Матанализ 2 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 22 марта 2022 г. в 20:56

Содержание

Раздел #1: Интегральное исчисление

1.1. Неопределенный интеграл

Def 1.1.1. *$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ называется первообразной функцией f, если F дифференцируема на $\langle A, B\rangle, F'(x) = f(x)\ \forall x \in \langle A, B\rangle$.*

Теорема 1.1.2. Пусть $f, F, G : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Тогда G – первообразная $f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) + c = G(x)$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $H(x) = F(x) - G(x)$. Тогда

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv \mathrm{const}$$

$\Leftarrow$. $(F(x) + c)' = (G(x))' \Leftrightarrow f(x) = F'(x) = G'(x) \Rightarrow G$ – первообразная. ■

Def 1.1.3. *$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Множество функций $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ называется неопределенным интегралом f.*

$$\int f(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Далее, $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$.

1. Дифференцирование
$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), x \in \langle A, B\rangle$$

2. Арифметические действия:

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F(x) + G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int f(x)\,dx + H(x) = \{F(x) + H(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda \int f(x)\,dx = \{\lambda F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Утверждение 1.1.4. Если функция f непрерывна на $\langle A, B\rangle$, то у неё есть первообразная на $\langle A, B\rangle$.

Упражнение 1.1.5. $f(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$. Есть ли первообразная у этой функции?

Def 1.1.6. *$E \subset \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}$. Если F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ на E, то F – первообразная f на множестве E.*

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int a\,dx = ax + c, a \in \mathbb{R}$
2. $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x\,dx = e^x + c$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$
10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, a \neq 0$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, a > 0$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c, a \in \mathbb{R}$

Доказательство. Дифференцирование ■

Пример 1.1.7. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ – неберущийся интеграл. $\mathrm{Si}(x)$ – интегральный синус (одна из первообразных, закрепленная при $x \to 0+$).

$$(\mathrm{Si}(x))' = \frac{\sin x}{x}$$

Теорема 1.1.8 (Линейность неопределенного интеграла)**.** $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, имеют первообразные на $\langle A, B\rangle$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha, \beta \neq 0$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Доказательство. Пусть F и G – первообразные f и g на $\langle A, B\rangle$. Правая часть равенства: $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$.

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + c)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

■

Теорема 1.1.9 (Замена переменной)**.** $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f на $\langle A, B\rangle$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c$$

Доказательство.

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

■

Замечание 1.1.10. $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x)$. Пусть $y = \varphi(x)$

$$\int f(y)dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Пример 1.1.11. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$. Пусть $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x}\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Следствие 1.1.12. Пусть в условиях теоремы φ имеет обратную функцию $\psi : \langle A, B\rangle \to \langle C, D\rangle$. Если $G(x)$ – первообразная функции $(f \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = G(\psi(x)) + c$$

Доказательство. Пусть F – первообразная f на $\langle A, B\rangle$. $F(\varphi(x))$ – первообразная $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ (по теореме). Рассмотрим $G(x) - F(\varphi(x))$ – постоянная (т.к. производная равна нулю). $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$. Тогда

$$G(\psi(y)) - F(y) = \mathrm{const} \Rightarrow \int f(y)\,dy = G(\psi(y)) + c$$

■

Пример 1.1.13. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Пусть $t = \sqrt{x}, t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = dt^2 = 2t\,dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = \int \left(\frac{2t+2}{t+1} - \frac{2}{t+1}\right) dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right) dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c$$

Пример 1.1.14. $\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\,d\sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$.
Иначе: $\int \sin x \cos x\,dx = -\int \cos x\,d\cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$.
Иначе: $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = \frac{-\cos 2x}{4} + c$.
Мораль сей басни такова: константы разные, а не $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$.

Теорема 1.1.15 (Формула интегрирования по частям)**.** $f, g \in C^1\langle A, B\rangle$. Тогда

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Доказательство. H – первообразная $g \cdot f'$. Тогда

$$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x)$$

■

Замечание 1.1.16. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Пример 1.1.17. $\int xe^x\,dx$. Пусть $u = x, u' = 1, v' = e^x, v = e^x$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

Пример 1.1.18. $\int \ln x\,dx$. Пусть $u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = 1, v = x$.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - x + c$$

Упражнение 1.1.19. $\int e^x \cdot \sin x\,dx$ Пусть $f = \sin x, g = e^x$. Тогда

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \Leftrightarrow \int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

Пусть теперь $f = \cos x, g = e^x$. Тогда

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \Leftrightarrow \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

Отсюда

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Пример 1.1.20. Пусть $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}, n \in \mathbb{N}$. Выразим интеграл I_{n+1} через I_n для произвольного натурального n.
Обозначим $f(x) = \frac{1}{(x^2+a)^n}$ и $g(x) = x$. Тогда

$$df(x) = \left(\frac{1}{(x^2+a)^n}\right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx, dg(x) = dx$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} - 2na\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1} \end{aligned}$$

Откуда

$$2naI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a)^n}$$

Утверждение 1.1.21. Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

Рассмотрим простешие дроби:

1. $\frac{a}{(x+p)^n}, n \in \mathbb{N}, a, p \in \mathbb{R}$
2. $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Интегралы от простейших дробей первого рода вычисляются по таблице. Для простейших дробей второго рода используется следующий алгоритм:

1. Если $p \neq 0$, то выделим полный квадрат и выполним замену $y = x + \frac{p}{2}$. Если $p = 0$, тогда
$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = a\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n} + b\int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$$
2. Интеграл $\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n}$ можно вычислить с помощью замены $y = x^2 + q$, т.к. $dy = 2x\,dx$.
3. Применяя к интегралу $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$ формулу понижения $n-1$ раз сведем его к интегралу I_1, который является табличным.

Пример 1.1.22 (12 и 13 из таблицы).

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} \left(\ln|x-2| - \ln|x+2| \right) + c$$

Пример 1.1.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Пусть $x = \operatorname{sh} t, dx = \operatorname{ch} t\, dt$. Тогда

$$\int \frac{\operatorname{ch} t\, dt}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + c$$

Упражнение 1.1.24. Найди формулу для $(\operatorname{sh} t)^{-1}$

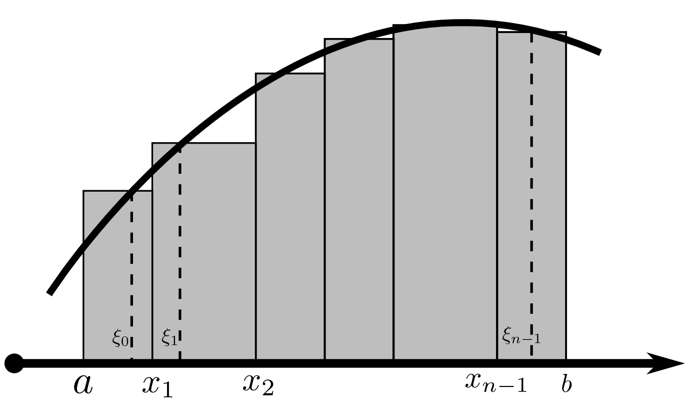
Неберущиеся интегралы:

- $\int \frac{\sin x}{x} dx$
- $\int \frac{\cos x}{x} dx$
- $\int \frac{dx}{\ln x}$
- $\int \frac{e^x}{x} dx$
- $\int \sin x^2 dx$
- $\int \cos x^2 dx$
- $\int e^{-x^2} dx$

1.2. Определенный интеграл Римана

Def 1.2.1. $[a,b], a < b$. *Набор точек* $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ *– разбиение (дробление) отрезка* $[a,b]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ *– длина отрезка* $[x_k, x_{k+1}]$. $\lambda = \lambda_\tau = \max_{k\in[0,n-1]} \Delta x_k$ *– ранг дробления (мелкость),* $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ *– оснащение дробления* τ. *Пара* (τ, ξ) *называется оснащенным дроблением.*

Def 1.2.2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ *– суммы Римана (интегральные суммы).*



Def 1.2.3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Число* $I \in \mathbb{R}$ *называют пределом интегральных сумм при ранге* $\to 0$:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad (I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma)$$

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$|\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \varepsilon$$

Замечание 1.2.4. Последовательность оснащенных дроблений $\{(\tau^{(i)},\xi^{(i)})\}_{i=1}^{\infty} : \lambda^{(i)} \to 0$. $\forall\{\tau^{(i)},\xi^{(i)}\} : \lambda^{(i)} \to 0 \ \sigma_{\tau^{(i)}}(f,\xi^{(i)}) \to I$.

Def 1.2.5 (Интеграл Римана). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Если $\exists \lim_{\lambda\to 0} \sigma = I$, то f называется интегрируемой по Риману на $[a,b]$, а число I называется интегралом f по $[a,b]$.*
$R[a,b]$ – класс функций, интегрируемых по Риману на $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

1.3. Суммы Дарбу

Def 1.3.1. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ – дробление $[a,b]$.*

$$M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$$

Суммы

$$S = S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, s = s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются верхними и нижними интегральными суммами.

Замечание 1.3.2. Если f – непрерывна на $[a,b]$, то это две частные суммы из сумм Римана.

Замечание 1.3.3. f ограничена сверху $\Leftrightarrow$ S ограничена.

Свойства сумм Дарбу:

1. $S_\tau(f) = \sup\limits_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi), s_\tau = \inf\limits_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi)$

   Доказательство. $M_k \geqslant f(\xi_k), k = 0,\dots,n-1$. Тогда $M_k\Delta x_k \geqslant f(\xi_k)\Delta x_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow S_\tau(f) \geqslant \sigma_\tau$, т.е. S_τ – верхняя граница. Докажем, что она является точной верхней границей.
   Если f ограничена на $[a,b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. На каждом кусочке разбиения $\exists \xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}] : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = S - \varepsilon$.
   Если f не ограничена на $[a,b] \Rightarrow$ не ограничена на каком-то кусочке $[x_l, x_{l+1}]$. Фиксируем $A > 0$ и выберем ξ_k^* при $k \neq l$ произвольно, а для ξ_l^*

   $$f(\xi_l^*) > \frac{1}{\Delta x_l}\left(A - \sum_{k\neq l} f(\xi_k^*)\Delta x_k\right)$$

   Тогда

   $$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > A \Rightarrow \sup_\xi \sigma = +\infty = S$$

   ■

2. При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя не уменьшится.

Доказательство. Докажем для верхних сумм при добавлении одной точки. $\tau : \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$. Добавим точку c в $[x_l, x_{l+1}]$ – T – новое дробление.

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + M_l \Delta x_l + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + (c - x_l) \cdot M' + (x_{l+1} - c) M'' + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

где $M' = \sup_{x \in [x_l, c]} f, M'' = \sup_{x \in [c, x_{l+1}]} f$. $M_l \geqslant M', M_l \geqslant M''$, т.к. $[x_l, c] \subset [x_l, x_{l+1}], [c, x_{l+1}] \subset [x_l, x_{l+1}]$.

Рассмотрим $S_\tau - S_T = M_l \Delta x_l - (c - x_l) M' - (x_{l+1} - c) M'' \geqslant M_l (x_{l+1} - x_l - c + x_l - x_{l+1} + c) = 0$.

Добавить больше точек можно по индукции. ∎

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней.

   Доказательство. τ_1, τ_2 – разные дробления $[a, b]$. Докажем, что $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$. Возьмем $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда $s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}$ (по свойству 2). ∎

Утверждение 1.3.4. $f \in R[a, b] \Rightarrow f$ ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть f не ограничена на $[a, b]$ сверху. Тогда $\forall \tau \Rightarrow \sup_\xi \sigma_\tau(f, \xi) = +\infty$. Тогда $\forall \tau$ и числа I $\exists$ оснащение $\xi' : \sigma_\tau(\xi') > I + 1 \Rightarrow$ никакое число I не является пределом интегральных сумм. ∎

Def 1.3.5. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Возьмем*

$$I^* = \inf_\tau S_\tau \qquad I_* = \sup_\tau s_\tau$$

где I^* – верхний интеграл Дарбу, I_* – нижний интеграл Дарбу.

Замечание 1.3.6. $I^* \geqslant I_*$.

Замечание 1.3.7. f ограничена сверху $\Leftrightarrow I^*$ ограничена.

1.4. Критерии интегрируемости функции

Теорема 1.4.1 (Критерий интегрируемости функции)**.** Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a, b] \Leftrightarrow$ $S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $f \in R[a, b]$. Обозначим $I = \int_a^b f$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$:

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Переходя к супремуму и инфимуму, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда $S_\tau - s_\tau \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3} - I + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
$\Leftarrow$. Пусть $S_\tau - s_\tau \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0 \Rightarrow$ все суммы Дарбу конечны.

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau \Rightarrow 0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow I^* = I_*$ (т.к. это числа). Обозначим $I = I^* = I_*$.

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau, s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau \Rightarrow |I - \sigma_\tau| \leqslant S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\tau : \lambda_\tau < \delta\ |I - \sigma_\tau| < \varepsilon$. ■

Замечание 1.4.2. Если $f \in R[a,b] \Rightarrow s_\tau \leqslant \int_a^b f \leqslant S_\tau$.

Следствие 1.4.3. $f \in R[a,b] \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} S_\tau = \lim_{\lambda\to 0} s_\tau = \int_a^b f$

Доказательство. $0 \leqslant S_\tau - \int_a^b f \leqslant S_\tau - s_\tau$, $0 \leqslant \int_a^b f - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau$. ■

Замечание 1.4.4. $\lim_{\lambda\to 0} S_\tau = I^*, \lim_{\lambda\to 0} s_\tau = I_*$.

