Cvičenie č. **3** Dátum: ....

Matice | Typy matíc. Operácie s maticami. Hodnosť matice

Teoretický rámec

Definícia (*Matica*). Nech $m, n \in N$ a $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n \in R$, potom tabuľka (schéma) čísel a_{ij} usporiadaná do m riadkov a n stĺpcov $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ sa nazýva ***matica***.

Čísla $a_{ij} \in R$ sa nazývajú ***prvky matice***. Matice označujeme veľkými tučnými písmenami napr. **A** a zapisujeme $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, kde $i = 1, 2, \dots, m,\quad j = 1, 2, \dots, n$.

Niektoré typy matíc	
Riadková/stĺpcová matica	je riadkový, resp. stĺp. vektor $\left[a_{ij}\right]_{1\times n}$, resp. $\left[a_{ij}\right]_{m\times 1}$
Obdĺžniková matica	je matica $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, ak $m \neq n$, napr.: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 4}$
Transponovaná matica	je matica $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left[a_{ji}\right]_{n\times m}$, ak $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$
Opačná matica	je matica $-\mathbf{A} = \left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$, ak $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$
Nulová matica	je matica $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, ktorej všetky prvky = 0, teda $\left[0\right]_{m\times n}$, napr.: $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$
Štvorcová matica n-tého stupňa - - - - hlavná diagonála	je matica $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, ak $m = n$, teda $\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, napr.: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$
Jednotková matica $\mathbf{E}_n$	je štvorcová matica s prvkami na hlavnej diagonále = 1, napr.: $\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Operácie s maticami

Definícia (*Rovnosť matíc*). Matice $\mathbf{A}_{m\times n}$ a $\mathbf{B}_{k\times l}$ sa ***rovnajú*** $\Leftrightarrow$ $m=k$ a $n=l$ a $a_{ij}=b_{ij}, \forall i=1,2,...,m, j=1,2,...n$. Píšeme **A = B**.

Definícia (*Súčet matíc*). Nech $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}, \mathbf{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$. Potom matica $\mathbf{C}=[c_{ij}]_{m\times n}$ s prvkami $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ sa nazýva ***súčet matíc*** **A + B**. Píšeme **C = A + B**.

Definícia (*α-násobok matice*). Nech $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\alpha\in R$. Potom matica $\mathbf{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$ sa nazýva α-**násobok** matic***e*** **A** $\Leftrightarrow$ ak $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$. Píšeme $\mathbf{B}=\alpha\cdot\mathbf{A}$.

Definícia (*Súčin matíc*). Nech $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}, \mathbf{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$. Potom matica $\mathbf{C}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times p}\cdot\mathbf{B}_{p\times n}$ sa nazýva ***súčin matíc*** **A**, **B**, v tomto poradí, kde matica $\mathbf{C}=[c_{ij}]_{m\times n}$ má prvky $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\cdot b_{kj}, i=1,2,...,m, j=1,2,...,n.$ Súčin matíc **A**, **B** v danom poradí označujeme **C = A · B**.

Teda:

1. Typ matice **C** = **A** · **B** je jednoznačne určený počtom riadkov matice **A** a počtom stĺpcov matice **B**.
2. Súčin matíc **A** a **B** $\exists\Leftrightarrow$ ak počet stĺpcov matice **A** sa rovná počtu riadkov matice **B**.
3. Pre súčin matíc ***neplatí vo všeobecnosti komutatívnosť***. Navyše, ak existuje súčin **A** · **B**, súčin **B** · **A** nemusí existovať.

<table>
<tr><td rowspan="7">Poznámka.

Nech A, B, C sú vhodné matice pre operácie súčtu a súčinu; α, $\beta\in R$. Potom pre súčet a násobenie matíc platí:</td><td>A + B = B + A</td><td>A(BC) = (AB)C</td></tr>
<tr><td>A + (B + C) = (A + B) + C</td><td>A(B + C) = AB + AC</td></tr>
<tr><td>A + 0 = A</td><td>(A + B)C = AC + BC</td></tr>
<tr><td>A + (–A) = 0</td><td>A(α B) = α (AB)</td></tr>
<tr><td>($\alpha\beta$)A = α(βA)</td><td>$(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}}=\mathbf{A}$</td></tr>
<tr><td>1A = A</td><td>$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathbf{T}}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}+\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$</td></tr>
<tr><td>α(A + B) = αA + αB
(α + β)A = αA + βA</td><td>$(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}=\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$</td></tr>
</table>

Definícia (*Hodnosť matice*). Nech je daná matica $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ a nech $S(\mathbf{A})$ a $R(\mathbf{A})$ sú stĺpcový a riadkový priestor matice **A**. Dimenzia dim $S(\mathbf{A})$ sa nazýva stĺpcová hodnosť matice **A**, zapisujeme $\dim S(\mathbf{A})=h_s(\mathbf{A})$. Dimenzia dim $R(\mathbf{A})$ sa nazýva riadková hodnosť matice **A**, zapisujeme $\dim R(\mathbf{A})=h_r(\mathbf{A})$. Platí vzťah $h(\mathbf{A})=h_r(\mathbf{A})=h_s(\mathbf{A})$.

Poznámka. Platí, že $h(\mathbf{A})=h(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.

Pri určovaní hodnosti matice **A** stačí určiť stĺpcovú (riadkovú) hodnosť matice, t.j. maximálny počet lineárne nezávislých stĺpcových (riadkových) vektorov matice **A**. Hodnosť matice budeme ďalej určovať len použitím **elementárnej zmeny bázy**.

Príklady na riešenie

Príklad 1.

Dané sú matice $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Určte maticu:

a) **A**, ktorá je α-násobkom matice **F**, ak $\alpha = 2$,
b) **B**, ktorá je súčtom matíc **F**, **G**,
c) **C**, ktorá je lineárnou kombináciou v tvare $3 \cdot \mathbf{F}^T - 2 \cdot \mathbf{G}^T$,
d) opačnú k matici **G**,
e) $\mathbf{E}_4$.

Príklad 2.

Nech sú dané matice $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Určte tieto súčiny matíc, ak daný súčin existuje: $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{D}\cdot\mathbf{C}$, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}$. Jednotlivé výsledky porovnajte.

Príklad 3.

Je daná matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Určte metódou EZB hodnosť matice **A**.

Poznámka. Vektory zaveďte do bázy v *prirodzenom poradí*.

Báza		Σ

Príklad 4.

Je daná matica $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -1 & 15 & 0 \\ 2 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$. Určte metódou EZB hodnosť matice **D** v závislosti od hodnoty parametra α, $\alpha \in R$.

Báza		Σ

Príklad 5.

Nech sú dané matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 & 13 \\ 14 & 2 & 88 & 14 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

Určte:

a) súčet matíc $\mathbf{B} + \mathbf{C}$

b) súčet matíc $\mathbf{E} + \mathbf{D}$

c) či súčin matíc: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C}$ a $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ existuje

d) maticu $\mathbf{F} = 10 \cdot \mathbf{E}_2$

e) maticu $\mathbf{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$