DELITEĽNOSŤ ČÍSEL.

m, n $\quad$ $m | n$ $\quad$ ak existuje také číslo q, že

„m delí n" $\quad$ $n = m \cdot q$

m – deliteľ
n – delenec
q – podiel

18 delitele
$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}$

−18 delitele
$\{$ —"— $\}$

m a $-m$ majú rovnaké delitele

$1, -1, 18, -18$ – triviálne delitele čísla 18, resp. −18

ich ostatné – vlastné delitele čísla 18

$3 | 18 \Rightarrow$ zvyšok po delení sa rovná nule

Lepšie ak $\quad n = m \cdot q + r$

PRÍKLAD: $22 = 5 \cdot 4 + 2$ – je zvyšok po delení čísla 22 číslom 5

SÚDELITEĽNOSŤ ČÍSEL

m, n sú súdeliteľné, ak existuje $k>1$, že $k|m \wedge k|n$

Sú súdeliteľné čísla 10, 17?

$A = DELITELE_{10} = \{1, 2, 5, 10, -1, -2, -5, -10\}$ $B = Del\,17 = \{1, 17, -1, -17\}$

V skutočnosti hľadáme spoločné nezáporné delitele. $A \cap B = \{1, -1\}$

neexistuje také $k > 1$; sú nesúdeliteľné

ak $a|b \not\Rightarrow b|a$

Kedy je číslo deliteľné:

2 – ak má posl. číslicu párnu 0, 2, 4, 6, 8

3 – ciferný súčet je del. 3

4 – posl. dvojčíslie musí byť del. 4

5 – posl. číslica 0, 5

6 – keď je del. 2 a aj 3

1782 . Σ cif. = 18

18 je del. 3

$3|18 \Rightarrow 3|1782$

1782 – nie je del. 4

23(40) – je del 4

1782 $\Rightarrow$ je del. 6

$2|1782 \wedge 3|1782 \Rightarrow 6|1782$

del. 7

ak násobíme číslice postupne zozadu (od najn. rádov) číslami $\boxed{1, 3, 2, 6, 4, 5}$ a výsledok sčítame

je číslo 8489880 del. 7?

$$4\cdot 5$$

$$0\cdot\boxed{1}+8\cdot\boxed{3}+8\cdot\boxed{2}+9\cdot\boxed{6}+\boxed{4}\cdot 8+8\cdot 1=24+16+54+20+8+32=$$

$$=94+28=122+32=154$$

$$+32$$

$$7 \mid 8489880$$

$$154=7\cdot 22$$

$$7 \mid 154 \Rightarrow$$

del. 8 posledné trojčíslie je del. 8

5096 ak

12 je del. 3 a 4
25 posl. dvojčíslie je del. 25
100 posl. 2 číslice sú nuly

del. 9
cif. súčet je del. 9

1251 je del. 9

del. 10 0

del. 11 rozdiel súčtu číslic na párnych a nepárnych miestach je delit. 11

$\boxed{7}4\boxed{4}4\boxed{8}$ $19-8=11$

8 19 $11 \mid 11$

(4)

$35^2 = 1225$

$105^2 = 11025$

$\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ párne čísla

$\{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$ nepárne čísla

Prvočísla.

Sú kladné prir. čísla, tj. majú práve 2 rôzne deliteľov.

sú väčšie ako 1

1 nie je prvočíslo 1

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$

$17 = 17^1$

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$, ak $p_1 < p_2 < \dots p_k$

p_i sú prvočísla

tak ten rozklad je jednoznačný

kanonický rozklad čísla

$144 = 2 \cdot 72 = 2^2 \cdot 36 =$
$= 2^2 \cdot 6 \cdot 6 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 =$
$= \underline{\underline{2^4 \cdot 3^2}}$ $2 < 3$

$17 = 17^1$ $\{1, 17\}$

$144 = 2^4 \cdot 3^2$

Koľko deliteľov majú tieto čísla?

$\boxed{144} = 2^{4} \cdot 3^{2}$

$\underline{\underline{2^{4}}}$ delí 144

2^{3}

2^{2}

2^{1}

2^{0}

$\underbrace{0, 1, 2, 3, 4}_{\text{exp. 2}}$

3^2 je podiel

$2 \cdot 3^2$

$2^2 \cdot 3^2$

$2^3 \cdot 3^2$

$3^2 \cdot 2^4$

$\underbrace{0, 1, 2}$

3 exponent 3

$5 \cdot \underline{\underline{3}} = 15$

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

Počet deliteľov čísla n je

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$

$2^4 \cdot 3$ podiel je 3

$(2^4 \cdot 3^2$ — " — 1

$2^4 \cdot 3^0$ 3^2

$2^4 \cdot$ 3^0, 3^1, 3^2

2^3 3^0, 3^1, 3^2

2^2

2^1 3^0, 3^1, 3^2

2^0 3^0, 3^1, 3^2

NAJVÄČŠÍ SPOL. DELITEĽ ČÍSEL m, n je $d = nsd(m,n)$
$d = gcd(m,n)$ (6)

1) $d \mid m$
2) $d \mid n$
3) ak $k \mid m \wedge k \mid n \Rightarrow k \mid d$

$m = 48$
$n = 36$

$k = 6$ $\quad 6 \mid 36 \wedge 6 \mid 48 \Rightarrow 6 \mid 12$

$nsd(36,48) = 12$

POZNÁMKA.
ak $d = 1$, sú nesúdeliteľné!

