Содержание

1. Введение

1.1. Элементы теории множеств.

Определения (множества)

Множество - совокупность объектов одинаковой природы.
Обозначение: A, B, C - множества. a, b, c - элементы множества.

Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.
Множество A называется подмножеством множества B, если $\forall a \in A \implies a \in B$. Обозначение: $A \subset B$.
Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством. Обозначение: $\varnothing$.

Объединением множеств A и B ($A \cup B$) называется $C : C = \{c : c \in A \cup c \in B\}$.
Пересечением множеств A и B ($A \cap B$) называется $D : D = \{d : d \in A \cap d \in B\}$.
Разностью множеств A и B ($A \diagdown B$) называется $E : E = \{e : e \in A \cap e \notin B\}$.
Симметричной разностью множеств A и B ($A \triangle B$) называется $F : F = \{f : f \in (A \diagdown B) \cup (B \diagdown A)\}$.

Свойства операций

1. $\forall A \ A \subset A$
   $\forall A \ \varnothing \subset A$
2. $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
3. $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$
4. $A \subset B, B \subset C \implies A \subset C$
5. $A \subset B, B \subset A \implies A = B$
6. $A \diagdown (A \diagdown B) = A \cap B$
7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
8. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
9. $A \diagdown (B \cap C) = (A \diagdown B) \cup (A \diagdown C)$
10. $A \diagdown (B \cup C) = (A \diagdown B) \cap (A \diagdown C)$
11. $(A \diagdown B) \cup (B \diagdown A) = (A \cup B) \diagdown (A \cap B)$

Доказательство пункта 9:

Пусть X - произвольное множество.
Если $x \in A \implies x \in A \cup X$
Если $x \notin A \implies x \notin A \cap X$
Если $x \in A \cap B \implies x \in A$ и $x \in B$
Если $x \in A \cup B \implies x \in A$ или $x \in B$

Если $x \notin A \cap B \implies x \notin A$ или $x \notin B$
Если $x \notin A \cup B \implies x \notin A$ и $x \notin B$

а) Пусть $x \in A \diagdown (B \cap C)$. Тогда $x \in A$ и $x \notin B \cap C$. Следовательно $x \in A$ и $(x \notin B)$ или $(x \notin C)$. Отсюда ($x \in A$ и $x \notin B$) или ($x \in A$ и $x \notin B$). Тогда $x \in (A \diagdown B) \cup (A \diagdown C)$.

б) Пусть $x \in (A \diagdown B) \cup (A \diagdown C)$. Тогда $x \in (A \diagdown B)$ или $x \in (A \diagdown C)$. Пусть для определённости $x \in A \diagdown B$. Тогда $x \in A$ и $x \notin B$. Отсюда $x \in A$ и $x \notin B \cap X$, например $x \in A$ и $x \notin B \cap C \implies x \in A \diagdown (B \cap C)$.

Ч.т.д.

Определения (декартово произведение)

Декартовым произведением множеств A и B ($A \times B$) называется множество $C : C = \{(a; b) : a \in A$ и $b \in B\}$.
Отображением F множества A в множество B называется подмножество их декартова произведения. $(F \subset A \times B) : \forall a \in A \, \exists \, ! \, (a; b) \in F$.
Примеры:

$A = \{1; 3; 5\}, B = \{2; 4; 6\}$

- $F = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$ - отображение
- $F = \{(1; 2), (1; 4), (3; 4), (5; 6)\}$ - не отображение

Пусть F - отображение A в B. Тогда элемент $b : (a; b) \in F$ называется образом элемента a при отображении F. $b = F(a)$
При этом a называется прообразом (одним из возможных) элемента b.
Множество $\{b \in B : \exists \, a \in A : b = F(a)\}$ называется образом множества A при отображении F и обозначается $F(A)$.

Отображение F называется **сюръекцией** или отображением "на", если $F(A) = B$ (все элементы b использованы в парах с элементами a)
Отображение F называется **инъекцией** или вложением, если $F(a_1) = F(a_2) \implies a_1 = a_2$ (каждому элементу a соответствует только один элемент b)
Отображение F называется **биекцией** или взаимооднозначным отображением, если оно является и сюръекцией, и инъекцией.

Пример: $A\{1; 3; 5\}, B\{2; 4; 6\}$

- $F_1\{(1; 2), (3; 2), (5; 6)\}$ - не сюръекция, не инъекция.
- $F_2\{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$ - сюръекция, инъекция; следовательно, биекция.

1.2. Мощность множества. Счётные и несчётные множества.

Эквивалентность

Множества A и B называются эквивалентными (равномощными), если между ними можно установить взаимооднозначное соответствие.

Обозначение: $A \sim B$.
Свойства:

1. $A \sim A$ (свойство рефлексивности)
2. $A \sim B \implies B \sim A$ (свойство симметричности)
3. $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$ (свойство транзитивности)

Мощность множеств. Счётные множества.

Множества чисел:

- N - натуральные числа $(1; 2; 3; \dots)$
- Z - целые числа $(0; \pm 1; \pm 2; \dots)$
- Q - рациональные числа ($\frac{p}{q} : p \in Z, q \in N, \frac{p}{q}$ - несократимое)
- R - действительные/вещественные числа

$N \subset Z \subset Q \subset R$

Мощность множества - некая числовая характеристика (обозначающаяся $\#A$), обладающая свойствами:

1. Если A - конечно, то $\#A$ - кол-во элементов множества.
2. Если A, B - бесконечномерные, то
   - $\#A = \#B \Leftrightarrow A \sim B$
   - $\#A \leq \#B \Leftrightarrow A \sim C, C \subset B,$ но A не $\subset B$

Утверждение: $Z \sim N$
Доказательство:

$0; -1; 1; -2; 2; -3; 3; \dots$
$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots$
Каждому элементу Z соответствует элемент N.

Утверждение: $Q \sim N$
Доказательство:

Договоримся, что $0 = \frac{0}{1}$
Обозначим $h = |p| + q$ - высота числа $\frac{p}{q}$
Будем нумеровать рациональные числа по возрастанию h; при фиксированном h - по возрастанию q; при фиксированном h и q - по возрастанию p.

$$h=1, q=1 \implies p=0 : r_1=\frac{0}{1}$$
$$h=2, q=1 \implies p=\pm 1 : r_2=\frac{-1}{1}, r_3=\frac{1}{1}$$
$$h=2, q=2 \implies p=0 \text{ (не может быть по определению)}$$
$$h=3, q=1 \implies p=\pm 2 : r_4=\frac{-2}{1}, r_5=\frac{2}{1}$$
$$h=3, q=2 \implies p=\pm 1 : r_6=\frac{-1}{2}, r_7=\frac{1}{2}$$
$$h=3, q=3 \implies p=0 \text{ (не может быть по определению)}$$

Индексы r являются натуральными числами $\implies$ каждому рациональному числу можно поставить в соответствие натуральное число.

Ч.т.д.

Множества, эквивалентные множеству N, называются счётными.

Утверждение: $\forall$ непустое подмножество счётного множества конечно или счётно.
Доказательство: занумеруем все элементы множества, затем перенумируем элементы подмножества в порядке возрастания номеров. Либо элементы закончатся, либо получим счётное подмножество.

Ч.т.д.

Утверждение: счётное объединение счётных множеств счётно.
Доказательство:

$$A_1=\{a_{11}; a_{12}; \dots; a_{1n}\}\text{- счётное}$$
$$A_2=\{a_{21}; a_{22}; \dots; a_{2n}\}\text{- счётное}$$
$$A_3=\{a_{31}; a_{32}; \dots; a_{3n}\}\text{- счётное}$$
$$A=\{a_{11}; a_{21}; a_{12}; a_{13}; a_{22}; a_{31}; a_{32}; \dots\}$$
$$N=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots\}$$

Каждому элементу множества A можно поставить в соответствие натуральное число из множества N.

Ч.т.д.

Несчётные множества.

Теорема 1.2.1

Множество H всех бесконечных наборов из цифр 0 и 1 не является счётным.

Доказательство:

Пусть $h \in H, h = (h_1, h_2, h_3, \dots, h_k, \dots,), h_k = 0$ или 1
Предположим противное. Пусть H - счётное, т.е. $H = \{h^1, h^2, h^3, \dots, h^j, \dots, h^k, \dots\}$

$$h^1 = \{h_1^1, h_2^1, h_3^1, \dots, \dots\}$$

$$h^2 = \{h_1^2, h_2^2, h_3^2, \dots, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$h^j = \{h_1^j, h_2^j, \dots, h_j^j, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$h^n = \{h_1^n, h_2^n, \dots, h_n^n, \dots\}$$

Построим набор $\bar{h} = \{\bar{h_1^1}; \bar{h_2^2}; \dots; \bar{h_j^j}; \dots; \bar{h_n^n}; \dots\}$, где $\bar{h_k^k} = \begin{cases} 0, \text{если } h_k^k = 1 \\ 1, \text{если } h_k^k = 0 \end{cases}$ Очевидно, что $\bar{h} \in H$, т.е. $\bar{h}$ имеет номер, пусть $\bar{h} = h^j$
На j-ом месте h^j имеет элемент h_j^j
На j-ом месте $\bar{h}$ имеет элемент $\bar{h_j^j}$, т.е. $h_j^j = \bar{h_j^j}$
Получили противоречие. Таким образом H не является счётным.

Ч.т.д.

Следствие: множество всех подмножеств счётного множества не является счётным.

Теорема 1.2.2

Множество K всех бесконечных наборов, состоящих из цифр от 0 до 9, не является счётным.

Доказательство: очевидно, что $H \subset K$. Если бы K было счётным, то и H было бы счётным, а это не так.

Ч.т.д.

Множества, эквивалентные множеству вещественных чисел отрезка $[0; 1]$ называются множествами мощности континуума.

1.3. Понятие рационального числа. Понятие вещественного числа.

Рациональными числами будем называть числа вида

$$\frac{p}{q}, p \in Z, q \in N, \text{НОД}(p, q) = 1, 0 = \frac{0}{1}$$

Множество рациональных чисел - Q.

Свойства:

1. $\forall a, b \in Q \mid a < b$ или $a = b$ (правило упорядочивания)
2. $\forall a, b \in Q \; \exists! \; c \in Q \mid c = a + b$ (корректность определения суммы)

3. $\forall a, b \in Q \ \exists! \ d \in Q \mid d = ab$ (корректность определения произведения)
4. $\forall a, b, c \in Q$ если $a < b$, а $b < c \implies a < c$
   $\forall a, b, c \in Q$ если $a = b$, а $b = c \implies a = c$ (транзитивность)
5. $\forall a, b \in Q \mid a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
6. $\forall a, b, c \in Q \mid (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
7. $\exists! \ 0 \in Q \mid \forall a \in Q \ a + 0 = 0 + a = a$ (существование нейтрального элемента по сложению)
8. $\forall a \in Q \ \exists! \ a' \in Q \mid a + a' = a' + a = 0$ (существование обратного элемента по сложению)
9. $\forall a, b \in Q \mid ab = ba$ (коммутативность умножения)
10. $\forall a, b, c \in Q \mid (ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
11. $\exists! \ 1 \in Q \mid \forall a \in Q \ a \times 1 = 1 \times a = a$ (существование нейтрального элемента по умножению)
12. $\forall a \neq 0, a \in Q \ \exists! \ a' \in Q \mid a \times a' = a' \times a = 1$ (существование обратного элемента по умножению)
13. $\forall a, b, c \in Q \ (a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность)
14. если $a < b, c \in Q \implies a + c < b + c$
15. если $a < b, c > 0 \implies ac < bc$
16. $\forall a \in Q \ \exists \ n \in N \mid n > a$ (аксиома Архимеда, или "натуральных чисел бесконечно много")

Вещественные числа

Вещественным или действительным числом называется произвольная бесконечная десятичная дробь вида $\pm a_1, a_2a_3a_4 \dots a_n \dots$
Рассмотрим $0,(9) = 0,9999 \dots \in Q$

$$0,(9) = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = \begin{vmatrix} S & = & \frac{b_1}{1-q} \\ b_1 & = & \frac{9}{10} \\ q & = & \frac{1}{10} \end{vmatrix} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Договоримся, что рациональное число не может содержать в своей записи бесконечное число 9.
Модуль (абсолютная величина) числа $a = \pm a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$ называется число, выраженное той же дробью, что и a, но взятой со знаком "+".

Правила сравнения вещественных чисел

1. Пусть $a = \pm a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$
   $b = \pm b_0, b_1b_2 \dots b_n \dots$
   $a, b \in R$
   Числа a и b называются равными, если перед ними один знак и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n, \dots$
2. Пусть $a \neq b$

- $\forall$ положительное число > 0
- $\forall$ отрицательное число < 0
- $\forall$ положительное число $> \forall$ отрицательного числа
- $a > 0, b > 0$. Будем говорить, что $a > b$, если $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_k > b_k$.
- $a < 0, b < 0$. $a > b$, если $|a| < |b|$; $a < b$, если $|a| > |b|$.

1.4. Ограниченные множества вещественных чисел.

Ограниченные множества

Множество $X \subset R$ ограничено сверху, если $\exists\, M \in R \mid \forall x \in X\ x \leq M$
Множество $X \subset R$ ограничено снизу, если $\exists\, m \in R \mid \forall x \in X\ x \geq m$
Числа M и m называются верхней и нижней гранями множества X соответственно.
Число $\bar{x} \in R$ ($\underline{x} \in R$) называется точной верхней (нижней) гранью множества X, если:

1. $\forall x \in X\ x \leq \bar{x}\ (x \geq \underline{x})$
2. $\forall x' \in R \mid x' < \bar{x}\ \exists\, x_0 \in X \mid x_0 > x'$ ($\forall x' \in R \mid x' > \underline{x}$, $\exists\, x_0 \in X\ x_0 < x'$) (невозможность уменьшить точную грань)
3. (на самом деле 2*): $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \mid \bar{x} - \varepsilon < x_n$
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \mid \underline{x} - \varepsilon > x_n$

Обозначения:

- $\bar{x} = \sup x$ - супремум множества X
- $\underline{x} = \inf x$ - инфинум множества X

Теорема 1.4.1 (принцип полноты Вейерштрасса)

$\forall$ непустое ограниченное сверху (снизу) множество $X \subset R$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

1.5. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.

Леммы

Лемма 1: пусть $a \in R$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q\ \exists\, \alpha, \beta \in Q \mid \alpha \leq a \leq \beta$, причём $\beta - \alpha < \varepsilon$

Доказательство:

Пусть $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \cdots \geq 0$
Пусть $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$. Очевидно, что $\alpha \leq a$.
Положим $\beta = \alpha + \frac{1}{10^n}$

$\beta = a_0, a_1a_2a_3 \dots (a_n + 1)$. Очевидно, что $\beta \geq a$

Замечание:

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q \ \exists \, n \in N \implies | \, 10^n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ (аксиома Архимеда)}$$

$$\beta - \alpha = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

.

Ч.т.д.

Лемма 2: $\forall a, b \in R \ \exists \, \alpha \in Q \mid a < \alpha < b$

Замечание: таких α бесконечно много.

Доказательство:

Пусть $a = a_0, a_1 \dots a_n \dots \geq 0$

Пусть $a = a_0, a_1 \dots a_k 99 \dots 9a_p \dots$ при $a_p \neq 9$

$b = b_0, b_1 \dots b_k \dots, a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_k < b_k \implies a < b$

$\alpha = a_0, a_1 \dots a_k 99 \dots 9(a_p + 1)$.

$a < \alpha$, т.к. $a_p < a_p + 1$

$b > \alpha$, т.к. $a_k < b_k$

Следовательно $a < \alpha < b$

Если $a < 0, b > 0$, то $\alpha = 0, 000 \dots$

Если $a < b \leq 0$, то переходим к модулям.

Ч.т.д.

Лемма 3: пусть $a, b \in R$. Если $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q \mid \exists \, \gamma_1, \gamma_2 \in Q \mid \gamma_1 \leq a \leq \gamma_2$ и $\gamma_1 \leq b \leq \gamma_2$ и $\gamma_1 - \gamma_2 < \varepsilon$, то $a = b$.

Доказательство:

Предположим противное.

Пусть $a \neq b$; пусть для определённости $a < b$. Тогда по лемме 2 $\exists \, \alpha_1, \alpha_2 \in Q \mid a < \alpha_1 < \alpha_2 < b$

Положим $\varepsilon = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$. По условию леммы $\exists \, \gamma_1, \gamma_2 \in Q \mid \gamma_1 \leq a < \alpha_1 < \alpha_2 < b \leq \gamma_2$ и $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$

Отсюда $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2$. Отнимем γ_1.

$$0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \alpha_2 - \gamma_1 < \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 > \varepsilon, \gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$$

Получили противоречие. Следовательно, $a = b$.

