Содержание

1 Введение **3**

1.1 Элементы теории множеств. 3

1.2 Мощность множества. Счётные и несчётные множества. 4

1.3 Понятие рационального числа. Понятие вещественного числа. 7

1.4 Ограниченные множества вещественных чисел. 9

1.5 Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел. 9

2 Теория пределов числовых последовательностей. **12**

2.1 Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. 12

2.2 Теоремы о сходящихся последовательностях 13

2.3 Арифметические действия с последовательностями, имеющими конечный предел . . 16

2.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Леммы о бесконечно малых последовательностях 18

2.5 Монотонные последовательности 20

2.6 Число e. 21

2.7 Принцип вложенных отрезков. 22

2.8 Подпоследовательность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. 23

2.9 Частичные пределы 24

2.10 Критерий Коши сходимости числовой последовательности 25

3 Теория пределов функций. Непрерывность функций в точке и на отрезке. **27**

3.1 Функция. Предел функции в точке. 27

3.2 Односторонние пределы 30

3.3 Свойства пределов функций 32

3.4 Непрерывность функции в точке. Разрывы I и II родов. 33

3.5 Замечательные пределы 35

3.6 Эквивалентные бесконечно малые функции в точке 37

3.7 Порядок переменной. Сравнение функций в окрестности заданной точки. 40

3.8 Глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке 41

3.9 Равномерная непрерывная функция 43

4 Дифференциальные исчисления функции **45**

4.1 Производная функции в точке 45

4.2 Геометрический смысл прооизводной 48

4.3 Производные элементарных функций 49
4.4 Производная суммы, произведения, частного 51
4.5 Производная сложной функции 52
4.6 Производная обратной функции 53
4.7 Гиперболические функции и их производные 53
4.8 Логарифмическое дифференцирование, производная от функции, заданной неявно, производная от функции, заданной параметрически 55
4.9 Дифференциуемость функции. Дифференциал, его геометрический и физический смыслы 56
4.10 Примемение дифференциала в приближённых вычислениях. Дифференциал сложной функции 59
4.11 Производные дифференциалов высших порядков 60
4.12 Дифференциальные теоремы о среднем 62
4.13 Раскрытие неопределённости по правилу Лопиталя 65
4.14 Формула Тейлора для многочленов 67
4.15 Формула Тейлора для функций 68
4.16 Монотонность функций. Необходимое и достаточное условие монотонности функций 71
4.17 Необходимое и достаточное условие экстремума 72

1. Введение

1.1. Элементы теории множеств.

Определения (множества)

Множество - совокупность объектов одинаковой природы.
Обозначение: A, B, C - множества. a, b, c - элементы множества.

Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.
Множество A называется подмножеством множества B, если $\forall a \in A \implies a \in B$. Обозначение: $A \subset B$.
Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством. Обозначение: $\varnothing$.

Объединением множеств A и B ($A \cup B$) называется $C : C = \{c : c \in A \cup c \in B\}$.
Пересечением множеств A и B ($A \cap B$) называется $D : D = \{d : d \in A \cap d \in B\}$.
Разностью множеств A и B ($A \diagdown B$) называется $E : E = \{e : e \in A \cap e \notin B\}$.
Симметричной разностью множеств A и B ($A \triangle B$) называется $F : F = \{f : f \in (A \diagdown B) \cup (B \diagdown A)\}$.

Свойства операций

1. $\forall A \; A \subset A$
   $\forall A \; \varnothing \subset A$
2. $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
3. $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$
4. $A \subset B, B \subset C \implies A \subset C$
5. $A \subset B, B \subset A \implies A = B$
6. $A \diagdown (A \diagdown B) = A \cap B$
7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
8. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
9. $A \diagdown (B \cap C) = (A \diagdown B) \cup (A \diagdown C)$
10. $A \diagdown (B \cup C) = (A \diagdown B) \cap (A \diagdown C)$
11. $(A \diagdown B) \cup (B \diagdown A) = (A \cup B) \diagdown (A \cap B)$

Доказательство пункта 9:

Пусть X - произвольное множество.
Если $x \in A \implies x \in A \cup X$
Если $x \notin A \implies x \notin A \cap X$
Если $x \in A \cap B \implies x \in A$ и $x \in B$
Если $x \in A \cup B \implies x \in A$ или $x \in B$

Если $x \notin A \cap B \implies x \notin A$ или $x \notin B$
Если $x \notin A \cup B \implies x \notin A$ и $x \notin B$

а) Пусть $x \in A \diagdown (B \cap C)$. Тогда $x \in A$ и $x \notin B \cap C$. Следовательно $x \in A$ и $(x \notin B)$ или $(x \notin C)$. Отсюда ($x \in A$ и $x \notin B$) или ($x \in A$ и $x \notin B$). Тогда $x \in (A \diagdown B) \cup (A \diagdown C)$.

б) Пусть $x \in (A \diagdown B) \cup (A \diagdown C)$. Тогда $x \in (A \diagdown B)$ или $x \in (A \diagdown C)$. Пусть для определённости $x \in A \diagdown B$. Тогда $x \in A$ и $x \notin B$. Отсюда $x \in A$ и $x \notin B \cap X$, например $x \in A$ и $x \notin B \cap C \implies x \in A \diagdown (B \cap C)$.

Ч.т.д.

Определения (декартово произведение)

Декартовым произведением множеств A и B ($A \times B$) называется множество $C : C = \{(a; b) : a \in A$ и $b \in B\}$.
Отображением F множества A в множество B называется подмножество их декартова произведения. $(F \subset A \times B) : \forall a \in A \, \exists \, ! \, (a; b) \in F$.
Примеры:

$A = \{1; 3; 5\}, B = \{2; 4; 6\}$

- $F = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$ - отображение
- $F = \{(1; 2), (1; 4), (3; 4), (5; 6)\}$ - не отображение

Пусть F - отображение A в B. Тогда элемент $b : (a; b) \in F$ называется образом элемента a при отображении F. $b = F(a)$
При этом a называется прообразом (одним из возможных) элемента b.
Множество $\{b \in B : \exists \, a \in A : b = F(a)\}$ называется образом множества A при отображении F и обозначается $F(A)$.

Отображение F называется **сюръекцией** или отображением "на", если $F(A) = B$ (все элементы b использованы в парах с элементами a)
Отображение F называется **инъекцией** или вложением, если $F(a_1) = F(a_2) \implies a_1 = a_2$ (каждому элементу a соответствует только один элемент b)
Отображение F называется **биекцией** или взаимооднозначным отображением, если оно является и сюръекцией, и инъекцией.

Пример: $A\{1; 3; 5\}, B\{2; 4; 6\}$

- $F_1\{(1; 2), (3; 2), (5; 6)\}$ - не сюръекция, не инъекция.
- $F_2\{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$ - сюръекция, инъекция; следовательно, биекция.

1.2. Мощность множества. Счётные и несчётные множества.

Эквивалентность

Множества A и B называются эквивалентными (равномощными), если между ними можно установить взаимооднозначное соответствие.

Обозначение: $A \sim B$.
Свойства:

1. $A \sim A$ (свойство рефлексивности)
2. $A \sim B \implies B \sim A$ (свойство симметричности)
3. $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$ (свойство транзитивности)

Мощность множеств. Счётные множества.

Множества чисел:

- N - натуральные числа $(1; 2; 3; \dots)$
- Z - целые числа $(0; \pm 1; \pm 2; \dots)$
- Q - рациональные числа ($\frac{p}{q} : p \in Z, q \in N, \frac{p}{q}$ - несократимое)
- R - действительные/вещественные числа

$N \subset Z \subset Q \subset R$

Мощность множества - некая числовая характеристика (обозначающаяся $\#A$), обладающая свойствами:

1. Если A - конечно, то $\#A$ - кол-во элементов множества.
2. Если A, B - бесконечномерные, то
   - $\#A = \#B \Leftrightarrow A \sim B$
   - $\#A \leq \#B \Leftrightarrow A \sim C, C \subset B,$ но A не $\subset B$

Утверждение: $Z \sim N$
Доказательство:

$0; -1; 1; -2; 2; -3; 3; \dots$
$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots$
Каждому элементу Z соответствует элемент N.

Утверждение: $Q \sim N$
Доказательство:

Договоримся, что $0 = \frac{0}{1}$
Обозначим $h = |p| + q$ - высота числа $\frac{p}{q}$
Будем нумеровать рациональные числа по возрастанию h; при фиксированном h - по возрастанию q; при фиксированном h и q - по возрастанию p.

$$h=1, q=1 \implies p=0 : r_1 = \frac{0}{1}$$
$$h=2, q=1 \implies p=\pm 1 : r_2 = \frac{-1}{1}, r_3 = \frac{1}{1}$$
$$h=2, q=2 \implies p=0 \text{ (не может быть по определению)}$$
$$h=3, q=1 \implies p=\pm 2 : r_4 = \frac{-2}{1}, r_5 = \frac{2}{1}$$
$$h=3, q=2 \implies p=\pm 1 : r_6 = \frac{-1}{2}, r_7 = \frac{1}{2}$$
$$h=3, q=3 \implies p=0 \text{ (не может быть по определению)}$$

Индексы r являются натуральными числами $\implies$ каждому рациональному числу можно поставить в соответствие натуральное число.

Ч.т.д.

Множества, эквивалентные множеству N, называются счётными.

Утверждение: $\forall$ непустое подмножество счётного множества конечно или счётно.
Доказательство: занумеруем все элементы множества, затем перенумируем элементы подмножества в порядке возрастания номеров. Либо элементы закончатся, либо получим счётное подмножество.

Ч.т.д.

Утверждение: счётное объединение счётных множеств счётно.
Доказательство:

$$A_1 = \{a_{11}; a_{12}; \ldots; a_{1n}\}\text{- счётное}$$
$$A_2 = \{a_{21}; a_{22}; \ldots; a_{2n}\}\text{- счётное}$$
$$A_3 = \{a_{31}; a_{32}; \ldots; a_{3n}\}\text{- счётное}$$
$$A = \{a_{11}; a_{21}; a_{12}; a_{13}; a_{22}; a_{31}; a_{32}; \ldots\}$$
$$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \ldots\}$$

Каждому элементу множества A можно поставить в соответствие натуральное число из множества N.

Ч.т.д.

Несчётные множества.

Теорема 1.2.1

Множество H всех бесконечных наборов из цифр 0 и 1 не является счётным.

Доказательство:

Пусть $h \in H, h = (h_1, h_2, h_3, \dots, h_k, \dots,), h_k = 0$ или 1

Предположим противное. Пусть H - счётное, т.е. $H = \{h^1, h^2, h^3, \dots, h^j, \dots, h^k, \dots\}$

$$h^1 = \{h_1^1, h_2^1, h_3^1, \dots, \dots\}$$

$$h^2 = \{h_1^2, h_2^2, h_3^2, \dots, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$h^j = \{h_1^j, h_2^j, \dots, h_j^j, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$h^n = \{h_1^n, h_2^n, \dots, h_n^n, \dots\}$$

Построим набор $\bar{h} = \{\bar{h_1^1}; \bar{h_2^2}; \dots; \bar{h_j^j}; \dots; \bar{h_n^n}; \dots\}$, где $\bar{h_k^k} = \begin{cases} 0, \text{если } h_k^k = 1 \\ 1, \text{если } h_k^k = 0 \end{cases}$ Очевидно, что $\bar{h} \in H$, т.е. $\bar{h}$ имеет номер, пусть $\bar{h} = h^j$

На j-ом месте h^j имеет элемент h_j^j

На j-ом месте $\bar{h}$ имеет элемент $\bar{h_j^j}$, т.е. $h_j^j = \bar{h_j^j}$

Получили противоречие. Таким образом H не является счётным.

Ч.т.д.

Следствие: множество всех подмножеств счётного множества не является счётным.

Теорема 1.2.2

Множество K всех бесконечных наборов, состоящих из цифр от 0 до 9, не является счётным.

Доказательство: очевидно, что $H \subset K$. Если бы K было счётным, то и H было бы счётным, а это не так.

Ч.т.д.

Множества, эквивалентные множеству вещественных чисел отрезка $[0; 1]$ называются множествами мощности континуума.

1.3. Понятие рационального числа. Понятие вещественного числа.

Рациональными числами будем называть числа вида

$$\frac{p}{q}, p \in Z, q \in N, \text{НОД}(p, q) = 1, 0 = \frac{0}{1}$$

Множество рациональных чисел - Q.

Свойства:

1. $\forall a, b \in Q \mid a < b$ или $a = b$ (правило упорядочивания)
2. $\forall a, b \in Q \; \exists! \; c \in Q \mid c = a + b$ (корректность определения суммы)

3. $\forall a, b \in Q \; \exists! \; d \in Q \mid d = ab$ (корректность определения произведения)
4. $\forall a, b, c \in Q$ если $a < b$, а $b < c \implies a < c$
   $\forall a, b, c \in Q$ если $a = b$, а $b = c \implies a = c$ (транзитивность)
5. $\forall a, b \in Q \mid a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
6. $\forall a, b, c \in Q \mid (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
7. $\exists! \; 0 \in Q \mid \forall a \in Q \; a + 0 = 0 + a = a$ (существование нейтрального элемента по сложению)
8. $\forall a \in Q \; \exists! \; a' \in Q \mid a + a' = a' + a = 0$ (существование обратного элемента по сложению)
9. $\forall a, b \in Q \mid ab = ba$ (коммутативность умножения)
10. $\forall a, b, c \in Q \mid (ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
11. $\exists! \; 1 \in Q \mid \forall a \in Q \; a \times 1 = 1 \times a = a$ (существование нейтрального элемента по умножению)
12. $\forall a \neq 0, a \in Q \; \exists! \; a' \in Q \mid a \times a' = a' \times a = 1$ (существование обратного элемента по умножению)
13. $\forall a, b, c \in Q \; (a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность)
14. если $a < b, c \in Q \implies a + c < b + c$
15. если $a < b, c > 0 \implies ac < bc$
16. $\forall a \in Q \; \exists \; n \in N \mid n > a$ (аксиома Архимеда, или "натуральных чисел бесконечно много")

Вещественные числа

Вещественным или действительным числом называется произвольная бесконечная десятичная дробь вида $\pm a_1, a_2 a_3 a_4 \dots a_n \dots$
Рассмотрим $0,(9) = 0,9999 \dots \in Q$

$$0,(9) = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = \begin{vmatrix} S & = & \frac{b_1}{1-q} \\ b_1 & = & \frac{9}{10} \\ q & = & \frac{1}{10} \end{vmatrix} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Договоримся, что рациональное число не может содержать в своей записи бесконечное число 9.
Модуль (абсолютная величина) числа $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ называется число, выраженное той же дробью, что и a, но взятой со знаком "+".

Правила сравнения вещественных чисел

1. Пусть $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$
   $b = \pm b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$
   $a, b \in R$
   Числа a и b называются равными, если перед ними один знак и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n, \dots$
2. Пусть $a \neq b$

- $\forall$ положительное число > 0
- $\forall$ отрицательное число < 0
- $\forall$ положительное число $> \forall$ отрицательного числа
- $a > 0, b > 0$. Будем говорить, что $a > b$, если $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_k > b_k$.
- $a < 0, b < 0$. $a > b$, если $|a| < |b|$; $a < b$, если $|a| > |b|$.

1.4. Ограниченные множества вещественных чисел.

Ограниченные множества

Множество $X \subset R$ ограничено сверху, если $\exists\, M \in R \mid \forall x \in X\ x \leq M$
Множество $X \subset R$ ограничено снизу, если $\exists\, m \in R \mid \forall x \in X\ x \geq m$
Числа M и m называются верхней и нижней гранями множества X соответственно.
Число $\bar{x} \in R$ ($\underline{x} \in R$) называется точной верхней (нижней) гранью множества X, если:

1. $\forall x \in X\ x \leq \bar{x}\ (x \geq \underline{x})$
2. $\forall x' \in R \mid x' < \bar{x}\ \exists\, x_0 \in X \mid x_0 > x'$ ($\forall x' \in R \mid x' > \underline{x}$, $\exists\, x_0 \in X\ x_0 < x'$) (невозможность уменьшить точную грань)
3. (на самом деле 2*): $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \mid \bar{x} - \varepsilon < x_n$
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \mid \underline{x} - \varepsilon > x_n$

Обозначения:

- $\bar{x} = \sup x$ - супремум множества X
- $\underline{x} = \inf x$ - инфинум множества X

Теорема 1.4.1 (принцип полноты Вейерштрасса)

$\forall$ непустое ограниченное сверху (снизу) множество $X \subset R$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

1.5. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественн чисел.

