Rozšírený Euklidov algoritmus.

Veta. Ak $nsd(u,v)=d$, potom a $d=nsd(v,u-vq)$

Príklad 1.
Nájdite $nsd(65,40)$.

i	u_i	v_i	d_i	A_i	B_i	
0	65	40	1	**-3**	**5**	
1	40	25	1	2	-3	
2	25	15	1	-1	2	2= 1-(-1).1
3	15	10	1	1	-1	-1= 0-1.1
4	10	5	2	0	1	
5	5	0				$5=u_iA_i+v_iB_i$

Najväčší spoločný deliteľ je posledný nenulový zvyšok, teda $nsd(65,40)=5$.

Čísla A_i, B_i volíme tak, aby platilo, že $nsd(u,v)=u_iA_i+v_iB_i$, pre každé $i=0,1,\ldots k$.

V našom prípade platí, že $5=u_4A_4+v_4B_4$, pre $A_4=0$, $B_4=1$.

Počítame zdola nahor hodnoty v stĺpcoch pre A_i, B_i , $i=3,2,1,0$ a dopĺňame správne hodnoty takto:

$A_i=B_{i+1}$ **a** $B_i=A_{i+1}-d_iB_{i+1}$

Platí $65(-3)+40(5)=5$.

Nájdenie čísel $x=-3$ a $y=-5$, sú jedným riešením rovnice $65x+40y=5$.

Rovnice typu $ax+by=c$ sa nazývajú diofantickými rovnicami.

Diofantická rovnica $ax+by=c$, kde $a,b,c\neq 0$ sú celé čísla, je riešiteľná práve vtedy, keď $nsd(a,b)|c$.

Ak (x_0,y_0) je riešením diofantickej rovnice $ax+by=c$, potom x, y je riešením práve vtedy, keď

$$x=\quad x_0+\frac{b}{d}t \qquad\qquad \text{pre } t\in Z,\quad d=nsd(a,b)$$
$$y=\quad y_0-\frac{a}{d}t$$

Príklad 2. Nájdite celočíselné riešenia rovnice $3x+5y=64$.

Riešenie. $1=nsd(3,5)$, $1|64$, teda úloha je riešiteľná.

Pomocou Euklidovho rozšíreného algoritmu dostaneme:

		d_i	A_i	B_i
5	3	1	-1	2
3	2	1	1	-1
2	1	2	0	1

Máme $3(2)+5(-1)=1$, vynásobením oboch strán rovnice číslom 64 dostaneme $3(128)+5(-64)=64$. Jedno riešenie rovnice je teda $(x_0, y_0)=(128,-64)$, všetky riešenia majú tvar

$$x = \quad 128+\frac{5}{1}t = 128+5t$$
$$y = \quad -64-\frac{3}{1}t = -64-3t$$

Príklad 3.

Nájdite najmenší počet trojeurových a päťeurových známok, ktorými je možné zaplatiť sumu 64 eúr.
Riešenie.
Využijeme všeobecné riešenie rovnice z predchádzajúceho príkladu $3x+5y=64$,
$x = 128+5t$
$y = -64-3t$
Naviac musí platiť, že $x = 128+5t \geq 0$, a $y = -64-3t \geq 0$.
Odtiaľ je $-25\frac{3}{5} \leq t \leq -21\frac{1}{3}$, čiže $t \in \{-25,-24,-23,-22\}$.
Takto dostaneme

t	**-25**	-24	-23	-22
x	**3**	8	13	18
y	**11**	8	5	2
spolu	**14**	16	18	20

Najmenší počet bankoviek je 14, a musíme zobrať 3 trojeurové a 11 päťeurových bankoviek.

Príklad 4.

Koľkými spôsobmi možno preliať 45 l do 3 a 6-litrových nádob?

Riešenie: 9 alebo 8, ak každý druh nádoby musí byť použitý aspoň raz.