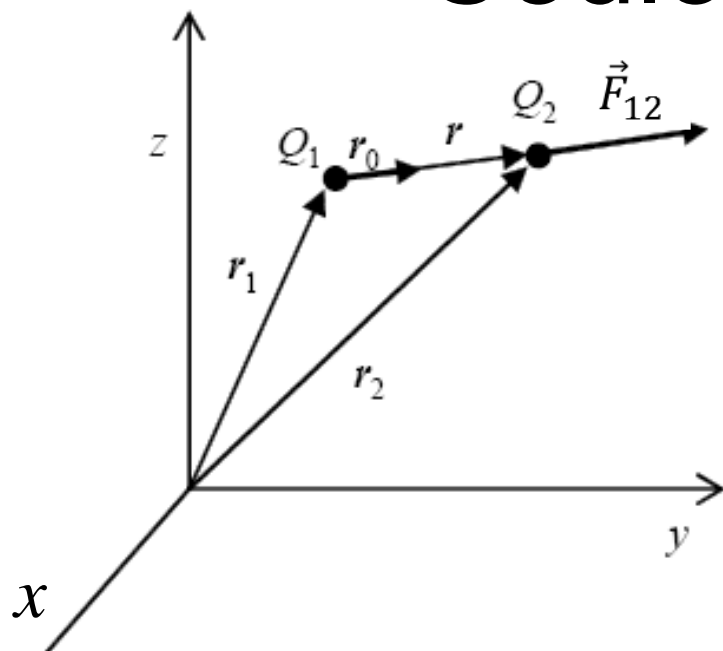


Elektrostatické pole

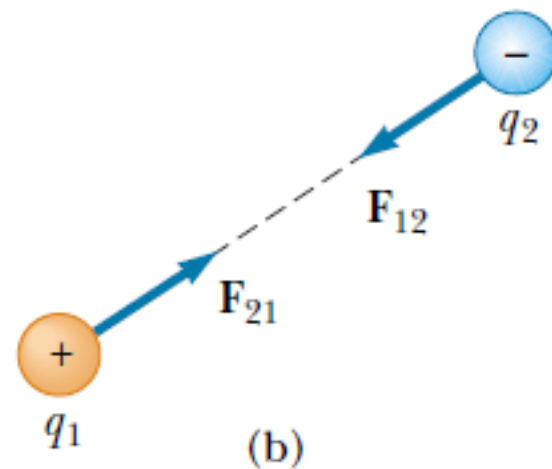
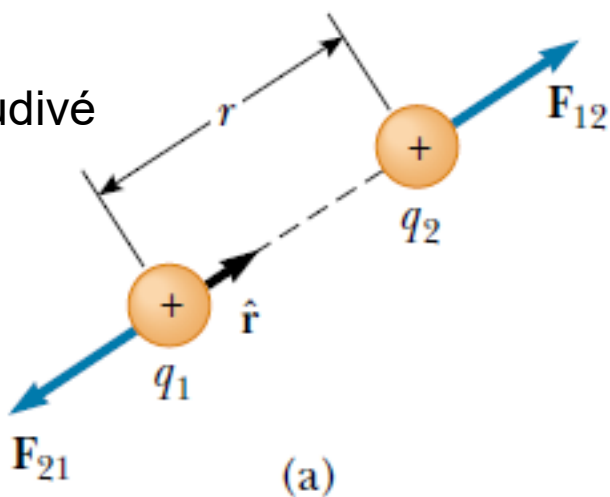
Coulombov zákon



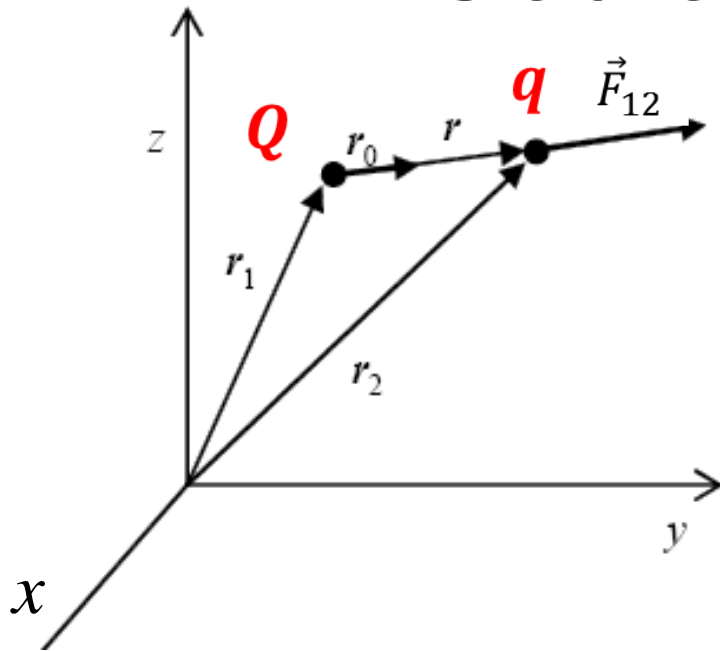
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r} \begin{cases} Q_1 Q_2 > 0 & \vec{F} \uparrow\uparrow \vec{r} \\ Q_1 Q_2 < 0 & \vec{F} \uparrow\downarrow \vec{r} \end{cases}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,854187818 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

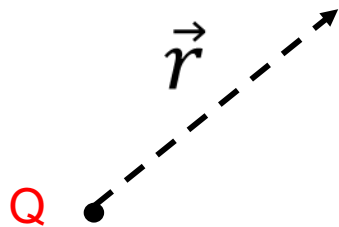
Akcia reakcia
Sily-príťažlivé, odpudivé



Coulombov zákon



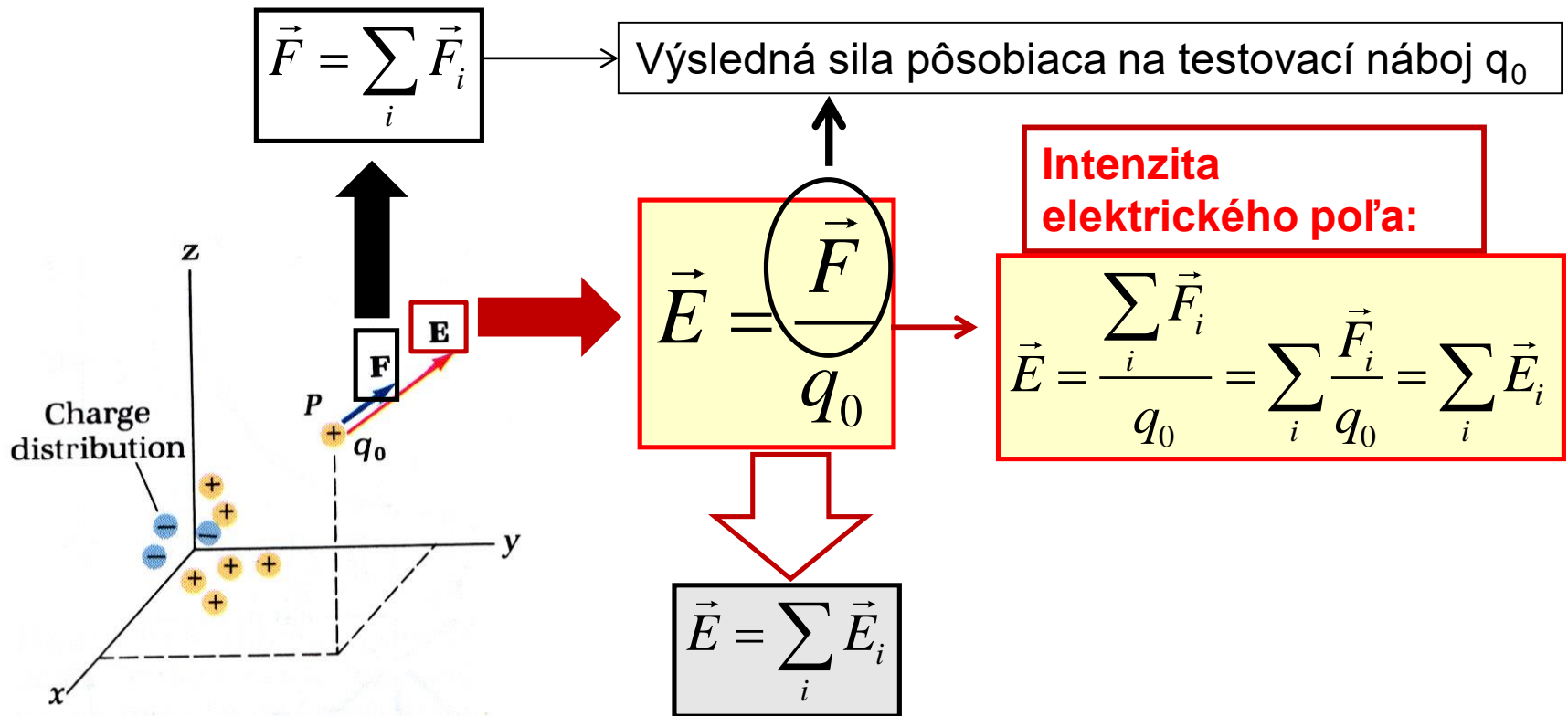
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \vec{r}$$



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

Princíp superpozície

Intenzita elektrostatičkého poľa



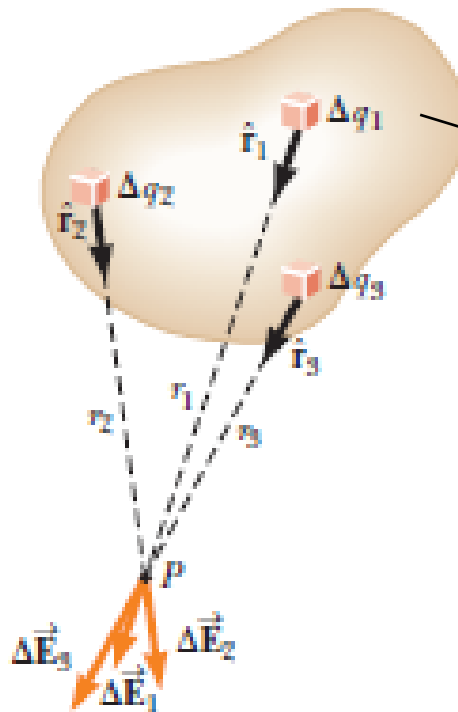
Tehnika výpočtu pri spojite rozloženom náboji

Princíp superpozície

Spojite rozložený náboj popisujeme

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$
$$\sigma = \frac{dQ}{dA}$$

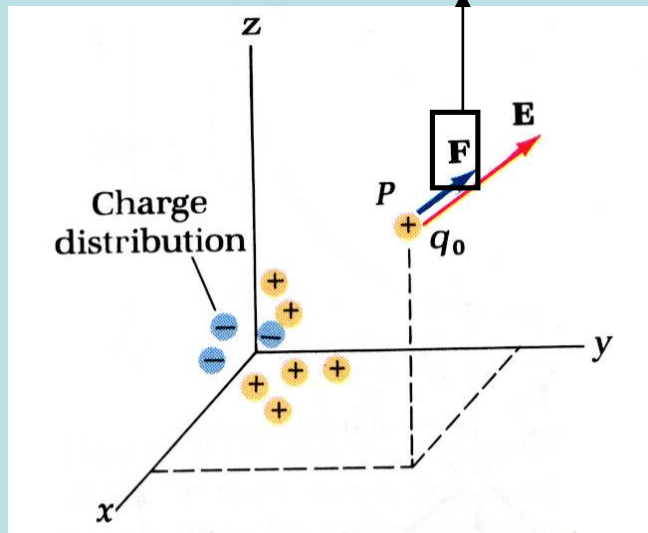
Nabité telesá, plochy, vlákna

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}$$


$$\rho dV$$
$$dq = \lambda dl$$
$$\sigma dS$$

Intenzita E

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$



Sústava bodových nábojov

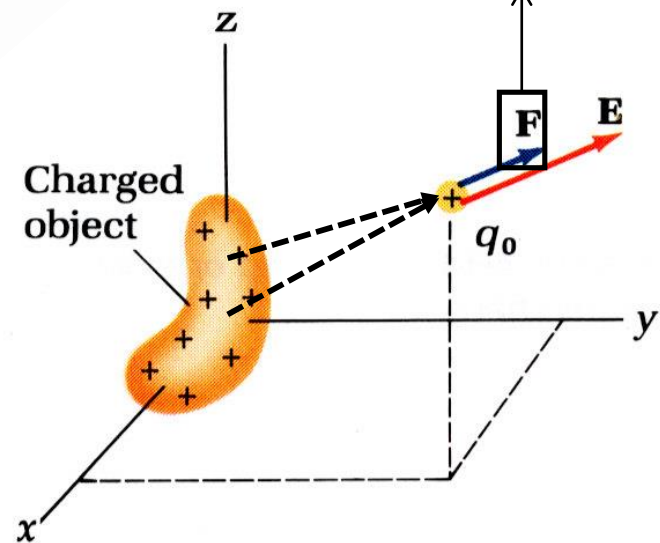
Elektrické pole spojte rozloženého náboja

$$\sigma = \frac{dQ}{dA}$$

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \\ \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\Sigma dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \\ \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_\Gamma \frac{\lambda dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \end{cases}$$



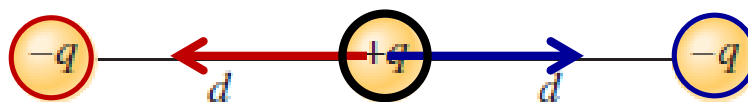
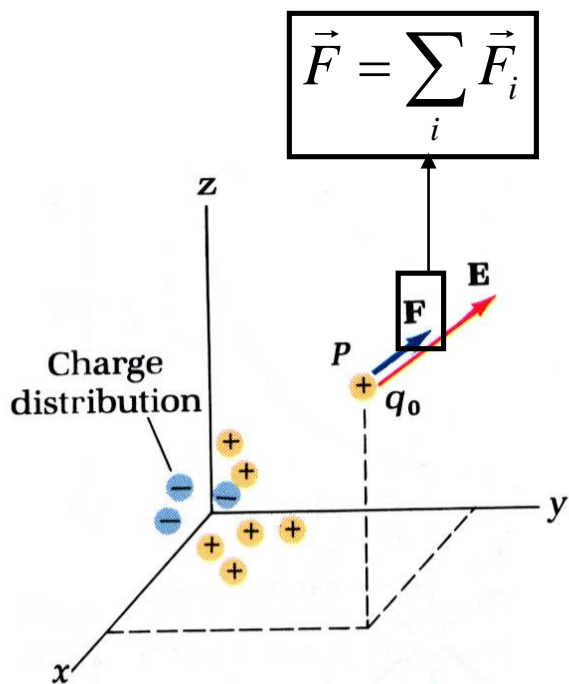
Sústava spojte rozložených nábojov

