Spojitosť a limita funkcie - 2. časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

1 Október 2020

Obsah prednášky

- **Limita funkcie** (riešené príklady)
- **Asymptoty funkcie** (asymptoty so smernicou, asymptoty bez smernice, riešené príklady, neriešené príklady)
- **Spojitosť funkcie** (neriešené príklady)

Obsah prednášky

- **Limita funkcie** (riešené príklady)
- **Asymptoty funkcie** (asymptoty so smernicou, asymptoty bez smernice, riešené príklady, neriešené príklady)
- **Spojitosť funkcie** (neriešené príklady)

Riešené príklady - limity

Príklad 1

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+5}{5x^2+x}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 1

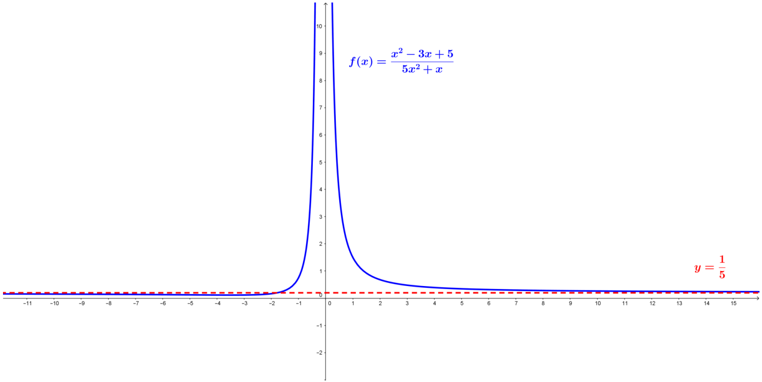
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+5}{5x^2+x}$.

Riešenie: Z čitateľa aj menovateľa vyberieme výraz x^n, resp. x^m pred zátvorku, kde n je najväčší exponent z čitateľa a m je najväčší exponent z menovateľa:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+5}{5x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-3\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{x}{x^2}\right)} = \frac{1-0+0}{5+0} = \frac{1}{5}$$

.

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+5}{5x^2+x} = \frac{1}{5}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 2

Vypočítajte $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$.

Riešené príklady - limity

Príklad 2

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$.

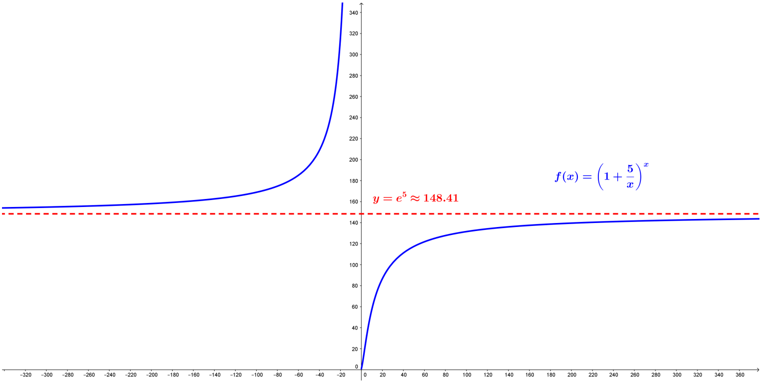
Riešenie: Označíme $t=\frac{x}{5}$, z toho $x=5t$ a keďže $x\to\infty$ potom aj $t\to\infty$. Dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t}$$

čo môžeme zapísať ako

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot 5}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^5=e^5.$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = e^5$.

Riešené príklady - limity

Príklad 3

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 3

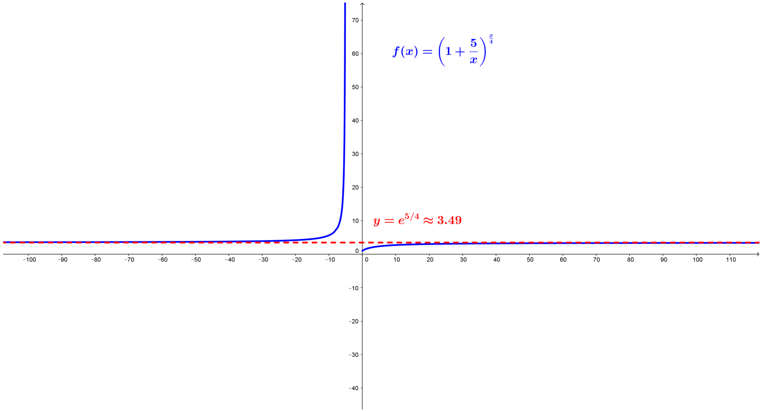
Vypočítajte $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$.

