KOMBINÁCIE S OPAKOVANÍM

(1)

- BEZ OPAKOVANIA

$$C_k(n) = \binom{n}{k}$$

K-TICE Z N PRVKOV – NA PORADÍ NEZÁLEŽÍ –

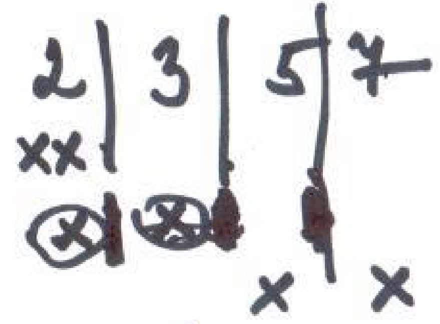
- S OPAKOVANÍM

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

PRÍKLAD.

KOĽKO RÔZNYCH SÚČINOV DVOCH ČINITEĽOV MOŽNO UTVORIŤ Z ČÍSLIC 2, 3, 5, 7 ?

VARIÁCIE S OPAK.



$n = 4$

$k = 2$

$$C'_2(4) = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \underline{\underline{10}}$$

$$\frac{5!}{2!\,3!}$$

3

Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 5 bankoviek z pokladnice, ak sú v nej bankovky v hodnote 5€, 10€, 20€, 50€, pričom bankovky nerozlišujeme a ich dostatočný počet?

$k=5$

$n=4$

$$\binom{4+5-1}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 56$$

V obchode majú 3 druhy cukríkov v 100g balíčkoch. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 500g cukríkov?

$n=3$

$k=5$

$$\binom{5+3-1}{5} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$$

D1	D2	D3
xx	x	xx

4 druhy čokolád po 1 Euro. Koľkými spôsobmi môžeme kúpiť čokolády, ak

a) zaplatíme práve 6 Eur

b) ——"—— , ale nekupujeme žiadne z každej rovnaké?

a)

$k = 6$

$n = 4$

Č1	Č2	Č3	Č4
xx	x	xxx	

$$\binom{6+4-1}{6} = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 7}{\cancel{6} \cdot \cancel{3} \cdot 2} = \underline{\underline{84}};$$

b) $k=3$, $n=4$

$$C_3'(4) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3 \cdot 2}} = \underline{\underline{20}};$$

Č1	Č2	Č3	~~Č4~~
2ok. O		OO	

(5)

V cukrárni predávajú 4 druhy zákuskov: veterníky, venčeky, laskonky, krémeše.

Koľkými spôsobmi možno kúpiť 7 zákuskov?

VET	VEN	LAS	KRÉM
OO	O	OO	OO

$$\frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \underline{\underline{120}}$$

~~ROZDEĽOVANIE~~ ROVNAKÝCH PREDMETOV DO k PRIEČINKOV

Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 50 guličiek medzi 4 deti tak, aby každé dieťa dostalo aspoň 1 guličku?

46 guličiek ... 4 deti

D1	D2	D3	D4
46 (OOO)	-	-	-

$$\binom{46+4-1}{4-1} = \frac{49!}{46!\,3!} = \frac{49\cdot \overset{8}{\cancel{48}}\cdot 47}{\cancel{3\cdot 2}} = 49\cdot 8\cdot 47 = \underline{\underline{18424}};$$

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k-1}}$$ rozdeľovanie n rovnakých predmetov do k skupín

Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 7 hrušiek a 5 jabĺk 3 deťom. 2 (6)

HRUŠKY 3 deti

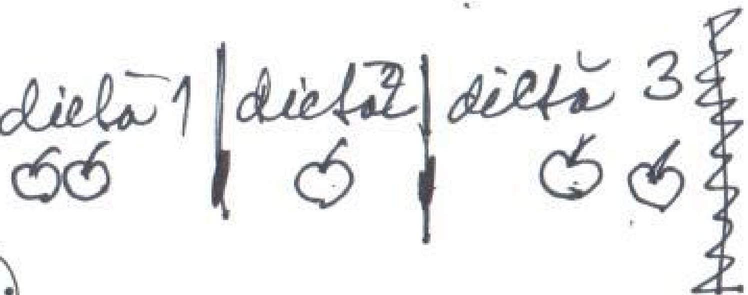
dieťa 1 | dieťa 2 | dieťa 3

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(7+3-1)!}{2!\,7!} = \frac{9!}{2!\,7!} = \frac{9.8}{2} = 36;$$

JABLKÁ

3 deti 5 jabĺk

dieťa 1 | dieťa 2 | dieťa 3



$$\frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7.6}{2} = 21;$$

HRUŠKY A JABLKÁ

$$36.21 = 756;$$

(7)

