STU FIIT

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA INFORMATIKY A INFORMAČNÝCH TECHNOLÓGIÍ

Dátové štruktúry a algoritmy

Pokročilé algoritmy vyhľadávania

17. 03. 2021

letný semester 2020/2021

prednášajúci: Lukáš Kohútka

Opakovanie – Problém vyhľadávania

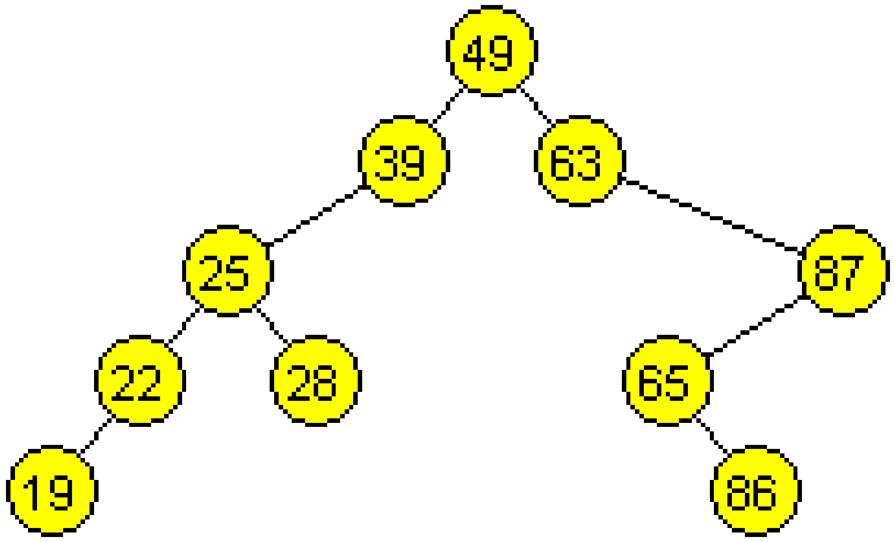
- Vstup:
  - Postupnosť: $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$
    $k(a_i)$ označíme kľúč k_i prvku a_i
  - Hľadaný kľúč x
  - Čo sú kľúče?
    Definičný obor D – reťazce, reálne čísla, dvojice celých čísel, ...
  - Relácia = (rovnosti) – relácia ekvivalencie nad D
  - Usporiadanie kľúčov < (binárna relácia nad D)
    Lineárne usporiadaná množina K (total ordering)
    Pre $k_1, k_2 \in D$ budeme písať, že $k_1 \leq k_2$ akk $k_1 < k_2$ alebo $k_1 = k_2$.
- Výstup:
  - Index res $\in \{1,2,\ldots,n\}$ takého prvku, že $k(a_{res}) = x$, alebo 0 ak taký prvok neexistuje.

Opakovanie – Základné algoritmy

- Čím viac informácií o vstupnej postupnosti mám k dispozícii, tým rýchlejší algoritmus dokážem vytvoriť
  - Lineárne vyhľadávanie: O(n)
  - Binárne vyhľadávanie: O(log n)
  - Interpolačné vyhľadávanie: O(log log n)
- Binárne vyhľadávacie stromy
  - Priemerný prípad: O(log n)
  - **Najhorší prípad: O(n)**
- Niektoré špecializované typy vyhľadávania
  - Prioritný front (vyhľadávam len najprioritnejší prvok): insert / removeMax: O(log n)

Nová operácia: nájdi k-ty prvok v strome

- Prvé riešenie:
  Využiť in-order usporiadanie, zobrať k-ty prvok
  - Zložitosť O(k)
- Napr. k=5



- In-order: 19, 22, 25, 28, **39**, 49, 63, 65, 86, 87

Nová operácia: nájdi k-ty prvok v strome

- Lepšie riešenie: využiť princíp QuickSelect algoritmu **pri porovnaní vo vrchole pokračovať len v podstrome, v ktorom sa k-ty prvok nachádza**
- Potrebujeme pre každý vrchol x poznať: **počet prvkov v podstrome strome s koreňom x**
- Implementácia ako **rozšírenie štandardnej dátovej štruktúry BVS**, rozšírime údaje pre vrchol:
  - ľavý, pravý, rodič, **počet** (prvkov v podstrome) tzv. **váha**
  - rekurzívna definícia váhy
    váha(v) = váha(ľavýPodstrom(v)) + váha(pravýPodstrom(v)) + 1
- Hodnoty **váha** vo vrcholoch upravujeme pri každej operácií ktorá mení štruktúru stromu: zložitosť O(h), kde h je výška stromu

Order statistic tree

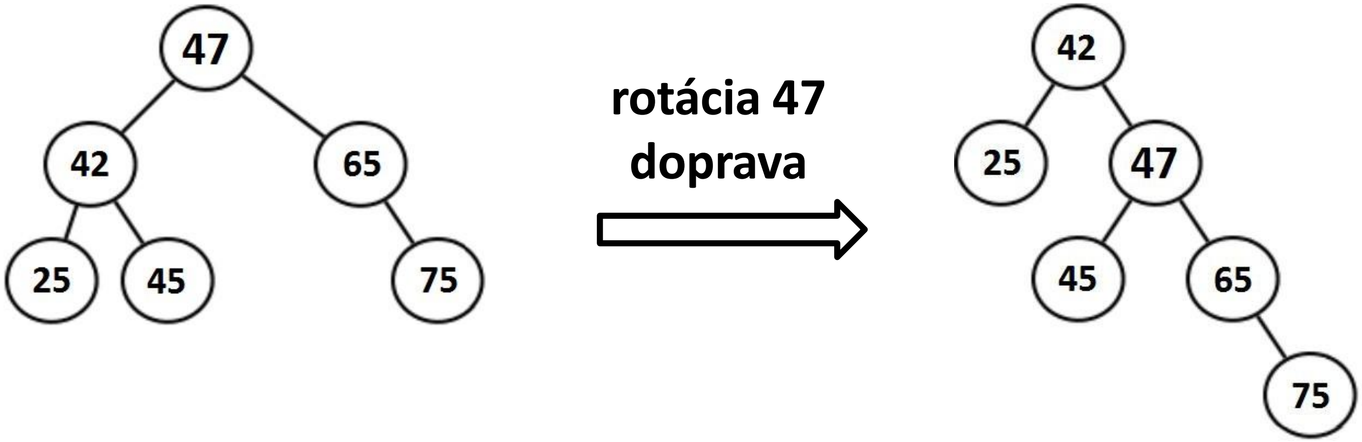
- Rozšírenie BVS stromu
- Pre každý vrchol BVS si navyše pamätáme **počet prvkov v podstrome vrcholu** tzv. váhu
- Hodnoty váhy vo vrcholoch upravujeme pri každej operácií ktorá mení štruktúru stromu (insert, delete)
- Rozšírený strom podporuje navyše operácie:
  - **select(k)** – nájdi k-ty najmenší prvok v množine
  - **rank(x)** – nájdi poradie prvku x v usporiadanej postupnosti prvkov stromu
- Zložitosť operácií O(h), kde h je výška stromu

Ako vylepšiť všeobecné vyhľadávacie stromy?

- Obmedziť ich štruktúru, aby sme mohli o nej prehlásiť nejaké vlastnosti – napr. že bude vždy nízka výška stromu
- Z týchto garancií (na veľkosť výšky) vyplynú efektívne zložitosti operácií nad takýmito stromami
- Na získanie optimálnej zložitosti O(log n) musíme zabezpečiť, aby strom po vykonaní každej operácie zostal vyvážený
- Ako zabezpečiť vyváženie stromu?
  - Hodnoty v strome meniť nemôžeme :)
  - Musíme nejako **upravovať štruktúru** stromu

Rotácia stromu – doprava

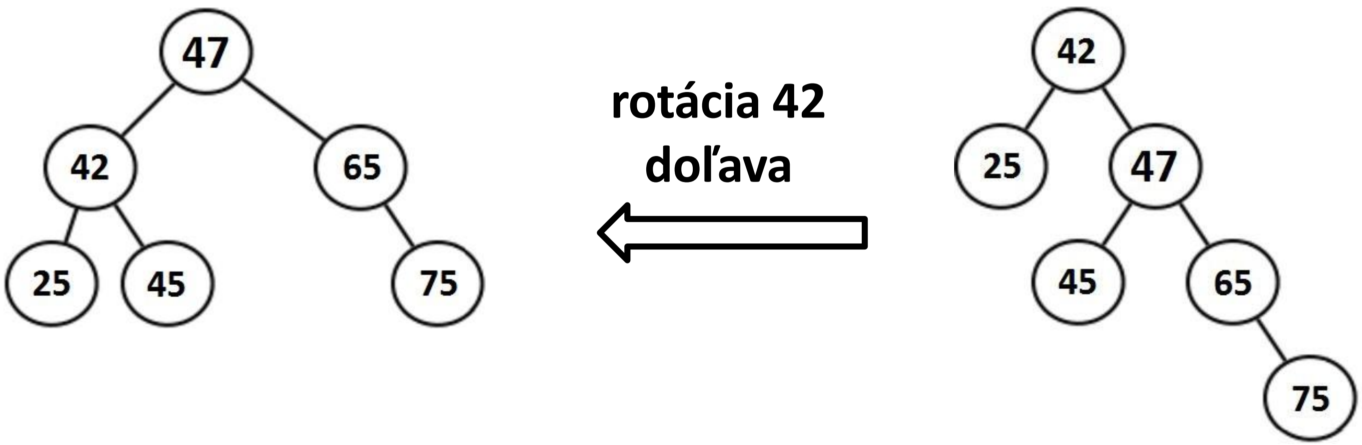
- Operácia, ktorá zmení štruktúru ale zachová usporiadanie
- Zmena tvaru stromu – zmena výšky stromu
- **Rotácia doprava**:
  ľavé dieťa sa presunie (doprava hore) na miesto rodiča



- Zmena hĺbky 25(-1), 42(-1), 47(+1), 65(+1), 75(+1)
- In-order poradie (oba stromy): 25, 42, 45, 47, 65, 75

Rotácia stromu - doľava

- Operácia, ktorá zmení štruktúru ale zachová usporiadanie
- Zmena tvaru stromu – zmena výšky stromu
- **Rotácia doľava**:
  pravé dieťa sa presunie (doľava hore) na miesto rodiča



- Zmena hĺbky 25(+1), 42(+1), 47(-1), 65(-1), 75(-1)
- In-order poradie (oba stromy): 25, 42, 45, 47, 65, 75

Výškovo vyvážené stromy (AVL stromy)

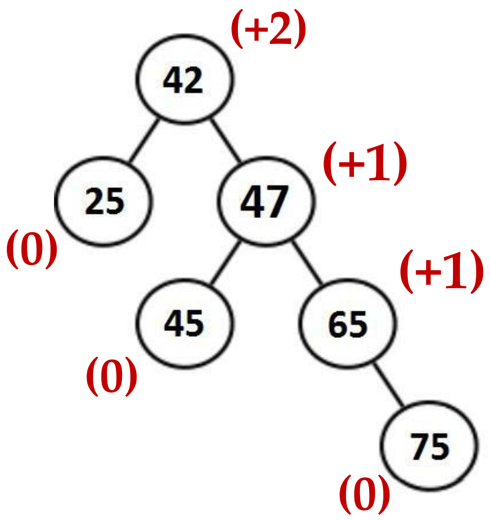
- Označme faktor vyváženia (balance factor) vo vrchole:

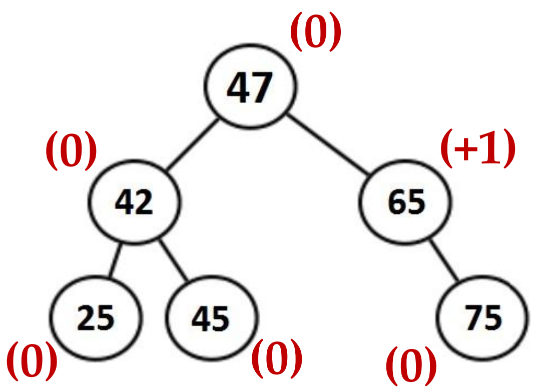
bf(v) = výška(pravýPodstrom(v)) – výška(ľavýPodstrom(v))

- Výškovo vyvážený strom (AVL strom):

|bf(v)| ≤ 1, pre každý vrchol v

- Napr. (bf)



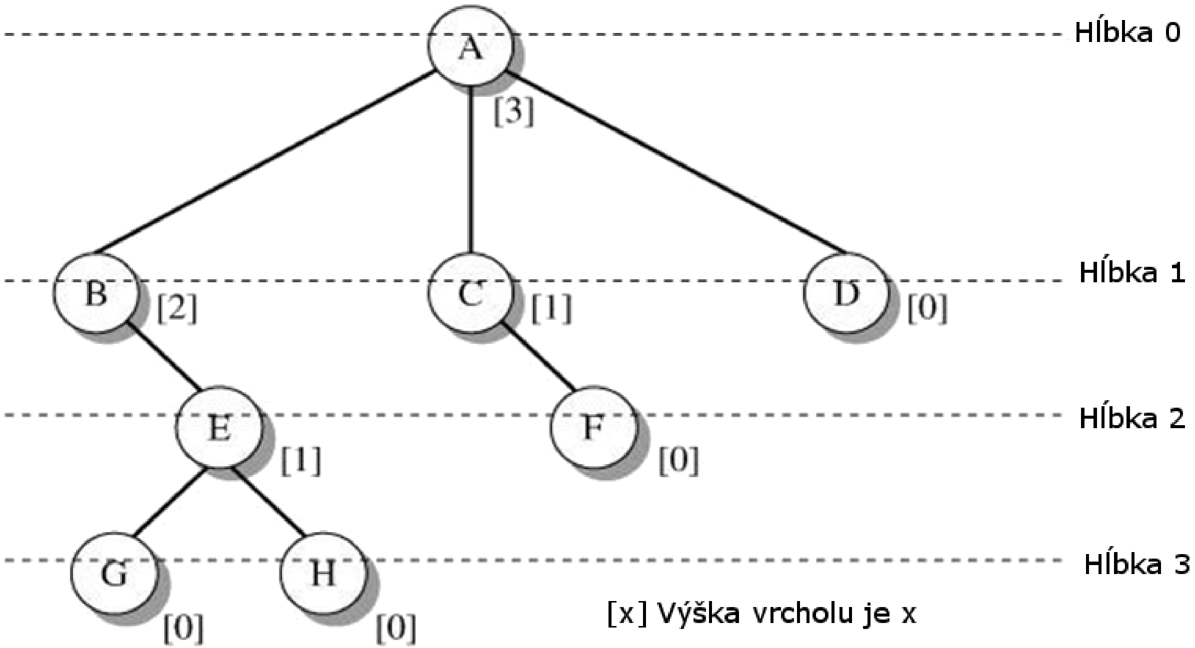


(Zakoreňený) strom – hĺbka, výška

Hĺbka vrcholu – počet hrán od koreňa stromu k danému vrcholu

Výška vrcholu – dĺžka najdlhšej cesty z daného vrcholu k listu (koncovému vrcholu)

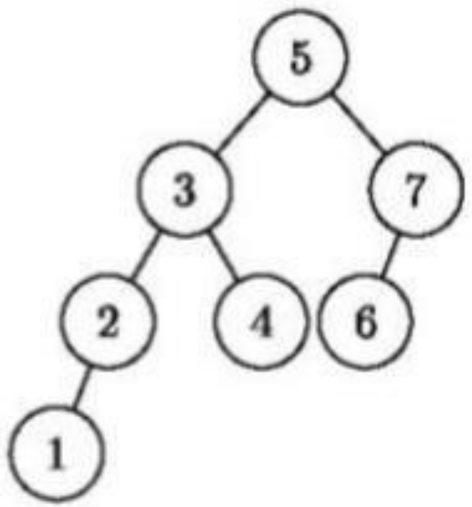
Výška stromu – výška jeho koreňa

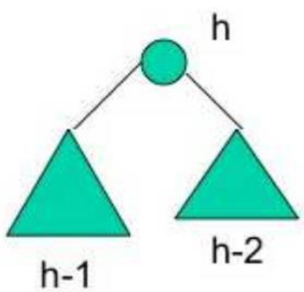


Výška AVL stromu

- Aké sú najhoršie prípady výškovo vyvážených stromov?
  - Pre danú výšku také, ktoré majú čo najmenej vrcholov, lebo
  - ak by sme pridali / odstránili nejaký list, tak by sme strom
    a) viac vyvážili (čo nechceme), alebo
    b) by to už nebol výškovo vyvážený strom (lebo bf(v) > 1)

    Napr. pre 7 vrcholov:





Označme N_h minimálny počet vrcholov AVL stromu výšky **h**.

AVL strom s N_h vrcholmi, musí mať jedno dieťa koreňa, ktoré má výšku **h-1** a teda najmenej vrcholov v jeho podstrome je N_{h-1}. Minimálna výška druhého dieťaťa koreňa je **h-2**, a teda jeho podstrom môže mať najmenej N_{h-2} vrcholov:

$$N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1$$

Výška AVL stromu (2)

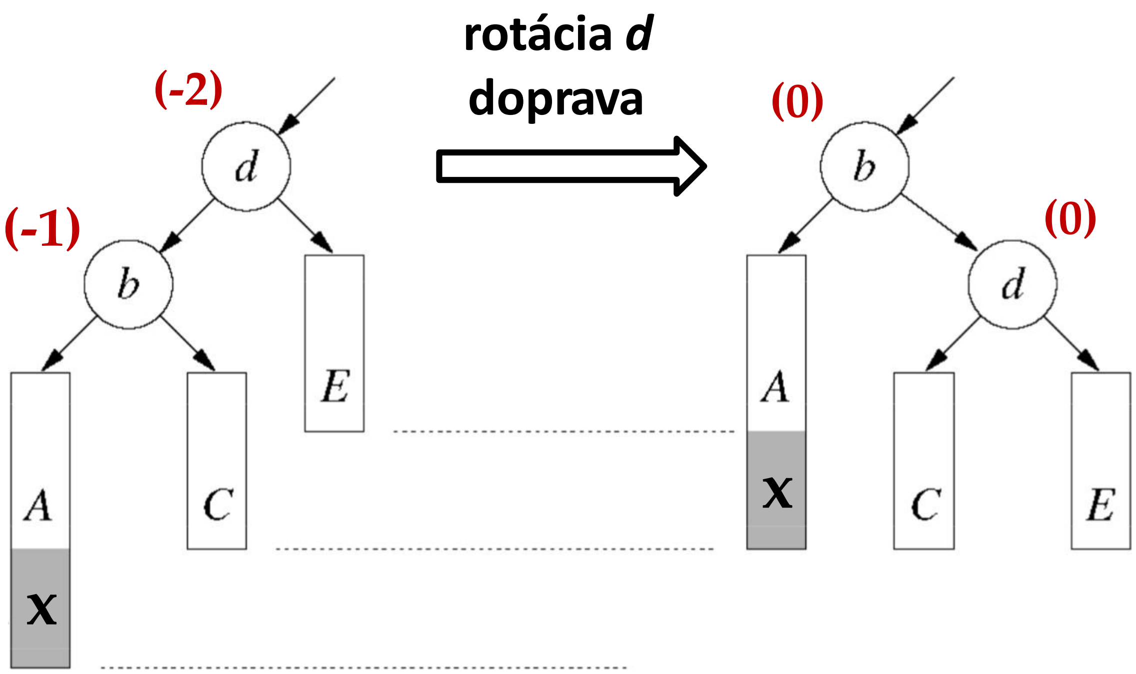
- **N_h** – najmenší počet vrcholov „najhoršieho“ AVL stromu výšky h
- **$N_1 = 1$, $N_2 = 2$.** Rekurzívna konštrukcia „najhoršieho“ stromu pre väčšie výšky: **$N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1$**

Operácie nad AVL stromom

- **Ak operácia nemení štruktúru stromu** (napr. min, max, select, succ, pred) vykonávame rovnako ako pri BVS, ale navyše máme garantovanú zložitosť O(log N), kde N je počet vrcholov v AVL strome.
- **Ak operácia mení štruktúru stromu** (napr. insert, delete), vykonáme rovnako ako pri BVS a následne dodatočne vyvážime strom rotáciami.
  - Časová zložitosť jednej rotácie O(1)
  - Vykonáme najviac h rotácií, kde h = O(log N), preto celková zložitosť insert aj delete je O(log N)

