Seminár z matematiky 1 – cv6 – Racionálne korene a rozklad polynómu - riešenia

V nasledujúcich polynómoch určte kandidátov na ich racionálne korene. Overte, ktorí kandidáti sú naozaj koreňom daného polynómu. Zistite, koľkonásobný je ktorý koreň. Ak vám po vydelení ostane polynóm druhého stupňa, zistite reálne korene tohto polynómu. Ak si myslíte, že tento reálne korene nemá (= je nerozložiteľný), zdôvodnite prečo ich nemá. Nakoniec napíšte polynóm v kanonickom tvare.

1. $p(x) = 10x^3 + 8x^2 + 8x - 2$

Aby sme si ušetrili robotu, najprv si vyberme pred zátvorku dvojku (keďže všetky koeficienty polynómu sú párne):
$p(x) = 10x^3 + 8x^2 + 8x - 2 = 2\left(5x^3 + 4x^2 + 4x - 1\right)$. Korene budeme teda hľadať už pre polynóm $p_1(x) = 5x^3 + 4x^2 + 4x - 1$. Ako ďalší krok si vypočítajme $p_1(1) = 5 + 4 + 4 - 1 = 12$ a $p_1(-1) = -5 + 4 - 4 - 1 = -6$. Vidíme, že 1 ani -1 nie sú koreňmi p_1. Nájdime teraz kandidátov na racionálne korene p_1. Podľa Vety 1 vieme, že ak $\frac{r}{s}$, kde $r \in Z$ a $s \in N$ je koreň nášho polynómu, potom $r \mid 1 \wedge s \mid 5$. Teda, $r \in \{-1;1\}$ a $s \in \{1;5\}$. Zároveň $(r - s) \mid p_1(1)$ a $(r + s) \mid p_1(-1)$. Dajme teda dáta do tabuľky:

$\frac{r}{s}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{5}$	
$r+s$	2	6	0	4	$p_1(-1) = -6$
$r-s$	0	-4	-2	-6	$p_1(1) = 12$

Vidíme, že jediný kandidát na racionálny koreň je $x = \frac{1}{5}$. Overme si Hornerovou schémou či to je koreň:

	5	4	4	-1
$x = \frac{1}{5}$		1	1	1
	5	5	5	0

Vidíme, že $x = \frac{1}{5}$ je koreň (sami si overte, že tento koreň je jednoduchý, t.j. jednonásobný). Po predelení polynómu $p_1(x)$ výrazom $\left(x - \frac{1}{5}\right)$ nám ostal polynóm $p_2(x) = 5x^2 + 5x + 5 = 5\left(x^2 + x + 1\right)$ (viď tretí riadok schémy). Môžeme si jednoducho použitím diskriminantu ($D = 5^2 - 4.5.5 = -75 < 0$) overiť, že tento polynóm druhého stupňa nemá reálne korene a teda je už nerozložiteľný. Kanonický tvar zadaného polynómu teda je
$p(x) = 10\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x^2 + x + 1\right)$ a jeho jediným a navyše jednoduchým koreňom je $x = \frac{1}{5}$.

2. $p(x) = 7x^3 + x^2 + 14x + 2$

Najprv si overme, že sa nedá nič vyňať pred zátvorku. Ako ďalší krok si vypočítajme $p(1) = 7 + 1 + 14 + 2 = 24$ a $p(-1) = -7 + 1 - 14 + 2 = -18$. Vidíme, že 1 ani -1 nie sú koreňmi $p(x)$. Nájdime teraz kandidátov na racionálne korene $p(x)$. Podľa Vety 1 vieme, že ak $\frac{r}{s}$, kde $r \in Z$ a $s \in N$ je koreň nášho polynómu, potom $r \mid 2 \wedge s \mid 7$. Teda, $r \in \{-1;1;-2;2\}$ a $s \in \{1;7\}$. Zároveň $(r-s) \mid p(1)$ a $(r+s) \mid p(-1)$. Dajme teda dáta do tabuľky:

$\frac{r}{s}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-2}{7}$	
$r+s$	2	8	0	6	3	9	-1	5	$p(-1) = -18$
$r-s$	0	-6	-2	-8	1	-5	-3	-9	$p(1) = 24$

