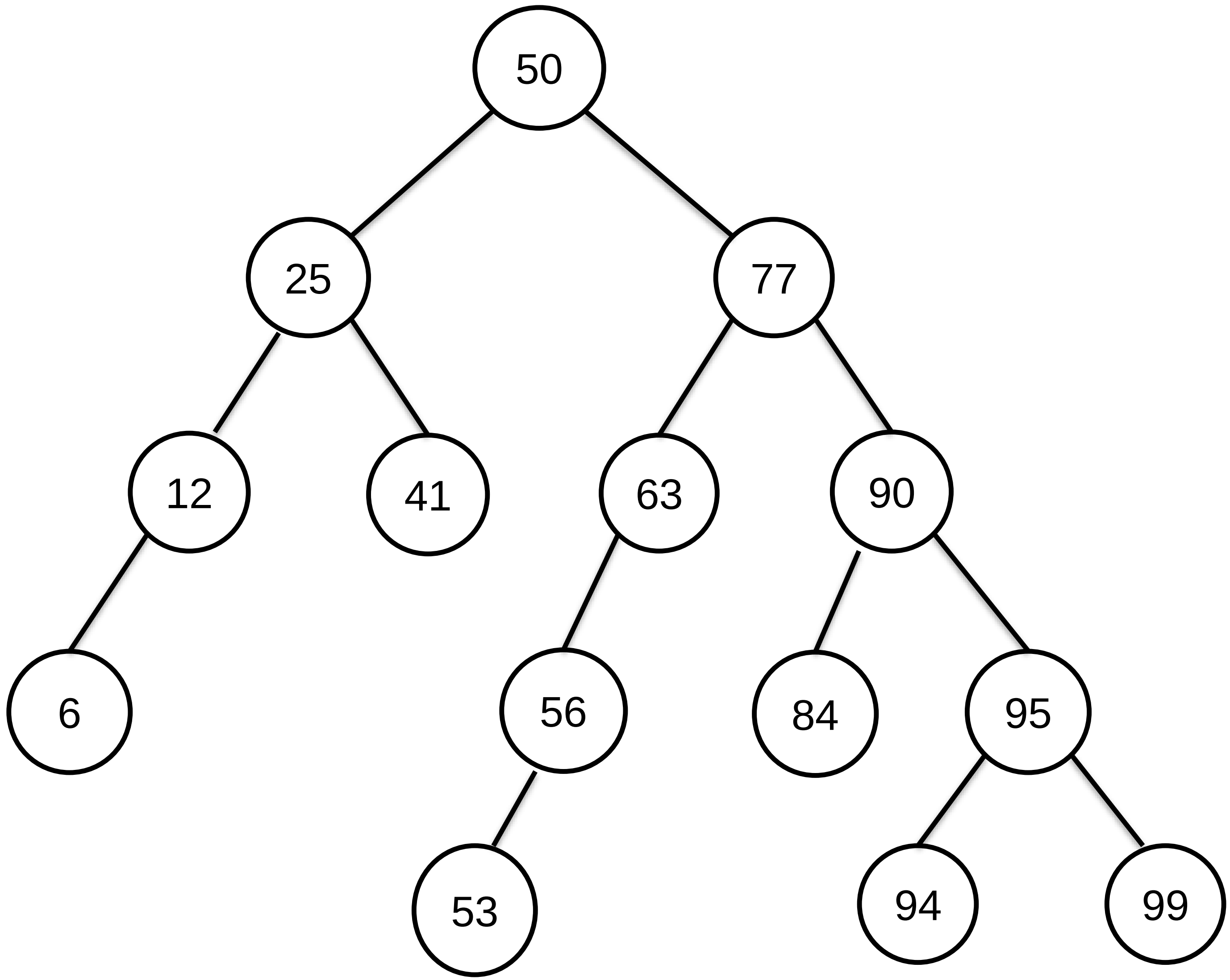
Binární vyhledávací strom (BVS)

(BST – Binary Search Tree)

- datová struktura pro ukládání a vyhledávání dat podle klíče
- pro každý vrchol platí:

    všechny záznamy uložené v levém podstromu mají menší klíč
    všechny záznamy uložené v pravém podstromu mají větší klíč
    (platí pro ***všechny*** záznamy v podstromu, nestačí jen pro syny!)


