Домашняя работа 1. Вариант 2.

Данила Печенев

2 декабря 2021 г.

1. Заметим, что число мышей каждого вида *с учетом контрольной группы* не может превосходить количества мышей, которое есть в лаборатории. Из этого условия следует, что для исследования возможно использовать от 5 до 15 белых мышей (11 способов) и от 5 до **9** домовых (5 способов). Выбор числа мышей одного вида и другого независимы друг от друга, поэтому количество способов выбрать экспериментальную группу вычисляется как $11 \times 5 = 55$.
Ответ: 55.

1'. Количество способов выбрать k мышей из n - это количество сочетаний $= C_n^k$ (так как порядок значения не имеет). Соответственно выбрать i белых мышей можно C_{45}^i способами, а j домовых - C_{18}^j способами. Выбор мышей одного вида и другого независимы друг от друга, поэтому количество способов выбрать экспериментальную группу из i белых и j домовых мышей $= C_{45}^i \cdot C_{18}^j$. Как было замечено ранее, $5 \leqslant i \leqslant 15$ и $5 \leqslant j \leqslant 9$. Таким образом, проход по всем возможным значениям i и j образует формулу $\sum\limits_{i=5}^{15}\sum\limits_{j=5}^{9} C_{45}^i \cdot C_{18}^j$.
Чтобы посчитать ответ в явном виде, напишем программу на языке Python:
—

```
import math

count = 0
for i in range(5, 15 + 1):
    for j in range(5, 9 + 1):
        count += math.comb(45, i) * math.comb(18, j)
print(count)
```

—
Ответ: 21561.

2. Для решения задачи напишем программу на языке Python. Алгоритм следующий: используя функцию *product* из библиотеки *itertools* переберем все возможные цепочки РНК длины 11. Для каждой цепочки рассмотрим ее с добавлением в конец каждого из стоп-кодонов (получатся цепочки длины 14). Таким образом, остается лишь проверить, что до стоп-кодона на конце цепочки стоп-кодоны не встречались, то есть среди первых 13 нуклеотидов стоп-кодонов нет.
—

```
from itertools import product
```

```python
def is_good(chain):
    return 'UAA' not in chain[:-1] and 'UAG' not in chain[:-1] and 'UGA' not in chain[:-1]

count = 0
combs = [''.join(x) for x in list(product('UGAC', repeat=11))]
for chain in combs:
    chain1 = chain + 'UAA'
    if is_good(chain1):
        count += 1
    chain2 = chain + 'UAG'
    if is_good(chain2):
        count += 1
    chain3 = chain + 'UGA'
    if is_good(chain3):
        count += 1
print(count)
```

Ответ: 7842144.

3. Количество способов распределить 16 культур по 4 чашам на языке теории множеств - это число разбиений 16-элементного множества на 4 непустых подмножества, что является числом Стирлинга второго рода из 16 по 4 $= S(16, 4)$. Числа Стирлинга второго рода ($S(n, k)$ - количество разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств) удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k) \text{ для } 0 < k \leq n$$

при естественных начальных условиях:

$$S(0, 0) = 1,\ S(n, 0) = 0 \text{ при } n > 0 \text{ и } S(j, k) = 0 \text{ при } k > j.$$

Напишем программу на языке Python, реализующую такую рекурсию:

```python
def S(n, k):
    if k > n:
        return 0
    if n == 0 and k == 0:
        return 1
    if n > 0 and k == 0:
        return 0
    return S(n - 1, k - 1) + k * S(n - 1, k)

print(S(16, 4))
```

Ответ: 171798901.

4. Посчитаем количество способов выбрать бактерии для эксперимента. Если участвует только один вид бактерий, то есть C_{32}^1 способов его выбрать. Если два вида, то C_{32}^2 способа. Если три, то C_{32}^3. Таким образом, выбрать бактерии для эксперимента можно $C_{32}^1 + C_{32}^2 + C_{32}^3$ способами. Также необходимо выбрать одну ткань - есть 7 способов сделать это. Выбор ткани и бактерий

независимы, поэтому эксперимент можно провести $7 \cdot (C_{32}^1 + C_{32}^2 + C_{32}^3)$ различными способами.

Чтобы посчитать ответ в явном виде, напишем программу на языке Python:

```
import math

print(7 * (math.comb(32, 1) + math.comb(32, 2) + math.comb(32, 3)))
```

Ответ: 38416.