**Intenzita elektrického poľa
budená sústavou nábojov:**

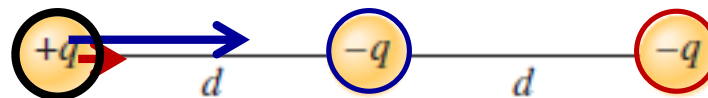
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Princíp superpozície

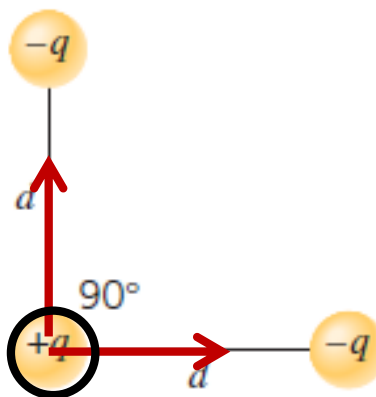
Určte výslednú silu pôsobiacu na „čierny“ náboj



$$\vec{F} = \vec{0}$$

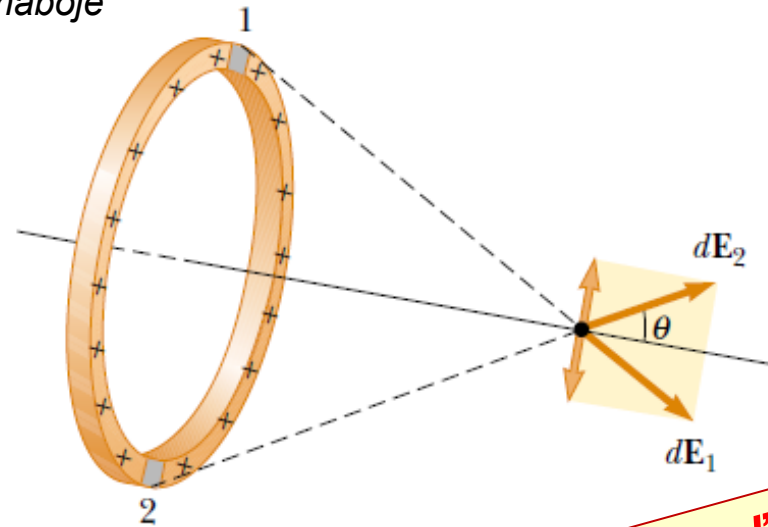
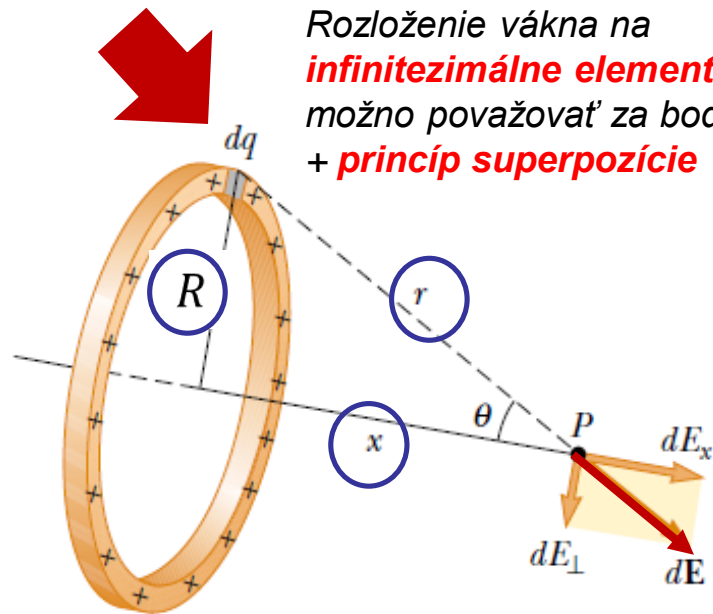


$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2d)^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \frac{5}{4}$$



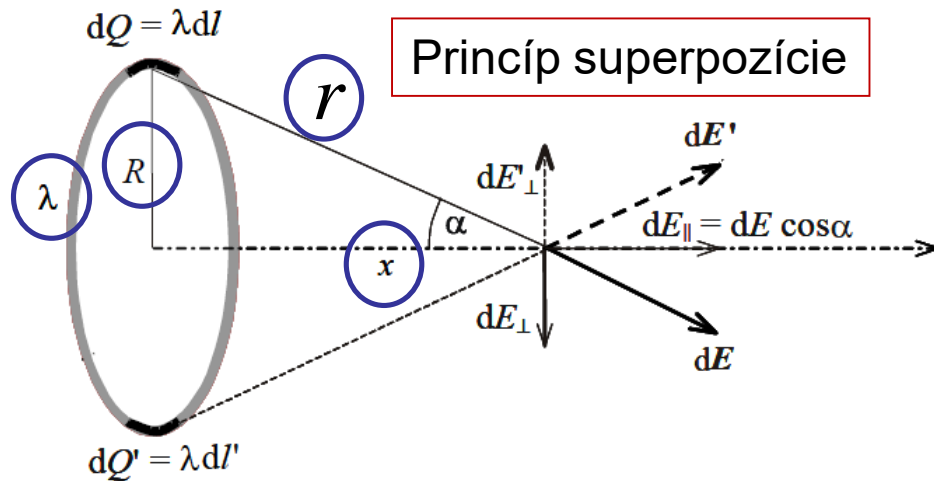
$$F = \sqrt{\left[\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \right]^2 + \left[\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \right]^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \sqrt{2}$$

Elektrické pole na osi rovnomerne nabitého kruhového vlákna



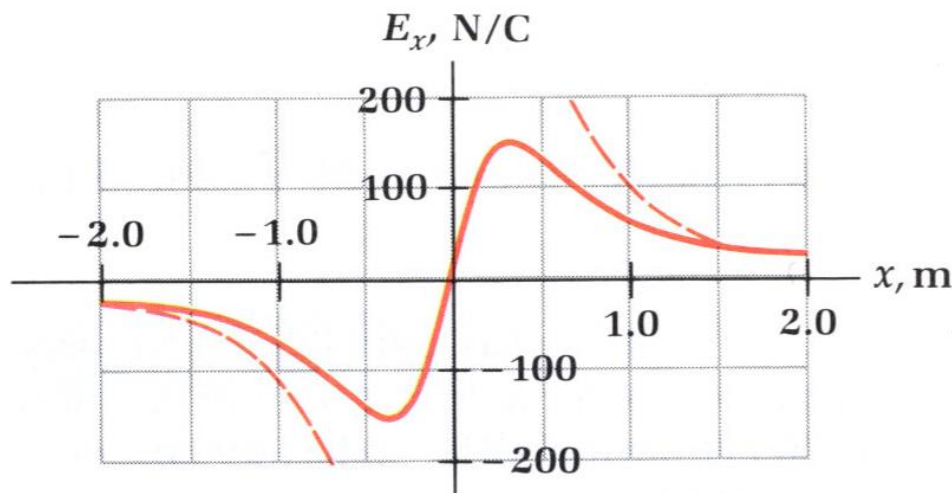
Kolmé zložky intenzity poľa od segmentu 1 a 2 sa vzájomne kompenzujú

Elektrické pole na osi nabitého kruhového vlákna



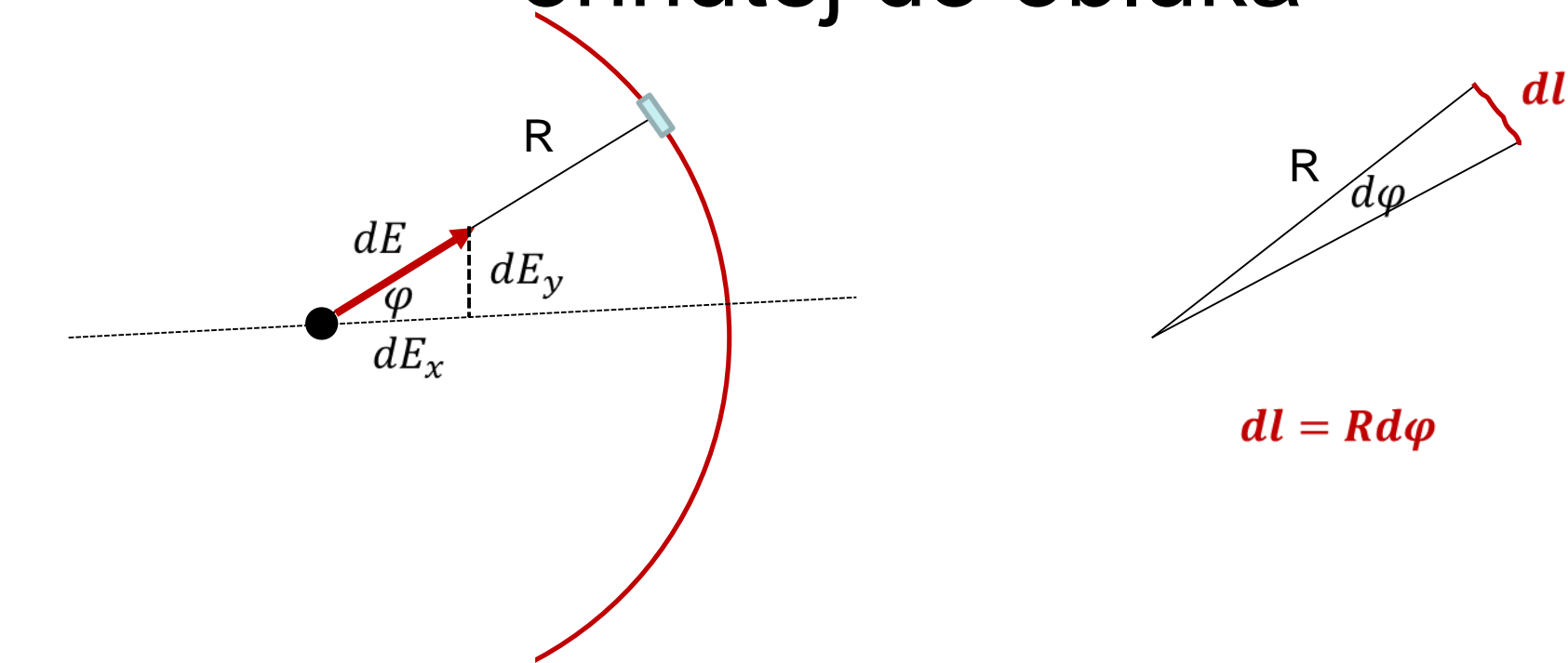
Na vlákne je rovnomerne rozmiestnený kladný elektrický náboj, ktorého dĺžková hustota je λ .

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



$$x \gg R \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2}$$

Elektrické pole záporně nabité tyče ohnutej do oblúka

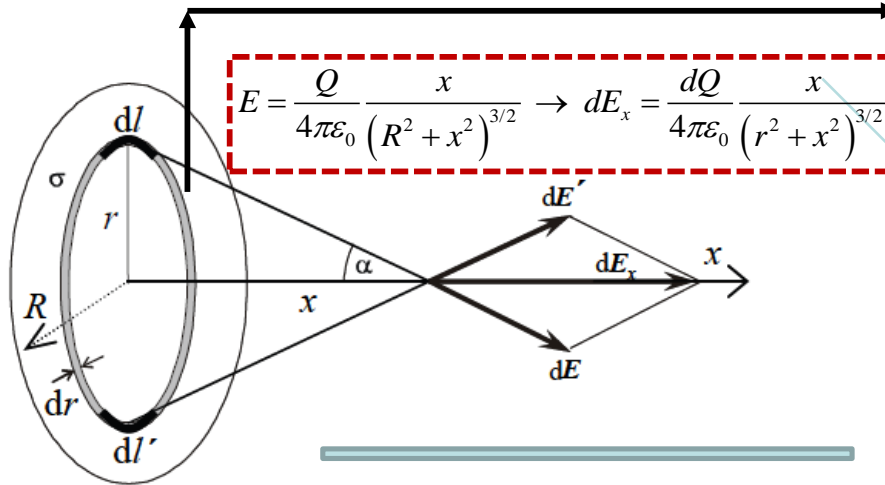


$$dl = R d\varphi$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\varphi}{R^2} \cos \varphi$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} \sin \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\varphi}{R^2} \sin \varphi$$

Elektrické pole na osi homogénne nabitej kruhovej dosky



$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \rightarrow dE_x = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Princíp superpozície:

Dosku si môžeme vytvoriť zo sústredných kruhových elementov – nabitých vlákien, ktorých šírka je dr a polomer r .

Intenzita kruhového vlákna

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right\}$$

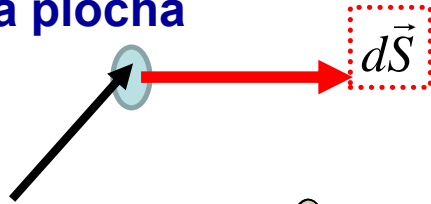
$$dE_x = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Intenzita od nekonečnej roviny, t.j. $R \rightarrow \infty$ $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

