляем N-точечную последовательность $X_г(m)$. Затем создаем новую спектральную последовательность $X'_c(k) = 2X_г(k)$ для $1 \le k \le (N/2)-1$. Положим $X'_c(0)$ равным $X_г(0) + X_г(N/2)$. Наконец, вычисляем $(N/2)$-точечное обратное ДПФ от $X'_c(m)$, которое дает прореженную в два раза аналитическую последовательность $x'_c(n)$. Частота дискретизации последовательности $x'_c(n)$ составляет $f'_s = f_s/2$, а спектр показан на рисунке 9.14 (с).

В разделе 13.28.2 мы обсудим схему генерации интерполированного аналитического сигнала по $x_г(n)$.

9.5. Генерация аналитического сигнала во временной области

В цифровых системах связи КИХ-реализация ПГ (подобная показанной на рисунке 9.12 (b)) используется для генерации комплексного аналитического сигнала $x_c(n)$. Некоторые практики при обработке полосовых сигналов для получения аналитического сигнала сейчас используют метод комплексной фильтрации во временной области [8]. Эта схема, которая, по существу, не выполняет ПГ входной последовательности $x_г(n)$, использует комплексный фильтр, образованный двумя действительными КИХ-фильтрами с равными АЧХ, ФЧХ которых отличаются в точности на 90°, как показано на рисунке 9.15.

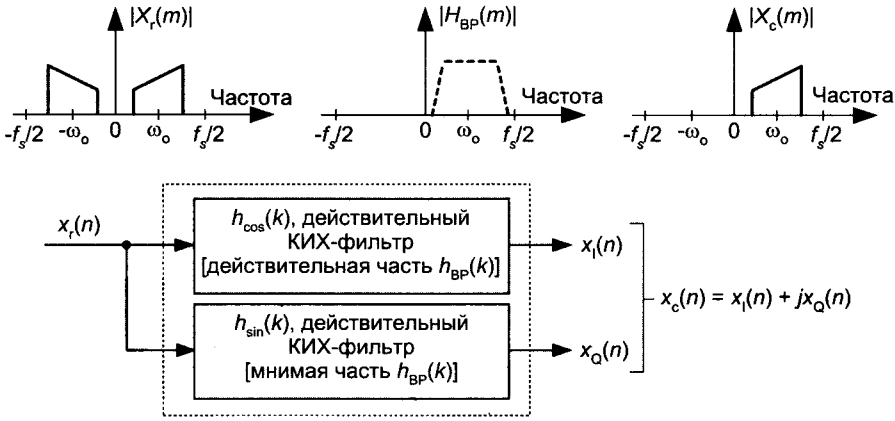


Рис. 9.15. Генерация последовательности $x_c(n)$ с помощью комплексного фильтра (двух вещественных КИХ-фильтров)

Вот как это делается. Используя любую понравившуюся нам программу расчета КИХ-фильтров, рассчитываем стандартный КИХ-фильтр нижних частот, удвоенная полоса пропускания которого несколько превышает полосу частот, которую занимает интересующий нас действительный полосовой сигнал. Затем вещественные коэффициенты фильтра нижних частот $h_{LP}(k)$, умножаются на комплексную экспоненту $e^{j\omega_o nts}$, где использованы следующие обозначения:

- ω_o = центральная частота исходного полосового сигнала в радианах в секунду, $\omega_o = 2\pi f_o$;

- f_o = центральная частота в Гц;
- n = временной индекс коэффициентов фильтра нижних частот ($n = 0, 1, 2, ..., K-1$);
- t_s = промежуток времени между отсчетами, измеряемый в секундах ($t_s = 1/f_s$);
- f_s = частота дискретизации исходного полосового сигнала $x_r(n)$.

В результате умножения на $e^{j\omega_o n t_s}$ формируются комплексные коэффициенты, которые в алгебраической форме выглядят следующим образом

$$h_{BP}(k) = h_{\cos}(k) + jh_{\sin}(k), \qquad (9\text{-}14)$$

и описывают комплексный полосовой фильтр, центр полосы пропускания которого находится на частоте f_o Гц.

Затем мы используем действительную и мнимую части коэффициентов фильтра $h_{BP}(k)$ в двух отдельных КИХ-фильтрах с действительными коэффициентами, как показано на рисунке 9.15. На языке ЦОС фильтр, выдающий последовательность $x_I(n)$, называется *I*-каналом для *синфазной* составляющей, а фильтр, выдающий $x_Q(n)$, называется *Q*-каналом для *квадратурной* составляющей. Эта схема генерации аналитического сигнала с использованием смешивания, приведенная на рисунке 9.15, обладает рядом интересных особенностей:

1. Смешивающее преобразование коэффициентов $h_{LP}(k)$ путем умножения на $e^{j\omega_o n t_s}$ приводит к уменьшению амплитудно-частотных характеристик двух действительный КИХ-фильтров в 2 раза. Удвоение значений $h_{LP}(k)$ перед смешиванием устранит эти потери.

2. Мы можем взвесить коэффициенты $h_{LP}(k)$ окном перед смешиванием для уменьшения величины пульсаций в полосе пропускания и разности АЧХ двух действительных фильтров. (Нам хотелось бы сохранить коэффициенты передачи в полосе пропускания обоих фильтров как можно ближе друг к другу.) Конечно, взвешивание несколько ухудшает крутизну АЧХ в переходной полосе, поэтому может потребоваться больше коэффициентов.

3. В этом случае можно использовать фильтры как нечетной, так и четной длины.

4. Если либо $h_{\cos}(k)$, либо $h_{\sin}(k)$ симметричны, можно использовать *сложенную* КИХ-структуру (см. раздел 13.7) для уменьшения в два раза количества умножений на один выходной отсчет.

5. Если центральные частоты исходного полосового сигнала и комплексного полосового фильтра равны четверти частоты дискретизации ($f_s/4$), вам крупно повезло, потому что примерно половина коэффициентов каждого из действительных фильтров в этом случае равна нулю, что снижает количество умножений еще в два раза.

6. Особенно эффективен полуполосный КИХ комплексный полосовой фильтр, центральная частота которого перенесена на $f_o = f_s/4$. В этом случае половина коэффициентов $h_{\cos}(k)$ принимают нулевые значения и все, кроме одного, коэффициенты $h_{\sin}(k)$ равны нулю!

7. При аппаратурной реализации должны быть реализованы оба действительных КИХ-фильтра, изображенные на рисунке 9.15. Если же вы реализуете генерацию аналитического сигнала просто для тренировки на каком-нибудь языке высокого уровня, например, в рамках MATLAB, используемый язык может дать возможность реализации $h_{BP}(k)$ в виде одного комплексного фильтра.

Запомните, что последовательность $x_Q(n)$ на рисунке 9.15 не является преобразованием Гильберта входной последовательности $x_r(n)$. Это не было нашей целью. Мы намеревались получить аналитический сигнал $x_c(n)$, квадратурная составляющая которого $x_Q(n)$ представляет собой преобразование Гильберта синфазной последовательности $x_I(n)$.

9.6. Сравнение методов генерации аналитических сигналов

Проектирование преобразователя Гильберта во временной области представляет собой, по существу, упражнение в проектировании фильтров нижних частот. И как таковой, идеальный дискретный КИХ-преобразователь Гильберта, как и идеальный КИХ-фильтр нижних частот, не может быть реализован практически. К счастью, мы обычно можем обеспечить полосу пропускания преобразователя Гильберта, перекрывающую полосу частот исходного сигнала, который мы сдвигаем по фазе на ± 90°. Использование большего количества ответвлений улучшает характеристики преобразователя (минимизируя пульсации в полосе пропускания), а выбор нечетного или четного количества ответвлений определяется тем, хотим ли мы, чтобы коэффициент передачи на частоте Найквиста был равен 0, или нет, а также тем, должна ли задержка равняться целому количеству периодов дискретизации. Эти замечания справедливы также и в случае генерации комплексного сигнала по входному действительному сигналу методом комплексной фильтрации (рисунок 9.15). Один возможный недостаток этого метода состоит в том, что действительная часть получаемого комплексного сигнала не совпадает с исходным входным вещественным сигналом (т. е. $x_I(n)$ не равна $x_r(n)$.)

При использовании вычислений с плавающей точкой схема комплексной фильтрации обеспечивает разность между двумя вещественными фильтрами длиной в 100 отсчетов каждый не более 0.15 дБ, тогда как КИХ-фильтр Гильберта требует примерно 30 ответвлений для обеспечения такой же величины пульсаций в полосе пропускания. Эти числа имеют место, когда не используется взвешивание с помощью окон. Таким образом, КИХ-фильтр Гильберта более эффективен с вычислительной точки зрения, чем схема комплексной фильтрации. Для высококачественной генерации аналитических сигналов (когда ширина полосы пропускания преобразователя Гильберта должна быть очень близка к полной полосе

сигналов $f_s/2$, и пульсации в полосе пропускания должны быть очень низкими) следует рассмотреть возможность применения метода ДПФ.

Схема комплексной фильтрации вносит потери по амплитуде в два раза, а методы ДПФ и КИХ-фильтрации не дают таких потерь. Метод ДПФ обеспечивает самую точную генерацию комплексного аналитического сигнала по вещественному сигналу, и при использовании ДПФ действительная часть $x_c(n)$ совпадает с вещественным входным сигналом $x_r(n)$. Выбор используемого метода в каждом конкретном приложении требует моделирования на целевой аппаратуре с использованием ожидаемой формы представления чисел (целых или с плавающей точкой) при типовых входных сигналах, которые вы собираетесь обрабатывать.

Библиография

1. Proakis, J., and Manolakis, D. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996, pp. 618, 657.

2. Rabiner, L., and Gold, B. *The Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, pp. 67, 168 (есть русский перевод: Рабинер Л., Голд Б. «Теория и применение цифровой обработки сигналов», М.: Мир, 1978, доступен по адресу http://geogin.narod.ru/arhiv/dsp/dsp3.htm).

3. Oppenheim, A., and Schafer, R. *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1st Ed. 1989, 2nd Ed. 1999 (имеется русский перевод одного из предыдущих изданий: Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. «Цифровая обработка сигналов», пер. с англ. / под ред. С. Я. Шаца, М.: Связь, 1979, доступен по адресу dsp-book.narod.ru/OpShDSP.djvu).

4. Laasko, T., et. al. «Splitting the Unit Delay», *IEEE Signal Processing Magazine*, Jan. 1996.

5. Gomes, J., and Petraglia, A. «An Analog Sampled-Data DSB to SSB Converter Using Recursive Hilbert Transformer for Accurate I and Q Channel Matching», *IEEE Trans, on Circuits and Sys.-II, Analog and Digital Signal Processing*, Vol. 39. No. 3, Mar. 2002, pp. 177-187.

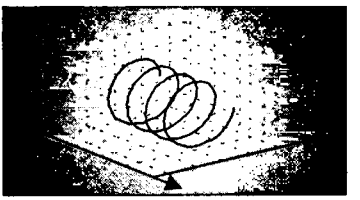
6. Ansari, R. «IIR Hilbert Transformers», *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Processing*, Vol. 35, Aug. 1987, pp. 1116-1119.

7. Marple Jr., S. «Computing the Discrete-time 'Analytic' Signal via FFT», *IEEE Trans, on Signal Proc.*, Vol. 47, No. 9, Sept. 1999, pp. 2600-2603.

8. Reilly, A., et. al. «Analytic Signal Generation—Tips and Traps», *IEEE Trans, on Signal Proc.*, Vol. 42, No. 11, Nov. 1994.

Глава 10

Преобразование частоты дискретизации



Полезная и увлекательная процедура преобразования частоты дискретизации представляет собой изменение частоты дискретизации дискретного сигнала после того, как сигнал был оцифрован. Такое преобразование частоты дискретизации находит множество применений, оно используется для минимизации объема вычислений путем уменьшения потока данных, когда полоса частот, занимаемая сигналом, уменьшается вследствие низкочастотной фильтрации. Преобразование частоты дискретизации неизбежно при обработке сигналов в реальном масштабе времени, когда два процессора, работающие на разных частотах, должны обмениваться цифровыми сигналами. При обработке медицинских и спутниковых изображений преобразование частоты дискретизации необходимо для улучшения изображений, изменения масштаба, вращения изображений. Преобразование частоты дискретизации используется также для уменьшения сложности некоторых узкополосных цифровых фильтров.

Мы можем определить преобразование частоты дискретизации следующим образом: рассмотрим ситуацию, когда непрерывный сигнал $y_c(t)$ был оцифрован с частотой дискретизации $f_{old} = 1/T_{old}$, в результате чего получены отсчеты $x_{old}(n) = y_c(nT_{old})$. Преобразование частоты дискретизации необходимо, когда нам нужен сигнал $x_{new}(n) = y_c(nT_{new})$, а прямая дискретизация непрерывного сигнала $y_c(t)$ с новой частотой дискретизации $f_{new} = 1/T_{new}$ невозможна. Например, представим себе, что мы имеем систему аналого-цифрового преобразования (АЦП), которая выдает по одному отсчету каждые T_{old} секунд. Но наш процессор может принимать данные только по одному отсчету каждые T_{new} секунд. Как можно получить $x_{new}(n)$ непосредственно из $x_{old}(n)$? Можно преобразовать последовательность $x_{old}(n)$ в аналоговый сигнал, т. е. восстановить $y_c(t)$, а затем преобразовать $y_c(t)$ в цифровую форму с частотой дискретизации f_{new}, и получить в результате $x_{new}(n)$. Из-за спектральных искажений, вносимых цифро-аналоговым преобразованием и последующим аналого-цифровым преобразованием, этот метод преобразования частоты дискретизации ограничивает динамический диапазон сигнала, и на практике его стараются избегать. К счастью, как мы скоро увидим, разработаны точные чисто цифровые алгоритмы преобразования частоты дискретизации.

10.1. Прореживание

Изменение частоты дискретизации встречается в двух разновидностях: как понижение и повышение. Понижение частоты дискретизации известно как децимация[1]. (Термин децимация не совсем подходит в этом случае, т. к. изначально децимация понималась как уменьшение в десять раз. В настоящее время термин децимация используется для обозначения понижения частоты дискретизации в любое целое число раз.) Процесс повышения частоты дискретизации известен как интерполяция, т. е. получение оценок значений промежуточных отсчетов. Поскольку прореживание является самым простым случаем изменения частоты дискретизации, сначала рассмотрим именно его.

Мы можем проредить, или понизить частоту дискретизации, последовательность дискретных отсчетов в D раз, выбрав каждый D-й отсчет и отбросив все остальные отсчеты. По отношению к исходной частоте дискретизации, f_{old}, новая частота дискретизации равна

$$f_{new} = f_{old} / D . \qquad (10\text{-}1)$$

Например, чтобы проредить последовательность $x_{old}(n)$ в три раза ($D=3$), мы оставляем $x_{old}(0)$ и отбрасываем $x_{old}(1)$ и $x_{old}(2)$, сохраняем $x_{old}(3)$ и отбрасываем $x_{old}(4)$ и $x_{old}(5)$, сохраняем $x_{old}(6)$ и так далее, как показано на рисунке 10.1. Таким образом, $x_{new}(n) = x_{old}(3n)$, где $n = 0, 1, 2$ и т. д. Результат такого процесса прореживания идентичен результату исходной дискретизации с частотой $f_{new} = f_{old} / 3$ для получения $x_{new}(n)$.

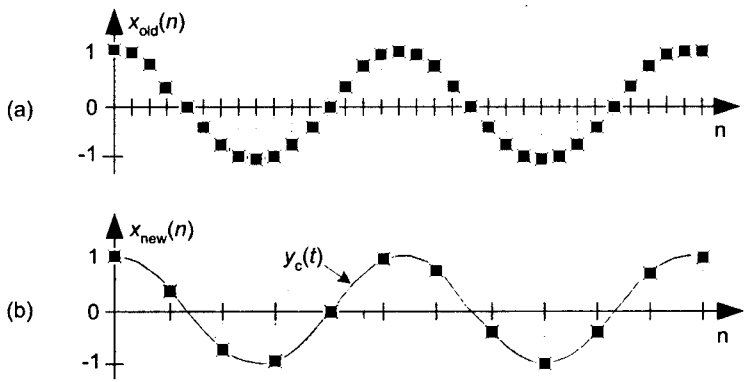


Рис. 10.1. Преобразование частоты дискретизации: (a) исходная последовательность; (b) прореженная в три раза последовательность

Спектральные эффекты прореживания вполне предсказуемы, как показано на рисунке 10.2, где ограниченный спектр непрерывного сигнала показан сплошной линией. На рисунке 10.2 (a) показан периодический спектр $X_{old}(m)$ дискретной

[1] Хотя в русскоязычной литературе понижении частоты дискретизации чаще называют прореживанием, здесь мы используем для обозначения этого приема транслитерацию английского термина decimation. Причины тому две: в последнее время у нас получил распространение и термин *децимация*, а, кроме того, при использовании термина «прореживание» следующее замечание автора было бы непонятно читателю — (*прим. перев.*).

последовательности $x_{old}(n)$. Спектр $X_{new}(m)$ при $x_{new}(n) = x_{old}(3n)$ показан на рисунке 10.2 (b). Рисунок 10.2 иллюстрирует две важные особенности. Во-первых, $X_{new}(m)$ можно было бы получить непосредственно, дискретизируя исходный непрерывный сигнал с частотой f_{new}, а не путем прореживания $x_{old}(n)$ в три раза. И, во-вторых, значение коэффициента прореживания ограничено шириной спектра B исходного сигнала. Мы должны выдерживать соотношение $f_{new} > 2B$, чтобы не допустить возникновения наложений после прореживания.

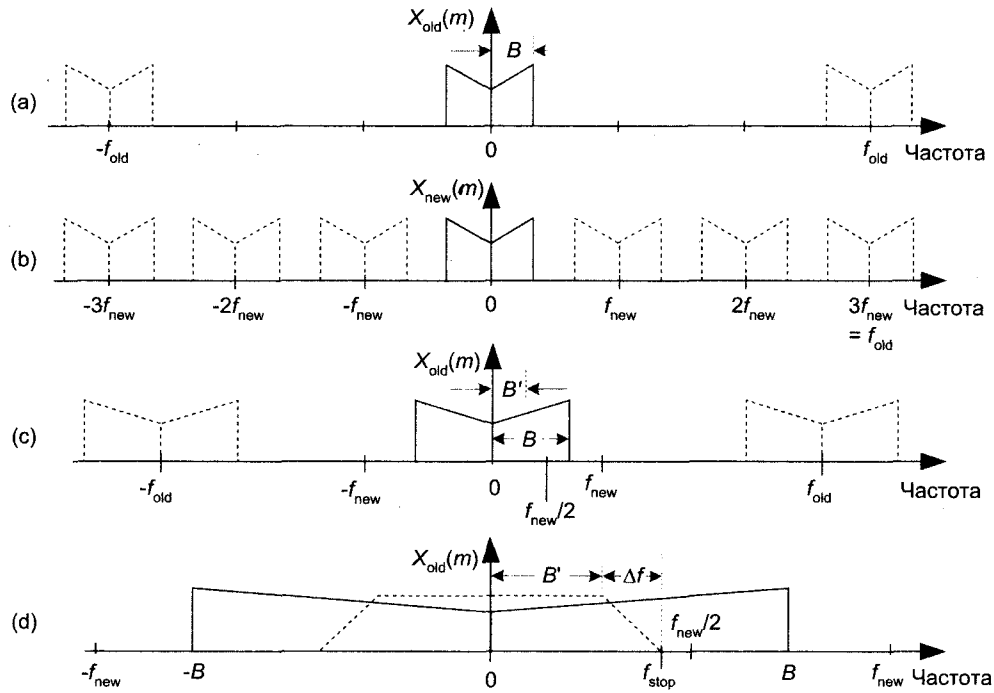


Рис. 10.2. Прореживание в три раза: (a) спектр исходного сигнала; (b) спектр после прореживания в три раза; (c) полоса B' должна сохраняться; (d) частота среза фильтра нижних частот по отношению к ширине спектра B'

Когда требуется, чтобы f_{new} была меньше, чем $2B$, перед выполнением прореживания необходимо профильтровать $x_{old}(n)$ фильтром нижних частот, как показано на рисунке 10.2 (c). Если исходный сигнал имеет ширину спектра B, а нас интересует только диапазон частот B', сигналы с частотами выше B' должны быть отфильтрованы до выполнения прореживания, при этом полоса подавления должна начинаться с частоты f_{stop}. На рисунке 10.2 (d) это показано подробнее, причем частотная характеристика фильтра нижних частот, показанная штриховой линией, должна ослабить составляющие сигнала с частотами, превышающими B'. На практике для реализации *прореживающих фильтров* предпочтительной является структура КИХ-фильтра, показанная на рисунке 5.13, благодаря линейности ее ФЧХ [1].

Когда требуется реализовать большой коэффициент прореживания D, скажем $D > 10$, следует учитывать одну важную особенность процесса фильтрации/прореживания. Можно добиться существенного уменьшения объема вычислений,

если реализовать прореживание в несколько ступеней, как показано на рисунке 10.3 (а). Операция прореживания (понижения частоты дискретизации) $\downarrow D_1$ означает отбрасывание каждого D_1-го отсчета. Произведение D_1 и D_2 дает требуемое значение коэффициента прореживания, т. е. $D_1D_2=D$. Проблема состоит в следующем: какими должны быть значения D_1 и D_2 для минимизации количества ответвлений фильтров нижних частот LPF_1 и LPF_2? Если $D = 100$, следует ли выбрать D_1D_2 равными $(5)(20)$, $(25)(4)$ или $(10)(10)$? Вдумчивые и внимательные пионеры ЦОС нашли для нас ответ на этот вопрос [1]. Для двухступенчатой фильтрации с прореживанием оптимальное значение D_1 составляет

$$D_{1,\,opt} \approx 2D[1 - \sqrt{DF/(2-F)}\,]/[2 - F(D+1)]\,, \qquad (10\text{-}2)$$

где F — ширина переходной полосы, отнесенная к границе полосы подавления, т. е. $F = \Delta f/f_{stop}$. Определив $D_{1,opt}$, находим второй коэффициент прореживания:

$$D_2 = D/D_{1,opt}\,. \qquad (10\text{-}2')$$

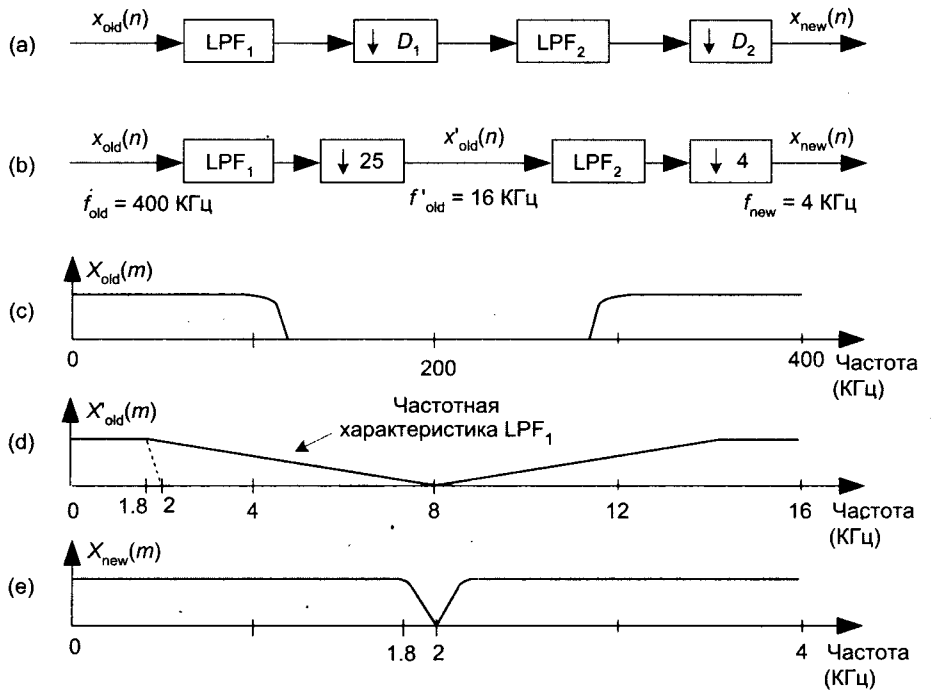


Рис. 10.3. Многокаскадное прореживание: (а) обобщенная блок-схема прореживания; (b) прореживание в 100 раз; (c) спектр исходного сигнала; (d) спектр сигнала на выходе блока прореживания в $D = 25$ раз; (e) спектр выходного сигнала блока прореживания в $D = 4$ раза

Для примера предположим, что мы имеем входные данные, поступающие с частотой дискретизации 400 кГц, и мы должны проредить их в $D = 100$ раз, чтобы получить частоту дискретизации 4 кГц. Предположим также, что интересующий нас диапазон нижних частот простирается от 0 до $B' = 1.8$ кГц.

Таким образом, имея $f_{new} = 4$ кГц, мы должны отфильтровать всю энергию сигнала $x_{old}(n)$, сосредоточенную в полосе частот выше $f_{new}/2$, причем переходная полоса фильтра может занимать диапазон частот от 1.8 кГц до $f_{stop} = f_{new}/2 = 2$ кГц. Теперь оценим количество ответвлений T, необходимое для однокаскадной реализации фильтрации с прореживанием. Было показано, что количество ответвлений T стандартного КИХ ФНЧ, построенного на основе линии задержки с ответвлениями, пропорционально отношению исходной частоты дискретизации к ширине переходной полосы фильтра Δf на рисунке 10.2 (d) [1, 2]:

$$T = k f_{old}/(f_{stop} - B') = k f_{old}/\Delta f, \qquad (10\text{-}3)$$

где $2 < k < 3$, в зависимости от заданных неравномерности АЧХ в полосе пропускания и подавления в полосе задерживания. Таким образом, для нашего случая, если k, к примеру, равно 2, $T = 2(400/0.2) = 4000$. Представьте себе КИХ-фильтр с 4000 ответвлений (коэффициентов)! Теперь разделим наш прореживатель на два каскада: для $D = 100$ и $F = (0.2\ кГц/2\ кГц)$ (10.2) дает оптимальное значение коэффициента прореживания $D_{1,opt}$, равное 31.9. Ближайший целый делитель коэффициента 100 равен 25, поэтому мы берем $D_1 = 25$ и $D_2 = 4$, как показано на рисунке 10.3 (b).

Предположим, что спектр исходного сигнала $X_{old}(m)$ простирается от нулевой частоты до частоты, несколько превышающей 100 кГц, как на рисунке 10.3 (c). Если первый ФНЧ LPF_1 имеет частоту среза 1.8 кГц, а граница его полосы задерживания положена равной 8 кГц, выходной сигнал блока прореживания с $D = 25$ будет иметь спектр, изображенный на рисунке 10.3 (d), где интересующий нас диапазон частот шириной 1.8 кГц отмечен штриховой линией. Когда LPF_2 имеет частоту среза 1.8 кГц, а его f_{stop} принята равной $f_{new}/2 = 2$ кГц, выходной сигнал блока прореживания с $D = 4$ будет иметь требуемый спектр, показанный на рисунке 10.3 (e). Смысл всего этого в том, что общее количество ответвлений двух ФНЧ T_{total} намного меньше, чем 4000 ответвлений, необходимых при однокаскадной фильтрации. Из (10.3) для двух фильтров LPF_1 и LPF_2

$$\begin{aligned} T_{total} &= T_{LPF1} + T_{LPF2} = \\ &= 2 \times 400/(8 - 1.8) + 2 \times 16/(2 - 1.8) = 289\ ответвлений \end{aligned} \qquad (10\text{-}4)$$

Это впечатляющее уменьшение объема вычислений. Рассмотрев (10.3) для каждого каскада, мы можем увидеть, что для первого каскада при постоянной $f_{old} = 400$ кГц мы увеличиваем Δf. Для второго каскада уменьшаются и Δf, и f_{old}. Следует хорошо запомнить тот факт, что при определении количества ответвлений ФНЧ в (10.3) отношение $f_{old}/\Delta f$ оказывает значительно большее влияние, чем k. Этот пример, хотя и страдает некоторым преувеличением, показывает, каким образом достигается уменьшение объема вычислений при многокаскадном прореживании. Разве не удивительно, что увеличение количества каскадов обработки в схеме прореживания с $D = 100$ в действительности уменьшает требования к вычислительной мощности?

Можете посчитать, что, если бы мы в нашем примере прореживания в 100 раз использовали значения $D_1 = 50$ и $D_2 = 2$ (или $D_1 = 10$ и $D_2 = 10$), то общее количество ответвлений фильтров было бы существенно больше 400. Следовательно, $D_1 = 25$ и $D_2 = 4$ представляют собой оптимальное решение.

Практическая реализация процесса фильтрации/прореживания достаточно прозрачна. Возвращаясь к нашему примеру прореживания в $D = 3$ раза, мы можем реализовать его в виде стандартного КИХ-фильтра с линейной ФЧХ на основе линии задержки с ответвлениями, показанного на рисунке 10.4, при этом мы вычисляем выходной отсчет $y(n')$, задвигаем в линию задержки $D = 3$ новых отсчетов $x(n)$ и вычисляем следующий выходной отсчет $y(n')$, задвигаем три новых отсчета $x(n)$ и вычисляем следующий выходной отсчет $y(n')$ и т. д. (Если коэффициенты нашего КИХ-фильтра нечетного порядка симметричны, так что $h(4) = h(0)$ и $h(3) = h(1)$, существует остроумный способ уменьшить необходимое количество умножений, описанный в разделе 13.7.)

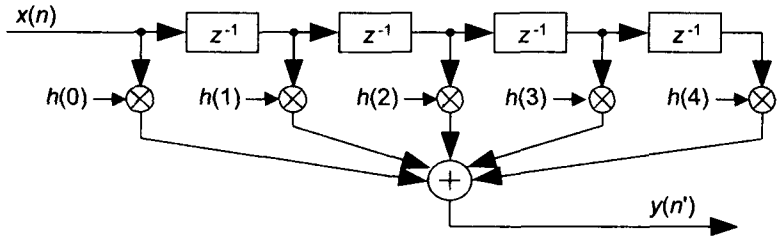


Рис. 10.4. Реализация фильтра прореживания

Прежде чем покончить с этой темой, упомянем две необычные особенности прореживания. Во-первых, интересно отметить, что прореживание представляет собой один из тех немногих процессов, которые не инвариантны во времени. Исходя из природы процесса прореживания можно заключить, что если мы задержим входной сигнал на один отсчет, блок прореживания выдаст на выход совершенно другую последовательность. Например, если мы подадим на вход блока прореживания последовательность $x(n) = x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), \ldots$ и $D = 3$, выходной сигнал $y(n)$ будет представлять собой последовательность $x(0), x(3), x(6), \ldots$. Если же мы задержим входную последовательность на один отсчет, задержанный входной сигнал $x'(n)$ будет выглядеть так: $x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), \ldots$. В этом случае выходная прореженная последовательность $y'(n)$ будет содержать отсчеты $x(1)$, $x(4), x(7), \ldots$, что не является задержанной версией $y(n)$. Следовательно, процесс прореживания не инвариантен во времени.

Во-вторых, прореживание не приводит к уменьшению амплитуды сигнала во временной области. Синусоида с размахом в 10 единиц сохраняет этот размах после прореживания. Однако прореживание в D раз вносит потери амплитуды в частотной области в D раз. Предположим, что дискретное преобразование Фурье (ДПФ) от синусоидального сигнала $x(n)$ длиной в 300 отсчетов есть $|X(m)|$. Если мы проредим $x(n)$ в $D = 3$ раза, получив синусоидальную последовательность $x'(n)$ длиной в 100 отсчетов, амплитуда ДПФ сигнала $x'(n)$ будет $|X'(m)| = |X(m)|/3$. Это происходит потому, что модули отсчетов ДПФ пропорциональны количеству преобразованных отсчетов во временной области.

И в завершение позволим себе дать небольшой практический совет от инженера ЦОС: всегда, когда мы можем проредить сигнал без возникновения ошибок наложения из-за перекрытия копий спектра, разумно использовать прореживание.

Понижение частоты дискретизации f_s:

- снижает требуемую вычислительную мощность (количество операций в секунду);
- снижает количество отсчетов во временной области, которые необходимо обработать — наши вычисления завершаются скорее, что позволяет нам обрабатывать более широкополосные сигналы;
- позволяет уменьшить стоимость (за счет снижения тактовых частот) аппаратурных компонентов, используемых при аппаратурной реализации обработки;
- уменьшает потребляемую аппаратурой мощность (это важно в приборах с батарейным питанием);
- позволяет увеличить отношение сигнал/шум за счет фильтрации сигнала (искаженного шумом), за которой следует прореживание.

Вывод: взвешивайте возможность прореживания сигналов всегда, когда оно представляется разумным.

10.2. Интерполяция

Прореживание — это только одна сторона преобразования частоты дискретизации. Рассмотрим другую сторону — интерполяцию. Повышение частоты дискретизации с помощью интерполяции несколько сложнее, чем прореживание, поскольку при интерполяции необходимо вычислять значения новых отсчетов. Концептуально интерполяция состоит в генерации непрерывной кривой $y_c(t)$, которая проходит через точки, соответствующие значениям отсчетов $x_{old}(n)$, как показано на рисунке 10.5 (a), с последующей дискретизацией этой кривой с новой частотой дискретизации f_{new} для получения интерполированной последовательности $x_{new}(n)$ на рисунке 10.5 (b). Конечно, непрерывные кривые не могут строиться цифровыми машинами, поэтому нам необходимо получать $x_{new}(n)$ непосредственно из $x_{old}(n)$. Для повышения заданной частоты дискретизации в M раз нам необходимо вычислить $M-1$ промежуточных значений между каждыми двумя соседними отсчетами $x_{old}(n)$. Этот процесс абсолютно прямолинеен, и понять его лучше всего на примере.

Предположим, что мы имеем последовательность $x_{old}(n)$, часть которой показана на рисунке 10.6 (a), и мы хотим увеличить частоту дискретизации в $M = 4$ раза. Спектр последовательности $x_{old}(n)$ приведен на рисунке 10.6 (a) в диапазоне от 0 Гц до $4f_{old}$. Обратите, пожалуйста, внимание: штриховые линии на графике $X_{old}(m)$ обозначают копии спектра. Чтобы повысить частоту дискретизации последовательности $x_{old}(n)$ в четыре раза, мы, как правило, добавляем три нуля между каждой парой отсчетов, как показано на рисунке 10.6 (b), в результате чего получаем новую последовательность $x_{int}(n')$. Индекс *int* означает intermediate, т. е. *промежуточная*. Заметьте, что при $n' = 4n$ значение $x_{int}(n') = x_{old}(n)$, т. е. старая последовательность теперь включена в новую. Введение нулей устанавливает новые значения индексов последовательности интерполированных значений $x_{int}(n')$.

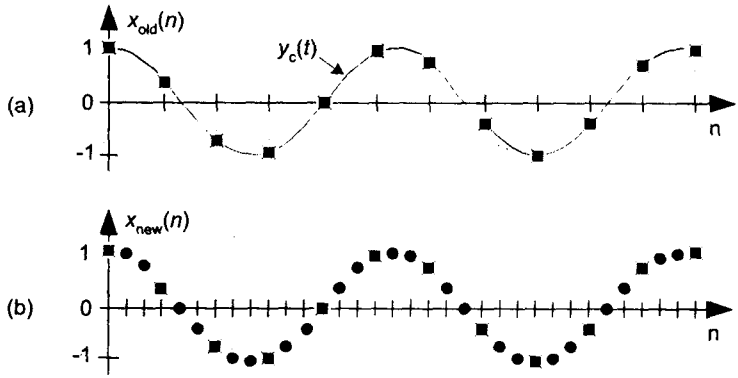


Рис. 10.5. Преобразование частоты дискретизации: (a) исходная последовательность; (b) последовательность, частота дискретизации которой увеличена в три раза

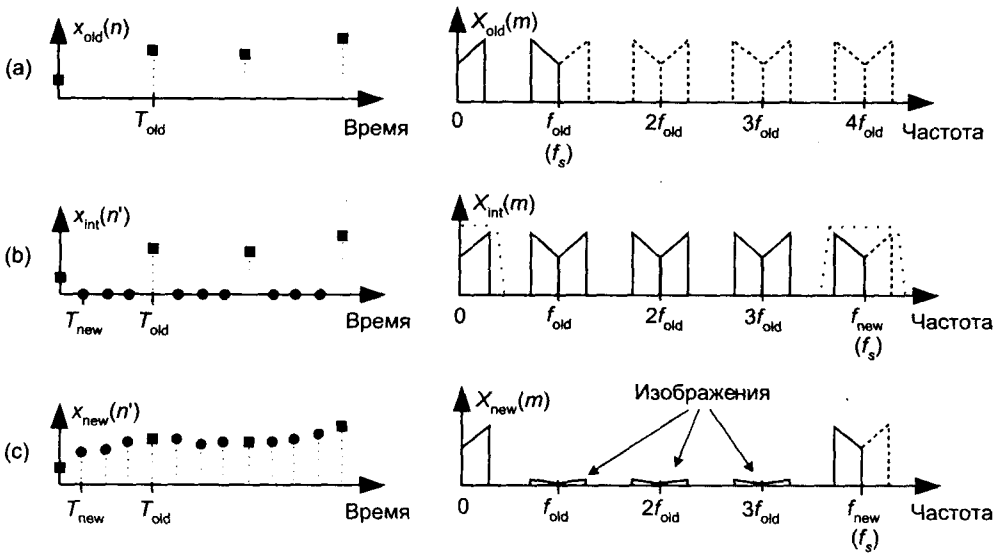


Рис. 10.6. Интерполяция в четыре раза: (a) исходная дискретизированная последовательность и ее спектр; (b) введение нулей в исходную последовательность и результирующий спектр; (c) выходная последовательность интерполирующего фильтра и окончательный спектр интерполированной последовательности

Спектр $X_{int}(m)$ последовательности $x_{int}(n')$ показан на рисунке 10.6 (b), где $f_{new}=4f_{old}$. Составляющие спектра $X_{int}(m)$, нарисованные сплошными линиями, центры которых расположены на частотах, кратных f_{old}, называются изображениями. Добавив нули, мы просто повысили эффективную частоту дискретизации до $f_s=f_{new}$ (см. рис. 10.6 (b)). Последний шаг интерполяции состоит в том, чтобы отфильтровать последовательность $x_{int}(n')$ фильтром нижних частот, амплитудно-частотная характеристика которого изображена на рисунке 10.6 (b) штриховой линией на частотах вблизи 0 Гц и f_{new} Гц, чтобы подавить изображения спектра.

Этот фильтр нижних частот называется интерполирующим фильтром, а его выходная последовательность и есть требуемая $x_{new}(n')$, показанная на рисунке 10.6 (с) и имеющая спектр $X_{new}(m)$.

Итак, мы сделали все, необходимое для внедрения нулей, интерполяции и фильтрации? Ну, не совсем — из-за того, что мы не можем реализовать идеальный фильтр нижних частот, $x_{new}(n')$ не будет точной интерполяцией последовательности $x_{old}(n)$. Ошибка проявляется как остатки изображений в $X_{new}(m)$. При использовании идеального фильтра эти остатков не было бы. Мы можем только аппроксимировать идеальный интерполирующий фильтр нижних частот. Важно помнить, что точность всего процесса интерполяции зависит от уровня подавления в полосе задерживания интерполирующего фильтра. Чем больше подавление, тем точнее интерполяция. Как и в случае прореживания, интерполяцию можно рассматривать как упражнение по проектированию фильтров нижних частот.

Обратите внимание на то, что из-за внедрения нулей процесс интерполяции приводит к потере амплитуды в M раз. Следовательно, чтобы обеспечить единичный коэффициент преобразования $x_{old}(n)$ в $x_{new}(n')$, фильтр интерполяции должен иметь коэффициент усиления, равный M.

И еще один последний момент, относящийся к интерполяции. Вы можете впасть в заблуждение, думая, что интерполяция — порождение современной теории и применения цифровой обработки сигналов. (Например, она используется, когда мы повышаем частоту дискретизации музыкального сигнала перед подачей его на цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), выходной сигнал которого подается далее на усилитель и громкоговоритель в проигрывателе компакт-дисков. Такое повышение частоты дискретизации снижает стоимость аналогового фильтра, включенного на выходе ЦАП). Не стоит так думать. Древние астрономические клинописные таблицы (составленные в Уруке и Вавилоне за 200 лет до Рождества Христова) показывают, что для заполнения пропущенных клеток в таблицах положения небесных тел, когда атмосферные условия препятствовали прямым наблюдениям, использовалась линейная интерполяция [3]. С тех пор интерполяция часто использовалась для заполнения пропущенных данных.

10.3. Объединение прореживания и интерполяции

Хотя изменение частоты дискретизации в целое количество раз с помощью прореживания или интерполяции и может быть полезным, что делать, если нам необходим нецелый коэффициент преобразования частоты дискретизации? Можно реализовать преобразование частоты дискретизации с любым рациональным коэффициентом M/D путем последовательного выполнения интерполяции в M раз и прореживания в D раз. Поскольку отношение M/D можно получить с такой точностью, какую мы хотим, при правильном выборе целых M и D, мы можем практически реализовать почти любое значение коэффициента преобразования. Например, повышение частоты дискретизации с коэффициентом 7.125 можно выполнить путем интерполяции с $M = 57$ с последующим прореживанием в $D = 8$ раз, т. к. $7.125 = 57/8$.

Изменение частоты дискретизации с коэффициентом M/D изображается в виде схемы, показанной на рисунке 10.7 (a). Операция повышения частоты, обозначенная как $\uparrow M$, состоит во введении $M-1$ нулевых отсчетов между парами отсчетов $x_{old}(n)$. Замечательным свойством этой процедуры является то, что вычислительная сложность изменения частоты дискретизации с рациональным коэффициентом M/D меньше, чем сумма вычислительных сложностей интерполяции и последующего прореживания, выполняемых по отдельности. Это объясняется тем, что мы можем объединить интерполирующий фильтр LPF_M и прореживающий фильтр LPF_D в один фильтр, который на рисунке 10.7 (b) обозначен как $LPF_{M/D}$. Процесс, изображенный на рисунке 10.7 (b) обычно называют преобразованием частоты дискретизации, потому что, если $M > D$, мы имеем интерполятор, а при $D > M$ мы имеем устройство прореживания. (Фильтр $LPF_{M/D}$ часто называют *многочастотным* фильтром.) Фильтр $LPF_{M/D}$ должен существенно подавлять спектральные изображения, возникающие при интерполяции, чтобы вызванные ими искажения полезного сигнала не превышали некоторого допустимого уровня.

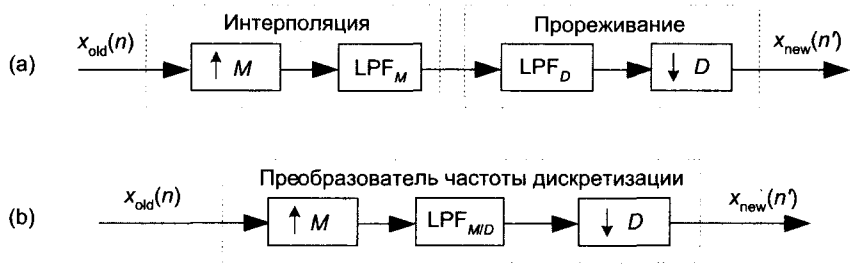


Рис. 10.7. Преобразование частоты дискретизации с рациональным коэффициентом: (a) комбинация интерполяции и прореживания; (b) преобразование частоты дискретизации с помощью единственного фильтра

Заметим, что граница полосы задерживания фильтра LPF_M должна быть меньше $f_{new}/2$, чтобы после прореживания не возникали наложения. Подавление в полосе задерживания $LPF_{M/D}$ должно быть достаточно большим, чтобы остатки ослабленных изображений спектра не вносили шум недопустимо высокого уровня, когда они накладываются на диапазон частот от 0 до $f_{new}/2$ в результате прореживания.

И снова наша задача интерполяции/прореживания сводится к задаче проектирования ФНЧ. Для ее решения мы можем применить все наши знания и все инструменты, которые доступны для проектирования ФНЧ. При программном проектировании интерполяторов/прореживателей мы хотим, чтобы ФНЧ эффективно подавлял изображения спектра, и его реализация работала как можно быстрее. Для аппаратурных интерполяторов/прореживателей мы стремимся достичь разумного компромисса противоречивых требований высокого качества (минимального уровня наложений), простой архитектуры, высокой пропускной способности и низкого энергопотребления.

Фильтрация при изменении частоты дискретизации в том виде, в каком мы ее представили, удручающе неэффективна. Представьте себе изменение частоты дискретизации сигнала с коэффициентом 4/3; нам необходимо вставить в исходную последовательность три нулевых отсчета на каждый исходный отсчет, а затем подать эту расширенную последовательность на ФНЧ. Три четверти умножений

при реализации фильтра будут давать нулевой результат. Затем мы отбросим две трети отфильтрованных отсчетов. Это очень неэффективно! К счастью, существуют специальные фильтры преобразования частоты дискретизации, которые называются *цифровыми полифазными фильтрами* и которые позволяют повысить эффективность фильтрации. Рассмотрим полифазные фильтры, а затем обсудим особый фильтр, известный как последовательный *интегратор-гребенчатый фильтр* (ИГФ = CIC – *cascaded integrator-comb*), использование которого эффективно при аппаратурной реализации преобразования частоты дискретизации.

10.4. Полифазные фильтры

Допустим, нам требуется интерполирующий КИХ-фильтр с линейной ФЧХ, имеющий 12 ответвлений. Первоначальный план состоит в том, что мы будем подавать последовательность $x_{int}(n')$ с добавленными нулевыми отсчетами, показанную на рисунке 10.8 (a), на этот фильтр, коэффициенты которого показаны на рисунке 10.8 (b), чтобы получить требуемую последовательность $x_{new}(n')$. (Этот фильтр, коэффициенты которого образуют последовательность $h(k)$, часто называют КИХ-фильтром-прототипом. Это вызвано тем, что мы собираемся позже модифицировать его.) Обратите внимание на то, что во времени, которое на рисунке 10.8 (a) увеличивается вправо, коэффициенты фильтра используются в обратном порядке, как показано на рисунке 10.8 (b). Такая фильтрация требует 12 умножений на каждый выходной отсчет $x_{new}(n')$, при том, что девять произведений всегда будут равны нулю. Но оказывается, что нам не нужно выполнять все 12 умножений.

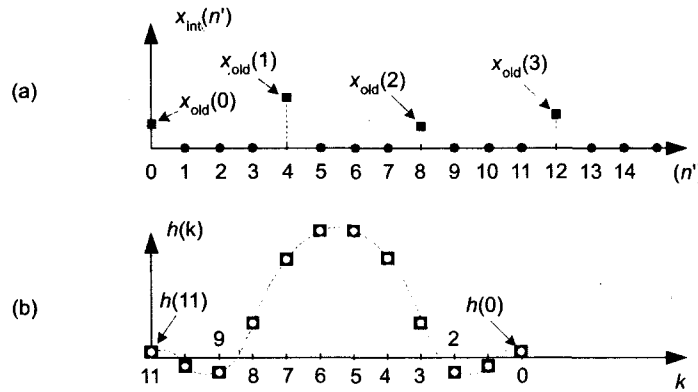


Рис. 10.8. Интерполяция в 4 раза с помощью КИХ ФНЧ с 12 ответвлениями: (a) входные отсчеты фильтра; (b) коэффициенты фильтра, используемые для вычисления $x_{new}(n')$

Чтобы показать это на примере, предположим, вернувшись к нашему случаю интерполяции с $M = 4$, что мы решили использовать ФНЧ с 12 ответвлениями, коэффициенты которого показаны на рисунке 10.8 (b). Задача интерполирующего фильтра нижних частот состоит в вычислении свертки коэффициентов с последовательностью $x_{int}(n')$. Рисунок 10.9 (a) показывает, как коэффициенты фильтра

накладываются на часть отсчетов $x_{int}(n')$ при вычислении первого отсчета последовательности $x_{new}(n')$, $x_{new}(0)$. Коэффициенты фильтра показаны символами ◘

По точкам, которые на рисунке 10.9 (а) представляют последовательность $x_{int}(n')$, мы видим, что, хотя среди коэффициентов девять отмечены символом ◘ и три — символом ◙, только три коэффициента, отмеченные символом ◙, дают ненулевые произведения, вносящие вклад в сумму $x_{new}(0)$. Это коэффициенты КИХ-фильтра $h(3)$, $h(7)$ и $h(11)$. Суть здесь в том, что нам не нужно выполнять умножения, когда участвующий в нем отсчет $x_{int}(n')$ равен нулю. Чтобы получить $x_{new}(0)$, нам необходимо выполнить только 3 умножения. Чтобы уяснить идею полифазного фильтра, вспомним, что для вычисления $x_{new}(0)$ мы используем коэффициенты фильтра-прототипа, отмеченные значками ◙. Когда мы сдвинем импульсную характеристику вправо на один отсчет, мы будем использовать для вычисления $x_{new}(1)$ коэффициенты, отмеченные на рисунке 10.9 (b) кружочками, т. к. ненулевые отсчеты последовательности $x_{int}(n')$ попадут под них. Эти кружочки представляют коэффициенты $h(0)$, $h(4)$ и $h(8)$.

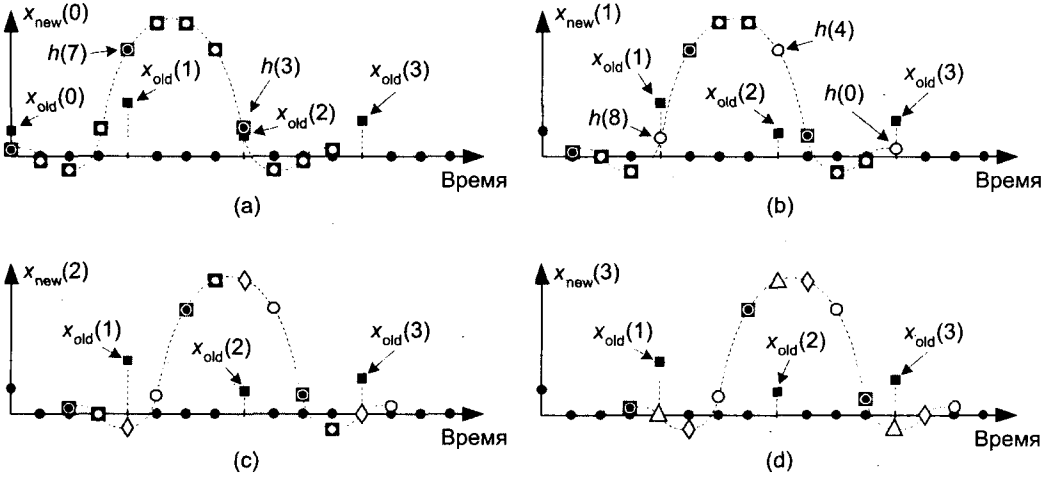


Рис. 10.9. Коэффициенты фильтра, используемые для вычисления разных отсчетов последовательности $x_{new}(n')$

Таким же образом, когда мы сдвинем импульсную характеристику вправо еще на один отсчет для вычисления $x_{new}(2)$, мы будем использовать коэффициенты, показанные на рисунке 10.9 (с) ромбиками. Наконец, мы сдвинем импульсную характеристику вправо еще раз и используем коэффициенты, показанные на рисунке 10.9 (d) треугольниками, для вычисления $x_{new}(3)$. Еще один сдвиг импульсной характеристики вправо приведет снова к использованию коэффициентов, отмеченных значком ◙, для вычисления $x_{new}(4)$. Теперь легко понять предлагаемую схему — имеются $M = 4$ разных набора коэффициентов, использованных для вычисления отсчетов $x_{new}(n')$ по отсчетам $x_{old}(n)$. Каждый раз, когда необходимо вычислить новый отсчет $x_{new}(n')$ мы продвигаемся циклически на один шаг по четырем наборам коэффициентов и выполняем вычисления следующим образом:

$x_{new}(0) = h(3)x_{old}(2) + h(7)x_{old}(1) + h(11)x_{old}(0)$ ←использует коэффициенты, отмеченные значком ◙

$x_{new}(1) = h(0)x_{old}(3) + h(4)x_{old}(2) + h(8)x_{old}(1)$ ←использует коэффициенты, отмеченные значком О

$x_{new}(2) = h(1)x_{old}(3) + h(5)x_{old}(2) + h(9)x_{old}(1)$ ←использует коэффициенты, отмеченные значком ◊

$x_{new}(3) = h(2)x_{old}(3) + h(6)x_{old}(2) + h(10)x_{old}(1)$ ←использует коэффициенты, отмеченные значком Δ

$x_{new}(4) = h(3)x_{old}(3) + h(7)x_{old}(2) + h(11)x_{old}(1)$ ←использует коэффициенты, отмеченные значком ◙

$x_{new}(5) = h(0)x_{old}(4) + h(4)x_{old}(3) + h(8)x_{old}(2)$ ←использует коэффициенты, отмеченные значком О

$x_{new}(6) = h(1)x_{old}(4) + h(5)x_{old}(3) + h(9)x_{old}(2)$ ←использует коэффициенты, отмеченные значком ◊

$x_{new}(7) = h(2)x_{old}(4) + h(6)x_{old}(3) + h(10)x_{old}(2)$ ←использует коэффициенты, отмеченные значком Δ

и так далее.

Привлекательной чертой этого механизма является то, что нам в действительности вообще не нужно формировать последовательность $x_{int}(n')$, и мы не выполняем никаких ненужных вычислений. Это и есть полифазная фильтрация.

Эта последовательность вычислений показывает нам не только, что нужно фильтровать, но и как это нужно делать. Мы можем реализовать наш метод полифазной интерполирующей фильтрации с помощью банка из четырех субфильтров, показанного на рисунке 10.10. Эта схема называется коммутаторной моделью полифазных интерполирующих фильтров. В ней имеется переключатель, который совершает полный оборот на каждый поступающий отсчет $x_{old}(n)$. Таким способом вычисляются четыре отсчета $x_{new}(n')$ на каждый входной отсчет $x_{old}(n)$.

В общем случае, если необходима интерполяция с коэффициентом M, нам нужно иметь M субфильтров. На рисунке 10.11 приведена структура полифазного фильтра, использующая минимум памяти, которая содержит три переключателя, вращающихся синхронно против часовой стрелки и подключающих последовательно четыре набора коэффициентов на каждый новый отсчет $x_{old}(n)$. Как и раньше, в этом случае вычисляются четыре новых отсчета $x_{new}(n')$ на каждый отсчет $x_{old}(n)$.

Преимуществом этой схемы является минимизация количества регистров для сохранения задержанных отсчетов $x_{old}(n)$. Если полифазный фильтр реализует коэффициент интерполяции M, то используются M наборов коэффициентов. Мы можем обосновать приведенные блок-схемы полифазных КИХ-фильтров с помощью уравнений в z-области. Начнем с описания полифазного КИХ-фильтра вида:

$$\begin{aligned} H(z) = {} & h(0) + h(4)z_{in}^{-1} + h(8)z_{in}^{-2} + \\ & + [h(1) + h(5)z_{in}^{-1} + h(9)z_{in}^{-2}]z_{out}^{-1} + \\ & + [h(2) + h(6)z_{in}^{-1} + h(10)z_{in}^{-2}]z_{out}^{-2} + \\ & + [h(3) + h(7)z_{in}^{-1} + h(11)z_{in}^{-2}]z_{out}^{-3} \end{aligned} \qquad (10\text{-}5)$$

где z_{in}^{-1} – единичная задержка на частоте дискретизации входного сигнала, а z_{out}^{-1} – единичная задержка на частоте дискретизации выходного сигнала, реализуемая с помощью переключателя. Поскольку $z_{in}^{-1} = z_{out}^{-4}$ и $z_{in}^{-2} = z_{out}^{-8}$, мы можем написать:

$$\begin{aligned} H(z) &= h(0) + h(4)z_{out}^{-4} + h(8)z_{out}^{-8} + \\ &+ [h(1) + h(5)z_{out}^{-4} + h(9)z_{out}^{-8}]z_{out}^{-1} + \\ &+ [h(2) + h(6)z_{out}^{-4} + h(10)z_{out}^{-8}]z_{out}^{-2} + \\ &+ [h(3) + h(7)z_{out}^{-4} + h(11)z_{out}^{-8}]z_{out}^{-3} = \\ &= h(0) + h(4)z_{out}^{-4} + h(8)z_{out}^{-8} + \\ &+ h(1)z_{out}^{-1} + h(5)z_{out}^{-5} + h(9)z_{out}^{-9} + \\ &+ h(2)z_{out}^{-2} + h(6)z_{out}^{-6} + h(10)z_{out}^{-10} + \\ &+ h(3)z_{out}^{-3} + h(7)z_{out}^{-7} + h(11)z_{out}^{-11} = \\ &= \sum_{k=0}^{11} h(k)z_{out}^{-k}, \end{aligned} \tag{10-6}$$

что представляет собой классическую передаточную функцию КИХ-фильтра с 12 ответвлениями. Уравнение (10.5) называется *полифазным разложением* уравнения (10.6).

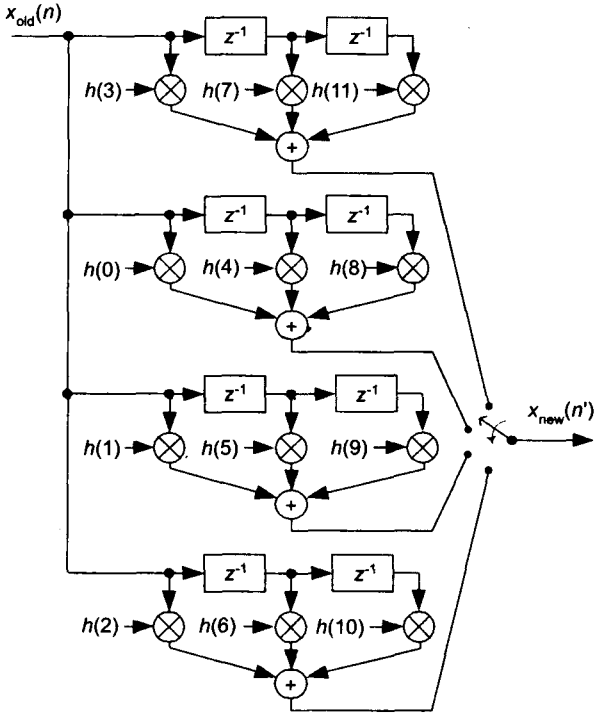


Рис. 10.10. Структура полифазного интерполирующего фильтра с коэффициентом 4, реализованного в виде банка субфильтров

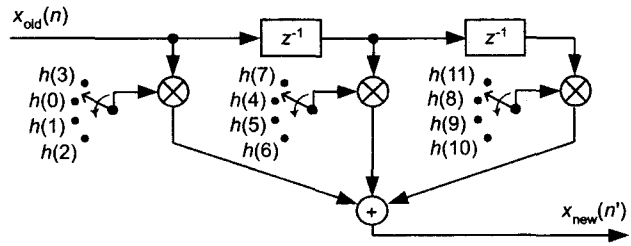


Рис. 10.11. Структура полифазного фильтра с минимальной памятью, использующая коммутируемые коэффициенты.

Рассматривая пример, приведенный на рисунке 10.9, следует иметь ввиду следующее:

1. Для коэффициента интерполяции M большинство людей предпочитают иметь КИХ-прототип с количеством ответвлений, кратным M, что облегчает реализацию. Интерполирующие КИХ-фильтры, о которых мы говорили, вносят ослабление сигнала, равное коэффициенту интерполяции M. Чтобы компенсировать эти потери, мы можем увеличить коэффициенты фильтра в M раз или умножить выходную последовательность $x_{new}(n')$ на M.
2. В примере на рисунке 10.9 использован фильтр-прототип с четным количеством ответвлений, но можно также использовать интерполирующие фильтры-прототипы с нечетным количеством ответвлений [4]. Например, для реализации коэффициента интерполяции 5 можно использовать КИХ-прототип длиной в 15 ответвлений.
3. Поскольку наборы коэффициентов на рисунке 10.11 не обязательно должны быть симметричными, мы не можем уменьшить количество операций, используя сложенную структуру КИХ-фильтра, которую мы обсуждаем в разделе 13.7.

Основываясь на структуре, показанной на рисунке 10.10, мы можем построить полифазный фильтр с прореживанием в 4 раза, используя переключатель на входе схемы, как на рисунке 10.12. Переключатель проходит циклически по четырем позициям ($D = 4$), подавая четыре отсчета входной последовательности $x_{old}(n)$ на субфильтры, затем выходные сигналы четырех субфильтров суммируются и дают один отсчет выходной последовательности $x_{new}(n')$. Заметьте, что субфильтры здесь точно те же, что и в схеме интерполирующего фильтра на рисунке 10.10. Достоинством полифазного прореживающего фильтра является то, что выполняются только действительно необходимые вычисления. Это значит, что в процессе прореживания никакие вычисленные отсчеты не отбрасываются.

На практике преобразование частоты дискретизации с большими коэффициентами выполняется в несколько этапов (при этом схема на рисунке 10.12, например, может использоваться как один каскад), на каждом из которых выполняется преобразование с меньшим коэффициентом. Каскадная реализация обладает следующими преимуществами:

- уменьшается вычислительная нагрузка,
- упрощается проектирование фильтров,

- уменьшается объем памяти,
- уменьшается вредное влияние ограниченной длины слова коэффициентов.

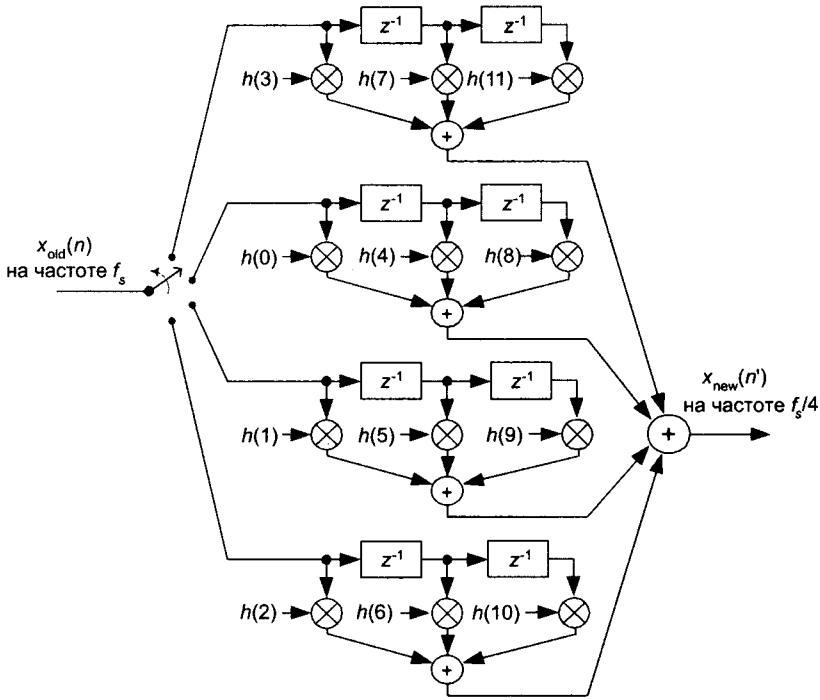


Рис. 10.12. Структура полифазного прореживающего в 4 раза фильтра в виде банка КИХ-субфильтров

Изложенное введение в преобразование частоты дискретизации по необходимости затронуло лишь поверхность этой важной технологии ЦОС. К счастью для нас, блестящая работа первых инженеров и математиков, исследовавших эту область, хорошо отражена в литературе,

Ряд стандартных учебников по ЦОС затрагивают более тонкие вопросы проектирования многочастотных фильтров [5 - 7], другие книги посвящены исключительно полифазным фильтрам и многочастотным системам [8 - 10]. Любознательный читатель может продолжить изучение этой темы и узнать, как в многочастотных системах выбирается количество каскадов [1, 11], из каких соображений выполняется проектирование оптимальных КИХ-фильтров [1, 12], какие выгоды дает использо вание полуполосных КИХ-фильтров [4, 13], в каких случаях предпочтение можно отдать БИХ-фильтрам [12], каковы особенности преобразования частоты дискретизации в обработке изображений [14 - 16], какие рекомендации существуют для разработчиков управляющей логики при аппаратурной реализации алгоритмов преобразования частоты дискретизации [12], как преобразование частоты дискретизации помогает более эффективно использовать коммерческую тестовую аппаратуру [17, 18], и какие программные инструменты проектирования многочастотных фильтров существуют сегодня [19].

Прежде чем покончить с преобразованием частоты дискретизации, познакомимся с последней темой — каскадными интеграторами-гребенчатыми фильтрами. Эти фильтры популярны среди разработчиков систем преобразования частоты дискретизации в современных системах связи.

10.5. Каскадные интеграторы-гребенчатые фильтры

Каскадные интеграторы-гребенчатые фильтры (ИГФ) представляют собой эффективную реализацию узкополосных ФНЧ и в этом качестве используются для аппаратурной реализации прореживания и интерполяции в современных системах связи.

ИГФ, частный случай более общего класса фильтров на основе частотной выборки, обсуждаемых в разделе 7.1, хорошо подходят для антиэлайзинговой фильтрации, предшествующей прореживанию (понижению частоты дискретизации), как показано на рисунке 10.13 (a), и для подавления изображений спектров при интерполяции (повышении частоты дискретизации), как изображено на рисунке 10.13 (b). Оба применения связаны с необходимостью фильтрации высокоскоростных потоков данных в таких устройствах как аппаратурные квадратурные модуляторы и демодуляторы в современных беспроводных системах, а также сигма-дельта АЦП и ЦАП.

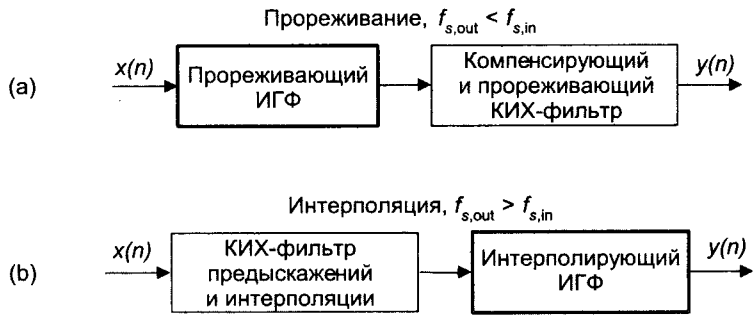


Рис. 10.13. Применения ИГФ: (a) прореживание; (b) интерполяция

Поскольку АЧХ таких фильтров имеет форму, подобную функции $\sin(x)/x$, после ИГФ или перед ним обычно включают более качественный КИХ-фильтр с линейной ФЧХ, задачей которого является компенсация неравномерности АЧХ ИГФ в полосе пропускания. Такая каскадная структура обладает рядом ценных качеств. Например, при прореживании благодаря предварительной фильтрации ИГФ узкополосные ФНЧ удается реализовать с существенным уменьшением вычислительной сложности по сравнению с реализацией в виде одного КИХ ФНЧ. Кроме того, КИХ ФНЧ второго каскада работает на пониженной частоте дискретизации, что позволяет уменьшить потребление энергии в высокоскоростных аппаратурных реализациях. Дополнительным преимуществом ИГФ является то, что они не используют операции умножения.

ИГФ были предложены сообществу специалистов по обработке сигналов более двух десятилетий тому назад, но возможности их использования выросли в последние годы [20]. Прогресс технологии СБИС, расширение использования методов полифазной фильтрации, успешное развитие техники сигма-дельта преобразователей и быстрое развитие беспроводных систем связи существенно подстегнули интерес к ИГФ и модификацию их традиционных схем. Ниже приводится введение в структуры и свойства традиционных ИГФ, представлены их частотные характеристики и обсуждаются некоторые важные аспекты их реализации.

10.5.1. Рекурсивные фильтры скользящего суммирования

ИГФ ведут свою родословную от *рекурсивных фильтров скользящего суммирования*, которые в свою очередь представляют собой эффективную форму нерекурсивного фильтра *скользящего среднего*. Посмотрев на D-точечный фильтр скользящего среднего, изображенный на рисунке 10-14 (a), можно видеть, что для вычисления выходного отсчета $y(n)$ требуется выполнить $D-1$ сложений плюс одно умножение на $1/D$.

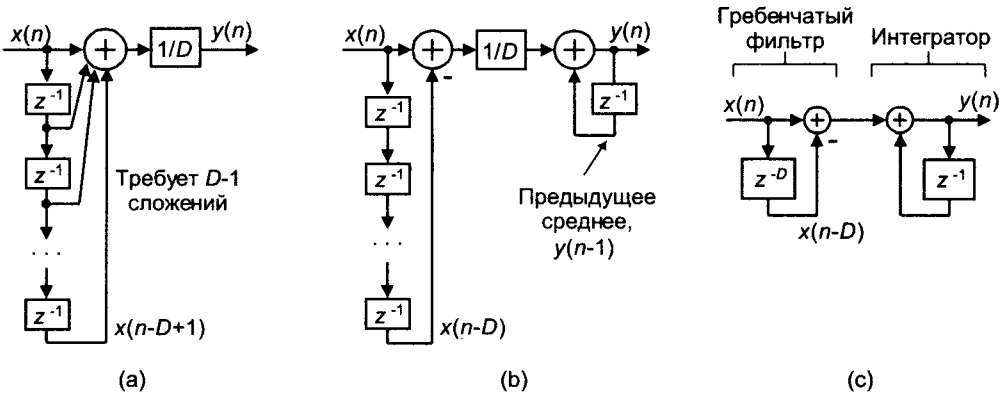


Рис. 10.14. D-точечные усредняющие фильтры: (a) стандартный фильтр скользящего среднего; (b) рекурсивный фильтр скользящего суммирования; (c) версия D-точечного усредняющего фильтра с использованием ИГФ

Выходной сигнал фильтра скользящего среднего с D ответвлениями во временной области вычисляется как

$$y(n) = (1/D)\,[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + \ldots + x(n-D+1)]\,. \qquad (10\text{-}7)$$

В z-области этому выражению соответствует изображение

$$Y(n) = (1/D)\,[X(n) + X(n)z^{-1} + X(n)z^{-2} + X(n)z^{-3} + \ldots + X(n)z^{-D+1}]\,, \qquad (10\text{-}8)$$

а передаточная функция $H(z)$ выглядит следующим образом

$$H(z) = Y(z)/X(z) = (1/D)\sum_{n=0}^{D-1} z^{-n} = (1/D)\,[1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-D+1}]\,. \qquad (10\text{-}9)$$

Эквивалентной, но более эффективной формой фильтра скользящего среднего является рекурсивный фильтр скользящего суммирования, показанный на рисунке 10.14 (b), где текущий отсчет $x(n)$ прибавляется к предыдущему значению выходного сигнала $y(n-1)$, а самый старый отсчет, $x(n-D)$, вычитается из него. Разностное уравнение, описывающее фильтр скользящего суммирования, имеет вид

$$y(n) = (1/D)[x(n) - x(n-D)] + y(n-1), \qquad (10\text{-}10)$$

а передаточная функция $H(z)$

$$H(z) = (1/D)\,[1 - z^{-D}]/[1 - z^{-1}]. \qquad (10\text{-}11)$$

Мы используем одно и то же обозначение $H(z)$ для передаточных функций фильтра скользящего среднего и рекурсивного фильтра скользящего суммирования потому, что их передаточные функции равны. Заметьте, что фильтр скользящего среднего имеет $D-1$ элементов задержки, а первая линия задержки рекурсивного фильтра скользящего суммирования содержит D элементов.

Фильтр скользящего суммирования имеет то преимущество, что он требует только две операции сложения на один выходной отсчет, независимо от величины D задержки! Этот фильтр используется во многих приложениях, где подавление шума достигается за счет усреднения. Далее мы увидим, что ИГФ сам по себе также является рекурсивным фильтром скользящего суммирования.

10.5.2. Структуры ИГФ

Если мы представим линию задержки одним блоком и опустим масштабирующий множитель $1/D$ на рисунке 10.14 (b), мы получим классическую форму ИГФ первого порядка, каскадная структура которой показана на рисунке 10.14 (c). Часть ИГФ с прямой связью называется *гребенчатой* секцией, *разностная задержка* которой равна D, а секцию с обратной связью обычно называют *интегратором*. Гребенчатый каскад вычитает задержанный входной отсчет из текущего входного отсчета, а интегратор представляет собой просто аккумулятор, к которому на каждом периоде дискретизации добавляется новый отсчет. Разностное уравнение ИГФ имеет вид

$$y(n) = x(n) - x(n-D) + y(n-1), \qquad (10\text{-}12)$$

а его передаточная функция выглядит так

$$H_{cic}(z) = [1 - z^{-D}]/[1 - z^{-1}]. \qquad (10\text{-}13)$$

Чтобы увидеть, чем интересен ИГФ, мы, прежде всего, исследуем его поведение во временной области для $D = 5$ по характеристикам, показанным на рисунке 10.15. Обратите внимание на то, что положительный импульс с выхода гребенчатого фильтра приводит к тому, что все отсчеты на выходе интегратора становятся равными единице. Затем, через D отсчетов, отрицательный импульс с выхода гребенчатого фильтра обнуляет интегратор, все его последующие выходные отсчеты становятся равными 0.

Ключевым моментом здесь является то, что общая импульсная характеристика ИГФ представляет собой дискретный прямоугольный импульс, идентичный

импульсной характеристике рекурсивного фильтра скользящего суммирования. (Фильтры скользящего среднего, рекурсивные фильтры скользящего суммирования и ИГФ — близкие родственники. Они имеют одинаковые карты нулей и полюсов в z-области, их АЧХ имеют одну и туже форму, их фазо-частотные характеристики идентичны, а их передаточные функции отличаются только постоянным масштабирующим множителем.) АЧХ и ФЧХ ИГФ при $D = 5$ показаны на рисунке 10.16 (а), где частотная ось нормирована относительно входной частоты дискретизации $f_s = f_{s,in}$.

Вычисление передаточной функции $H_{cic}(z)$ на единичной окружности, при $z = e^{j\omega}$, дает частотную характеристику ИГФ вида

$$H_{cic}(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega D})/(1 - e^{-j\omega}) =$$
$$= [e^{-j\omega D/2}(e^{j\omega D/2} - e^{-j\omega D/2})]/[e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})]. \qquad (10\text{-}14)$$

Используя тождество Эйлера $2j\sin(\alpha) = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}$, мы можем записать

$$H_{cic}(e^{j\omega}) = (e^{-j\omega D/2}/e^{-j\omega/2})[2j\sin(\omega D/2)/2j\sin(\omega/2)] =$$
$$= e^{-j\omega(D-1)/2}[\sin(\omega D/2)/\sin(\omega/2)]. \qquad (10\text{-}15)$$

Рис. 10.15. Характеристики однокаскадного ИГФ во временной области при $D = 5$

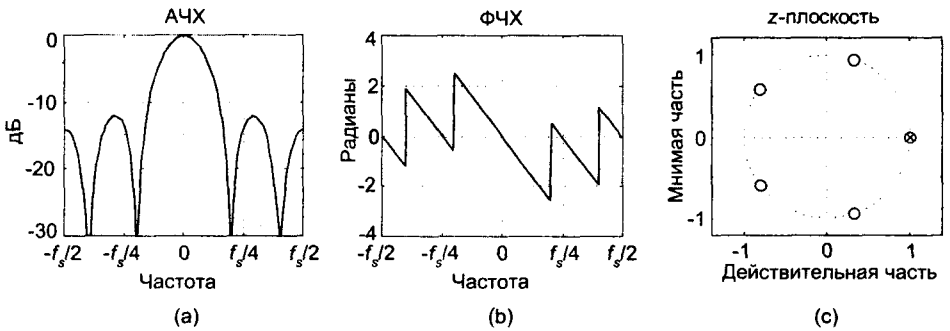


Рис. 10.16. Характеристики однокаскадного ИГФ при $D = 5$: (a) ЛАЧХ; (b) ФЧХ; (c) карта нулей и полюсов

И в результате получаем ФНЧ с характеристикой вида $\sin(x)/x$, центр которой расположен на частоте 0 Гц. (По этой причине ИГФ иногда называют *sinc*-филь-

трами.) Расположение нулей и полюсов ИГФ в z-плоскости при $D = 5$ приведено на рисунке 10.16 (с), при этом гребенчатый фильтр дает D нулей, распределенных равномерно по единичной окружности, а интегратор дает единственный полюс, компенсирующий ноль в точке $z = 1$. Нули гребенчатого фильтра, которые являются корнями степени D из 1, расположены в точках $z(m)=e^{j2\pi m/D}$, где $m = 0, 1, 2, \ldots, D-1$, соответствующих нулям АЧХ на рисунке 10.16 (а).

Рискованная, как правило, ситуация, когда полюс находится на единичной окружности, в данном случае не должна нас беспокоить, потому что передаточная функция $H_{cic}(z)$ не содержит ошибки, обусловленной квантованием коэффициентов. Коэффициенты ИГФ равны единице и в формате чисел с фиксированной запятой представляются без погрешности. Хотя ИГФ является рекурсивным фильтром, он гарантированно устойчив, обладает линейной ФЧХ и имеет импульсную характеристику конечной длительности.

Если мы рассмотрим модуль $H_{cic}(e^{j\omega})$ из (10.15), мы можем определить коэффициент передачи нашего ИГФ на нулевой частоте. Положив в (10-15) $\omega=0$, мы имеем

$$\textit{Коэффициент передачи ИГФ} = |H_{cic}(e^{j\omega})|_{\omega=0} = |\sin(0)/\sin(0)| = 0/0\,. \quad (10\text{-}16)$$

Пусть эта неопределенность вас не беспокоит, мы можем применить к (10-16) правило маркиза де Лопиталя

$$\textit{Коэффициент передачи ИГФ} = [\cos(\omega D/2)(D/2)]/[\cos(\omega/2)(1/2)] =$$
$$= [\cos(0)(D/2)]/[\cos(0)(1/2)] = D\,. \quad (10\text{-}17)$$

Таким образом, коэффициент передачи ИГФ для постоянной составляющей равен задержке гребенчатого фильтра D. Этот факт будет важным для нас, когда мы захотим реализовать наш ИГФ в аппаратуре.

ИГФ используются для антиэлайзинговой фильтрации перед прореживанием и для подавления изображений спектра интерполированных сигналов [21]. Хорошо запомнив все сказанное, поменяем порядок следования гребенчатого фильтра и интегратора, в котором они показаны на рисунке 10.14 (с), на обратный — мы имеем право сделать так, потому что оба фильтра линейны — и введем блок изменения частоты дискретизации в R раз, получив схему на рисунке 10.17 (а). (Предоставляем читателю самостоятельно доказать, что импульсная характеристика комбинации интегратор-гребенчатый фильтр, предшествующая изменению частоты дискретизации на рисунке 10.17 (а), равна импульсной характеристике фильтра, изображенного на рисунке 10.15 (с).) В большинстве применений ИГФ коэффициент преобразования частоты дискретизации R принимается равным разностной задержке гребенчатого фильтра D, но мы пока будем рассматривать эти параметры как независимые.

Операция прореживания $\downarrow R$ состоит в отбрасывании каждого R-го отсчета, в результате чего выходная частота дискретизации равна $f_{s,out}=f_{s,in}/R$. Чтобы исследовать подробнее поведение ИГФ в частотной области, на рисунке 10.18 (а) показана ЛАЧХ ИГФ, предшествующего прореживанию, при $D = 8$. Требуемая полоса пропускания фильтра представляет собой полосу частот шириной B, центр которой расположен на нулевой частоте. Ключевым моментом для расчета ИГФ является заворачивание спектра, обусловленное прореживанием.

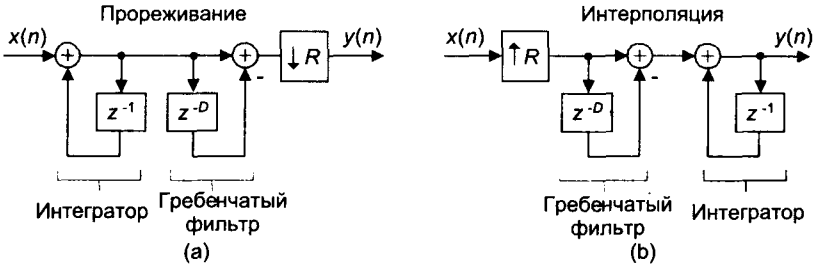


Рис. 10.17. Использование однокаскадных КГИФ при: (a) прореживании; (b) интерполяции

Затененные на рисунке 10.18 (a) полосы частот шириной B, центры которых расположены на частотах $f_{s,in}/R$, при прореживании в $R=8$ раз будут накладываться непосредственно на интересующий нас диапазон частот, как показано на рисунке 10.18 (b). Заметьте, что уровень наибольшего *накладываемого* компонента примерно на 16 дБ ниже уровня компонента в интересующем нас диапазоне частот. Конечно же, уровни накладываемой энергии зависят от ширины полосы частот B — чем меньше B, тем меньше уровень наложений после прореживания.

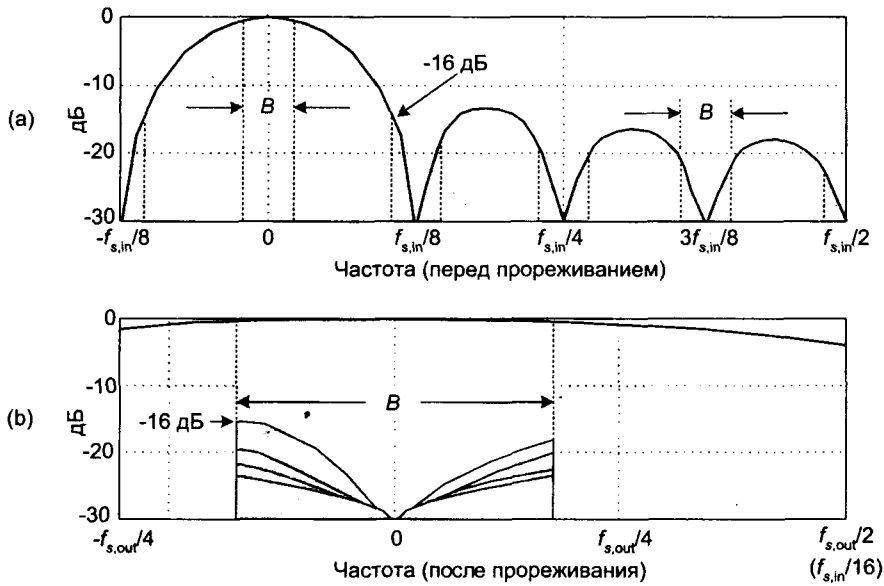


Рис. 10.18. АЧХ прореживающего ИГФ первого порядка с $D = 8$: (a) характеристика перед прореживанием; (b) характеристика и наложения после прореживания в $R = 8$ раз

На рисунке 10.17 (b) показан ИГФ, используемый для интерполяции, при этом символ $\uparrow R$ обозначает введение $R-1$ нулей между парами соседних отсчетов исходной последовательности, в результате чего получаем частоту дискретизации выходного сигнала $y(n)$, равную $f_{s,out}=Rf_{s,in}$. (В текущем обсуждении ИГФ интерполяция понимается как *введение нулей с последующей фильтрацией*.) На рисунке 10.19 (a) показан произвольный низкочастотный спектр сигнала,

подаваемого на интерполирующий ИГФ с $D = R = 8$, показанный на рисунке 10.17 (b), с его копиями. Спектр выходного сигнала фильтра на рисунке 10.19 (b) показывает, как неидеальная фильтрация приводит к появлению нежелательных изображений спектра.

После интерполяции мешающие изображения основного спектра шириной B расположены вокруг значений частоты, на которых АЧХ фильтра принимает нулевые значения и которые кратны частоте $f_{s,out}/R$. Если мы после ИГФ включим обычный КИХ ФНЧ на основе линии задержки с ответвлениями, полоса подавления которого включает полосу первого изображения, мы можем достичь достаточно хорошего подавления изображений.

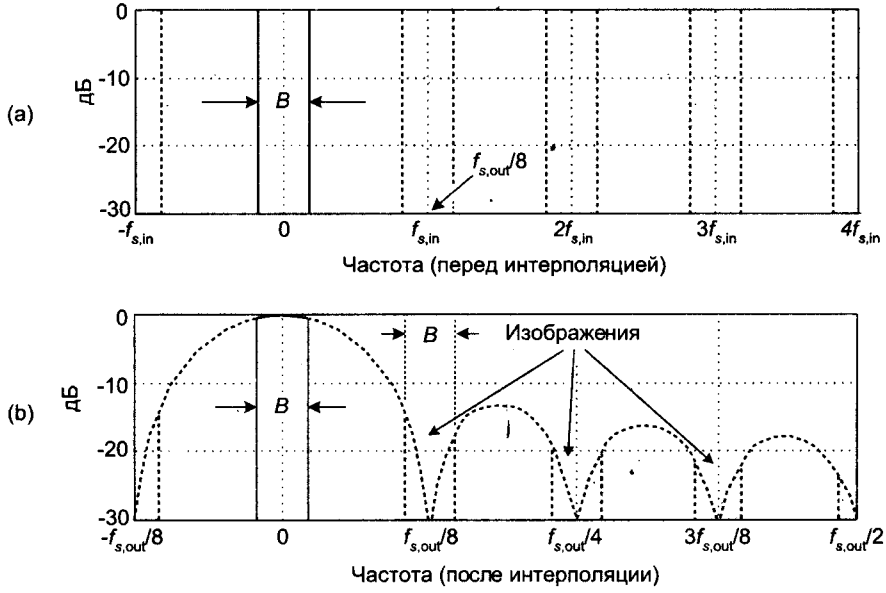


Рис. 10.19. Спектры в случае интерполирующего ИГФ первого порядка, $D = R = 8$: (a) спектр входного сигнала до интерполяции; (b) изображения выходного спектра

10.5.3. Улучшение подавления ИГФ

Самый общий метод улучшения подавления ИГФ состоит в повышении его порядка M путем включение нескольких секций фильтра. На рисунке 10.20 показаны структура и ЛАЧХ прореживающего ИГФ третьего порядка ($M = 3$).

Обратите внимание на то, что подавление в полосах частот вблизи $f_{s,in}/R$ на рисунке 10.20 (b) улучшилось по сравнению с фильтром первого порядка, показанным на рисунке 10.18 (a). Поскольку $M = 3$ секций ИГФ включены последовательно, общая АЧХ представляет собой произведение характеристик каскадов, или

$$|H_{cic,\ порядок\ M}(e^{j\omega})| = |\sin(\omega D/2)/\sin(\omega/2)|^M. \qquad (10\text{-}18)$$

За улучшение ослабления копий спектра мы платим увеличением количества аппаратурных сумматоров[1] и увеличением неравномерности АЧХ в полосе пропускания[2]. Дополнительная цена повышения порядка — увеличение коэффициента передачи фильтра, который растет экспоненциально с ростом порядка. Поскольку ИГФ обычно должны работать с полной разрядностью, чтобы сохранить устойчивость, разрядность сумматоров определяется как $M\log_2(D)$, так что за более высокий порядок фильтра приходится платить большой длиной слова данных. Несмотря на это, многокаскадные реализации распространены в коммерческих интегральных схемах, при этом ИГФ M-го порядка часто называют $sinc^M$ фильтрами.

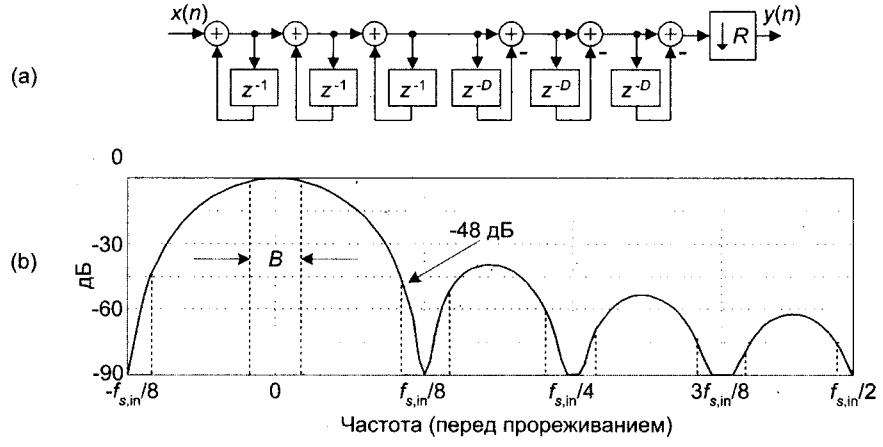


Рис. 10.20. Прореживающий ИГФ третьего порядка, $M = 3$, $D = R = 8$: (a) структура; (b) ЛАЧХ перед прореживанием

10.5.4. Особенности реализации ИГФ

В ИГФ гребенчатый каскад может предшествовать или следовать за интегратором. Однако важно поместить гребенчатый фильтр на той стороне, которая работает на меньшей частоте дискретизации, т. к. при этом для реализации задержки требуется меньше памяти. Поменяв порядок следования гребенчатых фильтров и операций изменения частоты дискретизации на рисунке 10.17 на обратный, получим наиболее распространенную реализацию ИГФ, показанную на рисунке 10.21. Заметьте, что гребенчатый каскад прореживающего фильтра теперь имеет длину линии задержки (разностную задержку), равную $N = D/R$. Это происходит благодаря тому, что задержка на N отсчетов после прореживания в R раз эквивалентна задержке в D отсчетов перед прореживанием в R раз. Аналогично для интерполирующего фильтра: задержка на N отсчетов перед интерполяцией с коэффициентом R эквивалентна задержке на D отсчетов после интерполяции.

---

[1] А также увеличением объема памяти, необходимого для реализации регистров сдвига — (*прим. перев.*).

[2] Или соответствующим сужением полосы пропускания — (*прим. перев.*).

Конфигурации, приведенные на рисунке 10.21, имеют два главных достоинства: во-первых, новая разностная задержка гребенчатого каскада уменьшается до $N = D/R$, что снижает требуемый объем памяти, а во-вторых, гребенчатая секция теперь работает на пониженной частоте дискретизации. Оба эти преимущества приводят к снижению потребляемой энергии.

Типовое значение параметра разностной задержки N гребенчатой секции составляет 1 или 2 для больших коэффициентов преобразования частоты дискретизации, которые часто используются в повышающих/понижающих преобразователях. По существу, N задает количество нулей частотной характеристики прореживающего фильтра, как показано на рисунке 10.22 (a).

Важной особенностью прореживающего фильтра на основе ИГФ является то, что форма его характеристики в зависимости от коэффициента прореживания меняется очень мало, как показано на рисунке 10.22 (b). Для значений R, превышающих 16, изменение формы характеристики пренебрежимо мало. Это позволяет использовать один и тот же компенсирующий КИХ-фильтр в системах с переменным коэффициентом прореживания.

ИГФ подвержены переполнениям регистров, вызванных единичной обратной связью в каждой интегрирующей секции. Эти переполнения не приводят к неприятным последствиям, если выполняются следующие два условия:

1. Диапазон представления чисел в выбранном формате данных не меньше максимальных ожидаемых значений выходных сигналов.

2. Фильтр реализован в двоичной дополнительной арифметике (без насыщения).

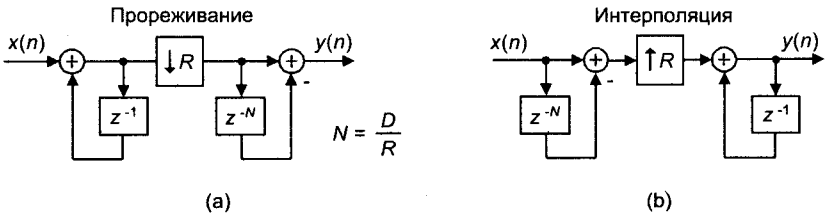


Рис. 10.21. Однокаскадные реализации ИГФ: (a) для прореживания; (b) для интерполяции

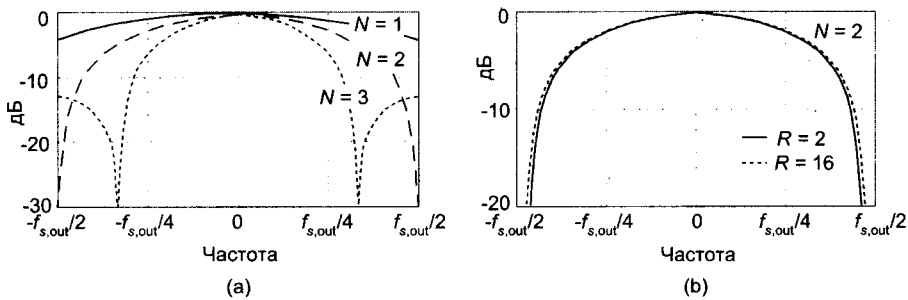


Рис. 10.22. Частотные характеристики прореживающего ИГФ: (a) для разных значений разностной задержки N при $R = 8$; (b) для двух коэффициентов прореживания при $N = 2$

Как показано в (10.17), ИГФ первого порядка имеет коэффициент передачи на нулевой частоте (постоянной составляющей), равный $D = NR$, а M включенных последовательно прореживающих фильтров имеют коэффициент передачи $(NR)^M$. Каждый дополнительный интегратор для правильной работы должен добавлять NR бит. Интерполирующие ИГФ вводят нули между отсчетами входного сигнала, что уменьшает коэффициент передачи в R раз с учетом нулевых значений, следовательно, полный коэффициент передачи интерполирующего ИГФ равен $(NK)^M/R$. Поскольку фильтр должен использовать целочисленную арифметику, длина слова для каждого каскада фильтра должна быть достаточной, чтобы принять максимальный сигнал (максимально возможный входной сигнал, умноженный на коэффициент передачи) этого каскада.

Хотя коэффициент передачи прореживающего ИГФ равен $(NR)^M$, в отдельных интеграторах может возникнуть переполнение. (Их усиление для постоянной составляющей бесконечно.) Использование двоичной дополнительной арифметики позволяет преодолеть эту трудность, если длина слова интегратора способна принять максимальное значение разности двух последовательных отсчетов (т. е. разность дает не более однократного переполнения). Используя двоично-дополнительный формат с его цикличностью, следующий гребенчатый фильтр вычислит правильную разность двух последовательных выходных отсчетов интегратора. Чтобы проиллюстрировать этот принцип, на рисунке 10.23 показано, как при прореживании с использованием четырехбитового двоичного дополнительного формата чисел первый выходной отсчет интегратора $x_{int}(0)$, равный шести, вычитается из второго отсчета, $x_{int}(1)$, равного 13 (что приводит к переполнению), и в результате получается правильная разность 7.

Десятичный	Двоичный дополнительный
+7	0111
+6	0110
+5	0101
+4	0100
+3	0011
+2	0010
+1	0001
0	0000
-1	1111
-2	1110
-3	1101
-4	1100
-5	1011
-6	1010
-7	1001
-8	1000

$x_{int}(0) = 6_{дес} = 0110_{двоич}$

$x_{int}(1) = 13_{дес} = 1101_{двоич} \leftarrow -3_{дес}$ после переполнения (заворот)

$$\begin{array}{rl} x_{int}(1) - x_{int}(0) = & 1101_{двоич} \\ & +1010_{двоич} \leftarrow -6_{дес} \\ \hline & 0111_{двоич} \leftarrow +7_{дес} \end{array}$$

Рис. 10.23. Пример получения правильной разности при переполнении в двоичных дополнительных кодах

При интерполяции увеличение длины слова составляет один бит на каждую гребенчатую секцию, и для правильной работы интеграторов необходимо избегать

переполнения. Таким образом, при интерполяции мы должны обеспечить увеличение длины слова на один бит данных на каждую гребенчатую секцию. Мы имеем некоторую свободу при отбрасывании отдельных младших битов в пределах секций ИГФ, за счет некоторого увеличения шума на выходе фильтра. Исследование специфических эффектов отбрасывания младших битов, однако, достаточно сложно, поэтому мы отсылаем читателя к работе [20].

Приведенные выше рассуждения были сфокусированы на ИГФ, реализуемых в жесткой логике, но такие фильтры могут быть реализованы и на программируемых ЦОС, использующих форматы данных с фиксированной запятой. Хотя такие процессоры имеют жестко заданные разрядности шин и АЛУ и фиксированную длину слова, реализация ИГФ и в этом случае может иметь преимущества при больших коэффициентах изменения частоты дискретизации. Большую длину слова можно реализовать с помощью многословных сложений, за счет дополнительных команд. Даже в этих условиях при больших коэффициентах преобразования частоты дискретизации вычислительная нагрузка на один отсчет в ЦПОС с фиксированной запятой может быть меньше, чем объем вычислений, необходимый при использовании обычного КИХ-фильтра на основе линии задержки с ответвлениями.

10.5.5. КИХ-фильтры компенсации и предискажений

В типовых применениях прореживания/интерполяции необходимо обеспечить достаточно гладкую АЧХ фильтра в полосе пропускания и узкую переходную полосу. Эти требования нельзя удовлетворить одним только ИГФ с его спадающей АЧХ в полосе пропускания и широкой переходной полосой. Мы можем приблизиться к решению этой проблемы, например, при прореживании, включив после ИГФ компенсирующий нерекурсивный КИХ-фильтр, как на рисунке 10.13 (а), который позволяет сузить переходную полосу и выровнять АЧХ в полосе пропускания.

