Алгебра 2 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 19 мая 2022 г. в 11:15

Содержание

Раздел #1: Системы линейных уравнений

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$A = (a_{ij})$ – матрица коэффициентов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Определение 1. Решение СЛУ $(*)$ называется $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$: при $x_i = \alpha_i$ все уравнения становятся верными.

Определение 2. СЛУ $(*)$ совместна, если $\exists$ хотя бы одно решение. Иначе - несовместна.

1.1. Ранг матрицы

$A - m \times n, A = (A_1, A_2, \ldots, A_m), A_i$ – строки.
$A = (A^1, A^2, \ldots, A^n), A^j$ – столбцы.

Определение 3. Строчным (столбцовым) рангом матрицы A называется максимальное число ЛНЗ строк (столбцов).
Иначе, количество элементов в базисе $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle(\langle A^1, \ldots, A^n\rangle)$.

Теорема 1. Строчный и столбцовый ранги совпадают.

Обозначение: $\operatorname{rank} A$.

Определение 4. Минором матрицы $A - m \times n$ k-го порядка называется определитель, составленный из элементов матрицы A, стоящих на k выбранных строках и на k выбранных столбцов.

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 5 & 9 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Если вы выберем вторую и третью строку, а также первый и последний столбец, то минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Теорема 2. Ранг матрицы A равен наибольшему порядку минора, отличного от нуля.

Теорема 3 (Связь определителя с рангом матрицы). $A - n \times n$. Тогда $\operatorname{rank} A < n \Leftrightarrow \det A = 0$.

Доказательство. $\Rightarrow$. $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow$ строки $A_1, \ldots, A_n$ ЛЗ, т.е. $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$: $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = 0$ (α_i не все равны нулю). Пусть $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} A_n$. Обнулим первую строку: прибавим к ней A_2, умноженную на $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, A_3, умноженную на $-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ и т.д. Поскольку теперь первая строка целиком нулевая, то $\det A = 0$.

$\Leftarrow$. Индукция $n = 1 \Rightarrow a_{11} = 0$. $n - 1 \to n$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Можем считать, что $A^1 \neq 0, a_{11} \neq 0$. Домножим первую строку на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавляем ко второй строке. Затем домножаем первую строку на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и прибавляем ко третьей строке и т.д.

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

По предположению $A'_2, \ldots, A'_n$ – ЛЗ. $\begin{cases} A'_2 = A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot A_1 \\ \cdots \\ A'_n = A_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} \cdot A_1 \end{cases}$.

$0 = \alpha_2 A'_2 + \ldots + \alpha_n A'_n = (\ldots) A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \ldots + \alpha_n A_n \Rightarrow A_1, \ldots, A_n$ – ЛЗ $\Rightarrow \operatorname{rank} A < n$. □

Определение 5. Элементарными преобразованиями над строками (столбцами) называется

1. Перестановка строк (столбцов).
2. Умножение строки (столбца) на $\lambda \neq 0$.
3. Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на $\lambda \neq 0$.

Теорема 4. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Доказательство. $1, 2$ – очевидно. $(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \to (A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n)$ □

Определение 6. Матрица называется трапецевидной, если у неё в $\forall$ ненулевой строке число нулей слева различно.

Замечание. rank трапецевидной матрицы равен числу ненулевых строк.

Теорема 5 (О вычислении ранга). Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к трапецевидной.

1.2. Структура решений СЛУ

Определение 7. СЛУ (*) называется однородной, если все свободные члены равны нулю.

Определение 8. Нулевое решение однородной СЛУ называется тривиальным. Любое другое решение – нетривиальным.

Лемма 1. Пусть Y, Z – решения $AX = 0 \Rightarrow \alpha Y + \beta Z$ – тоже решение, $\alpha, \beta \in K$.

Доказательство.

$$AY = 0, AZ = 0 \Rightarrow A(\alpha Y + \beta Z) = \alpha AY + \beta AZ = 0$$

□

Теорема 6 (Структура решений однородной СЛУ). $AX = 0, A - m \times n, n$ – число неизвестных, $r = \operatorname{rank} A \Rightarrow \exists n - r$ ЛНЗ решений $X_1, ..., X_{n-r} : \forall$ решение $X = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}$.

Доказательство. $A = (A^1, ..., A^n)$, $A^1, ..., A^r$ – ЛНЗ столбцы $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A^{r+1} = \beta_{r+1\ 1} A^1 + ... + \beta_{r+1\ n} A^r \\ ... \\ A^n = \beta_{n\ 1} A^1 + ... + \beta_{n\ r} A^r \end{cases}$$

$AX = 0 \Leftrightarrow x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = 0$.

$$X_1 = \begin{pmatrix} \beta_{r+1\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{r+1\ r} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \beta_{r+2\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{r+2\ r} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., X_{n+r} = \begin{pmatrix} \beta_{n\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{n\ r} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \text{ – решения. Они ЛНЗ.}$$

Пусть $Z = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_r^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ – решение. Рассмотрим $Y = Z + x_{r+1}^* X_1 + x_{r+2}^* X_2 + \ldots + x_n^* X_{n-r}$. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – решение

Получили следующую систему линейных уравнений: $\{y_1 A_1 + \ldots + y_r A_r = 0$.

Но $A_1, \ldots, A_r$ – ЛНЗ $\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = Z + x_{r+1}^* X_1 + x_{r+2}^* X_2 + \ldots + x_n^* X_{n-r}$. □

Определение 9. $\forall n-r$ ЛНЗ решений однородной системы линейных уравнений называется **фундаментальной системой решений**, решение вида $X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r}$ – **общее решение**.

1.3. Неоднородные СЛУ

$AX = B, A - m \times n, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$ – расширенная матрица $m \times (n+1)$.

Теорема 7 (Кронекера-Капелли). $(*)$ – совместна $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$.

