Матанализ 1 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 1 декабря 2021 г. в 16:14

Содержание

Раздел #1: Аксиомы вещественных чисел

1.1. Аксиомы сложения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \to a + 0 = a$ (существование нуля)
4. $\forall a \in \mathbb{R} \to \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ ($(-a)$ — противоположное число для a)

1.2. Аксиомы умножения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения)
3. $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R} \to 1 \cdot x = x$ (существование единицы)
4. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \to \exists \frac{1}{a} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($\frac{1}{a}$ — обратное число для a)

1.3. Дистрибутивность умножения относительно сложения

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

1.4. Аксиомы порядка ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leq b$ или $b \leq a$)

1. $\forall a \in \mathbb{R} \to a \leq a$ (рефлексивность)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b, b \leq c \to a \leq c$ (транзитивность)
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b, b \leq a \to a = b$ (антисимметричность)
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a \leq b$ или $b \leq a$
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \to a + c \leq b + c$
6. $\forall a, b \in R : 0 \leq a, 0 \leq b \to 0 \leq a \cdot b$

1.5. Ещё несколько определений

- $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$ (определение $\geq$)
- $a < b \Leftrightarrow a \leq b$ и $a \neq b$ (определение $<$)
- $a > b \Leftrightarrow b < a$ (определение $>$)

1.6. Аксиома полноты

$\forall A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \varnothing, B \neq \varnothing : \forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y \to \exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$

1.7. Следствия из аксиом множества действительных чисел

Следствие 1.7.1. Число 0 единственно

Доказательство. Предположим обратное: $\exists 0' \neq 0$, тогда рассмотрим следующее:

$$0' + 0 = 0'$$

$$0 + 0' = 0$$

Теперь заметим, что левые части равны по аксиоме о коммутативности сложения $\Rightarrow 0' = 0$, что противоречит предполагаемому. ■

Следствие 1.7.2. Число 1 единственно
Доказательство аналогично доказательству единственности нуля, только используется умножение вместо сложения.

Следствие 1.7.3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

Доказательство.

$$a = b \Rightarrow a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$$

$$a = b \Rightarrow b \le a \Rightarrow b + c \le a + c$$

$$a + c \le b + c,\ b + c \le a + c \Rightarrow a + c = b + c$$

В обратную сторону аналогично:

$$a + c = b + c \Rightarrow a + c \le b + c \Rightarrow a \le b$$

$$a + c = b + c \Rightarrow b + c \le a + c \Rightarrow b \le a$$

$$a \le b,\ b \le a \Rightarrow a = b$$

■

Следствие 1.7.4. $\forall a \in \mathbb{R}\ (-a)$ единственно.

Доказательство. Пусть верно обратное: $\exists a \in \mathbb{R} : \exists (-a)_1, (-a)_2 \in \mathbb{R} : (-a)_1 \neq (-a)_2$

$$a + (-a)_1 = a + (-a)_2 = 0$$

Добавим к обеим частям $(-a)_1$:

$$(-a)_1 = (-a)_2$$

Пришли к противоречию.

■

Следствие 1.7.5. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \le b \to -b \le -a$

Доказательство.

$$a + ((-a) + (-b)) \le b + ((-a) + (-b))$$

$$-b \le -a$$

■

Следствие 1.7.6. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \cdot x = 0$

Доказательство.

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = x \cdot (0+0) + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0$$

■

Следствие 1.7.7. $\forall x \in \mathbb{R} \to (-x) = (-1) \cdot x$

Доказательство. Предположим обратное: $\exists x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = b, b \neq (-x)$

$$(-1) \cdot x + 1 \cdot x = b + 1 \cdot x$$

$$x \cdot (1 + (-1)) = b + 1 \cdot x$$

$$b + x = 0$$

$$b = -x$$

Противоречие. ■

Следствие 1.7.8. $0 < 1$

Доказательство. Предположим обратное: $0 \geq 1$, вариант $0 = 1$ сразу отпадает из-за аксиомы о существовании единицы, значит $0 > 1 \Leftrightarrow -1 > 0$
Пусть $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, тогда $(-1) \cdot x \geq 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot x + 1 \cdot x \geq 1 \cdot x \Leftrightarrow 0 \geq x$
Противоречие. ■

Теорема 1.7.9 (Теорема о вложенных отрезка)**.** Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ... \supset [a_n, b_n]$. Тогда

$$\exists a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Доказательство. $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant ... \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant ... \leqslant b_1$
Значит, $\forall k, m \to a_k \leqslant b_m$
Пусть $A = \{a_n\}, B = \{b_n\}$. По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : \forall k, m \in \mathbb{N} \to a_k \leqslant c \leqslant b_m \Rightarrow c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ ■

Замечания: 1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; \frac{1}{n}\right] = \varnothing$. Важно, что именно отрезки, а не интервалы или полуинтервалы.
2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n; +\infty) = ?$
3) Без аксиомы полноты не работает. Например

$$[1.4; 1.5] \supset [1.41; 1.42] \supset ...$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}, \text{но не в } \mathbb{Q}$$

Раздел #2: Принцип математической индукции

$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ - утверждения. Если

1. P_1 верно - база
2. $\forall n \in \mathbb{N} \to P_n \Rightarrow P_{n+1}$ - индукционный переход

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \to P_n$.

Def 2.0.1. $M \subset \mathbb{R}$ - *индуктивное, если* $1 \in M \wedge (x \in M \Rightarrow x+1 \in M)$.

Def 2.0.2. $\mathbb{N}$ - *минимальное индуктивное подмножество* $\mathbb{R}$

Def 2.0.3 (Сдвиг индекса суммирования)**.**

$$\sum_{n=m}^{k} a_n = \sum_{j=m+p}^{k+p} a_{j-p}, p \in \mathbb{Z}$$

Def 2.0.4. $k!!$ - *произведение целых чисел до k включительно одной четности с k.*

Def 2.0.5 (Биномиальные коэффициенты)**.**

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Теорема 2.0.6 (Формула бинома Ньютона)**.** Пусть $n \in \mathbb{Z}, x, y, \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

Доказательство. $n = 0 \to 1 = 1$, верно
Индукционный переход:

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} = C_n^n x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + C_n^k x^k y^{n+1-k}\right) + C_n^0 x^0 y^{n+1} = \\
&= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) x^k y^{n+1-k} + C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

■

Раздел #3: Супремум и инфимум

Def 3.0.1. $E \subset \mathbb{R}$ *- ограниченное сверху, если* $\exists A : \forall x \in E \to x \leqslant A$

Def 3.0.2. $E \subset \mathbb{R}$ *- ограниченное снизу, если* $\exists B : \forall x \in E \to x \geqslant B$

Def 3.0.3. $E \subset \mathbb{R}$ *- ограниченное, если оно ограничено и снизу, и сверху.*

Def 3.0.4. $M \in \mathbb{R}$ *называется максимумом мн-ва* E*, если* $\forall x \in E \to x \leqslant M \wedge M \in E$

Def 3.0.5. $K \in \mathbb{R}$ *называется минимумом мн-ва* E*, если* $\forall x \in E \to x \geqslant K \wedge K \in E$

Теорема 3.0.6 (Существование минимума и максимума у конечного множества из $\mathbb{R}$)**.** Во всяком конечном непустом подмножестве $\mathbb{R}$ есть наибольший и наименьший элементю

Доказательство. $n = 1$ - количество элементов (База)
Индукционный переход: $\exists \max\{x_1, x_2, ..., x_n\} = C$
Добавим x_{n+1}: если $x_{n+1} > C \Rightarrow \max\{x_1, ..., x_{n+1}\} = x_{n+1}$
если $x_{n+1} \leqslant C \Rightarrow \max\{x_1, ..., x_{n+1}\} = C$ ■

Следствие 3.0.7. $\forall E \neq \varnothing \wedge E \subset \mathbb{Z} \wedge E$ - огр. $\to \exists \max E \wedge \min E$

Следствие 3.0.8. $\forall E \subset \mathbb{N}, E \neq \varnothing \to \exists \min E$

Далее везде $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$

Def 3.0.9. *Пусть* E *ограничено сверху, тогда* $\sup E$ *- наименьшаяя из верхних границ. (точная верхняя граница)*

Def 3.0.10. *Пусть* E *ограничено снизу, тогда* $\inf E$ *- наибольшая из нижних границ. (точная нижняя граница)*

Теорема 3.0.11. $E \neq \varnothing$. Если E ограничено снизу, то $\exists! \inf E$

Доказательство. Пусть A - множество всех нижних границ $E (A \neq \varnothing)$
$\forall a \in A, b \in E \to a \leqslant b$
Тогда по аксиоме полноты $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b \ \forall a \in A, b \in E \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} c \leqslant b \ \forall b \in E \text{ - } c \text{ - нижняя граница,} \\ c \geqslant a \ \forall a \in A \text{ - } c \text{ - наибольшее} \end{cases}$$ ■

Def 3.0.12.

$$l = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \to x \leqslant l \\ \forall \varepsilon > 0 \to \exists y \in E : y > l - \varepsilon \end{cases}$$

$$m = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \to x \geqslant m \\ \forall \varepsilon > 0 \to \exists y \in E : y < l + \varepsilon \end{cases}$$

Если E не ограничено сверху, то $\sup E = +\infty$
Если $E = \varnothing$, то чаще всего $\sup E$ и $\inf E$ не определены, но иногда $\sup \varnothing = -\infty, \inf \varnothing = +\infty$

Утверждение 3.0.13. $\varnothing \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Тогда если A ограничено снизу, то $\inf A \leqslant \inf B$

Доказательство. Если C - нижняя граница A, то $\forall x \in A \to C \leqslant x \Rightarrow \forall y \in B \to C \leqslant y \Rightarrow C$ - нижняя граница $B \Rightarrow \inf A$ - тоже нижняя граница $B \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$ ■

Утверждение 3.0.14. $\varnothing \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Тогда если A ограничено сверху, то $\sup A \geqslant \sup B$

Раздел #4: Отображения

$f : A \to B\ f(x) = y$
y – образ элемента X
x – прообраз y
$f(A)$ – образ множества A
$f^{-1}(B)$ – прообраз множества B
$G_f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$

Def 4.0.1. $f : A \to B$. *Если* $f(A) = B$, *то* f *сюрьективно.*

Def 4.0.2. $f : A \to B$. *Если* $(x_1 \neq x_2 \in A) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$, *то* f *инъективно.*

Def 4.0.3. *Биекция -* f *инъективно и сюрьективно.*

Def 4.0.4 (Композиция)**.** $g(x), f(x)$.
$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$
$f : X \to Y\ g : Y_0 \to Z, f(x) \subset Y_0$

Def 4.0.5. id_x *- тождественное отображение:* $f(x) = x$

Def 4.0.6. $f : X \to Y, X_0 \subset X$
$f|_{X_0}$ *- сужение отображения* f *на* X_0

Раздел #5: Последовательности

Def 5.0.1. *Последовательность — это отображение* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Пример 5.0.2. $x_n = n^2 : x_n = \{1, 4, 9, ...\}$

5.1. Предел последовательности и его свойства

Def 5.1.1. *Предел последовательности - это такое число* $l = lim_{n\to\infty} x_n$, *что*

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to |x_n - l| < \varepsilon$$

Также говорят, что вне любого интервала, содержащего l, *лежит лишь конечно число элементов* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

Пример 5.1.2. $x_n = \frac{1}{n}, \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right]$

Замечание 5.1.3. N необязательно наименьшее.