Riešenie: Nech $t = \frac{5}{x}$, z toho $x = \frac{5}{t}$ a keďže $x \to -\infty$, potom $t \to 0^-$.

Po dosadení dostaneme

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{4}} = \lim_{t \to 0^-} (1+t)^{\frac{5}{4t}} = \left(\lim_{t \to 0^-} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{5}{4}} = e^{\frac{5}{4}}.$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{4}} = e^{\frac{5}{4}}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 4

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-5}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 4

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-5}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-5}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+4}{3x+4} - \frac{9}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}}.$$

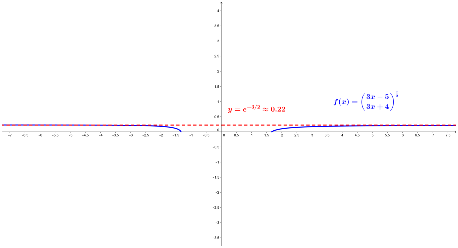
Označíme $t = -\frac{3x+4}{9}$. Potom $x = -3t - \frac{4}{3}$ a z toho dostávame

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+4}{3x+4} - \frac{9}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{t\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t\,\frac{-3t-\frac{4}{3}}{2t}}.$$

Riešené príklady - limity

Keďže $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{-3t-\frac{4}{3}}{2t} = -\frac{3}{2}$ po dosadení dostávame

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\,\frac{-3t-\frac{4}{3}}{2t}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$



Obr.: Riešené príklady: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$

Riešené príklady - limity

Príklad 5

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin(3x)}\right)$.

Riešené príklady - limity

Príklad 5

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin(3x)}\right)$.

Riešenie:

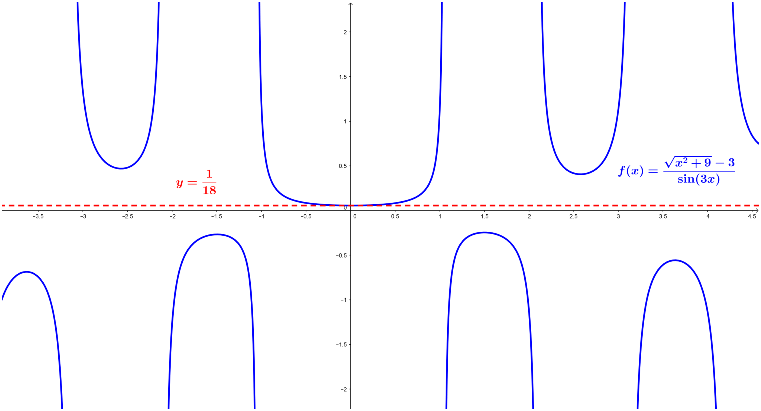
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin(3x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(3x)}\cdot\frac{\sqrt{x+9}-3}{1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}3x}\cdot\frac{\sqrt{x+9}-3}{1}\cdot\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}3x}\cdot\frac{x+9-9}{\sqrt{x+9}+3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin(3x)}\right) = \frac{1}{18}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 6

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^3-8}{x-2}}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 6

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^3-8}{x-2}}$.

Riešenie: Funkcia $f(z) = \sqrt{z}$ je spojitá na $D(f)$. To znamená, že dostaneme

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^3-8}{x-2}} = \sqrt{\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}}.$$

Po vykrátení dostaneme funkciu, ktorá je definovaná a spojitá v 2, t.j.

$$\sqrt{\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}} = \sqrt{\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}} = \sqrt{12}.$$

Riešené príklady - limity

Príklad 7

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-1}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 7

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-1}$.

Riešenie: Všimnime si, že menovateľ je pre dostatočne veľké x (presnejšie pre $x > 1$) kladný, teda môžeme ho prepísať do tvaru

$$x - 1 = \sqrt{(x-1)^2}$$

a potom postupujeme ako v predchádzajúcom príklade:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-1} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-8}{(x-1)^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(1-2\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}} = 1.$$

Riešené príklady - limity

Príklad 8

Vypočítajte $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-1}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 8

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-1}$.

