Алгебра 1 семестр ПИ,
Лекция, 09/17/21

Собрано 27 сентября 2021 г. в 17:19

Содержание

1.1. Отношения

Def. 1.1.1. *Отношением ω на $X \times Y$ называется любое подмножество $X \times Y$.*

Если $X = Y$, то говорят про отношение на X.
Отношение на X называется:

1. рефлексивным, если $\forall x \in X (x, x) \in \omega$
2. антирефлексивным, если $(x, y) \in \omega \Rightarrow x \neq y$
3. симметричным, если $(x, y) \in \omega \Rightarrow (y, x) \in \omega$
4. антисимметричным, если $(x, y), (y, x) \in \omega \Rightarrow y = x$
5. транзитивным, если $(x, y), (y, z) \in \omega \Rightarrow (x, z) \in \omega$

1.2. Отношение эквивалентности

Def. 1.2.1. *Отношение на X, которое является рефлексивным, симметричным, транзитивным, называется эквивалентностью и обозначается $x \sim y$*

Пример 1.2.2. $X = \mathbb{Z}\ x\omega y \Leftrightarrow x - y \vdots 5$

1. $x - x \vdots 5$ — рефлексивно
2. $x - y \vdots 5 \Rightarrow y - x \vdots 5$ — симметрично
3. $x - y \vdots 5$, $y - z \vdots 5$ $x - z = (x - y) + (y - z) \vdots 5 \Rightarrow x - z \vdots 5$ — транзитивно

$\Rightarrow \omega$ — отношение эививалентности

1.3. Класс эквивалентности

Def. 1.3.1. *Классом эквивалентности, содержащим $a \in X$, называется $[a] = \{x : x \in X, x \sim a\}$*

Def. 1.3.2. *Разбиением множества X называется $\pi(X) = \{X_i\}$:*

1. $X_1 \cup X_2 \dots = X$
2. $\forall i, j : i \neq j, X_i \cap X_j = \varnothing$

Теорема 1.3.3. Связь эквивалентности и разбиения множества

1. Отношения эквивалентности на X задаёт разбиение множества $\pi(X)$, X_i — классы эквивалентности
2. Разбиение $\pi(X)$ задаёт эквивалентность на X

Доказательство. 1. $X_i = [x] = \{y \in X : y \sim x\}$ — перебираем все $x \in X \Rightarrow X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots X_n \cup \cdots$

$X_i, X_j : X_i = [x_i], X_j = [x_j]$ предположим, что $a \in X_i \cap X_j \Rightarrow a \sim x_i, a \sim x_j \Rightarrow x_i \sim x_j \Rightarrow X_i = X_j \Rightarrow [x_i]$ задают разбиения

2. $\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow x, y \in X_i$, проверить, что $\sim$ — эквивалентность:

   1. $x, x \in X_i \Rightarrow x \sim x$
   2. $x, y \in X_i \Rightarrow y, x \in X_i$
   3. $x, y, y, z \in X_i \Rightarrow x, z \in X_i$

   $\Rightarrow \sim$ — эквивалентность

■

Def. 1.3.4. *$\sim$ на X, тогда фактормножество $(X/\sim)$ — множество, состоящее из классов эквивалентности*

1.4. Перестановка — биективное отображение $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ в X

Запись перестановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Def. 1.4.1. *Композиция перестановок. (σ, τ)*
$\sigma, \tau \Rightarrow \sigma \circ \tau = \sigma\tau$ — выполняется справа налево.

Def. 1.4.2. $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ *— тождественная перестановка*

Утверждение 1.4.3. $\forall \sigma \to \exists \sigma^{-1}$

Множество всех перестановок $X = \{1, 2, ..., n\}$ обозначается S_n

Def. 1.4.4. *Группой называется некоторое множество G, на котором определена бинарная операция: $\forall x, y \in G \to xy \in G$. При этом выполняются следующие аксиомы*

1. $\forall x, y, z \in G \to (xy)z = x(yz)$ - ассоциативность.

2. $\forall x \in G \to \exists e \in G : xe = ex = x$ - нейтральный элемент

3. $\forall x \in G \to \exists x^{-1} \in G : xx^{-1} = x^{-1}x = e$

Теорема 1.4.5. S_n относительно композиции является группой.

