

Содержание

1	Введение	3
1.1	Элементы теории множеств.	3
1.2	Мощность множества. Счётные и несчётные множества.	4
1.3	Понятие рационального числа. Понятие вещественного числа.	7
1.4	Ограниченные множества вещественных чисел.	9
1.5	Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.	9
2	Теория пределов числовых последовательностей.	12
2.1	Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.	12
2.2	Теоремы о сходящихся последовательностях	13
2.3	Арифметические действия с последовательностями, имеющими конечный предел . .	16
2.4	Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Леммы о бесконечно малых последовательностях	18
2.5	Монотонные последовательности	20
2.6	Число e	21
2.7	Принцип вложенных отрезков.	22
2.8	Подпоследовательность. Теорема Больцано-Вейерштрасса.	23
2.9	Частичные пределы	24
2.10	Критерий Коши сходимости числовой последовательности	25
3	Теория пределов функций. Непрерывность функций в точке и на отрезке.	27
3.1	Функция. Предел функции в точке.	27
3.2	Односторонние пределы	30
3.3	Свойства пределов функций	32
3.4	Непрерывность функции в точке. Разрывы I и II родов.	33
3.5	Замечательные пределы	36
3.6	Эквивалентные бесконечно малые функции в точке	37
3.7	Порядок переменной. Сравнение функций в окрестности заданной точки.	40
3.8	Глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке	41
3.9	Равномерная непрерывная функция	43
4	Дифференциальные исчисления функции	45
4.1	Производная функции в точке	45
4.2	Геометрический смысл прооизводной	48

4.3	Производные элементарных функций	49
-----	--	----

1. Введение

1.1. Элементы теории множеств.

Определения (множества)

Множество - совокупность объектов одинаковой природы.

Обозначение: A, B, C - множества. a, b, c - элементы множества.

Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество A называется подмножеством множества B , если $\forall a \in A \implies a \in B$. Обозначение: $A \subset B$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством. Обозначение: \emptyset .

Объединением множеств A и B ($A \cup B$) называется $C : C = \{c : c \in A \cup c \in B\}$.

Пересечением множеств A и B ($A \cap B$) называется $D : D = \{d : d \in A \cap d \in B\}$.

Разностью множеств A и B ($A \setminus B$) называется $E : E = \{e : e \in A \cap e \notin B\}$.

Симметричной разностью множеств A и B ($A \triangle B$) называется $F : F = \{f : f \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}$.

Свойства операций

1. $\forall A \ A \subset A$
 $\forall A \ \emptyset \subset A$
2. $A \cup A = A$
 $A \cap A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
 $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \subset B, B \subset C \implies A \subset C$
5. $A \subset B, B \subset A \implies A = B$
6. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
8. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
9. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
10. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
11. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Доказательство пункта 9:

Пусть X - произвольное множество.

Если $x \in A \implies x \in A \cup X$

Если $x \notin A \implies x \notin A \cap X$

Если $x \in A \cap B \implies x \in A$ и $x \in B$

Если $x \in A \cup B \implies x \in A$ или $x \in B$

Если $x \notin A \cap B \implies x \notin A$ или $x \notin B$

Если $x \notin A \cup B \implies x \notin A$ и $x \notin B$

а) Пусть $x \in A \setminus (B \cap C)$. Тогда $x \in A$ и $x \notin B \cap C$. Следовательно $x \in A$ и $(x \notin B)$ или $(x \notin C)$. Отсюда $(x \in A \text{ и } x \notin B)$ или $(x \in A \text{ и } x \notin C)$. Тогда $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

б) Пусть $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Тогда $x \in (A \setminus B)$ или $x \in (A \setminus C)$. Пусть для определённости $x \in A \setminus B$. Тогда $x \in A$ и $x \notin B$. Отсюда $x \in A$ и $x \notin B \cap C$, например $x \in A$ и $x \notin B \cap C \implies x \in A \setminus (B \cap C)$.

Ч.т.д.

Определения (декартово произведение)

Декартовым произведением множеств A и B ($A \times B$) называется множество $C : C = \{(a; b) : a \in A \text{ и } b \in B\}$.

Отображением F множества A в множество B называется подмножество их декартова произведения. $(F \subset A \times B) : \forall a \in A \exists ! (a; b) \in F$.

Примеры:

$$A = \{1; 3; 5\}, B = \{2; 4; 6\}$$

- $F = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$ - отображение
- $F = \{(1; 2), (1; 4), (3; 4), (5; 6)\}$ - не отображение

Пусть F - отображение A в B . Тогда элемент $b : (a; b) \in F$ называется образом элемента a при отображении F . $b = F(a)$

При этом a называется прообразом (одним из возможных) элемента b .

Множество $\{b \in B : \exists a \in A : b = F(a)\}$ называется образом множества A при отображении F и обозначается $F(A)$.

Отображение F называется **сюрьекцией** или отображением "на", если $F(A) = B$ (все элементы b использованы в парах с элементами a)

Отображение F называется **инъекцией** или вложением, если $F(a_1) = F(a_2) \implies a_1 = a_2$ (каждому элементу a соответствует только один элемент b)

Отображение F называется **биекцией** или взаимнооднозначным отображением, если оно является и сюрьекцией, и инъекцией.

Пример: $A\{1; 3; 5\}, B\{2; 4; 6\}$

- $F_1\{(1; 2), (3; 2), (5; 6)\}$ - не сюрьекция, не инъекция.
- $F_2\{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$ - сюрьекция, инъекция; следовательно, биекция.

1.2. Мощность множества. Счётные и несчётные множества.

Эквивалентность

Множества A и B называются эквивалентными (равномощными), если между ними можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Обозначение: $A \sim B$.

Свойства:

1. $A \sim A$ (свойство рефлексивности)
2. $A \sim B \implies B \sim A$ (свойство симметричности)
3. $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$ (свойство транзитивности)

Мощность множеств. Счётные множества.

Множества чисел:

- N - натуральные числа $(1; 2; 3; \dots)$
- Z - целые числа $(0; \pm 1; \pm 2; \dots)$
- Q - рациональные числа $(\frac{p}{q} : p \in Z, q \in N, \frac{p}{q} - \text{несократимое})$
- R - действительные/вещественные числа

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Мощность множества - некая числовая характеристика (обозначающаяся $\#A$), обладающая свойствами:

1. Если A - конечно, то $\#A$ - кол-во элементов множества.
2. Если A, B - бесконечномерные, то
 - $\#A = \#B \Leftrightarrow A \sim B$
 - $\#A \leq \#B \Leftrightarrow A \sim C, C \subset B$, но $A \not\subset B$

Утверждение: $Z \sim N$

Доказательство:

$0; -1; 1; -2; 2; -3; 3; \dots$

$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots$

Каждому элементу Z соответствует элемент N .

Утверждение: $Q \sim N$

Доказательство:

Договоримся, что $0 = \frac{0}{1}$

Обозначим $h = |p| + q$ - высота числа $\frac{p}{q}$

Будем нумеровать рациональные числа по возрастанию h ; при фиксированном h - по возрастанию q ; при фиксированном h и q - по возрастанию p .

$$\begin{aligned}
h = 1, q = 1 &\implies p = 0 : r_1 = \frac{0}{1} \\
h = 2, q = 1 &\implies p = \pm 1 : r_2 = \frac{-1}{1}, r_3 = \frac{1}{1} \\
h = 2, q = 2 &\implies p = 0 \text{ (не может быть по определению)} \\
h = 3, q = 1 &\implies p = \pm 2 : r_4 = \frac{-2}{1}, r_5 = \frac{2}{1} \\
h = 3, q = 2 &\implies p = \pm 1 : r_6 = \frac{-1}{2}, r_7 = \frac{1}{2} \\
h = 3, q = 3 &\implies p = 0 \text{ (не может быть по определению)}
\end{aligned}$$

Индексы r являются натуральными числами \implies каждому рациональному числу можно поставить в соответствие натуральное число.

Ч.т.д.

Множества, эквивалентные множеству N , называются счётными.

Утверждение: \forall непустое подмножество счётного множества конечно или счётно.

Доказательство: занумеруем все элементы множества, затем перенумируем элементы подмножества в порядке возрастания номеров. Либо элементы закончатся, либо получим счётное подмножество.

Ч.т.д.

Утверждение: счётное объединение счётных множеств счётно.

Доказательство:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}; a_{12}; \dots; a_{1n}\} \text{- счётное} \\
A_2 &= \{a_{21}; a_{22}; \dots; a_{2n}\} \text{- счётное} \\
A_3 &= \{a_{31}; a_{32}; \dots; a_{3n}\} \text{- счётное} \\
A &= \{a_{11}; a_{21}; a_{12}; a_{13}; a_{22}; a_{31}; a_{32}; \dots\} \\
N &= \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots\}
\end{aligned}$$

Каждому элементу множества A можно поставить в соответствие натуральное число из множества N .

Ч.т.д.

Несчётные множества.

Теорема 2.1:

Множество H всех бесконечных наборов из цифр 0 и 1 не является счётным.

Доказательство:

Пусть $h \in H, h = (h_1, h_2, h_3, \dots, h_k, \dots), h_k = 0$ или 1

Предположим противное. Пусть H - счётное, т.е. $H = \{h^1, h^2, h^3, \dots, h^j, \dots, h^k, \dots\}$

$$h^1 = \{h_1^1, h_2^1, h_3^1, \dots, \dots\}$$

$$h^2 = \{h_1^2, h_2^2, h_3^2, \dots, \dots\}$$

\vdots

$$h^j = \{h_1^j, h_2^j, \dots, h_j^j, \dots\}$$

\vdots

$$h^n = \{h_1^n, h_2^n, \dots, h_n^n, \dots\}$$

Построим набор $\bar{h} = \{\bar{h}_1^1; \bar{h}_2^2; \dots; \bar{h}_j^j; \dots; \bar{h}_n^n; \dots\}$, где $\bar{h}_k^k = \begin{cases} 0, & \text{если } h_k^k = 1 \\ 1, & \text{если } h_k^k = 0 \end{cases}$ Очевидно, что

$\bar{h} \in H$, т.е. \bar{h} имеет номер, пусть $\bar{h} = h^j$

На j -ом месте h^j имеет элемент h_j^j

На j -ом месте \bar{h} имеет элемент \bar{h}_j^j , т.е. $h_j^j = \bar{h}_j^j$

Получили противоречие. Таким образом H не является счётным.

Ч.т.д.

Следствие: множество всех подмножеств счётного множества не является счётным.

Теорема 2.2:

Множество K всех бесконечных наборов, состоящих из цифр от 0 до 9, не является счётным.

Доказательство: очевидно, что $H \subset K$. Если бы K было счётным, то и H было бы счётным, а это не так.

Ч.т.д.

Множества, эквивалентные множеству вещественных чисел отрезка $[0; 1]$ называются множествами мощности континуума.

1.3. Понятие рационального числа. Понятие вещественного числа.

Рациональными числами будем называть числа вида

$$\frac{p}{q}, p \in Z, q \in N, \text{НОД}(p, q) = 1, 0 = \frac{0}{1}$$

Множество рациональных чисел - Q .

