Задача коммивояжёра

Метод ветвей и границ

Данила Печенев

Программмная инженерия
Математико-механический факультет
СПбГУ

Май 2022

Содержание

1. Формулировка задачи
2. Формальнее: математическая модель
3. Метод ветвей и границ
4. Пример: применение метода ветвей и границ на конкретной задаче

Формулировка задачи

В 19-м и 20-м веке по городам ездили коммивояжёры (сейчас их называют «торговые представители»). Они ходили по домам и предлагали людям купить разные товары. Тактика была такой: коммивояжёр приезжал в город, обходил большинство домов и отправлялся в следующий город. Города были небольшими, поэтому обойти всё было вполне реально.
Чем больше городов посетит коммивояжёр, тем больше домов он сможет обойти и больше заработать с продаж. Самая большая проблема, которая всегда стояла перед коммивояжёрами, звучала так:

Как быстрее всего объехать все города в этом районе?

Формулировка задачи

В 19-м веке все добирались из города в город на лошадях и повозках, поэтому время полностью зависело от расстояния между городами. С другой стороны, коммивояжёру нужно было вернуться домой после поездок, поэтому **классическая задача коммивояжёра** звучит так:

Как найти самый короткий маршрут между городами, чтобы побывать в каждом хотя бы по одному разу и вернуться домой?

Формальнее: математическая модель

Задан полный ориентированный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$ и множеством дуг E. Каждой дуге $(i, j) \in E$ сопоставляется длина $c_{ij} \geq 0$. В общем случае задача коммивояжёра формулируется на произвольном графе, поэтому длины некоторых (в частности, не существующих) ребер могут быть сколь угодно большими. Будем считать, что $c_{ii} = +\infty$ (тем самым указываем на бессмысленность перемещения из города i в этот же город i). Таким образом, требуется найти гамильтонов цикл $(i_1, i_2, \dots, i_n, i_1)$ минимальной длины, где i_k - номер k-го посещенного города.

Пусть задана таблица C длин дуг из множества E. Расстояние между вершинами i и j, как и ранее, обозначаем за c_{ij} (соответствующая ячейка таблицы C). Опишем метод ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра.
Шаг 0: Обозначим $c_{ii} = +\infty$, $i = 1, \ldots, n$.
Шаг 1: Рассмотрим произвольный путь и посчитаем его длину. Это будет верхняя граница длины пути. Далее, если в какой-то момент мы получим нижнюю оценку на длину пути большую, чем это число, мы тут же перестанем рассматривать этот вариант.

Шаг 2: Редукция таблицы. Вычисляются $m_i' = min_j d_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$ - минимальные элементы в строках; $m_j'' = min_i(d_{ij} - m_i)$, $i = 1, \ldots, n$ - минимальные элементы в столбцах после вычитания из i-ой строки m_i, $i = 1, \ldots, n$.
Производится редукция и получается новая таблица C' в соответствии с формулой:

$$c_{ij}' = c_{ij} - m_i' - m_j'', 1 \leq i, j \leq n.$$

Это преобразование основано на том факте, что при вычитании константы из любого столбца или строки матрицы стоимость оптимального маршрута уменьшится на величину этой константы, а маршрут останется тем же.

Шаг 3: Сумма всех вычтенных на предыдущем шаге величин и будет оценкой снизу для всех вариантов маршрута, построенных по матрице C. Вычислим нижнюю границу длины путешествия:

$$d = \sum_{i=1}^{n} m_i' + \sum_{j=1}^{n} m_j''.$$

Шаг 4: Ветвление. Производится выбор некоторого ребра графа, при котором все возможные варианты маршрута делятся на две группы: те, которые включают выбранное ребро, и те, в которых оно отсутствует. Для обеих групп создается отдельная матрица расстояний. Эти матрицы подвергаются аналогичному преобразованию с выбором ребра. Строящееся при этом дерево муршрутов получается бинарным.

Выбор ребра на каждом шаге производится таким образом, чтобы оптимальный вариант маршрута содержал выбранное ребро с наибольшей вероятностью. А именно, выбирается такое ребро (i_0, j_0) с нулевым весом, для которого сумма весов вторых по минимальности ребер в его строке и в его столбце (иначе говоря, просматриваются все элементы, кроме текущего нулевого) максимальна. Выбранное ребро включается в маршрут для вариантов маршрута первой группы и исключается из всех вариантов маршрута второй группы.

Шаг 5: Вычисляется нижняя оценка длины пути для машрутов (узла в строящемся бинарном дереве), которые содержат ребро (i_0, j_0). Раз это ребро точно есть в пути, то строку i_0 и столбец j_0 в C' можно зачеркнуть (про них уже всё известно). С получившейся таблицей выполняются шаги 2 и 3.

Далее вычисляется нижняя оценка длины пути для машрутов (узла в строящемся бинарном дереве), которые не содержат ребро (i_0, j_0). В таблице C' обозначается $c_{i_0 j_0} = +\infty$ - это не позволяет коммивояжёру передвигаться из города i_0 в город j_0. Кроме того, все возможности закрытия цикла перед работой с матрицей в каждом узле дерева должны быть заблокированы (путем обозначения длин необходимых ребер, т.е. соответствующих ячеек таблицы, за $+\infty$).
Шаг 6: Из листов дерева выбирается тот, для которого нижняя оценка является наименьшей. С его таблицей выполняются шаги 2-6 и так далее.

