

Algebra a diskrétna matematika

Príklady na precvičenie

10. týždeň

Príklad 1: Uvažujme množinu \mathbb{Q} racionálnych čísel spolu s binárnymi operáciami $*$, \ominus , \otimes definovanými vzťahmi

a) $a * b = \frac{a+b}{7}$

b) $a \ominus b = a + b - ab$

c) $a \otimes b = |a \cdot b|$

Pre každú operáciu rozhodnite, či sa jedná o pologrupu, monoid alebo grupu.

Príklad 2: Nech M je množina binárnych reťazcov

$$M = \{(\text{prázdny reťazec}), 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}.$$

Definujme na M binárnu operáciu \oplus ako pripojenie dvoch po sebe nasledujúcich reťazcov $a \oplus b = ab$. Rozhodnite, či sa jedná o pologrupu, monoid alebo grupu.

Príklad 3: Pre každú z nasledujúcich podmnožín množiny \mathbb{Z} určte, o akú algebraickú štruktúru sa jedná vzhľadom na operáciu sčítania.

A = množina párnych čísel

B = množina nepárnych čísel

C = množina nezáporných celých čísel

$D = \{0\}$

Príklad 4: Tvorí množina všetkých racionálnych čísel, ktoré majú v menovateli 1 alebo 2, grupu vzhľadom na operáciu sčítania? Ak z tej istej množiny vynecháme nulu, bude tvoriť grupu vzhľadom na operáciu násobenia?

Príklad 5: Akú algebraickú štruktúru tvorí množina 2×2 matíc s reálnymi koeficientami vzhľadom na násobenie?

Príklad 6: Nech $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ a definujme $x * y = xy - x - y + 2$. Dokážte, že $(G, *)$ je grupa.

Príklad 7: Pre každú z nasledujúcich podmnožín množiny všetkých komplexných čísel s komplexnou jednotkou i určte, o akú algebraickú štruktúru sa jedná vzhľadom na operáciu násobenia.

A = množina nenulových racionálnych čísel

B = množina kladných celých čísel

$C = \{1, -1, i, -i\}$,

$D = \{1, \frac{1}{2}, 2\}$,

$E = \{a + bi \mid a > 0\}$.

Príklad 8: Ukážte, že množina všetkých reálnych matíc tvaru $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je grupa vzhľadom na operáciu násobenia. Splňa komutatívny zákon?

Príklad 9: Ktoré z nasledujúcich množín tvoria grupy spolu s operáciou sčítania polynómov?

A = množina všetkých polynómov párneho stupňa

B = množina všetkých polynómov, ktorých súčet koeficientov je párný

C = množina všetkých polynómov, ktoré majú iba nepárne koeficienty

Príklad 10: Nájdite všetky riešenia každej z daných rovníc.

a) $x + x = 6 \pmod{7}$

b) $x + x = 3 \pmod{6}$

c) $x + x + x + x + x = 8 \pmod{9}$

d) $x + x + 9 = 7 \pmod{15}$

Príklad 11: Nájdite všetky riešenia daných sústav rovníc.

a) $x + x + x = 7 \pmod{10}$

$x + x + x + x + x + x + x = 11 \pmod{12}$

b) $x = 3 \pmod{5}$

$x = 6 \pmod{7}$

$x = 2 \pmod{11}$

Príklad 12: Ukážte, že množina všetkých matíc nad Z_2 tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je grupa vzhľadom na operáciu násobenia. Aký je rád tejto grupy? Splňa komutatívny zákon?