

# Матанализ 1 семестр ПИ,

## Лекции

Собрано 24 ноября 2021 г. в 11:48

---

## Содержание

<b>1. Аксиомы вещественных чисел</b>	<b>1</b>
1.1. Аксиомы сложения ( $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )	1
1.2. Аксиомы умножения ( $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )	1
1.3. Дистрибутивность умножения относительно сложения	1
1.4. Аксиомы порядка ( $\forall a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leq b$ или $b \leq a$ )	1
1.5. Ещё несколько определений	1
1.6. Аксиома полноты	1
1.7. Следствия из аксиом множества действительных чисел	2
<b>2. Принцип математической индукции</b>	<b>4</b>
<b>3. Супремум и инфимум</b>	<b>5</b>
<b>4. Отображения</b>	<b>6</b>
<b>5. Последовательности</b>	<b>7</b>
5.1. Предел последовательности и его свойства	7
5.2. Монотонные последовательности	8
5.3. Теорема об арифметических действиях с пределами	9
5.4. Арифметические действия с бесконечностями	10
5.5. Неравенство Бернулли	11
<b>6. Пределы последовательностей</b>	<b>12</b>
6.1. Число $e$	12
6.2. Теорема Штольца	13
6.3. Подпоследовательности	14
<b>7. Ряды</b>	<b>17</b>
7.1. Ряды	17
7.2. Свойства рядов	18
<b>8. Функции</b>	<b>19</b>
8.1. Свойства пределов функций	19
8.2. Непрерывные функции	22
<b>9. Пределы функций</b>	<b>23</b>
9.1. $\varepsilon$ -окрестности	23
9.2. Предел функции	23
<b>10. Непрерывность</b>	<b>25</b>

<b>11. Элементарные функции</b>	<b>28</b>
11.1. Постоянная . . . . .	28
11.2. Степенная функция . . . . .	28
11.3. Показательная функция . . . . .	29
11.3.1. Свойства показательной функции . . . . .	30
11.4. Логарифм . . . . .	31
11.4.1. Свойства логарифма . . . . .	31
11.5. Тригонометрические функции . . . . .	32
11.5.1. Обратные тригонометрические функции . . . . .	33
<b>12. Замечательные пределы</b>	<b>34</b>
<b>13. Сравнение функций</b>	<b>36</b>
<b>14. Дифференциальное исчисление</b>	<b>39</b>
14.1. Связь с физикой . . . . .	40
14.2. Связь с геометрией . . . . .	40
14.3. Бесконечные производные . . . . .	40
14.4. Правила дифференцирования . . . . .	41
14.5. Формулы для вычисления производных . . . . .	42
14.6. Теоремы о средних . . . . .	44
14.7. Производные высших порядков . . . . .	48

## Раздел #1: Аксиомы вещественных чисел

### 1.1. Аксиомы сложения ( $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

1.  $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a + b = b + a$  (коммутативность сложения)
2.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность сложения)
3.  $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a + 0 = a$  (существование нуля)
4.  $\forall a \in \mathbb{R} \rightarrow \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$  ( $(-a)$  — противоположное число для  $a$ )

### 1.2. Аксиомы умножения ( $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

1.  $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a \cdot b = b \cdot a$  (коммутативность умножения)
2.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  (ассоциативность умножения)
3.  $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \cdot x = x$  (существование единицы)
4.  $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \rightarrow \exists \frac{1}{a} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$  ( $\frac{1}{a}$  — обратное число для  $a$ )

### 1.3. Дистрибутивность умножения относительно сложения

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

### 1.4. Аксиомы порядка ( $\forall a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leq b$ или $b \leq a$ )

1.  $\forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a \leq a$  (рефлексивность)
2.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b, b \leq c \rightarrow a \leq c$  (транзитивность)
3.  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b, b \leq a \rightarrow a = b$  (антисимметричность)
4.  $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a \leq b$  или  $b \leq a$
5.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c$
6.  $\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 \leq a, 0 \leq b \rightarrow 0 \leq a \cdot b$

### 1.5. Ещё несколько определений

- $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$  (определение  $\geq$ )
- $a < b \Leftrightarrow a \leq b$  и  $a \neq b$  (определение  $<$ )
- $a > b \Leftrightarrow b < a$  (определение  $>$ )

### 1.6. Аксиома полноты

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset, B \neq \emptyset : \forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y \rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$$

## 1.7. Следствия из аксиом множества действительных чисел

*Следствие 1.7.1.* Число 0 единственно

*Доказательство.* Предположим обратное:  $\exists 0' \neq 0$ , тогда рассмотрим следующее:

$$0' + 0 = 0'$$

$$0 + 0' = 0$$

Теперь заметим, что левые части равны по аксиоме о коммутативности сложения  $\Rightarrow 0' = 0$ , что противоречит предполагаемому. ■

*Следствие 1.7.2.* Число 1 единственно

Доказательство аналогично доказательству единственности нуля, только используется умножение вместо сложения.

*Следствие 1.7.3.*  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

*Доказательство.*

$$a = b \Rightarrow a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$a = b \Rightarrow b \leq a \Rightarrow b + c \leq a + c$$

$$a + c \leq b + c, b + c \leq a + c \Rightarrow a + c = b + c$$

В обратную сторону аналогично:

$$a + c = b + c \Rightarrow a + c \leq b + c \Rightarrow a \leq b$$

$$a + c = b + c \Rightarrow b + c \leq a + c \Rightarrow b \leq a$$

$$a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$$

■

*Следствие 1.7.4.*  $\forall a \in \mathbb{R} (-a)$  единственно.

*Доказательство.* Пусть верно обратное:  $\exists a \in \mathbb{R} : \exists (-a)_1, (-a)_2 \in \mathbb{R} : (-a)_1 \neq (-a)_2$

$$a + (-a)_1 = a + (-a)_2 = 0$$

Добавим к обеим частям  $(-a)_1$ :

$$(-a)_1 = (-a)_2$$

Пришли к противоречию. ■

*Следствие 1.7.5.*  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \rightarrow -b \leq -a$

*Доказательство.*

$$a + ((-a) + (-b)) \leq b + ((-a) + (-b))$$

$$-b \leq -a$$

■

*Следствие 1.7.6.*  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \cdot x = 0$

*Доказательство.*

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = x \cdot (0 + 0) + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0$$

■

*Следствие 1.7.7.*  $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow (-x) = (-1) \cdot x$

*Доказательство.* Предположим обратное:  $\exists x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = b, b \neq (-x)$

$$(-1) \cdot x + 1 \cdot x = b + 1 \cdot x$$

$$x \cdot (1 + (-1)) = b + 1 \cdot x$$

$$b + x = 0$$

$$b = -x$$

Противоречие.

■

*Следствие 1.7.8.*  $0 < 1$

*Доказательство.* Предположим обратное:  $0 \geq 1$ , вариант  $0 = 1$  сразу отпадает из-за аксиомы о существовании единицы, значит  $0 > 1 \Leftrightarrow -1 > 0$

Пусть  $x \in \mathbb{R}, x > 0$ , тогда  $(-1) \cdot x \geq 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot x + 1 \cdot x \geq 1 \cdot x \Leftrightarrow 0 \geq x$

Противоречие.

■

**Теорема 1.7.9** (Теорема о вложенных отрезка). Пусть  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$ . Тогда

$$\exists a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

*Доказательство.*  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1$

Значит,  $\forall k, m \rightarrow a_k \leq b_m$

Пусть  $A = \{a_n\}, B = \{b_n\}$ . По аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall k, m \in \mathbb{N} \rightarrow a_k \leq c \leq b_m \Rightarrow c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

■

Замечания: 1)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0; \frac{1}{n}] = \emptyset$ . Важно, что именно отрезки, а не интервалы или полуинтервалы.

2)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n; +\infty) = ?$

3) Без аксиомы полноты не работает. Например

$$[1.4; 1.5] \supset [1.41; 1.42] \supset \dots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}, \text{ но не в } \mathbb{Q}$$

## Раздел #2: Принцип математической индукции

$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  - утверждения. Если

1.  $P_1$  верно - база
2.  $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow P_n \Rightarrow P_{n+1}$  - индукционный переход

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow P_n$ .

**Def 2.0.1.**  $M \subset \mathbb{R}$  - индуктивное, если  $1 \in M \wedge (x \in M \Rightarrow x + 1 \in M)$ .

**Def 2.0.2.**  $\mathbb{N}$  - минимальное индуктивное подмножество  $\mathbb{R}$

**Def 2.0.3** (Сдвиг индекса суммирования).

$$\sum_{n=m}^k a_n = \sum_{j=m+p}^{k+p} a_{j-p}, p \in \mathbb{Z}$$

**Def 2.0.4.**  $k!!$  - произведение целых чисел до  $k$  включительно одной четности с  $k$ .

**Def 2.0.5** (Биномиальные коэффициенты).

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

**Теорема 2.0.6** (Формула бинома Ньютона). Пусть  $n \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

*Доказательство.*  $n = 0 \rightarrow 1 = 1$ , верно

Индукционный переход:

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \left( \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k+1} = C_n^n x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + C_n^k x^k y^{n+1-k}) + C_n^0 x^0 y^{n+1} = \\ &= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) x^k y^{n+1-k} + C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k} \end{aligned}$$

■

## Раздел #3: Супремум и инфимум

**Def 3.0.1.**  $E \subset \mathbb{R}$  - ограниченное сверху, если  $\exists A : \forall x \in E \rightarrow x \leq A$

**Def 3.0.2.**  $E \subset \mathbb{R}$  - ограниченное снизу, если  $\exists B : \forall x \in E \rightarrow x \geq B$

**Def 3.0.3.**  $E \subset \mathbb{R}$  - ограниченное, если оно ограничено и снизу, и сверху.

**Def 3.0.4.**  $M \in \mathbb{R}$  называется максимумом мн-ва  $E$ , если  $\forall x \in E \rightarrow x \leq M \wedge M \in E$

**Def 3.0.5.**  $K \in \mathbb{R}$  называется минимумом мн-ва  $E$ , если  $\forall x \in E \rightarrow x \geq K \wedge K \in E$

**Теорема 3.0.6** (Существование минимума и максимума у конечного множества из  $\mathbb{R}$ ). Во всяком конечном непустом подмножестве  $\mathbb{R}$  есть наибольший и наименьший элементу

*Доказательство.*  $n = 1$  - количество элементов (База)

Индукционный переход:  $\exists \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = C$

Добавим  $x_{n+1}$ : если  $x_{n+1} > C \Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = x_{n+1}$

если  $x_{n+1} \leq C \Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = C$  ■

*Следствие 3.0.7.*  $\forall E \neq \emptyset \wedge E \subset \mathbb{Z} \wedge E$  - огр.  $\rightarrow \exists \max E \wedge \min E$

*Следствие 3.0.8.*  $\forall E \subset \mathbb{N}, E \neq \emptyset \rightarrow \exists \min E$

Далее везде  $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$

**Def 3.0.9.** Пусть  $E$  ограничено сверху, тогда  $\sup E$  - наименьшая из верхних границ. (точная верхняя граница)

**Def 3.0.10.** Пусть  $E$  ограничено снизу, тогда  $\inf E$  - наибольшая из нижних границ. (точная нижняя граница)

**Теорема 3.0.11.**  $E \neq \emptyset$ . Если  $E$  ограничено снизу, то  $\exists! \inf E$

*Доказательство.* Пусть  $A$  - множество всех нижних границ  $E (A \neq \emptyset)$

$\forall a \in A, b \in E \rightarrow a \leq b$

Тогда по аксиоме полноты  $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \ \forall a \in A, b \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c \leq b \ \forall b \in E - c - \text{нижняя граница,} \\ c \geq a \ \forall a \in A - c - \text{наибольшее} \end{cases}$  ■

**Def 3.0.12.**

$$l = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \rightarrow x \leq l \\ \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists y \in E : y > l - \varepsilon \end{cases}$$

$$m = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \rightarrow x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists y \in E : y < m + \varepsilon \end{cases}$$

Если  $E$  не ограничено сверху, то  $\sup E = +\infty$

Если  $E = \emptyset$ , то чаще всего  $\sup E$  и  $\inf E$  не определены, но иногда  $\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$

*Утверждение 3.0.13.*  $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$ . Тогда если  $A$  ограничено снизу, то  $\inf A \leq \inf B$

*Доказательство.* Если  $C$  - нижняя граница  $A$ , то  $\forall x \in A \rightarrow C \leq x \Rightarrow \forall y \in B \rightarrow C \leq y \Rightarrow C$  - нижняя граница  $B \Rightarrow \inf A$  - тоже нижняя граница  $B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$  ■

*Утверждение 3.0.14.*  $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$ . Тогда если  $A$  ограничено сверху, то  $\sup A \geq \sup B$

---

## Раздел #4: Отображения

---

$f: A \rightarrow B$   $f(x) = y$

$y$  – образ элемента  $x$

$x$  – прообраз  $y$

$f(A)$  – образ множества  $A$

$f^{-1}(B)$  – прообраз множества  $B$

$G_f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$

**Def 4.0.1.**  $f: A \rightarrow B$ . Если  $f(A) = B$ , то  $f$  сюръективно.

**Def 4.0.2.**  $f: A \rightarrow B$ . Если  $(x_1 \neq x_2 \in A) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$ , то  $f$  инъективно.

