SemMat1 – cv5 - Príklady na binomickú vetu – riešenia

1) Využitím binomickej vety napíšte všetky členy umocneného výrazu $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{5}x^3\right)^{10}$. Pri každom člene zistite aký má koeficient (koeficient netreba vyčísľovať).

Riešenie:

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{5}x^3\right)^{10}=\left(\frac{1}{x^2}\right)^{10}-\binom{10}{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{9}\left(\frac{2}{5}x^3\right)^{1}+\binom{10}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{8}\left(\frac{2}{5}x^3\right)^{2}-\binom{10}{3}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{7}\left(\frac{2}{5}x^3\right)^{3}+$$

$$\binom{10}{4}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6}\left(\frac{2}{5}x^3\right)^{4}-\binom{10}{5}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{5}\left(\frac{2}{5}x^3\right)^{5}+\binom{10}{6}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{4}\left(\frac{2}{5}x^3\right)^{6}-\binom{10}{7}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{3}\left(\frac{2}{5}x^3\right)^{7}+$$

$$\binom{10}{8}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{2}\left(\frac{2}{5}x^3\right)^{8}-\binom{10}{9}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{1}\left(\frac{2}{5}x^3\right)^{9}+\binom{10}{10}\left(\frac{2}{5}x^3\right)^{10}=x^{-20}-\binom{10}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^{1}x^{-15}+\binom{10}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{2}x^{-10}-$$

$$\binom{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{3}x^{-5}+\binom{10}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{4}x^{0}-\binom{10}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{5}x^{5}+\binom{10}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{6}x^{10}-\binom{10}{7}\left(\frac{2}{5}\right)^{7}x^{15}+\binom{10}{8}\left(\frac{2}{5}\right)^{8}x^{20}-$$

$$\binom{10}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^{9}x^{25}+\left(\frac{2}{5}\right)^{10}x^{30}$$

---

2) Zjednodušte výraz $\frac{1}{(n+2)\,!}-\frac{1}{(n-1)\,!}$.

Riešenie:

$$\frac{1}{(n+2)\,!}-\frac{1}{(n-1)\,!}=\frac{1}{(n+2)(n+1)(n)(n-1)\,!}-\frac{1}{(n-1)\,!}=\frac{1-(n+2)(n+1)(n)}{(n+2)(n+1)(n)(n-1)\,!}=$$

$$=\frac{1-n^3-3n^2-2n}{(n+2)(n+1)(n)(n-1)\,!}=\frac{1-n^3-3n^2-2n}{(n+2)\,!}$$

---

3) Zjednodušte výraz $\sqrt{2}+2\sqrt{2}^2+3\sqrt{2}^3+4\sqrt{2}^4+5\sqrt{2}^5$
tak, aby obsahoval iba jednu odmocninu.

Riešenie:

$$\sqrt{2}+2\sqrt{2}^2+3\sqrt{2}^3+4\sqrt{2}^4+5\sqrt{2}^5=\sqrt{2}+2\bullet 2+3\bullet\left(2\sqrt{2}\right)+4\bullet(2)^2+5\bullet\left(2^2\sqrt{2}\right)=$$

$$=\left(4+16\right)+\sqrt{2}\bullet\left(1+6+20\right)=20+27\sqrt{2}$$

---

4) Riešte rovnicu $\binom{x-1}{x-3}+\binom{x-2}{x-4}=9$.

Riešenie:

$$\frac{(x-1)!}{(x-1-x+3)!\,(x-3)!}+\frac{(x-2)!}{(x-2-x+4)!\,(x-4)!}=9,$$

$$\frac{(x-1).(x-2)!}{(x-2)!}+\frac{(x-2).(x-3).(x-4)!}{2.(x-4)!}=9,$$

$$\frac{(x-1).(x-2)}{2}+\frac{(x-2).(x-3)}{2}=9,$$

$$\frac{x^2-x-2x+2+x^2-2x-3x+6}{2}=\frac{2x^2-8x+8}{2}=x^2-4x+4=9,$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$D=b^2-4ac=16-4.1.(-5)=16+20=36=6^2,$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{4\pm 6}{2}=<\begin{matrix}5\\-1\end{matrix}$$

Aby boli výrazy zo zadania definované, potrebujeme $x\geq 4$, a teda riešením je iba koreň $x=5$.

---

5) Vypočítajte štvrtý člen rozvoja výrazu $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$.

Riešenie: Podľa binomickej vety je štvrtý člen

$$\binom{8}{3}.\,x^5.\left(\frac{2}{x}\right)^3=\frac{8.7.6.5!}{5!\,3!}\cdot x^5\cdot\frac{8}{x^3}=\frac{8.7.6}{6}\cdot x^5\cdot\frac{8}{x^3}=56x^5\cdot\frac{8}{x^3}=448x^2.$$

---

6) Vypočítajte pomocou binomickej vety a upravte na čo najjednoduchší tvar $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^5$.