Def 5.1.4. *Последовательность называется* ***сходящейся****, если она имеет конечный предел.*

Def 5.1.5. $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to x_n > E$

Def 5.1.6. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to x_n < E$

Def 5.1.7 (Беззнаковая бесконечность)**.**

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to |x_n| > E$$

Def 5.1.8. *Последовательность называется бесконечно большой, если она стремится к бесконечности*

Def 5.1.9. *Последовательность называется бесконечно малой, если она стремится к нулю*

Свойства пределов последовательности:

1. Последовательность не может иметь двух различных пределов.

   Доказательство. Пусть $a \neq b$ - пределы, $a < b$. Возьмем $\varepsilon = \left(\frac{b-a}{3}\right)$. Тогда по определнию предела вне ε-окрестности a лежит конечно число членов последовательности, и вне ε-окрестности b лежит конечно число членов последовательности $\Rightarrow$ сама последовательности конечна !? ∎

2. Сходящаяся последовательность ограничена.

   Доказательство. Пусть $\lim\{x_n\} = a$. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдем номер N такой, что при всех $n \geqslant N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < 1$. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

   $$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a|$$

   Поэтому при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство

   $$|x_n| < 1 + |a|$$

   Положим $M = \max(1 + |a|, |x_1|, ..., |x_{N-1}|)$. Тогда $|x_n| \leqslant M \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ ∎

Утверждение 5.1.10. Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство. N_1 - номер из определения $\lim x_n = a$
N_2 - номер из определения $\lim y_n = b$
$N = \max\{N_1; N_2\}$ ■

3. Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b, \forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leqslant y_n$. Тогда $a \leqslant b$ (предельный переход в неравенстве).

   Доказательство. Пусть $a > b$. Тогда $\exists N$, начиная с которого в ε-окрестности b лежит бесконечное число членов y_n, а ε-окрестности a лежит бесконечное число членов x_n. Но тогда, если бы возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$, то $\exists y_n \in (b - \varepsilon; b + \varepsilon) : y_n < x_n, x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ ■

   Следствие 5.1.11. 1. $\lim x_n = a, \forall n \to x_n \leqslant b \Rightarrow a \leqslant b$

   2. $\lim y_n = b, \forall n \to y_n \geqslant a \Rightarrow a \leqslant b$

4.

   Теорема 5.1.12 (Теорема о сжатой последовательности, теорема о двух милиционерах)**.** Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \wedge \lim x_n = \lim y_n = a$. Тогда $\lim z_n = a$

   Доказательство. $\forall\varepsilon > 0 \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to x_n, y_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Т.к. $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ ■

5.2. Монотонные последовательности

Def 5.2.1. *Последовательность называется возрастающей, если* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots$

Def 5.2.2. *Последовательность называется убывающей, если* $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots$

Def 5.2.3. *Последовательность называется монотонной, если она возрастающая или убывающая.*

Теорема 5.2.4 (О монотонной ограниченной последовательности)**.** 1. Возрастающая и ограниченная сверху последовательность сходится

2. Убывающая и ограниченная снизу последовательность сходится

Доказательство. Пусть множество $E = \{x_1, x_2, \ldots\}, c = \sup E$
$\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leqslant c$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \to \exists N \in \mathbb{N} : x_N > c - \varepsilon$$

Т.к. x_n возрастает, то

$$\forall n > N \to x_n \geqslant x_N > c - \varepsilon \wedge x_n < c + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - c| < \varepsilon$$

■

Замечание 5.2.5. 1. Возрастающая и неограниченная сверху последовательность стремится к $+\infty$.

2. Убывающая и неограниченная снизу последовательность стремится к $-\infty$

Доказательство. $\forall E \to \exists N : x_N > E$ и $x_n \geqslant x_N$ $\forall n \geqslant N$ ■

5.3. Теорема об арифметических действиях с пределами

Теорема 5.3.1 (Теорема об арифметических действиях с пределами)**.** Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b, a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim |x_n| = |a|$
2. $\lim(x_n + y_n) = a + b$
3. $\lim(x_n - y_n) = a - b$
4. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
5. $\forall n \in \mathbb{N} \to b \neq 0 \wedge y_n \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists N : \forall n \geqslant N \to |x_n - a| < \varepsilon$. Заметим, что

$$||x_n| - |a|| < |x_n - a| < \varepsilon$$

2. $|(x_n + y_n) - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$
3. Вместо y_n рассмотрим $-y_n$
4. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists N : \forall n \geqslant N \to \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \end{cases}, M : \forall n \to |y_n| < M$

$$|x_n \cdot y_n - ab| = |x_n y_n - ab - a \cdot y_n + a \cdot y_n| = |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)| \leqslant |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| < \varepsilon$$

5. Достаточно доказать, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b}{|y_n||b|} \leqslant \frac{|y_n - b|}{|\frac{b}{2}||b|} < \frac{\frac{b^2\varepsilon}{2}}{|\frac{b}{2}||b|} = \varepsilon$$

■

Утверждение 5.3.2. x_n - бесконечно малая, y_n - ограниченная. Тогда $\lim x_n \cdot y_n = 0$

Доказательство. $|x_n y_n| < |x_n| \cdot M < \varepsilon \cdot M, M : \forall n \in \mathbb{N} \to |y_n| < M$ ■

Утверждение 5.3.3. $\forall n \to x_n \neq 0$. Тогда x_n - бесконечно большая $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая

Доказательство. $|x_n| > E \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E}$ ■

5.4. Арифметические действия с бесконечностями

1. $\lim x_n = +\infty, y_n$ ограничено снизу. Тогда $\lim(x_n + y_n) = +\infty$
2. $\lim x_n = -\infty, y_n$ ограничено сверху. Тогда $\lim(x_n + y_n) = -\infty$
3. $\lim x_n = +\infty, y_n \geqslant c > 0$. Тогда $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$
4. $\lim x_n = +\infty, y_n \leqslant c < 0$. Тогда $\lim(x_n \cdot y_n) = -\infty$
5. $\lim x_n = a \neq 0, \lim y_n = 0$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$
6. $\lim x_n = a \in \mathbb{R}, \lim y_n = \infty$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$
7. $\lim x_n = \infty, \lim y_n = b \in \mathbb{R} \wedge y_n \neq 0$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$

Замечание 5.4.1. $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}, \lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim(x_n * y_n) = a * b$

Запрещенные операции (неопределённости):

1. $\pm\infty + (\mp\infty)$
2. $\pm\infty - (\pm\infty)$
3. $0 \cdot \infty$
4. $\frac{0}{0}$
5. $\frac{\infty}{\infty}$

5.5. Неравенство Бернулли

Теорема 5.5.1 (Неравенство Бернулли)**.** Пусть $x > -1, n \in \mathbb{N}$. Тогда $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

Доказательство. База $n = 1 : (1+x)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot x$
Индукционный переход $n \to n+1$

$$(1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) = 1 + n(x+1) + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$$

∎

Раздел #6: Пределы последовательностей

6.1. Число e

Пусть $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Тогда

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} = \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1}$$
$$= \frac{n^{2n+2}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geqslant$$
$$\geqslant \left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{y_{n-1}}{y_n} \geqslant 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_{n-1} \geqslant y_n \Rightarrow y_n \text{ убывающая } \Rightarrow \exists \lim y_n \Rightarrow \exists \lim x_n, \text{ т.к. } x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim x_n = \lim y_n$$

Def 6.1.1. $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Теорема 6.1.2. $x_n > 0 \wedge \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $\exists \lim x_n = 0$

Доказательство. Пусть $q = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}, q < 1$. $\exists N : \forall n \geqslant N \to \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+q}{2}$. Тогда

$$0 < x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot x_N \leqslant x_N \cdot \left(\frac{1+q}{2}\right)^{n-N} \to 0$$

■

Следствие 6.1.3. $a > 1, k \in \mathbb{N}, \lim \frac{n^k}{a^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1$$

Следствие 6.1.4. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1$$

Следствие 6.1.5. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

6.2. Теорема Штольца

Теорема 6.2.1 (Теорема Штольца). $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots$. $\lim y_n = +\infty \wedge \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. 1. $l = 0$. $\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists m : \forall k \geqslant m \to |\varepsilon_k| < \varepsilon$
$x_k - x_{k-1} = \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |\varepsilon_k| (y_k - y_{k-1}) \leqslant \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_n - y_m) \leqslant \varepsilon \cdot y_n$$

Тогда $|x_n| \leqslant |x_m| + \varepsilon y_n$

$$0 \leqslant \left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leqslant \left| \frac{x_m}{y_n} \right| + \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$$

2. $l \neq 0, l \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\widetilde{x}_n = x_n - l \cdot y_n$. Тогда

$$\frac{\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - l \cdot y_n - x_{n-1} + l \cdot y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \to 0$$

Тогда по п. 1 $\frac{\widetilde{x}_n}{y_n} \to 0$. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x}_n + l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} + l \to l$

3. $l = +\infty$. $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to +\infty$. Начиная с некоторого номера > 1

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} \Leftrightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \to +\infty$$

Тогда x_n возрастает и стремится к $+\infty$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \to 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to +\infty$$

4. $l \to -\infty$. Следует рассмотреть $\{-x_n\}$

■

Теорема 6.2.2. $y_1 > y_2 > \ldots > 0 \wedge \lim y_n = \lim x_n = 0$. Если $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. Докажем для $l = 0$.

$$\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}, \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall k \geqslant N \to |\varepsilon_k| < \varepsilon$$

Пусть $n > m \geqslant N$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=n+1}^{m} |\varepsilon_k| \cdot |y_{k-1} - y_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{m} (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon (y_m - y_n) \Leftrightarrow |x_m| \leqslant \varepsilon \cdot y_m \Rightarrow \frac{|x_m|}{y_m} < \varepsilon$$

Доказали, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m \geqslant N \to \left| \frac{x_m}{y_m} \right| < \varepsilon$
Для $l \neq 0$ доказывается аналогично предыдущей теореме. ■

6.3. Подпоследовательности

Def 6.3.1. *Пусть дана последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Подпоследовательностью этой последовательности называется* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Теорема 6.3.2 (О стягивающихся отрезках)**.** $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots, \lim(b_n - a_n) = 0$. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ состоит из одной точки. Если эта точка c, то $\lim a_n = \lim b_n = c$

Доказательство. $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$ (по лемме о вложенных отрезках). Пусть $c < d$ принадлежит этому пересечению.

$$0 < d - c \leqslant b_n - a_n \to 0 \Rightarrow 0 \leqslant c - a_n \leqslant 0 \Rightarrow \text{ точка единственна}$$

$$0 \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n \to\Rightarrow 0 \leqslant c - a_n \leqslant 0 \Rightarrow a_n \to c$$

$$0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n \Rightarrow b_n \to c$$

■

Теорема 6.3.3 (Теорема Больцано-Вейерштрасса)**.** Из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Возьмем $a_1 \leqslant b_1$ так, чтобы вся последовательность лежала между ними. $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Поделим отрезок пополам и возьмем ту половину, в которой лежит бесконечное число членов последовательности. Обозначим её $[a_2, b_2]$. Теперь возьмем $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$. $[a_3, b_3]$ - ту половину $[a_2, b_2]$, в которой бесконечное число членов последовательности и т.д.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \text{ и длина } [a_k, b_k] = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \to 0$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}, \lim a_n = \lim b_n = c$$

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – подпоследовательность $\{x_n\}$ и

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$$

■

Теорема 6.3.4. 1. Если последовательность неограничена сверху, то из неё можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$

2. Если неограничена снизу, то можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$

Доказательство.

$$\exists n_1 : x_{n_1} > 1$$
$$\exists n_2 : x_{n_2} > 2 \land n_2 > n_1$$
$$\exists n_k : x_{n_k} > k \land n_k > n_{k-1}$$

■

Следствие 6.3.5. Из любой последовательсти можно выбрать подпоследовательность имеющую предел (конечный или бесконечный).

