NEROVNICE S ABSOLÚTNOU HODNOTOU

PRÍKLAD 1

RIEŠTE V $\mathbb{R}$.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x| + |x+2| > 1$$

$x = 0$

$x + 2 = 0$

$x = -2$

3 INTERVALY

TEÓRIA HOVORÍ

(1) NÁJDI NULOVÉ BODY

(2) ROZDEĽ ČÍSELNÚ OS NA INTERVALY + ZOSTAV TABUĽKU

(3) RIEŠ NA KAŽDOM SUBINTERVALE

	$(-\infty, -2)$	$\langle -2, 0)$	$\langle 0, \infty)$
$\lvert x \rvert$	$-x$	$-x$	$+x$
$\lvert x+2 \rvert$	$-(x+2)$	$+(x+2)$	$+(x+2)$

ZOSTAVÍME TABUĽKY

I: $x \in (-\infty, -2)$

POZOR!! NÁSOBENIE A DELENIE ZÁPORNÝM ČÍSLOM **MENÍ** ZNAMIENKO

$-x + [-(x+2)] > 1$

$-x - x - 2 > 1$

$-2x - 2 > 1 \quad /-1$

$-2x - 3 > 0$

$-2x > 3$

$x < -\frac{3}{2}$ – PRAVDA PRE CELÝ INTERVAL

RIEŠENÍM JE CELÝ INTERVAL $P_1 = (-\infty, -2)$

II $x \in \langle -2, 0)$

$-x + (x+2) > 1$

$-x + x + 2 > 1$

$2 > 1$ PRAVDA

RIEŠENÍM JE CELÝ INTERVAL $P_2 = \langle -2, 0)$

III $x \in \langle 0, \infty)$

$$x + (x+2) > 1$$
$$2x + 2 > 1 \quad / -2$$
$$2x > -1$$
$$x > -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \geq 0$$

PLATÍ PRE CELÝ INTERVAL

RIEŠENÍM JE CELÝ INTERVAL $P_3 = \langle 0, \infty)$

PRÍKLAD 2

$$|2x+1| - |3x| > 0$$

① NULOVÉ BODY

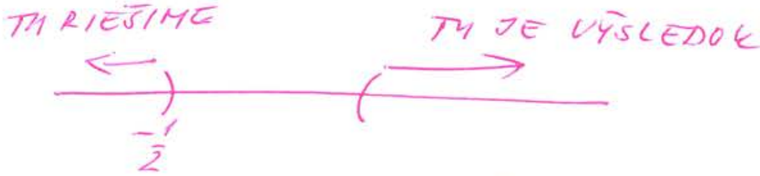
$$2x+1=0 \qquad 3x=0$$
$$2x=-1 \qquad x=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

ZOSTAVÍME TABUĽKU

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$\langle -\frac{1}{2}, 0)$	$\langle 0, \infty)$
$\lvert 2x+1 \rvert$	$-(2x+1)$	$+(2x+1)$	$+(2x+1)$
$\lvert 3x \rvert$	$-(3x)$	$-(3x)$	$+(3x)$

I: $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

$$-(2x+1) - (-(3x)) > 0$$
$$-(2x+1) + 3x > 0$$
$$-2x - 1 + 3x > 0$$
$$x - 1 > 0$$
$$\underbrace{x > 1 \quad \wedge \quad x \in (-\infty, -\tfrac{1}{2})}_{\text{nemôže byť súčasne!!!}}$$