Свойства:

1. $\forall a, b \in Q \mid a < b$ или $a = b$ (правило упорядочивания)
2. $\forall a, b \in Q \exists! c \in Q \mid c = a + b$ (корректность определения суммы)

3. $\forall a, b \in Q \exists! d \in Q \mid d = ab$ (корректность определения произведения)
4. $\forall a, b, c \in Q$ если $a < b$, а $b < c \implies a < c$
 $\forall a, b, c \in Q$ если $a = b$, а $b = c \implies a = c$ (транзитивность)
5. $\forall a, b \in Q \mid a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
6. $\forall a, b, c \in Q \mid (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
7. $\exists! 0 \in Q \mid \forall a \in Q a + 0 = 0 + a = a$ (существование нейтрального элемента по сложению)
8. $\forall a \in Q \exists! a' \in Q \mid a + a' = a' + a = 0$ (существование обратного элемента по сложению)
9. $\forall a, b \in Q \mid ab = ba$ (коммутативность умножения)
10. $\forall a, b, c \in Q \mid (ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
11. $\exists! 1 \in Q \mid \forall a \in Q a \times 1 = 1 \times a = a$ (существование нейтрального элемента по умножению)
12. $\forall a \neq 0, a \in Q \exists! a' \in Q \mid a \times a' = a' \times a = 1$ (существование обратного элемента по умножению)
13. $\forall a, b, c \in Q (a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность)
14. если $a < b, c \in Q \implies a + c < b + c$
15. если $a < b, c > 0 \implies ac < bc$
16. $\forall a \in Q \exists n \in N \mid n > a$ (аксиома Архимеда, или "натуральных чисел бесконечно много")

Вещественные числа

Вещественным или действительным числом называется произвольная бесконечная десятичная дробь вида $\pm a_1, a_2 a_3 a_4 \dots a_n \dots$.

Рассмотрим $0, (9) = 0,9999 \dots \in Q$

$$0, (9) = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = \left| \begin{array}{l} S \\ b_1 \\ q \end{array} \right| = \frac{\frac{b_1}{1-q}}{\frac{b_1}{q}} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Договоримся, что рациональное число не может содержать в своей записи бесконечное число 9. Модуль (абсолютная величина) числа $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ называется число, выраженное той же дробью, что и a , но взятой со знаком "+".

Правила сравнения вещественных чисел

1. Пусть $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$
 $b = \pm b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$
 $a, b \in R$
 Числа a и b называются равными, если перед ними один знак и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n, \dots$
2. Пусть $a \neq b$

- \forall положительное число > 0
- \forall отрицательное число < 0
- \forall положительное число $> \forall$ отрицательного числа
- $a > 0, b > 0$. Будем говорить, что $a > b$, если $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_k > b_k$.
- $a < 0, b < 0$. $a > b$, если $|a| < |b|$; $a < b$, если $|a| > |b|$.

1.4. Ограниченные множества вещественных чисел.

Ограниченные множества

Множество $X \subset R$ ограничено сверху, если $\exists M \in R \mid \forall x \in X \ x \leq M$

Множество $X \subset R$ ограничено снизу, если $\exists m \in R \mid \forall x \in X \ x \geq m$

Числа M и m называются верхней и нижней гранями множества X соответственно.

Число $\bar{x} \in R$ ($\underline{x} \in R$) называется точной верхней (нижней) гранью множества X , если:

1. $\forall x \in X \ x \leq \bar{x}$ ($x \geq \underline{x}$)
2. $\forall x' \in R \mid x' < \bar{x} \ \exists x_0 \in X \mid x_0 > x' \ (\forall x' \in R \mid x' > \underline{x}, \exists x_0 \in X \ x_0 < x')$ (невозможность уменьшить точную грань)
3. (на самом деле 2*): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \mid \bar{x} - \varepsilon < x_n$
 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \mid \underline{x} - \varepsilon > x_n$

Обозначения:

- $\bar{x} = \sup x$ - супремум множества X
- $\underline{x} = \inf x$ - инфимум множества X

Теорема 4.1 (принцип полноты Вейерштрасса):

\forall непустое ограниченное сверху (снизу) множество $X \subset R$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

1.5. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.

Леммы

Лемма 1: пусть $a \in R$

$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q \ \exists \alpha, \beta \in Q \mid \alpha \leq a \leq \beta$, причём $\beta - \alpha < \varepsilon$

Доказательство:

Пусть $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \geq 0$

Пусть $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$. Очевидно, что $\alpha \leq a$.

Положим $\beta = \alpha + \frac{1}{10^n}$

$\beta = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots (a_n + 1)$. Очевидно, что $\beta \geq a$

Замечание:

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q \exists n \in N \implies |10^n| > \frac{1}{\varepsilon} \text{ (аксиома Архимеда)}$$

$$\beta - \alpha = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

.

Ч.т.д.

Лемма 2: $\forall a, b \in R \exists \alpha \in Q \mid a < \alpha < b$

Замечание: таких α бесконечно много.

Доказательство:

Пусть $a = a_0, a_1 \dots a_n \dots \geq 0$

Пусть $a = a_0, a_1 \dots a_k 99 \dots 9 a_p \dots$ при $a_p \neq 9$

$b = b_0, b_1 \dots b_k \dots, a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_k < b_k \implies a < b$

$\alpha = a_0, a_1 \dots a_k 99 \dots 9(a_p + 1)$.

$a < \alpha$, т.к. $a_p < a_p + 1$

$b > \alpha$, т.к. $a_k < b_k$

Следовательно $a < \alpha < b$

Если $a < 0, b > 0$, то $\alpha = 0,000 \dots$

Если $a < b \leq 0$, то переходим к модулям.

Ч.т.д.

Лемма 3: пусть $a, b \in R$. Если $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q \mid \exists \gamma_1, \gamma_2 \in Q \mid \gamma_1 \leq a \leq \gamma_2$ и $\gamma_1 \leq b \leq \gamma_2$ и $\gamma_1 - \gamma_2 < \varepsilon$, то $a = b$.

Доказательство:

Предположим противное.

Пусть $a \neq b$; пусть для определённости $a < b$. Тогда по лемме 2 $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in Q \mid a < \alpha_1 < \alpha_2 < b$

Положим $\varepsilon = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$. По условию леммы $\exists \gamma_1, \gamma_2 \in Q \mid \gamma_1 \leq a < \alpha_1 < \alpha_2 < b \leq \gamma_2$ и $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$

Отсюда $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2$. Отнимем γ_1 .

$$0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \alpha_2 - \gamma_1 < \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 > \varepsilon, \gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$$

Получили противоречие. Следовательно, $a = b$.

Ч.т.д.

Арифметические действия

Суммой чисел $a, b \in R$ называется число $c \in R \mid \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q; \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2; \beta_1 \leq b \leq \beta_2$ выполнено $\alpha_1 + \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 + \beta_2$

Произведением чисел $a, b \in R$ называется число $c \in R \mid \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q; \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2; \beta_1 \leq b \leq \beta_2$ выполнено $\alpha_1 \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 \beta_2$

Замечание: все операции с вещественными числами производятся с погрешностью.

По определению положим: $a \times 0 = 0 \times a = 0$

Пусть $a, b \in R$. Тогда по определению

$$ab = \begin{cases} |a||b|, & \text{если } ab > 0 \text{ (a и b одного знака)} \\ -|a||b|, & \text{если } ab < 0 \text{ (a и b разных знаков)} \end{cases}$$

Свойства вещественных чисел

1. $\forall a, b \in R \mid a < b \text{ или } a = b$ (правило упорядочивания)
2. $\forall a, b \in R \exists! c \in R \mid c = a + b$ (корректность определения суммы)
3. $\forall a, b \in R \exists! d \in R \mid d = ab$ (корректность определения произведения)
4. $\forall a, b, c \in R$ если $a < b$, $a b < c \implies a < c$
 $\forall a, b, c \in R$ если $a = b$, $a b = c \implies a = c$ (транзитивность)
5. $\forall a, b \in R \mid a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
6. $\forall a, b, c \in R \mid (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
7. $\exists! 0 \in R \mid \forall a \in R a + 0 = 0 + a = a$ (существование нейтрального элемента по сложению)
8. $\forall a \in R \exists! a' \in R \mid a + a' = a' + a = 0$ (существование обратного элемента по сложению)
9. $\forall a, b \in R \mid ab = ba$ (коммутативность умножения)
10. $\forall a, b, c \in R \mid (ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
11. $\exists! 1 \in R \mid \forall a \in R a \times 1 = 1 \times a = a$ (существование нейтрального элемента по умножению)
12. $\forall a \neq 0, a \in R \exists! a' \in R \mid a \times a' = a' \times a = 1$ (существование обратного элемента по умножению)
13. $\forall a, b, c \in R (a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность)
14. если $a < b, c \in Q \implies a + c < b + c$
15. если $a < b, c > 0 \implies ac < bc$
16. $\forall a \in R \exists n \in N \mid n > a$ (аксиома Архимеда, или "натуральных чисел бесконечно много")

Арифметические действия 2. Electric Boogalo

Разностью чисел $a, b \in R$ называется число $c \in R \mid a = c + b$

Покажем, что этому определению удовлетворяет число $c = a + b'$, где b' - обратное к b по сложению.

Действительно $c + b = (a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$

Покажем, что c - единственное.

Пусть $\exists d \in R \mid a = d + b$, тогда $c = a + b' = d + b + b' = d + 0 = d$

Т.е. разность определена единственным образом.

По определению $0 - b = 0 + b' = b' = -b$

Пишем, что $b' = 0 - b = -b$

Обозначение: $c = a - b$

Частным чисел $a, b \in R, b \neq 0$ называется число $c \in R \mid a = bc$

Покажем, что этому определению удовлетворяет число $c = ab'$, где b' - обратное к b по умножению.

Действительно $cb = (ab')b = a(b'b) = a \times 1 = a$

Покажем, что c - единственное.

Пусть $\exists d \in R \mid a = db$, тогда $c = ab' = (db)b' = d(bb') = d$

Т.е. частное определено единственным образом.

Обозначение: $c = \frac{a}{b}$

2. Теория пределов числовых последовательностей.

2.1. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.

Определение числовой последовательности.

Пусть каждому натуральному $n \in N$ по определённому закону ставится в соответствие действительное число x_n .

Тогда говорят, что определена числовая последовательность.

Обозначение: $\{x_n\}$

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ - элементы последовательности.

Пример: арифметическая прогрессия $x_n = a + d(n - 1)$, геометрическая прогрессия $x_n = a \times q^n$.

При $a < b$:

- Множество чисел $x \mid a \leq x \leq b$ называется отрезком $[a; b]$
- Множество чисел $x \mid a < x < b$ называется интервалом $(a; b)$
- Если $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$, то есть $[a; b)$ или $(a; b]$, то эти множества называются полуинтервалом или полуотрезком.
- Замечание: a, b могут быть ∞ и $-\infty$ и образовывать, например, $(-\infty; \infty)$, $[a, \infty)$ и т.д.

Произвольный интервал $(a; b)$, содержащий точку c ($a < c < b$) называется окрестностью точки c и обозначается $U(c)$.

Крайне важные определения

Интервал вида $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ называется ε -окрестностью точки c .

Число a называется **пределом** числовой последовательности x_n , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Говоря по-русски, для любого эpsilon больше нуля существует номер N , зависящий от эpsilon, при котором при любом номере n больше номера N выполняется неравенство: $|x_n - a|$ меньше эpsilon.

