

Матанализ 2 семестр ПИ, Лекции

Собрано 2 марта 2022 г. в 11:42

Содержание

1. Интегральное исчисление	1
1.1. Неопределенный интеграл	1
1.2. Определенный интеграл Римана	5
1.3. Суммы Дарбу	6
1.4. Критерии интегрируемости функции	7
1.5. Свойства интеграла Римана	12
1.6. Интегральные теоремы о средних	14

Раздел #1: Интегральное исчисление

1.1. Неопределенный интеграл

Def 1.1.1. $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется первообразной функцией f , если F дифференцируема на $\langle A, B \rangle, F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle$.

Теорема 1.1.2. Пусть $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$ – первообразная f . Тогда G – первообразная $f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) + c = G(x)$.

Доказательство. \Rightarrow . Пусть $H(x) = F(x) - G(x)$. Тогда

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv \text{const}$$

\Leftarrow . $(F(x) + c)' = (G(x))' \Leftrightarrow f(x) = F'(x) = G'(x) \Rightarrow G$ – первообразная. ■

Def 1.1.3. $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$ – первообразная f . Множество функций $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ называется неопределенным интегралом f .

$$\int f(x) dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Далее, $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Дифференцирование

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), x \in \langle A, B \rangle$$

2. Арифметические действия:

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \{F(x) + G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int f(x) dx + H(x) = \{F(x) + H(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda \int f(x) dx = \{\lambda F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Утверждение 1.1.4. Если функция f непрерывна на $\langle A, B \rangle$, то у неё есть первообразная на $\langle A, B \rangle$.

Упражнение 1.1.5. $f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$. Есть ли первообразная у этой функции?

Def 1.1.6. $E \subset \mathbb{R}, f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Если F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ на E , то F – первообразная f на множестве E .

Таблица неопределенных интегралов

- | | |
|--|---|
| 1. $\int a \, dx = ax + c, a \in \mathbb{R}$ | 8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$ |
| 2. $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$ | 9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + c$ |
| 3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$ | 10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, a \neq 0$ |
| 4. $\int e^x \, dx = e^x + c$ | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c, a > 0$ |
| 5. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$ | 12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c, a \neq 0$ |
| 6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln x + \sqrt{x^2+a} + c, a \in \mathbb{R}$ |
| 7. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$ | |

Доказательство. Дифференцирование ■

Пример 1.1.7. $\int \frac{\sin x}{x} \, dx$ – неберущийся интеграл. $\operatorname{Si}(x)$ – интегральный синус (одна из первообразных, закрепленная при $x \rightarrow 0+$).

$$(\operatorname{Si}(x))' = \frac{\sin x}{x}$$

Теорема 1.1.8 (Линейность неопределенного интеграла). $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, имеют первообразные на $\langle A, B \rangle$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha, \beta \neq 0$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx$$

Доказательство. Пусть F и G – первообразные f и g на $\langle A, B \rangle$. Правая часть равенства: $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$.

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + c)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$
■

Теорема 1.1.9 (Замена переменной). $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, F – первообразная f на $\langle A, B \rangle$, $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$ – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + c$$

Доказательство.

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$
■

Замечание 1.1.10. $\varphi'(x) \, dx = d\varphi(x)$. Пусть $y = \varphi(x)$

$$\int f(y) \, dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Пример 1.1.11. $\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx$. Пусть $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x} \, dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int y \, dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Следствие 1.1.12. Пусть в условиях теоремы φ имеет обратную функцию $\psi : \langle A, B \rangle \rightarrow \langle C, D \rangle$. Если $G(x)$ – первообразная функции $(f \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, то

$$\int f(x) dx = G(\psi(x)) + c$$

Доказательство. Пусть F – первообразная f на $\langle A, B \rangle$. $F(\varphi(x))$ – первообразная $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ (по теореме). Рассмотрим $G(x) - F(\varphi(x))$ – постоянная (т.к. производная равна нулю). $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$. Тогда

$$G(\psi(y)) - F(y) = \text{const} \Rightarrow \int f(y) dy = G(\psi(y)) + c$$

■

Пример 1.1.13. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Пусть $t = \sqrt{x}, t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = dt^2 = 2t dt$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{1+t} = \int \left(\frac{2t+2}{t+1} - \frac{2}{t+1} \right) dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= 2t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2 \ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+1) + c \end{aligned}$$

Пример 1.1.14. $\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$.