В идеале АЧХ компенсирующего КИХ-фильтра должна представлять собой инвертированную версию АЧХ ИГФ в полосе пропускания, наподобие той, что показана штриховой линией на рисунке 10.24 (а) для простого КИХ-фильтра с тремя ответвлениями, коэффициенты которого равны [−1/16, 9/8, −1/16]. Пунктирной линией показана некомпенсированная спадающая в полосе пропускания АЧХ ИГФ первого порядка с $R = 8$, сплошной линией показана скомпенсированная характеристика включенных последовательно фильтров. Если увеличивается ширина полосы пропускания или порядок ИГФ, коррекция становится более жесткой и требует повышения длины компенсирующего КИХ-фильтра. Пример такой ситуации показан на рисунке 10.24 (b), где пунктирная кривая показывает спад АЧХ в полосе пропускания ИГФ третьего порядка с R = 8, а штриховая линия, описываемая уравнением $[x/\sin(x)]^3$, представляет собой характеристику компенсирующего КИХ-фильтра с 15 ответвлениями, имеющего коэффициенты [−1, 4, −16, 32, −64, 136, −352, 1312, −352, 136, −64, 32, −16, 4, −1].

Широкополосная коррекция означает также, что сигналы вблизи частоты $f_{s,out}/2$ сильно ослаблены при прохождении через ИГФ и, следовательно, должны быть

усилены компенсирующим фильтром, что увеличивает уровень шума. Поэтому на практике часто ограничивают ширину полосы пропускания компенсирующего КИХ-фильтра примерно одной четвертой частоты первого нуля АЧХ ИГФ[1].

Рис. 10.24. АЧХ компенсирующего КИХ-фильтра: (a) для прореживающего ИГФ первого порядка; (b) для прореживающего ИГФ третьего порядка

Штриховые кривые на рисунке 10.24 представляют АЧХ компенсирующих КИХ-фильтров, внутри которых не происходит изменение частоты дискретизации. (Частоты дискретизации на входе и на выходе КИХ-фильтров совпадают с выходной частотой дискретизации прореживающего ИГФ $f_{s,out}$.) Если бы компенсирующий КИХ-фильтр был предназначен для дополнительного прореживания в два раза, его АЧХ выглядела бы так, как на рисунке 10.25, где $f_{s,in}$ — входная частота дискретизации компенсирующего фильтра.

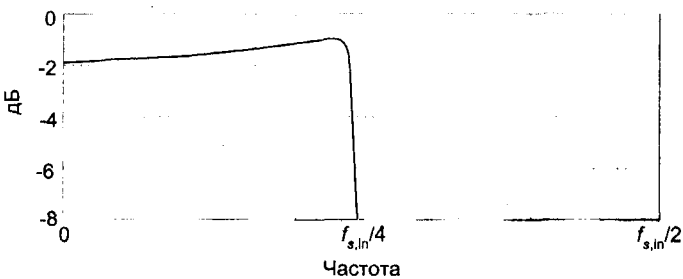


Рис. 10.25. ЛАЧХ компенсирующего КИХ-фильтра с прореживанием в два раза

В качестве резюме запомним: прореживающий ИГФ — это просто очень эффективная рекурсивная реализация фильтра скользящего среднего длины NR, выходной сигнал которого прореживается в R раз. Аналогично, интерполирующий ИГФ выполняет вставку $R-1$ нулевых отсчетов между соседними входными отсчетами с последующей фильтрацией фильтром скользящего среднего длины NR, работающим на выходной частоте дискретизации $f_{s,out}$. При прореживании и интерполяции с большими коэффициентами каскадные реализации на

[1] Я благодарен моему коллеге по ЦОС Рэю Андрака из Andraka Consulting Group Inc. за его ценные указания относительно этой особенности реализации.

рисунке 10.13 требуют значительно меньшего объема вычислений, чем обычный КИХ-фильтр. Структуры ИГФ спроектированы так, чтобы максимизировать количество операций, выполняемых на более низкой частоте, что позволяет уменьшить энергопотребление в высокоскоростных аппаратурных реализациях. Кроме того, ИГФ не требуют умножений, для них достаточно только сложения и вычитания. Их характеристики позволяют нам сказать, что, говоря техническим языком, ИГФ являются экономными фильтрующими приборами.

В разделе 13.24 приводятся некоторые остроумные приемы, дающие возможность реализовать нерекурсивные ИГФ, а это позволяет смягчить проблему роста длины слова данных, характерную для описанных выше традиционных рекурсивных ИГФ.

Библиография

1. Crochiere, R. and Rabiner, L. «Optimum FIR Digital Implementations for Decimation, Interpolation, and Narrow-band Filtering», *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-23, No. 5, October 1975.

2. Ballanger, M. «Computation Rate and Storage Estimation in Multirate Digital Filtering with Half-Band Filters», *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-25, No. 4, August 1977.

3. Neugebauer, O. *Astronomical Cuneiform Texts. Babylonian Ephemerides of the Seleucid Period for the Motion of the Sun, the Moon and the Planets*, London, UK: Lund Humphries, 1955.

4. Schafer, R. and Rabiner, L. «A Digital Signal Processing Approach to Interpolation», *Proceedings of the IEEE*, Vol. 61, No. 6, June 1973.

5. Proakis, J. and Manolakis, D. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New lersey, 1996.

6. Oppenheim, A. and Schafer, R. *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1st Ed. 1989, 2nd Ed. 1999 (имеется русский перевод одного из предыдущих изданий: Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. «Цифровая обработка сигналов», пер. с англ. / под ред. С. Я. Шаца, М.: Связь, 1979, доступен по адресу dsp-book.narod.ru/OpShDSP.djvu).

7. Rorabaugh, C. *DSP Primer*, McGraw-Hill, New York, 1999,

8. Fliege, N. *Multirate Digital Signal Processing: Multirate Systems, Filter Banks, Wavelets*, John Wiley & Sons, 1995.

9. Crochiere, R. and Rabiner, L. *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1983.

10. Vaidyanathan, P. *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1992.

11. Crochiere, R. and Rabiner, L. «Decimation and Interpolation of Digital Signals—A Tutorial Review», *Proceedings of the IEEE*, Vol. 69, No. 3, March 1981.

12. Crochiere, R. and Rabiner, L. «Further Considerations in the Design of Decimators and Interpolators», *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-24, No. 4, August 1976.

13. Ballanger, M. et al. «Interpolation, Extrapolation, and Reduction of Computational Speed in Digital Filters», *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-22, No. 4, August 1974.

14. Hou, H. and Andrews, H. «Cubic Splines for Image Interpolation and Digital Filtering», *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-26, No. 6, August 1978.

15. Keys, R. «Cubic Convolution Interpolation for Digital Image Processing», *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-29, No. 6, August 1981.

16. Parker, J., et al. «Comparison of Interpolating Methods for Image Resampling», *IEEE Trans, on Medical Imaging*, Vol. MI-2, No. 1, August 1983.

17. Blue, K., et al. «Vector Signal Analyzers for Difficult Measurements on Time-Varying and Complex Modulated Signals», *Hewlett-Packard Journal*, December, 1993.

18. Bartz, M., et al. «Baseband Vector Signal Analyzer Hardware Design», *Hewlett-Packard Journal*, December, 1993.

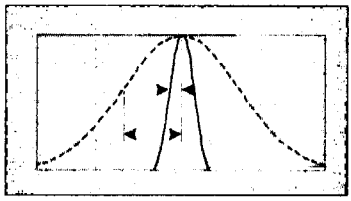
19. Mitchell, J. «Multirate Filters Alter Sampling Rates Even After You've Captured the Data», *EDN*, August 20,1992.

20. Hogenauer, E. «An Economical Class of Digital Filters for Decimation and Interpolation», *IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Proc.*, Vol. ASSP-29, April 1981, pp. 155-162.

21. Chu, S. and Burrus, C. «Multirate Filter Designs Using Comb Filters», *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-31, Nov. 1984, pp. 913-924.

Глава 11

Усреднение сигналов



Как мы определяем среднюю величину, оценку или действительное значение некоторого измеряемого параметра? Сделать это не так легко, поскольку результаты любых измерений в нашем мире искажены случайными возмущениями. Эти возмущения являются следствием как природы измеряемых величин, так и погрешностей наших измерительных приборов. Каждый раз, когда мы стараемся точно измерить некоторую физическую величину, мы получаем несколько различающиеся значения. Эти случайные флуктуации называются *шумом*, и специалисты по цифровой обработке сигналов научились минимизировать шум с помощью усреднения. В литературе мы можем найти описание использования усреднения не только для улучшения точности измерений, но и для обнаружения сигналов, а также в схемах фильтров нижних частот. Эта глава дает введение в математические основы усреднения и описывает, как и где этот важный процесс используется. Соответственно, когда мы перейдем к численной оценке влияния усреднения, нам придется использовать такие понятия статистики как среднее, дисперсия и стандартное отклонение.

В цифровой обработке сигналов усреднение часто используется в форме суммирования отсчетов сигнала с последующим делением суммы на количество просуммированных отсчетов. Математически среднее N отсчетов последовательности $x(n)$, обозначаемое как x_{ave}, записывается в виде

$$x_{ave} = (1/N)\sum_{n=1}^{N} x(n) = [x(1) + x(2) + x(3) + \ldots + x(N)]/N. \qquad (11\text{-}1)$$

(То, что мы называем средним, статистики называют *математическим ожиданием*.) При изучении усреднения важным понятием, которое мы должны хорошо усвоить, является σ^2 — дисперсия последовательности, определяемая как

$$\sigma^2 = (1/N)\sum_{n=1}^{N} [x(n) - x_{ave}]^2 = \qquad (11\text{-}2)$$

$$= \{[x(1) - x_{ave}]^2 + [x(2) - x_{ave}]^2 + [x(3) - x_{ave}]^2 + \ldots + [x(N) - x_{ave}]^2\}/N. \qquad (11\text{-}2')$$

Как поясняется в приложении D, дисперсия σ^2 в (11-2) и (11-2') дает нам количественную меру того, насколько сильно значения отсчетов последовательности флуктуируют относительно среднего значения. Это объясняется тем, что, например, значение $x(1) - x_{ave}$ в квадратных скобках представляет собой разность значения текущего отсчета $x(1)$ и среднего значения x_{ave}. Другая важная величина, которую мы будем использовать — это стандартное отклонение, которое определяется как положительное значение квадратного корня из дисперсии, или

$$\sigma = \sqrt{(1/N)\sum_{n=1}^{N}[x(n) - x_{ave}]^2} \qquad (11\text{-}3)$$

Другими словами, среднее значение x_{ave} представляет собой постоянный уровень, относительно которого значения отдельных отсчетов могут изменяться. Дисперсия σ^2 представляет собой сумму квадратов отклонений отдельных отсчетов от среднего уровня x_{ave}[1]. Если последовательность $x(n)$ представляет собой временной ряд или отсчеты сигнала, мы можем сказать, что x_{ave} определяет постоянную составляющую сигнала, стандартное отклонение σ отражает амплитуду флуктуаций, или переменной составляющей сигнала, а дисперсия σ^2 отражает мощность переменной составляющей. (Для тех читателей, кто не каждый день сталкивается с этими понятиями статистики, в приложении D приводится объяснение их природы.)

Теперь мы готовы исследовать два вида усреднения — когерентное и некогерентное, чтобы узнать, чем они отличаются друг от друга и в каких условиях их следует применять.

11.1. Когерентное усреднение

В процессе когерентного усреднения (известного также как линейное, преддетекторное, или векторное усреднение), ключевую роль играет временная сетка, используемая для дискретизации исходного сигнала: мы накапливаем множество последовательностей отсчетов смеси сигнала с шумом, причем необходимо, чтобы начальная фаза сигнала во всех этих последовательностях была одна и та же. Например, когда мы усредняем синусоиду, смешанную с шумом, для когерентного усреднения необходимо, чтобы начальная фаза синусоиды была одинаковой во всех последовательностях отсчетов. Когда это требование выполняется, усреднение синусоиды дает ее истинные отсчеты. Шум, однако, отличается в каждой последовательности, участвующей в усреднении, и результат его усреднения равен нулю[2]. Смысл этого в том, что когерентное усреднение уменьшает дисперсию шума, сохраняя в то же время неизменными отсчеты сигнала, которые синхронны, или когерентны, относительно начала интервала накопления. При когерентном

[1] Точнее, средний квадрат отклонений от среднего уровня — (*прим. перев.*).

[2] Мы предполагаем, что отсчеты шума некоррелированы друг с другом и с частотой дискретизации. Если какой-то компонент шума коррелируется с частотой дискретизации, после усреднения он останется.

усреднении мы можем действительно улучшить отношение сигнал/шум. В качестве примера рассмотрим последовательность из 128 отсчетов, график которой приведен на рисунке 11.1 (а). Эта последовательность содержит отсчеты импульса, искаженного шумом. (Для иллюстрации сказанного исходный импульс, амплитуда которого равна 2.5, показан в качестве фона рисунка 11.1.) В графике смеси сигнала с шумом (жирная черная линия) на рисунке 11.1 (а) очень трудно разглядеть исходный импульс. Допустим, мы накопили 32 набора по 128 отчетов смеси сигнала с шумом вида

$$\begin{aligned}
&\textit{Набор отсчетов 1} = x_1(1), x_1(2), x_1(3), \ldots, x_1(128),\\
&\textit{Набор отсчетов 2} = x_2(1), x_2(2), x_2(3), \ldots, x_2(128),\\
&\textit{Набор отсчетов 3} = x_3(1), x_3(2), x_3(3), \ldots, x_3(128),\\
&\ldots\\
&\ldots\\
&\textit{Набор отсчетов 32} = x_{32}(1), x_{32}(2), x_{32}(3), \ldots, x_{32}(128).
\end{aligned} \tag{11-4}$$

Здесь на сцену выходит вопрос когерентности: моменты времени взятия отсчетов должны быть каким-то образом синхронизированы с началом импульса, взаимное положение импульса и первого отсчета во всех последовательностях должно быть одинаковым. Когерентное усреднение 32 наборов отсчетов путем сложения (11-4) по столбцам выглядит следующим образом

$$x_{ave}(k) = (1/32)\sum_{n=1}^{32} x_n(k) = [x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + \ldots + x_{32}(k)]/32$$

или

$$\begin{aligned}
x_{ave}(1) &= [x_1(1) + x_2(1) + x_3(1) + \ldots + x_{32}(1)]/32\\
x_{ave}(2) &= [x_1(2) + x_2(2) + x_3(2) + \ldots + x_{32}(2)]/32\\
x_{ave}(3) &= [x_1(3) + x_2(3) + x_3(3) + \ldots + x_{32}(3)]/32\\
&\ldots\\
&\ldots\\
x_{ave}(128) &= [x_1(128) + x_2(128) + x_3(128) + \ldots + x_{32}(128)]/32\,.
\end{aligned} \tag{11-5}$$

Если мы усредним 32 последовательности, как показано в (11-5), мы получим 128-точечную последовательность $x_{ave}(k)$, график которой показан на рисунке 11.1 (b). Здесь мы уменьшили шумовые флуктуации, и форма импульса становится более явной. Когерентное усреднение 256 последовательностей дает график, показанный на рисунке 11.1 (с), где форма импульса видна уже достаточно хорошо. Мы уменьшили шумовые флуктуации, сохранив в то же время отсчеты импульса. (Здесь важно уяснить, что и суммирование, и усреднение уменьшают дисперсию шума. Суммирование просто реализует (11-5) без деления на $N = 32$. Если мы выполняем суммирование и не делим на N, мы просто изменяем вертикальный масштаб графиков на рисунках 11.1 (b) и (с). Однако относительный уровень шумовых флуктуаций по отношению к амплитуде импульса остается неизменным.)

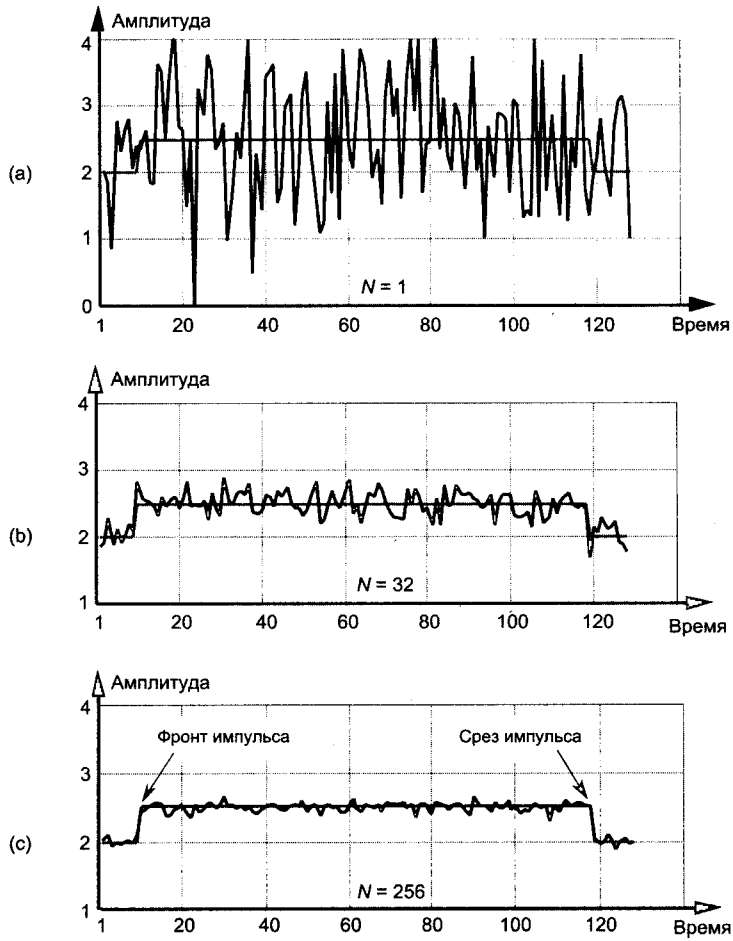


Рис. 11.1. Смесь импульса с шумом: (a) один из наборов отсчетов; (b) результат усреднения 32 наборов отсчетов; (c) результат усреднения 256 наборов отсчетов

Математическая основа процесса усреднения (11-5) имеет большое значение и в то же время не представляет сложности. Нам необходимо получить меру улучшения отношения сигнал/шум в процессе когерентного усреднения как функцию N, количества усредняемых наборов отсчетов. Допустим, мы хотим измерить уровень некоторого постоянного сигнала A, и каждый раз, когда выполняется измерение, мы получаем разные значения A. Мы понимаем, что наши измерения искажаются шумом, так что результат n-го измерения $r(n)$ равен

$$r(n) = A + \text{noise}(n)\,, \tag{11-6}$$

где noise(n) представляет вклад шума. Наша цель состоит в том, чтобы определить A в условиях, когда мы не имеет никаких других данных, кроме зашумленной последовательности $r(n)$. Для более точной оценки A мы усредняем N отсчетов $r(n)$ и вычисляем среднее значение r_{ave}.

Чтобы оценить точность результата r_{ave}, мы вычислим последовательность средних $r_{ave}(k)$ и посмотрим, как они флуктуируют:

$r_{ave}(1) = [r(1) + r(2) + r(3) + ... + r(N)]/N$, *1-е среднее по N точкам*

$r_{ave}(2) = [r(N+1) + r(N+2) + r(N+3) + ... + r(2N)]/N$, *2-е среднее по N точкам*

$r_{ave}(3) = [r(2N+1) + r(2N+2) + r(2N+3) + ... + r(3N)]/N$, *3-е среднее по N точкам*

...

...

$$r_{ave}(k) = [r([k-1]\bullet N+1)+ r([k-1]\bullet N+2)+ r([k-1]\bullet N+3)+...+ r(k\bullet N)]/N. \quad (11\text{-}7)$$

или в более компактной форме

$$r_{ave}(k) = (1/N)\sum_{n=1}^{N} r([k-1]\bullet N+n). \quad (11\text{-}8)$$

Чтобы увидеть, как усреднение уменьшает неопределенность измерений, нам необходимо сравнить стандартное отклонение последовательности средних $r_{ave}(k)$ со стандартным отклонением исходной последовательности $r(n)$.

Если стандартное отклонение исходной последовательности измерений $r(n)$ равно σ_{in}, то, как показано в [1 - 5], стандартное отклонение последовательности средних по N отсчетам $r_{ave}(k)$, σ_{ave}, определяется выражением

$$\sigma_{ave} = \sigma_{in}/\sqrt{N}. \quad (11\text{-}9)$$

Формула (11-9) имеет важное значение, поскольку она говорит нам, что последовательность средних $r_{ave}(k)$ будет флуктуировать относительно A не так сильно, как исходные результаты измерений $r(n)$; т. е. последовательность $r_{ave}(k)$ будет содержать меньше шума, чем последовательность $r(n)$ и, чем сильнее мы усредняем, повышая N, тем ближе отдельные оценки $r_{ave}(k)$ к истинному значению A[1].

С другой стороны, мы можем количественно оценить уменьшение шума вследствие усреднения. Если величина A представляет уровень сигнала, а σ_{in} — стандартное отклонение шума, искажающего сигнал, мы можем утверждать, что отношение сигнал/шум равно

$$SNR_{in} = A/\sigma_{in}. \quad (11\text{-}10)$$

Соответственно, отношение сигнал/шум после усреднения, SNR_{ave}, будет равно

$$SNR_{ave} = r_{ave}/\sigma_{ave} = A/\sigma_{ave}. \quad (11\text{-}11)$$

Далее, *коэффициент улучшения* отношения сигнал/шум, SNR_{coh}, который мы получили благодаря когерентному усреднению, равен отношению SNR_{ave} к SNR_{in}, или

[1] Формула (11-9) основана на предположении, что среднее шума равно нулю и что ни A, ни σ_{in} не меняются в процессе выполнения наших измерений и усреднения.

$$\textit{Коэффициент улучшения } SNR_{coh} =$$
$$= SNR_{ave} / SNR_{in} =$$
$$= (A/\sigma_{ave})/(A/\sigma_{in}) = \sigma_{in}/\sigma_{ave}. \qquad (11\text{-}12)$$

Подставляя σ_{ave} из (11-9) в (11-12), получаем коэффициент улучшения отношения сигнал/шум

$$\textit{Коэффициент улучшения } SNR_{coh} = \sigma_{in}/(\sigma_{in}/\sqrt{N}) = \sqrt{N}. \qquad (11\text{-}13)$$

Итак, с помощью усреднения мы можем достичь улучшения отношения сигнал/шум, пропорционального квадратному корню из количества усредняемых отсчетов. При измерении отношения сигнал/шум в децибелах мы имеем коэффициент улучшения когерентного усреднения, или *интегрирования*, равный

$$\textit{Коэффициент улучшения } SNR_{coh}(dB) =$$
$$= 20 \bullet \log_{10}(SNR_{coh}) = \qquad (11\text{-}14)$$
$$= 20 \bullet \log_{10}(\sqrt{N}) = 10 \bullet \log_{10}(N).$$

Формулы (11-13) и (11-14) также справедливы, если A характеризует уровень сигнала, а σ_{in} представляет стандартное отклонение исходного шума.

Другой способ, с помощью которого можно определить коэффициент интегрирования, достигаемый при когерентном усреднении, состоит в рассмотрении стандартного отклонения входного шума σ_{in} и вероятности получения того или иного конкретного значения амплитуды импульса, показанного на рисунке 11.1. Предположим, что мы выполнили множество отдельных измерений амплитуды импульса и построили гистограмму измеренных значений, получив график, изображенный штриховой линией на рисунке 11.2. Вертикальная ось на рисунке 11.2 представляет вероятность получения измеренного значения амплитуды импульса, откладываемого по горизонтальной оси. Если шум подчиняется хорошо известному нормальному, или Гауссовому, распределению, то распределение вероятностей, изображаемое штриховой линией, описывается формулой

$$p(x) = [1/(\sigma\sqrt{2\pi})]e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} = Ke^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad (11\text{-}15)$$

где $\sigma = \sigma_{in}$, а истинная амплитуда импульса соответствует $\mu = 2.5$. По штриховой кривой мы видим, что любое измеренное значение с наибольшей вероятностью будет расположено близко к истинной амплитуде импульса, равной 2.5. Заметьте, однако, что существует ненулевая вероятность получения таких значений, как 1.0 или 4.0. Будем говорить, что штриховая линия представляет распределение вероятностей смеси импульса с шумом, показанной на рисунке 11.1 (a). Если мы усредним 32 отсчета этой смеси и построим кривую распределения вероятностей усредненных измерений, мы получим график, начерченный сплошной линией на рисунке 11.2. Эта кривая характеризует отсчеты смеси импульса с шумом, показанные на рисунке 11.1 (b). По этой кривой мы видим, что после усреднения вероятность получить значение меньше 2.0 или больше 3.0 очень мала.

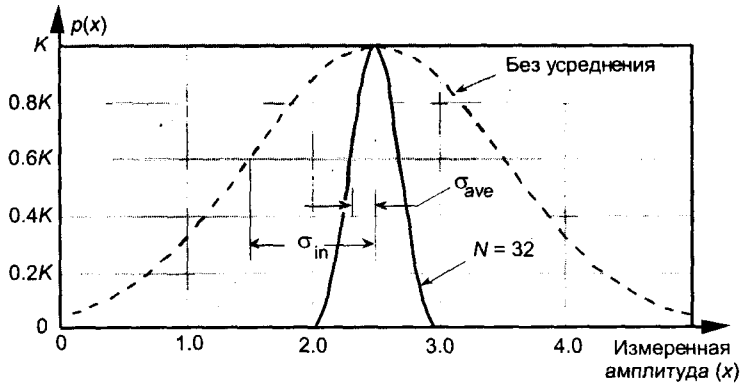


Рис. 11.2. Графики функций плотности вероятности измеренных амплитуд без усреднения ($N = 1$) и при усреднении $N = 32$ отсчетов

Из (11-9) мы знаем, что стандартное отклонение результата усреднения 32 отсчетов сигнала равно

$$\sigma_{ave} = \sigma_{in}/\sqrt{32} = \sigma_{in}/5.65\,. \tag{11-16}$$

На рисунке 11.2 мы можем видеть уменьшение стандартного отклонения в результате усреднения со статистической точки зрения. Использование для вычисления среднего большего количества отсчетов сожмет сплошную кривую на рисунке 11.2 еще больше вокруг значения 2.5, т. е. истинной амплитуды импульса[1].

Возвращаясь к зашумленному сигналу на рисунке 11.1 и выполняя когерентное усреднение для разных значений N, мы видим на рисунке 11.3 (a), что с ростом N усредненная амплитуда импульса приближается к истинному значению амплитуды 2.5. Рисунок 11.3 (b) показывает, как быстро уменьшается дисперсия шума при увеличении N. Проиллюстрировать уменьшение дисперсии с ростом N можно и другим способом: постройте график мощности шума в логарифмическом масштабе, как на рисунке 11.3 (c). На этом графике дисперсия шума нормирована относительно дисперсии шума без усреднения, т. е. при $N = 1$. Обратите внимание на то, что наклон графика на рисунке 11.3 (c) довольно точно соответствует предсказанию (11-13) и (11-14): когда N увеличивается в 10 раз, мощность усредненного шума уменьшается на 10 дБ. Хотя тестовый сигнал в данном случае представляет собой импульс, выражения (11-13) и (11-14) будут справедливы и для синусоидального сигнала.

[1] Кривые на рисунке 11.2 для удобства нормированы. Согласно (11-15) при $\sigma = 1$ для $N = 1$ получаем $K = 0.3989$. В случае $N = 32$ новое стандартное отклонение равно $\sigma' = \sigma/\sqrt{N} = 1/\sqrt{32}$, и $K = 0.3989 \cdot \sqrt{32} = 2.23$.

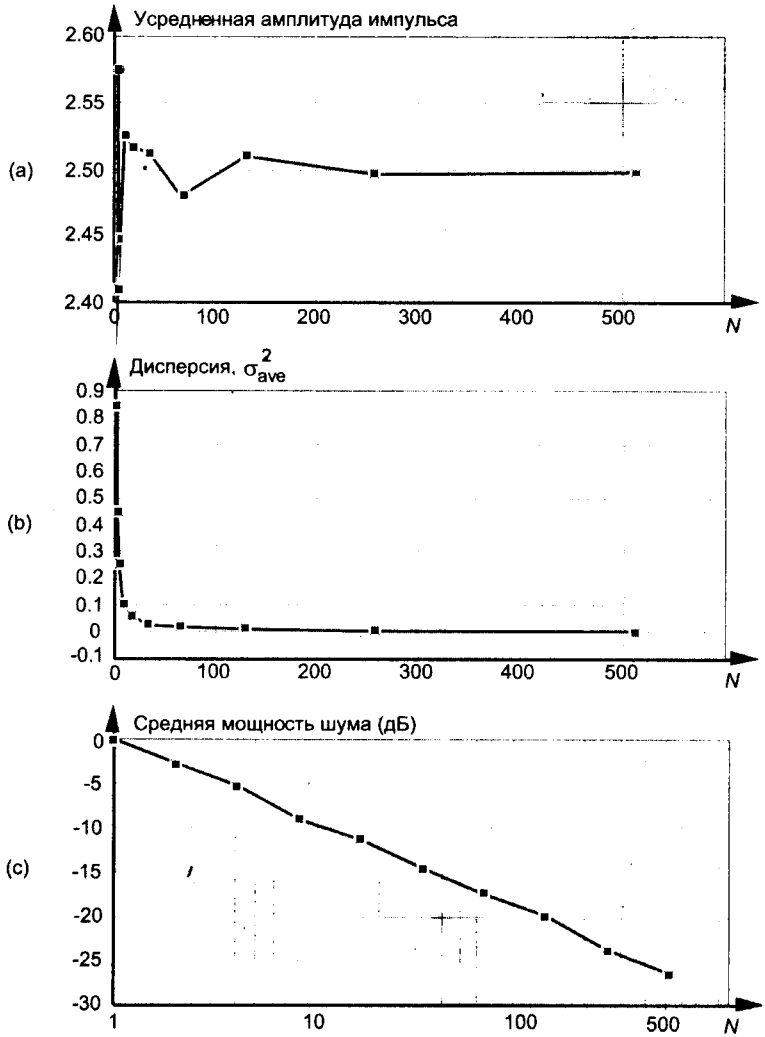


Рис. 11.3. Результаты усреднения смеси импульса с шумом: (a) измеренная амплитуда в зависимости от N: (b) дисперсия амплитуды в зависимости от N; (c) мощность шума в зависимости от N в логарифмическом масштабе

11.2. Некогерентное усреднение

Процесс некогерентного усреднения (известного также как среднеквадратичное, последетекторное, скалярное или видео-усреднение) представляет собой усреднение отсчетов сигнала в случае, когда на временные соотношения дискретизации не накладываются никакие ограничения; т. е. интервалы измерения сигнала никак не синхронизированы с фазой измеряемого сигнала. Подумайте, каким будет среднее значение зашумленного импульса, приведенного на рисунке 11.1 (a), если мы не будем синхронизировать каким-то образом начало накопления отсчетов с началом

импульса. В результате мы получим импульсы, которые начинаются в разные моменты в разных наборах отсчетов. Усреднение множества наборов отсчетов размажет импульс по набору отсчетов, или попросту «задавит сигнал». (Для читателей, знакомых с использованием осциллоскопа, некогерентное усреднение похоже на попытку увидеть импульс, когда начало развертки не синхронизировано с сигналом.) По этой причине некогерентное усреднение во временной области приносит мало пользы[1]. В частотной области, однако, все не так, потому что некогерентное усреднение может увеличить точность измерения относительного уровня сигнала. Действительно, некогерентное усреднение используется во множестве измерительных приборов, таких как анализаторы спектра, анализаторы сетей и анализаторы сигналов.

В некоторых аналоговых измерительных приборах сигналы представляются в частотной области с помощью узкополосного фильтра, средняя частота которого пробегает весь исследуемый диапазон частот, и детектора мощности. Эти приборы измеряют мощность сигнала как функцию частоты. Детектор мощности необходим, поскольку изменение частоты не синхронизировано по времени с измеряемым сигналом. Следовательно, данные, полученные таким образом в частотной области, представляют только мощность и не содержат никакой информации о фазе сигнала. Хотя в этом случае улучшать входное отношение сигнал/шум уже поздно, некогерентное усреднение может улучшить точность измерения мощности сигнала в присутствии шума, т. е., если спектр мощности сигнала очень зашумлен, мы можем уменьшить флуктуации оценок мощности и улучшить точность измерения мощности сигнала и шума. Рисунок 11.4 (a) иллюстрирует эту идею, на нем мы видим мощность (квадрат модуля) отсчетов БПФ основного тона и нескольких его гармоник, маскируемых шумом. Обратите внимание на то, что уровни мощности шума на рисунке 11.4 (a) изменяются почти на 20 дБ относительно истинной средней мощности шума, показанной штриховой линией на уровне –19 дБ.

Если бы берем 10 БПФ, усредняем квадраты их модулей и нормируем эти значения, мы получаем спектр мощности, показанный на рисунке 11.4 (b). Здесь мы уменьшили дисперсию шума в спектре, но не улучшили отношение мощности гармонических сигналов к мощности шума; т. е. средний уровень мощности шума не изменился. Усреднение квадратов модулей ста БПФ дает спектр, показанный на рисунке 11.4 (c), который обеспечивает более точное измерение относительных уровней мощности гармоник.

Аналогично тому, как мы получили выражение для коэффициента улучшения когерентного интегрирования (11-14), мы можем выразить коэффициент улучшения некогерентного интегрирования SNR_{incoh} через отношение сигнал/шум в дБ следующим образом

$$\textit{Коэффициент улучшения } SNR_{incoh} = 10 \cdot \log_{10}(\sqrt{N}) . \qquad (11\text{-}17)$$

[1] Термин некогерентное усреднение несколько неудачен. Усреднение данных это не более, чем усреднение — мы складываем набор значений данных и делим сумму на количество отсчетов в наборе. Некогерентное усреднение следовало бы, вероятно, назвать усреднением данных, полученных некогерентно.

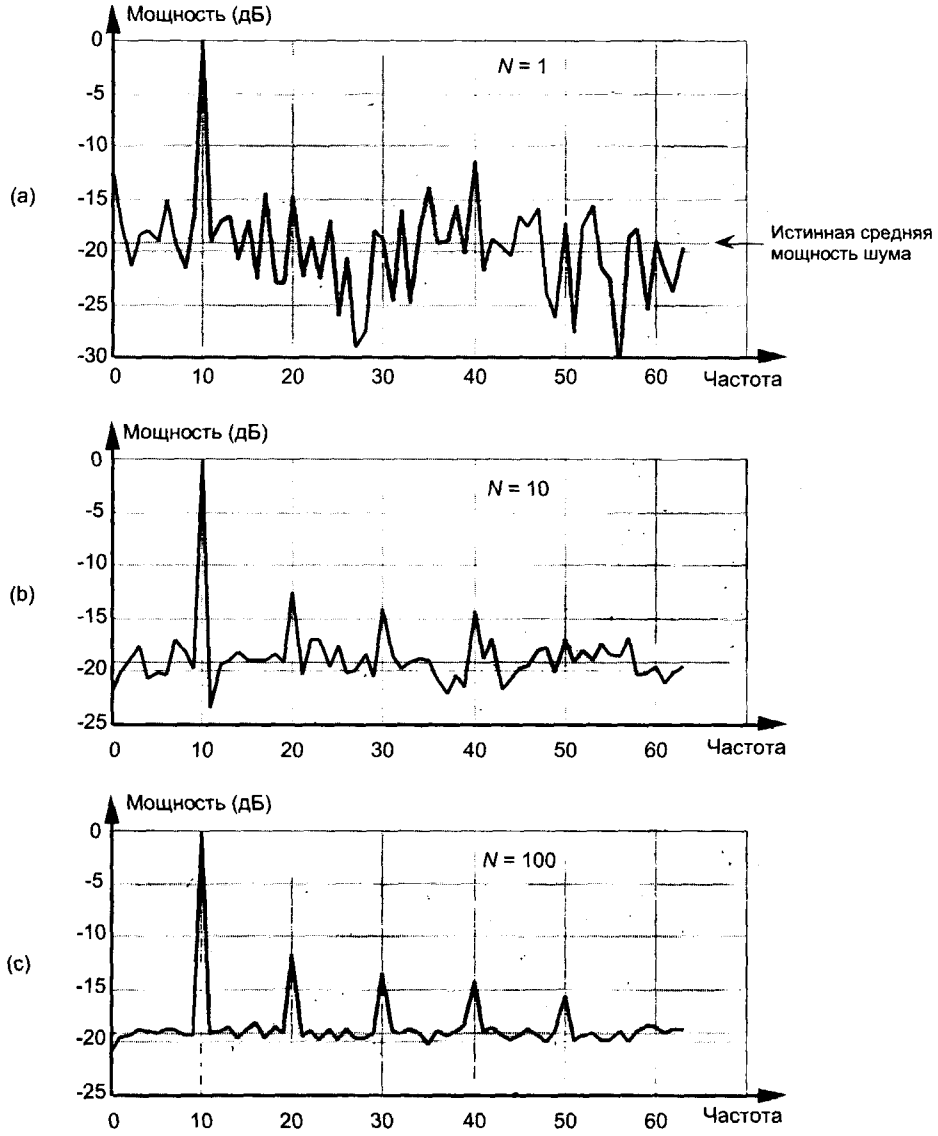


Рис. 11.4. Результат усреднения спектра для смеси гармоник с шумом: (a) без усреднения $N = 1$; (b) $N = 10$; (c) $N = 100$

Соотношение (11-17) применимо, когда усредняемая величина представляет собой мощность сигнала. Поэтому мы использовали в (11-17) коэффициент 10 вместо 20 в (11-14)[1]. Мы можем сравнить коэффициенты улучшения (11-14) и (11-17), построив графики этих выражений на рисунке 11.5.

[1] В разделе Е.1 приложения Е приводится объяснение того, почему при измерении мощности сигналов мы используем коэффициент 10, а при работе с амплитудами — коэффициент 20.

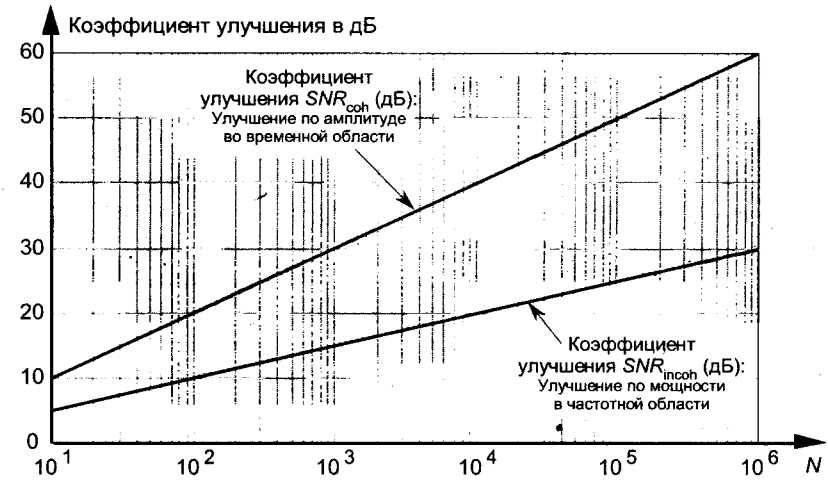


Рис. 11.5. Коэффициент улучшения отношения сигнал/шум при обработке во временной области согласно (11-14) и при обработке в частотной области согласно (11-17) как функция N

11.3. Усреднение результатов быстрого преобразования Фурье

В разделе 3.12 мы обсуждали коэффициент улучшения, связанный с ДПФ, и установили, что мы можем повысить его, увеличив количество точек N-точечного ДПФ. Обсудим этот вопрос в случае, когда ДПФ реализуется в виде алгоритма БПФ. Проблема состоит в том, что БПФ большой длины требует выполнения большого объема вычислений. Поскольку сложение реализуется проще и быстрее, чем умножение, для повышения чувствительности при обнаружении сигналов мы можем усреднить выходные последовательности нескольких БПФ; другими словами, легче (и обычно быстрее) усреднить выходы четырех 128-точечных БПФ, чем вычислить одно 512-точечное БПФ. Повышение чувствительности БПФ или снижение дисперсии шума благодаря усреднению результатов БПФ также называется коэффициентом улучшения интегрирования. В результате усреднения случайные флуктуации шума бинов БПФ уменьшаются, в то время как модули сигнальных бинов ДПФ остаются постоянными. (В этих рассуждениях предполагается, что сигнал присутствует на всех интервалах наблюдения, подвергающихся БПФ с последующим усреднением, а значения отсчетов шума не зависят от частоты дискретизации.) Существуют два вида улучшения при усреднении БПФ: некогерентное и когерентное.

Некогерентное интегрирование по отношению к БПФ представляет собой усреднение соответствующих модулей бинов нескольких БПФ, т. е. для некогерентного усреднения k результатов БПФ нулевой бин некогерентного среднего БПФ вычисляется как

$$F_{incoh}(0) = (|F_1(0)| + |F_2(0)| + |F_3(0)| + ... + |F_k(0)|)/k, \quad (11\text{-}18)$$

где $|F_n(0)|$ — модуль нулевого бина n-го результата БПФ. Аналогично, первый бин некогерентно усредненного спектра, $F_{incoh}(1)$, вычисляется как

$$F_{incoh}(1) = (|F_1(1)| + |F_2(1)| + |F_3(1)| + ... + |F_k(1)|)/k, \qquad (11\text{-}18')$$

и т. д., до последнего бина, $F_{incoh}(N-1)$, который вычисляется как

$$F_{incoh}(N-1) = (|F_1(N-1)| + |F_2(N-1)| + |F_3(N-1)| + ... + |F_k(N-1)|)/k, \qquad (11\text{-}18'')$$

Некогерентное интегрирование дает уменьшение шума, которое усиливает улучшение, присущее самому БПФ. Мы можем показать это на рисунке 11.6 (a), где серой линией показан результат отдельного БПФ смеси тона с частотой, соответствующей 16-му бину 64-точечного БПФ, с шумом. Черная линия на рисунке 11.6 (a) отображает результат некогерентного интегрирования модулей десяти отдельных 64-точечных БПФ. Оба графика нормированы относительно своих пиковых значений, так что максимальное значение равно 0 дБ. Обратите внимание на то, что изменения мощности шума на черном графике уменьшились в результате усреднения десяти БПФ. Уровень мощности шума, изображаемый черной линией, флуктуирует не так сильно, как уровень шума, изображаемый серой линией. Использовав усреднение, мы не увеличили мощность тона в 16-м бине, но мы уменьшили пиковые значения мощности шума. Чем больше количество усредняемых результатов БПФ, тем теснее значения шумовых бинов группируются вокруг истинного среднего уровня мощности шума, показанного штриховой линией на рисунке 11.6 (a).

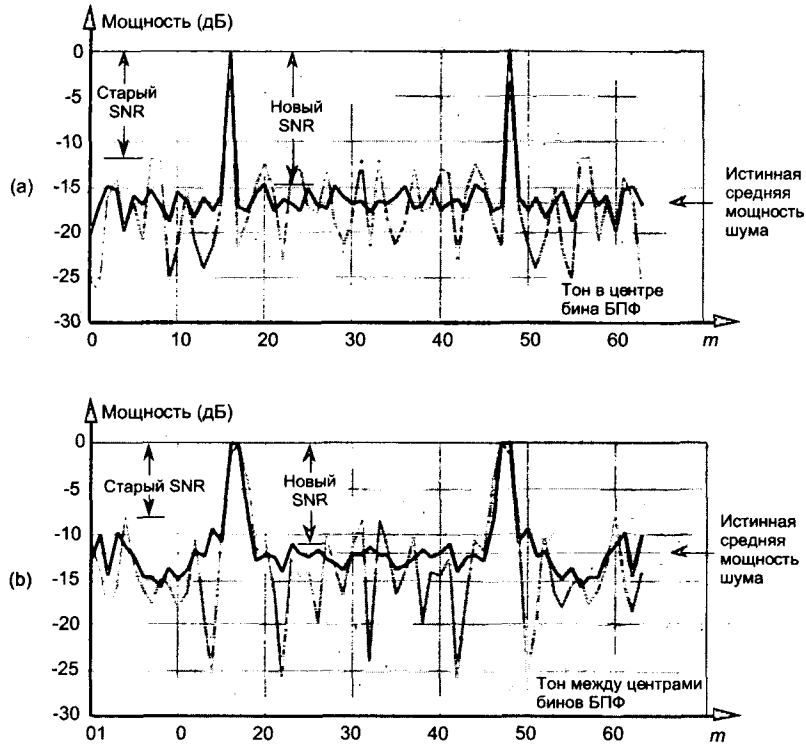


Рис. 11.6. Модули отсчетов отдельного БПФ (серая линия) и результат усреднения модулей десяти БПФ (черная линия): (a) частота тона совпадает с центром бина; (b) частота тона находится между центрами бинов

Когда частота тона не совпадает с центром бина, некогерентное усреднение тоже уменьшает флуктуации шумовых бинов БПФ. Серая линия на рисунке 11.6 (b) показывает результат отдельного БПФ смеси шума и тона, частота которого отстоит на одинаковую величину от центров 16-го и 17-го бинов 64-точечного БПФ. Черная кривая на рисунке 11.6 (b) показывает результат усреднения десяти БПФ. Вариации мощности шума, демонстрируемые черной линией, и в этом случае были уменьшены благодаря интегрированию десяти БПФ. Следовательно, некогерентное интегрирование уменьшает флуктуации мощности шума независимо от частоты сигнала. Как и следовало ожидать, на рисунке 11.6 (b) пики сигнала шире, а истинная мощность шума выше, чем на рисунке 11.6 (a), потому что утечка спектра повышает средний уровень мощности шума, а гребешковые потери уменьшают уровень мощности бинов БПФ на рисунке 11.6 (b). Следует запомнить, что некогерентное усреднение модулей отсчетов БПФ уменьшает вариации мощности шума, но не уменьшает его среднюю мощность. Уменьшение дисперсии шума [6] при некогерентном усреднении k результатов БПФ по отношению к дисперсии шума отдельного БПФ аналогично результату, полученному в разделе 11.2, и выражается как

$$\sigma^2_{k\,БПФ}/\sigma^2_{одно\,БПФ} = 1/k\,. \qquad (11\text{-}19)$$

Соответственно, если мы усредняем модули k отдельных БПФ, мы уменьшаем дисперсию шума в k раз.

На практике, когда усредняются несколько БПФ, а входные последовательности БПФ сглаживаются окном, входные последовательности обычно берутся с перекрытием во временной области. Это показано на рисунке 11.7 для интервала накопления длительностью $5.5Nt_s$ секунд, когда мы хотим усреднить десять результатов N-точечных БПФ, при этом t_s — период дискретизации ($1/f_s$). Поскольку входные последовательности БПФ формируются во временной области с 50 % перекрытием, некоторая часть шума, содержащаяся в N отсчетах, подготовленных для первого БПФ, будут содержаться также и во втором БПФ. Возникает вопрос: «Каким будет уменьшение дисперсии шума, когда некоторая часть шума присутствует в результатах двух БПФ?» Ответ на этот вопрос зависит от используемого окна. Было показано, что для наиболее распространенных окон при использовании перекрытия на 50 % или меньше выражение (11-19) остается справедливым [7].

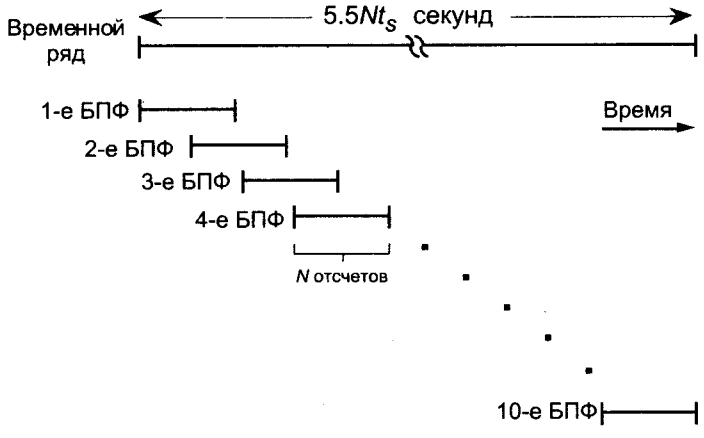


Рис. 11.7. Входные последовательности БПФ с 50 % перекрытием

Улучшение когерентного интегрирования возможно, когда мы усредняем отдельно действительные и мнимые части бинов нескольких БПФ, а затем объединяем среднюю действительную часть и среднюю мнимую часть в один средний комплексный бин; т. е. для когерентного усреднения результатов k отдельных БПФ нулевой бин комплексного когерентного среднего БПФ, $F_{coh}(0)$, вычисляется как

$$F_{coh}(0) = [F_1(0)_{real} + F_2(0)_{real} + F_3(0)_{real} + ... + F_k(0)_{real}]/k + \\ + j[F_1(0)_{imag} + F_2(0)_{imag} + F_3(0)_{imag} + ... + F_k(0)_{imag}]/k. \quad (11\text{-}20)$$

Первый бин комплексного когерентного среднего БПФ, $F_{coh}(1)$, равен

$$F_{coh}(1) = [F_1(1)_{real} + F_2(1)_{real} + F_3(1)_{real} + ... + F_k(1)_{real}]/k + \\ + j[F_1(1)_{imag} + F_2(1)_{imag} + F_3(1)_{imag} + ... + F_k(1)_{imag}]/k, \quad (11\text{-}20')$$

и т. д. до последнего бина, $F_{coh}(N\text{-}1)$, который вычисляется как

$$F_{coh}(N-1) = [F_1(N-1)_{real} + F_2(N-1)_{real} + F_3(N-1)_{real} + ... + F_k(N-1)_{real}]/k + \\ + j[F_1(N-1)_{imag} + F_2(N-1)_{imag} + F_3(N-1)_{imag} + ... + F_k(N-1)_{imag}]/k, \quad (11\text{-}20'')$$

Давайте подумаем, почему улучшение интегрирования, получаемое в результате когерентного усреднения, полезнее улучшения интегрирования от некогерентного усреднения. Некогерентное интегрирование не уменьшает средний уровень мощности шума, но оно уменьшает вариации уровня мощности шума, поскольку мы работаем только с модулями отсчетов БПФ, и все бины БПФ, содержащие шум, положительны. Следовательно, их среднее значение никогда не будет нулевым. С другой стороны, когда мы усредняем комплексные бины БПФ, комплексные шумовые бины могут быть как положительными, так и отрицательными. Эти положительные и отрицательные значения действительных и мнимых частей будут компенсировать друг друга. Это значит, что средние шумовые бины могут оказаться близкими к 0 до того, как мы будем вычислять их модули, в то время как усредненные сигнальные бины будут приближаться к истинному ненулевому значению. Если мы говорим, что отношение сигнал/шум когерентно усредненного БПФ определяется выражением

$$SNR_{coh} = 20 \bullet \log_{10}(\textit{модуль сигнального бина/модуль шумового бина}), \quad (11\text{-}21)$$

мы можем видеть, что при уменьшении знаменателя этого выражения SNR_{coh} повышается. Посмотрим на пример когерентного интегрирования на рисунке 11.8 (а), где серой линией показан результат отдельного БПФ суммы шума и тона, частота которого совпадает с центром 16-го бина 64-точечного БПФ. Черная линия на рисунке 11.8 (а) представляет результат когерентного интегрирования десяти 64-точечных БПФ. Обратите внимание, насколько уменьшился средний уровень мощности шума[1]. Это результат когерентного интегрирования. Чем больше количество усредняемых БПФ, тем сильнее уменьшается средняя мощность шума.

---

[1] Наблюдательный читатель может здесь сказать: «Постойте. Кажется, когерентное интегрирование уменьшает средний уровень мощности шума, но не похоже, чтобы оно уменьшало вариации мощности шума.» Вариации уровня мощности шума в действительности уменьшились по амплитуде — помните, что мы используем логарифмический масштаб. Амплитуда вариаций мощности шума от -20 дБ до -30 дБ меньше, чем амплитуда вариаций от -10 дБ до -20 дБ.

Когда частота тона не совпадает с центром бина, когерентное интегрирование тоже уменьшает средний уровень шума, но не в такой степени, как в случае, когда частота тона совпадает с центром бина. Серая кривая на рисунке 11.8 (b) представляет результат отдельного БПФ суммы случайного шума и тона, частота которого лежит посредине между центрами 16-го и 17-го бинов 64-точечного БПФ. Соответственно, черная линия на рисунке 11.8 (b) показывает результат когерентного усреднения десяти БПФ. Средний уровень мощности шума и в этом случае уменьшился. Когерентное интегрирование обеспечивает наибольшее улучшение, когда частота дискретизации f_s кратна частоте тона, который мы пытаемся обнаружить. В этом случае тон всегда будет иметь одну и ту же фазу в начале всех интервалов взятия отчетов для отдельных БПФ. Следовательно, частоту дискретизации f_s следует выбирать так, чтобы частота интересующего нас тона (мы предполагаем, что она не меняется в процессе измерения) совпадала с центром одного из бинов БПФ.

При когерентном усреднении нескольких БПФ помните о двух моментах. Во-превых, если случайный шум, искажающий сигнал, имеет ненулевое среднее, в усредненном спектре будет присутствовать ненулевой отсчет нулевой частоты $F_{coh}(0)$. Усреднение, конечно же, не уменьшит уровень этого бина. Во-вторых, когерентное интегрирование может уменьшить отношение сигнал/шум, если обнаруживаемый сигнал имеет случайную начальную фазу относительно начала интервала взятия отсчетов для отдельного БПФ. Вот вам пример такой ситуации: серая линия на рисунке 11.8 (c) демонстрирует результат отдельного БПФ смеси шума и тона, частота которого совпадает с центром 16-го бина 64-точечного БПФ. Черная линия на рисунке 11.8 (c) представляет результат когерентного усреднения десяти отдельных 64-точечных БПФ. Но для каждого из этих десяти БПФ в тон вносился случайный сдвиг фазы. Обратите внимание на то, что средний уровень мощности шума в усредненном спектре выше, чем средний уровень мощности шума в результате отдельного БПФ. Когда начальная фаза тона меняется случайным образом, мы ухудшаем, а не улучшаем, отношение сигнал/шум, потому что входной тон в этом случае не синхронизирован с частотой анализа бина БПФ.

Существует наглядное объяснение того, почему когерентное интегрирование ведет себя таким образом. Если мы посмотрим на фазоры, представляющие бин в последовательных БПФ, мы поймем поведение фазора, являющегося их суммой. Но сначала освежим в памяти векторное сложение двух фазоров[1]. Поскольку бин БПФ представляет собой комплексную величину с действительной и мнимой частью, мы можем изобразить его в виде фазора, подобного фазору *A* на рисунке 11.9 (a). Мы можем изобразить бин следующего БПФ с таким же индексом как фазор *B* на рисунке 11.9 (b). Есть два способа когерентного сложения двух бинов БПФ, т. е. сложения фазоров *A* и *B*. Как показано на рисунке 11.9 (c), мы можем сложить две действительные части между собой и две мнимые части между собой, в результате чего получим фазор суммы *C*. Графический метод сложения фазоров *A* и *B*, показанный на рисунке 11.9 (d), состоит в том, что начало фазора B совмещается с концом фазора *A*. Фазор суммы *C* образуется затем как новый фазор, идущий от начала фазора *A* к концу фазора *B*. Заметьте, что два фазора *C* на рисунках 11.9 (c) и 11.9 (d) идентичны. Мы будем использовать метод графического суммирования фазоров, чтобы лучше понять процесс когерентного интегрирования бинов БПФ.

---

[1] Соглашаясь с аргументами, выдвинутыми в разделе А.2 приложения А, мы будем для описания отдельного комплексного выходного отсчета ДПФ использовать термин фазор, а не вектор.

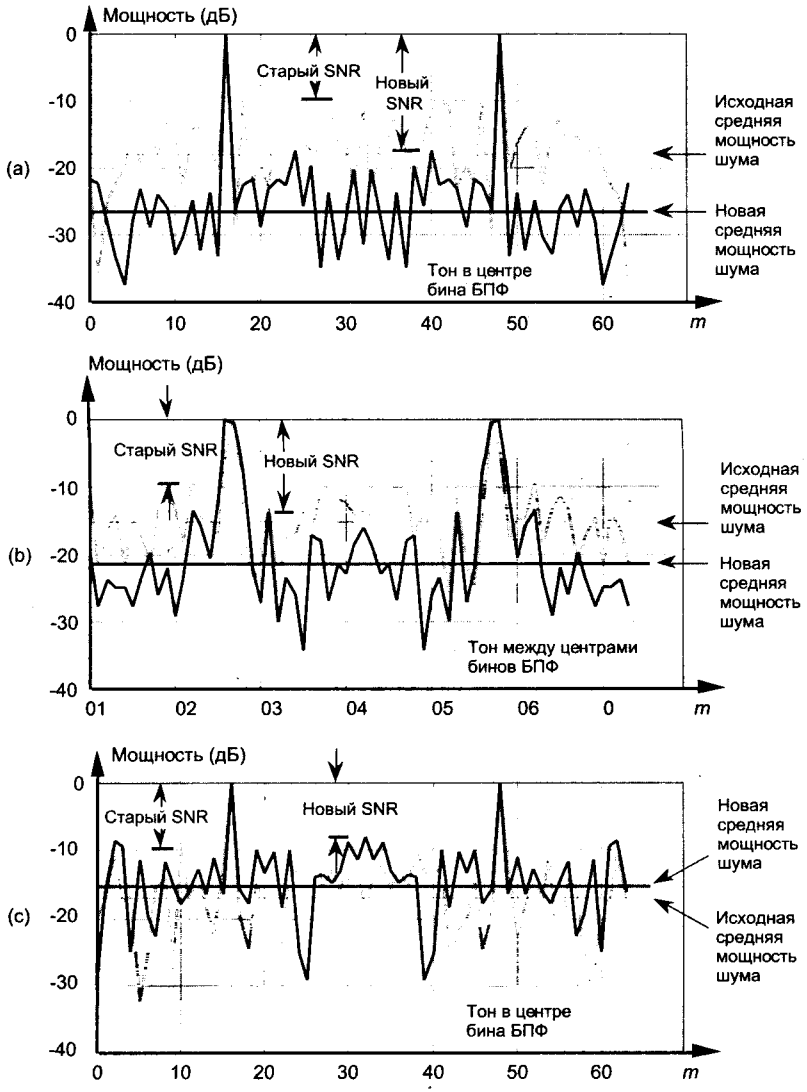


Рис. 11.8. Модуль результата отдельного БПФ (серая линия) и результата когерентного интегрирования десяти отдельных БПФ (черная линия): (a) частота тона совпадает с центром бина; (b) частота тона между центрами бинов; (c) частота тона совпадает с центром бина, но начальная фаза тона меняется случайным образом при каждом отдельном БПФ

Теперь мы готовы рассмотреть фазоры бинов БПФ, содержащих сигнал в последовательных вычислениях БПФ, чтобы увидеть, как ведет себя фазор, полученный их суммированием. Рассмотрим три комбинации фазоров на рисунке 11.10 (a). Каждый фазор представляет собой бин отдельного БПФ, содержащий тон, который мы пытаемся обнаружить с помощью когерентного интегрирования. Темные стрелки представляют собой компоненты фазора, обусловленные сигналом, а маленькие серые стрелки представляют компоненты фазора, обусловленные

случайным шумом в бине БПФ, содержащем тон. В этом случае частота дискретизации кратна частоте тона, так что фазовый угол фазора ϕ одинаков во всех трех вычислениях БПФ. Следовательно, три темных фазора, представляющих тон, имеют нулевой сдвиг фаз по отношению друг к другу. Фазовые углы шумовых компонентов случайны. Если мы сложим три комбинации фазоров, как на первом шаге когерентного интегрирования, мы получим суммарный фазор, показанный на рисунке 11.10 (b). Толстый серый вектор на рисунке 11.10 (b) представляет идеальный суммарный фазор, который был бы получен, если бы в трех рассматриваемых комбинациях не было бы случайных составляющих. Поскольку шумовые компоненты достаточно малы, реальный фазор суммы не слишком сильно отличается от идеальной суммы.

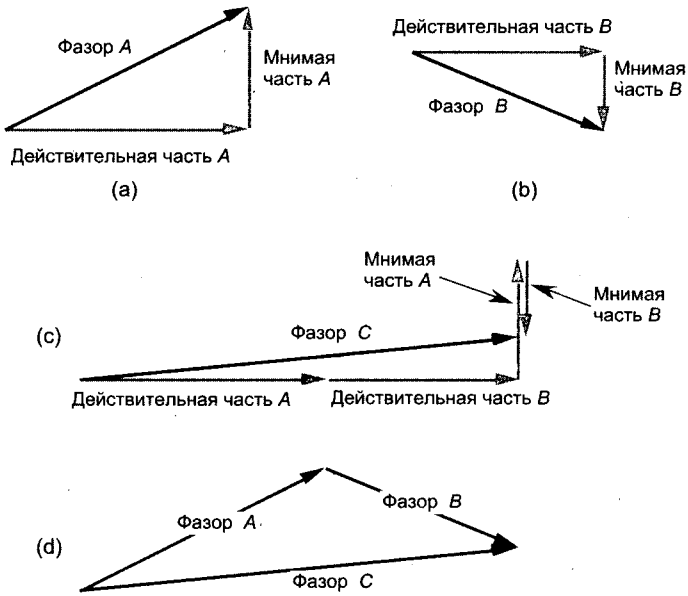


Рис. 11.9. Два способа сложения фазоров *A* и *B*, где фазор *C* = *A* + *B*

Теперь, если начальная фаза сигнала при каждом вычислении БПФ меняется случайным образом, мы можем получить три комбинации фазоров, показанные на рисунке 11.10 (c). Суммирование этих трех комбинаций дает реальный фазор суммы, показанный на рисунке 11.10 (d). Заметьте, что случайные фазы тона привели к тому, что длина фазора суммы оказалась меньше, чем длины фазоров, изображающих компоненты тона на рисунке 11.10 (c). Здесь мы ухудшили, а не улучшили отношение сигнал/шум в усредненном спектре.

Следует помнить, что, хотя когерентное усреднение представляет собой предпочтительный метод улучшения отношения сигнал/шум, нам редко выпадает счастье обрабатывать реальные сигналы, синхронизированные с интервалами накопления отсчетов для БПФ. Поэтому на практике обычно используется некогерентное усреднение. Конечно, при любом методе интегрирования за улучшение чувствительности методов обнаружения в частотной области мы платим дополнительными вычислениями и более медленной реакцией системы, обусловленной необходимостью дополнительного вычисления суммы.

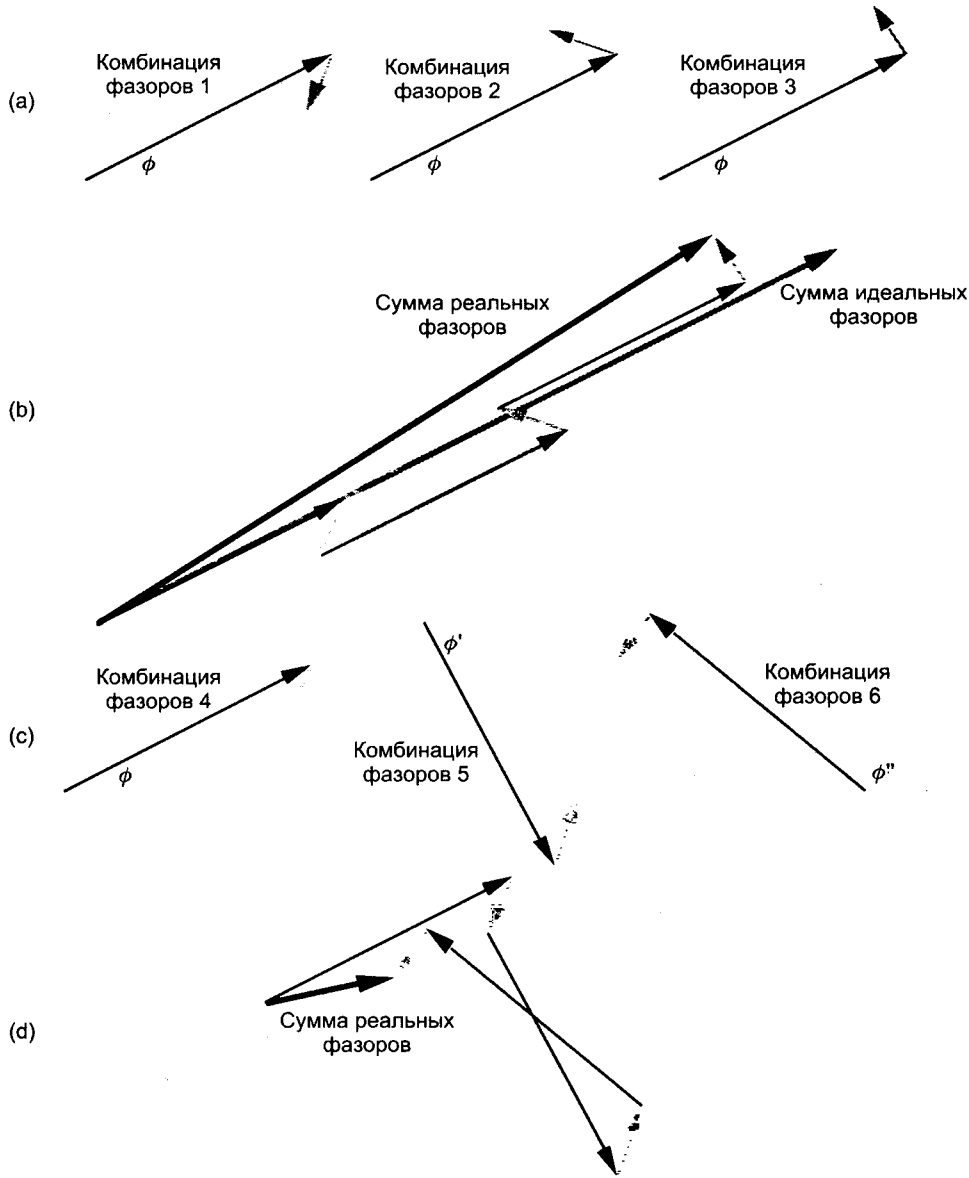


Рис. 11.10. Бины БПФ, представленные в виде фазоров: (a) три варианта одного и того же бина в случае, когда частота тона совпадает с центром бина; (b) когерентное интегрирование (сложение фазоров) трех бинов; (c) три варианта одного бина, когда входной тон имеет случайную начальную фазу при каждом вычислении БПФ; (d) когерентное интегрирование трех вариантов бинов при случайной начальной фазе тона

11.4. Фильрующие свойства усреднения во временной области

В разделе 5.2 мы познакомились с КИХ-фильтрами на примере усредняющего фильтра и впервые узнали, что процесс усреднения во временной области эквивалентен фильтру нижних частот. Действительно, последовательные выходы N-точечного устройства усреднения идентичны выходным отсчетам КИХ-фильтра с $(N-1)$ ответвлением, все коэффициенты которого равны $1/N$, как показано на рисунке 11.11.

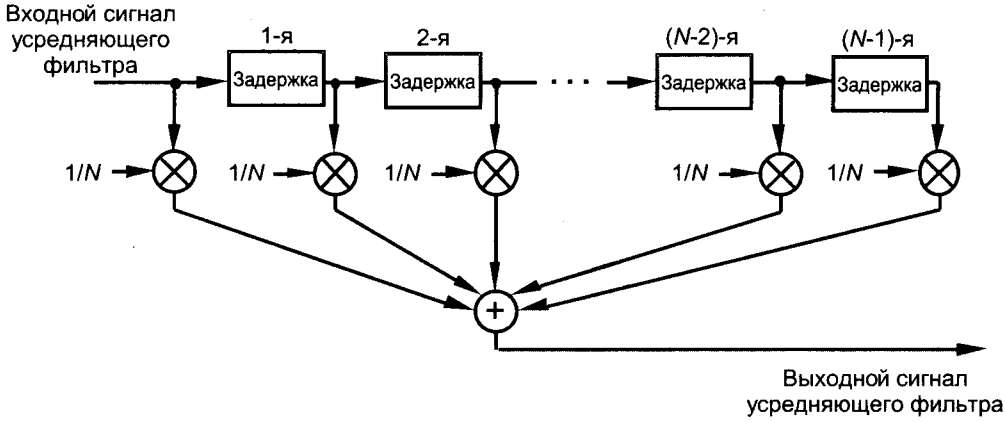


Рис. 11.11. Устройство усреднения, изображенное как КИХ-фильтр

Вопрос, на который мы должны ответить здесь, формулируется следующим образом: «Какую АЧХ имеет обобщенный N-точечный усредняющий фильтр?» Мы можем вычислить АЧХ по формуле (6-28) при всех $a(k) = 0$, которая дает частотную характеристику КИХ-фильтра с N ответвлениями. В этом выражении мы должны присвоить всем коэффициентам от $b(0)$ до $b(N-1)$ значения $1/N$ и вычислить модуль $H_{FIR}(\omega)$ в диапазоне нормированных круговых частот $0 \le \omega \le \pi$. Этот диапазон соответствует диапазону реальных частот $0 \le f \le f_s/2$ (где f_s — частота дискретизации в Гц). Но проще будет вспомнить раздел 5.2, в котором указывалось, что мы можем вычислить частотную характеристику КИХ-фильтра как ДПФ последовательности коэффициентов фильтра. В этом случаем мы можем использовать программу M-точечного БПФ для преобразования последовательности N коэффициентов, равных $1/N$. Конечно, M должно быть больше N, чтобы стала заметной форма частотной характеристики вида $\sin(x)/x$. Следуя этой процедуре и используя программу 128-точечного БПФ, получаем частотные характеристики N-точечного фильтра усреднения при разных значениях N, приведенные на рисунке 11.12. Чтобы придать этим графикам больше наглядности, частотная ось на рисунке определена через f_s в отсчетах/секунду.

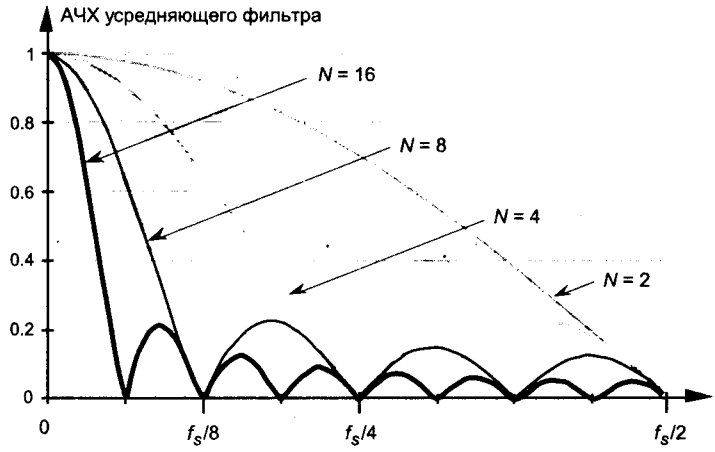


Рис. 11.12. Амплитудно-частотная характеристика *N*-точечного усредняющего фильтра в зависимости от *N*

11.5. Экспоненциальное усреднение

Существует вид усреднения во временной области, который используется в некоторых приборах измерения мощности — он называется экспоненциальным усреднением [8 - 11]. Этот метод обеспечивает подавление шума путем умножения входного отсчета на константу и сложения этого произведения с предыдущим значением среднего, умноженным на дополнение константы до единицы. На словах это кажется запутанным, но закон функционирования устройства экспоненциального усреднения представляет собой простое выражение

$$y(n) = \alpha x(n) + (1 - \alpha)\, y(n - 1), \qquad (11\text{-}22)$$

где $y(n)$ — текущий выходной отсчет устройства усреднения, $y(n-1)$ — предыдущий отсчет среднего и α — *постоянный весовой коэффициент*. Процесс, описываемый уравнением (11-22) реализуется так, как показано на рисунке 11.13. Преимущество экспоненциального усреднения в том, что оно требует всего одну ячейку памяти для хранения значения $y(n-1)$ до получения следующего входного отсчета $x(n)$.

Название этого устройства происходит от его импульсной характеристики. Предположим, что на вход устройства усреднения поступает длинная последовательность нулей и в момент времени $t=0$ мы подаем на его вход один единичный отсчет. Затем входная последовательность снова представляет собой последовательность нулей. Выходная последовательность устройства усреднения при $\alpha = 0.4$ показана на рисунке 11.14. В момент $t = 0$ входной отсчет умножается на α, следовательно, выходной отсчет равен 0.4. На следующем такте входной отсчет равен нулю, а старое значение 0.4 умножается на (1 – 0.4), или 0.6, давая значение выходного отсчета 0.24. На следующем такте входной отсчет опять равен нулю, старое значение, равное 0.24, умножается на 0.6 и дает выходной отсчет, равный 0.144. Дальше выходная последовательность, или импульсная характеристика, устройства экспоненциально уменьшается вследствие последовательных умножений на 0.6.

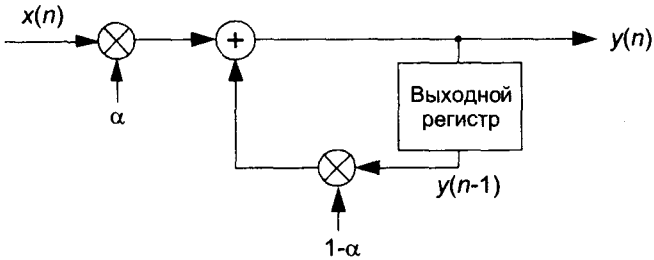


Рис. 11.13. Устройство экспоненциального усреднения

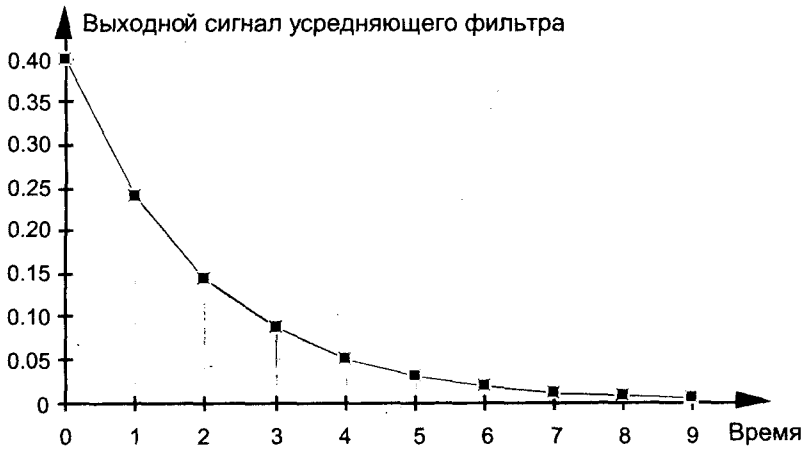


Рис. 11.14. Импульсная характеристика устройства экспоненциального усреднения при $\alpha = 0.4$

Полезной особенностью устройства экспоненциального усреднения является то, что оно позволяет изменять степень подавления шума путем изменения значения весового коэффициента. Если α=1, входные отсчеты не ослабляются, предыдущие отсчеты среднего не учитываются, и никакого усреднения не происходит. В этом случае изменения входной последовательности передаются непосредственно на выход. Когда α уменьшается по величине, входные отсчеты ослабляются, предыдущие выходные отсчеты начинают влиять на значение текущего выходного отсчета. Эти предыдущие отсчеты представляют собой сумму экспоненциально взвешенных входных отсчетов, и такое суммирование сглаживает зашумленный сигнал. Чем меньше α, тем сильнее подавляется шум. С другой стороны, чем меньше α, тем медленнее устройство реагирует на изменения входного сигнала. Мы можем увидеть это, посмотрев на переходные характеристики устройства экспоненциального усреднения при разных значениях α, приведенные на рисунке 11.15[1].

Итак, мы должны найти компромисс. Чем больше подавление шума, тем медленнее устройство усреднения будет реагировать на изменения входного сигнала. Мы видим по рисунку 11.15, что при уменьшении α, позволяющем лучше

[1] Переходная характеристика представляет собой выходную последовательность устройства усреднения, когда на его вход подается последовательность, состоящая из нулей, за которой следует последовательность, состоящая из единиц.

подавлять шум, для установления выходного сигнала требуется больше времени. Некоторые производители измерительных приборов используют хитроумный прием для достижения компромисса между подавлением шума и временем установления выходного сигнала. В начале измерения они используют большое значение α, так что выходной сигнал сразу принимает ненулевое значение. Затем, с течением времени, значение α уменьшается для достижения требуемого подавления шума.

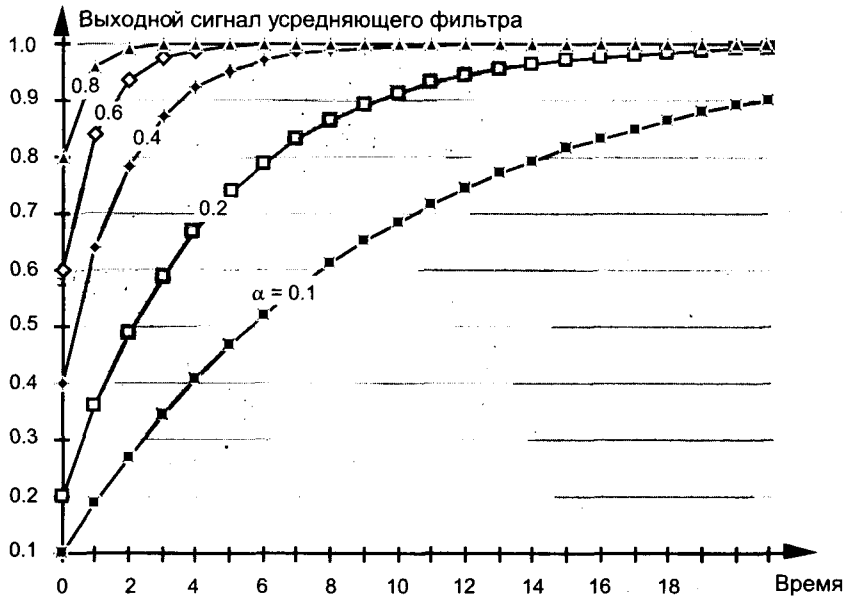


Рис. 11.15. Выходной сигнал устройства экспоненциального усреднения при подаче на его вход ступенчатого сигнала в момент времени $t=0$ как функция α

Как было показано в [9, 10], уменьшение дисперсии шума на выходе устройства усреднения, как функции весового коэффициента α описывается выражением

$$\textit{дисперсия выходного шума/дисперсия входного шума} =$$

$$= SNR_{exp} = \alpha/(2-\alpha)\,. \qquad (11\text{-}23)$$

Следовательно, уменьшение мощности шума в децибелах определяется выражением

$$SNR_{expdB} = 10\log_{10}[\alpha/(2-\alpha)]\,. \qquad (11\text{-}24)$$

На рисунке 11.16 приведен график выражения (11-24), который иллюстрирует соотношение между уменьшением шума и временем реакции устройства усреднения.

Чтобы продемонстрировать способность устройства экспоненциального усреднения уменьшать мощность шума, на рисунке 11.17 показан выходной сигнал при подаче на вход устройства косинусоиды, смешанной с шумом. Весовой коэффициент α линейно уменьшается, начиная со значения 1.0, до значения 0.1 на 180-м отсчете входной последовательности. Обратите внимание на уменьшение шума при уменьшении α. Однако, амплитуда косинусоиды также уменьшается при маленьких значениях α.

Рис. 11.16. Уменьшение мощности шума на выходе устройства экспоненциального усреднения как функция весового коэффициента α

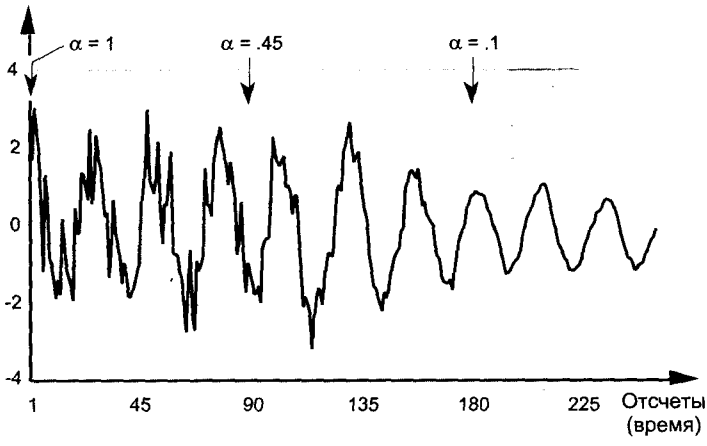


Рис. 11.17. Уменьшение выходного шума устройства экспоненциального усреднения при уменьшении α

Читатель может обнаружить, что реализация устройства экспоненциального усреднения на рисунке 11.13 представляет собой БИХ-фильтр с одним ответвлением [12]. Действительно, это так и есть, и мы можем определить его частотную характеристику.

Для этого вспомним общее выражение для частотной характеристики БИХ-фильтра (6-28), приведенное в главе 6, которое мы повторяем здесь:

$$H_{IIR}(\omega) = \Big[\sum_{k=0}^{N} b(k)\cos(k\omega) - j\sum_{k=0}^{N} b(k)\sin(k\omega)\Big] / \\ / \Big[1 - \sum_{k=1}^{M} a(k)\cos(k\omega) + j\sum_{k=1}^{M} a(k)\sin(k\omega)\Big] \qquad (11\text{-}25)$$

По сравнению с рисунком 6-18 мы должны модифицировать (11-25), положив $N = 0$ и $M = 1$, так что

$$H_{exp}(\omega) = [b(0) \bullet \cos(0\omega) - jb(0) \bullet \sin(0\omega)]/$$
$$/[1 - a(1) \bullet \cos(1\omega) + ja(1) \bullet \sin(1\omega)]. \qquad (11\text{-}26)$$

Теперь, при $b(0) = \alpha$ и $a(1) = 1 - \alpha$, частотная характеристика устройства экспоненциального усреднения приобретает вид комплексного выражения

$$H_{exp}(\omega) = \alpha/[1 - (1-\alpha) \bullet \cos(\omega) + j(1-\alpha) \bullet \sin(\omega)]. \qquad (11\text{-}26')$$

В настоящий момент нас интересует только АЧХ этого фильтра, которую мы можем записать как

$$|H_{exp}(\omega)| = |\alpha/[1 - (1-\alpha) \bullet \cos(\omega) + j(1-\alpha) \bullet \sin(\omega)]| =$$
$$= \alpha/\sqrt{[1 - (1-\alpha) \bullet \cos(\omega)]^2 + [(1-\alpha) \bullet \sin(\omega)]^2} = \qquad (11\text{-}27)$$
$$= \alpha/\sqrt{[1 - 2 \bullet (1-\alpha) \bullet \cos(\omega) + (1-\alpha)^2}$$

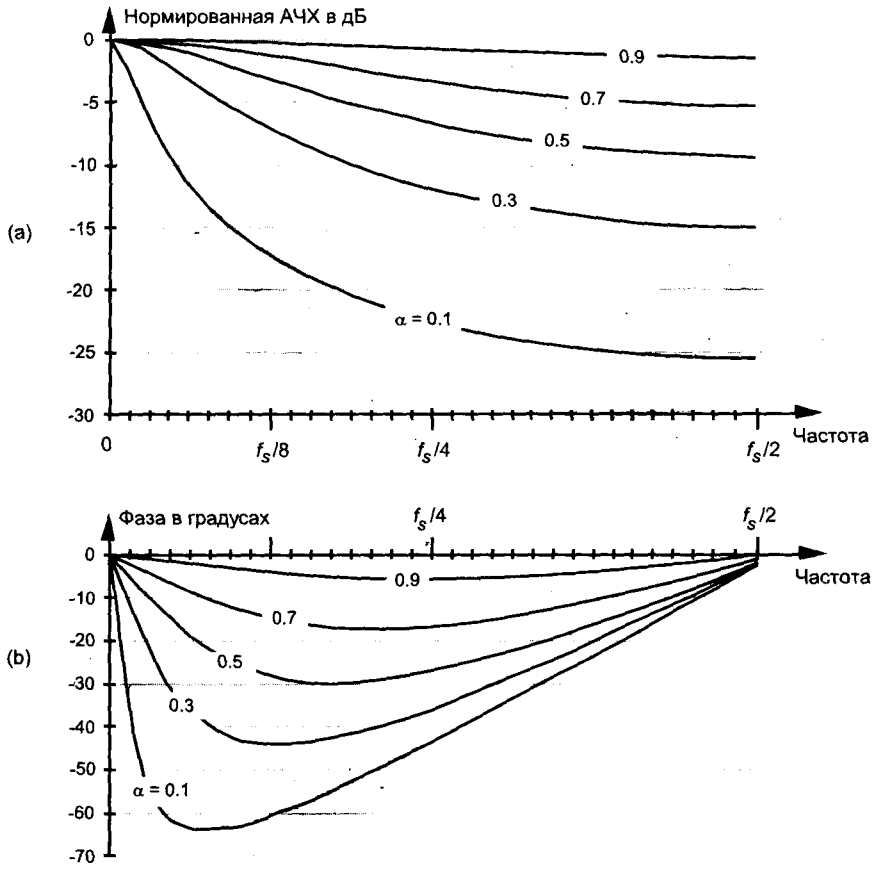


Рис. 11.18. Частотная характеристика устройства экспоненциального усреднения в зависимости от α: (a) нормированная логарифмическая АЧХ в дБ; (b) ФЧХ в градусах

Вычисляя (11-27) в диапазоне нормированных угловых частот $0 \le \omega \le \pi$ (который соответствует диапазону частот $0 \le f \le f_s/2$ Гц), мы получаем АЧХ нашего экспоненциально усредняющего фильтра для разных значений α, приведенные на рисунке 11.18 (а) с использованием нормированного логарифмического масштаба. Обратите внимание, что при уменьшении α устройство экспоненциального усреднения ведет себя как все более узкополосный фильтр нижних частот.

Мы можем попрактиковаться в работе с комплексными числами, выведя выражение для ФЧХ устройства экспоненциального усреднения. Мы знаем, что ФЧХ вычисляется как арктангенс отношения мнимой части $H_{exp}(\omega)$ к действительной части $H_{exp}(\omega)$, или

$$\phi_{exp}(\omega) = \tag{11-27'}$$

$$= \tan^{-1}[\textit{мнимая часть } H_{exp}(\omega)/\textit{действительная часть } H_{exp}(\omega)] .$$

Чтобы найти мнимую и действительную части частотной характеристики мы, зная, что $H_{exp}(\omega)$ является отношением комплексных чисел, определяем, какие переменные в (11-26') соответствуют выражению (А-20) в приложении А. В результате получаем:

$$R_1 = \alpha\,, I_1 = 0\,, R_2 = 1 - (1-\alpha) \bullet \cos(\omega) \text{ и } I_2 = (1-\alpha) \bullet \sin(\omega)\,.$$

Подстановка этих переменных в (А-20) дает

$$H_{exp}(\omega) = \{\alpha[1 - (1-\alpha) \bullet \cos(\omega)] - j[\alpha(1-\alpha) \bullet \sin(\omega)]\}/$$

$$/\{[1 - (1-\alpha) \bullet \cos(\omega)]^2 + [(1-\alpha) \bullet \sin(\omega)]^2\} \tag{11-28}$$

Обозначив знаменатель этого сложного уравнения (11-28) как *Den*, мы используем (11-27), чтобы представить фазовый угол $H_{exp}(\omega)$ в виде

$$\phi_{exp}(\omega) =$$

$$= \tan^{-1}\left([-\alpha(1-\alpha) \bullet \sin(\omega)/Den]\,/\{\alpha[1 - (1-\alpha) \bullet \cos(\omega)]/Den\}\right) =$$

$$= \tan^{-1}\{-(1-\alpha) \bullet \sin(\omega)/[1 - (1-\alpha) \bullet \cos(\omega)]\}\,. \tag{11-29}$$

Очень нелинейная характеристика $\phi_{exp}(\omega)$, описываемая выражением (11-29), вычислена в диапазоне нормированных угловых частот $0 < \omega < \pi$, соответствующем диапазону частот $0 \le f \le f_s/2$ Гц, и показана в виде графика на рисунке 11.18 (b).

Библиография

1. Miller, I., and Freund, J. *Probability and Statistics for Engineers*, 2nd Ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977, p. 118.

2. Beller, J., and Pless, W. «A Modular All-Haul Optical Time-Domain Reflectometer for Characterizing Fiber Links», *Hewlett-Packard Journal*, February 1993.

3. Spiegel, M. R. *Theory and Problems of Statistics*, Shaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., New York, 1961, p. 142.

4. Papoulis, A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1984, p. 245.

5. Davenport, W. B., Jr., and Root, W. L. *Random Signals and Noise*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1958, pp. 81-84 (есть русский перевод Давенпорт В., Рут В.: «Введение в теорию случайных сигналов и шумов», М., ИИЛ, 1960).

6. Welch, P. D. «The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging over Short, Modified Periodograms», *IEEE Transactions on Audio and Electroacoust.*, Vol. AU-15, No. 2, June 1967.

7. Harris, F. J. «On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform», *Proceedings of the IEEE*, Vol. 66, No. 1, January 1978.

8. Booster, D. H., et al. «Design of a Precision Optical Low-Coherence Reflectometer», *Hewlett-Packard Journal*, February 1993.

9. Witte, R. A. «Averaging Techniques Reduce Test Noise, Improve Accuracy» *Microwaves & RF*, February 1988.

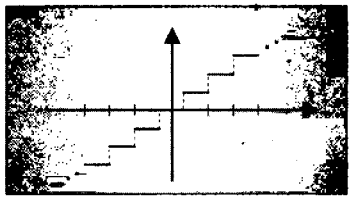
10. Oxaal, J. «Temporal Averaging Techniques Reduce Image Noise», *EDN*, March 17, 1983.

11. Lymer, A. «Digital-Modulation Scheme Processes RF Broadcast Signals», *Microwaves & RF*, April 1994.

12. Hayden, D. «Timer Controls DSP-Filter Frequency Resolution», *EDN*, April 13, 1995.

Глава 12

Цифровые форматы данных и их роль в обработке сигналов



В цифровой обработке сигналов существует много способов представления числовых данных в вычислительном оборудовании. Эти представления, известные как форматы данных, оказывают значительное влияние на точность и сложность реализации любого заданного алгоритма обработки сигналов. Более простые форматы данных позволяют реализовать несложное оборудование ценой ограничения диапазона представляемых чисел и повышения чувствительности к арифметическим ошибкам. Более сложные *форматы данных* труднее реализовать аппаратурно, но они позволяют работать с очень большими и с очень маленькими числами, обеспечивая в то же время разрешение многих проблем, связанных с цифровой арифметикой. Выбранный для заданного приложения формат данных может быть причиной успеха или провала всего проекта — здесь требуется полное соответствие алгоритма и средств его реализации.

В этой главе мы познакомим вас с наиболее распространенными форматами цифровых данных с фиксированной запятой[1] и объясним, почему и когда они применяются. Далее мы используем операцию аналого-цифрового преобразования (АЦП), чтобы установить точность и динамический диапазон, присущие этим форматам с фиксированной запятой, а также чтобы проиллюстрировать ошибки, возникающие при их использовании. Наконец, мы рассмотрим интересную тему двоичных форматов с плавающей запятой.

[1] В отечественной литературе для обозначения разделителя целой и дробной части числа используется как термин «запятая», так и термин «точка». В переводе мы отдали предпочтение первому из упомянутых терминов, хотя дробные десятичные числа в примерах используют точку в качестве разделителя (например, 3.1415). Описанная ситуация отражает различие в национальных системах обозначений — русской и американской — (*прим. ред. перев.*).

12.1. Двоичные форматы с фиксированной запятой

В цифровой аппаратуре числа представляются двоичными разрядами, или битами — термин *бит* (англ. bit) строится как неординарная аббревиатура слов *Binary digIT* [1]. Один бит может находиться только в одном из двух возможных состояний: единицы или нуля[2]. Шестибитовое двоичное число может, например, принимать значение 101101, где крайний левый бит называется *старшим битом* (*старшим значащим разрядом — СЗР*), а крайний правый бит называется *младшим битом* (*младшим значащим разрядом — МЗР*). Количество бит в двоичном числе называется *длиной слова* — следовательно, длина слова числа 101101 равна шести. Как и такая знакомая нам десятичная система, система двоичных чисел предполагает наличие веса, ассоциированного с каждым разрядом числа. Этот вес представляет собой основание системы (два для двоичных чисел и десять для десятичных чисел), возведенное в целую степень.

Например, десятичное число 4631 образуется как

$$(4 \cdot 10^3) + (6 \cdot 10^2) + (3 \cdot 10^1) + (1 \cdot 10^0) = \\ = 4000 + 600 + 30 + 1 = 4631\,. \qquad (12\text{-}1)$$

Множители 10^3, 10^2, 10^1 и 10^0 являются весами разрядов в (12-1). Аналогично, шестибитовое двоичное число 101101 равно десятичному числу 45:

$$(1 \cdot 2^5) + (0 \cdot 2^4) + (1 \cdot 2^3) + (1 \cdot 2^2) + (0 \cdot 2^1) + (1 \cdot 2^0) = \\ = 32 + 8 + 4 + 1 = 45\,. \qquad (12\text{-}2)$$

Используя для обозначения основания системы числа нижний индекс, мы можем записать (12-2) как $101101_2 = 45_{10}$. Выражение (12-2) показывает нам, что, как и десятичные числа, двоичные используют *позиционную систему*, в которой положение разряда определяет его вес. Если мы используем B для обозначения основания системы, позиционное четырехразрядное число $a_3\, a_2\, a_1\, a_0$ будет иметь вид

$$(a_3 \cdot B^3) + (a_2 \cdot B^2) + (a_1 \cdot B^1) + (a_0 \cdot B^0)\,. \qquad (12\text{-}3)$$

В (12-3) B^n представляет собой весовой коэффициент для разряда a_n, где $0 \le a_n \le B - 1$. (Позиционная система представления чисел очень стара — настолько стара, что ее истоки скрываются во тьме веков. Однако, с внутренне присущим ей позиционированием десятичной или двоичной запятой эта система оказалась такой удобной, что ее значимость для цивилизации сравнивают со значимостью алфавита [1].)

---

[1] Binary digit (англ.) = двоичный разряд — *(прим. перев.)*.

[2] Двоичные числа используются, поскольку пионеры электронной вычислительной техники быстро осознали, что значительно выгоднее и надежнее использовать электронные приборы (реле, радиолампы, транзисторы и т. д.), которые имеют только два состояния: включено и выключено. При этом включенное/выключенное состояние прибора может представляться одним двоичным разрядом.

12.1.1. Восьмеричные числа

С расширением использования миникомпьютеров и микропроцессоров в 1960-е годы люди быстро устали манипулировать длинными цепочками единиц и нулей и начали использовать более удобный способ представления двоичных чисел. Один из способов записи двоичного числа представляет собой восьмеричный формат, основание системы счисления которого равно восьми. Процедура преобразования двоичного числа в восьмеричное определяется операцией разбиения двоичного числа на трехбитовые группы, начиная справа. Например, двоичное число 10101001_2 можно преобразовать в восьмеричный формат как

$$10101001_2 \rightarrow 10 \mid 101 \mid 001 = 251_8$$

Каждая из трех групп битов легко преобразуется из двоичного представления в один восьмеричный разряд, потому что для трехбитовых слов восьмеричный и десятичный форматы совпадают. То есть, начиная с левой группы бит, $10_2 = 2_{10} = 2_8$, $101_2 = 5_{10} = 5_8$ и $001_2 = 1_{10} = 1_8$. Восьмеричный формат также является позиционным, так что $251_8 = (\mathbf{2} \cdot 8^2 + \mathbf{5} \cdot 8^1 + \mathbf{1} \cdot 8^0)$. Восьмеричный формат дает нам возможность представить восьмиразрядное число 10101001_2 трехразрядным числом 251_8. Конечно, в восьмеричном формате допустимы только значения разрядов от 0 до 7 — значения разрядов 8 и 9 в восьмеричном представлении не имеют смысла.

12.1.2. Шестнадцатеричные числа

Другой популярный двоичный формат — формат шестнадцатеричных чисел, использующий в качестве основания число 16. Преобразование из двоичного в шестнадцатеричный формат выполняется разбиением двоичного числа на четырехбитовые группы, начиная справа. Двоичное число 10101001_2 преобразуется в шестнадцатеричное как

$$10101001_2 \rightarrow 1010 \mid 1001 = A9_{16}.$$

Если вы не сталкивались раньше с использованием шестнадцатеричного формата, пусть запись A9 не смущает вас. В этом формате символы A, B, C, D, E и F представляют значения разрядов, которые в десятичной системе представляются как 10, 11, 12, 13, 14 и 15 соответственно. Мы преобразуем две группы битов в два шестнадцатеричных разряда, начиная с левой группы: $1010_2 = 10_{10} = A_{16}$ и $1001_2 = 9_{10} = 9_{16}$. Шестнадцатеричные числа также являются позиционными, а это значит, что $A9_{16} = (\mathbf{A} \cdot 16^1 + \mathbf{9} \cdot 16^0)$. Следовательно, для удобства мы можем представить восьмибитовое число 10101001_2 двухразрядным числом $A9_{16}$. В таблице 12.1 приведены допустимые значения разрядов для рассмотренных выше систем счисления.

12.1.3. Дробные двоичные числа

Дроби (числа, модуль которых больше нуля и меньше единицы) тоже могут быть представлены двоичными числами, если мы используем двоичную запятую, которая выполняет ту же функцию, что и знакомая нам десятичная запятая. В двоичных числах, о которых мы говорили до сих пор, предполагается, что двоичная

запятая находится справа от самого правого разряда. Используя для обозначения двоичной запятой символ ◇, мы можем показать, что шестибитовая дробь $11_{\diamond}0101$ равна десятичному числу 3.3125:

$$(1 \bullet 2^{1}) + (1 \bullet 2^{0}) + (0 \bullet 2^{-1}) + (1 \bullet 2^{-2}) + (0 \bullet 2^{-3}) + (1 \bullet 2^{-4}) =$$

$$= (1 \bullet 2) + (1 \bullet 1) + (0 \bullet 1/2) + (1 \bullet 1/4) + (0 \bullet 1/8) + (1 \bullet 1/16) =$$

$$= 2 + 1 + 0 + 0.25 + 0 + 0.0625 = 3.3125. \qquad (12\text{-}4)$$

Таблица 12.1. Допустимые представления разрядов для разных оснований системы счисления

Двоичная	Восьмеричная	Десятичная	Шестнадцатеричная	Десятичный эквивалент
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
	2	2	2	2
	3	3	3	3
	4	4	4	4
	5	5	5	5
	6	6	6	6
	7	7	7	7
		8	8	8
		9	9	9
			A	10
			B	11
			C	12
			D	13
			E	14
			F	15

В примере (12-4) двоичная запятая поставлена между вторым и третьим старшими разрядами. Из-за такого фиксированного положения двоичной запятой подобные двоичные числа часто называют двоичными числами *с фиксированной запятой*.

