Матанализ 2 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 25 апреля 2022 г. в 10:19

Содержание

Раздел #1: Интегральное исчисление

1.1. Неопределенный интеграл

Определение 1. $f:\langle A,B\rangle \to \mathbb{R}, F:\langle A,B\rangle \to \mathbb{R}$ называется первообразной функцией f, если F дифференцируема на $\langle A,B\rangle, F'(x)=f(x)\ \forall x\in\langle A,B\rangle$.

Теорема 1. Пусть $f,F,G:\langle A,B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Тогда G – первообразная $f \Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R}: F(x)+c=G(x)$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $H(x)=F(x)-G(x)$. Тогда

$$H'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow H'(x)=0 \Rightarrow H(x)\equiv \text{const}$$

$\Leftarrow$. $(F(x)+c)'=(G(x))' \Leftrightarrow f(x)=F'(x)=G'(x) \Rightarrow G$ – первообразная. □

Определение 2. $f:\langle A,B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Множество функций $\{F(x)+c, c\in\mathbb{R}\}$ называется неопределенным интегралом f.

$$\int f(x) = F(x)+c, c\in\mathbb{R}$$

Далее, $f:\langle A,B\rangle \to \mathbb{R}$.

1. Дифференцирование

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), x\in\langle A,B\rangle$$

2. Арифметические действия:

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F(x)+G(x)+c, c\in\mathbb{R}\}$$

$$\int f(x)\,dx + H(x) = \{F(x)+H(x)+c, c\in\mathbb{R}\}$$

$$\lambda\int f(x)\,dx = \{\lambda F(x)+c, c\in\mathbb{R}\}, \lambda\neq 0, \lambda\in\mathbb{R}$$

Утверждение 1. Если функция f непрерывна на $\langle A,B\rangle$, то у неё есть первообразная на $\langle A,B\rangle$.

Упражнение. $f(x)=\begin{cases}1, x\geqslant 0\\ -1, x<0\end{cases}$. Есть ли первообразная у этой функции?

Определение 3. $E \subset \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}$. Если F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ на E, то F – первообразная f на множестве E.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int a\,dx = ax + c, a \in \mathbb{R}$
2. $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x\,dx = e^x + c$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$
10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, a \neq 0$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, a > 0$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c, a \in \mathbb{R}$

Доказательство. Дифференцирование □

Пример. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ – неберущийся интеграл. $\mathrm{Si}(x)$ – интегральный синус (одна из первообразных, закрепленная при $x \to 0+$).

$$(\mathrm{Si}(x))' = \frac{\sin x}{x}$$

Теорема 2 (Линейность неопределенного интеграла). $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, имеют первообразные на $\langle A, B\rangle$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha, \beta \neq 0$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Доказательство. Пусть F и G – первообразные f и g на $\langle A, B\rangle$. Правая часть равенства: $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$.

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + c)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

□

Теорема 3 (Замена переменной). $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f на $\langle A, B\rangle$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c$$

Доказательство.

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

□

Замечание. $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x)$. Пусть $y = \varphi(x)$

$$\int f(y)dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Пример. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$. Пусть $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x}\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Следствие. Пусть в условиях теоремы φ имеет обратную функцию $\psi : \langle A, B\rangle \to \langle C, D\rangle$. Если $G(x)$ – первообразная функции $(f \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = G(\psi(x)) + c$$

Доказательство. Пусть F – первообразная f на $\langle A, B\rangle$. $F(\varphi(x))$ – первообразная $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ (по теореме). Рассмотрим $G(x)-F(\varphi(x))$ – постоянная (т.к. производная равна нулю). $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$. Тогда

$$G(\psi(y)) - F(y) = \text{const} \Rightarrow \int f(y)\,dy = G(\psi(y)) + c$$

$\square$

Пример. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Пусть $t = \sqrt{x}, t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = dt^2 = 2t\,dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = \int \left(\frac{2t+2}{t+1} - \frac{2}{t+1}\right) dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right) dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c$$

Пример. $\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\,d\sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$.
Иначе: $\int \sin x \cos x\,dx = -\int \cos x\,d\cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$.
Иначе: $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = \frac{-\cos 2x}{4} + c$.
Мораль сей басни такова: константы разные, а не $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$.

Теорема 4 (Формула интегрирования по частям). $f, g \in C^1\langle A, B\rangle$. Тогда

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Доказательство. H – первообразная $g \cdot f'$. Тогда

$$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x)$$

□

Замечание. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Пример. $\int xe^x\,dx$. Пусть $u = x, u' = 1, v' = e^x, v = e^x$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

Пример. $\int \ln x\,dx$. Пусть $u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = 1, v = x$.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = x\ln x - x + c$$

Упражнение. $\int e^x \cdot \sin x\,dx$ Пусть $f = \sin x, g = e^x$. Тогда

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \Leftrightarrow \int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

Пусть теперь $f = \cos x, g = e^x$. Тогда

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \Leftrightarrow \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

Отсюда

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Пример. Пусть $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}, n \in \mathbb{N}$. Выразим интеграл I_{n+1} через I_n для произвольного натурального n.
Обозначим $f(x) = \frac{1}{(x^2+a)^n}$ и $g(x) = x$. Тогда

$$df(x) = \left(\frac{1}{(x^2+a)^n}\right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx, dg(x) = dx$$

По формуле интегрирования по частям:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} - 2na\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1}$$

Откуда

$$2naI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a)^n}$$

Утверждение 2. Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

Рассмотрим простейшие дроби:

1. $\frac{a}{(x+p)^n}, n \in \mathbb{N}, a, p \in \mathbb{R}$
2. $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Интегралы от простейших дробей первого рода вычисляются по таблице. Для простейших дробей второго рода используется следующий алгоритм:

1. Если $p \neq 0$, то выделим полный квадрат и выполним замену $y = x + \frac{p}{2}$. Если $p = 0$, тогда

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = a\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n} + b\int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$$

2. Интеграл $\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n}$ можно вычислить с помощью замены $y = x^2+q$, т.к. $dy = 2x\,dx$.
3. Применяя к интегралу $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$ формулу понижения $n-1$ раз сведем его к интегралу I_1, который является табличным.

Пример (12 и 13 из таблицы).

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2|\right) + c$$

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Пусть $x = \operatorname{sh} t, dx = \operatorname{ch} t\,dt$. Тогда

$$\int \frac{\operatorname{ch} t\,dt}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t}\,dt = \int dt = t + c$$

Упражнение. Найди формулу для $(\operatorname{sh} t)^{-1}$

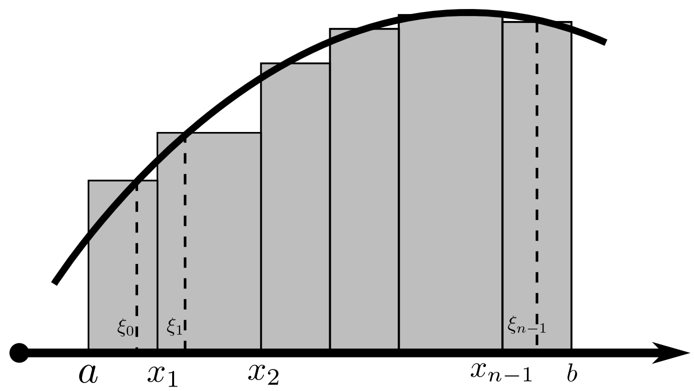
Неберущиеся интегралы:

- $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$
- $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$
- $\int \frac{dx}{\ln x}$
- $\int \frac{e^x}{x}\,dx$
- $\int \sin x^2\,dx$
- $\int \cos x^2\,dx$
- $\int e^{-x^2}\,dx$

1.2. Определенный интеграл Римана

Определение 4. $[a,b], a < b$. Набор точек $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ – разбиение (дробление) отрезка $[a,b]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. $\lambda = \lambda_\tau = \max_{k\in[0,n-1]} \Delta x_k$ – ранг дробления (мелкость), $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ – оснащение дробления τ. Пара (τ,ξ) называется оснащенным дроблением.

Определение 5. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ – суммы Римана (интегральные суммы).



Определение 6. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Число $I \in \mathbb{R}$ называют пределом интегральных сумм при ранге $\to 0$:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f,\xi) \quad (I = \lim_{\lambda\to 0} \sigma)$$

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$|\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \varepsilon$$

Замечание. Последовательность оснащенных дроблений $\{(\tau^{(i)}, \xi^{(i)})\}_{i=1}^{\infty} : \lambda^{(i)} \to 0$. $\forall \{\tau^{(i)}, \xi^{(i)}\} : \lambda^{(i)} \to 0\ \sigma_{\tau^{(i)}}(f, \xi^{(i)}) \to I$.

Определение 7 (Интеграл Римана). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Если $\exists \lim_{\lambda\to 0} \sigma = I$, то f называется интегрируемой по Риману на $[a,b]$, а число I называется интегралом f по $[a,b]$.
$R[a,b]$ – класс функций, интегрируемых по Риману на $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

1.3. Суммы Дарбу

Определение 8. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ – дробление $[a,b]$.

$$M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$$

Суммы

$$S = S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, s = s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются верхними и нижними интегральными суммами.

Замечание. Если f – непрерывна на $[a,b]$, то это две частные суммы из сумм Римана.

Замечание. f ограничена сверху $\Leftrightarrow$ S ограничена.

Свойства сумм Дарбу:

1. $S_\tau(f) = \sup\limits_\xi \sigma_\tau(f,\xi), s_\tau = \inf\limits_\xi \sigma_\tau(f,\xi)$

Доказательство. $M_k \geqslant f(\xi_k), k = 0, ..., n-1$. Тогда $M_k \Delta x_k \geqslant f(\xi_k)\Delta x_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow S_\tau(f) \geqslant \sigma_\tau$, т.е. S_τ – верхняя граница. Докажем, что она является точной верхней границей.
Если f ограничена на $[a,b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. На каждом кусочке разбиения $\exists \xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}] : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = S - \varepsilon$.
Если f не ограничена на $[a,b] \Rightarrow$ не ограничена на каком-то кусочке $[x_l, x_{l+1}]$. Фиксируем $A > 0$ и выберем ξ_k^* при $k \neq l$ произвольно, а для ξ_l^*

$$f(\xi_l^*) > \frac{1}{\Delta x_l}\left(A - \sum_{k\neq l} f(\xi_k^*)\Delta x_k\right)$$

Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > A \Rightarrow \sup_\xi \sigma = +\infty = S$$

□

2. При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя не уменьшится.

Доказательство. Докажем для верхних сумм при добавлении одной точки. $\tau : \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$. Добавим точку c в $[x_l, x_{l+1}] - T$ – новое дробление.

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + M_l \Delta x_l + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + (c - x_l)\cdot M' + (x_{l+1} - c)M'' + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

где $M' = \sup_{x\in[x_l,c]} f, M'' = \sup_{x\in[c,x_{l+1}]} f$. $M_l \geqslant M', M_l \geqslant M''$, т.к. $[x_l, c] \subset [x_l, x_{l+1}], [c, x_{l+1}] \subset [x_l, x_{l+1}]$.
Рассмотрим $S_\tau - S_T = M_l \Delta x_l - (c - x_l)M' - (x_{l+1} - c)M'' \geqslant M_l(x_{l+1} - x_l - c + x_l - x_{l+1} + c) = 0$.
Добавить больше точек можно по индукции. □

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней.

Доказательство. τ_1, τ_2 – разные дробления $[a,b]$. Докажем, что $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$. Возьмем $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда $s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}$ (по свойству 2). $\square$

Утверждение 3. $f \in R[a,b] \Rightarrow f$ ограничена на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть f не ограничена на $[a,b]$ сверху. Тогда $\forall \tau \Rightarrow \sup_\xi \sigma_\tau(f,\xi) = +\infty$. Тогда $\forall \tau$ и числа I $\exists$ оснащение $\xi' : \sigma_\tau(\xi') > I + 1 \Rightarrow$ никакое число I не является пределом интегральных сумм. $\square$

Определение 9. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Возьмем

$$I^* = \inf_\tau S_\tau \qquad I_* = \sup_\tau s_\tau$$

где I^* – верхний интеграл Дарбу, I_* – нижний интеграл Дарбу.

Замечание. $I^* \geqslant I_*$.

Замечание. f ограничена сверху $\Leftrightarrow I^*$ ограничена.

1.4. Критерии интегрируемости функции

Теорема 5 (Критерий интегрируемости функции). Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a,b] \Leftrightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $f \in R[a,b]$. Обозначим $I = \int_a^b f$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$:

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Переходя к супремуму и инфимуму, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда $S_\tau - s_\tau \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3} - I + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
$\Leftarrow$. Пусть $S_\tau - s_\tau \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0 \Rightarrow$ все суммы Дарбу конечны.

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau \Rightarrow 0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow I^* = I_*$ (т.к. это числа). Обозначим $I = I^* = I_*$.

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau, s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau \Rightarrow |I - \sigma_\tau| \leqslant S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta\ |I - \sigma_\tau| < \varepsilon$. □

Замечание. Если $f \in R[a,b] \Rightarrow s_\tau \leqslant \int_a^b f \leqslant S_\tau$.

