

Первое задание: интерполяция

Выполнял: Зернов Данил

Вариант: 4

В рамках выполнения первого проекта по Численным Методам мною была проведена работа по использованию методов интерполяции в различных случаях. В качестве рисунка для выполнения работы был выбран рис.1.



Рис. 1 машина

Оцифровка контура машины производилась на сайте <https://apps.automeris.io/wpd/>. Были получены два массива данных, первый в котором находятся точки крыши машины, необходимые для выполнения первых четырех заданий и второй, точки полного контура машины. После получения все точки для удобства были округлены до ближайших целых чисел.

1) На первом этапе работы было необходимо построить интерполяционный полином Лагранжа по точкам из первого массива. В рамках этого задания была написана функция $\text{lagrange}(x, y, xh)$, принимающая в качестве своих значений x -координаты точки интерполяции, y -координаты точек интерполяции и массив значений в которых нужно узнать значения интерполяционного полинома, а также получен график (рис.2) на котором изображен полином 19 степени, так как первый массив содержит 20 точек и точки интерполяции.

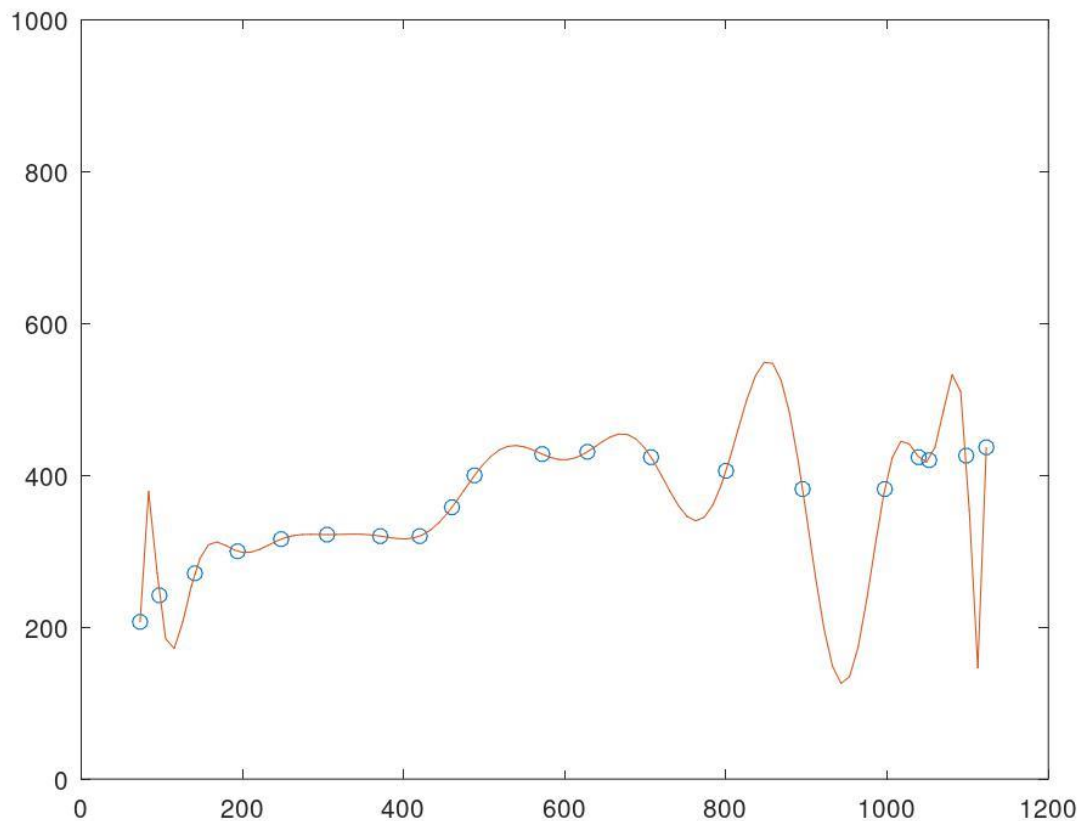


Рис.2 полином Лагранжа и точки интерполяции

2) На втором этапе было необходимо изменить программу представленную в файле `cubic_spline.m` для краевых условий I слева и IV справа. Все математические выкладки, а также система уравнений 1 в явном виде представлены на рисунке 3. Для удобства для краевых условий I, для первой производной сплайна был выбран 0.

