KOMBINATORIKA.

FAKTORIÁL

DEFINÍCIA

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ \dots\ 2\cdot 1\,,\quad \text{kde } n \in N$$

$$0! = 1$$

PRÍKLAD.

$$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$$

$$1! = 1$$

$$(k-3)! = (k-3)\cdot(k-4)\ \dots\ 2\cdot 1$$

$$\frac{5!}{2!\,1!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\cdot 1} = \underline{\underline{60}}$$

$$\frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{4!}} = \underline{\underline{35}}$$

$$\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}} =$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\,;$$

Kombinačné čísla. Nech. $n, k \geq 0$ $n \geq k$;

Počet k-tic vybraných z n-prvkov, pričom na poradí prvkov nezáleží.

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

„n nad k"

Príklad.

A, B, C, D, E $n=5$, $k=2$

$$C_2(5) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{2.\cancel{3!}} = \underline{\underline{10}};$$

dvojice

pričom nebude záležať na poradí

A, B
A, C
A, D
A, E
B, C
B, D
B, E
C, D
C, E
D, E

~~[illegible]~~ k-tej triedy

z n prvkov

Kombinácie

ich počet je $\binom{n}{k} = C_k(n)$

bez opakovania

VLASTNOSTI KOMBINAČNÝCH ČÍSEL

1) $\binom{n}{n} = 1$ $\qquad \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

2) $\binom{n}{0} = 1$ $\qquad \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\qquad$ příklad: $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$

$\binom{1028}{1000} = \binom{1028}{28}$

$\binom{100}{80} = \binom{100}{20}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(\cancel{n}-\cancel{n}+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

4) $\binom{n}{1} = n$ $\qquad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = \underline{\underline{n}}$

5 $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$ $\qquad \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$

$$L = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!\,[\cancel{k}+1+n-\cancel{k}]}{(n-k)!\,(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1};$$

Pascalov trojuholník

1 $\quad n=0$

1 1 $\quad n=1$

1 2 1 $\quad n=2$

1 3 3 1 $\quad n=3$

1 4 6 4 1 $\quad n=4$

1 5 10 10 5 1 $\quad n=5$

⋮

Binomická veta

$(a+b)^n$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

⋮

5

a) $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}$

b) $\binom{11}{4}+\binom{11}{8}=\binom{11}{4}+\binom{11}{3}=\binom{12}{4}$

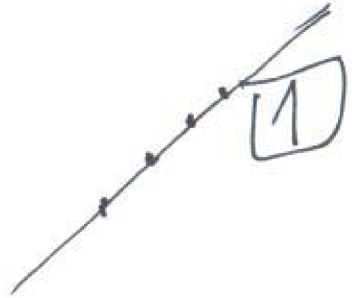
Príklad

Koľko rôznych zápasov v dvojhre odohrajú 4 tenisti, ak každý hrá s každým?

$n=4$

$k=2$

$$C_2(4)=\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}.\cancel{2}}=\underline{\underline{6}};$$



$\boxed{1}$

Príklad.

V rovine je daných 10 bodov. Koľko rôznych priamok tieto body môžu určiť, $\boxed{45}$ ak

a) žiadne tri body neležia na tej istej priamke — $\binom{10}{2}=\frac{10!}{8!2!}=\frac{\overset{5}{\cancel{10}}.9.\cancel{8!}}{\cancel{8!}.\cancel{2}}=$

b) 4 body ležia na jednej priamke a ďalšie 3 body ležia na druhej priamke

$$\binom{10}{2}-\binom{4}{2}+1-\binom{3}{2}+1=45-6+2-3=$$

$$=\underline{\underline{38}};$$

Príklad.

Určte počet vojakov strážneho oddielu, ak vieme, že z nich treba zostaviť 210 rôznych 4-členných hliadok.

n $\quad C_4(n) = 210$

$$\binom{n}{4} = 210$$

$$\frac{n!}{(n-4)!\,4!} = 210$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}} = 210 \cdot 4!$$

$$n\cdot(n-1)(n-2)(n-3) = 4\cdot3\cdot2\cdot210$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 24\cdot210$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 5040$$

$$\boxed{n=10} \qquad 10\cdot9\cdot8\cdot7 = 5040$$

$x-2=m$

$(n^2-n)(n^2-5n+6)=5040$

4

Koľko rôznych možných tan. párov (chlapec, dievča) možno vytvoriť z 15 chlapcov a 10 dievčat?