Insert(x) do AVL stromu

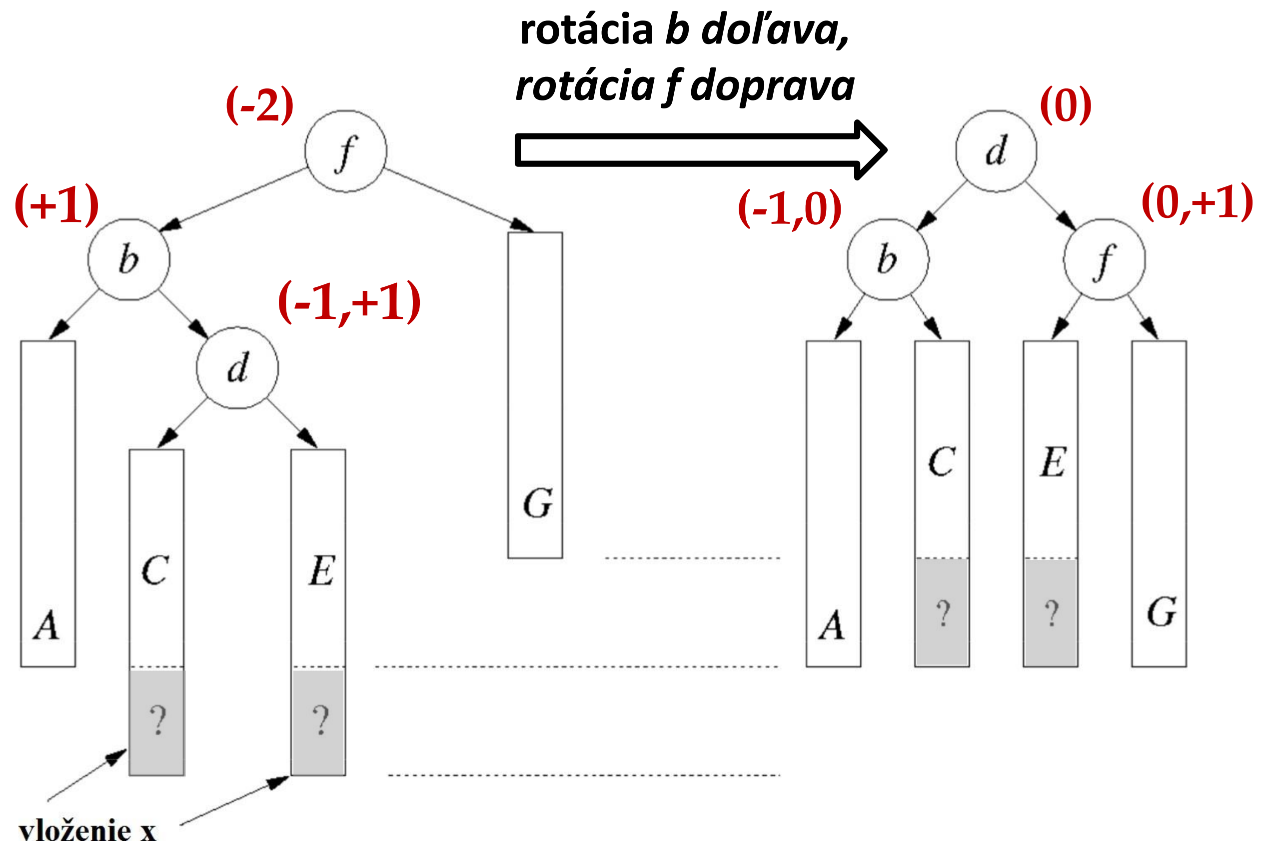
- Postupnosť rotácií závisí podľa typu nevyváženosti
- Uvažujme, že po pridaní je ľavý podstrom (b) ľavého dieťaťa (d) príliš hlboký: **rotácia doprava**



(pravý podstrom pravého dieťaťa je symetrická situácia: **rotácia doľava**)

Insert(x) do AVL stromu (2)

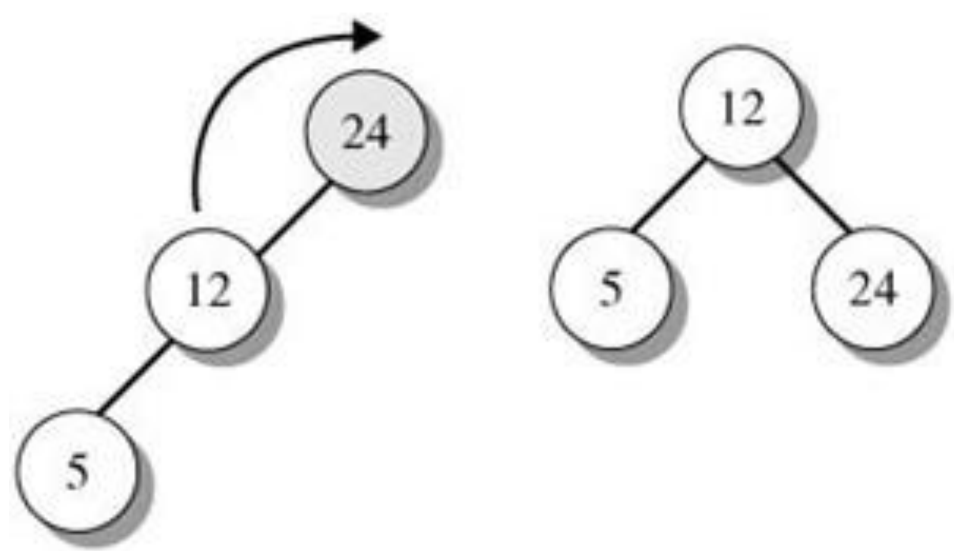
- Uvažujme, že po pridaní je pravý podstrom (d) ľavého dieťaťa (b) príliš hlboký: **dvojitá rotácia doprava**



(ľavý podstrom pravého dieťaťa je symetrická situácia: **dvojitá rotácia doľava**)

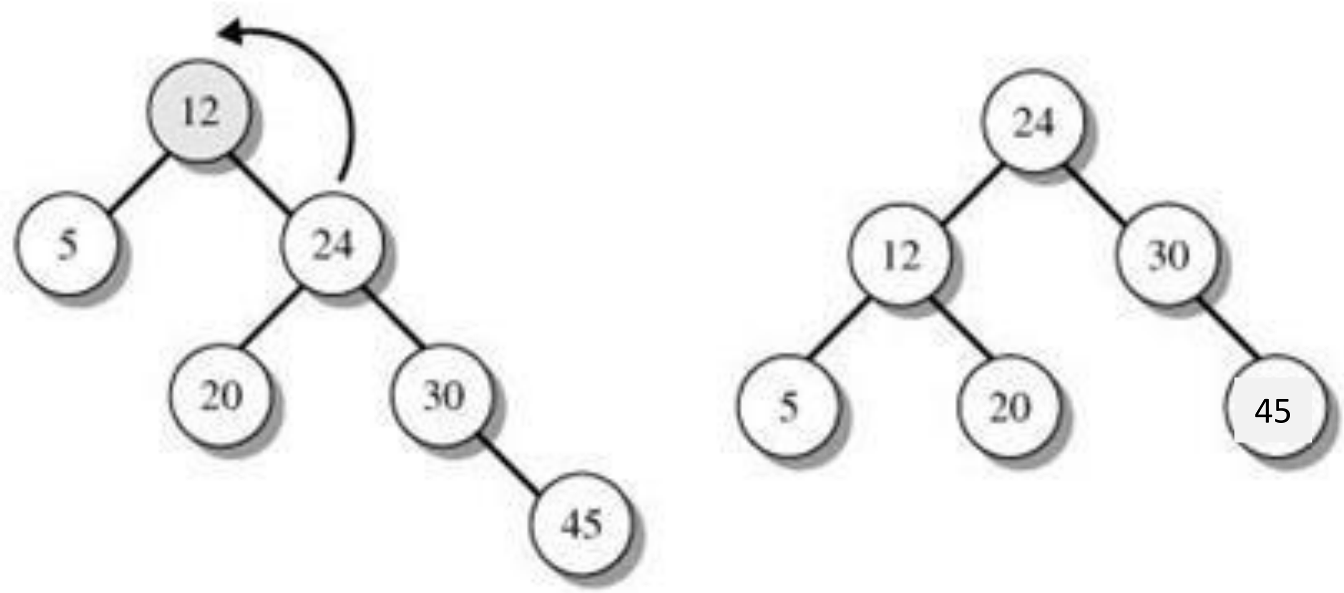
Insert do AVL stromu – Ukážka

- insert 24, insert 12, insert 5
- teraz je **bf(24) = -2**
- jednoduchá rotácia 24 doprava



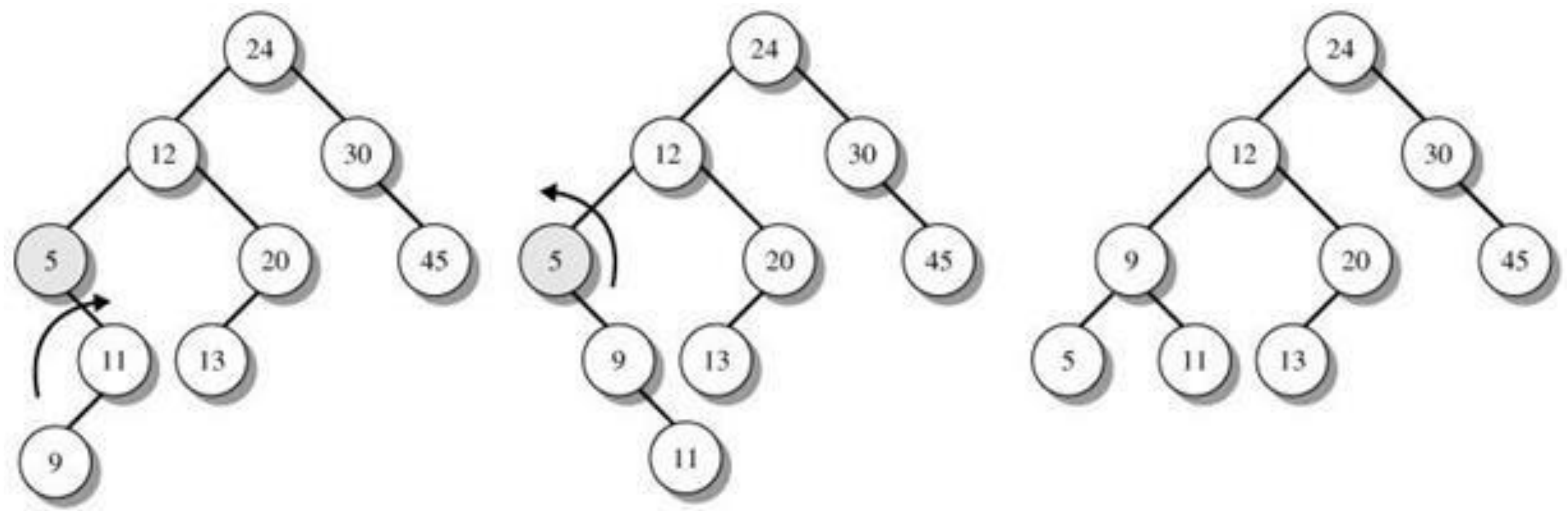
Insert do AVL stromu – Ukážka (2)

- ... insert 30, insert 20, insert 45
- teraz je **bf(12) = +2**
- jednoduchá rotácia 12 doľava



Insert do AVL stromu – Ukážka (3)

- ... insert 11, insert 13, insert 9
- teraz je **bf(5) = +2**
- Dvojitá rotácia:
  - jednoduchá rotácia 11 doprava
  - jednoduchá rotácia 5 doľava

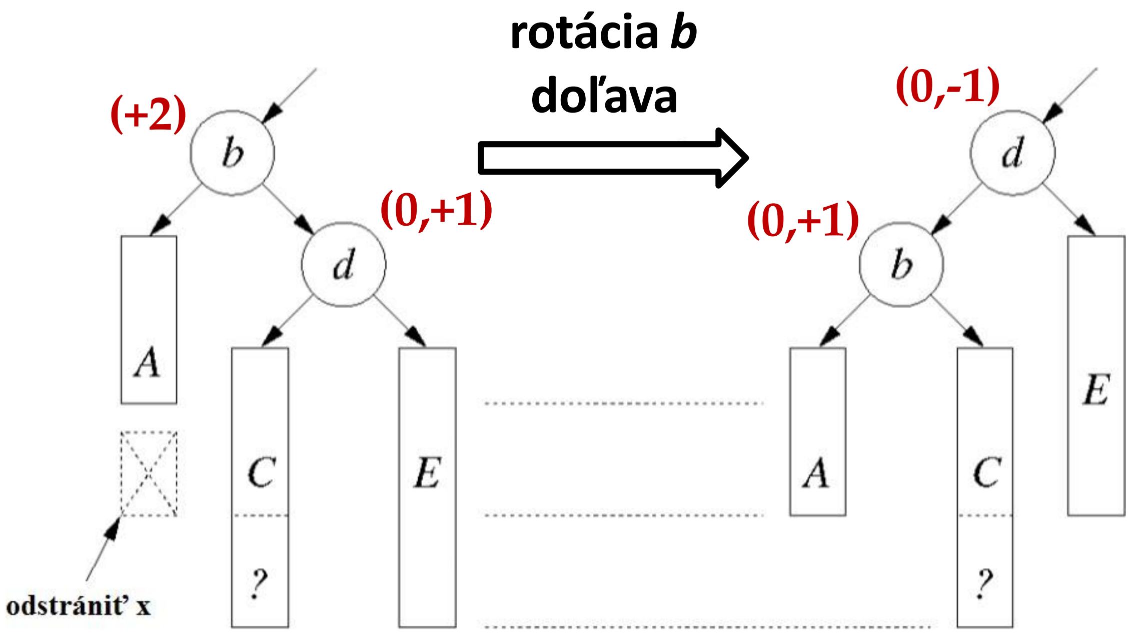


Odstránenie z AVL stromu

- Podobne ako pri vkladaní
- Vykonáme operáciu odstránenia nad obyčajným BVS a následne prechodom (od miesta odstráneného vrcholu) do koreňa upravujeme faktor vyváženia (bf) vrcholov, rotujúc vo vrcholoch, ktoré sú nevyvážené
- Môžeme rotovať viac krát, ale **vždy najviac O(log n) krát**

Delete(x) z AVL stromu

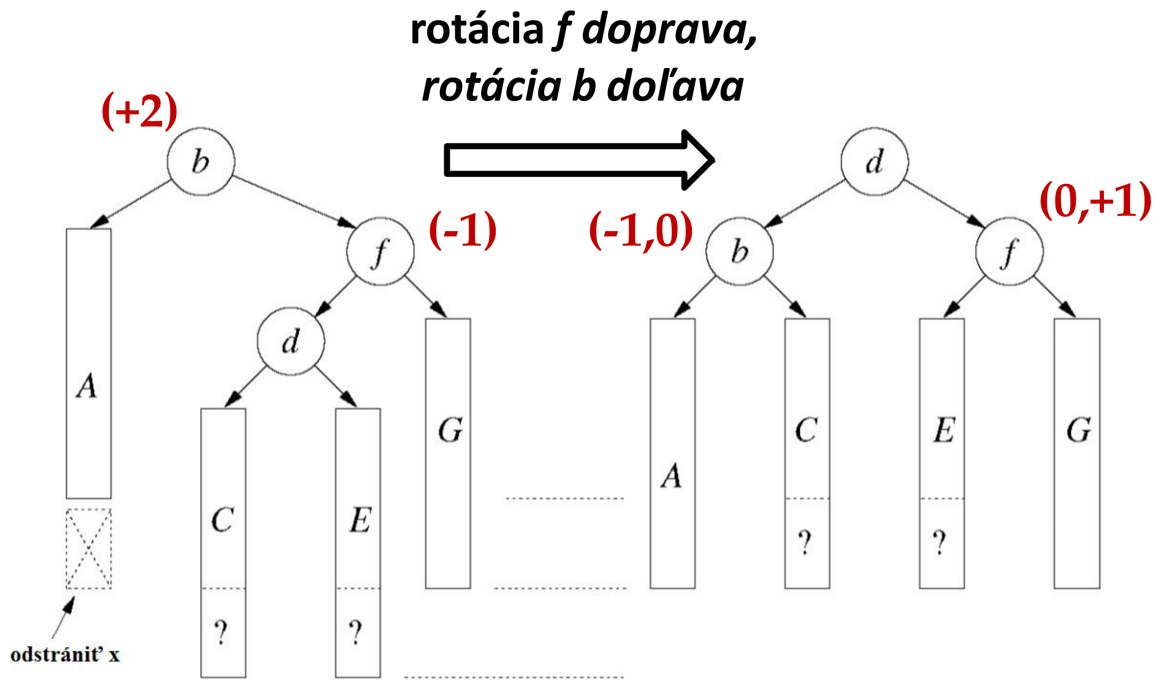
- Uvažujme, že po odstránení prvku z ľavého podstromu, niektorý jeho predok (b) zostane nevyvážený, pričom bf jeho pravého dieťaťa (d) je 0 alebo +1: **rotácia doľava**



(odstránenie z pravého podstromu je symetrická situácia: **rotácia doprava**)

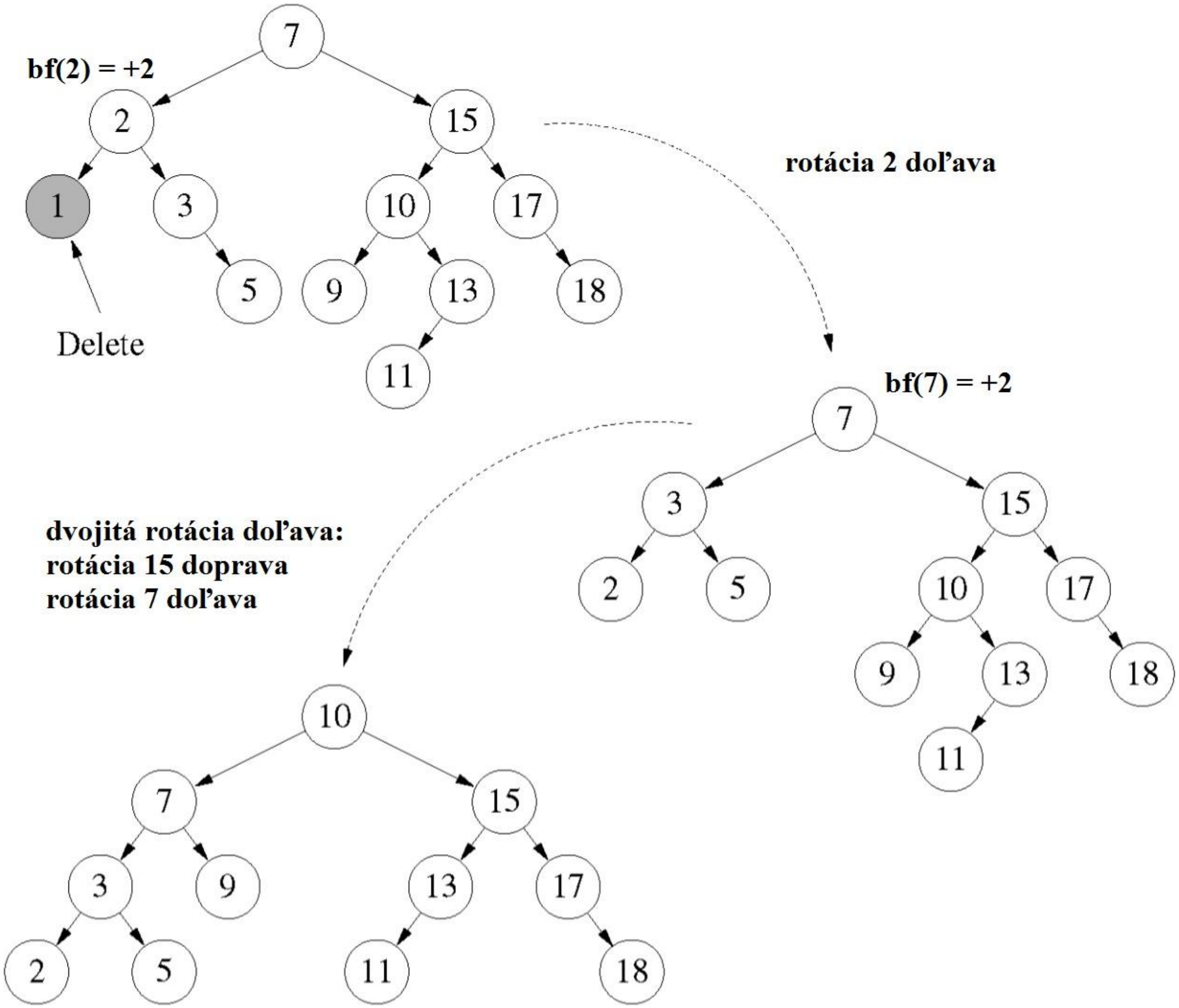
Delete(x) z AVL stromu (2)