TOK INTENZITY ELEKTRICKÉHO POĽA

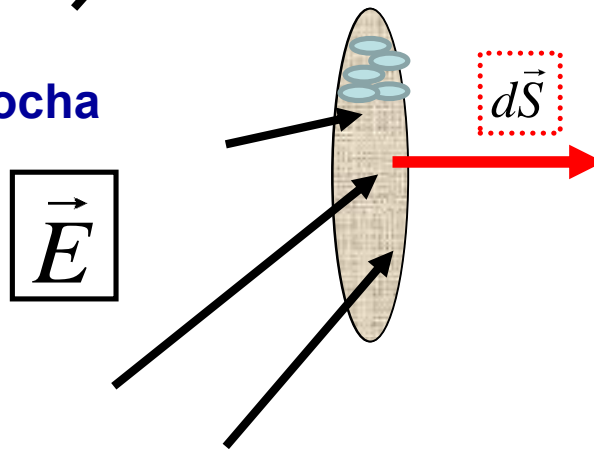
Tok intenzity elektrického poľa

Nekonečne malá plocha

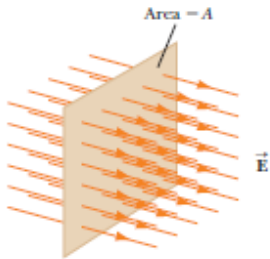


$$d\Phi = \vec{E} \bullet d\vec{S}$$

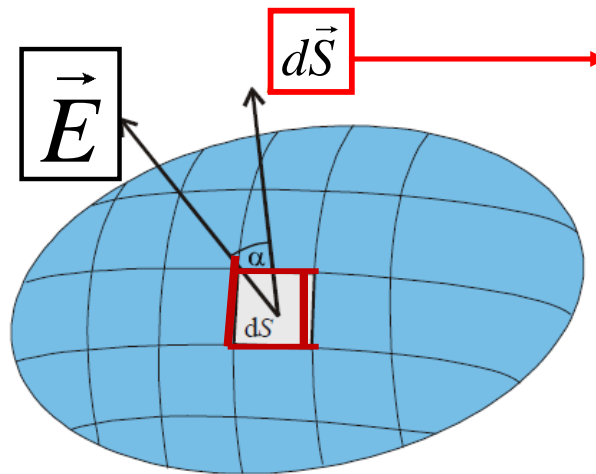
Otvorená plocha



$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{E} \bullet d\vec{S}$$

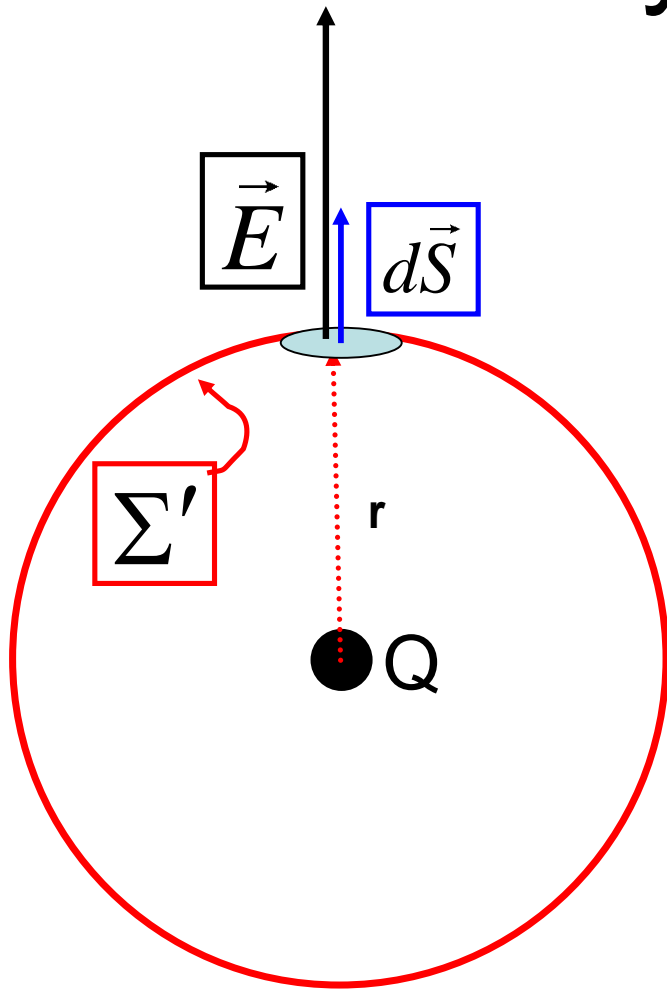


Uzavretá plocha



$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \bullet d\vec{S}$$

Tok intenzity cez guľovú plochu



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$\oint_{\Sigma'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma'} |\vec{E}| dS \cos 0^\circ = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Zdrojom toku intenzity cez uzavretú plochu je náboj.

**TOK OD BODOVÉHO NÁBOJA
NAZÁVISÍ OD POLOMERU
GUĽOVEJ PLOCHY.**

Pri uzavretých plochách sa zachováva konvencia, že vektor plochy $d\vec{S}$ má smer normály na plochu a je vždy orientovaný von z uzavretej plochy.

Prečo je to tak ????

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1^2}$$

$$dS_1 = \frac{4\pi r_1^2}{N}$$

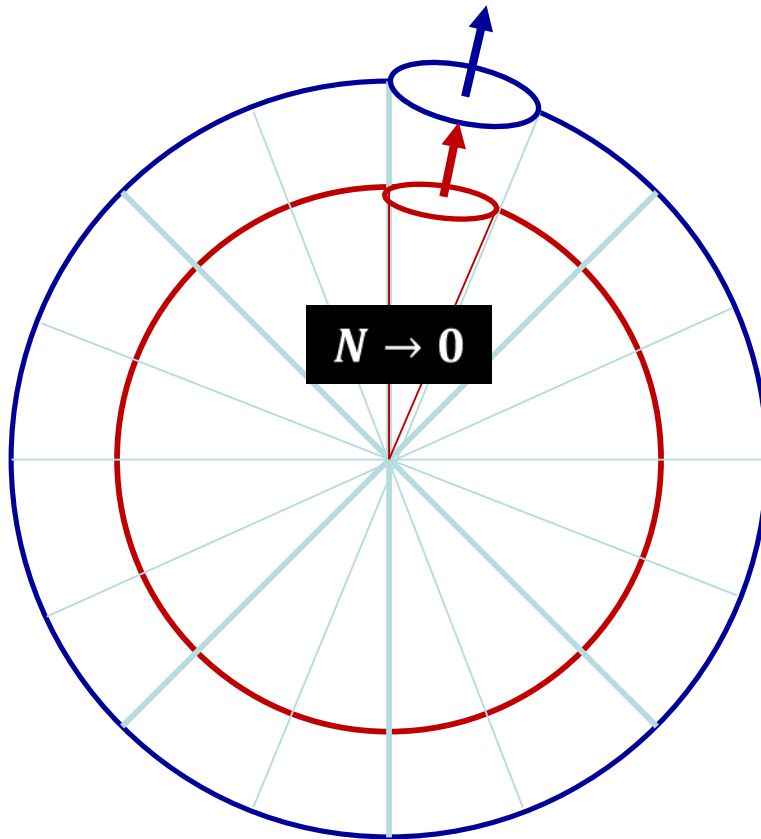
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2^2}$$

$$dS_2 = \frac{4\pi r_2^2}{N}$$

$$E_1 dS_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1^2} \frac{4\pi r_1^2}{N} = \frac{Q}{\epsilon_0 N}$$

$$E_2 dS_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2^2} \frac{4\pi r_2^2}{N} = \frac{Q}{\epsilon_0 N}$$

Toky cez infinitenzimálne plochy sú rovnaké



Ak rozdelíme guľu na N rovnakých dielov na každý diel pripadá plocha $\frac{4\pi r^2}{N}$, to znamená, že jednotlivé plochy dielov sa líšia s r^2

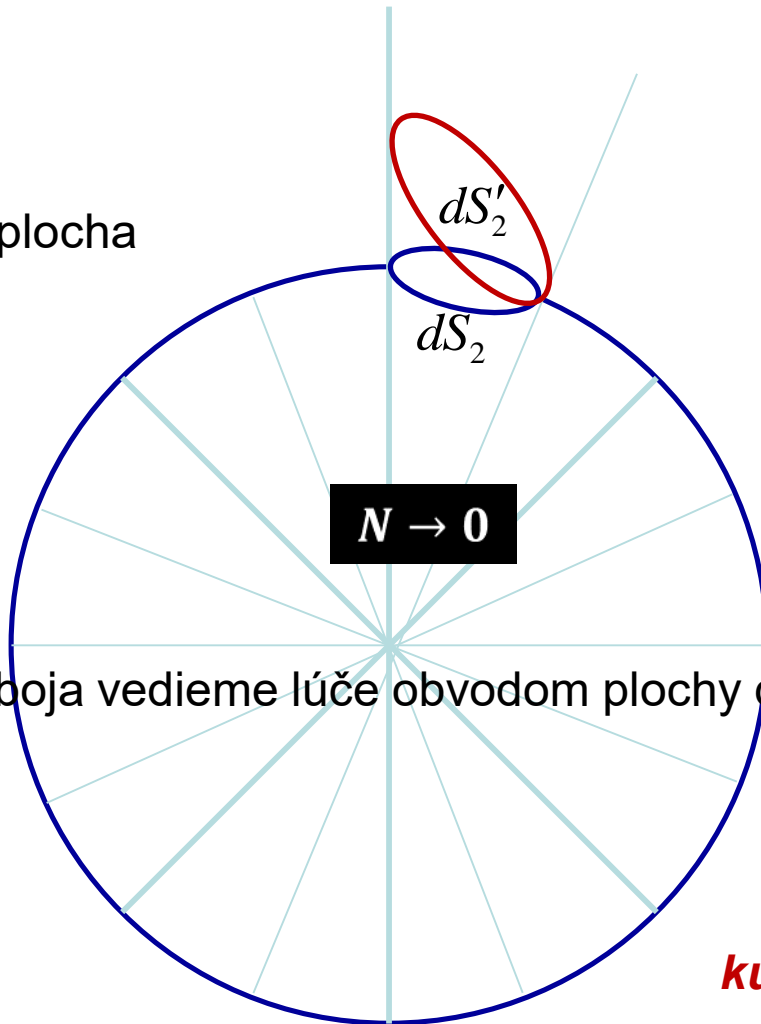
Ak vytvoríme infinitenzimálny kužellový výsek tok poľa cez ľubovoľnú plochu je rovnaký

$$\vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = E_2 dS'_2 \cos\varphi = E_2 dS_2$$

$$\vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = E_2 dS_2$$

Toky cez infinitenzimálne plochy, môžu byť aj sikmé, sú rovnaké

Šikmá plocha

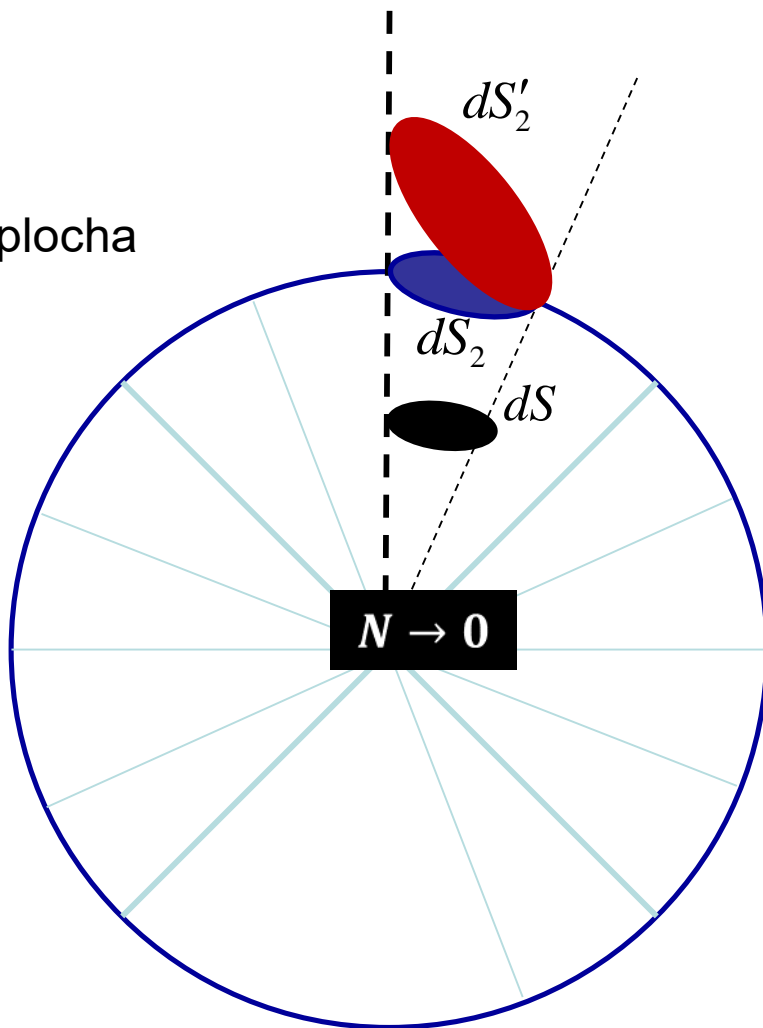


Od naboja vedieme lúče obodom plochy dS plášť takto vzniknutého kužela

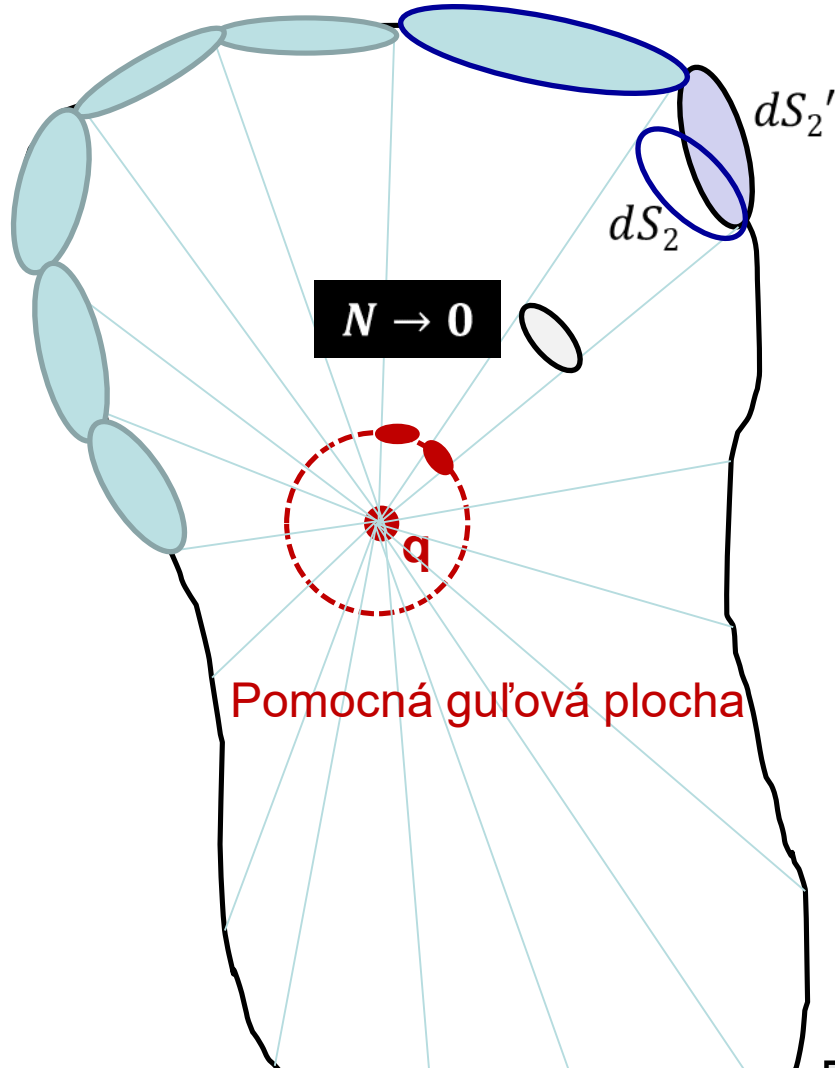


Ak vytvoríme infitenzimálny kuželový/priestorový výsek tok poľa cez ľubovoľnú plochu je rovnaký