Riešenie: Menovateľ je záporný pre všetky $x < 0$. Preto ho musíme upraviť nasledujúco:

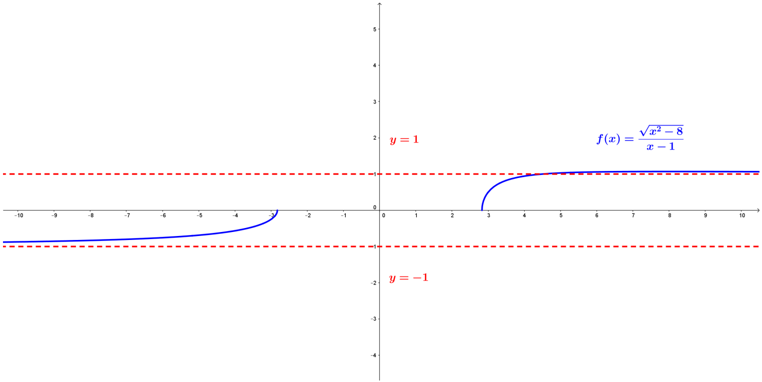
$$-(x-1) = \sqrt{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad x-1 = -\sqrt{(x-1)^2}.$$

Teraz môžeme postupovať podobne ako predtým

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-1} = -\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-8}{(x-1)^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(1-2\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{1-0}{1-0+0}} = -1.$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-1} = 1$ a $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-1} = -1$.

Riešené príklady - limity

Príklad 9

Vypočítajte $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos x}{|x-\pi|}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 9

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x}{|x-\pi|}$.

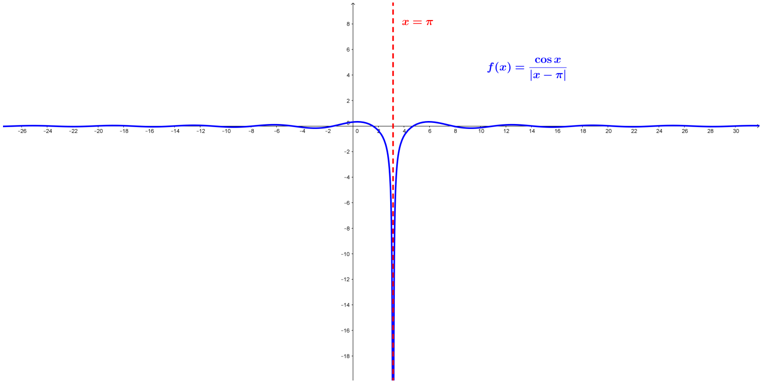
Riešenie: Upravíme si samostatne čitateľa aj menovateľa:

- $\lim\limits_{x\to\pi} \cos x = -1$
- $\lim\limits_{x\to\pi} |x-\pi| = 0$ a $|x-\pi| > 0$ pre $x \neq \pi$

Po dosadení dostávame

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{|x-\pi|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos x}{|x-\pi|} = -\infty$

Riešené príklady - limity

Príklad 10

Vypočítajte $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 10

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x}$.

Riešenie: Platí $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$, a

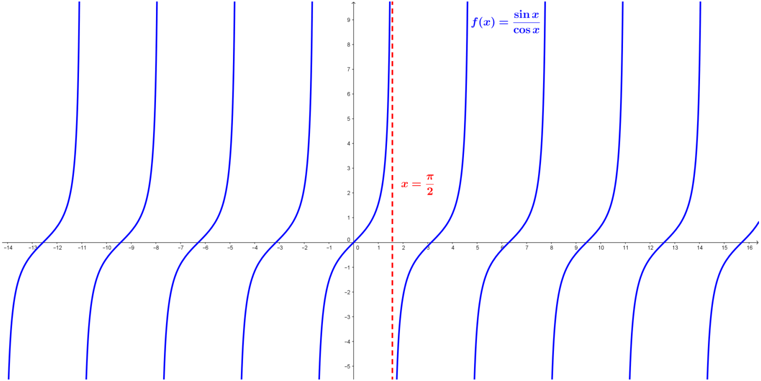
pre $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ je $\cos x < 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $\cos x > 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty$

Obsah prednášky

- **Limita funkcie** (riešené príklady)
- **Asymptoty funkcie** (asymptoty so smernicou, asymptoty bez smernice, riešené príklady, neriešené príklady)
- **Spojitosť funkcie** (neriešené príklady)

Asymptoty

Asymptoty funkcie

- Asymptota je priamka, ktorá opisuje správanie sa krivky. S narastajúcimi hodnotami súradníc sa vzdialenosť asymptoty a krivky zmenšuje.

