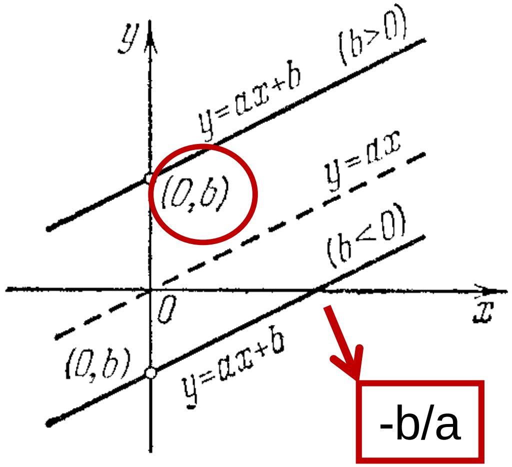
Matematická vsuvka

Priamka



Lineárna závislosť

Priamka:

$$a = tg\varphi$$

$$y = \boxed{a}\,x + b$$

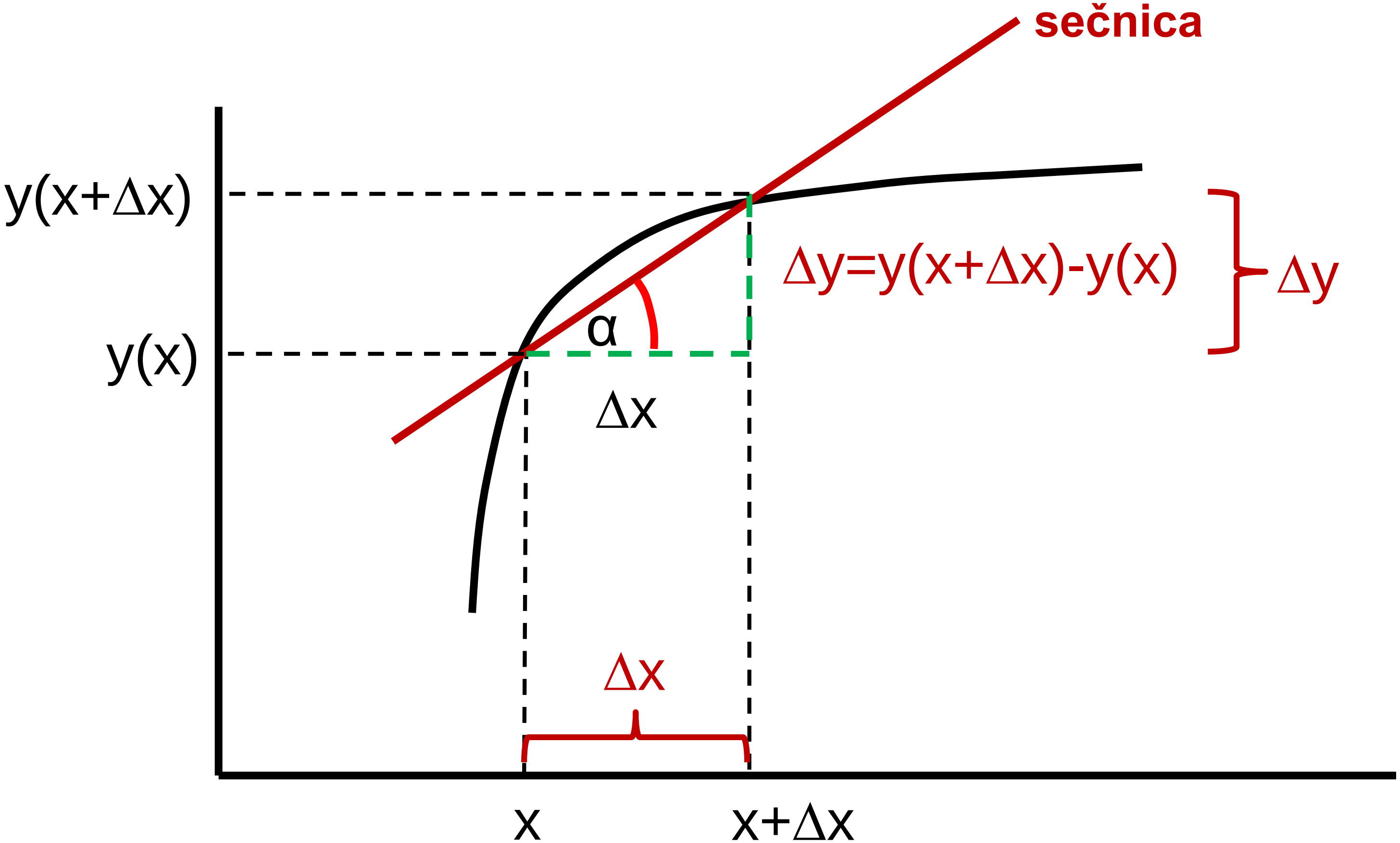
Smernica priamky – tangent uhla, ktorý zviera priamka s x –ovou osou

$$tg\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a\,x + b - (a\,x_1 + b)}{x - x_1} = a$$

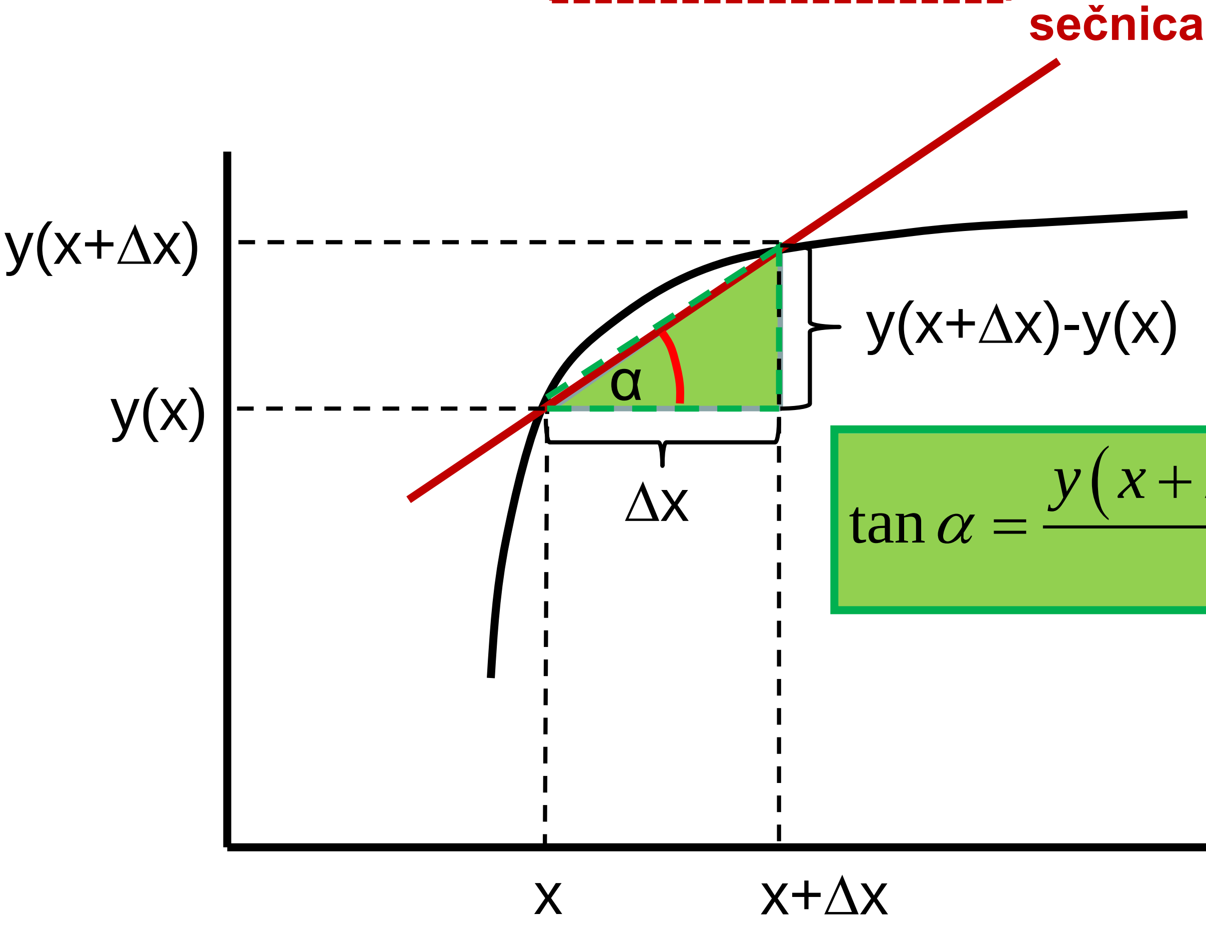
Derivácia

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \overbrace{\boxed{\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}}^{\text{Rýchlosť zmeny funkcie}}$$

Čo vyjadruje tento člen geometricky ????

