ANALYTICKÁ GEOMETRIA
POLOHOVÉ A METRICKÉ ÚLOHY V ROVINE

ZÁKLADNÁ INFORMÁCIA

POLOHOVÉ ÚLOHY: sú úlohy hovoriace o polohe
napr. vzájomná poloha 2 priamok
—||— poloha priamka + bod
—||— 3 body

METRICKÉ ÚLOHY:
sú úlohy hovoriace o neorálených výsledkoch
napr. - vzdialenosť 2 bodov
2 // priamok
priamky a bodu
- veľkosť uhla

ŠPECIÁLNE ÚLOHY:
napr. - KOLMÝ PRIEMET (kombinácia oboch problémov)
- BOD SYMETRICKÝ PODĽA PRIAMKY

V TOMTO CVIČENÍ SA ZAMERIAME LEN NA ÚLOHY LINEÁRNE

STRED ÚSEČKY:

$$S = A \div B$$

$A = [a_1, a_2]$

$B = [b_1, b_2]$

$$S = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right]$$

PRÍKLAD:

VYPOČÍTAJTE STRED ÚSEČKY AB

$A = [3,5]$

$B = [2,2]$

$$S = A \div B = \left[\frac{3+2}{2}, \frac{5+2}{2}\right] = [2{,}5;\ 3{,}5]$$

PRÍKLAD:

VYPOČÍTAJTE SÚRADNICE DRUHÉHO KONCOVÉHO BODU ÚSEČKY AB, ak

$A = [3,5]$

$S = [4,7]$

$B = ?$

$= [b_1, b_2]$

ak $S = A \div B$

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

$$4 = \frac{3 + b_1}{2} \qquad 7 = \frac{5 + b_2}{2}$$

$$8 = 3 + b_1 \qquad 14 - 5 = b_2$$

$$\underline{\underline{5 = b_1}} \qquad \underline{\underline{9 = b_2}}$$

BOD MÁ SÚRAD.

$B = [5, 9]$

DĹŽKA ÚSEČKY:

DĹŽKA ÚSEČKY = VZDIALENOSŤ 2 BODOV

$$|AB| = d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

$$A = [a_1, a_2]$$

$$B = [b_1, b_2]$$

PRÍKLAD:

VYPOČÍTAJTE $d(A,B)$; ak $A=[3,5]$
$B=[2,2]$

$$d(A,B) = \sqrt{(2-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2}$$

$$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

PRI VZDIALENOSTI NEZÁLEŽÍ NA PORADÍ

$$d(A,B) = d(B,A)$$

PRÍKLAD:

NA OSI $\vec{x}$ NÁJDITE BOD B, KTORÝ MÁ OD BODU $A=[-7,4]$ VZDIALENOSŤ 5.

$B=[b_1,b_2]$?

B LEŽÍ NA OSI $\vec{x}$
$\Rightarrow B=[b_1, 0]$

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1-(-7))^2+(0-4)^2}$$

$$5 = \sqrt{(b_1+7)^2+(-4)^2}$$

$$25 = (b_1+7)^2+16$$

$$9 = (b_1+7)^2$$

$$\pm 3 = (b_1+7) \quad /-7$$

POZOR

2 RIEŠENIA

$$3 = b_1+7$$

$$b_1 = -4$$

$B_1 = [-4, 0]$

$$-3 = b_1+7$$

$$-10 = b_1$$

$B_2 = [-10, 0]$

PRÍKLAD:

VYPOČÍTAJTE OBSAH TROJUHOLNÍKA $\triangle ABC$

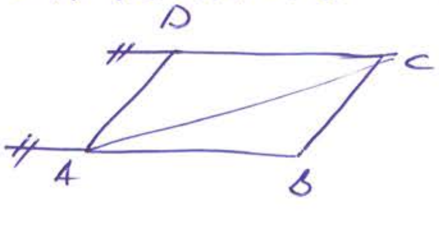
$A = [-1, -1]$

$B = [2, 0]$

$C = [1, 3]$

PRÍKLAD:

VYPOČÍTAJTE OBSAH ROVNOBEŽNÍKA ABCD



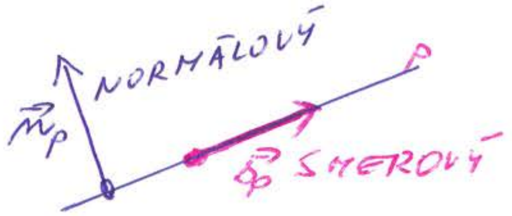
$A = [2, 1]$

$B = [1, 3]$

$C = [-2, -1]$

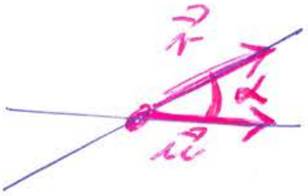
NAJČASTEJŠIE ZÁKLADNÉ CHYBY PRI VÝPOČTE UHLA

(1) AK SA POVIE SMEROVÝ VEKTOR – MYSLÍ SA SKUTOČNE SMEROVÝ



NEPLEŤTE SI HO S NORMÁLOVÝM VEKTOROM

(2) SMER JE DÔLEŽITÝ – NAJMÄ AK POČÍTAM VEĽKOSŤ UHLA



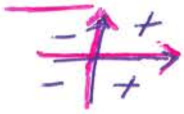
$\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$

$\sphericalangle(-\vec{u}, \vec{v}) = 180° - \alpha$ [V STUPŇOCH]

$\pi - \alpha$ [V RAD]

? AKO ZISTÍM KTORÝ UHOL MÁM POČÍTAŤ ?
POČÍTAM ?

ZNAMIENKA cos



PRÍKLAD!

$+\vec{u} = (2, 1)$
$\vec{v} = (3, -1)$

$\sphericalangle \vec{u}, \vec{v}$ vypočítame

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{(2,1)\cdot(3,-1)}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{2\cdot 3 + (1\cdot -1)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{6-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5}{5\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \cos\alpha > 0$

TO ISTÉ PRE

$-\vec{u} = (-2, -1)$
$\vec{v} = (3, -1)$

$$\cos\beta = \frac{-\vec{u}\cdot\vec{v}}{|-\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{(-2,-1)\cdot(3,-1)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{-6+1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} =$$

$$= -\frac{5}{5\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\beta = \pi - \frac{\pi}{4}$ $\qquad \beta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, $\cos\beta < 0$

UHOL DVOCH VEKTOROV

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

UVEDOMTE SI SÚVISLOSTI!!

PRÍKLAD:

$\vec{u} = (2,5)$
$\vec{v} = (15,-6)$

$$\varphi = \measuredangle(u,v)$$

$$\cos\varphi = \frac{(2,5)\cdot(15,-6)}{\sqrt{2^2+5^2}\cdot\sqrt{15^2+(-6)^2}} =$$

$$= \frac{30-30}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{261}} = 0$$

$$\boxed{\cos\varphi = 0}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ [rad]

$\varphi = 90°$ [stupne]

KONIEC PRÍKLADU.

SKÚŠKA SPRÁVNOSTI:

SKALÁRNY SÚČIN $= 0 \Leftrightarrow \varphi = 90°$

? MÔŽE BYŤ UHOL $= 90°$ $\pi/2$ [rad]

$\rightarrow$ SÚ KOLMÉ ? $\rightarrow$ SKAL. SÚČIN $= 0$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 15 + 5\cdot(-6) = 0$

PLATÍ

$$\boxed{\varphi = \pi/2 \text{ [rad]}}$$

PRÍKLAD:

ZISTITE ČI BODY A, B, C LEŽIA NA JEDNEJ PRIAMKE

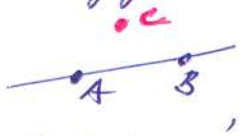
$A = [3, -1]$

$B = [5, 0]$

$C = [-1, -3]$

R: MOŽNÉ MYŠLIENKY

1 – najjednoduchšie, 2 body určujú priamku
stačí overiť či tretí bod
leží na tejto priamke.



