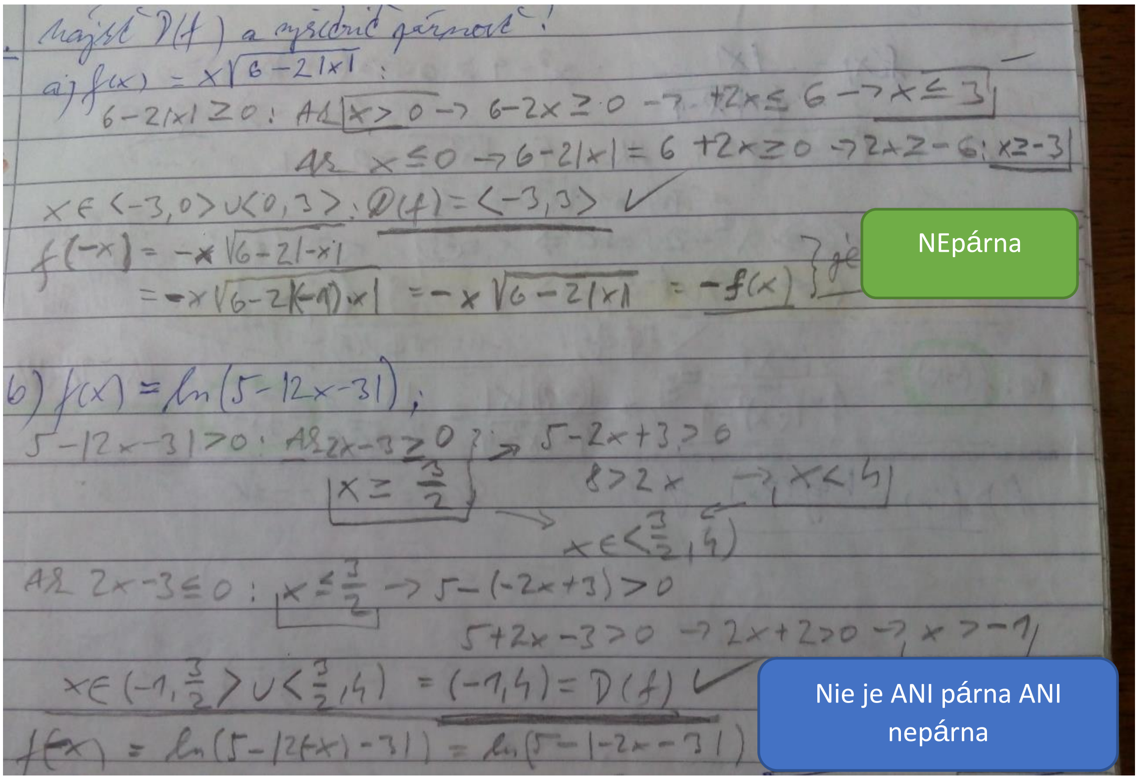
Cv-01 V nasledujúcich príkladoch: Zistite, či daná funkcia je párna alebo nepárna.

1.a), b)



Najsť D(f) a vyšetriť párnosť!

a) $f(x) = x\sqrt{6-2|x|}$:

$6-2|x| \geq 0$: Ak $x>0 \to 6-2x\geq 0 \to +2x \leq 6 \to x\leq 3$

Ak $x\leq 0 \to 6-2|x| = 6+2x \geq 0 \to 2x \geq -6$; $x\geq -3$

$x\in\langle -3,0\rangle \cup \langle 0,3\rangle$; $D(f)=\langle -3,3\rangle$

$f(-x) = -x\sqrt{6-2|-x|} = -x\sqrt{6-2|(-1)x|} = -x\sqrt{6-2|x|} = -f(x)$ } je

NEpárna

b) $f(x)=\ln(5-|2x-3|)$;