Riešenie: Podľa binomickej vety

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^5=\overbrace{\binom{5}{0}.\left(\sqrt{2}\right)^5.\left(\sqrt{3}\right)^0}^{(1)}+\overbrace{\binom{5}{1}.\left(\sqrt{2}\right)^4.\left(\sqrt{3}\right)^1}^{(2)}+\overbrace{\binom{5}{2}.\left(\sqrt{2}\right)^3.\left(\sqrt{3}\right)^2}^{(3)}+$$

$$+\underbrace{\binom{5}{3}.\left(\sqrt{2}\right)^2.\left(\sqrt{3}\right)^3}_{(4)}+\underbrace{\binom{5}{4}.\left(\sqrt{2}\right)^1.\left(\sqrt{3}\right)^4}_{(5)}+\underbrace{\binom{5}{5}.\left(\sqrt{2}\right)^0.\left(\sqrt{3}\right)^5}_{(6)}=$$

$$=1.\left(4.\sqrt{2}\right).1+5.4.\sqrt{3}+10.\left(2\sqrt{2}\right).3+10.2.\left(3\sqrt{3}\right)+5.\sqrt{2}.9+1.1.\left(9\sqrt{3}\right)=$$

$$=4.\sqrt{2}+20.\sqrt{3}+60.\sqrt{2}+60.\sqrt{3}+45.\sqrt{2}+9.\sqrt{3}=109.\sqrt{2}+89.\sqrt{3}.$$

---

7) Vypočítajte dva prostredné členy rozvoja výrazu $\left(\sqrt[3]{x}-2x\sqrt{x}\right)^{19}$.

Riešenie: Keďže $n=19$, rozvoj má 20 členov a prostredné sú členy číslo 10 a 11. Podobne ako predtým vypočítame, že $M_{10}=-\binom{19}{9}\cdot 2^9\cdot x^{101/6}$ a $M_{11}=\binom{19}{10}\cdot 2^{10}\cdot x^{18}$

---

8) Koľký člen rozvoja výrazu $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$ obsahuje x^3?

Riešenie: Podľa binomickej vety k-ty člen rozvoja daného výrazu je

$$\binom{12}{k-1}\left(2x^2\right)^{13-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^{k-1}=\binom{12}{k-1}.(-1)^{k-1}.\,2^{13-k}.\,x^{26-2k}.\,x^{1-k}=\binom{12}{k-1}\cdot(-1)^{k-1}.2^{13-k}\cdot x^{27-3k}.$$

Tento výraz obsahuje x^3 práve vtedy, ak $27-3k=3$, teda $k=8$. Teda ôsmy člen rozvoja daného výrazu obsahuje x^3. Tento člen je rovný

$$\binom{12}{8-1}\cdot 2^{13-8}\cdot(-1)^{8-1}x^3=-\binom{12}{7}\cdot 2^5\cdot x^3=-\frac{12.11.10.9.8}{5.4.3.2.1}\cdot 2^5\cdot x^3=-99.2^8.\,x^3.$$

---

9) Koľký člen rozvoja výrazu $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ obsahuje x^7 ?

Riešenie: Podľa binomickej vety k-ty člen rozvoja daného výrazu je

$$\binom{8}{k-1}\left(2x^2\right)^{9-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{k-1} = \binom{8}{k-1}. 2^{9-k} .(-1)^{k-1} \cdot x^{18-2k} . x^{1-k} = \binom{8}{k-1} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2^{9-k} \cdot x^{19-3k} .$$

Tento výraz obsahuje x^7 práve vtedy, ak $19-3k=7$, teda $k=4$. Teda štvrtý člen rozvoja daného výrazu obsahuje x^7. Tento člen je rovný

$$\binom{8}{4-1} \cdot 2^{9-4} \cdot (-1)^{4-1} \cdot x^7 = -\binom{8}{3} \cdot 2^5 \cdot x^7 = -\frac{8.7.6}{3.2.1} \cdot 2^5 \cdot x^7 = -7.2^8. x^7 .$$

---

10) Koľký člen rozvoja výrazu $\left(\frac{1}{x} + 2x^3\right)^{10}$ obsahuje x^6 ?

Riešenie: 5. člen.

---

11) Určte v rozvoji výrazu $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ prosté členy.

Riešenie: Podľa binomickej vety k-ty člen rozvoja daného výrazu je

$$M_k = \binom{3n}{k-1} (2x)^{3n+1-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{k-1} = \binom{3n}{k-1} \cdot 2^{3n+1-k} x^{3n+1-k} x^{2(1-k)} = \binom{3n}{k-1} \cdot 2^{3n+1-k} x^{3n+3-3k}$$

Tento člen neobsahuje x práve vtedy, keď exponent $3n+3-3k$ je rovný 0. Skúsme teda vyriešiť tento problém:

$$3n+3-3k=0 \quad \to \quad k=n+1$$

Riešenie tejto rovnice je $k=n+1$. Takže člen $n+1$ je prostý a teda $M_{n+1} = \binom{3n}{n} \cdot 2^{2n}$.

---

12) Zistite, či v rozvoji výrazu $\left(\sqrt[3]{c^2} + \sqrt[5]{c^3}\right)^{20}$ existuje prostý člen.

