SemMat1 - cvičenie 8 - Geometrická postupnosť a rady

1. Určte prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti, v ktorej platí

a) $a_4 = -\frac{8}{3}$, $a_6 = -\frac{32}{3}$.

Riešenie:

$a_4 = a_1 q^3$ $\quad a_6 = a_1 q^5$ $\quad \frac{a_4}{q^3} = \frac{a_6}{q^5}$ $\quad a_1 = \frac{a_4}{q^3}$ $\quad a_1 = \frac{a_6}{q^5}$

$q^2 a_4 = a_6 \iff q^2 = \frac{a_6}{a_4} = \frac{-\frac{32}{3}}{-\frac{8}{3}} = \frac{32}{8}$, čiže $q = \pm\sqrt{\frac{32}{8}} = \pm 2$, odkiaľ je $a_1 = \frac{-\frac{8}{3}}{2^3} = -\frac{1}{3}$, alebo $a_1 = \frac{-\frac{8}{3}}{(-2)^3} = \frac{1}{3}$. Úloha má dve riešenia: Prvý člen postupnosti je $a_1 = -\frac{1}{3}$ a $q = 2$ alebo $a_1 = \frac{1}{3}$ a $q = -2$.

b) $a_1 - a_2 + a_3 = 9$ a $a_4 - a_5 + a_6 = 72$.

Riešenie:

Prvú rovnicu si prepíšeme do tvaru $a_1 - a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = a_1 \cdot (1 - q + q^2) = 9 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{1 - q + q^2}$

Druhu rovnicu upravíme na $a_1 q^3 - a_1 q^4 + a_1 q^5 = a_1 q^3 \cdot (q^2 - q + 1) = 72$.

Dosadíme prvú rovnicu do druhej rovnice a dostaneme

$\frac{9}{q^2 - q + 1} \cdot q^3 \cdot (q^2 - q + 1) = 72$, čiže $9q^3 = 72$, odkiaľ $q^3 = \frac{72}{9}$, teda $q^3 = 8$. Musí teda platiť, že $q = \sqrt[3]{8} = 2$. Potom $a_1 = \frac{9}{1 - q + q^2} = \frac{9}{3} = 3$.

c) $a_1 + a_4 = 112$ a $a_2 + a_3 = 48$.

Riešenie:

Prvú rovnicu si prepíšeme a upravíme: $a_1 + a_4 = a_1 + a_1 q^3 = a_1 \cdot (1 + q^3)$, odtiaľ $a_1 \cdot (1 + q^3) = 112$, teda $a_1 = \frac{112}{1 + q^3}$. Rovnako druhú rovnicu: $a_2 + a_3 = a_1 q + a q^2 = a_1 \cdot (q^2 + q)$, odtiaľ $a_1 \cdot (q^2 + q) = 48$, teda $a_1 = \frac{48}{q \cdot (1 + q)}$. Tieto úpravy môžeme vykonať len za predpokladu, že $q \neq -1$ ani $q \neq 0$ (čitateľ si ľahko overí, že toto nemôžu byť hľadané riešenia). Ďalej využijeme známy vzťah $(q^3 + 1) = (q^2 - q + 1) \cdot (q + 1)$ a dostaneme $\frac{112}{(q^2 - q + 1) \cdot (q + 1)} = \frac{48}{q \cdot (q + 1)}$, čo upravíme na $112q = 48q^2 - 48q + 48$. Túto kvadratickú rovnicu ešte zjednodušíme na $48q^2 - 160q + 48 = 0$ a po vydelení rovnice číslom 16 dostaneme $3q^2 - 10q + 3 = 0$.

Diskriminant $D=b^2-4ac=100-36=64$, teda $q_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{+10\pm 8}{6}=\begin{cases} q_1=3 \\ q_2=\frac{1}{3} \end{cases}$.

K týmto dvom riešeniam dopočítame

$$a_{1,1}=\frac{48}{3\cdot(1+3)}=\frac{48}{3\cdot 4}=4,\ a_{1,2}=\frac{48}{\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)}=\frac{48}{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{48}{\frac{4}{9}}=\frac{48\cdot 9}{4}=12\cdot 9=108.$$

d) $a_1+a_2=4$ a $a_2-a_4=-24$

Riešenie:

Prvú rovnicu napíšeme ako $a_1+a_1q=4$, resp. $a_1\cdot(1+q)=4$ a upravíme na $a_1=\frac{4}{1+q}$.

Ľavú stranu druhej rovnice rovnako upravíme na tvar $a_4-a_4=a_1q-a_1q^3=a_1q\cdot\left(1-q^2\right)=a_1q\cdot(1-q)\cdot(1+q)$.

