

# Матанализ 2 семестр ПИ, Лекции

Собрано 22 марта 2022 г. в 21:58

---

## Содержание

<b>1. Интегральное исчисление</b>	<b>1</b>
1.1. Неопределенный интеграл	1
1.2. Определенный интеграл Римана	5
1.3. Суммы Дарбу	6
1.4. Критерии интегрируемости функции	7
1.5. Свойства интеграла Римана	12
1.6. Интегральные теоремы о средних	14
1.7. Интегральные неравенства	19
1.8. Несобственные интегралы	20
1.8.1. Свойства несобственного интеграла	21
1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов	23
1.9. Интегралы от знакопеременных функций	25
1.10. Длина, площадь и объём	28
1.10.1. Площадь	28

# Раздел #1: Интегральное исчисление

## 1.1. Неопределенный интеграл

**Def 1.1.1.**  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  называется первообразной функцией  $f$ , если  $F$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle, F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle$ .

**Теорема 1.1.2.** Пусть  $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$  – первообразная  $f$ . Тогда  $G$  – первообразная  $f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) + c = G(x)$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Пусть  $H(x) = F(x) - G(x)$ . Тогда

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv \text{const}$$

$\Leftarrow$ .  $(F(x) + c)' = (G(x))' \Leftrightarrow f(x) = F'(x) = G'(x) \Rightarrow G$  – первообразная. ■

**Def 1.1.3.**  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$  – первообразная  $f$ . Множество функций  $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$  называется неопределенным интегралом  $f$ .

$$\int f(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Далее,  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Дифференцирование

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x), x \in \langle A, B \rangle$$

2. Арифметические действия:

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \{F(x) + G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int f(x) dx + H(x) = \{F(x) + H(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda \int f(x) dx = \{\lambda F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

**Утверждение 1.1.4.** Если функция  $f$  непрерывна на  $\langle A, B \rangle$ , то у неё есть первообразная на  $\langle A, B \rangle$ .

**Упражнение 1.1.5.**  $f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$ . Есть ли первообразная у этой функции?

**Def 1.1.6.**  $E \subset \mathbb{R}, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $F$  дифференцируема на  $E$  и  $F'(x) = f(x)$  на  $E$ , то  $F$  – первообразная  $f$  на множестве  $E$ .

## Таблица неопределенных интегралов

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\int a \, dx = ax + c, a \in \mathbb{R}$                 | 8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$                                  |
| 2. $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$     | 9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + c$                                |
| 3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x  + c$                     | 10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, a \neq 0$    |
| 4. $\int e^x \, dx = e^x + c$                                | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c, a > 0$           |
| 5. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$ | 12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + c, a \neq 0$ |
| 6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$                         | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln x + \sqrt{x^2+a}  + c, a \in \mathbb{R}$              |
| 7. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$                          |   |

*Доказательство.* Дифференцирование ■

**Пример 1.1.7.**  $\int \frac{\sin x}{x} \, dx$  – неберущийся интеграл.  $\operatorname{Si}(x)$  – интегральный синус (одна из первообразных, закрепленная при  $x \rightarrow 0+$ ).

$$(\operatorname{Si}(x))' = \frac{\sin x}{x}$$

**Теорема 1.1.8** (Линейность неопределенного интеграла).  $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , имеют первообразные на  $\langle A, B \rangle$ . Тогда  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha, \beta \neq 0$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx$$

*Доказательство.* Пусть  $F$  и  $G$  – первообразные  $f$  и  $g$  на  $\langle A, B \rangle$ . Правая часть равенства:  $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ .

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + c)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$
■

**Теорема 1.1.9** (Замена переменной).  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  – первообразная  $f$  на  $\langle A, B \rangle$ ,  $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$  – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + c$$

*Доказательство.*

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$
■

*Замечание 1.1.10.*  $\varphi'(x) \, dx = d\varphi(x)$ . Пусть  $y = \varphi(x)$

$$\int f(y) \, dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

**Пример 1.1.11.**  $\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx$ . Пусть  $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x} \, dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int y \, dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

*Следствие 1.1.12.* Пусть в условиях теоремы  $\varphi$  имеет обратную функцию  $\psi : \langle A, B \rangle \rightarrow \langle C, D \rangle$ . Если  $G(x)$  – первообразная функции  $(f \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ , то

$$\int f(x) dx = G(\psi(x)) + c$$

*Доказательство.* Пусть  $F$  – первообразная  $f$  на  $\langle A, B \rangle$ .  $F(\varphi(x))$  – первообразная  $f(\varphi(y))\varphi'(y)$  (по теореме). Рассмотрим  $G(x) - F(\varphi(x))$  – постоянная (т.к. производная равна нулю).  $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$ . Тогда

$$G(\psi(y)) - F(y) = \text{const} \Rightarrow \int f(y) dy = G(\psi(y)) + c$$

■

**Пример 1.1.13.**  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ . Пусть  $t = \sqrt{x}, t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = dt^2 = 2t dt$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{1+t} = \int \left( \frac{2t+2}{t+1} - \frac{2}{t+1} \right) dt = \int \left( 2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= 2t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2 \ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+1) + c \end{aligned}$$

**Пример 1.1.14.**  $\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$ .

Иначе:  $\int \sin x \cos x dx = - \int \cos x d \cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$ .

Иначе:  $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{\cos 2x}{4} + c$ .

Мораль сей басни такова: константы разные, а не  $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$ .

**Теорема 1.1.15** (Формула интегрирования по частям).  $f, g \in C^1 \langle A, B \rangle$ . Тогда

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

*Доказательство.*  $H$  – первообразная  $g \cdot f'$ . Тогда

$$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x)$$

■

*Замечание 1.1.16.*  $\int u dv = uv - \int v du$

**Пример 1.1.17.**  $\int x e^x dx$ . Пусть  $u = x, u' = 1, v' = e^x, v = e^x$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + c$$

**Пример 1.1.18.**  $\int \ln x dx$ . Пусть  $u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = 1, v = x$ .

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + c$$

**Упражнение 1.1.19.** Пусть  $f = \sin x, g = e^x$ . Тогда

$$\int f dg = fg - \int g df \Leftrightarrow \int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

Пусть теперь  $f = \cos x, g = e^x$ . Тогда

$$\int f dg = fg - \int g df \Leftrightarrow \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

Отсюда

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$$

**Пример 1.1.20.** Пусть  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}, n \in \mathbb{N}$ . Выразим интеграл  $I_{n+1}$  через  $I_n$  для произвольного натурального  $n$ .

Обозначим  $f(x) = \frac{1}{(x^2+a)^n}$  и  $g(x) = x$ . Тогда

$$df(x) = \left( \frac{1}{(x^2+a)^n} \right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a)^{n+1}} dx, dg(x) = dx$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+a)^n} - 2na \int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1} \end{aligned}$$

Откуда

$$2naI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a)^n}$$

*Утверждение 1.1.21.* Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

Рассмотрим простейшие дроби:

1.  $\frac{a}{(x+p)^n}, n \in \mathbb{N}, a, p \in \mathbb{R}$
2.  $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Интегралы от простейших дробей первого рода вычисляются по таблице. Для простейших дробей второго рода используется следующий алгоритм:

1. Если  $p \neq 0$ , то выделим полный квадрат и выполним замену  $y = x + \frac{p}{2}$ . Если  $p = 0$ , тогда

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = a \int \frac{x dx}{(x^2+q)^n} + b \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$$

2. Интеграл  $\int \frac{x dx}{(x^2+q)^n}$  можно вычислить с помощью замены  $y = x^2 + q$ , т.к.  $dy = 2x dx$ .