Для некоторых форматов двоичных чисел (наподобие форматов с плавающей запятой, о которых мы вскоре поговорим), двоичную запятую помещают слева от старшего бита. Это делает числа принадлежащими диапазону от нуля до единицы. В этом формате наибольшее и наименьшее возможные значения для b-битовой дроби составляют $1-2^{-b}$ и 2^{-b} соответственно. Для шестибитовой дроби, например, наибольшее значение составляет $_{\diamond}111111_2$, или

$$_{\diamond}(1 \bullet 2^{-1}) + (1 \bullet 2^{-2}) + (1 \bullet 2^{-3}) + (1 \bullet 2^{-4}) + (1 \bullet 2^{-5}) + (1 \bullet 2^{-6}) =$$

$$= {}_{\diamond}(1 \bullet 1/2) + (1 \bullet 1/4) + (1 \bullet 1/8) + (1 \bullet 1/16) + (1 \bullet 1/32) + (1 \bullet 1/64) = \qquad (12\text{-}5)$$

$$= 0.5 + 0.25 + 0.125 + 0.0625 + 0.03125 + 0.015625 = 0.984375,$$

что и есть $1-2^{-6} = 1-1/64$ в десятичной системе. Наименьшее ненулевое число равно $_{\diamond}000001_2$, что соответствует десятичному числу $1/64 = 0.015625_{10}$.

12.1.4. Двоичный формат «модуль плюс знак»

Чтобы двоичные числа имели какую-то практическую ценность, они должны быть способны представлять отрицательные величины. В двоичных числах это достигается выделением одного бита в двоичном слове для индикации знака числа. Рассмотрим популярный двоичный формат, известный как «модуль плюс знак». Здесь мы предполагаем, что левый крайний бит есть знаковый бит, а остальные биты представляют модуль числа, который всегда положителен. Например, мы можем сказать, что четырехбитовое число 0011_2 есть $+3_{10}$, а двоичное число 1011_2 равно -3_{10}, или

Биты модуля		Биты модуля
↓ ↓ ↓		↓ ↓ ↓
$0\,0\,1\,1_2 = -3_{10}$	и	$1\,0\,1\,1_2 = -3_{10}$
↑		↑
нулевой знаковый бит обозначает положительное число		единичный знаковый бит обозначает отрицательное число

Конечно, использование одного из битов в качестве знака уменьшает диапазон представимых значений модуля чисел. Если длина слова беззнакового числа равна b бит, количество разных значений может быть выражено как 2^b. Например, восьмибитовое число может представлять $2^8 = 256$ различных целых значений. Поскольку ноль включается в число значений, которые необходимо представить, b-битовое беззнаковое двоичное слово может представить целые числа от 0 до 2^b-1. Наибольшее значение, представляемое беззнаковым восьмибитовым словом, равно $2^8-1 = 255_{10} = 11111111_2$. В двоичном формате «знак плюс модуль» b-битовое слово может представлять только числа в диапазоне $\pm 2^{b-1}-1$, так что наибольшее положительное и наименьшее отрицательное числа, которые мы можем представить восьмибитовым словом, содержащим модуль и знак, равны $\pm 2^{b-1}-1 = \pm 127$.

12.1.5. Двоичный дополнительный формат

Другая распространенная система представления двоичных чисел, известная как двоичный дополнительный формат, также использует крайний левый бит как знаковый. Двоичный дополнительный формат является наиболее удобным с точки зрения аппаратурной реализации и используется на протяжении десятилетий.

Он делает возможным выполнение в компьютерах как сложения, так и вычитания на одной и той же аппаратуре. Чтобы получить отрицательный эквивалент положительного двоичного дополнительного числа, мы просто дополняем каждый бит (меняем единицу на ноль и ноль на единицу) и прибавляем к дополненному слову единицу. Например, если 0011_2 представляет десятичное число 3 в двоичном дополнительном формате, мы получаем отрицательное десятичное число 3 следующим образом:

+3 в двоичном дополнительном формате →	0011
дополнение +3 →	1100
прибавление единицы →	+0001
–3 в двоичном дополнительном формате →	1101

В двоичном дополнительном формате b-битовое слово может представлять положительные числа до $2^{b-1}-1$ и отрицательные числа до -2^{b-1}. В таблице 12.2 приведены примеры четырехбитовых слов в формате модуля со знаком и двоичном дополнительном формате.

При использовании двоичных дополнительных чисел необходимо быть внимательными при сложении двух чисел разной длины. Рассмотрим случай сложения четырехбитового числа с восьмибитовым:

+15 в двоичном дополнительном формате →	00001111
плюс +3 в двоичном дополнительном формате →	+0011
+18 в двоичном дополнительном формате →	00010010

Пока никаких проблем. Проблема возникает, когда наше четырехбитовое число меньше нуля. Давайте попробуем вместо прибавления +3 к +15 прибавить –3 к +15:

+15 в двоичном дополнительном формате →	00001111	
плюс –3 в двоичном дополнительном формате →	+1101	
+28 в двоичном дополнительном формате →	00011100	← Ошибка!

Полученной выше ошибки можно избежать, если над четырехбитовым числом выполнить операцию расширения знака. Эта операция, выполняемая в аппаратуре автоматически, распространяет знак четырехбитовго отрицательного числа влево, превращая это число в восьмибитовое. Если мы расширим знак числа –3, а затем выполним сложение, мы получим правильный ответ:

+15 в двоичном дополнительном формате → 00001111

плюс –3 в двоичном дополнительном формате
с расширенным знаком → +11111101

+15 в двоичном дополнительном формате → 100001100 ← Это уже лучше

↑
бит переполнения игнорируется

Таблица12.2. Форматы двоичных чисел

Десятичный эквивалент	Модуль со знаком	Двоичный дополнительный формат	Двоичный со смещением
7	0111	0111	1111
6	0110	0110	1110
5	0101	0101	1101
4	0100	0100	1100
3	0011	0011	1011
2	0010	0010	1010
1	0001	0001	1001
+0	0000	0000	1000
–0	1000	—	—
–1	1001	1111	0111
–2	1010	1110	0110
–3	1011	1101	0101
–4	1100	1100	0100
–5	1101	1011	0011
–6	1110	1010	0010
–7	1111	1001	0001
–8	—	1000	0000

12.1.6. Двоичный формат со смещением

Еще одна популярная схема представления двоичных чисел известна как двоичный со смещением формат. Хотя этот формат встречается не так часто, как двоичный дополнительный, он все еще используется в некоторых приборах. В таблице 12.2 приведены примеры двоичного со смещением формата для четырехбитовых слов. В этом формате отрицательные числа представляются разностью беззнакового числа и 2^{b-1}. Например, во второй строке таблицы 12.2

двоичное число со смещением равно 1110_2. Когда это число интерпретируется как беззнаковое двоичное число, оно эквивалентно 14_{10}. Для четырехбитовых слов $b = 4$ и $2^{b-1} = 8$, так что $14_{10} - 8_{10} = 6_{10}$, что является десятичным эквивалентом 1110_2 в двоичном формате со смещением. Разность между эквивалентом двоичного беззнакового числа и десятичным эквивалентом двоичного числа со смещением в таблице 12.2 всегда равна 8. (Читателю интересно будет узнать, что мы можем преобразовывать числа из двоичного дополнительного формата в формат со смещением и обратно простым инвертированием старшего бита.)

История, правила выполнения арифметических операций и использование многих известных форматов чисел представляют собой обширное поле для исследования. Подробное и доступное обсуждение этого предмета приводится в книге Кнута [2].

12.2. Точность и динамический диапазон двоичных чисел

Как мы предполагали раньше, для любого двоичного формата чисел ключевым моментом является количество битов в слове. Чем их больше, тем выше разрешающая способность для дробных чисел и больше максимальное представимое значение для целых чисел[1]. Предполагая, что двоичное слово представляет амплитуду сигнала, специалисты по цифровой обработке сигналов находят полезным характеризовать количественно разные форматы двоичных чисел с помощью динамического диапазона. Для целого двоичного слова со знаком длиной $b+1$ битов (один знаковый бит и b битов модуля), динамический диапазон в децибелах определяется как

$$\begin{aligned} \textit{динамический диапазон}_{дБ} &= 20 \cdot \log_{10}(\textit{наибольшее возможное значение слова}/ \\ &\quad /\textit{наименьшее возможное значение слова}) = \\ &= 20 \cdot \log_{10}[(2^b - 1)/1] = 20 \cdot \log_{10}(2^b - 1)\,. \end{aligned} \tag{12-6}$$

Когда 2^b намного больше 1, мы можем игнорировать -1 в (12-6) и записать

$$\begin{aligned} \textit{динамический диапазон}_{дБ} &= 20 \cdot \log_{10}(2^b) = \\ &= 20 \cdot \log_{10}(2) \cdot b = 6.02 \cdot b\ дБ\,. \end{aligned} \tag{12-6'}$$

Значение (12-6'), выраженное в децибелах, говорит нам, что динамический диапазон данного формата чисел прямо пропорционален длине слова. Следовательно, восьмибитовое двоичное дополнительное слово, имеющее семь бит для представления модуля, имеет динамический диапазон $6.02 \cdot 7 = 42.14$ дБ. Большинство

[1] В некоторых компьютерах используются 64-битовые слова. 2^{64} равно примерно $1.8 \cdot 10^{19}$ — это довольно большое число. Настолько большое, что, если бы мы начали прибавлять 1 к 64-битовому числу один раз в секунду в момент рождения нашей Вселенной ($\approx$ 20 миллиардов лет тому назад), сегодня четыре старших разряда этого счетчика все еще оставались бы нулевыми.

людей упрощают (12-6'), используя приблизительное правило, согласно которому динамический диапазон равен «шесть дБ на бит».

12.3. Эффекты конечной длины слова двоичных чисел с фиксированной запятой

Эффекты конечной длины двоичного слова затрагивают все аспекты цифровой обработки сигналов. Использование слов конечной длины не позволяет нам представлять значения с неограниченной точностью, повышает шум при спектральном оценивании, вызывает отклонение характеристик цифровых фильтров от рассчитанных, вносит шум в результаты АЦП и может (если мы не будем начеку) привести к очень неточным результатам арифметических операций. Чем меньше длина слова, тем существеннее эти проблемы. К счастью, эффекты конечной разрядности достаточно хорошо изучены. Мы можем предсказать их последствия и предпринять определенные шаги для их минимизации. Первый эффект конечной разрядности, который мы рассмотрим – это ошибки, возникающие в процессе аналого-цифрового преобразования.

12.3.1. Ошибки квантования в аналого-цифровом преобразователе

Реальные АЦП выдают на выход слова конечной длины. Коммерческие АЦП классифицируются по длине выходного слова, которая обычно лежит в пределах от 8 до 16 бит[1]. Диапазон входного аналогового напряжения обычно составляет от −1 до +1 Вольта. Если мы используем такой АЦП, выдающий восьмибитовые слова, младший бит соответствует

$$\textit{значение МЗР} = (\textit{диапазон входного напряжения})/2^{\textit{длина слова}} =$$

$$= 2\ \textit{вольта}/2^8 = 7.81\ \textit{милливольт}\,. \qquad (12\text{-}7)$$

Это значит, что мы можем без погрешности представлять только те значения входного напряжения, которые делятся нацело на 7.81 — для любых других входных напряжений АЦП выдаст некоторое *приближенное* цифровое значение. Погрешность данного процесса называют *ошибкой квантования*, потому что значение младшего разряда АЦП является неделимым квантом. Мы иллюстрируем эту ситуацию на рисунке 12.1 (а), где показан процесс оцифровки непрерывного сигнала восьмибитовым АЦП, выходные слова которого представлены в формате модуля со знаком. В начале процесса дискретизации в момент времени $t = 0$ напряжение непрерывного сигнала имеет значение 31.25 милливольт (мВ), и значение выходного слова АЦП для отсчета $x(0)$ будет абсолютно точным. В момент времени T, когда мы берем второй отсчет $x(1)$, непрерывное напряжение находится

[1] В настоящее время в повседневную практику вошли АЦП с длиной слова до 24 бит — (*прим. перев.*).

между 0 и –7.81 мВ. В этом случае АЦП выдает слово 10000001, представляющее значение –7.81 мВ, хотя входное напряжение не достигает –7.81 мВ. Выходное слово АЦП 10000001 содержит некоторую ошибку квантования. Каждый последующий отсчет содержит ошибку квантования, потому что значения выходных слов АЦП должны лежать на горизонтальных пунктирных линиях, показанных на рисунке 12.1 (a). Разность между действительным напряжением непрерывного сигнала и его цифровым представлением показана на рисунке 12.1 (b) как ошибка квантования. Для идеального АЦП ошибка квантования, или шум округления, не может быть больше ±1/2 МЗР, или ±3.905 мВ.

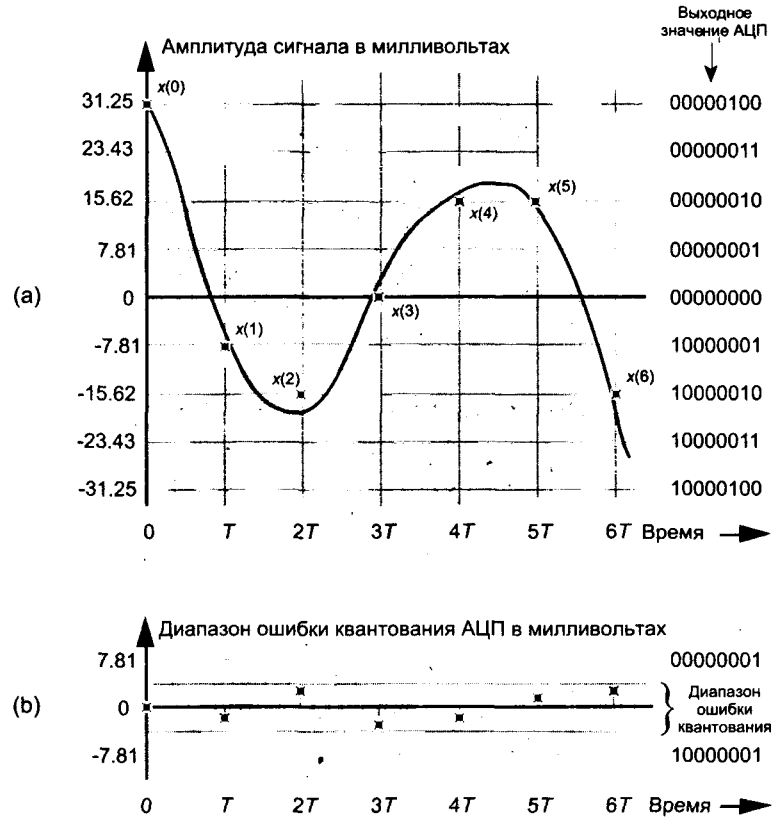


Рис. 12.1. Ошибки квантования: (a) оцифрованные значения непрерывного сигнала $x(n)$; (b) ошибка квантования как разность между реальными значениями аналогового сигнала и оцифрованными отсчетами

Рисунок 12.1 (b) показывает шум квантования во временной области, но мы можем также показать этот шум в частотной области. На рисунке 12.2 (a) пунктирной линией показан один период непрерывной синусоиды, совпадающий с интервалом наблюдения, а черными точками показана квантованная версия отсчетов этого сигнала. Заметьте, что квантованные отсчеты сигнала могут принимать только целые значения, что приводит к *ступенчатому эффекту* отклонения вверх и вниз от истинной неквантованной кривой. Длина слова здесь равна 4 битам, один бит для знака и три бита для модуля. При этом границы представимых

значений равны ±7. На рисунке 12.2 (b) показан результат ДПФ дискретной версии этой синусоиды, отсчеты которой не округлялись до целых значений и точность которых очень высока. Обратите внимание на то, что в этом случае ДПФ имеет ненулевой отсчет только при $m = 1$. С другой стороны, на рисунке 12.2 (c) показан спектр округленных до 4 бит отсчетов, показанных на рисунке 12.2 (a), где квантование привело к появлению шумовых компонентов на всех частотах. Если графики шума на рисунках 12.1 (b) и 12.2 (c) выглядят случайными, то это потому, что они такие и есть. Но, несмотря на то, что шум квантования АЦП представляет собой случайный процесс, мы все же можем количественно оценить его влияние.

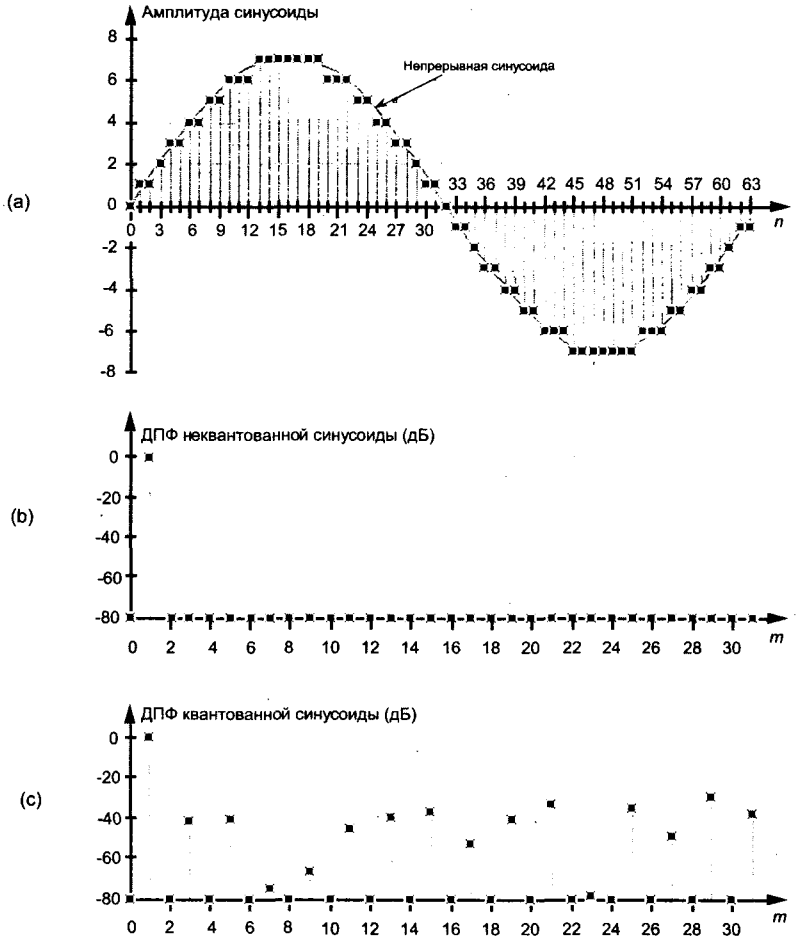


Рис. 12.2. Влияние шума квантования: (a) входная синусоида, подаваемая на 64-точечное ДПФ; (b) теоретический модуль ДПФ для высокоточных отсчетов; (c) модуль ДПФ синусоиды, округленной до 4 битов

Для оценки качества некоторого процесса или прибора в области телекоммуникаций часто используется понятие отношения сигнал/шум, которое равно отношению мощности сигнала к мощности шума. Мы можем поступить так же и получить выражение $SNR_{A/D}$ для отношения сигнал/шум идеального АЦП, учи-

тывающее эффекты конечной разрядности. Поскольку шум квантования представляет собой случайный процесс, мы не можем непосредственно представить его мощность, но мы можем использовать ее статистический эквивалент, дисперсию, чтобы определить $SNR_{A/D}$ в децибелах следующим образом

$$SNR_{A/D} =$$

$$= 10 \bullet \log_{10}(\textit{дисперсия входного сигнала/дисперсия шума квантования АЦП}) =$$

$$= 10 \bullet \log_{10}(\sigma^2_{signal}/\sigma^2_{A/D\,noise}) \qquad (12\text{-}8)$$

Далее, мы определим дисперсию шума квантования АЦП по отношению к максимальному входному напряжению АЦП V_p. Если полный размах (от $-V_p$ до $+V_p$ Вольт) непрерывного входного сигнала b-битового АЦП равен $2V_p$, то шаг квантования q равен этому диапазону, деленному на количество возможных значений выходного слова АЦП, или $q = 2V_p/2^b$. (На рисунке 12.1, например, шаг квантования q равен цене МЗР в 7.81 мВ.) На рисунке 12.3 показан график функции, которая характеризует вероятность получения того или иного заданного значения ошибки квантования и называется функцией плотности вероятности ошибки квантования $p(e)$.

Рис. 12.3. Функция плотности вероятности ошибки (шума) округления аналого-цифрового преобразования

Простая прямоугольная функция может рассказать нам о многом. Она показывает, что вероятности появления любых значений ошибки в диапазоне от $-q/2$ до $+q/2$ одинаковы. По определению, т. к. площадь под графиком функции плотности вероятности равна единице (т. е. вероятность того, что ошибка окажется где-то в пределах от $-q/2$ до $+q/2$, равна 1), максимальное значение $p(e)$ должно быть равно площади, деленной на ширину прямоугольника, или $p(e) = 1/q$. Согласно рисунку D.4 и (D.12) в приложении D, дисперсия равномерной функции $p(e)$ равна

$$\sigma^2_{A/D\,noise} = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 p(e)de = (1/q) \bullet \int_{-q/2}^{q/2} e^2 de = q^2/12\,. \qquad (12\text{-}9)$$

Теперь мы можем выразить дисперсию ошибки квантования через параметры АЦП, заменив q в (12-9) на $q = 2V_p/2^b$ и получив

$$\sigma^2_{A/D\,noise} = (2V_p)^2/[12 \bullet (2^b)^2] = (V_p)^2/(3 \bullet 2^{2b})\,. \qquad (12\text{-}10)$$

Итак, мы на полпути к цели — формула (12-10) дает нам знаменатель (12-8), нам остается получить числитель. Чтобы получить общий результат, выразим уровень входного сигнала через его среднеквадратичное значение (СКЗ), максимальное входное напряжение АЦП и коэффициент использования LF, определяемый как

$$LF = \text{СКЗ входного сигнала}/V_p = \sigma_{signal}/V_p\,.^{1} \qquad (12\text{-}11)$$

Мы возводим (12-11) в квадрат и выполняем его преобразования, чтобы представить дисперсию сигнала σ^2_{signal} в виде

$$\sigma^2_{signal} = (LF)^2\, V_p^2\,. \qquad (12\text{-}12)$$

Подставляя (12-10) и (12-12) в (12-8), получаем

$$SNR_{A/D} = 10 \bullet \log_{10}\{(LF)^2 V_p^2/[V_p^2/(3 \bullet 2^{2b})]\} = 10 \bullet \log_{10}[(LF)^2 \bullet (3 \bullet 2^{2b})] =$$
$$= 6.02 \bullet b + 4.77 + 20 \bullet \log_{10}(LF)\,. \qquad (12\text{-}13)$$

Формула (12-13) выражает $SNR_{A/D}$ идеального b-битового АЦП через коэффициент использования и количество битов b. На рисунке 12.4 приведены графики (12-13) для разных длин слова АЦП как функции коэффициента использования. Обратите внимание на то, что коэффициент использования на рисунке 12.4 никогда не превышает –3 дБ, потому что пиковое значение входного напряжения АЦП не может превышать V_p Вольт. Таким образом, СКЗ синусоидального входного сигнала не может быть больше, чем $V_p/\sqrt{2}$ Вольт (на 3 дБ ниже V_p).

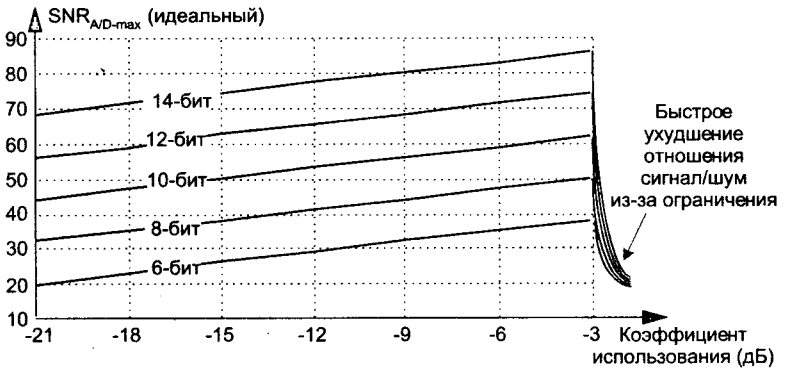


Рис. 12.4. $SNR_{A/D}$ идеального АЦП как функция коэффициента использования в дБ

Когда амплитуда входной синусоиды равна максимальному входному напряжению АЦП V_p, коэффициент использования LF равен

$$LF_{\text{полной шкалы}} = (V_p/\sqrt{2})/V_p = 1/\sqrt{2}\,. \qquad (12\text{-}14)$$

При этом максимальное отношение сигнал/шум, согласно (12-13), равно

$$SNR_{A/D\text{-}max} = 6.02 \bullet b + 4.77 + 20 \bullet \log_{10}(1/\sqrt{2}) =$$
$$= 6.02 \bullet b + 4.77 + 3.01 = 6.02 \bullet b + 1.76\ \text{дБ}\,. \qquad (12\text{-}15)$$

В приведенных выше рассуждениях об отношении сигнал/шум АЦП можно выделить три важных для нас момента:

1. Идеальный АЦП имеет отношение сигнал/шум $SNR_{A/D}$, определяемое выражением (12-13), следовательно, никакой непрерывный сигнал, который мы пытаемся оцифровать с помощью b-битового АЦП, никогда не будет иметь после преобразования отношение сигнал/шум больше,

[1] Раздел D.2 приложения D напоминает нам, что, если дисперсия σ^2 связана с мощностью сигнала, то стандартное отклонение связано с СКЗ сигнала.

чем определяется выражением (12-13). Допустим, к примеру, что мы хотим оцифровать непрерывный сигнал, имеющий отношение сигнал/шум 55 дБ. При использовании идеального восьмибитового АЦП, для которого отношение сигнал/шум для полной шкалы равно 6.02 • 8 + 1.76 = 49.9 дБ согласно (12-15), шум квантования исказит цифровые отсчеты, и результирующее отношение сигнал/шум для цифрового сигнала не может быть больше 49.9 дБ. В результате аналого-цифрового преобразования мы потеряем отношение сигнал/шум. (Для оцифровки непрерывного сигнала, имеющего отношение сигнал/шум 55 дБ, мы могли бы использовать десятибитовый АЦП с его $SNR_{A/D} \approx 62$ дБ, при этом ухудшение отношения сигнал/шум из-за шума квантования было бы незначительным.) Формулы (12-13) и (12-15) применимы к идеальным АЦП и не учитывают дополнительные источники шума, такие как ошибка апертурного джиттера, ошибки, связанные с пропуском кодов и другие нелинейности. Таким образом, реальные АЦП имеют отношение сигнал/шум ниже идеального, предсказываемого выражением (12-13). На практике благоразумно предполагать, что $SNR_{A/D\text{-}max}$ на 3 – 6 дБ ниже того, что дает (12-15).

2. Выражение (12-15) часто приводится в литературе, но оно иногда может приводить к ошибкам, т. к. нельзя подавать на вход АПЦ сигнал с размахом, равным полной шкале АЦП. Разумно подавать на АЦП сигнал, уровень которого несколько ниже, т. к. неизбежные флуктуации сигнала могут привести к ограничению сигнала и внесению, таким образом, искажений в него. Следовательно, оценка (12-15) очень оптимистична, и на практике отношение сигнал/шум АЦП будет меньше, чем показывает (12-15). Для более точной оценки отношения сигнал/шум АЦП следует брать такое СКЗ сигнала, которое никогда не будет (или редко будет) приводить к выходу за пределы допустимых входных напряжений АЦП, подставлять это значение в (12-11) для вычисления значения коэффициента использования, которое затем использовать в (12-13)[1]. Здесь тоже увеличение длины слова облегчит эту проблему, увеличив доступное отношение сигнал/шум.

3. Вспомните теперь, что любой непрерывный сигнал в реальном мире имеет свое собственное отношение сигал/шум, так что использование АЦП, $SNR_{A/D}$ которого намного превышает отношение сигнал/шум сигнала, не имеет смысла. В этом случае дополнительные биты АЦП будут использованы для оцифровки шума непрерывного сигнала с большей точностью.

Здесь необходимо сделать одно предупреждение относительно рассматриваемого анализа ошибок квантования АЦП. Вывод выражений (12-13) и (12-15) основан на трех предположениях:

1. Причиной ошибок квантования является случайный стационарный процесс, т. е. характеристики АЦП не меняются со временем. При заданном входном напряжении мы всегда ожидаем получить от АЦП один и тот же двоичный код.

---

[1] Кстати, для описания того, насколько сильно нагружен вход АЦП, некоторые специалисты используют пик-фактор. Пик-фактор и коэффициент нагрузки являются взаимно обратными величинами, или $CF = V_p$ /(*СКЗ сигнала*).

2. Функция плотности вероятности ошибки квантования равномерна. Мы предполагаем, что АЦП идеален, и все значения ошибки в пределах от $-q/2$ до $+q/2$ равновероятны. АЦП, у которого имеются пропущенные коды, этому условию не удовлетворяет. Высококачественные АЦП, на вход которых подается сигнал, пересекающий множество уровней квантования, даст необходимую нам равномерную функцию плотности вероятности ошибки квантования.

3. Ошибки квантования не коррелированы с непрерывным входным сигналом. Если бы мы оцифровывали непрерывный синусоидальный сигнал, частота которого кратна частоте дискретизации, мы фактически оцифровывали бы одно и то же напряжение, и последовательность ошибок квантования не была бы случайной. Ошибка квантования была бы в этом случае предсказуемой и повторяющейся, а наша формула для дисперсии ошибки квантования оказалась бы недействительной. На практике для таких сложных сигналов, как музыка или речь с их богатым спектральным составом, эта проблема не возникает.

Чтобы завершить обсуждение АЦП, рассмотрим последний вопрос. В литературе читатель может встретить выражение

$$b_{eff} = (SNR - 1.76)/6.02\,. \qquad (12\text{-}16)$$

Это выражение используется производителями измерительных приборов, чтобы указать чувствительность приборов, используя параметр b_{eff}, известный как количество *эффективных битов*, или эффективное количество битов (ENOB) [3 - 8]. Выражение (12-16) — это просто (12-15), решенное относительно b. Изготовители измерительных приборов измеряют реальное отношение сигнал/шум их прибора, характеризующее его способность воспринимать входные сигналы на фоне внутреннего шума прибора. Имея это реальное отношение сигнал/шум, они используют (12-16) для вычисления значения b_{eff}. Чем больше b_{eff}, тем больше непрерывное напряжение, которое можно точно оцифровать, по отношению к внутренним шумам оборудования.

12.3.2. Переполнение данных

Следующее явление, связанное с конечной длиной слова, которое мы рассмотрим, называется *переполнением*. Переполнение — это то, что происходит, когда результат арифметической операции содержит слишком много битов, или разрядов, и не может быть представлен в регистрах, предназначенных для его хранения. Мы можем показать такую ситуацию достаточно легко, используя простой восьмиразрядный калькулятор, реализующий четыре функции. Сумма десятичного 9.9999999 и 1.0 равна 10.9999999, но на восьмиразрядном калькуляторе сумма равна 10.999999, т. к.

$$\begin{array}{r} 9.9999999 \\ +\underline{1.0000000} \\ 10.9999999\,. \end{array}$$

↑

этот разряд отброшен

Регистры, которые содержат результат арифметической операции и управляют дисплеем, могут хранить только восемь десятичных разрядов, так что младший разряд отбрасывается. Хотя ошибка в приведенном примере меньше одной миллионной, эффект переполнения может быть поражающим, когда мы работаем с большими числами. Если мы используем наш калькулятор для сложения 99999999 и 1, вместо правильного результата в 100 миллионов мы получим 1. Теперь это настоящая ошибка переполнения!

Покажем эффекты переполнения на примерах, которые теснее связаны с обсуждением форматов двоичных чисел. Прежде всего, сложение двух двоичных беззнаковых чисел так же просто, как и сложение двух десятичных чисел. Сумма 42 и 39 дает 81, или

```
                                          1 1 1      ← биты переносов
+42 в двоичном беззнаковом формате →      1 0 1 0 1 0
+39 в двоичном беззнаковом формате →    + 1 0 0 1 1 1
                                        ---------------
+81 в двоичном беззнаковом формате →    1 0 1 0 0 0 1
```

В этом случае два шестибитовых двоичных числа требуют 7 битов для представления результата. Общее правило гласит, что *сумма m b-битовых чисел может требовать для представления результата до* $[b + \log_2(m)]$ *битов*. Следовательно, для накопления суммы шестнадцати 20-битовых чисел потребуется 24-битовый регистр (аккумулятор), т. к. $20 + \log_2(16) = 24$. Сумма 256 восьмибитовых слов потребует аккумулятор длиной в $[8 + \log_2(256)]$, или 16 бит, для того, чтобы не было переполнений.

В предыдущем примере, если бы длина слова аккумулятора была равна 6 битам, возникла бы ошибка переполнения:

```
                                          1 1 1      ← биты переносов
+42 в двоичном беззнаковом формате →      1 0 1 0 1 0
+39 в двоичном беззнаковом формате →    + 1 0 0 1 1 1
                                        ---------------
+17 в двоичном беззнаковом формате →    1 0 1 0 0 0 1  ← ошибка
                                        ↑              переполнения
```

перенос из знакового разряда игнорируется, что приводит к ошибке переполнения

Здесь старший бит результата вызвал переполнение 6-битового аккумулятора, и возникла ошибка.

В отношении ошибок переполнения двоичный дополнительный формат обладает двумя интересными свойствами. Во-первых, при определенных условиях переполнение при суммировании двух чисел не приводит к ошибке. Во-вторых, при выполнении множества сложений промежуточные ошибки переполнения не сказываются на окончательной сумме, если результирующий модуль суммы b-битовых двоичных дополнительных чисел меньше 2^{b-1}. Проиллюстрируем эти свойства, рассмотрев четырехбитовый двоичный дополнительный формат на рисунке 12.5, двоичные значения которого взяты из таблицы 12.2.

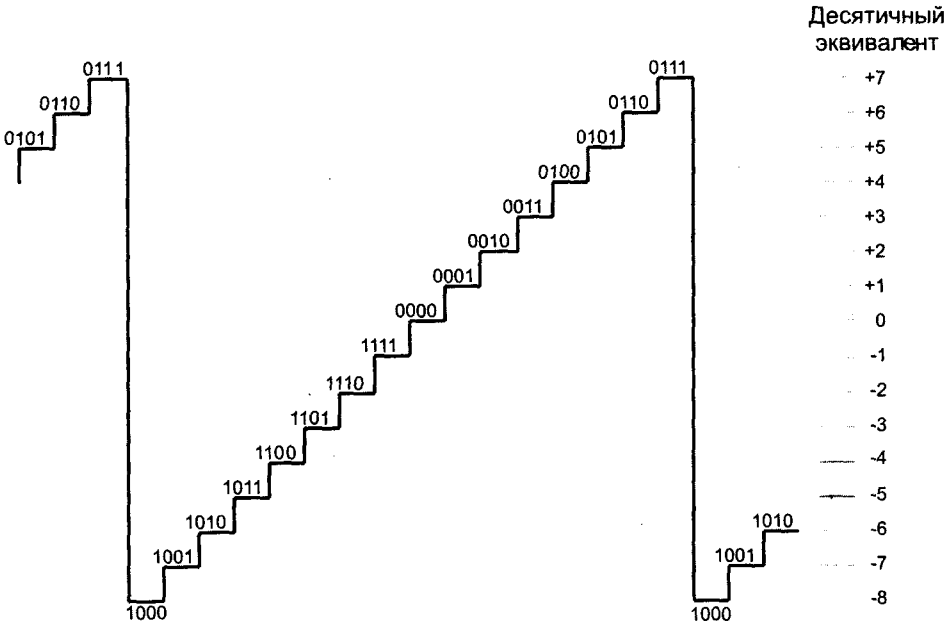


Рис. 12.5. Четырехбитовые двоичные дополнительные числа

Первое свойство двоичного дополнительного переполнения, которое иногда не дает ошибок, можно показать на следующих примерах:

	0 1 0	← биты переноса
–5 в двоичном дополнительном формате →	1 0 1 1	
+2 в двоичном дополнительном формате →	+ 0 0 1 0	
–3 в двоичном дополнительном формате →	0 1 1 0 1	← правильный отрицательный результат
	↑	

нулевой перенос из знакового бита

	1 1 0	← биты переноса
–2 в двоичном дополнительном формате→	1 1 1 0	
+6 в двоичном дополнительном формате→	+ 0 1 1 0	
+4 в двоичном дополнительном формате→	1 0 1 0 0	← правильный положительный результат
	↑	

перенос из знакового бита игнорируется, ошибка не возникает

Следующие примеры показывают, как иногда переполнение двоичных дополнительных чисел приводит к ошибкам:

	0 0 0	← биты переноса
–7 в двоичном дополнительном формате →	1 0 0 1	
–6 в двоичном дополнительном формате →	+ 1 0 1 0	
+3 в двоичном дополнительном формате →	1 0 0 1 1	← неверный положительный результат

↑ перенос из знакового бита игнорируется, что вызывает ошибку

	1 1 1	← биты переноса
+7 в двоичном дополнительном формате →	0 1 1 1	
+7 в двоичном дополнительном формате →	+ 0 1 1 1	
–2 в двоичном дополнительном формате →	0 1 1 1 0	← неверный отрицательный результат

↑ нулевой перенос из знакового бита

Правило, применяемое в случае сложения двоичных дополнительных чисел, гласит, что, *если бит переноса в знаковый разряд совпадает с битом переноса из знакового разряда, бит переполнения можно игнорировать без риска вызвать ошибку; если же бит переноса в знаковый бит отличается от бита переполнения, результат неверный.* Еще более интересно свойство двоичного дополнительного кода, состоящее в том, что последовательность b-битовых сложений может приводить к ошибкам переполнения промежуточных результатов, но конечная сумма оказывается правильной, если ее модуль меньше 2^{b-1}. Мы покажем это на следующем примере. Если мы складываем +6 с +7, а затем к сумме прибавляем –7, мы получим ошибку переполнения промежуточной суммы, но наша конечная сумма будет правильной:

+7 в двоичном дополнительном формате →	0 1 1 1	
+6 в двоичном дополнительном формате →	+ 0 1 1 0	
–3 в двоичном дополнительном формате →	1 1 0 1	← ошибка переполнения
–7 в двоичном дополнительном формате →	+ 1 0 0 1	
+6 в двоичном дополнительном формате →	1 0 1 1 0	← правильный положительный результат

↑ переполнение игнорируется без последствий

Модуль суммы трех четырехбитовых чисел был меньше 2^{4-1} (<8), следовательно, результат оказался правильным. Если мы сложим +6 и +7, а затем прибавим –5, мы получим переполнение промежуточной суммы, и окончательный результат будет неверным, потому что его модуль не меньше 8.

+7 в двоичном дополнительном формате →	0 1 1 1	
+6 в двоичном дополнительном формате →	+ 0 1 1 0	
−3 в двоичном дополнительном формате →	1 1 0 1	← ошибка переполнения
−5 в двоичном дополнительном формате →	+ 1 0 1 1	
+8 в двоичном дополнительном формате →	1 1 0 0 0	← правильный положительный результат

Другая ситуация, в которой проявляются проблемы переполнений — вычисление БПФ. На первых порах трудно себе представить, что умножение комплексных чисел на синусы и косинусы может привести к чрезмерному росту длины слова данных — особенно потому, что синусы и косинусы по модулю меньше единицы. Мы можем показать, как растет длина слова данных, рассмотрев бабочку БПФ с прореживанием по времени, показанную на рисунке 4.14(с), которую мы повторяем на рисунке 12.6, и пройдя через некоторые алгебраические преобразования. Выражение для выхода x' этой бабочки, согласно (4-26), имеет вид

$$x' = x + W_N^k \bullet y. \tag{12-17}$$

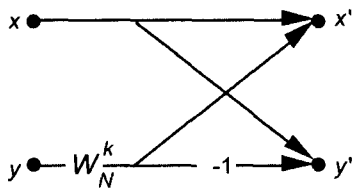


Рис. 12.6. Бабочка БПФ с прореживанием по времени

Разбив входы бабочки x и y на действительные и мнимые части и вспомнив, что $W_N^k = e^{-j2\pi k/N}$, мы можем записать (12-17) как

$$x' = x_{real} + jx_{imag} + (e^{-j2\pi k/N}) \bullet (y_{real} + jy_{imag}). \tag{12-18}$$

Если мы через α обозначим угол поворачивающего множителя $2\pi k/N$ и вспомним, что $e^{-j\alpha} = \cos(\alpha) - j\sin(\alpha)$, мы можем записать (12-18) в более простом виде

$$x' = x_{real} + jx_{imag} + [\cos(\alpha) - j\sin(\alpha)] \bullet (y_{real} + jy_{imag}) =$$

$$= x_{real} + \cos(\alpha)y_{real} + \sin(\alpha)y_{imag} + j[x_{imag} + \cos(\alpha)y_{imag} - \sin(\alpha)y_{real}]. \tag{12-19}$$

Рассмотрим, например, только действительную часть x'_{real} выхода x'. Она содержит три члена

$$x'_{real} = x_{real} + \cos(\alpha)y_{real} + \sin(\alpha)y_{imag}. \tag{12-20}$$

Если x_{real}, y_{real} и y_{imag} имеют на входе в бабочку единичные значения, а угол поворачивающего множителя оказывается равным $\pi/4 = 45°$, то x'_{real} может оказаться больше 2, т. к.

$$x'_{real} = 1 + \cos(45°) \bullet 1 + \sin(45°) \bullet 1 = 1 + 0.707 + 0.707 = 2.414. \tag{12-21}$$

Таким образом, мы видим, что действительная часть комплексного числа может более чем удвоиться при выполнении одного каскада БПФ. Мнимая часть комплексного числа тоже может на одном каскаде БПФ более чем удвоиться. Без решения этой проблемы, связанной с увеличением длины слова, переполнения могут сделать алгоритм практически неприменимым.

Проблема переполнений может решаться одним из двух способов — с помощью усечения или округления, каждый из которых, как мы увидим, вносит свои ошибки квантования.

12.3.3. Усечение

Усечение представляет собой процедуру, в результате которой значение данных представляется наибольшим уровнем квантования, который не превосходит это значение. Если уровни квантования обозначены целыми числами, например, действительное значение 1.2 будет усечено до 1. Пример усечения до целых значений приведен на рисунке 12.7 (a), где все значения x в диапазоне $0 \le x < 1$ приравниваются к 0, значения x в диапазоне $1 \le x < 2$ приравниваются к 1, значения x в диапазоне $2 \le x < 3$ приравниваются к 2 и так далее.

Как и в случае ошибок квантования АЦП, мы можем для описания ошибок, вносимых усечением, прибегнуть к понятию функции плотности вероятности. Функция плотности вероятности ошибок усечения в терминах шага квантования показана на рисунке 12.7 (b). На рисунке 12.7 (a) шаг квантования q равен 1, следовательно, в этом случае мы можем иметь ошибки квантования, достигающие −1. Используя результаты из (D-11) и (D-12) приложения D, мы можем выразить среднее и дисперсию для равномерной функции плотности вероятности как

$$\mu_{усечения} = -q/2 \qquad (12\text{-}22)$$

и

$$\sigma^2_{усечения} = q^2/12\,. \qquad (12\text{-}23)$$

В некотором смысле ошибка усечения — это цена, которую мы платим за привилегию использования целочисленной двоичной арифметики. Одно из ее проявлений — ошибка, вносимая при использовании усечения в процессе деления на целую степень двойки. Мы часто говорим, что быстрый способ деления двоичного числа на 2^T состоит в сдвиге двоичного слова на T битов вправо, т. е. мы усекаем значение данных (но не слово данных), отсекая после сдвига правые T битов. Допустим, например, что мы имеем значение 31, представленное пятибитовым двоичным числом 11111_2, и мы хотим разделить его на 16, используя сдвиг битов на $T = 4$ позиции вправо и игнорируя (отсекая) сдвинутые биты. После сдвига вправо и усечения мы получим двоичное частное $31/16 = 00001_2$. Здесь мы видим значимость проблемы, потому что быстрое деление дало нам в результате единицу вместо правильного результата $31/16 = 1.9375$. Ошибка деления с усечением составляет здесь почти 50 % правильного ответа. Если бы исходное делимое было равно 63 и представлено шестибитовым двоичным числом 111111_2, то деление его на 16 путем сдвига вправо на четыре бита дало бы нам двоичный результат 000011_2, или 3_{10}. Правильный результат, конечно же, равен $63/16 = 3.9375$. В этом случае относительная ошибка составляет $0.9375/3.9375$, или примерно 23.8 %. Следовательно, чем больше делимое, тем меньше относительная ошибка усечения.

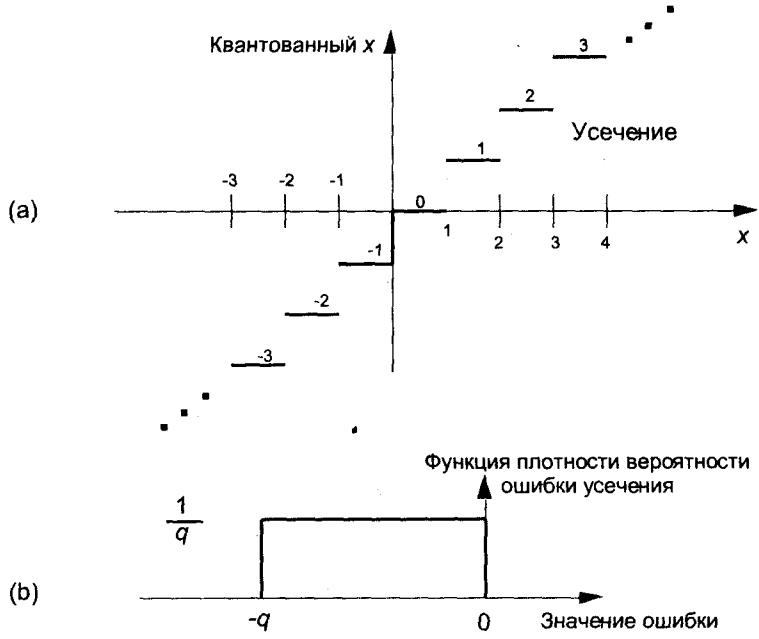


Рис. 12.7. Усечение: (a) нелинейность квантования; (b) функция плотности вероятности ошибки

Если мы займемся изучением этого вида ошибок, то обнаружим, что результирующая ошибка усечения зависит от трех факторов: количества сдвигаемых и усекаемых битов, значений усекаемых битов (т. е. были эти биты равны нулю или единице) и модуля двоичного числа, оставшегося после усечения. Хотя полный анализ ошибок усечения выходит за рамки этой книги, мы можем оценить максимальную ошибку, которая может возникнуть в нашей схеме деления с усечением при использовании двоичной целочисленной арифметики. Наихудшей будет ситуация, когда все усекаемые биты равны единице. Для целых двоичных чисел значение комбинации из T единичных бит справа от запятой равно $1 - 2^{-T}$. Если полученное частное N мало, значение этих усеченных единиц увеличивает ошибку. Мы можем нормировать максимальную ошибку деления, используя относительную меру ошибки. Таким образом, максимальная относительная ошибка двоичного частного N после усечения перед T-битовым сдвигом вправо в случае, когда все отбрасываемые биты равны единице, равна

$$\%\,\text{ошибка усечения}_{max} = \tag{12-24}$$

$$= 100 \bullet (\text{Правильное частное} - \text{Частное после усечения})/(\text{Правильное частное}) =$$

$$= 100 \bullet (\text{Ошибка усечения})/(\text{Правильное частное}) = 100 \bullet (1 - 2^{-T})/[N + (1 - 2^{-T})]\,.$$

Чтобы понять значение выражения (12-24), подставим в него некоторые числа. В первом примере, для деления 31/16, где $T = 4$ и частное $N = 1$, относительная ошибка составляет

$$100 \bullet (1 - 0.0625)/(1 + 1 - 0.0625) = 100 \bullet (0.9375/1.9375) = 48.4\,\%$$

Построив график по (12-24) для трех разных значений сдвига как функцию частного N после усечения, получаем рисунок 12.8.

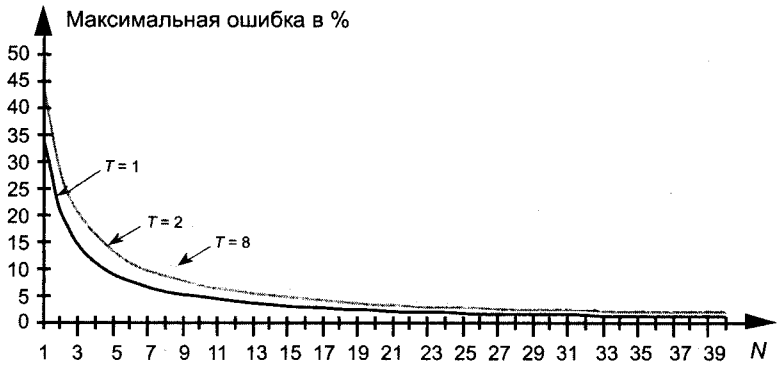


Рис. 12.8. Максимальная ошибка при использовании сдвига и усечения для реализации деления на 2^T. $T = 1$ означает деление на 2; $T=2$ соответствует делению на 4, а $T = 8$ — делению на 256

Таким образом, чтобы минимизировать этот тип ошибок деления, нам нужно, чтобы значение частного N было как можно больше. Помните, что (12-24) описывает наихудший случай, когда все усекаемые биты равны единице. С другой стороны, если бы все отбрасываемые биты оказались равными нулю, ошибка была бы равной нулю. На практике ошибки будут где-то между этими крайними значениями. Практический пример того, как деление с усечением может порождать серьезные численные ошибки, приводится в [9].

12.3.4. Округление данных

Округление — другой способ борьбы с ошибками переполнения, когда значение данных представляется ближайшим уровнем квантования, или округляется до него. Если уровни квантования представлены целыми числами, число 1.2 в результате квантования даст 1, а квантование числа 1.6 даст результат, равный 2. Это показано на рисунке 12.9 (a), где все значения x в диапазоне $-0.5 \le x < 0.5$ в результате округления превращаются в 0, значения x в диапазоне $0.5 \le x < 1.5$ превращаются в 1, значения x в диапазоне $1.5 \le x < 2.5$ дают 2, и т. д.

Функция плотности вероятности ошибки, вносимой при округлении, показана на рисунке 12.9 (b). На рисунке 12.9 (a) уровень квантования q равен 1, так что в этом случае мы можем иметь модуль ошибки не более $q/2$, или 1/2. И снова, используя (D-11) и (D-12) из приложения D, мы можем выразить среднее и дисперсию равномерной функции плотности вероятности как

$$\mu_{округления} = 0, \tag{12-25}$$

и

$$\sigma^2_{округления} = q^2/12. \tag{12-26}$$

Поскольку средняя и максимальная ошибки, вызванные округлением, меньше соответствующих ошибок усечения, на практике обычно отдают предпочтение округлению, чтобы минимизировать ошибки переполнения.

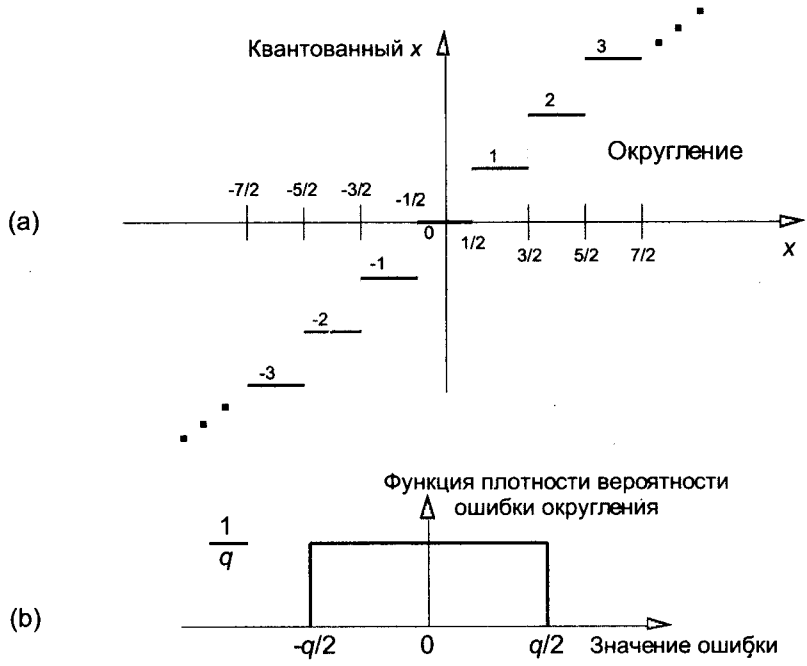


Рис. 12.9. Округление: (a) нелинейная характеристика квантования; (b) функция плотности вероятности ошибки

В цифровой обработке сигналов статистический анализ влияния ошибки квантования обычно очень сложен. Аналитические результаты зависят от типов ошибок квантования, амплитуды квантуемого сигнала, от используемого формата данных и от того, какую из множества структур БПФ или цифровых фильтров мы используем. Как бы то ни было, эксперты цифровой обработки сигналов разработали упрощенные модели ошибки, анализ которых оказался полезным. Обсуждение этих методов анализа и их результатов выходит за рамки этой вводной книги, но для активного читателя найдется множество дополнительных источников информации [10-18]. (В работе [11] приведен обширный библиографический список по теме анализа ошибок квантования.)

Проблемы переполнения при использовании двоичных форматов с фиксированной запятой, последствия которых мы пытаемся облегчить с помощью усечения и округления, возникают снова и снова, потому что многочисленные алгоритмы цифровой обработки сигналов включают огромное количество сложений и умножений. Это препятствие, особенно при аппаратурной реализации цифровых фильтров и БПФ, разработчикам удается обойти с помощью использования двоичных форматов с плавающей запятой.

12.4. Двоичные форматы с плавающей запятой

Двоичные форматы с плавающей запятой позволяют нам преодолеть большинство ограничений точности и динамического диапазона, накладываемых двоичными форматами с фиксированной запятой, особенно при уменьшении вредоносных эффектов переполнения [19]. В форматах с плавающей запятой слово данных разбивается на две части: мантиссу m и порядок e. Используя эти части, значение двоичного числа с плавающей запятой n можно вычислить как

$$n = m \bullet 2^{e}. \tag{12-27}$$

т. е. значение числа представляет собой произведение мантиссы на двойку, возведенную в степень, равную порядку. (*Мантисса* — не очень удачный термин, поскольку здесь ее смысл очень сильно отличается от смысла мантиссы логарифмов. Изначально мантиссой называли дробную часть логарифма[1]. Однако вследствие распространенности этого термина в литературе мы будем и дальше использовать его.) Конечно, и мантисса, и порядок в (12-27) могут быть либо положительными, либо отрицательными числами.

Предположим, что b-битовое число с плавающей запятой использует b_e битов для порядка в формате с фиксированной запятой и со знаком и b_m битов для мантиссы в том же формате. Чем больше количество битов b_e, тем больше динамический диапазон числа. Чем больше b_m, тем выше разрешение, или точность, числа. Ранние компьютерные модели, использованные разработчиками b-битовых форматов с плавающей запятой, показали, что компромисс достигается при $b_e \approx b/4$ и $b_m \approx 3b/4$. Мы увидим, что для типового 32-битового формата с плавающей запятой, используемого в наше время, $b_e \approx 8$ битов и $b_m \approx 24$ бита. Чтобы использовать полный динамический диапазон мантиссы, большинство реализаций чисел с плавающей запятой рассматривают мантиссу как дробное двоичное число с фиксированной запятой, сдвигают ее вправо или влево так, чтобы старший бит оказался равным единице и соответственно корректируют порядок. Это соглашение называют *нормализацией*. В нормализованном числе мантиссу обычно называют *дробной частью*. Например, десятичное число 3.6875_{10} можно представить в виде двоичного дробного числа 11.1011_2. Если мы используем двухбитовую экспоненту и шестибитовую мантиссу, мы можем также представить 11.1011_2 посредством сдвига вправо на два бита и установки порядка, равного 2, в виде

порядок дробная часть

$$11.1011_2 = \boxed{10 \mid \diamond 111011} \tag{12-28}$$

двоичная запятая

[1] Например, десятичный логарифм числа 256 равен 2.4082. Двойка слева от десятичной запятой называется характеристикой логарифма, а разряды 4082 называются мантиссой. Двойка в 2.4082 не означает умножение .4082 на 10^2. Она значит, что мы берем антилогарифм числа .4082, получаем 2.56, затем умножаем это число на 10^2, получая 256.

Это число с плавающей запятой можно преобразовать обратно в десятичное следующим образом

$$[_{\Diamond}(1\bullet 2^{-1}) + (1\bullet 2^{-2}) + (1\bullet 2^{-3}) + (0\bullet 2^{-4}) + (1\bullet 2^{-5}) + (1\bullet 2^{-6})]\bullet 2^{2} =$$

$$=[_{\Diamond}(1\bullet 1/2) + (1\bullet 1/4) + (1\bullet 1/8) + (0\bullet 1/16) + (1\bullet 1/32) + (1\bullet 1/64)]\bullet 2^{2}=$$

$$=[0.5 + 0.25 + 0.125 + 0.0625 + 0.03125 + 0.015625]\bullet 2^{2}=$$

$$= 0.921875 \bullet 4 = 3.6875 . \qquad (12\text{-}29)$$

Приобретя некоторый опыт нормализации чисел с плавающей запятой, люди скоро осознали, что хранить старший бит, который всегда равен единице, расточительно. Этот избыточный бит занимает позицию одного бита во всех словах данных и не приносит никакой пользы. Соответственно в практических реализациях форматов с плавающей запятой этот бит отбрасывается, а его присутствие подразумевается, при этом количество полезных битов дробной части увеличивается на единицу. Вот почему в описаниях некоторых форматов с плавающей запятой используется термин *скрытый бит*. Одновременно с повышением точности представления мантиссы эта схема использует меньший объем памяти, потому что скрытый бит просто учитывается в аппаратуре арифметического устройства. При использовании скрытого бита дробная часть в (12-28) сдвигается влево на одну позицию и приобретает вид

порядок дробная часть

$$11.1011_2 = \boxed{10 \mid {}_{\Diamond}110110} \qquad (12\text{-}30)$$

двоичная запятая

Вспомним теперь, что порядок и мантисса представляют собой числа со знаком и с фиксированной запятой, а мы обсуждали несколько форматов представления таких чисел, а именно модуль со знаком, двоичный дополнительный и двоичный со смещением. Все три перечисленных формата используются в стандартных форматах с плавающей запятой. Наиболее часто используемые форматы с плавающей запятой, использующие 32-битовые слова, перечислены в таблице 12.3.

Формат IEEE P754 пользуется наибольшей популярностью, т. к. многие производители интегральный схем реализуют именно его [8, 20-22]. Его порядок e представляется в двоичном формате со смещением (смещенный порядок), а дробная часть представляет собой двоичное число в формате модуля со знаком и со скрытым битом, значение которого предполагается равным 2^0. Десятичное представление нормализованного числа с плавающей запятой в формате IEEE P754 вычисляется как

$$значение_{IEEE} = (-1)^{s} \bullet 1_{\Diamond} f \bullet 2^{e-127} \qquad (12\text{-}31)$$

скрытый бит

Формат чисел с плавающей запятой фирмы IBM несколько отличается от других форматов, потому что в качестве основания он использует 16, а не 2. Порядок представляется в двоичном коде со смещением, а дробная часть — в виде модуля со знаком без скрытого бита. Десятичное значение нормализованного числа в формате IBM вычисляется как

$$значение_{IBM} = (-1)^s \bullet 0_{\Diamond} f \bullet 16^{e-64}. \qquad (12\text{-}32)$$

Таблица 12.3. Форматы чисел с плавающей запятой

Формат стандарта IEEE P754

Бит	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	...	2	1	0
	S	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	...	2^{-21}	2^{-22}	2^{-23}
Знак (s)	←Порядок (e)→									←Дробная часть (f)→						

Формат IBM

Бит	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	...	2	1	0
	S	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	...	2^{-22}	2^{-23}	2^{-24}
Знак (s)	←Порядок (e)→								←Дробная часть (f)→							

Формат DEC (Digital Equipment Corp.)

Бит	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	...	2	1	0
	S	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	...	2^{-22}	2^{-23}	2^{-24}
Знак (s)	←Порядок (e)→									←Дробная часть (f)→						

Формат MIL–STD 1750A

Бит	31	30	29	...	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	2^0	2^{-1}	2^{-2}	...	2^{-20}	2^{-21}	2^{-22}	2^{-23}	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	←Дробная часть (f)→									←Порядок (e)→						

Формат фирмы DEC использует двоичный порядок со смещением и дробную часть в виде модуля со знаком и скрытым битом, равным 2^{-1}. Десятичное значение нормализованного числа в формате DEC вычисляет следующим образом

$$значение_{DEC} = (-1)^s \bullet 0_{\Diamond} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{скрытый бит}}}{1} f \bullet 2^{e-128} \qquad (12\text{-}33)$$

MIL-STD 1750A представляет собой стандарт чисел с плавающей запятой военно-воздушных сил США. В этом формате порядок представляется в виде двоичного дополнительного кода, расположенного в восьми младших разрядах слова. Дробная часть в этом формате также представляется двоичным дополнительным

кодом (без скрытого бита), по этой причине в таблице 12.3 знаковый бит специально не отмечен. Десятичное значение числа в формате MIL-STD 1750A вычисляется как

$$значение_{1750A} = f \cdot 2^{e}. \qquad (12\text{-}34)$$

Обратите внимание на то, что все слова в таблице 12.3 содержат 32 бита. Это не случайно. Использование 32-битовых слов облегчает реализацию этих форматов в 8-, 16- и 32-битовых процессорах. Обеспечивая преимущества в обработке данных, эти форматы, с другой стороны, требуют достаточно большого объема сравнений и ветвлений для правильной реализации арифметических операций. В работе [23] приводятся блок-схемы алгоритмов, показывающие, какие действия необходимо выполнить при сложении или умножении чисел с плавающей запятой.

12.4.1. Динамический диапазон чисел с плавающей запятой

Определение динамического диапазона для произвольного формата с плавающей запятой требует значительных усилий. Мы начнем с повторения выражения для динамического диапазона заданной системы чисел (12-6):

$$Динамический\ диапазон\ дБ =$$

$$= 20 \cdot \log_{10}[(наибольшее\ возможное\ значение\ слова)/$$

$$/(наименьшее\ возможное\ значение\ слова)]\,. \qquad (12\text{-}35)$$

Когда мы пытаемся определить наибольшее и наименьшее возможные значения слова для заданного формата чисел с плавающей запятой, мы быстро понимаем, что они зависят от таких факторов, как

- позиция двоичной запятой;
- используется скрытый бит или нет (если используется, то важна его позиция относительно двоичной запятой);
- значение основания формата чисел с плавающей запятой;
- формат представления двоичных чисел со знаком, используемый для порядка и дробной части (например, вспомните таблицу 12.2, согласно которой двоичный дополнительный формат позволяет представлять большие по модулю отрицательные числа, чем формат модуля со знаком);
- как обрабатываются ненормализованные мантиссы, если таковые возможны (ненормализованные числа — это ненулевые числа, которые меньше минимального нормализованного, но все еще могут быть представлены, когда и порядок, и скрытый бит равны нулю);
- как обрабатываются порядки, когда их двоичное представление содержит только единицы или только нули (например, формат IEEE P754 интерпретирует число, порядок которого в двоичном коде состоит только из единиц, а дробная часть отлична от нуля, как недопустимое число, тогда как в формате DEC число, знаковый бит которого равен единице, а порядок — нулю, является специальной инструкцией, а не допустимым числом).

Попытка вывести выражение для динамического диапазона с учетом всех возможных комбинаций перечисленных факторов вряд ли привела бы к полезному результату. Мы можем вывести приблизительное выражение для динамического диапазона, которое часто используется на практике [8, 22, 24].

Предположим следующее: порядок представлен b_e-битовым двоичным числом со смещением, дробная часть представляет собой нормализованное число в виде модуля со знаком, имеющее знаковый бит и b_m значащих битов, а скрытый бит располагается слева от двоичной запятой. Наше гипотетическое слово имеет следующую форму:

Бит		b_m+b_e-1	b_m+b_e-2	...	b_m+2	b_m	b_m-1	b_m-2	...	1	0
	S	2^{b_e-1}	2^{b_e-2}	...	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	...	2^{-b_m+1}	2^{-b_m}
Знак (s)		← Порядок (e) →					← Дробная часть (f) →				

Сначала мы определим, каким может быть максимальное значение нашего слова с плавающей запятой. Наибольшее значение дробной части соответствует случаю, когда скрытый бит и все остальные b_m битов дробной части равны единице. При этом дробная часть равна $f = [1+(1-2^{-b_m})]$. Первая единица в этом выражении представляет скрытый бит слева от запятой, а значение в круглых скобках — значение дробной части, все b_m битов которой равны единице. Наибольшее положительное значение мы можем получить, когда b_e — битовый порядок в двоичном формате со смещением равен $2^{(2^{b_e-1}-1)}$. Наконец, наибольшее значение, которое может быть представлено в этом формате с плавающей запятой, равно наибольшей дробной части, умноженной на 2 в степени, равной наибольшему порядку, или

$$\textit{наибольшее возможное значение слова} = [1 + (1 - 2^{-b_m})] \bullet 2^{(2^{b_e-1}-1)}. \qquad (12\text{-}36)$$

Наименьшее значение, которое мы можем представить словом с плавающей запятой, равно единице в скрытом бите, умноженной на два в наиболее отрицательной степени, или

$$\textit{наименьшее возможное значение слова} = 1 \bullet 2^{-(2^{b_e-1})}. \qquad (12\text{-}37)$$

Подставляя (12-36) и (12-37) в (12-35), получаем

$$\textit{динамический диапазон}_{дБ} = \qquad (12\text{-}38)$$
$$= 20 \bullet \log_{10} \{ [1 + (1 - 2^{-b_m})] \bullet 2^{(2^{b_e-1}-1)} / [1 \bullet 2^{-(2^{b_e-1})}] \}.$$

И здесь мы можем использовать приближение — когда b_m велико, скажем, превышает семь, значение 2^{-b_m} приближается к нулю; т. е. при увеличении b_m значение дроби, состоящей из единиц, $(1 - 2^{-b_m})$, приближается к 1. При этом (12-38) превращается в

$$\textit{динамический диапазон}_{дБ} \approx \qquad (12\text{-}39)$$
$$\approx 20 \bullet \log_{10} \{ [1 + 1] \bullet 2^{(2^{b_e-1}-1)} / [1 \bullet 2^{-(2^{b_e-1})}] \} =$$
$$= 20 \bullet \log_{10} \{ 2 \bullet 2^{(2^{b_e-1}-1)} / [2^{-(2^{b_e-1})}] \} = 20 \bullet \log_{10} \{ 2^{(2^{b_e-1})} / [2^{-(2^{b_e-1})}] \} =$$
$$= 20 \bullet \log_{10} [2 \bullet 2^{(2^{b_e-1})}] = 20 \bullet \log_{10} [2^{(2^{b_e})}] = 6.02 \bullet 2^{b_e}.$$

Используя (12-39), мы можем оценить, например, динамический диапазон чисел с плавающей запятой в коротком формате IEEE P754, который содержит восемь битов порядка:

$$\text{динамический диапазон}_{IEEE\,P754} = 6.02 \bullet 2^8 = 1529\ \text{дБ}. \qquad (12\text{-}40)$$

Мы продемонстрировали только самые главные свойства наиболее употребительных форматов чисел с плавающей запятой, но в этой области есть еще множество деталей, требующих изучения. Для заинтересованного читателя ссылки, приведенные в конце этой главы, могут послужить хорошей отправной точкой.

12.5. Двоичный формат с поблочно плавающей запятой

Союз двоичных чисел с фиксированной и с плавающей запятой известен как формат с поблочно плавающей запятой. Эта схема используется, особенно в специализированных процессорах БПФ, когда обрабатываются большие массивы, или блоки, данных. При использовании поблочно плавающей запятой сначала анализируются все слова в блоке данных, затем нормализуется мантисса наибольшего слова и вырабатывается правильный порядок. Эта нормализация позволяет использовать весь динамический диапазон мантиссы. Затем мантиссы остальных слов сдвигаются так, что они могут использовать порядок наибольшего слова. Таким образом, все слова данных в блоке используют один и тот же порядок, что позволяет сэкономить память.

В реализациях БПФ арифметические операции выполняются над блочно нормализованными данным, как над числами с фиксированной запятой. Но когда в результате сложения возникает ситуация переполнения, все слова данных сдвигаются на один бит вправо (делятся на два), а порядок увеличивается на единицу. Как, возможно, читатель уже догадался, форматы с поблочно плавающей запятой имеют расширенный динамический диапазон и позволяют избежать проблем переполнения, свойственных форматам с фиксированной запятой, но не достигают характеристик, характерных для форматов с истинно плавающей запятой [8,25,26].

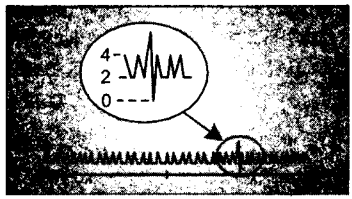
Библиография

1. Neugebauer, O. «The History of Ancient Astronomy», *Journal of Near Eastern Studies*, Vol. 4, 1945, p. 12.
2. Knuth, D. E. *The Art of Computer Programming: Seminumerical Methods*, том 2, раздел 4.1, Addison-Wesley Publishing, Reading, Massachusetts, 1981, p. 179 (Кнут Д. «Искусство программирования для ЭВМ» М., Мир 1977; www://lib.ru).
3. Kester, W. «Peripheral Circuits Can Make or Break Sampling-ADC Systems», *EDN Magazine*, October 1, 1992.
4. Grove, M. «Measuring Frequency Response and Effective Bits Using Digital Signal Processing Techniques», *Hewlett-Packard Journal*, February 1992.
5. Tektronix. «Effective Bits Testing Evaluates Dynamic Range Performance of Digitizing Instruments», *Tektronix Application Note*, No. 45W-7527, December 1989.
6. Ushani, R. «Subranging ADCs Operate at High Speed with High Resolution», *EDN Magazine*, April 11, 1991.

7. Demler, M. «Time-Domain Techniques Enhance Testing of High-Speed ADCs», *EDN Magazine*, March 30, 1992.
8. Hilton, H. «A 10-MHz Analog-to-Digital Converter with 110-dB Linearity», *Hewlett-Packard Journal*, October 1993.
9. Lyons, R. G. «Providing Software Flexibility for Optical Processor Noise Analysis», *Computer Design*, July 1978, p. 95.
10. Knuth, D. E. *The Art of Computer Programming: Seminumerical Methods*, том 2, раздел 4.2, Addison-Wesley Publishing, Reading, Massachusetts, 1981, p. 198 (Кнут Д. «Искусство программирования для ЭВМ» М., Мир 1977; www://lib.ru).
11. Rabiner, L. R., and Gold, B. *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Chapter 5, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, p. 353 (Рабинер Л., Голд Б. «Теория и применение цифровой обработки сигналов», М.: Мир, 1978; http://geogin.narod.ru/arhiv/dsp/dsp3.htm. На сайте http://geogin.narod.ru/readall.htm подборка книг по ЦОС.).
12. Jackson, L. B. «An Analysis of Limit Cycles Due to Multiplicative Rounding in Recursive Digital Filters», Proc. 7th Allerton Conf Circuit System Theory, 1969, pp. 69-78.
13. Kan, E. P. F, and Aggarwal, J. K. «Error Analysis of Digital Filters Employing Floating Point Arithmetic», *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, November 1971, pp. 678-686.
14. Crochiere, R. E. «Digital Ladder Structures and Coefficient Sensitivity», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-20, October 1972, pp. 240-246.
15. Jackson, L. B. «On the Interaction of Roundoff Noise and Dynamic Range in Digital Filters», *Bell System Technical Journal*, Vol. 49, February 1970, pp. 159-184.
16. Roberts, R. A., and Mullis, C. T. *Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing, Reading, Massachusetts, 1987, p. 277.
17. Jackson, L. B. «Roundoff Noise Analysis for Fixed-Point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, June 1970, pp.107-122.
18. Oppenheim, A. V., and Schafer, R. W. *Discrete-Time Signal Processing*, Sections 6.8 and 9.8, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989, p. 335 (Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. «Цифровая обработка сигналов», М.: Связь, 1979, доступен по адресу dsp-book.narod.ru/OpShDSP.djvu).
19. Larimer, J., and D. Chen. «Fixed or Floating? A Pointed Question in DSPs», *EDN Magazine*, August 3, 1995.
20. Ashton, C. «Floating Point Math Handles Iterative and Recursive Algorithms», *EDN Magazine*, January 9, 1986.
21. Windsor, B., and Wilson, J. «Arithmetic Duo Excels in Computing Floating Point Products», *Electronic Design*, May 17, 1984.
22. Windsor, W. A. «IEEE Floating Point Chips Implement DSP Architectures», *Computer Design*, January 1985.
23. Texas Instruments Inc., *Digital Signal Processing Applications with the TMS320 Family: Theory, Algorithms, and Implementations*, SPRA012A, Texas Instruments, Dallas, TX, 1986.
24. Strauss, W. I. «Integer or Floating Point? Making the Choice», *Computer Design Magazine*, April 1, 1990, p. 85.
25. Oppenheim and Weinstein. «Effects of Finite Register Length in Digital Filtering and the Fast Fourier Transform», *Proc. IEEE*, August 1972, pp. 957-976.
26. Woods, R. E. «Transform-Based Processing: »How Much Precision Is Needed?» *ESD: The Electronic System Design Magazine*, February 1987.

Глава 13

Маленькие хитрости цифровой обработки сигналов



Изучая литературу, посвященную цифровой обработке сигналов, мы иногда встречаем некоторые оригинальные приемы, которые используются профессионалами, чтобы повысить эффективность алгоритмов. Эти приемы представляют собой яркие примеры философии, выражаемой девизом «не работай много, работай с умом», и их изучение даст нам более глубокое понимание математических тонкостей ЦОС. В этой главе мы предлагаем вам коллекцию таких приемов, не заботясь о какой-то их сортировке, и подробно исследуем некоторые из них, чтобы упрочить знания, полученные при изучении предыдущих глав.

13.1. Перенос частоты без умножения

Перенос частоты часто используется в алгоритмах цифровой обработки сигналов. Существуют простые схемы переноса частоты на 1/2 и 1/4 частоты дискретизации. Давайте рассмотрим схемы смесителей.

13.1.1. Перенос частоты на $f_s/2$

Сначала рассмотрим метод переноса частоты на $f_s/2$ простым умножением на последовательность $(-1)^n = 1, -1, 1, -1, \ldots$ и т. д., где f_s — частота дискретизации в Гц. Этот процесс может поначалу показаться несколько загадочным, но его можно объяснить очень просто, если мы рассмотри рисунок 13.1 (а). Можно видеть, что умножение исходной последовательности на опорную последовательность $(-1)^n$

эквивалентно умножению на дискретизированную косинусоиду, на которой точками отмечены отсчеты опорной последовательности (рисунок 13.1 (a)). Поскольку косинусоида опорной последовательности повторяется каждые два отсчета, ее частота равна $f_s/2$. На рисунках 13.1 (b) и (c) показаны модуль и аргумент дискретного преобразования Фурье последовательности $(-1)^n$ длиной в 32 отсчета. При этом правая часть этих рисунков представляет отрицательные частоты.

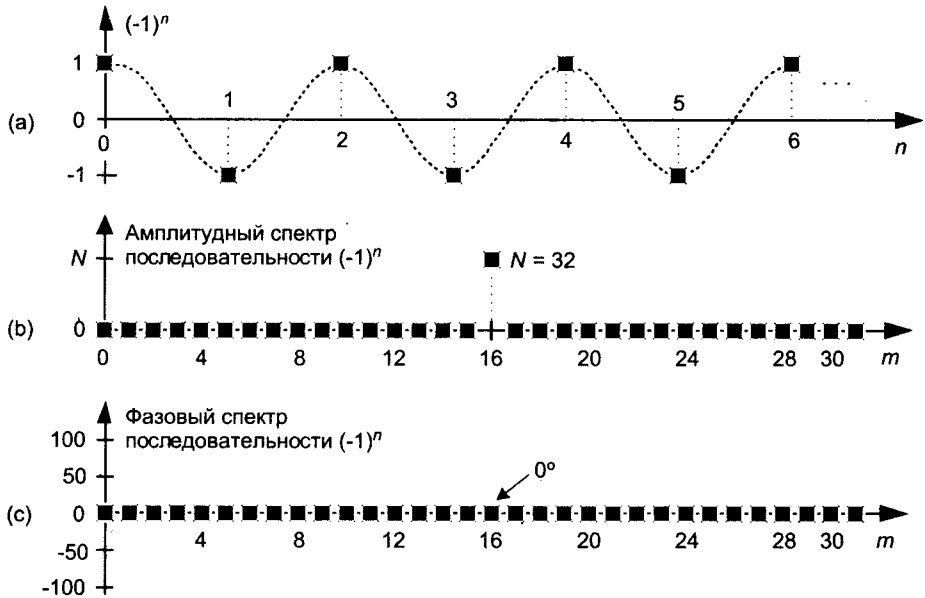


Рис. 13.1. Опорная последовательность $(-1)^n = 1, -1, 1, -1$ и т. д.: (a) во временной области; (b) амплитудный спектр для 32 отсчетов; (c) фазовый спектр

Рассмотрим процесс смешивания с последовательностью $(-1)^n$ на примере. Рассмотрим действительную последовательность $x(n)$, содержащую 32 отсчета суммы трех синусоид, амплитудный и фазовый спектры которой, $|X(m)|$ и $\phi(m)$ соответственно, показаны на рисунках 13.2 (a) и (b). Если мы умножим эту последовательность на последовательность $(-1)^n$, результат, последовательность $x_{1,-1}(n)$, будет иметь амплитудный и фазовый спектры, которые показаны на рисунках 13.2 (c) и (d). Умножение сигнала на $(-1)^n$ сдвигает половину его спектральной энергии вверх по частоте на $f_S/2$ и половину его спектральной энергии вниз по частоте на $-f_S/2$. Заметьте, что при таком нециклическом изображении частотной оси, если мы будем продвигаться вверх или вниз по частоте, то в конечных точках будет происходить заворот.

Здесь скрыта грандиозная возможность для новичка вычислить свертку спектра последовательности $(-1)^n$ на рисунке 13.1 со спектром $X(m)$, чтобы получить спектр сдвинутого по частоте сигнала $X_{1,-1}(m)$. Попробуйте, пожалуйста, — это упражнение поможет вам понять природу дискретных последовательностей и их соотношение во временной и частотной областях в соответствии с теоремой о свертке.

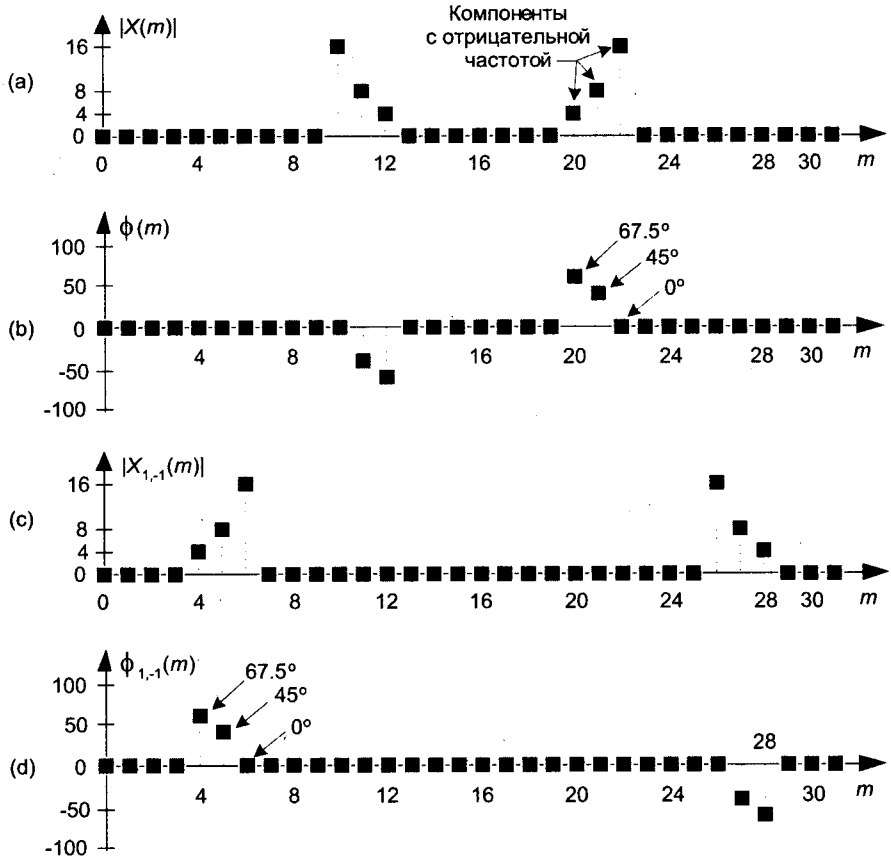


Рис. 13.2. Сигнал и его перенос по частоте на $f_s/2$: (a) исходный амплитудный спектр сигнала; (b) исходный фазовый спектр; (c) амплитудный спектр преобразованного сигнала; (d) фазовый спектр преобразованного сигнала

Обратите внимание, мы не выполнили ни одного явного умножения — идея в том и состоит, чтобы обойтись без умножений — мы просто изменили знак каждого второго отсчета сигнала на противоположный. Амплитудный спектр $X_{1,-1}(m)$ на рисунке 13.2(c) можно рассматривать и так: умножение на опорную последовательность $(-1)^n$ приводит к зеркальному отображению положительных частот $X(m)$ [от $X(0)$ до $X(16)$] относительно частоты $f_s/4$ Гц и зеркально отображает отрицательные частоты $X(m)$ [от $X(17)$ до $X(31)$] относительно $-f_s/4$ Гц. Этот процесс можно использовать для инвертирования спектра действительных сигналов при полосовой дискретизации, как показано в разделе 2.4. Кстати, в литературе по ЦОС некоторые достаточно грамотные авторы могут представлять последовательность $(-1)^n$ эквивалентными выражениями вида

$$(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{j\pi n}. \qquad (13\text{-}1)$$

13.1.2. Перенос частоты на $-f_s/4$

Две другие простые опорные последовательности образуют действительную и мнимую части комплексной последовательности с частотой $-f_s/4$, которая используется при понижающем преобразовании частоты для получения квадратурной версии (комплексной, с центральной частотой, равной 0) действительного полосового сигнала, центральная частота которого равна $f_s/4$. Действительная (синфазная) опорная последовательность имеет вид $\cos(\pi n/2) = 1, 0, -1, 0$ и т. д. и показана на рисунке 13.3 (a). Ее квадратурная компаньонка выглядит как $-\sin(\pi n/2) = 0, -1, 0, 1$ и т. д. и показана на рисунке 13.3 (b). Модули спектров этих двух последовательностей идентичны, как показано на рисунке 13.3 (c), но их фазы сдвинуты на 90° друг относительно друга (что мы и называем квадратурой).

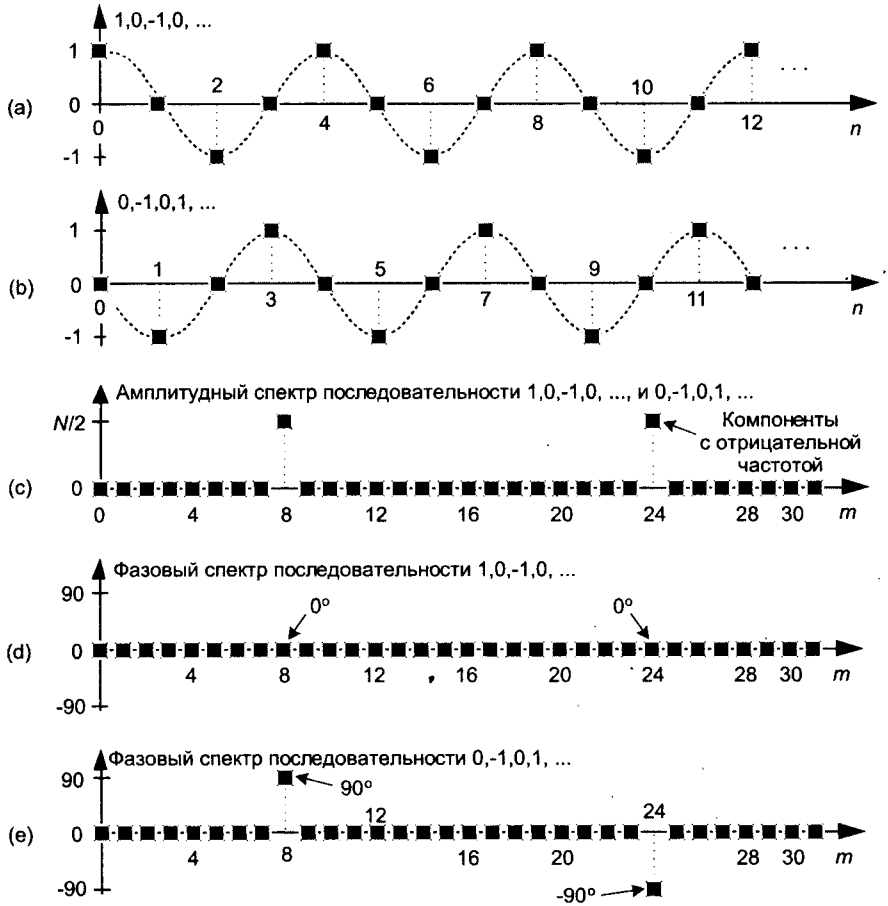


Рис. 13.3. Квадратурные опорные последовательности для понижающего преобразования частоты на $-f_s/4$: (a) синфазная опорная последовательность; (b) квадратурная опорная последовательность; (c) амплитудный спектр обеих последовательностей при $N = 32$ отсчета; (d) фазовый спектр косинусоидальной последовательности; (e) фазовый спектр синусоидальной последовательности

Если мы умножим последовательность $x(n)$, спектр которой показан на рисунках 13.2 (a) и (b), на синфазную (косинусоидальную) опорную последовательность, произведение будет иметь спектр $I(m)$, показанный на рисунках 13.4 (a) и (b). Здесь тоже энергия спектра $X(m)$ переносится вверх и вниз по частоте, но на этот раз величина переноса составляет $\pm f_s/4$. Умножение $x(n)$ на квадратурную (синусоидальную) последовательность дает спектр $Q(m)$, показанный на рисунках 13.4 (a) и (c).

Польза от применения квадратурных последовательностей состоит в том, что при понижающем преобразовании частоты на $f_s/4$ не нужны умножения, т. к. отсчеты этих последовательностей принимают только значения +1 и −1. Вот почему описываемые последовательности вызывают такой интерес: понижающее преобразование входной последовательности выполняется простой пересылкой данных.

Для понижающего переноса частоты на $f_s/4$ последовательности общего вида $x(n) = x_{real}(n) + jx_{imag}(n)$ присвоения значений выполняются следующим образом:

$$x_{new}(0) = x_{real}(0) + jx_{imag}(0)$$
$$x_{new}(1) = x_{imag}(1) - jx_{real}(1)$$
$$x_{new}(2) = -x_{real}(2) - jx_{imag}(2)$$
$$x_{new}(3) = -x_{imag}(3) + jx_{real}(3)$$
$$\textit{и т. д. ...} \qquad (13\text{-}2)$$

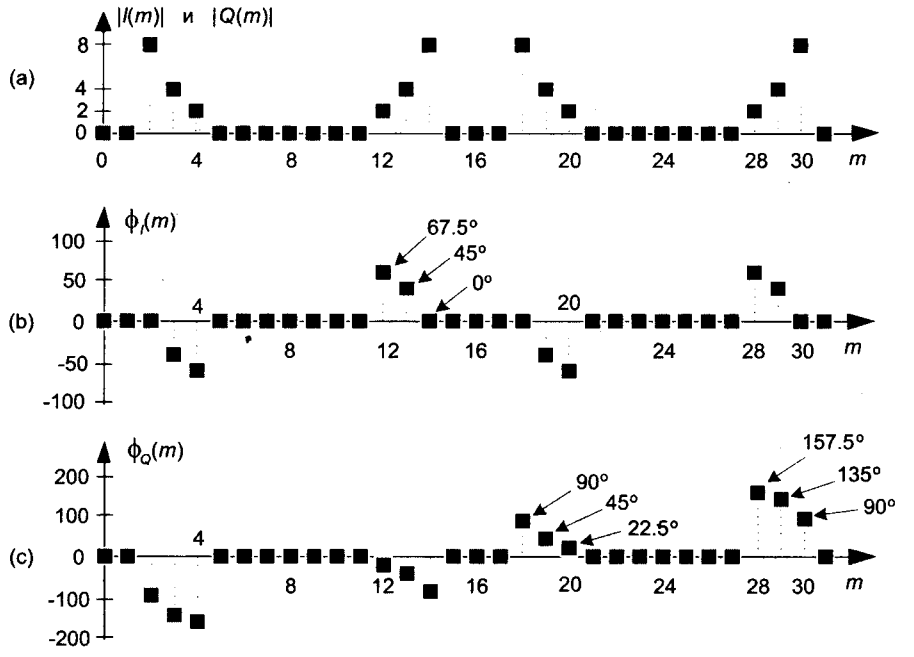


Рис. 13.4. Спектры после переноса вниз по частоте на $f_s/4$: (a) амплитудные спектры $I(m)$ и $Q(m)$; (b) фазовый спектр $I(m)$; (c) фазовый спектр $Q(m)$

Если преобразование частоты выполняется аппаратурно, эти пересылки реализуются соответствующим соединением элементов схемы. Хотя до сих пор мы были сосредоточены на понижающем преобразовании, стоит заметить, что повышающее преобразование последовательности общего вида на $f_s/4$ может быть выполнено с помощью следующих присвоений:

$$
\begin{aligned}
x_{new}(0) &= x_{real}(0) + jx_{imag}(0) \\
x_{new}(1) &= -x_{imag}(1) + jx_{real}(1) \\
x_{new}(2) &= -x_{real}(2) - jx_{imag}(2) \\
x_{new}(3) &= -x_{imag}(3) - jx_{real}(3) \\
&\text{и т. д. ...}
\end{aligned}
\tag{13-3}
$$

13.1.3. Фильтрация и прореживание после переноса по частоте вниз на $f_s/4$

Существует эффективный прием выполнения комплексного понижающего преобразования и фильтрации действительного сигнала с помощью процесса переноса по частоте на $f_s/4$, который мы рассматривали для схемы квадратурной дискретизации в разделе 8.9. Для существенного снижения вычислительной сложности ФНЧ с линейной ФЧХ мы можем использовать новый метод [1 - 3]. Кроме того, прореживание комплексной последовательности в два раза внутренне присуще этому процессу и не требует дополнительных усилий.

Рассматривая рисунок 13.5 (a), мы замечаем, что, если спектр действительной входной последовательности $x(n)$ имеет центральную частоту $f_s/4$, то умножение $x(n)$ на $\cos(\pi n/2) = 1, 0, -1, 0, \ldots$ в синфазном канале и на $-\sin(\pi n/2) = 0, -1, 0, 1, \ldots$ в квадратурном канале с целью перенести спектр $x(n)$ на частоту 0 Гц дает новую комплексную последовательность $x_{new}(n) = x_i(n) + jx_q(n)$, или

$$
\begin{aligned}
x_{new}(0) &= x(0) && + j0 \\
x_{new}(1) &= 0 && - jx(1) \\
x_{new}(2) &= -x(2) && + j0 \\
x_{new}(3) &= 0 && + jx(3) \\
x_{new}(4) &= x(4) && + j0 \\
x_{new}(5) &= 0 && - jx(5) \\
&\text{и т. д. ...}
\end{aligned}
\tag{13-4}
$$

Затем мы хотим пропустить обе последовательности $x_i(n)$ и $x_q(n)$ через ФНЧ и проредить результат в два раза.

А вот здесь доступна маленькая хитрость. Представим себе, что мы используем КИХ-фильтр с пятью ответвлениями, и в момент времени $n = 4$ данные, хранящиеся в элементах памяти двух ФНЧ, показаны на рисунках 13.5 (b) и (c). Благодаря

тому, что каждый второй отсчет последовательностей $x_i(n)$ и $x_q(n)$ равен нулю, в этот момент времени выполняются только пять умножений. Вычисления, которые выполняются в момент времени $n = 4$, показаны в третьей строке крайнего правого столбца таблицы 13.1. Поскольку мы прореживаем последовательности в два раза, мы игнорируем результат вычислений в момент $n = 5$. Необходимые вычисления в следующий момент времени ($n = 6$) приведены в четвертой строке таблицы 13.1, где снова выполняются только пять умножений.

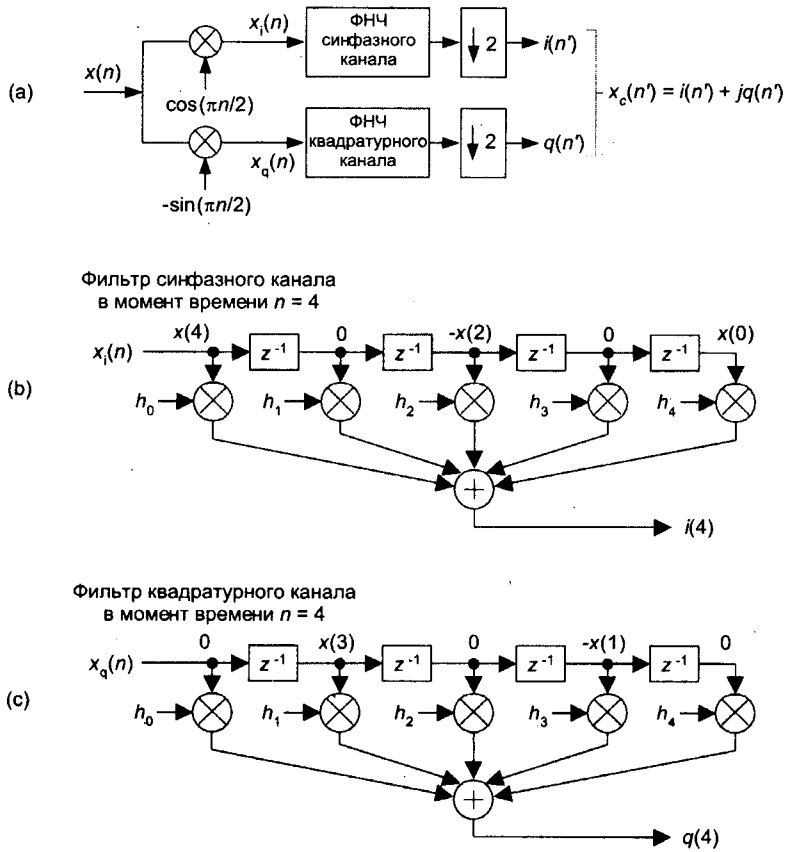


Рис. 13.5. Перенос частоты вниз на $f_s/4$ и фильтрация: (a) блок-схема; (b) данные синфазного фильтра; (c) данные квадратурного фильтра

Изучение таблицы 13.1 подсказывает нам, что мы можем разделить исходную последовательность $x(n)$ на две, умножить последние на опорную последовательность $1, -1, \ldots$ и подать полученные в результате умножения последовательности $x_i(n)$ и $x_q(n)$ на два фильтра, как показано на рисунке 13.6 (a). Эти два фильтра имеют *прореженные* коэффициенты, т. е. коэффициенты синфазного фильтра равны четным коэффициентам $h(k)$ исходного ФНЧ, показанного на рисунке 13.5, а коэффициенты квадратурного фильтра равны нечетным коэффициентам $h(k)$. Новые фильтры изображены на рисунке 13.6 (b), который демонстрирует вычисления, выполняемые в момент времени $n = 4$. Используя этот прием, мы уменьшили объем необходимых вычислений в два раза.

Таблица 13.1. Данные фильтра и необходимые вычисления после прореживания в два раза

Время	Данные фильтров					Необходимые вычисления
$n=0$	$x(0)$	–	–	–	–	$i(0)=x(0)h_0$
	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	
	0	–	–	–	–	$q(0)=0$
$n=2$	$-x(2)$	0	$x(0)$	–	–	$i(2)=x(0)h_2-x(2)h_0$
	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	
	0	$-x(1)$	0	–	–	$q(2)=-x(1)h_1$
$n=4$	$x(4)$	0	$-x(2)$	0	$x(0)$	$i(4)=x(0)h_4-x(2)h_2+x(4)h_0$
	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	
	0	$x(3)$	0	$-x(1)$	0	$q(4)=-x(1)h_3+x(3)h_1$
$n=6$	$-x(6)$	0	$x(4)$	0	$-x(2)$	$i(6)=-x(2)h_4+x(4)h_2-x(6)h_0$
	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	
	0	$-x(5)$	0	$x(3)$	0	$q(6)=x(3)h_3-x(5)h_1$
$n=8$	$x(8)$	0	$-x(6)$	0	$x(4)$	$i(8)=x(4)h_4-x(6)h_2+x(8)h_0$
	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	
	0	$x(7)$	0	$-x(5)$	0	$q(8)=-x(5)h_3+x(7)h_1$

Имеется еще одна особенность этой эффективной структуры понижающего преобразования. Если в структуре на рисунке 13.5 (a) используются полуполосные фильтры, то только один из коэффициентов модифицированного квадратурного фильтра отличен от нуля. Это значит, что мы можем реализовать фильтр квадратурного канала как K элементов задержки, один умножитель на центральный коэффициент исходного полуполосного фильтра, после которого включены еще K элементов задержки, как показано на рисунке 13.6 (c). Для исходного полуполосного фильтра с N ответвлениями K равно целой части от $N/4$. Если центральный коэффициент исходного полуполосного фильтра $h(N-1)/2$ равен 0.5, что бывает часто, то умножение на него реализуется в виде сдвига задержанного отсчета $x_q(n)$ на один бит вправо.