Утверждение 1.4.5 (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману). *$f \in R[a,b] \Leftrightarrow f$ ограничена на $[a,b]$ и $I_* = I^*$.*

Утверждение 1.4.6 (Критерий Римана интегрируемости). *$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\tau\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.*

Def 1.4.7. *$f : D \to \mathbb{R}$. Величина*

$$\omega(f)_D = \sup_{x,y\in D}(f(x) - f(y))$$

называется колебанием f на D. Из определений граней функции ясно, что

$$\omega(f)_D = \sup_{x\in D} f(x) - \inf_{y\in D} f(y)$$

Если задано τ отрезка $[a,b]$, то

$$\omega_k(f) = M_k - m_k$$

Тогда теорему можно записать:

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f)\Delta x_k = 0$$

Теорема 1.4.8 (Интегрируемость непрерывной функции)**.** *$f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.*

Доказательство. По теореме Кантора $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равномерна непрерывна на $[a,b]$.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall t', t'' \in [a,b] : |t' - t''| < \delta\ |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

По теореме Вейерштрасса f достигает наибольшего и наименьшего значения на любом отрезке, содержащемся в $[a,b]$. Поэтому колебание f на всяком отрезке, длина которого меньше δ, будет меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, $\forall\tau : \lambda_\tau < \delta$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f)\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k$$

■

Теорема 1.4.9 (Интегрируемость монотонной функции)**.** f монотонна на $[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.

Доказательство. Пусть f монотонно возрастает на $[a,b]$. Если $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ постоянна $\Rightarrow f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.
Если $f(a) < f(b)$. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Возьмем произвольное $\tau : \lambda_\tau < \delta$ на $[x_k, x_{k+1}]$. В силу монотонности f верно $\omega_k(f) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k))\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \varepsilon$$

■

Замечание 1.4.10. $f \in R[a,b]$. Если изменить значение f в конечном числе точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

Доказательство. $\widetilde{f}$ – отличается от f в точках $t_1, t_2, ..., t_m$. $|f|$ ограничена на $[a,b] \Rightarrow |\widetilde{f}|$ ограничена. $|f| \leqslant A$, возьмем $\widetilde{A} = \max\{A, |\widetilde{f}(t_1)|, |\widetilde{f}(t_2)|, ..., |\widetilde{f}(t_m)|\}$. В интегральных суммах для f и $\widetilde{f}$ отличаются не более $2m$ слагаемых, поэтому

$$|\sigma_\tau(f,\xi) - \sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)| \leqslant 2m(A+\widetilde{A})\lambda_\tau \underset{\lambda_\tau}{\longrightarrow} 0$$

Поэтому предел $\sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)$ существует и равен пределу $\sigma_\tau(f,\xi)$. ■

Теорема 1.4.11 (Интегрируемость функции и её сужения)**.** 1. $f \in R[a,b], [\alpha,\beta] \subset [a,b] \Rightarrow f \in R[\alpha,\beta]$

2. Если $a < c < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $f \in R[a,c], f \in R[c,b]$, то $f \in R[a,b]$.

Доказательство. 1. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$ из критерия интегрируемости на $[a,b]$. τ_0 – дробление $[\alpha,\beta], \lambda_{\tau_0} < \delta$. Добавим точек до дробления $[a,b]$. Получим $\tau(\lambda_\tau < \delta)$.

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=l}^{m-1} \omega_k(f)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon$$

2. Пусть f не постоянна, т.е. $\omega(f)_{[a,b]} > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta_1, \delta_2 : \forall \tau_1 : \lambda_{\tau_1} < \delta_1, \forall \tau_2 : \lambda_{\tau_2} < \delta_2$

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\}$. Пусть τ – дробление $[a,b], \lambda_\tau < \delta$. Точка $c \in [x_l, x_{l+1})$. Обозначим $\tau' = \tau \cup \{c\}, \tau_1 = \tau' \cap [a,c], \tau_2 = \tau' \cap [c,b]$

$$S_\tau - s_\tau \leqslant S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_1} + \omega_l(f)\delta < \varepsilon$$

■

Def 1.4.12. *Функция $f : [a,b] \to R$ называется кусочно-непрерывной на $[a,b]$, если множество её точек разрыв пусто или конечно (и все разрывы первого рода)*

Следствие 1.4.13. f – кусочно-непрерывная на $[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$

Доказательство. Возьмём точки $a_1, a_2, ..., a_m$ (может $a_1 = a$ и/или $a_m = $ b). Рассмотрим отрезки $[a_k, a_{k+1}]$. f непрерывна на (a_k, a_{k+1}) и $\exists$ конечные $\lim\limits_{x\to a_k+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a_{k+1}-} f(x) \Rightarrow f \in R[a_k, a_{k+1}] \Rightarrow$ по теореме о сужении $f \in R[a, b]$ ■

Def 1.4.14. *Множество X называется не более, чем счетным, если оно конечно или счетно.*

Def 1.4.15. $E \subset \mathbb{R}$ *– имеет нулевую меру, если для* $\forall\varepsilon > 0$ *множество* E *можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых* $< \varepsilon$.

$$\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)\right)$$

Пример 1.4.16. Множество из одной точки.

Упражнение 1.4.17. Чему равна мера $\mathbb{N}$?

Теорема 1.4.18 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)**.** Пусть $f : [a, b] \to R$.
$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ ограничена и множество точек разрыва имеет нулевую меру.

Теорема 1.4.19 (Арифметические действия над интегрируемыми функциями)**.** $f, g \in \mathbb{R}[a, b]$. Тогда

1. $f + g \in R[a, b]$
2. $f \cdot g \in R[a, b]$
3. $\alpha f \in R[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$
4. $|f| \in R[a, b]$
5. Если $\inf\limits_{[a,b]}|g| > 0$, то $\dfrac{f}{g} \in R[a, b]$

Доказательство.

1. $D \subset [a, b]$. $x, y \in D$
$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |f(x)+g(y)-f(y)-g(y)| \leqslant |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leqslant \omega_D(f)+\omega_D(g)$
$\omega_D(f + g) \leqslant \omega_D(f) + \omega_D(g)$
$\underset{[x_k,x_{k+1}]}{\omega}(f + g) \leqslant \underset{[x_k,x_{k+1}]}{\omega}(f) + \underset{[x_k,x_{k+1}]}{\omega}(g)$
$\omega_k(f + g) \leqslant \omega_k f + \omega_k g$
$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f + g)\delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k f\Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k g\Delta x_k(\to 0, \lambda \to 0)$$
$\Rightarrow f + g \in R[a, b]$
2. $|fg(x) - fg(y)| \leqslant |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant |g(x)||f(x) - f(y)| +$
$+ |f(y)||g(x) - g(y)| \leqslant A|f(x) - f(y)| + B|g(x) - g(y)|$ (т.к. $R[a, b] \Rightarrow$ ограничена на $[a, b]$)
3. $g(x) = \alpha$
4. $||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)|$
$|\omega_k|f|| \leqslant |\omega_k f|$

5. $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$. Докажем, что $\dfrac{1}{g} \in R[a,b]$.
$0 < m = \inf\limits_{[a,b]} |g|$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \left|\frac{g(x)-g(y)}{g(x)g(y)}\right| \leqslant \frac{g(x)-g(y)}{m^2} \Leftrightarrow \omega_k\left(\frac{1}{g}\right) \leqslant \frac{\omega_k(g)}{m^2}$$

■

Пример 1.4.20. 1. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$
$x^2 \in C[a,b] \Rightarrow x^2 \in R[a,b]$.
Рассмотрим какую-нибудь интегральную сумму: $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \lim \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

2. $\int_0^1 e^x dx-$ упражнение

3. $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $D \notin R[a,b], a < b$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(D)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = b - a \underset{\lambda\to 0}{\nrightarrow} 0$$