Ч.т.д.

Арифметические действия

Суммой чисел $a, b \in R$ называется число $c \in R \mid \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q; \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2; \beta_1 \leq b \leq \beta_2$ выполнено $\alpha_1 + \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 + \beta_2$

Произведением чисел $a, b \in R$ называется число $c \in R \mid \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q; \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2; \beta_1 \leq b \leq \beta_2$ выполнено $\alpha_1 \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 \beta_2$

Замечание: все операции с вещественными числами производятся с погрешностью.

По определению положим: $a \times 0 = 0 \times a = 0$
Пусть $a, b \in R$. Тогда по определению

$$ab = \begin{cases} |a||b|, \text{ если } ab > 0 \text{ (a и b одного знака)} \\ -|a||b|, \text{ если } ab < 0 \text{ (a и b разных знаков)} \end{cases}$$

Свойства вещественных чисел

1. $\forall a, b \in R \mid a < b$ или $a = b$ (правило упорядочивания)
2. $\forall a, b \in R\ \exists!\ c \in R \mid c = a + b$ (корректность определения суммы)
3. $\forall a, b \in R\ \exists!\ d \in R \mid d = ab$ (корректность определения произведения)
4. $\forall a, b, c \in R$ если $a < b$, а $b < c \implies a < c$
   $\forall a, b, c \in R$ если $a = b$, а $b = c \implies a = c$ (транзитивность)
5. $\forall a, b \in R \mid a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
6. $\forall a, b, c \in R \mid (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
7. $\exists!\ 0 \in R \mid \forall a \in R\ a + 0 = 0 + a = a$ (существование нейтрального элемента по сложению)
8. $\forall a \in R\ \exists!\ a' \in R \mid a + a' = a' + a = 0$ (существование обратного элемента по сложению)
9. $\forall a, b \in R \mid ab = ba$ (коммутативность умножения)
10. $\forall a, b, c \in R \mid (ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
11. $\exists!\ 1 \in R \mid \forall a \in R\ a \times 1 = 1 \times a = a$ (существование нейтрального элемента по умножению)
12. $\forall a \neq 0, a \in R\ \exists!\ a' \in R \mid a \times a' = a' \times a = 1$ (существование обратного элемента по умножению)
13. $\forall a, b, c \in R\ (a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность)
14. если $a < b, c \in Q \implies a + c < b + c$
15. если $a < b, c > 0 \implies ac < bc$
16. $\forall a \in R\ \exists\ n \in N \mid n > a$ (аксиома Архимеда, или "натуральных чисел бесконечно много")

Арифметические действия 2. Electric Boogalo

Разностью чисел $a, b \in R$ называется число $c \in R \mid a = c + b$
Покажем, что этому определению удовлетворяет число $c = a + b'$, где b' - обратное к b по сложению.
Действительно $c + b = (a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$
Покажем, что c - единственное.
Пусть $\exists\ d \in R \mid a = d + b$, тогда $c = a + b' = d + b + b' = d + 0 = d$
Т.е. разность определена единственным образом.
По определению $0 - b = 0 + b' = b' = -b$

Пишем, что $b' = 0 - b = -b$
Обозначение: $c = a - b$

Частным чисел $a, b \in R, b \neq 0$ называется число $c \in R \mid a = bc$
Покажем, что этому определению удовлетворяет число $c = ab'$, где b' - обратное к b по умножению.
Действительно $cb = (ab')b = a(b'b) = a \times 1 = a$
Покажем, что c - единственное.
Пусть $\exists\, d \in R \mid a = db$, тогда $c = ab' = (db)b' = d(bb') = d$
Т.е. частное определено единственным образом.
Обозначение: $c = \frac{a}{b}$

2. Теория пределов числовых последовательностей.

2.1. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.

Определение числовой последовательности.

Пусть каждому натуральному $n \in N$ по определённому закону ставится в соответствие действительное число x_n.
Тогда говорят, что определена числовая последовательность.
Обозначение: $\{x_n\}$
$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - элементы последовательности.
Пример: арифметическая прогрессия $x_n = a + d(n-1)$, геометрическая прогрессия $x_n = a \times q^n$.

При $a < b$:

- Множество чисел $x \mid a \leq x \leq b$ называется отрезком $[a; b]$
- Множество чисел $x \mid a < x < b$ называетя интервалом $(a; b)$
- Если $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$, то есть $[a; b)$ или $(a; b]$, то эти множества называются полуинтервалом или полуотрезком.
- Замечание: a, b могут быть ∞ и $-\infty$ и образовывать, например, $(-\infty; \infty)$, $[a, \infty)$ и т.д.

Произвольный интервал $(a; b)$, содержащий точку c $(a < c < b)$ называется окрестностью точки c и обозначается $U(c)$.

Крайне важные определения

Интервал вида $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ называется ε-окрестностью точки c.

Число a называется **пределом** числовой последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) \,\Big|\, \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Говоря по-русски, для любого эпсилон больше нуля существует номер N, зависящий от эпсилон, при котором при любом номере n больше номера N выполняется неравенство: $|x_n - a|$ меньше эпсилон.
Есть такие последовательности, чьих пределов не существует, например,

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n = \nexists$$

Пример: $x_n = \frac{1}{n}$. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$$
$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$1 < n\varepsilon$$
$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}]$$

Проверка:

$$\varepsilon = \frac{1}{10}$$
$$N(0.1) = 10$$
$$x_{10} = \frac{1}{10} \notin \varepsilon\text{-окр.}$$
$$x_{11} = \frac{1}{11} \in \varepsilon\text{-окр.}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{100}$$
$$N(0.01) = 100$$
$$x_{100} = \frac{1}{100} \notin \varepsilon\text{-окр.}$$
$$x_{101} = \frac{1}{101} \in \varepsilon\text{-окр.}$$

Ч.т.д.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся последовательностью. В противном случае - расходящейся.

2.2. Теоремы о сходящихся последовательностях

Теорема 2.2.1

Если $\{x_n\}$ имеет предел, то он единственный.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b, a \neq b$, пусть для определённости $a < b$.
Выберем окрестности точки a и b таким образом, чтобы они не пересекались.
По условию $\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies$ в окрестность точки a попадает ∞-ое число элементов $\{x_n\}$
Вне этой окрестности находится конечное число элементов $\{x_n\} \implies$ в окрестность точки

b попадает конечное число элементов $\{x_n\}$.
Получили противоречие, т.к. $\lim_{n\to\infty} x_n = b \implies$ в окрестности точки b должно быть ∞-ое число элементов $\{x_n\}$.
Отсюда следует, что $a = b$.

Ч.т.д.

Теорема 2.2.2

Если $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ сходится. Тогда существует конечный $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\, N = N(\varepsilon) \,\Big|\, \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Рассмотрим $|x_1 - a| \geq \varepsilon, |x_2 - a| \geq \varepsilon, \ldots, |x_n - a| \geq \varepsilon$
Обозначим $max\{|x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_n - a|\} = d \implies d \geq \varepsilon$
Тогда

$$\begin{cases} \forall n = 1..N \implies |x_n - a| \leq d \\ \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon \leq d \end{cases} \implies \forall N \implies |x_n - a| \leq d$$

$$a - d \leq x_n \leq a + d$$

Отсюда следует, что $\{x_n\}$ ограничена.

Ч.т.д.

Замечание: ограниченность подпоследовательности является необходимым условием, но не является достаточным, т.е. если $\{x_n\}$ ограничена, то она не обязана сходиться.
Пример:

$$\{x_n\} = (-1)^n \Rightarrow -1; 1; -1; 1; \ldots$$

$\{x_n\}$ ограничена, но $\lim_{n\to\infty} x_n = \nexists$
У данной последовательности нет такого элемента, который если окружить окрестностью ("ловушкой"), получится "поймать" все элементы последовательности.

Теорема 2.2.3 (о сохранении знака)

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, то $\exists\, N = N(\varepsilon) \,\Big|\, \forall n > N \implies |x_n| > \frac{a}{2}$
Если $a > 0$, то $x_n > \frac{a}{2}$
Если $a < 0$, то $x_n < \frac{a}{2}$

Доказательство:

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Зафиксируем $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$.

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\, N = N(\varepsilon) \,\Big|\, \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$
$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}$$

a > 0	**a < 0**
$x_n > a - \dfrac{\lvert a\rvert}{2}$	$x_n < a + \dfrac{\lvert a\rvert}{2}$
$x_n > \dfrac{a}{2}$	$x_n < \dfrac{a}{2}$

Ч.т.д.

Теорема 2.2.4

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$ и $\forall n \in N\ x_n \le y_n$, то $a \le b$.

Доказательство:

Предположим противное.
Пусть $a > b$. Зафиксируем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$.
Т.к. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то для $\varepsilon = \frac{a-b}{2}\ \exists N_1 \Bigm| \forall n > N_1\ |x_n - a| < \varepsilon$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Т.к. $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то для $\varepsilon = \frac{a-b}{2}\ \exists N_2 \Bigm| \forall n > N_2\ |y_n - b| < \varepsilon$

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N$

$$y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} =$$
$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < x_n$$
$$y_n < x_n$$

Получили противоречие. Таким образом, $a \le b$.

Ч.т.д.

Следствие: если $\{x_n\}$ - сходящаяся подпоследовательность и $\forall n \in N\ x_n \in [a;b]$, то её предел $\in [a;b]$

Доказательство:

$\forall n\ a_n \le x_n \le b_n$
Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.
Рассмотрим $\{a_n\}$. Её элементы: $a; a; a; a; \ldots$
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$
$\forall n\ a_n \le x_n \implies a \le c$ (по теореме 2.2.4).
Аналогично $c \le b$. Следовательно, $a \le c \le b$.

Ч.т.д.

Теорема 2.2.5 ("теорема о двух милиционерах")

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = a$ и $\forall n \in N\ x_n \le z_n \le y_n$, то $\lim_{n\to\infty} z_n = a$

Доказательство:

Зафиксируем ε.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \exists N_1 \bigm| \forall n > N_1 \; a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a \implies \exists N_2 \bigm| \forall n > N_2 \; a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N$

$$a-\varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a+\varepsilon$$

$$a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

Ч.т.д.

Теорема 2.2.6

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$

Доказательство:

$$|a-b| \geq \bigl||a|-|b|\bigr|$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ то } \exists N \bigm| \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\varepsilon > |x_n - a| \geq \bigl||x_n| - |a|\bigr| \implies \bigl||x_n| - |a|\bigr| < \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$$

Ч.т.д.

2.3. Арифметические действия с последовательностями, имеющими конечный предел

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$.
Все описанные в параграфе действия можно применять только для сходящихся последовательностей.
Для доказательств действий часто применяется неравенство треугольника:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Теорема 2.3.1

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

Доказательство:

Докажем для "+", т.е. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
Зафиксируем $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\exists N_1 \bigm| \forall n > N_1 \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \bigm| \forall n > N_2 \implies |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2\}$
Тогда $\forall n > N$

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

$$|x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т.е. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

Ч.т.д.

Теорема 2.3.2

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$$

Доказательство:

$\lim_{n\to\infty} y_n = b \implies \{y_n\}$ - сходящаяся $\implies \{y_n\}$ - ограничена (по т. 2.2) $\implies \exists M \mid |y_n| \leq M$, причём выберем M таким образом, чтобы $|a| \leq M$.

$$\exists\, N_1 \mid \forall n > N_1 \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\exists\, N_2 \mid \forall n > N_2 \implies |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Рассмотрим $|x_n y_n - ab|$

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| =$$

$$|y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \leq M \times \frac{\varepsilon}{2M} + M \times \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$$

Ч.т.д.

Теорема 2.3.3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

Доказательство:

$$\Big|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\Big| = \Big|\frac{x_n b - a y_n - ab + ab}{y_n b}\Big| = \Big|\frac{b(x_n - a) - a(y_n - b)}{y_n b}\Big| \leq$$

$$\Big|\frac{x_n - a}{y_n}\Big| + \Big|\frac{(y_n - b)a}{y_n b}\Big| = \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|a||y_n - b}{|y_n||b|}$$

По теореме о сохранении знака $\forall n > N_1$

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}$$

$$\frac{1}{|y_n|} > \frac{2}{|b|}$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \forall n > N_2 \; |x_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{4}$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n\to\infty} y_n = b \implies \forall n > N_3 \; |a||y_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{4}$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2, N_3\}$. Тогда $\forall n > N$:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon|b|}{4} \times \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon|b|^2}{4} \times \frac{2}{|b||b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

Ч.т.д.

Замечание: пределы в левых частях равенств могут существовать без существования пределов $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$

Пример:

$$x_n = (-1)^n \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \nexists$$

$$y_n = (-1)^{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \nexists$$

Как **НЕЛЬЗЯ:**

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = \nexists + \nexists = \nexists$$

Как правильно:

$$x_n + y_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = \{0; 0; 0; \dots\} \implies \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 0$$

2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Леммы о бесконечно малых последовательностях

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N = N(\varepsilon) \; \Big| \; \forall n > N \implies |\alpha| < \varepsilon$$

Утверждение: для того, чтобы $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, $\{\alpha_n\}$ - беск. малая последовательность.
Последовательность B_n называется бесконечно большой, еслии $\lim_{n\to\infty} B_n = \pm\infty$.
Говорят: $\{B_n\}$ стремится к бесконечности.

$$\forall M > 0 \; \exists \; N = N(M) \; \Big| \; \forall n > N \implies |B_n| > M$$

Лемма 1: сумма конечного числа беск. малых последовательностей является беск. малая последовательность.
$\alpha_n^1, \alpha_n^2, \dots, \alpha_n^k \to 0$

Доказательство:

Рассмотрим $\alpha_n = \alpha_n^1 + \dots + \alpha_n^k$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n^1 + \dots + \alpha_n^k) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n^1 + \dots + \lim_{n\to\infty} \alpha_n^k = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \implies \alpha_n \text{ - беск. малая последовательность.}$$

Ч.т.д.

Лемма 2: произведение беск. малой последовательности на ограниченную последовательность есть беск. малая последовательность.
$\alpha_n^1 \times x_n \to 0$

Доказательство:

Пусть $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N = N(\varepsilon) \, \Big| \, \forall n > N \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Т.к. $\{x_n\}$ ограничена, то $\exists M \; \forall n \; |y_n| \leq M$

$$|x_n y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon$$

Ч.т.д.

Пример:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Хоть $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$, но эта последовательность ограничена, а следовательно может быть одним из множителей.

Лемма 3: произведение конечного числа беск. малых последовательностей есть беск. малая последовательно

Доказательство:

Рассмотрим $\alpha_n = \alpha_n^1 \times \alpha_n^2 \times \cdots \times \alpha_n^k$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n^1 \times \alpha_n^2 \times \cdots \times \alpha_n^k) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n^1 \times \cdots \times \lim_{n\to\infty} \alpha_n^k = 0 \times \cdots \times 0 = 0$$

$\{\alpha_n\}$ - беск. малая последовательность, т.к. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Ч.т.д.

Определённые выражения

Обозначим:

- 0 - беск. малая величина
- ∞ - беск. большая величина
- a - конечная величина

Примеры определённых выражений:

$$\frac{a}{0} \to \infty; \frac{0}{a} \to 0; \frac{0}{\infty} \to 0; \frac{\infty}{0} \to \infty; \frac{a}{\infty} \to 0; \frac{\infty}{a} \to \infty; \ldots$$

Неопределённые выражения

Пример:

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

1. Пусть $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$
2. Пусть $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{n}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
3. Пусть $x_n = \frac{a}{n}, y_n = \frac{1}{n}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty} a = a$$
4. Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, y_n = \frac{1}{n}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$$

Виды неопределённостей:
$$\left[\frac{0}{0}\right];\left[\frac{\infty}{\infty}\right];[0\times\infty];[\infty-\infty];[1^\infty];\left[\infty^0\right];\left[0^0\right]$$

Замечание: при нахождении предела посл-ти используется выражение "раскрыть неопределённость".

2.5. Монотонные последовательности

Последовательность называется неубывающей, если $\forall n \in N\ x_n \leq x_{n+1}$.
Последовательность называется возрастающей, если $\forall n \in N\ x_n < x_{n+1}$.
Последовательность называется невозрастающей, если $\forall n \in N\ x_n \geq x_{n+1}$.
Последовательность называется убывающей, если $\forall n \in N\ x_n > x_{n+1}$.
Невозрастающие, неубывающие, возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными

Рассмотрим неубывающую посл-ть: $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$
Данная последовательность всегда ограничена снизу.

