

Дискретная математика 1 семестр ПИ,

Лекция, 10/23/21

Собрано 1 ноября 2021 г. в 15:43

Содержание

1. Теория вероятности	1
1.1. Испытания Бернулли	1
1.2. Предельные случаи испытаний Бернулли	2

Теорема 1.0.1 (Формула Байеса). Пусть H_1, H_2, \dots, H_n – полная группа событий. A – событие (считаем произошедшим). Тогда

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

Доказательство.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

■

1.1. Испытания Бернулли

Def. 1.1.1. Обозначим $P_n(m)$ – вероятность получить m успехов за n испытаний.

Теорема 1.1.2 (Теорема Бернулли). Рассмотрим упорядоченный набор: $\underbrace{SSS\dots S}_n \underbrace{FFF\dots F}_{n-m}$, где S обозначает успех, а F – неудачу. В силу независимости испытаний, вероятность получить конкретный упорядоченный набор равна $p^m(1-p)^{n-m}$. Таких наборов, очевидно, C_n^m

Теорема 1.1.3. $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq n$. $P_n(m_1, m_2)$ – успех наступил от m_1 до m_2 раз.

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{i=m_1}^{m_2} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$$

Def. 1.1.4. Наивероятнейшее число событий – число событий в испытаниях Бернулли с наибольшей вероятностью.

Теорема 1.1.5. Наивероятнейшее число успехов в n испытаниях заключено между числами $np - (1-p)$ и $np + p$

Доказательство. Рассмотрим следующее соотношение:

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} (1-p)^{n-m+1}} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n!(m-1)!(n-m+1)!}{n!m!(n-m)!} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-m+1}{m}$$

Отсюда очевидно, что

$$P_n(m) > P_n(m-1), m < (n+1)p$$

$$P_n(m) = P_n(m-1), m = (n+1)p$$

$$P_n(m) < P_n(m-1), m > (n+1)p$$

Значит, при $m < (n+1)p$ $P_n(m)$ возрастает, при $m > (n+1)p$ – убывает. Тогда несложно найти m такое, чтобы $P_n(m)$ было наибольшим:

$$\begin{cases} P_n(m) > P_n(m-1) \\ P_n(m+1) < P_n(m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < (n+1)p \\ m+1 > (n+1)p \end{cases} \Leftrightarrow np + p - 1 < m < np + p$$

■

1.2. Предельные случаи испытаний Бернулли

Рассмотрим ситуацию, когда вероятность какого-то события уменьшается пропорционально n , т.е. $p \sim \frac{1}{n}$

Теорема 1.2.1 (Теорема Пуассона). Пусть $np = \text{const}$, $\lambda = np$.

$$\forall m, \forall \lambda \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P_n(m) &= C_n^m p^m \cdot (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m = \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.2 (Локальная теорема Муавра-Лапласа). Пусть $x_n = \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Предположим, что x_n ограничена при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sqrt{np(1-p)} \cdot P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_n^2}{2}}$$

Доказательство. Вспомним, что $k! \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$.

$n - m = n(1-p) - x_n \sqrt{np(1-p)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{np(1-p)} P_n(m) &= \sqrt{np(1-p)} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} \\ &\approx \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi m} \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot \sqrt{2\pi(n-m)} \cdot \left(\frac{n-m}{e}\right)^{n-m}} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} \\ &= \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot \sqrt{n} \cdot n^n}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{m} \cdot m^m \cdot (n-m)^{n-m}} \cdot p^m (1-p)^{n-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-m}\right)^{n-m} \sqrt{\frac{np}{m}} \cdot \sqrt{\frac{n(1-p)}{n-m}} \end{aligned}$$

$$m = np + x_n \sqrt{np(1-p)}$$

$$\begin{aligned} \frac{m}{np} &= 1 + \frac{x_n \sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ \frac{n-m}{n(1-p)} &= 1 - \frac{x_n \sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Пусть, для удобства, $\exp(x) = e^x$. Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{np(1-p)}P_n(m) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right)^{-m} \left(1 - \frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}\right)^{-(n-m)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-m \cdot \ln\left(1 + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right) - (n-m) \cdot \ln\left(1 - \frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}\right)\right)\end{aligned}$$

Как мы знаем (откуда?)

$$\ln(1+y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} y - \frac{y^2}{2}(1+O(1))$$

Следовательно $\sqrt{np(1-p)}P_n(m) =$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-m \left(\frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} - \frac{x_n^2}{2np}\right)(1+O(1)) - (n-m) \left(-\frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} - \frac{x_n^2 p}{2n(1-p)}\right)(1+O(1))\right) \\ &\quad x_n \left(\frac{(n-m)\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} - \frac{m\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right) = \\ &= \frac{x_n}{\sqrt{np(1-p)}} \left(np(1-p) - x_n\sqrt{np(1-p)}p - n(1-p) \cdot p - x_n\sqrt{np(1-p)}(1-p)\right) = \\ &= -x_n^2(p + (1-p)) = -x_n^2\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\sqrt{np(1-p)}P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-x_n^2 + \frac{x_n^2}{2}\right)(1+O(1))} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}$$

■

Теорема 1.2.3 (Интегральная теорема Муавра-Лапласа). $a_n = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, b_n = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, q = 1 - p$. Пусть $m_1 \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, a_n, b_n$ – ограничены. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| P_n(m_1, m_2) - \frac{1}{2\pi} \int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| = 0$$

Def. 1.2.4. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса.

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа.

Следствие 1.2.5. По локальной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) \sim \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) \sim \frac{1}{2}(\Phi(b_n) - \Phi(a_n))$$