■

4. $r(x)\begin{cases} \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{дробь несократима} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
$r(x)$ непрерывна в каждой точке, разрывна в каждой рациональной.
$r(x) \in R[0,1]$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ Рациональные числа из [0,1] со знаменателем $\leqslant N$, конечное число = C_N, множество X.
Возьмём $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4C_N}$ и дробление $\tau : \lambda_\tau < \delta$
Точки X попадут в не более, чем $2C_N$ отрезков дробления. В отрезках, где нет точек из X наибольшее значение $< \dfrac{1}{N}$
$s_\tau(r) = 0$

$$S_\tau(r) = \sum_{k: M_k \geqslant \frac{1}{N}} M_k\Delta x_k \sum_{k: M_k < \frac{1}{N}} M_l\Delta x_k \leqslant \underbrace{1\cdot 2C_n}_{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\delta + \underbrace{\frac{1}{N}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$S_\tau(r) - s_\tau(r) = S_\tau(r) \underset{\lambda_r\to 0}{\to} 0 \Rightarrow r \in R[0,1]$ и $\displaystyle\int_0^1 r(x)\,dx = 0$ ■

Если $f \in R_D$ $g \in R[a,b]$, то $f(g) \in R[a,b]$? ($D-$ множество значений g)

Ответ: нет. Пример: $f(y) = \begin{cases} 1, y \in [0,1] \\ 0, y = 0 \end{cases}$ и $g(x) = r(x)$ на $[0,1]$

$f(r(x)) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = D(x) \notin R[0,1]$

Теорема 1.4.21 (Интегрируемость композиции)**.** $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b], f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(\varphi) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$
$\varphi \in R[\alpha, \beta], f \in C[a,b]$. Тогда $f \circ \varphi \in R[\alpha, \beta]$

Доказательство. Например, из критерия Лебега. ∎

1.5. Свойства интеграла Римана

1. $\int_b^a f = -\int_a^b f$
2. $\int_a^b f = 0$ ($\forall f$ на вырожденном отрезке $f \in R[a,a]$)

Свойства:

- Аддитивность интеграла по отрезку:
  $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f \in R[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$

  $$\int_a^b f = \int_a^c + \int_c^b f$$

  Доказательство. $f \in R[a,b] \Rightarrow fin\mathbb{R}[a,c], f \in R[c,b], \{\overline{\tau}^{(n)}, \overline{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\overline{\overline{\tau}}^{(n)}, \overline{\overline{\xi}}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательности оснащенных дроблений $[a,c]$ и $[c,b]$ (равномерных, т.е. $\widetilde{\lambda} = \frac{c-a}{n}, \overline{\overline{\lambda}}$)
  $\tau^{(n)} = \overline{\tau}^{(n)} \cup \overline{\overline{\tau}}^{(n)}-$ дробление $[a,b]$
  $\xi^{(n)} = \overline{\xi}^{(n)} \cup \overline{\overline{\xi}}^{(n)}$ – оснащение $\tau^{(n)}$
  $\sigma = \overline{\sigma} + \overline{\overline{\sigma}}$ при $n \to \infty$

  $$\underbrace{\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f}_{\text{по доказанному}} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

  $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

  Все остальные случаи – аналогично. ∎

- $f \equiv \alpha$ при $x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f = \alpha(b-a)$

Доказательство.
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \alpha(b-a)$$
■

- Линейность интеграла: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a,b]$
  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b + \beta \int_a^b g$

  Доказательство. $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$
  $\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sigma_\tau(\alpha f) + \sigma_\tau(\beta g)$ и переход к пределу. ■

- Монотонность интеграла: $a < b, \quad f, g \in R[a,b]$ и $f \leqslant g$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

  Доказательство. $\sigma_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(g)$ ■

  Следствие 1.5.1. $a < b, f \in R[a,b]$, если $f \leqslant M \in \mathbb{R}$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f \leqslant M(b-a)$,
  если $f \geqslant m$ на $[a,b]$то $\int_a^b f \geqslant m(b-a)$

  Следствие 1.5.2. $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$

- $a < b, \underset{f \geqslant 0 \text{ на } [a,b]}{f \in R[a,b]}$ и $\exists c \in [a,b] : f(c) > 0$ и f непрерывна в точке C.
  Тогда $\int_a^b f > 0$

  Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in \underbrace{[c-\delta; c+\delta] \cap [a,b]}_{[\alpha,\beta]} : |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

  $f(x) > f(c) - \varepsilon = \dfrac{f(c)}{2} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f \geqslant \dfrac{f(c)}{2}(\beta - \alpha)$
  $$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^b \geqslant \int_\alpha^\beta f \geqslant \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha) > 0$$
  ■

  Замечание 1.5.3. Таким же образом строгий знак в монотонности интеграла.

  Замечание 1.5.4. $f \in R[a,b], f > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$

- $a < b, f \in R[a,b]$
  $$\Big|\int_a^b f\Big| \leqslant \int_a^b |f|$$

  Доказательство. $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ ■

Если не знаем, что $a \geqslant b$ или $b \geqslant a$

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leqslant \Big|\int_a^b |f|\Big|$$

1.6. Интегральные теоремы о средних

Теорема 1.6.1. $f, g \in R[a,b], g \geqslant 0$ на $[a,b], m \leqslant f \leqslant M$. Тогда $\exists \mu \in [m,M] : \displaystyle\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$

Доказательство. $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ на $[a,b]$

$$m\int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M\int_a^b g$$

Если $\displaystyle\int_a^b g = 0$, то $\exists \mu \in [m,M] : 0 = \mu \cdot 0$

Если $\displaystyle\int_a^b g > 0$, то $m \leqslant \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leqslant M$

Возьмём $\mu = \dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ ■

Замечание 1.6.2. Для $g \leqslant 0$ тоже верно.

Следствие 1.6.3.

1. $f \in C[a,b], g \in R[a,b], g \geqslant 0($ или $g \leqslant 0)$.
   Тогда $\exists c \in [a,b] : \displaystyle\int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g$

   Доказательство. По теореме Вейерштрасса: $\exists m = \min\limits_{[a,b]} f$ и $M = \max\limits_{[a,b]} f$
   Подберём $\mu \in [m,M]$ по предыдущей теореме. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists c \in [a,b] : f(c) = M$ ■

2. $f \in R[a,b], m, M \in \mathbb{R} : m \leqslant f \leqslant M$ на $[a,b]$. Тогда $\exists \mu \in [m,M] : \displaystyle\int_a^b f = \mu(b-a)$

   Доказательство. $g \equiv 1$ в теореме. ■

3. $f \in C[a,b]$. Тогда $\exists c \in [a,b] : \displaystyle\int_a^b f = f(c)(b-a)$

   Доказательство. $g \equiv 1$ в следствии 1. ■

Замечание 1.6.4. Теорему и следствия называют ещё теоремами о средних. Почему?

