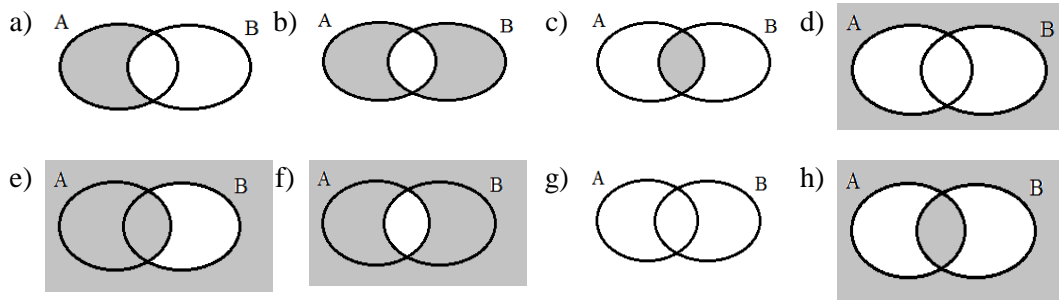


Príklady na Seminár z matematiky1, **Množiny** - Zadania s riešeniami

1) Akú množinu predstavuje zafarbená časť Vennovho diagramu? Pokúste sa nájsť vždy čo najjednoduchší zápis.



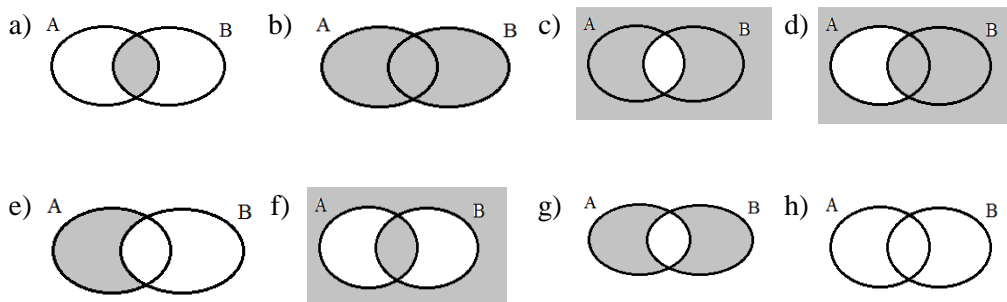
Riešenie:

- | | |
|---|--|
| a) $A - B$ | e) $(B - A)'$ |
| b) $(A \cup B) - (A \cap B)$ alebo
$(A - B) \cup (B - A)$, ale najkratší zápis
je $A \div B$ | f) $(A \cap B)'$ |
| c) $A \cap B$ | g) \emptyset (prázdna množina) |
| d) $(A \cup B)'$ | h) $(A \cup B)' \cup (A \cap B)$ ale kratšie je
$(A \div B)'$ |

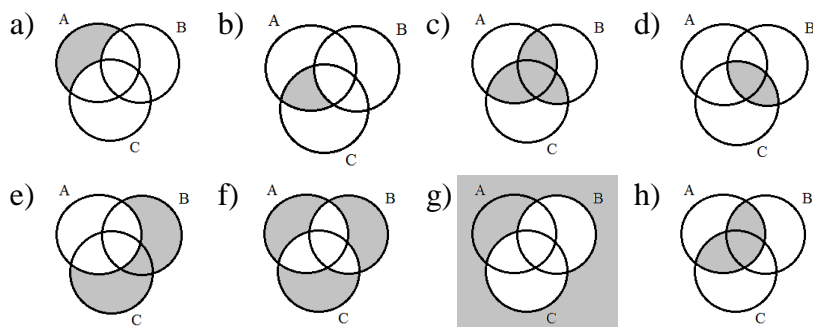
2) Ofarbite Vennov diagram tak, aby zafarbená časť zodpovedala danej množine:

- a) $A \cap B$
 b) $A \cup B$
 c) $(A \cap B)'$
 d) $(A - B)'$
 e) $A - B$
 f) $(A \cup B)' \cup (A \cap B)$
 g) $A \div B$
 h) \emptyset

Riešenie:



3) Akú množinu predstavuje zafarbená časť Vennovho diagramu? Pokúste sa nájsť vždy čo najjednoduchší zápis.