Vidíme, že máme 3 kandidátov na racionálny koreň, $x = -\frac{1}{7}$, $x = 2$ a $x = -2$. Overme si Hornerovou schémou či $x = -\frac{1}{7}$ je koreň:

	7	1	14	2
$x = -\frac{1}{7}$		-1	0	-2
	7	0	14	0

Vidíme, že to je koreň. Sami si overte, že je len jednoduchý (tj. jednonásobný). Výsledok delenia polynómu $p(x)$ výrazom $\left(x + \frac{1}{7}\right)$ nájdeme v poslednom riadku schémy - ostal nám polynóm $p_1(x) = 7x^2 + 0x + 14 = 7(x^2 + 2)$. Použitím diskriminantu ($D = 0^2 - 4 * 7 * 14 < 0$) si môžeme jednoducho overiť, že tento polynóm druhého stupňa nemá reálne korene, teda je už nerozložiteľný. Kanonický tvar zadaného polynómu teda je $p(x) = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)(x^2 + 2)$ a jeho jediným a navyše jednoduchým koreňom je $x = -\frac{1}{7}$.

3. $p(x) = 3x^3 - x^2 - 9x + 3$

Najprv si overme, že sa nedá nič vyňať pred zátvorku.

Ako ďalší krok si vypočítajme $p(1) = 3 - 1 - 9 + 3 = -4$ a $p(-1) = -3 - 1 + 9 + 3 = 8$. Keďže nám nevyšli nuly, je jasné, že 1 ani -1 nie sú koreňmi zadaného polynómu. Nájdime teraz kandidátov na racionálne korene polynómu $p(x)$. Podľa Vety 1 vieme, že ak $\frac{r}{s}$, kde $r \in Z$ a $s \in N$ je koreň nášho polynómu, potom $r \mid 3 \wedge s \mid 3$. Teda, $r \in \{-1;1;-3;3\}$ a $s \in \{1;3\}$. Zároveň $(r - s) \mid p(1)$ a $(r + s) \mid p(-1)$. Dajme teda dáta do tabuľky:

$\frac{r}{s}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-3}{3}$	
$r+s$	2	4	0	2	4	6	-2	0	$p(-1) = 8$
$r-s$	0	-2	-2	-4	2	0	-4	-6	$p(1) = -4$

Vidíme, že máme 4 kandidátov na racionálny koreň, $x = \pm\frac{1}{3}$ a $x = \pm 3$. Overme si Hornerovou schémou či $x = -\frac{1}{3}$ je koreň:

	3	-1	-9	3
$x = -\frac{1}{3}$		-1	$\frac{2}{3}$	3-$\frac{2}{9}$
	3	-2	-9+$\frac{2}{3}$	6-$\frac{2}{9}$

Vidíme, že to je nie je koreň. Overme si Hornerovou schémou či $x = \frac{1}{3}$ je koreň:

	3	-1	-9	3
$x = \frac{1}{3}$		1	0	-3
	3	0	-9	0

Vidíme že to je koreň (sami si overte, že je len jednonásobný = jednoduchý). Po predelení polynómu $p(x)$ výrazom $\left(x - \frac{1}{3}\right)$ nám ostal polynóm $p_1(x) = 3x^2 - 9$ - vidíme to v poslednom riadku Hornerovej schémy. Ten sa dá jednoducho rozložiť ako $p_1(x) = 3x^2 - 9 = 3\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$.

Spolu sme teda rozložili polynóm ako $p(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$, čo je kanonický tvar polynómu. Má jeden racionálny koreň $x = \frac{1}{3}$ a dva reálne korene $x = \pm\sqrt{3}$.