Доказательство. $\Rightarrow$. $AX = B$ – совместна $\Rightarrow \exists$ решение $x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n = B \Rightarrow B$ – линейная комбинация $A^1, \ldots, A^n \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$.
$\Leftarrow$. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = r \Rightarrow \exists A^1, \ldots, A^r$ – ЛНЗ $\Rightarrow A^1, \ldots, A^r, B$ – ЛЗ $\Rightarrow B = \alpha_1 A^1 + \ldots + \alpha_r A^r$, не все $\alpha_i = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$ – решение системы. □

Теорема 8 (О структуре решений неоднородной СЛУ). $AX = B, \operatorname{rank} A = r, n$ – число неизвестных, система совместна. X_* – какое-то решение СЛУ, $X_1, \ldots, X_{n-r}$ – фундаментальные решения $AX = 0$. Тогда любое решение $(*)$ имеет вид $X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r} + X_*, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in K$.

Доказательство. $AX_* = B \Rightarrow AX = AX_* \Rightarrow A(X - X_*) = 0 \Rightarrow X - X* = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r}$. □

Пример (Решение СЛУ методом Гаусса).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4-\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6-\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Раздел #2: Линейные отображения векторных пространств

Определение 10. V, W – векторные пространства над K. Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in V$
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)\ \forall x \in V, \alpha \in K$

Замечание. $1, 2 \sim f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)\ \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in K$.

Определение 11. $\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W$ – линейные$\}$

Лемма 2. $\mathrm{Hom}(V, W)$ – векторное пространство над K.

Доказательство. $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W), (f+g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \Rightarrow f + g, \alpha f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. $\square$

Определение 12. $f \in \mathrm{Hom}(V, W), \ker f = \{x \in V : f(x) = 0\}$ – ядро отображения f, $\mathrm{Im}\, f = \{f(x), x \in V\}$ – образ f.

Лемма 3. $\ker f \subset V, \mathrm{Im}\, f \subset W$ – подпространства.

Доказательство. $x, y \in \ker f, f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in \ker f$. Аналогично, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0 \Rightarrow \alpha x \in \ker f\ \ \forall \alpha \in K \Rightarrow \ker f$ – подпространство. $\square$

Упражнение. $\mathrm{Im}\, f$ – подпространство.

Теорема 9. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

1. f – инъективно $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.
2. f – сюръективно $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = W$.

Доказательство. $\Leftarrow$. $x_1 \neq x_2$, если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$!?
$\Rightarrow$. Пусть $x \in \ker f, x \neq 0 \Rightarrow f(x) = f(0) = 0$!?. $\square$

2.1. Матрица линейного отображения

$e_1, \dots, e_n$ – базис $V, e'_1, \dots, e'_m$ – базис $W, f \in \mathrm{Hom}(V, W)$
$x \in V, x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, x_i \in K, f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) \Leftrightarrow$ задать f значит задать

$f(e_i),\ i = 1,...,n.$

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{m1}e'_m \\ ... \\ f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{mn}e'_m \end{cases}$$

Определение 13. Матрицей $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ в базисе $e_1,...,e_n$ и $e'_1,...,e'_m$ назыается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{pmatrix}$$

Теорема 10. 1. $\mathrm{Hom}(V,W)$ взаимно-однозначно соответствует $M(m,n,K)$.

2. $e_1,...,e_n$ – базис V, $e'_1,...,e'_m$ – базис W, $x \in V \to X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f(x) \in W \to Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, f \to A$
   $\Rightarrow AX = Y$.

Доказательство. 1. $f \to A$ отображение однозначно определяется $f(e_i) \Rightarrow A$ определена однозначно. С другой стороны, взяв произвольную матрицу B, можем построить по ней отображение g.

2. $f \to A = (a_{ij}), 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m.$

$$f(x) = f(x_1e_1 + ...x_ne_n) = x_1f(e_1) + ... + x_nf(e_n) =$$
$$= x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{m1}e'_m) + ... + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{mn}e'_m) =$$
$$= \underbrace{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)}_{y_1}e'_1 + ... + \underbrace{(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)}_{y_m}e'_m \Rightarrow Y = AX$$

□

Следствие. 1. $\dim\mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$

2. $\alpha,\beta \in K, f,g \in \mathrm{Hom}(V,W), f \to A, g \to B$ в фиксированных базисах $\Rightarrow \alpha f + \beta g \to \alpha A + \beta B$.
3. $f : V \to W, g : W \to U \Rightarrow g \circ f : V \to U, g \circ f(x) = g(f(x))$. Фиксируем базисы, $f \to A, g \to B \Rightarrow g \circ f \to BA$

Доказательство. 1. Соответствие матриц.

2. $(\alpha f + \beta g)(e_i) = \alpha f(e_i) + \beta g(e_i) \in \alpha A + \beta B$.
3. $V \to n, W \to l, U \to m, A \to l \times n, B \to m \times l$
   $g \circ f(e_i) = g(\sum_{k=1}^{l} a_{ki}e'_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}g(e'_k) = \sum_{k=1}^{l} a_{ki}\sum_{j=1}^{m} b_{jk}e''_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} b_{jk}a_{ki}e''_j$, где $b_{jk}a_{ki} \to BA$.

□

Теорема 11. $f : V \to W,\ \dim V, \dim W < \infty$

$$\Rightarrow \dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = \dim V$$

Доказательство. $\ker f \subset V, e_1, \ldots, e_k$ - базис $\ker f$. Дополним до базиса $V : e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ – базис V.
$x \in V, f(x) \in \operatorname{Im} f\ \ f(x) = x_{k+1}f(e_{k+1}) + \ldots + x_n f(e_n) \in \operatorname{Im} f$
$f(e_1) = \ldots = f(e_k) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\rangle$. Надо доказать, что $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ – ЛНЗ.
Предположим обратное. $\alpha_{k+1}f(e_{k+1}) + \ldots + \alpha_n f(e_n) = 0 \Rightarrow f(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \ker f = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle$ – невозможно.
$\dim\ker f = k, \dim V = n, \dim\operatorname{Im} f = n - k$. □

2.2. Линейные операторы

Определение 14. Линейным оператором называется линейное отображение $a : V \to V$, т.е. $a \in \operatorname{Hom}(V, V)$.
Обозначается $\operatorname{End} V = \operatorname{Hom}(V, V)$.