Теорема 2.5.1

Если неубывающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она сходится.

Доказательство: так как $\{x_n\}$ ограничена сверху, то $\exists \bar{x} = \sup\{x_n\}$
Докажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$
Т.к. $\bar{x}$ - точная верхняя грань, то
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : x_n \leq \bar{x}\ \bar{x} - \varepsilon < x_n$$
Кроме того, по условию $\{x_n\}$ неубывающая, то есть
$$\forall n > N\ x - \varepsilon < x_n \leq x_n \leq \bar{x} < x + \varepsilon \implies |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$
$$\text{т.е. } \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$$

Замечание: аналогичную теорему можно сформулировать и доказать для убывавющей, возрастающей и невозрастающей последовательности.
Следствие: для того, чтобы монотонная последовательность сходилась $\Leftrightarrow$, чтобы $\{x_n\}$ была ограниченой.

2.6. Число e.

Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \qquad (1)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n, 0! = 1$$

Докажем формулу бинома Ньютона методом математической индукции:

1. База индукции.
   При $n = 1$ должно выполняться равенство $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{1-k}$
   $a + b = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0$
   $a + b = b + a$

2. Преположение индукции.
   Пусть при $n = m$ верно равенство $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}$

3. Шаг индукции.
   Докажем справедливость равенства для $n = m+1$, т.е докажем, что $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m-1-k}$
   Доказательство:
   Замечание: $C_m^{k+1} + C_m^k = \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)} + \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}(\frac{1}{m-k+1} + \frac{1}{k}) = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}(\frac{k+m-k+1}{(m-k+1)k}) = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}(\frac{m+1}{(m-k+1)k}) = \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} = C_{m+1}^k$

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m \times (a+b) = (\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}) \times (a+b) =$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} = \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} a^k b^{m-(k-1)} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} =$$

$$C_m^m a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} + C_m^0 a^0 b^{m+1} =$$

$$a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^{k-1} + C_m^k) a^k b^{m-k+1} =$$

$$a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1} = a^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k}$$

Ч.т.д.

Рассмотрим последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$

1. Покажем, что эта посл-ть ограничена снизу.

$$
\begin{gathered}
x_n = (1+\frac{1}{n})^n = \\
= C_n^1 * 1^{n-1} \times (\frac{1}{n})^1 + C_n^2 \times 1^{n-2} * (\frac{1}{n})^2 + \dots + C_n^n \times 1^0 \times (\frac{1}{n})^n = \\
= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \times \frac{1}{n^2} + \dots + \\
+ \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{1}{n^k} + \dots + \\
+ \frac{1}{n!} n(n-1)\dots(n-n+1)\frac{1}{n^n} \geq 2, \forall n
\end{gathered}
$$

   Значит x_n ограничена снизу.

2. Докажем, что x_n ограничена сверху.
   Замечание: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ (упр. - доказать методом мат. индукции)

$$
x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} \times 1 + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3
$$

3. Докажем, что $\{x_n\}$ является возрастающей.

$$
\begin{gathered}
x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n+1}) + \dots + \\
\frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n+1})\dots(1 - \frac{k-1}{n+1}) + \dots + \\
\frac{1}{(n+1)!}(1 - \frac{1}{n+1})\dots(1 - \frac{n}{n+1})
\end{gathered}
$$

   $x_n < x_{n+1}$, т.к. у x_{n+1} на одно положительное слагаемое больше и каждое соответствующее слагаемое у x_{n+1} больше, чем у x_n.
   То есть, x_n - возрастающая. То есть по теореме 2.5.1 $\exists \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.7182$

2.7. Принцип вложенных отрезков.

Теорема 2.7.1

Пусть задана послед-ть отрезков $S_n = [a_n; b_n], \forall n \in N$, вложенных друг в друга, т.е. $S_{n+1} \subset S_n$ с длинами, стремящимися к нулю ($\alpha_n = b_n - a_n \to_{n\to\infty} 0$). Тогда $\exists$ и притом единственная точка c, одновременно принадлежащая всем отрезкам S_n ($c \in S_n$).

Доказательство:
$S_2 \subset S_1$
$S_3 \subset S_2$
$\vdots$

$\vdots$

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_m, \forall m \in N$
Т.е. $\{a_n\}$ неубывающая и ограничена сверху $\implies$ по теореме 5.1 $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = c$
$a_n < c < b_m, \forall m, n \in N$ ($a_n < c$ т.к. c - грань; $c < b_m$ т.к. $c = \sup\{a_n\}$)
Например, $a_n < c < b_n$. То есть $\exists c \in S_n, \forall n$.

Докажем единственность методом от противного:
Пусть $\exists$ точка $c_1 \in S_n, \forall n$. Тогда $a_n < c, c_1 < b_n$. Пусть для определённости $c < c_1$.
Рассмотрим $b_n - a_n > c_1 - c$. Рассмотрим $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \neq 0$. Это противоречит условию теоремы о стремлении к нулю.
Точка c - единственная.

Ч.т.д.

2.8. Подпоследовательность. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Пусть задана $\{x_n\}$ - последовательность. Выберем из неё бесконечное множество элементов с номерами $n_1 < n_2 < \dots$. Полученная последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательно $\{x_n\}$. Таких подпоследовательностей можно извлечь бесконечно много из искомой последовательности.

Утверждение: если $\{x_n\}$ сходится, то все $\{x_{n_k}\}$ будут сходится и $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n, \forall k \in N$.
Утверждение: если $\{x_n\}$ беск. большая, т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, то все $\{x_{n_k}\}$ будут являться беск. большими.
Утверждение: если $\{x_n\}$ неограничена, то из неё можно извлечь беск. большую.
Вопрос? если $\{x_n\}$ ограничена...

Теорема 2.8.1 (Больцано-Вейерштрасса)

Из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: т.к. $\{x_n\}$ ограничена, то $\forall n, x_n \in [a_0; b_0]$.
Выберем произвольно какой-либо элемент последовательности $\{x_n\}$. Пусть его номер - n_1. Очевидно, что $x_{n_1} \in [a_0; b_0]$. Разделим отрезок $[a_0; b_0]$ на два равных отрезка. Тогда по крайней мере на одном из них (обозначим его $[a_1; b_1]$) окажется беск. много элементов посл-ти $\{x_n\}$. Поэтому среди них найдется элемент с номером $N > n_1$. Обозначим его n_2 ($x_{n_2} \in [a_1; b_1] \subset [a_0; b_0], b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$).
Разделим отрезок $[a_1; b_1]$ на два равных отрезка. Обозначим $[a_2; b_2]$ отрезок с ∞ числом элементов x_n. Выберем элемент с номером $N > n_2$. Обозначим его n_3 ($x_{n_3} \in [a_2; b_2] \subset [a_1; b_1], b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$).
Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$[a_k; b_k] \subset [a_{k-1}; b_{k-1}], k = 1, 2, \dots$$

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}, k = 0, 1, 2, \dots$$
$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = [\frac{a}{\infty}] = 0$$

То есть получили систему вложенных отрезков $[a_k; b_k]$ с длинами, стремящимися к 0.
Тогда по теореме 2.7.1:
$\exists!$ точка c, принадлежащая всем отрезкам.
$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c$, т.к. $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$.
То есть по теореме 2.2.5 (о двух милиционерах) $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$

2.9. Частичные пределы

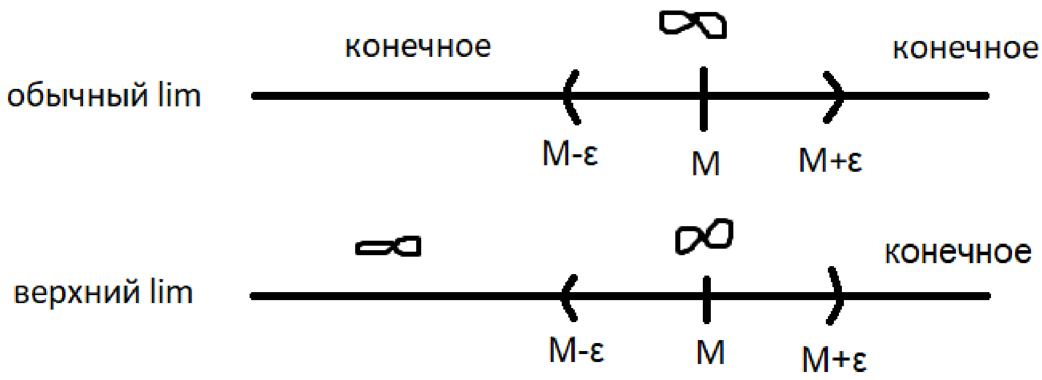
Пусть x_n - произвольная последовательность.
x_n:

- сходящиеся - все подпоследовательности сходятся к одному и тому же числу.
- расходящиеся:
  - стремящиеся к бесконечности - все подпоследовательности будут стремиться к ∞
  - не имеющие предела:
    - неограниченные - можно извлечь беск. большую последовательность.
      Пример: $\{1; 2; 1; 3; 1; 4; \dots\}$
    - ограниченные - можно извлечь сходяющуюся подпоследовательность.
      Пример: $(-1)^n = \{-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots\}$

Если x_n ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса можно рассматривать различные сходящиеся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$.
Пределы сходящихся подпоследовательности, извлечённых из ограниченной последовательности, называются **частичными пределами**.
Верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется число M (конечное, $\pm\infty$), обладающее свойствами:

1. $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \Big| \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = M$.
2. $\forall \{x_{n_k}\} \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq M$.
   Обозначение: $M = \overline{\lim}_{k\to\infty} x_n$.
   Замечание: если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_n = \infty$.
   Замечание: если $\{x_n\}$ сходящаяся и $\lim_{n\to\infty} x_n = M$, то $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_n = M$.

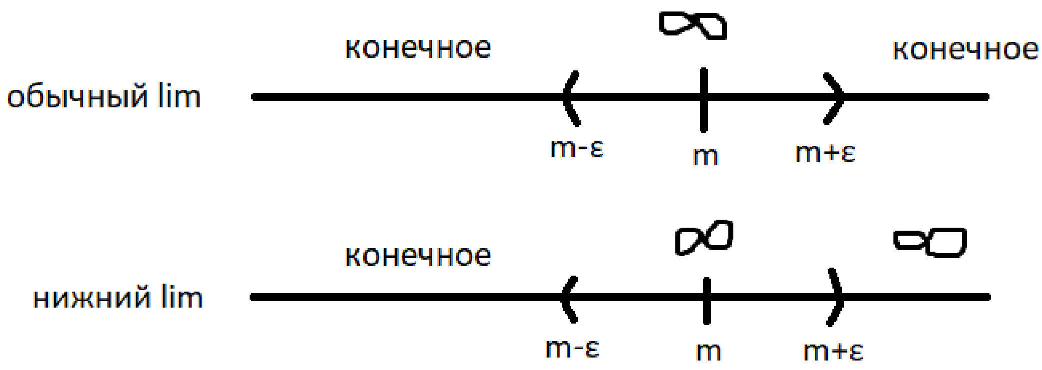
Разница между обычным пределом (единственным) и верхним пределом



Левее $M - \varepsilon$ в случае "обычного" предела находятся конечное число элементов x_n, а в случае верхнего предела - ∞ число элементов x_n.
Нижним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется число m (конечное, $\pm\infty$):

1. $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \Big| \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = m$.
2. $\forall$ сходящейся $\{x_{n_k}\}$ $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \geq m$.
   Обозначение: $m = \underline{\lim}_{k\to\infty} x_n$.
   Замечание: если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\underline{\lim}_{k\to\infty} x_n = -\infty$.
   Замечание: если $\{x_n\}$ сходящаяся и $\lim_{n\to\infty} x_n = m$, то $\underline{\lim}_{k\to\infty} x_n = m$.

Разница между обычным пределом (единственным) и нижним пределом



Разница между "обычным" пределом и нижним пределом заключается в том, что правее $M + \varepsilon$ в случае "обычного" предела находятся конечное число элементов x_n, а в случае нижнего предела - ∞ число элементов x_n.
Очевидно, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел (конечный, $\pm\infty$) $\Leftrightarrow$ чтобы $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. В этом случае $\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

2.10. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если она удовлетворяет условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \, \Big| \, \forall n > n_0, \forall m > n_0 \, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \, \Big| \, \forall n > n_0, \forall p > 0 \, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Леммы о фундаментальных последовательностях

Лемма 1: если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то она фундаментальная.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся.
Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N = N(\varepsilon) \, \Big| \, \forall n > N \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $m > N$ и $n > N$. Рассмотрим $|x_m - x_n|$.

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \le |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т.е. $\{x_n\}$ - фундаментальна.

Ч.т.д.

Лемма 2: если последовательность фундаментальна, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальна. Тогда по условию Коши

$$\exists \, n_0 \, \Big| \, \forall m, n > n_0 \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Зафиксируем $m = n_0 + 1$. Получим $|x_n - x_{n_0+1}| < \varepsilon$.

$$-\varepsilon < x_n - x_{n_0+1} < \varepsilon$$
$$x_{n_0+1} - \varepsilon < x_n < x_{n_0+1} + \varepsilon$$

Обозначим $d = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, |x_{n_0+1} + \varepsilon|\}$.
Тогда

$$\forall n \in N \Rightarrow -d \le x_n \le d$$

То есть $\{x_n\}$ ограничена.

Ч.т.д.

Лемма 3: если некоторая подпосл-ть фундаментальной посл-ти сходится, то предел этой подпосл-ти является пределом всей посл-ти.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность. Пусть $\{x_{n_k}\}$ - её сходящаяся подпосл-ть.
Пусть $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$
Зададим $\varepsilon > 0$
По условию Коши

$$\exists \, n_0 \, \Big| \, \forall m, n > n_0 \implies |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Т.к. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, т.е.
$$\exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) \implies |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
Пусть k_0 будет таким, чтобы при $k > k_0 \implies n_k > n_0$

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Ч.т.д.

Теорема 2.10.1 (критерий Коши сходимости числовой посл-ти)

Для того, чтобы посл-ть имела конечный предел $\Leftrightarrow$ чтобы она была фундаментальна.

Доказательство:

Докажем необходимость ($\Rightarrow$).
Пусть посл-ть имеет конечный предел. Тогда по лемме 1 она фундаментальна.

Докажем достаточность ($\Leftarrow$).
Пусть посл-ть фундаментальная. Тогда по лемме 2 она ограничена, следовательно по теореме Больцано-Вейерштрасса можно извлечь сходящуюся подпосл-ть.
Тогда по лемме 3 вся посл-ть будет иметь предел, равный пределу подпосл-ти, т.е. посл-ть сходящаяся.

Ч.т.д.

3. Теория пределов функций. Непрерывность функций в точке и на отрезке.

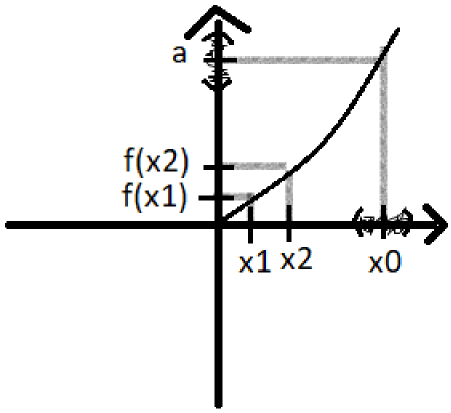
3.1. Функция. Предел функции в точке.

Пусть $E \subset R$. Пусть $\forall x \in E$ по вполне определённому закону ставится в соответствие единственное число y. Тогда говорят, что на множестве E задана **функция** $y = f(x)$.

E - область определения функции.
x - независимая переменная (аргумент функции).
y - зависимая переменная (функция).