$5-|2x-3|>0$: Ak $2x-3\geq 0$; $x\geq \frac{3}{2}$ → $5-2x+3>0$; $8>2x \to x<4$

$x\in\langle \frac{3}{2}, 4)$

Ak $2x-3\leq 0$: $x\leq\frac{3}{2} \to 5-(-2x+3)>0$

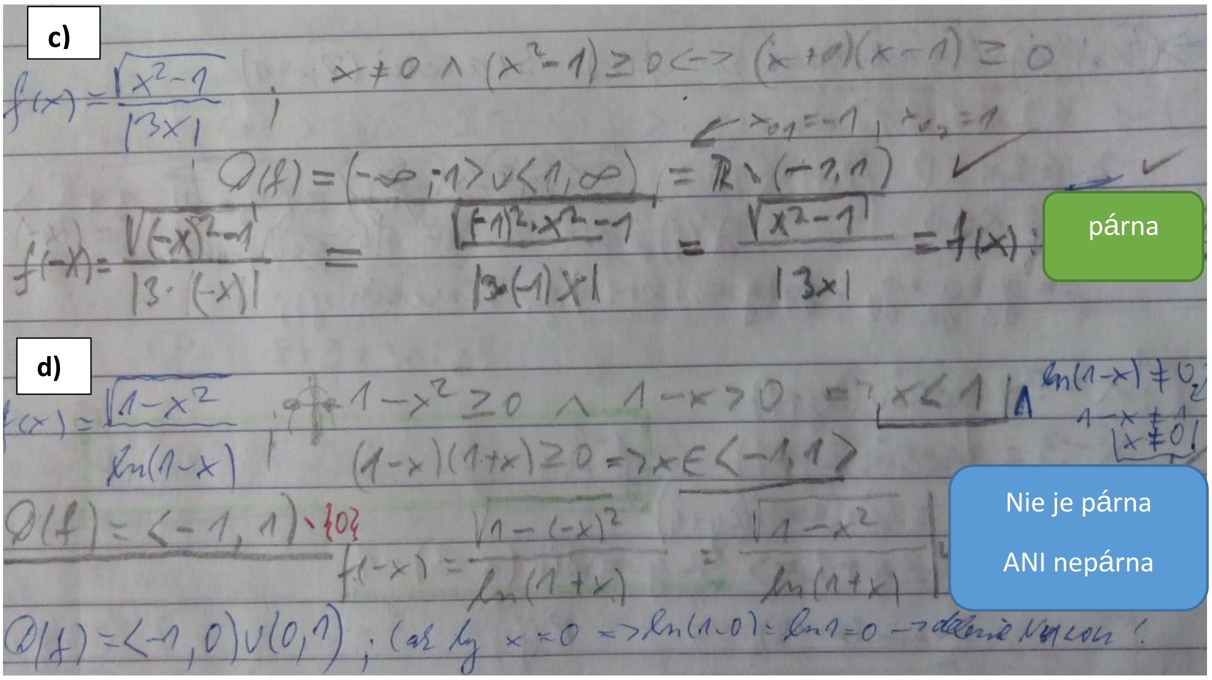
$5+2x-3>0 \to 2x+2>0 \to x>-1$

$x\in(-1,\frac{3}{2}\rangle\cup\langle\frac{3}{2},4) = (-1,4) = D(f)$

$f(-x) = \ln(5-|2(-x)-3|) = \ln(5-|-2x-3|)$

Nie je ANI párna ANI nepárna

2.pr. c), d)



c)

$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{|3x|}$; $x\neq 0 \wedge (x^2-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)\geq 0$

$x_{01}=-1$, $x_{02}=1$

$D(f)=(-\infty;-1\rangle\cup\langle 1,\infty) = \mathbb{R}\setminus(-1,1)$

$f(-x)=\frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{|3\cdot(-x)|} = \frac{\sqrt{(-1)^2 x^2-1}}{|3(-1)x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|3x|} = f(x)$;

párna

d)

$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\ln(1-x)}$; $1-x^2\geq 0 \wedge 1-x>0 \Rightarrow x<1 \wedge \ln(1-x)\neq 0$; $1-x\neq 1$; $x\neq 0$

