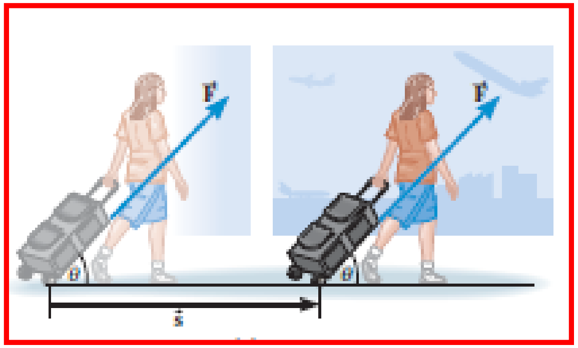
Práca a kinetická energia

Práca konštantnej sily

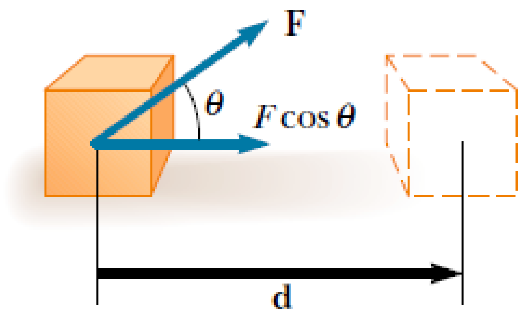


$$W = \vec{F} \bullet \vec{d}$$

práca

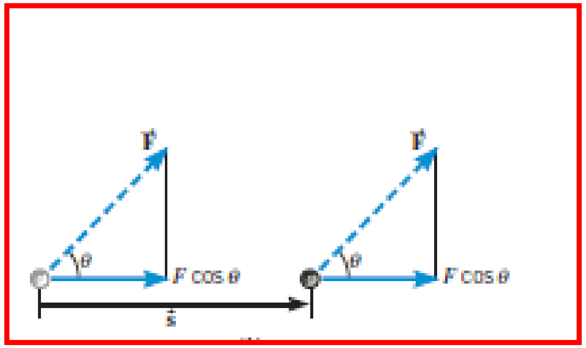
Pôsobiaca sila

Posunutie pôsobiska sily



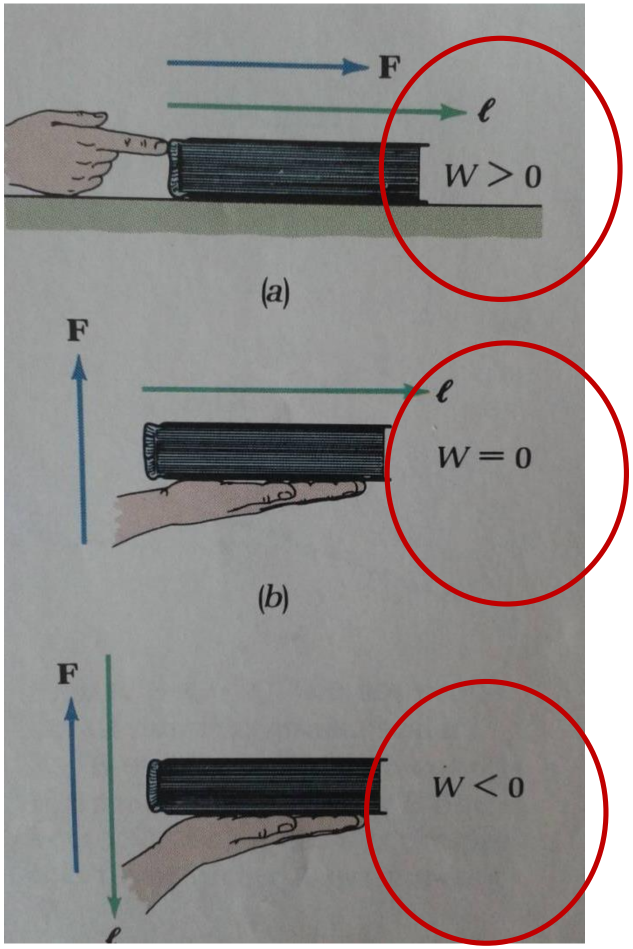
$$W = \vec{F} \bullet \vec{d} = Fd\cos\varphi = \boxed{F\cos\varphi}\, d$$

Zložka sily v smere posunutia

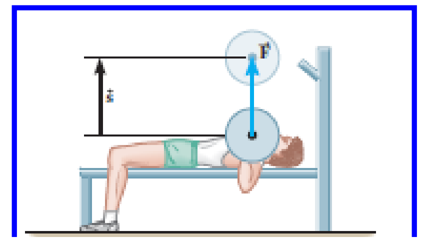


Do práce vstupuje len priemet sily do smeru posunutia

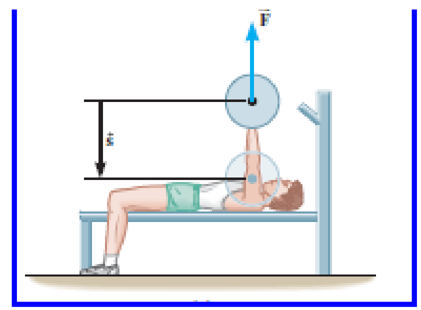
JEDNOTKA PRÁCE : 1 Joule = 1J



Práca je niečo iné ako fyziologická námaha



Sila F koná prácu W>0

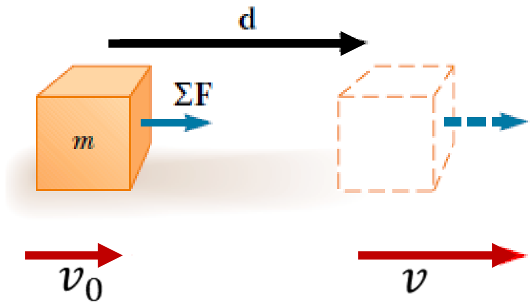


Sila F “spotrebováva“ prácu W<0

Práca sily, kolmej na smer posunutia je nulová.

$$W = \vec{F} \bullet \vec{d} = Fd\cos\varphi = F\cos\varphi\, d$$

Práca a kinetická energia pohyb v jednom smere



SILA MOŽE MENIŤ RÝCHLOSŤ, ZISTiME AKO

Poznáme silový účinok – sila pôsobila na dráhe d a zmenila rýchlosť z v_0 na v.
Určme silu a následne jej prácu z jej prejavov:

$$F = ma$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ad \qquad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

$$F = m\frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

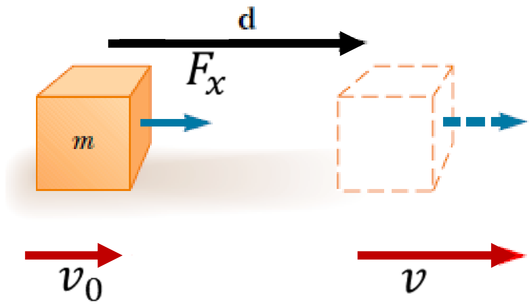
$$W = Fd = \vec{F} \bullet \vec{d} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta E_k$$

$$W = \boxed{\frac{1}{2}mv^2} - \boxed{\frac{1}{2}mv_0^2} = \Delta E_k$$

Kinetická energia

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2}$$

Práca a kinetická energia pohyb v jednom smere



$$F_x d = \boxed{\frac{1}{2}mv^2} - \boxed{\frac{1}{2}mv_0^2} = \Delta E_k$$

Kinetická energia

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2}$$

Zmena kinetickej energie telesa je rovná práci vykonanej silami, ktoré na časticu pôsobia v smere posunutia