**Def 4.0.3.** Биекция -  $f$  инъективно и сюръективно.

**Def 4.0.4** (Композиция).  $g(x), f(x)$ .

$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$

$f: X \rightarrow Y$   $g: Y_0 \rightarrow Z, f(x) \in Y_0$

**Def 4.0.5.**  $id_x$  - тождественное отображение:  $f(x) = x$

**Def 4.0.6.**  $f: X \rightarrow Y, X_0 \subset X$

$f|_{X_0}$  - сужение отображения  $f$  на  $X_0$



## Раздел #5: Последовательности

**Def 5.0.1.** Последовательность — это отображение  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

**Пример 5.0.2.**  $x_n = n^2 : x_n = \{1, 4, 9, \dots\}$

### 5.1. Предел последовательности и его свойства

**Def 5.1.1.** Предел последовательности — это такое число  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , что

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$$

Также говорят, что вне любого интервала, содержащего  $l$ , лежит лишь конечно число элементов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

**Пример 5.1.2.**  $x_n = \frac{1}{n}, \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Тогда  $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right]$

**Замечание 5.1.3.**  $N$  необязательно наименьшее.

**Def 5.1.4.** Последовательность называется **сходящейся**, если она имеет конечный предел.

**Def 5.1.5.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow x_n > E$

**Def 5.1.6.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow x_n < E$

**Def 5.1.7** (Беззнаковая бесконечность).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow |x_n| > E$$

**Def 5.1.8.** Последовательность называется бесконечно большой, если она стремится к бесконечности

**Def 5.1.9.** Последовательность называется бесконечно малой, если она стремится к нулю

Свойства пределов последовательности:

1. Последовательность не может иметь двух различных пределов.

*Доказательство.* Пусть  $a \neq b$  — пределы,  $a < b$ . Возьмем  $\varepsilon = \left(\frac{b-a}{3}\right)$ . Тогда по определению предела вне  $\varepsilon$ -окрестности  $a$  лежит конечно число членов последовательности, и вне  $\varepsilon$ -окрестности  $b$  лежит конечно число членов последовательности  $\Rightarrow$  сама последовательности конечна !? ■

2. Сходящаяся последовательность ограничена.

*Доказательство.* Пусть  $\lim\{x_n\} = a$ . По определению предела для  $\varepsilon = 1$  найдем номер  $N$  такой, что при всех  $n \geq N$  имеет место неравенство  $|x_n - a| < 1$ . Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a|$$

Поэтому при всех  $n \geq N$  выполняется неравенство

$$|x_n| < 1 + |a|$$

Положим  $M = \max(1 + |a|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|)$ . Тогда  $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ■

*Утверждение 5.1.10.* Пусть  $\lim x_n = a, \lim y_n = b$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

*Доказательство.*  $N_1$  - номер из определения  $\lim x_n = a$

$N_2$  - номер из определения  $\lim y_n = b$

$N = \max\{N_1; N_2\}$  ■

3. Пусть  $\lim x_n = a, \lim y_n = b, \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq y_n$ . Тогда  $a \leq b$  (предельный переход в неравенстве).

*Доказательство.* Пусть  $a > b$ . Тогда  $\exists N$ , начиная с которого в  $\varepsilon$ -окрестности  $b$  лежит бесконечное число членов  $y_n$ , а  $\varepsilon$ -окрестности  $a$  лежит бесконечное число членов  $x_n$ . Но тогда, если бы возьмем  $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$ , то  $\exists y_n \in (b - \varepsilon; b + \varepsilon) : y_n < x_n, x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$  ■

*Следствие 5.1.11.* 1.  $\lim x_n = a, \forall n \rightarrow x_n \leq b \Rightarrow a \leq b$

2.  $\lim y_n = b, \forall n \rightarrow y_n \geq a \Rightarrow a \leq b$

4.

**Теорема 5.1.12** (Теорема о сжатой последовательности, теорема о двух милиционерах).

Пусть  $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq z_n \leq y_n \wedge \lim x_n = \lim y_n = a$ . Тогда  $\lim z_n = a$

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow x_n, y_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ . Т.к.  $x_n \leq z_n \leq y_n \Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$  ■

## 5.2. Монотонные последовательности

**Def 5.2.1.** Последовательность называется возрастающей, если  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$

**Def 5.2.2.** Последовательность называется убывающей, если  $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$

**Def 5.2.3.** Последовательность называется монотонной, если она возрастающая или убывающая.

**Теорема 5.2.4** (О монотонной ограниченной последовательности). 1. Возрастающая и ограниченная сверху последовательность сходится

2. Убывающая и ограниченная снизу последовательность сходится

*Доказательство.* Пусть множество  $E = \{x_1, x_2, \dots\}, c = \sup E$

$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq c$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : x_N > c - \varepsilon$$

Т.к.  $x_n$  возрастает, то

$$\forall n > N \rightarrow x_n \geq x_N > c - \varepsilon \wedge x_n < c + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - c| < \varepsilon$$

■

*Замечание 5.2.5.* 1. Возрастающая и неограниченная сверху последовательность стремится к  $+\infty$ .

2. Убывающая и неограниченная снизу последовательность стремится к  $-\infty$

*Доказательство.*  $\forall E \rightarrow \exists N : x_N > E$  и  $x_n \geq x_N \forall n \geq N$  ■

### 5.3. Теорема об арифметических действиях с пределами

**Теорема 5.3.1** (Теорема об арифметических действиях с пределами). Пусть  $\lim x_n = a, \lim y_n = b, a, b \in \mathbb{R}$ . Тогда

1.  $\lim |x_n| = |a|$
2.  $\lim(x_n + y_n) = a + b$
3.  $\lim(x_n - y_n) = a - b$
4.  $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
5.  $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow b \neq 0 \wedge y_n \neq 0$ , то  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

*Доказательство.* 1.  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ . Заметим, что

$$||x_n| - |a|| < |x_n - a| < \varepsilon$$

2.  $|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$

3. Вместо  $y_n$  рассмотрим  $-y_n$

4.  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \end{cases}, M : \forall n \rightarrow |y_n| < M$

$$|x_n \cdot y_n - ab| = |x_n y_n - ab - a \cdot y_n + a \cdot y_n| = |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)| \leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| < \varepsilon$$

5. Достаточно доказать, что  $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$ .

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|} \leq \frac{|y_n - b|}{|\frac{b}{2}||b|} < \frac{\frac{b^2 \varepsilon}{2}}{|\frac{b}{2}||b|} = \varepsilon$$

■

*Утверждение 5.3.2.*  $x_n$  - бесконечно малая,  $y_n$  - ограниченная. Тогда  $\lim x_n \cdot y_n = 0$

*Доказательство.*  $|x_n y_n| < |x_n| \cdot M < \varepsilon \cdot M, M : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |y_n| < M$

■

*Утверждение 5.3.3.*  $\forall n \rightarrow x_n \neq 0$ . Тогда  $x_n$  - бесконечно большая  $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$  - бесконечно малая

*Доказательство.*  $|x_n| > E \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E}$

■

## 5.4. Арифметические действия с бесконечностями

1.  $\lim x_n = +\infty, y_n$  ограничено снизу. Тогда  $\lim(x_n + y_n) = +\infty$
2.  $\lim x_n = -\infty, y_n$  ограничено сверху. Тогда  $\lim(x_n + y_n) = -\infty$
3.  $\lim x_n = +\infty, y_n \geq c > 0$ . Тогда  $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$
4.  $\lim x_n = +\infty, y_n \leq c < 0$ . Тогда  $\lim(x_n \cdot y_n) = -\infty$
5.  $\lim x_n = a \neq 0, \lim y_n = 0$ . Тогда  $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$
6.  $\lim x_n = a \in \mathbb{R}, \lim y_n = \infty$ . Тогда  $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$
7.  $\lim x_n = \infty, \lim y_n = b \in \mathbb{R} \wedge y_n \neq 0$ . Тогда  $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$

*Замечание 5.4.1.*  $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}, \lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\lim(x_n * y_n) = a * b$

Запрещенные операции (неопределённости):

1.  $\pm\infty + (\mp\infty)$
2.  $\pm\infty - (\pm\infty)$
3.  $0 \cdot \infty$
4.  $\frac{0}{0}$
5.  $\frac{\infty}{\infty}$

## 5.5. Неравенство Бернулли

**Теорема 5.5.1** (Неравенство Бернулли). Пусть  $x > -1, n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $(1+x)^n \geq 1+nx$

*Доказательство.* База  $n = 1 : (1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x$

Индукционный переход  $n \rightarrow n+1$

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+n(x+1)+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

■

## Раздел #6: Пределы последовательностей

### 6.1. Число $e$

Пусть  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} = \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \\
 &= \frac{n^{2n+2}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \\
 &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow y_{n-1} \geq y_n \Rightarrow y_n \text{ убывающая} \Rightarrow \exists \lim y_n \Rightarrow \exists \lim x_n, \text{ т.к. } x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \lim x_n = \lim y_n
 \end{aligned}$$

**Def 6.1.1.**  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

**Теорема 6.1.2.**  $x_n > 0 \wedge \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ . Тогда  $\exists \lim x_n = 0$

*Доказательство.* Пусть  $q = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$ ,  $q < 1$ .  $\exists N : \forall n \geq N \rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+q}{2}$ . Тогда

$$0 < x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot x_N \leq x_N \cdot \left(\frac{1+q}{2}\right)^{n-N} \rightarrow 0$$

■

*Следствие 6.1.3.*  $a > 1, k \in \mathbb{N}, \lim \frac{n^k}{a^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$$

*Следствие 6.1.4.*  $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

*Следствие 6.1.5.*  $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

## 6.2. Теорема Штольца

**Теорема 6.2.1** (Теорема Штольца).  $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$   $\lim y_n = +\infty \wedge \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$  Тогда  $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

*Доказательство.* 1.  $l = 0$ .  $\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}$ .  $\forall \varepsilon > 0 \exists m : \forall k \geq m \rightarrow |\varepsilon_k| < \varepsilon$

$$x_k - x_{k-1} = \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_k - y_{k-1}) \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_n - y_m) \leq \varepsilon \cdot y_n$$

Тогда  $|x_n| \leq |x_m| + \varepsilon y_n$

$$0 \leq \left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leq \left| \frac{x_m}{y_n} \right| + \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$$

2.  $l \neq 0, l \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим  $\tilde{x}_n = x_n - l \cdot y_n$ . Тогда

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - l \cdot y_n - x_{n-1} + l \cdot y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \rightarrow 0$$

Тогда по п. 1  $\frac{\tilde{x}_n}{y_n} \rightarrow 0$ .  $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\tilde{x}_n + l \cdot y_n}{y_n} = \frac{\tilde{x}_n}{y_n} + l \rightarrow l$

3.  $l = +\infty$ .  $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty$ . Начиная с некоторого номера  $> 1$

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} \Leftrightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \rightarrow +\infty$$

Тогда  $x_n$  возрастает и стремится к  $+\infty$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$$

4.  $l \rightarrow -\infty$ . Следует рассмотреть  $\{-x_n\}$

■

**Теорема 6.2.2.**  $y_1 > y_2 > \dots > 0 \wedge \lim y_n = \lim x_n = 0$ . Если  $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , тогда  $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

*Доказательство.* Докажем для  $l = 0$ .

$$\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}, \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \rightarrow |\varepsilon_k| < \varepsilon$$

Пусть  $n > m \geq N$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| \cdot |y_{k-1} - y_k| \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon (y_m - y_n) \Leftrightarrow |x_m| \leq \varepsilon \cdot y_m \Rightarrow \frac{|x_m|}{y_m} < \varepsilon$$

Доказали, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq N \rightarrow \left| \frac{x_m}{y_m} \right| < \varepsilon$

Для  $l \neq 0$  доказывается аналогично предыдущей теореме.

