

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Элементы теории множеств. . . . .	3
1.2	Мощность множества. Счётные и несчётные множества. . . . .	4
1.3	Понятие рационального числа. Понятие вещественного числа. . . . .	7
1.4	Ограниченные множества вещественных чисел. . . . .	9
1.5	Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел. . . . .	9
<b>2</b>	<b>Теория пределов числовых последовательностей.</b>	<b>12</b>
2.1	Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. . . . .	12
2.2	Теоремы о сходящихся последовательностях . . . . .	13
2.3	Арифметические действия с последовательностями, имеющими конечный предел . .	16
2.4	Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Леммы о бесконечно малых последовательностях . . . . .	18
2.5	Монотонные последовательности . . . . .	20
2.6	Число $e$ . . . . .	21
2.7	Принцип вложенных отрезков. . . . .	22
2.8	Подпоследовательность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. . . . .	23
2.9	Частичные пределы . . . . .	24
2.10	Критерий Коши сходимости числовой последовательности . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Теория пределов функций. Непрерывность функций в точке и на отрезке.</b>	<b>27</b>
3.1	Функция. Предел функции в точке. . . . .	27
3.2	Односторонние пределы . . . . .	30
3.3	Свойства пределов функций . . . . .	32
3.4	Непрерывность функции в точке. Разрывы I и II родов. . . . .	33
3.5	Замечательные пределы . . . . .	35
3.6	Эквивалентные бесконечно малые функции в точке . . . . .	37
3.7	Порядок переменной. Сравнение функций в окрестности заданной точки. . . . .	40
3.8	Глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке . . . . .	41
3.9	Равномерная непрерывная функция . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Дифференциальные исчисления функции</b>	<b>45</b>
4.1	Производная функции в точке . . . . .	45
4.2	Геометрический смысл производной . . . . .	48

4.3	Производные элементарных функций . . . . .	49
4.4	Производная суммы, произведения, частного . . . . .	51
4.5	Производная сложной функции . . . . .	52
4.6	Производная обратной функции . . . . .	53
4.7	Гиперболические функции и их производные . . . . .	53
4.8	Логарифмическое дифференцирование, производная от функции, заданной неявно, производная от функции, заданной параметрически . . . . .	55
4.9	Дифференцируемость функции. Дифференциал, его геометрический и физический смыслы . . . . .	56
4.10	Применение дифференциала в приближённых вычислениях. Дифференциал сложной функции . . . . .	59
4.11	Производные дифференциалов высших порядков . . . . .	60
4.12	Дифференциальные теоремы о среднем . . . . .	62
4.13	Раскрытие неопределённости по правилу Лопиталья . . . . .	65
4.14	Формула Тейлора для многочленов . . . . .	67
4.15	Формула Тейлора для функций . . . . .	68
4.16	Монотонность функций. Необходимое и достаточное условие монотонности функций	71

# 1. Введение

## 1.1. Элементы теории множеств.

### Определения (множества)

Множество - совокупность объектов одинаковой природы.

Обозначение:  $A, B, C$  - множества.  $a, b, c$  - элементы множества.

Множества  $A$  и  $B$  называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество  $A$  называется подмножеством множества  $B$ , если  $\forall a \in A \implies a \in B$ . Обозначение:  $A \subset B$ .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством. Обозначение:  $\emptyset$ .

Объединением множеств  $A$  и  $B$  ( $A \cup B$ ) называется  $C : C = \{c : c \in A \cup c \in B\}$ .

Пересечением множеств  $A$  и  $B$  ( $A \cap B$ ) называется  $D : D = \{d : d \in A \cap d \in B\}$ .

Разностью множеств  $A$  и  $B$  ( $A \setminus B$ ) называется  $E : E = \{e : e \in A \cap e \notin B\}$ .

Симметричной разностью множеств  $A$  и  $B$  ( $A \triangle B$ ) называется  $F : F = \{f : f \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}$ .

### Свойства операций

1.  $\forall A \ A \subset A$   
 $\forall A \ \emptyset \subset A$
2.  $A \cup A = A$   
 $A \cap A = A$
3.  $A \cup \emptyset = A$   
 $A \cap \emptyset = \emptyset$
4.  $A \subset B, B \subset C \implies A \subset C$
5.  $A \subset B, B \subset A \implies A = B$
6.  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
7.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
8.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
9.  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
10.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
11.  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

### Доказательство пункта 9:

Пусть  $X$  - произвольное множество.

Если  $x \in A \implies x \in A \cup X$

Если  $x \notin A \implies x \notin A \cap X$

Если  $x \in A \cap B \implies x \in A$  и  $x \in B$

Если  $x \in A \cup B \implies x \in A$  или  $x \in B$

Если  $x \notin A \cap B \implies x \notin A$  или  $x \notin B$

Если  $x \notin A \cup B \implies x \notin A$  и  $x \notin B$

а) Пусть  $x \in A \setminus (B \cap C)$ . Тогда  $x \in A$  и  $x \notin B \cap C$ . Следовательно  $x \in A$  и  $(x \notin B)$  или  $(x \notin C)$ . Отсюда  $(x \in A \text{ и } x \notin B)$  или  $(x \in A \text{ и } x \notin C)$ . Тогда  $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

б) Пусть  $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ . Тогда  $x \in (A \setminus B)$  или  $x \in (A \setminus C)$ . Пусть для определённости  $x \in A \setminus B$ . Тогда  $x \in A$  и  $x \notin B$ . Отсюда  $x \in A$  и  $x \notin B \cap C$ , например  $x \in A$  и  $x \notin B \cap C \implies x \in A \setminus (B \cap C)$ .

**Ч.т.д.**

## Определения (декартово произведение)

Декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  ( $A \times B$ ) называется множество  $C : C = \{(a; b) : a \in A \text{ и } b \in B\}$ .

Отображением  $F$  множества  $A$  в множество  $B$  называется подмножество их декартова произведения. ( $F \subset A \times B$ ) :  $\forall a \in A \exists ! (a; b) \in F$ .

Примеры:

$$A = \{1; 3; 5\}, B = \{2; 4; 6\}$$

- $F = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$  - отображение
- $F = \{(1; 2), (1; 4), (3; 4), (5; 6)\}$  - не отображение

Пусть  $F$  - отображение  $A$  в  $B$ . Тогда элемент  $b : (a; b) \in F$  называется образом элемента  $a$  при отображении  $F$ .  $b = F(a)$

При этом  $a$  называется прообразом (одним из возможных) элемента  $b$ .

Множество  $\{b \in B : \exists a \in A : b = F(a)\}$  называется образом множества  $A$  при отображении  $F$  и обозначается  $F(A)$ .

Отображение  $F$  называется **сюрьекцией** или отображением "на", если  $F(A) = B$  (все элементы  $b$  использованы в парах с элементами  $a$ )

Отображение  $F$  называется **инъекцией** или вложением, если  $F(a_1) = F(a_2) \implies a_1 = a_2$  (каждому элементу  $a$  соответствует только один элемент  $b$ )

Отображение  $F$  называется **биекцией** или взаимнооднозначным отображением, если оно является и сюрьекцией, и инъекцией.

Пример:  $A\{1; 3; 5\}, B\{2; 4; 6\}$

- $F_1\{(1; 2), (3; 2), (5; 6)\}$  - не сюрьекция, не инъекция.
- $F_2\{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$  - сюрьекция, инъекция; следовательно, биекция.

## 1.2. Мощность множества. Счётные и несчётные множества.

### Эквивалентность

Множества  $A$  и  $B$  называются эквивалентными (равномощными), если между ними можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Обозначение:  $A \sim B$ .

Свойства:

1.  $A \sim A$  (свойство рефлексивности)
2.  $A \sim B \implies B \sim A$  (свойство симметричности)
3.  $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$  (свойство транзитивности)

### Мощность множеств. Счётные множества.

Множества чисел:

- $N$  - натуральные числа  $(1; 2; 3; \dots)$
- $Z$  - целые числа  $(0; \pm 1; \pm 2; \dots)$
- $Q$  - рациональные числа  $(\frac{p}{q} : p \in Z, q \in N, \frac{p}{q} - \text{несократимое})$
- $R$  - действительные/вещественные числа

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

**Мощность множества** - некая числовая характеристика (обозначающаяся  $\#A$ ), обладающая свойствами:

1. Если  $A$  - конечно, то  $\#A$  - кол-во элементов множества.
2. Если  $A, B$  - бесконечномерные, то
  - $\#A = \#B \Leftrightarrow A \sim B$
  - $\#A \leq \#B \Leftrightarrow A \sim C, C \subset B$ , но  $A \not\subset B$

Утверждение:  $Z \sim N$

Доказательство:

$0; -1; 1; -2; 2; -3; 3; \dots$

$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots$

Каждому элементу  $Z$  соответствует элемент  $N$ .

Утверждение:  $Q \sim N$

Доказательство:

Договоримся, что  $0 = \frac{0}{1}$

Обозначим  $h = |p| + q$  - высота числа  $\frac{p}{q}$

Будем нумеровать рациональные числа по возрастанию  $h$ ; при фиксированном  $h$  - по возрастанию  $q$ ; при фиксированном  $h$  и  $q$  - по возрастанию  $p$ .

$$\begin{aligned}
h = 1, q = 1 &\implies p = 0 : r_1 = \frac{0}{1} \\
h = 2, q = 1 &\implies p = \pm 1 : r_2 = \frac{-1}{1}, r_3 = \frac{1}{1} \\
h = 2, q = 2 &\implies p = 0 \text{ (не может быть по определению)} \\
h = 3, q = 1 &\implies p = \pm 2 : r_4 = \frac{-2}{1}, r_5 = \frac{2}{1} \\
h = 3, q = 2 &\implies p = \pm 1 : r_6 = \frac{-1}{2}, r_7 = \frac{1}{2} \\
h = 3, q = 3 &\implies p = 0 \text{ (не может быть по определению)}
\end{aligned}$$

Индексы  $r$  являются натуральными числами  $\implies$  каждому рациональному числу можно поставить в соответствие натуральное число.

**Ч.т.д.**

Множества, эквивалентные множеству  $N$ , называются счётными.

Утверждение:  $\forall$  непустое подмножество счётного множества конечно или счётно.

Доказательство: занумеруем все элементы множества, затем перенумируем элементы подмножества в порядке возрастания номеров. Либо элементы закончатся, либо получим счётное подмножество.

**Ч.т.д.**

Утверждение: счётное объединение счётных множеств счётно.

Доказательство:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}; a_{12}; \dots; a_{1n}\} \text{- счётное} \\
A_2 &= \{a_{21}; a_{22}; \dots; a_{2n}\} \text{- счётное} \\
A_3 &= \{a_{31}; a_{32}; \dots; a_{3n}\} \text{- счётное} \\
A &= \{a_{11}; a_{21}; a_{12}; a_{13}; a_{22}; a_{31}; a_{32}; \dots\} \\
N &= \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots\}
\end{aligned}$$

Каждому элементу множества  $A$  можно поставить в соответствие натуральное число из множества  $N$ .

**Ч.т.д.**

**Несчётные множества.**

**Теорема 1.2.1**

Множество  $H$  всех бесконечных наборов из цифр 0 и 1 не является счётным.

Доказательство:

Пусть  $h \in H, h = (h_1, h_2, h_3, \dots, h_k, \dots), h_k = 0$  или  $1$

Предположим противное. Пусть  $H$  - счётное, т.е.  $H = \{h^1, h^2, h^3, \dots, h^j, \dots, h^k, \dots\}$

$$h^1 = \{h_1^1, h_2^1, h_3^1, \dots, \dots\}$$

$$h^2 = \{h_1^2, h_2^2, h_3^2, \dots, \dots\}$$

$\vdots$

$$h^j = \{h_1^j, h_2^j, \dots, h_j^j, \dots\}$$

$\vdots$

$$h^n = \{h_1^n, h_2^n, \dots, h_n^n, \dots\}$$

Построим набор  $\bar{h} = \{\bar{h}_1^1; \bar{h}_2^2; \dots; \bar{h}_j^j; \dots; \bar{h}_n^n; \dots\}$ , где  $\bar{h}_k^k = \begin{cases} 0, & \text{если } h_k^k = 1 \\ 1, & \text{если } h_k^k = 0 \end{cases}$  Очевидно, что

$\bar{h} \in H$ , т.е.  $\bar{h}$  имеет номер, пусть  $\bar{h} = h^j$

На  $j$ -ом месте  $h^j$  имеет элемент  $h_j^j$

На  $j$ -ом месте  $\bar{h}$  имеет элемент  $\bar{h}_j^j$ , т.е.  $h_j^j = \bar{h}_j^j$

Получили противоречие. Таким образом  $H$  не является счётным.

**Ч.т.д.**

**Следствие:** множество всех подмножеств счётного множества не является счётным.

## Теорема 1.2.2

Множество  $K$  всех бесконечных наборов, состоящих из цифр от 0 до 9, не является счётным.

Доказательство: очевидно, что  $H \subset K$ . Если бы  $K$  было счётным, то и  $H$  было бы счётным, а это не так.

**Ч.т.д.**

Множества, эквивалентные множеству вещественных чисел отрезка  $[0; 1]$  называются множествами мощности континуума.

## 1.3. Понятие рационального числа. Понятие вещественного числа.

Рациональными числами будем называть числа вида

$$\frac{p}{q}, p \in Z, q \in N, \text{НОД}(p, q) = 1, 0 = \frac{0}{1}$$

Множество рациональных чисел -  $Q$ .

**Свойства:**

1.  $\forall a, b \in Q \mid a < b$  или  $a = b$  (правило упорядочивания)
2.  $\forall a, b \in Q \exists! c \in Q \mid c = a + b$  (корректность определения суммы)

3.  $\forall a, b \in Q \exists! d \in Q \mid d = ab$  (корректность определения произведения)
4.  $\forall a, b, c \in Q$  если  $a < b$ , а  $b < c \implies a < c$   
 $\forall a, b, c \in Q$  если  $a = b$ , а  $b = c \implies a = c$  (транзитивность)
5.  $\forall a, b \in Q \mid a + b = b + a$  (коммутативность сложения)
6.  $\forall a, b, c \in Q \mid (a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность сложения)
7.  $\exists! 0 \in Q \mid \forall a \in Q a + 0 = 0 + a = a$  (существование нейтрального элемента по сложению)
8.  $\forall a \in Q \exists! a' \in Q \mid a + a' = a' + a = 0$  (существование обратного элемента по сложению)
9.  $\forall a, b \in Q \mid ab = ba$  (коммутативность умножения)
10.  $\forall a, b, c \in Q \mid (ab)c = a(bc)$  (ассоциативность умножения)
11.  $\exists! 1 \in Q \mid \forall a \in Q a \times 1 = 1 \times a = a$  (существование нейтрального элемента по умножению)
12.  $\forall a \neq 0, a \in Q \exists! a' \in Q \mid a \times a' = a' \times a = 1$  (существование обратного элемента по умножению)
13.  $\forall a, b, c \in Q (a + b)c = ac + bc$  (дистрибутивность)
14. если  $a < b, c \in Q \implies a + c < b + c$
15. если  $a < b, c > 0 \implies ac < bc$
16.  $\forall a \in Q \exists n \in N \mid n > a$  (аксиома Архимеда, или "натуральных чисел бесконечно много")

## Вещественные числа

Вещественным или действительным числом называется произвольная бесконечная десятичная дробь вида  $\pm a_1, a_2 a_3 a_4 \dots a_n \dots$ .

Рассмотрим  $0, (9) = 0,9999 \dots \in Q$

$$0, (9) = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = \left| \begin{array}{l} S \\ b_1 \\ q \end{array} \right| = \frac{\frac{b_1}{1-q}}{\frac{b_1}{1-q}} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Договоримся, что рациональное число не может содержать в своей записи бесконечное число 9. Модуль (абсолютная величина) числа  $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  называется число, выраженное той же дробью, что и  $a$ , но взятой со знаком "+".

## Правила сравнения вещественных чисел

1. Пусть  $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$   
 $b = \pm b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$   
 $a, b \in R$   
 Числа  $a$  и  $b$  называются равными, если перед ними один знак и  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n, \dots$
2. Пусть  $a \neq b$



- $\forall$  положительное число  $> 0$
- $\forall$  отрицательное число  $< 0$
- $\forall$  положительное число  $> \forall$  отрицательного числа
- $a > 0, b > 0$ . Будем говорить, что  $a > b$ , если  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_k > b_k$ .
- $a < 0, b < 0$ .  $a > b$ , если  $|a| < |b|$ ;  $a < b$ , если  $|a| > |b|$ .

## 1.4. Ограниченные множества вещественных чисел.

### Ограниченные множества

Множество  $X \subset R$  ограничено сверху, если  $\exists M \in R \mid \forall x \in X \ x \leq M$

Множество  $X \subset R$  ограничено снизу, если  $\exists m \in R \mid \forall x \in X \ x \geq m$

Числа  $M$  и  $m$  называются верхней и нижней гранями множества  $X$  соответственно.