Эта схема понижающего преобразования и вправду весьма перспективна. Вот еще одна возможность. Если исходный фильтр нижних частот на рисунке 13.5 (a) имеет нечетное количество ответвлений, коэффициенты модифицированных фильтров на рисунке 13.6 (b) будут симметричными, и мы сможем использовать *сложенную* структуру КИХ-фильтра (раздел 13.7), чтобы уменьшить количество умножителей (за счет дополнительных сумматоров) еще почти в два раза!

Наконец, если необходимо инвертировать спектр выходной последовательности $x_c(n')$, то мы можем сделать это двумя способами. Мы можем инвертировать знак отсчетов последовательности *1, −1, ...*, подаваемой на смеситель квадратурного канала или поменять местами смеситель и отдельный элемент задержки в квадратурном канале.

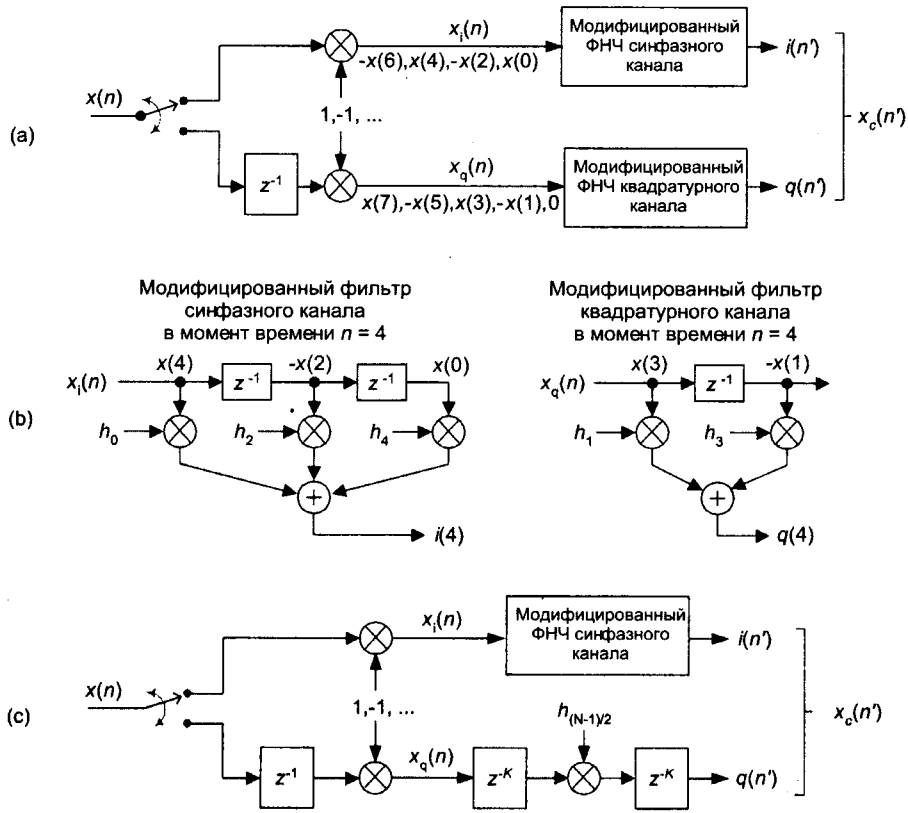


Рис. 13.6. Эффективная схема понижающего преобразования, фильтрации и прореживания: (a) блок-схема; (b) модифицированные фильтры и их данные в момент времени $n = 4$; (c) схема с использованием полуполосного фильтра

13.2. Быстрое приближенное вычисление длины вектора

Методы квадратурной обработки, используемые в спектральном анализе, компьютерной графике и цифровой связи обычно требуют быстрого вычисления модуля комплексного числа (вектора V) по заданным действительной и мнимой частям, т. е. по синфазной I и квадратурной Q составляющим. Вычисление модуля требует выполнения операции извлечения квадратного корня, т. к. по определению модуль V вычисляется как

$$|V| = \sqrt{I^2 + Q^2}. \qquad (13\text{-}5)$$

Если сумма $I^2 + Q^2$ известна, то проблема сводится к эффективному вычислению квадратного корня.

Имеется несколько способов вычисления квадратного корня. Оптимальный метод зависит от используемой аппаратуры и имеющегося программного обеспечения. Например, при вычислении квадратного корня в программе на языке высокого уровня мы используем процедуру вычисления корня, имеющуюся в библиотеке. Библиотечные процедуры вычисления корня обеспечивают очень высокую точность, но работают очень медленно. С другой стороны, если система должна выполнять вычисление корня за 50 наносекунд, требуются высокоскоростные аппроксимации [4, 5]. Рассмотрим экономичную схему аппроксимации модуля, которая особенно эффективна в аппаратурной реализации.

Существует метод вычисления модуля комплексного числа, который называют алгоритмом αMax+βMin (читается как «альфа максимум плюс бета минимум»)[1]. Этот метод использует линейную аппроксимацию модуля вектора, которая требует определения, какая из составляющих вектора, I или Q, больше по абсолютной величине. Если мы обозначим бо́льшую абсолютную величину составляющих I или Q как Max, а меньшую — как Min, то приближенное значение $|V|$ с использованием алгоритма αMax+βMin вычисляется как

$$|V| \approx \alpha\mathrm{Max} + \beta\mathrm{Min}. \qquad (13\text{-}6)$$

Существует несколько разных пар значений констант α и β которые дают разную точность приближения в пределах 0.1 дБ [4, 7]. Алгоритмы αMax+βMin, описанные в [10], определяют длину вектора за время, необходимое для сравнения модулей чисел, двух умножений и одного сложения. Но эти алгоритмы требуют для достижения разумной точности как минимум 16-битового умножения. Но даже если аппаратурный умножитель отсутствует, не все потеряно. Задавая для констант α и β значения, равные целым отрицательным степеням двойки, мы делаем (13-6) пригодным для реализации в двоичной целочисленной арифметике. В большинстве случаев в алгоритме αMax+βMin используются константы $\alpha = 1.0$ и $\beta = 0.5$ [8 - 10]. Умножение на 0.5 выполняется путем сдвига минимума вправо на один бит. Мы можем оценить точность того или иного алгоритма вычисления длины вектора, построив график ошибки, как функции фазового угла вектора. Попробуем. Оценка αMax+βMin для вектора единичной длины с использованием выражения

$$|V| \approx \mathrm{Max} + \mathrm{Min}/2, \qquad (13\text{-}7)$$

в диапазоне углов от 0° до 90° показана сплошной линией на рисунке 13.7. (Графики на рисунке 13.7 повторяются с периодом 90°.)

Идеальная оценка в этом случае равна единице. Мы будем использовать это идеальное значение как образец при оценке качества разных алгоритмов αMax+βMin. Давайте убедимся в том, что мы действительно понимаем, что означает сплошная кривая на рисунке 13.7. Она показывает, что для вектора единичной длины,

[1] Сначала использовался алгоритм «Max+βMin», но в 1988 автор предложил расширить его до αMax+βMin, где α может принимать отличные от единицы значения [6].

ориентированного под углом примерно 26°, оценка длины с помощью (13-7) даст значение 1.118 вместо правильного значения 1. Следовательно, ошибка при 26° равна 11.8 %, или 0.97 дБ. Анализируя всю сплошную кривую на рисунке 13.7, мы получаем среднее значение ошибки в диапазоне от 0 до 90°, равное 8.6 % (0.71 дБ). На рисунке 13.7 приведены также графики для $\alpha = 1$ и $\beta = 1/4$, $\alpha = 1$ и $\beta = 3/8$.

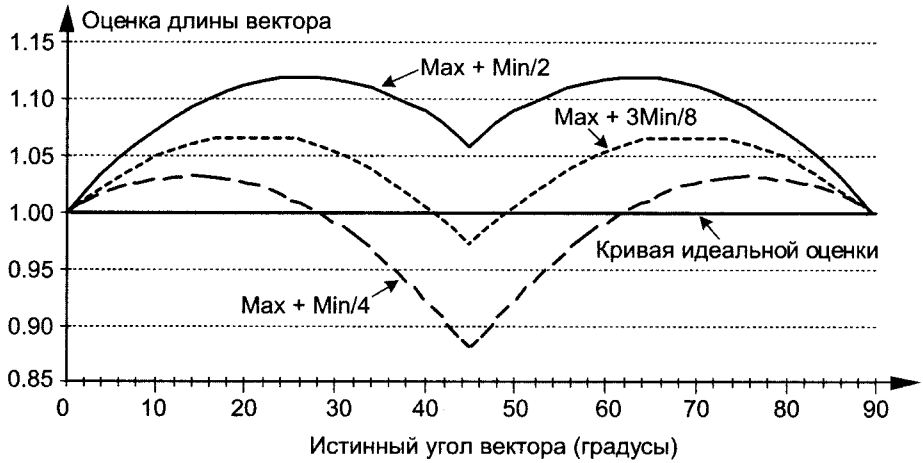


Рис. 13.7. Нормированные оценки αMax+βMin при $\alpha = 1$ и $\beta = 1/2$, 1/4 и 3/8

Хотя значения α и β на рисунке 13.7 дают довольно точные результаты, имеются другие пары значений α и β, которые заслуживают нашего внимания, т. к. они обеспечивают уменьшение стандартного отклонения ошибки. Оцените, например, пару значений $\alpha = 7/8$ и $\beta = 7/16$, для которой кривая оценки приведена на рисунке 13.8 сплошной линией. Дальнейшее улучшение может быть получена при $\alpha = 15/16$ и $\beta = 15/32$, график для этой пары приведен штриховой линией на рисунке 13.8. Пара $\alpha = 15/16$ и $\beta = 15/32$ дает довольно хорошие результаты по сравнению с оптимальными дробными значениями $\alpha = 0.96043387$ и $\beta = 0.397824735$, приведенными в работе [11], график оценки для которых показан пунктирной линией на рисунке 13.8.

Хотя кажется, что использование значений $\alpha = 15/16$ и $\beta = 15/32$ требует двух умножений и одного сложения, цифровая аппаратурная реализация в этом случае может быть очень простой, как показано на рисунке 13.9. Диагональные штрихи, \1 например, обозначают сдвиг на один бит на соединениях, который реализует операцию деления на 2 с усечением. Соответственно, символ \4 показывает сдвиг вправо на четыре бита, который реализует деление на 16. Управляющий сигнал анализа условия $|I| > |Q|$ принимает значение TRUE, когда модуль I больше модуля Q, так что Max $= |I|$ и Min $= |Q|$. При этом на сумматор подаются значения $|I|$ и $|Q|/2$. Когда сигнал $|I| > |Q|$ принимает значение FALSE, на вход сумматора подаются значения $|Q|$ и $|I|/2$. Заметьте, что выход сумматора, Max + Min/2, представляет собой результат вычисления по (13-7). Выражение (13-6) реализуется вычитанием (Max + Min/2)/16 из Max + Min/2.

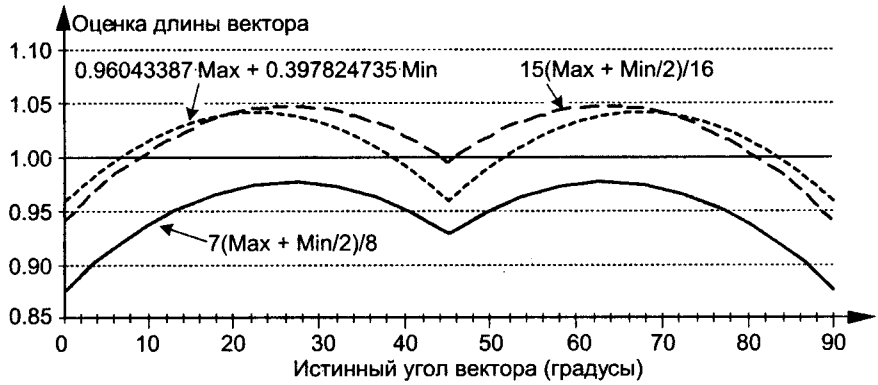


Рис. 13.8. Оценки αMax+βMin при α = 7/8, β = 7/16; α = 15/16, β = 15/32 и α = 0.96043387, β = 0.397824735

На рисунке 13.9 все умножения выполняются путем проводного сдвига, и общее время выполнения ограничено только задержками аппаратурных компонентов.

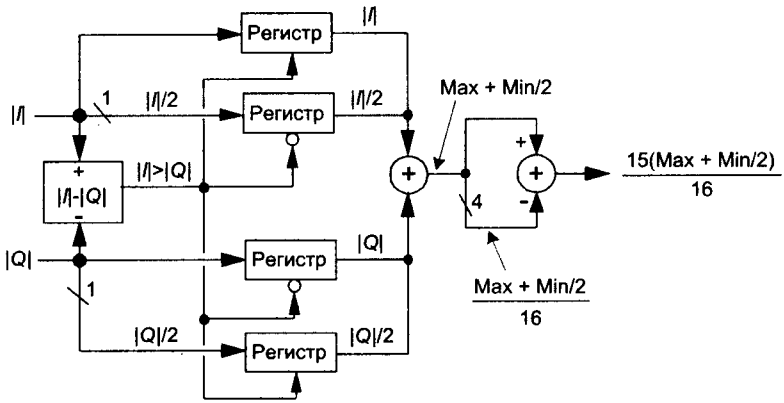


Рис. 13.9. Аппаратурная реализация при α = 15/16 и β = 15/32

Обратите внимание на одну особенность. Поскольку оценки $|V|$ могут иметь размер больше допустимого для нормализованных, их значения могут превышать единицу. Это значит, что, хотя модуль находится в пределах допустимого диапазона, оценка может выйти за границы слова и вызвать ошибку переполнения. При использовании алгоритмов αMax+βMin пользователь должен быть уверен, что истинные значения модуля не превышают значений, которые могут дать оценку, превышающую максимальное представимое значение.

За удобство использования значений α и β, представляющих собой целые степени двойки, мы платим ошибками, вносимыми при делении посредством сдвига с усечением, и до сих пор мы не принимали во внимание эти ошибки. Кривые оценок на рисунках 13.7 и 13.8 были получены с помощью программной модели, использующей вычисления с плавающей запятой, и могут использоваться для оценки разных пар значения α и β. Однако действительная ошибка, вносимая алгоритмом αMax+βMin, будет несколько другой из-за ошибок деления при усечении

данных с конечной длиной слова. Для схем αMax+βMin ошибки усечения являются функцией длины слова данных, используемого алгоритма, значений $|I|$ и $|Q|$ и угла вектора. (Ошибки усечения дополняют ошибки, внутренне присущие алгоритмам αMax+βMin.) Однако моделирование показало, что для 8-битовой системы (максимальная длина вектора = 255) ошибка усечения меньше 1 %. При увеличении длины слова ошибка усечения приближается к 0 %, и это значит, что ошибки усечения вносят очень маленький вклад в общую ошибку алгоритма αMax+βMin.

Сравнительные характеристики разных алгоритмов приведены в таблице 13.2.

Последний столбец в таблице 13.2 показывает максимально допустимую истинную длину вектора, при которой не возникает переполнение, по отношению к максимально допустимому числу.

Итак, алгоритм αMax+βMin дает возможность быстро вычислять длину вектора без использования математического сопроцессора или аппаратурного умножителя. Конечно, при использовании современных микросхем, содержащих высокоскоростные умножители с плавающей точкой, выполняющие умножение за один или два такта, можно использовать произвольные значения α и β, а не только целые степени двойки. Следует также заметить, что этот алгоритм легко реализуется в интегральных схемах (например, ПЛИС), что позволяет выполнять высокоскоростную обработку.

Таблица 13.2. Сравнение алгоритмов αMax+βMin

Алгоритм $\lvert V\rvert \approx$	Наибольшая ошибка (%)	Наибольшая ошибка (dB)	Средняя ошибка (%)	Средняя ошибка (dB)	Max $\lvert V\rvert$ (% F.S.)
Max + Min/2	11.8 %	0.97 дБ	8.6 %	0.71 дБ	89.4 %
Max + Min/4	−11.6 %	−1.07 дБ	−0.64 %	−0.06 дБ	97.0 %
Max + 3Min/8	6.8 %	0.57 дБ	3.97 %	0.34 дБ	93.6 %
7(Max + Min/2)/8	−12.5 %	−1.16 дБ	−4.99 %	−0.45 дБ	100 %
15(Max + Min/2)/16	−6.25 %	−0.56 дБ	1.79 %	0.15 дБ	95.4 %

13.3. Взвешивание окном в частотной области

Существует интересный прием минимизации вычислений, необходимых для взвешивания с целью уменьшения утечки спектра. В некоторых случаях необходимо вычислить БПФ невзвешенных данных и в то же время мы хотели бы иметь БПФ тех же данных, взвешенных окном. В этой ситуации нам нет необходимости выполнять БПФ два раза. Мы можем вычислить БПФ невзвешенных данных, а затем выполнить сглаживание результата БПФ в частотной области для уменьшения утечки. Посмотрим, как это делается.

Вспомним приведенные в разделе 3.9 выражения для окон Хэннига и Хэмминга: $w_{Han}(n) = 0.5 - 0.5\cos(2\pi n/N)$ и $w_{Ham}(n) = 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/N)$ соответственно. Оба они имеют общую косинусоидальную форму

$$w(n) = \alpha - \beta\cos(2\pi n/N) \qquad (13\text{-}8)$$

при $n = 0, 1, 2, ..., N-1$. Найдем спектр общего косинусоидального окна, вычислив ДПФ от (13-8):

$$W(m) = \sum_{n=0}^{N-1}[\alpha - \beta\cos(2\pi n/N)]e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (13\text{-}9)$$

Поскольку $\cos(2\pi n/N) = e^{j2\pi n/N}/2 + e^{-j2\pi n/N}/2$, (13-9) можно переписать в виде

$$W(m) = \sum_{n=0}^{N-1}\alpha e^{-j2\pi nm/N} - (\beta/2)\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi n/N}e^{-j2\pi nm/N} - (\beta/2)\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j2\pi n/N}e^{-j2\pi nm/N} =$$

$$= \alpha\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j2\pi nm/N} - (\beta/2)\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi n/N}e^{-j2\pi nm/N} - (\beta/2)\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j2\pi n/N}e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (13\text{-}10)$$

Выражение (13-10) выглядит довольно сложным, но, используя результаты раздела 3.13 для выражений, подобных суммам в (13-10), мы приходим к выводу, что искомый спектр представим как суперпозиция трех функций вида $\sin(x)/x$ в частотной области. Их амплитудные спектры показаны на рисунке 13.10.

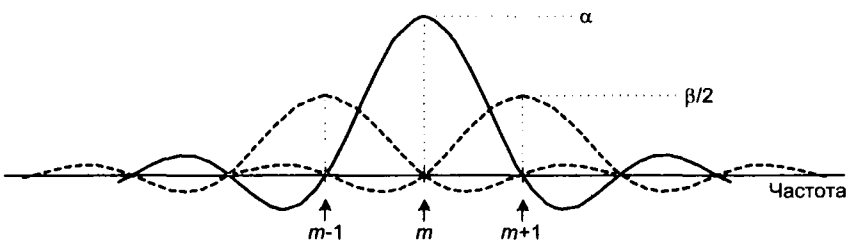


Рис. 13.10. Амплитудный спектр общего косинусоидального окна

Заметим, что две смещенные функции $\sin(x)/x$ имеют боковые лепестки, фазы которых противоположны фазам боковых лепестков центральной функции $\sin(x)/x$. Это значит, что из m-го бина, умноженного на α, вычитаются $(m-1)$-й бин, умноженный на $\beta/2$, и $(m+1)$-й бин, умноженный на $\beta/2$, что минимизирует боковые лепестки m-го бина. Этот процесс вычисления свертки в частотной области эквивалентен умножению входной последовательности на окно $w(n)$ длиной N отсчетов вида (13-8)[12 - 14].

Например, предположим, что выход m-го бина равен $X(m) = a_m + jb_m$, и выходы двух соседних бинов равны $X(m-1) = a_{-1} + jb_{-1}$ и $X(m+1) = a_{+1} + jb_{+1}$. Тогда сглаживание в частотной области для m-го бина несглаженного $X(m)$ даст следующий результат:

$$X_{по\ трем\ отсчетам}(m) = \alpha X(m) - (\beta/2)X(m-1) - (\beta/2)X(m+1) =$$

$$= \alpha(a_m + jb_m) - (\beta/2)(a_{-1} + jb_{-1}) - (\beta/2)(a_{+1} + jb_{+1}) =$$
$$= \alpha a_m - (\beta/2)(a_{-1} + a_{+1}) + j[\alpha b_m - (\beta/2)(b_{-1} + b_{+1})]. \qquad (13\text{-}11)$$

Для вычисления сглаженного N-точечного БПФ, $X_{по\ трем\ отсчетам}(m)$, мы можем применить (13-11), в котором используются $4N$ сложений и $3N$ умножений, к результату N-точечного БПФ $X(m)$ невзвешенной последовательности и избежать таким образом необходимости выполнения N умножений при взвешивании во временной области и второго БПФ с его $N\log_2(N)$ сложений и $2N\log_2(N)$ умножений. (В этом случае мы назвали результат сглаживания $X_{по\ трем\ отсчетам}(m)$, потому что мы выполняем свертку трехчленной последовательности $W(m)$ с последовательностью $X(m)$.)

Итак, ситуация благоприятная. Имеются коэффициенты в частотной области α и β для окна Хэннинга. Они оба равны *0.5*, и умножения в (13-11) можно выполнить в аппаратуре с помощью двух двоичных сдвигов вправо: на один бит для $\alpha = 0.5$ и на два бита для каждого из двух $\beta/2 = 0.25$, что в сумме дает шесть двоичных сдвигов. Если допустимо усиление в четыре раза, мы можем ограничиться только двумя сдвигами влево (одним для действительной и одним для мнимой части $X(m)$), используя выражение

$$X_{Хэннинга,\ усиление=4}(m) = 2X(m) - X(m-1) - X(m+1). \qquad (13\text{-}12)$$

В реализациях на заказных БИС (ASIC) или на ПЛИС типа FPGA, в которых следует избегать умножений[1], двоичные сдвиги выполняются путем соответствующей организации соединений блоков. Таким образом, для реализации сглаживания с использованием окна Хэннинга требуются только сложения. Мы должны рассмотреть вопрос о том, какое окно наилучшим образом подходит для данного приложения и какими возможностями обладает имеющаяся аппаратура при реализации взвешивания в частотной области. Взвешивание окном Хэмминга тоже можно реализовать в частотной области, но, к сожалению, здесь простых сдвигов недостаточно.

Наряду с окнами Хэннинга и Хэмминга в [14] описано семейство окон, известное как окна *Блэкмана*, которое обеспечивает меньшую утечку при реализации взвешивания в частотной области. (Примечание: в [14] обнаружены две опечатки в коэффициентах 4-членного (–74 дБ) окна на странице 65. В [15] приведены следующие значения этих коэффициентов: *0.40217, 0.49703, 0.09892* и *0.00188*.) Окна Блэкмана имеют пять ненулевых коэффициентов в частотной области, и их использование требует следующей пятичленной свертки:

$$X_{по\ пяти\ отсчетам}(m) = \alpha X(m) + (\gamma/2)X(m-2) - (\beta/2)X(m-1) -$$
$$- (\beta/2)X(m+1) + (\gamma/2)X(m+2). \qquad (13\text{-}13)$$

В таблице 13.3 приведены коэффициенты в частотной области для нескольких общеупотребительных окон.

---

[1] Современные ПЛИС FPGA содержат встроенные аппаратурно-реализованные умножители, так что замена полномасштабного умножения сдвигами в некоторой степени утратила актуальность — (*прим. перев.*).

Завершим наше обсуждение сглаживания в частотной области, заметив, что эта схема может быть эффективной, потому что мы не должны взвешивать весь массив данных, сглаживание выполняется только над теми бинами БПФ, которые представляют какой-то интерес. Одно из применений сглаживания во временной области рассматривается в разделе 13.18.

Таблица 13.3. Коэффициенты сглаживания в частотной области

Окно	α	β	γ
Прямоугольное	1.0	—	—
Хэннинга	0.5	0.5	—
Хэмминга	0.54	0.46	—
Блэкмана	0.42	0.5	0.08
Точное Блэкмана	7938/18608	9240/18608	1430/18608
3-членное Блэкмана-Хэрриса	0.42323	0.49755	0.07922

13.4. Быстрое умножение комплексных чисел

В цифровой обработке сигналов умножение двух комплексных чисел — одна из наиболее часто встречающихся операций. Она необходима во всех алгоритмах дискретного и быстрого преобразования Фурье, в графических преобразованиях и используется при обработке коммуникационных сигналов. И в аппаратурной, и в программной реализации необходимо реализовать ее как можно эффективнее. Если используемая аппаратура может выполнять три сложения быстрее, чем одно умножение, мы можем ускорить комплексное умножение [16].

Умножение двух комплексных чисел $a + jb$ и $c + jd$ дает комплексное произведение вида

$$R+jI = (a + jb)(c + jd) = \\ = (ac - bd) + j(bc + ad) \qquad (13\text{-}14)$$

Мы видим, что (13-14) требует четыре умножения и два сложения. (Мы предполагаем, что с точки зрения времени выполнения вычитание эквивалентно сложению.) Вместо использования (13-14) мы можем вычислить следующие промежуточные значения

$$k_1 = a\,(c + d), \\ k_2 = d(a + b), \qquad (13\text{-}15) \\ k_3 = c(b - a).$$

Затем мы выполняем следующие операции для получения окончательных значений R и I:

$$R = k_1 - k_2,$$
$$I = k_1 + k_3. \qquad (13\text{-}16)$$

Мы предлагаем читателю подставить k из (13-15) в (13-16) и убедиться в том, что выражения в (13-16) эквивалентны (13-14). Промежуточные значения в (13-15) требуют три сложения и три умножения, а результаты в (13-16) требуют еще два сложения. Таким образом, мы обменяли одно умножение в (13-14) на три сложения в (13-15) и (13-16). Если нашей аппаратуре для выполнения трех сложений требуется меньше тактов, чем для одного умножения, мы можем получить общий выигрыш в скорости обработки при использовании (13-15) и (13-16) вместо (13-14) для выполнения комплексного умножения.

13.5. Эффективное вычисление БПФ действительных последовательностей

Осознав свойство линейности и четную/нечетную симметрии быстрого преобразования Фурье (БПФ), ранние его исследователи быстро пришли к выводу о том, что две разные действительные последовательности могут быть преобразованы с помощью одного комплексного БПФ. Они также разработали метод использования одного N-точечного комплексного БПФ для преобразования действительной последовательности длиной в $2N$ отсчетов. Посмотрим, как работают эти методы.

13.5.1. Вычисление БПФ двух N-точечных действительных последовательностей

Стандартные алгоритмы БПФ разработаны для комплексных входных последовательностей; т. е. предполагается, что входная последовательность $x(n)$ содержит действительную и мнимую часть, или

$$x(0) = x_r(0) + jx_i(0),$$
$$x(1) = x_r(1) + jx_i(1),$$
$$x(2) = x_r(2) + jx_i(2),$$
$$\ldots$$
$$x(N-1) = x_r(N-1) + jx_i(N-1). \qquad (13\text{-}17)$$

В типовых схемах обработки сигналов чаще всего анализируются действительные последовательности. Самый распространенный пример — вычисление БПФ последовательности, полученной с выхода АЦП, который выдает целые действительные отсчеты, соответствующие некоторому непрерывному сигналу. В этом случае мнимые части всех отсчетов последовательности $x(n)$ равны

нулю. Следовательно, часть операций, выполняемых на первом этапе БПФ, оказывается бесполезной. Первые исследователи БПФ осознали неэффективность выполнения такого преобразования, изучили проблему и разработали метод, которые позволяет с помощью одного N-точечного комплексного БПФ вычислять преобразования двух независимых действительных последовательностей, содержащих по N отсчетов. Мы называем предложенный метод алгоритмом двойного N-точечного действительного БПФ. Вывод этого метода не представляет сложности и изложен в литературе [17 - 19]. Две N-точечные действительные входные последовательности $a(n)$ и $b(n)$ имеют преобразования Фурье $X_a(m)$ и $X_b(m)$. Если мы возьмем $a(n)$ в качестве действительной части входной последовательности БПФ, а $b(n)$ в качестве мнимой части входной последовательности БПФ, то

$$x(0) = a(0)+jb(0),$$

$$x(1) = a(1)+jb(1),$$

$$x(2) = a(2) + jb(2),$$

$$\dots$$

$$x(N-1) = a(N-1) + jb(N-1) \tag{13-18}$$

Подставляя $x(n)$ из (13-18) в формулу стандартного ДПФ,

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi nm/N}, \tag{13-19}$$

мы получим результат $X(m)$, при этом m пробегает все целые значения от 0 до $N-1$. (Мы, естественно, предполагаем, что ДПФ реализуется в виде БПФ.) Обозначая верхним индексом * комплексно-сопряженное число, мы можем извлечь два искомых ДПФ $X_a(m)$ и $X_b(m)$ из $X(m)$, используя следующие выражения:

$$X_a(m) = [X^*(N-m) + X(m)]/2, \tag{13-20}$$

и

$$X_b(m) = j[X^*(N-m) - X(m)]/2. \tag{13-21}$$

Чтобы сделать выражения для $X_a(m)$ и $X_b(m)$ более понятными и более удобными для реализации, представим (13-20) и (13-21) в виде действительной и мнимой частей. Используя запись $X(m)$ в алгебраической форме, $X(m) = X_r(m) + jX_i(m)$, мы можем переписать (13-20) в виде

$$X_a(m) = \{X_r(N-m) + X_r(m) + j[X_i(m) - X_i(N-m)]\}/2, \tag{13-22}$$

где $m = 1, 2, 3, \dots, N-1$. Что вы скажете об $X_a(m)$, когда $m = 0$? Да, здесь мы сталкиваемся с непреодолимой трудностью, если попробуем реализовать (13-20) прямо. Подставив $m = 0$ в (13-40), мы быстро осознаем, что первый член числителя $X^*(N-0) = X^*(N)$, отсутствует, т. к. в результатах N-точечного БПФ отсчета $X(N)$ нет! Мы решаем эту проблему, вспомнив, что последовательность $X(m)$ периодична с периодом N, так что $X(N) = X(0)$[1].

[1] Это показано в разделе 3.8 при обсуждении утечки спектра в ДПФ.

Когда $m = 0$, формула (13-20) превращается в

$$X_a(0) = [X_r(0) - jX_i(0) + X_r(0) + jX_i(0)]/2 = X_r(0)\,. \qquad (13\text{-}23)$$

Далее, упрощая (13-21), получаем

$$X_b(m) = j[X_r(N-m) - jX_i(N-m) - X_r(m) - jX_i(m)]/2 =$$
$$= \{X_i(N-m) + X_i(m) + j[X_r(N-m) - X_r(m)]\}/2\,, \qquad (13\text{-}24)$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots, N-1$. Прибегая к тем же рассуждениям, что и при выводе (13-23), получаем $X_b(0)$ в (13-24) в виде

$$X_b(0) = \{X_i(0) + X_i(0) + j[X_r(0) - X_r(0)]\}/2 = X_i(0) \qquad (13\text{-}25)$$

Эти рассуждения выявили один момент, который новичкам следует запомнить. В литературе формулы (13-20) и (13-21) часто подаются без обсуждения проблемы, связанной с $m = 0$. Так что каждый раз, разбирая математические выкладки или столкнувшись с некоторыми уравнениями, сохраняйте здоровую долю скепсиса. Проверьте уравнения на примере — вы увидите, справедливы ли они. (В конце концов, и автор книги, и наборщик в типографии тоже человек и иногда делает ошибки. В Огайо известна старая присказка: «Доверяй всем, но прячь свои карты.») Следуя этому совету, давайте докажем, что описанное двойное N-точечное действительное БПФ действительно работает, подставив в (13-22) — (13-25) 8-точечные последовательности из примеров вычисления ДПФ в главе 3. Взяв 8-точечную последовательность из примера 1 в разделе 3.1, и обозначив ее как $a(n)$, имеем

$$\begin{aligned} a(0) &= 0.3535, & a(1) &= 0.3535, \\ a(2) &= 0.6464, & a(3) &= 1.0607, \\ a(4) &= 0.3535, & a(5) &= -1.0607, \\ a(6) &= -1.3535, & a(7) &= -0.3535\,. \end{aligned} \qquad (13\text{-}26)$$

Аналогично, 8-точечная последовательность из примера 2 в разделе 3.6, обозначенная как $b(n)$, имеет вид

$$\begin{aligned} b(0) &= 1.0607, & b(1) &= 0.3535, \\ b(2) &= -1.0607, & b(3) &= -1.3535, \\ b(4) &= -0.3535, & b(5) &= 0.3535, \\ b(6) &= 0.3535, & b(7) &= 0.6464\,. \end{aligned} \qquad (13\text{-}27)$$

Объединяя (13-26) и (13-27) в одну комплексную последовательность $x(n)$, мы получаем

$$\begin{array}{lcc} & a(n) & b(n) \\ & \downarrow & \downarrow \\ x(n)= & 0.3535 & +j\,1.0607 \\ & +\,0.3535 & +j\,0.3535 \\ & +\,0.6464 & -j\,1.0607 \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
+1.0607 & -j\,1.3535 \\
+0.3535 & -j\,0.3535 \\
-1.0607 & +j\,0.3535 \\
-1.3535 & +j\,0.3535 \\
-0.3535 & +j\,0.6464.
\end{array}
\qquad (13\text{-}28)
$$

Теперь, вычисляя 8-точечное БПФ комплексной последовательности (13-28), мы имеем:

$$
\begin{array}{lll}
 & X_r(m) & X_i(m) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
X(m)= & 0.0000 & +j\,0.0000 \quad \leftarrow m=0 \\
 & -2.8283 & -j\,1.1717 \quad \leftarrow m=1 \\
 & +2.8282 & +j\,2.8282 \quad \leftarrow m=2 \\
 & +0.0000 & +j\,0.0000 \quad \leftarrow m=3 \\
 & +0.0000 & +j\,0.0000 \quad \leftarrow m=4 \\
 & +0.0000 & +j\,0.0000 \quad \leftarrow m=5 \\
 & +0.0000 & +j\,0.0000 \quad \leftarrow m=6 \\
 & +2.8283 & +j\,6.8282 \quad \leftarrow m=7.
\end{array}
\qquad (13\text{-}29)
$$

Итак, согласно (13-23),

$$X_a(0) = X_r(0) = 0\,.$$

Для получения остальных отсчетов $X_a(m)$ мы должны подставить отсчеты $X(m)$ и $X(N-m)$ в (13-22)[1]. В результате получаем:

$$
\begin{aligned}
X_a(1) &= \{X_r(7) + X_r(1) + j[X_i(1) - X_i(7)]\}/2 = \\
&= [2.8283 - 2.8283 + j(-1.1717 - 6.8282)]/2 = \\
&= (0 - j7.9999)/2 = 0 - j4.0 = 4 \angle -90^\circ\,, \\
X_a(2) &= \{X_r(6) + X_r(2) + j[X_i(2) - X_i(6)]\}/2 = \\
&= [0.0 + 2.8282 + j(2.8282 - 0.0)]/2 = \\
&= (2.8282 + j2.8282)/2 = 1.414 + j1.414 = 2 \angle 45^\circ\,, \\
X_a(3) &= \{X_r(5) + X_r(3) + j[X_i(3) - X_i(5)]\}/2 = \\
&= [0.0 + 0.0 + j(0.0 - 0.0)]/2 = 0 \angle 0^\circ\,, \\
X_a(4) &= \{X_r(4) + X_r(4) + j[X_i(4) - X_i(4)]\}/2 = \\
&= [0.0 + 0.0 + j(0.0 - 0.0)]/2 = 0 \angle 0^\circ\,,
\end{aligned}
$$

[1] Помните, что для комплексной входной последовательности отсчеты ДПФ не обладают сопряженной симметрией; т. е. мы не можем предположить, что $F(m) = F^*(N-m)$, когда и действительная, и мнимая части входных отсчетов отличны от нуля.

$$X_a(5) = \{X_r(3) + X_r(5) + j[X_i(5) - X_i(3)]\}/2 =$$
$$= [0.0 + 0.0 + j(0.0 - 0.0)]/2 = 0 \angle 0°,$$
$$X_a(6) = \{X_r(2) + X_r(6) + j[X_i(6) - X_i(2)]\}/2 =$$
$$= [2.8282 + 0.0 + j(0.0 - 2.8282)]/2 =$$
$$= (2.8282 - j2.8282)/2 = 1.414 + j1.414 = 2 \angle -45°,$$
$$X_a(7) = \{X_r(1) + X_r(7) + j[X_i(7) - X_i(1)]\}/2 =$$
$$= [-2.8282 + 2.8282 + j(6.8282 - 1.1717)]/2 =$$
$$= (0.0 + j7.9999)/2 = 0 + j4.0 = 4 \angle 90°.$$

Следовательно, (13-22) действительно позволяет извлечь $X_a(m)$ из $X(m)$. Можно видеть, что нет необходимости выполнять вычисления по (13-22), когда m больше 4 (или $N/2$), потому что последовательность $X_a(m)$ всегда сопряженно-симметрична. Поскольку $X_a(7) = X_a(1)^*$, $X_a(6) = X_a(2)^*$ и т. д., только первые $N/2$ элементов $X_a(m)$ независимы и должны быть вычислены.

Итак, продолжим наши вычисления и используем (13-24) и (13-25) для извлечения $X_b(m)$ из результатов БПФ. Согласно (13-25),

$$X_b(0) = X_i(0) = 0.$$

Подставляя отсчеты спектра в (13-24) для получения следующих четырех отсчетов $X_b(m)$, получаем

$$X_b(1) = \{X_i(7) + X_i(1) + j[X_r(7) - X_r(1)]\}/2 =$$
$$= [6.8282 - 1.1717 + j(2.8283 + 2.8283)]/2 =$$
$$= (5.656 + j5.656)/2 = 2.828 + j2.828 = 4 \angle 45°,$$
$$X_b(2) = \{X_i(6) + X_i(2) + j[X_r(6) - X_r(2)]\}/2 =$$
$$= [0.0 + 2.8282 + j(0.0 - 2.8282)]/2 =$$
$$= (2.8282 - j2.8282)/2 = 1.414 - j1.414 = 2 \angle -45°,$$
$$X_b(3) = \{X_i(5) + X_i(3) + j[X_r(5) - X_r(3)]\}/2 =$$
$$= [0.0 + 0.0 + j(0.0 - 0.0)]/2 = 0 \angle 0°,$$
$$X_b(4) = \{X_i(4) + X_i(4) + j[X_r(4) - X_r(4)]\}/2 =$$
$$= [0.0 + 0.0 + j(0.0 - 0.0)]/2 = 0 \angle 0°.$$

Возникает вопрос: «Увеличивается или уменьшается общее количество операций с учетом дополнительной обработки в соответствии с (13-22) и (13-24) после БПФ, и насколько, при использовании алгоритма двойного N-точечного действительного БПФ?» Мы можем оценить эффективность этого алгоритма, рассмотрев количество необходимых арифметических операций по отношению к двум отдельным N-точечным БПФ по основанию 2. Сначала мы должны оценить количество арифметических операций для двух отдельных N-точечных комплексных БПФ.

Из раздела 4.2 мы знаем, что стандартное N-точечное комплексное БПФ по основанию 2 требует выполнения $(N/2)\log_2 N$ бабочек. Если мы используем оптимизированную структуру бабочки, каждая бабочка требует одного комплексного умножения и двух комплексных сложений. Каждое комплексное умножение состоит из двух действительных сложений и четырех действительных умножений, а одно комплексное сложение содержит два действительных сложения[1]. Следовательно, одна бабочка БПФ содержит четыре действительных умножения и шесть действительных сложений. Это значит, что N-точечное комплексное БПФ требует $(4N/2)\log_2 N$ действительных умножений и $(6N/2)\log_2 N$ действительных сложений. Наконец, мы можем сказать, что два отдельных N-точечных комплексных БПФ по основанию 2 требуют

Два N-точечных комплексных БПФ → $4N \bullet \log_2 N$ действительных умножений и (13-30)

$6N \bullet \log_2 N$ действительных сложений. (13-30')

Далее нам необходимо определить объем вычислений для двойного N-точечного действительного БПФ. Если мы сложим количество действительных операций сложения и умножения, необходимых для реализации N-точечного комплексного БПФ, и количество соответствующих операций, необходимых для вычислений по (13-22) и (13-24) для получения $X_a(m)$ и $X_b(m)$ соответственно, то получим следующую картину:

Двойное N-точечное действительное БПФ → $2N \bullet \log_2 N + N$ действительных умножений и (13-31)

$3N \bullet \log_2 N + 2N$ действительных сложений. (13-31')

В (13-31) и (13-31') предполагается, что мы вычисляем только первые $N/2$ независимых отсчетов $X_a(m)$ и $X_b(m)$. Член N в (13-31) учитывает $N/2$ операций деления на 2 в (13-22) и $N/2$ делений на 2 в (13-24).

Итак, теперь мы можем установить, какова эффективность алгоритма двойного N-точечного действительного БПФ по сравнению с двумя отдельными комплексными N-точечными БПФ по основанию 2. Результат этого сравнения, однако, зависит от используемого для вычислений оборудования. Если наше арифметическое устройство затрачивает на умножение намного больше тактов, чем на сложение, то наибольшее значение имеет разность количества операций умножения. В этом случае процент уменьшения объема вычислений при двойном N-точечном действительном БПФ по сравнению с двумя отдельными N-точечными комплексными БПФ вычисляется как разность количества умножений, деленная на количество умножений, необходимое для вычисления двух отдельных БПФ, или

[1] Комплексное сложение $(a+jb) + (c+jd) = (a+c) + j(b+d)$ требует двух действительных сложений. Комплексное умножение $(a+jb)(c+jd) = ac-bd + j(ad+bc)$ требует двух действительных сложений и четырех действительных умножений.

$$\{[4N \bullet \log_2 N - (2N \bullet \log_2 N + N)]/(4N \bullet \log_2 N)\} \bullet 100\% =$$
$$= [(2 \bullet \log_2 N - 1)/(4 \bullet \log_2 N)] \bullet 100\ \%\ . \qquad (13\text{-}32)$$

Экономия количества операций, вычисленная только по умножениям, при использовании (13-32) показана в виде верхнего графика на рисунке 13.11. По количеству умножений при $N>32$ двойное N-точечное действительное БПФ оказывается более чем на 45 % экономичнее по сравнению с двумя отдельными N-точечными комплексными БПФ.

В аппаратуре, в которой используются высокоскоростные специализированные умножители, умножения и сложения могут выполняться за практически одинаковое количество тактов. В этом случае операции сложения так же важны, как и операции умножения. Следовательно, для правильного сравнения необходимо брать разность суммарного количества операций в (13-30) и (13-30') и суммарного количества операций в (13-31) и (13-31'). В этом случае относительное уменьшение количества операций вычисляется как разность общего количества операций, деленная на общее количество операций для двух отдельных N-точечных комплексных БПФ, или

$$\{[(4N \bullet \log_2 N + 6N \bullet \log_2 N) - (2N \bullet \log_2 N + N + 3N \bullet \log_2 N + 2N)]/$$
$$/(4N \bullet \log_2 N + 6N \bullet \log_2 N)\} \bullet 100\ \% =$$
$$= [(5 \bullet \log_2 N - 3)/(10 \bullet \log_2 N)] \bullet 100\ \%\ . \qquad (13\text{-}33)$$

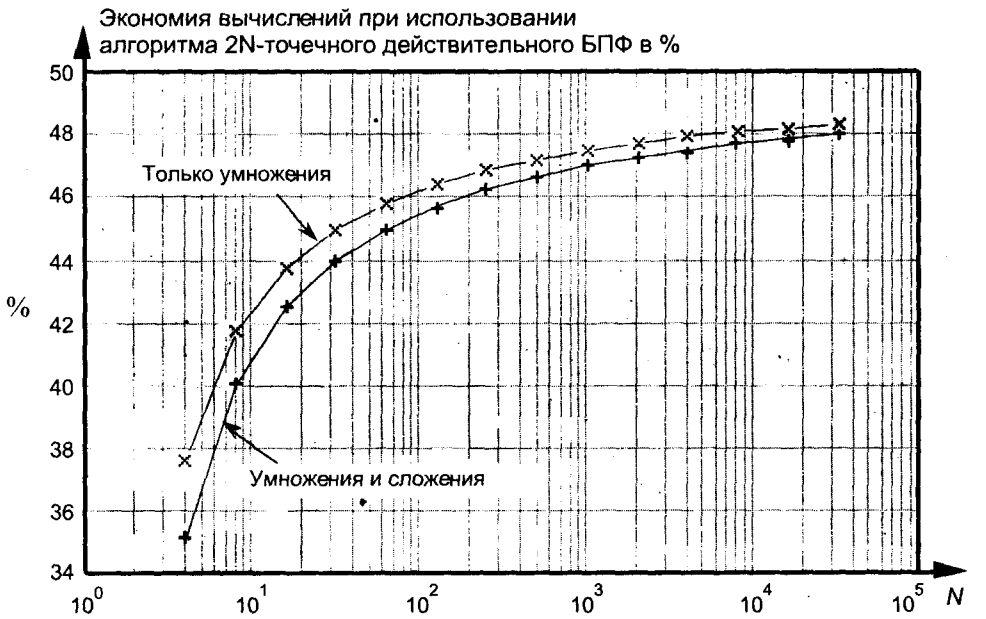


Рис. 13.11. Уменьшение количества операций при использовании алгоритма двойного N-точечного действительного БПФ по сравнению с двумя отдельными N-точечными комплексными БПФ. Верхняя кривая показывает экономию по умножениям. Нижняя кривая показывает экономию по сумме сложений и умножений

Полный выигрыш в объеме вычислений (по сумме умножений и сложений) в соответствии с (13-33) приведен в виде нижнего графика на рисунке 13.11. Этим мы завершаем обсуждение использования одного N-точечного комплексного БПФ для преобразования двух независимых N-точечных действительных последовательностей.

13.5.2. Вычисление 2N-точечного действительного БПФ

Подобно описанному выше алгоритму вычисления БПФ двух разных действительных последовательностей с помощью одного комплексного БПФ, существует метод вычисления БПФ $2N$-точечной действительной последовательности с помощью одного N-точечного комплексного БПФ. Этот алгоритм $2N$-точечного действительного БПФ, вывод которого также описан в литературе, основан на разбиении действительной последовательности длиной в $2N$ отсчетов на две части [19, 20]. Не просто на разбиении, а на разбиении, подобном разъединению двух частей замка-молнии — разделении четных и нечетных отсчетов. N входных отсчетов с четными индексами загружаются на место действительных частей комплексной N-точечной входной последовательности $x(n)$. Аналогично, N отсчетов с нечетными индексами загружаются на место мнимых частей последовательности $x(n)$. Для иллюстрации этого процесса предположим, что мы имеем входную действительную последовательность длиной в $2N$ отсчетов $a(n)$ при $0 \le n \le 2N-1$. Мы хотим получить преобразование последовательности $a(n)$, содержащее $2N$ отсчетов $X_a(m)$. Загружая четные и нечетные отсчеты $a(n)$ соответствующим образом в N-точечную последовательность $x(n)$, получаем

$$x(0) = a(0) + ja(1),$$

$$x(1) = a(2) + ja(3),$$

$$x(2) = a(4) + ja(5),$$

$$\cdots$$

$$x(N-1) = a(2N-2) + ja(2N-1). \qquad (13\text{-}34)$$

Подавая N комплексных значений вида (13-34) на N-точечное комплексное БПФ, мы получим результат $X(m) = X_r(m) + jX_i(m)$, где m меняется от 0 до $N-1$. Чтобы извлечь требуемое $2N$-точечное БПФ действительной последовательности $X_a(m) = X_{a,real}(m) + jX_{a,imag}(m)$ из $X(m)$, зададим следующие соотношения

$$X_r^+(m) = [X_r(m) + X_r(N-m)]/2, \qquad (13\text{-}35)$$

$$X_r^-(m) = [X_r(m) - X_r(N-m)]/2, \qquad (13\text{-}36)$$

$$X_i^+(m) = [X_i(m) + X_i(N-m)]/2, \qquad (13\text{-}37)$$

$$X_i^-(m) = [X_i(m) - X_i(N-m)]/2, \qquad (13\text{-}38)$$

Значения, полученные с помощью (13-35) — (13-38), используются затем как коэффициенты в следующих выражениях для получения действительных и мнимых частей $X_a(m)$:

$$X_{a,real}(m) = X_r^+(m) + \cos(\pi m/N) \bullet X_i^+(m) - \sin(\pi m/N) \bullet X_r^-(m), \quad (13\text{-}39)$$

и

$$X_{a,imag}(m) = X_i^-(m) - \sin(\pi m/N) \bullet X_i^+(m) - \cos(\pi m/N) \bullet X_r^-(m), \quad (13\text{-}40)$$

Вспомните теперь, что индекс исходной последовательности $a(n)$ меняется в пределах от 0 до $2N-1$, а индекс результата N-точечного БПФ m меняется от 0 до $N-1$. Мы подаем на вход преобразования $2N$ действительных отсчетов и получаем на выходе N комплексных отсчетов в частотной области, представляющих первую половину эквивалентного $2N$-точечного БПФ, от $X_a(0)$ до $X_a(N-1)$. Поскольку входная последовательность этого алгоритма $a(n)$ действительна, отсчеты от $X_a(N)$ до $X_a(2N-1)$ являются комплексно-сопряженными отсчетам $X_a(0)$ – $X_a(N-1)$, и их вычислять не нужно. Для более полного понимания всего процесса на рисунке 13.12 показаны шаги алгоритма $2N$-точечного действительного БПФ.

Чтобы продемонстрировать этот алгоритм на примере, подадим 8-точечную последовательность из (13-26) на вход алгоритма $2N$-точечного действительного БПФ. Разбивая отсчеты (13-26) в соответствии с (13-34), мы получаем новую входную последовательность БПФ:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0.3535 + j0.3535, \\ x(1) &= 0.6464 + j1.0607, \\ x(2) &= 0.3535 - j1.0607, \\ x(3) &= -1.3535 - j0.3535. \end{aligned} \quad (13\text{-}41)$$

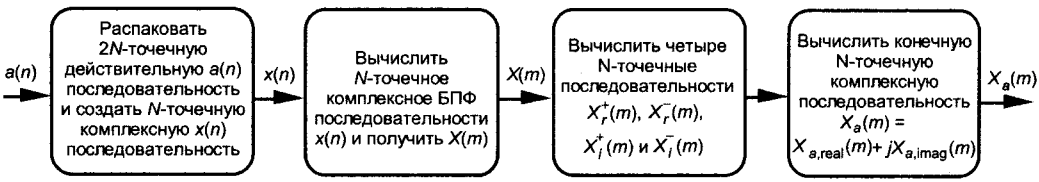


Рис. 13.12. Последовательность вычислений в алгоритме $2N$-точечного действительного БПФ

В данном примере $N = 4$, поэтому, вычислив 4-точечное БПФ комплексной последовательности (13-41), мы получаем

$$\begin{array}{lrll} & X_r(m) & X_i(m) & \\ & \downarrow & \downarrow & \\ X(m)= & 0.0000 & +j\,0.0000 & \leftarrow m = 0 \\ & +1.4142 & -j\,0.5857 & \leftarrow m = 1 \\ & +1.4141 & -j\,1.4141 & \leftarrow m = 2 \\ & -1.4142 & +j\,3.4141 & \leftarrow m = 3 \end{array} \quad (13\text{-}42)$$

Используя эти значения, мы получаем промежуточные коэффициенты согласно (13-35) — (13-38). Вычисление первого значения $X_r^+(0)$ снова напоминает нам о том, что последовательность $X(m)$ периодична с периодом N, так что $X(4) = X(0)$, и $X_r^+(0) = [X_r(0) + X_r(0)]/2 = 0$. Продолжая использовать. (13-35) — (13-38), получаем

$$
\begin{aligned}
&X_r^+(0) = 0, && X_r^-(0) = 0, && X_i^+(0) = 0, && X_i^-(0) = 0,\\
&X_r^+(1) = 0, && X_r^-(1) = 1.4142, && X_i^+(1) = 1.4142, && X_i^-(1) = -1.9999,\\
&X_r^+(2) = 1.4141, && X_r^-(2) = 0, && X_i^+(2) = -1.4144, && X_i^-(2) = 0,\\
&X_r^+(3) = 0, && X_r^-(3) = -1.4142, && X_i^+(3) = 1.4142, && X_i^-(3) = 1.9999\,. \qquad (13\text{-}43)
\end{aligned}
$$

Используя промежуточные значения из (13-43) в (13-39) и (13-40), получаем

$$
\begin{aligned}
&X_{a,real}(0) = (0) + \cos(\pi \bullet 0/4) \bullet (0) - \sin(\pi \bullet 0/4) \bullet (0)\\
&X_{a,imag}(0) = (0) - \sin(\pi \bullet 0/4) \bullet (0) - \cos(\pi \bullet 0/4) \bullet (0)\\
&X_{a,real}(1) = (0) + \cos(\pi \bullet 1/4) \bullet (1.4142) - \sin(\pi \bullet 1/4) \bullet (1.4142)\\
&X_{a,imag}(1) = (-1.9999) - \sin(\pi \bullet 1/4) \bullet (1.4142) - \cos(\pi \bullet 1/4) \bullet (1.4142)\\
&X_{a,real}(2) = (1.4141) + \cos(\pi \bullet 2/4) \bullet (-1.4144) - \sin(\pi \bullet 2/4) \bullet (0)\\
&X_{a,imag}(2) = (0) - \sin(\pi \bullet 2/4) \bullet (-1.4144) - \cos(\pi \bullet 2/4) \bullet (0)\\
&X_{a,real}(3) = (0) + \cos(\pi \bullet 3/4) \bullet (1.4142) - \sin(\pi \bullet 3/4) \bullet (-1.4142)\\
&X_{a,imag}(3) = (1.9999) - \sin(\pi \bullet 3/4) \bullet (1.4142) - \cos(\pi \bullet 3/4) \bullet (-1.4142) \qquad (13\text{-}44)
\end{aligned}
$$

Вычисляя значения синусоидальных и косинусоидальных членов в (13-44), получаем

$$
\begin{aligned}
&X_{a,real}(0) = (0) + (1) \bullet (0) - (0) \bullet (0) = 0,\\
&X_{a,imag}(0) = (0) - (0) \bullet (0) - (1) \bullet (0) = 0,\\
&X_{a,real}(1) = (0) + (0.7071) \bullet (1.4142) - (0.7071) \bullet (1.4142) = 0,\\
&X_{a,imag}(1) = (-1.9999) - (0.7071) \bullet (1.4142) - (0.7071) \bullet (1.4142) = -3.9999,\\
&X_{a,real}(2) = (1.4141) + (0) \bullet (-1.4144) - (1) \bullet (0) = 1.4141,\\
&X_{a,imag}(2) = (0) - (1) \bullet (-1.4144) - (0) \bullet (0) = 1.4144,\\
&X_{a,real}(3) = (0) + (-0.7071) \bullet (1.4142) - (0.7071) \bullet (-1.4142) = 0,\\
&X_{a,imag}(3) = (1.9999) - (0.7071) \bullet (1.4142) - (-0.7071) \bullet (-1.4142) = 0. \qquad (13\text{-}45)
\end{aligned}
$$

И, наконец, получаем окончательный правильный результат

$$X_a(0) = X_{a,real}(0) + jX_{a,imag}(0) = 0 + j0 = 0 \angle 0°,$$

$$X_a(1) = X_{a,real}(1) + jX_{a,imag}(1) = 0 - j3.999 = 4 \angle -90°,$$

$$X_a(2) = X_{a,real}(2) + jX_{a,imag}(2) = 1.4141 + j1.4144 = 2 \angle 45°,$$

$$X_a(3) = X_{a,real}(3) + jX_{a,imag}(3) = 0 + j0 = 0 \angle 0° \qquad (13\text{-}46)$$

После выполнения всех операций согласно (13-35) — (13-40), читатель может задуматься об эффективности алгоритма $2N$-точечного действительного БПФ. Используя тот же подход, который мы применили в случае двойного N-точечного действительного БПФ, покажем, что алгоритм $2N$-точечного действительного БПФ на самом деле обеспечивает некоторый выигрыш. Прежде всего, мы знаем, что отдельное $2N$-точечное БПФ по основанию 2 содержит $(2N/2) \bullet \log_2 2N = N(\log_2 N+1)$ бабочек и требует

$2N$-точечное комплексное БПФ → $4N \bullet (\log_2 N+1)$ действительных умножений (13-47)

и

$6N \bullet (\log_2 N+1)$ действительных сложений (13-47')

Если мы сложим количество действительных умножений и действительных сложений, необходимое для вычисления N-точечного комплексного БПФ, плюс операции, необходимы для (13-35) — (13-38) плюс операции в (13-39) и (13-40), то получится, что полное $2N$-точечное действительное БПФ требует

$2N$-точечное действительное БПФ → $2N \bullet \log_2 N + 8N$ действительных умножений (13-48)

и

$3N \bullet \log_2 N + 8N$ действительных сложений (13-48')

Итак, используя те же соображения, которые привели нас к (13-32), мы получаем относительное уменьшение количества умножений в алгоритме $2N$-точечного действительного БПФ по отношению к $2N$-точечному комплексному БПФ в виде

$$[4N \bullet (\log_2 N+1) - (2N \bullet \log_2 N + 8N)]/[4N \bullet (\log_2 N+1)] \bullet 100\,\% =$$

$$= [2N \bullet \log_2 N + 2N - N \bullet \log_2 N - 4N)]/[2N \bullet \log_2 N + 2N] \bullet 100\,\% =$$

$$= [\log_2 N - 2]/[2 \bullet \log_2 N + 2] \bullet 100\,\% . \qquad (13\text{-}49)$$

Выигрыш согласно (13-49) (с учетом только умножений) показан как нижний график на рисунке 13.13. Относительно умножений алгоритм $2N$-точечного действительного БПФ обеспечивает экономию больше 30 % при $N \geq 128$, или при обработке действительных последовательностей, длина которых не меньше 256.

Для аппаратуры, использующей высокоскоростные умножители, мы должны учитывать как умножения, так и сложения. Подходящее сравнение обеспечивается

разностью общего количества операций в (13-47) и (13-47') и общего количества операций в (13-48) и (13-48'). В этом случае относительная экономия вычислений в процентах вычисляется как

$$[4N \bullet (\log_2 N+1) + 6N \bullet (\log_2 N+1) - (2N \bullet \log_2 N + 8N + 3N \bullet \log_2 N + 8N)]/$$
$$/[4N \bullet (\log_2 N+1) + 6N \bullet (\log_2 N+1)] \bullet 100\,\% =$$
$$[10 \bullet (\log_2 N+1) - 5 \bullet \log_2 N - 16]/[10 \bullet (\log_2 N+1)] \bullet 100\,\% =$$
$$= [5 \bullet \log_2 N - 6]/[10 \bullet (\log_2 N+1)] \bullet 100\,\% . \qquad (13\text{-}50)$$

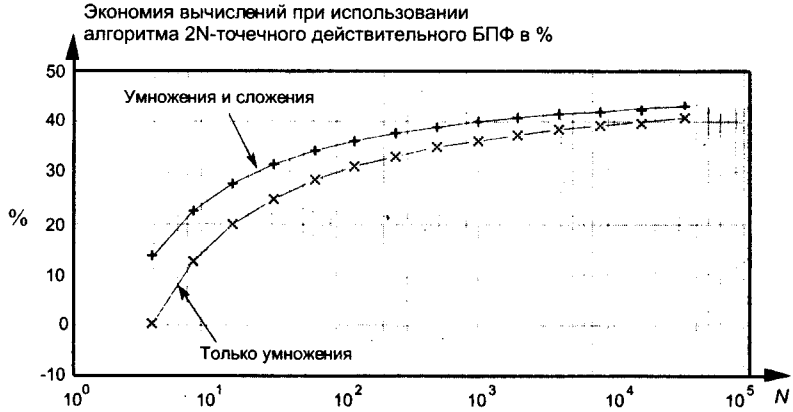


Рис. 13.13. Экономия объема вычислений при использовании алгоритма *2N*-точечного действительного БПФ по сравнению с отдельным *2N*-точечным комплексным БПФ. Верхний график показывает экономию с учетом и сложений, и умножений. Нижний график показывает экономию с учетом только умножений

Экономия полного количества операций (умножений и сложений) согласно (13-50) в зависимости от N показана в виде верхнего графика на рисунке 13.13.

13.6. Вычисление обратного БПФ с помощью прямого БПФ

Часто в системах цифровой обработки сигналов требуется вычислять обратное БПФ. Это может создавать проблемы, если имеющаяся аппаратура или библиотечная процедура могут выполнять только прямое БПФ. К счастью, существуют два простых способа вычисления обратного БПФ, используя прямое БПФ.

13.6.1. Первый метод вычисления обратного БПФ

Первый метод выполнения обратного БПФ реализуется в соответствии со схемой, показанной на рисунке 13.14.

Чтобы понять, как она работает, рассмотрим выражения для прямого и обратного ДПФ:

Прямое ДПФ →
$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N} \tag{13-51}$$

Обратное ДПФ →
$$x(n) = (1/N)\sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j2\pi nm/N}. \tag{13-52}$$

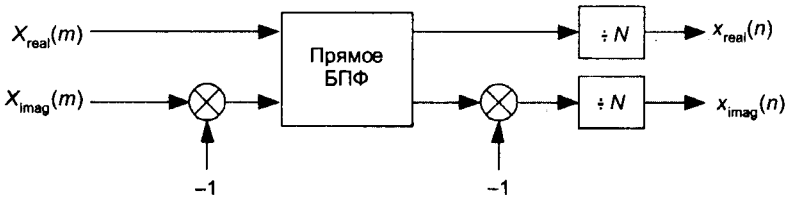


Рис. 13.14. Последовательность обработки при использовании первого метода вычисления обратного БПФ

Повторим: нашей целью является использование преобразования, описываемого выражением (13-51), для реализации (13-52). На первом шаге мы используем операцию комплексного сопряжения. Напомним, что эта операция (обозначаемая надстрочным индексом *) состоит в инверсии знака показателя степени комплексной экспоненты — если $x = e^{j\phi}$, то $x^* = e^{-j\phi}$. Итак, на первом шаге мы заменяем обе части (13-52) комплексно-сопряженными величинами, а именно

$$x^*(n) = (1/N)\Big[\sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j2\pi nm/N}\Big]^*. \tag{13-53}$$

Одно из свойств комплексных чисел, обсуждаемое в приложении А, состоит в том, что сопряженное произведения равно произведению сопряженных: если $c = ab$, то $c^* = (ab)^* = a^*b^*$. Используя это свойство, мы можем показать, что правая часть (13-53) имеет вид

$$x^*(n) = (1/N)\sum_{m=0}^{N-1} X(m)^*(e^{j2\pi nm/N})^* =$$
$$= (1/N)\sum_{m=0}^{N-1} X(m)^* e^{-j2\pi nm/N}. \tag{13-54}$$

Потерпите еще немного, мы почти у цели. Обратите внимание на сходство выражения (13-54) и выражения для прямого ДПФ (13-51). Если мы выполним прямое ДПФ последовательности, сопряженной исходной последовательности $X(m)$ в (13-54), и разделим результат на N, мы получим последовательность, сопряженную нашей искомой последовательности $x(n)$. Построив сопряжение для обеих частей (13-54), мы получаем более прямое выражение для $x(n)$:

$$x(n) = (1/N)\Big[\sum_{m=0}^{N-1} X(m)^* e^{-j2\pi nm/N}\Big]^*. \tag{13-55}$$

13.6.2. Второй метод вычисления обратного БПФ

Второй метод реализуется в соответствии с интересной схемой, показанной на рисунке 13.15.

В этой остроумной схеме нам не нужно возиться с сопряженными последовательностями. Вместо этого мы просто меняем местами действительные и мнимые части последовательностей комплексных отсчетов [21]. Чтобы понять, как работает эта схема, рассмотрим еще раз выражение для обратного ДПФ, представив входную последовательность $X(m)$ в виде действительной и мнимой части и помня, что $e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$.

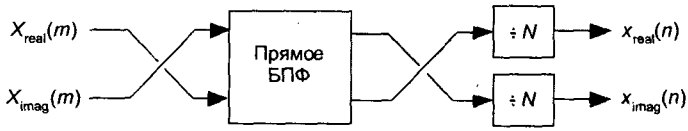


Рис. 13.15. Обработка данных вторым методом вычисления обратного БПФ

Обратное ДПФ→

$$x(n) = (1/N)\sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j2\pi nm/N} =$$

$$= (1/N)\sum_{m=0}^{N-1}[X_{real}(m) + jX_{imag}(m)][\cos(2\pi mn/N) + + j\sin(2\pi mn/N)]\,. \qquad (13\text{-}56)$$

Перемножение комплексных членов (13-56) дает нам

$$= (1/N)\sum_{m=0}^{N-1}[X_{real}(m)\cos(2\pi mn/N) - X_{imag}(m)\sin(2\pi mn/N)] + + j[X_{real}(m)\sin(2\pi mn/N) + X_{imag}(m)\cos(2\pi mn/N)]\,. \qquad (13\text{-}57)$$

Формула (13-57) представляет общее выражение для обратного ДПФ, и мы скоро покажем, что процесс, представленный на рисунке 13.15, реализует это выражение. Поскольку $X(m) = X_{real}(m) + jX_{imag}(m)$, перестановка этих членов приводит к

$$X_{swap}(m) = X_{imag}(m) + jX_{real}(m) \qquad (13\text{-}58)$$

Прямое ДПФ последовательности $X_{swap}(m)$ имеет вид

Прямое ДПФ→

$$\sum_{m=0}^{N-1}[X_{imag}(m) + jX_{real}(m)][\cos(2\pi mn/N) - j\sin(2\pi mn/N)]\,. \qquad (13\text{-}59)$$

Перемножение комплексных множителей в (13-59) дает

Прямое ДПФ →

$$\sum_{m=0}^{N-1}[X_{imag}(m)\cos(2\pi mn/N) + X_{real}(m)\sin(2\pi mn/N)] + + j[X_{real}(m)\cos(2\pi mn/N) - X_{imag}(m)\sin(2\pi mn/N)]\,. \qquad (13\text{-}60)$$

Поменяв местами действительную и мнимую части результата этого ДПФ, мы получаем то, к чему стремились:

$$\textbf{Прямое ДПФ}_{\textbf{swap}} \rightarrow \sum_{m=0}^{N-1}[X_{real}(m)\cos(2\pi mn/N) - X_{imag}(m)\sin(2\pi mn/N)] + \\ +j[X_{imag}(m)\cos(2\pi mn/N) + X_{real}(m)\sin(2\pi mn/N)]. \quad (13\text{-}61)$$

Если мы разделим (13-61) на N, то получим в точности выражение для обратного ДПФ (13-57), и это как раз то, что мы хотели показать.

13.7. Упрощенная структура КИХ-фильтра

Если мы реализуем цифровой КИХ-фильтр с линейной ФЧХ, используя стандартную структуру, показанную на рисунке 13.16 (a), то мы можем уменьшить количество умножителей в случае, когда длина фильтра нечетна. Посмотрим на верхнюю часть рисунка 13.16 (a), где коэффициенты КИХ-фильтра с пятью ответвлениями обозначены как $h(0) - h(4)$, а выходной сигнал $y(n)$ вычисляется как

$$y(n) = h(4)\,x(n-4) + h(3)x(n-3) + h(2)x(n-2) + h(1)x(n-1) + h(0)x(n) \quad (13\text{-}62)$$

Если коэффициенты КИХ-фильтра симметричны, мы можем уменьшить количество умножений: если $h(4) = h(0)$ и $h(3) = h(1)$, мы можем реализовать (13-62) как

$$y(n) = h(4)[x(n-4)+x(n)] + h(3)[x(n-3)+x(n-1)] + h(2)x(n-2) \quad (13\text{-}63)$$

которое требует всего трех умножений, как показано в нижней части рисунка 13.16 (a). В данном примере фильтра с пятью ответвлениями мы убрали два умножителя за счет добавления двух сумматоров. Эта структура с минимальным количеством умножителей называется сложенной структурой КИХ-фильтра.

В общем случае КИХ-фильтров с симметричными коэффициентами, имеющих S ответвлений, мы можем обменять $(S-1)/2$ умножителей на $(S-1)/2$ сумматоров, когда S является нечетным числом. Таким образом, в случае нечетного количества ответвлений нам необходимо выполнить только $(S-1)/2 + 1$ умножений на каждый выходной отсчет фильтра. В случае четного количества симметричных ответвлений, как показано на рисунке 13.16 (b), этот метод позволяет нам уменьшить количество необходимых умножений до $S/2$. В настоящее время программируемые ЦПОС не могут использовать преимущества сложенной структуры КИХ-фильтров, потому что она требует выполнения сложения перед каждой командой умножения с накоплением.

13.8. Уменьшение шума квантования АЦП

В разделе 12.3 мы обсуждали математические детали и вредные эффекты шума квантования аналого-цифровых преобразователей (АЦП). Для уменьшения шума квантования практикующие специалисты по ЦОС обычно используют два приема. Это *сверхдискретизация* (oversampling) и *рандомизация*, или *размывание* (dithering).

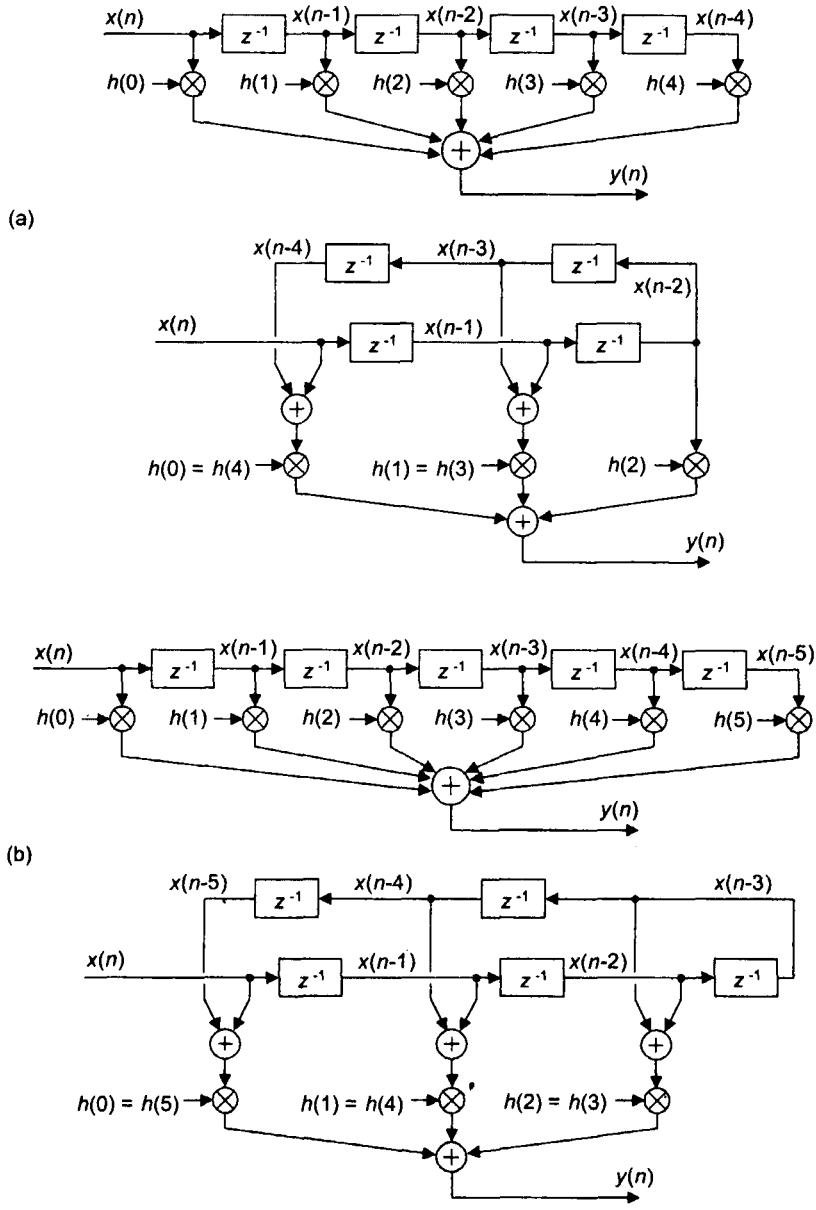


Рис. 13.16. Обычная и упрощенная структуры КИХ-фильтра: (a) с нечетным количеством ответвлений; (b) с четным количеством ответвлений

13.8.1. Сверхдискретизация

Сущность процесса сверхдискретизации с точки зрения уменьшения шума квантования АЦП очевидна. Мы просто увеличиваем частоту дискретизации f_s до значения, превышающего минимально необходимое согласно критерию Найквиста (вдвое большее, чем ширина спектра сигнала), а затем пропускаем дискре-

тизированный сигнал через цифровой ФНЧ. Что может быть проще? В основе теории процесса сверхдискретизации лежит предположение о том, что погрешность квантования является случайной величиной с равномерным распределением, и мощность (дисперсия) шума квантования равна квадрату значения МЗР преобразователя, деленному на 12, или

$$\begin{aligned} &\textit{Общая мощность шума квантования} = \\ &= \sigma^2 = (\textit{значение МЗР})^2/12. \end{aligned} \tag{13-64}$$

Мы вывели это выражение в разделе 12.3. Еще одно предположение состоит в том, что отсчеты шума квантования являются совершенно случайными, и в частотной области шум квантования имеет равномерный спектр. (Эти предположения верны, когда диапазон изменения входного сигнала АЦП составляет значительную часть допустимого диапазона входных сигналов преобразователя и входной сигнал не является периодическим или его период превышает интервал наблюдения.) Далее мы рассмотрим понятие спектральной плотности мощности (СПМ) шума квантования, описывающей шум квантования в частотной области и измеряемой в единицах мощности шума на один Герц, как показано на рисунке 13.17. Таким образом, мы можем описать шум квантования мощностью (при желании, в Ваттах), приходящейся на единицу полосы частот.

В мире дискретных систем наше предположение о равномерности спектра означает, что полная мощность шума квантования (фиксированное значение, определяемое напряжением, соответствующим одному МЗР) распределяется равномерно в полосе частот от $-f_s/2$ до $+f_s/2$, как показано на рисунке 13.17. Высота прямоугольной СПМ равна площади прямоугольника (общей мощности шума квантования), деленной на ширину прямоугольника (f_s), или

$$\begin{aligned} &\textit{СПМ}_{\textit{шума}} = [(\textit{значение МЗР})^2/12]\,(1/f_s) = \\ &= (\textit{значение МЗР})^2/(12f_s) \end{aligned} \tag{13-65}$$

и измеряется в Вт/Гц.

Рис. 13.17. Спектральная плотность мощности шума идеального АЦП

Далее возникает следующий вопрос: «Как можно уменьшить уровень СПМ шума, определяемый выражением (13-65)?» Мы можем уменьшить значение МЗР (в Вольтах), находящееся в числителе, используя АЦП с дополнительными битами. Такой прием, конечно же, понизит СПМ шума, но это дорогостоящее решение. Дополнительные биты АЦП стоят денег. Будет лучше, если мы увеличим знаменатель (13-65), повысив частоту дискретизации f_s.

Рассмотрим интересующий нас сигнал низкого уровня, спектр которого изображен на рисунке 13.18 (а). Повысив частоту дискретизации $f_{s,old}$ до некоторого

значения $f_{s,new}$ (сверхдискретизация), мы распределяем полную мощность шума (фиксированное значение) по более широкой полосе частот, как показано на рисунке 13.18 (b). Площади затененных прямоугольников на рисунках 13.18 (a) и 13.18 (b) равны. Затем мы пропускаем выходные отсчеты АЦП через ФНЧ. На выходе фильтра уровень шума квантования, искажающего сигнал, будет ниже, чем на входе.

Улучшение отношения сигнал/шум квантования в децибелах, получаемое за счет сверхдискретизации, вычисляется в соответствии с выражением:

$$\textit{улучшение } SNR_{АЦП} = 10\log_{10}(f_{s,new}/f_{s,old}). \qquad (13\text{-}66)$$

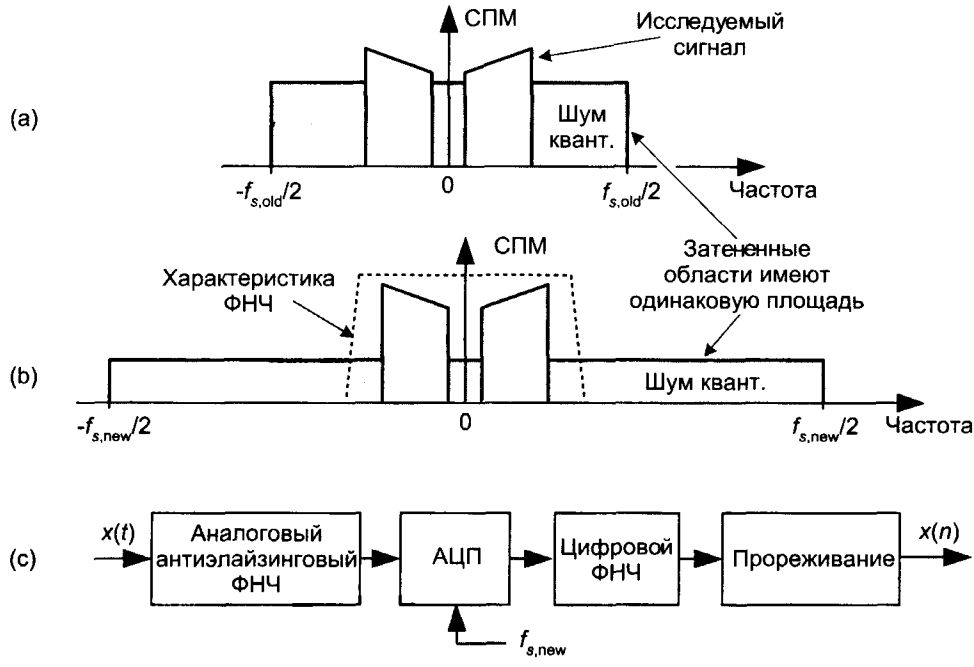


Рис. 13.18. Пример сверхдискретизации: (a) СПМ шума при частоте дискретизации $f_{s,old}$; (b) СПМ шума на более высокой частоте дискретизации $f_{s,new}$; (c) стадии обработки

Например, если $f_{s,old} = 100$ кГц, а $f_{s,new} = 400$ кГц, улучшение $SNR_{АЦП} = 10\log_{10}(4) = 6.02$ дБ. Следовательно, используя сверхискретизацию с коэффициентом 4 (с последующей фильтрацией), мы выигрываем в отношении сигнал/шум квантования столько же, сколько при увеличении разрядности АЦП на один бит. В результате мы можем получить характеристики, соответствующие длине слова $N+1$ бит, используя N-разрядный АЦП, т. к. мы улучшаем разрешение сигнала за счет увеличения частоты дискретизации.

После цифровой фильтрации мы можем выполнить прореживание, вернувшись к частоте дискретизации $f_{s,old}$ без ухудшения отношения сигнал/шум. Конечно, количество бит, используемое для представления коэффициентов и

регистров ФНЧ, должно превышать разрядность АЦП, иначе эта схема работать не будет.

Повышение частоты дискретизации в большинстве случаев позволяет также использовать более простой аналоговый антиэлайзинговый фильтр, чем при более низких частотах дискретизации.

13.8.2. Рандомизация

Рандомизация, другой метод уменьшения влияния шума квантования, представляет собой добавление шума к аналоговому сигналу до его преобразования. Эта схема, которая на первый взгляд не производит впечатления разумной, действительно может быть полезной, что легко показать на примере. Рассмотрим преобразование аналоговой синусоиды низкого уровня, показанной на рисунке 13.19 (a), с амплитудой, едва превышающей значение МЗР АЦП, в результате которого получаются отсчеты $x_1(n)$, показанные на рисунке 13.19 (b). Выходная последовательность $x_1(n)$ получается клиппированной. В результате в спектре сигнала появляются самые разнообразные *гармоники*. По-другому объяснить наличие этих гармоник можно, заметив периодичность шума квантования на рисунке 13.19 (c).

На рисунке 13.20 (a) мы показываем спектр $x_1(n)$ с хорошо заметными гармониками шума квантования. Стоит заметить, что усреднение спектров в данном случае не позволит нам выделить некоторый спектральный компонент на фоне этих гармоник. Поскольку шум квантования сильно коррелирован с входным сигналом, — шум квантования имеет тот же период, что и входной синусоидальный сигнал — усреднение спектров будет усиливать также и гармоники. Здесь на помощь может прийти рандомизация.

Рандомизация — это добавление случайного аналогового шума к синусоидальному сигналу перед его оцифровкой. Этот метод дает зашумленный аналоговый сигнал, который более часто пересекает границы уровня квантования, соответствующего МЗР, в результате чего шум квантования получается значительно более случайным, с пониженным уровнем нежелательных гармоник, как показано на рисунке 13.20 (b). Рандомизация повышает средний уровень шума в частотной области, но улучшает отношение сигнал/шум SNR_2. Рандомизация разрушает корреляцию шума квантования с входным сигналом, и мы можем выполнять требуемое усреднение.

Рандомизация оказывается полезной, когда мы оцифровываем:

- аналоговые сигналы низкого уровня;
- периодические аналоговые сигналы (как, например, синусоида с четным количеством периодов на интервале накопления);
- медленно меняющиеся (очень низкой частоты, включая постоянные) аналоговые сигналы.

Стандартная реализация рандомизации показана на рисунке 13.21 (a). Типовое СКЗ широкополосного аналогового шума, генерируемого шумовым диодом или микросхемой шумового генератора, составляет от 1/3 до 1 МЗР.

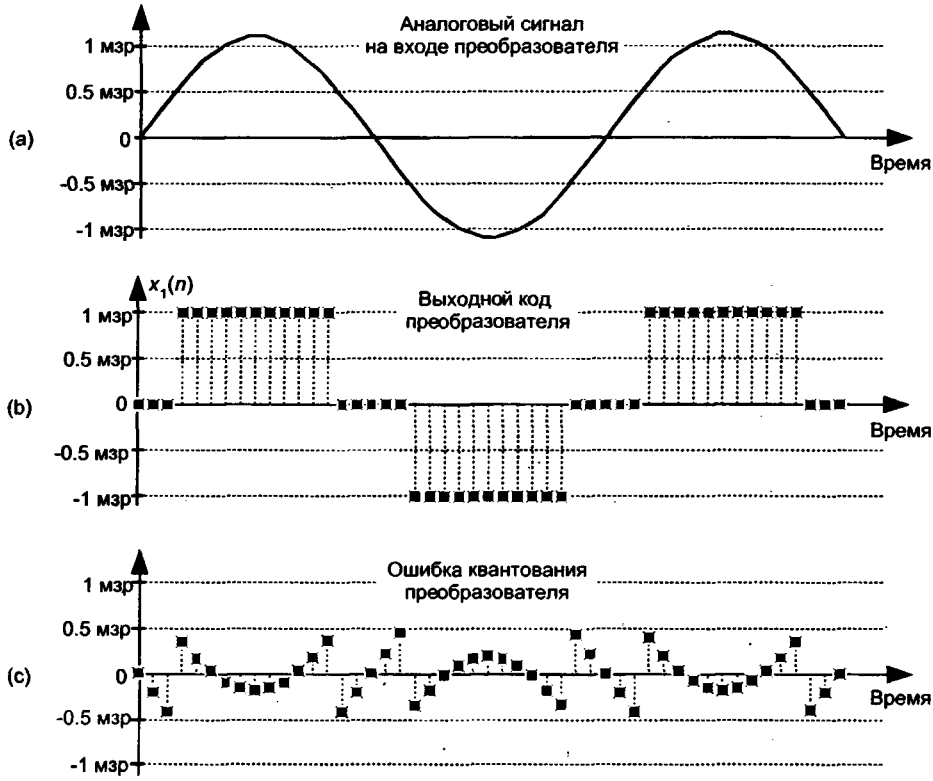


Рис. 13.19. Рандомизация: (a) аналоговый сигнал низкого уровня; (b) выходная последовательность АЦП; (c) ошибка квантования на выходе преобразователя

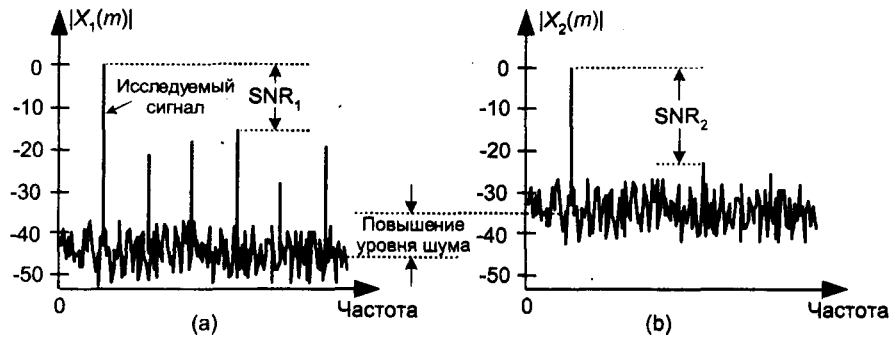


Рис. 13.20. Спектр дискретной синусоиды низкого уровня: (a) без рандомизации; (b) с рандомизацией

Как установили инженеры, в высококачественных аудиосистемах добавление случайного шума от двух отдельных генераторов шума улучшает подавление звукового фонового шума низкого уровня. Функция плотности вероятности (ФПВ) суммы двух источников шума (имеющих прямоугольные ФПВ) является сверткой индивидуальных ФПВ. Поскольку свертка двух прямоугольных функций

дает треугольник, эту схему с использованием двух источников шума называют триангулярной рандомизацией. Типовой шум при триангулярной рандомизации имеет СКЗ, эквивалентное двум МЗР.

В ситуации, когда интересующий нас сигнал занимает некоторую хорошо определенную часть полного диапазона частот, более полезным может оказаться введение узкополосного шума, спектр которого лежит за пределами частотного диапазона полезного сигнала, а СКЗ эквивалентно 4 – 6 МЗР. (Помните, однако: размывающий сигнал не может быть слишком узкополосным, как синусоида. Шум квантования синусоидального сигнала приведет к появлению еще большего количества случайных гармоник!) Этот узкополосный шум можно затем удалить с помощью цифровой фильтрации.

И последнее замечание относительно рандомизации: для улучшения способности обнаруживать сигналы низкого уровня можно добавить аналоговый шум, а затем вычесть его из оцифрованных данных, как показано на рисунке 13.21 (b). В этом случае мы рандомизируем шум квантования, но минимизируем общую мощность шума, добавляемого к аналоговому сигналу. Эта схема используется в коммерческом аналоговом тестовом оборудовании [22, 23].

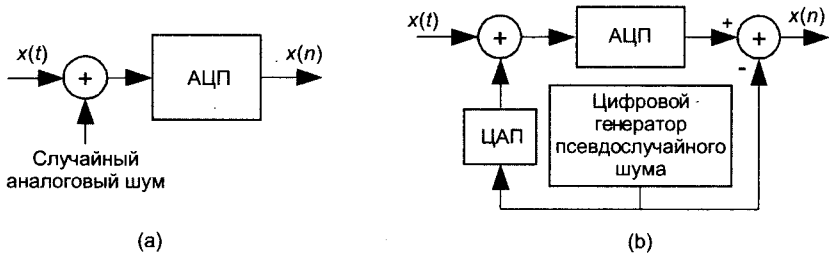


Рис. 13.21. Реализации рандомизации: (a) стандартная схема рандомизации; (b) улучшенная схема рандомизации с вычитанием шума

13.9. Методы испытаний аналого-цифровых преобразователей

Можно упростить испытания АЦП, используя преимущества цифровой обработки сигналов. В этом разделе мы познакомим вас с двумя схемами измерения параметров преобразователей: во-первых, с методом, использующим БПФ для оценки общего уровня шума преобразователя, и, во-вторых, с методом анализа гистограмм для обнаружения пропущенных кодов.

13.9.1. Оценка шума квантования АЦП с помощью БПФ

Совокупность шума квантования, пропущенных бит, гармонических искажений и других нелинейностей может быть оценена путем анализа спектрального состава выходных последовательностей АЦП. Ухудшение качества преобразователя, вызванное этими нелинейностями, нетрудно распознать, т. к. они проявляются как нежелательные спектральные компоненты и повышенный уровень

шума в выходной последовательности АЦП. Традиционный метод тестирования состоит в подаче на вход АЦП синусоидального аналогового напряжения и изучении спектра выходной последовательности оцифрованных отсчетов. Для вычисления спектра выходной последовательности мы можем использовать БПФ, но для повышения чувствительности измерений необходимо минимизировать утечку спектра БПФ. Традиционное взвешивание окнами во временной области, однако, обеспечивает недостаточное для тестирования высококачественных АЦП снижение утечки.

Прием, который позволяет решить проблему утечки, состоит в том, что на вход АЦП подается синусоидальное напряжение с частотой, отношение которой к частоте дискретизации представимо отношением целых чисел, как показано на рисунке 13.22 (а). Здесь частота равна mf_s/N, где m — целое число, f_s — частота дискретизации, а N — размер БПФ. На рисунке 13.22 (а) показана выходная последовательность идеального АЦП $x(n)$ при подаче на его вход аналоговой синусоиды, имеющей ровно восемь периодов на интервале времени, соответствующем $N = 128$ выходным отсчетам. В этом случае частота входного сигнала, нормированная относительно частоты дискретизации f_s, равна $8f_s/128$ Гц. Вспомним главу 3, в которой указывалось, что выражение mf_s/N определяет частоты анализа, или центральные частоты бинов, ДПФ, а входная синусоидальная последовательность, частота которой совпадает с центральной частотой бина, не вызывает проблем утечки.

Первая половина отсчетов 128-точечного БПФ последовательности $x(n)$ показана в логарифмическом масштабе на рисунке 13.22 (b), при этом частота входного тона попадает точно на центр бина $m = 8$, и утечка БПФ сильно ослаблена. Если бы частота дискретизации была равна 1 МГц, то входной тон должен был бы иметь частоту $8(10^6/128) = 62.5$ кГц. Чтобы реализовать эту схему, мы должны обеспечить точную синхронизацию тестового генератора аналогового сигнала с тактовой частотой АЦП f_s Гц. Благодаря такой синхронизации эту схему тестирования АЦП называют *когерентной дискретизацией* [24 - 26]. При этом генератор аналогового сигнала и генератор синхросигнала АЦП, обеспечивающий f_s, не должны «плыть» друг относительно друга — они должны оставаться когерентными. (Здесь следует быть осторожным относительно терминологии, т. к. схемы квадратурной дискретизации, описанные в главе 8, также называют *когерентной дискретизацией*, но они не имеют никакого отношения к рассматриваемой здесь процедуре тестирования АЦП.)

Как оказывается, некоторые значения m имеют преимущества перед другими значениями. Обратите внимание на то, что на рисунке 13.22 (а), при $m = 8$, АЦП выдает на выход только девять различных значений. Эти значения повторяются снова и снова. Как показано на рисунке 13.23, при $m=7$ мы получаем намного больше разных значений выходных отсчетов.

Поскольку необходимо проверить как можно больше выходных слов АЦП, сохраняя в то же время случайность шума квантования, пользователи этой схемы тестирования АЦП придумали другой прием. Они обнаружили, что использование простых чисел (3, 5, 7, 11 и т. д.) в качестве значений m минимизирует количество избыточных значений выходных слов АЦП.

На рисунке 13.24 (а) показан утрированный пример нелинейности АЦП, когда несколько выходных отсчетов искажены вследствие пропуска битов, при $m = 8$. Результат БПФ этой искаженной последовательности $x(n)$ показан на рисунке 13.24 (b), где налицо повышенный уровень шума по сравнению с рисунком 13.22 (b).

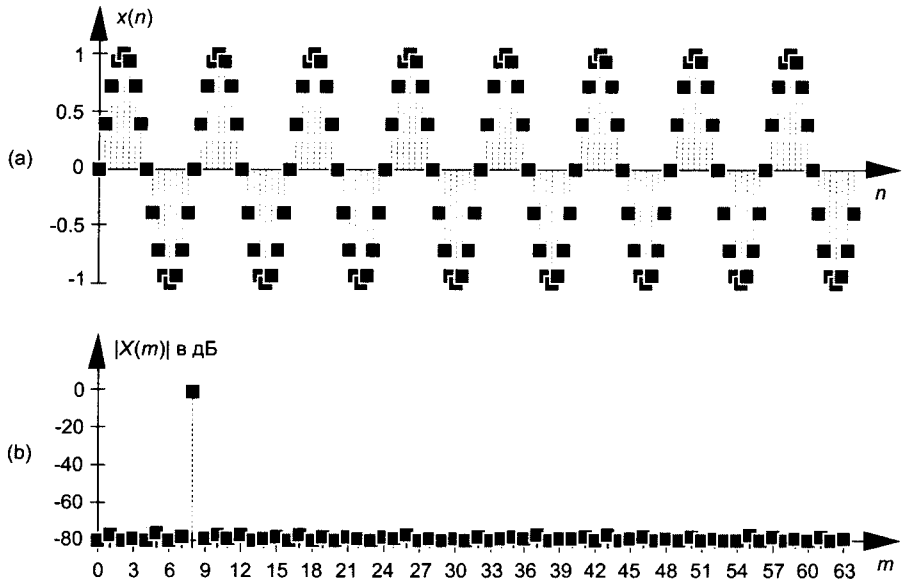


Рис. 13.22. Выходной сигнал идеального АЦП при подаче на вход аналоговой синусоиды частотой $8f_s/128$ Гц: (a) выходная последовательность во времени; (b) амплитудный спектр в дБ

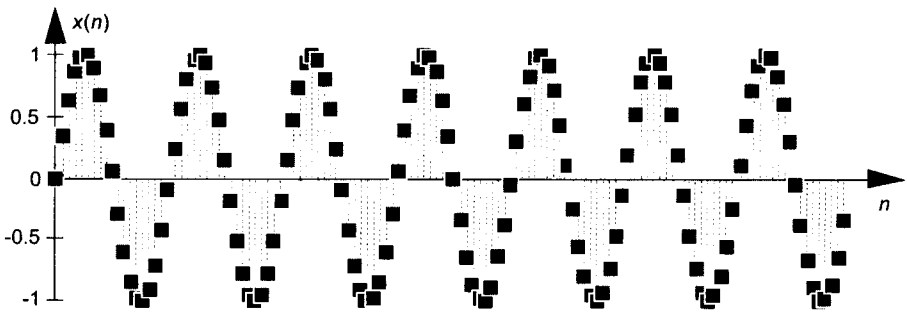


Рис. 13.23. Выходные отсчеты АЦП при подаче на вход семи периодов синусоиды

Реальный уровень шума квантования АЦП относительно уровня полезного сигнала будет выше, чем показанный на рисунке 13.24 (b). Это объясняется внутренним усилением БПФ (обсуждавшимся в разделе 3.12.1), которое *поднимает* высокоуровневый спектральный компонент $m = 8$ над уровнем шума. Следовательно, если мы используем этот метод тестирования АЦП, то мы должны учитывать усиление БПФ $10\log_{10}(N/2)$, как показано на рисунке 13.24 (b).

Для полного описания динамических характеристик АЦП мы должны выполнить такое тестирование для разных значений частоты и амплитуды сигнала[1]. Главное здесь то, что мы можем в полной мере использовать преимущества БПФ,

[1] Аналоговая синусоида, подаваемая на вход АЦП, конечно, должна быть как можно чище. Любое искажение аналогового сигнала проявится в результатах БПФ и может быть принято за нелинейность АЦП.

сведя к минимуму утечку спектра, если частота входного сигнала равна mf_s/N, где m меньше $N/2$ в соответствии с критерием Найквиста.