- Uvažujme, že po odstránení prvku z ľavého podstromu, niektorý jeho predok (b) zostane nevyvážený, pričom bf jeho pravého dieťaťa (f) je -1: **dvojitá rotácia doľava**



(odstránenie z pravého podstromu je symetrická situácia: **dvojita rotácia doprava**)

Delete z AVL stromu – Ukážka



Implementácia AVL stromov

- Rozšírenie štruktúry vrcholu o hodnotu **výšky** vrcholu
- Opakovanie – výpočet výšky vo vrchole realizujeme vychádzajúc z rekurzívnej definície:

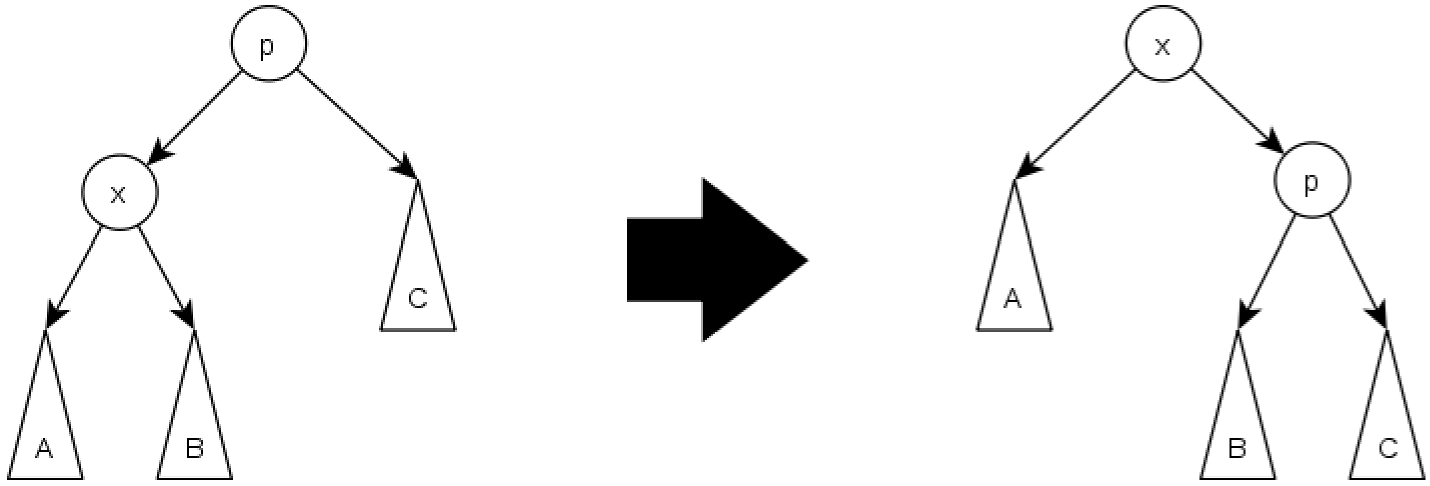
$$\textbf{výška}(T) = \begin{cases} -1 & \textit{ak podstrom T je prázdny} \\ 1 + \max(\text{výška}(T_L), \text{výška}(T_R)) & \textit{ak podstrom T nie je prázdny} \end{cases}$$

- Pri jednej rotácii sa zmenia výšky vrcholov „zachytených v rotáciach“ na ceste do koreňa
    - Najviac O(log n) zmien hodnôt výšok

Operácia splay(x) - presunúť hodnotu x do koreňa

- Rotácie nám umožňujú upravovať štruktúru stromu
- Ako dostať x do koreňa?
- Tri prípady:

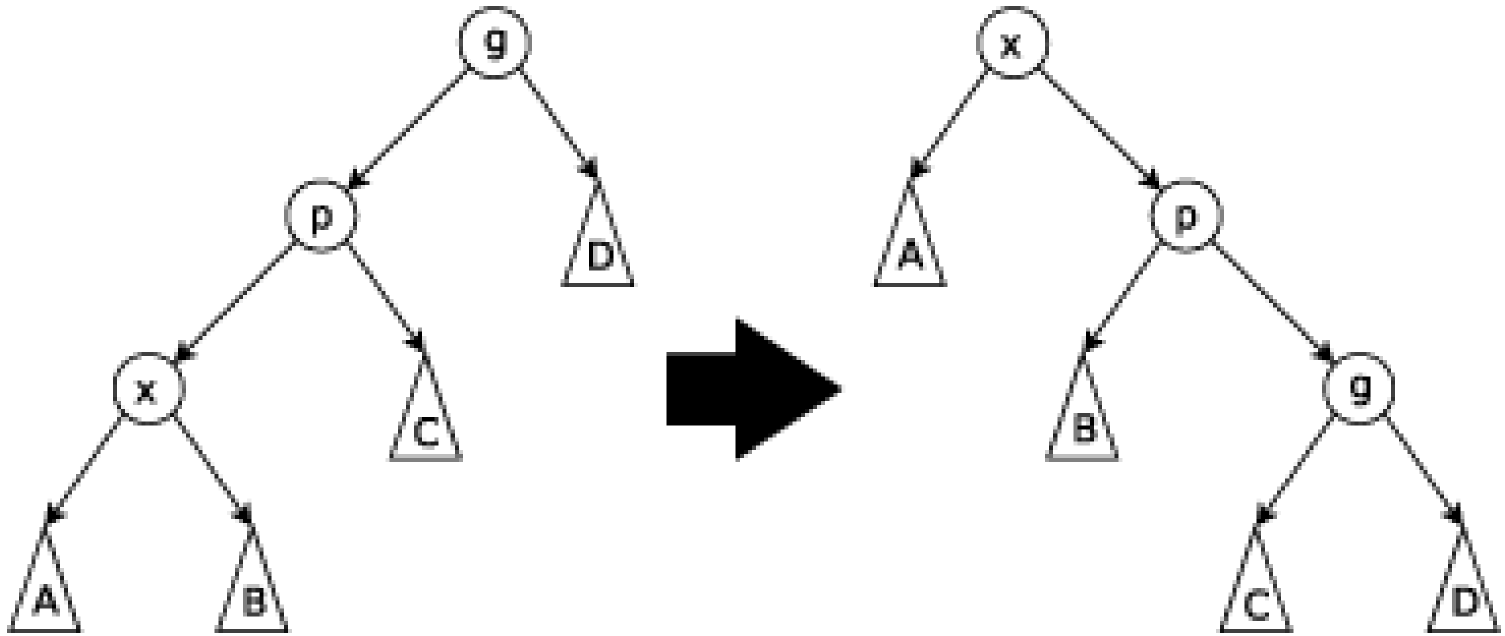
1. Parent(x) je koreň a x ľavé dieťa – **rotácia p doprava (zig)**



(ak je x pravé dieťa je to symetrické: **rotácia p doľava**)

Operácia splay(x) - presunúť hodnotu x do koreňa

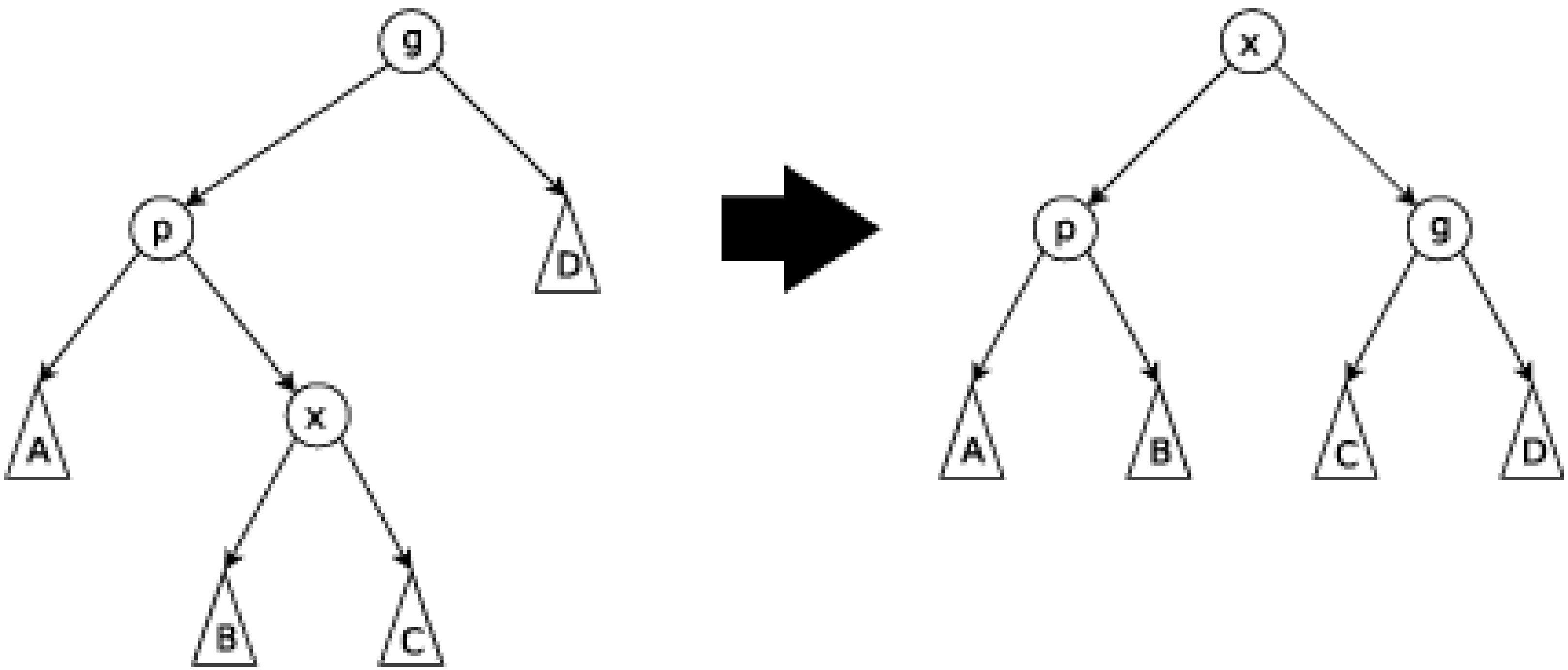
2. Parent(x) nie je koreň a Parent(x) a x sú obe ľavé deti – **2x rotácia doprava (zig-zig)**



(ak sú obe pravé deti je to symetrické: **2x rotácia doľava**)

Operácia splay(x) - presunúť hodnotu x do koreňa

3. Parent(x) nie je koreň a Parent(x) je ľavé dieťa a x je pravé dieťa, alebo opačne – **rotácia p doľava a rotácia g doprava (zig-zag)**



(analogicky v symetrickej situácii)

Ďalšie operácie nad BVS

- **insertRoot(x)** – vloženie hodnoty do koreňa:
  - insert(x) – štandardné vloženie x
  - splay(x) – presun hodnoty do koreňa
  - Zložitosť O(log n)
- **join(a,b)** – spojenie dvoch vyhľadávacích stromov A a B
- **split(x)** – rozdelenie stromu na dva stromy, prvý s hodnotami < x, a druhý s hodnotami > x

- **Splay strom** je strom, v ktorom po každej operácii s x vykonáme splay(x), teda hodnota x sa dostane do koreňa
  - Štruktúra sa dynamicky prispôsobuje vykonávaným operáciám
  - Operácie pracujú v amortizovanej zložitosti O(log n)

Optimálny binárny vyhľadávací strom

- Najmenší možný počet vykonaných krokov pre danú postupnosť vykonávania operácií (search, insert, delete)
- **Statická optimálnosť**
  - Pre dané pravdepodobnosti s akými sa budú vyhľadávať prvky, strom musí mať najnižšiu očakávanú zložitosť search operácií
  - Staticky optimálny strom sa dá zostrojiť dynamickým programovaním v čase $O(n^2)$ – využitím vážených dĺžok ciest
- **Dynamická optimálnosť**
  - Pre danú postupnosť prístupov k prvkom $X = x_1, \dots, x_m$ chceme minimalizovať celkový počet operácií (posun doľava/doprava, posun do rodiča, jednoduchá rotácia) – minimálny počet $OPT(X)$
  - Domnienka: **Splay stromy sú dynamicky optimálne- vykonajú $O(OPT(x))$ operácií.**

Váhovo vyvážené stromy

- Pôvodný názov: stromy s ohraničenou vyváženosťou (tzv. **bounded balance trees - BB[α]**)
- Vyváženie podľa váhy (počet prvkov v podstrome) tzv. **weight-balanced trees**
- Hodnoty váhy vo vrcholoch upravujeme pri každej operácií ktorá mení štruktúru stromu (insert, delete)
- Štruktúru stromu upravujeme jednoduchými rotáciami a dvojitými rotáciami (podobne ako pri vyvažovaní podľa výsky), ak je strom vo vrchole nevyvážený

Váhovo vyvážené stromy (2)

- Udržiadať vyváženosť podstromov na presnosť +/– 1 ako pri vyvážení podľa výšky je náročnejšie ako O(log n)
- Ohraničíme **pomer váhy** podstromu (ľavého aj pravého) k celkovej váhe vo vrchole:

$$\alpha \bullet \text{váha}(x) \leq \text{váha}(\text{Podstrom}(x)) \leq (1 - \alpha) \bullet \text{váha}(x)$$

- Strom výšky aspoň 2 má aspoň $\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^h$ listov
- Výška stromu:

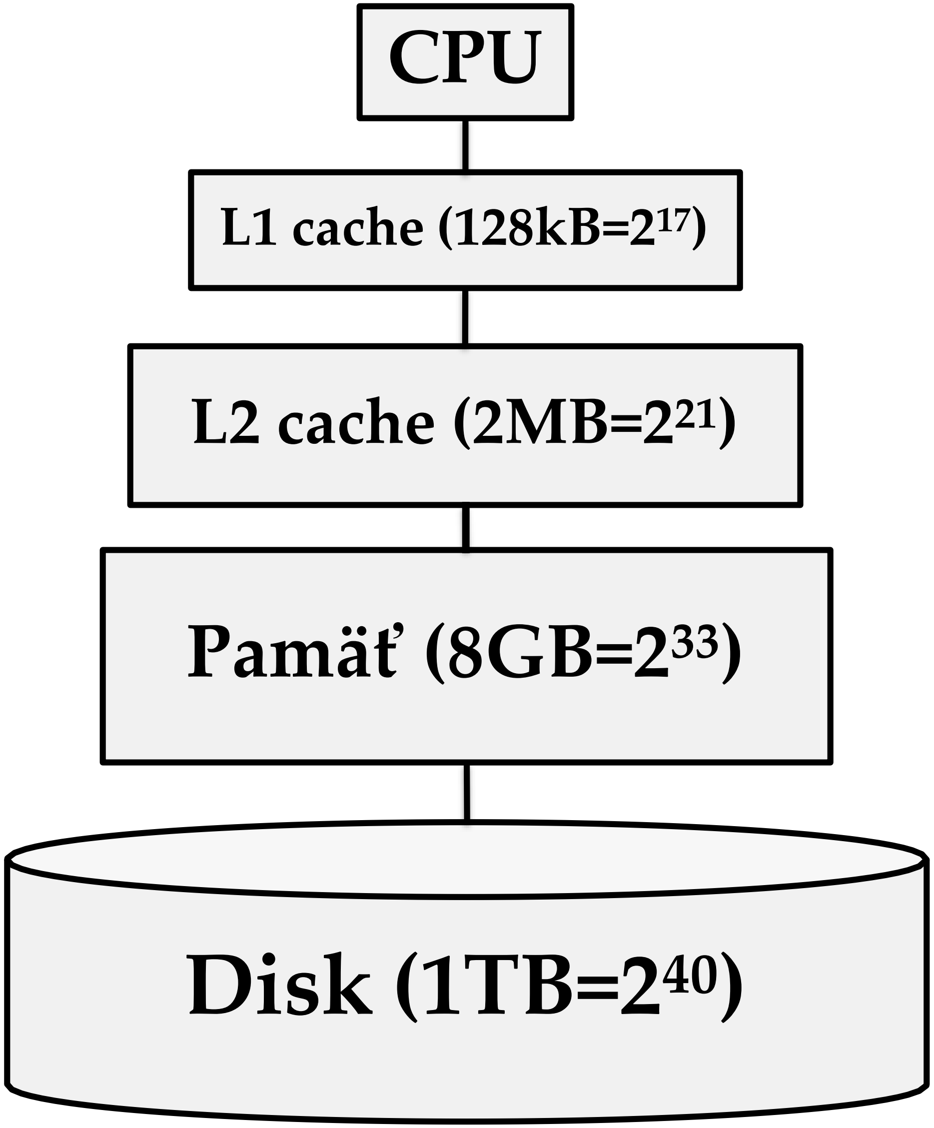
$$h \leq \log_{\frac{1}{1-\alpha}} n = \frac{\log_2 n}{\log_2\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} = O(\log n)$$

- Dobré hodnoty pre vyváženie: $\frac{2}{11} < \alpha < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Čo keď máme veľa dát?

- Doteraz sme predpokladali, že sa dátová štruktúra zmestí do pracovnej pamäte
- Uvažujme, že máme tak veľa údajov, že ich nie je možné všetky naraz vložiť do pamäte
- Na uloženie musíme použiť pevný disk
  - čas vykonania podstatne narastie
- Diskové operácie (čítanie a zápis) sú výrazne pomalšie ako operácie s pamäťou

Aké rýchle sú operácie v počítači?



