PREDNÁŠKA ČÍSLO

ZÁKLADY ANALYTICKEJ GEOMETRIE

KUŽEĽOSEČKY

(KRUŽNICA, ELIPSA, PARABOLA, HYPERBOLA)

KUŽEĽOSEČKY - SÚ ÚTVARY, KTORÉ VZNIKAJÚ PRIENIKOM (SEKANÍM) KUŽEĽA A ROVINY

VŠEOBECNÝ TVAR KUŽEĽOSEČIEK je nasledný

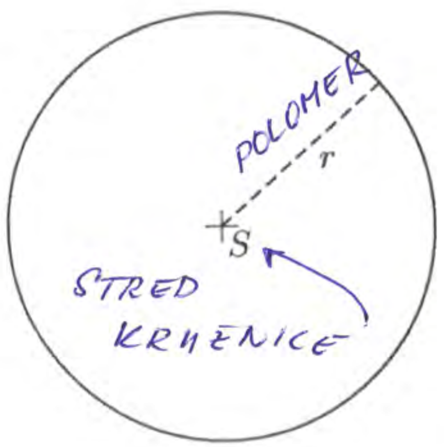
$$ax^2 + 2b x \cdot y + c \cdot y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

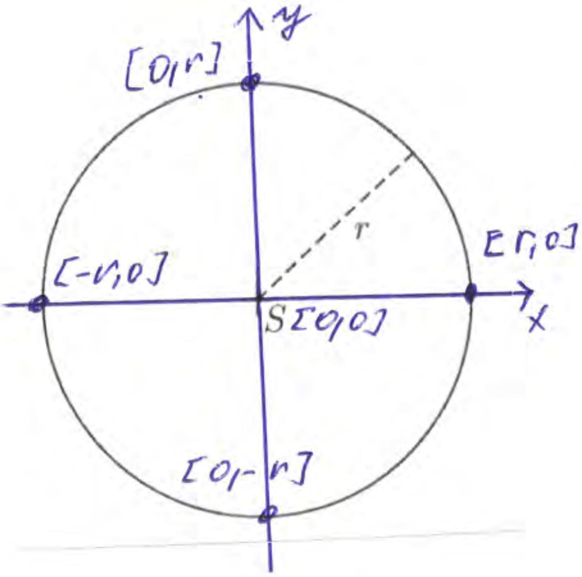
a, b, c, d, e, f - konštanty $\in R$

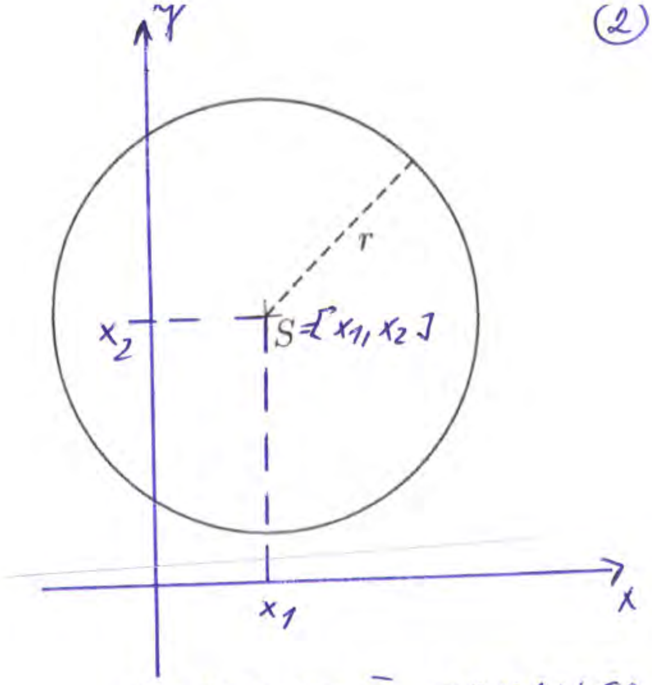
poznámka:
my sa budeme zaoberať len takými kužeľosečkami, kde os súmernosti je rovnobežná s osou $\vec{x}$ alebo $\vec{y}$

KRUŽNICA

Kružnica je množina bodov, ktoré majú od pevného bodu S - STRED KRUŽNICE rovnakú vzdialenosť r - POLOMER KRUŽNICE







STREDOVÁ ROVNICA KRUŽNICE

$S = [0, 0]$ - stred

r - polomer, $r > 0$, $r \in R$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

STREDOVÁ ROVNICA KRUŽNICE

$S = [x_1, x_2]$ - stred

r - polomer, $r > 0$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

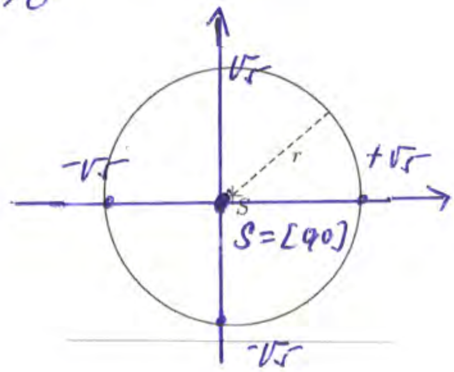
PRÍKLAD:

NÁJDITE STRED A POLOMER KRUŽNICE. NAČRTNITE DO SÚRADNICOVÉHO SYSTÉMU

1. $x^2 + y^2 = 5 \rightarrow r^2 = 5$

   $S = [0, 0]$ $\quad r = \sqrt{5}$, $r > 0$

   $r = \sqrt{5}$



2. $x^2 + 4x + y^2 = 0$

   UPRAVÍME V KAŽDEJ PREM. NA ŠTVOREC

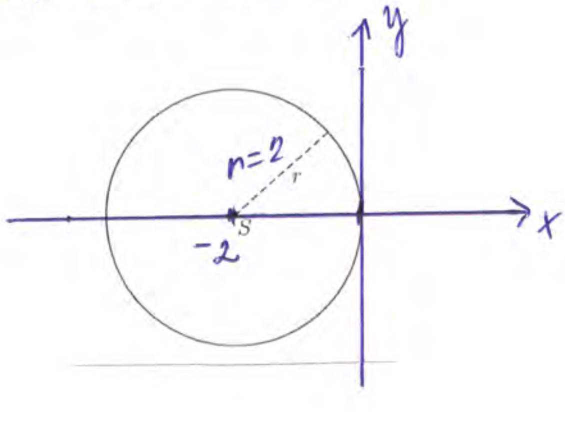
   $x^2 + 4x + y^2 = 0$

   $x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + y^2 = 0$

   $(x+2)^2 + y^2 = 4$

   $S = [-2, 0]$

   $r = 2$



3. $x^2+4x+y^2-3x+\frac{1}{2}=0$

UPRAVÍME V KAŽDEJ PREMENNEJ NA ŠTVOREC

$$x^2+2.2x+y^2-2.\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$$

$$(x^2+2.2x+4)-4+\left(y^2-2.\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+\frac{1}{2}=0$$

