Конспект лекций по геометрии, ПИ, 2 семестр Лекции

Собрано 21 марта 2022 г. в 22:15

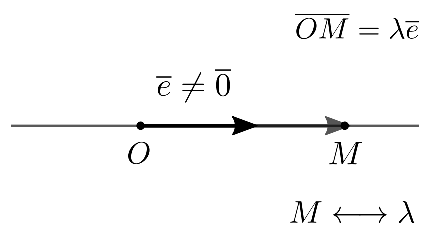
Содержание

Раздел #1: Аналитическая геометрия

1.1. Системы координат

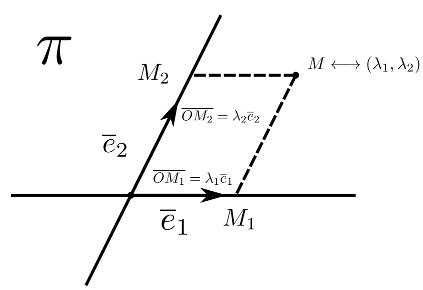
1.1.1. Аффинные системы координат

Def 1.1.1. *Аффинной системой координат на прямой называется взаимно-однозначное соответствие $l \longleftrightarrow \mathbb{R}$.*



Она определяется выбором точки O и выбором вектора $\overline{e}$. $АСК = \{O, \{\overline{e}\}\}$.

Def 1.1.2. *АСК на плоскости называется биекция $\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$.*



Она определяется выбором точки O и векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2 \neq \overline{e}, \overline{e}_1 \nparallel \overline{e}_2$. $АСК = \{O, \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}\}$.

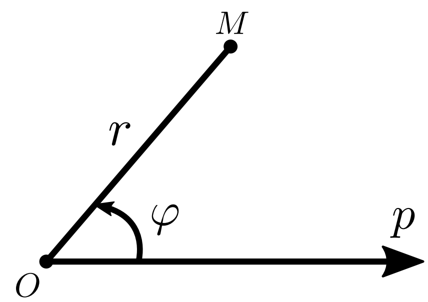
Def 1.1.3. *Если $|\overline{e}_1| = |\overline{e}_2| = 1, \overline{e}_1 \perp \overline{e}_2$, то АСК называется декартовой системой координат.*

Def 1.1.4. *АСК в пространстве называется биекция $M \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$. Она определяется выбором точки O и векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \neq \overline{0}$ – не компланарны. $АСК = \{O, \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}\}$.*

Def 1.1.5. *Упорядоченная тройка векторов $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ называется **правой** , если из конца вектор $\overline{w}$ поворот то $\overline{u}$ к $\overline{v}$ по наименьшему углу выглядит происходящим против часовой стрелки, и **левой** – в противном случае.*

1.1.2. Криволинейные системы координаты

Def 1.1.6. *Выберем точку O и построим из неё луч p, который назовем полярной осью. Возьмем теперь произвольную точку M на плоскости и измерим две величины: расстояние от M до O и угол между вектором $\overline{OM}$ и полярной осью. Обозначим расстояние за r, а угол за φ. Тогда, чтобы избежать неоднозначности, будем считать, что $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$, и если $r = 0$, то $\varphi = 0$. Такая система координат называется* ***полярной***.



Def 1.1.7. *Полярная система координат, где $r \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$, то она называется обобщенной полярной системой координат.*

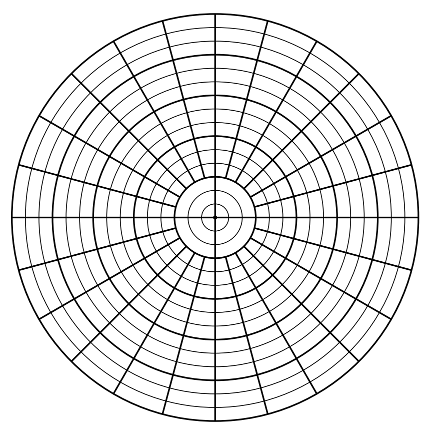


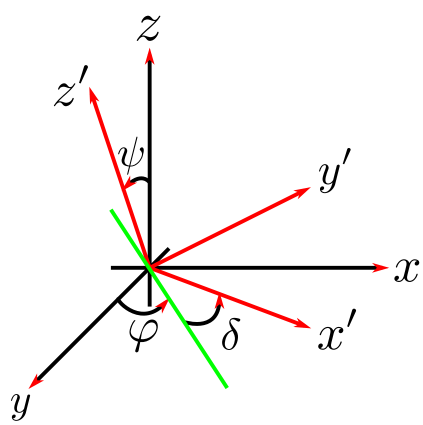
Рис. 1: Координатная сеть полярной системы координат

Def 1.1.8. *Цилиндрической системой координат называют трёхмерную систему координат, являющуюся расширением полярной системы координат путём добавления третьей координаты (обычно обозначаемой z), которая задаёт высоту точки над плоскостью.*

Def 1.1.9. *Сферическая система координат — трёхмерная система координат, в которой каждая точка пространства определяется тремя числами, где r — расстояние до начала координат, а θ и φ — зенитный и азимутальный углы соответственно.*

1.1.3. Параметризации

Построим декартову систему координат. Теперь возьмем какую-то новую систему координат x', y', z'. Проведем через x', y' плоскость. Если z' не совпадает с z, то эта плоскость пересекает



плоскость (x, y) по какой-то прямой. Отсчитает от вектора x до этой прямой угол φ. Угол между z и z' обозначим за ψ. Теперь, мы можем эту прямую поворачивать вокруг оси z' на угол δ, пока она не совпадет с x'.
Таким образом, мы совместили исходную систему координат с новой СК. То есть мы построили соответствие между (ψ, φ, δ).