ZOVŠEOBECNENIE: $$\vec{F} \bullet \vec{d} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta E_k$$

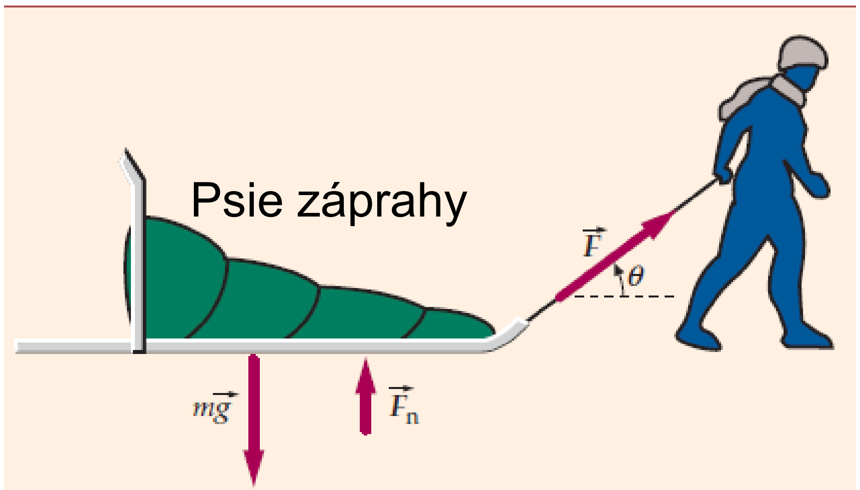
Teleso dôsledkom interakcie s okolím získava energiu

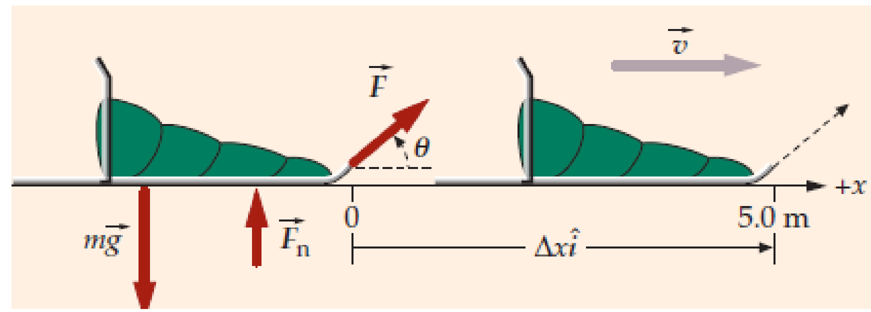
Zmena kinetickej energie častice sa rovná celkovej práci vykonanej všetkými silami, ktoré na časticu pôsobia

$$W = \sum \vec{F}_i \bullet \vec{d} = \vec{F}_V \bullet \vec{d} = \Delta E_k$$

$$W = \int_1^2 \vec{F} \bullet d\vec{l} = \Delta E_k$$

Človek s hmotnosťou m=80 kg začal pôsobiť na záprah silou F=180 N pod uhlom 40 stupňov. Určte prácu a výslednú rýchlosť záprahu, ak záprah sa presunul o Δx=5m



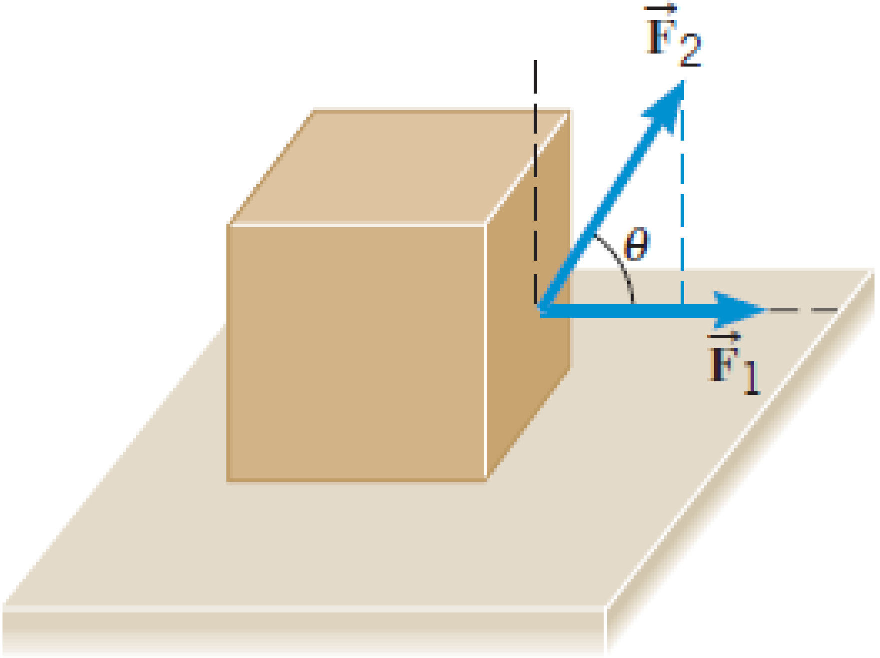


$$W_{total} = W_{you} = F_x \Delta x = F \cos\theta \, \Delta x$$
$$= (180 \text{ N})(\cos 40°)(5.0 \text{ m}) = 689 \text{ J}$$
$$= \boxed{6.9 \times 10^2 \text{ J}}$$

$$W_{total} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$
$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2W_{total}}{m}$$
$$= 0 + \frac{2(689 \text{ J})}{80 \text{ kg}} = 17.2 \text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$v_f = \sqrt{17.2 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 4.151 \text{ m/s} = \boxed{4.2 \text{ m/s}}$$

Normálová a tiažová sila nekonajú prácu

$$\boxed{\vec{F}_V \bullet \vec{d} = \Delta E_k}$$



Teleso sa premiestnilo o rovnakú vzdialenosť.Ktorá zo znázornených síl vykonala väčšiu prácu ?

PRÁCA ŠPECIALNYCH SÍL

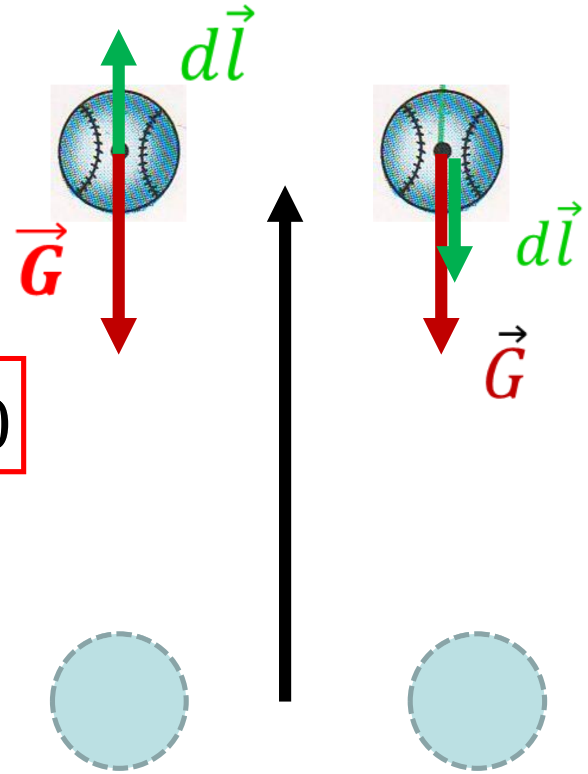
Práca tiažovej sily

$$\boxed{W = \Delta E_k}$$

Ak je práca ktorú vykoná sila G kladná, znamená to, že uvedená sila sa snaží zvýšiť kinetickú energiu telesa, ak je záporná, tak ju znižuje.