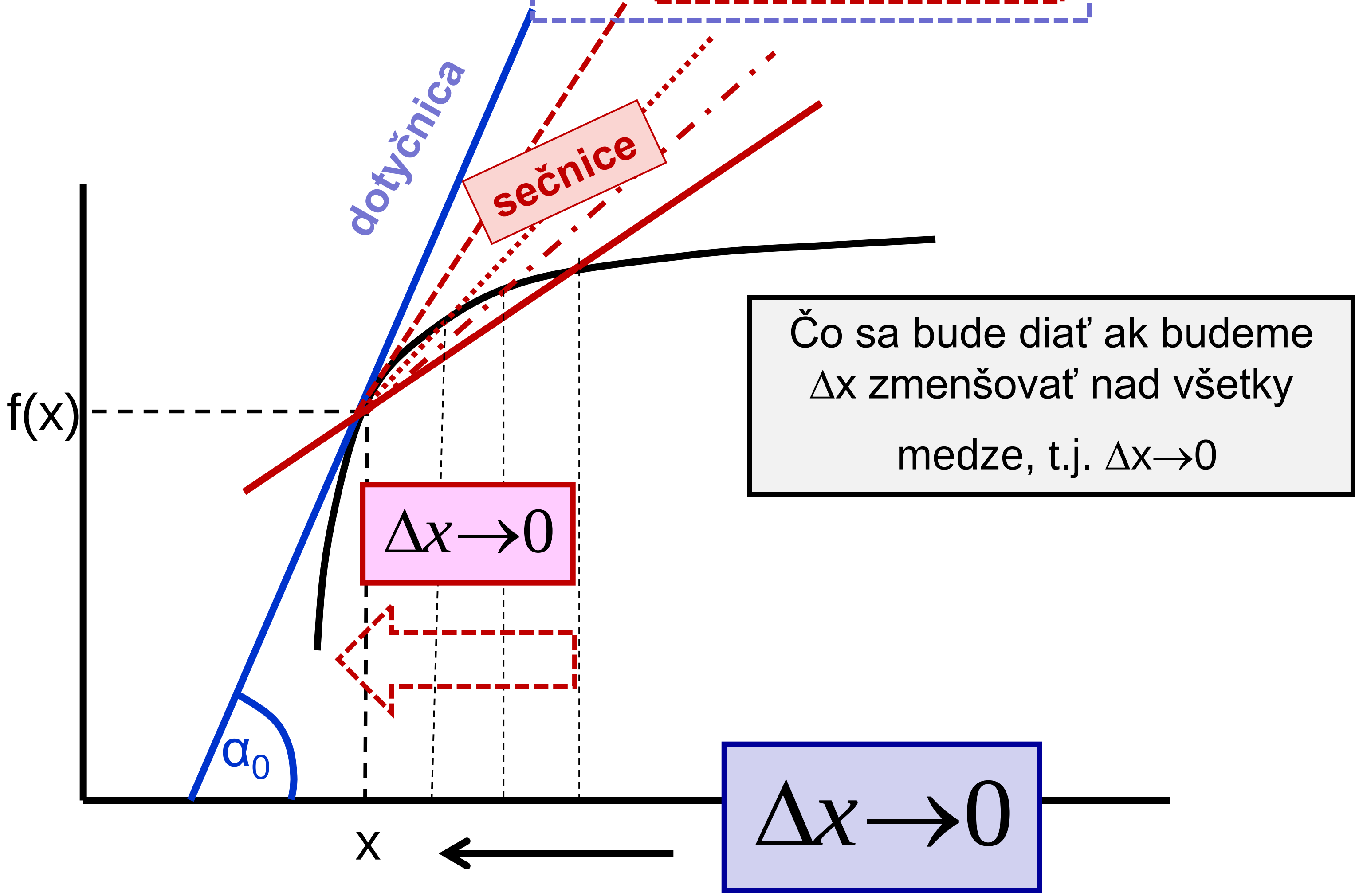


$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \overbrace{\boxed{\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}}^{\textit{smernica sečnice}}$$



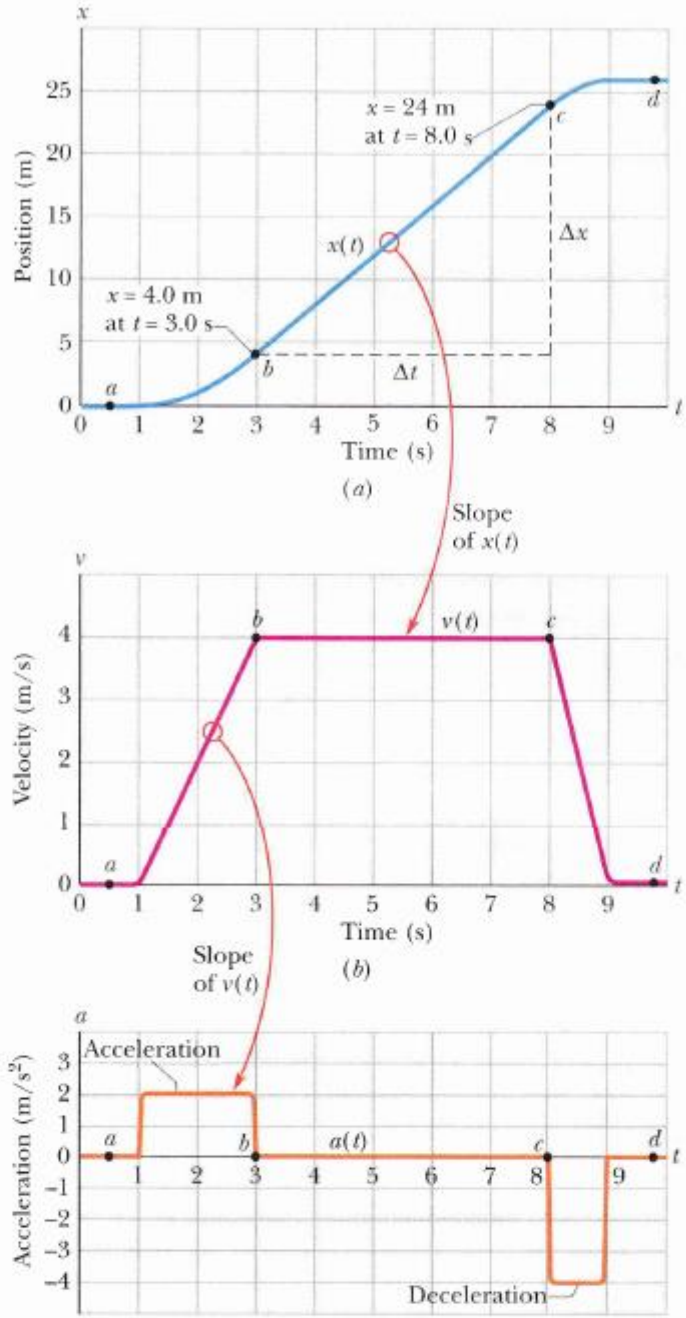
$$\tan \alpha = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$



Geometrický význam derivácie –
derivácia funkcie v danom bode určuje smernicu dotyčnice

Základy mechaniky



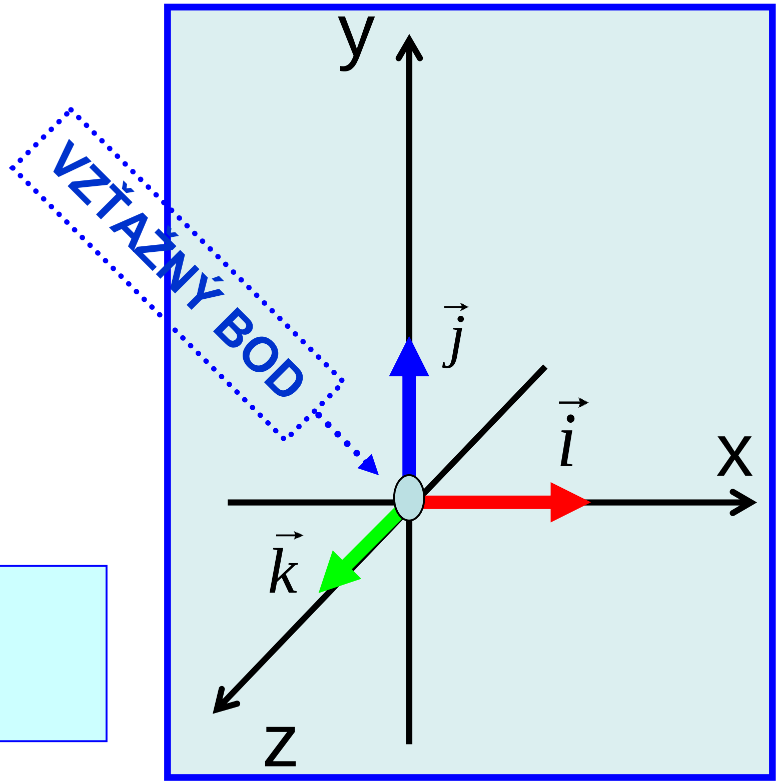
x
Position (m)
25
20
15
10
5
0
x = 24 m
at t = 8.0 s
c
d
x(t)
Δx
x = 4.0 m
at t = 3.0 s
a
b
Δt
t
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Time (s)
(a)
Slope
of x(t)
v
Velocity (m/s)
4
3
2
1
0
b
v(t)
c
a
d
t
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Time (s)
(b)
Slope
of v(t)
a
Acceleration (m/s²)
Acceleration
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
a
b
a(t)
c
d
t
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Deceleration

Kinematika

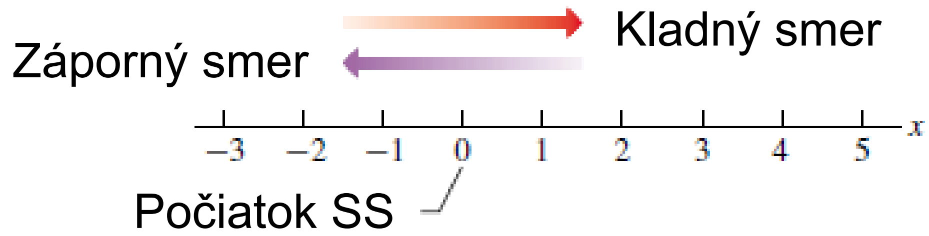
Kinematika - popisuje pohyb telesa pomocou rôznych charakteristík (poloha, posunutie, rýchlosť, zrýchlenie).