Def 1.6.5. $f \in R[a,b], a < b$
$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$ – *интегральное среднее* f *на* $[a,b]$
Если возьмём равномерное разбиение $[a,b]$, *то* $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \frac{b-a}{n}$
То есть $\dfrac{\sigma_n}{b-a} \to \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$, *где* $\dfrac{\sigma_n}{b-a}$ *– среднее арифметическое значений функции в точках* ξ_k

Def 1.6.6. *$E \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток (может быть и лучом), $f : E \to \mathbb{R}$, f – интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в E. $a \in E$.*
$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, x \in E$ *– интеграл с переменным верхним пределом.*

Теорема 1.6.7 (Барроу, об интеграле с переменным верхним пределом)**.** $E \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток, $f : E \to \mathbb{R}$, интегрируема на каждом отрезке из E, $a \in E$, $\Phi(x) = \int_a^x f, x \in E$. Тогда

1. $\Phi(x) \in C(E)$
2. Если f непрерывна в точке $x_0 \in E$, то Φ – дифференцируема в точке x_0, $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство.
1. Пусть $x_0 \in E$, подберем $\delta > 0 [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap E = [A, B]$
$|f|$ на $[A, B]$ ограничена числом M. $\Delta x : x_0 + \Delta x \in [A, B]$
$$|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| = \left|\int_a^{x_0+\Delta x} f - \int_a^{x_0} f\right| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f|\right| \leqslant |\Delta x| \cdot M \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$$
2. Проверим, что $\dfrac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x_0)$
Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0 : \forall t : |t - x_0| < \delta\ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ (по непрерывности.)
$$\left|\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt = f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| <$$
$$< \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta x| = \varepsilon,\ k = \int_a^b k \cdot \frac{1}{b-a}$$

■

Пример 1.6.8. $\Phi(x) = \int_1^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt, x > 1$
$\Phi'(x) = \dfrac{\sin x}{x} \Rightarrow \mathrm{Si}'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Упражнение 1.6.9. $\int \mathrm{Si}(x)\,dx =?$

Следствие 1.6.10. Функция, непрерывная на промежутке имеет на нём первообразную. Ей является интеграл с переменным верхним пределом.

Def 1.6.11. $\Psi(x) = \int_x^a f$ *(Условия на f и a прежние) – интеграл с переменным нижним пределом.*
$\Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$ *(Если f непрерывна).*

Теорема 1.6.12 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** $f \in R[a, b], F$– первообразная f на $[a, b]$. Тогда:
$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$:
$$F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$$
По теореме Лагранжа $\exists \xi_{k,n} \in (x_k, x_{k+1})$
$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_{k,n})(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_{k,n})\Delta x_k$
$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k,n})\Delta x_k = \lim(F(b) - F(a)) = F(b) - F(a)$$ ■

Замечание 1.6.13. $\int_a^b f = F\Big|_a^b$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^b$ – двойная подстановка.

Замечание 1.6.14. $G(x) = F(x) + C$ – тоже первообразная.
$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$

Пример 1.6.15. $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Пример 1.6.16. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$ - чушь!

1. $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ – не везде на $[-1,1]$
2. $\frac{1}{x^2}$ не интегрируема на $[-1;1]$, т.к. не ограничена.

Замечание 1.6.17. Обобщение теоремы.
$f \in R[a;b], F \in C[a,b],\ F$ – первообразная f на $[a,b]$ за исключением некоторого конечного числа точек.
Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. Пусть $\alpha_0 = a, \alpha_m = b,\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ – все точки на (a,b), в которых $F' \neq f$
$\int_a^b f = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \sum\limits_{k=0}^{m-1} (F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)) = F(b) - F(a).$
(Рассмотрим $\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_{\alpha_k+\varepsilon}^{\alpha_{k+1}-\varepsilon} f = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} (F(\alpha_{k+1} - \varepsilon) - F(\alpha_k + a)) = F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k))$ ■

Замечание 1.6.18. Без непрерывности F не получится: на $[-1,1]$

$$F(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases},\ f(x) = 0$$

$0 = \int_{-1}^1 f \neq F\Big|_{-1}^1 = 2$

Замечание 1.6.19. $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$
F дифференцируема, F' интегрируема.

Замечание 1.6.20. $F' \in R[a,b]$ – существенно.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos\frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

F' не ограничена, а значит не интегрируема.

Замечание 1.6.21. Интегрируемость $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ первообразной.
$\not\Rightarrow \operatorname{sign} x$ интегрируема на [-1. 1], но первообразной нет.
$\not\Leftarrow$ Предыдущее замечание.

Теорема 1.6.22 (Интегрирование по частям в определенном интеграле.)**.** f, g – дифференцируемы на $[a,b]$, $f', g' \in R[a,b]$. Тогда
$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$

Доказательство. f, g– дифференцируемы ⇒ непрерывны ⇒ интегрируемы.
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f \in R[a,b]$
$\int_a^b (fg)' = fg\Big|_a^b$
$\int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + g'f)$ ■

Замечание 1.6.23. $\int_a^b f\,dg = fg\Big|_a^b - \int_a^b g\,df$
$dg(x) = g'(x)\,dx$

Теорема 1.6.24 (Замена переменной в определенном интеграле)**.** $\varphi : [\alpha, \beta] \to [A, B]$, дифференцируема на $[\alpha, \beta], \varphi' \in R[\alpha, \beta]$
$f \in C[A; B]$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

Доказательство. $f(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(\varphi) \in R[a,b] \Rightarrow f(\varphi) \cdot \varphi' \in R[a,b]$
Пусть F - первообразная f на $[A, B] \Rightarrow F(\varphi)$ – первообразная $f(\varphi) \cdot \varphi'$ на $[\alpha, \beta]$
$\int_\alpha^\beta f(\varphi) \cdot \varphi' = F(\varphi)\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$ ■

Упражнение 1.6.25. Пусть f четная функция. Доказать, что $\int_{-a}^a = 2\int_0^a f$
Пусть f нечетная функция. Доказать, что $\int_{-a}^a f = 0$

Теорема 1.6.26 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.** $n \in \mathbb{N}_0$,
$f \in C^{n+1}\langle A; B\rangle, a, x \in \langle A; B\rangle$. Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$

Доказательство. По индукции:
База: $n = 0 : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$ (Формула Ньютона-Лейбница)
Пусть верно для $n-1$. Докажем для n.
$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt$. Проинтегрируем остаток по частям:
$u = f^{(n)}(t), u' = f^{(n+1)}(t), v' = (x-t)^{n-1}, v = \frac{(x-t)^n}{n}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{(n-1)!}\left(-f^{(n)}(t)\cdot\frac{(x-t)^n}{n}\Big|_{t=a}^{x}+\int_a^x\frac{f^{n+1}(t)(x-t)^n}{n}\,dt\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

■

Замечание 1.6.27. $\exists c :\in (a,x)\ \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = f^{(n+1)}(c)\int_a^x (x-t)^m\,dt = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$
(Т.е. остаток в форме Лагранжа следует отсюда)

Последовательность $\{x_n\} : x_i \in \mathbb{Q}, x_n \to \pi$

<u>Lm</u> 1.6.28. $m \in \mathbb{N}_0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}x\cdot\sin x\,dx = -\sin^{m-1}\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\cdot\cos^2 x\,dx =$

$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx$

$I_m = (m-1)\cdot(I_{m-2}-I_m) \Rightarrow I_m = \frac{m-1}{m}I_{m-2}$

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\,dx = \frac{\pi}{2}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$I_m = \begin{cases}\frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2}, m - \text{ четно}\\ I_m = \frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot 1, m - \text{ нечётно}\end{cases}$

