1.domáca úloha z predmetu Matematika(1) ZS 2019/2020

Mário Chebeň

15. október 2019

1 Príklad č.1

Rovnako ako na prvej prednáške uvažujme digitálne hodiny, ktoré sú nastavené na európsky 24-hodinový cyklus. Tie ukazujú denný časový údaj vo formáte hodiny:minúty:sekundy. Tak napr. 12:22:34 je čas, ktorý sa na takýchto hodinách môže vyskytnút. Spočítajte, kolkokrát za deň sa na hodinách vyskytne časový údaj H1H2 : M1M2 : S1S2 taký, že M1 menší ako M2 menší alebo rovný S1 menší alebo rovný S2 menší ako H1 menší ako H2.

1.1 Riešenie 1.prikladu

Vytvoril som stromový diagram, v ktorom som na začiatku zadal hodnoty pre H1 = 0, H2 = 1. Dalej som vypísal jednotlivé možnosti minút a sekúnd, ktoré bude časový údaj nadobúdať.

Ak vieme, že H1 môže byť iba 0 a 1, H2 môže byť 1,2,3,4, M1 môže byť 1,2,3,4, M2 môže byť 1,2,3,4, S1 môže byť 3,4,5, a S2 môže byť 3,4,5,6,7,8,9.

01:M1M2:S1S2 = 7 + 6 + 5 + 4 + 6 + 5 + 4 + 5 + 4 + 4 + 6 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4 + 5 + 4 + 4 + 4 = 95
02:M1M2:S1S2 = 4 + 5 + 4 + 4 + 6 + 5 + 4 + 5 + 4 + 4 = 45
03:M1M2:S1S2 = 4 + 4 + 4 + 5 = 17
Uvedomil som si, že keď H1H2 sa rovná 02, počet riešení je rovnaký, ako ked H1H2 sa rovná 12. To isté platí pre H1H2 sa rovná 03 a 13 a aj 23 a ešte zostávajú riešenia pre H1H2 sa rovná 04 a 14.
Výsledok = 95 + (2*45) + (3*17) + (2*4) = 244
Výsledok je 244 možností.

