Алгебра 2 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 10 марта 2022 г. в 13:49

Содержание

Раздел #1: Системы линейных уравнений

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$A = (a_{ij})$ – матрица коэффициентов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Def 1.0.1. *Решение СЛУ* $(*)$ *называется* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$: *при* $x_i = \alpha_i$ *все уравнения становятся верными.*

Def 1.0.2. *СЛУ* $(*)$ *совместна, если* $\exists$ *хотя бы одно решение. Иначе - несовместна.*

1.1. Ранг матрицы

$A - m \times n, A = (A_1, A_2, \dots, A_m), A_i$ – строки.
$A = (A^1, A^2, \dots, A^n), A^j$ – столбцы.

Def 1.1.1. *Строчным (столбцовым) рангом матрицы* A *называется максимальное число ЛНЗ строк (столбцов).*
Иначе, количество элементов в базисе $\langle A_1, \dots, A_m\rangle(\langle A^1, \dots, A^n\rangle)$.

Теорема 1.1.2. Строчный и столбцовый ранги совпадают.

Обозначение: $\operatorname{rank} A$.

Def 1.1.3. *Минором матрицы* $A - m \times n$ k*-го порядка называется определитель, составленный из элементов матрицы* A*, стоящих на* k *выбранных строках и на* k *выбранных столбцов.*

Пример 1.1.4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 5 & 9 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Если вы выберем вторую и третью строку, а также первый и последний столбец, то минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Теорема 1.1.5. Ранг матрицы A равен наибольшему порядку минора, отличного от нуля.

Теорема 1.1.6 (Связь определителя с рангом матрицы)**.** $A - n \times n$. Тогда $\operatorname{rank} A < n \Leftrightarrow \det A = 0$.

Доказательство. $\Rightarrow$. $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow$ строки $A_1, \dots, A_n$ ЛЗ, т.е. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = 0$ (α_i не все равны нулю). Пусть $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}A_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}A_n$. Обнулим первую строку: прибавим к ней A_2, умноженную на $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, A_3, умноженную на $-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ и т.д. Поскольку теперь первая строка целиком нулевая, то $\det A = 0$.

$\Leftarrow$. Индукция $n = 1 \Rightarrow a_{11} = 0$. $n - 1 \to n$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Можем считать, что $A^1 \neq 0, a_{11} \neq 0$. Домножим первую строку на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавляем ко второй строке. Затем домножаем первую строку на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и прибавляем ко третьей строке и т.д.

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

По предположению $A'_2, ..., A'_n$ – ЛЗ. $\begin{cases} A'_2 = A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot A_1 \\ \cdots \\ A'_n = A_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} \cdot A_1 \end{cases}$.

$0 = \alpha_2 A'_2 + ... + \alpha_n A'_n = (...)A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + ... + \alpha_n A_n \Rightarrow A_1, ..., A_n$ – ЛЗ $\Rightarrow \operatorname{rank} A < n$. ■

Def 1.1.7. *Элементарными преобразованиями над строками (столбцами) называется*

1. *Перестановка строк (столбцов).*
2. *Умножение строки (столбца) на* $\lambda \neq 0$.
3. *Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на* $\lambda \neq 0$.

Теорема 1.1.8. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Доказательство. 1, 2 – очевидно. $(A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n) \to (A_1, ..., A_i + \lambda A_j, ..., A_j, ..., A_n)$ ■

Def 1.1.9. *Матрица называется трапецевидной, если у неё в* $\forall$ *ненулевой строке число нулей слева различно.*

Замечание 1.1.10. rank трапецевидной матрицы равен числу ненулевых строк.

Теорема 1.1.11 (О вычислении ранга)**.** Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к трапецевидной.

1.2. Структура решений СЛУ

Def 1.2.1. *СЛУ (*) называется однородной, если все свободные члены равны нулю.*

Def 1.2.2. *Нулевое решение однородной СЛУ называется тривиальным. Любое другое решение – нетривиальным.*

Lm 1.2.3. Пусть Y, Z – решения $AX = 0 \Rightarrow \alpha Y + \beta Z$ – тоже решение, $\alpha, \beta \in K$.

