

Матанализ 1 семестр ПИ,

Лекции

Собрано 29 ноября 2021 г. в 21:15

Содержание

1. Аксиомы вещественных чисел	1
1.1. Аксиомы сложения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)	1
1.2. Аксиомы умножения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)	1
1.3. Дистрибутивность умножения относительно сложения	1
1.4. Аксиомы порядка ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leq b$ или $b \leq a$)	1
1.5. Ещё несколько определений	1
1.6. Аксиома полноты	1
1.7. Следствия из аксиом множества действительных чисел	2
2. Принцип математической индукции	4
3. Супремум и инфимум	5
4. Отображения	6
5. Последовательности	7
5.1. Предел последовательности и его свойства	7
5.2. Монотонные последовательности	8
5.3. Теорема об арифметических действиях с пределами	9
5.4. Арифметические действия с бесконечностями	10
5.5. Неравенство Бернулли	11
6. Пределы последовательностей	12
6.1. Число e	12
6.2. Теорема Штольца	13
6.3. Подпоследовательности	14
7. Ряды	17
7.1. Ряды	17
7.2. Свойства рядов	18
8. Функции	19
8.1. Свойства пределов функций	19
8.2. Непрерывные функции	22
9. Пределы функций	23
9.1. ε -окрестности	23
9.2. Предел функции	23
10. Непрерывность	25

11. Элементарные функции	28
11.1. Постоянная	28
11.2. Степенная функция	28
11.3. Показательная функция	29
11.3.1. Свойства показательной функции	30
11.4. Логарифм	31
11.4.1. Свойства логарифма	31
11.5. Тригонометрические функции	32
11.5.1. Обратные тригонометрические функции	33
12. Замечательные пределы	34
13. Сравнение функций	36
14. Дифференциальное исчисление	39
14.1. Связь с физикой	40
14.2. Связь с геометрией	40
14.3. Бесконечные производные	40
14.4. Правила дифференцирования	41
14.5. Формулы для вычисления производных	42
14.6. Теоремы о средних	44
14.7. Производные высших порядков	48
14.8. Формула Тейлора	49
14.9. Формулы Тейлора-Маклорена	51

Раздел #1: Аксиомы вещественных чисел

1.1. Аксиомы сложения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a + 0 = a$ (существование нуля)
4. $\forall a \in \mathbb{R} \rightarrow \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ ($(-a)$ — противоположное число для a)

1.2. Аксиомы умножения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения)
3. $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \cdot x = x$ (существование единицы)
4. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \rightarrow \exists \frac{1}{a} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($\frac{1}{a}$ — обратное число для a)

1.3. Дистрибутивность умножения относительно сложения

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1.4. Аксиомы порядка ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leq b$ или $b \leq a$)

1. $\forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a \leq a$ (рефлексивность)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b, b \leq c \rightarrow a \leq c$ (транзитивность)
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b, b \leq a \rightarrow a = b$ (антисимметричность)
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a \leq b$ или $b \leq a$
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 \leq a, 0 \leq b \rightarrow 0 \leq a \cdot b$

1.5. Ещё несколько определений

- $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$ (определение \geq)
- $a < b \Leftrightarrow a \leq b$ и $a \neq b$ (определение $<$)
- $a > b \Leftrightarrow b < a$ (определение $>$)

1.6. Аксиома полноты

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset, B \neq \emptyset : \forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y \rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$$

1.7. Следствия из аксиом множества действительных чисел

Следствие 1.7.1. Число 0 единственно

Доказательство. Предположим обратное: $\exists 0' \neq 0$, тогда рассмотрим следующее:

$$0' + 0 = 0'$$

$$0 + 0' = 0$$

Теперь заметим, что левые части равны по аксиоме о коммутативности сложения $\Rightarrow 0' = 0$, что противоречит предполагаемому. ■

Следствие 1.7.2. Число 1 единственно

Доказательство аналогично доказательству единственности нуля, только используется умножение вместо сложения.

Следствие 1.7.3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

Доказательство.

$$a = b \Rightarrow a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$a = b \Rightarrow b \leq a \Rightarrow b + c \leq a + c$$

$$a + c \leq b + c, b + c \leq a + c \Rightarrow a + c = b + c$$

В обратную сторону аналогично:

$$a + c = b + c \Rightarrow a + c \leq b + c \Rightarrow a \leq b$$

$$a + c = b + c \Rightarrow b + c \leq a + c \Rightarrow b \leq a$$

$$a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$$

■

Следствие 1.7.4. $\forall a \in \mathbb{R} (-a)$ единственно.

Доказательство. Пусть верно обратное: $\exists a \in \mathbb{R} : \exists (-a)_1, (-a)_2 \in \mathbb{R} : (-a)_1 \neq (-a)_2$

$$a + (-a)_1 = a + (-a)_2 = 0$$

Добавим к обеим частям $(-a)_1$:

$$(-a)_1 = (-a)_2$$

Пришли к противоречию. ■

Следствие 1.7.5. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \rightarrow -b \leq -a$

Доказательство.

$$a + ((-a) + (-b)) \leq b + ((-a) + (-b))$$

$$-b \leq -a$$

■

Следствие 1.7.6. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \cdot x = 0$

Доказательство.

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = x \cdot (0 + 0) + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0$$

■

Следствие 1.7.7. $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow (-x) = (-1) \cdot x$

Доказательство. Предположим обратное: $\exists x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = b, b \neq (-x)$

$$(-1) \cdot x + 1 \cdot x = b + 1 \cdot x$$

$$x \cdot (1 + (-1)) = b + 1 \cdot x$$

$$b + x = 0$$

$$b = -x$$

Противоречие.

■

Следствие 1.7.8. $0 < 1$

Доказательство. Предположим обратное: $0 \geq 1$, вариант $0 = 1$ сразу отпадает из-за аксиомы о существовании единицы, значит $0 > 1 \Leftrightarrow -1 > 0$

Пусть $x \in \mathbb{R}, x > 0$, тогда $(-1) \cdot x \geq 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot x + 1 \cdot x \geq 1 \cdot x \Leftrightarrow 0 \geq x$

Противоречие.

■

Теорема 1.7.9 (Теорема о вложенных отрезка). Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$. Тогда

$$\exists a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Доказательство. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1$

Значит, $\forall k, m \rightarrow a_k \leq b_m$

Пусть $A = \{a_n\}, B = \{b_n\}$. По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : \forall k, m \in \mathbb{N} \rightarrow a_k \leq c \leq b_m \Rightarrow c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

■

Замечания: 1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0; \frac{1}{n}] = \emptyset$. Важно, что именно отрезки, а не интервалы или полуинтервалы.

2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n; +\infty) = ?$

3) Без аксиомы полноты не работает. Например

$$[1.4; 1.5] \supset [1.41; 1.42] \supset \dots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}, \text{ но не в } \mathbb{Q}$$

Раздел #2: Принцип математической индукции

$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ - утверждения. Если

1. P_1 верно - база
2. $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow P_n \Rightarrow P_{n+1}$ - индукционный переход

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow P_n$.

Def 2.0.1. $M \subset \mathbb{R}$ - индуктивное, если $1 \in M \wedge (x \in M \Rightarrow x + 1 \in M)$.

Def 2.0.2. \mathbb{N} - минимальное индуктивное подмножество \mathbb{R}

Def 2.0.3 (Сдвиг индекса суммирования).

$$\sum_{n=m}^k a_n = \sum_{j=m+p}^{k+p} a_{j-p}, p \in \mathbb{Z}$$

Def 2.0.4. $k!!$ - произведение целых чисел до k включительно одной четности с k .

Def 2.0.5 (Биномиальные коэффициенты).

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Теорема 2.0.6 (Формула бинома Ньютона). Пусть $n \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

Доказательство. $n = 0 \rightarrow 1 = 1$, верно

Индукционный переход:

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k+1} = C_n^n x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + C_n^k x^k y^{n+1-k}) + C_n^0 x^0 y^{n+1} = \\ &= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) x^k y^{n+1-k} + C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k} \end{aligned}$$

■

Раздел #3: Супремум и инфимум

Def 3.0.1. $E \subset \mathbb{R}$ - ограниченное сверху, если $\exists A : \forall x \in E \rightarrow x \leq A$

Def 3.0.2. $E \subset \mathbb{R}$ - ограниченное снизу, если $\exists B : \forall x \in E \rightarrow x \geq B$

Def 3.0.3. $E \subset \mathbb{R}$ - ограниченное, если оно ограничено и снизу, и сверху.

Def 3.0.4. $M \in \mathbb{R}$ называется максимумом мн-ва E , если $\forall x \in E \rightarrow x \leq M \wedge M \in E$

Def 3.0.5. $K \in \mathbb{R}$ называется минимумом мн-ва E , если $\forall x \in E \rightarrow x \geq K \wedge K \in E$

Теорема 3.0.6 (Существование минимума и максимума у конечного множества из \mathbb{R}). Во всяком конечном непустом подмножестве \mathbb{R} есть наибольший и наименьший элементу

Доказательство. $n = 1$ - количество элементов (База)

Индукционный переход: $\exists \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = C$

Добавим x_{n+1} : если $x_{n+1} > C \Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = x_{n+1}$

если $x_{n+1} \leq C \Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = C$ ■

Следствие 3.0.7. $\forall E \neq \emptyset \wedge E \subset \mathbb{Z} \wedge E$ - огр. $\rightarrow \exists \max E \wedge \min E$

Следствие 3.0.8. $\forall E \subset \mathbb{N}, E \neq \emptyset \rightarrow \exists \min E$

Далее везде $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$

Def 3.0.9. Пусть E ограничено сверху, тогда $\sup E$ - наименьшая из верхних границ. (точная верхняя граница)

Def 3.0.10. Пусть E ограничено снизу, тогда $\inf E$ - наибольшая из нижних границ. (точная нижняя граница)

Теорема 3.0.11. $E \neq \emptyset$. Если E ограничено снизу, то $\exists! \inf E$

Доказательство. Пусть A - множество всех нижних границ $E (A \neq \emptyset)$

$\forall a \in A, b \in E \rightarrow a \leq b$

Тогда по аксиоме полноты $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \ \forall a \in A, b \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c \leq b \ \forall b \in E - c - \text{нижняя граница,} \\ c \geq a \ \forall a \in A - c - \text{наибольшее} \end{cases}$ ■

Def 3.0.12.

$$l = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \rightarrow x \leq l \\ \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists y \in E : y > l - \varepsilon \end{cases}$$

$$m = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \rightarrow x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists y \in E : y < m + \varepsilon \end{cases}$$

Если E не ограничено сверху, то $\sup E = +\infty$

Если $E = \emptyset$, то чаще всего $\sup E$ и $\inf E$ не определены, но иногда $\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$

Утверждение 3.0.13. $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Тогда если A ограничено снизу, то $\inf A \leq \inf B$

Доказательство. Если C - нижняя граница A , то $\forall x \in A \rightarrow C \leq x \Rightarrow \forall y \in B \rightarrow C \leq y \Rightarrow C$ - нижняя граница $B \Rightarrow \inf A$ - тоже нижняя граница $B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$ ■

Утверждение 3.0.14. $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Тогда если A ограничено сверху, то $\sup A \geq \sup B$

Раздел #4: Отображения

$f: A \rightarrow B$ $f(x) = y$

y – образ элемента x

x – прообраз y

$f(A)$ – образ множества A

$f^{-1}(B)$ – прообраз множества B

$G_f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$

Def 4.0.1. $f: A \rightarrow B$. Если $f(A) = B$, то f сюръективно.

Def 4.0.2. $f: A \rightarrow B$. Если $(x_1 \neq x_2 \in A) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$, то f инъективно.

Def 4.0.3. Биекция - f инъективно и сюръективно.

Def 4.0.4 (Композиция). $g(x), f(x)$.