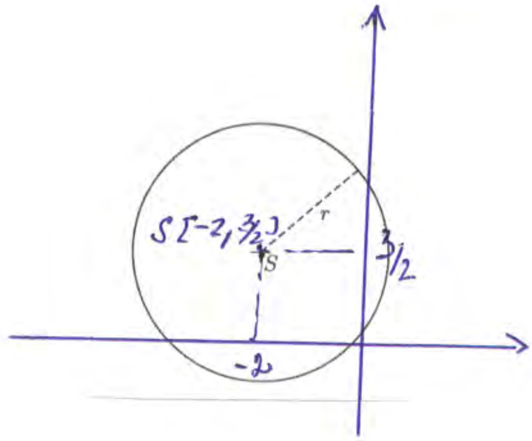
$$(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=4+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}$$

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{16+9-2}{4}$$

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{23}{4}$$

$$S=\left[-2,\frac{3}{2}\right]$$

$$r=\frac{\sqrt{23}}{2}\doteq 2{,}39$$



PRÍKLAD:

OPAČNÁ OTÁZKA - ako bude vyzerať rovnica kružnice, ak poznáme jej stred a polomer

nech $S=[\sqrt{2},-1]$

$r=\sqrt{3}$

R: rovnica kružnice bude

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

$$(x-\sqrt{2})^2+(y-(-1))^2=(\sqrt{3})^2$$

$$\boxed{(x-\sqrt{2})^2+(y+1)^2=3}$$

niekedy sa nazýva STREDOVÝ TVAR

ak ju chceme upraviť na všeobecný tvar - počítajme

$$x^2-2.\sqrt{2}x+2+y^2+2y+1-3=0$$

$$\boxed{x^2-2\sqrt{2}x+y^2+2y=0}$$

NAZÝVA SA VŠEOBECNÝ TVAR

PRÍKLAD:

Ukážte, že rovnica $x^2+y^2-6x+4y+4=0$ je rovnicou kružnice, určte jej stred a polomer.

R: $x^2+y^2-6x+4y+4=0$

$x^2-6x+y^2+4y+4=0$

$x^2-2\cdot 3\cdot x+9-9+y^2+2\cdot 2x+4-\cancel{4}+\cancel{4}=0$

$\underbrace{(x-3)^2+(y+2)^2=9}_{\text{rovnica kružnice}}$ $\quad S=[3,-2]$

$r=3$

PRÍKLAD:

Pre ktoré hodnoty p je rovnica

$$x^2+y^2+3x-y+p=0$$

všeobecnou rovnicou kružnice. Určte vždy súradnice stredu a polomer.

R: upravujeme (úprava na štvorec)

$x^2+y^2+3x-y+p=0$

$\underbrace{x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}}_{(x-\frac{3}{2})^2}-\frac{9}{4}+\underbrace{y^2-2\cdot\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}}_{(y-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{4}+p=0$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2-\frac{10}{4}+p=0$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=-p+\frac{5}{2}$

z podmienok kružnice vieme, že polomer má byť $r>0$

$\Rightarrow \frac{5}{2}-p=r^2$

$\frac{5}{2}-p>0 \Rightarrow$

$\frac{5}{2}>p$

LEN PRE HODNOTY $p\in(-\infty,\frac{5}{2})$ je to rovnica kružnice

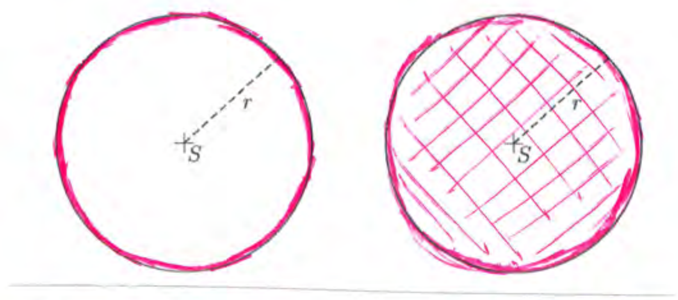
$S=[\frac{3}{2},\frac{1}{2}]$ $\quad r=+\sqrt{\frac{5}{2}-p}$ $\leftarrow$ stred a polomer

KRUŽNICA A KRUH

POZOR: TIETO DVA POJMY SI NESMIEME ZAMIEŇAŤ

KRUŽNICA – MNOŽINA BODOV, KTORÝCH VZDIALENOSŤ OD STREDU JE PRESNE R

KRUH – MNOŽINA BODOV, KTORÝCH VZDIALENOSŤ OD STREDU JE MENŠIA ALEBO ROVNÁ R



KRUŽNICA KRUH

KRUŽNICA:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

KRUH:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\leq r^2$$

PRÍKLAD:

KRUH k je určený

$$(x-2)^2+(y+1)^2\leq 25$$

zistite, či body A, B, C ležia v kruhu, mimo kruhu, alebo na hranici

$A=[8,6]$

dosadíme

$$(8-2)^2+(6+1)^2\overset{?}{\leq}25$$

$$6^2+7^2\leq 25$$ neplatí

leží mimo

$B=[7,-1]$

dosadíme $(7-2)^2+(-1+1)^2\leq 25$

$$25=25$$ $\rightarrow$ leží na hranici

$C = [\ 2, 3]$

dosadíme

$$(2-2)^2 + (3+1)^2 \overset{?}{\leq} 25$$

$$0 + 16 \leq 25 \rightarrow \text{leží v kruhu.}$$

PRÍKLAD! :

V ROVINE SÚ DANÉ BODY $A = [2, -1]$
$B = [-2, 3]$

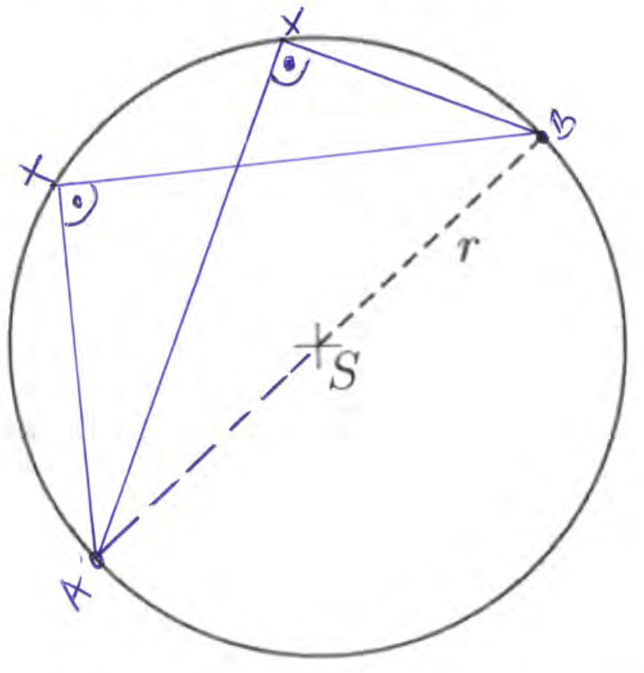
URČTE MNOŽINY VŠETKÝCH BODOV X, TAKÚ že priamky $\overrightarrow{AX}$ a $\overrightarrow{BX}$ SÚ NAVZÁJOM KOLMÉ

INÝMI SLOVAMI: NÁJDITE VŠETKY BODY X, Z KTORÝCH JE VIDIEŤ ÚSEČKA AB POD PRAVÝM UHLOM.