Определение предела функции в точке по Гейне (в терминах последовательностей)

Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, быть может за исключением самой точки x_0 (такая окрестность называется выколотой окрестностью) и $\forall\{x_n\} \bigm| \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, порождаемая ею посл-ть $\{f(x_n)\}$ имеет своим пределом точку a, т.е. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.
Запись:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$



<u>Пример:</u>

Рассмотрим такой предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x-1}{x-1}=\left|\begin{array}{c}\text{Пусть } x_n \text{ - произвольная}\\ \lim_{n\to\infty}x_n=0\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n^2+x_n-1}{x_n-1}=$$

$$\frac{\lim_{n\to\infty}(2x_n^2+x_n-1)}{\lim_{n\to\infty}(x_n-1)}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2x_n^2)+\lim_{n\to\infty}x_n-1}{\lim_{n\to\infty}x_n-1}=$$

$$\frac{2\lim_{n\to\infty}x_n\times\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}x_n-1}{\lim_{n\to\infty}x_n-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

Другой пример: доказать, что $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\nexists$

<u>Доказательство:</u>

Выберем $\{x_n\}$ такую, что $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

1. $x_n=\frac{1}{\pi n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi n}\implies\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\frac{1}{\pi n}}=\lim_{n\to\infty}\sin\pi n=0$$

2. $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$

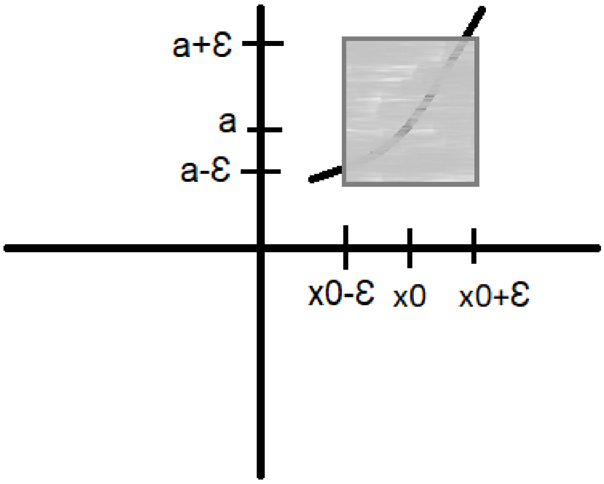
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}=0\implies\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}=\lim_{n\to\infty}\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi n)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=1$$

Поэтому $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\nexists$.

Ч.т.д.

Определение предела функции в точке по Коши

Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, быть может за исключением самой точки x_0 и, если $\forall\varepsilon>0\;\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)\;\big|\;|x-x_0|<\delta\implies|f(x)-a|<\varepsilon$



Если x находятся в δ-окрестности точки x_0, то все значения $f(x)$ располагаются в полосе шириной 2ε.

Теорема 3.1.1

Определения предела функции $f(x)$ в точке x_0 по Гейне и по Коши эквивалентны.

Доказательство:

1. **Докажем Гейне $\to$ Коши**
   Пусть функция имеет предел в точке x_0 в смысле Гейне.
   Предположим противное. Пусть функция $f(x)$ не имеет предел в точке x_0 в смысле Коши. Это значит, что $\exists$ хотя бы одно ε_0, для которого нельзя подобрать нужное δ.
   То есть $\forall\delta$ среди x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ должно найтись хотя бы одно $x = x(\delta) : |f(x(\delta)) - a| \geq \varepsilon$
   Составим последовательность. Выберем $\delta = \frac{1}{k}$ и для каждого k будем искать точку x_k для которой не выполняется определение Коши.
   (a) $k = 1\ \delta = 1\ |x_1 - x_0| < 1 \implies |f(x_1) - a| \geq \varepsilon_0$
   такой x_1 $\exists$
   (b) $k = 2\ \delta = \frac{1}{2}\ |x_2 - x_0| < \frac{1}{2} \implies |f(x_2) - a| \geq \varepsilon_0$
   такой x_2 $\exists$
   (c) $k = 3\ \delta = \frac{1}{3}\ |x_3 - x_0| < \frac{1}{3} \implies |f(x_3) - a| \geq \varepsilon_0$
   такой x_3 $\exists$

   То есть $\forall k > 0\ |x_k - x_0| < \frac{1}{k} \implies \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, но тогда $|f(x_k) - a| \geq \varepsilon_0$, то есть $\lim_{k\to\infty} f(x_k) \neq a$. Получили противоречие, т.к. по Гейне $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$.
2. **Докажем Коши $\to$ Гейне**
   Пусть функция имеет предел по Коши.
   Зададим произвольную последовательность $\{x_n\} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
   Так как определение по Коши выполняется, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |x_n - x_0| < \delta \implies$$
$$|f(x_n) - a| < \varepsilon \implies \lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Ч.т.д.

Предел функции в бесконечно удалённой точки

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, k = k(\varepsilon) : x > k \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

Упр.: уметь расписывать **ВСЕГДА и ВЕЗДЕ**

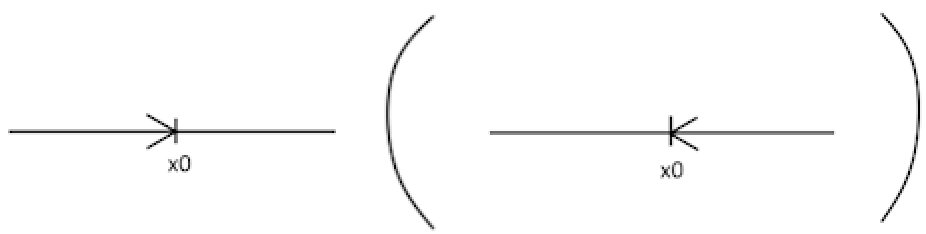
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a; \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty; \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty;$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty;$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Например, распишем последнее. Нужны два параметра. В определении Коши есть δ для x (аргумента) и ε для y (функции).
Т.к. $x \to -\infty$, то мы не можем использовать δ (она используется для малых величин), поэтому введём параметр K вместо δ.
Т.к. $\lim_{x\to-infty} f(x) = -\infty$, то мы не можем использовать ε (он используется для малых величин), поэтому введём параметр M вместо ε.
Тогда определение принимает вид:

$$\forall M > 0 \, \exists \, K = K(M) > 0 : x < -K \implies f(x) < -M$$

3.2. Односторонние пределы

Если значение функции $f(x)$ стремится к числу a по мере стремления x к x_0 со стороны меньших (больших) значений, то число a называют пределом функции $f(x)$ в точке x_0 слева (справа)

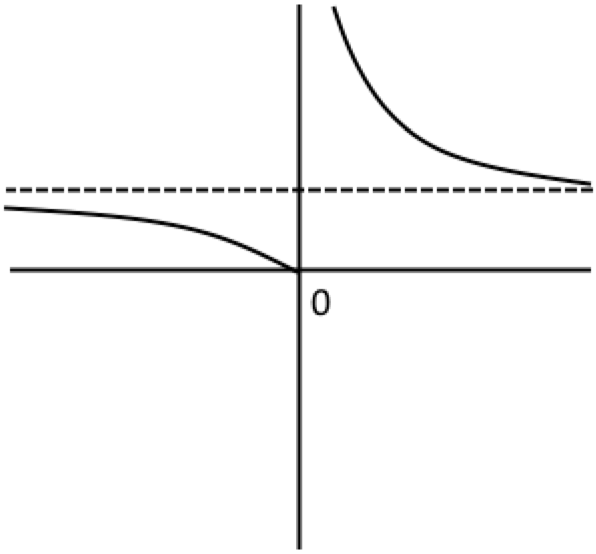


Обозначение:

- предел слева: $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) = a$
- предел справа $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0) = a$

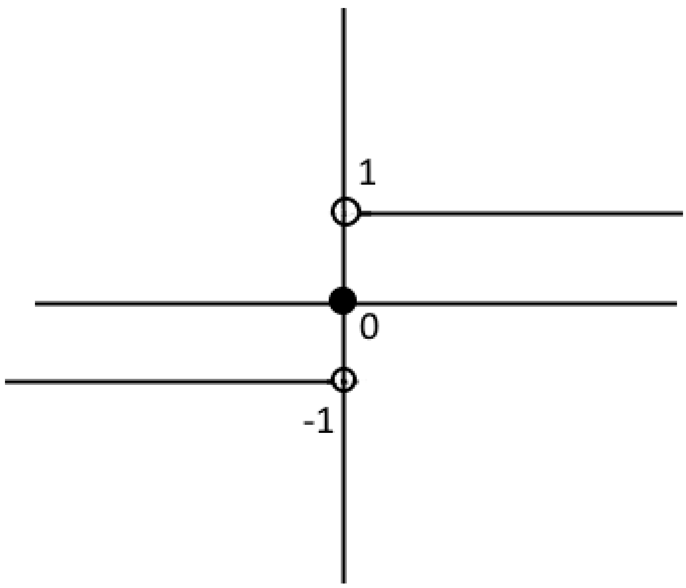
Пример:

$$\lim_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0; \lim_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$$



<u>Пример 2:</u>

$$f(x) = \text{sign}\, x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0-0} \text{sign}\, x = -1; \lim_{x\to 0+0} \text{sign}\, x = 1$$

<u>Утверждение:</u> для того, чтобы существовал обычный двусторонний предел функции в точке $x_0 \Leftrightarrow$ чтобы в этой точке существовали левый и правый односторонние пределы и чтобы они были равны.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

3.3. Свойства пределов функций

Теорема 3.3.1

Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, где a - конечное число, то в некоторой окрестности точки x_0 $f(x)$ ограничена.

Доказательство:

По определению Коши предела функции в точке:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

Ч.т.д.

Теорема 3.3.2 (о сохранении знака)

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 не равный нулю конечный предел a, то $\exists$ окрестность точки x_0 : $\forall x$, принадлежащего этой окрестности, выполняется

$$f(x) > \frac{a}{2}, a > 0$$
$$f(x) < \frac{a}{2}, a < 0$$

Доказательство:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$
Обозначим $U(x_0)$ - окрестность точки x_0
Тогда $\forall x \in U(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon = \frac{|a|}{2}$

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}$$

$$a > 0 \qquad\qquad a < 0$$

$$f(x) > a - \frac{a}{2} \qquad\qquad f(x) < a - \frac{a}{2}$$

$$f(x) > \frac{a}{2} \qquad\qquad f(x) < -\frac{|a|}{2}$$

Ч.т.д.

Теорема 3.3.3

Если $f(x) = c$ (константа), то $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ - уже доказана.

Теорема 3.3.4

Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \lim_{x\to x_0} g(x) = b$ и $\forall x \in R$ из окрестности точки x_0:

$$f(x) \le g(x) \implies a \le b$$

3.4. Непрерывность функции в точке. Разрывы I и II родов.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\lim_{x\to\infty} x) = f(x_0)$$

Т.е. для непрерывности в точке функции множества меняются знаками предела и функции

1. Через прирождение
   $\varDelta x = x - x_0$ - прирождение аргумента
   $\varDelta y = y - y_0$ - прирождение функции
   Функция $f(x)$, направленная в точке x_0, если $\lim_{\delta x=0} \delta y = 0$

2. Определение Гейне
   Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для $\forall$ последовательности $\lim_{x\to\infty} x_n = x_0$
   Порождающая её последовательность $f(x_n)$ $\lim_{n\to\infty} f(x_0) = f(x_0)$

3. Определение Коши
   Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $(\delta - \delta\varepsilon)$

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв II рода, если хотя бы один из пределов (справа или слева) не существует или бесконечен.

Пример 1: рассмотрим при $x \neq 2$

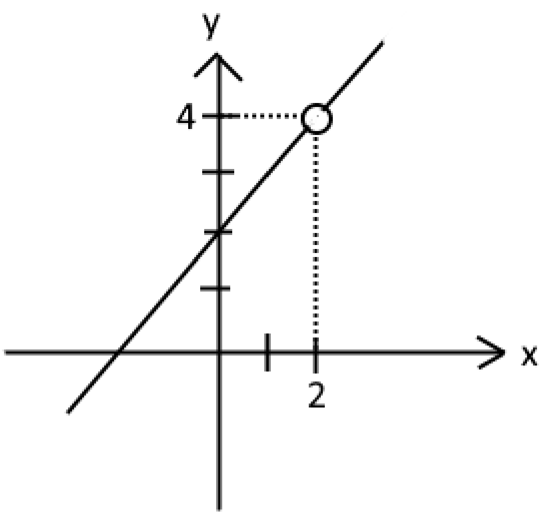
$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$$

$$f(2) = \nexists$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} (x+2) = 4$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = 4$$

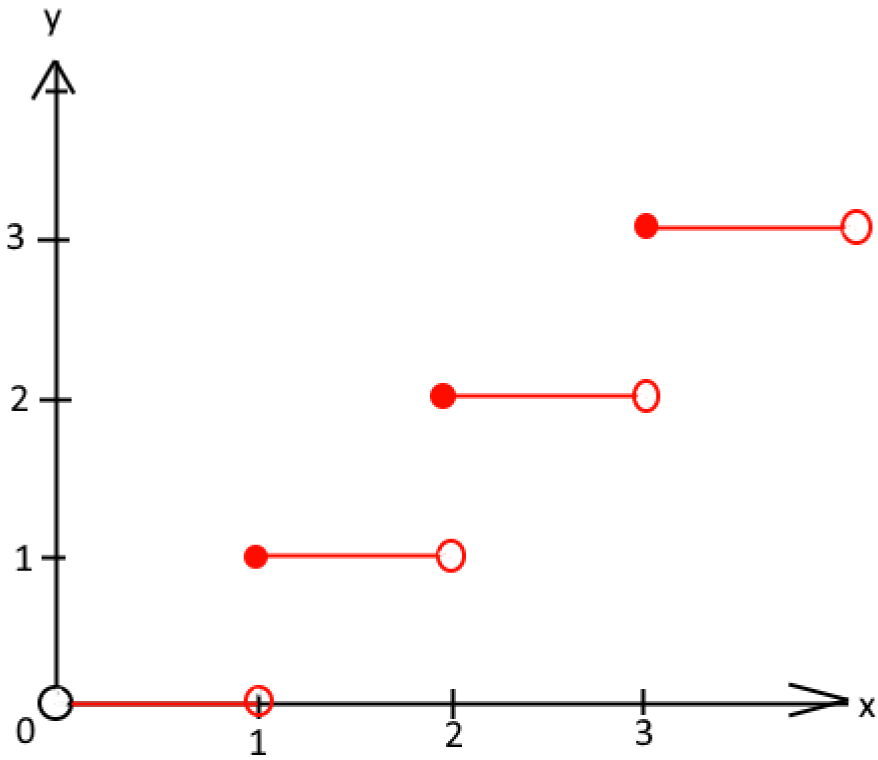


$f(x)$ непрерывна $\forall x \in R$, кроме $x = 2$, где $f(x)$ терпит разрыв I рода устранений.

Замечание: рассмотрим $g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq 2 \\ 4, x = 2 \end{cases}$; $g(x)$ непрерывна $\forall x \in R$

Пример 2: рассмотрим

$$f(x) = [x] \text{ - целая часть } x, x > 0$$

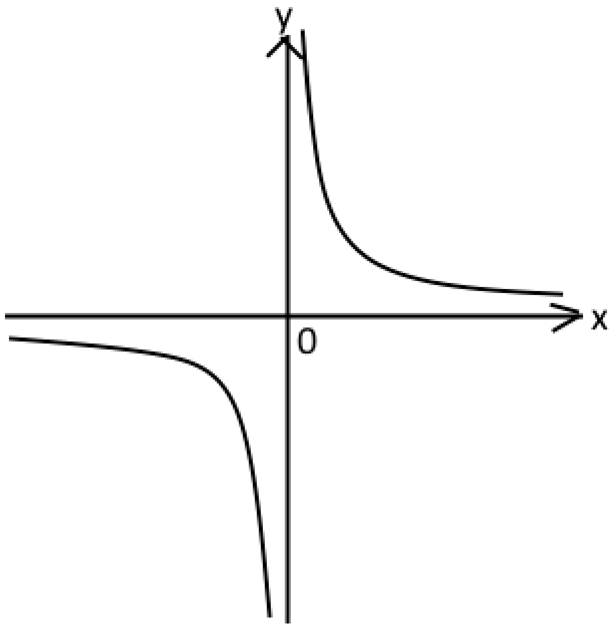


$$f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to 1-0} [x] = 0$$
$$\lim_{x \to 1+0} [x] = 1$$

$\forall x \in N$ $f(x)$ терпит разрыв I рода (скачок), в остальных $x > 0$ $f(x)$ - непрерывна.