Определение 15. Тождественным отображением называется отображение $\mathrm{id} : x \to x$ (любой вектор переходит сам в себя)

Определение 16. Если a линейный оператор, то b – обратный линейный оператор к a, если $b \circ a = a \circ b = \mathrm{id}$

Пример. 1. Нулевой оператор. $0 \in \operatorname{End} V$. $0(x) = 0$. $0 \to \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$

2. Оператор подобия. $\forall x \in V\ \ ax = \lambda x \to \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$
3. Оператор поворота в $\mathbb{R}^2$. $z \to ze^{i\varphi}$ – поворот на φ. Зафиксируем базис – $1, i \Rightarrow a(1) = \cos\varphi + i\sin\varphi, a(i) = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -\sin\varphi + i\cos\varphi \ \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
4. Оператор дифференцирования. $V = \mathbb{R}[x]$. $\frac{d}{dx}f \to f'$, зафиксируем базис – $1, x, x^2, x^3$.

   $\frac{d}{dx}(1) = 0, \frac{d}{dx}(x) = 1, \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$. Тогда матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Возьмём другой базис – $1, x + 1, x^2 + x + 1, x^3 + x^2 + x + 1$.
   Посчитаем значения: $\frac{d}{dx}(1) = 0, \frac{d}{dx}(x + 1) = 1, \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) = 2x + 1, \frac{d}{dx}(x^3 + x^2 + x + 1) =$

$3x^2 + 2x + 1$.

Матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Определение 17. $(e_i), (e_i')$ – базисы V, $\dim V = n$. Разложим $\begin{cases} e_1' = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ \ldots \\ e_n' = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases}$. Тогда матрица вида $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей перехода от базиса (e_i) к (e_i').

Теорема 12 (Преобразование координат вектора при переходе к другому базису)**.** V – векторное пространство над полем K, $(e_i), (e_i')$ – базисы V, $x \in V$, $x \to X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора в базисе (e_i). $x \to X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ – координаты вектора в базисе $(e_i'), C$ – матрица перехода от (e_i) к (e_i').

1. $X = CX'$
2. C – обратима ($\det C \neq 0$)

Доказательство. 1. $x = x_1'e_1' + \ldots + x_n'e_n' = x_1'(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n) + \ldots + x_n'(c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n) = \underbrace{(c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \ldots + c_{1n}x_n')}_{x_1} e_1 + \ldots + \underbrace{(c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \ldots + c_{nn}x_n')}_{x_n} e_n$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

2. $\forall X$ $X = CX'$ по доказанному, тогда $X = CX' = CDX \Rightarrow CD = E \Rightarrow \det C \neq 0$.

□

Теорема 13 (Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису)**.** V – векторное пространство, $\dim V = n, a \in \operatorname{End} V$, фиксируем базисы $(e_i), (e_i')$, A – матрица оператора в базисе (e_i), A' – в базисе (e_i'), C – матрица перехода от (e_i) к (e_i').

$$\Rightarrow A' = C^{-1}AC$$

Определение 18. Матрицы $A, B \in M(n, K)$ называются подобными, если $\exists C \in M(n, K)$: $A = C^{-1}BC, A \sim B$

Теорема 14. Отношение подобия матриц – отношение эквивалентности.

Доказательство. Самостоятельно. □

2.3. Инвариантные подпрастранства

Определение 19. Подпространство U пространства V называется инвариантным (неизменным) под действием оператора a, если $\forall x \in I,\ ax \in U$

Лемма 4. $U \subset V, a \in \operatorname{End} V$

$U-$ a-инвариантно $\Leftrightarrow \exists$ базис $V : A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, B = \dim U \times \dim U$

Доказательство. U – a-инвариантно. Выберем базис U: $e_1, ..., e_k$ и дополним его до базиса V матрицы a $ae_i = b_{1i}e_1 + \dots + b_{ki}e_k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{1i} & \cdot \\ b_{ki} & \cdot \\ 0 & \cdot \\ 0 & \cdot \end{pmatrix}$ □

Лемма 5. $U, W \subset V, a \in \operatorname{End} V$

$V = U \oplus W, U, W$ – a-инвариантны $\Leftrightarrow \exists$ базис $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

$B = \dim U \times \dim U, C = \dim W \times \dim W$

Доказательство. $V = U \oplus V$, выберем $U : e_1, ..., e_k, W : e_{k+1}, ..., e_n$

$a(e_i) \in U, i = 1, ..., k, a(e_j) \in W, j = k+1, ..., n \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ □

Пример. 1. $V = M(2, \mathbb{R})\quad a : X \to X^T, X \in M(2, \mathbb{R})$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a(E_{11}) = E_{11},\quad a(E_{12}) = E_{21},\quad a(E_{21}) = E_{12}\quad a(E_{22}) = E_{22}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad < E_{11} > \oplus < E_{12}, E_{21} > \oplus < E_{22} > = V \text{ инвариантны}$$

2. $V = K[x]_3 \quad a : \frac{d}{dx}(f \to f') \quad 1, x, x^2, x^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{d}{dx} :< 1, x, x^2 > \to < 1, x > \subset < 1, x, x^2 >$$

2.4. Собственные векторы и числа

Определение 20. Собственным вектором оператора а называется $\forall$ ненулевой вектор одномерного инвариантного подпространства.