$(1-x)(1+x)\geq 0 \Rightarrow x\in\langle -1,1\rangle$

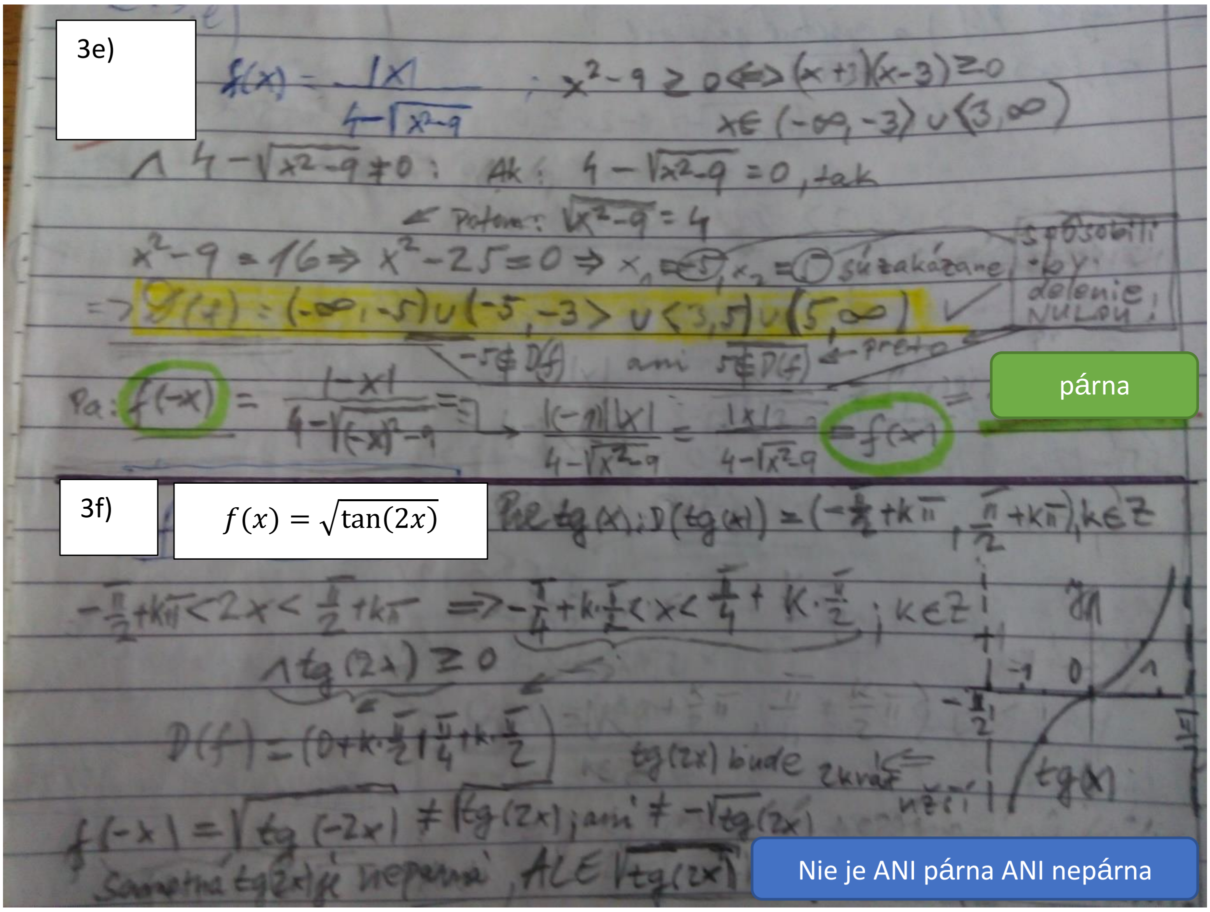
$D(f)=\langle -1,1)\setminus\{0\}$

$f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{\ln(1+x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\ln(1+x)}$

Nie je párna ANI nepárna

$D(f)=\langle -1,0)\cup(0,1)$; (ak by $x=0 \Rightarrow \ln(1-0)=\ln 1=0 \to$ delenie nulou!

3pr.: e), f)



3e)

$f(x)=\frac{|x|}{4-\sqrt{x^2-9}}$; $x^2-9\geq 0 \iff (x+3)(x-3)\geq 0$

$x\in(-\infty,-3\rangle\cup\langle 3,\infty)$

$\wedge\ 4-\sqrt{x^2-9}\neq 0$: Ak: $4-\sqrt{x^2-9}=0$, tak

Potom: $\sqrt{x^2-9}=4$

$x^2-9=16 \Rightarrow x^2-25=0 \Rightarrow x_1=-5, x_2=5$ sú zakázané, spôsobili by delenie NULOU!

$\Rightarrow D(f)=(-\infty,-5)\cup(-5,-3\rangle\cup\langle 3,5)\cup(5,\infty)$

$-5\notin D(f)$ ani $5\notin D(f)$ ← preto

Pa: $f(-x)=\frac{|-x|}{4-\sqrt{(-x)^2-9}} = \frac{|-1||x|}{4-\sqrt{x^2-9}}=\frac{|x|}{4-\sqrt{x^2-9}}=f(x)$

párna

3f) $f(x)=\sqrt{\tan(2x)}$

Pre tg(x): $D(tg(x))=(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi), k\in Z$

$-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x<\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}; k\in Z$