4. $p(x) = 8x^4 + 12x^3 + 6x^2 + x$

Najprv si všimnime, že sa dá x vyňať pred zátvorku. Znamená to, že jeden z koreňov zadaného polynómu je $x = 0$ a je to jednoduchý koreň. Po vyňatí dostaneme $p(x) = 8x^4 + 12x^3 + 6x^2 + x = x\left(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1\right)$. Korene budeme teda hľadať už pre polynóm $p_1(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$. Ako ďalší krok si vypočítajme $p_1(1) = 8 + 12 + 6 + 1 = 27$ a $p_1(-1) = -8 + 12 - 6 + 1 = -1$. Vidíme, že 1 ani -1 nie sú koreňmi polynómu $p_1(x)$. Nájdime teraz kandidátov na racionálne korene polynómu $p_1(x)$. Podľa Vety 1 vieme, že ak $\frac{r}{s}$, kde $r \in Z$ a $s \in N$ je koreň nášho polynómu, potom $r \mid 1 \wedge s \mid 8$. Teda, $r \in \{-1;1\}$ a $s \in \{1;2;4;8\}$. Zároveň $(r-s) \mid p_1(1)$ a $(r+s) \mid p_1(-1)$. Dajme teda dáta do tabuľky:

$\frac{r}{s}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	
$r+s$	2	3	5	9	0	1	3	7	$p(-1) = -1$
$r-s$	0	-1	-3	-7	-2	-3	-5	-9	$p(1) = 27$

Vidíme, že jediný kandidát na racionálny koreň je $x = -\frac{1}{2}$. Overme si Hornerovou schémou či to je koreň:

	8	12	6	1
$x = -\frac{1}{2}$		-4	-4	-1
	8	8	2	0

Vidíme, že to je koreň. Overme si rovno, či nie je viacnásobný:

	8	8	2
$x = -\frac{1}{2}$		-4	-2
	8	4	0
$x = -\frac{1}{2}$		-4	
	8	0	

Vidíme, že je to trojnásobný koreň. Po predelení polynómu $p_1(x)$ výrazom $\left(x + \frac{1}{2}\right)^3$ nám ostal polynóm $p_2(x) = 8$ (viď posledný riadok Hornerovej schémy). Spolu sme teda rozložili $p(x) = 8x^4 + 12x^3 + 6x^2 + x = 8x\left(x + \frac{1}{2}\right)^3$, čo je jeho kanonický tvar. Polynóm má dva racionálne korene – jeden jednoduchý $x = 0$ a jeden trojnásobný $x = -\frac{1}{2}$.

5. $p(x)=16x^4+32x^3+12x^2-8x-4$

Aby sme si ušetrili robotu, najprv si vyberme pred zátvorku štvorku (keďže všetky koeficienty polynómu sú deliteľné 4): $p(x)=16x^4+32x^3+12x^2-8x-4=4\left(4x^4+8x^3+3x^2-2x-1\right)$. Korene budeme teda hľadať už pre polynóm $p_1(x)=4x^4+8x^3+3x^2-2x-1$. Ako ďalší krok si vypočítajme $p_1(1)=4+8+3-2-1=12$ a $p_1(-1)=4-8+3+2-1=0$. Keby sme teraz pokračovali hľadaním potenciálnych racionálnych koreňov, museli by sme krúžkovať delitele nuly, teda všetky čísla v tabuľke. To by bolo veľmi nemilé, lebo to by znamenalo veľa potenciálnych koreňov a veľa Hornerových schém. Aby sme si ušetrili robotu, využijeme tú nulu, ktorá nám vyšla, vo svoj prospech. Ak totiž $p_1(-1)=0$, znamená to, že $x=-1$ je koreň polynómu $p_1(x)$. Predeľme teda $p_1(x)$ výrazom $(x+1)$ a to rovno viackrát, aby sme overili násobnosť koreňa:

	4	8	3	-2	-1
$x=-1$		-4	-4	1	1
	4	4	-1	-1	0
$x=-1$		-4	0	1	
	4	0	-1	0	
$x=-1$		-4	4		
	4	-4	3		

Vidíme, že $x=-1$ je dvojnásobný koreň nášho polynómu. Po predelení $p_1(x)$ výrazom $(x+1)^2$ dostaneme polynóm $p_3(x)=4x^2-1$ (viď piaty riadok schémy). Ten sa dá jednoducho rozložiť na $p_3(x)=4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$. Spolu sme $p(x)$ rozložili na $p(x)=4(x+1)^2(2x-1)(2x+1)$. Na záver prevedieme polynóm do kanonického tvaru, teda do tvaru, keď každé *x* v zátvorke je len jedno, t.j. všetky koeficienty pred *x*-kami sú vyňaté pred zátvorky: $p(x)=4(x+1)^2(2x-1)(2x+1)=16(x+1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Polynóm má tri racionálne korene: dva jednoduché $x=\pm\frac{1}{2}$ a jeden dvojnásobný $x=-1$.