Леммы

Лемма 1: пусть $a \in R$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q\ \exists\, \alpha, \beta \in Q \mid \alpha \leq a \leq \beta$, причём $\beta - \alpha < \varepsilon$

Доказательство:

Пусть $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \cdots \geq 0$
Пусть $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$. Очевидно, что $\alpha \leq a$.
Положим $\beta = \alpha + \frac{1}{10^n}$

$\beta = a_0, a_1a_2a_3 \dots (a_n + 1)$. Очевидно, что $\beta \geq a$
Замечание:

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q\ \exists\, n \in N \implies |\ 10^n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ (аксиома Архимеда)}$$

$$\beta - \alpha = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

.

Ч.т.д.

Лемма 2: $\forall a, b \in R\ \exists\, \alpha \in Q \mid a < \alpha < b$
Замечание: таких α бесконечно много.

Доказательство:

Пусть $a = a_0, a_1 \dots a_n \dots \geq 0$
Пусть $a = a_0, a_1 \dots a_k 99 \dots 9 a_p \dots$ при $a_p \neq 9$
$b = b_0, b_1 \dots b_k \dots, a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_k < b_k \implies a < b$
$\alpha = a_0, a_1 \dots a_k 99 \dots 9(a_p + 1)$.
$a < \alpha$, т.к. $a_p < a_p + 1$
$b > \alpha$, т.к. $a_k < b_k$
Следовательно $a < \alpha < b$
Если $a < 0, b > 0$, то $\alpha = 0,000\dots$
Если $a < b \leq 0$, то переходим к модулям.

Ч.т.д.

Лемма 3: пусть $a, b \in R$. Если $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q \mid \exists\, \gamma_1, \gamma_2 \in Q \mid \gamma_1 \leq a \leq \gamma_2$ и $\gamma_1 \leq b \leq \gamma_2$ и $\gamma_1 - \gamma_2 < \varepsilon$, то $a = b$.

Доказательство:

Предположим противное.
Пусть $a \neq b$; пусть для определённости $a < b$. Тогда по лемме 2 $\exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in Q \mid a < \alpha_1 < \alpha_2 < b$
Положим $\varepsilon = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$. По условию леммы $\exists\, \gamma_1, \gamma_2 \in Q \mid \gamma_1 \leq a < \alpha_1 < \alpha_2 < b \leq \gamma_2$ и $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$
Отсюда $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2$. Отнимем γ_1.

$$0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \alpha_2 - \gamma_1 < \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 > \varepsilon, \gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$$

Получили противоречие. Следовательно, $a = b$.

Ч.т.д.

Арифметические действия

Суммой чисел $a, b \in R$ называется число $c \in R \mid \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q; \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2; \beta_1 \leq b \leq \beta_2$ выполнено $\alpha_1 + \beta_1 \leq c \leq \alpha_2 + \beta_2$

Произведением чисел $a, b \in R$ называется число $c \in R \mid \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q; \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2; \beta_1 \leq b \leq \beta_2$ выполнено $\alpha_1\beta_1 \leq c \leq \alpha_2\beta_2$

Замечание: все операции с вещественными числами производятся с погрешностью.

По определению положим: $a \times 0 = 0 \times a = 0$
Пусть $a, b \in R$. Тогда по определению

$$ab = \begin{cases} |a||b|, \text{если } ab > 0 \text{ (a и b одного знака)} \\ -|a||b|, \text{если } ab < 0 \text{ (a и b разных знаков)} \end{cases}$$

Свойства вещественных чисел

1. $\forall a, b \in R \mid a < b$ или $a = b$ (правило упорядочивания)
2. $\forall a, b \in R \; \exists! \; c \in R \mid c = a + b$ (корректность определения суммы)
3. $\forall a, b \in R \; \exists! \; d \in R \mid d = ab$ (корректность определения произведения)
4. $\forall a, b, c \in R$ если $a < b$, а $b < c \implies a < c$
   $\forall a, b, c \in R$ если $a = b$, а $b = c \implies a = c$ (транзитивность)
5. $\forall a, b \in R \mid a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
6. $\forall a, b, c \in R \mid (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
7. $\exists! \; 0 \in R \mid \forall a \in R \; a + 0 = 0 + a = a$ (существование нейтрального элемента по сложению)
8. $\forall a \in R \; \exists! \; a' \in R \mid a + a' = a' + a = 0$ (существование обратного элемента по сложению)
9. $\forall a, b \in R \mid ab = ba$ (коммутативность умножения)
10. $\forall a, b, c \in R \mid (ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
11. $\exists! \; 1 \in R \mid \forall a \in R \; a \times 1 = 1 \times a = a$ (существование нейтрального элемента по умножению)
12. $\forall a \neq 0, a \in R \; \exists! \; a' \in R \mid a \times a' = a' \times a = 1$ (существование обратного элемента по умножению)
13. $\forall a, b, c \in R \; (a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность)
14. если $a < b, c \in Q \implies a + c < b + c$
15. если $a < b, c > 0 \implies ac < bc$
16. $\forall a \in R \; \exists \; n \in N \mid n > a$ (аксиома Архимеда, или "натуральных чисел бесконечно много")

Арифметические действия 2. Electric Boogalo

Разностью чисел $a, b \in R$ называется число $c \in R \mid a = c + b$
Покажем, что этому определению удовлетворяет число $c = a + b'$, где b' - обратное к b по сложению.
Действительно $c + b = (a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$
Покажем, что c - единственное.
Пусть $\exists \; d \in R \mid a = d + b$, тогда $c = a + b' = d + b + b' = d + 0 = d$
Т.е. разность определена единственным образом.
По определению $0 - b = 0 + b' = b' = -b$

Пишем, что $b' = 0 - b = -b$
Обозначение: $c = a - b$

Частным чисел $a, b \in R, b \neq 0$ называется число $c \in R \mid a = bc$
Покажем, что этому определению удовлетворяет число $c = ab'$, где b' - обратное к b по умножению.
Действительно $cb = (ab')b = a(b'b) = a \times 1 = a$
Покажем, что c - единственное.
Пусть $\exists\, d \in R \mid a = db$, тогда $c = ab' = (db)b' = d(bb') = d$
Т.е. частное определено единственным образом.
Обозначение: $c = \frac{a}{b}$

2. Теория пределов числовых последовательностей.

2.1. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.

Определение числовой последовательности.

Пусть каждому натуральному $n \in N$ по определённому закону ставится в соответствие действительное число x_n.
Тогда говорят, что определена числовая последовательность.
Обозначение: $\{x_n\}$
$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - элементы последовательности.
Пример: арифметическая прогрессия $x_n = a + d(n-1)$, геометрическая прогрессия $x_n = a \times q^n$.

При $a < b$:

- Множество чисел $x \mid a \leq x \leq b$ называется отрезком $[a; b]$
- Множество чисел $x \mid a < x < b$ называетя интервалом $(a; b)$
- Если $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$, то есть $[a; b)$ или $(a; b]$, то эти множества называются полуинтервалом или полуотрезком.
- Замечание: a, b могут быть ∞ и $-\infty$ и образовывать, например, $(-\infty; \infty)$, $[a, \infty)$ и т.д.

Произвольный интервал $(a; b)$, содержащий точку c $(a < c < b)$ называется окрестностью точки c и обозначается $U(c)$.

Крайне важные определения

Интервал вида $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ называется ε-окрестностью точки c.

Число a называется **пределом** числовой последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \;\Big|\; \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Говоря по-русски, для любого эпсилон больше нуля существует номер N, зависящий от эпсилон, при котором при любом номере n больше номера N выполняется неравенство: $|x_n - a|$ меньше эпсилон.
Есть такие последовательности, чьих пределов не существует, например,

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n = \nexists$$

Пример: $x_n = \frac{1}{n}$. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$$
$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$1 < n\varepsilon$$
$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}]$$

Проверка:

$$\varepsilon = \frac{1}{10}$$
$$N(0.1) = 10$$
$$x_{10} = \frac{1}{10} \notin \varepsilon\text{-окр.}$$
$$x_{11} = \frac{1}{11} \in \varepsilon\text{-окр.}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{100}$$
$$N(0.01) = 100$$
$$x_{100} = \frac{1}{100} \notin \varepsilon\text{-окр.}$$
$$x_{101} = \frac{1}{101} \in \varepsilon\text{-окр.}$$

Ч.т.д.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся последовательностью. В противном случае - расходящейся.

2.2. Теоремы о сходящихся последовательностях

Теорема 2.2.1

Если $\{x_n\}$ имеет предел, то он единственный.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b, a \neq b$, пусть для определённости $a < b$.
Выберем окрестности точки a и b таким образом, чтобы они не пересекались.
По условию $\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies$ в окрестность точки a попадает ∞-ое число элементов $\{x_n\}$
Вне этой окрестности находится конечное число элементов $\{x_n\} \implies$ в окрестность точки

b попадает конечное число элементов $\{x_n\}$.
Получили противоречие, т.к. $\lim_{n\to\infty} x_n = b \implies$ в окрестности точки b должно быть ∞-ое число элементов $\{x_n\}$.
Отсюда следует, что $a = b$.

Ч.т.д.

Теорема 2.2.2

Если $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ сходится. Тогда существует конечный $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon)\ \Big|\ \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Рассмотрим $|x_1 - a| \geq \varepsilon, |x_2 - a| \geq \varepsilon, \ldots, |x_n - a| \geq \varepsilon$
Обозначим $max\{|x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_n - a|\} = d \implies d \geq \varepsilon$
Тогда

$$\begin{cases} \forall n = 1..N \implies |x_n - a| \leq d \\ \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon \leq d \end{cases} \implies \forall N \implies |x_n - a| \leq d$$

$$a - d \leq x_n \leq a + d$$

Отсюда следует, что $\{x_n\}$ ограничена.

Ч.т.д.

Замечание: ограниченность подпоследовательности является необходимым условием, но не является достаточным, т.е. если $\{x_n\}$ ограничена, то она не обязана сходиться.
Пример:

$$\{x_n\} = (-1)^n \Rightarrow -1; 1; -1; 1; \ldots$$

$\{x_n\}$ ограничена, но $\lim_{n\to\infty} x_n = \nexists$
У данной последовательности нет такого элемента, который если окружить окрестностью ("ловушкой"), получится "поймать" все элементы последовательности.

Теорема 2.2.3 (о сохранении знака)

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, то $\exists\, N = N(\varepsilon)\ \Big|\ \forall n > N \implies |x_n| > \frac{a}{2}$
Если $a > 0$, то $x_n > \frac{a}{2}$
Если $a < 0$, то $x_n < \frac{a}{2}$

Доказательство:

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Зафиксируем $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon)\ \Big|\ \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$
$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}$$

a > 0	**a < 0**
$x_n > a - \dfrac{\lvert a\rvert}{2}$	$x_n < a + \dfrac{\lvert a\rvert}{2}$
$x_n > \dfrac{a}{2}$	$x_n < \dfrac{a}{2}$

Ч.т.д.

Теорема 2.2.4

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$ и $\forall n \in N\ x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

Доказательство:

Предположим противное.
Пусть $a > b$. Зафиксируем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$.
Т.к. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то для $\varepsilon = \frac{a-b}{2}\ \exists N_1 \bigm| \forall n > N_1\ |x_n - a| < \varepsilon$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Т.к. $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то для $\varepsilon = \frac{a-b}{2}\ \exists N_2 \bigm| \forall n > N_2\ |y_n - b| < \varepsilon$

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N$

$$y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} =$$
$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < x_n$$
$$y_n < x_n$$

Получили противоречие. Таким образом, $a \leq b$.

Ч.т.д.

Следствие: если $\{x_n\}$ - сходящаяся подпоследовательность и $\forall n \in N\ x_n \in [a; b]$, то её предел $\in [a; b]$

Доказательство:

$\forall n\ a_n \leq x_n \leq b_n$
Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.
Рассмотрим $\{a_n\}$. Её элементы: $a; a; a; a; \ldots$
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$
$\forall n\ a_n \leq x_n \implies a \leq c$ (по теореме 2.2.4).
Аналогично $c \leq b$. Следовательно, $a \leq c \leq b$.

Ч.т.д.

Теорема 2.2.5 ("теорема о двух милиционерах")

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = a$ и $\forall n \in N\ x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\lim_{n\to\infty} z_n = a$

Доказательство:

Зафиксируем ε.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \exists N_1 \Bigm| \forall n > N_1\ a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a \implies \exists N_2 \Bigm| \forall n > N_2\ a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N$

$$a-\varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a+\varepsilon$$

$$a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

Ч.т.д.

Теорема 2.2.6

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$

Доказательство:

$$|a-b| \ge \bigl||a|-|b|\bigr|$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ то } \exists N \Bigm| \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\varepsilon > |x_n - a| \ge \bigl||x_n|-|a|\bigr| \implies \bigl||x_n|-|a|\bigr| < \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$$

Ч.т.д.

2.3. Арифметические действия с последовательностями, имеющими конечный предел

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$.
Все описанные в параграфе действия можно применять только для сходящихся последовательностей.
Для доказательств действий часто применяется неравенство треугольника:

$$|a+b| \le |a| + |b|$$

Теорема 2.3.1

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

Доказательство:

Докажем для "+", т.е. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
Зафиксируем $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\exists N_1 \Bigm| \forall n > N_1 \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \Bigm| \forall n > N_2 \implies |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2\}$
Тогда $\forall n > N$

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b|$$

$$|x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т.е. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

Ч.т.д.

Теорема 2.3.2

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$$

Доказательство:

$\lim_{n\to\infty} y_n = b \implies \{y_n\}$ - сходящаяся $\implies \{y_n\}$ - ограничена (по т. 2.2) $\implies \exists M \mid |y_n| \le M$, причём выберем M таким образом, чтобы $|a| \le M$.

$$\exists\, N_1 \mid \forall n > N_1 \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$
$$\exists\, N_2 \mid \forall n > N_2 \implies |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Рассмотрим $|x_n y_n - ab|$

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \le |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| =$$
$$|y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \le M \times \frac{\varepsilon}{2M} + M \times \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$$

Ч.т.д.

Теорема 2.3.3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, b \ne 0$$

Доказательство:

$$\Big|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\Big| = \Big|\frac{x_n b - a y_n - ab + ab}{y_n b}\Big| = \Big|\frac{b(x_n - a) - a(y_n - b)}{y_n b}\Big| \le$$
$$\Big|\frac{x_n - a}{y_n}\Big| + \Big|\frac{(y_n - b)a}{y_n b}\Big| = \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|a||y_n - b}{|y_n||b|}$$

По теореме о сохранении знака $\forall n > N_1$

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}$$

$$\frac{1}{|y_n|} > \frac{2}{|b|}$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \forall n > N_2 \; |x_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{4}$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n\to\infty} y_n = b \implies \forall n > N_3 \; |a||y_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{4}$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2, N_3\}$. Тогда $\forall n > N$:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon|b|}{4} \times \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon|b|^2}{4} \times \frac{2}{|b||b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

Ч.т.д.

Замечание: пределы в левых частях равенств могут существовать без существования пределов $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$

Пример:

$$x_n = (-1)^n \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \nexists$$

$$y_n = (-1)^{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \nexists$$

Как **НЕЛЬЗЯ:**

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = \nexists + \nexists = \nexists$$

Как правильно:

$$x_n + y_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = \{0; 0; 0; \dots\} \implies \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$$

2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Леммы о бесконечно малых последовательностях

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N = N(\varepsilon) \; \Big| \; \forall n > N \implies |\alpha| < \varepsilon$$

Утверждение: для того, чтобы $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, $\{\alpha_n\}$ - беск. малая последовательность.
Последовательность B_n называется бесконечно большой, еслии $\lim_{n\to\infty} B_n = \pm\infty$.
Говорят: $\{B_n\}$ стремится к бесконечности.

$$\forall M > 0 \; \exists \; N = N(M) \; \Big| \; \forall n > N \implies |B_n| > M$$

Лемма 1: сумма конечного числа беск. малых последовательностей является беск. малая последовательность.
$\alpha_n^1, \alpha_n^2, \dots, \alpha_n^k \to 0$

Доказательство:

Рассмотрим $\alpha_n = \alpha_n^1 + \dots + \alpha_n^k$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n^1 + \dots + \alpha_n^k) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n^1 + \dots + \lim_{n\to\infty} \alpha_n^k = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \implies \alpha_n \text{ - беск. малая последовательность.}$$

Ч.т.д.

Лемма 2: произведение беск. малой последовательности на ограниченную последовательность есть беск. малая последовательность.
$\alpha_n^1 \times x_n \to 0$

Доказательство:

Пусть $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N = N(\varepsilon) \, \Big| \, \forall n > N \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Т.к. $\{x_n\}$ ограничена, то $\exists M \, \forall n \, |y_n| \leq M$

$$|x_n y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon$$

Ч.т.д.

Пример:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Хоть $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$, но эта последовательность ограничена, а следовательно может быть одним из множителей.

