Дискретная математика 1 семестр ПИ, Лекции

Собрано 27 ноября 2021 г. в 15:19

Содержание

1. Основы комбинаторики 1
- 1.1. Множества . . . 1
- 1.2. Мощность множества . . . 1
- 1.3. Комбинаторика . . . 2

2. Перестановки 3
- 2.1. Лексикографический порядок перестановок . . . 3

3. Числа Стирлинга 4
- 3.1. Числа Стирлинга . . . 4
- 3.2. Числа Белла . . . 4

4. Теория вероятности 6
- 4.1. Основы теории вероятности . . . 6
- 4.2. Условная вероятность . . . 9
- 4.3. Независимость событий . . . 9
- 4.4. Формула полной вероятности . . . 10
- 4.5. Испытания Бернулли . . . 11
- 4.6. Предельные случаи испытаний Бернулли . . . 12
- 4.7. Случайные величины . . . 14
- 4.8. Дисперсия . . . 15
- 4.9. Производящие функции . . . 15
- 4.10. Характеристические функции . . . 16
- 4.11. Нормальное распределение . . . 16

5. Ликбез по алгоритмам 18
- 5.1. Полный перебор . . . 18
- 5.2. Линейные алгоритмы . . . 18
- 5.3. Разделяй и властвуй . . . 19
- 5.4. Жадные алгоритмы . . . 20
- 5.5. Динамическое программирование . . . 20

6. Теория графов 21
- 6.1. Способы задания графов . . . 21
- 6.2. Пути в графе . . . 22

Раздел #1: Основы комбинаторики

1.1. Множества

Def. 1.1.1. *Множество - совокупность объектов.*

Def. 1.1.2. *Покрытием множества A называется множество $B = \{B_1, B_2, ..., B_k\} : \bigcup_i B_i \supset A$*

Def. 1.1.3. *Разбиением множества A называется $\pi(X) = \{X_i\}$:*

$$X_i \neq \varnothing, \bigcup_i X_i = A, \forall i \neq j \to X_i \cap X_j = \varnothing$$

Def. 1.1.4. *Пусть B, C – разбиения A. B называется измельчением C, если B – разбиение A и $\forall i\ \exists j : B_i \subset C_j$*

1.2. Мощность множества

1. $|\varnothing| = 0$
2. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \Rightarrow |X| = n$
3. $\mathbb{N}$ – счётное. $\mathbb{Z}$ – тоже счётное:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 2x, x > 0 \\ 2|x| + 1, x < 0 \end{cases}$$

4. $[0, 1]$. Пусть существует $q : \mathbb{N} \to [0, 1]$
   1. $0, a_1 a_2 ... a_k ...$
   2. $0, b_1 b_2 ... b_k ...$
   3. $0, c_1 c_2 ... c_k ...$

   Рассмотрим $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_k..., \alpha_1 \neq a_1, \alpha_2 \neq b_2, \alpha_3 \neq c_3$ и т.д. Таким образом, всегда найдётся не пронумерованное число.
   $|[0, 1]|$ – континуум

Def. 1.2.1. *Множество всех подмножеств A обозначается 2^A*

Утверждение 1.2.2. $|2^A| = 2^{|A|}$

Доказательство. База: $A = \varnothing, |A| = 0, 2^A = \{\varnothing\} \Rightarrow |2^A| = 2^{|A|} = 1$
Индукционное предположение: Пусть $\forall A : |A| \leqslant k \to |2^A| = 2^{|A|}$
Индукционный переход:
Рассмотрим $A : |A| = k + 1, B_1 \in 2^{A \setminus \{x_{k+1}\}}, B = \{x_{k+1}\} \cup B_1$
$2^A = 2^{A \setminus \{x_{k+1}\}} \cup \{B\}$

$$\begin{cases} |2^{A \setminus \{x_{k+1}\}}| = 2^k \\ |\{B\}| = 2^k \end{cases} \Rightarrow 2^A = 2^k + 2^k = 2^{k+1} = 2^{|A|}$$

■

1.3. Комбинаторика

1. $A, B : A \cap B = \varnothing$
$$|A \cup B| = |A| + |B|$$
2. $A_1, ..., A_n, \forall i, j \to (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$
$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$
3. $A, B, A \cap B \neq \varnothing$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
4. $A_1, ..., A_n$
$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j=1}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k=1}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k - ... + (-1)^{n+1}|\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$
5. A, B
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$
6. $A_1, ..., A_n$
$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

1. Перестановки: $\langle a_1 ... a_n \rangle = \overline{\langle a_1 ... a_n \rangle, a_n}$. Тогда
$$|\langle 1 : n \rangle| = |\langle 1 : n-1 \rangle \times (1 : n)| = |\langle 1 : n-1 \rangle| \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!$$
2. Размещения. $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
3. Сочетания.
$$A_n^k = C_n^k \cdot k! \Leftrightarrow C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
4. Сочетания с повторениями. Выставим все k выбранных объектов в ряд и поставим между ними $n-1$ перегородку: до первой перегородки будут элементы 1-го типа, от первой до второй перегородки – 2-го типа и т.д. Таким образом, всего $n+k-1$ место. Нам нужно выбрать $n-1$ перегородку из этих $n+k-1$ мест
$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$$

