Матанализ 1 семестр ПИ,
Лекция, 10/20/21

Собрано 20 октября 2021 г. в 19:09

Содержание

1.1. Постоянная

$f(x) = c, x \mapsto c$, непрерывна на $\mathbb{R}$

1.2. Степенная функция

$e_\alpha(x) = x^\alpha$
При $\alpha = 1$ $e_1(x) = x$ – непрерывна на $\mathbb{R}$
При $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$e_\alpha(x) = x^n$$

Следовательно $e_n(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ как произведение непрерывных.
При $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \mathtt{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как частное непрерывных.
При $\alpha = 0$ полагаем $x^0 = 1$ при всех $x \neq 0$. Можно доопределить до непрерывности ($0^0 = 1$)
Если n нечётно, то e_n строго возрастает на $\mathbb{R}, \sup_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = +\infty, \inf_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = -\infty$. По теореме о сохранении промежутка $e_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Если n четно, то функция e_n строго возрастает на $\mathbb{R}_+, \sup_{x\in\mathbb{R}_+} e_n(x) = +\infty, \min_{x\in\mathbb{R}_+} e_n(x) = 0, e_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует и непрерывна функция

$$e_{\frac{1}{n}} = \begin{cases} e_n^{-1}, n \;\not\vdots\; 2 \\ \left(e_n|_{R_+}\right)^{-1}, n \;\vdots\; 2 \end{cases}$$

Это $\sqrt[n]{x}$, строго возрастает и непрерывна на $\mathbb{R}_+$
Теперь определим x^α при рациональном $\alpha = r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \frac{p}{q}$ несократима.

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}} (e_r = e_{\frac{1}{q}} \circ e_p)$$

Таким образом, x^r определено следующим образом.

$$\begin{aligned} &x > 0, r \text{ любое}, \\ &x = 0, r \geqslant 0, \\ &x < 0, q \;\not\vdots 2 \end{aligned}$$

e_r непрерывна на своей области определения, строго возрастает на $[0, +\infty)$ при $r > 0$, строго убывает на $(0, +\infty)$ при $r < 0$

1.3. Показательная функция

$0^x = 0 \ \forall x > 0$
Пусть $a > 0$. Пока что a^x определена только для $x \in \mathbb{Q}$. Обозначим эту функцию $a^x|_{\mathbb{Q}}$. Её свойства:

1. $r < s \Rightarrow a^r < a^s, a > 1$ и $a^r > a^s, 0 < a < 1$
2. $a^{r+s} = a^r a^s$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $(ab)^r = a^r b^r$

Def. 1.3.1. *Пусть* $a > 0, x \in \mathbb{R}$ *Положим*

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r|_{\mathbb{Q}}$$

Lm 1.3.2. Пусть $a > 0, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \to 0$. Тогда $a^{r_n} \to 1$.

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидно, т.к. $a^{r_n} = 1 \ \forall n$.
Пусть $a > 1$. Докажем лемму в частном случае $r_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $a^{\frac{1}{n}} > 1$, имеем $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n, \alpha_n > 0$. Тогда по неравенству Бернулии

$$a = (a + \alpha_n)^n \geqslant 1 + n\alpha_n$$

Откуда $0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n} \Rightarrow \alpha_n \to 0 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \to 1$.
Далее, по доказанному

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{1} = 1$$

Пусть теперь $\{r_n\}$ – произвольная последовательность из условия леммы. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists N_0 :$

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Поскольку $r_n \to 0$, найдется такой номер N, что $\forall n > N \to -\frac{1}{N_0} < r_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Значит $a^{r_n} \to 1$
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, и по доказанному

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \to 1$$

■

Lm 1.3.3. Пусть $a > 0, x \in \mathbb{R}, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \to x$. Тогда существует конечный предел последовательности $\{a^{r_n}\}$

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидна.
Пусть $a > 1$. Возьмем какую-либо возрастающую последовательность $\{s)n\}$ рациональных чисел, стремящуюся к x. Например

$$s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

Тогда $x - \frac{1}{10^n} < s_n \leqslant x \Rightarrow s_n \to x$. Докажем, что последовательность $\{s_n\}$. Пусть $A = 10^n x$. Тогда $s_n \leqslant s_{n+1} \Leftrightarrow 10[A] \leqslant [10A]$, но $10[A]$ – целое число, не превосходящее $10A$.
$\{a^{s_n}\}$ возрастает и ограничена сверху числом $a^{[x]+1}$. Значит $\{a^{s_n}\}$ сходится к некоторому пределу L. Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \to L$$

Потому что $a^{r_n - s_n} \to 1$ по предыдущей лемме.
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и по доказанному $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \to L, L > 0$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \to \frac{1}{L}$$

■