

Основы теории управления

Типовые динамические звенья

Типовые динамические звенья

- Усилительное звено;
- Дифференцирующее звено;
- Интегрирующее звено;
- Апериодическое звено;
- Звено второго порядка.

Исследование типовых звеньев



- Математическое описание, передаточная функция.
- Переходная характеристика (реакция на единичную ступенчатую функцию).
- Импульсная переходная характеристика (реакция на импульсную дельта-функцию).
- Частотные характеристики (реакция на гармонический сигнал при изменении частоты от 0 до бесконечности).

Пропорциональное (усилительное) звено

$$y = k u, \quad k - \text{коэффициент усиления}$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{kU(p)}{U(p)} = k$$

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{k}{p}$$

$$h(t) = k \cdot 1(t)$$

$$G(p) = W(p) = k$$

$$g(t) = k \cdot \delta(t)$$

Частотные характеристики пропорционального звена

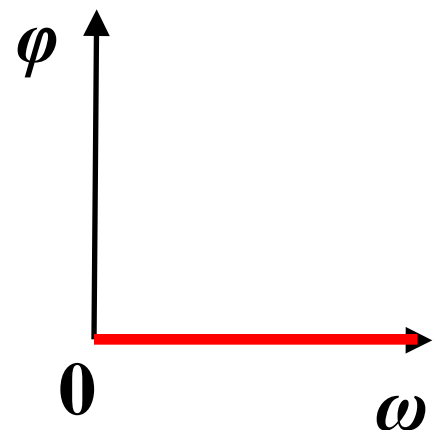
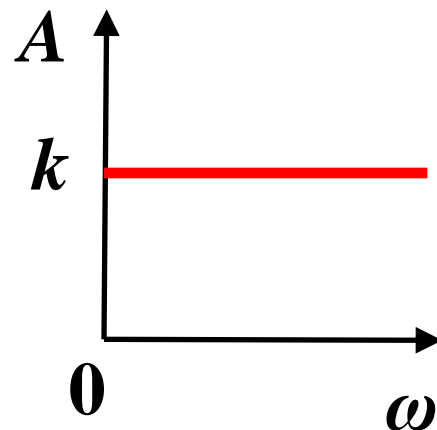
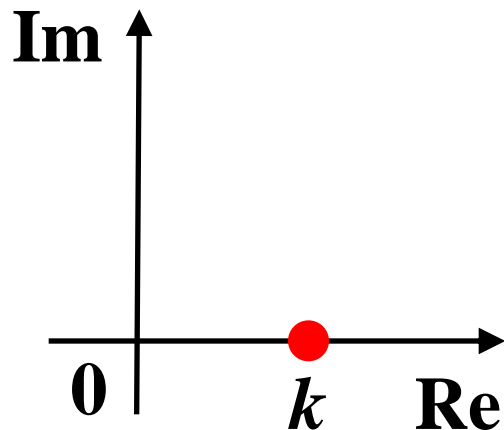
$$W(j\omega) = k$$

$$R(\omega) = k$$

$$I(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = \sqrt{k^2 + 0} = k$$

$$\operatorname{tg}[\varphi(\omega)] = \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \frac{0}{k} = 0 \Rightarrow \varphi(\omega) = 0$$



Дифференцирующее звено

$$y = k \dot{u}$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{kpU(p)}{U(p)} = kp$$

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{kp}{p} = k$$

$$h(t) = k \cdot \delta(t)$$

$$G(p) = W(p) = kp$$

$$g(t) = k \cdot \delta'(t)$$

Частотные характеристики дифференцирующего звена

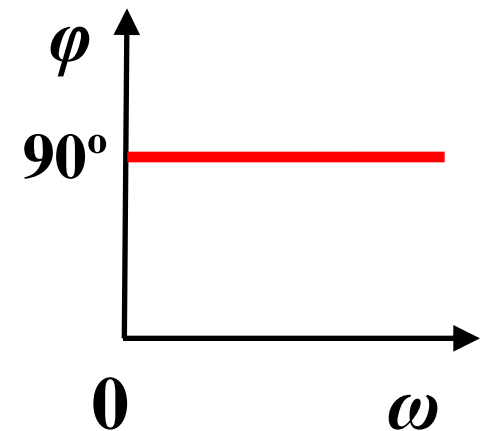
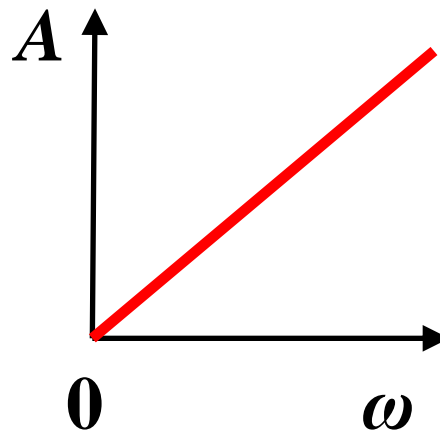
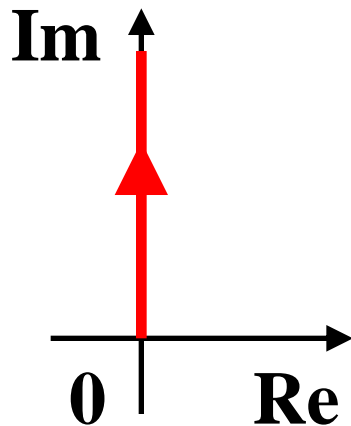
$$W(j\omega) = jk\omega$$