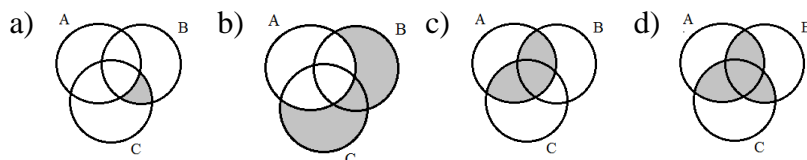
Riešenia:

- a) $(A - B) - C$ alebo $A - (B \cup C)$
 b) $(C \cap A) - B$
 c) $(A \cap (B \cup C)) \cup (B \cap C)$
 d) $(C \cap B)$
 e) $(C \cup B) - A$
 f) $(A \cup B \cup C) - ((A \cap B) \cup (C \cap B) \cup (C \cap A))$
 g) $(C \cup B)'$
 h) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) Ofarbite Vennov diagram tak, aby zafarbená časť zodpovedala danej množine

- a) $(C \cap B) - A$ b) $(C \cup B) - A$ c) $A \cap (B \cup C)$ d) $(A \cap (B \cup C)) \cup (B \cap C)$

Riešenie:



5) Zjednodušte (A je ľubovoľná podmnožina danej základnej nad množiny X):

- | | | |
|-----------------------|----------------|-----------------------|
| a) $A \cup A$ | b) $A \cap A$ | c) $A \cup \emptyset$ |
| d) $A \cap \emptyset$ | e) $A \cup X$ | f) $A \cap X$ |
| g) $A \cup A'$ | h) $A \cap A'$ | i) $(A')'$ |

Riešenie:

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|---------------------------|
| a) $A \cup A = A$ | b) $A \cap A = A$ | c) $A \cup \emptyset = A$ |
| d) $A \cap \emptyset = \emptyset$ | e) $A \cup X = X$ | f) $A \cap X = A$ |
| g) $A \cup A' = X$ | h) $A \cap A' = \emptyset$ | i) $(A')' = A$ |

6) Zjednodušte:

a) $A \cup (A \cap B) =$

c) $(A \cap B') \cup B =$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap B') =$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) =$

Riešenie

a) $A \cup (A \cap B) = A$

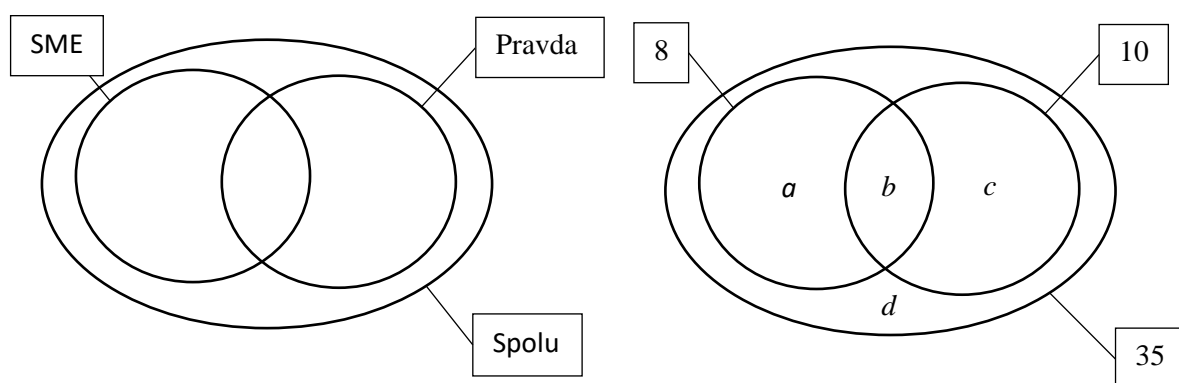
c) $(A \cap B') \cup B = A \cup B$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$

7) Z 35 žiakov odoberá denník SME 8 žiakov, Pravdu 10 žiakov, 21 žiakov neodoberá žiadne z týchto novín. Koľko žiakov odoberá obidvoje noviny.

Riešenie:



$35 \rightarrow \text{Spolu}$

$8 \rightarrow \text{SME}$

$10 \rightarrow \text{Pravda}$

$21 \rightarrow \text{Žiadne noviny}$

$? \rightarrow \text{Oboje noviny}$

$35 = a + b + c + d$

$8 = a + b$

$10 = b + c$

$d = 21$

$b = ?$

Najskôr si spočítajme, koľko žiakov odoberá nejaké noviny (Pravdu alebo SME)

$|\text{Spolu}| - |\text{žiadne noviny}| = (a + b + c + d) - d = 35 - 21 = 14 = a + b + c.$

Teraz môžeme ľahko vypočítať **a** aj **c** a z nich potom **b**, alebo jednoducho sčítame počet čitateľov SME a čitateľov Pravdy, dostaneme:

$|\text{SME}| + |\text{Pravda}| = (a + b) + (b + c) = 10 + 8 = 18 = a + 2b + c$

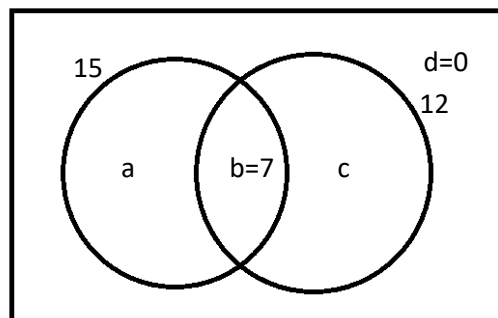
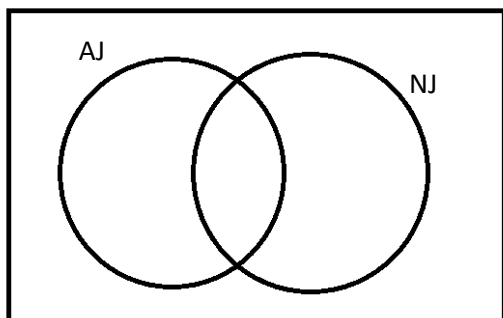
Odčítaním našich dvoch výsledkov nám vyjde hľadané **b**:

$(a + 2b + c) - (a + b + c) = 18 - 14 = 4 = b$

Výsledok: Obidvoje noviny odoberajú 4 žiaci.

