(SYSTÉM)
# SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC O 2 (A VIAC) NEZNÁMYCH (n-ROZOB.) ①

$n=2$ ($n=3$)

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

## a) METÓDY RIEŠENIA

1) SUBSTITUČNÁ
2) PORovnávacia
3) SČÍTACIA (ADITÍVNA)
4) GRAFICKÁ
5) POMOCOU DETERMINANTOV

## b) RIEŠITEĽNOSŤ

1) SYSTÉM NEMÁ RIEŠENIE
2) — " — MÁ NEKONEČNE VEĽA RIEŠENÍ
3) MÁ JEDINÉ RIEŠENIE.

1) $3x - 2y = 4 \quad /\cdot(-2)$
$6x - 4y = 5$ ↵

$-6x + 6x + 4y - 4y = -8 + 5$

$0 = -3$ nepravda!

$\Rightarrow$ SYSTÉM NEMÁ RIEŠENIE

2) $3x - 2y = 4$
$6x - 4y = 8 \quad /\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$ ↑+

$0 = 0$

MÁ NEK. VEĽA RIEŠENÍ

$3x - 2y = 4$ $\quad y = t$

$3x = 4 + 2t$

$x = \frac{4+2t}{3}$ $\quad \left(\frac{4+2t}{3}, t\right)$

$t = 0$; $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

$3 \cdot \frac{4}{3} - 2 \cdot 0 = 4$ $\quad x \quad y$

$t \in R$ $\quad t = 1$

$(2, 1)$

3) SYSTÉM MÁ JEDINÉ RIEŠENIE

$$\begin{array}{l} \cdot\ 3x-2y=4 \quad (-2) \\ \quad 6x+4y=5 \quad / \end{array}$$

$$8y=-3$$

$$y=-\frac{3}{8}$$

$$3x-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=4$$

$$3x=4-\frac{6}{8}$$

$$3x=4-\frac{3}{4}$$

$$3x=\frac{13}{4}$$

$$x=\frac{13}{12}$$

$$\left(\frac{13}{12};-\frac{3}{8}\right)$$

OVERENIE.

$$L^U=3\cdot\frac{13}{12}-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{13}{4}+\frac{3}{4}=\frac{16}{4}=4$$

$$L^U=P$$

$$L^U=6\cdot\frac{13}{12}+4\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$L^U=P$$