$$R(\omega) = 0$$

$$I(\omega) = k\omega$$

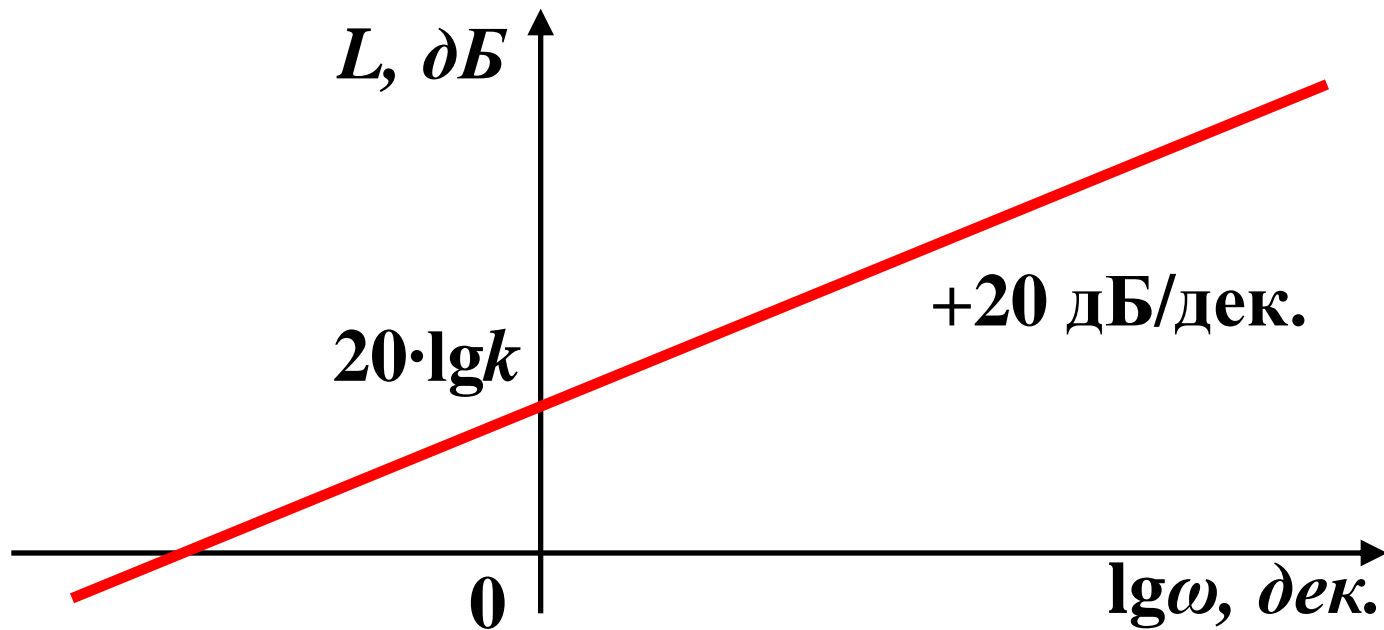
$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = \sqrt{0 + (k\omega)^2} = k\omega$$

$$\operatorname{tg}[\varphi(\omega)] = \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \frac{k\omega}{0} = \infty \Rightarrow \varphi(\omega) = 90^\circ$$



ЛАЧХ дифференцирующего звена

$$L(\omega) = 20 \lg k \omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega$$



Интегрирующее звено

$$\dot{y} = k u \qquad y(t) = k \int_0^t u(t) dt + y(0)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\frac{k}{p} U(p)}{U(p)} = \frac{k}{p}$$

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{k}{p^2}$$

$$h(t) = k t$$

$$G(p) = W(p) = \frac{k}{p}$$

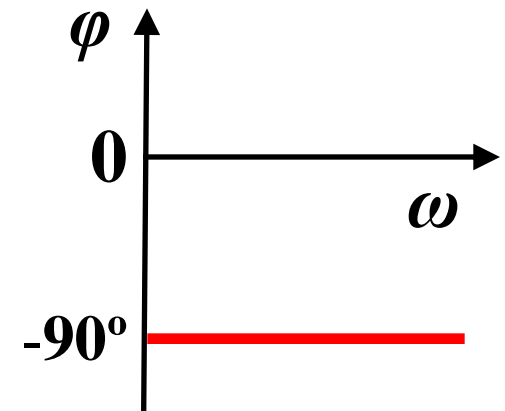
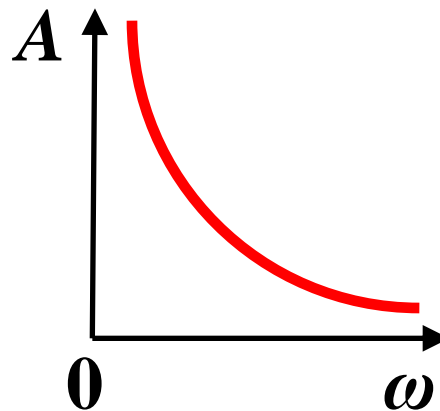
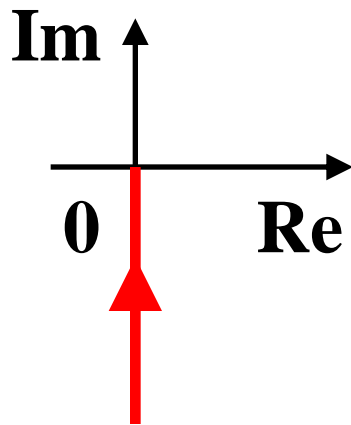
$$g(t) = k \cdot 1(t)$$

Частотные характеристики интегрирующего звена

$$W(j\omega) = k/j\omega = -jk/\omega \quad R(\omega) = 0 \quad I(\omega) = -k/\omega$$