2 – porovnávame závislosť

3 VYPOČÍTAME VEĽKOSŤ UHLA

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

RIEŠENIE: 1. MOŽNOSŤ

1 $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (5-3, 0-(-1)) = (2, 1)$

$x = 3 + 2t$

$y = -1 + t$

$C \in \overrightarrow{AB}$ $\quad -1 = 3 + 2t \rightarrow -4 = 2t \rightarrow t = -2$

$-3 = -1 + t \rightarrow t = -2$

ROVNAKÉ

ODP: VŠETKY 3 BODY LEŽIA NA JEDNEJ PRIAMKE

2. MOŽNOSŤ

$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (5-3, 0-(-1)) = (2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = \vec{v} = C - A = (-1-3, -3-(-1)) = (-4, -2)$

$(-4, -2) = -2\,(2, 1)$

VIEME NÁJSŤ ZÁVISLOSŤ → KONŠTANTA

3. MOŽNOSŤ:

$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = \vec{v} = (-4, -2)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+4}} = \frac{-8-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 2}$$

$$\cos\varphi = \frac{-10}{5 \cdot 2}$$

$$\cos\varphi = \frac{-10}{10} = -1$$

$$\varphi = \pi \ [\text{rad}]$$

PRÍKLAD:

VYPOČÍTAJTE UHOL DVOCH VEKTOROV:

- $\vec{u} = (1,4)$, $\vec{v} = (-2,-8)$ $[\pi/2]$
- $\vec{u} = (3,-1)$, $\vec{v} = (4,3)$ $[55°18']$
- $\vec{u} = (2,3)$, $\vec{v} = (4,6)$ $[\pi]$
- $\vec{u} = (1,-2)$, $\vec{v} = (3,2)$ $[82°52']$
- $\vec{u} = (1,0)$, $\vec{v} = (2,2)$ $[\pi/4]$

PRÍKLAD:

VYPOČÍTAJTE VEĽKOSTI VNÚTORNÝCH UHLOV $\triangle ABC$

- $A=[1,3]$ $B=[2,8]$ $C=[-2,5]$ $[67°37', 41°49', 70°34']$
- $A=[2,0]$ $B=[5,0]$ $C=[5,3\sqrt{3}]$ $[30°, 60°, 90°]$

PRÍKLAD:

ZISTITE ČI BODY LEŽIA NA JEDNEJ PRIAMKE

- $A=[2,5]$ $B=[1,1]$ $C=[0,7]$ nie
- $A=[1,2]$ $B=[5,6]$ $C=[9,0]$ nie
- $A=[-1,5]$ $B=[1,8]$ $C=[-3,2]$ áno

DALŠIE PRÍKLADY

3.2 Určete číslo p tak, aby vektor $\boldsymbol{v}$ byl směrovým vektorem přímky AB.

a) $A[1;3]$, $B[-1;2]$, $\boldsymbol{v}=(3;p)$
b) $A[-1;1]$, $B[2;3]$, $\boldsymbol{v}=(1+p;2-p)$
c) $A[\frac{2}{3};1]$, $B[-1;-\frac{1}{3}]$, $\boldsymbol{v}=(2p-1;2+p)$
d) $A[\sqrt{3};1]$, $B[1;-\sqrt{3}]$, $\boldsymbol{v}=(1;2+p)$
e) $A[-1;2]$, $B[3;5]$, $\boldsymbol{v}=(1-p;p+\frac{1}{6})$

3.3 Zjistěte, zda bod C leží na přímce AB.

a) $A[1;2]$, $B[-1;3]$, $C[5;0]$
b) $A[3;1]$, $B[1;5]$, $C[-1;2]$
c) $A[1;6]$, $B[-2;3]$, $C[2;-1]$
d) $A[0;3]$, $B[-\sqrt{2};3\sqrt{2}]$, $C[2+\sqrt{2};0]$
e) $A[\frac{2}{5};\frac{1}{3}]$, $B[1;\frac{2}{3}]$, $C[-2;-1]$

3.4 Volte číslo p tak, aby bod C ležel na přímce AB. Zjistěte, zda tento bod leží na polopřímce AB, popřípadě na úsečce AB.

a) $A[-2;-1]$, $B[1;3]$, $C[2p-1;p-3]$
b) $A[2;-1]$, $B[4;5]$, $C[p-3;-1-2p]$
c) $A[3;5]$, $B[1;0]$, $C[2p-1;4p]$
d) $A[2;5]$, $B[5;-7]$, $C[2p+1;-3p+4]$
e) $A[1;3]$, $B[2;4]$, $C[2p;4p-2]$
f) $A[-1;3]$, $B[1;1]$, $C[p+1;-p]$