$15 \cdot 10 = 150$;

$$\binom{25}{2} - \binom{15}{2} - \binom{10}{2} = \underline{\underline{150}};$$

Z 32 kariet vyťahujeme 4 karty. Koľkými spôsobmi môžeme vytiahnuť:

a) 4 králov

b) 2 kráľov a 2 sedmičky

c) 4 srdcové karty

d) 1 kráľa a 3 sedmičky

e) 1 kráľa a 3 iné karty

a) $\binom{4}{4} = 1$;

b) $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = \left(\frac{\cancel{4}^{2} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot \cancel{2!}}\right)^2 = \underline{\underline{36}}$;

c) $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 14 \cdot 5 = \underline{\underline{70}}$;

d) $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3} = 4 \cdot 4 = \underline{\underline{16}}$;

e) $\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{3} = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{28 \cdot \cancel{27}^{9} \cdot 26}{\cancel{6} \cdot \cancel{3}} = 2 \cdot 28 \cdot 9 \cdot 26 = 13104$

Príklad.

Z 24 výrobkov je 7 chybných.

Koľkými spôsobmi môžeme vybrať na kontrolu päť

a) 7 výrobkov, aby boli všetky dobré?

b) 7 vr., aby boli všetky chybné

c) 1 dobrý a 4 chybné

d) 3 dobré a 2 chybné výrobky?

17 je dobrých, 7 je chybných

a) $\binom{17}{7} = \dots = 19448$

b) $\binom{7}{7} = 1$

c) $\binom{17}{1} \cdot \binom{7}{4} = 17 \cdot \binom{7}{4} = \dots = 595$

d) $\binom{17}{3} \cdot \binom{7}{2} = \dots = 14\,280$

$V_k(n)$ skupiny po k-prvkov, kde na poradí záleží

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

variácie bez opakovania

Šp. prípad je, keď $k=n$

$$V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Permutácie $P(n) = n!$

Príklad.

Koľko 5-miestnych čísel možno zostaviť z číslic 5, 7, 3, 1, 9?

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 5.4.3.2 = 20.6 = 120$;

Koľko 3 miestnych čísel — u — z číslic 5, 7, 3, 1, 9?

$5 . 4 . 3 = 60$

$$V_3(5) = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60;$$

Koľko 5. miestnych čísel — u — z číslic 0, 1, 2, 3, 4.?

$4 . 4 . 3 . 2 . 1 = 96$

Príklad.

Do knižnice chceme uložiť vedľa seba 6 kníh, z ktorých 3 sú rovnaké slovníky. Koľkými spôsobmi to môžeme urobiť, ak chceme, aby slovníky boli vedľa seba?

1 ks $\boxed{S1}\ \boxed{S2}\ \boxed{S3}\ \boxed{K1}\ \boxed{K2}\ \boxed{K3}$

$3! = 6$

$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4$

$X_2 \quad X_1 \quad X_3 \quad X_4$

6

$$4!\,3! = 4\cdot3\cdot2\cdot6 = 24\cdot6 = \underline{\underline{144}}$$

Permutácie s opakovaním $k=n$ $\quad n^n = P'(n)$

Variácie s opakovaním.

$n=3 \quad k=2$

$$V'_k(n) = \underline{\underline{n^k}}$$

1, 2, 3 dvojcif. čísla

11, 22, 33, ...

$\boxed{n} \times \boxed{n} = n^2$

(11)

Koľko prvkov Morseovej abecedy môžeme utvoriť, ak zoskupíme bodky a čiarky do skupín s 1–4 prvkami?

— ·　　$n=2$

$$V_1'(2) + V_2'(2) + V_3'(2) + V_4'(2) = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 6 + 8 + 16 = \underline{\underline{30}};$$

$2\left\{\begin{array}{c} 2 \\ — \\ \cdot \end{array}\right.$

— —
· ·
— ·
· —

Koľko rôznych poradí s desiatimi prvkami môžeme zostaviť z piatich A, troch B, dvoch C?

AABCCBABAA

⋮

~~[illegible]~~ Permutácie s opakovaním.

$$\frac{10!}{5!\,3!\,2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6} \cdot \cancel{2}} = 90 \cdot 28 = \underline{\underline{2520}};$$

Permutácie s opakovaním

nech $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ k - rôznych prvkov, z každého druhu máme n_k prvkov

Počet permutácií s opakovaním je:

$$P'_{n_1, n_2, \dots n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \dots n_k!}$$

Koľko rôznych kódových zoskupení s 10 písmenami môžeme zložiť zo slova MATEMATIKA?

M	2
A	3
T	2
K	1
E	1
I	1

$$P'_{2,3,2,1,1,1}(10) = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = \frac{10.9.8.7.\cancel{6}.5.\overset{2}{\cancel{4}}.3.\cancel{2}}{\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{3}.\cancel{2}} =$$

$$= 90.56.30 = \underline{\underline{151\,200}};$$

V skupine je 20 študentov, z ktt. 3 dosahujú slabé výsledky. Koľkými spôsobmi môžeme zobrať 6 študentov, aby bol medzi nimi~~~~ najmenej 1 slabý študent?

17 dobrých a 3 slabých

6 študentov

1 slabý + 5 dobrí

$$\binom{17}{6} + \binom{3}{1}\cdot\binom{17}{5} =$$

$$= 30940$$