Ako nájsť d?
1) rozklad čísel na súč. tvar
2) Euklidov algoritmus

$3.2.2.2 = 24$ deliteľov

$nsd(924, 715)$

$924 = 4.3.77 = 2^2.3.7.\boxed{11}^1$

$715 = 5.143 = 5.\boxed{11}.13$ — $2.2.2 = 8$ $\quad \{5, 11, 13, 5.11, 5.13, 11.13, 1, 715\}$

$nsd(924, 715) = 11$

EUKLIDOV ALGORITMUS.

$$\text{nsd}(m,n) = \text{nsd}(n, m - k.n)$$

$$\text{nsd}(924,715) = \text{nsd}(\underbrace{715,209}_{715-3.209}) = \text{nsd}(\underbrace{209,88}_{209-2.88}) = \text{nsd}(88,33) =$$

$$= \text{nsd}(\underbrace{33,22}_{88-2.33}) = \text{nsd}(\underbrace{22,11}_{22-2.11}) =$$

$$= \text{nsd}(11,0)$$

posledný nenulový zvyšok

$924 : 715 = 1$ zv. 209

$715 : 209 = 3$ zv. 88

$209 : 88 = 2$ zv. 33

$88 : 33 = 2$ zv. 22

$33 : 22 = 1$ zv. 11

$22 : 11 = 2$ zv. 0

ak $d = \text{nsd}(m,n)$ potom existujú čísla $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$:

$$d = k_1.m + k_2.n$$

$$11 = k_1.924 + k_2.715$$

$$k_1 = 24$$
$$k_2 = -31$$

$$11 = 33 - 1.22 = 33 - 1.(88 - 2.33) =$$
$$= 3.33 - 1.88 = (209 - 2.88).3 - 1.88 =$$
$$= 3.209 - 7.88 = 3.209 - 7.(715 - 3.209) =$$
$$= 24.209 - 7.715 = 24(924 - 1.715) - 7.715$$
$$= \underline{\underline{24.924 - 31.715}}$$

8

ROZŠÍRENÝ EUKLIDOV ALGORITMUS

A	B	C	D	E	
924	715	1	24	-31	$-7-24\cdot 1$
715	209	3	-7	24	$3-(-7)\cdot 3$
209	88	2	3	-7	$-1-3\cdot 2$
88	33	2	-1	3	$1-(-1)\cdot 2$
33	22	1	1	-1	$D-E\cdot C$ $0-1\cdot 1$
22	$\boxed{11}$	2	0	1	
11	0				

$-88+99=11$

$A\cdot D+B\cdot E = \text{nsd}(m,n)=11$

$11 = 24\cdot(924)+(-31)\cdot 715$

DIOFANICKÉ ROVNICE.

$ax+by=c$, $a,b,c \in \mathbb{Z}$

$x,y \in \mathbb{Z}$

$3x+5y=64$

koľkými trojeurovými a koľkými 5-eurovými bankovkami vieme zaplatiť sumu 64 Eur?

1) ? či také x, y existujú?

ak $nsd(a,b) \mid c$, tak úloha je rieš.

$nsd(3,5)=1$

$1 \mid 64 \Rightarrow$ úloha je riešiteľná!

2) nech x_0, y_0 je riešením tej rovnice

(x_0,y_0) je nejaké riešenie

$d = nsd(a,b)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{b}{d}\cdot t \\ y &= y_0 - \frac{a}{d}\cdot t \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbb{Z}}$$

$3x+5y=64$

nsd$(3,5)=1$

$3\cdot 2+5\cdot(-1)=1 \quad | \cdot 64$

$1=k_1\cdot 3+k_2\cdot 5$

$1=2\cdot 3+(-1)\cdot 5$

$(2,-1)$

$3\cdot(128)+5\cdot(-64)=64$

$(x_0,y_0)=(128,-64)$

$1=3\cdot 7-4\cdot 5$

$(7,-4)$

$(-2,1)$

ak má byť kladný

$\boxed{x=128+\frac{5}{1}\cdot t=128+5t}$

$\boxed{y=-64-\frac{3}{1}t=-64-3t}$, ak ze $t\in\mathbb{Z}$

$t=1$

$(133,-67)$

⋮

$x=128+5t\geq 0 \ \wedge$

$y=-64-3t\geq 0$

$5t\geq -128$

$t\geq -\frac{128}{5}=-25\frac{3}{5}$

$-64\geq 3t$

$t\leq -\frac{64}{3}=-21\frac{1}{3}$

$-25\frac{3}{5}$, -25, -24, -23, -22, $-21\frac{1}{3}$, -21

$t\in\{-25,-24,-23,-22\}$

11

	-25	-24	-23	-22
x	3	8	13	18
y	11	8	5	2

$3x+5y=64$

$3.3+5.11=64$

$x = 128+5d$

$y = -64-3d$