Определение 21. x - собственный вектор, $ax = \lambda x$, тогда $\lambda =$ собственное число, ассоциированное вектору x

$a \to A, x \to X \quad AX = \lambda X \Rightarrow (A - \lambda E)X = 0$

Определение 22. Характеристическим многочленом оператора а (матрицы A) назыается $\chi_a(t) = \det(A - tE)$

Теорема 15 (О собственных числах). Все собственные числа оператора а и только они являются корнями характеристического многочлена.

Доказательство. $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda E)X = 0$ – имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E)X = 0 \Leftrightarrow$ все собственные числа корни $\chi_a(t)$ $\square$

Лемма 6 (Независимость собственных чисел от выбора базиса). Характеристические многочлены оператора а в разных базисах совпадают.

Доказательство. $a(e_i) \to A \quad (e_i') \to A' \quad C$ – матрица перехода от (e_i) к (e_i')

$A' = C^{-1}AC \quad \chi_a(t) = \det(A' - tE) = \det(C^{-1}AC) = \det(C^{-1}AC - t \cdot C^{-1}C) = \det(C^{-1}(A - tE)C) = \det C^{-1} \cdot \det(A - tE) \cdot \det C = \det(A - tE) = \chi_a(t)e_i$ $\square$

Теорема 16 (Линейная независимость собственных векторов). Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы.

Доказательство. $n = 1$ – очевидно. Пусть доказали при $n - 1$. Индукционный переход: $n - 1 \to n : V_1, V_2, ..., V_n$ – собственные векторы

$aV_i = \lambda_i V_i, \quad \lambda_1, ..., \lambda_n$ – различны

Пусть $V_1, V_2, ..., V_n$ – линейно зависимы. Тогда $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_n V_n = 0, \alpha_i \in K \Rightarrow$ под действием а: $\alpha_1 \lambda_1 V_1 + \alpha_2 \lambda_2 V_2 + ... + \alpha_n \lambda_n V_n = 0$

Будем считать, что $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 V_1 + \alpha_2 \lambda_2 V_2 + ... + \alpha_n \lambda_n V_n - \lambda_1(\alpha_1 V_1 + ... + \alpha_n V_n) = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda - 1)V_2 + ... + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)V_n = 0 \Rightarrow$ по предположению индукции $\alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ $\square$

Определение 23. Оператор a называется диагонализируемым, если существует базис такой, что $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Теорема 17 (Критерий диагонализируемости). Если $\chi_a(t)$ имеет n различных корней ($n = \dim V$) над рассматриваемым полем, то оператор a – диагонализируем.

Доказательство. В качестве базиса берём собственные векторы. □

Пример. Оператор поворота $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ – недиагонализируем над $\mathbb{R}$

Лемма 7. Над полем $\mathbb{C}$ любой оператор имеет одномерное инвариантное подпространство.

Определение 24. Кратность λ как кратность корня $\chi_a(t) = 0$ называется алгебраической кратностью собственного числа.

Определение 25. λ – собственное число, $V^\lambda = \{x \in V : ax = \lambda x\}$
$\dim V^\lambda$ – геометрическая кратность собственного числа λ

Пример. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\chi_a(t) = \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} = (A - tE) = (\lambda - t)^2 \Rightarrow \lambda$ собственное число алгебраической кратности 2.
$(A - \lambda E)X = 0$
$$\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$\dim V^\lambda = 2$ – геометрическая кратность

Пример. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
$\chi_a(t) = \begin{vmatrix} \lambda - t & 1 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} = (\lambda - t)^2 \Rightarrow$ алгебраическая кратность $\lambda = 2$
$$\left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V^\lambda =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$
$\dim V^\lambda = 1$ – геометрическая кратность

Лемма 8. Геометрическая кратность собственного числа $\lambda \leqslant$ алгебраической кратности

Доказательство. V^λ – инвариантно относительно a, $V^\lambda = \{x : ax = \lambda x\}$
По лемме: $a \to \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad B - m \times m, \dim V^\lambda = m$
$a\big|_{V^\lambda} = \chi_a\big|_V^\lambda = (t-\lambda)^m$
$\chi_a = \det\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & d \end{pmatrix} - tE\right) = (t-\lambda)^m p(t) \Rightarrow$ алгебраическая кратность $\lambda \geqslant m$ □

Теорема 18 (Критерий диагонализируемости). $a \in \operatorname{End} V$ – диагонализируема $\Leftrightarrow$ 1. Все собственные числа $\in K$ 2. $\forall$ собственных чисел λ алгебраическая кратность $=$ геометрическая кратность

2.5. Жорданова нормальная форма

Определение 26. Жордановой клеткой порядка m соответствующей собственному числу λ называется
$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \lambda \end{pmatrix}$

Пример. 1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Определение 27. ЖНФ оператора $a \in \operatorname{End} V$ называется

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}()\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}()\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_n}()\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Определение 28. Базис, в котором оператор a имеет ЖНФ называется жордановом

Теорема 19 (ЖНФ). 1. Над алгебраическим замкнутым полем $\forall a \in \operatorname{End} V$ имеет ЖНФ

2. ЖНФ определена с точностью до перестановки клеток

Теорема 20. $a \in \operatorname{End} V$ имеет ЖНФ над произвольным полем $\Leftrightarrow$ характеристический многочлен раскладывается на линейные множители

2.6. Теорема Гамильтона-Кэли

Определение 29. $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$
$A - -m \times m$
$f(A) = a_n A^N + \ldots + a_i A + a_0 E$, $E - -m \times m$ – многочлен от матрицы

Определение 30. $a \in \operatorname{End} V$
$f(a) = a_n \cdot a^n + \ldots + a_1 \cdot a + a_0 \cdot \mathrm{id}$ – многочлен от оператора

Теорема 21 (Гамильтона-Кэли). $\chi_a(A) = 0$, $a \in \operatorname{End} V$, $a \to A \in M(m, K)$