$$P_1 = \emptyset$$

II $x \in \langle -\frac{1}{2}, 0)$

$$(2x+1) - (-3x) > 0$$

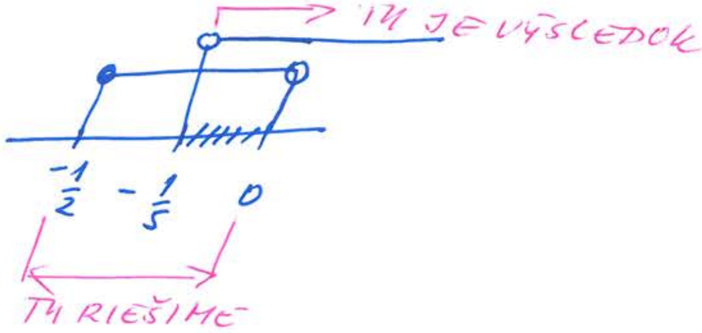
$2x+1+3x > 0$

$5x+1 > 0$

$5x > -1$

$x > -\frac{1}{5}$

$\boxed{P_2 = (-\frac{1}{5}, 0)}$



$\overline{III}$ $x \in \langle 0, \infty)$

$(2x+1) - (3x) > 0$

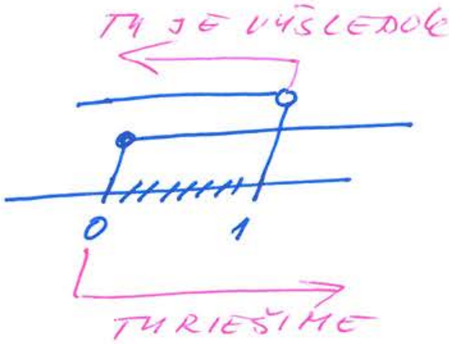
$2x+1-3x > 0$

$-x+1 > 0$

$-x > -1$

$x < 1 \quad \wedge \quad x \geq 0$

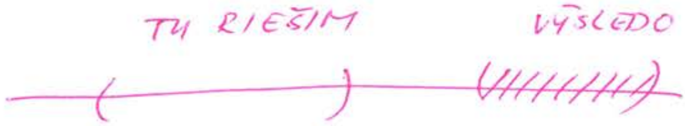
$\boxed{P_3 = \langle 0, 1)}$



RIEŠENIE: $P_1 \cup P_2 \cup P_3 = (-\frac{1}{5}, 0) \cup \langle 0, 1)$

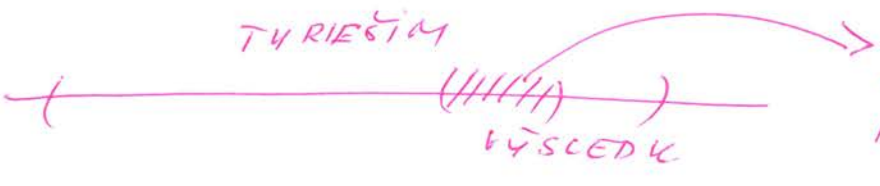
$\boxed{P = (-\frac{1}{5}, 1)}$

POZNÁMKA KU RIEŠENIU – HĽADÁME $\boxed{\text{PRIENIK}}$



→ NEMÁ RIEŠENIE

→ RIEŠENÍM JE LEN TEN VYŠRAFOVANÝ KÚSOK



LEN TOTO JE RIEŠENÍM

POZOR NA UZAVRETÝ A OTVORENÝ INTERVAL

OPAKOVANIE - VEĽMI JEDNODUCHÉ KVADRATICKÉ NEROVNICE

PRÍKLAD 1

$+3x^2+18x+15 \leq 0$

$3(x^2+6x+5) \leq 0$

$(x^2+6x+5)=0$

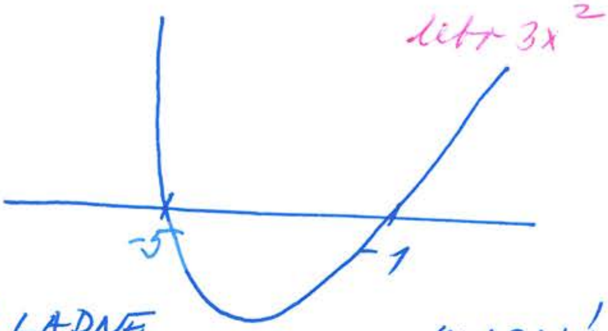
$x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-4.1.5}}{2.1} =$

$x_1 = -1$

$x_2 = -5$

$3(x-(-1))(x-(-5)) = 0$

$3(x+1)(x+5)=0$



KLADNÉ H. | ZÁPORNÉ HODNOTY | KLADNÉ H.