Общее уравнение для Сплайна

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k$$

Первое условие

$$m_0 = \frac{3}{h_0} (d_0 - S'(x_0)) - \frac{m_1}{2}$$

Второе условие

$$S''(x_{N-1}) = S''(x_N) \Leftrightarrow m_{N-1} = m_N$$

Подставляя первое и второе условие в первое уравнение и последнее уравнения системы можно получить систему уравнений (1).

Task 1

Вариант 4

Транширование условия I слева и IV справа

В области все системы уравнений

$$h_0 m_0 + 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = U_1 \quad k=1$$

$$h_1 m_1 + 2(h_1 + h_2)m_2 + h_2 m_3 = U_2 \quad k=2$$

...

$$h_{N-2} m_{N-2} + 2(h_{N-2} + h_{N-1})m_{N-1} + h_{N-1} m_N = U_{N-1} \quad k=N-1$$

1) Первое условие если задана первая производная сплайна в начальной точке.

Тогда первый коэффициент будет равен $m_0 = \frac{3}{h_0}(d_0 - S'(x_0)) - \frac{m_1}{2}$

2) Второе условие равенство вторых производных в последней узле

$$S''(x_{N-1}) = S''(x_N), \text{ что равносильно.}$$

$$\text{равенств } m_{N-1} = m_N$$

Тогда подставляя первое условие в первое уравнение

$$\frac{3}{2}(d_0 - S'(x_0)) - \frac{m_1 h_0}{2} + 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = U_1$$

$$m_1 \left(\frac{3}{2}h_0 + 2h_1 \right) + h_1 m_2 = U_1 - 3(d_0 - S'(x_0))$$

Подставляя второе условие в последнее уравнение получаем

$$h_{N-2} m_{N-2} + (2h_{N-2} + 3h_{N-1})m_{N-1} = U_{N-1}$$

что получаем систему уравнений

$$(1) \begin{cases} m_1 \left(\frac{3}{2}h_0 + 2h_1 \right) + h_1 m_2 = U_1 - 3(d_0 - S'(x_0)) \\ \vdots \\ h_{k-1} m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = U_k \quad k=2, 3, \dots, N-2 \\ \vdots \\ h_{N-2} m_{N-2} + (2h_{N-2} + 3h_{N-1})m_{N-1} = U_{N-1} \end{cases}$$

Для удобства в программе будем считать, что $S'(x_0) = 0$

Рис.3 Вывод СЛАУ для краевых условий

Также краевые условия отражены в функции для построения кубического сплайна соответствующими комментариями. В рамках этого этапа был

получен график интерполяции сплайнами с заданными краевыми условиями (рис.4).

