SemMat1 – cv3 - Príklady na matematickú indukciu – riešenia (ešte nie všetky)

1. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Dôkaz:

i. Tvrdenie V(1) platí. Ľavá strana Ľ $=\frac{1}{1.(1+1)}=\frac{1}{2}$, P=$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$; Ľ=P.

ii. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké $k\geq 1$, teda že platí:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

Dokážeme, že platí aj

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Vychádzajúc z ľavej strany s využitím indukčného predpokladu dostaneme:

Ľ=$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$

$$\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)}{(k+2)}=\text{P}$$

Uvedená rovnosť platí teda pre každé prirodzené číslo.

---

2. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dôkaz:

iii. Tvrdenie V(1) platí. Ľavá strana Ľ $=1^2=1$; P=$\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=\frac{1.2.3}{6}=1$; Ľ=P.

iv. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké $k\geq 1$, teda že platí:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Dokážeme, že platí aj

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Vychádzajúc z ľavej strany s využitím indukčného predpokladu dostaneme:

Ľ=$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)+(k+1)^2=$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\text{P}$$

Uvedená rovnosť platí teda pre každé prirodzené číslo.

3. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$1+3+5+7+\dots(2n-1)=n^2$$ (súčet prvých n nepárnych čísel)

Dôkaz:

i. Tvrdenie V(1) platí. Ľavá strana Ľ $=1$, P=$1^2=1$; Ľ=P.

ii. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké $k\geq 1$, teda že platí:

$$1+3+5+7+\dots(2k-1)=k^2.$$

Dokážeme, že platí aj

$$1+3+5+7+\dots(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

Vychádzajúc z ľavej strany s využitím indukčného predpokladu dostaneme:

Ľ = $1+3+5+7+\dots(2k-1)+(2(k+1)-1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$ = P

Uvedená rovnosť platí teda pre každé prirodzené číslo.

---

4. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Dôkaz:

i. Tvrdenie V(1) platí. Ľavá strana Ľ =1; P $=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1.2}{2}=1$; teda Ľ=P.

ii. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké $k\geq 1$, teda že platí:

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Dokážeme, že platí aj: $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Vychádzajúc z ľavej strany s využitím indukčného predpokladu dostaneme:

Ľ=$\left(1+2+3+\cdots+k\right)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$;

P=$\frac{(k+2)(k+1)}{2}$; teda Ľ=P.

Uvedená rovnosť platí pre každé prirodzené číslo.

---

5. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Dôkaz:

i. Tvrdenie platí pre $n=1$. Skutočne : Ľ=$(1)^3=1$; P=$\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$.

ii. Predpokladajme platnosť pre nejaké prirodzené číslo k. Dokážeme platnosť pre $k+1$

Ľ= $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=$

$\frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4}=\frac{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}{4}$;

P=$\frac{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}{4}$; Ľ=P. Teda tvrdenie platí pre každé prirodzené číslo n.

6. Metódou matematickej indukcie dokážte, že pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti platí vzťah: $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$, $q \neq 1$

(v geometrickej postupnosti platí, že $a_i = a_1 . q^{i-1}$, $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$)

Dôkaz:

Pre $n = 1$ výrok zrejme platí, lebo $s_1 = a_1 = a_1 \dfrac{q^1 - 1}{q-1} = a_1$. Nech vzťah platí pre nejaké $k \geq 1$, $s_k = a_1 \dfrac{q^k - 1}{q-1}$, pre $q \neq 1$. Ukážeme, že potom aj $s_{k+1} = a_1 \dfrac{q^{k+1} - 1}{q-1}$, pre $q \neq 1$.