Упражнение 1.6.29. $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ - непрерывна.
Доказать, что $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$

<u>Теорема</u> 1.6.30 (Формула Валлиса)**.** $\pi = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$

Доказательство. $\forall x \in (0;\frac{\pi}{2})\quad \sin x(0;1)$

$\forall n \in \mathbb{N}\quad \sin^{2n+1} < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx$

$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$

$< \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!\cdot(2n)!!)}{((2n-1)!!)^2}$

$\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$

$x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \Rightarrow \pi < x_n < \frac{2n+1}{2n}\pi, \Rightarrow\ x_n \to \pi$ ■

Теорема 1.6.31 (Вторая теорема о среднем для интегралов, Бонне)**.** $f \in C[a,b]$, $g \in C^1[a,b], g$ монотонна на $[a,b]$. Тогда $\exists c \in [a,b]:$

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f$$

Доказательство. $F(x) = \displaystyle\int_a^x f, \quad F' = f, F(a) = 0$

$$\int_a^b fg = Fg\Big|_a^b - \int_a^b - \int_a^b Fg' = g(b)\int_a^b f - \int_a^b Fg' =$$

$$= g(b)\int_a^b f - \int_a^c f \cdot (g(b) - g(a)) = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f$$

■

Упражнение 1.6.32. Оценить $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$

1. По первой теореме о среднем.
2. По второй теореме о среднем.

1.7. Интегральные неравенства

Теорема 1.7.1 (Неравенство Йенсена)**.** f – выпукла и непрерывна на $\langle A,B\rangle$, $\varphi : [a,b] \to \langle A,B\rangle$ – непрерывна, $\lambda : [a,b] \to [0,+\infty)$ – непрерывна, $\int_a^b \lambda = 1$. Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda\varphi\right) \leqslant \int_a^b \lambda \cdot f(\varphi)$$

Упражнение 1.7.2. Доказать.

Замечание 1.7.3. Строкое неравенство, если f строго выпукла и $\varphi \not\equiv \text{const}$.

Теорема 1.7.4 (Неравенство Гельдера)**.** $p,q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f,g \in C[a,b]$. Тогда

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Пусть $x_k = \frac{k(b-a)}{n} + a, \xi_k = x_k$. Обозначим $a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}, b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow a_k b_k = f(x_k)g(x_k)\Delta x_k$. Тогда

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)g(x_k)\Delta x_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)|^p \Delta x_k\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Выполним предельный переход:

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)\frac{1}{p} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)\frac{1}{q}$$

■

Следствие 1.7.5 (Неравенство Коши-Буняковского). $f, g \in C[a,b] \Rightarrow \left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$

Теорема 1.7.6 (Неравенство Минковского). $f, g \in C[a,b], p \geqslant 1$.

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Def 1.7.7. *Пусть* $f \in C[a,b]$.

1. *Величина*
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$
называется интегральным средним арифметическим функции f *на* $[a,b]$.
2. *Если* $f > 0$, *то величина*
$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)$$
называется интегральным средним геометрическим функции f *на* $[a,b]$.

Замечание 1.7.8. Интегральное среднее геометрическое есть пределы при $n \to \infty$ последовательности
$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} f(x_k)} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k)\right) = \exp\left(\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k)\Delta x_k\right)$$
при $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$.

Теорема 1.7.9 (Об интегральных средних). $f \in C[a,b], f > 0$. Тогда

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Доказательство. Предельный переход в неравенстве для сумм, либо применить неравенство Йенсена для $\ln x$. ∎

1.8. Несобственные интегралы

Def 1.8.1. f *локально интегрируема (по Риману) на промежутке* E, *если она интегрируема на каждом отрезке из* E.

Замечание 1.8.2. Непрерывность влечет локальную интегрируемость.

Def 1.8.3. *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty, f \in R_{loc}[a,b]$. *Тогда* $\int_a^{\to b} f$ *– несобственный интеграл.*

$$\lim_{t \to b-}\int_a^t f = \int_a^{\to b}$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Def 1.8.4. *Несобственный интеграл называется сходящимся, если из* $\mathbb{R}$.

Def 1.8.5. *Аналогично, для* $-\infty \leqslant a < b < +\infty, f \in R_{loc}(a,b]$

$$\int_{\to a}^{b} f = \lim_{t\to a+} \int_t^b f$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$*.*

Теорема 1.8.6 (Критерий Больцано-Коши сходимости интегралов)**.** Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty, f \in R_{loc}[a,b)$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta \in (a,b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b) \ \left| \int_{t_1}^{t_2} f \right| < \varepsilon$$

Доказательство. $\Phi(t) = \int_a^t f$. $\int_a^b$ сходится $\Leftrightarrow$ $\exists$ конечный $\lim_{t\to b-} \Phi(t)$. Согласно критерию Больцано-Коши существования предела функции

$$\exists \varepsilon > 0 \ \exists \Delta \in (a,b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b) \ |\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| < \varepsilon$$

и по аддитивности интеграла $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f$. ■

Замечание 1.8.7. Расходимость $\int_a^b f \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall \Delta \in (a,b) \ \exists t_1, t_2 \in (\Delta, b) \ \left|\int_{t_1}^{t_2} f\right| \geqslant \varepsilon$

Замечание 1.8.8. Запись:

$$\int_a^b f = \lim_{t\to b-} \int_a^t f = \lim_{t\to b-} (F(t) - F(a)) = F(b-) - F(a)$$

Пример 1.8.9. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^{+\infty}, \alpha \neq 1 \\ \ln x\big|_1^{+\infty}, \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Пример 1.8.10. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty, \alpha \geqslant 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1. \end{cases}$

1.8.1. Свойства несобственного интеграла

Будем считать, что f локально интегрируема на рассматриваемых промежутках.

1. **Аддитивность по промежутку.** Если $\int_a^b f$ сходится, то $\forall c \in (a,b)$ интеграл $\int_c^b$ тоже сходится и

$$\int_a^b = \int_a^c f + \int_c^b f$$

   В обратную сторону, если при $c \in (a,b)$ интеграл $\int_c^b f$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f$.

   Доказательство. $\forall t \in (a,b)$ $\int_a^t f = \int_a^c f + \int_c^t f$ – по аддитивности определенного интеграла. Переидем к пределу при $t \to b-$ предел левой части и правой части существует или не существует одновременно. ■

2. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\underbrace{\int_t^b f \xrightarrow[t\to b-]{} 0}_{\text{остаток интеграла}}$.

   Доказательство.
$$\int_t^b f = \int_a^b f - \int_a^t \xrightarrow[t\to b-]{} \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$
■

3. **Линейность несобственного интеграла.** Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то интеграл $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$
   Доказательство. Для доказательства надо перейти к пределу в равенстве для частичных интегралов
$$\int_a^t (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^t g$$
■

   Замечание 1.8.11. Если интеграл $\int_a^b f$ расходится, а интеграл $\int_a^b g$ сходится, то интеграл $\int_a^b (f+g)$ расходится. Действительно, если $f+g$ сходится, то сходится и интеграл от $f = (f+g) - f$ (?!).