3.5 Jsou dány body A, B, C. Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC.

a) $A[-1,0]$, $B[3,-2]$, $C[1,5]$
b) $A[4,1]$, $B[1,-2]$, $C[-2,7]$

3.6 Jsou dány vrcholy A, B a těžiště T trojúhelníku ABC. Určete souřadnice vrcholu C.

a) $A[5,2]$, $B[1,7]$, $T[2,3]$
b) $A[8,1]$, $B[0,7]$, $T[3,2]$

3.7 Je dán vrchol A, střed S strany AB a těžiště T trojúhelníku ABC. Určete souřadnice jeho vrcholů B, C.

a) $A[3,-1]$, $S[1,0]$, $T[2,1]$
b) $A[-2,4]$, $S[0,4]$, $T[1,3]$

Riešenia

3.2 a) $p = \frac{3}{2}$; b) $p = \frac{4}{5}$; c) $p = \frac{14}{3}$; d) $p = \sqrt{3}$; e) $p = \frac{1}{3}$. **3.3** a) Ano; b) ne; c) ne; d) ano; e) ano. **3.4** a) $p = -2$, $C[-5; -5]$ neleží na polopřímce AB; b) $p = 3$, $C[0; -7]$ neleží na polopřímce AB; c) $p = 5$, $C[9; 20]$ neleží na polopřímce AB; d) $p = 1$, $C[3; 1]$ leží na úsečce AB; e) $p = 2$, $C[4; 6]$ leží na polopřímce AB, ale neleží na úsečce AB; f) úloha nemá řešení. **3.5** a) $T[1, 1]$; b) $T[1, 2]$. **3.6** a) $C[0, 0]$; b) $C[1, -2]$. **3.7** a) $B[-1, 1]$, $C[4, 3]$; b) $B[2, 4]$, $C[3, 1]$.

8. Zistite vzájomnú polohu priamok $p: x = 8+5t,\ y = 6-10t,\ t \in R$, a $q: y = -2x+3$.

9. Nájdite vzdialenosť bodu $A = [4, 3]$ od priamky $4x - 3y + 18 = 0$. Nakreslite obrázok.

10. Strana štvorca leží na priamke $4x - 3y + 15 = 0$ a jeden vrchol štvorca je v začiatku súradnicovej sústavy. Vypočítajte obsah tohto štvorca.

11. Ukážte, že priamky $y + 2x = 0$, $2y + 4x + 2\sqrt{5} = 0$ sú rovnobežné a vypočítajte ich vzdialenosť.

12. Daný je trojuholník ABC, $A = [2, 2]$, $B = [0, -4]$, $C = [5, 1]$. Nájdite rovnicu priamky, na ktorej leží výška v_a trojuholníka a vypočítajte jej veľkosť.

13. Daný je trojuholník ABC, $A = [4, -6]$, $B = [-2, -2]$, $C = [0, 4]$. Nájdite súradnice ťažiska trojuholníka ABC. Nakreslite obrázok.

14. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza priesečníkom dvoch priamok $y = 7x - 4$, $y = -2x + 5$ a zviera s kladným smerom osi x uhol $60°$.

Riešenia

8. rovnobežné rôzne,

9. $d = 5$,

10. 9,

11. $d = \dfrac{5}{2}$,

12. $x + y - 4 = 0$,

13. $T = \left[\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right]$,

14. $\sqrt{3}x - y + 3 - \sqrt{3} = 0$,

POLOHOVÉ ÚLOHY - POLOHA 2 PRIAMOK

PRÍKLAD: PRIAMKA p JE DANÁ BODOM P a $\vec{u}$
q —//— Q a $\vec{v}$

ZISTITE ICH VZÁJOMNÚ POLOHU:

p: $P = [2,3]$
$\vec{u} = (1,-2)$

q: $Q = [1,0]$
$\vec{v} = (-\frac{1}{2}, 1)$

RIEŠENIE: podľa návodu v prednáškach

1. KROK zistíme vzťah $\vec{u}$ a $\vec{v}$, či môžeme nájsť takú konštantu k

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

má platiť

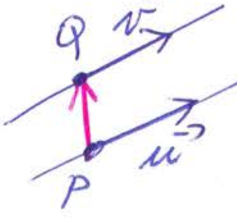
$$(1,-2) = k \cdot (-\tfrac{1}{2}, 1)$$

teda

$$\left.\begin{aligned} 1 &= k \cdot -\tfrac{1}{2} \rightarrow k = -2 \\ -2 &= k \cdot 1 \rightarrow k = -2 \end{aligned}\right\} \text{hľadaná konštanta existuje}$$