Следствие. $f \in R[a,b] \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} S_\tau = \lim_{\lambda\to 0} s_\tau = \int_a^b f$

Доказательство. $0 \leqslant S_\tau - \int_a^b f \leqslant S_\tau - s_\tau$, $0 \leqslant \int_a^b f - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau$. □

Замечание. $\lim_{\lambda\to 0} S_\tau = I^*, \lim_{\lambda\to 0} s_\tau = I_*$.

Утверждение 4 (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману). $f \in R[a,b] \Leftrightarrow f$ ограничена на $[a,b]$ и $I_* = I^*$.

Утверждение 5 (Критерий Римана интегрируемости). $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \tau\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.

Определение 10. $f : D \to \mathbb{R}$. Величина

$$\omega(f)_D = \sup_{x,y\in D} (f(x) - f(y))$$

называется колебанием f на D. Из определений граней функции ясно, что

$$\omega(f)_D = \sup_{x\in D} f(x) - \inf_{y\in D} f(y)$$

Если задано τ отрезка $[a,b]$, то

$$\omega_k(f) = M_k - m_k$$

Тогда теорему можно записать:

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k = 0$$

Теорема 6 (Интегрируемость непрерывной функции). $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.

Доказательство. По теореме Кантора $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равномерна непрерывна на $[a,b]$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall t', t'' \in [a,b] : |t' - t''| < \delta\ |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

По теореме Вейерштрасса f достигает наибольшего и наименьшего значения на любом отрезке, содержащемся в $[a,b]$. Поэтому колебание f на всяком отрезке, длина которого меньше δ, будет меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, $\forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k$$

□

Теорема 7 (Интегрируемость монотонной функции). f монотонна на $[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.

Доказательство. Пусть f монотонно возрастает на $[a,b]$. Если $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ постоянна $\Rightarrow f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.
Если $f(a) < f(b)$. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Возьмем произвольное $\tau : \lambda_\tau < \delta$ на $[x_k, x_{k+1}]$. В силу монотонности f верно $\omega_k(f) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k))\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \varepsilon$$

□

Замечание. $f \in R[a,b]$. Если изменить значение f в конечном числе точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

Доказательство. $\widetilde{f}$ – отличается от f в точках $t_1, t_2, ..., t_m$. $|f|$ ограничена на $[a,b] \Rightarrow |\widetilde{f}|$ ограничена. $|f| \leqslant A$, возьмем $\widetilde{A} = \max\{A, |\widetilde{f}(t_1)|, |\widetilde{f}(t_2)|, ..., |\widetilde{f}(t_m)|\}$. В интегральных суммах для f и $\widetilde{f}$ отличаются не более $2m$ слагаемых, поэтому

$$|\sigma_\tau(f,\xi) - \sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)| \leqslant 2m(A + \widetilde{A})\lambda_\tau \xrightarrow[\lambda_\tau]{} 0$$

Поэтому предел $\sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)$ существует и равен пределу $\sigma_\tau(f,\xi)$. □

Теорема 8 (Интегрируемость функции и её сужения). 1. $f \in R[a,b], [\alpha,\beta] \subset [a,b] \Rightarrow f \in R[\alpha,\beta]$

2. Если $a < c < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $f \in R[a,c], f \in R[c,b]$, то $f \in R[a,b]$.

Доказательство. 1. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$ из критерия интегрируемости на $[a,b]$. τ_0 – дробление $[\alpha,\beta], \lambda_{\tau_0} < \delta$. Добавим точек до дробления $[a,b]$. Получим $\tau(\lambda_\tau < \delta)$.

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=l}^{m-1} \omega_k(f)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon$$

2. Пусть f не постоянна, т.е. $\omega(f)_{[a,b]} > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta_1, \delta_2 : \forall \tau_1 : \lambda_{\tau_1} < \delta_1, \forall \tau_2 :$

$\lambda_{\tau_2} < \delta_2$

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\}$. Пусть τ – дробление $[a,b], \lambda_\tau < \delta$. Точка $c \in [x_l, x_{l+1})$. Обозначим $\tau' = \tau \cup \{c\}, \tau_1 = \tau' \cap [a,c], \tau_2 = \tau' \cap [c,b]$

$$S_\tau - s_\tau \leqslant S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_1} + \omega_l(f)\delta < \varepsilon$$

□

Определение 11. Функция $f : [a,b] \to R$ называется кусочно-непрерывной на $[a,b]$, если множество её точек разрыв пусто или конечно (и все разрывы первого рода)

Следствие. f – кусочно-непрерывная на $[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$

Доказательство. Возьмём точки $a_1, a_2, \dots, a_m$ (может $a_1 = a$ и/или $a_m =$ b). Рассмотрим отрезки $[a_k, a_{k+1}]$. f непрерывна на (a_k, a_{k+1}) и $\exists$ конечные $\lim\limits_{x \to a_k+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a_{k+1}-} f(x) \Rightarrow f \in R[a_k, a_{k+1}] \Rightarrow$ по теореме о сужении $f \in R[a,b]$ □

Определение 12. Множество X называется не более, чем счетным, если оно конечно или счетно.

Определение 13. $E \subset \mathbb{R}$ – имеет нулевую меру, если для $\forall \varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых $< \varepsilon$.

$$\left(\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i)\right)$$

Пример. Множество из одной точки.

Упражнение. Чему равна мера $\mathbb{N}$?

Теорема 9 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману). Пусть $f : [a,b] \to R$.
$f \in R[a,b] \Leftrightarrow f$ ограничена и множество точек разрыва имеет нулевую меру.

Теорема 10 (Арифметические действия над интегрируемыми функциями). $f, g \in \mathbb{R}[a,b]$. Тогда

1. $f + g \in R[a,b]$
2. $f \cdot g \in R[a,b]$

3. $\alpha f \in R[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$
4. $|f| \in R[a,b]$
5. Если $\inf\limits_{[a,b]}|g| > 0$, то $\dfrac{f}{g} \in R[a,b]$

Доказательство. 1. $D \subset [a,b]$. $x, y \in D$
$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |f(x)+g(y)-f(y)-g(y)| \leqslant |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leqslant \omega_D(f)+\omega_D(g)$
$\omega_D(f+g) \leqslant \omega_D(f)+\omega_D(g)$
$\underset{[x_k,x_{k+1}]}{\omega}(f+g) \leqslant \underset{[x_k,x_{k+1}]}{\omega}(f) + \underset{[x_k,x_{k+1}]}{\omega}(g)$
$\omega_k(f+g) \leqslant \omega_k f + \omega_k g$

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f+g)\delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k f\Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k g\Delta x_k (\to 0, \lambda \to 0)$$

$\Rightarrow f+g \in R[a,b]$

2. $|fg(x)-fg(y)| \leqslant |f(x)g(x)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(y)g(y)| \leqslant |g(x)||f(x)-f(y)|+$
$+|f(y)||g(x)-g(y)| \leqslant A|f(x)-f(y)|+B|g(x)-g(y)|$ (т.к. $R[a,b] \Rightarrow$ ограничена на $[a,b]$)

3. $g(x) = \alpha$

4. $||f(x)|-|f(y)|| \leqslant |f(x)-f(y)|$
$|\omega_k|f|| \leqslant |\omega_k f|$

5. $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$. Докажем, что $\dfrac{1}{g} \in R[a,b]$.
$0 < m = \inf\limits_{[a,b]}|g|$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \left|\frac{g(x)-g(y)}{g(x)g(y)}\right| \leqslant \frac{g(x)-g(y)}{m^2} \Leftrightarrow \omega_k\left(\frac{1}{g}\right) \leqslant \frac{\omega_k(g)}{m^2}$$

□

Пример. 1. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$
$x^2 \in C[a,b] \Rightarrow x^2 \in R[a,b]$.
Рассмотрим какую-нибудь интегральную сумму: $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 = \lim\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

2. $\int_0^1 e^x dx-$ упражнение

3. $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $D \notin R[a,b], a < b$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(D)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a \underset{\lambda \to 0}{\not\to} 0$$

□

4. $r(x) \begin{cases} \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{дробь несократима} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$r(x)$ непрерывна в каждой точке, разрывна в каждой рациональной.
$r(x) \in R[0,1]$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ Рациональные числа из [0,1] со знаменателем $\leqslant N$, конечное число $= C_N$, множество X.
Возьмём $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4C_N}$ и дробление $\tau : \lambda_\tau < \delta$
Точки X попадут в не более, чем $2C_N$ отрезков дробления. В отрезках, где нет точек из X наибольшее значение $< \dfrac{1}{N}$
$s_\tau(r) = 0$

$$S_\tau(r) = \sum_{k:M_k \geqslant \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k \sum_{k:M_k < \frac{1}{N}} M_l \Delta x_k \leqslant \underbrace{1 \cdot 2C_n \cdot \delta}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{1}{N}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$S_\tau(r) - s_\tau(r) = S_\tau(r) \underset{\lambda_r \to 0}{\to} 0 \Rightarrow r \in R[0,1]$ и $\displaystyle\int_0^1 r(x)\,dx = 0$ □

Если $f \in R_D$ $g \in R[a,b]$, то $f(g) \in R[a,b]$? ($D-$ множество значений g)

Ответ: нет. Пример: $f(y) = \begin{cases} 1, y \in [0,1] \\ 0, y = 0 \end{cases}$ и $g(x) = r(x)$ на $[0,1]$

$f(r(x)) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = D(x) \notin R[0,1]$

Теорема 11 (Интегрируемость композиции). $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b], f : [a,b] \to \mathbb{R}$,
$f(\varphi) : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$
$\varphi \in R[\alpha,\beta], f \in C[a,b]$. Тогда $f \circ \varphi \in R[\alpha,\beta]$

Доказательство. Например, из критерия Лебега. □

1.5. Свойства интеграла Римана

1. $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$

2. $\int_a^a f = 0$ ($\forall f$ на вырожденном отрезке $f \in R[a,a]$)

Свойства:

- Аддитивность интеграла по отрезку:
$a, b, c \in \mathbb{R},\ f \in R[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Доказательство. $f \in R[a,b] \Rightarrow f \in \mathbb{R}[a,c], f \in R[c,b], \{\overline{\tau}^{(n)}, \overline{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\overline{\overline{\tau}}^{(n)}, \overline{\overline{\xi}}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательности оснащенных дроблений $[a,c]$ и $[c,b]$ (равномерных, т.е. $\overline{\lambda} = \frac{c-a}{n}, \overline{\overline{\lambda}}$)
$\tau^{(n)} = \overline{\tau}^{(n)} \cup \overline{\overline{\tau}}^{(n)}$ – дробление $[a,b]$
$\xi^{(n)} = \overline{\xi}^{(n)} \cup \overline{\overline{\xi}}^{(n)}$ – оснащение $\tau^{(n)}$
$\sigma = \overline{\sigma} + \overline{\overline{\sigma}}$ при $n \to \infty$

$$\underbrace{\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f}_{\text{по доказанному}} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

Все остальные случаи – аналогично. □

- $f \equiv \alpha$ при $x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f = \alpha(b-a)$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \alpha(b-a)$$

□

- Линейность интеграла: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a,b]$
$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b + \beta \int_a^b g$

Доказательство. $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$
$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sigma_\tau(\alpha f) + \sigma_\tau(\beta g)$ и переход к пределу. □

- Монотонность интеграла: $a < b,\ \ f, g \in R[a,b]$ и $f \leqslant g$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

Доказательство. $\sigma_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(g)$ □

Следствие. $a < b, f \in R[a,b]$, если $f \leqslant M \in \mathbb{R}$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f \leqslant M(b-a)$, если $f \geqslant m$ на $[a,b]$то $\int_a^b f \geqslant m(b-a)$

Следствие. $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$

- $a < b, \underset{f \geqslant 0 \text{ на } [a,b]}{f \in R[a,b]}$ и $\exists c \in [a,b] : f(c) > 0$ и f непрерывна в точке С.

Тогда $\int_a^b f > 0$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in \underbrace{[c-\delta; c+\delta] \cap [a,b]}_{[\alpha,\beta]} : |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$f(x) > f(c) - \varepsilon = \dfrac{f(c)}{2} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f \geqslant \dfrac{f(c)}{2}(\beta - \alpha)$

$$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^b \geqslant \int_\alpha^\beta f \geqslant \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha) > 0$$

□

Замечание. Таким же образом строгий знак в монотонности интеграла.

Замечание. $f \in R[a,b], f > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$

- $a < b, f \in R[a,b]$

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

Доказательство. $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ □

Если не знаем, что $a \geqslant b$ или $b \geqslant a$

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \left| \int_a^b |f| \right|$$

1.6. Свойства интеграла, интегральные теоремы о средних, формулы Тейлора и Валлиса

Теорема 12. $f, g \in R[a,b], g \geqslant 0$ на $[a,b], m \leqslant f \leqslant M$. Тогда $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$

Доказательство. $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ на $[a,b]$

$$m\int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M\int_a^b g$$

Если $\int_a^b g = 0$, то $\exists \mu \in [m,M] : 0 = \mu \cdot 0$

Если $\int_a^b g > 0$, то $m \leqslant \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leqslant M$

Возьмём $\mu = \dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ □

Замечание. Для $g \leqslant 0$ тоже верно.

Следствие. 1. $f \in C[a,b], g \in R[a,b], g \geqslant 0($ или $g \leqslant 0)$.

