

# Дискретная математика 1 семестр ПИ,

## Лекция, 10/09/21

Собрано 25 октября 2021 г. в 14:26

---

### Содержание

<b>1. Теория вероятности</b>	<b>1</b>
1.1. Основы теории вероятности . . . . .	1
1.2. Условная вероятность . . . . .	4
1.3. Независимость событий . . . . .	5
1.4. Формула полной вероятности . . . . .	6

## 1.1. Основы теории вероятности

**Def. 1.1.1.**  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  – множество всех взаимно-исключающих исходов эксперимента (пространство элементарных событий)

$X \subseteq \Omega$  – событие

**Def. 1.1.2.** Дано  $\Omega, \mathcal{A} \subset 2^\Omega$ . Тогда  $\mathcal{A}$  называется алгеброй, если

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
3.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

Утверждение 1.1.3. Если  $\mathcal{A}$  – алгебра, то

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
3.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$
4.  $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}, \bigcap A_i \in \mathcal{A}$

Доказательство. 1.  $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$

2.  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{A}$ . Тогда  $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B \in \mathcal{A}$

3.  $A \setminus B = A \cap \bar{B} \in \mathcal{A}$

4. Доказывается по индукции. ■

**Def. 1.1.4.**  $\mathcal{A}$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
3.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

**Def. 1.1.5.** Пусть есть пространство  $\Omega$ , определенная на нём  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра и  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция над множеством. Тогда вероятностью называется функция из  $\mathcal{A}$  в  $\mathbb{R}$  такая, что

1.  $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $A_1, A_2, \dots : A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Перечисленные выше свойства называются **аксиомами теории вероятности**  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – вероятностное пространство.

Свойства вероятности:

1.  $P(\Omega) = 1$
2.  $P(\emptyset) = 0$
3. Если  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , то

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

4. Если  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j$ , то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

5.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

*Доказательство.*

$$P(\bar{A} \cup A) = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

■

6. Если  $A, B \in \mathcal{A}$ , то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

*Доказательство.*

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) = P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) + P((B \setminus A) \cup (A \cap B)) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

■

7.  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j=1}^n (A_i \cap A_j) + \dots$
8.  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

*Доказательство.*  $A_{k-1} \subset A_k$ . Рассмотрим  $A_k \setminus A_{k-1}$ . Пусть  $A_0 = \emptyset$ .

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) - P(A_{k-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) - P(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

■

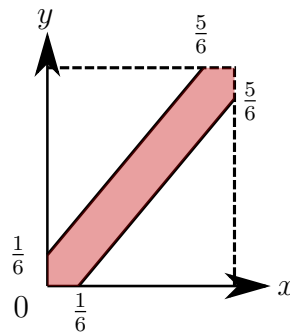
9.  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

**Пример 1.1.6.** Два человека приходят на место в промежуток от 12 до 13ч и ждут 10 минут прежде чем уйти. Найти вероятность того, что они встретятся.

**Решение 1.1.7.** Пусть  $t_1$  – время, когда приходит первый,  $t_2$  – время, когда приходит второй.

$$|t_1 - t_2| \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 \geq t_1 - \frac{1}{6} \\ t_2 \leq t_1 + \frac{1}{6} \end{cases}$$



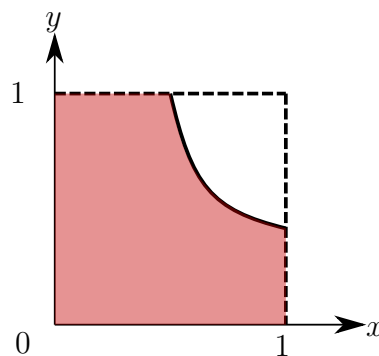
Тогда вероятность – площадь заштрихованной фигуры:

$$S = 1 - 2 \cdot \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}}{2} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

**Пример 1.1.8.** На  $[0, 1]$  выбираются два числа  $x, y$ . Найти вероятность того, что их произведение меньше  $\frac{1}{2}$

**Решение 1.1.9.**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2x}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Тогда искомая вероятность:

$$P(x \cdot y < \frac{1}{2}) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}$$

## 1.2. Условная вероятность

**Def. 1.2.1.** Вероятность события  $A$  при условии, что выполняется событие  $B$  равна

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Пример 1.2.2.** Есть урна, в которой лежит  $m$  белых и  $n$  черных шаров. Вытащим из неё два шара. Какова вероятность того, что они оба белые?

**Решение 1.2.3.**

$$P(\text{первый} - \text{белый}) = \frac{m}{m+n}, P(\text{второй} - \text{белый} | \text{первый} - \text{белый}) = \frac{m-1}{m+n-1}$$

$$P(\text{оба белые}) = \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m}{m+n}$$

Свойства условной вероятности:

1.  $P(\Omega|B) = 1$
2.  $P(\emptyset|B) = 0$
3.  $0 \leq P(A|B) \leq 1$
4.  $A \subset C \Rightarrow P(A|B) \leq P(C|B)$
5.  $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
6.  $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$
7.  $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

$$P((A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n) = P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Пример 1.2.4.** Бросаем 3 кубика. Найти вероятность того, что хотя бы на одном из них выпадет 1 при условии, что на всех выпали разные значения.

**Решение 1.2.5.**

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B) = 1 - \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

### 1.3. Независимость событий

**Def. 1.3.1.**  $A$  независимо от  $B$  ( $P(B) \neq \emptyset$ ), если  $P(A|B) = P(A)$

*Утверждение 1.3.2.* Если  $A$  независимо от  $B \Rightarrow B$  независимо от  $A$ .

*Доказательство.*

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P(B)} = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} = P(B)$$

■

**Def. 1.3.3.**  $A, B$  – независимые, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Def. 1.3.4.**  $A_1, \dots, A_n$  – независимы в совокупности, если

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

**Def. 1.3.5.**  $A_1, \dots, A_n$  – попарно-независимы, если

$$\forall i, j \rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

*Замечание 1.3.6.* Если  $A_1, \dots, A_n$  попарно-независимы, то они необязательно независимы в совокупности.

## 1.4. Формула полной вероятности

**Def. 1.4.1.** Пусть  $H_1, \dots, H_n$  – разбиение  $\Omega$ . Тогда  $H_1 \cup \dots \cup H_n = \Omega$  называется полной группой событий.

**Теорема 1.4.2.**  $H_1, \dots, H_n$  – полная группа событий и  $P(H_i) > 0 \forall i = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\forall A \rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

*Доказательство.*

$$A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup \dots \cup H_n) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$$

$$P((A \cap H_1) \cup \dots \cup (A \cap H_n)) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

■