Tiažová sila sa snaží znížiť kinetickú energiu telesa

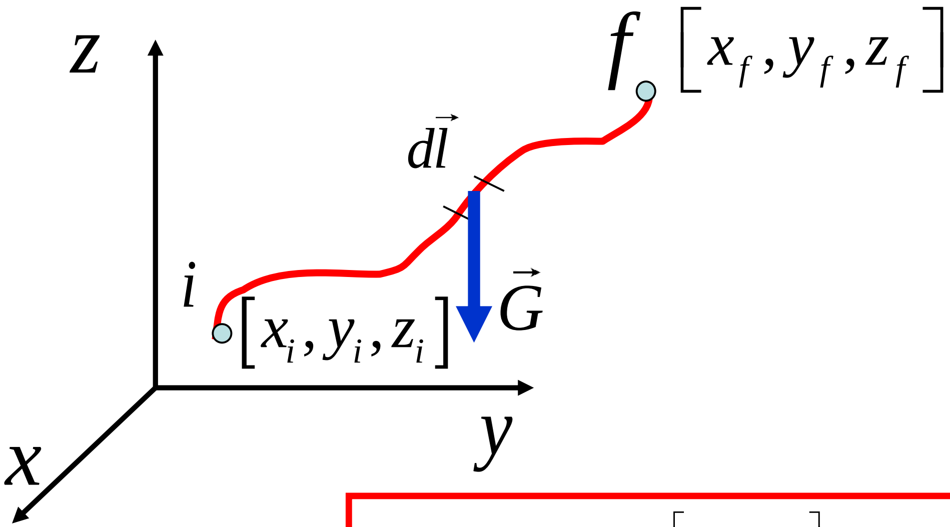
$$\boxed{\vec{G} \bullet d\vec{l} < 0}$$



$$\boxed{\vec{G} \bullet d\vec{l} > 0}$$

Tiažová sila sa snaží zvýšiť kinetickú energiu telesa

Práca tiažovej sily homogénne gravitačné pole



$$\boxed{W = \int \vec{G} \bullet d\vec{l}}$$

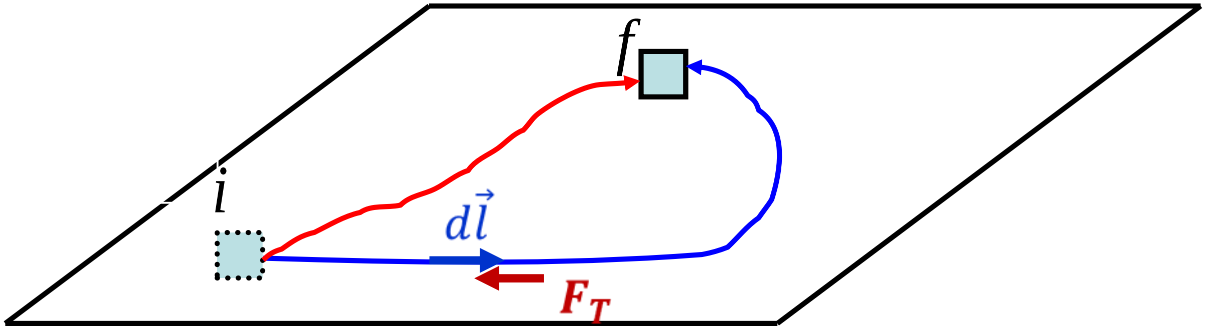
$$\Downarrow$$

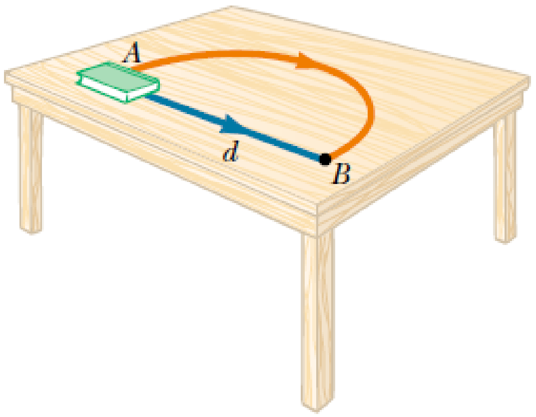
$$\boxed{W = \int \vec{G} \bullet d\vec{l} = \int_{[x_i, y_i, z_i]}^{[x_f, y_f, z_f]} (0, 0, -mg) \bullet (dx, dy, dz) \int = -mg\left(z_f - z_i\right) = \Delta E_k}$$

$$\Downarrow$$

Práca vykonaná gravitačnou silou <u>nezávisí</u> od tvaru trajektórie, ale iba od počiatočnej a konečnej polohy telesa.

Práca trecej sily





$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_T \bullet d\vec{l} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F_T\, dl \cos\left(180^0\right) = -F_T \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dl = -F_T s$$

Práca vykonaná trecou silou pri premiestnení telesa z bodu i do bodu f závisí od dĺžky dráhy, t.j. <u>závisí</u> od tvaru trajektórie.

Konzervatívne a nekonzervatívne sily (polia)

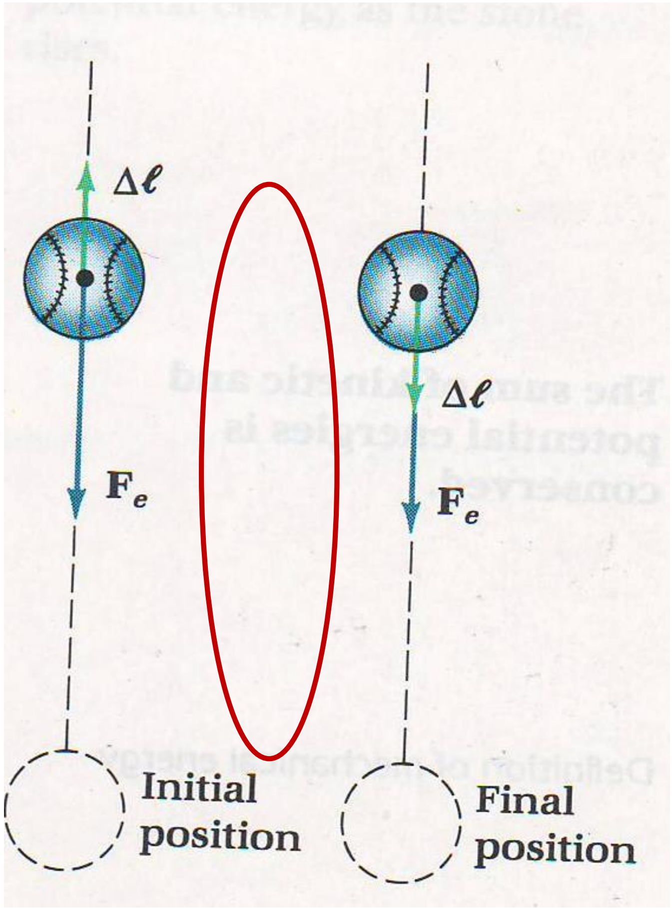
Podľa toho, či práca danej sily pri premiestnení telesa z jedného bodu do druhého závisí (nezávisí) od výberu trajektórie, možno pôsobiace sily rozdeliť do dvoch kategórii:

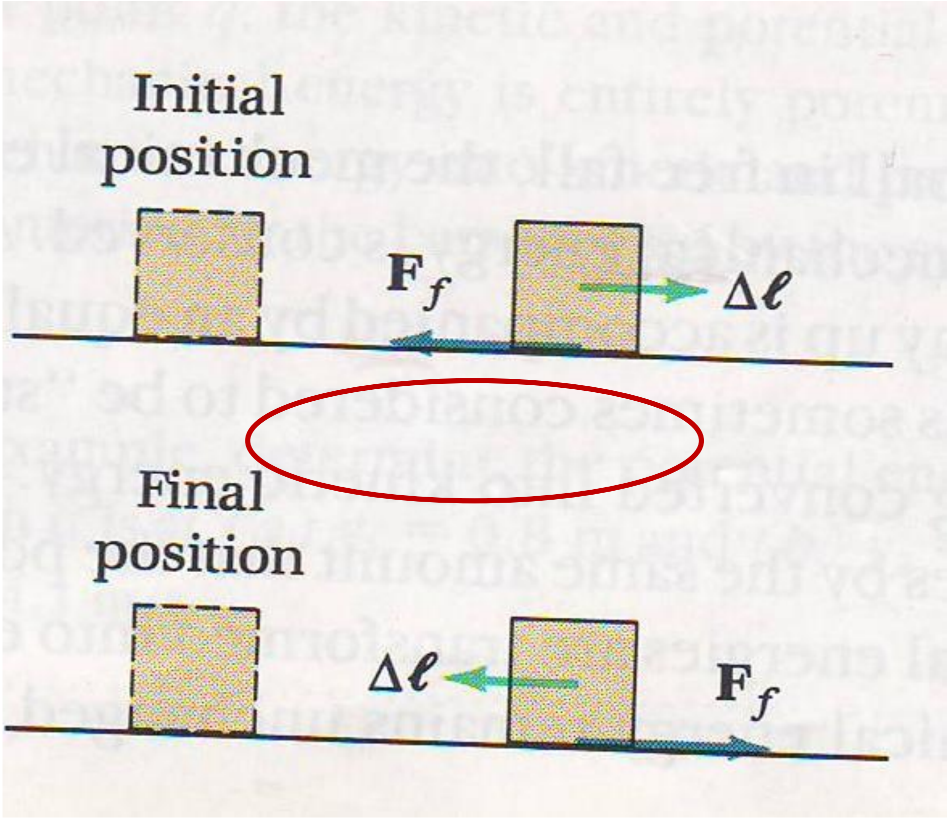
Konzervatívne – práca nezávisí od tvaru trajektórie, ale iba od počiatočnej a konečnej polohy telesa (napr. gravitačná)

Nekonzervatívne sily – práca závisí od tvaru rajektórie (napr. trecia)

Alternatívna podmienka konzervatívnosti. Pre ľubovoľné uzavreté krivky musí byť splnená rovnica: $\oint_{\Gamma} \vec{F} \bullet d\vec{l} = 0$

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \bullet d\vec{l} = 0$$





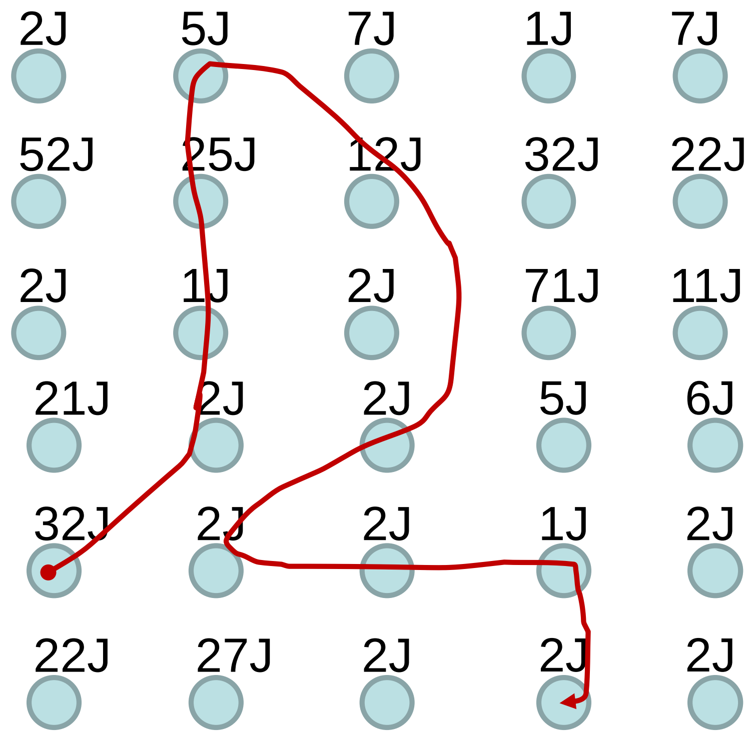
Tiažová sila počas výstupu "spotrebúva" rovnakú prácu ako vykonáva pri spätnom páde

Práca trecej sily nemôže byť nulová !!!