Лемма 3: произведение конечного числа беск. малых последовательностей есть беск. малая последовательно

Доказательство:

Рассмотрим $\alpha_n = \alpha_n^1 \times \alpha_n^2 \times \cdots \times \alpha_n^k$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n^1 \times \alpha_n^2 \times \cdots \times \alpha_n^k) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n^1 \times \cdots \times \lim_{n\to\infty} \alpha_n^k = 0 \times \cdots \times 0 = 0$$

$\{\alpha_n\}$ - беск. малая последовательность, т.к. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Ч.т.д.

Определённые выражения

Обозначим:

- 0 - беск. малая величина
- ∞ - беск. большая величина
- a - конечная величина

Примеры определённых выражений:

$$\frac{a}{0} \to \infty; \frac{0}{a} \to 0; \frac{0}{\infty} \to 0; \frac{\infty}{0} \to \infty; \frac{a}{\infty} \to 0; \frac{\infty}{a} \to \infty; \ldots$$

Неопределённые выражения

Пример:

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

1. Пусть $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$
2. Пусть $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{n}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
3. Пусть $x_n = \frac{a}{n}, y_n = \frac{1}{n}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty} a = a$$
4. Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, y_n = \frac{1}{n}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$$

Виды неопределённостей:
$$\left[\frac{0}{0}\right]; \left[\frac{\infty}{\infty}\right]; [0\times\infty]; [\infty-\infty]; [1^\infty]; \left[\infty^0\right]; \left[0^0\right]$$

Замечание: при нахождении предела посл-ти используется выражение "раскрыть неопределённость".

2.5. Монотонные последовательности

Последовательность называется неубывающей, если $\forall n \in N \; x_n \le x_{n+1}$.
Последовательность называется возрастающей, если $\forall n \in N \; x_n < x_{n+1}$.
Последовательность называется невозрастающей, если $\forall n \in N \; x_n \ge x_{n+1}$.
Последовательность называется убывающей, если $\forall n \in N \; x_n > x_{n+1}$.
Невозрастающие, неубывающие, возрастающие и убывающие последовательности называются монотонным

Рассмотрим неубывающую посл-ть: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_n \le \dots$
Данная последовательность всегда ограничена снизу.

Теорема 2.5.1

Если неубывающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она сходится.

Доказательство: так как $\{x_n\}$ ограничена сверху, то $\exists \bar{x} = \sup\{x_n\}$
Докажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$
Т.к. $\bar{x}$ - точная верхняя грань, то
$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) : x_n \le \bar{x} \; \bar{x} - \varepsilon < x_n$$
Кроме того, по условию $\{x_n\}$ неубывающая, то есть
$$\forall n > N \; x - \varepsilon < x_n \le x_n \le \bar{x} < x + \varepsilon \implies |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$
$$\text{т.е. } \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$$

Замечание: аналогичную теорему можно сформулировать и доказать для убывавющей, возрастающей и невозрастающей последовательности.
Следствие: для того, чтобы монотонная последовательность сходилась $\Leftrightarrow$, чтобы $\{x_n\}$ была ограниченой.

2.6. Число e.

Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \tag{1}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n, 0! = 1$$

Докажем формулу бинома Ньютона методом математической индукции:

1. База индукции.
   При $n = 1$ должно выполняться равенство $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{1-k}$
   $a + b = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0$
   $a + b = b + a$

2. Преположение индукции.
   Пусть при $n = m$ верно равенство $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}$

3. Шаг индукции.
   Докажем справедливость равенства для $n = m+1$, т.е докажем, что $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m-1-k}$
   Доказательство:
   Замечание: $C_m^{k+1} + C_m^k = \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)} + \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}(\frac{1}{m-k+1} + \frac{1}{k}) = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}(\frac{k+m-k+1}{(m-k+1)k}) = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}(\frac{m+1}{(m-k+1)k}) = \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} = C_{m+1}^k$

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m \times (a+b) = (\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}) \times (a+b) =$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} = \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} a^k b^{m-(k-1)} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} =$$

$$C_m^m a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} + C_m^0 a^0 b^{m+1} =$$

$$a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^{k-1} + C_m^k) a^k b^{m-k+1} =$$

$$a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1} = a^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k}$$

Ч.т.д.

Рассмотрим последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$

1. Покажем, что эта посл-ть ограничена снизу.

$$\begin{gathered}x_n = (1+\frac{1}{n})^n = \\ = C_n^1 * 1^{n-1} \times (\frac{1}{n})^1 + C_n^2 \times 1^{n-2} * (\frac{1}{n})^2 + \dots + C_n^n \times 1^0 \times (\frac{1}{n})^n = \\ = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \times \frac{1}{n^2} + \dots + \\ + \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{1}{n^k} + \dots + \\ + \frac{1}{n!} n(n-1)\dots(n-n+1)\frac{1}{n^n} \geq 2, \forall n\end{gathered}$$

   Значит x_n ограничена снизу.

2. Докажем, что x_n ограничена сверху.
   Замечание: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ (упр. - доказать методом мат. индукции)

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} \times 1 + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

3. Докажем, что $\{x_n\}$ является возрастающей.

$$\begin{gathered}x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n+1}) + \dots + \\ \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})\dots(1-\frac{k-1}{n+1}) + \dots + \\ \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\dots(1-\frac{n}{n+1})\end{gathered}$$

   $x_n < x_{n+1}$, т.к. у x_{n+1} на одно положительное слагаемое больше и каждое соответствующее слагаемое у x_{n+1} больше, чем у x_n.
   То есть, x_n - возрастающая. То есть по теореме 2.5.1 $\exists \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.7182$

2.7. Принцип вложенных отрезков.

Теорема 2.7.1

Пусть задана послед-ть отрезков $S_n = [a_n; b_n], \forall n \in N$, вложенных друг в друга, т.е. $S_{n+1} \subset S_n$ с длинами, стремящимися к нулю ($\alpha_n = b_n - a_n \to_{n\to\infty} 0$). Тогда $\exists$ и притом единственная точка c, одновременно принадлежащая всем отрезкам S_n ($c \in S_n$).

Доказательство:
$S_2 \subset S_1$
$S_3 \subset S_2$
$\vdots$

$\vdots$

$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \le b_m, \forall m \in N$
Т.е. $\{a_n\}$ неубывающая и ограничена сверху $\implies$ по теореме 5.1 $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = c$
$a_n < c < b_m, \forall m, n \in N$ ($a_n < c$ т.к. c - грань; $c < b_m$ т.к. $c = \sup\{a_n\}$)
Например, $a_n < c < b_n$. То есть $\exists c \in S_n, \forall n$.

Докажем единственность методом от противного:
Пусть $\exists$ точка $c_1 \in S_n, \forall n$. Тогда $a_n < c, c_1 < b_n$. Пусть для определённости $c < c_1$.
Рассмотрим $b_n - a_n > c_1 - c$. Рассмотрим $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \neq 0$. Это противоречит условию теоремы о стремлении к нулю.
Точка c - единственная.

Ч.т.д.

2.8. Подпоследовательность. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Пусть задана $\{x_n\}$ - последовательность. Выберем из неё бесконечное множество элементов с номерами $n_1 < n_2 < \dots$. Полученная последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательно $\{x_n\}$. Таких подпоследовательностей можно извлечь бесконечно много из искомой последовательности.

Утверждение: если $\{x_n\}$ сходится, то все $\{x_{n_k}\}$ будут сходится и $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n, \forall k \in N$.
Утверждение: если $\{x_n\}$ беск. большая, т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, то все $\{x_{n_k}\}$ будут являться беск. большими.
Утверждение: если $\{x_n\}$ неограничена, то из неё можно извлечь беск. большую.
Вопрос? если $\{x_n\}$ ограничена...

Теорема 2.8.1 (Больцано-Вейерштрасса)

Из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: т.к. $\{x_n\}$ ограничена, то $\forall n, x_n \in [a_0; b_0]$.
Выберем произвольно какой-либо элемент последовательности $\{x_n\}$. Пусть его номер - n_1. Очевидно, что $x_{n_1} \in [a_0; b_0]$. Разделим отрезок $[a_0; b_0]$ на два равных отрезка. Тогда по крайней мере на одном из них (обозначим его $[a_1; b_1]$) окажется беск. много элементов посл-ти $\{x_n\}$. Поэтому среди них найдется элемент с номером $N > n_1$. Обозначим его n_2 ($x_{n_2} \in [a_1; b_1] \subset [a_0; b_0], b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$).
Разделим отрезок $[a_1; b_1]$ на два равных отрезка. Обозначим $[a_2; b_2]$ отрезок с ∞ числом элементов x_n. Выберем элемент с номером $N > n_2$. Обозначим его n_3 ($x_{n_3} \in [a_2; b_2] \subset [a_1; b_1], b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$).
Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$[a_k; b_k] \subset [a_{k-1}; b_{k-1}], k = 1, 2, \dots$$

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = [\frac{a}{\infty}] = 0$$

То есть получили систему вложенных отрезков $[a_k; b_k]$ с длинами, стремящимися к 0.
Тогда по теореме 2.7.1:

$\exists!$ точка c, принадлежащая всем отрезкам.

$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c$, т.к. $a_k \le x_{n_k} \le b_k$.

То есть по теореме 2.2.5 (о двух милиционерах) $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$

2.9. Частичные пределы

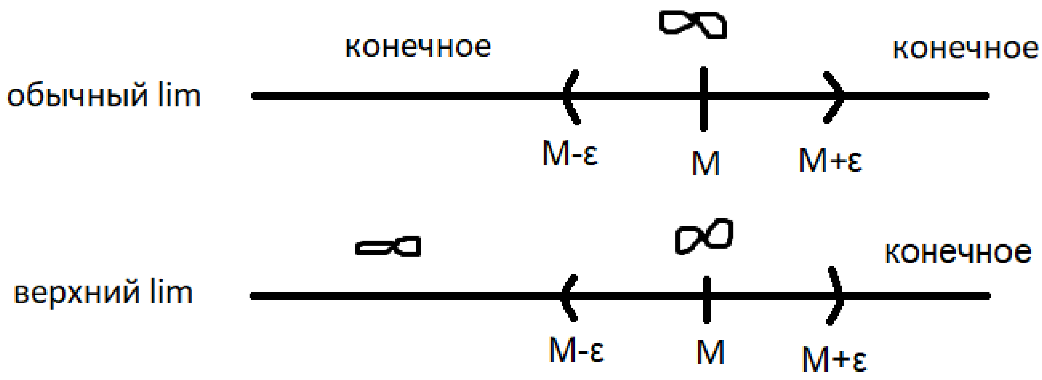
Пусть x_n - произвольная последовательность.
x_n:

- сходящиеся - все подпоследовательности сходятся к одному и тому же числу.
- расходящиеся:
  - стремящиеся к бесконечности - все подпоследовательности будут стремиться к ∞
  - не имеющие предела:
    - неограниченные - можно извлечь беск. большую последовательность.
      Пример: $\{1; 2; 1; 3; 1; 4; \dots\}$
    - ограниченные - можно извлечь сходяющуюся подпоследовательность.
      Пример: $(-1)^n = \{-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots\}$

Если x_n ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса можно рассматривать различные сходящиеся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$.
Пределы сходящихся подпоследовательности, извлечённых из ограниченной последовательности, называются **частичными пределами**.
Верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется число M (конечное, $\pm\infty$), обладающее свойствами:

1. $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \Big| \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = M$.
2. $\forall \{x_{n_k}\} \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \le M$.
   Обозначение: $M = \overline{\lim}_{k\to\infty} x_n$.
   Замечание: если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_n = \infty$.
   Замечание: если $\{x_n\}$ сходящаяся и $\lim_{n\to\infty} x_n = M$, то $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_n = M$.

Разница между обычным пределом (единственным) и верхним пределом

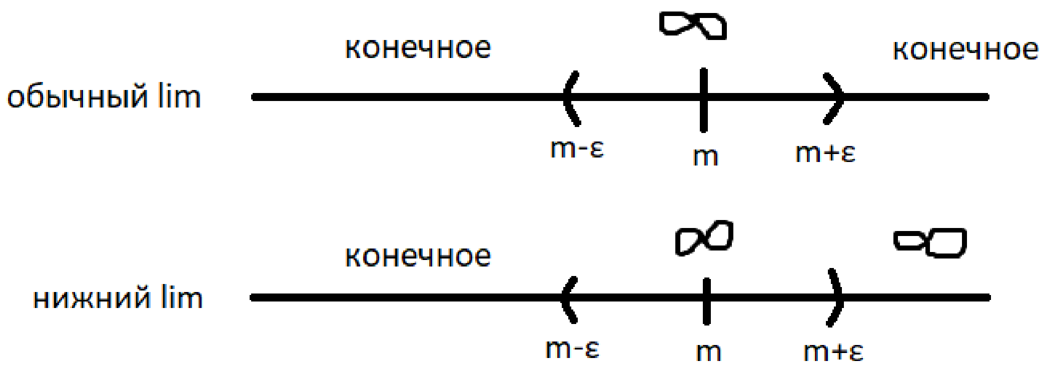


Левее $M - \varepsilon$ в случае "обычного" предела находятся конечное число элементов x_n, а в случае верхнего предела - ∞ число элементов x_n.
Нижним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется число m (конечное, $\pm\infty$):

1. $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}\Big| \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = m$.

2. $\forall$ сходящейся $\{x_{n_k}\}$ $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \geq m$.
   Обозначение: $m = \underline{\lim}_{k\to\infty} x_n$.
   Замечание: если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\underline{\lim}_{k\to\infty} x_n = -\infty$.
   Замечание: если $\{x_n\}$ сходящаяся и $\lim_{n\to\infty} x_n = m$, то $\underline{\lim}_{k\to\infty} x_n = m$.

Разница между обычным пределом (единственным) и нижним пределом



Разница между "обычным" пределом и нижним пределом заключается в том, что правее $M + \varepsilon$ в случае "обычного" предела находятся конечное число элементов x_n, а в случае нижнего предела - ∞ число элементов x_n.
Очевидно, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел (конечный, $\pm\infty$) $\Leftrightarrow$ чтобы $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. В этом случае $\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

2.10. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если она удовлетворяет условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \; \Big| \; \forall n > n_0, \forall m > n_0 \; |x_n - x_m| < \varepsilon$$

или

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \; \Big| \; \forall n > n_0, \forall p > 0 \; |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Леммы о фундаментальных последовательностях

Лемма 1: если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то она фундаментальная.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся.
Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists \, N = N(\varepsilon) \; \Big| \; \forall n > N \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $m > N$ и $n > N$. Рассмотрим $|x_m - x_n|$.

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т.е. $\{x_n\}$ - фундаментальна.

Ч.т.д.

Лемма 2: если последовательность фундаментальна, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальна. Тогда по условию Коши

$$\exists \, n_0 \; \Big| \; \forall m, n > n_0 \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Зафиксируем $m = n_0 + 1$. Получим $|x_n - x_{n_0+1}| < \varepsilon$.

$$-\varepsilon < x_n - x_{n_0+1} < \varepsilon$$
$$x_{n_0+1} - \varepsilon < x_n < x_{n_0+1} + \varepsilon$$

Обозначим $d = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, |x_{n_0+1} + \varepsilon|\}$.
Тогда

$$\forall n \in N \Rightarrow -d \leq x_n \leq d$$

То есть $\{x_n\}$ ограничена.

Ч.т.д.

Лемма 3: если некоторая подпосл-ть фундаментальной посл-ти сходится, то предел этой подпосл-ти является пределом всей посл-ти.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность. Пусть $\{x_{n_k}\}$ - её сходящаяся подпосл-ть.
Пусть $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$
Зададим $\varepsilon > 0$
По условию Коши

$$\exists \, n_0 \; \Big| \; \forall m, n > n_0 \implies |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Т.к. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, т.е.

$$\exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) \implies |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть k_0 будет таким, чтобы при $k > k_0 \implies n_k > n_0$

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Ч.т.д.

Теорема 2.10.1 (критерий Коши сходимости числовой посл-ти)

Для того, чтобы посл-ть имела конечный предел $\Leftrightarrow$ чтобы она была фундаментальна.

Доказательство:

Докажем необходимость ($\Rightarrow$).
Пусть посл-ть имеет конечный предел. Тогда по лемме 1 она фундаментальна.

Докажем достаточность ($\Leftarrow$).
Пусть посл-ть фундаментальная. Тогда по лемме 2 она ограничена, следовательно по теореме Больцано-Вейерштрасса можно извлечь сходящуюся подпосл-ть.
Тогда по лемме 3 вся посл-ть будет иметь предел, равный пределу подпосл-ти, т.е. посл-ть сходящаяся.

Ч.т.д.

3. Теория пределов функций. Непрерывность функций в точке и на отрезке.

