

Учебная практика 1 (научно-исследовательская работа)

ЧИСЛЕННАЯ ПРОВЕРКА ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ДЛЯ
АСИМПТОТИЧЕСКОЙ МОЩНОСТИ

Выполнил:

Курлов Дмитрий Николаевич

группа 22.М04-мм

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор

Мелас Вячеслав Борисович

Кафедра Статистического Моделирования

Оглавление

Введение	2
Глава 1. Постановка задачи	3
1.1. Гипотеза о равенстве двух распределений	3
1.2. Энергетический критерий	3
1.3. Аналитическое исследование предельного распределения	4
Глава 2. Использование перестановочного метода	6
Заключение	7
Список литературы	8

Введение

В работе В. Б. Меласа [1] была получена формула для теоретической мощности энергетического критерия для проверки гипотезы о равенстве двух распределений, предложенного в работах [2], [3]. Этот критерий применим в случае, когда альтернативное распределение отличается только величиной сдвига.

В работе В. Б. Меласа [4] рассматривается уже случай изменения параметра масштаба. Также была выведена соответствующая формула для теоретических мощностей. Существует множество тестов, предназначенных для проверки подобных гипотез. Однако, универсальные тесты, такие как тест Колмогорова-Смирнова, могут быть маломощными из-за своей универсальности и показывать слабые результаты для распределений, отличающихся параметром масштаба. Более мощные тесты направлены прицельно на конкретный вид распределений, например, тест Андерсона-Дарлинга.

Данная работа заключается в исследовании случая изменения параметра масштаба. Необходимо провести численное моделирование эмпирических мощностей для различных значений параметра масштаба, а затем сравнить результаты с полученной теоретической формулой.

Глава 1

Постановка задачи

1.1. Гипотеза о равенстве двух распределений

Рассмотрим классическую задачу проверки гипотезы о равенстве двух распределений

$$H_0 : F_1 = F_2 \quad (1.1)$$

против альтернативы

$$H_1 : F_1 \neq F_2 \quad (1.2)$$

в случае двух независимых распределений $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ с функциями распределения F_1 и F_2 соответственно [2]. Предположим, что функции распределения F_1 и F_2 принадлежат классу функций распределений со случайной величиной ξ , такой, что

$$E[\ln(1 + \xi^2)] < \infty. \quad (1.3)$$

Нашей задачей является сравнение мощности различных тестов при проверке гипотезы о равенстве двух распределений с указанными свойствами. Примерами таких распределений являются нормальное распределение, распределение Коши и Лапласа.

Важно отметить, что равенство объемов выборки используется только для удобства обозначений и не влияет на результаты проведения тестирования.

1.2. Энергетический критерий

Рассмотрим следующий тест [1]

$$\begin{aligned} \Phi_A &= \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(X_i - X_j), \\ \Phi_B &= \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(Y_i - Y_j), \\ \Phi_{AB} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g(X_i - Y_j), \\ \Phi_{nn} &= \Phi_{AB} - \Phi_A - \Phi_B, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$g(u) = \ln(1 + |u|^2),$$

$g(x)$ с точностью до постоянного члена является логарифмом плотности стандартного распределения Коши.

1.3. Аналитическое исследование предельного распределения

Приведем основные аналитические результаты работы [1]. Рассматривается случай двух распределений, удовлетворяющих свойству (1), отличающихся только параметром масштаба. Для упрощения обозначений предполагается, что $m = n$, а случай $m \neq n$ аналогичен. Критерий (1.4) принимает вид

$$T_n = \Phi_{nn} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g(X_i - Y_j) - \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(X_i - X_j) - \quad (1.5)$$

$$- \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(Y_i - Y_j) \quad (1.6)$$

Пусть $f(x)$ обозначает плотность F_1 ,

$$J(h, n) = \int_R g(x - y - |h|/\sqrt{n}) f(x) f(y) dx dy,$$

$$J_1 = J(0), J_2 = \int_R g^2(x - y) f(x) f(y) dx dy,$$

$$J_3 = \int_R g(x - y) g(x - z) f(x) f(y) f(z) dx dy dz,$$

$$J1(h_2, n) = g(x - y)(1 + h_2/n) f(x) f(y) dx dy.$$

Заметим, что

$$\int_R g'(x - y) f(x) f(y) dx dy = 0, \quad (1.7)$$

так как функция $g(x)$, по предположению, дважды непрерывно дифференцируема, она может быть представлена в виде $g(x) = \psi(x^2)$, где $\psi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Обозначим

$$J^*(h_1) = \frac{1}{2} h_1^2 \int_R g''(x - y) f(x) f(y) dx dy,$$

$$J_1^*(h_2) = \frac{1}{4} h_2^2 \int_R g''_\beta(x - y(1 + \beta))|_{\beta=0} f(x) f(y) dx dy.$$

Обозначим

$$b_1^2 = |J^*(h_1)| \quad (1.8)$$

$$b_2^2 = |J1^*(h_2)| \quad (1.9)$$

Основным результатом работы [1] является теорема, которая устанавливает вид предельного распределения величины nT_n и представление для асимптотической эффективности теста.