5. a) $A \Leftrightarrow$ в популяции встречается сплошной альбинос,
   $\overline{B} \Leftrightarrow$ в популяции менее двух сплошных альбиносов,
   $\Rightarrow A\overline{B} \Leftrightarrow$ в популяции ровно один сплошной альбинос.

   b) $C \Leftrightarrow$ в популяции встречается голубоглазый сиамский альбинос,
   $E \Leftrightarrow$ в популяции встречается **либо** бурманский, **либо** голубоглазый альбинос.
   Если выполнены оба условия, то в популяции встречается голубоглазый (и при этом сиамский) альбинос и не встречается бурманский (так как либо...либо - это исключающее "или"), $\Rightarrow$
   $CE \Leftrightarrow$ в популяции встречается голубоглазый сиамский альбинос и не встречается бурманский альбинос.

   c) $\overline{D} \Leftrightarrow$ в популяции встречается бурманский розовоглазый альбинос,
   $E \Leftrightarrow$ в популяции встречается либо бурманский, либо голубоглазый альбинос,
   $\overline{D}E \Leftrightarrow$ в популяции встречается бурманский розовоглазый альбинос и не встречается голубоглазый альбинос,
   $\overline{\overline{D}E} \Leftrightarrow$ в популяции встречается бурманский розовоглазый альбинос тогда и только тогда, когда в ней встречается голубоглазый альбинос.

   d) $\overline{A} \Leftrightarrow$ в популяции нет сплошных альбиносов,
   $C \Leftrightarrow$ в популяции встречается голубоглазый сиамский альбинос,
   $D \Leftrightarrow$ в популяции нет бурманских розовоглазых альбиносов,
   $\overline{A}CD \Leftrightarrow$ в популяции встречается голубоглазый сиамский альбинос, но не встречаются сплошные и бурманские розовоглазые альбиносы.

   e) $\overline{A} \Leftrightarrow$ в популяции нет сплошных альбиносов,
   $\overline{B} \Leftrightarrow$ в популяции менее двух сплошных альбиносов,
   $\overline{A \cup B} \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$ (по закону де Моргана). $\overline{A} \cap \overline{B} \Leftrightarrow$ в популяции нет сплошных альбиносов.

   f) Заметим, что события A и D не могут быть выполнены одновременно, то есть являются *несовместными событиями*. Если A выполняется, то есть в популяции найдется сплошной альбинос, то для него выполняются условия всех остальных типов альбинизма, в частности, эта особь является бурманским розовоглазым альбиносом, тогда событие D не выполнено.

Для несовместных событий получаем:
$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \bigsqcup B) \backslash \varnothing = A \bigsqcup B$. Тогда
$A \triangle B \Leftrightarrow$ в популяции либо встречается сплошной альбинос (который, в частности, является и бурманским розовоглазым), либо не встречается бурманский розовоглазый альбинос (тогда не встречается и сплошной) $\Rightarrow$
$\overline{A \triangle B} \Leftrightarrow$ в популяции либо встречаются и сплошной, и бурманский розовоглазый вид альбиносов, либо не встречается никакой из них.

g) $E \Leftrightarrow$ в популяции встречается либо бурманский, либо голубоглазый альбинос,
$\overline{C} \Leftrightarrow$ в популяции не встречается голубоглазый сиамский альбинос,
$E \backslash C \Leftrightarrow E \cap \overline{C} \Leftrightarrow$ если в популяции встречается голубоглазый альбинос, то никакой из них не является сиамским и в популяции нет бурманских альбиносов; если голубоглазый альбинос не встречается, то в популяции найдется бурманский альбинос.

h) Для события S будем обозначать $S = 1$, если оно состоялось, и $S = 0$, если оно не состоялось.
Если $\overline{(AC \cup BD) \backslash E} = \overline{(AC \cup BD) \cap \overline{E}} = 1$, то $(AC \cup BD) \cap \overline{E} = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{c} AC \cup BD = 0 \\ \overline{E} = 0 \end{array}\right. = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \begin{cases} AC = 0 \\ BD = 0 \end{cases} \\ E = 1 \end{array}\right. = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ C = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ D = 0 \end{array}\right. \end{cases} \\ E = 1 \end{array}\right. = 1.$$

Случай 1. $E = 1 \Leftrightarrow$ в популяции встречается либо бурманский, либо голубоглазый альбинос.