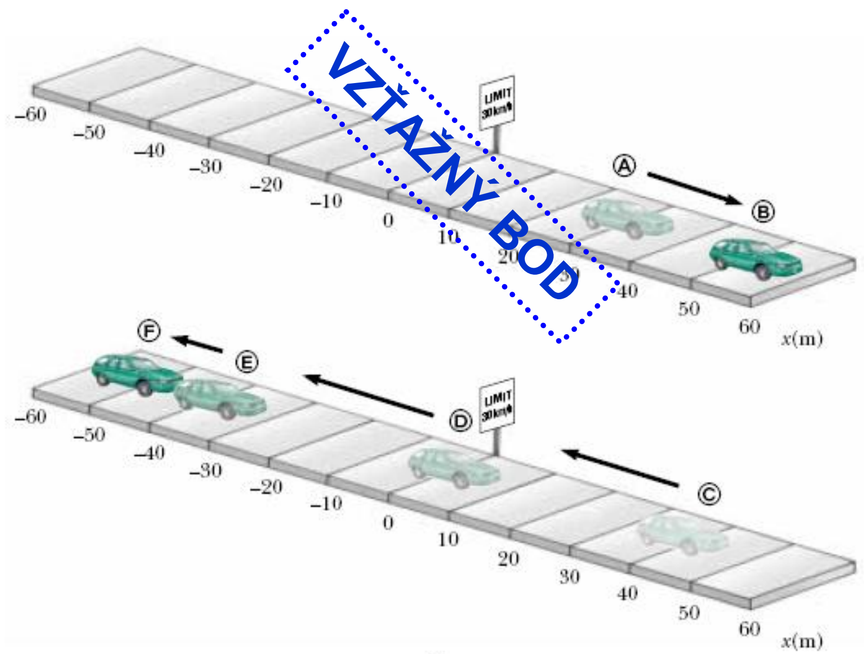
Hmotný bod – najjednoduchší objekt, ktorý zastupuje pohybujúce sa teleso

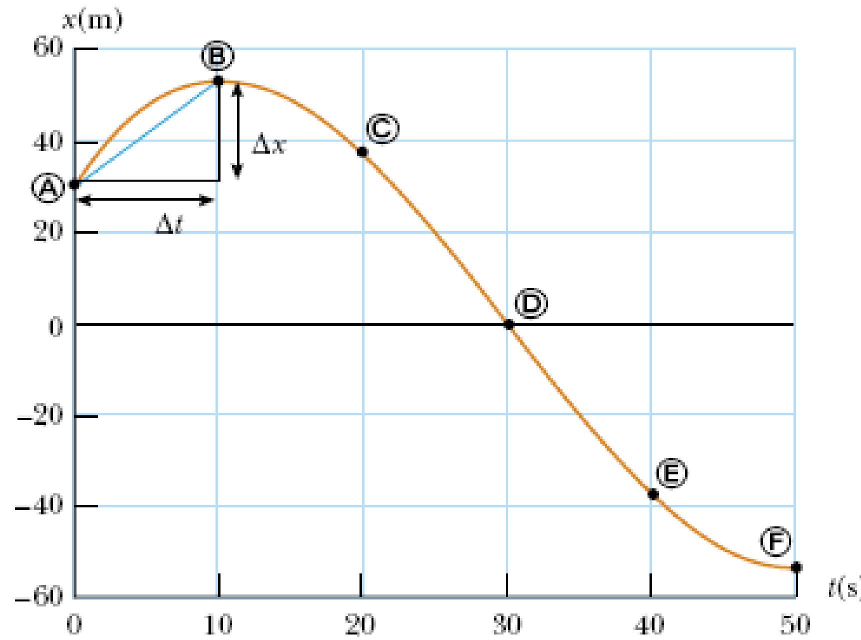
Poloha – určuje sa vždy vzhľadom k nejakému **vzťažnému bodu** (najčastejšie k počiatku SS)



Kartézska súradnícová sústava je tvorená pravotočivou sústavou súradníc, určenou navzájom kolmými jednotkovými vektormi.







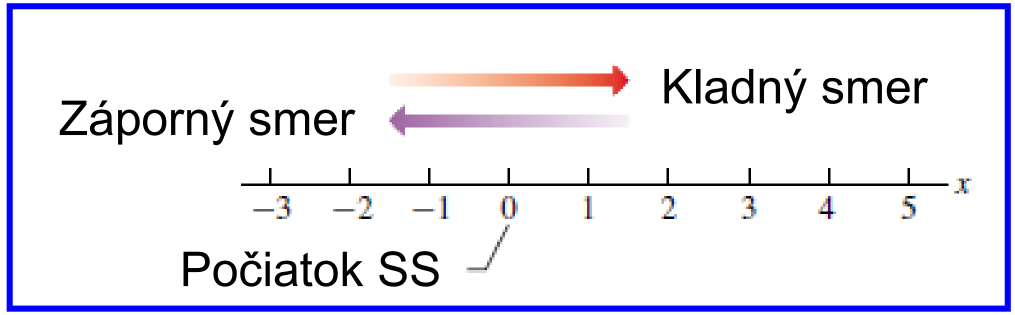
V polohe v závislosti od času je skrytá informácia o pohybe.

Jednorozmerný prípad

Posunutie $\Delta x = x_2 - x_1$

Jednorozmerná vektorová veličina

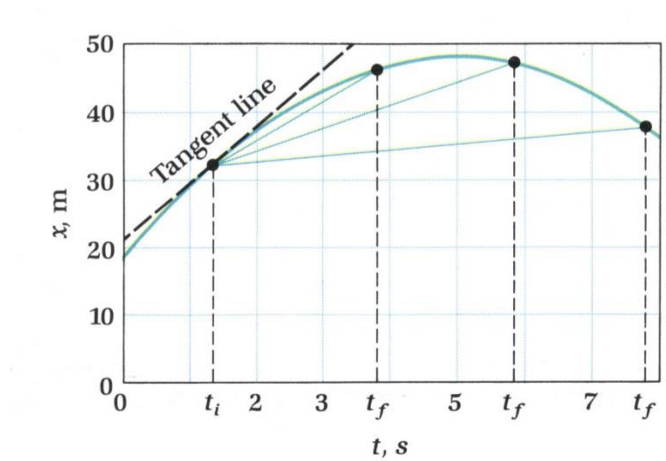
Vektorová veličina, závisí len od počiatočnej a konečnej polohy



Priemerná rýchlosť

Geometria:Smernica sečnice

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

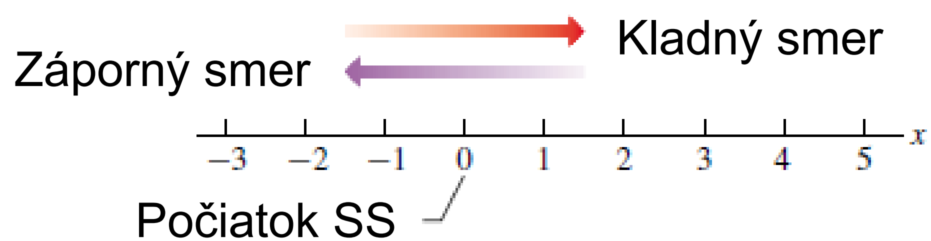


Okamžitá rýchlosť

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Čím $\Delta t \to 0$, tým presnejšie vystihuje príslušná priemerná rýchlosť na danom úseku okamžitú rýchlosť.

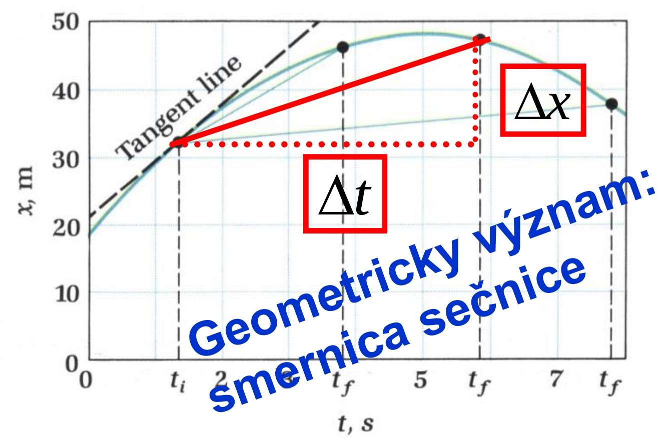
Jednorozmerný prípad



Priemerná rýchlosť

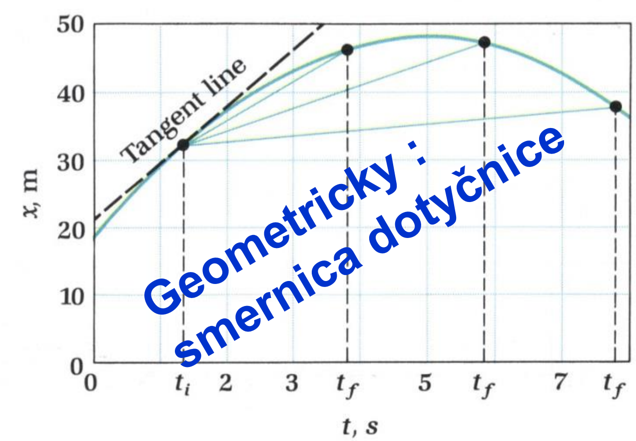
Geometria:Smernica sečnice

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



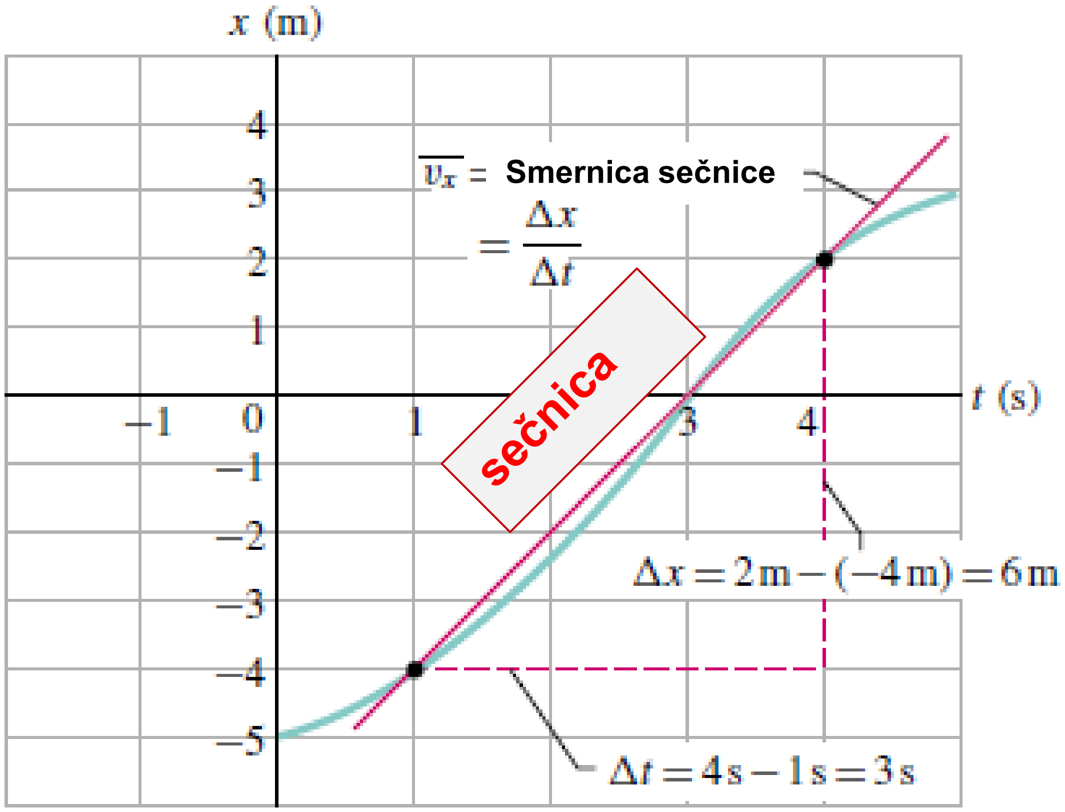
Okamžitá rýchlosť

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



Zmenšovaním intervalu Δt nad všetky medze, sečnica sa začne približovať k dotyčnici