Prvá rovnica dosadená do druhej rovnice nám dá

$\frac{4}{1+q}\cdot q\cdot(1-q)\cdot(1+q)=-24$, odkiaľ $4q-4q^2=-24$, čiže $q-q^2=-6$. Hľadáme teda riešenie kvadratickej rovnice $q^2-q-6=0$. Diskriminant $D=b^2-4ac=1+24=25$, teda

$$q=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{+1\pm 5}{2}=\begin{cases} q_1=3 \\ q_2=-2 \end{cases}$$ odkiaľ $a_{1,1}=\frac{4}{1+q}=\frac{4}{4}=1$, $a_{1,2}=-4$.

e) $a_1+a_4=\frac{70}{9}$ a $a_1-a_2+a_3=\frac{28}{9}$.

Riešenie:

Prvú rovnicu napíšeme ako $a_1+a_1q^3=\frac{70}{9}$ a upravujeme na $a_1\cdot\left(1+q^3\right)=\frac{70}{9}$ a napokon na $a_1=\frac{70}{9\cdot\left(1+q^3\right)}$. Tu si dávame pozor, aby sme nedelili nulou, takže ďalej budeme uvažovať, že $q\neq -1$ (čitateľ si ľahko overí, že toto nemôže byť hľadané riešenie).

Druhá rovnica je $a_1-a_1q+a_1q^2=\frac{28}{9}$, čo upravíme na $a_1=\frac{28}{9\cdot\left(1-q+q^2\right)}$.

Porovnaním oboch rovníc máme: $\frac{70}{9\cdot\left(1+q^3\right)}=\frac{28}{9\cdot\left(1-q+q^2\right)}$, odkiaľ $\frac{70}{28}=\frac{\left(1+q^3\right)}{\left(1-q+q^2\right)}$. Úpravou zlomku na ľavej strane a vydelením polynómov na pravej strane rovnice, dostaneme $\frac{5}{2}=q+1$, čiže $q=\frac{3}{2}$.

Nakoľko $a_1=\frac{70}{9\cdot\left(1+q^3\right)}$, je $a_1=\frac{70}{9\cdot\left(1+\frac{27}{8}\right)}=\frac{70}{9\cdot\frac{35}{8}}=\frac{16}{9}$.

2. Určte také číslo, aby postupne zväčšené o 7, 15 a 27 dalo 3 za sebou idúce členy geometrickej postupnosti.

Riešenie:

Číslo postupne zväčšené o 7, 15, 27 môžeme zapísať ako $a+7$, $a+15$ a $a+27$. Pretože to majú byť členy geometrickej postupnosti, musí pre ne platiť ešte aj $a_1 = a+7$, $a_2 = a+15 = a_1 q$ a $a_3 = a+27 = a_1 q^2$. Dosadením prvej rovnice do druhej aj tretej dostávame $a+15 = (a+7)\cdot q$ a $a+27 = (a+7)\cdot q^2$. Teraz si môžeme z jednej vyjadriť $q = \dfrac{a+15}{a+7}$ a dosadiť ho do poslednej. Tu si dávame pozor, aby sme nedelili nulou, takže ďalej budeme uvažovať, že $a \neq -7$ (čitateľ si ľahko overí, že toto nemôže byť hľadané riešenie):

$a+27 = (a+7)\cdot \dfrac{(a+15)^2}{(a+7)^2}$ a teda $(a+27)\cdot(a+7) = (a+15)^2$.

Túto rovnicu roznásobíme a upravíme na $a^2 + 34a + 189 = a^2 + 30a + 225$, teda $4a = 36$, čiže $a = 9$.

Koho by zaujímalo, môže si dopočítať aj $q = \dfrac{9+15}{9+7} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2}$ a spomínané tri členy postupnosti sú 16, 24 a 36.

---

3. Určte n-tý člen postupnosti a určte, či sa jedná o geometrickú postupnosť:

a) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$

b) $5, 10, 40, 320, \ldots$

c) $\frac{2}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{8}{125}, -\frac{16}{625}, \ldots$

Riešenie:

a) Vidíme, že každý ďalší člen je 3x väčší ako ten predchádzajúci. Ide teda o geometrickú postupnosť s kvocientom $q = 3$. Po zohľadnení prvého člena máme $a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{1}{3} 3^{n-1} = 3^{n-2}$.

b) Pozrime sa na pomer dvoch po sebe idúcich členov: $\frac{5}{10} = 2$, $\frac{40}{10} = 4$, $\frac{320}{40} = 8$. Pomer teda nie je konštantný, čiže sa nejedná o geometrickú postupnosť. Vidíme, že n-tý člen postupnosti je 2^{n-1}-krát väčší ako člen číslo $n-1$. Môžeme však odvodiť vzorček pre a_n. Vieme že

$$a_n = 2^{n-1} a_{n-1} = 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} a_{n-2} = \cdots = 2^{n-1} 2^{n-2} \cdots 2^1 a_1 = 2^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} a_1 = 5 \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

c) Vidíme, že pomer dvoch nasledujúcich členov je vždy $-\frac{2}{5}$. Ide teda o geometrickú postupnosť s kvocientom $q = -\frac{2}{5}$. Po zohľadnení prvého člena máme $a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

