Конспект лекций по геометрии, ПИ, 2 семестр Лекции

Собрано 26 февраля 2022 г. в 21:08

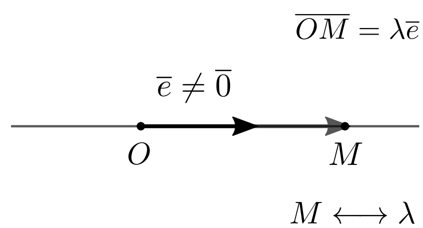
Содержание

Раздел #1: Аналитическая геометрия

1.1. Системы координат

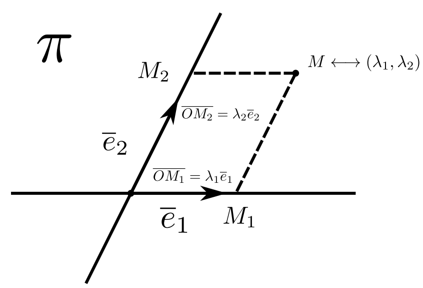
1.1.1. Аффинные системы координат

Def 1.1.1. *Аффинной системой координат на прямой называется взаимно-однозначное соответствие $l \longleftrightarrow \mathbb{R}$.*



Она определяется выбором точки O и выбором вектора $\overline{e}$. АСК $= \{O, \{\overline{e}\}\}$.

Def 1.1.2. *АСК на плоскости называется биекция $\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$.*



Она определяется выбором точки O и векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2 \neq \overline{e}, \overline{e}_1 \nparallel \overline{e}_2$. АСК $= \{O, \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}\}$.

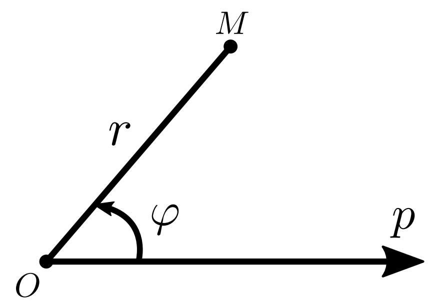
Def 1.1.3. *Если $|\overline{e}_1| = |\overline{e}_2| = 1, \overline{e}_1 \perp \overline{e}_2$, то АСК называется декартовой системой координат.*

Def 1.1.4. *АСК в пространстве называется биекция $M \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$. Она определяется выбором точки O и векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \neq \overline{0}$ – не компланарны. АСК $= \{O, \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}\}$.*

Def 1.1.5. *Упорядоченная тройка векторов $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ называется* ***правой*** *, если из конца вектор $\overline{w}$ поворот то $\overline{u}$ к $\overline{v}$ по наименьшему углу выглядит происходящим против часовой стрелки, и* ***левой*** *– в противном случае.*

1.1.2. Криволинейные системы координаты

Def 1.1.6. *Выберем точку O и построим из неё луч p, который назовем полярной осью. Возьмем теперь произвольную точку M на плоскости и измерим две величины: расстояние от M до O и угол между вектором $\overline{OM}$ и полярной осью. Обозначим расстояние за r, а угол за φ. Тогда, чтобы избежать неоднозначности, будем считать, что $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$, и если $r = 0$, то $\varphi = 0$. Такая система координат называется* ***полярной****.*



Def 1.1.7. *Полярная система координат, где $r \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$, то она называется обобщенной полярной системой координат.*