Случай 2. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ C = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ D = 0 \end{array}\right. \end{cases} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ C = 0 \end{array}\right. = 1 \\ \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ D = 0 \end{array}\right. = 1 \end{cases}.$

Заметим, что выполнение условия A влечет за собой выполнение условия C (поскольку в ситуации, когда особь является сплошным альбиносом, для нее выполняются условия всех типов альбинизма). Тогда:
$A = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ C = 0 \end{array}\right. = 0$. Выходит, если $\left[\begin{array}{l} A = 0 \\ C = 0 \end{array}\right. = 1$, то $A \neq 1 \Leftrightarrow$
$A = 0$. Получается, что $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ C = 0 \end{array}\right. = 1 \\ \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ D = 0 \end{array}\right. = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ D = 0 \end{array}\right. = 1 \end{cases}$. Теперь заметим, что если $A = 0 \Leftrightarrow$ в популяции не встречается сплошной альбинос, то B (в популяции не менее двух сплошных альбиносов) $= 0$, а это значит,

что $\left[\begin{array}{l} B=0 \\ D=0 \end{array}\right. = 1$ выполнено автоматически. Таким образом,

$\begin{cases} A=0 \\ \left[\begin{array}{l} B=0 \\ D=0 \end{array}\right. = 1 \end{cases} \Rightarrow A=0 \Leftrightarrow$ в популяции нет сплошных альбиносов.

Итак, $\overline{(AC \cup BD) \backslash E} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} E=1 \\ A=0 \end{array}\right. = 1.$

Если $A=1$, то в популяции найдется сплошной альбинос, который будет являться и бурманским, и голубоглазым, то есть условие E (в популяции встречается строго один из этих типов) выполняться не будет. Тогда:

$A=1 \Rightarrow E=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} E=1 \\ A=0 \end{array}\right. = 0$. Значит, если $\left[\begin{array}{l} E=1 \\ A=0 \end{array}\right. = 1$, то

$A \neq 1 \Leftrightarrow A=0$, то есть $\left[\begin{array}{l} E=1 \\ A=0 \end{array}\right. = 1 \Rightarrow A=0$. Получили следующее:

$\overline{(AC \cup BD) \backslash E} = 1 \Rightarrow A=0$. С другой стороны,

$A=0 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC=0 \\ BD=0 \end{cases} \Rightarrow AC \cup BD = 0 \Rightarrow$

$(AC \cup BD) \cap \overline{E} = 0 \Leftrightarrow (AC \cup BD) \backslash E = 0 \Leftrightarrow \overline{(AC \cup BD) \backslash E} = 1.$

Таким образом, $\begin{cases} \overline{(AC \cup BD) \backslash E} \Rightarrow \overline{A} \\ \overline{A} \Rightarrow \overline{(AC \cup BD) \backslash E} \end{cases} \Rightarrow \overline{(AC \cup BD) \backslash E} \Leftrightarrow \overline{A} \Leftrightarrow$ в популяции нет сплошных альбиносов.

Утверждения:

1. События a и b несовместны.
2. События a и d несовместны.
3. События a и e несовместны.
4. События a и g несовместны.
5. События a и h несовместны.
6. События b и c несовместны.
7. События b и g несовместны.
8. События c и d несовместны.
9. Вероятность события d ниже, чем вероятность события e, поскольку d $\subset$ e.
10. Вероятность события d ниже, чем вероятность события f, поскольку d $\subset$ f.
11. Вероятность события d ниже, чем вероятность события h, поскольку d $\subset$ h.

12. События e и h равносильны.

Все утверждения следуют из того, что уже было сказано.

6. Будем считать, что мы **отличаем** особей друг от друга. То есть во всех задачах мы будем мыслить так: зафиксируем нужное количество божьих коровок (и их самих, соответственно), а дальше будем менять количество пятен на спине у каждой.
Чтобы посчитать искомую вероятность, напишем программу на языке Python. Циклы перебирают все возможные варианты количества пятен у разных коровок. Переменная count_ways считает все возможные комбинации божьих коровок, а переменная count_necessary_ways - только те, которые удовлетворяют условиям подзадачи. Поскольку вероятность любого числа пятен одинакова при случайном выборе особи, то искомая вероятность вычисляется как отношение количества благоприятных событий (count_necessary_ways) к количеству всех возможных событий (count_ways).