50
25
77
12
41
63
90
6
56
84
95
53
94
99

Při vyhledávání není třeba procházet celý strom, stačí projít jednu cestu od kořene k listu

$\rightarrow$ časová složitost algoritmu vyhledávání je v nejhorším případě určena ***výškou stromu***

- v nejlepším případě $\log_2 N$
- v nejhorším případě N

- v průměrném případě $O(\log N)$

Hledání hodnoty v BVS

```
def hledej(p, x):
    """
      hledání hodnoty "x" v BVS
      s kořenem ve vrcholu "p"
    """
    while p != None and p.info != x:
        if x < p.info:
            p = p.levy
        else:
            p = p.pravy
    return p
```

Rekurzivní řešení téže funkce:

```
def hledej(p, x):
    """
      hledání hodnoty "x" v BVS
      s kořenem ve vrcholu "p"
    """
    if p == None:
        return None
    elif x == p.info:
        return p
    elif x < p.info:
        return hledej(p.levy, x)
    else:
        return hledej(p.pravy, x)
```

Totéž zapsáno jinak:

```
def hledej(p, x):
    """
      hledání hodnoty "x" v BVS
      s kořenem ve vrcholu "p"
    """
    if p == None or x == p.info:
        return p
    return hledej(p.levy, x) if x < p.info \
        else hledej(p.pravy, x)
```

Přidání hodnoty do BVS

- novou hodnotu musíme přidat tam, kde ji budeme hledat
- přidává se vždy *do nového listu*
- postupuje se stejně jako při hledání hodnoty v BVS, dokud se nenarazí na odkaz **None** a do toho místa se přidá nový uzel
- časová složitost je opět dána výškou stromu, v průměrném případě O(log *N*)

Technická realizace:

- buď při průchodu stromem od kořene k listu udržovat pomocný ukazatel o jeden krok pozadu, pomocí něj pak připojit do stromu nový uzel
- nebo řešení pomocí rekurze

Rekurzivní řešení:

```
def pridej(p, x):
    """přidání hodnoty "x" do BVS
       s kořenem ve vrcholu "p"
       (pokud tam hodnota "x" ještě není)
    """
    if p is None:
        p = Vrchol(x)
    elif x < p.info:
        p.levy = pridej(p.levy, x)
    elif x > p.info:
        p.pravy = pridej(p.pravy, x)
    return p
```

Vypuštění hodnoty z BVS

- nejprve průchodem od kořene směrem k listu najít vrchol s vypouštěnou hodnotou (a jeho předchůdce ve stromě)
- pokud je to ***list***, zruší se (v předchůdci nastavit **None**)
- pokud má jen ***jednoho následníka***, vrchol se zruší a jeho následník se přepojí místo něj (předchůdce tedy bude místo na rušený vrchol ukazovat na jeho jediného následníka)
- pokud má ***dva následníky***, vrchol se nemůže fyzicky zrušit, smaže se jen jeho dosavadní hodnota a nahradí se jinou vhodnou hodnotou ze stromu. Tou je buď nejmenší hodnota z pravého podstromu nebo naopak největší hodnota z levého podstromu rušeného vrcholu. Tato náhradní hodnota leží jistě v listu nebo ve vrcholu s jediným následníkem – její původní vrchol tedy umíme snadno zrušit.

- časová složitost je opět dána výškou stromu, v průměrném případě O(log *N*) – celkově se prošlo stromem pouze jednou od kořene k listu

Hledání hodnoty v BVS s použitím zarážky
(alternativa k předchozímu řešení)

- podobné jako hledání v seznamu pomocí zarážky
- jeden speciální vrchol navíc slouží jako zarážka při hledání (vkládá se do něj hledaná hodnota)
- všechny odkazy „levy“, „pravy“ ve vrcholech stromu s hodnotou **None** nahradíme odkazy na zarážku

Vyvážené stromy

Cíl: zajistit výšku stromu O(log N)

→ v případě BVS časová složitost všech operací O(log N)

Dokonale vyvážený binární strom

pro každý uzel platí:

počet uzlů v jeho levém a pravém podstromu se liší nejvýše o 1

- nejlepší možné vyvážení, výška stromu s N uzly je $\lceil \log N \rceil$
- lze snadno postavit z předem známé množiny hodnot
- je obtížné udržovat strom dokonale vyvážený při přidávání a odebírání hodnot

→ proto se v praxi používají jiné (slabší) definice vyváženosti, strom nebude tak dokonale vyvážený, ale půjde snadněji udržovat

Postavení dokonale vyváženého binárního stromu s N vrcholy

```
def postav(n):
    """
      postavení dokonale vyváženého
      binárního stromu s "n" vrcholy
    """
    if n == 0:
        return None
    p = Vrchol()
    p.levy = postav((n-1)//2)
    p.pravy = postav(n-1 - (n-1)//2)
    return p
```

Funkce vrací ukazatel na kořen sestrojeného stromu.
Hodnoty „info“ ve vrcholech stromu zatím nejsou definovány.