Число  $\bar{x} \in R$  ( $\underline{x} \in R$ ) называется точной верхней (нижней) гранью множества  $X$ , если:

1.  $\forall x \in X \ x \leq \bar{x} \ (x \geq \underline{x})$
2.  $\forall x' \in R \mid x' < \bar{x} \ \exists x_0 \in X \mid x_0 > x' \ (\forall x' \in R \mid x' > \underline{x}, \exists x_0 \in X \ x_0 < x')$  (невозможность уменьшить точную грань)
3. (на самом деле 2\*):  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \mid \bar{x} - \varepsilon < x_n$   
 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \mid \underline{x} - \varepsilon > x_n$

Обозначения:

- $\bar{x} = \sup x$  - супремум множества  $X$
- $\underline{x} = \inf x$  - инфимум множества  $X$

### Теорема 1.4.1 (принцип полноты Вейерштрасса)

$\forall$  непустое ограниченное сверху (снизу) множество  $X \subset R$  имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

## 1.5. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.

### Леммы

**Лемма 1:** пусть  $a \in R$

$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q \ \exists \alpha, \beta \in Q \mid \alpha \leq a \leq \beta$ , причём  $\beta - \alpha < \varepsilon$

Доказательство:

Пусть  $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \geq 0$

Пусть  $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ . Очевидно, что  $\alpha \leq a$ .

Положим  $\beta = \alpha + \frac{1}{10^n}$

$\beta = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots (a_n + 1)$ . Очевидно, что  $\beta \geq a$

Замечание:

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q \exists n \in N \implies |10^n| > \frac{1}{\varepsilon} \text{ (аксиома Архимеда)}$$

$$\beta - \alpha = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

.

**Ч.т.д.**

**Лемма 2:**  $\forall a, b \in R \exists \alpha \in Q \mid a < \alpha < b$

Замечание: таких  $\alpha$  бесконечно много.

Доказательство:

Пусть  $a = a_0, a_1 \dots a_n \dots \geq 0$

Пусть  $a = a_0, a_1 \dots a_k 99 \dots 9 a_p \dots$  при  $a_p \neq 9$

$b = b_0, b_1 \dots b_k \dots, a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_k < b_k \implies a < b$

$\alpha = a_0, a_1 \dots a_k 99 \dots 9(a_p + 1)$ .

$a < \alpha$ , т.к.  $a_p < a_p + 1$

$b > \alpha$ , т.к.  $a_k < b_k$

Следовательно  $a < \alpha < b$

Если  $a < 0, b > 0$ , то  $\alpha = 0,000 \dots$

Если  $a < b \leq 0$ , то переходим к модулям.

**Ч.т.д.**

**Лемма 3:** пусть  $a, b \in R$ . Если  $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q \mid \exists \gamma_1, \gamma_2 \in Q \mid \gamma_1 \leq a \leq \gamma_2$  и  $\gamma_1 \leq b \leq \gamma_2$  и  $\gamma_1 - \gamma_2 < \varepsilon$ , то  $a = b$ .

Доказательство:

Предположим противное.

Пусть  $a \neq b$ ; пусть для определённости  $a < b$ . Тогда по лемме 2  $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in Q \mid a < \alpha_1 < \alpha_2 < b$

Положим  $\varepsilon = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$ . По условию леммы  $\exists \gamma_1, \gamma_2 \in Q \mid \gamma_1 \leq a < \alpha_1 < \alpha_2 < b \leq \gamma_2$  и  $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$

Отсюда  $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2$ . Отнимем  $\gamma_1$ .

$$0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \alpha_2 - \gamma_1 < \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 > \varepsilon, \gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$$

Получили противоречие. Следовательно,  $a = b$ .

**Ч.т.д.**

## Арифметические действия

Суммой чисел  $a, b \in R$  называется число  $c \in R \mid \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q; \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2; \beta_1 \leq b \leq \beta_2$  выполнено  $\alpha_1 + \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 + \beta_2$

Произведением чисел  $a, b \in R$  называется число  $c \in R \mid \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q; \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2; \beta_1 \leq b \leq \beta_2$  выполнено  $\alpha_1 \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 \beta_2$

Замечание: все операции с вещественными числами производятся с погрешностью.

По определению положим:  $a \times 0 = 0 \times a = 0$

Пусть  $a, b \in R$ . Тогда по определению

$$ab = \begin{cases} |a||b|, & \text{если } ab > 0 \text{ (a и b одного знака)} \\ -|a||b|, & \text{если } ab < 0 \text{ (a и b разных знаков)} \end{cases}$$

### Свойства вещественных чисел

1.  $\forall a, b \in R \mid a < b \text{ или } a = b$  (правило упорядочивания)
2.  $\forall a, b \in R \exists! c \in R \mid c = a + b$  (корректность определения суммы)
3.  $\forall a, b \in R \exists! d \in R \mid d = ab$  (корректность определения произведения)
4.  $\forall a, b, c \in R$  если  $a < b$ ,  $a b < c \implies a < c$   
 $\forall a, b, c \in R$  если  $a = b$ ,  $a b = c \implies a = c$  (транзитивность)
5.  $\forall a, b \in R \mid a + b = b + a$  (коммутативность сложения)
6.  $\forall a, b, c \in R \mid (a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность сложения)
7.  $\exists! 0 \in R \mid \forall a \in R a + 0 = 0 + a = a$  (существование нейтрального элемента по сложению)
8.  $\forall a \in R \exists! a' \in R \mid a + a' = a' + a = 0$  (существование обратного элемента по сложению)
9.  $\forall a, b \in R \mid ab = ba$  (коммутативность умножения)
10.  $\forall a, b, c \in R \mid (ab)c = a(bc)$  (ассоциативность умножения)
11.  $\exists! 1 \in R \mid \forall a \in R a \times 1 = 1 \times a = a$  (существование нейтрального элемента по умножению)
12.  $\forall a \neq 0, a \in R \exists! a' \in R \mid a \times a' = a' \times a = 1$  (существование обратного элемента по умножению)
13.  $\forall a, b, c \in R (a + b)c = ac + bc$  (дистрибутивность)
14. если  $a < b, c \in Q \implies a + c < b + c$
15. если  $a < b, c > 0 \implies ac < bc$
16.  $\forall a \in R \exists n \in N \mid n > a$  (аксиома Архимеда, или "натуральных чисел бесконечно много")

### Арифметические действия 2. Electric Boogalo

Разностью чисел  $a, b \in R$  называется число  $c \in R \mid a = c + b$

Покажем, что этому определению удовлетворяет число  $c = a + b'$ , где  $b'$  - обратное к  $b$  по сложению.

Действительно  $c + b = (a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$

Покажем, что  $c$  - единственное.

Пусть  $\exists d \in R \mid a = d + b$ , тогда  $c = a + b' = d + b + b' = d + 0 = d$

Т.е. разность определена единственным образом.

По определению  $0 - b = 0 + b' = b' = -b$

Пишем, что  $b' = 0 - b = -b$

Обозначение:  $c = a - b$

Частным чисел  $a, b \in R, b \neq 0$  называется число  $c \in R \mid a = bc$

Покажем, что этому определению удовлетворяет число  $c = ab'$ , где  $b'$  - обратное к  $b$  по умножению.

Действительно  $cb = (ab')b = a(b'b) = a \times 1 = a$

Покажем, что  $c$  - единственное.

Пусть  $\exists d \in R \mid a = db$ , тогда  $c = ab' = (db)b' = d(bb') = d$

Т.е. частное определено единственным образом.

Обозначение:  $c = \frac{a}{b}$

## 2. Теория пределов числовых последовательностей.

### 2.1. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.

#### Определение числовой последовательности.

Пусть каждому натуральному  $n \in N$  по определённому закону ставится в соответствие действительное число  $x_n$ .

Тогда говорят, что определена числовая последовательность.

Обозначение:  $\{x_n\}$

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  - элементы последовательности.

Пример: арифметическая прогрессия  $x_n = a + d(n - 1)$ , геометрическая прогрессия  $x_n = a \times q^n$ .

При  $a < b$ :

- Множество чисел  $x \mid a \leq x \leq b$  называется отрезком  $[a; b]$
- Множество чисел  $x \mid a < x < b$  называется интервалом  $(a; b)$
- Если  $a \leq x < b$  или  $a < x \leq b$ , то есть  $[a; b)$  или  $(a; b]$ , то эти множества называются полуинтервалом или полуотрезком.
- Замечание:  $a, b$  могут быть  $\infty$  и  $-\infty$  и образовывать, например,  $(-\infty; \infty)$ ,  $[a, \infty)$  и т.д.

Произвольный интервал  $(a; b)$ , содержащий точку  $c$  ( $a < c < b$ ) называется окрестностью точки  $c$  и обозначается  $U(c)$ .

#### Крайне важные определения

Интервал вида  $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$  при  $\varepsilon > 0$  называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $c$ .

Число  $a$  называется **пределом** числовой последовательности  $x_n$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Говоря по-русски, для любого эpsilon больше нуля существует номер  $N$ , зависящий от эpsilon, при котором при любом номере  $n$  больше номера  $N$  выполняется неравенство:  $|x_n - a|$  меньше эpsilon.

Есть такие последовательности, чьих пределов не существует, например,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \nexists$$

Пример:  $x_n = \frac{1}{n}$ . Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$1 < n\varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$$

**Проверка:**

$$\varepsilon = \frac{1}{10}$$

$$N(0.1) = 10$$

$$x_{10} = \frac{1}{10} \notin \varepsilon\text{-окр.}$$

$$x_{11} = \frac{1}{11} \in \varepsilon\text{-окр.}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{100}$$

$$N(0.01) = 100$$

$$x_{100} = \frac{1}{100} \notin \varepsilon\text{-окр.}$$

$$x_{101} = \frac{1}{101} \in \varepsilon\text{-окр.}$$

**Ч.т.д.**

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся последовательностью. В противном случае - расходящейся.

## 2.2. Теоремы о сходящихся последовательностях

### Теорема 2.2.1

Если  $\{x_n\}$  имеет предел, то он единственный.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ,  $a \neq b$ , пусть для определённости  $a < b$ .

Выберем окрестности точки  $a$  и  $b$  таким образом, чтобы они не пересекались.

По условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies$  в окрестность точки  $a$  попадает  $\infty$ -ое число элементов  $\{x_n\}$

Вне этой окрестности находится конечное число элементов  $\{x_n\} \implies$  в окрестность точки

$b$  попадает конечное число элементов  $\{x_n\}$ .

Получили противоречие, т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \implies$  в окрестности точки  $b$  должно быть  $\infty$ -ое число элементов  $\{x_n\}$ .

Отсюда следует, что  $a = b$ .

**Ч.т.д.**

### Теорема 2.2.2

Если  $\{x_n\}$  сходится, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть  $\{x_n\}$  сходится. Тогда существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Рассмотрим  $|x_1 - a| \geq \varepsilon, |x_2 - a| \geq \varepsilon, \dots, |x_n - a| \geq \varepsilon$

Обозначим  $\max\{|x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_n - a|\} = d \implies d \geq \varepsilon$

Тогда

$$\begin{cases} \forall n = 1..N \implies |x_n - a| \leq d \\ \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon \leq d \end{cases} \implies \forall N \implies |x_n - a| \leq d$$

$$a - d \leq x_n \leq a + d$$

Отсюда следует, что  $\{x_n\}$  ограничена.

**Ч.т.д.**

Замечание: ограниченность подпоследовательности является необходимым условием, но не является достаточным, т.е. если  $\{x_n\}$  ограничена, то она не обязана сходиться.

Пример:

$$\{x_n\} = (-1)^n \Rightarrow -1; 1; -1; 1; \dots$$

$\{x_n\}$  ограничена, но  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \nexists$

У данной последовательности нет такого элемента, который если окружить окрестностью ("ловушкой"), получится "поймать" все элементы последовательности.

### Теорема 2.2.3 (о сохранении знака)

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$ , то  $\exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |x_n| > \frac{a}{2}$

Если  $a > 0$ , то  $x_n > \frac{a}{2}$

Если  $a < 0$ , то  $x_n < \frac{a}{2}$

Доказательство:

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Зафиксируем  $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}$$

$\mathbf{a > 0}$ $x_n > a - \frac{ a }{2}$ $x_n > \frac{a}{2}$	$\mathbf{a < 0}$ $x_n < a + \frac{ a }{2}$ $x_n < \frac{a}{2}$
--	--

**Ч.т.д.**

#### Теорема 2.2.4

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  и  $\forall n \in N \ x_n \leq y_n$ , то  $a \leq b$ .

Доказательство:

Предположим противное.

Пусть  $a > b$ . Зафиксируем  $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ .

Т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то для  $\varepsilon = \frac{a-b}{2} \exists N_1 \mid \forall n > N_1 \mid x_n - a \mid < \varepsilon$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то для  $\varepsilon = \frac{a-b}{2} \exists N_2 \mid \forall n > N_2 \mid y_n - b \mid < \varepsilon$

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

Пусть  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Тогда  $\forall n > N$

$$y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} =$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < x_n$$

$$y_n < x_n$$

Получили противоречие. Таким образом,  $a \leq b$ .

**Ч.т.д.**

**Следствие:** если  $\{x_n\}$  - сходящаяся подпоследовательность и  $\forall n \in N \ x_n \in [a; b]$ , то её предел  $\in [a; b]$

Доказательство:

$$\forall n \ a_n \leq x_n \leq b_n$$

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ .

Рассмотрим  $\{a_n\}$ . Её элементы:  $a; a; a; a; \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$\forall n \ a_n \leq x_n \implies a \leq c$  (по теореме 2.2.4).

Аналогично  $c \leq b$ . Следовательно,  $a \leq c \leq b$ .

**Ч.т.д.**

#### Теорема 2.2.5 ("теорема о двух милиционерах")

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  и  $\forall n \in N \ x_n \leq z_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

Доказательство:

Зафиксируем  $\varepsilon$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \exists N_1 \mid \forall n > N_1 \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \implies \exists N_2 \mid \forall n > N_2 \quad a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$$

Пусть  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Тогда  $\forall n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

**Ч.т.д.**

### Теорема 2.2.6

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$

Доказательство:

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ то } \exists N \mid \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\varepsilon > |x_n - a| \geq ||x_n| - |a|| \implies ||x_n| - |a|| < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$$

**Ч.т.д.**

## 2.3. Арифметические действия с последовательностями, имеющими конечный предел

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ .

Все описанные в параграфе действия можно применять только для сходящихся последовательностей.

Для доказательств действий часто применяется неравенство треугольника:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

### Теорема 2.3.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

Доказательство:

Докажем для "+", т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$

Зафиксируем  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

$$\exists N_1 \mid \forall n > N_1 \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \mid \forall n > N_2 \implies |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$



Пусть  $N = \max\{N_1, N_2\}$

Тогда  $\forall n > N$

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

$$|x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$

**Ч.т.д.**

### Теорема 2.3.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$$

Доказательство:

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \implies \{y_n\}$  - сходящаяся  $\implies \{y_n\}$  - ограничена (по т. 2.2)  $\implies \exists M \mid |y_n| \leq M$ , причём выберем  $M$  таким образом, чтобы  $|a| \leq M$ .

$$\exists N_1 \mid \forall n > N_1 \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\exists N_2 \mid \forall n > N_2 \implies |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Рассмотрим  $|x_n y_n - ab|$

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = \\ &= |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b| \leq M \times \frac{\varepsilon}{2M} + M \times \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab \end{aligned}$$

**Ч.т.д.**

### Теорема 2.3.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{x_n b - a y_n - ab + ab}{y_n b} \right| = \left| \frac{b(x_n - a) - a(y_n - b)}{y_n b} \right| \leq \\ &= \left| \frac{x_n - a}{y_n} \right| + \left| \frac{(y_n - b)a}{y_n b} \right| = \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|a||y_n - b|}{|y_n||b|} \end{aligned}$$

По теореме о сохранении знака  $\forall n > N_1$

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}$$

$$\frac{1}{|y_n|} > \frac{2}{|b|}$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \forall n > N_2 \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{4}$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \implies \forall n > N_3 \quad |a||y_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{4}$$

Пусть  $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ . Тогда  $\forall n > N$ :

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{\varepsilon|b|}{4} \times \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon|b|^2}{4} \times \frac{2}{|b||b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

**Ч.т.д.**

Замечание: пределы в левых частях равенств могут существовать без существования пределов  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

Пример:

$$\begin{array}{ll} x_n = (-1)^n & \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \nexists \\ y_n = (-1)^{n+1} & \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \nexists \end{array}$$

Как **НЕЛЬЗЯ**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \nexists + \nexists = \nexists$$

Как правильно:

$$x_n + y_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = \{0; 0; 0; \dots\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$$

## 2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Леммы о бесконечно малых последовательностях

Последовательность  $\{\alpha_n\}$  называется бесконечно малой, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |\alpha_n| < \varepsilon$$

Утверждение: для того, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$ ,  $\{\alpha_n\}$  - беск. малая последовательность.

Последовательность  $B_n$  называется бесконечно большой, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \pm\infty$ .

Говорят:  $\{B_n\}$  стремится к бесконечности.