Тогда $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса: $\exists m = \min\limits_{[a,b]} f$ и $M = \max\limits_{[a,b]} f$

Подберём $\mu \in [m,M]$ по предыдущей теореме. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists c \in [a,b] : f(c) = M$ □

2. $f \in R[a,b], m, M \in \mathbb{R} : m \leqslant f \leqslant M$ на $[a,b]$. Тогда $\exists \mu \in [m,M] : \int_a^b f = \mu(b-a)$

Доказательство. $g \equiv 1$ в теореме. □

3. $f \in C[a,b]$. Тогда $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f = f(c)(b-a)$

Доказательство. $g \equiv 1$ в следствии 1. □

Замечание. Теорему и следствия называют ещё теоремами о средних. Почему?

Определение 14. $f \in R[a,b], a < b$

$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$ – интегральное среднее f на $[a,b]$

Если возьмём равномерное разбиение $[a,b]$, то $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \dfrac{b-a}{n}$

То есть $\dfrac{\sigma_n}{b-a} \to \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$, где $\dfrac{\sigma_n}{b-a}$ – среднее арифметическое значений функции в точках ξ_k

Определение 15. $E \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток (может быть и лучом), $f : E \to \mathbb{R}$, f – интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в E. $a \in E$.

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, x \in E$ – интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 13 (Барроу, об интеграле с переменным верхним пределом). $E \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток, $f : E \to \mathbb{R}$, интегрируема на каждом отрезке из E, $a \in E$, $\Phi(x) = \int_a^x f, x \in E$. Тогда

1. $\Phi(x) \in C(E)$
2. Если f непрерывна в точке $x_0 \in E$, то Φ – дифференцируема в точке x_0, $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство.

1. Пусть $x_0 \in E$, подберем $\delta > 0 [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap E = [A, B]$
$|f|$ на $[A, B]$ ограничена числом M. $\Delta x : x_0 + \Delta x \in [A, B]$
$|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| = \left|\int_a^{x_0+\Delta x} f - \int_a^{x_0} f\right| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f|\right| \leqslant |\Delta x| \cdot M \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$
2. Проверим, что $\dfrac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x_0)$
Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0 : \forall t : |t - x_0| < \delta \ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ (по непрерывности.)
$\left|\dfrac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\dfrac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt = f(x_0)\right| = \left|\dfrac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| <$
$< \dfrac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta x| = \varepsilon$, $k = \int_a^b k \cdot \dfrac{1}{b-a}$

□

Пример. $\Phi(x) = \int_1^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt, x > 1$
$\Phi'(x) = \dfrac{\sin x}{x} \Rightarrow \mathrm{Si}'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Упражнение. $\int \mathrm{Si}(x)\,dx = ?$

Следствие. Функция, непрерывная на промежутке имеет на нём первообразную. Ей является интеграл с переменным верхним пределом.

Определение 16. $\psi(x) = \int_x^a f$ (Условия на f и a прежние) – интеграл с переменным нижним пределом.
$\Rightarrow \psi'(x) = -f(x)$ (Если f непрерывна).

Теорема 14 (Формула Ньютона-Лейбница). $f \in R[a, b], F-$ первообразная f на $[a, b]$. Тогда:
$\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$:

$F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$

По теореме Лагранжа $\exists \xi_{k,n} \in (x_k, x_{k+1})$

$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_{k,n})(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_{k,n})\Delta x_k$

$\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k,n})\Delta x_k = \lim(F(b) - F(a)) = F(b) - F(a)$ □

Замечание. $\int_a^b f = F\Big|_a^b$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^b$ – двойная подстановка.

Замечание. $G(x) = F(x) + C$ – тоже первообразная.

$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$

Пример. $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Пример. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$ - чушь!

1. $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ – не везде на $[-1, 1]$
2. $\frac{1}{x^2}$ не интегрируема на $[-1; 1]$, т.к. не ограничена.

Замечание. Обобщение теоремы.

$f \in R[a; b], F \in C[a, b]$, F – первообразная f на $[a, b]$ за исключением некоторого конечного числа точек.

Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. Пусть $\alpha_0 = a, \alpha_m = b$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ – все точки на (a, b), в которых $F' \neq f$

$\int_a^b f = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \sum\limits_{k=0}^{m-1}(F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)) = F(b) - F(a).$

(Рассмотрим $\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_{\alpha_k+\varepsilon}^{\alpha_{k+1}-\varepsilon} f = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}(F(\alpha_{k+1} - \varepsilon) - F(\alpha_k + a)) = F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k))$ □

Замечание. Без непрерывности F не получится: на $[-1, 1]$

$F(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}, f(x) = 0$

$0 = \int_{-1}^{1} f \neq F\Big|_{-1}^{1} = 2$

Замечание. $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
F дифференцируема, F' интегрируема.

Замечание. $F' \in R[a,b]$ – существенно.

$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

F' не ограничена, а значит не интегрируема.

Замечание. Интегрируемость $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ первообразной.
$\not\Rightarrow \operatorname{sign} x$ интегрируема на [-1. 1], но первообразной нет.
$\not\Leftarrow$ Предыдущее замечание.

Теорема 15 (Интегрирование по частям в определенном интеграле.). f, g – дифференцируемы на $[a,b]$, $f', g' \in R[a,b]$. Тогда

$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$

Доказательство. f, g– дифференцируемы $\Rightarrow$ непрерывны $\Rightarrow$ интегрируемы.

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f \in R[a,b]$

$\int_a^b (fg)' = fg\Big|_a^b$

$\int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + g'f)$ $\square$

Замечание. $\int_a^b f\,dg = fg\Big|_a^b - \int_a^b g\,df$

$dg(x) = g'(x)\,dx$

Теорема 16 (Замена переменной в определенном интеграле). $\varphi : [\alpha, \beta] \to [A, B]$, дифференцируема на $[\alpha, \beta], \varphi' \in R[\alpha, \beta]$

$f \in C[A;B]$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\cdot\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

Доказательство. $f(\varphi) \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow f(\varphi) \in R[a,b] \Rightarrow f(\varphi)\cdot\varphi' \in R[a,b]$
Пусть F - первообразная f на $[A,B] \Rightarrow F(\varphi)$ – первообразная $f(\varphi)\cdot\varphi'$ на $[\alpha,\beta]$
$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\cdot\varphi' = F(\varphi)\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$ □

Упражнение. Пусть f четная функция. Доказать, что $\int_{-a}^a = 2\int_0^a f$
Пусть f нечетная функция. Доказать, что $\int_{-a}^a f = 0$

Теорема 17 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме). $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}\langle A;B\rangle, a, x \in \langle A;B\rangle$. Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$

Доказательство. По индукции:
База: $n = 0 : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$ (Формула Ньютона-Лейбница)
Пусть верно для $n-1$. Докажем для n.
$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt$. Проинтегрируем остаток по частям: $u = f^{(n)}(t), u' = f^{(n+1)}(t), v' = (x-t)^{n-1}, v = \frac{(x-t)^n}{n}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\left(-f^{(n)}(t)\cdot\frac{(x-t)^n}{n}\Big|_{t=a}^x + \int_a^x \frac{f^{n+1}(t)(x-t)^n}{n}\,dt\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

□

Замечание. $\exists c :\in (a,x)\ \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = f^{(n+1)}(c)\int_a^x (x-t)^m\,dt = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$
(Т.е. остаток в форме Лагранжа следует отсюда)

Последовательность $\{x_n\} : x_i \in \mathbb{Q}, x_n \to \pi$

Лемма 1. $m \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cdot \sin x\, dx = -\sin^{m-1} \cdot \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x\, dx =$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx$$

$$I_m = (m-1)\cdot(I_{m-2} - I_m) \Rightarrow I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_m = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2}, m - \text{ четно} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot 1, m - \text{ нечётно} \end{cases}$$

Упражнение. $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ - непрерывна.
Доказать, что $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx$

Теорема 18 (Формула Валлиса). $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$

Доказательство. $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2}) \quad \sin x \in (0;1)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin^{2n+1} < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$< \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!\cdot(2n)!!)}{((2n-1)!!)^2}$$

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

$$x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \Rightarrow \pi < x_n < \frac{2n+1}{2n}\pi, \Rightarrow \ x_n \to \pi$$ □

Теорема 19 (Вторая теорема о среднем для интегралов, Бонне). $f \in C[a,b]$, $g \in C^1[a,b], g$ монотонна на $[a,b]$. Тогда $\exists c \in [a,b]$:

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f$$

Доказательство. $F(x) = \int_a^x f, \quad F' = f, F(a) = 0$

$$\int_a^b fg = Fg\Big|_a^b - \int_a^b - \int_a^b Fg' = g(b)\int_a^b f - \int_a^b Fg' =$$
$$= g(b)\int_a^b f - \int_a^c f \cdot (g(b) - g(a)) = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f$$

□

Упражнение. Оценить $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$

1. По первой теореме о среднем.
2. По второй теореме о среднем.

1.7. Интегральные неравенства

Теорема 20 (Неравенство Йенсена). f – выпукла и непрерывна на $\langle A, B\rangle$, $\varphi : [a, b] \to \langle A, B\rangle$ – непрерывна, $\lambda : [a, b] \to [0, +\infty)$ – непрерывна, $\int_a^b \lambda = 1$. Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda\varphi\right) \leqslant \int_a^b \lambda \cdot f(\varphi)$$

Доказательство. Обозначим $c = \int_a^b \lambda\varphi, \quad E = \{x \in [a, b] : \lambda(x) > 0\}$,
$m = \inf\limits_E \varphi, \quad M = \sup\limits_E \varphi$ (m и M конечны по теореме Вейерштрасса)
Если m = M, то есть φ постоянна на E, то $c = m$ и обе части неравенства равны $f(m)$.
Пусть $m < M$. Тогда $c \in (m, M)$ и, следовательно, $c \in (A, B)$. Функция f имеет в точке c опорную прямую; пусть она задается уравнением $y = \alpha x + \beta$. По определению опорной прямой $f(c) = \alpha c + \beta$ и $f(t) \geqslant \alpha t + \beta$ при всех $t \in \langle A, B\rangle$. Поэтому

$$f(c) = \alpha c + \beta = \alpha\int_a^b \lambda\varphi + \beta\int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda \cdot (\alpha\varphi + \beta) \leqslant \int_a^b \lambda \cdot (f \circ \varphi)$$

□

Замечание. Строгое неравенство, если f строго выпукла и $\varphi \not\equiv \mathrm{const}$.

Теорема 21 (Неравенство Гельдера). $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \in C[a, b]$. Тогда

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Пусть $x_k = \frac{k(b-a)}{n} + a, \xi_k = x_k$. Обозначим $a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}, b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow a_k b_k = f(x_k)g(x_k)\Delta x_k$. Тогда

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)g(x_k)\Delta x_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)|^p \Delta x_k\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Выполним предельный переход:

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)\frac{1}{p} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)\frac{1}{q}$$

$\square$

Следствие (Неравенство Коши-Буняковского). $f, g \in C[a,b] \Rightarrow \left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$

Теорема 22 (Неравенство Минковского). $f, g \in C[a,b], p \geqslant 1$.

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Определение 17. Пусть $f \in C[a,b]$.

1. Величина
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$
называется интегральным средним арифметическим функции f на $[a,b]$.
2. Если $f > 0$, то величина
$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)$$
называется интегральным средним геометрическим функции f на $[a,b]$.

Замечание. Интегральное среднее геометрическое есть пределы при $n \to \infty$ последовательности

$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} f(x_k)} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k)\right) = \exp\left(\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k)\Delta x_k\right)$$

при $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$.

Теорема 23 (Об интегральных средних). $f \in C[a,b], f > 0$. Тогда

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Доказательство. Предельный переход в неравенстве для сумм, либо применить неравенство Йенсена для $\ln x$. □

1.8. Несобственные интегралы

Определение 18. f локально интегрируема (по Риману) на промежутке E, если она интегрируема на каждом отрезке из E.

Замечание. Непрерывность влечет локальную интегрируемость.

Определение 19. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty, f \in R_{loc}[a,b]$. Тогда $\int_a^{\to b} f$ – несобственный интеграл.

$$\lim_{t\to b-}\int_a^t f = \int_a^{\to b} f$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение 20. Несобственный интеграл называется сходящимся, если из $\mathbb{R}$.

Определение 21. Аналогично, для $-\infty \leqslant a < b < +\infty, f \in R_{loc}(a,b]$

$$\int_{\to a}^b f = \lim_{t\to a+}\int_t^b f$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 24 (Критерий Больцано-Коши сходимости интегралов). Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty, f \in R_{loc}[a,b)$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta \in (a,b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b)\ \left|\int_{t_1}^{t_2} f\right| < \varepsilon$$

Доказательство. $\Phi(t) = \int_a^t f$. $\int_a^b$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim_{t\to b-}\Phi(t)$. Согласно критерию Больцано-Коши существования предела функции

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta \in (a,b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b)\ |\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| < \varepsilon$$

и по аддитивности интеграла $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f$. □

Замечание. Расходимость $\int_a^b f \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\ \forall\Delta \in (a,b)\ \exists t_1, t_2 \in (\Delta, b)\ \left|\int_{t_1}^{t_2} f\right| \geqslant \varepsilon$

Замечание. Запись:

$$\int_a^b f = \lim_{t\to b-}\int_a^t f = \lim_{t\to b-}(F(t) - F(a)) = F(b-) - F(a)$$

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty}, \alpha \neq 1 \\ \ln x\big|_1^{+\infty}, \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Пример. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty, \alpha \geqslant 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1. \end{cases}$

1.8.1. Свойства несобственного интеграла

Будем считать, что f локально интегрируема на рассматриваемых промежутках.

