

Дискретная математика 1 семестр ПИ,

Лекция, 10/09/21

Собрано 9 октября 2021 г. в 20:50

Содержание

1. Теория вероятности	1
1.1. Основы теории вероятности	1
1.2. Условная вероятность	3
1.3. Независимость событий	4
1.4. Формула полной вероятности	5

1.1 Основы теории вероятности

Def. 1.1.1. $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множество всех взаимо-исключающих исходов эксперимента (пространство элементарных событий)

$X \subseteq A$ – событие

Def. 1.1.2. Дано $\Omega, \mathcal{A} \subset 2^\Omega$. Тогда \mathcal{A} называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

Утверждение 1.1.3. Если \mathcal{A} – алгебра, то

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$
4. $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}, \bigcap A_i \in \mathcal{A}$

Доказательство. 1. $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$

2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{A}$. Тогда $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B \in \mathcal{A}$

3. $A \setminus B = A \cap \bar{B} \in \mathcal{A}$

4. Доказывается по индукции. ■

Def. 1.1.4. \mathcal{A} называется σ -алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

Def. 1.1.5. Пусть есть пространство Ω , определенная на нём \mathcal{A} – σ -алгебра и $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция над множеством. Тогда вероятностью называется функция из \mathcal{A} в \mathbb{R} такая, что

1. $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A_1, A_2, \dots : A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Перечисленные выше свойства называются **аксиомами теории вероятности** (Ω, \mathcal{A}, P) – вероятностное пространство.

Свойства вероятности:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Если $A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

4. Если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Доказательство.

$$P(\bar{A} \cup A) = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

■

6. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Доказательство.

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) = P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) + P((B \setminus A) \cup (A \cap B)) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

■

7. $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j=1}^n (A_i \cap A_j) + \dots$

8. $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Доказательство. $A_{k-1} \subset A_k$. Рассмотрим $A_k \setminus A_{k-1}$. Пусть $A_0 = \emptyset$.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) - P(A_{k-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) - P(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

■

9. $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Пример 1.1.6. Два человека приходят на место в промежуток от 12 до 13ч и ждут 10 минут прежде чем уйти. Найти вероятность того, что они встретятся.

Решение 1.1.7. Пусть t_1 – время, когда приходит первый, t_2 – время, когда приходит второй.

$$|t_1 - t_2| \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 \geq t_1 - \frac{1}{6} \\ t_2 \leq t_1 + \frac{1}{6} \end{cases}$$

Картинка **TODO**

Тогда вероятность – площадь заштрихованной фигуры:

$$S = 1 - 2 \cdot \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}}{2} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Пример 1.1.8. На $[0, 1]$ выбираются два числа x, y . Найти вероятность того, что их произведение меньше $\frac{1}{2}$

Решение 1.1.9. Картинка **TODO**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2x}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(x \cdot y < \frac{1}{2}) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}$$

1.2. Условная вероятность

Def. 1.2.1. Вероятность события A при условии, что выполняется событие B равна

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пример 1.2.2. Есть урна, в которой лежит m белых и n черных шаров. Вытащим из неё два шара. Какова вероятность того, что они оба белые?

Решение 1.2.3.

$$P(\text{первый} - \text{белый}) = \frac{m}{m+n}, P(\text{второй} - \text{белый} | \text{первый} - \text{белый}) = \frac{m-1}{m+n-1}$$

$$P(\text{оба белые}) = \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m}{m+n}$$

Свойства условной вероятности:

1. $P(\Omega|B) = 1$
2. $P(\emptyset|B) = 0$
3. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
4. $A \subset C \Rightarrow P(A|B) \leq P(C|B)$
5. $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
6. $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$
7. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

$$P((A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n) = P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Пример 1.2.4. Бросаем 3 кубика. Найти вероятность того, что хотя бы на одном из них выпадет 1 при условии, что на всех выпали разные значения.

Решение 1.2.5.

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B) = 1 - \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

1.3. Независимость событий

Def. 1.3.1. A независимо от B ($P(B) \neq \emptyset$), если $P(A|B) = P(A)$

Утверждение 1.3.2. Если A независимо от $B \Rightarrow B$ независимо от A .

Доказательство.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P(B)} = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} = P(B)$$

■

Def. 1.3.3. A, B – независимые, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Def. 1.3.4. A_1, \dots, A_n – независимы в совокупности, если

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Def. 1.3.5. A_1, \dots, A_n – попарно-независимы, если

$$\forall i, j \rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

Замечание 1.3.6. Если A_1, \dots, A_n попарно-независимы, то они необязательно независимы в совокупности.

1.4. Формула полной вероятности

Def. 1.4.1. Пусть H_1, \dots, H_n – разбиение Ω . Тогда $H_1 \cup \dots \cup H_n = \Omega$ называется полной группой событий.

Теорема 1.4.2. H_1, \dots, H_n – полная группа событий и $P(H_i) > 0 \forall i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\forall A \rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Доказательство.

$$A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup \dots \cup H_n) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$$

$$P((A \cap H_1) \cup \dots \cup (A \cap H_n)) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

■