1.2. Понятие вектора

Пусть E – евклидово пространство.

Def 1.2.1. *Закрепленный вектор – упорядоченная пара точек в евклидовом пространстве. Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, модуль $|\overrightarrow{AB}|$ – расстояние между точками A и B.*

Def 1.2.2. *Пусть $\{(A, B), A, B \in E\}$ – множество закрепленных векторов. Введём на нём отношение равенства: $(A, B) = (C, D) \Leftrightarrow$:*

1. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$
2. $(A, B) \| (C, D)$ *либо совпадают.*
3. $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$.

Замечание 1.2.3. $\forall A, B \to (A, A) = (B, B)$.

Утверждение 1.2.4. Отношение, введённое в прошлом определении – отношение эквивалентности.

Доказательство. 1. Рефлексивность: $(A, B) = (A, B)$ – верно.

2. Симметричность – очевидно.

3. Транзитивность: $(A, B) = (C, D), (C, D) = (F, G) \Rightarrow (A, B) = (F, G)$ – верно.
Значит множество закрепленных векторов разбивается на классы эквивалентности. ∎

Def 1.2.5. *Класс эквивалентности называется* ***свободным вектором****.*

1.3. Сложение и умножение на число

Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in V$ – классы.

Def 1.3.1. *Сложение векторов: $V \times V \to V$.* $[\overrightarrow{OO''}] = \overline{a} + \overline{b}$

Def 1.3.2. *Пусть $\overline{a} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Умножение на число на число: $\mathbb{R} \times V \to V$.*

$(V, +, \cdot)$. Свойства:

1. $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V \ \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.
2. $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V \ (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.
3. $\exists \overline{0} : \forall \overline{a} \ \overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$.
4. $\forall \overline{a} \ \exists - \overline{a} : \overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$.
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \overline{a}, \overline{b} \in V \ \lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$.
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \overline{a} \in V \ (\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$.
7. $\forall \overline{a} \in V \ 1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.
8. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \overline{a} \in V \ \lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$.

Def 1.3.3. *Множество $(V, +, \cdot)$, удовлетворяющее свойствам 1-8, называется* ***векторным пространством****. Элементы – векторы.*

1.4. ЛЗ, ЛНЗ, Базис, размерность

Def 1.4.1. $\lambda_1\overline{a}_1 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n$ *– линейная комбинация. Если $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ – нетривиальная ЛК.*

Def 1.4.2. $\{\overline{a}_i\}_{i=1}^n$ *– линейно зависимый, если $\exists$ нетривиальная ЛК $\{\lambda_i\}_{i=1}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i\overline{a}_i = 0$*

Def 1.4.3. $\{\overline{a}_i\}_{i=1}^n$ *– ЛНЗ, если он не ЛЗ.*

Свойства:

1. $\{\overline{a} \neq \overline{0}\}$ – ЛНЗ.
2. $\{\overline{0}\}$ – ЛЗ.
3. $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_n, \overline{0}\}$ – ЛЗ.
4. Пусть $\{\overline{a}_i\}$ – ЛЗ. Тогда $\{\overline{a}_i, \overline{a}_j\}_{i=1,j=1}^{n,m}$ – ЛЗ.

Def 1.4.4. $\{\overline{a}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *– ЛЗ, если в нем $\exists$ ЛЗ конечный поднабор.*

Def 1.4.5. *ЛНЗ – набор, который не является ЛЗ.*

Def 1.4.6. $\{\overline{a}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *– полный, если $\forall \overline{v} \in V \ \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\lambda_i\}_{i=1}^n \ \overline{v} = \lambda_1\overline{a}_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n\overline{a}_{\alpha_n}$.*

Def 1.4.7. $\{\overline{a}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *– базис V, если он полный и ЛНЗ.*

Def 1.4.8. *Размерность V ($\dim V$) – мощность базиса.*

Def 1.4.9. *Векторное пространство V называется конечномерным, если $\exists$ конечный полный набор.*

1.5. Скалярное умножение

Будем определять скалярное произведение для элементов векторного пространства V.

Def 1.5.1. $(\overline{a},\overline{b})$ – *скалярное произведение:* $V \times V \to \mathbb{R}$

Свойства:

1. Свойства 1-8, необходимые для существования векторного пространства.
2. $\forall \overline{a} \in V\ (\overline{a},\overline{a}) \geqslant 0$ – положительная определённость.
   Кроме того, $(\overline{a},\overline{a}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$ – невырожденность.
3. $\forall \overline{a},\overline{b},\overline{c} \in V\ (\overline{a}+\overline{b},\overline{c}) = (\overline{a},\overline{c}) + (\overline{b},\overline{c})$ – аддитивность.
   $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \overline{a},\overline{b} \in V\ (\lambda\overline{a},\overline{b}) = \lambda(\overline{a},\overline{b})$ – однородность.
4. $\forall \overline{a},\overline{b} \in V\ (\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{a})$. – коммутативность.