- 4GHz procesor ≈ 2^{32} B/s
- Načítať dáta do L1 cache trvá 2 takty CPU: ≈ 2^{31} B/s
- Načítať dáta do L2 cache trvá 30 taktov: ≈ 2^{27} B/s
- Načítať dáta do pamäte trvá 250 taktov: ≈ 2^{24} B/s
- Načítať dáta z nového miesta na disku trvá asi 8M inštrukcií: ≈ 2^{9} B/s

Náročnosť operácií

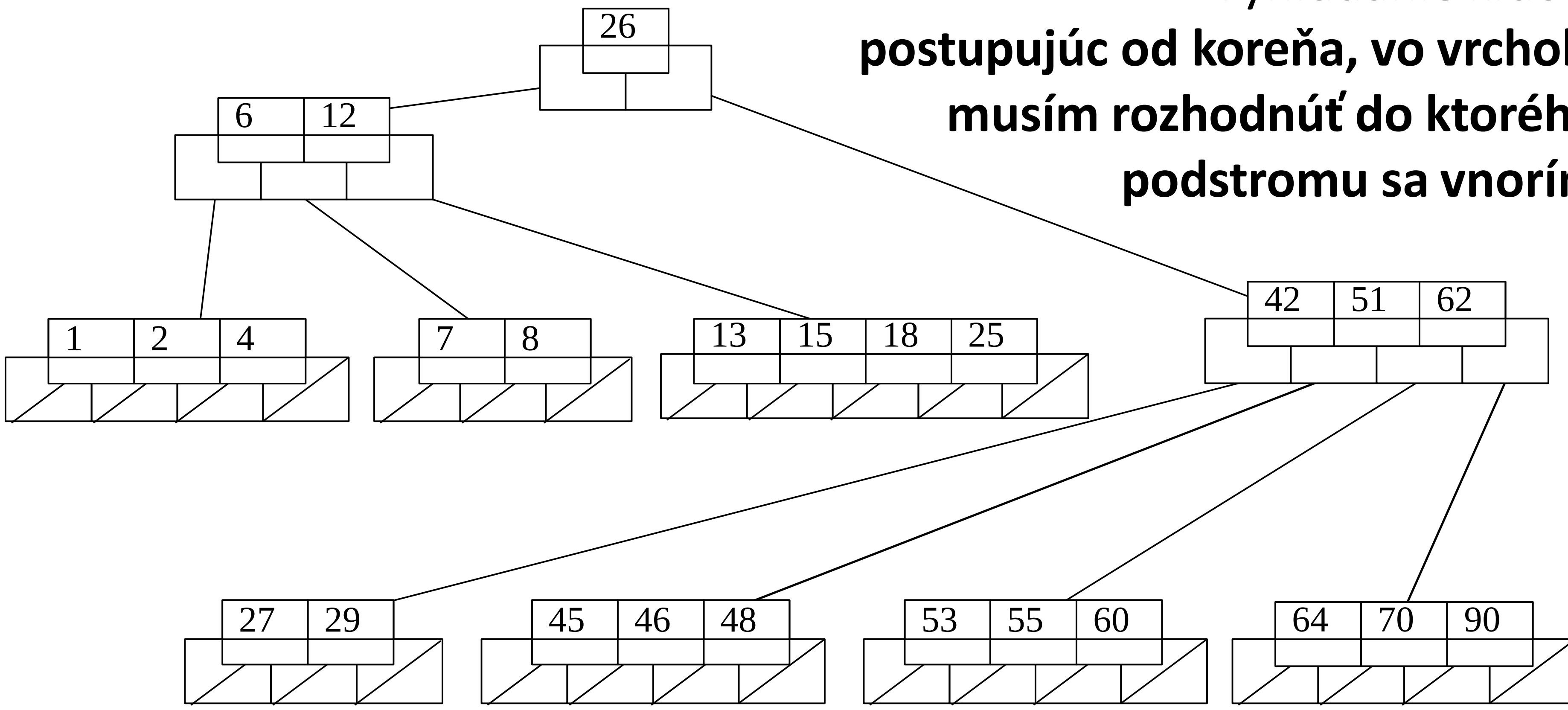
- Rýchlejšie ako JEDEN prístup na disk je:
  - 2 milióny aritmetických operácií,
  - 1000 L2 cache prístupov,
  - 200 prístupov do pamäte.
- Uvažujme teraz AVL strom s n = 2^{38} (256 mld.) prvkami,
  - potom, výška stromu je okolo 1,44*38 = 55,
  - čiže každá operácia search/insert/delete vyžaduje okolo 55 prístupov na disk, čo môže trvať aj 0,5 sekundy, alebo **asi 30 vykonaní operácií za minútu**
- Z disku sa číta po **veľkých** blokoch
  - Každý vrchol AVL stromu môže byť v inom bloku

B-strom (B-tree)

- Myšlienka: **vo vrcholoch sa budeme viac vetviť**
  - Vyšší stupeň vetvenia vo vrcholoch = menšia výška stromu
- B-strom rádu ***m*** je strom, v ktorom každý vrchol môže mať najviac ***m*** detí, pričom:
  - počet kľúčov vo vrchole je o 1 menší než počet jeho detí (kľúče rozdeľujú intervaly kľúčov v podstromoch)
  - všetky listy sú v rovnakej hĺbke
  - každý vnútorný vrchol okrem koreňa má aspoň $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ detí
  - koreň je buď list alebo má 2 až m potomkov
  - list obsahuje najviac $m - 1$ kľúčov
- Rád B-stromu ***m*** je nepárne číslo

B-strom rádu 5 obsahujúci 26 prvkov – Ukážka

Vyhľadanie kľúču:
postupujúc od koreňa, vo vrchole musím rozhodnúť do ktorého podstromu sa vnorím



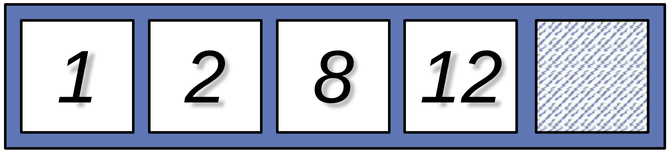
Všetky listy sú v (rovnakej) hĺbke 2

Insert do B-stromu

- Vyhľadám list, do ktorého by nový kľúč mal patriť
- Vložíme nový kľúč do tohto listu
- Opravím chyby:
  - Ak by list už obsahoval príliš veľa kľúčov, rozdelíme ho na dva vrcholy, a prostredný kľúč posunieme vyššie (do rodiča)
  - Rekurzívne pokračuj až do koreňa:
    Ak by rodič už obsahoval príliš veľa kľúčov, rozdeľ ho a stredný kľúč posun vyššie
  - V prípade koreňa (ak je to potrebné): koreň rozdelíme na dva vrcholy, a prostredný kľúč vytvorí nový koreň, čím sa zvýši celková výška B-stromu

Konštrukcia B-stromu – Ukážka

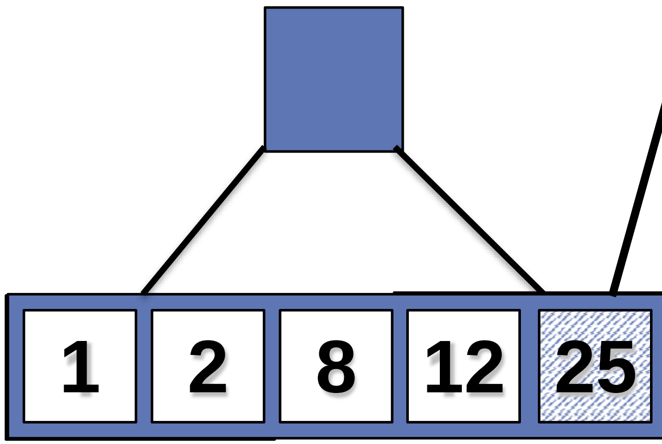
- Na vstupe máme prvky: **1,12,8,2,25,6,14,28,17,7,52,16,48,68,3,26,29,53,55,45**
- Chceme zostrojiť B-strom rádu 5
- Vkladáme prvky po jednom
- Po vložení 4 prvkov bude koreň:



- Pridanie piateho prvku (25) by porušilo podmienky B-stromu rádu m=5, takže vrchol rozdelíme, strednú hodnotu (8) povýšime na nový koreň …

Insert 25 do B-stromu rádu 5

1
12
8
2
25
6
14
28
17
7
52
16
48
68
3
26
29
53
55
45

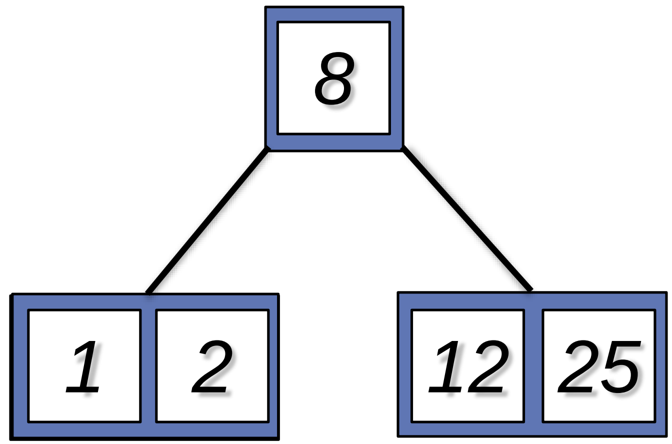


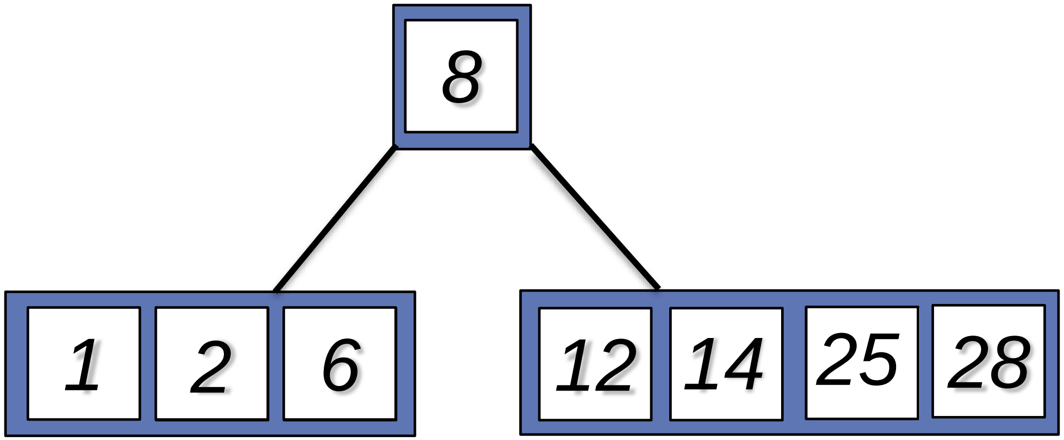
Presahuje rád m=5.

Rozdeliť vrchol a povýšiť stredný prvok (8) na nový koreň.

Insert 6, 14, 28 do listov

1
12
8
2
25
6
14
28
17
7
52
16
48
68
3
26
29
53
55
45

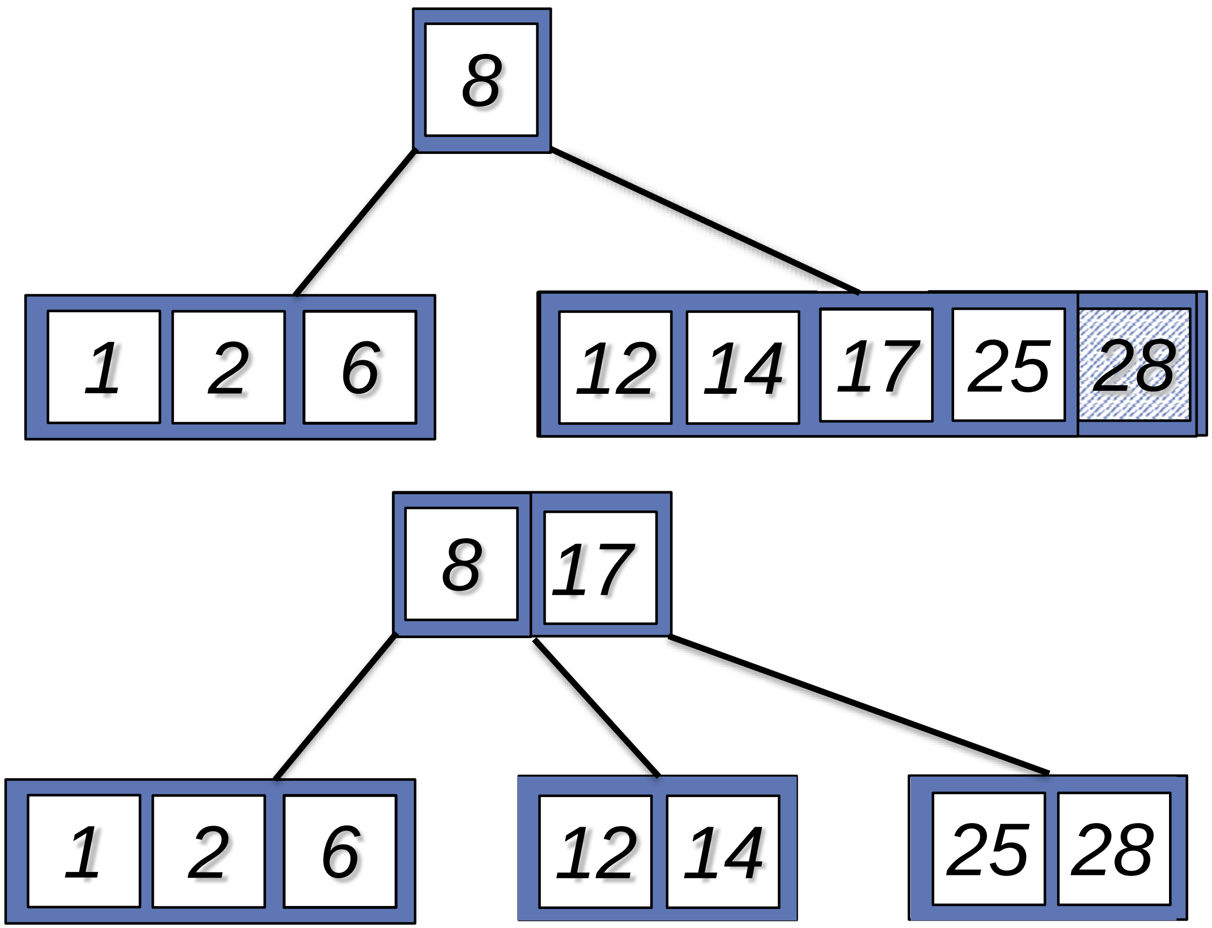




Insert 17 do B-stromu

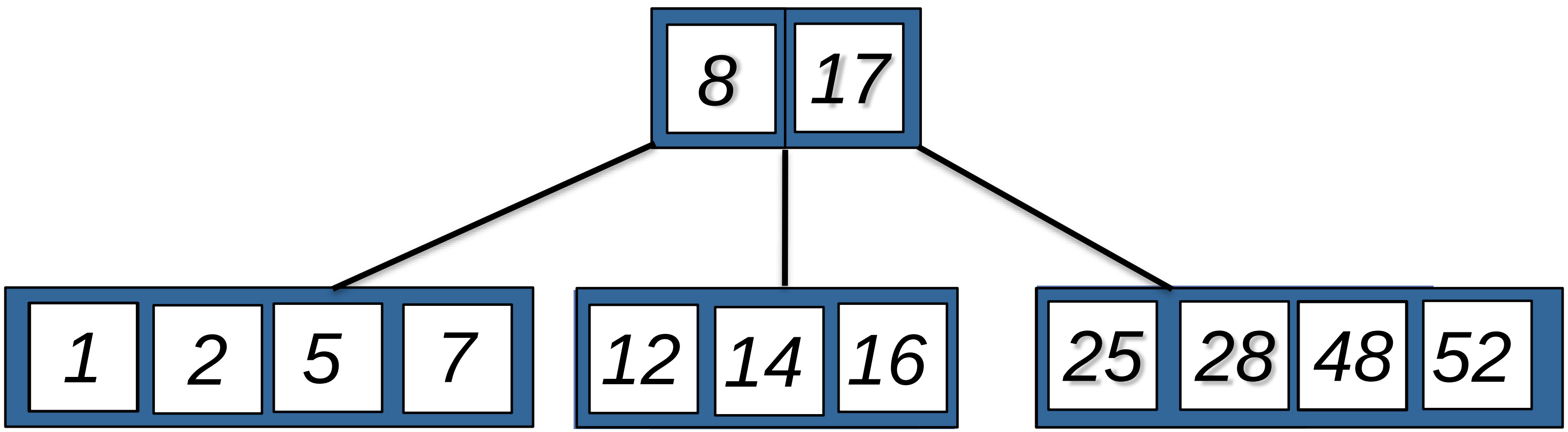
1
12
8
2
25
6
14
28
17
7
52
16
48
68
3
26
29
53
55
45

Vložíme 17 do pravého listu, keďže bude už obsahovať príliš veľa prvkov, rozdelíme podľa strednej hodnoty, ktorú posunieme do rodiča



Insert 7, 52, 16, 48 do listov

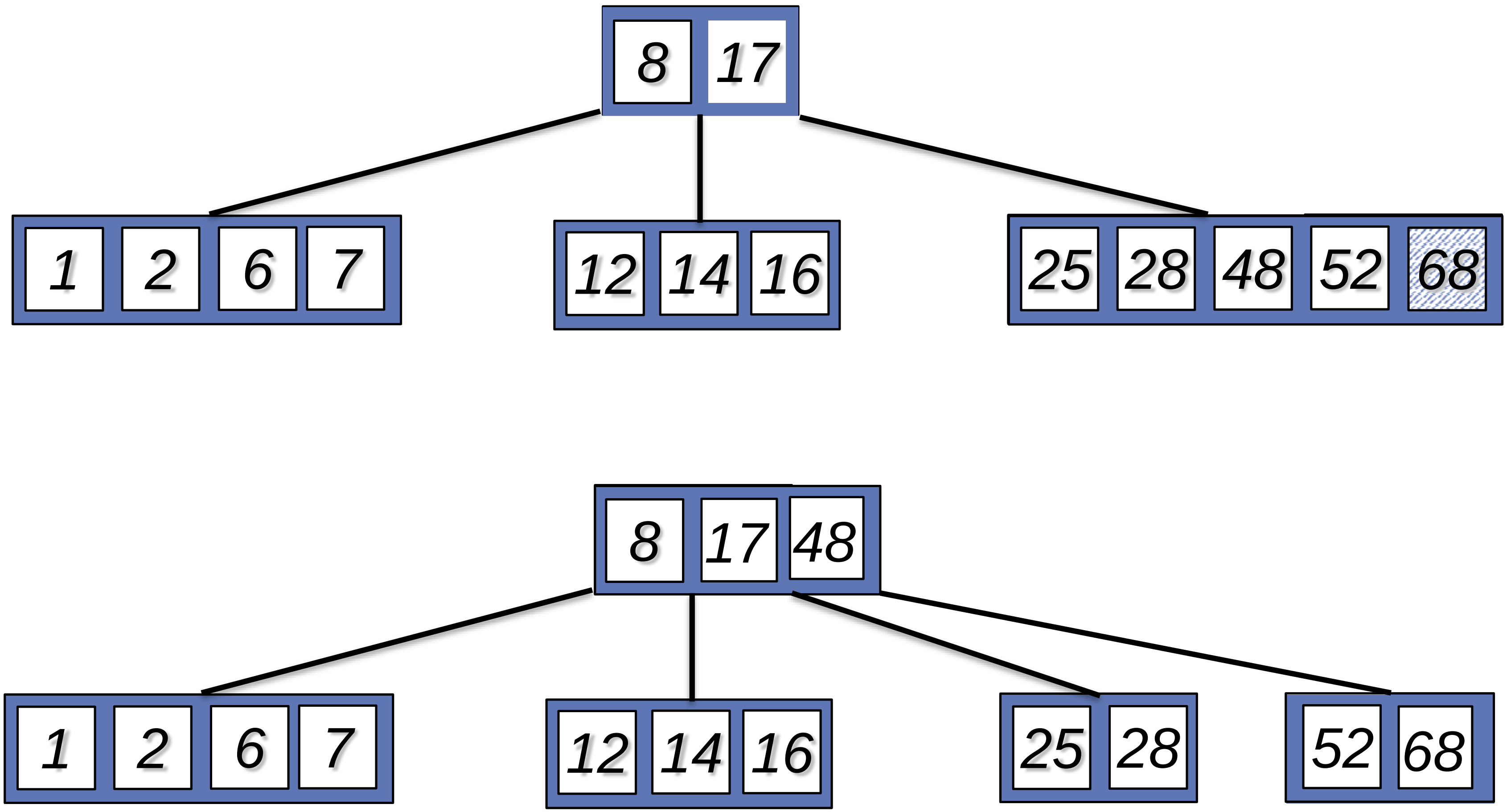
1
12
8
2
25
6
14
28
17
7
52
16
48
68
3
26
29
53
55
45