Šikmá plocha



***Toky cez všetky plochy
sú rovnaké***



V prípade všeobecnej plochy, ktorá obklopuje bodový náboj q , obklopíme náboj guľovou plochou, ktorá leží vo vnútri plochy. Od náboja vedieme lúče obvodom plochy dS . Plášť tohto vzniknutého kužela vytne na guľovej ploche element dS .

$$\iint_{\text{gula}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{plocha}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Tok cez ľubovoľnú plochu je rovnaký ako cez Guľovú plochu a má hodnotu:

Tok cez komplikovanú čiernu uzavretú plochu je rovnaký ako tok cez pomocnú červenú plochu a ten je rovný Q/ϵ_0

$$\iint_{\text{gula}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{plocha}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Z predchádzajúceho vyplýva:

$$\iint_{S+S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

S'

$$\iint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Pomocná guľová plocha

Výsledok prenesieme na
prípady, keď je náboj mimo
integračnej plochy

S

Náboj je mimo
integračnej modrej
plochy

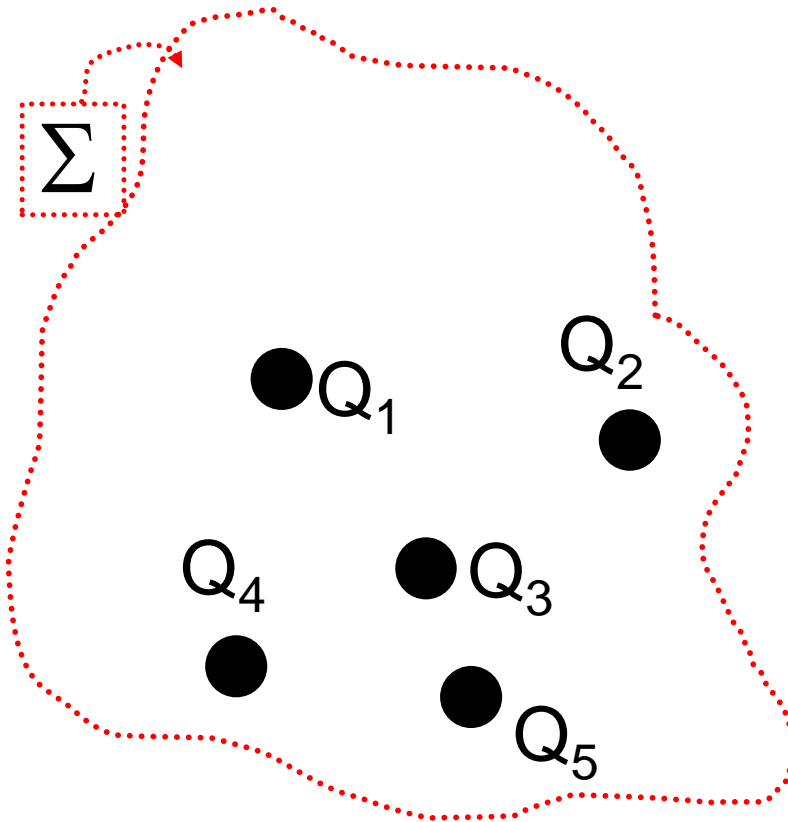
$$\begin{aligned} \iint_{S+S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ \frac{q}{\epsilon_0} &= \frac{q}{\epsilon_0} + \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \end{aligned}$$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Do toku vstupuje len náboj, ohraničený touto plochou

Gaussov zákon v integrálnom tvare

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma} \left[\sum_i \vec{E}_i \right] \cdot d\vec{S} = \sum_i \int_{\Sigma} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$



$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$$

Celkový náboj, ktorý je uzavretý pod
integračnou plochou.

Gaussov zákon :

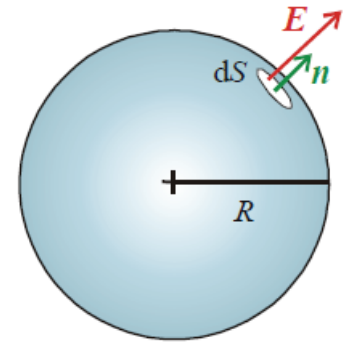
Tok vektora intenzity
elektrostatického poľa vo vákuu cez
uzavretú plochu sa rovná podielu
celkového náboja uzavretého touto
plochou a permitivity vákuu.

Spojenie princípu superpozície +
Coulombovho zákona

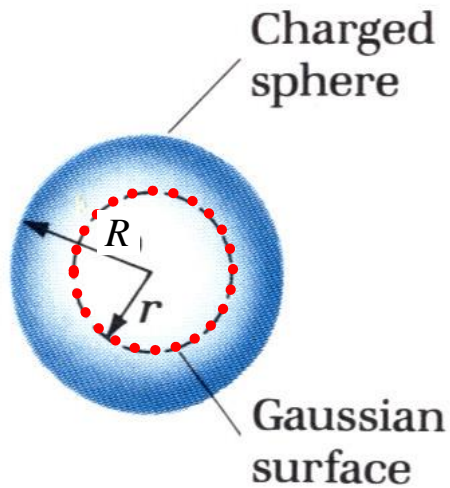
Aplikácie gausovej vety

UMENIE: Hľadanie vhodných
integračných plôch

Pole homogéne nabitej gule

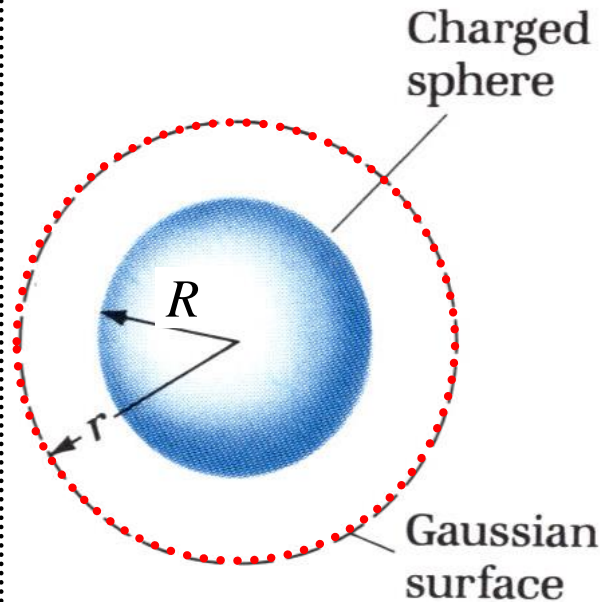


Vo vnútri gule

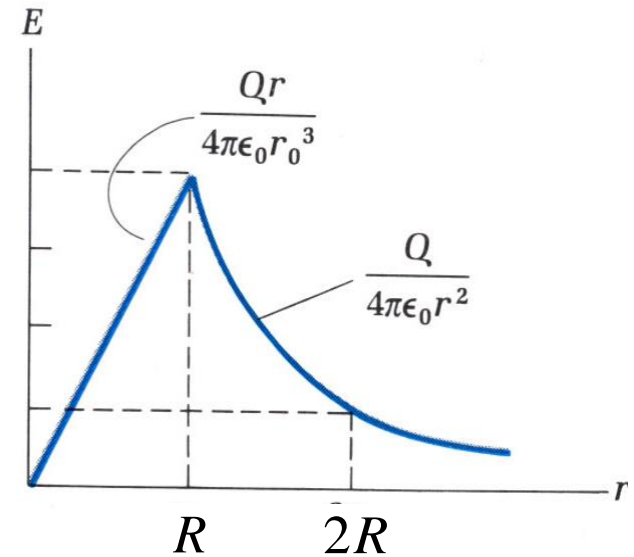


Uzavretá
integračná plocha
 $r < R$

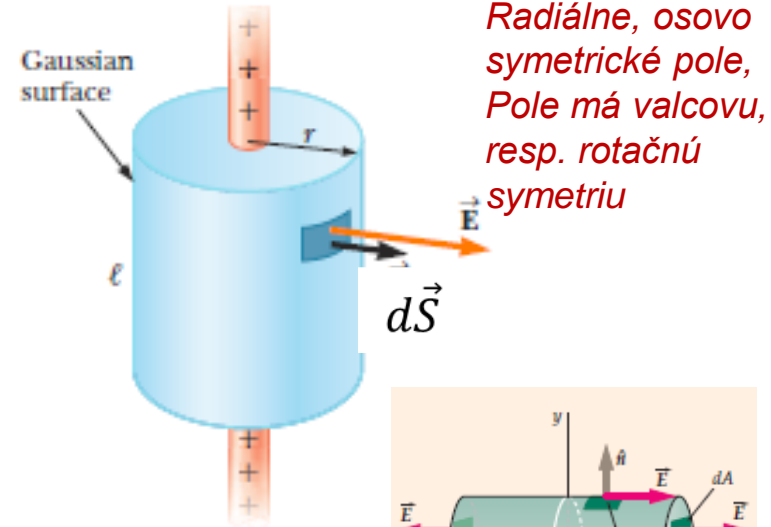
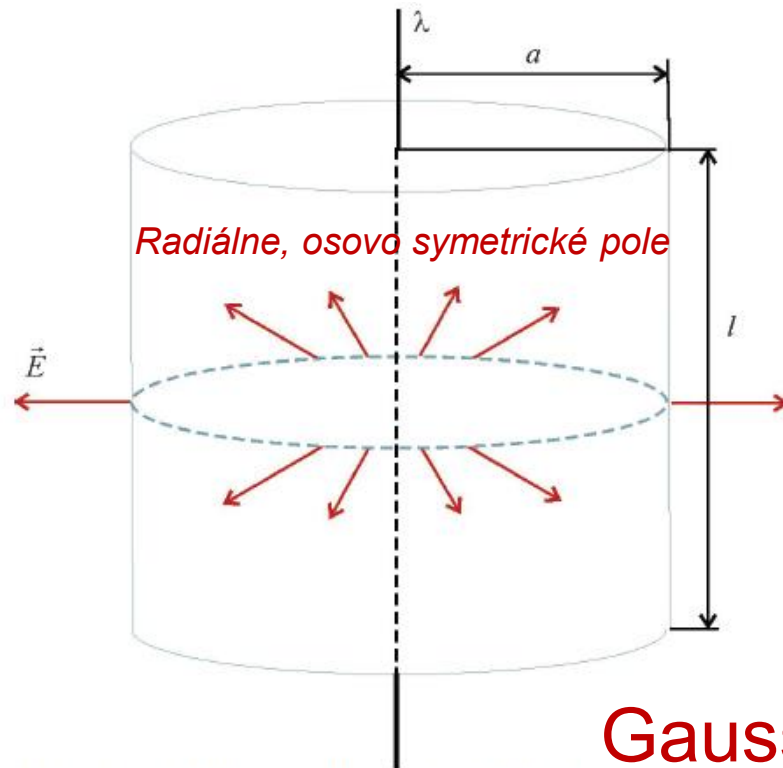
Mimo gule



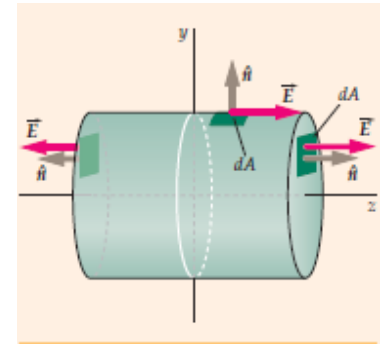
Uzavretá
integračná plocha
 $r > R$



Pole homogénne nabitého vlákna



$$E(a) = \frac{\lambda}{2\pi a \epsilon_0}$$



Gaussova plocha je valcová

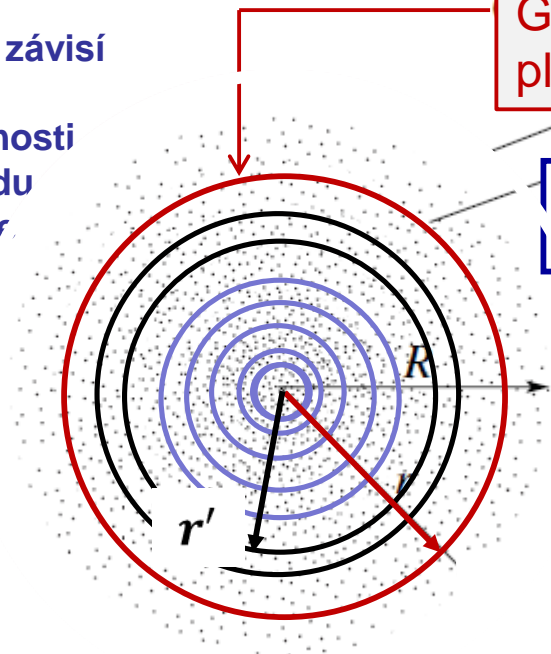
$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{plast}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \cancel{\int_{\text{podstava1}} \vec{E} \cdot d\vec{S}} + \cancel{\int_{\text{podstava2}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