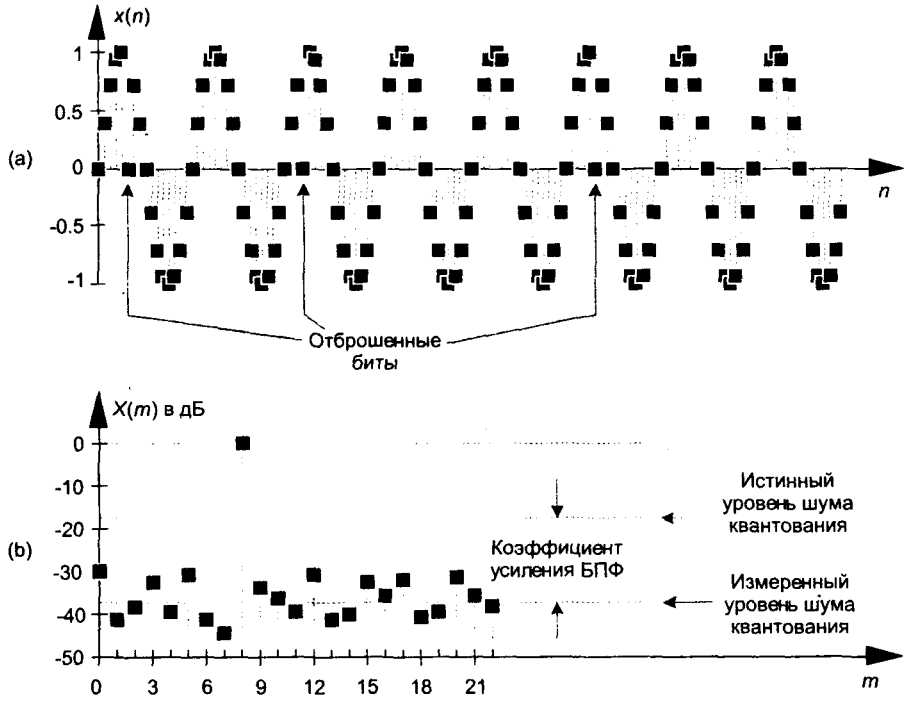


Рис. 13.24. Выходной сигнал неидеального АЦП с пропуском битов: (a) отсчеты во временной области; (b) амплитудный спектр в дБ

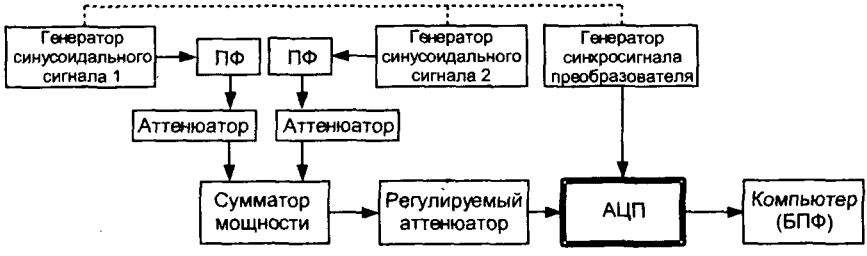


Рис. 13.25. Конфигурация аппаратуры для тестирования АЦП

И, наконец, часто на вход АЦП подают сумму двух аналоговых тонов для оценки уровня интермодуляционных искажений АЦП, который в свою очередь характеризует динамический диапазон преобразователя. При этом частоты обоих тонов должны определяться по формуле mf_s/N. На рисунке 13.25 показана конфигурация испытательного стенда. Разумно будет использовать полосовые фильтры (ПФ) для улучшения спектральной чистоты выходных сигналов генераторов, а также включить аттенюаторы с небольшим фиксированным коэффициентом передачи, чтобы исключить влияние генераторов друг на друга. (Я рекомендую использовать для этого аттенюаторы с ослаблением в 3 дБ.) Сумматор мощности обычно представляет собой аналоговый расщепитель в инверсном

включении, а генератор синхросигнала АЦП выдает последовательность прямоугольных импульсов. Штриховые линии на рисунке 13.25 показывают, что все три генератора синхронизируются от одного источника опорной частоты.

13.9.2. Обнаружение пропущенных кодов

Пропущенные коды представляют собой одну из проблем, стоящих перед разработчиками АЦП. Этот дефект возникает, когда преобразователь не способен выдавать определенные двоичные слова (коды). Представим себе 8-битовый АЦП, на вход которого подается аналоговая синусоида, и ситуацию, когда на выходе должно быть двоичное слово 00100001 (десятичное 33), а в действительности на выходе появляется слово 00100000 (десятичное 32), как показано на рисунке 13.26. Двоичное слово, представляющее десятичное число 33, и есть пропущенный код. Эту небольшую нелинейность очень трудно обнаружить, рассматривая отсчеты АЦП или выполняя спектральный анализ. К счастью, существует простой и надежный способ обнаружить пропуск кода 33 с помощью анализа гистограмм.

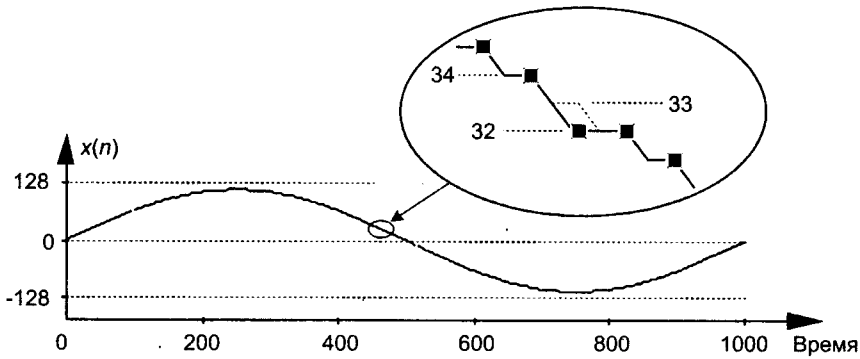


Рис. 13.26. График выходных отсчетов 8-битового АЦП с пропуском кода 0010001 (десятичного 33) во времени

Метод тестирования с помощью гистограмм заключается в накоплении большого количества выходных отсчетов АЦП и построении графика зависимости количества появлений каждого значения кода в зависимости от этого значения, как показано на рисунке 13.27. Любой пропущенный код (вроде упомянутого кода 33) проявится в гистограмме как нулевое значение. Это значит, что код, представляющий десятичное число 33, не будет зафиксирован.

13.10. Быстрая реализация КИХ-фильтров с помощью БПФ

Созерцая соотношения свертки (5-31) и на рисунке 5.41, специалисты-практики осознали, что свертку можно выполнять более эффективно, используя алгоритм БПФ. Этот метод вычисления свертки с помощью БПФ называется *быстрой сверткой*, а его схема приведена на рисунке 13.28.

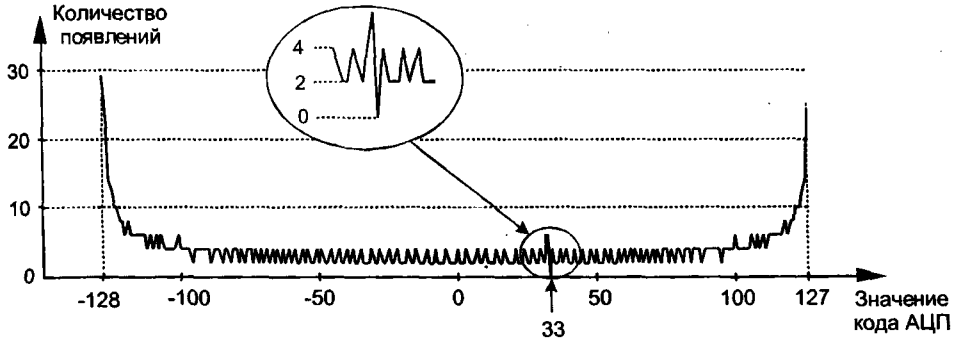


Рис. 13.27. Гистограмма для 8-битового преобразователя

Мы повторяем здесь стандартное уравнение свертки для нерекурсивного КИХ-фильтра с M ответвлениями (5-6):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) = h(k) * x(n), \qquad (13\text{-}67)$$

где $h(k)$ — импульсная характеристика (коэффициенты) КИХ-фильтра, а символ $*$ обозначает свертку. Было показано, что, если длина выходной последовательности $y(n)$ превышает 30, то процесс, показанный на рисунке 13.28, требует меньше умножений, чем прямая реализация выражения (13-67). Следовательно, быстрая свертка является очень мощным инструментом обработки сигналов, особенно в области цифровой фильтрации. Использование этого метода позволяет проектировать очень эффективные КИХ-фильтры, потому что, если их импульсная характеристика не меняется, нам не нужно пересчитывать $H(m)$ для каждой новой последовательности $x(n)$. В этом случае последовательность $H(m)$ можно вычислить заранее и хранить в памяти.

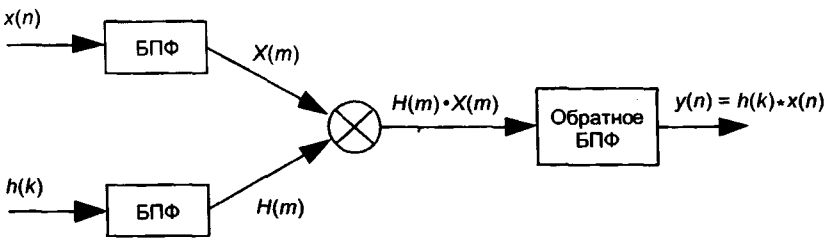


Рис. 13.28. Структура быстрой свертки

Длины прямого и обратного БПФ, конечно, должны быть одинаковыми и зависят от длины последовательностей $h(k)$ и $x(n)$. Вспомним (5-29), согласно которому, если $h(k)$ имеет длину P, а $x(n)$ имеет длину Q, то длина результирующей последовательности $y(n)$ будет равна $(P+Q-1)$. Чтобы метод быстрой свертки давал правильный результат, длины прямого и обратного БПФ должны быть не меньше $(P+Q-1)$. Это значит, что $h(k)$ и $x(n)$ необходимо дополнить нулями в конце до одинаковой длины, равной или превышающей $(P+Q-1)$. Это дополнение нулями не исказит результат свертки. Таким образом, для использования

быстрой свертки мы должны выбрать размер БПФ, удовлетворяющий условию $N \geq (P+Q-1)$ и дополнить $h(k)$ и $x(n)$ нулями до длины N.

Интересной особенностью быстрой свертки с точки зрения аппаратурной реализации является то, что проблема бит-реверсивной перестановки отсчетов БПФ, обсуждавшаяся в разделах 4.5 и 4.6, здесь отсутствует. Если на рисунке 13.28 идентичные структуры БПФ используются для получения $X(m)$ и $H(m)$ в бит-реверсивном порядке, перемножать можно перемешанные последовательности $H(m)$ и $X(m)$. Затем можно использовать подходящую структуру БПФ, которая принимает на вход последовательности в бит-реверсивном порядке. Это обратное БПФ выдает на выход последовательность $y(n)$ в естественном порядке!

13.11. Генерация нормально распределенных случайных сигналов

В разделе D.4 приложения D обсуждается нормальное распределение случайных данных. Мы можем столкнуться с задачей генерации данных с нормальным (Гауссовым) распределением. Существует прямой путь решения этой проблемы с использованием программного генератора равномерно распределенных случайных чисел [27]. На рисунке 13.29 наша задача представлена графически. Нам необходимо получить данные, распределенные по нормальному закону со средним (математическим ожиданием) μ' и стандартным отклонением σ', как на рисунке 13.29 (a), и при этом в нашем распоряжении есть только программа, генерирующая случайные числа, которые распределены равномерно на отрезке от нуля до единицы, как на рисунке 13.29 (b).

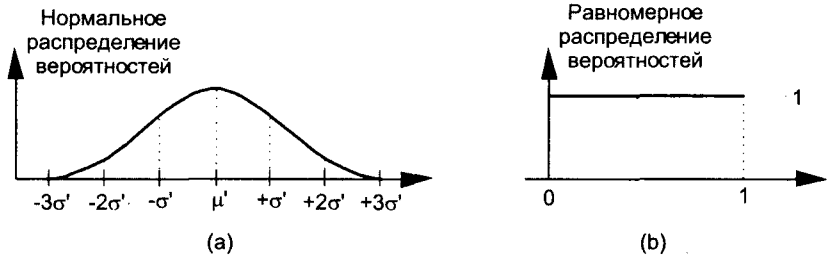


Рис. 13.29. Функции плотности вероятностей (ФПВ): (a) Нормальное распределение со средним = μ' и стандартным отклонением σ'; (b) Равномерное распределение на интервале от нуля до единицы

К счастью, в теории вероятностей доказана *Центральная Предельная Теорема*, которая говорит о том, что при суммировании M случайных чисел с произвольным распределением вероятностей с ростом M распределение суммы приближается к нормальному [28 - 30]. Другими словами, если мы генерируем набор N случайных отсчетов, которые распределены равномерно на отрезке от нуля до единицы, мы можем прибавлять к первому набору отсчетов последующие наборы из N отсчетов. По мере увеличения количества суммированных наборов распределение суммарной последовательности из N отсчетов все больше приближается к

нормальному. Чтобы произвести впечатление, мы можем сказать: «Сумма становится асимптотически нормальной». Как показал опыт, в практических задачах распределение суммы при M ≥ 30 достаточно близко к нормальному. Запомнив это правило, мы прошли половину пути к решению проблемы.

После суммирования M наборов равномерно распределенных отсчетов суммарный набор y_{sum} будет иметь распределение, показанное на рисунке 13.30.

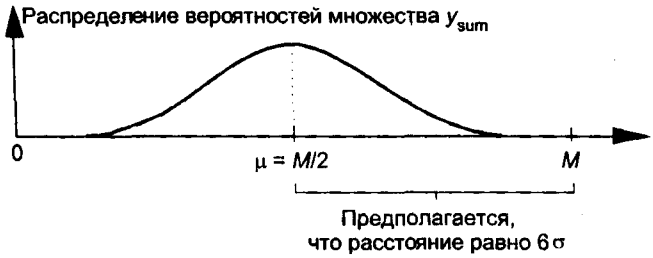


Рис. 13.30. Распределение вероятностей набора данных, полученного суммированием данных с равномерным распределением

Поскольку мы просуммировали M наборов, среднее ysum равно $\mu = M/2$. Чтобы определить стандартное отклонение σ последовательности ysum, мы предположим, что шести стандартным отклонениям соответствует точка $M-\mu$:

$$6\sigma = M - \mu . \qquad (13\text{-}68)$$

Это предположение оправданно, т. к. мы знаем, что вероятность появления в y_{sum} значений, больших M, равна нулю, а при нормальном распределении вероятность получения отсчета, равного шести стандартным отклонениям составляет одну шестимиллионную, т. е. практически равна нулю. Поскольку $\mu = M/2$, из (13-68) следует, что стандартное отклонение y_{sum} равно

$$\sigma = (M - \mu)/6 = (M - M/2)/6 = M/12 . \qquad (13\text{-}69)$$

Для преобразования y_{sum} в требуемый набор данных со средним μ и стандартным отклонением σ', мы:

- вычитаем $M/2$ из каждого элемента, чтобы сделать среднее равным нулю;
- обеспечиваем равенство $6\sigma'$ значению $M/2$ путем умножения каждого элемента в последовательности с нулевым средним на $12\sigma'/M$;
- переносим новый набор данных на новое среднее μ', прибавляя μ' к каждому элементу нового набора данных.

Если мы обозначим требуемую нормально распределенную случайную последовательность $y_{desired}$, то n-й отсчет этой последовательности математически описывается как

$$y_{desired}(n) = (12\sigma'/M)\left\{\left[\sum_{k=1}^{M} x_k(n)\right] - M/2\right\} + \mu'. \qquad (13\text{-}70)$$

Наши рассуждения до сих пор явно относились к программной реализации генератора случайных чисел, но разработчикам аппаратуры тоже иногда необходимо

генерировать нормально распределенные данные с высокой скоростью. Для вас, разработчики аппаратуры, в работе [30] описывается эффективный метод генерации нормально распределенных данных с использованием ИС, реализующих арифметику с фиксированной запятой.

Описанный выше метод генерации нормально распределенных случайных чисел работает достаточно хорошо, но его результаты несовершенны, потому что хвосты распределения вероятностей, показанного на рисунке 13.30, не приближаются к Гауссовым[1]. Более совершенный и более корректный статистически (с улучшенной случайностью) метод, который, возможно, вы захотите исследовать, называется методом зиккурата (Ziggurat) [31 - 33].

13.12. Фильтрация с нулевым сдвигом фаз

Вы можете устранить нелинейность ФЧХ БИХ-фильтра, используя схему, показанную на 13.31 (a). Выходная последовательность $y(n)$ будет представлять собой отфильтрованную версию входной последовательности $x(n)$ без фазовых искажений, вносимых фильтром. В этой схеме один и тот же БИХ-фильтр используется дважды, а инверсия времени представляет собой простое изменение порядка следования отсчетов последовательности на обратный. Рассмотрим следующую ситуацию. Если некоторая спектральная составляющая $x(n)$ имеет произвольную начальную фазу α градусов, а первый фильтр вносит фазовый сдвиг $-\beta$ градусов, то начальная фаза этой спектральной составляющей в узле A будет $\alpha - \beta$ градусов. Первая инверсия времени приведет к изменению знака начальной фазы и внесет дополнительный сдвиг $-\theta$ градусов. (Этот эффект объясняется в приложении C.) Следовательно, начальная фаза составляющей в узле B будет равна $-\alpha + \beta - \theta$ градусов. Вносимый вторым фильтром сдвиг фаз $-\beta$ градусов дает в узле C начальную фазу $-\alpha - \theta$ градусов. Окончательная инверсия времени (часто опускаемая при описании этого метода фильтрации с нулевым сдвигом фаз) приведет к изменению знака начальной фазы и внесет дополнительный сдвиг фаз $-\theta$ градусов. Начальная фаза рассматриваемой спектральной составляющей в $y(n)$ будет равна $\alpha + \theta - \theta = \alpha$ градусов, т. е. будет такой же, как и у $x(n)$. Это свойство приводит к тому, что полная ФЧХ такого фильтра оказывается равной нулю градусов во всем диапазоне частот.

Эквивалентный фильтр с нулевым сдвигом фаз показан на рисунке 13.31 (b). Конечно, эти методы нельзя применять в реальном масштабе времени, т. к. мы не можем обратить ход времени (по крайней мере, в нашей вселенной). Такая фильтрация представляет собой *блочную обработку*, или *отложенную обработку*, такую как фильтрация аудиозаписи в компьютере. Мы должны иметь в наличии все отсчеты сигнала до начала обработки. Начальная инверсия времени на рисунке 13.31 (b) подчеркивает это ограничение.

В начале и в конце фильтрованной последовательности будут присутствовать переходные процессы. Если в каком-то приложении эти переходные процессы являются проблемой, следует рассмотреть возможность отбрасывания L отсчетов в начале и в конце последовательности $y(n)$, где L в 4—5 раз превосходит порядок БИХ-фильтра.

---

[1] Я благодарю моего коллегу по ЦОС доктора Питера Куцукоса (Peter Kootsookos) из университета в Квинсленде, Австралия, за его замечание по этому поводу.

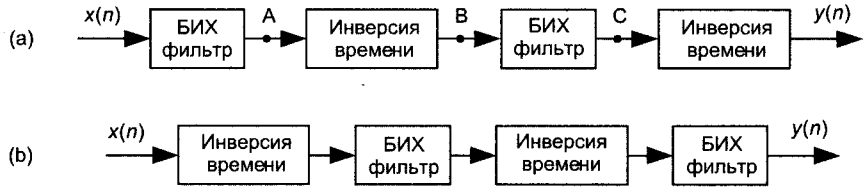


Рис. 13.31. Два эквивалентных метода фильтрации с нулевым фазовым сдвигом

Кстати, общая неравномерность АЧХ в полосе пропускания (в дБ) такого фильтра будет в два раза больше неравномерности одного БИХ-фильтра. Результирующее подавление в полосе задерживания также будет в два раза больше.

13.13. Повышение крутизны АЧХ КИХ-фильтров

Рассмотрим интересный метод улучшения подавления в полосе задерживания цифровых фильтров в ситуации, когда мы не можем по каким-либо причинам модифицировать коэффициенты фильтра. Мы можем удвоить подавление, просто включив последовательно два одинаковых фильтра. Этот прием работает, как показано на рисунке 13.32 (a), где АЧХ одного фильтра $|H(m)|$ показана штриховой линией, а АЧХ двух одинаковых фильтров, включенных последовательно, $|H^2(m)|$, показана сплошной линией. Недостаток такого простого приема в том, что одновременно с увеличением подавления удваивается и неравномерность АЧХ в полосе пропускания, как показано на рисунке 13.32 (b). Частотная ось на рисунке 13.32 нормирована так, что значение нормированной частоты 0.5 соответствует половине частоты дискретизации.

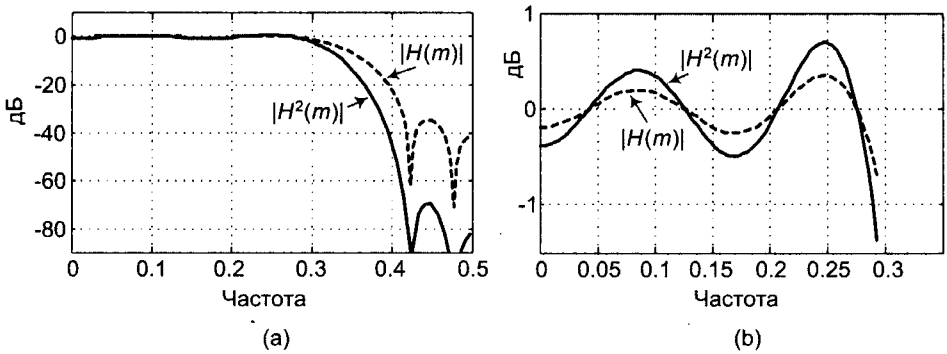


Рис. 13.32. АЧХ одного фильтра и последовательно соединенных двух фильтров: (a) полная характеристика; (b) полоса пропускания

Есть лучший метод повышения подавления в полосе задерживания без ухудшения неравномерности в полосе пропускания, который не требует изменения коэффициентов фильтра. Этот метод называется *повышением крутизны АЧХ фильтра* [34], а его блок-схема обозначена H_s на рисунке 13.33.

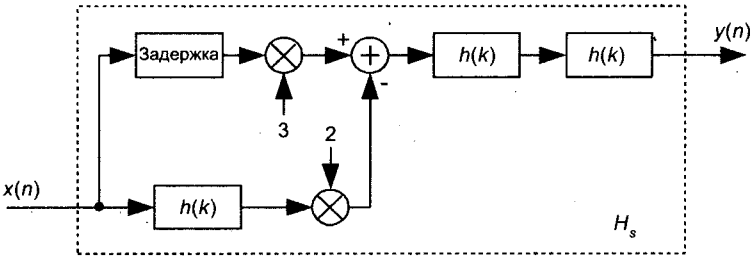


Рис. 13.33. Повышение крутизны АЧХ фильтра

Элемент задержки на рисунке 13.33 обеспечивает задержку на $(N-1)/2$ отсчетов, где N — количество коэффициентов $h(k)$, или длина импульсной характеристики, исходного КИХ-фильтра. Процесс повышения крутизны дает улучшенные характеристики фильтра $|H_s(m)|$, показанные на рисунке 13.34 сплошными линиями, на котором хорошо видно повышение подавления и уменьшение неравномерности АЧХ в полосе пропускания по сравнению с исходным фильтром $H(m)$. Из-за необходимости выравнивания задержек повышение крутизны неприменимо к фильтрам, групповая задержка которых непостоянна, таким как минимально-фазовые КИХ-фильтры или БИХ-фильтры.

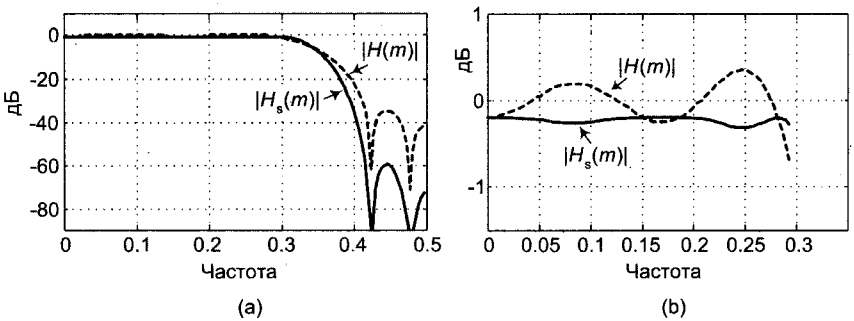


Рис. 13.34. Характеристики $|H(m)|$ и $|H_s(m)|$: (a) полная АЧХ; (b) полоса пропускания

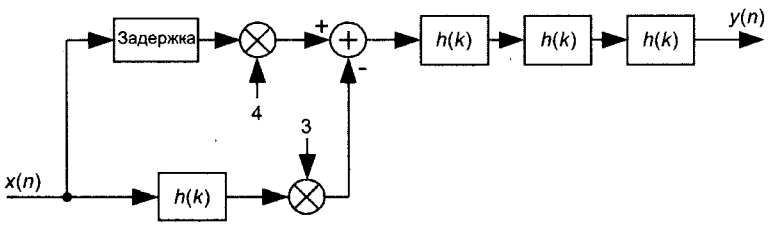


Рис. 13.35. Улучшенная схема повышения крутизны АЧХ

Если требуется еще большее подавление, то можно использовать схему, приведенную на рисунке 13.35, для которой элемент задержки тоже обеспечивает задержку на $(N-1)/2$ отсчетов.

Процедура повышения крутизны АЧХ применима к ФНЧ, ФВЧ и полосовым фильтрам, имеющим симметричные коэффициенты и нечетное количество

ответвлений. Ее можно использовать везде, где имеющиеся характеристики фильтра изменить нельзя, и можно даже использовать с каскадными интеграторами-гребенчатыми фильтрами для уменьшения неравномерности их АЧХ в полосе пропускания, а также с КИХ-фильтрами без умножителей, в которых коэффициенты принимают значения, равные целым степеням двух [35, 36].

13.14. Интерполяция полосовых сигналов

Существует множество приложения цифровой связи, в которых центральная частота спектра действительного сигнала равна четверти частоты дискретизации, или $f_s/4$. В этом случае квадратурное понижающее преобразование частоты становится особенно простым (см. разделы 8.9 и 13.1). Если необходимо получить интерполированный (с повышенной частотой дискретизации) полосовой сигнал, сохранив центральную частоту равной $f_s/4$, можно воспользоваться следующим эффективным методом [37]. Предположим, что мы хотим интерполировать с коэффициентом два, так что частота дискретизации на выходе в два раза превышает частоту дискретизации на входе: $f_{s,out} = 2f_{s,in}$. В этом случае последовательность преобразований выглядит так: квадратурное понижающее преобразование на $f_{s,in}/4$, интерполяция с коэффициентом два, квадратурное повышающее преобразование на $f_{s,out}/4$, и использование в дальнейшем только действительной части комплексной преобразованной последовательности. Реализация этого процесса показана в верхней части рисунка 13.36.

На первый умножитель в верхнем канале подаются входная действительная последовательность $x(n)$ и повторяющаяся опорная последовательность 1, 0, –1, 0. Эта опорная последовательность представляет собой действительную (синфазную) часть комплексной экспоненты

$$e^{-j2\pi(f_{s,in}/4)t_{s,in}} = e^{-j2\pi(f_{s,in}/4)(1/f_{s,in})} = e^{-2\pi(1/4)}, \qquad (13\text{-}71)$$

необходимой для понижающего преобразования на $f_s/4$. Аналогично, повторяющаяся последовательность 0, –1, 0, 1, подаваемая на первый умножитель нижнего канала, есть мнимая (квадратурная) часть комплексной экспоненты для понижающего преобразования $e^{-j2\pi(f_{s,in}/4)t_{s,in}}$. Символ ↑2 обозначает введение одного нулевого отсчета между парой исходный отсчетов в узлах A. Последнее вычитание выполняется для извлечения действительной части из комплексной последовательности в узле D и получения выходной последовательности $y(n)$ (т. е. мы выделяем действительную часть произведения комплексного сигнала узла C на $e^{j2\pi(1/4)}$). Спектры сигналов в различных узлах этой схемы приведены в нижней части рисунка 13.35. Затушеванные спектры показывают истинные спектральные компоненты, а белые спектры представляют собой изображения. Конечно, в обоих каналах обработки должны использоваться одинаковые фильтры нижних частот, чтобы сохранялись временные соотношения и ортогональность фаз.

Имеются и другие особенности этого процесса интерполяции, заслуживающие нашего внимания [38]. Если уменьшение амплитуды в два раза в результате интерполяции недопустимо, мы можем для компенсации потерь использовать опорные последовательности вида 2, 0, –2, 0 и 0, 2, 0, –2. Поскольку сигнал в узле

В содержит много нулевых отсчетов (три четверти от общего количества отсчетов), мы можем использовать эффективные полифазные фильтры. Наконец, если это необходимо, можно подумать о замене конечного сумматора мультиплексором (потому что каждый второй отсчет последовательностей в узле D равен нулю). В этом случае опорную последовательность в нижнем канале следует заменить последовательностью 0, –1, 0, 1.

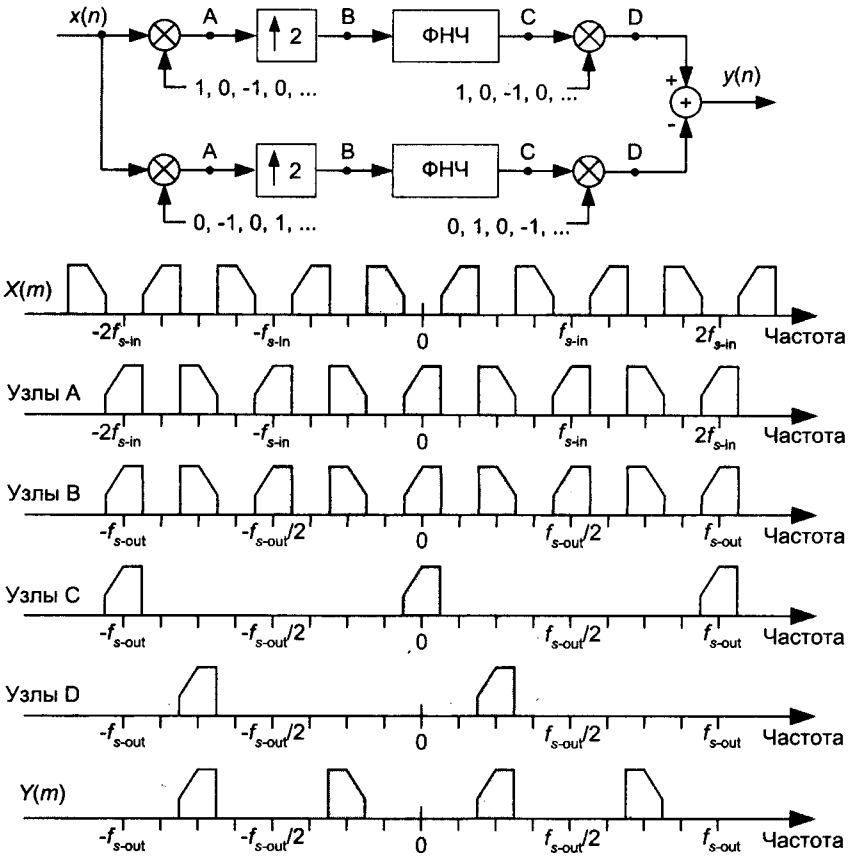


Рис. 13.36. Схема интерполяции полосового сигнала и соответствующие спектры

13.15. Алгоритм локализации спектральных пиков

На практике при анализе дискретных спектров мы часто сталкиваемся с необходимостью оценки частоты синусоиды (или центральной частоты очень узкополосного сигнала). При использовании БПФ по основанию 2 частота интересующего нас сигнала редко совпадает с центром одного из бинов БПФ, частота которого известна точно. В этом случае вследствие утечки спектра дискретный спектр синусоиды, содержащей N отсчетов, может выглядеть так, как на рисунке 13.37 (а).

Мы видим, что максимум спектра синусоиды лежит между центрами бинов с индексами $m = 5$ и $m = 6$. (Переменная m представляет собой индекс отсчетов N-точечного БПФ в частотной области. Расстояние между бинами по частоте составляет f_s/N, где , как и всегда, f_s — частота дискретизации.) Внимательное изучение рисунка 13.37 (a) позволяет нам сказать, что частота синусоиды лежит где-то между $m = 5$ и $m = 5.5$, потому что отсчет БПФ бина $m = 5$ больше отсчета бина $m = 6$. Действительный синусоидальный сигнал в данном случае имеет частоту $5.25 f_s/N$ Гц. В этой ситуации погрешность измерения частоты равна половине расстояния между соседними бинами. Нам часто необходимо получить более точную оценку частоты, и, действительно, существует несколько методов ее улучшения.

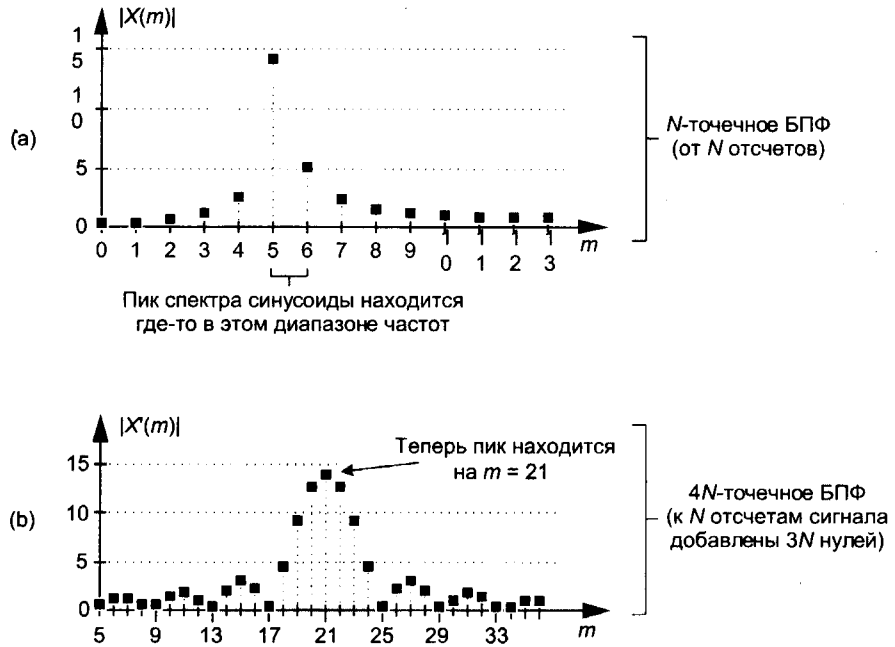


Рис. 13.37. Амплитудные спектры: (a) для N-точечного БПФ; (b) для $4N$-точечного БПФ

Мы можем накопить, скажем, $4N$ отсчетов сигнала и выполнить $4N$-точечное БПФ, в результате чего разность частот соседних бинов уменьшится до $f_s/4N$. Или можно дополнить исходную последовательность из N отсчетов $3N$ нулевыми отсчетами и выполнить $4N$-точечное БПФ расширенной последовательности. Это также уменьшит расстояние между бинами до $f_s/4N$, как показано на рисунке 13.37 (b). Если максимум спектра совпадает с бином $m_{peak} = 21$, то оценка центральной частоты имеет вид

$$f_{peak} = m_{peak} f_s / FFTsize = m_{peak} f_s / 4N. \qquad (13\text{-}72)$$

Обе схемы, *увеличение выборки сигнала* и *дополнение нулями*, требуют существенного увеличения объема вычислений. В научной литературе — от приземленной геофизики до возвышенной астрофизики — описаны другие методы повышения точности измерения частоты, но большинство из них направлены на

повышение точности без учета вычислительных затрат. Здесь мы опишем простую с точки зрения вычислений схему оценки частоты [3].

Предположим, что мы имеем отсчеты БПФ $X(m)$ действительного узкополосного сигнала, модули которых представлены на рисунке 13.38. Вертикальная ось здесь имеет линейный, а не логарифмический масштаб.

Центральная частота сигнала в единицах индекса m_{peak} может быть оценена как

$$m_{peak} = m_k - real(\delta), \tag{13-73}$$

где $real(\delta)$ обозначает действительную часть корректирующего члена δ, который определяется как

$$\delta = [X(m_{k+1}) - X(m_{k-1})]/[2X(m_k) - X(m_{k-1}) - X(m_{k+1})], \tag{13-74}$$

где m_k — целочисленный индекс наибольшего по модулю отсчета $|X(m_k)|$. Значения $X(m_{k-1})$ и $X(m_{k+1})$ представляют собой комплексные отсчеты спектра по обе стороны наибольшего отсчета, как показано на рисунке 13.38.

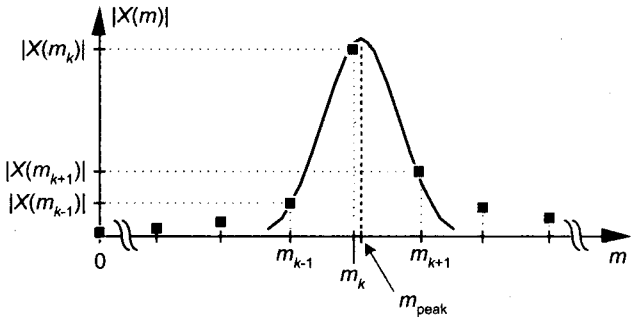


Рис. 13.38. Модули отсчетов БПФ узкополосного сигнала

На основе комплексных отсчетов спектра мы выражаем частоту сигнала через частотный индекс m (который может быть нецелым), и подставляем это значение в

$$f_{peak} = m_{peak} f_s / N \tag{13-75}$$

для получения оценки частоты в Гц. Оценки (13-73) и (13-74) применимы только в случае, когда большая часть энергии сигнала сосредоточена в пределах одного бина шириной (f_s/N).

Этот алгоритм оценки пика спектра достаточно точен при его простоте. Ошибка оценки частоты пика составляет примерно 0.06, 0.04 и 0.03 ширины бина при отношениях сигнал/шум 3, 6 и 9 дБ соответственно. Это совсем не плохо! Привлекательной особенностью этого алгоритма является то, что он не требует использования окон, в отличие от других алгоритмов локализации пиков спектра, и использует отсчеты БПФ, не требуя вычисления их модулей.

13.16. Вычисление поворачивающих множителей БПФ

В типовых приложениях с использованием N-точечного БПФ по основанию 2 по N входным отсчетам $x(n)$ вычисляются N отсчетов в частотной области $X(m)$. Однако существуют нестандартные приложения БПФ (например, гармонический анализ или использование БПФ для реализации банка фильтров), в которых требуется только подмножество результатов $X(m)$. Рассмотрим рисунок 13.39, на котором изображен граф 16-точечного БПФ по основанию 2 с прореживанием по времени, и предположим, что нам необходимо вычислить только выходные отсчеты $X(1)$, $X(5)$, $X(9)$ и $X(13)$. В этом случае вместо выполнения полного БПФ мы можем выполнить только вычисления, показанные на графе жирными линиями. БПФ с уменьшенным объемом вычислений часто называют *обрезанным БПФ* [39 - 42]. (Как и в главе 4, для простоты в бабочках на рисунке 13.39 показаны только множители аргументов поворачивающих множителей, а не полные аргументы.) Для реализации обрезанных БПФ мы должны знать аргументы поворачивающих множителей, связанных с вычислением всех необходимых бабочек, форма которых приведена на рисунке 13.40 (а). Здесь мы предлагаем вашему вниманию интересный алгоритм вычисления аргументов поворачивающих множителей $2\pi A_1/N$ и $2\pi A_2/N$ для БПФ произвольного размера [43].

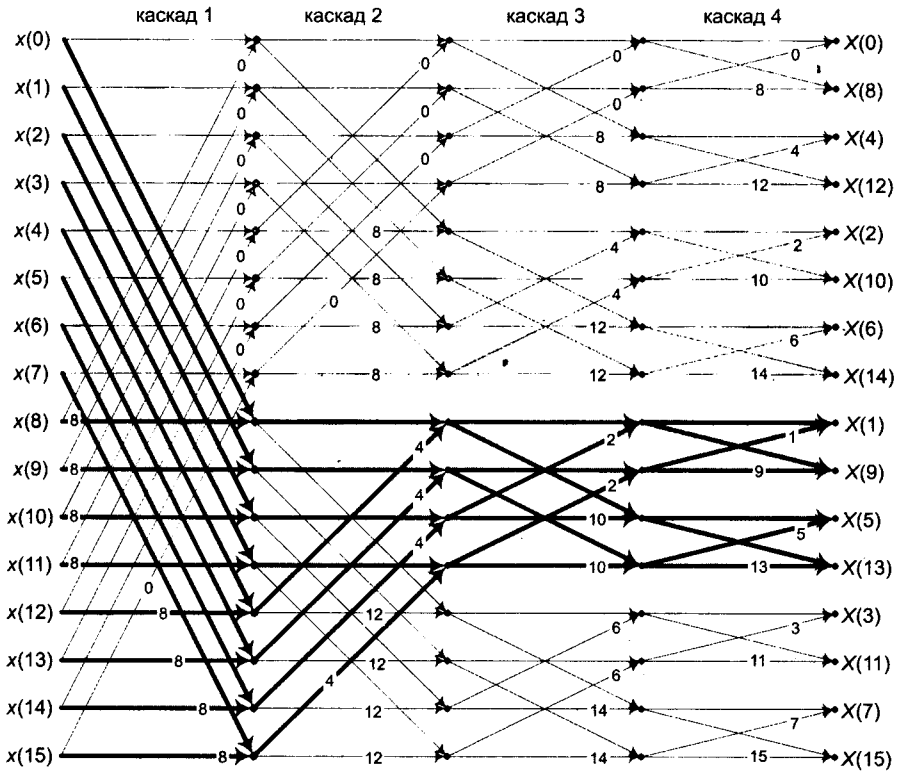


Рис. 13.39. Сигнальный граф 16-точечного БПФ по основанию 2

Алгоритм основан на следующих особенностях БПФ с прореживанием по времени по основанию 2:

- бабочка имеет вид, показанный на рисунке 13.40 (а);
- множители аргумента A_1 и A_2 являются целыми числами, показанными на рисунке 13.39;
- N-точечное БПФ по основанию 2 имеет M каскадов (обозначенных в верхней части рисунка 13.39), причем $M = \log_2(N)$;
- каждый каскад содержит $N/2$ бабочек.

Множитель аргумента произвольной бабочки вычисляется как

$$A_1 = B_{rev}[\lfloor 2^S(B-1)/N \rfloor] \qquad (13\text{-}76)$$

где S — индекс каскада преобразования, принимающий значения в диапазоне $1 \le S \le M$. Значение B представляет собой индекс одной из $N/2$ бабочек в каждом каскаде, при этом $1 \le B \le N/2$. Величина $B = 1$ соответствует верхней бабочке в каскаде. Операция $\lfloor q \rfloor$ возвращает наибольшее целое, которое не превосходит q. Выражение $B_{rev}[z]$ представляет собой трехступенчатую операцию: преобразование десятичного целого z в двоичное число длиной $M-1$ бит, выполнение реверса битов двоичного представления числа (см. раздел 4.5), и преобразование реверсированного двоичного числа обратно в десятичное целое, в результате которой получается коэффициент A_1. Множитель аргумента A_2 на рисунке 13.40 (а) вычисляется затем как

$$A_2 = A_1 + N/2. \qquad (13\text{-}76')$$

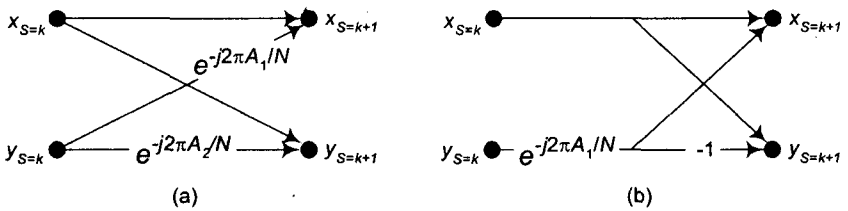


Рис. 13.40. Две формы бабочек БПФ по основанию 2

Этот алгоритм можно также использовать для вычисления единственного поворачивающего множителя оптимизированной бабочки, показанной на рисунке 13.40 (b). Ниже приведен исходный текст программы для MATLAB, реализующей описанный алгоритм вычисления множителей аргумента поворачивающих множителей.

```
clear
N = 16;  %размер БПФ
M = log2(N);  %Количество каскадов
Sstart = 1;  %Первый обрабатываемый каскад
Sstop = M;  %Последний обрабатываемый каскад
Bstart = 1;  %Первая вычисляемая бабочка
Bstop = N/2;  %Последняя вычисляемая бабочка
Pointer = 0;  %Инициализация указателя результатов
```

```
for S = Sstart:Sstop
  for B = Bstart:Bstop
    Z = floor((2^S*(B-1))/N);  %Вычислить целое z
    % Вычислить бит-реверсивное представление Z
    Zbr = 0;
    for I = M-2:-1:0
      if Z>=2^I
        Zbr = Zbr + 2^(M-I-2);
        Z = Z -2^I;
      end
    end  %Конец вычисления бит-реверс. представления
    A1 = Zbr;  %Множитель аргумента A1
    A2 = Zbr + N/2;  % Множитель аргумента A2
    Pointer = Pointer +1;
    Results(Pointer,:) = [S,B,A1,A2];
  end
end
Results, disp('    Stage B-fly, A1, A2'), disp(' ')
```

Переменные в тексте программы, в имени которых содержатся строки **start** и **stop**, позволяют вычислять подмножество поворачивающих множителей N-точечного БПФ. Например, для вычисления множителей аргумента пятой и шестой бабочки третьего каскада 32-точечного БПФ мы можем задать $N = 32$, **Sstart = 3**, **Sstop = 3**, **Bstart = 5** и **Bstop = 6** и выполнить эту программу.

13.17. Обнаружение отдельного тона

В этом разделе мы рассмотрим структуру БИХ-фильтра, используемого для выполнения спектрального анализа при обнаружении и измерении параметров отдельных синусоидальных тонов. Стандартным методом вычисления спектра сигнала является дискретное преобразование Фурье (ДПФ), обычно реализуемое в форме быстрого преобразования Фурье (БПФ). Однако имеются приложения, в которых необходимо вычислять спектр на подмножестве N центральных частот бинов N-точечного ДПФ. Популярным и эффективным методом вычисления прореженных отсчетов БПФ является алгоритм Герцеля, использующий некоторую реализацию БИХ-фильтра для вычисления одного отсчета ДПФ по N входным отсчетам сигнала. Самым распространенным применением этого алгоритмы является обнаружение присутствия отдельного непрерывного синусоидального тона. Учитывая это, давайте коротко рассмотрим задачу обнаружения тона.

Конечно, для обнаружения присутствия отдельного синусоидального тона в последовательности $x(n)$ можно использовать БПФ. Например, если бы мы хотели обнаружить тон частотой 30 кГц при частоте дискретизации $f_s = 128$ кГц, мы могли бы начать с выполнения 64-точечного БПФ, как показано на рисунке 13.41. Затем мы проанализировали бы модуль комплексного отсчета $X(15)$ и проверили бы, превышает ли он некоторый заданный порог.

Такое использование БПФ крайне неэффективно. В нашем примере нам пришлось бы выполнить 192, $(64/2)(\log_2 64)$, комплексных умножения для вычисления 64-х комплексных отсчетов $X(m)$, чтобы получить единственный интересующий

нас отсчет $X(15)$. Мы отбросили бы 98 % полученных результатов! Мы могли бы повысить эффективность нашего алгоритма, вычислив требуемый отсчет $X(15)$ с помощью одноточечного ДПФ, что потребовало бы $N = 64$ комплексных умножения при реализации формулы

$$X(m) = \sum_{n=0}^{63} x(n)e^{-j2\pi n15/64}. \qquad (13\text{-}77)$$

Это, конечно, уже лучше, но существует более эффективный способ. Он называется алгоритмом Герцеля.

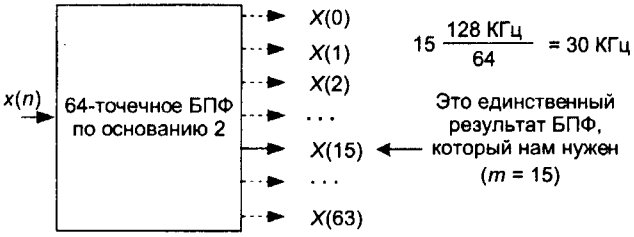


Рис. 13.41. Обнаружение тона частотой 30 кГц с помощью ДПФ в виде БПФ

13.17.1. Алгоритм Герцеля

Алгоритм Герцеля реализуется в форме БИХ-фильтра второго порядка с двумя действительными коэффициентами обратной связи и одним комплексным коэффициентом в цепи прямой связи, как показано на рисунке 13.42. (Хотя мы не используем эту структуру как традиционный фильтр, принято называть ее *фильтром*.) Этот фильтр вычисляет значение единственного бина ДПФ (m-й бин N-точечного ДПФ), который определяется как

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (13\text{-}78)$$

Выходной сигнал фильтра $y(n)$ равен отсчету ДПФ $X(m)$ в момент времени $n = N$, если индекс первого отсчета сигнала $n = 0$. Мы подчеркиваем, что выходной сигнал фильтра $y(n)$ не равен $X(m)$ в любой момент времени $n \neq N$. Чтобы результат был эквивалентен ДПФ, индекс в частотной области m должен быть целым числом в диапазоне $0 \le m \le N-1$. Вы вполне можете рассматривать алгоритм Герцеля как *однобиновое ДПФ*. Построение структуры этого фильтра (алгоритма) описывается в литературе [44 - 46].

Передаточная функция фильтра Герцеля имеет вид

$$H_G(z) = Y(z)/X(z) = (1 - e^{-j2\pi m/N}z^{-1})/[1 - 2\cos(2\pi m/N)z^{-1} + z^{-2}], \qquad (13\text{-}79)$$

Ее единственный ноль расположен в точке $z = e^{-j2\pi m/N}$ на z-плоскости, а комплексно-сопряженные полюсы — в точках $z = e^{\pm j2\pi m/N}$, как показано на рисунке 13.43 (а). Ноль и полюс в точке $z = e^{-j2\pi m/N}$ взаимно уничтожаются. Вообще расположение полюса фильтра на единичной окружности рискованно с точки зрения

устойчивости, но в случае алгоритма Герцеля это не так. Поскольку он обрабатывает блоки отсчетов сигнала длиной $N+1$ (N обычно измеряется сотнями), фильтр остается устойчивым, т. к. его внутренние регистры данных $w(n-1)$ и $w(n-2)$ обнуляются в начале обработки каждого нового блока данных. Частотная характеристика фильтра, показанная на рисунке 13.43 (b), содержит резонансный пик на относительной частоте $2\pi m/N$, соответствующей частоте mf_s/N Гц (здесь f_s — частота дискретизации сигнала).

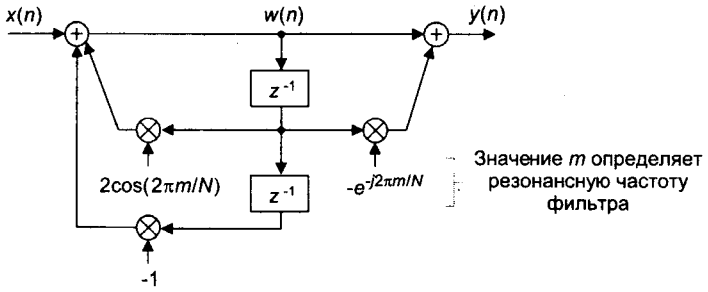


Рис. 13.42. Реализация БИХ-фильтра алгоритма Герцеля

Алгоритм Герцеля реализуется с помощью комплексного резонатора, имеющего импульсную характеристику бесконечной длительности $h(n) = e^{j2\pi nm/N}$, и этим объясняется такая малая ширина его АЧХ. Разностные уравнения фильтра Герцеля во временной области выглядят следующим образом

$$w(n) = 2\cos(2\pi m/N)w(n-1) - w(n-2) + x(n), \qquad (13\text{-}80)$$

$$y(n) = w(n) - e^{-j2\pi m/N}w(n-1). \qquad (13\text{-}81)$$

Преимущество фильтра Герцеля при вычислении значения отсчета N-точечного ДПФ $X(m)$ состоит в том, что вычисление выражения (13-80) выполняется N раз, в то время как выражение (13-81) — цепь прямой связи на рисунке 13.42 — вычисляется только один раз при подаче на вход N-го входного отсчета. Таким образом, для действительной входной последовательности $x(n)$ фильтр выполняет с целью вычисления $X(m)$ $N+2$ действительных умножений и $2N+1$ действительных сложений. Однако, при моделировании фильтра Герцеля, если отсчет индекса времени начинается с $n = 0$ для вычисления $X(m)$ фильтр должен обработать $N+1$ входной отсчет при $x(N) = 0$.

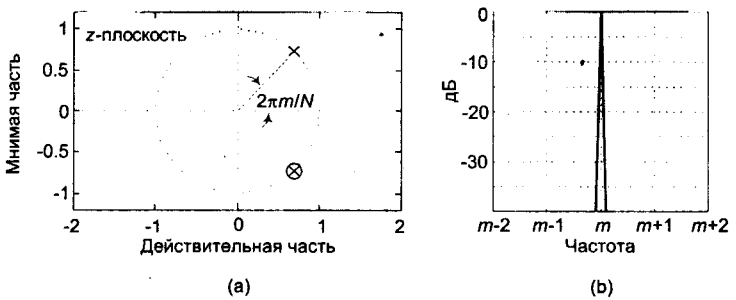


Рис. 13.43. Фильтр Герцеля: (a) карта нулей и полюсов в z-плоскости; (b) АЧХ

В типовых приложениях для минимизации утечки спектра мы выбираем N так, что входная последовательность содержит целое количество периодов тона, который мы пытаемся обнаружить. N может быть любым целым, и чем больше N, тем выше разрешение по частоте и меньше влияние шума. Однако увеличение N приводит к росту объема вычислений.

Следует заметить, что в то время как обычно в литературе при описании алгоритма Герцеля утверждается, что переменная m, определяющая частоту резонанса, должна принимать только целые значения (что делает фильтр Герцеля эквивалентом бина N-точечного ДПФ), на самом деле m на рисунке 13.42 и в (13-79) может принимать любое значение в диапазоне от 0 до $N-1$, обеспечивая полный контроль над резонансной частотой фильтра.

13.17.2. Пример использования алгоритма Герцеля

Используем алгоритм Герцеля для вычисления модуля спектра тона частотой $f_{tone} = 30$ кГц из примера, показанного на рисунке 13.41. При $f_s = 128$ кГц и $N = 64$ переменная m принимает значение

$$m = f_{tone}/(f_s/N) = (64)(30)\ кГц/128\ кГц = 15. \qquad (13\text{-}82)$$

Структура фильтра Герцеля и необходимые вычисления приведены на рисунке 13.44.

Полезно заметить, что при вычислении мощности $X(15)$, $|X(15)|^2$, окончательных операций с комплексными числами можно избежать, вычисляя:

$$|X(m)|^2 = |y(N-1)|^2 =$$

$$= w(N-1)^2 + w(N-2)^2 - w(N-1)w(N-2)[2\cos(2\pi m/N)] \qquad (13\text{-}83)$$

В нашем примере (13-83) приобретает вид

$$|X(15)|^2 = |y(63)|^2 = w(63)^2 + w(62)^2 - w(63)w(62)[2\cos(2\pi 15/64)] \qquad (13\text{-}84)$$

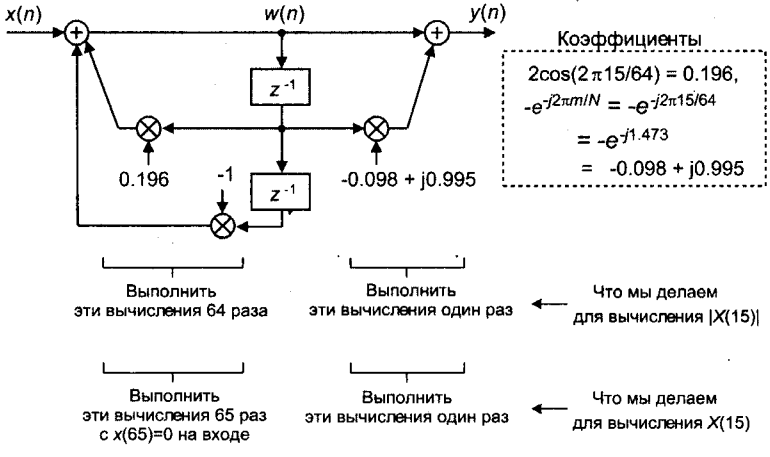


Рис. 13.44. Фильтр, его коэффициенты и вычисления, необходимые для обнаружения тона частотой 30 кГц

13.17.3. Преимущества алгоритма Герцеля перед БПФ

Ниже перечислены некоторые преимущества алгоритма Герцеля перед стандартным БПФ по основанию 2 при обнаружении отдельного тона:

- N может не быть целой степенью двух.
- Резонансная частота может быть любой в диапазоне от нуля до f_s Гц.
- Объем памяти коэффициентов фильтра меньше, чем объем памяти поворачивающих множителей. Если используется (13-83), то необходимо хранить только один коэффициент.
- *Не требуется накопление блока данных до начала вычисления* (как в случае БПФ). Обработка может начинаться с приходом первого входного отсчета.
- Алгоритм Герцеля не требует бит-реверсивной сортировки.
- Если алгоритм Герцеля реализуется M раз для обнаружение M разных тонов, то он более эффективен (требует меньше умножений), чем БПФ, при $M < \log_2 N$.
- Объемы требуемых вычислений для обнаружения одного тона (для действительной входной последовательности $x(n)$) приведены в таблице 13.4.

Таблица 13.4. Сравнение методов вычисления одного бина ДПФ по объему вычислений

Метод	Действительные умножения	Действительные сложения
Один бин ДПФ	$4N$	$2N$
БПФ	$2N\log_2 N$	$N\log_2 N$
Фильтр Герцеля	$N + 2$	$2N + 1$

И последнее замечание: хотя алгоритм Герцеля реализуется в виде структуры фильтра с комплексным коэффициентом, он не используется как обычный фильтр, когда мы запоминаем все выходные отсчеты. В случае аглоритма Герцеля мы сохраняем только каждый N-й или $(N+1)$-й выходной отсчет. Поэтому АЧХ фильтра Герцеля, если рассматривать его как черный ящик, эквивалентна характеристике вида $|\sin(x)/x|$ одного бина N-точечного ДПФ, часть которой показана на рисунке 13.45.

13.18. Скользящее ДПФ

Описанный выше алгоритм Герцеля позволяет вычислить комплексное значение одного бина ДПФ по N отсчетам входного сигнала. В этом разделе мы описываем алгоритм *скользящего ДПФ*, который выдает значения отсчетов в частотной области с той же частотой, с какой приходят входные отсчеты, и требует меньше вычислений, чем алгоритм Герцеля. В тех приложениях, где обновление спектра должно производиться с каждым новым входным отсчетом или несколькими отсчетами, скользящее ДПФ проще с точки зрения объема вычислений, чем традиционное БПФ по основанию 2.

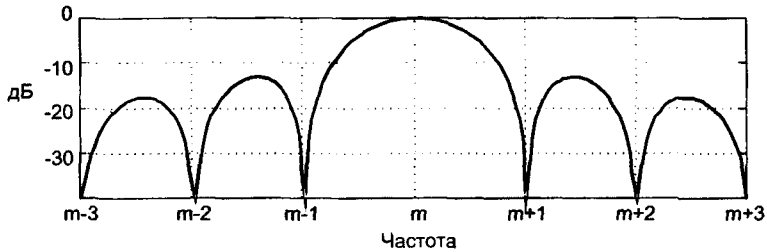


Рис. 13.45. АЧХ фильтра Герцеля

13.18.1. Алгоритм скользящего ДПФ

Алгоритм скользящего ДПФ (СДПФ) вычисляет значение одного бина N-точечного ДПФ по отсчетам входного сигнала из скользящего окна. Для m-го бина N-точечного ДПФ, СДПФ вычисляет

$$X^m(q) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (13\text{-}85)$$

Давайте разберем подробнее обозначение $X^m(q)$. Обычно, как в главе 3, в качестве индекса отсчетов ДПФ мы использовали частотный индекс m. В (13-85) в качестве индекса отсчета ДПФ используется временной индекс $q = 0, 1, 2, 3, \ldots$, так что первый отсчет m-го бина СДПФ есть $X^m(0)$, второй отсчет СДПФ есть $X^m(1)$ и т. д.

Пример окна анализа СДПФ показан на рисунке 13.46 (а), где $X^m(0)$ вычисляется для $N = 16$ отсчетов $x(0) - x(15)$. Затем временное окно сдвигается на один отсчет вперед, как на рисунке 13.46 (b), и мы вычисляем новый отсчет $X^m(1)$. Ценное свойство этого процесса состоит в том, что мы можем эффективно вычислять каждый новый отсчет ДПФ, используя результат предыдущего ДПФ. Постепенное смещение окна анализа во времени дало этому алгоритму название *скользящее ДПФ* или *ДПФ по скользящему окну*.

Математическое выражение для СДПФ мы можем вывести следующим образом: стандартное выражение N-точечного ДПФ для m-го бина ДПФ q-й последовательности $x(q), x(q+1), \ldots, x(q+N-1)$ имеет вид

$$X^m(q) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+q)e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (13\text{-}86)$$

(Переменная m представляет частотный индекс, $m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.) Аналогично, выражение для следующего ДПФ, $(q+1)$, вычисляемого по отсчетам $x(q+1)$, $x(q+2), \ldots, x(q+N)$, имеет вид

$$X^m(q+1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+q+1)e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (13\text{-}87)$$

Положив в (13-87) $p = n+1$, мы можем записать

$$X^m(q+1) = \sum_{p=1}^{N} x(p+q)e^{-j2\pi(p-1)m/N}. \qquad (13\text{-}88)$$

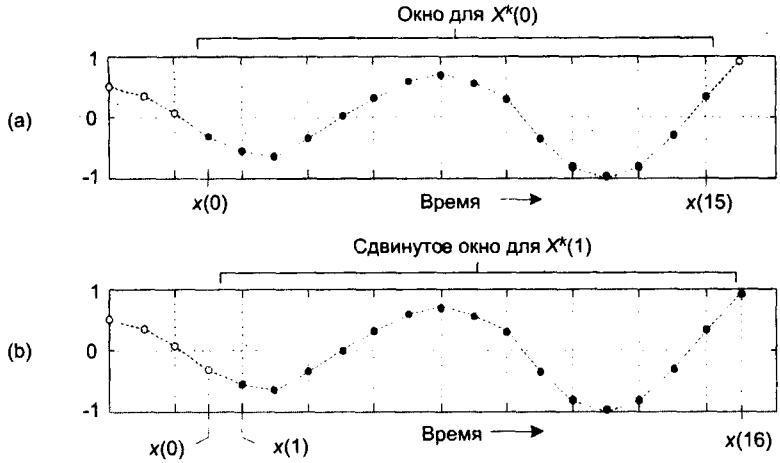


Рис. 13.46. Окно анализа для двух 16-точечных ДПФ: (a) отсчеты данных для первого вычисления ДПФ; (b) отсчеты данных для второго вычисления ДПФ

Изменив пределы суммирования в (13-88) и включив в выражение соответствующие члены (вычитание члена с $p = 0$ и прибавление члена с $p = N$) для компенсации измененных пределов суммирования, мы можем записать

$$X^m(q+1) = \left[\sum_{p=0}^{N-1} x(p+q)e^{-j2\pi(p-1)m/N}\right] - x(q)e^{-j2\pi(-1)m/N} + \\ + x(q+N)e^{-j2\pi(N-1)m/N}. \qquad (13\text{-}89)$$

Вынося за скобку общий множитель ($e^{j2\pi m/N}$), записываем

$$X^m(q+1) = e^{j2\pi m/N}\left\{\left[\sum_{p=0}^{N-1} x(p+q)e^{-j2\pi pm/N}\right] - x(q) + \\ + x(q+N)e^{-j2\pi Nm/N}\right\}. \qquad (13\text{-}90)$$

Заметив, что сумма в квадратных скобках равна предыдущему отсчету $X^m(q)$ в (13-86), и $e^{-j2\pi m} = 1$, мы можем записать искомое рекурсивное выражение для скользящего N-точечного ДПФ в виде

$$X^m(q+1) = e^{j2\pi m/N}[X^m(q) + x(q+N) - x(q)], \qquad (13\text{-}91)$$

где $X^m(q+1)$ — новый отсчет бина ДПФ, а $X^m(q)$ — предыдущий отсчет бина ДПФ. Верхний индекс m напоминает нам, что отсчеты спектра $X^m(q)$ относятся к m-му бину ДПФ.

Чтобы раскрыть сущность индексирования в (13-91), подставим в это выражение некоторые числа. Если $N = 20$, то для вычисления первого результата, $X^m(0)$, требуются 20 отсчетов во временной области ($x(0) - x(19)$). Тогда вычисление $X^m(1)$ выполняется по формуле

$$X^m(1) = e^{j2\pi m/N}[X^m(0) + x(20) - x(0)]. \qquad (13\text{-}92)$$

Благодаря индексированию во временной области, использованному нами при выводе алгоритма, выражение (13-92), как кажется, использует для вычисления $X^m(1)$ будущий отсчет $x(20)$. Без потери общности мы можем модифицировать индексы времени в (13-91) так, что входные отсчеты $x(n)$ и выходные отсчеты $X^m(q)$ будут использовать одни и те же значения индекса времени n. Такая модификация приводит наше уравнение СДПФ к виду

$$X^m(n) = e^{j2\pi m/N}[X^m(n-1) + x(n) - x(n-N)]\,. \qquad (13\text{-}93)$$

В (13-93) проявляется ценность данного алгоритма для вычисления спектра в реальном масштабе времени. Мы вычисляем $X^m(n)$, вычитая отсчет $x(n-N)$ и прибавляя текущий отсчет $x(n)$ к предыдущему значению $X^m(n-1)$, а затем сдвигая результат по фазе. Таким образом, СДПФ требует только двух действительных сложений и одного комплексного умножения на выходной отсчет. Совсем неплохо! Формула (13-93) приводит к реализации однобинового СДПФ в виде фильтра, показанного на рисунке 13.47.

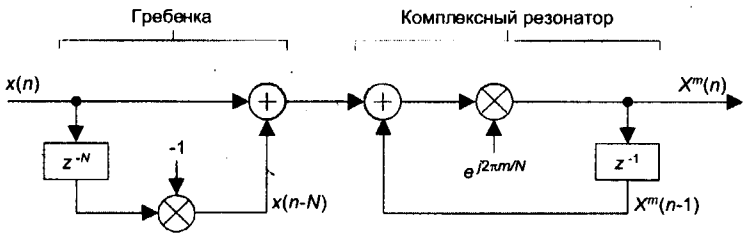


Рис. 13.47. Структура фильтра однобинового скользящего ДПФ

Однобиновое СДПФ реализуется в виде БИХ-фильтра, состоящего из гребенчатого фильтра и комплексного резонатора, включенных последовательно. (Если вы хотите вычислить все N бинов ДПФ, потребуются N резонаторов с $m = 0 \ldots N-1$, на входы которых подается выходной сигнал единственного гребенчатого фильтра.) Задержка гребенчатого фильтра в N отсчетов приводит к тому, что переходная характеристика фильтра СДПФ имеет длину N отсчетов, так что выходные отсчеты не будут иметь установившихся значений до появления отсчета $X^m(N-1)$. Выходные отсчеты будут неправильными, т. е. не будут эквивалентны отсчетам $X^m(q)$ в (13-86), до тех пор, пока не будут обработаны N входных отсчетов. При этом z-преобразование (13-93) имеет вид

$$X^m(z) = e^{j2\pi m/N}[X^m(z)z^{-1} + X(z) - X(z)z^{-N}]\,. \qquad (13\text{-}94)$$

Приведя подобные члены, содержащие $X^m(z)$ и $X(z)$, получаем передаточную функцию в z-области для фильтра m-го бина СДПФ в виде

$$H_{СДПФ}(z) = X^m(z)/X(z) = (1 - z^{-N})\, e^{j2\pi m/N}/(1 - e^{j2\pi m/N}z^{-1}). \qquad (13\text{-}95)$$

Этот комплексный фильтр имеет N нулей, распределенных равномерно по единичной окружности z-плоскости, обусловленных гребенчатым фильтром с N элементами задержки, а также единственный полюс, подавляющий ноль в точке $z = e^{j2\pi m/N}$. Комплексная импульсная характеристика фильтра СДПФ $h(n)$ и карта его нулей и полюсов показаны на рисунке 13.48 для нашего примера, где $m = 2$ и $N = 20$.

Благодаря гребенчатому субфильтру импульсная характеристика фильтра СДПФ, имеющая форму комплексной синусоиды, ограничена по длительности — усечена до N отсчетов — и эта особенность делает АЧХ фильтра СДПФ идентичной характеристике вида $\sin(Nx)/\sin(x)$ отдельного бина ДПФ с центральной частотой $2\pi m/N$.

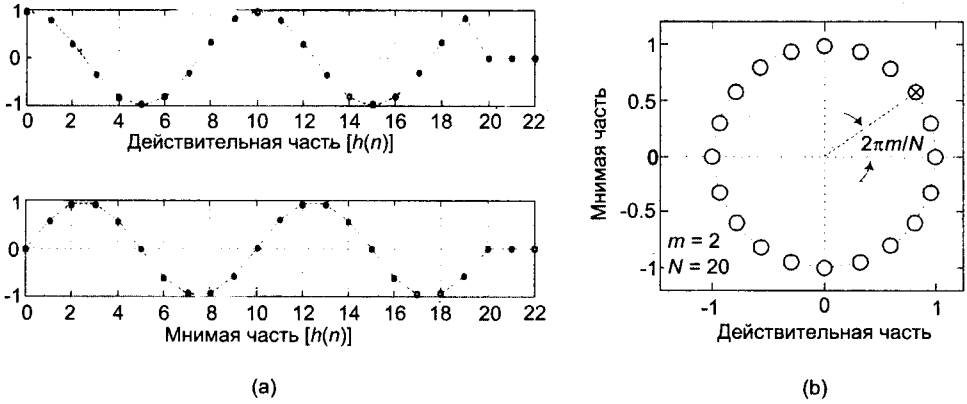


Рис. 13.48. Характеристики скользящего ДПФ при $m = 2$ и $N = 20$: (a) комплексная импульсная характеристика; (b) карта полюсов и нулей

Одной их особенностей СДПФ является то, что, как только получено значение $X^m(n)$, количество операций для вычисления $X^m(n+1)$ фиксировано и не зависит от N. Сравнение вычислительной сложности фильтров Герцеля и СДПФ приведено ниже. В отличие от БПФ по основанию 2, в случае СДПФ N может быть любым положительным числом, что обеспечивает более гибкую *настройку* центральной частоты СДПФ путем задания целого m, такого, что $m = Nf_i/f_s$, где f_i — интересующая нас частота в Гц, а f_s — частота дискретизации в Гц. Кроме того, СДПФ не требует бит-реверсивной индексации, в отличие от БПФ. Как и алгоритм Герцеля, СДПФ особенно эффективно при узкополосном спектральном анализе.

Для полноты упомянем о том, что существует метод *скользящего БПФ* по основанию 2, позволяющий вычислять все N бинов $X^m(q)$ в (13-85) [47, 48]. Этот метод привлекателен с точки зрения объема вычислений, т. к. он требует только N комплексных умножений для обновления N-точечного БПФ для всех N бинов; но он требует $3N$ ячеек памяти ($2N$ ячеек для данных и N ячеек для поворачивающих множителей). В отличие от СДПФ, схема скользящего БПФ по основанию 2 требует реализации бит-реверсивной адресации и реализуется только для значений N, равных целой степени двойки.

13.18.2. Устойчивость СДПФ

Фильтр СДПФ находится на грани устойчивости, т. к. его полюс расположен на единичной окружности z-плоскости. Если ошибки округления коэффициентов фильтра незначительны, фильтр СДПФ устойчив в смысле «ограниченный вход — ограниченный выход». Неустойчивость может возникнуть, если в результате округления коэффициентов полюс выйдет за пределы единичного круга. Мы можем использовать коэффициент затухания r, чтобы разместить полюсы и нули,

показанные на рисунке 13.48 (b), на окружности радиуса r, немного смещенной внутрь единичного круга и обеспечить таким образом устойчивость фильтра, передаточная функция которого в этом случае имеет вид

$$H_{СДПФ,gs}(z) = [(1 - r^N z^{-N})re^{j2\pi m/N}]/(1 - re^{j2\pi m/N} z^{-1}), \qquad (13\text{-}96)$$

где индекс gs обозначает гарантированную устойчивость. (В разделе 7.1.3 приведены математические детали смещения нулей и полюсов внутрь единичного круга.) Коэффициенты фильтра при этом превращаются в $-r^N$ и $re^{j2\pi m/N}$. Разностное уравнение устойчивого СДПФ фильтра приобретает вид

$$X^m(n) = re^{j2\pi m/N}[X^m(n-1) + x(n) - r^N x(n-N)], \qquad (13\text{-}97)$$

а структура фильтра с гарантированной устойчивостью показана на рисунке 13.49. В этом случае мы выполняем пять действительных умножений и четыре действительных сложения на выходной отсчет.

Использование коэффициента затухания на рисунке 13.49 гарантирует устойчивость, но выходные отсчеты фильтра $X^m(q)$, определяемые выражением

$$X^m{}_{r<1}(q) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)re^{-j2\pi nm/N}, \qquad (13\text{-}98).$$

теперь не равны m-му бину N-точечного ДПФ в (13-85). Хотя можно уменьшить эту ошибку, сделав значение r очень близким к единице (но меньшим единицы), существует схема, позволяющая устранить ошибку полностью один раз на каждые N выходных отсчетов за счет дополнительных логических операций [49]. Определение необходимости введения коэффициента затухания r в каждом конкретном применении СДПФ требует тщательного эмпирического исследования. Это значит, что вы должны очень тщательно и внимательно тестировать реализации СДПФ!

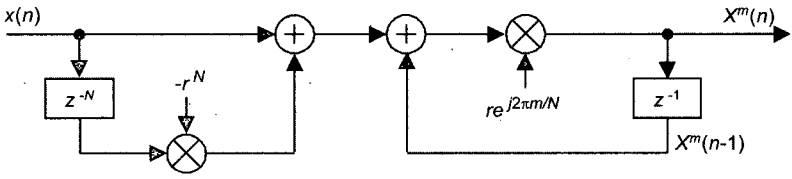


Рис. 13.49. Структура фильтра скользящего ДПФ с гарантированной устойчивостью

Другой метод повышения устойчивости, заслуживающий упоминания, состоит в уменьшении наибольшей составляющей (действительной или мнимой) коэффициента обратной связи $e^{j2\pi m/N}$ на единицу младшего разряда. Этот метод можно применять избирательно к бинам, вызывающим проблемы. Он эффективен в борьбе с неустойчивостью, вызванной ошибками округления, которые приводят к тому, что коэффициенты $e^{j2\pi m/N}$, представленные в ограниченной разрядной сетке, могут оказаться больше единицы. Как и в случае ДПФ, выходные значения СДПФ пропорциональны N, и, соответственно, в реализациях с фиксированной запятой разработчики должны предусматривать регистры достаточной для сохранения результатов длины.

13.18.3. Уменьшение утечки СДПФ

Будучи эквивалентным ДПФ, СДПФ также подвержено влиянию утечки спектра. Как и в случае ДПФ, утечку СДПФ можно уменьшить с помощью взвешивания входной последовательности $x(n)$ окном, как обсуждалось в разделе 3.9. Однако, умножение на окно во временной области разрушило бы вычислительную простоту СДПФ. Благодаря теореме о свертке мы можем реализовать взвешивание с помощью свертки в частотной области, как было описано в разделе 13.3.

Уменьшение утечки спектра в частотной области выполняется путем вычисления свертки соседних отсчетов $X^m(q)$ с ДПФ выбранного окна. Например, ДПФ окна Хэмминга содержит только три ненулевых отсчета: –0.23, 0.54 и –0.23. Поэтому мы можем вычислить отсчеты $X^m(q)$, взвешенные окном Хэмминга с помощью трехточечной свертки вида

$$X^m(q),\ \textit{взвешенный окном Хэмминга} =$$

$$= -0.23X^{m-1}(q) + 0.54X^m(q) - 0.23X^{m+1}(q)\,. \qquad (13\text{-}99)$$

На рисунке 13.50 показан этот процесс с использованием трех резонаторов, настроенных на соседние бины ДПФ ($m-1$, m и $m+1$). Каскад гребенчатой фильтрации при этом реализуется только один раз.

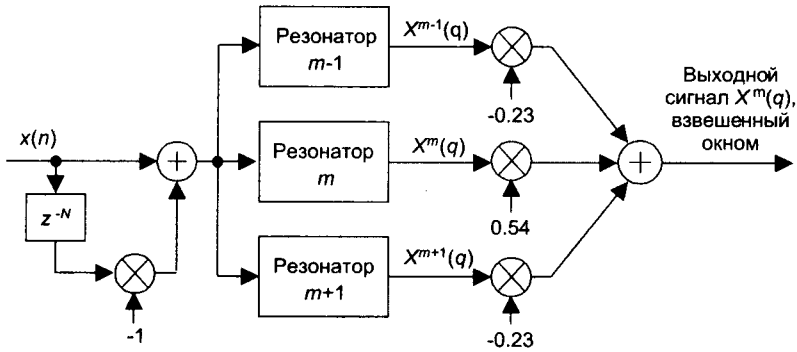


Рис. 13.50. Структура вычисления $X^m(q)$, взвешенного окном Хэмминга, с использованием трех резонаторов

В таблице 13.5 приведены сравнительные данные по вычислительной сложности разных схем спектрального анализа при вычислении начальных значений $X^m(n)$ и последующих отсчетов $X^m(n+1)$.

Для вычисления начальных значений $X^m(n)$, взвешенных окном, в таблице 13.5, трехточечная свертка в частотной области должна выполняться только один раз, по приходу N-го входного отсчета. Однако она должна выполняться при всех последующих вычислениях.

Мы напоминаем читателю, что в разделе 13.3 обсуждаются некоторые особенности реализации взвешивания окном Хэмминга в частотной области с использованием двоичных сдвигов для устранения умножений в (13-99), а также использование других окон.

Таблица 13.5. Сравнение методов вычисления отдельного бина ДПФ

Метод	Вычисление начального $X^m(n)$		Вычисление $X^m(n+1)$	
	Действительные умножения	Действительные сложения	Действительные умножения	Действительные сложения
ДПФ	$4N$	$2N$	$4N$	$2N$
Алгоритм Герцеля	$N+2$	$2N+1$	$N+2$	$2N+1$
Скользящее ДПФ (на грани устойчивости)	$4N$	$4N$	4	4
Скользящее ДПФ (с гарантированной устойчивостью)	$5N$	$4N$	5	4
Скользящее ДПФ с трехчленным окном (на грани устойчивости)	$12N+6$	$10N+4$	18	14
Скользящее ДПФ с трехчленным окном (с гарантированной устойчивостью)	$13N+6$	$10N+4$	19	14

13.18.4. Малоизвестное свойство СДПФ

СДПФ обладает особым свойством, которое не очень широко известно, но очень важно. Если мы изменим коэффициент гребенчатого фильтра (рисунок13.47) с -1 на $+1$, нули фильтра повернутся в направлении против хода часовой стрелки вдоль единичной окружности на угол π/N радиан. Эта ситуация при $N = 8$ показана в правой части рисунка 13.51 (а). Нули располагаются на угловом расстоянии $2\pi(m + 1/2)/N$ радиан. Нули при $m = 0$ показаны черными точками. На рисунке 13.51 (b) показано расположение нулей при $N = 9$ и двух значениях коэффициента гребенчатого фильтра -1 и $+1$.

Это свойство весьма полезно: мы можем расширить набор центральных частот спектрального анализа, получив больше чем N угловых частот, распределенных равномерно по единичной окружности. Частоты анализа могут быть либо $2\pi m/N$, либо $2\pi(m+1/2)/N$, где целое m находится в диапазоне $0 \le m \le N-1$. Таким образом, мы можем построить анализатор СДПФ, который имеет резонансы на любой из $2N$ частот в диапазоне от 0 до f_s Гц. Конечно, если коэффициент гребенчатого фильтра равен $+1$, то коэффициент резонатора должен быть равен $e^{j2\pi(m+1/2)/N}$, чтобы обеспечить взаимное уничтожение полюса и нуля.

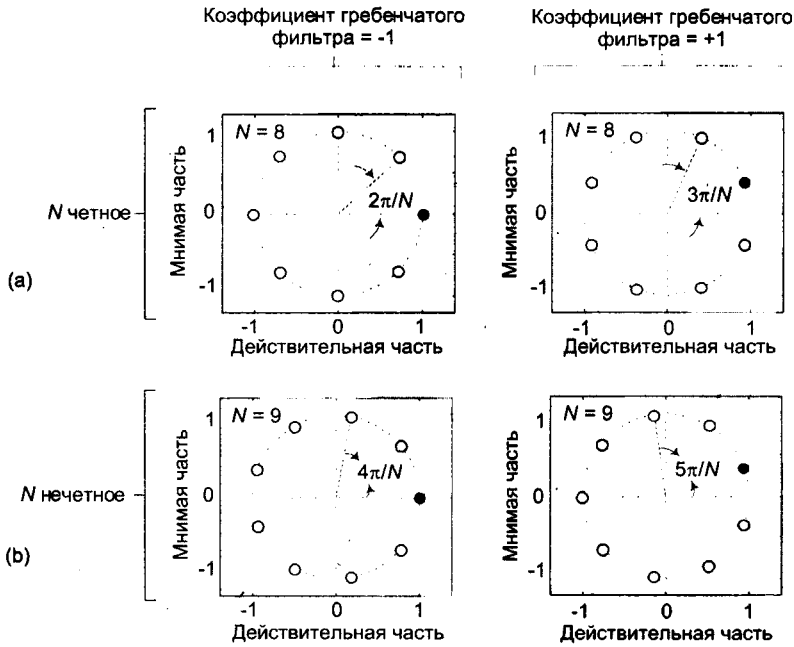


Рис. 13.51. Четыре варианта расположения нулей гребенчатого фильтра на единичной окружности

13.19. Увеличение масштаба БПФ по частоте

БПФ с увеличением масштаба представляет большой интерес, т. к. оно сочетает комплексное понижающее преобразование, низкочастотную фильтрацию и изменение частоты дискретизации посредством прореживания в спектральном анализе. Этот метод спектрального анализа используется тогда, когда необходимо *высокое* разрешение в небольшой части полного частотного диапазона. В этом случае он более эффективен, чем традиционное БПФ.

Рассмотрим спектральный анализ в случае, когда нам необходимо высокое разрешение, т. е. близкое расположение бинов, в частотном диапазоне интересующего нас сигнала, показанном на рисунке 13.52 (а). (Остальные сигналы нас не интересуют.) Чтобы получить требуемую разрешающую способность, мы могли бы накопить достаточно большое количество отсчетов и выполнить БПФ по основанию 2 большого размера. Это решение неэффективно, потому что нам пришлось бы отбросить большинство результатов БПФ. Растянутое БПФ может помочь нам повысить вычислительную эффективность посредством:

- преобразования частоты с помощью комплексного понижающего преобразования,
- низкочастотной фильтрации,
- прореживания,
- вычисления БПФ уменьшенного размера.

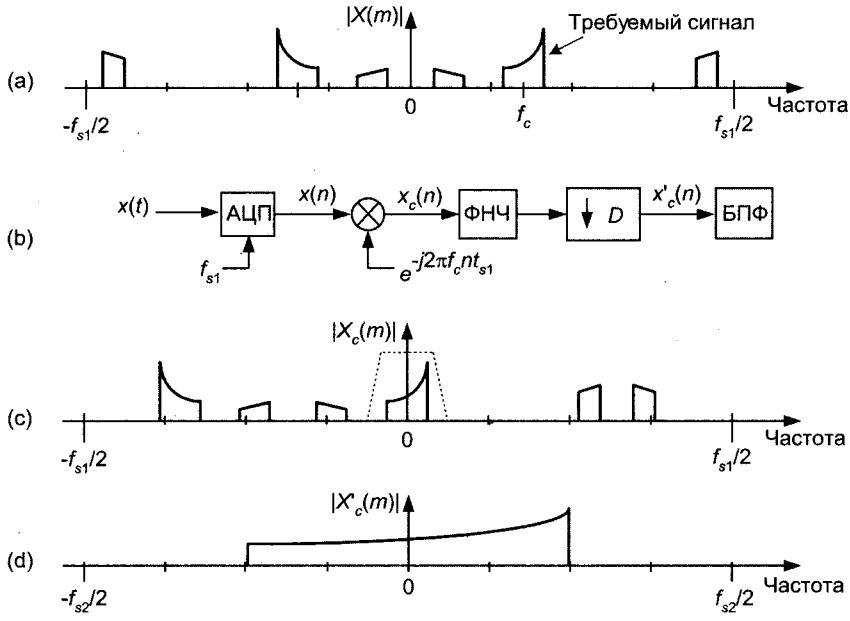


Рис. 13.52. Спектр при растянутом БПФ: (a) исходный спектр; (b) схема обработки; (c) спектр после понижающего преобразования; (d) спектр отфильтрованного и прореженного сигнала

Мы начинаем анализ с оцифровки непрерывного сигнала $x(t)$ с частотой f_{s1} с помощью аналого-цифрового преобразователя, выдающего последовательность $x(n)$ длиной N точек, спектр которой $|X(m)|$ показан на рисунке 13.52 (a). Метод растянутого БПФ требует узкополосной фильтрации и прореживания для уменьшения количества отсчетов перед завершающим БПФ, как показано на рисунке 13.52 (b). Спектр сигнала после понижающего преобразования с центром на частоте 0 Гц, $|X_c(m)|$, показан на рисунке 13.52 (c). (АЧХ ФНЧ показана штриховой линией.) После фильтрации перед БПФ выходной сигнал фильтра $x_c(n)$ прореживается в D раз, в результате чего получаем последовательность $x'_c(n)$ с частотой дискретизации $f_{s2} = f_{s1}/D$. Ключевым моментом здесь является то, что длина последовательности $x'_c(n)$ равна N/D, благодаря чему мы можем выполнить БПФ уменьшенного размера. (N/D должно быть равно целой степени двойки при использовании БПФ по основанию 2.) Мы вычисляем БПФ только в диапазоне частот прореженного сигнала. Интересно отметить, что, поскольку входная последовательность БПФ является комплексной, БПФ длиной N/D точек покрывает безызбыточный диапазон частот от $-f_{s2}/2$ до $+f_{s2}/2$. (В отличие от случая действительного сигнала, когда отсчеты в области положительных и отрицательных частот являются комплексно-сопряженными.)

Реализация растянутого БПФ показана на рисунке 13.53, где все последовательности действительны.

Сравнивая дискретные последовательности на рисунках 13.52 (b) и 13.53, мы можем записать комплексную последовательность $x_c(n)$ аналитически в виде:

$$x_c(n) = i(n) + jq(n), \qquad (13\text{-}100)$$

а прореженную комплексную последовательность $x'_c(n)$ — в виде

$$x'_c(n) = i'_{LPF}(n) + jq'_{LPF}(n). \qquad (13\text{-}101)$$

Опорная комплексная последовательность $e^{-j2\pi f_c n t_{s1}}$, где $t_{s1} = 1/f_{s1}$, может быть представлена в двух формах

$$e^{-j2\pi f_c n t_{s1}} = \cos(2\pi f_c n t_{s1}) - j\sin(2\pi f_c n t_{s1}) =$$
$$= \cos(2\pi n f_c / f_{s1}) - j\sin(2\pi n f_c / f_{s1}). \qquad (13\text{-}102)$$

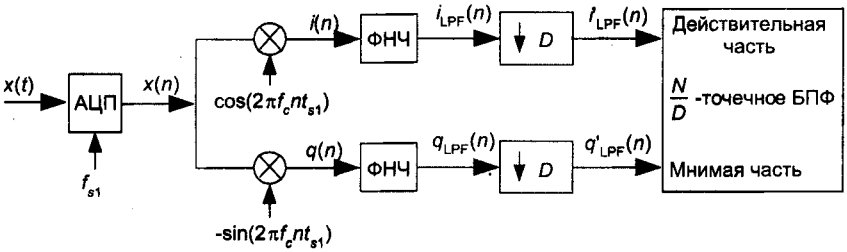


Рис. 13.53. Растянутое БПФ

Чтобы показать возможность уменьшения объема вычислений при растянутом БПФ, рассмотрим пример. Допустим, мы имеем сигнал, дискретизированный с частотой $f_{s1} = 1024$ кГц, и хотим получить расстояние между бинами в 2 кГц. Для этого необходимо накопить 512 отсчетов сигнала (1024 кГц/2 кГц) и выполнить 512-точечное БПФ. Если ширина спектра интересующего нас сигнала меньше $f_{s1}/8$, мы можем использовать понижающее преобразование, ФНЧ с последующим прореживанием в $D = 8$ раз и выполнить 512/8 = 64-точечное БПФ, получив требуемое разрешение по частоте в 2 кГц. Мы свели 512-точечное БПФ (требующее 2304 комплексных умножения) к 64-точечному БПФ (требующему 192 комплексных умножения). Таким образом, выигрыш в количестве операций составил более 90 %!

Для вычисления процентного уменьшения объема вычислений при использовании (N/D)-точечного растянутого БПФ по отношению к стандартному БПФ мы используем следующее выражение:

$$\%\ \textit{снижения объема вычислений} =$$
$$= 100\{1 - \textit{число умножений}\ (N/D)\textit{-точечного БПФ}/\textit{число умножений}\ N\textit{-точечного БПФ}\}$$
$$= 100\{1 - [(N/D)/2]\log_2(N/D)/[(N/2)\log_2(N)]\} =$$
$$= 100\{1 - (1/D) + [\log_2(D)/D\log_2(N)]\}. \qquad (13\text{-}103)$$

На рисунке 13.54 приведены графики (13-103) для разных значений коэффициента прореживания и ряда значений размера БПФ (все они являются целыми степенями двойки).

Мы видим, что растянутое БПФ может дать существенную экономию по сравнению с обычным БПФ при анализе узкополосной части спектра $X(m)$ — и эта экономия увеличивается при увеличении коэффициента прореживания D. Но

здесь есть подводный камень. При увеличении D полоса пропускания ФНЧ должна сужаться, что приводит к увеличению порядка фильтра, а, следовательно, количества необходимых для его реализации операций; здесь необходимо найти компромисс. Вы должны задать себе вопрос: «Компенсирует ли уменьшение размера БПФ дополнительные операции понижающего преобразования частоты и фильтрации?» Это определенно так, если выполнение БПФ большого размера невозможно на имеющейся аппаратуре или в программе. Если есть возможность *сделать* центральную частоту спектра интересующего нас непрерывного сигнала равной $f_{s1}/4$, то можно выполнить квадратурное смешение без умножений (см. раздел 13.1). Если фаза составляющих сигнала не важна, для фильтрации можно использовать эффективный БИХ-фильтр. Если же фазовые искажения недопустимы, то можно использовать полифазные или полуполосные КИХ-фильтры. Следует также рассмотреть возможность использования КИХ-фильтров на основе частотной выборки и интерполирующих фильтров (см. главу 7). Если спектр сигнала очень узок по сравнению с частотой дискретизации f_{s1}, и требуется большой коэффициент прореживания и сложный фильтр нижних частот, можно попробовать использовать комбинированный интегратор — гребенчатый фильтр.

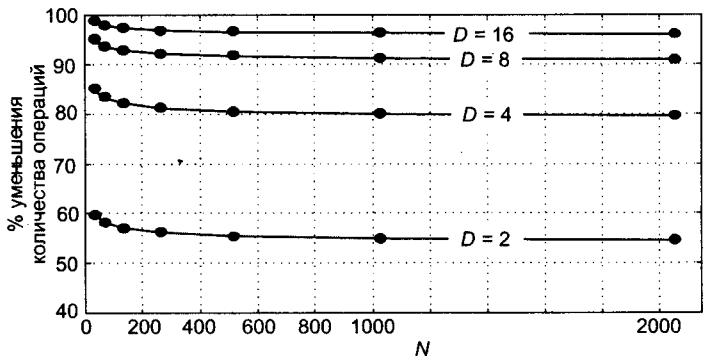


Рис. 13.54. Процентное снижение объема вычислений (комплексных умножений) (N/D)-точечного БПФ по сравнению со стандартным N-точечным БПФ

13.20. Практическая реализация анализатора спектра

Рассмотрим остроумный прием реализации практического анализатора спектра путем модификации данных во временной области перед вычислением БПФ.

Допустим, нам необходимо построить анализатор спектра для отображения в некотором виде модуля спектра последовательности. Мы хотим, чтобы наш анализатор — банк полосовых фильтров — имел амплитудно-частотную характеристику, похожую на характеристику, приведенную на рисунке 13.55 (a). В случае спектрального анализа первое, что приходит на ум — использование БПФ. Однако частотная характеристика отдельных бинов БПФ имеет вид, показанный на рисунке 13.55 (b), ее полоса пропускания не является плоской, боковые лепестки

слишком велики, а главные лепестки соседних фильтров перекрываются. Мы можем уменьшить уровень боковых лепестков с помощью окон, но это приводит к расширению главного лепестка, к большему перекрытию соседних характеристик, показанному на рисунке 13.55 (c) и к уменьшению разрешающей способности, кроме того, неравномерность АЧХ в полосе пропускания по-прежнему остается высокой.

Попробуем решить эту проблему следующим способом. Рассмотрим последовательность $x(n)$ длиной M, M-точечное ДПФ которой равно

$$X(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)\, e^{-j2\pi nk/N}. \qquad (13\text{-}104)$$

Далее рассмотри разбиение $x(n)$ на P субпоследовательностей, длиной N отсчетов каждая. Следовательно, $PN = M$. Если мы сложим поэлементно эти P субпоследовательностей, мы получим новую последовательность $y(n)$ длиной N, N-точечное ДПФ которой имеет вид

$$Y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)\, e^{-j2\pi nm/N}. \qquad (13\text{-}105)$$

Хорошей для нас новостью является то, что

$$|Y(m)| = |X(Pm)|. \qquad (13\text{-}106)$$

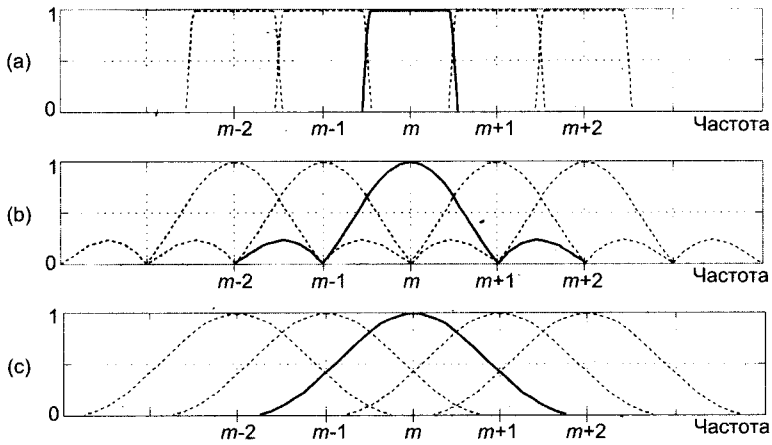


Рис. 13.55. Анализатор спектра: (a) требуемая частотная характеристика; (b) частотная характеристика бинов стандартного БПФ; (c) частотна характеристика БПФ при использовании окна

Это значит, что модули отсчетов ДПФ последовательности $y(n)$ равны модулям подмножества отсчетов ДПФ последовательности $x(n)$ большей длины. $Y(m)$ представляет собой прореженную в P раз версию $X(k)$. Соотношение между $|Y(m)|$ и $|X(Pm)|$ кажется не слишком важным, но мы можем им воспользоваться с выгодой для себя. Мы создадим M-точечную последовательность, для которой частотная характеристика одного бина M-точечного БПФ будет такой, как показанная на

рисунке 13.56 (а) сплошной жирной черной линией. Вместо вычисления всех M выходных отсчетов БПФ мы вычислим только каждый P-й отсчет M-точечного БПФ, реализовав (13-105) и получив прореженные бины БПФ, показанные на рисунке 13.56 (b). На этом рисунке $P = 5$.

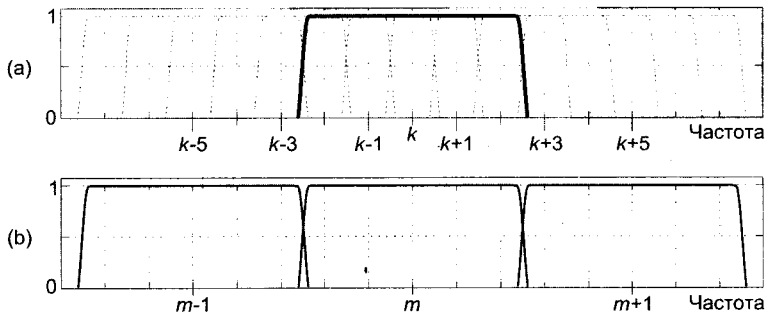


Рис. 13.56. Частотные характеристики анализатора спектра на основе БПФ

Такое прореживание спектра $|X(k)|$ в частотной области выполняется во временной области путем наложения, показанного на рисунке 13.57, где $P = 5$. Мы разделяем взвешенную окном последовательность $x(n)$, содержащую M отсчетов, на $P = 5$ субпоследовательностей, суммируем субпоследовательности поэлементно для получения последовательности $y(n)$ с наложениями длиной N отсчетов. Затем вычисляем модули спектральных отсчетов $|Y(m)|$ с помощью БПФ по основанию 2. (Поскольку входная последовательность $x(n)$ действительна, симметрия спектра позволяет нам вычислять только $N/2+1$ значений $|Y(m)|$.)

Этот процесс, такой привлекательный своей простотой, называется *взвешенным наложением-сложением* [50, 51], или, иначе, *БПФ с предварительным суммированием* [52]. Наиболее сложной частью построения такого анализатора является проектирование M-точечного окна, используемого для взвешивания исходной последовательности $x(n)$. Мы решаем эту задачу, задав требуемую частотную характеристику точно так же, как для цифровых фильтров, и используя программу расчета фильтров для вычисления импульсной характеристики фильтра. Эта импульсная характеристики и есть требуемое окно. При частоте дискретизации сигнала f_s ширина полосы пропускания будет немного меньше f_s/N. Поэтому односторонняя полоса пропускания фильтра равна примерно $f_s/2N$.

