Алгебра 1 семестр ПИ,
Лекция, 10/22/21

Собрано 23 октября 2021 г. в 12:53

Содержание

Def. 1.0.1. *Множество* $\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$ *называется множество комплексных чисел, если:*

1. $(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c, b=d$
2. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
3. $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$
4. $a=(a,0)$

Проверим корректность:

- *1 и 4:* $a=b\Leftrightarrow(a,0)=(b,0)$
- *2 и 4:* $a+b=(a,0)+(b,0)=(a+b,0)=a+b$
- *3 и 4:* $a\cdot b=(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0)=ab$

Теорема 1.0.2. $\mathbb{C}$ образует коммутативное кольцо с единицей.

Доказательство. $(0,0)$ – нейтральный элемент по сложению. $(a,b):-(a,b)=(-a,-b)$ – обратный элемент по сложению. Остальные свойства несложно проверяются. ■

Def. 1.0.3. *Множество* K *называется полем, если* K *является коммутативным кольцом с единицей и*

$$\forall x\in K^*=K\setminus\{0\}\ \exists x^{-1}\in K: x\cdot x^{-1}=1$$

Теорема 1.0.4. $\mathbb{Z}_p(p$ – простое$),\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ – поля.

Доказательство. $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ – поля.
$\mathbb{Z}_p$ – коммутативное кольцо с единицей, $\mathbb{Z}_p^*$ – мультипликативная группа $\Rightarrow\mathbb{Z}_p$ – поле.
$(a,b)\in\mathbb{C}^*, (a,b)^{-1}=\frac{(a,-b)}{a^2+b^2}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$$(a,b)\cdot\frac{(a,-b)}{a^2+b^2}=\frac{(a^2+b^2,0)}{a^2+b^2}=(1,0)$$

■

Def. 1.0.5. (a,b) *и* $(a,-b)$ *– комплексно-сопряженные числа.*
$|(a,b)|=\sqrt{a^2+b^2}$ *– модуль комплексного числа. Заметим, что* $|(a,0)|=\sqrt{a^2+0}=\sqrt{a^2}=|a|$
$(a,b)\cdot(a,-b)=a^2+b^2=|(a,b)|^2$

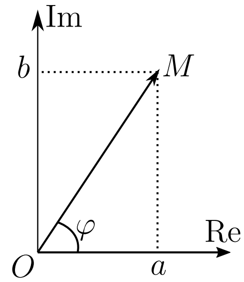
1.1. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Def. 1.1.1. *Положим* $i=(0,1)$. *Тогда*

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)\cdot(1,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+bi$$

1.2. Геометрическое представление комплексных чисел

Def. 1.2.1. $z = a + bi$. $\operatorname{Re} z = a$ – *вещественная часть числа* z, $\operatorname{Im} z = b$ – *мнимая часть.* $z = a + bi \mapsto$ *точка на комплексной плоскости.* (a, b) – *радиус-вектор* OM.
$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – *длина вектора* OM. $\varphi = (\widehat{\mathrm{Re}, OM})$ – *аргумент комплексного числа.*
$\arg z = \varphi, \varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \varphi_0 \in [0; 2\pi)$ *или* $\varphi_0 \in (-\pi; pi]$.



1.3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Def. 1.3.1. $a = \rho\cos\varphi, b = \rho\sin\varphi \Rightarrow z = a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, z \in \ \textit{I и II четверти} \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi, z \in \textit{III и IV четверти} \end{cases}$$

Def. 1.3.2 (Неравенство треугольника)**.** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
2. $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$

Доказательство. 1. $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$\begin{gathered}|z_1 + z_2|^2 = |\rho_1\cos\varphi_1 + \rho_2\cos\varphi_2 + i(\rho_1\sin\varphi_1 + \rho_2\sin\varphi_2)|^2 = \\ = \rho_1^2\cos^2\varphi_1 + 2\rho_1\rho_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \rho_2^2\cos^2\varphi_2 + \rho_1^2\sin^2\varphi_1 + 2\rho_1\rho_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \rho_2^2\sin^2\varphi_2 = \\ = \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \rho_2^2 \leqslant \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2\end{gathered}$$

2.
$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2| \Rightarrow ||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$$

■

Замечание 1.3.3. $|z_1 + z_2| = |z_1| + z_2| \Leftrightarrow z_1 \parallel z_2$

Теорема 1.3.4 (Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме). $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Доказательство. Достаточно перемножить, заметить формулу косинуса суммы и синуса суммы ■

Следствие 1.3.5 (Формула Муавра). $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Доказательство. 1. $n \geqslant 0$. По индукции: $n = 1$ очевидно.
$n - 1 \to n :$

$$z^n = z^{n-1} \cdot z = \rho^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi) \cdot \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

2. $n < 0$. Пусть $n = -m, m > 0$. Тогда

$$z^n = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\rho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)} = \rho^{-m}\frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{1} = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

■

1.4. Извлечение корней из комплексных чисел

Def. 1.4.1. *Корнем n-й степени из комплексного числа z называется $w \in \mathbb{C} : w^n = z$*

Теорема 1.4.2. $\forall z \in \mathbb{C}^* \; \exists n$ корней n-й степени $z_k, k = 0, 1, ..., n-1$

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Доказательство. $w^n = z, w = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$

$$\Rightarrow (w^n = z) : R^n(\cos(n\Theta) + i\sin(n\Theta)) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R = \sqrt[n]{\rho}, \cos(n\Theta) = \cos\varphi, \sin(n\Theta) = \sin\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n\Theta = \varphi + 2\pi k \Rightarrow \Theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \Rightarrow \text{ любой корень имеет вид } z_k$$

■