6.1 —–

```
count_ways = 0
count_necessary_ways = 0
for n1 in range(2, 22 + 1, 2):
    for n2 in range(2, 22 + 1, 2):
        count_ways += 1
        if n1 + n2 == 34:
            count_necessary_ways += 1
print(f'{count_necessary_ways} / {count_ways}')
```

—–

Ответ: $\frac{6}{121} \approx 0.05$.

6.2 —–

```
count_ways = 0
count_necessary_ways = 0
for n1 in range(2, 22 + 1, 2):
    for n2 in range(2, 22 + 1, 2):
        count_ways += 1
        if n1 + n2 <= 18:
            count_necessary_ways += 1
print(f'{count_necessary_ways} / {count_ways}')
```

—–

Ответ: $\frac{36}{121} \approx 0.298$.

6.3 —–

```
count_ways = 0
count_necessary_ways = 0
for n1 in range(2, 22 + 1, 2):
    for n2 in range(2, 22 + 1, 2):
        for n3 in range(2, 22 + 1, 2):
            count_ways += 1
            if n1 + n2 + n3 > 54:
                count_necessary_ways += 1
print(f'{count_necessary_ways} / {count_ways}')
```

—–

Ответ: $\frac{56}{1331} \approx 0.042$.

6.4 Эту подзадачу решим "руками".

Количество комбинаций чисел пятен на спинах коровок при выборе 12 особей $= 11^{12}$.

Количество таких комбинаций божьих коровок, при которых ни у одной нет ровно двух пятен $= 10^{12}$ (исключаем один вариант - два пятна).

Количество таких комбинаций божьих коровок, при которых ровно два пятна на спине есть только у одной коровки $= 12 \cdot 10^{11}$ (12 способов выбрать коровку, у которой будет два пятна, у остальных на спине может быть любое количество пятен, кроме двух, то есть 10 вариантов). И, наконец, количество таких комбинаций божьих коровок, при которых ровно два пятна на спине есть ровно у двух коровок $C_{12}^2 \cdot 10^{10}$ (C_{12}^2 способов выбрать две коровки, у которых будет два пятна, у остальных на спине может быть любое количество пятен, кроме двух, то есть 10 вариантов).

Осталось отнять из общего числа комбинаций те, которые не соответствуют условию. Получаем: $11^{12} - 10^{12} - 12 \cdot 10^{11} - C_{12}^2 \cdot 10^{10}$. Чтобы посчитать вероятность, поделим количество комбинаций, удовлетворяющих условию, на общее количество комбинаций. Ответ в явном виде получим с помощью программы на языке Python:

—

```
import math

print(f'{11**12 - 10**12 - 12 * (10**11) - math.comb(12, 2) * (10**10)} / {11**12}')
```

—

Ответ: $\frac{278428376721}{3138428376721} \approx 0.089$.

6.5 —

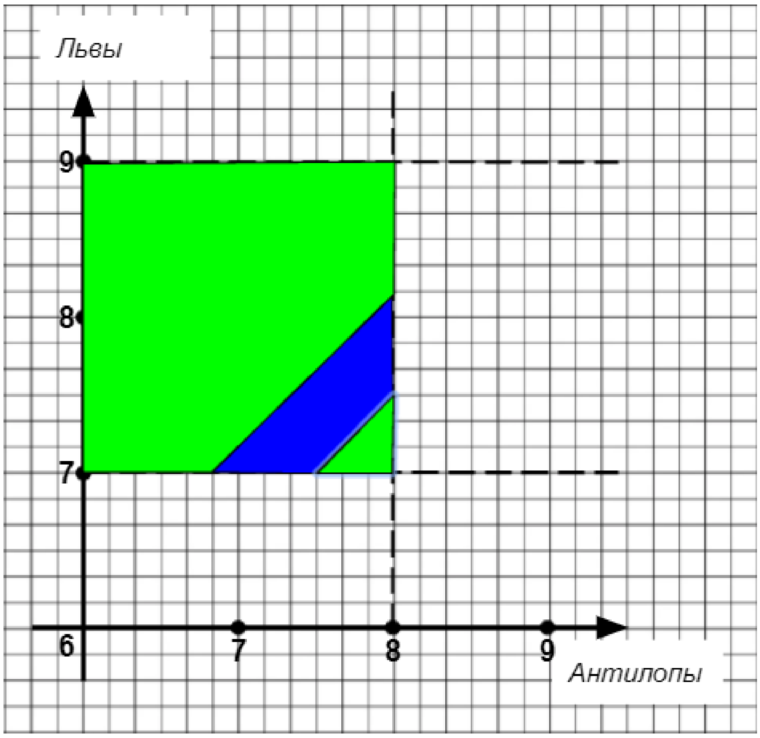
```
count_ways = 0
count_necessary_ways = 0
for n1 in range(2, 22 + 1, 2):
    for n2 in range(2, 22 + 1, 2):
        for n3 in range(2, 22 + 1, 2):
            for n4 in range(2, 22 + 1, 2):
                count_ways += 1
                if (n1 + n2) == (n3 + n4):
                    count_necessary_ways += 1
print(f'{count_necessary_ways} / {count_ways}')
```