Insert 68 do B-stromu

1
12
8
2
25
6
14
28
17
7
52
16
48
68
3
26
29
53
55
45

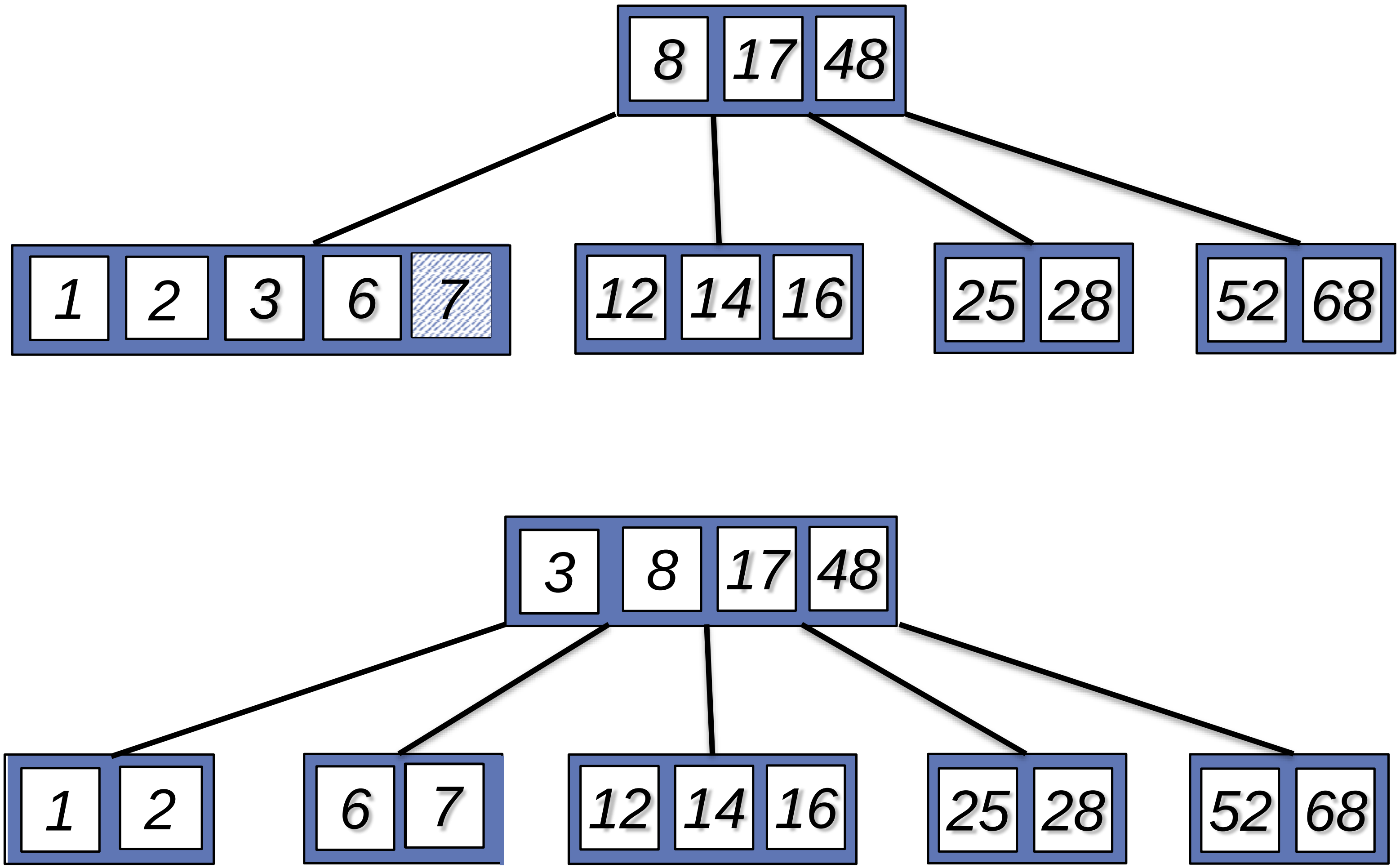
Vloženie 68 spôsobí rozdelenie pravého listu, prvok 48 bude povýšený do rodiča



Insert 3 do B-stromu

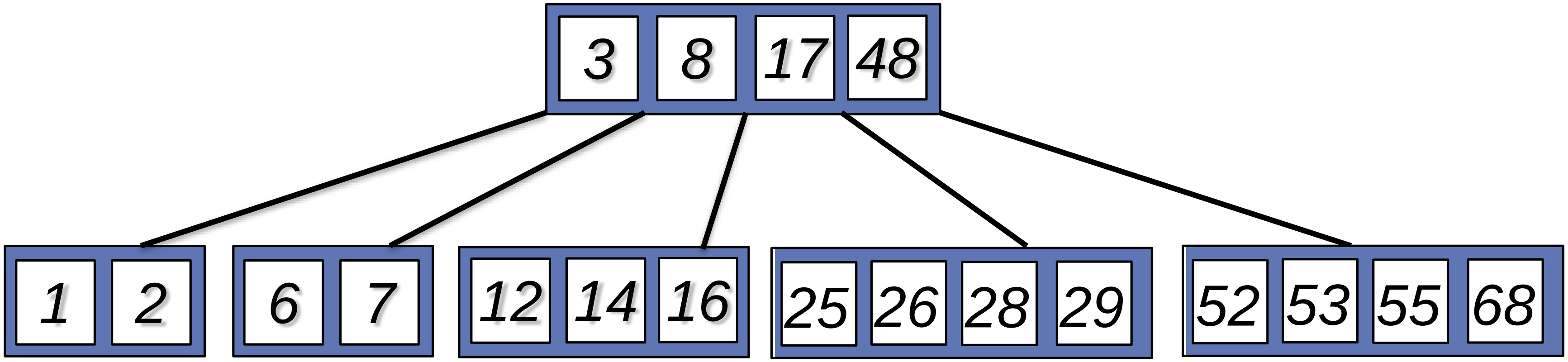
1
12
8
2
25
6
14
28
17
7
52
16
48
68
3
26
29
53
55
45

Vloženie 3 spôsobí rozdelenie ľavého listu



Insert 26, 29, 53, 55 do listov

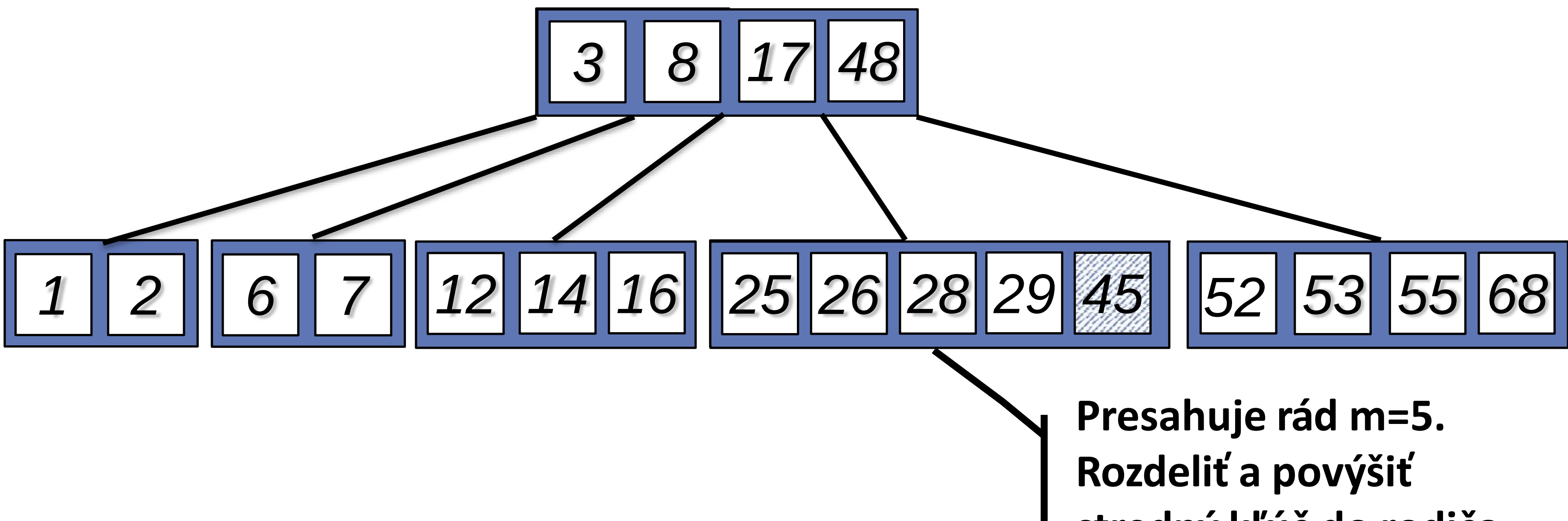
1
12
8
2
25
6
14
28
17
7
52
16
48
68
3
26
29
53
55
45



Insert 45 do B-stromu

1
12
8
2
25
6
14
28
17
7
52
16
48
68
3
26
29
53
55
45

Vloženie čísla 45 ...



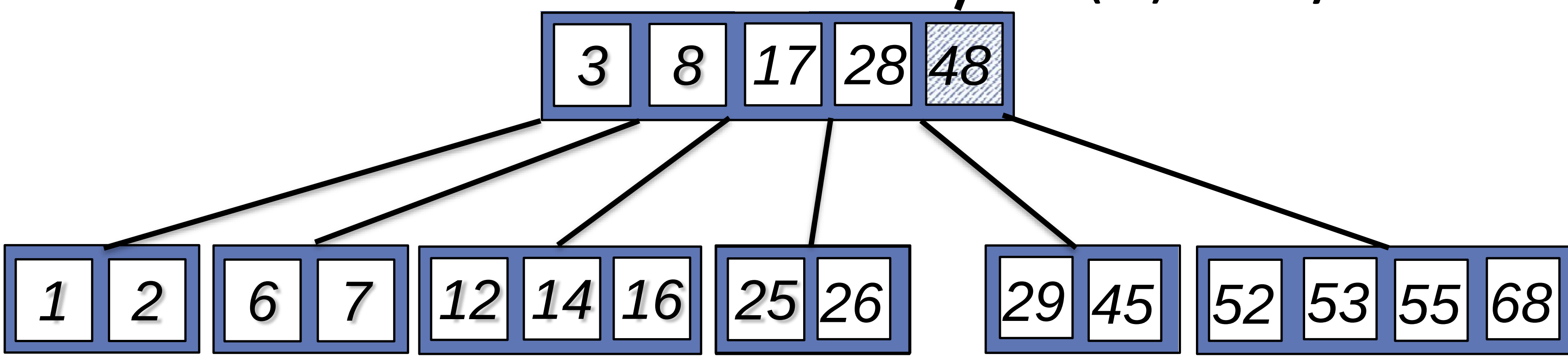
Presahuje rád m=5.
Rozdeliť a povýšiť
stredný kľúč do rodiča.

Insert 45 do B-stromu

1
12
8
2
25
6
14
28
17
7
52
16
48
68
3
26
29
53
55
45

Vloženie čísla 45 ...

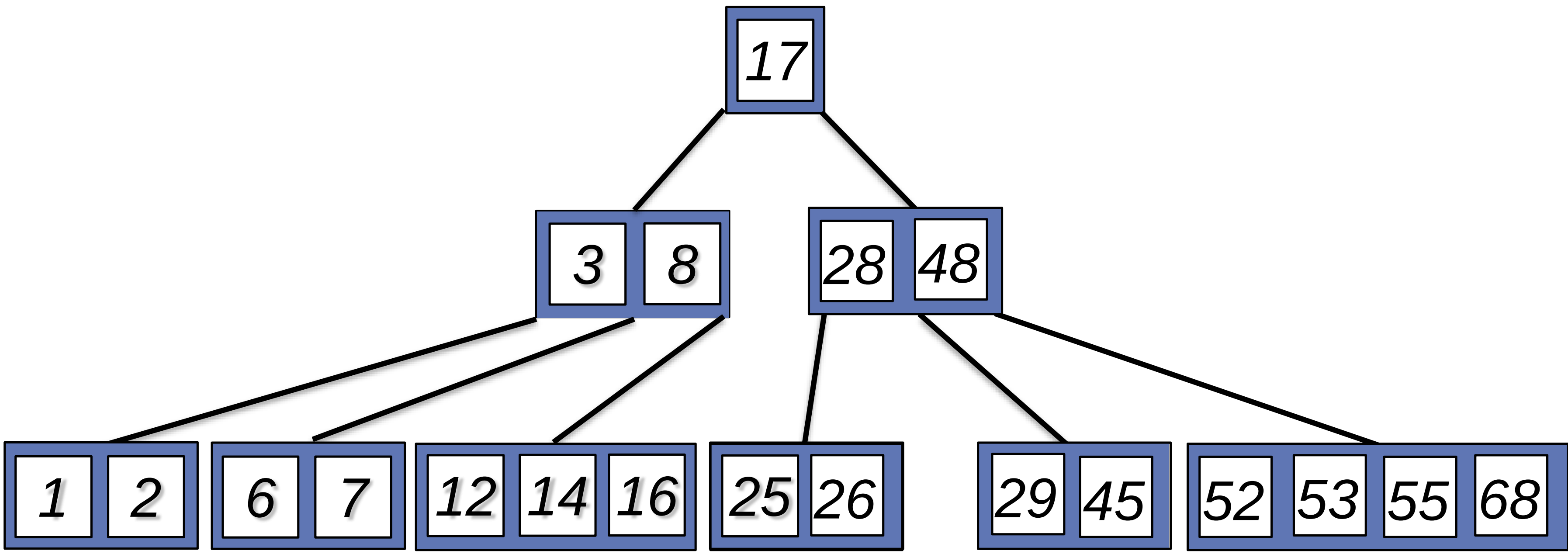
Presahuje rád m=5. Rozdeliť vrchol a povýšiť stredný prvok (17) na nový koreň.



Insert 45 do B-stromu

1
12
8
2
25
6
14
28
17
7
52
16
48
68
3
26
29
53
55
45

Vloženie čísla 45 zvýšilo výšku celého stromu



Delete z B-stromu

- Odstránenie kľúča X zo stromu je trochu komplikovanejšie
- Ak kľúč nie je v liste, tak predchádzajúci alebo nasledujúci prvok P stromu je v liste, odstránime X a prvok P povýšime na miesto X
- Ak je kľúč X v liste:
  - Ak ho môžeme odstrániť bez toho, aby v liste zostalo príliš málo prvkov, odstránime ho.
  - Ak máme list, v ktorom po odstránení X zostane príliš málo kľúčov, hľadáme možnosti, ako by sme listy-súrodencov spojili (a v rodičovi prípadne znížili počet kľúčov) ...
  - Ak v rodičovi zostane málo kľúčov pokračujeme rekurzívne do koreňa

Zložitosť operácií nad B-stromom

- Podstatné sú prístupy na disk
- Maximálny počet prvkov v B-strome rádu m a výšky h:

root	$m - 1$
level 1	$m(m - 1)$
level 2	$m^2(m - 1)$
. . .	
level h	$m^h(m - 1)$

- Celkový počet prvkov:

$$N_{m,h} = (1 + m + m^2 + m^3 + \dots + m^h)(m - 1) = [(m^{h+1} - 1)/ (m - 1)]\ (m - 1) = m^{h+1} - 1$$

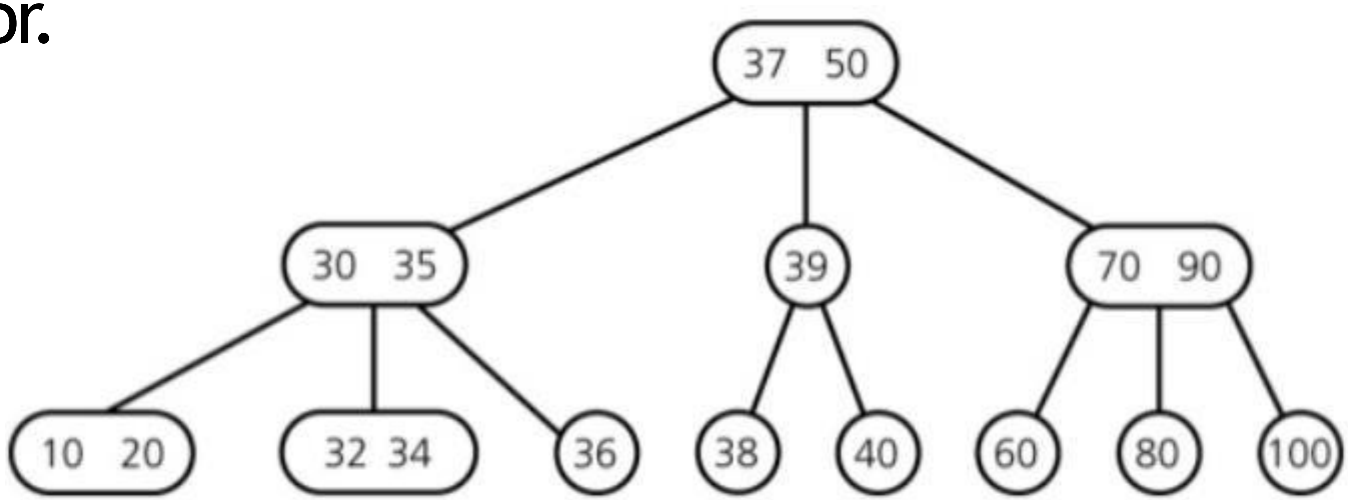
- Pre $m = 5, h = 2$ počet $N_{5,2} = 5^3 - 1 = 124$
- Pre $m = 101, h = 3$ počet $N_{101,3} = 101^4 - 1 =$ cca 100M

(a,b) stromy

- Stupeň vrchola B-stromu je od **a** do **b=2a-1**
  - **Pri insert/delete je potrebných** O(log n) **úprav blokov**
- Ak umožníme ešte väčší stupeň vetvenia (**b ≥ 2a**), tak vyvažovanie pracuje efektívnejšie – **(a,b) stromy**:
  - **Pri insert/delete postačuje upraviť O(1) blokov**
- V praxi preferovaný typ stromu v porovnaní s klasickým B-stromom

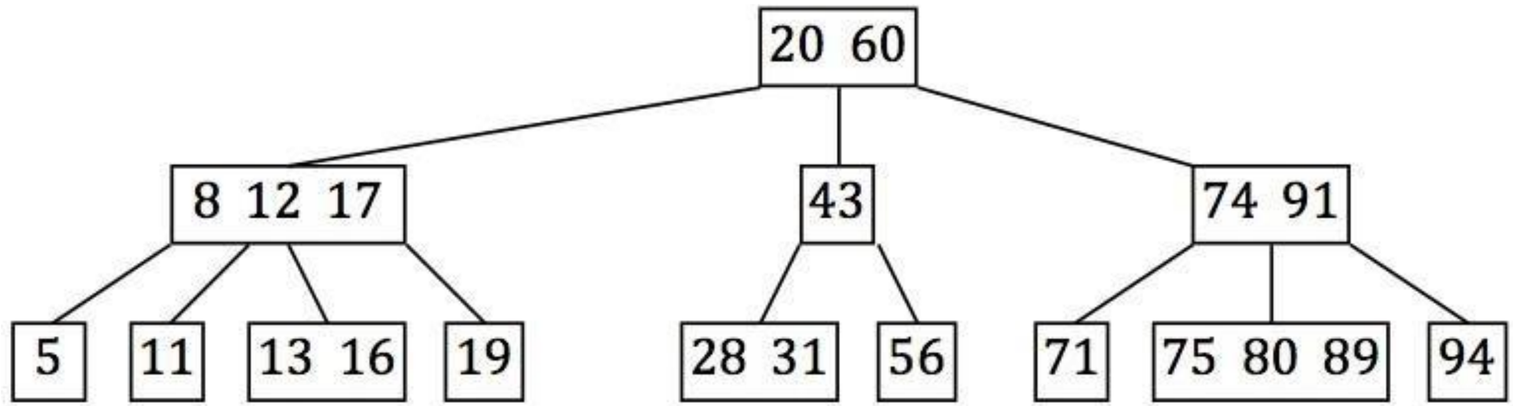
2-3 stromy (2-3 trees)

- Špeciálny prípad B-stromu pre m=3
  - **Každý vnútorný vrchol má dve alebo tri deti**
  - **Všetky listy sú v rovnakej hĺbke a každý obsahuje najviac 2 hodnoty**
- B-stromy sú vždy vyvážené, takže 2-3 strom je dobrý príklad vyváženého vyhľadávacieho stromu
- Napr.