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \bullet d\vec{l} \neq 0$$

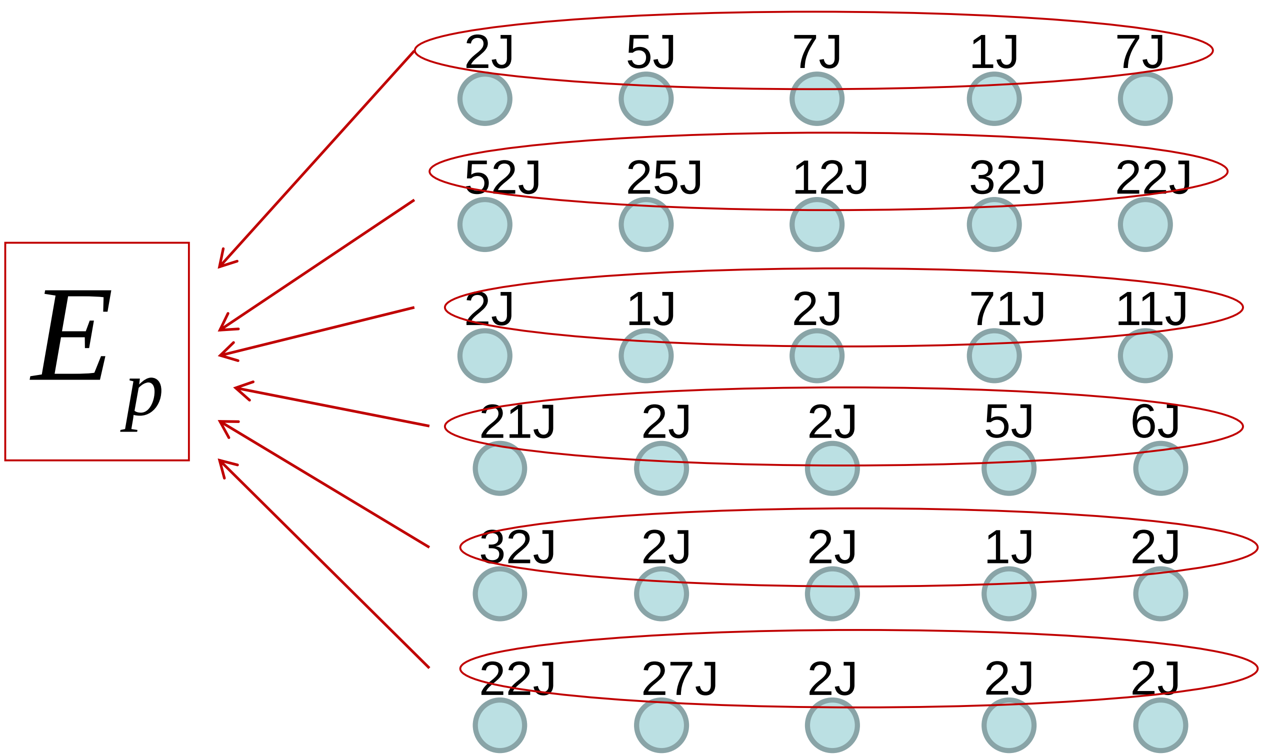
PREDSTAVA

Zavedenie potenciálnej energie



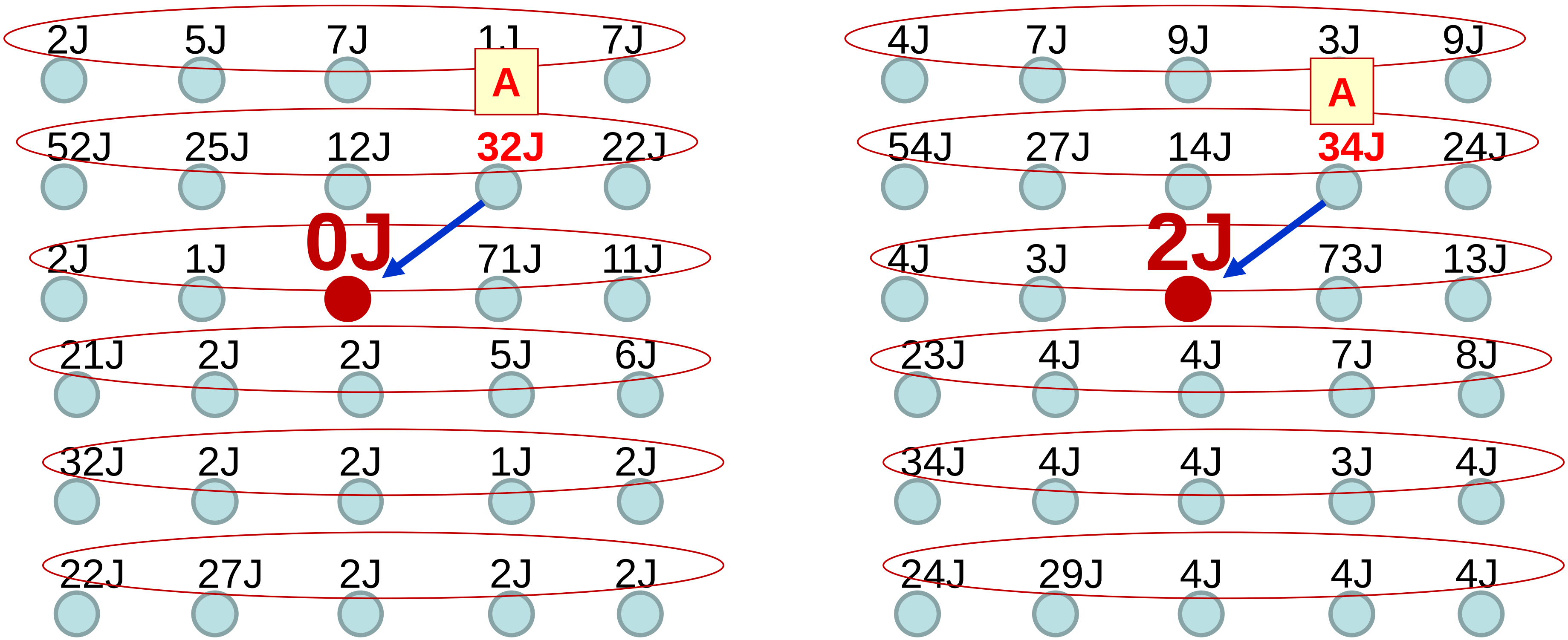
Príprava polotovaru nazývaného potenciálna energia

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -\left[E_p\left(\vec{r}_2\right) - E_p\left(\vec{r}_1\right) \right] = -\Delta E_p$$



Rozdiel potenciálnych energií medzi bodmi je jednoznačný, potenciálna energia však jednoznačne nie je definovaná

Ak sa však stanoví jej hodnota v nejakom referenčnom bode, potom už bude jednoznačne definovaná



Potenciálna energia

Nejednoznačnosť odstránime zadefinovaním referenčného bodu, ktorému priradíme konkrétnu hodnotu

$$-\left[E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1)\right] = -\Delta E_p = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l}$$

Rozdiel medzi funkciami je jednoznačne zadefinovaný, ale jej hodnota nie je.

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{ref}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}$$

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \bullet d\vec{l} + E_p(\vec{r}_{ref})$$

$$\boxed{E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \bullet d\vec{l}}$$

Potenciálna energia

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -\Delta E_p$$

POTENCIÁLNA ENERGIA Ep

- **Nejednoznačná funkcia, pokiaľ sa nevyjadruje vzhľadom na ľubovolne zvolený referenčný bod**
- **Nemá fyzikálny význam**
- **fyz. význam iba rozdiel ΔEp (záporne vzatá práca poľa; resp. práca vonkajších síl vykonaná pri premiestnení telesa z referenčného bodu, do miesta, kde sa teleso nachádza)**

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \bullet d\vec{l} = 0$$

Konzervatívne sily

Gravitačná sila

Sila pružnosti

Elektrická sila

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \bullet d\vec{l} \neq 0$$

NEkonzervatívne sily

Sila trenia

Odpor prostredia

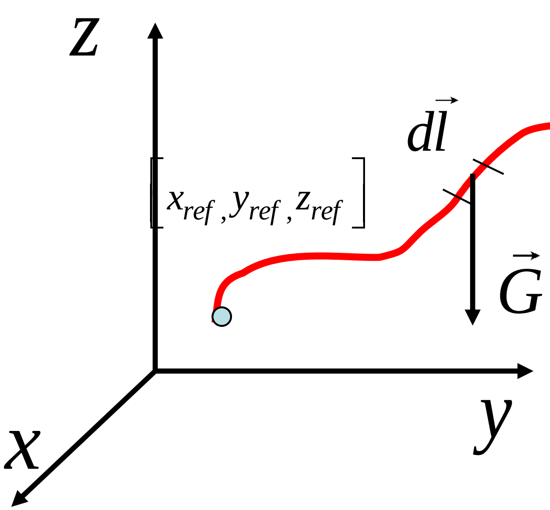
Sila napätia /lanka/

Normálové, tlakové

Výpočet potenciálnej energie

- Tiažová potenciálna energia
- Potenciálna energia pružnosti

Potenciálna energia v homogénom gravitačnom poli



$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$E_p = -\int_{[x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}]}^{[x, y, z]} \vec{G} \bullet d\vec{l} = -\int_{[x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}]}^{[x, y, z]} (0, 0, -mg) \bullet (dx, dy, dz) =$$