—

Ответ: $\frac{891}{14641} \approx 0.061$.

7. Если стадо антилоп за день никого не потеряет (событие X), то оно никого не потеряет ни утром (событие A), ни вечером (событие B).

Найдем вероятность события A. Сначала решим противоположную задачу и найдем вероятность $\overline{A}$, то есть того, что утром стадо потеряет антилопу. Вероятность того, что львы выберут тот же водоем, что и выбрали антилопы (событие M_1) $= \frac{1}{2}$. Теперь посчитаем вероятность того, что *при условии выбора того же водоема* львы встретятся с антилопами (событие M_2). Для этого воспользуемся геометрической интерпритацией вероятности:



Ось абсцисс - время прихода стада антилоп, ось ординат - время прихода львов. Закрашенная часть (зеленая и синяя, то есть квадрат) - это пространство всех возможных комбинаций времени прихода антилоп и львов. Обозначим зеленым цветом такие события, при которых встреча не происходит, синим - те, при которых встреча произойдет. Сделаем это из следующего соображения: животные встретятся, если львы придут позже, чем за 30 минут до прихода антилоп, и раньше, чем спустя 10 минут после прихода антилоп. Тогда вероятность встречи - это отношение площади синей фигуры к площади всего закрашенного квадрата:

$$P(M_2) = \frac{\frac{1}{2}\cdot 7^2 - \frac{1}{2}\cdot 3^2}{12^2} = \frac{5}{36}.$$

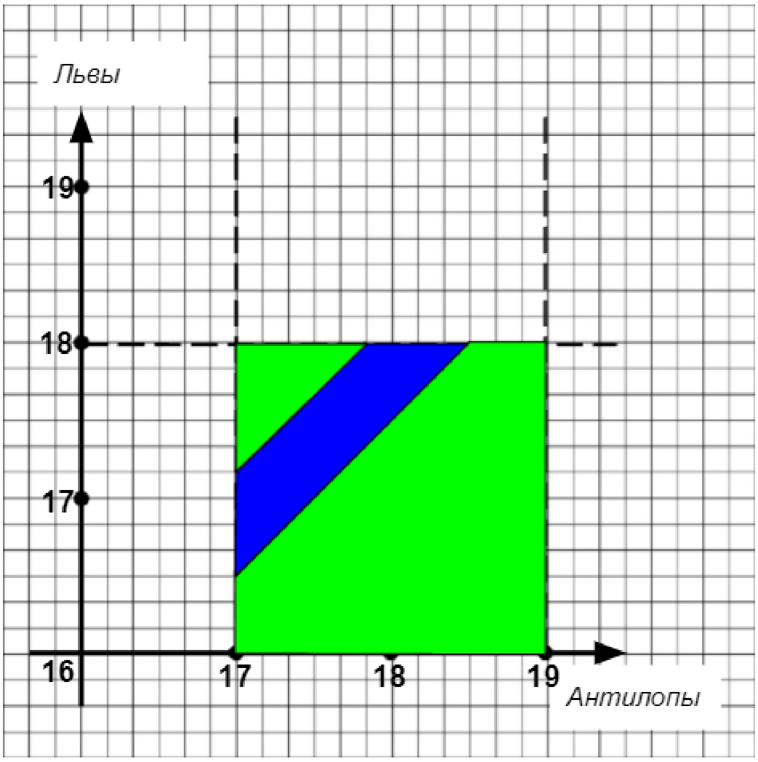
Согласно условию, вероятность того, что львы *при встрече* поймают антилопу (событие M_3)$= 0.85 = \frac{17}{20}$.

Итак, искомая вероятность

$$P(\overline{A}) = P(M_1)\cdot P(M_2)\cdot P(M_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{36}\cdot\frac{17}{20} = \frac{17}{288}.$$

А значит, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{17}{288} = \frac{271}{288}$.