Def. 1.3.1. *Пусть дан выпуклый n-угольник. Найти количество способов разбить его на треугольники с непересекающимися сторонами*

$$C_0 = 1, C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1} - \text{ Числа Каталана}$$

Раздел #2: Перестановки

2.1. Лексикографический порядок перестановок

Def. 2.1.1. *Пусть есть две перестановки* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. *Тогда*

$$X < Y \Leftrightarrow \exists k : x_i = y_i \ \forall i = 1, ..., k \wedge x_{k+1} < y_{k+1}$$

Алгоритм 2.1.2 (Поиск следующей перестановки). Найдем наибольший убывающий суффикс. Пусть $k : a_{k+1} > a_{k+2} > ... > a_n$. Тогда выберем из этого суффикса $a_i : a_i > a_k$ и a_i минимально. После этого отсортируем получившийся суффикс. Получим перестановку:

$$\langle a_1, a_2, ..., a_i, \mathrm{sort}[a_k, a_k + 1, ..., a_n] \rangle$$

Она и будет лексикографический следующей.

Раздел #3: Числа Стирлинга

3.1. Числа Стирлинга

Def. 3.1.1. *Пусть* $A = \{a_1, ..., a_n\}$. *Рассмотрим разбиение этого множества мощности* k, *т.е.* $X = \{X_1, ..., X_k\}$:

$$\forall i, j \to X_i \supset A, X_i \cap X_j = \varnothing, \bigcup_i X_i = A$$

Тогда числами Стирлинга – количество таких разбиений.

1. $k = 2 \Rightarrow S(n, 2) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i}{2} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$
2. Общий случай.
   - Если $\{a_n\}$ – элемент разбиения, то таких разбиений $S(n-1, k-1)$
   - $\exists i : a_n \in X_i, |X_i| > 1$. Тогда нужно найти количество разбиений $A \setminus \{a_n\}$ на k множеств, а потом вставить a_n в одно из этих множеств.
     Количество способов:
     $$S(n-1, k) \cdot k$$

   Тогда рекуррентная формула:

   $$S(n, k) = S(n-1, k-1) + S(n-1, k) \cdot k$$

   Базовые значения:

   $$\begin{array}{cc} S(n, 0) = 0 & S(0, 0) = 0 \\ S(k, n) = 0, k > n & S(n, 2) = 2^{n-1} - 1 \\ S(n, n-1) = C_n^2 & \end{array}$$

3.2. Числа Белла

Def. 3.2.1. *Числа Белла – количество разбиений множества.*

$$B(n) = \sum_{i=1}^{n} S(n, i)$$

Теорема 3.2.2 (Формула чисел Белла)**.** Рассмотрим произвольное разбиение множества A. $\exists i : a_{n+1} \in X_i, |X_i| = j$.
$|A \setminus X_i| = n + 1 - j$. Тогда количество способов выбрать X_i равно $C_n^{j-1} = C_n^{n+1-j}$
Количество разбиений $A \setminus X_i$, в свою очередь, равно $B(n + 1 - j)$. Тогда

$$B(n+1) = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{n+1-j} \cdot B(n+1-j) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B(k)$$

Теорема 3.2.3 (Формула чисел Стирлинга)**.**

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \cdot C_k^j(k-j)^n$$

Доказательство. Пусть $L = \{\rho \subseteq A \times \{1, ..., k\} | \rho$ – сюръекция$\}$. Заметим, это множество равномощно множеству упорядоченных разбиений мощности k.
$\{a_1, ..., a_n\} \to \{1, ..., k\}$. Элементы разбиения имеют следующий вид: $X_i = \{a_k | \rho(a_k) = i\}$. Т.к. отображение сюръективно, то X_i непусты.

$$S(n,k) = \frac{|L|}{k!}$$

Чтобы посчитать мощность L, из общего количества отображения вычтем количество несюръективных отображений. Пусть $P_i = \{\rho \subset A \times \{1, ..., n\} | \forall a \in A \to \rho(a) \neq i\}$. Тогда количество несюръективных отображений равно:

$$|\bigcup_{i=1}^{k} P_i| = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant ... \leqslant i_j \leqslant k}|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap ... \cap P_{i_j}|$$

$|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap ... P_{i_j}|$ – количество отображений из A в $\{1, ..., k\} \setminus \{i_1, ..., i_j\}$

$$|P_{i_1} \cap ... \cap P_{i_j}| = (k-j)^n$$

$$\sum_{i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_j}|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap ... \cap P_{i_j}| = C_k^j(k-j)^n$$

Тогда

$$|L| = k^n - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}C_k^j(k-j)^n = k^n + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j C_k^j(k-j)^n = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j(k-j)^n$$

Тогда искомая формула чисел Стирлинга:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j(k-j)^n$$

■

Раздел #4: Теория вероятности

4.1. Основы теории вероятности

Def. 4.1.1. $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – *множество всех взаимо-исключающих исходов эксперимента (пространство элементарных событий)*
$X \subseteq \Omega$ – *событие*

Def. 4.1.2. *Дано* $\Omega, \mathscr{A} \subset 2^\Omega$. *Тогда* $\mathscr{A}$ *называется алгеброй, если*

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$
3. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$

Утверждение 4.1.3. Если $\mathscr{A}$ – алгебра, то

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$
2. $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$
3. $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{A}$
4. $A_i \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathscr{A}, \bigcap A_i \in \mathscr{A}$

Доказательство. 1. $\Omega \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{\Omega} \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{\Omega} = \varnothing \Rightarrow \varnothing \in \mathscr{A}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathscr{A}$. Тогда $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B \in \mathscr{A}$
3. $A \setminus B = A \cap \overline{B} \in \mathscr{A}$
4. Доказывается по индукции.