---

4. Zistite, či je daná postupnosť geometrická. Ak áno, vypočítajte prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti:

---

a) $a_n = 3^n + 2$

b) $a_n = 3^{n+2}$

c) $a_n = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

d) $a_n = (n - 0{,}5)^2$

e) $a_n = 2^{(n-0{,}5)}$

f) $a_n = n(n+2)$

g) $a_n = \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2-n}$

Riešenie:

a) Spočítajme si $a_1 = 3^1 + 2 = 5$, $a_2 = 3^2 + 2 = 11$, $a_3 = 3^3 + 2 = 29$. Vidíme, že $\frac{a_2}{a_1} = \frac{11}{5} \neq \frac{29}{11} = \frac{a_3}{a_2}$ a teda nejde o geometrickú postupnosť.

b) Vidíme, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{3^{n+2}} = 3$ a teda ide o geometrickú postupnosť s kvocientom $q = 3$ a prvým členom $a_1 = 3^{1+2} = 27$ a $a_n = 27 \cdot 3^{n-1}$.

c) Vidíme, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n}{\frac{2}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}} = \frac{1}{8}$ a teda ide o geometrickú postupnosť s kvocientom $q = \frac{1}{8}$ a prvým členom $a_1 = \frac{2}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^0 = \frac{2}{7}$.

d) Spočítajme si $a_1 = (1-0{,}5)^2 = \frac{1}{4}$, $a_2 = (2-0{,}5)^2 = \frac{9}{4}$, $a_3 = (3-0{,}5)^2 = \frac{25}{4}$. Vidíme, že $\frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{1} \neq \frac{25}{9} = \frac{a_3}{a_2}$ a teda nejde o geometrickú postupnosť.

e) Vidíme, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1-0{,}5}}{2^{n-0{,}5}} = 2$ a teda ide o geometrickú postupnosť s kvocientom $q = 2$ a prvým členom $a_1 = 2^{1-0{,}5} = \sqrt{2}$ a $a_n = \sqrt{2} \cdot 2^{n-1}$.

f) Spočítajme si $a_1 = 1 \cdot (1+2) = 3$, $a_2 = 2 \cdot (2+2) = 8$, $a_3 = 3 \cdot (3+2) = 15$. Vidíme, že $\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{3} \neq \frac{15}{8} = \frac{a_3}{a_2}$ a teda nejde o geometrickú postupnosť.

g) Vidíme, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{6}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{2-(n+1)}}{\frac{6}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{2-n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$ a teda ide o geometrickú postupnosť s kvocientom $q = \frac{4}{3}$ a prvým členom $a_1 = \frac{6}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$ a $a_n = \frac{9}{10}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

---

5. Vypočítajte členy a_2, a_5, a_7 geometrickej postupnosti, ak poznáte

a) $a_1 = 2, a_4 = 1$ b) $a_2 = 4, q = 8$ c) $a_8 = 2, a_{10} = \frac{1}{2}$ d) $a_3 = -3, q = -\frac{1}{3}$ e) $a_{161} = 2a_{159}, a_1 = \sqrt[3]{2}$

Riešenie:

a) Vieme, že $a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$ a teda $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{1}{2}$ a teda $q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{3}}$. Potom $a_2 = a_1 \cdot q = 2 \cdot 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$,

$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 2 \cdot \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^4 = 2 \cdot 2^{-\frac{4}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ a $a_7 = a_1 \cdot q^6 = 2 \cdot \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^6 = 2 \cdot 2^{-\frac{6}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

b) Vieme, že $a_2 = a_1 \cdot q$ a teda $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Potom $a_5 = a_2 \cdot q^3 = 4 \cdot 8^3 = 2^2 \cdot 2^9 = 2^{11}$ a $a_7 = a_2 \cdot q^5 = 4 \cdot 8^5 = 2^2 \cdot 2^{15} = 2^{17}$.

c) Vieme, že $a_{10} = a_8 \cdot q^{10-8}$ a teda $q^2 = \frac{a_{10}}{a_8} = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4}$ a teda $q = \pm\frac{1}{2}$. Potom

$a_2 = a_8 \cdot q^{-6} = 2 \cdot \left(\pm\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$,

$a_5 = a_2 \cdot q^3 = 2^7 \cdot \left(\pm\frac{1}{2}\right)^3 = 2^7 \cdot 2^{-3} \cdot (\pm 1)^{-3} = \pm 2^4 = \pm 16$ a

$a_7 = a_8 \cdot q^{-1} = 2 \cdot \left(\pm\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \cdot 2 \cdot (\pm 1) = \pm 2^2 = \pm 4$.

d) Vieme, že $a_3 = a_2 \cdot q$ a teda $a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{-3}{-\frac{1}{3}} = 9$, $a_5 = a_2 \cdot q^3 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3}$ a

$a_7 = a_2 \cdot q^5 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{9}{3^5} = -\frac{1}{27}$.

e) Vieme, že $a_{161} = a_{159} \cdot q^2$ a teda $q^2 = \frac{a_{161}}{a_{159}} = 2$ a teda $q = \pm\sqrt{2} = \pm 2^{\frac{1}{2}}$. Potom pre kladné q má úloha nasledujúce riešenia:

$a_2 = a_1 \cdot q = 2^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{6}}$, $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 2^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 2^{\frac{1}{3}} 2^2 = 2^{\frac{7}{3}}$ a $a_7 = a_5 \cdot q^2 = 2^{\frac{7}{3}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{7}{3}} 2^1 = 2^{\frac{10}{3}}$.

