Матанализ 1 семестр ПИ,
Лекция, 10/06/21

Собрано 6 октября 2021 г. в 17:43

Содержание

1.1. Ряды

Def. 1.1.1. *Дана* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Рассмотрим* $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
Тогда ряд – $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ...$
Если $S_n \to S \in \mathbb{R}$, *то* S *называют суммой ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *(ряд сходится к* S*).*
Если S_n *не имеет предела в* $\mathbb{R}$, *то ряд называют расходящимся.*

Пример 1.1.2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$, т.е.

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$$

Пример 1.1.3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$ Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = S$$

Тогда, если $S \in \mathbb{R}$, то $\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ...$ Значит

$$\frac{S}{2} = S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{S}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Данный ряд называется **гармоническим**

Замечание 1.1.4. S_n частичные суммы ряда

Пример 1.1.5. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0 \Rightarrow S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \Rightarrow \text{ не существует } \lim S_n$$

Теорема 1.1.6 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Доказательство.

$$\exists \lim S_n = S, a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow a_n \to 0$$

■

Пример 1.1.7. Гармонический ряд.
$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Тогда $H_{2^n} \geqslant \frac{1}{2}(n+1) \to +\infty \Rightarrow H_n \to +\infty$ (т.к. H_n возрастает)

Пример 1.1.8. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ...$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

1.2. Свойства рядов

1. Ряд не может иметь двух различных сумм.
2. Если ряд сходится к S, то к S сходится и ряд, полученный из данного любой расстановкой скобок.

   $$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow (a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6)$$

   Пусть $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3, b_3 = a_4 + a_5 + a_6$ и т.д. Заметим, что $\{S_n^b\}$ является подпоследовательность S_n^a.

   Замечание 1.2.1. "раскрывать скобки"вообще говоря нельзя.

   $$\sum_{k=1}^{\infty}(1-1) = (1-1) + (1-1) + ... = 0$$

   Но если раскрыть скобки, то получится пример 1.1.5
3. Добавление или отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость (но может повлиять на сумму)