Доказательство. $\chi_a(t) = \det(tE - A)$
$B = tE - A, \widetilde{B} = (B_{ij})^T$ – взаимная матрица
$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} c_{11}^{m-1} t^{m-1} + \ldots + c_{11}^0 & \ldots \\ c_{12}^{m-1} t^{m-1} + \ldots + c_{12}^0 & \ldots \end{pmatrix} = t^{m-1} B_{m-1} + t^{m-2} B_{m-2} + \ldots + B_0$
$\widetilde{B} \cdot B = \det(tE - A) \cdot E$
$(t^{m-1} B_{m-1} + \ldots + B_0) \cdot (tE - A) = (a_m t^m + \ldots + a_0) \cdot E$
Приравняем коэффициенты, домножим: $t^m : B_m - 1 = a_m E \ \ |\cdot A^m$
$t^{m-1} : B_{m-2} - B_{m-1} A = a_{m-1} E \ \ |\cdot A^{m-1}$
…
$t : B_0 - B_1 A = a_1 E \ \ |\cdot A$
$1 : -B_0 A = a_0 E \ \ |\cdot E$
Вычтем строки: $\Rightarrow 0 = \chi_a(A)$ □

2.7. Билинейные формы

Определение 31. $f : V \times V \to K$ линейное по каждому аргументу называется билинейным отображением, то есть выполняется

1. $f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$
2. $f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)$

$(e_i)_{i=1}^n$ – базис V, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$
$f(x, y) = f(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i, y_j f(e_i, e_j)$

Определение 32. $B = (b_{ij}), b_{ij} = f(e_i, e_j), 1 \leqslant i, j, \leqslant n$

B – матрица билинейной формы f $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow f(x,y) = X^T BY$

Пример. 1. Скалярное произведение $(x,y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

2. $f, g \in C[a,b], (f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Определение 33. Билинейные формы f

1. Симметрические: $f(x,y) = f(y,x) \forall x, y \in V \quad B = B^T$ (симметрическая матрица)
2. Кососимметрические: $f(x,y) = -f(y,x) \forall x, y \in V \quad -B = B^T$ (кососимметрическая матрица)

2.7.1. Замена базиса

Теорема 22 (Преобразование матрицы билинейной формы при изменении базиса). $f : V \times V \to K$ в базисе $(e_i) : B$, в базисе $(e'_i) : B'$
Тогда $B' = C^T BC$

Доказательство. $x \to X$ в базисе $(e_i), X'$ в базисе $(e'_i) X = CX'$,
$y \to Y$ в (e_i), Y' в (e'_i) $\quad Y = CY'$
$f(x,y) = X^T BY = (CX')^T B(CY') = X'^T C^T BCY' = X'^T B'Y' \Rightarrow B' = C^T BC$ □

2.8. Квадратичные формы

Определение 34. Квадратичной формой $Q : V \to K$, ассоциированной с некоторой симметрической билинейной формой $f : V \times V \to K$, называется $q(x) = f(x,x)$

Матрица квадратичной формы $A \quad (A = A^T) \quad q(x) = X^T AX, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$q(x) = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_nn \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,h=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$ – однородный многочлен 2 степени от n переменных

$a_{ij} = a_{ji} \quad a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_ix_j = 2a_{ij}x_ix_j$

$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant u < j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j$

Определение 35. Каноническим видом квадратичной формы называется $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$

Определение 36. Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется каноническим.

Замечание. Замена переменной $\leftrightarrow$ переход к другому базису

Теорема 23 (Преобразование Лагранжа). V – векторное пространство над полем K, $charK \neq 2 \Rightarrow \forall q : V \to K$ может быть приведена к каноническому виду ($\exists$ базис: q имеет канонический вид)

Доказательство. $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^{aij} x_ix_j$
$q = 0$ – доказывать нечего, будем считать $q \neq 0$.

1. Пусть $a_{11} = 0, \exists i > 1 : a_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ сделаем замену $y_i = x_1, x_i = y_1 \Rightarrow a_11y_1^2 + \dots$, где $a_{11} \neq 0$
2. $a_{ii} = 0 \forall i = 1,\dots,n \Rightarrow \exists a_{ij} \neq 0, i < j \Rightarrow x_i = y_i + y_j, x_j = y_i - y_j$
   $a_{ij}x_ix_j \to a_{ij}(y_i + y_j)(y_i - y_j) = a_{ij} \cdot y_i^2 - a_{ij}y_j^2 \Rightarrow$ по п.1 можно считать, что $a_{11} \neq 0$
3. Индукция
   База: $n = 1 \quad q(x) = a_{11}x_1^2$
   Индукционный переход: $n - 1 \to n, a_{11} \neq 0$ в силу пункта один
   $$q(x) = a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \frac{2a_{13}}{a_11}x_1x_3 + \dots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) + \varphi(x_2,\dots,x_n) =$$
   $$a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \dots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) + a_{11}(\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 + \dots + \dots) - (\dots) + \varphi(x_2,\dots,x_n) =$$
   $$a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - \psi(x_2,\dots,x_n) = a_{11}y_1^2 + b_{22}z_1^2 + \dots + b_{nn}z_n^2$$

$\square$

2.8.1. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$

$\lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2$
Если находимся над полем $\mathbb{C}$, тогда $y_i = \sqrt{\lambda_i}x_i \Rightarrow y_1^2 + \dots + y_r^2, r$ – ранг формы, $r \leqslant n$
Над $\mathbb{R}$ ситуация иная. $\lambda_i > 0 \quad y_i = \sqrt{\lambda_i}x_i, \quad \lambda_j < 0 \quad y_i = \sqrt{-\lambda_j}x_j \Rightarrow$
$y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots - y_r^2$

Определение 37. Говорят, что квадратичная форма приведена к нормальному виду, если она представляет собой сумму чистых квадратов $(y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots - y_r^2)$.