Pre záporné q by nám to vyšlo podobne, len každý druhý člen by mal opačné znamienko, v našom prípade by bolo záporné $a_2 = -2^{\frac{5}{6}}$ a druhé dva členy ostanú rovnaké.

---

6. Vypočítajte súčty s_4, s_6, s_{10} geometrickej postupností, ak poznáte

a) $a_1 = 1, a_4 = 8$

b) $a_2 = 2, q = 3$

c) $a_8 = 1, a_{10} = 4$

d) $a_3 = -5, q = -\frac{1}{5}$

e) $a_{161} = 2a_{159}, a_1 = \sqrt[3]{2}$

Riešenie:

a) Vieme, že $a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$ a teda $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{8}{1} = 8$ a teda $q = \sqrt[3]{8} = 2$. $s_4 = a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 15$,

$s_6 = a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 63$ a $s_{10} = a_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023$.

b) Vieme, že $a_2 = a_1 \cdot q$ a teda $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{2}{3}$. Potom $s_4 = a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = \frac{3^4 - 1}{3} = \frac{80}{3}$,

$s_6 = a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = \frac{3^6 - 1}{3}$ a $s_{10} = a_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{10} - 1}{3}$.

c) Vieme, že $a_{10} = a_8 \cdot q^2$ a teda $q^2 = \frac{a_{10}}{a_8} = 4$ a teda $q = \pm 2$. Vyriešme najskôr úlohu pre kladné q. Potom

$a_8 = a_1 \cdot q^7$ a teda $a_1 = a_8 \cdot q^{-7} = 2^{-7}$. Teraz už môžeme vypočítať $s_4 = a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 2^{-7} \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = \frac{2^4 - 1}{2^7} = \frac{15}{128}$,

$s_6 = a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 2^{-7} \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = \frac{2^6 - 1}{2^7} = \frac{63}{128}$ a $s_{10} = a_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 2^{-7} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{10} - 1}{2^7} = \frac{1023}{128}$.

Pre záporné q ide o rovnakú postupnosť, len každý druhý člen postupnosti je záporný. Súčty sú potom samozrejme celkom iné, ale vypočítajú sa podľa rovnakých vzorcov. Dopočítanie nechávame na čitateľa.

d) Vieme, že $a_3 = a_1 \cdot q^2$ a teda $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{-5}{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = -125$. Potom môžeme dopočítať

$$s_4 = a_1 \frac{1-q^4}{1-q} = (-125) \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^4}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = (-125) \cdot \frac{1-\frac{1}{625}}{1+\frac{1}{5}} = (-125) \frac{\frac{624}{625}}{\frac{6}{5}} = -104,$$

$$s_6 = a_1 \frac{1-q^6}{1-q} = (-125) \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^6}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = -5^3 \cdot \frac{\frac{5^6-1}{5^6}}{\frac{6}{5}} = \frac{-5^3\left(5^6-1\right)5}{6.5^6} = \frac{5^6-1}{6.5^2} \approx 104{,}16$$

$$s_{10} = a_1 \frac{1-q^{10}}{1-q} = (-125) \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^{10}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = -5^3 \cdot \frac{\frac{5^{10}-1}{5^{10}}}{\frac{6}{5}} = \frac{-5^3\left(5^{10}-1\right)5}{6.5^{10}} = \frac{5^{10}-1}{6.5^6} = 104{,}166656.$$

Výsledky stačí uvádzať v tvare zlomku.

e) Vieme, že $a_{161} = a_{159} \cdot q^2$ a teda $q^2 = \frac{a_{161}}{a_{159}} = 2$ a teda $q = \pm\sqrt{2}$. Riešme úlohu najskôr pre kladné q.

$$s_4 = a_1 \frac{q^4-1}{q-1} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}^4-1}{\sqrt{2}-1} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{4-1}{\sqrt{2}-1} \approx 9{,}125, \quad s_6 = a_1 \frac{q^6-1}{q-1} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}^6-1}{\sqrt{2}-1} = 2^{\frac{1}{3}} \frac{8-1}{\sqrt{2}-1} \approx 21{,}29 \text{ a}$$

$$s_{10} = a_1 \frac{q^{10}-1}{q-1} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}^{10}-1}{\sqrt{2}-1} = 2^{\frac{1}{3}} \frac{32-1}{\sqrt{2}-1} \approx 94{,}29.$$

Pre záporné q bude mať rad celkom iné súčty, ale čitateľ sa k nim ľahko dopočíta použitím rovnakých vzorcov.