4. **Монотонность несобственного интеграла.** Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ существуют в $\overline{R}$, $f \leqslant g$ на $[a,b)$, то
$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$
   Доказательство. Переидем к пределу в неравенстве для частичных пределов
$$\int_a^t f \leqslant \int_a^t g$$
■

   Замечание 1.8.12. Аналогично, с помощью предельного перехода, на несобственные интегралы переносятся неравенства Йенсена, Гельдера, Минковского.

5. **Интегрирование по частям в несобственном интеграле.** Пусть f, g дифференцируемы на $[a,b)$, $f', g' \in R_{loc}[a,b)$. Тогда
$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$
   Если два из этих трез пределов конечны, то третий предел также существует и конечен.

   Доказательство. Устремим t к b слева в равенстве
$$\int_a^t fg' = fg\Big|_a^t - \int_a^t f'g$$
■

6. **Замена переменной в несобственном интеграле.** Пусть $\varphi : [\alpha, \beta) \to [A, B)$ – дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, $\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta)$, существует $\varphi(\beta-) \in \overline{R}$, $f \in C[A, B)$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$$

Опять же, если существует один из интегралов, то существует и другой.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t) = \int_\alpha^t (f \circ \varphi)\varphi', \quad \Psi(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f$$

По формуле замены переменной в собственном интеграле

$$\Phi(t) = \Psi(\varphi(t))$$

1. Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = I \in \overline{R}$. Докажем, что $\exists \int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi' = I$, т.е. $\Phi(t) \xrightarrow[t\to\beta-]{} I$. Возьмем $\{t_n\}$: $t_n \to \beta, t_n < \beta$. Тогда $\varphi(t_n) \to \varphi(b-), \varphi(t_n) \in [A, B)$. Поэтому $\Phi(t_n) = \Psi(\varphi(t_n)) \to I$. В силу произвольности выбора $\{t_n\}$, $\Phi(t) \to I$ при $t \to \beta-$.
2. Пусть существует интеграл $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = J \in \overline{R}$. Докажем, что интеграл $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$ существует, и тогда по пункту 1 будет следовать, что он равен J. Если $\varphi(\beta-) \in [A, B)$, то интеграл собственный. Пусть $\varphi(\beta-) = B$. Возьмем $\{y_n\}, y_n \in [A, B), y_n \to B$. Не уменьшая общности, можно считать, что $y_n \in [\varphi(\alpha), B)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = y_n$ (по теореме Больцано-Коши).
Докажем, что $\gamma_n \to \beta$. Пусть $\beta' \in [\alpha, \beta)$. Т.к. $\max_{[\alpha,\beta']} \varphi < \beta$, а $\varphi(\gamma_n) \to B$, то, начиная с некоторого номера, $\gamma_n \in (\beta', \beta)$. Поэтому $\gamma_n \to \beta$, откуда $\Psi(y_n) = \Phi(\gamma_n) \to J$.

∎

Пример 1.8.13. $\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$. Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t, \cos x \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$. Если $x = \pi$, то $t = +\infty$. Тогда

$$\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot 2 + 1 - t^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+3} =$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Замечание 1.8.14. $a < b \in \mathbb{R}$. Пусть $x = b - \frac{1}{t}$.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}\, dt$$

Пример 1.8.15.

$$\int_1^{+\infty} \cos x\, dx = \sin x\big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \sin x - \sin 1 - \text{не существует}$$

1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов

Lm 1.8.16. $f \in R_{loc}[a,b), f \geqslant 0$. Тогда $\int_a^b f$ сходится $\Leftrightarrow F(t) = \int_a^t f$ на $[a,b)$ ограничена сверху.

Доказательство. $F(t)$ возрастает на $[a,b)$ $\big(t_1, t_2\ F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f \geqslant 0\big)$. $\exists \lim\limits_{t\to b-} F(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow F$ возрастает и F ограничена сверху. ■

Замечание 1.8.17. Если $f \geqslant 0$, то $\int_a^b f \in \overline{R}$.

Теорема 1.8.18 (Признак сравнения). $f, g \in R_{loc}[a,b), f, g \geqslant 0$

$$f(x) = O(g(x)) \qquad \text{при } x \to b-$$

Тогда

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится.
2. Если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство. 1. По определению O-большого найдутся такие $\Delta \in (a,b)$ и $K > 0$, что $f(x) \leqslant Kg(x)$ при всех $x \in [\Delta, b)$. Следовательно,

$$\int_\Delta^b f \leqslant K \int_\Delta^b g < +\infty$$

то есть остаток интеграла $\int_a^b f$ сходится, а тогда и сам интеграл $\int_a^b f$ сходится.

2. Если бы интеграл $\int_a^b g$ сходился, то по пункту 1 сходился бы и интеграл $\int_a^b f$.

■

Следствие 1.8.19 (Признак сравнения в предельной форме). $f, g \in R_{loc}[a;b), f \geqslant 0, g > 0$ и $\exists \lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in [0; +\infty]$. Тогда

1. Если $l \in [0, +\infty)$ и $\displaystyle\int_a^b g$ сходится, то $\displaystyle\int_a^b f$ сходится
2. Если $l \in (0, +\infty]$ и $\displaystyle\int_a^b f$ сходится, то $\displaystyle\int_a^b g$ сходится
3. Если $l \in (0, +\infty)$, то $\displaystyle\int_a^b f$ и $\displaystyle\int_a^b g$ сходятся или расходятся одновременно

Доказательство. 1. $\dfrac{f}{g}$ ограничено в $(b-\varepsilon; b) \Rightarrow f(x) = O_b(g(x))$ при $x \to b- \Rightarrow$ по теореме $\displaystyle\int_a^b f$ сходится

2. Т.к. $l > 0$, то $f > 0$ в $(b-\varepsilon; b)$. Тогда поменяем f и g местами в п.1

3. Следует из пунктов 1 и 2.

■

Следствие 1.8.20. Интегралы от неотрицательных эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно.

Упражнение 1.8.21. $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha ln^7 x}$

Пример 1.8.22. Докажем, что $f \geqslant 0$, $\int_a^{+\infty} f$ сходится $\not\Rightarrow f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

Доказательство. $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}; k + \frac{1}{k^2(k+1)}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{R}\backslash E \\ k, x = k \\ \text{линейно и непрерывном соединим точки}, x \in E \end{cases}.$$

$\int_0^{+\infty} f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f$

$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{k-\frac{1}{k^2(k+1)}}^{k+\frac{1}{k^2(k+1)}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2}k \cdot \frac{2}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$

$= 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to\infty}{\to} 1$ ∎

Замечание 1.8.23. Можно построить пример с $g > 0$. $g(x) = f(x) + \frac{1}{x^2}$

1.9. Интегралы от знакопеременных функций

Def 1.9.1. $-\infty < a < b \leqslant +\infty, f \in R_{loc}[a;b)$

$\int_a^b f$ *сходится абсолютно, если сходится* $\int_a^b |f|$

Замечание 1.9.2. Если $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходится абсолютно, то $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится абсолютно $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Доказательство. $|\alpha f + \beta g| \leqslant |\alpha| \cdot |f| + |\beta| \cdot |g|$ + признак сравнения для неотрицательных функций. ∎