Пример 3: рассмотрим

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(0) = \nexists$$
$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty$$

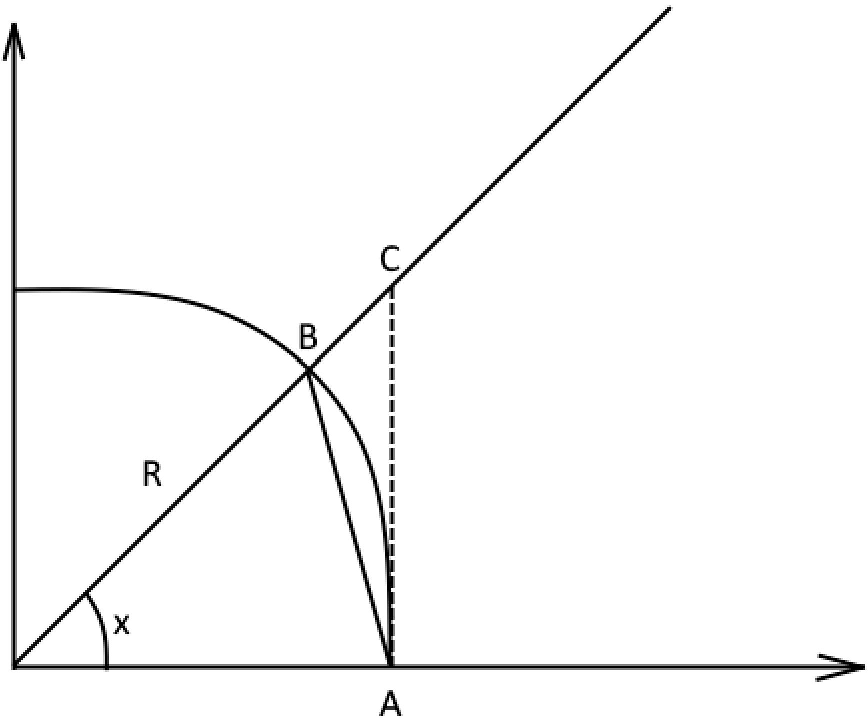
$f(x)$ непрерывна $\forall x \in R$, кроме $x = 0$, где она терпит разрыв II рода.

3.5. Замечательные пределы

Теорема 3.5.1 (I Замечательный предел)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Доказательство:



Рассмотрим в координатной плоскости круг радиуса R с центром в начале координат

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект}OAB} < S_{\triangle OAC}$$
$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$$
$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \,\Big|\, : \sin x \text{ (пусть } \sin x > 0)$$
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
$$\lim_{x\to 0} 1 = 1, \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \implies \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} = 1$$

Замечание: $f(x) = \cos x$ и $\frac{x}{\sin x}$, поэтому неравенство будет выполняться для $\frac{-\pi}{2} < x < 0$

Теорема 3.5.2 (II Замечательный предел)

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$
$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство:

Надо показать, что

$$\lim_{x\to 0-0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Замена:

$$x = \frac{1}{y} \implies \lim_{y\to -\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = \lim_{y\to\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$$

Замечание: будем считать известным фактом, что $\forall n \in N$ верно $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Пусть $x_n \to \infty$ (доказываем по определению Гейне)
Покажем, что $\lim_{x_n\to\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e$. $\{x_n\}$ - произвольная посл-ть: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$
Рассмотрим посл-ть $k_n = [x_n]$ - целая часть x_n.

$$k_n \le x_n < k_n + 1$$
$$\frac{1}{k_n+1} < \frac{1}{x_n} \le \frac{1}{k_n}$$
$$1+\frac{1}{k_n+1} < 1+\frac{1}{x_n} \le 1+\frac{1}{k_n}$$
$$(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n} < (1+\frac{1}{x_n})^{k_n} \le (1+\frac{1}{k_n})^{k_n}$$
$$\text{т.к. } k_n \le x_n < k_n + 1$$
$$(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n} < (1+\frac{1}{x_n})^{k_n} \le (1+\frac{1}{k_n})^{k_n+1}$$

1. $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n+1-1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n+1}(1+\frac{1}{k_n+1})^{-1} = e \times 1 = e$$

2. $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n})^{k_n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n})^{k_n}(1+\frac{1}{k_n})^{1} = e \times 1 = e$$

Тогда $\lim_{x_n\to\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e$ (по теореме о двух милиционерах) Рассмотрим $x_n \to -\infty$.
Замена: $x'_n = -x_n$.
Рассмотрим $\lim_{x_n\to-\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = \lim_{x'_n\to\infty}(1+\frac{1}{-x'_n})^{-x'_n} = e$

Ч.т.д.

3.6. Эквивалентные бесконечно малые функции в точке

Функция $f(x)$ называется беск. малой при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$
Замечание: Функция, которая является беск. м. в одной точке, может не быть беск. б. в другой точке.

Теорема 3.6.1

Сумма и произведения конечного числа беск. м. функция в точке есть функция беск. м. в точке.

Теорема 3.6.2

Произведение беск. м. функции в точке на ограниченную есть беск. м. функция в точке.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ - беск. м. функция в точке $x_0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$
Пусть $g(x)$ - ограничена в окрестности точки x_0 $(u(x_0)) \implies \exists\, M : |g(x)| \le M$
$0 \le |f(x)g(x)| \le M|f(x)|$

По теореме о двух милиционерах так как $\lim_{x\to x_0} 0 = 0$ и $\lim_{x\to x_0} M|f(x)| = M \times 0 = 0$, то $\lim_{x\to x_0} |f(x)g(x)| = 0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

Ч.т.д.

Пример:

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

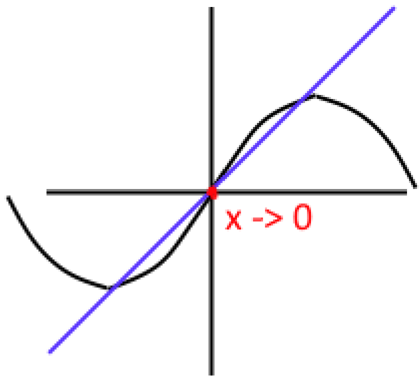
x - беск. м.
$\sin\frac{1}{x}$ - огр.

Эквивалентность беск. м. функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ являются беск. м. функциями в точке x_0. Тогда они называются эквивалентными беск. м. функциями в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \to x_0$
Например, $\sin x \sim x, x \to 0$



Замечание: если $f_1(x) \sim f_2(x), x \to x_0$, а $g_1(x) \sim g_2(x), x \to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_2(x)}$$

При нахождении предела дроби можно заменять на эквивалентные беск. м. или числитель, или знаменатель, или и то, и другое (но не часть числителя или знаменателя).

Так **НЕЛЬЗЯ**:

$$\operatorname{tg} x - \sin x \stackrel{?}{\sim} 0$$

Основные эквивалентности при $x \to 0$

1. $\sin x \sim x$
2. $\operatorname{tg} x \sim x$
3. $\ln(1+x) \sim x$

4. $e^x - 1 \sim x$
5. $a^x - 1 \sim x \ln a$
6. $(1+x)^m - 1 \sim mx$
7. $\arcsin x \sim x$
8. $\operatorname{arctg} x \sim x$
9. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

Доказательство:

1. доказано (I Замечательный предел)
2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \times \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$
4. частный случай пункта 5 $(a = e)$
5. $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \left| \begin{matrix} a^x - 1 = y \\ x \to 0 \implies y \to 0 \\ \ln a^x = \ln(1+y) \\ x \ln a = \ln(1+y) \end{matrix} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$
6. $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{mx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{\ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{mx} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{\ln(1+x)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{mx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{m\ln(1+x)} = \left| \begin{matrix} (1+x)^m - 1 = y \\ x \to 0 \implies y \to 0 \\ (1+x)^m = y + 1 \\ \ln(1+x)^m = \ln(1+y) \\ m\ln(1+x) = \ln(1+y) \end{matrix} \right| =$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$
7. $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{matrix} \arcsin x = y \\ x \to 0 \implies y \to 0 \\ x = \sin y \end{matrix} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$
8. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{arctg} x = y \\ x \to 0 \implies y \to 0 \\ x = \operatorname{tg} y \end{matrix} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \frac{y \cos y}{\sin y} = 1$$
9. $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

3.7. Порядок переменной. Сравнение функций в окрестности заданной точки.

Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные в $u(x_0)$ за исключением быть может самой точки x_0.

x_0 - конечная, $\pm\infty$.
Пусть $g(x) \neq 0\ \forall x \in u(x_0)$.

Если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = 0$, то в этом случае $f(x) = o(g(x))$, (o читается как "o малое"), т.е. $f(x)$ является беск. м. более высокого порядка малости, чем $g(x)$ при $x \to x_0$.

Если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ называются беск. малой одного порядка при $x \to x_0$.

Беск. малая $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет k-ый порядок малости по отношению к $g(x)$ при $x \to x_0$, если $f(x)$ имеет тот же порядок малости, что и $g^k(x)$, т.е. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g^k(x)} = 0$

Теорема 3.7.1

Для того, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)), x \to x_0$

Доказательство:

Докажем необходимость ($\Rightarrow$)

Пусть $f(x) \sim g(x), x \to x_0$. Тогда по определению $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \varepsilon(x)\Big| \times g(x)$$
$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) = g(x) + o(g(x))$$

Докажем достаточность ($\Leftarrow$)

Пусть $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \to x_0$
Например,

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x)\Big| : g(x)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \varepsilon(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Т.е. $f(x) \sim g(x), x \to x_0$.

Ч.т.д.

Функция $f(x)$ называется функцией, ограниченной относительно функции $g(x)$ в $u(x_0)$, если ограничена функция $\frac{f(x)}{g(x)}$, т.е.

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq c \text{ или } |f(x)| \leq c\,|g(x)|$$

В этом случае $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$
$f(x) = O(1), x \to x_0$ = "функция $f(x)$ ограничена.

3.8. Глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$, в точке $x=a$ справа, в точке $x=b$ слева.

Теорема 3.8.1 (I-ая теорема Вейерштрасса)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она ограничена на нём, т.е.

$$\exists M>0:|f(x)|\le M\ \forall x\in[a;b]$$

Доказательство:

Предположим противное. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, но при этом не ограничена на нём.
Составим последовательность x_n следующим образом:

$$\begin{gathered}\exists x_1\in[a;b]:f(x_1)>1\\ \exists x_2\in[a;b]:f(x_2)>2\\ \vdots\\ \exists x_n\in[a;b]:f(x_n)>2\\ \vdots\end{gathered}$$

В результате получили посл-ть $\{x_n\}$. Она ограничена ($\forall n\ x_n\in[a;b]$). По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпосл-ть x_{n_k}
Пусть $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\alpha$
Так как $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по определению $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$
В нашем случае $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\lim_{k\to\infty}x_{n_k})=f(\alpha)$ - конечное число (в силу непрерывности)
Однако $f(\alpha)$ является беск. б. по построению x_n ($f(x_n)$ беск. б.), $f(\alpha)=\infty$.
Получили противоречие, т.е. $f(x)$ ограничена.

Ч.т.д.

Теорема 3.8.2 (II-ая теорема Вейерштрасса)

Среди значений, которые на отрезке $[a;b]$ принимает непрерывная функция, существует наибольшее и наименьшее значения (в том числе может быть и в крайних точках).

Доказательство:

По I-ой теореме Вейерштрасса $f(x)$ ограничена сверху, т.е. $\exists k:f(x)\le k\ \forall x\in[a;b]$
Тогда существует точная верхняя грань $f(x)$ на $[a;b]$. $M=\sup f(x), x\in[a;b]$
Составим вспомогательную посл-ть $\{x_n\}$ на основе свойства $\sup f(x)$.

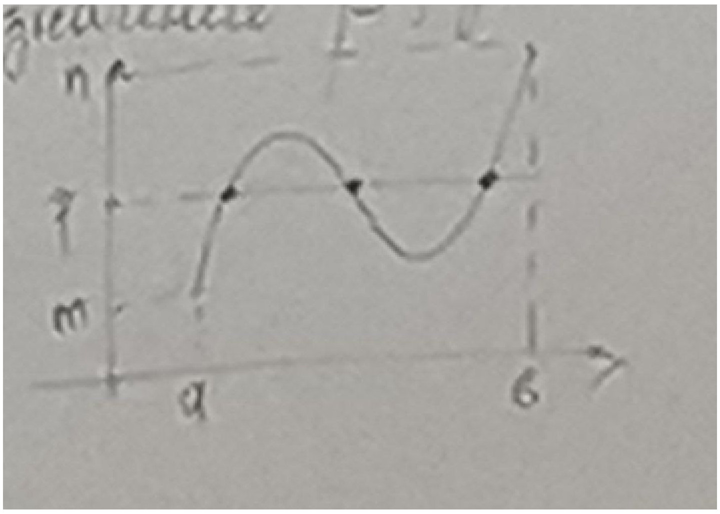
$$\begin{gathered}\exists x_1:M-1<f(x_1)\le M\\ \exists x_2:M-\frac{1}{2}<f(x_2)\le M\\ \vdots\\ \exists x_n:M-\frac{1}{n}<f(x_n)\le M\\ \vdots\end{gathered}$$

$\{x_n\}$ ограничена ($\forall n x_n \in [a;b]$)
Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпосл-ть $x_{n_k}, \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$

1. С одной стороны, $f(x)$ непрерывна на $[a;b] \implies \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(\alpha)$
2. С другой стороны $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$, следовательно
$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le M$$
Т.к. $\lim_{k\to\infty}(M - \frac{1}{n_k}) = M$ и $\lim_{k\to\infty} M = M$, то $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$ (по т. о двух милиционерах), т.е. $f(\alpha) = M$.
$\beta \in [a;b] : f(\beta) = m$

Теорема 3.8.3 (Теорема Больцано-Коши)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $f(a) = m, f(b) = n$, то на интервале $(a;b)$ $f(x)$ по крайней мере один раз принимает значение p, заключённое между m и n.



Доказательство:

Для доказательства надо найти точку ξ, $f(\xi) = p$.
Разобъём отрезок $[a;b]$ на 2 равных отрезка точкой $\frac{a+b}{2}$
Варианты:

1. $f(\frac{a+b}{2}) = p \implies \xi = \frac{a+b}{2}$. **Ч.т.д.**
2. $f(\frac{a+b}{2}) \ne p$. Тогда либо $f(\frac{a+b}{2}) < p$, либо $f(\frac{a+b}{2}) > p$.
В первом случае далее выберем отрезок $[\frac{a+b}{2}; b]$, во втором - $[a; \frac{a+b}{2}]$. Переобозначим выбранный отрезок $[a_1; b_1]$, $f(a_1) < p < f(b_1)$. $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.
Разделим $[a_1; b_1]$ на 2 равных отрезка и выберем тот, на левом конце которого значение функции меньше p, а на правом - больше.
Тогда либо через конечное число шагов мы получим такую точку ξ, либо систему вложенных отрезков $[a_n; b_n], f(a_n) < p < f(b_n), b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to_{n\to\infty} 0$
Тогда по теореме о вложенных отрезках $\exists$ точка ξ, принадлежащая всем отрезкам одновременно

и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$
В точке ξ $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = f(\xi)$$

Тогда по теореме о двух милиционерах:

$$f(a_n) < p < f(b_n) \implies \lim_{n\to\infty} p = f(\xi)$$

Ч.т.д.

Следствие теоремы Больцано-Коши: если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка такая, что значение $f(x)$ в этой точке равно 0.

Замечание: будем считать элементарные функции непрерывными на своей области определения: $\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} \cdots = \operatorname{tg} \lim_{x\to x_0} \ldots$
Замечание: замена неопределённостей может идти по такому принципу

$$u^v \to e^{\ln u * v}$$
$$1^\infty \to [0 \times \infty] \to \begin{cases} \left[\frac{0}{0}\right] \\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \end{cases}$$
$$\infty^0 \to [\infty \times 0]$$
$$0^0 \to [\infty \times 0]$$

3.9. Равномерная непрерывная функция

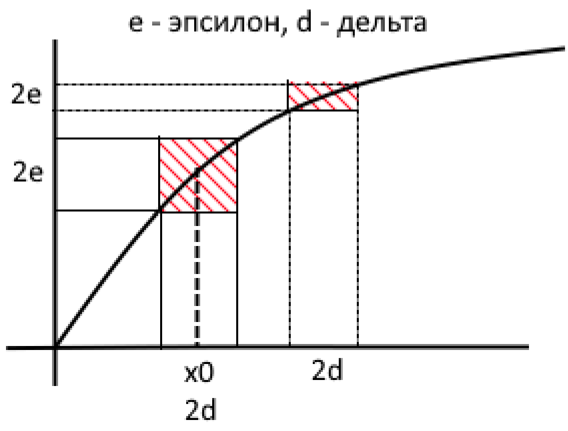
Вспомним определение непрерывности функции в точке по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Зафиксируем ε. Вообще говоря, в каждой точке x существует своё δ, т.е. $\delta = \delta(\varepsilon, x)$.
В связи с этим выделяют класс функций (непрерывных), для которых при фиксированном $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, пригодная сразу для всех x, принадлежащая некоторому X.