1. **Аддитивность по промежутку.** Если $\int_a^b f$ сходится, то $\forall c \in (a,b)$ интеграл $\int_c^b f$ тоже сходится и

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

В обратную сторону, если при $c \in (a,b)$ интеграл $\int_c^b f$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f$.

Доказательство. $\forall t \in (a,b)$ $\int_a^t f = \int_a^c f + \int_c^t f$ – по аддитивности определенного интеграла. Переидем к пределу при $t \to b-$ предел левой части и правой части существует или не существует одновременно. ☐

2. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\underbrace{\int_t^b f \xrightarrow[t\to b-]{} 0}_{\text{остаток интеграла}}$.

Доказательство.

$$\int_t^b f = \int_a^b f - \int_a^t f \xrightarrow[t\to b-]{} \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

☐

3. **Линейность несобственного интеграла.** Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то интеграл $\int_a^b(\alpha f + \beta g)$ сходится и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g$$

Доказательство. Для доказательства надо перейти к пределу в равенстве для частичных интегралов

$$\int_a^t (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^t g$$

$\square$

Замечание. Если интеграл $\int_a^b f$ расходится, а интеграл $\int_a^b g$ сходится, то интеграл $\int_a^b (f+g)$ расходится. Действительно, если $f+g$ сходится, то сходится и интеграл от $f = (f+g)-f$ (?!).

4. **Монотонность несобственного интеграла.** Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ существуют в $\overline{R}$, $f \leqslant g$ на $[a,b)$, то
$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

Доказательство. Переидем к пределу в неравенстве для частичных пределов

$$\int_a^t f \leqslant \int_a^t g$$

$\square$

Замечание. Аналогично, с помощью предельного перехода, на несобственные интегралы переносятся неравенства Йенсена, Гельдера, Минковского.

5. **Интегрирование по частям в несобственном интеграле.** Пусть f, g дифференцируемы на $[a,b)$, $f', g' \in R_{loc}[a,b)$. Тогда
$$\int_a^b fg' = fg\big|_a^b - \int_a^b f'g$$
Если два из этих трех пределов конечны, то третий предел также существует и конечен.

Доказательство. Устремим t к b слева в равенстве

$$\int_a^t fg' = fg\big|_a^t - \int_a^t f'g$$

$\square$

6. **Замена переменной в несобственном интеграле.** Пусть $\varphi : [\alpha,\beta) \to [A,B)$ – дифференцируема на $[\alpha,\beta)$, $\varphi' \in R_{loc}[\alpha,\beta)$, существует $\varphi(\beta-) \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \in C[A,B)$. Тогда
$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$$
Опять же, если существует один из интегралов, то существует и другой.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t) = \int_{\alpha}^{t} (f \circ \varphi)\varphi', \quad \psi(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^{y} f$$

По формуле замены переменной в собственном интеграле

$$\Phi(t) = \psi(\varphi(t))$$

1. Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = I \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажем, что $\exists \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\varphi' = I$, т.е. $\Phi(t) \xrightarrow[t\to\beta-]{} I$. Возьмем $\{t_n\} : t_n \to \beta, t_n < \beta$. Тогда $\varphi(t_n) \to \varphi(b-), \varphi(t_n) \in [A, B)$. Поэтому $\Phi(t_n) = \psi(\varphi(t_n)) \to I$. В силу произвольности выбора $\{t_n\}$, $\Phi(t) \to I$ при $t \to \beta-$.
2. Пусть существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi' = J \in \overline{R}$. Докажем, что интеграл $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$ существует, и тогда по пункту 1 будет следовать, что он равен J. Если $\varphi(\beta-) \in [A, B)$, то интеграл собственный. Пусть $\varphi(\beta-) = B$. Возьмем $\{y_n\}, y_n \in [A, B), y_n \to B$. Не уменьшая общности, можно считать, что $y_n \in [\varphi(\alpha), B)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = y_n$ (по теореме Больцано-Коши).
   Докажем, что $\gamma_n \to \beta$. Пусть $\beta' \in [\alpha, \beta)$. Т.к. $\max_{[\alpha,\beta']} \varphi < \beta$, а $\varphi(\gamma_n) \to B$, то, начиная с некоторого номера, $\gamma_n \in (\beta', \beta)$. Поэтому $\gamma_n \to \beta$, откуда $\psi(y_n) = \Phi(\gamma_n) \to J$.

$\square$

Пример. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$. Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t, \cos x \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$. Если $x = \pi$, то $t = +\infty$. Тогда

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot 2 + 1 - t^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+3} =$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Замечание. $a < b \in \mathbb{R}$. Пусть $x = b - \frac{1}{t}$.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}\, dt$$

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \cos x\, dx = \sin x\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \sin x - \sin 1 \text{ — не существует}$$

1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов

Лемма 2. $f \in R_{loc}[a,b), f \geqslant 0$. Тогда $\int_a^b f$ сходится $\Leftrightarrow F(t) = \int_a^t f$ на $[a,b)$ ограничена сверху.

Доказательство. $F(t)$ возрастает на $[a,b)$ $\left(F(t_2) - F(t_1) \underset{t_1<t_2}{=} \int_{t_1}^{t_2} f \geqslant 0\right)$.

$\exists \lim\limits_{t\to b-} F(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow F$ возрастает и F ограничена сверху. □

Замечание. Если $f \geqslant 0$, то $\int_a^b f \in \overline{R}$.

Теорема 25 (Признак сравнения). $f, g \in R_{loc}[a,b), f, g \geqslant 0$

$$f(x) = O(g(x)) \qquad \text{при } x \to b-$$

Тогда

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится.
2. Если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство. 1. По определению O-большого найдутся такие $\Delta \in (a,b)$ и $K > 0$, что $f(x) \leqslant Kg(x)$ при всех $x \in [\Delta, b)$. Следовательно,

$$\int_\Delta^b f \leqslant K \int_\Delta^b g < +\infty$$

то есть остаток интеграла $\int_a^b f$ сходится, а тогда и сам интеграл $\int_a^b f$ сходится.

2. Если бы интеграл $\int_a^b g$ сходился, то по пункту 1 сходился бы и интеграл $\int_a^b f$.

□

Следствие (Признак сравнения в предельной форме). $f, g \in R_{loc}[a;b), f \geqslant 0, g > 0$ и $\exists \lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in [0;+\infty]$. Тогда

1. Если $l \in [0,+\infty)$ и $\displaystyle\int_a^b g$ сходится, то $\displaystyle\int_a^b f$ сходится
2. Если $l \in (0,+\infty]$ и $\displaystyle\int_a^b f$ сходится, то $\displaystyle\int_a^b g$ сходится
3. Если $l \in (0,+\infty)$, то $\displaystyle\int_a^b f$ и $\displaystyle\int_a^b g$ сходятся или расходятся одновременно

Доказательство. 1. $\dfrac{f}{g}$ ограничено в $(b-\varepsilon; b) \Rightarrow f(x) = O_b(g(x))$ при $x \to b- \Rightarrow$ по теореме $\displaystyle\int_a^b f$ сходится

2. Т.к. $l > 0$, то $f > 0$ в $(b - \varepsilon; b)$. Тогда поменяем f и g местами в п.1

3. Следует из пунктов 1 и 2.

$\square$

Следствие. Интегралы от неотрицательных эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно.

Упражнение. $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha ln^7 x}$

Пример. Докажем, что $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ сходится $\not\Rightarrow f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

Доказательство. $E = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}; k + \frac{1}{k^2(k+1)}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{R} \backslash E \\ k, x = k \\ \text{линейно и непрерывном соединим точки}, x \in E \end{cases}.$$

$$\int_0^{+\infty} f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^N \int_{k-\frac{1}{k^2(k+1)}}^{k+\frac{1}{k^2(k+1)}} f(x)dx = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} k \cdot \frac{2}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to\infty}{\to} 1$$

$\square$

Замечание. Можно построить пример с $g > 0$. $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{x^2}$

1.9. Интегралы от знакопеременных функций

Определение 22. $-\infty < a < b \leqslant +\infty, f \in R_{loc}[a; b)$

$\displaystyle\int_a^b f$ сходится абсолютно, если сходится $\displaystyle\int_a^b |f|$

Замечание. Если $\displaystyle\int_a^b f$ и $\displaystyle\int_a^b g$ сходится абсолютно, то $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится абсолютно $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Доказательство. $|\alpha f + \beta g| \leqslant |\alpha| \cdot |f| + |\beta| \cdot |g|$ + признак сравнения для неотрицательных функций.

$\square$

Замечание. Если $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

Лемма 3. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. $\int_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a;b)\ \int_\Delta^b |f| < \varepsilon$
Тогда $\left|\int_\Delta^b f\right| < \int_\Delta^b |f| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^\Delta f + \int_\Delta^b f$ сходится по критерию Больцано-Коши. □

Определение 23.

$$x_+ = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \quad \text{– положительная часть } x$$

$$x_- = \max\{-x, 0\} = \begin{cases} 0, x > 0 \\ -x, x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{– отрицательная часть } x$$

$$x_+ - x_- = x \Rightarrow x_+ = \frac{|x| + x}{2}$$

$$x_+ + x_- = |x| \Rightarrow x_- = \frac{|x| - x}{2}$$

$0 \leqslant x_\pm \leqslant |x|$, $f_+ = \max\{f; 0\}$, $f_- = \max\{-f; 0\}$

Доказательство. $\int_a^b |f|$ сходится $\underset{0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|}{\Rightarrow} \int_a^b f_+$ и $\int_a^b f_-$ – сходятся $\Rightarrow$
$\underset{f = f_+ - f_-}{\Rightarrow} \int_a^b f$ сходится □

Замечание. Обратное утверждение к лемме неверно: $\int_a^b f$ сходится $\not\Rightarrow \int_a^b |f|$ сходится.

Определение 24. Если $\int_a^b f$ сходится, а $\int_a^b |f|$ расходится, то $\int_a^b f$ называют условно сходящимся.

Замечание. $\int_a^b f$ сходится абсолютно, $\int_a^b g$ сходится условно $\Rightarrow \int_a^b (f+g)$ сходится условно, т.к. $g = (f+g) - f$.

Теорема 26 (Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов). $f \in$

$C[a;b), g \in C^1[a;b], g$ монотонна.

1. **Признак Дирихле.** Если функция $F(t) = \int_a^t f$ ограничена, а $g(x) \xrightarrow[x \to b-]{} 0$, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.
2. **Признак Абеля.** Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, а g ограничена, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.

Доказательство. 1. Проинтегрируем по частям:

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg\Big|_a^b - \int_a^b Fg'$$

Двойная подстановка обнуляется, поэтому сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла $\int_a^b Fg'$. Докажем, что $\int_a^b Fg'$ сходится абсолютно.

$$\int_a^b |Fg'| \leqslant \underset{|F| \leqslant K}{K} \int_a^b |g'| = K \left| \int_a^b g' \right| = K \cdot |g\Big|_a^b| = K|g(a)|$$

2. g ограничена и монотонна $\Rightarrow \alpha = \lim_{x \to b-} g(x)$
   Функция $g - \alpha$ монотонна, $\xrightarrow[x \to b-]{} 0 \Rightarrow \int_a^b f(g-\alpha)$ сходится по признаку Дирихле. Поэтому интеграл $\int_a^b f(g-\alpha)$ сходится, а интеграл $\int_a^b fg$ сходится как сумма двух сходящихся:

$$\int_a^b fg = \int_a^b f(g-\alpha) + \int_a^b f \cdot \alpha$$

□

Замечание. Можно ослабить условия: $f \in R_{loc}[a;b), g$ монотонна на $[a;b)$

Определение 25. v.p. $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right)$ – главное значение.