Intenzita elektrického poľa náboja rozloženého s guľovou symetriou

Objemová
hustota
náboja, závisí
LEN od
vzdialenosti
od stredu
symetrie

Gaussova
plocha

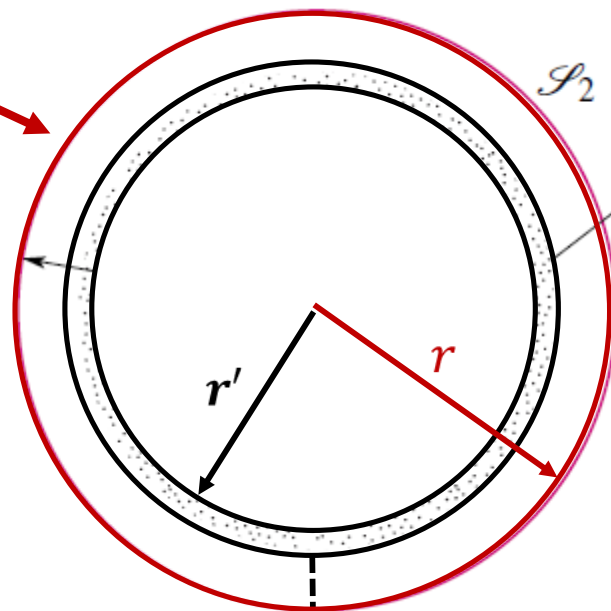
ρ



Objemový element

\mathcal{S}_2

dq



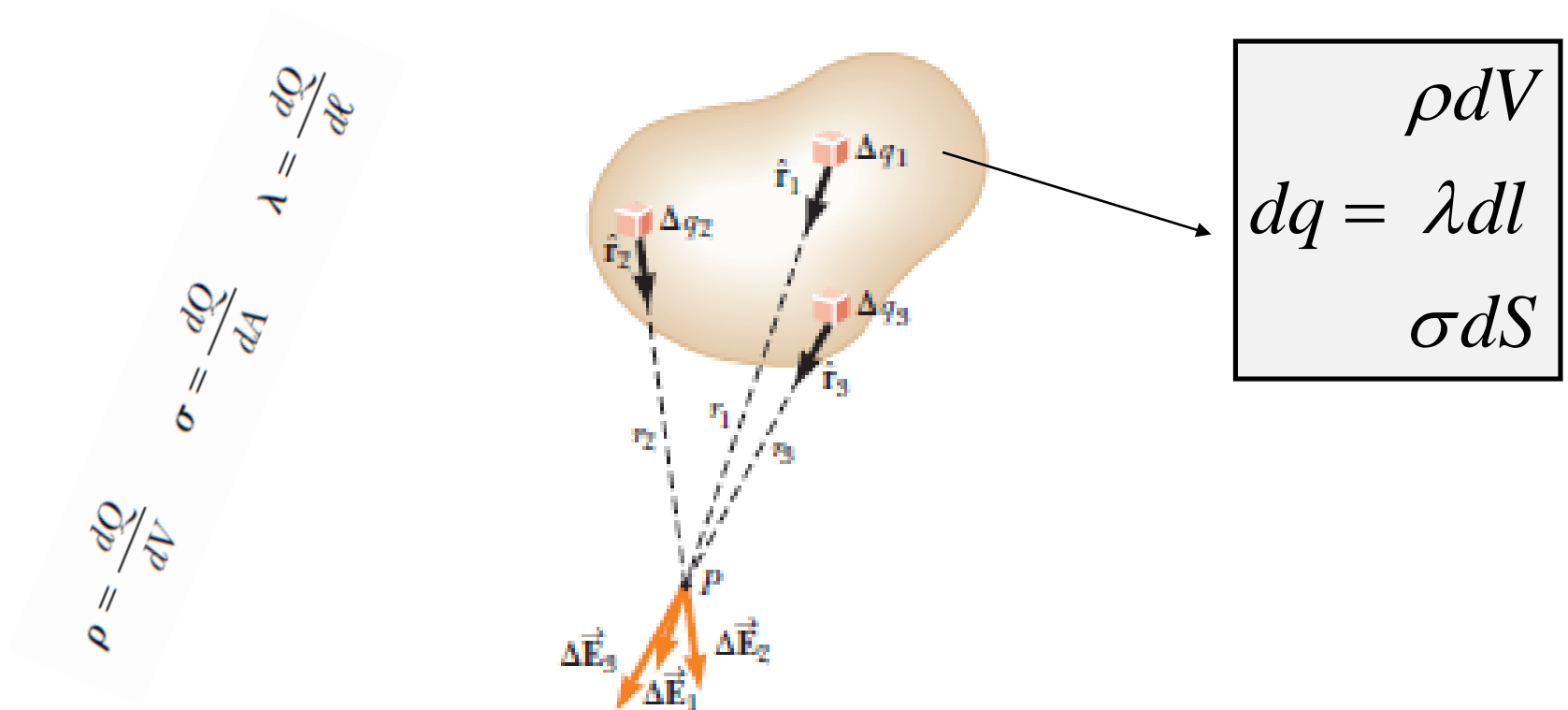
$$dq = \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

$$dV = 4\pi r'^2 dr'$$

$$E = \frac{\int_0^r 4\pi r'^2 dr'}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Tehnika výpočtu pri spojite rozloženom náboji

Princíp superpozície



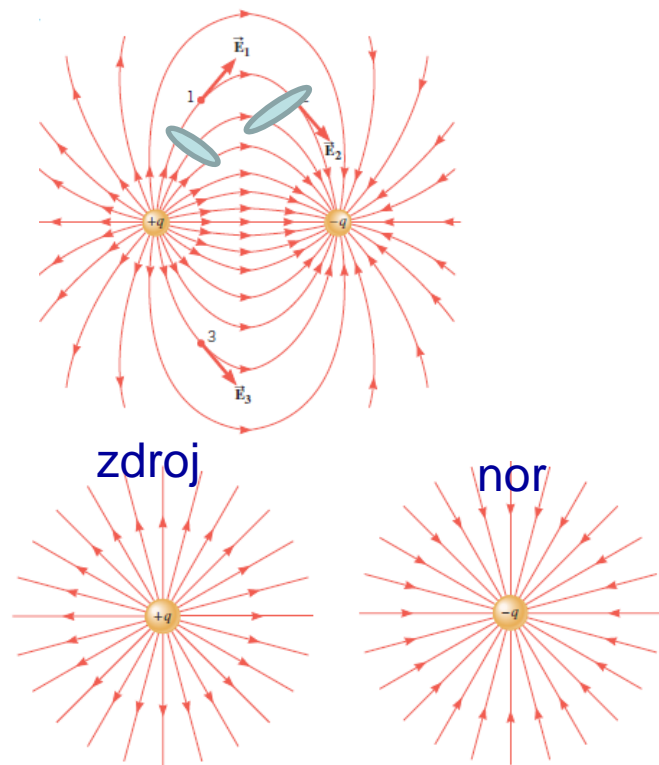
Elektrické pole

- Charakteristiky elektrického poľa:
- Intenzita E
- Siločiar
- Potenciál V

Vlastnosti siločiar

- 1, Elektrické siločiar sú **orientované krivky**, ktorých dotyčnica v každom bode má smer intenzity elektrického poľa.
- 2, Elektrické siločiar vychádzajú z kladného náboja a vstupujú do záporného náboja
- 3, Siločiar sa nemôžu pretínať
- 4, Počet silociar v danom bode je úmerný toku elektrického poľa v tomto mieste, t.j. veľkosti elektrickej intenzity **Intenzita elektrického poľa rastie s hustotou siločiar**

Počet siločiar prechádzajúcou danou plochou je rovný toku \vec{E} : $dN = \vec{E} \cdot d\vec{S}$



Kladný náboj rodí siločiar
Záporný náboj ich pohlcuje

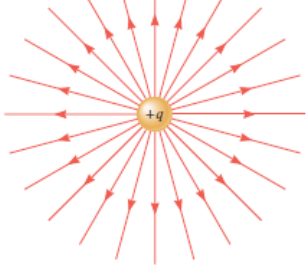
Elektrické siločiarý – vizualizácia elektrického poľa

Elektrické siločiarý sú orientované krivky, ktorých dotyčnica v každom bode má smer intenzity elektrického poľa.

Počet siločiarý prechádzajúcou danou plochou je rovný toku \vec{E} : $dN = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

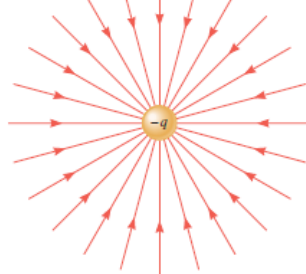
Pokles intenzity so vzdialenosťou

zdroj

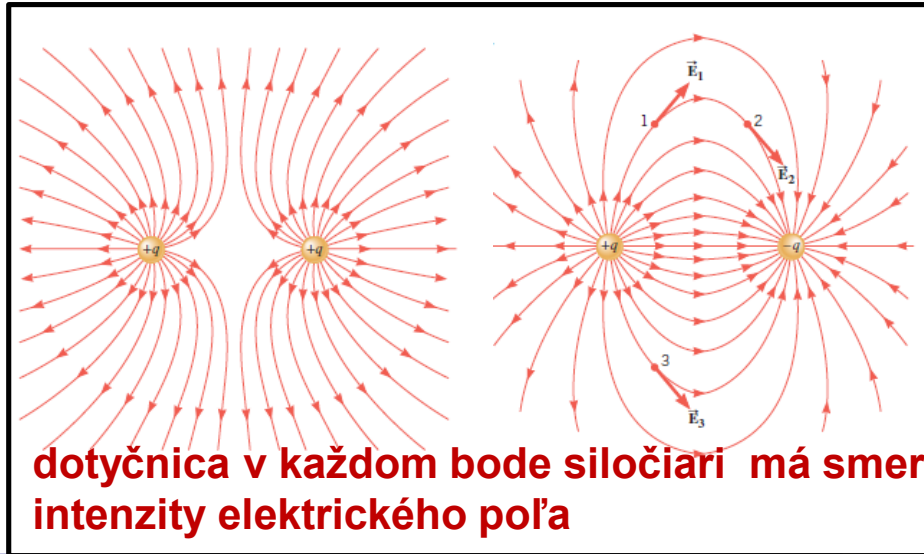


Z kladných nábojov siločiarý vychádzajú.

nor



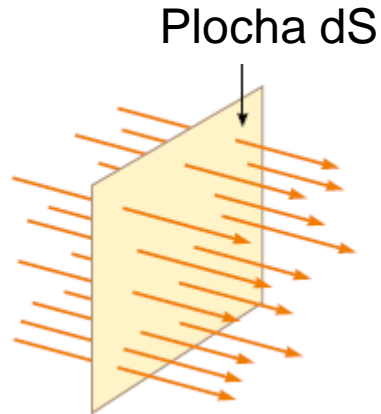
V záporných nabojoch siločiarý končia



Silochiarý sa vzájomne nepretínajú
(ak by sa pretínali, pole v danom mieste by nebolo jednoznačne určené)

Zobrazením získame dobrú predstavu o priebehu elektrického poľa

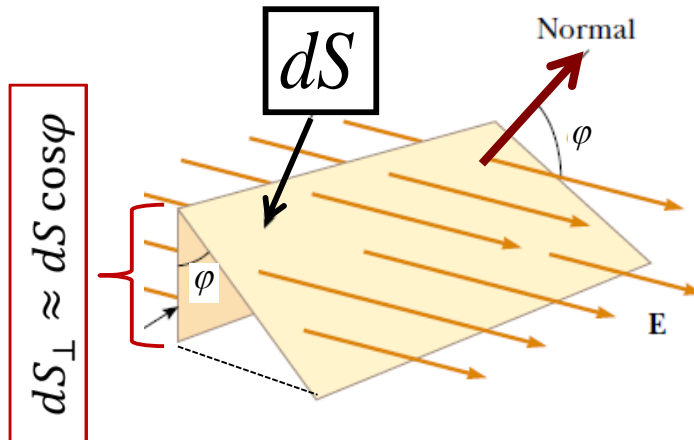
$$E \approx \frac{dN}{dS_{\perp}}$$



počet siločiar prechádzajúcich cez plochu $dS \sim$

$$dN \approx E dS_{\perp}$$

Prípad, keď plocha nie je kolmá na smer siločiar



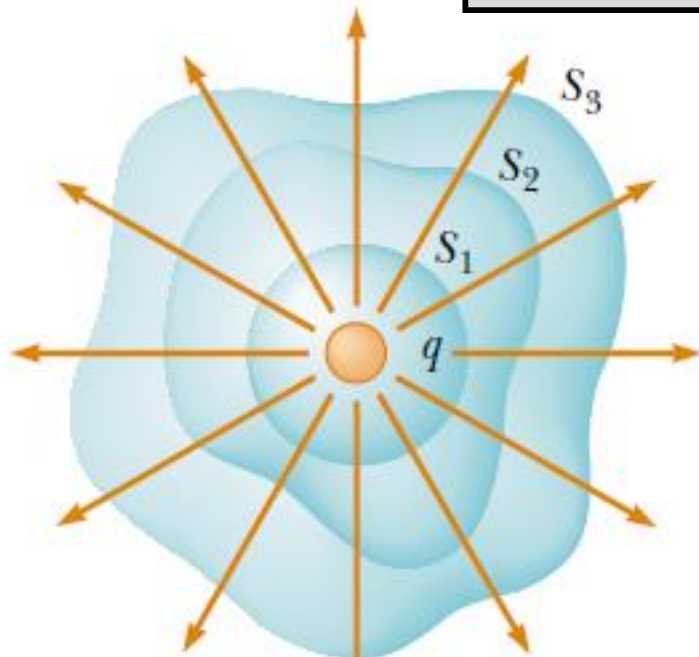
$$dS_{\perp} \approx dS \cos \varphi$$

$$dN \approx E dS_{\perp} = E dS \cos \varphi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

počet siločiar ktoré prechádzajú cez obe plochy sú rovnaké \Rightarrow toky sú rovnaké