Пример 1.5.2. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$
$\overline{v} = (x_1, ..., x_n), \overline{w} = (y_1, ..., y_n)$
Тогда скалярное произведение: $(\overline{v},\overline{w}) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.
Проверим свойства:

1. $(\overline{v},\overline{v}) = x_1^2 + ... + x_n^2 \geqslant 0$.
   $(\overline{v},\overline{v}) = 0 \Leftrightarrow \forall i\ x_i = 0$.
2. Пусть $\overline{z} = (z_1, ..., z_n)$, тогда $(\overline{v}+\overline{w},\overline{z}) = (x_1+y_1)z_1+...+(x_n+y_n)z_n = x_1z_1+...+x_ny_z+y_1z_1+...+y_nz_n = (\overline{v},\overline{z}) + (\overline{w},\overline{z})$.
   $(\lambda\overline{v},\overline{w}) = \lambda x_1y_1 + ... + \lambda x_ny_n = \lambda(x_1y_1 + ... + x_ny_n) = \lambda(\overline{v},\overline{w})$.
3. $(\overline{v},\overline{w}) = x_1y_1 + ... + x_ny_n = y_1x_1 + ... + y_nx_n = (\overline{w},\overline{v})$.

Пример 1.5.3. $C[0,1]$ – непрерывные функции на отрезке $[0,1]$.
Пусть $f, g, q \in C[0,1]$ – функции: $(f,g) = \int_0^1 fg\,dx$.

1. $(f,f) = \int_0^1 f^2\,dx \geqslant 0$.
   $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
2. $(f+q,g) = \int_0^1 (f+q)g\,dx = \int_0^1 (fg+qg)\,dx = \int_0^1 fg\,dx + \int_0^1 qg\,dx = (f,g) + (q,g)$.
   $(\lambda f,g) = \int_0^1 \lambda fg\,dx = \lambda\int_0^1 fg\,dx = \lambda(f,g)$.
3. $(f,g) = \int_0^1 fg\,dx = \int_0^1 gf\,dx = (g,f)$.

Таким образом, это скалярное произведение непрерывных на $[0,1]$ функций.

Пусть есть конечномерное векторное пространство V, на нём задано скалярное произведение $(,)$, выберем базис векторного пространства $\{\overline{e}_i\}$, рассмотрим векторы $\overline{v} = (x_i), \overline{w} = (y_i)$, тогда их скалярное произведение $(\overline{v},\overline{w}) = (x_1\overline{e}_1 + ... + x_n\overline{e}_n, y_1\overline{e}_1 + ... + y_n\overline{e}_n)$, т.е.

$$(\overline{v},\overline{w}) = \sum_{i,j}^{n} x_iy_j(\overline{e}_i,\overline{e}_j)$$

Либо же запись вида:

$$(\overline{v},\overline{w}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\overline{e}_1,\overline{e}_1) & (\overline{e}_1,\overline{e}_2) & \cdots & (\overline{e}_1,\overline{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\overline{e}_n,\overline{e}_1) & (\overline{e}_n,\overline{e}_2) & \cdots & (\overline{e}_n,\overline{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

где $G = ((\overline{e}_i,\overline{e}_j)), 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ – матрица Грама сколярного произведения.
Тогда скалярное произведение можно записать в следующем виде: $(\overline{v},\overline{w}) = \overline{v}^T G\overline{w}$.
В силу коммутативности скалярного произведения $G^T = G$.

Теорема 1.5.4 (Критерий Сильвестра).

$$\forall k = 1, ..., n \quad \det(G_k) > 0$$

где G_n – миноры главной диагонали.

Утверждение 1.5.5. Если взять R^n, G, то G – матрица Грама $\Leftrightarrow G^T = G$, которая удовлетворяет критерию Сильвестра.

Def 1.5.6. *Если базис обладает свойством:* $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \Rightarrow G = E$*, тогда он называется ортонормированным базисом (ОРБ).*

Теорема 1.5.7 (Теорема Грама-Шмидта). В $\forall V^n$ со скалярным произведением $(,)$ $\exists$ ОНБ.

Def 1.5.8. V *– векторное пространство,* $(,)$ *– скалярное произведение на нём, тогда* ***модуль (длина)*** $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}, |\overline{a}| = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = 0$.

Def 1.5.9. *Величина угла между векторами – число* $\alpha \in [0; \pi] \in R : \cos\alpha = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}, \overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0$.