Riešenie: Podľa binomickej vety k-ty člen rozvoja daného výrazu je

$$M_k = \binom{20}{k-1} \left(c^{2/3}\right)^{21-k} \left(c^{3/5}\right)^{k-1} = \binom{20}{k-1} \cdot c^{\frac{42-2k}{3} + \frac{3k-3}{5}}$$

Tento člen neobsahuje x práve vtedy, keď exponent $\frac{42-2k}{3} + \frac{3k-3}{5}$ je rovný 0. Skúsme teda vyriešiť tento problém:

$$\frac{42-2k}{3} + \frac{3k-3}{5} = 0 \quad \to \quad \frac{210-10k+9k-9}{15} = 0 \quad \to \quad \frac{201-k}{15} = 0$$

Riešenie tejto rovnice je $k = 201$. Taký člen v našom rozvoji nemáme a preto v ňom nie je prostý člen.

---

13) Pre aké x v rozvoji výrazu $\left(\frac{1}{2.\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ sa rovná piaty člen 105?

Riešenie: Podľa binomickej vety piaty člen rozvoja daného výrazu je

$$\binom{10}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^6 \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{210}{2^{10}} \cdot x^{-3} .$$

Tento člen je rovný 105, teda $105 = 210 \,.\, 2^{-10} x^{-3}$. Vynásobme obe strany x^3 a vydeľme 105 a dostaneme rovnicu $x^3 = 2^{-9}$ a teda $x = 2^{-3} = 1/8$. Môžeme si dosadením overiť, že pre toto x je piaty člen naozaj rovný 105.

---

14) Pre aké x v rozvoji výrazu $\left(\sqrt[3]{4-2x} + \sqrt[6]{3-2x}\right)^9$ sa rovná siedmy člen 168?

Riešenie: Výrazy sú definované iba ak $4-2x \geq 0$, teda $x \leq 2$, a zároveň $3-2x \geq 0$, teda $x \leq 3/2$.
Spolu máme teda podmienku $x \leq 3/2$. Podľa binomickej vety siedmy člen rozvoja daného výrazu je

$$\binom{9}{6} \cdot \left(\sqrt[3]{4-2x}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[6]{3-2x}\right)^6 = \binom{9}{6} \cdot (4-2x) \cdot (3-2x) =$$

$$= 84 \,.\, \left(12 - 8x - 6x + 4x^2\right) = 84 \,.\, \left(4x^2 - 14x + 12\right) = 168 \,.\, \left(2x^2 - 7x + 6\right).$$

$$168 \,.\, \left(2x^2 - 7x + 6\right) = 168 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 7x + 6 = \frac{168}{168} = 1$$

$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \quad .$$

Toto je kvadratická rovnica, ktorú si každý vyrieši svojou obľúbenou metódou. Riešením je

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4}$$

Keďže výrazy sú definované iba pre $x \leq 3/2$, riešením je $x = \frac{4}{4} = 1$.

15.V rozvoji výrazu $\left(1-x^3\right)^9 \left(1+x^2\right)^{10}$ určte člen, ktorý obsahuje x^{14}.

Riešenie: Najprv si napíšme k-tz člen rozvoja prvej časti (nazvime ho M_k) a j-tý člen rozvoja druhej časti (nazvime ho T_j):

$M_k = \binom{9}{k-1} (1)^{10-k} \left(-x^3\right)^{k-1} = K_1 \cdot x^{3k-3}$ a $T_j = \binom{10}{j-1} (1)^{11-j} \left(x^2\right)^{j-1} = K_2 \cdot x^{2j-2}$ kde K_1 a K_2 sú nejaké konštanty (čísla ktoré neobsahuju premennú x). Keďže nás zaujíma exponent 14, ten dostaneme ako kombináciu nejakého exponentu z prvej časti výrazu a nejakého z druhej časti. Otázka teda je, aké kombinácie $(3k-3) + (2j-2) = 3k + 2j - 5$ nám dajú výsledok 14, Hľadáme teda take nezáporné čísla k, j, aby $3k + 2j = 19$. Vidíme, že možnosti sú $k = 1, j = 8; k = 3, j = 5; k = 5, j = 2$. Poďme sa teda pozrieť na to, aké koeficienty tieto členy prinesú:

- $k = 1, j = 8$ potom $M_1 = \binom{9}{0} = 1$ a $T_8 = \binom{10}{7} x^{14} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^{14} = 120x^{14}$
- $k = 3, j = 5$ potom $M_3 = \binom{9}{2} x^6 = 36x^6$ a $T_5 = \binom{10}{4} x^8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} x^8 = 210x^8$
- $k = 5, j = 2$ potom $M_5 = \binom{9}{4} x^{12} = 126x^{12}$ a $T_2 = \binom{10}{1} x^2 = 10x^2$

Spolu potom máme koeficient $120 \cdot 1 + 36 \cdot 210 + 126 \cdot 10 = 120 + 7560 + 1260 = 8940$