3.1. Функция. Предел функции в точке.

Пусть $E \subset R$. Пусть $\forall x \in E$ по вполне определённому закону ставится в соответствие единственное число y. Тогда говорят, что на множестве E задана **функция** $y = f(x)$.

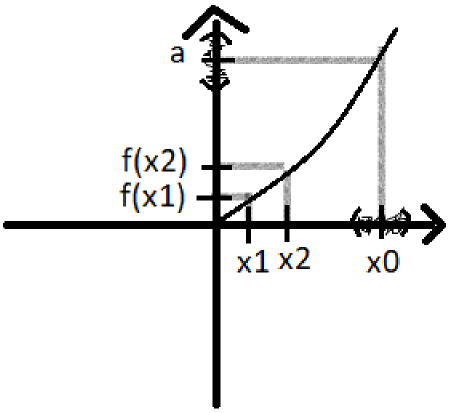
E - область определения функции.
x - независимая переменная (аргумент функции).
y - зависимая переменная (функция).

Определение предела функции в точке по Гейне (в терминах последовательностей)

Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, быть может за исключением самой точки x_0 (такая окрестность называется выколотой окрестностью) и $\forall \{x_n\} \bigm| \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, порождаемая ею посл-ть $\{f(x_n)\}$ имеет своим пределом точку a, т.е. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Запись:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$



Пример:

Рассмотрим такой предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x-1}{x-1}=\left|\begin{matrix}\text{Пусть } x_n \text{ - произвольная}\\ \lim_{n\to\infty}x_n=0\end{matrix}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n^2+x_n-1}{x_n-1}=$$
$$\frac{\lim_{n\to\infty}(2x_n^2+x_n-1)}{\lim_{n\to\infty}(x_n-1)}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2x_n^2)+\lim_{n\to\infty}x_n-1}{\lim_{n\to\infty}x_n-1}=$$
$$\frac{2\lim_{n\to\infty}x_n\times\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}x_n-1}{\lim_{n\to\infty}x_n-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

Другой пример: доказать, что $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\nexists$

Доказательство:

Выберем $\{x_n\}$ такую, что $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

1. $x_n=\frac{1}{\pi n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi n}\implies\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\frac{1}{\pi n}}=\lim_{n\to\infty}\sin\pi n=0$$

2. $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$

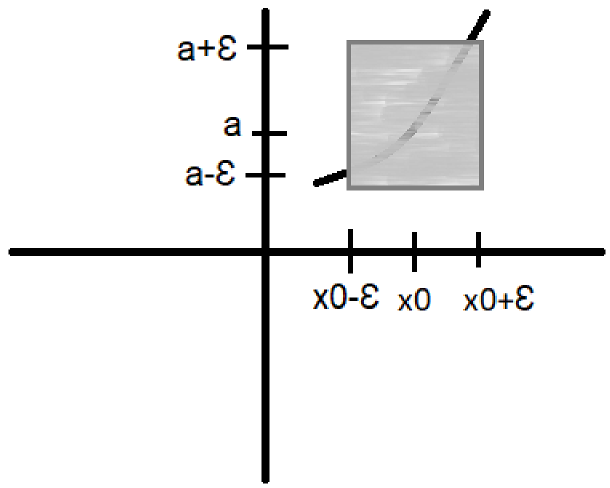
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}=0\implies\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}=\lim_{n\to\infty}\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi n)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=1$$

Поэтому $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\nexists$.

Ч.т.д.

Определение предела функции в точке по Коши

Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, быть может за исключением самой точки x_0 и, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)\ \big|\ |x-x_0|<\delta\implies|f(x)-a|<\varepsilon$



Если x находятся в δ-окрестности точки x_0, то все значения $f(x)$ располагаются в полосе шириной 2ε.

Теорема 3.1.1

Определения предела функции $f(x)$ в точке x_0 по Гейне и по Коши эквивалентны.

Доказательство:

1. **Докажем Гейне → Коши**
   Пусть функция имеет предел в точке x_0 в смысле Гейне.
   Предположим противное. Пусть функция $f(x)$ не имеет предел в точке x_0 в смысле Коши. Это значит, что $\exists$ хотя бы одно ε_0, для которого нельзя подобрать нужное δ.
   То есть $\forall\delta$ среди x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ должно найтись хотя бы одно $x = x(\delta) : |f(x(\delta)) - a| \geq \varepsilon$
   Составим последовательность. Выберем $\delta = \frac{1}{k}$ и для каждого k будем искать точку x_k для которой не выполняется определение Коши.
   (a) $k = 1\ \delta = 1\ |x_1 - x_0| < 1 \implies |f(x_1) - a| \geq \varepsilon_0$
   такой $x_1\ \exists$
   (b) $k = 2\ \delta = \frac{1}{2}\ |x_2 - x_0| < \frac{1}{2} \implies |f(x_2) - a| \geq \varepsilon_0$
   такой $x_2\ \exists$
   (c) $k = 3\ \delta = \frac{1}{3}\ |x_3 - x_0| < \frac{1}{3} \implies |f(x_3) - a| \geq \varepsilon_0$
   такой $x_3\ \exists$
   То есть $\forall k > 0\ |x_k - x_0| < \frac{1}{k} \implies \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, но тогда $|f(x_k) - a| \geq \varepsilon_0$, то есть $\lim_{k\to\infty} f(x_k) \neq a$. Получили противоречие, т.к. по Гейне $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$.
2. **Докажем Коши → Гейне**
   Пусть функция имеет предел по Коши.
   Зададим произвольную последовательность $\{x_n\} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
   Так как определение по Коши выполняется, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |x_n - x_0| < \delta \implies$$
$$|f(x_n) - a| < \varepsilon \implies \lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Ч.т.д.

Предел функции в бесконечно удалённой точки

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ k = k(\varepsilon) : x > k \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

Упр.: уметь расписывать **ВСЕГДА и ВЕЗДЕ**

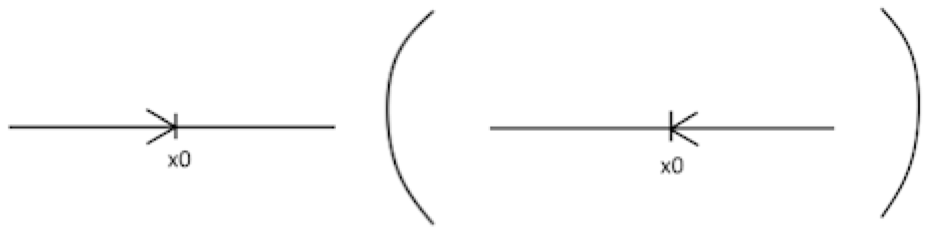
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a; \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty; \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty;$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty;$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Например, распишем последнее. Нужны два параметра. В определении Коши есть δ для x (аргумента) и ε для y (функции).
Т.к. $x \to -\infty$, то мы не можем использовать δ (она используется для малых величин), поэтому введём параметр K вместо δ.
Т.к. $\lim_{x\to-infty} f(x) = -\infty$, то мы не можем использовать ε (он используется для малых величин), поэтому введём параметр M вместо ε.
Тогда определение принимает вид:

$$\forall M > 0\ \exists\ K = K(M) > 0 : x < -K \implies f(x) < -M$$

3.2. Односторонние пределы

Если значение функции $f(x)$ стремится к числу a по мере стремления x к x_0 со стороны меньших (больших) значений, то число a называют пределом функции $f(x)$ в точке x_0 слева (справа)

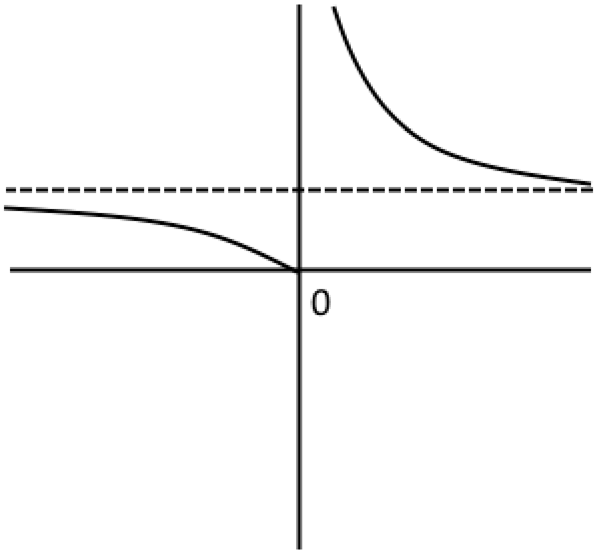


Обозначение:

- предел слева: $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) = a$
- предел справа $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0) = a$

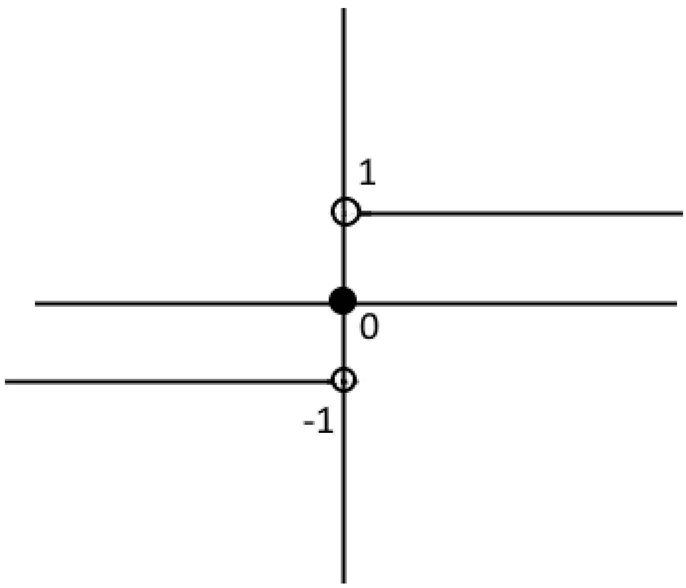
Пример:

$$\lim_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0; \lim_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$$



Пример 2:

$$f(x) = \text{sign}\, x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0-0} \text{sign}\, x = -1; \lim_{x\to 0+0} \text{sign}\, x = 1$$

Утверждение: для того, чтобы существовал обычный двусторонний предел функции в точке $x_0 \Leftrightarrow$ чтобы в этой точке существовали левый и правый односторонние пределы и чтобы они были равны.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

3.3. Свойства пределов функций

Теорема 3.3.1

Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, где a - конечное число, то в некоторой окрестности точки x_0 $f(x)$ ограничена.

Доказательство:

По определению Коши предела функции в точке:

$$\forall\varepsilon > 0 \,\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

Ч.т.д.

Теорема 3.3.2 (о сохранении знака)

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 не равный нулю конечный предел a, то $\exists$ окрестность точки x_0 : $\forall x$, принадлежащего этой окрестности, выполняется

$$f(x) > \frac{a}{2}, a > 0$$

$$f(x) < \frac{a}{2}, a < 0$$

Доказательство:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$
Обозначим $U(x_0)$ - окрестность точки x_0
Тогда $\forall x \in U(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon = \frac{|a|}{2}$

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}$$

$$a > 0 \qquad\qquad a < 0$$

$$f(x) > a - \frac{a}{2} \qquad\qquad f(x) < a - \frac{a}{2}$$

$$f(x) > \frac{a}{2} \qquad\qquad f(x) < -\frac{|a|}{2}$$

Ч.т.д.

Теорема 3.3.3

Если $f(x) = c$ (константа), то $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ - уже доказана.

Теорема 3.3.4

Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \lim_{x\to x_0} g(x) = b$ и $\forall x \in R$ из окрестности точки x_0:

$$f(x) \leq g(x) \implies a \leq b$$

3.4. Непрерывность функции в точке. Разрывы I и II родов.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\lim_{x\to\infty} x) = f(x_0)$$

Т.е. для непрерывности в точке функции множества меняются знаками предела и функции

1. Через прирождение
   $\Delta x = x - x_0$ - прирождение аргумента
   $\Delta y = y - y_0$ - прирождение функции
   Функция $f(x)$, направленная в точке x_0, если $\lim_{\delta x=0} \delta y = 0$

2. Определение Гейне
   Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для $\forall$ последовательности $\lim_{x\to\infty} x_n = x_0$
   Порождающая её последовательность $f(x_n)$ $\lim_{n\to\infty} f(x_0) = f(x_0)$

3. Определение Коши
   Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ (\delta - \delta\varepsilon)$

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв II рода, если хотя бы один из пределов (справа или слева) не существует или бесконечен.

Пример 1: рассмотрим при $x \neq 2$

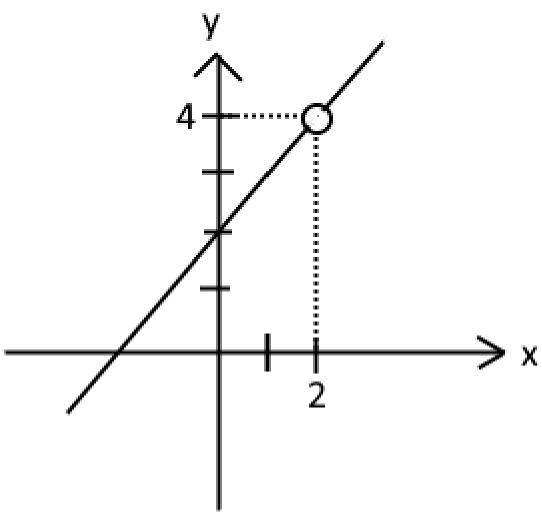
$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$$

$$f(2) = \nexists$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} (x+2) = 4$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = 4$$

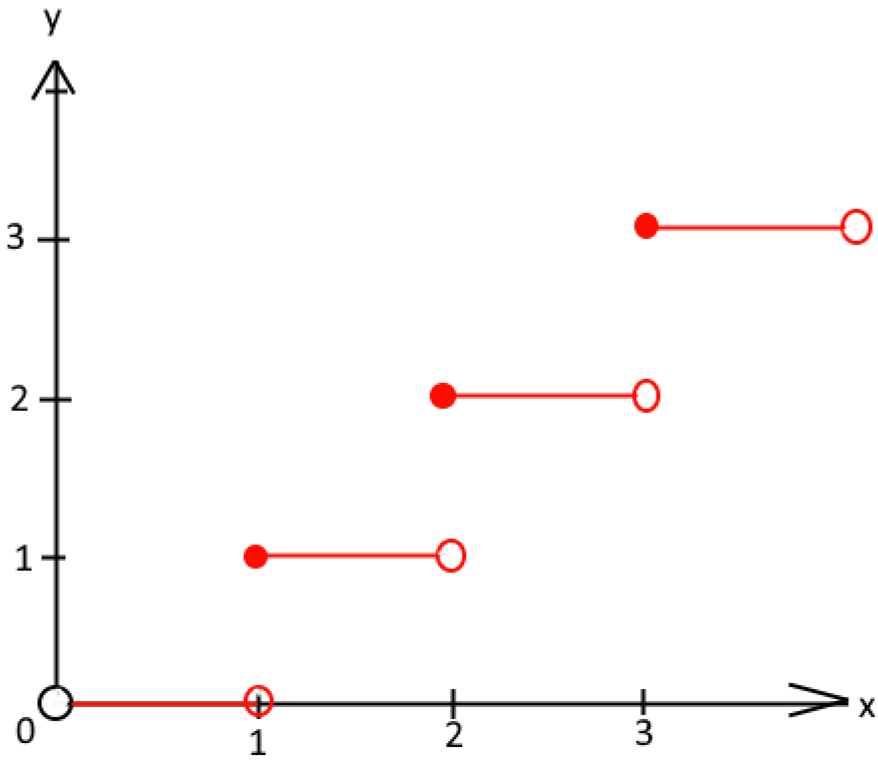


$f(x)$ непрерывна $\forall x \in R$, кроме $x = 2$, где $f(x)$ терпит разрыв I рода устранений.

Замечание: рассмотрим $g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq 2 \\ 4, x = 2 \end{cases}$; $g(x)$ непрерывна $\forall x \in R$

Пример 2: рассмотрим

$$f(x) = [x] \text{ - целая часть } x, x > 0$$

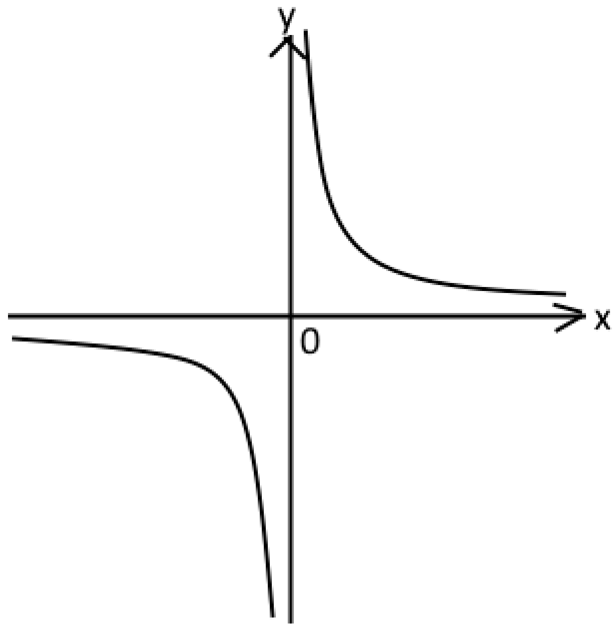


$$f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to 1-0} [x] = 0$$
$$\lim_{x \to 1+0} [x] = 1$$

$\forall x \in N$ $f(x)$ терпит разрыв I рода (скачок), в остальных $x > 0$ $f(x)$ - непрерывна.