Def. 1.4.6. *Порядком группы G называется количество элементов в G*
Обозначается $|G|$

Def. 1.4.7. $\begin{pmatrix} 1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ *– k-цикл*

$\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix} = (ij)$ *– транспозиция.*

Пример 1.4.8. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Теорема 1.4.9. $\forall \sigma \in S_n$ может быть разложена в произведение независимых циклов.

Доказательство. $1 \leqslant i, j \leqslant n$. $i \sim j \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : \sigma^p(i) = j$

1. $\sigma^0(i) = i$ - рефлексивность
2. $\sigma^p(i) = j \Rightarrow \sigma^{-p}(j) = i$ - симметричность
3. $\sigma^p(i) = j, \sigma^q(j) = k \Rightarrow \sigma^{p+q}(i) = k$ - транзитивность

$\Rightarrow$ по теореме о разбиении множества $\Rightarrow X = X_1 \cup ... \cup X_s \Rightarrow \forall X_i$ соответствует цикл, длина которого равна $|X_i|$
Пусть $j \in X_i$, тогда $\begin{pmatrix} j & \sigma(j) & \sigma^2(j) & ... & \sigma^p(j) \\ \sigma(j) & \sigma^2(j) & \sigma^3(j) & ... & j \end{pmatrix} \Rightarrow$ все такие циклы независимы.
Замечание 1.4.10. Можно доказать, что это разложение единственно с точностью до порядка. ■

Следствие 1.4.11. $\forall \sigma \in S_n$ раскладывается в произведение транспозиций

Доказательство. Рассмотрим какой-то k-цикл.

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & ... & i_k \\ i_2 & i_3 & i_4 & ... & i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_k \\ i_k & i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_{k-1} \\ i_{k-1} & i_1 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \\ i_3 & i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_2 & i_1 \end{pmatrix}$$

■

Замечание 1.4.12. Разложение перестановки в произведение транспозиций не является единственным.

1.5. Знак перестановки

Def. 1.5.1. $\sigma = \tau_1, \tau_2, ..., \tau_k, \tau_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ - *транспозиции.*
Знаком перестановки σ *называется* $\varepsilon_\sigma = (-1)^k$

Замечание 1.5.2. Если $\tau = (ij) \Rightarrow \tau^2 = (ij)^2 = e$

Теорема 1.5.3. О знаке перестановки

1. ε_σ не зависит от способа разложения σ на произведение транспозиций
2. $\varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau = \varepsilon_{\sigma\tau}$

Доказательство. 1. $\sigma = \tau_1\tau_2...\tau_k = \tau'_1\tau'_2...\tau'_s, \tau_i, \tau'_j$ - транспозиции.
$\Rightarrow \tau_1\tau_2...\tau_k\tau'_s = \tau'_1\tau'_2...\tau'_{s-1} \Rightarrow \tau_1\tau_2...\tau_k\tau'_s\tau'_{s-1} = \tau'_1\tau'_2...\tau'_{s-2} \Rightarrow e = \tau_1\tau_2...\tau_k\tau'_s...\tau'_1$.
Если k, s одной четности $\Rightarrow e$ раскладывается в четное число транспозиций
k, s разной четности $\Rightarrow e$ раскладывается в нечетное число транспозиций.
Докажем, что e не может быть разложена в нечётное число транспозиций. Найдем транспозицию, содержащую i и будем двигать её влево
$e = \tau_1\tau_2...(ij)...$

Смотрим транспозицию слева от (ij):

$$(ij)(ij) = e \Rightarrow$$

число транспозиций уменьшилось на 2

$$(ik)(ij) = (ij)(jk)$$

$$(jk)(ij) = (ik)(jk)$$

$$(kl)(ij) = (ij)(kl)$$

$\Rightarrow$ если не будет пункта 1 $\Rightarrow e = (it)...$
$e(i) = i$. Однако правая часть $i \to t$, что невозможно. $\Rightarrow$ обязательно будет 1 $\Rightarrow$ число транспозиций уменьшится на 2
Было $k + s$ транспозиций. $k + s - 2, k + s - 4, ... = 0 \Rightarrow k + s$ - чётное.