На рисунке 13.58 показан пример анализатора на основе БПФ с $f_s = 1$ МГц, $N = 64$, $P = 5$, откуда $M = 320$. Расстояние между бинами составляет 15.63 кГц, так что при проектировании фильтра ширина полосы пропускания была принята равной 10 кГц (следовательно, в программе Паркса-Маклеллана односторонняя ширина полосы пропускания была задана равной 5 кГц). На рисунке 13.58 (а) приведен график 320-точечного окна, а на рисунке 13.58 (b) показана характеристика анализатора для бинов $m = 3$, 4 и 5, а характеристика $|Y(4)|$ показана сплошной линией.

Ширина полос пропускания анализатора спектра определяется главным образом шириной главного лепестка окна. Центральные частоты полос пропускания анализатора определяются как f_s/N. Это значит, что перекрытие полос пропускания анализатора зависит как от ширины главного лепестка окна, так и от f_s и от N. Динамический диапазон анализатора можно расширить, увеличив P,

что приводит к увеличению M и длины последовательности $x(n)$. С увеличением M более длинные окна будут давать полосы пропускания анализатора, приближающиеся к прямоугольной форме с более низким уровнем боковых лепестков и неравномерности АЧХ в полосе пропускания.

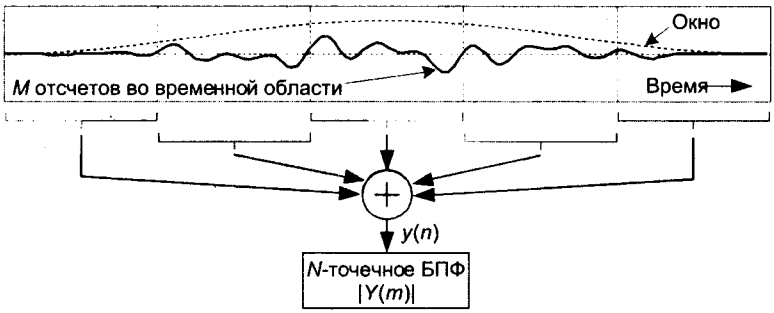


Рис. 13.57. Принцип построения анализатора спектра на основе БПФ

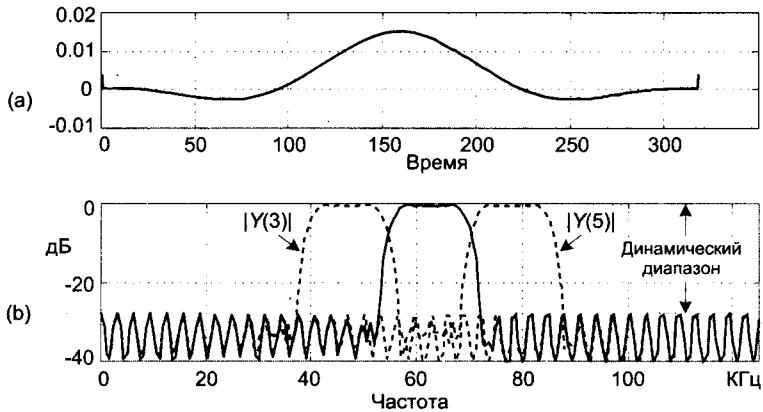


Рис. 13.58. Пример анализатора на основе БПФ: (a) окно; (b) характеристики анализатора для бинов $|Y(3)|$, $|Y(4)|$ и $|Y(5)|$ 64-точечного БПФ

Для реализации такого анализатора спектра длина M исходной последовательности должна быть ровно в P раз больше целой степени двух N.

13.21. Эффективная аппроксимация арктангенса

Быстрые и точные методы вычисления арктангенса отношения мнимой и действительной частей комплексного числа $x = I + jQ$ исследовались весьма активно, т. к. оценка аргумента θ комплексного значения находит множество применений в цифровой обработке сигналов. Аргумент числа x определяется как $\theta = \tan^{-1}(Q/I)$.

Специалисты, добивающиеся максимальной скорости вычисления арктангенса, обычно используют поисковые таблицы, в которых значение Q/I задает адрес

ячейки ПЗУ, содержащей значение аргумента θ. Те же, кто заинтересован в повышении точности вычислений, реализуют вычисление приближенного значения аргумента с помощью алгебраических полиномов высокого порядка, при этом наиболее популярными являются полиномы Чебышева и ряд Тейлора. (К сожалению, из-за своей нелинейности арктангенс плохо поддается аппроксимации с помощью полиномов разумного порядка. Поэтому для вычисления арктангенса мы выбираем метод наименьшего ухудшения.)

Вот еще один претендент на реализацию вычисления арктангенса, который не использует ни поисковые таблицы, ни полиномы высокого порядка. Мы можем оценить аргумент θ комплексного числа $x = I + jQ$ в радианах, используя следующую аппроксимацию

$$\tan^{-1}(Q/I) \approx \theta' = (Q/I)/[1 + 0.28125(Q/I)^2] \text{ радиан}, \qquad (13\text{-}107)$$

где $-1 \le Q/I \le 1$. Величина θ лежит в пределах от $-45°$ до $+45°$ ($-\pi/4 \le \theta \le +\pi/4$ радиан). Выражение (13-107) обеспечивает удивительно хорошее приближение. Судя по рисунку 13.59, максимальная ошибка аппроксимации при использовании (13-107) составляет 0.26°, если угол θ находится в пределах от $-45°$ до $+45°$.

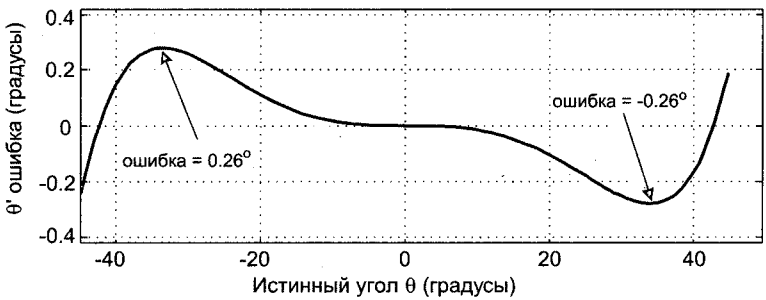


Рис. 13.59. Ошибка оценки угла в градусах

Привлекательность этой аппроксимации состоит в том, что формулу можно записать в виде:

$$\theta' = IQ/(I^2 + 0.28125Q^2), \qquad (13\text{-}108)$$

устранив операцию деления Q/I за счет двух дополнительных умножений. Другая особенность (13-108) заключается в том, что одну операцию умножения можно заменить двоичным сдвигом вправо. Произведение $0.28125Q^2$ — это $(1/4+1/32)Q^2$, так что мы можем вычислить произведение, прибавляя Q^2, сдвинутое вправо на два бита, к Q^2, сдвинутому вправо на пять бит. Эта схема вычисления арктангенса может быть особенно полезной в цифровых приемниках, где I^2 и Q^2 были вычислены ранее, в процессе демодуляции сигнала или автоматической регулировки усиления (АРУ). Мы можем расширить диапазон углов, в котором работает эта аппроксимация. Если мы разобьем окружность на восемь октантов по 45°, первый из которых соответствует углам от 0° до 45°, мы можем вычислить арктангенс для углов в любом октанте. Это возможно благодаря симметрии арктангенса относительно поворотов:

$$\tan^{-1}(-Q/I) = -\tan^{-1}(Q/I) \qquad (13\text{-}109)$$

$$\tan^{-1}(Q/I) = \pi/2 - \tan^{-1}(I/Q)\,. \qquad (13\text{-}109')$$

Упомянутые свойства позволили нам составить таблицу 13.6.

Таблица 13.6. Расположение октантов и соответствующие формулы для арктангенса

Октант	Аппроксимация арктангенса
1-й, 8-й	$\theta' = IQ/(I^2 + 0.28125Q^2)$
2-й, 3-й	$\theta' = \pi/2 - IQ/(Q^2 + 0.28125I^2)$
4-й, 5-й	$\theta' = \pi + IQ/(I^2 + 0.28125Q^2)$
6-й, 7-й	$\theta' = -\pi/2 - IQ/(Q^2 + 0.28125I^2)$

Итак, мы должны проверить знаки Q и I и проверить условие $|Q| > |I|$, определив таким образом номер октанта, а затем используем соответствующее приближенное выражение из таблицы 13.6. Максимум ошибки равен 0.26° во всех октантах.

Когда θ находится в 5-м октанте, формула даст значение, превышающее $+\pi$ радиан. Если необходимо удерживать оценки θ' в диапазоне от $-\pi$ до $+\pi$, мы можем повернуть любой угол θ, лежащий в 5-м октанте, на $+\pi/4$ радиан (45°), умножив $(I+jQ)$ на $(1+j)$, что перемещает угол в 6-й октант. Это умножение дает новые значения действительной и мнимой частей согласно

$$I' = (I-Q)$$

и

$$Q' = j(I+Q). \qquad (13\text{-}110)$$

Затем, используя I' и Q', оцениваем θ' в 5-м октанте с помощью формулы

$$Q'_{5\text{-й окт}} = -3\pi/4 - I'Q'/(Q'^2 + 0.28125I'^2) \qquad (13\text{-}110')$$

13.22. Алгоритмы демодуляции частотно-модулированных сигналов

В разделе 9.2 мы обсуждали измерение мгновенной частоты комплексного синусоидального сигнала путем вычисления производной мгновенной фазы сигнала $\theta(n)$, как показано на рисунке 13.60.

Это традиционный метод демодуляции ЧМ-сигналов, и он работает хорошо. Выходная мгновенная частота демодулятора равна

$$f(n) = f_s[\Delta\theta_{rad}(n)]/2\pi \text{ Гц}, \qquad (13\text{-}111)$$

где f_s — частота дискретизации в Гц.

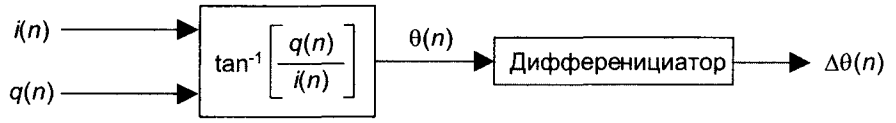


Рис. 13.60. Частотный демодулятор с использованием арктангенса

Вычисление мгновенной фазы $\theta(n)$ требует вычисления арктангенса, которое трудно выполнить точно без привлечения значительных вычислительных ресурсов. Ниже мы предлагаем схему вычисления $\Delta\theta(n)$ для использования в (13-111) без промежуточного вычисления фазы $\theta(n)$ (и хлопотного вычисления арктангенса) [53, 54]. Построим алгоритм вычисления $\Delta\theta(n)$, используя сначала непрерывные переменные при следующих обозначениях:

$$\begin{aligned} i(t) &= \textit{синфазный сигнал}, \\ q(t) &= \textit{квадратурный сигнал}, \\ \theta(t) &= \tan^{-1}[q(t)/i(t)] = \textit{мгновенная фаза}, \\ \Delta\theta(t) &= \textit{производная по времени от } \theta(t) \end{aligned} \tag{13-112}$$

Пусть $r(t) = q(t)/i(t)$ — сигнал, для которого мы пытаемся вычислить производную его арктангенса. Производная по времени от $\tan^{-1}[r(t)]$, согласно таблице производных, имеет вид

$$\Delta\theta(t) = d\{\tan^{-1}[r(t)]\}/dt = \{1/[1+r^2(t)]\}\{d[r(t)]/dt\}. \tag{13-113}$$

Поскольку $d[r(t)]/dt = d[q(t)/i(t)]/dt$, мы воспользуемся правилами дифференцирования отношения функций, чтобы записать

$$\begin{aligned} d[r(t)]/dt &= d[q(t)/i(t)]/dt = \\ &= \{i(t)d[q(t)]/dt - q(t)d[i(t)]/dt\}/i^2(t). \end{aligned} \tag{13-114}$$

Подставляя (13-114) в (13-113), получаем

$$\Delta\theta(t) = \{1/[1+r^2(t)]\}\{i(t)d[q(t)]/dt - q(t)d[i(t)]/dt\}/i^2(t). \tag{13-115}$$

Замена $r(t)$ в (13-115) на $q(t)/i(t)$ дает

$$\Delta\theta(t) = 1/\{1+[q(t)/i(t)]^2\}\{i(t)d[q(t)]/dt - q(t)d[i(t)]/dt\}/i^2(t). \tag{13-116}$$

Мы приближаемся к цели. Умножим далее числитель и знаменатель первого отношения на $i^2(t)$ и заменим непрерывное время t на дискретный индекс n. В результате получим

$$\Delta\theta(n) = \{i(n)d[q(n)]/dn - q(n)d[i(n)]/dn\}/[i^2(n)+q^2(n)]. \tag{13-117}$$

Реализация этого алгоритма показана на рисунке 13.61 (а), где производные $i(n)$ и $q(n)$ обозначены как $i'(n)$ и $q'(n)$ соответственно. Выходная последовательность $\Delta\phi(n)$ используется в (13-111) для вычисления мгновенной частоты.

Дифференциатор представляет собой дифференцирующий КИХ-фильтр на основе линии задержки с нечетным количеством ответвлений. В работе [54] приводятся результаты для случая, когда коэффициенты КИХ-фильтра принимают значения 1, 0, –1. Элементы задержки на рисунке 13.61 используются для выравнивания задержек $i(n)$, $q(n)$ и выходных сигналов дифференциаторов. При использовании дифференциаторов с K ответвлениями задержка составляет $(K-1)/2$ отсчетов. На практике мы можем получить нужную задержку, взяв сигнал с центрального ответвления дифференцирующего фильтра.

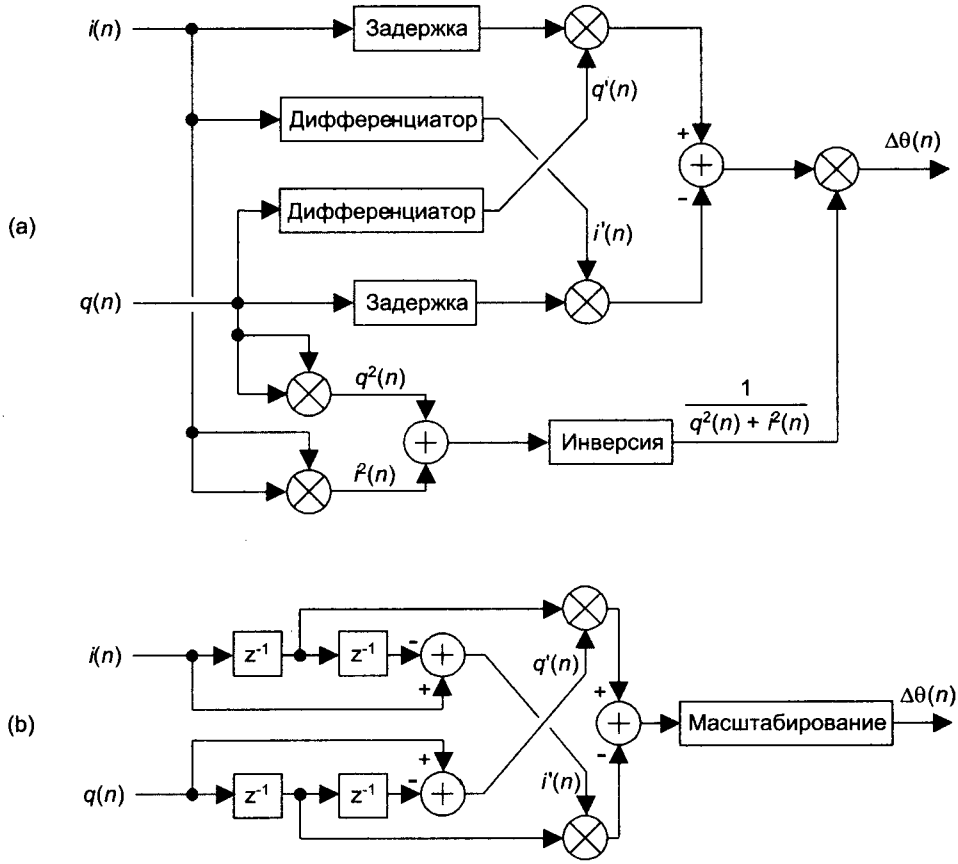


Рис. 13.61. Частотный демодулятор без вычисления арктангенса: (a) стандартная схема; (b) упрощенная схема

Если $i(n)+jq(n)$ представляет собой чистый ЧМ-сигнал и *жестко ограничен*, так что сумма $i^2(n)+q^2(n)$ постоянна, знаменатель выражения (13-117) вычислять не нужно. В этом случае, используя дифференциаторы с коэффициентами 1, 0, –1, можно упростить схему демодулятора, как показано на рисунке 13.61 (b), где операция масштабирования представляет собой умножение на коэффициент, обратный этой константе.

13.23. Удаление постоянной составляющей

При оцифровке аналоговых сигналов с использованием АЦП выходная последовательность обычно содержит некоторое постоянное смещение, т. е. среднее значение отсчетов отлично от нуля. Это постоянное смещение может присутствовать в исходном непрерывном сигнале или появиться в результате несовершенства АЦП. Другим источником постоянного смещения в ЦОС является усечение значений отсчетов, представленных B битами, до длины слова, которая меньше B. Независимо от источника нежелательное смещение сигнала может порождать проблемы. При спектральном анализе любое постоянное смещение проявляется в частотной области как энергия, сосредоточенная вблизи нулевой частоты, в отсчете спектра $X(0)$. Для N-точечного БПФ значение $X(0)$ пропорционально N и становится недопустимо большим при большом размере БПФ. При построении графика спектра программа промасштабирует все отсчеты по большому значению $X(0)$, в результате остальные отсчеты, которые нас интересуют больше, окажутся плохо различимыми. Ненулевая постоянная составляющая в звуковых сигналах вызывает особенно большие проблемы, потому что конкатенация двух сигналов или переключение с одного сигнала на другой сопровождаются неприятными слышимыми щелчками. В современных цифровых системах связи постоянное смещение квадратурных сигналов ухудшает характеристики системы и повышает частоту ошибок. Учитывая все сказанное, становится ясно, что методы удаления постоянной составляющей интересуют очень многих специалистов по ЦОС.

13.23.1. Удаление постоянной составляющей в блоках данных

Если обработка выполняется не в реальном масштабе времени, и отсчеты сигнала поступают блоками (последовательностями фиксированной длины) по N отсчетов, то метод устранения постоянной составляющей очевиден. Мы просто вычисляем среднее значение N отсчетов и вычитаем это среднее из каждого отсчета входного блока, получая при этом новую последовательность, постоянная составляющая которой очень мала.

Эта схема, хотя и эффективна, несовместима с обработкой в реальном масштабе времени, когда обрабатывается непрерывный поток данных. В системах реального времени для подавления постоянной составляющей мы вынуждены использовать фильтры.

13.23.2. Удаление постоянной составляющей в реальном масштабе времени

Просматривая литературу, автор обнаружил три фильтра для удаления постоянной составляющей [55 - 57]; их структуры показаны на рисунках 13.62 (a), (b) и (c).

За исключением постоянных масштабирующих множителей эти фильтры имеют характеристики, идентичные характеристикам *обобщенного фильтра удаления постоянной составляющей*, структура которого показана на рисунке 13.62 (d), а передаточная функция имеет вид

$$H(z) = Y(z)/X(z) = (1 - z^{-1})/(1 - \alpha z^{-1}); \qquad (13\text{-}118)$$

(То, что фильтры на рисунках 13.62 (c) и (d) эквивалентны, неочевидно. Вы можете проверить их эквивалентность, записав разностные уравнения, связывающие узлы в цепи обратной связи фильтра, показанного на рисунке 13.62 (c). Затем преобразуйте это разностное уравнение в z-область и решите полученное уравнение относительно $Y(z)/X(z)$, в результате чего получите (13-118)).

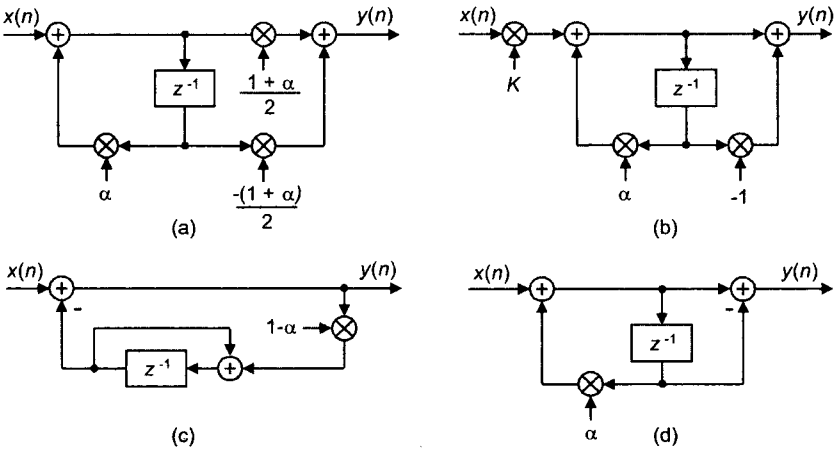


Рис. 13.62. Фильтры, используемые для подавления постоянной составляющей

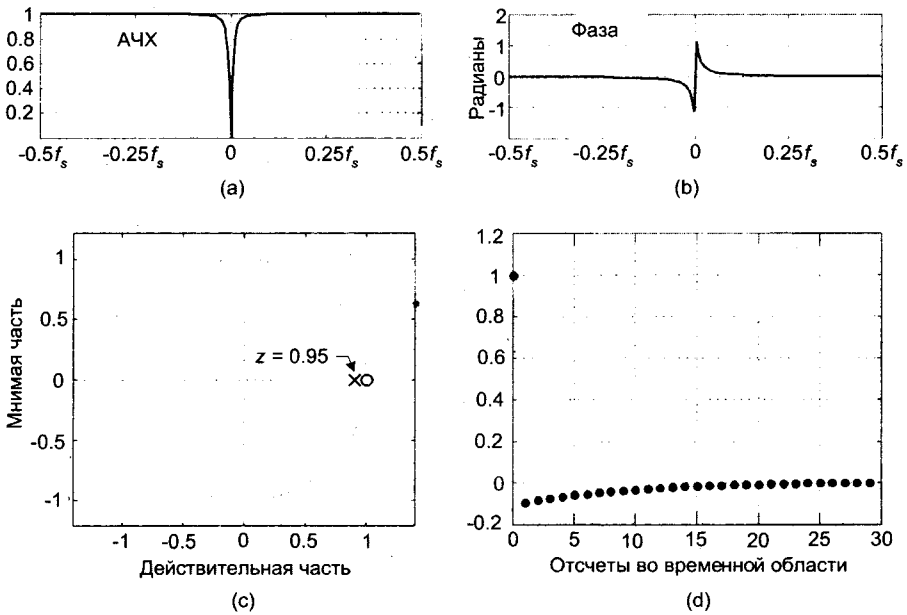


Рис. 13.63. Фильтр подавления постоянной составляющей, $\alpha = 0.95$; (a) АЧХ; (b) ФЧХ; (c) карта нулей и полюсов; (d) импульсная характеристика

Поскольку фильтры подавления постоянной составляющей можно промоделировать с помощью обобщенного фильтра, показанного на рисунке 13.62 (d), мы приводим обобщенные АЧХ и ФЧХ фильтра на рисунках 13.63 (a) и (b) при $\alpha = 0.95$. Карта нулей и полюсов фильтра приведена на рисунке 13.63 (c). Она показывает, что один ноль лежит в точке $z = 1$, обеспечивая бесконечно большое подавление постоянной составляющей, а полюс в точке $z = \alpha$ делает характеристику вблизи нулевой частоты очень крутой. Чем ближе α к единице, тем уже полоса режекции с центром на нулевой частоте. На рисунке 13.63 (d) приведена импульсная характеристика обобщенного фильтра.

Рисунок 13.64 иллюстрирует поведение обобщенного фильтра подавления постоянной составляющей (для $\alpha = 0.95$) при подаче на его вход синусоиды, к которой в момент времени, соответствующий *100*-му отсчету, добавляется постоянное смещение, равное *2*, которое исчезает при поступлении *200*-го отсчета. Как видим, фильтр работает хорошо.

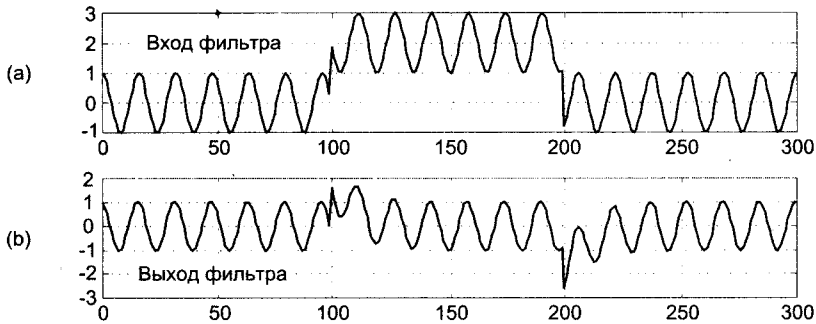


Рис. 13.64. Поведение фильтра подавления постоянной составляющей: (a) входная последовательность с постоянным смещение на интервале от 100-го до 200-го отсчета; (b) выходной сигнал фильтра

13.23.3. Удаление постоянной составляющей в реальном масштабе времени при квантовании

Поскольку обобщенный фильтр подавления постоянной составляющей имеет цепь обратной связи, для представления выходных отсчетов $y(n)$ может понадобиться двоичное слово большей длины, чем для представления входных отсчетов $x(n)$. Это может привести к переполнению при реализации с фиксированной запятой. Масштабирующие множители $(1+\alpha)/2$ и K на рисунках 13.62 (a) и (b) меньше единицы, что уменьшает риск двоичного переполнения.

В аппаратуре с фиксированной запятой отсчеты $y(n)$ часто усекаются до той же длины слова, что и входные отсчеты $x(n)$. Это квантование (посредством усечения) вносит отрицательное смещение в квантованные отсчеты, что ухудшает подавление постоянной составляющей. Когда мы усекаем двоичное значение отсчета, отбрасывая некоторое количество младших бит, мы вносим отрицательную ошибку. К счастью, значение ошибки доступно нам и может быть прибавлено к следующему неквантованному отсчету, увеличивая его положительное смещение. При усечении следующего отсчета добавленная ошибка минимизирует отрицательную ошибку, вносимую квантованием.

На рисунке 13.65 (a) показано добавление квантующего сигма-дельта модулятора в цепь обратной связи фильтра подавления постоянной составляющей, показанного на рисунке 13.62 (c). Положительная ошибка, вносимая усечением (блок Q), задерживается на один отсчет и подается обратно на вход квантователя. Поскольку модулятор обладает свойством *формирования шума*, которое смещает спектр шума в область высоких частот, общее постоянное смещение на выходе фильтра минимизируется [56].

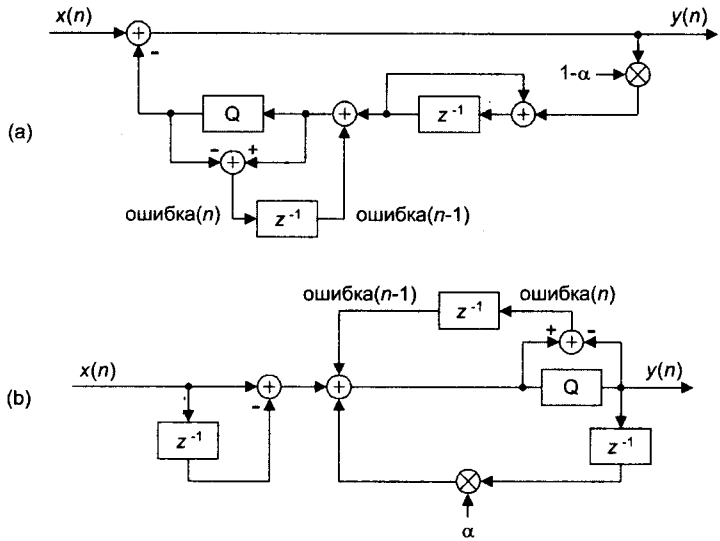


Рис. 13.65. Два фильтра подавления постоянной составляющей с использованием квантования для предотвращения переполнений

Аналогичный способ формирования шума квантования можно применить и в случае Прямой Формы I, приведенной на рисунке 13.62 (d); как показано на рисунке 13.65 (b). Здесь также ошибка квантования задерживается на один период дискретизации и прибавляется к выходному сигналу квантователя [58 - 60]. Повторим еще раз: фильтры подавления постоянной составляющей, показанные на рисунке 13.65, используются для предотвращения переполнения двоичных данных посредством квантования, без масштабирующих множителей.

13.24. Усовершенствование интеграторов-гребенчатых фильтров

Главной задачей проектирования фильтров на основе каскадного соединения интегратора и гребенчатого фильтра является, как отмечалось в разделе 10.5 в связи с изменением частоты дискретизации, минимизация потребления энергии путем максимально возможного уменьшения длины слова и тактовой частоты обработки данных. Здесь мы предлагаем остроумный прием, который позволяет понизить энергопотребление при использовании нерекурсивных структур с

помощью *полиномиальной факторизации*, которая позволяет уменьшить рост длины слова данных. Для реализации этих нерекурсивных структур необходимо, чтобы коэффициент изменения частоты дискретизации R был равен целой степени двух, что позволяет уменьшить объем вычислений путем использования *полифазного разложения, транспонированных структур, упрощенного умножения* и использования *общих субструктур* [61 - 63]. (Эти приемы не так сложны, как кажется, просто у них такие мудреные названия.) Затем мы рассмотрим нерекурсивную схему, которая дает возможность реализовать коэффициент преобразования частоты дискретизации, отличный от степени двойки. При последующем изложении предполагается, что читатель знаком с материалом по фильтрам на основе интегратора и гребенчатого фильтра, представленным в разделе 10.5.

13.24.1. Нерекурсивные ИГФ

Напомним, что структуры прореживающих ИГФ первого ($M = 1$) и третьего ($M = 3$) порядка, задержка гребенчатой части которых равна коэффициенту изменения частоты дискретизации R, имеют вид, показанный на рисунке 13.66. Как показано в разделе 10.5, передаточная функция прореживающего ИГФ M-го порядка может быть выражена либо в рекурсивной, либо в нерекурсивной форме, что и отражено в (13-119). (Вы можете при желании использовать сведения о геометрической прогрессии, приведенные в приложении В, чтобы показать эквивалентность двух форм передаточной функции фильтра.)

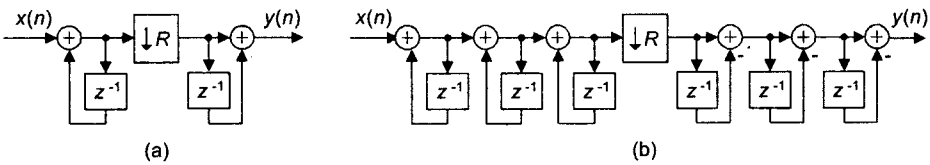


Рис. 13.66. Рекурсивные прореживающие ИГФ: (a) первого порядка; (b) третьего порядка

$$H_{cic}(z) = [(1 - z^{-R})/(1 - z^{-1})]^M \qquad \textit{рекурсивная форма} \qquad (13\text{-}119)$$

$$H_{cic}(z) = \left[\sum_{n=0}^{R-1} z^{-n}\right]^M = (1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-R+1})^M. \qquad \textit{нерекурсивная форма} \qquad (13\text{-}119')$$

Если коэффициент изменения частоты дискретизации R равен целой степени двойки, $R = 2^K$, где K — некоторое положительное целое, нерекурсивную форму M-го порядка (13-119') можно разложить на множители:

$$H_{cic}(z) = (1 + z^{-1})^M (1 + z^{-2})^M (1 + z^{-4})^M \ldots (1 + z^{-2^{K-1}})^M. \qquad (13\text{-}120)$$

Достоинством такой факторизации является то, что ИГФ в этом случае можно реализовать в виде K нерекурсивных каскадов, как показано на рисунке 13.67. В этой реализации отсутствуют цепи обратной связи, которые приводят к неприятному росту длины слова. В этой нерекурсивной структуре длина слова тоже растет на M бит в каждом каскаде, но частота дискретизации в каждом каскаде уменьшается в два раза. Было показано, что эта структура потребляет меньше

энергии, чем рекурсивная структура на рисунке 13.66 (b), при порядках фильтра, превышающих три, и коэффициентах прореживания/интерполяции, превышающих восемь [63]. В результате снижение потребляемой мощности благодаря уменьшению частоты дискретизации превышает ее рост вследствие увеличения длины слова.

В каждом каскаде этой нерекурсивной структуры возможны дальнейшие улучшения [62]. Например, предположим, что мы хотим использовать прореживающий ИГФ пятого порядка в качестве каскада 1 на рисунке 13.67. В этом случае передаточная функция каскада имеет вид

$$H_1(z) = (1 + z^{-1})^5 = 1 + 5z^{-1} + 10z^{-2} + 10z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-5} =$$
$$= 1 + 10z^{-2} + 5z^{-4} + (5 + 10z^{-2} + z^{-4})z^{-1} = F_A(z) + F_B(z)z^{-1}. \qquad (13\text{-}121)$$

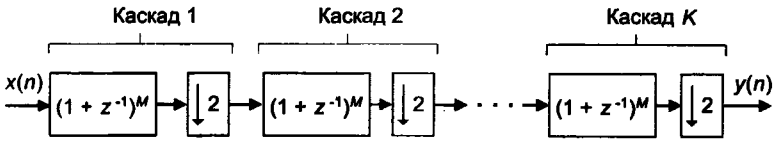


Рис. 13.67. Многокаскадный нерекурсивный ИГФ

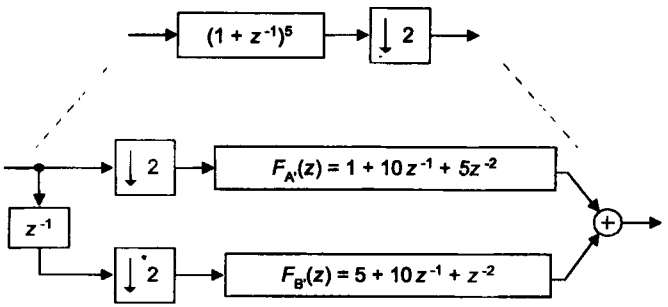


Рис. 13.68. Полифазная структура нерекурсивного каскада ИГФ пятого порядка

Второй шаг в (13-121), известный как *полифазное разложение* [64-68], позволяет организовать вычисления по двум параллельным ветвям, как показано на рисунке 13.68. Прореживание в два раза выполняется путем направления нечетных отсчетов на вход $F_{A'}(z)$, а четных — на вход $F_{B'}(z)$. Поскольку прореживание в два раза выполняется до фильтрации, новые полифазные компоненты $F_{A'}(z) = 1 + 10z^{-1} + 5z^{-2}$ и $F_{B'}(z) = 5 + 10z^{-1} + z^{-2}$ реализуются на половинной частоте дискретизации. (Понижение частоты дискретизации на возможно более ранних стадиях обработки является главной целью реализации прореживающих ИГФ.)

Полифазные компоненты $F_{A'}(z)$ и $F_{B'}(z)$ реализуются на основе линий задержки с ответвлениями и, к нашему счастью, здесь возможны дальнейшие упрощения. Рассмотрим полифазный фильтр $F_{A'}(z)$ на основе линии задержки с ответвлениями, показанный на рисунке 13.69 (a). Транспонированная версия этого фильтра показана на рисунке 13.69 (b), где порядок следования коэффициентов изменен на обратный. Сумматор на рисунке 13.69 (a) должен выполнять два сложения на входной отсчет данных, а в транспонированной форме все сумматоры выполняют не более одного сложения на один отсчет. Следовательно, транспонированная форма может работать на более высокой частоте.

Еще больше упростить обработку можно, используя упрощенное умножение с помощью сдвигов и сложений, как показано на рисунке 13.69 (c). В этом случае коэффициент 5 реализуется как $2^2 + 1$, и умножение не нужно. Наконец, благодаря транспонированной структуре, мы можем использовать для уменьшения количества аппаратурных модулей метод *общих субструктур*, пример использования которого приведен на рисунке 13.69 (d). Прекрасно! Между прочим, эти нерекурсивные фильтры все еще называются ИГФ, несмотря на то, что они не содержат интеграторов.

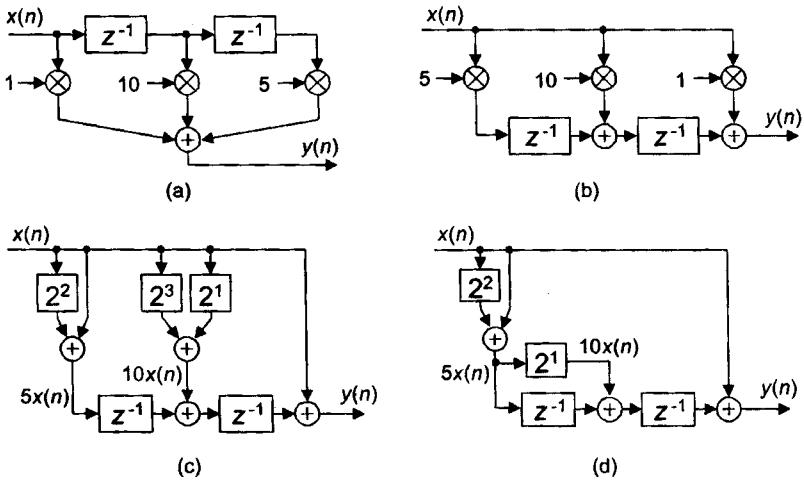


Рис. 13.69. Компонент фильтра $F_A(z)$: (a) структура на основе линии задержки; (b) транспонированная структура; (c) упрощенное умножение; (d) использование общих субструктур

Таблица 13.7 поможет читателю в определении полиномиального эквивалента для нескольких нерекурсивных каскадов M-го порядка, как в (13-121).

Таблица 13.7. Разложения бинома $(1 + z^{-1})^M$

M	$(1+z^{-1})^M$
2	$(1+z^{-1})^2 = 1+2z^{-1}+z^{-2}$
3	$(1+z^{-1})^3 = 1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}$
4	$(1+z^{-1})^4 = 1+4z^{-1}+6z^{-2}+4z^{-3}+z^{-4}$
5	$(1+z^{-1})^5 = 1+5z^{-1}+10z^{-2}+10z^{-3}+5z^{-4}+z^{-5}$
6	$(1+z^{-1})^6 = 1+6z^{-1}+15z^{-2}+20z^{-3}+15z^{-4}+6z^{-5}+z^{-6}$
7	$(1+z^{-1})^7 = 1+7z^{-1}+21z^{-2}+35z^{-3}+35z^{-4}+21z^{-5}+7z^{-6}+z^{-7}$
8	$(1+z^{-1})^8 = 1+8z^{-1}+28z^{-2}+56z^{-3}+70z^{-4}+56z^{-5}+28z^{-6}+8z^{-7}+z^{-8}$
9	$(1+z^{-1})^9 = 1+9z^{-1}+36z^{-2}+84z^{-3}+126z^{-4}+126z^{-5}+84z^{-6}+36z^{-7}+9z^{-8}+z^{-9}$

13.24.2. Нерекурсивные ИГФ с разложением R на простые множители

В нерекурсивные прореживающих ИГФ, описаных выше, значения коэффициента прореживания R ограничены целыми степенями двойки. Это ограничение можно ослабить, используя хитроумную схему разложения R на простые множители [69]. Метод разложения R на простые множители основан на представлении целого числа R в форме произведения $R = 2^p 3^q 5^r 7^s 11^t$ ..., где $2, 3, 5, 7, 11$ — простые числа. (Эта процедура называется *разложением на простые множители* и вызывает интерес со времен Эвклида.). В данном случае соответствующее количество ИГФ-субфильтров включаются последовательно, как показано на рисунке 13.70 (a). Эти ИГФ M-го порядка описываются передаточными функциями

$$H_2(z) = [(1 - z^{-2})/(1 - z^{-1})]^M = (1 + z^{-1})^M$$

$$H_3(z) = [(1 - z^{-3})/(1 - z^{-1})]^M = (1 + z^{-1} + z^{-2})^M$$

$$H_5(z) = [(1 - z^{-5})/(1 - z^{-1})]^M = (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4})^M. \quad (13\text{-}122)$$

и т. д., что позволяет использовать нерекусивную реализацию.

Из-за ограниченного объема книги мы не приводим здесь элегантный и трудоемкий вывод этого алгоритма; но мы можем продемонстрировать использование данного алгоритма на примере. Допустим, нам нужен ИГФ третьего порядка с коэффициентом прореживания $R = 90$.

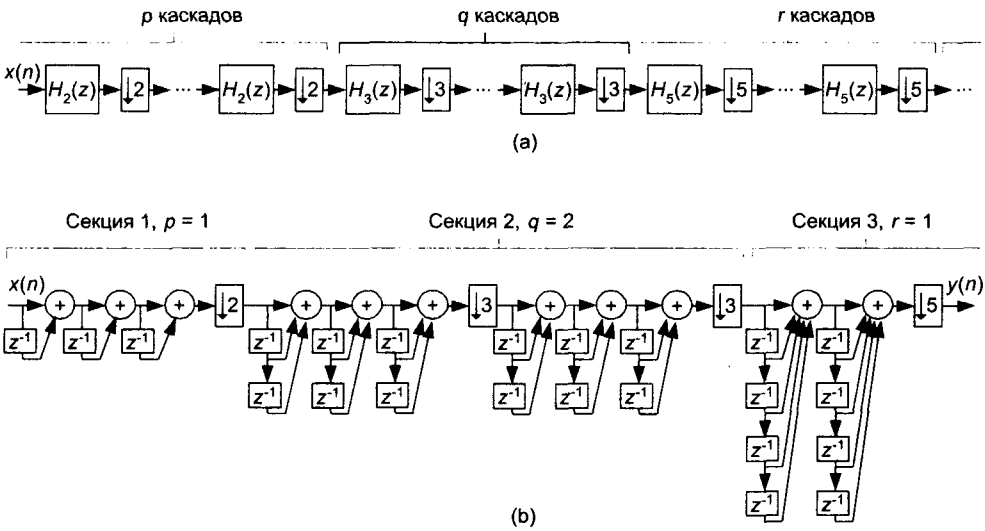


Рис. 13.70. Пример нерекурсивного ИГФ с разложением на простые множители: (a) каскадная структура; (b) пример нерекурсивного ИГФ с $R = 90$

Коэффициент прореживания раскладывается на множители следующим образом: $90 = (2)(3)(3)(5)$. Следовательно, $p = 1$, $q = 2$ и $r = 1$. Составной ИГФ реализуется как $H_2(z)H_3(z)H_3(z)H_5(z)$, что показано на рисунке 13.70 (b).

На первый взгляд множество сложений в ИГФ на рисунке 13.70 (b) увеличит потребляемую мощность такого фильтра, но понижение частоты дискретизации

существенно снижает энергопотребление [69]. Если один сумматор в секции 1 на рисунке 13.70 (b) потребляет P единиц мощности, то секция 1 потребляет $3P$ единиц мощности, а каждое сложение в первой части секции 2 потребляет $P/2$ единиц мощности. Каждое сложение во второй части секции 2 потребляет $P/6$ единиц мощности, тогда как каждый сумматор в секции 3 потребляет $P/18$ единиц мощности.

Мы можем выбирать рекурсивную или нерекурсивную реализацию для субфильтров каждой секции на рисунке 13.70 (b), как показано на рисунке (13-122). В нерекурсивных реализациях можно применять полифазное разложение, транспонированные структуры, упрощенное умножение и объединение субструктур. Проектирование ИГФ поистине прошло большой путь со времени введения этих фильтров в начале 1980-х годов.

13.25. Сглаживание импульсного шума

На практике может потребоваться выполнение точных измерений в присутствии шума или помех высокого уровня. Без использования некоторого кондиционирования аналогового сигнала или цифровой обработки будет трудно получить в этом случае устойчивые и повторяемые результаты измерения. Рассматриваемый ниже прием сглаживания импульсного шума, разработанный первоначально для обнаружения изменений токов, измеряемых микроамперами, при величине тока, измеряемой миллиамперами, использует алгоритм сглаживания, который улучшает устойчивость точных измерений в присутствии импульсного шума [70].

Практические методы понижения шума часто включают усреднение по большому количеству отсчетов (*блочное усреднение*) последовательности измеренных значений $x(n)$ для вычисления N отсчетов арифметического среднего $M(q)$. В этом случае последовательность усредненных поблочно значений $M(q)$ определяется как:

$$M(q) = \sum_{k=qN}^{(q+1)N-1} x(n), \qquad (13\text{-}123)$$

где временной индекс процесса усреднения принимает значения $q = 0, 1, 2, 3$ и т. д. При $N = 10$, например, в первом блоке данных ($q = 0$), усредняются отсчеты $x(0)$ – $x(9)$ и получается отсчет $M(0)$. Во втором блоке данных ($q = 1$), усредняются отсчеты от $x(10)$ до $x(19)$ и вычисляется отсчет $M(1)$, и т. д. [71].

Рассматриваемый алгоритм сглаживания импульсного шума обрабатывает блок отсчетов, полученный с помощью периодической дискретизации, и количество отсчетов N может изменяться в соответствии с индивидуальной потребностью и имеющимися ресурсами. Обработка одного блока из N отсчетов выполняется следующим образом: необходимо накопить $N+2$ отсчетов последовательности $x(n)$, отбросить максимальный (наибольший положительный) и минимальный (наибольший по модулю отрицательный) отсчеты, после чего остается блок данных в N отсчетов, и вычислить среднее арифметическое $M(q)$ оставшихся N отсчетов. Каждый отсчет в блоке затем сравнивается со средним. Подсчитывается количество отсчетов, превышающих среднее арифметическое, и количество отсчетов, которые оказались меньше среднего арифметического, а также сумма модулей от-

клонений значений отсчетов от среднего арифметического в одном направлении (которая, согласно определению среднего, равна сумме модулей отклонений от среднего в другом направлении). Эти данные используются для коррекции среднего в соответствии с формулой:

$$A(q) = M(q) + [(P_{os} - N_{eg})\ |D_{total}|]/N^2 \qquad (13\text{-}124)$$

где $A(q)$ — *уточненное среднее*, $M(q)$ — среднее арифметическое, вычисленное по (13-123), P_{os} — количество отсчетов, превышающих $M(q)$, и N_{eg} — количество отсчетов, которые меньше $M(q)$, D_{total} — сумма абсолютных значений отклонений от среднего в одном направлении. Величина D_{total} представляет собой сумму разностей между отсчетами, вошедшими в P_{os}, и $M(q)$.

В качестве примера рассмотрим систему, обрабатывающую 10 отсчетов измерений: 10, 10, 11, 9, 10, 10, 13, 10, 10 и 10. Среднее $M = 10.3$. Количество отсчетов с положительной разностью составляет $P_{os} = 2$, а количество отсчетов с отрицательной разностью составляет $N_{eg} = 8$ (т. е. $P_{os} - N_{eg} = -6$). Сумма модулей отклонений от среднего в любом направлении составляет 3.4 [при использовании восьми отсчетов, не превышающих среднее, получаем $(10.3 - 10)7 + (10.3 - 9)$; а с использованием двух отсчетов, превышающих среднее, получаем $(13 - 10.3) + (11 - 10.3)$]. При $D_{total} = 3.4$, выражение (13-124) дает уточненный результат $A = 10.096$.

Качество алгоритма сглаживания по сравнению с традиционным блочным усреднением можно оценить на примере. На рисунке 13.71 (а) показана последовательность $x(n)$, содержащая 300 измеренных значений ступенчатого сигнала с единичной амплитудой, искаженного случайным шумом (дисперсия которого равна 0.1) и двумя большими отсчетами импульсного шума.

Описанный процесс усреднения следует дополнить следующими соображениями:

- Размер блока N может быть произвольным целым числом, но при реализации в реальном масштабе времени с фиксированной запятой выгодно выбирать N равным целой степени двойки. В этом случае трудоемкие операции деления в (13-123) и (13-124) сводятся к двоичному сдвигу вправо.

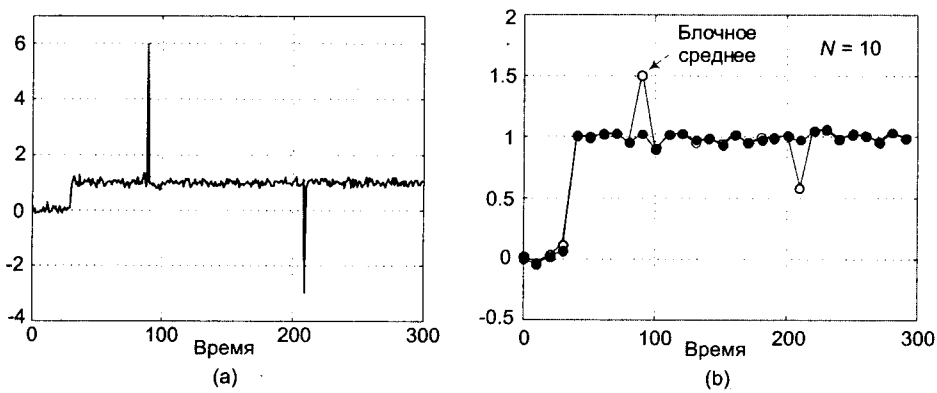


Рис. 13.71. Сглаживание шума при $N = 10$: (a) входной сигнал $x(n)$; (b) результат блочного усреднения (белые кружочки) и сглаживания импульсного шума (черные кружочки)

- Если возможно появление в сигнале более чем двух шумовых пиков, то следует накапливать больше чем $N+2$ отсчетов $x(n)$ и отбрасывать соответствующее количество максимальных и минимальных отсчетов для их удаления.
- Мы можем обойти вычисление (13-124) и воспользоваться только вычислением $M(q)$ по (13-123). В этом случае при заданном N стандартное отклонение $M(q)$ будет примерно на 15-20 % больше, чем стандартное отклонение $A(q)$.

13.26. Эффективное вычисление полиномов

На случай, если вы этого не знаете, сообщаю вам, что для ускорения вычисления полиномов в программе разумно воспользоваться методом, известным как схема Горнера. Примером вычисления полинома является вычисление арктангенса x:

$$\arctan(x) = 0.14007x^4 - 0.34241x^3 - 0.01522x^2 + 1.00308x - 0.00006 \quad (13\text{-}125)$$

Чтобы определить, насколько уменьшается трудоемкость вычисления полиномов, рассмотрим следующий полином k-го порядка:

$$f_k(x) = c_k x^k + \ldots + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0. \quad (13\text{-}126)$$

Его можно переписать как:

$$f_k(x) = f_{Hk}(x) = x(x(x(\ldots x(c_kx + c_{k-1}) + c_{k-2}) \ldots + c_2) + c_1) + c_0, \quad (13\text{-}127)$$

где индекс H подчеркивает использование схемы Горнера. Использование этого метода для вычисления полиномов:

- уменьшает количество необходимых умножений,
- легко реализуется на программируемых ЦПОС с помощью команд *умножения с накоплением* (multiply and accumulate = MAC).

Например, рассмотрим полином пятого порядка:

$$f_5(x) = c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0. \quad (13\text{-}128)$$

При вычислении обычным способом (13-128) требует девять умножений и пять сложений, тогда как для схемы Горнера

$$F_5(x) = f_{H5}(x) = x(x(x(\ldots x(c_5x + c_4) + c_3) \ldots + c_2) + c_1) + c_0 \quad (13\text{-}129)$$

требуются пять умножений и пять сложений, а вычисление начинается с внутреннего двучлена $(c_5x + c_4)$, требующего одного сложения и одного умножения.

Вот несколько примеров полиномов в формате Горнера:

$$c_2x^2 + c_1x + c_0 = x(c_2x + c_1) + c_0 \quad (13\text{-}130)$$

$$c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = x(x(c_3x + c_2) + c_1) + c_0 \quad (13\text{-}131)$$

$$c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = x(x(x(c_4x + c_3) + c_2) + c_1) + c_0. \quad (13\text{-}132)$$

Между прочим, умножения и сложения не могут быть выполнены параллельно. Поскольку схема Горнера в принципе последовательна, результат последнего умножения должен быть готов перед началом следующего сложения, результат которого должен быть готов до последующего умножения.

Схема Горнера — один из полезных методов вычислений, имеющий очень древние корни. Китайские математики описали эту схему в XIII в. Европейские математики (включая Уильяма Горнера (William Horner)) вновь открыли и опубликовали ее в начале XVIII в. Есть основания полагать, что сэр Исаак Ньютон также нашел и использовал ее в XVII в.

13.27. Проектирование КИХ-фильтров очень высокого порядка

Существуют приложения, в которых необходимо проектировать нерекурсивные КИХ-фильтры очень высокого качества (с очень узкой полосой пропускания и/или очень высоким подавлением). Рассмотрим ситуацию, когда вы использовали (7-39) или какой-то другой алгоритм и определили, что вам необходимо реализовать КИХ-фильтр с линейной ФЧХ с 2000 ответвлений. Затем, когда вы пытаетесь спроектировать такой фильтр, используя проверенную программу, реализующую алгоритм Паркса-Маклеллана, основанный на алгоритме замен Ремеза, вы получаете непригодный для использования результат. Случается, что некоторые инкарнации алгоритма замен Ремеза испытывают проблемы со сходимостью (дают неточные результаты), когда количество ответвлений или порядок фильтра превышает четыреста-пятьсот. Существует остроумный прием, позволяющий обойти проблему проектирования КИХ-фильтров высокого порядка, используя дополнение нулями в частотной области[1].

Если программа проектирования КИХ-фильтров не в состоянии рассчитывать наборы коэффициентов в тысячи элементов, то мы можем рассчитать меньшее количество коэффициентов и интерполировать эти коэффициенты (импульсную характеристику фильтра), чтобы получить требуемую длину фильтра. Вместо использования интерполяции во временной области с ее погрешностями мы можем упростить процесс, выполнив интерполяцию с помощью добавление нулей в частотной области.

Рассмотрим следующий пример: предположим, что мы имеем сигнал, дискретизированный с частотой $f_s = 1000$ Гц. Мы хотим реализовать ФНЧ с частотой среза 20 Гц и подавлением в полосе задерживания 60 дБ. Проблема усложняется требованиями линейности ФЧХ и удаления постоянной составляющей сигнала. (Последние требования не позволяют использовать схемы удаления постоянной составляющей, описанные в разделе 13.23.) Первым делом рассчитаем прототипный нерекурсивный КИХ-фильтр, имеющий, скажем, $N = 168$ коэффициентов,

[1] Я благодарен моему коллеге по ЦОС Эрику Якобсену (Eric Jacobsen), руководителю отделения алгоритмов в Intel Corp., за публикацию этого метода.

АЧХ которого показана на рисунке 13.72 (a), а коэффициенты $h_p(k)$ — на рисунке 13.72 (b). Затем рассчитаем 168-точечное ДПФ коэффициентов и получим отсчеты частотной характеристики $H_p(m)$, модули которых изображены на рисунке 13.72 (c).

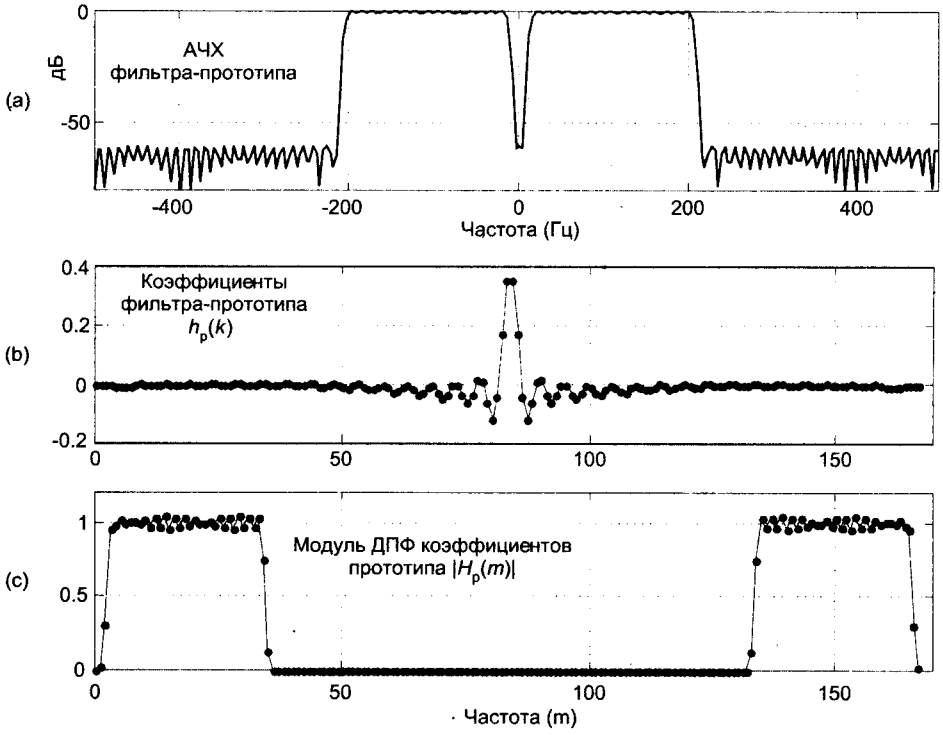


Рис. 13.72. КИХ-фильтр-прототип: (a) АЧХ; (b) коэффициенты $h_p(k)$; (c) модули $|H_p(m)|$ отсчетов 168-точечного ДПФ $h_p(k)$

В предположении, что проектируемый фильтр требует примерно 1600 ответвлений, нам необходимо интерполировать импульсную характеристику прототипа $h_p(k)$ с коэффициентом интерполяции $M = 10$. Мы выполняем интерполяцию, вводя $(M-1)N$ нулей в центральную часть отсчетов частотной характеристики $H_p(m)$, получая в результате 1680 отсчетов частотной характеристики $H(m)$, модули которых показаны на рисунке 13.73 (a). Наконец, мы выполняем 1680-точечное обратное ДПФ от $H(m)$ и получаем интерполированную импульсную характеристику требуемого фильтра $h(k)$ (т. е. коэффициенты фильтра), показанную на рисунке 13.73 (b). (Десятикратное уменьшение относительной частоты пропускания прототипа $H_p(m)$ дает десятикратное увеличение длины импульсной характеристики $h_p(k)$.) АЧХ результирующего КИХ-фильтра очень высокого порядка в диапазоне от –30 до 30 Гц показана на рисунке 13.73 (c).

В этом процессе коэффициенты прототипа $h_p(k)$ сохраняются среди интерполированных коэффициентов, если отсчет $H_p(N/2)$ (соответствующий $f_s/2$) равен нулю. Это условие обеспечивает сопряженную симметрию и, следовательно, дает действительные коэффициенты $h(k)$.

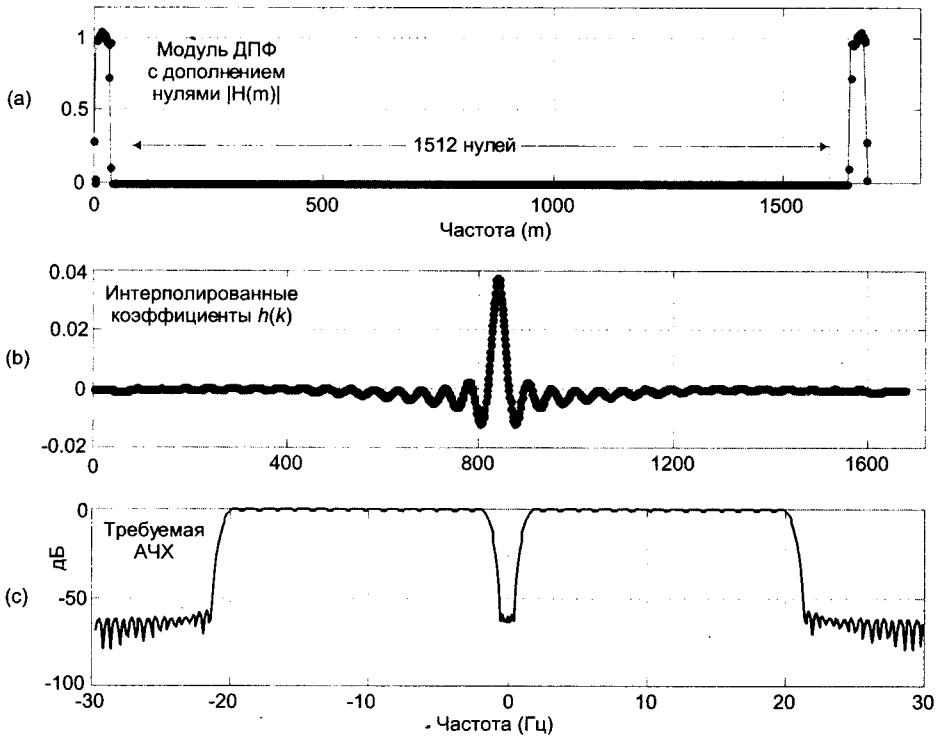


Рис. 13.73. Требуемый КИХ-фильтр: (a) модуль $H_p(m)$ с добавленными нулями; (b) интерполированные коэффициенты $h(k)$; (c) АЧХ

Последовательность действий при использовании этого метода проектирования фильтров высокого порядка:

- Если требуемый фильтр должен иметь MN ответвлений, следует задать длину прототипа N, равную целому значению, достаточно малому для того, чтобы программа проектирования КИХ-фильтров дала пригодный к использованию результат. Коэффициент интерполяции M равен количеству требуемых ответвлений, деленному на N.
- Далее необходимо спроектировать прототипный КИХ-фильтр с N ответвлениями с учетом M-кратной компрессии частотной характеристики конечного фильтра. (То есть частоты среза прототипа должны в M раз превышать заданные частоты среза.)
- Следует выполнить N-точечное ДПФ коэффициентов прототипа $h_p(k)$ и получить $H_p(m)$.
- Затем необходимо вставить в $H_p(m)$ $M-1$ нулевых отсчетов непосредственно перед $H_p(N/2)$ и получить частотную характеристику $H(m)$, содержащую MN отсчетов.
- Нужно вычислить MN-точечное обратное ДПФ $H(m)$, которое дает интерполированный набор коэффициентов $h(k)$ длиной MN. (Следует отбросить мнимую часть результатов обратного ДПФ, которая из-за ошибок вычислений может оказаться отличной от нуля.)

- Далее следует умножить $h(k)$ на M для компенсации коэффициента потери амплитуды $1/M$, обусловленного интерполяцией.
- И, наконец, необходимо проверить коэффициенты $h(k)$ и убедиться в том, что полученная АЧХ удовлетворяет заданным требованиям, используя программу анализа фильтров. (Можно, например, использовать такой метод: дополнить $h(k)$ несколькими тысячами нулей и выполнить БПФ очень большого размера.)

Примером применения такого фильтра является построение высококачественного полифазного ФНЧ, описанное в разделе 10.4. (Структуры высококачественных *интерполированных КИХ-фильтров* и фильтров на основе *частотной выборки* не позволяют использовать их разложение на полифазные субфильтры в таких приложениях.)

13.28. Интерполяция во временной области с помощью БПФ

Вдумчивый читатель может посмотреть на схему интерполяции импульсной характеристики КИХ-фильтра, представленную в разделе 13.27, и задуматься: «Если мы можем интерполировать импульсную характеристику, то мы должны быть в состоянии интерполировать любые сигналы, используя тот же метод дополнения нулями в частотной области». Это действительно так, и описанный выше процесс интерполяции с коэффициентом M, применяемый к сигналам, иногда называют *точной интерполяцией*, т. к. его применение эквивалентно использованию идеального интерполирующего фильтра с бесконечным подавлением в полосе задерживания, и он нашел отражение в учебниках по ЦОС, журнальных статьях и конспектах лекций известных профессоров.

Для согласования терминологии договоримся, что мы вычисляем БПФ N-точечной последовательности $x(n)$ и получаем отсчеты $X(m)$ в частотной области. Затем мы добавляем $(M-1)N$ нулей в среднюю часть $X(m)$ для получения MN отсчетов $X_{int}(m)$, где MN равно целой степени двойки. Затем мы выполняем MN-точечное обратное БПФ от $X_{int}(m)$ для получения интерполированной с коэффициентом M последовательности $x_{int}(n)$. Использование дополнения нулями в частотной области для реализации интерполяции во временной области имеет две важные особенности, на которых мы сейчас сосредоточимся.

13.28.1. Вычисление интерполированных действительных сигналов

Первая особенность: чтобы интерполированная последовательность $x_{int}(n)$ была действительной, дополненная нулями последовательность в частотной области $X_{int}(m)$ должна сохранять сопряженную симметрию. Если последовательность $X(m)$ содержит ненулевой отсчет $X_{int}(N/2)$, соответствующий частоте $f_s/2$, для обеспечения сопряженной симметрии мы должны выполнить следующую процедуру:

- Выполнить N-точечное БПФ N-элементной последовательности $x(n)$ и получить N отсчетов $X(m)$ в частотной области.
- Создать последовательность $X_{int}(m)$ длиной MN, все отсчеты которой равны нулю.
- Присвоить $X_{int}(m) = X(m)$ для $0 \le m \le (N/2)-1$.
- Присвоить отсчетам $X_{int}(N/2)$ и $X_{int}(MN-N/2)$ значение отсчета $X(N/2)/2$. (Этот шаг, необходимый для обеспечения сопряженной симметрии и улучшения точности интерполяции, мало известен [72].)
- Присвоить $X_{int}(m) = X(q)$ при $MN-(N/2)+1 \le m \le MN-1$ и $(N/2)+1 \le q \le N-1$.
- Вычислить MN-точечное обратное БПФ последовательности $X_{int}(m)$, в результате которого получается требуемая интерполированная последовательность $x_{int}(n)$ длиной MN отсчетов.
- Наконец, если необходимо, умножить $x_{int}(n)$ на M для компенсации коэффициента $1/M$, обусловленного интерполяцией.

Ух! Приведенная математизированная запись процедуры придает этой схеме довольно сложный вид, но все не так плохо. В таблице 13.8 показаны присвоения отсчетам $X_{int}(m)$ в частотной области при $0 \le m \le 15$ для интерполяции последовательности $x(n)$ длиной $N = 8$ отсчетов с коэффициентом интерполяции $M = 2$.

Таблица 13.8. Формирование $X_{int}(m)$ при двукратной интерполяции

m	$X_{int}(m)$	m	$X_{int}(m)$
0	$X(0)$	8	0
1	$X(1)$	9	0
2	$X(2)$	10	0
3	$X(3)$	11	0
4	$X(4)/2$	12	$X(4)/2$
5	0	13	$X(5)$
6	0	14	$X(6)$
7	0	15	$X(7)$

Одно из привлекательных свойств описанного алгоритма состоит в том, что каждый M-й отсчет последовательности $x_{int}(n)$ совпадает с отсчетом исходной последовательности $x(n)$. На практике, из-за вычислений с ограниченной разрядностью мнимые части отсчетов результирующей последовательности $x_{int}(n)$ могут иметь некоторые ненулевые значения. В этом случае в качестве $x_{int}(n)$ мы берем действительные части отсчетов обратного БПФ последовательности $X_{int}(m)$.

Вторая особенность интерполяции действительных сигналов имеет действительно большое значение. Этот алгоритм *точной* интерполяции обеспечивает корректные результаты только тогда, когда исходная последовательность $x(n)$ периодична в пределах интервала накопления. Если в $X(m)$ присутствует утечка спектра, как для большинства сигналов, с которыми мы работаем, интерполированная последовательность $x_{int}(n)$ может содержать заметные ошибки значений начальных и конечных отсчетов, как показано на рисунке 13.74 (a), где последовательность $x(n)$ длиной $N = 24$ отсчета интерполирована с коэффициентом $M = 2$. На этом рисунке квадратики (и белые, и черные) представляют интерполированную последовательность $x_{int}(n)$ длиной 48 отсчетов. Белые квадратики обозначают отсчеты исходной последовательности $x(n)$, а кружочки обозначают корректные значения интерполированных отсчетов. (В центральной части рисунка кружочки почти не видны, т. к. они закрыты квадратиками.) График ошибки интерполяции, представляющей собой разность между корректными значениями интерполированных отсчетов и полученными значениями отсчетов $x_{int}(n)$, приведен на рисунке 13.74 (b).

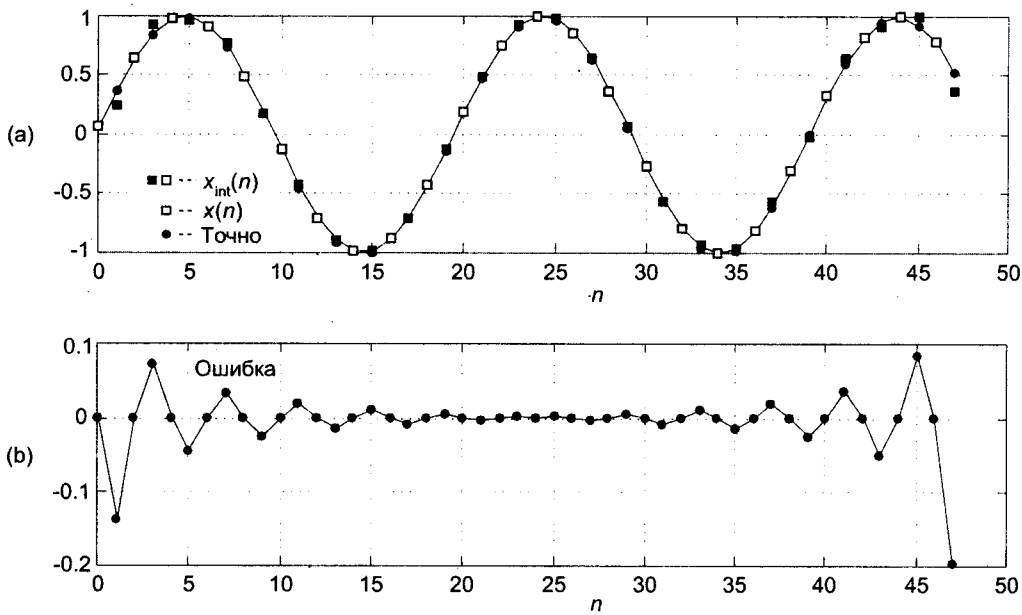


Рис. 13.74. Результаты интерполяции при $N = 24$, $M = 2$: (a) отсчеты интерполированной $x_{int}(n)$, исходной $x(n)$ последовательностей и правильные значения отсчетов интерполированной последовательности; (b) ошибка интерполяции

Ошибки интерполяции возникают из-за того, что $X_{int}(m)$ не совпадает со спектром, который мы получили бы, если бы частота дискретизации последовательности $x(n)$ была равна Mf_s, и мы выполняли бы БПФ длиной MN точек. Замкнутого выражения, позволяющего предсказать эти ошибки, не существует. Ошибка зависит от амплитуд и фаз спектральных компонентов последовательности $x(n)$, а

также от N и M. В работе [72] описан прием, позволяющий уменьшить ошибки интерполяции двумерных изображений, который для уменьшения утечки спектра в $X(m)$ использует простое взвешивание нескольких первых и нескольких последних отсчетов $x(n)$.

С появлением быстрых микросхем ЦОС и методов конвейерного БПФ, описанный алгоритм интерполяции может оказаться полезным в ряде приложений, таких как вычисление тестовых последовательностей с выбираемой частотой дискретизации и постоянной формой огибающей спектра; интерполяция с переменным коэффициентом сигналов, полученных фильтрацией в частотной области методом быстрой свертки (раздел 13.10); или изменение интервала дискретизации цифровых изображений. Один из методов, заслуживающих рассмотрения в этом случае — это использование эффективного метода $2N$-точечного действительного БПФ, описанного в разделе 13.5.2, для вычисления прямого БПФ действительной последовательности $x(n)$. Конечно, опытный инженер в данном случае проведет поиск по литературе, чтобы выяснить, какие алгоритмы эффективного выполнения обратного БПФ при наличии большого количества нулевых отсчетов в частотной области существуют.

13.28.2. Вычисление интерполированных аналитических сигналов

Для генерации M-кратно интерполированного аналитического сигнала по действительной последовательности $x(n)$, содержащей N отсчетов, мы можем использовать дополнение нулями в частотной области, если N четно [73]. Соответствующая процедура выглядит так:

- вычислить N-точечное БПФ действительной последовательности $x_r(n)$, содержащей N отсчетов, и получить N отсчетов в частотной области $X_r(m)$;
- сформировать последовательность $X_{int}(m)$ длиной MN отсчетов и заполнить ее нулями, при этом произведение MN должно быть равно целой степени двойки;
- присвоить $X_{int}(0) = X_r(0)$ и $X_{int}(N/2) = X_r(N/2)$;
- присвоить $X_{int}(m) = 2X_r(m)$ при $1 \le m \le (N/2)-1$;
- вычислить обратное MN-точечное БПФ последовательности $X_{int}(m)$ и получить требуемый интерполированный аналитический (комплексный) сигнал $x_{c,int}(n)$ длиной MN отсчетов;
- в завершение, если необходимо, умножить $x_{c,int}(n)$ на M для компенсации коэффициента снижения амплитуды $1/M$, обусловленного интерполяцией.

Начальные и конечные отсчеты комплексной последовательности $x_{c,int}(n)$ также будут содержать ошибки.

13.29. Перенос по частоте с помощью прореживания

Мы можем перенести полосовой сигнал вниз по частоте, преобразовать его в низкочастотный сигнал без использования умножителей с помощью прореживания в целое число раз D, как показано на рисунке 13.75 (a). Если полосовой фильтр выдает выходной сигнал с шириной спектра B Гц, спектр которого расположен так, как показано на рисунках 13.75 (b) и 13.75 (d), где k — целое положительное число, то прореживание в D раз даст низкочастотные сигналы, спектры которых показаны на рисунках 13.75 (c) и 13.75 (e), в зависимости от того, четно или нечетно целое число k. Обратите внимание, пожалуйста, на то, что спектр на рисунке 13.75 (e) инвертирован по частоте. Чтобы избежать появления ошибок наложения в результате прореживания, должен удовлетворяться критерий Найквиста, т. е. ширина B спектра сигнала $x_{BP}(n)$ не должна превышать $f_s/2D$.

13.30. Автоматическая регулировка усиления (АРУ)

Еще во времена радиоприемников на электронных лампах возникла необходимость автоматической установки коэффициента усиления приемника, чтобы поддерживать (примерно) постоянный уровень выходного сигнала при изменениях амплитуды входного сигнала. Такого рода схемы, которые называют схемами автоматической регулировки усиления (АРУ) являются важным компонентом современных аналоговых и цифровых приемников систем связи. На рисунке 13.76 (a) показана простая цифровая схема АРУ [74,75]. Принцип ее работы достаточно прост: мощность выходного сигнала измеряется и сравнивается с заданным образцовым уровнем R (который определяет требуемое СКЗ выходного сигнала). Если уровень сигнала слишком высок (низок), вырабатывается отрицательный (положительный) сигнал обратной связи, который уменьшает (увеличивает) коэффициент усиления. Управляющей параметр α устанавливает уровень сигнала обратной связи и используется для регулировки постоянной времени АРУ (т. е. того, насколько быстро происходит изменение коэффициента усиления).

Если на вход приходит сигнал $x(n)$, показанный на рисунке 13.76 (b), амплитуда которого флуктуирует, система АРУ выдает выходной сигнал $y(n)$ с примерно постоянной амплитудой, показанный на рисунке 13.76 (c).

Мы назвали схему на рисунке 13.76 (a) простой, но в действительности системы АРУ не так просты. Система регулирования является нелинейной, нестационарной, зависящей от сигнала системой с обратной связью. И поэтому она очень плохо поддается обычному анализу во временной или z-области. Именно поэтому анализ системы АРУ выполняется скорее эмпирически, чем математически, и этим также объясняется, почему системы АРУ так мало обсуждаются в литературе по ЦОС.

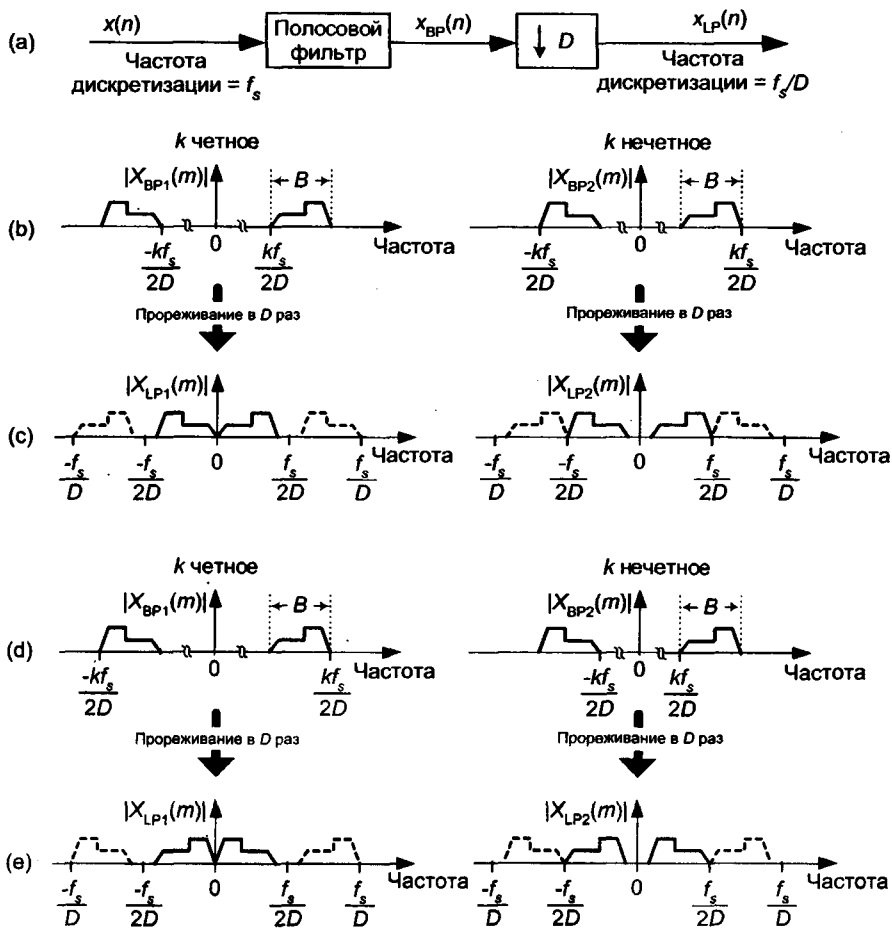


Рис. 13.75. Перенос по частоте действительного полосового сигнала с помощью прореживания в D раз

Для некоторых сигналов $x(n)$ сигнал обратной связи может быстро флуктуировать, и контур обратной связи будет менять коэффициент усиления слишком часто. Это приведет к слабой амплитудной модуляции сигнала, которая породит в выходном сигнале $y(n)$ гармоники низкого уровня. Эту проблему можно свести к минимуму, введя в контур обратной связи простой ФНЧ перед или после сумматора R. Но такой фильтр не избавит систему от главного недостатка. Постоянная времени (время нарастания) этой системы АРУ зависит от уровня входного сигнала и различна при нарастании и убывании входного сигнала $x(n)$. Эти свойства резко сокращают возможность управления постоянной времени. Для решения данной проблемы мы воспользуемся опытом, накопленным при разработке АРУ радиоприемников, и перейдем в логарифмическую область.

Мы можем получить полный контроль над постоянной времени АРУ и расширить динамический диапазон АРУ, используя логарифмирование, как показано на рисунке 13.77 (а). Как принято на практике, эта система логарифмической

АРУ содержит ФНЧ для подавления слишком быстрых изменений [76]. Этот фильтр может быть простым фильтром скользящего среднего, каскадированным ИГФ или более традиционным ФНЧ, имеющим импульсную характеристику вида $\sin(x)x$.

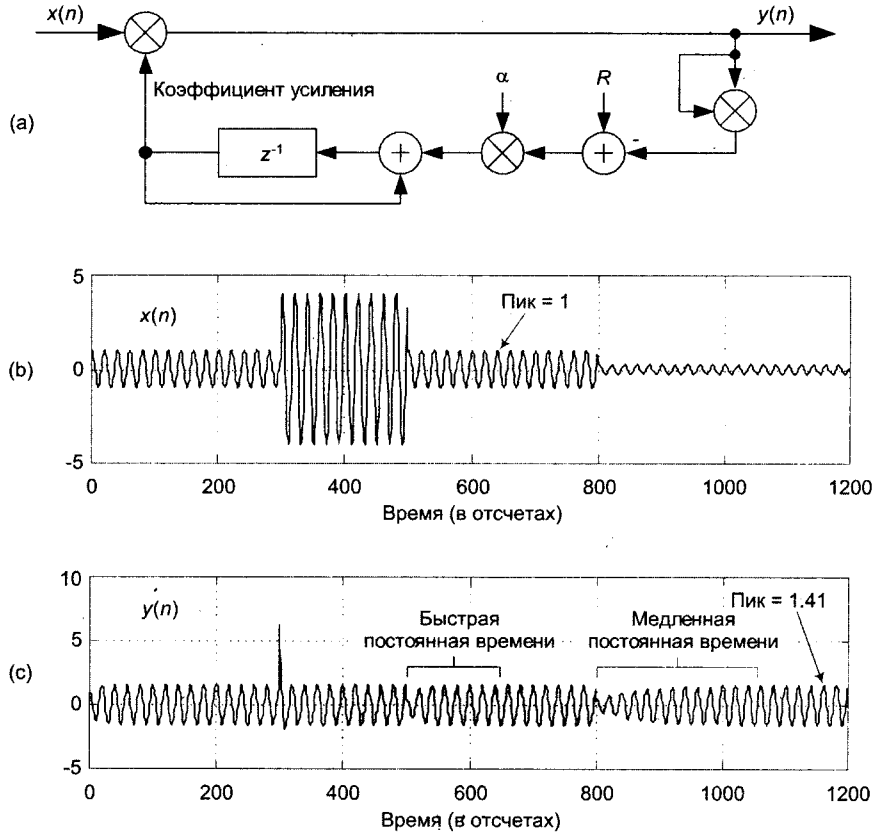


Рис. 13.76. Система АРУ: (a) линейная цепь АРУ; (b) пример входного сигнала $x(n)$ с изменяющейся амплитудой; (c) выходной сигнал $y(n)$ при $\alpha = 0.01$ и $R=1$

Для логарифмической системы АРУ постоянная времени обратной связи зависит только от α и не зависит от уровня входного сигнала, что можно видеть на рисунке 13.77 (b), когда входной сигнал $x(n)$ такой, как показано на рисунке 13.76 (b). Операции Log и Antilog могут быть выполнены как $\log_2(x)$ и 2^x соответственно.

13.31. Оценка огибающей

В этом разделе мы познакомим вас с простой в реализации схемой грубой оценки огибающей комплексного сигнала. Под *оценкой огибающей* мы понимаем оценку мгновенных значений амплитуды комплексного сигнала $x_c(n)$. Схема предельно проста: мы берем сумму абсолютных значений действительной и мнимой частей комплексного сигнала и подаем ее на вход простого БИХ ФНЧ первого порядка, на выходе которого получаем огибающую $E(n)$, как показано она рисунке 13.78 (a).

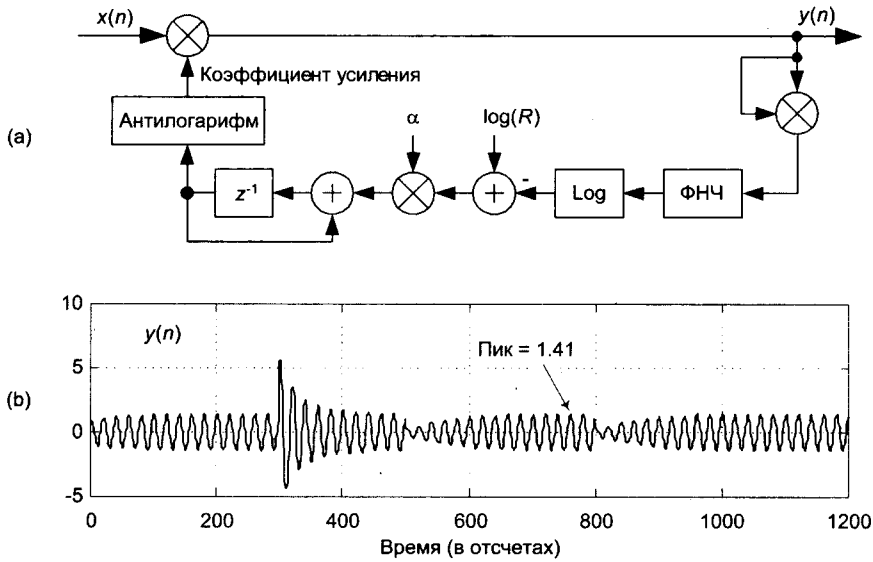


Рис. 13.77. Система АРУ: (a) схема логарифмической АРУ; (c) выходной сигнал $y(n)$ при $\alpha = 0.01$ и $R=1$

Коэффициент обратной связи фильтра α находится в диапазоне от 0 до 1. (Этот фильтр представляет собой фильтр экспоненциального усреднения, обсуждавшийся в разделе 11.5, который некоторые специалисты по ЦОС называют *квазиинтегратором*.) Последовательность $E(n)$ пропорциональна требуемому модулю $x_c(n)$, или

$$E(n) \approx K\,|x_c(n)| = K\sqrt{x_r(n)^2 + x_i(n)^2}\,. \qquad (13\text{-}133)$$

Чтобы оценить качество такого детектора огибающей, рассмотрим дискретизированную версию модулированной синусоиды $x_r(n)$, показанной на рисунке 9.7 (a), по которой мы можем сгенерировать дискретизированный аналитический (комплексный) сигнал $x_c(n)$. Если $x_c(n)$ подается на описанную нами схему оценки огибающей, мы получим результаты, показанные на рисунках 13.78 (b) и 13.78 (c), где сплошными линиями показана $E(n)$, штриховыми — истинное значение амплитуды $x_c(n)$. Обратите внимание на зависимость степени сглаживания флуктуаций $E(n)$ от значения α.

На основе последовательности $x_r(n)$ должна быть сформирована комплексная аналитическая последовательность $x_c(n)$ (с использование одного из методов, обсуждавшихся в разделах 9.4 и 9.5), которая затем подается на детектор огибающей. Преимуществом такого метода оценки огибающей является то, что в (13-133) нет необходимости выполнять возведение в квадрат и извлечение квадратного корня, а также то, что не используется сравнение $|x_r(n)|$ и $|x_i(n)|$, используемое при приближенной оценке длины вектора в разделе 13.2.

Дает ли этот метод достаточно точные результаты, предоставим решать читателю. Его точность может быть ниже требований, предъявляемых к большинству амплитудных детекторов, но эту схему можно использовать для оценки амплитуды сигнала в системах АРУ или обнаружения сигналов.

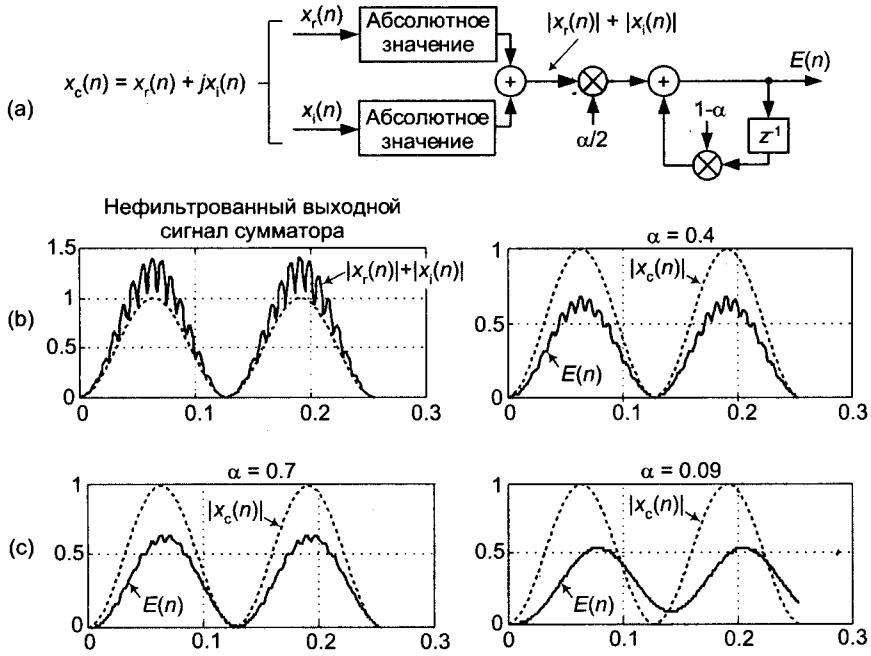


Рис. 13.78. Оценка огибающей: (a) блок-схема; (b) результат суммирования $|x_r(n)| + |x_i(n)|$ и $E(n)$ при $\alpha = 0.4$; (c) $E(n)$ при $\alpha = 0.7$ и $\alpha = 0.9$

13.32. Квадратурный генератор

Здесь мы предлагаем вашему вниманию удобный и надежный цифровой генератор квадратур, дающий выходной сигнал вида $y_i(n) + jy_q(n)$, имеющий структуру, показанную на рисунке 13.79 (a). Если у вас нет опыта работы с цифровыми генераторами, эта структура выглядит довольно сложной, но в действительности все не так плохо. Если вы посмотрите на нее внимательно, то увидите, что она выполняет следующие вычисления

$$y_i(n) = y_i(n-1)\cos(\theta) - y_q(n-1)\sin(\theta) \qquad (13\text{-}134)$$

и

$$y_q(n) = y_i(n-1)\sin(\theta) + y_q(n-1)\cos(\theta). \qquad (13\text{-}134')$$

Эти вычисления представляют собой просто умножение предыдущего комплексного отсчета выходного сигнала на комплексную экспоненту $e^{j\theta}$ в алгебраической форме:

$$y_i(n) + jy_q(n) = [y_i(n-1) + jy_q(n-1)][\cos(\theta) + j\sin(\theta)] =$$
$$= [y_i(n-1) + jy_q(n-1)]e^{j\theta}. \qquad (13\text{-}135)$$

Итак, теория функционирования генератора проста. Каждый новый комплексный отсчет равен предыдущему выходному отсчету, повернутому на θ радиан, где угол θ равен $2\pi f_t/f_s$, а f_t и f_s представляют собой частоту настройки генератора и частоту дискретизации в Гц.

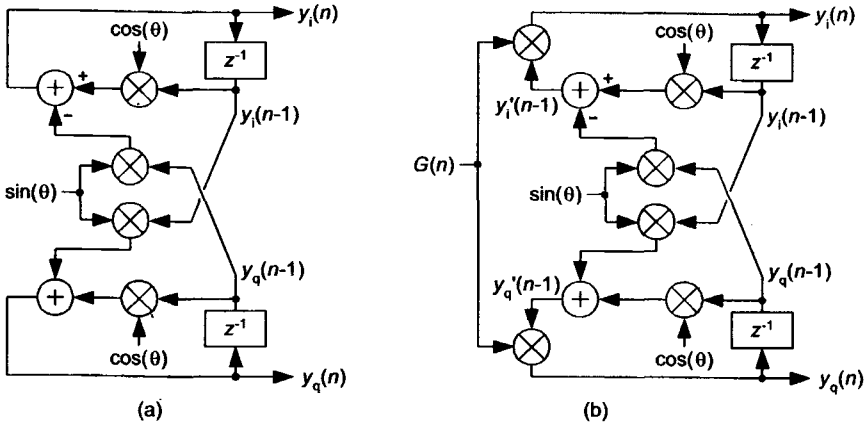


Рис. 13.79. Генератор квадратурных сигналов: (a) стандартная структура; (b) структура с АРУ

Для запуска генератора мы задаем начальные условия вида $y_i(n-1) = 1$ и $y_q(n-1) = 0$, а затем циклически вычисляем новые выходные отсчеты с ростом индекса времени n, используя (13-134). Этот генератор называют *парным квадратурным генератором* (*coupled quadrature oscillator*), т. к. для вычисления каждого нового отсчета синфазного и квадратурного сигналов используются оба предыдущих выходных сигнала. Это полезная схема генератора, потому что она позволяет использовать любые частоты настройки (почти от 0 Гц до, примерно, $f_s/2$), и выходные сигналы ее равны по амплитуде, в отличие от некоторых других структур квадратурных генераторов [77]. Сложно, однако, обеспечить стабильность такого генератора при реализации в арифметике с фиксированной запятой.

В зависимости от длины двоичных слов и значения θ, амплитуды выходных сигналов могут либо нарастать, либо убывать с течением времени, т. к. при работе с форматами чисел с фиксированной запятой невозможно представить $e^{j\theta}$ с амплитудой, в точности равной единице, во всем диапазоне значений θ. Решение этой проблемы возможно при вычислении $y_i'(n-1)$ и $y_q'(n-1)$ и умножении их на мгновенный коэффициент усиления $G(n)$, как показано на рисунке 13.79 (b). Хитрость здесь заключается в способе вычисления значений коэффициента усиления $G(n)$.

Мы можем использовать метод линейной АРУ, описанный в разделе 13.30, как показано на рисунке 13.80 (a), где α имеет маленькое значение, скажем, $\alpha = 0.01$. Значение R представляет собой требуемое СКЗ выходных сигналов генератора. Этот метод АРУ существенно улучшает стабильность генератора. Но существует более простой с вычислительной точки зрения метод, который можно разработать, используя известное нам со школы *разложение в ряд Тэйлора*. Вот как это делается.

Используя подход, подобный использованному в [78], мы можем определить требуемый коэффициент усиления как

$$G(n) = M_{des}/M_{act} \tag{13-136}$$

Здесь требуемая амплитуда выходного сигнала M_{des} делится на реальную амплитуду выходного сигнала M_{act}. Мы можем также выразить коэффициент усиления через мощность в виде

$$G(n) = \sqrt{P_{des}} / \sqrt{P_{act}} =$$

$$= \sqrt{P_{des}} / \sqrt{P_{act} + E}\ , \qquad (13\text{-}137)$$

где P_{des} — требуемая мощность выходного сигнала, а P_{act} — реальная его мощность. В правой части (13-137) P_{act} заменена на сумму требуемой мощности P_{des} и ошибки E, и мы будем вычислять именно это отношение. Чтобы не вычислять квадратные корни, а также потому, что ошибка E мала, мы аппроксимируем это отношение в окрестности точки $E = 0$ рядом Тэйлора, содержащим два члена:

$$G(n) \approx a_0 + a_1(E)\ . \qquad (13\text{-}138)$$

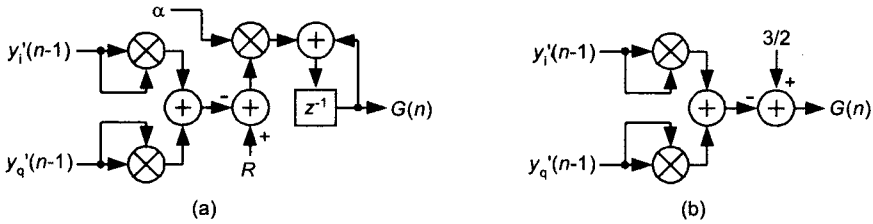


Рис. 13.80. Схемы АРУ: (a) линейная АРУ; (b) упрощенная АРУ

Вычисление коэффициентов ряда Тэйлора дает значения $a_0 = 1$ и $a_1 = -1/2P_{des}$, а, вспомнив, что $E = P_{act} - P_{des}$, мы можем оценить мгновенный коэффициент усиления как

$$G(n) \approx 1 - (1/2P_{des})(P_{act} - P_{des}) = 3/2 - P_{act}/2P_{des} =$$

$$= 3/2 - [y_i'(n-1)^2 + y_q'(n-1)^2]/2P_{des}\ . \qquad (13\text{-}139)$$

Если мы примем значение амплитуды равным $1/\sqrt{2}$, т. е. $P_{des} = 1/2$, то мы избавляемся от деления в (13-139) и получаем

$$G(n) \approx 3/2 - [y_i'(n-1)^2 + y_q'(n-1)^2]\ . \qquad (13\text{-}140)$$

Упрощенная структура вычисления $G(n)$ показана на рисунке 13.80 (b). На практике, чтобы не получались значения, превышающие единицу (в тех случаях, когда выбранный формат с фиксированной запятой не позволяет представлять числа ≥ 1), мы используем разумную рекомендацию из [77]: умножаем на $G(n)/2$ и удваиваем произведение на рисунке 13.79 (b). В работе [78] рекомендуется использовать округление вместо усечения во всех промежуточных вычислениях для улучшения чистоты спектра выходного сигнала. Округление также дает некоторое улучшение управления частотой настойки. Поскольку этот генератор гарантированно устойчив и может настраиваться динамически, он, безусловно, заслуживает внимания при выборе схемы генератора как действительных, так и квадратурных сигналов [77].

13.33. Двухрежимное усреднение

Ниже описана остроумная схема усреднения, используемая для подавления шума, которая сочетает быструю реакцию фильтра скользящего среднего с управлением подавлением шума фильтра экспоненциального усреднения[1]. Структура этого устройства усреднения изображена на рисунке 13.81 (а). Фильтр усреднения работает следующим образом: переключатель остается разомкнутым при обработке K входных отсчетов, после чего выходной сигнал $y(n)$ оказывается равным среднему $x(n)$ по K отсчетам. Перед приходом $K+1$-го входного отсчета переключатель замыкается, преобразуя фильтр скользящего среднего в фильтр экспоненциального усреднения с коэффициентом обратной связи $(1 - 1/K)$, который обеспечивает управление подавлением шума, как описывалось в разделе 11.5.

