

Конспект лекций по геометрии, ПИ, 2 семестр Лекции

Собрано 26 февраля 2022 г. в 12:00

Содержание

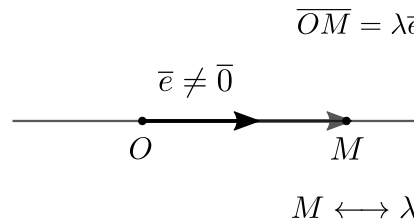
1. Аналитическая геометрия	1
1.1. Системы координат	1
1.1.1. Аффинные системы координат	1
1.1.2. Криволинейные системы координаты	2
1.1.3. Параметризации	2
1.2. Понятие вектора	3
1.3. Сложение и умножение на число	3
1.4. ЛЗ, ЛНЗ, Базис, размерность	4

Раздел #1: Аналитическая геометрия

1.1. Системы координат

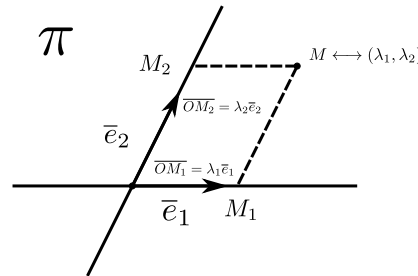
1.1.1. Аффинные системы координат

Def 1.1.1. Аффинной системой координат на прямой называется взаимно-однозначное соответствие $l \longleftrightarrow \mathbb{R}$.



Она определяется выбором точки O и выбором вектора \bar{e} . $АСК = \{O, \{\bar{e}\}\}$.

Def 1.1.2. АСК на плоскости называется биекция $\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$.



Она определяется выбором точки O и векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \neq \bar{0}, \bar{e}_1 \nparallel \bar{e}_2$. $АСК = \{O, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}\}$.

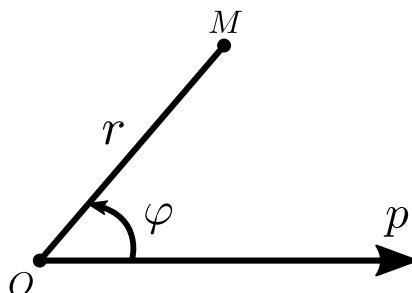
Def 1.1.3. Если $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1, \bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, то АСК называется декартовой системой координат.

Def 1.1.4. АСК в пространстве называется биекция $M \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$. Она определяется выбором точки O и векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \neq \bar{0}$ – не компланарны. $АСК = \{O, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}\}$.

Def 1.1.5. Упорядоченная тройка векторов $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ называется **правой**, если из конца вектор \bar{w} поворот то \bar{u} к \bar{v} по наименьшему углу выглядит происходящим против часовой стрелки, и **левой** – в противном случае.

1.1.2. Криволинейные системы координаты

Def 1.1.6. Выберем точку O и построим из неё луч p , который назовем полярной осью. Возьмем теперь произвольную точку M на плоскости и измерим две величины: расстояние от M до O и угол между вектором \overrightarrow{OM} и полярной осью. Обозначим расстояние за r , а угол за φ . Тогда, чтобы избежать неоднозначности, будем считать, что $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$, и если $r = 0$, то $\varphi = 0$. Такая система координат называется **полярной**.



Def 1.1.7. Полярная система координат, где $r \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$, то она называется обобщенной полярной системой координат.

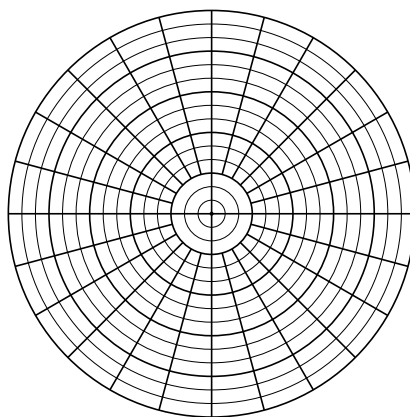


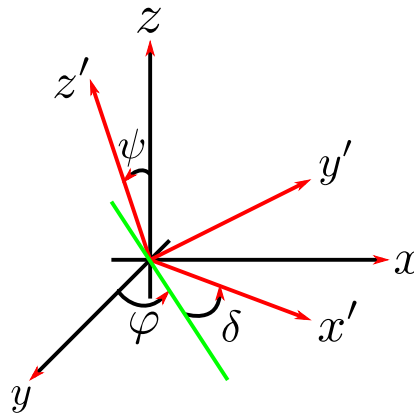
Рис. 1: Координатная сеть полярной системы координат

Def 1.1.8. Цилиндрической системой координат называют трёхмерную систему координат, являющуюся расширением полярной системы координат путём добавления третьей координаты (обычно обозначаемой z), которая задаёт высоту точки над плоскостью.