Иначе: $\int \sin x \cos x dx = - \int \cos x d \cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$.

Иначе: $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{\cos 2x}{4} + c$.

Мораль сей басни такова: константы разные, а не $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$.

Теорема 1.1.15 (Формула интегрирования по частям). $f, g \in C^1 \langle A, B \rangle$. Тогда

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Доказательство. H – первообразная $g \cdot f'$. Тогда

$$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x)$$

■

Замечание 1.1.16. $\int u dv = uv - \int v du$

Пример 1.1.17. $\int x e^x dx$. Пусть $u = x, u' = 1, v' = e^x, v = e^x$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + c$$

Пример 1.1.18. $\int \ln x dx$. Пусть $u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = 1, v = x$.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + c$$

Упражнение 1.1.19. Пусть $f = \sin x, g = e^x$. Тогда

$$\int f dg = fg - \int g df \Leftrightarrow \int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

Пусть теперь $f = \cos x, g = e^x$. Тогда

$$\int f dg = fg - \int g df \Leftrightarrow \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

Отсюда

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Пример 1.1.20. Пусть $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}, n \in \mathbb{N}$. Выразим интеграл I_{n+1} через I_n для произвольного натурального n .

Обозначим $f(x) = \frac{1}{(x^2+a)^n}$ и $g(x) = x$. Тогда

$$df(x) = \left(\frac{1}{(x^2+a)^n} \right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a)^{n+1}} dx, dg(x) = dx$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+a)^n} - 2na \int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1} \end{aligned}$$

Откуда

$$2naI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a)^n}$$

Утверждение 1.1.21. Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

Рассмотрим простейшие дроби:

1. $\frac{a}{(x+p)^n}, n \in \mathbb{N}, a, p \in \mathbb{R}$
2. $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Интегралы от простейших дробей первого рода вычисляются по таблице. Для простейших дробей второго рода используется следующий алгоритм:

1. Если $p \neq 0$, то выделим полный квадрат и выполним замену $y = x + \frac{p}{2}$. Если $p = 0$, тогда

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = a \int \frac{x dx}{(x^2+q)^n} + b \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$$

2. Интеграл $\int \frac{x dx}{(x^2+q)^n}$ можно вычислить с помощью замены $y = x^2 + q$, т.к. $dy = 2x dx$.

3. Применяя к интегралу $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$ формулу понижения $n-1$ раз сведем его к интегралу I_1 , который является табличным.

Пример 1.1.22 (12 и 13 из таблицы).

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + c$$

Пример 1.1.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Пусть $x = \operatorname{sh} t$, $dx = \operatorname{ch} t dt$. Тогда

$$\int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + c$$

Упражнение 1.1.24. Найди формулу для $(\operatorname{sh} t)^{-1}$

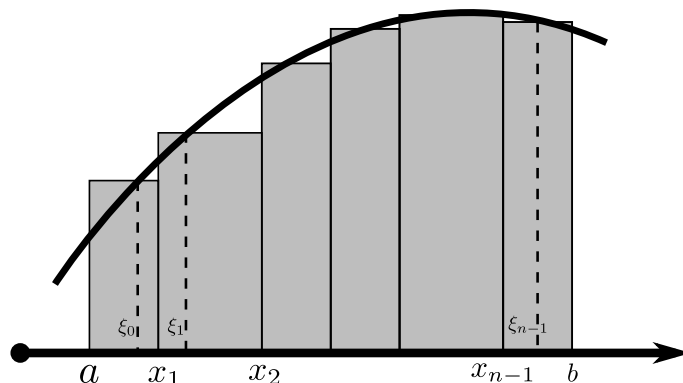
Неберущиеся интегралы:

- $\int \frac{\sin x}{x} dx$
- $\int \sin x^2 dx$
- $\int \frac{\cos x}{x} dx$
- $\int \cos x^2 dx$
- $\int \frac{dx}{\ln x}$
- $\int e^{-x^2} dx$
- $\int \frac{e^x}{x} dx$

1.2. Определенный интеграл Римана

Def 1.2.1. $[a, b], a < b$. Набор точек $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ – разбиение (дробление) отрезка $[a, b]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. $\lambda = \lambda_\tau = \max_{k \in [0, n-1]} \Delta x_k$ – ранг дробления (мелкость), $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ – оснащение дробления τ . Пара (τ, ξ) называется оснащённым дроблением.

Def 1.2.2. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$ – суммы Римана (интегральные суммы).



Def 1.2.3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Число $I \in \mathbb{R}$ называют пределом интегральных сумм при ранге $\rightarrow 0$:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad (I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma)$$

если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

Замечание 1.2.4. Последовательность оснащенных дроблений $\{(\tau^{(i)}, \xi^{(i)})\}_{i=1}^{\infty} : \lambda^{(i)} \rightarrow 0$.
 $\forall \{\tau^{(i)}, \xi^{(i)}\} : \lambda^{(i)} \rightarrow 0 \quad \sigma_{\tau^{(i)}}(f, \xi^{(i)}) \rightarrow I$.

Def 1.2.5 (Интеграл Римана). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\exists \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$, то f называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, а число I называется интегралом f по $[a, b]$.

$R[a, b]$ – класс функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx$$

1.3. Суммы Дарбу

Def 1.3.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ – дробление $[a, b]$.

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Суммы

$$S = S_{\tau}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, s = s_{\tau}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются верхними и нижними интегральными суммами.

Замечание 1.3.2. Если f – непрерывна на $[a, b]$, то это две частные суммы из сумм Римана.

Замечание 1.3.3. f ограничена сверху $\Leftrightarrow S$ ограничена.

Свойства сумм Дарбу:

$$1. S_{\tau}(f) = \sup_{\xi} \sigma_{\tau}(f, \xi), s_{\tau} = \inf_{\xi} \sigma_{\tau}(f, \xi)$$

Доказательство. $M_k \geq f(\xi_k), k = 0, \dots, n-1$. Тогда $M_k \Delta x_k \geq f(\xi_k) \Delta x_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \Rightarrow S_{\tau}(f) \geq \sigma_{\tau}$, т.е. S_{τ} – верхняя граница. Докажем, что она является точной верхней границей.

Если f ограничена на $[a, b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. На каждом кусочке разбиения $\exists \xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}] : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = S - \varepsilon$.

Если f не ограничена на $[a, b] \Rightarrow$ не ограничена на каком-то кусочке $[x_l, x_{l+1}]$. Фиксируем $A > 0$ и выберем ξ_k^* при $k \neq l$ произвольно, а для ξ_l^*

$$f(\xi_l^*) > \frac{1}{\Delta x_l} \left(A - \sum_{k \neq l} f(\xi_k^*) \Delta x_k \right)$$

Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta x_k > A \Rightarrow \sup_{\xi} \sigma = +\infty = S$$

■

2. При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя не уменьшится.

Доказательство. Докажем для верхних сумм при добавлении одной точки. $\tau : \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$. Добавим точку c в $[x_l, x_{l+1}]$ – T – новое дробление.

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + M_l \Delta x_l + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + (c - x_l) \cdot M' + (x_{l+1} - c) M'' + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

где $M' = \sup_{x \in [x_l, c]} f$, $M'' = \sup_{x \in [c, x_{l+1}]} f$. $M_l \geq M'$, $M_l \geq M''$, т.к. $[x_l, c] \subset [x_l, x_{l+1}]$, $[c, x_{l+1}] \subset [x_l, x_{l+1}]$.