8. Na recepcii na vyslanectve každý ovláda aspoň jeden cudzí jazyk, 15 ľudí hovorí po anglicky, 12 po nemecky a 7 obidvoma jazykmi. Z koľkých ľudí sa skladá táto spoločnosť, ak v spoločnosti nikto iný jazyk neovláda?

Riešenie:



$$\text{Spolu} = ? \quad a + b + c + d$$

$$AJ = 15 \quad a + b = 15$$

$$NJ = 12 \quad b + c = 12$$

$$\text{Iný} = 0 \quad d = 0$$

$$AJ \text{ a } NJ = 7 \quad b = 7$$

Najskôr si spočítajme, koľko ľudí hovorí len po anglicky

$$a = (a + b) - b = 15 - 7 = 8$$

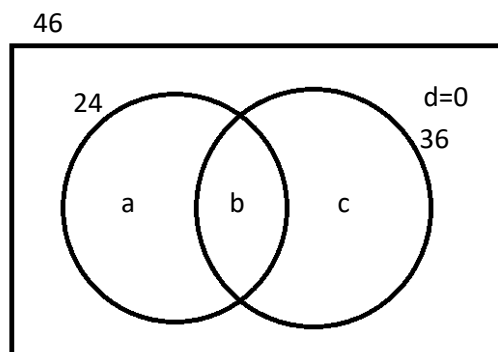
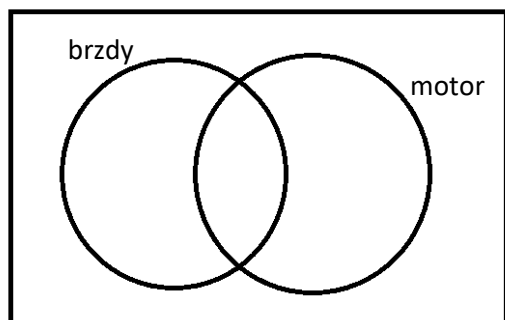
Teraz si spočítajme, koľko ľudí hovorí len po nemecky

$$c = (b + c) - b = 12 - 7 = 5$$

A teda táto spoločnosť sa skladá z $a + b + c + d = 8 + 7 + 5 + 0 = \mathbf{20}$ ľudí.

9. Za jeden deň opravili v autodielni na 46 autách 24 chýb na brzdách a 36 chýb na motore. Koľko áut malo chybu len na brzdách a koľko len na motore?

Riešenie:



$$\text{Spolu} = 46 \qquad a + b + c + d = 46$$

$$\text{brzdy} = 24 \qquad a + b = 24$$

$$\text{motor} = 36 \qquad b + c = 36$$

$$\text{Iný} = 0 \qquad d = 0$$

$$\text{motor a brzdy} \qquad b$$

$$\text{len motor} \qquad c = ?$$

$$\text{len brzdy} \qquad a = ?$$

Najskôr si spočítajme, koľko áut malo chybu na brzdách aj na motore

$$b = (a + b) + (b + c) + d - (a + b + c + d) = (24 + 36 + 0) - 46 = 60 - 46 = 14$$

Teraz si spočítajme, koľko áut malo chybu len na brzdách

$$a = (a + b) - b = 24 - 14 = 10$$

Teraz si spočítajme, koľko áut malo chybu len na motore

$$c = (b + c) - b = 36 - 14 = 22$$

A teda **22** áut malo chybu len na motore a **10** áut malo chybu len na brzdách.

- 10) V triede je 18 žiakov, každý z nich ovláda anglický jazyk alebo francúzsky jazyk alebo nemecký jazyk. Anglický jazyk ovláda desať žiakov, štyria ovládajú iba nemecký jazyk a jeden iba francúzsky jazyk. Piaty ovládajú aj nemecký aj francúzsky jazyk. Koľko žiakov vie hovoriť všetkými tromi jazykmi?