Есть такие последовательности, чьих пределов не существует, например,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \nexists$$

Пример: $x_n = \frac{1}{n}$. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} - 0 \right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ 1 &< n\varepsilon \\ n &> \frac{1}{\varepsilon} \\ N(\varepsilon) &= \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{10} \\ N(0.1) &= 10 \\ x_{10} &= \frac{1}{10} \notin \varepsilon\text{-окр.} \\ x_{11} &= \frac{1}{11} \in \varepsilon\text{-окр.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{100} \\ N(0.01) &= 100 \\ x_{100} &= \frac{1}{100} \notin \varepsilon\text{-окр.} \\ x_{101} &= \frac{1}{101} \in \varepsilon\text{-окр.} \end{aligned}$$

Ч.т.д.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся последовательностью. В противном случае - расходящейся.

2.2. Теоремы о сходящихся последовательностях

Теорема 2.1:

Если $\{x_n\}$ имеет предел, то он единственный.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, $a \neq b$, пусть для определённости $a < b$.

Выберем окрестности точки a и b таким образом, чтобы они не пересекались.

По условию $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies$ в окрестность точки a попадает ∞ -ое число элементов $\{x_n\}$

Вне этой окрестности находится конечное число элементов $\{x_n\} \implies$ в окрестность точки

b попадает конечное число элементов $\{x_n\}$.

Получили противоречие, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \implies$ в окрестности точки b должно быть ∞ -ое число элементов $\{x_n\}$.

Отсюда следует, что $a = b$.

Ч.т.д.

Теорема 2.2:

Если $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ сходится. Тогда существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Рассмотрим $|x_1 - a| \geq \varepsilon, |x_2 - a| \geq \varepsilon, \dots, |x_n - a| \geq \varepsilon$

Обозначим $\max\{|x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_n - a|\} = d \implies d \geq \varepsilon$

Тогда

$$\begin{cases} \forall n = 1..N \implies |x_n - a| \leq d \\ \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon \leq d \end{cases} \implies \forall N \implies |x_n - a| \leq d$$

$$a - d \leq x_n \leq a + d$$

Отсюда следует, что $\{x_n\}$ ограничена.

Ч.т.д.

Замечание: ограниченность подпоследовательности является необходимым условием, но не является достаточным, т.е. если $\{x_n\}$ ограничена, то она не обязана сходиться.

Пример:

$$\{x_n\} = (-1)^n \Rightarrow -1; 1; -1; 1; \dots$$

$\{x_n\}$ ограничена, но $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \nexists$

У данной последовательности нет такого элемента, который если окружить окрестностью ("ловушкой"), получится "поймать" все элементы последовательности.

Теорема 2.3 (о сохранении знака):

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, то $\exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |x_n| > \frac{a}{2}$

Если $a > 0$, то $x_n > \frac{a}{2}$

Если $a < 0$, то $x_n < \frac{a}{2}$

Доказательство:

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Зафиксируем $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}$$

$\mathbf{a > 0}$ $x_n > a - \frac{ a }{2}$ $x_n > \frac{a}{2}$	$\mathbf{a < 0}$ $x_n < a + \frac{ a }{2}$ $x_n < \frac{a}{2}$
--	--

Ч.т.д.

Теорема 2.4:

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и $\forall n \in N \ x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

Доказательство:

Предположим противное.

Пусть $a > b$. Зафиксируем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$.

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то для $\varepsilon = \frac{a-b}{2} \exists N_1 \mid \forall n > N_1 \mid x_n - a \mid < \varepsilon$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то для $\varepsilon = \frac{a-b}{2} \exists N_2 \mid \forall n > N_2 \mid y_n - b \mid < \varepsilon$

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N$

$$y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} =$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < x_n$$

$$y_n < x_n$$

Получили противоречие. Таким образом, $a \leq b$.

Ч.т.д.

Следствие: если $\{x_n\}$ - сходящаяся подпоследовательность и $\forall n \in N \ x_n \in [a; b]$, то её предел $\in [a; b]$

Доказательство:

$$\forall n \ a_n \leq x_n \leq b_n$$

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Рассмотрим $\{a_n\}$. Её элементы: $a; a; a; a; \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$\forall n \ a_n \leq x_n \implies a \leq c$ (по теореме 2.4).

Аналогично $c \leq b$. Следовательно, $a \leq c \leq b$.

Ч.т.д.

Теорема 2.5 ("теорема о двух милиционерах"):

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ и $\forall n \in N \ x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

Доказательство:

Зафиксируем ε .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \exists N_1 \mid \forall n > N_1 \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \implies \exists N_2 \mid \forall n > N_2 \ a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

Ч.т.д.

Теорема 2.6:

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$

Доказательство:

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ то } \exists N \mid \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\varepsilon > |x_n - a| \geq ||x_n| - |a|| \implies ||x_n| - |a|| < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$$

Ч.т.д.

2.3. Арифметические действия с последовательностями, имеющими конечный предел

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

Все описанные в параграфе действия можно применять только для сходящихся последовательностей.

Для доказательств действий часто применяется неравенство треугольника:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Теорема 3.1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

Доказательство:

Докажем для "+", т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$

Зафиксируем $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\exists N_1 \mid \forall n > N_1 \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \mid \forall n > N_2 \implies |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$

Тогда $\forall n > N$

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

$$|x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$

Ч.т.д.

Теорема 3.2:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$$

Доказательство:

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \implies \{y_n\}$ - сходящаяся $\implies \{y_n\}$ - ограничена (по т. 2.2) $\implies \exists M \mid |y_n| \leq M$, причём выберем M таким образом, чтобы $|a| \leq M$.

$$\exists N_1 \mid \forall n > N_1 \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\exists N_2 \mid \forall n > N_2 \implies |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Рассмотрим $|x_n y_n - ab|$

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = \\ &= |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b| \leq M \times \frac{\varepsilon}{2M} + M \times \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab \end{aligned}$$

Ч.т.д.

Теорема 3.3:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{x_n b - a y_n - ab + ab}{y_n b} \right| = \left| \frac{b(x_n - a) - a(y_n - b)}{y_n b} \right| \leq \\ &= \left| \frac{x_n - a}{y_n} \right| + \left| \frac{(y_n - b)a}{y_n b} \right| = \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|a||y_n - b|}{|y_n||b|} \end{aligned}$$

По теореме о сохранении знака $\forall n > N_1$

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}$$

$$\frac{1}{|y_n|} > \frac{2}{|b|}$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \forall n > N_2 \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{4}$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \implies \forall n > N_3 \quad |a||y_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{4}$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Тогда $\forall n > N$:

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{\varepsilon|b|}{4} \times \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon|b|^2}{4} \times \frac{2}{|b||b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

Ч.т.д.

Замечание: пределы в левых частях равенств могут существовать без существования пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

Пример:

$$\begin{array}{ll} x_n = (-1)^n & \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \nexists \\ y_n = (-1)^{n+1} & \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \nexists \end{array}$$

Как **НЕЛЬЗЯ**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \nexists + \nexists = \nexists$$

Как правильно:

$$x_n + y_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = \{0; 0; 0; \dots\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$$

2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Леммы о бесконечно малых последовательностях

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |\alpha_n| < \varepsilon$$

Утверждение: для того, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, $\{\alpha_n\}$ - беск. малая последовательность.

Последовательность B_n называется бесконечно большой, если $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \pm\infty$.

Говорят: $\{B_n\}$ стремится к бесконечности.

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) \mid \forall n > N \implies |B_n| > M$$

Лемма 1: сумма конечного числа беск. малых последовательностей является беск. малая последовательность.

$$\alpha_n^1, \alpha_n^2, \dots, \alpha_n^k \rightarrow 0$$

Доказательство:

Рассмотрим $\alpha_n = \alpha_n^1 + \dots + \alpha_n^k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n^1 + \dots + \alpha_n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^1 + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^k = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \implies \alpha_n - \text{беск. малая последовательность.}$$

Ч.т.д.

Лемма 2: произведение беск. малой последовательности на ограниченную последовательность есть беск. малая последовательность.

$$\alpha_n^1 \times x_n \rightarrow 0$$

Доказательство:

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Т.к. $\{x_n\}$ ограничена, то $\exists M \forall n \mid y_n \leq M$

$$|x_n y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon$$

Ч.т.д.

Пример:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Хоть $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \nexists$, но эта последовательность ограничена, а следовательно может быть одним из множителей.

Лемма 3: произведение конечного числа беск. малых последовательностей есть беск. малая последовательность.

Доказательство:

Рассмотрим $\alpha_n = \alpha_n^1 \times \alpha_n^2 \times \dots \times \alpha_n^k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n^1 \times \alpha_n^2 \times \dots \times \alpha_n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^1 \times \dots \times \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^k = 0 \times \dots \times 0 = 0$$

$\{\alpha_n\}$ - беск. малая последовательность, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

Ч.т.д.

Определённые выражения

Обозначим:

- 0 - беск. малая величина
- ∞ - беск. большая величина
- a - конечная величина

Примеры определённых выражений:

$$\frac{a}{0} \rightarrow \infty; \frac{0}{a} \rightarrow 0; \frac{0}{\infty} \rightarrow 0; \frac{\infty}{0} \rightarrow \infty; \frac{a}{\infty} \rightarrow 0; \frac{\infty}{a} \rightarrow \infty; \dots$$

Неопределённые выражения

Пример:

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

1. Пусть $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

2. Пусть $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

3. Пусть $x_n = \frac{a}{n}, y_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

4. Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, y_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \nexists$$

Виды неопределённостей:

$$\left[\frac{0}{0} \right]; \left[\frac{\infty}{\infty} \right]; [0 \times \infty]; [\infty - \infty]; [1^\infty]; [\infty^0]; [0^0]$$

Замечание: при нахождении предела посл-ти используется выражение "раскрыть неопределённость".

2.5. Монотонные последовательности

Последовательность называется неубывающей, если $\forall n \in N \ x_n \leq x_{n+1}$.

Последовательность называется возрастающей, если $\forall n \in N \ x_n < x_{n+1}$.

Последовательность называется невозрастающей, если $\forall n \in N \ x_n \geq x_{n+1}$.

Последовательность называется убывающей, если $\forall n \in N \ x_n > x_{n+1}$.

Невозрастающие, неубывающие, возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными.

Рассмотрим неубывающую посл-ть: $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$

Данная последовательность всегда ограничена снизу.

Теорема 5.1:

Если неубывающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она сходится.

Доказательство: так как $\{x_n\}$ ограничена сверху, то $\exists \bar{x} = \sup\{x_n\}$

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$

Т.к. \bar{x} - точная верхняя грань, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : x_n \leq \bar{x} \ \bar{x} - \varepsilon < x_n$$

Кроме того, по условию $\{x_n\}$ неубывающая, то есть

$$\forall n > N \ x - \varepsilon < x_n \leq x_n \leq \bar{x} < x + \varepsilon \implies |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

Замечание: аналогичную теорему можно сформулировать и доказать для убывающей, возрастающей и невозрастающей последовательности.

Следствие: для того, чтобы монотонная последовательность сходилась \Leftrightarrow , чтобы $\{x_n\}$ была ограниченной.

2.6. Число e .

Формула бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \quad (1)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n! = 1 \times 2 \times \dots \times n, 0! = 1$$

Докажем формулу бинома Ньютона методом математической индукции:

1. База индукции.

При $n = 1$ должно выполняться равенство $(a + b)^1 = \sum_{k=0}^1 C_1^k a^k b^{1-k}$

$$a + b = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0$$

$$a + b = b + a$$

2. Преположение индукции.

Пусть при $n = m$ верно равенство $(a + b)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^k b^{m-k}$

3. Шаг индукции.