Пример.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx = +\infty$$

Пример. 1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x) \cdot \sin x \, dx, f(x) \geqslant 0.$

- Если $\int_1^{+\infty} f$ сходится, то $\int_1^{+\infty} f(x)\sin x dx$ сходится абсолютно.
  $0 \leqslant |f(x)\cdot \sin x| \leqslant |f(x)| = f(x)$

- Если $\int_1^{+\infty} f$ расходится
  $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

  1. $l = 0$ и f монотонна, то признак Дирихле и $\int_1^{+\infty} f(x)\sin x dx$ – сходится.
     Но: $\int_1^{+\infty} |f(x)\sin x| dx$ не сходится.
     $|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
     $$\int_1^{\infty} f(x)|\sin x| dx \geqslant \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} f(x)dx}_{\text{расходится}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} f(x)\cos 2x dx}_{\text{сходится}}$$
  2. $l > 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f\sin x dx$ расходится.
     $$\int_{a_k}^{b_k} f(x)\cdot \sin x dx \geqslant \frac{1}{2}\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot \min\{f(a_k), f(b_k)\} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{\pi}{3}\cdot l = \varepsilon > 0$$

2. $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx$ сходится условно.
   $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2} dx$ сходится абсолютно по признаку сравнения.
   $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится условно
   $\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin x dx$ расходится
3. Нельзя пользоваться эквивалентностью в случае знакопеременной функции.
   $\int_1^{\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$ – расходится
   $f(x) \sim \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \to \infty$ $\int_1^{\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ сходится.
   Выделим главную часть: $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}\right) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}(1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sin^2 x}{x} + \dfrac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + r(x)) = \underbrace{\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}}_{\text{сх-ся}} +$
   $\underbrace{\dfrac{\sin^2 x}{x}}_{\text{расходится}} + \underbrace{\dfrac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}}}_{\text{сх-ся абс-но}} + \underbrace{\dfrac{\sin^4 x}{x^2}}_{\text{сх-ся абс.}} + |q(x)|, \quad |q(x)| \leqslant \dfrac{c}{x^2}$
   $\left(\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + r(t), t \to 0\right)$
4. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$
   При $x \to 0 \sin x \sim x$ и $\sin x > 0$ на $(0;1)$
   $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^{\alpha-1}}$
5. $\int_{-1}^1 \dfrac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \dfrac{dx}{x} + \int_0^1 \dfrac{dx}{x}$ расходится. Но сходится в смысле главного значения.

Замечание. $\int_1^{+\infty} f\cdot g, f$ – периодична с периодом $T>0, g$ – монотонна $\underset{x\to+\infty}{\to} 0$
Тогда

1. Если $\int_1^{+\infty} g$ сходится $\Rightarrow \int_1^{+\infty} fg$
2. Если $\int_1^{+\infty} g$ расходится, то $\left(\int_1^{+\infty} fg \text{ сходится } \Leftrightarrow \int_1^{1+T} f = 0\right)$

Доказательство. Упражнение. □

Следствие. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится
$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}dx$ сходится

1.10. Длина, площадь и объём

1.10.1. Площадь

Определение 26. $\|x\|, x\in\mathbb{R}^n$ – длина вектора.

$$\|A-B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i - B_i)^2}$$

Определение 27. Движение – отображение $U:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, сохраняющее расстояния.

$$\|A-B\| = \|U(A)-U(B)\| \quad \forall A,B\in\mathbb{R}^n$$

Определение 28. Площадь – функционал $S:P\to[0;+\infty)$, где $\{P\}$ – множество квадрируемых фигур из $\mathbb{R}^2$

Теорема 27 (Свойства площади). 1. Аддитивность: P_1, P_2 – квадрируемы и $P_1\cap P_2=\varnothing$. Тогда $P_1\cup P_2$ – квадрируемая и
$S(P_1\cup P_2) = S(P_1)+S(P_2)$

2. Нормированность на прямоугольниках: площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab
3. Инвариантность относительно движений: $S(U(P)) = S(P)$
4. Монотонность: P, P_2 – квадрируемые, $P_1\subset P$, тогда $S(P_1)\leqslant S(P)$

Доказательство. $P = P_1 \cup (P \backslash P_1)$, $P_1 \cap (P \backslash P_1) = \varnothing$. Тогда по аддитивности площади: $S(P) = S(P_1) + S(P \backslash P_1) \geqslant S(P_1)$ □

5. Если P содержится в некотором отрезке, то $S(p) = 0$

Доказательство. P можно поместить в прямоугольник сколь угодно малой площади. □

6. Усиленная аддитивность: P_1 и P_2 пересекаются по множеству нулевой площади. Тогда $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

Доказательство. Возьмем $P = P_1 \cap P_2 \Rightarrow S(P_1) = S(P) + S(P_1 \backslash P) = S(P_1 \backslash P)$
$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1 \backslash P) + S(P_2) = S(P_1) + S(P_2)$ □

1.10.2. Объём

Определение 29. Объём – функционал $V : \{T\} \to [0; +\infty)$, где $\{T\}$ – класс кубируемых тел

Теорема 28 (Свойства объёма).
1. Аддитивность: T_1, T_2 – кубируемые, $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, тогда $T_1 \cup T_2$ – кубируемое, $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$
2. Нормированность на прямоугольных параллелепипедах. Объём параллелепипеда: $a \times b \times c = abc$
3. Инвариантность относительно движения: $V(U(T)) = V(T)$
4. Монотонность: T_1, T – кубируемые, $T_1 \subset T$, тогда $V(T_1) \leqslant V(T)$
5. Если тело T содержится в некотором прямоугольнике, то его объём равен нулю.
6. Усиленная аддитивность. T_1, T_2 – кубируемые, $T_1 \cap T_2$ нулевого объёма, тогда $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

Определение 30. $P \subset \mathbb{R}^2, h \geqslant 0$. Множество $Q = P \times [0; h]$ называется прямым цилиндром с основанием P и высотой h.

Определение 31. $T \subset \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}$
$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$ – сечение

1.10.3. Длина пути

Определение 32. $\gamma : [a; b] \to R^m, \gamma -$ непрерывное отображение
$\gamma_i, \quad i = 1, \ldots, m$ – i-тая координатная функция.
Если все γ_i непрерывны, то отображение γ непрерывно.

Определение 33. Путь в R^m – $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m) : [a, b] \to R^m$
$\gamma(a)$ – начало пути
$\gamma(b)$ – конец пути
$\gamma* = \gamma([a, b])$ – носитель пути. В каком-то смысле можно считать, что это изображение пути.

Пример. Полуокружность:
$\gamma^1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), t \in [-1, 1]$, пробегаем дугу слева направо.
$\gamma^2(t) = (-\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$
$\gamma^3(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$
$\gamma^4(t) = (\cos t, |\sin t|), t \in [-\pi, \pi]$. пробежали дугу туда и обратно.
Все четыре отображения разные, но носитель пути у всех одинаковый.

Определение 34. $\gamma(a) = \gamma(b)$ – замкнутый путь

Определение 35. Если $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ только при $t_1 = t_2$ или $t_1, t_2 \in \{a; b\}$, то путь несамопересекающийся (простой)

Определение 36. Если $\gamma_i \in C^r[a; b], i = 1, ..., m$, то путь γ гладкости r, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Определение 37. Если $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$ – противоположный путь.

Упражнение. Посмотреть на кривые Пеано.

Определение 38. $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^m$, $\widetilde{\gamma} : [\alpha; \beta] \to \mathbb{R}^m$ – эквивалентные, если существует строго возрастающая функция и $[a; b] \overset{\text{на}}{\to} [\alpha; \beta] : \gamma = \widetilde{\gamma} \circ u$.
Это отношение эквивалентности:

1. $\gamma \sim \gamma, \quad u = id[a; b]$
2. $\gamma \sim \widetilde{\gamma} \Leftrightarrow \gamma \sim \widetilde{\gamma} \quad u^{-1}$ – обратное отображение
3. $\gamma_1 \sim \gamma_2, \gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3 \quad u_1 \circ u_2$

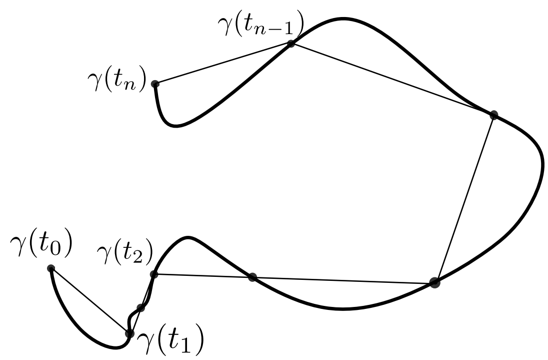
Определение 39. Класс эквивалентных путей – кривая
Каждый представитель класса – параметризация кривой
Кривая называется r-гладкой, если у неё найдется гладкая параметризация

1.10.4. Длина кривой

Определение 40. $\gamma \in C([a;b] \to \mathbb{R}^m)$– путь в R^m

1. Длина кривой, соединяющей точки A и B не меньше $\|AB\|$
2. Нужна аддитивность: $a < c < b$, $\gamma^1 = \gamma\big|_{[a;c]}, \gamma^2 = \gamma\big|_{[c;b]} \Rightarrow S_\gamma = S_{\gamma^1} + S_{\gamma^2}$

Пример. $\tau = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n\}$ – дробление $[a,b]$
l_τ – вписанная ломаная.



Определение 41. γ – путь в $\mathbb{R}^m$. Длиной пути γ называется $S_\gamma = \sup\limits_\tau l_\tau$

Определение 42. Путь с $S_\gamma < +\infty$ – спрямляемый.

Лемма 4. Длины эквивалентных путей равны.

Доказательство. $\gamma \sim \widetilde{\gamma} \circ u, \quad u : [a;b] \overset{\text{на}}{\to} [\alpha;\beta]$ строго возрастает
$\tau = \{t_k\}_{k=1}^n$ – дробление $[a;b]$
$\widetilde{t}_k = u(t_k), \widetilde{\tau} = \{\widetilde{t}_k\}$ – дробление $[\alpha, \beta]$
$l_\tau = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \underbrace{\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|}_{\text{длина отрезка}} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \|\widetilde{\gamma}(\widetilde{t}_{k+1}) - \widetilde{t}_k\| = l_{\widetilde{\tau}}$
$l_\tau = l_{\widetilde{\tau}} \leqslant S_{\widetilde{\gamma}} \Rightarrow S_\gamma \leqslant S_{\widetilde{\gamma}}$
Поменяем: γ и $\widetilde{\gamma}$ местами $\Rightarrow S_{\widetilde{\gamma}} \leqslant S_\gamma$ □

Замечание. Противоположные пути имеют одинаковую длину.

Лемма 5 (Аддитивность длины пути). $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}, a < c < b$
$\gamma^1 = \gamma\big|_{[a;c]}, \gamma^2 = \gamma\big|_{[c;b]}$
$S_\gamma = S_{\gamma^1} + S_{\gamma^2}$

Доказательство. Обозначим $S_1 = S_{\gamma^1}, S_2 = S_{\gamma^2}$. Возьмём дробления τ_1 и τ_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$; тогда $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ – дробление $[a,b]$. Построим по τ_1 и τ_2 ломаные, вписанные в γ^1 и γ^2, и обозачим через l_1 и l_2 их длины. Тогда $l_1 + l_2 = l_\tau \leqslant s_\gamma$. Последовательно переходя в левой части к супремуму по всевозможным дроблениям τ_1 и τ_2, получаем

$$s_1 + l_2 \leqslant s_\gamma,$$

$$s_1 + s_2 \leqslant s_\gamma.$$

Докажем противоположное неравенство

$$s_\gamma \leqslant s_1 + s_2.$$

Возьмём дробление $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ и докажем, что $l_\tau \leqslant s_1 + s_2$; отсюда и будет следовать требуемое. Если $c \in \tau$, то $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 и τ_2 – дробления $[a,c]$ и $[c,b]$. Поэтому

$$l_\tau = l_1 + l_2 \leqslant s_1 + s_2.$$

Если $c \notin \tau$, то добавим c в число точек дробления, то есть положим $\tau^* = \tau \cup \{c\}$. Пусть $c \in (t_\nu, t_{\nu+1})$. По неравенству треугольника

$$l_\tau = \sum_{k=0}^{\nu-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| + |\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(t_\nu)| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\nu=1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| + |\gamma(c) - \gamma(t_\nu)| + |\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(c)| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| = l_{\tau^*}$$

По доказанному

$$l_\tau \leqslant l_{\tau^*} \leqslant s_1 + s_2$$

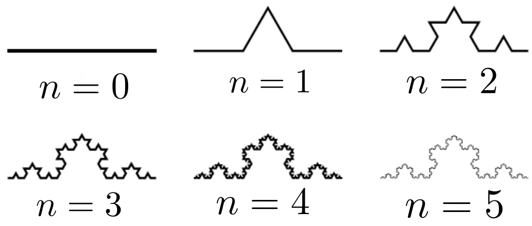
□

Определение 43. Длина кривой – длина какой-то из её параметризаций

Пример. Пример ограниченной, но неспрямляемой кривой: кривая Коха. Длины:

1. $n = 1: \ \dfrac{1}{3} \cdot 4$
2. $n = 2: \ \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$
3. $n = 3: \ \left(\dfrac{4}{3}\right)^3$

1.10.5. Приложения интеграла Римана



Определение 44. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$
$Q_f \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a; b], y \in [0; f(x)]\}$ – подграфик
Если $f \in C[a; b]$, то Q_f называют криволинейной трапеция

Теорема 29. Пусть $f \in R[a; b]$. Тогда Q_f квадрируема

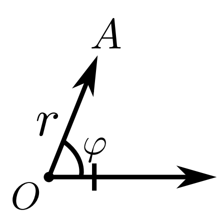
Доказательство. Без доказательства □

Замечание. Суммы Дарбу s_τ, S_τ
$\forall \tau \quad s_\tau \leqslant S(Q_f) \leqslant S_\tau$
Вспомним, что $\sup\limits_\tau S_\tau = \inf\limits_\tau S_\tau$
$\Rightarrow S(Q_f) = \int_a^b f dx$

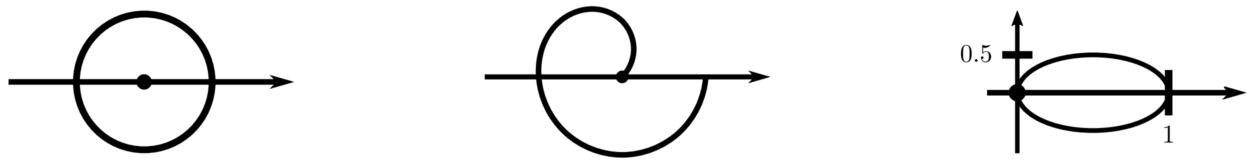
Замечание. $S(Q_f) = -\int_a^b f$

Пример. Площадь эллипса: $E = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}, a, b > 0$
$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, x \in [0; a]$
$S_E = 4 \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^2 t \, dt = 4ba \cdot \frac{\pi}{4} = \pi ba$

1.11. Полярные координаты



Чтобы была взаимная однозначность, можно считать, что $\varphi \in [0, 2\pi]$. Можно обобщать на $r \in \mathbb{R}$, а не только $\mathbb{R}_+$.