R:

ANALÝZA PROBLÉMU

- aj si spomeniete na 6 ročník ZŠ (konštrukčné úlohy) THALESOVA KRUŽNICA



THALESOVA KRUŽ. je kružnica zostrojená nad úsečkou AB
- je to presne množina bodov, ktorú hľadáme

NAJDÔLEŽITEJŠIA NA TOMTO PRÍKLADE JE MYŠLIENKA

(to ostatné je jednoduché)

$A = [2, -1]$
$B = [-2, 3]$ } $S = A \dot{+} B$

↓ stred úsečky
= stred kružnice

$S=\left[\frac{2-2}{2}, \frac{-1+3}{2}\right] = [0,1]$

$d(S,A)$ = polomer kružnice

$= \sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{2}$

polomer kružnice $r = 2\sqrt{2}$

RIEŠENIE 2 - INÁ ÚVAHA

PRIAMKY $\overrightarrow{AX}$ a $\overrightarrow{BX}$ SÚ NA SEBA KOLMÉ.
to znamená, že ich smerné vektory sú na seba KOLMÉ → to znamená, že ich skalárny súčin je = 0

$s_{\overrightarrow{AX}} = \overrightarrow{X-A}$
$= (x-2, y+1)$

$X=[x,y]$
$A=[2,-1]$
$B=[-2,3]$

$s_{\overrightarrow{BX}} = \overrightarrow{X-B}$
$=(x+2, y-3)$

$s_{\overrightarrow{AX}} \cdot s_{\overrightarrow{BX}} = 0$

$(x-2, y+1)\cdot(x+2, y-3)=0$

$(x-2)(x+2) + (y+1)\cdot(y-3)=0$

po algebraických úpravách dostaneme

$x^2-2x+2x-4+y^2+y-3y-3=0$

$\boxed{x^2+y^2-2y-7=0}$ - ROVNICA KRUŽNICE

skúška: urobíme úpravu na štvorec

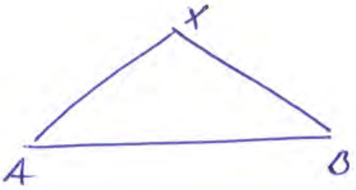
$x^2+y^2-2\cdot1\cdot y+1-1-7=0$

$x^2+(y-1)^2=8$

$S=[0,1]$
$r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
} rovnaký výsledok ako v 1. verzii

RIEŠENIE 3 - ĎALŠIA ÚVAHA

Z obrázku a zadania príkladu vidíme, že $\triangle AXB$ je pravouhlý trojuholník $\Rightarrow$ musí platiť PYTAGOROVA VETA



$$|AX|^2 + |BX|^2 = |AB|^2$$

$$A = [2, -1]$$
$$B = [-2, 3]$$
$$X = [x, y]$$

$$d(A, X) = \sqrt{(2-x)^2 + (-1-y)^2}$$
$$d(B, X) = \sqrt{(-2-x)^2 + (3-y)^2}$$
$$d(A, B) = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-3)^2}$$

doplníme do Pytagorovej vety

$$(2-x)^2 + (-1-y)^2 + (-2-x)^2 + (3-y)^2 = (2+2)^2 + (-4)^2$$

$$4 \cancel{- 2 \cdot 2x} + x^2 + 1 + 2 \cdot 1 \cdot y + y^2$$
$$+ 4 \cancel{+ 4x} + x^2 + 9 - 6y + y^2 = 16 + 16$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4y + 18 = 32$$
$$x^2 + y^2 - 2y = -9 + 16$$
$$\underline{x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0}$$ - rovnaký výsledok

PRÍKLAD:

NAPÍŠTE ROVNICU KRUŽNICE, KTORÁ PRECHÁDZA BODMI $A=[2,1]$; $B=[3,0]$; $C=[0,5]$

URČTE JEJ STRED A POLOMER.

R:

Rovnica kružnice vo všeobecnom tvare je

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

$S=[m,n]$ ↓ stred

$r=$ polomer

A leží na kružnici
⇒ môžeme dosadiť

$$(2-m)^2+(1-n)^2=r^2$$

To isté pre bod B a C
dostaneme sústavu 3 rovníc

$$\left.\begin{aligned}(2-m)^2+(1-n)^2&=r^2\\(3-m)^2+(0-n)^2&=r^2\\(0-m)^2+(5-n)^2&=r^2\end{aligned}\right\}$$

TREBA NÁJSŤ m, n, r

(1) $4-4m+m^2+1-2n+n^2=r^2$

(2) $9-6m+m^2+n^2=r^2$

(3) $m^2+25-10n+n^2=r^2$

(1+2) $\cancel{m^2}-4m+4+\cancel{n^2}-2n+1=\cancel{m^2}-6m+9+\cancel{n^2}$ $\;/-n^2\;-m^2$

$-4m+4-2n+1=-6m+9$ $\;/+6m$

$2m-2n+5=9$ $\;/-5$

$2m-2n=4$

$\underline{m-n=2}$

(1+3) $m^2-4m+4+n^2-2n+1=m^2+n^2-10n+25$ $\;/-m^2\;-n^2$

$-4m+4-2n+1=-10n+25$ $\;/+10n$

$-4m+8n+5=25$ $\;/-5$

$-4m+8n=20$

$\underline{-m+2n=5}$

$$\left.\begin{aligned} m - n &= 2 \\ -m + 2n &= 5 \end{aligned}\right\} +$$

$$-n + 2n = 2 + 5$$

$$\boxed{n = 7}$$

$$m - 7 = 2$$

$$\boxed{m = 9}$$

Střed kružnice

$S = [9, 7]$

Poloměr dopočítáme z libovolné rovnice

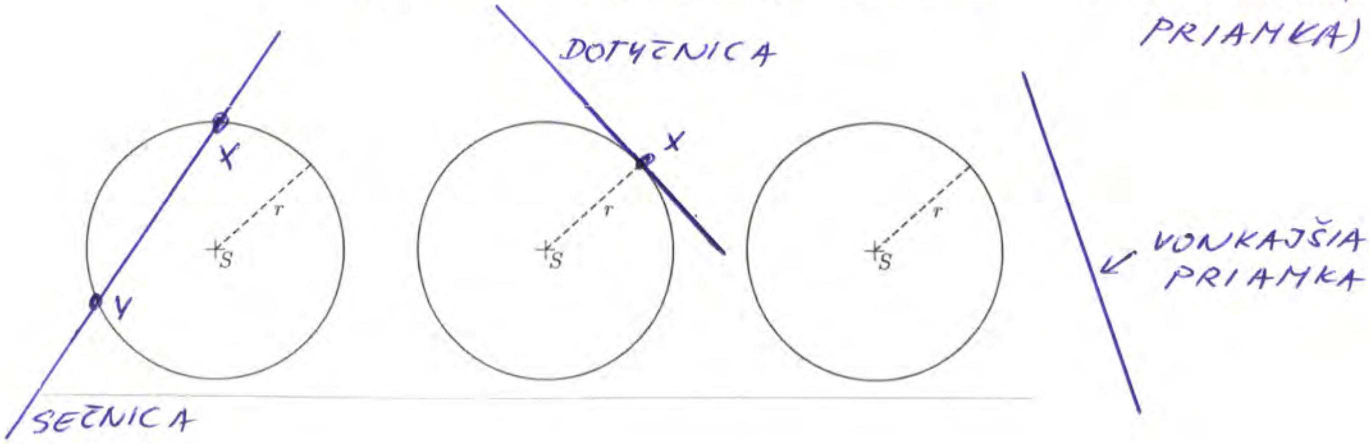
$$(0 - m)^2 + (5 - n)^2 = r^2$$

$$(-9)^2 + (5 - 7)^2 = 81 + 4 = 85$$

$$\boxed{r = \sqrt{85}}$$

KRUŽNICA A PRIAMKA

Z PLANIMETRIE VIEME, ŽE PRIAMKA A KRUŽNICA V ROVINE MÔŽU MAŤ
- 2 SPOLOČNÉ BODY (SEČNICA)
- 1 SPOLOČNÝ BOD (DOTYČNICA)
- 0 SPOLOČNÝCH BODOV (VONKAJŠIA PRIAMKA)



