Первое задание

Выполнял: Зернов Данил

Вариант 3

Задание по задаче Коши: решить нелинейную задачу Коши, используя неявную схему с 10 подотрезками. Построить на графике численные результаты и точное решение (*первым делом проверить правильность точного решения!*).

3. Задача Коши

$$y'' = y' \cos x - y \ln y, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = \text{вычислить}.$$

Точное решение $y(x) = e^{\sin x}$ на отрезке $[0, 2]$. Задание смотри выше.

В рамках выполнения второго проекта по численным методам было необходимо решить нелинейную задачу Коши, используя неявную схему Эйлера, которую нужно было решить методом Ньютона для нелинейных систем уравнений.

1) На первом этапе было необходимо вычислить значение первой производной точного решения в нуле, а также проверить правильность точного решения.

$$y_{true} = e^{\sin(x)}$$

$$y'_{true} = \cos(x) * e^{\sin(x)} = 1, \text{при } x = 0$$

$$y''_{true} = \cos^2(x) * e^{\sin(x)} - \sin(x) * e^{\sin(x)}$$

Подставляя вычисленные производные в исходное уравнение:

$$\cos^2(x) * e^{\sin(x)} - \sin(x) * e^{\sin(x)} = \cos^2(x) * e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)} * \ln(e^{\sin(x)})$$

Приходим к тождеству, а значит действительно точное решение правильно.

2) Для использования неявной схемы Эйлера было необходимо понизить порядок уравнения сделав замену y’ = dy. Тогда уравнение преобразуется в систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = dy \\ dy' = dy * \cos(x) - y * \ln(y) \end{cases}$$

Тогда при использовании неявного метода Эйлера и при переноси всех неизвестных в левую часть получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y_{n+1} - y_n \ - h * dy_{n+1} = 0 \\ dy_{n+1} - dy_n - h(dy_{n+1} * \cos(x_{n+1}) - y_{n+1} * \ln(y_{n+1})) = 0 \end{cases}$$

Также было необходимо найти Якобиан получившейся матрицы:

$$\begin{matrix} 1 & -h \\ h(\ln(y_{n+1}) + 1) & 1 - h * \cos(x_{n+1}) \end{matrix}$$

3) После реализации метода Ньютона был получен график сравнения точного решения и вычисленного численно. Так как график для N=10 был слишком не похож на точное решение, было принято решение проверить программу для большего количества отрезков разбиения N=100 и N=1000. Видно, что с ростом количества отрезков численное решение стремится к точному (рис.1).

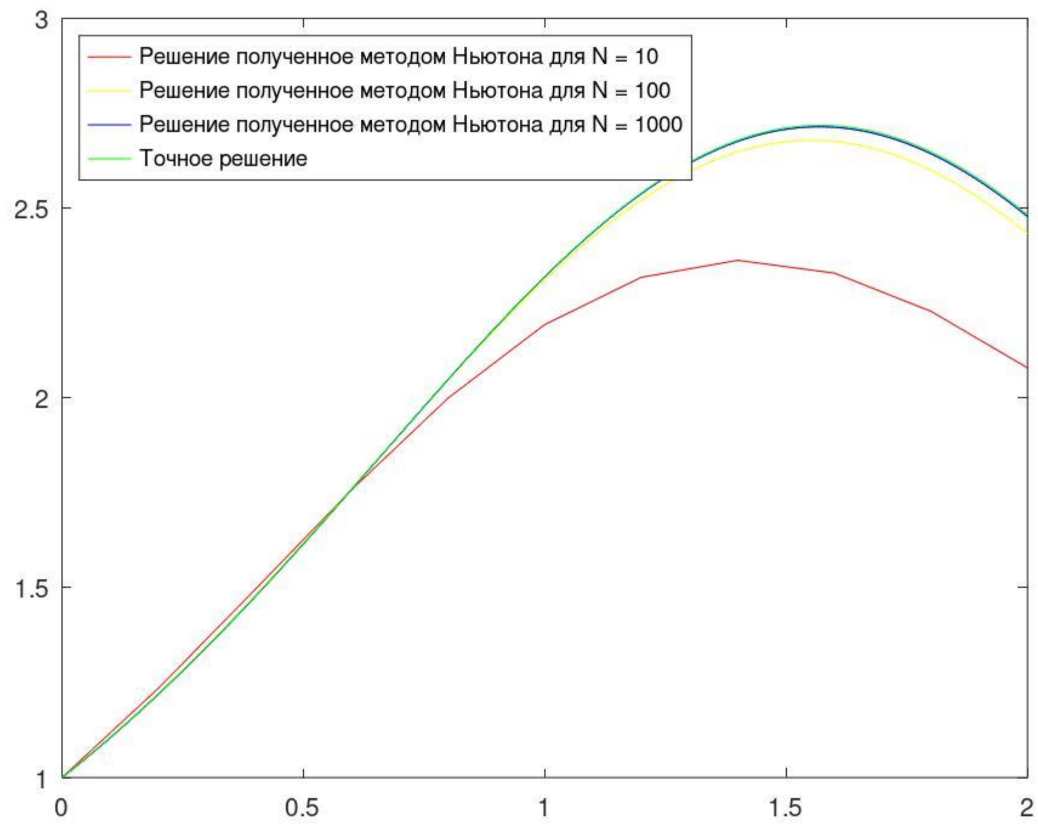

Рис.1

В качестве результата выполненной работы прилагается код программы.