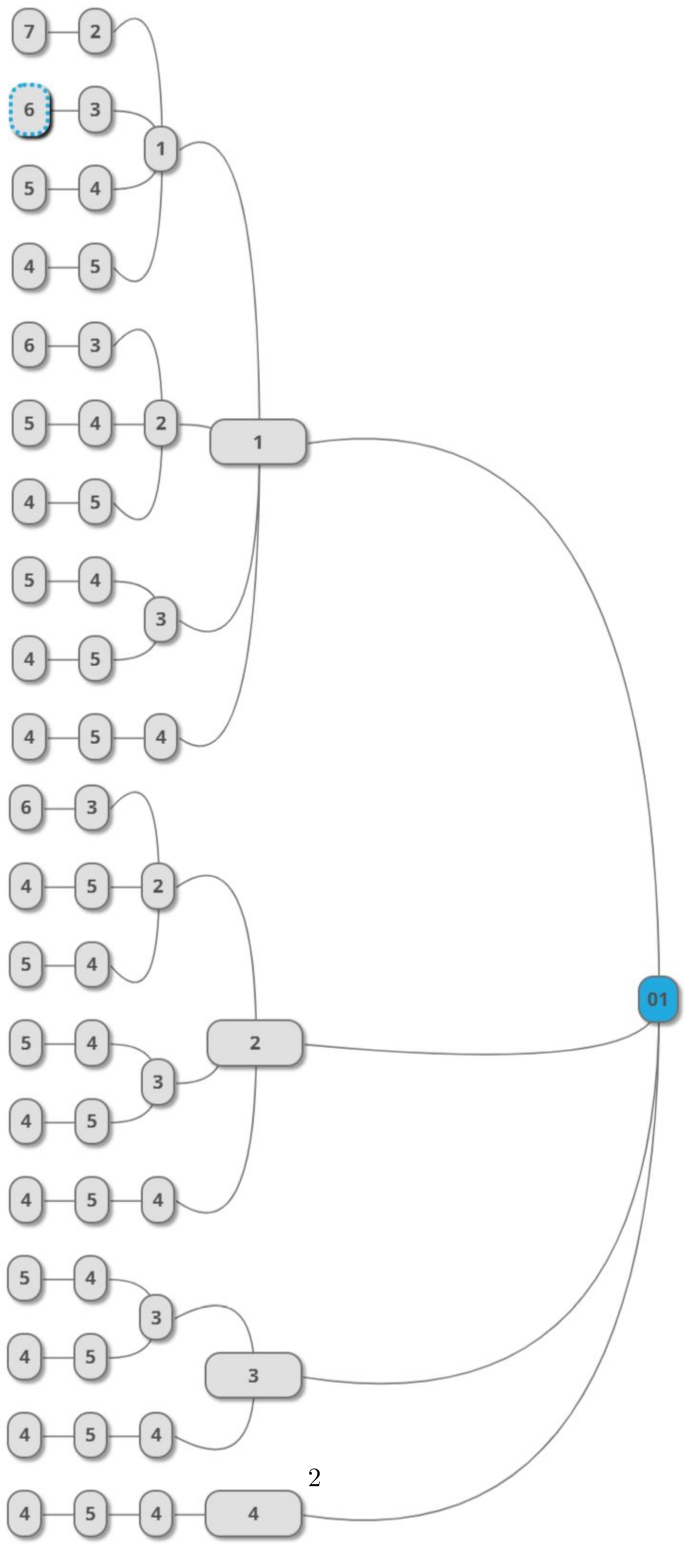

Figure 1: Vzorový stromový diagram pre H1H2 = 01

Príklad č.2

Spočítajte, koľko celočíselných riešení má nasledujúci systém pozostávajúci z jednej rovnice a jednej nerovnice:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \tag{1}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 < 71, \tag{2}$$

ak $-2 \leq x_1$, $3 \leq x_2$, $-4 \leq x_3$, $-5 \leq x_4 \leq 5$, $6 \leq x_5$, $7 \leq x_6$ a $-8 \leq x_7 \leq 8$.

Riešenie 2. príkladu

$x_1 + x_2 + x_3 = 11$ Vyjadrenie rovnice ako a.
$x_1 + x_2 + x_3 = a$

Substitúcia x_1, x_2, x_3.
$y_1 - 2 + y_2 + 3 + y_3 - 4 = a$
$y_1 + y_2 + y_3 = a + 3$

Všetky riešenia pre a (1): $\binom{a+3+3-1}{3-1} = \binom{a+5}{2}$

$a + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 < 71$

Substitúcia x_4, x_5, x_6, x_7.
$a + y_4 - 5 + y_5 + 6 + y_6 + 7 + y_7 - 8 + (z + 1) = 71$
$y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + z = 70 - a$

Riešenie nerovnice (2): $\binom{70-a+5-1}{5-1} = \binom{74-a}{4}$

Prvú podmienku $x_4 \leq 5$ riešim spôsobom, že všetky nevyhovujúce prípady to sú $x_4 \geq 6$
.
$a + y_4 + 6 + y_5 + 6 + y_6 + 7 + y_7 - 8 + (z + 1) = 71$
$y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + z = 59 - a$

$\binom{59-a+5-1}{5-1} = \binom{63-a}{4}$

Druhú podmienku riešim rovnakým spôsobom, $x_7 \geq 9$
.
$a + y_4 - 5 + y_5 + 6 + y_6 + 7 + y_7 + 9 + (z + 1) = 71$
$y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + z = 53 - a$

$\binom{53-a+5-1}{5-1} = \binom{57-a}{4}$

V treťom kroku spočítam všetky riešenia, pre ktoré platia obe podmienky:

$$a + y_4 + 6 + y_5 + 6 + y_6 + 7 + y_7 + 9 + (z + 1) = 71$$
$$y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + z = 42 - a$$

Na záver odpočítam všetky nevyhovujúce riešenia od množiny všetkých riešení.

Výsledné riešenie zapisané sumou

$$\sum_{a=-3}^{11} \binom{a+5}{2} \cdot \binom{74-a}{4} - \sum_{a=-3}^{11} \binom{a+5}{2} \cdot \binom{63-a}{4} + \sum_{a=-3}^{11} \binom{a+5}{2} \cdot \binom{57-a}{4} - \sum_{a=-3}^{11} \binom{a+5}{2} \cdot \binom{46-a}{4}$$