

# Матанализ 1 семестр ПИ,

## Лекция, 09/29/21

Собрано 6 октября 2021 г. в 20:23

---

## Содержание

<b>1. Пределы последовательностей</b>	<b>1</b>
1.1. Число $e$ . . . . .	1
1.2. Теорема Штольца . . . . .	2
1.3. Подпоследовательности . . . . .	3

## 1.1. Число $e$

Пусть  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} = \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n^{2n+2}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_{n-1} \geq y_n \Rightarrow y_n \text{ убывающая} \Rightarrow \exists \lim y_n \Rightarrow \exists \lim x_n, \text{ т.к. } x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \lim x_n = \lim y_n \end{aligned}$$

**Def. 1.1.1.**  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

**Теорема 1.1.2.**  $x_n > 0 \wedge \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ . Тогда  $\exists \lim x_n = 0$

*Доказательство.* Пусть  $q = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$ ,  $q < 1$ .  $\exists N : \forall n \geq N \rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+q}{2}$ . Тогда

$$0 < x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot x_N \leq x_N \cdot \left(\frac{1+q}{2}\right)^{n-N} \rightarrow 0$$

■

*Следствие 1.1.3.*  $a > 1, k \in \mathbb{N}, \lim \frac{n^k}{a^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$$

*Следствие 1.1.4.*  $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

*Следствие 1.1.5.*  $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

## 1.2. Теорема Штольца

**Теорема 1.2.1** (Теорема Штольца).  $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$   $\lim y_n = +\infty \wedge \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$  Тогда  $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

*Доказательство.* 1.  $l = 0$ .  $\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}$ .  $\forall \varepsilon > 0 \exists m : \forall k \geq m \rightarrow |\varepsilon_k| < \varepsilon$

$$x_k - x_{k-1} = \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_k - y_{k-1}) \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_n - y_m) \leq \varepsilon \cdot y_n$$

Тогда  $|x_n| \leq |x_m| + \varepsilon y_n$

$$0 \leq \left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leq \left| \frac{x_m}{y_n} \right| + \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$$

2.  $l \neq 0, l \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим  $\tilde{x}_n = x_n - l \cdot y_n$ . Тогда

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - l \cdot y_n - x_{n-1} + l \cdot y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \rightarrow 0$$

Тогда по п. 1  $\frac{\tilde{x}_n}{y_n} \rightarrow 0$ .  $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\tilde{x}_n + l \cdot y_n}{y_n} = \frac{\tilde{x}_n}{y_n} + l \rightarrow l$

3.  $l = +\infty$ .  $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty$ . Начиная с некоторого номера  $> 1$

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} \Leftrightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \rightarrow +\infty$$

Тогда  $x_n$  возрастает и стремится к  $+\infty$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$$

4.  $l \rightarrow -\infty$ . Следует рассмотреть  $\{-x_n\}$  ■

**Теорема 1.2.2.**  $y_1 > y_2 > \dots > 0 \wedge \lim y_n = \lim x_n = 0$ . Если  $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , тогда  $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

*Доказательство.* Докажем для  $l = 0$ .

$$\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}, \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \rightarrow |\varepsilon_k| < \varepsilon$$

Пусть  $n > m \geq N$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| \cdot |y_{k-1} - y_k| \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon (y_m - y_n) \Leftrightarrow |x_m| \leq \varepsilon \cdot y_m \Rightarrow \frac{|x_m|}{y_m} < \varepsilon$$

Доказали, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq N \rightarrow \left| \frac{x_m}{y_m} \right| < \varepsilon$

Для  $l \neq 0$  доказывается аналогично предыдущей теореме. ■

### 1.3. Подпоследовательности

**Def. 1.3.1.** Пусть дана последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Подпоследовательностью этой последовательности называется  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

**Теорема 1.3.2** (О стягивающихся отрезках).  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots, \lim(b_n - a_n) = 0$ . Тогда  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$  состоит из одной точки. Если эта точка  $c$ , то  $\lim a_n = \lim b_n = c$

*Доказательство.*  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$  (по лемме о вложенных отрезках). Пусть  $c < d$  принадлежит этому пересечению.

$$0 < d - c \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leq c - a_n \leq 0 \Rightarrow \text{точка единственна}$$

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leq c - a_n \leq 0 \Rightarrow a_n \rightarrow c$$

$$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \Rightarrow b_n \rightarrow c$$