$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$

$f: X \rightarrow Y$ $g: Y_0 \rightarrow Z, f(x) \in Y_0$

Def 4.0.5. id_x - тождественное отображение: $f(x) = x$

Def 4.0.6. $f: X \rightarrow Y, X_0 \subset X$

$f|_{X_0}$ - сужение отображения f на X_0

Раздел #5: Последовательности

Def 5.0.1. Последовательность — это отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Пример 5.0.2. $x_n = n^2 : x_n = \{1, 4, 9, \dots\}$

5.1. Предел последовательности и его свойства

Def 5.1.1. Предел последовательности — это такое число $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$$

Также говорят, что вне любого интервала, содержащего l , лежит лишь конечно число элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Пример 5.1.2. $x_n = \frac{1}{n}, \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right]$

Замечание 5.1.3. N необязательно наименьшее.

Def 5.1.4. Последовательность называется **сходящейся**, если она имеет конечный предел.

Def 5.1.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow x_n > E$

Def 5.1.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow x_n < E$

Def 5.1.7 (Беззнаковая бесконечность).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow |x_n| > E$$

Def 5.1.8. Последовательность называется бесконечно большой, если она стремится к бесконечности

Def 5.1.9. Последовательность называется бесконечно малой, если она стремится к нулю

Свойства пределов последовательности:

1. Последовательность не может иметь двух различных пределов.

Доказательство. Пусть $a \neq b$ — пределы, $a < b$. Возьмем $\varepsilon = \left(\frac{b-a}{3}\right)$. Тогда по определению предела вне ε -окрестности a лежит конечно число членов последовательности, и вне ε -окрестности b лежит конечно число членов последовательности \Rightarrow сама последовательности конечна !? ■

2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim\{x_n\} = a$. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдем номер N такой, что при всех $n \geq N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < 1$. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a|$$

Поэтому при всех $n \geq N$ выполняется неравенство

$$|x_n| < 1 + |a|$$

Положим $M = \max(1 + |a|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|)$. Тогда $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ■

Утверждение 5.1.10. Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство. N_1 - номер из определения $\lim x_n = a$

N_2 - номер из определения $\lim y_n = b$

$N = \max\{N_1; N_2\}$ ■

3. Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b, \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq y_n$. Тогда $a \leq b$ (предельный переход в неравенстве).

Доказательство. Пусть $a > b$. Тогда $\exists N$, начиная с которого в ε -окрестности b лежит бесконечное число членов y_n , а ε -окрестности a лежит бесконечное число членов x_n . Но тогда, если бы возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$, то $\exists y_n \in (b - \varepsilon; b + \varepsilon) : y_n < x_n, x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ ■

Следствие 5.1.11. 1. $\lim x_n = a, \forall n \rightarrow x_n \leq b \Rightarrow a \leq b$

2. $\lim y_n = b, \forall n \rightarrow y_n \geq a \Rightarrow a \leq b$

4.

Теорема 5.1.12 (Теорема о сжатой последовательности, теорема о двух милиционерах).

Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq z_n \leq y_n \wedge \lim x_n = \lim y_n = a$. Тогда $\lim z_n = a$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow x_n, y_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Т.к. $x_n \leq z_n \leq y_n \Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ ■

5.2. Монотонные последовательности

Def 5.2.1. Последовательность называется возрастающей, если $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$

Def 5.2.2. Последовательность называется убывающей, если $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$

Def 5.2.3. Последовательность называется монотонной, если она возрастающая или убывающая.

Теорема 5.2.4 (О монотонной ограниченной последовательности). 1. Возрастающая и ограниченная сверху последовательность сходится

2. Убывающая и ограниченная снизу последовательность сходится

Доказательство. Пусть множество $E = \{x_1, x_2, \dots\}, c = \sup E$

$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq c$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : x_N > c - \varepsilon$$

Т.к. x_n возрастает, то

$$\forall n > N \rightarrow x_n \geq x_N > c - \varepsilon \wedge x_n < c + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - c| < \varepsilon$$

■

Замечание 5.2.5. 1. Возрастающая и неограниченная сверху последовательность стремится к $+\infty$.

2. Убывающая и неограниченная снизу последовательность стремится к $-\infty$

Доказательство. $\forall E \rightarrow \exists N : x_N > E$ и $x_n \geq x_N \forall n \geq N$ ■

5.3. Теорема об арифметических действиях с пределами

Теорема 5.3.1 (Теорема об арифметических действиях с пределами). Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b, a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim |x_n| = |a|$
2. $\lim(x_n + y_n) = a + b$
3. $\lim(x_n - y_n) = a - b$
4. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
5. $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow b \neq 0 \wedge y_n \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Заметим, что

$$||x_n| - |a|| < |x_n - a| < \varepsilon$$

2. $|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$

3. Вместо y_n рассмотрим $-y_n$

4. $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \end{cases}, M : \forall n \rightarrow |y_n| < M$

$$|x_n \cdot y_n - ab| = |x_n y_n - ab - a \cdot y_n + a \cdot y_n| = |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)| \leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| < \varepsilon$$

5. Достаточно доказать, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|} \leq \frac{|y_n - b|}{|\frac{b}{2}||b|} < \frac{\frac{b^2 \varepsilon}{2}}{|\frac{b}{2}||b|} = \varepsilon$$

■

Утверждение 5.3.2. x_n - бесконечно малая, y_n - ограниченная. Тогда $\lim x_n \cdot y_n = 0$

Доказательство. $|x_n y_n| < |x_n| \cdot M < \varepsilon \cdot M, M : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |y_n| < M$

■

Утверждение 5.3.3. $\forall n \rightarrow x_n \neq 0$. Тогда x_n - бесконечно большая $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая

Доказательство. $|x_n| > E \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E}$

■

5.4. Арифметические действия с бесконечностями

1. $\lim x_n = +\infty, y_n$ ограничено снизу. Тогда $\lim(x_n + y_n) = +\infty$
2. $\lim x_n = -\infty, y_n$ ограничено сверху. Тогда $\lim(x_n + y_n) = -\infty$
3. $\lim x_n = +\infty, y_n \geq c > 0$. Тогда $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$
4. $\lim x_n = +\infty, y_n \leq c < 0$. Тогда $\lim(x_n \cdot y_n) = -\infty$
5. $\lim x_n = a \neq 0, \lim y_n = 0$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$
6. $\lim x_n = a \in \mathbb{R}, \lim y_n = \infty$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$
7. $\lim x_n = \infty, \lim y_n = b \in \mathbb{R} \wedge y_n \neq 0$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$

Замечание 5.4.1. $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}, \lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim(x_n * y_n) = a * b$

Запрещенные операции (неопределённости):

1. $\pm\infty + (\mp\infty)$
2. $\pm\infty - (\pm\infty)$
3. $0 \cdot \infty$
4. $\frac{0}{0}$
5. $\frac{\infty}{\infty}$

5.5. Неравенство Бернулли

Теорема 5.5.1 (Неравенство Бернулли). Пусть $x > -1, n \in \mathbb{N}$. Тогда $(1+x)^n \geq 1+nx$

Доказательство. База $n = 1 : (1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x$

Индукционный переход $n \rightarrow n+1$

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+n(x+1)+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

■

Раздел #6: Пределы последовательностей

6.1. Число e

Пусть $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} = \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n^{2n+2}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_{n-1} \geq y_n \Rightarrow y_n \text{ убывающая} \Rightarrow \exists \lim y_n \Rightarrow \exists \lim x_n, \text{ т.к. } x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \lim x_n = \lim y_n \end{aligned}$$

Def 6.1.1. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Теорема 6.1.2. $x_n > 0 \wedge \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $\exists \lim x_n = 0$

Доказательство. Пусть $q = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $q < 1$. $\exists N : \forall n \geq N \rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+q}{2}$. Тогда

$$0 < x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot x_N \leq x_N \cdot \left(\frac{1+q}{2}\right)^{n-N} \rightarrow 0$$

■

Следствие 6.1.3. $a > 1, k \in \mathbb{N}, \lim \frac{n^k}{a^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$$

Следствие 6.1.4. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

Следствие 6.1.5. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

6.2. Теорема Штольца

Теорема 6.2.1 (Теорема Штольца). $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$ $\lim y_n = +\infty \wedge \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. 1. $l = 0$. $\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}$. $\forall \varepsilon > 0 \exists m : \forall k \geq m \rightarrow |\varepsilon_k| < \varepsilon$

$$x_k - x_{k-1} = \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_k - y_{k-1}) \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_n - y_m) \leq \varepsilon \cdot y_n$$

Тогда $|x_n| \leq |x_m| + \varepsilon y_n$

$$0 \leq \left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leq \left| \frac{x_m}{y_n} \right| + \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$$

2. $l \neq 0, l \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\tilde{x}_n = x_n - l \cdot y_n$. Тогда

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - l \cdot y_n - x_{n-1} + l \cdot y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \rightarrow 0$$

Тогда по п. 1 $\frac{\tilde{x}_n}{y_n} \rightarrow 0$. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\tilde{x}_n + l \cdot y_n}{y_n} = \frac{\tilde{x}_n}{y_n} + l \rightarrow l$

3. $l = +\infty$. $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty$. Начиная с некоторого номера > 1

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} \Leftrightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \rightarrow +\infty$$

Тогда x_n возрастает и стремится к $+\infty$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$$

4. $l \rightarrow -\infty$. Следует рассмотреть $\{-x_n\}$

■

Теорема 6.2.2. $y_1 > y_2 > \dots > 0 \wedge \lim y_n = \lim x_n = 0$. Если $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. Докажем для $l = 0$.

$$\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}, \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \rightarrow |\varepsilon_k| < \varepsilon$$

Пусть $n > m \geq N$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| \cdot |y_{k-1} - y_k| \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon (y_m - y_n) \Leftrightarrow |x_m| \leq \varepsilon \cdot y_m \Rightarrow \frac{|x_m|}{y_m} < \varepsilon$$

Доказали, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq N \rightarrow \left| \frac{x_m}{y_m} \right| < \varepsilon$

Для $l \neq 0$ доказывается аналогично предыдущей теореме.

■

6.3. Подпоследовательности

Def 6.3.1. Пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Подпоследовательностью этой последовательности называется $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Теорема 6.3.2 (О стягивающихся отрезках). $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots, \lim(b_n - a_n) = 0$. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ состоит из одной точки. Если эта точка c , то $\lim a_n = \lim b_n = c$

Доказательство. $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ (по лемме о вложенных отрезках). Пусть $c < d$ принадлежит этому пересечению.

$$0 < d - c \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leq c - a_n \leq 0 \Rightarrow \text{точка единственна}$$

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \Rightarrow 0 \leq c - a_n \leq 0 \Rightarrow a_n \rightarrow c$$

$$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \Rightarrow b_n \rightarrow c$$

■

Теорема 6.3.3 (Теорема Больцано-Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Возьмем $a_1 \leq b_1$ так, чтобы вся последовательность лежала между ними. $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Поделим отрезок пополам и возьмем ту половину, в которой лежит бесконечное число членов последовательности. Обозначим её $[a_2, b_2]$. Теперь возьмем $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$. $[a_3, b_3]$ - ту половину $[a_2, b_2]$, в которой бесконечное число членов последовательности и т.д.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \text{ и длина } [a_k, b_k] = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}, \lim a_n = \lim b_n = c$$

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - подпоследовательность $\{x_n\}$ и

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

■

Теорема 6.3.4. 1. Если последовательность неограничена сверху, то из неё можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$

2. Если неограничена снизу, то можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$

Доказательство.

$$\exists n_1 : x_{n_1} > 1$$

$$\exists n_2 : x_{n_2} > 2 \wedge n_2 > n_1$$

$$\exists n_k : x_{n_k} > k \wedge n_k > n_{k-1}$$

■

Следствие 6.3.5. Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность имеющую предел (конечный или бесконечный).

Def 6.3.6. Частичные пределы последовательности $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ – пределы её подпоследовательностей.

