Algebra a diskrétna matematika
Príklady na precvičenie
9. týždeň

Príklad 1. Overte, či sú dané relácie na zodpovedajúcich množinách reflexívne, symetrické, antisymetrické a tranzitívne. Určte, ktoré z nich sú čiastočné usporiadania a nakreslite ich Hasseho diagramy.

a) $M = \{a, b, c, d\}, \quad \mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, d), (d, d), (b, d)\}$

b) $M = \{0, 1, 2\}, \quad \mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M; x \leq y\}$

c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; x < 1 - y\}$

d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x < 1 + y\}$

e) $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad \mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M; 3|(y - x)\}$

f) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; x|y^2\}$

g) $\mathcal{R}$ je daná maticou susednosti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

h) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \cdot y \in \mathbb{Q}$

i) $\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + b \leq c$ a zároveň $b \leq d$

Príklad 2: Nech $A = \{1, 3, 5, 6, 10, 12, 15, 18, 20, 21\}$

a) Znázornite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny $(A, |)$.

b) Nájdite najväčší, najmenší prvok, minimálne a maximálne prvky danej čiastočne usporiadanej množiny.

c) Určte $\inf\{3, 6, 15\}, \inf\{5, 10, 20\}, \inf\{5, 6, 18\}, \inf\{5, 12, 15, 18\}, \sup\{3, 5\}$, $\sup\{5, 15, 20\}, \sup\{3, 6, 15\}, \sup\{6, 21\}$.

Príklad 3. Uvažujme množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ usporiadanú reláciou deliteľnosti. Najviac koľko prvkov môže mať podmnožina $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, ktorá je reláciou deliteľnosti usporiadaná na X lineárne (tvorí reťazec)?

Príklad 4. Nech $A = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$, $B = \{2, 3, 12, 15, 18, 180\}$ a nech D_{18} je množina deliteľov čísla 18.

a) Nakreslite Hasseho diagramy čiastočne usporiadaných množín $(A, \subseteq)$, $(B, |)$, $(D_{18}, |)$.

b) Určte, či sa jedná o zväzy.

c) Ak áno, sú niektoré dvojice z nich izomorfné?

Príklad 5: Nech $A = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$. Nakreslite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny $(A, \subseteq)$ a rozhodnite, či sa jedná o zväz. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Príklad 6: Zistite, či zväz $Z_1 = (\{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \leq)$, kde $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c$ a $b \leq d$, je izomorfný so zväzom $Z_2 = (D_{72}, |)$, pričom D_{72} označuje množinu všetkých deliteľov 72.

Príklad 7: Zostrojte všetky zväzy $(M, \leq)$ pre $|M| \leq 5$.

Príklad 8: Zistite, či $(M, \mathcal{R})$ tvorí zväz, ak $M = \{2, 4, 8, 16, 64, 64^2\}$ a relácia $\mathcal{R}$ je definovaná nasledovne: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y = x^n$.

Príklad 9: Je umocňovanie na množine $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R}$ binárna operácia?

Príklad 10: Nech $S = \{1, 2, 3\}$ a M je množina všetkých podmnožín množiny S. Na množine M máme danú binárnu operáciu symetrický rozdiel množín $\oplus$, ktorý je definovaný nasledovne

$\forall A, B \in M : A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Overte, či $\oplus$ je komutatívna a asociatívna.

Príklad 11: Uvažujme množinu $\mathbb{Z}$ spolu s binárnymi operáciami $*$, $\circ$ definovanými vzťahmi

a) $a * b = (a + b)^2$

b) $a \circ b = a + b - 6$

Pre obidve operácie overte komutativitu a asociativitu.