Дискретная математика 1 семестр ПИ, Лекции

Собрано 5 ноября 2021 г. в 17:37

Содержание

1.1. Множества

Def. 1.1.1. *Множество - совокупность объектов.*

Def. 1.1.2. *Покрытием множества A называется множество $B = \{B_1, B_2, ..., B_k\} : \bigcup_i B_i \supset A$*

Def. 1.1.3. *Разбиением множества A называется $\pi(X) = \{X_i\}$:*

$$X_i \neq \varnothing, \bigcup_i X_i = A, \forall i \neq j \to X_i \cap X_j = \varnothing$$

Def. 1.1.4. *Пусть B, C – разбиения A. B называется измельчением C, если B – разбиение A и $\forall i\ \exists j : B_i \subset C_j$*

1.2. Мощность множества

1. $|\varnothing| = 0$
2. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \Rightarrow |X| = n$
3. $\mathbb{N}$ – счётное. $\mathbb{Z}$ – тоже счётное:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 2x, x > 0 \\ 2|x| + 1, x < 0 \end{cases}$$

4. $[0, 1]$. Пусть существует $q : \mathbb{N} \to [0, 1]$
   1. $0, a_1 a_2 ... a_k ...$
   2. $0, b_1 b_2 ... b_k ...$
   3. $0, c_1 c_2 ... c_k ...$

   Рассмотрим $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ... \alpha_k ..., \alpha_1 \neq a_1, \alpha_2 \neq b_2, \alpha_3 \neq c_3$ и т.д. Таким образом, всегда найдётся не пронумерованное число.
   $|[0, 1]|$ – континуум

Def. 1.2.1. *Множество всех подмножеств A обозначается 2^A*

Утверждение 1.2.2. $|2^A| = 2^{|A|}$

Доказательство. База: $A = \varnothing, |A| = 0, 2^A = \{\varnothing\} \Rightarrow |2^A| = 2^{|A|} = 1$
Индукционное предположение: Пусть $\forall A : |A| \leqslant k \to |2^A| = 2^{|A|}$
Индукционный переход:
Рассмотрим $A : |A| = k + 1, B_1 \in 2^{A \setminus \{x_{k+1}\}}, B = \{x_{k+1}\} \cup B_1$
$2^A = 2^{A \setminus \{x_{k+1}\}} \cup \{B\}$

$$\begin{cases} |2^{A \setminus \{x_{k+1}\}}| = 2^k \\ |\{B\}| = 2^k \end{cases} \Rightarrow 2^A = 2^k + 2^k = 2^{k+1} = 2^{|A|}$$

■

1.3. Комбинаторика

1. $A, B : A \cap B = \varnothing$
$$|A \cup B| = |A| + |B|$$
2. $A_1, ..., A_n, \forall i, j \to (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$
$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$
3. $A, B, A \cap B \neq \varnothing$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
4. $A_1, ..., A_n$
$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j=1}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k=1}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k - ... + (-1)^{n+1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$
5. A, B
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$
6. $A_1, ..., A_n$
$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

1. Перестановки: $\langle a_1 ... a_n \rangle = \overline{\langle a_1 ... a_n \rangle, a_n}$. Тогда
$$|\langle 1 : n \rangle| = |\langle 1 : n-1 \rangle \times (1 : n)| = |\langle 1 : n-1 \rangle| \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!$$
2. Размещения. $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
3. Сочетания.
$$A_n^k = C_n^k \cdot k! \Leftrightarrow C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
4. Сочетания с повторениями. Выставим все k выбранных объектов в ряд и поставим между ними $n-1$ перегородку: до первой перегородки будут элементы 1-го типа, от первой до второй перегородки – 2-го типа и т.д. Таким образом, всего $n+k-1$ место. Нам нужно выбрать $n-1$ перегородку из этих $n+k-1$ мест
$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$$

Def. 1.3.1. *Пусть дан выпуклый n-угольник. Найти количество способов разбить его на треугольники с непересекающимися сторонами*

$$C_0 = 1, C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1} - \text{ Числа Каталана}$$

2.1. Лексикографический порядок перестановок

Def. 2.1.1. *Пусть есть две перестановки* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. *Тогда*

$$X < Y \Leftrightarrow \exists k : x_i = y_i \ \forall i = 1, ..., k \land x_{k+1} < y_{k+1}$$

Алгоритм 2.1.2 (Поиск следующей перестановки)*.* Найдем наибольший убывающий суффикс. Пусть $k : a_{k+1} > a_{k+2} > ... > a_n$. Тогда выберем из этого суффикса $a_i : a_i > a_k$ и a_i минимально. После этого отсортируем получившийся суффикс. Получим перестановку:

$$\langle a_1, a_2, ..., a_i, \mathrm{sort}[a_k, a_k + 1, ..., a_n] \rangle$$

Она и будет лексикографический следующей.