Докажем справедливость равенства для $n = m+1$, т.е. докажем, что $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \text{Замечание: } C_m^{k+1} + C_m^k &= \frac{m!}{(k+1)!(m-k)!} + \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(k+1)!(m-k)!} \left(\frac{1}{m-k+1} + \frac{1}{k} \right) = \frac{m!}{(k+1)!(m-k)!} \left(\frac{k+m-k+1}{(m-k+1)k} \right) = \\ &= \frac{m!}{(k+1)!(m-k)!} \left(\frac{m+1}{(m-k+1)k} \right) = \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k+1)!} = C_{m+1}^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b)^{m+1} &= (a + b)^m \times (a + b) = \left(\sum_{k=0}^m C_m^k a^k b^{m-k} \right) \times (a + b) = \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^m C_m^k a^k b^{m-k+1} = \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} a^k b^{m-(k-1)} + \sum_{k=0}^m C_m^k a^k b^{m-k+1} = \\ &= C_m^m a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^m C_m^{k-1} a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=1}^m C_m^k a^k b^{m-k+1} + C_m^0 a^0 b^{m+1} = \\ &= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^m (C_m^{k-1} + C_m^k) a^k b^{m-k+1} = \\ &= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^m C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1} = a^{m+1} + \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k} \end{aligned}$$

Ч.т.д.

Рассмотрим последовательность $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

1. Покажем, что эта посл-ть ограничена снизу.

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = \\ &= C_n^1 * 1^{n-1} \times (\frac{1}{n})^1 + C_n^2 \times 1^{n-2} * (\frac{1}{n})^2 + \dots + C_n^n \times 1^0 \times (\frac{1}{n})^n = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \times \frac{1}{n^2} + \dots + \\ &+ \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1) \frac{1}{n^k} + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} n(n-1) \dots (n-n+1) \frac{1}{n^n} \geq 2, \forall n \end{aligned}$$

Значит x_n ограничена снизу.

2. Докажем, что x_n ограничена сверху.

Замечание: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ (упр. - доказать методом мат. индукции)

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} \times 1 + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

3. Докажем, что $\{x_n\}$ является возрастающей.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n+1}) + \dots + \\ &\frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n+1}) \dots (1 - \frac{k-1}{n+1}) + \dots + \\ &\frac{1}{(n+1)!} (1 - \frac{1}{n+1}) \dots (1 - \frac{n}{n+1}) \end{aligned}$$

$x_n < x_{n+1}$, т.к. у x_{n+1} на одно положительное слагаемое больше и каждое соответствующее слагаемое у x_{n+1} больше, чем у x_n .

То есть, x_n - возрастающая. То есть по теореме 5.1 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.7182$

2.7. Принцип вложенных отрезков.

Теорема 7.1:

Пусть задана послед-ть отрезков $S_n = [a_n; b_n]$, $\forall n \in N$, вложенных друг в друга, т.е. $S_{n+1} \subset S_n$ с длинами, стремящимися к нулю ($\alpha_n = b_n - a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$). Тогда \exists и притом единственная точка c , одновременно принадлежащая всем отрезкам S_n ($c \in S_n$).

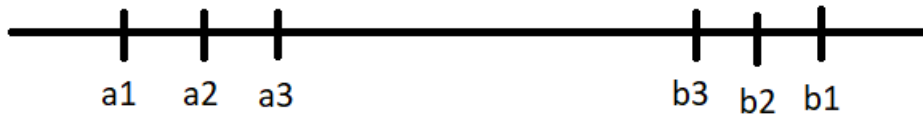
Доказательство:

$$S_2 \subset S_1$$

$$S_3 \subset S_2$$

\vdots

⋮



$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_m, \forall m \in N$$

Т.е. $\{a_n\}$ неубывающая и ограничена сверху \implies по теореме 5.1 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\} = c$

$a_n < c < b_m, \forall m, n \in N$ ($a_n < c$ т.к. c - грань; $c < b_m$ т.к. $c = \sup\{a_n\}$)

Например, $a_n < c < b_n$. То есть $\exists c \in S_n, \forall n$.

Докажем единственность методом от противного:

Пусть \exists точка $c_1 \in S_n, \forall n$. Тогда $a_n < c, c_1 < b_n$. Пусть для определённости $c < c_1$.

Рассмотрим $b_n - a_n > c_1 - c$. Рассмотрим $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \neq 0$. Это противоречит условию теоремы про стремление к нулю.

Точка c - единственная.

Ч.т.д.

2.8. Подпоследовательность. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Пусть задана $\{x_n\}$ - последовательность. Выберем из неё бесконечное множество элементов с номерами $n_1 < n_2 < \dots$. Полученная последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Таких подпоследовательностей можно извлечь бесконечно много из искомой последовательности.

Утверждение: если $\{x_n\}$ сходится, то все $\{x_{n_k}\}$ будут сходиться и $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \forall k \in N$.

Утверждение: если $\{x_n\}$ беск. большая, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$, то все $\{x_{n_k}\}$ будут являться беск. большими.

Утверждение: если $\{x_n\}$ неограничена, то из неё можно извлечь беск. большую.

Вопрос? если $\{x_n\}$ ограничена...

Теорема 8.1 (Больцано-Вейерштрасса):

Из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: т.к. $\{x_n\}$ ограничена, то $\forall n, x_n \in [a_0; b_0]$.

Выберем произвольно какой-либо элемент последовательности $\{x_n\}$. Пусть его номер - n_1 . Очевидно, что $x_{n_1} \in [a_0; b_0]$. Разделим отрезок $[a_0; b_0]$ на два равных отрезка. Тогда по крайней мере на одном из них (обозначим его $[a_1; b_1]$) окажется беск. много элементов посл-ти $\{x_n\}$. Поэтому среди них найдется элемент с номером $N > n_1$. Обозначим его n_2 ($x_{n_2} \in [a_1; b_1] \subset [a_0; b_0], b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$). Разделим отрезок $[a_1; b_1]$ на два равных отрезка. Обозначим $[a_2; b_2]$ отрезок с ∞ числом элементов x_n . Выберем элемент с номером $N > n_2$. Обозначим его n_3 ($x_{n_3} \in [a_2; b_2] \subset [a_1; b_1], b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$). Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$[a_k; b_k] \subset [a_{k-1}; b_{k-1}], k = 1, 2, \dots$$

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \left[\frac{a}{\infty} \right] = 0$$

То есть получили систему вложенных отрезков $[a_k; b_k]$ с длинами, стремящимися к 0.

Тогда по теореме 7.1:

$\exists!$ точка c , принадлежащая всем отрезкам.

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c$, т.к. $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$.

То есть по теореме 2.5 (о двух милиционерах) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$

2.9. Частичные пределы

Пусть x_n - произвольная последовательность.

x_n :

- сходящиеся - все подпоследовательности сходятся к одному и тому же числу.
- расходящиеся:
 - стремящиеся к бесконечности - все подпоследовательности будут стремиться к ∞
 - не имеющие предела:
 - * неограниченные - можно извлечь беск. большую последовательность.
Пример: $\{1; 2; 1; 3; 1; 4; \dots\}$
 - * ограниченные - можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.
Пример: $(-1)^n = \{-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots\}$

Если x_n ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса можно рассматривать различные сходящиеся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$.

Пределы сходящихся подпоследовательности, извлечённых из ограниченной последовательности, называются **частичными пределами**.

Верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется число M (конечное, $\pm\infty$), обладающее свойствами:

$$1. \exists \text{ подпоследовательность } \{x_{n_k}\} \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = M.$$

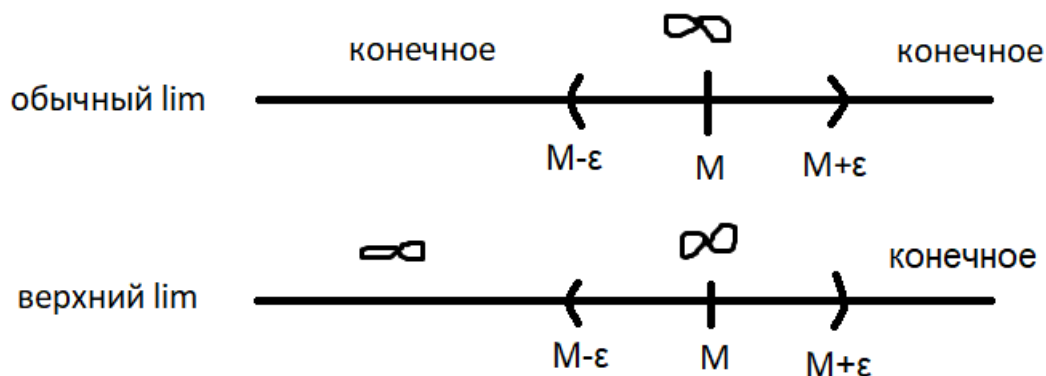
$$2. \forall \{x_{n_k}\} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_n.$$

Обозначение: $M = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_n$.

Замечание: если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Замечание: если $\{x_n\}$ сходящаяся и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$, то $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_n = M$.

Разница между обычным пределом (единственным) и верхним пределом



Левее $M - \varepsilon$ в случае "обычного" предела находятся конечное число элементов x_n , а в случае верхнего предела - ∞ число элементов x_n .

Нижним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется число m (конечное, $\pm\infty$):

$$1. \exists \text{ подпоследовательность } \{x_{n_k}\} \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = m.$$

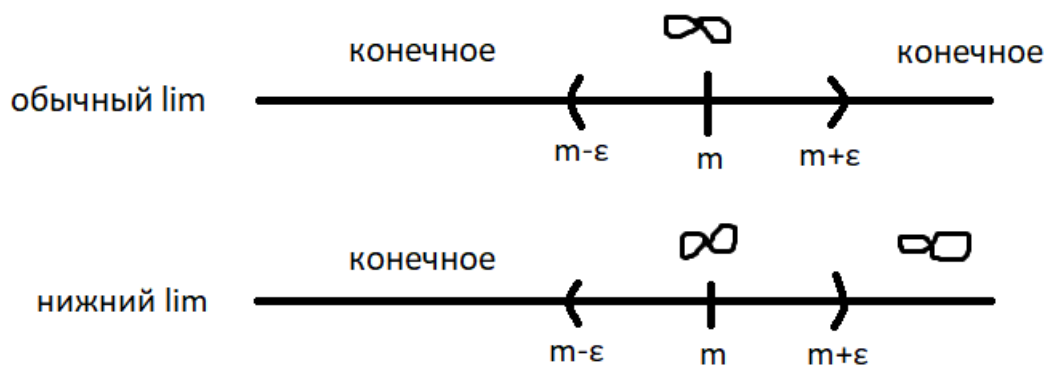
$$2. \forall \text{ сходящейся } \{x_{n_k}\} \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq m.$$

Обозначение: $m = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Замечание: если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Замечание: если $\{x_n\}$ сходящаяся и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = m$, то $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = m$.

Разница между обычным пределом (единственным) и нижним пределом



Разница между "обычным" пределом и нижним пределом заключается в том, что правее $M + \varepsilon$ в случае "обычного" предела находятся конечное число элементов x_n , а в случае нижнего предела - ∞ число элементов x_n .