Def 6.3.6. *Частичные пределы последовательности* $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ *– пределы её подпоследовательностей.*

Замечание 6.3.7. $\lim x_n = a, \{x_{n_k}\}$ - подпоследовательность $\Rightarrow x_{n_k} \to a$

Def 6.3.8. *Последовательность* $\{x_n\}$ *– фундаментальная, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m, n \geqslant N \to |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Свойства:

1. Фундаментальная последовательность ограничена
2. Сходящаяся последовательность фундмаентальна

   Доказательство. $a = \lim x_n$

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \to |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   $$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

   ■

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то эта последовательность сходится.

   Доказательство. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a, \forall \varepsilon > 0 \ \exists K : \forall k \geqslant K \to |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m, n \geqslant N \to |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   $M = \max\{n_K, N\}$. Тогда $\forall n \geqslant M \to |x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon$ ■

Теорема 6.3.9 (Критерий Коши сходимости последовательности)**.** Последовательность сходится ⇔ она фундаментальна

Доказательство. "⇒". Свойство 2.
"⇐". Фундаменталья ⇒ ограничена (свойство 1) ⇒ ∃ сходящаяся подпоследовательность (теорема Больцано-Вейерштрасса) ⇒ сходится ■

Def 6.3.10. $\{x_n\}$ *– ограничена сверху.*
$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k$ *– верхний предел.*
$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k$ *– нижний предел.*

Теорема 6.3.11. Пусть $y_n = \inf_{k \geqslant n} x_k$, $z_n = \sup_{k \geqslant n} x_k$. Тогда

$$\exists \underline{\lim} x_n, \overline{\lim} x_n \land \underline{\lim} x_n \leqslant \overline{\lim} x_n$$

Доказательство. 1. Если неограничена сверху, то $\overline{\lim x_n} = +\infty$

2. Пусть $\{x_n\}$ – ограчичена. $\forall n \to x_n \leqslant M$

$$z_1 \geqslant z_2 \geqslant z_3 \geqslant ... \land z_n \leqslant M \Rightarrow \exists \lim z_n$$

3. Аналогично для y_n

4. $\forall n \to y_n \leqslant z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leqslant \overline{\lim} x_n$

■

Теорема 6.3.12. 1. $\overline{\lim} x_n$ – наибольший частичный предел $\{x_n\}$

2. $\underline{\lim} x_n$ – наименьший частичный предел $\{x_n\}$

3. $\exists \lim x_n$ в $\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, $b = \overline{\lim} x_n$. Построим $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} b$ $z_1 = \sup\{x_1, x_2, ...\} > b - \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x_{n_1} > b - \frac{1}{2}$
$z_{n_1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, ...\} > b - \frac{1}{3} \Rightarrow \exists x_{n_2} > b - \frac{1}{3}, n_2 > n_1$

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leqslant z_{n_k} \Rightarrow x_{n_k} \to b$$

Рассмотрим $x_{m_k} \to c$. Тогда $x_{m_k} \leqslant z_{m_k} \Rightarrow c \leqslant b$
Если $\{x_n\}$ неограничена

- сверху: $\exists \overline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \to +\infty$
- снизу: а) $\exists \overline{\lim} x_n = b \in \mathbb{R}$ – аналогично п.1. б) $\exists \overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow x_n \to -\infty$

2. Аналогично

3. "$\Rightarrow$". $\exists \lim x_n = l \Rightarrow \forall \{x_{n_k}\} \to \lim x_{n_k} = l \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$
"$\Leftarrow$". $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leqslant \lim x_n \leqslant \overline{\lim} x_n \Rightarrow \exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

■

Теорема 6.3.13 (характеристические свойства $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$)**.**

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \to x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \ \exists n \geqslant N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$b = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \to x_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \ \exists n \geqslant N : x_n > a - \varepsilon \end{cases}$$

Раздел #7: Ряды

7.1. Ряды

Def 7.1.1. *Дана* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Рассмотрим* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
Тогда ряд – $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$
Если $S_n \to S \in \mathbb{R}$, *то* S *называют суммой ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *(ряд сходится к* S*).*
Если S_n *не имеет предела в* $\mathbb{R}$, *то ряд называют расходящимся.*

Пример 7.1.2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$, т.е.

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$$

Пример 7.1.3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = S$$

Тогда, если $S \in \mathbb{R}$, то $\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots$. Значит

$$\frac{S}{2} = S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{S}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Данный ряд называется **гармоническим**

Замечание 7.1.4. S_n частичные суммы ряда

Пример 7.1.5. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0 \Rightarrow S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \Rightarrow \text{ не существует } \lim S_n$$

Теорема 7.1.6 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Доказательство.

$$\exists \lim S_n = S, a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow a_n \to 0$$

∎

Пример 7.1.7. Гармонический ряд.
$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Тогда $H_{2^n} \geqslant \frac{1}{2}(n+1) \to +\infty \Rightarrow H_n \to +\infty$ (т.к. H_n возрастает)

Пример 7.1.8. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

7.2. Свойства рядов

1. Ряд не может иметь двух различных сумм.
2. Если ряд сходится к S, то к S сходится и ряд, полученный из данного любой расстановкой скобок.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow (a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6)$$

   Пусть $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3, b_3 = a_4 + a_5 + a_6$ и т.д. Заметим, что $\{S_n^b\}$ является подпоследовательность S_n^a.

   Замечание 7.2.1. "раскрывать скобки"вообще говоря нельзя.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-1) = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0$$

   Но если раскрыть скобки, то получится пример 7.1.5
3. Добавление или отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость (но может повлиять на сумму)

Раздел #8: Функции

8.1. Свойства пределов функций

Теорема 8.1.1 (Единственность предела функции)**.** Пусть $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D, $f : D \to R$. Если A и $B \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A, f(x) \xrightarrow[x\to a]{} B \Rightarrow A = B$

Доказательство. Возьмем $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \to a$. По Гейне $f(x_n) \to A \wedge f(x_n) \to B$. Но $\{x_n\}$ имеет единственный предел $\Rightarrow A = B$. ■

Замечание 8.1.2. Беззнаковая бесконечность: $A = +\infty, B = -\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$

Теорема 8.1.3 (Локальная ограниченность функции, имеющей предел)**.** $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D, $f : D \to \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}, f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$. Тогда $\exists V(a) : f(x)$ ограничена в $D \cap V(a)$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$. $\exists \dot{V}(a) : |f(x) - A| < 1 \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D$. Тогда $|f(x)| < |A| + 1$. Если $a \in D$, то $|f(x)| < \max\{|A| + 1, f(a)\}$ ■

Теорема 8.1.4 (Стабилизация знака функции, имеющей предел)**.** $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка $D, f : D \to \mathbb{R}$. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = B \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Тогда $\exists V(a)$ такая, что знаки $f(x)$ и B совпадают на $\dot{V}(a) \cap D$

Доказательство. Пусть $B > 0$. Докажем от противного, т.е.

$$\forall n \ \exists x_n \in \dot{V}_{\frac{1}{n}}(a) \cap D \wedge f(x_n) \leqslant 0$$

Тогда $x_n \to a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to B$, но $f(x_n) \leqslant 0 \Rightarrow B \leqslant 0$. ■

Теорема 8.1.5 (Арифметические действия над функциями, имеющими предел)**.** $D \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка D, $f, g : D \to \mathbb{R}, f \xrightarrow[x\to a]{} A, g \xrightarrow[x\to a]{} B$. Тогда

1. $f(x) + g(x) \to A + B$
2. $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$
3. $f(x) - g(x) \to A - B$
4. $|f(x)| \to |A|$
5. Если $B \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\} : x_n \to a, x_n \neq a, x_n \in D$. Тогда $f(x_n) \to A, g(x_n) \to B$. Достаточно применить теорему об арифметических действиях с пределами последовательностей. ■

Замечание 8.1.6. Пункт 5) т.к. $B \neq 0$, то $\exists V(a) : \mathrm{sign}(g(x)) = \mathrm{sign}\, B$ в $V(a)$. Поэтому излишне требовать $g(x) \neq 0$

Теорема 8.1.7 (Предел композиции функций). $f : D \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}, f(D) \subset E$

1. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A \in \overline{\mathbb{R}}$
2. A – предельная точка множества E и $g(x) \xrightarrow[x\to A]{} B \in \overline{R}$
3. $\exists V(a) : f(x) \neq A \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D$

Тогда $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} B$

Доказательство. Возьмем $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \to a, x_n \neq a$.
Обозначим $y_n = f(x_n) \Rightarrow y_n \in E, y_n \to A$. По 3) начиная с некоторого номера $x_n \in V(a)$, а значит $y_n \neq A$. Тогда $g(y_n) \to B$, т.е. $g(f(x_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} B$. Значит $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} B$ ■

Теорема 8.1.8 (Предельный переход в неравенстве). $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D. $f,\ g\ :\ D\ \to\ \mathbb{R}$.