Interpretacia Gaussovej vety cez siločiary

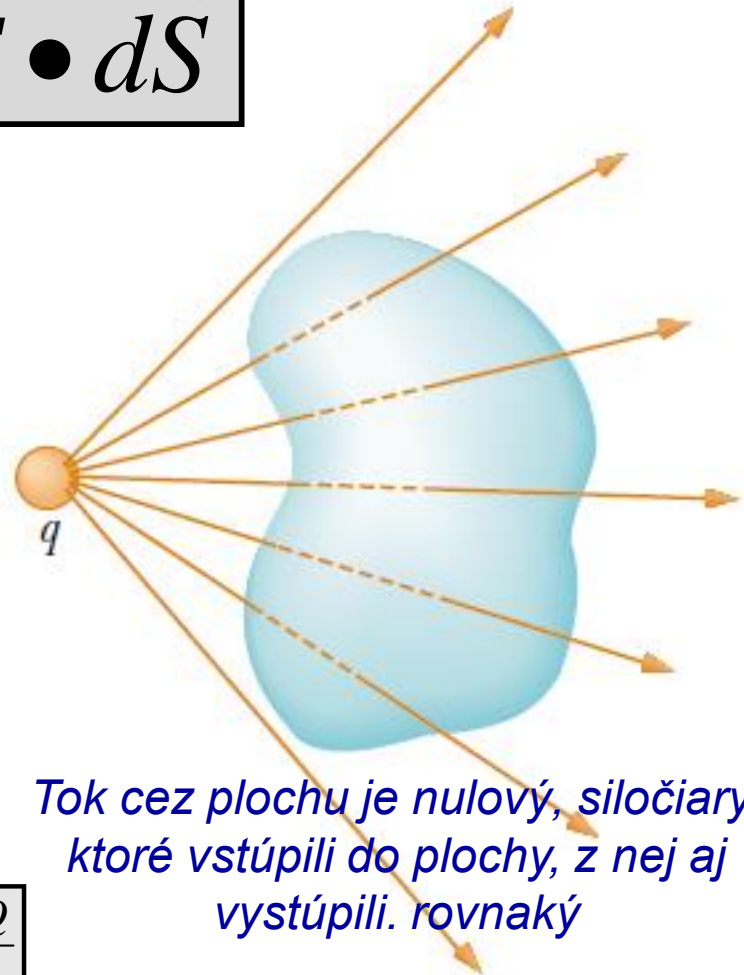
$$dN = \vec{E} \bullet d\vec{S}$$



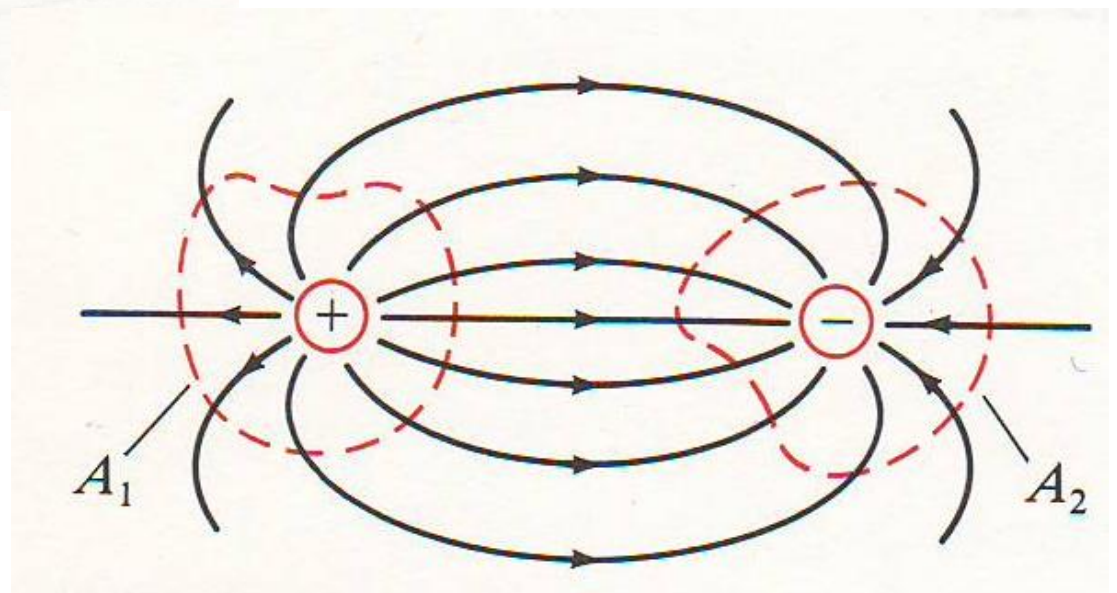
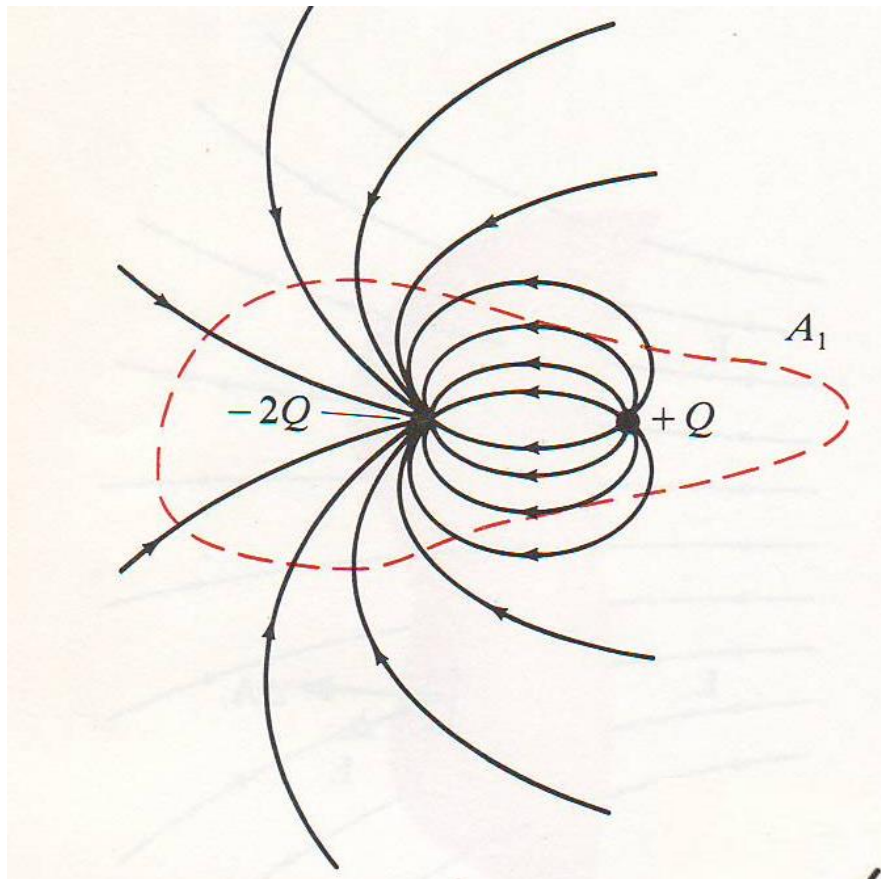
Každou plochou prechádza rovnaký počet siločiar – tok je rovnaký

Celkový počet siločiar, ktoré sa zrodili v uzavretom objeme.

$$\iint_{\text{plocha}} \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

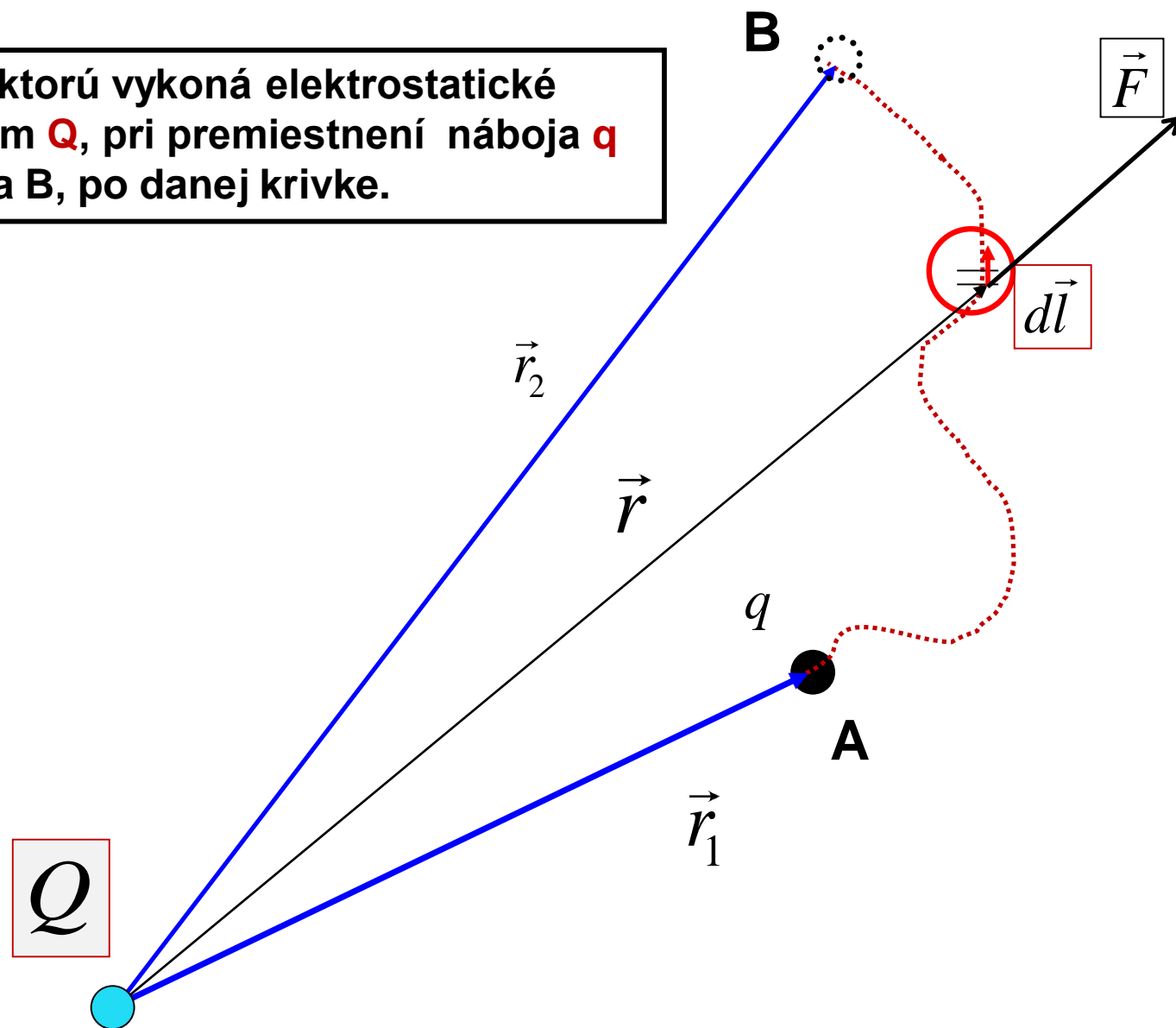


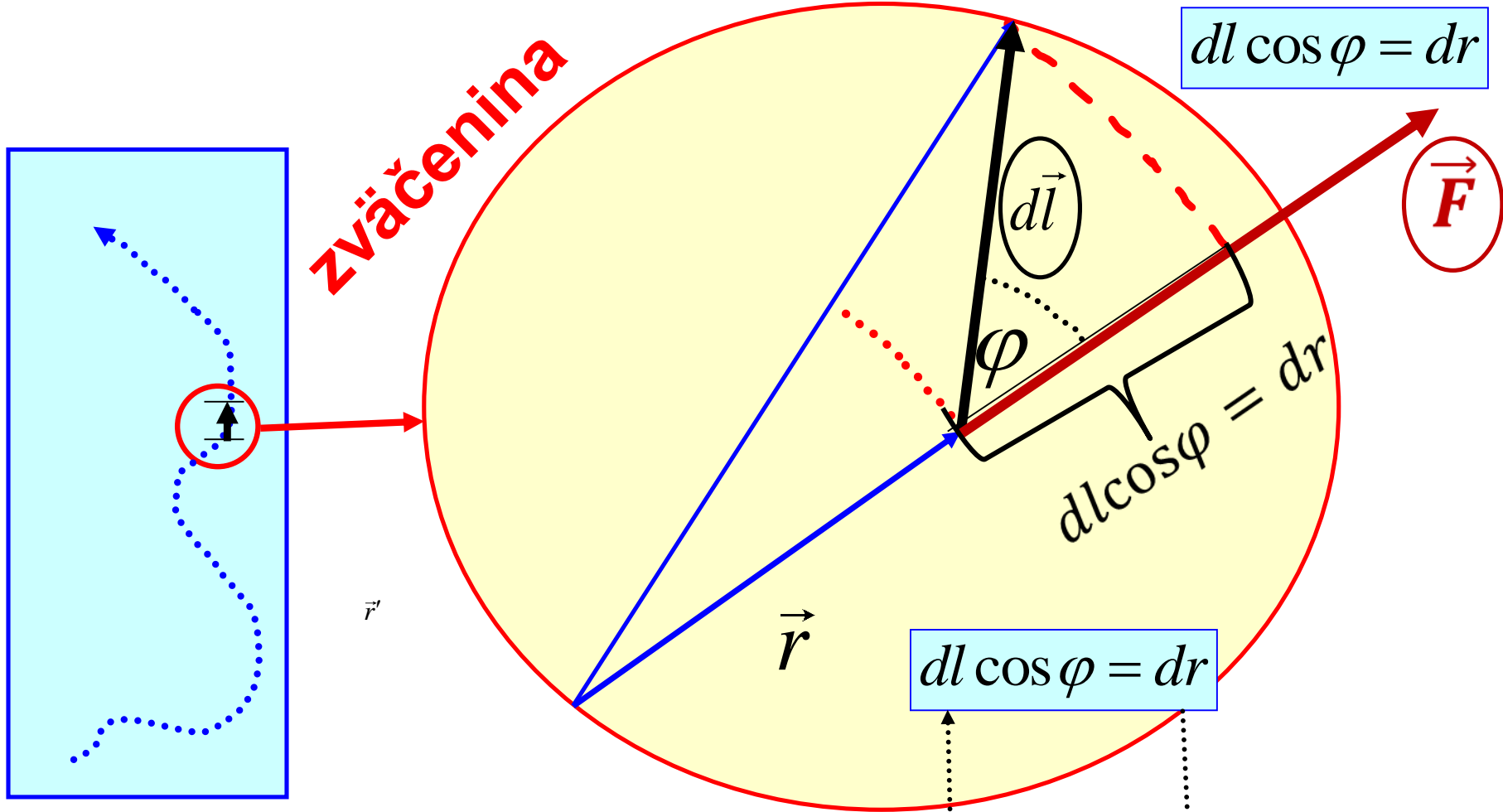
Tok cez plochu je nulový, siločiary, ktoré vstúpili do plochy, z nej aj vystúpili. rovnaký



PRÁCA ELEKTROSTATICKÉHO POĽA

Vypočítajme prácu, ktorú vykoná elektrostatické pole budené nábojom Q , pri premiestnení náboja q z miesta A do miesta B, po danej krivke.





$$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_{\Gamma} |\vec{F}| |d\vec{l}| \cos \varphi = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \boxed{dl \cos \varphi} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \boxed{dr} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

Práca vykonaná elektrostatickými silami nezávisí od tvaru trajektórie ale iba od počiatocnej a konečnej polohy. Pole je konzervatívne.

Elektrostatické pole je konzervativné

Pre akúkoľvek uzavretú krivku v elektrostatickom poli platí:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Základné vlastnosti elektrostatických polí

Konzervatívnosť

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Coulombov zákon
+ superpozícia

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Potenciálna energia

$$W_p = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

∞
 r_1
 r_2

Referenčný bod

$$W(r) = - \int_{r_{ref}}^r \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



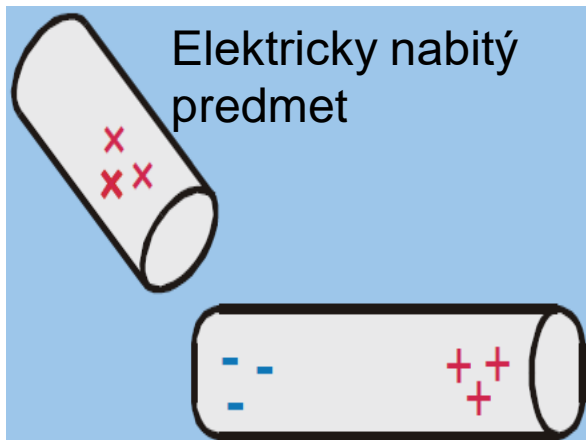
$$W(r) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Napätie

$$U_{ba} = V_b - V_a = - \int_a^b \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

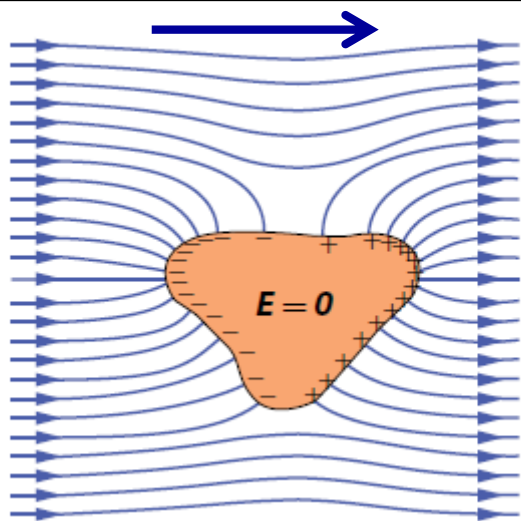
Elektrické napätie medzi dvomi bodmi elektrostického poľa sa rovná práci na prenesenie **jednotkového kladného elektrického** náboja medzi týmito bodmi elektrického poľa.