Очевидно, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел (конечный, $\pm\infty$) \Leftrightarrow чтобы $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2.10. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если она удовлетворяет условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \mid \forall n > n_0, \forall m > n_0 \mid x_n - x_m \mid < \varepsilon$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \mid \forall n > n_0, \forall p > 0 \mid x_{n+p} - x_n \mid < \varepsilon$$

Леммы о фундаментальных последовательностях

Лемма 1: если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то она фундаментальная.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся.

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies \mid x_n - a \mid < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $m > N$ и $n > N$. Рассмотрим $\mid x_m - x_n \mid$.

$$\mid x_m - x_n \mid = \mid (x_m - a) - (x_n - a) \mid \leq \mid x_m - a \mid + \mid x_n - a \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т.е. $\{x_n\}$ - фундаментальна.

Ч.т.д.

Лемма 2: если последовательность фундаментальна, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальна. Тогда по условию Коши

$$\exists n_0 \mid \forall m, n > n_0 \implies \mid x_n - x_m \mid < \varepsilon$$

Зафиксируем $m = n_0 + 1$. Получим $\mid x_n - x_{n_0+1} \mid < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< x_n - x_{n_0+1} < \varepsilon \\ x_{n_0+1} - \varepsilon &< x_n < x_{n_0+1} + \varepsilon \end{aligned}$$

Обозначим $d = \max\{\mid x_1 \mid, \mid x_2 \mid, \dots, \mid x_{n_0} \mid, \mid x_{n_0+1} + \varepsilon \mid\}$.

Тогда

$$\forall n \in N \implies -d \leq x_n \leq d$$

То есть $\{x_n\}$ ограничена.

Ч.т.д.

Лемма 3: если некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то предел этой подпоследовательности является пределом всей последовательности.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность. Пусть $\{x_{n_k}\}$ - её сходящаяся подпоследовательность.

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$

Зададим $\varepsilon > 0$

По условию Коши

$$\exists n_0 \mid \forall m, n > n_0 \implies \mid x_n - x_m \mid < \frac{\varepsilon}{2}$$

Т.к. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, т.е.

$$\exists k_0 = k_0(\varepsilon) \implies |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть k_0 будет таким, чтобы при $k > k_0 \implies n_k > n_0$

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Ч.т.д.

Теорема 10.1 (критерий Коши сходимости числовой посл-ти):

Для того, чтобы посл-ть имела конечный предел \Leftrightarrow чтобы она была фундаментальна.

Доказательство:

Докажем необходимость (\Rightarrow).

Пусть посл-ть имеет конечный предел. Тогда по лемме 1 она фундаментальна.

Докажем достаточность (\Leftarrow).

Пусть посл-ть фундаментальна. Тогда по лемме 2 она ограничена, следовательно по теореме Больцано-Вейерштрасса можно извлечь сходящуюся подпосл-ть.

Тогда по лемме 3 вся посл-ть будет иметь предел, равный пределу подпосл-ти, т.е. посл-ть сходящаяся.

Ч.т.д.

3. Теория пределов функций. Непрерывность функций в точке и на отрезке.

3.1. Функция. Предел функции в точке.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Пусть $\forall x \in E$ по вполне определённом закону ставится в соответствие единственное число y . Тогда говорят, что на множестве E задана **функция** $y = f(x)$.

E - область определения функции.

x - независимая переменная (аргумент функции).

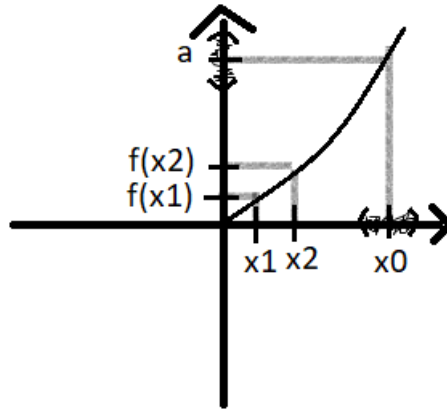
y - зависимая переменная (функция).

Определение предела функции в точке по Гейне (в терминах последовательностей)

Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 , если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , быть может за исключением самой точки x_0 (такая окрестность называется выколотой окрестностью) и $\forall \{x_n\} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, порождаемая ею посл-ть $\{f(x_n)\}$ имеет своим пределом точку a , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

Запись:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$



Пример:

Рассмотрим такой предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} &= \left| \begin{array}{l} \text{Пусть } x_n - \text{произвольная} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \end{array} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 + x_n - 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2) + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1} = \\ &= \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1} = \frac{-1}{-1} = 1 \end{aligned}$$

Другой пример: доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \nexists$

Доказательство:

Выберем $\{x_n\}$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$$1. \ x_n = \frac{1}{\pi n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{\pi n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0$$

$$2. \ x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

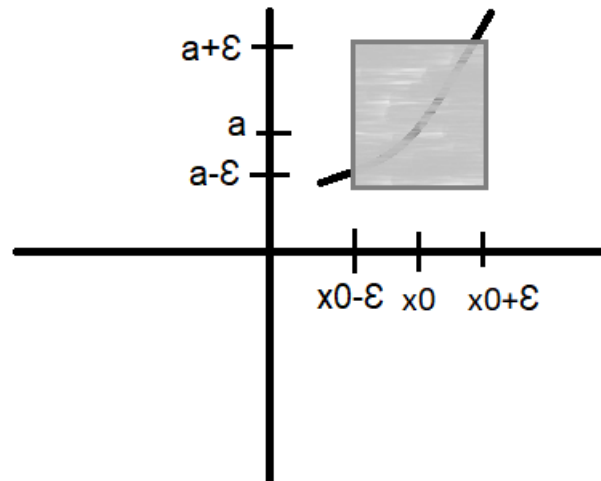
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \nexists$.

Ч.т.д.

Определение предела функции в точке по Коши

Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 , если $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , быть может за исключением самой точки x_0 и, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \mid |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$



Если x находятся в δ -окрестности точки x_0 , то все значения $f(x)$ располагаются в полосе шириной 2ϵ .

Теорема 1.1:

Определения предела функции $f(x)$ в точке x_0 по Гейне и по Коши эквивалентны.

Доказательство:

1. Докажем Гейне \rightarrow Коши

Пусть функция имеет предел в точке x_0 в смысле Гейне.

Предположим противное. Пусть функция $f(x)$ не имеет предел в точке x_0 в смысле Коши. Это значит, что \exists хотя бы одно ϵ_0 , для которого нельзя подобрать нужное δ .

То есть $\forall \delta$ среди x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ должно найтись хотя бы одно $x = x(\delta) : |f(x(\delta)) - a| \geq \epsilon$

Составим последовательность. Выберем $\delta = \frac{1}{k}$ и для каждого k будем искать точку x_k для которой не выполняется определение Коши.

$$(a) \quad k = 1 \quad \delta = 1 \quad |x_1 - x_0| < 1 \implies |f(x_1) - a| \geq \epsilon_0$$

такой $x_1 \exists$

$$(b) \quad k = 2 \quad \delta = \frac{1}{2} \quad |x_2 - x_0| < \frac{1}{2} \implies |f(x_2) - a| \geq \epsilon_0$$

такой $x_2 \exists$

$$(c) \quad k = 3 \quad \delta = \frac{1}{3} \quad |x_3 - x_0| < \frac{1}{3} \implies |f(x_3) - a| \geq \epsilon_0$$

такой $x_3 \exists$

То есть $\forall k > 0 \quad |x_k - x_0| < \frac{1}{k} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$, но тогда $|f(x_k) - a| \geq \epsilon_0$, то есть $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \neq a$. Получили противоречие, т.к. по Гейне $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = a$.

2. Докажем Коши \rightarrow Гейне

Пусть функция имеет предел по Коши.

Зададим произвольную последовательность $\{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Так как определение по Коши выполняется, то

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) : |x_n - x_0| < \delta \implies$$

$$|f(x_n) - a| < \epsilon \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Ч.т.д.

Предел функции в бесконечно удалённой точки

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon) : x > k \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

Упр.: уметь расписывать **ВСЕГДА и ВЕЗДЕ**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

Например, распишем последнее. Нужны два параметра. В определении Коши есть δ для x (аргумента) и ε для y (функции).

Т.к. $x \rightarrow -\infty$, то мы не можем использовать δ (она используется для малых величин), поэтому введём параметр K вместо δ .

Т.к. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, то мы не можем использовать ε (он используется для малых величин), поэтому введём параметр M вместо ε .

Тогда определение принимает вид:

$$\forall M > 0 \exists K = K(M) > 0 : x < -K \implies f(x) < -M$$

3.2. Односторонние пределы

Если значение функции $f(x)$ стремится к числу a по мере стремления x к x_0 со стороны меньших (больших) значений, то число a называют пределом функции $f(x)$ в точке x_0 слева (справа)

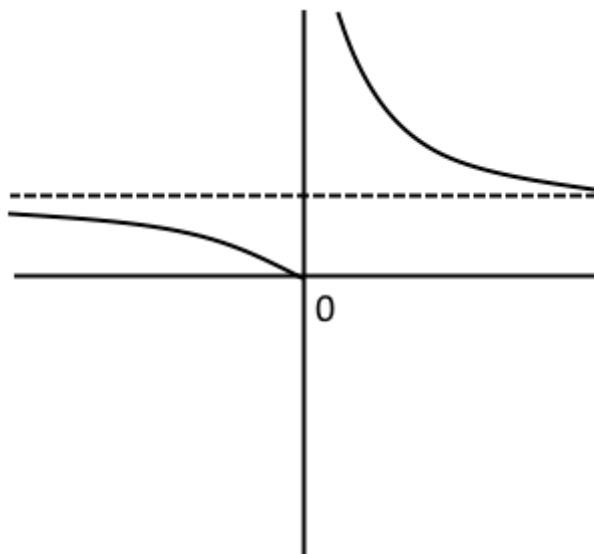


Обозначение:

- предел слева: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = a$
- предел справа: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = a$

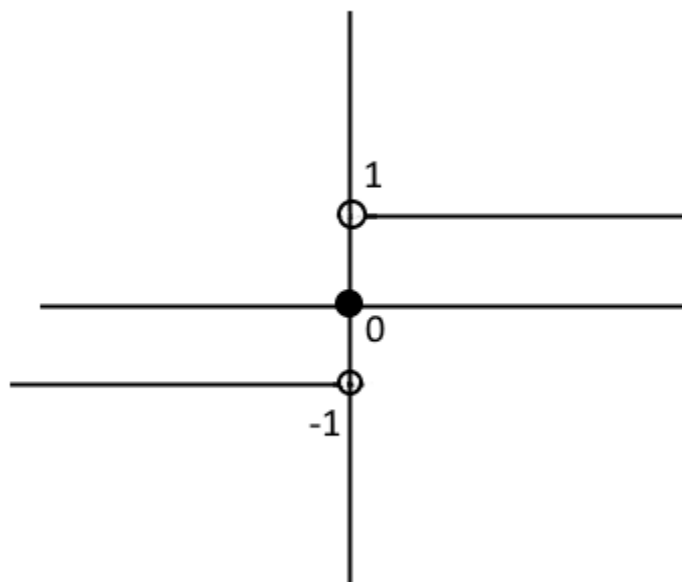
Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$$



Пример 2:

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{sign} x = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sign} x = 1$$

Утверждение: для того, чтобы существовал обычный двусторонний предел функции в точке $x_0 \Leftrightarrow$ чтобы в этой точке существовали левый и правый односторонние пределы и чтобы они были равны.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

3.3. Свойства пределов функций

Теорема 3.1

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, где a - конечное число, то в некоторой окрестности точки x_0 $f(x)$ ограничена.