6. $\quad p(x) = 3x^5 + x^4 - 8x^3 + 4x^2$

Najprv si vyjmime pred zátvorku x^2 (vidíme teda že nula je dvojnásobný koreň $p(x)$) a dostaneme $p(x) = 3x^5 + x^4 - 8x^3 + 4x^2 = x^2\left(3x^3 + x^2 - 8x + 4\right)$. Korene budeme teda hľadať už pre polynóm $p_1(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$. Ako ďalší krok si vypočítajme $p_1(1) = 3 + 1 - 8 + 4 = 0$. Ako v predchádzajúcom príklade vidíme teda, že $x = 1$ je koreň polynómu. Predeľme teda $p_1(x)$ výrazom $(x-1)$ a to rovno viackrát, aby sme overili násobnosť koreňa:

	3	1	-8	4
$x=1$		3	4	-4
	3	4	-4	0
$x=1$		3	7	
	3	7	3	

Vidíme, že $x = 1$ je jednoduchý koreň nášho polynómu. Po predelení $p_1(x)$ výrazom $(x-1)$ dostaneme polynóm $p_2(x) = 3x^2 + 4x - 4$ (viď tretí riadok schémy). Ten sa dá jednoducho rozložiť pomocou vzorčeka pre korene kvadratickej rovnice. Rovnako môžeme však použiť Vetu o koreňoch: ak $\frac{r}{s}$, kde $r \in Z$ a $s \in N$ je koreň nášho polynómu, potom $r \mid -4 \wedge s \mid 3$. Teda, $r \in \{-1;1;-2;2;-4;4\}$ a $s \in \{1;3\}$. Zároveň $(r-s) \mid p_1(1)$ a $(r+s) \mid p_1(-1)$. Dajme teda dáta do tabuľky

$\frac{r}{s}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{-4}{3}$	
$r+s$	2	4	3	5	5	7	0	2	-1	1	-3	-1	$p_2(-1) = -5$
$r-s$	0	-2	1	-1	3	1	-2	-4	-3	-5	-5	-7	$p_2(1) = 3$

Vidíme, že máme 3 kandidátov na racionálny koreň, $x = \frac{2}{3}$, $x = 4$ a $x = -2$. Overme si Hornerovou schémou či $x = \frac{2}{3}$ je koreň:

	3	4	-4
$x = \frac{2}{3}$		2	4
	3	6	0

Vidíme, že $x = \frac{2}{3}$ je koreň. Po predelení nám ostal už iba polynóm $3x + 6$ ktorý má koreň $x = -2$.

Spolu sme rozložili $p(x)$ na $p(x) = 3x^2(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x+2)$. Toto je kanonický tvar zadaného polynómu. Polynóm má 4 rôzne racionálne korene, všetky jednoduché: $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{2}{3}$ a $x = -2$.

7. $p(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1$

Najprv si overme, že sa nedá nič vyňať pred zátvorku. Ako ďalší krok si vypočítajme $p(1) = 1 - 8 + 14 - 8 + 1 = 0$ .Vidíme teda, že $x = 1$ je koreň polynómu. Predeľme teda $p(x)$ výrazom $(x-1)$ a to rovno viackrát, aby sme overili násobnosť koreňa:

	1	-8	14	-8	1
$x = 1$		1	-7	7	-1
	1	-7	7	-1	0
$x = 1$		1	-6	1	
	1	-6	1	0	
$x = 1$		1	-5		
	1	-5	-4		

Vidíme, že $x = 1$ je dvojnásobný koreň nášho polynómu. Po predelení polynómu $p(x)$ výrazom $(x-1)^2$ dostaneme polynóm $p_1(x) = x^2 - 6x + 1$ (viď piaty riadok tabuľky). Ten sa dá jednoducho rozložiť pomocou vzorčeka na hľadanie koreňov kvadratickej rovnice, s výsledkom $p_1(x) = x^2 - 6x + 1 = \left(x - x - \sqrt{8}\right)\left(x - 3 + \sqrt{8}\right)$. Kanonický tvar zadaného polynómu teda je $p(x) = (x-1)^2\left(x - 3 - \sqrt{8}\right)\left(x - 3 + \sqrt{8}\right)$. Zadaný polynóm má jeden dvojnásobný racionálny koreň $x = 1$ a dva jednoduché reálne korene $x = 3 \pm \sqrt{8}$.