Riešenie:

$$|A| = 4 \dots\dots\dots \text{iba nemecký jazyk}$$

$$|C| = 1 \dots\dots\dots \text{iba francúzsky jazyk}$$

$$|D| = ? \dots\dots\dots \text{všetky tri jazyky}$$

$$|E + D + F + G| = 10 \dots \text{anglický jazyk}$$

$$|A + B + C + D + E + F + G| = 18 \dots \text{všetci žiaci}$$

$$|4 + B + 1 + 10| = 18$$

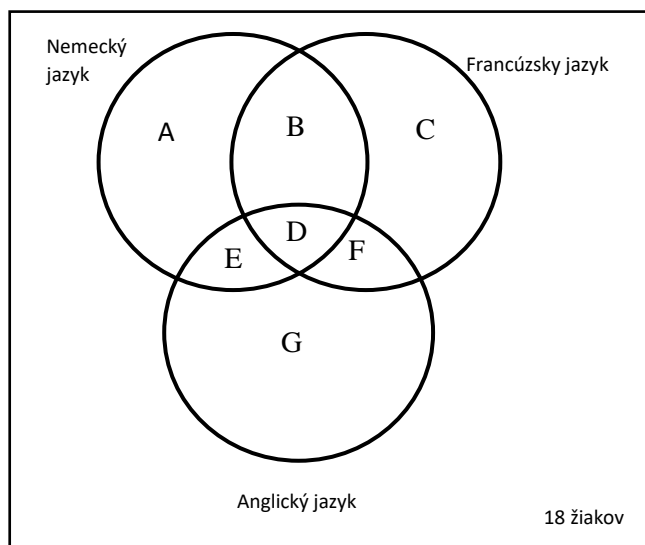
$$|B + 15| = 18$$

$|B| = 3 \dots\dots\dots$ študenti hovoriaci francúzsky aj nemecky, ale nehovoriaci anglicky

$|B + D| = 5 \dots\dots\dots$ študenti hovoriaci francúzsky aj nemecky (môžu a nemusia hovoriť aj anglicky)

$$|D| = 2 \dots\dots\dots \text{všetky tri jazyky}$$

Všetky tri jazyky ovládajú 2 žiaci.



- 11) Na FIIT sa zapísalo 509 študentov. Na hodine telesnej výchovy sa študenti mohli zapísať k plavcom, neplavcom, po predložení potrebných dokumentov k študentom so zdravotným problémom, no našli sa aj ulievači, ktorí sa nezapísali ani do jednej z týchto skupín. K študentom so zdravotným problémom sa zapísalo 32 ľudí. K plavcom alebo neplavcom sa zapísalo 439 ľudí. Koľko študentov sa nezapísalo ani do jednej zo skupín.

Riešenie:

a : plavci

b: neplavci

c: študenti so zdravotným problémom

d: ulievači

$$a + b + c + d = 509$$

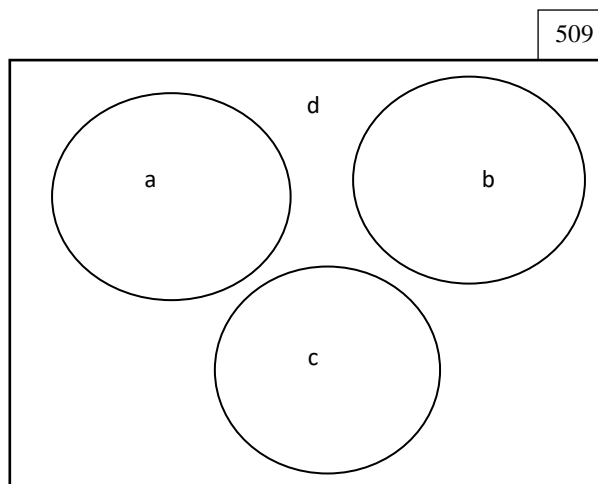
$$c = 32$$

$$a + b = 439$$

$$439 + 32 + d = 509$$

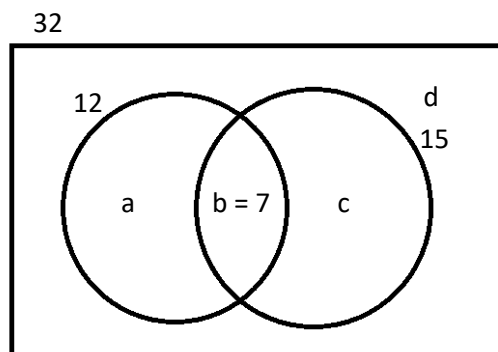
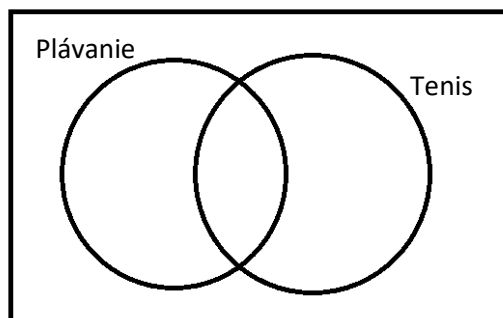
$$d = 509 - 439 - 32$$

$$d = 38$$



12. Trieda má 32 žiakov. Z toho je 12 plavcov a 15 tenistov. Oba športy pestuje 7 žiakov. Koľko žiakov pestuje plávanie alebo tenis? Koľko žiakov nepestuje ani plávanie a ani tenis?

