Štvrtok, 11.00, ML, 1.4.2021 :-)

Univerzum: množina, tvoríme si ju my, z ktorej pochádzajú naše prvky (M)

Indivíduá: prvky univerza, ktoré nadobúdajú určité vlastnosti $(x, y, \dots)$

Predikáty: vlastnosti, ktoré nadobúdajú indivíduá (prvky)

(napr. ozn. $Q(x)$ → je to vlastnosť Q indivíduá x)

Konštanty: sú funkcie bez argumentu

Kvantifikátory: – všeobecný „$\forall$" → čítame „pre všetky"

– existenčný $\exists$ → čítame „existuje"

$(\forall x)\, T(x) \dots \bigwedge_{x \in M} T(x)$, teda $T(x_1) \wedge T(x_2) \wedge \dots$

$(\exists x)\, T(x) \dots \bigvee_{x \in M} T(x)$, teda $T(x_1) \vee T(x_2) \vee \dots$

n-árna relácia (n-árny predikát) – na množ. A je ľubovoľná podmnožina A^k, jej prvky sú usporiadané n-tice

n-árne zobrazenie: (n-árna funkcia) → na množ. A je ľubovoľná podmnožina A^{n+1} taká, že pre prvky podmnožiny $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ a $(b_1, \dots, b_n, b_{n+1})$ platí $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \dots$. Potom aj $a_{n+1} = b_{n+1}$

$$f\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{\text{argument}} = \underbrace{a_{n+1}}_{\text{hodnota}}$$

Jazyk predikátovej logiky (jazyk prvého rádu): tvorí ho:

- Logické symboly:
  - symboly pre premenné: $x, y, x_1, \dots$
  - symboly pre logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
  - symboly pre kvantifikátory
- Špeciálne symboly jazyka:
  - symboly pre predikáty: $P, Q, P_1, \dots$
  - symboly pre funkcie
- Pomocné symboly:
  - zátvorky $(\,)$, $[\,]$ a čiarka

Ak sa medzi logické spojky radí aj rovnosť $=$, potom hovoríme o jazyku s rovnosťou.

Unárne predikátové symboly sú logické konštanty 0, a 1 (pravda a lož)

Jazyk teórie množín – jazyk s rovnosťou + jeden špeciálny symbol $\in$ (binárny)

Jazyk elementárnej aritmetiky – na N je jazyk s rovnosťou + špeciálne symboly

- 0 – nulárny funkčný symbol pre nulu
- S – unárny funkčný symbol pre funkciu nasledovníka
- $+, \cdot$ – binárne funkčné symboly pre sčítanie a násobenie

Jazyk príbuzenských vzťahov medzi ľuďmi:

- unárne predikáty: ŽENA, MUŽ
- binárne –"–: RODIČ, MANŽEL
- unárne funkčné symboly: O(otec), M(mama)

Formuly

Príklad: V jazyku elem. aritm. sú

- atomické formuly: $x = y$, $(S(x) + y) = S(x + y)$
- formuly: $(\forall x)(\exists y)((S(x) + y) = S(x + y))$

$\neg(\exists x)(S(x) = 0)$

Cv. 7.1.

a) každý učiteľ má aspoň jedného žiaka

M – univerzum, prvky sú bytosti / ľudia $(x, y, \dots)$

$P(x)$ – x je učiteľom, $Q(x)$ – x je žiakom } unárne predikáty

$R(x, y)$ – x je učiteľ žiaka y – binárny predikát

$$\underbrace{(\forall x)(\exists y)}_{\text{kvantifikátory}}\underbrace{(P(x) \Rightarrow (Q(y) \wedge R(x, y)))}_{\text{predikáty}}$$

b) každý rektor má aspoň dvoch dekanov

M – univerzum, prvky sú bytosti / ľudia

$R(x)$ → x je rektor

$D(x)$ → x je dekan

$P(x, y)$ → x patrí pod (rektora) y

kvantifikátory | predikáty

$(\forall x)(\exists u)(\exists v)(R(x) \Rightarrow (\neg(u = v) \wedge D(u) \wedge D(v) \wedge$
$\wedge P(u, x) \wedge P(v, x))$

c) Neexistuje človek, ktorý by sa páčil každému.

M – univerzum, prvky sú bytosti

$\check{C}(x)$ – x je človekom → $\check{C}(x) = \{x \in M \mid x \text{ je človekom}\}$

$P(x, y)$ – x sa páči y-mu

$\neg(\exists x)(\check{C}(x) \Rightarrow (\forall y)(\check{C}(y) \Rightarrow P(x, y)))$

Ml.