8. $p(x) = 64x^6 - 16x^4 - 4x^2 + 1$

Najprv si overme, že sa nedá nič vyňať pred zátvorku. Ako ďalší krok si vypočítajme $p(1) = 64 - 16 - 4 + 1 = 45$ a $p(-1) = 64 - 16 - 4 + 1 = 45$. Vidíme, že 1 ani -1 nie sú koreňmi p .

Nájdime teraz kandidátov na racionálne korene p . Podľa Vety 1 vieme, že ak $\frac{r}{s}$, kde $r \in Z$ a $s \in N$ je koreň nášho polynómu, potom $r \mid 1 \wedge s \mid 64$. Teda, $r \in \{\pm 1\}$ a $s \in \{1;2;4;8;16;32;64\}$. Zároveň $(r-s) \mid p(1)$ a $(r+s) \mid p(-1)$. Dajme teda dáta do tabuľky:

$\frac{r}{s}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{64}$	
$r+s$	2	3	5	9	17	33	65	0	1	3	7	15	31	63	45
$r-s$	0	-1	-3	-7	-15	-31	-63	-2	-3	-5	-9	-17	-33	-65	45

Vidíme, že máme 4 kandidátov na racionálny koreň, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{2}$ a $x = -\frac{1}{4}$. Overme si Hornerovou schémou či $x = \frac{1}{2}$ je koreň:

	64	0	-16	0	-4	0	1
$x=\frac{1}{2}$		32	16	0	0	-2	-1
	64	32	0	0	-4	-2	0
$x=\frac{1}{2}$		32	32	16	8	2	
	64	64	32	16	4	0	
$x=\frac{1}{2}$		32	48	40	28		
	64	96	80	56	32		

Vidíme, že $x=\frac{1}{2}$ je dvojnásobný koreň nášho polynómu. Z Hornerovej schémy vidíme, že $p(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(64x^4+64x^3+32x^2+16x+4\right)$. Ďalej budeme teda hľadať korene polynómu $p_1(x)=64x^4+64x^3+32x^2+16x+4$. Z kandidátov na koreň nám ostali ešte $x=\frac{1}{4}$, $x=-\frac{1}{2}$ a $x=-\frac{1}{4}$. Skúsme overiť ostatných kandidátov, najprv $x=-\frac{1}{2}$:

	64	64	32	16	4
$x=-\frac{1}{2}$		-32	-16	-8	-4
	64	32	16	8	0
$x=-\frac{1}{2}$		-32	0	-8	
	64	0	16	0	
$x=-\frac{1}{2}$		-32	16		
	64	-32	32		

Vidíme, že aj $x=-\frac{1}{2}$ je dvojnásobný koreň nášho polynómu. Z Hornerovej schémy vidíme, že $p(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(64x^2+16\right)$. Na prvý pohľad je evidentné, že polynóm $p_2(x)=\left(64x^2+16\right)$ sa už nedá ďalej rozložiť (a ľahko to overíme aj pomocou diskriminantu $D=0^2-4*64*16<0$. Kanonický tvar zadaného polynómu teda je $p(x)=16\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(4x^2+1\right)$ polynóm má dva dvojnásobné korene $x=\frac{1}{2}$ a $x=-\frac{1}{2}$.

