Дискретная математика 1 семестр ПИ, Лекция, 10/02/21

Собрано 8 октября 2021 г. в 21:22

Содержание

1.1. Лексикографический порядок перестановок

Def. 1.1.1. *Пусть есть две перестановки* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. *Тогда*

$$X < Y \Leftrightarrow \exists k : x_i = y_i \ \forall i = 1, ..., k \wedge x_{k+1} < y_{k+1}$$

Алгоритм 1.1.2 (Поиск следующей перестановки). Найдем наибольший убывающий суффикс. Пусть $k : a_{k+1} > a_{k+2} > ... > a_n$. Тогда выберем из этого суффикса $a_i : a_i > a_k$ и a_i минимально. После этого отсортируем получившийся суффикс. Получим перестановку:

$$< a_1, a_2, ..., a_i, \mathrm{sort}[a_k, a_k + 1, ..., a_n] >$$

Она и будет лексикографический следующей.

2.1. Числа Стирлинга

Def. 2.1.1. *Пусть* $A = \{a_1, ..., a_n\}$*. Рассмотрим разбиение этого множества мощности* k*, т.е.* $X = \{X_1, ..., X_k\}$:

$$\forall i, j \to X_i \supset A, X_i \cap X_j = \varnothing, \bigcup_i X_i = A$$

Тогда числами Стирлинга – количество таких разбиений.

1. $k = 2 \Rightarrow S(n, 2) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i}{2} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$
2. Общий случай.
   - Если $\{a_n\}$ – элемент разбиения, то таких разбиений $S(n-1, k-1)$
   - $\exists i : a_n \in X_i, |X_i| > 1$. Тогда нужно найти количество разбиений $A \setminus \{a_n\}$ на k множеств, а потом вставить a_n в одно из этих множеств.
     Количество способов:
     $$S(n-1, k) \cdot k$$

   Тогда рекуррентная формула:

   $$S(n, k) = S(n-1, k-1) + S(n-1, k) \cdot k$$

   Базовые значения:

   $$\begin{array}{cc} S(n, 0) = 0 & S(0, 0) = 0 \\ S(k, n) = 0, k > n & S(n, 2) = 2^{n-1} - 1 \\ S(n, n-1) = C_n^2 & \end{array}$$

2.2. Числа Белла

Def. 2.2.1. *Числа Белла – количество разбиений множества.*

$$B(n) = \sum_{i=1}^{n} S(n, i)$$

Теорема 2.2.2 (Формула чисел Белла)**.** Рассмотрим произвольное разбиение множества A. $\exists i : a_{n+1} \in X_i, |X_i| = j$.
$|A \setminus X_i| = n + 1 - j$. Тогда количество способов выбрать X_i равно $C_n^{j-1} = C_n^{n+1-j}$
Количество разбиений $A \setminus X_i$, в свою очередь, равно $B(n + 1 - j)$. Тогда

$$B(n+1) = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{n+1-j} \cdot B(n+1-j) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B(k)$$

Теорема 2.2.3 (Формула чисел Стирлинга)**.**

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \cdot C_k^j (k-j)^n$$

Доказательство. База.

$$S(0,k) = 0 = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \cdot C_k^j (k-j)^0 = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot (-1)^j = \frac{1}{k!} \cdot (1-1)^k$$

ИП. **TODO** ■

Доказательство. Альтернативное доказательство.
Пусть $L = \{\rho \subseteq A \times \{1, ..., k\} | \rho$ – сюръекция$\}$. Заметим, это множество равномощно множеству упорядоченных разбиений мощности k.
$\{a_1, ..., a_n\} \to \{1, ..., k\}$. Элементы разбиения имеют следующий вид: $X_i = \{a_k | \rho(a_k) = i\}$. Т.к. отображение сюръективно, то X_i непусты.

$$S(n,k) = \frac{|L|}{k!}$$

Чтобы посчитать мощность L, из общего количества отображения вычтем количество несюръективных отображений. Пусть $P_i = \{\rho \subset A \times \{1, ..., n\} | \forall a \in A \to \rho(a) \neq i\}$. Тогда количество несюръективных отображений равно:

$$|\bigcup_{i=1}^{k} P_i| = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant ... \leqslant i_j \leqslant k} |P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap ... \cap P_{i_j}|$$

$|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap ... P_{i_j}|$ – количество отображений из A в $\{1, ..., k\} \setminus \{i_1, ..., i_j\}$

$$|P_{i_1} \cap ... \cap P_{i_j}| = (k-j)^n$$

$$\sum_{i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_j} |P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap ... \cap P_{i_j}| = C_k^j (k-j)^n$$

Тогда

$$|L| = k^n - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1} C_k^j (k-j)^n = k^n + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j C_k^j (k-j)^n = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j (k-j)^n$$

Тогда искомая формула чисел Стирлинга:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j (k-j)^n$$

■