$+ \quad -5 \quad - \quad -1 \quad +$

⇒ RIEŠIME NEROVNICU

$3(x+1)(x+5) \leq 0$

Z GRAFU VIDÍME

$P = \langle -5, -1 \rangle$

! NEZABUDNI UZAVRETÝ INTERVAL LEBO

ALGORITMUS

1. POKÚS SA NÁJSŤ RIEŠENIE ROVNICE ... = 0 v R

áno → grafická tabuľková metóda

nie → uprav na štvorec

DÔLEŽITÉ INFORMÁCIE

Ak máme parabolu v tvare $+ \dots x^2 + \dots$ tvar paraboly je ∪ NOŽIČKAMI HORE LEBO ZNAMIENKO PLUS PRI x^2

Ak máme parabolu v tvare $- \dots x^2 + \dots$ tvar paraboly je ∩ NOŽIČKAMI DOLE - LEBO ZNAMIENKO MINUS PRI x^2 (KOEFICIENT KVADRATICKÉHO ČLENA JE ZÁPORNÝ)

PRÍKLAD 2

$$\boxed{+x^2-2x+5<0}$$

$$x^2-2x+5=0$$

$$x_{1,2} = \frac{+2\pm\sqrt{4-4.1.5}}{2.1} = \frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$$

→ ZÁPORNÝ DISKRIMINANT

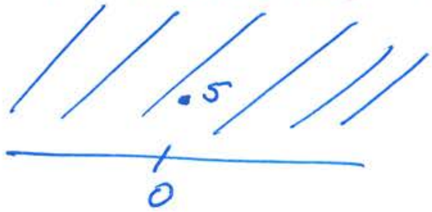
!!!!

⇒ NEMÁ REÁLNE KORENE

⇒ NIKDE NEPRETNE REÁLNU OS

3 SPÔSOBY AKO SA DÁ SITUÁCIA ANALYZOVAŤ

① DOSAĎ 1 HODNOTU (ĽUBOVOĽNÚ) → NULA napr.



⇒ vidíme že hodnoty ĽS nerovnice sú vždy kladné, lebo sú kladné v jednom bode a nikdy nepretne os.