Замечание 6.3.7. $\lim x_n = a, \{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow a$

Def 6.3.8. Последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Свойства:

1. Фундаментальная последовательность ограничена
2. Сходящаяся последовательность фундаментальна

Доказательство. $a = \lim x_n$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

■

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то эта последовательность сходится.

Доказательство. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a, \forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall k \geq K \rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$M = \max\{n_K, N\}$. Тогда $\forall n \geq M \rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon$

■

Теорема 6.3.9 (Критерий Коши сходимости последовательности). Последовательность сходится \Leftrightarrow она фундаментальна

Доказательство. " \Rightarrow ". Свойство 2.

" \Leftarrow ". Фундаментальна \Rightarrow ограничена (свойство 1) $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность (теорема Больцано-Вейерштрасса) \Rightarrow сходится

■

Def 6.3.10. $\{x_n\}$ – ограничена сверху.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$ – верхний предел.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$ – нижний предел.

Теорема 6.3.11. Пусть $y_n = \inf_{k \geq n} x_k, z_n = \sup_{k \geq n} x_k$. Тогда

$$\exists \lim x_n, \overline{\lim} x_n \wedge \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

Доказательство. 1. Если неограничена сверху, то $\overline{\lim} x_n = +\infty$

2. Пусть $\{x_n\}$ – ограничена. $\forall n \rightarrow x_n \leq M$

$$z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq \dots \wedge z_n \leq M \Rightarrow \exists \lim z_n$$

3. Аналогично для y_n

4. $\forall n \rightarrow y_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

■

Теорема 6.3.12. 1. $\overline{\lim} x_n$ – наибольший частичный предел $\{x_n\}$

2. $\underline{\lim} x_n$ – наименьший частичный предел $\{x_n\}$

3. $\exists \lim x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, $b = \overline{\lim} x_n$. Построим $\{x_{n_k}\}$:

$$x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \quad z_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\} > b - \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x_{n_1} > b - \frac{1}{2}$$

$$z_{n_1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\} > b - \frac{1}{3} \Rightarrow \exists x_{n_2} > b - \frac{1}{3}, n_2 > n_1$$

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow b$$

Рассмотрим $x_{m_k} \rightarrow c$. Тогда $x_{m_k} \leq z_{m_k} \Rightarrow c \leq b$

Если $\{x_n\}$ неограничена

- сверху: $\exists \overline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \rightarrow +\infty$
- снизу: а) $\exists \overline{\lim} x_n = b \in \mathbb{R}$ – аналогично п.1. б) $\exists \overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$

2. Аналогично

3. " \Rightarrow ". $\exists \lim x_n = l \Rightarrow \forall \{x_{n_k}\} \rightarrow \lim x_{n_k} = l \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$

" \Leftarrow ". $y_n \leq x_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \lim x_n \leq \overline{\lim} x_n \Rightarrow \exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

■

Теорема 6.3.13 (характеристические свойства $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$).

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$b = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N : x_n > a - \varepsilon \end{cases}$$

Раздел #7: Ряды

7.1. Ряды

Def 7.1.1. Дана $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$

Если $S_n \rightarrow S \in \mathbb{R}$, то S называют суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ряд сходится к S).

Если S_n не имеет предела в \mathbb{R} , то ряд называют расходящимся.

Пример 7.1.2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$, т.е.

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1$$

Пример 7.1.3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = S$$

Тогда, если $S \in \mathbb{R}$, то $\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$. Значит

$$\frac{S}{2} = S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots > \frac{S}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Данный ряд называется **гармоническим**

Замечание 7.1.4. S_n частичные суммы ряда

Пример 7.1.5. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0 \Rightarrow S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \Rightarrow \text{не существует } \lim S_n$$

Теорема 7.1.6 (Необходимое условие сходимости ряда). Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

Доказательство.

$$\exists \lim S_n = S, a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

■

Пример 7.1.7. Гармонический ряд.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Тогда $H_{2n} \geq \frac{1}{2}(n+1) \rightarrow +\infty \Rightarrow H_n \rightarrow +\infty$ (т.к. H_n возрастает)

Пример 7.1.8. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

7.2. Свойства рядов

1. Ряд не может иметь двух различных сумм.
2. Если ряд сходится к S , то к S сходится и ряд, полученный из данного любой расстановкой скобок.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow (a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6)$$

Пусть $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3, b_3 = a_4 + a_5 + a_6$ и т.д. Заметим, что $\{S_n^b\}$ является подпоследовательностью S_n^a .

Замечание 7.2.1. "раскрывать скобки" вообще говоря нельзя.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 1) = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

Но если раскрыть скобки, то получится пример [7.1.5](#)

3. Добавление или отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость (но может повлиять на сумму)

Раздел #8: Функции

8.1. Свойства пределов функций

Теорема 8.1.1 (Единственность предела функции). Пусть $D \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка D , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Если A и $B \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \Rightarrow A = B$

Доказательство. Возьмем $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$. По Гейне $f(x_n) \rightarrow A \wedge f(x_n) \rightarrow B$. Но $\{x_n\}$ имеет единственный предел $\Rightarrow A = B$. ■

Замечание 8.1.2. Беззнаковая бесконечность: $A = +\infty, B = -\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$

Теорема 8.1.3 (Локальная ограниченность функции, имеющей предел). $D \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка D , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$. Тогда $\exists V(a) : f(x)$ ограничена в $D \cap V(a)$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$. $\exists \dot{V}(a) : |f(x) - A| < 1 \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D$. Тогда $|f(x)| < |A| + 1$. Если $a \in D$, то $|f(x)| < \max\{|A| + 1, f(a)\}$ ■

Теорема 8.1.4 (Стабилизация знака функции, имеющей предел). $D \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка D , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Тогда $\exists V(a)$ такая, что знаки $f(x)$ и B совпадают на $\dot{V}(a) \cap D$

Доказательство. Пусть $B > 0$. Докажем от противного, т.е.

$$\forall n \ \exists x_n \in \dot{V}_{\frac{1}{n}}(a) \cap D \wedge f(x_n) \leq 0$$

Тогда $x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow B$, но $f(x_n) \leq 0 \Rightarrow B \leq 0$. ■

Теорема 8.1.5 (Арифметические действия над функциями, имеющими предел). $D \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка D , $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \xrightarrow{x \rightarrow a} A, g \xrightarrow{x \rightarrow a} B$. Тогда

1. $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$
2. $f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$
3. $f(x) - g(x) \rightarrow A - B$
4. $|f(x)| \rightarrow |A|$
5. Если $B \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\} : x_n \rightarrow a, x_n \neq a, x_n \in D$. Тогда $f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B$. Достаточно применить теорему об арифметических действиях с пределами последовательностей. ■

Замечание 8.1.6. Пункт 5) т.к. $B \neq 0$, то $\exists V(a) : \text{sign}(g(x)) = \text{sign } B$ в $V(a)$. Поэтому излишне требовать $g(x) \neq 0$

Теорема 8.1.7 (Предел композиции функций). $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subset E$

1. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in \overline{\mathbb{R}}$
2. A – предельная точка множества E и $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} B \in \overline{\mathbb{R}}$
3. $\exists V(a) : f(x) \neq A \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D$

Тогда $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$

Доказательство. Возьмем $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n \neq a$.

Обозначим $y_n = f(x_n) \Rightarrow y_n \in E, y_n \rightarrow A$. По 3) начиная с некоторого номера $x_n \in V(a)$, а значит $y_n \neq A$. Тогда $g(y_n) \rightarrow B$, т.е. $g(f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$. Значит $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$ ■

Теорема 8.1.8 (Предельный переход в неравенстве). $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D . $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in \overline{\mathbb{R}}, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \in \overline{\mathbb{R}}, f(x) \leq g(x) \ \forall x \in D \setminus \{a\}$$

Тогда $A \leq B$

Доказательство.

$$\{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B = A \leq B$$

■

Теорема 8.1.9 (о сжатой функции). $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D , $f, h, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ и

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in D \setminus \{a\} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, A \in \mathbb{R}$$

Тогда $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$

Доказательство. $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, h(x_n) \rightarrow A$

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \Rightarrow A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \leq A \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A \Rightarrow g(x) \rightarrow A$$

■

Замечание 8.1.10. $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in D \setminus \{a\}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Rightarrow g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$

Def 8.1.11. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a$ – предельная точка $D_1 \subset D$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f|_{D_1}(x)$ – предел f в точке a по множеству D_1 .

Def 8.1.12. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D_1 = D \cap (-\infty, a), a$ – предельная точка D_1 . Предел f в точке a по множеству D_1 называется левосторонним пределом в точке a .

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x), \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

Def 8.1.13. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D_1 = D \cap (a, +\infty), a$ – предельная точка D_1 . Правосторонний предел – предел f в точке a по множеству D_1

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

Def 8.1.14. Левосторонний предел на разных "языках".

- $\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
- $\forall V(A) \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \rightarrow f(x) \in V(A)$
- $\forall \{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n < a \rightarrow f(x_n) \rightarrow A$

Замечание 8.1.15. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ – предельная точка для $D_1 = D \cap (-\infty, a), D_2 = D \cap (a, +\infty)$
Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \wedge \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

Доказательство. " \Rightarrow ". Очевидно.

" \Leftarrow ". Возьмем δ_1 из определения левостороннего предела, δ_2 из определения правостороннего предела. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in D : |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

■

Теорема 8.1.16 (Предел монотонной функции). $D \in \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in (-\infty, +\infty]$
 $D_1 = D \cap (-\infty, a), a$ – предельная точка D .

1. Если f возрастает и ограничена сверху на D_1 , то $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Если f убывает и ограничена снизу на D_1 , то $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. Пусть $A = \sup_{x \in D_1} f(x)$. Тогда $A \in \mathbb{R}$, т.к. f ограничена сверху. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in D_1 : f(x_0) > A - \varepsilon$$

Тогда $\forall x \in D_1 : x > x_0$

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq A < A + \varepsilon$$

Пусть $\delta = a - x_0$. Тогда $|f(x) - A| < \varepsilon \forall x : 0 < a - x < \delta$

Если $a = +\infty \Rightarrow \Delta = \max\{x_0, 1\}$

■

Замечание 8.1.17. f возрастает и не ограничена сверху $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty$

Теорема 8.1.18 (Критерий Больцано-Коши для функций). $D \subset \mathbb{R}$. Тогда существование конечного $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ равносильно утверждению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V(a) : \forall x_1, x_2 \in \dot{V}(a) \cap D \rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Доказательство. " \Rightarrow ". $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ Тогда $\exists V(a) : |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $x_1, x_2 \in D \cap \dot{V}(a)$, то

$$|f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$$

С другой стороны $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$

" \Leftarrow ". $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$ и докажем, что $\exists \lim f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Пусть $\varepsilon > 0$.

$$\exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n \in \dot{V}(a)$$

$$\forall n, l \geq N \rightarrow |f(x_n) - f(x_l)| < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\} - \text{фундаментальна}$$

Значит $\{f(x_n)\}$ сходится. ■

8.2. Непрерывные функции

Def 8.2.1. $D \subset \mathbb{R}, a \in D$. Функция f называется непрерывной в точке a , если выполнено одно из следующих условий:

1. Предел f в точке a существует и равен $f(a)$ (только если a – предельная точка).
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
3. $\forall V(f(a)) \exists V(a) : f(V(a) \cap D) \subset V(f(a))$
4. $\forall \{x_n\} : x_n \rightarrow a, x_n \in D \rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$
5. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (если a – предельная точка)

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(x) - f(a) \Rightarrow \Delta f \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

Замечание 8.2.2. Если a – изолированная точка D , то

$$f(V(a) \cap D) = \{f(a)\} \subset V(f(a))$$

Т.е. любая f непрерывна в точке a

Def 8.2.3. $D \subset \mathbb{R}, a \in D, f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

a называется точкой разрыва f , если f не непрерывна в точке a

Def 8.2.4. $D_1 = D \cap (-\infty, a], D_2 = D \cap [a, +\infty)$.

