2. domáca úloha z predmetu 1-AIN-121 Matematika (1) ZS 2019/20

Mário Chebeň

1.novembra 2019

1. príklad

Kompozíciou čísla n rozumieme každú jeho usporiadanú partíciu v tvare

$$x_1 + \cdots + x_k = n,$$

kde $k \geq 1$ a $x_i \geq 1$ pre $i = 1, \ldots, k$. Spočítajte počet kompozícií čísla $n \geq 1$.

Riešenie 1. príkladu

v riešení tohto príkladu postupujem systematicky týmto spôsobom.

$$x_1 + \cdots + x_k = n$$

$$y_1 + \cdots + y_{k+1} = n$$

$$y_1 + y_2 \cdots + y_{k+k} = n$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + k = n - k$$

V dalšiom kroku vytvorím výsledok ktorý je toto kombinačné císlo .

$\binom{n-k+(k-1)}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$

Podmienka k tomuto vysledku je :
(n-1) $\geq (k-1)$

2. príklad

Určite konštantný koeficient pri člene x^5 v úplnom rozvoji výrazu

$$\left(\frac{7}{x^2} + 8 - 9x\right)^{11}.$$

Riešenie 2. príkladu

Najprv prepíšem rozvoj do tvaru z ktorym sa nám lepšie precuje.

$$\left(7x^{-2} + 8 - 9x\right)^{11}.$$

V dalšiom prepíšem mocniny nad x pomocou koeficientov (a,b,c):

$$7x^{-2a} + 8^{0b} - 9x^{c}$$

Z čoho už vieme urobit rovnicu : -2a + 0b + c =5

v dalšiom kroku postupujem tym sposobom že viem že a + b + c = 11
a = 1 , b = 3 , c = 7........... $\binom{11}{1,3,7}*7^1 * 8^3 * (-9)^7+$
a = 2 , b = 0 , c = 9........... $\binom{11}{2,0,9}*7^2 * 8^0 * (-9)^9+$
a = 0 , b = 6 , c = 5........... $\binom{11}{0,6,5}*7^0 * 8^6 * (-9)^5$

Ako už som v bode predtým načrtol výsledok vypočitame sčitanim týchto 3 čísel:

$$\binom{11}{1,3,7}*7^1 * 8^3 * (-9)^7+\binom{11}{2,0,9}*7^2 * 8^0 * (-9)^9+\binom{11}{0,6,5}*7^0 * 8^6 * (-9)^5=z$$

3. príklad

V 1. kole súťažilo proti sebe 10 dvojíc. Koľkými spôsobmi môžeme z nich vytvoriť 10 nových súťažných dvojíc pre 2. kolo (čiže žiadna dvojica s 1. kola sa nestretne opäť v 2. kole).

Pokyny. Výsledok vyjadrite pomocou súčtovej notácie $\sum$.

Riešenie 3. príkladu

Na riešenie tohoto príkladu som zvolil princíp exklúzie a inklúzie, najprv teda vypočítam všetky možnosti. Počet všetkých možností je 2*10!. Tieto možnosti delíme dva na desiatu, lebo nám nezáleží na poradí, a ďalej delíme výsledok 10!, z toho istého dôvodu, ako keď usádzame ľudí ku kruhovému stolu.

$$\frac{2*10!}{2^{10}} = x$$

$$\frac{x}{10!}$$

Princíp exklúzie a inklúzie:

$$\frac{2*10!}{2^{10}*10!} - \binom{10}{1}\frac{2*9!}{2^{9}*9!} + \binom{10}{2}\frac{2*8!}{2^{8}*8!} - ..... + \binom{10}{10}\frac{2*0!}{2^{0}*0!}$$

Nakoniec to vyjadrím sumou:

$$\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} \frac{20-2k!}{(10-k)!2^(10-k)}$$