3. Применяя к интегралу  $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$  формулу понижения  $n-1$  раз сведем его к интегралу  $I_1$ , который является табличным.

**Пример 1.1.22** (12 и 13 из таблицы).

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \int \left( \frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + c$$

**Пример 1.1.23.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ . Пусть  $x = \operatorname{sh} t$ ,  $dx = \operatorname{ch} t dt$ . Тогда

$$\int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + c$$

**Упражнение 1.1.24.** Найди формулу для  $(\operatorname{sh} t)^{-1}$

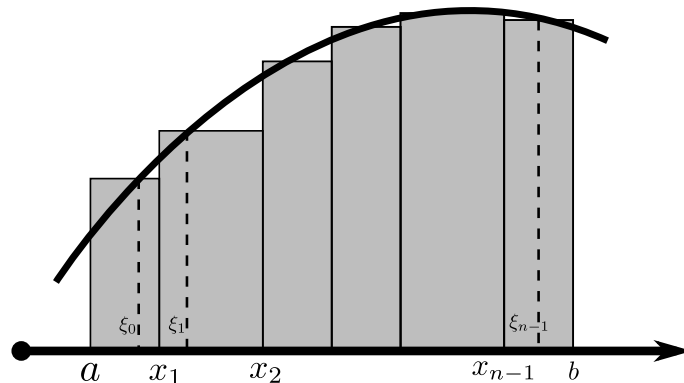
Неберущиеся интегралы:

- $\int \frac{\sin x}{x} dx$
- $\int \sin x^2 dx$
- $\int \frac{\cos x}{x} dx$
- $\int \cos x^2 dx$
- $\int \frac{dx}{\ln x}$
- $\int e^{-x^2} dx$
- $\int \frac{e^x}{x} dx$

## 1.2. Определенный интеграл Римана

**Def 1.2.1.**  $[a, b], a < b$ . Набор точек  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  – разбиение (дробление) отрезка  $[a, b]$ ,  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  – длина отрезка  $[x_k, x_{k+1}]$ .  $\lambda = \lambda_\tau = \max_{k \in [0, n-1]} \Delta x_k$  – ранг дробления (мелкость),  $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$  – оснащение дробления  $\tau$ . Пара  $(\tau, \xi)$  называется оснащённым дроблением.

**Def 1.2.2.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$  – суммы Римана (интегральные суммы).



**Def 1.2.3.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Число  $I \in \mathbb{R}$  называют пределом интегральных сумм при ранге  $\rightarrow 0$ :

$$I = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad (I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma)$$

если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

*Замечание 1.2.4.* Последовательность оснащенных дроблений  $\{(\tau^{(i)}, \xi^{(i)})\}_{i=1}^{\infty} : \lambda^{(i)} \rightarrow 0$ .  
 $\forall \{\tau^{(i)}, \xi^{(i)}\} : \lambda^{(i)} \rightarrow 0 \quad \sigma_{\tau^{(i)}}(f, \xi^{(i)}) \rightarrow I$ .

**Def 1.2.5** (Интеграл Римана).  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $\exists \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$ , то  $f$  называется интегрируемой по Риману на  $[a, b]$ , а число  $I$  называется интегралом  $f$  по  $[a, b]$ .

$R[a, b]$  – класс функций, интегрируемых по Риману на  $[a, b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx$$

### 1.3. Суммы Дарбу

**Def 1.3.1.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  – дробление  $[a, b]$ .

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

*Суммы*

$$S = S_{\tau}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, s = s_{\tau}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются верхними и нижними интегральными суммами.

*Замечание 1.3.2.* Если  $f$  – непрерывна на  $[a, b]$ , то это две частные суммы из сумм Римана.

*Замечание 1.3.3.*  $f$  ограничена сверху  $\Leftrightarrow S$  ограничена.

Свойства сумм Дарбу:

$$1. S_{\tau}(f) = \sup_{\xi} \sigma_{\tau}(f, \xi), s_{\tau} = \inf_{\xi} \sigma_{\tau}(f, \xi)$$

*Доказательство.*  $M_k \geq f(\xi_k), k = 0, \dots, n-1$ . Тогда  $M_k \Delta x_k \geq f(\xi_k) \Delta x_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \Rightarrow S_{\tau}(f) \geq \sigma_{\tau}$ , т.е.  $S_{\tau}$  – верхняя граница. Докажем, что она является точной верхней границей.

Если  $f$  ограничена на  $[a, b]$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . На каждом кусочке разбиения  $\exists \xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}] : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$ . Тогда  $\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = S - \varepsilon$ .

Если  $f$  не ограничена на  $[a, b] \Rightarrow$  не ограничена на каком-то кусочке  $[x_l, x_{l+1}]$ . Фиксируем  $A > 0$  и выберем  $\xi_k^*$  при  $k \neq l$  произвольно, а для  $\xi_l^*$

$$f(\xi_l^*) > \frac{1}{\Delta x_l} \left( A - \sum_{k \neq l} f(\xi_k^*) \Delta x_k \right)$$

Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta x_k > A \Rightarrow \sup_{\xi} \sigma = +\infty = S$$

■

2. При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя не уменьшится.

*Доказательство.* Докажем для верхних сумм при добавлении одной точки.  $\tau : \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ . Добавим точку  $c$  в  $[x_l, x_{l+1}] - T$  – новое дробление.

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + M_l \Delta x_l + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + (c - x_l) \cdot M' + (x_{l+1} - c) M'' + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

где  $M' = \sup_{x \in [x_l, c]} f$ ,  $M'' = \sup_{x \in [c, x_{l+1}]} f$ .  $M_l \geq M'$ ,  $M_l \geq M''$ , т.к.  $[x_l, c] \subset [x_l, x_{l+1}]$ ,  $[c, x_{l+1}] \subset [x_l, x_{l+1}]$ .

Рассмотрим  $S_\tau - S_T = M_l \Delta x_l - (c - x_l) M' - (x_{l+1} - c) M'' \geq M_l (x_{l+1} - x_l - c + x_l - x_{l+1} + c) = 0$ .

Добавить больше точек можно по индукции. ■

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней.

*Доказательство.*  $\tau_1, \tau_2$  – разные дробления  $[a, b]$ . Докажем, что  $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$ . Возьмем  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ . Тогда  $s_{\tau_1} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_2}$  (по свойству 2). ■

**Утверждение 1.3.4.**  $f \in R[a, b] \Rightarrow f$  ограничена на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Пусть  $f$  не ограничена на  $[a, b]$  сверху. Тогда  $\forall \tau \Rightarrow \sup_\xi \sigma_\tau(f, \xi) = +\infty$ . Тогда  $\forall \tau$  и числа  $I \exists$  оснащение  $\xi' : \sigma_\tau(\xi') > I + 1 \Rightarrow$  никакое число  $I$  не является пределом интегральных сумм. ■

**Def 1.3.5.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Возьмем

$$I^* = \inf_\tau S_\tau \quad I_* = \sup_\tau s_\tau$$

где  $I^*$  – верхний интеграл Дарбу,  $I_*$  – нижний интеграл Дарбу.

**Замечание 1.3.6.**  $I^* \geq I_*$ .

**Замечание 1.3.7.**  $f$  ограничена сверху  $\Leftrightarrow I^*$  ограничена.

## 1.4. Критерии интегрируемости функции

**Теорема 1.4.1** (Критерий интегрируемости функции). Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \overline{S_\tau(f) - s_\tau(f)}_{\lambda \rightarrow 0} = 0$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \quad S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Пусть  $f \in R[a, b]$ . Обозначим  $I = \int_a^b f$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$ , подберем  $\delta > 0$  :

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Переходя к супремуму и инфимуму, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$



откуда  $S_\tau - s_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{3} - I + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ .

$\Leftarrow$ . Пусть  $S_\tau - s_\tau \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \Rightarrow$  все суммы Дарбу конечны.

$$s_\tau \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau \Rightarrow 0 \leq I^* - I_* \leq S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow I^* = I_*$  (т.к. это числа). Обозначим  $I = I^* = I_*$ .

$$s_\tau \leq I \leq S_\tau, s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau \Rightarrow |I - \sigma_\tau| \leq S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \Rightarrow |I - \sigma_\tau| < \varepsilon$ . ■

*Замечание 1.4.2.* Если  $f \in R[a, b] \Rightarrow s_\tau \leq \int_a^b f \leq S_\tau$ .

*Следствие 1.4.3.*  $f \in R[a, b] \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\tau = \int_a^b f$

*Доказательство.*  $0 \leq S_\tau - \int_a^b f \leq S_\tau - s_\tau, 0 \leq \int_a^b f - s_\tau \leq S_\tau - s_\tau$ . ■

*Замечание 1.4.4.*  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau = I^*, \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\tau = I_*$ .

*Утверждение 1.4.5* (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману).  $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$  ограничена на  $[a, b]$  и  $I_* = I^*$ .

*Утверждение 1.4.6* (Критерий Римана интегрируемости).  $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$ .

**Def 1.4.7.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . *Величина*

$$\omega(f)_D = \sup_{x, y \in D} (f(x) - f(y))$$

называется колебанием  $f$  на  $D$ . Из определений граней функции ясно, что

$$\omega(f)_D = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{y \in D} f(y)$$

Если задано  $\tau$  отрезка  $[a, b]$ , то

$$\omega_k(f) = M_k - m_k$$

Тогда теорему можно записать:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0$$

**Теорема 1.4.8** (Интегрируемость непрерывной функции).  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$ .

*Доказательство.* По теореме Кантора  $f \in C[a, b] \Rightarrow f$  равномерна непрерывна на  $[a, b]$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t', t'' \in [a, b] : |t' - t''| < \delta \Rightarrow |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

По теореме Вейерштрасса  $f$  достигает наибольшего и наименьшего значения на любом отрезке, содержащемся в  $[a, b]$ . Поэтому колебание  $f$  на всяком отрезке, длина которого меньше  $\delta$ , будет меньше  $\frac{\varepsilon}{b-a}$ . Значит,  $\forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k$$

**Теорема 1.4.9** (Интегрируемость монотонной функции).  $f$  монотонна на  $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$ .

*Доказательство.* Пусть  $f$  монотонно возрастает на  $[a, b]$ . Если  $f(a) = f(b) \Rightarrow f$  постоянна  $\Rightarrow f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$ .

Если  $f(a) < f(b)$ .  $\forall \varepsilon > 0$  возьмем  $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ . Возьмем произвольное  $\tau : \lambda_\tau < \delta$  на  $[x_k, x_{k+1}]$ . В силу монотонности  $f$  верно  $\omega_k(f) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ .

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta_k < \sum_{k=0}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon$$

■

*Замечание 1.4.10.*  $f \in R[a, b]$ . Если изменить значение  $f$  в конечном числе точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

*Доказательство.*  $\tilde{f}$  — отличается от  $f$  в точках  $t_1, t_2, \dots, t_m$ .  $|f|$  ограничена на  $[a, b] \Rightarrow |\tilde{f}|$  ограничена.  $|f| \leq A$ , возьмем  $\tilde{A} = \max\{A, |\tilde{f}(t_1)|, |\tilde{f}(t_2)|, \dots, |\tilde{f}(t_m)|\}$ . В интегральных суммах для  $f$  и  $\tilde{f}$  отличаются не более  $2m$  слагаемых, поэтому

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - \sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)| \leq 2m(A + \tilde{A})\lambda_\tau \xrightarrow{\lambda_\tau} 0$$

Поэтому предел  $\sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)$  существует и равен пределу  $\sigma_\tau(f, \xi)$ .

■

**Теорема 1.4.11** (Интегрируемость функции и её сужения). 1.  $f \in R[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b] \Rightarrow f \in \overline{R[\alpha, \beta]}$

2. Если  $a < c < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f \in R[a, c], f \in R[c, b]$ , то  $f \in R[a, b]$ .

*Доказательство.* 1. Возьмем  $\varepsilon > 0$ , подберем  $\delta > 0$  из критерия интегрируемости на  $[a, b]$ .

$\tau_0$  — дробление  $[\alpha, \beta], \lambda_{\tau_0} < \delta$ . Добавим точек до дробления  $[a, b]$ . Получим  $\tau(\lambda_\tau < \delta)$ .

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=l}^{m-1} \omega_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \varepsilon$$

2. Пусть  $f$  не постоянна, т.е.  $\omega(f)_{[a,b]} > 0$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$ , подберем  $\delta_1, \delta_2 : \forall \tau_1 : \lambda_{\tau_1} < \delta_1, \forall \tau_2 : \lambda_{\tau_2} < \delta_2$

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\}$ . Пусть  $\tau$  — дробление  $[a, b], \lambda_\tau < \delta$ . Точка  $c \in [x_l, x_{l+1})$ . Обозначим  $\tau' = \tau \cup \{c\}, \tau_1 = \tau' \cap [a, c], \tau_2 = \tau' \cap [c, b]$

$$S_\tau - s_\tau \leq S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega_l(f)\delta < \varepsilon$$

■

**Def 1.4.12.** Функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  называется кусочно-непрерывной на  $[a, b]$ , если множество её точек разрыв пусто или конечно (и все разрывы первого рода)

*Следствие 1.4.13.*  $f$  — кусочно-непрерывная на  $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$

*Доказательство.* Возьмём точки  $a_1, a_2, \dots, a_m$  (может  $a_1 = a$  и/или  $a_m = b$ ). Рассмотрим отрезки  $[a_k, a_{k+1}]$ .  $f$  непрерывна на  $(a_k, a_{k+1})$  и  $\exists$  конечные  $\lim_{x \rightarrow a_k+} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a_{k+1}-} f(x) \Rightarrow f \in R[a_k, a_{k+1}] \Rightarrow$  по теореме о сужении  $f \in R[a, b]$  ■

**Def 1.4.14.** Множество  $X$  называется не более, чем счётным, если оно конечно или счётно.

**Def 1.4.15.**  $E \subset \mathbb{R}$  – имеет нулевую меру, если для  $\forall \varepsilon > 0$  множество  $E$  можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых  $< \varepsilon$ .

$$\left( \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \right)$$

**Пример 1.4.16.** Множество из одной точки.

**Упражнение 1.4.17.** Чему равна мера  $\mathbb{N}$ ?

**Теорема 1.4.18** (Критерий Лебега интегрируемости по Риману). Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$  ограничена и множество точек разрыва имеет нулевую меру.