Доказательство:

По определению Коши предела функции в точке:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

Ч.т.д.

Теорема 3.2 (о сохранении знака)

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 не равный нулю конечный предел a , то \exists окрестность точки $x_0 : \forall x$, принадлежащего этой окрестности, выполняется

$$f(x) > \frac{a}{2}, a > 0$$

$$f(x) < \frac{a}{2}, a < 0$$

Доказательство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Обозначим $U(x_0)$ - окрестность точки x_0

Тогда $\forall x \in U(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon = \frac{|a|}{2}$

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}$$

$$a > 0$$

$$f(x) > a - \frac{a}{2}$$

$$f(x) > \frac{a}{2}$$

$$a < 0$$

$$f(x) < a - \frac{a}{2}$$

$$f(x) < -\frac{|a|}{2}$$

Ч.т.д.

Теорема 3.3

Если $f(x) = c$ (константа), то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ - уже доказана.

Теорема 3.4

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ и $\forall x \in R$ из окрестности точки x_0 :

$$f(x) \leq g(x) \implies a \leq b$$

Теорема 3.5

Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Теорема 3.6

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) * g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

Критерий Коши существования функции в точке:

Для того, чтобы существовал конечный предел при $x \rightarrow x_0$ $f(x) \Leftrightarrow$ чтобы $f(x)$ была определена в окрестности точки x_0 за исключением быть может самой точки x_0 и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U_\delta(x_0) : \forall x', x'' \in U_\delta(x_0) \implies x', x'' \neq x_0, |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

3.4. Непрерывность функции в точке. Разрывы I и II родов.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$$

Т.е. для непрерывности в точке функции множества меняются знаками предела и функции

1. Через приращение

$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента

$\Delta y = y - y_0$ - приращение функции

Функция $f(x)$, направленная в точке x_0 , если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

2. Определение Гейне

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для \forall последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

Порождающая её последовательность $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

3. Определение Коши

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 $\forall \varepsilon > 0 \exists (\delta - \delta\varepsilon)$

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв II рода, если хотя бы один из пределов (справа или слева) не существует или бесконечен.

Пример 1: рассмотрим при $x \neq 2$

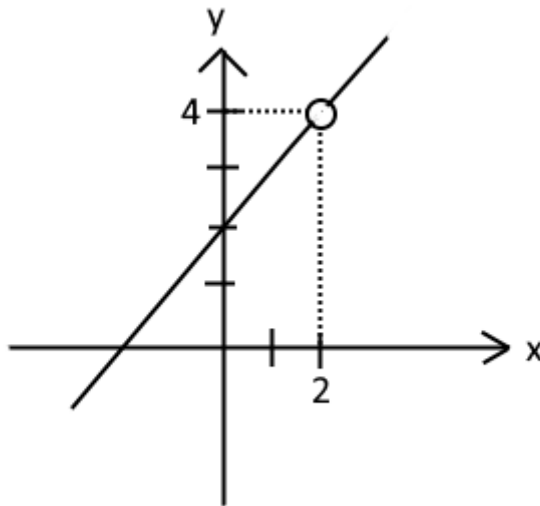
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

$$f(2) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x + 2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 4$$

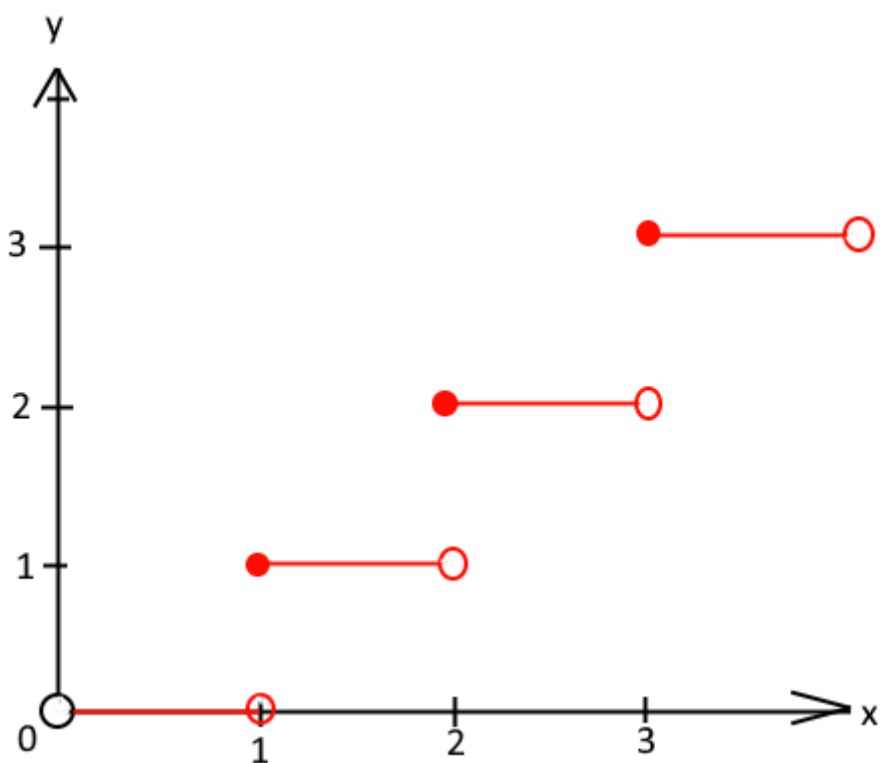


$f(x)$ непрерывна $\forall x \in R$, кроме $x = 2$, где $f(x)$ терпит разрыв I рода устранимый.

Замечание: рассмотрим $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$; $g(x)$ непрерывна $\forall x \in R$

Пример 2: рассмотрим

$$f(x) = [x] - \text{целая часть } x, x > 0$$



$$f(x) = 1$$

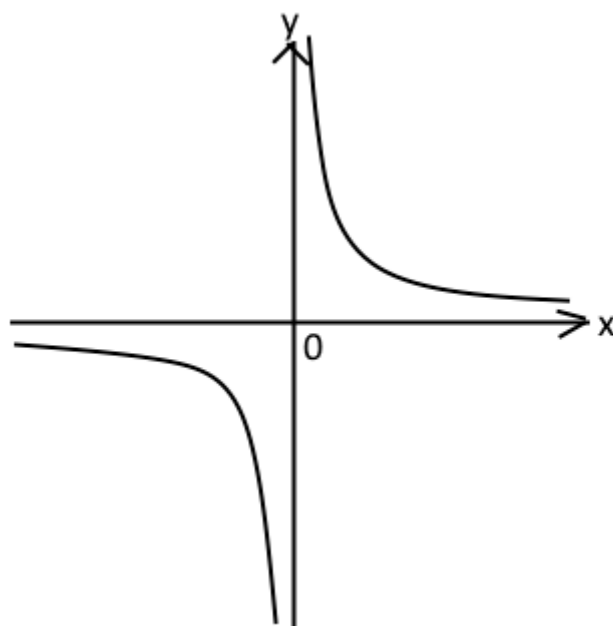
$$\lim_{x \rightarrow 1-0} [x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} [x] = 1$$

$\forall x \in \mathbb{N}$ $f(x)$ терпит разрыв I рода (скачок), в остальных $x > 0$ $f(x)$ - непрерывна.

Пример 3: рассмотрим

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(0) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = \infty$$

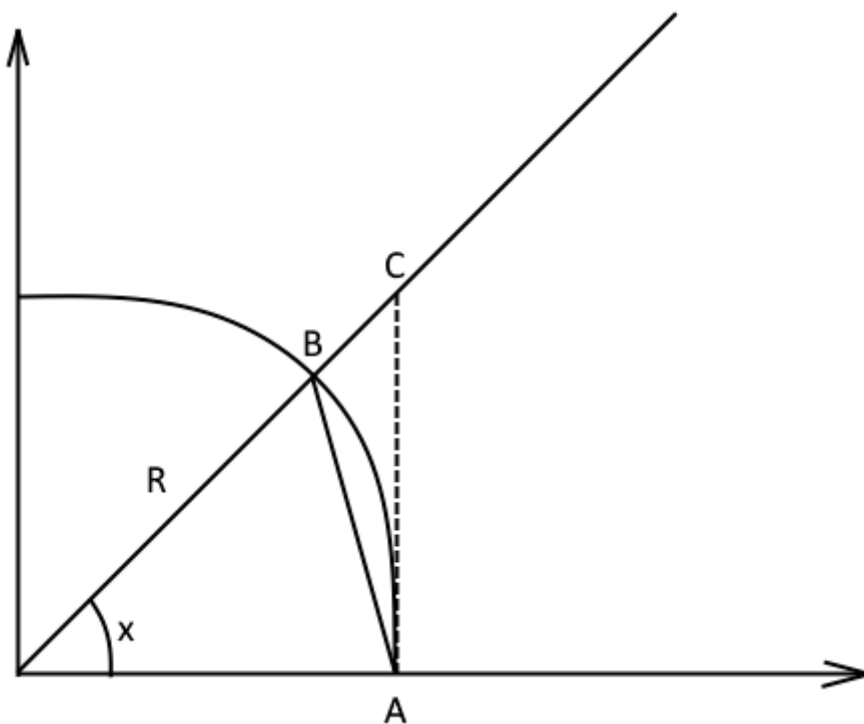
$f(x)$ непрерывна $\forall x \in R$, кроме $x = 0$, где она терпит разрыв II рода.

3.5. Замечательные пределы

Теорема 5.1 (I Замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Доказательство:



Рассмотрим в координатной плоскости круг радиуса R с центром в начале координат

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект} OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \mid : \sin x \text{ (пусть } \sin x > 0)$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Замечание: $f(x) = \cos x$ и $\frac{x}{\sin x}$, поэтому неравенство будет выполняться для $\frac{-\pi}{2} < x < 0$

Теорема 5.2 (II Замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство:

Надо показать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Замена:

$$x = \frac{1}{y} \implies \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Замечание: будем считать известным фактом, что $\forall n \in \mathbb{N}$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Пусть $x_n \rightarrow \infty$ (доказываем по определению Гейне)

Покажем, что $\lim_{x_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. $\{x_n\}$ - произвольная посл-ть: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

Рассмотрим посл-ть $k_n = [x_n]$ - целая часть x_n .

$$\begin{aligned} k_n &\leq x_n < k_n + 1 \\ \frac{1}{k_n + 1} &< \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{k_n} \\ 1 + \frac{1}{k_n + 1} &< 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{k_n} \\ \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} &< \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{k_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \\ \text{т.к. } k_n &\leq x_n < k_n + 1 \\ \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} &< \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{k_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1} \end{aligned}$$

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{-1} = e \times 1 = e$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^1 = e \times 1 = e$$

Тогда $\lim_{x_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ (по теореме о двух милиционерах) Рассмотрим $x_n \rightarrow -\infty$.

Замена: $x'_n = -x_n$.

Рассмотрим $\lim_{x_n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{x'_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x'_n}\right)^{-x'_n} = e$

Ч.т.д.

3.6. Эквивалентные бесконечно малые функции в точке

Функция $f(x)$ называется беск. малой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Замечание: Функция, которая является беск. м. в одной точке, может не быть беск. б. в другой точке.

Теорема 6.1

Сумма и произведения конечного числа беск. м. функция в точке есть функция беск. м. в точке.