Def 1.1.9. Сферическая система координат — трёхмерная система координат, в которой каждая точка пространства определяется тремя числами, где r — расстояние до начала координат, а θ и φ — зенитный и азимутальный углы соответственно.

1.1.3. Параметризации

Построим декартову систему координат. Теперь возьмем какую-то новую систему координат x', y', z' . Проведем через x', y' плоскость. Если z' не совпадает с z , то эта плоскость пересекает



плоскость (x, y) по какой-то прямой. Отсчитывает от вектора x до этой прямой угол φ . Угол между z и z' обозначим за ψ . Теперь, мы можем эту прямую поворачивать вокруг оси z' на угол δ , пока она не совпадет с x' .

Таким образом, мы совместили исходную систему координат с новой СК. То есть мы построили соответствие между (ψ, φ, δ) .

1.2. Понятие вектора

Пусть E – евклидово пространство.

Def 1.2.1. *Закрепленный вектор – упорядоченная пара точек в евклидовом пространстве. Обозначение: \overrightarrow{AB} , модуль $|\overrightarrow{AB}|$ – расстояние между точками A и B .*

Def 1.2.2. *Пусть $\{(A, B), A, B \in E\}$ – множество закрепленных векторов. Введём на нём отношение равенства: $(A, B) = (C, D) \Leftrightarrow$:*

1. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$
2. $(A, B) \parallel (C, D)$ либо совпадают.
3. $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$.

Замечание 1.2.3. $\forall A, B \rightarrow (A, A) = (B, B)$.

Утверждение 1.2.4. Отношение, введённое в прошлом определении – отношение эквивалентности.

Доказательство. 1. Рефлексивность: $(A, B) = (A, B)$ – верно.

2. Симметричность – очевидно.

3. Транзитивность: $(A, B) = (C, D), (C, D) = (F, G) \Rightarrow (A, B) = (F, G)$ – верно.

Значит множество закрепленных векторов разбивается на классы эквивалентности. ■

Def 1.2.5. *Класс эквивалентности называется свободным вектором.*

1.3. Сложение и умножение на число

Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in V$ – классы.

Def 1.3.1. *Сложение векторов: $V \times V \rightarrow V$. $[\overrightarrow{OO''}] = \bar{a} + \bar{b}$*

Def 1.3.2. Пусть $\bar{a} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Умножение на число на число: $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$.

$(V, +, \cdot)$. Свойства:

1. $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V \quad \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.
2. $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V \quad (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.
3. $\exists \bar{0} : \forall \bar{a} \quad \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$.
4. $\forall \bar{a} \quad \exists -\bar{a} : \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \bar{a}, \bar{b} \in V \quad \lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$.
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \bar{a} \in V \quad (\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$.
7. $\forall \bar{a} \in V \quad 1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$.
8. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \bar{a} \in V \quad \lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$.

Def 1.3.3. Множество $(V, +, \cdot)$, удовлетворяющее свойствам 1-8, называется **векторным пространством**. Элементы – векторы.

1.4. ЛЗ, ЛНЗ, Базис, размерность

Def 1.4.1. $\lambda_1\bar{a}_1 + \dots + \lambda_n\bar{a}_n$ – линейная комбинация. Если $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ – нетривиальная ЛК.

Def 1.4.2. $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^n$ – линейно зависимый, если \exists нетривиальная ЛК $\{\lambda_i\}_{i=1}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i\bar{a}_i = 0$

Def 1.4.3. $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ, если он не ЛЗ.

Свойства:

1. $\{\bar{a} \neq \bar{0}\}$ – ЛНЗ.
2. $\{\bar{0}\}$ – ЛЗ.
3. $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{0}\}$ – ЛЗ.
4. Пусть $\{\bar{a}_i\}$ – ЛЗ. Тогда $\{\bar{a}_i, \bar{a}_j\}_{i=1, j=1}^{n, m}$ – ЛЗ.

Def 1.4.4. $\{\bar{a}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ – ЛЗ, если в нем \exists ЛЗ конечный поднабор.

Def 1.4.5. ЛНЗ – набор, который не является ЛЗ.

Def 1.4.6. $\{\bar{a}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ – полный, если $\forall \bar{v} \in V \quad \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\lambda_i\}_{i=1}^n \quad \bar{v} = \lambda_1\bar{a}_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n\bar{a}_{\alpha_n}$.

Def 1.4.7. $\{\bar{a}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ – базис V , если он полный и ЛНЗ.

Def 1.4.8. Размерность V ($\dim V$) – мощность базиса.

Def 1.4.9. Векторное пространство V называется конечномерным, если \exists конечный полный набор.