Vodič v elektrostatickom poli



Elektrostatická indukcia - zmena v rozložení elektrických nábojov vo vodiči vonkajším účinkom.

Záporné elektrické náboje sa môžu **voľne pohybovať**. Pod účinkom sily sa budú premiestňovať bližšie k tomu koncu, kde sa v blízkosti nachádza kladný elektrický náboj, tento koniec sa preto bude javiť ako záporný. Na druhej strane vodiča bude **deficit záporných elektrických** nábojov a kladné elektrické náboje nebudú mať vo svojom okolí dosť záporných nábojov na svoju kompenzáciu. Navonok sa to prejaví prítomnosťou kladného elektrického náboja na opačnom konci vodiča



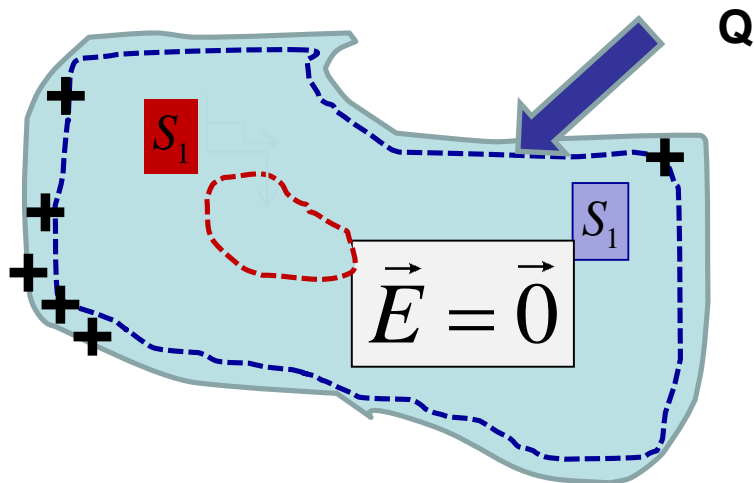
Na povrchu vodiča sa indukujú náboje, tak aby **sa vykompenzovalo vonkajšie pole** (elektrostatická indukcia)

Pôvodné pole sa deformuje tak, že siločiaru vstupujú a vystupujú kolmo na plochu vodiča.

$$\vec{E} = \vec{E}_{in} + \vec{E}_{ex} = \vec{0}$$

Nabitý izolovaný vodič

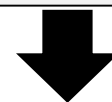
Ak privedieme elektrický náboj na izolovaný vodič, elektrické náboje sa vplyvom vzájomnej repulzie rozmiestnia tak, aby boli od seba čo najviac vzdialené, a elektrický náboj bude sústredený na povrchu vodiča. Ľahko si toto tvrdenie dokážeme pomocou Gaussovho zákona.



Tok cez ľubovoľnú uzavretú plochu vo vodiči je nulový \Rightarrow celkový náboj vo vnútri je nulový \Rightarrow keď nie je **náboj** vo vnútri vodiča, musí byť **na povrchu**

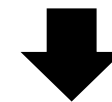
Náboj vo vodiči sa umiestňuje na jeho povrchu, nemusí rovnomerne

$$\vec{E} = \vec{0}$$



Tok cez ľubovoľnú uzavretú plochu vo vnútri vodiča.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

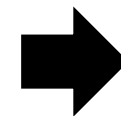


$$Q = 0$$

Vodič s dutinou v elektrostatickom poli

Gaussova veta aplikovaná na túto krivku:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$



$$Q = 0$$

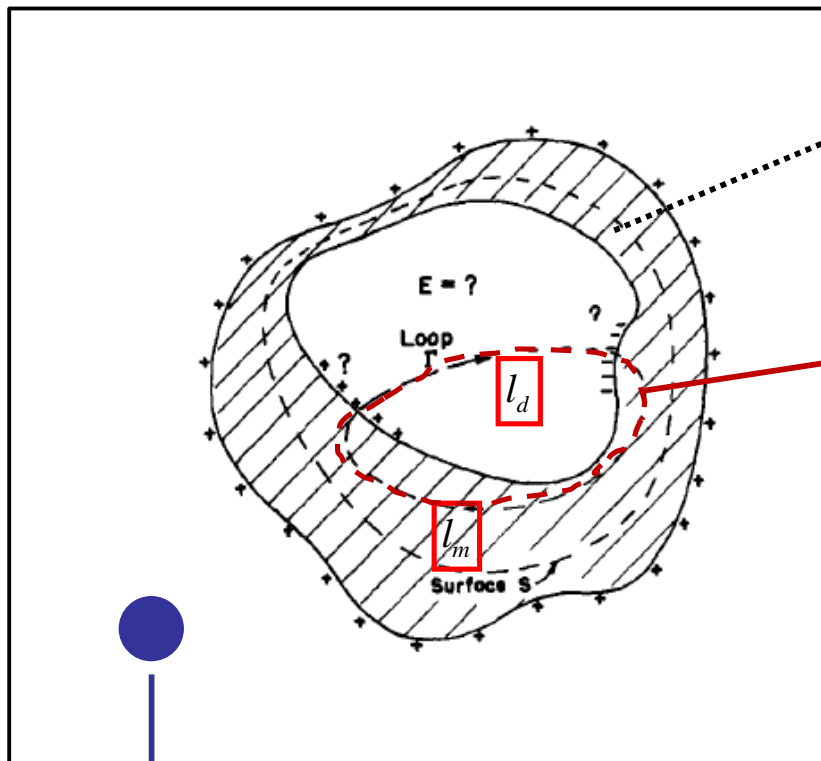
V vnútri vodiča je intenzita nulová

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{l_m} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{l_d} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{l_d} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

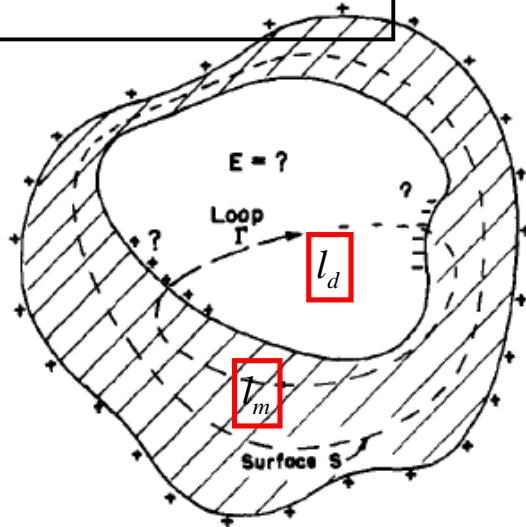
V dutine je vždy nulové pole – dutina je od vonkajšieho priestoru elektricky odtienená



Zdroj vonkajšieho poľa, napr. náboj

Vodič s dutinou

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow Q = 0$$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{l_m} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{l_d} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{l_d} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

**V dutine je vždy nulové pole –
dutina je od vonkajšieho
priestoru elektricky odtienená**

Faradayova klieťka

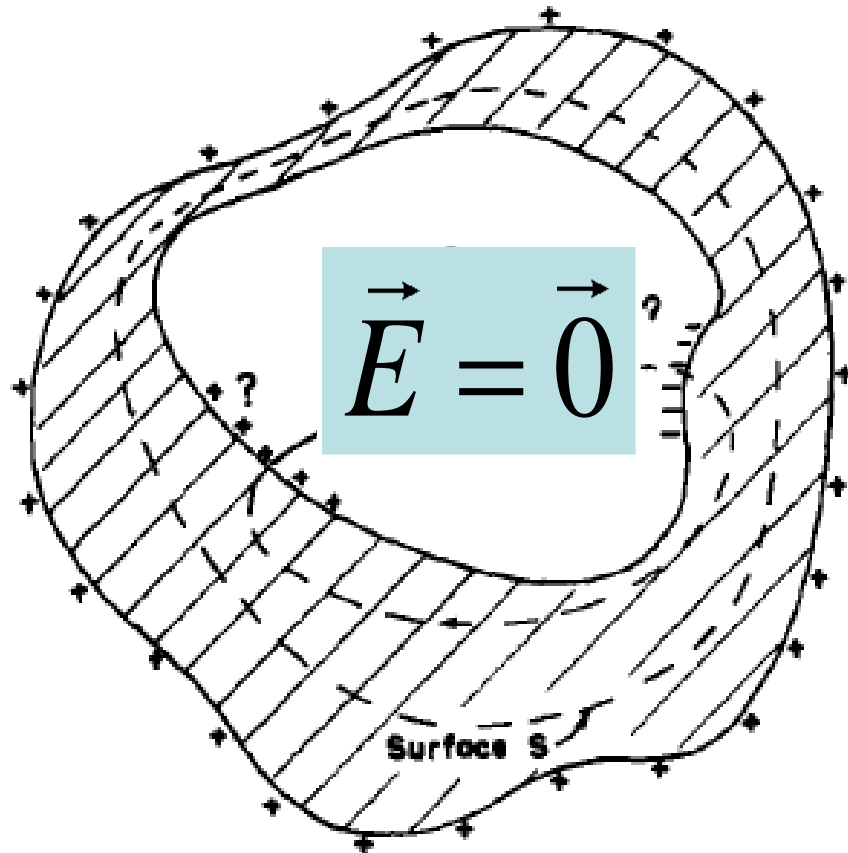


Obr. 25.20 Do karosérie auta udeřila mohutná elektrická jiskra a pak přeskočila přes izolující levou přední pneumatiku do země (všimněme si záblesku v tomto místě), aniž zranila osobu uvnitř auta.

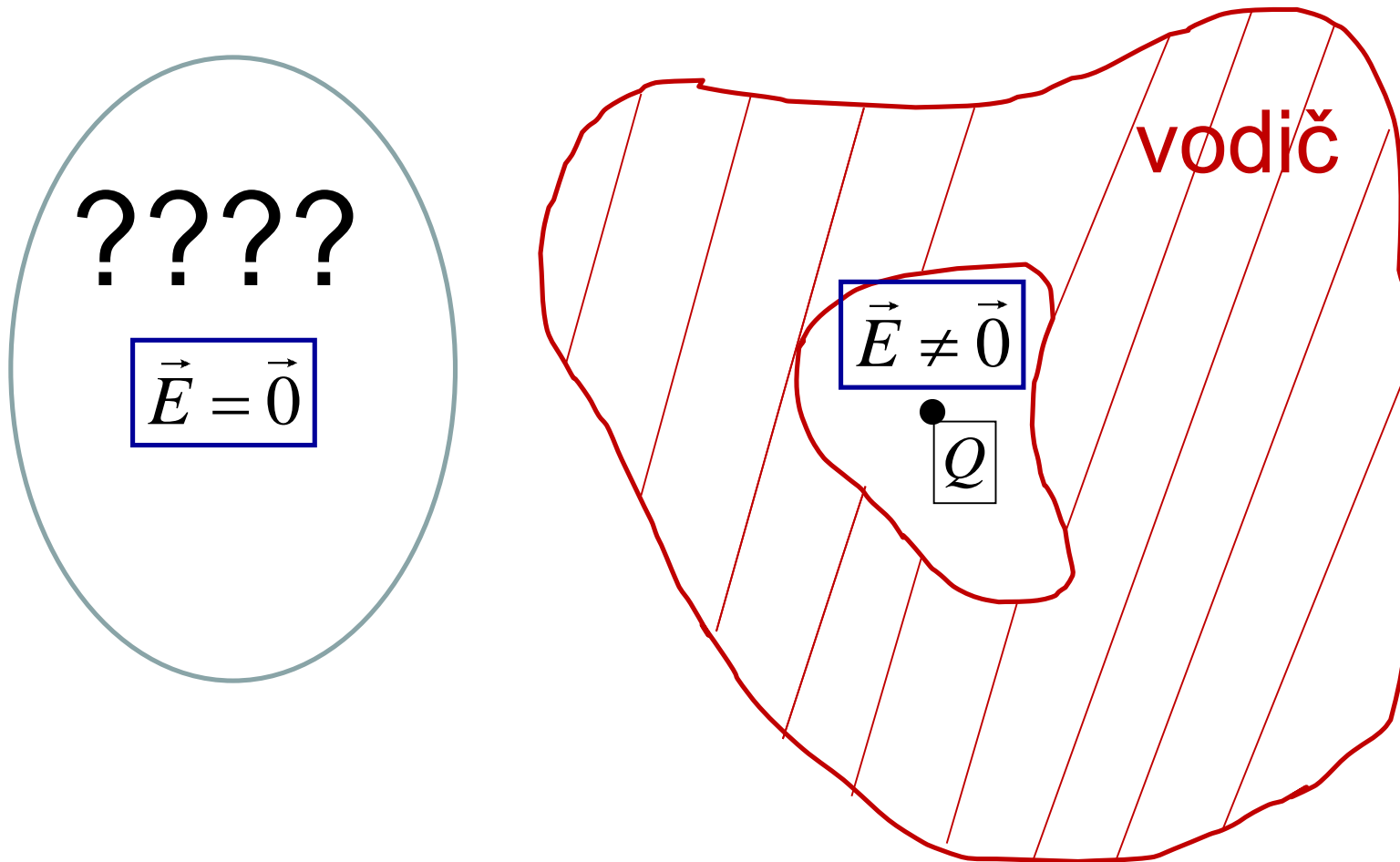
Tento jav sa využíva na elektrické tienenie citlivých zariadení (niektoré meracie prístroje, vstupné diely rozhlasových a televíznych prijímačov a pod.), ale aj na ochranu pred elektrickým výbojom

Faradayova klieťka

$$\vec{E} \neq 0$$



Ak vo vnútri dutiny vodiča je umiestnený náboj Q , bude elektrické pole mimo vodiča ?
Je tienenie obojstranné ???