→ ak by sme zvolili M – univerzum, kde prvky sú ľudia, tak:

$P(x, y)$ – x sa páči y-mu

$\neg(\exists x)(\forall y)(P(x, y))$

d) Nikto ma nemá rád

M – univerzum, prvky sú bytosti

$\check{C}(x) = \{x \in M \mid x \text{ je človekom}\}$

J – konšt. „Ja" / „mňa"

$R(x, y) = \{x \in M, y \in M, x \text{ má rád } y\text{-na}\}$

$\neg(\exists x)(\check{C}(x) \wedge R(x, J))$

↳ ak by sme zvolili M – univerzum, kde prvky sú ľudia, tak: $\neg(\exists x)(R(x, J))$

e) Janko nemá bračeka

M – univerzum, prvky sú ľudia

J – konštanta, „Janko"

$B(x, y) = \{x \in M, y \in M \mid x \text{ a } y \text{ sú bratia}\}$

$\neg(\exists x)(B(J, x))$

záleží na poradí

f) Neexistuje najväčšie prvočíslo (Teda od každého prvočísla existuje väčšie)

M – univerzum, prvky sú prirodzené čísla !

$P(x) = \{x \in M \mid x \text{ je prvočíslo}\}$

$V(x, y) = \{x \in M, y \in M \mid x \text{ je väčšie ako } y\}$!

$(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge V(y, x)))$

↳ ak by sme zvolili množ. M – univ., prvky sú prvočísla, tak:

$(\forall x)(\exists y)(V(y, x))$

Cv. 7.2 | ŽENA, MUŽ → un. pred., bin. pred. → RODIČ, MANŽEL

M – univ. → prvky sú ľudia

a) Mária je Andrejova stará mama.

Pozn. v Andrea sa v zadaní neuvádza či je chlapec alebo dievča teda nepíšeme info MUŽ(A)

$(\exists x)((\text{ŽENA}(M)) \wedge (\text{RODIČ}(M, x)) \wedge (\text{RODIČ}(x, A)))$

b) Danka a Janka sú sestry.

D – danka

J – janka

$(\exists x)((\text{ŽENA}(D)) \wedge (\text{ŽENA}(J)) \wedge (\text{RODIČ}(x, D)) \wedge$
$\wedge (\text{RODIČ}(x, J)))$

záleží na poradí

záleží na poradí

Pozn. Nepíšeme, že sú ženy, lebo tie majú byť sestry a tým chceme vylúčiť možnosti, že sú bratia alebo brat a sestra....

c) Pavol a Jozef sú bratranci → z toho mám info že sú to muži

P – Pavol

J – Jozef

$(\exists x)(\exists u)(\exists v)(\neg(u = v) \wedge (\text{MUŽ}(P) \wedge \text{MUŽ}(J)) \wedge$
$(\text{RODIČ}(x, u)) \wedge (\text{RODIČ}(x, v)) \wedge (\text{RODIČ}(u, P)) \wedge$
$\wedge ((\text{RODIČ}(v, J)))$

d) Eva má dve deti:

E – eva

poz. Nepíšeme, že Eva je žena, lebo to nevyplýva zo zadania. Ľudské to môže byť aj pomenovanie predka.

$(\exists x)(\exists y)(\neg(x = y) \wedge (\text{Rodič}(E, x)) \wedge (\text{RODIČ}(E, y))$

Cv. 7.3 $0, S, +$ a .

a) x je štvorec

$(\exists y)(x = y \cdot y)$

pozn. pretože hovoríme „x" má byť štvorec, teda ho berieme ako konštantu. Preto sa nemá vyskytnúť vedľa neho druhý kvantifikátor. $(\forall, \exists)$

b) y je o 3 väčšie ako x

$y = S(S(S(x)))$ alebo tiež $y = x + S(S(S(0)))$

S – nasledovník

c) x je prvočíslo

3.1, 5.1, 7.1

$3, \ 5, \ 7$

$\neg(\exists y)(\exists z)[(x = y \cdot z) \wedge ((y = S(0)) \vee (z = S(0)))]$

$\cancel{4.1}$, $\cancel{6.1}$, $\cancel{8.1}$

4, 6, 8

2.2, 3.2, 2.2.2, 2.7

DÚ