2-3-4 stromy (2-3-4 trees)

- Špeciálny prípad B-stromu, resp. (a,b) stromu pre (2,4)
  - **Každý vnútorný vrchol má dve, tri alebo štyri deti**
  - **Všetky listy sú v rovnakej hĺbke a každý obsahuje najviac 3 hodnoty**



- Insert je možné spraviť jedným prechodom od koreňa
  - Vždy, keď prechádzame cez 4-vrchol, rozdelíme ho na dva 2-vrcholy
  - 2-3 strom môže (po vložení do listu) vyžadovať spätný prechod

Insert do 2-3-4 stromu

- Nájdi list, do ktorého sa bude hodnota vkladať.
- Počas hľadania, keď narazíš na 4-vrchol, tak ho rozbaľ.
- Ak je list, do ktorého vkladáme 2-vrchol alebo 3-vrchol, tak vlož do listu.
- Ak je list (po vložení) 4-vrchol, tak ho rozbaľ tak, že prostrednú hodnotu vlož do rodiča a vkladanú hodnotu vlož do príslušného listu.
    - Miesto v rodičovi sa určite nájde, keďže sme pri ceste dole rozbalili všetky 4-vrcholy. Preto nemusíme rekurzívne postupovať hore ako v prípade 2-3 stromov.

Farebné stromy

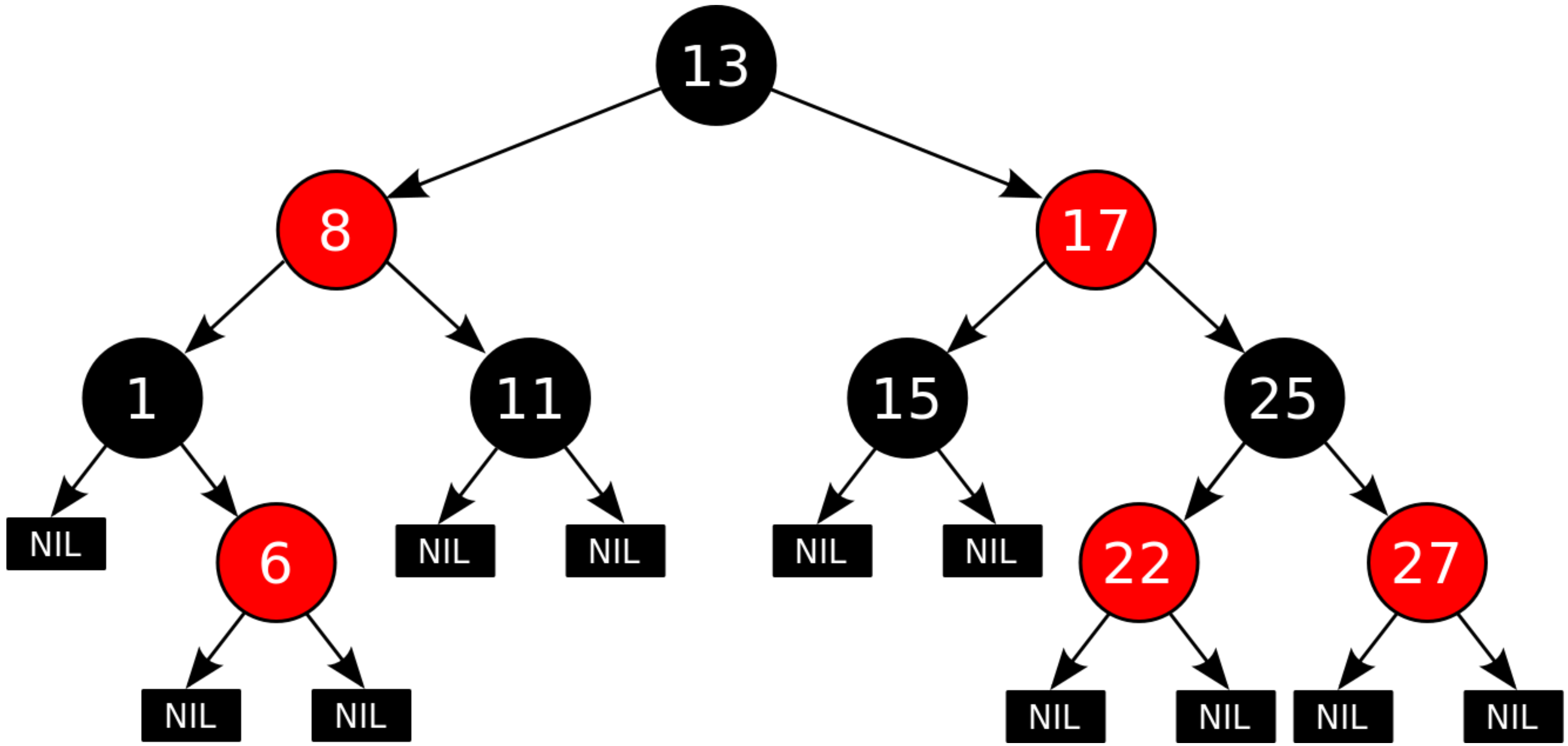
- Binárne stromy sú implementačne výhodné
  - Dajú sa využiť operácie ako nad štandardným BVS
- Vrcholy obsahujúce viac ako jeden kľúč sú implementačne komplikované
  - Operácie majú veľa špeciálnych prípadov
- Návrh: **farbenie vrcholov binárneho stromu dvomi farbami**
- Aké farby zvolíme? **červenú** – **čiernu**
  - (1978) **červená** bola najkrajšia farba, ktorú vedeli farebné laserové tlačiarne vytlačiť :)
  - Dobrá dostupnosť **červených** a **čiernych** pier na kreslenie na papier ...

Červeno-čierny strom (red-black tree)

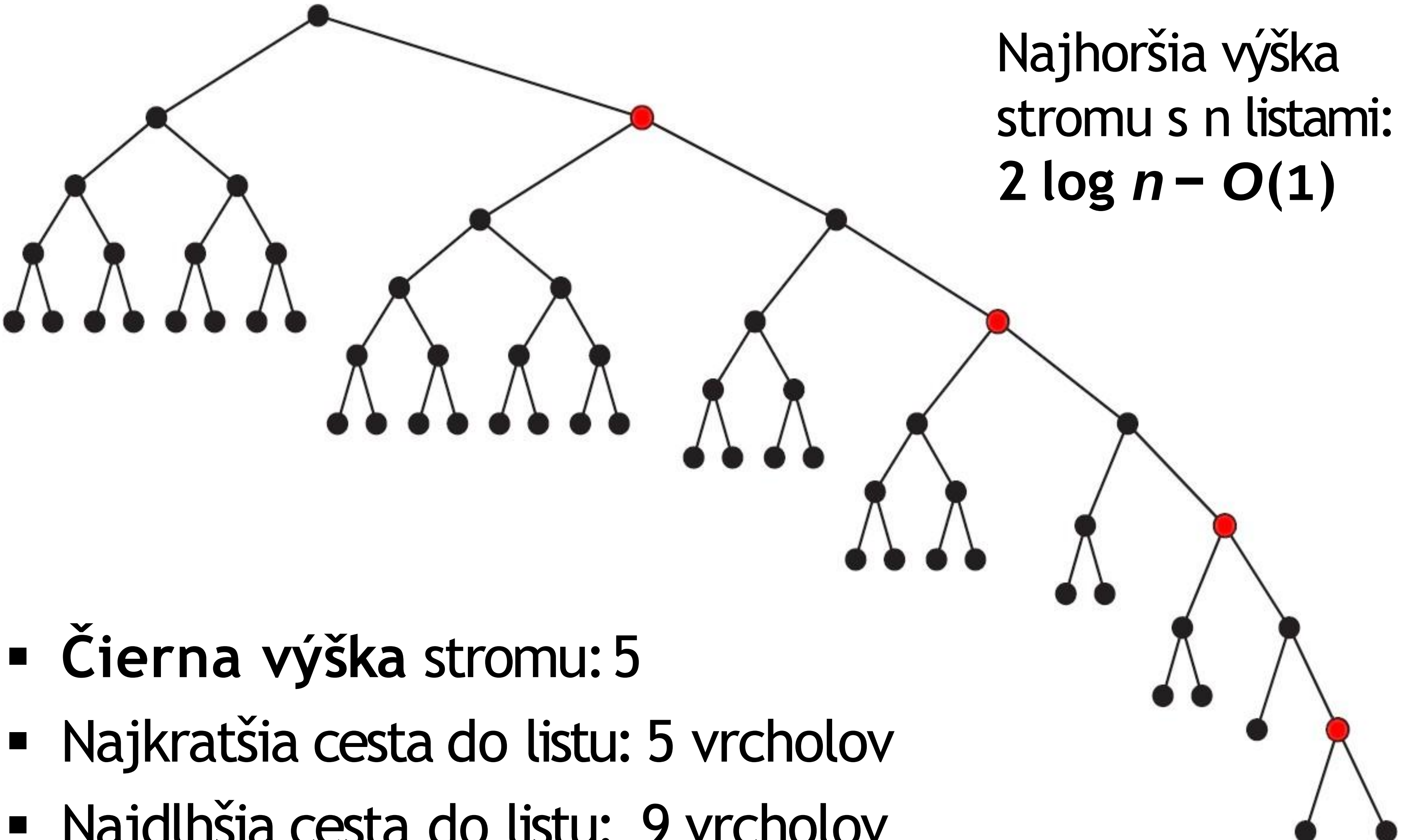
- Binárny vyhľadávací strom s vrcholmi ofarbenými na **červeno** alebo **čierno**, taký že:
  1. Koreň je **čierny**
  2. Listy neobsahujú dáta a sú **čierne**
  3. Cesty z koreňa do listov majú rovnaký počet **čiernych** vrcholov a tento počet označujeme **čierna výška** stromu
  4. Ak je vrchol **červený**, tak jeho deti sú **čierne**
- Vlastnosti:
  - Na žiadnej ceste nie sú dva **červené** vrcholy za sebou
  - Dĺžka cesty z koreňa do najvzdialenejšieho listu nie je viac ako dvakrát dlhšia ako cesta do najbližšieho listu
  - Každý vnútorný vrchol má dvoch potomkov

Červeno-čierny strom - Ukážka

- **Čierna výška** vrcholu – počet **čiernych** vrcholov na ceste z vrcholu do listu



Najmenej vyvážený červeno-čierny strom



Najhoršia výška stromu s n listami: **2 log n − O(1)**

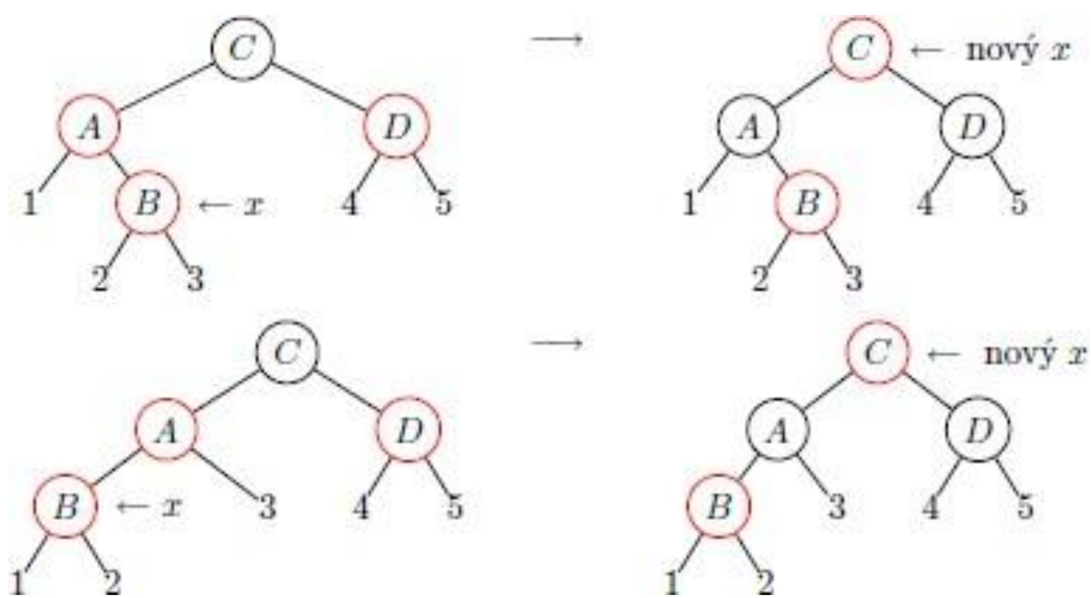
- **Čierna výška** stromu: 5
- Najkratšia cesta do listu: 5 vrcholov
- Najdlhšia cesta do listu: 9 vrcholov

Insert(x) do červeno-čierneho stromu

- Vrchol x vložíme ako do štandardného BVS a zafarbíme ho na **červeno**
- Ktorú vlastnosť stromov sme mohli týmto porušiť?
- Ak je x koreň, zafarbíme ho na **čierno**
- Ak je Parent(x) **čierny**, strom je v poriadku
- Ak je y = Parent(x) **červený**, tak (keďže nie je koreň) má z = Parent(y), ktorý je **čierny**:
    1. súrodenec vrcholu y (strýko vrcholu x) je **červený**
    2. súrodenec vrcholu y (strýko vrcholu x) je **čierny**

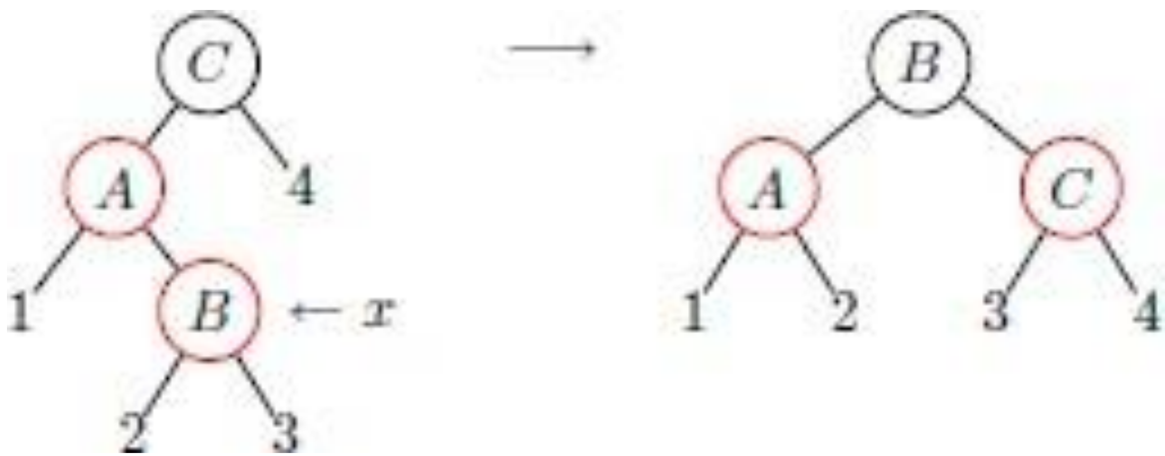
Insert(x) do červeno-čierneho stromu (2)

- **y** = Parent(**x**) je červený, strýko vrcholu **x** je červený
- Vrcholy **y** a strýko **x** prefarbíme na **čierno**, **z**=Parent(y) na **červeno**. Ak je **z** koreň alebo má **čierneho** rodiča, končíme, inak vyriešime „chybu“ rekurzívne vyššie. (Nakoniec koreň zafarbíme na **čierno**.)



Insert(x) do červeno-čierneho stromu (3)

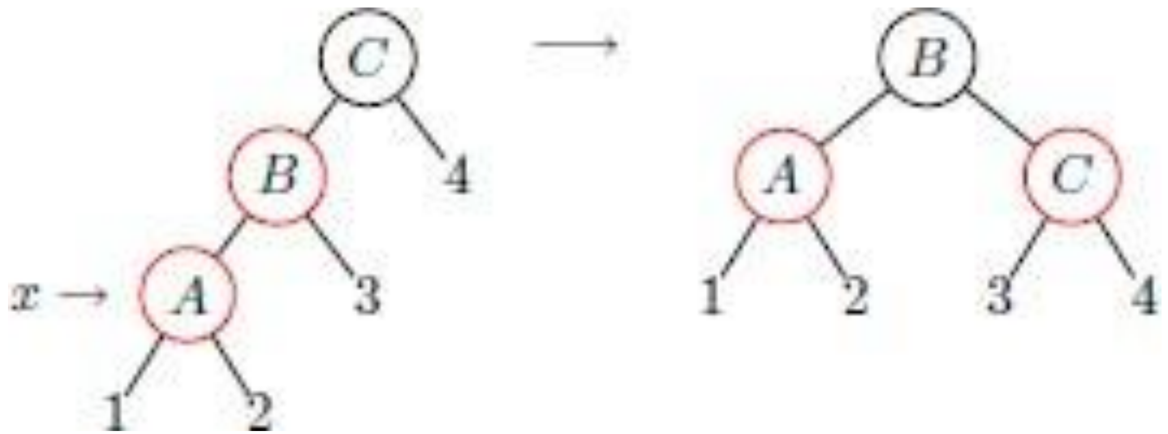
- **y** = Parent(**x**) je červený, strýko vrcholu **x** je **čierny**
- Ak **x** je opačným dieťaťom **y** ako je **y** dieťaťom **z**=Parent(**y**)
- Uvažujme, že x je pravým dieťaťom a y je ľavým **rotácia y doľava**, a **rotácia z doprava** a prefarbenie:



- Symetricky ak x je ľavým dieťatom a y je pravým

Insert(x) do červeno-čierneho stromu (4)

- **y** = Parent(**x**) je červený, strýko vrcholu **x** je **čierny**
- Ak **x** je <u>rovnakým</u> dieťaťom **y** ako je **y** dieťaťom **z**=Parent(**y**)
- Uvažujme, že x je ľavým dieťaťom a y je tiež ľavým **rotácia y doprava**, a prefarbíme y na **čierno**, z na **červeno**:



- Symetricky ak sú pravými deťmi: **rotácia y doľava**

Insert do červeno-čierneho stromu – Ukážka

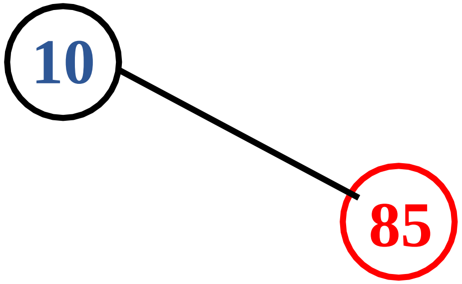
- Vlož 10

Insert do červeno-čierneho stromu - Ukážka

- Prefarbiť koreň na **čierno**

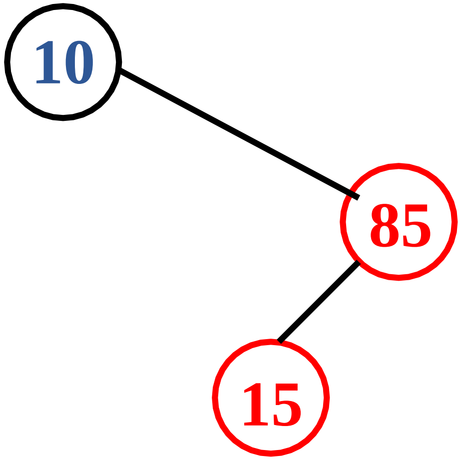
Insert do červeno-čierneho stromu – Ukážka

- Vlož 85



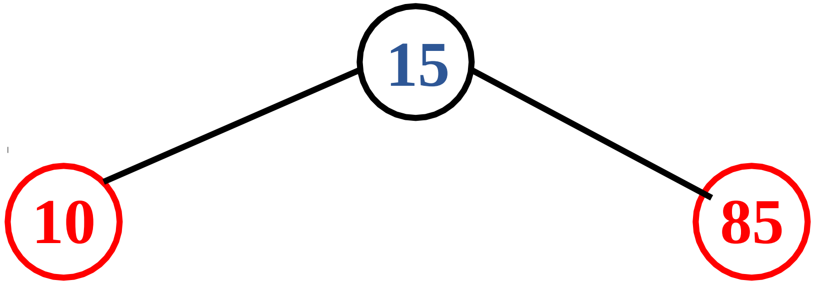
Insert do červeno-čierneho stromu - Ukážka