$\Rightarrow$ PRIAMKY SÚ ROVNOBEŽNÉ ALEBO TOTOŽNÉ

2. KROK:



najjednoduchší nápad - stačí zobrať vektor $\overrightarrow{PQ}$ a zistiť, či je násobkom $\vec{u}$ alebo $\vec{v}$
- ak ÁNO $\Rightarrow$ sú totožné
- ak NIE (obrázok) $\Rightarrow$ sú len rovnobežné

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1-2, 0-3) = (-1,-3)$$

vidíme $(1,-2) \neq k \cdot (-1,-3)$

$$\left.\begin{aligned} \text{lebo } 1 &= k \cdot (-1) \rightarrow k = -1 \\ \text{ale } -2 &= k \cdot -3 \rightarrow k = \tfrac{2}{3} \end{aligned}\right\} \text{nie sú rovnaké}$$

$\Rightarrow$ SÚ LEN ROVNOBEŽNÉ A RÔZNE

PRÍKLAD:

Urči vzájomnú polohu 2 priamok p a q ak sa dá nájdite ich priesečník

$p: 2x - y + 1 = 0$

$q: 3x + 2 = 0$

RIEŠENIE: podľa návodu v prednáške (môžeme použiť aj normálové vektory)

$\vec{n}_p = (2,-1)$

$\vec{n}_q = (3,0)$

$(2,-1) = k \cdot (3,0)$

$\left.\begin{array}{l} 2 = k \cdot 3 \rightarrow k = \frac{2}{3} \\ -1 = k \cdot 0 \quad \emptyset \end{array}\right\}$ sú rôznobežky

nájdeme ich priesečník:

$2x - y + 1 = 0$

$3x + 2 = 0 \rightarrow 3x = -2$

$x = -\frac{2}{3}$

$2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - y + 1 = 0$

$-\frac{4}{3} + 1 = y$

$-\frac{1}{3} = y$

priesečník $R = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]$

PRÍKLAD:

v rovnici priamky p zvoľte číslo m tak, aby priamka p bola rovnobežná s q

$p: (1+m)x - (2-3m)y + m = 0$

$q: x + 8y - 1 = 0$

RIEŠENIE: aby boli priamky rovnobežné, musí platiť

$$\vec{n}_p = k \cdot \vec{n}_q$$

$\vec{n}_p = [1+m, -(2-3m)]$

$\vec{n}_q = [1, 8]$

musí platiť: $1+m = k \cdot 1 \rightarrow k = 1+m$

$$-(2-3m) = k \cdot 8$$

$$-(2-3m) = (1+m) \cdot 8$$

$$-2 + 3m = 8 + 8m$$

$$-10 = 5m$$

$$m = -2$$

$$\Rightarrow k = 1 + m = 1 - 2 = -1$$

p:

$$(1-2) \cdot x - (2 - 3 \cdot (-2))\, y - 2 = 0$$

$$-x - (2+6)\, y - 2 = 0$$

$$-x - 8y - 2 = 0$$

$$x + 8y + 2 = 0$$

PRÍKLADY: to isté zadanie

1. $p: (2+m) \cdot x - (1 + \frac{1}{2}m) \cdot y - 1 = 0$
   $q: -2x + y - 3 = 0$

   R: $p \parallel q$ pre $\forall m \in R$

2. $p: (3-2m) \cdot x + (m-4) \cdot y + 1 = 0$
   $q: -2x + y - 1 = 0$

   R: neexistuje také m

PRÍKLADY:

Zistite vzájomnú polohu priamok p a q, ak sú rôznobežné, nájdite ich priesečník

1. $p: P=[1,0]$ $\quad \vec{u}=(2,3)$
   $q: Q=[1,1]$ $\quad \vec{v}=(1,-1)$ $\qquad \nparallel$

