1 OPAKOVANIE

ÚPRAVY VÝRAZOV • BINOMICKÁ VETA • RACIONÁLNE ČÍSLA

V tejto kapitole si najskôr zopakujeme prácu s úpravou výrazov a tiež niektoré príklady z učiva z predchádzajúceho semestra.

VZORCE

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

ZLOMKY

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad+cb}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

MOCNINY

$$a^0 = 1 \qquad a^r = \frac{1}{a^{-r}} \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$a^r a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad (a^r)^s = a^{rs}$$

$$(ab)^r = a^r b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$$

BINOMICKÁ VETA

$$(s+t)^n = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} s^{n-(k-1)} t^{k-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i} t^i \text{ pre } s,t \in R,\ n \in N$$

Výraz $(s+t)^n$ má k–ty člen $\binom{n}{k-1} s^{n-(k-1)} t^{k-1}$.

PRÍKLAD 1.1

Zjednodušte výraz $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}$.

Riešenie:

Pre $a,x>0, a\neq x$ je

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a+x}\right)^2}{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}\right)^{-2}-\left(\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a+x}\right)^2}{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{a+x+2\sqrt{ax}-a-x}{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}\right)^{-2}-\left(\frac{a+x-2\sqrt{ax}-a-x}{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}\right)^{-2}-\left(\frac{-2\sqrt{ax}}{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{ax}}\right)^{2}-\left(\frac{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)}{-2\sqrt{ax}}\right)^{2}=$$

$$=\left(\frac{(a+x)\left(a+x+2\sqrt{ax}\right)}{4ax}\right)-\left(\frac{(a+x)\left(a+x-2\sqrt{ax}\right)}{4ax}\right)=$$

$$=\left(\frac{(a+x)\left(a+x+2\sqrt{ax}\right)-(a+x)\left(a+x-2\sqrt{ax}\right)}{4ax}\right)=$$

$$=\left(\frac{(a+x)\left(4\sqrt{ax}\right)}{4ax}\right)=\frac{(a+x)}{\sqrt{ax}}$$

PRÍKLAD 1.2

Zjednodušte výraz $\left[\frac{\left(\sqrt{7}+1\right)^2-\frac{7-\sqrt{7x}}{\sqrt{7}-\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{7}+1\right)^3-7\sqrt{7}+2}\right]^{-3}$.

Riešenie:

Pre $x>0$ platí

$$\left[\frac{\left(\sqrt{7}+1\right)^2-\dfrac{7-\sqrt{7x}}{\sqrt{7}-\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{7}+1\right)^3-7\sqrt{7}+2}\right]^{-3}=\left[\frac{\left(\sqrt{7}+1\right)^2-\dfrac{7-\sqrt{7x}}{\sqrt{7}-\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{x}}{\sqrt{7}+\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{7}+1\right)^3-7\sqrt{7}+2}\right]^{-3}=$$

$$=\left[\frac{\left(\sqrt{7}+1\right)^2-\dfrac{7\sqrt{7}-7\sqrt{x}+7\sqrt{x}-x\sqrt{7}}{7-x}}{7\sqrt{7}+3\cdot 7+3\sqrt{7}+1-7\sqrt{7}+2}\right]^{-3}=\left[\frac{8+2\sqrt{7}-\dfrac{\sqrt{7}(7-x)}{7-x}}{3\sqrt{7}+24}\right]^{-3}=$$

$$=\left[\frac{8+2\sqrt{7}-\sqrt{7}}{3\sqrt{7}+24}\right]^{-3}=\left[\frac{8+\sqrt{7}}{3\left(8+\sqrt{7}\right)}\right]^{-3}=\left[\frac{1}{3}\right]^{-3}=3^3=27$$

PRÍKLAD 1.3

Zjednodušte výraz $\dfrac{(a-\sqrt{b})(b+\sqrt{a})+\sqrt{ab}\left(1-\sqrt{ab}\right)}{a+b+\sqrt{ab}}$.