■

### 6.3. Подпоследовательности

**Def 6.3.1.** Пусть дана последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Подпоследовательностью этой последовательности называется  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

**Теорема 6.3.2** (О стягивающихся отрезках).  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots, \lim(b_n - a_n) = 0$ . Тогда  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$  состоит из одной точки. Если эта точка  $c$ , то  $\lim a_n = \lim b_n = c$

*Доказательство.*  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$  (по лемме о вложенных отрезках). Пусть  $c < d$  принадлежит этому пересечению.

$$0 < d - c \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leq c - a_n \leq 0 \Rightarrow \text{точка единственна}$$

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \Rightarrow 0 \leq c - a_n \leq 0 \Rightarrow a_n \rightarrow c$$

$$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \Rightarrow b_n \rightarrow c$$

■

**Теорема 6.3.3** (Теорема Больцано-Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство.* Возьмем  $a_1 \leq b_1$  так, чтобы вся последовательность лежала между ними.  $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ . Поделим отрезок пополам и возьмем ту половину, в которой лежит бесконечное число членов последовательности. Обозначим её  $[a_2, b_2]$ . Теперь возьмем  $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$  и  $n_2 > n_1$ .  $[a_3, b_3]$  - ту половину  $[a_2, b_2]$ , в которой бесконечное число членов последовательности и т.д.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \text{ и длина } [a_k, b_k] = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}, \lim a_n = \lim b_n = c$$

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$   $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  - подпоследовательность  $\{x_n\}$  и

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

■

**Теорема 6.3.4.** 1. Если последовательность неограничена сверху, то из неё можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к  $+\infty$

2. Если неограничена снизу, то можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к  $-\infty$

*Доказательство.*

$$\exists n_1 : x_{n_1} > 1$$

$$\exists n_2 : x_{n_2} > 2 \wedge n_2 > n_1$$

$$\exists n_k : x_{n_k} > k \wedge n_k > n_{k-1}$$

■



*Следствие 6.3.5.* Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность имеющую предел (конечный или бесконечный).

**Def 6.3.6.** Частичные пределы последовательности  $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$  – пределы её подпоследовательностей.

*Замечание 6.3.7.*  $\lim x_n = a, \{x_{n_k}\}$  – подпоследовательность  $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow a$

**Def 6.3.8.** Последовательность  $\{x_n\}$  – фундаментальная, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Свойства:

1. Фундаментальная последовательность ограничена
2. Сходящаяся последовательность фундаментальна

*Доказательство.*  $a = \lim x_n$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

■

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то эта последовательность сходится.

*Доказательство.*  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a, \forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall k \geq K \rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$M = \max\{n_K, N\}$ . Тогда  $\forall n \geq M \rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon$

■

**Теорема 6.3.9** (Критерий Коши сходимости последовательности). Последовательность сходится  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна

*Доказательство.* " $\Rightarrow$ ". Свойство 2.

" $\Leftarrow$ ". Фундаментальна  $\Rightarrow$  ограничена (свойство 1)  $\Rightarrow \exists$  сходящаяся подпоследовательность (теорема Больцано-Вейерштрасса)  $\Rightarrow$  сходится

■

**Def 6.3.10.**  $\{x_n\}$  – ограничена сверху.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$  – верхний предел.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$  – нижний предел.

**Теорема 6.3.11.** Пусть  $y_n = \inf_{k \geq n} x_k, z_n = \sup_{k \geq n} x_k$ . Тогда

$$\exists \lim x_n, \overline{\lim} x_n \wedge \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

*Доказательство.* 1. Если неограничена сверху, то  $\overline{\lim} x_n = +\infty$

2. Пусть  $\{x_n\}$  – ограничена.  $\forall n \rightarrow x_n \leq M$

$$z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq \dots \wedge z_n \leq M \Rightarrow \exists \lim z_n$$

3. Аналогично для  $y_n$

4.  $\forall n \rightarrow y_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

■

**Теорема 6.3.12.** 1.  $\overline{\lim} x_n$  – наибольший частичный предел  $\{x_n\}$

2.  $\underline{\lim} x_n$  – наименьший частичный предел  $\{x_n\}$

3.  $\exists \lim x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

*Доказательство.* 1.  $\{x_n\}$  – ограниченная последовательность,  $b = \overline{\lim} x_n$ . Построим  $\{x_{n_k}\}$  :

$$x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \quad z_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\} > b - \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x_{n_1} > b - \frac{1}{2}$$

$$z_{n_1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\} > b - \frac{1}{3} \Rightarrow \exists x_{n_2} > b - \frac{1}{3}, n_2 > n_1$$

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow b$$

Рассмотрим  $x_{m_k} \rightarrow c$ . Тогда  $x_{m_k} \leq z_{m_k} \Rightarrow c \leq b$

Если  $\{x_n\}$  неограничена

- сверху:  $\exists \overline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \rightarrow +\infty$
- снизу: а)  $\exists \overline{\lim} x_n = b \in \mathbb{R}$  – аналогично п.1. б)  $\exists \overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$

2. Аналогично

3. " $\Rightarrow$ ".  $\exists \lim x_n = l \Rightarrow \forall \{x_{n_k}\} \rightarrow \lim x_{n_k} = l \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$

" $\Leftarrow$ ".  $y_n \leq x_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \lim x_n \leq \overline{\lim} x_n \Rightarrow \exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

■

**Теорема 6.3.13** (характеристические свойства  $\overline{\lim} x_n$  и  $\underline{\lim} x_n$ ).

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$b = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N : x_n > a - \varepsilon \end{cases}$$

## Раздел #7: Ряды

### 7.1. Ряды

**Def 7.1.1.** Дана  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ . Рассмотрим  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

Тогда ряд  $-\sum_{k=1}^\infty a_k = a_1 + a_2 + \dots$

Если  $S_n \rightarrow S \in \mathbb{R}$ , то  $S$  называют суммой ряда  $\sum_{k=1}^\infty a_k$  (ряд сходится к  $S$ ).

Если  $S_n$  не имеет предела в  $\mathbb{R}$ , то ряд называют расходящимся.

**Пример 7.1.2.**  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ , т.е.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1$$

**Пример 7.1.3.**  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ . Пусть

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = S$$

Тогда, если  $S \in \mathbb{R}$ , то  $\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$ . Значит

$$\frac{S}{2} = S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots > \frac{S}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = +\infty$$

Данный ряд называется **гармоническим**

*Замечание 7.1.4.*  $S_n$  частичные суммы ряда

**Пример 7.1.5.**  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0 \Rightarrow S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \Rightarrow \text{не существует } \lim S_n$$

**Теорема 7.1.6** (Необходимое условие сходимости ряда). Если  $\sum_{k=1}^\infty a_k$  сходится, то  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

*Доказательство.*

$$\exists \lim S_n = S, a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

■

**Пример 7.1.7.** Гармонический ряд.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Тогда  $H_{2n} \geq \frac{1}{2}(n+1) \rightarrow +\infty \Rightarrow H_n \rightarrow +\infty$  (т.к.  $H_n$  возрастает)

**Пример 7.1.8.**  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

## 7.2. Свойства рядов

1. Ряд не может иметь двух различных сумм.
2. Если ряд сходится к  $S$ , то к  $S$  сходится и ряд, полученный из данного любой расстановкой скобок.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow (a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6)$$

Пусть  $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3, b_3 = a_4 + a_5 + a_6$  и т.д. Заметим, что  $\{S_n^b\}$  является подпоследовательностью  $S_n^a$ .

*Замечание 7.2.1.* "раскрывать скобки" вообще говоря нельзя.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 1) = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

Но если раскрыть скобки, то получится пример [7.1.5](#)

3. Добавление или отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость (но может повлиять на сумму)

## Раздел #8: Функции

### 8.1. Свойства пределов функций

**Теорема 8.1.1** (Единственность предела функции). Пусть  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  – предельная точка  $D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $A$  и  $B \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \Rightarrow A = B$

*Доказательство.* Возьмем  $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$ . По Гейне  $f(x_n) \rightarrow A \wedge f(x_n) \rightarrow B$ . Но  $\{x_n\}$  имеет единственный предел  $\Rightarrow A = B$ . ■

*Замечание 8.1.2.* Беззнаковая бесконечность:  $A = +\infty, B = -\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$

**Теорема 8.1.3** (Локальная ограниченность функции, имеющей предел).  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  – предельная точка  $D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ . Тогда  $\exists V(a) : f(x)$  ограничена в  $D \cap V(a)$

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon = 1$ .  $\exists \dot{V}(a) : |f(x) - A| < 1 \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D$ . Тогда  $|f(x)| < |A| + 1$ . Если  $a \in D$ , то  $|f(x)| < \max\{|A| + 1, f(a)\}$  ■

**Теорема 8.1.4** (Стабилизация знака функции, имеющей предел).  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  – предельная точка  $D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ . Тогда  $\exists V(a)$  такая, что знаки  $f(x)$  и  $B$  совпадают на  $\dot{V}(a) \cap D$

*Доказательство.* Пусть  $B > 0$ . Докажем от противного, т.е.

$$\forall n \ \exists x_n \in \dot{V}_{\frac{1}{n}}(a) \cap D \wedge f(x_n) \leq 0$$

Тогда  $x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow B$ , но  $f(x_n) \leq 0 \Rightarrow B \leq 0$ . ■

**Теорема 8.1.5** (Арифметические действия над функциями, имеющими предел).  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  – предельная точка  $D$ ,  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \xrightarrow{x \rightarrow a} A, g \xrightarrow{x \rightarrow a} B$ . Тогда

1.  $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$
2.  $f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$
3.  $f(x) - g(x) \rightarrow A - B$
4.  $|f(x)| \rightarrow |A|$
5. Если  $B \neq 0$ , то  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$

*Доказательство.* Рассмотрим  $\{x_n\} : x_n \rightarrow a, x_n \neq a, x_n \in D$ . Тогда  $f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B$ . Достаточно применить теорему об арифметических действиях с пределами последовательностей. ■

*Замечание 8.1.6.* Пункт 5) т.к.  $B \neq 0$ , то  $\exists V(a) : \text{sign}(g(x)) = \text{sign } B$  в  $V(a)$ . Поэтому излишне требовать  $g(x) \neq 0$

**Теорема 8.1.7** (Предел композиции функций).  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subset E$

1.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in \overline{\mathbb{R}}$
2.  $A$  – предельная точка множества  $E$  и  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} B \in \overline{\mathbb{R}}$
3.  $\exists V(a) : f(x) \neq A \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D$

Тогда  $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$

*Доказательство.* Возьмем  $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n \neq a$ .

Обозначим  $y_n = f(x_n) \Rightarrow y_n \in E, y_n \rightarrow A$ . По 3) начиная с некоторого номера  $x_n \in V(a)$ , а значит  $y_n \neq A$ . Тогда  $g(y_n) \rightarrow B$ , т.е.  $g(f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$ . Значит  $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$  ■

**Теорема 8.1.8** (Предельный переход в неравенстве).  $D \subset \mathbb{R}, a$  – предельная точка  $D$ .  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in \overline{\mathbb{R}}, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \in \overline{\mathbb{R}}, f(x) \leq g(x) \ \forall x \in D \setminus \{a\}$$

Тогда  $A \leq B$

*Доказательство.*

$$\{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B = A \leq B$$

■

**Теорема 8.1.9** (о сжатой функции).  $D \subset \mathbb{R}, a$  – предельная точка  $D$ ,  $f, h, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  и

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in D \setminus \{a\} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, A \in \mathbb{R}$$

Тогда  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$

*Доказательство.*  $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, h(x_n) \rightarrow A$

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \Rightarrow A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \leq A \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A \Rightarrow g(x) \rightarrow A$$

■

*Замечание 8.1.10.*  $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in D \setminus \{a\}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Rightarrow g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$

**Def 8.1.11.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a$  – предельная точка  $D_1 \subset D$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f|_{D_1}(x)$  – предел  $f$  в точке  $a$  по множеству  $D_1$ .