9. $p(x) = 81x^4 - 1$

Najprv si overme, že sa nedá nič vyňať pred zátvorku. Ako ďalší krok si vypočítajme $p(1) = 81 - 1 = 80$ a $p(-1) = 81 - 1 = 80$. Vidíme, že 1 ani -1 nie sú koreňmi p. Nájdime teraz kandidátov na racionálne korene p. Podľa Vety 1 vieme, že ak $\frac{r}{s}$, kde $r \in Z$ a $s \in N$ je koreň nášho polynómu, potom $r \mid -1 \wedge s \mid 81$. Teda, $r \in \{-1;1\}$ a $s \in \{1;3;9;27;81\}$. Zároveň $(r - s) \mid p(1)$ a $(r + s) \mid p(-1)$. Dajme teda dáta do tabuľky:

$\frac{r}{s}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{81}$	
$r + s$	2	4	10	28	82	0	2	8	26	80	$p(-1) = 80$
$r - s$	0	-2	-8	-26	-80	-2	-4	-10	-28	-82	$p(1) = 80$

Vidíme, že máme 4 kandidátov na racionálny koreň (pretože už sme overili, že $x = 1$ ani $x = -1$ nie sú koreňmi p), a to $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{9}$, $x = -\frac{1}{3}$ a $x = -\frac{1}{9}$. Overme si Hornerovou schémou či $x = \frac{1}{3}$ je koreň:

	81	0	0	0	-1
$x = \frac{1}{3}$		27	9	3	1
	81	27	9	3	0
$x = \frac{1}{3}$		27	18	9	
	81	54	27	12	

Vidíme, že $x = \frac{1}{3}$ je jednoduchý koreň nášho polynómu. Z Hornerovej schémy vidíme, že $p(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(81x^3 + 27x^2 + 9x + 3\right)$. Ďalej budeme teda hľadať korene polynómu $p_1(x) = 81x^3 + 27x^2 + 9x + 3 = 3\left(27x^3 + 9x^2 + 3x + 1\right)$. Z kandidátov na koreň nám ostali ešte $x = \frac{1}{9}$, $x = -\frac{1}{3}$ a $x = -\frac{1}{9}$. Na prvý pohľad vidíme, že $x = \frac{1}{9}$ nie je koreň $p_1(x)$. Skúsme teda overiť ostatných kandidátov, najprv $x = -\frac{1}{3}$:

	81	27	9	3
$x = -\frac{1}{3}$		-27	0	-3
	81	0	9	0
$x = -\frac{1}{3}$		-27	9	
	81	-27	18	

Vidíme, že aj $x = -\frac{1}{3}$ je jednoduchý koreň nášho polynómu. Z Hornerovej schémy vidíme, že $p(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(81x^2 + 9\right) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(9x^2 + 1\right)$. Na prvý pohľad je evidentné, že polynóm $p_2(x) = \left(9x^2 + 1\right)$ sa už nedá ďalej rozložiť (a ľahko to overíme aj pomocou diskriminantu $D = 0^2 - 4 * 9 * 1 < 0$. Kanonický tvar zadaného polynómu teda je
$p(x) = 81 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{9}\right)$ a polynóm má dva jednoduché korene $x = \frac{1}{3}$ a $x = -\frac{1}{3}$.

10. $p(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x - 1$

Najprv si overme, že sa nedá nič vyňať pred zátvorku. Ako ďalší krok si vypočítajme $p(1) = 1 + 2 + 3 - 3 - 2 - 1 = 0$. Vidíme, že $x = 1$ je koreň nášho polynómu. Overme si Hornerovou schémou či nie je viacnásobný:

	1	2	3	-3	-2	-1
$x = 1$		1	3	6	3	1
	1	3	6	3	1	0
$x = 1$		1	4	10	13	
	1	4	10	13	14	

Vidíme, že ide o jednoduchý koreň a že $p(x) = (x-1)\left(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 1\right)$. Ďalej budeme hľadať už iba korene polynómu $p_1(x) = \left(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 1\right)$. Vidíme, že prvý aj posledný koeficient sú rovné 1 a teda racionálne korene tohto polynómu môžu byť iba $x = 1$ a $x = -1$. Tiež sme už overili, že $x = 1$ už nie je koreňom $p_1(x)$, teda ešte overme $p_1(-1) = 1 - 3 + 6 - 3 + 1 = 2$ a teda $x = -1$ tiež nie je koreňom $p_1(x)$. Polynóm $p(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x - 1$ teda už nemá iné racionálne korene iba jednoduchý koreň $x = 1$.