**Теорема 1.4.19** (Арифметические действия над интегрируемыми функциями).  $f, g \in R[a, b]$ .  
 Тогда

1.  $f + g \in R[a, b]$
2.  $f \cdot g \in R[a, b]$
3.  $\alpha f \in R[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$
4.  $|f| \in R[a, b]$
5. Если  $\inf_{[a, b]} |g| > 0$ , то  $\frac{f}{g} \in R[a, b]$

*Доказательство.* 1.  $D \subset [a, b]$ .  $x, y \in D$

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(y) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \omega_D(f) + \omega_D(g) \\ \omega_D(f+g) &\leq \omega_D(f) + \omega_D(g) \\ \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(f+g) &\leq \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(f) + \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(g) \\ \omega_k(f+g) &\leq \omega_k f + \omega_k g \end{aligned}$$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f+g) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k f \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k g \Delta x_k \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f + g \in R[a, b]$$

2.  $|fg(x) - fg(y)| \leq |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \leq |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leq A|f(x) - f(y)| + B|g(x) - g(y)|$  (т.к.  $R[a, b] \Rightarrow$  ограничена на  $[a, b]$ )
3.  $g(x) = \alpha$
4.  $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$   
 $|\omega_k|f| \leq |\omega_k f|$

$$5. \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}. \text{ Докажем, что } \frac{1}{g} \in R[a, b].$$

$$0 < m = \inf_{[a, b]} |g|$$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \left| \frac{g(y) - g(x)}{g(x)g(y)} \right| \leq \frac{|g(x) - g(y)|}{m^2} \Leftrightarrow \omega_k \left( \frac{1}{g} \right) \leq \frac{\omega_k(g)}{m^2}$$

■

**Пример 1.4.20.** 1.  $\int_0^1 x^2 dx$

$$x^2 \in C[a, b] \Rightarrow x^2 \in R[a, b].$$

Рассмотрим какую-нибудь интегральную сумму:  $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

2.  $\int_0^1 e^x dx$  – упражнение

$$3. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad D \notin R[a, b], a < b$$

*Доказательство.*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(D) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a \not\rightarrow_{\lambda \rightarrow 0} 0$$

■

$$4. r(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ дробь несократима} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$r(x)$  непрерывна в каждой точке, разрывна в каждой рациональной.

$$r(x) \in R[0, 1]$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$  Рациональные числа из  $[0, 1]$  со знаменателем  $\leq N$ , конечное число  $= C_N$ , множество  $X$ .

Возьмём  $\delta = \frac{\varepsilon}{4C_N}$  и дробление  $\tau : \lambda_\tau < \delta$

Точки  $X$  попадут в не более, чем  $2C_N$  отрезков дробления. В отрезках, где нет точек из  $X$  наибольшее значение  $< \frac{1}{N}$

$$s_\tau(r) = 0$$

$$S_\tau(r) = \sum_{k: M_k \geq \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k + \sum_{k: M_k < \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k \leq \underbrace{1 \cdot 2C_N \cdot \delta}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{1}{N}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$S_\tau(r) - s_\tau(r) = S_\tau(r) \xrightarrow{\lambda_r \rightarrow 0} 0 \Rightarrow r \in R[0, 1] \text{ и } \int_0^1 r(x) dx = 0$$

■

Если  $f \in R_D$   $g \in R[a, b]$ , то  $f(g) \in R[a, b]$ ? ( $D$  – множество значений  $g$ )

Ответ: нет. Пример:  $f(y) = \begin{cases} 1, y \in [0, 1] \\ 0, y = 0 \end{cases}$  и  $g(x) = r(x)$  на  $[0, 1]$

$$f(r(x)) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = D(x) \notin R[0, 1]$$

**Теорема 1.4.21** (Интегрируемость композиции).  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b], f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f(\varphi) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\varphi \in R[\alpha, \beta], f \in C[a, b]$ . Тогда  $f \circ \varphi \in R[\alpha, \beta]$

*Доказательство.* Например, из критерия Лебега. ■

## 1.5. Свойства интеграла Римана

1.  $\int_b^a f = - \int_a^b f$
2.  $\int_a^b f = 0$  ( $\forall f$  на вырожденном отрезке  $f \in R[a, a]$ )

Свойства:

- Аддитивность интеграла по отрезку:  
 $a, b, c \in \mathbb{R}, f \in R[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

*Доказательство.*  $f \in R[a, b] \Rightarrow f \in R[a, c], f \in R[c, b], \{\bar{\tau}^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  и  $\{\bar{\tau}^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  – последовательности оснащенных дроблений  $[a, c]$  и  $[c, b]$  (равномерных, т.е.  $\tilde{\lambda} = \frac{c-a}{n}, \bar{\lambda}$ )  
 $\tau^{(n)} = \bar{\tau}^{(n)} \cup \bar{\tau}^{(n)}$  – дробление  $[a, b]$   
 $\xi^{(n)} = \bar{\xi}^{(n)} \cup \bar{\xi}^{(n)}$  – оснащение  $\tau^{(n)}$   
 $\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\sigma}$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\underbrace{\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f}_{\text{по доказанному}} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

Все остальные случаи – аналогично. ■

- $f \equiv \alpha$  при  $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f = \alpha(b-a)$

*Доказательство.*

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \alpha(b-a)$$

■

- **Линейность интеграла:**  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a, b]$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

*Доказательство.*  $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$

$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sigma_\tau(\alpha f) + \sigma_\tau(\beta g)$  и переход к пределу.

■

- **Монотонность интеграла:**  $a < b, f, g \in R[a, b]$  и  $f \leq g$  на  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

*Доказательство.*  $\sigma_\tau(f) \leq \sigma_\tau(g)$

■

*Следствие 1.5.1.*  $a < b, f \in R[a, b]$ , если  $f \leq M \in \mathbb{R}$  на  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f \leq M(b-a)$ ,  
если  $f \geq m$  на  $[a, b]$  то  $\int_a^b f \geq m(b-a)$

*Следствие 1.5.2.*  $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

- $a < b, f \in R[a, b]$  и  $\exists c \in [a, b] : f(c) > 0$  и  $f$  непрерывна в точке  $c$ .

Тогда  $\int_a^b f > 0$

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in \underbrace{[c - \delta; c + \delta] \cap [a, b]}_{[\alpha, \beta]} : |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$$f(x) > f(c) - \varepsilon = \frac{f(c)}{2} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha)$$

$$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^b f \geq \int_\alpha^\beta f \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha) > 0$$

■

*Замечание 1.5.3.* Таким же образом строгий знак в монотонности интеграла.

*Замечание 1.5.4.*  $f \in R[a, b], f > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$

- $a < b, f \in R[a, b]$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

*Доказательство.*  $-|f| \leq f \leq |f|$

■

Если не знаем, что  $a \geq b$  или  $b \geq a$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

## 1.6. Интегральные теоремы о средних

**Теорема 1.6.1.**  $f, g \in R[a, b], g \geq 0$  на  $[a, b], m \leq f \leq M$ . Тогда  $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$

*Доказательство.*  $mg \leq fg \leq Mg$  на  $[a, b]$

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$$

Если  $\int_a^b g = 0$ , то  $\exists \mu \in [m, M] : 0 = \mu \cdot 0$

Если  $\int_a^b g > 0$ , то  $m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M$

Возьмём  $\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$  ■

*Замечание 1.6.2.* Для  $g \leq 0$  тоже верно.

*Следствие 1.6.3.* 1.  $f \in C[a, b], g \in R[a, b], g \geq 0$  (или  $g \leq 0$ ).

Тогда  $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g$

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса:  $\exists m = \min_{[a,b]} f$  и  $M = \max_{[a,b]} f$

Подберём  $\mu \in [m, M]$  по предыдущей теореме. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса  $\exists c \in [a, b] : f(c) = M$  ■

2.  $f \in R[a, b], m, M \in \mathbb{R} : m \leq f \leq M$  на  $[a, b]$ . Тогда  $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f = \mu(b-a)$

*Доказательство.*  $g \equiv 1$  в теореме. ■

3.  $f \in C[a, b]$ . Тогда  $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b-a)$

*Доказательство.*  $g \equiv 1$  в следствии 1. ■

*Замечание 1.6.4.* Теорему и следствия называют ещё теоремами о средних. Почему?