∎

Def. 4.1.4. $\mathscr{A}$ *называется* σ*-алгеброй, если*

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. $A_i \in \mathscr{A}, i = 1, ... \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$
3. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$

Def. 4.1.5. *Пусть есть пространство* Ω, *определенная на нём* $\mathscr{A}$ – σ*-алгебра и* $f : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ – *функция над множеством. Тогда вероятностью называется функция из* $\mathscr{A}$ *в* $\mathbb{R}$ *такая, что*

1. $P(A) \geqslant 0 \ \forall A \in \mathscr{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A_1, A_2, ... : A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i, j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Перечисленные выше свойства называются ***аксиомами теории вероятности***
$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ – *вероятностное пространство.*

Свойства вероятности:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. Если $A_1, A_2 \in \mathscr{A}, A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$
4. Если $A_1, ..., A_n \in \mathscr{A}, A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i, j$, то
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
5. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   Доказательство.
$$P(\overline{A} \cup A) = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$
■

6. Если $A, B \in \mathscr{A}$, то
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   Доказательство.
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) = P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) + P((B \setminus A) \cup (A \cap B)) - P(A \cap B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
■

7. $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j=1}^{n} (A_i \cap A_j) + ...$
8. $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$
$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

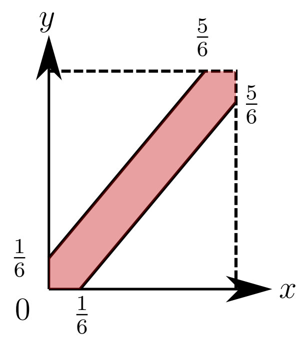
   Доказательство. $A_{k-1} \subset A_k$. Рассмотрим $A_k \setminus A_{k-1}$. Пусть $A_0 = \varnothing$.
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k \setminus A_{k-1}) \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - P(A_{k-1}) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} P(A_n) - P(\varnothing) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$
■

9. $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ....$ Тогда
$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

Пример 4.1.6. Два человека приходят на место в промежуток от 12 до 13ч и ждут 10 минут прежде чем уйти. Найти вероятность того, что они встретятся.

Решение 1. Пусть t_1 – время, когда приходит первый, t_2 – время, когда приходит второй.

$$|t_1 - t_2 \leqslant \frac{1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 \geqslant t_1 - \frac{1}{6} \\ t_2 \leqslant t_1 + \frac{1}{6} \end{cases}$$



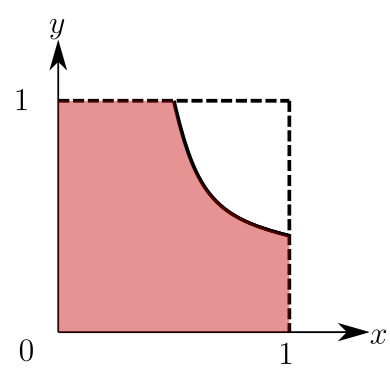
Тогда вероятность – площадь заштрихованной фигуры:

$$S = 1 - 2 \cdot \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}}{2} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Пример 4.1.7. На $[0, 1]$ выбираются два числа x, y. Найти вероятность того, что их произведение меньше $\frac{1}{2}$

Решение 2.

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2x}, x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Тогда искомая вероятность:

$$P(x \cdot y < \frac{1}{2}) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}$$

4.2. Условная вероятность

Def. 4.2.1. *Вероятность события A при условии, что выполняется событие B равна*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пример 4.2.2. Есть урна, в которой лежит m белых и n черных шаров. Вытащим из неё два шара. Какова вероятность того, что они оба белые?

Решение 3.

$$P(\text{первый} - \text{белый}) = \frac{m}{m+n}, P(\text{второй} - \text{белый}|\text{первый} - \text{белый}) = \frac{m-1}{m+n-1}$$

$$P(\text{оба белые}) = \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m}{m+n}$$

Свойства условной вероятности:

1. $P(\Omega|B) = 1$
2. $P(\varnothing|B)0$
3. $0 \leqslant P(A|B) \leqslant 1$
4. $A \subset C \Rightarrow P(A|B) \leqslant P(C|B)$
5. $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$
6. $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$
7. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot ... \cdot P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

$$P((A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \cdot P(A_1 \cap ... \cap_{n-1})$$

Пример 4.2.3. Бросаем 3 кубика. Найти вероятность того, что хотя бы на одном из них выпадет 1 при условии, что на всех выпали разные значения.

