Дискретная математика 1 семестр ПИ, Лекция, 09/25/21

Собрано 11 октября 2021 г. в 16:13

Содержание

1.1. Множества

Def. 1.1.1. *Множество - совокупность объектов.*

Def. 1.1.2. *Покрытием множества A называется множество $B = \{B_1, B_2, ..., B_k\} : \bigcup_i B_i \supset A$*

Def. 1.1.3. *Разбиением множества A называется $\pi(X) = \{X_i\}$:*

$$X_i \neq \varnothing, \bigcup_i X_i = A, \forall i \neq j \to X_i \cap X_j = \varnothing$$

Def. 1.1.4. *Пусть B, C – разбиения A. B называется измельчением C, если B – разбиение A и $\forall i \ \exists j : B_i \subset C_j$*

1.2. Мощность множества

1. $|\varnothing| = 0$
2. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \Rightarrow |X| = n$
3. $\mathbb{N}$ – счётное. $\mathbb{Z}$ – тоже счётное:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 2x, x > 0 \\ 2|x| + 1, x < 0 \end{cases}$$

4. $[0, 1]$. Пусть существует $q : \mathbb{N} \to [0, 1]$
   1. $0, a_1 a_2 ... a_k ...$
   2. $0, b_1 b_2 ... b_k ...$
   3. $0, c_1 c_2 ... c_k ...$

   Рассмотрим $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ... \alpha_k ..., \alpha_1 \neq a_1, \alpha_2 \neq b_2, \alpha_3 \neq c_3$ и т.д. Таким образом, всегда найдётся не пронумерованное число.
   $|[0, 1]|$ – континуум

Def. 1.2.1. *Множество всех подмножеств A обозначается 2^A*

Утверждение 1.2.2. $|2^A| = 2^{|A|}$

Доказательство. База: $A = \varnothing, |A| = 0, 2^A = \{\varnothing\} \Rightarrow |2^A| = 2^{|A|} = 1$
Индукционное предположение: Пусть $\forall A : |A| \leqslant k \to |2^A| = 2^{|A|}$
Индукционный переход:
Рассмотрим $A : |A| = k + 1, B_1 \in 2^{A \setminus \{x_{k+1}\}}, B = \{x_{k+1}\} \cup B_1$
$2^A = 2^{A \setminus \{x_{k+1}\}} \cup \{B\}$

$$\begin{cases} |2^{A \setminus \{x_{k+1}\}}| = 2^k \\ |\{B\}| = 2^k \end{cases} \Rightarrow 2^A = 2^k + 2^k = 2^{k+1} = 2^{|A|}$$

■

1.3. Комбинаторика

1. $A, B : A \cap B = \varnothing$
$$|A \cup B| = |A| + |B|$$
2. $A_1, ..., A_n, \forall i, j \to (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$
$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$
3. $A, B, A \cap B \neq \varnothing$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
4. $A_1, ..., A_n$
$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j=1}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k=1}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k - ... + (-1)^{n+1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$
5. A, B
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$
6. $A_1, ..., A_n$
$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

1. Перестановки: $< a_1 ... a_n >= \overline{< a_1 ... a_n >, a_n}$. Тогда
$$| < 1 : n > | = | < 1 : n-1 > \times (1 : n)| = | < 1 : n-1 > | \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!$$
2. Размещения. $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
3. Сочетания.
$$A_n^k = C_n^k \cdot k! \Leftrightarrow C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
4. Сочетания с повторениями. Выставим все k выбранных объектов в ряд и поставим между ними $n-1$ перегородку: до первой перегородки будут элементы 1-го типа, от первой до второй перегородки – 2-го типа и т.д. Таким образом, всего $n+k-1$ место. Нам нужно выбрать $n-1$ перегородку из этих $n+k-1$ мест
$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$$

Def. 1.3.1. *Пусть дан выпуклый n-угольник. Найти количество способов разбить его на треугольники с непересекающимися сторонами*

$$C_0 = 1, C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1} - \text{ Числа Каталана}$$