"n-faktoriál"

Pre každé celé nezáporné číslo n, definujeme $n!$ ako výraz $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1 = n(n-1)!$, pričom $0! = 1$.

Platí : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $\binom{n}{n} = 1, \binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n$.

Variácie .

Tvoríme skupiny k prvkov z n-prvkovej množiny, pričom na ***poradí prvkov záleží, teda dve skupiny s odlišným poradím prvkov budeme považovať za rôzne.***

Definícia. Variácie bez opakovania.

Nech k a n sú prirodzené čísla, pričom $k \leq n$. Nech je daná množina M, ktorá pozostáva z n rôznych prvkov. Potom ***variáciou k-tej triedy z n prvkov bez opakovania*** $V_k(n)$ budeme rozumieť každú usporiadanú skupinu k prvkov vytvorenú z množiny M tak, že sa v nej žiadny prvok neopakuje. Počet variácií $V_k(n)$ sa vypočíta podľa vzorca

$$V_k(n) = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (1)$$

Definícia. Variácie s opakovaním.

Nech k a n sú prirodzené čísla, pričom $k \leq n$. Potom ***variáciou k-tej triedy z n prvkov s opakovaním*** $V'_k(n)$ budeme rozumieť každú skupinu k prvkov vytvorenú z prvkov množiny M tak, že sa v nej jednotlivé prvky môžu opakovať. Počet variácií ***k-tej triedy z n prvkov s opakovaním*** $V'_k(n)$ sa vypočíta podľa vzorca:

$$V'_k(n) = n^k \qquad (2)$$

Definícia. Permutácie bez opakovania.

Variácie n-tej triedy z n prvkov sa nazývajú ***permutácie***. Označujeme ich $P(n)$. Počet permutácií je:

$$P(n) = V_n(n) = n(n-1)(n-2)\ldots.1 = n! \qquad (3)$$

Definícia. Permutácie s opakovaním.

Ak sa skupina n prvkov skladá z n_1 prvkov jedného druhu, n_2 prvkov druhého druhu,... n_r prvkov $r-$tého druhu, pričom $n_1 + n_2 + \ldots n_r = n$, potom sa každá usporiadaná $n-$tica nazýva ***permutáciou s opakovaním*** a označuje sa $P'_{n_1,n_2,n_3,\ldots n_r}(n)$.

Počet permutácií s opakovaním sa vypočíta podľa vzorca:

$$P'_{n_1,n_2,n_3,\ldots n_r}(n) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots n_r)!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!} \qquad (4)$$

Budeme zostavovať skupiny veľkosti k z $n-$prvkovej množiny, ale nebude záležať na ich poradí, teda množiny nebudú usporiadané.

Definícia. Kombinácie bez opakovania.

Nech je daná konečná množina M obsahujúca n rôznych prvkov. Každá podmnožina množiny M, ktorá má k rôznych prvkov, sa nazýva ***kombináciou*** $k-tej$ ***triedy z*** n ***prvkov bez opakovania.*** (Na poradí v skupinách nezáleží.) Kombinácie označuje znakom $C_k(n)$ a ich počet sa vypočíta podľa vzorca

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{5}$$

Definícia. Kombinácie s opakovaním.

Ak zostavujeme $k-$členné skupiny tak, že sa jednotlivé prvky môžu opakovať a nezáleží na poradí prvkov v skupine, hovoríme o ***kombináciách*** $k-$***tej triedy s opakovaním*** $C'_k(n)$. Ich počet sa vypočíta podľa vzorca:

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} \tag{6}$$

1) Rozdeľovanie n nerozlíšiteľných predmetov do k skupín.

a) Pripúšťajú sa prázdne skupiny:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n} \tag{7}$$

b) Nepripúšťajú sa prázdne skupiny, teda každá z $k-$skupín má obsahovať aspoň jeden prvok:

$$\binom{n-1}{k-1} \tag{8}$$

c) V každej skupine je aspoň q prvkov:

$$\binom{n-qk+k-1}{k-1} \tag{9}$$

Príklad.
Tri deti natrhali 40 jabĺk. Určte počet spôsobov, ako si ich môžu rozdeliť, ak

a) sa nekladú žiadne podmienky
b) Každé dieťa dostane aspoň jedno jablko
c) Každé dieťa dostane aspoň päť jabĺk