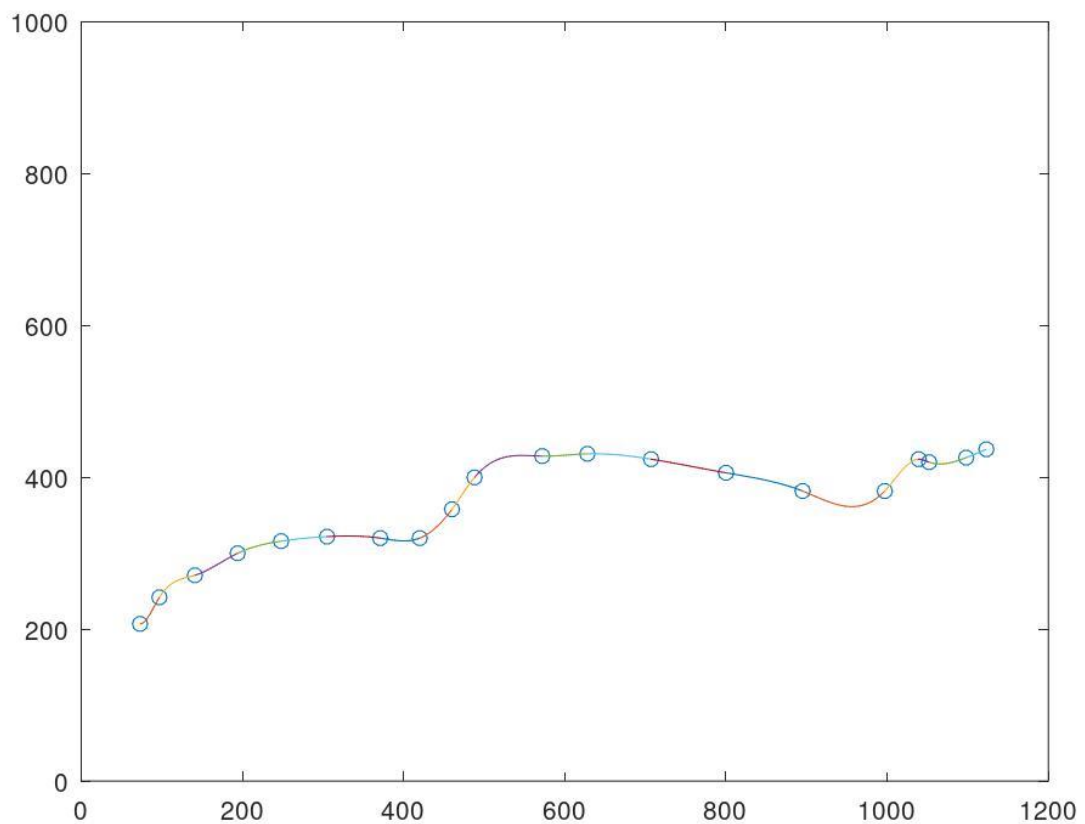


Рис.4 Интерполяция сплайнами

3) На третьем этапе было необходимо построить первую производную сплайна (рис.5). Функция для построения графика была получена прямым дифференцированием выражения для сплайна на отрезке.

