SemMat1 – kombinatorika – riešenia

1.

a. Upravte $\frac{n!}{(n-3)!}+\binom{n}{2}$

Riešenie:

$$\frac{n!}{(n-3)!}+\binom{n}{2}=\frac{n!}{(n-3)!}+\frac{n!}{(n-2)!\,2!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}{(n-3)!}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!\,2!}=$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1}+\frac{n\cdot(n-1)}{2}=\frac{n\cdot(n-1)[2(n-2)+1]}{2}=\frac{n\cdot(n-1)(2n-3)}{2}$$

---

b. Upravte $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n-2)!}$

Riešenie: $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n-2)!}=\frac{1}{n!}-\frac{n}{n!}-\frac{n\cdot(n-1)}{n!}=\frac{1-n-n(n-1)}{n!}=\frac{1-n^2}{n!}$

---

2. Zjednodušte:

a. $\frac{n^2-9}{(n+3)!}+\frac{6}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}$

Riešenie:

$$\frac{n^2-9}{(n+3)!}+\frac{6}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{(n-3)(n+3)}{(n+3)!}+\frac{6}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{(n-3)}{(n+2)!}+\frac{6}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{(n-3)}{(n+2)!}+\frac{6}{(n+2)!}-\frac{(n+2)}{(n+2)!}=\frac{n-3+6-n-2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+2)!}$$

---

b. $\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{n^2-4}{(n+2)!}$

Riešenie: $\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{n^2-4}{(n+2)!}=\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{(n-2)(n+2)}{(n+2)!}=\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{(n-2)}{(n+1)!}=$

$$=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{(n-2)}{(n+1)!}=\frac{n+1-3-(n-2)}{(n+1)!}=\frac{0}{(n+1)!}=0$$

---

3. Riešte v N rovnicu:

a. $\binom{x}{2}+\binom{x-1}{2}=a^2$ kde a je neznámy parameter, $a \in Z$

Riešenie: $\binom{x}{2}+\binom{x-1}{2}=a^2$ sa dá prepísať ako $\frac{x(x-1)}{2}+\frac{(x-1)(x-2)}{2}=a^2$. To upravíme na

$$x(x-1)+(x-1)(x-2)=2a^2$$
$$x^2-x+x^2-3x+2=2a^2$$
$$2x^2-4x+2=2a^2$$
$$x^2-2x+1=a^2$$
$$(x-1)^2-a^2=0$$

$(x-1-a)(x-1+a)=0$ a teda $x=1\pm a$. Aby boli kombinačné čísla zo zadania definované, potrebujeme aby $x \geq 3$. Takže pre $a \geq 2$ máme riešenie $x=1+a$, pre $a \leq -2$ máme riešenie $x=1-a$ a pre $-1 \leq a \leq 1$ úloha nemá riešenie.

---

b. $\binom{x-1}{x-2}+\binom{x-2}{x-4}=4$

$$\frac{(x-1)}{1}+\frac{(x-2)(x-3)}{2}=4$$
$$2(x-1)+(x^2-5x+6)=8$$
$$x^2-3x-4=0$$
$$(x-4)(x+1)=0$$

Keďže hľadáme iba kladné *x*, tak jediným riešením rovnice je $x=4$

---

c. $\binom{x-1}{x-3}+\binom{x-2}{x-4}=9$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2}+\frac{(x-2)(x-3)}{2}=9$$
$$(x^2-3x+2)+(x^2-5x+6)=18$$
$$2x^2-8x-10=0$$
$$x^2-4x-5=0$$
$$(x-5)(x+1)=0$$

Keďže hľadáme iba kladné *x*, tak jediným riešením rovnice je $x=5$

4. Počet variácií tretej triedy bez opakovania z *n* prvkov je k počtu variácií tretej triedy s opakovaním v pomere 21:32. Koľko je prvkov?

Riešenie: Počet variácií tretej triedy bez opakovania z *n* prvkov je $n(n-1)(n-2)$. Počet variácií tretej triedy bez opakovania z *n* prvkov je n^3. Zadanie hovorí, že $\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \frac{21}{32}$. Riešme teda túto rovnicu. $32n(n-1)(n-2) = 21n^3$

$$32(n-1)(n-2) = 21n^2$$
$$32(n^2-3n+2) = 21n^2$$
$$11n^2-96n+64=0$$
$$(11n-8)(n-8)=0$$

Keďže nás zaujímajú iba celočíselné riešenia, jediným riešením rovnice je $x=8$

---

5. Počet permutácií z *n* prvkov je v pomere k počtu permutácií z *n*+2 prvkov ako 1:30. Nájdite *n*.

Riešenie: Počet permutácií z *n* prvkov je $n!$. Počet permutácií *n*+2 prvkov je $(n+2)!$. Zadanie hovorí, že $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{30}$. Riešme teda túto rovnicu. $30 = (n+1)(n+2)$ ktorá má na prvý pohľad viditeľné riešenie $n=4$ (ak súčin dvoch za sebou idúcich čísel je 30 tak tie čísla sú 5 a 6).

---

6. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 600 variácií druhej triedy bez opakovania?

Riešenie: Počet variácií druhej triedy bez opakovania z *n* prvkov je $n(n-1)$. Hľadáme teda také n aby $n(n-1)=600$. Toto môžeme vyriešiť ako kvadratickú rovnicu $n^2-n-600=0$, potom $n_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+2400}}{2} = \frac{1\pm 49}{2} =< \begin{matrix} +25 \\ -24 \end{matrix}$. Keďže my hľadáme kladné číslo, jediným riešením je $n=25$.