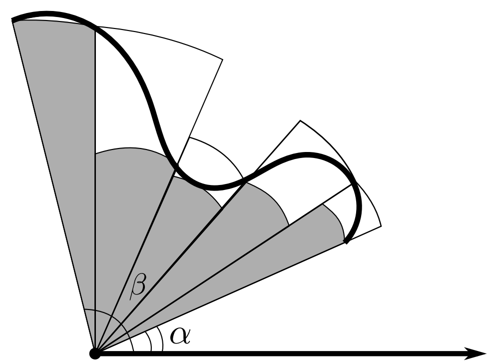


(a) $r(\varphi) = 1$ (b) $r(\varphi) = \varphi$ (c) $r(\varphi) = \cos\varphi$

Рис. 1: Примеры функций в полярных координатах

1.11.1. Вычисление площади в полярных координатах

$r(\varphi) : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}, \tau = \{\psi_k\}$ – разбиение $[\varphi_1, \varphi_2]$.



Площадь сектора равна $\frac{1}{2}r^2\varphi$. Обозначим

$$s_\tau = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta\psi_k \cdot \min_{\varphi\in[\psi_k,\psi_{k+1}]} r^2(\varphi)$$
$$S_\tau = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta\psi_k \cdot \max_{\varphi\in[\psi_k,\psi_{k+1}]} r^2(\varphi)$$

Тогда

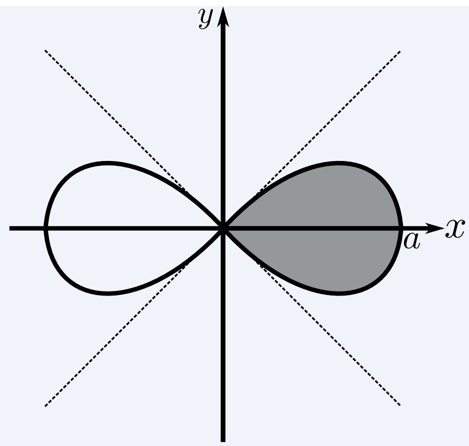
$$s_\tau \leqslant S(Q) \leqslant S_\tau$$

Если $r^2(\varphi) \in R[\varphi_1, \varphi_2]$, то $\sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau = S(Q)$. Значит, искомая площадь равна:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, d\varphi$$

Пример. Найдем площадь S правого лепестка **лемнискаты Бернулли**

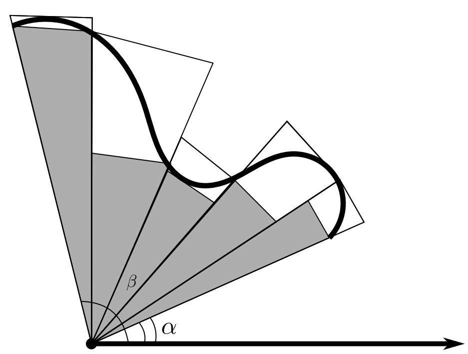
$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad a > 0$$



$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cdot 2\cos 2\varphi\, d\varphi = a^2 \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

Упражнение. Посчитать площадь правого лепестка лемниската Бернулли.

Замечание. Можно было приближать не секторами, а треугольниками.



$$\frac{1}{2}\min_{\varphi\in[\psi_k,\psi_{k+1}]} r^2(\varphi)\sin\Delta\psi_k$$

В данном случае, нельзя перейти к эквивалентным. Тогда

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} \leqslant \sin\alpha \leqslant \alpha$$

1.11.2. Вычисление объемов

T – кубируемое.

- Существует отрезок $[a,b]$ такой, что $T(x) = \varnothing\ \forall x \notin [a,b]$
- $\forall x \in [a,b]\ T(x)$ – квадрируемая фигура.

$\tau = \{x_k\}$ – разбиение $[a,b]$. Возьмем цилиндры с $h = \Delta x_k$, основаниями $\min\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} S(x)$ и

$\max\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} S(x)$. Тогда

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

Пример. Найдем объем V эллипсоида

$$D = \left\{(x,y,z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}, \qquad a,b,c > 0$$

Если $x \notin [-a,a]$, то $D(x) = \varnothing$. Если $x = \pm a$, то $D(x) = \{(0,0)\}$. Если $x \in (-a,a)$, то

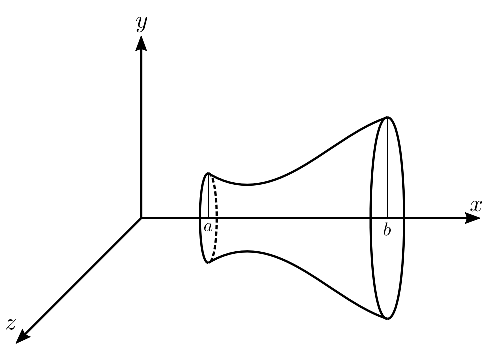
$$D(x) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 - \frac{x^2}{a^2}\right\}$$

есть эллипс с полуосями $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Площадь эллипса вычисляется по формуле: $S(x) = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Отсюда

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{x=0}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc$$

Замечание. Пусть $f : [a,b] \to [0,+\infty), T_f$ – тело, получающееся вращением подграфика функции f вокруг оси OX. Тело T_f задается равенством

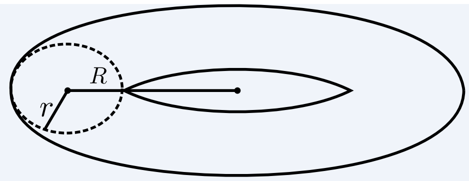
$$T_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], y^2 + z^2 \leqslant f^2(x)\right\}$$



Замечание. Пусть $f \in C[a,b], f \geqslant 0$. Для тела вращения T_f при каждом $x \in [a,b]$ сечение есть круг радиуса $f(x)$, поэтому $S(x) = \pi f^2(x)$. Значит

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2$$

Пример. Найдем объем V_T тора – тела, образованного вращением круга $\{(x,y) : x^2 + (y-R)^2 \leqslant r^2\}$ $(0 < r < R)$ вокруг оси OX.



Тор представляется в виде разности тел вращения подграфиков функций, графики которых – верхняя и нижняя полуокружности, то есть функции

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad x \in [-r, r]$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V_T &= \pi \int_{-r}^{r} f_1^2 - \pi \int_{-r}^{r} f_2^2 = \\ &= \pi \int_{-r}^{r} \left(\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \right) dx = \\ &= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2\pi^2 R r^2 \end{aligned}$$

Замечание. Вокруг OY вращаем $y = f(x)$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

1.11.3. Длина кривой

Если $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$ – путь в $\mathbb{R}^m$, $\gamma_i \in C^1[a, b], \gamma' = (\gamma_1', \gamma_2', ..., \gamma_m')$. По определению евклидовой длины

$$\|\gamma'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i'^2}$$

Теорема 30 (Длина гладкого пути)**.** Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ – гладкий путь. Тогда γ спрямляем и

$$s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$$

Доказательство. 1. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Пусть дробление $\eta = \{u_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка Δ. Тогда

$$l_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(u_{k+1}) - \gamma(u_k)\| = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k))^2}$$

По формуле Лагранжа при каждых i и k найдется такая точка $c_{ik} \in (u_k, u_{k+1})$, что

$$\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k) = \gamma_i'(c_{ik}) \Delta u_k$$

Поэтому

$$l_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i'^2(c_{ik})} \cdot \Delta u_k$$

Обозначим

$$M_\Delta^{(i)} = \max_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|, \qquad m_\Delta^{(i)} = \min_{t\in\Delta} |\gamma_i'^2(t)|$$

$$M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(M_\Delta^{(i)}\right)^2}, \qquad m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(m_\Delta^{(i)}\right)^2}$$

Тогда

$$m_\Delta(\beta - \alpha) \leqslant l_\eta \leqslant M_\Delta(\beta - \alpha)$$

Переходя к супремуму по всем дроблениям, мы получим

$$m_\Delta(\beta - \alpha) \leqslant s_{\gamma|_\Delta} \leqslant M_\Delta(\beta - \alpha)$$

В частности, при $\Delta = [a, b]$, отсюда следует, что путь γ спрямляем.

2. Возьмем дробление $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ и обозначим

$$m_k = m_{[t_k, t_{k+1}]}, \qquad M_k = M_{[t_k, t_{k+1}]}$$

По доказанному

$$m_k \Delta t_k \leqslant s_{\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}} \leqslant M_k \Delta t_k$$

Кроме того, при всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$m_k \leqslant \|\gamma'(t)\| \leqslant M_k$$

и поэтому

$$m_k \Delta t_k \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\gamma'\| \leqslant M_k \Delta t_k$$

Складывая неравенства и пользуясь аддитивностью длины пути и интеграла, получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k \leqslant s_\gamma \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k \leqslant \int_a^b \|\gamma'\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k$$

Докажем, что для всех дроблений между левой и правой суммами лежит лишь одно число. Суммы в левой и правой части не обязаны быть интегральными для $\|\gamma'\|$, поэтому оценим разность между ними непосредственно. Если $M_\Delta + m_\Delta \neq 0$, то

$$M_\Delta - m_\Delta = \frac{M_\Delta^2 - m_\Delta^2}{M_\Delta + m_\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\left(M_\Delta^{(i)}\right)^2 - \left(m_\Delta^{(i)}\right)^2\right)}{M_\Delta + m_\Delta} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)}\right) \cdot \frac{M_\Delta^{(i)} + m_\Delta^{(i)}}{M_\Delta + m_\Delta} \leqslant \sum_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)}\right)$$

Если же $M_\Delta = m_\Delta = 0$, то доказанное неравенство очевидно.
Возьмем $\varepsilon > 0$. По теореме Кантора все функции $|\gamma_i'|$ равномерно непрерывны на $[a, b]$. Поэтому для каждого $i = 1, \ldots, m$ найдется такое $\delta_i > 0$, что

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta_i \Rightarrow \left||\gamma_i'(x)| - |\gamma_i'(y)|\right| < \frac{\varepsilon}{m(b-a)}$$

Положим $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \delta_i$. Для любого разбиения с рангом меньше, чем δ $|M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Поэтому

$$\left|s_\gamma - \int_a^b \|\gamma'\|\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \varepsilon$$

Так как ε произвольно, то $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$.

□

Замечание. По аддитивности эта теорема распространяется на кусочно-гладкие пути.

Замечание. Запишем частный случай теоремы 1 при $m = 2$. Пусть $\gamma = (x(t), y(t)) \in C^1([a, b] \to \mathbb{R}^2)$

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Следствие. $y = f(x) \in C^1[a, b]$. Тогда график спрямляем и

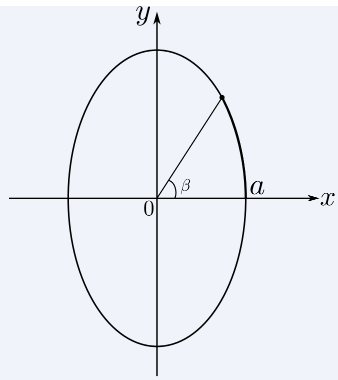
$$S_{\Gamma_f} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

График f – это путь

$$\Gamma_f(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b]$$

Пример. Длина дуги эллипса.

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, \beta]$$



$$\begin{aligned} s &= \int_0^\beta \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^\beta \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2) \sin^2 t}\, dt = b \int_0^\beta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt \end{aligned}$$

Величина $\varepsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ называется **эксцентриситетом** эллипса. Интеграл

$$E(\varepsilon, \beta) = \int_0^\beta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt$$

называется **эллиптическим интегралом второго рода**.

Замечание. Эллиптическим интегралом первого рода называется интеграл

$$K(\varepsilon, \beta) \int_0^\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}}\, dt$$

1.12. Функции ограниченной вариации

Определение 45. Величина

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_\tau \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

называется полной вариацией f на $[a, b]$.
Если $V_a^b f < +\infty$, то f называется функцией **ограниченной вариации** на отрезке $[a, b]$. Множество всех функций ограниченной вариации на $[a, b]$ обозначается $V[a, b]$.