Функция для первой производной сплайна на отрезке

$$S'(x) = S_1 + 2 * S_2(x - x_i) + 3 * S_3(x - x_i)^2$$

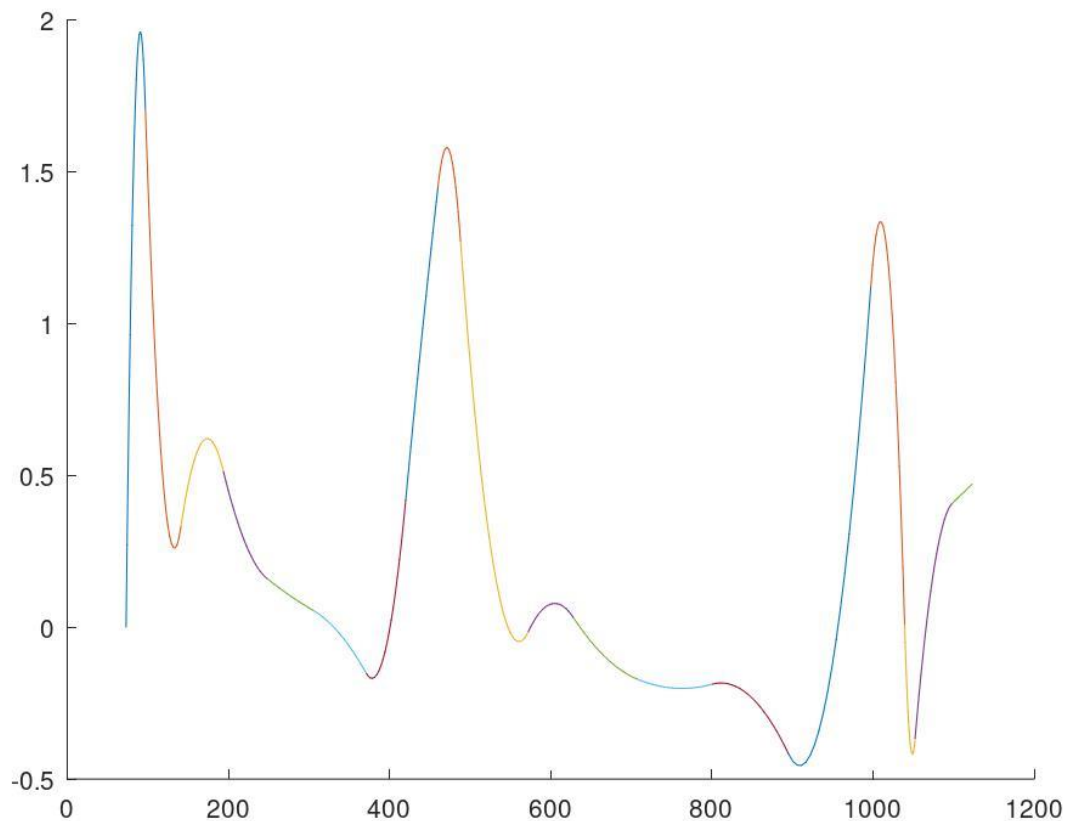


Рис.5 График первой производной сплайна

4) На четвертом этапе было необходимо построить вторую производную сплайна (рис.6). Функция для построения графика была получена прямым дифференцированием выражения для первой производной сплайна на отрезке.