$$P=\emptyset$$

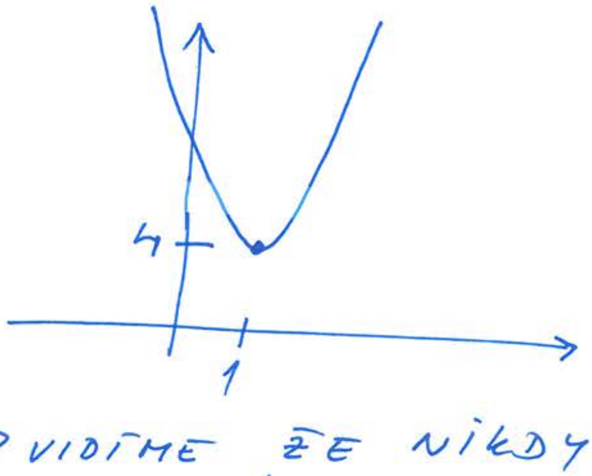
② UPRAV NA ŠTVOREC

$$x^2-2x+5 = (x^2-2.1.x+1)-1+5 =$$

$$=(x-1)^2+4$$ ⇒ VRCHOL PARABOLY $V=[1,4]$

koeficient $+x^2$

→ otočená nožičkami smerom hore



⇒ VIDÍME ŽE NIKDY NENADOBUDNE ZÁPORNÉ HODNOTY ⇒

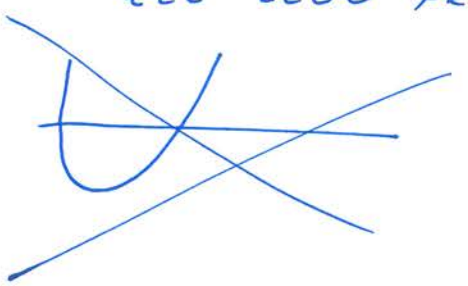
$$P=\emptyset$$

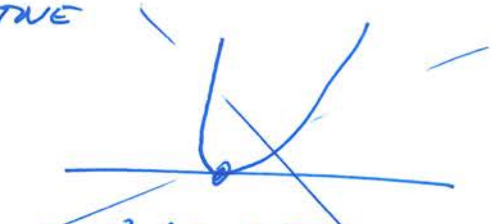
(3) LEN JEDNODUCHÁ LOGICKÁ ÚVAHA

FAKT 1: PRETOŽE JE KOEFICIENT KVADRATICKÉHO ČLENA KLADNÝ ($+x^2-2x+5\ldots$)
TAK PARABOLA JE OTOČENÁ NOŽIČKAMI HORE

FAKT 2: NIKDE NEPRETNE OS $\vec{x}$

ZLE LEBO PRETNE





ZLE LEBO SA DOTÝKA $\Rightarrow$ MALA BY DVOJNÁSOBNÝ KOREŇ

$\rightarrow$ SPRÁVNY PRÍPAD, LEBO OBE PODMIENKY SÚ SPLNENÉ

ODPOVEĎ: $P = \emptyset$ – NIKDY TO NEBUDE ZÁPORNÉ

PRÍKLAD 3

ROVNAKÝ AKO PRÍKLAD 2, LEN OTOČENÉ ZNAMIENKO

$$\boxed{+x^2-2x+5 \geq 0}$$

ROVNAKOU ANALÝZOU AKO V PRÍKLADE 2 VIDÍME, ŽE TÁTO NEROVNOSŤ JE VŽDY SPLNENÁ

$\Rightarrow$ NEROVNICA MÁ NEKONEČNE VEĽA RIEŠ

$$P = \mathbb{R}$$

OZNAM: JE JEDNO, KTORÚ LOGICKÚ ÚVAHU POUŽÍVATE – LEN NECH SÚ TAM SPRÁVNE VÝSLEDKY !!!

NEROVNICE S NEZNÁMOU V MENOVATELI

PRÍKLAD 1

$$\frac{x-1}{x+2} > \frac{x+3}{x-2}$$

POSTUP

1. PODMIENKY, KEDY MAJÚ ZLOMKY ZMYSEL MENOVATEĽ $\neq 0$
2. UPRAVÍME TAK, ABY NA JEDNEJ STRANE BOLA NULA → VŠETKO NA JEDNU STRANU
3. JEDEN ZLOMOK, AK SA DÁ.
4. ČITATEĽ / MENOVATEĽ ROZLOŽÍME NA SÚČIN ČINITEĽOV
5. KLASICKÁ TABUĽKOVÁ GRAFICKÁ METÓDA

(1) $x+2 \neq 0$

$\boxed{x \neq -2}$

$x-2 \neq 0$

$\boxed{x \neq 2}$

(2) $$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+3}{x-2} > 0$$

$$\frac{(x-1)(x-2)-(x+3)(x+2)}{(x+2)(x-2)} > 0$$

$$\frac{x^2-x-2x+2-[x^2+3x+2x+6]}{(x+2)(x-2)} > 0$$

NECHAJ V TVARE SÚČINU

$$\frac{x^2-3x+2-x^2-5x-6}{(x+2)(x-2)} > 0$$

TOTO VIEME:

ZLOMOK $> 0 \Leftrightarrow$

$\frac{+}{+} > 0 \qquad \frac{-}{-} > 0$

$$\frac{-8x-4}{(x+2)(x-2)} > 0$$

$-8x-4=0$

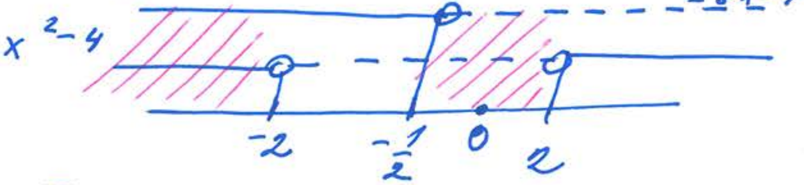
$-8x = 4$

$x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

$(x+2)(x-2)=0$

$x=2$

$x=-2$



GRAFICKY

POZOR NA OKRAJE INTERVALOV!!!

$P = (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, 2)$

$\frac{+}{+} \qquad \cup \qquad \frac{-}{-}$

TABUĽKOVÁ METÓDA

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 2)$	$(2, \infty)$
$-8x-4$	+	+	−	−
$(x-2)(x+2)$	+	−	−	+

$$\frac{+}{+} > 0 \qquad \frac{-}{-} > 0$$

$$P = (-\infty, -2) \cup (-\tfrac{1}{2}, 2)$$

PRÍKLAD 2

$$\frac{18}{(x-2)(x-3)} + \frac{10}{x-3} < -1$$

PODMIENKY:

$x-2 \neq 0$

$x \neq 2$

$x-3 \neq 0$

$x \neq 3$

$$\frac{18}{(x-2)(x-3)} + \frac{10}{(x-3)} + 1 < 0$$

$$\frac{18 + 10.(x-2) + 1.(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} < 0$$

NECHAJ V TVARE SÚČINU ⇒ JE TO VÝHODNEJŠIE

$$\frac{18 + 10x - 20 + x^2 - 2x - 3x + 6}{(x-2)(x-3)} < 0$$

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x-3)} < 0$$

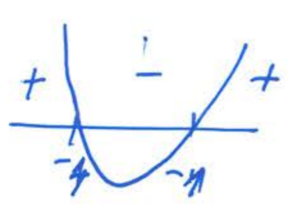
KVADRATICKÁ

KVADRATICKÁ

POZRI ČASŤ VENOVANÚ JEDNODUCHÝM KVADRATICKÝM ROVNICIAM

ANALÝZA ČITATEĽA

$x^2 + 5x + 4$



$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4.1.4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \begin{cases} \frac{-2}{2} = -1 \\ \frac{-5-3}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

$x_1 = -1$

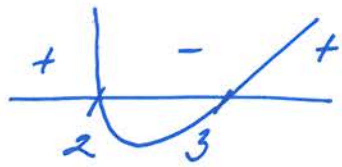
$x_2 = -4$

ANALÝZA MENOVATEĽA

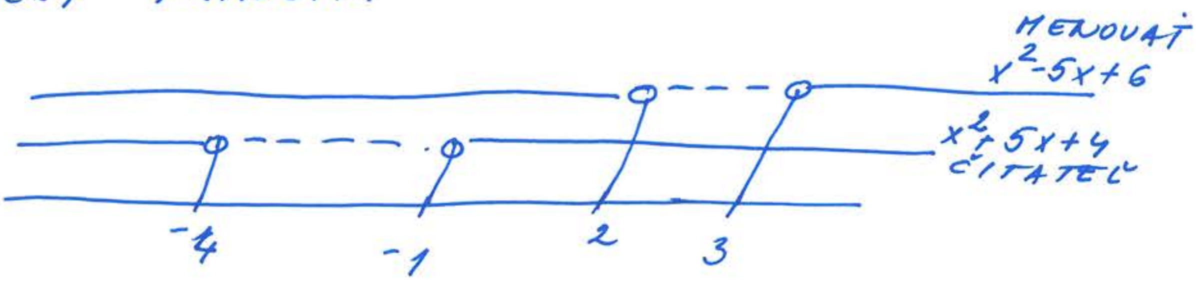
$$\frac{(x+1)(x+4)}{(x-2)(x-3)} < 0$$

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 2x - 3x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6$$