**Def 8.1.12.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D_1 = D \cap (-\infty, a), a$  – предельная точка  $D_1$ . Предел  $f$  в точке  $a$  по множеству  $D_1$  называется левосторонним пределом в точке  $a$ .

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x), \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

**Def 8.1.13.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D_1 = D \cap (a, +\infty), a$  – предельная точка  $D_1$ . Правосторонний предел – предел  $f$  в точке  $a$  по множеству  $D_1$

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

**Def 8.1.14.** Левосторонний предел на разных "языках".

- $\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
- $\forall V(A) \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \rightarrow f(x) \in V(A)$
- $\forall \{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n < a \rightarrow f(x_n) \rightarrow A$

*Замечание 8.1.15.*  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$  – предельная точка для  $D_1 = D \cap (-\infty, a), D_2 = D \cap (a, +\infty)$   
Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \wedge \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

*Доказательство.* " $\Rightarrow$ ". Очевидно.

" $\Leftarrow$ ". Возьмем  $\delta_1$  из определения левостороннего предела,  $\delta_2$  из определения правостороннего предела.  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in D : |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

■

**Теорема 8.1.16** (Предел монотонной функции).  $D \in \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in (-\infty, +\infty]$   
 $D_1 = D \cap (-\infty, a), a$  – предельная точка  $D$ .

1. Если  $f$  возрастает и ограничена сверху на  $D_1$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Если  $f$  убывает и ограничена снизу на  $D_1$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \mathbb{R}$

*Доказательство.* 1. Пусть  $A = \sup_{x \in D_1} f(x)$ . Тогда  $A \in \mathbb{R}$ , т.к.  $f$  ограничена сверху. Докажем, что  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in D_1 : f(x_0) > A - \varepsilon$$

Тогда  $\forall x \in D_1 : x > x_0$

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq A < A + \varepsilon$$

Пусть  $\delta = a - x_0$ . Тогда  $|f(x) - A| < \varepsilon \forall x : 0 < a - x < \delta$

Если  $a = +\infty \Rightarrow \Delta = \max\{x_0, 1\}$

■

*Замечание 8.1.17.*  $f$  возрастает и не ограничена сверху  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty$

**Теорема 8.1.18** (Критерий Больцано-Коши для функций).  $D \subset \mathbb{R}$ . Тогда существование конечного  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  равносильно утверждению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V(a) : \forall x_1, x_2 \in \dot{V}(a) \cap D \rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

*Доказательство.* " $\Rightarrow$ ".  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$  Тогда  $\exists V(a) : |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Если  $x_1, x_2 \in D \cap \dot{V}(a)$ , то

$$|f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$$

С другой стороны  $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$

" $\Leftarrow$ ".  $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$  и докажем, что  $\exists \lim f(x_n) \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n \in \dot{V}(a)$$

$$\forall n, l \geq N \rightarrow |f(x_n) - f(x_l)| < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\} - \text{фундаментальна}$$

Значит  $\{f(x_n)\}$  сходится. ■

## 8.2. Непрерывные функции

**Def 8.2.1.**  $D \subset \mathbb{R}, a \in D$ . Функция  $f$  называется непрерывной в точке  $a$ , если выполнено одно из следующих условий:

1. Предел  $f$  в точке  $a$  существует и равен  $f(a)$  (только если  $a$  – предельная точка).
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
3.  $\forall V(f(a)) \exists V(a) : f(V(a) \cap D) \subset V(f(a))$
4.  $\forall \{x_n\} : x_n \rightarrow a, x_n \in D \rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$
5. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (если  $a$  – предельная точка)

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(x) - f(a) \Rightarrow \Delta f \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

*Замечание 8.2.2.* Если  $a$  – изолированная точка  $D$ , то

$$f(V(a) \cap D) = \{f(a)\} \subset V(f(a))$$

Т.е. любая  $f$  непрерывна в точке  $a$

**Def 8.2.3.**  $D \subset \mathbb{R}, a \in D, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

$a$  называется точкой разрыва  $f$ , если  $f$  не непрерывна в точке  $a$

**Def 8.2.4.**  $D_1 = D \cap (-\infty, a], D_2 = D \cap [a, +\infty)$ .

Если сужение  $f|_{D_1}$  непрерывно в точке  $a$ , то  $f$  непрерывна в точке  $a$  **слева**.

Если сужение  $f|_{D_2}$  непрерывно в точке  $a$ , то  $f$  непрерывна в точке  $a$  **справа**

**Def 8.2.5.** Если  $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow a-} f(x), f(a)$  – конечные, но не все равны, то  $a$  – точка разрыва I рода.

**Def 8.2.6.** Если хотя бы один предел не существует или бесконечен – II рода.

**Def 8.2.7.** Если в точке  $a$  разрыв, но мы можем доопределить или переопределить  $f$  в точке  $a$  до непрерывности, то  $a$  – точка устранимого разрыва.



## Раздел #9: Пределы функций

### 9.1. $\varepsilon$ -окрестности

**Def 9.1.1.**  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a - V_\varepsilon(a) : (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

проколота  $\varepsilon$ -окрестность  $a - \dot{V}_\varepsilon : (a - \varepsilon, a) \cup (a + \varepsilon)$

**Def 9.1.2.**  $D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ . Точка  $a$  называется точкой сгущения  $D$ , если в любой окрестности  $a$  найдется точка из  $D$ , отличная от  $a$

$$\forall \dot{V}(a) \exists x \in D : x \in \dot{V}(a) \wedge x \neq a$$

**Пример 9.1.3.**  $D = [1, 2)$ . Точки сгущения:  $[1, 2]$

*Замечание 9.1.4.* Точка сгущения может принадлежать множеству, а может и не принадлежать.

*Замечание 9.1.5.* Если  $a$  – точка сгущения, тогда в  $\forall \dot{V}(a)$  бесконечно много точек из  $D$ .

*Замечание 9.1.6.* Точки сгущения называют предельными точками множества.

$a$  – точка сгущения  $\Leftrightarrow \exists \{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$

*Доказательство.* " $\Rightarrow$ ".  $\varepsilon = \frac{1}{k} \Rightarrow |x_k - a| < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 \leq \lim |x_k - a| < 0 \Rightarrow \exists \lim x_k = 0$

" $\Leftarrow$ ". В  $\forall V(a)$  лежит бесконечно много точек  $\{x_n\}, x_n \neq a \Rightarrow a$  – точка сгущения. ■

**Def 9.1.7.**  $a \in D$ , но  $a$  – не предельная точка. Тогда  $a$  называется изолированной точкой множества  $D$

*Замечание 9.1.8.*  $+\infty$  может быть предельной точкой множества

$$\dot{V}(+\infty) = (E, +\infty)$$

### 9.2. Предел функции

**Def 9.2.1.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$  – предельная точка  $D$ .

Число  $A \in \mathbb{R}$  называется пределом  $f$  в точке  $a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ или } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$$

если выполняется одно из следующих условий:

1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$  (Определение по Коши, определение на языке  $\delta, \varepsilon$ )
2.  $\forall V(A) \exists \dot{V}(a) : f(\dot{V}(a) \cap D) \subset V(A)$  (Определение на языке окрестностей)
3.  $\forall \{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A$  (Определение по Гейне, на языке последовательностей)

**Теорема 9.2.2** (Эквивалентность определения по Коши и по Гейне). Определения 1) и 3) эквивалентны.

*Доказательство.* 1)  $\Rightarrow$  3). Рассмотрим какую-то  $\{x_n\} : x_n \neq a, x_n \in D, x_n \rightarrow a$  (она существует по доказанному). Нужно доказать, что  $f(x_n) \rightarrow A$ .

Пусть  $x_n \rightarrow a$ , то

$$\forall \delta > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

3)  $\Rightarrow$  1). Пусть это не так, т.е. 1) не выполнено

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in D, x \neq a, |x - a| < \delta : |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Возьмем последовательность  $\delta_n = \frac{1}{n}$ .

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, \text{ но } |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$$

■

*Замечание 9.2.3.* в  $\overline{\mathbb{R}}$

1.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{5\}, |x - 5| < \delta \rightarrow f(x) > E$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \Delta : \forall x \in D, x < \Delta \rightarrow |f(x) - 2| < E$$

*Замечание 9.2.4.* В определении по Гейне есть " $\forall \{x_n\}$ ". Если  $x_n$  и  $y_n$  подходят под условия, то  $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$

*Доказательство.* Возьмем  $z_n : z_1 = x_1, z_2 = y_1, z_3 = x_2, z_4 = y_2$  и т.д.  $\{z_n\}$  подходит под определение  $\Rightarrow \exists \lim f(z_n)$  ■

*Замечание 9.2.5.* В определении предела функции не участвует значения функции в точке  $a$ .

*Замечание 9.2.6.* Последовательность – частный случай функции.

## Раздел #10: Непрерывность

**Def 10.0.1.** Функция называется непрерывной на множестве  $D$ , если она непрерывна в каждой точке  $D$ .

$C(D)$  – множество функций, непрерывных на  $D$ .  $\langle a, b \rangle$  – промежуток (неважно, включаются концы или нет).

**Теорема 10.0.2** (об арифметических действиях над непрерывными функциями).  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}$  – непрерывны в точке  $x_0 \in D$ . Тогда  $f + g, f - g, |f|, f \cdot g$  также непрерывны в точке  $x_0$ . Если  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  тоже непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* •  $x_0$  – изолированная точка  $D$  – очевидно.

- $x_0$  – предельная точка.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$  и  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g(x_0)$ . Тогда  $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0) + g(x_0)$ . Далее по теореме об арифметических действиях с пределами функций, имеющих предел.

■

*Замечание 10.0.3.* Если  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \in D$  и  $f(x_0) \neq 0$ , то найдется  $V(x_0)$ , что знак  $f$  в  $V(x_0) \cap D$  совпадает со знаком  $f(x_0)$

**Теорема 10.0.4** (О непрерывности композиции).  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subset E$ . Пусть  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \in D$  и  $g$  непрерывна в точке  $f(x_0)$ . Тогда  $g \circ f$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_n \in D, x_n \rightarrow x_0$ . Обозначим  $y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$ . Т.к.  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $y_n \rightarrow y_0$ . Тогда  $g(y_n) \rightarrow g(y_0)$ , т.к.  $g$  непрерывна в точке  $y_0$ .

$$g(y_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$$

■

**Теорема 10.0.5** (Первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция ограничена.

*Доказательство.*  $f \in C[a, b]$ . Пусть  $f$  не ограничена на  $[a, b]$ , т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$$

$x_n$  – ограничена  $\Rightarrow \exists \{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$ . Т.к.  $f$  непрерывна, то  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c) \Rightarrow \{f(x_{n_k})\}$  ограничена, т.к. сходится, но

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Получили противоречие

■

*Замечание 10.0.6.* Если возьмем интервал  $(a, b)$ , то теорема не выполняется.

**Теорема 10.0.7** (Вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

*Доказательство.*  $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ . По первой теореме Вейерштрасса  $f$  ограничена на  $[a, b] \Rightarrow M \in \mathbb{R}$ . Пусть  $f$  не достигает  $M$ . Тогда  $f(x) < M$  на  $[a, b]$ . Рассмотрим  $\varphi(x) = \frac{1}{M-f(x)}$  — непрерывна на  $[a, b]$ . Значит она ограничена на  $[a, b]$ .  $\exists m : \varphi(x) \leq m \quad \forall x \in [a, b]$

$$\frac{1}{M-f(x)} \leq m \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leq M-f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{m}$$

Значит  $M$  — не супремум — противоречие ■

**Теорема 10.0.8** (Больцано-Коши о промежуточном значении).  $f$  — непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда  $\forall C$ , лежащего между  $f(a)$  и  $f(b)$   $\exists c \in (a, b) : f(c) = C$

*Доказательство.* • Пусть  $f(a)$  и  $f(b)$  — разных знаков. Тогда докажем, что  $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$ . Пусть  $f(a) < 0 < f(b)$ . Рассмотрим точку  $\frac{a+b}{2}$ . Если  $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ , то теорема доказана. Если  $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ , то будем далее рассматривать отрезок  $[a, \frac{a+b}{2}]$ , иначе будем рассматривать отрезок  $[\frac{a+b}{2}, b]$ .

