

Diferenciálny počet - derivácia funkcie (2. časť)

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

8 Október 2020

Obsah prednášky

- Derivácie
 - Derivácia **implicitnej funkcie**
 - Derivácia **funkcie určenej parametrickými rovnicami**
 - Derivácie **vyšších rádov**
- Diferenciálny počet - aplikácie
 - **Dotyčnica a normála** ku grafu funkcie

Obsah prednášky

- Derivácie
 - **Derivácia implicitnej funkcie**
 - Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami
 - Derivácie vyšších rádov
- Diferenciálny počet - aplikácie
 - Dotyčnica a normála ku grafu funkcie

Derivácia implicitnej funkcie

- Rovnica $F(x, y) = 0$ určuje funkčný vzťah medzi veličinami x a y .
- Takúto funkciu voláme **funkcia určená implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$.
- Ak funkcia určená implicitne má deriváciu v niektorej množine, tak túto môžeme vypočítať aj **bez explicitného vyjadrenia** funkcie f .
- Postupujeme pri tom tak, že derivujeme obidve strany rovnice, pričom ľavú stranu **derivujeme ako zloženú funkciu** $F(x, y(x))$.
- Tento postup je veľmi užitočný najmä v situáciách, keď veličinu y nie sme schopní z rovnice vyjadriť.

Derivácia implicitnej funkcie - Riešené príklady

Príklad

Vypočítajte deriváciu funkcie $x^2 + y^2 = 1$.

Riešenie: Rovnica $x^2 + y^2 = 1$ určuje dve funkcie $f_1 : y = \sqrt{1 - x^2}$ a $f_2 : y = -\sqrt{1 - x^2}$. Vypočítame ich derivácie bez pomoci tohoto explicitného vyjadrenia.

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

a po vyjadrení hľadanej derivácie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Derivácia implicitnej funkcie - Príklady

Príklad

Nájdite deriváciu implicitnej funkcie:

1) $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$

2) $x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y = 0$

3) $x^2y^3 - \sin(xy) = 0$

Derivácia implicitnej funkcie - Príklady

Príklad

Nájdite deriváciu implicitnej funkcie:

$$1) \quad x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+2x}{x+2y}$$

$$2) \quad x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+3y-2x}{-3x+8y+3}$$

$$3) \quad x^2y^3 - \sin(xy) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3 + \cos(xy)y}{3x^2y^2 - \cos(xy)x}$$

Obsah prednášky

- Derivácie
 - Derivácia implicitnej funkcie
 - **Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami**
 - Derivácie vyšších rádov
- Diferenciálny počet - aplikácie
 - Dotyčnica a normála ku grafu funkcie

Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami

- Rovinná krivka býva často určená **parametrickými rovnicami**

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in (a, b).$$

V prípade, keď $f'(t) \neq 0$ pre všetky $t \in (a, b)$, je krivka grafom funkcie určenej parametrickými rovnicami, ktorej deriváciu môžeme počítat' aj bez jej explicitného vyjadrenia pomocou vzťahu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Derivácia funkcie určenej par. rovnicami - Riešené príklady

Príklad

Vypočítajte deriváciu funkcie určenej parametrickými rovnicami

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in \langle \pi, 2\pi \rangle.$$

Riešenie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cotg t.$$

Derivácia funkcie určenej par. rovnicami - Príklady

Príklad

Nájdite deriváciu funkcie danej parametrickými rovnicami:

$$x = te^t,$$

$$y = t^3 + 6t, t \in (0, \infty).$$

Príklad

Nájdite deriváciu funkcie danej parametrickými rovnicami:

$$x = \sqrt{t^3},$$

$$y = t^2, t \in (0, \infty).$$

Derivácia funkcie určenej par. rovnicami - Príklady

Príklad

Nájdite deriváciu funkcie danej parametrickými rovnicami:

$$x = te^t,$$

$$y = t^3 + 6t, t \in (0, \infty).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(t^2+2)}{e^t(1+t)}$$