2. $\varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau = \varepsilon_{\sigma\tau}$
$\sigma = \tau_1...\tau_k, \tau = \tau'_1...\tau'_s$
$\varepsilon_\sigma \varepsilon = (-1)^k \cdot (-1)^s = (-1)^{k+s}$
$\varepsilon_{\sigma\tau} = (-1)^{k+s}$

■

Def. 1.5.4. *Если $\varepsilon = +1$, то перестановка называется четной*

1.6. Чётные перестановки

$A_n = \{$чётные перестановки в $S_n\}$
$\overline{A_n} = S_n \setminus A_n$

Утверждение 1.6.1. $|A_n| = |\overline{A_n}| = \frac{n!}{2}$

Доказательство. Пусть $\tau = (ij), \sigma \in A_n, \varphi : A_n \to \overline{A_n}, \varphi(\sigma) = \tau\sigma \in \overline{A_n}$
Инъективность: $\sigma_1 \neq \sigma_2 \in A_n, \varphi(\sigma_1) = \tau\sigma_1, \varphi(\sigma_2) = \tau\sigma_2$
Если $\tau\sigma_1 = \tau\sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$ - противоречие
Сюръективность: Пусть $\rho \in \overline{A_n} \Rightarrow \tau\rho \in A_n \Rightarrow \varphi(\tau\rho) = \tau(\tau\rho) = \rho \Rightarrow \varphi$ - биективно $\Rightarrow |A_n| = |\overline{A_n}|$ ■

Замечание 1.6.2. $e \in A_n, \sigma, \rho \in A_n \Rightarrow \sigma\rho \in A_n$.

$$\sigma = \tau_1\tau_2...\tau_k, \sigma^{-1} = \tau_k\tau_{k-1}...\tau_1 \in A_n$$

Значит A_n - группа относительно композиции.

Def. 1.6.3. *G - группа. Множество $H \subseteq G$ называется подгруппой G, если оно также образует группу. Обозначение: $H \leqslant G$*

Теорема 1.6.4. $A_n \leqslant S_n \Rightarrow |A_n| = \frac{n!}{2}$

Def. 1.6.5. *A_n - знакопеременная группа (alternating)*

1.7. Инверсии

Def. 1.7.1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & s & \dots & t & \dots & n \\ i & \dots & i_s & \dots & i_t & \dots & i_n \end{pmatrix}$. *Говорят, что* (s,t) *образуют инверсию, если* $s < t \wedge i_s > i_t$. *Количество всех инверсий равно* $inv(\sigma)$

Теорема 1.7.2 (Инверсии и четность и перестановки)**.** σ – четная (нечетная) $\Leftrightarrow$ $inv(\sigma)$ четно (нечетно)

Доказательство. 1. Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} \dots & s & t & \dots \\ \dots & i & j & \dots \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} i & i+1 \\ i+1 & i \end{pmatrix}, j = i+1$ Хотим узнать, как меняется количество инверсий при умножении на τ.

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} i & i+1 \\ i+1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & s & \dots & t & \dots \\ \dots & i & \dots & i+1 & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow$$

количество инверсий изменится на 1.
Число инверсий в парах без s и t не поменялось. $(k,s),(m,t)$ - тоже не поменялось. (s,t) - изменилось на 1.

2. $\tau = (ij)$ - произовальная транспозиция. σ - произовальная перестановка.
$\tau = \begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+1 & i+2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i+k-1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+k-2 & i+k-1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i+1 & i+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \tau$ раскладывается в $2(k-1)+1$ транспозицию соседних элементов $\Rightarrow$ число инверсий $\tau\sigma$ изменится на нечётное число.

3. $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_l e$, где σ_i – независимые циклы.
Если σ_l раскладывается в чётное число транспозиций, то в $\sigma_l e$ чётное число инверсий (т.к. каждая транспозиция меняет $inv(\sigma_l)$ на нечетное число).
Если σ_l раскладывается в нечётное число транспозиций, то в $\sigma_l e$ нечётное число инверсий.

■