Доказательство.
$$AY = 0, AZ = 0 \Rightarrow A(\alpha Y + \beta Z) = \alpha AY + \beta AZ = 0$$

∎

Теорема 1.2.4 (Структура решений однородной СЛУ). $AX = 0, A - m \times n, n$ – число неизвестных, $r = \operatorname{rank} A \Rightarrow \exists n - r$ ЛНЗ решений $X_1, ..., X_{n-r} : \forall$ решение $X = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}$.

Доказательство. $A = (A^1, ..., A^n)$, $A^1, ..., A^r$ – ЛНЗ столбцы $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A_{r+1} = \beta_{r+1\ 1} A^1 + ... + \beta_{r+1\ n} A^r \\ ... \\ A^n = \beta_{n\ 1} A^1 + ... + \beta_{n\ r} A^r \end{cases}$$

$AX = 0 \Leftrightarrow x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = 0$.

$X_1 = \begin{pmatrix} \beta_{r+1\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{r+1\ r} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \beta_{r+2\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{r+2\ r} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., X_{n+r} = \begin{pmatrix} \beta_{n\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{n\ r} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$ – решения.

Пусть $Z = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_r^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ – решение. Рассмотрим $Y = Z + x_{r+1}^* X_1 + x_{r+2}^* X_2 + ... + x_n^* X_{n-r}$. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – решение $\{y_1 A_1 + ... + y_r A_r = 0\}$. Но $A_1, ..., A_r$ – ЛНЗ $\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = Z + x_{r+1}^* X_1 + x_{r+2}^* X_2 + ... + x_n^* X_{n-r}$. ∎

Def 1.2.5. *$\forall n - r$ ЛНЗ решений однородной системы линейных уравнений называется* ***фундаментальной системой решений****, решение вида $X = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}$ –* ***общее решение****.*

1.3. Неоднородные СЛУ

$AX = B, A - m \times n, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$ – расширенная матрица $m \times (n+1)$.

Теорема 1.3.1 (Кронекера-Капелли). $(*)$ – совместна $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$.

Доказательство. $\Rightarrow$. $AX = B$ – совместна $\Rightarrow \exists$ решение $x_1 A^1 + ... + x_n A^n = B \Rightarrow B$ – линейная комбинация $A^1, ..., A^n \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$.
$\Leftarrow$. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = r \Rightarrow \exists A^1, ..., A^r$ – ЛНЗ $\Rightarrow A^1, ..., A^r, B$ – ЛЗ $\Rightarrow B = \alpha_1 A^1 + ... + \alpha_r A^r$, не все $\alpha_i = 0 \Rightarrow (\alpha_1, ..., \alpha_r, 0, ..., 0)$ – решение системы. ∎

Теорема 1.3.2 (О структуре решений неоднородной СЛУ)**.** $AX = B, \operatorname{rank} A = r, n$ – число неизвестных, система совместна. X_* – какое-то решение СЛУ, $X_1, ..., X_{n-r}$ – фундаментальные решения $AX = 0$. Тогда любое решение $(*)$ имеет вид $X = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r} + X_*, \alpha_1, ..., \alpha_{n-r} \in K$.

Доказательство. $AX_* = B \Rightarrow AX = AX_* \Rightarrow A(X - X_*) = 0 \Rightarrow X - X* = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}$. ■

Пример 1.3.3 (Решение СЛУ методом Гаусса)**.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4-\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6-\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Раздел #2: Линейные отображения векторных пространств

Def 2.0.1. *V, W – векторные пространства над K. Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если:*

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in V$
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)\ \forall x \in V, \alpha \in K$

Замечание 2.0.2. $1, 2 \sim f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)\ \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in K$.

Def 2.0.3. $\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W$ *– линейные*$\}$

Lm 2.0.4. $\mathrm{Hom}(V, W)$ – векторное пространство над K.

Доказательство. $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W), (f+g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \Rightarrow f + g, \alpha f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. ■

Def 2.0.5. $f \in \mathrm{Hom}(V, W), \ker f = \{x \in V : f(x) = 0\}$ *– ядро отображения* f, $\mathrm{Im}\, f = \{f(x), x \in V\}$ *– образ* f.