Riešenie:

Pre $a \geq 0, b \geq 0, ab \neq 0$ je

$$\frac{(a-\sqrt{b})(b+\sqrt{a})+\sqrt{ab}\left(1-\sqrt{ab}\right)}{a+b+\sqrt{ab}}=\frac{ab+a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}-ab}{a+b+\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a+b+\sqrt{ab}}=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a+b+\sqrt{ab}}\left(\frac{a+b-\sqrt{ab}}{a+b-\sqrt{ab}}\right)=\frac{\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)\left(a+b-\sqrt{ab}\right)}{(a+b)^2-ab}=$$

$$=\frac{a^2\sqrt{a}-ab\sqrt{b}+ab\sqrt{a}-b^2\sqrt{b}-a^2\sqrt{b}+b^2\sqrt{a}}{a^2+b^2+ab}=$$

$$=\frac{a^2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+ab\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+b^2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a^2+b^2+ab}=\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a^2+b^2+ab}=$$

$$=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

PRÍKLAD 1.4

Zjednodušte výraz $\left(\dfrac{a-3}{1+3a}-\dfrac{a-4}{1+4a}\right):\left(1+\dfrac{a-3}{1+3a}\dfrac{a-4}{1+4a}\right)$.

Riešenie:

Podmienky: $1+3a \neq 0 \wedge 1+4a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq \dfrac{-1}{3} \wedge a \neq \dfrac{-1}{4}$

$$\left(\frac{a-3}{1+3a}-\frac{a-4}{1+4a}\right):\left(1+\frac{a-3}{1+3a}\frac{a-4}{1+4a}\right)=$$

$$=\left(\frac{(a-3)(1+4a)-(a-4)(1+3a)}{(1+3a)(1+4a)}\right):\left(\frac{(1+3a)(1+4a)+(a-3)(a-4)}{(1+3a)(1+4a)}\right)=$$

$$=\left(\frac{(a-3)(1+4a)-(a-4)(1+3a)}{(1+3a)(1+4a)+(a-3)(a-4)}\right)=\left(\frac{a-3+4a^2-12a-a+4-3a^2+12a}{1+7a+12a^2+a^2-7a+12}\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2+1}{13(a^2+1)}\right)=\frac{1}{13}$$

PRÍKLAD 1.5 Zjednodušte výraz a určte podmienky jeho existencie:

$$\frac{\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^5}}$$

Riešenie:

$$\frac{\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^5}}=\frac{a^{3\cdot\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{5\cdot\frac{1}{2}}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{5}{2}}}=a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{5}{2}}=a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}=a^{\frac{2}{2}}\cdot b^{\frac{-4}{2}}=$$

$$=a^1\cdot b^{-2}=\frac{a}{b^2}$$

Podmienky existencie: $a>0, b>0$

PRÍKLAD 1.6 Pre prípustné hodnoty premenných upravte výraz:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}.x^{0,75}.\sqrt{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt[4]{x^3}}}}{\sqrt{x.\sqrt[3]{x}.x^{\frac{-2}{3}}}}$$

Riešenie:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}.x^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{x.\left(x^2.x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt{x.x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{-2}{3}}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}.\left(x.x^{\left(2+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{1+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^{\frac{4.2}{4.3}+\frac{3.3}{3.4}}.\left(x^{1+\left(\frac{8}{4}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$= \frac{x^{\frac{8+9}{12}} . x^{\left(1+\left(\frac{11}{4}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{17}{12}\cdot\frac{2}{2}} . x^{\left(\frac{12}{12}+\frac{11}{12}\right)\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{34}{24}} . x^{\frac{23}{24}} . x^{-\frac{1.8}{3.8}} = x^{\frac{34+23-8}{24}} = x^{\frac{49}{24}}$$