Рассмотрим $S_\tau - S_T = M_l \Delta x_l - (c - x_l) M' - (x_{l+1} - c) M'' \geq M_l (x_{l+1} - x_l - c + x_l - x_{l+1} + c) = 0$.

Добавить больше точек можно по индукции. ■

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней.

Доказательство. τ_1, τ_2 – разные дробления $[a, b]$. Докажем, что $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$. Возьмем $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда $s_{\tau_1} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_2}$ (по свойству 2). ■

Утверждение 1.3.4. $f \in R[a, b] \Rightarrow f$ ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть f не ограничена на $[a, b]$ сверху. Тогда $\forall \tau \Rightarrow \sup_\xi \sigma_\tau(f, \xi) = +\infty$. Тогда $\forall \tau$ и числа $I \exists$ оснащение $\xi' : \sigma_\tau(\xi') > I + 1 \Rightarrow$ никакое число I не является пределом интегральных сумм. ■

Def 1.3.5. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Возьмем

$$I^* = \inf_\tau S_\tau \quad I_* = \sup_\tau s_\tau$$

где I^* – верхний интеграл Дарбу, I_* – нижний интеграл Дарбу.

Замечание 1.3.6. $I^* \geq I_*$.

Замечание 1.3.7. f ограничена сверху $\Leftrightarrow I^*$ ограничена.

1.4. Критерии интегрируемости функции

Теорема 1.4.1 (Критерий интегрируемости функции). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \overline{S_\tau(f) - s_\tau(f)}_{\lambda \rightarrow 0} = 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \quad S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Доказательство. \Rightarrow . Пусть $f \in R[a, b]$. Обозначим $I = \int_a^b f$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$:

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Переходя к супремуму и инфимуму, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда $S_\tau - s_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{3} - I + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

\Leftarrow . Пусть $S_\tau - s_\tau \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \Rightarrow$ все суммы Дарбу конечны.

$$s_\tau \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau \Rightarrow 0 \leq I^* - I_* \leq S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow I^* = I_*$ (т.к. это числа). Обозначим $I = I^* = I_*$.

$$s_\tau \leq I \leq S_\tau, s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau \Rightarrow |I - \sigma_\tau| \leq S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \Rightarrow |I - \sigma_\tau| < \varepsilon$. ■

Замечание 1.4.2. Если $f \in R[a, b] \Rightarrow s_\tau \leq \int_a^b f \leq S_\tau$.

Следствие 1.4.3. $f \in R[a, b] \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\tau = \int_a^b f$

Доказательство. $0 \leq S_\tau - \int_a^b f \leq S_\tau - s_\tau, 0 \leq \int_a^b f - s_\tau \leq S_\tau - s_\tau$. ■

Замечание 1.4.4. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau = I^*, \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\tau = I_*$.

Утверждение 1.4.5 (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману). $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ ограничена на $[a, b]$ и $I_* = I^*$.

Утверждение 1.4.6 (Критерий Римана интегрируемости). $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.

Def 1.4.7. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. *Величина*

$$\omega(f)_D = \sup_{x, y \in D} (f(x) - f(y))$$

называется колебанием f на D . Из определений граней функции ясно, что

$$\omega(f)_D = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{y \in D} f(y)$$

Если задано τ отрезка $[a, b]$, то

$$\omega_k(f) = M_k - m_k$$

Тогда теорему можно записать:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0$$

Теорема 1.4.8 (Интегрируемость непрерывной функции). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.

Доказательство. По теореме Кантора $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерна непрерывна на $[a, b]$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t', t'' \in [a, b] : |t' - t''| < \delta \Rightarrow |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

По теореме Вейерштрасса f достигает наибольшего и наименьшего значения на любом отрезке, содержащемся в $[a, b]$. Поэтому колебание f на всяком отрезке, длина которого меньше δ , будет меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, $\forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k$$

Теорема 1.4.9 (Интегрируемость монотонной функции). f монотонна на $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.