**Def 1.6.5.**  $f \in R[a, b], a < b$

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$  – интегральное среднее  $f$  на  $[a, b]$

Если возьмём равномерное разбиение  $[a, b]$ , то  $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \frac{b-a}{n}$

То есть  $\frac{\sigma_n}{b-a} \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ , где  $\frac{\sigma_n}{b-a}$  – среднее арифметическое значений функции в точках  $\xi_k$

**Def 1.6.6.**  $E \subset \mathbb{R}$  – невырожденный промежуток (может быть и лучом),  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  – интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в  $E$ .  $a \in E$ .

$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in E$  – интеграл с переменным верхним пределом.

**Теорема 1.6.7** (Барроу, об интеграле с переменным верхним пределом).  $E \subset \mathbb{R}$  – невырожденный промежуток,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , интегрируема на каждом отрезке из  $E$ ,  $a \in E$ ,  $\Phi(x) = \int_a^x f, x \in E$ . Тогда

1.  $\Phi(x) \in C(E)$

2. Если  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \in E$ , то  $\Phi$  – дифференцируема в точке  $x_0$ ,  $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

*Доказательство.* 1. Пусть  $x_0 \in E$ , подберем  $\delta > 0 [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap E = [A, B]$

$|f|$  на  $[A, B]$  ограничена числом  $M$ .  $\Delta x : x_0 + \Delta x \in [A, B]$

$$|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_a^{x_0 + \Delta x} f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f| \right| \leq |\Delta x| \cdot M \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

2. Проверим, что  $\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0)$

Возьмем  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0 : \forall t : |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$  (по непрерывности.)

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt \right| < \\ < \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta x| = \varepsilon, \quad k = \int_a^b k \cdot \frac{1}{b-a}$$

■

**Пример 1.6.8.**  $\Phi(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt, x > 1$

$$\Phi'(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \text{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

**Упражнение 1.6.9.**  $\int \text{Si}(x) dx = ?$

*Следствие 1.6.10.* Функция, непрерывная на промежутке имеет на нём первообразную. Ей является интеграл с переменным верхним пределом.

**Def 1.6.11.**  $\Psi(x) = \int_x^a f$  (Условия на  $f$  и  $a$  прежние) – интеграл с переменным нижним пределом.

$\Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$  (Если  $f$  непрерывна).

**Теорема 1.6.12** (Формула Ньютона-Лейбница).  $f \in R[a, b]$ ,  $F$  – первообразная  $f$  на  $[a, b]$ . Тогда:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

*Доказательство.* Для каждого  $n \in \mathbb{N}$ :

$$F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$$

По теореме Лагранжа  $\exists \xi_{k,n} \in (x_k, x_{k+1})$

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_{k,n})(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_{k,n})\Delta x_k$$

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k,n})\Delta x_k = \lim (F(b) - F(a)) = F(b) - F(a)$$

■



*Замечание 1.6.13.*  $\int_a^b f = F \Big|_a^b$   
 $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b$  – двойная подстановка.

*Замечание 1.6.14.*  $G(x) = F(x) + C$  – тоже первообразная.  
 $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$

**Пример 1.6.15.**  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

**Пример 1.6.16.**  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$  – чушь!

1.  $(-\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$  – не везде на  $[-1, 1]$

2.  $\frac{1}{x^2}$  не интегрируема на  $[-1; 1]$ , т.к. не ограничена.

*Замечание 1.6.17.* Обобщение теоремы.

$f \in R[a; b]$ ,  $F \in C[a, b]$ ,  $F$  – первообразная  $f$  на  $[a, b]$  за исключением некоторого конечного числа точек.

Тогда  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

*Доказательство.* Пусть  $\alpha_0 = a, \alpha_m = b, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  – все точки на  $(a, b)$ , в которых  $F' \neq f$

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \sum_{k=0}^{m-1} (F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)) = F(b) - F(a).$$

(Рассмотрим  $\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\alpha_k+\varepsilon}^{\alpha_{k+1}-\varepsilon} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (F(\alpha_{k+1}-\varepsilon) - F(\alpha_k+\varepsilon)) = F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)$ ) ■

*Замечание 1.6.18.* Без непрерывности  $F$  не получится: на  $[-1, 1]$

$$F(x) = \text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad f(x) = 0$$

$$0 = \int_{-1}^1 f \neq F \Big|_{-1}^1 = 2$$

*Замечание 1.6.19.*  $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$ .

$F$  дифференцируема,  $F'$  интегрируема.

*Замечание 1.6.20.*  $F' \in R[a, b]$  – существенно.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$F'$  не ограничена, а значит не интегрируема.

*Замечание 1.6.21.* Интегрируемость  $\stackrel{?}{\Leftrightarrow} \exists$  первообразной.

$\nRightarrow \text{sign } x$  интегрируема на  $[-1, 1]$ , но первообразной нет.

$\nRightarrow$  Предыдущее замечание.

**Теорема 1.6.22** (Интегрирование по частям в определенном интеграле).  $f, g$  – дифференцируемы на  $[a, b]$ ,  $f', g' \in R[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

*Доказательство.*  $f, g$  – дифференцируемы  $\Rightarrow$  непрерывны  $\Rightarrow$  интегрируемы.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f \in R[a, b]$$

$$\int_a^b (f g)' = f g \Big|_a^b$$

$$\int_a^b (f g)' = \int_a^b (f' g + g' f)$$

■

$$\text{Замечание 1.6.23. } \int_a^b f dg = f g \Big|_a^b - \int_a^b g df$$

$$dg(x) = g'(x) dx$$

**Теорема 1.6.24** (Замена переменной в определенном интеграле).  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [A, B]$ , дифференцируема на  $[\alpha, \beta]$ ,  $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$

$f \in C[A; B]$ . Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

*Доказательство.*  $f(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(\varphi) \in R[a, b] \Rightarrow f(\varphi) \cdot \varphi' \in R[a, b]$

Пусть  $F$  – первообразная  $f$  на  $[A, B] \Rightarrow F(\varphi)$  – первообразная  $f(\varphi) \cdot \varphi'$  на  $[\alpha, \beta]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \cdot \varphi' = F(\varphi) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F \Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

■

**Упражнение 1.6.25.** Пусть  $f$  четная функция. Доказать, что  $\int_{-a}^a = 2 \int_0^a f$

Пусть  $f$  нечетная функция. Доказать, что  $\int_{-a}^a f = 0$

**Теорема 1.6.26** (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме).  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$f \in C^{n+1}(A; B), a, x \in (A; B). \text{ Тогда } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

*Доказательство.* По индукции:

База:  $n = 0 : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$  (Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть верно для  $n-1$ . Докажем для  $n$ .