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) \mid \forall n > N \implies |B_n| > M$$

**Лемма 1:** сумма конечного числа беск. малых последовательностей является беск. малая последовательность.

$$\alpha_n^1, \alpha_n^2, \dots, \alpha_n^k \rightarrow 0$$

Доказательство:

Рассмотрим  $\alpha_n = \alpha_n^1 + \dots + \alpha_n^k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n^1 + \dots + \alpha_n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^1 + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^k = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \implies \alpha_n - \text{беск. малая последовательность.}$$

**Ч.т.д.**

**Лемма 2:** произведение беск. малой последовательности на ограниченную последовательность есть беск. малая последовательность.

$$\alpha_n^1 \times x_n \rightarrow 0$$

Доказательство:

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Т.к.  $\{x_n\}$  ограничена, то  $\exists M \forall n |y_n| \leq M$

$$|x_n y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon$$

**Ч.т.д.**

Пример:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Хоть  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \nexists$ , но эта последовательность ограничена, а следовательно может быть одним из множителей.

**Лемма 3:** произведение конечного числа беск. малых последовательностей есть беск. малая последовательность.

Доказательство:

Рассмотрим  $\alpha_n = \alpha_n^1 \times \alpha_n^2 \times \dots \times \alpha_n^k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n^1 \times \alpha_n^2 \times \dots \times \alpha_n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^1 \times \dots \times \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^k = 0 \times \dots \times 0 = 0$$

$\{\alpha_n\}$  - беск. малая последовательность, т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

**Ч.т.д.**

## Определённые выражения

Обозначим:

- 0 - беск. малая величина
- $\infty$  - беск. большая величина
- $a$  - конечная величина

Примеры определённых выражений:

$$\frac{a}{0} \rightarrow \infty; \frac{0}{a} \rightarrow 0; \frac{0}{\infty} \rightarrow 0; \frac{\infty}{0} \rightarrow \infty; \frac{a}{\infty} \rightarrow 0; \frac{\infty}{a} \rightarrow \infty; \dots$$

## Неопределённые выражения

Пример:

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

1. Пусть  $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

2. Пусть  $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

3. Пусть  $x_n = \frac{a}{n}, y_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

4. Пусть  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, y_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \nexists$$

Виды неопределённостей:

$$\left[ \frac{0}{0} \right]; \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]; [0 \times \infty]; [\infty - \infty]; [1^\infty]; [\infty^0]; [0^0]$$

Замечание: при нахождении предела посл-ти используется выражение "раскрыть неопределённость".

## 2.5. Монотонные последовательности

Последовательность называется неубывающей, если  $\forall n \in N \ x_n \leq x_{n+1}$ .

Последовательность называется возрастающей, если  $\forall n \in N \ x_n < x_{n+1}$ .

Последовательность называется невозрастающей, если  $\forall n \in N \ x_n \geq x_{n+1}$ .

Последовательность называется убывающей, если  $\forall n \in N \ x_n > x_{n+1}$ .

Невозрастающие, неубывающие, возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными.

Рассмотрим неубывающую посл-ть:  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$

Данная последовательность всегда ограничена снизу.

### Теорема 2.5.1

Если неубывающая последовательность  $\{x_n\}$  ограничена сверху, то она сходится.

Доказательство: так как  $\{x_n\}$  ограничена сверху, то  $\exists \bar{x} = \sup\{x_n\}$

Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$

Т.к.  $\bar{x}$  - точная верхняя грань, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : x_n \leq \bar{x} \ \bar{x} - \varepsilon < x_n$$

Кроме того, по условию  $\{x_n\}$  неубывающая, то есть

$$\forall n > N \ x - \varepsilon < x_n \leq x_n \leq \bar{x} < x + \varepsilon \implies |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

Замечание: аналогичную теорему можно сформулировать и доказать для убывающей, возрастающей и невозрастающей последовательности.

**Следствие:** для того, чтобы монотонная последовательность сходилась  $\Leftrightarrow$ , чтобы  $\{x_n\}$  была ограниченной.

## 2.6. Число $e$ .

**Формула бинома Ньютона:**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \quad (1)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n! = 1 \times 2 \times \dots \times n, 0! = 1$$

Докажем формулу бинома Ньютона методом математической индукции:

1. База индукции.

При  $n = 1$  должно выполняться равенство  $(a + b)^1 = \sum_{k=0}^1 C_1^k a^k b^{1-k}$

$$a + b = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0$$

$$a + b = b + a$$

2. Преположение индукции.

Пусть при  $n = m$  верно равенство  $(a + b)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^k b^{m-k}$

3. Шаг индукции.

Докажем справедливость равенства для  $n = m+1$ , т.е. докажем, что  $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \text{Замечание: } C_m^{k+1} + C_m^k &= \frac{m!}{(k+1)!(m-k)!} + \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(k+1)!(m-k)!} \left( \frac{1}{m-k+1} + \frac{1}{k} \right) = \frac{m!}{(k+1)!(m-k)!} \left( \frac{k+m-k+1}{(m-k+1)k} \right) = \\ &= \frac{m!}{(k+1)!(m-k)!} \left( \frac{m+1}{(m-k+1)k} \right) = \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k+1)!} = C_{m+1}^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b)^{m+1} &= (a + b)^m \times (a + b) = \left( \sum_{k=0}^m C_m^k a^k b^{m-k} \right) \times (a + b) = \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^m C_m^k a^k b^{m-k+1} = \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} a^k b^{m-(k-1)} + \sum_{k=0}^m C_m^k a^k b^{m-k+1} = \\ &= C_m^m a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^m C_m^{k-1} a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=1}^m C_m^k a^k b^{m-k+1} + C_m^0 a^0 b^{m+1} = \\ &= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^m (C_m^{k-1} + C_m^k) a^k b^{m-k+1} = \\ &= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^m C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1} = a^{m+1} + \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k} \end{aligned}$$

Ч.т.д.

Рассмотрим последовательность  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

1. Покажем, что эта посл-ть ограничена снизу.

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = \\ &= C_n^1 * 1^{n-1} \times (\frac{1}{n})^1 + C_n^2 \times 1^{n-2} * (\frac{1}{n})^2 + \dots + C_n^n \times 1^0 \times (\frac{1}{n})^n = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \times \frac{1}{n^2} + \dots + \\ &+ \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1) \frac{1}{n^k} + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} n(n-1) \dots (n-n+1) \frac{1}{n^n} \geq 2, \forall n \end{aligned}$$

Значит  $x_n$  ограничена снизу.

2. Докажем, что  $x_n$  ограничена сверху.

Замечание:  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  (упр. - доказать методом мат. индукции)

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} \times 1 + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

3. Докажем, что  $\{x_n\}$  является возрастающей.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n+1}) + \dots + \\ &\frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n+1}) \dots (1 - \frac{k-1}{n+1}) + \dots + \\ &\frac{1}{(n+1)!} (1 - \frac{1}{n+1}) \dots (1 - \frac{n}{n+1}) \end{aligned}$$

$x_n < x_{n+1}$ , т.к. у  $x_{n+1}$  на одно положительное слагаемое больше и каждое соответствующее слагаемое у  $x_{n+1}$  больше, чем у  $x_n$ .

То есть,  $x_n$  - возрастающая. То есть по теореме 2.5.1  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.7182$

## 2.7. Принцип вложенных отрезков.

### Теорема 2.7.1

Пусть задана послед-ть отрезков  $S_n = [a_n; b_n]$ ,  $\forall n \in N$ , вложенных друг в друга, т.е.  $S_{n+1} \subset S_n$  с длинами, стремящимися к нулю ( $\alpha_n = b_n - a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ). Тогда  $\exists$  и притом единственная точка  $c$ , одновременно принадлежащая всем отрезкам  $S_n$  ( $c \in S_n$ ).

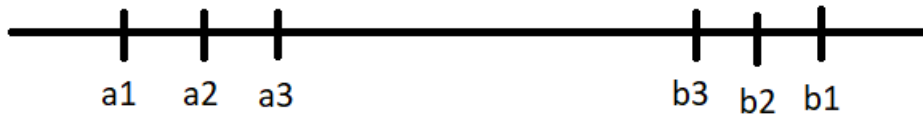
Доказательство:

$$S_2 \subset S_1$$

$$S_3 \subset S_2$$

$\vdots$

⋮



$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_m, \forall m \in N$$

Т.е.  $\{a_n\}$  неубывающая и ограничена сверху  $\implies$  по теореме 5.1  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\} = c$

$a_n < c < b_m, \forall m, n \in N$  ( $a_n < c$  т.к.  $c$  - грань;  $c < b_m$  т.к.  $c = \sup\{a_n\}$ )

Например,  $a_n < c < b_n$ . То есть  $\exists c \in S_n, \forall n$ .

Докажем единственность методом от противного:

Пусть  $\exists$  точка  $c_1 \in S_n, \forall n$ . Тогда  $a_n < c, c_1 < b_n$ . Пусть для определённости  $c < c_1$ .

Рассмотрим  $b_n - a_n > c_1 - c$ . Рассмотрим  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \neq 0$ . Это противоречит условию теоремы о стремлении к нулю.

Точка  $c$  - единственная.

Ч.т.д.

## 2.8. Подпоследовательность. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Пусть задана  $\{x_n\}$  - последовательность. Выберем из неё бесконечное множество элементов с номерами  $n_1 < n_2 < \dots$ . Полученная последовательность  $\{x_{n_k}\}$  называется подпоследовательностью последовательности  $\{x_n\}$ . Таких подпоследовательностей можно извлечь бесконечно много из искомой последовательности.

Утверждение: если  $\{x_n\}$  сходится, то все  $\{x_{n_k}\}$  будут сходиться и  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \forall k \in N$ .

Утверждение: если  $\{x_n\}$  беск. большая, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ , то все  $\{x_{n_k}\}$  будут являться беск. большими.

Утверждение: если  $\{x_n\}$  неограничена, то из неё можно извлечь беск. большую.

Вопрос? если  $\{x_n\}$  ограничена...

### Теорема 2.8.1 (Больцано-Вейерштрасса)

Из любой ограниченной последовательности  $\{x_n\}$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: т.к.  $\{x_n\}$  ограничена, то  $\forall n, x_n \in [a_0; b_0]$ .

Выберем произвольно какой-либо элемент последовательности  $\{x_n\}$ . Пусть его номер -  $n_1$ . Очевидно, что  $x_{n_1} \in [a_0; b_0]$ . Разделим отрезок  $[a_0; b_0]$  на два равных отрезка. Тогда по крайней мере на одном из них (обозначим его  $[a_1; b_1]$ ) окажется беск. много элементов посл-ти  $\{x_n\}$ . Поэтому среди них найдется элемент с номером  $N > n_1$ . Обозначим его  $n_2$  ( $x_{n_2} \in [a_1; b_1] \subset [a_0; b_0], b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ ). Разделим отрезок  $[a_1; b_1]$  на два равных отрезка. Обозначим  $[a_2; b_2]$  отрезок с  $\infty$  числом элементов  $x_n$ . Выберем элемент с номером  $N > n_2$ . Обозначим его  $n_3$  ( $x_{n_3} \in [a_2; b_2] \subset [a_1; b_1], b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$ ). Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ .

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$[a_k; b_k] \subset [a_{k-1}; b_{k-1}], k = 1, 2, \dots$$

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \left[ \frac{a}{\infty} \right] = 0$$

То есть получили систему вложенных отрезков  $[a_k; b_k]$  с длинами, стремящимися к 0.

Тогда по теореме 2.7.1:

$\exists!$  точка  $c$ , принадлежащая всем отрезкам.

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c$ , т.к.  $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ .

То есть по теореме 2.2.5 (о двух милиционерах)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$

## 2.9. Частичные пределы

Пусть  $x_n$  - произвольная последовательность.

$x_n$ :

- сходящиеся - все подпоследовательности сходятся к одному и тому же числу.
- расходящиеся:
  - стремящиеся к бесконечности - все подпоследовательности будут стремиться к  $\infty$
  - не имеющие предела:
    - \* неограниченные - можно извлечь беск. большую последовательность.  
Пример:  $\{1; 2; 1; 3; 1; 4; \dots\}$
    - \* ограниченные - можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.  
Пример:  $(-1)^n = \{-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots\}$

Если  $x_n$  ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса можно рассматривать различные сходящиеся подпоследовательности  $\{x_{n_k}\}$ .

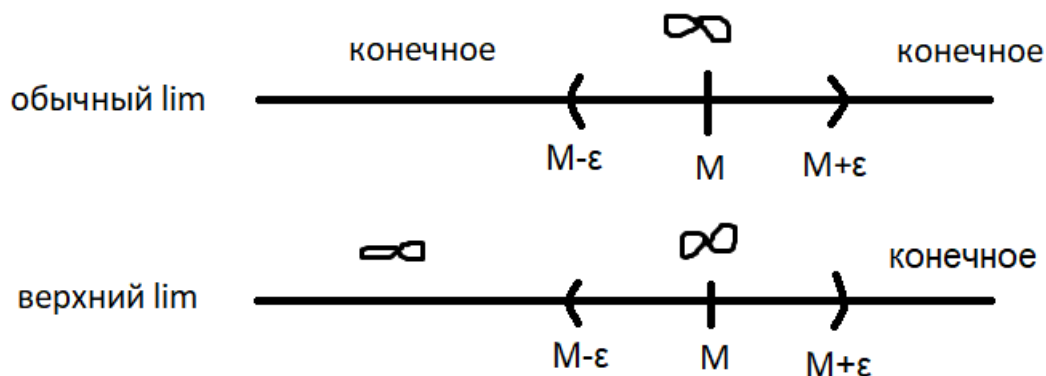
Пределы сходящихся подпоследовательности, извлечённых из ограниченной последовательности, называются **частичными пределами**.

**Верхним пределом** последовательности  $\{x_n\}$  называется число  $M$  (конечное,  $\pm\infty$ ), обладающее свойствами:

1.  $\exists$  подпоследовательность  $\{x_{n_k}\} \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = M$ .
2.  $\forall \{x_{n_k}\} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq M$ .  
Обозначение:  $M = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_n$ .  
Замечание: если  $\{x_n\}$  неограничена сверху, то  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .  
Замечание: если  $\{x_n\}$  сходящаяся и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$ , то  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_n = M$ .



## Разница между обычным пределом (единственным) и верхним пределом



Левее  $M - \varepsilon$  в случае "обычного" предела находятся конечное число элементов  $x_n$ , а в случае верхнего предела -  $\infty$  число элементов  $x_n$ .

**Нижним пределом** последовательности  $\{x_n\}$  называется число  $m$  (конечное,  $\pm\infty$ ):

$$1. \exists \text{ подпоследовательность } \{x_{n_k}\} \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = m.$$

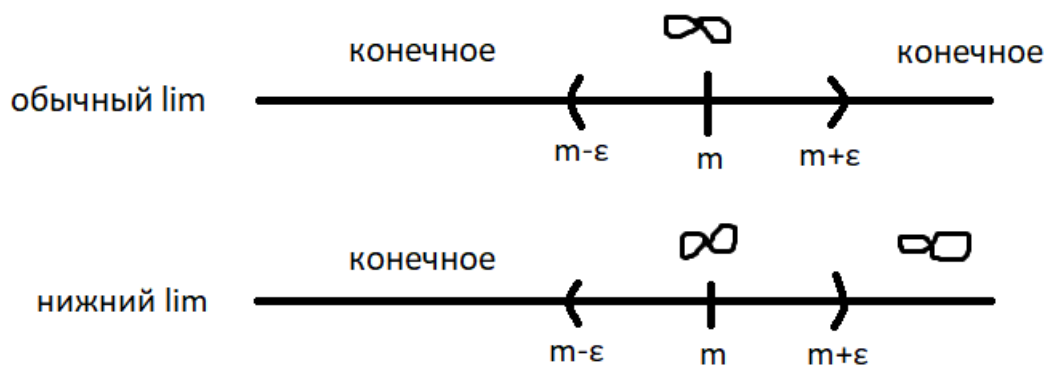
$$2. \forall \text{ сходящейся } \{x_{n_k}\} \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq m.$$

Обозначение:  $m = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Замечание: если  $\{x_n\}$  неограничена сверху, то  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

Замечание: если  $\{x_n\}$  сходящаяся и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = m$ , то  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = m$ .

## Разница между обычным пределом (единственным) и нижним пределом



Разница между "обычным" пределом и нижним пределом заключается в том, что правее  $M + \varepsilon$  в случае "обычного" предела находятся конечное число элементов  $x_n$ , а в случае нижнего предела -  $\infty$  число элементов  $x_n$ .

Очевидно,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Для того, чтобы последовательность  $\{x_n\}$  имела предел (конечный,  $\pm\infty$ )  $\Leftrightarrow$  чтобы  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ . В этом случае  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

## 2.10. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Последовательность  $\{x_n\}$  называется **фундаментальной**, если она удовлетворяет условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \mid \forall n > n_0, \forall m > n_0 \mid x_n - x_m \mid < \varepsilon$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \mid \forall n > n_0, \forall p > 0 \mid x_{n+p} - x_n \mid < \varepsilon$$

### Леммы о фундаментальных последовательностях

**Лемма 1:** если последовательность  $\{x_n\}$  имеет конечный предел, то она фундаментальная.

Доказательство:

Пусть  $\{x_n\}$  - сходящаяся.

Тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \implies \mid x_n - a \mid < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть  $m > N$  и  $n > N$ . Рассмотрим  $\mid x_m - x_n \mid$ .

$$\mid x_m - x_n \mid = \mid (x_m - a) - (x_n - a) \mid \leq \mid x_m - a \mid + \mid x_n - a \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т.е.  $\{x_n\}$  - фундаментальна.

**Ч.т.д.**

**Лемма 2:** если последовательность фундаментальна, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть  $\{x_n\}$  - фундаментальна. Тогда по условию Коши

$$\exists n_0 \mid \forall m, n > n_0 \implies \mid x_n - x_m \mid < \varepsilon$$

Зафиксируем  $m = n_0 + 1$ . Получим  $\mid x_n - x_{n_0+1} \mid < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< x_n - x_{n_0+1} < \varepsilon \\ x_{n_0+1} - \varepsilon &< x_n < x_{n_0+1} + \varepsilon \end{aligned}$$

Обозначим  $d = \max\{\mid x_1 \mid, \mid x_2 \mid, \dots, \mid x_{n_0} \mid, \mid x_{n_0+1} + \varepsilon \mid\}$ .

Тогда

$$\forall n \in N \implies -d \leq x_n \leq d$$

То есть  $\{x_n\}$  ограничена.

**Ч.т.д.**

**Лемма 3:** если некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то предел этой подпоследовательности является пределом всей последовательности.

Доказательство:

Пусть  $\{x_n\}$  - фундаментальная последовательность. Пусть  $\{x_{n_k}\}$  - её сходящаяся подпоследовательность.

Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$

Зададим  $\varepsilon > 0$

По условию Коши

$$\exists n_0 \mid \forall m, n > n_0 \implies \mid x_n - x_m \mid < \frac{\varepsilon}{2}$$

Т.к.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ , т.е.

$$\exists k_0 = k_0(\varepsilon) \implies |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть  $k_0$  будет таким, чтобы при  $k > k_0 \implies n_k > n_0$

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

**Ч.т.д.**

### Теорема 2.10.1 (критерий Коши сходимости числовой посл-ти)

Для того, чтобы посл-ть имела конечный предел  $\Leftrightarrow$  чтобы она была фундаментальна.

Доказательство:

**Докажем необходимость ( $\Rightarrow$ ).**

Пусть посл-ть имеет конечный предел. Тогда по лемме 1 она фундаментальна.

**Докажем достаточность ( $\Leftarrow$ ).**

Пусть посл-ть фундаментальна. Тогда по лемме 2 она ограничена, следовательно по теореме Больцано-Вейерштрасса можно извлечь сходящуюся подпосл-ть.

Тогда по лемме 3 вся посл-ть будет иметь предел, равный пределу подпосл-ти, т.е. посл-ть сходящаяся.

**Ч.т.д.**

## 3. Теория пределов функций. Непрерывность функций в точке и на отрезке.

### 3.1. Функция. Предел функции в точке.

Пусть  $E \subset \mathbb{R}$ . Пусть  $\forall x \in E$  по вполне определённом закону ставится в соответствие единственное число  $y$ . Тогда говорят, что на множестве  $E$  задана **функция**  $y = f(x)$ .

$E$  - область определения функции.

$x$  - независимая переменная (аргумент функции).

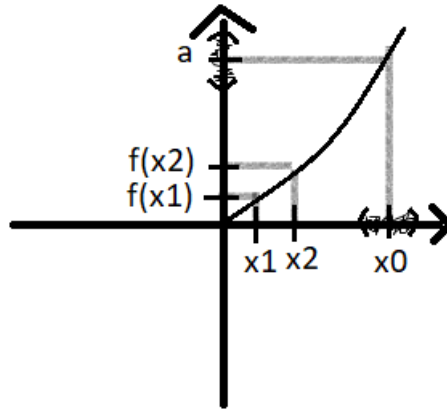
$y$  - зависимая переменная (функция).

### Определение предела функции в точке по Гейне (в терминах последовательностей)

Число  $a$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , быть может за исключением самой точки  $x_0$  (такая окрестность называется выколотой окрестностью) и  $\forall \{x_n\} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , порождаемая ею посл-ть  $\{f(x_n)\}$  имеет своим пределом точку  $a$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ .

Запись:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$



Пример:

Рассмотрим такой предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} &= \left| \begin{array}{l} \text{Пусть } x_n - \text{произвольная} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \end{array} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 + x_n - 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2) + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1} = \\ &= \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1} = \frac{-1}{-1} = 1 \end{aligned}$$

Другой пример: доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \nexists$

Доказательство:

Выберем  $\{x_n\}$  такую, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

$$1. x_n = \frac{1}{\pi n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{\pi n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0$$

$$2. x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

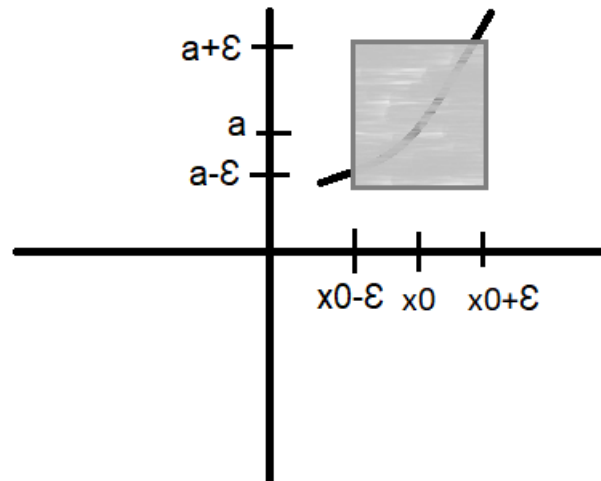
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Поэтому  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \nexists$ .

**Ч.т.д.**

## Определение предела функции в точке по Коши

Число  $a$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $f(x)$  определена в окрестности точки  $x_0$ , быть может за исключением самой точки  $x_0$  и, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \mid |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$



Если  $x$  находятся в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , то все значения  $f(x)$  располагаются в полосе шириной  $2\varepsilon$ .

### Теорема 3.1.1

Определения предела функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  по Гейне и по Коши эквивалентны.

Доказательство:

#### 1. Докажем Гейне $\rightarrow$ Коши

Пусть функция имеет предел в точке  $x_0$  в смысле Гейне.

Предположим противное. Пусть функция  $f(x)$  не имеет предел в точке  $x_0$  в смысле Коши. Это значит, что  $\exists$  хотя бы одно  $\varepsilon_0$ , для которого нельзя подобрать нужное  $\delta$ .

То есть  $\forall \delta$  среди  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$  должно найтись хотя бы одно  $x = x(\delta) : |f(x(\delta)) - a| \geq \varepsilon$

Составим последовательность. Выберем  $\delta = \frac{1}{k}$  и для каждого  $k$  будем искать точку  $x_k$  для которой не выполняется определение Коши.

$$(a) \quad k = 1 \quad \delta = 1 \quad |x_1 - x_0| < 1 \implies |f(x_1) - a| \geq \varepsilon_0$$

такой  $x_1 \exists$

$$(b) \quad k = 2 \quad \delta = \frac{1}{2} \quad |x_2 - x_0| < \frac{1}{2} \implies |f(x_2) - a| \geq \varepsilon_0$$

такой  $x_2 \exists$

$$(c) \quad k = 3 \quad \delta = \frac{1}{3} \quad |x_3 - x_0| < \frac{1}{3} \implies |f(x_3) - a| \geq \varepsilon_0$$

такой  $x_3 \exists$

То есть  $\forall k > 0 \quad |x_k - x_0| < \frac{1}{k} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ , но тогда  $|f(x_k) - a| \geq \varepsilon_0$ , то есть  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \neq a$ . Получили противоречие, т.к. по Гейне  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = a$ .

#### 2. Докажем Коши $\rightarrow$ Гейне

Пусть функция имеет предел по Коши.

Зададим произвольную последовательность  $\{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Так как определение по Коши выполняется, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |x_n - x_0| < \delta \implies$$

$$|f(x_n) - a| < \varepsilon \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Ч.т.д.

## Предел функции в бесконечно удалённой точки

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

Число  $a$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon) : x > k \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

Упр.: уметь расписывать **ВСЕГДА и ВЕЗДЕ**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

Например, распишем последнее. Нужны два параметра. В определении Коши есть  $\delta$  для  $x$  (аргумента) и  $\varepsilon$  для  $y$  (функции).

Т.к.  $x \rightarrow -\infty$ , то мы не можем использовать  $\delta$  (она используется для малых величин), поэтому введём параметр  $K$  вместо  $\delta$ .

Т.к.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , то мы не можем использовать  $\varepsilon$  (он используется для малых величин), поэтому введём параметр  $M$  вместо  $\varepsilon$ .

Тогда определение принимает вид:

$$\forall M > 0 \exists K = K(M) > 0 : x < -K \implies f(x) < -M$$

## 3.2. Односторонние пределы

Если значение функции  $f(x)$  стремится к числу  $a$  по мере стремления  $x$  к  $x_0$  со стороны меньших (больших) значений, то число  $a$  называют пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  слева (справа)

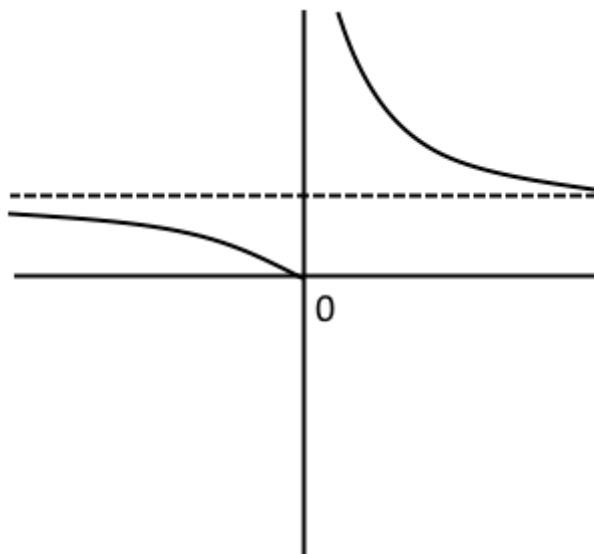


Обозначение:

- предел слева:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = a$
- предел справа:  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = a$

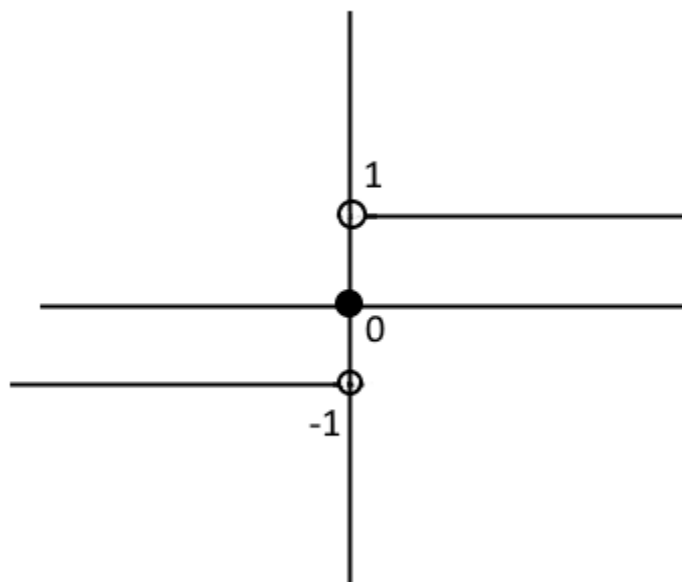
Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$$



Пример 2:

$$f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \text{sign } x = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \text{sign } x = 1$$

Утверждение: для того, чтобы существовал обычный двусторонний предел функции в точке  $x_0 \Leftrightarrow$  чтобы в этой точке существовали левый и правый односторонние пределы и чтобы они были равны.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

### 3.3. Свойства пределов функций

#### Теорема 3.3.1

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , где  $a$  - конечное число, то в некоторой окрестности точки  $x_0$   $f(x)$  ограничена.

Доказательство:

По определению Коши предела функции в точке:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

**Ч.т.д.**

#### Теорема 3.3.2 (о сохранении знака)

Если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  не равный нулю конечный предел  $a$ , то  $\exists$  окрестность точки  $x_0 : \forall x$ , принадлежащего этой окрестности, выполняется

$$f(x) > \frac{a}{2}, a > 0$$

$$f(x) < \frac{a}{2}, a < 0$$

Доказательство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Обозначим  $U(x_0)$  - окрестность точки  $x_0$

Тогда  $\forall x \in U(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon = \frac{|a|}{2}$

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}$$

$$a > 0$$

$$f(x) > a - \frac{a}{2}$$

$$f(x) > \frac{a}{2}$$

$$a < 0$$

$$f(x) < a - \frac{a}{2}$$

$$f(x) < -\frac{|a|}{2}$$

**Ч.т.д.**

#### Теорема 3.3.3

Если  $f(x) = c$  (константа), то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$  - уже доказана.

#### Теорема 3.3.4

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$  и  $\forall x \in R$  из окрестности точки  $x_0$ :

$$f(x) \leq g(x) \implies a \leq b$$



### 3.4. Непрерывность функции в точке. Разрывы I и II родов.

Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0)$$

Т.е. для непрерывности в точке функции множества меняются знаками предела и функции

1. Через приращение

$\Delta x = x - x_0$  - приращение аргумента

$\Delta y = y - y_0$  - приращение функции

Функция  $f(x)$ , направленная в точке  $x_0$ , если  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

2. Определение Гейне

Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если для  $\forall$  последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

Порождающая её последовательность  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

3. Определение Коши

Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$   $\forall \varepsilon > 0 \exists (\delta - \delta \varepsilon)$

Функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  разрыв II рода, если хотя бы один из пределов (справа или слева) не существует или бесконечен.

Пример 1: рассмотрим при  $x \neq 2$

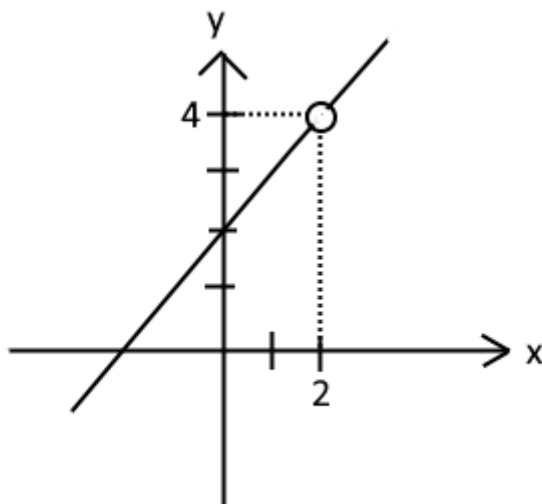
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

$$f(2) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x + 2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 4$$

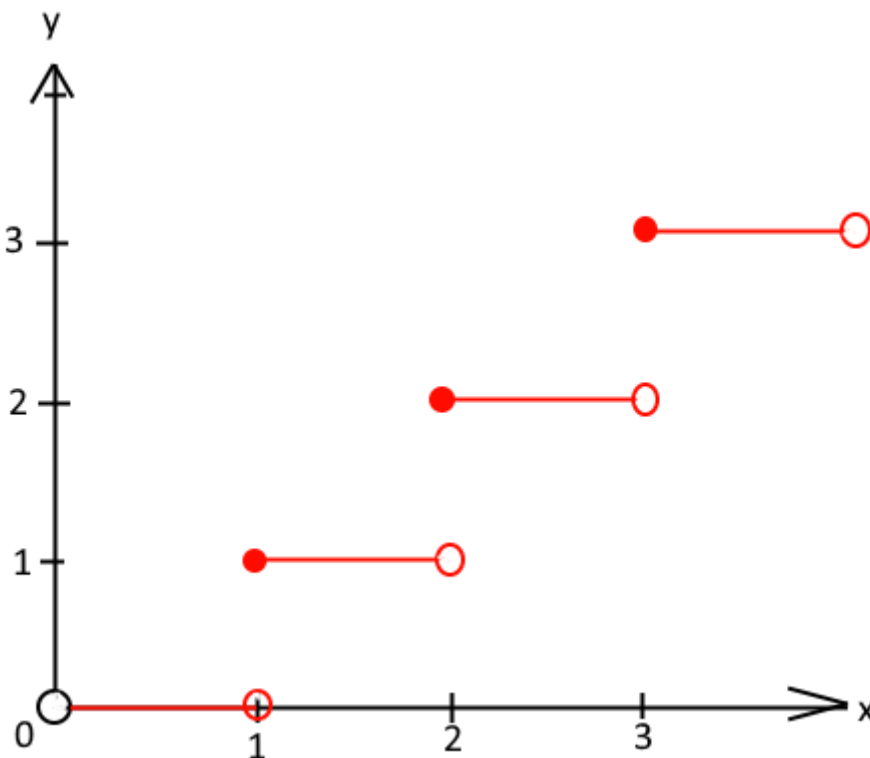


$f(x)$  непрерывна  $\forall x \in R$ , кроме  $x = 2$ , где  $f(x)$  терпит разрыв I рода устранимый.