Asymptoty

Asymptoty funkcie

- Asymptota je priamka, ktorá opisuje správanie sa krivky. S narastajúcimi hodnotami súradníc sa vzdialenosť asymptoty a krivky zmenšuje.
- Asymptoty rozdeľujeme na:
  - **Asymptoty bez smernice**
  - **Asymptoty so smernicou**

Asymptoty - Asymptoty bez smernice

Asymptoty bez smernice:

Asymptoty - Asymptoty bez smernice

Asymptoty bez smernice:

- Funkcia f má v bode x_0 **asymptotu bez smernice**, ak aspoň **jedna z jednostranných limít funkcie f v x_0** je **nevlastná**.

Asymptoty - Asymptoty bez smernice

Asymptoty bez smernice:

- Funkcia f má v bode x_0 **asymptotu bez smernice**, ak aspoň **jedna z jednostranných limít funkcie f v x_0** je **nevlastná**.
- Asymptota bez smernice má v tomto prípade rovnicu

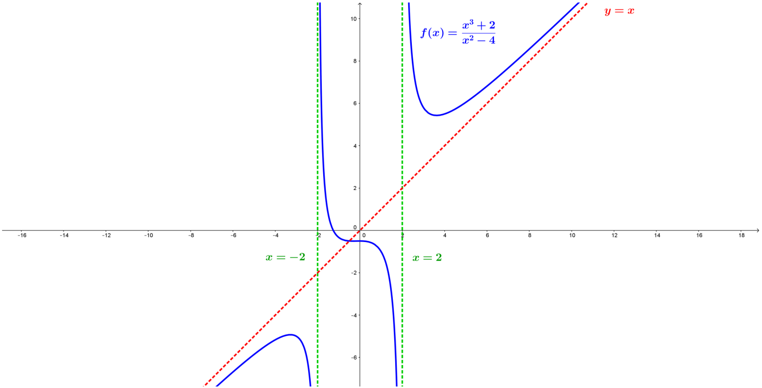
$$x = x_0.$$

Asymptoty - Asymptoty so smernicou

Asymptoty so smernicou:

- Hovoríme, že priamka
$$p: \ y = kx + q$$
je **asymptotou so smernicou** funkcie f v ∞ (resp. v $-\infty$), ak platí $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx - q) = 0$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx - q) = 0$), kde
$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \\ q &= \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx). \end{aligned}$$
Asymptota so smernicou existuje, ak **obe limity existujú a sú konečné.**

Asymptoty



Obr.: Asymptota so smernicou a asymptoty bez smernice

Príklady - asymptoty

Príklad 11

Nájdite všetky asymptoty grafov funkcií:

1. $f(x) = \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$,
2. $f(x) = \ln(x)$,
3. $f(x) = x \cdot 2^x$.

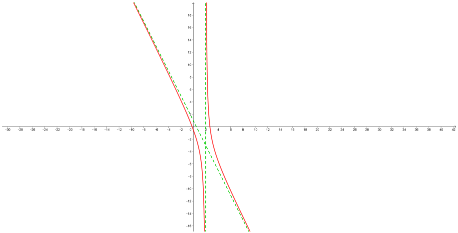
Príklady - asymptoty

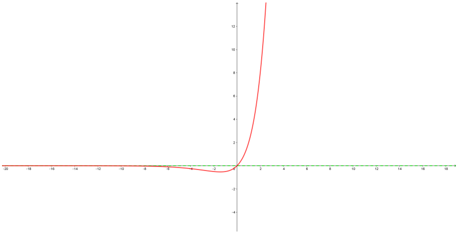
Príklad 12

Nájdite všetky asymptoty grafov funkcií:

1. $f(x) = \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$, $\quad x = 2,\ y = -2x + 1$
2. $f(x) = \ln(x)$, $\quad x = 0$
3. $f(x) = x \cdot 2^x$, $\quad y = 0$

Príklady - asymptoty

a) 

b) 

Obr.: Grafy funkcií: a) $f(x) = \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$ a b) $f(x) = x \cdot 2^x$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 13

Nájdite asymptoty bez smernice funkcie $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 13

