Algebra a diskrétna matematika

doc. RNDr. Jana Šiagiová, PhD.

Prehľad z prednášky č. 2

Matice, operácie s maticami, inverzná matica

Matica je usporiadaná obdĺžniková tabuľka čísel.

Ak matica pozostáva z m riadkov a n stĺpcov, hovoríme, že je **typu** $m \times n$.
Všeobecný zápis matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Štvorcová matica rádu n je matica s n riadkami a n stĺpcami.

Hlavná diagonála štvorcovej matice pozostáva z prvkov $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Súčet prvkov na hlavnej diagonále je **stopa** matice a značujeme ju $\mathrm{tr}(A)$.

Diagonálna matica je štvorcová matica, ktorej všetky prvky nachádzajúce sa mimo hlavnej diagonály sú nulové.

Dve matice sa **rovnajú**, ak sú rovnakého typu a majú rovnaké prvky na všetkých príslušných miestach.

Súčtom matíc rovnakého typu je matica toho istého typu s prvkami získanými sčítaním prvkov daných matíc na príslušných pozíciách, t. j.

ak $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a $B = (b_{ij})_{m\times n}$, tak $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.

Rozdielom matíc $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a $B = (b_{ij})_{m\times n}$ je matica

$$C = A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n} = (c_{ij})_{m\times n}.$$

Nie je možné sčítať ani odčítať matice rôznych typov!

Sčítanie matíc je komutatívne aj asociatívne.

Nulová matica O je matica pozostávajúca zo samých núl.

Pre každú maticu platí: $A_{m\times n} + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n}$

Násobenie matice konštantou c znamená vynásobenie každého prvku danej matice číslom c, t. j. $c \cdot A = (c \cdot a_{ij})_{m\times n}$.

Súčin matíc $A = (a_{ik})_{m\times s}$ a $B = (b_{kj})_{s\times n}$ v poradí $A \cdot B$ je matica $C = (c_{ij})_{m\times n}$, kde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$.

Vo výslednej matici súčinu je prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci skalárnym súčinom vektora tvoreného i-tym riadkom ľavej matice s vektorom tvoreným j-tym stĺpcom pravej matice.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \boldsymbol{a}_{i1} & \boldsymbol{a}_{i2} & \boldsymbol{a}_{i3} & \dots & \boldsymbol{a}_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \boldsymbol{b}_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \boldsymbol{b}_{2j} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & \boldsymbol{b}_{3j} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & \boldsymbol{b}_{sj} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

Násobenie matíc **nie je komutatívne**. $AB \neq BA$ (vo všeobecnosti)

Násobenie matíc **je asociatívne**. $(AB)C = A(BC)$

Jednotková matica I je štvorcová matica, ktorá má jednotky na hlavnej diagonále a inde nuly.

Pre každú maticu $A_{m\times n}$ platí: $A_{m\times n} \cdot I_{n\times n} = A_{m\times n}$ $\qquad I_{m\times m} \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$

Transponovaná matica A^T sa získa z matice A výmenou riadkov so stĺpcami, t. j. ak $A = (a_{ij})_{m\times n}$, potom $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$.

Inverzná matica k štvorcovej matici A je matica A^{-1} (rovnakého typu), ktorá vyhovuje rovniciam

$A \cdot A^{-1} = I$ a $A^{-1} \cdot A = I$.

Ak inverzná matica k štvorcovej matici A existuje, je jednoznačne určená.

Inverzná matica existuje iba k štvorcovej matici, ktorá po úprave na redukovaný tvar (pomocou ERO 1 - 3) nemá nulové riadky.

Inverznú maticu k matici A hľadáme pomocou Gaussovej eliminačnej metódy aplikovanej na maticu A rozšírenú o jednotkovú maticu.

$$\big(A \mid I\big) \quad \sim \quad (\text{ERO } 1 - 3) \quad \sim \quad \big(I \mid A^{-1}\big)$$

Sústavu lineárnych rovníc môžeme riešiť aj pomocou inverznej matice.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Sústavu prepíšeme do maticovej formy

$$A \cdot X = B$$

Riešenie má potom tvar

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Matice je tiež možné použiť na **šifrovanie správ**.

Najprv si želaný text prevedieme do číselného tvaru (podľa vopred zvoleného kľúča) a zapíšeme do maticovej formy $T_{m\times n}$. Text zašifrujeme tak, že ho vynásobíme nejakou štvorcovou maticou $S_{m\times m}$, t. j.

$$S \cdot T = Z.$$

Zašifrovanú správu potom rozšifrujeme výpočtom

$$T = S^{-1} \cdot Z.$$