Если сужение $f|_{D_1}$ непрерывно в точке a , то f непрерывна в точке a **слева**.

Если сужение $f|_{D_2}$ непрерывно в точке a , то f непрерывна в точке a **справа**

Def 8.2.5. Если $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow a-} f(x), f(a)$ – конечные, но не все равны, то a – точка разрыва I рода.

Def 8.2.6. Если хотя бы один предел не существует или бесконечен – II рода.

Def 8.2.7. Если в точке a разрыв, но мы можем доопределить или переопределить f в точке a до непрерывности, то a – точка устранимого разрыва.

Раздел #9: Пределы функций

9.1. ε -окрестности

Def 9.1.1. ε -окрестность точки $a - V_\varepsilon(a) : (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
 проколота ε -окрестность $a - \dot{V}_\varepsilon : (a - \varepsilon, a) \cup (a + \varepsilon)$

Def 9.1.2. $D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. Точка a называется точкой сгущения D , если в любой окрестности a найдется точка из D , отличная от a

$$\forall \dot{V}(a) \exists x \in D : x \in \dot{V}(a) \wedge x \neq a$$

Пример 9.1.3. $D = [1, 2)$. Точки сгущения: $[1, 2]$

Замечание 9.1.4. Точка сгущения может принадлежать множеству, а может и не принадлежать.

Замечание 9.1.5. Если a – точка сгущения, тогда в $\forall \dot{V}(a)$ бесконечно много точек из D .

Замечание 9.1.6. Точки сгущения называют предельными точками множества.

a – точка сгущения $\Leftrightarrow \exists \{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$

Доказательство. " \Rightarrow ". $\varepsilon = \frac{1}{k} \Rightarrow |x_k - a| < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 \leq \lim |x_k - a| < 0 \Rightarrow \exists \lim x_k = 0$

" \Leftarrow ". В $\forall V(a)$ лежит бесконечно много точек $\{x_n\}, x_n \neq a \Rightarrow a$ – точка сгущения. ■

Def 9.1.7. $a \in D$, но a – не предельная точка. Тогда a называется изолированной точкой множества D

Замечание 9.1.8. $+\infty$ может быть предельной точкой множества

$$\dot{V}(+\infty) = (E, +\infty)$$

9.2. Предел функции

Def 9.2.1. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ – предельная точка D .

Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом f в точке a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ или } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$$

если выполняется одно из следующих условий:

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (Определение по Коши, определение на языке δ, ε)
2. $\forall V(A) \exists \dot{V}(a) : f(\dot{V}(a) \cap D) \subset V(A)$ (Определение на языке окрестностей)
3. $\forall \{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A$ (Определение по Гейне, на языке последовательностей)

Теорема 9.2.2 (Эквивалентность определения по Коши и по Гейне). Определения 1) и 3) эквивалентны.

Доказательство. 1) \Rightarrow 3). Рассмотрим какую-то $\{x_n\} : x_n \neq a, x_n \in D, x_n \rightarrow a$ (она существует по доказанному). Нужно доказать, что $f(x_n) \rightarrow A$.

Пусть $x_n \rightarrow a$, то

$$\forall \delta > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

3) \Rightarrow 1). Пусть это не так, т.е. 1) не выполнено

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in D, x \neq a, |x - a| < \delta : |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$.

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, \text{ но } |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$$

■

Замечание 9.2.3. в $\overline{\mathbb{R}}$

1.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{5\}, |x - 5| < \delta \rightarrow f(x) > E$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \Delta : \forall x \in D, x < \Delta \rightarrow |f(x) - 2| < E$$

Замечание 9.2.4. В определении по Гейне есть " $\forall \{x_n\}$ ". Если x_n и y_n подходят под условия, то $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$

Доказательство. Возьмем $z_n : z_1 = x_1, z_2 = y_1, z_3 = x_2, z_4 = y_2$ и т.д. $\{z_n\}$ подходит под определение $\Rightarrow \exists \lim f(z_n)$ ■

Замечание 9.2.5. В определении предела функции не участвует значения функции в точке a .

Замечание 9.2.6. Последовательность – частный случай функции.

Раздел #10: Непрерывность

Def 10.0.1. Функция называется непрерывной на множестве D , если она непрерывна в каждой точке D .

$C(D)$ – множество функций, непрерывных на D . $\langle a, b \rangle$ – промежуток (неважно, включаются концы или нет).

Теорема 10.0.2 (об арифметических действиях над непрерывными функциями). $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}$ – непрерывны в точке $x_0 \in D$. Тогда $f + g, f - g, |f|, f \cdot g$ также непрерывны в точке x_0 . Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ тоже непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. • x_0 – изолированная точка D – очевидно.

- x_0 – предельная точка. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ и $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g(x_0)$. Тогда $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0) + g(x_0)$. Далее по теореме об арифметических действиях с пределами функций, имеющих предел.

■

Замечание 10.0.3. Если f непрерывна в точке $x_0 \in D$ и $f(x_0) \neq 0$, то найдется $V(x_0)$, что знак f в $V(x_0) \cap D$ совпадает со знаком $f(x_0)$

Теорема 10.0.4 (О непрерывности композиции). $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subset E$. Пусть f непрерывна в точке $x_0 \in D$ и g непрерывна в точке $f(x_0)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Пусть $x_n \in D, x_n \rightarrow x_0$. Обозначим $y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$. Т.к. f непрерывна в точке x_0 , то $y_n \rightarrow y_0$. Тогда $g(y_n) \rightarrow g(y_0)$, т.к. g непрерывна в точке y_0 .

$$g(y_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$$

■

Теорема 10.0.5 (Первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция ограничена.

Доказательство. $f \in C[a, b]$. Пусть f не ограничена на $[a, b]$, т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$$

x_n – ограничена $\Rightarrow \exists \{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$. Т.к. f непрерывна, то $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c) \Rightarrow \{f(x_{n_k})\}$ ограничена, т.к. сходится, но

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Получили противоречие

■

Замечание 10.0.6. Если возьмем интервал (a, b) , то теорема не выполняется.

Теорема 10.0.7 (Вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

Доказательство. $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. По первой теореме Вейерштрасса f ограничена на $[a, b] \Rightarrow M \in \mathbb{R}$. Пусть f не достигает M . Тогда $f(x) < M$ на $[a, b]$. Рассмотрим $\varphi(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ — непрерывна на $[a, b]$. Значит она ограничена на $[a, b]$. $\exists m : \varphi(x) \leq m \quad \forall x \in [a, b]$

$$\frac{1}{M-f(x)} \leq m \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leq M-f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{m}$$

Значит M — не супремум — противоречие ■

Теорема 10.0.8 (Больцано-Коши о промежуточном значении). f — непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\forall C$, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in (a, b) : f(c) = C$

Доказательство. • Пусть $f(a)$ и $f(b)$ — разных знаков. Тогда докажем, что $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$. Пусть $f(a) < 0 < f(b)$. Рассмотрим точку $\frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то теорема доказана. Если $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, то будем далее рассматривать отрезок $[a, \frac{a+b}{2}]$, иначе будем рассматривать отрезок $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Получим $[a_1, b_1] : f(a_1) < 0 < f(b_1)$ и т.д. $[a_n, b_n]$ — стягивающиеся отрезки $\Rightarrow \exists! c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n], a_n, b_n \rightarrow c$

$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \Leftrightarrow f(c) \leq 0 \leq f(c) \Rightarrow f(c) = 0$$

- Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - C, \varphi \in C[a, b], \varphi(a)$ и $\varphi(b)$ разных знаков. Тогда $\exists c \in (a, b) : \varphi(c) = 0 \Rightarrow f(c) = C$ ■

Следствие 10.0.9. Если непрерывная на отрезке функция принимает какие-то два значения, то она принимает и все значения между ними.

Теорема 10.0.10 (О сохранении промежутка). Множество значений непрерывной на промежутке функции есть промежуток.

Доказательство. Пусть $f \in C\langle a, b \rangle$

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$$

$m, M \in \overline{\mathbb{R}}, E = f(\langle a, b \rangle)$. Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$. f принимает все значения между $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если E не промежуток, то $\exists y \in E : f(x) \neq y \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$, но $\exists y_1 < y < y_2 : \exists x_1 : f(x_1) = y_1, \exists x_2 : f(x_2) = y_2$ ■

Теорема 10.0.11 (О разрывах и непрерывности монотонной функции). $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, монотонна. Тогда

1. f не может иметь разрывов II рода
2. f — непрерывная \Leftrightarrow её множество значения — промежуток

Доказательство. 1. Пусть f возрастает. $x \in (a, b), x_1 \in \langle a, x_0 \rangle$. Тогда $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_1, x_0) \Rightarrow f$ возрастает и ограничена сверху на $(x_1, x_0) \Rightarrow \exists$ конечный $f(x_0-)$. Кроме того, по используя предельный переход:

$$f(x_1) \leq f(x_0-) \leq f(x_0)$$

Повторим для $f(x_0+) \Rightarrow$ нет разрывов II рода.

2. " \Rightarrow ". Доказано

" \Leftarrow ". $f(\langle a, b \rangle)$ – промежуток. Докажем непрерывность слева в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Пусть $f(x_0-) < f(x_0)$. Возьмем $y \in (f(x_0-), f(x_0))$. Тогда если $a < x_1 < x_0$, то $y \in [f(x_1), f(x_0)]$. Значит y – значение функции. С другой стороны $\forall x \in \langle a, x_0 \rangle \rightarrow f(x) \leq f(x_0-) < y, \forall x \in [x_0, b) \rightarrow f(x) \geq f(x_0) > y \Rightarrow f$ не принимает значение y – противоречие. Аналогично для $f(x_0+)$ ■

Теорема 10.0.12 (Существование и непрерывность обратной функции). $f \in C\langle a, b \rangle$, f строго монотонна

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$$

Тогда

1. f обратима, $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ – биекция.
2. f^{-1} строго монотонна (одноименно с f)
3. f^{-1} непрерывна на $\langle m, M \rangle$

Доказательство. Пусть f возрастает.

1. $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle, x_1 < x_2$. Тогда $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ обратима.
 $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$. $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$. Если $y_1 \neq y_2 \in \langle m, M \rangle \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$
2. $y_1 < y_2 \in \langle m, M \rangle \Rightarrow y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$. $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2), x_1 < x_2$ из-за возрастания f
3. f^{-1} строго возрастает на $\langle m, M \rangle$, множество значений функции f^{-1} – промежуток $\Rightarrow f^{-1}$ непрерывна по предыдущей теореме. ■

Раздел #11: Элементарные функции

11.1. Постоянная

$f(x) = c, x \mapsto c$, непрерывна на \mathbb{R}

11.2. Степенная функция

$$e_\alpha(x) = x^\alpha$$

При $\alpha = 1$ $e_1(x) = x$ — непрерывна на \mathbb{R}

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$e_\alpha(x) = x^n$$

Следовательно $e_n(x)$ непрерывна на \mathbb{R} как произведение непрерывных.

При $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как частное непрерывных.

При $\alpha = 0$ полагаем $x^0 = 1$ при всех $x \neq 0$. Можно доопределить до непрерывности ($0^0 = 1$)

Если n нечётно, то e_n строго возрастает на \mathbb{R} , $\sup_{x \in \mathbb{R}} e_n(x) = +\infty$, $\inf_{x \in \mathbb{R}} e_n(x) = -\infty$. По теореме о сохранении промежутка $e_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Если n чётно, то функция e_n строго возрастает на \mathbb{R}_+ , $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} e_n(x) = +\infty$, $\min_{x \in \mathbb{R}_+} e_n(x) = 0$, $e_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует и непрерывна функция

$$e_{\frac{1}{n}} = \begin{cases} e_n^{-1}, n \not\equiv 2 \\ (e_n|_{\mathbb{R}_+})^{-1}, n \equiv 2 \end{cases}$$

Это $\sqrt[n]{x}$, строго возрастает и непрерывна на \mathbb{R}_+

Теперь определим x^α при рациональном $\alpha = r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \frac{p}{q}$ несократима.