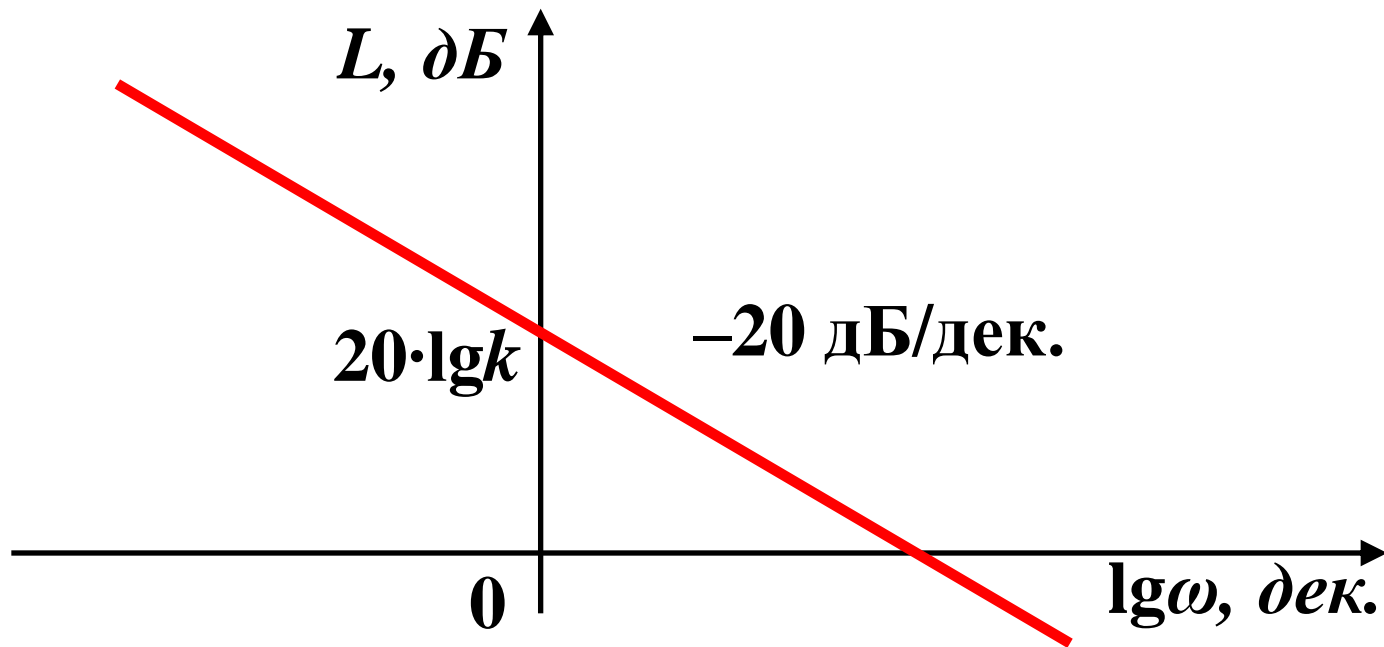
$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = \sqrt{0 + (-k/\omega)^2} = k/\omega$$

$$\operatorname{tg}[\varphi(\omega)] = \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \frac{-k}{\omega \cdot 0} = -\infty \Rightarrow \varphi(\omega) = -90^\circ$$



ЛАЧХ интегрирующего звена

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega} = 20 \lg k - 20 \lg \omega$$



Апериодическое звено

$$\dot{y} + a_0 y = bu \qquad T \dot{y} + y = ku$$

$T = 1/a_0$ – постоянная времени

$k = b/a_0$ – коэффициент усиления

$$TpY(p) + Y(p) = kU(p)$$

$$Y(p) \cdot (Tp + 1) = kU(p)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k}{Tp + 1}$$

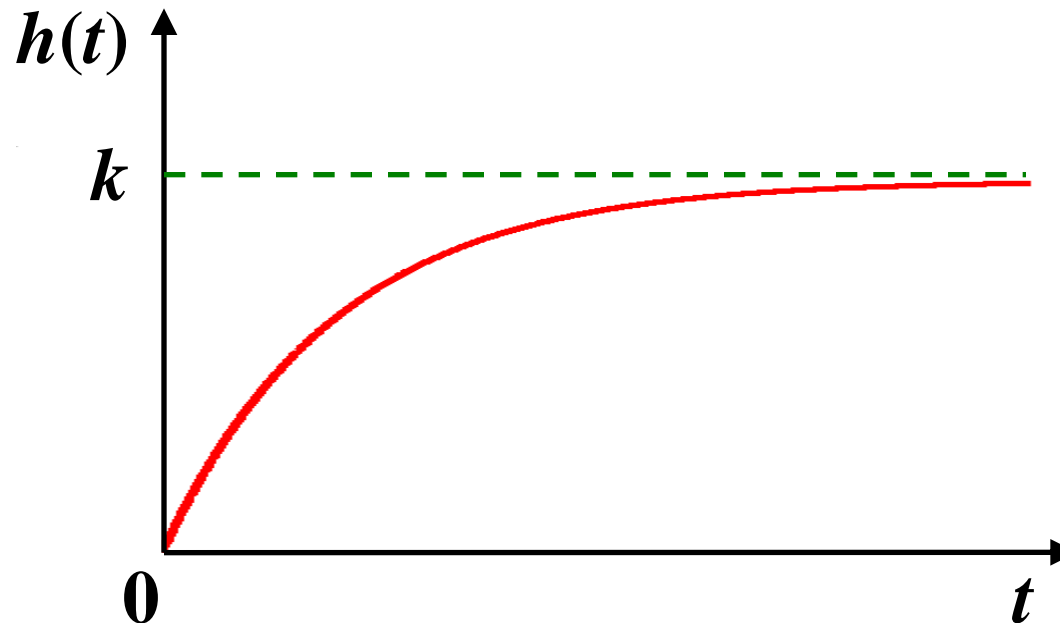
Переходная функция апериодического звена

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{k}{p \cdot (Tp + 1)} = \frac{k}{T} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{T}}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{k}{T} \int_0^t 1(t - \tau) \cdot e^{-\frac{\tau}{T}} 1(\tau) d\tau = \frac{k}{T} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau = \\ &= -ke^{-\frac{\tau}{T}} \Big|_0^t = -ke^{-\frac{t}{T}} + ke^0 = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \end{aligned}$$

Переходная функция апериодического звена

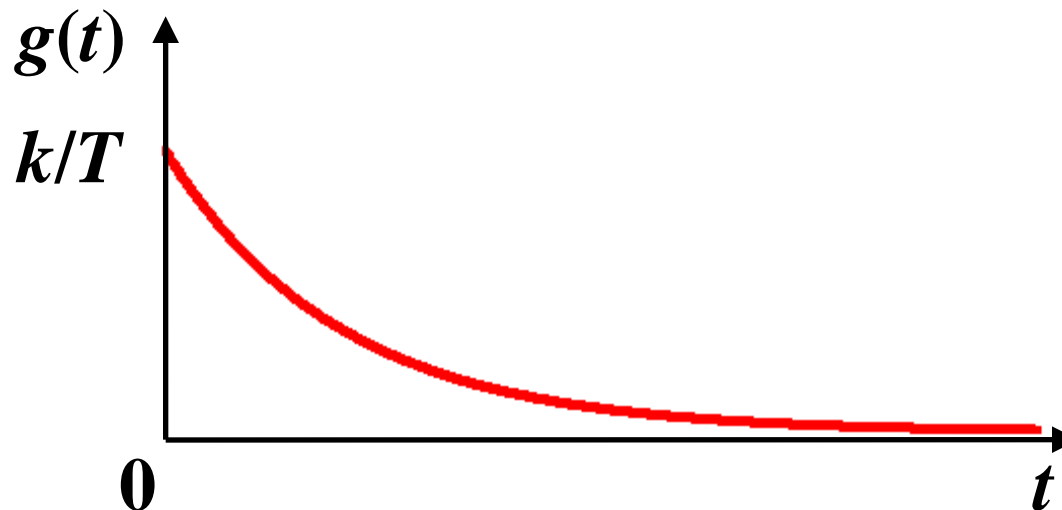
$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$