Получим  $[a_1, b_1] : f(a_1) < 0 < f(b_1)$  и т.д.  $[a_n, b_n]$  — стягивающиеся отрезки  $\Rightarrow \exists! c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n], a_n, b_n \rightarrow c$

$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \Leftrightarrow f(c) \leq 0 \leq f(c) \Rightarrow f(c) = 0$$

- Рассмотрим  $\varphi(x) = f(x) - C, \varphi \in C[a, b], \varphi(a)$  и  $\varphi(b)$  разных знаков. Тогда  $\exists c \in (a, b) : \varphi(c) = 0 \Rightarrow f(c) = C$  ■

*Следствие 10.0.9.* Если непрерывная на отрезке функция принимает какие-то два значения, то она принимает и все значения между ними.

**Теорема 10.0.10** (О сохранении промежутка). Множество значений непрерывной на промежутке функции есть промежуток.

*Доказательство.* Пусть  $f \in C\langle a, b \rangle$

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$$

$m, M \in \overline{\mathbb{R}}, E = f(\langle a, b \rangle)$ . Возьмем  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ .  $f$  принимает все значения между  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ . Если  $E$  не промежуток, то  $\exists y \in E : f(x) \neq y \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$ , но  $\exists y_1 < y < y_2 : \exists x_1 : f(x_1) = y_1, \exists x_2 : f(x_2) = y_2$  ■

**Теорема 10.0.11** (О разрывах и непрерывности монотонной функции).  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , монотонна. Тогда

1.  $f$  не может иметь разрывов II рода
2.  $f$  — непрерывная  $\Leftrightarrow$  её множество значения — промежуток

*Доказательство.* 1. Пусть  $f$  возрастает.  $x \in (a, b), x_1 \in \langle a, x_0 \rangle$ . Тогда  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_1, x_0) \Rightarrow f$  возрастает и ограничена сверху на  $(x_1, x_0) \Rightarrow \exists$  конечный  $f(x_0-)$ . Кроме того, по используя предельный переход:

$$f(x_1) \leq f(x_0-) \leq f(x_0)$$

Повторим для  $f(x_0+) \Rightarrow$  нет разрывов II рода.

2. " $\Rightarrow$ ". Доказано

" $\Leftarrow$ ".  $f(\langle a, b \rangle)$  – промежуток. Докажем непрерывность слева в точке  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Пусть  $f(x_0-) < f(x_0)$ . Возьмем  $y \in (f(x_0-), f(x_0))$ . Тогда если  $a < x_1 < x_0$ , то  $y \in [f(x_1), f(x_0)]$ . Значит  $y$  – значение функции. С другой стороны  $\forall x \in \langle a, x_0 \rangle \rightarrow f(x) \leq f(x_0-) < y, \forall x \in [x_0, b) \rightarrow f(x) \geq f(x_0) > y \Rightarrow f$  не принимает значение  $y$  – противоречие. Аналогично для  $f(x_0+)$  ■

**Теорема 10.0.12** (Существование и непрерывность обратной функции).  $f \in C\langle a, b \rangle$ ,  $f$  строго монотонна

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$$

Тогда

1.  $f$  обратима,  $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  – биекция.
2.  $f^{-1}$  строго монотонна (одноименно с  $f$ )
3.  $f^{-1}$  непрерывна на  $\langle m, M \rangle$

*Доказательство.* Пусть  $f$  возрастает.

1.  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle, x_1 < x_2$ . Тогда  $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$  обратима.  
 $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$ .  $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ . Если  $y_1 \neq y_2 \in \langle m, M \rangle \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$
2.  $y_1 < y_2 \in \langle m, M \rangle \Rightarrow y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ .  $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2), x_1 < x_2$  из-за возрастания  $f$
3.  $f^{-1}$  строго возрастает на  $\langle m, M \rangle$ , множество значений функции  $f^{-1}$  – промежуток  $\Rightarrow f^{-1}$  непрерывна по предыдущей теореме. ■

## Раздел #11: Элементарные функции

### 11.1. Постоянная

$f(x) = c, x \mapsto c$ , непрерывна на  $\mathbb{R}$

### 11.2. Степенная функция

$$e_\alpha(x) = x^\alpha$$

При  $\alpha = 1$   $e_1(x) = x$  — непрерывна на  $\mathbb{R}$

При  $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$e_\alpha(x) = x^n$$

Следовательно  $e_n(x)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  как произведение непрерывных.

При  $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Непрерывна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  как частное непрерывных.

При  $\alpha = 0$  полагаем  $x^0 = 1$  при всех  $x \neq 0$ . Можно доопределить до непрерывности ( $0^0 = 1$ )

Если  $n$  нечётно, то  $e_n$  строго возрастает на  $\mathbb{R}$ ,  $\sup_{x \in \mathbb{R}} e_n(x) = +\infty$ ,  $\inf_{x \in \mathbb{R}} e_n(x) = -\infty$ . По теореме о сохранении промежутка  $e_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Если  $n$  чётно, то функция  $e_n$  строго возрастает на  $\mathbb{R}_+$ ,  $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} e_n(x) = +\infty$ ,  $\min_{x \in \mathbb{R}_+} e_n(x) = 0$ ,  $e_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ . По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует и непрерывна функция

$$e_{\frac{1}{n}} = \begin{cases} e_n^{-1}, n \not\equiv 2 \\ (e_n|_{\mathbb{R}_+})^{-1}, n \equiv 2 \end{cases}$$

Это  $\sqrt[n]{x}$ , строго возрастает и непрерывна на  $\mathbb{R}_+$

Теперь определим  $x^\alpha$  при рациональном  $\alpha = r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \frac{p}{q}$  несократима.

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}} (e_r = e_{\frac{1}{q}} \circ e_p)$$

Таким образом,  $x^r$  определено следующим образом.

$$x > 0, r \text{ любое,}$$

$$x = 0, r \geq 0,$$

$$x < 0, q \not\equiv 2$$

$e_r$  непрерывна на своей области определения, строго возрастает на  $[0, +\infty)$  при  $r > 0$ , строго убывает на  $(0, +\infty)$  при  $r < 0$

### 11.3. Показательная функция

$$0^x = 0 \quad \forall x > 0$$

Пусть  $a > 0$ . Пока что  $a^x$  определена только для  $x \in \mathbb{Q}$ . Обозначим эту функцию  $a^x|_{\mathbb{Q}}$ . Её свойства:

1.  $r < s \Rightarrow a^r < a^s, a > 1$  и  $a^r > a^s, 0 < a < 1$
2.  $a^{r+s} = a^r a^s$
3.  $(a^r)^s = a^{rs}$
4.  $(ab)^r = a^r b^r$

**Def 11.3.1.** Пусть  $a > 0, x \in \mathbb{R}$  Положим

$$a^x = \lim_{r \rightarrow x} a^r|_{\mathbb{Q}}$$

**Lm 11.3.2.** Пусть  $a > 0, \{r_n\}$  – последовательность рациональных чисел,  $r_n \rightarrow 0$ . Тогда  $a^{r_n} \rightarrow 1$ .

*Доказательство.* При  $a = 1$  лемма очевидно, т.к.  $a^{r_n} = 1 \quad \forall n$ .

Пусть  $a > 1$ . Докажем лемму в частном случае  $r_n = \frac{1}{n}$ . Поскольку  $a^{\frac{1}{n}} > 1$ , имеем  $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n, \alpha_n > 0$ . Тогда по неравенству Бернулли

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$$

Откуда  $0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n} \Rightarrow \alpha_n \rightarrow 0 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ .

Далее, по доказанному

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

Пусть теперь  $\{r_n\}$  – произвольная последовательность из условия леммы. Возьмем  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N_0$  :

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Поскольку  $r_n \rightarrow 0$ , найдется такой номер  $N$ , что  $\forall n > N \rightarrow -\frac{1}{N_0} < r_n < \frac{1}{N_0}$ . В силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Значит  $a^{r_n} \rightarrow 1$

Если  $0 < a < 1$ , то  $\frac{1}{a} > 1$ , и по доказанному

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \rightarrow 1$$

■

**Lm 11.3.3.** Пусть  $a > 0, x \in \mathbb{R}, \{r_n\}$  – последовательность рациональных чисел,  $r_n \rightarrow x$ . Тогда существует конечный предел последовательности  $\{a^{r_n}\}$

*Доказательство.* При  $a = 1$  лемма очевидна.

Пусть  $a > 1$ . Возьмем какую-либо возрастающую последовательность  $\{s_n\}$  рациональных чисел, стремящуюся к  $x$ . Например

$$s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

Тогда  $x - \frac{1}{10^n} < s_n \leq x \Rightarrow s_n \rightarrow x$ . Докажем, что последовательность  $\{s_n\}$  возрастает. Пусть  $A = 10^n x$ . Тогда  $s_n \leq s_{n+1} \Leftrightarrow 10[A] \leq [10A]$ , но  $10[A]$  – целое число, не превосходящее  $10A$ .  $\{a^{s_n}\}$  возрастает и ограничена сверху числом  $a^{[x]+1}$ . Значит  $\{a^{s_n}\}$  сходится к некоторому пределу  $L$ . Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \rightarrow L$$

Потому что  $a^{r_n - s_n} \rightarrow 1$  по предыдущей лемме.

Если  $0 < a < 1$ , то  $\frac{1}{a} > 1$  и по доказанному  $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \rightarrow L, L > 0$ . Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \rightarrow \frac{1}{L}$$

■

### 11.3.1. Свойства показательной функции

1.  $a^x$  строго возрастает на  $\mathbb{R}$  при  $a > 1$  и строго убывает на  $\mathbb{R}$  при  $a \in (0, 1)$

*Доказательство.*  $a > 1$ . Пусть  $x < y$ . Докажем, что  $a^x < a^y$ . Возьмем два числа  $\bar{r}, \bar{\bar{r}} \in \mathbb{Q}$  между  $x$  и  $y$ . Возьмем  $\{\bar{r}_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{\bar{r}}_n\}_{n=1}^\infty$  : последовательности из  $\mathbb{Q} : \bar{r}_n \rightarrow x, \bar{\bar{r}}_n \rightarrow y$ .

По доказанному  $a^{\bar{r}_n} < a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} < a^{\bar{\bar{r}}_n}$

$$\Rightarrow a^x \leq a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} \leq a^y \Rightarrow a^x < a^y$$

$a \in (0, 1)$ . Рассмотрим  $b = \frac{1}{a} > 1$ .

■

2.  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

*Доказательство.*  $\{\bar{r}_n\}, \{\bar{\bar{r}}_n\}$  как в 1)

$$a^{\bar{r}_n + \bar{\bar{r}}_n} = a^{\bar{r}_n} \cdot a^{\bar{\bar{r}}_n} \Rightarrow a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

■

3.  $a^{-x} = a^0 \cdot a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

4.  $a^x$  непрерывна на  $\mathbb{R}$

*Доказательство.*  $a > 1, \{x_n\} : x_n \rightarrow 0$ . Докажем непрерывность в нуле.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n| < \varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{n_0} < x_n < \frac{1}{n_0}, n_0 \in \mathbb{N}$$

Тогда  $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{x_n} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$  ( $a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow \exists n_0 : |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$ )

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N' : \forall n \geq N \rightarrow |a^{x_n} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow a^{x_n} \rightarrow 1$$

Докажем непрерывность в точке  $x_0 \neq 0$ .

Рассмотрим  $a^{x_0 + x_n} - a^{x_n} = a^{x_0}(a^{x_n} - 1) \rightarrow 0$

■

5.  $(ab)^x = a^x b^x$



*Доказательство.*  $\{r_n\}$  из  $\mathbb{Q}$ ,  $r_n \rightarrow x$ . Тогда

$$(ab)^{r_n} = a^{r_n} \cdot b^{r_n} \Rightarrow (ab)^x = a^x b^x$$

■

6.  $(a^x)^y = a^{xy}$

*Доказательство.*  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, \{x_n\}, \{y_n\}$  из  $\mathbb{Q}$ . Тогда по непрерывности показательной и степенной функций

$$(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n \cdot y_m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (a^x)^{y_m} = a^{x \cdot y_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

■

7.  $a^x$  – биекция из  $\mathbb{R}$  на  $(0, +\infty)$

*Доказательство.*  $a > 1$ . Тогда  $a^x$  строго возрастает на  $\mathbb{R}$ .

$$a^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

■

## 11.4. Логарифм

**Def 11.4.1.** Т.к.  $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  – биекция, то  $\exists f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\log_a x : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Из теоремы об обратной функции  $\log_a x$  монотонна и непрерывна.

