(1)

Výroky:

$a, b,$

$p(a)$ < 0 nepravdivý výrok; 1 pravdivý

Negácia:

a: Bratislava je hlavné mesto Slovenska. $p(a)=1$

$\bar{a}$, a': Nie je pravda, že — " —

Bratislava nie je hlavné mesto Slovenska $p(\bar{a})=0$

Kvantifikátory. Existenčný kvantifikátor.

$\exists$ existuje

$\forall$ pre všetky

negácia: $\forall$ pre všetky

$\exists$ existuje

Aspoň traja žiaci dostali jednotku. Najviac dvaja žiaci dostali jednotku.

Najviac sedem detí dostalo chrípku. Aspoň osem detí dostalo chrípku.

Práve dvaja ľudia vstúpili k autobusu. 2

Z autobusu vystúpil najviac jeden človek alebo
aspoň traja ľudia

Každý žiak v triede dostal učebnice. Aspoň jeden žiak v triede nedostal učebnice

V triede je práve 5 žiakov.

Každý žiak si musí písať domáce úlohy.
Existuje žiak, ktorý si nemusí písať domáce úlohy.
aspoň jeden žiak

Žiaden žiak v našej triede nenosí okuliare.
Existuje žiak v našej triede, ktorý musí nosiť okuliare.
aspoň jeden žiak v našej triede

Logické spojky.

$\wedge$ konjunkcia (a) $\bullet$

$a \wedge b$ pravdivá práve vtedy, keď sú oba výroky pravdivé

$\vee$ disjunkcia (alebo) $+$

$a \vee b$ —— " ——, keď aspoň jeden výrok je pravdivý

$\Rightarrow$ implikácia

$a \Rightarrow b$ pravdivá vždy, okrem prípadu, keď ~~[illegible]~~ prvý výrok (a) je pravdivý a b je nepravdivý

$\mu(a)=1 \quad \mu(b)=0$

$\mu(a \Rightarrow b)=0$

ekvivalencia

$a \Leftrightarrow b$ vtedy a len vtedy / práve vtedy

$\mu(a \Leftrightarrow b)=1 \Leftrightarrow$
$(\mu(a)=1 \wedge \mu(b)=1) \vee$
$(\mu(a)=0 \wedge \mu(b)=0)$

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \overset{\bullet}{\wedge} b$	$a \overset{+}{\vee} b$	$a \Leftrightarrow b$	$a \Rightarrow b$	$(a \wedge b)'$	$a' \vee b'$
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

$\boxed{(a \wedge b)' = a' \vee b'}$ de Morganove pravidlo

Bratislava je hlavné mesto Slovenska a Michalovce je hl. mesto Košíc.

Buď — " — nie je hl. — " — alebo Michalovce nie je hl. mesto Košíc.

Štvorec má dve^{a} uhlopriečky a pravidelný päťuholník nemá pravý uhol.^{b}

Buď štv. nemá dve uhl. alebo prav. päťuholník má pravý uhol.

(5)

$(a \vee b)' = a' \wedge b'$

Štv. má dve uhlop. alebo pov. pravouholník nemá pravý uhol.

Štvorec nemá dve uhlop. a pov. pravouhol. má pravý uhol.

$(a \Rightarrow b)' = a \wedge b'$

a	b	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b)'$	b'	$a \wedge b'$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0

Ak $\underbrace{\text{bude pršať}}_{a}$, $\underbrace{\text{pôjdeme do kina}}_{b}$.

Bude pršať a nepôjdeme do kina.

Ak nebudeš mať dobré vysvedčenie, nepôjdeš na [illegible].

$\boxed{a \Rightarrow b \Leftrightarrow b' \Rightarrow a'}$ obmena

Pôjdem s tebou, ak mi zaplatíš večeru.

Ak mi zaplatíš večeru, pôjdem s tebou.

Nepôjdem s tebou, ak mi nezaplatíš večeru.

$a \Rightarrow b \not\Leftrightarrow b \Rightarrow a$

(1) ak dostanem čerstvé ovocie, nekúpime kompót.

OBMENA.

Kúpime kompót, ak nedostaneme čerstvé ovocie

negácia. (1)

Dostaneme čerstvé ovocie a kúpime kompót.

(7)

1) $(A \Leftrightarrow B)' = \boxed{A \Leftrightarrow B'}$ (*)

2) $(A \Leftrightarrow B)' = A' \Leftrightarrow B$

3) $(A \Leftrightarrow B)' = (A \wedge B') \underline{\vee} (A' \wedge B)$ (***)

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Leftrightarrow B)'$	B'	(*) $A \Leftrightarrow B'$	A'	(**) $A' \Leftrightarrow B$	(1) $A \wedge B'$	$\vee$ (2) $A' \wedge B$	$(1) \vee (2)$ (***)
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0

A	B	C
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Banány kúpim vždy a vtedy (keď pôjdem do Tesca.

negácia.