2. $p: P=[2,-1]$ $\quad \vec{u}=(-1,3)$
   $q: Q=[0,5]$ $\quad \vec{v}=(2,-6)$ $\qquad \parallel$ + totožné

3. $p: P=[1,2]$ $\quad \vec{u}=(2,-3)$
   $q: Q=[0,1]$ $\quad \vec{v}=(-1,3/2)$ $\qquad \parallel$ rôzne

4. $p: P=[3,2]$ $\quad \vec{u}=(2,-1)$
   $q: Q=[-1,1]$ $\quad \vec{v}=(1,1)$ $\qquad \nparallel \quad R=[1,3]$

5. $p: P=[3/2,1]$ $\quad \vec{u}=(-1,2)$
   $q: Q=[-1,6]$ $\quad \vec{v}=(1/2,-1)$ $\qquad \parallel$ + totožné

---

6. $p: -x+y=0$
   $q: 2x-2y=0$ $\qquad$ totožné

7. $p: x+2y+1=0$
   $q: 2x+y-1=0$ $\qquad \nparallel \quad R=[1,-1]$

8. $p: 3x-y+1=0$
   $q: 6x-2y+1=0$ $\qquad \parallel$ rôzne

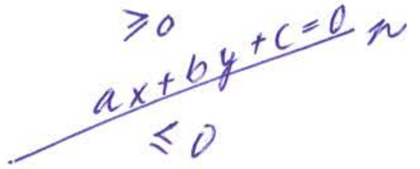
POLOHOVÉ ÚLOHY - POLOHA BODU VZHĽADOM KU PRIAMKE

BOD P leží na osi $\vec{x}$ ... má súradnice $P=[p; 0]$

Q —''— $\vec{y}$ —''— $Q=[0; q]$

POLROVINY

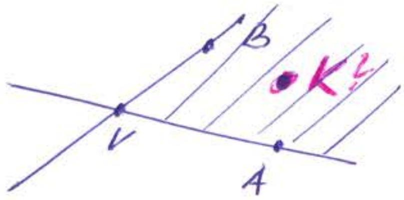
Ak má priamka p: rovnicu $ax+by+c=0$ potom jedna polrovina je určená rovnicou $ax+by+c \geq 0$ a druhá polrovina je určená rovnicou $ax+by+c \leq 0$

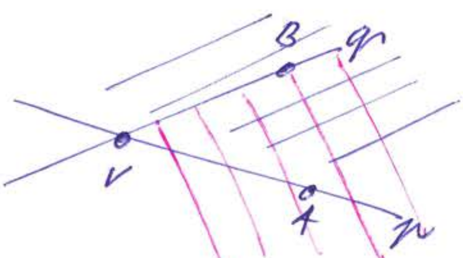


Pomocou tejto myšlienky vieme určiť, či dva body ležia v rovnakej polrovine.

BOD A UHOL

Ako zistíme, či bod K leží v konvexnom uhle $\measuredangle AVB$





postup:

Konvexný uhol $\measuredangle AVB$ vznikol ako prienik 2 polrovín AVB a BVA (obrázok). Takže treba zistiť, či body B a K ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou p.

Ostatne treba overiť, či body A a K ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou q.

myšlienka polrovín sa dá úspešne používať v mnohých polohových úlohách

PRÍKLAD:

zistite, či body K a L ležia v rovnakej polrovine určenej hraničnou priamkou p

$p:\ 3x - 2y + 1 = 0$

$K = [1,2]$

$L = [2,-3]$

RIEŠENIE:

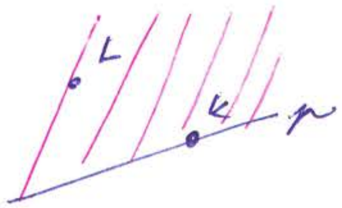
dosadíme $K = [1,2]$

$3\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$

$\Rightarrow$ bod K leží priamo na priamke p

$L = [2,-3]$

$3\cdot 2 - 2\cdot(-3) + 1 = 6 + 6 + 1 = 13 > 0$



PRÍKLADY: to isté

1. $p:\ 2x - y + 3 = 0$ $\quad K = [3,0]$, $L = [0,0]$ $\quad$ R: áno

2. $p:\ 5y - 1 = 0$ $\quad K = [1,3]$, $L = [5,-1]$ $\quad$ R: nie

PRÍKLADY:

zistite, či bod K leží vo vnútri $\sphericalangle AVB$

1. $A = [2,3]$, $V = [5,-1]$, $B = [1,-2]$ $\quad K = [0,5]$ $\quad$ R: ÁNO

2. $A = [1,-1]$, $V = [-1,1]$, $B = [2,3]$ $\quad K = [-3,2]$ $\quad$ R: NIE

správnosť overte nakreslením

PRÍKLADY

Zistite, či bod K je vnútorným bodom v $\triangle ABC$

1. $A = [-2, -1]$ $\quad K = [0, 1]$ $\quad$ R: áno

   $B = [3, -2]$

   $C = [1, 3]$

2. $A = [2, 2]$ $\quad K = [1, 5]$ $\quad$ R: nie

   $B = [0, -3]$

   $C = [3, 4]$

Správnosť si overte nakreslením karteziánskej SS a umiestnením bodov

METRICKÉ ÚLOHY - VZDIALENOSTI

VZDIALENOSŤ BODU OD PRIAMKY:

Z teórie vieme, že vzdialenosť d bodu $P=[p_1, p_2]$ od priamky $p: ax+by+c=0$ sa vypočíta podľa vzorca

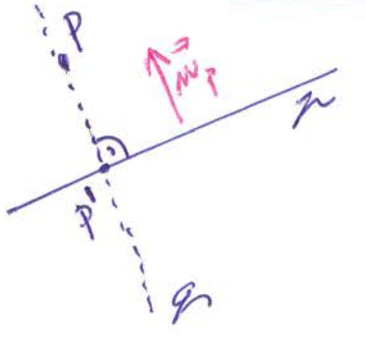
$$d = \frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

PRÍKLAD:

Vypočítajte vzdialenosť bodu P od priamky $2x+y-2=0$, ak $P=[-3,1]$

R: $$d = \frac{|2.(-3)+1.1-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|-6+1-2|}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{5}}}}$$

KOLMÝ PRIEMET BODU NA PRIAMKY:



nájsť kolmý priemet znamená nájsť bod P' ku bodu P podľa obrázka

postup:

1. napíšeme rovnicu priamky q určenej bodom P a $\vec{n}_p$
2. vypočítame priesečník $p \cap q$

PRÍKLAD:

nájdite bod P', ktorý je kolmým priemetom bodu $P=[2,-3]$ do priamky $p: 2x-y+3=0$

1. rovnica q: $P=[2,-3]$

$\vec{s}_q = \vec{n}_p$

$\vec{n}_p = (2,-1)$ $\Rightarrow$ najlepšie je napísať param. vyjadrenie

$q: x = 2+2t$

$y = -3-t \quad t \in R$

2 krok: priesečník $p \cap q = P'$

$$p: 2x - y + 3 = 0$$
$$q: \begin{aligned} x &= 2 + 2t \\ y &= -3 - t \end{aligned} \quad t \in R$$

$$\left.\begin{aligned} &2 \cdot (2+2t) - (-3-t) + 3 = 0 \\ &4 + 4t + 3 + t + 3 = 0 \\ &10 + 5t = 0 \\ &5t = -10 \\ &t = -2 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow P': x = 2 + 2 \cdot (-2) = 2 - 4 = -2$$
$$y = -3 - (-2) = -3 + 2 = -1$$

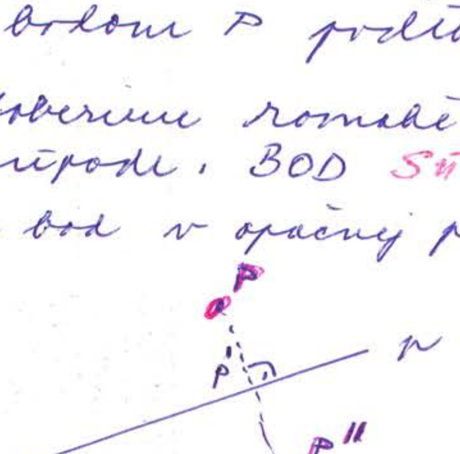
$$\underline{\underline{P' = [-2, -1]}}$$

SÚMERNE ZDRUŽENÝ BOD PODĽA PRIAMKY

PRÍKLAD:

nájdite bod P'', ktorý je súmerne združený s bodom P podľa priamky p.

