Матанализ 1 семестр ПИ,
Лекция, 11/03/21

Собрано 5 ноября 2021 г. в 10:22

Содержание

0.1. O-символика

Def. 0.1.1. *Пусть $f \sim g, f \sim h, x \to x_0$. Если $f - h = o(f-g)$, то говорят асимптотическое равенство $f \sim h$ точнее, чем $f \sim g$.*

Пусть $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D. Пусть задана система функций $\{g_k\}_{k=0}^N : \forall k \in [0, N-1] \cap \mathbb{Z}_+ \to g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot g_k(x) + o(g_N(x))$$

Многочлены получаются, если $g_k(x) = (x - x_0)^k$.
Если $f(x) \sim C \cdot (x-x_0)^k (C \neq 0)$, то $C \cdot (x - x_0)^k$ – главная степенная часть.

Теорема 0.1.2 (О единственности асимптотического разложения)**.** $D \in \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D, $n \in \mathbb{Z}_+; f, g_k : D \to \mathbb{R}, g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), x \to x_0\ \forall k = 0, ..., n-1$ и $\forall V(x_0)\ \exists$ точка в $\dot{V}(x_0)$: в нкй g_n не ноль. Тогда если существует асимптотическое разложение f по системе функций $\{g_k\}$, то оно единственно.

Доказательство. Пусть не единственное. Тогда $\exists c_k, d_k, k = 0, ..., n : \exists i\ c_i \neq d_i$.
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot g_k(x) + o(g_n(x))$ и $f(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k \cdot g_k(x) + o(g_n(x))$ при $x \to x_0$.
Т.к. $g_{k+1}(x) = o(g_k(x))$, то $g_{k+1}(x) = o(g_l(x))\ \forall l \leqslant k$ при $x \to x_0$.
Обозначим $E_k = \{x : g_k(x) \neq 0, k = 0, ..., n\}$. Если $g_k = 0$ на $V(x_0)$, то $g_{k+1} = 0$ на $V(x_0), g_n = 0$ на $V(x_0)$.

$$g_{k+1} = o(g_k) \Leftrightarrow \exists \varphi : g_{k+1} = \varphi \cdot g_k$$

Если x_0 – предельная точка E_{k_0}, то она предельная точка всех E_k. Пусть m – наименьший номер : $c_m \neq d_m$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k g_k(x) = o(g_m(x)), f(x) = \sum_{k=0}^{m} d_k g_k(x) + o(g_m(x))$$

Вычтем: $0 = (c_m - d_m) g_m(x) + o(g_m(x))$. Поделим на $g_m(x)$

$$0 = (c_m - d_m) + \frac{o(g_m(x))}{g_m(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} c_m - d_m \Rightarrow c_m = d_m$$

■

Def. 0.1.3. *$x_0 \in \mathbb{R}, f$ задана хотя бы на $\langle a, x_0)$ или $(x_0, b\rangle$ и действует в $\mathbb{R}$. Тогда прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции f, если*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty$$

Def. 0.1.4. *$\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Прямая $y = \alpha x + \beta$ – наклонная асимптота f при $x \to +\infty$, если $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$ при $x \to +\infty$.*

Def. 0.1.5. *При $x \to -\infty$ аналогично.*

Теорема 0.1.6 (Уравнение наклонной асимптоты). $\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Прямая $y = \alpha x + \beta$ является асимптотой f при $x \to +\infty \Leftrightarrow \alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \alpha x)$

Доказательство. "$\Rightarrow$". По определению $f(x) = \alpha x + \beta + \varphi(x), \varphi \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Тогда $\frac{f(x)}{x} = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$$

$f(x) - \alpha x = \beta + \varphi(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$$

"$\Leftarrow$". Проделаем те же рассуждения "в обратную сторону". ∎

Пусть $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка $E, n \in \mathbb{Z}_+$. Хотим найти многочлен степени не выше n ($P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k$)

$$f(a) = P(a), f(x) = P(x) + o((x-a)^n), x \to a \tag{1}$$

Замечание 1.0.1. Если такой многочлен существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть $\exists P(x), Q(x)$, удовлетворяющие условию (1). Тогда

$$0 = P(x) - Q(x) + o((x-a)^n)$$

Если $P(x) \neq Q(x)$, то $P(x) - Q(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k (x-a)^k = r(x)$

$$\Rightarrow r(x) = o((x-a)^n), x \to a$$

$r(x) = r_m (x-a)^m + ... + r_n (x-a)^n, m \leqslant n, r_m \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{(x-a)^m} = o((x-a)^{n-m}) \Rightarrow r_m \neq 0 = 0$$

■

Def. 1.0.2. *Многочлен, удовлетворяющий условию (1) называется многочленом Тейлора функции f в точке a порядка n $T_{a,n} f$*

Def. 1.0.3. *Функция f называется дифференцируемой в точке a ($\langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$), если* $\exists k \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + k(x-a) + o(x-a), x \to a$$

Def. 1.0.4. $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, *если* $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = K \in \mathbb{R}$, *то K называется производной функции f в точке a. (Обозначение $f'(a), \frac{df}{dx}(a), Df(a)$)*
$\Delta_a f = f(x) - f(a)$ – *приращение функции f в точке a.*
$x - a = \Delta_a x$.

$$f'(a) = \lim_{\Delta_a x \to 0} \frac{\Delta_a f}{\Delta_a x}$$

Теорема 1.0.5. $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$. Тогда равносильны три утверждения:

1. f дифференцируема в точке a
2. $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ существует и равен k
3. $\exists F(x) : F : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, F$ непрерывна в точке a, $F(a) = k$ и $f(x) - f(a) = F(x)(x-a), x \in \langle A, B \rangle$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). $\exists k : f(x) - f(a) = k(x-a) + o(x-a), x \to a$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k + \frac{o(x-a)}{x-a} \to k$$

2) $\Rightarrow$ 3).

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, x \neq a \\ k, x = a \end{cases}$$

из 2) следует непрерывность F в точке a
3) $\Rightarrow$ 1). По 3) $\exists F$:

$$f(x) - f(a) = F(x)(x-a) = \Leftrightarrow f(X) = f(a) + F(x)(x-a) = f(a) + k(x-a) + (F(x) - k) \cdot (x-a)$$

$F(x) \xrightarrow[x \to a]{} F(a) = k \Rightarrow (F(x) - k)(x-a) = o((x-a))$ ■

1.1. Связь с физикой

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ – мгновенная скорость}$$

1.2. Связь с геометрией

Рассмотрим функции: $l_k(x) = f(a) + k(x - a)$, графики – прямые, проходящие через точку $(a; f(a))$

$$f(x) - l_k(x) = f(x) - f(a) - k(x - a)$$

Если $f(x)$ дифференцируема в точке a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \Leftrightarrow f(x) - l_k(x) = (x - a) \cdot (f'(a) - k) + o(x - a)$$

При $k = f'(a)$ разность есть $o(x - a)$.

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

касательная в точке a к функции f. $\operatorname{tg} \alpha = f'(a)$.

1.3. Бесконечные производные

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \Rightarrow f'(a) = +\infty$$

В таком случае f не является дифференцируемой в точке a.
Односторонняя производная:

$$\exists \lim_{x \to a\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$