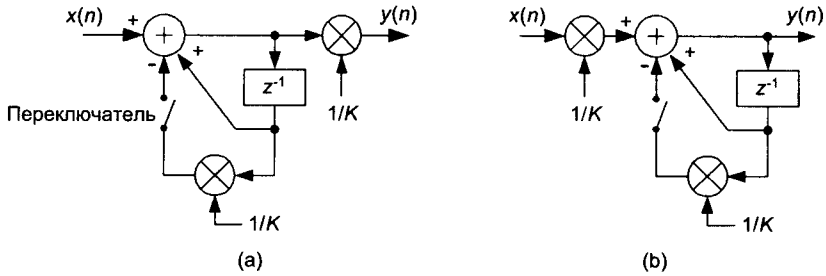


Рис. 13.81. Двухрежимное усреднение: (a) стандартная форма, (b) альтернативная форма

В приложениях, в которых необходимо минимизировать длину выходного слова сумматора, второй умножитель на $1/K$ можно поставить перед сумматором, уменьшив, таким образом, амплитуду выходных отсчетов сумматора, как показано на рисунке 13.81 (b).

А вот еще одна плодотворная идея: если мы можем принять K равным целой степени двойки, умножение на $1/K$ может быть реализовано в виде арифметического сдвига (путем соответствующего соединения шин при аппаратурной реализации), вследствие чего мы получим фильтр подавления шума, не содержащий умножителей.

Библиография

1. Powell, S. «Design and Implementation Issues of All-digital Broadband Modems», *DSP World Workshop Proceedings*, Toronto, Canada, Sept. 13.16, 1998, pp. 127-142.
2. Frerking, M. *Digital Signal Processing in Communications Systems*, Chapman & Hall, New York, 1994, p. 330.
3. Jacobsen, E., Minister of Algorithms, Texas Instruments Inc., private communication, Sept. 11,2003.

[1] Мы благодарны гуру ЦОС Фреду Харрису (Fred Harris) за то, что он рекомендовал эту схему двухрежимного устройства усреднения.

4. Palacherls, A. «DSP-mP Routine Computes Magnitude», *EDN*, Oct. 26,1989.
5. Mikami, N., Kobayashi, M., and Yokoyama, Y. «A New DSP-Oriented Algorithm for Calculation of the Square Root Using a Nonlinear Digital Filter», *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 40, No. 7, July 1992.
6. Lyons, R. «Turbocharge Your Graphics Algorithm», *ESD: The Electronic System Design Magazine*, Oct. 1988.
7. Adams W., and Brady, J. «Magnitude Approximations for Microprocessor Implementation», *IEEE Micro*, Vol. 3, No. 5, Oct. 1983.
8. Eldon, J. «Digital Correlator Defends Signal Integrity with Multibit Precision», *Electronic Design*, May 17,1984.
9. Smith, W. «DSP Adds Performance to Pulse Compression Radar», *DSP Applications*, Oct. 1993.
10. Harris Semiconductor Corp., HSP50110 Digital Quadrature Tuner Data Sheet, File Number 3651, Feb. 1994.
11. Griffin, G. «Subject: *Re: Looking for Good Implementation of log() and sqrt()*», *Usenet group comp.dsp* post, Apr. 9,1999.
12. Bingham, C, Godfrey, M., and Tukey, J. «Modern Techniques for Power Spectrum Estimation», *IEEE Trans, on Audio and Electroacoust.*, Vol. AU-15, No. 2, June 1967.
13. Bergland, G. «A Guided Tour of the Fast Fourier Transform», IEEE Sectrum magazine, July 1969, p. 47.
14. Harris, F. «On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform», *Proceedings of the IEEE*, Vol. 66, No. 1, Jan. 1978.
15. Nuttall, A. «Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior», *IEEE Trans. on Acoust. Speech, and Signal Proc*, Vol. ASSP-29, No. 1, Feb. 1981.
16. Cox, R. «Complex-Multiply Code Saves Clocks Cycles», *EDN*, June 25,1987.
17. Rabiner, L., and Gold, B. *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975 (есть русский перевод: Рабинер Л., Голд Б. «Теория и применение цифровой обработки сигналов», М.: Мир, 1978, доступен по адресу http://geogin.narod.ru/arhiv/dsp/dsp3.htm).
18. Sorenson, H., Jones, D., Heideman, M., and Burrus, C. «Real-Valued Fast Fourier Transform Algorithms», *IEEE Trans, on Acoust. Speech, and Signal Proc*, Vol. ASSP-35, No. 6, June 1987.
19. Cooley, J., Lewis, P., and Welch, P. «The Fast Fourier Transform Algorithm: Programming Considerations in the Calculation of Sine, Cosine and Laplace Transforms», *Journal Sound Vib.*, Vol. 12, July 1970.
20. Brigham, E. *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
21. Burrus, C, et al., *Computer-Based Exercises for Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994, p. 53.
22. Hewlett-Packard, «The Dynamic Range Benefits of Large-Scale Dithered Analog-to-Digital Conversion, *HP Product Note:* 89400-7.

23. Blesser, and B. Locanthi, B. «The Application of NarrowBand Dither Operating at the Nyquist Frequency in Digital Systems to Provide Improved Signal-to-Noise Ratio over Conventional Dithering», *J Audio Eng. Soc*, Vol. 35 (June 1987).

24. Coleman, B., et al., «Coherent Sampling Helps When Specifying DSP A/D Converters», *EDN*, Oct. 1987.

25. Ushani, R. «Classical Tests are Inadequate for Modern High-Speed Converters», *EDN Magazine*, May 9,1991.

26. Meehan, P. and Reidy, J. «FFT Techniques Give Birth to Digital Spectrum Analyzer», *Electronic Design*, Aug. 11,1988, p. 120.

27. Beadle, E. «Algorithm Converts Random Variables to Normal», *EDN Magazine*, May 11, 1995.

28. Spiegel, M. *Theory and Problems of Statistics*, Shaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., New York, 1961, p. 142.

29. Davenport Jr., W. and Root, W. *Random Signals and Noise*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1958 (есть русский перевод Давенпорт В., Рут В.: «Введение в теорию случайных сигналов и шумов», М., ИИЛ, 1960).

30. Salibrici, B. «Fixed-Point DSP Chip Can Generate Real-Time Random Noise», *EDN Magazine*, Apr. 29,1993.

31. Marsaglia, G. and Tsang, W. «The Ziggurat Method for Generating Random Variables», *Journal of Statistic Software*, Vol. 5, No. 8,2000.

32. *http://finmath.uchicago.edu/~wilder/Code/random/Papers/Marsaglia_OO_ZMGRV.pdf.*

33. *http://www.jstatsoft.org/v05/i08/ziggurat.pdf.*

34. Donadio, M. «Lost Knowledge Refound: Sharpened FIR Filters», *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 20, No. 5, Sept. 2003, pp. 61-63.

35. Kwentus, A., et al, «Application of Filter Sharpening to Cascaded Integrator- Comb Decimation Filters». *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, Vol. 45, Feb. 1997, pp. 457-467.

36. Gentili, P., et al. «Improved Power-of-Two Sharpening Filter Design by Genetic Algorithm», 1996 IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP '96), Atlanta, Georgia, Vol. 3,1996, p. 1375.

37. Graychip Inc. «Upconverting Signals with the GC2011 for Easier Digital to Analog Conversion», Application Note: GC2011-AN9804, Dec. 20,1998.

38. Donadio, M., private communication, Sept. 11,2003.

39. Nagai, K. «Pruning the Decimation-in-Time FFT Algorithm with Frequency Shift», *IEEE Trans, on ASSP*, Vol. ASSP-34, Aug. 1986, pp. 1008-1010.

40. Skinner, D. «Pruning the Decimation-in-time FFT Algorithm», *IEEE Trans, on ASSP*, Vol. ASSP-24, April 1976, pp. 193-194.

41. Markel, J. D. «FFT Pruning», *IEEE Trans on Audio Electroacoust.*, Vol. AU-19, Dec. 1971, p. 305-311.:

42. Sreenivas, T., and Rao, P. «FFT Algorithm for Both Input and Ouput Pruning», *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. ASSP-27, June 1979, pp. 291-292.

43. Lyons, R. «Program Aids Analysis of FFT Algorithms», *EDN Mag.*, Aug. 6, 1987.

44. Goertzel, G. «An Algorithm for the Evaluation of Finite Trigonometric Series», *American Math. Monthly*, Vol. 65,1958, pp. 34-35.

45. Proakis, J. and Manolakis, D. *Digital Signal Processing Principles, Algorithms, and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996, pp. 480-481.

46. Oppenheim, A., Schafer, R., and Buck, *J. Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999, pp. 633-634.

47. Farhang-Boroujeny, B., and Lim, Y. «A Comment on the Computational Complexity of Sliding FFT», *IEEE Trans. Circuits and Syst. II*, Vol. 39, No. 12, Dec. 1992, pp. 875-876.

48. Farhang-Boroujeny, B., and Gazor, S. «Generalized Sliding FFT and Its Application to Implementation of Block LMS Adaptive Filters», *IEEE Trans. Sig. Proc*, Vol. 42, No. 3, Mar. 1994, pp. 532-538.

49. Douglas, S., and Soh, J. «A Numerically-Stable Sliding-Window Estimator and It's application to Adaptive Filters», *Proc. 31st Annual Asilomar Conf. on Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove, CA, Vol. 1, Nov. 1997, pp. 111-115.

50. Crochiere, R., and Rabiner, L. *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983, pp. 315-319.

51. Zoran Corp., «Vernier Spectral Analysis with the ZR34161 Vector Signal Processor», *Tech. Note ZAN34003*, Santa Clara, CA, 1989.

52. Gumas, C. «Window-Presum FFT Achieves High-Dynamic Range, Resolution», *Personal Engineering and Instrumentation News*, July 1997, pp. 58-64.

53. Hack, T. «IQ Sampling Yields Flexible Demodulators», *RF Design*, Apr. 1991.

54. Bateman, A. «Quadrature Frequency Discriminator», *GlobalDSP Mag.*, Oct. 2002.

55. *http://aulos.calarts.edu/pipermail/test/1998-March/001 028.html*

56. Dick, C. and Harris, F. «FPGA Signal Processing Using Sigma-Delta Modulation», *IEEE Signal Proc. Magazine*, Vol. 17, No. 1, Jan. 2000.

57. Bateman, A. «Implementing a Digital AC Coupling Filter», *GlobalDSP Magazine*, Feb. 2003.

58. Shenoi, K. *Digital Signal Processing in Communications Systems*, Chapman & Hall, New York, 1994, p. 330.

59. Bristow-Johnson, R. «Subject: *Fixed-PointDC Blocking Filter with Noise Shaping*», Usenet group *comp.dsp* post, June 22,2000.

60. Bristow-Johnson, R. «Subject: *Virtues of Noise Shaping*», Usenet group comp.dsp post, Aug. 21,2001.

61. Ascari, L., et al. «Low Power Implementation of a Sigma Delta Decimation Filter for Cardiac Applications», *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Budapest Hungary, May 21-23, 2001, pp. 750-755.

62. Gao, Y, et al. «Low-Power Implementation of a Fifth-Order Comb Decimation Filter for Multi-Standard Transceiver Applications», *Int. Conf. on Signal Proc. Applications and Technology* (*ICSPAT*), Orlando, FL, 1999.

63. Gao, Y., et al. «A Comparison Design of Comb Decimators for Sigma-Delta Analog-to-Digital Converters», *Int. Journal: Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, Kluwer Academic publishers, ISSN: 0925-1030,1999.

64. Ballanger, M., et al. «Digital Filtering by Polyphase Network: Application to Sample-Rate Alteration and Filter Banks», *IEEE Trans, on Acoustics, Speech, and Signal Proc*, Vol. ASSP-24, No. 2, Apr. 1976, pp. 109-114.

65. Brandt, B. and Wooley, B. «A Low-Power Area-Efficient Digital Filter for Decimation and Interpolation», *IEEE Journ. of Solid-State Circuits*, Vol. 29, June 1994, pp. 679-687.

66. Willson Jr., A. «A Programmable Interpolation Filter for Digital Communications Applications», Final report for MICRO Project 96-149, UCLA, 1996-1997.

67. Dumonteix, Y et al. «Low Power Comb Decimation Filter Using Polyphase Decomposition for Mono-Bit ZA Analog-to-Digital Converters», Int. Conf. on Signal Processing Aplications and Technology (ICSPAT), San Jose, CA, 2000.

68. Yang, H. and Snelgrove, W. «High Speed Polyphase CIC Decimation Filters», *IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 2,1996, pp. 229-232.

69. Jang, Y and Yang, S. «Non-Recursive Cascaded Integrator-Comb Decimation Filters with Integer Multiple Factors», 44th IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), Dayton, OH, Aug. 2001.

70. Dvorak, R. «Software Filter Boosts Signal-measurement Stability, Precision», *Electronic Design*, Feb. 3,2003.

71. Lynn, P. and Fuerst, W. *Introductory Digital Signal Processing, with Computer Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1997, pp. 285-297.

72. Fraser, D. «Interpolation by the FFT Revisited—An Experimental Investigation», *IEEE Trans, on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-37, No. 5, May 1989, pp. 665-676.

73. Marple Jr., S. «Computing the Discrete-Time 'Analytic' Signal via FFT», *IEEE Trans, on Signal Proc*, Vol. 47, No. 9, Sept. 1999, pp. 2600-2603.

74. Harris, F. «T102: Digital Signal Processing for Digital Modems», *DSP World Spring Design Conf*, Santa Clara, CA, Apr. 1999.

75. Harris, F. «On the Design, Implementation, and Performance of a Microprocessor-Controlled AGC System for a Digital Receiver», *IEEE Military Communications Conf*, San Diego, CA, Oct. 1988.

76. Analog Devices, Inc., «80 MSPS, Dual-Channel WCDMA Receive Signal Processor (RSP) AD6634», Data Sheet Rev. 0, 2002, pp. 28-34.

77. Turner, C. «Recursive Discrete-Time Sinusoidal Oscillators», *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 20, No. 3, May 2003, pp. 103-111.

78. Paillard, B. and Boudreau, A. «Fast, Continuous, Sinewave Generator», *GlobalDSP On-line Magazine*, Dec. 2003.

Приложение А

Арифметика комплексных чисел

Чтобы понять цифровую обработку сигналов, мы должны освоить использование комплексных чисел. Первый шаг к этой цели – изучение арифметических операций над комплексными числами. К счастью, эта задача облегчается тем, что при этом мы можем использовать наши знания о действительных числах. Физический смысл комплексных чисел обсуждался в главе 8, здесь же мы сосредоточимся на правилах выполнения арифметических операций над ними.

А.1. Графическое представление действительных и комплексных чисел

Начнем с действительных (вещественных) чисел, которые представляют собой те положительные или отрицательные числа, к которым мы привыкли в повседневной жизни. Примерами действительных чисел являются 0.3, –2.2, 5.1 и т.д. Имея это ввиду, мы видим, что действительное число можно представить как точку на одномерной оси, которую называют действительной осью, как показано на рисунке А.1.

Мы в самом деле можем говорить о взаимно-однозначном соответствии всех действительных чисел всем точкам действительной оси.

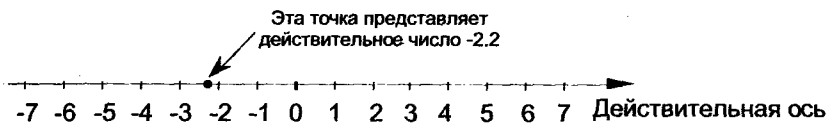


Рис. А.1. Представление действительного числа в виде точки на одномерной действительной оси.

Комплексное число, в отличие от действительного, имеет две части: действительную и мнимую. Точно так же, как действительное число можно рассматривать как точку на одномерной действительной оси, комплексное число можно рассматривать как точку на комплексной плоскости, как показано на рисунке А.2.

Мы будем использовать это геометрическое представление, чтобы облегчить понимание арифметики комплексных чисел[1].

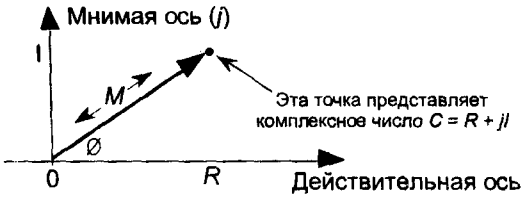


Рис. А.2. Представление комплексного числа $C = R + jI$ в виде фазора на комплексной плоскости

А.2. Арифметическое представление комплексных чисел

В литературе комплексное число C представляется разными способами:

Алгебраическая форма:	$C = R + jI,$	(А-1)
Тригонометрическая форма:	$C = M[\cos(\phi) + j\sin(\phi)],$	(А-1')
Экспоненциальная форма:	$C = Me^{j\phi},$	(А-1'')
Модуль и аргумент:	$C = M \angle \phi.$	(А-1''')

Формулы (А-1'') и (А-1''') напоминают нам о том, что комплексное число C можно также рассматривать как координаты на комплексной плоскости фазора длиной M, направленного под углом ϕ градусов к положительной полуоси действительной оси, как показано на рисунке А.2. (Мы будем избегать называть фазор M вектором, потому что термин вектор имеет разный смысл в разных контекстах. В линейной алгебре *вектор* представляет собой термин, используемый для обозначения одномерной матрицы. С другой стороны, в механике и теории поля векторы используются для обозначения величины и направления, но существуют операции над векторами (*скалярное*, или *точечное, произведение* и *векторное произведение*), которые неприменимы к нашему определению фазора.) Соотношения между переменными на этом рисунке соответствуют стандартной тригонометрии прямоугольного треугольника. Помните, что C – комплексное число, а переменные R, I, M и ϕ – действительные числа. Длина, или модуль, C равна

$$M = |C| = \sqrt{R^2 + I^2}, \qquad \text{(А-2)}$$

и, по определению, фазовый угол, или *аргумент*, C представляет собой арктангенс отношения I/R, или

$$\phi = \tan^{-1}(I/R). \qquad \text{(А-3)}$$

[1] Представление комплексных чисел на комплексной плоскости иногда называют диаграммой Арганда в честь французского математика Жана Робера Арганда (в другой транскрипции – Аргана) (1768-1825).

Величина ϕ в (А-3) может иметь размерность градусов или радиан. Конечно, мы можем преобразовывать градусы в радианы и обратно, зная, что π радиан равны 180°. Таким образом, если ϕ_r измеряется в радианах, а ϕ_d – в градусах, то мы можем преобразовать ϕ_r в градусы с помощью выражения

$$\phi_d = 180\,\phi_r/\pi\,. \qquad \text{(А-4)}$$

Аналогично, следующее выражение поможет нам преобразовать ϕ_d в радианы

$$\phi_r = \pi\,\phi_d/180\,. \qquad \text{(А-5)}$$

Экспоненциальная форма комплексных чисел обладает интересным свойством, о котором нам нужно знать. В то время как алгебраическая форма однозначно определяет комплексное число, в экспоненциальной форме последнее может быть представлено бесконечным количеством способов; т. е. комплексное число C, представленное в экспоненциальной форме как $C = Me^{j\phi}$, может быть также представлено выражением

$$C = Me^{j\phi} = Me^{j(\phi + 2\pi n)}\,, \qquad \text{(А-6)}$$

где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, а ϕ измеряется в радианах. Когда ϕ измеряется в градусах, (А-6) приобретает вид

$$C = Me^{j\phi} = Me^{j(\phi + n360^\circ)}\,, \qquad \text{(А-7)}$$

Формулы (А-6) и (А-7) *почти* не требуют пояснений. Они показывают, что точка, на которую указывает конец фазора C, остается неподвижной при повороте фазора на угол, кратный 2π радиан или 360°. Так, например, если $C = Me^{j20^\circ}$, то

$$C = Me^{j20^\circ} = Me^{j380^\circ} = Me^{j740^\circ}. \qquad \text{(А-8)}$$

Переменная ϕ, угол фазора на рисунке А.2, не обязательно должна быть константой. Мы часто будем встречать комплексные синусоиды в форме

$$C = Me^{j\omega t}\,. \qquad \text{(А-9)}$$

Выражение (А-9) представляет фазор длиной M, угол которого на рисунке А.2 линейно возрастает со временем со скоростью ω радиан в секунду. Если $\omega = 2\pi$, фазор, описываемый выражением (А-9), вращается в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, со скоростью 2π радиан в секунду – один оборот в секунду – и поэтому ω называют угловой, или круговой, частотой. В общем случае фазор (А-9) вращается в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, со скоростью $\omega = 2\pi f$ радиан в секунду, где f – частота в периодах в секунду (Гц). Если частота $f = 10$ Гц, то фазор вращается со скоростью 20π радиан в секунду. Аналогично, выражение

$$C = Me^{-j\omega t}\,. \qquad \text{(А-9')}$$

описывает фазор длиной M, вращающийся по ходу часовой стрелки вокруг начала координат комплексной плоскости с отрицательной угловой частотой $-\omega$.

А.3. Арифметические операции над комплексными числами

А.3.1. Сложение и вычитание комплексных чисел

Какая из приведенных в (А-1) форм представления C лучше? Это зависит от того, какую арифметическую операцию мы хотим выполнить. Например, если мы складываем два комплексных числа, то проще всего использовать алгебраическую форму в (А-1). Сложение двух комплексных чисел, $C_1 = R_1 + jI_1$ и $C_2 = R_2 + jI_2$ сводится к сложению их действительных и мнимых частей

$$C_1 + C_2 = R_1 + jI_1 + R_2 + jI_2 = R_1 + R_2 + j(I_1 + I_2) \qquad \text{(А-10)}$$

На рисунке А.3 приведено графическое изображение суммы двух комплексных чисел в форме фазоров. Фазор суммы $C_1 + C_2$ на рисунке А.3 (а) представляет собой новый фазор, соединяющий начала фазора C_1 и конец фазора C_2 на рисунке А.3 (b). Напомним, что R и I могут быть как положительными, так и отрицательными числами. Вычитание комплексных чисел также не вызывает сложностей, т. к. сводится к вычислению разности действительных частей и разности мнимых частей. Таким образом

$$C_1 - C_2 = (R_1 + jI_1) - (R_2 + jI_2) = R_1 - R_2 + j(I_1 - I_2) \qquad \text{(А-11)}$$

Пример сложения комплексных чисел приведен в разделе 11.3, где мы рассматривали вопрос усреднения выходов быстрого преобразования Фурье.

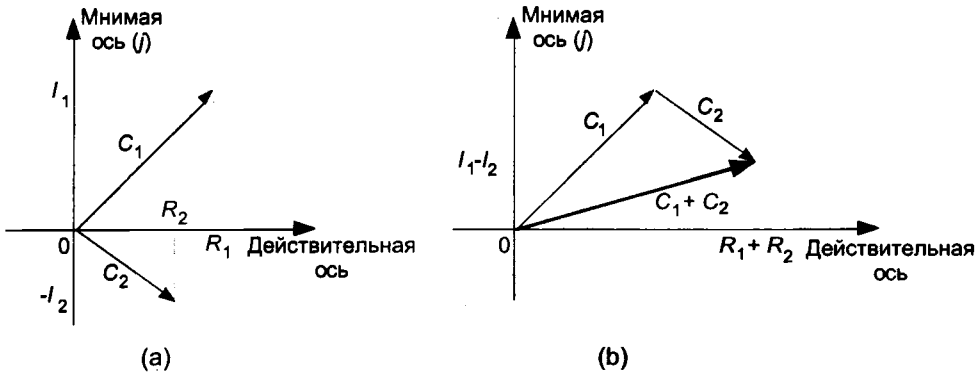


Рис. А.3. Геометрическое представление суммы двух комплексных чисел

А.3.2. Умножение комплексных чисел

Для умножения двух комплексных чисел мы можем использовать алгебраическую форму:

$$C_1C_2 = (R_1 + jI_1)(R_2 + jI_2) = (R_1R_2 - I_1I_2) + j(R_1I_2 + R_2I_1) \qquad \text{(А-12)}$$

Но если мы представим сомножители в экспоненциальной форме, то умножение выполняется проще

$$C_1C_2 = M_1e^{j\phi_1}M_2e^{j\phi_2} = M_1M_2e^{j(\phi_1+\phi_2)}, \qquad \text{(А-13)}$$

потому что операция сводится к умножению модулей и сложению аргументов.

Как особый случай умножения, масштабирование заключается в умножении комплексного числа на другое комплексное число, мнимая часть которого равна нулю. Мы можем использовать как алгебраическую, так и экспоненциальную формы:

$$kC = k(R+jI) = kR + jkI, \qquad \text{(А-14)}$$

или в экспоненциальной форме

$$kC = k(Me^{j\phi}) = kMe^{j\phi}. \qquad \text{(А-15)}$$

А.3.3. Комплексно-сопряженные числа

Комплексное число, сопряженное данному, получается в результате инверсии знака мнимой части исходного комплексного числа. Так, если мы обозначим число, сопряженное комплексному числу $C = R + jI = Me^{j\phi}$, как C^*, то мы можем записать

$$C^* = R - jI = Me^{-j\phi}. \qquad \text{(А-16)}$$

Комплексно-сопряженные числа обладают двумя полезными свойствами. Во-первых, сопряженное произведению есть произведение сопряженных сомножителям. Если $C = C_1C_2$, то из (А-13) следует, что

$$C^* = (C_1C_2)^* = (M_1M_2e^{j(\phi_1+\phi_2)})^* = M_1M_2e^{-j(\phi_1+\phi_2)} =$$
$$= M_1e^{-j\phi_1}M_2e^{-j\phi_2} = C_1^*C_2^*. \qquad \text{(А-17)}$$

Во-вторых, произведение комплексного числа на сопряженное ему комплексное число равно квадрату модуля этого числа. Это легко показать в экспоненциальной форме как

$$CC^* = Me^{j\phi} \cdot Me^{-j\phi} = M^2e^{j0} = M^2. \qquad \text{(А-18)}$$

(Это свойство часто используют в цифровой обработке сигналов для вычисления относительной мощности комплексного синусоидального фазора вида $Me^{j\omega t}$.)

А.3.4. Деление комплексных чисел

Деление двух комплексных чисел также лучше всего выполнять в показательной форме или в форме модуля и аргумента, как

$$C_1/C_2 = (M_1e^{j\phi_1})/(M_2e^{j\phi_2}) = (M_1/M_2)\,e^{j(\phi_1-\phi_2)} \qquad \text{(А-19)}$$

и

$$C_1/C_2 = (M_1/M_2)\angle(\phi_1-\phi_2). \qquad \text{(А-19')}$$

Мы можем выполнить деление и в алгебраической форме, хотя это не так удобно, умножив числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, следующим образом

$$C_1/C_2 = (R_1 + jI_1)/(R_2 + jI_2) =$$
$$= [(R_1 + jI_1)/(R_2 + jI_2)] \bullet [(R_2 - jI_2)/(R_2 - jI_2)] =$$
$$= [(R_1R_2 + I_1I_2) + j(R_2I_1 - R_1I_2)]/(R_2^2 + I_2^2). \qquad \text{(A-20)}$$

А.3.5. Обращение комплексного числа

Обращение представляет собой частный случай деления. Если $C = Me^{j\phi}$, то обратное ему число вычисляется как

$$1/C = 1/(Me^{j\phi}) = (1/M)e^{-j\phi}. \qquad \text{(A-21)}$$

В алгебраической форме число, обратное числу $C = R + jI$, записывается следующим образом

$$1/C = 1/(R + jI) = (R - jI)/(R^2 + I^2). \qquad \text{(A-22)}$$

Мы получили (А-22), предположив, что в (А-20) $R_1 = 1, I_1 = 0, R_2 = R$ и $I_2 = I$.

А.3.6. Возведение комплексных чисел в степень

Возведение комплексных чисел в некоторую степень в показательной форме выполняется очень легко. Если $C = Me^{j\phi}$, то

$$C^k = M^k(e^{j\phi})^k = M^k e^{jk\phi}. \qquad \text{(A-23)}$$

Например, если $C = 3e^{j125°}$, то C в кубе равно

$$(C)^3 = 3^3(e^{j3\bullet 125°}) = 27e^{j375°} = 27e^{j15°}. \qquad \text{(A-24)}$$

Мы завершаем это приложение обсуждением четырех арифметических операций, которые нечасто встречаются в цифровой обработке сигналов, но которые могут когда-нибудь понадобиться.

А.3.7. Корни из комплексных чисел

Корень k-й степени из комплексного числа C представляет собой число, которое, будучи умножено само на себя k раз, даст C. Для нахождения корней наилучшей является экспоненциальная форма. Когда задано комплексное число $C = Me^{j\phi}$, его можно записать как

$$C = Me^{j(\phi + n360°)}. \qquad \text{(A-25)}$$

В этом случае переменная ϕ в (А-25) измеряется в градусах. Существует k разных значений корня k-й степени из C. Под разными мы понимаем корни, аргументы которых меньше 360°. Мы находим корни с помощью следующего выражения:

$$\sqrt[k]{C} = \sqrt[k]{Me^{j(\phi+n360°)}} = \sqrt[k]{M}e^{j(\phi+n360°)/k}. \qquad \text{(A-26)}$$

n в (А-26) пробегает значения $0, 1, 2, 3, \ldots, k-1$, в результате чего мы получаем k корней числа C. Здесь необходимо привести пример! Допустим, мы хотим найти кубический корень из $C = 125^{j(75°)}$. Для этого мы поступаем следующим образом:

$$\sqrt[3]{C} = \sqrt[3]{125e^{j(75°+n360°)}} = \sqrt[3]{125}e^{j(75°+n360°)/3}. \qquad \text{(A-27)}$$

Затем мы задаем значения $n = 0, n = 1$ и $n = 2$ в (А-27) и получаем три значения корня из C. Следовательно, три корня равны

1-й корень → $\sqrt[3]{C} = 5\,e^{j(75° + 0 \cdot 360°)/3} = 5\,e^{j(25°)}$;

2-й корень → $\sqrt[3]{C} = 5\,e^{j(75° + 1 \cdot 360°)/3} = 5\,e^{j(435°)/3} = 5\,e^{j(145°)}$;

и

3-й корень → $\sqrt[3]{C} = 5\,e^{j(75° + 2 \cdot 360°)/3} = 5\,e^{j(795°)/3} = 5\,e^{j(265°)}$.

А.3.8. Натуральные логарифмы комплексных чисел

Взятие натурального логарифма комплексного числа $C = Me^{j\phi}$ в экспоненциальной форме очевидно:

$$\ln C = \ln(Me^{j\phi}) = \ln M + \ln(e^{j\phi}) = \ln M + j\phi, \qquad \text{(A-28)}$$

где $0 < \phi < 2\pi$. К примеру, если $C = 12e^{j\pi/4}$, натуральный логарифм C равен

$$\ln C = \ln(12e^{j\pi/4}) = \ln(12) + j\pi/4 = 2.485 + j0.785. \qquad \text{(A-29)}$$

Это значит, что $e^{(2.485+j0.785)} = e^{2.485} \cdot e^{j0.785} = 12e^{j\pi/4}$.

А.3.9. Десятичные логарифмы комплексных чисел

Мы можем вычислить десятичный логарифм комплексного числа $C = Me^{j\phi}$, используя

$$\log_{10}C = \log_{10}(Me^{j\phi}) = \log_{10}M + \log_{10}(e^{j\phi}) =$$
$$= \log_{10}M + j\phi \cdot \log_{10}(e).^{1} \qquad \text{(A-30)}$$

Конечно, e является иррациональным числом, примерно равным 2.71828, логарифм которого по основанию 10 равен примерно 0.43429. Учитывая это, мы можем упростить (А-30) следующим образом

$$\log_{10}C \approx \log_{10}M + j(0.43429 \cdot \phi). \qquad \text{(A-31)}$$

---

[1] Для получения второго члена результата в (А-30) мы использовали соотношение $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$ в соответствии со свойствами логарифмов.

Повторяя этот пример с $C = 12e^{j\pi/4}$ и используя приближенное соотношение (А-31), получаем логарифм С по основанию 10 в виде

$$\log_{10}C = \log_{10}(12e^{j\pi/4}) = \log_{10}(12) + j(0.43429 \cdot \pi/4) =$$
$$= 1.079 + j(0.43429 \cdot 0.785) = 1.079 + j0.341. \qquad \text{(А-32)}$$

Результат (А-32) означает, что

$$10^{(1.079+j0.341)} = 10^{1.079} \cdot 10^{j0.341} = 12 \cdot (e^{2.302})^{j0.341} =$$
$$= 12e^{j(2.302 \cdot 0.341)} = 12e^{j0.785} = 12e^{j\pi/4}. \qquad \text{(А-33)}$$

А.3.10. Вычисление десятичных логарифмов комплексных чисел через натуральные логарифмы

К сожалению, некоторые математические пакеты программ не содержат функции вычисления десятичных логарифмов и могут вычислять только натуральные логарифмы. В этой ситуации для вычисления десятичного логарифма x мы используем соотношение

$$\log_{10}(x) = \ln(x)/\ln(10) \qquad \text{(А-34)}$$

Используя эту формулу замены основания логарифмов, мы можем найти десятичный логарифм комплексного числа $C = Me^{j\phi}$, т. е.

$$\log_{10}C = \ln C/\ln(10) = (\log_{10}e)\ln(C). \qquad \text{(А-35)}$$

Поскольку $\log_{10}(e)$ примерно равен 0.43429, мы используем (А-35) и получаем

$$\log_{10}C \approx 0.43429 \cdot (\ln C) = 0.43429 \cdot (\ln M + j\phi). \qquad \text{(А-36)}$$

Повторяя снова приведенный выше пример с $C = 12e^{j\pi/4}$, мы можем с помощью приближенного равенства (А-36) взять логарифм числа C по основанию 10 с помощью натуральных логарифмов как

$$\log_{10}C = 0.43429 \cdot [\ln(12) + j\pi/4] =$$
$$= 0.43429 \cdot [2.485 + j0.785] = 1.079 + j0.341, \qquad \text{(А-37)}.$$

что совпадает с результатом (А-32).

А.4. Некоторые практические особенности использования комплексных чисел

В начале раздела А.3 мы говорили, что выбор формы представления комплексных чисел – алгебраической или показательной – зависит от того, какие операции мы собираемся выполнять. Интересно заметить, что алгебраическая форма имеет практическое преимущество над экспоненциальной формой, когда мы рассматриваем представление чисел в компьютере.

Например, допустим, что мы должны представлять комплексные числа, используя четырехбитный формат двоичных чисел в виде модуля со знаком. Это значит, что мы можем иметь целые числа в диапазоне от –7 до +7, и доступный нам диапазон комплексных чисел при использовании алгебраической формы на комплексной плоскости представляет собой квадрат, показанный на рисунке А.4 (а).

С другой стороны, если мы используем тот же формат для представления модуля и аргумента комплексных чисел, эти числа будут лежать в пределах круга радиуса 7, как показано на рисунке А.4 (b). Обратите внимание на четыре затененных угла на рисунке А.4 (b), которые соответствуют позициям допустимых комплексных чисел при использовании алгебраической формы, но находятся *за пределами допустимой области* при использовании экспоненциальной формы. Иначе говоря, вычисления с комплексными числами, которые дают правильный результат в алгебраической форме, могут дать ошибку переполнения, если мы используем экспоненциальную форму. В алгебраической форме значение $7 + j7$ допустимо, а в экспоненциальной – нет, потому что модуль этого числа больше 7.

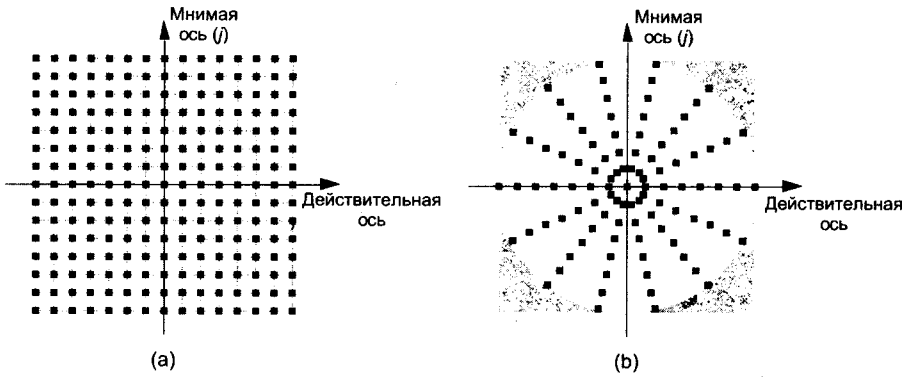


Рис. А.4. Комплексные числа в целочисленном формате, показанные как точки на комплексной плоскости при использовании четырехбитового формата модуля со знаком: (а) при использовании алгебраической формы; (b) при использовании экспоненциальной формы

Здесь мы не приводим более детальное обсуждение особенностей реализации комплексной арифметики в стандартных форматах данных, но это сложная и интересная тема. Для дальнейшего ее изучения мы рекомендуем любознательным читателям обратиться к имеющейся литературе.

Библиография

1. Plauger, P. J. «Complex Math Functions», *Embedded Systems Programming*, August 1994.
2. Kahan, W. «Branch Cuts for Complex Elementary Functions, or Much Ado About Nothing's Sign Bit», *Proceedings of the Joint IMA/SIAM Conference on the State of the Art in Numerical Analysis*, Clarendon Press, 1987.
3. Plauger, P. J. «Complex Made Simple», *Embedded Systems Programming*, July 1994.

Приложение В

Сумма геометрической прогрессии

В литературе по цифровой обработке сигналов мы частот встречаем выражения вида

$$\sum_{n=p}^{N-1} r^n = (r^p - r^N)/(1-r), \qquad \text{(B-1)}$$

или

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi nm/N} = (1-e^{-j2\pi m})/(1-e^{-j2\pi m/N}). \qquad \text{(B-2)}$$

К сожалению, многие авторы часто заявляют «и мы знаем, что...» и выдают выражения (B-1) или (B-2) читателю, который должен принимать их на веру. Если у вас нет докторской степени по математике, то у вас может возникнуть желание узнать, какие математические выкладки приводят нас к (B-1) или (B-2). Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим общее выражение для геометрической прогрессии вида

$$S = \sum_{n=p}^{N-1} ar^n = ar^p + ar^{p+1} + ar^{p+2} + \ldots + ar^{N-1}, \qquad \text{(B-3)}$$

где n, N и p – целые, а a и r – некоторые произвольные константы. Умножение (B-3) на r дает

$$Sr = \sum_{n=p}^{N-1} ar^{n+1} = ar^{p+1} + ar^{p+2} + ar^{p+3} + \ldots + ar^{N-1} + ar^N. \qquad \text{(B-4)}$$

Вычитая (B-4) из (B-3), мы получаем выражение

$$S - Sr = S(1-r) = ar^p - ar^N,$$

или

$$S = a \bullet (r^p - r^N)/(1-r). \qquad \text{(B-5)}$$

Итак, вот цель, к которой мы стремимся. *Замкнутая форма* суммы ряда имеет вид

Замкнутая форма суммы геометрической прогрессии общего вида → $$\sum_{n=p}^{N-1} ar^n = a \bullet (r^p - r^N)/(1-r). \quad \text{(B-6)}$$

(Под замкнутой формой мы понимаем сумму бесконечного ряда, преобразованную в более простое математическое выражение, не содержащее бесконечного суммирования.) При $a=1$ (B-6) приводит к (B-1). Мы можем быстро проверить (B-6) на примере. Задав $N = 5, p = 0, a = 2$ и $r = 3$, например, мы можем составить следующий список:

n	$ar^n = 2 \bullet 3^n$
0	$2 \bullet 3^0 = 2$
1	$2 \bullet 3^1 = 6$
2	$2 \bullet 3^2 = 18$
3	$2 \bullet 3^3 = 54$
4	$2 \bullet 3^4 = 162$

Сумма этого столбца равна

$$\sum_{n=0}^{4} 2 \bullet 3^n = 242.$$

Подставляя значения N, p, a и r из нашего примера в (B-6), получаем

$$\sum_{n=p}^{N-1} ar^n = a \bullet (r^p - r^N)/(1-r) =$$

$$= 2 \bullet (3^0 - 3^5)/(1-3) = 2 \bullet (1-243)/(-2) = 242. \quad \text{(B-7)}$$

И, наконец, члены выражения (B-2) в форме (B-6) равны $p = 0, a = 1$ и $r = e^{-j2\pi m/N}$.[1] Так что их подстановка из (B-2) в (B-6) дает

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi nm/N} = 1 \bullet (e^{-j2\pi m0/N} - e^{-j2\pi mN/N})/(1 - e^{-j2\pi m/N}) =$$

$$= (1 - e^{-j2\pi m})/(1 - e^{-j2\pi m/N}), \quad \text{(B-8)}$$

чем доказывается справедливость (B-2).

[1] Согласно математическому тождеству $a^{xy} = (a^x)^y$ мы можем сказать, что $e^{-j2\pi nm/N} = (e^{-j2\pi m/N})^n$, так что $r = e^{-j2\pi m/N}$.

Приложение С

Инверсия времени и ДПФ

Понятие инверсии времени иногда возникает при изучении дискретного преобразования Фурье (ДПФ), математическом анализе цифровых фильтров и даже на практике (инверсия времени используется непосредственно в схеме цифровой фильтрации, описанной в разделе 13.12). Здесь мы уделим вопросу инверсии времени некоторое внимание, потому что она обнаруживает одно из глубоких различий между непрерывными и дискретными системами. Кроме того, влияние инверсии времени на спектр сигнала не так очевидно (по моему мнению) и заслуживает изучения.

В действительности в случае дискретных систем имеются две формы инверсии времени, о которых нам необходимо подумать. Рассмотрим шеститочечную последовательность $x(n)$

$$x(n) = x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5)\,. \qquad \text{(C-1)}$$

Благодаря свойствам периодичности дискретных представлений (обсуждавшихся в разделе 3.17) мы можем изобразить последовательность $x(n)$ в виде отсчетов, расположенных по кругу, как на рисунке С.1 (а). Здесь мы произвольно приняли за положительное направление времени движение по кругу *против хода часовой стрелки*.

Инверсия времени, определенная здесь для последовательностей, которые рассматриваются как периодические, означает движение по кругу в направлении хода часовой стрелки (в отрицательном направлении времени) в результате чего мы получаем новую последовательность

$$x_c(n) = x(0), x(5), x(4), x(3), x(2), x(1). \qquad \text{(C-2)}$$

Мы называем $x_c(n)$ результатом *циклической* инверсии времени последовательности $x(n)$, при этом индекс с обозначает циклическую инверсию времени. Последовательность $x_c(n)$ изображена на рисунке С.1 (b).

Интересным свойством этих последовательностей является то, что для действительной N-точечной последовательности $x_c(n)$ ДПФ является комплексно сопряженным ДПФ последовательности $x(n)$:

$$X_c(m) = X^*(m) \qquad \text{(C-3)}$$

где индекс ДПФ меняется в пределах $0 \le m \le N-1$. Благодаря сопряженной симметрии ДПФ действительных последовательностей мы должны понять, что

последовательность отсчетов ДПФ $X^*(m)$ представляет собой последовательность отсчетов ДПФ $X(m)$, отсчеты которой взяты в обратном порядке.

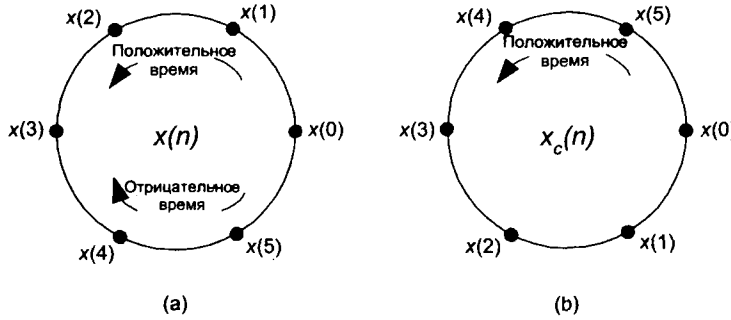


Рис. С.1. Циклические представления периодических последовательностей: (a) исходная последовательность $x(n)$; (b) циклическая инверсия времени $x(n)$

Продемонстрируем (С-3) на примере. Если последовательность $X(m)$ представляет ДПФ $x(n)$, мы можем записать ее отсчет с индексом $m = 4$, $X(4)$, как

$$X(4) = x(0)e^{-j2\pi 0/6} + x(1)e^{-j2\pi 4/6} + x(2)e^{-j2\pi 8/6} + \\ + x(3)e^{-j2\pi 12/6} + x(4)e^{-j2\pi 16/6} + x(5)e^{-j2\pi 20/6}. \qquad (C\text{-}4)$$

Поскольку период последовательности $e^{-j2\pi k/6}$ равен 6, мы можем записать (С-4) как

$$X(4) = x(0)e^{-j2\pi 0/6} + x(1)e^{-j2\pi 4/6} + x(2)e^{-j2\pi 2/6} + \\ + x(3)e^{-j2\pi 0/6} + x(4)e^{-j2\pi 4/6} + x(5)e^{-j2\pi 2/6}. \qquad (C\text{-}5)$$

Теперь запишем отсчет с индексом $m = 4$ последовательности $X_c(m)$ (для инвертированной во времени последовательности) как

$$X_c(4) = x(0)e^{-j2\pi 0/6} + x(5)e^{-j2\pi 4/6} + x(4)e^{-j2\pi 8/6} + \\ + x(3)e^{-j2\pi 12/6} + x(2)e^{-j2\pi 16/6} + x(1)e^{-j2\pi 20/6} \qquad (C\text{-}6)$$

или

$$X_c(4) = x(0)e^{-j2\pi 0/6} + x(5)e^{-j2\pi 4/6} + x(4)e^{-j2\pi 2/6} + \\ + x(3)e^{-j2\pi 0/6} + x(2)e^{-j2\pi 4/6} + x(1)e^{-j2\pi 2/6}. \qquad (C\text{-}7)$$

Заменив отрицательные углы в $X_c(4)$ их положительными эквивалентами, мы получаем

$$X_c(4) = x(0)e^{j2\pi 0/6} + x(5)e^{j2\pi 2/6} + x(4)e^{j2\pi 4/6} + \\ + x(3)e^{j2\pi 0/6} + x(2)e^{j2\pi 2/6} + x(1)e^{j2\pi 4/6}, \qquad (C\text{-}8)$$

что представляет собой выражение, сопряженное выражению (С-5), и показывает, что $X(m)$ и $X_c(m)$ являются комплексно-сопряженными.

Другой вариант инверсии времени, который мы будем называть *линейной* инверсией времени, состоит в простом изменении порядка следования отсчетов $x(n)$ из (С-1) на обратный, в результате чего получаем последовательность $x_s(n)$

$$x_s(n) = x(5), x(4), x(3), x(2), x(1), x(0), \qquad \text{(С-9)}$$

где индекс s обозначает линейную инверсию. Для действительной N-точечной временной последовательности ДПФ $x_s(n)$ имеет вид

$$X_s(m) = X^*(m)e^{-j2\pi m(N-1)/N}. \qquad \text{(С-10)}$$

Мы можем продемонстрировать справедливость (С-10) так же, как мы это делали для (С-3), но рассматривая рисунок С.2. На нем мы показываем инверсию времени периодической последовательности $x(n)$, отмечая как 6-точечную последовательность $x_s(n)$, так и 6-точечную последовательность $x_c(n)$. Обратите внимание на то, что $x_s(n)$ сдвинута во времени на 5 отсчетов назад по сравнению с $x_c(n)$.

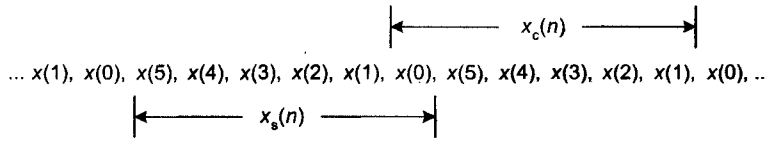


Рис. С.2. Периодические последовательности $x_s(n)$ и $x_c(n)$

Используя теорему о сдвиге из раздела 3.6, мы можем сказать, что последовательность отсчетов ДПФ $X_s(m)$ равна последовательности $X_c(m)$, умноженной на фазовый множитель с линейной фазой $e^{-2j\pi m(5)/6}$ для нашего примера с $N = 6$. Итак, в случае N-точечной последовательности общего вида

$$X_s(m) = X_c(m)e^{-j2\pi m(N-1)/N} = X^*(m)e^{-j2\pi m(N-1)/N}. \qquad \text{(С-11)}$$

что подтверждает (С-10).

Приложение D

Среднее, дисперсия и стандартное отклонение

При изучении цифровой обработки сигналов мы часто вынуждены рассматривать случайные функции. Они описывают шумовые сигналы, которые мы не можем описать явно с помощью уравнений во временной области. Эти функции, однако, можно описать количественно с использованием статистических понятий среднего, дисперсии и стандартного отклонения. Хотя мы здесь только слегка касаемся обширной и важной области статистики, мы расскажем, почему, как и когда следует использовать эти статистические параметры, чтобы включить их в наш арсенал средств анализа сигналов. Сначала мы определим, как вычисляются эти значения для набора дискретных отсчетов, рассмотрим пример с непрерывной аналитической функцией и завершим это приложение обсуждением функций плотности вероятности нескольких случайных величин, которые часто встречаются в цифровой обработке сигналов. Итак, продолжим, погрузившись в холодные воды математической статистики, чтобы получить некоторые определения.

D.1. Статистические параметры

Рассмотрим непрерывную синусоиду частотой f_o Гц, амплитуда которой равна A_p, описываемую выражением

$$x(t)=A_p\sin(2\pi f_o t). \qquad \text{(D-1)}$$

Выражение (D-1) полностью описывает $x(t)$, т. е. мы можем определить точное значение $x(t)$ в любой заданный момент времени. Например, когда $t = 1/4f_o$, мы знаем, что $x(t)$ принимает значение A_p, а в более поздний момент времени $t = 1/2f_o$ синусоида $x(t)$ принимает нулевое значение. С другой стороны, у нас нет определенного способа выразить последовательные значения случайной функции или случайного шума[1]. Не существует соотношения, подобного (D-1), которое позволило бы предсказывать значения шума. (Поэтому его и называют случайным.)

[1] Мы определяем случайный шум как нежелательные, непредсказуемые возмущения, искажающие интересующий нас сигнал или последовательность данных.

Специалисты по статистике, однако, разработали мощные математические средства для описания свойств случайных функций. Наиболее важные из этих свойств получили названия *среднее*, *дисперсия* и *стандартное отклонение*.

Математически *среднее*, или *математическое ожидание*, N отдельных значений последовательности x, обозначенное как x_{ave}, определяется следующим образом [1]

$$x_{ave} = (1/N)\sum_{n=1}^{N} x(n) = [x(1) + x(2) + x(3) + \ldots + x(N)]/N. \qquad \text{(D-2)}$$

Соотношение (D-2), уже известное большинству читателей, показывает, что среднее последовательности N чисел вычисляется как сумма этих чисел, деленная на N. Графически среднее можно изобразить как значение, вокруг которого концентрируются значения отсчетов данных, как показано на рисунке D.1. Если восемь значений, показанных на рисунке D.1 точками, представляют результат измерения некоторой величины, и мы подставим эти значения в (D-2), то получим среднее, равное 5.17, как показано широкой серой линией.

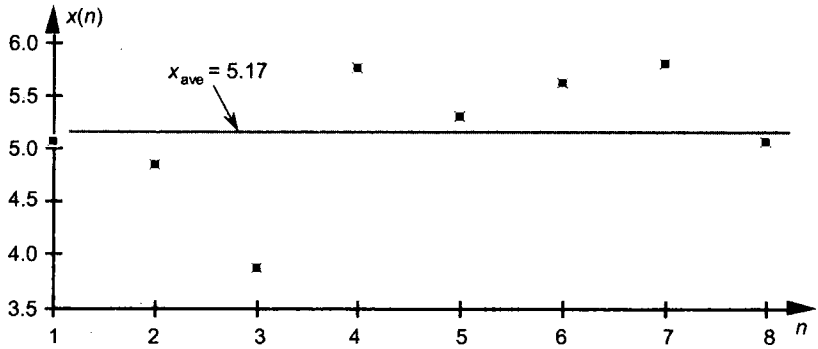


Рис. D.1. Среднее последовательности из восьми отсчетов

Теперь, когда мы определили *среднее*, следующим важным параметром является дисперсия последовательности, σ^2, определяемая как

$$\sigma^2 = (1/N)\sum_{n=1}^{N}[x(n) - x_{ave}]^2 = \qquad \text{(D-3)}$$
$$= \{[x(1) - x_{ave}]^2 + [x(2) - x_{ave}]^2 + [x(3) - x_{ave}]^2 + \ldots +$$
$$+ [x(N) - x_{ave}]^2\}/N.$$

Иногда в литературе мы можем встретить σ^2, в определении которой перед суммой используется множитель $1/(N-1)$ вместо $1/N$ в (D-3). Имеются тонкие статистические причины, по которым иногда множитель $1/(N-1)$ дает более точный результат [2]. Однако когда N превышает, скажем, 20, как во всех интересующих нас случаях, разность между этими двумя множителями не имеет практического значения.

Дисперсия представляет собой важное понятие, потому что она дает средство измерения, которое мы используем, например, для измерения влияния ошибок квантования или эффективности алгоритмов усреднения сигналов. Она позволяет

нам представить, как значения отсчетов последовательности флуктуируют относительно среднего значения и дает нам хорошо определенную численную меру величины этих флуктуаций. (Поскольку положительный квадратный корень из дисперсии, стандартное отклонение, в литературе обычно обозначается как σ, мы будем использовать для дисперсии обычное обозначение σ^2.) Формула (D-3) может несколько озадачить, если вы не видели ее раньше. Ее смысл становится понятным при внимательном рассмотрении. Значение $x(1) - x_{ave}$ в квадратных скобках, например, есть разность значения $x(1)$ и среднего значения последовательности x_{ave}. Для любого значения отсчета последовательности $x(n)$ разность $x(n) - x_{ave}$, которую мы обозначаем как $\Delta(n)$, может быть либо положительной, либо отрицательной, как показано на рисунке D.2. В частности, $\Delta(1)$, $\Delta(2)$, $\Delta(3)$ и $\Delta(8)$ отрицательны, потому что соответствующие отсчеты последовательности меньше среднего значения, показанного широкой серой линией. Если мы заменим разности $x(n) - x_{ave}$ в (D-3) обозначением $\Delta(n)$, то дисперсию можно записать как

$$\sigma^2 = (1/N)\sum_{n=1}^{N}[\Delta(n)]^2, \qquad \text{(D-4)}$$

где $\Delta(n) = x(n) - x_{ave}$.

Читатель может спросить, почему суммируются квадраты разностей, а не сами разности. Если мы будем суммировать просто разности, отдельные отрицательные $\Delta(n)$ компенсируют отдельные положительные $\Delta(n)$, что даст очень маленькую сумму. Например, если мы сложим разности $\Delta(n)$, соответствующие рисунку D.2, положительные разности $\Delta(6)$ и $\Delta(7)$ и отрицательная разность $\Delta(3)$ практически уничтожат друг друга, чего мы не должны допустить. Поскольку нам необходима беззнаковая мера каждой разности, мы используем квадраты разностей, как в (D-4). При этом отдельные разности $\Delta(n)$ вносят свой вклад в общее значение дисперсии независимо от их знака. Подстановка значений $\Delta(n)$ из примера, приведенного на рисунке D.2, в (D-4) дает нам значение дисперсии 0.34. Другой полезной характеристикой последовательности данных является квадратный корень из дисперсии, известный как *стандартное отклонение* σ,

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{(1/N)\sum_{n=1}^{N}[x(n) - x_{ave}]^2}. \qquad \text{(D-5)}$$

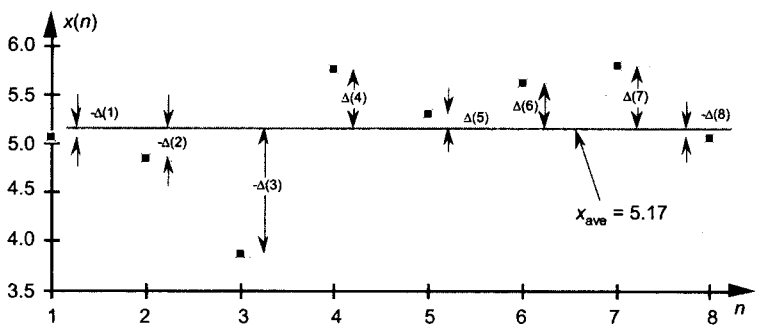


Рис. D.2. Значения разностей $\Delta(n)$ последовательности, показанной на рисунке D.1

Итак, мы имеем три числовые характеристики последовательностей: среднее x_{ave}, дисперсию σ^2 и стандартное отклонение σ. При этом xave показывает постоянный уровень, относительно которого колеблются отдельные отсчеты последовательности, σ^2 является мерой размаха этих колебаний. Если последовательность представляет собой набор отсчетов случайного сигнала, мы можем сказать, что x_{ave} определяет среднее значение, или постоянную составляющую, сигнала. Дисперсия σ^2 представляет собой мощность переменной составляющей сигнала. Соответственно, стандартное отклонение характеризует амплитуду переменной составляющей сигнала.

D.2. Стандартное отклонение или СКЗ непрерывного синусоидального сигнала

Для синусоидальных сигналов инженеры-электротехники взяли квадратный корень из (D-3) при $x_{ave}=0$ и определили полезный параметр, который называется среднеквадратическим значением (СКЗ), который равен стандартному отклонению. Для дискретных сигналов этот параметр, $x_{СКЗ}$, определяется как

$$x_{СКЗ} = \sqrt{(1/N)\sum_{n=1}^{N} x(n)^2}. \qquad \text{(D-6)}$$

Значение $x_{СКЗ}$ в (D-6) получено в результате подстановки $x_{ave}=0$ в (D-5) и является квадратным корнем из среднего квадрата последовательности $x(n)$. Для непрерывной синусоиды $x(t)=A_p\sin(2\pi ft) = A_p\sin(\omega t)$, среднее значение которой равно нулю, СКЗ $x_{СКЗ\sin}$ имеет вид:

$$x_{СКЗ\sin} = \sqrt{(1/2\pi)\int_0^{2\pi}[A_p\sin(\omega t)]^2 d(\omega t)} =$$

$$= \sqrt{[(A_p)^2/2\pi]\int_0^{2\pi}(1/2)[1-\cos(\omega t)]d(\omega t)} =$$

$$= \sqrt{[(A_p)^2/2\pi]\cdot\Big[(\omega t)/2-(1/2)(\sin(\omega t))\Big]_0^{2\pi}} =$$

$$= \sqrt{[(A_p)^2/2\pi]\cdot[(2\pi/2)]} =$$

$$= A_p/\sqrt{2}. \qquad \text{(D-7)}$$

при расчете средней рассеиваемой мощности элементов схемы это выражение использовать гораздо проще, чем брать интеграл от более сложных выражений для мгновенной мощности. Дисперсия синусоидального сигнала, конечно же, равна квадрату (D-7), или $A_p^2/2$.

Мы получили выражения для среднего и дисперсии последовательности дискретных значений, ввели выражение для стандартного отклонения, или СКЗ, последовательности, и вывели выражение для стандартного отклонения непрерывной синусоиды. Здесь возникает следующий вопрос: «Как вычислять параметры случайных последовательностей, для вычисления отсчетов которых аналитические выражения отсутствуют, и отсчетов которых у нас нет?» Ответ на этот вопрос выглядит так: мы должны использовать функции плотности вероятности.

D.3. Среднее и дисперсия случайных функций

Чтобы определить среднее или дисперсию случайной функции, мы используем нечто, известное под названием *функция плотности вероятности* (*ФПВ*). ФПВ представляет собой меру правдоподобия появления некоторого значения функции. Мы можем объяснить это понятие на простых примерах подбрасывания монеты или бросания игральной кости, как показано на рисунках D.3 (a) и D.3 (b). Результатом подбрасывания монеты может быть только один из двух вариантов: орел или решка. На рисунке D.3 (a) показана соответствующая ФПВ, а также то, что вероятность (правдоподобие) равна одной второй как для орла, так и для решки. Это значит, что мы имеем равные шансы получить орел или решку. Сумма этих двух вероятностей равна единице, т. е. вероятность того, что выпадет орел или решка, равна единице.

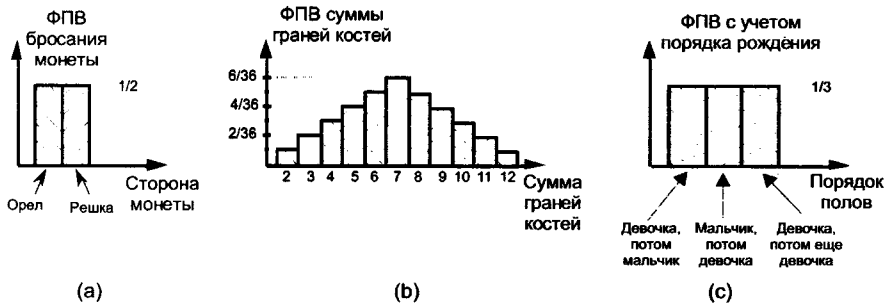


Рис. D.3. Простые функции плотности вероятности: (a) выпадения монеты; (b) вероятность получения заданной суммы на гранях двух костей; (c) вероятность наличия у девочки сестры

На рисунке D.3 (b) показана вероятность получения заданной суммы граней на двух игральных костях. Эта функция вероятности неравномерна, поскольку, например, для получения суммы, равной семи, имеется в шесть раз больше возможностей, чем для получения суммы, равной двум. Мы можем сказать, что после многократного бросания костей мы ожидаем, что 6/36 = 16.7 % всех результатов

будут равны семи, а в 1/36 = 2.8 % результатов мы будем иметь сумму два. Сумма одиннадцати возможных значений вероятности на рисунке D.3 (b) равна единице, и это говорит нам о том, что эта ФПВ учитывает все (100 %) возможных исходов бросания костей.

На рисунке D.3 (c) интересным образом подчеркнут тот факт, что ФПВ должна учитывать все возможные результаты. Допустим, женщина говорит: «Из двух моих детей один ребенок – девочка. Какова вероятность того, что у нее есть сестра?» Здесь будьте внимательны – как ни странно, 0.5 – неверный ответ на этот вопрос. Следует рассмотреть больше возможностей, чем просто наличие у девочки брата или сестры. Мы должны подумать обо всех возможных вариантах порядка рождения двух детей, один из которых – девочка. Поскольку мы не знаем, какого пола первый рожденный ребенок, существую три возможных порядка рождения детей: девочка, потом мальчик; мальчик, потом девочка и девочка, потом еще девочка, как показано на рисунке D.3 (c). Следовательно, вероятность того, что дочка имеет сестру, равна 1/3, а не 1/2! (Поверьте этому.) И снова сумма трех вероятностей по 1/3 равна единице.

Примеры на рисунке D.3 иллюстрируют две важные особенности ФПВ: ФПВ всегда положительны, и площадь под ними должна быть равна единице. Понятие ФПВ делает их *мерой правдоподобия* появления того или иного события, и если некоторое событие должно наступить непременно, то это эквивалентно высказыванию, что существует единичная вероятность (100 %) его наступления. Для непрерывной функции плотности вероятности $p(f)$ мы записываем эти свойства как

Значения ФПВ никогда не бывают отрицательными: → $$p(f) \geq 0, \qquad \text{(D-8)}$$

и

Сумма всех значений ФПВ равна единице: → $$\int_{-\infty}^{\infty} p(f)df = 1 \qquad \text{(D-8')}$$

В разделе D.1 мы показали, как вычисляются оценки среднего (математического ожидания) и дисперсии для дискретных отсчетов. Мы можем также вычислить эти статистические параметры для случайной функции, если мы знаем ФПВ этой функции. Среднее случайной функции f, μ_f, по определению равно

$$\mu_f = \int_{-\infty}^{\infty} f \bullet p(f)df, \qquad \text{(D-9)}$$

а дисперсия f определяется как [3]:

$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f - \mu_f)^2 \bullet p(f)df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \bullet p(f)df - \mu_f^2. \qquad \text{(D-10)}$$

В цифровой обработке сигналов мы будем встречать непрерывные функции плотности вероятности, значения которых постоянны, подобные примерам, показанным на рисунке D.3. В таких случаях для определения среднего и дисперсии

легко воспользоваться выражениями (D-9) и (D-10). На рисунке D.4 показана равномерная непрерывная ФПВ, описывающая случайную функцию, значения которой с равными вероятностями принимают значения в диапазоне от $-a$ до b. Из (D-8) мы знаем, что площадь под кривой ФПВ должна быть равна единице (т. е. вероятность того, что значение случайной величины попадет куда-нибудь под эту кривую, составляет 100 %). Следовательно, максимальное значение $p(f)$ должно быть равно площади, деленной на ширину, или $p(f) = 1/(b + a)$. Согласно (D-9) среднее для этой ФПВ $p(f)$ равно

$$\mu_f = \int_{-\infty}^{\infty} f \bullet p(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} f \bullet [1/(b + a)]df =,$$

$$= [1/(b + a)]\int_{-a}^{b} f\,df = [1/(b + a)][f^2/2]_{-a}^{b} = (b^2 - a^2)/[2(b + a)] =$$

$$= (b + a)(b - a)/[2(b + a)] = (b - a)/2, \qquad \text{(D-11)}$$

что в данном случае совпадает со средней точкой интервала от $-a$ до b. Дисперсия ФПВ, приведенной на рисунке D.4, имеет вид

$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \bullet p(f)df - \mu_f^2 = \int_{-a}^{b} f^2 \bullet [1/(b + a)]\,df - (b - a)^2/4 =$$

$$= [1/(b + a)] \bullet [f^3/3]_{-a}^{b} - (b - a)^2/4 = \{1/[3(b + a)]\} \bullet (b^3 + a^3) - (b - a)^2/4 =$$

$$= (b + a)(b^2 - ab + a^2)/[3(b + a)] - (b^2 - 2ab + a^2)/4 =$$

$$= (b^2 + 2ab + a^2)/12 = (b + a)^2/12. \qquad \text{(D-12)}$$

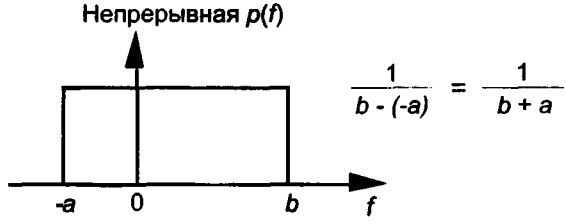


Рис. D.4. Непрерывная равномерная функция плотности вероятности

Мы используем результаты (D-11) и (D-12) в главе 12 для анализа ошибок квантования АЦП и эффектов конечной длины слова аппаратурных регистров.

D.4. Нормальная функция плотности вероятности

Одна функция плотности вероятности, которая так часто встречается в природе, заслуживает нашего внимания. Эта функция так широко распространена, что ее назвали *нормальной* функцией плотности вероятности[1]. Эта функция, форма которой показана на рисунке D.5, имеет такое большое значение, потому что данные с таким распределением вероятностей очень полезны при тестировании программных алгоритмов и аппаратурных процессоров. Нормальная ФПВ имеет вид

$$p(x) = \left[1/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)\right]e^{-(x - x_{ave})^2/2\sigma^2}. \qquad \text{(D-13)}$$

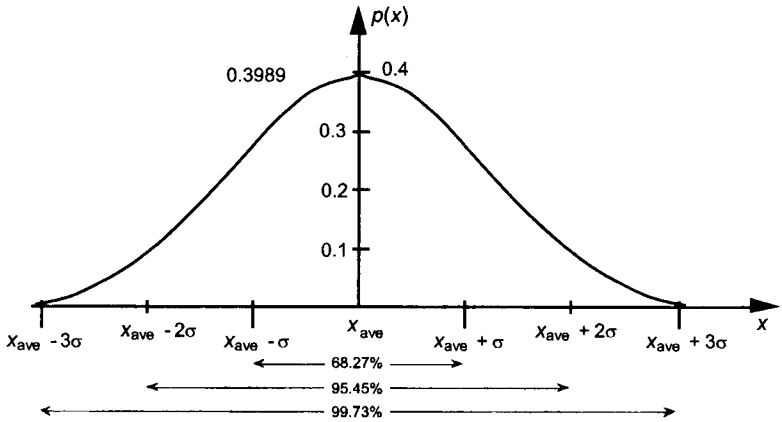


Рис. D.5. Нормальная ФПВ, имеющая среднее x_{ave} и стандартное отклонение σ

Площадь под этой кривой равна единице, а проценты в нижней части рисунка D.5 говорят нам, что в 68.27 % случаев значения x отличаются от среднего не более чем на σ. Аналогично, в 99.73 % случаев значения x находятся в пределах 3σ от x_{ave}.

Библиография

1. Papoulis, A. *Probability Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York,1965, pp. 266-268.

2. Miller, I., and Freund, J. *Probability and Statistics for Engineers*, 2nd Ed., Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, New Jersey, 1977, p. 118.

3. Bendat, J., and Piersol, A. *Measurement and Analysis of Random Data*, John Wiley and Sons, New York, 1972, p. 61.

[1] *Нормальную функцию плотности вероятности* иногда называют Гауссовой функцией. Схема генерации данных с таким распределением вероятностей обсуждается в разделе 13.11.

Приложение Е

Децибелы (дБ и дБм)

Это приложение знакомит читателя с логарифмическим масштабом, используемым для улучшения разрешения по уровню графиков функций частоты, таких как спектры сигналов, амплитудно-частотные характеристики фильтров и амплитудные спектры окон. Когда мы используем для построения графиков логарифмический масштаб, вертикальная ось системы координат размечается в *децибелах*.

Е.1. Использование логарифмов для сравнения мощности сигналов

Знакомясь с децибелами, интересно узнать, как эволюционировала эта единица измерения. При сравнении уровней непрерывных (аналоговых) сигналов первые специалисты по электронной связи обнаружили, что полезно было бы определить меру различия двух сигналов по мощности. Если это различие определить как логарифм отношения мощностей, его можно использовать как простую аддитивную меру для определения общего усиления или ослабления последовательно включенных электронных схем. Положительные значения логарифма, соответствующие усиливающим компонентам системы можно прибавить к отрицательным логарифмам тех компонентов, которые вносят ослабление, и получить общее усиление или ослабление системы. С учетом этого разность уровней мощности двух сигналов (P_1 и P_2), измеренная в белах[1], была определена как логарифм по основанию 10 отношения этих двух мощностей, или

$$\textit{Разность мощностей} = \log_{10}(P_1/P_2)\ \textit{бел}\,. \qquad \text{(E-1)}$$

Использование (Е-1) привело к следующему шагу эволюции, т. к. единица «бел» оказалась слишком большой, что делало ее использование несколько неудобным. Например, было установлено, что человеческое ухо может различать разность уровней мощности звукового сигнала в одну десятую бела. При измерениях разности мощности так часто оказывались меньше бела, что была введена единица децибел (bel/10), а использование устаревшей единицы «бел» сошло на

[1] Безразмерная единица измерения *бел* была названа в честь Александра Грэхема Белла (Alexander Graham Bell).

нет. Таким образом, децибел (дБ) является единицей измерения относительной разности уровней мощности двух сигналов, вычисляемой по формуле

$$\textit{Разность мощностей} = 10 \bullet \log_{10}(P_1/P_2)\ dB\,. \qquad \text{(E-2)}$$

Логарифмическая функция $10 \bullet \log_{10}$, график которой приведен на рисунке Е.1, на первый взгляд не кажется полезной. Обратите внимание на большую скорость ее изменения при малых отношениях мощностей (P_1/P_2) и небольшие изменения при больших отношениях мощностей. В результате этой нелинейности при малых отношениях P_1/P_2 разрешение по уровню оказывается выше, что дает нам возможность различать очень маленькие разности уровней мощности в спектрах сигналов, частотных характеристиках фильтров и спектрах окон.

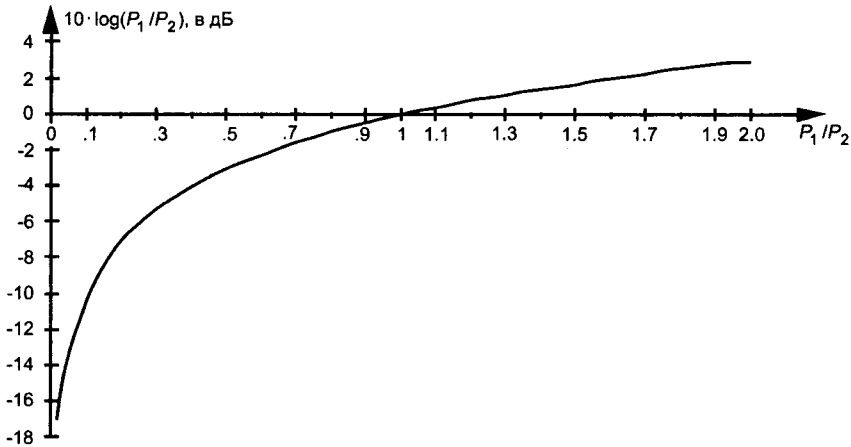


Рис. Е.1. График логарифмической функции (Е-2)

Продемонстрируем возможности переменного разрешения логарифмической функции. Во-первых, вспомним, что мощность любой последовательности в частотной области, представляющей амплитудный спектр $|X(m)|$, пропорциональна $|X(m)|^2$. Для удобства коэффициент пропорциональности предполагается равным единице, так что мы говорим, что мощность $|X(m)|$ определяется в соответствии с

$$\textit{Дискретный спектр мощности}\ X(m) = |X(m)|^2\,. \qquad \text{(E-3)}$$

Хотя (Е-3) на самом деле может не представлять мощность (в ваттах) в классическом смысле, здесь важна операция возведения в квадрат, поскольку она аналогична традиционной операции возведения амплитуды в квадрат, используемой для определения мощности непрерывных сигналов. (Конечно, если $X(m)$ представляется комплексным числом, мы можем вычислить спектр мощности, используя соотношение $|X(m)|^2 = X_{real}(m)^2 + X_{imag}(m)^2$.) Умножение логарифма в (Е-3) на 10 позволяет выразить спектр мощности $X_{dB}(m)$ в децибелах:

$$X_{dB}(m) = 10 \log_{10}(|X(m)|^2)\ \textit{дБ}\,. \qquad \text{(E-4)}$$

Поскольку $\log(x^2) = \log(x) + \log(x) = 2\log(x)$, мы можем обойтись без операции возведения в квадрат в (Е-4), удвоив коэффициент перед логарифмом и переписав выражение в виде

$$X_{dB}(m) = 20 \log_{10}(|X(m)|)\ дБ\,. \qquad \text{(E-5)}$$

Благодаря отсутствию возведения в квадрат (Е-5) является более удобным, чем (Е-4), при вычислении последовательности отсчетов логарифмического спектра мощности $X_{dB}(m)$ по последовательности $X(m)$.

Уравнения (Е-4) и (Е-5), таким образом, представляют собой выражения, используемые для преобразования линейного масштаба амплитуд в логарифмический масштаб мощности, измеряемой в дБ. Наиболее часто в литературе мы встречаем нормированные графики в логарифмическом масштабе, на которых каждый отсчет $|X(m)|^2$ разделен на мощность первого отсчета $|X(0)|^2$ (при $m = 0$), в соответствии с

$$\text{нормированный } X_{dB}(m) = 10 \bullet \log_{10}(|X(m)|^2 / |X(0)|^2) =$$
$$= 20 \bullet \log_{10}(|X(m)| / |X(0)|)\ dB\,. \qquad \text{(E-6)}$$

Деление на $|X(0)|^2$ или $|X(0)|$ приводит к тому, что первый отсчет нормированной логарифмической последовательности $X_{dB}(m)$ равен 0 дБ[1]. Благодаря этому мы можем легко сравнивать различные логарифмические графики спектров. Для иллюстрации сказанного давайте посмотрим на спектры окна Хэннинга и треугольного окна. Амплитудные спектры этих окон в линейном масштабе приведены на рисунке Е-2 (а), где максимальные значения спектров мы произвольно приняли равными 2. Сравнивая две последовательности в линейном масштабе $W_{Hanning}(m)$ и $W_{triangular}(m)$, мы можем видеть некоторые незначительные отличия их значений. Если нас интересует мощность, соответствующая двум этим функциям, мы можем возвести отсчеты амплитудного спектра в квадрат и построить графики мощности в линейном масштабе, как на рисунке Е.2 (b). Разность между двумя спектрами мощности на частотах выше $m = 8$ на рисунке Е.2 (b) практически незаметна. В этом случае нам может помочь логарифмический масштаб. Если мы построим графики нормированных спектров мощности в логарифмическом масштабе, используя (Е-6), различие двух функций становится очевидным.

Нормирование в случае окна Хэннинга сводится к вычислению последовательности, нормированной относительно $|W_{Hanning}(0)|$, в соответствии с выражением

$$W_H(m) = 10 \bullet \log_{10}(|W_{Hanning}(m)|^2 / |W_{Hanning}(0)|^2) =$$
$$= 20 \bullet \log_{10}(|W_{Hanning}(m)| / |W_{Hanning}(0)|)\ dB\,. \qquad \text{(E-7)}$$

Графики нормированных логарифмических последовательностей приведены на рисунке Е.2 (с). Мы теперь можем видеть различия этих функций намного лучше, чем в линейном масштабе на рисунке Е.2 (b). Заметьте, что благодаря нормированию максимальные значения обоих спектров на рисунке Е.2 (с) равны 0 дБ. (Точки на рисунке Е.2 соединены линиями, чтобы подчеркнуть форму боковых лепестков двух последовательностей.)

Хотя мы показали полезность графиков в логарифмическом масштабе для окон, шкала дБ может использоваться с тем же успехом при построении графиков спектров мощности сигналов или частотных характеристик фильтров. Мы можем продемонстрировать использование логарифмического масштаба на примере

[1] Потому что $\log_{10}(|X(0)| / |X(0)|) = \log_{10}(1) = 0$.

простого цифрового фильтра. Допустим, мы проектируем КИХ фильтр верхних частот с 11 ответвлениями, коэффициенты которого показаны на рисунке Е.3 (а).

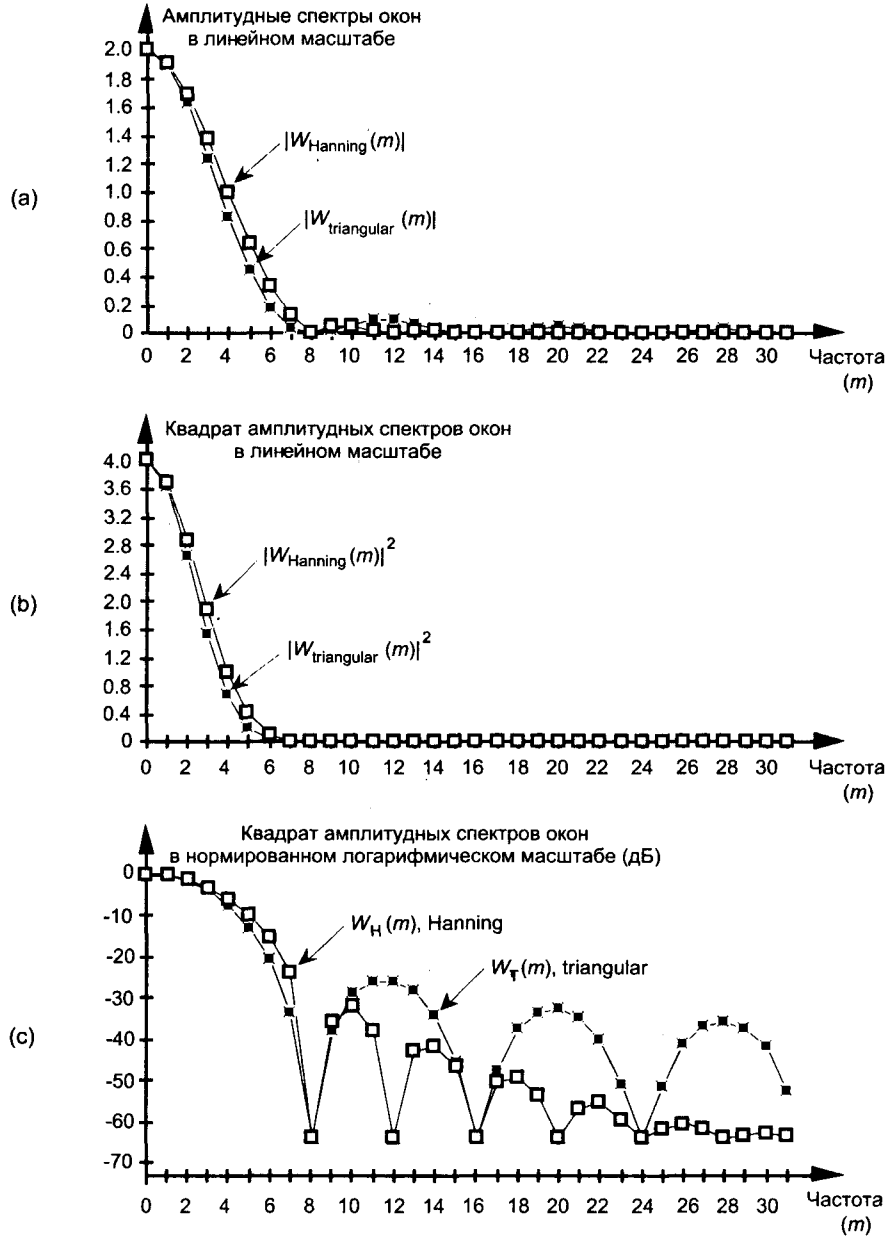


Рис. Е.2. Спектры окон Хэннинга (белые квадратики) и треугольного (черные квадратики): (а) амплитудные спектры в линейном масштабе; (b) квадраты амплитудных спектров в линейном масштабе; (c) нормированные спектры мощности в логарифмическом масштабе в дБ

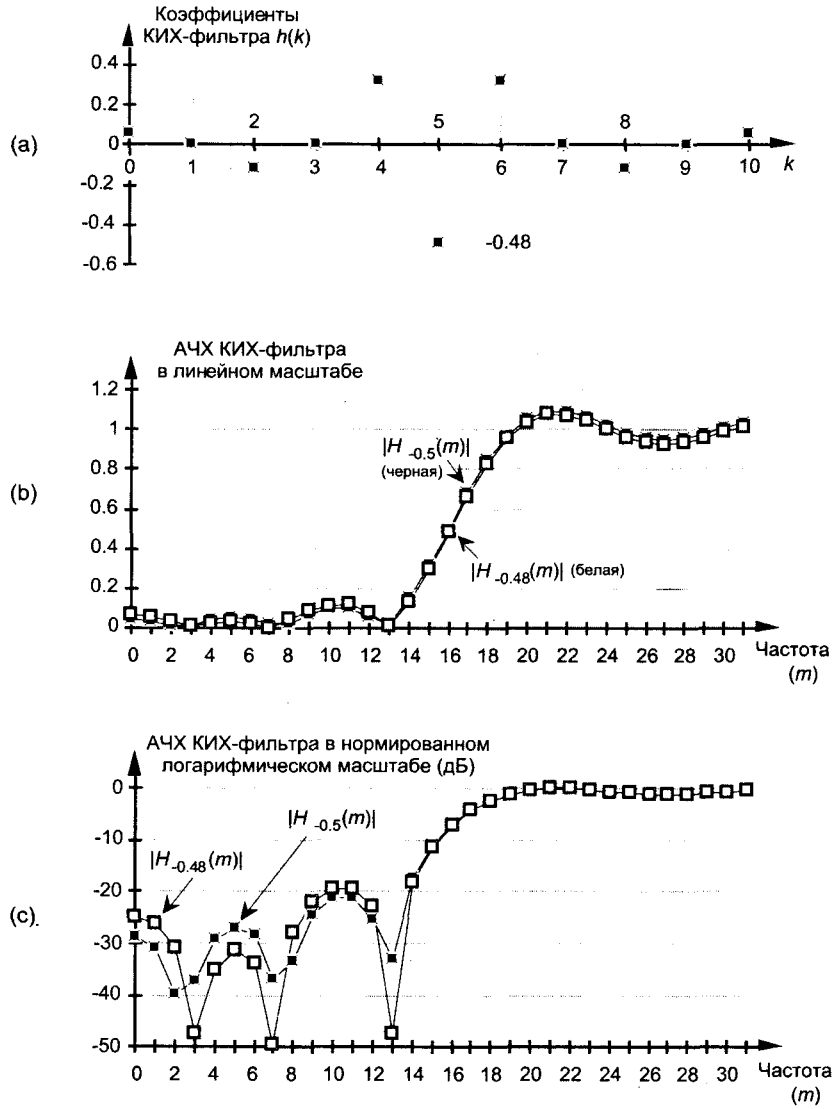


Рис. Е.3. АЧХ КИХ-фильтра: (a) коэффициенты КИХ-фильтра; (b) АЧХ в линейном масштабе; (c) АЧХ в логарифмическом масштабе в дБ

Если центральный коэффициент $h(5)$ равен -0.48, график амплитудно-частотной характеристики фильтра $|H_{-0.48}(m)|$ может быть построен белыми точками на рисунке Е.3 (b). При замене $h(5)$-значения -0.48 значением -0.5 новая АЧХ $|H_{-0.5}(m)|$ будет иметь вид, показанный черными точками на рисунке Е.3 (b). В линейном масштабе трудно заметить разницу между $|H_{-0.48}(m)|$ и $|H_{-0.5}(m)|$. Если же мы используем (Е-6) для вычисления логарифмических АЧХ, они будут иметь вид, показанный на рисунке Е.3 (c), где изменение боковых лепестков фильтра при изменении $h(5)$ хорошо видны.

Е.2. Некоторые полезные числа, связанные с децибелами

Если читатель регулярно пользуется логарифмическим масштабом, ему полезно запомнить несколько констант. Разность мощностей в 3 дБ соответствует отношению мощностей, равному 2, в соответствии с (Е-2)

$$\textit{Разность мощностей} = 10 \log_{10}(2/1) = 10 \bullet \log_{10}(2) = 3.01 \approx 3\ dB\,. \qquad \text{(E-8)}$$

Аналогично, если отношение мощностей компонентов составляет 1/2,то разность мощностей равна –3 дБ, потому что

$$\textit{Разность мощностей} = 10 \log_{10}(1/2) = 10 \bullet \log_{10}(0.5) = -3.01 \approx -3\ dB\,. \qquad \text{(E-9)}$$

Таблица Е.1. Некоторые полезные соотношения в дБ

Отношение амплитуд	Отношение мощностей (P_1/P_2)	Примерная разность уровней в дБ	
$10^{-1/2}$	10^{-1}	–10	← P_1 равна одной десятой P_2
2^{-1}	$2^{-2} = 1/4$	–6	← P_1 равна одной четвертой P_2
$2^{-1/2}$	$2^{-1} = 1/2$	–3	← P_1 равна половине P_2
2^0	$2^0 = 1$	0	← P_1 равна P_2
$2^{1/2}$	$2^1 = 2$	3	← P_1 в два раза больше P_2
2^1	$2^2 = 4$	6	← P_1 в четыре раза больше P_2
$10^{1/2}$	$10^1 = 10$	10	← P_1 в десять раз больше P_2
10^1	$10^2 = 100$	20	← P_1 в сто раз больше P_2
$10^{3/2}$	$10^3 = 1000$	30	← P_1 в тысячу раз больше P_2

В таблице Е.1 приведены некоторые часто используемые отношения мощностей с соответствующей разностью в дБ. Помните, что децибелы показывают только относительное соотношение мощностей. Например, если нам говорят, что сигнал А на 6 дБ превышает сигнал В, мы знаем, что мощность сигнала А в четыре раза больше мощности сигнала В, а амплитуда сигнала А в два раза больше амплитуды сигнала В. Мы можем не знать абсолютных мощностей сигналов А и В в ваттах, но мы знаем, что $P_A/P_B = 4$.

Е.3. Задание абсолютной мощности в децибелах

Обсудим другой способ использования децибелов, который читатель может встретить в литературе. Специалисты по электронным системам связи находят удобным измерять уровень мощности непрерывных сигналов по отношению к некоторому заданному значению абсолютной мощности. В этом случае они получают возможность говорить об уровне абсолютной мощности в ваттах, используя в то же время преимущества логарифмического масштаба. Наиболее часто используется опорный уровень, равный одному милливатту. Например, если P_2 в (Е-2) представляет собой опорный уровень в один милливатт, то

$$\textit{Абсолютная мощность } P_1 = 10 \cdot \log_{10}(P_1 / P_2) =$$

$$= 10 \cdot \log_{10}(P_1 \textit{ в ваттах}/1 \textit{ милливатт}) \textit{ дБм}. \qquad \text{(Е-10)}$$

Единица измерения дБм в (Е-10) читается как «дБ относительно одного милливатта». Следовательно, если для некоторого непрерывного сигнала известно, что его мощность равна 3 дБм, то мы знаем, что абсолютная мощность этого сигнала в 2 раза превышает один милливатт, или равна 2 милливаттам. Аналогично, сигнал уровня −10 дБм имеет обсолютную мощность 0.1 милливатт[1].

Читателю следует быть внимательным, чтобы не смешивать использование дБ и дБм. Они обозначают очень разные понятия. Повторим, что дБ представляют собой относительный уровень, а дБм представляет собой абсолютную мощность в милливаттах.

[1] Могут использоваться и другие опорные уровни. Специалисты, имеющие дело с мощными передатчиками, иногда в качестве опорного уровня используют один ватт. Эта логарифмическая единица измерения называется дБВ и читается как «дБ относительно одного ватта». В этом случае, например, 3 дБВ соответствуют мощности в 2 ватта.

Приложение F

Терминология в области цифровой фильтрации

Первый шаг по пути освоения цифровых фильтров состоит в том, чтобы научиться говорить на языке, используемом в этой области. К счастью, словарь цифровых фильтров в значительной степени унаследован от словаря аналоговых фильтров – так что нам не придется забывать то, что мы уже знаем. В этом приложении дается введение в терминологию цифровых фильтров.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – описывает взаимодействие фильтра с входным сигналом в частотной области. АЧХ на рисунке F.6 представляет собой кривую ослабления фильтра (в дБ) в функции частоты. АЧХ дополняется фазо-частотной характеристикой.

Веса (весовые коэффициенты) ответвлений – см. коэффициенты фильтра.

Всепропускающий фильтр – БИХ-фильтр, АЧХ которого равна единице во всем диапазоне частот, а ФЧХ может изменяться. Всепропускающие фильтры обычно включаются последовательно с обычными БИХ-фильтрами, $H_1(z)$, как показано на рисунке F.1.

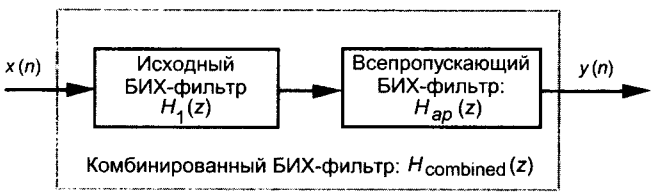


Рис. F.1. Типовое использование всепропускающего фильтра

Всепропускающий фильтр, $H_{ap}(z)$, можно спроектировать так, что его ФЧХ будет компенсировать, или выравнивать, нелинейность ФЧХ исходного БИХ-фильтра [1 - 3]. Таким образом, ФЧХ комбинации двух фильтров, $H_{combined}(z)$, будет ближе к линейной, чем ФЧХ исходной $H_1(z)$, а это очень важное свойство для систем связи. В этом смысле всепропускающий фильтр иногда называют *компенсатором фазы*.

Групповая задержка – производная ФЧХ по частоте, $G=-\Delta\phi/\Delta f$, или наклон ФЧХ фильтра $H_\phi(m)$. Понятие групповой задержки требует дополнительного пояснения, выходящего за рамки простого определения. Для идеального фильтра

ФЧХ линейна, а групповая задержка постоянна. Групповую задержку, которая измеряется в единицах времени, секундах, можно также рассматривать как задержку распространения огибающей амплитудно-модулированного сигнала при прохождении через цифровой фильтр (в этом контексте ее часто называют *задержкой огибающей*). Искажение групповой задержки возникает, когда сигналы разных частот проходят через фильтр с разной задержкой. Если групповая задержка обозначена как G, то соотношение между групповой задержкой, приращением фазы $\Delta\phi$ и приращением частоты Δf имеет вид:

$$G = (-\Delta\phi_{в\ градусах}/360)/\Delta f = (-\Delta\phi_{в\ радианах}/2\pi)/\Delta f\ секунд\,. \quad \text{(F-1)}$$

Если мы знаем сдвиг фаз фильтра ($\Delta\phi$) в градусах/Гц или радианах/Гц, мы можем определить групповую задержку в секундах, используя выражение

$$G\Delta f = G1 = G = (-\Delta\phi_{в\ градусах/Гц}/360) =$$
$$= (-\Delta\phi_{в\ радианах/Гц}/2\pi)\ секунд\,. \quad \text{(F-2)}$$

Чтобы продемонстрировать использование (F-2) и показать влияние нелинейности ФЧХ фильтра, предположим, что мы оцифровали непрерывный сигнал, содержащий четыре частотных компонента и определяемый выражением

$$x(t) = \sin(2\pi \bullet 1 \bullet t) + \sin(2\pi \bullet 3 \bullet t)/3 + \sin(2\pi \bullet 5 \bullet t)/5 + \sin(2\pi \bullet 7 \bullet t)/7\,. \quad \text{(F-3)}$$

Входной сигнал $x(t)$ содержит сумму синусоид с частотами 1 Гц, 3 Гц, 5 Гц и 7 Гц, его дискретное представление показано на рисунке F.2 (a). Если мы подадим последовательности, представляющие $x(t)$, на вход идеального ФНЧ с линейной ФЧХ и 4-мя ответвлениями, с частотой среза больше 7 Гц, фазовый сдвиг которого составляет –0.25 радиан/Гц, выходная последовательность будет выглядеть так, как показано на рисунке F.2 (b).

Поскольку сдвиг фазы фильтра составляет –0.25 радиан/Гц, (F-2) говорит нам, что постоянная групповая задержка фильтра G в секундах составляет

$$G = (-\Delta\phi_{в\ радианах/Гц}/2\pi) = -0.25/2\pi = 0.04\ секунды\,. \quad \text{(F-4)}$$

При постоянной групповой задержке в 0.04 секунды входная синусоида частотой 1 Гц задерживается фильтром на 0.25 радиана, синусоида частотой 3 Гц задерживается на 0.75 радиана, синусоида частотой 5 Гц – на 1.25 радиана и синусоида частотой 7 Гц – на 1.75 радиана. Заметьте, что фильтр с линейной ФЧХ дает выходной сигнал, который представляет собой просто задержанную по времени версию входного сигнала, на рисунке F.2 (b) это хорошо видно. Задержка по времени равна времени групповой задержки 0.04 секунды. С другой стороны, на рисунке F.2 (c) показан искаженный сигнал в случае, когда ФЧХ фильтра нелинейна по какой-то причине, так что фазовый сдвиг на частоте 7 Гц вместо 1.75 радиана составляет 3.5 радиана. Обратите внимание на искажения в начальной части огибающей на рисунке F.2 (c) по сравнению с рисунком F.2 (b). Смысл всего сказанного состоит в том, что, если интересующая нас информация содержится в огибающей сигала, пропускаемого через фильтр, то форма ФЧХ фильтра должна быть как можно ближе к линейной. Другими словами, мы хотим, чтобы групповая задержка в полосе пропускания изменялась как можно меньше. (Дополнительные особенности фильтров с нелинейной ФЧХ обсуждаются в разделе 5.8.)

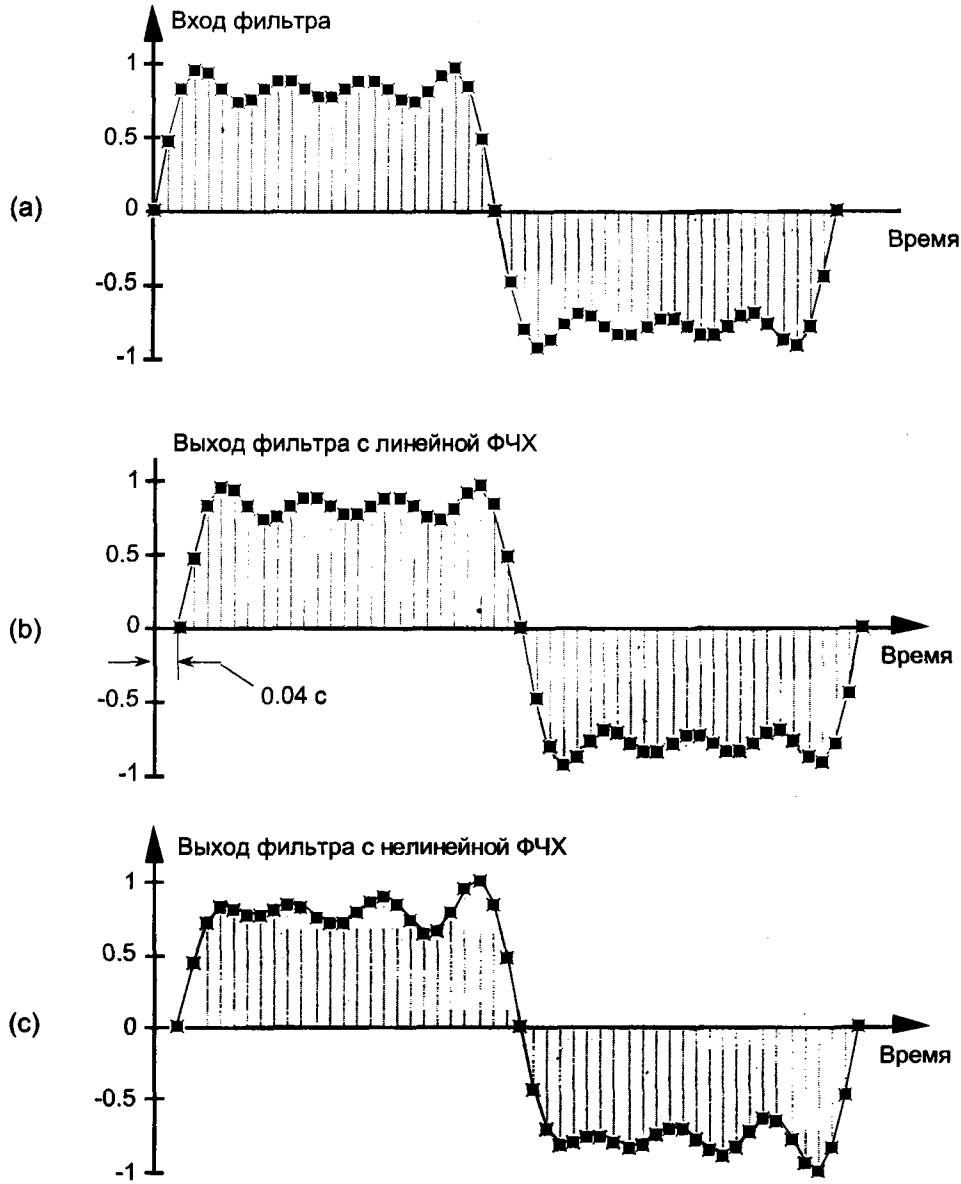


Рис. F.2. Примеры реакции фильтра во временной области: (a) входная последовательность фильтра; (b) выходная последовательность фильтра с линейной ФЧХ, сдвинутая на 0.04 секунды, совпадающая с входной последовательностью; (c) искаженная выходная последовательность фильтра с нелинейной ФЧХ

Децибел (дБ) – единица ослабления или усиления, используемая для выражения относительной амплитуды или мощности двух сигналов. В случае фильтров мы используем децибелы для указания уровня АЧХ на частоте среза (–3 дБ) и в полосе задерживания (–20 дБ), как показано на рисунке F.6. В приложении E децибелы обсуждаются подробнее.