$\wedge\ tg(2x)\geq 0$

$D(f)=\langle 0+k\cdot\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2})$

tg(2x) bude zkrať užší

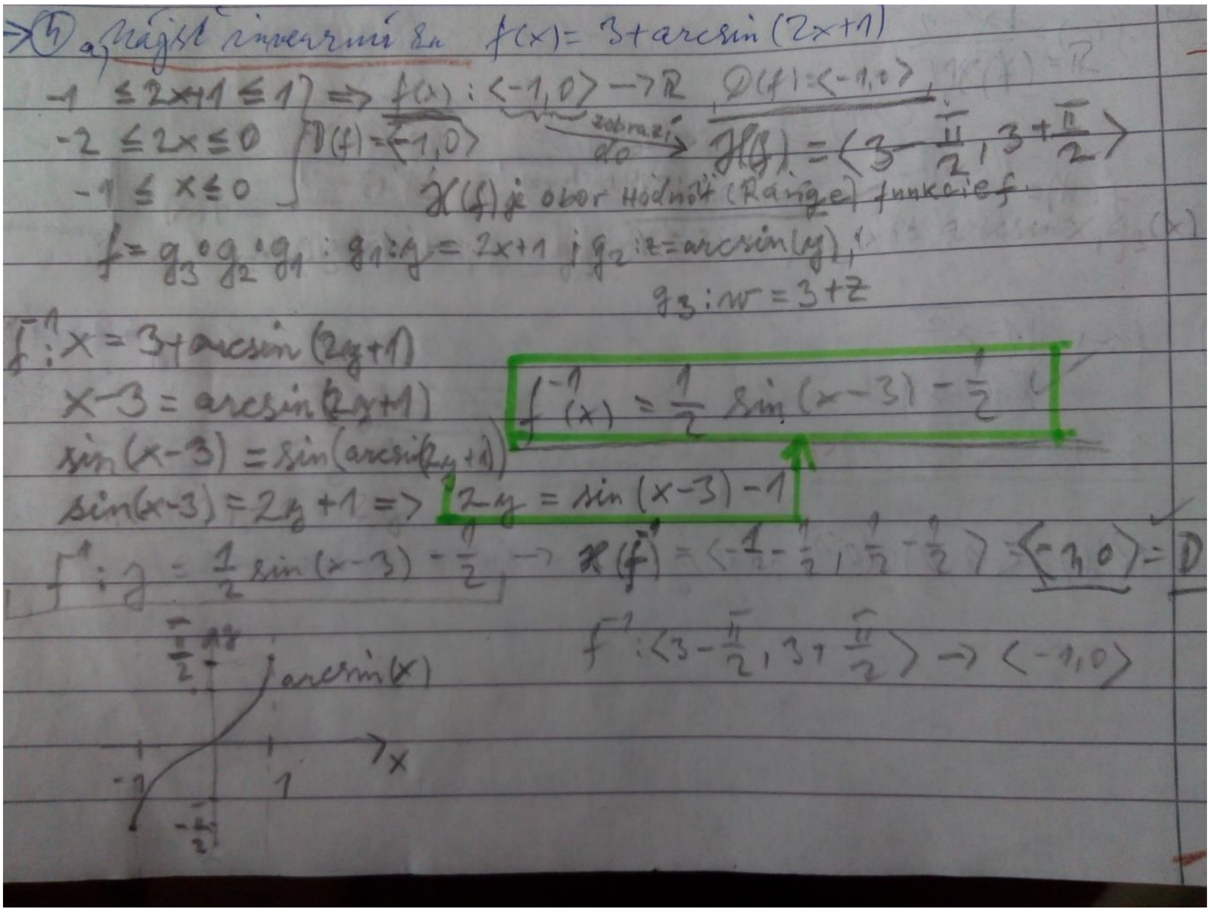
$f(-x)=\sqrt{tg(-2x)}\neq\sqrt{tg(2x)}$; ani $\neq -\sqrt{tg(2x)}$

Samotná tg(2x) je nepárna, ALE $\sqrt{tg(2x)}$

Nie je ANI párna ANI nepárna

1. V ďalšom príklade nájdite inverznú funkciu k danej funkcii.

4.a) $f(x)=3+\arcsin(2x+1)$



4) a) Nájsť inverznú fn. $f(x)=3+\arcsin(2x+1)$

$-1\leq 2x+1\leq 1 \Rightarrow f(x): \langle -1,0\rangle \to R$, $D(f): \langle -1,0\rangle$

$-2\leq 2x\leq 0$; $D(f)=\langle -1,0\rangle$ zobrazí do $H(f)=\langle 3-\frac{\pi}{2}, 3+\frac{\pi}{2}\rangle$

$-1\leq x\leq 0$

H(f) je obor hodnôt (Range) funkcie f.