4) GRAFICKÁ METÓDA

$a_1x + b_1y = c_1$

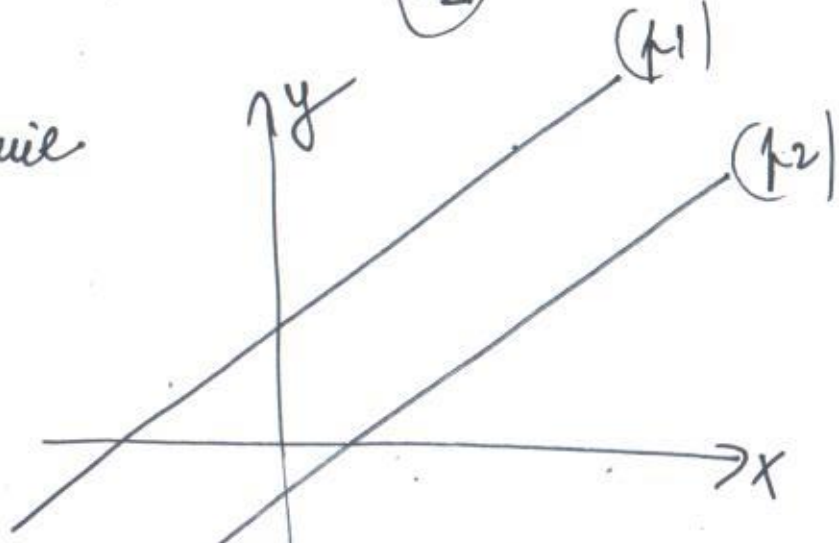
$a_2x + b_2y = c_2$

$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$ (p1) grafom je priamka

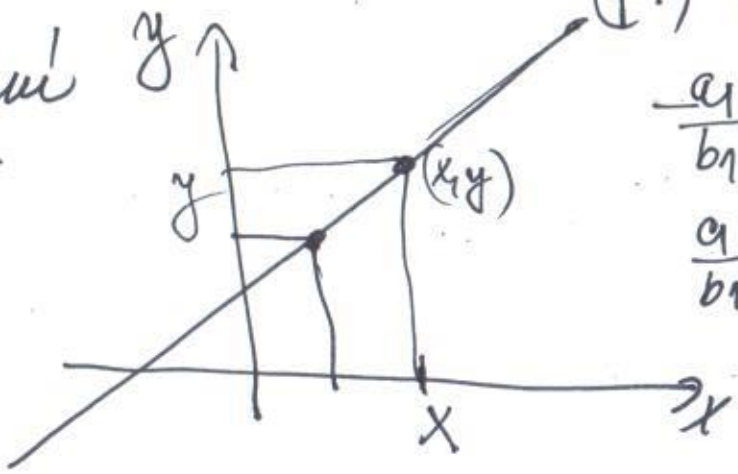
$y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}$ (p2)

$-\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

1) jedno riešenie



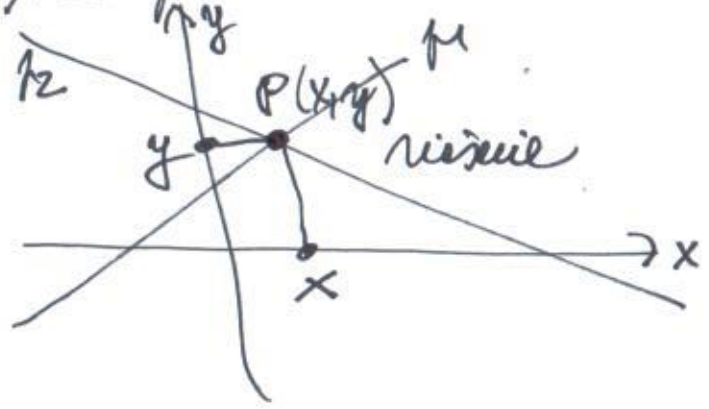

2) nekonečne veľa riešení




$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ ∧

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$

3) nemá jediné riešenie



PRÍKLAD

$3x-2y=4$

$x+3y=5$

1) SUBSTITUČNÁ

$3x-2y=4$

$x=5-3y$

$3(5-3y)-2y=4$

$15-9y-2y=4$

$-11y=-11$

$y=1$ $\quad (2,1)$

$x=5-3y=5-3=2$

2) POROVNÁVACIA METÓDA

$3x-2y=4$

$x+3y=5$

$x=\frac{4+2y}{3} \wedge x=5-3y$

$\frac{4+2y}{3}=5-3y \quad /\cdot 3$

$4+2y=15-9y$

$11y=11 \Rightarrow y=1 \quad x=2$

$3x - 2y = 4$

$x + 3y = 5$

3) SČÍTACIA (ELIMINAČNÁ)