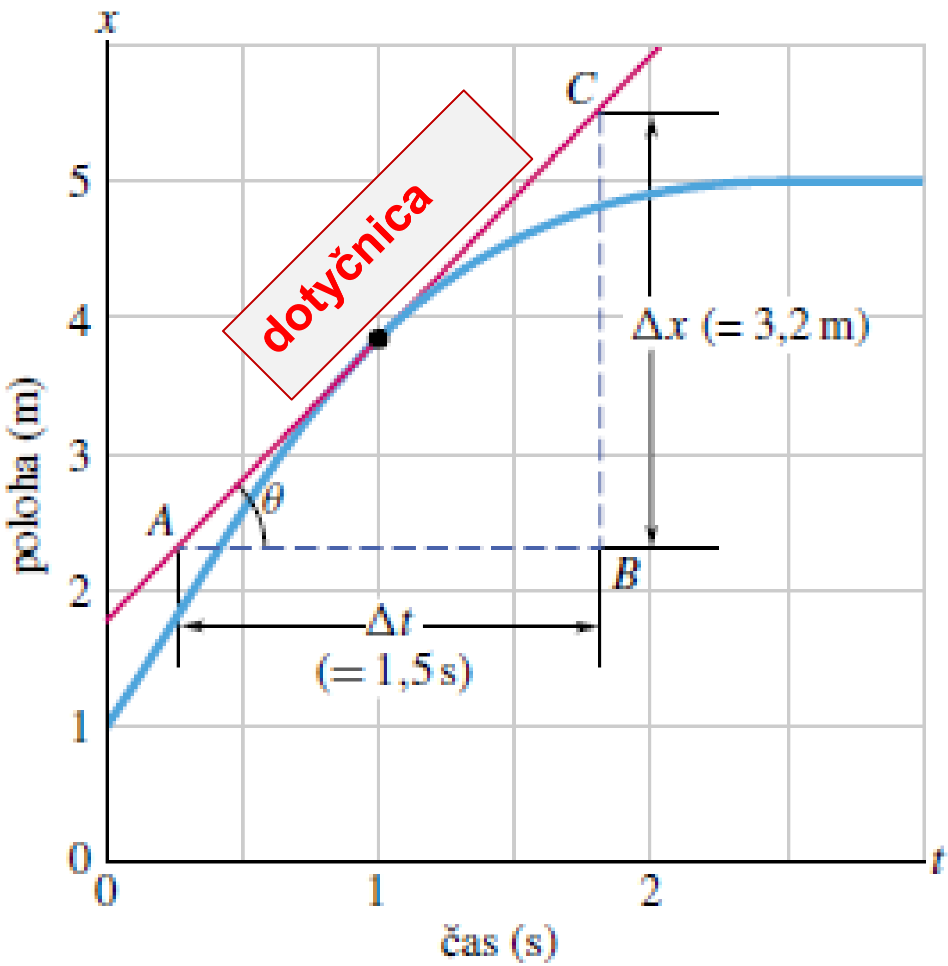
Určenie priemernej rýchlosti



Priemerná rýchlosť telesa medzi 1s a 4s

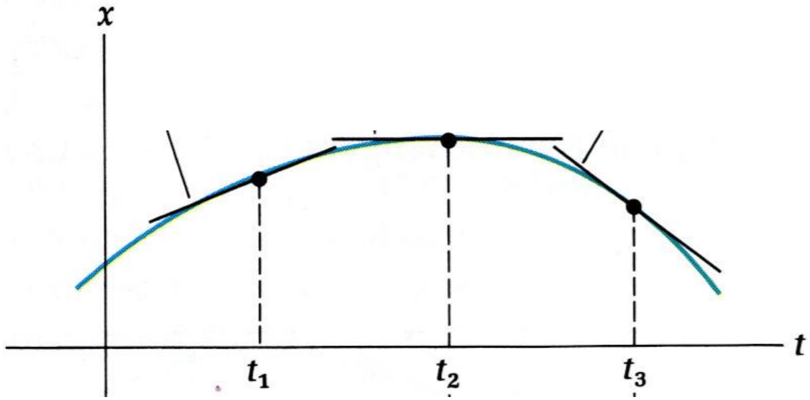
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6}{3}\frac{m}{s} = 2\frac{m}{s}$$

Určovanie okamžitej rýchlosti - geometricky



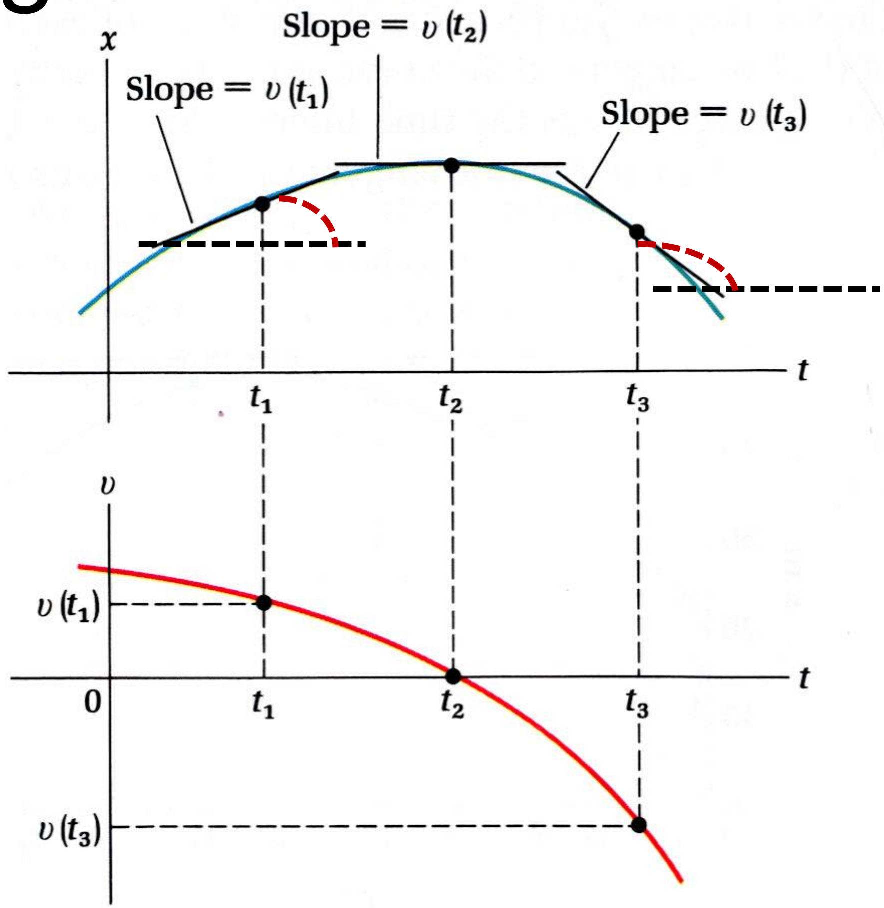
$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3.2}{1.5}\frac{m}{s} = 2.1\frac{m}{s}$$

Využitie geometrického významu grafické derivovanie



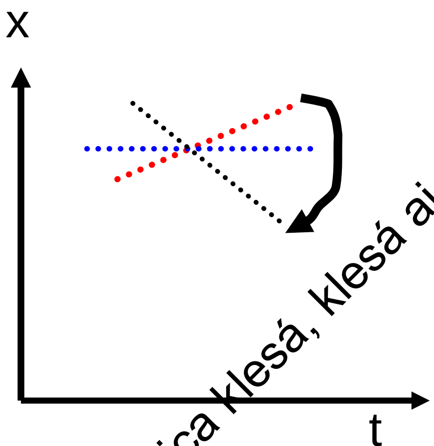
Na obrázku je znázornená závislosť polohy telesa v čase t. Na základe kvalitatívnej úvahy načrtnite závislosť rýchlosti od času

