

Algebra a diskrétna matematika

Príklady na precvičenie

11. týždeň

Príklad 1: Určte grupy symetrií pravidelného päťuholníka, šesťuholníka a sedemuholníka a vypíšte rády všetkých ich prvkov.

Príklad 2: Dané súčiny prvkov napíšte v najjednoduchšom možnom tvare.

- a) $r^3s^4r^{-1}r^5sr s$ v grupe D_4
- b) $sr^9s^5r^{-3}r^5sr s^5r^4$ v grupe D_7
- c) $rsr^7s^{-1}r^4r^{11}sr^{-2}s^3r^2$ v grupe D_8

Príklad 3: Overte, či sú izomorfné nasledujúce dvojice grúp

- a) \mathbb{Z}_8 a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$,
- b) \mathbb{Z}_{10} a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$,
- c) D_5 a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$,
- d) A_4 a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

Príklad 4: Ukážte, že množina $\{e, (12), (345), (354), (12)(345), (12)(354)\}$ tvorí grupu vzhľadom na operáciu skladania permutácií. Je táto grupa komutatívna?

Príklad 5: Určte, aké rôzne rády prvkov sa vyskytujú v grupe S_6 . K aspoň jednému prvku z každého rádu nájdite jeho inverzný prvok. Aké rády prvkov sú v grupe S_7 ?

Príklad 6: K daným prvkom z grupy S_9 nájdite inverzné prvky.

$$a = (13476)(259), \quad b = (2364)(78), \quad c = (134)(2697), \quad d = (145)(26)(79)$$

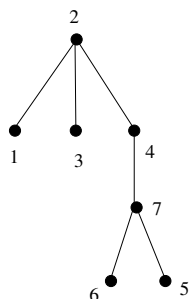
Príklad 7: Pre prvky $a = (236)(57)$ a $b = (147)$ z grupy S_7 vypočítajte:

- a) ab
- b) $(ab)^{-1}$
- c) $(ab)^{-2}$
- d) $a^{-1}b^{-1}$
- e) $b^{-1}a^{-1}$

Príklad 8: Pre $a = (12345678)$ z grupy S_8 vypočítajte mocniny a^i , pričom $2 \leq i \leq 10$.

Príklad 9: Uvažujme grupu, ktorá je generovaná prvkami (123) , (124) , (125) . Zistite rády prvkov tejto grupy. Viete určiť, o akú známu grupu sa jedná?

Príklad 10: Ukážte, že grupa S_7 je generovaná všetkými 6 transpozíciami (ab) , kde ab je hrana ohodnoteného stromu z obrázku.



Príklad 11: Nech i, j, k, ℓ, m sú rôzne prvky v S_n , kde $n \geq 5$. Vypočítajte permutácie

- a) $(ij)(jk)(kj)$
- b) $(ij)(jk\ell m)(ij)$

Príklad 12: V každom z prípadov ukážte, že grupa S_n je generovaná danými prvkami.

- a) $(12), (123 \dots n)$
- b) $(12), (23), (34), \dots, (n-1 \ n)$
- c) $(12), (13), (14), \dots, (1n)$