Пример 3: рассмотрим

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(0) = \nexists$$
$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty$$

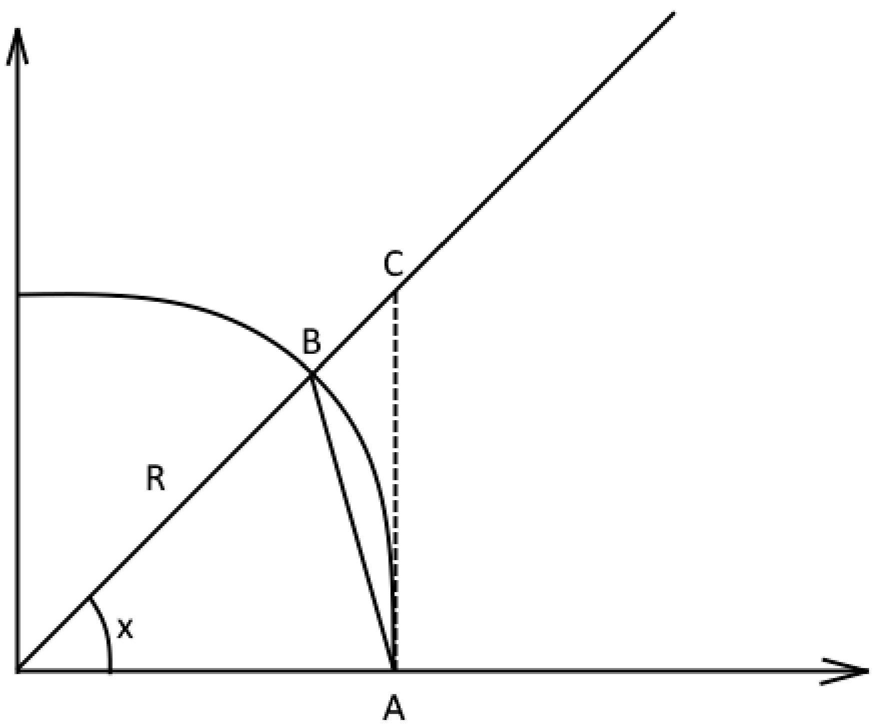
$f(x)$ непрерывна $\forall x \in R$, кроме $x = 0$, где она терпит разрыв II рода.

3.5. Замечательные пределы

Теорема 3.5.1 (I Замечательный предел)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

<u>Доказательство:</u>



Рассмотрим в координатной плоскости круг радиуса R с центром в начале координат

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект}OAB} < S_{\triangle OAC}$$
$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$$
$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \,\Big|\, : \sin x \ (\text{пусть } \sin x > 0)$$
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
$$\lim_{x\to 0} 1 = 1, \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \implies \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} = 1$$

Замечание: $f(x) = \cos x$ и $\frac{x}{\sin x}$, поэтому неравенство будет выполняться для $\frac{-\pi}{2} < x < 0$

Теорема 3.5.2 (II Замечательный предел)

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$
$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство:

Надо показать, что
$$\lim_{x\to 0-0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Замена:
$$x = \frac{1}{y} \implies \lim_{y\to -\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = \lim_{y\to\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$$

Замечание: будем считать известным фактом, что $\forall n \in N$ верно $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Пусть $x_n \to \infty$ (доказываем по определению Гейне)
Покажем, что $\lim_{x_n\to\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e$. $\{x_n\}$ - произвольная посл-ть: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$
Рассмотрим посл-ть $k_n = [x_n]$ - целая часть x_n.

$$k_n \le x_n < k_n + 1$$
$$\frac{1}{k_n+1} < \frac{1}{x_n} \le \frac{1}{k_n}$$
$$1+\frac{1}{k_n+1} < 1+\frac{1}{x_n} \le 1+\frac{1}{k_n}$$
$$(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n} < (1+\frac{1}{x_n})^{k_n} \le (1+\frac{1}{k_n})^{k_n}$$
т.к. $k_n \le x_n < k_n + 1$
$$(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n} < (1+\frac{1}{x_n})^{k_n} \le (1+\frac{1}{k_n})^{k_n+1}$$

1.
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n+1-1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n+1}(1+\frac{1}{k_n+1})^{-1} = e\times 1 = e$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n})^{k_n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n})^{k_n}(1+\frac{1}{k_n})^{1} = e\times 1 = e$$

Тогда $\lim_{x_n\to\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e$ (по теореме о двух милиционерах) Рассмотрим $x_n \to -\infty$.
Замена: $x'_n = -x_n$.
Рассмотрим $\lim_{x_n\to-\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = \lim_{x'_n\to\infty}(1+\frac{1}{-x'_n})^{-x'_n} = e$

Ч.т.д.

3.6. Эквивалентные бесконечно малые функции в точке

Функция $f(x)$ называется беск. малой при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$
Замечание: Функция, которая является беск. м. в одной точке, может не быть беск. б. в другой точке.

Теорема 3.6.1

Сумма и произведения конечного числа беск. м. функция в точке есть функция беск. м. в точке.

Теорема 3.6.2

Произведение беск. м. функции в точке на ограниченную есть беск. м. функция в точке.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ - беск. м. функция в точке $x_0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$
Пусть $g(x)$ - ограничена в окрестности точки x_0 ($u(x_0)$) $\implies \exists\, M : |g(x)| \le M$
$0 \le |f(x)g(x)| \le M|f(x)|$

По теореме о двух милиционерах так как $\lim_{x \to x_0} 0 = 0$ и $\lim_{x \to x_0} M|f(x)| = M \times 0 = 0$, то $\lim_{x \to x_0} |f(x)g(x)| = 0 \implies \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$

Ч.т.д.

Пример:

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

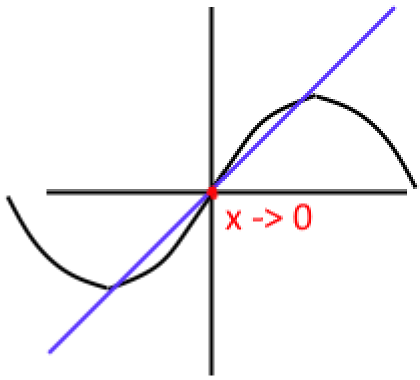
x - беск. м.
$\sin \frac{1}{x}$ - огр.

Эквивалентность беск. м. функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ являются беск. м. функциями в точке x_0. Тогда они называются эквивалентными беск. м. функциями в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \to x_0$
Например, $\sin x \sim x, x \to 0$



Замечание: если $f_1(x) \sim f_2(x), x \to x_0$, а $g_1(x) \sim g_2(x), x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_2(x)}$$

При нахождении предела дроби можно заменять на эквивалентные беск. м. или числитель, или знаменатель, или и то, и другое (но не часть числителя или знаменателя).

Так **НЕЛЬЗЯ**:

$$\operatorname{tg} x - \sin x \sim^{?} 0$$

Основные эквивалентности при $x \to 0$

1. $\sin x \sim x$
2. $\operatorname{tg} x \sim x$
3. $\ln(1 + x) \sim x$

4. $e^x - 1 \sim x$

5. $a^x - 1 \sim x \ln a$

6. $(1+x)^m - 1 \sim mx$

7. $\arcsin x \sim x$

8. $\operatorname{arctg} x \sim x$

9. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

Доказательство:

1. доказано (I Замечательный предел)
2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \times \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$
4. частный случай пункта 5 ($a = e$)
5. $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \left| \begin{matrix} a^x - 1 = y \\ x \to 0 \implies y \to 0 \\ \ln a^x = \ln(1+y) \\ x \ln a = \ln(1+y) \end{matrix} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$
6. $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{mx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{\ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{mx} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{\ln(1+x)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{mx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{m \ln(1+x)} = \left| \begin{matrix} (1+x)^m - 1 = y \\ x \to 0 \implies y \to 0 \\ (1+x)^m = y + 1 \\ \ln(1+x)^m = \ln(1+y) \\ m \ln(1+x) = \ln(1+y) \end{matrix} \right| =$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$
7. $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{matrix} \arcsin x = y \\ x \to 0 \implies y \to 0 \\ x = \sin y \end{matrix} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$
8. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{arctg} x = y \\ x \to 0 \implies y \to 0 \\ x = \operatorname{tg} y \end{matrix} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \frac{y \cos y}{\sin y} = 1$$
9. $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

3.7. Порядок переменной. Сравнение функций в окрестности заданной точки.

Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные в $u(x_0)$ за исключением быть может самой точки x_0.

x_0 - конечная, $\pm\infty$.
Пусть $g(x) \neq 0 \; \forall x \in u(x_0)$.

Если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = 0$, то в этом случае $f(x) = o(g(x))$, (o читается как "o малое"), т.е. $f(x)$ является беск. м. более высокого порядка малости, чем $g(x)$ при $x \to x_0$.

Если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ называются беск. малой одного порядка при $x \to x_0$.

Беск. малая $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет k-ый порядок малости по отношению к $g(x)$ при $x \to x_0$, если $f(x)$ имеет тот же порядок малости, что и $g^k(x)$, т.е. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g^k(x)} = 0$

Теорема 3.7.1

Для того, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)), x \to x_0$

Доказательство:

Докажем необходимость ($\Rightarrow$)

Пусть $f(x) \sim g(x), x \to x_0$. Тогда по определению $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \varepsilon(x) \Big| \times g(x)$$
$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) = g(x) + o(g(x))$$

Докажем достаточность ($\Leftarrow$)

Пусть $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \to x_0$
Например,

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) \Big| : g(x)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \varepsilon(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Т.е. $f(x) \sim g(x), x \to x_0$.

Ч.т.д.

Функция $f(x)$ называется функцией, ограниченной относительно функции $g(x)$ в $u(x_0)$, если ограничена функция $\frac{f(x)}{g(x)}$, т.е.

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq c \text{ или } |f(x)| \leq c\,|g(x)|$$

В этом случае $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$
$f(x) = O(1), x \to x_0$ = "функция $f(x)$ ограничена.

3.8. Глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$, в точке $x=a$ справа, в точке $x=b$ слева.

Теорема 3.8.1 (I-ая теорема Вейерштрасса)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она ограничена на нём, т.е.

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \ \forall x \in [a;b]$$

Доказательство:

Предположим противное. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, но при этом не ограничена на нём.
Составим последовательность x_n следующим образом:

$$\begin{gathered}\exists x_1 \in [a;b] : f(x_1) > 1 \\ \exists x_2 \in [a;b] : f(x_2) > 2 \\ \vdots \\ \exists x_n \in [a;b] : f(x_n) > 2 \\ \vdots\end{gathered}$$

В результате получили посл-ть $\{x_n\}$. Она ограничена ($\forall n \ x_n \in [a;b]$). По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпосл-ть x_{n_k}
Пусть $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$
Так как $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по определению $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
В нашем случае $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(\alpha)$ - конечное число (в силу непрерывности)
Однако $f(\alpha)$ является беск. б. по построению x_n ($f(x_n)$ беск. б.), $f(\alpha) = \infty$.
Получили противоречие, т.е. $f(x)$ ограничена.

Ч.т.д.

Теорема 3.8.2 (II-ая теорема Вейерштрасса)

Среди значений, которые на отрезке $[a;b]$ принимает непрерывная функция, существует наибольшее и наименьшее значения (в том числе может быть и в крайних точках).

Доказательство:

По I-ой теореме Вейерштрасса $f(x)$ ограничена сверху, т.е. $\exists k : f(x) \leq k \ \forall x \in [a;b]$
Тогда существует точная верхняя грань $f(x)$ на $[a;b]$. $M = \sup f(x), x \in [a;b]$
Составим вспомогательную посл-ть $\{x_n\}$ на основе свойства $\sup f(x)$.

$$\begin{gathered}\exists x_1 : M - 1 < f(x_1) \leq M \\ \exists x_2 : M - \frac{1}{2} < f(x_2) \leq M \\ \vdots \\ \exists x_n : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \\ \vdots\end{gathered}$$

$\{x_n\}$ ограничена ($\forall n x_n \in [a;b]$)
Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпосл-ть $x_{n_k}, \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$

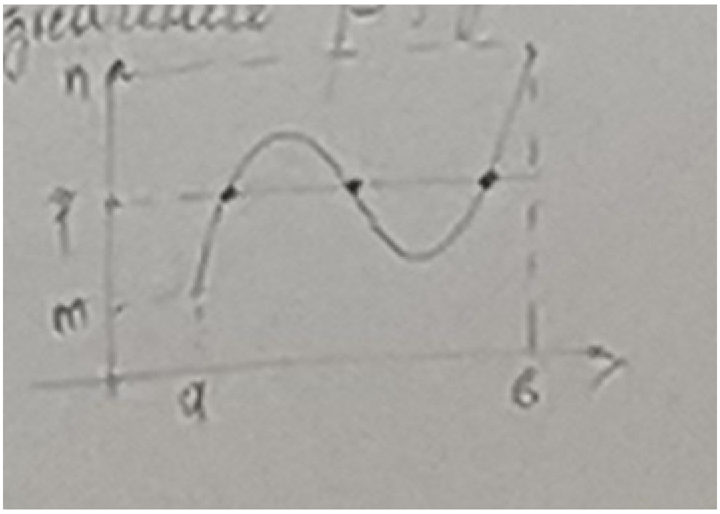
1. С одной стороны, $f(x)$ непрерывна на $[a;b] \implies \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(\alpha)$
2. С другой стороны $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$, следовательно

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$$

Т.к. $\lim_{k\to\infty}(M - \frac{1}{n_k}) = M$ и $\lim_{k\to\infty} M = M$, то $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$ (по т. о двух милиционерах), т.е. $f(\alpha) = M$.
$\beta \in [a;b] : f(\beta) = m$

Теорема 3.8.3 (Теорема Больцано-Коши)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $f(a) = m, f(b) = n$, то на интервале $(a;b)$ $f(x)$ по крайней мере один раз принимает значение p, заключённое между m и n.



Доказательство:

Для доказательства надо найти точку ξ, $f(\xi) = p$.
Разобъём отрезок $[a;b]$ на 2 равных отрезка точкой $\frac{a+b}{2}$
Варианты:

1. $f(\frac{a+b}{2}) = p \implies \xi = \frac{a+b}{2}$. **Ч.т.д.**
2. $f(\frac{a+b}{2}) \neq p$. Тогда либо $f(\frac{a+b}{2}) < p$, либо $f(\frac{a+b}{2}) > p$.
В первом случае далее выберем отрезок $[\frac{a+b}{2}; b]$, во втором - $[a; \frac{a+b}{2}]$. Переобозначим выбранный отрезок $[a_1; b_1]$, $f(a_1) < p < f(b_1)$. $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.
Разделим $[a_1; b_1]$ на 2 равных отрезка и выберем тот, на левом конце которого значение функции меньше p, а на правом - больше.
Тогда либо через конечное число шагов мы получим такую точку ξ, либо систему вложенных отрезков $[a_n; b_n], f(a_n) < p < f(b_n), b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to_{n\to\infty} 0$
Тогда по теореме о вложенных отрезках $\exists$ точка ξ, принадлежащая всем отрезкам одновременно

и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$
В точке ξ $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = f(\xi)$$

Тогда по теореме о двух милиционерах:

$$f(a_n) < p < f(b_n) \implies \lim_{n\to\infty} p = f(\xi)$$

Ч.т.д.

Следствие теоремы Больцано-Коши: если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка такая, что значение $f(x)$ в этой точке равно 0.