Доказательство. Пусть f монотонно возрастает на $[a, b]$. Если $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ постоянна $\Rightarrow f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.

Если $f(a) < f(b)$. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Возьмем произвольное $\tau : \lambda_\tau < \delta$ на $[x_k, x_{k+1}]$. В силу монотонности f верно $\omega_k(f) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta_k < \sum_{k=0}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon$$

■

Замечание 1.4.10. $f \in R[a, b]$. Если изменить значение f в конечном числе точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

Доказательство. \tilde{f} — отличается от f в точках t_1, t_2, \dots, t_m . $|f|$ ограничена на $[a, b] \Rightarrow |\tilde{f}|$ ограничена. $|f| \leq A$, возьмем $\tilde{A} = \max\{A, |\tilde{f}(t_1)|, |\tilde{f}(t_2)|, \dots, |\tilde{f}(t_m)|\}$. В интегральных суммах для f и \tilde{f} отличаются не более $2m$ слагаемых, поэтому

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - \sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)| \leq 2m(A + \tilde{A})\lambda_\tau \xrightarrow{\lambda_\tau} 0$$

Поэтому предел $\sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)$ существует и равен пределу $\sigma_\tau(f, \xi)$.

■

Теорема 1.4.11 (Интегрируемость функции и её сужения). 1. $f \in R[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b] \Rightarrow f \in \overline{R[\alpha, \beta]}$

2. Если $a < c < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in R[a, c], f \in R[c, b]$, то $f \in R[a, b]$.

Доказательство. 1. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$ из критерия интегрируемости на $[a, b]$.

τ_0 — дробление $[\alpha, \beta], \lambda_{\tau_0} < \delta$. Добавим точек до дробления $[a, b]$. Получим $\tau(\lambda_\tau < \delta)$.

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=l}^{m-1} \omega_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \varepsilon$$

2. Пусть f не постоянна, т.е. $\omega(f)_{[a,b]} > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta_1, \delta_2 : \forall \tau_1 : \lambda_{\tau_1} < \delta_1, \forall \tau_2 : \lambda_{\tau_2} < \delta_2$

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\}$. Пусть τ — дробление $[a, b], \lambda_\tau < \delta$. Точка $c \in [x_l, x_{l+1})$. Обозначим $\tau' = \tau \cup \{c\}, \tau_1 = \tau' \cap [a, c], \tau_2 = \tau' \cap [c, b]$

$$S_\tau - s_\tau \leq S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega_l(f)\delta < \varepsilon$$

■

Def 1.4.12. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной на $[a, b]$, если множество её точек разрыв пусто или конечно (и все разрывы первого рода)

Следствие 1.4.13. f — кусочно-непрерывная на $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$

Доказательство. Возьмём точки a_1, a_2, \dots, a_m (может $a_1 = a$ и/или $a_m = b$). Рассмотрим отрезки $[a_k, a_{k+1}]$. f непрерывна на (a_k, a_{k+1}) и \exists конечные $\lim_{x \rightarrow a_k+} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a_{k+1}-} f(x) \Rightarrow f \in R[a_k, a_{k+1}] \Rightarrow$ по теореме о сужении $f \in R[a, b]$ ■

Def 1.4.14. Множество X называется не более, чем счётным, если оно конечно или счётно.

Def 1.4.15. $E \subset \mathbb{R}$ – имеет нулевую меру, если для $\forall \varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых $< \varepsilon$.

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \right)$$

Пример 1.4.16. Множество из одной точки.

Упражнение 1.4.17. Чему равна мера \mathbb{N} ?

Теорема 1.4.18 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ ограничена и множество точек разрыва имеет нулевую меру.