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A \in \overline{\mathbb{R}}, g(x) \xrightarrow[x\to a]{} B \in \overline{\mathbb{R}}, f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in D \setminus \{a\}$$

Тогда $A \leqslant B$

Доказательство.

$$\{x_n\} : x_n \in D, x_n \to a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to A, g(x_n) \to B = A \leqslant B$$

■

Теорема 8.1.9 (о сжатой функции). $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D, $f, h, g : D \to \mathbb{R}$ и

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), \forall x \in D \setminus \{a\}\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A, h(x) \xrightarrow[x\to a]{} A, A \in \mathbb{R}$$

Тогда $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$

Доказательство. $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \to a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to A, h(x_n) \to A$

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n) \Rightarrow A \leqslant \lim_{n\to\infty} g(x_n) \leqslant A \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A \Rightarrow g(x) \to A$$

■

Замечание 8.1.10. $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in D \setminus \{a\}, f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \Rightarrow g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

Def 8.1.11. *$f : D \to \mathbb{R}, a$ – предельная точка $D_1 \subset D$. Тогда $\lim_{x\to a} f|_{D_1}(x)$ – предел f в точке a по множеству D_1.*

Def 8.1.12. *$f : D \to \mathbb{R}, D_1 = D \cap (-\infty, a), a$ – предельная точка D_1. Предел f в точке a по множеству D_1 называется левосторонним пределом в точке a.*
Обозначение:

$$\lim_{x\to a-} f(x), \lim_{x\to a-0} f(x)$$

Def 8.1.13. *$f : D \to \mathbb{R}, D_1 = D \cap (a, +\infty), a$ – предельная точка D_1. Правосторонний предел – предел f в точке a по множеству D_1*
Обозначение:

$$\lim_{x\to a+} f(x), \lim_{x\to a+0} f(x)$$

Def 8.1.14. *Левосторонний предел на разных "языках".*

- $\forall\varepsilon\ \exists\delta > 0 : \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$
- $\forall V(A)\ \exists\delta > 0 : \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \to f(x) \in V(A)$
- $\forall\{x_n\} : x_n \in D, x_n \to a, x_n < a\ f(x_n) \to A$

Замечание 8.1.15. $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ – предельная точка для $D_1 = D \cap (-\infty, a), D_2 = D \cap (a, +\infty)$
Тогда

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a-} f(x), \exists \lim_{x\to a+} f(x) \wedge \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

Доказательство. "$\Rightarrow$". Очевидно.
"$\Leftarrow$". Возьмем δ_1 из определения левостороннего предела, δ_2 из определения правостороннего предела. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta : \forall x \in D : |x - a| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$$

■

Теорема 8.1.16 (Предел монотонной функции)**.** $D \in \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, a \in (-\infty, +\infty]$
$D_1 = D \cap (-\infty, a), a$ – предельная точка D.

1. Если f возрастает и ограничена сверху на D_1, то $\exists \lim_{x\to a-} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Если f убывает и ограничена снизу на D_1, то $\exists \lim_{x\to a-} f(x) \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. Пусть $A = \sup_{x\in D_1} f(x)$. Тогда $A \in \mathbb{R}$, т.к. f ограничена сверху. Докажем, что $\lim_{x\to a-} f(x) = A$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists x_0 \in D_1 : f(x_0) > A - \varepsilon$$

Тогда $\forall x \in D_1 : x > x_0$

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant A < A + \varepsilon$$

Пусть $\delta = a - x_0$. Тогда $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x : 0 < a - x < \delta$
Если $a = +\infty \Rightarrow \Delta = \max\{x_0, 1\}$

■

Замечание 8.1.17. f возрастает и не ограничена сверху $\Rightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = +\infty$

Теорема 8.1.18 (Критерий Больцано-Коши для функций). $D \subset \mathbb{R}$. Тогда существование конечного $\lim_{x\to a} f(x)$ равносильно утверждению:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists V(a) : \forall x_1, x_2 \in \dot{V}(a) \cap D \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Доказательство. "$\Rightarrow$". $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ Тогда $\exists V(a) : |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $x_1, x_2 \in D \cap \dot{V}(a)$, то

$$|f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$$

С другой стороны $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$
"$\Leftarrow$". $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \to a$ и докажем, что $\exists \lim f(x_n) \in \mathbb{R}$.
Пусть $\varepsilon > 0$.

$$\exists N : \forall n \geqslant N \to x_n \in \dot{V}(a)$$

$$\forall n, l \geqslant N \to |f(x_n) = f(x_l)| < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\} - \text{фундаментальна}$$

Значит $\{f(x_n)\}$ сходится. ∎

8.2. Непрерывные функции

Def 8.2.1. $D \subset \mathbb{R}, a \in D$. *Функция f называется непрерывной в точке a, если выполнено одно из следующих условий:*

1. *Предел f в точке a существует и равен $f(a)$ (только если a – предельная точка).*
2. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in D : |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
3. $\forall V(f(a))\ \exists V(a) : f(V(a) \cap D) \subset V(f(a))$
4. $\forall \{x_n\} : x_n \to a, x_n \in D\ \ f(x_n) \to f(a)$
5. *Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (если a – предельная точка)*

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(x) - f(a) \Rightarrow \Delta f \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

Замечание 8.2.2. Если a – изолированная точка D, то

$$f(V(a) \cap D) = \{f(a)\} \subset V(f(a))$$

Т.е. любая f непрерывна в точке a

Def 8.2.3. $D \subset \mathbb{R}, a \in D, f : D \to \mathbb{R}$.
a называется точкой разрыва f, если f не непрерывна в точке a

Def 8.2.4. $D_1 = D \cap (-\infty, a], D_2 = D \cap [a, +\infty)$.
Если сужение $f|_{D_1}$ непрерывно в точке a, то f непрерывна в точке a ***слева****.*
Если сужение $f|_{D_2}$ непрерывно в точке a, то f непрерывна в точке a ***справа***

Def 8.2.5. *Если $\exists \lim_{x\to a+} f(x), \lim_{x\to a-} f(x), f(a)$ – конечные, но не все равны, то a – точка разрыва I рода.*

Def 8.2.6. *Если хотя бы один предел не существует или бесконечен – II рода.*

Def 8.2.7. *Если в точке a разрыв, но мы можем доопределить или переопределить f в точке a до непрерывности, то a – точка устранимого разрыва.*

Раздел #9: Пределы функций

9.1. ε-окрестности

Def 9.1.1. *ε-окрестность точки $a - V_\varepsilon(a) : (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$*
проколотая ε-окрестность $a - \dot{V}_\varepsilon : (a-\varepsilon, a) \cup (a+\varepsilon)$

Def 9.1.2. *$D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. Точка a называется точкой сгущения D, если в любой окрестности a найдется точка из D, отличная от a*

$$\forall \dot{V}(a)\ \exists x \in D : x \in \dot{V}(a) \wedge x \neq a$$

Пример 9.1.3. $D = [1,2)$. Точки сгущения: $[1,2]$

Замечание 9.1.4. Точка сгущения может принадлежать множеству, а может и не принадлежать.

Замечание 9.1.5. Если a – точка сгущения, тогда в $\forall \dot{V}(a)$ бесконечно много точек из D.

Замечание 9.1.6. Точки сгущения называют предельными точками множества.
a – точка сгущения $\Leftrightarrow \exists \{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \to a$

Доказательство. "$\Rightarrow$". $\varepsilon = \frac{1}{k} \Rightarrow |x_k - a| < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 \leqslant \lim |x_k - a| < 0 \Rightarrow \exists \lim x_k = 0$
"$\Leftarrow$". В $\forall V(a)$ лежит бесконечно много точек $\{x_n\}, x_n \neq a \Rightarrow a$ – точка сгущения. ■

Def 9.1.7. *$a \in D$, но a – не предельная точка. Тогда a называется изолированной точкой множества D*

Замечание 9.1.8. $+\infty$ может быть предельной точкой множества

$$\dot{V}(+\infty) = (E, +\infty)$$

9.2. Предел функции

Def 9.2.1. *$f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ – предельная точка D.*
Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом f в точке a

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ или } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$$

если выполняется одно из следующих условий:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\} : |x-a| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$ *(Определение по Коши, определение на языке δ, ε)*
2. $\forall V(A)\ \exists V(a) : f(\dot{V}(a) \cap D) \subset V(A)$ *(Определение на языке окрестностей)*
3. $\forall \{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to A$ *(Определение по Гейне, на языке последовательностей)*

Теорема 9.2.2 (Эквивалентность определения по Коши и по Гейне)**.** Определения 1) и 3) эквивалентны.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим какую-то $\{x_n\} : x_n \neq a, x_n \in D, x_n \to a$ (она существует по доказанному). Нужно доказать, что $f(x_n) \to A$.
Пусть $x_n \to a$, то

$$\forall \delta > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \to |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть это не так, т.е. 1) не выполнено

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in D, x \neq a, |x - a| < \delta : |f(x) - A| \geqslant \varepsilon$$

Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$.

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to A, \text{ но } |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$$

■

Замечание 9.2.3. в $\overline{\mathbb{R}}$

1. $$\lim_{x \to 5} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{5\}, |x - 5| < \delta \to f(x) > E$$

2. $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \forall E > 0 \ \exists \Delta : \forall x \in D, x < \Delta \to |f(x) - 2| < E$$

Замечание 9.2.4. В определении по Гейне есть "$\forall\{x_n\}$". Если x_n и y_n подходят под условия, то $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$

Доказательство. Возьмем $z_n : z_1 = x_1, z_2 = y_1, z_3 = x_2, z_4 = y_2$ и т.д. $\{z_n\}$ подходит под определение $\Rightarrow \exists \lim f(z_n)$ ■

Замечание 9.2.5. В определении предела функции не участвует значения функции в точке a.

Замечание 9.2.6. Последовательность – частный случай функции.

Раздел #10: Непрерывность

Def 10.0.1. *Функция называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке D.*
$C(D)$ – множество функций, непрерывных на D. $\langle a, b\rangle$ – промежуток (неважно, включаются концы или нет).

Теорема 10.0.2 (об арифметических действиях над непрерывными функциями)**.** $f, g : D \to \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}$ – непрерывны в точке $x_0 \in D$. Тогда $f+g, f-g, |f|, f\cdot g$ также непрерывны в точке x_0. Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ тоже непрерывна в точке x_0.

Доказательство.
- x_0 – изолированная точка D – очевидно.
- x_0 – предельная точка. $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$ и $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} g(x_0)$. Тогда $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)+g(x_0)$. Далее по теореме об арифметических действиях с пределами функций, имеющих предел.

■

Замечание 10.0.3. Если f непрерывна в точке $x_0 \in D$ и $f(x_0) \neq 0$, то найдется $V(x_0)$, что знак f в $V(x_0) \cap D$ совпадает со знаком $f(x_0)$

Теорема 10.0.4 (О непрерывности композиции)**.** $f : D \to \mathbb{R}, g : E \to R, f(D) \subset E$. Пусть f непрерывна в точке $x_0 \in D$ и g непрерывна в точке $f(x_0)$. Тогда $g\circ f$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Пусть $x_n \in D, x_n \to x_0$. Обозначим $y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$. Т.к. f непрерывна в точке x_0, то $y_n \to y_0$. Тогда $g(y_n) \to g(y_0)$, т.к. g непрерывна в точке y_0.

$$g(y_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$$

■

Теорема 10.0.5 (Первая теорема Вейерштрасса)**.** Непрерывная на отрезке функция ограничена.

Доказательство. $f \in C[a, b]$. Пусть f не ограничена на $[a, b]$, т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$$

x_n – ограничена $\Rightarrow \exists \{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \to c \in [a, b]$. Т.к. f непрерывна, то $f(x_{n_k}) \to f(c) \Rightarrow \{f(x_{n_k})\}$ ограничена, т.к. сходится, но

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geqslant k \;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

Получили противоречие ■

Замечание 10.0.6. Если возьмем интервал (a, b), то теорема не выполняется.