Теорема 1.5.10 (Неравенство Коши-Буняковского).

$$(\overline{a}, \overline{b})^2 \leqslant \overline{a}^2 \overline{b}^2$$

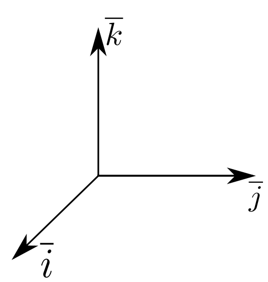
Доказательство. По свойству скалярного произведения $(\overline{a} + t\overline{b})^2$ всегда невырожденная величина, т.е. $(\overline{a} + t\overline{b})^2 \geqslant 0 \Rightarrow \overline{a}^2 + 2t(\overline{a}, \overline{b}) + t^2\overline{b}^2 \geqslant 0$, тогда его дискриминант не положительный, т.к. t – любое число, то

$$(\overline{a}, \overline{b})^2 - \overline{a}^2\overline{b}^2 \leqslant 0 \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b})^2 \leqslant \overline{a}^2\overline{b}^2$$

. ∎

1.6. Векторное умножение

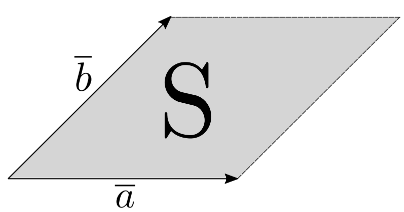
Векторное умножение определяется только для трёхмерного пространства V^3, кроме того, необходимо, чтобы пространство было ориентированным, выберем в нём правый ОНБ $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$.



Def 1.6.1. *Пусть* $\overline{v} = (x_1, x_2, x_3), \overline{w} = (y_1, y_2, y_3)$. *Тогда* ***векторное произедение***
$\overline{v} \times \overline{w} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \overline{i}(x_2y_3 - x_3y_2) - \overline{j}(x_3y_1 - x_1y_3) + \overline{k}(x_1y_2 - x_2y_1)$.

Свойства:

1. $\overline{v} \times \overline{w} = -\overline{w} \times \overline{v}$ – косокоммутативность.
2. $\overline{v} \times \overline{v} = \overline{0}$.
3. $(\overline{v} + \overline{w}) \times \overline{z} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \overline{v} \times \overline{z} + \overline{w} \times \overline{z}$ – аддитивность.
4. $(\lambda\overline{v}) \times \overline{w} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \lambda\overline{v} \times \overline{w}$.
5. $\overline{v} \times \overline{w} \perp \overline{v}, \overline{w}$
   $(\overline{v}, \overline{v} \times \overline{w}) = (\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \overline{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$.
6. $\overline{v} \times \overline{w} = 0 \Leftrightarrow \overline{v} \parallel \overline{w}$
   $(\overline{v}, \overline{w}, \overline{v} \times \overline{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow (\overline{v}, \overline{w}, \overline{v} \times \overline{w}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}, \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$.
7. $\overline{v} \nparallel \overline{w} \Rightarrow (\overline{v}, \overline{w}, \overline{v} \times \overline{w})$ – правая.
8. $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$. Получим таблицу умножения: $i \to j, j \to k, k \to i$.
9. $(\overline{a} \times \overline{b})^2 = (x_2y_3 - y_2x_3)^2 + (...)^2 + (...)^2$
   $\overline{a}^2\overline{b}^2 - (\overline{a}, \overline{b})^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$
   $(\overline{a} \times \overline{b})^2 = \overline{a}^2\overline{b}^2 - (\overline{a}, \overline{b})^2$ – упражнение.
   $\overline{a}^2\overline{b}^2 - (\overline{a}, \overline{b})^2 = S^2 = |\overline{a}|^2|\overline{b}|^2 \sin^2\alpha = |\overline{a}|^2|\overline{b}|^2(1 - \cos^2\alpha) = |\overline{a}|^2|\overline{b}|^2 - (\overline{a}, \overline{b})^2$, т.к. $\cos^2\alpha = \frac{(a,b)^2}{|a|^2|b|^2}$.
   Следствие: $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1, (\overline{a}, \overline{b}) \Rightarrow |\overline{a} \times \overline{b}| = 1$.



Рассмотрим V^3, зафиксируем ОНБ $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$, зададим векторное произведение $\times : V \times V \to V$. Выберем $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правый ОНБ, таким образом, если взять любой ОНБ, можно получить таблицу умножения: $a \to b, b \to c, c \to a$.

$\overline{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),\ \overline{w} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \Rightarrow \overline{v} \times \overline{w} = (\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c}) \times (\mu_1\overline{a} + \mu_2\overline{b} + \mu_3\overline{c}) =$
$= \lambda_1\mu_1\overline{a} \times \overline{a} + \lambda_1\mu_2\overline{a} \times \overline{b} + \lambda_1\mu_3\overline{a} \times \overline{c} + \lambda_2\mu_1\overline{b} \times \overline{a} + \lambda_2\mu_2\overline{b} \times \overline{b} + \lambda_2\mu_3\overline{b} \times \overline{c} + \lambda_3\mu_1\overline{c} \times \overline{a} + \lambda_3\mu_2\overline{c} \times \overline{b} + \lambda_3\mu_3\overline{c} \times \overline{c} =$
$= \overline{c}(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) - \overline{b}(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1) + \overline{a}(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) = \begin{vmatrix} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}$.

1.7. Смешанное умножение

Рассмотрим трёхмерное ориентированное векторное пространство V^3, в котором зафиксирован базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ и на котором задано векторное умножение: $\times$.
Зададим новую операцию – смешанное произведение $(,,) : V \times V \times V \to \mathbb{R}$.

Def 1.7.1. *Смешанное произведение трёх векторов* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *– скалярное произведение вектора* $\overline{a}$ *и векторного произведения векторов* $\overline{b}$ *и* $\overline{c}$. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c})$.