Теорема 31 (Свойства). 1. Вариация аддитивна: если $f : [a, b] \to \mathbb{R}, a < c < b$, то

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} = \overset{c}{\underset{a}{V}} + \overset{b}{\underset{c}{V}}$$

2. Если f является кусочно-гладкой на $[a,b]$, то

$$\mathop{V}_{a}^{b} f = \int_a^b |f'|$$

3. Вариация монотонна: если $f : [a,b] \to \mathbb{R}, [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, то

$$\mathop{V}_{\alpha}^{\beta} = \mathop{V}_{a}^{b} f$$

   Вариацию можно определить и для функция, заданных на промежутке произвольного типа. Если $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, то

$$\mathop{V}_{a}^{b} f = \sup_{[\alpha,\beta]\subset\langle a,b\rangle} \mathop{V}_{\alpha}^{\beta} f$$

4. Пусть $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$. Тогда γ спрямляем в том и только том случае, когда $\gamma_i \in V[a,b]$ при всех $i = 1, ..., m$.
5. Если f монотонна на $[a,b]$, то $f \in V[a,b]$

$$\mathop{V}_{a}^{b} f = |f(b) - f(a)|$$

6. Если $f \in V[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$.

Доказательство. Докажем свойства 3, 4, 5 и 6.
3. По аддитивности

$$\mathop{V}_{a}^{b} f = \mathop{V}_{a}^{\alpha} + \mathop{V}_{\alpha}^{\beta} + \mathop{V}_{\beta}^{b} \geqslant \mathop{V}_{\alpha}^{\beta} f$$

4. Доказательство следует из двусторонней оценки

$$|\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)| \leqslant \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k)|$$

5. Для любого дробления

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k))\right| = |f(b) - f(a)|$$

6. При всех $x \in [a,b]$

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant |f(a)| + \mathop{V}_{a}^{b} f$$

□

Теорема 32 (Арифметические действия над функциями ограниченной вариации)**.** Пусть $f, g \in V[a,b]$. Тогда

1. $f + g \in V[a,b]$

2. $fg \in V[a,b]$
3. $\alpha f \in V[a,b]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
4. $|f| \in V[a,b]$
5. если $\inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0$, то $\frac{f}{g} \in V[a,b]$

Доказательство. Обозначим $\Delta_k f = f(x_{k+1}) - f(x_k)$

1. Складывая по всем k неравенства

$$|\Delta_k(f+g)| \leqslant |\Delta_k f| + |\Delta_k g|$$

получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k(f+g)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k f| + \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k g| \leqslant \mathop{V}_a^b + \mathop{V}_a^b g$$

Переходя в левой части к супремуму по всем дроблениям, получаем, что

$$\mathop{V}_a^b (f+g) \leqslant \mathop{V}_a^b f + \mathop{V}_a^b g$$

2. По свойству 6 функции f и g ограничены; пусть $|f|$ ограничена числом K, а $|g|$ – числом L. Тогда

$$|\Delta_k(fg)| \leqslant L|\Delta_k f| + K|\Delta_k g|$$

Складывая эти неравенства и переходя к супремуму, получим

$$\mathop{V}_a^b fg \leqslant L \mathop{V}_a^b f + K \mathop{V}_a^b g$$

3. Утверждение для αf следует из 2, если взять в качестве g функцию, тождественно равную α.
4. Аналогично, из неравенств

$$|\Delta_k |f|| \leqslant |\Delta_k f|$$

сложив и перейдя к супремуму, вытекает, что

$$\mathop{V}_a^b |f| \leqslant \mathop{V}_a^b f$$

5. Достаточно доказать, что $\frac{1}{g} \in V[a,b]$, а потом воспользоваться утверждением 2. Пусть $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$. Тогда

$$\left|\Delta_k \frac{1}{g}\right| = \left|\frac{\Delta_k g}{g(x_k)g(x_{k+1})}\right| \leqslant \frac{|\Delta_k g|}{m^2}$$

откуда

$$\mathop{V}_a^b \frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{m^2} \mathop{V}_a^b g$$

□

Теорема 33 (Характеристика функций ограниченной вариации). Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in V[a,b]$ в том и только том случае, когда f представляется в виде разности двух возрастающих на $[a,b]$ функций.

Доказательство. Достаточность очевидна из свойства 5 и предыдущей теоремы. Докажем необходимость. Пусть

$$g(x) = \mathop{V}_a^x f, \quad x \in [a,b]; \qquad h = g - f$$

Если $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, то по аддитивности

$$g(x_2) - g(x_1) = \mathop{V}_{x_1}^{x_2} f \geqslant 0,$$
$$h(x_2) - h(x_1) = \mathop{V}_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geqslant 0$$

то есть функции g и h возрастают. □

Следствие. $V[a,b] \subset R[a,b]$

Доказательство. Действительно, монотонная функция интегрируема и разность интегрируемых функций интегрируема. □

Следствие. Функция ограниченной вариации не может иметь разрывов второго рода.

Доказательство. Это следует из теоремы 33 и из того, что монотонная на отрезке функция не может иметь разрывов второго рода. □

Следствие. Ни один из классов $V[a,b]$ и $C[a,b]$ не содержится в другом.

Доказательство. Так как существуют разрывные монотонные функции, то $V[a,b] \not\subset C[a,b]$ Приведем пример непрерывной функции, вариация которой бесконечна. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Тогда $f \in C[0,1]$. Обозначим $x_k = \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$. При этом

$$f(x_k) = \frac{(-1)^k}{k}, \qquad |f(x_k) - f(x_{k+1})| = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

Возьмем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим дробление: $0 < x_n < \ldots < x_1 = 1$ (для удобства точки дробления замурованы в порядке убывания). Сумма из определения вариации равна

$$\sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_n) - f(0)| = -1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Докажем, что последовательность **гармонических** сумм

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

не ограничена сверху. При $m \in \mathbb{N}$ оценим сумму с номером 2^m снизу. Для этого сгруппируем слагаемые, а затем оценим сумму в каждой группе как количество слагаемых, умноженное на самое малое слагаемое:

$$\begin{aligned} H_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) \geqslant \\ &\geqslant 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2} \end{aligned}$$

Поэтому $f \notin V[0,1]$ $\square$

Раздел #2: Ряды

Определение 46. Рядами называется сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

где $\{a_k\}$ – последовательность из $\mathbb{R}$ (из $\mathbb{C}$)

Определение 47. Частичной суммой называется величина

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Определение 48. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim_{n\to\infty} S_n$

Утверждение 6. $\forall \{S_n\}$ является последовательностью частичных сумм какого-то ряда.

Доказательство. $a_1 = S_1, a_k = S_k - S_{k-1}$ □

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots = 0$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots = +\infty$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots, \quad S_n = \begin{cases} -1, & n \text{ нечетно} \\ 0, & n \text{ четно} \end{cases}$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = a + a^2 + a^3 + \dots$, сходится при $|a| < 1$

Пример. $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $z \in \mathbb{C}$, сходится при $|z| < 1$.

Упражнение. Что будет, если $|z| = 1$?

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\alpha^{2k} = \cos\alpha$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty$

Замечание. $H_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$ – гармонические суммы.

Свойство 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\forall m \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ тоже сходится. Верно и что если $\exists m \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ сходится, то и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k$. Перейдем к пределу по $n \to \infty$. □

Свойство 2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\sum_{k=m}^{\infty} a_k \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Доказательство. $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ □

Свойство 3 (Линейность суммирования)**.** Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – сходятся, то $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ сходится. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Замечание. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum_{i=0}^{\infty}(a_k + b_k)$ расходится

Доказательство. $a_k = (a_k + b_k) - b_k$ □

Свойство 4. $z_k = x_k + y_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}$. $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходится.

Свойство 5 (Монотонность)**.** $a_k, b_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ из $\overline{\mathbb{R}}$ и $a_k \leqslant b_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Теорема 34 (Критерий Больцано-Коши)**.** Пусть есть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$

Доказательство. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, n > N\ |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Возьмем $m = n + p$. □

Замечание. Необходимое условие сходимости ряда следует отсюда.

2.1. Группировка слагаемых

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ – подпоследовательность натуральных чисел, $n_0 = 0$

$$A_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k, \quad j \in \mathbb{N}$$

$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$ – получен из $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ при помощи группировки.

Теорема 35 (Группировка членов ряда). 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ $\left(S \in \overline{R} \cup \{\infty\}\text{ или } S \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{A_j} = S$$

2. $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = S$, и $a_n \to 0$ и $\exists L \in \mathbb{N}:$ в каждом A_j не более чем L штук a_k. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_k = S$$

3. $a_k \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} A_j = S \in \overline{R}$ и все a_k из одной группы одного знака. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

Доказательство. 1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, T_m = \sum_{j=1}^{m} A_j$. T_m – подпоследовательность S_n $(T_m = S_{n_{m+1}})$

2. По определению сходимости ряда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m > N\ |S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

А также

$$\exists K : \forall k > K\ |a_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Возьмем $M = \max\{K, n_{N+1}\}$ и $n_m \leqslant n < n_{m+1}$ Тогда

$$|S_n - S| \leqslant |S_n - S_{n_m}| + |S_{n_m} - S| = \left|\sum_{k=n_m+1}^{n} a_k\right| + |S_{n_m} - S| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n_m+1}^{n} |a_k| + |S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3. Возьмем $\varepsilon > 0\ \exists M : \forall m > M\ |S_{n_m} - S| < \varepsilon$. Пусть $N = n_{m+1}$. Возьмем $n_m \leqslant n < n_{m+1}$. Если $a_{n_m+1}, a_{n_m+2}, \dots, a_{n_{m+1}} \geqslant 0$. Тогда

$$S_{n_m} \leqslant S_n \leqslant S_{n_{m+1}}$$

Если $a_{n_m+1}, a_{n_m+2}, \ldots, a_{n_{m+1}} \leqslant 0$, то знаки в другую сторону.

$$|S_n - S| \leqslant \max\{|S_{n_m} - S|, |S_{n_{m+1}} - S|\}$$

$\square$

2.2. Ряды с неотрицательными слагаемыми

Лемма 6. Если $a_k \geqslant 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится } \Leftrightarrow S_n \text{ ограничена сверху}$$

Доказательство. S_n неубывает, поэтому S_n сходится $\Leftrightarrow$ S_n ограничена сверху $\square$

Замечание. Если $a_k \geqslant 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\exists \lim S_n = S \in \overline{R} \qquad (S = \sup S_n)$$

Достаточно ограниченности сверху подпоследовательности S_n.

Теорема 36 (Признак сравнения). $a_k, b_k \geqslant 0, a_k = O(b_k)$ при $k \to \infty$. Тогда

1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Доказательство. $\exists N \in \mathbb{N}, A > 0 : a_K \leqslant Ab_k$. Тогда

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \leqslant A \sum_{k=N}^{\infty} b_k < +\infty$$

$\square$

Следствие (Признак сравнения в предельной форме). $a_k \geqslant, b_k > 0$ и $\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$

1. Если $l \in [0, +\infty)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.
2. Если $l \in (0, +\infty]$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.
3. Если $l \in (0, +\infty)$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$ ограничена + теорема.

2. Если $l > 0$, то $a_k > 0$ с некоторого места, поэтому поменяем ролями a_k и b_k.
3. Следует из 1 и 2.

$\square$

Следствие. $a_k \sim b_k, k \to \infty$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. При $\alpha < 1$ расходится, т.к. $\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{k}$. С другой стороны, при $\alpha \geqslant 2$ сходится, т.к. $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{5^k}$ сходится, т.к.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^5}{5^k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^7}{5^k} = 0$$

Замечание. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – плохая запись!!!

Теорема 37 (Радикальный признак Коши). $a_k \geqslant 0, \exists \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = K$. Тогда

1. Если $K > 1$ то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.
2. Если $K < 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится

Доказательство. 1. Т.к. $K > 1$, то бесконечно много $\sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow a_k > 1 \Rightarrow a_k \not\to 0$.

2. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-k}{2} > 0$. Начиная с некоторого номера все $\sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon = \frac{1+K}{2} \in (0,1) \Rightarrow a_n \leqslant \left(\frac{1+K}{2}\right)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+K}{2}\right)^n$ сходится (геометрическая прогрессия).

□

Замечание. Если $k = 1$, то бывает и сходимость, и расходимость. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится,} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

С другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится,} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

Теорема 38 (Признак Даламбера). $a_k > 0$ и $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$. Тогда

1. Если $D > 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится
2. Если $D < 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится

Доказательство. 1. С некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, т.е. $a_{n+1} > a_n > a_N$ $\forall n > N$. Тогда $a_n \not\to 0$.

2. Пусть $\varepsilon = \frac{1-D}{2} > 0$. Начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon = \frac{1+D}{2} \in (0,1) \Rightarrow a_{n+1} < \frac{1+D}{2} \cdot a_n$.

Для $m > N$

$$a_m < \frac{1+D}{2} \cdot a_{m-1} < \left(\frac{1+D}{2}\right)^2 a_{m-2} < \ldots < \left(\frac{1+D}{2}\right)^{m-N} a_N$$

Т.е. мы оценили a_m сверху членами геометрической прогрессии.