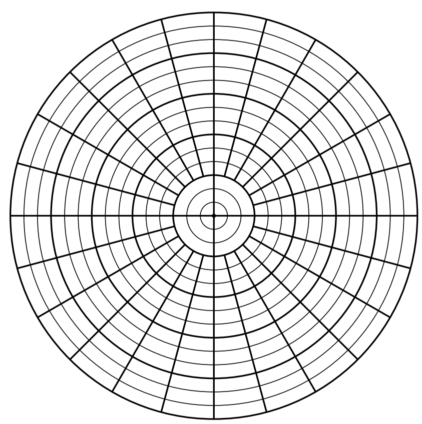


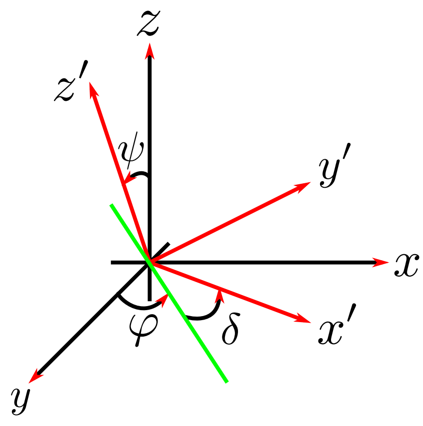
Рис. 1: Координатная сеть полярной системы координат

Def 1.1.8. *Цилиндрической системой координат называют трёхмерную систему координат, являющуюся расширением полярной системы координат путём добавления третьей координаты (обычно обозначаемой z), которая задаёт высоту точки над плоскостью.*

Def 1.1.9. *Сферическая система координат — трёхмерная система координат, в которой каждая точка пространства определяется тремя числами, где r — расстояние до начала координат, а θ и φ — зенитный и азимутальный углы соответственно.*

1.1.3. Параметризации

Построим декартову систему координат. Теперь возьмем какую-то новую систему координат x', y', z'. Проведем через x', y' плоскость. Если z' не совпадает с z, то эта плоскость пересекает



плоскость (x, y) по какой-то прямой. Отсчитает от вектора x до этой прямой угол φ. Угол между z и z' обозначим за ψ. Теперь, мы можем эту прямую поворачивать вокруг оси z' на угол δ, пока она не совпадет с x'.
Таким образом, мы совместили исходную систему координат с новой СК. То есть мы построили соответствие между $(\ \psi, \varphi, \delta\ )$.

1.2. Понятие вектора

Пусть E – евклидово пространство.

Def 1.2.1. *Закрепленный вектор – упорядоченная пара точек в евклидовом пространстве. Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, модуль $|\overrightarrow{AB}|$ – расстояние между точками A и B.*

Def 1.2.2. *Пусть $\{(A, B), A, B \in E\}$ – множество закрепленных векторов. Введём на нём отношение равенства: $(A, B) = (C, D) \Leftrightarrow$:*

1. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$
2. $(A, B) \| (C, D)$ *либо совпадают.*
3. $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$.

Замечание 1.2.3. $\forall A, B \rightarrow (A, A) = (B, B)$.

Утверждение 1.2.4. Отношение, введённое в прошлом определении – отношение эквивалентности.

Доказательство. 1. Рефлексивность: $(A, B) = (A, B)$ – верно.

2. Симметричность – очевидно.

3. Транзитивность: $(A, B) = (C, D), (C, D) = (F, G) \Rightarrow (A, B) = (F, G)$ – верно.
Значит множество закрепленных векторов разбивается на классы эквивалентности. ■

Def 1.2.5. *Класс эквивалентности называется* ***свободным вектором****.*

1.3. Сложение и умножение на число

Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in V$ – классы.

Def 1.3.1. *Сложение векторов: $V \times V \rightarrow V$. $[\overrightarrow{OO''}] = \overline{a} + \overline{b}$*

Def 1.3.2. *Пусть* $\overline{a} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. *Умножение на число на число:* $\mathbb{R} \times V \to V$.

$(V, +, \cdot)$. Свойства:

1. $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V\ \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.
2. $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V\ (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.
3. $\exists \overline{0} : \forall \overline{a}\ \overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$.
4. $\forall \overline{a}\ \exists - \overline{a} : \overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$.
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \overline{a}, \overline{b} \in V\ \lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$.
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \overline{a} \in V\ (\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$.
7. $\forall \overline{a} \in V\ 1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.
8. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \overline{a} \in V\ \lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$.