Решение 4.

$$P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B) = 1 - \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4.3. Независимость событий

Def. 4.3.1. *A независимо от $B (P(B) \neq \varnothing)$, если $P(A|B) = P(A)$*

Утверждение 4.3.2. Если A независимо от $B \Rightarrow B$ независимо от A.

Доказательство.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P(B)} = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} = P(B)$$

■

Def. 4.3.3. *A, B – независимые, если*

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

Def. 4.3.4. *$A_1, ..., A_n$ – независимы в совокупности, если*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Def. 4.3.5. *$A_1, .., A_n$ – попарно-независимы, если*

$$\forall i, j \to P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

Замечание 4.3.6. Если $A_1, ..., A_n$ попарно-независимы, то они необязательно независимы в совокупности.

4.4. Формула полной вероятности

Def. 4.4.1. *Пусть $H_1, ..., H_n$ – разбиение Ω. Тогда $H_1 \cup ... \cup H_n = \Omega$ называется полной группой событий.*

Теорема 4.4.2. $H_1, ..., H_n$ – полная группа событий и $P(H_i) > 0\ \forall i = 1, ..., n$. Тогда

$$\forall A \to P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Доказательство.

$$A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup ... \cup H_n) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup ... \cup (A \cap H_n)$$

$$P((A \cap H_1) \cup ... \cup (A \cap H_n)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

■

Теорема 4.4.3 (Формула Байеса)**.** Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ – полная группа событий. A – событие (считаем произошедшим). Тогда

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

Доказательство.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

■

4.5. Испытания Бернулли

Def. 4.5.1. *Обозначим $P_n(m)$ – вероятность получить m успехов за n испытаний.*

Теорема 4.5.2 (Теорема Бернулли)**.** Рассмотрим упорядоченный набор: $\underbrace{SSS...S}_{n}\underbrace{FFF...F}_{n-m}$, где S обозначает успех, а F – неудачу. В силу независимости испытаний, вероятность получить конкретный упорядоченный набор равна $p^m(1-p)^{n-m}$. Таких наборов, очевидно, C_n^m

Теорема 4.5.3. $0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant n$. $P_n(m_1, m_2)$ – успех наступил от m_1 до m_2 раз.

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{i=m_1}^{m_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Def. 4.5.4. *Наивероятнейшее число событий – число событий в испытаниях Бернулли с наибольшей вероятностью.*

Теорема 4.5.5. Наивероятнейшее число успехов в n испытаниях заключено между числами $np-(1-p)$ и $np+p$

Доказательство. Рассмотрим следующее соотношение:

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} (1-p)^{n-m+1}} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n!(m-1)!(n-m+1)!}{n!m!(n-m)!} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-m+1}{m}$$

Отсюда очевидно, что

$$\begin{aligned} P_n(m) > P_n(m-1), m < (n+1)p \\ P_n(m) = P_n(m-1), m = (n+1)p \\ P_n(m) < P_n(m-1), m > (n+1)p \end{aligned}$$

Значит, при $m < (n+1)p$ $P_n(m)$ возрастает, при $m > (n+1)p$ – убывает. Тогда несложно найти m такое, чтобы $P_n(m)$ было наибольшим:

$$\begin{cases} P_n(m) > P_n(m-1) \\ P_n(m+1) < P_n(m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < (n+1)p \\ m+1 > (n+1)p \end{cases} \Leftrightarrow np+p-1 < m < np+p$$

∎

4.6. Предельные случаи испытаний Бернулли

Рассмотрим ситуацию, когда вероятность какого-то события уменьшается пропорционально n, т.е. $p \sim \frac{1}{n}$

Теорема 4.6.1 (Теорема Пуассона)**.** Пусть $np \to \lambda$.

$$\forall m, \forall \lambda \lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
P_n(m) = C_n^m p^m \cdot (1-p)^{n-m} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\
&= \frac{n(n-1)...(n-m)+1}{m!} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m = \\
&= \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) ... \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

■

Теорема 4.6.2 (Локальная теорема Муавра-Лапласа)**.** Пусть $x_n = \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Предположим, что x_n ограничена при $n \to \infty$. Тогда

$$\sqrt{np(1-p)} \cdot P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_n^2}{2}}$$

Доказательство. Вспомним, что $k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$.
$n - m = n(1-p) - x_n\sqrt{np(1-p)}$. Тогда

$$\sqrt{np(1-p)}P_n(m) = \sqrt{np(1-p)}C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$
$$\approx \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi m} \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot \sqrt{2\pi(n-m)} \cdot \left(\frac{n-m}{e}\right)^{n-m}} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$
$$= \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot \sqrt{n} \cdot n^n}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{m} \cdot m^m \cdot (n-m)^{n-m}} \cdot p^m (1-p)^{n-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-m}\right)^{n-m} \sqrt{\frac{np}{m}} \cdot \sqrt{\frac{n(1-p)}{n-m}}$$