Импульсная переходная функция апериодического звена

$$G(p) = W(p) = \frac{k}{Tp + 1} = \frac{k}{T} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{T}}$$

$$g(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$$



Частотные характеристики апериодического звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{T \cdot j\omega + 1} = \frac{k(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)}$$

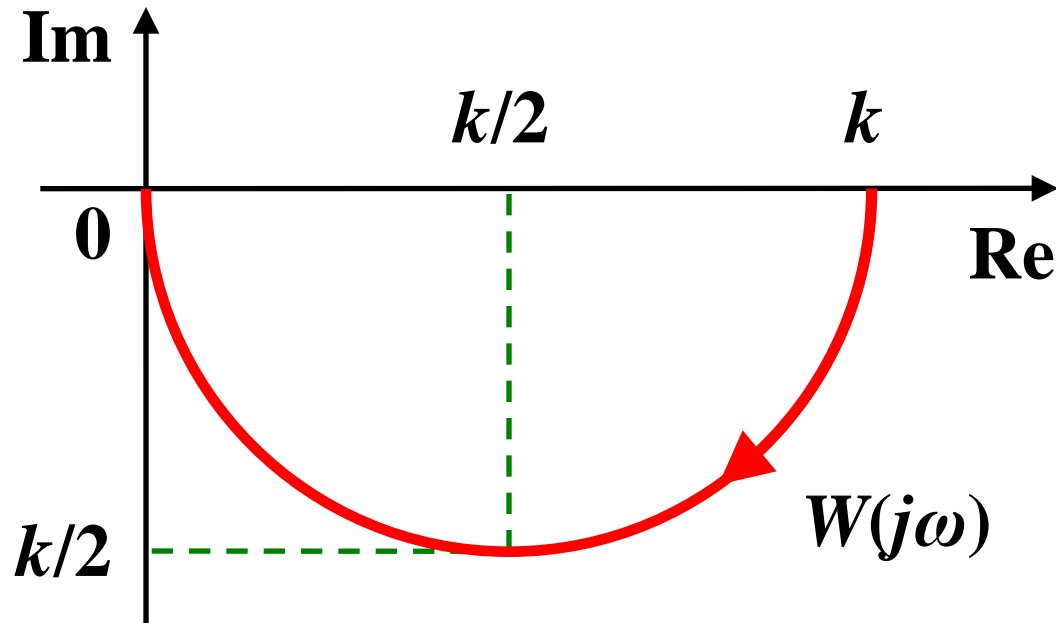
$$W(j\omega) = \frac{k(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

$$R(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}$$

$$I(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

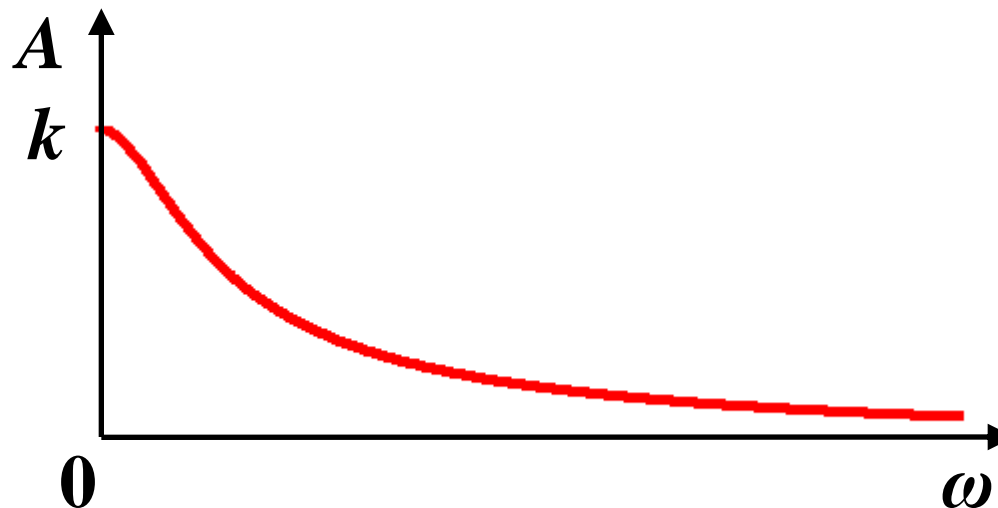
АФХ апериодического звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$



АЧХ апериодического звена

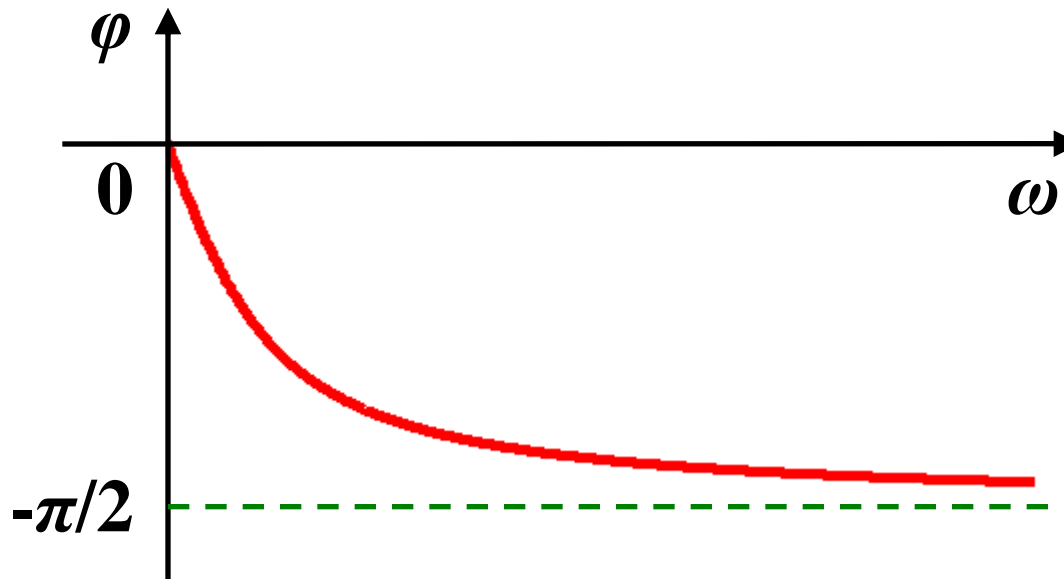
$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\left(\frac{k}{1+T^2\omega^2}\right)^2 + \left(-\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{k^2 + k^2T^2\omega^2}{(1+T^2\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{k^2(1+T^2\omega^2)}{(1+T^2\omega^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \end{aligned}$$



