

# Algebra a diskrétna matematika

## Úlohy na precvičenie

### 6. týždeň

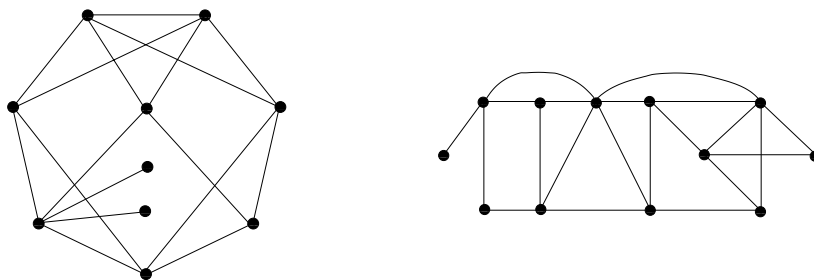
**Úloha 1.** Zostrojte kostru Petersenovho grafu pomocou

(a) prehľadávania do hĺbky

(b) prehľadávania do šírky.

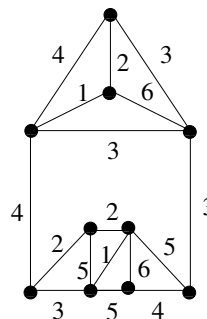
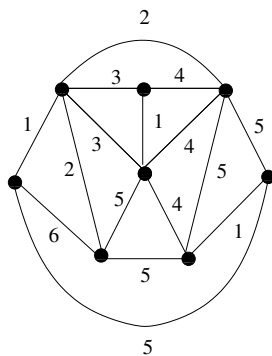
Riešte analogickú úlohu pre  $K_n$  pre ľubovoľné  $n \geq 3$ .

**Úloha 2.** Pre dané grafy zostrojte kostru pomocou prehľadávania do hĺbky a taktiež pomocou prehľadávania do šírky.



**Úloha 3.** Ukážte, že ak  $G$  je súvislý graf, tak kostra vybudovaná z vrchola  $v$  prehľadáváním do šírky nám určuje vzdialenosť vrchola  $v$  v grafe  $G$  a ľubovoľného iného vrchola v  $G$  (ako?).

**Úloha 4.** Pomocou Kruskalovho algoritmu nájdite najlacnejšiu kostru v daných grafoch.



**Úloha 5.** Nájdite perfektné párovanie ku grafom z príkladu 2.

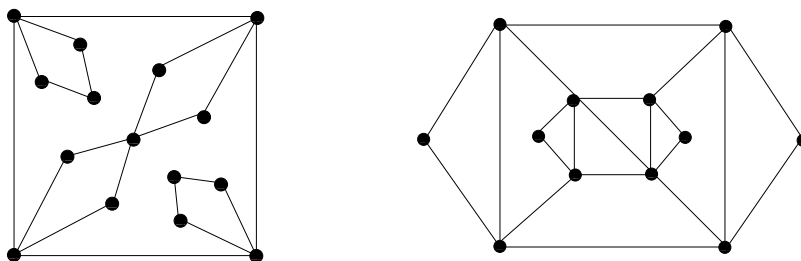
**Úloha 6.** Ukážte, že ak v strome existuje perfektné párovanie, tak je jediné.

**Úloha 7.** Zostrojte graf na aspoň  $3t$  vrchoch, v ktorom má každý vrchol stupeň aspoň 2 a ktorého najväčšie párovanie obsahuje nanaajvýš  $2t$  vrcholov.

**Úloha 8.** Zistite, či Petersenov graf má

- (a) hamiltonovskú kružnicu,
- (b) hamiltonovskú cestu.

**Úloha 9.** Nakreslite dané grafy jedným ťahom.



**Úloha 10.** Nech  $G$  je graf s vrcholom  $v$  stupňa 3 a nech okolie bodu  $v$  tvoria vrcholy  $x, y, z$ . Nech  $H$  je graf, ktorý z  $G$  vznikne vynechaním vrchola  $v$  a hrán incidentných s ním a pridaním 3 nových vrcholov  $a, b, c$  a 6 nových hrán  $ax, by, cz, ab, bc, ca$ . Ukážte, že  $G$  má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď ju má  $H$ . Ukážte, že analogické tvrdenie platí pre hamiltonovské cesty.

**Úloha 11.** Pomocou Petersenovho grafu zostrojte pre každé párne  $n \geq 10$  súvislý graf na  $n$  vrchoch bez hamiltonovskej kružnice, v ktorom má každý vrchol stupeň 3.

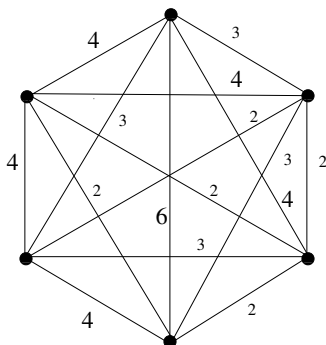
**Úloha 12.** Nech  $G$  je graf s hamiltonovskou cestou. Ukážte na príklade, že kostra v  $G$  zostrojená pomocou prehľadávania do hĺbky nemusí nutne byť hamiltonovskou cestou.

**Úloha 13.** Ukážte, že každý súvislý graf na aspoň 2 vrchoch obsahuje aspoň 2 vrcholy  $v$  také, že graf  $G - v$  je súvislý.

**Úloha 14.** Ukážte, že v pravidelnom grafe  $G$  stupňa  $d$  platí:  $G$  má chromatický index  $d$  vtedy a len vtedy, keď jeho hranovú množinu možno rozložiť na  $d$  perfektných párovaní.

**Úloha 15.** Graf  $G$  nazveme maximálny nehamiltonovský, ak nemá hamiltonovskú kružnicu, ale zároveň ak pre každé 2 nesusedné vrcholy  $u, v$  platí, že  $G + uv$  (pridáme 'novú' hranu  $uv$ ) má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte, že Petersenov graf je maximálny nehamiltonovský.

**Úloha 16.** V danom grafe nájdite najlacnejšiu hamiltonovskú kružnicu.



**Úloha 17.\*** Dokážte Oreho vetu: Ak v  $n$ -vrcholovom grafe  $G$  pre každé 2 nesusedné vrcholy  $u, v$  platí, že  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ , tak  $G$  má hamiltonovskú kružnicu.