Заворот фазы – результат использования программ вычисления арктангенса для вычисления фазовых углов, которые приводят к кажущимся разрывам ФЧХ. Когда истинный фазовый угол находится в диапазоне от –180° до –360°, некоторые программы автоматически приводят этот угол к диапазону от 0° до +180°. В разделе 5.8 приведен пример заворота фазы при вычислении ФЧХ КИХ-фильтра.

Задержка огибающей – см. групповая задержка.

Импульсная характеристика – выходной сигнал цифрового фильтра при подаче на вход одного единичного отсчета, которому предшествуют и за которым следуют нулевые отсчеты. Частотную характеристику фильтра можно вычислить с помощью дискретного преобразования Фурье от импульсной характеристики фильтра [4].

Каскадированные фильтры – *система* фильтрации, в которой множество отдельных фильтров соединены последовательно, так что выход одного фильтра соединен с входом следующего, как показано на рисунках F.1 и 6.37(а).

Квадратурный фильтр – двухканальный цифровой фильтр, обрабатывающий комплексные сигналы, показанный на рисунке F.3. Один фильтр обрабатывает синфазную последовательность $i(n)$, а другой – квадратурную последовательность $q(n)$. Для квадратурной фильтрации обычно используются ФНЧ.

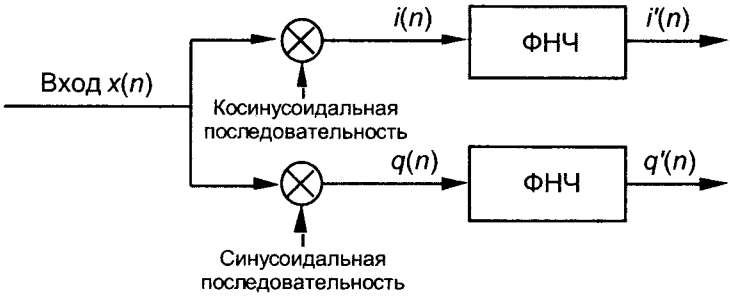


Рис. F.3. Два ФНЧ в реализации квадратурной фильтрации

Коэффициент прямоугольности (коэффициент формы) – термин, используемый в качестве характеристики крутизны АЧХ. Коэффициент прямоугольности обычно определяется как отношение ширины полосы пропускания к сумме ширины полосы пропускания и ширины переходной полосы. Чем меньше значение этого коэффициента, тем меньше крутизна АЧХ фильтра. Для идеального фильтра с нулевой шириной переходной полосы коэффициент прямоугольности равен единице. Термин *коэффициент формы* используется также при описании аналоговых фильтров.

Коэффициенты фильтра – набор констант, которые называют также *весами ответвлений*, используемых для умножения задержанных отсчетов сигналов в структурах ЦФ. Проектирование ЦФ представляет собой процесс определения коэффициентов фильтра, которые обеспечивают получение требуемой частотной характеристики. Для КИХ-фильтра коэффициенты совпадают с отсчетами импульсной характеристики.

Крутизна АЧХ – термин, используемый для описания наклона амплитудно-частотной характеристики в переходной полосе, расположенной между полосами про-

пускания и задерживания. Можно сказать, что АЧХ фильтра имеет крутизну 12 дБ/октаву. Это значит, что сигналы, частота которых отличается на две октавы, будут ослаблены на 24 дБ, а отстоящие по частоте на три октавы — на 36 дБ и т. д.

Неравномерность АЧХ в полосе пропускания – размер флуктуаций АЧХ от пика до пика в полосе пропускания, как показано на рисунке F.6.

Ослабление – уменьшение амплитуды сигнала, обычо измеряемое в дБ, после прохождения через цифровой фильтр. Ослабление фильтра представляет собой отношение амплитуды выходного сигнала фильтра к амплитуде входного сигнала на некоторой частоте, определяемое как

$$\textit{Ослабление} = 20 \bullet \log_{10}(a_{out}/a_{in})\ \textit{дБ}\,. \qquad \text{(F-5)}$$

Если на заданной частоте амплитуда выходного сигнала фильтра меньше амплитуды входного сигнала, то отношение в (F-5) меньше единицы, а ослабление выражается отрицательным числом.

Относительное ослабление – ослабление, измеренное по отношению к наибольшему значению амплитуды. Наибольшему уровню сигнала обычно присваивается опорный уровень 0 дБ, как показано на рисунке F.6, в результате чего все остальные значения АЧХ оказываются отрицательными.

Передаточная функция – математическое выражение, получаемое как отношение z-преобразования (для аналоговых фильтров – преобразования Лапласа) выходного сигнала цифрового фильтра к преобразованию входного сигнала. По заданной передаточной функции мы можем определить АЧХ и ФЧХ фильтра.

Переходная полоса – диапазон частот, в котором АЧХ фильтра переходит от полосы пропускания к полосе задерживания. На рисунке F.6 показана переходная полоса ФНЧ.

Полоса задерживания – диапазон частот, в котором фильтр ослабляет сигналы. На рисунке F.6 показана полоса задерживания ФНЧ.

Полоса пропускания – диапазон частот сигнала, в котором фильтр пропускает энергию сигнала на выход с минимальным ослаблением. Обычно определяется как диапазон частот, в котором АЧХ фильтра не выходит за пределы заданной неравномерности, как показано на рисунке F.6.

Полосовой фильтр – фильтр, АЧХ которого показана на рисунке F.4 (b), пропускающий сигналы в одной полосе частот и ослабляющий сигналы в полосах частот, лежащих ниже и выше полосы пропускания.

Полуполосный фильтр – тип КИХ-фильтров, центр переходной полосы которых расположен на одной четвертой частоты дискретизации, или на $f_s/4$. Иначе говоря, граница полосы пропускания и граница полосы задерживания находятся на одинаковом расстоянии от $f_s/4$. Благодаря симметрии частотной характеристики полуполосные фильтры часто используются в схемах фильтрации с прореживанием, т. к. половина их коэффициентов равна нулю. Это уменьшает количество необходимых умножений, как описано в разделе 5.7.

Порядок фильтра – число, определяющее наибольшую степень числителя или знаменателя передаточной функции ЦФ в z-области. Передаточные функции КИХ-фильтров не содержат знаменателя, а порядок фильтра на единицу меньше

количества ответвлений линии задержки в структуре фильтра. Для БИХ-фильтров порядок равен количеству элементов задержки в структуре фильтра[1]. В общем случае, чем больше порядок фильтра, тем лучше его частотная характеристика.

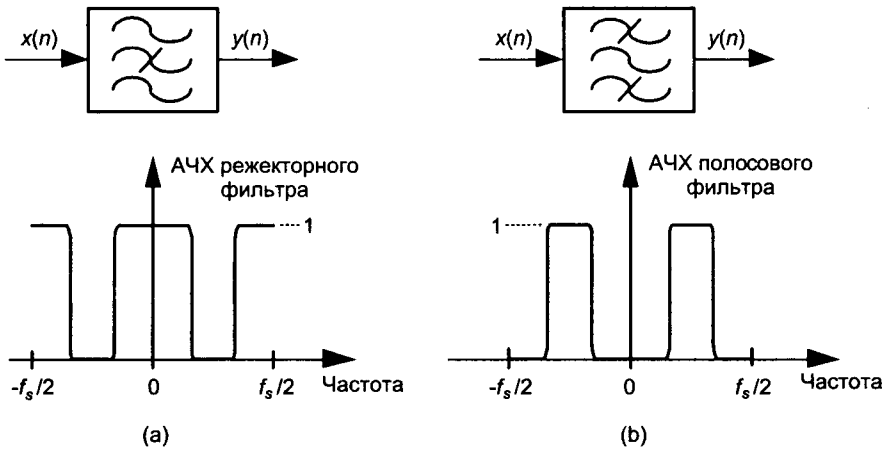


Рис. F.4. Символы фильтров и соответствующие частотные характеристики: (a) режекторного фильтра; (b) полосового фильтра

Пульсации – флуктуации (величина которых измеряется в дБ) АЧХ в полосе пропускания или задерживания. Эллиптические фильтры и фильтры Чебышева имеют АЧХ с равноволновыми пульсациями, т.е. амплитуда их пульсаций не меняется в пределах полосы пропускания. АЧХ фильтров Бесселя и Баттерворта не имеют пульсаций. Пульсации в полосе задерживания иногда называют *внеполосными пульсациями*.

Режекторный фильтр – фильтр, который вырезает (ослабляет) сигналы в одном диапазоне частот и пропускает сигналы как на более высоких, так и на более низких частотах. На рисунке F.4 (a) показана АЧХ идеального режекторного фильтра.

Структура – относится к блок-схеме, показывающей, как реализован цифровой фильтр. Рекурсивный фильтр имеет структуру с обратными связями, использующую прошлые отсчеты выходного сигнала и прошлые отсчеты входного сигнала для вычисления текущего выходного сигнала. БИХ-фильтры реализуются в виде рекурсивных структур. Нерекурсивная структура фильтра – это такая структура, в которой для вычисления выходного отсчета используются только текущий и прошлые отсчеты входного сигнала. КИХ-фильтры почти всегда реализуются в виде нерекурсивных структур. Примеры различных структур цифровых фильтров см. в главе 6.

Трансверсальный фильтр – в области цифровой обработки сигналов это синоним КИХ-фильтра, реализованного по нерекурсивной схеме, описанной в главе 5.

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) – разность фаз входного и выходного синусоидальных сигналов фильтра в зависимости от частоты сигнала. ФЧХ,

[1] Это справедливо для так называемых канонических структур фильтров, содержащих наименьшее возможное количество элементов задержки. В общем случае количество элементов задержки может быть больше порядка фильтра — (*прим. перев.*).

которую иногда называют характеристикой *фазовой задержки*, обычно изображается кривой, показывающей сдвиг фаз фильтра в зависимости от частоты. Более подробно ФЧХ фильтра обсуждается в разделе 5.8.

Фильтр верхних частот (ФВЧ) – фильтр, который пропускает сигналы, частота которых выше некоторой заданной частоты, и подавляет сигналы с частотами, лежащими ниже этой частоты, как показано на рисунке F.5 (a). Мы все встречаемся с одной из реализаций фильтрации верхних частот у себя дома. Обратите внимание на то, что происходит, когда вы включаете подъем высоких частот или отключаете подъем низких частот в вашей домашней стереосистеме. При этом усилитель с плоской АЧХ превращается в аналоговый ФВЧ, который дает резкий металлический звук вследствие подчеркивания высоких частот.

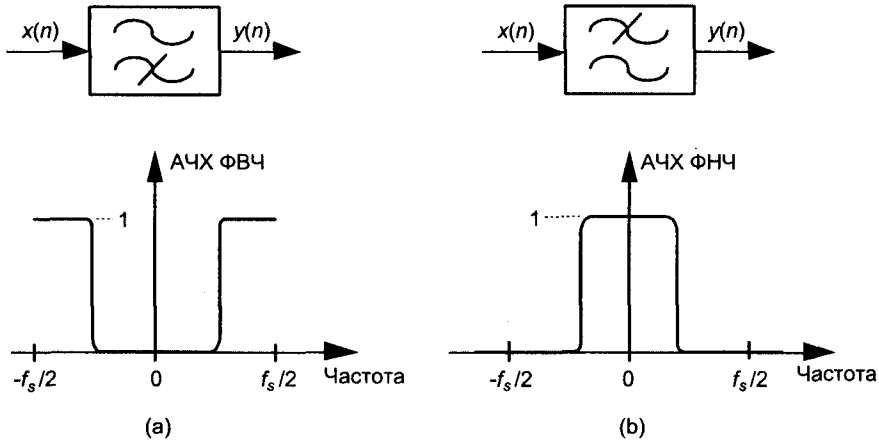


Рис. F.5. Символы фильтров и соответствующие АЧХ: (a) фильтра верхних частот; (b) фильтра нижних частот

Фильтр нижних частот (ФНЧ) – фильтр, который пропускает сигналы с частотами от 0 Гц до некоторой заданной частоты и подавляет сигналы с более высокими частотами. Типовая АЧХ ФНЧ показана на рисунке F.5 (b). Примером ФНЧ является усилитель вашей стереосистемы, когда вы включаете подъем низких частот (или ослабляете высокие частоты с помощью регулятора тембра). Звук при этом становится монотонным, смазанным вследствие относительного усиления низкочастотных компонентов.

Фильтр прореживания – цифровой ФНЧ, у которого частота дискретизации выходного сигнала меньше частоты дискретизации входного сигнала. Как показано в разделе 10.1, для устранения наложений выходная частота дискретизации должна удовлетворять критерию Найквиста.

Фильтр с линейной ФЧХ – фильтр, ФЧХ которого представляет собой линейную функцию частоты. График ФЧХ в линейном масштабе представляет собой прямую линию. Соответственно, групповая задержка фильтра постоянна. Для фильтров, используемых в системах связи, линейность ФЧХ является важным условием сохранения целостности сигналов.

Фильтр с нулевой фазой – метод фильтрации блоков данных, неприменимый в системах реального времени, который позволяет компенсировать нелинейность ФЧХ БИХ-фильтров. В разделе 13.12 этот метод описан подробнее.

Фильтры с импульсной характеристикой бесконечной длительности (БИХ-фильтры) – класс цифровых фильтров, передаточные функции которых имеют как нули, так и полюсы на z-плоскости. Вследствие этого устойчивость БИХ-фильтров не гарантируется, а их ФЧХ почти всегда нелинейна. При одном и том же порядке фильтра, АЧХ БИХ-фильтра имеет значительно более крутую переходную полосу, чем АЧХ КИХ-фильтра.

Фильтры с импульсной характеристикой конечной длительности (КИХ-фильтры) – класс цифровых фильтров, передаточная функция которых имеет только нули на z-плоскости. Главное следствие этого состоит в том, что КИХ-фильтры всегда устойчивы и могут иметь линейную ФЧХ (если последовательность коэффициентов фильтра симметрична). При заданном порядке фильтра переходная полоса АЧХ КИХ-фильтров намного шире, чем в случае БИХ-фильтров.

Функция Баттерворта – математическая функция, используемая для получения максимально гладкой АЧХ фильтра без учета требований к ФЧХ. АЧХ фильтров, основанных на функции Баттерворта, не имеет пульсаций ни в полосе пропускания, ни в полосе задерживания. К сожалению, при заданном порядке фильтры Баттерворта имеют самую широкую переходную полосу по сравнению с фильтрами, использующими другие популярные аппроксимирующие функции.

Функция Бесселя – математическая функция, используемая для получения наиболее линейной ФЧХ БИХ-фильтра без учета требований к АЧХ. Фильтры, спроектированные на основе функций Бесселя, имеют почти постоянную групповую задержку.

Функция Чебышева – математическая функция, используемая для расчета фильтров, АЧХ которых содержит пульсации заданного уровня в полосе пропускания или в полосе задерживания. Имеются семейства функций Чебышева, обеспечивающие уровень пульсаций 1 дБ, 2 дБ и 3 дБ. АЧХ фильтров Чебышева может пульсировать в полосе пропускания и быть гладкой в полосе задерживания (фильтры Чебышева типа I) или быть гладкой в полосе пропускания и пульсировать в полосе задерживания (фильтры Чебышева типа II). Фильтры Чебышева не могут иметь пульсации одновременно и в полосе пропускания, и в полосе задерживания. Цифровые фильтры, основанные на функциях Чебышева, имеют более крутую переходную полосу, чем фильтры Баттерворта, но нелинейность их ФЧХ выше, чем нелинейность ФЧХ фильтров Баттерворта.

Центральная частота (f_o) – частота, лежащая в центре полосы пропускания полосового фильтра. На рисунке F.4 (b) показана центральная частота полосового фильтра f_o.

Цифровой фильтр – вычислительный алгоритм, преобразующий дискретную последовательность чисел (входной сигнал) в другую дискретную последовательность чисел (выходной сигнал), имеющую измененный частотный спектр. Цифровой фильтр может быть реализован в форме программы, обрабатывающей данные, хранящиеся в памяти компьютера, или в форме специализированного устройства.

Частота среза – наивысшая частота полосы пропускания для ФНЧ (и наинизшая частота полосы пропускания ФВЧ), на которой АЧХ еще не выходит за пределы пульсаций полосы пропускания. На рисунке F.6 показана частота среза f_c для ФНЧ.

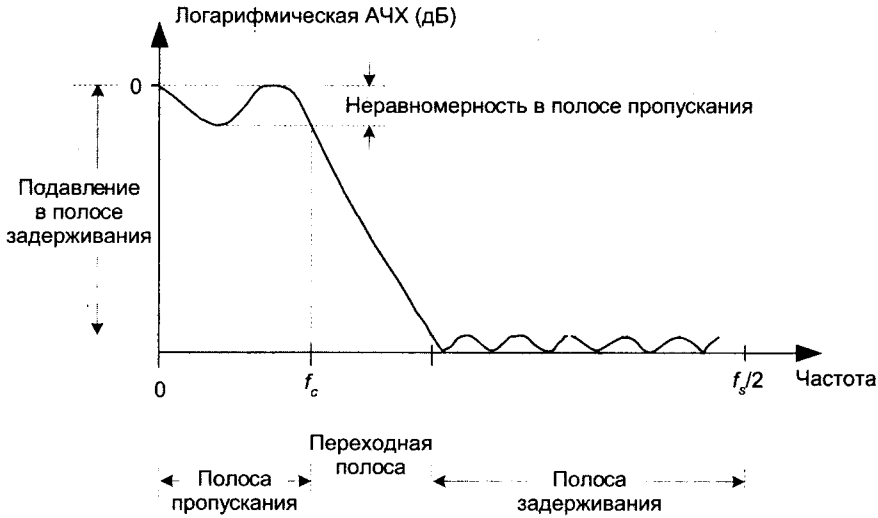


Рис. F.6. АЧХ цифрового ФНЧ. Относительный уровень АЧХ в полосе задерживания составляет –20 дБ

Ширина полосы фильтра – ширина полосы пропускания фильтра. Для ФНЧ ширина полосы равна частоте среза. Для полосового фильтра ширина полосы обычно определяется как разность верхней и нижней частот, на которых АЧХ уменьшается на 3 дБ.

Эллиптическая функция – математическая функция, используемая для расчета фильтров с самой крутой переходной полосой АЧХ при заданном порядке фильтра. Однако фильтры, спроектированные на основе эллиптических функций, которые также называют *фильтрами Кауэра*[1], имеют наихудшую форму ФЧХ по сравнению с фильтрами на основе других популярных функций. АЧХ эллиптический фильтров имеет пульсации одинаковой величины как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания.

Библиография

1. Rabiner, L. R., and Gold, B. *The Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englevvood Cliffs, New Jersey, 1975, pp. 206, 273, and 288 (есть русский перевод: Рабинер Л., Голд Б. «Теория и применение цифровой обработки сигналов», М.: Мир, 1978, доступен по адресу *http://geogin.narod.ru/arhiv/dsp/dsp3.htm*).

2. Oppenheim, A. V., and Schafer, R. W. *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Englevvood Cliffs, New Jersey, 1989, pp. 236 and 441 (имеется русский перевод одного из предыдущих изданий: Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. «Цифровая обработка сигналов», пер. с англ. / под ред. С. Я. Шаца, М.: Связь, 1979, доступен по адресу *dsp-book.narod.ru/OpShDSP.djvu*).

[1] А также фильтрами Золотарева-Кауэра, поскольку эллиптическая аппроксимация использует дробь Золотарева — (*прим. перев*).

3. Laakso, T. I, et al. «Splitting the Unit Delay», *IEEE Signal Processing Magazine*, January 1996, p. 46.

4. Pickerd, J. «Impulse-Response Testing Lets a Single Test Do the Work of Thousands», *EDN*, April 27,1995.

Приложение G

Вывод соотношений для фильтров на основе частотной выборки

В литературе значительная часть математических выкладок, связанных с фильтрами на основе частотной выборки, обычно опускается, что вполне оправдано, но здесь мы решили привести вывод некоторых соотношений по двум причинам: во-первых, для того, чтобы подтвердить состоятельность уравнений, использованных в разделе 7.1; и, во-вторых, чтобы продемонстрировать различные математические приемы, которые могут быть полезными в ваших будущих исследованиях.

G.1. Частотная характеристика гребенчатого фильтра

Частотная характеристика гребенчатого фильтра представляет собой передаточную функцию $H_{comb}(z)$, вычисленную на единичной окружности. Мы начинаем с подстановки $e^{j\omega}$ вместо z в $H_{comb}(z)$ вида (7-2), т. к. уравнение $z = e^{j\omega}$ описывает единичную окружность

$$H_{comb}(e^{j\omega})=H_{comb}(z)|_{z=e^{j\omega}}=(1-e^{-jN\omega}). \qquad \text{(G-1)}$$

Вынося за скобки экспоненту с половинным углом, $e^{-j\omega N/2}$, мы имеем

$$H_{comb}(e^{j\omega})=e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}). \qquad \text{(G-2)}$$

Используя тождество Эйлера $2j\sin(\alpha) = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}$, мы приходим к

$$H_{comb}(e^{j\omega})=e^{-j\omega N/2}[2j\sin(\omega N/2)]. \qquad \text{(G-3)}$$

Заменив j на $e^{j\pi/2}$, получаем

$$H_{comb}(e^{j\omega})=e^{-j(\omega N-\pi)/2}2\sin(\omega N/2). \qquad \text{(G-4)}$$

В ЦОС зачастую важно знать максимальное значение АЧХ фильтра, которую мы получаем как модуль (G-4):

$$|H_{comb}(e^{j\omega})| = 2|\sin(\omega N/2)|. \qquad \text{(G-5)}$$

Здесь максимум равен 2.

G.2. Частотная характеристика отдельного комплексного ФОЧВ

Частотная характеристика односекционного комплексного ФОЧВ представляет собой передаточную функцию $H_{ss}(z)$, вычисленную на единичной окружности. Мы начинаем с подстановки $e^{j\omega}$ вместо z в $H_{ss}(z)$, т. к. $z = e^{j\omega}$ описывает единичную окружность. Имея $H_{ss}(z)$ в виде

$$H_{ss}(z) = (1 - z^{-N})\, H(k)/\{1 - [e^{j2\pi k/N}]\, z^{-1}\}, \qquad \text{(G-6)}$$

мы заменяем z на $e^{j\omega}$, что дает нам

$$H_{ss}(e^{j\omega}) = H_{ss}(z)|_{z=e^{j\omega}} = (1 - e^{-jN\omega})\, H(k)/\{1 - [e^{j2\pi k/N}]\, e^{-j\omega}\} =$$
$$= H(k)\,(1 - e^{-jN\omega})/[1 - e^{-j(\omega - 2\pi k/N)}]. \qquad \text{(G-7)}$$

Вынося за скобки экспоненты $e^{-j\omega N/2}$ и $e^{-j(\omega/2 - \pi k/N)}$, мы имеем

$$H_{ss}(e^{j\omega}) = H(k)\,\{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})\}/$$
$$/\{e^{-j(\omega/2 - \pi k/N)}[e^{j(\omega/2 - \pi k/N)} - e^{-j(\omega/2 - \pi k/N)}]\}. \qquad \text{(G-8)}$$

Используя тождество Эйлера $2j\sin(\alpha) = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}$, мы приходим к

$$H_{ss}(e^{j\omega}) = H(k)\,\{e^{-j\omega N/2}[2j\sin(\omega N/2)]\}/$$
$$/\{e^{-j\omega/2} e^{j\pi k/N}[2j\sin(\omega/2 - \pi k/N)]\}. \qquad \text{(G-9)}$$

Сокращая общие множители и меняя местами сомножители, мы приходим к требуемой частотной характеристике одной секции комплексного ФОЧВ:

$$H_{ss}(e^{j\omega}) =$$
$$= e^{-j\omega(N-1)/2} e^{-j\pi k/N}\, H(k)\,[\sin(\omega N/2)]/[\sin(\omega/2 - \pi k/N)]. \qquad \text{(G-10)}$$

Далее мы вычисляем максимум АЧХ одной секции ФОЧВ в случае, когда ее полюс лежит на единичной окружности и $H(k) = 1$. Опуская в (G-10) фазовые множители (экспоненты), мы получаем амплитудную характеристику одной секции ФОЧВ в виде

$$H_{ss,\,amp}(e^{j\omega}) = \sin(\omega N/2)/\sin(\omega/2 - \pi k/N). \qquad \text{(G-11)}$$

Нам необходимо знать значение (G-11) при $\omega = 2\pi k/N$, поскольку это значение ω соответствует полюсу передаточной функции, но $|H_{ss}(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$ не определен, т. к.

$$|H_{ss,\,amp}(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = \sin(\pi k)/\sin(\pi k/N - \pi k/N) =$$
$$= \sin(\pi k)/\sin(0) = 0/0\,. \qquad \text{(G-12)}$$

Применяя к (G-11) правило маркиза де Лопиталя, получаем

$$|H_{ss,\,amp}(e^{j\omega})|_{\omega\to 2\pi k/N} =$$
$$= \{d[\sin(\omega N/2)]/d\omega\}/\{d[\sin(\omega/2 - \pi k/N)]/d\omega\}\,\Big|_{\omega\to 2\pi k/N} =$$
$$= [(N/2)/(1/2)]\,[\cos(\omega N/2)/\cos(\omega/2 - \pi k/N)]\,\Big|_{\omega\to 2\pi k/N} =$$
$$= [N\cos(\pi k)]/[\cos(\pi k/N - \pi k/N)] = N(-1)^k\,. \qquad \text{(G-13)}$$

Фазовые множители в (G-10) при $\omega = 2\pi k/N$ равны

$$e^{-j\omega(N-1)/2}e^{-j\pi k/N}\,|_{\omega=2\pi k/N} = e^{-j\pi k}\,e^{j\pi k/N}e^{-j\pi k/N} = (-1)^k. \qquad \text{(G-14)}$$

Объединяя результаты (G-13) и (G-14) с (G-10), имеем

$$|H_{ss,\,amp}(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = |H(k)|\bullet N(-1)^{2k} = |H(k)|\bullet N\,. \qquad \text{(G-15)}$$

Таким образом, максимальное значение АЧХ односекционного комплексного ФОЧВ при резонансе равно $|H(k)|\bullet N$ независимо от k.

G.3. ФЧХ многосекционного комплексного ФОЧВ

В этом разделе показано, как в (7-13) появляются множители $(-1)^k$ для многосекционного комплексного ФОЧВ с четным N и линейной ФЧХ. Подстановка множителей $|H(k)|e^{j\phi(k)}$ для положительных частот, $0 \le k \le (N/2)-1$, со значениями фазы $\phi(k)$ из (7-11), в (7-10) дает

$$H_{cplx,\,lp,\,pf}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2}\sin(\omega N/2)\sum_{k=0}^{(N/2)-1}[\,|H(k)|\;e^{-j\pi k\,(N-1)/N}e^{-j\pi k/N}]/$$
$$/\sin(\omega/2\;-\pi k/N)\,, \qquad \text{(G-16)}$$

где индекс pf обозначает положительные частоты. Рассматривая только числитель под знаком суммы в (G-16), имеем

$$\text{числитель}_{pf} = |H(k)|\;e^{-jk\pi(N-1)/N}\,e^{-jk\pi/N} = |H(k)|\;e^{-j\pi k/N(N-1+1)} =$$
$$= |H(k)|\;e^{-jk\pi} = |H(k)|\;(e^{-j\pi})^k = |H(k)|\;(-1)^k\,, \qquad \text{(G-17)}$$

которое показывает, как появляются множители $(-1)^k$ в первой сумме (7-13). Далее подставим множители $|H(k)|\;e^{j\phi(k)}$ для отрицательных частот, $(N/2)+1 \le k \le N-1$, при значениях фазы $\phi(k)$ из (7-11") в (7-10), в результате чего получаем

$$H_{cplx,\,lp,\,nf}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2}\sin(\omega N/2)\sum_{k=(N/2)+1}^{N-1}[\,|H(k)|\;e^{j\pi(N-k)(N-1)/N}e^{-jk\pi/N}]/$$

$$/\sin(\omega/2\;-\pi k/N)\,, \qquad \text{(G-18)}$$

где индекс nf обозначает отрицательные частоты. Рассматривая снова только числитель под знаком суммы в (G-18), имеем

$$\textit{числитель}_{nf} =$$

$$= |H(k)|\;e^{j\pi(N-k)(N-1)/N}e^{-jk\pi/N} = |H(k)|\;e^{-j\pi[k-(N-k)(N-1)]/N} =$$

$$= |H(k)|\;e^{-j\pi(N+kN-N^2)/N} = |H(k)|\;e^{-j\pi(1+k-N)} =$$

$$= |H(k)|\;(e^{-j\pi})\;(e^{-jk\pi})\;(e^{j\pi N})\,. \qquad \text{(G-19)}$$

Множитель $e^{j\pi N}$ в (G-19) при четном N равен 1, так что мы можем записать

$$\textit{числитель}_{nf} = |H(k)|\;(-1)\;(e^{-jk\pi})\;(1) = -|H(k)|(e^{-jk\pi}) =$$

$$= -|H(k)|(e^{-j\pi})^k = -|H(k)|(-1)^k\,, \qquad \text{(G-20)}$$

что объясняет появление и знака минус, и множителя $(-1)^k$ во второй сумме (7-13). Чтобы учесть одну секцию $k = N/2$ (соответствующую частоте Найквиста, или $f_s/2$, на которой $\omega=\pi$), мы подставляем множитель $|H(N/2)e^{j0}|$ и $k = N/2$ в (7-8), получая

$$H_{cplx,\,lp,\,pf}(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} =$$

$$= e^{-j\omega(N-1)/2}\,e^{-j\pi(N/2)/N}\,|H(N/2)|\;e^{-j0}\sin(\omega N/2)/\sin[\omega/2-\pi(N/2)/N] =$$

$$= e^{-j\omega(N-1)/2}\,e^{-j\pi/2}\;|H(N/2)|\sin(\omega N/2)/\sin(\omega/2-\pi/2)\,. \qquad \text{(G-21)}$$

G.4. Частотная характеристика многосекционных комплексных ФОЧВ

Частотная характеристика комплексного N-секционного ФОЧВ с гарантированной устойчивостью, когда $r<1$, представляет собой $H_{gs,cplx}(z)$, в которой переменная z в (7-18) заменена на $e^{j\omega}$:

$$H_{gs,cplx}(e^{j\omega}) = H_{gs,cplx}(z)|_{z=e^{j\omega}} =$$

$$= (1-r^N e^{-jN\omega})\sum_{k=0}^{N-1}H(k)/\{1-[re^{j2\pi k/N}]e^{-j\omega}\}\,. \qquad \text{(G-22)}$$

Чтобы на время упростить наши выражения, введем обозначение $\theta = \omega - 2\pi k/N$ и получим

$$H_{gs,cplx}(e^{j\omega}) = (1-r^N e^{-jN\omega})\sum_{k=0}^{N-1}H(k)/(1-re^{-j\theta})\,. \qquad \text{(G-23)}$$

Вынося за скобки экспоненты с половинными углами и учитывая множители r, мы получаем

$$H_{gs,cplx}(e^{j\omega}) = r^{N/2}e^{-jN\omega/2}(r^{-N/2}e^{jN\omega/2} - r^{N/2}e^{-jN\omega/2}) \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{N-1} H(k)/[r^{1/2}e^{-j\theta/2}(r^{-1/2}e^{j\theta/2} - r^{1/2}e^{-j\theta/2})] . \qquad \text{(G-24)}$$

Преобразуя все члены в скобках в экспоненты (скоро мы узнаем зачем), приходим к

$$H_{gs,cplx}(e^{j\omega}) = r^{N/2}e^{-jN\omega/2}\{-e^{-[N\ln(r)/2-jN\omega/2]} - e^{[N\ln(r)/2-jN\omega/2]}\} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{N-1} H(k)/[r^{1/2}e^{-j\theta/2}\{e^{-[\ln(r)/2-j\theta/2]} - e^{-[\ln(r)/2-j\theta/2]}\}] . \qquad \text{(G-25)}$$

Теперь выкладки несколько усложняются, т. к. показатели экспонент содержат как действительные, так и мнимые части. Здесь нам помогут гиперболические функции. Напомним: если α – комплексное число, то $\sinh(\alpha) = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2$, соответственно мы получаем

$$H_{gs,cplx}(e^{j\omega}) = r^{N/2}e^{-jN\omega/2}\{-2\sinh[N\ln(r)/2 - jN\omega/2]\} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{N-1} H(k)/[r^{1/2}e^{-j\theta/2}\{-2\sinh[\ln(r)/2 - j\theta/2]\}] . \qquad \text{(G-26)}$$

Заменяя угол θ на $\omega - 2\pi k/N$, сокращая множители -2, получаем

$$H_{gs,cplx}(e^{j\omega}) = r^{N/2}e^{-jN\omega/2}\sinh[N\ln(r)/2 - jN\omega/2] \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{N-1} H(k)/[r^{1/2}e^{-j(\omega-2\pi k/N)/2}\sinh[\ln(r)/2 - j(\omega-2\pi k/N)/2]] . \qquad \text{(G-27)}$$

Меняя порядок следования слагаемых и приводя подобные члены, мы приходим к окончательному выражению

$$H_{gs,cplx}(e^{j\omega}) = \sqrt{r^{(N-1)}}\, e^{-j\omega(N-1)/2} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\, e^{-j\pi k/N}\sinh[N\ln(r)/2 - jN\omega/2] \,/$$
$$/\, \sinh[\ln(r)/2 - j(\omega-2\pi k/N)/2] . \qquad \text{(G-28)}$$

(Впечатляет, не правда ли? Теперь понятно, почему выражение для частотной характеристики в литературе обычно не приводится.)

G.5. Передаточная функция действительного ФОЧВ

Выражение для передаточной функции действительного многосекционного ФОЧВ на первый взгляд выглядит несколько странно, поэтому вместо того, чтобы предложить его вывод в качестве упражнения читателю, мы покажем математические приемы, необходимые для этого. Наш план состоит в следующем: воспользоваться выражением для передаточной функции многосекционного комплексного ФОЧВ и определить множители $H(k)$ так, чтобы все полюсы фильтра образовывали комплексно-сопряженные пары. Это приведет нас к структурам действительных ФОЧВ с действительными коэффициентами. Начнем с передаточной функции N-секционного комплексного ФОЧВ с гарантированной устойчивостью (7-18) вида

$$H_{gs,\,cplx}(z) = (1 - r^N z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} H(k)/\{1 - [re^{j2\pi k/N}]z^{-1}\}. \qquad \text{(G-29)}$$

При четном N, разбивая сумму в (G-29) на части, мы можем записать

$$H_{gs,\,cplx}(z) = (1 - r^N z^{-N}) \times$$

$$\times \Big[H(0)/(1 - rz^{-1}) + H(N/2)/(1 + rz^{-1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{(N/2)-1} H(k)/\{1 - [re^{j2\pi k/N}]\, z^{-1}\} + \sum_{k=N/2+1}^{N-1} H(k)/\{1 - [re^{j2\pi k/N}]\, z^{-1}\}\Big]. \qquad \text{(G-30)}$$

Первые две дроби в квадратных скобках учитывают частотные отсчеты $k = 0$ и $k = N/2$. Первая сумма соответствует положительным частотам, которые размещаются на верхней половине единичной окружности в z-плоскости. Вторая сумма соответствует отрицательным частотам, лежащим на нижней половине единичной окружности.

Чтобы упростить вывод, запишем две суммы в виде

$$\textit{Сумма} = \sum_{k=1}^{(N/2)-1} H(k)/\{1 - [re^{j2\pi k/N}]\, z^{-1}\} + \sum_{k=N/2+1}^{N-1} H(k)/\{1 - [re^{j2\pi k/N}]\, z^{-1}\}. \qquad \text{(G-31)}$$

Затем мы объединяем суммы, изменив индекс во второй сумме, как

$$\textit{Сумма} = \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \Big[H(k)/\{1 - [re^{j2\pi k/N}]\, z^{-1}\} +$$

$$+ H(N-k)/\{1 - [re^{j2\pi (N-k)/N}]\, z^{-1}\}\Big]. \qquad \text{(G-32)}$$

Приведя дроби к общему знаменателю и перемножив их знаменатели, а затем положив множители $H(N-k)$ комплексно-сопряженными множителям $H(k)$, запишем

$$Сумма = \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \left[H(k)\,\{1-[re^{j2\pi(N-k)/N}]\,z^{-1}\} + H^*(k)\,\{1-[re^{j2\pi k/N}]\,z^{-1}\} \right] /$$

$$/\left[\{1-[re^{j2\pi(N-k)/N}]\,z^{-1}\} - re^{j2\pi k/N}z^{-1} + r^2 e^{j2\pi(k+N-k)/N}z^{-2} \right], \quad \text{(G-33)}$$

где символ "*" обозначает комплексно-сопряженное значение. Определив $H(N-k) = H^*(k)$, мы получили полюсы в виде комплексно-сопряженных пар и, как мы увидим, это условие преобразует наш комплексный ФОЧВ в действительный ФОЧВ с действительными коэффициентами. Продвигаясь дальше, замечаем, что

$$e^{j2\pi(N-k)/N} = e^{-j2\pi N/N}\,e^{-2\pi k/N} = e^{-j2\pi k/N},$$

подставив это выражение в (G-33), перегруппируя числитель и объединяя члены, содержащие z^{-1} в знаменателе, приходим к выражению

$$Сумма = \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \left\{ H(k) + H^*(k) - [H(k)\,re^{-j2\pi k/N} + H^*(k)\,re^{j2\pi k/N}]\,z^{-1} \right\} /$$

$$/\left[1 - r\,(e^{-j2\pi k/N} + e^{j2\pi k/N})\,z^{-1} + r^2 z^{-2} \right]. \quad \text{(G-34)}$$

Затем мы записываем комплексные $H(k)$ в алгебраической форме:

$$H(k) = |H(k)|\,[\cos(\phi_k) + j\sin(\phi_k)]$$

и

$$H^*(k) = |H(k)|\,[\cos(\phi_k) - j\sin(\phi_k)].$$

Мнимые части суммы при этом взаимно уничтожаются, так что

$$H(k) + H^*(k) = 2\,|H(k)|\cos(\phi_k),$$

и это позволяет нам записать

$$Сумма = \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \left\{ 2\,|H(k)|\cos(\phi_k) - |H(k)|\,[re^{j(\phi_k - 2\pi k/N)} + re^{-j(\phi_k - 2\pi k/N)}]\,z^{-1} \right\} /$$

$$/\left[1 - r\,(e^{-j2\pi k/N} + e^{j2\pi k/N})\,z^{-1} + r^2 z^{-2} \right]. \quad \text{(G-35)}$$

Вспомнив тождество Эйлера $2\cos(\alpha) = e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}$, и объединяя множители $|H(k)|$, приходим к окончательной форме суммы:

$$Сумма = \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \left\{ 2\,|H(k)|\,[\cos(\phi_k) - r\cos(\phi_k - 2k\pi/N)]\,z^{-1} \right\} /$$

$$/\left\{ 1 - [2r\cos(2\pi k/N)]\,z^{-1} + r^2 z^{-2} \right\}. \quad \text{(G-36)}$$

Подставляя (G-36) вместо двух сумм в (G-30), мы получаем искомую передаточную функцию

$$H_{gs,\,real}(z) = (1 - r^N z^{-N}) \times$$
$$\times \left\{ H(0)/(1 - r z^{-1}) + H(N/2)/(1 + r z^{-1}) + \right.$$
$$+ \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \left[2|H(k)|[\cos(\phi_k) - r\cos(\phi_k - 2k\pi/N)]\, z^{-1} \right] /$$
$$\left. / \left[1 - [2r\cos(2\pi k/N)]\, z^{-1} + r^2 z^{-2} \right] \right\}, \qquad \text{(G-37)}$$

где индекс *real* обозначает действительный многосекционный ФОЧВ.

G.6. Частотная характеристика ФОЧВ Типа IV

Частотная характеристика односекционного ФОЧВ Типа IV при четном N равна передаточной функции, вычисленной на единичной окружности. Для начала мы положим в (7-23) $|H(k)|=1$ и запишем передаточную функцию одной секции ФОЧВ Типа IV как

$$H_{Type\text{-}IV,\,ss}(z) = (1 - r^N z^{-N})(1 - r^2 z^{-2}) /$$
$$/(1 - 2r\cos(2\pi k/N)\, z^{-1} + r^2 z^{-2}), \qquad \text{(G-38)}$$

где индекс *ss* обозначает одну секцию. В предположении о том, что коэффициент затухания r настолько близок к единице, что его можно заменить единицей, мы имеем упрощенную передаточную функцию ФОЧВ

$$H_{Type\text{-}IV,\,ss}(z) = (1 - z^{-N})(1 - z^{-2}) /$$
$$/[1 - 2\cos(2\pi k/N) z^{-1} + z^{-2}]. \qquad \text{(G-39)}$$

Обозначив $\omega_r = 2\pi k/N$ для упрощения записи, разложив знаменатель $H_{Type\text{-}IV,\,ss}(z)$ на множители, получаем

$$H_{Type\text{-}IV,\,ss}(z) = (1 - z^{-N})(1 - z^{-2})/[1 - 2\cos(\omega_r)\, z^{-1} + z^{-2}] =$$
$$= (1 - z^{-N})(1 - z^{-2})/[(1 - e^{j\omega_r} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_r} z^{-1})], \qquad \text{(G-40)}$$

в котором заменяем z на $e^{j\omega}$:

$$H_{Type\text{-}IV,\,ss}(e^{j\omega}) = [(1 - e^{-j\omega N})(1 - e^{-j2\omega})]/[(1 - e^{j\omega_r} e^{-j\omega})(1 - e^{-j\omega_r} e^{-j\omega})] =$$
$$= [(1 - e^{-j\omega N})(1 - e^{-j2\omega})]/[(1 - e^{-j(\omega - \omega_r)})(1 - e^{-j(\omega + \omega_r)})]. \qquad \text{(G-41)}$$

Вынося за скобки экспоненты с половинными углами, получаем

$$H_{Type\text{-}IV,\,ss}(e^{j\omega}) = \qquad \text{(G-42)}$$
$$= e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}) e^{-j\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) /$$
$$/[e^{-j(\omega - \omega_r)/2}(e^{j(\omega - \omega_r)/2} - e^{-j(\omega - \omega_r)/2}) e^{-j(\omega + \omega_r)/2}(e^{j(\omega + \omega_r)/2} - e^{-j(\omega + \omega_r)/2})],$$

Используя тождество Эйлера $2j\sin(\alpha) = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}$, имеем

$$H_{Type\text{-}IV,\,ss}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2}[2j\sin(\omega N/2)]e^{-j\omega}[2j\sin(\omega)]/$$
$$/\{e^{-j(\omega-\omega_r)/2}\,2j\sin[(\omega-\omega_r)/2]\,e^{-j(\omega+\omega_r)/2}\,2j\sin[(\omega+\omega_r)/2]\}\,, \qquad \text{(G-43)}$$

Сокращая общие множители и складывая подобные члены, мы имеем

$$H_{Type\text{-}IV,\,ss}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2}e^{-j\omega}/[e^{-j(\omega-\omega_r)/2}e^{-j(\omega+\omega_r)/2}] \times$$
$$\times \sin(\omega N/2)\sin(\omega)/\{\sin[(\omega-\omega_r)/2]\sin[(\omega+\omega_r)/2]\} =$$
$$= e^{-j\omega N/2}[\cos(\omega N/2-\omega) - \cos(\omega N/2+\omega)]/[\cos(\omega_r) - \cos(\omega)]\,. \qquad \text{(G-44)}$$

Вернув $2\pi k/N$ вместо ω_r, получаем частотную характеристику одной секции в виде

$$H_{Type\text{-}IV,\,ss}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2}[\cos(\omega N/2-\omega) - \cos(\omega N/2+\omega)]/$$
$$/[\cos(2\pi k/N) - \cos(\omega)]\,. \qquad \text{(G-45)}$$

Взяв за основу (G-45), мы можем записать выражение для частотной характеристики многосекционного ФОЧВ Типа IV с четным N как

$$H_{Type\text{-}IV}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2}\sum_{k=0}^{N/2}(-1)^k|H(k)|[\cos(\omega N/2-\omega) - \cos(\omega N/2+\omega)]/$$
$$/[\cos(2\pi k/N) - \cos(\omega)]\,. \qquad \text{(G-46)}$$

Для вычисления АЧХ отдельной секции мы опускаем фазовые множители (комплексные экспоненты) в (G-45) и получаем

$$H_{Type\text{-}IV,\,amp}(e^{j\omega}) = [\cos(\omega N/2-\omega) - \cos(\omega N/2+\omega)]/$$
$$/[\cos(2\pi k/N) - \cos(\omega)]\,. \qquad \text{(G-47)}$$

Чтобы найти максимальное значение АЧХ на частоте резонанса, мы вычисляем (G-47) при $\omega = 2\pi k/N$, т. к. это значение ω, соответствующее расположению полюса. Однако это значение ω обращает знаменатель в ноль, а дробь – в бесконечность. Мы можем продвинуться дальше, применив к (G-47) правило Лопиталя:

$$H_{Type\text{-}IV,\,amp}(e^{j\omega})|_{\omega\to 2\pi k/N} =$$
$$= \{d[\cos(\omega N/2-\omega) - \cos(\omega N/2+\omega)]/d\omega\}/$$
$$/\{d[\cos(2\pi k/N) - \cos(\omega)]/d\omega\}\,|_{\omega\to 2\pi k/N} =$$
$$= [-\sin(\omega N/2-\omega)(N/2-1) + \sin(\omega N/2+\omega)(N/2+1)]/\sin(\omega)|_{\omega\to 2\pi k/N} =$$
$$=\{-[(N-2)/2]\sin(\pi k - 2\pi k/N) + [(N+2)/2]\sin(\pi k + 2\pi k/N)\}/$$
$$/\sin(2\pi k/N)\,. \qquad \text{(G-48)}$$

Устраняя слагаемые πk с помощью тригонометрических формул

$$\sin(\pi k - \alpha) = (-1)^k[-\sin(\alpha)]$$

и

$$\sin(\pi k + \alpha) = (-1)^k[\sin(\alpha)],$$

получаем значение максимума амплитудной характеристики в виде

$$H_{Type\text{-}IV,\,amp}(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} =$$

$$= \{[(N-2)/2](-1)^k \sin(2\pi k/N) + [(N+2)/2](-1)^k \sin(2\pi k/N)\}/[2\sin(2\pi k/N)] =$$

$$= N(-1)^k \sin(2\pi k/N)/\sin(2\pi k/N) = N(-1)^k, \qquad \text{(G-49)}$$

$$k = 1, 2, ..., [(N/2) - 1].$$

Выражение (G-49) имеет смысл только при $1 \le k \le (N/2) - 1$. Опуская множители $(-1)^k$, мы получаем модуль характеристики в точке резонанса как функцию k в виде

$$|H_{Type\text{-}IV}(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = N, \qquad \text{(G-50)}$$

$$k = 1, 2, ..., [(N/2) - 1].$$

Чтобы найти значение резонансной характеристики на частоте 0 Гц (постоянном токе), мы задаем в (G-47) $k = 0$, дважды применяем правило Лопиталя (беря производные по ω) и полагаем $\omega = 0$, что дает нам

$$|H_{Type\text{-}IV}(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 2N. \qquad \text{(G-51)}$$

Для получения резонансного значения при частоте $f_s/2$ Гц мы полагаем $k = N/2$ в (G-47), снова дважды применяем правило Лопиталя и полагаем $\omega = \pi$, что дает

$$|H_{Type\text{-}IV}(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 2N. \qquad \text{(G-52)}$$

Приложение H

Таблицы расчета фильтров на основе частотной выборки

В разделе 7.1 мы описывали так называемые фильтры на основе частотной выборки Типа IV. Таблицы в этом приложении содержат наборы оптимальных переходных коэффициентов для ФОЧВ НЧ Типа IV, случай I, (см. рисунок 7.25) при различных значениях ширины полосы пропускания для разных значений N. Таблица H.1 содержит один переходной коэффициент $H(k)$ и два переходных коэффициента для четных значений N. Таблица H.2 содержит один переходной коэффициент и два переходных коэффициента для нечетных значений N. Таблица H.3 содержит три переходных коэффициента $H(k)$ для четного N, а таблица H.4 содержит три переходных коэффициента для нечетных N.

Ширина полосы пропускания в этих таблицах, обозначенная как BW, равна количеству секций ФОЧВ, имеющих единичные коэффициенты $H(k)$. Например, ФОЧВ НЧ при $N = 32$, использующий шесть секций в полосе пропускания и один переходной коэффициент (T_1), будет иметь значения $H(k)$, показанные на рисунке H.1 (a). В этом случае коэффициент T_1 следует искать в таблице H.1 для $N = 32$ при $BW = 6$. ФОЧВ НЧ с $N = 23$ с пятью секциями в полосе пропускания и двумя переходными коэффициентами (T_1 и T_2) будет иметь значения $H(k)$, показанные на рисунке H.1 (b). В этом случае коэффициенты T_1 и T_2 находятся в таблице H.2 для $N = 23$ и $BW = 5$. Дополнительным параметром таблиц является максимальное подавление боковых лепестков в полосе задерживания (Atten).

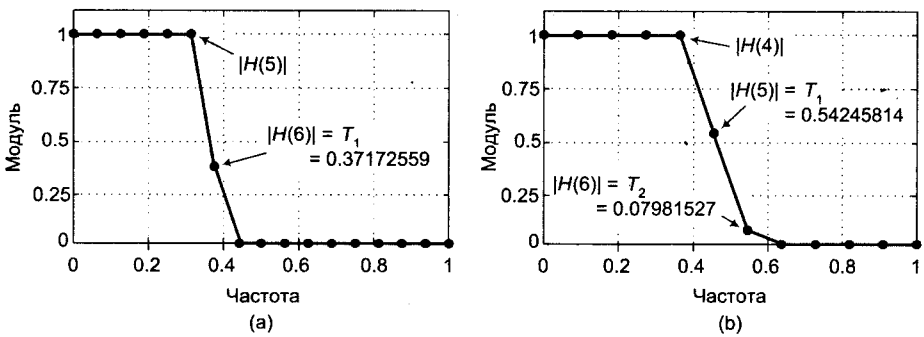


Рис. H.1. Примеры выбора переходных коэффициентов: (a) один коэффициент при N = 32 и BW = 6; (b) два коэффициента при N = 23 и BW = 5

Таблица Н.1. ФОЧВ НЧ Типа IV для четного N (один и два коэффициента)

BW	Atten	T1	BW	Atten	T1	T2
	N = 16				N = 16	
1	−44.9	0.41924081	1	−76.5	0.56626687	0.07922718
2	−45.8	0.38969818	2	−77.2	0.55487263	0.08012238
3	−47.3	0.36942214	3	−81.2	0.53095099	0.07087993
4	−49.6	0.34918551	4	−87.7	0.49927622	0.05813368
	N = 24				N = 24	
1	−44	0.42452816	1	−73.6	0.57734042	0.08641861
2	−44.1	0.40042889	2	−72.5	0.57708274	0.09305238
3	−44.9	0.38622106	3	−72.9	0.56983709	0.09177956
4	−45.7	0.37556064	4	−73.8	0.55958351	0.08770698
5	−46.5	0.36663149	5	−75.6	0.54689579	0.08202772
	N = 32				N = 32	
1	−43.6	0.42638815	1	−72.6	0.58109341	0.08892320
2	−43.6	0.40407598	2	−71	0.58466392	0.09771906
3	−44	0.39197681	3	−70.8	0.58101218	0.09823378
4	−44.5	0.38377786	5	−71.6	0.57002693	0.09442029
6	−45.5	0.37172559	7	−73.2	0.55593774	0.0879846
7	−45.8	0.38912443	9	−76.2	0.53661082	0.07884406
8	−46.6	0.36087271	13	−106	0.43242657	0.03643965
	N = 48				N = 48	
1	−43.4	0.42772741	1	−72	0.58385966	0.09079945
2	−43.2	0.40654471	2	−70	0.58999731	0.10107095
3	−43.5	0.39569517	3	−69.5	0.58898579	0.1030238
4	−43.8	0.38879556	5	−69.6	0.58356869	0.10204926
6	−44.4	0.37994174	7	−70	0.57749269	0.09959325

BW	Atten	T1	BW	Atten	T1	T2
8	−44.9	0.37394938	9	−70.6	0.57143299	0.09683486
10	−45.3	0.3690437				
	N = 64				N = 64	
1	−43.3	0.42815077	1	−71.8	0.58480329	0.09144087
2	−43.1	0.40742967	2	−69.7	0.59178518	0.10221701
3	−43.4	0.39690507	3	−69.2	0.59168291	0.10467406
4	−43.6	0.39043339	4	−68.9	0.5899207	0.10496398
5	−43.9	0.38583162	5	−68.9	0.58788109	0.10457886
6	−44.1	0.38244173	9	−69.4	0.58010661	0.10157302
10	−44.7	0.37382147	13	−70.2	0.57272483	0.09810828
14	−45.3	0.36813961	17	−71.1	0.56417336	0.09386963
	N = 96					N = 96
1	−43.2	0.42856954	1	−71.6	0.585424	0.09185794
2	−43	0.40790815	2	−69.5	0.59305878	0.10302346
3	−43.3	0.3977603	3	−68.8	0.59332978	0.10571202
4	−43.5	0.39154291	4	−68.4	0.59202942	0.10623854
5	−43.7	0.38719365	5	−68.3	0.59062246	0.10623287
6	−43.9	0.38409245	9	−68.5	0.58514671	0.10445521
10	−44.4	0.37686993	13	−68.9	0.58087019	0.10253761
14	−44.7	0.37270333	17	−69.3	0.57751103	0.10097157
18	−45	0.36984146	21	−65.3	0.59419612	0.11180709
	N = 128				N = 128	
1	−43.2	0.42864273	1	−71.6	0.58574352	0.09208128
2	−43	0.40823844	2	−69.4	0.59357535	0.10335703
3	−43.2	0.39811024	3	−68.6	0.59383385	0.10601544
4	−43.4	0.39188378	4	−68.3	0.59279342	0.10671242

Продолжение таблицы следует

BW	Atten	T1	BW	Atten	T1	T2
5	−43.7	0.38774353	6	−68.1	0.59024028	0.10655014
7	−44	0.38236389	9	−68.2	0.5868017	0.10542034
10	−44.3	0.37771128	17	−68.7	0.58071332	0.10271656
18	−44.8	0.3717883	25	−69.2	0.57652818	0.1006787
26	−45.1	0.36862161	33	−69.8	0.57265344	0.09871098
	N = 192				N = 192	
1	−43.2	0.42881027	1	−71.5	0.58589507	0.09218797
2	−43	0.40831822	2	−69.4	0.59383365	0.1035231
3	−43.2	0.39830476	3	−68.6	0.59433749	0.10635017
4	−43.4	0.39219024	4	−68.2	0.5933049	0.10702144
5	−43.6	0.38797095	6	−67.9	0.59098287	0.10700026
7	−43.9	0.3828125	9	−68	0.58790082	0.10604544
10	−44.2	0.37845008	17	−68.4	0.58295021	0.10399738
18	−44.7	0.37302517	25	−68.7	0.57978921	0.10242432
26	−44.9	0.37049755	33	−69	0.57773363	0.10143253
34	−45	0.36908526	41	−69.2	0.57597277	0.10055134
42	−45.2	0.36764286	49	−69.5	0.57407637	0.09954949
	N = 224				N = 224	
1	−43.2	0.42874481	1	−71.5	0.58591935	0.09220841
2	−43	0.40836093	2	−69.4	0.593894	0.10355622
3	−43.2	0.39831237	3	−68.5	0.59435536	0.10634325
4	−43.4	0.3921651	4	−68.1	0.59354863	0.10719315
5	−43.6	0.38807204	6	−67.9	0.59106856	0.1070268
7	−43.9	0.38281226	9	−67.9	0.58816185	0.10619806
10	−44.2	0.37847605	10	−67.9	0.58726527	0.10582934
11	−44.3	0.37742038	17	−68.3	0.58317185	0.10407347

BW	Atten	T1	BW	Atten	T1	T2
18	−44.6	0.37324982	33	−68.8	0.57860121	0.10189345
34	−45	0.36946431	49	−69.2	0.5757377	0.10043439
50	−45.2	0.36753866	57	−69.4	0.57440527	0.09975201
	N = 256				N = 256	
1	−43.2	0.42874481	1	−71.5	0.58599793	0.09225917
2	−43	0.40844072	2	−69.4	0.59395199	0.10360852
3	−43.2	0.39839019	3	−68.5	0.59445009	0.10641045
4	−43.4	0.39231838	4	−68.1	0.59358715	0.10721801
5	−43.6	0.38814788	6	−67.9	0.59121865	0.10712227
7	−43.9	0.38296192	9	−67.9	0.58824601	0.10622746
10	−44.2	0.37855003	10	−67.9	0.58727091	0.10580213
11	−44.3	0.37756795	17	−68.2	0.58347729	0.10424412
18	−44.6	0.3733958	33	−68.7	0.57913354	0.1021842
34	−44.9	0.36982575	49	−69	0.57667852	0.10093887
50	−45.1	0.36804233	57	−69.2	0.57568486	0.10043603
58	−45.2	0.3673716	65	−69.3	0.57469205	0.09993526

Таблица Н.2. ФОЧВ НЧ Типа IV для нечетного N (один и два коэффициента)

BW	Atten	T1	BW	Atten	T1	T2
	N = 15				N = 15	
1	−45.1	0.41802444	1	−77.3	0.56378193	0.07767395
2	−46.2	0.38716426	2	−78.9	0.54831544	0.07646082
3	−48	0.36461603	3	−83.4	0.52139051	0.06627593
4	−51.4	0.34005655	4	−96.3	0.47732772	0.0487037

Продолжение таблицы следует

BW	Atten	T1	BW	Atten	T1	T2
	N = 23				N = 23	
1	−44	0.42412451	1	−73.8	0.57648809	0.08585489
2	−44.3	0.3995718	2	−72.7	0.57569102	0.09221862
3	−45.1	0.38497937	3	−73.2	0.56732401	0.09032595
4	−46	0.37367551	4	−74.6	0.55575797	0.08563268
5	−46.8	0.36445788	5	−76.5	0.54245814	0.07981527
	N = 33				N = 33	
1	−43.6	0.42659097	1	−72.6	0.58141103	0.08913503
2	−43.5	0.40433257	2	−70.9	0.58529197	0.09811292
3	−44	0.39239983	3	−70.7	0.58187597	0.09874619
4	−44.4	0.3843389	5	−71.3	0.57154421	0.09525674
6	−45.3	0.37272147	7	−72.9	0.55826179	0.08918146
8	−46.4	0.36256798	9	−75.3	0.54128598	0.08116809
	N = 47				N = 47	
1	−43.4	0.42768264	1	−72	0.58376507	0.09073592
2	−43.2	0.40649692	2	−70.1	0.58975381	0.1009182
3	−43.5	0.39553589	3	−69.6	0.5886934	0.10284475
4	−43.8	0.38859729	5	−69.6	0.58311582	0.10178496
6	−44.4	0.37968179	7	−70.1	0.57687412	0.09925266
8	−44.9	0.37362421	9	−70.7	0.57045477	0.0963056
10	−45.4	0.36853968	11	−71.6	0.56319305	0.09280396
	N = 65				N = 65	
1	−43.3	0.4281872	1	−71.7	0.58480896	0.09144011
2	−43.1	0.40743541	2	−69.7	0.59188395	0.10227409
3	−43.4	0.39694541	3	−69.1	0.59158717	0.10459977
4	−43.6	0.39043991	4	−68.9	0.59001405	0.10501496

BW	Atten	T1	BW	Atten	T1	T2
5	−43.9	0.3859325	5	−68.8	0.58797401	0.10462176
6	−44.1	0.38249194	9	−69.4	0.58031079	0.10167681
10	−44.7	0.37399454	13	−70.1	0.57312044	0.09830111
14	−45.2	0.36841874	17	−71	0.56506463	0.0943328
18	−45.8	0.36324429	21	−72.5	0.55369626	0.08867447
	N = 95				N = 95	
1	−43.2	0.42852251	1	−71.6	0.58559589	0.09199196
2	−43	0.40799464	2	−69.5	0.59306419	0.10302347
3	−43.3	0.39772511	3	−68.8	0.59323668	0.10563966
4	−43.5	0.39143867	4	−68.5	0.59207559	0.10628422
5	−43.7	0.38722579	5	−68.3	0.5905046	0.10614086
6	−43.9	0.38400287	9	−68.5	0.58506537	0.10440925
10	−44.4	0.3766755	13	−68.9	0.58094477	0.10262083
14	−44.8	0.37268027	17	−69.3	0.57725045	0.10081244
18	−45	0.369842	21	−69.8	0.57370707	0.09903691
	N = 125				N = 125	
1	−43.2	0.42857276	1	−71.5	0.5856764	0.0920373
2	−43	0.40819419	2	−69.5	0.59346193	0.10328234
3	−43.2	0.39806479	3	−68.7	0.59389103	0.1060686
4	−43.5	0.39191493	5	−68.1	0.59144981	0.1067222
6	−43.8	0.38458541	7	−68.1	0.58887274	0.10611287
8	−44.1	0.38046599	9	−68.2	0.58670301	0.10535739
10	−44.3	0.37761366	17	−68.7	0.5805297	0.10262003
18	−44.8	0.37166577	25	−69.3	0.57610034	0.10041636
26	−45.1	0.36836415	33	−69.9	0.57206269	0.0984002

Продолжение таблицы следует

BW	Atten	T1	BW	Atten	T1	T2
	N = 191				N = 191	
1	−43.2	0.42865655	1	−71.5	0.5859143	0.09220684
2	−43	0.40839373	2	−69.4	0.5937664	0.10346999
3	−43.2	0.39822053	3	−68.5	0.59423193	0.1062604
4	−43.4	0.39214502	5	−68	0.59213475	0.1071269
6	−43.8	0.38503751	7	−67.9	0.589875	0.10671096
8	−44	0.38095089	9	−68	0.58788996	0.10603382
10	−44.2	0.37828083	17	−68.4	0.58282022	0.10390276
18	−44.7	0.37305805	25	−68.7	0.57971044	0.10236319
26	−44.9	0.37048161	33	−69	0.57760031	0.10133385
34	−45	0.36904678	41	−69.2	0.57578133	0.10042123
42	−45.1	0.3676021	49	−69.5	0.57404729	0.09954845
	N = 223				N = 223	
1	−43.2	0.42874481	1	−71.5	0.58589267	0.0921919
2	−43	0.40836093	2	−69.4	0.59379277	0.10347913
3	−43.2	0.39835128	3	−68.5	0.59435536	0.10634325
4	−43.4	0.3921651	4	−68.1	0.59354863	0.10719315
5	−43.6	0.38807204	6	−67.9	0.59114264	0.10708575
7	−43.9	0.38288709	9	−67.9	0.58797899	0.10606475
10	−44.2	0.37851304	10	−67.9	0.58726527	0.10582934
11	−44.3	0.37742038	17	−68.3	0.58329541	0.10416575
18	−44.6	0.37324982	33	−68.8	0.57849661	0.10182631
34	−45	0.36946431	49	−69.2	0.57568307	0.10040604
50	−45.2	0.3674667	57	−69.4	0.5744086	0.09975962
	N = 255				N = 255	
1	−43.2	0.42874481	1	−71.5	0.58590294	0.09218854

BW	Atten	T1	BW	Atten	T1	T2
2	−43	0.40836093	2	−69.3	0.59392035	0.10356223
3	−43.2	0.39831237	3	−68.5	0.59440493	0.10637653
4	−43.4	0.39224174	4	−68.1	0.59363182	0.10725379
5	−43.6	0.38814788	6	−67.9	0.59121586	0.10712951
7	−43.9	0.38296192	9	−67.9	0.58822523	0.10621751
10	−44.2	0.37855003	10	−67.9	0.58747402	0.10596604
11	−44.3	0.37756795	17	−68.2	0.58351595	0.10427857
18	−44.6	0.3733958	33	−68.7	0.57906429	0.10213183
34	−44.9	0.36982575	49	−69	0.57660259	0.10088411
50	−45.1	0.36804233	57	−69.2	0.57562728	0.10040259
58	−45.2	0.3673716	65	−69.4	0.57461162	0.09987875

Таблица Н.3. ФОЧВ НЧ Типа IV при четном N (три коэффициента)

BW	**Atten**	**T1**	**T2**	**T3**
		N = 16		
1	−112.6	0.64272445	0.15442399	0.00880089
2	−95.9	0.70487291	0.22419597	0.01947599
3	−100.7	0.70063089	0.21872748	0.01757096
4	−115.9	0.68531929	0.19831357	0.01270197
		N = 24		
1	−103.8	0.6599002	0.17315143	0.01189889
2	−101.8	0.67718249	0.19461557	0.01429673
3	−95.5	0.69609682	0.21773826	0.01860944
4	−104.1	0.66830223	0.18959572	0.01339907
		N = 32		
1	−99.6	0.6642114	0.17798254	0.01278046

Продолжение таблицы следует

BW	Atten	T1	T2	T3
2	−98.5	0.68804961	0.20639825	0.01646338
4	−87.4	0.73378289	0.26142233	0.02762054
6	−100.5	0.67913658	0.20169658	0.01554611
8	−105.3	0.65936975	0.18380663	0.01270743
		N = 48		
1	−93.8	0.68361144	0.2010237	0.01735969
2	−96	0.69534463	0.21480253	0.01812435
4	−87.2	0.73314865	0.26098449	0.02762804
6	−86.4	0.73802064	0.26732823	0.02900775
8	−95	0.69703503	0.2211425	0.01909109
10	−90	0.71746809	0.24474881	0.02420421
		N = 64		
1	−96.6	0.67620503	0.19208214	0.01551621
2	−94.9	0.69693984	0.21653685	0.01842226
3	−89.7	0.72079468	0.24569738	0.02432222
4	−92.3	0.7068141	0.22927121	0.02042893
8	−91.4	0.70957119	0.23498487	0.02215407
12	−93.8	0.7026052	0.22772953	0.02059288
16	−85.3	0.74439511	0.27543213	0.03085705
		N = 96		
1	−98.5	0.6720933	0.18712559	0.01449609
2	−92.9	0.70471821	0.22591053	0.02048075
3	−93	0.70905096	0.23165702	0.02121954
4	−88.7	0.72625477	0.25269331	0.02574193
8	−90.8	0.71369108	0.23929089	0.02281527
12	−90.8	0.71110318	0.23715671	0.02248568

BW	Atten	T1	T2	T3
16	−85.2	0.74356072	0.27478153	0.03080406
20	−85.8	0.74022029	0.27104418	0.02999046
		N = 128		
1	−98.3	0.67221636	0.18725564	0.01451885
2	−94.4	0.70015724	0.22042278	0.01929075
3	−92.6	0.70981704	0.23257905	0.02143209
5	−90.6	0.71933148	0.24480839	0.02391897
8	−89.8	0.72190475	0.24869701	0.02481883
16	−88.5	0.72569265	0.25405918	0.02615712
24	−87.4	0.7301942	0.25964746	0.02748522
		N = 192		
1	−98.1	0.67216994	0.1871603	0.01447431
2	−94.3	0.70064573	0.22097713	0.01939796
3	−92.6	0.71046628	0.23329177	0.02156244
5	−90.6	0.71933299	0.24477507	0.0238993
8	−89.8	0.72185688	0.24857861	0.02477626
16	−88.5	0.72617255	0.2545026	0.02622728
24	−87.7	0.72957884	0.25880678	0.02726692
32	−90.9	0.71321929	0.24041037	0.02328586
40	−91.2	0.71133926	0.23853571	0.02293979
48	−91.4	0.70862489	0.2357226	0.0224067
		N = 224		
1	−98.2	0.67256687	0.18767169	0.01459779
2	−94.2	0.70077254	0.22112728	0.01942992
3	−90.4	0.7026477	0.22304697	0.01885735
5	−91.1	0.71677647	0.24176238	0.0232377

Продолжение таблицы следует

BW	Atten	T1	T2	T3
8	−89.9	0.72168089	0.24837531	0.02473386
9	−89.8	0.71675825	0.24253218	0.02331464
16	−90.3	0.71805244	0.24514888	0.0241623
32	−90.6	0.71429115	0.24150812	0.0234885
48	−91.1	0.71133746	0.23857357	0.02295657
		N = 256		
1	−95.7	0.67780153	0.19398356	0.01590119
2	−94	0.70138048	0.22187281	0.01959708
3	−90.3	0.70235664	0.22265441	0.01875372
5	−91	0.71654134	0.24139758	0.02311255
8	−89.9	0.72167623	0.24835995	0.02472548
9	−89.7	0.71676546	0.24249377	0.02328724
16	−90.2	0.71841628	0.24555225	0.02424786
32	−90.5	0.71523646	0.24257287	0.02372755
48	−90.8	0.71282545	0.2402303	0.02331467
56	−90.7	0.71353605	0.24104134	0.02347778

Таблица Н.4. ФОЧВ НЧ Типа IV при нечетном N (три коэффициента)

BW	Atten	T1	T2	T3
		N = 15		
1	−99.1	0.67276446	0.18765467	0.01448603
2	−109	0.65109591	0.16879848	0.01032845
3	−103	0.64743501	0.16597437	0.00887322
4	−129.8	0.58430569	0.11830427	0.0041067
		N = 23		
1	−98.6	0.67021235	0.18516808	0.01420518
2	−96.9	0.6596023	0.17408826	0.00996838

BW	Atten	T1	T2	T3
3	−95.3	0.64635467	0.16260027	0.0077623
4	−86.1	0.60390729	0.12509768	0.00296913
		N = 33		
1	−98.4	0.67150869	0.18654613	0.01442309
2	−97.9	0.68975409	0.20844142	0.01686088
4	−93.8	0.70392025	0.22717012	0.02035858
6	−92.1	0.70836197	0.23374423	0.02185812
8	−92.9	0.70271751	0.22868478	0.02098636
		N = 47		
1	−99.7	0.66933083	0.18386234	0.01384901
2	−94.7	0.69037782	0.20845236	0.01654889
4	−94.4	0.70435781	0.22714301	0.02019897
6	−94.5	0.70200706	0.22582668	0.01999782
8	−95.4	0.69662478	0.22082819	0.01907788
10	−97	0.69029654	0.21493063	0.01807728
12	−88.8	0.64107819	0.16254219	0.0076571
		N = 65		
1	−98.8	0.67071168	0.18547676	0.01416929
2	−94.8	0.69743725	0.21725	0.01864255
3	−93.6	0.70659336	0.22882367	0.02062804
4	−93	0.70962871	0.23307976	0.02141978
8	−92.6	0.70884359	0.23403175	0.02173011
12	−88.7	0.72402053	0.25220517	0.02579854
16	−89.9	0.71679306	0.24461807	0.02427071
		N = 95		
1	−98.6	0.67204252	0.18706788	0.0144861

Продолжение таблицы следует

BW	Atten	T1	T2	T3
2	−94.5	0.69934889	0.21945399	0.01908355
3	−93	0.70879388	0.23134381	0.02114855
4	−92.2	0.71277193	0.23666779	0.0221755
8	−89.2	0.72434568	0.25160197	0.02547937
12	−88.8	0.72479877	0.25277864	0.02583655
16	−90.1	0.71754976	0.24492389	0.02419794
20	−92.6	0.70606236	0.23250776	0.02165584
		N = 125		
1	−98.3	0.67220923	0.18724753	0.01451708
2	−94.4	0.7001615	0.22041952	0.01928486
4	−90.8	0.71816438	0.24299337	0.02355056
6	−90.5	0.71950797	0.24538851	0.02405304
8	−90.5	0.71546288	0.2410237	0.02303409
16	−89.5	0.72139717	0.24910324	0.02505485
24	−89.9	0.71817491	0.24597097	0.02448715
32	−88.9	0.72170356	0.25030101	0.02550214
		N = 191		
1	−98.1	0.67223344	0.1872747	0.01452257
2	−94.3	0.70075621	0.22112031	0.01943466
4	−90.5	0.7196321	0.24471727	0.02393159
6	−90.9	0.71816017	0.24379217	0.02370239
8	−90.4	0.71833134	0.24451461	0.02390559
16	−90.4	0.71734228	0.244362	0.02399541
24	−90.1	0.71838476	0.24599127	0.02444213
32	−89	0.72239379	0.25075541	0.02551853
40	−89.7	0.7188511	0.24690437	0.0247143

BW	Atten	T1	T2	T3
48	−91.6	0.70888027	0.23598149	0.02243978
		N = 223		
1	−98.2	0.67257273	0.18768014	0.01460038
2	−94.2	0.70072996	0.22108243	0.01942305
3	−90.4	0.70262204	0.22302806	0.0188601
5	−91	0.71641456	0.24126979	0.02309323
8	−89.9	0.72166528	0.24835901	0.02473006
9	−89.8	0.71674758	0.24252389	0.02331481
16	−90.3	0.7179882	0.24507651	0.02414698
32	−90.6	0.71403002	0.24119297	0.02341017
48	−91.2	0.71143573	0.2386827	0.02297579
56	−90.7	0.71338506	0.24097504	0.02348867
		N = 255		
1	−97.6	0.67176623	0.18670931	0.01441482
2	−94.2	0.70070534	0.22105163	0.01941457
3	−90.3	0.70233551	0.22263226	0.01874791
5	−91	0.71654995	0.24140965	0.02311617
8	−89.9	0.72164196	0.24831241	0.02471143
9	−89.7	0.71673449	0.2424607	0.02328277
16	−90.1	0.71885073	0.24604614	0.02435372
32	−89.6	0.71549778	0.24342724	0.02411907
48	−90.9	0.71268842	0.23999548	0.02323405
56	−90.7	0.71349454	0.240994	0.02346651
64	−91.3	0.71035623	0.23761455	0.02277658

Предметный указатель

Z

Z-преобразование
— БИХ-фильтры, 239–246
— задержка во времени, 239–242
— описание, 235–237
— определение, 235
— основы, 235–236
— полярная форма, 236
— устойчивость, 237–238

А

А/Ц преобразователи, *см.* Аналого-цифровые преобразователи

Абсолютное значение, 29

Автоматическая регулировка усиления (АРУ), 539, 561
— блочная, 551
— в фильтрах с конечной импульсной характеристикой, 162
— двухрежимная, 568
— когерентная, 412
— некогерентная, 418
— скользящая, 398
— экспоненциальная, 430, 564, 568

Алгоритм БПФ по основанию 2, вывод, 145–152

Алгоритм Герцеля, 521, 531

Алгоритм замен Ремеза в проектировании КИХ-фильтров, 197–198

Алгоритм с замещением, 160

Алгоритм с постоянной геометрией, 160

Алгоритм с прореживанием по частоте, 154, 160

Алгоритм с удвоенной памятью, 160

Амплитуда, определение, 28–29

Амплитудная характеристика, дискретное преобразование Фурье
— при действительном косинусоидальном сигнале, 130
— при комплексном входном сигнале, 125

Аналитические сигналы, 349, 365

Аналого-цифровые преобразователи
— методы испытаний, 503
— сверхдискретизация, 498
— уменьшение шума квантования, 497

Аналоговые фильтры, использование термина, 248

Аналоговый, использование термина, 22

Антиэлайзинговые фильтры, 48

Аппроксимация длины вектора, 476

Аппроксимация модуля вектора, 475

Арганда диаграмма, 574

Арктангенс
— аппроксимация, 538

— при демодуляции ЧМ сигналов, 367, 541

АРУ (автоматическая регулировка усиления), 539, 561, 564

Б

Бабочек структуры, БПФ по основанию 2, 154–161

Бартлетта окна, 91

Бесселя функции, 190

Билинейное преобразование при проектировании БИХ-фильтров, 223

Бит-реверсивная индексация при БПФ, 152–153

Бит-реверсивная перестановка входных/выходных данных, 152–153

БИХ-фильтр М-го порядка

— выражения в z-области, 240–242

— выражения во временной области, 240

— передаточная функция в z-области, 240

— частотная характеристика, 240–242

Блок-схемы, 30, 166–167

Блэкмана-Хэрриса окна, 482

Блэкмана окна и, 187–190

— КИХ-фильтры, 179

— КИХ ФНЧ, 183–193

Блэкмана окна (точные), 482

Боковые лепестки, 85–86

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

— алгоритм БПФ по основанию, 145–152

— алгоритм с замещением, 160

— алгоритм с постоянной геометрией, 160

— алгоритм с удвоенной памятью, 160

— бит-реверсивная перестановка входных/выходных данных, 152–153

— в увеличенном масштабе, 532

— вывод, 139

— вычисление поворачивающих множителей, 518

— интерпретация результатов, 143–144

— использование для КИХ фильтрации, 515

— обрезанное, 518

— приемы использования, 141–144

— программы, 145

— прореживание по времени, 152–153, 156–161

— прореживание по частоте, 154–161, 160

— связь с дискретным преобразованием Фурье, 140–141

— структуры бабочек БПФ по основанию 2, 154–161

— увеличение масштаба по частоте, 532

— усреднение нескольких преобразований, 142

В

Вектор, использование термина, 574–575

Веса ответвлений, 608

Возведение в степень комплексных чисел, 578

Возмущающая последовательность, 276

Всепропускающий фильтр, 605

Выделение огибающей, 366, 563

Выражение в z-области для КИХ-фильтра М-го порядка, 240–241
Вычисление значения полинома, 553
Вычисление ОБПФ через БПФ, 494
Вычитание, 30
— для комплексных чисел, 576

Г

Гармоническая дискретизация, 50
Гаусс, Карл, 335
Геометрическая прогрессия, 108, 583–584
Герц, Генрих, 23
Групповая задержка, 200–203, 204, 605–607

Д

Действительная дискретизация, 51–52
Действительные числа, графическая интерпретация, 573–574
Действительный косинусоидальный входной сигнал ДПФ
— для отдельного бина, 130–136
— частотный отклик, 129–130
Деление комплексных чисел, 577–578
Демодуляция АМ сигналов, 366
Демодуляция квадратурных сигналов, 354
Демодуляция ФМ сигналов, 368, 540, 541
Демодуляция ЧМ сигналов, 368, 540–541
Детектирование
— чистого тона, 520
Децибелы
— мощность сигнала в логарифмическом масштабе, 597–602
— определение, 597–603
— определение абсолютной мощности, 603
— отношения амплитуд и мощностей, 603–603
Дирихле, Петер, 109
Дискретизация когерентная, 504
Дискретизация на ПЧ, 50–51
Дискретизация первого порядка, 51–52
Дискретизация с пониженной частотой, 46–49, 50
Дискретная свертка, 205–216
Дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ)
— определение, 103
— пример, 134
Дискретное выражение, 24
Дискретное колебание, методы описания, 26
Дискретное преобразование Фурье (ДПФ), 39
— гребешковые потери, 97–98
— для реверсированных во времени сигналов, 585
— дополнение нулями, 98–102
— коэффициент улучшения, 103–106
— линейность, 77
— модуль, 78–79
— назначение, 63
— обратное, 82
— окна, 90–97
— определение, 64
— отклик в частотной области на действительный косинусоидальный входной сигнал, 129–130
— отклик в частотной области на комплексный входной сигнал, 125–129
— пример использования, 67–77

— прямоугольных функций, 107–117
— реакция отдельного бина в частотной области на входной действительный косинусоидальный сигнал, 130–136
— связь с преобразованием Фурье, 132
— симметрия, 75–77
— скользящее, 524
— соотношения для быстрого преобразования Фурье, 140–141
— теорема о сдвиге, 80–82
— уравнение, описание, 64–75
— утечка, 83–90
— частотная ось, 79

Дискретные линейные системы, 32–36

Дискретный сигнал, 585
— изображение входа и выхода, 25
— использование термина, 22
— о соединении точек, изображающих дискретный сигнал, 24
— пример, 24
— частота, 26

Дисперсия
— определение, 591
— случайных функций, 593–595

Длина слова, ошибки, 274

Дольфа-Чебышева окна, 190

Дополнение нулями при быстрой свертке, 508

Дополнение нулями при ДПФ, 98–102

Дополнение нулями при проектировании фильтров, 554

ДПФ действительного сигнала, 75

Е

Единичная окружность, 236

З

Заворот фазы, 201, 608

Задержка огибающей, 203, 608

Задержка по времени и z-преобразование, 257

Звездная диаграмма, 152

Зуб акулы, 45

И

Импульсная характеристика, 38
— биквадратное звено, 280
— каскадированная, 278
— КИХ-фильтров, 169–171
— комбинации каскадированных параллельных, 276–281
— наложение, 249–251
— определение, 608, 612
— проектирование с помощью билинейного преобразования, 223, 263–272
— сравнение с КИХ, 281
— эффекты мертвой зоны, 274

Инвариантные во времени системы
— анализ, 38–39
— пример, 36–37
— свойство коммутативности, 38

Инверсия времени, 585

Инверсия спектра при полосовой дискретизации, 58–61

Интегратор с утечкой, 564

Интермодуляционные искажения, 36

Интерполированные КИХ-фильтры, 320

Интерполяция
— определение, 387
— полосовых сигналов, 514
— с использованием БПФ, 557

Интерполяция посредством дополнения нулями, 387
Итерационная оптимизация, 272

К

Кайзера окна, 97, 190–193
Каскадные интеграторы-гребенчатые фильтры, 397, 546
Каскадные фильтры, 277, 608
Каузальные системы, 224
Кауэра фильтры, 613
Квадратурная дискретизация
— с цифровым смешиванием, 357
— фильтрация, 472
Квадратурные сигналы, 335
— рекурсивные фильтры, 248
Квадратурный генератор, 354, 565
Квадратурный фильтр, 608
Квантование коэффициентов, 274
Квантование, коэффициенты, ошибки, 274–276
Кельвин, 64
КИХ-фильтры с 5-ю ответвлениями, 167–168
КИХ-фильтры с повышенной крутизной АЧХ, 512
Колебания переполнения, 274–276
Коммутативности свойство, 38
Комплексная частота, 224
— для БИХ-фильтра М-го порядка, 240–242
Комплексное понижающее преобразование, 351
Комплексное сопряжение, 76
Комплексные сигналы
— аналитические, 349, 365
— комплексные экспоненты, 342
Комплексные числа
— алгоритм умножения, 482
— арифметическое представление, 574–575
— возведение в степень, 578
— графическое представление, 573–574
— деление, 577–578
— извлечение корней, 578–579
— логарифм по основанию 10, 579–580
— натуральный логарифм, 579
— обратные, 578
— сложение и вычитание, 576
— сопряженные, 577
— умножение, 576–577
Корни из комплексных чисел, 578–579
Коэффициент улучшения или ухудшения
— дискретного преобразования Фурье, 103–106
— интегрирования, 103–106
— окна, 93
Коэффициент формы, 608
Коэффициенты КИХ-фильтров, 171
— постоянные, 177, 608
Критерий Найквиста, 48
Кули, Дж., 139

Л

Линейные инвариантные во времени системы
— анализ, 38–39
— дискретные, 32–36
— инвариантные во времени системы, 36–37
— пример линейной системы, 32–33
— пример нелинейной системы, 34–36
— свойство гомогенности (однородности), 32
— свойство коммутативности, 38
Линейный, использование термина, 32

Логарифмы и комплексные числа, 579–580
— натуральные, 579
— по основанию 10 через натуральные, 579
Логарифмы при определении мощности сигнала, 597–602

М

Модуль С, 574
Модуль дискретного преобразования Фурье, 78–79

Н

Наложение, 41
— в фильтрах с бесконечной импульсной характеристикой, 249
Нелинейная система, пример, 34–36
Непрерывная обработка сигналов
— использование термина, 22
— частота, 25–26
Нерекурсивные фильтры, 164, 248
— редукция, 551
Несущая частота, 51
Нечетная симметрия, 76
Низкочастотные сигналы, дискретизация, 46–49
Нормальная функция плотности вероятности, 596
Нормальная функция распределения, 509
Нормированная угловая переменная, 119

О

Обнаружение спектральных пиков, 515
Обнаружение тона, 520
Обработка аналоговых сигналов, примеры, 22
Обработка сигналов
— аналоговая, 22
— использование термина, 22
— символы операций, 29–30
— цифровая, 22
Обратное дискретное преобразование Фурье (ОБПФ), 82
Обратное преобразование обобщенной прямоугольной функции, 120–123
Обратное преобразование симметричной треугольной функции, 123–124
Обращение комплексных чисел, 578
Односторонняя/каузальная система, 224
Окна
— Бартлетта, 91
— Блэкмана, 187–190, 482
— Блэкмана-Хэрриса, 482
— взвешивание в частотной области, 479
— выбор, 97
— дискретное преобразование Фурье, 90–97
— для КИХ-фильтров, 179–193
— Дольфа-Чебышева, 190
— Кайзера, 97, 190–193
— назначение, 97
— Парзена, 91
— приподнятый косинус, 91
— прямоугольное, 91
— точное Блэкмана, 482
— треугольное, 91
— функции Бесселя, 612
— Хэмминга, 91, 93, 482
— Хэннинга/Хана, 92, 93–97
— Чебышева, 97, 190–193
Оптимальное проектирование КИХ-фильтров, 197

Оптимизационное проектирование БИХ-фильтров, 223, 272–274
Ортогональный, 353
Ослабление
— в полосе задерживания, 191
— определение, 609
— относительное, 609
Относительное ослабление, 609
Ошибки округления, 274–276
Ошибки переполнения, 274–276

П

Параллельные фильтры, 276–281
Парзена окна, 91
Паркса-Маклеллана метод проектирования КИХ-фильтров, 197
Передаточная функция, 228–229
— второго порядка, 230
— использование для оценки устойчивости и расчета частотной характеристики, 229–235
— каскадных фильтров, 276
— определение, 609
— параллельных фильтров, 276
— при проектировании методом 1 инвариантного преобразования импульсной характеристики, 255–258
— при проектировании методом 2 инвариантного преобразования импульсной характеристики, 258–259
— при проектировании с помощью билинейного преобразования, 263–264, 269
Передаточная функция в пространстве преобразования Лапласа, 228–229
— в методе 1 проектирования на основе инвариантности импульсной характеристики, 255–258
— в методе 2 проектирования на основе инвариантности импульсной характеристики, 258–259
— в параллельных фильтрах, 276
— второго порядка, 230
— для каскадных фильтров, 276
— использование для проверки устойчивости и вычисления частотной характеристики непрерывных систем, 229–235
— при проектировании с помощью билинейного преобразования, 263–264, 269
Перенос по частоте
— без умножений, 467
— дискретизация с переносом по частоте, 50
— с помощью пересылок отсчетов, 471
— с прореживанием, 561
Переходная полоса, 609
Периодическая дискретизация
— дискретизация с пониженной частотой, 46–49, 49
— инверсия спектра, 58–61
— итог по полосовой дискретизации, 61
— наложение, 41–46
— перенос, 50
— полосовая, 49–58
Подавление в полосе задерживания, 191
Подавление постоянной составляющей, 543
Полифазное разложение, 394, 548
Полифазные фильтры, 391

Полоса задерживания, определение, 609
Полоса пропускания, определение, 609
Полосовая дискретизация, 58
— инверсия спектра при полосовой дискретизации, 60
Полосовой сигнал
— интерполяция, 514
Полосовой фильтр, 609
Полосовых КИХ-фильтров проектирование, 193
Полуполосные КИХ-фильтры, 199–200, 379, 609
Понижающее преобразование
— комплексное, 351
— с анализом спектра, 472
— фильтрация при, 472
Правило Лопиталя, 109
Предельные циклы, 274
Предыскажение, 270
Преобразование Гильберта, 361
Преобразование Лапласа
— вывод, 223
— двустороннее, 224
— для непрерывного времени, 224–226
— одностороннее/каузальное, 224
— описание, 223–229
Преобразование частоты дискретизации
— интерполяция, 387
— определение, 381
— полифазные фильтры, 391
— прореживание, 382
Пример метода проектирования 1, 255–258
Пример метода проектирования 2, 256–263
Программы БПФ, 145
Проектирование БИХ-фильтров с инвариантным преобразованием импульсной характеристики, 223, 249–250
Проектирование КИХ ФВЧ, 194–196
Проектирование КИХ ФНЧ, 179–193, 612
Проектирование КИХ-фильтров с помощью ряда Фурье, 179–193
Прореживание
— двухступенчатая фильтрация, 385
— определение, 382
— перенос по частоте, 561
— фильтры, 611
Прореживание по времени, 152–153, 156–161
Процесс сложения, 29
— в фильтрах с конечной импульсной характеристикой, 164
— для комплексных чисел, 573
Прямая форма I, 241
Прямая форма II, 246
— z-преобразование, 235–246
— интегратор с утечкой, 564
— использование возмущающих последовательностей, 276
— колебания переполнения, 274
— оптимизационное проектирование, 272–274
— подводные камни реализации, 274–276
— предельные циклы, 274
— преобразование Лапласа, 223–235
— причины использования, 219–220
— проектирование методом инвариантного преобразования импульсной характеристики, 223, 249–263
— рекурсивные фильтры, 248

— сравнение с КИХ-фильтрами, 281–282
— структура, 221–223, 246–249
— транспонированные, 246
— устойчивость, 246
— устройство экспоненциального усреднения, 431, 564, 568

Прямоугольная функция, все отсчеты которой равны 1, 116

Прямоугольные окна, 91, 93

Прямоугольные функции
— все единицы, 115–118
— обратное преобразование обобщенной функции, 120–123
— обратное преобразование симметричной функции, 125–129
— общее определение, 107–112
— оси времени и частоты, 117–119
— симметричная, 112–117
— формы, 106

Пульсации в полосе задерживания, 197

Пульсации в полосе пропускания, 197, 610

Пульсации вне полосы, 610

Р

Размножение спектра, 46–49

Размноженная функция sinc, 109

Разностное уравнение, 221–222

Рандомизация
— в АЦП, 501
— с фильтрами, 276
— треугольная, 503

Реакция отдельного бина в частотной области на действительный косинусоидальный сигнал, 130–136

Режекторный фильтр, 610

Рекурсивные фильтры, 248

Ряд Тейлора, 567

С

Свертка, 39
— быстрая свертка с использованием БПФ, 507
— дискретная, 205–216
— теорема, 208–216
— уравнение, 169

Свойство гомогенности (однородности), 32

Сигналы во временной области, 24
— дискретная свертка, 206–208
— преобразование Лапласа, 223–225

Сигналы с конечной мощностью
— абсолютная мощность в децибелах, 599
— в логарифмическом масштабе, 597–602
— определение, 28–29

Символы операций обработки сигналов, 29–31

Симметричная прямоугольная функция, 112–117

Симметрия
— дискретного преобразования Фурье, 75–77
— нечетная, 76
— четная, 76

Системы, инвариантные к сдвигу, 36

Скользящее ДПФ, 524

Случайные функции, среднее и дисперсия, 593–596

Смешивание без умножений, 467

Сопряженные/сопряжение, 76
— комплексных чисел, 577

Спектр мощности, 67

Спектральный анализ
— БПФ в увеличенном масштабе, 532
— БПФ с окном, 535
— локализация пиков, 515
— обнаружение тона, 520
— практическая реализация, 535
Среднее случайных функций, 593–595
Стандартное отклонение, 592
— синусоиды, 592–593
Структура БИХ-фильтра, 221–223, 246–249
Структуры бабочек БПФ по основанию 2, 154–161
Суб-найквистовская дискретизация, 50
Суммирование, 29–31
Схема Горнера, 553

Т

Теорема о сдвиге для ДПФ, 80–82
Трансверсальные КИХ-фильтры с постоянными коэффициентами, 177
Трансверсальные фильтры, 610
Транспонированная структура фильтров/фильтрации, 246, 549
Транспонированные фильтры, 549
Треугольные окна, 91, 93
Тьюки, Дж., 139

У

Умножение
— комплексных чисел, 576–577
Умножитель комплексный, 353
Уравнение Эйлера, 64, 108, 244, 259
Условная устойчивость, 233
Устойчивость
— z- преобразование и устойчивость, 237–238
— передаточная функция Лапласа и устойчивость, 229–235
— условная, 237–238
Утечка
— ДПФ, 83–90
— заворот, 88–90

Ф

Фазо-частотная характеристика
— КИХ-фильтров, 200–205
— определение, 610
Фазовая задержка, 608
Фазовый компенсатор, 605
Фазовый угол/аргумент С, 574
Фибоначчи, 346
Фильтр-прототип, 249
Фильтрация/фильтры *см.* также КИХ-фильтры, БИХ-фильтры
— всепропускающие, 605
— гребенчатые КИХ, 286
— для спектрального анализа, 520
— каскадированные фильтры, 276
— каскадные, 276–281, 608
— Кауэра, 613
— КИХ с повышенной крутизной АЧХ, 512
— коэффициенты, 608
— на основе частотной выборки, 286
— неравномерность в полосе пропускания, 277, 609
— описание процесса фильтрации, 163–164
— основы, 163
— параллельные, 276–281
— полоса пропускания, 609
— полосовые, 609
— порядок, 609
— прореживающие, 611
— прототип, 249
— режекторные, 610

— рекурсивное скользящее суммирование, 399
— рекурсивные, 248
— скользящего среднего, 398
— сравнение КИХ и БИХ, 281
— структура, 166–167
— транспонированная структура, 246
— фильтры с нулевой фазой, 511, 612
— частота среза, 612

Фильтры на основе частотной выборки, 286

Фильтры с импульсной характеристикой бесконечной длины (БИХ)
— частотная характеристика, 168, 183

Фильтры с импульсной характеристикой конечной длины (КИХ)
— гребенчатые, 286
— другие названия, 164
— импульсная характеристика, 171
— интерполированные КИХ-фильтры, 320
— использование для усреднения, 164–168
— коэффициенты, 171
— метод Паркса-Маклеллана, 197
— метод проектирования с помощью замен Ремеза, 197–198
— методы оптимального проектирования, 197
— на основе частотной выборки, 286
— нерекурсивные фильтры, 163–216
— определение, 608
— оценка количества ответвлений, 325
— полифазные фильтры, 391
— полуполосные, 199–200
— проектирование методом рядов Фурье, 179–193
— проектирование полосовых, 193–194
— проектирование с использованием окон, 179–193
— проектирование ФВЧ, 194–196
— проектирование фильтров высокого порядка, 554
— проектирование ФНЧ, 179–193
— с 5-ю ответвлениями, 167–168
— свертка, 169–179
— сложенная структура, 316, 497
— сравнение с, 281–282
— сравнение с БИХ, 281
— транспонированные, 549
— фазо-частотная характеристика, 200–205

Фильтры с линейной ФЧХ, 611

Фильтры с нулевой фазой, 511, 612

Формула квадратичной факторизации, 231

Функция Баттерворта, 612

Функция плотности вероятности
— источника шума, 501
— нормальная (Гауссова), 509
— нормальная, 596
— среднее и дисперсия случайных функций, 593–595

Х

Хэвисайд, Оливер, 223

Хэмминга окна, 91, 481
— в частотной области, 480

Хэннинга/Ханна окна, 91–94, 481
— в частотной области, 480

Ц

Центральная предельная теорема, 509
Центральная частота, 612
Цифровые фильтры
— многокаскадные КИХ, 384
— многочастотные, 390
— прореживающие, 382

Ч

Частота
— оценивание, 515
— разница между непрерывными и дискретными системами, 25–26
— среза, 612
— центральная, 612
Частота заворота, 48, 266
Частота Найквиста, 44
Частота среза, 612
Частотная область
— взвешивание окном, 530
— определение, 26
Частотная ось, 79
— в Гц, 118
— в радианах/сек, 119
нормированная угловая переменная, 119
— прямоугольная функция, 117–119
Частотная характеристика, 39
— N-каскадного БИХ-фильтра, 245–246
— дискретного преобразования Фурье при действительном косинусоидальном входе, 129–130
— дискретного преобразования Фурье при комплексном входе, 125–129
— БИХ-фильтра М-го порядка, 240–242
— КИХ-фильтров, 169–179
— отдельного бина при действительном косинусоидальном входном сигнале, 130–136
Чебышева окна, 97, 190–193
Чебышева функция, 612
Четная симметрия, 76

Ш

Шаги метода проектирования 1, 251–253
Шаги метода проектирования 2, 254–255
Ширина спектра, 613
Шум
— определение случайного шума, 589

Э

Эйлер, Леонард, 338
Экспоненциальное усреднение, 568
Эллиптическая функция, 613
Эффекты мертвой зоны, 274

Я

Явление Гиббса, 186
Ядро Дирихле, 109–111
— для последовательности, содержащей только единицы, 115, 118–119
— для симметричной последовательности, 112–117