PRÍKLAD:

nájdite spoločné body kružnice

$k: \ x^2+y^2-2x+4y=0$

a priamky

$p: \ 2x-y-8=0$

R: Potrebujeme riešiť sústavu 2 rovníc

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+4y&=0 \\ 2x-y-8&=0 \\ \hline y&=-8+2x \end{aligned}$$

$$x^2+(-8+2x)^2-2x+4\cdot(-8+2x)=0$$

$$x^2+64-32x+4x^2-2x-32+8x=0$$

$$5x^2-26x+32=0$$

$$x_1=2 \longrightarrow y_1=-8+2\cdot2=-4$$

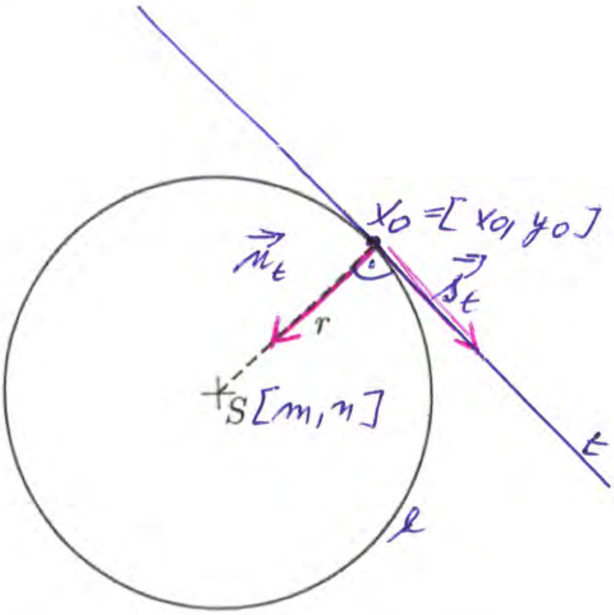
$$x_2=\frac{16}{5} \longrightarrow y_2=-\frac{8}{5}$$

$\Rightarrow$ 2 PRIESEČNÍKY $\Rightarrow$ SEČNICA

$X_1=[2,-4]$

$X_2=[16/5, -8/5]$

DOTYČNICA KU KRUŽNICI



kružnica:

k: $S=[m,n]$

r - polomer

dotyčnica t

BOD DOTYKU

$X_0=[x_0,y_0]$

$$\underbrace{\vec{s}_t}$$

$$\vec{s}_t \perp \overrightarrow{SX_0}$$

smerový vektor dotyčnice t a $\overrightarrow{SX_0}$ sú na seba kolmé,

$$\overrightarrow{SX_0} = X_0 - S = (x_0-m, y_0-n) = \vec{n}_t$$

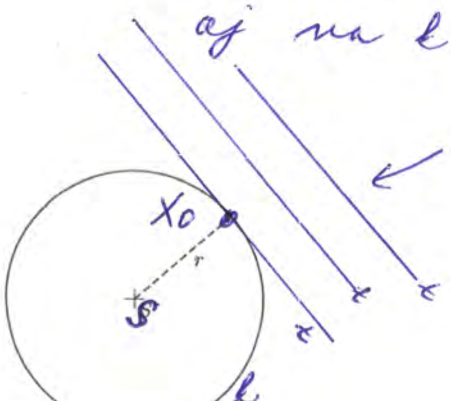
ROVNICA DOTYČNICE:

- ideálne je hľadať všeobecný tvar dotyčnice $\overrightarrow{SX_0}$

$$ax+by+cz=0$$

DOTYČNICA t: $(x_0-m).x+(y_0-n).y+c=0$
(priamka)

MUSÍME SI UVEDOMIŤ, ŽE MUSIA PLATIŤ
2 PODMIENKY
1. bod $X_0=[x_0,y_0] \in t$
bod leží na priamke
2. je to skutočne dotyčnica
- to znamená, že bod X_0 leží súčasne aj na kružnici k



len jedna z týchto priamok
$(x_0-m).x+(y_0-n).y+c=0$
je skutočne dotyčnicou

POUŽIJEME OBE PODMIENKY A DOPOČÍTAME:

1. $X_0 = [x_0, y_0] \in t \to$ dotyčnica

DOSADÍME

$$(x_0-m)\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x_0}}{x} + (y_0-n)\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y_0}}{y} + c = 0$$

$$+(x_0-m)\cdot x_0 + (y_0-n)\cdot y_0 = -c$$

$\Rightarrow$ DOSTANEME

$$\underbrace{(x_0-m)\cdot x - (x_0-m)\cdot x_0} + \underbrace{(y_0-n)\cdot y - (y_0-n)\cdot y_0} = 0$$

$$\boxed{(x_0-m)\cdot(x-x_0) + (y_0-n)\cdot(y-y_0) = 0}$$

2. $X_0 = [x_0, y_0] \in k \to$ kružnica

$$k: \ (\underset{\substack{\uparrow \\ x_0}}{x}-m)^2 + (\underset{\substack{\uparrow \\ y_0}}{y}-n)^2 = r^2$$

$$\boxed{(x_0-m)^2 + (y_0-n)^2 = r^2}$$

MUSÍME VYRIEŠIŤ SÚSTAVU ROVNÍC

$$(x_0-m)(x-x_0) + (y_0-n)(y-y_0) = 0$$
$$(x_0-m)^2 + (y_0-n)^2 = r^2$$

VÝHODNÉ JE OBE ROVNICE SČÍTAŤ DOKOPY

$$(x_0-m)^2 + (x_0-m)(x-x_0) +$$
$$+ (y_0-n)^2 + (y_0-n)(y-y_0) = r^2$$

$$(x_0-m)\left[(x_0-m) + (x-x_0)\right] +$$
$$+ (y_0-n)\left[(y_0-n) + (y-y_0)\right] = r^2$$

$$(x_0-m)\left[\cancel{x_0} - m + x - \cancel{x_0}\right] +$$
$$+ (y_0-n)\left[\cancel{y_0} - n + y - \cancel{y_0}\right] = r^2$$

$$\boxed{(x_0-m)(x-m) + (y_0-n)(y-n) = r^2}$$

HĽADANÁ ROVNICA DOTYČNICE

VZHĽADOM NA POMERNE KOMPLIKOVANÉ ODVODENIE JE DOBRÝ NÁPAD ROVNICU DOTYČNICE SI ZAPAMÄTAŤ

ROVNICA DOTYČNICE t KU KRUŽNICI

$k: S[m,n]; r$

V BODE $X_0=[x_0,y_0]$ MÁ TVAR

$$(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$$

PRÍKLAD:

NÁJDITE ROVNICU DOTYČNICE KU KRUŽNICI

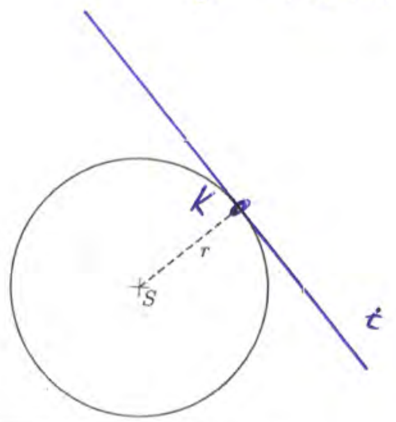
$$x^2+y^2-6x-4y+3=0$$

V BODE $K=[0,3]$

RIEŠENIE:

1 KROK: OVERTE ČI BOD K LEŽÍ NA KRUŽNICI (AK NIE POZRI SI NÁVOD NA RIEŠENIE V NASLEDUJÚCOM PRÍKLADE)

$$x^2+y^2-6x-4y+3=0$$
$$0^2+3^2-6\cdot 0-4\cdot 3+3=0$$
$$9-12+3=0 \rightarrow \text{platí}$$



2 KROK: UPRAV ROVNICU KRUŽNICE - NÁJDI STRED A POLOMER

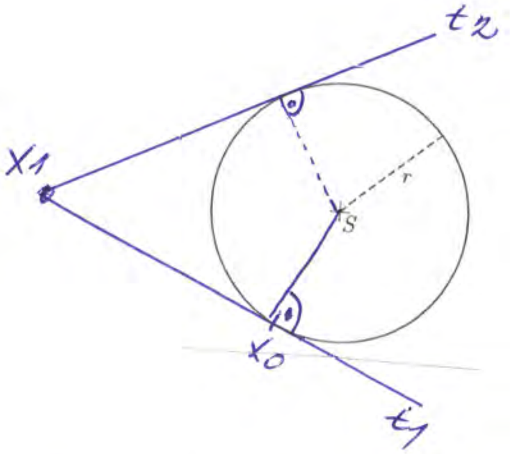
$$x^2+y^2-6x-4y+3=0$$
$$x^2-2\cdot 3x+9-9+y^2-2\cdot 2y+4-4+3=0$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2-9-4+3=0$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=10$$
$$S=[3,2]$$
$$r=\sqrt{10}$$

3 KROK - NAPÍŠ DOTYČNICU:

$$(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$$
$$(0-3)(x-3)+(3-2)\cdot(y-2)=10$$
$$-3(x-3)+y-2=10$$

ČASŤ PREDNÁŠKY PRE ŠTUDENTOV A++

DOTYČNICA KU KRUŽNICI Z BODU X_1 PODĽA NASLEDUJÚCEMO OBR.



kružnica

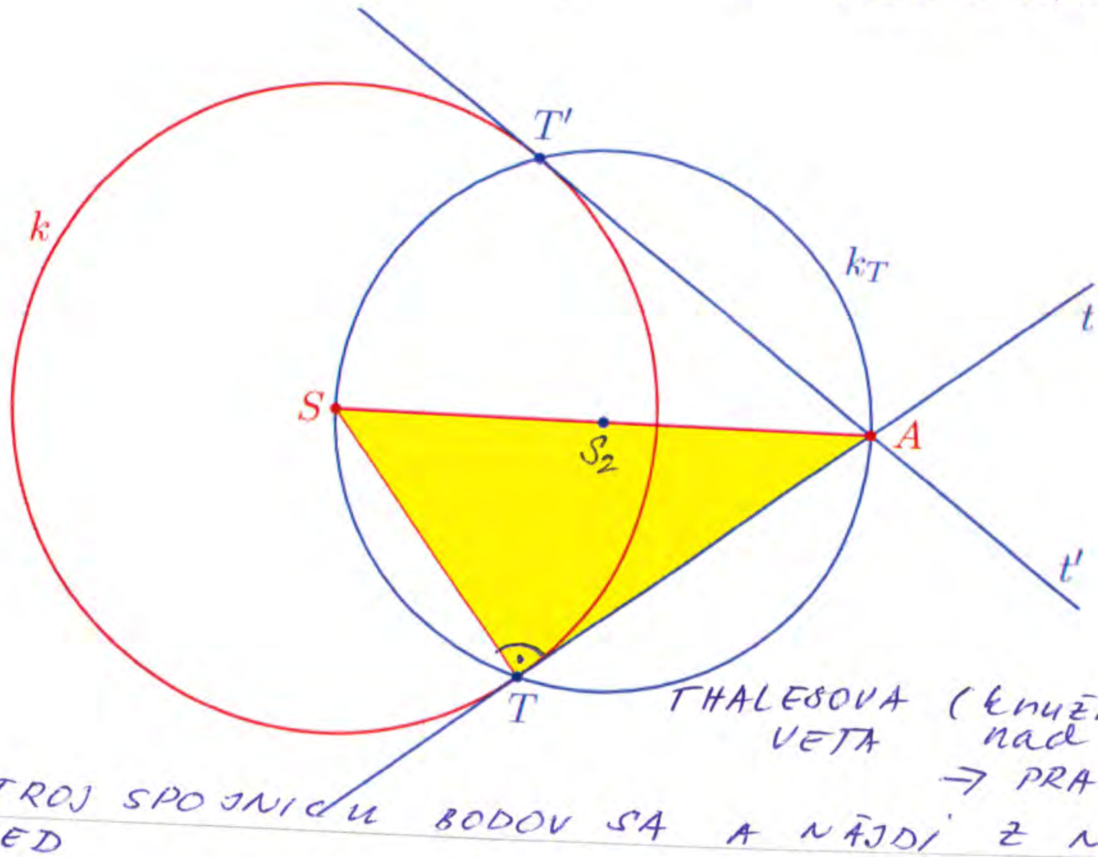
k: $S=[m, n]$ stred

r - polomer

$X_0 = [x_0, y_0]$

$X_1 = [x_1, y_1]$

NAJSKÔR SI ZOPAKUJME (ZO ZÁKLADNEJ ŠKOLY) AKO SA TENTO PROBLÉM RIEŠI KONŠTRUKČNE



THALESOVA VETA (kružnica nad priemerom → PRAVÝ UHOL)

1, ZOSTROJ SPOJNICU BODOV SA A NÁJDI Z NICH STRED

2.) ZOSTROJ KRUŽNICU k_T (THALES): S_2, a polomer $r=|SS_2|$ (MODRÁ)

3.) BODY T a T' SÚ PRIESEČNÍKY $k \cap k_T$

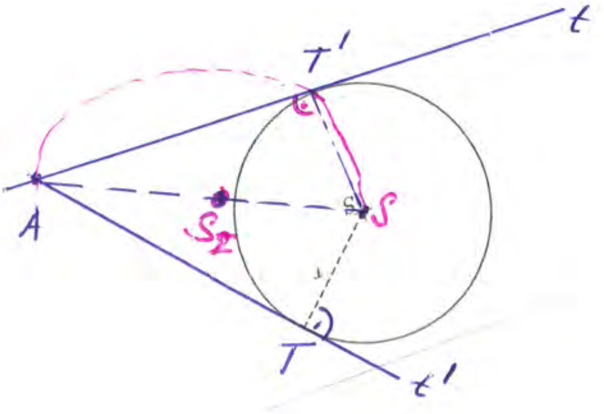
4.) ZOSTROJ DOTYČNICE - SPOJNICE AT' a AT.