Využitie geometrického významu grafické derivovanie

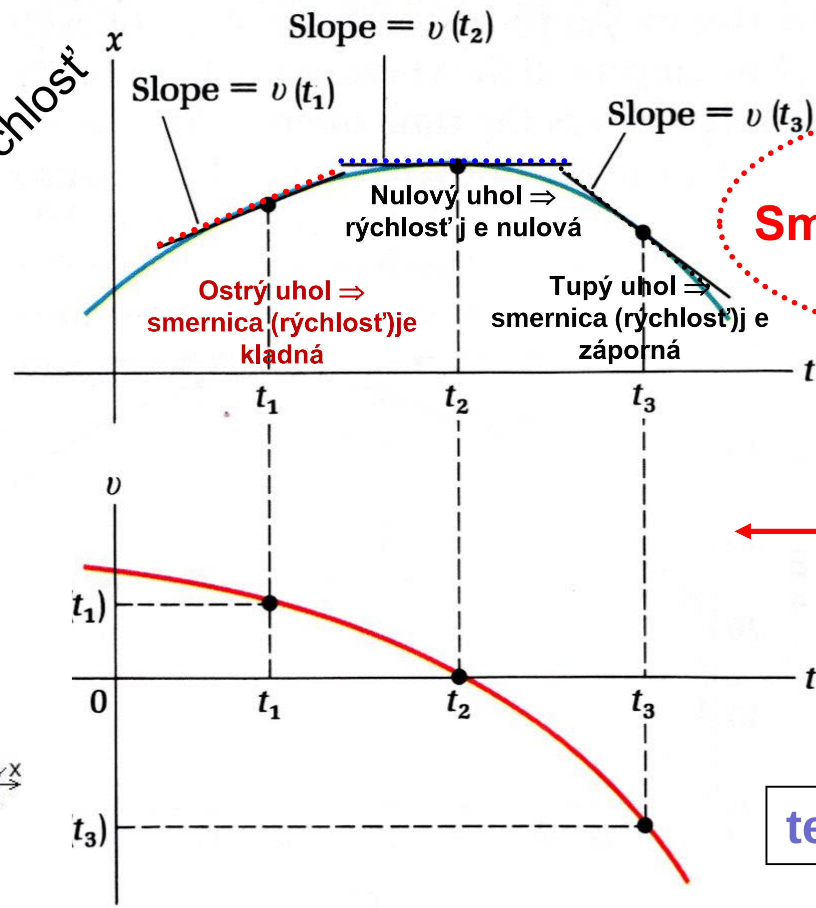


$$\boxed{v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}$$

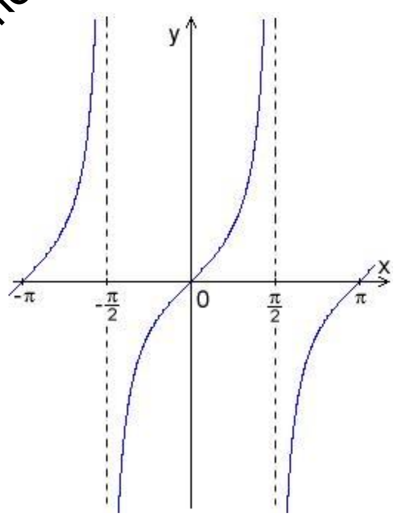
Využitie geometrického významu grafické derivovanie



Smernica klesá, klesá aj rýchlosť



Smernica dotyčnice klesá



teleso sa vracia nazad

Smernica dotyčnice v grafe x(t) v každom čase určuje veľkosť rýchlosti.

Zhrnutie

Okamžitá rýchlosť je limita, ku ktorej sa blíži **priemerná rýchlosť** pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu $\Delta t \to 0$.

$$v = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t}}} = \frac{dx}{dt}$$

Priemerná rýchlosť

Okamžitá rýchlosť

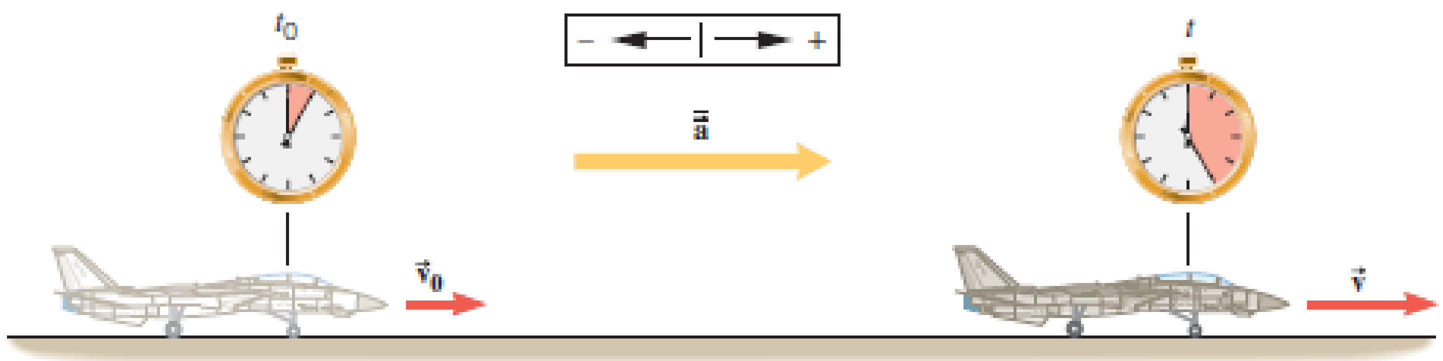
Výpočet rýchlosti analticky

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

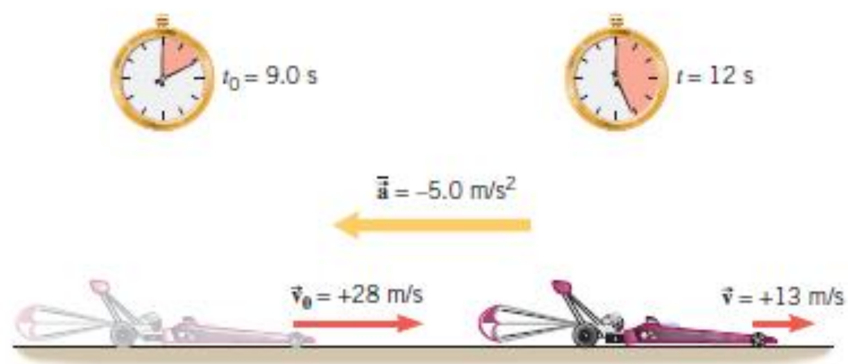
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \left(t + \Delta t\right) + \frac{1}{2} g \left(t + \Delta t\right)^2 - \left[\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t\right]}{\Delta t} = v_0 + g t$$

$$v = \dot{x} = v_0 + \frac{1}{2} 2 g t = v_0 + g t$$

Zmena rýchlosti častice sa charakterizuje zrýchlením



Veľkosť rýchlosti sa zväčšuje



Veľkosť rýchlosti sa zmenšuje

Jednorozmerný prípad

Priemerné zrýchlenie

$$\boxed{\overline{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}}$$

Okamžité zrýchlenie

$$\boxed{a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}}$$

Zrýchlenie

Okamžité zrýchlenie je limita, ku ktorej sa blíži **priemerné zrýchlenie** pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu $\Delta t \to 0$.

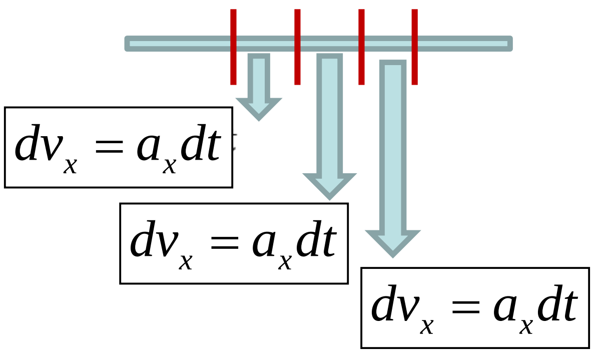
$$a_x = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \boxed{\frac{\Delta v_x}{\Delta t}}} = \frac{dv_x}{dt}$$

priemerné zrýchlenie

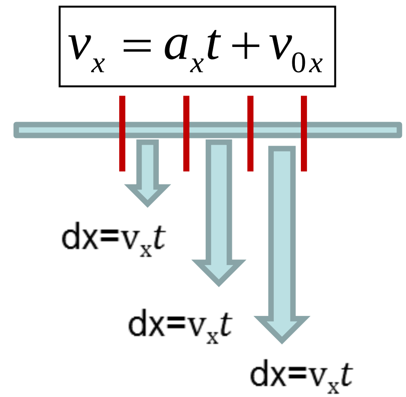
Okamžité zrýchlenie

Rovnomerne zrýchlený pohyb

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = konst$$



ax = konštanta



$$dv_x = a_x dt$$

$$\int dv_x = \int a_x dt \qquad v_x(0) = v_{0x}$$

$$v_x = a_x t + v_{0x}$$

$$dx = v_x dt$$

$$\int dx = \int v_x dt = \int (a_x t + v_{0x}) dt \qquad x(0) = x_0$$

$$x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 + x_0$$

Rovnomerne zrýchlený pohyb

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt}}$$

$$a_x = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow \boxed{v = at + v_0}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v_0) = \frac{x}{t} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}(v + v_0)t}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t}$$