Пример 1.7.2. Что подразумевает под собой смешанное произведение?
Рассмотрим $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3), \overline{b} = (b_1, b_2, b_3), \overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

$$\overline{b} \times \overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

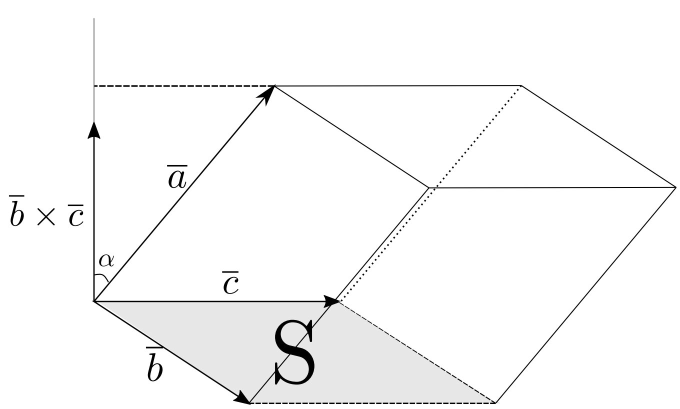
$$(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$$

Таким образом, $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Свойства смешанного произведения:

1. Линейность по каждому аргументу, как композиция линейных отображений.
2. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$ по свойству векторного произведения.
   $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}); (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a})$.
   Знак меняется в зависимости от чётности перестановки в силу свойств определителя.
3. Геометрический смысл для трёх некомпланарных.
   Если $\overline{a}$ сходит туда же, куда и $\overline{b} \times \overline{c}$, то $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ – правая тройка. Если $\overline{a}$ "смотрит"в другую плоскость, то тройка – левая.
   $\overline{b} \times \overline{c} = S$, тогда $(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = S\underbrace{|\overline{a}|\cos\alpha}_{h} = S \cdot h$. Таким образом, $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = S \cdot h = V_{\text{пар}}$.

   Вывод: смешанное произведение равно $\pm V$ параллелепипеда (знак зависит от ориентации).



1.8. Двойное векторное умножение. Тождество Якоби

Рассмотрим ориентированное V^3 и $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$, выражение имеет смысл, поскольку и $\overline{a}$ – вектор, и $(\overline{b}\times\overline{c})$ – вектор.

Утверждение 1.8.1 (Формула "бац минус цаб").

$$\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})=\overline{b}(\overline{a},\overline{c})-\overline{c}(\overline{a},\overline{b}).$$

Доказательство. И справа, и слева знака равенства линейные выражения. Представим, что есть функция с операцией из трёх аргументов $f(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$, где каждый из векторов может быть расписан по базису, т.е. $f(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=f(a_1\overline{i}+a_2\overline{j}+a_3\overline{k},b_1\overline{i}+b_2\overline{j}+b_3\overline{k},c_1\overline{i}+c_2\overline{j}+c_3\overline{k})=a_1b_1c_1f(\overline{i},\overline{i},\overline{i})+a_1b_1c_2f(\overline{i},\overline{i},\overline{j})+\ldots+a_3b_3c_3f(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$, в силу линейности мы вынесли числа за скобки и получили все возможные наборы базисных элементов. В качестве первого, второго и третьего аргумента может быть один из трёх векторов: $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, т.е. 27 базисных наборов, в данном выражении 27 слагаемых.
Чтобы вычислить значение трилинейной функции на каком-то наборе векторов, достаточно знать координаты этих векторов и значения отображения функции 27 базисных наборов. Тогда для доказательства выражения достаточно проверить, совпадают ли две трилинейные функции на 27 базисных наборах, значит, они совпадают везде.
Проверим для базисного набора "$\overline{i},\overline{i},\overline{i}$": $\overline{i}\times\underbrace{(\overline{i}\times\overline{i})}_{0}=\overline{i}\underbrace{(\overline{i},\overline{i})}_{1}-\overline{i}\underbrace{(\overline{i},\overline{i})}_{1}$

Для набора "$\overline{i},\overline{i},\overline{j}$": $\overline{i}\times(\overline{i}\times\overline{j})=\overline{i}(\overline{i},\overline{j})-\overline{j}(\overline{i},\overline{i})$, используем таблицу умножения: $i\to j, j\to k, k\to i$, тогда $\overline{i}\times\underbrace{(\overline{i}\times j)}_{\overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j}}=\overline{i}\underbrace{(\overline{i},\overline{j})}_{0}-\overline{j}\underbrace{(\overline{i},\overline{i})}_{1}$
Аналогично для остальных 25 базисных наборов. ∎

Теорема 1.8.2 (Тождество Якоби).

$$\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})+\overline{b}\times(\overline{c}\times\overline{a})+\overline{c}\times(\overline{a}\times\overline{b})=0$$

Доказательство. $\overline{b}(\overline{a},\overline{c})-\overline{c}(\overline{a},\overline{b})+\overline{c}(\overline{a},\overline{b})-\overline{a}(\overline{b},\overline{c})+\overline{a}(\overline{c},\overline{b})-\overline{b}(\overline{a},\overline{c})=0$ ∎

Пусть V – векторное пространство, на нём есть бинарная операция $[,]:V\times V\to V$, которая обладает свойствами:

1. Билинейность
2. Кососкоммутативность: $[\overline{a},\overline{b}]=-[\overline{b},\overline{a}]$
3. Удовлетворяет тождеству Якоби: $[\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]]+[\overline{b},[\overline{c},\overline{a}]]+[\overline{c},[\overline{a},\overline{b}]]=0$

Def 1.8.3. *Если выполняются все свойства, то операция $[,]$ называется скобка Ли, а векторное пространство $(V,[,])$ – алгебра Ли.*

1.9. Уравнение прямой на плоскости

Возьмём точку M и вектор $\overline{v}$, который отложим от точки M, проведём прямую, кторая содержит эти два объекта. Отметим точку M', которая записывается как $M'=M+t\overline{v}$.