EXISTUJE NIEKOĽKO POSTUPOV A MYŠLIENOK AKO TAKÉTO DOTYČNICE NÁJSŤ.
Z MYŠLIENKOVÉHO HĽADISKA JE NAJJEDNODUCHŠIE SIMULOVAŤ KONŠTRUKČNÝ POSTUP.

Sledujte postup na nasledovnom príklade

PRÍKLAD:

Bodom $A=[\frac{1}{2},\frac{9}{2}]$ veďte dotyčnice ku kružnici $x^2+y^2-6x-4y+3=0$.



1. určíme parametre kružnice S a r

$$x^2+y^2-6x-4y+3=0$$
$$(x-3)^2-9+(y-2)^2-4+3=0$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=10$$
$$S=[3,2]$$
$$r=\sqrt{10}$$

1. vypočítame súradnice stredu úsečky SA

$S_2 = S \div A$

$S=[3,2]$

$A=[1/2, 9/2]$

$$S_2=\left[\frac{\frac{1}{2}+3}{2},\frac{\frac{9}{2}+2}{2}\right]=\left[\frac{1+6}{4},\frac{4+9}{4}\right]=$$
$$=\left[\frac{7}{4},\frac{13}{4}\right]$$

2. vypočítame polomer kružnice k_t

polomer $= d(A,S_2)$

$$d(A,S_2)=\sqrt{\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{13}{4}-\frac{9}{2}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\left(\frac{7-2}{4}\right)^2-\left(\frac{13-18}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(-\frac{5}{4}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{25}{16}}=\sqrt{2}\cdot\frac{5}{4}=\sqrt{\frac{50}{16}}$$

3. napíšeme analytický rovnicu k_t:

k_t: stred $S_2 = [\frac{7}{4}, \frac{13}{4}]$

polomer $r_2 = \sqrt{\frac{50}{16}}$

rovnica:

$$\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{50}{16}$$

---

4. potrebujeme vypočítať 2 priesečníky kružnice k a kružnice k_t → body T a T'

Toto je práve jediný problematický bod, lebo takáto sústava sa ťažko rieši.

PRIESEČNÍK:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$$
$$\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{50}{16}$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 10$$
$$x^2 - 2\cdot\frac{7}{4}x + \frac{49}{16} + y^2 - 2\cdot\frac{13}{4}y + \frac{13^2}{16} = \frac{50}{16}$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = -3$$
$$x^2 - \frac{7}{2}x + y^2 - \frac{13}{2}y = -\frac{21}{2} \quad /\cdot 2$$

chceme sa zbaviť zlomkov aby sme mohli rovnice sčítať

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = -3 \quad /\cdot(-2)$$
$$2x^2 - 7x + 2y^2 - 13y = -21$$

$$-2x^2 + 12x - 2y^2 + 8y = +6$$
$$2x^2 - 7x + 2y^2 - 13y = -21$$

} sčítame rovnice

$$5x - 5y = -15$$
$$x - y = -3$$
$$\boxed{y = x + 3}$$

dosadíme do jednej z rovníc kružnice (tej jednoduchšej)

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = -3$$
$$x^2 - 6x + (x+3)^2 - 4\cdot(x+3) = -3$$
$$x^2 \cancel{-6x} + x^2 \cancel{+6x} + 9 - 4x - 12 = -3$$
$$2x^2 - 4x - 3 = -3$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x\cdot(x-2) = 0$$

BOD T : $x_1 = 0$ $\longrightarrow$ $y = x+3$

BOD T' : $x_2 = 2$

$y_1 = 0+3 = 3$ $\quad T = [0,3]$

$y_2 = 2+3 = 5$ $\quad T' = [2,5]$

5. napíšeme rovnice obou dotyčnic

t_1: $(x_0 - m)(x-m) + (y_0 - n)(y-n) = r^2$

$S = [3,2] = [m,n]$

$T = [0,3] = [x_0, y_0]$

$r = \sqrt{10}$

t_1: $(0-3)\cdot(x-3) + (3-2)(y-2) = 10$
$$-3(x-3) + 1\cdot(y-2) = 10$$
$$-3x + 9 + y - 2 = 10 \quad /-7$$
$$-3x + y = 3$$
$$\underline{\underline{y = 3x+3}}$$

t_2: $(x_0 - m)(x-m) + (y_0 - n)(y-n) = r^2$

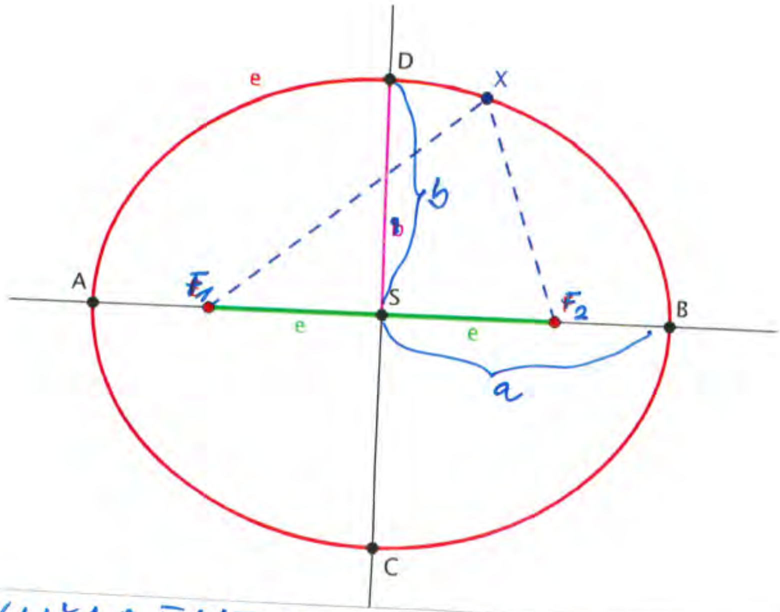
$S = [3,2] = [m,n]$

$T' = [2,5] = [x_0, y_0]$

$r = \sqrt{10}$

t_2: $(2-3)(x-3) + (5-2)(y-2) = 10$
$$-1(x-3) + 3(y-2) = 10$$
$$-x + 3 + 3y - 6 = 10$$
$$-x + 3y = 13$$
$$\underline{\underline{y = \frac{x}{3} + \frac{13}{3}}};$$