Определение 38. Ранг квадратичной формы равен рангу соответствующей матрицы.
$\operatorname{rank} q = \operatorname{rank} A$

Теорема 24 (Закон инерции квадратичных форм). $q : V \to \mathbb{R}$ – квадратичная форма.
$\dim V = n, \operatorname{rank} q = r$
Параметры s и $r - s$ при приведении квадратичной формы к нормальному виду не зависят от базиса.

Доказательство. A – матрица квадратичной формы в базисе $(e_i) \Rightarrow C^T AC$ – матрица квадратичной формы в базисе (e'_i), где C – матрица перехода от e_i к (e'_i), $\det C \neq 0$ Несложно показать, что количество линейно независимых строк одинаково у A и $C^T AC$. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} C^T AC = r$ (было доказано)
Предположим, что в базисе (e_i) квадратичная форма имеет следующий вид: $q = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2$
А в базисе $(e'_i) : q = x_q^2 + \ldots + x_t^2 - x_{t+1}^2 - \ldots - x_r^2$
Предположим, что $t < s$ Рассмотрим два подпространства пространства $V : U_1 =< e_1, \ldots, e_s >$ $U_2 =< e'_{t+1}, \ldots, e'_n >$
Рассмотрим размерность подпространства $U_1 + U_2 :$
$\dim(U_1 + U_2) \leqslant n$
С другой стороны $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = s + n - t - \dim(U_1 \cap U_2) \Rightarrow$ $\dim(U_1 \cap U_2) \geqslant s + n - t - n = s - t > 0 \Rightarrow x \in U_1 \cap U_2, \quad q(x) > 0, x \in U_1; \quad q(x) < 0, x \in U_2 \Rightarrow$ противоречие □

Определение 39. Предположим, что квадратичная форма приведена. Тогда числа s и $r-s$ называются индексами инерции или положительным и отрицательным индексами инерции. А пары чисел $(s, r - s)$ – сигнатура квадратичной формы.

Замечание (Мотивация изучения квадратичных форм). Квадратичные формы нужны, чтобы исследовать экстремумы функций. $f(x) - f(x_0) = \sum f'_{x_i} \Delta x_i + \sum f''_{x_i x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \ldots$

Определение 40. Всё рассматриваем над $\mathbb{R}$
$q : V \to \mathbb{R}$ называется

1. Положительно определенной, если $q(x) > 0 \ \forall x \neq 0, x \in V$
2. Отрицательно определенной, если $q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$
3. Положительно полуопределенной, если $q(x) \geqslant 0 \ \forall x$
4. Отрицательной полуопределенной, если $q(x) \leqslant 0 \ \forall x$
5. Неопределенной, если $q(x) \cdot q(y) < 0 \ \ \exists x, y \in V$

Пример. $n = 2$

1. $x^2 + y^2$

2. $-x^2 - y^2$

3. $x^2 - 2xy + y^2$

4. –

5. $x^2 - y^2$

2.8.2. Теорема Якоби

Определение 41. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{\nu} \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta N = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – Главные миноры

$\Delta_0 = 1$

Определение 42. $charK \neq 2$
$f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ называется билинейной формой, полученной поляризацией квадратичной формы q

Упражнение. Показать, что $f(x, y)$ – билинейная форма
$q(x) = f(x, x) \quad q(ax) = a^2 q(x)$

Определение 43. Если q положительно/отрицательно определена/полуопределена, то её поляризация $f(x, y)$ называется положительно/отрицательно определенной/полуопределенной

Определение 44. Матрица A называется положительно определенной, если соответствующая ей билинейная форма положительно определена.

Теорема 25. Матрица A (Над $\mathbb{R}$) – положительно определенная $\Leftrightarrow \exists$ невырожденная C : $A = C^T \cdot C$

Доказательство. A – положительно определена $\Leftrightarrow$ соответствующая ей билинейная форма $f(x, y)$ положительно определена, $q(x)$ – положительно определена. $\Leftrightarrow \exists$ базис: матрица квадратичной формы q – E $(x_1^2 + \dots + x_n^2)$ $\Leftrightarrow \exists$ матрица перехода $C : E = C^T A C \Leftrightarrow A = (C^T)^{-1} \cdot C^{-1}$ □

Теорема 26 (Якоби, критерий положительной определенности)**.** Теорема верна для любого поля, но в основном мы находимся над $\mathbb{R}$
$q : V \to K, charK \neq 2, q \to A, \Delta_i \neq 0, i = 1, \dots, n \Rightarrow \exists$ базис $(e_i') : q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2$

Доказательство. По индукции.
$n = 1 q(x) = a_{11}x_1^2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1)^2$
Индукционный переход: $n-1 \to n$
$(e_i), i = 1, ..., n$ – исходный произвольный базис $U =< e_1, ..., e_{n-1} >\subset V$
$\overline{q} = q\big|_U, \overline{A}$ – матрица A, в которой вычеркнули последнюю строчку и столбец.
Для $\overline{q}$ утверждение верно. Заметим, что $\overline{\Delta_1} = \Delta_1, ..., \overline{\Delta_{n-1}} = \Delta_{n-1}(\overline{\Delta_i})$ – главные миноры для $\overline{A} \Rightarrow \exists (e_i'), i = 1, ..., n-1 : \overline{q} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}x_1'^2 + ... + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}x_{n-1}'^2$
Возвращаемся в пространство V, ищем вектор x $\{f(x, e_i') = 0, i = 1, .., n-1$ – система линейных уравнений, n-1 уравнение, n неизвестных. rank СЛУ < n $\Rightarrow \exists$ нетривиальное решение $\Rightarrow \exists \widetilde{e_n}$ – решение СЛУ. На данный момент имеем, что q почти нужна к нужному виду, но последний коэффициент неизвестный. $q = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}x_1'^2 + ... + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}x_{n-1}'^2 + ?x_n'^2$
$e_n' = \lambda\widetilde{e_n}$ λ выберем: C – матрица перехода от $(e_i))$
$K(e_i', \widetilde{e_n})$ $\det C$ – линейно зависит от λ
$$\begin{cases} e_1 = ... \\ ... \\ \lambda\widetilde{e_n} = \lambda...\lambda \end{cases}$$
$\lambda : \det C = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{\Delta_n}$
В базисе $(e_i'), i = 1, ..., n$ A' – матрица квадратичной формы q – диагональная
$\frac{f(e_n', e_n')}{\Delta_{n-1}} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdot ... \cdot \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-1}} \cdot f(e_n', e_n') = \det A' = \det(C^TAC) = (\det C)^2 \cdot \det A = \frac{1}{\Delta_n^2} \cdot \Delta_n = \frac{1}{\Delta_n} \Rightarrow f(e_n', e_n') = \frac{\Delta_n - 1}{\Delta_n}$ □