---

7. Súčet prvého a tretieho člena geometrickej postupnosti je 30, súčet prvých troch členov tejto postupnosti je 42. Určite prvý člen a kvocient postupnosti.

Riešenie:

Vieme že $a_1 + a_3 = 30$, čo môžeme napísať aj ako $a_1 + a_1 \cdot q^2 = 30$. Ďalej zo zadania vieme, že $a_1 + a_2 + a_3 = 42$, čo môžeme zase zapísať ako $a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 42$. Odčítaním týchto dvoch rovníc zistíme, že $a_2 = 12$. Keďže $a_2 = a_1 \cdot q$, môžeme si z toho vyjadriť $q = \frac{12}{a_1}$ (v tomto prípade určite nedelíme nulou, lebo prvý člen nemôže byť nulový – to by boli nulové všetky členy, a teda aj ich súčet). Vzťah $q = \frac{12}{a_1}$ môžeme dosadiť do prvej rovnice a dostaneme $30 = a_1 + a_1 \cdot q^2 = a_1 + a_1 \cdot \frac{144}{a_1^2} = a_1 + \frac{144}{a_1}$. Po prenásobení a_1 dostaneme rovnicu $a_1^2 - 30a_1 + 144 = 0$. Riešime teda klasickú kvadratickú rovnicu. Vyberte si svoj vlastný obľúbený spôsob. My si ju rozložíme na $(a_1 - 6) \cdot (a_1 - 24) = 0$ a vidíme, že korene sú 6 a 24. Z informácie že $a_2 = 12$ a $a_2 = a_1 \cdot q$ dostaneme 2 riešenia: $a_1 = 6, q = 2$ a $a_1 = 24, q = 0{,}5$.

8. Pre členy geometrickej postupnosti platí $a_1 + a_4 = -21$ a $a_2 + a_5 = 42$. Určte jej *n*-tý člen!

Riešenie:

Prvú rovnicu $a_1 + a_4 = -21$ vieme zapísať aj v tvare $a_1 + a_1q^3 = -21$ a upraviť ju na $a_1(1+q^3) = -21$. Druhú rovnicu $a_2 + a_5 = 42$ vieme zapísať aj ako $a_1q + a_1q^4 = 42$ a po úprave ako $a_1q(1+q^3) = 42$. Podelením dvoch upravených rovníc dostávame $\frac{a_1q(1+q^3)}{a_1(1+q^3)} = \frac{42}{-21}$, odkiaľ $q = -2$ (pri delení si dávame pozor, aby sme nedelili nulou, čitateľ si ľahko overí, že prvý člen nemôže byť nula a kvocient nemôže byť -1).

Z prvej rovnice máme: $a_1(1+q^3) = -21$, $a_1(1-8) = -21$, $a_1 = 3$.

Hľadaný *n*-tý člen hľadanej postupnosti môžeme vyjadriť ako $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$. Rovnosti overíme tak, že vyjadríme potrebné členy: $a_1 = 3$, $a_2 = -6$, $a_4 = -24$, $a_5 = 48$.

---

9. V štvorčlennej geometrickej postupnosti je súčet nepárnych členov 5, súčet párnych 10. Koľko členov musíme sčítať, aby sme dostali číslo väčšie než 1 000 a k číslu 1 000 najbližšie

Riešenie:

Zostavme si rovnice podľa zadania, pričom 4 členy postupnosti si označíme a_1, a_2, a_3, a_4: $a_2 = a_1q$, $a_3 = a_1q^2$, $a_4 = a_1q^3$ a ešte navyše $a_1 + a_3 = 5$ a $a_2 + a_4 = 10$. Ich vzájomným dosadením dostaneme $a_1q + a_1q^3 = 10$ a $a_1 + a_1q^2 = 5$. Za predpokladu, že $q \neq 0$, môžeme druhú rovnicu napísať ako $a_1q + a_1q^3 = 5q$ a následne ju odpočítať od prvej. Dostaneme $0 = 10 - 5q$, odkiaľ $q = 2$. Keď túto hodnotu dosadíme do rovnice $a_1 + a_1q^2 = 5$, vypočítame $a_1 = 1$ (pre zvedavcov uvádzame, že ďalšie členy sú $a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$). Teraz nám už chýba len zistiť najmenší počet členov, ktoré nám v súčte dajú číslo väčšie ako 1000. Vieme, že súčet prvých *n* členov je

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Hľadáme teda takú najmenšiu mocninu dvojky, pre ktorú je $2^n - 1 > 1000$. Je to pre $n = 10$. Musíme teda sčítať prvých 10 členov.

---

10. Kváder, ktorého dĺžky hrán tvoria geometrickú postupnosť, má povrch P = 78 a súčet dĺžok hrán prechádzajúcich jedným vrcholom je 13. Vypočítajte objem kvádra.