$m = np + x_n\sqrt{np(1-p)}$

$$\frac{m}{np} = 1 + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$
$$\frac{n-m}{n(1-p)} = 1 - \frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Пусть, для удобства, $\exp(x) = e^x$. Тогда

$$\sqrt{np(1-p)}P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right)^{-m} \left(1 - \frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}\right)^{-(n-m)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-m \cdot \ln\left(1 + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right) - (n-m) \cdot \ln\left(1 - \frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}\right)\right)$$

Как мы знаем (откуда?)

$$\ln(1+y) \xrightarrow[y\to 0]{} y - \frac{y^2}{2}(1 + O(1))$$

Следовательно $\sqrt{np(1-p)}P_n(m) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-m\left(\frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} - \frac{x_n^2}{2np}\right)(1+O(1)) - (n-m)\left(-\frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} - \frac{x_n^2 p}{2n(1-p)}\right)(1+O(1))\right)$$

$$x_n\left(\frac{(n-m)\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} - \frac{m\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right) =$$
$$= \frac{x_n}{\sqrt{np(1-p)}}\left(np(1-p) - x_n\sqrt{np(1-p)}p - n(1-p)\cdot p - x_n\sqrt{np(1-p)}(1-p)\right) =$$
$$= -x_n^2(p + (1-p)) = -x_n^2$$

Таким образом:

$$\sqrt{np(1-p)}P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-x_n^2 + \frac{x_n^2}{2}\right)(1+O(1))} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}$$

■

Теорема 4.6.3 (Интегральная теорема Муавра-Лапласа). $a_n = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, b_n = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, q = 1 - p$. Пусть $m_1 \to \infty, n \to \infty, a_n, b_n$ – ограничены. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|P_n(m_1, m_2) - \frac{1}{2\pi}\int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right| = 0$$

Def. 4.6.4. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – *функция Гаусса.*
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – *функция Лапласа.*

Следствие 4.6.5. По локальной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) \sim \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) \sim \frac{1}{2}(\Phi(b_n) - \Phi(a_n))$$

4.7. Случайные величины

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\}$

Def. 4.7.1. *Функция, заданная на Ω – случайная величина.*

$$x = X(\Omega)$$

Def. 4.7.2. *Соответствие, которое каждому x_i сопоставляет вероятность p_i – распределение (закон распределения)*

Замечание 4.7.3. Если X – дискретная случайная величина, то $Y = g(X)$ – тоже дискретная случайная величина и

$$y_i = g(x_i), p_i = P(X = x_i)$$

Def. 4.7.4. *Определим случайную величину в более общим случае. Пусть у нас есть $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Тогда случайная величина это*

$$X = X(\omega), \omega \in \Omega : \{X < x\} = \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathscr{A} \ \forall x$$

Def. 4.7.5. $F(x) = P(X < x), x \in (-\infty, +\infty)$ *– функция распределения случайной величины.*

Свойства:

1. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ если $x_1 < x_2$
2. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$
3. $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$

Def. 4.7.6. *Пусть $P(y)$ – неотрицательная функция. Если $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$, то $P(y)$ – плотность распределения. В частности, $P(x) = F'(x)$*

Def. 4.7.7. *Есть $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$, где $P(A, B)$ – вероятность одновременного наступления событий A и B, то X, Y – независимые случайные величины.*

Def. 4.7.8. *Пусть X – дискретная случайная величина. Тогда матожиданием называется*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

а $\mathbb{E}(|X|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| p_i$ – абсолютный момент.

Свойства:

1. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(x) + b$
2. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
3. Если X, Y – независимые случайные величины, то $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

4.8. Дисперсия

Def. 4.8.1. $\mathbb{D}(X) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X))^2$ – *дисперсия.*

Замечание 4.8.2. $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 p_i$

Свойства дисперсии:

1. $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

   Доказательство. $\mathbb{D}(X) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 p_i - \sum_{i=1}^{n} 2X_i\mathbb{E}(X)p_i + \sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}(X))^2 p_i = \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(X))^2 \cdot 1 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ ■

2. $\mathbb{D}(aX + b) = a^2 \cdot \mathbb{D}(X)$
3. $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y)$

   Доказательство. $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{E}((X + Y)^2) - (\mathbb{E}(X + Y))^2 = \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X))^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2$. ■

Def. 4.8.3. $m_k = \mathbb{E}(X^k)$ – *k-й момент.*
$\mathbb{E}(|X|^k)$ – *k-й абсолютный момент.*
$M_k = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^k$ – *центральный момент.*

Def. 4.8.4. $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$
$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

Замечание 4.8.5. $\mathrm{cov}(X + Z, Y) + \mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{cov}(Z, Y)$
$\mathrm{cov}(X, Y + Z) = \mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{cov}(X, Z)$

Def. 4.8.6. *Коэффициент корелляции случайных величин X и Y*

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}$$

Свойства:

1. $\rho(aX + b, cY + d) = \mathrm{sign}(ac)\rho(X, Y)$

4.9. Производящие функции

Def. 4.9.1. *Пусть X – случайная величина, принимающая значения Z_+ с вероятностями $p_0, p_1, ...$*
Рассмотрим функцию $\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k = \mathbb{E}(z^X), |z| \leqslant 1, z \in \mathbb{C}$. Заметим, что