### 11.4.1. Свойства логарифма

1.  $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ ,  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ,  $x, y > 0$

*Доказательство.*

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y = a^{\log_a(xy)}$$

■

2.  $\log_a x^b = b \log_a x$ ,  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ,  $x > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$

*Доказательство.*

$$a^{b \log_a x} = (a^{\log_a x})^b = x^b = a^{\log_a x^b}$$

■

3.  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ,  $a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ,  $x > 0$

*Доказательство.*

$$b^{\log_a x \cdot \log_b a} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x}$$

■

**Def 11.4.2.**  $\ln x$  – натуральный логарифм ( $\log_e x$ )

Вернемся к степенной функции:

**Def 11.4.3.**  $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$   $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$ .  $0^\alpha = 0$ . Покажем непрерывность справа в точке 0.

$$x_n \rightarrow 0, x_n > 0$$

Пусть  $y_n = \ln x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ . Значит  $x_n^\alpha = e^{\alpha \ln x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

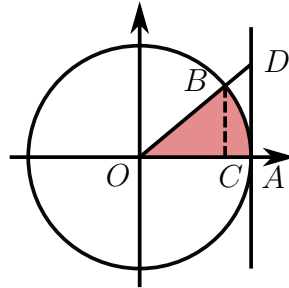
$$x^\alpha : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \alpha > 0 - \text{биекция}$$

$$x^\alpha : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), \alpha < 0 - \text{биекция}$$

## 11.5. Тригонометрические функции

Утверждение 11.5.1.  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Тогда  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ .

*Доказательство.* Нужно доказать:  $BC < \widehat{AB} < AD$   
 $\triangle OBA \subset \nabla OAB \subset \triangle OAD \Leftrightarrow S_{\triangle OBA} < S_{\nabla OAB} < S_{\triangle OAD}$



$$S_{\triangle OBA} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |BC| = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{\nabla OAB} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot |OA|^2 = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAD} = |OA| \cdot |AD| \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Отсюда

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

■

*Следствие 11.5.2.*  $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$  (причем равенство достигается только в 0 )  
 При  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  доказано.

$$x \geq \frac{\pi}{2} : |\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$$

$$x \leq -\frac{\pi}{2} : |\sin x| = |\sin(-x)| < |-x| = x$$

Свойства:

1.  $\sin x$  – непрерывная на  $\mathbb{R}$  функция.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

*Доказательство.*

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0| \rightarrow 0$$

■

2.  $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$  – непрерывна.

3.  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

4.  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$  – непрерывны на области определения.

### 11.5.1. Обратные тригонометрические функции

$\sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  не обратимая.

$\sin x|_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  – биекция

**Def 11.5.3.**  $\arcsin x = \left( \sin x|_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}$ . Монотонно возрастает и непрерывна

**Def 11.5.4.**  $\arccos x = \left( \cos x|_{x \in [0, \pi]} \right)^{-1}$ . Убывает, непрерывна

**Def 11.5.5.**  $\operatorname{arctg} x = \left( \operatorname{tg} x|_{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$ . Непрерывна, строго возрастает.

**Def 11.5.6.**  $\operatorname{arcctg} x = \left( \operatorname{ctg} x|_{x \in (0, \pi)} \right)^{-1}$

*Замечание 11.5.7.* Для обратимости строгой монотонной функции непрерывность не нужна.

## Раздел #12: Замечательные пределы

**Def 12.0.1.** *Первый замечательный предел:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*Доказательство.*  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$  на  $(0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$   
 $\cos x, \frac{\sin x}{x}, 1$  – четные функции, значит верно и для  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ . Перейдем к пределу при  $x \rightarrow 0$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

■

*Следствие 12.0.2.*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

*Доказательство.*  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$$\frac{1 - \cos x}{2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$$

■

*Следствие 12.0.3.*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

*Доказательство.*

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

■

*Следствие 12.0.4.*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

*Доказательство.*  $\frac{\sin x}{x} = \frac{y}{\arcsin y}$ ,  $y = \sin x$  в окрестности  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow \arcsin y = x$ .  $\arcsin x$  непрерывна в нуле, в 0 равен 0.  $\frac{\sin x}{x}$  непрерывна в  $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad - \text{непрерывна на } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$  по теореме о непрерывности композиции  $\frac{y}{\arcsin y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$

■

*Следствие 12.0.5.*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

*Доказательство.* Аналогично предыдущему следствию.

■

**Def 12.0.6.** *Второй замечательный предел*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

*Доказательство.*  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  задана на  $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ . Пусть  $x_n \rightarrow +\infty$ . Нужно доказать, что  $f(x_n) \rightarrow e$ .

1. Рассмотрим  $\{x_n\}$  из  $\mathbb{N}$ .  $f(x_n) \rightarrow e$  как подпоследовательность.
2.  $\{x_n\}$  из  $\mathbb{R}$ . Начиная с некоторого номера  $x_n \geq 1$ .

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n] + 1}$$

Очевидно,  $[x_n] \leq x_n \leq [x_n] + 1$ . Тогда

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{[x_n] + 1}} \cdot f([x_n] + 1) \leq f(x_n) \leq f([x_n]) \cdot \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)$$

$\{[x_n]\}_{n=1}^\infty$  — последовательность из  $\mathbb{N}$ . Выполним предельный переход в неравенстве.

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq e \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = e$$

■

**Def 12.0.7.** Третий замечательный предел (обычно не нумеруется).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, a > 0, a \neq 1$$

*Доказательство.*  $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

■

**Def 12.0.8.** Четвертый замечательный предел (обычно не нумеруется)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.*  $\alpha = 0$  тривиально.

$\alpha \neq 0$ .  $x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0, |x_n| < 1 \forall n$ . Обозначим

$$y_n = (1+x_n)^\alpha - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, y_n \neq 0 \Rightarrow \alpha \ln(1+x_n) = \ln(1+y_n)$$

Тогда

$$\frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x_n)}{x_n} \rightarrow \alpha$$

■

**Def 12.0.9.** Пятый замечательный предел (обычно не нумеруется)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$

*Доказательство.*  $a = 1$  тривиально.

$a \neq 1$ .  $x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0$

$$y_n = a^{x_n} - 1 \rightarrow 0, y_n \neq 0, \ln(1+y_n) = x_n \cdot \ln a$$

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \cdot \frac{x_n \ln a}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln a$$

■

## Раздел #13: Сравнение функций

**Def 13.0.1.**  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0$  – предельная точка  $D$  и  $\exists \varphi : D \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$  в  $\dot{V}(x_0) \cap D$ .

1. Если  $\varphi(x)$  ограничена на  $\dot{V}(x_0) \cap D$ , то говорят, что  $f$  ограничена по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$$

2. Если  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ , то говорят, что  $f$  бесконечно малая по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$$

3. Если  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ , то говорят, что  $f$  и  $g$  асимптотически равны.

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$$

*Замечание 13.0.2.* 1.  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ограничена в  $\dot{V} \cap D$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

*Замечание 13.0.3.* Все пункты при  $x \rightarrow x_0$

$$1. f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$$

$$2. f \sim f$$

$$3. f \sim g, f = g + o(g), f = g + o(f) \text{ – равносильные утверждения.}$$

$$4. \text{ Если } f = o(g), \text{ то } f = O(g)$$

*Следствие 13.0.4.* При  $x \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ll} \sin x = x + o(x) & \ln(1+x) = x + o(x) \\ \tan x = x + o(x) & \arcsin x = x + o(x) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) & a^x = 1 + x \ln a + o(x) \\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) & \end{array}$$

**Теорема 13.0.5** (О замене на эквивалентные).  $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0$  – предельная точка  $D$ ,  $f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \text{ (если } x_0 \text{ – предельная точка области определения } \frac{f}{g} \text{)}$$

*Доказательство.*  $\exists u(x_0) \exists \varphi : \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1. f = \varphi \cdot \tilde{f}$  в  $u(x_0) \cap D$

$\exists v(x_0) \exists \psi : \psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1. g = \psi \cdot \tilde{g}$  в  $v(x_0) \cap D$

$w(x_0) = u(x_0) \cap v(x_0)$ . Тогда  $f \cdot g = (\varphi \cdot \psi) \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g}$  в  $w(x_0)$ . Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \cdot f = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$  т.к.  $\varphi \cdot \psi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ ,

то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f} \cdot \tilde{g} = A$ . Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \cdot f$  не существует, то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f} \tilde{g}$  не существует.

Для частного доказательство аналогично. ■

*Замечание 13.0.6.* Заменять на эквивалентные можно **только** в произведении и частном.

**Def 13.0.7.** Пусть  $f \sim g, f \sim h, x \rightarrow x_0$ . Если  $f - h = o(f - g)$ , то говорят, что асимптотическое равенство  $f \sim h$  точнее, чем  $f \sim g$ .

Пусть  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0$  – предельная точка  $D$ . Пусть задана система функций  $\{g_k\}_{k=0}^N : \forall k \in [0, N-1] \cap \mathbb{Z}_+ \rightarrow g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), x \rightarrow x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^N c_k \cdot g_k(x) + o(g_N(x))$$

Многочлены получаются, если  $g_k(x) = (x - x_0)^k$ .

Если  $f(x) \sim C \cdot (x - x_0)^k (C \neq 0)$ , то  $C \cdot (x - x_0)^k$  – главная степенная часть.

**Теорема 13.0.8** (О единственности асимптотического разложения).  $D \in \mathbb{R}, x_0$  – предельная точка  $D, n \in \mathbb{Z}_+; f, g_k : D \rightarrow \mathbb{R}, g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), x \rightarrow x_0 \forall k = 0, \dots, n-1$  и  $\forall V(x_0) \exists$  точка в  $\dot{V}(x_0)$  : в ней  $g_n$  не ноль. Тогда если существует асимптотическое разложение  $f$  по системе функций  $\{g_k\}$ , то оно единственно.

*Доказательство.* Пусть не единственное. Тогда  $\exists c_k, d_k, k = 0, \dots, n : \exists i \ c_i \neq d_i$ .

$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot g_k(x) + o(g_n(x))$  и  $f(x) = \sum_{k=0}^n d_k \cdot g_k(x) + o(g_n(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Т.к.  $g_{k+1}(x) = o(g_k(x))$ , то  $g_{k+1}(x) = o(g_l(x)) \forall l \leq k$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Обозначим  $E_k = \{x : g_k(x) \neq 0, k = 0, \dots, n\}$ . Если  $g_k = 0$  на  $V(x_0)$ , то  $g_{k+1} = 0$  на  $V(x_0), g_n = 0$  на  $V(x_0)$ .

$$g_{k+1} = o(g_k) \Leftrightarrow \exists \varphi : g_{k+1} = \varphi \cdot g_k$$

Если  $x_0$  – предельная точка  $E_{k_0}$ , то она предельная точка всех  $E_k$ . Пусть  $m$  – наименьший номер :  $c_m \neq d_m$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^m c_k g_k(x) + o(g_m(x)), f(x) = \sum_{k=0}^m d_k g_k(x) + o(g_m(x))$$

Вычтем:  $0 = (c_m - d_m)g_m(x) + o(g_m(x))$ . Поделим на  $g_m(x)$

$$0 = (c_m - d_m) + \frac{o(g_m(x))}{g_m(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c_m - d_m \Rightarrow c_m = d_m$$

■

**Def 13.0.9.**  $x_0 \in \mathbb{R}, f$  задана хотя бы на  $\langle a, x_0 \rangle$  или  $\langle x_0, b \rangle$  и действует в  $\mathbb{R}$ . Тогда прямая  $x = x_0$  называется вертикальной асимптотой функции  $f$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \pm\infty$$

**Def 13.0.10.**  $\langle a, +\infty \rangle \subset D \subset \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Прямая  $y = \alpha x + \beta$  – наклонная асимптота  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

**Def 13.0.11.** При  $x \rightarrow -\infty$  аналогично.

**Теорема 13.0.12** (Уравнение наклонной асимптоты).  $\langle a, +\infty \rangle \subset D \subset \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Прямая  $y = \alpha x + \beta$  является асимптотой  $f$  при  $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x)$

*Доказательство.* " $\Rightarrow$ ". По определению  $f(x) = \alpha x + \beta + \varphi(x)$ ,  $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Тогда  $\frac{f(x)}{x} = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$$

$$f(x) - \alpha x = \beta + \varphi(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$$

" $\Leftarrow$ ". Проведем те же рассуждения "в обратную сторону".

