Матанализ 1 семестр ПИ,
Лекция, 10/13/21

Собрано 13 октября 2021 г. в 19:36

Содержание

1.1. Свойства пределов функций

Теорема 1.1.1 (Единственность предела функции)**.** Пусть $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D, $f : D \to R$. Если A и $B \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A, f(x) \xrightarrow[x\to a]{} B \Rightarrow A = B$

Доказательство. Возьмем $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \to a$. По Гейне $f(x_n) \to A \wedge f(x_n) \to B$. Но $\{x_n\}$ имеет единственный предел $\Rightarrow A = B$. ■

Замечание 1.1.2. Беззнаковая бесконечность: $A = +\infty, B = -\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$

Теорема 1.1.3 (Локальная ограниченность функции, имеющей предел)**.** $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D, $f : D \to \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}, f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$. Тогда $\exists V(a) : f(x)$ ограничена в $D \cap V(a)$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$. $\exists \dot{V}(a) : |f(x) - A| < 1\ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D$. Тогда $|f(x)| < |A| + 1$. Если $a \in D$, то $|f(x)| < \max\{|A| + 1, f(a)\}$ ■

Теорема 1.1.4 (Стабилизация знака функции, имеющей предел)**.** $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка $D, f : D \to \mathbb{R}$. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = B \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Тогда $\exists V(a)$ такая, что знаки $f(x)$ и B совпадают на $\dot{V}(a) \cap D$

Доказательство. Пусть $B > 0$. Докажем от противного, т.е.

$$\forall n\ \exists x_n \in \dot{V}_{\frac{1}{n}}(a) \cap D \wedge f(x_n) \leqslant 0$$

Тогда $x_n \to a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to B$, но $f(x_n) \leqslant 0 \Rightarrow B \leqslant 0$. ■

Теорема 1.1.5 (Арифметические действия над функциями, имеющими предел)**.** $D \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка D, $f, g : D \to \mathbb{R}, f \xrightarrow[x\to a]{} A, g \xrightarrow[x\to a]{} B$. Тогда

1. $f(x) + g(x) \to A + B$
2. $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$
3. $f(x) - g(x) \to A - B$
4. $|f(x)| \to |A|$
5. Если $B \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\} : x_n \to a, x_n \neq a, x_n \in D$. Тогда $f(x_n) \to A, g(x_n) \to B$. Достаточно применить теорему об арифметических действиях с пределами последовательностей. ■

Замечание 1.1.6. Пункт 5) т.к. $B \neq 0$, то $\exists V(a) : \operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign} B$ в $V(a)$. Поэтому излишне требовать $g(x) \neq 0$

Теорема 1.1.7 (Предел композиции функций)**.** $f : D \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}, f(D) \subset E$

1. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A \in \overline{\mathbb{R}}$
2. A – предельная точка множества E и $g(x) \xrightarrow[x \to A]{} B \in \overline{R}$
3. $\exists V(a) : f(x) \neq A \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D$

Тогда $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} B$

Доказательство. Возьмем $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \to a, x_n \neq a$.
Обозначим $y_n = f(x_n) \Rightarrow y_n \in E, y_n \to A$. По 3) начиная с некоторого номера $x_n \in V(a)$, а значит $y_n \neq A$. Тогда $g(y_n) \to B$, т.е. $g(f(x_n)) \xrightarrow[n \to \infty]{} B$. Значит $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} B$ ■

Теорема 1.1.8 (Предельный переход в неравенстве)**.** $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D. $f,\ g\ :\ D\ \to\ \mathbb{R}$.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A \in \overline{\mathbb{R}}, g(x) \xrightarrow[x \to a]{} B \in \overline{\mathbb{R}}, f(x) \leqslant g(x) \ \forall x \in D \setminus \{a\}$$

Тогда $A \leqslant B$

Доказательство.

$$\{x_n\} : x_n \in D, x_n \to a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to A, g(x_n) \to B = A \leqslant B$$

■

Теорема 1.1.9 (о сжатой функции)**.** $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D, $f, h, g : D \to \mathbb{R}$ и

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), \forall x \in D \setminus \{a\} \ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A, h(x) \xrightarrow[x \to a]{} A, A \in \mathbb{R}$$

Тогда $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$

Доказательство. $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \to a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to A, h(x_n) \to A$

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n) \Rightarrow A \leqslant \lim_{n \to \infty} g(x_n) \leqslant A \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} g(x_n) = A \Rightarrow g(x) \to A$$

■

Замечание 1.1.10*.* $f(x) \leqslant g(x) \ \forall x \in D \setminus \{a\}, f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \Rightarrow g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$

Def. 1.1.11. *$f : D \to \mathbb{R}, a$ – предельная точка $D_1 \subset D$. Тогда $\lim_{x\to a} f|_{D_1}(x)$ – предел f в точке a по множеству D_1.*