Lm 2.0.6. $\ker f \subset V, \mathrm{Im}\, f \subset W$ – подпространства.

Доказательство. $x, y \in \ker f, f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in \ker f$. Аналогично, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0 \Rightarrow \alpha x \in \ker f\ \forall \alpha \in K \Rightarrow \ker f$ – подпространство. ■

Упражнение 2.0.7. $\mathrm{Im}\, f$ – подпространство.

Теорема 2.0.8. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

1. f – инъективно $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.
2. f – сюръективно $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = W$.

Доказательство. $\Leftarrow$. $x_1 \neq x_2$, если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$!?
$\Rightarrow$. Пусть $x \in \ker f, x \neq 0 \Rightarrow f(x) = f(0) = 0$!?. ■

2.1. Матрица линейного отображения

$e_1, \ldots, e_n$ – базис $V, e'_1, \ldots, e'_m$ – базис $W, f \in \mathrm{Hom}(V, W)$
$x \in V, x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, x_i \in K, f(x) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n) \Leftrightarrow$ задать f значит задать $f(e_i),\ i = 1, \ldots, n$.

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11} e'_1 + a_{21} e'_2 + \ldots + a_{m1} e'_m \\ \ldots \\ f(e_n) = a_{1n} e'_1 + a_{2n} e'_2 + \ldots + a_{mn} e'_m \end{cases}$$

Def 2.1.1. *Матрицей $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_m$ назыается*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{pmatrix}$$

Теорема 2.1.2. 1. $\mathrm{Hom}(V,W)$ взаимно-однозначно соответствует $M(m,n,K)$.

2. $e_1,...,e_n$ – базис V, $e'_1,...,e'_m$ – базис W, $x\in V\to X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, f(x)\in W\to Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}, f\to A$ $\Rightarrow AX=Y$.

Доказательство. 1. $f\to A$ отображение однозначно определяется $f(e_i)\Rightarrow A$ определена однозначно. С другой стороны, взяв произвольную матрицу B, можем построить по ней отображение g.

2. $f\to A=(a_{ij}), 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m$.

$$f(x)=f(x_1e_1+...x_ne_n)=x_1f(e_1)+...+x_nf(e_n)=$$
$$=x_1(a_{11}e'_1+a_{21}e'_2+...+a_{m1}e'_m)+...+x_n(a_{1n}e'_1+a_{2n}e'_2+...+a_{mn}e'_m)=$$
$$=\underbrace{(a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n)}_{y_1}e'_1+...+\underbrace{(a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n)}_{y_m}e'_m\Rightarrow Y=AX$$

■

Следствие 2.1.3. 1. $\dim\mathrm{Hom}(V,W)=\dim V\cdot\dim W$

2. $\alpha,\beta\in K, f,g\in\mathrm{Hom}(V,W), f\to A, g\to B$ в фиксированных базисах $\Rightarrow\alpha f+\beta g\to\alpha A+\beta B$.

3. $f:V\to W, g:W\to U\Rightarrow g\circ f:V\to U, g\circ f(x)=g(f(x))$. Фиксируем базисы, $f\to A, g\to B\Rightarrow$ $g\circ f\to BA$

Доказательство. 1. Соответствие матриц.

2. $(\alpha f+\beta g)(e_i)=\alpha f(e_i)+\beta g(e_i)\in\alpha A+\beta B$.

3. $V\to n, W\to l, U\to m, A\to l\times n, B\to m\times l$
$g\circ f(e_i)=g(\sum_{k=1}^{l}a_{ki}e_k)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}g(e'_k)=\sum_{k=1}^{l}a_{ki}\sum_{j=1}^{m}b_{jk}e''_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}b_{jk}a_{ki}e''_j$, где $b_{jk}a_{ki}\to BA$. ■