Теорема 1. *Рассмотрим задачу проверки гипотезы (1.1)–(1.2), где обе функции обладают свойством и симметричны относительно некоторой точки. Тогда*

(i) *при условии $n \rightarrow \infty$ функция распределения nT_n сходится при H_0 к функции распределения случайной величины*

$$(aL)^2 + c \quad (1.10)$$

где L - случайная величина, которая имеет стандартное нормальное распределение, где L имеет стандартное нормальное распределение, а

$$a^2 = \sqrt{J_2 + J_1^2 - 2J_3}, c = J_1 - a^2. \quad (1.11)$$

(ii) *Пусть $F_1(x) = F(x)$, $F_2 = F(x(1 + h_2/\sqrt{n}) + h_1/\sqrt{n})$, где F — произвольная функция распределения, симметричная относительно точки и обладающая свойством (1), h_1, h_2 — произвольно заданные числа. Тогда функция распределения nT_n сходится при H_1 к распределению случайной величины*

$$(aL + b_1 + b_2)^2 + c,$$

где b_1 имеет вид (1.8), b_2 определено в (1.9), а u и c заданы формулой (??).

Мощность критерия nT_n с уровнем значимости α асимптотически эквивалентна

$$Pr\{L \geq z_{1-\alpha/2} - b/a\} + Pr L \leq -z_{1-\alpha/2} - b/a, \quad (1.12)$$

где $b = b_1 + b_2$, $z_{1-\alpha/2}$ является таким, что

$$Pr\{L \geq z_{1-\alpha/2}\} = \alpha/2.$$

Глава 2

Использование перестановочного метода

В исследовании использован перестановочный метод для определения доверительной и критической области значений статистики критерия. Данный метод является статистическим и основан на алгоритме с перестановками внутри выборок.

В рамках данного метода рассматриваются две независимые выборки X и Y , для которых ставится гипотеза о равенстве двух распределений $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$ для любого $x \in R$.

Ставится задача нахождения доверительной и критической области значений статистики критерия $\varphi = \varphi(X, Y)$.

Идея метода заключается в том, что если гипотеза H_0 верна, то элементы выборок X и Y можно рассматривать как элементы из одной выборки, и при перестановке некоторых элементов местами, полученные новые выборки не будут существенно отличаться от исходных.

Алгоритм метода заключается в следующем [5] :

- Объединении выборок X и Y в единую выборку Z ;
- Нахождении K случайных разбиений Z на $(X^{(i)}, Y^{(i)})$, таких что: $\#X^{(i)} = \#Y^{(i)}$, $X^{(i)} \cup Y^{(i)} = Z$, $X^{(i)} \cap Y^{(i)} = \emptyset$;
- Нахождении достигнутого уровня значимости теста $ASL_{perm} = \frac{\#\{\varphi(X, Y) \leq \varphi(X^{(i)}, Y^{(i)}), i=1, \dots, K\}}{K}$;
- Сравнении выбранного уровня значимости α с ASL_{perm}

Заключение

В данной работе была исследована теоретическая часть, необходимая для моделирования эмпирических мощностей. А также аналитические результаты теоретических работ, в которых были получены асимптотические формулы для энергетического критерия.

В данный момент ведется разработка ПО для проведения экспериментов и моделирования эмпирических мощностей энергетического критерия для случая изменения параметра масштаба для различных распределений. Также данное ПО будет рассчитывать теоретические мощности и сравнение результатов.

Список литературы

1. Мелас В.Б. Об асимптотической мощности одного метода проверки гипотез о равенстве распределений. // Вестник СПбГУ (в печати). — 2022. — Т. 4.
2. Aslan B., Zech G. New test for the multivariate two-sample problem based on the concept of minimum energy // Journal of Statistical Computation and Simulation. — 2005. — Vol. 75, no. 2. — P. 109–119.
3. Melas V. Salnikov D. On Asymptotic Power of the New Test for Equality of Two Distributions // Recent Developments in Stochastic Methods and Applications. — 2021. — Vol. 371. — P. 204–214.
4. Мелас В.Б. Об асимптотической мощности „энергетического“ теста для проверки гипотез о равенстве распределений // Вестник СПбГУ, Сер. 1, Вып. 2. (в печати). — 2023.
5. Efron B., Tibshirani R.J. An Introduction to the Bootstrap. — Springer Science+Business Media Dordrecht, 1993. — P. 202–218.