Функция, определённая на множестве X, называется **равномерно-непрерывной** на этом множестве, если

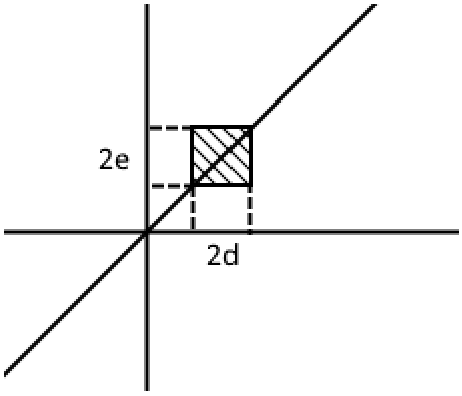
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x', x'' \in X : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$



Примеры:

1. $f(x) = x, x \in R$
   Пусть $x', x'' \in R : |x' - x''| < \delta$

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$$



2. $f(x) = x^2, x \in R$
   Пусть $x', x'' \in R : |x' - x''| < \delta$
   Пусть $x'' = x' + h \implies |x' - x' - h| = |h| < \delta$

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - (x' + h)^2| = |x'^2 - x'^2 - 2x'h - h^2| = |2x'h + h^2|$$

   Так как $x' \in R$, то можно так его выбрать, что $|2x'h + h^2| = \infty \implies$ функция $f(x) = x^2$ не является непрерывной на области своего определения.

Теорема 3.9.1 (Теорема Кантера)

Если функция определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она равномерно-непрерывна на нём.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x', x'' \in [a; b] : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

Зададим последовательность $\delta_n : \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.
Построим две вспомогательные последовательности x'_n и x''_n:

$$\exists \, x'_1, x''_1 : |x'_1 - x''_1| < \delta_1 \implies |f(x'_1) - f(x''_1)| \geq \varepsilon$$

$$\exists \, x'_2, x''_2 : |x'_2 - x''_2| < \delta_2 \implies |f(x'_2) - f(x''_2)| \geq \varepsilon$$

$$\exists \, x'_n, x''_n : |x'_n - x''_n| < \delta_n \implies |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$$

Рассмотрим $\{x'_n\}$: она ограничена. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сх-ся подпосл-ть $\{x'_{n_k}\}$.
Пусть $\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = x_0$
Аналогично м. извлечь $\{x''_{n_k}\}$
Т.к. $|x'_n - x''_n| < \delta_n \implies |x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \delta_{n_k}$
$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x''_{n_k} = x_0$
Так как $f(x)$ непрерывнв на $[a; b]$, то она непрерывна в точке $x_0 \in [a; b]$
Значит $\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0)$
Рассмотрим $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon \quad \circledast$

Перейдем в $\circledast$ к пределу при $k \to \infty$

$$\varepsilon \le |\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k})| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

Получили противоречие, т.к. $\varepsilon > 0 \implies f(x)$ - непрерывна.

Пример: рассмотрим $g = \sin\frac{1}{x}, x \in (0;1)$

На $(0;1)$ y является непрерывна. Покажем, что на $(0;1)$ y не является равномерно-непрерывной функцией.
Рассмотрим x'_n:

$$x'_n = \frac{1}{\pi n}, \lim_{n\to\infty} x'_n = 0, x'_n \in (0;1)$$

Рассмотрим x''_n:

$$x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \lim_{n\to\infty} x''_n = 0, x''_n \in (0;1)$$

Рассмотрим

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = |\sin \pi n - \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)| = 1$$

$$\forall\delta : |x'_n - x''_n| < \delta \implies |f(x'_n) - f(x''_n)| = 1$$

$$\forall\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 \implies \nexists\delta(\varepsilon)$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда $\delta(\varepsilon) = \nexists$.

Ч.т.д.

Замечание: на практике, как правило, функции, которые растут больше, чем $y = x$, не является равн.-непр-ми на $D(f)$.

4. Дифференциальные исчисления функции

4.1. Производная функции в точке

$y = f(x)$
Δx - приращение аргумента
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции

Производной от функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при стремлении последнего к 0.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\sqcup}{dx} f$$

$$y'''' = y^{IV} = y^{(4)}$$

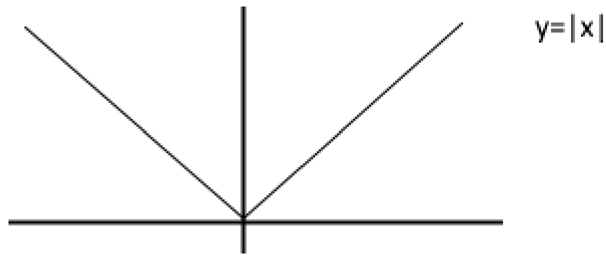
Замечание: для существования производной от $f(x)$ в точке x_0 необходимо, чтобы $f(x)$ была определена в некоторой окрестности x_0 и в самой точке x_0.
Замечание: функция имеет производную в точке x_0, если $\exists \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Замечание: если $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$, то говорят, что функция имеет бесконечную производную в точке.

Если $\Delta x \to 0$ принимает только положительные значения то соответствующий предел называется правой производной от $f(x)$ в точке x_0.

Если $\Delta x \to 0$ принимает только отрицательные значения то соответствующий предел называется левой производной от $f(x)$ в точке x_0.

Функция $f(x)$ имеет производную на $[a;b]$, если она имеет производную во всех точках $(a;b)$, в точке $x = a$ имеет правую производную, в точку $x = b$ - левую.

Утверждение: если $f(x)$ имеет в точке x_0 правую и левую производные, то $f(x)$ имеет в точке x_0 производную.
Утверждение: если правая и левая производные в точке x_0 $\exists$ и не равны между собой, то производная в точке x_0 $\exists$.
Пример:



$$y'\Big|_{x\,=\,0}$$

Правая производная

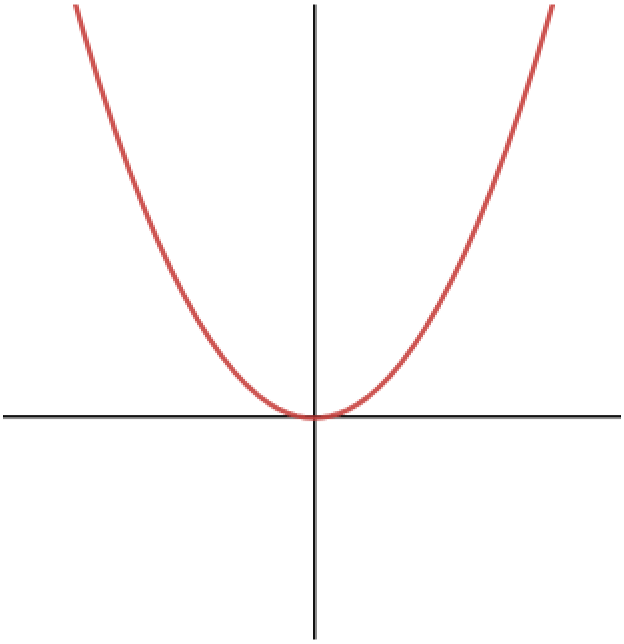
$$y'_+\Big|_{x\,=\,0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \left| \Delta x \to 0 \sim x_0 \to 0 \right| = \lim_{x_0 \to 0} \frac{x_0 - 0}{x_0} = 1$$

Левая производная

$$y'_-\Big|_{x\,=\,0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x_0) - f(0)}{-x_0 - 0} = \left| \Delta x \to 0 \sim x_0 \to 0 \right| = \lim_{x_0 \to 0} \frac{-x_0 - 0}{-x_0} = -1$$

Функция $y = |x|$ не имеет производной в точке 0.

Пример: докажем, что $y = x^2$ имеет производную в точке $x = 0$.



$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2-0}{x-0} = 0$$
$$\lim_{x\to 0-0} \frac{f(-x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x^2-0}{-x-0} = 0$$

В точке $x = 0$ действительно $f'(x) = 0$.

Ч.т.д.

Теорема 4.1.1

Функция, имеющая конечную производную в точке, непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Пусть существует $\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'$ конечное.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f' + \varepsilon(\Delta x),\ \lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

$$\Delta y = f'\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} (f'\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} f'\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon(\Delta x)\Delta x = 0 + 0 = 0$$

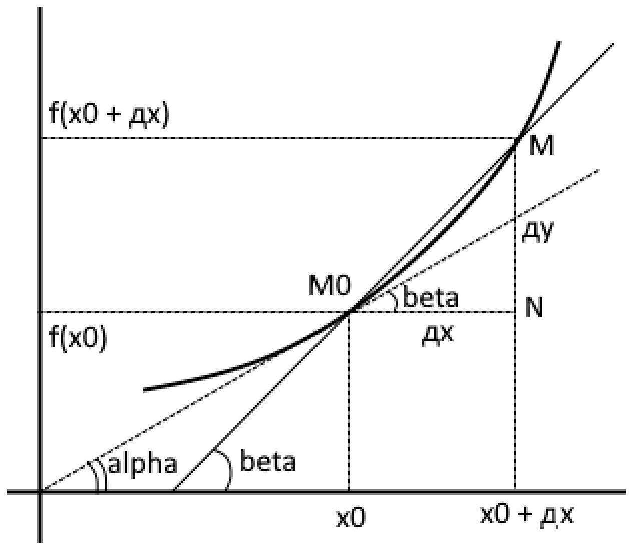
Ч.т.д.

Некоторые приложения производной

1. Мгновенная скорость

   Пусть $S = S(t)$ - закон движения в точке.
   Рассмотрим $[t, t+\Delta t]$: $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$ - путь, пройденный за промежуток времени Δt.
   $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость.
   Мгновенная скорость $v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$
   $a = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ - ускорение.

4.2. Геометрический смысл прооизводной



$$M_0(x_0; f(x_0))$$
$$M(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$$

Запишем уравнение прямой M_0M
Замечание: уравнение прямой, проходящей через точки $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

$$\frac{x-x_0}{x_0+\Delta x-x_0} = \frac{y-f(x_0)}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}$$
$$\frac{x-x_0}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{\Delta y}$$
$$\Delta y(x-x_0) = \Delta x(y-y_0) \; \Big| \; *\Delta x$$
$$y-y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-x_0)$$
$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-x_0)+f(x_0) \; \Big| \; : M_0M$$
$$\operatorname{tg}\angle\beta = \frac{|MN|}{|M_0N|} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда точка M будет стремиться к точке M_0, а угол β к углу α.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ по определению}$$

С другой стороны,
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta = tg\lim_{\Delta x\to 0}\beta = tg\alpha$$
Рассмотрим уравнение секущей при $\Delta x \to 0$

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

- уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Допустим $f'(x_0) = \infty$. Тогда рассмотрим уравнение секущей:

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \; \Big| \; : \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\frac{y}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 + \frac{y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$. Тогда уравнение касательной примет вид $\underline{x = x_0}$.

Замечание: если $L_1 \perp L_2$

$$\begin{matrix} L_1 : y = k_1 x + b_1 \\ L_2 : y = k_2 x + b_2 \end{matrix} \implies k_1 k_2 = -1$$

Прямая, проходящая через точку x_0 перпендикулярно касательной, проведённой в этой точке, называется нормалью к графику функции $f(x)$.

$$K_{\text{н}} = -\frac{1}{K_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0 \text{ (уравнение нормали)}$$

4.3. Производные элементарных функций

1. $y = \mathbb{C} = const$
   $y(x) = \mathbb{C}, y(x + \Delta x) = \mathbb{C}$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbb{C} - \mathbb{C}}{\Delta x} = 0$$

2. $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} * \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2} * 2} = \cos x$$

   Аналогично доказывается, что $(\cos x)' = -\sin x$

3. $y = \log_a x$

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a \left(\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x} * \frac{x}{x}}\right) =$$
$$= \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a} = (log_a x)'$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

4. $y = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ По теореме 4.4.3
$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
Аналогично доказывается, что $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5. $y = a^x$
$x = \log_a y$ - обратная функция.
$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$
$$(a^x)'_x = \frac{1}{(\log_a y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$$

6. $y = \arcsin x$
$x = \sin y$
$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$
$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
Аналогично:
   - $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   - $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
   - $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

7. $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ По теореме 4.5.1
$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} * \alpha * \frac{1}{x} = x^\alpha * \alpha * \frac{1}{x} = \alpha * x^{\alpha - 1}$$

Таблица производных

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

16. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

17. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

4.4. Производная суммы, произведения, частного

Теорема 4.4.1

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$y(x) = u(x) + v(x)$$
$$\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$$

Ч.т.д.

Теорема 4.4.2

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$y(x) = u(x)v(x)$$
$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x} = u'v + uv'$$

Ч.т.д.

Теорема 4.4.3

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x) - u(x)v(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x) - u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x} = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Ч.т.д.

4.5. Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки $x_0 = u(x_0)$, а функция $z = g(y)$ - в некоторой окрестности $v = v(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, причём $f(u) \subset v$.
Тогда определена сложная функция $F(x) = g(f(x))$.

Теорема 4.5.1

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $z = F(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0, причём

$$F(x)\Big|_{x\,=\,x_0} = y'(y)\Big|_{y\,=\,y_0} * f'(x)\Big|_{x\,=\,x_0}$$

Доказательство:

$\Delta x = x - x_0$
$\Delta y = y - y_0$
$\Delta z = g(y) - g(y_0)$
Т.к. функция $g(y)$ имеет производную в точке y_0, то

$$\exists \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y} = g'(y_0)$$

То есть

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = g'(y_0) + \varepsilon(\Delta y)$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\varepsilon(\Delta y) = o\left(g'(y_0) = g'(y)\Big|_{y\,=\,y_0}\right) * \Delta y$$

$$\Delta z = g'(y_0) * \Delta y + \varepsilon(\Delta y) * \Delta y \;\Big|\; : \Delta x$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Замечание: по условию функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда по теореме 4.1.1 $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции, т.е. если $\Delta x \to 0 \implies \Delta y \to 0 \implies \varepsilon(\Delta y) \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)f'(x_0) + 0 * f'(x_0) = g'(y)\Big|_{y = y_0} * f'(x)\Big|_{x = x_0}$$

Ч.т.д.

4.6. Производная обратной функции

Теорема 4.6.1

Если функция непрерывна и возрастает (строго монотонна) в окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ и

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Доказательство:

Замечание 1: если $f(x)$ возрастает и непрерывна в $u(x_0)$, то $f^{-1}(y)$ тоже возрастает и непрерывна на интервале $v = f(u)$
Замечание 2: функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \implies$ при $\Delta x \to 0 \implies \Delta y \to 0$
Замечание 3: т.к. $y = f(x)$ возрастает, то при $\Delta x \neq 0 \implies \Delta y \neq 0$

Рассмотрим

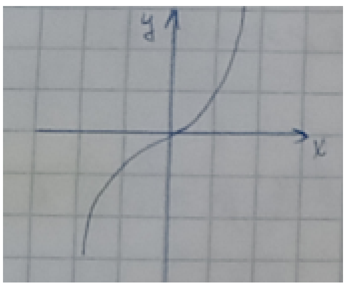
$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \overset{\text{зм 2}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \overset{\text{зм 3}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

Ч.т.д.