$f=g_3\circ g_2\circ g_1$: $g_1: y=2x+1$; $g_2: z=\arcsin(y)$; $g_3: w=3+z$

$f^{-1}: x=3+\arcsin(2y+1)$

$x-3=\arcsin(2y+1)$

$\sin(x-3)=\sin(\arcsin(2y+1))$

$\sin(x-3)=2y+1 \Rightarrow \boxed{2y=\sin(x-3)-1}$

$\boxed{f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\sin(x-3)-\frac{1}{2}}$

$f^{-1}: y=\frac{1}{2}\sin(x-3)-\frac{1}{2} \to H(f^{-1})=\langle -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle=\langle -1,0\rangle = D$

$f^{-1}: \langle 3-\frac{\pi}{2}, 3+\frac{\pi}{2}\rangle \to \langle -1,0\rangle$

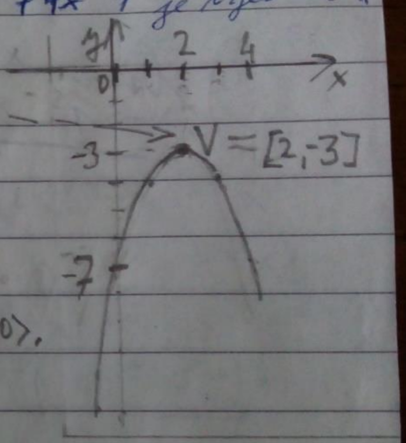
5.pr.:

Zistite, či $f_1(x) = -x^2 + 4x - 7$ je prostá na intervale $(-\infty, 0>$
Ak áno, presne definujte k nej inverznú funkciu vrátane určenia $D(f_1^{-1})$

danú predpisom

Zistiť, či $f_1 : (-\infty, 0> \longrightarrow (-\infty, -7>$, $f_1(x) = -x^2 + 4x - 7$ je bijekcia*)

Ak je f_1 prostá $\Longrightarrow$ nájdite inverznú f_1^{-1}:



$-x^2 + 4x - 7 = -(x^2 - 4x + 7) = -[(x-2)^2 + 3]$

$D = 16 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) < 0 \Rightarrow f_1$ nemá reál. korene

*) t.j. treba overiť, či pri $D(f) = (-\infty, 0>$ bude $H(f) = (-\infty, -7>$,
a či f_1 je prostá na $(-\infty, 0>$.:

(f_1 je rastúca na $(-\infty, 2) \Rightarrow$ je rastúca aj na $(-\infty, 0>$.

f_1^{-1}: $x = -y^2 + 4y - 7$

$x + 7 = -y^2 + 4y = -(y^2 - 4y) = -[(y-2)^2 - 4]$

$-x - 7 = (y-2)^2 - 4$

$-x - 3 = (y-2)^2$

$\sqrt{-x-3} = |y - 2|$: pre $y - 2 \leq 0$ je $|y-2| = -y + 2$

$\sqrt{-x-3} = -y + 2$, ak $y \leq 2$

$-y = \sqrt{-x-3} - 2 \Rightarrow y = 2 - \sqrt{-3-x} = f_{\circledast}^{-1}(x)$

$-3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq -3$

t.j. $D(f_{*}^{-1}) = (-\infty, -3>$

teda $D(f_*^{-1}) = (-\infty, -3> \neq (-\infty, -7> = D(f_1)$, preto:

aby predpis $f_{\circledast}^{-1}$ bol presne inverznou funkciou k f_1, treba zúžiť $D(f^{-1})$ na $(-\infty, -7>$

6.pr.:

(5) Dané sú $f : A \to B$, $g : B \to C$; Nájdite množiny A, B tak, aby existovala zložená funkcia $h = g \circ f$

a) $f(x) = 6^x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ $\Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, $D(g) = <1, \infty)$

$f: D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \infty)$; $D(g) = <1, \infty)$; $H(f) \not\subseteq D(g) \Rightarrow f$ treba zúžiť

$f: y = 6^x$ je rastúca, $(6^0 = 1)$

$h(x) = g \circ f(x) = \sqrt{6^x - 1}$

$f|_{<0,\infty)} : y = 6^x \Rightarrow H(f|_{<0,\infty)}) = <1, \infty) = D(g)$ preto $A = <0, \infty)$, $B = <1, \infty)$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = 6^x \to g \circ f$: ?

$g(f(x)) = 6^{\sqrt{x-1}}$

$x - 1 \geq 0$
$x \geq 1$ } $D(f) = <1, \infty)$; $f : <1, \infty) \to \mathbb{R}$

$\mathcal{H}(f) = <0, \infty)$

$g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$; $D(g) = \mathbb{R} \supset \mathcal{H}(f) \Rightarrow f$ netreba zužovať

$A = <1, \infty)$; $f : A \to \mathbb{R}$
$B = \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ } $g \circ f : <1, \infty) \to \mathbb{R}$