

Матанализ 1 семестр ПИ,

Лекция, 10/20/21

Собрано 25 октября 2021 г. в 12:16

Содержание

1. Элементарные функции	1
1.1. Постоянная	1
1.2. Степенная функция	1
1.3. Показательная функция	2

1.1. Постоянная

$f(x) = c, x \mapsto c$, непрерывна на \mathbb{R}

1.2. Степенная функция

$$e_\alpha(x) = x^\alpha$$

При $\alpha = 1$ $e_1(x) = x$ – непрерывна на \mathbb{R}

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$e_\alpha(x) = x^n$$

Следовательно $e_n(x)$ непрерывна на \mathbb{R} как произведение непрерывных.

При $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как частное непрерывных.

При $\alpha = 0$ полагаем $x^0 = 1$ при всех $x \neq 0$. Можно доопределить до непрерывности ($0^0 = 1$)

Если n нечётно, то e_n строго возрастает на \mathbb{R} , $\sup_{x \in \mathbb{R}} e_n(x) = +\infty$, $\inf_{x \in \mathbb{R}} e_n(x) = -\infty$. По теореме о сохранении промежутка $e_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Если n чётно, то функция e_n строго возрастает на \mathbb{R}_+ , $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} e_n(x) = +\infty$, $\min_{x \in \mathbb{R}_+} e_n(x) = 0$, $e_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует и непрерывна функция

$$e_{\frac{1}{n}} = \begin{cases} e_n^{-1}, n \not\equiv 2 \\ (e_n|_{\mathbb{R}_+})^{-1}, n \equiv 2 \end{cases}$$

Это $\sqrt[n]{x}$, строго возрастает и непрерывна на \mathbb{R}_+

Теперь определим x^α при рациональном $\alpha = r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \frac{p}{q}$ несократима.

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}} (e_r = e_{\frac{1}{q}} \circ e_p)$$

Таким образом, x^r определено следующим образом.

$$x > 0, r \text{ любое,}$$

$$x = 0, r \geq 0,$$

$$x < 0, q \not\equiv 2$$

e_r непрерывна на своей области определения, строго возрастает на $[0, +\infty)$ при $r > 0$, строго убывает на $(0, +\infty)$ при $r < 0$

1.3. Показательная функция

$$0^x = 0 \quad \forall x > 0$$

Пусть $a > 0$. Пока что a^x определена только для $x \in \mathbb{Q}$. Обозначим эту функцию $a^x|_{\mathbb{Q}}$. Её свойства:

1. $r < s \Rightarrow a^r < a^s, a > 1$ и $a^r > a^s, 0 < a < 1$
2. $a^{r+s} = a^r a^s$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $(ab)^r = a^r b^r$

Def. 1.3.1. Пусть $a > 0, x \in \mathbb{R}$ Положим

$$a^x = \lim_{r \rightarrow x} a^r|_{\mathbb{Q}}$$

Lm 1.3.2. Пусть $a > 0, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \rightarrow 0$. Тогда $a^{r_n} \rightarrow 1$.

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидно, т.к. $a^{r_n} = 1 \quad \forall n$.

Пусть $a > 1$. Докажем лемму в частном случае $r_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $a^{\frac{1}{n}} > 1$, имеем $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n, \alpha_n > 0$. Тогда по неравенству Бернулли

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$$

Откуда $0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n} \Rightarrow \alpha_n \rightarrow 0 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.

Далее, по доказанному

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

Пусть теперь $\{r_n\}$ – произвольная последовательность из условия леммы. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists N_0$:

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Поскольку $r_n \rightarrow 0$, найдется такой номер N , что $\forall n > N \rightarrow -\frac{1}{N_0} < r_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Значит $a^{r_n} \rightarrow 1$

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, и по доказанному

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \rightarrow 1$$

■

Lm 1.3.3. Пусть $a > 0, x \in \mathbb{R}, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \rightarrow x$. Тогда существует конечный предел последовательности $\{a^{r_n}\}$

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидна.

Пусть $a > 1$. Возьмем какую-либо возрастающую последовательность $\{s_n\}$ рациональных чисел, стремящуюся к x . Например

$$s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

Тогда $x - \frac{1}{10^n} < s_n \leq x \Rightarrow s_n \rightarrow x$. Докажем, что последовательность $\{s_n\}$ возрастает. Пусть $A = 10^n x$. Тогда $s_n \leq s_{n+1} \Leftrightarrow 10[A] \leq [10A]$, но $10[A]$ – целое число, не превосходящее $10A$.

$\{a^{s_n}\}$ возрастает и ограничена сверху числом $a^{[x]+1}$. Значит $\{a^{s_n}\}$ сходится к некоторому пределу L . Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \rightarrow L$$

Потому что $a^{r_n - s_n} \rightarrow 1$ по предыдущей лемме.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и по доказанному $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \rightarrow L, L > 0$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \rightarrow \frac{1}{L}$$

■