Теорема 2.1.4. $f:V\to W,\ \dim V,\dim W<\inf$

$$\Rightarrow\dim\ker f+\dim\mathrm{Im}\,f=\dim V$$

Доказательство. $\ker f\subset V, e_1,...,e_k$ - базис $\ker f$. Дополним до базиса $V: e_1,...,e_k,e_{k+1},...,e_n$ – базис V.
$x\in V, f(x)\in\mathrm{Im}\,f\ \ f(x)=x_{k+1}f(e_{k+1})+...+x_nf(e_n)\in\mathrm{Im}\,f$
$f(e_1)=...=f(e_k)=0\Rightarrow\mathrm{Im}\,f=\langle f(e_{k+1}),...,f(e_n)\rangle$. Надо доказать, что $f(e_{k+1}),...,f(e_n)$ – ЛНЗ.
Предположим обратное. $\alpha_{k+1}f(e_{k+1})+...+\alpha_nf(e_n)=0\Rightarrow f(\alpha_{k+1}e_{k+1}+...+\alpha_ne_n)=0\Rightarrow\alpha_{k+1}e_{k+1}+...+\alpha_ne_n\in\ker f=\langle e_1,...,e_k\rangle$ – невозможно.
$\dim\ker f=k, \dim V=n, \dim\mathrm{Im}\,f=n-k$. ■

2.2. Линейные операторы

Def 2.2.1. *Линейным оператором называется линейное отображение $a:V\to V$, т.е. $a\in$* $\mathrm{Hom}(V,V)$.
Обозначается $EndV=$ $\mathrm{Hom}(V,V)$.

Def 2.2.2. *Тождественным отображением называется отображение*

Def 2.2.3.

Пример 2.2.4. 1. Нулевой оператор. $0 \in EndV$. $0(x) = 0$. $0 \to \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$

2. Оператор подобия. $\forall x \in V\ ax = \lambda x \to \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$

3. Оператор поворота в $\mathbb{R}^2$. $z \to ze^{i\varphi}$ – поворот на φ. Зафиксируем базис – $1, i \Rightarrow a(1) = \cos\varphi + i\sin\varphi, a(i) = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -\sin\varphi + i\cos\varphi \ \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

4. Оператор дифференцирования. $V = \mathbb{R}[x]$. $\frac{d}{dx}f \to f'$, зафиксируем базис – $1, x, x^2, x^3$.

   $\frac{d}{dx}(1) = 0, \frac{d}{dx}(x) = 1, \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$. Тогда матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Возьмём другой базис – $1, x+1, x^2+x+1, x^3+x^2+x+1$.
   Посчитаем значения: $\frac{d}{dx}(1) = 0, \frac{d}{dx}(x+1) = 1, \frac{d}{dx}(x^2+x+1) = 2x+1, \frac{d}{dx}(x^3+x^2+x+1) = 3x^2+2x+1$.

   Матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Def 2.2.5. $(e_i), (e'_i)$ *– базисы* V*,* $\dim V = n$*. Разложим* $\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ \cdots \\ e'_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases}$*. Тогда матрица вида* $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ *называется матрицей перехода от базиса* (e_i) *к* (e'_i)*.*

Теорема 2.2.6 (Преобразование координат вектора при переходе к другому базису)**.** V – векторное пространство над полем K, $(e_i), (e'_i)$ – базисы V, $x \in V$, $x \to X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора в базисе (e_i). $x \to X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора в базисе $(e'_i), C$ – матрица перехода от (e_i) к (e'_i).

1. $X = CX'$
2. C – обратима $(\det C \neq 0)$

Доказательство. 1. $x = x_1'e_1' + \ldots + x_n'e_n' = x_1'(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n) + \ldots + x_n'(c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n) = \underbrace{(c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \ldots + c_{1n}x_n')}_{x_1} e_1 + \ldots + \underbrace{(c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \ldots + c_{nn}x_n')}_{x_n} e_n$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

2. $\forall X \ X = CX'$ по доказанному, тогда $X = CX' = CDX \Rightarrow CD = E \Rightarrow \det C \neq 0$.

■

Теорема 2.2.7 (Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису). V – векторное пространство, $\dim V = n, a \in EndV$, фиксируем базисы $(e_i), (e_i')$, A – матрица оператора в базисе (e_i), A' – в базисе (e_i'), C – матрица перехода от (e_i) к (e_i').

$$\Rightarrow A' = C^{-1}AC$$