Riešenie:

Označme si strany kvádra v poradí v akom tvoria geometrickú postupnosť ako *a,b,c*. Potom vieme, že $P = 2(ab + bc + ca) = 78$, $a + b + c = 13$ a $b = aq$, $c = aq^2$. Dosaďme tretí a štvrtý vzťah do prvých dvoch a dostaneme $2(a+b+c) = 2(a \cdot aq + aq \cdot aq^2 + aq^2 \cdot a) = 2(a^2q + a^2q^3 + a^2q^2) = 2a^2q(1 + q^2 + q)$, teda $2a^2q(1 + q^2 + q) = 78$ a $a + b + c = a + aq + aq^2 = a(1 + q + q^2)$, teda $a(1 + q + q^2) = 13$.

Predeľme tieto dve rovnice (podotýkame, že menovateľ je vždy nenulový) a dostaneme

$\frac{2a^2q(1+q+q^2)}{a(1+q+q^2)} = \frac{78}{13} \quad \rightarrow \quad aq = \frac{78}{2 \cdot 13} = 3 \quad \rightarrow \quad q = \frac{3}{a}$. Dosaďme *q* naspäť do pôvodnej rovnice:

$a+aq+aq^2=a+3+3\cdot\frac{3}{a}=13$. Po roznásobení dostaneme $a^2+3a+9=13a \quad\rightarrow\quad a^2-10a+9=0$. Túto kvadratickú rovnicu vyriešime a dostaneme

$a_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot1\cdot9}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm8}{2}=<\begin{matrix}9\\1\end{matrix}$ a teda $\quad q_1=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ a $q_2=\frac{3}{1}=3$. Strany kvádra teda budú $a=9, b=9\cdot\frac{1}{3}=3$ a $c=9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=1$ alebo $a=1, b=3$ a $c=3^2=9$. V oboch prípadoch

$V=a\cdot b\cdot c=<\begin{matrix}9\cdot3\cdot1=27\\1\cdot3\cdot9=27\end{matrix}$.

---

11. Daný je prvý člen $a_1=6144$ a kvocient $q=\frac{1}{2}$ geometrickej postupnosti. Zistite, koľko členov má táto postupnosť, ak viete, že jej posledný člen $a_n=48$. Vypočítajte súčet s_n všetkých členov tejto postupnosti.

Riešenie

$a_n=6144\cdot q^{n-1}$

$6144\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=48 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{48}{6144} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{128} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^7} \quad n-1=7$, teda $n=8$ a postupnosť má 8 členov. Súčet s_8 vypočítame použitím vzorca

$$s_8=6144\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}}=6.2^{10}.\frac{\frac{2^8-1}{2^8}}{\frac{1}{2}}=6.2^{10}.\frac{2.\left(2^8-1\right)}{2^8}=6.2^3.\left(2^8-1\right)=6.8.255=12240.$$

---

12. Vypočítajte súčet nekonečného geometrického radu:

a) $\frac{3}{5}+\frac{6}{15}+\frac{12}{45}+\frac{24}{135}+\cdots$

b) $\frac{2}{53}-\frac{10}{53}+\frac{50}{53}-\frac{250}{53}+\cdots$

Riešenia:

a) Vidíme, že ide o geometrický rad s $a_1=\frac{3}{5}$ a $q=\frac{2}{3}$. Kto nevidí, nech sa vráti k príkladom typu „zistite, či ide o geometrickú postupnosť". Keďže $|q|<1$, môžeme použiť vzorec na súčet nekonečného geometrického radu: $S=a_1\frac{1}{1-q}=\frac{3}{5}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}\frac{1}{\frac{1}{3}}=\frac{9}{5}$.

b) Vidíme, že ide o geometrický rad s $a_1=\frac{2}{53}$ a $q=-5$. Máme teda $|q|=5>1$. Súčet takéhoto nekonečného radu neexistuje (rad diverguje).

---

13. V lese je približne 80 000 m^3 dreva. Ročný prírastok sa odhaduje na 2%. Na konci každého roka sa vyrúbe 2 500 m^3 dreva. Vypočítajte koľko dreva zostane v lese

a) po jednom roku,
b) po dvoch rokoch,
c) po desiatich rokoch. Čo sa deje s lesom?