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt. \text{ Проинтегрируем остаток по частям:}$$

$$u = f^{(n)}(t), u' = f^{(n+1)}(t), v' = (x-t)^{n-1}, v = \frac{(x-t)^n}{n}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt = \\
& = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \left( -f^{(n)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n} \Big|_{t=a}^x + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t) (x-t)^n}{n} dt \right) = \\
& = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt
\end{aligned}$$

■

**Замечание 1.6.27.**  $\exists c \in (a, x) \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = f^{(n+1)}(c) \int_a^x (x-t)^n dt = f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$   
(Т.е. остаток в форме Лагранжа следует отсюда)

Последовательность  $\{x_n\} : x_i \in \mathbb{Q}, x_n \rightarrow \pi$

**Lm 1.6.28.**  $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cdot \sin x dx = -\sin^{m-1} \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x dx = \\
&= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) dx
\end{aligned}$$

$$I_m = (m-1) \cdot (I_{m-2} - I_m) \Rightarrow I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_m = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, m - \text{чётно} \\ I_m = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot 1, m - \text{нечётно} \end{cases}$$

**Упражнение 1.6.29.**  $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывна.

Доказать, что  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

**Теорема 1.6.30** (Формула Валлиса).  $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$

**Доказательство.**  $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2}) \quad \sin x \in (0; 1)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$< \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!! \cdot (2n)!!}{((2n-1)!!)^2}$$

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \left( \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

$$x_n = \frac{1}{n} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \Rightarrow \pi < x_n < \frac{2n+1}{2n} \pi, \Rightarrow x_n \rightarrow \pi$$

■

**Теорема 1.6.31** (Вторая теорема о среднем для интегралов, Бонне).  $f \in C[a, b]$ ,  $g \in C^1[a, b]$ ,  $g$  монотонна на  $[a, b]$ . Тогда  $\exists c \in [a, b]$ :

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f$$

*Доказательство.*  $F(x) = \int_a^x f$ ,  $F' = f$ ,  $F(a) = 0$

$$\begin{aligned} \int_a^b fg &= Fg \Big|_a^b - \int_a^b Fg' = g(b) \int_a^b f - \int_a^b Fg' = \\ &= g(b) \int_a^b f - \int_a^c f \cdot (g(b) - g(a)) = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f \end{aligned}$$

■

**Упражнение 1.6.32.** Оценить  $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

1. По первой теореме о среднем.
2. По второй теореме о среднем.

## 1.7. Интегральные неравенства

**Теорема 1.7.1** (Неравенство Йенсена).  $f$  – выпукла и непрерывна на  $\langle A, B \rangle$ ,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$  – непрерывна,  $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  – непрерывна,  $\int_a^b \lambda = 1$ . Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda \varphi\right) \leq \int_a^b \lambda \cdot f(\varphi)$$

**Упражнение 1.7.2.** Доказать.

*Замечание 1.7.3.* Строгое неравенство, если  $f$  строго выпукла и  $\varphi \neq \text{const}$ .

**Теорема 1.7.4** (Неравенство Гельдера).  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f, g \in C[a, b]$ . Тогда

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

*Доказательство.* Пусть  $x_k = \frac{k(b-a)}{n} + a$ ,  $\xi_k = x_k$ . Обозначим  $a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$ ,  $b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow a_k b_k = f(x_k)g(x_k)\Delta x_k$ . Тогда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k \right| \leq \left( \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)g(x_k)\Delta x_k \right| \leq \left( \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)|^p \Delta x_k \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k)|^q \Delta x_k \right)^{\frac{1}{q}}$$

Выполним предельный переход:

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

■

*Следствие 1.7.5* (Неравенство Коши-Буняковского).  $f, g \in C[a, b] \Rightarrow \left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$

**Теорема 1.7.6** (Неравенство Минковского).  $f, g \in C[a, b], p \geq 1$ .

$$\left( \int_a^b |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Def 1.7.7.** Пусть  $f \in C[a, b]$ .

1. Величина

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

называется интегральным средним арифметическим функции  $f$  на  $[a, b]$ .

2. Если  $f > 0$ , то величина

$$\exp \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f \right)$$

называется интегральным средним геометрическим функции  $f$  на  $[a, b]$ .

*Замечание 1.7.8.* Интегральное среднее геометрическое есть пределы при  $n \rightarrow \infty$  последовательности

$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} f(x_k)} = \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k) \right) = \exp \left( \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k) \Delta x_k \right)$$

при  $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ .

**Теорема 1.7.9** (Об интегральных средних).  $f \in C[a, b], f > 0$ . Тогда

$$\exp \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

*Доказательство.* Предельный переход в неравенстве для сумм, либо применить неравенство Йенсена для  $\ln x$ . ■

## 1.8. Несобственные интегралы

**Def 1.8.1.**  $f$  локально интегрируема (по Риману) на промежутке  $E$ , если она интегрируема на каждом отрезке из  $E$ .

*Замечание 1.8.2.* Непрерывность влечет локальную интегрируемость.

**Def 1.8.3.** Пусть  $-\infty < a < b \leq +\infty, f \in R_{loc}[a, b]$ . Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f$  – несобственный интеграл.

$$\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f = \int_a^{\rightarrow b} f$$

если предел существует в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Def 1.8.4.** Несобственный интеграл называется сходящимся, если из  $\mathbb{R}$ .

**Def 1.8.5.** Аналогично, для  $-\infty \leq a < b < +\infty, f \in R_{loc}(a, b]$

$$\int_{\rightarrow a}^b f = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f$$

если предел существует в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Теорема 1.8.6** (Критерий Больцано-Коши сходимости интегралов). Пусть  $-\infty < a < b \leq +\infty, f \in R_{loc}[a, b)$ . Тогда сходимость интеграла  $\int_a^b f$  равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b) \left| \int_{t_1}^{t_2} f \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.*  $\Phi(t) = \int_a^t f$ .  $\int_a^b f$  сходится  $\Leftrightarrow \exists$  конечный  $\lim_{t \rightarrow b-} \Phi(t)$ . Согласно критерию Больцано-Коши существования предела функции

$$\exists \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b) |\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| < \varepsilon$$

и по аддитивности интеграла  $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f$ . ■

*Замечание 1.8.7.* Расходимость  $\int_a^b f \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \Delta \in (a, b) \exists t_1, t_2 \in (\Delta, b) \left| \int_{t_1}^{t_2} f \right| \geq \varepsilon$

*Замечание 1.8.8.* Запись:

$$\int_a^b f = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f = \lim_{t \rightarrow b-} (F(t) - F(a)) = F(b-) - F(a)$$

**Пример 1.8.9.**  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^{+\infty}, \alpha \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^{+\infty}, \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha \leq 1 \end{cases}$$

**Пример 1.8.10.**  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1. \end{cases}$

### 1.8.1. Свойства несобственного интеграла

Будем считать, что  $f$  локально интегрируема на рассматриваемых промежутках.

1. **Аддитивность по промежутку.** Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $\forall c \in (a, b)$  интеграл  $\int_c^b$  тоже сходится и

$$\int_a^b = \int_a^c f + \int_c^b f$$

В обратную сторону, если при  $c \in (a, b)$  интеграл  $\int_c^b f$  сходится, то сходится и интеграл  $\int_a^b f$ .

*Доказательство.*  $\forall t \in (a, b)$   $\int_a^t f = \int_a^c f + \int_c^t f$  – по аддитивности определенного интеграла. Перейдем к пределу при  $t \rightarrow b-$  предел левой части и правой части существует или не существует одновременно. ■

2. Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $\underbrace{\int_t^b f}_{\text{остаток интеграла}} \xrightarrow{t \rightarrow b-} 0$ .

*Доказательство.*

$$\int_t^b f = \int_a^b f - \int_a^t f \xrightarrow{t \rightarrow b-} \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

■

3. **Линейность несобственного интеграла.** Если интегралы  $\int_a^b f, \int_a^b g$  сходятся,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то интеграл  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$  сходится и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

*Доказательство.* Для доказательства надо перейти к пределу в равенстве для частичных интегралов

$$\int_a^t (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^t f + \beta \int_a^t g$$

■

*Замечание 1.8.11.* Если интеграл  $\int_a^b f$  расходится, а интеграл  $\int_a^b g$  сходится, то интеграл  $\int_a^b (f + g)$  расходится. Действительно, если  $f + g$  сходится, то сходится и интеграл от  $f = (f + g) - g$  (?!).