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}} (e_r = e_{\frac{1}{q}} \circ e_p)$$

Таким образом, x^r определено следующим образом.

$$\begin{aligned} x &> 0, r \text{ любое,} \\ x &= 0, r \geq 0, \\ x &< 0, q \not\equiv 2 \end{aligned}$$

e_r непрерывна на своей области определения, строго возрастает на $[0, +\infty)$ при $r > 0$, строго убывает на $(0, +\infty)$ при $r < 0$

11.3. Показательная функция

$$0^x = 0 \quad \forall x > 0$$

Пусть $a > 0$. Пока что a^x определена только для $x \in \mathbb{Q}$. Обозначим эту функцию $a^x|_{\mathbb{Q}}$. Её свойства:

1. $r < s \Rightarrow a^r < a^s, a > 1$ и $a^r > a^s, 0 < a < 1$
2. $a^{r+s} = a^r a^s$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $(ab)^r = a^r b^r$

Def 11.3.1. Пусть $a > 0, x \in \mathbb{R}$ Положим

$$a^x = \lim_{r \rightarrow x} a^r|_{\mathbb{Q}}$$

Lm 11.3.2. Пусть $a > 0, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \rightarrow 0$. Тогда $a^{r_n} \rightarrow 1$.

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидно, т.к. $a^{r_n} = 1 \quad \forall n$.

Пусть $a > 1$. Докажем лемму в частном случае $r_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $a^{\frac{1}{n}} > 1$, имеем $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n, \alpha_n > 0$. Тогда по неравенству Бернулли

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$$

Откуда $0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n} \Rightarrow \alpha_n \rightarrow 0 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.

Далее, по доказанному

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

Пусть теперь $\{r_n\}$ – произвольная последовательность из условия леммы. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists N_0$:

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Поскольку $r_n \rightarrow 0$, найдется такой номер N , что $\forall n > N \rightarrow -\frac{1}{N_0} < r_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Значит $a^{r_n} \rightarrow 1$

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, и по доказанному

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \rightarrow 1$$

■

Lm 11.3.3. Пусть $a > 0, x \in \mathbb{R}, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \rightarrow x$. Тогда существует конечный предел последовательности $\{a^{r_n}\}$

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидна.

Пусть $a > 1$. Возьмем какую-либо возрастающую последовательность $\{s_n\}$ рациональных чисел, стремящуюся к x . Например

$$s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

Тогда $x - \frac{1}{10^n} < s_n \leq x \Rightarrow s_n \rightarrow x$. Докажем, что последовательность $\{s_n\}$ возрастает. Пусть $A = 10^n x$. Тогда $s_n \leq s_{n+1} \Leftrightarrow 10[A] \leq [10A]$, но $10[A]$ – целое число, не превосходящее $10A$. $\{a^{s_n}\}$ возрастает и ограничена сверху числом $a^{[x]+1}$. Значит $\{a^{s_n}\}$ сходится к некоторому пределу L . Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \rightarrow L$$

Потому что $a^{r_n - s_n} \rightarrow 1$ по предыдущей лемме.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и по доказанному $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \rightarrow L, L > 0$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \rightarrow \frac{1}{L}$$

■

11.3.1. Свойства показательной функции

1. a^x строго возрастает на \mathbb{R} при $a > 1$ и строго убывает на \mathbb{R} при $a \in (0, 1)$

Доказательство. $a > 1$. Пусть $x < y$. Докажем, что $a^x < a^y$. Возьмем два числа $\bar{r}, \bar{\bar{r}} \in \mathbb{Q}$ между x и y . Возьмем $\{\bar{r}_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{\bar{r}}_n\}_{n=1}^\infty$: последовательности из $\mathbb{Q} : \bar{r}_n \rightarrow x, \bar{\bar{r}}_n \rightarrow y$.

По доказанному $a^{\bar{r}_n} < a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} < a^{\bar{\bar{r}}_n}$

$$\Rightarrow a^x \leq a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} \leq a^y \Rightarrow a^x < a^y$$

$a \in (0, 1)$. Рассмотрим $b = \frac{1}{a} > 1$.

■

2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

Доказательство. $\{\bar{r}_n\}, \{\bar{\bar{r}}_n\}$ как в 1)

$$a^{\bar{r}_n + \bar{\bar{r}}_n} = a^{\bar{r}_n} \cdot a^{\bar{\bar{r}}_n} \Rightarrow a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

■

3. $a^{-x} = a^0 \cdot a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

4. a^x непрерывна на \mathbb{R}

Доказательство. $a > 1, \{x_n\} : x_n \rightarrow 0$. Докажем непрерывность в нуле.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n| < \varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{n_0} < x_n < \frac{1}{n_0}, n_0 \in \mathbb{N}$$

Тогда $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{x_n} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$ ($a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow \exists n_0 : |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N' : \forall n \geq N \rightarrow |a^{x_n} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow a^{x_n} \rightarrow 1$$

Докажем непрерывность в точке $x_0 \neq 0$.

Рассмотрим $a^{x_0 + x_n} - a^{x_n} = a^{x_0}(a^{x_n} - 1) \rightarrow 0$

■

5. $(ab)^x = a^x b^x$

Доказательство. $\{r_n\}$ из \mathbb{Q} , $r_n \rightarrow x$. Тогда

$$(ab)^{r_n} = a^{r_n} \cdot b^{r_n} \Rightarrow (ab)^x = a^x b^x$$

■

6. $(a^x)^y = a^{xy}$

Доказательство. $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, \{x_n\}, \{y_n\}$ из \mathbb{Q} . Тогда по непрерывности показательной и степенной функций

$$(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n \cdot y_m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (a^x)^{y_m} = a^{x \cdot y_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

■

7. a^x – биекция из \mathbb{R} на $(0, +\infty)$

Доказательство. $a > 1$. Тогда a^x строго возрастает на \mathbb{R} .

$$a^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

■

11.4. Логарифм

Def 11.4.1. Т.к. $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ – биекция, то $\exists f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\log_a x : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Из теоремы об обратной функции $\log_a x$ монотонна и непрерывна.

11.4.1. Свойства логарифма

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x, y > 0$

Доказательство.

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y = a^{\log_a(xy)}$$

■

2. $\log_a x^b = b \log_a x$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x > 0$, $b \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$$a^{b \log_a x} = (a^{\log_a x})^b = x^b = a^{\log_a x^b}$$

■

3. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x > 0$

Доказательство.

$$b^{\log_a x \cdot \log_b a} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x}$$

■

Def 11.4.2. $\ln x$ – натуральный логарифм ($\log_e x$)

Вернемся к степенной функции:

Def 11.4.3. $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$. $0^\alpha = 0$. Покажем непрерывность справа в точке 0.

$$x_n \rightarrow 0, x_n > 0$$

Пусть $y_n = \ln x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$. Значит $x_n^\alpha = e^{\alpha \ln x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

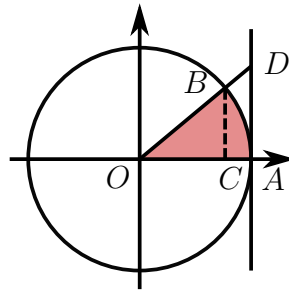
$$x^\alpha : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \alpha > 0 - \text{биекция}$$

$$x^\alpha : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), \alpha < 0 - \text{биекция}$$

11.5. Тригонометрические функции

Утверждение 11.5.1. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Тогда $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Доказательство. Нужно доказать: $BC < \widehat{AB} < AD$
 $\triangle OBA \subset \nabla OAB \subset \triangle OAD \Leftrightarrow S_{\triangle OBA} < S_{\nabla OAB} < S_{\triangle OAD}$



$$S_{\triangle OBA} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |BC| = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{\nabla OAB} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot |OA|^2 = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAD} = |OA| \cdot |AD| \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Отсюда

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

■

Следствие 11.5.2. $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (причем равенство достигается только в 0)
 При $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ доказано.

$$x \geq \frac{\pi}{2} : |\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$$

$$x \leq -\frac{\pi}{2} : |\sin x| = |\sin(-x)| < |-x| = x$$

Свойства:

1. $\sin x$ – непрерывная на \mathbb{R} функция.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

Доказательство.

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0| \rightarrow 0$$

■

2. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ – непрерывна.

3. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

4. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ – непрерывны на области определения.

11.5.1. Обратные тригонометрические функции

$\sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ не обратимая.

$\sin x|_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ – биекция

Def 11.5.3. $\arcsin x = \left(\sin x|_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}$. Монотонно возрастает и непрерывна

Def 11.5.4. $\arccos x = \left(\cos x|_{x \in [0, \pi]} \right)^{-1}$. Убывает, непрерывна

Def 11.5.5. $\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg} x|_{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$. Непрерывна, строго возрастает.

Def 11.5.6. $\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg} x|_{x \in (0, \pi)} \right)^{-1}$

Замечание 11.5.7. Для обратимости строгой монотонной функции непрерывность не нужна.

Раздел #12: Замечательные пределы

Def 12.0.1. *Первый замечательный предел:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ на $(0, \frac{\pi}{2})$, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$
 $\cos x, \frac{\sin x}{x}, 1$ – четные функции, значит верно и для $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Перейдем к пределу при $x \rightarrow 0$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

■

Следствие 12.0.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Доказательство. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$$\frac{1 - \cos x}{2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$$

■

Следствие 12.0.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

Доказательство.

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

■

Следствие 12.0.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

Доказательство. $\frac{\sin x}{x} = \frac{y}{\arcsin y}$, $y = \sin x$ в окрестности $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow \arcsin y = x$. $\arcsin x$ непрерывна в нуле, в 0 равен 0. $\frac{\sin x}{x}$ непрерывна в $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad - \text{непрерывна на } \mathbb{R}$$

\Rightarrow по теореме о непрерывности композиции $\frac{y}{\arcsin y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$

■

Следствие 12.0.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Доказательство. Аналогично предыдущему следствию.

■

Def 12.0.6. *Второй замечательный предел*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \end{aligned}$$

Доказательство. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ задана на $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$. Пусть $x_n \rightarrow +\infty$. Нужно доказать, что $f(x_n) \rightarrow e$.

1. Рассмотрим $\{x_n\}$ из \mathbb{N} . $f(x_n) \rightarrow e$ как подпоследовательность.
2. $\{x_n\}$ из \mathbb{R} . Начиная с некоторого номера $x_n \geq 1$.

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n] + 1}$$

Очевидно, $[x_n] \leq x_n \leq [x_n] + 1$. Тогда

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{[x_n] + 1}} \cdot f([x_n] + 1) \leq f(x_n) \leq f([x_n]) \cdot \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)$$

$\{[x_n]\}_{n=1}^\infty$ — последовательность из \mathbb{N} . Выполним предельный переход в неравенстве.

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq e \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = e$$

■

Def 12.0.7. Третий замечательный предел (обычно не нумеруется).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, a > 0, a \neq 1$$

Доказательство. $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

■

Def 12.0.8. Четвертый замечательный предел (обычно не нумеруется)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Доказательство. $\alpha = 0$ тривиально.

$\alpha \neq 0$. $x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0, |x_n| < 1 \ \forall n$. Обозначим

$$y_n = (1+x_n)^\alpha - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, y_n \neq 0 \Rightarrow \alpha \ln(1+x_n) = \ln(1+y_n)$$

Тогда

$$\frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x_n)}{x_n} \rightarrow \alpha$$

■

Def 12.0.9. Пятый замечательный предел (обычно не нумеруется) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$

Доказательство. $a = 1$ тривиально.