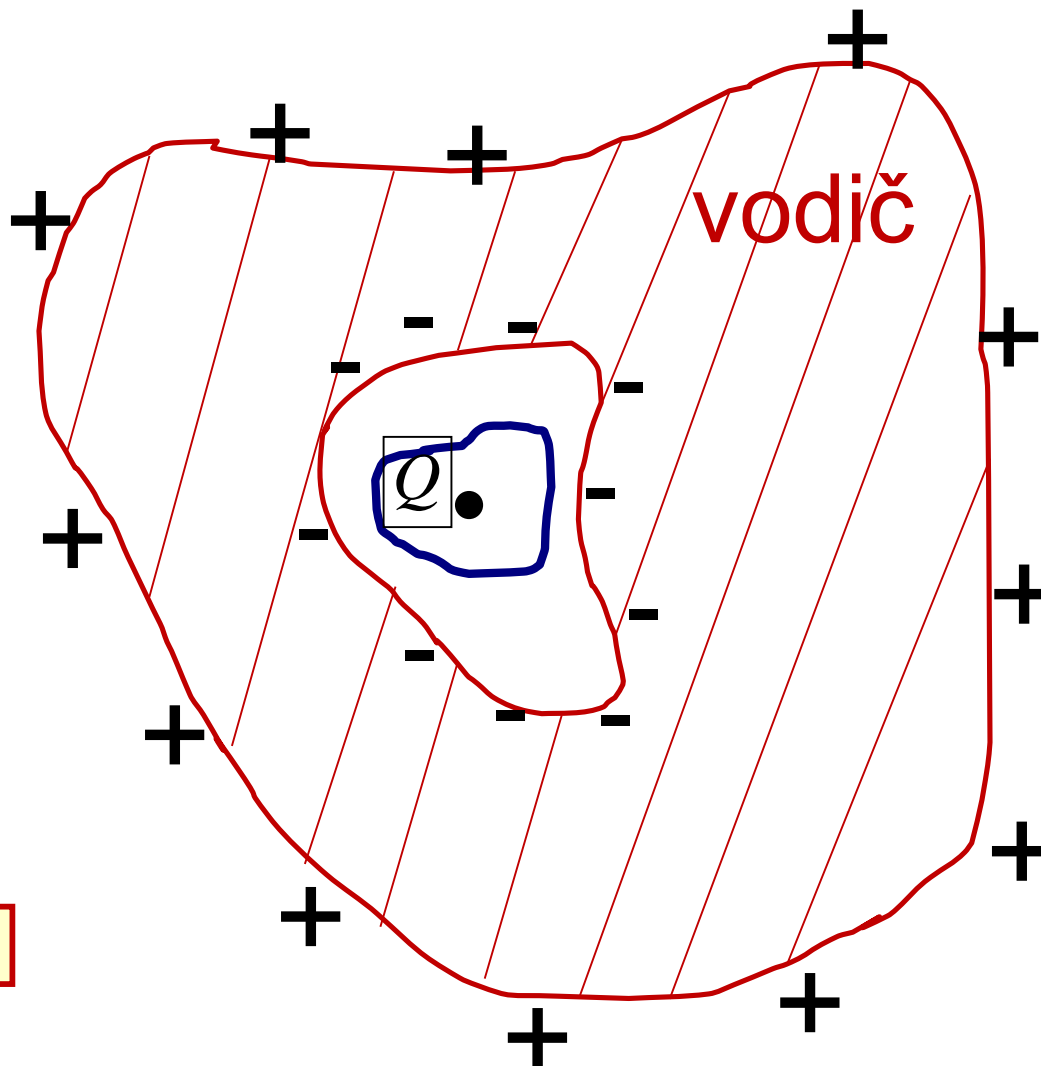


Integračná plocha S_1

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \neq 0$$



Vo vnútri dutiny je pole

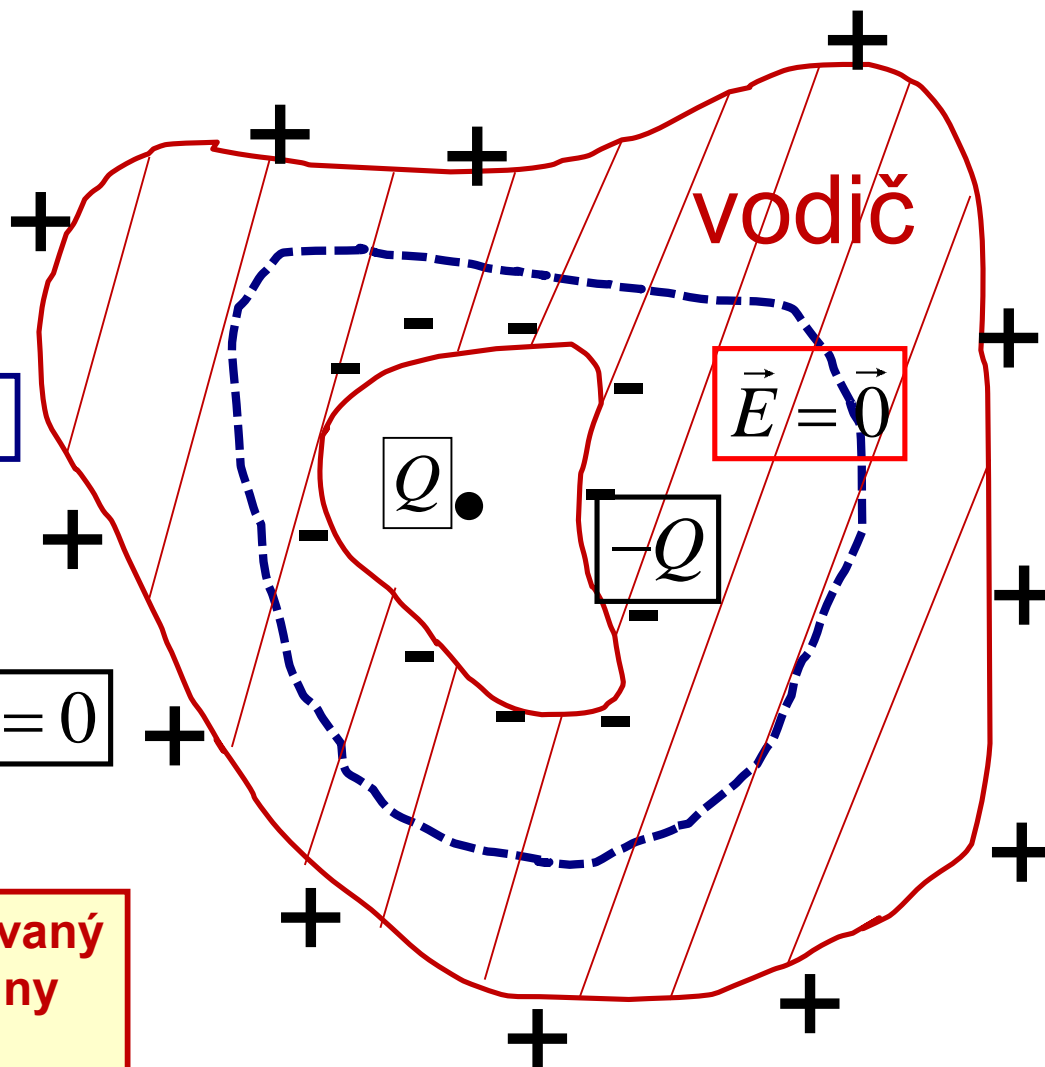


Integračná plocha S2

$$\int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$E = 0$$

Celkový náboj naindukovaný
z vnútornej strany dutiny
musí byť rovný $-Q$

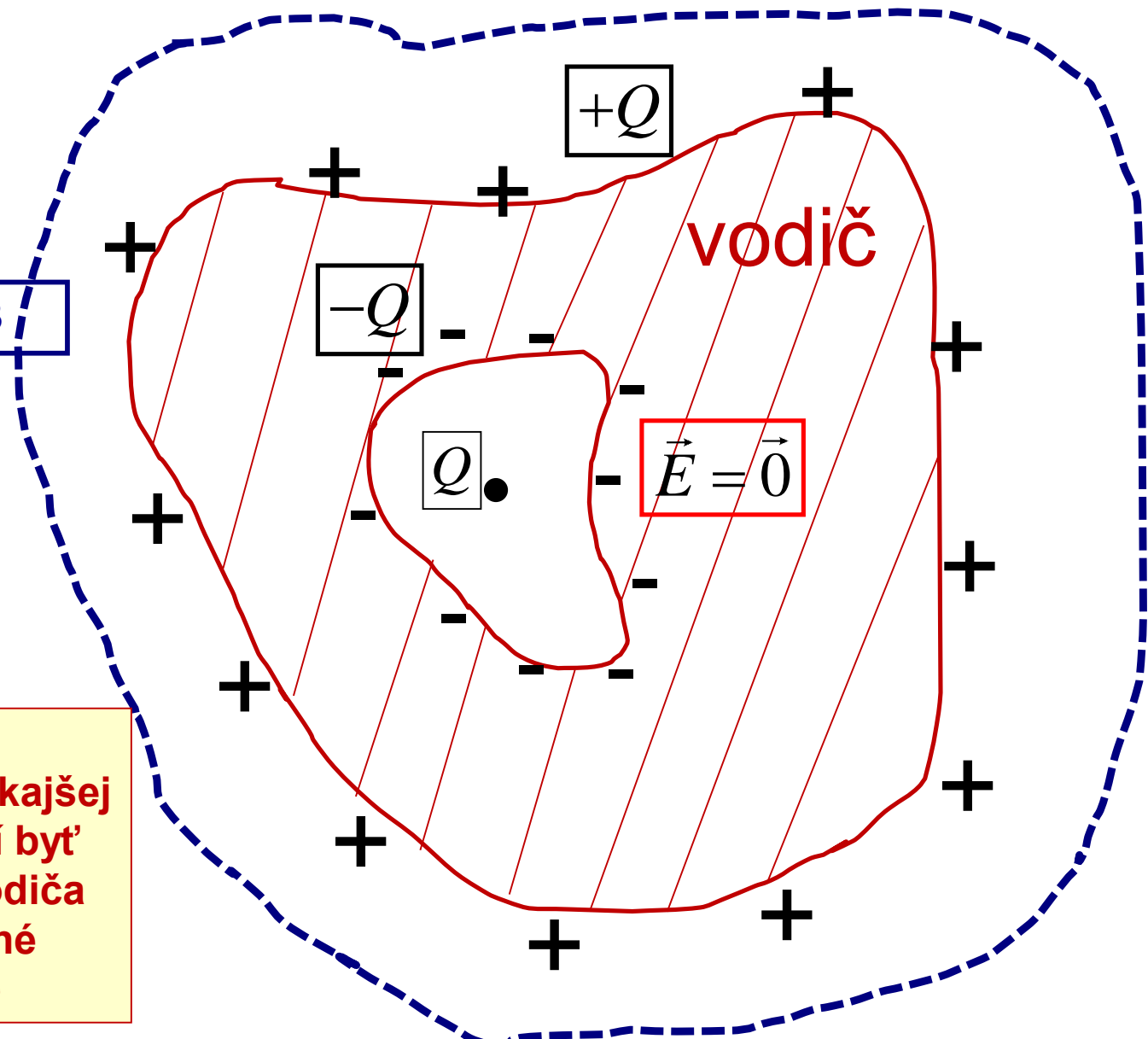


Integračná plocha S3

$$\int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} \neq \frac{Q}{\epsilon_0}$$

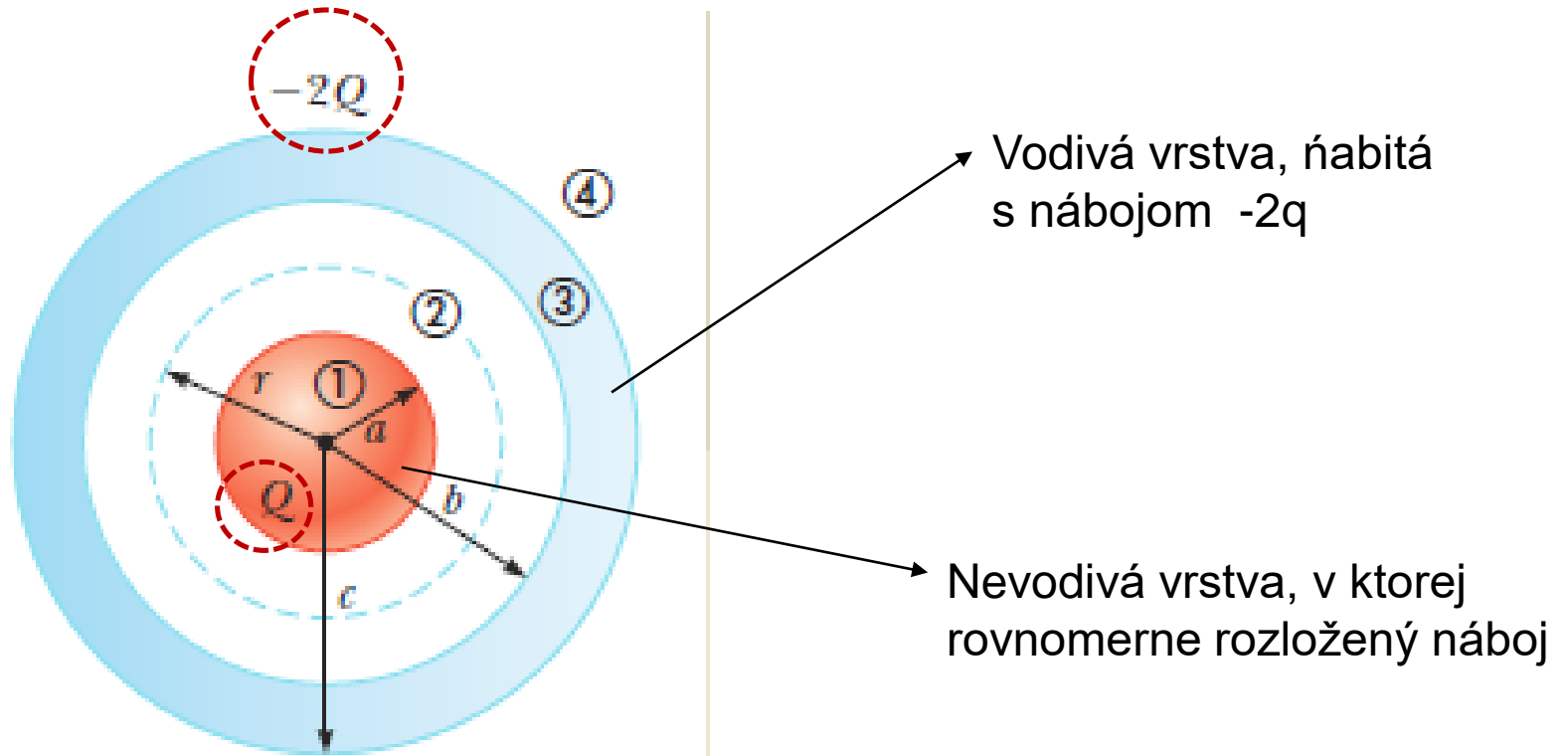


Celkový náboj naindukovaný z vonkajšej strany dutiny musí byť rovný Q. V okolí vodiča existuje netienené elektrické pole



Tienenie nie je obojstranné: Ak sa v dutine nachádza náboj, potom v okolí nenabitého vodiča existuje elektrostatické pole.

Príklad



Určite náboj indukovaný na vnútornej vrstve vodiča