$3x - 2y = 4 \mid \cdot 3$

$x + 3y = 5 \mid \cdot 2$

$9x - 6y = 12$

$2x + 6y = 10$

$11x = 22$

$x = 2$

$2 + 3y = 5$

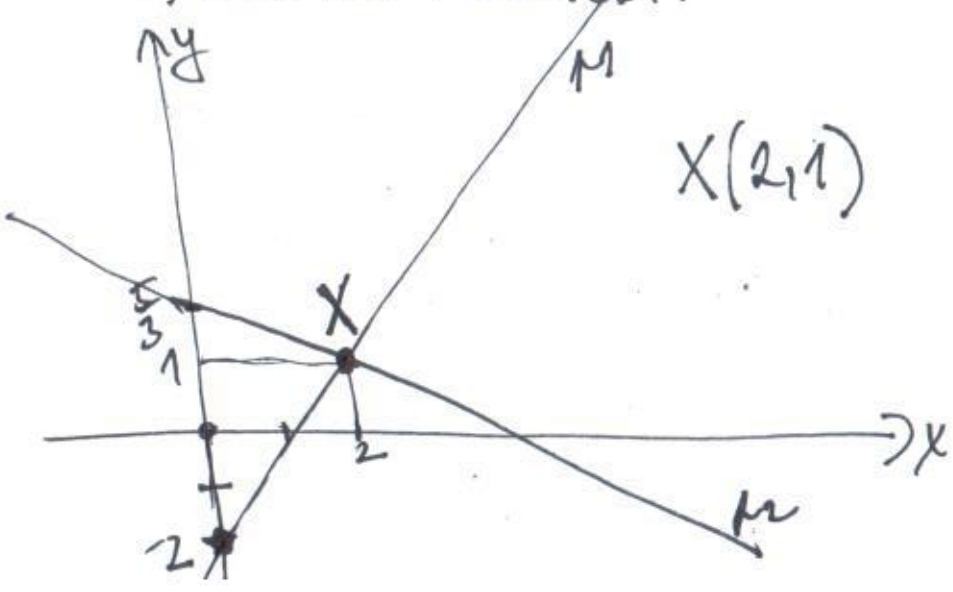
$3y = 3$

$y = 1$

$y = \frac{3x - 4}{2}$ (p1)

$y = \frac{5 - x}{3}$ (p2)

4) GRAFICKÁ METÓDA



5) POMOCOU DETERMINANTOV

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

DETERMINANT (ČÍSLO)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 b_1$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$ MATICA SYSTÉMU

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - b_1 c_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - c_1 a_2$$

diagonála HLAVNÁ

vedľajšia diagonála

RIEŠENIE SYSTÉMU:

$$x = \frac{D_1}{D} \quad , \quad y = \frac{D_2}{D} \quad , \quad \text{(ZA PREDPOKLADU, ŽE } D \neq 0\text{)}$$

ak $D \neq 0$, SYSTÉM MÁ JEDINÉ RIEŠENIE

ak $D = 0$ — BOD ŽIADNE ALEBO NEK. VEĽA RIEŠENÍ

$3x-2y=4$

$x+3y=5$

---

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3\cdot3-(-2)\cdot1=9+2=\underline{\underline{11}} \qquad D\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=12-(-2)\cdot5=12+10=\underline{\underline{22}}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=3\cdot5-1\cdot4=15-4=\underline{\underline{11}}$$

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{22}{11}=\underline{\underline{2}}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{11}{11}=\underline{\underline{1}}$$

$3x - 2y = 4$
$6x - 4y = 5$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 3.(-4) - (-2).6 = \underline{\underline{0}}$$

NEMÁ RIEŠENIE

---

$3x - 2y = 4$
$6x - 4y = 8$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

MÁ NEK. VEĽA RIEŠENÍ

NEMÔŽEME POUŽIŤ NA RIEŠENIE METÓDU DETERMINANTOV, ALE INÚ METÓDU.

# DETERMINANTY 3. STUPŇA

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

---

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

ak $D \neq 0$

$$x = \frac{D_1}{D}; \quad y = \frac{D_2}{D}; \quad z = \frac{D_3}{D}$$

---

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - (c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3b_1a_2)$$

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

PRIMER.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)1 + 1\cdot 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1\cdot 1 - \left[(-1)(-1)(-1) + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\right]$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -1-1-1 - [-1+1+1] = -3-1 = \underline{\underline{-4}}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

PŘÍKLAD.

$$x+y-z=17$$
$$x+z-y=13$$
$$y+z-x=7$$

$$x+y-z=17$$
$$x-y+z=13$$
$$-x+y+z=7$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 17\\ 1 & -1 & 13\\ -1 & 1 & 7\end{vmatrix}=-7+17-13-(17+13+7)=-3-37=\underline{-40}$$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1-1-1-(-1+1+1)=-3-1=\underline{-4}$$

$$\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 1 & - & 1\end{matrix}$$

$$\underline{(15;12;10)}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}17 & 1 & -1\\ 13 & -1 & 1\\ 7 & 1 & 1\end{vmatrix}=-17-13+7-(7+17+13)=-23-37=\underline{-60}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 17 & -1\\ 1 & 13 & 1\\ -1 & 7 & 1\end{vmatrix}=13+(-17)-7-(13+7+17)=-11-37=\underline{-48}$$