Теорема 10.0.7 (Вторая теорема Вейерштрасса)**.** Непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

Доказательство. $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x_0)$. По первой теореме Вейерштрасса f ограничена на $[a,b] \Rightarrow M \in \mathbb{R}$. Пусть f не достигает M. Тогда $f(x) < M$ на $[a,b]$. Рассмотрим $\varphi(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ – непрерывна на $[a,b]$. Значит она ограничена на $[a,b]$. $\exists m : \varphi(x) \leqslant m\ \forall x \in [a,b]$

$$\frac{1}{M-f(x)} \leqslant m \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leqslant M - f(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant M - \frac{1}{m}$$

Значит M – не супремум – противоречие ■

Теорема 10.0.8 (Больцано-Коши о промежуточном значении)**.** f – непрерывна на $[a,b]$. Тогда $\forall C$, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in (a,b) : f(c) = C$

Доказательство.

- Пусть $f(a)$ и $f(b)$ – разных знаков. Тогда докажем, что $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$. Пусть $f(a) < 0 < f(b)$. Рассмотрим точку $\frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то теорема доказана. Если $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, то будем далее рассматривать отрезок $[a, \frac{a+b}{2}]$, иначе будем рассматривать отрезок $[\frac{a+b}{2}, b]$.
  Получим $[a_1,b_1] : f(a_1) < 0 < f(b_1)$ и т.д. $[a_n,b_n]$ – стягивающиеся отрезки $\Rightarrow \exists! c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n], a_n, b_n \to c$

  $$f(a_n) < 0 < f(b_n) \Leftrightarrow f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c) \Rightarrow f(c) = 0$$

- Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - C, \varphi \in C[a,b]$, $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ разных знаков. Тогда $\exists c \in (a,b) : \varphi(c) = 0 \Rightarrow f(c) = C$

■

Следствие 10.0.9. Если непрерывная на отрезке функция принимает какие-то два значения, то она принимает и все значения между ними.

Теорема 10.0.10 (О сохранении промежутка)**.** Множество значений непрерывной на промежутке функции есть промежуток.

Доказательство. Пусть $f \in C\langle a,b\rangle$

$$m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

$m, M \in \overline{\mathbb{R}}, E = f(\langle a,b\rangle)$. Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$. f принимает все значения между $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если E не промежуток, то $\exists y \in E : f(x) \neq y\ \forall x \in \langle a,b\rangle$, но $\exists y_1 < y < y_2 : \exists x_1 : f(x_1) = y_1, \exists x_2 : f(x_2) = y_2$ ■

Теорема 10.0.11 (О разрывах и непрерывности монотонной функции)**.** $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, монононна. Тогда

1. f не может иметь разрывов II рода
2. f – непрерывная $\Leftrightarrow$ её множество значения – промежуток

Доказательство. 1. Пусть f возрастает. $x \in (a,b\rangle, x_1 \in \langle a, x_0)$. Тогда $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)\ \forall x \in (x_1, x_0) \Rightarrow f$ возрастает и ограничена сверху на $(x_1,x_0) \Rightarrow \exists$ конечный $f(x_0-)$. Кроме того, по используя предельный переход:

$$f(x_1) \leqslant f(x_0-) \leqslant f(x_0)$$

Повторим для $f(x_0+) \Rightarrow$ нет разрывов II рода.

2. "$\Rightarrow$". Доказано
   "$\Leftarrow$". $f(\langle a,b\rangle)$ – промежуток. Докажем непрерывность слева в точке $x_0 \in (a,b\rangle$. Пусть $f(x_0-) < f(x_0)$. Возьмем $y \in (f(x_0-), f(x_0))$. Тогда если $a < x_1 < x_0$, то $y \in [f(x_1), f(x_0)]$. Значит y – значение функции. С другой стороны $\forall x \in \langle a, x_0) \to f(x) \leqslant f(x_0-) < y, \forall x \in [x_0, b\rangle \to f(x) \geqslant f(x_0) > y \Rightarrow f$ не принимает значение y – противоречие. Аналогично для $f(x_0+)$

■

Теорема 10.0.12 (Существование и непрерывность обратной функции)**.** $f \in C\langle a,b\rangle, f$ строго мононтонна

$$m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

Тогда

1. f обратима, $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a,b\rangle$ – биекция.
2. f^{-1} строго монотонна (одноименно с f)
3. f^{-1} непрерывна на $\langle m, M\rangle$

Доказательство. Пусть f возрастает.

1. $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle, x_1 < x_2$. Тогда $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ обратима.
   $f(\langle a,b\rangle) = \langle m, M\rangle$. $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a,b\rangle$. Если $y_1 \neq y_2 \in \langle m, M\rangle \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$
2. $y_1 < y_2 \in \langle m, M\rangle \Rightarrow y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$. $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2), x_1 < x_2$ из-за возрастания f
3. f^{-1} строго возрастает на $\langle m, M\rangle$, множество значений функции f^{-1} – промежуток $\Rightarrow f^{-1}$ непрерывна по предыдущей теореме.

■

Раздел #11: Элементарные функции

11.1. Постоянная

$f(x) = c, x \mapsto c$, непрерывна на $\mathbb{R}$

11.2. Степенная функция

$e_\alpha(x) = x^\alpha$
При $\alpha = 1$ $e_1(x) = x$ – непрерывна на $\mathbb{R}$
При $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$e_\alpha(x) = x^n$$

Следовательно $e_n(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ как произведение непрерывных.
При $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \mathtt{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как частное непрерывных.
При $\alpha = 0$ полагаем $x^0 = 1$ при всех $x \neq 0$. Можно доопределить до непрерывности ($0^0 = 1$)
Если n нечётно, то e_n строго возрастает на $\mathbb{R}, \sup_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = +\infty, \inf_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = -\infty$. По теореме о сохранении промежутка $e_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Если n четно, то функция e_n строго возрастает на $\mathbb{R}_+, \sup_{x\in\mathbb{R}_+} e_n(x) = +\infty, \min_{x\in\mathbb{R}_+} e_n(x) = 0, e_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует и непрерывна функция

$$e_{\frac{1}{n}} = \begin{cases} e_n^{-1}, n \not\vdots\ 2 \\ (e_n|_{R_+})^{-1}, n \vdots 2 \end{cases}$$

Это $\sqrt[n]{x}$, строго возрастает и непрерывна на $\mathbb{R}_+$
Теперь определим x^α при рациональном $\alpha = r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \frac{p}{q}$ несократима.

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}} (e_r = e_{\frac{1}{q}} \circ e_p)$$

Таким образом, x^r определено следующим образом.

$$\begin{aligned} &x > 0, r \text{ любое}, \\ &x = 0, r \geqslant 0, \\ &x < 0, q \not\vdots\ 2 \end{aligned}$$

e_r непрерывна на своей области определения, строго возрастает на $[0, +\infty)$ при $r > 0$, строго убывает на $(0, +\infty)$ при $r < 0$

11.3. Показательная функция

$0^x = 0 \ \forall x > 0$

Пусть $a > 0$. Пока что a^x определена только для $x \in \mathbb{Q}$. Обозначим эту функцию $a^x|_{\mathbb{Q}}$. Её свойства:

1. $r < s \Rightarrow a^r < a^s, a > 1$ и $a^r > a^s, 0 < a < 1$
2. $a^{r+s} = a^r a^s$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $(ab)^r = a^r b^r$

Def 11.3.1. *Пусть* $a > 0, x \in \mathbb{R}$ *Положим*

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r|_{\mathbb{Q}}$$

Lm 11.3.2. Пусть $a > 0, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \to 0$. Тогда $a^{r_n} \to 1$.

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидно, т.к. $a^{r_n} = 1 \ \forall n$.
Пусть $a > 1$. Докажем лемму в частном случае $r_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $a^{\frac{1}{n}} > 1$, имеем $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n, \alpha_n > 0$. Тогда по неравенству Бернулии

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geqslant 1 + n\alpha_n$$

Откуда $0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n} \Rightarrow \alpha_n \to 0 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \to 1$.
Далее, по доказанному

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{1} = 1$$

Пусть теперь $\{r_n\}$ – произвольная последовательность из условия леммы. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists N_0 :$

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Поскольку $r_n \to 0$, найдется такой номер N, что $\forall n > N \to -\frac{1}{N_0} < r_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Значит $a^{r_n} \to 1$
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, и по доказанному

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \to 1$$

∎

Lm 11.3.3. Пусть $a > 0, x \in \mathbb{R}, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \to x$. Тогда существует конечный предел последовательности $\{a^{r_n}\}$

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидна.
Пусть $a > 1$. Возьмем какую-либо возрастающую последовательность $\{s_n\}$ рациональных чисел, стремящуюся к x. Например

$$s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

Тогда $x - \frac{1}{10^n} < s_n \leqslant x \Rightarrow s_n \to x$. Докажем, что последовательность $\{s_n\}$ возрастает. Пусть $A = 10^n x$. Тогда $s_n \leqslant s_{n+1} \Leftrightarrow 10[A] \leqslant [10A]$, но $10[A]$ – целое число, не превосходящее $10A$.
$\{a^{s_n}\}$ возрастает и ограничена сверху числом $a^{[x]+1}$. Значит $\{a^{s_n}\}$ сходится к некоторому пределу L. Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \to L$$

Потому что $a^{r_n - s_n} \to 1$ по предыдущей лемме.
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и по доказанному $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \to L, L > 0$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \to \frac{1}{L}$$

■

11.3.1. Свойства показательной функции

1. a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$ при $a > 1$ и строго убывает на $\mathbb{R}$ при $a \in (0, 1)$

   Доказательство. $a > 1$. Пусть $x < y$. Докажем, что $a^x < a^y$. Возьмем два числа $\overline{r}, \overline{\overline{r}} \in \mathbb{Q}$ между x и y. Возьмем $\{\overline{r}_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\overline{\overline{r}}\}_{n=1}^{\infty}$: последовательности из $\mathbb{Q} : \overline{r}_n \to x, \overline{\overline{r}}_n \to y$.
   По доказанному $a^{\overline{r}_n} < a^{\overline{r}} < a^{\overline{\overline{r}}} < a^{\overline{\overline{r}}_n}$

   $$\Rightarrow a^x \leqslant a^{\overline{r}} < a^{\overline{\overline{r}}} \leqslant a^y \Rightarrow a^x < a^y$$

   $a \in (0, 1)$. Рассмотрим $b = \frac{1}{a} > 1$. ■

2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

   Доказательство. $\{\overline{r}_n\}, \{\overline{\overline{r}}_n\}$ как в 1)

   $$a^{\overline{r}_n + \overline{\overline{r}}_n} = a^{\overline{r}_n} \cdot a^{\overline{\overline{r}}_n} \Rightarrow a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

   ■

3. $a^{-x} = a^0 \cdot a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4. a^x непрерывна на $\mathbb{R}$

   Доказательство. $a > 1, \{x_n\} : x_n \to 0$. Докажем непрерывность в нуле.