4. **Монотонность несобственного интеграла.** Если интегралы  $\int_a^b f, \int_a^b g$  существуют в  $\overline{R}$ ,  $f \leq g$  на  $[a, b)$ , то

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

*Доказательство.* Перейдем к пределу в неравенстве для частичных пределов

$$\int_a^t f \leq \int_a^t g$$

■

*Замечание 1.8.12.* Аналогично, с помощью предельного перехода, на несобственные интегралы переносятся неравенства Йенсена, Гельдера, Минковского.

5. **Интегрирование по частям в несобственном интеграле.** Пусть  $f, g$  дифференцируемы на  $[a, b)$ ,  $f', g' \in R_{loc}[a, b)$ . Тогда

$$\int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b f' g$$

Если два из этих трех пределов конечны, то третий предел также существует и конечен.

*Доказательство.* Устремим  $t$  к  $b$  слева в равенстве

$$\int_a^t f g' = f g|_a^t - \int_a^t f' g$$

■

6. **Замена переменной в несобственном интеграле.** Пусть  $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [A, B)$  – дифференцируема на  $[\alpha, \beta)$ ,  $\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta)$ , существует  $\varphi(\beta-) \in \overline{R}$ ,  $f \in C[A, B)$ . Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$$

Опять же, если существует один из интегралов, то существует и другой.

*Доказательство.* Обозначим

$$\Phi(t) = \int_{\alpha}^t (f \circ \varphi) \varphi', \quad \Psi(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f$$

По формуле замены переменной в собственном интеграле

$$\Phi(t) = \Psi(\varphi(t))$$

1. Пусть  $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = I \in \overline{R}$ . Докажем, что  $\exists \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi' = I$ , т.е.  $\Phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \beta-]{} I$ . Возьмем  $\{t_n\} : t_n \rightarrow \beta, t_n < \beta$ . Тогда  $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(\beta-), \varphi(t_n) \in [A, B)$ . Поэтому  $\Phi(t_n) = \Psi(\varphi(t_n)) \rightarrow I$ . В силу произвольности выбора  $\{t_n\}$ ,  $\Phi(t) \rightarrow I$  при  $t \rightarrow \beta-$ .
2. Пусть существует интеграл  $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi' = J \in \overline{R}$ . Докажем, что интеграл  $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$  существует, и тогда по пункту 1 будет следовать, что он равен  $J$ . Если  $\varphi(\beta-) \in [A, B)$ , то интеграл собственный. Пусть  $\varphi(\beta-) = B$ . Возьмем  $\{y_n\}, y_n \in [A, B), y_n \rightarrow B$ . Не уменьшая общности, можно считать, что  $y_n \in [\varphi(\alpha), B)$ . Тогда  $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = y_n$  (по теореме Больцано-Коши). Докажем, что  $\gamma_n \rightarrow \beta$ . Пусть  $\beta' \in [\alpha, \beta)$ . Т.к.  $\max_{[\alpha, \beta']} \varphi < \beta$ , а  $\varphi(\gamma_n) \rightarrow B$ , то, начиная с некоторого номера,  $\gamma_n \in (\beta', \beta)$ . Поэтому  $\gamma_n \rightarrow \beta$ , откуда  $\Psi(y_n) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow J$ .

■

**Пример 1.8.13.**  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$ . Пусть  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Тогда  $x = 2 \operatorname{arctg} t, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ . Если  $x = 0$ , то  $t = 0$ . Если  $x = \pi$ , то  $t = +\infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2) \cdot 2 + 1 - t^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 3} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

*Замечание 1.8.14.*  $a < b \in \mathbb{R}$ . Пусть  $x = b - \frac{1}{t}$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} dt$$

**Пример 1.8.15.**

$$\int_1^{+\infty} \cos x dx = \sin x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x - \sin 1 - \text{не существует}$$

## 1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов



**Лм 1.8.16.**  $f \in R_{loc}[a, b), f \geq 0$ . Тогда  $\int_a^b f$  сходится  $\Leftrightarrow F(t) = \int_a^t f$  на  $[a, b)$  ограничена сверху.

*Доказательство.*  $F(t)$  возрастает на  $[a, b)$  ( $t_1, t_2$   $F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f \geq 0$ ).  $\exists \lim_{t \rightarrow b-} F(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow F$  возрастает и  $F$  ограничена сверху. ■

*Замечание 1.8.17.* Если  $f \geq 0$ , то  $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Теорема 1.8.18** (Признак сравнения).  $f, g \in R_{loc}[a, b), f, g \geq 0$

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при } x \rightarrow b-$$

Тогда

1. Если  $\int_a^b g$  сходится, то  $\int_a^b f$  сходится.
2. Если  $\int_a^b f$  расходится, то  $\int_a^b g$  расходится.

*Доказательство.* 1. По определению  $O$ -большого найдутся такие  $\Delta \in (a, b)$  и  $K > 0$ , что  $f(x) \leq Kg(x)$  при всех  $x \in [\Delta, b)$ . Следовательно,

$$\int_{\Delta}^b f \leq K \int_{\Delta}^b g < +\infty$$

то есть остаток интеграла  $\int_a^b f$  сходится, а тогда и сам интеграл  $\int_a^b f$  сходится.

2. Если бы интеграл  $\int_a^b g$  сходил, то по пункту 1 сходил бы и интеграл  $\int_a^b f$ . ■

*Следствие 1.8.19* (Признак сравнения в предельной форме).  $f, g \in R_{loc}[a; b), f \geq 0, g > 0$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0; +\infty]$ . Тогда

1. Если  $l \in [0, +\infty)$  и  $\int_a^b g$  сходится, то  $\int_a^b f$  сходится
2. Если  $l \in (0, +\infty]$  и  $\int_a^b f$  сходится, то  $\int_a^b g$  сходится
3. Если  $l \in (0, +\infty)$ , то  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  сходятся или расходятся одновременно

*Доказательство.* 1.  $\frac{f}{g}$  ограничено в  $(b - \varepsilon; b) \Rightarrow f(x) = O_b(g(x))$  при  $x \rightarrow b- \Rightarrow$  по теореме

$$\int_a^b f \text{ сходится}$$

2. Т.к.  $l > 0$ , то  $f > 0$  в  $(b - \varepsilon; b)$ . Тогда поменяем  $f$  и  $g$  местами в п.1
3. Следует из пунктов 1 и 2. ■

*Следствие 1.8.20.* Интегралы от неотрицательных эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно.

**Упражнение 1.8.21.**  $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^7 x}$

**Пример 1.8.22.** Докажем, что  $f \geq 0$ ,  $\int_a^{+\infty} f$  сходится  $\nRightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

*Доказательство.*  $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left( k - \frac{1}{k^2(k+1)}; k + \frac{1}{k^2(k+1)} \right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus E \\ k, & x = k \\ \text{линейно и непрерывно соединим точки, } & x \in E \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f \\ \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^N \int_{k - \frac{1}{k^2(k+1)}}^{k + \frac{1}{k^2(k+1)}} f(x) dx = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} k \cdot \frac{2}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

■

*Замечание 1.8.23.* Можно построить пример с  $g > 0$ .  $g(x) = f(x) + \frac{1}{x^2}$

## 1.9. Интегралы от знакопеременных функций

**Def 1.9.1.**  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $f \in R_{loc}[a; b)$

$\int_a^b f$  сходится абсолютно, если сходится  $\int_a^b |f|$

*Замечание 1.9.2.* Если  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  сходится абсолютно, то  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$  сходится абсолютно  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

*Доказательство.*  $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| \cdot |f| + |\beta| \cdot |g|$  + признак сравнения для неотрицательных функций.