Следствие. $q : V \to \mathbb{R}$ – квадратичная форма
Тогда отрицательный индекс инерации q равен числу перемен знака в последовательности $\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n$

Теорема 27 (Критерий Сильвестра). $q : V \to \mathbb{R}$
q – положительно определена $\Leftrightarrow \Delta_i > 0, i = 1, ..., n$

Доказательство. $\Leftarrow$. Очевидно.
$\Rightarrow$. По индукции.
$n = 1$ $q = a_{11}x_1^2, a_{11} > 0$
Индукционный переход: $n-1 \to n$ $U =< e_1, ..., e_{n-1} >$
$\overline{q} = q\big|_U$ – положительно определена $\Rightarrow \Delta_i > 0, i = 1, ..., n-1$
q – положительно определена $\Rightarrow A$ –положительно определена $\Rightarrow A = C^TC \Rightarrow \Delta_n = \det A = (detC)^2 > 0$ □

2.8.3. Ортогональные преобразования

Определение 45. $X = CY$ – замена переменных. Соответствует переходу от одного базиса к другому.

Определение 46. Матрица C называется ортогональной, если она обладает следующим свойством $C^TC = E \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Пример. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Теорема 28. $\forall q : V \to \mathbb{R}\ \exists$ ортогональное преобразование C :
$q = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2, \lambda_i$ – собственные числа матрицы A

Раздел #3: Элементы теории полей

Пример. Примеры полей: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, K(x)$.

Notation. $\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ – конечное поле с p элементами.

Определение 47. Если $K \subset L$, K, L – поля, то K называется *подполем* поля L, а L – *расширением поля* K.

Определение 48. Если в поле K нет подполей, отличных от K, то поле называется *простым*.

Теорема 29 (О простых подполях). Любое поле содержит простое подполе, изоморфное либо полю $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{F}_p$.

Доказательство. Возьмем единицу и будем прибавлять её к самой себе. Если $\operatorname{char} K = 0$, то таким образом мы сможем получить любое целое число. К тому же, у нас есть противоположные по знаку числа, а значит $\mathbb{Z} \subset K$. Более того, в поле есть также и обратные числа, а значит и $\mathbb{Q} \subset K$.
Если же $\operatorname{char} K = p$, то $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p} = 0$. Рассмотрим множество $\{0, 1, \ldots, p-1\} = \mathbb{F}_p$. □

Пример. $\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$.

3.1. Факторкольцо

Пусть R – ассоциативное коммутативное кольцо с 1, K – поле.

Определение 49. Множество $I \subset R$ называется *идеалом* кольца R, если

1. I – аддитивная группа кольца R
2. $\forall r \in R\ \forall a \in I\ ra \in I$

Пример. $I = \{0\}$.

Пример. $R = \mathbb{Z}, I = m\mathbb{Z}$.

Пример. $R = K[x]$. Тогда $I = \{f \in K[x] : f(a) = 0\}$.

Пример. $a_1, ..., a_N \in R$. Тогда $I = \{r_1 a_1 + ... + r_n a_n, r_I \in R, i = 1, ..., n\}$.

Определение 50. $I = \{r_1 a_1 + ... + r_n a_n, r_i \in R\}$ – идеал, порожденный $a_1, ..., a_n \in R$.

Notation. $I = (a_1, ..., a_n)$ – идеал, порожденный $a_1, ..., a_n \in R$.

Определение 51. Если идеал $I = (a)$, то он называется *главным*.

Определение 52. Если в области целостности R любой идеал является главным, то R – кольцо главных идеалов.

Теорема 30 (Кольцо многочленов – кольцо главных идеалов). У любого $I \neq (0)$ идеала в $K[x]$ $\exists!$ нормированный $f \in K[x] : I = (f)$.

Доказательство. Выберем среди $f \in I$ многочлен с наименьшей степенью. Пусть

$$f = a_n x^n + ..., \quad a_n \neq 0$$

Тогда $g = a_n^{-1} f \in I$.
Возьмем произвольный $h \in I$ и поделим его на g, т.е.

$$h = gq + r, \quad g, r \in K[x], \deg r < \deg g$$

Тогда $r = h - gq \in I$. Получаем противоречие, а значит $r = 0 \Rightarrow I = (g)$.
Докажем теперь однозначность. Пусть $I = (g_1), I = (g_2)$. Тогда

$$g_1 = c_1 \cdot g_2, \quad c_1 \in R, \qquad g_2 = c_2 \cdot g_1, \quad c_2 \in R$$

Поэтому

$$g_1 = c_1 \cdot c_2 \cdot g_1 \Rightarrow c_1 \cdot c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$$

□

Пример. $\mathbb{R}[x]$.