$a \neq 1$. $x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0$

$$y_n = a^{x_n} - 1 \rightarrow 0, y_n \neq 0, \ln(1+y_n) = x_n \cdot \ln a$$

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \cdot \frac{x_n \ln a}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln a$$

■

Раздел #13: Сравнение функций

Def 13.0.1. $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D и $\exists \varphi : D \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$ в $\dot{V}(x_0) \cap D$.

1. Если $\varphi(x)$ ограничена на $\dot{V}(x_0) \cap D$, то говорят, что f ограничена по сравнению с g при $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$$

2. Если $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, то говорят, что f бесконечно малая по сравнению с g при $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$$

3. Если $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$, то говорят, что f и g асимптотически равны.

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$$

Замечание 13.0.2. 1. $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена в $\dot{V} \cap D$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Замечание 13.0.3. Все пункты при $x \rightarrow x_0$

$$1. f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$$

$$2. f \sim f$$

$$3. f \sim g, f = g + o(g), f = g + o(f) \text{ – равносильные утверждения.}$$

$$4. \text{ Если } f = o(g), \text{ то } f = O(g)$$

Следствие 13.0.4. При $x \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ll} \sin x = x + o(x) & \ln(1+x) = x + o(x) \\ \tan x = x + o(x) & \arcsin x = x + o(x) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) & a^x = 1 + x \ln a + o(x) \\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) & \end{array}$$

Теорема 13.0.5 (О замене на эквивалентные). $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D , $f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \text{ (если } x_0 \text{ – предельная точка области определения } \frac{f}{g} \text{)}$$

Доказательство. $\exists u(x_0) \exists \varphi : \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1. f = \varphi \cdot \tilde{f}$ в $u(x_0) \cap D$

$\exists v(x_0) \exists \psi : \psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1. g = \psi \cdot \tilde{g}$ в $v(x_0) \cap D$

$w(x_0) = u(x_0) \cap v(x_0)$. Тогда $f \cdot g = (\varphi \cdot \psi) \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g}$ в $w(x_0)$. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} g \cdot f = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ т.к. $\varphi \cdot \psi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$,

то $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f} \cdot \tilde{g} = A$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} g \cdot f$ не существует, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f} \tilde{g}$ не существует.

Для частного доказательство аналогично. ■

Замечание 13.0.6. Заменять на эквивалентные можно **только** в произведении и частном.

Def 13.0.7. Пусть $f \sim g, f \sim h, x \rightarrow x_0$. Если $f - h = o(f - g)$, то говорят, что асимптотическое равенство $f \sim h$ точнее, чем $f \sim g$.

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D . Пусть задана система функций $\{g_k\}_{k=0}^N : \forall k \in [0, N-1] \cap \mathbb{Z}_+ \rightarrow g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), x \rightarrow x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^N c_k \cdot g_k(x) + o(g_N(x))$$

Многочлены получаются, если $g_k(x) = (x - x_0)^k$.

Если $f(x) \sim C \cdot (x - x_0)^k (C \neq 0)$, то $C \cdot (x - x_0)^k$ – главная степенная часть.

Теорема 13.0.8 (О единственности асимптотического разложения). $D \in \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка $D, n \in \mathbb{Z}_+; f, g_k : D \rightarrow \mathbb{R}, g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), x \rightarrow x_0 \forall k = 0, \dots, n-1$ и $\forall V(x_0) \exists$ точка в $\dot{V}(x_0)$: в ней g_n не ноль. Тогда если существует асимптотическое разложение f по системе функций $\{g_k\}$, то оно единственно.

Доказательство. Пусть не единственное. Тогда $\exists c_k, d_k, k = 0, \dots, n : \exists i c_i \neq d_i$.

$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot g_k(x) + o(g_n(x))$ и $f(x) = \sum_{k=0}^n d_k \cdot g_k(x) + o(g_n(x))$ при $x \rightarrow x_0$.

Т.к. $g_{k+1}(x) = o(g_k(x))$, то $g_{k+1}(x) = o(g_l(x)) \forall l \leq k$ при $x \rightarrow x_0$.

Обозначим $E_k = \{x : g_k(x) \neq 0, k = 0, \dots, n\}$. Если $g_k = 0$ на $V(x_0)$, то $g_{k+1} = 0$ на $V(x_0), g_n = 0$ на $V(x_0)$.

$$g_{k+1} = o(g_k) \Leftrightarrow \exists \varphi : g_{k+1} = \varphi \cdot g_k$$

Если x_0 – предельная точка E_{k_0} , то она предельная точка всех E_k . Пусть m – наименьший номер : $c_m \neq d_m$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^m c_k g_k(x) + o(g_m(x)), f(x) = \sum_{k=0}^m d_k g_k(x) + o(g_m(x))$$

Вычтем: $0 = (c_m - d_m)g_m(x) + o(g_m(x))$. Поделим на $g_m(x)$

$$0 = (c_m - d_m) + \frac{o(g_m(x))}{g_m(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c_m - d_m \Rightarrow c_m = d_m$$

■

Def 13.0.9. $x_0 \in \mathbb{R}, f$ задана хотя бы на $\langle a, x_0 \rangle$ или $\langle x_0, b \rangle$ и действует в \mathbb{R} . Тогда прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции f , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \pm\infty$$

Def 13.0.10. $\langle a, +\infty \rangle \subset D \subset \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Прямая $y = \alpha x + \beta$ – наклонная асимптота f при $x \rightarrow +\infty$, если $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Def 13.0.11. При $x \rightarrow -\infty$ аналогично.

Теорема 13.0.12 (Уравнение наклонной асимптоты). $\langle a, +\infty \rangle \subset D \subset \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Прямая $y = \alpha x + \beta$ является асимптотой f при $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x)$

Доказательство. " \Rightarrow ". По определению $f(x) = \alpha x + \beta + \varphi(x)$, $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Тогда $\frac{f(x)}{x} = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$$

$$f(x) - \alpha x = \beta + \varphi(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$$

" \Leftarrow ". Прделаем те же рассуждения "в обратную сторону".

■

Раздел #14: Дифференциальное исчисление

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка $E, n \in \mathbb{Z}_+$. Хотим найти многочлен степени не выше n ($P(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k$)

$$f(a) = P(a), f(x) = P(x) + o((x - a)^n), x \rightarrow a \quad (1)$$

Замечание 14.0.1. Если такой многочлен существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть $\exists P(x), Q(x)$, удовлетворяющие условию (1). Тогда

$$0 = P(x) - Q(x) + o((x - a)^n)$$

Если $P(x) \neq Q(x)$, то $P(x) - Q(x) = \sum_{k=0}^n r_k (x - a)^k = r(x)$

$$\Rightarrow r(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a$$

$$r(x) = r_m (x - a)^m + \dots + r_n (x - a)^n, m \leq n, r_m \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{(x - a)^m} = o((x - a)^{n-m}) \Rightarrow r_m = 0$$

■

Def 14.0.2. Многочлен, удовлетворяющий условию (1) называется многочленом Тейлора функции f в точке a порядка n $T_{a,n}f$

Def 14.0.3. Функция f называется дифференцируемой в точке a ($\langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$), если $\exists k \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + k(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a$$

Def 14.0.4. $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$, если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = K \in \mathbb{R}$, то K называется производной функции f в точке a . (Обозначение $f'(a), \frac{df}{dx}(a), Df(a)$)

$\Delta_a f = f(x) - f(a)$ – приращение функции f в точке a .

$$x - a = \Delta_a x.$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta_a x \rightarrow 0} \frac{\Delta_a f}{\Delta_a x}$$

Теорема 14.0.5. $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$. Тогда равносильны три утверждения:

1. f дифференцируема в точке a
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ существует и равен k
3. $\exists F(x) : F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$ непрерывна в точке $a, F(a) = k$ и $f(x) - f(a) = F(x)(x - a), x \in \langle A, B \rangle$

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). $\exists k : f(x) - f(a) = k(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k + \frac{o(x - a)}{x - a} \rightarrow k$$

2) \Rightarrow 3).

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \neq a \\ k, & x = a \end{cases}$$

из 2) следует непрерывность F в точке a

3) \Rightarrow 1). По 3) $\exists F$:

$$f(x) - f(a) = F(x)(x - a) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + F(x)(x - a) = f(a) + k(x - a) + (F(x) - k) \cdot (x - a)$$

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} F(a) = k \Rightarrow (F(x) - k)(x - a) = o((x - a)) \quad \blacksquare$$

14.1. Связь с физикой

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} - \text{мгновенная скорость}$$

14.2. Связь с геометрией

Рассмотрим функции: $l_k(x) = f(a) + k(x - a)$, графики – прямые, проходящие через точку $(a; f(a))$

$$f(x) - l_k(x) = f(x) - f(a) - k(x - a)$$

Если $f(x)$ дифференцируема в точке a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \Leftrightarrow f(x) - l_k(x) = (x - a) \cdot (f'(a) - k) + o(x - a)$$

При $k = f'(a)$ разность есть $o(x - a)$.

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

касательная в точке a к функции f . $\operatorname{tg} \alpha = f'(a)$.

14.3. Бесконечные производные

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \Rightarrow f'(a) = +\infty$$

В таком случае f не является дифференцируемой в точке a .

Односторонняя производная:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a \pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Замечание 14.3.1. Если f дифференцируема в точке a , то f непрерывна в точке a .

Доказательство.

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) \quad \blacksquare$$

Обратное не выполняется. Например, $f(x) = |x|$

14.4. Правила дифференцирования

Теорема 14.4.1 (Производная композиции). $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \langle C, D \rangle, g : \langle C, D \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$. Если f дифференцируема в точке a , g дифференцируема в точке $f(a)$, то $g \circ f$ дифференцируема в точке a и

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Доказательство. $\exists F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F(a) = f'(a)$ и $f(x) - f(a) = F(x)(x - a), x \in \langle A, B \rangle$, F непрерывна в точке a

$\exists G : \langle C, D \rangle \rightarrow \mathbb{R}, G(f(a)) = g'(f(a))$ и $g(y) - g(f(a)) = G(y)(y - f(a)), y \in \langle C, D \rangle$, G непрерывна в точке $f(a)$ Подставим $y = f(x)$

$$g(f(x)) - g(f(a)) = G(f(x))(f(x) - f(a)) = G(f(x))F(x)(x - a) = H(x)(x - a)$$

$H(x)$ — непрерывна в точке $x = a$, $H : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $(g \circ f)'(a) = H(a) = G(f(a)) \cdot F(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. ■

Замечание 14.4.2. Это "правило цепочки".

$$(g \circ h \circ f)'(a) = g'(h \circ f(a)) \cdot h'(f(a)) \circ f'(a)$$

Теорема 14.4.3 (Арифметические операции). $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle, f, g$ — дифференцируемы в точке a . Тогда

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ — дифференцируемая в точке a функция и

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

2. $f \cdot g$ — дифференцируема в точке a и

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

3. если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ — дифференцируема в точке a и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Доказательство. 1. $(\alpha f + \beta g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(a) + \beta g(a))}{x - a} =$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left(\alpha \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

2. Докажем частный случай $g = f$, т.е. докажем $(f^2)'(a) = 2f'(a)f(a)$. Возьмем $h(t) = t^2$, тогда $f^2(x) = (h \circ f)(x)$. Тогда по предыдущей теореме

$$(f^2)'(a) = h'(f(a)) \cdot f'(a) = 2 \cdot f(a) \cdot f'(a)$$

Вернемся к общей формуле:

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \Rightarrow (f \cdot g)'(a) = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)'(a) = \\ &= \frac{1}{4}(2 \cdot (f(a) + g(a)) \cdot (f'(a) + g'(a)) - 2(f(a) - g(a)) \cdot (f'(a) - g'(a))) = \\ &= \frac{1}{2}(2f(a) \cdot g'(a) + 2f'(a) \cdot g(a)) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a) \end{aligned}$$

Упражнение 14.4.4. Получить эту формулу непосредственно из определения производной

$$3. \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}. \text{ Возьмем } h(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} = (h \circ g)(x)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = h'(g(a)) \cdot g'(a) = -\frac{1}{g^2(a)} \cdot g'(a)$$