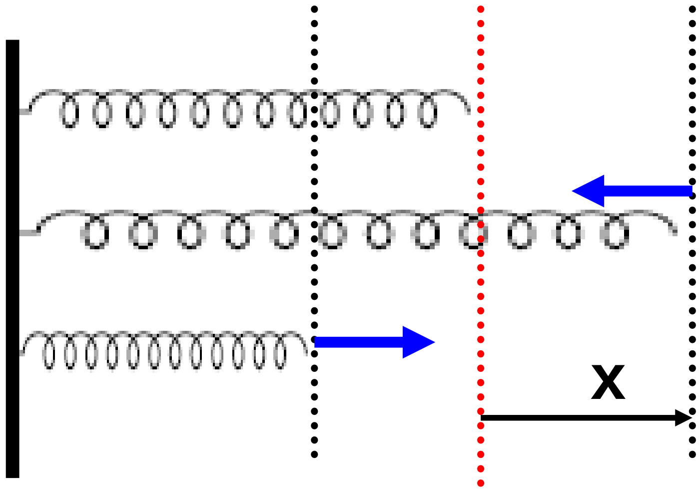
$$= -\int_{[x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}]}^{[x, y, z]} (0, 0, -mg) \bullet (dx, dy, dz) = mg \underbrace{\left(z - z_{ref}\right)}_{h}$$

Referenčný bod zvoľme v počiatočnom bode súradnicovej sústavy:

$$\left[x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}\right] = [0, 0, 0]$$

$$\boxed{E_p = mgz = mgh}$$

Potenciálna energia pružných síl



Rovnovážna poloha

$$\boxed{F_x = -kx}$$

$$\boxed{E_p = -\int_{x_{ref}}^{x} F dx = -\int_{x_{ref}}^{x} F dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_{ref}^2}$$

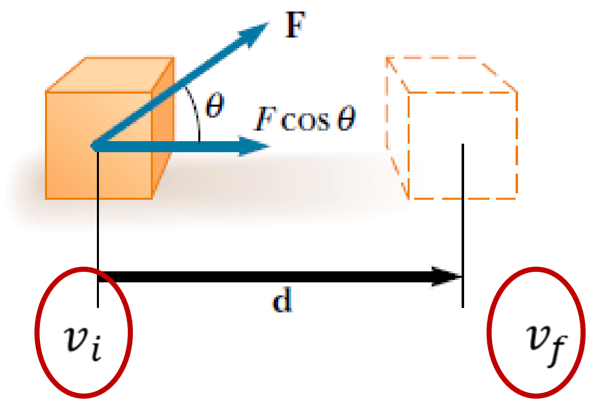
Referenčný bod zvoľme v rovnovážnej polohe $x_{ref} = 0$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

ZHRNUTIE poznatkov o práci

Práca a kinetická energia

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l}$$



K zmene rýchlosti telesa môže dôjsť len pôsobením sily

$$W = \boxed{\frac{1}{2}mv_f^2} - \boxed{\frac{1}{2}mv_i^2} = \Delta E_k$$

Kinetická energia

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2}$$

Zmena kinetickej energie telesa je rovná celkovej práci vykonanej všetkými silami, ktoré na časticu pôsobia

$$\boxed{W = \Delta E_k}$$

Práca v konzervatívnych poliach

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -\Delta E_p}$$

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Práca síl konzervatívneho poľa (pri prechode systému z počiatočného do konečného stavu) sa rovná záporne vzatej zmene potenciálnej energie ΔEp.

Práca v **konzervatívnych** poliach

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Zmena kinetickej energie častice sa rovná celkovej práci vykonanej všetkými silami, ktoré na časticu pôsobia

$$W = \Delta E_k$$

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

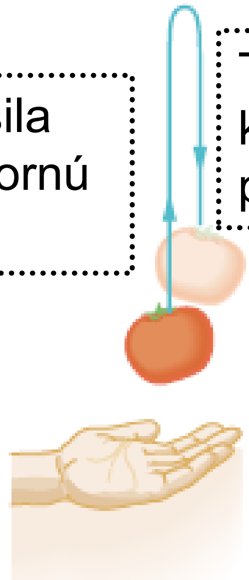
Zmena potenciálnej energie ΔEp pri prechode systému z počiatočného do konečného stavu je rovná záporne vzatej práci (konzervatívne polia) :

$$W = -\Delta E_p$$

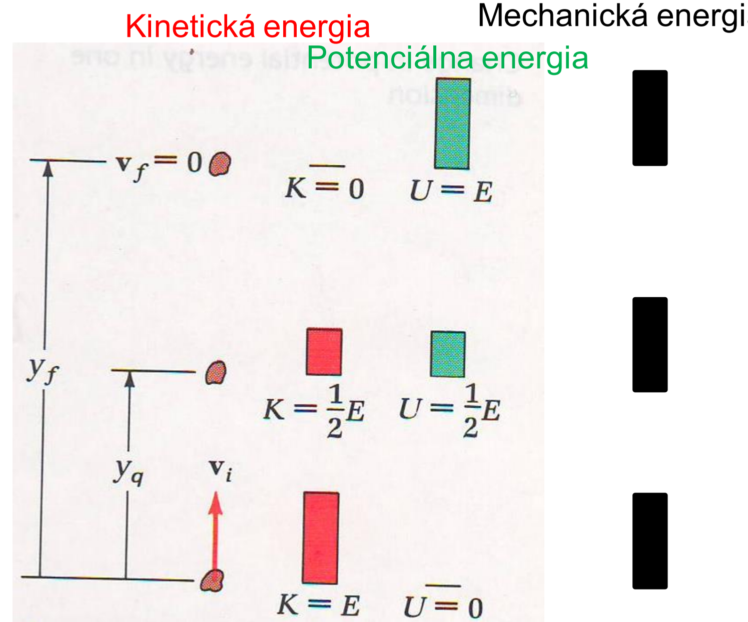
$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Pohyb telesa v tiažovom poli Zeme

Tiažová sila koná zápornú prácu.



Tiažová sila koná kladnú prácu.



$$\boxed{\Delta E_k + \Delta E_p = 0}$$

Mechanická energia sústavy je stála, pokiaľ v sústave pôsobia **iba konzervatívne sily**

- **Teleso sa pohybuje nahor, potenciálna energia rastie $\Delta E_p > 0$**
$\Rightarrow$ kinetická energia klesá $\Delta E_k < 0$
- **Teleso sa pohybuje nadol, potenciálna energia klesá $\Delta E_p < 0$**
- **$\Rightarrow$ kinetická energia stúpa $\Delta E_k > 0$**

Výpočet práce síl pôsobiacich na HB

$$\Delta E_k = W = \int \boxed{\vec{F}} \bullet d\vec{l}$$

$$F \begin{cases} F_K \\ F_{NK} \end{cases}$$

Konzervatívne sily

Gravitačná sila

Sila pružnosti

Elektrická sila

NEkonzervatívne sily

Sila trenia

Odpor prostredia

Sila napätia /lanka/

Normálové, tlakové

$$\Delta E_k = \boxed{\int \boxed{\vec{F}_K} \bullet d\vec{l} + \int \boxed{\vec{F}_{NK}} \bullet d\vec{l}}$$

Výpočet práce síl pôsobiacich na HB

$$\Delta E_k = \boxed{\int \boxed{\vec{F}_K} \bullet d\vec{l} + \int \boxed{\vec{F}_{NK}} \bullet d\vec{l}}$$