3.1. Числа Стирлинга

Def. 3.1.1. *Пусть* $A = \{a_1, ..., a_n\}$. *Рассмотрим разбиение этого множества мощности* k*, т.е.* $X = \{X_1, ..., X_k\}$:

$$\forall i, j \to X_i \supset A, X_i \cap X_j = \varnothing, \bigcup_i X_i = A$$

Тогда числами Стирлинга – количество таких разбиений.

1. $k = 2 \Rightarrow S(n, 2) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i}{2} = \frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1} - 1$
2. Общий случай.
   - Если $\{a_n\}$ – элемент разбиения, то таких разбиений $S(n-1, k-1)$
   - $\exists i : a_n \in X_i, |X_i| > 1$. Тогда нужно найти количество разбиений $A \setminus \{a_n\}$ на k множеств, а потом вставить a_n в одно из этих множеств.
     Количество способов:
     $$S(n-1, k) \cdot k$$

   Тогда рекуррентная формула:

   $$S(n, k) = S(n-1, k-1) + S(n-1, k) \cdot k$$

   Базовые значения:

   $$\begin{array}{cc} S(n,0) = 0 & S(0,0) = 0 \\ S(k,n) = 0, k > n & S(n,2) = 2^{n-1} - 1 \\ S(n, n-1) = C_n^2 & \end{array}$$

3.2. Числа Белла

Def. 3.2.1. *Числа Белла – количество разбиений множества.*

$$B(n) = \sum_{i=1}^{n} S(n, i)$$

Теорема 3.2.2 (Формула чисел Белла)**.** Рассмотрим произвольное разбиение множества A. $\exists i : a_{n+1} \in X_i, |X_i| = j$.
$|A \setminus X_i| = n + 1 - j$. Тогда количество способов выбрать X_i равно $C_n^{j-1} = C_n^{n+1-j}$
Количество разбиений $A \setminus X_i$, в свою очередь, равно $B(n+1-j)$. Тогда

$$B(n+1) = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{n+1-j} \cdot B(n+1-j) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B(k)$$

Теорема 3.2.3 (Формула чисел Стирлинга)**.**

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \cdot C_k^j (k-j)^n$$

Доказательство. Пусть $L = \{\rho \subseteq A \times \{1,...,k\} | \rho - \text{сюръекция}\}$. Заметим, это множество равномощно множеству упорядоченных разбиений мощности k.
$\{a_1,...,a_n\} \to \{1,...,k\}$. Элементы разбиения имеют следующий вид: $X_i = \{a_k | \rho(a_k) = i\}$. Т.к. отображение сюръективно, то X_i непусты.

$$S(n,k) = \frac{|L|}{k!}$$

Чтобы посчитать мощность L, из общего количества отображения вычтем количество несюръективных отображений. Пусть $P_i = \{\rho \subset A \times \{1,...,n\} | \forall a \in A \to \rho(a) \neq i\}$. Тогда количество несюръективных отображений равно:

$$|\bigcup_{i=1}^{k} P_i| = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant ... \leqslant i_j \leqslant k} |P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap ... \cap P_{i_j}|$$

$|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap ... P_{i_j}|$ – количество отображений из A в $\{1,...,k\} \setminus \{i_1,...,i_j\}$

$$|P_{i_1} \cap ... \cap P_{i_j}| = (k-j)^n$$

$$\sum_{i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_j} |P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap ... \cap P_{i_j}| = C_k^j (k-j)^n$$

Тогда

$$|L| = k^n - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1} C_k^j (k-j)^n = k^n + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j C_k^j (k-j)^n = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j (k-j)^n$$

Тогда искомая формула чисел Стирлинга:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j (k-j)^n$$

■

4.1. Основы теории вероятности

Def. 4.1.1. $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *– множество всех взаимо-исключающих исходов эксперимента (пространство элементарных событий)*
$X \subseteq \Omega$ *– событие*

Def. 4.1.2. *Дано* $\Omega, \mathscr{A} \subset 2^\Omega$. *Тогда* $\mathscr{A}$ *называется алгеброй, если*

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$
3. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$

Утверждение 4.1.3. Если $\mathscr{A}$ – алгебра, то

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$
2. $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$
3. $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{A}$
4. $A_i \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathscr{A}, \bigcap A_i \in \mathscr{A}$

Доказательство. 1. $\Omega \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{\Omega} \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{\Omega} = \varnothing \Rightarrow \varnothing \in \mathscr{A}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathscr{A}$. Тогда $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B \in \mathscr{A}$
3. $A \setminus B = A \cap \overline{B} \in \mathscr{A}$
4. Доказывается по индукции.