■

*Замечание 1.9.3.* Если  $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

**Lm 1.9.4.** Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

*Доказательство.*  $\int_a^b |f|$  сходится  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a; b) \int_\Delta^b |f| < \varepsilon$

Тогда  $\left| \int_\Delta^b f \right| < \int_\Delta^b |f| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^\Delta f + \int_\Delta^b f$  сходится по критерию Больцано-Коши.

■

**Def 1.9.5.**

$$x_+ = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad - \text{положительная часть } x$$

$$x_- = \max\{-x, 0\} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \quad - \text{отрицательная часть } x$$

$$x_+ - x_- = x \Rightarrow x_+ = \frac{|x| + x}{2}$$

$$x_+ + x_- = |x| \Rightarrow x_- = \frac{|x| - x}{2}$$

$$0 \leq x_{\pm} \leq |x|, f_{+} = \max\{f; 0\}, f_{-} = \max\{-f; 0\}$$

Второе доказательство леммы.  $\int_a^b |f|$  сходится  $\Rightarrow_{0 \leq f_{\pm} \leq |f|} \int_a^b f_+$  и  $\int_a^b f_-$  — сходятся  $\Rightarrow_{f=f_+-f_-} \int_a^b f$  сходится

*Замечание 1.9.6.* Обратное утверждение к лемме неверно:  $\int_a^b f$  сходится  $\nRightarrow \int_a^b |f|$  сходится.

**Def 1.9.7.** Если  $\int_a^b f$  сходится, а  $\int_a^b |f|$  расходится, то  $\int_a^b f$  называют условно сходящимся.

*Замечание 1.9.8.*  $\int_a^b f$  сходится абсолютно,  $\int_a^b g$  сходится условно  $\Rightarrow \int_a^b (f+g)$  сходится условно, т.к.  $g = (f+g) - f$ .

**Теорема 1.9.9** (Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов).  $f \in C[a; b), g \in C^1[a; b], g$  монотонна.

1. **Признак Дирихле.** Если функция  $F(t) = \int_a^t f$  ограничена, а  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-} 0$ , то интеграл  $\int_a^b fg$  сходится.
2. **Признак Абеля.** Если интеграл  $\int_a^b f$  сходится, а  $g$  ограничена, то интеграл  $\int_a^b fg$  сходится.

*Доказательство.* 1. Проинтегрируем по частям:

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg \Big|_a^b - \int_a^b Fg'$$

Двойная подстановка обнуляется, поэтому сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла  $\int_a^b F g'$ . Докажем, что  $\int_a^b F g'$  сходится абсолютно.

$$\int_a^b |Fg'| \leqslant \int_{|F| \leqslant K}^b |g'| = K \left| \int_a^b g' \right| = K \cdot |g|_a^b = K|g(a)|$$

2.  $g$  ограничена и монотонна  $\Rightarrow \alpha = \lim_{x \rightarrow b-} g(x)$   
 Функция  $g - \alpha$  монотонна,  $\xrightarrow{x \rightarrow b-} 0 \Rightarrow \int_a^b f(g - \alpha)$  сходится по признаку Дирихле. Поэтому  
 интеграл  $\int_a^b f(g - \alpha)$  сходится, а интеграл  $\int_a^b fg$  сходится как сумма двух сходящихся:

$$\int_a^b fg = \int_a^b f(g - \alpha) + \int_a^b f \cdot \alpha$$

*Замечание 1.9.10.* Можно ослабить условия:  $f \in R_{loc}[a; b)$ ,  $g$  монотонна на  $[a; b)$

**Def 1.9.11.** *v.p.*  $\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right)$  – *главное значение*.

**Пример 1.9.12.**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx &= +\infty\end{aligned}$$

**Пример 1.9.13.** 1.  $\int_1^{+\infty} f(x) \cdot \sin x dx, f(x) \geq 0$ .

- Если  $\int_1^{+\infty} f$  сходится, то  $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x dx$  сходится абсолютно.  
 $0 \leq |f(x) \cdot \sin x| \leq |f(x)| = f(x)$

- Если  $\int_1^{+\infty} f$  расходится  
 $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1.  $l = 0$  и  $f$  монотонна, то признак Дирихле и  $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x dx$  – сходится.

Но:  $\int_1^{+\infty} |f(x) \sin x| dx$  не сходится.

$$\begin{aligned}|\sin x| \geq \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \int_1^{\infty} f(x) |\sin x| dx &\geq \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} f(x) dx}_{\text{расходится}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} f(x) \cos 2x dx}_{\text{сходится}}\end{aligned}$$

2.  $l > 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f \sin x dx$  расходится.

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) \cdot \sin x dx \geq \frac{1}{2} \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \min\{f(a_k), f(b_k)\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} \cdot l = \varepsilon > 0$$

2.  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  сходится условно.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$  сходится абсолютно по признаку сравнения.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  сходится условно

$\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \sin x dx$  расходится

3. Нельзя пользоваться эквивалентностью в случае знакопеременной функции.

$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$  – расходится

$f(x) \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  при  $x \rightarrow \infty$   $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  сходится.

Выделим главную часть:  $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left( 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + r(x) \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} +$   
сх-ся

$$\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x}}_{\text{расходится}} + \underbrace{\frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}}}_{\text{сх-ся абс-но}} + \underbrace{\frac{\sin^4 x}{x^2}}_{\text{сх-ся абс.}} + |q(x)|, \quad |q(x)| \leq \frac{c}{x^2}$$

$$\left( \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + r(t), t \rightarrow 0 \right)$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

При  $x \rightarrow 0 \sin x \sim x$  и  $\sin x > 0$  на  $(0; 1)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$$

$$5. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} \text{ расходится. Но сходится в смысле главного значения.}$$

*Замечание 1.9.14.*  $\int_1^{+\infty} f \cdot g, f$  – периодична с периодом  $T > 0, g$  – монотонна  $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Тогда

$$1. \text{ Если } \int_1^{+\infty} g \text{ сходится} \Rightarrow \int_1^{+\infty} fg$$

$$2. \text{ Если } \int_1^{+\infty} g \text{ расходится, то } \left( \int_1^{+\infty} fg \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_1^{1+T} f = 0 \right)$$

*Доказательство.* Упражнение. ■

*Следствие 1.9.15.*  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  расходится

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx \text{ сходится}$$

## 1.10. Длина, площадь и объём

### 1.10.1. Площадь

**Def 1.10.1.**  $\|x\|, x \in \mathbb{R}^n$  – длина вектора.

$$\|A - B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i - B_i)^2}$$

**Def 1.10.2.** Движение – отображение  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , сохраняющее расстояния.

$$\|A - B\| = \|U(A) - U(B)\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^n$$

**Def 1.10.3.** Площадь – функционал  $S: P \rightarrow [0; +\infty)$ , где  $\{P\}$  – множество квадратуемых фигур из  $\mathbb{R}^2$

**Теорема 1.10.4** (Свойства площади). 1. Аддитивность:  $P_1, P_2$  – квадратуемы и  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ .

Тогда  $P_1 \cup P_2$  – квадратуемая и

$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$$

2. Нормированность на прямоугольниках: площадь прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  равна  $ab$

3. Инвариантность относительно движений:  $S(U(P)) = S(P)$