Функция для второй производной сплайна на отрезке

$$S''(x) = 2 * S_2 + 3 * 2 * S_3(x - x_i)$$

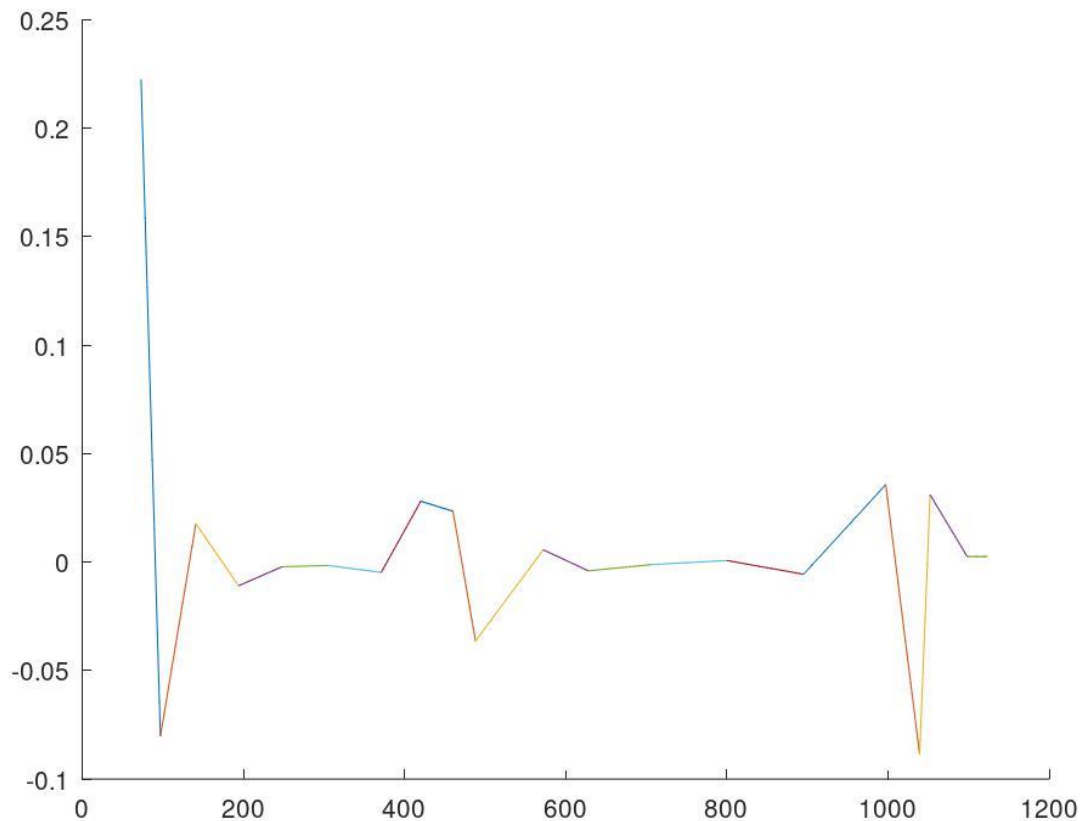


Рис.6 График второй производной сплайна

5) На заключительном этапе необходимо было использовать массив данных, полного контура машины (рис.7). Для построения полного контура необходимо было ввести параметризацию от параметра t . Для того чтобы получился замкнутый контур, начальная точка была помещена в конец массива.

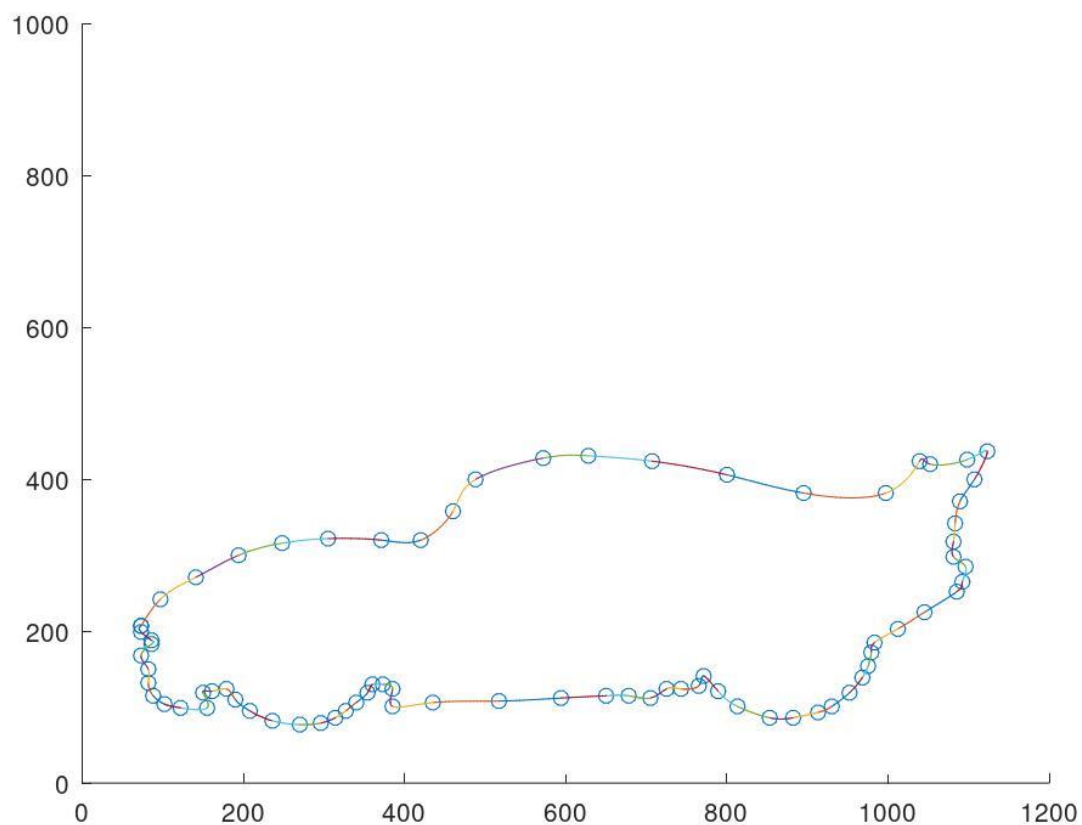


Рис.7 Построение полного контура машины

В качестве результатов проделанной работы прилагается файл, с кодом.