$\square$

Замечание. $D = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится,} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

С другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится,} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

Замечание. Эти два признака можно сформулировать и без использования пределов.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, a > 0$. Используя признак Даламбера

$$\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{a^k} = \frac{a}{k+1} \to 0$$

По признаку Коши

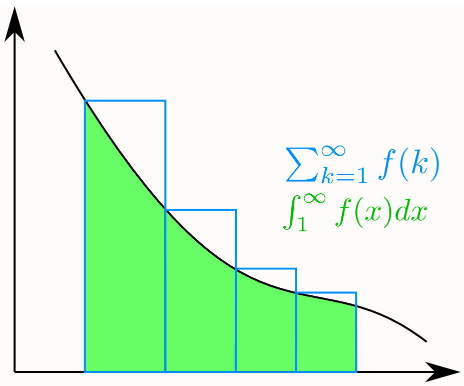
$$\sqrt[k]{\frac{a^k}{k!}} = \frac{a}{\sqrt[k]{k!}} \to 0$$

Замечание. $a_n > 0$. Если $\exists D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = D$. Обратное неверно!

Упражнение. Доказать.

Теорема 39. f монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится или расходится одновременно с $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$

Доказательство. Пусть f невозрастает, $f \geqslant 0$.



$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant f(k)$$

Просуммируем эти неравенства:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \int_1^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \tag{1}$$

и перейдем к пределу при $n \to \infty$ □

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \alpha \in (1,2)$. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ сходится, поэтому сходится и ряд.

Упражнение. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \ln^\beta k}$. При каких α и β сходится?

Замечание. Пусть $f \geqslant 0, f$ убывает на $[1;+\infty)$. Обозначим

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f$$

Последовательность $\{A_n\}$ возрастает:

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f \geqslant 0$$

Кроме того, по неравенствам (1)

$$0 \leqslant A_n = f(1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - f(n+1) - \int_1^{n+1} f \leqslant f(1) - f(n+1) \leqslant f(1)$$

поэтому последовательность $\{A_n\}$ ограничена, а значит существует конечный неотрицательный предел $\{A_n\}$. Обозначим его c. Тогда справедлива асимптотическая формула:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^{n+1} f + c + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Если ряд расходится (и интеграл), то

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int_1^{n+1} f$$

Пример. $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx + \gamma + \varepsilon_n = \ln(n+1) + \gamma + \varepsilon_n = \left| ln(n+1) - \ln n = \ln(1+\frac{1}{n}) \to 0 \right| =$
$\ln n + \gamma + \delta_n \Rightarrow H_n \sim \ln n$
$\gamma = 0,577215$

Пример. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}, \alpha \in (0;1)$
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx + c_\alpha + \varepsilon_n = \left| \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + o(1) - \frac{1}{1-\alpha} \right| = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + d_\alpha + \delta_n$
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Упражнение. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}, \alpha > 1$

Замечание. $\int_{n+1}^\infty f \leqslant \sum_{k=n+1}^\infty f(k) \leqslant \int_n^\infty f$ (Посмотреть на примере 3, как ведет себя "хвостик")

2.2.1. Ряды с произвольными членами

Определение 49. $\sum_{k=1}^\infty a_k$ сходится абсолютно, если $\sum |a_k|$

Замечание. $\sum a_k, \sum b_k$ – сходится абсолютно. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то $\sum(\alpha a_k + \beta b_k)$ – сходится абсолютно

Доказательство. $|\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant |\alpha||a_k| + |\beta||b_k|$ + признак сравнения □

Замечание. $\sum_{k=1}^\infty z_k, z_k \in \mathbb{C}, z_k = x_k + y_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}$
$\sum_{k=1}^\infty z_k$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow \sum x_k, \sum y_k$ сходится абсолютно

Доказательство. $|x_k|, |y_k| \leqslant |z_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$ □

Замечание.

$$\left|\sum_{k=1}^\infty\right| \leqslant \sum_{k=1}^\infty |a_k|$$

Следствие. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. $x_+ = \max\{x, 0\}, x = x_+ - x_-$
$x_- = \max\{-x, 0\}, |x| = x_+ + x_-, |x| \geqslant x_\pm \geqslant 0$
1. $a_k \in \mathbb{R}$
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится 2. $a_k \in \mathbb{C}, a_k = x_k + iy_k$
$\sum |a_k|$ сходится $\Rightarrow \sum x_k, sumy - k$ абсолютно сходится $\Rightarrow \sum x_k, \sum y_k$ сходится $\Rightarrow \sum a_k$ ☐

Замечание. $\sum a_k$ – сходится условно, $\sum b_k$ сходится абсолютно $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ - сходится условно

Теорема 40 (Радикальный признак Коши абсолютной сходимости). $K = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

1. $k > 1$, то $\sum a_k$
2. $k < 1$, то $\sum a_k$ сходится абсолютно

Доказательство. $k > 1 \Rightarrow |a_n| \not\to 0 \Rightarrow a_n \not\to \Rightarrow \sum a_n$ расходится $k < 1 \Rightarrow \sum |a_k|$ сходится ☐

Теорема 41 (Признак Даламбера абсолютной сходимости). $a_k \neq 0, \mathcal{D} = \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ – существует

1. $\mathcal{D} > 1 \Rightarrow \sum a_k$ расходится
2. $\mathcal{D} < 1 \Rightarrow \sum a_k$ сходится абсолютно

Доказательство. Аналогично ☐

Лемма 7 (Преобразования Абеля). Договорися, что $\sum_{k=m}^{n} a_k$ при $m > n$
$\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ из $\mathbb{R}(\mathbb{C})$
$A_0 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j + A_0$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$

Доказательство. $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ ☐

Теорема 42 (Признак Дирихле). $\{a_k\} \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \{b_k\} \in \mathbb{R}$ – монотонно убывает. Если $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ограничена, $b_n \to 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится

Доказательство. $A_0 = 0$. Применим Преобразование Абеля: $\underset{\to \sum_{k=1}^{infty} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k} = \underset{\to 0}{A_n b_n} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \underset{\to 0}{(b_k - b_{k+1})}$ Покажем, что $*$ сходится абсолютно.

$\exists M : \forall k\ |A_k| \leqslant M$, $b_k - b_{k+1}$ одного знака.
$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| = M|b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n| = M(b_1)$ □

Теорема 43 (Признак Абеля). $\{a_k\}$ из $\mathbb{R}(\mathbb{C}), \{b_k\}$ из $\mathbb{R}$ – монотонная Если $\sum a_k$ сходится, последовательность b_k ограничена, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится

Доказательство. $\exists$ конечный $\lim b_n = \alpha$
$\{a_k\}$ и $\{b_n - \alpha\}$ – удовлетворяют предыдущей теореме $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - \alpha)$ – сходится
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - \alpha) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ □

Определение 50. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ или $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} b_k$, если b_k одного знака, называется *знакочередующимися.*

Теорема 44 (Признак Лейбница). Пусть $\{b_n\}$ монотонна, $b_n \to 0$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ сходится.

Доказательство. Пусть $b_k \geqslant 0$. Рассмотрим последовательность $\{S_{2m}\}$. Она убывает, т.к.

$$S_{2m} - S_{2(m-1)} = b_{2m} - b_{2m-1} \leqslant 0$$

и ограничена снизу, поскольку

$$S_{2m} = -b_1 + (b_2 - b_3) + (b_4 - b_5) + \ldots + (b_{2m-2} - b_{2m-1}) + b_{2m} \geqslant -b_1 + b_{2m} \geqslant -b_1$$

Поэтому существует конечный $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Но тогда

$$S_{2m+1} = S_{2m} - b_{2m+1} \to S$$

т.к. $b_{2m+1} \to 0$. □

Замечание. Признак Лейбница следует из принципа Дирихле, если положить $a_k = (-1)^k$.

Замечание. Поскольку

$$S_{2m} = (-b_1 + b_2) + \ldots + (-b_{2m-1} + b_{2m}) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad S_{2m} \geqslant -b_1$$

то, по теореме о предельном переходе в неравенстве $-b_1 \leqslant S \leqslant 0$.

Замечание. Рассмотрим остаток лейбницевского ряда $S - S_n$. Тогда

$$-b_1 \leqslant (-1)(S - S_n) \leqslant 0$$

Для доказательства нужно применить замечание 1 к остатку ряда.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$. При $\alpha > 1$ он сходится абсолютно, т.к.

$$\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}\right| = \frac{1}{k^\alpha}$$

При $\alpha \in (0, 1]$ он абсолютно не сходится, но сходится по признаку Лейбница.

Пример. Найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} S_{2n} &= H_{2n} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n = \\ &= \ln 2n + \gamma + \delta_{2n} - (\ln n + \gamma + \delta_n) \\ &= \ln 2 + \delta_{2n} - \delta_n \to \ln 2 \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Он получен из ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ перестановкой членов. Обозначим частичные суммы этих рядов T_n и S_n соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} T_{3m} &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} S_{2m} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{2} \ln 2 \\ T_{3m+1} &= T_{3m} + \frac{1}{2m+1} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{2} \ln 2 \\ T_{3m+2} &= T_{3m+1} - \frac{1}{4m+2} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Значит, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{\ln 2}{2}$, то есть сумма после перестановки слагаемые поменялась.

Определение 51. $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (биекция). Тогда мы будем говорить, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

получен перестановкой слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 45 (Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда)**.** Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно к S, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (биекция). Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ сходится абсолютно к S.

Доказательство. 1. Пусть $a_k \geqslant 0$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$$

Для всех n верно

$$T_n \leqslant S_m \leqslant S$$

где $m = \max\{\varphi(1), ..., \varphi(n)\} \Rightarrow T_n \leqslant S$, т.е. перестановка не увеличивает сумму ряда. Применим к новому ряду $\varphi^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Но такая перестановка тоже не увеличит сумму ряда, а значит $S \leqslant T$.

2. Пусть $a_k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $a_{k\pm}, a_{\varphi(k)\pm}$. Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-}$ сходятся. По доказанному, $a_{\varphi(k)\pm}$ сходятся к тем же суммам. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

3. Пусть $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k = x_k + i \cdot y_k$. По замечанию к определению абсолютной сходимости ряды с вещественными x_k и y_k абсолютно сходятся. По доказанному их суммы не меняются при перестановке, откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} + i \sum_{k=1}^{\infty} y_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$\square$

Замечание. Перестановка членов расходящегося положительного ряда приводит к расходящемуся положительному ряду. Действительно, если бы ряд после перестановки сходился, то теореме сходился бы и исходный ряд.

Замечание. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \in \mathbb{R}$ сходится условно, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-}$ расходятся.

Доказательство. Если бы они оба сходились, то сходился бы и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ как сумма двух сходящихся. Если бы один из них сходился, а другой расходился, то расходился бы и исходный ряд как разность сходящегося и расходящегося. $\square$

Теорема 46 (Римана. Перестановка членов условно сходящегося ряда). Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \in \mathbb{R}$ сходится условно. Тогда $\forall S \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S$. Более того, существует перестановка, после которой ряд вообще не будет иметь суммы.

Доказательство. Для определенности докажем теорему, когда $S \in [0, +\infty)$. Пусть $\{b_p\}$ и $\{c_q\}$ – подпоследовательности всех неотрицательных и всех отрицательных членов ряда; $b_p = a_{n_p}, c_q = a_{m_q}$. По предыдущему замечанию оба ряда $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$ расходятся. Положим $p_0 = q_0 = 0$. Обозначим через p_1 наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p > S$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p \leqslant S < \sum_{p=1}^{p_1} b_p$$

Затем обозначим через q_1 наименьшее число, для которого

$$\sum_{q=1}^{q_1} c_q < S - \sum_{p=1}^{p_1} b_p$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p + \sum_{q=1}^{q_1} c_q < S \leqslant \sum_{p=1}^{p_1} b_p + \sum_{q=1}^{q_1} c_q$$

Такие p_1 и q_1 найдутся в силу расходимости рядов $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$. Продолжим построение неограниченно. Пусть номера $p_1, ..., p_{s-1}, q_1, ..., q_{s-1}$ уже выбраны. Обозначим через p_s наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{p=1}^{p_s} b_p > S - \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_s - 1} b_p + \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q \leqslant S < \sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q$$

Затем обозначим через q_s наименьшее натуральное число, для которого $\sum_{q=1}^{q_s} c_q < S - \sum_{p=1}^{p_s} b_p$ то есть

$$\sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_s} c_q < S \leqslant \sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_s - 1} c_q$$

Такие p_s и q_s найдутся в силу расходимости рядов $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$.
Ряд

$$b_1 + ... + b_{p_1} + c_1 + ... + c_{q_1} + ... + b_{p_{s-1}+1} + ... + b_{p_s} + c_{q_{s-1}} + ... + c_{q_s} + ... \qquad (2)$$

получен из исходного ряда перестановкой. Докажем, что он сходится к S. Сгруппировав члены одного знака, мы получим ряд

$$B_1 + C_1 + \ldots + B_s + C_s + \ldots$$

где $B_s = \sum_{p=p_{s-1}+1}^{p_s} b_p, C_s = \sum_{q=q_{s-1}+1}^{q_s} c_q$. Обозначим его частные суммы через T_n. По построению $0 < T_{2s-1} - S \leqslant b_{p_s}, c_{q_s} \leqslant T_{2s} - S < 0$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к, b_{p_s} и c_{q_s} стремятся к нулю. Следовательно, $T_n \to S$. По теореме о группировке членов ряда и ряд (2) сходится к S. $\square$