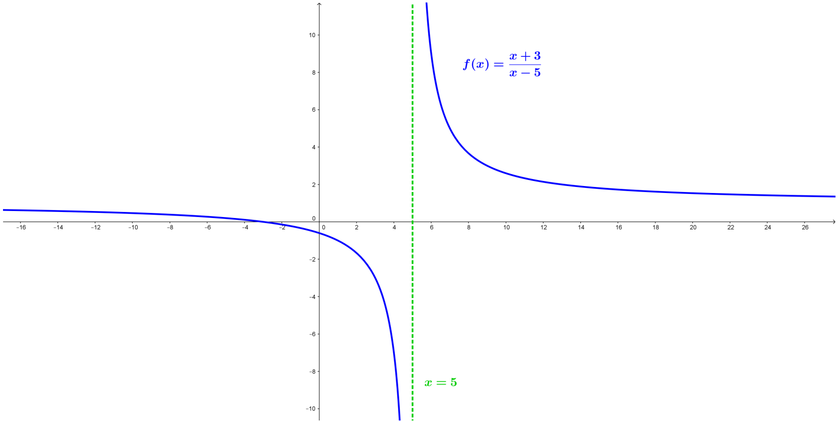
Nájdite asymptoty bez smernice funkcie $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$.

Riešenie: $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{5\}$. Jediný bod, v ktorom funkcia f môže mať asymptotu bez smernice, je $x_0 = 5$. Zistíme limitu sprava a zľava v tomto bode. Dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5^+} \frac{x+3}{x-5} &= \frac{8}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \to 5^-} \frac{x+3}{x-5} &= \frac{8}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

Teda asymptota bez smernice má rovnicu $x = 5$.

Riešené príklady - asymptoty



Obr.: Graf funkcie $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 14

Nájdite asymptoty so smernicou funkcie $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 14

Nájdite asymptoty so smernicou funkcie $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$.

Riešenie: $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Zistíme asymptotu so smernicou v $+\infty$. Pre jej smernicu dostaneme

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-3x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-3\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 1.$$

Pre úsek asymptoty $q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$ platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3x}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-x^2-x}{x+1} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{1+\frac{1}{x}} = -4. \end{aligned}$$

Riešené príklady - asymptoty

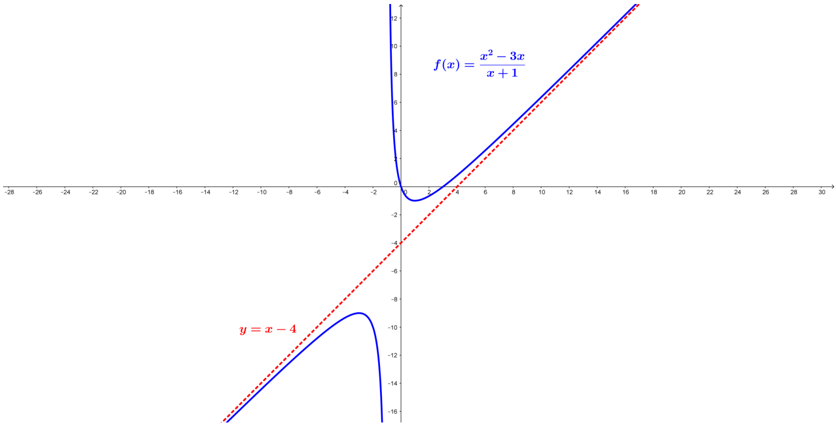
Asymptota so smernicou v $+\infty$ má rovnicu $p: \; y = x - 4.$

Podobne môžeme vypočítať asymptotu so smernicou v $-\infty$.

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2-3x}{x+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \left(1 - 3\frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 1. \\
q &= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x+1} - x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2 - x)}{x+1} = \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{1 + \frac{1}{x}} = -4.
\end{aligned}
$$

Asymptota so smernicou v $-\infty$ má rovnicu $p: \; y = x - 4.$

Riešené príklady - asymptoty



Obr.: Graf funkcie $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 15

Nájdite všetky asymptoty funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 15

Nájdite všetky asymptoty funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}$.

Riešenie: Pre definičný obor funkcie f platí $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

Najprv zistíme asymptoty so smernicou. Pre smernicu asymptoty v $+\infty$ dostaneme

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x^2-2x} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+4}{(x^2-2x)^2}} = \\ &= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+4}{x^4-4x^3+4x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{4}{x^2}\right)}{x^4\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}} = 0. \end{aligned}$$

Riešené príklady - asymptoty

Pre úsek asymptoty v $+\infty$ dostaneme

$$\begin{aligned} q_1 &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+4}{(x-2)^2}} \\ &= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+4}{x^2-4x+4}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}} = \sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

Asymptota so smernicou v ∞ má rovnicu $p_1 : y_1 = 2$.