Riešenie: Po jednom roku máme $80000\cdot 1{,}02-2500=81600-2500=79100$ m^3 dreva. Po dvoch rokoch máme $79100\cdot 1{,}02-2500=80682-2500=78182$ m^3 dreva. Po 10 rokoch máme

$\left[\left(\cdots\left(\left(\left(80000\cdot 1{,}02-2500\right)\cdot 1.02-2500\right)\cdot 1.02-2500\right)\cdots\right)\cdot 1.02-2500\right]$ m^3 dreva. Vieme to spočítať? Číslo 80000 je 10x násobené číslom 1,02, každé ďalšie číslo 2500 o jedenkrát menej, spolu máme:

$$80000\cdot 1{,}02^{10}-2500\cdot 1{,}02^{9}-2500\cdot 1{,}02^{8}-2500\cdot 1{,}02^{7}-\cdots-2500\cdot 1{,}02^{1}-2500=$$

$$=80000\cdot 1{,}02^{10}-2500\cdot\left(1{,}02^{9}+1{,}02^{8}+1{,}02^{7}+\cdots+1{,}02^{1}+1{,}02^{0}\right)$$

To, čo nám ostalo v zátvorke je vlastne súčet prvých desiatich členov geometrického radu, teda ďalej môžeme v úpravách pokračovať nasledovne:

$80000\cdot 1{,}02^{10}-2500\cdot\left(\dfrac{1{,}02^{10}-1}{1{,}02-1}\right)$. Za pomoci kalkulačky ľahko dopočítame, že sa jedná približne o $80000\cdot 1{,}22-2500\cdot\left(\dfrac{1{,}22-1}{1{,}02-1}\right)=70145$ m^3 dreva. Jasne môžeme vidieť že z lesa ubúda. Je to preto, že ťažíme viac ako každý rok dorastie.

---

14. Zapíšte čísla $a=0{,}23\overline{7}$, $b=0{,}\overline{28}$ $c=0{,}7\overline{368}$ a v tvare $\dfrac{p}{q}$, kde $p,q\in N$, pričom použijete súčet nekonečného geometrického radu.

Riešenie: Napíšme si $a=0{,}23\overline{7}$ ako súčet $a=0{,}23\overline{7}=0{,}23+7\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^3+7\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^4+7\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^4+\cdots$

Spočítajme najprv iba $s=7\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^3+7\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^4+7\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^4+\cdots$, čo je súčet nekonečného geometrického radu s prvým členom $a_1=7\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^3$ a kvocientom $q=\dfrac{1}{10}$. Potom

$$s=a_1\frac{1}{1-q}=7\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=7\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=7\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3\cdot\frac{10}{9}=\frac{7}{900}.$$

Spolu máme $a=0{,}23\overline{7}=0{,}23+s=\dfrac{23}{100}+\dfrac{7}{900}=\dfrac{207}{900}+\dfrac{7}{900}=\dfrac{214}{900}=\dfrac{107}{450}$.

Napíšme si $b=0{,}\overline{28}$ ako súčet $b=0{,}\overline{28}=2\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^1+8\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^2+2\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^3+8\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^4+\cdots$

Spočítajme najprv iba $s_1=2\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^1+2\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^3+2\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^5+\cdots$, čo je súčet nekonečného geometrického radu s prvým členom $2\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^1$ a kvocientom $\dfrac{1}{100}$ (Pokiaľ nerozumiete prečo, vráťte sa k príkladom typu „zistite, či ide o geometrickú postupnosť“). Potom

$$s_1 = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{100}{99} = \frac{20}{99}.$$

Teraz spočítajme iba $s_2 = 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 + 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^6 + \cdots$, čo je súčet nekonečného geometrického radu s prvým členom $8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2$ a kvocientom $\frac{1}{100}$ (Opäť, pokiaľ nerozumiete prečo, vráťte sa k príkladom typu „zistite, či ide o geometrickú postupnosť"). Potom

$$s_2 = 8 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 8 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = 8 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{8}{99}.$$

Spolu $b = 0,\overline{28} = s_1 + s_2 = \frac{20}{99} + \frac{8}{99} = \frac{28}{99}$.

Alternatívne riešenie by bolo počítať len jeden súčet

$$b = 0,\overline{28} = 28 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 28 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 + 28 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^6 + \cdots = 0,28 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{28}{99}.$$

Napíšme si $c = 0,7\overline{368}$ ako súčet $c = 0,7 + 0,0\overline{368} = 0,7 + 368 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 + 368 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^7 + 368 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{10} + \cdots$.

Spočítajme najskôr len súčet $s = 368 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 + 368 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^7 + 368 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{10} + \cdots$, čo je súčet nekonečného geometrického radu s prvým členom $368 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4$ a kvocientom $\frac{1}{1000}$ (Pokiaľ nerozumiete prečo, vráťte sa k príkladom typu „zistite, či ide o geometrickú postupnosť"). Potom

$$s = 368 \cdot \frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1000}} = 368 \cdot \frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{\frac{999}{1000}} = 368 \cdot \frac{1}{10000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{368}{9990}.$$

Spolu $c = 0,7 + 0,0\overline{368} = 0,7 + s = \frac{7}{10} + \frac{368}{9990} = \frac{7 \cdot 999 + 368}{9990} = \frac{7361}{9990}$.

---

15. Preveďte číslo $0,\overline{3}_6$ zo šestkovej sústavy do desiatkovej, pričom použijete súčet nekonečného geometrického radu.