ФЧХ апериодического звена

$$\operatorname{tg}[\varphi(\omega)] = \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \left(-\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2} \right) \frac{1+T^2\omega^2}{k} = -T\omega$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-T\omega)$$

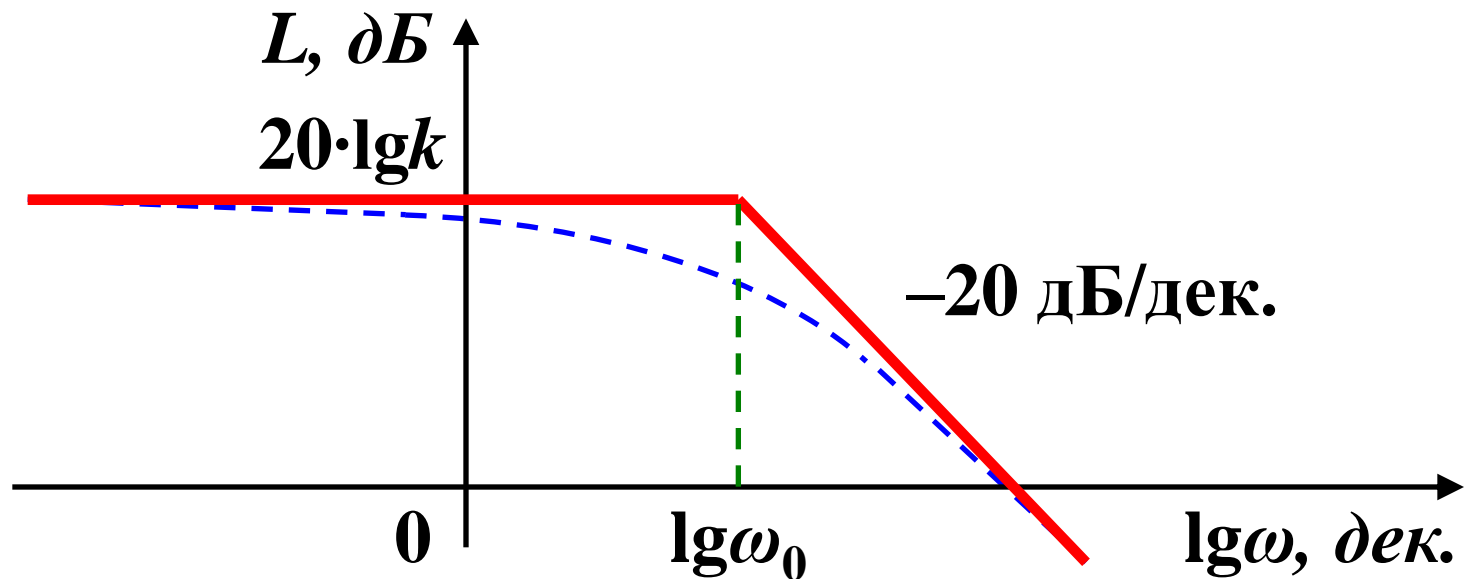


ЛАЧХ апериодического звена

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} = 20 \lg k - 10 \lg(1 + T^2 \omega^2)$$

$$\omega \ll 1/T \Rightarrow L(\omega) \approx 20 \lg k$$

$$\omega \gg 1/T \Rightarrow L(\omega) \approx 20 \lg k - 20 \lg T \omega$$



Звено второго порядка

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = bu \qquad T^2 \ddot{y} + 2dT \dot{y} + y = ku$$

$$T = \sqrt{1/a_0} \quad \text{– постоянная времени}$$

$$d = \frac{a_1}{2a_0 T} \quad \text{– коэффициент демпфирования}$$

$$k = b/a_0 \quad \text{– коэффициент усиления}$$

$$T^2 p^2 Y(p) + 2dTp Y(p) + Y(p) = kU(p)$$

$$Y(p) [T^2 p^2 + 2dTp + 1] = kU(p)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}$$

Переходная функция звена второго порядка

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{k}{p(T^2 p^2 + 2dT p + 1)}$$

$$p_0 = 0$$

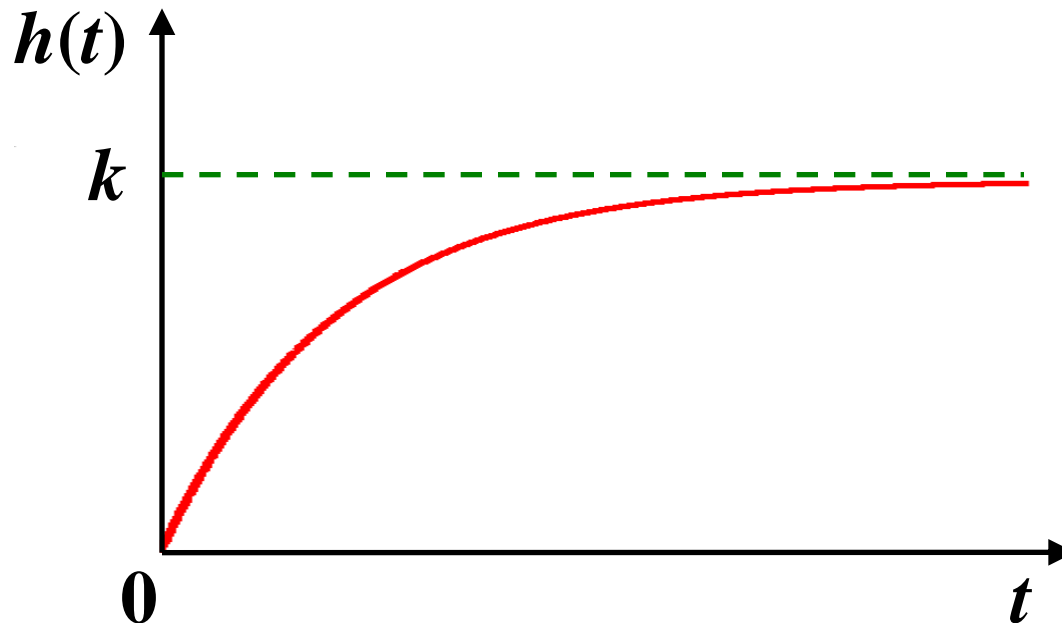
$$p_{1,2} = \frac{-2dT \pm \sqrt{4d^2 T^2 - 4T^2}}{2T^2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 1}}{T}$$