1. $|\psi(z)| = |\sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |z^k| p_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$
2. $p_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n}\psi(z)|_{z=0}$
3. $\frac{d^n}{dz^n}\psi(z)|_{z=1} = \mathbb{E}(X(X-1)...(X-n+1))$

Доказательство. $\frac{d^n}{dz^n}\psi(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)...(k-n+1) \cdot z^{k-n} p_k$
$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2$. Заметим, что $\mathbb{E}(X) = \psi'(z), \mathbb{E}(X(X-1)) = \psi''(z)$ ■

Пример 4.9.2. $\psi = \frac{1}{4}(1+z)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2$

4.10. Характеристические функции

Def. 4.10.1. $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$. *Для дискретной случайной величины:*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itX} p_k$$

Свойства:

1. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at)$
2. $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$
3. $\mathbb{E}(X^k) = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} \cdot \varphi(t)|_{t=0}$

4.11. Нормальное распределение

$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(X-a)^2}{\sigma^2}\right)$

Def. 4.11.1. $N(a, \sigma^2)$ – *нормальное распредение.*
$N(0,1)$ – *стандартное нормальное распределение.*

$$\varphi(t) = \exp\left(-ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \mathbb{E}(X) = a, \mathbb{D}(X) = \sigma^2$$

Замечание 4.11.2. $P(|X-a| < 3\sigma) = \Phi(3) \sim 0.997$

Lm 4.11.3. Пусть X – неотрицательная случайная величина. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

Доказательство. $1_{[0,\varepsilon)}(X) + 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X) = 1$, где $1_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, x \in [a,b) \\ 0, x \notin [a,b) \end{cases}$

$X \cdot 1_{[\varepsilon,+\infty)} \geqslant \varepsilon \cdot 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X)$

$$\mathbb{E}(X \cdot 1_{[\varepsilon,+infty)}(X)) \geqslant \varepsilon \mathbb{E}(1_{[\varepsilon,+\infty)}(X))$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X(1_{[0,\varepsilon)}(X) + 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X)) = \mathbb{E}(X \cdot 1_{[0,\varepsilon)}(X)) + \mathbb{E}(X \cdot 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X)) \geqslant$$
$$\geqslant \mathbb{E}(X \cdot 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X)) \geqslant \varepsilon \mathbb{E}(1_{[\varepsilon,+\infty)}(X)) = \varepsilon P(X \geqslant \varepsilon)$$

■

Теорема 4.11.4 (Неравенство Чебышева). $\forall Y$ – случайная величина с конечным вторым моментом. Тогда

$$\forall \delta \ P(|Y - EY| \geqslant \delta) \leqslant \frac{DY}{\delta^2}$$

Доказательство. Рассмотрим $X = |Y - EY|^2, \varepsilon = \delta^2$

$$P(|Y - EY| \geqslant \delta) = P(|Y - EY|^2 \geqslant \delta^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y - EY)^2}{\delta^2} = \frac{DY}{\delta^2}$$

■

Замечание 4.11.5. $P(|\sum_{i=0}^n K_i - \sum_{i=0}^n \mathbb{E}X_i| \geqslant \delta) \leqslant \frac{1}{\delta}\sum_{i=0}^n \mathbb{D}X_i$

Def. 4.11.6. *Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – последовательность случайных величин. Тогда $X_n \xrightarrow{n\to a} X$ если $\mathbb{E}(X_n - X)^2 \to 0$ – сходимость среднеквадратичная.*

Def. 4.11.7. *$X_n \xrightarrow{P} X$, если $P(|X_n - X| \geqslant \mathbb{E}) \to 0$ – сходимость по вероятности.*

Def. 4.11.8. *$X_n \xrightarrow[\text{почти наверное}]{} X$, если $P(\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)) = 1$ – сходимость "почти наверное".*

Теорема 4.11.9 (Закон Больших Чисел). $X_1, ...X_n, ...$ – последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин. Пусть $m = EX_i, DX_i < +\infty$. Тогда

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n\to\infty]{} m$$

Доказательство. Среднекватратичная сходимость:
$\mathbb{E}\overline{X}_n = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n}\cdot m \cdot n = m$

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n - m)^2 = \mathbb{D}(\overline{X}_n) = \mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_i = \frac{1}{n}\cdot\mathbb{D}(X_i) \to 0$$

Сходимость по вероятности:

$$P(|\overline{X}_n - m)| \geqslant m) = P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n EX_i\right| \geqslant n\varepsilon\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_i}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}X_i}{n\varepsilon^2} \to 0$$

■

Теорема 4.11.10 (Центральная предельная теорема). $\{X_i\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbb{E}X_i = a, \mathbb{D}X_i, \sigma^2$. Пусть $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, F_n(x) = P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right), N(X)$ – стандартное нормальное распределение. Тогда

$$\sup |F_n(x) - N(X)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

т.е. $S_n \to N(na, n\sigma^2)$

Раздел #5: Ликбез по алгоритмам

Пример 5.0.1. $n! = \prod_{i=1}^{n} i$

```
int res = 1;
for (int i = 1; i <= n; i++, res *= i);
```

Либо же можно избрать другой подход:

```
int f(int t) {
    if (n > 0)
        return f(n - 1) * n;
    return 1;
}
```

Какой из этих алгоритмов лучше? Очевидно, что оба алгоритма работают за $O(n)$, однако на второй алгоритм требуется больше памяти, а именно $O(n)$ памяти, а первый лишь $O(1)$.