$Ľ = s_{k+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_k + a_{k+1} = a_1 \dfrac{q^k - 1}{q-1} + a_{k+1} = a_1 \dfrac{q^k - 1}{q-1} + a_1 q^k =$

$= a_1 \dfrac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q-1} = a_1 \dfrac{q^{k+1} - 1}{q-1} = P$, čo sme mali ukázať. Využili sme pritom vzťah pre výpočet $n-$tého člena geometrickej postupnosti, $a_{n+1} = a_1 q^n$, pre $n = 1,2,\ldots$.

---

7. Metódou matematickej indukcie dokážte , že číslo $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ je deliteľné číslom 133.

Dôkaz:

Pre $n = 1$ máme $11^{1+2} + 12^{2+1} = 11^3 + 12^3 = 1331 + 1728 = 3059 = 133 \cdot 23$. Vidíme teda, že pre $n = 1$ výrok platí.

Predpokladajme teraz, že výrok platí pre nejaké $k \geq 1$, teda, že 133 delí $11^{k+2} + 12^{2k+1}$. Skúsime dokázať, že platí aj pre $k+1$. Skúmajme teda $11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3}$. Môžeme si výraz upraviť:

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot 11^{k+1} + (133 + 11) \cdot 12^{2k+1}$$
$$= 11\left(11^{k+1} + 12^{2k+1}\right) + 133 \cdot 12^{2k+1}$$

Teraz využijeme náš indukčný predpoklad, teda, že $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ je deliteľné 133. Vďaka nemu vidíme, že oba sčítance sú deliteľné 133 – prvý vďaka indukčnému predpokladu a druhý ako súčin 133 a iného celého čísla. Potom aj ich súčet je deliteľný 133. Tým sme dokázali indukčný krok, a teda ukončili dôkaz, že všetky čísla v danom tvare sú deliteľné 133.

---

8. Ak je postupnosť $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ definovaná rekurentne vzťahom:

$a_0 = \dfrac{1}{4}$ a $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$, pre $n \in N$,

pomocou matematickej indukcie dokážte, že pre člen a_n platí vzťah:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right) / 2$$

Dôkaz:

Pre $n = 0$ ľahko overíme, že $\left(1 - \dfrac{1}{2^{2^0}}\right)/2 = \left(1 - \dfrac{1}{2^1}\right)/2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)/2 = \dfrac{1}{4} = a_0$

Predpokladajme teraz, že vzťah platí pre nejaké $k \geq 0$. Skúsime dokázať, že potom platí aj pre $k+1$.

Skúmajme teda a_{k+1}. Z definície postupnosti vieme, že $a_{k+1} = 2a_k(1 - a_k)$. Využitím indukčného predpokladu (teda, dosadením $\left(1 - \dfrac{1}{2^{2^k}}\right)/2$ za a_k) dostaneme

$$a_{k+1}=2\left(1-\frac{1}{2^{2^k}}\right)/2\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{2^{2^k}}\right)/2\right)=\left(1-\frac{1}{2^{2^k}}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{2^{2^k}-1}{2^{2^k}}\right)/2\right)=\left(1-\frac{1}{2^{2^k}}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{2^{2^k}-1}{2^{2^k+1}}\right)\right)$$

Teraz môžeme roznásobiť zátvorky a dostaneme

$$a_{k+1}=1-\frac{1}{2^{2^k}}-\frac{2^{2^k}-1}{2^{2^k+1}}+\frac{2^{2^k}-1}{2^{2^k+1}\cdot 2^{2^k}}=1-\frac{1}{2^{2^k}}-\frac{2^{2^k}}{2^{2^k+1}}+\frac{1}{2^{2^k+1}}+\frac{2^{2^k}}{2^{2^k+1}\cdot 2^{2^k}}-\frac{1}{2^{2^k+1}\cdot 2^{2^k}}=$$

$$=1-\frac{1}{2^{2^k}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^k+1}}+\frac{1}{2^{2^k+1}}-\frac{1}{2^{2^k+1+2^k}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2^k}}+\frac{2}{2^{2^k}\cdot 2}-\frac{1}{2^{2^{k+1}}\cdot 2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{2^{k+1}}}\right).$$

Vidíme, že sme dostali žiadaný výsledok, a teda sme dokázali indukčný krok.