Riešenie:



$$\text{Spolu} = 32 \quad a + b + c + d = 32$$

$$\text{Plávanie} = 12 \quad a + b = 12$$

$$\text{Tenis} = 15 \quad b + c = 15$$

$$\text{Ani jedno} \quad d = ?$$

$$\text{Plávanie a tenis} \quad b = 7$$

$$\text{Plávanie alebo tenis} \quad a + b + c = ?$$

Najskôr si spočítajme, koľko žiakov pestuje len plávanie

$$a = (a + b) - b = 12 - 7 = 5$$

Teraz si spočítajme, koľko žiakov pestuje len tenis

$$c = (b + c) - b = 15 - 7 = 8$$

Teraz si spočítajme, koľko žiakov pestuje plávanie alebo tenis

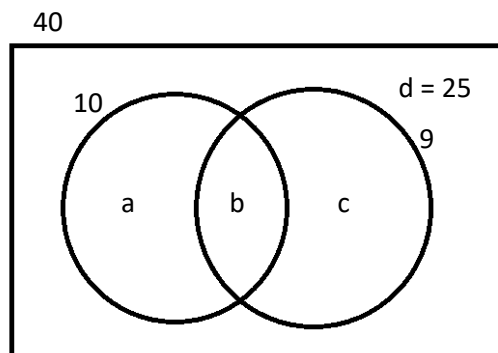
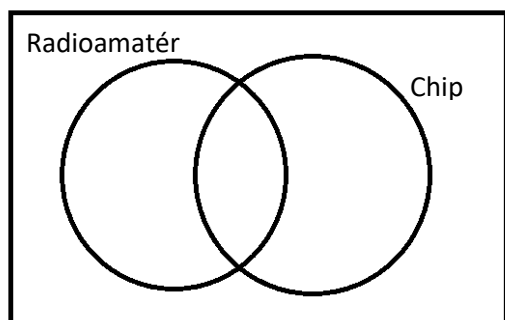
$$a + b + c = 5 + 7 + 8 = 20$$

A teda **20** žiakov pestuje plávanie alebo tenis.

Vidíme, že ani plávanie a ani tenis pestuje $d = (\text{spolu}) - (\text{plávanie alebo tenis}) = 32 - 20 = \mathbf{12}$ žiakov.

13. V triede je 40 žiakov. Z toho 10 žiakov odoberá časopis Radioamatér, 9 žiakov Chip. Žiadny časopis neodoberá 25 žiakov. Koľko žiakov odoberá iba Chip? Koľko žiakov odoberá iba časopis Radioamatér? Koľko žiakov odoberá oba časopisy?

Riešenie:



$$\text{Spolu} = 40 \quad a + b + c + d = 40$$

$$\text{Radioamatér} = 10 \quad a + b = 10$$

$$\text{Chip} = 9 \quad b + c = 9$$

$$\text{Žiadny} = 25 \quad d = 25$$

$$\text{Oba časopisy} \quad b = ?$$

$$\text{iba Radioamatér} \quad a = ?$$

$$\text{iba Chip} \quad c = ?$$

Najskôr si spočítajme, žiakov odoberá oba časopisy

$$b = (a + b) + (b + c) + d - (a + b + c + d) = (10 + 9 + 25) - 40 = 44 - 40 = 4$$

Teraz si spočítajme, koľko žiakov odoberá iba časopis Radioamatér

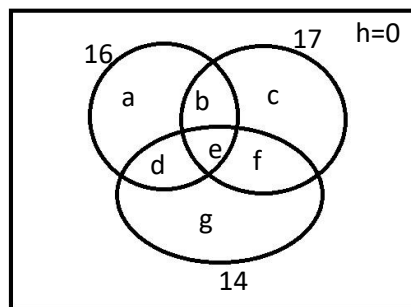
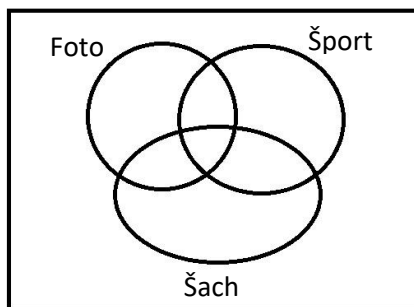
$$a = (a + b) - b = 10 - 4 = 6$$

Teraz si spočítajme, koľko žiakov odoberá iba časopis Chip

$$c = (b + c) - b = 9 - 4 = 5$$

A teda **5** žiakov odoberá iba časopis Chip, **6** žiakov odoberá iba časopis Radioamatér a **4** žiaci odoberajú oba časopisy.