- Vlož 15



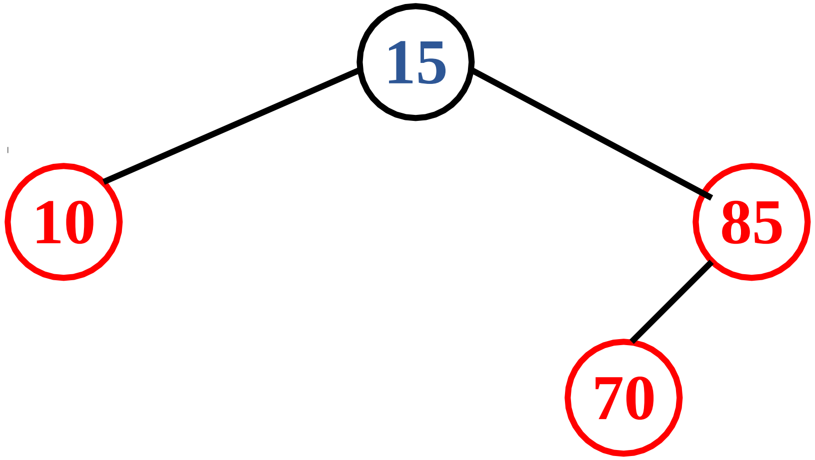
Insert do červeno-čierneho stromu – Ukážka

- Porušená podmienka!
  - Rotácia 85 doprava
  - Rotácia 15 doľava
  - Prefarbenie



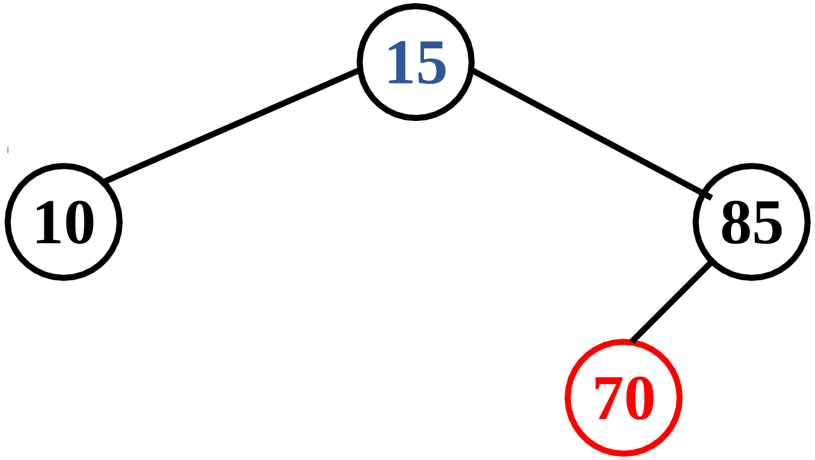
Insert do červeno-čierneho stromu - Ukážka

- Vlož 70



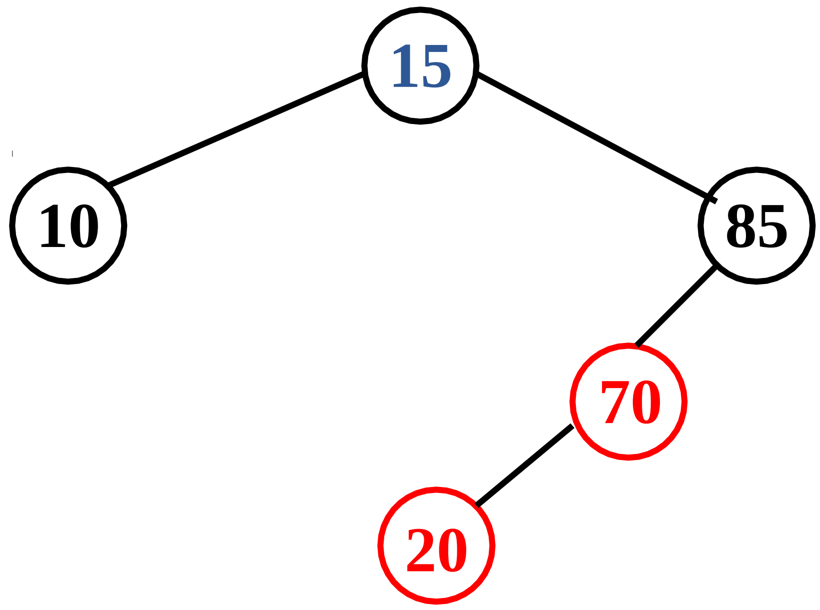
Insert do červeno-čierneho stromu – Ukážka

- Porušená podmienka!
  - Prefarbenie



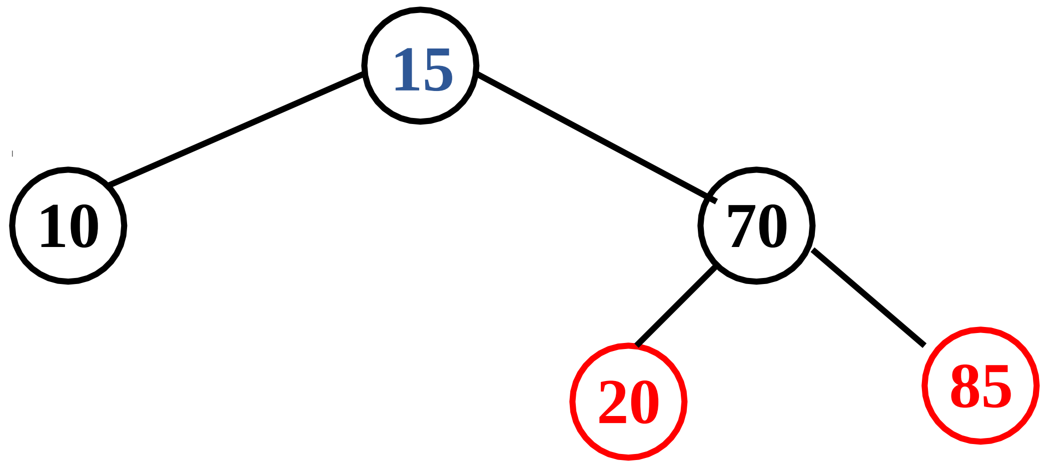
Insert do červeno-čierneho stromu - Ukážka

- Vlož 20



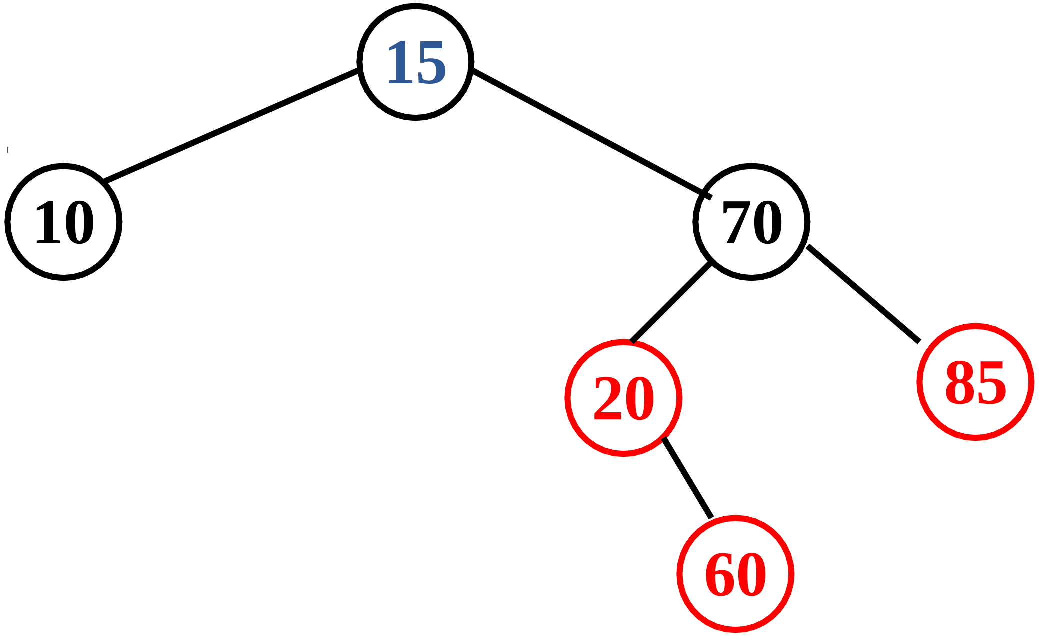
Insert do červeno-čierneho stromu – Ukážka

- Porušená podmienka!
  - Rotácia 70 doprava
  - Prefarbenie



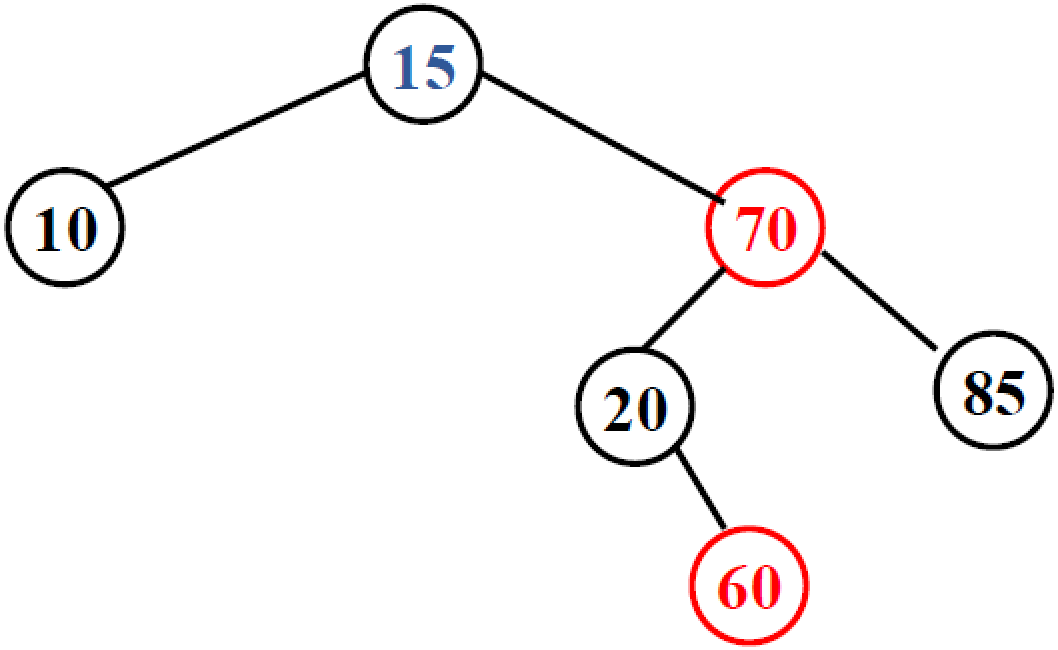
Insert do červeno-čierneho stromu - Ukážka

- Vlož 60



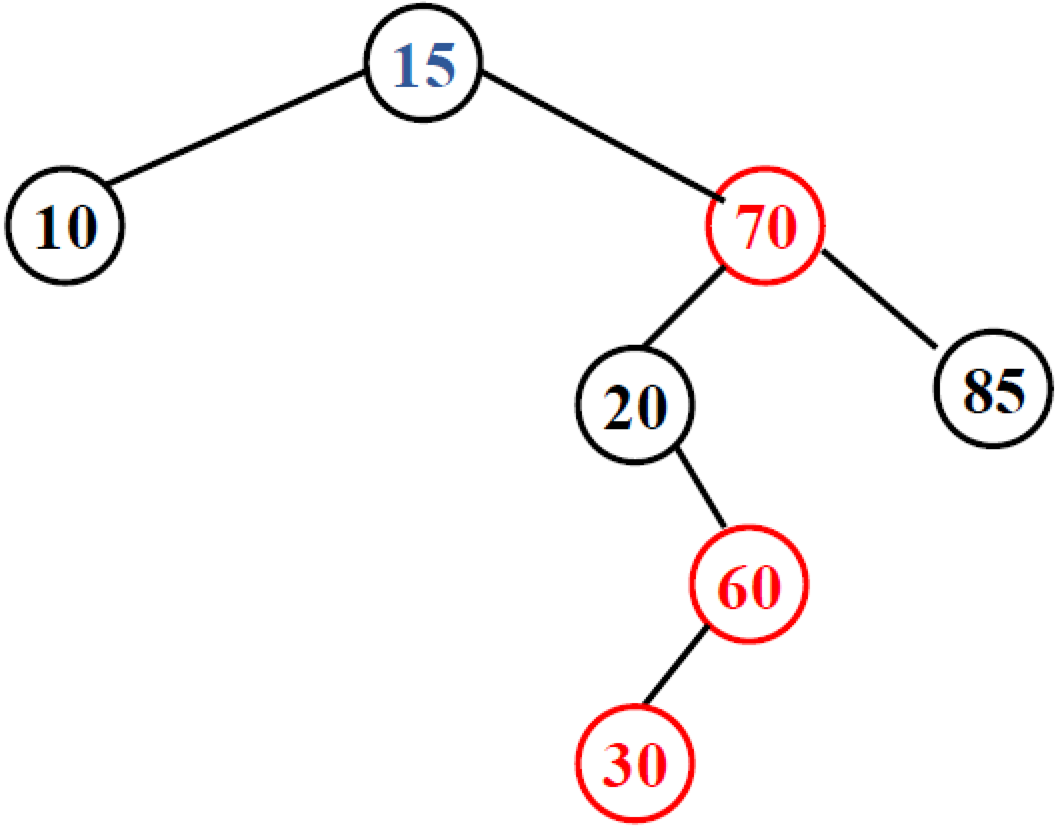
Insert do červeno-čierneho stromu – Ukážka

- Porušená podmienka!
  - Prefarbenie



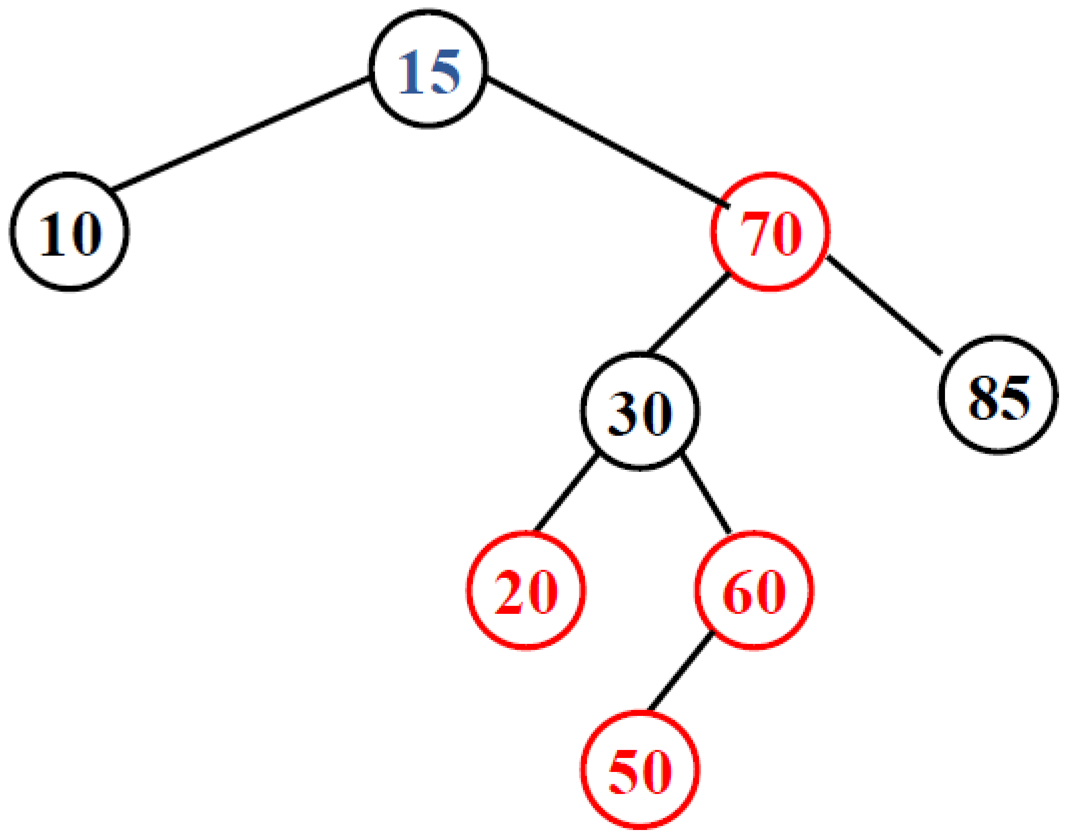
Insert do červeno-čierneho stromu - Ukážka

- Vlož 30



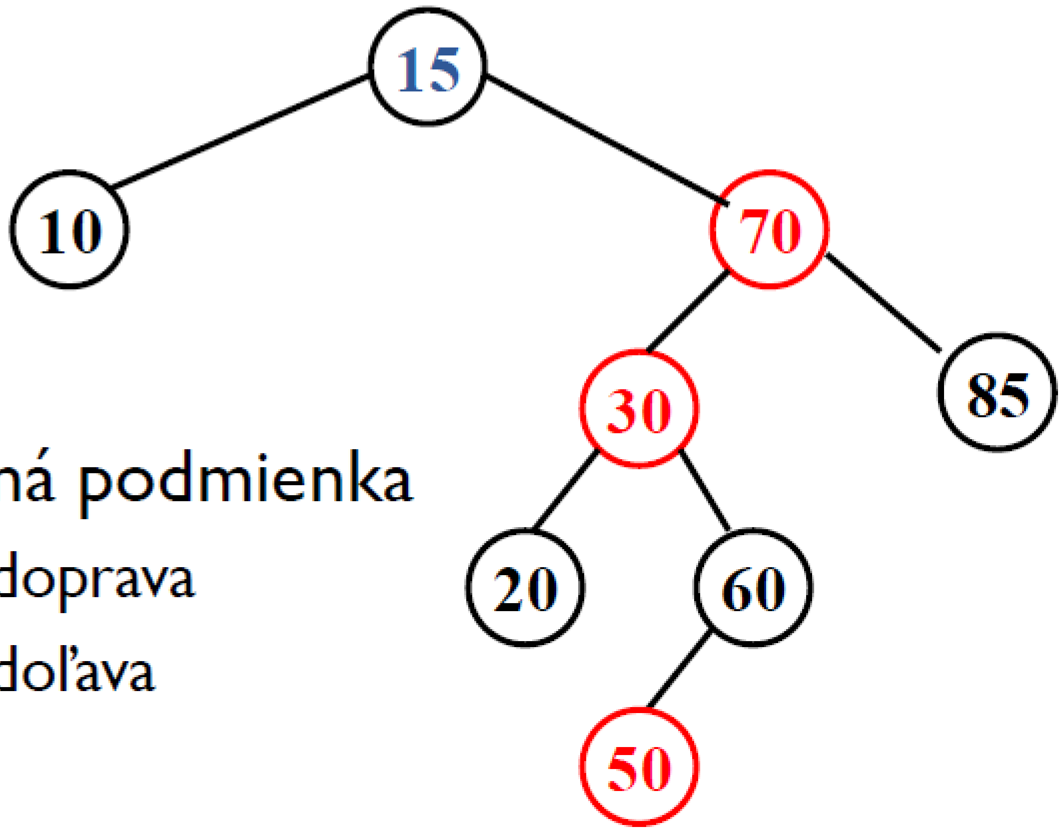
Insert do červeno-čierneho stromu – Ukážka