Def 1.3.3. *Множество* $(V, +, \cdot)$, *удовлетворяющее свойствам 1-8, называется* ***векторным пространством***. *Элементы – векторы.*

1.4. ЛЗ, ЛНЗ, Базис, размерность

Def 1.4.1. $\lambda_1\overline{a}_1 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n$ *– линейная комбинация. Если* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ *– нетривиальная ЛК.*

Def 1.4.2. $\{\overline{a}_i\}_{i=1}^n$ *– линейно зависимый, если* $\exists$ *нетривиальная ЛК* $\{\lambda_i\}_{i=1}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i\overline{a}_i = 0$

Def 1.4.3. $\{\overline{a}_i\}_{i=1}^n$ *– ЛНЗ, если он не ЛЗ.*

Свойства:

1. $\{\overline{a} \neq \overline{0}\}$ – ЛНЗ.
2. $\{\overline{0}\}$ – ЛЗ.
3. $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_n, \overline{0}\}$ – ЛЗ.
4. Пусть $\{\overline{a}_i\}$ – ЛЗ. Тогда $\{\overline{a}_i, \overline{a}_j\}_{i=1, j=1}^{n,m}$ – ЛЗ.

Def 1.4.4. $\{\overline{a}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *– ЛЗ, если в нем* $\exists$ *ЛЗ конечный поднабор.*

Def 1.4.5. *ЛНЗ – набор, который не является ЛЗ.*

Def 1.4.6. $\{\overline{a}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *– полный, если* $\forall \overline{v} \in V\ \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\lambda_i\}_{i=1}^n\ \overline{v} = \lambda_1\overline{a}_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n\overline{a}_{\alpha_n}$.

Def 1.4.7. $\{\overline{a}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *– базис* V, *если он полный и ЛНЗ.*

Def 1.4.8. *Размерность* V *(* $\dim V$ *) – мощность базиса.*

Def 1.4.9. *Векторное пространство* V *называется конечномерным, если* $\exists$ *конечный полный набор.*

1.5. Скалярное умножение

Будем определять скалярное произведение для элементов векторного пространства V.

Def 1.5.1. $(\overline{a}, \overline{b})$ – *скалярное произведение:* $V \times V \to \mathbb{R}$

Свойства:

1. Свойства 1-8, необходимые для существования векторного пространства.
2. $\forall \overline{a} \in V \ (\overline{a}, \overline{a}) \geqslant 0$ – положительная определённость.
   Кроме того, $(\overline{a}, \overline{a}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$ – невырожденность.
3. $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V \ (\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c})$ – аддитивность.
   $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \overline{a}, \overline{b} \in V \ (\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$ – однородность.
4. $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V \ (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$. – коммутативность.

Пример 1.5.2. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$
$\overline{v} = (x_1, ..., x_n), \overline{w} = (y_1, ..., y_n)$
Тогда скалярное произведение: $(\overline{v}, \overline{w}) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.
Проверим свойства:

1. $(\overline{v}, \overline{v}) = x_1^2 + ... + x_n^2 \geqslant 0$.
   $(\overline{v}, \overline{v}) = 0 \Leftrightarrow \forall i \ x_i = 0$.
2. Пусть $\overline{z} = (z_1, ..., z_n)$, тогда $(\overline{v}+\overline{w}, \overline{z}) = (x_1+y_1)z_1+...+(x_n+y_n)z_n = x_1z_1+...+x_ny_z+y_1z_1+...+y_nz_n = (\overline{v}, \overline{z}) + (\overline{w}, \overline{z})$.
   $(\lambda\overline{v}, \overline{w}) = \lambda x_1 y_1 + ... + \lambda x_n y_n = \lambda(x_1 y_1 + ... + x_n y_n) = \lambda(\overline{v}, \overline{w})$.
3. $(\overline{v}, \overline{w}) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = y_1 x_1 + ... + y_n x_n = (\overline{w}, \overline{v})$.

Пример 1.5.3. $C[0,1]$ – непрерывные функции на отрезке $[0,1]$.
Пусть $f, g, q \in C[0,1]$ – функции: $(f, g) = \int_0^1 fg\,dx$.