Výslednica všetkých konzervatívnych síl pôsobiacich na teleso

Výslednica všetkých NEkonzervatívnych síl pôsobiacich na teleso

$$\boxed{\Delta E_k - \boxed{\int \vec{F}_K \bullet d\vec{l}} = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$

$$\boxed{\int \vec{F}_K \bullet d\vec{l} = -\Delta E_p}$$

$$\boxed{\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}}$$

Mechanická energia

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

Niektoré druhy potenciálnej energie

Potenciálna energia gravitačného poľa

$$E_p = mgh$$

Potenciálna energia pružných síl

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Výpočet práce v sústavách

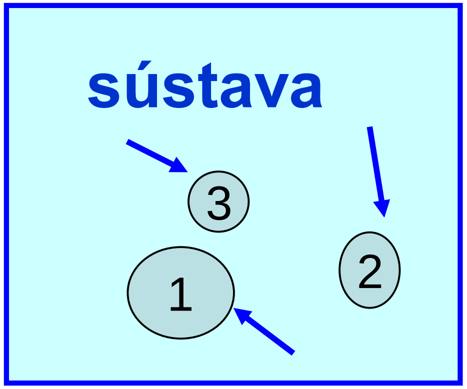
- Sústava sa skladá z dvoch alebo viacerých objektov
- Na objekty sústavy pôsobia vzájomné *interakčné sily* ako aj okolie

$$\Delta E_{k_1} + \Delta E_{p_1} = \int \vec{F}_{NK_1} \bullet d\vec{l}$$

$$\Delta E_{k2} + \Delta E_{p_2} = \int \vec{F}_{NK_2} \bullet d\vec{l}$$

$$\Delta E_{k_3} + \Delta E_{p_3} = \int \vec{F}_{NK_3} \bullet d\vec{l}$$

$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \sum_i \int \vec{F}_{NK_i} \bullet d\vec{l}$$

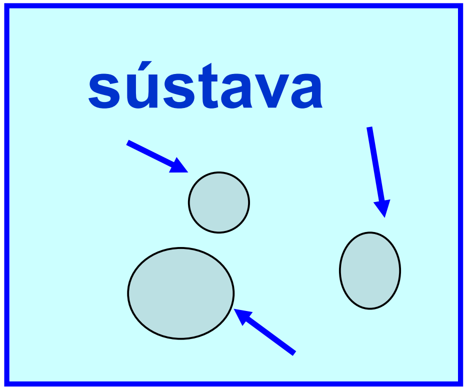


Práca nekonzervatívnych síl pôsobiacej na i-ty objekt sústavy

Mechanická energia sústavy

$$\boxed{\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total}} = \sum_i \boxed{\int \vec{F}_{NK_i} \bullet d\vec{l}}$$

Zákon zachovania mechanickej energie



Mechanická energia sústavy

$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \sum_i \int \vec{F}_{NK_i} \bullet d\vec{l}$$

Zmena mechanickej energie sústavy sa rovná celkovej práci nekonzervatívnych síl pôsobiacich na objekty sústavy.

Ak v sústave pôsobia len konzervatívne sily, potom sa celková mechanická (t.j. celková kinetická +potenciálna) energia zachováva

$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = 0$$

Alternatívne vyjadrenie

$$\Delta E_k^{total} + \Delta E_p^{total} = \boxed{\sum_i \boxed{W_{NK_i}}}$$

Práca nekonzervatívnych síl pôsobiacej na i-ty objekt sústavy

Práca nekonzervatívnych síl nad celou sústavou

$$\left[E_{k_f}^{total} - E_{k_i}^{total} \right] + \left[E_{p_f}^{total} - E_{p_i}^{total} \right] = W_{NK}$$

$$\boxed{E_{k_i}^{total} + E_{p_i}^{total} + W_{NK} = E_{k_f}^{total} + E_{p_f}^{total}}$$

Algoritmus použitia ZZ

1. Definujte systém na ktorý chcete aplikovat ZZ. Vyberte počiatočný a konečný stav, pre ktorý sa použije ZZ
2. Urči sily pôsobiace na systém a rozdeľte ich na konzervatívne a nekonzervatívne
3. Určte referenčné body pre výpočet jednotlivých potenciálnych energii asociovaných s príslušnými konzervatívnymi silami
4. A, V prípade, že na sústavu pôsobia iba konzervatívne sily mechanická energia systému sa zachováva.

   B, V prípade, že sú prítomné aj nekonzervatívne sily, treba použiť „modifikovanú“ verziu ZZE

$$\boxed{E_{k_i}^{total} + E_{p_i}^{total} + W_{NK} = E_{k_f}^{total} + E_{p_f}^{total}}$$

KINEMATICKÝ PRÍSTUP

Teleso je vrhnuté pod uhlom α k horizontálnemu smeru počiatočnou rýchlosťou v_0. Určte **maximálnu výšku výstupu**.

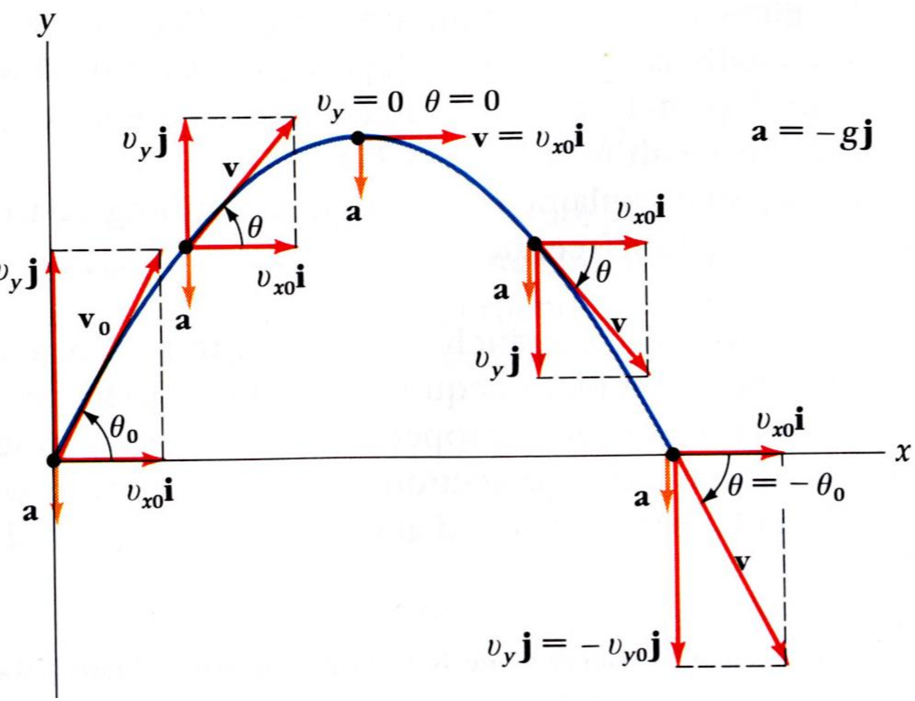
Max. výška

$$\boxed{v_y = 0}$$

$$v_y = v_0 \sin\varphi - g t_{max} = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0 \sin\varphi}{g}$$

$$H_{max} = v_0 \sin\varphi t_{max} - \frac{1}{2} g t_{max}^2$$

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\varphi)}{2g}$$

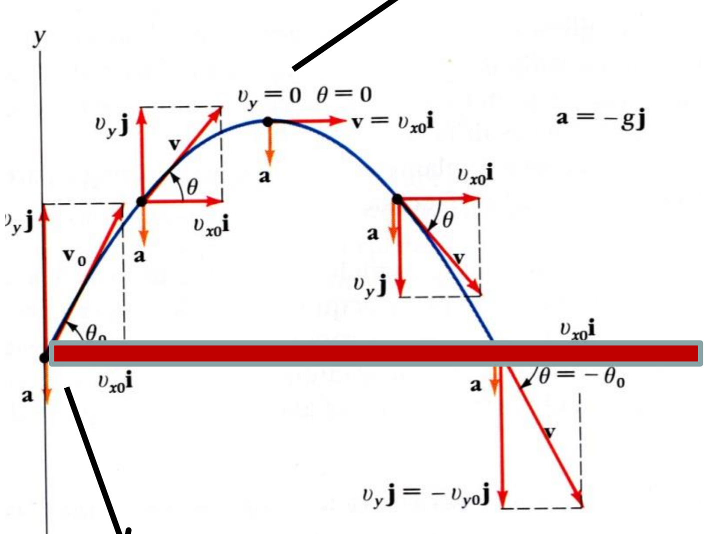


ENERGETICKÝ PRÍSTUP

Teleso je vrhnuté pod uhlom α k horizontálnemu smeru počiatočnou rýchlosťou v0. Určte **maximálnu výšku výstupu**.