Def 1.9.1. $M'=M+t\overline{v}$ *– параметрическое задание.*

Выберем начало координат O, вектор $\overline{r}_0$, который соответсвует точке M и вектор $\overline{r}$, который соответсвует произольной точке M'. Тогда вектор $\overline{r}$ в зависимости от t представляется как $\overline{r}(t) = \overline{r}_0 + t\overline{v}$

Def 1.9.2.

$$\overline{r}(t) = \overline{r}_0 + t\overline{v}$$

– параметрическое уравнение прямой.

Обозначим координаты вектора $\overline{r}$ как (x, y), вектора $\overline{r}_0$ как (x_0, y_0), вектора $\overline{v}$ как (a, b). Тогда запишем это уравнение с каждой координатой.

Def 1.9.3. $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$ *– параметрическое уравнение в координатах.*

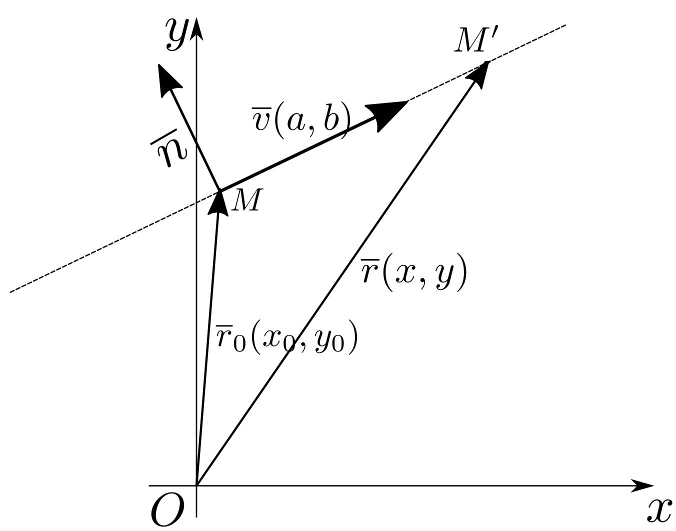


Рис. 2: Изображение вектора $\overline{v}$ на плоскости

Выразим из обоих уравнений t, из первого уравнения получаем $t = \frac{x-x_0}{a}$, из второго $t = \frac{y-y_0}{b}$, тогда верно $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$.

Def 1.9.4.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

– каноническое уравнение прямой на плоскости.

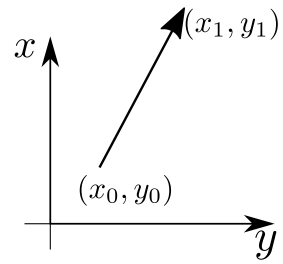
Пример 1.9.5. $2x = y - 1$, можно записать данное выражение как: $\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2}$

Пусть нам известны координаты начала вектора (x_0, y_0) и координаты конца (x_1, y_1), тогда можно записать каноническое уравнение прямой в другом виде.

Def 1.9.6.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

– каноническое уравнение прямой на плоскости.



Приведём первый вариант канонического уравнения прямой к следующему виду:
$bx - x_0 b = ay - ay_0 \Rightarrow bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$.
Введём обозначения, пусть A – коэффициент при x, B – коэффициент при y, а C – свободный член.

Def 1.9.7. $A^2 + B^2 \neq 0$

$$Ax + By + C = 0$$

– общее уравнение прямой на плоскости.
$(-B, A)$ *– направляющий вектор.*
$(-\frac{C}{A}, 0)$ *– точка.*
$(-B, A)$ *– перпендикуляр к прямой (вектор нормали).*

$B \neq 0$, тогда $y = -\frac{A}{B} - \frac{C}{B}$, введём обозначения.

Def 1.9.8.

$$y = kx + b$$

– уравнение прямой с угловым коэффициентом, где $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Пусть вектор $\overline{n}$ с координатами (A, B) перпендикулярен вектору $\overline{v}$ (рис. 2), т.е. $\overline{MM'} \perp \overline{n}$), тогда $(\overline{n}, \overline{MM'}) = 0$.

Def 1.9.9.

$$(\overline{n}, \overline{r} - \overline{r}_0) = 0$$

– векторное уравнение прямой на плоскости.

Раскроем скобки: $(\overline{n}, \overline{r}) - (\overline{n} - \overline{n}_0) = 0 \Rightarrow (\overline{n}, \overline{r}) = (\overline{n}, \overline{r}_0)$, обозначим $(\overline{n}, \overline{r}_0) = \alpha$, поскольку векторы $\overline{n}$ и $\overline{r}_0$ зафиксированы.