1. $(f, f) = \int_0^1 f^2\,dx \geqslant 0$.
   $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
2. $(f + q, g) = \int_0^1 (f + q)g\,dx = \int_0^1 (fg + qg)\,dx = \int_0^1 fg\,dx + \int_0^1 qg\,dx = (f, g) + (q, g)$.
   $(\lambda f, g) = \int_0^1 \lambda fg\,dx = \lambda \int_0^1 fg\,dx = \lambda(f, g)$.
3. $(f, g) = \int_0^1 fg\,dx = \int_0^1 gf\,dx = (g, f)$.

Таким образом, это скалярное произведение непрерывных на $[0,1]$ функций.

Пусть есть конечномерное векторное пространство V, на нём задано скалярное произведение $(,)$, выберем базис векторного пространства $\{\overline{e}_i\}$, рассмотрим векторы $\overline{v} = (x_i), \overline{w} = (y_i)$, тогда их скалярное произведение $(\overline{v}, \overline{w}) = (x_1\overline{e}_1 + ... + x_n\overline{e}_n, y_1\overline{e}_1 + ... + y_n\overline{e}_n)$, т.е.

$$(\overline{v}, \overline{w}) = \sum_{i,j}^{n} x_i y_j (\overline{e}_i, \overline{e}_j)$$

Либо же запись вида:

$$(\overline{v}, \overline{w}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\overline{e}_1, \overline{e}_1) & (\overline{e}_1, \overline{e}_2) & \cdots & (\overline{e}_1, \overline{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\overline{e}_n, \overline{e}_1) & (\overline{e}_n, \overline{e}_2) & \cdots & (\overline{e}_n, \overline{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

где $G = ((\overline{e}_i, \overline{e}_j)), 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ – матрица Грама сколярного произведения.
Тогда скалярное произведение можно записать в следующем виде: $(\overline{v}, \overline{w}) = \overline{v}^T G \overline{w}$.
В силу коммутативности скалярного произведения $G^T = G$.

Теорема 1.5.4 (Критерий Сильвестра)**.**

$$\forall k = 1, ..., n \quad \det(G_k) > 0$$

где G_n – миноры главной диагонали.

Утверждение 1.5.5. Если взять R^n, G, то G – матрица Грама $\Leftrightarrow G^T = G$, которая удовлетворяет критерию Сильвестра.

Def 1.5.6. *Если базис обладает свойством:* $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \Rightarrow G = E$, *тогда он называется ортонормированным базисом (ОРБ).*

Теорема 1.5.7 (Теорема Грама-Шмидта)**.** В $\forall V^n$ со скалярным произведением $(,)$ $\exists$ ОНБ.

Def 1.5.8. V *– векторное пространство,* $(,)$ *– скалярное произведение на нём, тогда* ***модуль (длина)*** $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}, |\overline{a}| = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = 0$.

Def 1.5.9. *Величина угла между векторами – число* $\alpha \in [0; \pi] \in R : \cos\alpha = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}, \overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0$.

Теорема 1.5.10 (Неравенство Коши-Буняковского)**.**

$$(\overline{a}, \overline{b})^2 \leqslant \overline{a}^2 \overline{b}^2$$

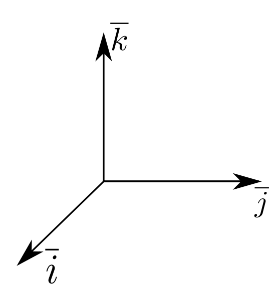
Доказательство. По свойству скалярного произведения $(\overline{a} + t\overline{b})^2$ всегда невырожденная величина, т.е. $(\overline{a} + t\overline{b})^2 \geqslant 0 \Rightarrow \overline{a}^2 + 2t(\overline{a}, \overline{b}) + t^2\overline{b}^2 \geqslant 0$, тогда его дискриминант не положительный, т.к. t – любое число, то

$$(\overline{a}, \overline{b})^2 - \overline{a}^2\overline{b}^2 \leqslant 0 \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b})^2 \leqslant \overline{a}^2\overline{b}^2$$

. ■

1.6. Векторное умножение

Векторное умножение определяется только для трёхмерного пространства V^3, кроме того, необходимо, чтобы пространство было ориентированным, выберем в нём правый ОНБ $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$.