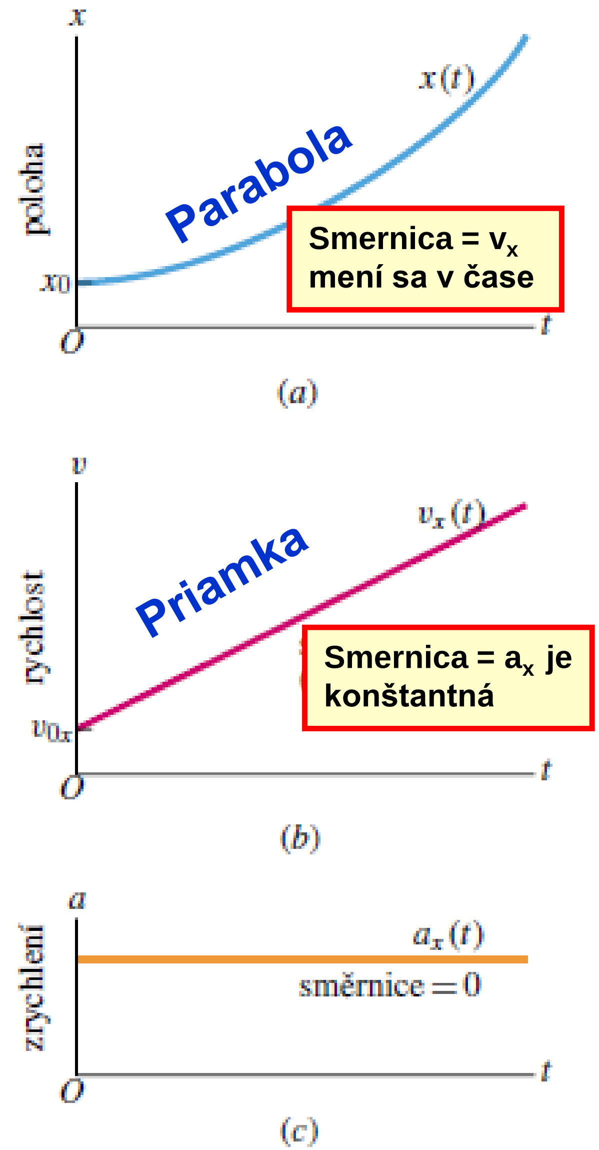
Rovnomerne zrýchlený pohyb

ax = konštanta

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v = v_{0x} + a_x t$$

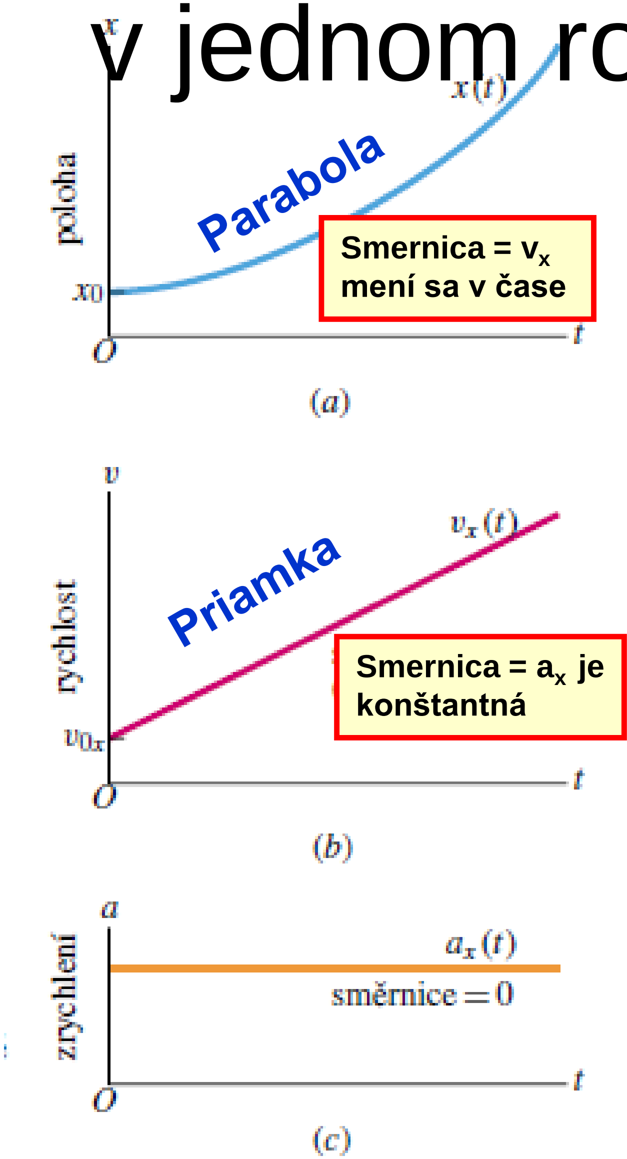


Rovnomerne zrýchlený pohyb v jednom rozmere

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = konst$$

$$v_x = a_x t + v_{0x}$$

$$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$



Rovnica	Chýbajúca veličina
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$x - x_0$
$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\left(x - x_0\right)$	t
$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(v_{0x} + v_x\right) t$	a_x
$x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}

Pohyb s konštantným zrýchlením

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

ax = konštanta

$$a_x \neq 0$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v = v_{0x} + a_x t$$

Rovnomerne zrýchlený pohyb

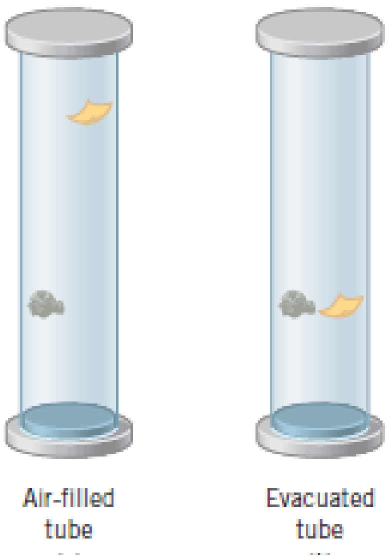
$$a_x = 0$$

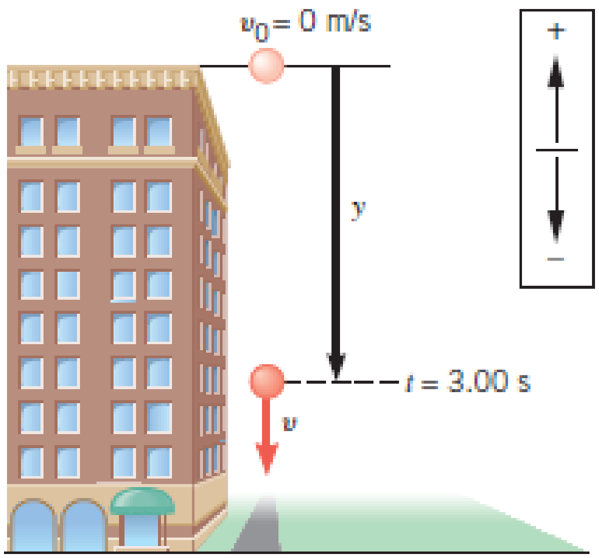
$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$v = v_{0x}$$

Rovnomerný pohyb

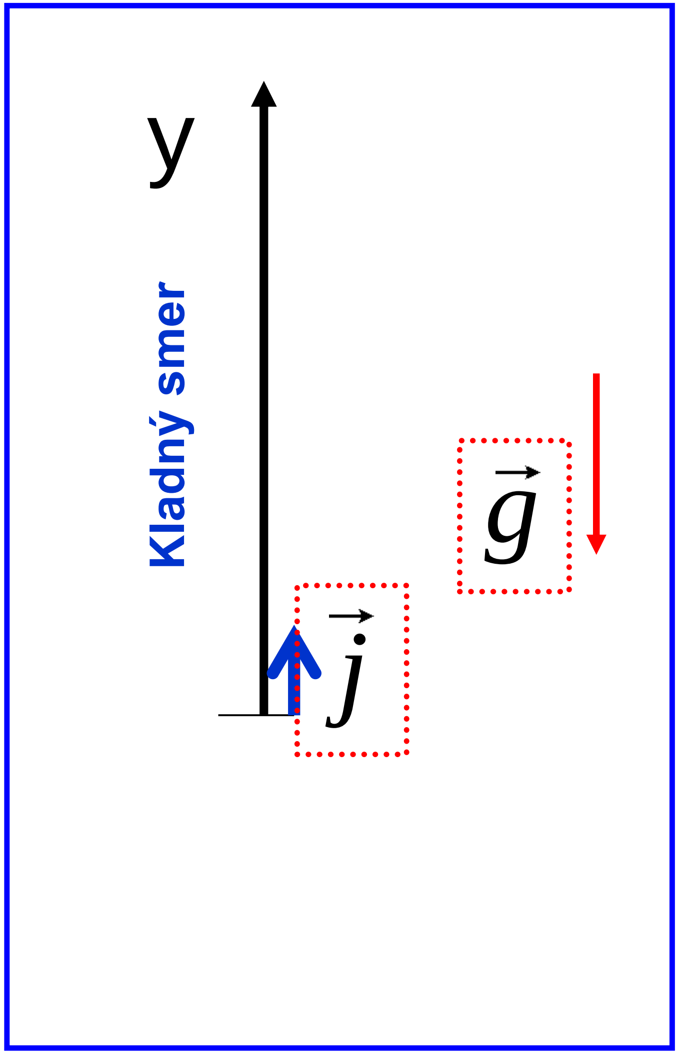
Ukážka pohybov v jednom smere





$$\boxed{g = 9{,}8ms^{-2}}$$

Zvislý vrh



$$\boxed{\vec{a} = -g\ \vec{j}}$$

$$\boxed{a_y = -g}$$

Zvislý vrh

Teleso bolo vrhnuté smerom nahor rýchlosťou v_{0y}. Určte **čas**, za ktorý teleso dosiahne maximálnu výšku. Určte maximálnu výšku výstupu.

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

Charakteristika pohybu

$$y_0 = 0$$

$$a_y = -g$$

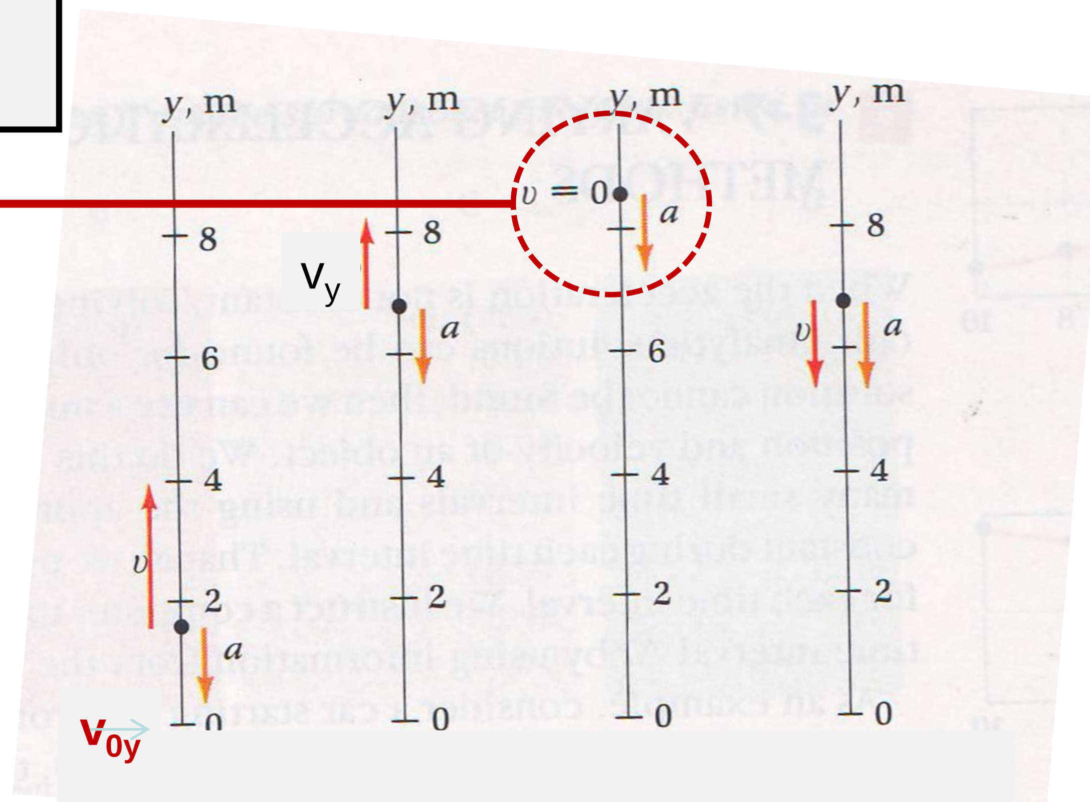
$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