Переходная функция апериодического звена второго порядка

$d \geq 1 \Rightarrow p_{1,2}$ – вещественные отрицательные

$$\lambda_1 = |p_1| \quad \lambda_2 = |p_2|$$

$$h(t) = k + c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

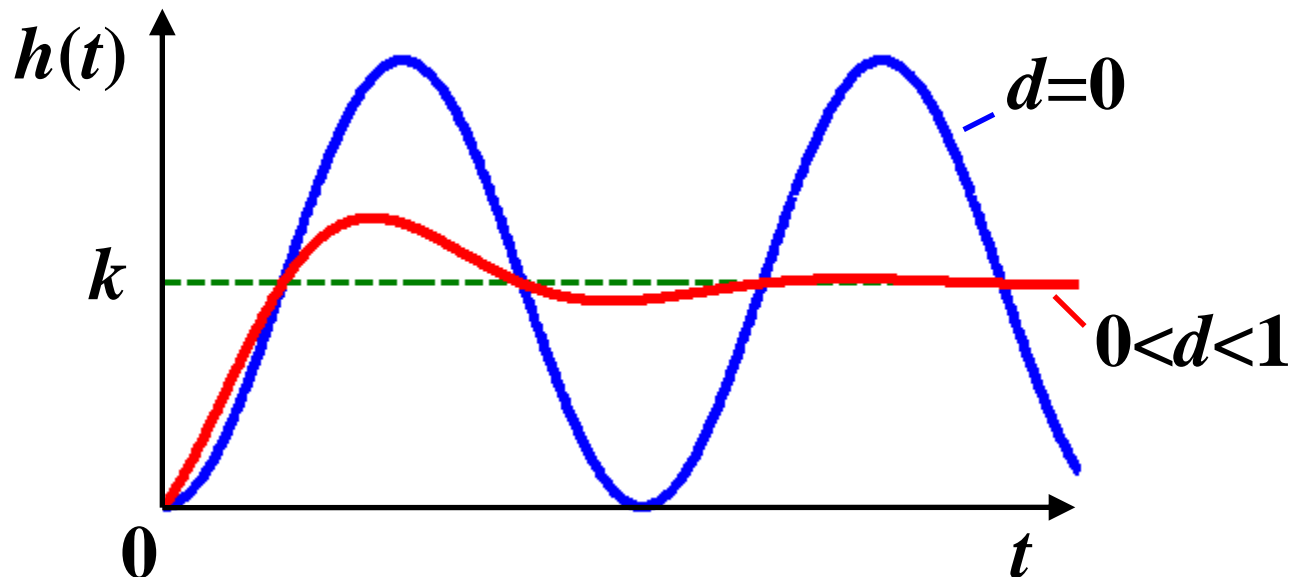


Переходная функция колебательного звена второго порядка

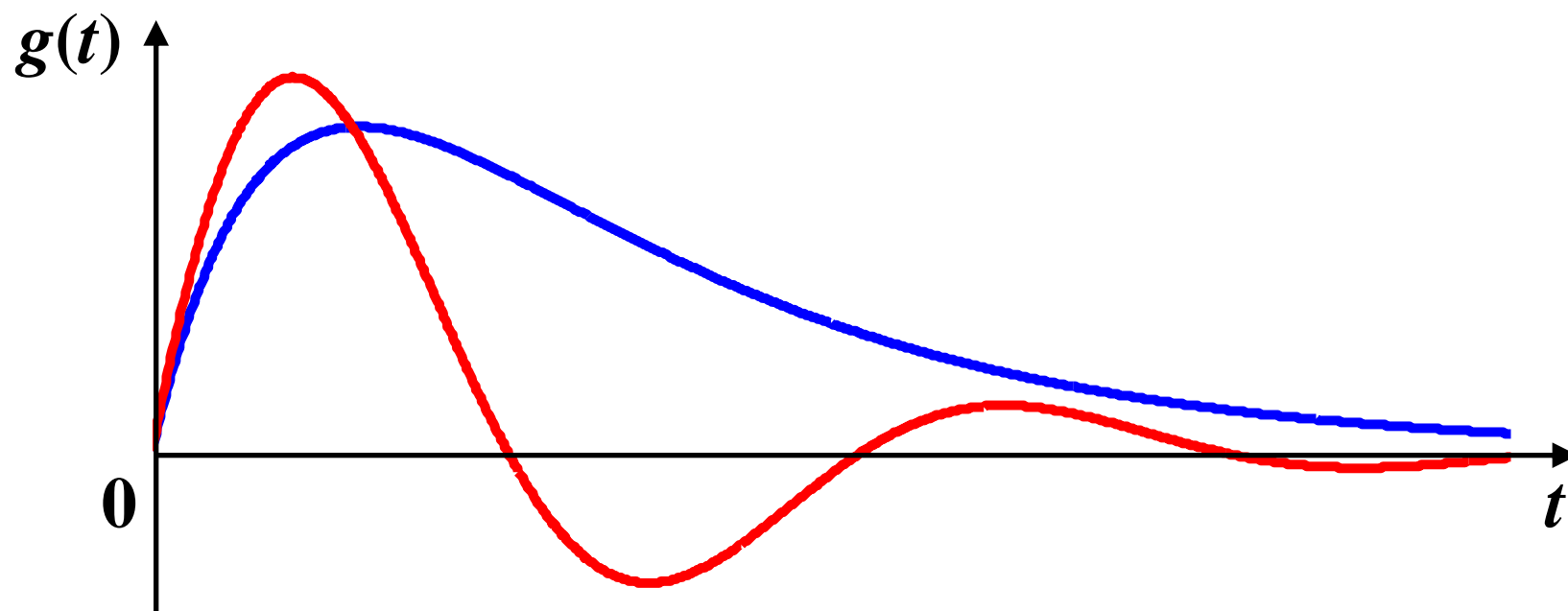
$$0 \leq d < 1 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\alpha t} (\cos \beta t + c \sin \beta t) \right]$$

$$d = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow h(t) = k [1 - \cos \beta t - c \sin \beta t]$$