14. V škole pracujú 3 záujmové krúžky: fotografický, športový a šachový. Každý žiak triedy chodí do niektorého z nich. Do fotografického chodí 16 žiakov, do športového 17 a do šachového 14 žiakov. Do fotografického a súčasne športového krúžku chodí 8 žiakov, 6 do fotografického a šachového a 4 do športového a šachového. Celkove 3 žiaci navštevujú všetky tri krúžky. Koľko žiakov je v triede?



Spolu $a + b + c + d + e + f + g + h = ?$

Foto = 16 $a + b + d + e = 16$

Šport = 17 $b + c + e + f = 17$

Šach = 14 $d + e + f + g = 14$

Foto a Šport = 8 $b + e = 8$

Foto a Šach = 6 $d + e = 6$

Šach a Šport = 4 $e + f = 4$

Všetky tri = 3 $e = 3$

Žiadny = 0 $h = 0$

Všimnime si, že

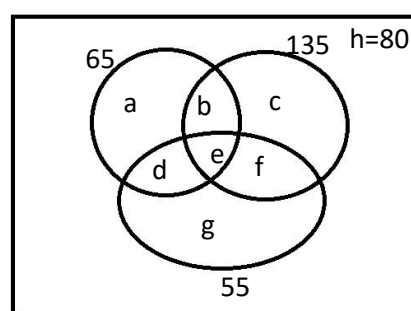
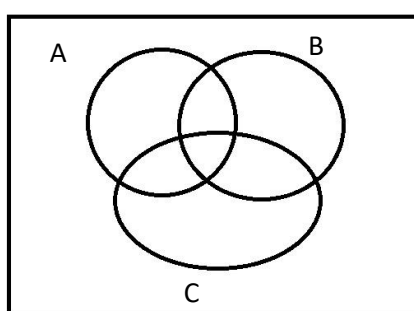
$$\text{Spolu} = \text{Foto} + \text{Šport} + \text{Šach} - (\text{Foto a Šport}) - (\text{Foto a Šach}) - (\text{Šach a Šport}) + \text{Všetky tri} + \text{Žiadny}$$

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f + g + h &= (a + b + d + e) + (b + c + e + f) + (d + e + f + g) - (b + e) - (d + e) - (e + f) + e + h \\ &= (a + 2b + c + 2d + 3e + 2f + g) - (b + d + 3e + f) + e + h \end{aligned}$$

A teda v triede je $16 + 17 + 14 - 8 - 6 - 4 + 3 + 0 = 32$ žiakov.

15. Pražské metro má tri trasy označené A, B a C. Prieskum jednej firmy ukázal, že jeho pracovníci používajú metro nasledovne: trasou A cestuje 65, trasou B 135 a trasou C 55 zamestnancov, metrom necestuje vôbec 80 pracovníkov a všetky tri trasy metra súčasne nepoužíva žiadny pracovník. Trasou A a súčasne trasou B cestuje 40 osôb, trasou A a C cestuje 5 osôb. Trasami B alebo C cestuje 155 ľudí. Podľa daných informácií určite, koľko pracovníkov:

- cestuje iba trasou B
- cestuje trasami A alebo B
- používa práve 2 trasy metra
- je zamestnaných v tejto firme?



Spolu $a + b + c + d + e + f + g + h = ?$

trasou A = 65 $a + b + d + e = 65$

trasou B = 135 $b + c + e + f = 135$

trasou C = 55 $d + e + f + g = 55$

trasou A a B = 40 $b + e = 40$

trasou A a C = 5 $d + e = 5$

trasami B alebo C = 155 $b + c + d + e + f + g = 155$

Všetky tri = 0 $e = 0$

vôbec = 80 $h = 80$

iba B $c = ?$

trasami A alebo B $a + b + c + d + e + f = ?$

práve 2 trasy metra $b + d + f = ?$

a) Všimnime si, že

Iba B = (trasami B alebo C) - (trasou C) - (trasou A a B) + všetky tri

$c = (b + c + d + e + f + g) - (d + e + f + g) - (b + e) + e$

A teda iba trasou B cestuje $155 - 55 - 40 + 0 = 60$ pracovníkov.

b) Všimnime si, že

$$\text{trasami A alebo B} = (\text{trasou A}) + (\text{trasou B}) - (\text{trasou A a B})$$

$$a + b + c + d + e + f = (a + b + d + e) + (b + c + e + f) - (b + e)$$

Preto trasami A alebo B cestuje $65 + 135 - 40 = \mathbf{160}$ pracovníkov.

c) Všimnime si, že

$$\text{práve 2 trasy metra} = (\text{trasou B}) + (\text{trasami A a C}) - (\text{iba trasou B}) - (\text{všetky tri} + \text{všetky tri})$$

$$b + d + f = (b + c + e + f) + (d + e) - c - 2e$$

Práve 2 trasy metra používa $135 + 5 - 60 - 0 = \mathbf{80}$ pracovníkov.