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-60}{-4}=\underline{15}\qquad y=\frac{-48}{-4}=\underline{12}\qquad z=\frac{-40}{-4}=\underline{10}$$

# SLOVNÉ ÚLOHY O 2-3 NEZNÁMYCH

OTEC JE O 8 ROKOV STARŠÍ AKO JE TROJNÁSOBNÝ VEK SYNA.
ZA 20 ROKOV BUDE OTEC 2X TAKÝ STARÝ AKO SYN.
KOĽKO ROKOV MÁ OTEC A KOĽKO MÁ SYN?

RIEŠENIE

OTEC ... x rokov
SYN ... y rokov

$$x - 8 = 3 \cdot y$$
$$x + 20 = (y + 20) \cdot 2$$

$$x = 44$$
$$y = 12$$

VEĽKOTCA JE 44 ROKOV, VEK SYNA JE 12 ROKOV.

PRÍKLAD

A, B, C

ROBOTNÍCI A a B BY JU VYKONALI ZA 12 DNÍ
B a C — " — 20 DNÍ
A a C — " — ZA 15 DNÍ

AKO DLHO BY PRÁCU VYKONÁVAL KAŽDÝ SÁM?
ZA KOĽKO DNÍ BY VYKONALI PRÁCU VŠETCI TRAJA SPOLOČNE?

x dní 1. ROB. A ZA 1 DEŇ ... $\frac{1}{x}$
y dní 2. ROB. B ZA 1 DEŇ $\frac{1}{y}$
z dní 3. ROB C — " — $\frac{1}{z}$

$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$

$\frac{20}{y} + \frac{20}{z} = 1$

$\frac{15}{x} + \frac{15}{z} = 1$

$$\frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1$$

$$\frac{20}{y}+\frac{20}{z}=1$$

$$\frac{15}{x}+\frac{15}{z}=1$$

---

SUBST.

$\frac{1}{x}=X$

$\frac{1}{y}=Y$

$\frac{1}{z}=Z$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{20} \Rightarrow \underline{\underline{x=20}}$ ;

$\underline{\underline{y=30}}$ ;

$\underline{\underline{z=60}}$ ;

---

$12X+12Y=1 \quad |\cdot(-20)$

$20X+20Z=1 \quad |\cdot(12)$

$15X+15Z=1$

---

$-240X-240Y=-20$

$240X+240Z=12$

---

$15X+15Z=1$

$15\cdot X+15\cdot\frac{1}{60}=1$

$15X=1-\frac{1}{4}$ $\quad 15X=\frac{3}{4}$ $\quad X=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$ ;

---

$12\cdot\frac{1}{20}+12\cdot Y=1$

$\frac{3}{5}+12Y=1 \Rightarrow 12Y=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$Y=\frac{2}{5\cdot 12}=\frac{2}{60}=\underline{\underline{\frac{1}{30}}}$

---

$-240X+240Z=-8$

$15X+15Z=1 \quad |\cdot 16$

---

$-240X+240Z=-8$

$240X+240Z=16$

---

$480Z=8$

$Z=\frac{8}{480}=\underline{\underline{\frac{1}{60}}}$

$\begin{array}{r} 15\cdot 16 \\ 90 \\ \hline 240 \end{array}$

VŠETCI SPOLOČNE ZA $x$ dní

$$\frac{x}{20} + \frac{x}{30} + \frac{x}{60} = 1$$

$$\frac{3x + 2x + x}{60} = 1$$

$$\frac{6x}{60} = 1$$

$$6x = 60$$

$$x = 10$$

SPOLOČNE ZA 10 DNÍ.