Podmienky: $x > 0$

PRÍKLAD 1.7

Zjednodušte výraz a určte podmienky jeho existencie:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^{-2} \cdot \left(b-\frac{1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}$$

Riešenie:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^{-2} \cdot \left(b-\frac{1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2} = \frac{\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}}{\left(a+\frac{1}{b}\right)^{2} \cdot \left(b-\frac{1}{a}\right)^{2} \cdot \left(b-\frac{1}{a}\right)} =$$

$$= \frac{\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}}{\left[\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b-\frac{1}{a}\right)\right]^{2} \cdot \left(b-\frac{1}{a}\right)} = \frac{\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}}{\left[ab-\frac{a}{a}+\frac{b}{b}-\frac{1}{ab}\right]^{2} \cdot \left(\frac{ba}{a}-\frac{1}{a}\right)} =$$

$$= \frac{\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}}{\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2} \cdot \left(\frac{ba-1}{a}\right)} = \frac{1}{\frac{ba-1}{a}} = \frac{a}{ba-1}$$

Podmienky: $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq \pm\frac{1}{b}$

PRÍKLAD 1.8

Napíšte 37. člen binomického rozvoja výrazu $\left(2a^{2}+0{,}5\sqrt{b}\right)^{79}$.

BINOMICKÁ VETA

Riešenie:

Výraz $(s+t)^{n}$ má k–ty člen $\binom{n}{k-1} s^{n-(k-1)} t^{k-1}$ a teda 37. člen výrazu $\left(2a^{2}+0{,}5\sqrt{b}\right)^{79}$ je

$$\binom{79}{36}\left(2a^2\right)^{(79-36)}\left(2^{-1}\sqrt{b}\right)^{36}=\binom{79}{36}\left(2a^2\right)^{43}\left(2^{-1}\sqrt{b}\right)^{36}=\binom{79}{36}2^{43}a^{86}2^{-36}b^{18}=$$
$$=\binom{79}{36}2^{7}a^{86}b^{18}$$

PRÍKLAD 1.9

Ktorý člen binomického rozvoja $\left(2x^3+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ obsahuje x^6? Napíšte ho.

Riešenie:

k–ty člen binomického rozvoja má tvar

$$\binom{10}{k-1}\left(2x^3\right)^{10-(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}=\binom{10}{k-1}2^{10-(k-1)}x^{30-3k+3}(x)^{1-k}=$$
$$=\binom{10}{k-1}2^{10-(k-1)}x^{34-4k}=\binom{10}{k-1}2^{11-k}x^{34-4k}$$

Ak má $x^6=x^{34-4k}$, musí byť $(34-4k)=6$, teda $k=7$. Siedmy člen je $\binom{10}{6}2^4x^6=3360x^6$.

PRÍKLAD 1.10

Vypočítajte súčin $3{,}1\overline{25}\times 2{,}\overline{31}$.

Riešenie:

RACIONÁLNE ČÍSLA

Upravíme najprv rýdzo periodické číslo $2{,}\overline{31}$ na zlomok:

$$a=2{,}\overline{31}$$
$$100a=231{,}\overline{31}$$
$$100a-a=231{,}\overline{31}-2{,}\overline{31}$$
$$99a=229$$
$$a=\frac{229}{99}$$

Podobným spôsobom upravíme aj číslo $3{,}1\overline{25}$. Číslo však navyše vynásobíme takou mocninou čísla 10, aby periodická časť čísla začínala ihneď za desatinnou čiarkou:

$b = 3{,}1\overline{25}$

$10b = 31{,}\overline{25}$

$1000b = 3125{,}\overline{25}$

$1000b - 10b = 3125{,}\overline{25} - 31{,}\overline{25}$

$990b = 3094$

$b = \dfrac{3094}{990} = \dfrac{1547}{495}$

Čísla v tvare zlomku vynásobíme:

$\dfrac{1547}{495} \cdot \dfrac{229}{99} = \dfrac{354263}{49005} \approx 7{,}229$