identifikácia

$$v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0y}}{g}$$

$$H_{\max} = y\big|_{v=0} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$



Rýchlosť sa mení, aj orientácia

Všeobecná schéma kinematických výpočtov

$$x$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

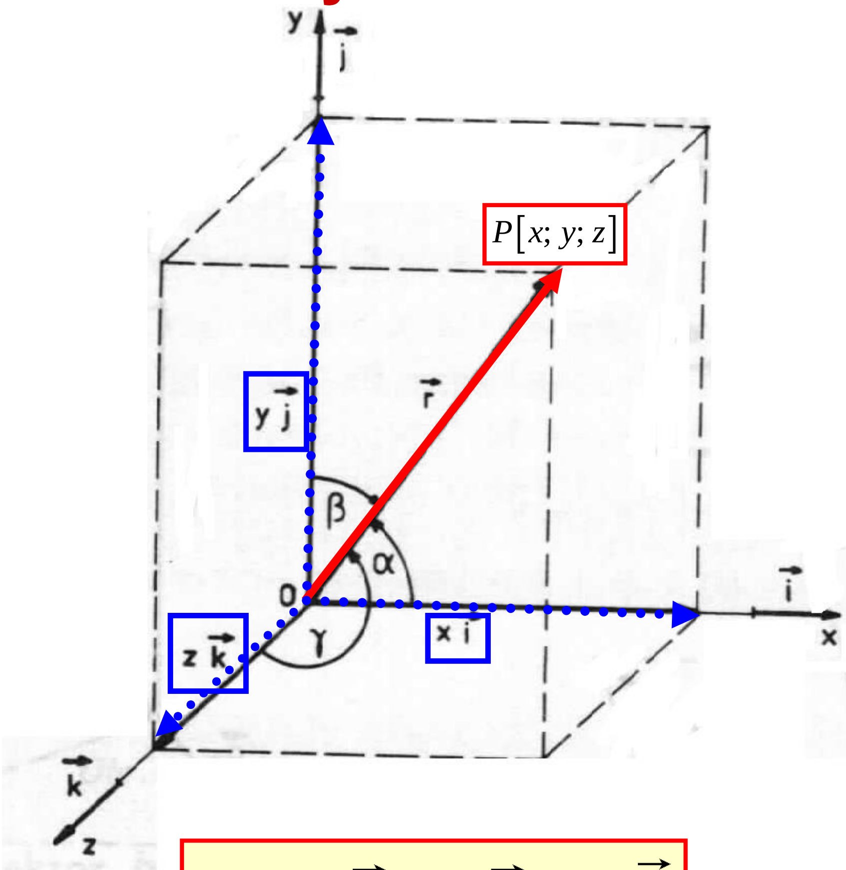
Kinematický prístup

– snaží sa o pohybe povedať čo najviac BEZ detailného štúdia príčin

Pohyb vo viacerých rozmeroch

Polohový vektor

Polohový vektor



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\left(x; y; z \right)$$

Súradnice vektora

Priemety (zložky) vektora

$$x\vec{i}\,, \quad y\vec{j}\,, \quad z\vec{k}$$

Vo všeobecnom prípade sa každý vektor dá rozložiť na tri nekomplanárne zložky (ktoré neležia v jednej rovine).

Matematická vsuvka

Vzájomná orientácia vektorov

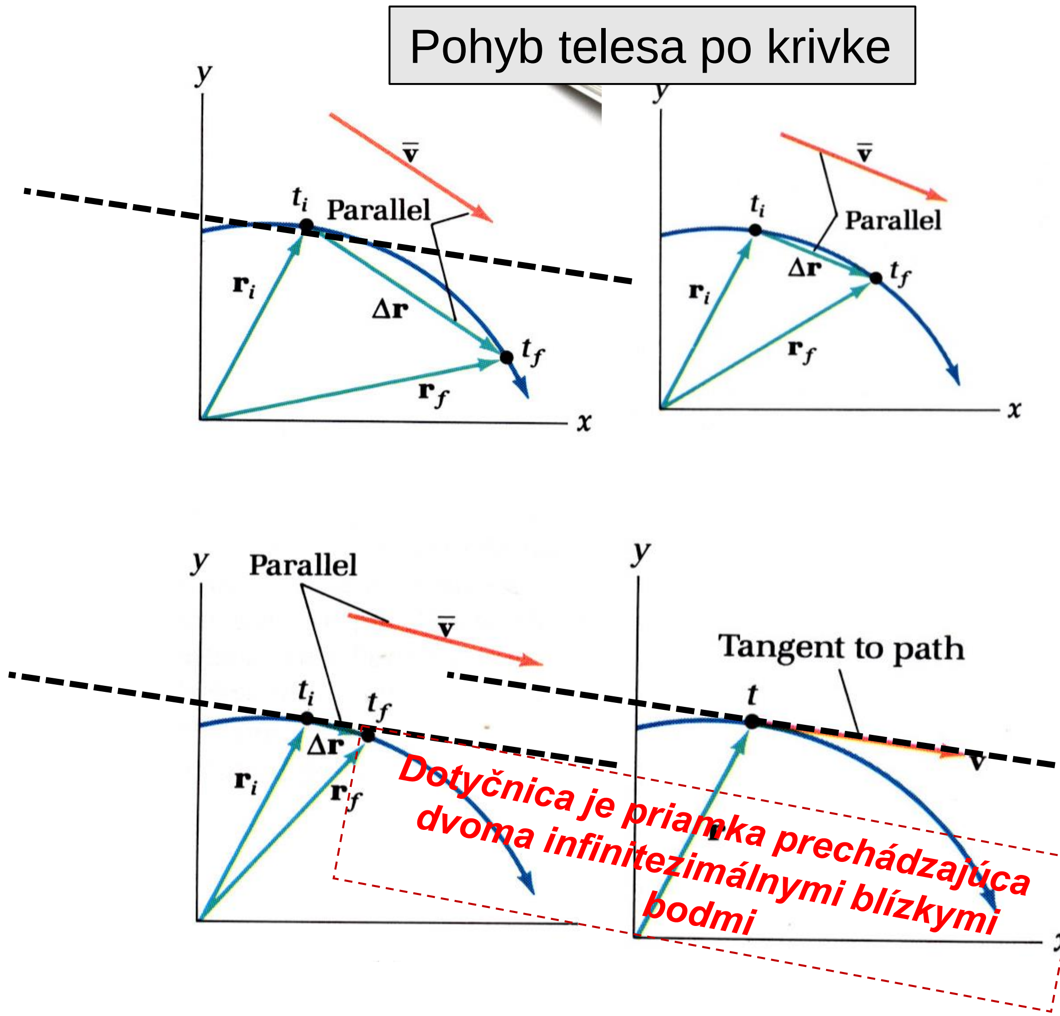
- Násobenie vektora číslom

$$\vec{b} = s \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot s \quad \begin{cases} s > 0 & \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ s < 0 & \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a} \end{cases}$$

Okamžitá rýchlosť

SMER VEKTORA

$$\boxed{\vec{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boxed{\Delta \vec{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Okamžitá rýchlosť má smer rovnobežný s trajektóriou, t.j. je dotyčnicou k trajektórie.