5.1. Полный перебор

Пример 5.1.1. $2x + y = 100, x, y \in \mathbb{N}$. Заметим, что $1 \leqslant x \leqslant 49, 1 \leqslant y \leqslant 99$. Тогда несложно перебрать все варианты: $\forall (a, b) \in X \times Y$ проверяем, выполняется ли $2a + b = 100$. Перебор можно было урезать, например, заметив, что $y < 99$, т.к. $x \geqslant 1 \Rightarrow 100 - 2x \leqslant 98$. Также, $y \vdots 2$, т.к. $2x \vdots 2, 100 \vdots 2$. В конце концов, можно заметить, что $y = 100 - 2x$, значит $\overline{X} = \{1, ..., 99\}, \overline{Y} = \{100 - 2x\}, |X| = 49, |Y| = 1$. Значит достаточно перебирать только $b \in X$, что сокращает перебор в 100 раз.

Def. 5.1.2. *Будем считать перебор* ***оптимальным****, если множество перебираемых значений по мощности асимптотически равно размеру ответа.*

Пример 5.1.3. Решето Эратосфена. Хотим найти все простые числа, меньшие n.

```
bool prime[n] = {1};
prime[0] = prime[1] = 0;
for (int i = 2; i * i < n; i++) {
    if (prime[i]) {
        for (int j = i * i; j < n; j += i)
            prime[j] = 0;
    }
}
```

5.2. Линейные алгоритмы

Пример 5.2.1. Дана последовательность $\{a_0, ..., a_{n-1}\}$. Хотим найти $i, j : \sum_{k=i}^{j} a_k$ максимальна.

```
int max_sum = 0;
int cur_sum = 0;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    cur_sum += a[i];
    max_sum = max(max_sum, cur_sum);
    if (cur_sum < 0)
        cur_sum = 0;
}
```

5.3. Разделяй и властвуй

Идея заключается в разделении задачи на несколько подзадач того же типа и в дальнейшем слиянии получившихся результатов.

Пример 5.3.1 (Сортировка слиянием)**.** Имеется массив, который мы хотим отсортировать. Делим массив пополам и рекурсивно выполняем сортировку в левой и правой половинах. Слияние половинок выполняется несложно. Массив длиной 1 считаем отсортированным. Тогда получается $\log_2 n$ уровней, на каждом из которых выполняется слияние за $O(n)$, тогда общая асимптотика $O(n \log n)$

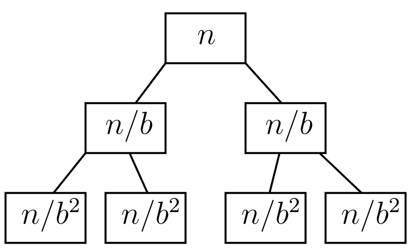
Теорема 5.3.2 (Мастер теорема)**.** Если есть рекуррентное соотношение:

$$T(n) = \begin{cases} a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^c), n > 1 \\ O(1), n = 1 \end{cases}$$

где n – длина задачи, которая делится на a подзадач длины $\frac{n}{b}$ за время $O(n^c)$ Тогда

1. Если $c > \log_b a$, то $T(n) = O(n^c)$
2. Если $c = \log_b a$, то $T(n) = O(n^c \cdot \log n)$
3. Если $c < \log_b a$, то $T(n) = O(n^{\log_b a})$

Доказательство. Рассмотрим дерево рекурсии:



№ слоя	# задач	Размер задач	Накладные расходы
0	1	n/b	$O(n^c)$
1	a	n/b^2	$O(n^c)$
...	a^i	n/b^i	$O\left(a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^c\right) = O\left(m^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right)$
$\log_b n$	$a^{\log_b n}$	$O(1)$	1

Тогда

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} O\left(n^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right) = O\left(n^c \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right)$$

1. $c > \log_b a$, т.е. $\frac{a}{b^c} < 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i$ – сумма убывающей геометрической прогрессии, т.е. константа. Значит $T(n) = O(n^c)$
2. $c = \log_b a \Rightarrow T(n) = O\left(n^c \sum_{i=0}^{\log_b n} 1\right) = O(n^c \log n)$
3. $c < \log_b a \Rightarrow$

$$T(n) = O\left(n^c \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right) = O\left(n^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n}\right) = O\left(n^c \cdot \frac{a^{\log_b n}}{b^{\log_b n \cdot c}}\right) = O(a^{\log_b n}) = O(n^{\log_b a})$$