Postavení dokonale vyváženého binárního vyhledávacího stromu
s danými *N* hodnotami ve vrcholech stromu

1. varianta řešení:
- ukládané hodnoty uspořádat vzestupně
- postavit dokonale vyvážený binární strom s *N* vrcholy pomocí předchozí funkce „postav“ („info“ hodnoty vrcholů zatím nejsou definovány)
- projít sestrojený strom metodou inorder a přitom do vrcholů stromu postupně zapisovat hodnoty v pořadí od nejmenší po největší

2. varianta řešení:
- ukládané hodnoty uspořádat vzestupně (seznam ***a***)
- při konstrukci stromu rovnou vkládat do info-položek vrcholů hodnoty
- parametry funkce „strom“ určují rozsah indexů v seznamu ***a***, tzn. udávají, které hodnoty ze seznamu ***a*** patří do příslušného podstromu
- funkce bude volána „strom(0, N-1)“, vrací ukazatel na kořen sestrojeného stromu

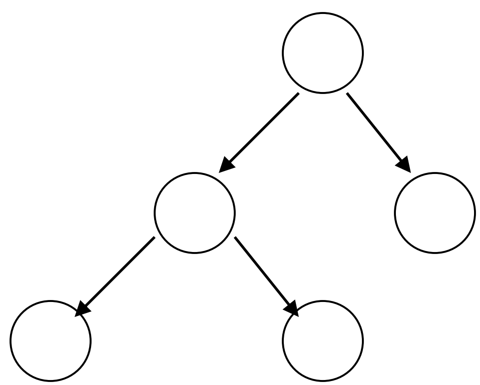
```
def strom(a, x, y):
    """
      postavení dokonale vyváženého binárního
      stromu s hodnotami z uspořádaného seznamu "a"
      v úseku od indexu "x" po index "y" včetně
    """
    if x > y:
        return None
    p = Vrchol(a[(x+y)//2])
    p.levy = strom(a, x, (x+y)//2 - 1)
    p.pravy = strom(a, (x+y)//2 + 1, y)
    return p
```

Hloubkově vyvážený binární strom
AVL – strom (G. M. Adeľson-Velskij, E. M. Landis, 1962)
pro každý uzel platí:
výška jeho levého a pravého podstromu se liší nejvýše o 1

- slabší požadavek, ale stačí: AVL-strom je maximálně o 45% vyšší než dokonale vyvážený strom se stejným počtem uzlů

- každý dokonale vyvážený strom je AVL-stromem
- AVL-strom nemusí být dokonale vyvážený

Příklad:



Realizace:
V každém uzlu *p* je navíc uložena položka „*balance*“, jejíž hodnota -1, 0 nebo 1 určuje, jak se liší výška levého a pravého podstromu tohoto uzlu:

balance(*p*) = výška(*p.levy*) - výška(*p.pravy*)

Pomocí této technické položky lze do AVL-stromu hodnoty snadno přidávat a z něj odebírat – s časovou složitostí O(log *N*).

Rekurzivní generování

úlohy typu „zkoušení všech možností“ nebo „generování všech možností“

Vypsat všechna *k*-ciferná čísla v poziční soustavě o základu *n*

Pokud *k* je předem pevně dáno, např pro *k* = 4:

```
for i1 in range(n):
    for i2 in range(n):
        for i3 in range(n):
            for i4 in range(n):
                print(f"{i1} {i2} {i3} {i4}")
```

Je-li *k* vstupním údajem, nemůžeme toto zapsat pomocí vnořených cyklů – nevíme předem, kolik jich máme v programu napsat.

Řešení: rekurzivní funkce obsahující jeden takový cyklus, rekurzivní zanoření jde vždy do hloubky *k*

```
k = 4           # počet cifer
n = 3           # číselná soustava

def cislo(c):
    """ vypíše všechna k-ciferná čísla
        v poziční soustavě o základu "n",
        "c" je vytvářené číslo
    """
    for i in range(n):
        c.append(i)
        if len(c) < k:
            cislo(c)
        else:
            print(c)
        c.pop()

cislo([])
```

Stejné řešení pomocí globálního pole
(v Pythonu implementováno seznamem)

```
k = 4             # počet cifer
n = 3             # číselná soustava
c = [0] * k       # vytvářené číslo

def cislo(p):
    """vypíše všechna k-ciferná čísla
       v poziční soustavě o základu "n",
       "p" je pořadové číslo vybírané cifry
    """
    for i in range(n):
        c[p] = i
        if p < k-1:
            cislo(p+1)
        else:
            print(c)

cislo(0)
```

Podobné řešení: rekurzivní zanoření do hloubky *k*+1

```
k = 4              # počet cifer
n = 3              # číselná soustava
c = [0] * k        # vytvářené číslo

def cislo(p):
    """vypíše všechna k-ciferná čísla
       v poziční soustavě o základu "n",
       "p" je pořadové číslo vybírané cifry
    """
    if p == k:
        print(c)
    else:
        for i in range(n):
            c[p] = i
            cislo(p+1)

cislo(0)
```