Riešenie:

a) sa nekladú žiadne podmienky $\binom{40+2}{2} = 861$
b) Každé dieťa dostane aspoň jedno jablko $\binom{40-1}{2} = 741$
c) Každé dieťa dostane aspoň päť jabĺk $\binom{40-3*5+2}{2} = 351$

2) Rozdeľovanie n rozlíšiteľných predmetov do k skupín.

2.1. V skupinách záleží na poradí:

a) Pripúšťame aj prázdne skupiny $\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$

b) Nepripúšťame prázdne skupiny $n!\binom{n-1}{k-1}$

Príklad.

Je daných 6 rôznych vlajok, ktoré potrebujeme zavesiť na 3 stožiare, pričom aj poradie vlajok na danom stožiari je dôležité. Určte počet spôsobov, akými môžeme vlajky na stožiare zavesiť, ak :

a) Niektorý stožiar môže zostať aj prázdny
b) Žiadny stožiar nesmie zostať prázdny

Riešenie:

a) $\frac{(6+3-1)!}{2!} = \frac{8!}{2} = 56 * 360 = 20160$
b) $6!\binom{6-1}{2} = 7200$

2.2. V skupinách nezáleží na poradí:

c) Pripúšťame aj prázdne skupiny: k^n (10)
d) Nepripúšťame prázdne skupiny:

$$k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n + \cdots (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}1^n \qquad (11)$$

Príklad.

Vo výťahu, ktorý zastavuje na 4 poschodiach sa vezie 8 ľudí. Koľkými spôsobmi môžu vystúpiť z výťahu, ak :

a) Na niektorom poschodí nevystúpi nikto
b) Na každom poschodí vystúpi aspoň jeden človek

Riešenie:

a) $4^8 = 65536$
Každý z ôsmich ľudí môže vystúpiť na ľubovolnom poschodí – má teda 4 možnosti.
b) $4^8 - \binom{4}{1}(4-1)^8 + \binom{4}{2}(4-2)^8 - \binom{4}{3}1^8 = 65536 - 26244 + 1536 - 4 = 40824$

Príklad.

V škôlke kúpili 7 kusov rôznych druhov malých autíčok, ktoré chú rozdeliť štyrom deťom tak, aby žiadne dieťa nezostalo bez darčeka. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť?

Riešenie:

$$4^7 - \binom{4}{1}(4-1)^7 + \binom{4}{2}(4-2)^7 - \binom{4}{3}(4-3)^7 = 16384 - 8748 + 768 - 4 = 8400$$

Iný spôsob riešenia:

Číslo 7 sa dá rozložiť na 4 sčítance takto:

a) 1 1 1 4
b) 1 2 1 3
c) 1 2 2 2
a) 4 autíčka vyberieme zo siedmich, možností je:
$\binom{7}{4}.3.2.1$, štvoricu vieme dať na 4 pozície, je to teda $\binom{7}{4}.3.2.1.4 = 840$ možností.
b) 3 autíčka vyberieme zo siedmich, možností je:
$\binom{7}{3}.\binom{4}{2}.2.1$, okrem toho dvojicu a trojicu vieme dať na $\frac{4!}{2!} = 12$ pozícií, je to teda spolu $35.12.12 = 5040$ možností.
c) Podobne v poslednom prípade je : $\binom{7}{2}.\binom{5}{2}.\binom{3}{2}.1$, a opäť môžu byť 4 rôzne usporiadania štvorice 1222, takže dostaneme 2520 možností.

Celkove je teda $840 + 5040 + 2520 = 8400$ možností.

Binomická veta.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots \binom{n}{n}a^0 b^n$$

k -ty člen rozvoja je člen $\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$.