4.7. Гиперболические функции и их производные

1. Гиперболический синус

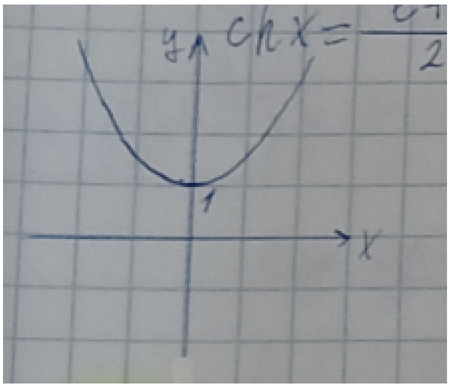
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$D(f) : R$
$E(f) : R$
нечётная, непрерывная, возрастает

2. Гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



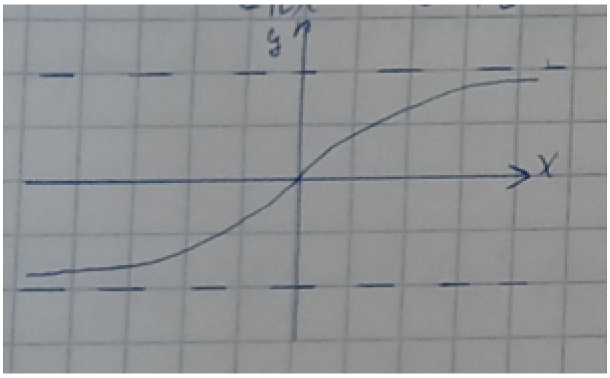
$D(f) : R$

$E(f) : [1; +\infty]$

чётная, непрерывная

3. Гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



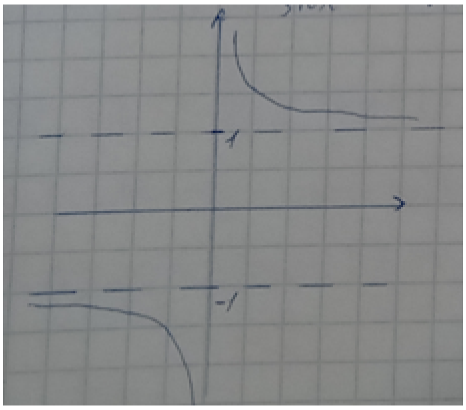
$D(f) : R$

$E(f) : (-1; 1)$

нечётная, непрерывная, возрастающая

4. Гиперболический контангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$D(f) : R\backslash 0$
$E(f) : (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
нечётная, в точке $x = 0$ разрыв II рода

Производные гиперболических функций

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' \overset{\text{аналогично}}{=} -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

4.8. Логарифмическое дифференцирование, производная от функции, заданной неявно, производная от функции, заданной параметрически

1. Производная от функции, заданной неявно
   $y = f(x)$ - явное задание функции
   Пример:
   $3x^4y^3 + 5x^3y^5 - 5 = 0$ - уравнение, определяющее неявно функцию $y = y(x)$
   $(x)' = 1$; $(y)' = y'$

$$3(4x^3y^3 + x^4 * 3y^2 * y') + 5(3x^2y^5 + x^3 * 5y^4 * y') = 0$$

$$y'(9x^4y^2 + 25x^3y^4) = -12x^3y^3 - 15x^2y^5$$

$$y' = \frac{-12x^3y^3 + 15x^2y^5}{9x^4y^2 + 25x^3y^4}$$

2. Производная от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$y = y(x)$

$$y'_x = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} \overset{\text{Th 4.6.1}}{=} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Пример:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$$

$x'_t = -2\sin t$

$y'_t = 2\cos t$

$$y'_x = \frac{2\cos t}{-2\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

3. Логарифмическое дифференцирование

   $y = u(x)^{v(x)}$ - степенно-показательная функция

   (a) Логарифмическое дифференцирование

$$y = u(x)^{v(x)}$$

$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)}$$

$$\ln y = v(x) * \ln u(x)$$

$$\frac{1}{y} * y' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)} * u'(x) \;\Big|\; * y$$

$$y' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln(u(x)) + \frac{v(x)}{u(x)} * u'(x)\right]$$

   (b) Сведение к сложной функции

$$y = u(x)^{v(x)} = \left|a = b^{\log_b a}\right| = e^{\ln u(x) * v(x)}$$

$$y' = e^{\ln u(x) * v(x)} * \left[\frac{1}{u(x)} * u'(x) * v(x) + \ln(u(x)) * v'(x)\right]$$

   (c)

$$\begin{array}{lll} y = u(x) & y = (u(x))^n & y = a^{v(x)} \\ \vdots & y' = n(u(x))^{n-1} * u'(x) & y' = a^{v(x)} * \ln(a) * v'(x) \end{array}$$

$$y' = v(x)u(x)^{v(x)-1} * u'(x) + u(x)^{v(x)} * \ln u(x) * v'(x)$$

4.9. Дифференциуемость функции. Дифференциал, его геометрический и физический смыслы

Функция $y = f(x)$, заданная в $u(x_0)$, называется дифференциуемой в этой точке, если её приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta) - f(x_0)$ представимо в этой окрестности в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta \to 0$, $A = const$

Линейная часть приращения функции $A\Delta x$ называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается $df\Big|_{x = x_0}$ или $df(x_0)$.
Тогда $\Delta y = dy + o(\Delta x)$

Замечание: $o(\Delta x) = o(A\Delta x) = o(dy)$

Тогда $\Delta y = dy + o(dy)| : dy$
$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(dy)}{dy}$
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$
Т.е. $\Delta y \sim dy$ при $\Delta x \to 0$

Теорема 4.9.1 (необходимость и достаточность условия дифференции в точке)

Для того чтобы $f(x)$ была дифференциуема в точке $x_0 \Leftrightarrow$ чтобы в этой точке она имела конечную производную.

Доказательство:

Докажем необходимость ($\Rightarrow$)
Пусть $f(x)$ дифференциуема в точке x_0. Покажем, что $\exists\ f'(x_0)$ - конечное.
Тогда по определению

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$
$$\Delta y = A\Delta x + \varepsilon(\Delta x) * \Delta x$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x)$$
$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$
$$f'(x)|x = x_0 = A = const$$

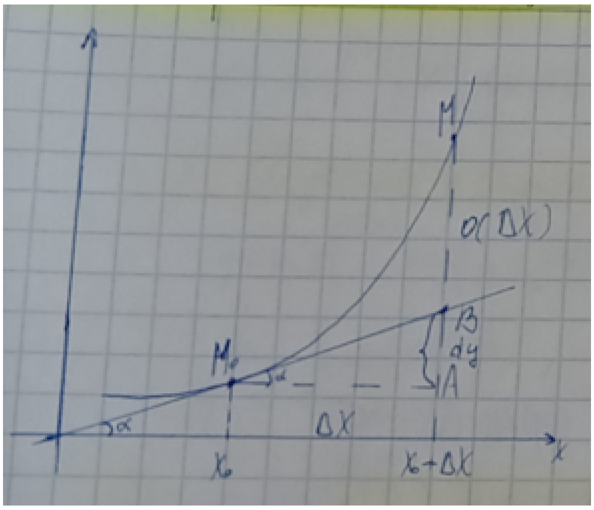
Докажем достаточность ($\Leftarrow$)
Пусть $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, т.е. $\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \epsilon(\Delta x)| * \Delta x$$
$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Ч.т.д.

Замечание: таким образом $df\Big|_{x = x_0} = f'(x_0)\Delta x$

Геометрический смысл дифференциала

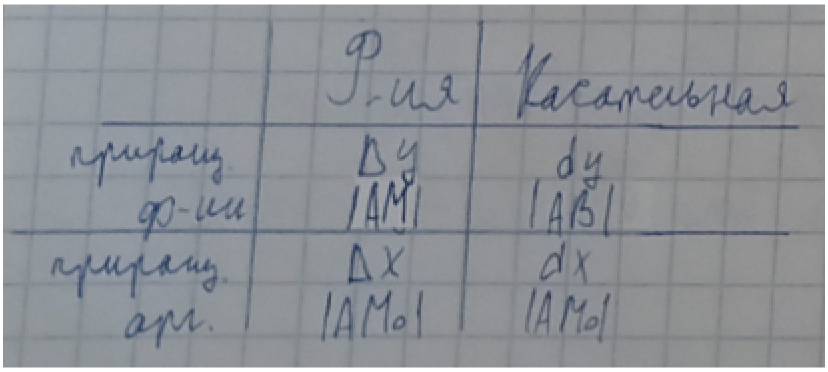


Рассмотрим функцию $y = f(x)$:

$$M_0(x_0, f(x_0))$$
$$M(x_0, \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$$
$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

Рассмотрим ΔABM_0:

$$\operatorname{tg}\alpha = |AB|$$
$$f'(x_0)\Delta x = \Delta y$$
$$|MB| = o(\Delta x)$$



	Ф-ия	Касательная
приращ. ф-ии	Δy $\lvert AM\rvert$	dy $\lvert AB\rvert$
приращ. арг.	Δx $\lvert AM_0\rvert$	dx $\lvert AM_0\rvert$

Отсюда для независимой переменной x: $\Delta x = dx$
Геометрический смысл дифференциала: это есть приращение ординатф касательной, проведённой к графику функции в точке x_0.

<u>Замечание:</u> для функции $y = kx + b$ $dy = \Delta y$ для любых x.
<u>Замечание:</u> $dy = f'(x)\Big|_{x\,=\,x_0} * dx \implies f'(x)\Big|_{x\,=\,x_0} = \frac{dy}{dx}$

Физический смысл диффернциала

$$V_{\text{мгнов}} = S'(t)\Big|_{t\,=\,t_0} = \frac{dS}{dt}$$

$$dS = S'(t)\Big|_{t=t_0} * dt = S'(t)\Big|_{t=t_0} * \Delta t$$

Дифферинциал dS равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за время Δt, начиная с момента времени $t = t_0$, если бы на этом участке пути скорость была бы постоянной и равной $S'(t)\Big|_{t=t_0}$

Свойства дифферинциалов

1. $d(u \pm V) = du \pm dv$
2. $d(uv) = udv + vdu$
3. $d(Cu) = Cdu$
4. $d(\frac{u}{v}) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{vdu-udv}{v^2}$

Доказательство 4-го пункта:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Ч.т.д.

4.10. Примемение дифференциала в приближённых вычислениях. Дифференциал сложной функции

Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0

$\Delta y = dy + o(dx)$
$\Delta y \approx dy$
$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$
$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ **- формула приближённого вычисления функции**.

Пример: $\sin 32°$

Рассмотрим $f(x) = \sin x$
$32 = x_0 + \Delta x = 30 + 2$
$x_0 = 30; \Delta x = 2 = \frac{\pi}{90}$
$f'(x) = const$
$f(30) = \frac{1}{2}$ $f'(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $sin32 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{90} = 0,53$

Дифференцируемость сложной функции

Рассмотрим $y = f(x)$
$z = g(y)$
Получим $F(x) = g(f(x))$

$$F'(x)\Big|_{x=x_0} = g'(y)\Big|_{y=y_0} * f'(x)\Big|_{x=x_0}$$

Рассмотрим

$$dF = F'(x)\Big|_{x = x_0} dx = g'(y)\Big|_{y = y_0} * f'(x)\Big|_{x = x_0} * dx = g'(y)dy$$

Формула показывает, что записи дифференциала посредством независимой переменной x и зависимой переменной y имеет один и тот же вид.
Это свойство называется **инвариантностью** формы записи первого дифференциала.

4.11. Производные дифференциалов высших порядков

Пусть $y = f(x)$ имеет производную $y' = f(x)$ во всех точках некоторой окрестности точки x_0.
Если в свою очередь $f'(x)$ имеет производную $[f'(x)]'\Big|_{x = x_0}$, то она называется второй производной функции $f(x)$ в точке x_0.
Аналогично определяются производные более высоких порядков: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.
Примеры:

1. $y = a^x$
   $y' = a^x \ln a$
   $y'' = a^x \ln^2 a$
   $y^{(n)} = a^x \ln^n a$

2. $y = \sin x$
   $y' = \cos x = \sin(\frac{1\pi}{2} + x)$
   $y'' = -\sin x = \sin(\frac{2\pi}{2} + x)$
   $y^{(n)} = \sin(\frac{n\pi}{2} + x)$

3. $y = \cos x$
   $y^{(n)} = \cos(\frac{n\pi}{2} + x)$

4. $y = \ln x$
   $y' = \frac{1}{x}$
   $y'' = -\frac{1}{x^2}$
   $y''' = \frac{1}{x^3}$
   $\vdots$
   $y^{(n)} = (-1)^{n-1} * \frac{(n-1)!}{x^n}$

5. $y = x^n, n \in N$
   $y' = nx^{n-1}$
   $y'' = n(n-1)x^{n-2}$
   $\vdots$
   $y^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$
   $\vdots$
   $y^{(n)} = n!$

6. $y = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$
   $y^{(n)} = \lambda_1 y_1^{(n)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n)}(x)$

7. $y = uv$
   $y' = u'v + uv'$
   $y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$
   $y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$
   $\vdots$
   $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$ **- формула Лейбница**
   $(k), (n-k)$ - символическая степень (применяем формулу бинома Ньютона, но не возводим в степень, а берём производную)

Производная высшего порядка от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$y'_x = y'_t * t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = A(t)$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (A(t))'_t t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = B(t)$$

$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x = (B(t))'_t t'_x = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$$

$$\boxed{y^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n}} = \frac{(y^{(n-1)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n-1}})'_t}{x'_t}}$$

Производная высшего порядка от функций, заданных неявно

Пример: $x^2 + y^2 = 25$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$x + yy' = 0 \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

$$1 + yy'' + (y')^2 = 0 \qquad y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = f_2(x; y)$$

$$y'y'' + yy'' + 2y'y'' = 0 \qquad y''' = -\frac{3y'y''}{y} = f_3(x; y)$$

Дифференциалы высших порядков

$$y = f(x)$$
$$dy = f'(x)dx$$

Пусть функция $f'(x)$ также дифференциуема в точке x_0 и **величина dx имеет одно и то же фиксированное значение** для $\forall x \in u(x_0)$
Рассмотрим

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'_x dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2$$

$$dx^2 = (dx)^2 \text{ (дэ икс дважды)}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Аналогично дифференциал порядка n называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$ при условии, что $dx = const$, то есть

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = y^{(n)}dx^n \text{ (дэ икс эножды)}$$

Замечание: дифференциалы высших порядков $(n \geq 2)$ не обладают свойством инвариантности формы записи относительно выбора переменных.
Доказательство:

$y = f(x), z = z(y) \qquad z = z(f(x))$ - сложная функция

$$dz = z'_y dy$$

$$d^2z = d(dz) = d(z'_y \underbrace{dy}_{\text{не const}}) = \left| d(uv) = udv + vdu \right| = z'_y d^2y + dyd(z'y) = z'_y d^2y + z''_{yy}dy^2$$

$$z'_y d^2y = 0 \text{ для линейной функции}$$

4.12. Дифференциальные теоремы о среднем

Точка $x = c$ называется точкой локального максимума (минимума) функкции $y = f(x)$, если $\exists u_\delta(c) : (c-\delta; c+\delta)$:

$$f(c) \geq f(x)\ \forall x \in (c-\delta; c+\delta)$$

$$(f(c) \leq f(x)\ \forall x \in (c-\delta; c+\delta))$$

Точка локального максимума (минимума) функции называется точкой локального экстремума.

Теорема 4.12.1 (Ферма)

Если $f(x)$ имеет производную в точке c и достигает в этой точке экстремум, то $f'(c) = 0$

Доказательство:

Пусть точка c - точка локального экстремума.

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Пусть для определённости точка c - точка максимума $(f(c) \geq f(x) \forall x \in (c-\delta; c+\delta))$
Т.к. производная в точке c существует, то существует

$$\left.\begin{matrix} f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0 \\ f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0 \end{matrix}\right\} \text{т.к. } f'(c)\exists \implies f'(c) = 0$$

Ч.т.д.

Замечание: точка, в которой функция достигает экстремальное значение, является внутренней точкой интервала.

Теорема 4.12.2 (Ролля)

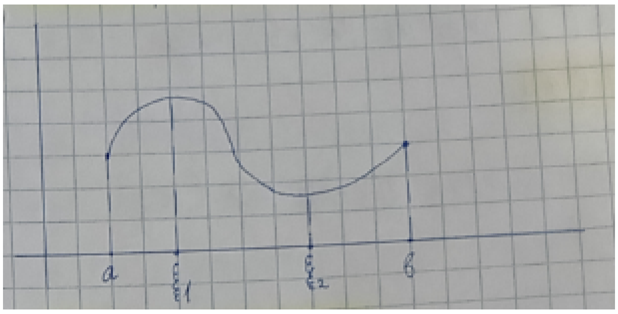
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференциуема на $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда на $(a;b)$ $\exists$ по крайней мере одна точка $\xi \in (a;b) : f'(\xi) = 0$

<u>Доказательство:</u>

1. $f = const$. Тогда $\forall \xi \in (a;b) f'(\xi) = 0$. **Ч.т.д.**
2. $f \neq const$. Тогда по второй теореме Вейерштрасса существуют точки x_1, x_2, в которых функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Причём обе точки x_1 и x_2 не могут быть концами $[a;b]$ одновременно. Т.к. $\underset{x \in [a;b]}{max} f(x) = \underset{x \in [a;b]}{min} f(x) = f(a) = f(b)$ по условию. Тогда $f(x)$ была бы константой, а это не так. Т.е. одна из $x_1, x_2 \in (a;b)$. Обозначим её ξ. По условию $f(x)$ дифференциуема на $(a;b) \overset{\text{Th 4.9.1}}{\Longrightarrow} \exists$ конечная $f'(\xi)$. А так как в этой точке функция принимает наибольшее или наименьшее значение $\implies$ $f'(\xi) = 0$.