Zoberieme rovnaké údaje, ako v predchádzajúcom príklade. BOD SÚMERNE ZDRUŽENÝ PODĽA PRIAMKY je bod v opačnej polrovine, rovnako vzdialený od priamky p a taký $PP'' \perp \vec{p}$



postup: ako v predchádzajúcom príklade len pribudne bod 3.

3. uvedomte si, že $P' = P \div P''$ je to stred úsečky

$P = [2, -3]$ $\quad P'' = [x, y]$

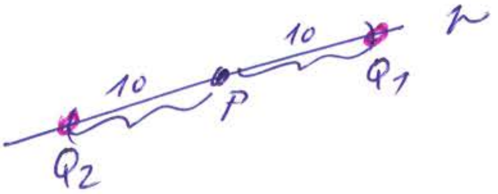
$P' = [-2, -1]$

$$\Rightarrow \quad -2 = \frac{2+x}{2} \qquad -1 = \frac{-3+y}{2}$$
$$-4 = 2 + x \qquad -2 = -3 + y \quad /+3$$
$$-6 = x \qquad 1 = y$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow P'' = [-6, 1]}}$$

PRÍKLAD:

nájdite na priamke $p: 3x-4y+1=0$ bod Q, ktorý má od bodu $P[1,?]$ ležiaceho na priamke p vzdialenosť $d=10$



Rie: vypočítame aj druhú súradnicu P

$$3x-4y+1=0$$
$$3\cdot 1-4\cdot ?+1=0$$
$$3+1-4? = 0$$
$$-4\cdot ? = -4$$
$$? = 1$$
$$\Rightarrow P=[1,1]$$

Teraz určíme jednotkový smerový vektor priamky p. To je taký čo má rovnaký smer, ale jednotkovú dĺžku

$\vec{s}_p=(4,3)$ $\qquad$ $\vec{n}_p=(3,-4)$ → vieme z rovnice

$$\vec{s}_p^{\,*}=\frac{\vec{s}_p}{\|s_p\|}=\frac{(4,3)}{5} \qquad \underbrace{\|\vec{s}_p\|}_{\text{veľkosť}}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\vec{s}_p^{\,*}=\left(\tfrac{1}{5}\cdot 4, \tfrac{1}{5}\cdot 3\right)$$

vzdialenosť

potom bod Q_1: $\quad x = 1 + 10\cdot\frac{4}{5}$ → súradnice jednotkového vektora

$\qquad y = 1 + 10\cdot\frac{3}{5}$

súradnice P

$$x = 1+8 = 9 \qquad Q_1=[9,7]$$
$$y = 1+6 = 7$$

na opačnú stranu:

Q_2: $x = 1-10\cdot\frac{4}{5} = 1-8 = -7$ $\qquad Q_2=[-7,-5]$

$\qquad y = 1-10\cdot\frac{3}{5} = 1-6 = -5$

PRÍKLADY:

1. napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom Q a je kolmá na p

$Q = [1,-3]$

$p: -x + 3y - 2 = 0$ R: $3x + y = 0$

2. $Q = [2,5]$

$p: \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3t \end{array} \quad t \in R$ R: $x + 3y - 17 = 0$

---

určte vzdialenosť bodu M od priamky $\overrightarrow{AB}$

1. $M = [11,-4]$ R:

$A = [1,1]$ $d(M, \overrightarrow{AB}) = 10$

$B = [-3,-2]$

2. $M = [-4,3]$ R:

$A = [3,-1]$ $d(M, \overrightarrow{AB}) = 1$

$B = [-9,4]$

Určte súradnice bodu A' symetricky združeného s bodom A podľa priamky p:

1. $A = [5,1]$ R: $A' = [1,3]$

$p: 2x - y - 4 = 0$

2. $A = [8,1]$ R:

$p: P = [1,0]$ $A' = [-4,5]$

$\vec{s_p} = [1,3]$