■



## Раздел #14: Дифференциальное исчисление

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, a$  – предельная точка  $E, n \in \mathbb{Z}_+$ . Хотим найти многочлен степени не выше  $n$  ( $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k$ )

$$f(a) = P(a), f(x) = P(x) + o((x - a)^n), x \rightarrow a \quad (1)$$

*Замечание 14.0.1.* Если такой многочлен существует, то он единственный.

*Доказательство.* Пусть  $\exists P(x), Q(x)$ , удовлетворяющие условию (1). Тогда

$$0 = P(x) - Q(x) + o((x - a)^n)$$

Если  $P(x) \neq Q(x)$ , то  $P(x) - Q(x) = \sum_{k=0}^n r_k (x - a)^k = r(x)$

$$\Rightarrow r(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a$$

$$r(x) = r_m (x - a)^m + \dots + r_n (x - a)^n, m \leq n, r_m \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{(x - a)^m} = o((x - a)^{n-m}) \Rightarrow r_m = 0$$

■

**Def 14.0.2.** Многочлен, удовлетворяющий условию (1) называется многочленом Тейлора функции  $f$  в точке  $a$  порядка  $n$   $T_{a,n}f$

**Def 14.0.3.** Функция  $f$  называется дифференцируемой в точке  $a$  ( $\langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$ ), если  $\exists k \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = f(a) + k(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a$$

**Def 14.0.4.**  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$ , если  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = K \in \mathbb{R}$ , то  $K$  называется производной функции  $f$  в точке  $a$ . (Обозначение  $f'(a), \frac{df}{dx}(a), Df(a)$ )

$\Delta_a f = f(x) - f(a)$  – приращение функции  $f$  в точке  $a$ .

$$x - a = \Delta_a x.$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta_a x \rightarrow 0} \frac{\Delta_a f}{\Delta_a x}$$

**Теорема 14.0.5.**  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$ . Тогда равносильны три утверждения:

1.  $f$  дифференцируема в точке  $a$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  существует и равен  $k$
3.  $\exists F(x) : F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$  непрерывна в точке  $a, F(a) = k$  и  $f(x) - f(a) = F(x)(x - a), x \in \langle A, B \rangle$

*Доказательство.* 1)  $\Rightarrow$  2).  $\exists k : f(x) - f(a) = k(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k + \frac{o(x - a)}{x - a} \rightarrow k$$

2)  $\Rightarrow$  3).

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \neq a \\ k, & x = a \end{cases}$$

из 2) следует непрерывность  $F$  в точке  $a$

3)  $\Rightarrow$  1). По 3)  $\exists F$ :

$$f(x) - f(a) = F(x)(x - a) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + F(x)(x - a) = f(a) + k(x - a) + (F(x) - k) \cdot (x - a)$$

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} F(a) = k \Rightarrow (F(x) - k)(x - a) = o((x - a)) \quad \blacksquare$$

### 14.1. Связь с физикой

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} - \text{мгновенная скорость}$$

### 14.2. Связь с геометрией

Рассмотрим функции:  $l_k(x) = f(a) + k(x - a)$ , графики – прямые, проходящие через точку  $(a; f(a))$

$$f(x) - l_k(x) = f(x) - f(a) - k(x - a)$$

Если  $f(x)$  дифференцируема в точке  $a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \Leftrightarrow f(x) - l_k(x) = (x - a) \cdot (f'(a) - k) + o(x - a)$$

При  $k = f'(a)$  разность есть  $o(x - a)$ .

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

касательная в точке  $a$  к функции  $f$ .  $\operatorname{tg} \alpha = f'(a)$ .

### 14.3. Бесконечные производные

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \Rightarrow f'(a) = +\infty$$

В таком случае  $f$  не является дифференцируемой в точке  $a$ .

Односторонняя производная:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a \pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*Замечание 14.3.1.* Если  $f$  дифференцируема в точке  $a$ , то  $f$  непрерывна в точке  $a$ .

*Доказательство.*

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) \quad \blacksquare$$

Обратное не выполняется. Например,  $f(x) = |x|$

## 14.4. Правила дифференцирования

**Теорема 14.4.1** (Производная композиции).  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \langle C, D \rangle, g : \langle C, D \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$ . Если  $f$  дифференцируема в точке  $a$ ,  $g$  дифференцируема в точке  $f(a)$ , то  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $a$  и

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

*Доказательство.*  $\exists F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F(a) = f'(a)$  и  $f(x) - f(a) = F(x)(x - a), x \in \langle A, B \rangle$ ,  $F$  непрерывна в точке  $a$

$\exists G : \langle C, D \rangle \rightarrow \mathbb{R}, G(f(a)) = g'(f(a))$  и  $g(y) - g(f(a)) = G(y)(y - f(a)), y \in \langle C, D \rangle$ ,  $G$  непрерывна в точке  $f(a)$  Подставим  $y = f(x)$

$$g(f(x)) - g(f(a)) = G(f(x))(f(x) - f(a)) = G(f(x))F(x)(x - a) = H(x)(x - a)$$

$H(x)$  – непрерывна в точке  $x = a$ ,  $H : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $(g \circ f)'(a) = H(a) = G(f(a)) \cdot F(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ . ■

*Замечание 14.4.2.* Это "правило цепочки".

$$(g \circ h \circ f)'(a) = g'(h \circ f(a)) \cdot h'(f(a)) \circ f'(a)$$

**Теорема 14.4.3** (Арифметические операции).  $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle, f, g$  – дифференцируемы в точке  $a$ . Тогда

1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то  $\alpha f + \beta g$  – дифференцируемая в точке  $a$  функция и

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

2.  $f \cdot g$  – дифференцируема в точке  $a$  и

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

3. если  $g(a) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  – дифференцируема в точке  $a$  и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

*Доказательство.* 1.  $(\alpha f + \beta g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(a) + \beta g(a))}{x - a} =$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left( \alpha \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

2. Докажем частный случай  $g = f$ , т.е. докажем  $(f^2)'(a) = 2f'(a)f(a)$ . Возьмем  $h(t) = t^2$ , тогда  $f^2(x) = (h \circ f)(x)$ . Тогда по предыдущей теореме

$$(f^2)'(a) = h'(f(a)) \cdot f'(a) = 2 \cdot f(a) \cdot f'(a)$$

Вернемся к общей формуле:

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \Rightarrow (f \cdot g)'(a) = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)'(a) = \\ &= \frac{1}{4}(2 \cdot (f(a) + g(a)) \cdot (f'(a) + g'(a)) - 2(f(a) - g(a)) \cdot (f'(a) - g'(a))) = \\ &= \frac{1}{2}(2f(a) \cdot g'(a) + 2f'(a) \cdot g(a)) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a) \end{aligned}$$

**Упражнение 14.4.4.** Получить эту формулу непосредственно из определения производной

$$3. \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}. \text{ Возьмем } h(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} = (h \circ g)(x)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = h'(g(a)) \cdot g'(a) = -\frac{1}{g^2(a)} \cdot g'(a)$$

Теперь  $f \cdot \frac{1}{g}$ .

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot -\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

■

*Следствие 14.4.5.*

$$\begin{aligned} (f \cdot (h \cdot g))'(a) &= f'(a) \cdot (h \cdot g)(a) + f(a) \cdot (h \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot h(a) \cdot g(a) + f(a)(h'(a)g(a) + h(a)g'(a)) = \\ &= f'(a)h(a)g(a) + f(a)h'(a)g(a) + f(a)h(a)g'(a) \end{aligned}$$

**Теорема 14.4.6** (Дифференцирование обратной функции).  $f$  – строго монотонная непрерывная функция на  $\langle A, B \rangle$ ,  $a \in \langle A, B \rangle$ ,  $f$  – дифференцируема в точке  $a$  и  $f'(a) \neq 0$ . Тогда  $f^{-1}$  – дифференцируема в точке  $f(a)$  и  $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ .

*Замечание 14.4.7.* Геометрический смысл. Рисунок: **TODO**

*Доказательство.*  $g(x) = f^{-1}(x)$ ,  $f(a) = b$ .  $f: \langle A, B \rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle C, D \rangle$ ,  $g: \langle C, D \rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle A, B \rangle$  – непрерывны.  $f$  – дифференцируема, тогда  $\exists F(x): \langle A, B \rangle$  непрерывная в точке  $a$

$$F(a) = f'(a), f(x) - f(a) = F(x)(x - a)$$

$f$  строго монотонна  $\Rightarrow \forall x \neq a \ f(x) \neq f(a) \Rightarrow F(x) \neq 0$  если  $x \neq a$  и по условию  $f'(a) = F(a) \neq 0$ , т.е.  $F(x) \neq 0 \ \forall x \in \langle A, B \rangle$

$$x = g(y) \ (y = f(x))$$

Тогда  $y - b = f(x) - f(a) = F(x)(x - a) = F(g(y))(g(y) - g(b)) \Rightarrow g(y) - g(b) = \frac{1}{F(g(y))}(y - b) = H(y)(y - b)$

$H$  определена на  $\langle C, D \rangle$ , непрерывна в точке  $b = f(a) \Rightarrow g'(b) = H(b) = \frac{1}{F(g(b))} = \frac{1}{F(a)} = \frac{1}{f'(a)}$  ■

## 14.5. Формулы для вычисления производных

$$f'(a), a \in E \ a \mapsto f'(a)$$

$$1. \ f(x) \equiv 1, a \in \mathbb{R}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - 1}{x - a} = 0$$

$$2. \ f(x) = b^x, b > 0, a \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{b^x - b^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} b^a \cdot \frac{b^{x-a} - 1}{x - a} = b^a \cdot \ln b$$

В частности,  $(e^x)' = e^x$

3.  $f(x) = \log_b x, b > 0, b \neq 1, a \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_b x - \log_b a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_b \frac{x}{a}}{x - a} \\ \frac{x}{a} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 &\Rightarrow \log_b \frac{x}{a} = \frac{\ln \frac{x}{a}}{\ln b} = \ln \frac{\left(1 + \left(\frac{x}{a} - 1\right)\right)}{\ln b} \sim \frac{\frac{x}{a} - 1}{\ln b} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_b \frac{x}{a}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x}{a} - 1}{(x - a) \ln b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{a(x - a) \ln b} = \frac{1}{a \ln b} \end{aligned}$$

Значит

$$(\log_b x)' = \frac{1}{x \ln b}$$

В частности,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

4.  $f(x) = x^\alpha, \alpha \neq 0$

- $\alpha \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
- $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \frac{m}{2n+1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} (\alpha > 0), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} (\alpha < 0)$
- $\alpha = \frac{m}{2n}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \in [0, +\infty) (\alpha > 0), x \in (0, +\infty) (\alpha < 0)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \frac{\left(1 + \left(\frac{x}{a} - 1\right)\right)^\alpha - 1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \cdot \frac{\alpha \cdot \left(\frac{x}{a} - 1\right)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \cdot \frac{\alpha(x - a)}{a(x - a)} = \alpha \cdot a^{\alpha-1} \end{aligned}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, \alpha > 1 \\ 1, \alpha = 1 \\ \infty, \alpha < 1 \end{cases}$$

Выводы:  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$  (с точностью до области определения функции).

5.  $f(x) = \sin x, a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 2 \frac{\frac{x-a}{2} \cdot \cos a}{x - a} = \cos a$$

6.  $f(x) = \cos x$

$$(\cos x)' = \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \left( \frac{\pi}{2} - x \right)' = -\sin x$$

7.  $f(x) = \operatorname{tg} x, a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

8.  $f(x) = \operatorname{ctg} x, a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - x \right)} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - x \right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

9.  $f(x) = \arcsin x, x \in [-1, 1]$ . Пусть  $g(y) = \sin y \Rightarrow b = \arcsin a, g'(b) = \cos b > 0$ , т.к.  $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \frac{1}{\cos b} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 b}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$$

10.  $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$

11.  $f(x) = \operatorname{arctg} x, g(y) = \operatorname{tg} y, b = \operatorname{arctg} a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \cos^2 b = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 b + 1} = \frac{1}{a^2 + 1}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

12.  $(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{x^2 + 1}$

## 14.6. Теоремы о средних

**Теорема 14.6.1** (Теорема Ферма).  $a \in (A, B), f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  – дифференцируема в точке  $a$ .