Riešenie:

Desatinné číslo v šestkovej sústave vlastne znamená násobky mocnín jednej šestiny. Pre naše číslo teda chceme vypočítať

$$0,\overline{3}_6 = 3 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \cdots$$

Ide teda o súčet nekonečného geometrického radu s prvým členom $3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ a s kvocientom $\frac{1}{6}$ (Pokiaľ nerozumiete prečo, vráťte sa k príkladom typu „zistite, či ide o geometrickú postupnosť"). Súčet teda je

$$0,\overline{3}_6=3\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4+\dots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3}{5}=0,6\,.$$

Spolu teda $0,\overline{3}_6=0,6_{10}$

---

16. Riešte v R rovnicu

a) $1+3^x+9^x+27^x+\ldots=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{x^3}.\sqrt[4]{x^3}.\sqrt[8]{x^3}.\sqrt[16]{x^3}\ldots.=1$

c) $1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{27}{x^3}+\ldots=\dfrac{8}{x+10}$

Nezabudnite potom vždy spraviť skúšku správnosti (aby ste overili, či postupnosť vôbec konverguje).
Riešenie:

a) $1+3^x+9^x+27^x+\ldots=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$. Spočítajme si najprv rad na ľavej strane rovnice. Ide o geometrický rad, v ktorom prvý člen je 1, a kvocient je rovný 3^x (Uvedomme si, že $9^x=\left(3^2\right)^x=3^{2x}=3^x\cdot3^x$ a podobné vzťahy platia aj pre ďalšie členy postupnosti.) Súčet teda, pokiaľ rad konverguje, bude

$$1+3^x+9^x+27^x+\ldots=1\cdot\frac{1}{1-3^x}=\frac{1}{1-3^x}\,.$$

My riešime rovnicu $1+3^x+9^x+27^x+\ldots=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$, a teda $\dfrac{1}{1-3^x}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$. Obráťme rovnicu (pričom určite nedelíme nulou), a dostaneme $1-3^x=\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}$. Upravujme ľavú stranu tejto rovnice

$\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(3-\sqrt{3}\right)}{9-3}=\dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Teda rovnicu môžeme napísať ako $1-3^x=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ alebo zjednodušene aj ako $3^x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Toto má jediné riešenie, $x=-0,5$. Ostáva nám ešte overiť, či pre toto x náš rad konverguje. Kvocient je rovný $3^x=3^{-0,5}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}<1$ a teda náš rad konverguje, teda vypočítané a riešenie je aj riešením zadanej rovnice.

---

b)

$\sqrt{x^3}.\sqrt[4]{x^3}.\sqrt[8]{x^3}.\sqrt[16]{x^3}\ldots.=1$

Upravme si výraz na ľavej strane rovnice: $\sqrt{x^3}.\sqrt[4]{x^3}.\sqrt[8]{x^3}.\sqrt[16]{x^3}\ldots.=x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{3}{8}}\cdot x^{\frac{3}{16}}\cdots=x^{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\cdots}$.

Súčet $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\cdots$ je súčtom nekonečného geometrického radu s prvým členom $\frac{3}{2}$ a kvocientom $\frac{1}{2}$.

Súčet je rovný $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\cdots=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=3.$ Potom

$\sqrt{x^3}.\sqrt[4]{x^3}.\sqrt[8]{x^3}.\sqrt[16]{x^3}.\ldots=x^{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\cdots}=x^3=1$ a teda riešením je $x=1$.

c) $1-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{27}{x^3}+\ldots=\frac{8}{x+10}$

Vidíme, že $x=0$ a $x=10$ nie sú výrazy v rovnici definované, budeme teda hľadať iné riešenie. Spočítajme rad na ľavej strane rovnice. Ide o súčet nekonečného geometrického radu s prvým členom 1 a kvocientom $\frac{-3}{x}$. Súčet (pokiaľ rad konverguje) je rovný

$$1-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{27}{x^3}+\ldots=1\cdot\frac{1}{1-\frac{-3}{x}}=\frac{1}{\frac{x+3}{x}}=\frac{x}{x+3}.$$

Aby sme mohli ďalej počítať, potrebujeme mať istotu, že menovateľ $x+3$ nebude nulový. Čitateľ si dosadením ľahko overí, že pre $x=-3$ rad nekonverguje, teda menovateľ môžeme považovať za nenulový.

Riešime teda rovnicu $\frac{x}{x+3}=\frac{8}{x+10}$, ktorú roznásobíme a dostaneme $x^2+10x=8x+24$ alebo aj $x^2+2x-24=0$. Túto rovnicu vyriešime napríklad rozložením na zátvorky: $(x-4)(x+6)=0$. Riešením sú teda $x_1=4$ a $x_2=-6$. Poďme sa teraz pozrieť naspäť na náš geometrický rad. Aby konvergoval, potrebujeme aby $\left|\frac{-3}{x}\right|<1$ a teda aby $x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$. To platí pre oba naše korene. Pre $x_1=4$ je náš kvocient $\frac{-3}{4}$ a pre $x_2=-6$ je kvocient $\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$.