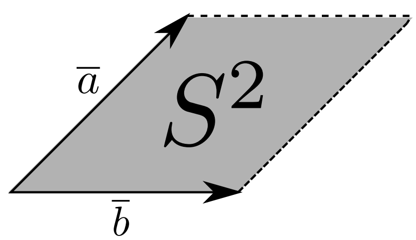


Def 1.6.1. *Пусть* $\overline{v} = (x_1, x_2, x_3), \overline{w} = (y_1, y_2, y_3)$. *Тогда* ***векторное произедение***

$$\overline{v} \times \overline{w} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \overline{i}(x_2y_3 - x_3y_2) - \overline{j}(x_3y_1 - x_1y_3) + \overline{k}(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Свойства:

1. $\overline{v} \times \overline{w} = -\overline{w} \times \overline{v}$ – кососкоммутативность.
2. $\overline{v} \times \overline{v} = \overline{0}$.
3. $(\overline{v} + \overline{w}) \times \overline{z} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \overline{v} \times \overline{z} + \overline{w} \times \overline{z}$ – аддитивность.
4. $(\lambda \overline{v}) \times \overline{w} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \lambda \overline{v} \times \overline{w}$.
5. $\overline{v} \times \overline{w} \perp \overline{v}, \overline{w}$
   $(\overline{v}, \overline{v} \times \overline{w}) = (\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \overline{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$.
6. $\overline{v} \times \overline{w} = 0 \Leftrightarrow \overline{v} \parallel \overline{w}$
   $(\overline{v}, \overline{w}, \overline{v} \times \overline{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow (\overline{v}, \overline{w}, \overline{v} \times \overline{w}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}, \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$.
7. $\overline{v} \nparallel \overline{w} \Rightarrow (\overline{v}, \overline{w}, \overline{v} \times \overline{w})$ – правая.
8. $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$. Получим таблицу умножения: $i \to j, j \to k, k \to i$.
9. $(\overline{a} \times \overline{b})^2 = (x_2y_3 - y_2x_3)^2 + (...)^2 + (...)^2$
   $\overline{a}^2\overline{b}^2 - (\overline{a}\overline{b})^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$
   $(\overline{a} \times \overline{b})^2 = \overline{a}^2\overline{b}^2 - (\overline{a}\overline{b})^2$ – упражнение.
   $\overline{a}^2\overline{b}^2 - (\overline{a}\overline{b})^2 = S^2 = |\overline{a}|^2|\overline{b}|^2 \sin^2\alpha = a^2b^2(1 - \cos^2\alpha) = \overline{a}^2\overline{b}^2 - (\overline{a}\overline{b})^2$, т.к. $\cos^2\alpha = \frac{(a,b)^2}{|a||b|}$.
   Следствие: $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1, (\overline{a}, \overline{b}) \Rightarrow |\overline{a} \times \overline{b}| = 1$.



Рассмотрим V^3, фиксируем ОНБ $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$, зададим векторное произведение $\times : V \times V \to V$. Выберем $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правый ОНБ, таким образом, если взять любой ОНБ, можно получить таблицу умножения: $a \to b, b \to c, c \to a$.

$\overline{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),\ \overline{w} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \Rightarrow \overline{v} \times \overline{w} = (\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c}) \times (\mu_1\overline{a} + \mu_2\overline{b} + \mu_3\overline{c}) =$
$= \lambda_1\mu_1\overline{a} \times \overline{a} + \lambda_1\mu_2\overline{a} \times \overline{b} + \lambda_1\mu_3\overline{a} \times \overline{c} + \lambda_2\mu_1\overline{b} \times \overline{a} + \lambda_2\mu_2\overline{b} \times \overline{b} + \lambda_2\mu_3\overline{b} \times \overline{c} + \lambda_3\mu_1\overline{c} \times \overline{a} + \lambda_3\mu_2\overline{c} \times \overline{b} + \lambda_3\mu_3\overline{c} \times \overline{c} =$
$= \overline{c}(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) - \overline{b}(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1) + \overline{a}(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) = \begin{vmatrix} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}$.