---

7. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 420 variácií druhej triedy bez opakovania?

Riešenie: Počet variácií druhej triedy bez opakovania z *n* prvkov je $n(n-1)$. Hľadáme teda také *n* aby $n(n-1)=420$. Toto môžeme vyriešiť ako kvadratickú rovnicu $n^2-n-420=0$, potom $n_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+1680}}{2} = \frac{1\pm 41}{2} =< \begin{matrix} +21 \\ -20 \end{matrix}$. Keďže my hľadáme kladné číslo, jediným riešením je $n=21$

---

8. Ak sa zväčší počet prvkov o dva, zväčší sa počet permutácií dvanásť krát. Koľko je prvkov?

Riešenie: Počet permutácií z *n* prvkov je $n!$. Počet permutácií *n*+2 prvkov je $(n+2)!$. Zadanie hovorí, že $(n+2)!=12n!$. Riešme teda túto rovnicu. $(n+2)(n+1)=12$ ktorá má na prvý pohľad viditeľné riešenie $n=2$ (ak súčin dvoch za sebou idúcich čísel je 12 tak tie čísla sú 4 a 3).

---

9. Počet variácií bez opakovania tretej triedy z n prvkov je o 225 menší než počet variácií s opakovaním tretej triedy z tých istých prvkov. Koľko je tých prvkov?

Riešenie: Počet variácií tretej triedy bez opakovania z *n* prvkov je $n(n-1)(n-2)$. Počet variácií tretej triedy bez opakovania z *n* prvkov je n^3. Zadanie hovorí, že $n(n-1)(n-2)+225=n^3$.

Riešme teda túto rovnicu. $n(n-1)(n-2)+225=n^3$

$$n^3-3n^2+2n+225=n^3$$

$$3n^2-2n-225=0$$

$$n_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 3\cdot 225}}{6}=\frac{2\pm 52}{6}=< \begin{matrix}+9\\-25/3\end{matrix}$$

Keďže my hľadáme kladné a celé číslo, jediným riešením je $n=9$

---

10. Koľkokrát viac je variácií k-tej triedy ako kombinácií k-tej triedy z n prvkov bez opakovania?

Riešenie: Počet variácií k-tej triedy bez opakovania z *n* prvkov je

$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Počet kombinácií *k*-tej triedy bez opakovania z *n* prvkov je

$\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Vidíme teda že variácií *k*-tej triedy bez opakovania z *n* prvkov je $k!$-krát viac ako kombinácií *k*-tej triedy bez opakovania z *n* prvkov.

---

11. Vyriešte v N rovnicu: $\dbinom{n+1}{n-1}+\dbinom{n-1}{n-3}-\dbinom{n-3}{n-5}=20$

Riešenie: Rozpíšme si kombinačné čísla a dostaneme

$$\frac{(n+1)n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-3)(n-4)}{2}=20$$

$$\left(n^2+n\right)+\left(n^2-3n+2\right)-\left(n^2-7n+12\right)=40$$

$$n^2+5n-50=0$$

$$(n-5)(n+10)=0$$

Keďže my hľadáme kladné číslo, jediným riešením je $n=5$.

---

12. Dokážte, že platí: $\dfrac{\binom{16}{3}+\binom{16}{4}+\binom{17}{5}}{\binom{18}{6}}=\dfrac{6}{13}$.

Riešenie: Vieme, že platí $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$, teda $\binom{16}{3}+\binom{16}{4}=\binom{17}{4}$ a teda

$\binom{16}{3}+\binom{16}{4}+\binom{17}{5}=\binom{17}{4}+\binom{17}{5}=\binom{18}{5}$.

Potom vieme, že

$$\frac{\binom{16}{3}+\binom{16}{4}+\binom{17}{5}}{\binom{18}{6}}=\frac{\binom{18}{5}}{\binom{18}{6}}=\frac{\frac{18!}{5!13!}}{\frac{18!}{6!12!}}=\frac{18!\,6!\,12!}{18!\,5!\,13!}=\frac{6}{13},$$

čo sme aj mali dokázať.

---

13. Pre ktoré $n \in N$ platí

a. $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=5n$

Riešenie:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n}{6}\left(6+3(n-1)+(n-1)(n-2)\right)=\frac{n}{6}\left(n^2+5\right)$$

My chceme vedieť, pre aké *n* platí $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=5n$, teda pre aké *n* platí $\frac{n}{6}\left(n^2+5\right)=5n$.

Roznásobením dostaneme $n^2=25$ a teda jediné prirodzené riešenie je $n=5$.

---

b. $\binom{n}{2}-\binom{n+3}{2}+\binom{6}{2}>0$

Riešenie:

$$\binom{n}{2}-\binom{n+3}{2}+\binom{6}{2}=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n+3)(n+2)}{2}+\frac{6\cdot 5}{2}=\frac{\left(n^2-n\right)-\left(n^2+5n+6\right)+30}{2}=$$

$$=\frac{24-6n}{2}=12-3n$$

My chceme vedieť, pre aké *n* platí $\binom{n}{2}-\binom{n+3}{2}+\binom{6}{2}>0$, teda pre aké *n* platí $12-3n>0$. Z toho priamo dostaneme $n<4$ a zo zadania tiež $n\geq 2$. Jedinými riešeniami teda sú $n\in\{2;3\}$