■

Def. 4.1.4. $\mathscr{A}$ *называется* σ*-алгеброй, если*

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. $A_i \in \mathscr{A}, i = 1, ... \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$
3. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$

Def. 4.1.5. *Пусть есть пространство* Ω, *определенная на нём* $\mathscr{A}$ *–* σ*-алгебра и* $f : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ *– функция над множеством. Тогда вероятностью называется функция из* $\mathscr{A}$ *в* $\mathbb{R}$ *такая, что*

1. $P(A) \geqslant 0 \ \forall A \in \mathscr{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A_1, A_2, ... : A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i, j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Перечисленные выше свойства называются ***аксиомами теории вероятности***
$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *– вероятностное пространство.*

Свойства вероятности:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. Если $A_1, A_2 \in \mathscr{A}, A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

4. Если $A_1, ..., A_n \in \mathscr{A}, A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i, j$, то

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

5. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Доказательство.

$$P(\overline{A} \cup A) = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$

■

6. Если $A, B \in \mathscr{A}$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Доказательство.

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) = P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) + P((B \setminus A) \cup (A \cap B)) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

■

7. $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j=1}^{n} (A_i \cap A_j) + ...$
8. $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

Доказательство. $A_{k-1} \subset A_k$. Рассмотрим $A_k \setminus A_{k-1}$. Пусть $A_0 = \varnothing$.

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k \setminus A_{k-1}) \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - P(A_{k-1}) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} P(A_n) - P(\varnothing) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

■

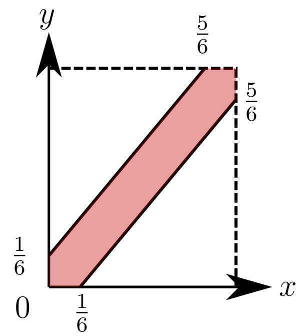
9. $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

Пример 4.1.6. Два человека приходят на место в промежуток от 12 до 13ч и ждут 10 минут прежде чем уйти. Найти вероятность того, что они встретятся.

Решение 1. Пусть t_1 – время, когда приходит первый, t_2 – время, когда приходит второй.

$$|t_1 - t_2 \leqslant \frac{1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 \geqslant t_1 - \frac{1}{6} \\ t_2 \leqslant t_1 + \frac{1}{6} \end{cases}$$



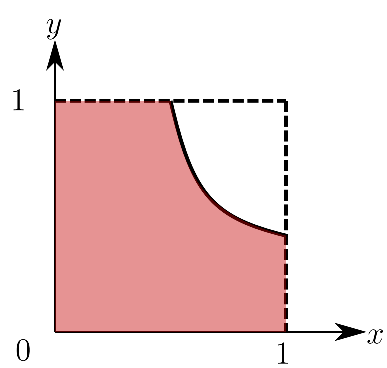
Тогда вероятность – площадь заштрихованной фигуры:

$$S = 1 - 2 \cdot \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}}{2} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Пример 4.1.7. На $[0, 1]$ выбираются два числа x, y. Найти вероятность того, что их произведение меньше $\frac{1}{2}$

Решение 2.

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2x}, x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Тогда искомая вероятность:

$$P(x \cdot y < \frac{1}{2}) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}$$

4.2. Условная вероятность

Def. 4.2.1. *Вероятность события A при условии, что выполняется событие B равна*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пример 4.2.2. Есть урна, в которой лежит m белых и n черных шаров. Вытащим из неё два шара. Какова вероятность того, что они оба белые?

Решение 3.

$$P(\text{первый} - \text{белый}) = \frac{m}{m+n}, P(\text{второй} - \text{белый}|\text{первый} - \text{белый}) = \frac{m-1}{m+n-1}$$

$$P(\text{оба белые}) = \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m}{m+n}$$

Свойства условной вероятности:

1. $P(\Omega|B) = 1$
2. $P(\varnothing|B)0$
3. $0 \leqslant P(A|B) \leqslant 1$
4. $A \subset C \Rightarrow P(A|B) \leqslant P(C|B)$
5. $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$
6. $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$
7. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot ... \cdot P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

$$P((A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \cdot P(A_1 \cap ... \cap_{n-1})$$

Пример 4.2.3. Бросаем 3 кубика. Найти вероятность того, что хотя бы на одном из них выпадет 1 при условии, что на всех выпали разные значения.