Замечание: будем считать элементарные функции непрерывными на своей области определения: $\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} \dots = \operatorname{tg} \lim_{x\to x_0} \dots$
Замечание: замена неопределённостей может идти по такому принципу

$$u^v \to e^{\ln u * v}$$
$$1^\infty \to [0 \times \infty] \to \begin{cases} \left[\frac{0}{0}\right] \\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \end{cases}$$
$$\infty^0 \to [\infty \times 0]$$
$$0^0 \to [\infty \times 0]$$

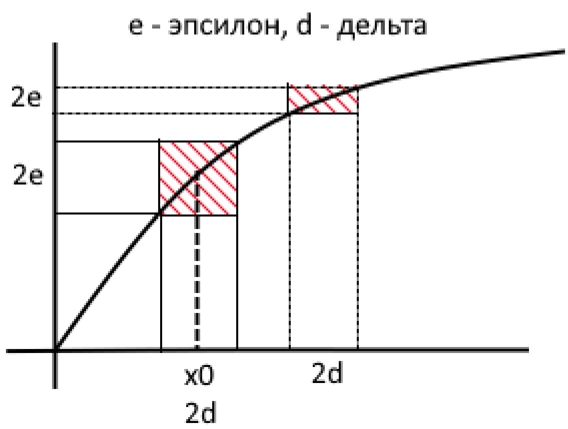
3.9. Равномерная непрерывная функция

Вспомним определение непрерывности функции в точке по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Зафиксируем ε. Вообще говоря, в каждой точке x существует своё δ, т.е. $\delta = \delta(\varepsilon, x)$.
В связи с этим выделяют класс функций (непрерывных), для которых при фиксированном $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, пригодная сразу для всех x, принадлежащая некоторому X.

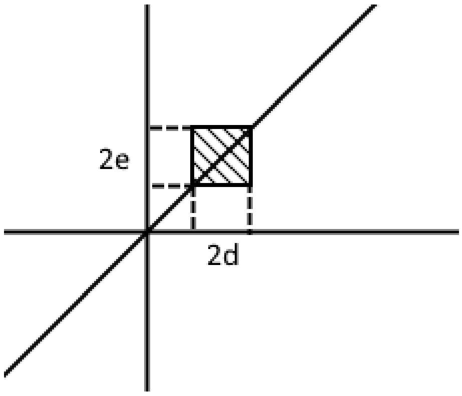
Функция, определённая на множестве X, называется **равномерно-непрерывной** на этом множестве, если
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x', x'' \in X : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$



Примеры:

1. $f(x) = x, x \in R$
   Пусть $x', x'' \in R : |x' - x''| < \delta$

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$$



2. $f(x) = x^2, x \in R$
   Пусть $x', x'' \in R : |x' - x''| < \delta$
   Пусть $x'' = x' + h \implies |x' - x' - h| = |h| < \delta$

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - (x' + h)^2| = |x'^2 - x'^2 - 2x'h - h^2| = |2x'h + h^2|$$

   Так как $x' \in R$, то можно так его выбрать, что $|2x'h + h^2| = \infty \implies$ функция $f(x) = x^2$ не является непрерывной на области своего определения.

Теорема 3.9.1 (Теорема Кантера)

Если функция определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она равномерно-непрерывна на нём.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x', x'' \in [a; b] : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

Зададим последовательность $\delta_n : \lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$.
Построим две вспомогательные последовательности x'_n и x''_n:

$$\exists \, x'_1, x''_1 : |x'_1 - x''_1| < \delta_1 \implies |f(x'_1) - f(x''_1)| \geq \varepsilon$$

$$\exists \, x'_2, x''_2 : |x'_2 - x''_2| < \delta_2 \implies |f(x'_2) - f(x''_2)| \geq \varepsilon$$

$$\exists \, x'_n, x''_n : |x'_n - x''_n| < \delta_n \implies |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$$

Рассмотрим $\{x'_n\}$: она ограничена. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сх-ся подпосл-ть $\{x'_{n_k}\}$.
Пусть $\lim_{k \to \infty} x'_{n_k} = x_0$
Аналогично м. извлечь $\{x''_{n_k}\}$
Т.к. $|x'_n - x''_n| < \delta_n \implies |x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \delta_{n_k}$
$\lim_{k \to \infty} x'_{n_k} = \lim_{k \to \infty} x''_{n_k} = x_0$
Так как $f(x)$ непрерывнв на $[a; b]$, то она непрерывна в точке $x_0 \in [a; b]$
Значит $\lim_{k \to \infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0)$
Рассмотрим $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon \quad \circledast$

Перейдем в $\circledast$ к пределу при $k \to \infty$

$$\varepsilon \leq |\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k})| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

Получили противоречие, т.к. $\varepsilon > 0 \implies f(x)$ - непрерывна.

Пример: рассмотрим $g = \sin\frac{1}{x}, x \in (0;1)$

На $(0;1)$ y является непрерывна. Покажем, что на $(0;1)$ y не является равномерно-непрерывной функцией.
Рассмотрим x'_n:

$$x'_n = \frac{1}{\pi n}, \lim_{n\to\infty} x'_n = 0, x'_n \in (0;1)$$

Рассмотрим x''_n:

$$x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \lim_{n\to\infty} x''_n = 0, x''_n \in (0;1)$$

Рассмотрим

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = |\sin\pi n - \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)| = 1$$

$$\forall\delta : |x'_n - x''_n| < \delta \implies |f(x'_n) - f(x''_n)| = 1$$

$$\forall\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 \implies \nexists\delta(\varepsilon)$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда $\delta(\varepsilon) = \nexists$.

Ч.т.д.

Замечание: на практике, как правило, функции, которые растут больше, чем $y = x$, не является равн.-непр-ми на $D(f)$.

4. Дифференциальные исчисления функции

4.1. Производная функции в точке

$y = f(x)$
Δx - приращение аргумента
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции

Производной от функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при стремлении последнего к 0.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\sqcup}{dx}f$$

$$y'''' = y^{IV} = y^{(4)}$$

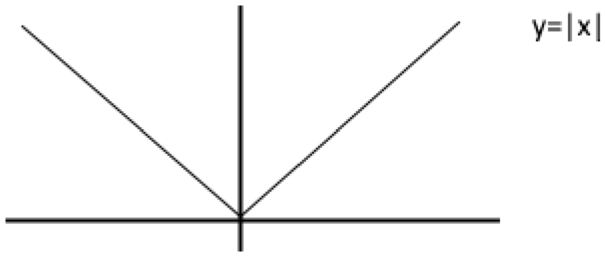
Замечание: для существования производной от $f(x)$ в точке x_0 необходимо, чтобы $f(x)$ была определена в некоторой окрестности x_0 и в самой точке x_0.
Замечание: функция имеет производную в точке x_0, если $\exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
Замечание: если $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$, то говорят, что функция имеет бесконечную производную в точке.

Если $\Delta x \to 0$ принимает только положительные значения то соответствующий предел называется правой производной от $f(x)$ в точке x_0.

Если $\Delta x \to 0$ принимает только отрицательные значения то соответствующий предел называется левой производной от $f(x)$ в точке x_0.

Функция $f(x)$ имеет производную на $[a;b]$, если она имеет производную во всех точках $(a;b)$, в точке $x = a$ имеет правую производную, в точку $x = b$ - левую.

Утверждение: если $f(x)$ имеет в точке x_0 правую и левую производные, то $f(x)$ имеет в точке x_0 производную.
Утверждение: если правая и левая производные в точке x_0 $\exists$ и не равны между собой, то производная в точке x_0 $\exists$.
Пример:



$$y'\Big|_{x\,=\,0}$$

Правая производная

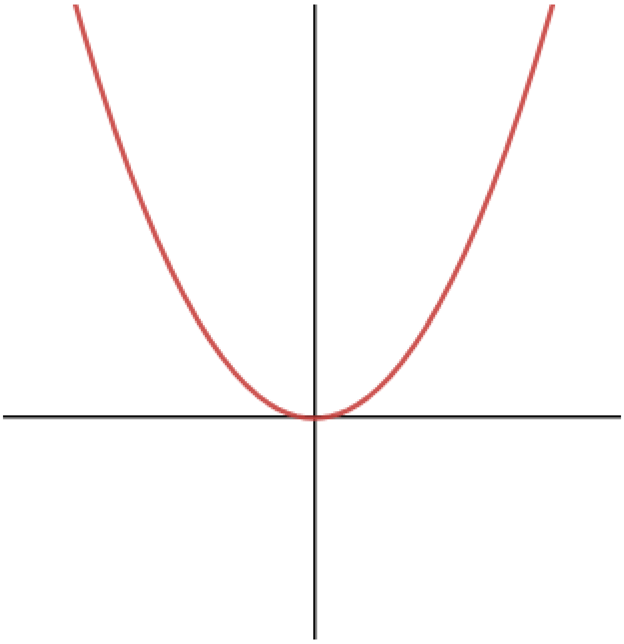
$$y'_{+}\Big|_{x\,=\,0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \left| \begin{array}{c} \Delta x \to 0 \sim x_0 \to 0 \\ \\ \end{array} \right| = \lim_{x_0 \to 0} \frac{x_0 - 0}{x_0} = 1$$

Левая производная

$$y'_{-}\Big|_{x\,=\,0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x_0) - f(0)}{-x_0 - 0} = \left| \begin{array}{c} \Delta x \to 0 \sim x_0 \to 0 \\ \\ \end{array} \right| = \lim_{x_0 \to 0} \frac{-x_0 - 0}{-x_0} = -1$$

Функция $y = |x|$ не имеет производной в точке 0.

Пример: докажем, что $y = x^2$ имеет производную в точке $x = 0$.



$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2-0}{x-0}=0$$
$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(-x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2-0}{-x-0}=0$$

В точке $x=0$ действительно $f'(x)=0$.

Ч.т.д.

Теорема 4.1.1

Функция, имеющая конечную производную в точке, непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Пусть существует $\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'$ конечное.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'+\varepsilon(\Delta x),\ \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$$
$$\Delta y=f'\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(f'\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}f'\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)\Delta x=0+0=0$$

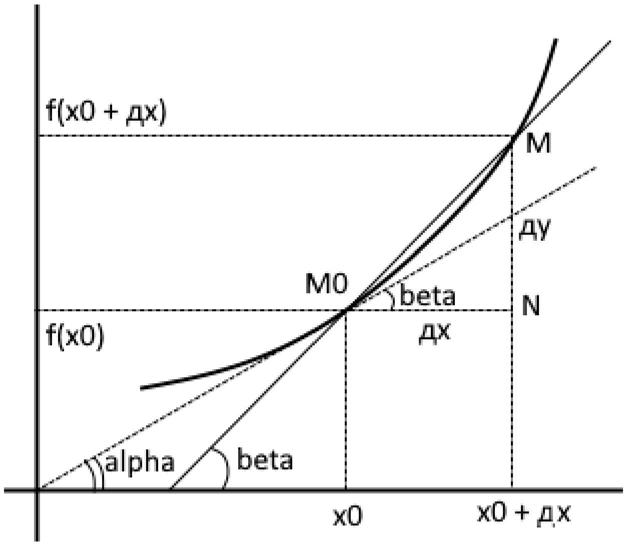
Ч.т.д.

Некоторые приложения производной

1. Мгновенная скорость

   Пусть $S=S(t)$ - закон движения в точке.
   Рассмотрим $[t,t+\Delta t]$: $\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$ - путь, пройденный за промежуток времени Δt.
   $v_{\text{ср}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость.
   Мгновенная скорость $v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t)$
   $a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$ - ускорение.

4.2. Геометрический смысл прооизводной



$$M_0(x_0; f(x_0))$$
$$M(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$$

Запишем уравнение прямой M_0M
<u>Замечание:</u> уравнение прямой, проходящей через точки $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$\frac{x - x_0}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$
$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y}$$
$$\Delta y(x - x_0) = \Delta x(y - y_0) \; \Big| \; * \Delta x$$
$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$$
$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0) \; \Big| \; : M_0M$$
$$\operatorname{tg} \angle\beta = \frac{|MN|}{|M_0N|} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда точка M будет стремиться к точке M_0, а угол β к углу α.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ по определению}$$

С другой стороны,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = tg \lim_{\Delta x \to 0} \beta = tg\alpha$$

Рассмотрим уравнение секущей при $\Delta x \to 0$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Допустим $f'(x_0) = \infty$. Тогда рассмотрим уравнение секущей:

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \; \Big| \; : \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\frac{y}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 + \frac{y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$. Тогда уравнение касательной примет вид $\underline{x = x_0}$.

Замечание: если $L_1 \perp L_2$

$$\begin{matrix} L_1 : y = k_1 x + b_1 \\ L_2 : y = k_2 x + b_2 \end{matrix} \implies k_1 k_2 = -1$$

Прямая, проходящая через точку x_0 перпендикулярно касательной, проведённой в этой точке, называется нормалью к графику функции $f(x)$.

$$K_{\text{н}} = -\frac{1}{K_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0 \text{ (уравнение нормали)}$$

4.3. Производные элементарных функций

1. $y = \mathbb{C} = const$
   $y(x) = \mathbb{C}, y(x + \Delta x) = \mathbb{C}$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbb{C} - \mathbb{C}}{\Delta x} = 0$$

2. $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} * \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2} * 2} = \cos x$$

   Аналогично доказывается, что $(\cos x)' = -\sin x$

3. $y = \log_a x$

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x} * \frac{x}{x}}\right) =$$
$$= \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a} = (log_a x)'$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

4. $y = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ По теореме 4.4.3

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Аналогично доказывается, что $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5. $y = a^x$
$x = \log_a y$ - обратная функция.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

$$(a^x)'_x = \frac{1}{(\log_a y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$$

6. $y = \arcsin x$
$x = \sin y$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Аналогично:

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

7. $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ По теореме 4.5.1

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} * \alpha * \frac{1}{x} = x^\alpha * \alpha * \frac{1}{x} = \alpha * x^{\alpha - 1}$$

Таблица производных

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

16. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

17. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

4.4. Производная суммы, произведения, частного

Теорема 4.4.1

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$$

Ч.т.д.

Теорема 4.4.2

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$y(x) = u(x)v(x)$$

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x} = u'v + uv'$$

Ч.т.д.

Теорема 4.4.3

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x) - u(x)v(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ч.т.д.

4.5. Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки $x_0 = u(x_0)$, а функция $z = g(y)$ - в некоторой окрестности $v = v(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, причём $f(u) \subset v$.
Тогда определена сложная функция $F(x) = g(f(x))$.

Теорема 4.5.1

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $z = F(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0, причём

$$F(x)\Big|_{x = x_0} = y'(y)\Big|_{y = y_0} * f'(x)\Big|_{x = x_0}$$

Доказательство:

$\Delta x = x - x_0$
$\Delta y = y - y_0$
$\Delta z = g(y) - g(y_0)$
Т.к. функция $g(y)$ имеет производную в точке y_0, то

$$\exists \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = g'(y_0)$$

То есть

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = g'(y_0) + \varepsilon(\Delta y)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = o\left(g'(y_0) = g'(y)\Big|_{y = y_0}\right) * \Delta y$$

$$\Delta z = g'(y_0) * \Delta y + \varepsilon(\Delta y) * \Delta y \;\Big|\; : \Delta x$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Замечание: по условию функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда по теореме 4.1.1 $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции, т.е. если $\Delta x \to 0 \implies \Delta y \to 0 \implies \varepsilon(\Delta y) \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0) f'(x_0) + 0 * f'(x_0) = g'(y)\Big|_{y = y_0} * f'(x)\Big|_{x = x_0}$$

Ч.т.д.

4.6. Производная обратной функции

Теорема 4.6.1

Если функция непрерывна и возрастает (строго монотонна) в окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ и

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Доказательство:

Замечание 1: если $f(x)$ возрастает и непрерывна в $u(x_0)$, то $f^{-1}(y)$ тоже возрастает и непрерывна на интервале $v = f(u)$
Замечание 2: функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \implies$ при $\Delta x \to 0 \implies \Delta y \to 0$
Замечание 3: т.к. $y = f(x)$ возрастает, то при $\Delta x \neq 0 \implies \Delta y \neq 0$

Рассмотрим

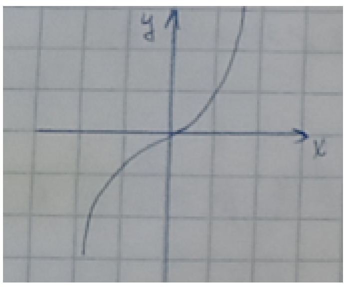
$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \overset{\text{зм 2}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \overset{\text{зм 3}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

Ч.т.д.