- Vlož 50



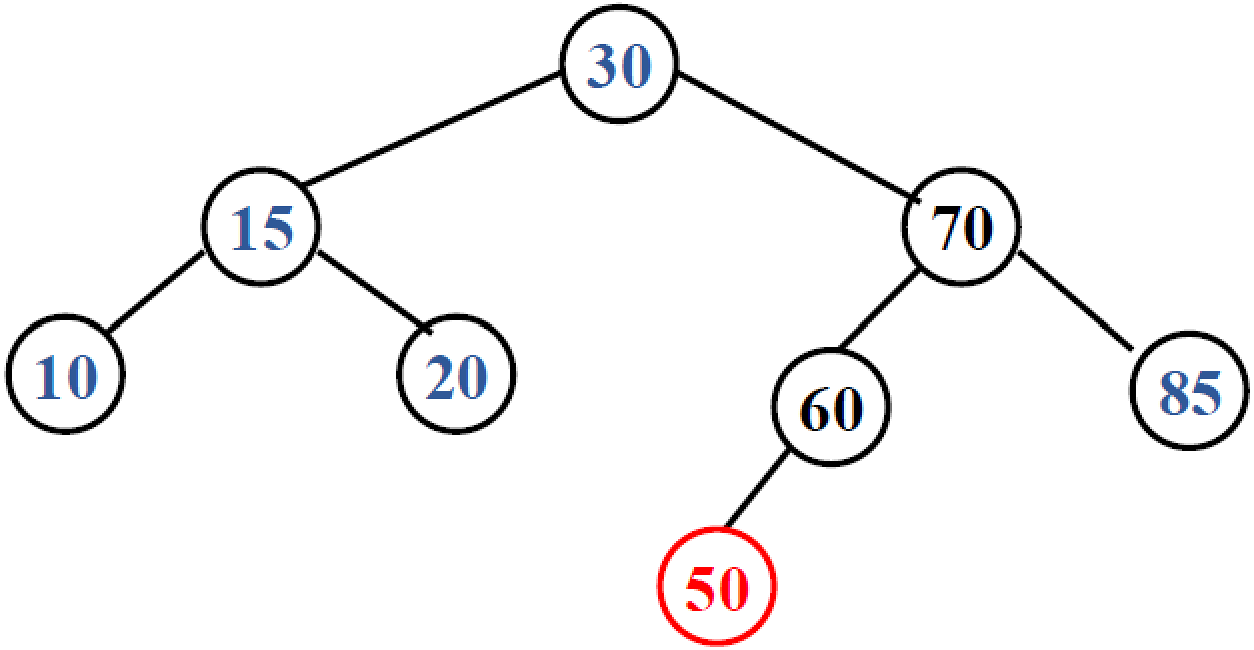
Insert do červeno-čierneho stromu – Ukážka

- Porušená podmienka!
  - Prefarbenie



- Stále porušená podmienka
  - Rotácia 70 doprava
  - Rotácia 15 doľava
  - Prefarbenie

Insert do červeno-čierneho stromu – Ukážka

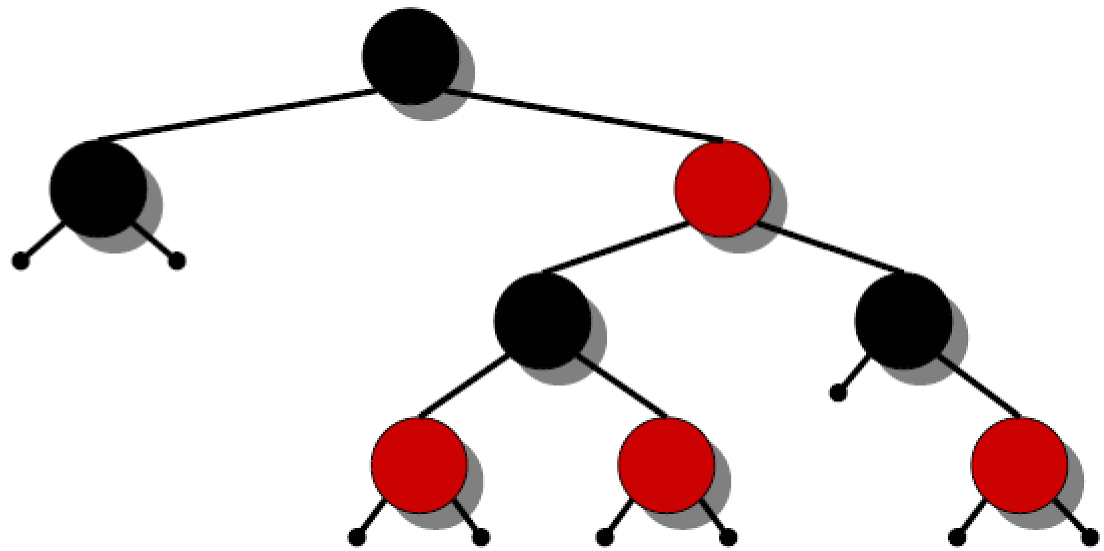


Delete z červeno-čierneho stromu

- Podobne ako v prípade štandardných BVS – vrchol na odstránenie nahradíme inorder predchodcom
- Musíme teda vyriešiť len prípad odstránenia vrcholu s jedným dieťaťom – nahradíme ho dieťatom, a prípadnú „chybu“ riešime rekurzívne, postupujúc ku koreňu
- Odstránením vrcholu môžeme porušiť podmienku (3) „cesty do listov majú rovnaký počet **čiernych** vrcholov“
- Sú dva jednoduché prípady, ak zostal / sme v červenom vrchole alebo sme v koreni, prefarbíme na **čierno**
- Inak nastavíme vrchol ako **dvojito čierny**, a prefarbovaním smerom ku koreňu túto chybu vyriešime

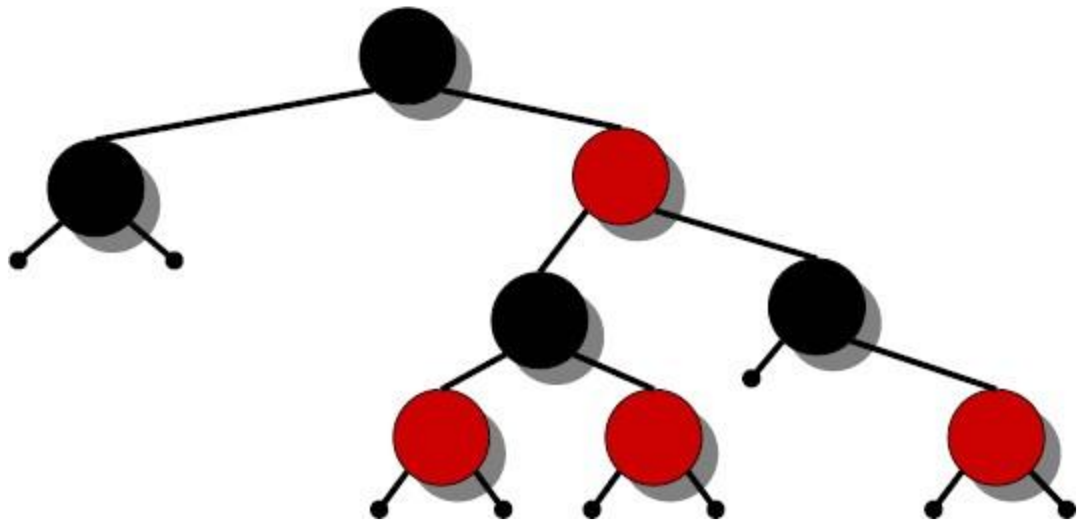
Červeno-čierny strom ako 2-3-4 strom

- Spojíme **červené** vrcholy do ich **čiernych** rodičov



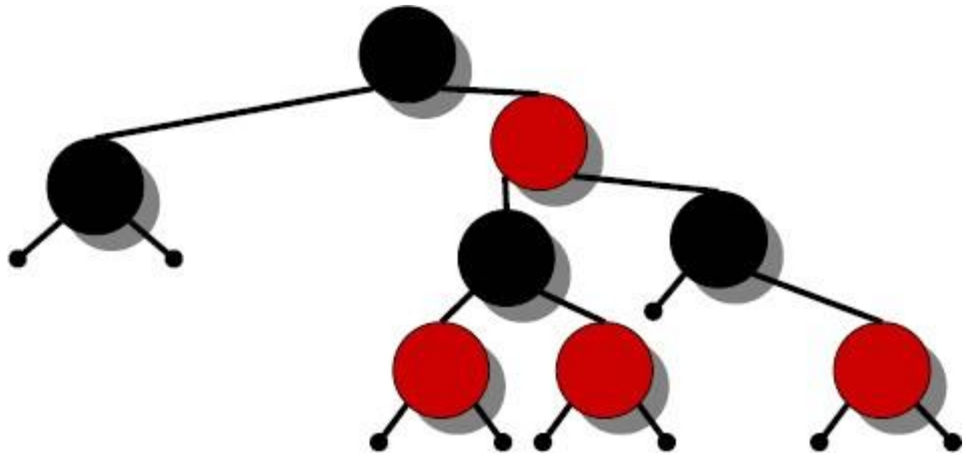
Červeno-čierny strom ako 2-3-4 strom

- Spojíme **červené** vrcholy do ich **čiernych** rodičov



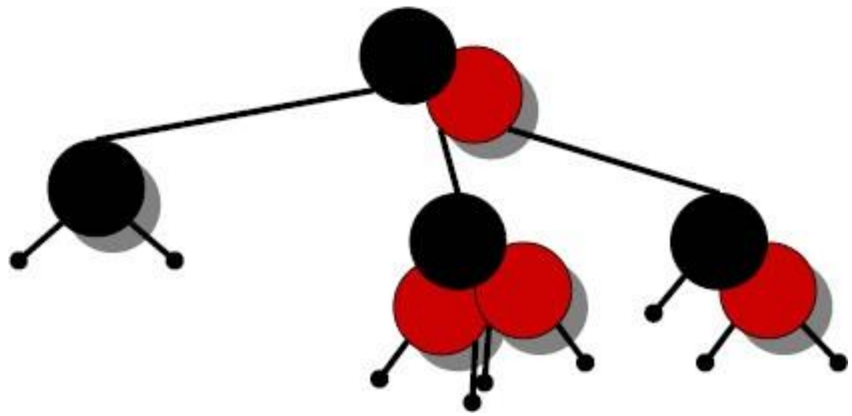
Červeno-čierny strom ako 2-3-4 strom

- Spojíme **červené** vrcholy do ich **čiernych** rodičov



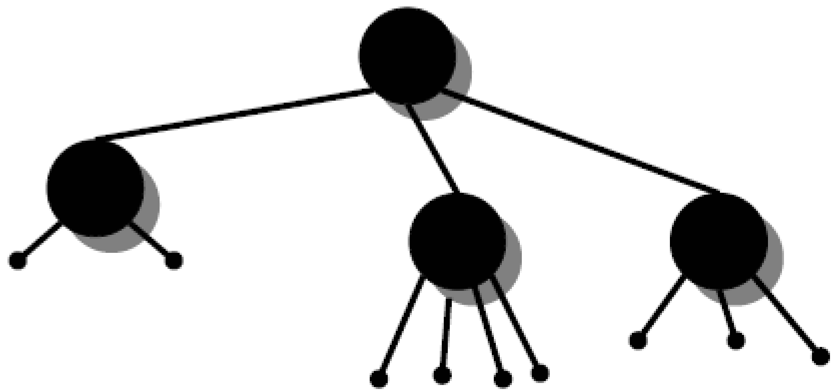
Červeno-čierny strom ako 2-3-4 strom

- Spojíme **červené** vrcholy do ich **čiernych** rodičov



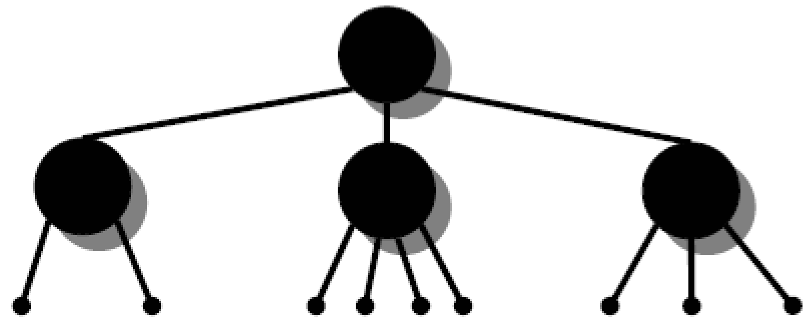
Červeno-čierny strom ako 2-3-4 strom

- Spojíme **červené** vrcholy do ich **čiernych** rodičov



Červeno-čierny strom ako 2-3-4 strom

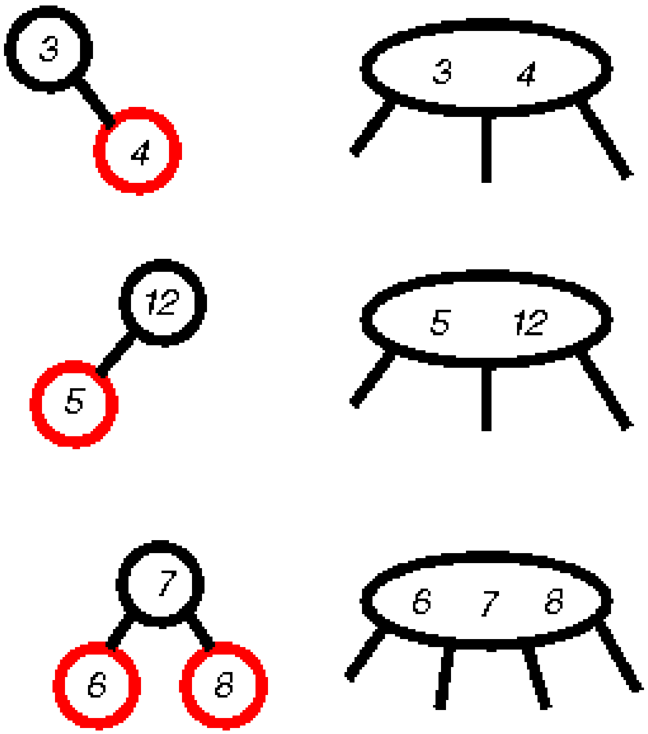
- Spojíme **červené** vrcholy do ich **čiernych** rodičov



- Vznikne strom, v ktorom vnútorné vrcholy majú 2, 3 alebo 4 deti – **2-3-4 strom**

Červeno-čierne stromy ako iné stromy

- **Červeno-čierne** stromy sú ako reprezentácia stromov s väčšími vrcholmi využitím binárneho stromu
- V závislosti od varianty implementácie zodpovedajú
  - 2-3-4 stromom, alebo
  - 2-3 stromom

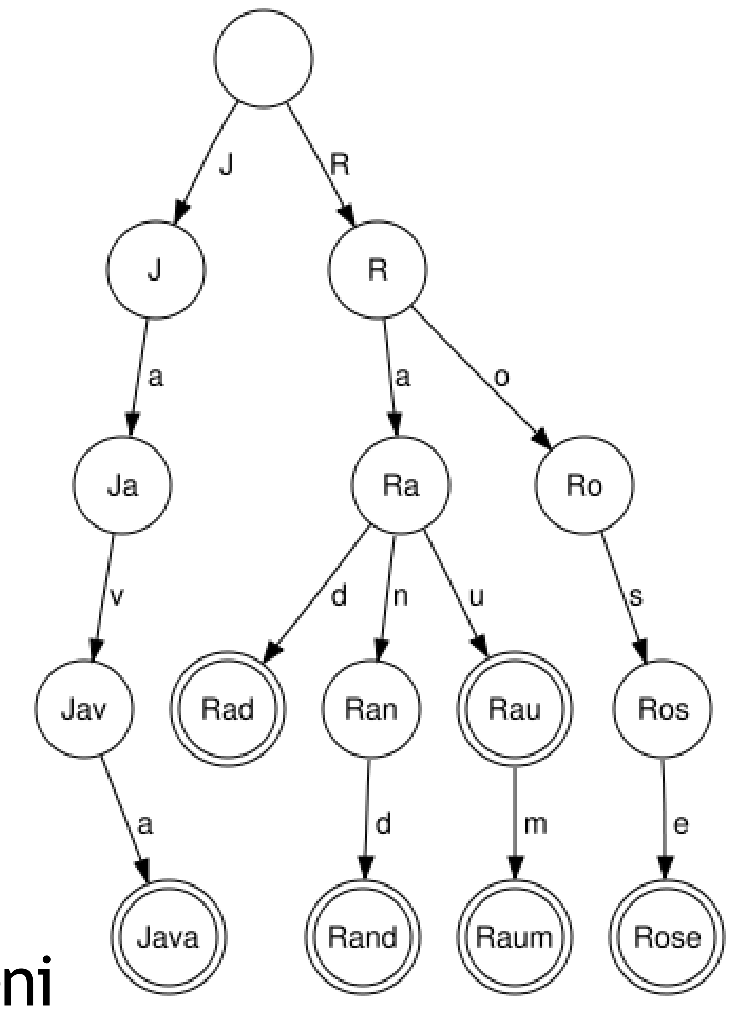


Porovnanie hĺbok vyvážených stromov

- **h_n** – hĺbka binárneho vyhľadávacieho stromu s n listami
- Dolné ohraničenie (úplný BVS): **$h_n = \log n$**
- Výškovo vyvážené (AVL) stromy: **$h_n \leq 1.44 \log n$**
- Červeno-čierne stromy: **$h_n \leq 2 \log n$**
- Váhovo vyvážené stromy: **$2 \log n \leq h_n \leq O(\log n)$**
- Iné teoretické modely dosahujú lepšie garancie, ale pre praktickú implementáciu sú komplikované
  - Malé zrýchlenie pri vyhľadávaní
  - Výrazné komplikácie pri úpravách (insert, delete)
  - Napr. 2-3 a 2-3-4 stromy s n listami majú výšku log n

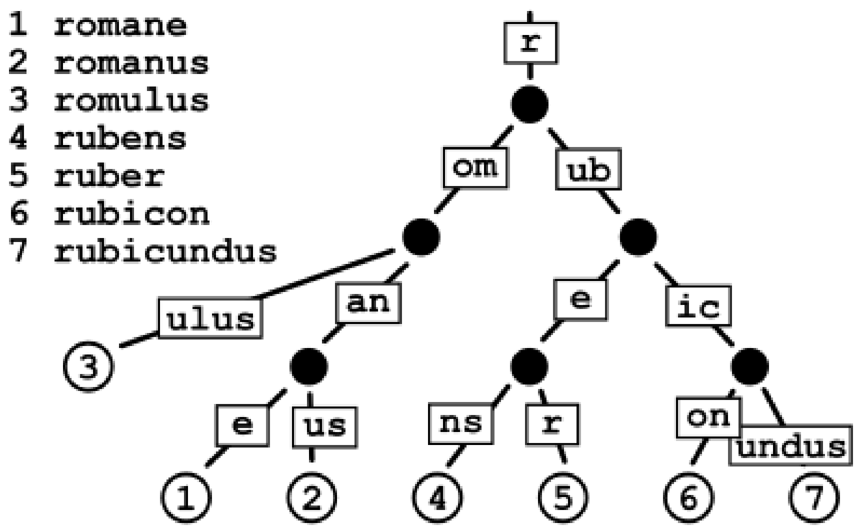
Trie – dynamická množina reťazcov

- Strom prefixov reťazcov
- **Vrcholy zodpovedajú prefixom hodnôt prvkov v množine**
  - Nasledovníci vrcholu majú spoločný prefix
  - Koreň je prázdny reťazec
  - Nie každý vrchol zodpovedá reťazcu z množiny
  - Každý z listov zodpovedá nejakej hodnote v množine
- **Každá hrana (prechod) má priradené písmenko**
- Vykonávanie operácií: začnem v koreni a postupujem po jednom písmenku



Radixový strom (radix tree)

- Priestorovo optimalizovaný trie
- Také vrcholy, ktoré sú jediné dieťa svojho rodiča sú spojené s rodičom do jedného vrcholu
- **Hrany môžu mať priradený reťazec**



- Efektívna dynamická množina reťazcov

Ďalšie typy vyhľadávacích stromov

- Obsahujú intervaly
  - **Segmentové stromy** – vhodné pre operáciu:
    nájdi intervaly, v ktorých sa nachádza daný bod
  - **Intervalové stromy** – vhodné pre intervalové operácie:
    napr. nájdi intervaly, ktoré prekrývajú daný interval
- Obsahuje body:
  - **Range trees** – vhodné na operáciu:
    nájdi body, ktoré sa spadajú do daného intervalu
- Obsahujú skalárne hodnoty:
  - **Binárne indexované stromy** – vhodné na operáciu:
    koľko bodov je v danom intervale