Variace s opakováním
k-prvkové z *n*-prvkové množiny {1, 2, …, *n*}

= všechny uspořádané *k*-tice tvořené prvky z {1, 2, …, *n*}
s možností opakování hodnot

Např. pro $k = 2$, $n = 4$: (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (2,1), (2,2) (2,3) (2,4)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (4,1), (4,2) (4,3) (4,4)

Řešení: na každou z *k* pozic vytvářené variace
postupně umístíme každé z *n* čísel

→ zcela totéž jako předchozí úloha
(jenom místo čísel 0, …, *n*-1 umisťujeme čísla 1, …, *n*)

Kombinace bez opakování
k-prvkové z n-prvkové množiny $\{1, 2, \dots, n\}$

= všechny k-prvkové podmnožiny vybrané z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$
(bez možnosti opakování hodnot)

Např. pro $k = 2$, $n = 4$: (1,2) (1,3) (1,4) (2,3) (2,4) (3,4)

Řešení: generujeme pouze ostře rostoucí k-tice
hodnot z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$

```python
k = 3                  # počet prvků v kombinaci
n = 5                  # z kolika prvků vybíráme
c = [0] * (k+1)        # vytvářená kombinace
# technický trik: c[0]=0, kombinace začíná až v c[1]

def kombinace(p):
    """vypíše všechny k-prvkové kombinace
       z "n" prvků bez opakování,
       "p" je pořadové číslo vybíraného prvku
    """
    if p > k:
        print(c[1:])
    else:
        for i in range(c[p-1]+1, n-(k-p)+1):
            c[p] = i
            kombinace(p+1)

kombinace(1)
```

Doplnění znamének

Je dáno *n* kladných celých čísel a požadovaný součet *c*.
Před čísla doplňte znaménka + nebo - tak, aby byl součet čísel se znaménky roven danému *c*. Nalezněte všechna řešení úlohy.

Řešení: před každé číslo zkusíme postupně dát + nebo -,
po vytvoření celé *n*-tice znamének otestujeme součet

$\rightarrow$ 2^n možností, tedy časová složitost algoritmu $O(2^n)$

```
cislo = [int(_) for _ in input().split()]
                    # uložení zadaných čísel
n = len(cislo)      # počet zadaných čísel
c = int(input())    # požadovaný výsledný součet
znam = [None] * n   # uložení znamének

def znamenko(p, soucet):
    ''' p = pozice nového znaménka,
        soucet = součet přechozích čísel se znaménky
    '''
    … viz další strana …

znamenko(0, 0)      # zavolání rekurzivní funkce
    # začínáme od indexu 0, dosavadní součet je 0
```

Parametr *soucet* není nutný, funkce si dokáže tento součet sama spočítat na základě údajů uložených v seznamech *cislo*, *znam* na indexech od 0 do *p*-1 (včetně).

```
def znamenko(p, soucet):
    ''' p = pozice nového znaménka,
        soucet = součet přechozích čísel se znaménky
    '''
    if p == n:
        if soucet == c:
            for i in range(n):
                print(znam[i], end = '')
                print(cislo[i], end = '')
            print()
    else:
        znam[p] = '+'
        znamenko(p+1, soucet+cislo[p])
        znam[p] = '-'
        znamenko(p+1, soucet-cislo[p])
```

Rozklad čísla

Zadané kladné celé číslo *n* rozložte všemi různými způsoby na součet kladných celých sčítanců. Rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců nepovažujeme za různé.

Příklad:

$$
\begin{aligned}
5 &= 4 + 1 \\
&= 3 + 2 \\
&= 3 + 1 + 1 \\
&= 2 + 2 + 1 \\
&= 2 + 1 + 1 + 1 \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}
$$

Řešení: Aby se neopakovaly stejné rozklady s různým pořadím sčítanců, budeme vytvářet pouze rozklady s nerostoucím pořadím sčítanců. Na každou pozici rozkladu vždy vyzkoušíme všechny přípustné hodnoty (minimálně 1, maximálně kolik ještě zbývá a maximálně kolik je na předchozí pozici). Provádíme, dokud je co rozkládat.

```
n = 7
a = [n+1] * (n+1) # prvek a[0] není součástí rozkladu

def rozklad(z, p):
    """
      z - kolik zbývá rozložit
      p - kolikátý sčítanec vytváříme
    """
    if z == 0:          # rozklad je hotov
        print(a[1:p])
    else:          # přidáme do a[p] p-tý člen rozkladu
        for i in range(1, min(z, a[p-1])+1):
            a[p] = i
            rozklad(z-i, p+1)

rozklad(n, 1);   # rozložit "n", začínáme 1. sčítancem
```