(*) Banány kúpim vždy a len vtedy (práve vtedy), keď nepôjdem do Tesca.

(**) Banány nekúpim — " — , keď pôjdem do Tesca.

(***) buď Banány kúpim a nepôjdem do Tesca alebo banány nekúpim a pôjdem do Tesca.

Tautológia – vždy pravdivá!
Kontradikcia – vždy nepravdivá!

Ak si tento príklad spočítal Ty, tak som ja pápež.

Hypotézy

axiómy.

<u>Definície.</u>

<u>vety.</u>

Dôkazy mat. viet.

1) Priamy dôkaz

$\boxed{A \Rightarrow B}$ $\quad A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \dots \Rightarrow A_n = B$

Príklad: Pre každé číslo $x > 1$ platí, že $x + \frac{1}{x} > 2$

$x > 1 \Rightarrow x > 0$

Dôkaz: $x > 1 \Rightarrow (x-1) > 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x} > 2 \Rightarrow \underline{\underline{x + \frac{1}{x} > 2}}$$

b) nepriamy dôkaz.

$A \Rightarrow B \qquad \overline{B' \Rightarrow A'}$

$B' \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots B_n \Rightarrow A'$

Dokážte, že $\forall n \in N$ ak 2 delí $n^2 \Rightarrow$ 2 delí aj n

$2 \mid n^2 \qquad 2 \mid n$

nech $2 \nmid n \Rightarrow n = 2k+1$ nie je párne číslo $\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 =$

$= 2(\underbrace{2k^2+2k}) + 1 =$

$= 2l + 1$ teda $2 \nmid n^2$

c) Dôkaz sporom.

$A \Rightarrow B \qquad A \wedge B' \Rightarrow \dots \Rightarrow A'$ $\qquad \sqrt{2} = \frac{2r}{2s}$ nie nesúdeliteľ. spor s predp.

$\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo.

nech $\sqrt{2}$ je rac. číslo $\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde p a q nesúdeliteľné. $\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ je párne $\Rightarrow p$ je párne $\Rightarrow p = 2r$

$\sqrt{2} = \frac{2r}{q} \Big|^2 \qquad 2 = \frac{4r^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2 \Rightarrow q^2$ je párne $\Rightarrow q$ je párne

$q = 2s$

Dôkaz mat. indukciou

$V(n)$ - máme dokázať pre všetky $n \in N$

Ukážeme, že platí 1) $V(1)$ i predpokl., že platí $V(k)$, $k \geq 1$

2) dok., že aj platí $V(k) \Rightarrow V(k+1)$, pre $k \geq 1$

$\boxed{s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$ máme dokázať

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$s_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100)$

Gauss, Friedrich

$1 + 2 + \dots + 100$ 5050

$\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + 4 + 5 + \dots + \boxed{98} + \boxed{99} + \boxed{100}$

101

101

101

$50 \cdot 101 = \underline{\underline{5050}}$

$a_1 = 1$

$a_{100} = 100$

$n = 100$

Dokážte, že pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti platí:

(11)

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) \qquad s_n = a_1+a_2+\dots+a_n$$

1) Dokážeme platnosť pre $n=1$

$$s_1 = \frac{1}{2}(a_1+a_1)$$

$L = s_1 = a_1$ $\qquad L = P$; dokázané;

$P = \frac{1}{2}(a_1+a_1) = a_1$

2) Predp., že to platí pre nejaké $k \geq 1$, teda že platí $s_k = \frac{k}{2}(a_1+a_k)$ (*)

3) Dokážeme, že to potom platí aj pre $(k+1)$, teda, že

$$s_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1+a_{k+1}) = \frac{k+1}{2}a_1 + \frac{k+1}{2}\cdot a_{k+1}$$

PLATÍ PRE AP
$a_{k+1} = a_1 + k\cdot d$

$$L = s_{k+1} = \underbrace{a_1+a_2+\dots+a_k}_{s_k \text{ (využijeme ind. predpoklad)}} + a_{k+1} \overset{(*)}{=} s_k + a_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1+a_k) + a_{k+1} = \frac{ka_1+ka_k+a_{k+1}2}{2} =$$

$$= \frac{ka_1+ka_k+2(a_1+kd)}{2} = \frac{ka_1+ka_k+2a_1+2kd}{2} = \frac{ka_1+k\cdot a_k+a_1+a_1+kd+kd}{2} =$$

$$= \frac{\overset{(a_1+kd)}{\overset{\parallel}{a_{k+1}}} + k(\overbrace{a_k+d}^{a_{k+1}}) + (k+1)\cdot a_1}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)}{2}(a_1+a_{k+1})$$; ČO SME MALI DOKÁZAŤ.