Решение 4.

$$P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B) = 1 - \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4.3. Независимость событий

Def. 4.3.1. *A независимо от $B(P(B) \neq \varnothing)$, если $P(A|B) = P(A)$*

Утверждение 4.3.2. Если A независимо от $B \Rightarrow B$ независимо от A.

Доказательство.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P(B)} = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} = P(B)$$

■

Def. 4.3.3. *A, B – независимые, если*

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

Def. 4.3.4. *$A_1, ..., A_n$ – независимы в совокупности, если*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Def. 4.3.5. *$A_1, .., A_n$ – попарно-независимы, если*

$$\forall i, j \to P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

Замечание 4.3.6. Если $A_1, ..., A_n$ попарно-независимы, то они необязательно независимы в совокупности.

4.4. Формула полной вероятности

Def. 4.4.1. *Пусть $H_1, ..., H_n$ – разбиение Ω. Тогда $H_1 \cup ... \cup H_n = \Omega$ называется полной группой событий.*

Теорема 4.4.2. $H_1, ..., H_n$ – полная группа событий и $P(H_i) > 0\ \forall i = 1, ..., n$. Тогда

$$\forall A \to P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Доказательство.

$$A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup ... \cup H_n) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup ... \cup (A \cap H_n)$$

$$P((A \cap H_1) \cup ... \cup (A \cap H_n)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

■

Теорема 4.4.3 (Формула Байеса)**.** Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ – полная группа событий. A – событие (считаем произошедшим). Тогда

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

Доказательство.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

■

4.5. Испытания Бернулли

Def. 4.5.1. *Обозначим $P_n(m)$ – вероятность получить m успехов за n испытаний.*

Теорема 4.5.2 (Теорема Бернулли)**.** Рассмотрим упорядоченный набор: $\underbrace{SSS...S}_{n}\underbrace{FFF...F}_{n-m}$, где S обозначает успех, а F – неудачу. В силу независимости испытаний, вероятность получить конкретный упорядоченный набор равна $p^m(1-p)^{n-m}$. Таких наборов, очевидно, C_n^m

Теорема 4.5.3. $0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant n$. $P_n(m_1, m_2)$ – успех наступил от m_1 до m_2 раз.

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{i=m_1}^{m_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Def. 4.5.4. *Наивероятнейшее число событий – число событий в испытаниях Бернулли с наибольшей вероятностью.*

Теорема 4.5.5. Наивероятнейшее число успехов в n испытаниях заключено между числами $np - (1-p)$ и $np + p$

Доказательство. Рассмотрим следующее соотношение:

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} (1-p)^{n-m+1}} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n!(m-1)!(n-m+1)!}{n!m!(n-m)!} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-m+1}{m}$$

Отсюда очевидно, что

$$\begin{aligned} P_n(m) > P_n(m-1), m < (n+1)p \\ P_n(m) = P_n(m-1), m = (n+1)p \\ P_n(m) < P_n(m-1), m > (n+1)p \end{aligned}$$

Значит, при $m < (n+1)p$ $P_n(m)$ возрастает, при $m > (n+1)p$ – убывает. Тогда несложно найти m такое, чтобы $P_n(m)$ было наибольшим:

$$\begin{cases} P_n(m) > P_n(m-1) \\ P_n(m+1) < P_n(m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < (n+1)p \\ m+1 > (n+1)p \end{cases} \Leftrightarrow np + p - 1 < m < np + p$$

■

4.6. Предельные случаи испытаний Бернулли

Рассмотрим ситуацию, когда вероятность какого-то события уменьшается пропорционально n, т.е. $p \sim \frac{1}{n}$

Теорема 4.6.1 (Теорема Пуассона)**.** Пусть $np \to \lambda$.

$$\forall m, \forall \lambda \lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
P_n(m) = C_n^m p^m \cdot (1-p)^{n-m} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\
&= \frac{n(n-1)...(n-m)+1}{m!} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m = \\
&= \frac{\lambda^m}{m!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