■

Алгоритм 5.3.3 (Алгоритм Карацубы). Рассмотрим числа длины $2n$. $A = (A_1 \cdot 10^n + A_2), B = (B_1 \cdot 10^n + B_2)$. Тогда $A \cdot B = A_1B_1 \cdot 10^{2n} + 10^n(A_1B_2 + A_2B_1) + A_2B_2$. Обратимся к мастер теореме. $a = 4, b = 2, c = 1$. $\log_b a = \log_2 4 = 2$. Тогда оценка сложности $T(n) = O(n^2)$. Рассмотрим следующую величину: $\underbrace{(A_1 + A_2) \cdot (B_1 + B_2)}_{\delta} = \underbrace{A_1B_1}_{\alpha} + \underbrace{A_1B_2 + A_2B_1}_{\beta} + \underbrace{A_2B_2}_{\gamma}$. Тогда $a = 3, b = 2, c = 1 \Rightarrow T(n) = O(n^{\log_2 3})$

5.4. Жадные алгоритмы

Пример 5.4.1. Пусть имеются монетки номиналом в 1, 2, 5, 10, 50, 100. Каким наименьшим количеством монет можно разменять данную сумму?

$$x = \left(\frac{x}{100}\right) k_1 + \underbrace{x\%100}_{y_1}$$

$$y_1 = \left(\frac{y}{50}\right) k_2 + \underbrace{y_1\%50}_{y_2}$$

$$\ldots$$

$$y_5 = \left(\frac{y_4}{1}\right) k_6 + 0$$

5.5. Динамическое программирование

Def. 5.5.1. *Динамическое программирование – способ решений рекуррентных задач с помощью запоминания промежуточных результатов.*

Пример 5.5.2. $\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}, \varphi_0 = \varphi_1 = 1$. Если решать эту задачу рекурсивно, несколько значений придётся вычислять несколько раз, что неоптимально. Вместо этого можно решать итеративно, запоминая промежуточные результаты:

```
int fib[n];
fib[0] = fib[1] = 1;
for (int i = 2; i < n; i++)
    fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2]
```

Раздел #6: Теория графов

Def. 6.0.1. *Пусть* $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, E \subset V \times V$. $(V, E) = G$ *– граф.* V *– множество вершин,* E *– множество рёбер.*

Def. 6.0.2. *Мультиграф –* **TODO**.

Def. 6.0.3. $G = (V, E), v_i \in V, e_j = (v_k, v_l) \in E$. v_i ***инцидентно*** e_j*, если* $v_k = v_i$ *или* $v_l = v_i$.

Def. 6.0.4. *Степень вершина - число ребер, ей инцидентных.*

Утверждение 6.0.5. Сумма степеней графа – четна.

Доказательство. $\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = \deg v_1 + \deg v_2 + ... + \deg v_n = \sum_{e_i \in E}(1+1) = |E| \cdot 2$ ■

Def. 6.0.6. $v_i, v_j \in V$. v_i *смежна с* v_j*, если* $\exists e_k = (v_i, v_j)$

6.1. Способы задания графов

1. Матрица смежности.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & v_1 & v_2 & ... & v_n \\ \hline v_1 & & & & \\ \hline v_2 & & & & \\ \hline ... & & & & \\ \hline v_n & & & & \end{array} = M, M_{i,j} = \begin{cases} 0, (v_i, v_j) \notin E \\ 1, (v_i, v_j) \in E \end{cases}$$

   Очевидно, что для её хранения требуется $O(|V|^2)$ памяти.

2. Список смежности.

$$\begin{aligned} v_1 &: \overbrace{v_{11}, v_{12}, ...}^{\text{смежные с } v_i} \\ v_2 &: v_{21}, v_{22}, ... \\ &\vdots \\ v_n &: v_{n1}, v_{n2}, ... \end{aligned}$$

   Поскольку мы храним все ребра, то нужно $O(|E|)$ памяти.

3. Список ребер.
4. Матрица инцидентности. Матрица размера $|V| \cdot |E|$:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & e_1 & e_2 & ... & e_m \\ \hline v_1 & & & & \\ \hline v_2 & & & & \\ \hline ... & & & & \\ \hline v_n & & & & \end{array} = MI, MI_{i,j} = \begin{cases} 0, v_i \text{ не инцидентно } e_j \\ 1, \text{иначе} \end{cases}$$

6.2. Пути в графе

Def. 6.2.1. *Пусть в графе – последовательность вершин* $u_1, u_2, ...u_k : \forall 2 \leqslant i \leqslant k \to (u_{i-1}, u_i) \in E$
Простой путь – путь, в котором вершины не повторяются.

Def. 6.2.2. *Наличие пути между двумя вершинами – отношение эквивалентности* $\Rightarrow$ *вершины разбиваются на классы эквивалентности –* ***компоненты связности***

Def. 6.2.3. *Цикл в графе – последовательность вершин* $u_1, ..., u_k : \begin{cases} \forall i \to (u_{i-1}, u_i) \in E \\ (u_k, u_1) \in E \end{cases}$

Def. 6.2.4. *Простой цикл – цикл без повторяющихся ребер.*

Def. 6.2.5. *Если* $V_1 \subset V, E_1 \subset E, H = (V_1, E_1)$ *– граф, тогда* H *– подграф* G*.*

Def. 6.2.6. H *– остовный подграф* G*, если* $V_1 = V$

Def. 6.2.7. H *– индуцированный подграф* G*, если* $\forall x, y \in V_1((x, y) \in E \Rightarrow (x, y) \in E_1)$