Теперь $f \cdot \frac{1}{g}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot -\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

■

Следствие 14.4.5.

$$\begin{aligned} (f \cdot (h \cdot g))'(a) &= f'(a) \cdot (h \cdot g)(a) + f(a) \cdot (h \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot h(a) \cdot g(a) + f(a)(h'(a)g(a) + h(a)g'(a)) = \\ &= f'(a)h(a)g(a) + f(a)h'(a)g(a) + f(a)h(a)g'(a) \end{aligned}$$

Теорема 14.4.6 (Дифференцирование обратной функции). f – строго монотонная непрерывная функция на $\langle A, B \rangle$, $a \in \langle A, B \rangle$, f – дифференцируема в точке a и $f'(a) \neq 0$. Тогда f^{-1} – дифференцируема в точке $f(a)$ и $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Замечание 14.4.7. Геометрический смысл. Рисунок: **TODO**

Доказательство. $g(x) = f^{-1}(x)$, $f(a) = b$. $f: \langle A, B \rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle C, D \rangle$, $g: \langle C, D \rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle A, B \rangle$ – непрерывны. f – дифференцируема, тогда $\exists F(x): \langle A, B \rangle$ непрерывная в точке a

$$F(a) = f'(a), f(x) - f(a) = F(x)(x - a)$$

f строго монотонна $\Rightarrow \forall x \neq a \ f(x) \neq f(a) \Rightarrow F(x) \neq 0$ если $x \neq a$ и по условию $f'(a) = F(a) \neq 0$, т.е. $F(x) \neq 0 \ \forall x \in \langle A, B \rangle$

$$x = g(y) \ (y = f(x))$$

Тогда $y - b = f(x) - f(a) = F(x)(x - a) = F(g(y))(g(y) - g(b)) \Rightarrow g(y) - g(b) = \frac{1}{F(g(y))}(y - b) = H(y)(y - b)$

H определена на $\langle C, D \rangle$, непрерывна в точке $b = f(a) \Rightarrow g'(b) = H(b) = \frac{1}{F(g(b))} = \frac{1}{F(a)} = \frac{1}{f'(a)}$ ■

14.5. Формулы для вычисления производных

$$f'(a), a \in E \ a \mapsto f'(a)$$

$$1. \ f(x) \equiv 1, a \in \mathbb{R}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - 1}{x - a} = 0$$

$$2. \ f(x) = b^x, b > 0, a \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{b^x - b^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} b^a \cdot \frac{b^{x-a} - 1}{x - a} = b^a \cdot \ln b$$

В частности, $(e^x)' = e^x$

3. $f(x) = \log_b x, b > 0, b \neq 1, a \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_b x - \log_b a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_b \frac{x}{a}}{x - a} \\ \frac{x}{a} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 &\Rightarrow \log_b \frac{x}{a} = \frac{\ln \frac{x}{a}}{\ln b} = \ln \frac{\left(1 + \left(\frac{x}{a} - 1\right)\right)}{\ln b} \sim \frac{\frac{x}{a} - 1}{\ln b} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_b \frac{x}{a}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x}{a} - 1}{(x - a) \ln b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{a(x - a) \ln b} = \frac{1}{a \ln b}\end{aligned}$$

Значит

$$(\log_b x)' = \frac{1}{x \ln b}$$

В частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

4. $f(x) = x^\alpha, \alpha \neq 0$

- $\alpha \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
- $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \frac{m}{2n+1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} (\alpha > 0), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} (\alpha < 0)$
- $\alpha = \frac{m}{2n}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \in [0, +\infty) (\alpha > 0), x \in (0, +\infty) (\alpha < 0)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \frac{\left(1 + \left(\frac{x}{a} - 1\right)\right)^\alpha - 1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \cdot \frac{\alpha \cdot \left(\frac{x}{a} - 1\right)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \cdot \frac{\alpha(x - a)}{a(x - a)} = \alpha \cdot a^{\alpha-1}\end{aligned}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

Выводы: $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (с точностью до области определения функции).

5. $f(x) = \sin x, a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 2 \frac{\frac{x-a}{2} \cdot \cos a}{x - a} = \cos a$$

6. $f(x) = \cos x$

$$(\cos x)' = \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x \right)' = -\sin x$$

7. $f(x) = \operatorname{tg} x, a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

8. $f(x) = \operatorname{ctg} x, a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x \right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

9. $f(x) = \arcsin x, x \in [-1, 1]$. Пусть $g(y) = \sin y \Rightarrow b = \arcsin a, g'(b) = \cos b > 0$, т.к. $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \frac{1}{\cos b} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 b}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$$

10. $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$

11. $f(x) = \operatorname{arctg} x, g(y) = \operatorname{tg} y, b = \operatorname{arctg} a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \cos^2 b = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 b + 1} = \frac{1}{a^2 + 1}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{x^2 + 1}$

14.6. Теоремы о средних

Теорема 14.6.1 (Теорема Ферма). $a \in (A, B), f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируема в точке a .

Если $f(a) = \max_{a \in \langle A, B \rangle} f$ или $f(a) = \min_{a \in \langle A, B \rangle} f$, то $f'(a) = 0$.

Геометрический смысл:

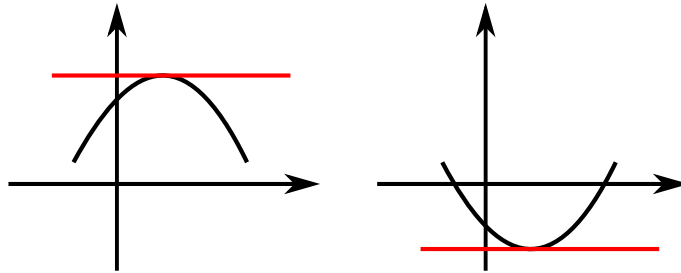


Рис. 1: Горизонтальная касательная

Доказательство. $f(a) = \max_{\langle A, B \rangle} f \Rightarrow f(x) - f(a) \leq 0 \quad \forall x \in \langle A, B \rangle$. Если $x > a$, то $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

Если $x < a$, то $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

f дифференцируема в точке $a \Rightarrow f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a) \Rightarrow f'(a) = 0$ ■

Теорема 14.6.2 (Теорема Ролля). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Если

1. f дифференцируема на (a, b) (т.е. дифференцируема в каждой точке).
2. непрерывна на $[a, b]$
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

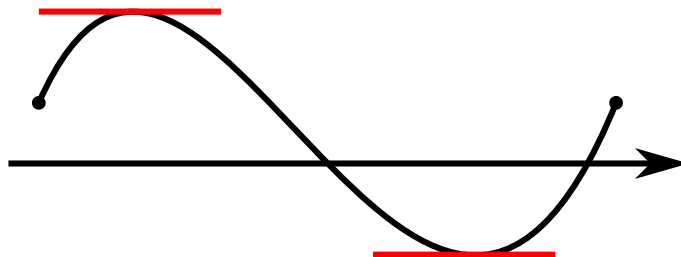


Рис. 2: Теорема Ролля

Доказательство. f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ достигает наибольшего и наименьшего значения. Если a, b – те точки, в которых достигается наибольшее и наименьшее значение, то f постоянная на $[a, b] \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Если хотя бы в одной из точек a и b не достигается наибольшего или наименьшего значения, тогда одно из них достигается на (a, b) . Тогда по теореме Ферма в этой точке производная равна нулю. ■

Замечание 14.6.3. Все три условия существенны.

Теорема 14.6.4 (Теорема Лагранжа или формула конечных приращений). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. f непрерывна на $[a, b]$, f – дифференцируема на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Геометрический смысл: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

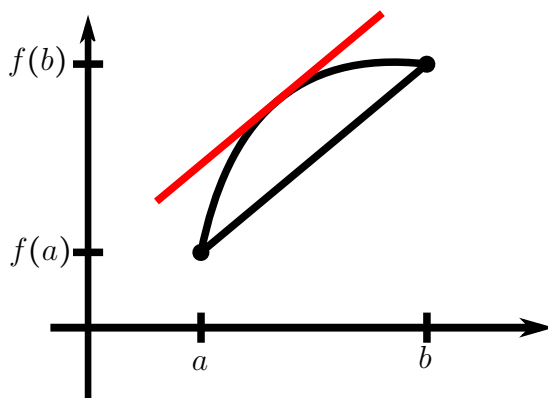


Рис. 3: Теорема Лагранжа

Доказательство. $g(x) = f(x) - kx$ – непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) . Хотим подобрать $k : g(a) = g(b)$

$$f(a) - ka = f(b) - kb \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда $g(x) = f(x) - x \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ подходит под условия теоремы Ролля. Тогда $\exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Теорема 14.6.5 (Теорема Коши). $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g – непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) , $\forall x \in (a, b) \ g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Доказательство. $h(x) = f(x) - kg(x)$ – непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) . Подберем $k : h(a) = h(b)$

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Тогда $h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Rightarrow \exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$

$$f'(c) - g'(c) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0$$

■

Замечание 14.6.6. 1. Точка c может быть не единственной.

2. Теорема Лагранжа – частный случай теоремы Коши, теорема Ролля – частный случай теоремы Лагранжа.

3. Теорему Лагранжа можно записать в следующем виде:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \Theta \cdot (b - a)), \Theta \in (0, 1)$$

Следствие 14.6.7 (Оценка конечных приращений). f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) . Если $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f'(x) \leq M \ \forall x \in (a, b)$, тогда

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

В частности, если $\exists M \in \mathbb{R} : |f'(x)| \leq M \ \forall x \in (a, b)$, то

$$|f(b) - f(a)| \leq M \cdot (b - a)$$

Доказательство. По теореме Лагранжа $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leq M(b - a)$$

■

Следствие 14.6.8. Если $\forall x \in (a, b) \ f'(x) \geq 0$, то f нестрого монотонно возрастает.

Доказательство. $x_1 < x_2 \in (a, b)$. $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

■

Следствие 14.6.9. Если $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$, то f строго возрастает.

Следствие 14.6.10. Если $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) \leq 0$, то f нестрого монотонно убывает.

Следствие 14.6.11. Если $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) < 0$, то f строго монотонно убывает.

Замечание 14.6.12. Если f дифференцируема на (a, b) и f строго монотонно убывает $\Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$ – вообще говоря, неверно.

$f(x) = -x^3, f'(x) = -3x^2 \leq 0$ и равенство достигается при $x = 0$.

Теорема 14.6.13 (Теорема Дарбу). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируема на $[a, b]$. Пусть C лежит строго между $f'(a)$ и $f'(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = C$

Доказательство. 1. $C = 0$. Для определенности $f'(a) < 0 < f'(b)$. f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ достигает наибольшего и наименьшего значения на $[a, b]$. При таких знаках производной наименьшее значение достигается на $(a, b) \Rightarrow$ в такой точке минимума $f'(c) = 0$ (по теореме Ферма).

2. $C \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = f(x) - Cx$.

$$h'(a) = f'(a) - C, h'(b) = f'(b) - C \Rightarrow h'(a) \text{ и } h'(b) \text{ – разных знаков}$$

Тогда по предыдущему пункту $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = C$

■

Теорема 14.6.14 (Правило Лопиталя). Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируемы на (a, b) , $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ и $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$.

Если $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Доказательство. g дифференцируема на $(a, b) \Rightarrow g$ непрерывна на (a, b) . Кроме того, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow g$ строго монотонна на $(a, b) \Rightarrow$ знакопостоянна на (a, b) (и ни в какой точке не равна нулю).

По Гейне: $\forall \{x_n\} : x_n \rightarrow b, x_n \in (a, b) \Rightarrow g(x_n) \rightarrow 0$. Возьмем строго возрастающую последовательность $\{x_n\} : x_n \in (a, b), x_n \rightarrow b$. Тогда $\{g(x_n)\}$ строго монотонна. Тогда по теореме Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})}$$

если предел справа существует.