Найдем вероятность события B. Сначала решим противоположную задачу и найдем вероятность $\overline{B}$, то есть того, что вечером стадо потеряет антилопу. Вероятность того, что львы выберут тот же водоем, что и выбрали антилопы (событие E_1) $= \frac{1}{2}$. Теперь посчитаем вероятность того, что *при условии выбора того же водоема* львы встретятся с антилопами (событие E_2). Для этого воспользуемся геометрической интерпритацией вероятности:



Ось абсцисс - время прихода стада антилоп, ось ординат - время прихода львов. Закрашенная часть (зеленая и синяя, то есть квадрат) - это пространство всех возможных комбинаций времени прихода антилоп и львов. Обозначим зеленым цветом такие события, при которых встреча не происходит, синим - те, при которых встреча произойдет. Сделаем это из следующего соображения: животные встретятся, если львы придут позже, чем за 30 минут до прихода антилоп, и раньше, чем спустя 10 минут после прихода антилоп. Тогда вероятность встречи - это отношение площади синей фигуры к площади всего закрашенного квадрата:

$$P(E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9^2 - \frac{1}{2} \cdot 5^2}{12^2} = \frac{7}{36}.$$

Согласно условию, вероятность того, что львы *при встрече* поймают антилопу (событие E_3)$= 0.85 = \frac{17}{20}$.
Итак, искомая вероятность

$$P(\overline{B}) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{36} \cdot \frac{17}{20} = \frac{119}{1440}.$$

А значит, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{119}{1440} = \frac{1321}{1440}$.
События A и B независимы, получаем

$$P(X) = P(A) \cdot P(B) = \frac{271}{288} \cdot \frac{1321}{1440} = \frac{357991}{414720}.$$

Ответ: $\frac{357991}{414720} \approx 0.863$.

8. Сначала решим противоположную задачу - найдем вероятность того, что в городе не объявят карантин (событие A), то есть ни в каком из выбранных для

дополнительного исследования восьми микрорайонов не будет превышения нормы. Всего микрорайонов 42, в трех из них число заражений превышает норму $\Rightarrow$ в 39 микрорайонах норма не превышена. Тогда количество выборов восьми из них $= C_{39}^{8}$. Количество способов выбрать 8 микрорайонов из всех $42 = C_{42}^{8}$. Искомая вероятность вычисляется как отношение количества благоприятных событий (в восьми выбранных микрорайонах не обнаружено превышение нормы) к количеству всех возможных событий (выбор восьми микрорайонов для дополнительного исследования). Получаем: $P(A) = \frac{C_{39}^{8}}{C_{42}^{8}} = \frac{748}{1435}$.
Вернемся к изначальной задаче. Необходимо найти вероятность того, что в городе будет объявлен карантин, то есть среди восьми выбранных для дополнительного исследования микрорайонов найдется такой, в котором будет превышение нормы (событие $\overline{A}$). $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{748}{1435} = \frac{687}{1435}$.
Ответ: $\frac{687}{1435} \approx 0.479$.

9. Если за неделю среди извлеченных пчел не встретится трутень (событие A), то он не встретится в каждый из семи дней. Найдем вероятность того, что вытащенная в конкретный день пчела не окажется трутнем (событие B).
Пусть H_1, H_2, H_3 - выбор улья с пчелами породы I, C, S соответственно - полная группа событий. Тогда по соответствующей теореме

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(B|H_i)$$

Посчитаем все, что нужно:
$P(H_1) = \frac{3}{3+5+4} = \frac{1}{4}$, $P(H_2) = \frac{5}{3+5+4} = \frac{5}{12}$, $P(H_3) = \frac{4}{3+5+4} = \frac{1}{3}$
$P(B|H_1) = 1 - \frac{25}{100} = \frac{3}{4}$, $P(B|H_2) = 1 - \frac{20}{100} = \frac{4}{5}$, $P(B|H_3) = 1 - \frac{10}{100} = \frac{9}{10}$.
Подставим в формулу:
$P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{197}{240}$.
Итак, поскольку изъятие одной пчелы из ульев каждый день - это независимые события, то

$$P(A) = P(B) \cdot ... \cdot P(B) = P(B)^7 = \left(\frac{197}{240}\right)^7 = \frac{11514990476898413}{45864714240000000}.$$

Ответ: $\frac{11514990476898413}{45864714240000000} \approx 0.251$.