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \to |x_n| < \varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{n_0} < x_n < \frac{1}{n_0}, n_0 \in \mathbb{N}$$

   Тогда $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{x_n} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$ $(a^{\frac{1}{n}} \to 1 \Rightarrow \exists n_0 : |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon)$

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N' : \forall n \geqslant N \to |a^{x_n} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow a^{x_n} \to 1$$

   Докажем непрерывность в точке $x_0 \neq 0$.
   Рассмотрим $a^{x_0 + x_n} - a^{x_n} = a^{x_0}(a^{x_n} - 1) \to 0$ ■

5. $(ab)^x = a^x b^x$

Доказательство. $\{r_n\}$ из $\mathbb{Q}$, $r_n \to x$. Тогда

$$(ab)^{r_n} = a^{r_n} \cdot b^{r_n} \Rightarrow (ab)^x = a^x b^x$$

■

6. $(a^x)^y = a^{xy}$

   Доказательство. $x_n \to x, y_n \to y, \{x_n\}, \{y_n\}$ из $\mathbb{Q}$. Тогда по непрерывности показательной и степенной функций

$$(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n \cdot y_m} \xRightarrow[n\to\infty]{} (a^x)^{y_m} = a^{x\cdot y_m} \xRightarrow[m\to\infty]{} (a^x)^y = a^{x\cdot y}$$

■

7. a^x – биекция из $\mathbb{R}$ на $(0, +\infty)$

   Доказательство. $a > 1$. Тогда a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$.

$$a^n = (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \to +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

■

11.4. Логарифм

Def 11.4.1. *Т.к. $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ – биекция, то $\exists f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.*

$$\log_a x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

Из теоремы об обратной функции $\log_a x$ монотонна и непрерывна.

11.4.1. Свойства логарифма

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy), a \in (0,1) \cup (1, +\infty), x, y > 0$

   Доказательство.

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y = a^{\log_a(xy)}$$

■

2. $\log_a x^b = b \log_a x, a \in (0,1) \cup (1, +\infty), x > 0, b \in \mathbb{R}$

   Доказательство.

$$a^{b\log_a x} = (a^{log_a x})^b = x^b = a^{log_a x^b}$$

■

3. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, a, b \in (0,1) \cup (1, +\infty), x > 0$

Доказательство.

$$b^{\log_a x \cdot \log_b a} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x}$$

■

Def 11.4.2. $\ln x$ – *натуральный логарифм* ($\log_e x$)

Вернемся к степенной функции:

Def 11.4.3. $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$. $0^\alpha = 0$. *Покажем непрерывность справа в точке* 0.

$$x_n \to 0, x_n > 0$$

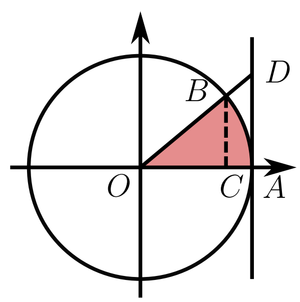
Пусть $y_n = \ln x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. *Значит* $x_n^\alpha = e^{\alpha \ln x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$x^\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \alpha > 0 \text{ – биекция}$$
$$x^\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty), \alpha < 0 \text{ – биекция}$$

11.5. Тригонометрические функции

Утверждение 11.5.1. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Тогда $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Доказательство. Нужно доказать: $BC < \overset{\frown}{AB} < AD$
$\triangle OBA \subset \triangledown OAB \subset \triangle OAD \Leftrightarrow S_{\triangle OBA} < S_{\triangledown OAB} < S_{\triangle OAD}$



$$S_{\triangle OBA} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |BC| = \frac{\sin x}{2}$$
$$S_{\triangledown OAB} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot |OA|^2 = \frac{x}{2}$$
$$S_{\triangle OAD} = |OA| \cdot |AD| \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Отсюда

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

■

Следствие 11.5.2. $|\sin x| \leqslant |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$ (причем равенство достигается только в 0)
При $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ доказано.

$$x \geqslant \frac{\pi}{2} : |\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x$$
$$x \leqslant -\frac{\pi}{2} : |\sin x| = |\sin(-x)| < |-x| = x$$

Свойства:

1. $\sin x$ – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция.

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

Доказательство.

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \cdot \sin\frac{x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant |x - x_0| \to 0$$

■

2. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ – непрерывна.
3. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$
4. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ – непрерывны на области определения.

11.5.1. Обратные тригонометрические функции

$\sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не обратимая.
$\sin x|_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ – биекция

Def 11.5.3. $\arcsin x = \left(\sin x|_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$. *Монотонно возрастает и непрерывна*

Def 11.5.4. $\arccos x = \left(\cos x|_{x \in [0, \pi]}\right)^{-1}$. *Убывает, непрерывна*

Def 11.5.5. $\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg} x|_{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$. *Непрерывна, строго возрастает.*

Def 11.5.6. $\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg} x|_{x \in (0, \pi)}\right)^{-1}$

Замечание 11.5.7. Для обратимости строго монотонной функции непрерывность не нужна.

Раздел #12: Замечательные пределы

Def 12.0.1. *Первый замечательный предел:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$
$\cos x, \frac{\sin x}{x}, 1$ – четные функции, значит верно и для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Перейдем к пределу при $x \to 0$

$$1 \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

∎

Следствие 12.0.2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Доказательство. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$$\frac{1-\cos x}{2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}^2 \to \frac{1}{2}\right)$$

∎

Следствие 12.0.3. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

Доказательство.

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

∎

Следствие 12.0.4. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$

Доказательство. $\frac{\sin x}{x} = \frac{y}{\arcsin y}$, $y = \sin x$ в окрестности $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow \arcsin y = x$. $\arcsin x$ непрерывна в нуле, в 0 равен 0. $\frac{\sin x}{x}$ непрерывна в $(-\varepsilon, \varepsilon)\setminus\{0\}$

$$g(x) = \begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x \neq 0\\ 1, x = 0\end{cases} \quad \text{– непрерывна на } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ по теореме о непрерывности композиции $\frac{y}{\arcsin y}\xrightarrow[y\to 0]{} 1$ ∎

Следствие 12.0.5. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Доказательство. Аналогично предыдущему следствию. ∎

Def 12.0.6. *Второй замечательный предел*

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
$$\lim_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство. $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ задана на $\mathbb{R} \setminus [-1,0]$. Пусть $x_n \to +\infty$. Нужно доказать, что $f(x_n) \to e$.

1. Рассмотрим $\{x_n\}$ из $\mathbb{N}$. $f(x_n) \to e$ как подпоследовательность.
2. $\{x_n\}$ из $\mathbb{R}$. Начиная с некоторого номера $x_n \geqslant 1$.

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}$$

Очевидно, $[x_n] \leqslant x_n \leqslant [x_n]+1$. Тогда

$$\frac{1}{1+\frac{1}{[x_n]+1}} \cdot f([x_n]+1) \leqslant f(x_n) \leqslant f([x_n]) \cdot \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)$$

$\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность из $\mathbb{N}$. Выполним предельный переход в неравенстве.

$$e \leqslant \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant e \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = e$$

■

Def 12.0.7. *Третий замечательный предел (обычно не нумеруется).*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, a > 0, a \neq 1$$

Доказательство. $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

■

Def 12.0.8. *Четвертый замечательный предел (обычно не нумеруется)*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Доказательство. $\alpha = 0$ тривиально.
$\alpha \neq 0$. $x_n \to 0, x_n \neq 0, |x_n| < 1\ \forall n$. Обозначим

$$y_n = (1+x_n)^\alpha - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, y_n \neq 0 \Rightarrow \alpha \ln(1+x_n) = \ln(1+y_n)$$

Тогда

$$\frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x_n)}{x_n} \to \alpha$$

■

Def 12.0.9. *Пятый замечательный предел (обычно не нумеруется)* $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$

Доказательство. $a = 1$ тривиально.
$a \neq 1$. $x_n \to 0, x_n \neq 0$

$$y_n = a^{x_n} - 1 \to 0, y_n \neq 0, \ln(1+y_n) = x_n \cdot \ln a$$
$$\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \cdot \frac{x_n \ln a}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln a$$

■

Раздел #13: Сравнение функций

Def 13.0.1. *$f, g : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D и $\exists \varphi : D \to \mathbb{R} : f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$ в $\dot{V}(x_0) \cap D$.*

1. *Если $\varphi(x)$ ограничена на $\dot{V}(x_0) \cap D$, то говорят, что f ограничена по сравнению с g при $x \to x_0$*
$$f(x) = O(g(x)), x \to x_0$$
2. *Если $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, то говорят, что f бесконечно малая по сравнению с g при $x \to x_0$*
$$f(x) = o(g(x)), x \to x_0$$
3. *Если $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$, то говорят, что f и g асимптотически равны.*
$$f(x) \sim g(x), x \to x_0$$

Замечание 13.0.2. 1. $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена в $\dot{V} \cap D$

2. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

3. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Замечание 13.0.3. Все пункты при $x \to x_0$

1. $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$
2. $f \sim f$
3. $f \sim g, f = g + o(g), f = g + o(f)$ – равносильные утверждения.
4. Если $f = o(g)$, то $f = O(g)$

Следствие 13.0.4. При $x \to 0$

$$\begin{array}{cc} \sin x = x + o(x) & \ln(1+x) = x + o(x) \\ \tan x = x + o(x) & \arcsin x = x + o(x) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) & a^x = 1 + x \ln a + o(x) \\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) & \end{array}$$

Теорема 13.0.5 (О замене на эквивалентные)**.** $f, \widetilde{f}, g, \widetilde{g} : D \to \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D, $f \sim \widetilde{f}, g \sim \widetilde{g}$ при $x \to x_0$. Тогда

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \widetilde{f}(x) \cdot \widetilde{g}(x)$
2. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\widetilde{f}(x)}{\widetilde{g}(x)}$ (если x_0 – предельная точка области определения $\frac{f}{g}$)

Доказательство. $\exists u(x_0)\ \exists \varphi : \varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1.\ f = \varphi \cdot \widetilde{f}$ в $u(x_0) \cap D$
$\exists v(x_0)\ \exists \psi : \psi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1.\ g = \psi \cdot \widetilde{g}$ в $v(x_0) \cap D$
$w(x_0) = u(x_0) \cap v(x_0)$. Тогда $f \cdot g = (\varphi \cdot \psi) \cdot \widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$ в $w(x_0)$. Пусть $\lim_{x \to x_0} g \cdot f = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ т.к. $\varphi \cdot \psi \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$, то $\lim_{x \to x_0} \widetilde{f} \cdot \widetilde{g} = A$. Если $\lim_{x \to x_0} g \cdot f$ не существует, то $\lim_{x \to x_0} \widetilde{f}\widetilde{g}$ не существует.
Для частного доказательство аналогично. ∎

Замечание 13.0.6. Заменять на эквивалентные можно **только** в произведении и частном.

Def 13.0.7. *Пусть* $f \sim g, f \sim h, x \to x_0$. *Если* $f - h = o(f - g)$, *то говорят, что асимптотическое равенство* $f \sim h$ *точнее, чем* $f \sim g$.

Пусть $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D. Пусть задана система функций $\{g_k\}_{k=0}^N : \forall k \in [0, N-1] \cap \mathbb{Z}_+ \to g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot g_k(x) + o(g_N(x))$$

Многочлены получаются, если $g_k(x) = (x - x_0)^k$.
Если $f(x) \sim C \cdot (x - x_0)^k (C \neq 0)$, то $C \cdot (x - x_0)^k$ – главная степенная часть.