4.7. Гиперболические функции и их производные

1. Гиперболический синус

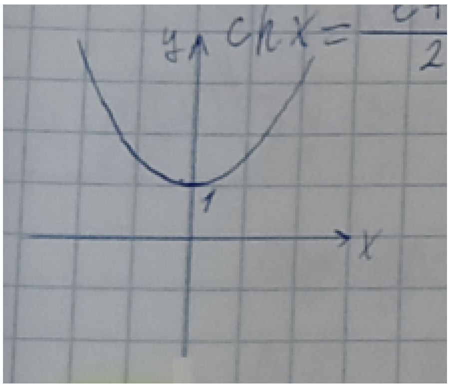
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$D(f) : R$
$E(f) : R$
нечётная, непрерывная, возрастает

2. Гиперболический косинус

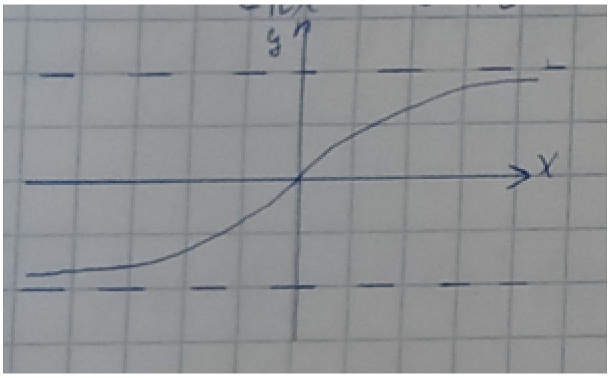
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$D(f) : R$
$E(f) : [1; +\infty]$
чётная, непрерывная

3. Гиперболический тангенс

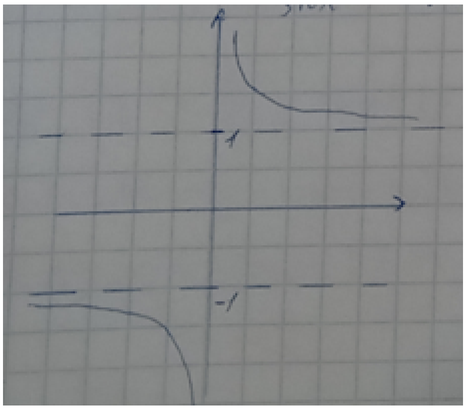
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$D(f) : R$
$E(f) : (-1; 1)$
нечётная, непрерывная, возрастающая

4. Гиперболический контангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$$D(f) : R\backslash 0$$
$$E(f) : (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$
нечётная, в точке $x = 0$ разрыв II рода

Производные гиперболических функций

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$$
$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} =$$
$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$
$$(\operatorname{cth} x)' \overset{\text{аналогично}}{=} -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

4.8. Логарифмическое дифференцирование, производная от функции, заданной неявно, производная от функции, заданной параметрически

1. Производная от функции, заданной неявно
   $y = f(x)$ - явное задание функции
   Пример:

   $3x^4y^3 + 5x^3y^5 - 5 = 0$ - уравнение, определяющее неявно функцию $y = y(x)$
   $(x)' = 1$; $(y)' = y'$

$$3(4x^3y^3 + x^4 * 3y^2 * y') + 5(3x^2y^5 + x^3 * 5y^4 * y') = 0$$
$$y'(9x^4y^2 + 25x^3y^4) = -12x^3y^3 - 15x^2y^5$$
$$y' = \frac{-12x^3y^3 + 15x^2y^5}{9x^4y^2 + 25x^3y^4}$$

2. Производная от функции, заданной параметрически
   $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$y = y(x)$

$$y'_x = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} \overset{\text{Th 4.6.1}}{=} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Пример:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$$

$x'_t = -2\sin t$

$y'_t = 2\cos t$

$$y'_x = \frac{2\cos t}{-2\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

3. Логарифмическое дифференцирование

   $y = u(x)^{v(x)}$ - степенно-показательная функция

   (a) Логарифмическое дифференцирование

$$y = u(x)^{v(x)}$$
$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)}$$
$$\ln y = v(x) * \ln u(x)$$
$$\frac{1}{y} * y' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)} * u'(x) \ \Big| \ * y$$
$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x)\ln(u(x)) + \frac{v(x)}{u(x)} * u'(x) \right]$$

   (b) Сведение к сложной функции

$$y = u(x)^{v(x)} = \left| a = b^{\log_b a} \right| = e^{\ln u(x) * v(x)}$$

$$y' = e^{\ln u(x) * v(x)} * \left[\frac{1}{u(x)} * u'(x) * v(x) + \ln(u(x)) * v'(x) \right]$$

   (c)

$$\begin{array}{lll} y = u(x) & y = (u(x))^n & y = a^{v(x)} \\ \vdots & y' = n(u(x))^{n-1} * u'(x) & y' = a^{v(x)} * \ln(a) * v'(x) \end{array}$$

$$y' = v(x)u(x)^{v(x)-1} * u'(x) + u(x)^{v(x)} * \ln u(x) * v'(x)$$

4.9. Дифференциуемость функции. Дифференциал, его геометрический и физический смыслы

Функция $y = f(x)$, заданная в $u(x_0)$, называется дифференциуемой в этой точке, если её приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta) - f(x_0)$ представимо в этой окрестности в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta \to 0$, $A = const$

Линейная часть приращения функции $A\Delta x$ называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается $df\Big|_{x = x_0}$ или $df(x_0)$.
Тогда $\Delta y = dy + o(\Delta x)$

Замечание: $o(\Delta x) = o(A\Delta x) = o(dy)$

Тогда $\Delta y = dy + o(dy)| : dy$
$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(dy)}{dy}$
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$
Т.е. $\Delta y \sim dy$ при $\Delta x \to 0$

Теорема 4.9.1 (необходимость и достаточность условия дифференции в точке)

Для того чтобы $f(x)$ была дифференциуема в точке $x_0 \Leftrightarrow$ чтобы в этой точке она имела конечную производную.

Доказательство:

Докажем необходимость ($\Rightarrow$)
Пусть $f(x)$ дифференциуема в точке x_0. Покажем, что $\exists\ f'(x_0)$ - конечное.
Тогда по определению

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$
$$\Delta y = A\Delta x + \varepsilon(\Delta x) * \Delta x$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x)$$
$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$
$$f'(x)|x = x_0 = A = const$$

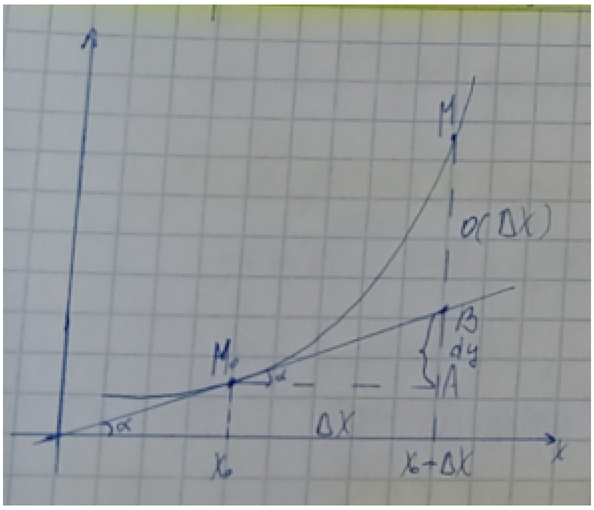
Докажем достаточность ($\Leftarrow$)
Пусть $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, т.е. $\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \epsilon(\Delta x)| * \Delta x$$
$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Ч.т.д.

Замечание: таким образом $df\Big|_{x = x_0} = f'(x_0)\Delta x$

Геометрический смысл дифференциала



Рассмотрим функцию $y = f(x)$:

$$M_0(x_0, f(x_0))$$
$$M(x_0, \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$$
$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

Рассмотрим ΔABM_0:

$$\operatorname{tg}\alpha = |AB|$$
$$f'(x_0)\Delta x = \Delta y$$
$$|MB| = o(\Delta x)$$

	Ф-ия	Касательная
приращ. ф-ии	Δy $\lvert AM\rvert$	dy $\lvert AB\rvert$
приращ. арг.	Δx $\lvert AM_0\rvert$	dx $\lvert AM_0\rvert$

Отсюда для независимой переменной x: $\Delta x = dx$
Геометрический смысл дифференциала: это есть приращение ординатф касательной, проведённой к графику функции в точке x_0.

<u>Замечание:</u> для функции $y = kx + b$ $dy = \Delta y$ для любых x.
<u>Замечание:</u> $dy = f'(x)\Big|_{x = x_0} * dx \implies f'(x)\Big|_{x = x_0} = \frac{dy}{dx}$

Физический смысл диффернциала

$$V_{\text{мгнов}} = S'(t)\Big|_{t = t_0} = \frac{dS}{dt}$$

$$dS = S'(t)\Big|_{t=t_0} * dt = S'(t)\Big|_{t=t_0} * \Delta t$$

Дифферинциал dS равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за время Δt, начиная с момента времени $t = t_0$, если бы на этом участке пути скорость была бы постоянной и равной $S'(t)\Big|_{t=t_0}$

Свойства дифферинциалов

1. $d(u \pm V) = du \pm dv$
2. $d(uv) = udv + vdu$
3. $d(Cu) = Cdu$
4. $d(\frac{u}{v}) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{vdu-udv}{v^2}$

Доказательство 4-го пункта:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Ч.т.д.

4.10. Примемение дифференциала в приближённых вычислениях. Дифференциал сложной функции

Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0

$\Delta y = dy + o(dx)$
$\Delta y \approx dy$
$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$
$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ - **формула приближённого вычисления функции**.

Пример: $\sin 32°$

Рассмотрим $f(x) = \sin x$
$32 = x_0 + \Delta x = 30 + 2$
$x_0 = 30; \Delta x = 2 = \frac{\pi}{90}$
$f'(x) = const$
$f(30) = \frac{1}{2}$ $f'(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $sin32 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{90} = 0,53$

Дифференцируемость сложной функции

Рассмотрим $y = f(x)$
$z = g(y)$
Получим $F(x) = g(f(x))$

$$F'(x)\Big|_{x=x_0} = g'(y)\Big|_{y=y_0} * f'(x)\Big|_{x=x_0}$$

Рассмотрим

$$dF = F'(x)\Big|_{x = x_0} dx = g'(y)\Big|_{y = y_0} * f'(x)\Big|_{x = x_0} * dx = g'(y)dy$$

Формула показывает, что записи дифференциала посредством независимой переменной x и зависимой переменной y имеет один и тот же вид.
Это свойство называется **инвариантностью** формы записи первого дифференциала.

4.11. Производные дифференциалов высших порядков

Пусть $y = f(x)$ имеет производную $y' = f(x)$ во всех точках некоторой окрестности точки x_0.
Если в свою очередь $f'(x)$ имеет производную $[f'(x)]'\Big|_{x = x_0}$, то она называется второй производной функции $f(x)$ в точке x_0.
Аналогично определяются производные более высоких порядков: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.
Примеры:

1. $y = a^x$
   $y' = a^x \ln a$
   $y'' = a^x \ln^2 a$
   $y^{(n)} = a^x \ln^n a$

2. $y = \sin x$
   $y' = \cos x = \sin(\frac{1\pi}{2} + x)$
   $y'' = -\sin x = \sin(\frac{2\pi}{2} + x)$
   $y^{(n)} = \sin(\frac{n\pi}{2} + x)$

3. $y = \cos x$
   $y^{(n)} = \cos(\frac{n\pi}{2} + x)$

4. $y = \ln x$
   $y' = \frac{1}{x}$
   $y'' = -\frac{1}{x^2}$
   $y''' = \frac{1}{x^3}$
   $\vdots$
   $y^{(n)} = (-1)^{n-1} * \frac{(n-1)!}{x^n}$

5. $y = x^n, n \in N$
   $y' = nx^{n-1}$
   $y'' = n(n-1)x^{n-2}$
   $\vdots$
   $y^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$
   $\vdots$
   $y^{(n)} = n!$

6. $y = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$
   $y^{(n)} = \lambda_1 y_1^{(n)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n)}(x)$

7. $y = uv$
   $y' = u'v + uv'$
   $y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$
   $y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$
   $\vdots$
   $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$ **- формула Лейбница**
   $(k), (n-k)$ - символическая степень (применяем формулу бинома Ньютона, но не возводим в степень, а берём производную)

Производная высшего порядка от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$y'_x = y'_t * t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = A(t)$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (A(t))'_t t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = B(t)$$

$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x = (B(t))'_t t'_x = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$$

$$\boxed{y^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n}} = \frac{(y^{(n-1)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n-1}})'_t}{x'_t}}$$

Производная высшего порядка от функций, заданных неявно

<u>Пример:</u> $x^2 + y^2 = 25$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$x + yy' = 0 \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

$$1 + yy'' + (y')^2 = 0 \qquad y'' = -\frac{1+(y')^2}{y} = f_2(x;y)$$

$$y'y'' + yy'' + 2y'y'' = 0 \qquad y''' = -\frac{3y'y''}{y} = f_3(x;y)$$

Дифференциалы высших порядков

$$y = f(x)$$
$$dy = f'(x)dx$$

Пусть функция $f'(x)$ также дифференциуема в точке x_0 и **величина dx имеет одно и то же фиксированное значение** для $\forall x \in u(x_0)$
Рассмотрим

$$d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'_x dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2$$

$$dx^2 = (dx)^2 \text{ (дэ икс дважды)}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Аналогично дифференциал порядка n называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$ при условии, что $dx = const$, то есть

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = y^{(n)}dx^n \text{ (дэ икс эножды)}$$

Замечание: дифференциалы высших порядков $(n \geq 2)$ не обладают свойством инвариантности формы записи относительно выбора переменных.

Доказательство:

$y = f(x), z = z(y) \quad z = z(f(x))$ - сложная функция

$$dz = z'_y dy$$

$$d^2z = d(dz) = d(z'_y \underbrace{dy}_{\text{не const}}) = \left| d(uv) = udv + vdu \right| = z'_y d^2y + dyd(z'y) = z'_y d^2y + z''_{yy}dy^2$$

$$z'_y d^2y = 0 \text{ для линейной функции}$$

4.12. Дифференциальные теоремы о среднем

Точка $x = c$ называется точкой локального максимума (минимума) функкции $y = f(x)$, если $\exists u_\delta(c) : (c - \delta; c + \delta) :$

$$f(c) \geq f(x) \; \forall x \in (c - \delta; c + \delta)$$

$$(f(c) \leq f(x) \; \forall x \in (c - \delta; c + \delta))$$

Точка локального максимума (минимума) функции называется точкой локального экстремума.

Теорема 4.12.1 (Ферма)

Если $f(x)$ имеет производную в точке c и достигает в этой точке экстремум, то $f'(c) = 0$

Доказательство:

Пусть точка c - точка локального экстремума.

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Пусть для определённости точка c - точка максимума $(f(c) \geq f(x) \forall x \in (c - \delta; c + \delta))$

Т.к. производная в точке c существует, то существует

$$\left. \begin{array}{l} f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \\ f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \end{array} \right\} \text{т.к. } f'(c) \exists \implies f'(c) = 0$$

Ч.т.д.

Замечание: точка, в которой функция достигает экстремальное значение, является внутренней точкой интервала.

Теорема 4.12.2 (Ролля)

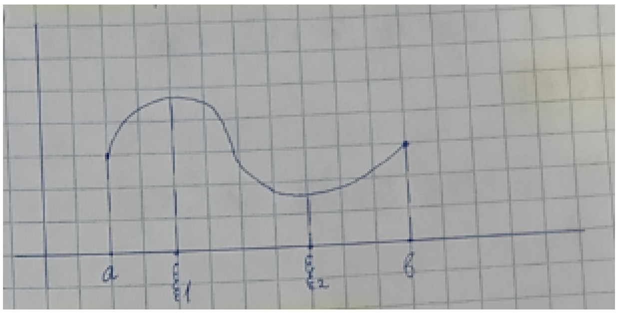
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференциуема на $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда на $(a;b)$ $\exists$ по крайней мере одна точка $\xi \in (a;b) : f'(\xi) = 0$

<u>Доказательство:</u>

1. $f = const$. Тогда $\forall \xi \in (a;b) f'(\xi) = 0$. **Ч.т.д.**
2. $f \neq const$. Тогда по второй теореме Вейерштрасса существуют точки x_1, x_2, в которых функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Причём обе точки x_1 и x_2 не могут быть концами $[a;b]$ одновременно. Т.к. $\underset{x\in[a;b]}{max} f(x) = \underset{x\in[a;b]}{min} f(x) = f(a) = f(b)$ по условию. Тогда $f(x)$ была бы константой, а это не так. Т.е. одна из $x_1, x_2 \in (a;b)$. Обозначим её ξ. По условию $f(x)$ дифференциуема на $(a;b) \overset{\text{Th 4.9.1}}{\Longrightarrow} \exists$ конечная $f'(\xi)$. А так как в этой точке функция принимает наибольшее или наименьшее значение $\implies f'(\xi) = 0$.

Ч.т.д.