---

9. Predpokladajme, že na pošte dostať kúpiť iba známky 3 a 5 korunové. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že každú sumu väčšiu rovnú ako 8 korún možno zaplatiť pomocou týchto dvoch známok.

Dôkaz:

Sumu $s=8$, možno napísať $s=1.5+1.3$, a teda zaplatiť jednou trojkorunovou a jednou päťkorunovou mincou. Predpokladajme, že nejakú sumu $S\geq s$ môžeme zaplatiť pomocou trojkorunových a päťkorunových mincí, teda $S=x.5+y.3$, kde $x,y\in N\cup\{0\}$.

Potom sumu o korunu väčšiu

$S+1=x.5+y.3+1=x.5+y.3+2.3-1.5=(x-1).5+(y+2).3=X.5+Y.3$,

kde treba dať pozor, či opäť $X,Y\in N\cup\{0\}$. To nemusí platiť pre $x=0$, preto v týchto prípadoch vytvoríme sumu o korunu väčšiu ako $S+1=0.5+y.3+1=0.5+y.3+2.5-3.3=2.5+(y-3)3=2.5+Z.3$, kde $Z\in N\cup\{0\}$. To nemusí platiť pre $y<2$, to by však $S<2.3=6$, čo podľa zadania neplatí. Teda sme dokázali, že vždy vieme sumu zväčšiť o jednu korunu a teda zaplatiť tak ľubovoľnú sumu peňazí.

---

10. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že číslo n^3+2n je deliteľné číslom 3.

Dôkaz:

Pre $n=1$ výrok zrejme platí, lebo $1^3+2=3$. Nech daný výrok platí pre nejaké $k\geq 1$, a číslo k^3+2k je deliteľné tromi. Ukážeme, že aj číslo $(k+1)^3+2(k+1)$ je deliteľné tromi, a teda ho možno zapísať v tvare $(k+1)^3+2(k+1)=3r$, kde $r\in N$. Ak je číslo k^3+2k je deliteľné tromi, môžeme ho vyjadriť v tvare $k^3+2k=3s$, kde $s\in N$.

$$(k+1)^3+2(k+1)=k^3+3k^2+3k+3+2k=\left(k^3+2k\right)+3(k^2+k+1)=$$
$$=3s+3(k^2+k+1)=3(s+k^2+k+1)=3r\ ,\ r\in N\ .$$

---

11. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že $(1+a)^n\geq 1+na$ pre každé kladné reálne číslo a a pre každé prirodzené číslo n.

Dôkaz:

Pre $n=1$ výrok zrejme platí, lebo $(1+a)^1\geq 1+1a=1+a$. Nech daná nerovnosť platí pre nejaké $k\geq 1$, teda $(1+a)^k\geq 1+ka$. Ukážeme, že potom aj $(1+a)^{k+1}\geq 1+(1+k)a$.

$Ľ=(1+a)^{k+1}\geq(1+a)(1+a)^k\geq(1+a)(1+ka)$, na základe indukčného predpokladu.

$(1+a)(1+ka)=1+a+ka+ka^2\geq 1+a+ka=1+(1+k)a$, lebo výraz $ka^2\geq 0$.

---

12. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že $2^n<n!$ pre každé $n>3$

Dôkaz:

Pre $n = 4$ výrok zrejme platí, lebo $2^4 = 16 < 4! = 24$. Nech platí výrok V(k), pre nejaké $k \geq 4$. Ukážeme, že potom platí aj výrok V(k+1).

Ľ $= 2^{k+1} = 2.2^k < 2k! = 2.k.(k-1).(k-2)\ldots 3.2.1 < (k+1)k! = (k+1)! =$ P

Pri dôkaze sme využili fakt, že $2 < k+1$, ktorý platí pre všetky $k > 2$.