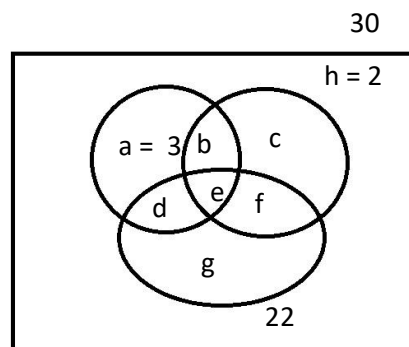
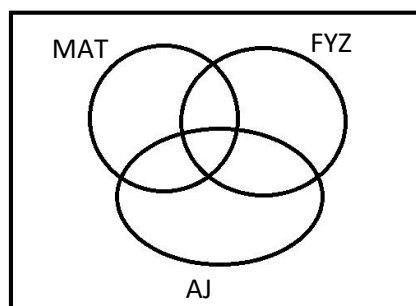
d) Všimnime si, že

$$\text{Spolu} = (\text{trasou A}) + (\text{trasou B}) + (\text{trasou B}) - (\text{práve 2 trasy metra}) - 2 * (\text{všetky tri}) + \text{vôbec}$$

$$(a + b + c + d + e + f + g + h) = (a + b + d + e) + (b + c + e + f) + (d + e + f + g) - (b + d + f) - 2e + h$$

V tejto firme je zamestnaných $65 + 135 + 55 - 80 - 0 + 8 = \mathbf{255}$ pracovníkov.

16) Z 30 žiakov triedy chce jedna tretina maturovať z matematiky a z fyziky. Niektorý z týchto predmetov si vybralo 24 žiakov. Z angličtiny chce maturovať celkom 22 žiakov. Osem žiakov si vybralo všetky tri tieto maturitné predmety. Iba matematiku si vybrali 3 žiaci, matematiku i angličtinu 15 žiakov a 2 žiaci žiadny z uvedených predmetov. Koľko študentov chce maturovať z fyziky? Koľko študentov chce maturovať iba z angličtiny? Koľko študentov chce maturovať iba z fyziky? Koľko študentov chce maturovať z angličtiny a zároveň z fyziky?



$$\text{Spolu} \quad a + b + c + d + e + f + g + h = 30$$

$$\text{MAT a FYZ} \quad b + e = \frac{1}{3} * 30 = 10$$

$$\text{MAT alebo FYZ} \quad a + b + c + d + e + f = 24$$

$$\text{AJ} \quad d + e + f + g = 22$$

$$\text{Iba MAT} \quad a = 3$$

$$\text{MAT aj AJ} \quad d + e = 15$$

Všetky tri	$e = 8$
Žiadny	$h = 2$
FYZ	$b + c + e + f = ?$
Iba AJ	$g = ?$
Iba FYZ	$c = ?$
AJ a FYZ	$e + f = ?$

Všimnime si, že

$$\begin{aligned} \text{Iba AJ} &= \text{Spolu} - \text{Žiadny} - \text{MAT alebo FYZ} \\ g &= (a + b + c + d + e + f + g + h) - h - (a + b + c + d + e + f) \\ &= 30 - 2 - 24 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Iba FYZ} &= \text{Spolu} - \text{Žiadny} - \text{AJ} - \text{iba MAT} - \text{MAT a FYZ} + \text{Všetky tri} \\ c &= (a + b + c + d + e + f + g + h) - h - (d + e + f + g) - a - (b + e) + e \\ &= 30 - 2 - 22 - 3 - 10 + 8 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AJ a FYZ} &= \text{Spolu} - \text{Žiadny} - \text{iba MAT} - \text{iba AJ} - \text{iba F} - \text{MAT a FYZ} - \text{MAT a AJ} + 2 * \text{Všetky tri} \\ e + f &= (a + b + c + d + e + f + g + h) - h - a - g - c - (b + e) - (d + e) + 2e \\ &= 30 - 2 - 3 - 4 - 1 - 10 - 15 + 16 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{FYZ} &= \text{iba FYZ} + \text{AJ a FYZ} + \text{Mat a FYZ} - \text{Všetky tri} \\ b + c + e + f &= c + (e + f) + (b + e) - e \\ &= 1 + 11 + 10 - 8 = 14 \end{aligned}$$

Z fyziky chce maturovať **14** študentov. Iba z angličtiny chcú maturovať **4** študenti. Iba z fyziky chcú maturovať **1** študenti. Z angličtiny a zároveň z fyziky chce maturovať **11** študentov

17) V kancelárii cestovnej kancelárie „Dovolenka“ predali počas jedného dňa celkove 166 poukazov na zahraničné zájazdy. Leteckých zájazdov sa predalo dvakrát viac než zájazdov do Chorvátska. Zájazdov do Chorvátska, ktoré nie sú letecké, sa predalo o 40 viac ako leteckých zájazdov do Chorvátska. Zájazdov, ktoré nie sú ani letecké ani do Chorvátska, bolo predaných o 30 menej než tých zájazdov do Chorvátska, ktoré nie sú letecké. Koľko bolo predaných zájazdov do Chorvátska? Koľko bolo predaných leteckých zájazdov inam ako do Chorvátska?