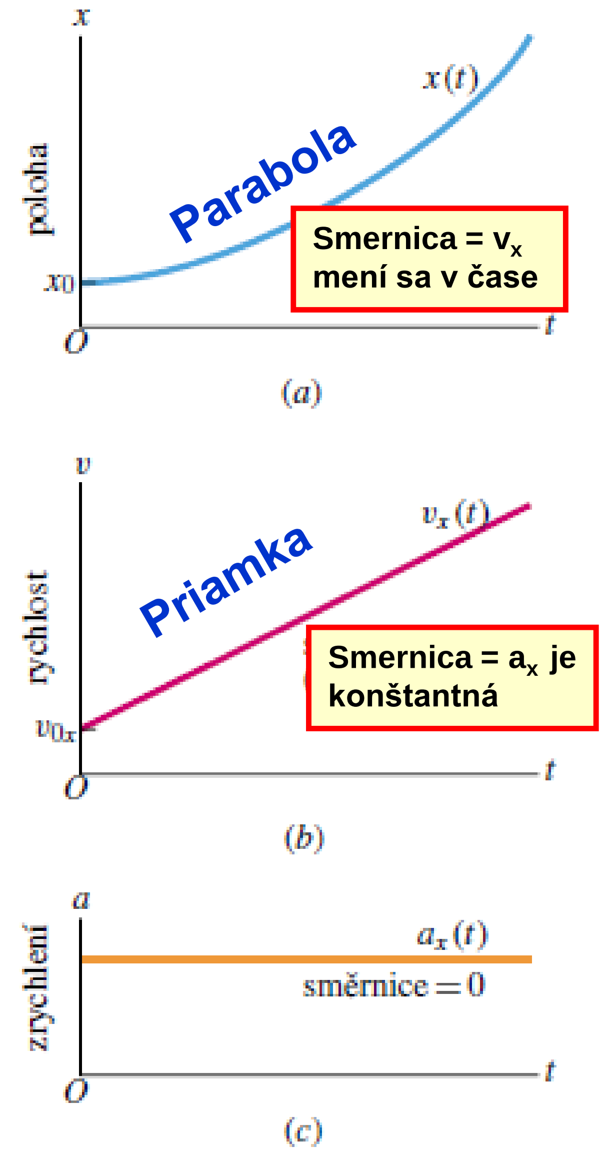
Rovnomerne zrýchlený pohyb

ax = konštanta

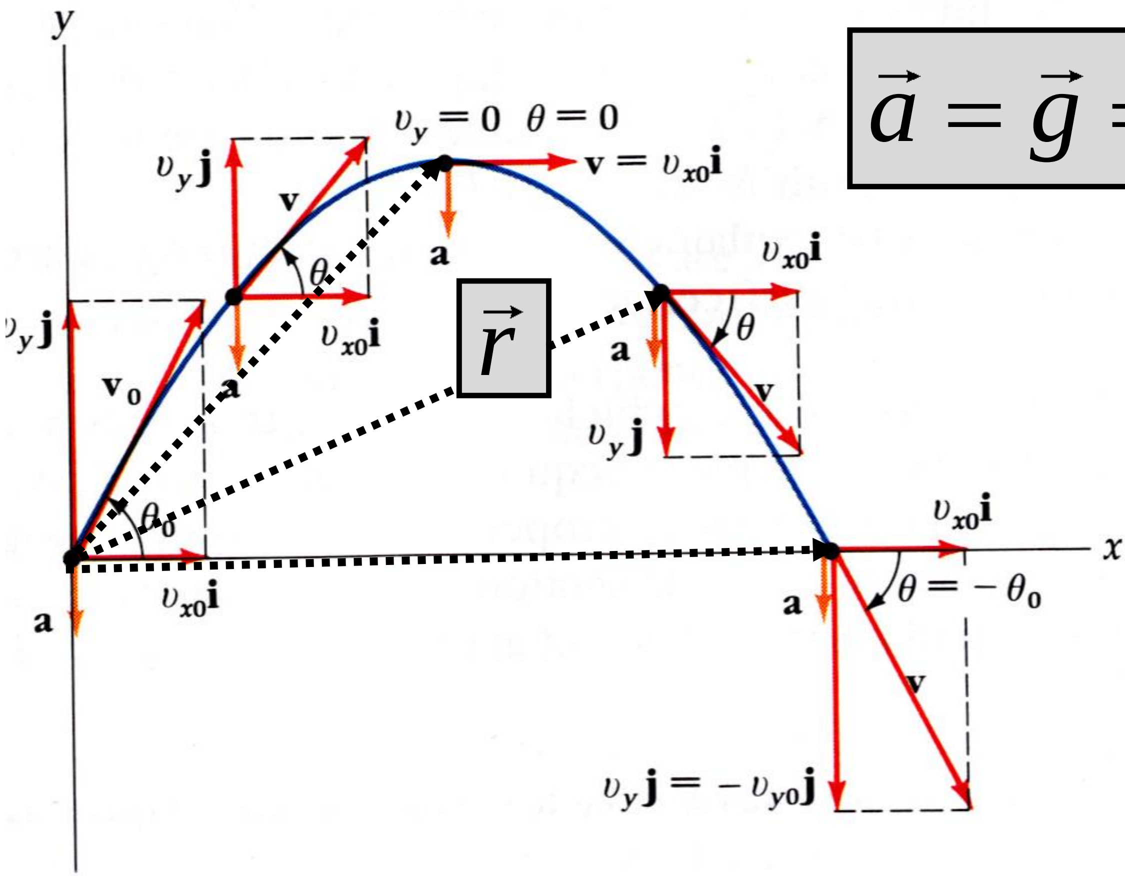
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v = v_{0x} + a_x t$$



Šikmý vrh



$$\vec{a} = \vec{g} = 0\vec{i} - g\vec{j}$$

Rýchlosť má smer dotyčnice k trajektórie pohybu
Zrýchlenie sa nemení

Vektorová rovnica

$$\vec{a} = \vec{g} = 0\vec{i} - g\vec{j}$$

Algebraické rovnice

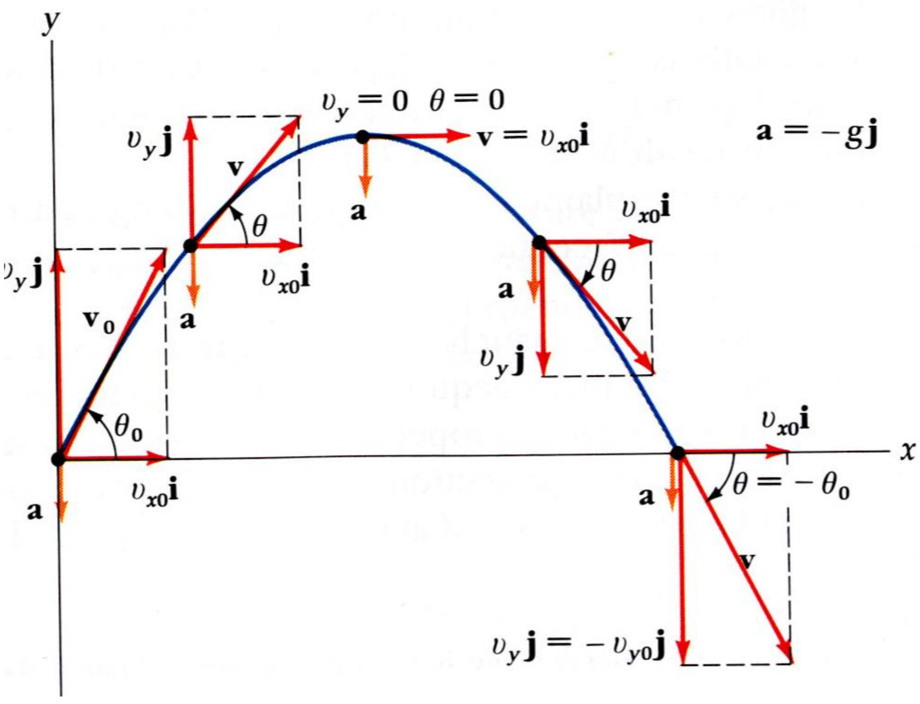
a_x = konštanta= 0

a_y = konštanta= -g

Algebraické rovnice

Počiatočné podmienky:

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$v_{0x} = v_0 \cos\varphi$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\varphi$$



Rovnomerne zrýchlený a rovnomerný pohyb

a_x = konštanta

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

a_y = konštanta

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

a_x = konštanta= 0
X0=0

$$x = v_{0x}t$$

$$v_x = v_{0x}$$

a_y = konštanta= -g
y0=0

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$x = v_{0x} t$$
$$v = v_{0x}$$

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\varphi$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\varphi$$

Parametrické vyjadrenie súradníc

$$x = v_0 \cos\varphi \; t$$
$$v_x = v_0 \cos\varphi$$

$$y = v_0 \sin\varphi \; t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$v_y = v_0 \sin\varphi - gt$$

<u>x-ová zložka rýchlosti sa počas pohybu nemení, na rozdiel od y-ovej</u>.
Tvar trajektórie je parabola.

Rovnica trajektórie

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{g}{2\left(v_0 \cos\varphi\right)^2} x^2$$

Dolet

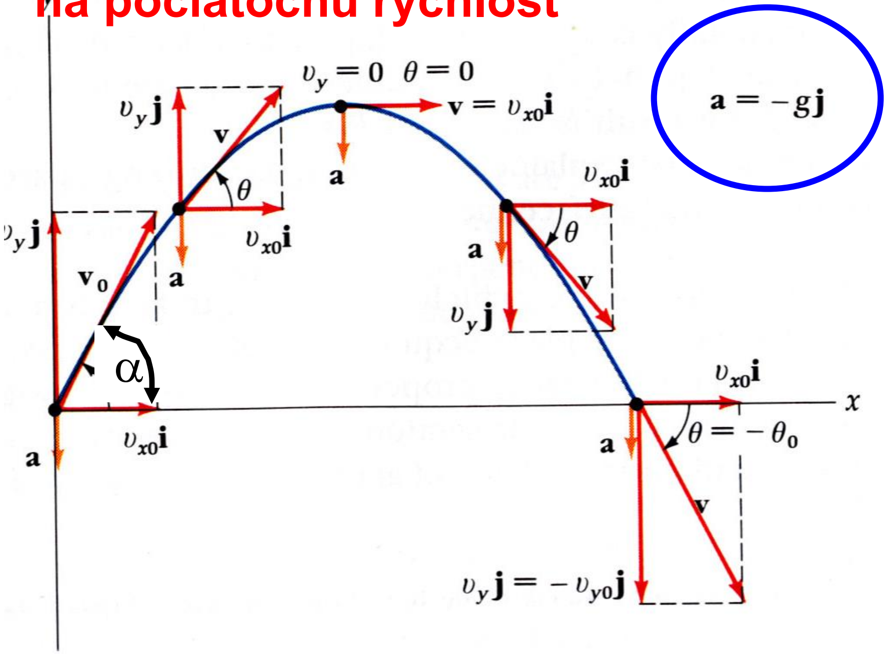
$$\boxed{y = 0} \Rightarrow R = \frac{v_0^2}{g} \sin\left(2\varphi\right)$$

Max. výška

$$\boxed{v_y = 0} \Rightarrow H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\left(\varphi\right)}{2g}$$

Šikmý vrh

Teleso v gravitačnom poli vždy padá s rovnakým zrýchlením, bez ohľadu na počiatočnú rýchlosť



$$a_x = 0$$
$$a_y = -g$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\varphi$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\varphi$$
$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$$
$$\vec{r}_0 = \vec{0}$$

Vodorovné a zvislé zložky veličín popisujúce vrh sú na sebe nezávislé.

x-ová zožka rýchlosti sa počas pohybu nemení, na rozdiel od y-ovej.
Tvar trajektórie je parabola.

Rovnica trajektórie

$$y = x\,tg\varphi - \frac{g}{2\left(v_0 \cos\varphi\right)^2}x^2$$

Dolet

$$y = 0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin\left(2\varphi\right)$$

Max. výška

$$v_y = 0$$

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\left(\varphi\right)}{2g}$$