Príklad

Nájdite deriváciu funkcie danej parametrickými rovnicami:

$$x = \sqrt{t^3},$$

$$y = t^2, t \in (0, \infty).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{t}}{3}$$

Obsah prednášky

- Derivácie
 - Derivácia implicitnej funkcie
 - Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami
 - **Derivácie vyšších rádov**
- Diferenciálny počet - aplikácie
 - Dotyčnica a normála ku grafu funkcie

Derivácie vyšších rádov

- Keďže derivácia elementárnej funkcie je funkciou, má zmysel hovoriť o derivácii derivácie atď'.
- Druhou deriváciou funkcie f je derivácia funkcie f' (ak existuje).
- Pomocou indukcie môžeme takto definovať derivácie ľubovoľného rádu. **Deriváciou n -tého rádu alebo n -tou deriváciou funkcie f je derivácia $(n-1)$ -ej derivácie funkcie f (ak existuje).**
- Derivácie vyšších rádov označujeme takto

$$\begin{aligned} f'', f''', f^4, f^5, \dots, f^{(n)} \\ y'', y''', y^4, y^5, \dots, y^{(n)} \\ \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \frac{d^5 y}{dx^5}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n} \end{aligned}$$

Derivácie vyšších rádov - Riešené príklady

Príklad

Vypočítajte deriváciu funkcie $(\log_2 3x)'''$ a

Riešenie:

$$(\log_2 3x)' = \frac{1}{3x \ln 2} \cdot 3 = \frac{1}{x \ln 2}$$

$$(\log_2 3x)'' = \left(\frac{1}{x \ln 2} \right)' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} \right)$$

$$(\log_2 3x)''' = \left(\frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} \right) \right)' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2}{x^3}.$$

Derivácie vyšších rádov - Príklady

Príklad

Nájdite deriváciu:

1) $f^4(x)$ ak $f(x) = x^6 + 5x^4 + 2x^3 - x^2$ $f^4(x) = 360x^2 + 120$

2) $f^4(x)$ ak $f(x) = \frac{2}{x}$ $f^4(x) = \frac{48}{x^5}$

3) $f''(x)$ ak $f(x) = \tan x$ $f''(x) = 2 \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

4) $f'''(x)$ ak $f(x) = \arctan x$ $f'''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$

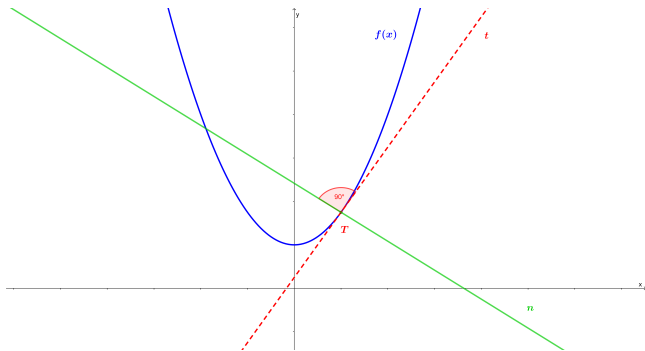
5) $f^5(x)$ ak $f(x) = x^4 \ln x$ $f^5(x) = \frac{24}{x}$

Obsah prednášky

- Derivácie
 - Derivácia implicitnej funkcie
 - Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami
 - Derivácie vyšších rádov
- Diferenciálny počet - aplikácie
 - **Dotyčnica a normála ku grafu funkcie**

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie

- Nech t a n sú priamky, ktorých smernice sú k_t a k_n . Potom priamky t a n sú na seba kolmé práve vtedy, keď $k_t \cdot k_n = -1$.