Геометрический смысл теоремы Ролля



Теорема 4.12.3 (теорема Коши)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a;b]$, дифференциуемы на $(a;b)$, $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a;b)$. Тогда $\exists$ точка $\xi \in (a;b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

<u>Доказательство:</u>

<u>Замечание:</u> $g(b) \neq g(a)$, так как, если бы это было так, то $g(x)$ удовлетворяла бы условию теоремы Ролля $\implies \exists$ точка $\xi \in (a;b) : g'(\xi) = 0$, а это не так.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * (g(x) - g(a))$$

Т.к. $f(x), g(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и дифференциуемы на $(a;b) \implies F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференциуема на $(a;b)$
$F(a) = 0; F(b) = 0$
Т.е. $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля $\implies \exists$ точка $\xi \in (a;b) : F'(\xi) = 0$.
Тогда:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(x)$$

$$F'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * g'(\xi) = 0$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * g'(\xi) = f'(\xi) \; \Big| \; * g'(\xi) \neq 0$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Ч.т.д.

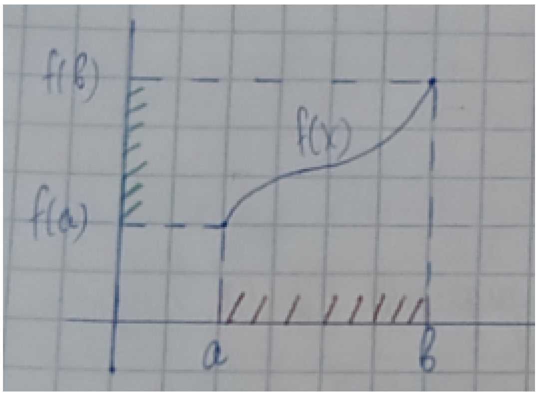
Теорема 4.12.4 (теорема Лагранжа)

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференциуема на $(a;b)$, тогда $\exists$ точка $\xi \in (a;b)$:

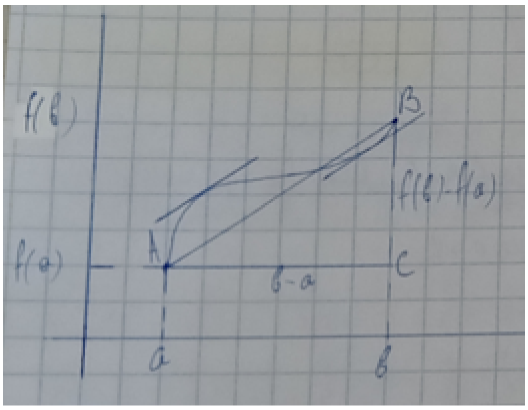
$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)}$$

Доказательство:

Если в теореме Коши принять $g(x) = x \implies$ **ч.т.д.**



Геометрический смысл теоремы Лагранжа



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \operatorname{tg} \angle A = f'(\xi)$$

$\exists$ точка $\xi \in (a;b)$: касательная к графику функции в этой точке $\|$-на хорде AB

Замечание: промежуточное значение ξ можно записать в виде $\xi = a + \theta(b-a), 0 < \theta < 1$
Тогда

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a)) * (b-a)}$$

Пусть $(b-a)=\Delta x$
$f(b)-f(a)=f(x+\Delta x)-f(x)$
Тогда

$$\boxed{f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x}$$

Все три формулы называются формулой конечных приращений Лагранжа.

Теорема 4.12.5

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференциуема на $(a;b)$ и $\forall x\in(a;b)\ f'(x)=0 \implies f(x)$ постоянная на этом отрезке.

<u>Доказательство:</u>

Выберем произвольно $x_1,x_2\in[a;b]$. Пусть для определённости $x_1<x_2$.
Тогда $f(x)$ непрерывна $[x_1;x_2]\subset[a;b]$ и дифферецируема $(x_1;x_2)\subset(a;b)$.
Тогда по теореме Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), x_1<\xi<x_2$.
По условию $f'(x)=0\ \forall x\in(a;b) \implies f'(\xi)=0$, т.к. точка $\xi\in(x_1;x_2)\subset(a;b) \implies f(x_1)=f(x_2)$, а т.к. x_1,x_2 - произвольные и $\in[a;b]$, то $f(x)=const\ \forall x\in[a;b]$.

Ч.т.д.

4.13. Раскрытие неопределённости по правилу Лопиталя

Теорема 4.13.1

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены в $u(x_0)$ и в этой точке $f(x_0)=g(x_0)=0$, то

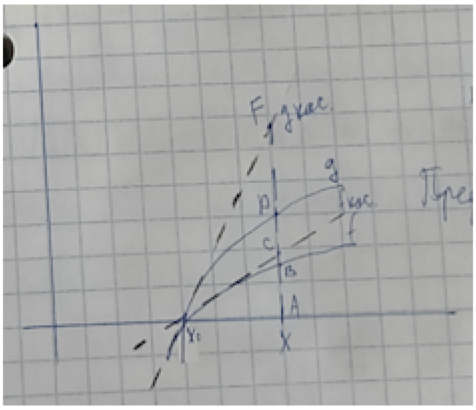
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}\Big|_{x=x_0}$$

<u>Доказательство:</u>

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Ч.т.д.

Геометрический смысл



$$\lim_{x\to x_0}\frac{|AB|}{|AO|}=\lim_{x\to x_0}\frac{|AC|}{|AF|}$$

Предел отношения ординат графиков функции f и g равен пределу отношения касательных к этим функциям в точке x_0.

Теорема 4.13.2

Если:

1. Функции f и g дифференциуемы на $(a;b)$
2. $g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a;b)$
3. $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$
4. $\exists$ конечный или бесконечный $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда $\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство:

Так как по пункту 1 $f(x)$ и $g(x)$ дифференциуемы на $(a;b)\overset{\text{Th 4.9.1}}{\underset{\text{Th 4.1.1}}{\Longrightarrow}}$ они непрерывны на $(a;b)$.
Доопределим эти функции в точке $x=a$: $f(a)=g(a)=0$.
Тогда $\forall x\in(a;b)$ на $[a;x]$ $f(x)$ и $g(x)$ будут удовлетворять условию теоремы Коши, т.е. $\exists$ точка $\xi=\xi(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\overset{\text{Th 4.12.3}}{=}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\left|\begin{matrix}a<\xi<x\\ x\to a\implies\xi\to a\end{matrix}\right|=\lim_{\xi toa}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\left|\begin{matrix}\text{Замена}\\ x=\xi\\ \text{(переобозначение)}\end{matrix}\right|=\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Ч.т.д.

Теорема 4.13.3

Если:

1. Функции f и g дифференциуемы на $(a;b)$
2. $g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a;b)$
3. $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$
4. $\exists$ конечный или бесконечный $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда $\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Замечание: в теореме 4.13.2 и теореме 4.13.3 рассмотрены случаи, когда $x\to a+0$. К этому случаю сводятся те, когда $x\to a-0$ или произвольным образом, а также случаи, когда $a=\pm\infty$.

Примеры:

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos x*\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=\nexists$$

Не выполняется пункт 4!

2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\left[0^0\right]=\lim_{x\to 0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0+0}x\ln x}=[0*\infty]=e^{\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$
$$=e^{\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim_{x\to 0+0}(-x)}=e^0=1$$

4.14. Формула Тейлора для многочленов

Рассмотрим произвольный многочлен степени n:

$$P_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$$

Пусть x_0 - произвольное число, $x=(x-x_0)+x_0$. Тогда $\sum_{k=0}^{n}b_k((x-x_0)+x_0)^k$. После возведения в степень и приведения подобных слагаемых, получим:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$$

Это разложение многочлена $P_n(x)$ по степеням $(x-x_0)$.

$a_k=a_k(x_0,b_i),i=\overline{1,n}$ $\qquad P_n(x_0)=a_0$

$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\dots+na_n(x-x_0)^{n-1}$ $\qquad P_n'(x_0)=a_1$

$P_n''(x)=2a_2+3*2*a_3(x-x_0)+4*3*a_4(x-x_0)^2+\dots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$ $\qquad P_n''(x_0)=2a_2$

$\vdots$ $\qquad \vdots$

$P_n^{(k)}(x)=1*2*3*\dots*k*a_k+\dots+(n-k+1)\dots(n-1)na_n(x-x_0)^{n-k}$ $\qquad P_n^{(k)}(x_0)=k!a_k$

$\vdots$ $\qquad \vdots$

$P_n^{(n)}(x)=n!a_n$ $\qquad P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n$

$$\boxed{a_k=\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}}$$

Многочлен $P_n(x)$ можно разложить по степеням $(x-x_0)$ единственным образом.

$$P_n(x)=P_n(x_0)+\frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

Это формула Тейлора для многочлена $P_n(x)$ по степеням $(x-x_0)$.

<u>Пример:</u>

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3 \qquad\qquad P(-1) = 5$$

Записать $P(x)$ по степеням $(x+1)$, $x_0 = -1$

$$\begin{aligned} &P'(x) = 3 + 10x - 6x^2 && P'(-1) = -13 \\ &P''(x) = 10 - 12x && P''(-1) = 22 \\ &P'''(x) = -12 && P'''(-1) = -12 \end{aligned}$$

$$P(x) = 5 + \frac{-13}{1!}(x+1) + \frac{22}{2!}(x+1)^2 + \frac{-12}{3!}(x+1)^3 = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$$

4.15. Формула Тейлора для функций

Рассмотрим функцию $f(x)$, имеющую непрерывные производные до $(n+1)$ порядка в $u(x_0)$
Составим многочлен

$$Q_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{(k)}$$

Этот многочлен совпадает с $f(x)$ только в точке x_0
НО! в остальных точках он не равен $f(x)$.

$$Q_n'(x) = f'(x_0) + \frac{2}{2!}f''(x_0)(x-x_0) + \dots \qquad\qquad Q_n'(x_0) = f'(x_0)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &Q_n''(x_0) = f''(x_0) \\ &\vdots \\ &Q_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

Пусть $\boxed{f(x) = Q_n(x) + r_n(x)}$ - формула Тейлора для $f(x)$, где $r_n(x)$ - погрешность при замене $f(x)$ на $Q_n(x)$.

Найдём вид $r_n(x)$:

$$\begin{aligned} &f(x_0) = Q_n(x_0) \implies r_n(x_0) = 0 \\ &f'(x_0) = Q_n'(x_0) \implies r_n'(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ &f^{(n)}(x_0) = Q_n^{(n)}(x_0) \implies r_n^{(n)}(x_0) = 0 \\ &r^{(n+1)}(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Введём вспомогательную функцию $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

$$\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \varphi''(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n)}(x_0) = 0, \varphi^{(n+1)}(x_0) = (n+1)!$$

По теореме Коши рассмотрим

$$\boxed{\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}} = \frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \underset{x_1\in(x_0;x) \text{ или } (x;x_0)}{\frac{r'_n(x_1)}{\varphi'(x_1)}} = \frac{r'_n(x_1)-r'_n(x_0)}{\varphi'(x_1)-\varphi'(x_0)} = \underset{x_2\in(x_0;x_1) \text{ или } (x_1;x_0)}{\frac{r''_n(x_2)}{\varphi''(x_2)}} =$$

$$= \dots = \frac{r_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)} = \frac{r^{(n)}(x_n)-r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n)-\varphi^{(n)}(x_0)} = \underset{\xi\in(x_0;x_n) \text{ или } (x_n;x_0)}{\boxed{\frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}}}$$

Тогда

$$r_n(x) = \frac{\varphi(x) * r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}; \varphi(x) = (x-x_0)^{(n+1)}$$

$$\begin{aligned} r_n^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) - Q_n^{(n+1)}(x) \\ r_n^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) \\ \varphi^{(n+1)}(x) &= (n+1)! \\ \varphi^{(n+1)}(\xi) &= (n+1)! \end{aligned}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

<u>Формула Тейлора для функции $f(x)$:</u>

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

формула Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

<u>Замечание:</u> рассмотрим

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi) * (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!(x-x_0)^n} = 0 \implies r_n(x) = o((x-x_0)^n), x \to x_0$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), x \to x_0}$$

формула Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Пеано

<u>Замечание:</u> если в формуле Тейлора положить $x_0 = 0$, то соответствующая формула называется формулой Маклорена для функции $f(x)$.

Теорема 4.15.1 (теорема о единственности представления функции формулы Тейлора)

Функция $f(x)$ в $u(x_0)$ представляется единственным образом формулой Тейлора.

<u>Доказательство:</u>

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$a_0+a_1(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) = b_0+b_1(x-x_0)+\dots+b_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$ получим, что

$$a_0 = b_0$$

Тогда

$$a_1(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) = b_1(x-x_0)+\dots+b_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \quad \Big| : (x-x_0)$$

$$a_1+a_2(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1}) = b_1+b_2(x-x_0)+\dots+b_n(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1})$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$ получим, что

$$a_1 = b_1$$

Продолжая этот процесс, получим **ч.т.д.**

Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена

1.

$$\begin{array}{ccc} f(x) = e^x & x_0 = 0 & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & \vdots & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & \vdots & f''(0) = 1 \\ f'''(x) = e^x & \vdots & f'''(0) = 1 \end{array}$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$$

2.

$$\begin{array}{ccc} f(x) = \sin x & x_0 = 0 & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & \vdots & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & \vdots & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & \vdots & f'''(0) = -1 \end{array}$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

Аналогично

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^2 n}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

3.

$$
\begin{array}{lcr}
f(x) = \ln(1+x) & x_0 = 0 & f(0) = 0 \\
f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & \vdots & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} & \vdots & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} & \vdots & f'''(0) = 2 \\
f''''(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4} & \vdots & f''''(0) = -6
\end{array}
$$

$$
\ln(1+x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \dots = \\
= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)
$$

4.

$$
(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)
$$

Частые случаи формулы:

$$
\frac{1}{1+x}; \frac{1}{1-x}; \frac{1}{\sqrt{1+x}}; \frac{1}{\sqrt{1-x}}
$$

5.

$$
\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^2 n)
$$

4.16. Монотонность функций. Необходимое и достаточное условие монотонности функций

Функцию $f(x)$, заданную на множестве X, называют неубывающей на этом множестве, если $\forall x_1, x_2 \in X \implies f(x_1) \le f(x_2)$
Возрастающая $f(x_1) < f(x_2)$
Невозрастающая $f(x_1) \ge f(x_2)$
Убывающая $f(x_1) > f(x_2)$

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие, убывающие функции на мн-ве X называются монотонными на мн-ве X.

Теорема 4.16.1 (необходимое и достаточное условие монотонности)

Для того, чтобы диф-ая на интервале ф-ия была неубывающей (невозр.) $\Leftrightarrow$ чтобы её производная была во всех точках интервала неотрицательной (неположительной). Если производная ф-ии во всех точках интервала $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то ф-ия возрастает (убывает).

Доказательство:

Докажем необходимость ($\Rightarrow$)

Пусть $f(x)$ неубывающая на $(a;b)$ и имеет в точке $x_0 \in (a;b)$ производную.
Покажем, что $f'(x_0) \geq 0$.
Пусть для определённости $\Delta x > 0$. Тогда $f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$.

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \implies \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0$$

Докажем достаточность ($\Leftarrow$)

Пусть $\forall x \in (a;b)\ f'(x) \geq 0$
Покажем, что $f(x)$ неубывающая на $(a;b)$.
Выберем произвольно $x_1, x_2 \in (a;b)$. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа (12.4):

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \xi \in (x_1; x_2)$$

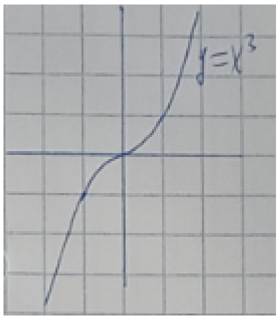
По условию

$$f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a;b) \implies f'(\xi) \geq 0, x_2 - x_1 > 0 \implies f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

Т.к. x_1, x_2 - произвольные и $\in (a;b) \implies$ на $(a;b)$ $f(x)$ неубывающая.

Ч.т.д.

Замечание 1: условие $f'(x) > 0$ является достаточным условием возрастания, но не является необходимым (если $f(x)$ возрастает, то не везде $f'(x) > 0$)
Пример: $y = x^3$ возрастает, но $y'(0) = 0$.



Замечание: если функция непрерывна на $(a;b)$ и имеет во всех его точках, кроме, может быть конечного числа неотрицательную (положительную) производную, то функция неубывающая (возрастающая) на $(a;b)$.

4.17. Необходимое и достаточное условие экстремума

Теорема 4.17.1

Если $f(x)$ задана в некоторой $u(x_0)$ и точка x_0 - точка экстремума, тогда $f'(x_0) = 0$ или $\nexists$

Доказательство:

Доказательство такое же, как у теоремы Ферма.

Ч.т.д.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ будем называть **стационарными**.
Если $\forall x \in u(x_0)\ f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), то эта точка x_0 - точка строгого локального максимума (минимума).

Теорема 4.17.2 (первое достаточное условие экстремума функции)

опа