

Stýžďen 15. 2. 2021, 11.00, Strážboho MMLogika

AXIOMY:

- $A1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 $A2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
 $A3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

Modus ponens (MP): A a $A \rightarrow B$ odvoďte B

Pravidlo syllogizmu (Syl): $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

Věty o záměně předpokladů: pro libovolné A, B, C

platí $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$

Odvodění výrokové spojky

- $A \wedge B \dots \dots \neg(A \rightarrow \neg B)$
 $A \vee B \dots \dots \neg A \rightarrow B$
 $A \leftrightarrow B \dots \dots (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \dots \dots \neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A))$

Důkaz s využitím předpokladů:

ab T je množina výrok. formulí, podle formule A

je dokázáno z předpokladu $T (T \vdash A)$ ab existuje

důkaz A , abojím axiomy pro T nebo MP tj. $A \vdash A$

Věty o dedukci:

ab $A \vdash B$ má formulu A T je množina formulí, podle

$T \vdash A \rightarrow B$ platí věty, ab $T \cup \{A\} \vdash B \dots (V)$

(přidání: ab $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ podle $A \vdash B \rightarrow A$)

Věty o obměně implikace (V00I)

- a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
 b) $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
 c) $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$
 d) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Lemmy:

Lemma 2.1: $\vdash A \rightarrow A$

Lemma 2.2: Syl

Lemma 2.3: V00P

Lemma 2.4: V0D

Lemma 2.5: $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

Lemma 2.6: $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$

Lemma 2.7: $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$

Lemma 2.8: V00I

Lemma 2.9: $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$

Lemma 2.10: ab $T \cup \{A\} \vdash B$
 $\sim \vdash \neg A$
 } podle $T \vdash B$
 } o neplatnosti formule

Lemma 2.11: $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$
 $\neg A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$

Lemma 2.12: $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$
 $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow B$
 $(B \rightarrow C)$

Pr. 4/ odvoďte Syl: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C)$

- 1) $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ $A2$
 2) $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ $A1$
 3) $B \rightarrow C \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ $V0D(2)$
 4) $B \rightarrow C \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ $MP(3,1)$
 5) $B \rightarrow C, A \rightarrow B \vdash A \rightarrow C$ $V0C(4)$

b) Odvoďte $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$

- 1) $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ $A2$
 2) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ $V0D(1)$
 3) $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ $A1$
 4) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$ $Syl(3,2)$

a) pravidlo syllogizmu (inženýrské)

$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

- 1) $A \rightarrow B$ $predp$
 2) $B \rightarrow C$ $predp$
 3) A $predp$
 4) $A, A \rightarrow B \vdash B$ $MP(3,1)$
 5) $A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash C$ $MP(4,2)$
 6) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ $V0D(5)$

b) a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$:

- 1) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ $A3$
 2) $\vdash \neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ $A1$
 3) $(A \rightarrow B) \vdash ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ $V0D(1)$
 4) $(A \rightarrow B) \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ $Syl(2,3)$
 5) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ $V0D(4)$

2.6.12) $A \rightarrow B \vdash (C \vee A) \rightarrow (C \vee B)$

- $A \rightarrow B \vdash (\neg C \rightarrow A) \rightarrow (\neg C \rightarrow B)$
 1) $\vdash (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((\neg C \rightarrow A) \rightarrow (\neg C \rightarrow B))$ $A2$
 2) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B))$ $A1$
 3) $A \rightarrow B \vdash (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B))$ $V0D(2)$
 4) $A \rightarrow B \vdash (\neg C \rightarrow A) \rightarrow (\neg C \rightarrow B)$ $MP(3,1)$

6.2) $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$

- 1) $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ $V00I$
 2) $\neg A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow A$ $V0D(1)$
 3) $\vdash (\neg B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$ $A3$
 4) $\neg B \rightarrow A \vdash (\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$ $V0D(3)$
 5) $\neg A \rightarrow B, \neg B \rightarrow A \vdash B$ $MP(2,4)$
 6) $\neg A \rightarrow B \vdash (\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$ $V0D(5)$
 7) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ $V00I$
 8) $\neg A \rightarrow B \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow B$ $Syl(7,6)$
 9) $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ $V0D(8)$

m) $\vdash ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A$

- 1) $(A \rightarrow A) \rightarrow A$ $predpoklad$
 2) $\vdash A \rightarrow A$ $\dots \dots \dots$ Lemma 2.1
 3) $(A \rightarrow A) \rightarrow A \vdash A$ $\dots \dots \dots$ MP(2,1)
 4) $\vdash ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A$ $\dots \dots \dots$ V0D(3)

n) $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

- 1) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ $A3$
 2) $\vdash \neg A \rightarrow \neg A$ $Lemma 2.1$
 3) $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ $MP(2,1)$

Návěd: treba skúsat obr. impl., V0D
 A1, A2, A3
 odvodiť alebo podľa n
 - kedykoľvek \rightarrow axiomy lemy
 predpoklad, $\dots \dots$
 hľadám
 polozky