Riešené príklady - asymptoty

Pre smernicu asymptoty v $-\infty$ dostaneme

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x^2-2x} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+4}{(x^2-2x)^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+4}{x^4-4x^3+4x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{4}{x^2}\right)}{x^4\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}} = 0.$$

Pre úsek asymptoty v $-\infty$ dostaneme

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+4}{(x-2)^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+4}{x^2-4x+4}} =$$

Riešené príklady - asymptoty

$$= -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}} = -\sqrt{4} = -2$$

Asymptota so smernicou v $-\infty$ má rovnicu $p_2 : y_2 = -2$.

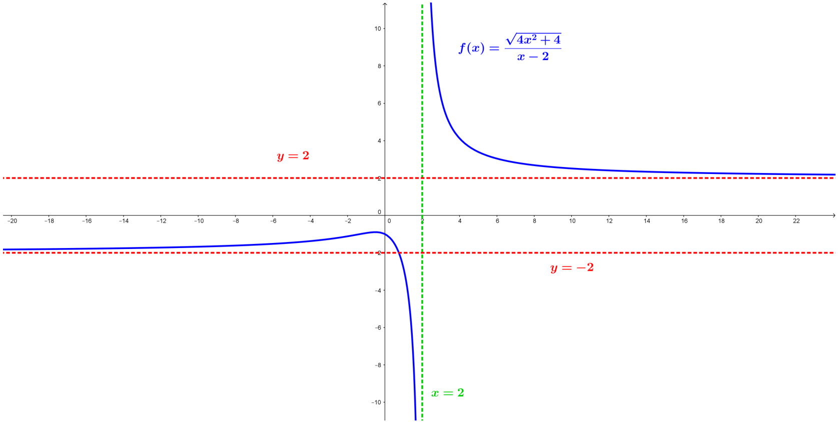
Určíme asymptoty bez smernice. Funkcia f je spojitá v každom bode $D(f)$, teda 2 je jediný bod, v ktorom môže existovať asymptota bez smernice danej funkcie f. Vypočítame limitu sprava a zľava pre $x_0 = 2$:

$$\lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2} = \sqrt{\lim_{x\to2^+} \frac{4x^2+4}{(x-2)^2}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2} = -\sqrt{\lim_{x\to2^-} \frac{4x^2+4}{(x-2)^2}} = -\infty.$$

.

Riešené príklady - asymptoty



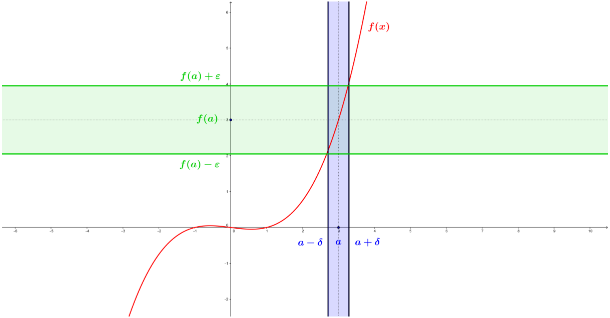
Obr.: Graf funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}$.

Obsah prednášky

- **Limita funkcie** (riešené príklady)
- **Asymptoty funkcie** (asymptoty so smernicou, asymptoty bez smernice, riešené príklady, neriešené príklady)
- **Spojitosť funkcie** (neriešené príklady)

Spojitosť

- **Funkcia f je spojitá v čísle (bode) a zo svojho definičného oboru, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že pre všetky $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D(f)$ platí $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.**



Obr.: Spojitosť funkcií - definícia

Spojitosť - príklady

Príklad 16

Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

a) $a = 2$
$f(x) = \frac{2x^2+6x-20}{x^3-3x^2+2x}$ pre $x \neq 2, x \neq 0, x \neq 1$
$f(x) = 7$ pre $x = 2$

b) $a = 4$
$f(x) = \frac{2x-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$ pre $x \neq 4$
$f(x) = 2$ pre $x = 4$

c) $a = \pi$
$f(x) = \frac{(2x)^2-4\pi x}{\pi-x}$ pre $x < \pi$
$f(x) = 4x \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ pre $x \geq \pi$

Spojitosť - príklady

Príklad 17

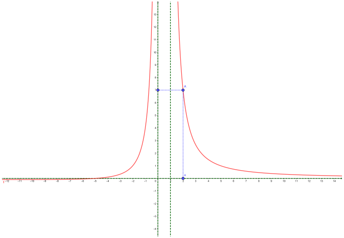
Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

a) $a = 2$
$f(x) = \frac{2x^2+6x-20}{x^3-3x^2+2x}$ pre $x \neq 2, x \neq 0, x \neq 1$
$f(x) = 7$ pre $x = 2$ Funkcia je spojitá v $a = 2$.