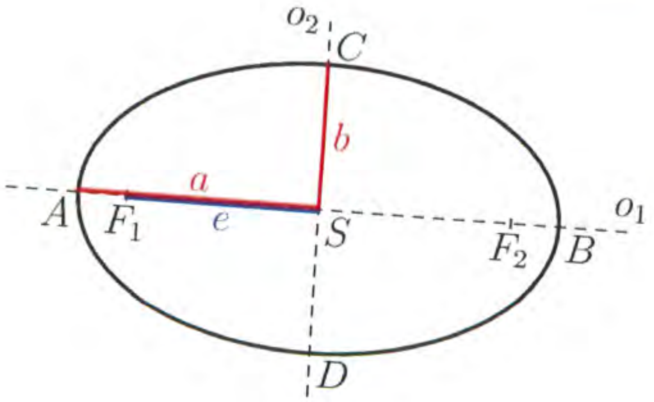
ELIPSA

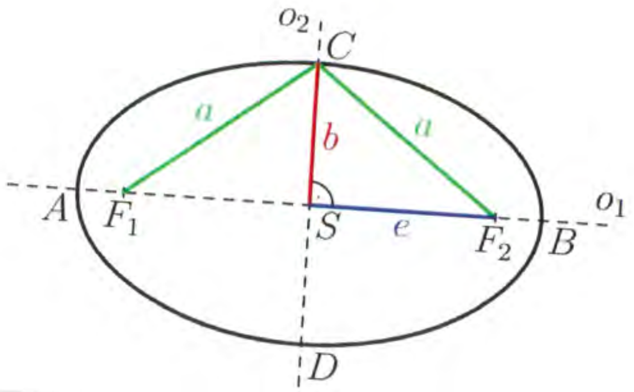


ELIPSA (ČERVENÁ) JE MNOŽINA BODOV X, KTORÉ MAJÚ OD DVOCH RÔZNYCH PEVNÝCH BODOV E a F (OHNISKÁ) STÁLY SÚČET VZDIALENOSTÍ

HĽADÁME:
MNOŽINY BODOV X, KTORÉ MUSIA Z DEFINÍCIE ELIPSY SPĹŇAŤ

$$|EX| + |FX| = |AB|$$





- F_1, F_2 - OHNISKÁ ELIPSY
- S - STRED ELIPSY
- ELIPSA MÁ 2 OSI SÚMERNOSTI

$$S = F_1 \div F_2$$

- VZDIALENOSŤ $|SB|$ = DĹŽKA HLAVNEJ POLOOSI = a
- VZDIALENOSŤ $|SC|$ = DĹŽKA VEDĽAJŠEJ POLOOSI = b

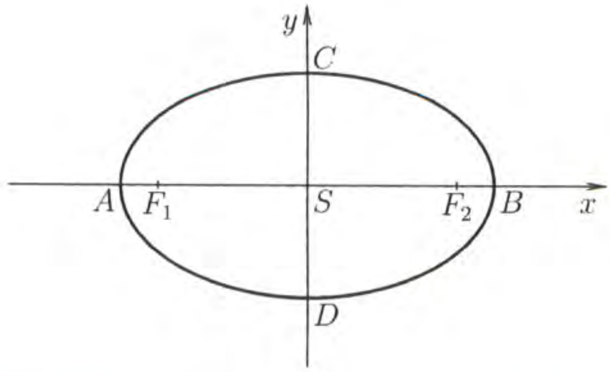
PLATÍ PYTHAGOROVA V.

$$b^2 + e^2 = a^2$$

platí:

$$|SF_1| = |SF_2| = e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

- e = EXCENTRICITA

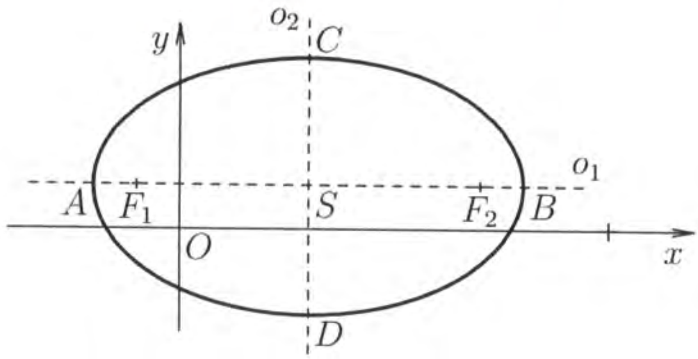


AK OSI ELIPSY LEŽIA NA OSIACH $\vec{x}$ a $\vec{y}$ TAK STRED $S=[0,0]$

ROVNICA ELIPSY:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

AK ELIPSU POSUNIEME $S=[m,n]$

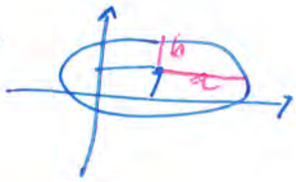


$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

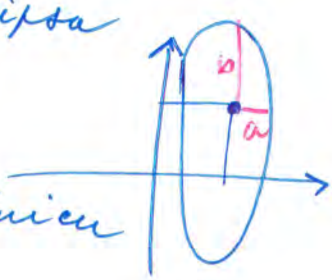
ČO VIEME ZO ZÁKLADNÉHO VZORCA VYČÍTAŤ:

$S=[m,n]$

ak $\underline{\underline{a>b}}$ tak elipsa



a $\underline{\underline{a<b}}$ tak elipsa



*) keď porovnáme kružnicu a elipsu

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

vidíme, že kružnicu môžeme chápať ako špeciálny prípad elipsy $a=b=r$

PRÍKLAD:

UPRAVTE NA VŠEOBECNÝ TVAR a popíšte základné parametre elipsy.

$$x^2+4y^2-6x+32y+48=0$$

R: upravujeme na štvorec pre každú premennú

$$x^2-6x = x^2-2.3x+9-9 = (x+3)^2-9$$

$$4y^2+32y = 4.(y^2+8y) = 4.(y^2+2.4.y+16-16) =$$

$$= 4.(y+4)^2-4.16 = 4.(y+4)^2-64$$

dosadíme späť:

$$(x+3)^2-9+4(y+4)^2-64+48=0$$

$$(x+3)^2+4(y+4)^2=25$$

POZOR! - DÔLEŽITÁ MYŠLIENKA

$$(x+3)^2+4.(y+4)^2=25 \quad / :25$$

$$\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{4.(y+4)^2}{25}=1$$ - pravú stranu upravíme ako prvú

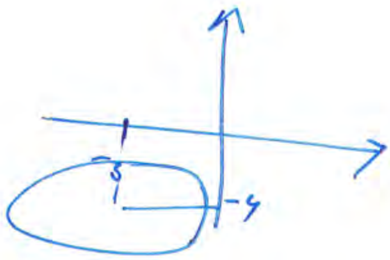
$$\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{\frac{25}{4}}=1$$

$$\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=1$$

parametre: $S=[-3,-4]$

$a=5$

$b=\frac{5}{2}$



PRÍKLAD: napíšte rovnicu elipsy s ohniskami v bodoch $E=[-1,0]$ a $F=[1,0]$, ktorá prechádza bodom $T=[1,\frac{8}{3}]$

Určte je hlavné a vedľajšie vrcholy

R: $2e = |EF|$

$\Rightarrow e = 1$ platí $b^2 = a^2 - 1$

ELIPSA MÁ ROVNICU

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} = 1$$

ak má prechádzať bodom T, môžeme dosadiť súradnice a dostaneme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{(8/3)^2}{a^2-1} = 1$$

upravujeme:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{64}{9(a^2-1)} = 1$$

$$\frac{9(a^2-1)+64a^2}{9 \cdot a^2(a^2-1)} = 1$$

$$\frac{9(a^2-1)+64a^2-9a^2(a^2-1)}{9a^2(a^2-1)} = 0$$

$$\frac{9a^2-9+64a^2-9a^4+9a^2}{9a^2(a^2-1)} = 0$$

$$\frac{-9a^4+82a^2-9}{9a^2(a^2-1)} = 0$$

$$a^2 = t \longrightarrow -9t^2+82t-9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-82 \pm \sqrt{82^2-4.(-9).(-9)}}{2.(-9)} = \frac{-82 \pm 80}{-18} = \begin{cases} +\frac{1}{9} \\ 9 \end{cases}$$