По теореме Коши:

$$\exists c_n \in (x_{n-1}, x_n) : \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} - \text{существует и равен } l$$

т.к. $x_n \rightarrow b \Rightarrow c_n \rightarrow b$.

■

Теорема 14.6.15 (правило Лопиталя для бесконечностей). Условия те же, но $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = +\infty$. Тогда если $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Замечание 14.6.16. Обратить правило Лопиталя нельзя. $f(x) = x + \sin x, g(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

Но

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 + \cos x}{1} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

14.7. Производные высших порядков

f дифференцируема на E . $x \mapsto f'(x)$ область определения E .

Если $f'(x)$ дифференцируема на E_1 , то f дифференцируема на E_1 дважды.

Def 14.7.1. Второй производной функции f в точке a называется $(f')'(a) = f''(a)$, третья производная – $f'''(a) = (f'')'(a)$. n -ая производная – $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$

Пример 14.7.2. $(x^3)''' = (3x^2)'' = (6x)' = 6$

Пример 14.7.3. $(\sin x)^{(14)} = (\cos x)^{(13)} = (-\sin x)^{(12)} = (-\cos x)^{(11)} = (\sin x)^{(10)} = (\sin x)'' = -\sin x$

Теорема 14.7.4 (Арифметические действия с производными высших порядков). f и g n раз дифференцируемы в точке a . Тогда

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g$ – n раз дифференцируема и

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(a) = \alpha \cdot f^{(n)}(a) + \beta \cdot g^{(n)}(a)$$

2. $f \cdot g$ – n раз дифференцируема в точке a и

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

Доказательство. 1. База при $n = 1$ – верно.

Индукционный переход: пусть верно для l . Тогда для $l + 1$:

$$(\alpha f + \beta g)^{(l+1)} = ((\alpha f + \beta g)^{(l)})' = (\alpha f^{(l)} + \beta g^{(l)})' = \alpha f^{(l+1)} + \beta g^{(l+1)}$$

2. База при $n = 1$: $(fg)' = fg' + f'g$.

Индукционный переход: пусть верно для l

$$\begin{aligned} (fg)^{(l+1)} &= ((fg)^{(l)})' = \left(\sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k)} g^{(l-k)} \right)' = \sum_{k=0}^l C_l^k (f^{(k)} g^{(l-k)})' = \\ &= \sum_{k=0}^l C_l^k (f^{(k+1)} g^{(l-k)} + f^{(k)} g^{(l+1-k)}) = \sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k+1)} g^{(l-k)} + \sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k)} g^{(l+1-k)} = \\ &= \sum_{j=1}^{l+1} C_l^{j-1} f^{(j)} g^{(l+1-j)} + \sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k)} g^{(l+1-k)} = \\ &= C_l^l f^{(l+1)} g + \sum_{j=1}^l (C_l^{j-1} + C_l^j) f^{(j)} g^{(l+1-j)} + C_l^0 f g^{(l+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^k f^{(k)} g^{(l+1-k)} \end{aligned}$$



Утверждение 14.7.5. $(f(\alpha x + \beta))^{(n)} = \alpha^n + f^{(n)}(\alpha x + \beta)$

Def 14.7.6. f дифференцируема на E и f' непрерывна на E . Тогда f называется непрерывно дифференцируемой.

$f \in C^1(E)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

$f \in C^2(E)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции.

$f \in C^n(E)$ – n раз непрерывно дифференцируемые функции.

$f \in C^\infty(E)$ – бесконечно непрерывно дифференцируемые функции.

Пример 14.7.7. $f(x) = |x| \in C(\mathbb{R})$, но $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$

Пример 14.7.8. $f(x) = x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$

Пример 14.7.9. $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ на \mathbb{R} . $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ на \mathbb{R} .

$f''(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$ на \mathbb{R} разрывна в нуле. Тогда $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, но $f(x) \notin C^2(\mathbb{R})$

Упражнение 14.7.10. $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Дифференцируема ли $g(x)$ в нуле?

14.8. Формула Тейлора

$P(x)$ многочлен степени не выше n , $a \in \mathbb{R}$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k, c_i \in \mathbb{R}$$

$$c_0 = P(a)$$

Теорема 14.8.1 (Формула Тейлора для многочлена). Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, P – многочлен степени не выше n . Тогда $\forall a, x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Доказательство. Проверим, что $((x-a)^k)^{(m)} \Big|_{x=a} = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ k!, & k = m \end{cases}$.

$k > m$

$$((x-a)^k)^{(m)} = (k(x-a)^{k-1})^{(m-1)} = \frac{k \dots (k-m+1)}{\frac{k!}{m!}} (x-a)^{k-m} = 0$$

$k < m \Rightarrow ((x-a)^k)^{(m)} = 0$

$k = m$

$$((x-a)^k)^{(k)} = k!$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k \Rightarrow P^{(m)}(a) = c_m \cdot m! \Rightarrow c_m = \frac{P^{(m)}(a)}{m!}$$



Лм 14.8.2. Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E, g: E \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Предположим, что g дифференцируема в точке a n раз и $g(a) = g'(a) = g''(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0$. Тогда $g(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a$.

Доказательство. База: $k = 1. g(a) = g'(a) = 0$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a), x \rightarrow a \Rightarrow g(x) = o(x-a)$$

Индукционный переход: Пусть при $n = k$ выполняется. При $n = k+1$ g $k+1$ раз дифференцируема в точке a и $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(k+1)}(a) = 0$

$$g'(a) = (g')'(a) = \dots = (g')^{(k)}(a) = 0 \Rightarrow g'(x) = o((x-a)^k), x \rightarrow a$$

$|g'(x)| \leq \varepsilon |x-a|^k, |x-a| < \delta$. По формуле конечных приращений

$$\exists \Theta : g(x) - g(a) = g'(a + \Theta(x-a)) \cdot (x-a)$$

$|a + \Theta(x-a) - a| = \Theta(x-a) < \delta$. Тогда $|g'(a + \Theta(x-a))| \leq \varepsilon \cdot |x-a|^k$

$$|g(x)| = |g'(a + \Theta(x-a)) \cdot (x-a)| \leq \varepsilon |x-a|^k \cdot |x-a| = \varepsilon |x-a|^{k+1}$$

$$\Rightarrow g(x) = o((x-a)^{n+1})$$

■

Теорема 14.8.3 (Формула Тейлора). $E \subset \mathbb{R}, a \in E, f: E \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Пусть f n раз дифференцируема в точке a . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{остаток в форме Пеано}}, x \rightarrow a$$

Доказательство. Положим $P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$. По формуле Тейлора для многочлена:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \Rightarrow f^{(k)}(a) = P^{(k)}(a) \quad \forall k = 0, \dots, n$$

Возьмем $g = f - P$.

$$g(a) = f(a) - P(a) = 0$$

$$g'(a) = f'(a) - P'(a) = 0$$

$$g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) = 0$$

\Rightarrow По лемме $g(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a \Rightarrow f(x) = P(x) + o((x-a)^n), x \rightarrow a$, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

■

Теорема 14.8.4 (Формула Тейлора-Лагранжа). $a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$. Обозначим $\Delta_{a,x}$ — отрезок $[a, x]$ или $[x, a]$, $\tilde{\Delta}_{a,x}$ — интервал с концами a и x . $n \in \mathbb{Z}_+, f$ $n+1$ раз дифференцируема в на $\langle A, B \rangle, a, x \in \langle A, B \rangle$. Тогда $\exists c \in \tilde{\Delta}_{a,x}$, для которой

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}}_{\text{остаток в форме Лагранжа}}$$

Замечание 14.8.5. Точка c зависит от x , поэтому, вообще говоря, не многочлен. Можно взять $c = a + \Theta(x - a)$, $\Theta(0, 1)$

Доказательство. $t \in \Delta_{a,x}$. Пусть $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$, $F(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k$. Тогда $t \in \tilde{\Delta}_{a,x}$.

$$\begin{aligned} F'(t) &= 0 - f'(t) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot k \cdot (x - t)^{k-1} \right) \\ &= -f'(t) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x - t)^{k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k \\ &= -f'(t) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!} (x - t)^m - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k \\ &= -f'(t) + f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x - t)^n = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n \end{aligned}$$

По теореме Коши $\exists c \in \tilde{\Delta}_{a,x}$:

$$\frac{F(a)}{(x - a)^{n+1}} = \frac{F(a) - F(x)}{\varphi(a) - \varphi(x)} = \frac{F'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n}{-(n+1)(x - c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow F(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} \quad \blacksquare$$

Замечание 14.8.6. Формула Тейлора-Пеано \Leftarrow формула Тейлора-Лагранжа. $f - n$ раз дифференцируема в точке a , $f^{(n)}$ — непрерывна в точке a .

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c(x))}{n!} (x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c(x))}{n!} (x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Рассмотрим:

$$\frac{f^{(n)}(c(x)) - f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, c(x) \in \tilde{\Delta}_{a,x} \Rightarrow |c(x) - a| < |x - a|$$

Значит, если $x \rightarrow a$, то $c(x) \rightarrow a$. $f^{(n)}(c(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} f^{(n)}(a)$ (по непрерывности). Тогда $\frac{f^{(n)}(c(x)) - f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$

Замечание 14.8.7. Обозначения: $T_{a,n}f$ — многочлен Тейлора функции f в точке a порядка n . Остаток: $R_{a,n}f(x) = f(x) - T_{a,n}f$

14.9. Формулы Тейлора-Маклорена

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Выведем формулы при $x \rightarrow 0$.

$$1. e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Доказательство. $f(x) = e^x$, $f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$

$$T_{0,n}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$2. \sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

Доказательство. $f(x) = \sin x$
 $f^{(m)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi m}{2}\right) \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+$

Доказательство. $m = 0$ верно (база).

$$f^{(m+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi m}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi m}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi(m+1)}{2}\right) \quad \blacksquare$$

$$f^{(m)}(0) = \sin \frac{\pi m}{2} = \begin{cases} 0, m : 2 \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$f(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + (*)$$

$(*)$: если n – нечетное, то $(*) = (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$. Заметим, что $T_{0,2k+1}f = T_{0,2k+2}f = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Если n – четное, то последнее слагаемое в $T_{0,n}f$ равно 0 ■

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

Доказательство. $f(x) = \ln(1+x), f'(x) = \frac{1}{1+x}, f'' = -\frac{1}{(1+x)^2}, f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

$$\Rightarrow f^{(m)}(x) = (-1)^{m+1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}, x > -1$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = (-1)^{m+1} \cdot (m-1)!$$

Рассмотрим m -тое слагаемое:

$$\frac{f^{(m)}(0)}{m!} (x-0)^m = \frac{(-1)^{m+1} (m-1)!}{m!} x^m = \frac{(-1)^{m+1}}{m} x^m \quad \blacksquare$$

Гипотеза 14.9.1. У четных функций только четные степени, у нечетных функций – только нечетные. У функций общего вида – и те, и другие.

Упражнение 14.9.2. Объяснить это.

$$5. (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n). \quad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+. \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Замечание 14.9.3. При $\alpha \in \mathbb{N}$ $f(x) = (1+x)^\alpha = T_{0,\alpha}f(x)$

Доказательство. $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)$$

$$f(0) = 1$$

$$T_{0,n}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \quad \blacksquare$$

Утверждение 14.9.4. $\forall n \in \mathbb{N} \exists c \in (0, 1) :$

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

Следствие 14.9.5. $e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}$

Следствие 14.9.6. e – иррациональное число.

Доказательство. Пусть $e \in \mathbb{Q}, e \in (2, 3), e = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} = e &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, c \in (0, 1) = \\ &= \underbrace{m(n-1)!}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \dots + 1}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{e^c}{n+1} \Rightarrow \frac{e^c}{n+1} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

но $0 < e^c < e < 3, n+1 \geq 3$!?

■