Def 1.9.10.

$$(\overline{n}, \overline{r}) = \alpha$$

– векторное уравнение прямой на плоскости, где $\overline{n}$ *– перпендикуляр к исходной прямой.*

1.10. Уравнение плоскости в пространстве

Возьмём точку M_0 в $\mathbb{R}^3$ и зададим плоскость двумя неколлинеарными векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. $\overline{a} \nparallel \overline{b}$. Любая точка M этой плоскости является линейной комбинацией: $M = M_0 + \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

Def 1.10.1. $M = M_0 + \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ *– параметрическое задание точек пространства* $\mathbb{R}^3$.

Аналогично, как в уравнении прямой на плоскости, возьмём начало координат O и запишем через параметры радиус-вектор $\overline{r}$ точки M.

Def 1.10.2.

$$\overline{r}(\alpha, \beta) = \overline{r}_0 + \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$$

– параметрическое уравнение плоскости в пространстве.

Выберем систему координат, тогда у точки M будут координаты (x, y, z). Запишем параметрическое уравнение в координатах.

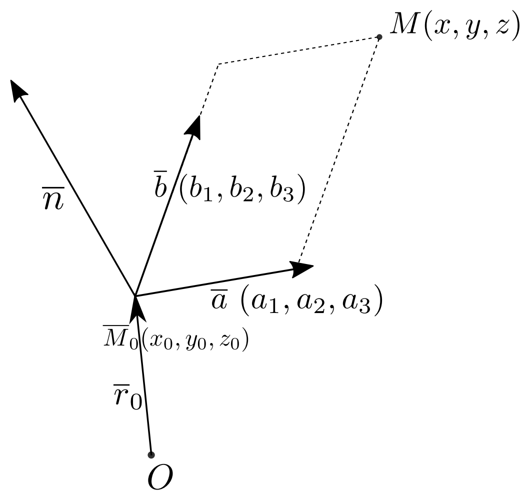
Def 1.10.3. $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a_1 + \beta b_1 \\ y = y_0 + \alpha a_2 + \beta b_2 \\ z = z_0 + \alpha a_3 + \beta b_3 \end{cases}$ *– параметрическое уравнение плоскости в координатах.*

Рассмотрим правоориентированное векторное пространство $\mathbb{R}^3$. Если есть вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то их векторное произведение – перпендикуляр $\overline{n}$ к плоскости, которая содержит эти вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. С помощью этого перпендикуляра можно записать уравнение плоскости: $(\overline{n}, \overline{M_0M}) = 0$.

Def 1.10.4.

$$(\overline{n}, \overline{r} - \overline{r_0}) = 0$$

– векторное уравнение плоскости.



Если координаты вектора $\overline{n}$ – (A, B, C), то можно записать скалярное произведение в другом виде.

Def 1.10.5.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

– общее уравнение плоскости.

x_0, y_0, z_0 – координаты конкретной точки, от которой можно отойти. Раскроем скобки, обозначим свободный член за D.

Def 1.10.6.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

– *общее уравнение плоскости.*

Векторов, перпендикулярных плоскости, содержащей векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, бесконечное множество, один из них – векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Если "отойти"от параметров, то получим общее уравнение, значит, коэффициенты A, B, C будут пропорциональны векторному произведению.
Сопоставляя общее уравнение плоскости и параметрическое можно прийти к другому виду общего уравнения.

Def 1.10.7.

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}(x - x_0) - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

– *общее уравнение плоскости.*

Плоскость можно задать тремя точками, не лежащими на одной прямой. Пусть их координаты (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). Предположим, что необходимо найти плоскость через общее уравнение плоскости, т.е. $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставим координаты трёх точек в это уравнение: $\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$
Необоходимо решить эту систему, чтобы найти значения коэффициентов A, B, C, D. Три уравнения, четыре переменные, значит, решений у такой системы много. Добавим ещё одну точку $M(x, y, z)$, тогда система принимает вид: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$
При каком условии у такой системы найдётся решение? Если эта новая точка M лежит в одной плоскости с заданными трёмя точками, то решение есть, иначе – нет.
В системе четыре уравнения, четыре неизвестных, все свободные члены равны нулю, получается, эта СЛУ однородная. Что значит, что эта система разрешима? У неё единственное решение, если эта система невырожденная, т.е. $(0, 0, 0, 0)$, это решение не подходит.
Если точка M принадлежит искомой плоскости, то решение существует, причем решение системым должно быть не тождественный нуль, значит, эта система имеет вырожденную матрицу: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow M \in \pi$, где π – плоскость.

Def 1.10.8.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

– *матричное уравнение плоскости в пространстве.*

1.11. Уравнение прямой в пространстве

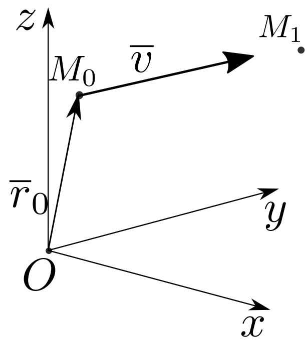
Def 1.11.1. $M' = M + t\overline{v}$ – *параметрическое задание.*

Def 1.11.2.

$$\overline{r}(t) = \overline{r}_0 + t\overline{v}$$

– *параметрическое уравнение прямой.*

Введём декартову систему координат.



Def 1.11.3.

