Cvičenie č. **4** Dátum: ....

Matice | Inverzná matica. Maticové rovnice. Determinant matice

Teoretický rámec

Definícia (*Regulárna matica*). Štvorcovú maticu **A** n-tého stupňa nazývame ***regulárnou*** $\Leftrightarrow$

$$h(\mathbf{A}) = n$$

Ak $h(\mathbf{A}) < n$ matica je ***singulárna***.

Veta. Štvorcová matica stupňa n je regulárna $\Leftrightarrow$ ak je ekvivalentná s jednotkovou maticou $\mathbf{E}_n$.

Definícia (*Inverzná matica*). Maticu **B** nazývame inverznou maticou k matici **A** stupňa n ak platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$. Maticu, ku ktorej existuje inverzná matica, nazývame ***invertibilnou*** *maticou*. Inverznú maticu k matici **A**, ak existuje, označujeme $\mathbf{A}^{-1}$.

Veta. Ak je štvorcová matica **A** stupňa n invertibilná, tak existuje k nej práve jedna inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$.

Veta. Štvorcová matica **A** stupňa n je invertibilná $\Leftrightarrow$ ak je regulárna.

Niektoré metódy výpočtu inverznej matice:

1. **použitím elementárnej zmeny bázy**,
2. ekvivalentnými riadkovými úpravami,
3. pomocou determinantov.

Maticovou rovnicou nazývame každú rovnicu, ktorá obsahuje maticu neznámych.

Základné typy maticových rovníc:

1. rovnice s operáciami sčítania matíc a násobenia matice skalárom (napr. $\mathbf{B} + 3\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{X}$) – postupujeme pomocou **operácii s reálnymi číslami**,
2. rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ a $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$, kde **A** je regulárna matica a **B** má toľko stĺpcov (riadkov) ako matica $\mathbf{A}^{-1}$; číslu 0 zodpovedá nulová matica **0** a číslu 1 jednotková matica **E** – postupujeme podľa **nasledujúcich dvoch viet**

Veta. Nech je regulárna matica **A** stupňa n a **B** je matica typu $n \times k$, potom rovnica:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

má jediné riešenie:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Veta. Nech je daná rovnosť **A** = **B**, kde matice **A**, **B** sú typu $m\times n$, potom ak:

a) k obom stranám rovnosti pripočítame maticu $\mathbf{C}_{m\times n}$,
b) obe strany rovnosti vynásobíme $\alpha \neq 0$,
c) obe strany rovnosti vynásobíme zľava (sprava) regulárnou maticou $\mathbf{C}_{p\times m}$ ($\mathbf{D}_{n\times p}$)

dostaneme opäť rovnosť dvoch matíc **A** = **B**.

Maticové rovnice budeme riešiť:

1. pre ľubovoľné vhodné matice, t.j. ***všeobecné riešenie***,
2. pre konkrétne dané matice, ak existuje.

Poznámka. Špecifickými typmi maticových rovníc a ich riešením sa zaoberá odborná literatúra. V teórii matíc na viac existuje pojem ***pseudoinverzná matica*** (ozn. $\mathbf{A}^+$), ktorá sa používa vo výpočtoch, napríklad ak zodpovedajúca matica **A** nie je štvorcová, resp. nie je regulárna. Ak $\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ je bázický rozklad matice **A** na súčin matíc, potom $\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}\right)^{-1} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.

Definícia (*Inverzia v permutácii*). Nech $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ je permutácia z čísel 1, 2, ..., n, $n \geq 2$. Potom dvojica čísel k_i, k_j, $i < j$ tvorí inverziu v permutácii $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ $\Leftrightarrow$ keď $k_i > k_j$. Počet inverzií v permutácii označujeme $I(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Definujeme $I(1) = 1$.

Definícia (*Determinant matice* A). Determinant n-tého stupňa, $n \geq 1$, z prvkov matice **A** je číslo, ktoré označujeme $|\mathbf{A}|$ (resp. det **A**) a určíme ho ako $|\mathbf{A}| = \sum\limits_{(k_1,\dots,k_n)} (-1)^{I(k_1,\dots,k_n)} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$, kde $I(k_1, k_2, \dots, k_n)$ je počet inverzií v permutácii.

Výpočet determinantu (podľa stupňa n štvorcovej matice **A**):

1. $n = 1$; $|\mathbf{A}| = |a_{11}| = a_{11}$

2. $n = 2$; $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$

3. $n = 3$; *Sarrusovo pravidlo*; $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \; - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} = \dots$

4. $n \geq 3$; *rozvojom (viď odborná literatúra)*, *metóda EZB*, *softvér*.

Niektoré vlastnosti determinantov:

1. $|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right|$,
2. $|\mathbf{E}_n| = 1$,
3. štvorcová matica **A** je regulárna $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$,
4. ďalšie viď študijná literatúra.