Если  $f(a) = \max_{a \in \langle A, B \rangle} f$  или  $f(a) = \min_{a \in \langle A, B \rangle} f$ , то  $f'(a) = 0$ .

Геометрический смысл:

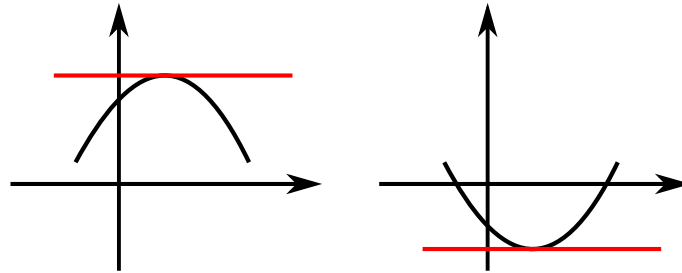


Рис. 1: Горизонтальная касательная

*Доказательство.*  $f(a) = \max_{\langle A, B \rangle} f \Rightarrow f(x) - f(a) \leq 0 \quad \forall x \in \langle A, B \rangle$ . Если  $x > a$ , то  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

Если  $x < a$ , то  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

$f$  дифференцируема в точке  $a \Rightarrow f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a) \Rightarrow f'(a) = 0$  ■

**Теорема 14.6.2** (Теорема Ролля).  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Если

1.  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$  (т.е. дифференцируема в каждой точке).
2. непрерывна на  $[a, b]$
3.  $f(a) = f(b)$

Тогда  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

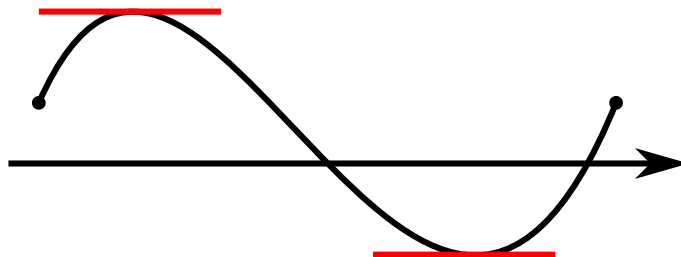


Рис. 2: Теорема Ролля

*Доказательство.*  $f$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow f$  достигает наибольшего и наименьшего значения. Если  $a, b$  – те точки, в которых достигается наибольшее и наименьшее значение, то  $f$  постоянная на  $[a, b] \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ .

Если хотя бы в одной из точек  $a$  и  $b$  не достигается наибольшего или наименьшего значения, тогда одно из них достигается на  $(a, b)$ . Тогда по теореме Ферма в этой точке производная равна нулю. ■

*Замечание 14.6.3.* Все три условия существенны.

**Теорема 14.6.4** (Теорема Лагранжа или формула конечных приращений).  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $f$  – дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ . Геометрический смысл:  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ .

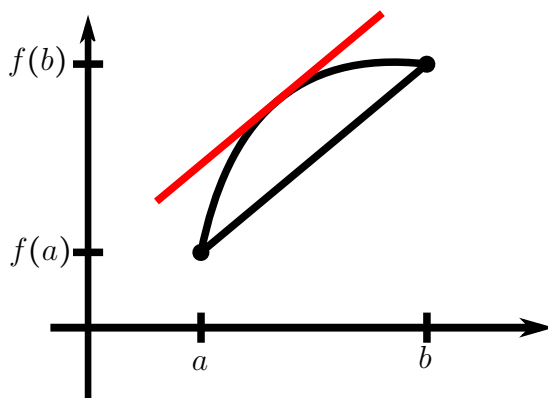


Рис. 3: Теорема Лагранжа

*Доказательство.*  $g(x) = f(x) - kx$  – непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ . Хотим подобрать  $k : g(a) = g(b)$

$$f(a) - ka = f(b) - kb \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда  $g(x) = f(x) - x \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  подходит под условия теоремы Ролля. Тогда  $\exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$ .

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

**Теорема 14.6.5** (Теорема Коши).  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  – непрерывны на  $[a, b]$ , дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $\forall x \in (a, b) \ g'(x) \neq 0$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

*Доказательство.*  $h(x) = f(x) - kg(x)$  – непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ . Подберем  $k : h(a) = h(b)$

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Тогда  $h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \Rightarrow \exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$

$$f'(c) - g'(c) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0$$

■

*Замечание 14.6.6.* 1. Точка  $c$  может быть не единственной.

2. Теорема Лагранжа – частный случай теоремы Коши, теорема Ролля – частный случай теоремы Лагранжа.
3. Теорему Лагранжа можно записать в следующем виде:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \Theta \cdot (b - a)), \Theta \in (0, 1)$$

*Следствие 14.6.7* (Оценка конечных приращений).  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ . Если  $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f'(x) \leq M \ \forall x \in (a, b)$ , тогда

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

В частности, если  $\exists M \in \mathbb{R} : |f'(x)| \leq M \ \forall x \in (a, b)$ , то

$$|f(b) - f(a)| \leq M \cdot (b - a)$$

*Доказательство.* По теореме Лагранжа  $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leq M(b - a)$$

■

*Следствие 14.6.8.* Если  $\forall x \in (a, b) \ f'(x) \geq 0$ , то  $f$  нестрого монотонно возрастает.



*Доказательство.*  $x_1 < x_2 \in (a, b)$ .  $\exists c \in (x_1, x_2)$  :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

■

*Следствие 14.6.9.* Если  $\forall x \in (a, b)$   $f'(x) > 0$ , то  $f$  строго возрастает.

*Следствие 14.6.10.* Если  $\forall x \in (a, b)$   $f'(x) \leq 0$ , то  $f$  нестрого монотонно убывает.

*Следствие 14.6.11.* Если  $\forall x \in (a, b)$   $f'(x) < 0$ , то  $f$  строго монотонно убывает.

*Замечание 14.6.12.* Если  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$  и  $f$  строго монотонно убывает  $\Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$  – вообще говоря, неверно.

$f(x) = -x^3, f'(x) = -3x^2 \leq 0$  и равенство достигается при  $x = 0$ .

**Теорема 14.6.13** (Теорема Дарбу).  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  – дифференцируема на  $[a, b]$ . Пусть  $C$  лежит строго между  $f'(a)$  и  $f'(b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = C$

*Доказательство.* 1.  $C = 0$ . Для определенности  $f'(a) < 0 < f'(b)$ .  $f$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow f$  достигает наибольшего и наименьшего значения на  $[a, b]$ . При таких знаках производной наименьшее значение достигается на  $(a, b) \Rightarrow$  в такой точке минимума  $f'(c) = 0$  (по теореме Ферма).

2.  $C \neq 0$ . Рассмотрим  $h(x) = f(x) - Cx$ .

$$h'(a) = f'(a) - C, h'(b) = f'(b) - C \Rightarrow h'(a) \text{ и } h'(b) - \text{разных знаков}$$

Тогда по предыдущему пункту  $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = C$

■

**Теорема 14.6.14** (Правило Лопиталя). Пусть  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$  и  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

*Доказательство.*  $g$  дифференцируема на  $(a, b) \Rightarrow g$  непрерывна на  $(a, b)$ . Кроме того,  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow g$  строго монотонна на  $(a, b) \Rightarrow$  знакопостоянна на  $(a, b)$  (и ни в какой точке не равна нулю).

По Гейне:  $\forall \{x_n\} : x_n \rightarrow b, x_n \in (a, b) \Rightarrow g(x_n) \rightarrow 0$ . Возьмем строго возрастающую последовательность  $\{x_n\} : x_n \in (a, b), x_n \rightarrow b$ . Тогда  $\{g(x_n)\}$  строго монотонна. Тогда по теореме Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})}$$

если предел справа существует.

По теореме Коши:

$$\exists c_n \in (x_{n-1}, x_n) : \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} - \text{существует и равен } l$$

т.к.  $x_n \rightarrow b \Rightarrow c_n \rightarrow b$ .

■

**Теорема 14.6.15** (правило Лопиталя для бесконечностей). Условия те же, но  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = +\infty$ . Тогда если  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ .

*Замечание 14.6.16.* Обратить правило Лопиталя нельзя.  $f(x) = x + \sin x, g(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

Но

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 + \cos x}{1} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## 14.7. Производные высших порядков

$f$  дифференцируема на  $E$ .  $x \mapsto f'(x)$  область определения  $E$ .

Если  $f'(x)$  дифференцируема на  $E_1$ , то  $f$  дифференцируема на  $E_1$  дважды.

**Def 14.7.1.** Второй производной функции  $f$  в точке  $a$  называется  $(f')'(a) = f''(a)$ , третья производная –  $f'''(a) = (f'')'(a)$ .  $n$ -ая производная –  $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$

**Пример 14.7.2.**  $(x^3)''' = (3x^2)'' = (6x)' = 6$

**Пример 14.7.3.**  $(\sin x)^{(14)} = (\cos x)^{(13)} = (-\sin x)^{(12)} = (-\cos x)^{(11)} = (\sin x)^{(10)} = (\sin x)'' = -\sin x$

**Теорема 14.7.4** (Арифметические действия с производными высших порядков).  $f$  и  $g$   $n$  раз дифференцируемы в точке  $a$ . Тогда

1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \alpha f + \beta g - n$  раз дифференцируема и

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(a) = \alpha \cdot f^{(n)}(a) + \beta \cdot g^{(n)}(a)$$

2.  $f \cdot g - n$  раз дифференцируема в точке  $a$  и

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

*Доказательство.* 1. База при  $n = 1$  – верно.

Индукционный переход: пусть верно для  $l$ . Тогда для  $l + 1$ :

$$(\alpha f + \beta g)^{(l+1)} = ((\alpha f + \beta g)^{(l)})' = (\alpha f^{(l)} + \beta g^{(l)})' = \alpha f^{(l+1)} + \beta g^{(l+1)}$$

2. База при  $n = 1$ :  $(fg)' = fg' + f'g$ .

Индукционный переход: пусть верно для  $l$

$$\begin{aligned} (fg)^{(l+1)} &= ((fg)^{(l)})' = \left( \sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k)} g^{(l-k)} \right)' = \sum_{k=0}^l C_l^k (f^{(k)} g^{(l-k)})' = \\ &= \sum_{k=0}^l C_l^k (f^{(k+1)} g^{(l-k)} + f^{(k)} g^{(l+1-k)}) = \sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k+1)} g^{(l-k)} + \sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k)} g^{(l+1-k)} = \\ &= \sum_{j=1}^{l+1} C_l^{j-1} f^{(j)} g^{(l+1-j)} + \sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k)} g^{(l+1-k)} = \\ &= C_l^l f^{(l+1)} g + \sum_{j=1}^l (C_l^{j-1} + C_l^j) f^{(j)} g^{(l+1-j)} + C_l^0 f g^{(l+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^k f^{(k)} g^{(l+1-k)} \end{aligned}$$



Утверждение 14.7.5.  $(f(\alpha x + \beta))^{(n)} = \alpha^n + f^{(n)}(\alpha x + \beta)$

**Def 14.7.6.**  $f$  дифференцируема на  $E$  и  $f'$  непрерывна на  $E$ . Тогда  $f$  называется непрерывно дифференцируемой.

$f \in C^1(E)$  – непрерывно дифференцируемые функции.

$f \in C^2(E)$  – дважды непрерывно дифференцируемые функции.

$f \in C^n(E)$  –  $n$  раз непрерывно дифференцируемые функции.

$f \in C^\infty(E)$  – бесконечно непрерывно дифференцируемые функции.

**Пример 14.7.7.**  $f(x) = |x| \in C(\mathbb{R})$ , но  $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$

**Пример 14.7.8.**  $f(x) = x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$

**Пример 14.7.9.**  $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$  на  $\mathbb{R}$ .  $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$  на  $\mathbb{R}$ .

$f''(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$  на  $\mathbb{R}$  разрывна в нуле. Тогда  $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ , но  $f(x) \notin C^2(\mathbb{R})$