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

– *параметрическое уровнение прямой в координатах, где a, b, c – координаты направляющего вектора $\overline{v}$.*

"Избавимся"от параметра:

Def 1.11.4.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

– *каноническое уравнение прямой в пространстве.*

Если есть произвольная точка M_1, лежащая на прямой, координаты которой мы знаем.

Def 1.11.5.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

– *каноническое уравнение прямой через две точки.*

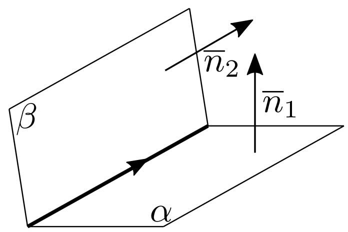
Можно переписать данное выражение в виде системы: $\begin{cases} \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \\ \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \end{cases}$, что эквивалентно другой системе: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$. Каждое из уравнений в этой системе – уравнение плоскости, значит, прямая записана как пересечение двух плоскостей.

Def 1.11.6.

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

– уравнение прямой как линия пересечения двух плоскостей.

Значения A, B, C – координаты вектора нормали к плоскости. Пусть есть плоскость α с вектором нормали $\overline{n}_1$ и плоскость β с вектором нормали $\overline{n}_2$. Тогда линия пересечения плоскостей – необходимая прямая.



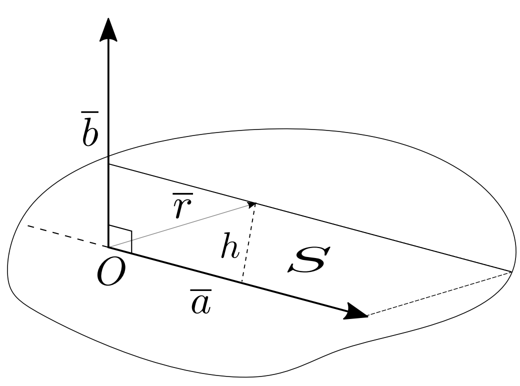
Чтобы эту прямую явно задать каноническим способом, нужно знать направляющий вектор и точку.
Точку можно найти следующим образом: можно любую из координат "положить"нуль, например, $x = 0$, тогда решаем СЛУ стандартным образом.
Как найти направляющий вектор? Этот вектор – векторное произведение двух нормалей плоскостей α и $\beta : \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$.

Пример 1.11.7. Допустим, координаты точки $(0, y_0, z_0)$. Тогда можно записать каноническое уравнение как:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

Замечание 1.11.8. Можно судить о пересечении двух плоскостей; если вектора нормали неколлинеарны, то это заведомо прямая, иначе – нужно судить по свободным членам, если все коэффициенты пропорциональны, решение у этой системы – вся плоскость (т.е. плоскости совпадают), если не пропорциональны, то решение – $\varnothing$.

Рассмотрим некоторые векторы в ориентированном векторном пространстве V^3: зафиксированные $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и переменный вектор $\overline{r}$ – в выражении $\overline{a} \times \overline{r} = \overline{b}$.



Чтоб решение у этого выражения существовало, необходимо задать, что $\overline{b} \perp \overline{a}$, значит, вектор $\overline{r}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к $\overline{b}$. Разделим эту плоскость на две полуплоскости по отношению к $\overline{a}$, вектор $\overline{r}$ должен лежать так, чтобы (по правилу буравчика) от вектора $\overline{a}$ давать вектор $\overline{b}$. Каков геометрический смысл векторного произведения? $|\overline{a} \times \overline{r}| = S_{\text{пар}}$, кроме того, $S = |\overline{b}|$. С другой стороны, $S = |\overline{a}|h$, где h – расстроение от "кончика"вектора $\overline{r}$ до прямой, содержащей $\overline{a}$, поскольку вектор $\overline{b}$ фиксирован, отчего фиксирована и величина S, то и все концы возможных векторов $\overline{r}$ должны лежать на одинаковом удалении от $\overline{a}$, равном h. Значит, все решения лежат на прямой, параллельной той, на которой лежит вектор $\overline{a}$, на расстоянии h по определённую полуплоскость. Таким образом, решение уравнения $\overline{a} \times \overline{r} = \overline{b}, \overline{b} \perp \overline{a}$ всегда есть, и им является прямая в пространстве.

Def 1.11.9.

$$\overline{a} \times \overline{r} = \overline{b},\ \ \overline{b} \perp \overline{a}$$

– векторное уравнение прямой в пространстве.

Найдём точку, которая лежит на данной прямой, поскольку мы уже знаем, что это за прямая. Изобразим расстояние (перпендикуляр) от данной прямой, обозначим точкой M_0, до точки O. Из описанного ранее известно, что $h = \frac{S}{|\overline{a}|}$. Тогда $\overline{OM_0}$ это результат векторного произведения $\overline{a} \times \overline{b}$, тогда направление данного вектора это $\overline{e} = \frac{\overline{a} \times \overline{b}}{|\overline{a} \times \overline{b}|}$, но нам необходим вектор, умноженный на h, тогда этот вектор $\overline{r}_0 = \frac{\overline{a} \times \overline{b}}{|\overline{a} \times \overline{b}|} \cdot \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$ – частное решение уравнения, где направляющий вектор $\overline{a}$.