Def. 1.1.12. *$f : D \to \mathbb{R}, D_1 = D \cap (-\infty, a), a$ – предельная точка D_1. Предел f в точке a по множеству D_1 называется левосторонним пределом в точке a.*
Обозначение:

$$\lim_{x\to a-} f(x), \lim_{x\to a-0} f(x)$$

Def. 1.1.13. *$f : D \to \mathbb{R}, D_1 = D \cap (a, +\infty), a$ – предельная точка D_1. Правосторонний предел – предел f в точке a по множеству D_1*
Обозначение:

$$\lim_{x\to a+} f(x), \lim_{x\to a+0} f(x)$$

Def. 1.1.14. *Левосторонний предел на разных "языках".*

- $\forall\varepsilon\ \exists\delta > 0 : \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$
- $\forall V(A)\ \exists\delta > 0 : \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \to f(x) \in V(A)$
- $\forall\{x_n\} : x_n \in D, x_n \to a, x_n < a\ f(x_n) \to A$

Замечание 1.1.15. $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ – предельная точка для $D_1 = D \cap (-\infty, a), D_2 = D \cap (a, +\infty)$
Тогда

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a-} f(x), \exists \lim_{x\to a+} f(x) \wedge \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

Доказательство. "$\Rightarrow$". Очевидно.
"$\Leftarrow$". Возьмем δ_1 из определения левостороннего предела, δ_2 из определения правостороннего предела. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta : \forall x \in D : |x - a| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$$

∎

Теорема 1.1.16 (Предел монотонной функции)**.** $D \in \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, a \in (-\infty, +\infty]$
$D_1 = D \cap (-\infty, a), a$ – предельная точка D.

1. Если f возрастает и ограничена сверху на D_1, то $\exists \lim_{x\to a-} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Если f убывает и ограничена снизу на D_1, то $\exists \lim_{x\to a-} f(x) \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. Пусть $A = \sup_{x\in D_1} f(x)$. Тогда $A \in \mathbb{R}$, т.к. f ограничена сверху. Докажем, что $\lim_{x\to a-} f(x) = A$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists x_0 \in D_1 : f(x_0) > A - \varepsilon$$

Тогда $\forall x \in D_1 : x > x_0$

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant A < A + \varepsilon$$

Пусть $\delta = a - x_0$. Тогда $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x : 0 < a - x < \delta$
Если $a = +\infty \Rightarrow \Delta = \max\{x_0, 1\}$

∎

Замечание 1.1.17. f возрастает и не ограничена сверху $\Rightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = +\infty$

Теорема 1.1.18 (Критерий Больцано-Коши для функций). $D \subset \mathbb{R}$. Тогда существование конечного $\lim_{x\to a} f(x)$ равносильно утверждению:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists V(a) : \forall x_1, x_2 \in \dot{V}(a) \cap D \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Доказательство. "$\Rightarrow$". $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ Тогда $\exists V(a) : |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $x_1, x_2 \in D \cap \dot{V}(a)$, то

$$|f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$$

С другой стороный $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$
"$\Leftarrow$". $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \to a$ и докажем, что $\exists \lim f(x_n) \in \mathbb{R}$.
Пусть $\varepsilon > 0$.

$$\exists N : \forall n \geqslant N \to x_n \in \dot{V}(a)$$

$$\forall n, l \geqslant N \to |f(x_n) = f(x_l)| < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\} \text{ – фундаментальна}$$

Значит $\{f(x_n)\}$ сходится. ■

1.2. Непрерывные функции

Def. 1.2.1. *$D \subset \mathbb{R}, a \in D$. Функция f называется непрерывной в точке a, если выполнено одно из следующих условий:*

1. *Предел f в точке a существует и равен $f(a)$ (только если a – предельная точка).*
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
3. $\forall V(f(a))\ \exists V(a) : f(V(a) \cap D) \subset V(f(a))$
4. $\forall \{x_n\} : x_n \to a, x_n \in D\ f(x_n) \to f(a)$
5. *Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (если a – предельная точка)*

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(x) - f(a) \Rightarrow \Delta f \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

Замечание 1.2.2. Если a – изолированная точка D, то

$$f(V(a) \cap D) = \{f(a)\} \subset V(f(a))$$

Т.е. любая f непрерывна в точке a

Def. 1.2.3. *$D \subset \mathbb{R}, a \in D, f : D \to \mathbb{R}$.*
a называется точкой разрыва f, если f не непрерывна в точке a

Def. 1.2.4. *$D_1 = D \cap (-\infty, a], D_2 = D \cap [a, +\infty)$.*
*Если сужение $f|_{D_1}$ непрерывно в точке a, то f непрерывна в точке a **слева**.*
*Если сужение $f|_{D_2}$ непрерывно в точке a, то f непрерывна в точке a **справа***

Def. 1.2.5. *Если $\exists \lim_{x\to a+} f(x), \lim_{x\to a-} f(x), f(a)$ – конечные, но не все равны, то a – точка разрыва I рода.*

Def. 1.2.6. *Если хотя бы один предел не существует или бесконечен – II рода.*

Def. 1.2.7. *Если в точке a разрыв, но мы можем доопределить или переопределить f в точке a до непрерывности, то a – точка устранимого разрыва.*