Obr.: Dotyčnica a normála ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode T

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie

- Ak existuje derivácia funkcie f v bode x_0 , tak **číslo** $f'(x_0)$ **je smernicou dotyčnice** ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $[x_0, y_0]$ a číslo $-\frac{1}{f'(x_0)}$ je smernicou normály ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $[x_0, y_0]$. Preto

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

je **rovnicou dotyčnice ku grafu funkcie** f v bode $[x_0, f(x_0)]$ a

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

je **rovnicou normály ku grafu funkcie** f v bode $[x_0, y_0]$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2$, ak dotykový bod T má x -ovú súradnicu $x_0 = 2$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2$, ak dotykový bod T má x -ovú súradnicu $x_0 = 2$.

Riešenie: Najprv vypočítame y -ovú súradnicu bodu T :

$$y_0 = f(2) = 4.$$

Dotykový bod má súradnice $T = (2, 4)$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2$, ak dotykový bod T má x -ovú súradnicu $x_0 = 2$.

Riešenie: Najprv vypočítame y -ovú súradnicu bodu T :

$$y_0 = f(2) = 4.$$

Dotykový bod má súradnice $T = (2, 4)$.

Vypočítame smernicu dotyčnice k_t :

$$k_t = f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4.$$

Dotyčnica t má rovnicu t : $y - 4 = 4(x - 2)$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = |x|$, ak dotykový bod má súradnice $T = (0, 0)$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = |x|$, ak dotykový bod má súradnice $T = (0, 0)$.

Riešenie: Potrebujeme vypočítať deriáciu funkcie f pre $x_0 = 0$, teda limitu. Zvlášť vypočítame limitu sprava a limitu zľava.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.\end{aligned}$$

To znamená, že $|x|$ nemá pre $x = 0$ deriváciu, teda neexistuje ani dotyčnica v bode T .

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2 - 2x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = x$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2 - 2x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = x$.

Riešenie: Smernica priamky p je $k_p = 1$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2 - 2x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = x$.

Riešenie: Smernica priamky p je $k_p = 1$. Rovnobežné priamky majú rovnaké smernice, preto pre smernicu dotyčnice k_t platí

$$k_t = k_p = 1.$$

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2 - 2x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = x$.

Riešenie: Smernica priamky p je $k_p = 1$. Rovnobežné priamky majú rovnaké smernice, preto pre smernicu dotyčnice k_t platí

$$k_t = k_p = 1.$$

Poznáme smernicu dotyčnice, ale nepoznáme dotykový bod T . Označme súradnice dotykového bodu $T = (x_0, y_0)$. To znamená, že hľadáme x_0 , v ktorom $f'(x_0) = 1$.

$$f'(x_0) = (x_0^2 - 2x_0)' = 2x_0 - 2$$

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Dostali sme rovnicu $2x_0 - 2 = 1$ a z toho $x_0 = \frac{3}{2}$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Dostali sme rovnicu $2x_0 - 2 = 1$ a z toho $x_0 = \frac{3}{2}$.

Dosadíme x_0 do funkcie f a dostaneme y_0 :

$$y_0 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\frac{3}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Dotykový bod má súradnice $T = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

Rovnica dotyčnice je $t : y + \frac{3}{4} = x - \frac{3}{2}$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Příklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = \tan x$ v bode $T = (\frac{\pi}{4}, ?)$.

$$t : y - 1 = 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$n : y - 1 = -\frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = x^2 - 3x + 5$ tak, aby t bola rovnobežná s priamkou

$$p : x - y + 1 = 0.$$

$$t : y - 3 = 1(x - 2)$$

$$n : y - 3 = -1(x - 2)$$

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Příklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = \ln(x - 2)$ tak, aby t bola kolmá na priamku $p : x + y = 0$.

$$t : y - 0 = 1(x - 3)$$

$$n : y - 0 = -1(x - 3)$$

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = \arctan x$ tak, aby dotyčnica zvierala s osou x uhol $\alpha = 45^\circ$.

$$t : y - 0 = 1(x - 0)$$

$$n : y - 0 = -1(x - 0)$$

Ďakujem za pozornosť.