■

Теорема 4.6.2 (Локальная теорема Муавра-Лапласа)**.** Пусть $x_n = \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Предположим, что x_n ограничена при $n \to \infty$. Тогда

$$\sqrt{np(1-p)} \cdot P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_n^2}{2}}$$

Доказательство. Вспомним, что $k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$.
$n - m = n(1-p) - x_n\sqrt{np(1-p)}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\sqrt{np(1-p)}P_n(m) = \sqrt{np(1-p)}C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} \\
&\approx \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi m} \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot \sqrt{2\pi(n-m)} \cdot \left(\frac{n-m}{e}\right)^{n-m}} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} \\
&= \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot \sqrt{n} \cdot n^n}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{m} \cdot m^m \cdot (n-m)^{n-m}} \cdot p^m (1-p)^{n-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{np}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-m}\right)^{n-m} \sqrt{\frac{np}{m}} \cdot \sqrt{\frac{n(1-p)}{n-m}}
\end{aligned}$$

$m = np + x_n\sqrt{np(1-p)}$

$$\frac{m}{np} = 1 + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$
$$\frac{n-m}{n(1-p)} = 1 - \frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Пусть, для удобства, $\exp(x) = e^x$. Тогда

$$\sqrt{np(1-p)}P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right)^{-m} \left(1 - \frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}\right)^{-(n-m)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-m \cdot \ln\left(1 + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right) - (n-m)\cdot \ln\left(1 - \frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}\right)\right)$$

Как мы знаем (откуда?)

$$\ln(1+y) \xrightarrow[y\to 0]{} y - \frac{y^2}{2}(1+O(1))$$

Следовательно $\sqrt{np(1-p)}P_n(m) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-m\left(\frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} - \frac{x_n^2}{2np}\right)(1+O(1)) - (n-m)\left(-\frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} - \frac{x_n^2 p}{2n(1-p)}\right)(1+O(1))\right)$$

$$x_n\left(\frac{(n-m)\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} - \frac{m\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right) =$$

$$= \frac{x_n}{\sqrt{np(1-p)}}\left(np(1-p) - x_n\sqrt{np(1-p)}p - n(1-p)\cdot p - x_n\sqrt{np(1-p)}(1-p)\right) =$$

$$= -x_n^2(p + (1-p)) = -x_n^2$$

Таким образом:

$$\sqrt{np(1-p)}P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-x_n^2 + \frac{x_n^2}{2}\right)(1+O(1))} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}$$

■

Теорема 4.6.3 (Интегральная теорема Муавра-Лапласа)**.** $a_n = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, b_n = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, q = 1-p.$ Пусть $m_1 \to \infty, n \to \infty, a_n, b_n$ – ограничены. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|P_n(m_1, m_2) - \frac{1}{2\pi}\int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right| = 0$$

Def. 4.6.4. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – *функция Гаусса.*
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – *функция Лапласа.*

Следствие 4.6.5. По локальной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) \sim \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) \sim \frac{1}{2}(\Phi(b_n) - \Phi(a_n))$$

4.7. Случайные величины

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\}$

Def. 4.7.1. *Функция, заданная на Ω – случайная величина.*

$$x = X(\Omega)$$

Def. 4.7.2. *Соответствие, которое каждому x_i сопоставляет вероятность p_i – распределение (закон распределения)*

Замечание 4.7.3. Если X – дискретная случайная величина, то $Y = g(X)$ – тоже дискретная случайная величина и

$$y_i = g(x_i), p_i = P(X = x_i)$$

Def. 4.7.4. *Определим случайную величину в более общим случае. Пусть у нас есть $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Тогда случайная величина это*

$$X = X(\omega), \omega \in \Omega : \{X < x\} = \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathscr{A} \ \forall x$$

Def. 4.7.5. $F(x) = P(X < x), x \in (-\infty, +\infty)$ *– функция распределения случайной величины.*

Свойства:

1. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ если $x_1 < x_2$
2. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$
3. $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$

Def. 4.7.6. *Пусть $P(y)$ – неотрицательная функция. Если $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$, то $P(y)$ – плотность распределения. В частности, $P(x) = F'(x)$*

Def. 4.7.7. *Есть $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$, где $P(A, B)$ – вероятность одновременного наступления событий A и B, то X, Y – независимые случайные величины.*

Def. 4.7.8. *Пусть X – дискретная случайная величина. Тогда матожиданием называется*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

а $E(|X|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| p_i$ – абсолютный момент.

Свойства:

1. $E(aX + b) = aE(x) + b$
2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
3. Если X, Y – независимые случайные величины, то $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$