Теорема 6.2

Произведение беск. м. функции в точке на ограниченную есть беск. м. функция в точке.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ - беск. м. функция в точке $x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Пусть $g(x)$ - ограничена в окрестности точки x_0 ($u(x_0)$) $\implies \exists M : |g(x)| \leq M$

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$$

По теореме о двух милиционерах так как $\lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} M|f(x)| = M \times 0 = 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)g(x)| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

Ч.т.д.

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

x - беск. м.

$\sin \frac{1}{x}$ - огр.

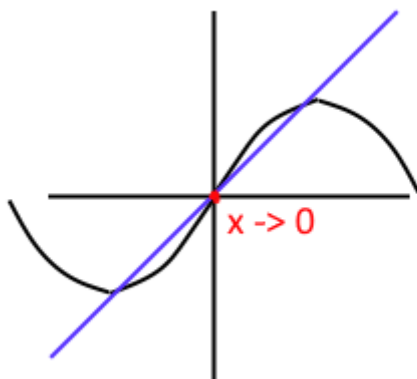
Эквивалентность беск. м. функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ являются беск. м. функциями в точке x_0 . Тогда они называются эквивалентными беск. м. функциями в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$

Например, $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$



Замечание: если $f_1(x) \sim f_2(x), x \rightarrow x_0$, а $g_1(x) \sim g_2(x), x \rightarrow x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_2(x)}$$

При нахождении предела дроби можно заменять на эквивалентные беск. м. или числитель, или знаменатель, или и то, и другое (но не часть числителя или знаменателя).

Так **НЕЛЬЗЯ**:

$$\operatorname{tg} x - \sin x \sim^? 0$$

Основные эквивалентности при $x \rightarrow 0$

1. $\sin x \sim x$
2. $\operatorname{tg} x \sim x$
3. $\ln(1+x) \sim x$
4. $e^x - 1 \sim x$
5. $a^x - 1 \sim x \ln a$
6. $(1+x)^m - 1 \sim mx$
7. $\arcsin x \sim x$
8. $\arctan x \sim x$
9. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

Доказательство:

1. доказано (I Замечательный предел)

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \times \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

4. частный случай пункта 5 ($a = e$)

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \left| \begin{array}{l} a^x - 1 = y \\ x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 \\ \ln a^x = \ln(1+y) \\ x \ln a = \ln(1+y) \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{mx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{mx} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{\ln(1+x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{m \ln(1+x)} = \left| \begin{array}{l} (1+x)^m - 1 = y \\ x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 \\ (1+x)^m = y + 1 \\ \ln(1+x)^m = \ln(1+y) \\ m \ln(1+x) = \ln(1+y) \end{array} \right| = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1 \end{aligned}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = y \\ x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 \\ x = \sin y \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \left| \begin{array}{l} \arctan x = y \\ x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 \\ x = \operatorname{tg} y \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cos y}{\sin y} = 1$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

3.7. Порядок переменной. Сравнение функций в окрестности заданной точки.

Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные в $u(x_0)$ за исключением быть может самой точки x_0 .

x_0 - конечная, $\pm\infty$.

Пусть $g(x) \neq 0 \forall x \in u(x_0)$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = 0$, то в этом случае $f(x) = o(g(x))$, (o читается как "о малое"), т.е. $f(x)$ является беск. м. более высокого порядка малости, чем $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ называются беск. малой одного порядка при $x \rightarrow x_0$.

Беск. малая $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ имеет k -ый порядок малости по отношению к $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если $f(x)$ имеет тот же порядок малости, что и $g^k(x)$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g^k(x)} = 0$

Теорема 7.1

Для того, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными при $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow x_0$

Доказательство:

Докажем необходимость (\Rightarrow)

Пусть $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$. Тогда по определению $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) &= 0 \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 + \varepsilon(x) \Big| \times g(x) \\ f(x) &= g(x) + \varepsilon(x)g(x) = g(x) + o(g(x)) \end{aligned}$$

Докажем достаточность (\Leftarrow)

Пусть $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow x_0$

Например,

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) + \varepsilon(x)g(x) \Big| : g(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 + \varepsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= 1\end{aligned}$$

Т.е. $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$.

Ч.т.д.

Функция $f(x)$ называется функцией, ограниченной относительно функции $g(x)$ в $u(x_0)$, если ограничена функция $\frac{f(x)}{g(x)}$, т.е.

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq c \text{ или } |f(x)| \leq c |g(x)|$$

В этом случае $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$
 $f(x) = O(1), x \rightarrow x_0$ = "функция $f(x)$ ограничена.

3.8. Глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$, в точке $x = a$ справа, в точке $x = b$ слева.

Теорема 8.1 (I-ая теорема Вейерштрасса)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она ограничена на нём, т.е.

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a; b]$$

Доказательство:

Предположим противное. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, но при этом не ограничена на нём. Составим последовательность x_n следующим образом:

$$\begin{aligned}\exists x_1 \in [a; b] : f(x_1) &> 1 \\ \exists x_2 \in [a; b] : f(x_2) &> 2 \\ &\vdots \\ \exists x_n \in [a; b] : f(x_n) &> n \\ &\vdots\end{aligned}$$

В результате получили посл-ть $\{x_n\}$. Она ограничена ($\forall n \ x_n \in [a; b]$). По теореме Больцано-Вейерштрасса (т. 8.1 гл. 2) из неё можно извлечь сходящуюся подпослед-ть x_{n_k}

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha$

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то по определению $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

В нашем случае $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(\alpha)$ - конечное число (в силу непрерывности)

Однако $f(\alpha)$ является беск. б. по построению x_n ($f(x_n)$ беск. б.), $f(\alpha) = \infty$.

Получили противоречие, т.е. $f(x)$ ограничена.

Ч.т.д.

Теорема 8.2 (II-ая теорема Вейерштрасса)

Среди значений, которые на отрезке $[a; b]$ принимает непрерывная функция, существует наибольшее и наименьшее значения (в том числе может быть и в крайних точках).

Доказательство:

По I-ой теореме Вейерштрасса $f(x)$ ограничена сверху, т.е. $\exists k : f(x) \leq k \forall x \in [a; b]$

Тогда существует точная верхняя грань $f(x)$ на $[a; b]$. $M = \sup f(x), x \in [a; b]$

Составим вспомогательную послед-ть $\{x_n\}$ на основе свойства $\sup f(x)$.

$$\exists x_1 : M - 1 < f(x_1) \leq M$$

$$\exists x_2 : M - \frac{1}{2} < f(x_2) \leq M$$

\vdots

$$\exists x_n : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

\vdots

$\{x_n\}$ ограничена ($\forall n x_n \in [a; b]$)

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпослед-ть $x_{n_k}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha$

1. С одной стороны, $f(x)$ непрерывна на $[a; b] \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(\alpha)$

2. С другой стороны $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$, следовательно

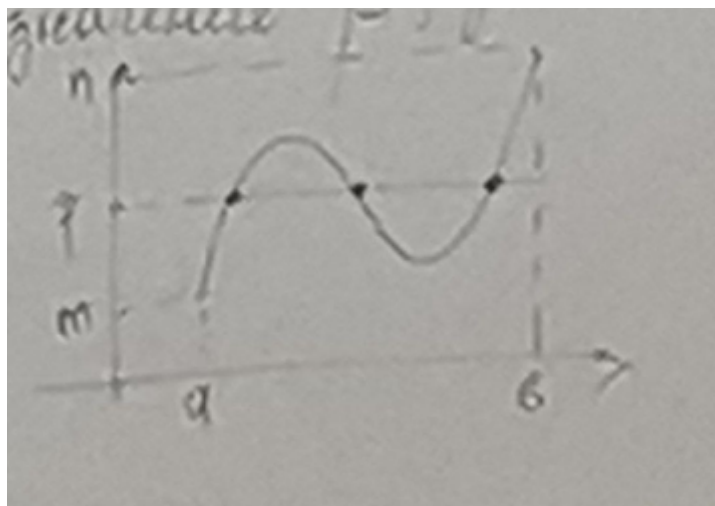
$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$$

Т.к. $\lim_{k \rightarrow \infty} (M - \frac{1}{n_k}) = M$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} M = M$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$ (по т. о двух милиционерах), т.е. $f(\alpha) = M$.

$\beta \in [a; b] : f(\beta) = m$

Теорема 8.3 (Теорема Больцано-Коши)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $f(a) = m, f(b) = n$, то на интервале $(a; b)$ $f(x)$ по крайней мере один раз принимает значение p , заключённое между m и n .



Доказательство:

Для доказательства надо найти точку ξ , $f(\xi) = p$.

Разобьём отрезок $[a; b]$ на 2 равных отрезка точкой $\frac{a+b}{2}$

Варианты:

1. $f(\frac{a+b}{2}) = p \implies \xi = \frac{a+b}{2}$. **Ч.т.д.**

2. $f(\frac{a+b}{2}) \neq p$. Тогда либо $f(\frac{a+b}{2}) < p$, либо $f(\frac{a+b}{2}) > p$.

В первом случае далее выберем отрезок $[\frac{a+b}{2}; b]$, во втором - $[a; \frac{a+b}{2}]$. Переобозначим выбранный отрезок $[a_1; b_1]$, $f(a_1) < p < f(b_1)$. $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

Разделим $[a_1; b_1]$ на 2 равных отрезка и выберем тот, на левом конце которого значение функции меньше p , а на правом - больше.

Тогда либо через конечное число шагов мы получим такую точку ξ , либо систему вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, $f(a_n) < p < f(b_n)$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$

Тогда по теореме о вложенных отрезках \exists точка ξ , принадлежащая всем отрезкам одновременно и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$

В точке ξ $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = f(\xi)$$

Тогда по теореме о двух милиционерах:

$$f(a_n) < p < f(b_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p = f(\xi)$$

Ч.т.д.

Следствие теоремы Больцано-Коши: если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка такая, что значение $f(x)$ в этой точке равно 0.

Замечание: будем считать элементарные функции непрерывными на своей области определения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \dots = \operatorname{tg} \lim_{x \rightarrow x_0} \dots$$

Замечание: замена неопределённостей может идти по такому принципу

$$u^v \rightarrow e^{\ln u \cdot v}$$

$$1^\infty \rightarrow [0 \times \infty] \rightarrow \begin{cases} \left[\frac{0}{0} \right] \\ \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \end{cases}$$

$$\infty^0 \rightarrow [\infty \times 0]$$

$$0^0 \rightarrow [\infty \times 0]$$

3.9. Равномерная непрерывная функция

Вспомним определение непрерывности функции в точке по Коши:

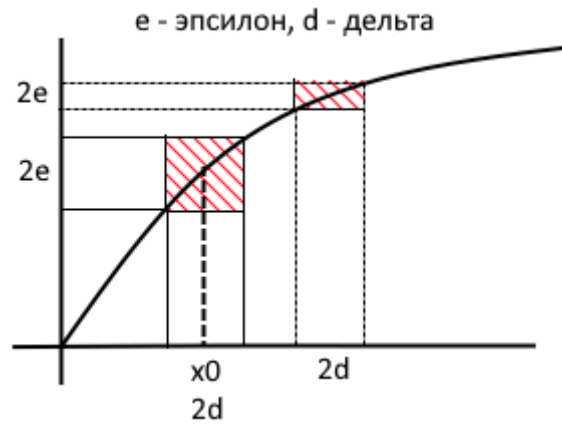
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Зафиксируем ε . Вообще говоря, в каждой точке x существует своё δ , т.е. $\delta = \delta(\varepsilon, x)$.