Замечание 1.9.3. Если $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

<u>Lm</u> 1.9.4. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. $\int_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a;b) \int_\Delta^b |f| < \varepsilon$

Тогда $\left|\int_\Delta^b f\right| < \int_\Delta^b |f| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^\Delta f + \int_\Delta^b f$ сходится по критерию Больцано-Коши. ∎

Def 1.9.5. $x_+ = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ – *положительная часть* x

$x_- = \max\{-x, 0\} = \begin{cases} 0, x > 0 \\ -x, x \leqslant 0 \end{cases}$ – *отрицательная часть* x

$x_+ - x_- = x \Rightarrow x_+ = \frac{|x| + x}{2}$

$x_+ + x_- = |x| \Rightarrow x_- = \dfrac{|x| - x}{2}$
$0 \leqslant x_\pm \leqslant |x|$
$f_+ = \max\{f; 0\}$
$f_- = \max\{-f; 0\}$

Второе доказательство леммы. $\displaystyle\int_a^b |f|$ сходится $\underset{0\leqslant f_\pm \leqslant |f|}{\Rightarrow} \displaystyle\int_a^b f_+$ и $\displaystyle\int_a^b f_-$ – сходятся $\Rightarrow$ $\underset{f=f_+-f_-}{\Rightarrow} \displaystyle\int_a^b f$ сходится ■

Замечание 1.9.6. Обратное утверждение к лемме неверно: $\displaystyle\int_a^b f$ сходится $\not\Rightarrow \displaystyle\int_a^b |f|$ сходится.

Def 1.9.7. *Если* $\displaystyle\int_a^b f$ *сходится, а* $\displaystyle\int_a^b |f|$ *расходится, то* $\displaystyle\int_a^b f$ *называют условно сходящимся.*

Замечание 1.9.8. $\displaystyle\int_a^b f$ сходится абсолютно, $\displaystyle\int_a^b g$ сходится условно $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b (f+g)$ сходится условно, т.к. $g = (f+g) - f$.

Теорема 1.9.9 (Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов)**.** $f \in C[a;b), g \in C^1[a;b], g$ монотонна.

Признак Дирихле:

$$\left.\begin{array}{r} F(t) = \displaystyle\int_a^t f \text{ ограничена} \\ g(x) \underset{x\to b-}{\to} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b fg \text{ сходится.}$$

Признак Абеля:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b f \text{ сходится} \\ g \text{ ограничена.} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b fg \text{ сходится.}$$

Доказательство. **Признак Дирихле:** $\displaystyle\int_a^b fg = \int_a^b F'g = \underbrace{Fg\Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b Fg'$ Докажем, что $\displaystyle\int_a^b Fg'$ сходится абсолютно.

$$\int_a^b |Fg'| \leqslant \underset{|F|\leqslant K}{K} \int_a^b |g'| = K\left|\int_a^b g'\right| = K \cdot |g\Big|_a^b| = K|g(a)|$$

Признак Абеля: g ограничена и монотонна $\Rightarrow \alpha = \lim\limits_{x\to b-} g(x)$

Функция $g - \alpha$ монотонна, $\underset{x\to b-}{\to} 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(g-\alpha)$ сходится по признаку Дирихле. $\displaystyle\int_a^b fg = \underbrace{\int_a^b f(g-\alpha)}_{\text{сх-ся}} + \underbrace{\int_a^b f\cdot\alpha}_{\text{сх-ся по усл.}}$ ■

Замечание 1.9.10. Можно ослабить условия: $f \in R_{loc}[a;b)$, g монотонна на $[a;b)$

Def 1.9.11. *v.p.* $\int_a^b f = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f\right)$ – *главное значение.*

v.p. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$

v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$

v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2dx = +\infty$

Пример 1.9.12. 1. $\int_1^{+\infty} f(x)\cdot\sin x\,dx, f(x) \geqslant 0.$

- Если $\int_1^{+\infty} f$ сходится, то $\int_1^{+\infty} f(x)\sin xdx$ сходится абсолютно.
  $0 \leqslant |f(x)\cdot\sin x| \leqslant |f(x)| = f(x)$
- Если $\int_1^{+\infty} f$ расходится
  $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
  (a) $l = 0$ и f монотонна, то признак Дирихле и $\int_1^{+\infty} f(x)\sin xdx$ – сходится.
  Но: $\int_1^{+\infty} |f(x)\sin x|dx$ не сходится.
  $|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
  $$\int_1^{\infty} f(x)|\sin x|dx \geqslant \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}f(x)dx}_{\text{расходится}} - \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}f(x)\cos 2xdx}_{\text{сходится}}$$
  (b) $l > 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f\sin xdx$ расходится.
  $$\int_{a_k}^{b_k} f(x)\cdot\sin xdx \geqslant \frac{1}{2}\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\min\{f(a_k), f(b_k)\} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{\pi}{3}\cdot l = \varepsilon > 0$$

2. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится условно.
   $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ сходится абсолютно по признаку сравнения.
   $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится условно
   $\int_1^{+\infty}\sqrt{x}\sin xdx$ расходится
3. Нельзя пользоваться эквивалентностью в случае знакопеременной функции.
   $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}dx$ – расходится
   $f(x) \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x\to\infty$ $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ сходится.
   Выделим главную часть: $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + r(x)) = \underbrace{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}_{\text{сх-ся}} +$

$$\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x}}_{\text{расходится}} + \underbrace{\frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}}}_{\text{сх-ся абс-но}} + \underbrace{\frac{\sin^4 x}{x^2}}_{\text{сх-ся абс.}} + |q(x)|, \quad |q(x)| \leqslant \frac{c}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + r(t), t \to 0\right)$$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$
   При $x \to 0 \sin x \sim x$ и $\sin x > 0$ на $(0;1)$
   $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$

5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится. Но сходится в смысле главного значения.

Замечание 1.9.13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} f \cdot g, f$ – периодична с периодом $T > 0, g$ – монотонна $\underset{x\to+\infty}{\to} 0$
Тогда

1. Если $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$ сходится $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} fg$

2. Если $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$ расходится, то $\left(\displaystyle\int_1^{+\infty} fg \text{ сходится } \Leftrightarrow \int_1^{1+T} f = 0\right)$

Доказательство. Упражнение. ∎

Следствие 1.9.14. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$ сходится

1.10. Длина, площадь и объём

1.10.1. Площадь

Def 1.10.1. $\|x\|, x \in \mathbb{R}^n$ *– длина вектора.*
$\|A - B\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n (A_i - B_i)^2}$

Def 1.10.2. *Движение – отображение* $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, сохраняющее расстояния.*
$\|A - B\| = \|U(A) - U(B)\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^n$

Def 1.10.3. *Площадь – функционал* $S : P \to [0; +\infty)$*, где* $\{P\}$ *– множество квадрируемых фигур из* $\mathbb{R}^2$

Свойства площади:

1. Аддитивность: P_1, P_2 – квадрируемы и $P_1 \cap P_2 = \varnothing$. Тогда $P_1 \cup P_2$ – квадрируемая и $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

2. Нормированность на прямоугольниках: площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab

3. Инвариантность относительно движений: $S(U(P)) = S(P)$