A = Chorvátsko letecké zajazdy	C = inam letecké zajazdy
B = Chorvátsko neletecké zajazdy	D = inam neletecké zajazdy

Spolu: $A + B + C + D = 166$

Leteckých zájazdov sa predalo dvakrát viac než zájazdov do Chorvátska $\Rightarrow (A + C) = 2 \cdot (A + B)$

Zájazdov do Chorvátska, ktoré nie sú letecké, sa predalo o 40 viac ako leteckých zájazdov do Chorvátska $\Rightarrow B = A + 40$

Zájazdov, ktoré nie sú ani letecké ani do Chorvátska, bolo predaných o 30 menej než tých zájazdov do Chorvátska, ktoré nie sú letecké. $\Rightarrow D = B - 30$

Koľko bolo predaných zájazdov do Chorvátska? $\Rightarrow A + B = ?$

Koľko bolo predaných leteckých zájazdov inam ako do Chorvátska? $\Rightarrow C + D = ?$

$$A + C = 2A + 2B \Rightarrow C = A + 2B$$

$$A + B + C + D = 166 \Rightarrow A + B + (A + 2B) + (B - 30) = 2A + 4B - 30 = 166$$

$$B = A + 40 \Rightarrow 2A + 4B - 30 = 2A + 4 \cdot (A + 40) - 30 = 6A + 130 = 166 \Rightarrow A = (166 - 130) / 6 = 6$$

$$B = A + 40 = 6 + 40 = 46$$

$$C = A + 2B = 6 + 2 \cdot 46 = 6 + 92 = 98$$

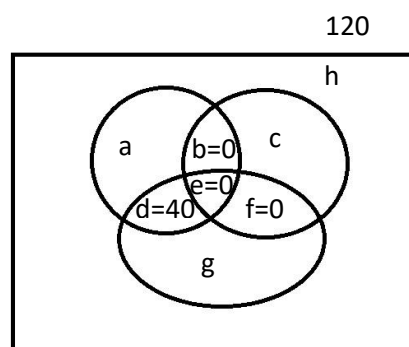
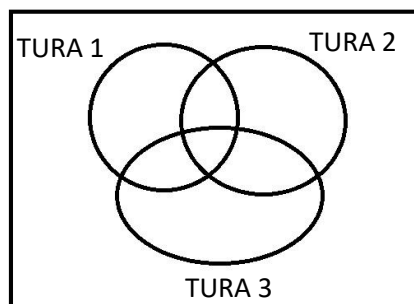
$$D = B - 30 = 46 - 30 = 16$$

A teda do Chorvátska bolo predaných $6 + 46 = 52$ zájazdov.

Inam ako do Chorvátska bolo predaných **98** zájazdov.

18) Turistický klub so 120 členmi organizoval v počas roka 3 túry. Zistite, koľko členov absolvovalo jednotlivé túry a koľko sa nezúčastnilo na žiadnej z nich, ak:

- nikto neabsolvoval 2 túry za sebou
- aspoň na jednej túre sa zúčastnilo 90% členov klubu
- na dvoch túrach sa zúčastnila $1/3$ členov klubu
- na druhej túre bolo o 20 členov menej ako na prvej túre a o osem menej ako na tretej túre?



Spolu $a+b+c+d+e+f+g+h = 120$

nikto neabsolvoval 2 túry za sebou $\Rightarrow b=0 ; e=0; f=0$

aspoň na jednej túre sa zúčastnilo 90% členov klubu $\Rightarrow a + b + c + d + e + f + g = 0.9 * 120 = 108$

na dvoch túrach sa zúčastnila 1/3 členov klubu $\Rightarrow d = 120/3 = 40$

na druhej túre bolo o 20 členov menej ako na prvej túre a o osem menej ako na tretej túre \Rightarrow

$$b + c + e + f = a + b + d + e - 20 \Rightarrow c = a + 40 - 20 = a + 20$$

$$b + c + e + f = d + e + f + g - 8 \Rightarrow c = 40 + g - 8 = g + 32$$

Všimnime si, že na žiadnej z nich sa nezúčastnilo spolu - aspoň na jednej túre sa zúčastnilo 90% členov klubu $= 120 - 108 = 12$ členov.

Všimnime si, že

aspoň na jednej túre sa zúčastnilo 90% členov klubu \Rightarrow

$$a + b + c + d + e + f + g = a + c + 40 + g = 108$$

Keďže $a = c - 20$ a $g = c - 32$, platí

$$c - 20 + c + 40 + c - 32 = 108 \Rightarrow 3c - 12 = 108 \Rightarrow c = 120/3 = 40, a = 20, g = 8$$

A teda na prvej túre sa zúčastnilo $20 + 40 = 60$, na druhej **40** a na tretej $8 + 40 = 48$ členov.