В связи с этим выделяют класс функций (непрерывных), для которых при фиксированном $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, пригодная сразу для всех x , принадлежащая некоторому X .

Функция, определённая на множестве X , называется **равномерно-непрерывной** на этом множестве, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x', x'' \in X : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

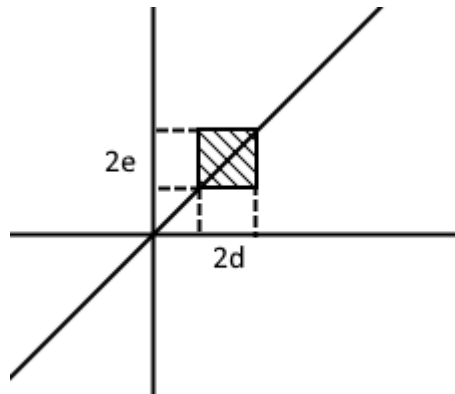


Примеры:

1. $f(x) = x, x \in R$

Пусть $x', x'' \in R : |x' - x''| < \delta$

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$$



2. $f(x) = x^2, x \in R$

Пусть $x', x'' \in R : |x' - x''| < \delta$

Пусть $x'' = x' + h \implies |x' - x' - h| = |h| < \delta$

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - (x' + h)^2| = |x'^2 - x'^2 - 2x'h - h^2| = |2x'h + h^2|$$

Так как $x' \in R$, то можно так его выбрать, что $|2x'h + h^2| = \infty \implies$ функция $f(x) = x^2$ не является непрерывной на области своего определения.

Теорема 9.1 (Теорема Кантера)

Если функция определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она равномерно-непрерывна на нём.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x', x'' \in [a; b] : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

Зададим последовательность $\delta_n : \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

Построим две вспомогательные последовательности x'_n и x''_n :

$$\exists x'_1, x''_1 : |x'_1 - x''_1| < \delta_1 \implies |f(x'_1) - f(x''_1)| \geq \varepsilon$$

$$\exists x'_2, x''_2 : |x'_2 - x''_2| < \delta_2 \implies |f(x'_2) - f(x''_2)| \geq \varepsilon$$

$$\exists x'_n, x''_n : |x'_n - x''_n| < \delta_n \implies |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$$

Рассмотрим $\{x'_n\}$: она ограничена. Тогда по теореме. Больцано-Вейерштасса из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$.

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = x_0$

Аналогично мы извлечём $\{x''_{n_k}\}$

Т.к. $|x'_n - x''_n| < \delta_n \implies |x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \delta_{n_k}$

$\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x''_{n_k} = x_0$

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она непрерывна в точке $x_0 \in [a; b]$

Значит $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0)$

Рассмотрим $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ (*)

Перейдем в (*) к пределу при $k \rightarrow \infty$

$$\varepsilon \leq \left| \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_{n_k}) \right| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

Получили противоречие, т.к. $\varepsilon > 0 \implies f(x)$ - непрерывна.

Пример: рассмотрим $g = \sin \frac{1}{x}, x \in (0; 1)$

На $(0; 1)$ g является непрерывной. Покажем, что на $(0; 1)$ g не является равномерно-непрерывной функцией.

Рассмотрим x'_n :

$$x'_n = \frac{1}{\pi n}, \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0, x'_n \in (0; 1)$$

Рассмотрим x''_n :

$$x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = 0, x''_n \in (0; 1)$$

Рассмотрим

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = \left| \sin \pi n - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \right| = 1$$

$$\forall \delta : |x'_n - x''_n| < \delta \implies |f(x'_n) - f(x''_n)| = 1$$

$$\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 \implies \nexists \delta(\varepsilon)$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда $\delta(\varepsilon) = \nexists$.

Ч.т.д.

Замечание: на практике, как правило, функции, которые растут быстрее, чем $y = x$, не являются равн.-непр.-ми на $D(f)$.

4. Дифференциальные исчисления функции

4.1. Производная функции в точке

$$y = f(x)$$

Δx - приращение аргумента

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции

Производной от функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при стремлении последнего к 0.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\sqcup}{dx} f$$

$$y'''' = y^{IV} = y^{(4)}$$

Замечание: для существования производной от $f(x)$ в точке x_0 необходимо, чтобы $f(x)$ была определена в некоторой окрестности x_0 и в самой точке x_0 .

Замечание: функция имеет производную в точке x_0 , если $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Замечание: если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$, то говорят, что функция имеет бесконечную производную в точке.

Если $\Delta x \rightarrow 0$ принимает только положительные значения то соответствующий предел называется правой производной от $f(x)$ в точке x_0 .

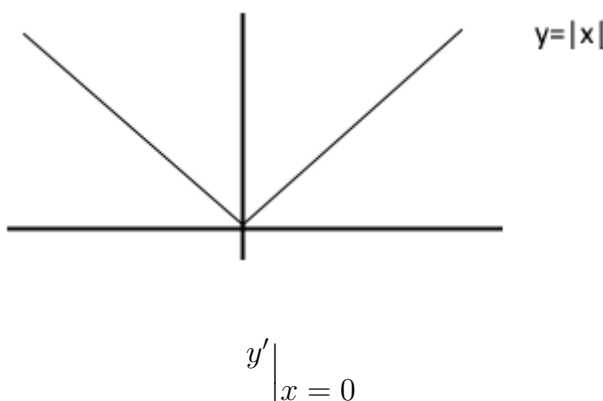
Если $\Delta x \rightarrow 0$ принимает только отрицательные значения то соответствующий предел называется левой производной от $f(x)$ в точке x_0 .

Функция $f(x)$ имеет производную на $[a; b]$, если она имеет производную во всех точках $(a; b)$, в точке $x = a$ имеет правую производную, в точку $x = b$ - левую.

Утверждение: если $f(x)$ имеет в точке x_0 правую и левую производные, то $f(x)$ имеет в точке x_0 производную.

Утверждение: если правая и левая производные в точке x_0 \exists и не равны между собой, то производная в точке x_0 \nexists .

Пример:



Правая производная

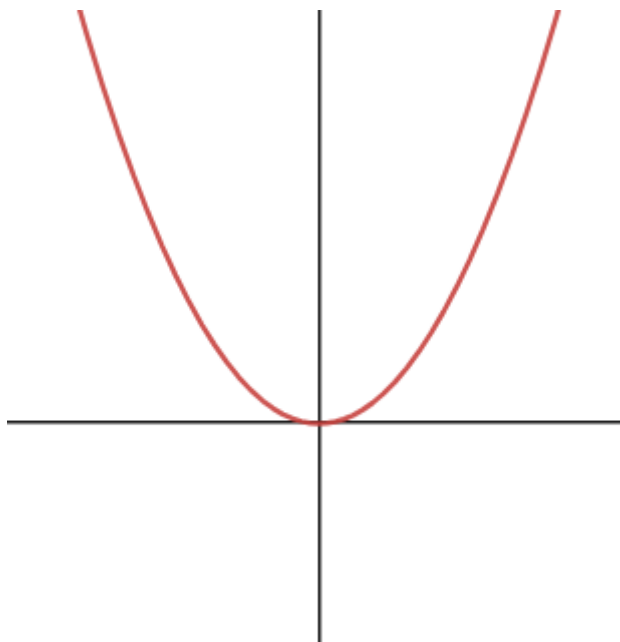
$$y'_+ \Big|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \left| \Delta x \rightarrow 0 \sim x_0 \rightarrow 0 \right| = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{x_0 - 0}{x_0} = 1$$

Левая производная

$$y'_- \Big|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x_0) - f(0)}{-x_0 - 0} = \left| \Delta x \rightarrow 0 \sim x_0 \rightarrow 0 \right| = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{-x_0 - 0}{-x_0} = -1$$

Функция $y = |x|$ не имеет производной в точке 0.

Пример: докажем, что $y = x^2$ имеет производную в точке $x = 0$.



$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(-x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x^2 - 0}{-x - 0} = 0$$

В точке $x = 0$ действительно $f'(x) = 0$.

Ч.т.д.

Теорема 1.1

Функция, имеющая конечную производную в точке, непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Пусть существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'$ конечное.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f' + \varepsilon(\Delta x), \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

$$\Delta y = f' \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f' \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f' \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) \Delta x = 0 + 0 = 0$$

Ч.т.д.

Мгновенная скорость

Пусть $S = S(t)$ - закон движения в точке.

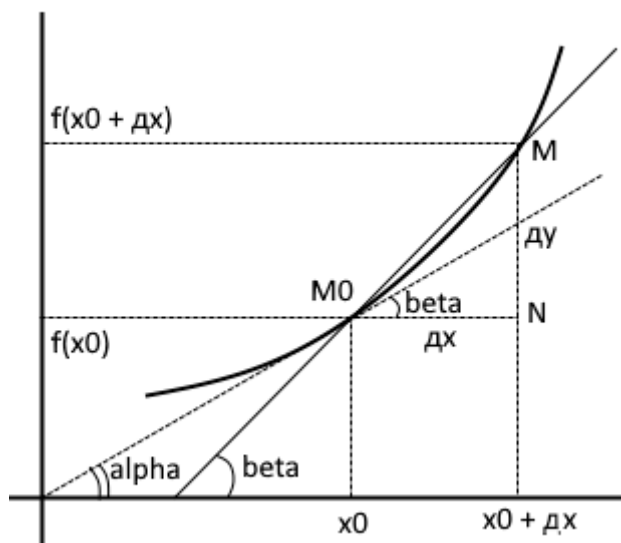
Рассмотрим $[t, t + \Delta t]$: $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$ - путь, пройденный за промежуток времени Δt .

$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость.

Мгновенная скорость $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$

$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ - ускорение.

4.2. Геометрический смысл производной



$$M_0(x_0; f(x_0))$$

$$M(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$$

Запишем уравнение прямой M_0M

Замечание: уравнение прямой, проходящей через точки $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$\frac{x - x_0}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y}$$

$$\Delta y(x - x_0) = \Delta x(y - y_0) \quad | \cdot \Delta x$$

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0) \quad | : M_0M$$

$$\operatorname{tg} \angle \beta = \frac{|MN|}{|M_0N|} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пусть $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда точка M будет стремиться к точке M_0 , а угол β к углу α .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ по определению}$$

С другой стороны,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

Рассмотрим уравнение секущей при $\Delta x \rightarrow 0$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .

Допустим $f'(x_0) = \infty$. Тогда рассмотрим уравнение секущей:

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \quad \Big| : \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\frac{y}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 + \frac{y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Перейдём к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда уравнение касательной примет вид $x = x_0$.

Замечание: если $L_1 \perp L_2$

$$\begin{aligned} L_1 : y &= k_1 x + b_1 \\ L_2 : y &= k_2 x + b_2 \end{aligned} \implies k_1 k_2 = -1$$

Прямая, проходящая через точку x_0 перпендикулярно касательной, проведённой в этой точке, называется нормалью к графику функции $f(x)$.

$$K_n = -\frac{1}{K_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$$

4.3. Производные элементарных функций

1. $y = \mathbb{C} = \text{const}$

$$y(x) = \mathbb{C}, y(x + \Delta x) = \mathbb{C}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbb{C} - \mathbb{C}}{\Delta x} = 0$$

2. $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} * \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2} * 2} = \cos x$$

Аналогично доказывается, что $(\cos x)' = -\sin x$