Теорема 13.0.8 (О единственности асимптотического разложения)**.** $D \in \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D, $n \in \mathbb{Z}_+; f, g_k : D \to \mathbb{R}, g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), x \to x_0$ $\forall k = 0, \ldots, n-1$ и $\forall V(x_0)$ $\exists$ точка в $\dot{V}(x_0)$: в ней g_n не ноль. Тогда если существует асимптотическое разложение f по системе функций $\{g_k\}$, то оно единственно.

Доказательство. Пусть не единственное. Тогда $\exists c_k, d_k, k = 0, \ldots, n : \exists i \ c_i \neq d_i$.
$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot g_k(x) + o(g_n(x))$ и $f(x) = \sum_{k=0}^n d_k \cdot g_k(x) + o(g_n(x))$ при $x \to x_0$.
Т.к. $g_{k+1}(x) = o(g_k(x))$, то $g_{k+1}(x) = o(g_l(x))$ $\forall l \leqslant k$ при $x \to x_0$.
Обозначим $E_k = \{x : g_k(x) \neq 0, k = 0, \ldots, n\}$. Если $g_k = 0$ на $V(x_0)$, то $g_{k+1} = 0$ на $V(x_0), g_n = 0$ на $V(x_0)$.

$$g_{k+1} = o(g_k) \Leftrightarrow \exists \varphi : g_{k+1} = \varphi \cdot g_k$$

Если x_0 – предельная точка E_{k_0}, то она предельная точка всех E_k. Пусть m – наименьший номер : $c_m \neq d_m$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k g_k(x) + o(g_m(x)), f(x) = \sum_{k=0}^{m} d_k g_k(x) + o(g_m(x))$$

Вычтем: $0 = (c_m - d_m) g_m(x) + o(g_m(x))$. Поделим на $g_m(x)$

$$0 = (c_m - d_m) + \frac{o(g_m(x))}{g_m(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} c_m - d_m \Rightarrow c_m = d_m$$

■

Def 13.0.9. $x_0 \in \mathbb{R}, f$ *задана хотя бы на* $\langle a, x_0)$ *или* $(x_0, b\rangle$ *и действует в* $\mathbb{R}$. *Тогда прямая* $x = x_0$ *называется вертикальной асимптотой функции* f, *если*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty$$

Def 13.0.10. $\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Прямая* $y = \alpha x + \beta$ *– наклонная асимптота* f *при* $x \to +\infty$, *если* $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$ *при* $x \to +\infty$.

Def 13.0.11. *При* $x \to -\infty$ *аналогично.*

Теорема 13.0.12 (Уравнение наклонной асимптоты)**.** $\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Прямая $y = \alpha x + \beta$ является асимптотой f при $x \to +\infty \Leftrightarrow \alpha = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \beta = \lim_{x \to +\infty}(f(x) - \alpha x)$

Доказательство. "$\Rightarrow$". По определению $f(x) = \alpha x + \beta + \varphi(x), \varphi \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Тогда $\frac{f(x)}{x} = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$$

$f(x) - \alpha x = \beta + \varphi(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$$

"$\Leftarrow$". Проделаем те же рассуждения "в обратную сторону". ■

Раздел #14: Дифференциальное исчисление

Пусть $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка $E, n \in \mathbb{Z}_+$. Хотим найти многочлен степени не выше n $(P(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x-x_0)^k)$

$$f(a) = P(a), f(x) = P(x) + o((x-a)^n), x \to a \tag{1}$$

Замечание 14.0.1. Если такой многочлен существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть $\exists P(x), Q(x)$, удовлетворяющие условию (1). Тогда

$$0 = P(x) - Q(x) + o((x-a)^n)$$

Если $P(x) \neq Q(x)$, то $P(x) - Q(x) = \sum_{k=0}^n r_k(x-a)^k = r(x)$

$$\Rightarrow r(x) = o((x-a)^n), x \to a$$

$r(x) = r_m(x-a)^m + ... + r_n(x-a)^n, m \leqslant n, r_m \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{(x-a)^m} = o((x-a)^{n-m}) \Rightarrow r_m = 0$$

■

Def 14.0.2. *Многочлен, удовлетворяющий условию (1) называется многочленом Тейлора функции f в точке a порядка n $T_{a,n}f$*

Def 14.0.3. *Функция f называется дифференцируемой в точке a ($\langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$), если $\exists k \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = f(a) + k(x-a) + o(x-a), x \to a$$

Def 14.0.4. *$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, если $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = K \in \mathbb{R}$, то K называется производной функции f в точке a. (Обозначение $f'(a), \frac{df}{dx}(a), Df(a)$)*
$\Delta_a f = f(x) - f(a)$ – приращение функции f в точке a.
$x - a = \Delta_a x$.

$$f'(a) = \lim_{\Delta_a x\to 0} \frac{\Delta_a f}{\Delta_a x}$$

Теорема 14.0.5. $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$. Тогда равносильны три утверждения:

1. f дифференцируема в точке a
2. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ существует и равен k
3. $\exists F(x) : F : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ непрерывна в точке a, $F(a) = k$ и $f(x)-f(a) = F(x)(x-a), x \in \langle A, B\rangle$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). $\exists k : f(x) - f(a) = k(x-a) + o(x-a), x \to a$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = k + \frac{o(x-a)}{x-a} \to k$$

2) $\Rightarrow$ 3).

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, x \neq a \\ k, x = a \end{cases}$$

из 2) следует непрерывность F в точке a
3) $\Rightarrow$ 1). По 3) $\exists F$:

$$f(x) - f(a) = F(x)(x-a) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + F(x)(x-a) = f(a) + k(x-a) + (F(x) - k)\cdot(x-a)$$

$F(x) \xrightarrow[x\to a]{} F(a) = k \Rightarrow (F(x) - k)(x-a) = o((x-a))$ ■

14.1. Связь с физикой

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ – мгновенная скорость}$$

14.2. Связь с геометрией

Рассмотрим функции: $l_k(x) = f(a) + k(x-a)$, графики – прямые, проходящие через точку $(a; f(a))$

$$f(x) - l_k(x) = f(x) - f(a) - k(x-a)$$

Если $f(x)$ дифференцируема в точке a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \Leftrightarrow f(x) - l_k(x) = (x-a)\cdot(f'(a) - k) + o(x-a)$$

При $k = f'(a)$ разность есть $o(x-a)$.

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

касательная в точке a к функции f. $\operatorname{tg}\alpha = f'(a)$.

14.3. Бесконечные производные

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = +\infty \Rightarrow f'(a) = +\infty$$

В таком случае f не является дифференцируемой в точке a.
Односторонняя производная:

$$\exists \lim_{x\to a\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Замечание 14.3.1. Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a.

Доказательство.

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + o(x-a), x \to a \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$$

■

Обратное не выполняется. Например, $f(x) = |x|$

14.4. Правила дифференцирования

Теорема 14.4.1 (Производная композиции)**.** $f : \langle A, B\rangle \to \langle C, D\rangle, g : \langle C, D\rangle \to \mathbb{R}, a \in \langle A, B\rangle$. Если f дифференцируема в точке a, g дифференцируема в точке $f(a)$, то $g \circ f$ дифференцируема в точке a и

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Доказательство. $\exists F : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F(a) = f'(a)$ и $f(x) - f(a) = F(x)(x - a), x \in \langle A, B\rangle$, F непрерывна в точке a
$\exists G : \langle C, D\rangle \to \mathbb{R}, G(f(a)) = g'(f(a))$ и $g(y) - g(f(a)) = G(y)(y - f(a)), y \in C, D\rangle$, G непрерывна в точке $f(a)$ Подставим $y = f(x)$

$$g(f(x)) - g(f(a)) = G(f(x))(f(x) - f(a)) = G(f(x))F(x)(x - a) = H(x)(x - a)$$

$H(x)$ – непрерывна в точке $x = a$, $H : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда $(g \circ f)'(a) = H(a) = G(f(a)) \cdot F(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. ■

Замечание 14.4.2. Это "правило цепочки".

$$(g \circ h \circ f)'(a) = g'(h \circ f(a)) \cdot h'(f(a)) \circ f'(a)$$

Теорема 14.4.3 (Арифметические операции)**.** $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in \langle A, B\rangle, f, g$ – дифференцируемы в точке a. Тогда

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ – дифференцируемая в точке a функция и
$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$
2. $f \cdot g$ – дифференцируема в точке a и
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$
3. если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ – дифференцируема в точке a и
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Доказательство. 1. $(\alpha f + \beta g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(\alpha f(x)+\beta g(x))-(\alpha f(a)+\beta g(a))}{x-a} =$

$$= \lim_{x\to a}\left(\alpha \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right) = \alpha \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

2. Докажем частный случай $g = f$, т.е. докажем $(f^2)'(a) = 2f'(a)f(a)$. Возьмем $h(t) = t^2$, тогда $f^2(x) = (h \circ f)(x)$. Тогда по предыдущей теореме
$$(f^2)'(a) = h'(f(a)) \cdot f'(a) = 2 \cdot f(a) \cdot f'(a)$$
Вернемся к общей формуле:
$$\begin{aligned} f \cdot g = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \Rightarrow (f \cdot g)'(a) &= \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)'(a) = \\ &= \frac{1}{4}(2 \cdot (f(a) + g(a)) \cdot (f'(a) + g'(a)) - 2(f(a) - g(a)) \cdot (f'(a) - g'(a))) = \\ &= \frac{1}{2}(2f(a) \cdot g'(a) + 2f'(a) \cdot g(a)) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a) \end{aligned}$$

Упражнение 14.4.4. Получить эту формулу непосредственно из определения производной

3. $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$. Возьмем $h(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} = (h \circ g)(x)$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = h'(g(a)) \cdot g'(a) = -\frac{1}{g^2(a)} \cdot g'(a)$$

Теперь $f \cdot \frac{1}{g}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot -\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

∎

Следствие 14.4.5.

$$(f \cdot (h \cdot g))'(a) = f'(a) \cdot (h \cdot g)(a) + f(a) \cdot (h \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot h(a) \cdot g(a) + f(a)(h'(a)g(a) + h(a)g'(a)) =$$

$$= f'(a)h(a)g(a) + f(a)h'(a) + g(a) + f(a)h(a)g'(a)$$

Теорема 14.4.6 (Дифференцирование обратной функции)**.** f – строго монотонная непрерывная функция на $\langle A, B\rangle$, $a \in \langle A, B\rangle, f$ – дифференцируема в точке a и $f'(a) \neq 0$. Тогда f^{-1} – дифференцируема в точке $f(a)$ и $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Замечание 14.4.7. Геометрический смысл. Рисунок: **TODO**