Импульсная переходная функция звена второго порядка



Частотные характеристики звена второго порядка

$$W(j\omega) = \frac{k}{-T^2\omega^2 + j2dT\omega + 1} = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + j2dT\omega}$$

$$W(j\omega) = k \frac{(1 - T^2\omega^2) - j2dT\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2dT\omega)^2}$$

$$R(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2dT\omega)^2}$$

$$I(\omega) = -\frac{2kdT\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2dT\omega)^2}$$

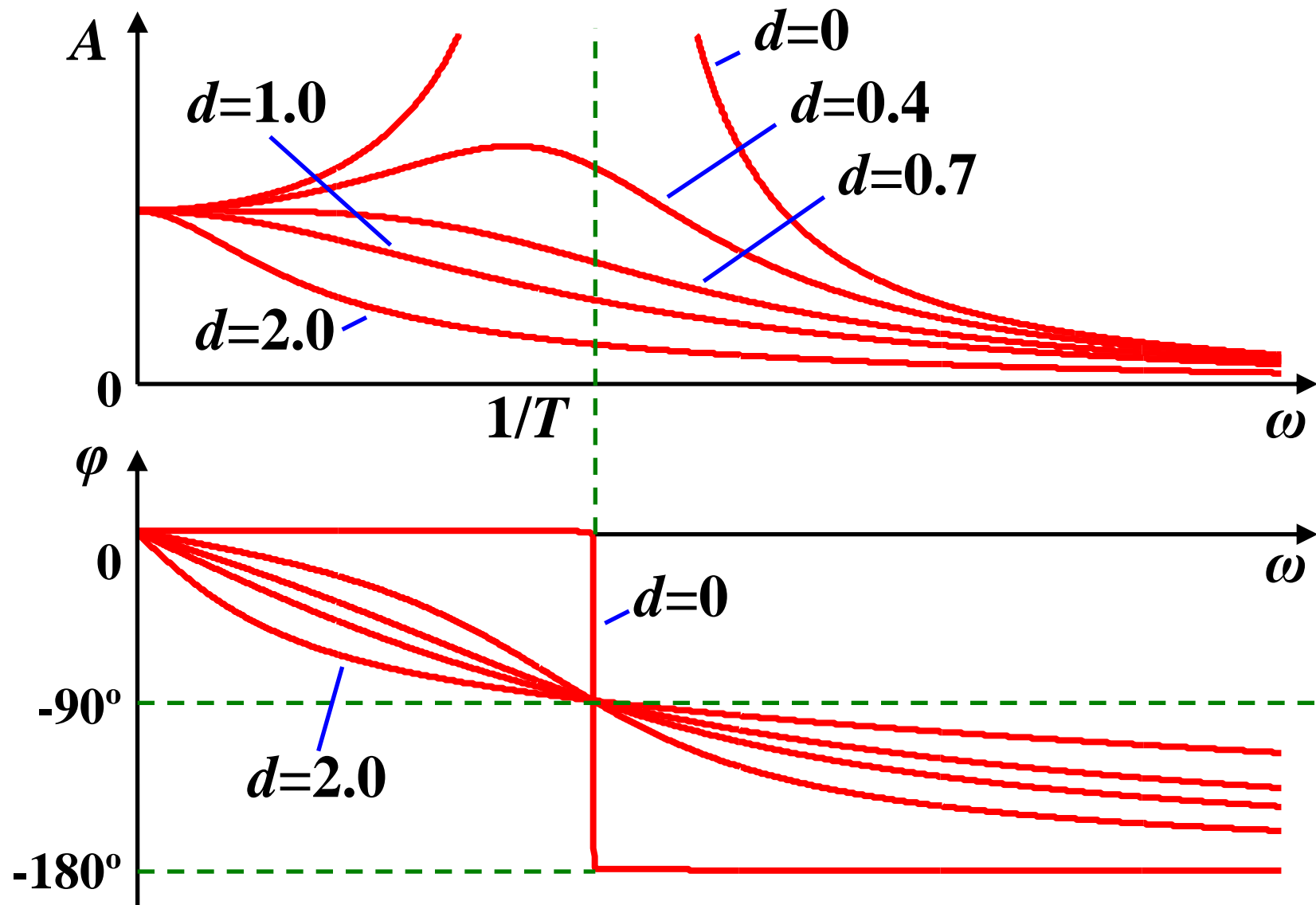
АЧХ и ФЧХ звена второго порядка

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2dT\omega)^2}}$$

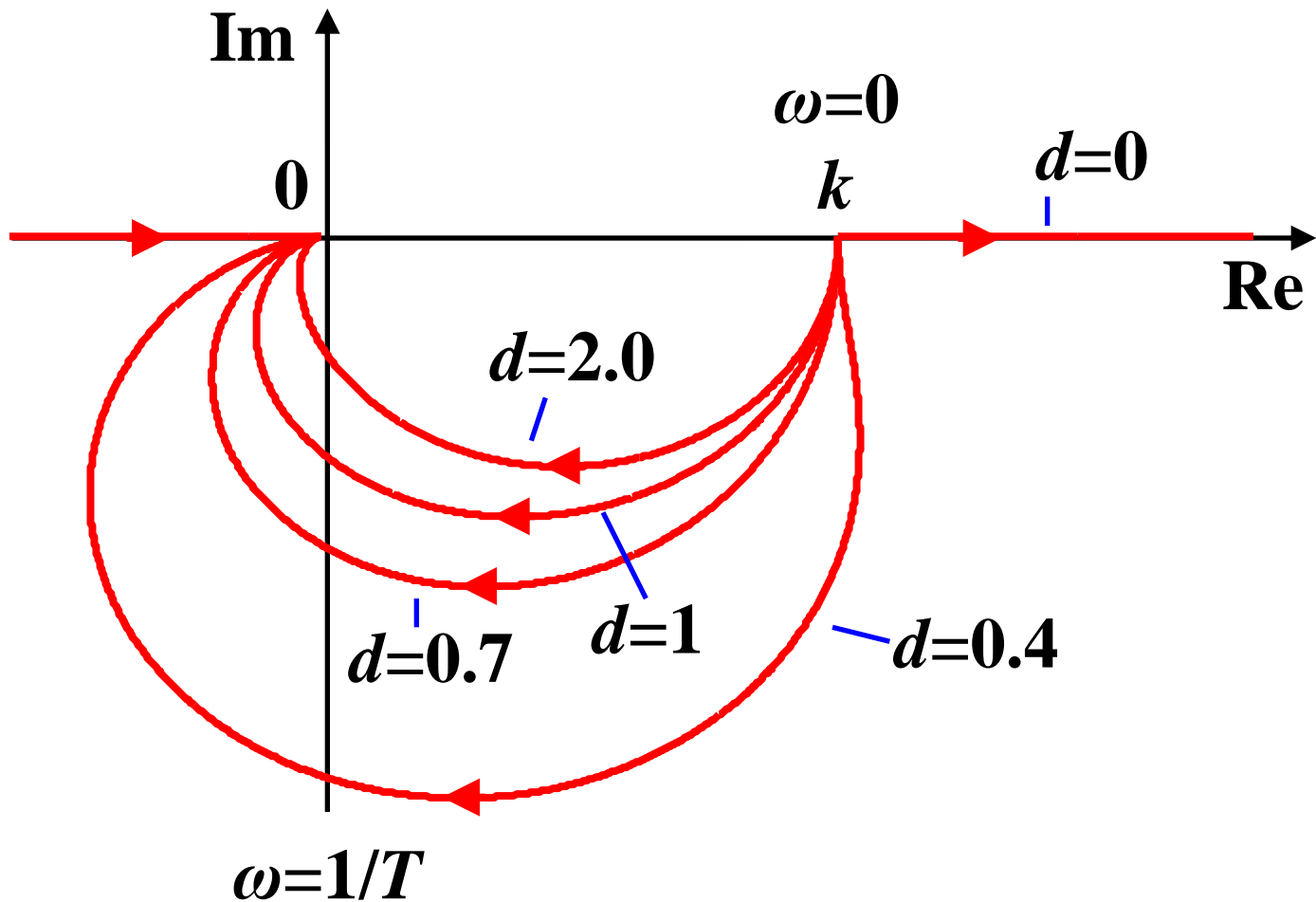
$$\operatorname{tg}[\varphi(\omega)] = \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = -\frac{2dT\omega}{1 - T^2\omega^2}$$