Konečný stav

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$



Počiatočný stav

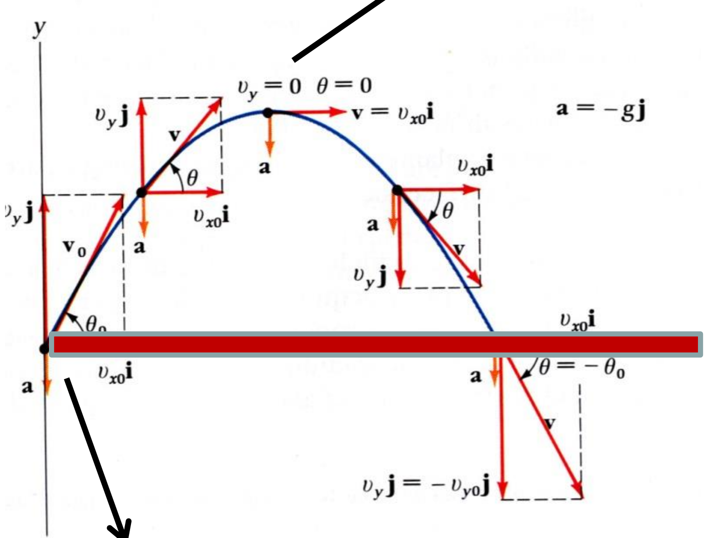
Systém: teleso
Sily : gravitačná – konzervatívna
ref.b- Zem

1. Definujte systém na ktorý chcete aplikovat ZZ. Vyberte počiatočný a konečný stav, pre ktorý sa použije ZZE
2. Urči sily pôsobiace na systém a rozdeľte ich na konzervatívne a nekonzervatívne
3. Určte referenčné body pre výpočet jednotlivých potenciálnych energii asociovaných s príslušnými konzervatívnymi silami
4. Aplikujte ZZ

Teleso je vrhnuté pod uhlom α k horizontálnemu smeru počiatočnou rýchlosťou v0. Určte **maximálnu výšku výstupu**.

Konečný stav

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

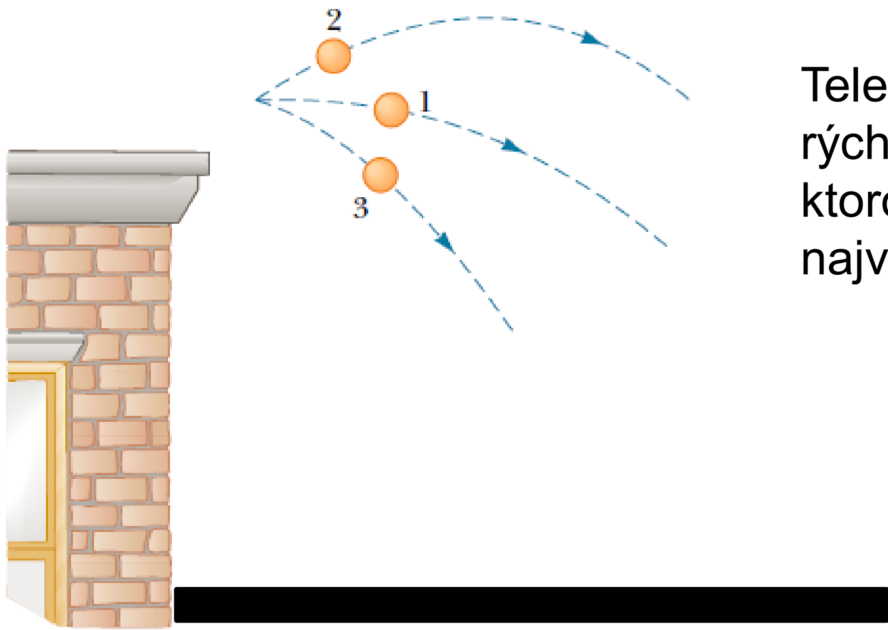


Počiatočný stav

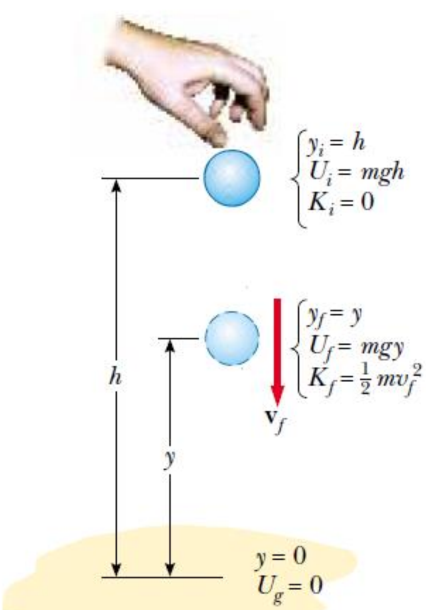
$$E_{k_i}^{total} + E_{p_i}^{total} + W_{NK} = E_{k_f}^{total} + E_{p_f}^{total}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2} m \left[v_0 \cos\varphi\right]^2 + mgH_{\max}$$

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$



Teleso sme vrhli z budovi rovnako veľkou rýchlosťou rôznymi smermi. Rozhodnite, v ktorom prípade bude rýchlosť dopadu najväčšia



$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l}$$

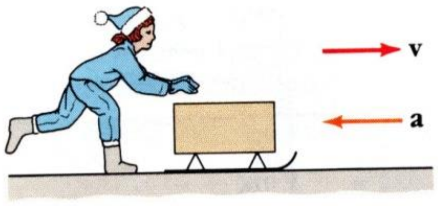
$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

Ak počiatočná rýchlosť rovnaká, potom aj konečná je rovnaká

Práca nekonzervatívnych síl

Dievča naskočilo na sánky, ktoré sa začali pohybovať rýchlosťou v=2.5 m/s. Sánky prešli dráhu d=6.4m a zastavili sa. Určte koeficient dynamického trenia.



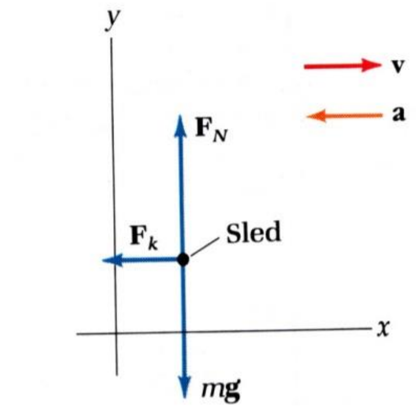
(a)

Tlaková sila nekoná prácu

$$E_{k_i} + E_{pi} + \int \vec{F}_{NK} \bullet d\vec{l} = E_{kf} + E_{pf}$$

$$E_{k_i} + \cancel{E_{pi}} - \mu_k mgd = \cancel{E_{kf}} + \cancel{E_{pf}}$$

Posobiace sily:



$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 - \mu_k mgd = 0}$$