- $(x^2 + 1) = \{f(x) \cdot (x^2 + 1)\}$
- $(x - 1) = \{f(x) \cdot (x - 1)\}$
- $(x^2 - 5x + 4) = \{f(x)(x^2 - 5x + 4)\}$

Определение 53 (Конструкция факторкольца). I – идеал, R – ассоциативное коммутативное кольцо с 1. Рассмотрим

$$R/I = \{r + I, r \in R\}$$

Будем говорить, что r и r' сравнимы по $\mod I$ и писать $r \equiv r' (\mod I)$, если $r - r' \in I$. Определим сложение и умножение на R/I.

1. $\overline{r} + \overline{s} = \overline{r+s}$, т.е. $(r+I)+(s+I) = r+s+I$
2. $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{rs}$, т.е. $(r+I)\cdot(s+I) = rs+I$.

Теорема 31 (Корректность определения операций). Операции сложения и умножения в факторкольце определены корректно.

Доказательство. 1. Самостоятельно

2. $r \equiv r' \mod I,\ s \equiv s' \mod I$. Тогда

$$\overline{r}' \cdot \overline{s}' = (r'+I)\cdot(s'+I) = r'\cdot s' + I = (r+a)\cdot(s+b)+I = rs+rb+as+ab+I = rs+I = \overline{r}\cdot\overline{s}$$

Третье равенство верно, т.к. $r \equiv r' \mod I \Leftrightarrow r = r' + a, a \in I$. Аналогично, $s' = s+b, b \in I$. □

Теорема 32. R/I – кольцо.

Определение 54. Множество R/I называется *факторкольцом*.

3.2. Расширение полей

Определение 55. Поле $K(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ – минимальное поле, содержащее само поле K и элементы $\theta_1, \ldots, \theta_n$.

Определение 56 (Простое расширение). Если $L = K(\theta), \theta \notin K$, то L – простое расширение.

Пример. $\mathbb{R}(i)$

Пример. $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d}, a, b \in \mathbb{Q}\}$, d – свободное от квадратов.

Пример. $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{d}) = \{a_0 + a_1\sqrt[n]{d} + a_2\sqrt[n]{d^2} + \ldots + a_{n-1}\sqrt[n]{d^{n-1}}, a_i \in \mathbb{Q}, i = 0, \ldots, n-1\}$, где $\forall p\ d \not\vdots\ p^n$, p – простое.

Пример. $\mathbb{Q}(\pi) \simeq \mathbb{Q}(x)$. π – трансцендентный элемент.

Определение 57. Элемент $\theta \in L$ *алгебраичен* над полем K, если θ – корень многочлена $f \in K[x]$. Иначе, θ – *трансцендентный* элемент над K.

Определение 58. Пусть $K \subset L$ и $\theta \in L$ – алгебраичен над K. Нормированный многочлен минимальной степени $f \in K[x] : f(\theta) = 0$ называется *минимальным многочленом*. Степень минимального многочлена – это степень элемента θ над K.

Теорема 33 (Неприводимость минимального многочлена). Пусть $K \subset L$, θ – алгебраичен над K, f – минимальный многочлен θ. Тогда

1. f – неприводим над K;
2. Если $g \in K[x] : g(\theta) = 0$, то $f|g$.

Доказательство. 1. Предположим, что f приводим. Тогда $f = h_1h_2, \deg h_i \geqslant 1, i = 1, 2$. Тогда

$$f(\theta) = 0 \Rightarrow h_1(\theta)h_2(\theta) = 0 \Rightarrow h_i(\theta) = 0$$

Но $\deg h_i < \deg f$, а значит мы получили противоречие минимальности f. Отсюда, f – неприводим.

2. Поделим g на f:

$$g = f \cdot q + r, \quad \deg r < \deg f$$

Тогда

$$g(\theta) = f(\theta) \cdot q(\theta) + r(\theta) \Rightarrow r(\theta) = 0 \Rightarrow r = 0$$

Откуда получаем, что $f|g$.

□

Определение 59. Пусть $K \subset L$. Рассмотрим L как векторное пространство над полем K. Тогда *степенью расширения* L над K называется размерность размерность векторного пространства L над K.

Notation. $[L : K] = \dim_K L$ – степень расширения L над K.

Замечание. Расширение называется конечным, если $[L : K] < \infty$.

Теорема 34. Любое конечное расширение является алгебраичным.

Доказательство. Пусть $K \subset L$, $[L : K] = n$. Возьмем произвольный элемент $\theta \in L$ и рассмотрим его степени: $1, \theta, \theta^2, ..., \theta^{n-1}, \theta^n$. Этот набор элементов – линейно зависимый, поэтому существует $a_i \in K$ такие, что

$$a_0 + a_1\theta + ... + a_n\theta^n = 0$$

где не все a_i нулевые. А это и значит, что существует $g \in K[x] : g(\theta) = 0$. □

Теорема 35. Пусть $K \subset L \subset M$. Предположим, что $[L : K], [M : L] < \infty$. Тогда расширение M над K конечно и $[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$.

Теорема 36 (Структура простых алгебраичных расширений). Пусть $K \subset K(\theta)$, где θ – алгебраичен над K, $\theta \notin K$; f – минимальный многочлен θ, $\deg f = n$. Тогда

1. $K(\theta) \simeq K[x]/(f)$;
2. $[K(\theta) : K] = n$ и $\{1, \theta, \theta^2, ..., \theta^{n-1}\}$ – базис $K(\theta)$ над K;
3. Если $\alpha \in K(\theta)$ – алгебраичен над K, то степень элемента α делит n.

Пример. $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Рассмотрим неприводимый многочлен 2-й степени над $\mathbb{F}_2$:

$$f = x^2 + x + 1, \qquad \theta \text{ – корень}$$

$\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1) = \{0, 1, x, x + 1\}$.

$$\begin{aligned} x \cdot x &\equiv x + 1 (\mod x^2 + x + 1) \\ x(x+1) &\equiv 1 \\ (x+1)(x+1) &\equiv x \end{aligned}$$