Замечание: рассмотрим  $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$ ;  $g(x)$  непрерывна  $\forall x \in R$

Пример 2: рассмотрим

$$f(x) = [x] - \text{целая часть } x, x > 0$$

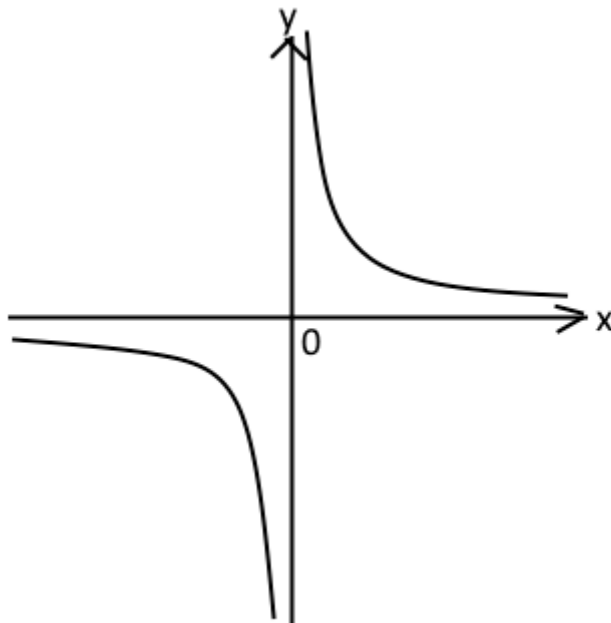


$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} [x] &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} [x] &= 1 \end{aligned}$$

$\forall x \in N$   $f(x)$  терпит разрыв I рода (скачок), в остальных  $x > 0$   $f(x)$  - непрерывна.

Пример 3: рассмотрим

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(0) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = \infty$$

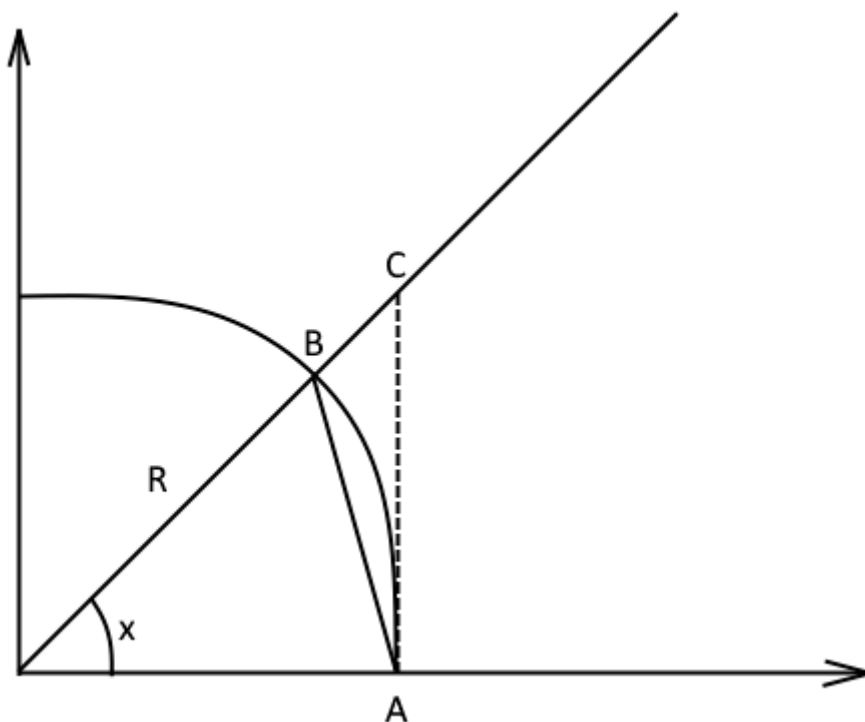
$f(x)$  непрерывна  $\forall x \in R$ , кроме  $x = 0$ , где она терпит разрыв II рода.

### 3.5. Замечательные пределы

**Теорема 3.5.1 (I Замечательный предел)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Доказательство:



Рассмотрим в координатной плоскости круг радиуса  $R$  с центром в начале координат

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle OAB} &< S_{\text{сект}OAB} < S_{\triangle OAC} \\
 \frac{1}{2}R^2 \sin x &< \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x \\
 \sin x &< x < \operatorname{tg} x \mid : \sin x \text{ (пусть } \sin x > 0) \\
 1 &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} 1 &= 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} = 1
 \end{aligned}$$

Замечание:  $f(x) = \cos x$  и  $\frac{x}{\sin x}$ , поэтому неравенство будет выполняться для  $\frac{-\pi}{2} < x < 0$

### Теорема 3.5.2 (II Замечательный предел)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \\
 \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} &= e
 \end{aligned}$$

Доказательство:

Надо показать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Замена:

$$x = \frac{1}{y} \implies \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Замечание: будем считать известным фактом, что  $\forall n \in \mathbb{N}$  верно  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ .

Пусть  $x_n \rightarrow \infty$  (доказываем по определению Гейне)

Покажем, что  $\lim_{x_n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = e$ .  $\{x_n\}$  - произвольная посл-ть:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

Рассмотрим посл-ть  $k_n = [x_n]$  - целая часть  $x_n$ .

$$\begin{aligned} k_n &\leq x_n < k_n + 1 \\ \frac{1}{k_n + 1} &< \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{k_n} \\ 1 + \frac{1}{k_n + 1} &< 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{k_n} \\ (1 + \frac{1}{k_n + 1})^{k_n} &< (1 + \frac{1}{x_n})^{k_n} \leq (1 + \frac{1}{k_n})^{k_n} \\ \text{т.к. } k_n &\leq x_n < k_n + 1 \\ (1 + \frac{1}{k_n + 1})^{k_n} &< (1 + \frac{1}{x_n})^{k_n} \leq (1 + \frac{1}{k_n})^{k_n + 1} \end{aligned}$$

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{k_n + 1})^{k_n + 1 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{k_n + 1})^{k_n + 1} (1 + \frac{1}{k_n + 1})^{-1} = e \times 1 = e$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{k_n})^{k_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{k_n})^{k_n} (1 + \frac{1}{k_n})^1 = e \times 1 = e$$

Тогда  $\lim_{x_n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = e$  (по теореме о двух милиционерах) Рассмотрим  $x_n \rightarrow -\infty$ .

Замена:  $x'_n = -x_n$ .

Рассмотрим  $\lim_{x_n \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = \lim_{x'_n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{-x'_n})^{-x'_n} = e$

**Ч.т.д.**

### 3.6. Эквивалентные бесконечно малые функции в точке

Функция  $f(x)$  называется беск. малой при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Замечание: Функция, которая является беск. м. в одной точке, может не быть беск. б. в другой точке.

#### Теорема 3.6.1

Сумма и произведения конечного числа беск. м. функция в точке есть функция беск. м. в точке.

#### Теорема 3.6.2

Произведение беск. м. функции в точке на ограниченную есть беск. м. функция в точке.

Доказательство:

Пусть  $f(x)$  - беск. м. функция в точке  $x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Пусть  $g(x)$  - ограничена в окрестности точки  $x_0$  ( $u(x_0)$ )  $\implies \exists M : |g(x)| \leq M$

$0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$

По теореме о двух милиционерах так как  $\lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} M|f(x)| = M \times 0 = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)g(x)| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

**Ч.т.д.**

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$x$  - беск. м.

$\sin \frac{1}{x}$  - огр.

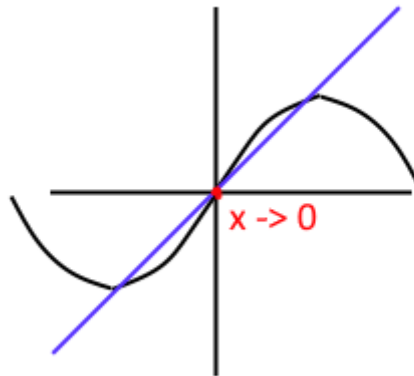
### Эквивалентность беск. м. функций

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  являются беск. м. функциями в точке  $x_0$ . Тогда они называются эквивалентными беск. м. функциями в точке  $x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение:  $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$

Например,  $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$



Замечание: если  $f_1(x) \sim f_2(x), x \rightarrow x_0$ , а  $g_1(x) \sim g_2(x), x \rightarrow x_0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_2(x)}$$

При нахождении предела дроби можно заменять на эквивалентные беск. м. или числитель, или знаменатель, или и то, и другое (но не часть числителя или знаменателя).

Так **НЕЛЬЗЯ**:

$$\operatorname{tg} x - \sin x \sim^? 0$$

Основные эквивалентности при  $x \rightarrow 0$

1.  $\sin x \sim x$
2.  $\operatorname{tg} x \sim x$
3.  $\ln(1+x) \sim x$

4.  $e^x - 1 \sim x$
5.  $a^x - 1 \sim x \ln a$
6.  $(1+x)^m - 1 \sim mx$
7.  $\arcsin x \sim x$
8.  $\operatorname{arctg} x \sim x$
9.  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

Доказательство:

1. доказано (I Замечательный предел)

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \times \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

4. частный случай пункта 5 ( $a = e$ )

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \left| \begin{array}{l} a^x - 1 = y \\ x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 \\ \ln a^x = \ln(1+y) \\ x \ln a = \ln(1+y) \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{mx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{\ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{mx} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{\ln(1+x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{m \ln(1+x)} = \left| \begin{array}{l} (1+x)^m - 1 = y \\ x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 \\ (1+x)^m = y+1 \\ \ln(1+x)^m = \ln(y+1) \\ m \ln(1+x) = \ln(y+1) \end{array} \right| = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1 \end{aligned}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = y \\ x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 \\ x = \sin y \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = y \\ x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 \\ x = \operatorname{tg} y \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cos y}{\sin y} = 1$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

### 3.7. Порядок переменной. Сравнение функций в окрестности заданной точки.

Рассмотрим функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , заданные в  $u(x_0)$  за исключением быть может самой точки  $x_0$ .

$x_0$  - конечная,  $\pm\infty$ .

Пусть  $g(x) \neq 0 \forall x \in u(x_0)$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 0$ , то в этом случае  $f(x) = o(g(x))$ , ( $o$  читается как "о малое"), т.е.  $f(x)$  является беск. м. более высокого порядка малости, чем  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ , то  $f(x)$  и  $g(x)$  называются беск. малой одного порядка при  $x \rightarrow x_0$ .

Беск. малая  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  имеет  $k$ -ый порядок малости по отношению к  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если  $f(x)$  имеет тот же порядок малости, что и  $g^k(x)$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g^k(x)} = 0$

#### Теорема 3.7.1

Для того, чтобы функции  $f(x)$  и  $g(x)$  были эквивалентными при  $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow x_0$

Доказательство:

**Докажем необходимость ( $\Rightarrow$ )**

Пусть  $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$ . Тогда по определению  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) &= 0 \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 + \varepsilon(x) \Big| \times g(x) \\ f(x) &= g(x) + \varepsilon(x)g(x) = g(x) + o(g(x))\end{aligned}$$

**Докажем достаточность ( $\Leftarrow$ )**

Пусть  $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow x_0$

Например,

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) + \varepsilon(x)g(x) \Big| : g(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 + \varepsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= 1\end{aligned}$$

Т.е.  $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$ .

**Ч.т.д.**

Функция  $f(x)$  называется функцией, ограниченной относительно функции  $g(x)$  в  $u(x_0)$ , если ограничена функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , т.е.

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq c \text{ или } |f(x)| \leq c |g(x)|$$

В этом случае  $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$

$f(x) = O(1), x \rightarrow x_0$  = "функция  $f(x)$  ограничена."



### 3.8. Глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция  $f(x)$  называется непрерывной на отрезке  $[a; b]$ , если она непрерывна в каждой точке интервала  $(a; b)$ , в точке  $x = a$  справа, в точке  $x = b$  слева.

#### Теорема 3.8.1 (I-ая теорема Вейерштрасса)

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то она ограничена на нём, т.е.

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a; b]$$

Доказательство:

Предположим противное. Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , но при этом не ограничена на нём. Составим последовательность  $x_n$  следующим образом:

$$\exists x_1 \in [a; b] : f(x_1) > 1$$

$$\exists x_2 \in [a; b] : f(x_2) > 2$$

$\vdots$

$$\exists x_n \in [a; b] : f(x_n) > n$$

$\vdots$

В результате получили посл-ть  $\{x_n\}$ . Она ограничена ( $\forall n \ x_n \in [a; b]$ ). По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпосл-ть  $x_{n_k}$

Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha$

Так как  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то по определению  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

В нашем случае  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(\alpha)$  - конечное число (в силу непрерывности)

Однако  $f(\alpha)$  является беск. б. по построению  $x_n$  ( $f(x_n)$  беск. б.),  $f(\alpha) = \infty$ .

Получили противоречие, т.е.  $f(x)$  ограничена.

**Ч.т.д.**

#### Теорема 3.8.2 (II-ая теорема Вейерштрасса)

Среди значений, которые на отрезке  $[a; b]$  принимает непрерывная функция, существует наибольшее и наименьшее значения (в том числе может быть и в крайних точках).

Доказательство:

По I-ой теореме Вейерштрасса  $f(x)$  ограничена сверху, т.е.  $\exists k : f(x) \leq k \quad \forall x \in [a; b]$

Тогда существует точная верхняя грань  $f(x)$  на  $[a; b]$ .  $M = \sup f(x), x \in [a; b]$

Составим вспомогательную посл-ть  $\{x_n\}$  на основе свойства  $\sup f(x)$ .

$$\exists x_1 : M - 1 < f(x_1) \leq M$$

$$\exists x_2 : M - \frac{1}{2} < f(x_2) \leq M$$

$\vdots$

$$\exists x_n : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

$\vdots$

$\{x_n\}$  ограничена ( $\forall n x_n \in [a; b]$ )

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $x_{n_k}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha$

1. С одной стороны,  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b] \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(\alpha)$

2. С другой стороны  $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$ , следовательно

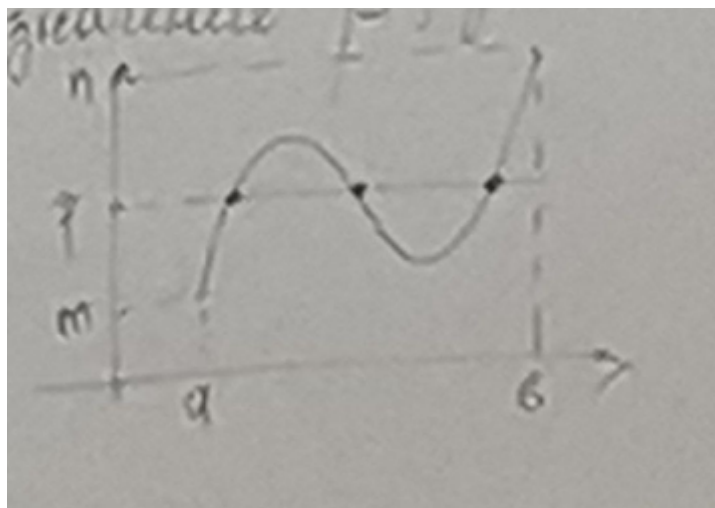
$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$$

Т.к.  $\lim_{k \rightarrow \infty} (M - \frac{1}{n_k}) = M$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} M = M$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$  (по т. о двух милиционерах), т.е.  $f(\alpha) = M$ .

$\beta \in [a; b] : f(\beta) = m$

### Теорема 3.8.3 (Теорема Больцано-Коши)

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и  $f(a) = m, f(b) = n$ , то на интервале  $(a; b)$   $f(x)$  по крайней мере один раз принимает значение  $p$ , заключённое между  $m$  и  $n$ .



#### Доказательство:

Для доказательства надо найти точку  $\xi$ ,  $f(\xi) = p$ .

Разобьём отрезок  $[a; b]$  на 2 равных отрезка точкой  $\frac{a+b}{2}$

Варианты:

1.  $f(\frac{a+b}{2}) = p \implies \xi = \frac{a+b}{2}$ . **Ч.т.д.**

2.  $f(\frac{a+b}{2}) \neq p$ . Тогда либо  $f(\frac{a+b}{2}) < p$ , либо  $f(\frac{a+b}{2}) > p$ .

В первом случае далее выберем отрезок  $[\frac{a+b}{2}; b]$ , во втором -  $[a; \frac{a+b}{2}]$ . Переобозначим выбранный отрезок  $[a_1; b_1]$ ,  $f(a_1) < p < f(b_1)$ .  $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ .

Разделим  $[a_1; b_1]$  на 2 равных отрезка и выберем тот, на левом конце которого значение функции меньше  $p$ , а на правом - больше.