■

**Теорема 1.3.3** (Теорема Больцано-Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство.* Возьмем  $a_1 \leq b_1$  так, чтобы вся последовательность лежала между ними.  $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ . Поделим отрезок пополам и возьмем ту половину, в которой лежит бесконечное число членов последовательности. Обозначим её  $[a_2, b_2]$ . Теперь возьмем  $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$  и  $n_2 > n_1$ .  $[a_3, b_3]$  - ту половину  $[a_2, b_2]$ , в которой бесконечное число членов последовательности и т.д.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \text{ и длина } [a_k, b_k] = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}, \lim a_n = \lim b_n = c$$

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$   $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  - подпоследовательность  $\{x_n\}$  и

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

■

**Теорема 1.3.4.** 1. Если последовательность неограничена сверху, то из неё можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к  $+\infty$

2. Если неограничена снизу, то можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к  $-\infty$

*Доказательство.*

$$\exists n_1 : x_{n_1} > 1$$

$$\exists n_2 : x_{n_2} > 2 \wedge n_2 > n_1$$

$$\exists n_k : x_{n_k} > k \wedge n_k > n_{k-1}$$

■

*Следствие 1.3.5.* Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность имеющую предел (конечный или бесконечный).

**Def. 1.3.6.** Частичные пределы последовательности  $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$  – пределы её подпоследовательностей.

*Замечание 1.3.7.*  $\lim x_n = a, \{x_{n_k}\}$  – подпоследовательность  $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow a$

**Def. 1.3.8.** Последовательность  $\{x_n\}$  – фундаментальная, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Свойства:

1. Фундаментальная последовательность ограничена
2. Сходящаяся последовательность фундаментальна

*Доказательство.*  $a = \lim x_n$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

■

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то эта последовательность сходится.

*Доказательство.*  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a, \forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall k \geq K \rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$M = \max \{n_K, N\}$ . Тогда  $\forall n \geq M \rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon$

■

**Теорема 1.3.9** (Критерий Коши сходимости последовательности). Последовательность сходится  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна

*Доказательство.* " $\Rightarrow$ ". Свойство 2.

" $\Leftarrow$ ". Фундаментальна  $\Rightarrow$  ограничена (свойство 1)  $\Rightarrow \exists$  сходящаяся подпоследовательность (теорема Больцано-Вейерштрасса)  $\Rightarrow$  сходится

■

**Def. 1.3.10.**  $\{x_n\}$  – ограничена сверху.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$  – верхний предел.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$  – нижний предел.

**Теорема 1.3.11.** Пусть  $y_n = \inf_{k \geq n} x_k, z_n = \sup_{k \geq n} x_k$ . Тогда

$$\exists \lim x_n, \overline{\lim} x_n \wedge \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

*Доказательство.* 1. Если неограничена сверху, то  $\overline{\lim} x_n = +\infty$

2. Пусть  $\{x_n\}$ .  $\forall n \rightarrow x_n \leq M$

$$z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq \dots \wedge z_n \leq M \Rightarrow \exists \lim z_n$$

3. Аналогично для  $y_n$

4.  $\forall n \rightarrow y_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

■

**Теорема 1.3.12.** 1.  $\overline{\lim} x_n$  – наибольший частичный предел  $\{x_n\}$

2.  $\underline{\lim} x_n$  – наименьший частичный предел  $\{x_n\}$

3.  $\exists \lim x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

*Доказательство.* 1.  $\{x_n\}$  – ограниченная последовательность,  $b = \overline{\lim} x_n$ . Построим  $\{x_{n_k}\}$  :

$$x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \quad z_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\} > b - \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x_{n_1} > b - \frac{1}{2}$$

$$z_{n_1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\} > b - \frac{1}{3} \Rightarrow \exists x_{n_2} > b - \frac{1}{3}, n_2 > n_1$$

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow b$$

Рассмотрим  $x_{m_k} \rightarrow c$ . Тогда  $x_{m_k} \leq z_{m_k} \Rightarrow c \leq b$

Если  $\{x_n\}$  неограничена

- сверху:  $\exists \overline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \rightarrow +\infty$
- снизу: а)  $\exists \overline{\lim} x_n = b \in \mathbb{R}$  – аналогично п.1. б)  $\exists \overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$

2. Аналогично

3. " $\Rightarrow$ ".  $\exists \lim x_n = l \Rightarrow \forall \{x_{n_k}\} \rightarrow \lim x_{n_k} = l \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$

" $\Leftarrow$ ".  $y_n \leq x_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \lim x_n \leq \overline{\lim} x_n \Rightarrow \exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

■

**Теорема 1.3.13** (характеристические свойства  $\overline{\lim} x_n$  и  $\underline{\lim} x_n$ ). 1.

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

2.

$$b = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N : x_n > a - \varepsilon \end{cases}$$

*Доказательство.* **TODO**

■