Ч.т.д.

Геометрический смысл теоремы Ролля



Теорема 4.12.3 (теорема Коши)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a;b]$, дифференциуемы на $(a;b)$, $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a;b)$. Тогда $\exists$ точка $\xi \in (a;b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

<u>Доказательство:</u>

<u>Замечание:</u> $g(b) \neq g(a)$, так как, если бы это было так, то $g(x)$ удовлетворяла бы условию теоремы Ролля $\implies$ $\exists$ точка $\xi \in (a;b) : g'(\xi) = 0$, а это не так.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * (g(x) - g(a))$$

Т.к. $f(x), g(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и дифференциуемы на $(a;b)$ $\implies$ $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференциуема на $(a;b)$
$F(a) = 0; F(b) = 0$
Т.е. $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля $\implies$ $\exists$ точка $\xi \in (a;b) : F'(\xi) = 0$.
Тогда:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(x)$$

$$F'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(\xi) = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(\xi) = f'(\xi) \,\Big|\, * g'(\xi) \neq 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Ч.т.д.

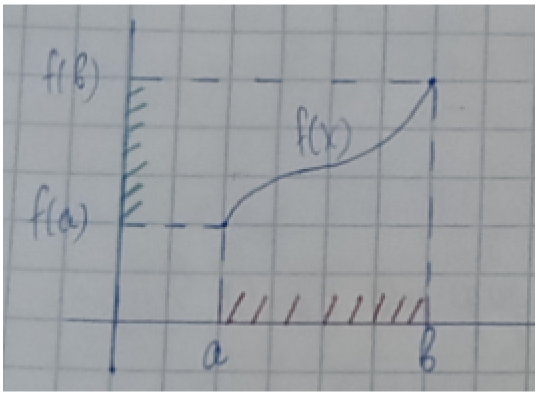
Теорема 4.12.4 (теорема Лагранжа)

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференциуема на $(a; b)$, тогда $\exists$ точка $\xi \in (a; b)$:

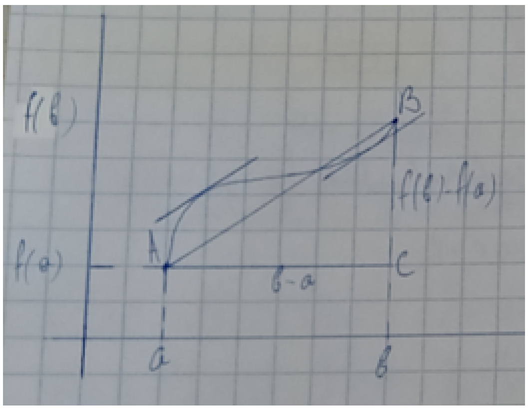
$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)}$$

Доказательство:

Если в теореме Коши принять $g(x) = x \implies$ **ч.т.д.**



Геометрический смысл теоремы Лагранжа



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \angle A = f'(\xi)$$

$\exists$ точка $\xi \in (a; b)$: касательная к графику функции в этой точке $\|$-на хорде AB

Замечание: промежуточное значение ξ можно записать в виде $\xi = a + \theta(b - a), 0 < \theta < 1$
Тогда

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a)) * (b - a)}$$

Пусть $(b-a) = \Delta x$
$f(b) - f(a) = f(x + \Delta x) - f(x)$
Тогда

$$\boxed{f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x)\Delta x}$$

Все три формулы называются формулой конечных приращений Лагранжа.

Теорема 4.12.5

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, дифференциуема на $(a; b)$ и $\forall x \in (a; b)\ f'(x) = 0 \implies f(x)$ постоянная на этом отрезке.

Доказательство:

Выберем произвольно $x_1, x_2 \in [a; b]$. Пусть для определённости $x_1 < x_2$.
Тогда $f(x)$ непрерывна $[x_1; x_2] \subset [a; b]$ и дифферецируема $(x_1; x_2) \subset (a; b)$.
Тогда по теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), x_1 < \xi < x_2$.
По условию $f'(x) = 0\ \forall x \in (a; b) \implies f'(\xi) = 0$, т.к. точка $\xi \in (x_1; x_2) \subset (a; b) \implies f(x_1) = f(x_2)$, а т.к. x_1, x_2 - произвольные и $\in [a; b]$, то $f(x) = const\ \forall x \in [a; b]$.

Ч.т.д.

4.13. Раскрытие неопределённости по правилу Лопиталя

Теорема 4.13.1

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены в $u(x_0)$ и в этой точке $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то

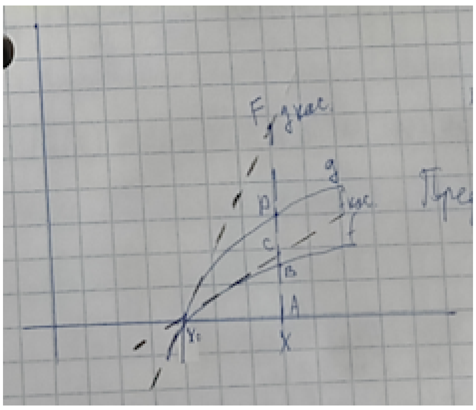
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}\Big|_{x=x_0}$$

Доказательство:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Ч.т.д.

Геометрический смысл



$$\lim_{x \to x_0} \frac{|AB|}{|AO|} = \lim_{x \to x_0} \frac{|AC|}{|AF|}$$

Предел отношения ординат графиков функции f и g равен пределу отношения касательных к этим функциям в точке x_0.

Теорема 4.13.2

Если:

1. Функции f и g дифференциуемы на $(a; b)$
2. $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a; b)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$
4. $\exists$ конечный или бесконечный $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство:

Так как по пункту 1 $f(x)$ и $g(x)$ дифференциуемы на $(a; b) \overset{\text{Th 4.9.1}}{\underset{\text{Th 4.1.1}}{\Longrightarrow}}$ они непрерывны на $(a; b)$.
Доопределим эти функции в точке $x = a$: $f(a) = g(a) = 0$.
Тогда $\forall x \in (a; b)$ на $[a; x]$ $f(x)$ и $g(x)$ будут удовлетворять условию теоремы Коши, т.е. $\exists$ точка $\xi = \xi(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \overset{\text{Th 4.12.3}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \left| \begin{array}{c} a < \xi < x \\ x \to a \implies \xi \to a \end{array} \right| = \lim_{\xi to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \left| \begin{array}{c} \text{Замена} \\ x = \xi \\ \text{(переобозначение)} \end{array} \right| = \boxed{\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Ч.т.д.

Теорема 4.13.3

Если:

1. Функции f и g дифференциуемы на $(a; b)$
2. $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a; b)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$
4. $\exists$ конечный или бесконечный $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Замечание: в теореме 4.13.2 и теореме 4.13.3 рассмотрены случаи, когда $x \to a + 0$. К этому случаю сводятся те, когда $x \to a - 0$ или произвольным образом, а также случаи, когда $a = \pm\infty$.

Примеры:

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos x*\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=\nexists$$

Не выполняется пункт 4!

2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\left[0^0\right]=\lim_{x\to 0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0+0}x\ln x}=[0*\infty]=e^{\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$
$$=e^{\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim_{x\to 0+0}(-x)}=e^0=1$$

4.14. Формула Тейлора для многочленов

Рассмотрим произвольный многочлен степени n:

$$P_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$$

Пусть x_0 - произвольное число, $x=(x-x_0)+x_0$. Тогда $\sum_{k=0}^{n}b_k((x-x_0)+x_0)^k$. После возведения в степень и приведения подобных слагаемых, получим:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$$

Это разложение многочлена $P_n(x)$ по степеням $(x-x_0)$.

$$\begin{array}{ll}
a_k=a_k(x_0,b_i),i=\overline{1,n} & P_n(x_0)=a_0\\
P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\dots+na_n(x-x_0)^{n-1} & P_n'(x_0)=a_1\\
P_n''(x)=2a_2+3*2*a_3(x-x_0)+4*3*a_4(x-x_0)^2+\dots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} & P_n''(x_0)=2a_2\\
\vdots & \vdots\\
P_n^{(k)}(x)=1*2*3*\dots*k*a_k+\dots+(n-k+1)\dots(n-1)na_n(x-x_0)^{n-k} & P_n^{(k)}(x_0)=k!a_k\\
\vdots & \vdots\\
P_n^{(n)}(x)=n!a_n & P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n
\end{array}$$

$$\boxed{a_k=\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}}$$

Многочлен $P_n(x)$ можно разложить по степеням $(x-x_0)$ единственным образом.

$$P_n(x)=P_n(x_0)+\frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

Это формула Тейлора для многочлена $P_n(x)$ по степеням $(x-x_0)$.

Пример:

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3 \qquad P(-1) = 5$$

Записать $P(x)$ по степеням $(x+1)$, $x_0 = -1$

$$\begin{aligned} &P'(x) = 3 + 10x - 6x^2 && P'(-1) = -13 \\ &P''(x) = 10 - 12x && P''(-1) = 22 \\ &P'''(x) = -12 && P'''(-1) = -12 \end{aligned}$$

$$P(x) = 5 + \frac{-13}{1!}(x+1) + \frac{22}{2!}(x+1)^2 + \frac{-12}{3!}(x+1)^3 = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$$

4.15. Формула Тейлора для функций

Рассмотрим функцию $f(x)$, имеющую непрерывные производные до $(n+1)$ порядка в $u(x_0)$
Составим многочлен

$$Q_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{(k)}$$

Этот многочлен совпадает с $f(x)$ только в точке x_0
НО! в остальных точках он не равен $f(x)$.

$$Q'_n(x) = f'(x_0) + \frac{2}{2!}f''(x_0)(x-x_0) + \dots \qquad Q'_n(x_0) = f'(x_0)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &Q''_n(x_0) = f''(x_0) \\ &\vdots \\ &Q_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

Пусть $\boxed{f(x) = Q_n(x) + r_n(x)}$ - формула Тейлора для $f(x)$, где $r_n(x)$ - погрешность при замене $f(x)$ на $Q_n(x)$.

Найдём вид $r_n(x)$:

$$\begin{aligned} &f(x_0) = Q_n(x_0) \implies r_n(x_0) = 0 \\ &f'(x_0) = Q'_n(x_0) \implies r'_n(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ &f^{(n)}(x_0) = Q_n^{(n)}(x_0) \implies r_n^{(n)}(x_0) = 0 \\ &r^{(n+1)}(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Введём вспомогательную функцию $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

$$\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \varphi''(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n)}(x_0) = 0, \varphi^{(n+1)}(x_0) = (n+1)!$$

По теореме Коши рассмотрим

$$\boxed{\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \underset{x_1 \in (x_0;x) \text{ или } (x;x_0)}{\frac{r'_n(x_1)}{\varphi'(x_1)}} = \frac{r'_n(x_1) - r'_n(x_0)}{\varphi'(x_1) - \varphi'(x_0)} = \underset{x_2 \in (x_0;x_1) \text{ или } (x_1;x_0)}{\frac{r''_n(x_2)}{\varphi''(x_2)}} =$$

$$= \cdots = \frac{r_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)} = \frac{r^{(n)}(x_n) - r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n) - \varphi^{(n)}(x_0)} = \underset{\xi \in (x_0;x_n) \text{ или } (x_n;x_0)}{\boxed{\frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}}}$$

Тогда

$$r_n(x) = \frac{\varphi(x) * r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}; \varphi(x) = (x - x_0)^{(n+1)}$$

$$r_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - Q_n^{(n+1)}(x)$$
$$r_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$$
$$\varphi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$
$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

Формула Тейлора для функции $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}$$

формула Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

Замечание: рассмотрим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi) * (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!(x - x_0)^n} = 0 \implies r_n(x) = o((x - x_0)^n), x \to x_0$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), x \to x_0}$$

формула Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Пеано

Замечание: если в формуле Тейлора положить $x_0 = 0$, то соответствующая формула называется формулой Маклорена для функции $f(x)$.

Теорема 4.15.1 (теорема о единственности представления функции формулы Тейлора)

Функция $f(x)$ в $u(x_0)$ представляется единственным образом формулой Тейлора.

Доказательство:

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$
$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$a_0+a_1(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) = b_0+b_1(x-x_0)+\dots+b_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$ получим, что

$$a_0 = b_0$$

Тогда

$$a_1(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) = b_1(x-x_0)+\dots+b_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \quad \Big| : (x-x_0)$$

$$a_1+a_2(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1}) = b_1+b_2(x-x_0)+\dots+b_n(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1})$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$ получим, что

$$a_1 = b_1$$

Продолжая этот процесс, получим **ч.т.д.**

Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена

1.

$$\begin{array}{ccc} f(x) = e^x & x_0 = 0 & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & \vdots & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & \vdots & f''(0) = 1 \\ f'''(x) = e^x & \vdots & f'''(0) = 1 \end{array}$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$$

2.

$$\begin{array}{ccc} f(x) = \sin x & x_0 = 0 & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & \vdots & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & \vdots & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & \vdots & f'''(0) = -1 \end{array}$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

Аналогично

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^2 n}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

3.

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = \ln(1+x) & x_0 = 0 & f(0) = 0 \\
f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & \vdots & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} & \vdots & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} & \vdots & f'''(0) = 2 \\
f''''(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4} & \vdots & f''''(0) = -6
\end{array}
$$

$$
\ln(1+x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \dots =
$$

$$
= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)
$$

4.

$$
(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)
$$

Частые случаи формулы:

$$
\frac{1}{1+x}; \frac{1}{1-x}; \frac{1}{\sqrt{1+x}}; \frac{1}{\sqrt{1-x}}
$$

5.

$$
\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^2n)
$$

4.16. Монотонность функций. Необходимое и достаточное условие монотонности функций

Функцию $f(x)$, заданную на множестве X, называют неубывающей на этом множестве, если $\forall x_1, x_2 \in X \implies f(x_1) \le f(x_2)$
Возрастающая $\quad f(x_1) < f(x_2)$
Невозрастающая $\quad f(x_1) \ge f(x_2)$
Убывающая $\quad f(x_1) > f(x_2)$

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие, убывающие функции на мн-ве X называются монотонными на мн-ве X.

Теорема 4.16.1 (необходимое и достаточное условие монотонности)

Для того, чтобы диф-ая на интервале ф-ия была неубывающей (невозр.) $\Leftrightarrow$ чтобы её производная была во всех точках интервала неотрицательной (неположительной). Если производная ф-ии во всех точках интервала $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то ф-ия возрастает (убывает).

Доказательство:

Докажем необходимость (⇒)

Пусть $f(x)$ неубывающая на $(a;b)$ и имеет в точке $x_0 \in (a;b)$ производную.
Покажем, что $f'(x_0) \geq 0$.
Пусть для определённости $\Delta x > 0$. Тогда $f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$.

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \implies \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0$$

Докажем достаточность (⇐)

Пусть $\forall x \in (a;b)\ f'(x) \geq 0$
Покажем, что $f(x)$ неубывающая на $(a;b)$.
Выберем произвольно $x_1, x_2 \in (a;b)$. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа (12.4):

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \xi \in (x_1; x_2)$$

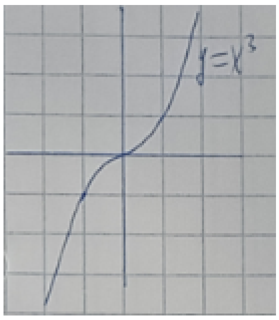
По условию

$$f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a;b) \implies f'(\xi) \geq 0, x_2 - x_1 > 0 \implies f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

Т.к. x_1, x_2 - произвольные и $\in (a;b) \implies$ на $(a;b)$ $f(x)$ неубывающая.

Ч.т.д.

Замечание 1: условие $f'(x) > 0$ является достаточным условием возрастания, но не является необходимым (если $f(x)$ возрастает, то не везде $f'(x) > 0$)
Пример: $y = x^3$ возрастает, но $y'(0) = 0$.



Замечание: если функция непрерывна на $(a;b)$ и имеет во всех его точках, кроме, может быть конечного числа неотрицательную (положительную) производную, то функция неубывающая (возрастающая) на $(a;b)$.

4.17. Необходимое и достаточное условие экстремума

Теорема 4.17.1

Если $f(x)$ задана в некоторой $u(x_0)$ и точка x_0 - точка экстремума, тогда $f'(x_0) = 0$ или $\nexists$

Доказательство:

Доказательство такое же, как у теоремы Ферма.

Ч.т.д.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ будем называть **стационарными**.
Если $\forall x \in u(x_0)\ f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), то эта точка x_0 - точка строгого локального максимума (минимума).