Тогда либо через конечное число шагов мы получим такую точку  $\xi$ , либо систему вложенных отрезков  $[a_n; b_n]$ ,  $f(a_n) < p < f(b_n)$ ,  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$

Тогда по теореме о вложенных отрезках  $\exists$  точка  $\xi$ , принадлежащая всем отрезкам одновременно

и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$

В точке  $\xi$   $f(x)$  непрерывна.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = f(\xi)$$

Тогда по теореме о двух милиционерах:

$$f(a_n) < p < f(b_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p = f(\xi)$$

**Ч.т.д.**

**Следствие теоремы Больцано-Коши:** если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка такая, что значение  $f(x)$  в этой точке равно 0.

Замечание: будем считать элементарные функции непрерывными на своей области определения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \dots = \operatorname{tg} \lim_{x \rightarrow x_0} \dots$$

Замечание: замена неопределённостей может идти по такому принципу

$$u^v \rightarrow e^{\ln u \cdot v}$$

$$1^\infty \rightarrow [0 \times \infty] \rightarrow \begin{cases} \left[ \frac{0}{0} \right] \\ \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \end{cases}$$

$$\infty^0 \rightarrow [\infty \times 0]$$

$$0^0 \rightarrow [\infty \times 0]$$

### 3.9. Равномерная непрерывная функция

Вспомним определение непрерывности функции в точке по Коши:

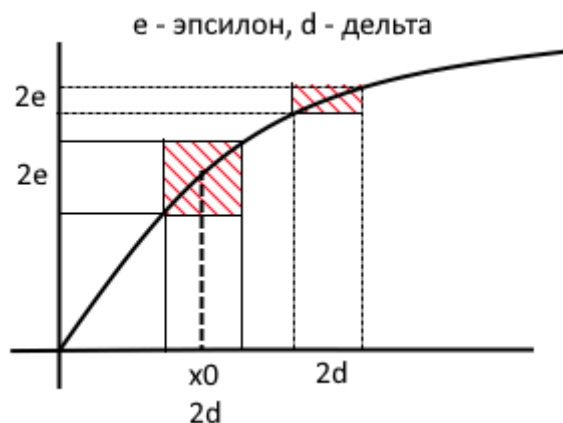
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Зафиксируем  $\varepsilon$ . Вообще говоря, в каждой точке  $x$  существует своё  $\delta$ , т.е.  $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ .

В связи с этим выделяют класс функций (непрерывных), для которых при фиксированном  $\varepsilon > 0$  можно указать  $\delta > 0$ , пригодная сразу для всех  $x$ , принадлежащая некоторому  $X$ .

Функция, определённая на множестве  $X$ , называется **равномерно-непрерывной** на этом множестве, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x', x'' \in X : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

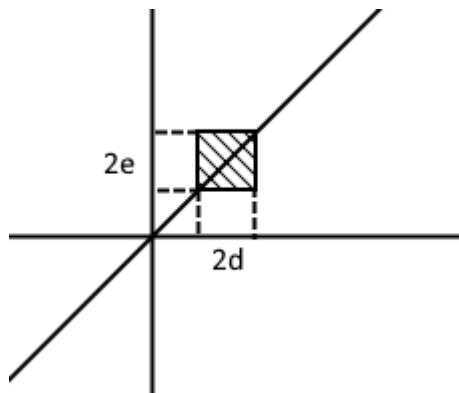


### Примеры:

1.  $f(x) = x, x \in R$

Пусть  $x', x'' \in R : |x' - x''| < \delta$

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$$



2.  $f(x) = x^2, x \in R$

Пусть  $x', x'' \in R : |x' - x''| < \delta$

Пусть  $x'' = x' + h \implies |x' - x' - h| = |h| < \delta$

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - (x' + h)^2| = |x'^2 - x'^2 - 2x'h - h^2| = |2x'h + h^2|$$

Так как  $x' \in R$ , то можно так его выбрать, что  $|2x'h + h^2| = \infty \implies$  функция  $f(x) = x^2$  не является непрерывной на области своего определения.

### Теорема 3.9.1 (Теорема Кантера)

Если функция определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то она равномерно-непрерывна на нём.

#### Доказательство:

Предположим противное. Пусть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x', x'' \in [a; b] : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

Зададим последовательность  $\delta_n : \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ .

Построим две вспомогательные последовательности  $x'_n$  и  $x''_n$ :

$$\exists x'_1, x''_1 : |x'_1 - x''_1| < \delta_1 \implies |f(x'_1) - f(x''_1)| \geq \varepsilon$$

$$\exists x'_2, x''_2 : |x'_2 - x''_2| < \delta_2 \implies |f(x'_2) - f(x''_2)| \geq \varepsilon$$

$$\exists x'_n, x''_n : |x'_n - x''_n| < \delta_n \implies |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$$

Рассмотрим  $\{x'_n\}$ : она ограничена. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $\{x'_{n_k}\}$ .

Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = x_0$

Аналогично м. извлечь  $\{x''_{n_k}\}$

Т.к.  $|x'_n - x''_n| < \delta_n \implies |x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \delta_{n_k}$

$\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x''_{n_k} = x_0$

Так как  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то она непрерывна в точке  $x_0 \in [a; b]$

Значит  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0)$

Рассмотрим  $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon \quad \textcircled{*}$

Перейдем в  $\circledast$  к пределу при  $k \rightarrow \infty$

$$\varepsilon \leq \left| \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_{n_k}) \right| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

Получили противоречие, т.к.  $\varepsilon > 0 \implies f(x)$  - непрерывна.

Пример: рассмотрим  $g = \sin \frac{1}{x}, x \in (0; 1)$

На  $(0; 1)$   $g$  является непрерывна. Покажем, что на  $(0; 1)$   $g$  не является равномерно-непрерывной функцией.

Рассмотрим  $x'_n$ :

$$x'_n = \frac{1}{\pi n}, \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0, x'_n \in (0; 1)$$

Рассмотрим  $x''_n$ :

$$x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = 0, x''_n \in (0; 1)$$

Рассмотрим

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = \left| \sin \pi n - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \right| = 1$$

$$\forall \delta : |x'_n - x''_n| < \delta \implies |f(x'_n) - f(x''_n)| = 1$$

$$\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 \implies \nexists \delta(\varepsilon)$$

Пусть  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Тогда  $\delta(\varepsilon) = \nexists$ .

**Ч.т.д.**

Замечание: на практике, как правило, функции, которые растут больше, чем  $y = x$ , не являются равн.-непр.-ми на  $D(f)$ .

## 4. Дифференциальные исчисления функции

### 4.1. Производная функции в точке

$$y = f(x)$$

$\Delta x$  - приращение аргумента

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  - приращение функции

**Производной** от функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел отношения приращения функции в точке  $x_0$  к приращению аргумента при стремлении последнего к 0.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\sqcup}{dx} f$$

$$y'''' = y^{IV} = y^{(4)}$$

Замечание: для существования производной от  $f(x)$  в точке  $x_0$  необходимо, чтобы  $f(x)$  была определена в некоторой окрестности  $x_0$  и в самой точке  $x_0$ .

Замечание: функция имеет производную в точке  $x_0$ , если  $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Замечание: если  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \infty$ , то говорят, что функция имеет бесконечную производную в точке.

Если  $\Delta x \rightarrow 0$  принимает только положительные значения то соответствующий предел называется правой производной от  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

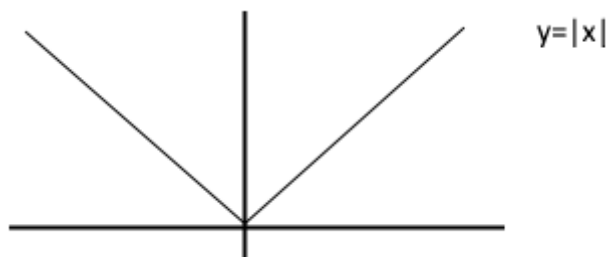
Если  $\Delta x \rightarrow 0$  принимает только отрицательные значения то соответствующий предел называется левой производной от  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

Функция  $f(x)$  имеет производную на  $[a; b]$ , если она имеет производную во всех точках  $(a; b)$ , в точке  $x = a$  имеет правую производную, в точку  $x = b$  - левую.

Утверждение: если  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  правую и левую производные, то  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  производную.

Утверждение: если правая и левая производные в точке  $x_0 \exists$  и не равны между собой, то производная в точке  $x_0 \nexists$ .

Пример:



$$y' \Big|_{x=0}$$

Правая производная

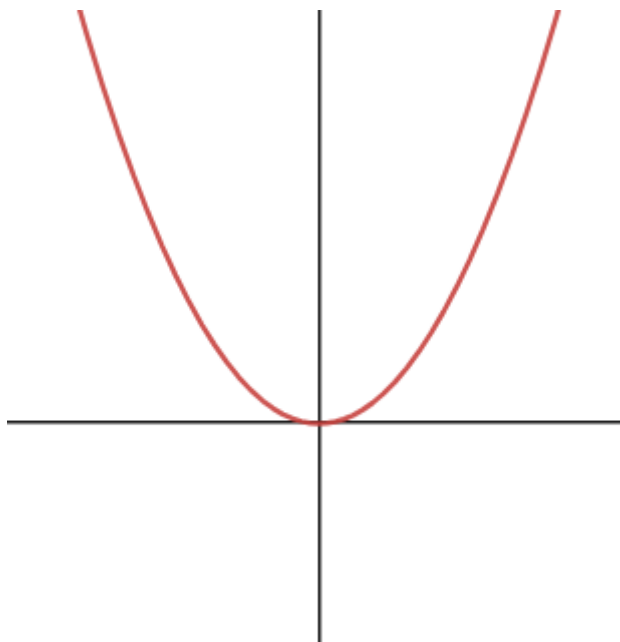
$$y'_+ \Big|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \left| \Delta x \rightarrow 0 \sim x_0 \rightarrow 0 \right| = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{x_0 - 0}{x_0} = 1$$

Левая производная

$$y'_- \Big|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x_0) - f(0)}{-x_0 - 0} = \left| \Delta x \rightarrow 0 \sim x_0 \rightarrow 0 \right| = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{-x_0 - 0}{-x_0} = -1$$

Функция  $y = |x|$  не имеет производной в точке 0.

Пример: докажем, что  $y = x^2$  имеет производную в точке  $x = 0$ .



$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(-x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x^2 - 0}{-x - 0} = 0$$

В точке  $x = 0$  действительно  $f'(x) = 0$ .

**Ч.т.д.**

### Теорема 4.1.1

Функция, имеющая конечную производную в точке, непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Пусть существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'$  конечное.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f' + \varepsilon(\Delta x), \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

$$\Delta y = f' \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f' \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f' \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) \Delta x = 0 + 0 = 0$$

**Ч.т.д.**

### Некоторые приложения производной

#### 1. Мгновенная скорость

Пусть  $S = S(t)$  - закон движения в точке.

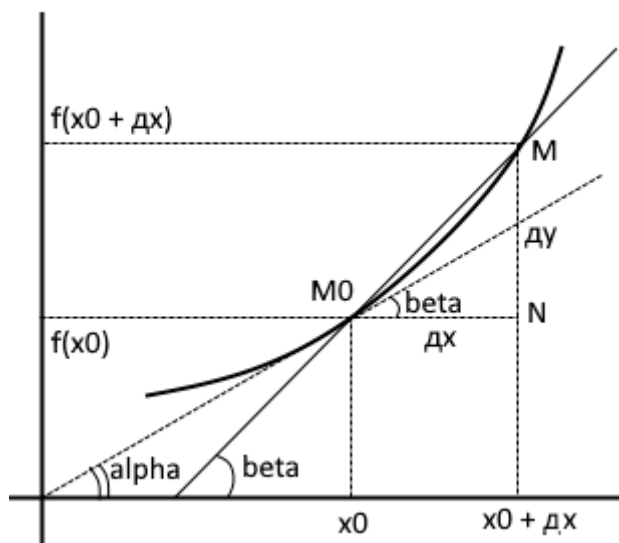
Рассмотрим  $[t, t + \Delta t]$ :  $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$  - путь, пройденный за промежуток времени  $\Delta t$ .

$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$  - средняя скорость.

Мгновенная скорость  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$

$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$  - ускорение.

## 4.2. Геометрический смысл производной



$$M_0(x_0; f(x_0))$$

$$M(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$$

Запишем уравнение прямой  $M_0M$

Замечание: уравнение прямой, проходящей через точки  $(x_0; y_0)$  и  $(x_1; y_1)$ :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$\frac{x - x_0}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y}$$

$$\Delta y(x - x_0) = \Delta x(y - y_0) \quad | \cdot \Delta x$$

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0) \quad | : M_0M$$

$$\operatorname{tg} \angle \beta = \frac{|MN|}{|M_0N|} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пусть  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда точка  $M$  будет стремиться к точке  $M_0$ , а угол  $\beta$  к углу  $\alpha$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ по определению}$$

С другой стороны,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

Рассмотрим уравнение секущей при  $\Delta x \rightarrow 0$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



- уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

Допустим  $f'(x_0) = \infty$ . Тогда рассмотрим уравнение секущей:

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \mid : \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{y}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 + \frac{y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Перейдём к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда уравнение касательной примет вид  $x = x_0$ .

Замечание: если  $L_1 \perp L_2$

$$\begin{aligned} L_1 : y &= k_1 x + b_1 \\ L_2 : y &= k_2 x + b_2 \end{aligned} \implies k_1 k_2 = -1$$

Прямая, проходящая через точку  $x_0$  перпендикулярно касательной, проведённой в этой точке, называется нормалью к графику функции  $f(x)$ .

$$K_n = -\frac{1}{K_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0 \text{ (уравнение нормали)}$$

### 4.3. Производные элементарных функций

1.  $y = \mathbb{C} = \text{const}$

$$y(x) = \mathbb{C}, y(x + \Delta x) = \mathbb{C}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbb{C} - \mathbb{C}}{\Delta x} = 0$$

2.  $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} * \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2} * 2} = \cos x$$

Аналогично доказывается, что  $(\cos x)' = -\sin x$

3.  $y = \log_a x$

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x} * \frac{x}{x}}\right) = \\ &= \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a} = (\log_a x)' \end{aligned}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

4.  $y = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$  По теореме 4.4.3

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Аналогично доказывается, что  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5.  $y = a^x$

$x = \log_a y$  - обратная функция.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

$$(a^x)'_x = \frac{1}{(\log_a y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$$

6.  $y = \arcsin x$

$x = \sin y$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Аналогично:

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

7.  $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$  По теореме 4.5.1

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} * \alpha * \frac{1}{x} = x^\alpha * \alpha * \frac{1}{x} = \alpha * x^{\alpha-1}$$

## Таблица производных

1.  $(x^n)' = nx^{n-1}$
2.  $(a^x)' = a^x \ln a$
3.  $(e^x)' = e^x$
4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
5.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6.  $(\sin x)' = \cos x$
7.  $(\cos x)' = -\sin x$
8.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$14. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$15. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$16. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$17. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

## 4.4. Производная суммы, произведения, частного

### Теорема 4.4.1

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$$

**Ч.т.д.**

### Теорема 4.4.2

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$y(x) = u(x)v(x)$$

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x} = u'v + uv'$$

**Ч.т.д.**

### Теорема 4.4.3

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Delta y = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x) + u(x)v(x) - u(x)v(x)}{v(x + \Delta x)v(x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x)v(x)\Delta x} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

**Ч.т.д.**

## 4.5. Производная сложной функции

Пусть функция  $y = f(x)$  задана в некоторой окрестности точки  $x_0 = u(x_0)$ , а функция  $z = g(y)$  - в некоторой окрестности  $v = v(y_0)$  точки  $y_0 = f(x_0)$ , причём  $f(u) \subset v$ . Тогда определена сложная функция  $F(x) = g(f(x))$ .