Теорема 1.4.19 (Арифметические действия над интегрируемыми функциями). $f, g \in R[a, b]$.
 Тогда

1. $f + g \in R[a, b]$
2. $f \cdot g \in R[a, b]$
3. $\alpha f \in R[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$
4. $|f| \in R[a, b]$
5. Если $\inf_{[a, b]} |g| > 0$, то $\frac{f}{g} \in R[a, b]$

Доказательство. 1. $D \subset [a, b]$. $x, y \in D$

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(y) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \omega_D(f) + \omega_D(g) \\ \omega_D(f+g) &\leq \omega_D(f) + \omega_D(g) \\ \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(f+g) &\leq \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(f) + \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(g) \\ \omega_k(f+g) &\leq \omega_k f + \omega_k g \end{aligned}$$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f+g) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k f \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k g \Delta x_k \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f + g \in R[a, b]$$

2. $|fg(x) - fg(y)| \leq |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \leq |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leq A|f(x) - f(y)| + B|g(x) - g(y)|$ (т.к. $R[a, b] \Rightarrow$ ограничена на $[a, b]$)
3. $g(x) = \alpha$
4. $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$
 $|\omega_k|f| \leq |\omega_k f|$

$$\begin{aligned}
5. \quad \frac{f}{g} &= f \cdot \frac{1}{g}. \text{ Докажем, что } \frac{1}{g} \in R[a, b] \\
0 < m &= \inf_{[a, b]} |g| \\
\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| &= \left| \frac{g(y) - g(x)}{g(x)g(y)} \right| \leq \frac{|g(x) - g(y)|}{m^2} \\
\omega_k\left(\frac{1}{g}\right) &\leq \frac{\omega_k(g)}{m^2}
\end{aligned}$$

■

Пример 1.4.20. 1. $\int_0^1 x^2 dx$

$$x^2 \in C[a, b] \Rightarrow x^2 \in R[a, b].$$

Рассмотрим какую-нибудь интегральную сумму: $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

2. $\int_0^1 e^x dx$ – упражнение

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad D \notin R[a, b], a < b$$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(D) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a \not\rightarrow_{\lambda \rightarrow 0} 0$$

■

$$4. \quad r(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ дробь несократима} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$r(x)$ непрерывна в каждой точке, разрывна в каждой рациональной.

$$r(x) \in R[0, 1]$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ Рациональные числа из $[0, 1]$ со знаменателем $\leq N$, конечное число $= C_N$, множество X .

Возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{4C_N}$ и дробление $\tau : \lambda_\tau < \delta$

Точки X попадут в не более, чем $2C_N$ отрезков дробления. В отрезках, где нет точек из X наибольшее значение $< \frac{1}{N}$

$$s_\tau(r) = 0$$

$$S_\tau(r) = \sum_{k: M_k \geq \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k + \sum_{k: M_k < \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k \leq \underbrace{1 \cdot 2C_N \cdot \delta}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{1}{N}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$S_\tau(r) - s_\tau(r) = S_\tau(r) \xrightarrow{\lambda_r \rightarrow 0} 0 \Rightarrow r \in R[0, 1] \text{ и } \int_0^1 r(x) dx = 0$$

■

Если $f \in R_D$ $g \in R[a, b]$, то $f(g) \in R[a, b]$? (D – множество значений g)

Ответ: нет. Пример: $f(y) = \begin{cases} 1, y \in [0, 1] \\ 0, y = 0 \end{cases}$ и $g(x) = r(x)$ на $[0, 1]$

$$f(r(x)) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = D(x) \notin R[0, 1]$$

Теорема 1.4.21 (Интегрируемость композиции). $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b], f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(\varphi) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$
 $\varphi \in \mathbb{R}[\alpha, \beta], f \in C[a, b]$. Тогда $f \circ \varphi \in R[\alpha, \beta]$

Доказательство. Например, из критерия Лебега. ■

1.5. Свойства интеграла Римана

1. $\int_b^a f = - \int_a^b f$
2. $\int_a^b f = 0$ ($\forall f$ на вырожденном отрезке $f \in \mathbb{R}[a, a]$)

Свойства:

- Аддитивность интеграла по отрезку:
 $a, b, c \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Доказательство. $f \in \mathbb{R}[a, b] \Rightarrow f \in \mathbb{R}[a, c], f \in R[c, b]$ $\{\bar{\tau}^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ и $\{\bar{\tau}^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ – последовательности оснащенных дроблений $[a, c]$ и $[c, b]$ (равномерных, т.е. $\tilde{\lambda} = \frac{c-a}{n}, \bar{\lambda}$)
 $\tau^{(n)} = \bar{\tau}^{(n)} \cup \bar{\tau}^{(n)}$ – дробление $[a, b]$
 $\xi^{(n)} = \bar{\xi}^{(n)} \cup \bar{\xi}^{(n)}$ – оснащение $\tau^{(n)}$
 $\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\sigma}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\underbrace{\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f}_{\text{по доказанному}} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

Все остальные случаи – аналогично. ■

- $f \equiv \alpha$ при $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f = \alpha(b-a)$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \alpha(b-a)$$

■

- **Линейность интеграла:** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a, b]$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство. $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$

$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sigma_\tau(\alpha f) + \sigma_\tau(\beta g)$ и переход к пределу.

■

- **Монотонность интеграла:** $a < b, f, g \in R[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Доказательство. $\sigma_\tau(f) \leq \sigma_\tau(g)$

■

Следствие 1.5.1. $a < b, f \in R[a, b]$, если $f \leq M \in \mathbb{R}$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f \leq M(b-a)$,
если $f \geq m$ на $[a, b]$ то $\int_a^b f \geq m(b-a)$

Следствие 1.5.2. $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

- $a < b, f \in R[a, b]$ и $\exists c \in [a, b] : f(c) > 0$ и f непрерывна в точке c .

Тогда $\int_a^b f > 0$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in \underbrace{[c - \delta; c + \delta] \cap [a, b]}_{[\alpha, \beta]} : |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$$f(x) > f(c) - \varepsilon = \frac{f(c)}{2} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha)$$

$$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^b f \geq \int_\alpha^\beta f \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha) > 0$$

■

Замечание 1.5.3. Таким же образом строгий знак в монотонности интеграла.

Замечание 1.5.4. $f \in R[a, b], f > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$

- $a < b, f \in R[a, b]$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Доказательство. $-|f| \leq f \leq |f|$

■

Если не знаем, что $a \geq b$ или $b \geq a$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

1.6. Интегральные теоремы о средних

Теорема 1.6.1. $f, g \in R[a, b], g \geq 0$ на $[a, b], m \leq f \leq M$. Тогда $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$

Доказательство. $mg \leq fg \leq Mg$ на $[a, b]$

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$$

Если $\int_a^b g = 0$, то $\exists \mu \in [m, M] : 0 = \mu \cdot 0$

Если $\int_a^b g > 0$, то $m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M$

Возьмём $\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ ■

Замечание 1.6.2. Для $g \leq 0$ тоже верно.

Следствие 1.6.3. 1. $f \in C[a, b], g \in R[a, b], g \geq 0$ (или $g \leq 0$).

Тогда $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса: $\exists m = \min_{[a,b]} f$ и $M = \max_{[a,b]} f$

Подберём $\mu \in [m, M]$ по предыдущей теореме. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists c \in [a, b] : f(c) = M$ ■

2. $f \in R[a, b], m, M \in \mathbb{R} : m \leq f \leq M$ на $[a, b]$. Тогда $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f = \mu(b-a)$

Доказательство. $g \equiv 1$ в теореме. ■

3. $f \in C[a, b]$. Тогда $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b-a)$

Доказательство. $g \equiv 1$ в следствии 1. ■

Замечание 1.6.4. Теорему и следствия называют ещё теоремами о средних. Почему?

Def 1.6.5. $f \in R[a, b], a < b$

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ – интегральное среднее f на $[a, b]$

Если возьмём равномерное разбиение $[a, b]$, то $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \frac{b-a}{n}$

То есть $\frac{\sigma_n}{b-a} \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f$, где $\frac{\sigma_n}{b-a}$ – среднее арифметическое значений функции в точках ξ_k