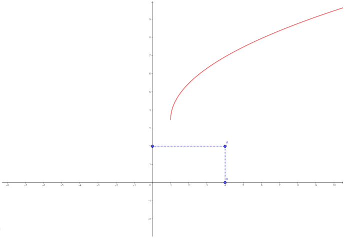
b) $a = 4$
$f(x) = \frac{2x-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$ pre $x \neq 4$
$f(x) = 2$ pre $x = 4$ Funkcia nie je spojitá v $a = 4$.

c) $a = \pi$
$f(x) = \frac{(2x)^2-4\pi x}{\pi - x}$ pre $x < \pi$
$f(x) = 4x \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ pre $x \geq \pi$ Funkcia je spojitá v $a = \pi$.

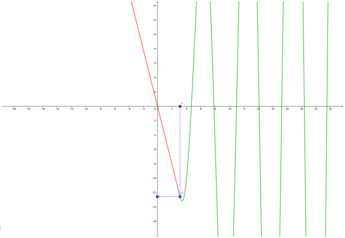
Riešené príklady - spojitosť



a)



b)



c)

Spojitosť - príklady

Príklad 18

Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá

a) $a = 0$
$f(x) = \frac{\sin(5x)}{2x}$ pre $x \neq 0$
$f(x) = p$ pre $x = 0$

b) $a = 0$
$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ pre $x \neq 0$
$f(x) = p$ pre $x = 0$

c) $a = 1$
$f(x) = p^2 x$ pre $x < 1$
$f(x) = p \tan \frac{\pi x}{4}$ pre $x \geq 1$

d) $a = 4$
$f(x) = \frac{x}{4p} - 1$ pre $x < 4$
$f(x) = \frac{2x^2 - 8x}{x - 4}$ pre $x \geq 4$

Spojitosť - príklady

Príklad 19

Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá

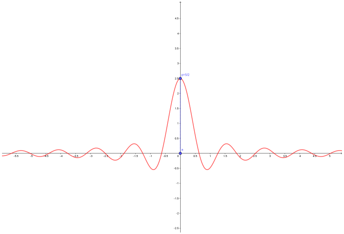
a) $a = 0$
$f(x) = \frac{\sin(5x)}{2x}$ pre $x \neq 0$
$f(x) = p$ pre $x = 0$ $p = \frac{5}{2}$

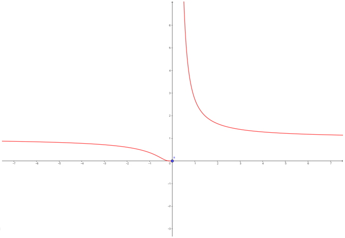
b) $a = 0$
$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ pre $x \neq 0$
$f(x) = p$ pre $x = 0$ parameter p neexistuje

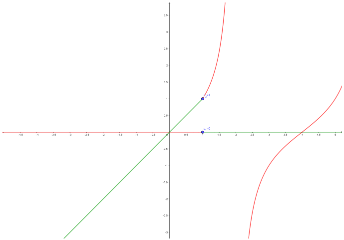
c) $a = 1$
$f(x) = p^2 x$ pre $x < 1$
$f(x) = p \tan \frac{\pi x}{4}$ pre $x \geq 1$ $p = 0,\ p = 1$

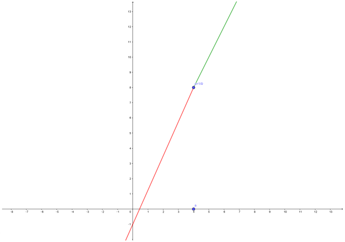
d) $a = 4$
$f(x) = \frac{x}{4p} - 1$ pre $x < 4$
$f(x) = \frac{2x^2 - 8x}{x - 4}$ pre $x \geq 4$ $p = \frac{1}{9}$

Riešené príklady - spojitosť


a)


b)


c)


d)

Ďakujem za pozornosť.