3 deti nazbierali 40 jabĺk. Určte počet spôsobov, ako ich môžu rozdeliť, ak

a) sa nekladú žiadne podmienky

b) každé dieťa dostane aspoň 1 jablko

c) — " — " — aspoň 5 jabĺk

---

a)

D1	D2	D3
40 000		0

$$\frac{42!}{2!\,40!} = \frac{42 \cdot 41}{2} = 21 \cdot 41 = \underline{\underline{861}};$$

b) $40 - 3 = \underline{37}$

$$\frac{(37+2)!}{2!\,37!} = \frac{39!}{37!\,2!} = \frac{39 \cdot 38}{2} = \underline{\underline{741}};$$

c) $40 - 15 = 25$

$$\frac{(25+2)!}{2!\,25!} = \underline{\underline{351}};$$

1 $\boxed{\text{Kombin. s opak.}}$

k-tice z n rôznych prvkov, pričom sa môžu prvky opakovať $C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$

2 Rozdelenie n rovnakých predmetov do k skupín

a) pripúšťajú sa aj prázdne skupiny

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

b) nepripúšťajú sa prázdne skupiny

$$\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

c) v každej skupine má byť aspoň q prvkov

$$\binom{n-kq+k-1}{k-1}$$

1

binomická veta.

$1\ 2\ 1 \quad (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ $\qquad (x+y)^2 = (x+y)(x+y)$

$1\ 3\ 3\ 1 \quad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ $\qquad (x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 =$

$x^0 = 1$

$y^0 = 1$

$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + y^5$

y^0

$\boxed{n=5}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$\binom{n}{k}$ $\binom{n}{0}$

1 $\quad n=1$

1 2 1 $\quad n=2$ Pascalov trojuholník

1 3 3 1 $\quad$ 3

1 4 6 4 1 $\quad$ 4

1 5 10 10 5 1 $\quad \boxed{n=5}$

1 6 15 20 15 6 1

n

$= \binom{5}{0}x^5 y^0 + \binom{5}{1}x^4y^1 + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}x^1y^4 + \binom{5}{5}x^0y^5$

$$(x+y)^n = \underbrace{\binom{n}{0} x^n y^0}_{1.\ \text{člen}} + \underbrace{\binom{n}{1} x^{n-1} \cdot y^1}_{2.\ \text{člen}} + \overbrace{\binom{n}{2} x^{n-2} y^2}^{3\ \text{člen}} + \dots$$

$$+ \dots + \underbrace{\binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k}_{(k+1)\ \text{člen}} + \dots \underbrace{\binom{n}{n} x^0 y^n}_{(n+1)\text{ý člen}}$$

k-tý člen od předu?

$$\underline{\underline{\binom{n}{k-1} \cdot x^{n-k+1} \cdot y^{k-1}}}$$

(11)

Vypočítajte jedenásty člen rozvoja výrazu

$$(x-y)^{15}$$

$n = 15$

$k = 10$

$$\binom{15}{10} \cdot x^{15-10} \cdot y^{10} \cdot (-1)^{10} = \frac{15!}{10!\,5!} x^5 y^{10} = \frac{\cancel{15} \cdot \overset{7}{\cancel{14}} \cdot 13 \cdot \overset{3}{\cancel{12}} \cdot 11}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 91 \cdot 33 = \underline{\underline{3003}};$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

11-ty člen

12

Určte v rozvoji výrazu $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$ absolútny člen.

neobsahuje x, teda x má mocninu 0 : $x^0 = 1$

nech je to pre nejaké k

$$\binom{6}{k}\left(2x^2\right)^{6-k} \cdot (-1)^k \cdot 3^k \cdot \left(x^{-1}\right)^k \qquad x^{2(6-k)-k}$$

$$\binom{6}{0} \ldots \binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}$$

1. člen, 2., 3., 4., $\boxed{5.}$

$$2(6-k) + (-k) = 0$$

$$12 - 2k - k = 0$$

$$12 = 3k$$

$$\underline{\underline{k = 4}}$$

$\boxed{x^0}$

5. člen rozvoja

$4860 \cdot x^0$

$$\binom{6}{4} \cdot 2^2 \cdot 3^4 =$$

$$= \frac{6!}{2!\,4!}\, 4 \cdot 81 = \frac{\cancel{6}^{\,3} \cdot 5}{\cancel{2}} \cdot 4 \cdot 81 = 60 \cdot 81 = \underline{\underline{4860}};$$