### Теорема 4.5.1

Если функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , а функция  $z = g(y)$  имеет производную в точке  $y_0 = f(x_0)$ , то сложная функция  $z = F(x) = g(f(x))$  также имеет производную в точке  $x_0$ , причём

$$F(x)\Big|_{x=x_0} = y'(y)\Big|_{y=y_0} * f'(x)\Big|_{x=x_0}$$

Доказательство:

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta y = y - y_0$$

$$\Delta z = g(y) - g(y_0)$$

Т.к. функция  $g(y)$  имеет производную в точке  $y_0$ , то

$$\exists \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = g'(y_0)$$

То есть

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = g'(y_0) + \varepsilon(\Delta y)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = o\left(g'(y_0) = g'(y)\Big|_{y=y_0}\right) * \Delta y$$

$$\Delta z = g'(y_0) * \Delta y + \varepsilon(\Delta y) * \Delta y \mid : \Delta x$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Замечание: по условию функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ . Тогда по теореме 4.1.1  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , т.е. малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции, т.е. если  $\Delta x \rightarrow 0 \implies \Delta y \rightarrow 0 \implies \varepsilon(\Delta y) \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)f'(x_0) + 0 * f'(x_0) = g'(y) \Big|_{y=y_0} * f'(x) \Big|_{x=x_0}$$

**Ч.т.д.**

## 4.6. Производная обратной функции

### Теорема 4.6.1

Если функция непрерывна и возрастает (строго монотонна) в окрестности точки  $x_0$  и имеет в точке  $x_0$  производную  $f'(x_0) \neq 0$ , тогда обратная функция  $x = f^{-1}(y)$  имеет производную в точке  $y_0 = f(x_0)$  и

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Доказательство:

Замечание 1: если  $f(x)$  возрастает и непрерывна в  $u(x_0)$ , то  $f^{-1}(y)$  тоже возрастает и непрерывна на интервале  $v = f(u)$

Замечание 2: функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0 \implies$  при  $\Delta x \rightarrow 0 \implies \Delta y \rightarrow 0$

Замечание 3: т.к.  $y = f(x)$  возрастает, то при  $\Delta x \neq 0 \implies \Delta y \neq 0$

Рассмотрим

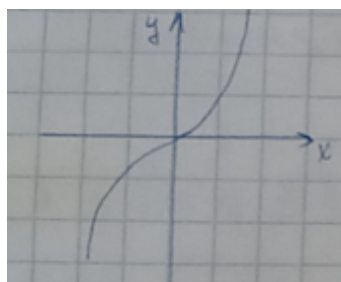
$$x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \stackrel{\text{ЗМ2}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \stackrel{\text{ЗМ3}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

**Ч.т.д.**

## 4.7. Гиперболические функции и их производные

### 1. Гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



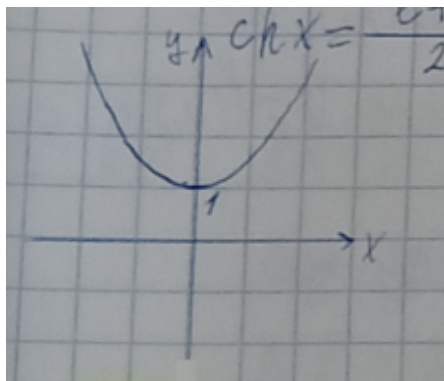
$$D(f) : \mathbb{R}$$

$$E(f) : \mathbb{R}$$

нечётная, непрерывная, возрастает

## 2. Гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



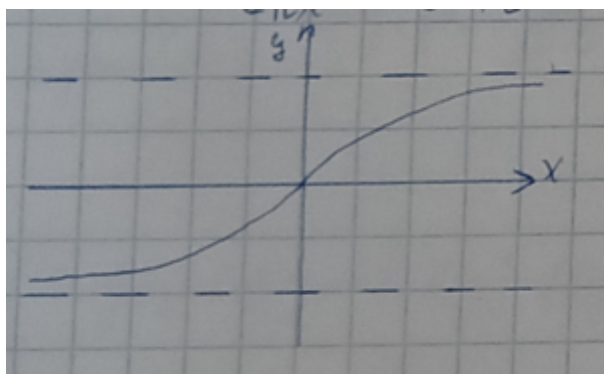
$$D(f) : \mathbb{R}$$

$$E(f) : [1; +\infty]$$

чётная, непрерывная

## 3. Гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



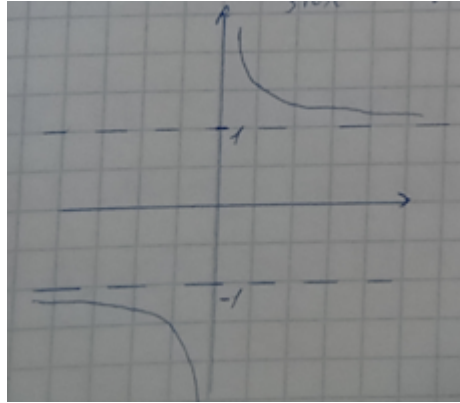
$$D(f) : \mathbb{R}$$

$$E(f) : (-1; 1)$$

нечётная, непрерывная, возрастающая

## 4. Гиперболический контангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$D(f) : \mathbb{R} \setminus 0$   
 $E(f) : (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$   
 нечётная, в точке  $x = 0$  разрыв II рода

## Производные гиперболических функций

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{sh} x)' &= \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x \\
 (\operatorname{ch} x)' &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x \\
 (\operatorname{th} x)' &= \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \\
 &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}} = \frac{1}{\left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\
 (\operatorname{cth} x)' &\stackrel{\text{аналогично}}{=} -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}
 \end{aligned}$$

## 4.8. Логарифмическое дифференцирование, производная от функции, заданной неявно, производная от функции, заданной параметрически

### 1. Производная от функции, заданной неявно

$y = f(x)$  - явное задание функции

Пример:

$$\begin{aligned}
 3x^4y^3 + 5x^3y^5 - 5 &= 0 - \text{уравнение, определяющее неявно функцию } y = y(x) \\
 (x)' &= 1; (y)' = y'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3(4x^3y^3 + x^4 * 3y^2 * y') + 5(3x^2y^5 + x^3 * 5y^4 * y') &= 0 \\
 y'(9x^4y^2 + 25x^3y^4) &= -12x^3y^3 - 15x^2y^5 \\
 y' &= \frac{-12x^3y^3 + 15x^2y^5}{9x^4y^2 + 25x^3y^4}
 \end{aligned}$$

### 2. Производная от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$y = y(x)$$

$$y'_x = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} \stackrel{\text{Th 4.6.1}}{=} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Пример:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$x'_t = -2 \sin t$$

$$y'_t = 2 \cos t$$

$$y'_x = \frac{2 \cos t}{-2 \sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

### 3. Логарифмическое дифференцирование

$y = u(x)^{v(x)}$  - степенно-показательная функция

#### (a) Логарифмическое дифференцирование

$$y = u(x)^{v(x)}$$

$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)}$$

$$\ln y = v(x) * \ln u(x)$$

$$\frac{1}{y} * y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} * u'(x) \quad | \quad * y$$

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \ln(u(x)) + \frac{v(x)}{u(x)} * u'(x) \right]$$

#### (b) Сведение к сложной функции

$$y = u(x)^{v(x)} = |a = b^{\log_b a}| = e^{\ln u(x) * v(x)}$$

$$y' = e^{\ln u(x) * v(x)} * \left[ \frac{1}{u(x)} * u'(x) * v(x) + \ln(u(x)) * v'(x) \right]$$

#### (c)

$$y = u(x)$$

$$y = (u(x))^n$$

$$y = a^{v(x)}$$

⋮

$$y' = n(u(x))^{n-1} * u'(x)$$

$$y' = a^{v(x)} * \ln(a) * v'(x)$$

$$y' = v(x)u(x)^{v(x)-1} * u'(x) + u(x)^{v(x)} * \ln u(x) * v'(x)$$

## 4.9. Дифференцируемость функции. Дифференциал, его геометрический и физический смыслы

Функция  $y = f(x)$ , заданная в  $u(x_0)$ , называется дифференцируемой в этой точке, если её приращение  $\Delta y = f(x_0 + \Delta) - f(x_0)$  представимо в этой окрестности в виде  $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ ,  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $A = \operatorname{const}$



Линейная часть приращения функции  $A\Delta x$  называется дифференциалом функции в точке  $x_0$  и обозначается  $df|_{x=x_0}$  или  $df(x_0)$ .

Тогда  $\Delta y = dy + o(\Delta x)$

Замечание:  $o(\Delta x) = o(A\Delta x) = o(dy)$

Тогда  $\Delta y = dy + o(dy) : dy$

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(dy)}{dy}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$$

Т.е.  $\Delta y \sim dy$  при  $\Delta x \rightarrow 0$

### Теорема 4.9.1 (необходимость и достаточность условия дифференцируемости в точке)

Для того чтобы  $f(x)$  была дифференцируема в точке  $x_0 \Leftrightarrow$  чтобы в этой точке она имела конечную производную.

Доказательство:

**Докажем необходимость ( $\Rightarrow$ )**

Пусть  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Покажем, что  $\exists f'(x_0)$  - конечное.

Тогда по определению

$$\begin{aligned}\Delta y &= A\Delta x + o(\Delta x) \\ \Delta y &= A\Delta x + \varepsilon(\Delta x) * \Delta x \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) &= 0 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= A + \varepsilon(\Delta x) \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= A \\ f'(x)|_{x=x_0} &= A = const\end{aligned}$$

**Докажем достаточность ( $\Leftarrow$ )**

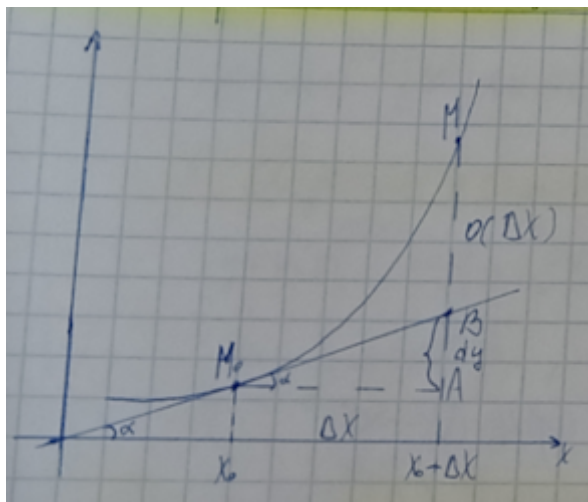
Пусть  $f(x)$  имеет конечную производную в точке  $x_0$ , т.е.  $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= f'(x_0) + \epsilon(\Delta x) * \Delta x \\ \Delta y &= f'(x_0)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\end{aligned}$$

**Ч.т.д.**

Замечание: таким образом  $df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$

## Геометрический смысл дифференциала



Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ :

$$\begin{aligned} M_0(x_0, f(x_0)) \\ M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \\ \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \end{aligned}$$

Рассмотрим  $\triangle ABM_0$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= |AB| \\ f'(x_0)\Delta x &= \Delta y \\ |MB| &= o(\Delta x) \end{aligned}$$

	Ф-ция	Касательная
приращ.	$\Delta y$	$dy$
ф-ция	$ AM $	$ AB $
приращ.	$\Delta x$	$dx$
арг.	$ AM_0 $	$ AM_0 $

Отсюда для независимой переменной  $x$ :  $\Delta x = dx$

Геометрический смысл дифференциала: это есть приращение ординат касательной, проведённой к графику функции в точке  $x_0$ .

Замечание: для функции  $y = kx + b$   $dy = \Delta y$  для любых  $x$ .

Замечание:  $dy = f'(x) \Big|_{x=x_0} * dx \implies f'(x) \Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}$

## Физический смысл дифференциала

$$V_{\text{мгнов}} = S'(t) \Big|_{t=t_0} = \frac{dS}{dt}$$

$$dS = S'(t) \Big|_{t=t_0} * dt = S'(t) \Big|_{t=t_0} * \Delta t$$

Дифференциал  $dS$  равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за время  $\Delta t$ , начиная с момента времени  $t = t_0$ , если бы на этом участке пути скорость была бы постоянной и равной  $S'(t) \Big|_{t=t_0}$

### Свойства дифференциалов

1.  $d(u \pm V) = du \pm dv$
2.  $d(uv) = u dv + v du$
3.  $d(Cu) = C du$
4.  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{v du - u dv}{v^2}$

Доказательство 4-го пункта:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

**Ч.т.д.**

## 4.10. Применение дифференциала в приближённых вычислениях. Дифференциал сложной функции

Если  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$

$$\Delta y = dy + o(dx)$$

$$\Delta y \approx dy$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x - \text{формула приближённого вычисления функции.}$$

Пример:  $\sin 32^\circ$

$$\text{Рассмотрим } f(x) = \sin x$$

$$32 = x_0 + \Delta x = 30 + 2$$

$$x_0 = 30; \Delta x = 2 = \frac{\pi}{90}$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(30) = \frac{1}{2} \quad f'(30) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin 32 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{90} = 0,53$$

### Дифференцируемость сложной функции

$$\text{Рассмотрим } y = f(x)$$

$$z = g(y)$$

$$\text{Получим } F(x) = g(f(x))$$

$$F'(x) \Big|_{x=x_0} = g'(y) \Big|_{y=y_0} * f'(x) \Big|_{x=x_0}$$

Рассмотрим

$$dF = F'(x) \Big|_{x=x_0} dx = g'(y) \Big|_{y=y_0} * f'(x) \Big|_{x=x_0} * dx = g'(y) dy$$

Формула показывает, что записи дифференциала посредством независимой переменной  $x$  и зависимой переменной  $y$  имеет один и тот же вид.

Это свойство называется **инвариантностью** формы записи первого дифференциала.

## 4.11. Производные дифференциалов высших порядков

Пусть  $y = f(x)$  имеет производную  $y' = f'(x)$  во всех точках некоторой окрестности точки  $x_0$ .

Если в свою очередь  $f'(x)$  имеет производную  $[f'(x)]' \Big|_{x=x_0}$ , то она называется второй производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

Аналогично определяются производные более высоких порядков:  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ . Примеры:

1.  $y = a^x$

$$y' = a^x \ln a$$

$$y'' = a^x \ln^2 a$$

$$y^{(n)} = a^x \ln^n a$$

2.  $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin\left(\frac{1\pi}{2} + x\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$$

$$y^{(n)} = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

3.  $y = \cos x$

$$y^{(n)} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

4.  $y = \ln x$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \frac{1}{x^3}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} * \frac{(n-1)!}{x^n}$$

5.  $y = x^n, n \in N$

$$y' = nx^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$y^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)x^{n-k}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = n!$$

6.  $y = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$

$$y^{(n)} = \lambda_1 y_1^{(n)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n)}(x)$$

7.  $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

⋮

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} - \text{формула Лейбница}$$

$(k), (n-k)$  - символическая степень (применяем формулу бинома Ньютона, но не возводим в степень, а берём производную)

## Производная высшего порядка от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$y'_x = y'_t * t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = A(t)$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (A(t))'_t t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = B(t)$$

$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x = (B(t))'_t t'_x = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$$

$$\boxed{y^{(n)}_{x \dots x} = \frac{(y^{(n-1)}_{x \dots x})'_t}{x'_t}}$$

## Производная высшего порядка от функций, заданных неявно

Пример:  $x^2 + y^2 = 25$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$x + yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$1 + yy'' + (y')^2 = 0$$

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = f_2(x; y)$$

$$y'y'' + yy'' + 2y'y'' = 0$$

$$y''' = -\frac{3y'y''}{y} = f_3(x; y)$$

## Дифференциалы высших порядков

$$y = f(x)$$

$$dy = f'(x)dx$$

Пусть функция  $f'(x)$  также дифференцируема в точке  $x_0$  и величина  $dx$  имеет одно и то же фиксированное значение для  $\forall x \in u(x_0)$

Рассмотрим

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'_x dx = f''(x)dx dx = f''(x)dx^2$$

$$dx^2 = (dx)^2 \text{ (дэ икс дважды)}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Аналогично дифференциал порядка  $n$  называется дифференциал от дифференциала порядка  $(n-1)$  при условии, что  $dx = const$ , то есть

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = y^{(n)} dx^n \text{ (дэ икс энжды)}$$

Замечание: дифференциалы высших порядков ( $n \geq 2$ ) не обладают свойством инвариантности формы записи относительно выбора переменных.

Доказательство:

$$y = f(x), z = z(y) \quad z = z(f(x)) \text{ - сложная функция}$$

$$\begin{aligned} dz &= z'_y dy \\ d^2 z &= d(dz) = d(z'_y dy) = \left| d(z'_y) dy + z'_y d(dy) \right| = z'_y d^2 y + dy d(z'_y) = z'_y d^2 y + z''_{yy} dy^2 \\ z'_y d^2 y &= 0 \text{ для линейной функции} \end{aligned}$$

## 4.12. Дифференциальные теоремы о среднем

Точка  $x = c$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $y = f(x)$ , если  $\exists u_\delta(c) : (c - \delta; c + \delta) :$

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (c - \delta; c + \delta)$$

$$(f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in (c - \delta; c + \delta))$$

Точка локального максимума (минимума) функции называется точкой локального экстремума.

### Теорема 4.12.1 (Ферма)

Если  $f(x)$  имеет производную в точке  $c$  и достигает в этой точке экстремум, то  $f'(c) = 0$

Доказательство:

Пусть точка  $c$  - точка локального экстремума.

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Пусть для определённости точка  $c$  - точка максимума ( $f(c) \geq f(x) \forall x \in (c - \delta; c + \delta)$ )

Т.к. производная в точке  $c$  существует, то существует

$$\left. \begin{aligned} f'_+(c) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \\ f'_-(c) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \end{aligned} \right\} \text{т.к. } f'(c) \exists \implies f'(c) = 0$$

**Ч.т.д.**

Замечание: точка, в которой функция достигает экстремальное значение, является внутренней точкой интервала.