$a^2 = 9$

$a^2 = \frac{1}{9} \longrightarrow b^2 = \frac{1}{9} - 1 < 0$

nemôže byť

vypočítali sme $a^2 = 9$ potom $b^2 = a^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

rovnica elipsy bude

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

HLAVNÉ VRCHOLY ELIPSY

$A = [-3, 0]$

$B = [3, 0]$

VEDĽAJŠIE VRCHOLY $C = [0, 2\sqrt{2}]$

$D = [0, -2\sqrt{2}]$

PRÍKLAD: URČTE POLOHU PRIAMKY $4x + 5y = 140$ VOČI ELIPSE

$$\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{400} = 1$$

A NAPÍŠTE ROVNICU DOTYČNICE KU ELIPSE V SPOLOČNÝCH BODOCH PRIAMKY A ELIPSY

R: ROVNICU DOTYČNICE KU ELIPSE ODVODÍME ROVNAKO AKO V PRÍPADE KRUŽNICE

$$\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1$$

PRIESEČNÍKY:

Z PRIAMKY VYJADRÍME

$$4x + 5y = 140 \rightarrow 4x = 140 - 5y$$

$$x = 35 - \frac{5}{4}y$$

$$\frac{\left(35 - \frac{5}{4}y\right)^2}{625} + \frac{y^2}{400} = 1$$

$$400\left(35 - \frac{5}{4}y\right)^2 + 625y^2 - 250\,000 = 0$$

$$y^2 - 28y + 192 = 0$$

$$y_1 = 16 \quad y_2 = 12$$

⑥

$y_1 = 16 \qquad x_1 = 35 - \frac{5}{4} \cdot 16 = 15$

$y_2 = 12 \qquad x_2 = 35 - 5 \cdot \frac{12}{4} = 20$

O: PRIAMKA PRETINA ELIPSU V DVOCH BODOCH

$T_1 = [15, 16]$

$T_2 = [20, 12]$

$S = [\underset{m}{0}, \underset{n}{0}]$

DOTYČNICA V BODE $T_1 : [\underset{x_0}{15}, \underset{y_0}{16}]$

$a^2 = 625$

$a = 25$

$b^2 = 400$

$b = 20$

$$\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1$$

$$\frac{15 \cdot x}{625} + \frac{16 \cdot y}{400} = 1$$

po úprave:

$$\underline{3x + 5y = 125}$$

DOTYČNICA V BODE $T_2 [\underset{x_0}{20}, \underset{y_0}{12}]$

$$\frac{20x}{625} + \frac{12 \cdot y}{400} = 1$$

po úprave:

$$\underline{16x + 15y = 500}$$

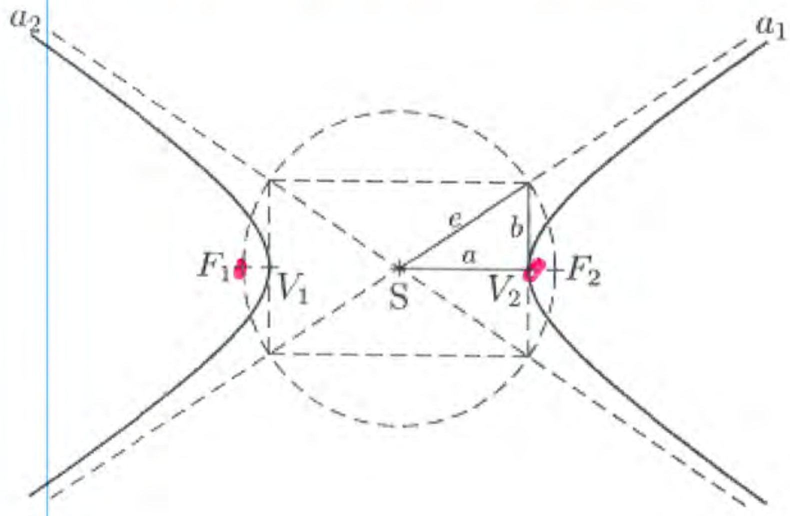
HYPERBOLA

①

- MNOŽINA BODOV, PRE KTORÉ JE ABSOLÚTNA HODNOTA ROZDIELU VZDIALENOSTÍ OD DVOCH RÔZNYCH PEVNÝCH BODOV KONŠTANTNÁ.

TIETO BODY OZNAČUJEME OHNISKÁ F_1 a F_2

$$e = |SF_1| = |SF_2| \qquad b = \sqrt{e^2 - a^2}$$



Hyperbola so stredom v bode $S = [0;0]$, hlavnou polosou dĺžky a a vedľajšou polosou dĺžky b, pričom hlavná os je zhodná s osou x, má rovnicu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ a vrcholy } V_1 = [-a;\, 0] \text{ a } V_2 = [a;\, 0].$$

Ak jej hlavná os je zhodná s osou y, má elipsa rovnicu

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ a vrcholy } V_1 = [0;\, -a] \text{ a } V_2 = [0;\, a].$$

V oboch prípadoch majú hyperboly tieto dve asymptoty:

$$a_1:\ \ y = \frac{b}{a}x \qquad \text{a} \qquad a_2:\ \ y = -\frac{b}{a}x$$

Hyperbola so stredom v bode $S[x_1, y_1]$, hlavnou polosou dĺžky a a vedľajšou polosou dĺžky b, pričom jej hlavná os je rovnobežná s osou x, má rovnicu

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} - \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1, \text{ vrcholy } V_1 = [x_1 - a;\, y_1],\ V_2 = [x_1 + a;\, y_1].$$

Ak jej hlavná os je rovnobežná s osou y, je rovnica elipsy

$$-\frac{(x-x_1)^2}{b^2} + \frac{(y-y_1)^2}{a^2} = 1 \text{ a jej vrcholy } V_1 = [x_1;\, y_1 - a],\ V_2 = [x_1;\, y_1 + a].$$

V oboch prípadoch majú hyperboly tieto dve asymptoty:

$$a_1:\ \ y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1) \qquad \text{a} \qquad a_2:\ \ y - y_1 = -\frac{b}{a}(x - x_1)$$

Všeobecná rovnica kužeľosečky je:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in R,$$

PRÍKLAD:

NÁJDITE STRED, VRCHOLY, HLAVNÚ A VEDĽAJŠIU POLOOS, EXCENTRICITU A ASYMPTOTY HYPERBOLY DANEJ ROVNICOU

$$9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$$

R:

$$9x^2-18x = 9(x^2-2x) = 9(x^2-2.1x+1-1)$$
$$= 9.(x-1)^2-9$$
$$-4y^2-16y = -4(y^2+4y) = -4(y^2+2.2y+4-4) =$$
$$= -4(y+2)^2+16$$

dosadíme:

$$9(x-1)^2-9-4(y+2)^2+16-43=0$$
$$9(x-1)^2-4(y+2)=36 \quad /:36$$
$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

toto mínus nám hovorí, že ide o hyperbolu.

stred:

$S=[1,-2]$

poloosi $a=2$

$b=3$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

Vrcholy počítame podľa stredu

$V_1=[1+2,-2]=[3,-2]$

$V_2=[1-2,-2]=[-1,-2]$

excentricita

$e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

ohniská:

$F_1=[1+\sqrt{13},-2]$

$F_2=[1-\sqrt{13},-2]$

asymptoty:

$S=[1,2]$

$y+2=\frac{3}{2}(x-1)$

$y+2=-\frac{3}{2}(x-1)$