Алгоритм завершается, когда в таблице остаются только те маршруты, которые, если не используются, приводят к решению, являющемуся траекторией бесконечной продолжительности. В этом случае будет известна точная длина пути коммивояжёра. Все листы полученного бинарного дерева, нажняя оценка для которых больше, чем полученный результат, вычеркиваются. Остается проделать тот же алгоритм с оставшимися листами дерева, начиная с того, нижняя оценка которого минимальна. Наконец, среди всех полученных результатов выбирается путь с наименьшей длиной - такой путь и есть результат работы алгоритма.

Пример: применения метода ветвей и границ на конкретной задаче

Рассмотрим пример применения метода ветвей и границ. Пусть задана следующая таблица расстояний между пятью городами (сразу выполним для нее шаг 0):

$C =$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	10	25	25	10
2	1	∞	10	15	2
3	8	9	∞	20	10
4	14	10	24	∞	15
5	10	8	25	27	∞

Мы будем искать значение F - наименьшую длину пути.
Шаг 1: рассмотрим какой-нибудь путь, например, $((1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1))$. Несложно проверить, что его длина 65 - это верхняя оценка на F.

Пример: применение метода ветвей и границ на конкретной задаче

Выполним шаг 2. Заполним столбец m' и строку m'':

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**m'**
1	∞	10	25	25	10	10
2	1	∞	10	15	2	1
3	8	9	∞	20	10	8
4	14	10	24	∞	15	10
5	10	8	25	27	∞	8
m''	0	0	9	12	0	

Пример: применение метода ветвей и границ на конкретной задаче

Вычтем и получим:

$$C' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{1} & \infty & 0 & 6 & 3 & 0 \\ \hline \mathbf{2} & 0 & \infty & 0 & 2 & 1 \\ \hline \mathbf{3} & 0 & 1 & \infty & 0 & 2 \\ \hline \mathbf{4} & 4 & 0 & 5 & \infty & 5 \\ \hline \mathbf{5} & 2 & 0 & 8 & 7 & \infty \\ \hline \end{array}$$

Отсюда, шаг 3: $d = 10 + 1 + 8 + 10 + 8 + 9 + 12 = 58 \Rightarrow 58 \leq F \leq 65$.

Пример: применение метода ветвей и границ на конкретной задаче

Шаг 4. $\Theta(\mu, \nu) = min_{\rho \neq \nu} c'_{\mu\rho} + min_{\rho \neq \mu} c'_{\rho\nu}$. Вычисляем:
$\Theta(1,2) = 0 + 0 = 0$
$\Theta(1,5) = 0 + 1 = 1$
$\Theta(2,1) = 0 + 0 = 0$
$\Theta(2,3) = 0 + 5 = 5$
$\Theta(3,1) = 0 + 0 = 0$
$\Theta(3,4) = 0 + 2 = 2$
$\Theta(4,2) = 4 + 0 = 4$
$\Theta(5,2) = 2 + 0 = 2.$
$\Rightarrow \Theta(\mu, \nu) = \Theta(2,3) = 5.$

Пример: применение метода ветвей и границ на конкретной задаче

Итак, мы получаем деление на два случая:
1) ребро $(2, 3)$ обязательно входит в путь;
2) ребро $(2, 3)$ точно не входит в путь.
Шаг 5. Рассмотрим сначала случай 2. Раз ребро $(2, 3)$ не входит в путь, то переобозначим $c'_{23} = \infty$:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	0	6	3	0
2	0	∞	∞	2	1
3	0	1	∞	0	2
4	4	0	5	∞	5
5	2	0	8	7	∞

Пример: применение метода ветвей и границ на конкретной задаче

По аналогии:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**m'**
1	∞	0	6	3	0	0
2	0	∞	∞	2	1	0
3	0	1	∞	0	2	0
4	4	0	5	∞	5	0
5	2	0	8	7	∞	0
m''	0	0	5	0	0	

Тогда $d_2 = d + \Theta(2,3) = 58 + 5 = 63$.

Пример: применение метода ветвей и границ на конкретной задаче

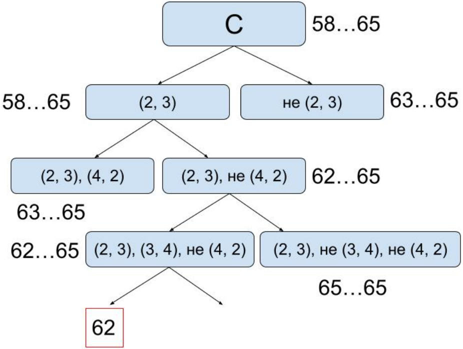
Разберем теперь случай 1. Раз ребро $(2, 3)$ точно входит в путь, то удалим вторую строку и третий столбец из таблицы C':

	1	**2**	**4**	**5**
1	∞	0	3	0
3	0	1	0	2
4	4	0	∞	5
5	2	0	7	∞

Заметим, что все m' и m'' для этой таблицы равны нулю. А значит $d_1 = d + 0 = 58 + 0 = 58$.

Пример: применение метода ветвей и границ на конкретной задаче

Шаг 6. Получили, что $d_1 < d_2$. Поэтому далее будем работать со случаем 1, т.е. будем включать ребро $(2, 3)$ в путь. Необходимо будет выполнить те же шаги, что и ранее. Как итог, на каком-то этапе получим следующее дерево:



Пример: применение метода ветвей и границ на конкретной задаче

Видно, что листов с нижней границей, меньшей 62, в дереве нет. Значит, найденный путь, обладая длиной 62, является ответом к задаче.