### Теорема 4.12.2 (Ролля)

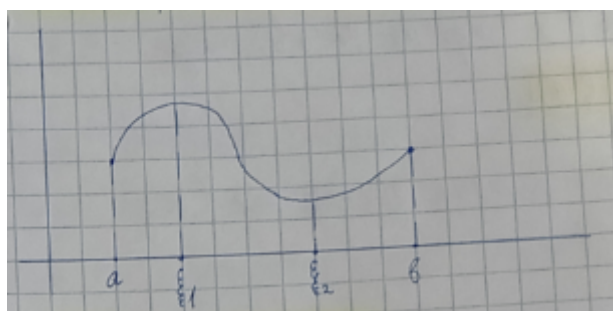
Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , дифференцируема на  $(a; b)$  и  $f(a) = f(b)$ . Тогда на  $(a; b)$   $\exists$  по крайней мере одна точка  $\xi \in (a; b) : f'(\xi) = 0$

Доказательство:

1.  $f = \text{const.}$  Тогда  $\forall \xi \in (a; b) f'(\xi) = 0$ . **Ч.т.д.**
2.  $f \neq \text{const.}$  Тогда по второй теореме Вейерштрасса существуют точки  $x_1, x_2$ , в которых функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Причём обе точки  $x_1$  и  $x_2$  не могут быть концами  $[a; b]$  одновременно. Т.к.  $\max_{x \in [a; b]} f(x) = \min_{x \in [a; b]} f(x) = f(a) = f(b)$  по условию. Тогда  $f(x)$  была бы константой, а это не так. Т.е. одна из  $x_1, x_2 \in (a; b)$ . Обозначим её  $\xi$ . По условию  $f(x)$  дифференцируема на  $(a; b) \xRightarrow{\text{Th 4.9.1}} \exists$  конечная  $f'(\xi)$ . А так как в этой точке функция принимает наибольшее или наименьшее значение  $\implies f'(\xi) = 0$ .

**Ч.т.д.**

### Геометрический смысл теоремы Ролля



### Теорема 4.12.3 (теорема Коши)

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на  $[a; b]$ , дифференцируемы на  $(a; b)$ ,  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a; b)$ . Тогда  $\exists$  точка  $\xi \in (a; b)$ :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доказательство:

Замечание:  $g(b) \neq g(a)$ , так как, если бы это было так, то  $g(x)$  удовлетворяла бы условию теоремы Ролля  $\implies \exists$  точка  $\xi \in (a; b) : g'(\xi) = 0$ , а это не так.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * (g(x) - g(a))$$

Т.к.  $f(x), g(x)$  непрерывны на  $[a; b]$  и дифференцируемы на  $(a; b) \implies F(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$

$$F(a) = 0; F(b) = 0$$

Т.е.  $F(x)$  удовлетворяет условию теоремы Ролля  $\implies \exists$  точка  $\xi \in (a; b) : F'(\xi) = 0$ .

Тогда:

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(\xi) = 0$$

$$F'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(\xi) = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(\xi) = f'(\xi) \mid * g'(\xi) \neq 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

**Ч.т.д.**

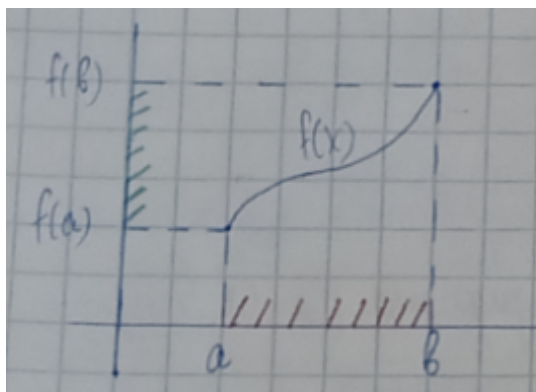
#### Теорема 4.12.4 (теорема Лагранжа)

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$ , тогда  $\exists$  точка  $\xi \in (a; b)$ :

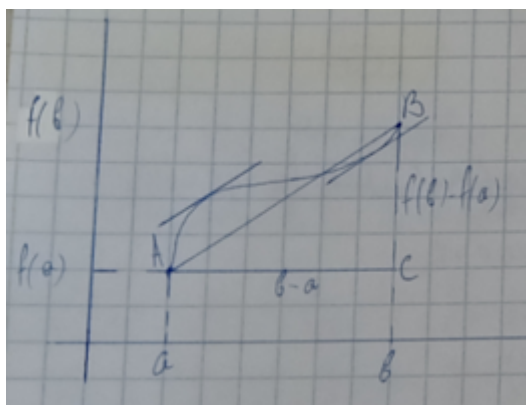
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Доказательство:

Если в теореме Коши принять  $g(x) = x \implies$  **Ч.т.д.**



#### Геометрический смысл теоремы Лагранжа



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \angle A = f'(\xi)$$

$\exists$  точка  $\xi \in (a; b)$  : касательная к графику функции в этой точке  $\parallel$ -на хорде  $AB$

Замечание: промежуточное значение  $\xi$  можно записать в виде  $\xi = a + \theta(b - a)$ ,  $0 < \theta < 1$

Тогда

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a)) * (b - a)$$



Пусть  $(b - a) = \Delta x$

$$f(b) - f(a) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Тогда

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x$$

Все три формулы называются формулой конечных приращений Лагранжа.

### Теорема 4.12.5

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , дифференцируема на  $(a; b)$  и  $\forall x \in (a; b) f'(x) = 0 \implies f(x)$  постоянная на этом отрезке.

Доказательство:

Выберем произвольно  $x_1, x_2 \in [a; b]$ . Пусть для определённости  $x_1 < x_2$ .

Тогда  $f(x)$  непрерывна  $[x_1; x_2] \subset [a; b]$  и дифференцируема  $(x_1; x_2) \subset (a; b)$ .

Тогда по теореме Лагранжа  $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ ,  $x_1 < \xi < x_2$ .

По условию  $f'(x) = 0 \forall x \in (a; b) \implies f'(\xi) = 0$ , т.к. точка  $\xi \in (x_1; x_2) \subset (a; b) \implies f(x_1) = f(x_2)$ , а т.к.  $x_1, x_2$  - произвольные и  $\in [a; b]$ , то  $f(x) = \text{const} \forall x \in [a; b]$ .

**Ч.т.д.**

## 4.13. Раскрытие неопределённости по правилу Лопиталя

### Теорема 4.13.1

Если  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в  $u(x_0)$  и в этой точке  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , то

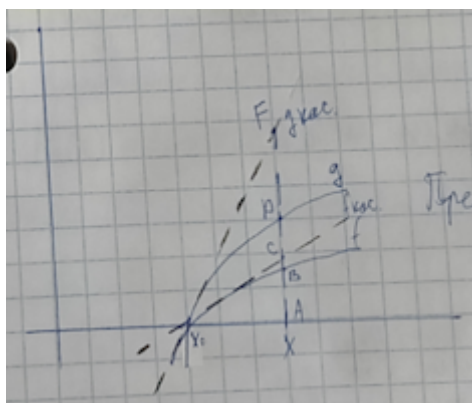
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Big|_{x=x_0}$$

Доказательство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

**Ч.т.д.**

### Геометрический смысл



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|AB|}{|AO|} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|AC|}{|AF|}$$

Предел отношения ординат графиков функции  $f$  и  $g$  равен пределу отношения касательных к этим функциям в точке  $x_0$ .

### Теорема 4.13.2

Если:

1. Функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы на  $(a; b)$
2.  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a; b)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
4.  $\exists$  конечный или бесконечный  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство:

Так как по пункту 1  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на  $(a; b)$   $\xRightarrow[\text{Th 4.1.1}]{\text{Th 4.9.1}}$  они непрерывны на  $(a; b)$ .

Доопределим эти функции в точке  $x = a$ :  $f(a) = g(a) = 0$ .

Тогда  $\forall x \in (a; b)$  на  $[a; x]$   $f(x)$  и  $g(x)$  будут удовлетворять условию теоремы Коши, т.е.  $\exists$

точка  $\xi = \xi(x)$  и  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \xRightarrow{\text{Th 4.12.3}} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \left| \begin{array}{c} a < \xi < x \\ x \rightarrow a \implies \xi \rightarrow a \end{array} \right| = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \left| \begin{array}{c} \text{Замена} \\ x = \xi \end{array} \right|_{\text{(переобозначение)}} = \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

**Ч.т.д.**

### Теорема 4.13.3

Если:

1. Функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы на  $(a; b)$
2.  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a; b)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$
4.  $\exists$  конечный или бесконечный  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Замечание: в теореме 4.13.2 и теореме 4.13.3 рассмотрены случаи, когда  $x \rightarrow a + 0$ . К этому случаю сводятся те, когда  $x \rightarrow a - 0$  или произвольным образом, а также случаи, когда  $a = \pm\infty$ .

Примеры:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos x * \frac{1}{x} \left( -\frac{1}{x^2} \right)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} = \#$$

Не выполняется пункт 4!

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = [0^0] &= \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x} = [0 * \infty] = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} (-x)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

## 4.14. Формула Тейлора для многочленов

Рассмотрим произвольный многочлен степени  $n$ :

$$P_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{k=0}^n b_kx^k$$

Пусть  $x_0$  - произвольное число,  $x = (x - x_0) + x_0$ . Тогда  $\sum_{k=0}^n b_k((x - x_0) + x_0)^k$ . После возведения в степень и приведения подобных слагаемых, получим:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$$

Это разложение многочлена  $P_n(x)$  по степеням  $(x - x_0)$ .

$$a_k = a_k(x_0, b_i), i = \overline{1, n}$$

$$P_n(x_0) = a_0$$

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$P'_n(x_0) = a_1$$

$$P''_n(x) = 2a_2 + 3 * 2 * a_3(x - x_0) + 4 * 3 * a_4(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$P''_n(x_0) = 2a_2$$

$\vdots$

$\vdots$

$$P_n^{(k)}(x) = 1 * 2 * 3 * \dots * k * a_k + \dots + (n - k + 1) \dots (n - 1) na_n(x - x_0)^{n-k}$$

$$P_n^{(k)}(x_0) = k!a_k$$

$\vdots$

$\vdots$

$$P_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = n!a_n$$

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Многочлен  $P_n(x)$  можно разложить по степеням  $(x - x_0)$  единственным образом.

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Это формула Тейлора для многочлена  $P_n(x)$  по степеням  $(x - x_0)$ .

Пример:

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

$$P(-1) = 5$$

Записать  $P(x)$  по степеням  $(x + 1)$ ,  $x_0 = -1$

$$P'(x) = 3 + 10x - 6x^2$$

$$P'(-1) = -13$$

$$P''(x) = 10 - 12x$$

$$P''(-1) = 22$$

$$P'''(x) = -12$$

$$P'''(-1) = -12$$

$$P(x) = 5 + \frac{-13}{1!}(x+1) + \frac{22}{2!}(x+1)^2 + \frac{-12}{3!}(x+1)^3 = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$$

## 4.15. Формула Тейлора для функций

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , имеющую непрерывные производные до  $(n + 1)$  порядка в  $u(x_0)$

Составим многочлен

$$Q_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{(k)}$$

Этот многочлен совпадает с  $f(x)$  только в точке  $x_0$

**НО!** в остальных точках он не равен  $f(x)$ .

$$Q'_n(x) = f'(x_0) + \frac{2}{2!}f''(x_0)(x-x_0) + \dots$$

$$Q'_n(x_0) = f'(x_0)$$

Аналогично

$$Q''_n(x_0) = f''(x_0)$$

$$\vdots$$

$$Q^{(n)}_n(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Пусть  $\boxed{f(x) = Q_n(x) + r_n(x)}$  - формула Тейлора для  $f(x)$ , где  $r_n(x)$  - погрешность при замене  $f(x)$  на  $Q_n(x)$ .

Найдём вид  $r_n(x)$ :

$$f(x_0) = Q_n(x_0) \implies r_n(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) = Q'_n(x_0) \implies r'_n(x_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x_0) = Q^{(n)}_n(x_0) \implies r^{(n)}_n(x_0) = 0$$

$$r^{(n+1)}(x_0) \neq 0$$

Введём вспомогательную функцию  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

$$\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \varphi''(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n)}(x_0) = 0, \varphi^{(n+1)}(x_0) = (n+1)!$$

По теореме Коши рассмотрим

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}} &= \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{r'_n(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{r'_n(x_1) - r'_n(x_0)}{\varphi'(x_1) - \varphi'(x_0)} = \frac{r''_n(x_2)}{\varphi''(x_2)} = \\ &= \dots = \frac{r_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)} = \frac{r_n^{(n)}(x_n) - r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n) - \varphi^{(n)}(x_0)} = \boxed{\frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}} \\ &\quad \text{где } x_1 \in (x_0; x) \text{ или } (x; x_0) \quad x_2 \in (x_0; x_1) \text{ или } (x_1; x_0) \quad \xi \in (x_0; x_n) \text{ или } (x_n; x_0) \end{aligned}$$

Тогда

$$r_n(x) = \frac{\varphi(x) * r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}; \varphi(x) = (x - x_0)^{(n+1)}$$

$$r_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - Q_n^{(n+1)}(x)$$

$$r_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}$$

Формула Тейлора для функции  $f(x)$ :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}$$

формула Тейлора для функции  $f(x)$  с остаточным членом в форме Лагранжа

Замечание: рассмотрим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi) * (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!(x - x_0)^n} = 0 \implies r_n(x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0}$$

формула Тейлора для функции  $f(x)$  с остаточным членом в форме Пеано

Замечание: если в формуле Тейлора положить  $x_0 = 0$ , то соответствующая формула называется формулой Маклорена для функции  $f(x)$ .

#### Теорема 4.15.1 (теорема о единственности представления функции формулы Тейлора)

Функция  $f(x)$  в  $u(x_0)$  представляется единственным образом формулой Тейлора.

Доказательство:

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Переходя к пределу при  $x \rightarrow x_0$  получим, что

$$a_0 = b_0$$

Тогда

$$a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = b_1(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad \Big| : (x-x_0)$$

$$a_1 + a_2(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1}) = b_1 + b_2(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1})$$

Переходя к пределу при  $x \rightarrow x_0$  получим, что

$$a_1 = b_1$$

Продолжая этот процесс, получим **ч.т.д.**

## Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена

1.

$$\begin{array}{lll} f(x) = e^x & x_0 = 0 & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & \vdots & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & \vdots & f''(0) = 1 \\ f'''(x) = e^x & \vdots & f'''(0) = 1 \end{array}$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$$

2.

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sin x & x_0 = 0 & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & \vdots & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & \vdots & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & \vdots & f'''(0) = -1 \end{array}$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

Аналогично

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

3.

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = \ln(1+x) & x_0 = 0 & f(0) = 0 \\
 f'(x) = \frac{1}{1+x} & \vdots & f'(0) = 1 \\
 f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} & \vdots & f''(0) = -1 \\
 f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} & \vdots & f'''(0) = 2 \\
 f''''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} & \vdots & f''''(0) = -6
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \ln(1+x) &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \dots = \\
 &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)
 \end{aligned}$$

4.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Частые случаи формулы:

$$\frac{1}{1+x}; \frac{1}{1-x}; \frac{1}{\sqrt{1+x}}; \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

5.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})$$

## 4.16. Монотонность функций. Необходимое и достаточное условие монотонности функций

Функцию  $f(x)$ , заданную на множестве  $X$ , называют неубывающей на этом множестве, если  $\forall x_1, x_2 \in X \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

Возрастающая  $f(x_1) < f(x_2)$

Невозрастающая  $f(x_1) \geq f(x_2)$

Убывающая  $f(x_1) > f(x_2)$

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие, убывающие функции на мн-ве  $X$  называются монотонными на мн-ве  $X$ .

### Теорема 4.16.1 (необходимое и достаточное условие монотонности)

Для того, чтобы диф-ая на интервале ф-ия была неубывающей (невозр.)  $\Leftrightarrow$  чтобы её производная была во всех точках интервала неотрицательной (неположительной). Если производная ф-ии во всех точках интервала  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ), то ф-ия возрастает (убывает).

Доказательство:

**Докажем необходимость ( $\Rightarrow$ )**

Пусть  $f(x)$  неубывающая на  $(a; b)$  и имеет в точке  $x_0 \in (a; b)$  производную.

Покажем, что  $f'(x_0) \geq 0$ .

Пусть для определённости  $\Delta x > 0$ . Тогда  $f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$ .

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0$$

**Докажем достаточность ( $\Leftarrow$ )**

Пусть  $\forall x \in (a; b) f'(x) \geq 0$

Покажем, что  $f(x)$  неубывающая на  $(a; b)$ .

Выберем произвольно  $x_1, x_2 \in (a; b)$ . Пусть  $x_1 < x_2$ . Тогда по теореме Лагранжа (12.4):

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \xi \in (x_1; x_2)$$

По условию

$$f'(x) \geq 0 \forall x \in (a; b) \implies f'(\xi) \geq 0, x_2 - x_1 > 0 \implies f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

Т.к.  $x_1, x_2$  - произвольные и  $\in (a; b) \implies$  на  $(a; b)$   $f(x)$  неубывающая.

**Ч.т.д.**

Замечание 1: условие  $f'(x) > 0$  является достаточным условием возрастания, но не является необходимым (если  $f(x)$  возрастает, то не везде  $f'(x) > 0$ )

Пример:  $y = x^3$  возрастает, но  $y'(0) = 0$ .

