Лекция по математическому анализу №2

Дудников Илья

29 сентября 2021 г.

Содержание

1 Продолжение про вещественные числа

1.1 Теорема о вложенных отрезках

Теорема 1 (Теорема о вложенных отрезка)**.** *Пусть* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ... \supset [a_n, b_n]$. *Тогда*

$$\exists a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Доказательство. $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant ... \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant ... \leqslant b_1$
Значит, $\forall k, m \to a_k \leqslant b_m$
Пусть $A = \{a_n\}, B = \{b_n\}$. По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : \forall k, m \in \mathbb{N} \to a_k \leqslant c \leqslant b_m \Rightarrow c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ ∎

Замечания: 1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; \frac{1}{n}\right] = \varnothing$. Важно, что именно отрезки, а не интервалы или полуинтервалы.
2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n; +\infty) = ?$
3) Без аксиомы полноты не работает. Например

$$[1.4; 1.5] \supset [1.41; 1.42] \supset ...$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}, \text{но не в } \mathbb{Q}$$

1.2 Принцип математической индукции

$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ - утверждения. Если

1. P_1 верно - база
2. $\forall n \in \mathbb{N} \to P_n \Rightarrow P_{n+1}$ - индукционный переход

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \to P_n$.

Определение 1. $M \subset \mathbb{R}$ - индуктивное, если $1 \in M \wedge (x \in M \Rightarrow x+1 \in M)$.

Определение 2. $\mathbb{N}$ - минимальное индуктивное подмножество $\mathbb{R}$

Определение 3 (Сдвиг индекса суммирования)**.**

$$\sum_{n=m}^{k} a_n = \sum_{j=m+p}^{k+p} a_{j-p}, p \in \mathbb{Z}$$

Определение 4. $k!!$ - произведение целых чисел до k включительно одной четности с k.

Определение 5 (Биномиальные коэффициенты)**.**

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Теорема 2 (Формула бинома Ньютона)**.** *Пусть* $n \in \mathbb{Z}, x, y, \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

Доказательство. $n = 0 \to 1 = 1$, верно
Индукционный переход:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} = C_n^n x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + C_n^k x^k y^{n+1-k}\right) + C_n^0 x^0 y^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) x^k y^{n+1-k} + C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k}$$

■

1.3 Супремум и инфимум

Определение 6. $E \subset \mathbb{R}$ - ограниченное сверху, если $\exists A : \forall x \in E \to x \leqslant A$

Определение 7. $E \subset \mathbb{R}$ - ограниченное снизу, если $\exists B : \forall x \in E \to x \geqslant B$

Определение 8. $E \subset \mathbb{R}$ - ограниченное, если оно ограничено и снизу, и сверху.

Определение 9. $M \in \mathbb{R}$ называется максимумом мн-ва E, если $\forall x \in E \to x \leqslant M \wedge M \in E$

Определение 10. $K \in \mathbb{R}$ называется минимумом мн-ва E, если $\forall x \in E \to x \geqslant K \wedge K \in E$

Теорема 3 (Существование минимума и максимума у конечного множества из $\mathbb{R}$)**.** *Во всяком конечном непустом подмножестве $\mathbb{R}$ есть наибольший и наименьший элементю*

Доказательство. $n = 1$ - количество элементов (База)
Индукционный переход: $\exists \max\{x_1, x_2, ..., x_n\} = C$
Добавим x_{n+1}: если $x_{n+1} > C \Rightarrow \max\{x_1, ..., x_{n+1}\} = x_{n+1}$
если $x_{n+1} \leqslant C \Rightarrow \max\{x_1, ..., x_{n+1}\} = C$ ■

Следствие 1. $\forall E \neq \varnothing \wedge E \subset \mathbb{Z} \wedge E$ - огр. $\to \exists \max E \wedge \min E$

Следствие 2. $\forall E \subset \mathbb{N}, E \neq \varnothing \to \exists \min E$

Далее везде $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$

Определение 11. Пусть E ограничено сверху, тогда $\sup E$ - наименьшаяя из верхних границ. (точная верхняя граница)

Определение 12. Пусть E ограничено снизу, тогда $\inf E$ - наибольшая из нижних границ. (точная нижняя граница)

Теорема 4. *$E \neq \varnothing$. Если E ограничено снизу, то* $\exists! \inf E$

Доказательство. Пусть A - множество всех нижних границ $E (A \neq \varnothing)$
$\forall a \in A, b \in E \to a \leqslant b$
Тогда по аксиоме полноты $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b \ \forall a \in A, b \in E \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} c \leqslant b \ \forall b \in E \text{ - } c \text{ - нижняя граница,} \\ c \geqslant a \ \forall a \in A \text{ - } c \text{ - наибольшее} \end{cases}$ ■

Определение 13.

$$l = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \to x \leqslant l \\ \forall \varepsilon > 0 \to \exists y \in E : y > l - \varepsilon \end{cases}$$

$$m = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \to x \geqslant m \\ \forall \varepsilon > 0 \to \exists y \in E : y < l + \varepsilon \end{cases}$$

Если E не ограничено сверху, то $\sup E = +\infty$
Если $E = \varnothing$, то чаще всего $\sup E$ и $\inf E$ не определены, но иногда $\sup \varnothing = -\infty, \inf \varnothing = +\infty$

Утверждение 1. $\varnothing \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. *Тогда если A ограничено снизу, то* $\inf A \leqslant \inf B$

Доказательство. Если C - нижняя граница A, то $\forall x \in A \to C \leqslant x \Rightarrow \forall y \in B \to C \leqslant y \Rightarrow C$ - нижняя граница $B \Rightarrow \inf A$ - тоже нижняя граница $B \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$ ■

Утверждение 2. $\varnothing \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. *Тогда если A ограничено сверху, то* $\sup A \geqslant \sup B$

2 Отображения

$f : A \to B$ $f(x) = y$
y – образ элемента X
x – прообраз y
$f(A)$ – образ множества A
$f^{-1}(B)$ – прообраз множества B
$G_f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$

Определение 14. $f : A \to B$. Если $f(A) = B$, то f сюръективно.

Определение 15. $f : A \to B$. Если $(x_1 \neq x_2 \in A) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$, то f инъективно.

Определение 16. Биекция - f инъективно и сюръективно.

Определение 17 (Композиция)**.** $g(x), f(x)$.
$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$
$f : X \to Y$ $g : Y_0 \to Z, f(x) \subset Y_0$

Определение 18. id_x - тождественное отображение: $f(x) = x$

Определение 19. $f : X \to Y, X_0 \subset X$
$f|_{X_0}$ - сужение отображения f на X_0