Veta (*Výpočet determinantu využitím EZB*). Nech **A** je štvorcová matica, $n \geq 2$ a nech je regulárna. Ak uskutočníme na stĺpcových vektoroch matice **A** takých n elementárnych zmien bázy, že postupne vektory jednotkovej bázy nahrádzame stĺpcovými vektormi matice **A**, až kým dostaneme bázu $B = \left\{ \bar{a}_{k_1}, \bar{a}_{k_2}, ..., \bar{a}_{k_n} \right\}$ tvorenú iba stĺpcovými vektormi matice **A** v ľubovoľnom usporiadaní, potom $|\mathbf{A}|$ sa rovná súčinu vedúcich prvkov elementárnych zmien báz a čísla $(-1)^{I(k_1,...,k_n)}$.

Poznámka. Ak z tabuľky EZB zistíme, že $h(\mathbf{A}) \neq n \Rightarrow |\mathbf{A}| = 0$.

Poznámka. S teóriou determinantov úzko súvisí pojem ***adjungovaná matica***, ktorú možno využiť na výpočet inverznej matice; $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \operatorname{adj}\mathbf{A}$. Potom pre štvorcovú maticu **druhého** stupňa, ktorá je regulárna, platí:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Jedná sa o najrýchlejší spôsob „manuálneho“ výpočtu inverznej matice 2 × 2.

Príklady na riešenie

Príklad 1.

Nech je daná matica $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Úlohy:

a) vypočítajte determinant matice **A**,

b) určte inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k matici **A** metódou EZB,

Báza			Σ

c) výsledok z b) overte podľa definície,

d) určte inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k matici **A** pomocou adjungovanej matice,

Príklad 2.

Určte, pomocou determinantu, pre aké p; $p \in R$ je matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ regulárna.

Príklad 3.

Vypočítajte determinant matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Príklad 4.

Určte počet inverzií v daných permutáciách.

a) (4, 2, 7, 5, 3, 6), b) (1, 2, 3, 4), c) (9, 5, 6, 7, 8, 4)

Príklad 5.

Použitím EZB vypočítajte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, pričom poznáme poslednú časť tabuľky EZB a informáciu, že ako *vedúce prvky* sa postupne zvolili čísla: 1; 1; 1; – 4.

$\bar{a}_4$	0	0	0	1	1
$\bar{a}_3$	0	0	1	0	1
$\bar{a}_2$	0	1	0	0	1
$\bar{a}_1$	1	0	0	0	1

Príklad 6.

Určte metódou EZB inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$, ak matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$ a $\alpha \in R$. Výsledky riešenia vzhľadom na parameter α uvádzajte do prehľadnej tabuľky.

Báza			Σ

Príklad 7.

Na základe nižšie uvedenej časti rozšírenej tabuľky EZB, rozhodnite o existencii inverznej matice, v závislosti od hodnoty parametra p, $p \in R$. Ďalším riešením určte inverznú maticu $\mathbf{P}^{-1}$ pre *najmenšie celé kladné číslo*, pre ktoré inverzná matica existuje. Pre výpočet využite už pripravenú tabuľku EZB.

$\bar{a}_1$	1	0	-5	-3	2	0	-5
$\bar{a}_2$	0	1	4	2	-1	0	6
$\bar{e}_3$	0	0	$p-1$	1	-2	1	$p-1$

$\bar{a}_1$	1	0	-5	-3	2	0	
$\bar{a}_2$	0	1	4	2	-1	0	
$\bar{e}_3$	0	0	......	1	-2	1	

Príklad 8.

Riešte maticovú rovnicu $2\mathbf{X} - \mathbf{B} = 2\mathbf{C} - \mathbf{XA}$;

a) všeobecne, pre neznámu maticu **X** a vyslovte predpoklady pre aké matice riešenie ∃,

b) pre dané matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, ak riešenie ∃.

Príklad 9.

Riešte všeobecne dané maticové rovnice, pre neznámu maticu **X**.

a) $2(\mathbf{X} + 2\mathbf{A}) = \mathbf{B} + 3\mathbf{X} + 2\mathbf{A}$

b) $\mathbf{A} + \mathbf{XB} = 2\mathbf{X} - 3\mathbf{B}$

c) $2\mathbf{AX} - 3\mathbf{B} = 4\mathbf{B} + 3\mathbf{BX}$

d) $\mathbf{BX} = \mathbf{BXA} + 3\mathbf{C}$

e) $\mathbf{CXA} = \mathbf{E} - 3\mathbf{A}$

f) $5\mathbf{X} + \mathbf{XA} = (\mathbf{C} + \mathbf{A})\mathbf{B}$