GRAFICKÝ PRINCÍP:



ZLOMOK < 0

$$\frac{+}{-} < 0 \qquad \frac{-}{+} < 0$$

$$P_1 = (2, 3) \qquad P_2 = (-4, -1)$$

$$P = (-4, -1) \cup (2, 3)$$

TABUĽKOVÝ PRINCÍP

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
x^2+5x+4	+	−	+	+	+
x^2-5x+6	+	+	+	−	+
		RIEŠ.		RIEŠ	

$$P = (-4, -1) \cup (2, 3)$$

POZOR NA PODMIENKY !!

IRACIONÁLNE NEROVNICE

PRÍKLAD 1

$$\sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} > 4$$

VÝRAZ POD ODMOCNINOU JE DEFINOVANÝ:

$x-2 \geq 0 \qquad x-2>0$

$x \geq 2 \quad \wedge \quad x>2$

$\underline{x>2}$ $\quad x \in (2,\infty)$

VÝRAZ POD ODM JE VŽDY KLADNÝ → MÔŽEME NÁSOBIŤ

$$\sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} > 4 \quad / \cdot \sqrt{x-2}$$

ZÁVAHK: ODMOCNINA JE VŽDY KLADNÁ ⇒ ⇒ JE BEZPEČNÉ ŇOU VYNÁSOBIŤ

$$(x-2) + 1 > 4\cdot\sqrt{x-2}$$

$$x-2+1 > 4\sqrt{x-2}$$

$$(x-1) > 4\sqrt{x-2} \quad /^2$$

! POČÍTAME NA $(2,\infty)$

x-1 NA TOMTO INTERVALE JE KLADNÉ

→ NEROVNICA MÁ ŠANCU BYŤ SPLNENÁ

NEEKVIVALENTNÁ ÚPRAVA

$$x^2-2x+1 > 16\cdot(x-2)$$

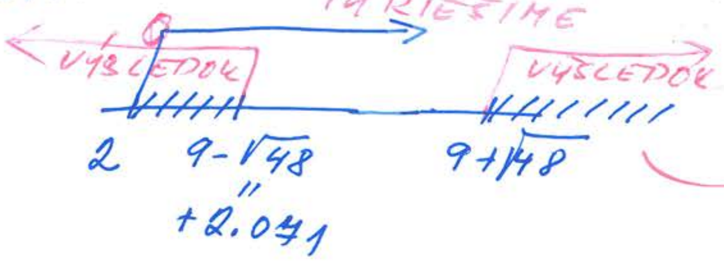
$$x^2-2x+1 > 16x-32$$

$$x^2-18x+33 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{+18 \pm \sqrt{18^2-4\cdot 1\cdot 33}}{2}$$

$$= \frac{18 \pm \sqrt{192}}{2} = \underline{\underline{9 \pm \sqrt{48}}} = 9 \pm 4\sqrt{3}$$

GRAF.



$P = (2, 9-\sqrt{48}) \cup (9+\sqrt{48}, \infty)$

! SKÚŠKA SPRÁVNOSTI DOSADENÍM !!!

POZOR- ČASTÉ CHYBY

- NEROVNICU NEMÔŽEME VYNÁSOBIŤ MENOVATEĽOM - HROZÍ ZMENA ZNAMENKA V NEROVNICI $> \leftrightarrow <$
  - dá sa to zrealizovať len tak, že najskôr určíme intervaly zmeny znamienka a potom počítame na každom intervale samostatne

  → TOTO JE NÁROČNEJŠÍ POSTUP.

- NEROVNICU S ODMOCNINOU

  PO UMOCNENÍ MÔŽU PRIBUDAŤ RIEŠENIA

  → SKÚŠKA SPRÁVNOSTI