$$A'(\omega) = \frac{2kT^2\omega[(1 - 2d^2) - T^2\omega^2]}{\left[(1 - T^2\omega^2)^2 + (2dT\omega)^2\right]^{3/2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{1 - 2d^2}}{T}$$

АЧХ и ФЧХ звена второго порядка



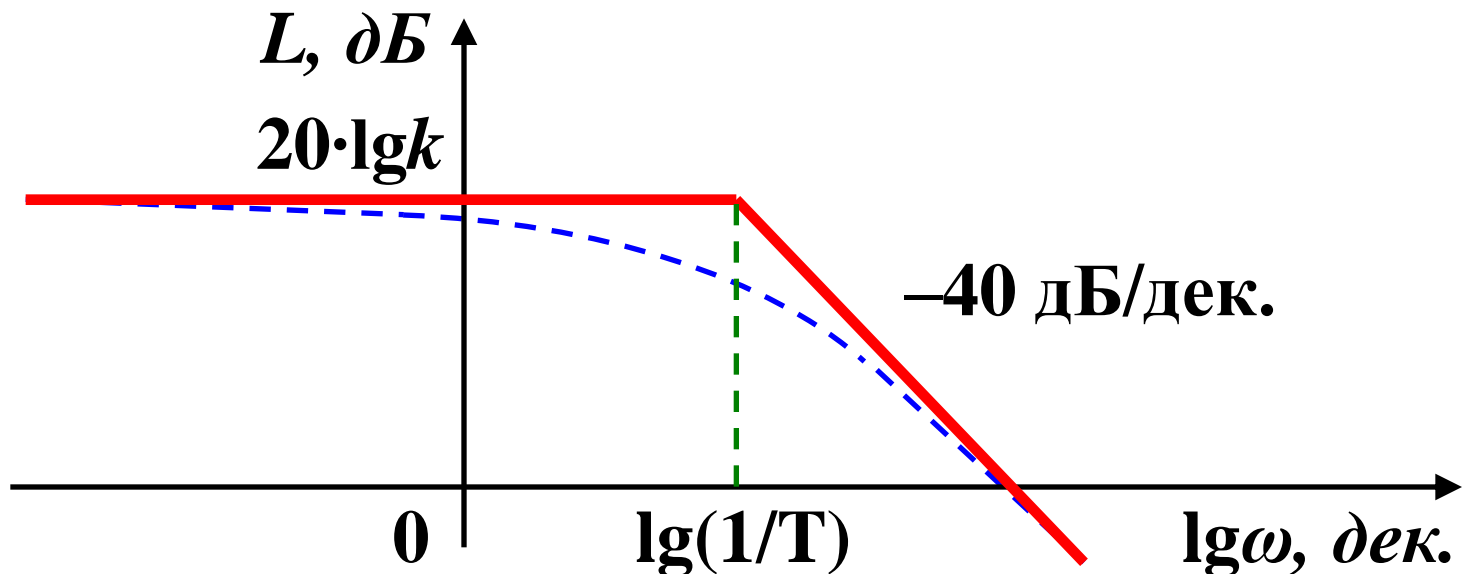
АФХ звена второго порядка



ЛАЧХ звена второго порядка

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2dT\omega)^2}}$$

$$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg \left[(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2dT\omega)^2 \right]$$



ЛАЧХ апериодического звена второго порядка

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)}}$$

$$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg(T_1^2 \omega^2 + 1) - 10 \lg(T_2^2 \omega^2 + 1)$$