Доказательство. $g(x) = f^{-1}(x), f(a) = b$. $f : \langle A, B\rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle C, D\rangle, g : \langle C, D\rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle A, B\rangle$ – непрерывны. f – дифференцируема, тогда $\exists F(x) : \langle A, B\rangle$ непрерывная в точке a

$$F(a) = f'(a), f(x) - f(a) = F(x)(x - a)$$

f строго монотонна $\Rightarrow \forall x \neq a\ f(x) \neq f(a) \Rightarrow F(x) \neq 0$ если $x \neq a$ и по условию $f'(a) = F(a) \neq 0$, т.е. $F(x) \neq 0\ \forall x \in \langle A, B\rangle$

$$x = g(y)\ (y = f(x))$$

Тогда $y - b = f(x) - f(a) = F(x)(x - a) = F(g(y))(g(y) - g(b)) \Rightarrow g(y) - g(b) = \frac{1}{F(g(y))}(y - b) = H(y)(y - b)$

H определена на $\langle C, D\rangle$, непрерывна в точке $b = f(a) \Rightarrow g'(b) = H(b) = \frac{1}{F(g(b))} = \frac{1}{F(a)} = \frac{1}{f'(a)}$ ∎

14.5. Формулы для вычисления производных

$f'(a), a \in E\ a \mapsto f'(a)$

1. $f(x) \equiv 1, a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1 - 1}{x - a} = 0$$

2. $f(x) = b^x, b > 0, a \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{b^x - b^a}{x - a} = \lim_{x \to a} b^a \cdot \frac{b^{x-a} - 1}{x - a} = b^a \cdot \ln a$$

В частности, $(e^x)' = e^x$

3. $f(x) = \log_b x, b > 0, b \neq 1, a \in (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to a}\frac{\log_b x - \log_b a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\log_b \frac{x}{a}}{x-a}$$

$$\frac{x}{a}\xrightarrow[x\to a]{} 1 \Rightarrow \log_b\frac{x}{a} = \frac{\ln\frac{x}{a}}{\ln b} = \ln\frac{\left(1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right)}{\ln b} \sim \frac{\frac{x}{a}-1}{\ln b}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\log_b\frac{x}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{x}{a}-1}{(x-a)\ln b} = \lim_{x\to a}\frac{x-a}{a(x-a)\ln b} = \frac{1}{a\ln b}$$

Значит

$$(\log_b x)' = \frac{1}{x\ln b}$$

В частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

4. $f(x) = x^\alpha, \alpha \neq 0$

- $\alpha \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
- $\alpha \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \frac{m}{2n+1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}(\alpha > 0), x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}(\alpha < 0)$
- $\alpha = \frac{m}{2n}, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, x \in [0, +\infty)(\alpha > 0), x \in (0, +\infty)(\alpha < 0)$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x-a} = \lim_{x\to a} a^\alpha\cdot\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1}{x-a} = \lim_{x\to a} a^\alpha\frac{\left(1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right)^\alpha - 1}{x-a} = \lim_{x\to a} a^\alpha\cdot\frac{\alpha\cdot\left(\frac{x}{a}-1\right)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} a^\alpha\cdot\frac{\alpha(x-a)}{a(x-a)} = \alpha\cdot a^{\alpha-1}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, \alpha > 1 \\ 1, \alpha = 1 \\ \infty, \alpha < 1 \end{cases}$$

Выводы: $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$ (с точностью до области определения функции).

5. $f(x) = \sin x, a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a} 2\frac{\frac{x-a}{2}\cdot\cos a}{x-a} = \cos a$$

6. $f(x) = \cos x$

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\sin x$$

7. $f(x) = \operatorname{tg} x, a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

8. $f(x) = \operatorname{ctg} x, a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

9. $f(x) = \arcsin x, x \in [-1, 1]$. Пусть $g(y) = \sin y \Rightarrow b = \arcsin a, g'(b) = \cos b > 0$, т.к. $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \frac{1}{\cos b} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 b}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$$

10. $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$
11. $f(x) = \operatorname{arctg} x, g(y) = \operatorname{tg} y, b = \operatorname{arctg} a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \cos^2 b = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 b + 1} = \frac{1}{a^2+1}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{x^2+1}$

14.6. Теоремы о средних

Теорема 14.6.1 (Теорема Ферма). $a \in (A, B), f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ – дифференцируема в точке a. Если $f(a) = \max_{a\in\langle A,B\rangle} f$ или $f(a) = \min_{a\in\langle A,B\rangle} f$, то $f'(a) = 0$.
Геометрический смысл:

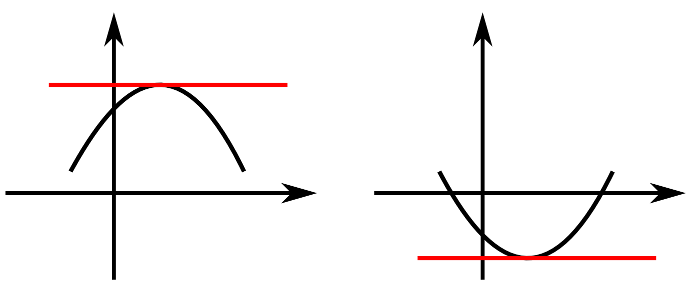


Рис. 1: Горизонтальная касательная

Доказательство. $f(a) = \max_{\langle A,B\rangle} \Rightarrow f(x) - f(a) \leqslant 0\ \forall x \in \langle A, B\rangle$. Если $x > a$, то $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$$

Если $x < a$, то $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$$

f дифференцируема в точке $a \Rightarrow f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a) \Rightarrow f'(a) = 0$ ■

Теорема 14.6.2 (Теорема Ролля)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Если

1. f дифференцируема на (a, b) (т.е. дифференцируема в каждой точке).
2. непрерывна на $[a, b]$
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

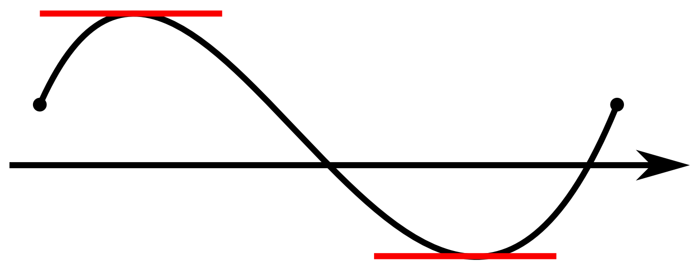


Рис. 2: Теорема Ролля

Доказательство. f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ достигает наибольшего и наименьшего значения. Если a, b – те точки, в которых достигается наибольшее и наименьшее значение, то f постоянная на $[a, b] \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$.
Если хотя бы в одной из точек a и b не достигает наибольшего или наименьшего значения, тогда одно из них достигается на (a, b). Тогда по теореме Ферма в этой точке производная равна нулю. ∎

Замечание 14.6.3. Все три условия существенны.

Теорема 14.6.4 (Теорема Лагранжа или формула конечных приращений.)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. f непрерывна на $[a, b]$, f – дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$
Геометрический смысл: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

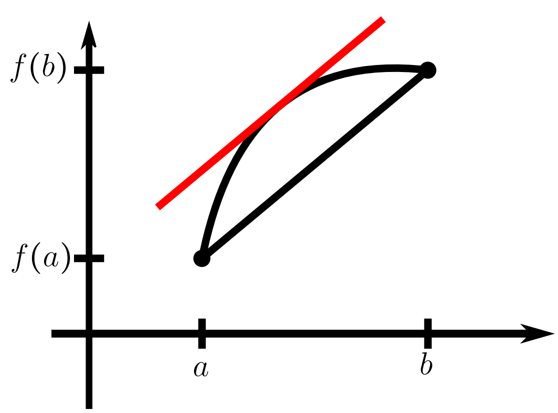


Рис. 3: Теорема Лагранжа

Доказательство. $g(x) = f(x) - kx$ – непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b). Хотим подобрать $k : g(a) = g(b)$

$$f(a) - ka = f(b) - kb \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда $g(x) = f(x) - x \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ подходит под условия теоремы Ролля. Тогда $\exists c \in (a,b) : g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Теорема 14.6.5 (Теорема Коши). $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g – непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), $\forall x \in (a,b)\ g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists c \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Доказательство. $h(x) = f(x) - kg(x)$ – непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b). Подберем $k : h(a) = h(b)$

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Тогда $h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Rightarrow \exists c \in (a,b) : h'(c) = 0$

$$f'(c) - g'(c) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0$$

■

Замечание 14.6.6. 1. Точка c может быть не единственной.

2. Теорема Лагранжа – частный случай теоремы Коши, теорема Ролля – частный случай теоремы Лагранжа.

3. Теорему Лагранжа можно записать в следующем виде:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \Theta \cdot (b - a)), \Theta \in (0,1)$$

Следствие 14.6.7 (Оценка конечных приращений). f непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b). Если $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leqslant f'(x) \leqslant M\ \ \forall x \in (a,b)$, тогда

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

В частности, если $\exists M \in \mathbb{R} : |f'(x)| \leqslant M\ \ \forall x \in (a,b)$, то

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M \cdot (b - a)$$

Доказательство. По теореме Лагранжа $\exists c \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leqslant M(b - a)$$

■

Следствие 14.6.8. Если $\forall x \in (a,b)\ f'(x) \geqslant 0$, то f нестрого монотонно возрастает.

Доказательство. $x_1 < x_2 \in (a,b)$. $\exists c \in (x_1,x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1)$$

■

Следствие 14.6.9. Если $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) > 0$, то f строго возрастает.

Следствие 14.6.10. Если $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) \leqslant 0$, то f нестрого монотонно убывает.

Следствие 14.6.11. Если $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) < 0$, то f строго монотонно убывает.

Замечание 14.6.12. Если f дифференцируема на (a,b) и f строго монотонно убывает $\Rightarrow f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$ – вообще говоря, неверно.
$f(x) = -x^3, f'(x) = -3x^2 \leqslant 0$ и равенство достигается при $x = 0$.

Теорема 14.6.13 (Теорема Дарбу). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – дифференцируема на $[a,b]$. Пусть C лежит строго между $f'(a)$ и $f'(b)$. Тогда $\exists c \in (a,b) : f'(c) = C$

Доказательство. 1. $C = 0$. Для определенности $f'(a) < 0 < f'(b)$. f непрерывна на $[a,b] \Rightarrow f$ достигает наибольшего и наименьшего значения на $[a,b]$. При таких знаках производной наименьшее значение достигается на $(a,b) \Rightarrow$ в такой точке минимума $f'(c) = 0$ (по теореме Ферма).

2. $C \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = f(x) - Cx$.

$$h'(a) = f'(a) - C, h'(b) = f'(b) - C \Rightarrow h'(a) \text{ и } h'(b) \text{ – разных знаков}$$

Тогда по предыдущему пункту $\exists c \in (a,b) : h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = C$

■

Теорема 14.6.14 (Правило Лопиталя). Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, дифференцируемы на $(a,b), g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ и $\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = 0$.
Если $\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Доказательство. g дифференцируема на $(a,b) \Rightarrow g$ непрерывна на (a,b). Кроме того, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow g$ строго монотонна на $(a,b) \Rightarrow$ знакопостоянна на (a,b) (и ни в какой точке не равна нулю).
По Гейне: $\forall \{x_n\} : x_n \to b, x_n \in (a,b)$ $g(x_n) \to 0$. Возьмем строго возрастающую последовательность $\{x_n\} : x_n \in (a,b), x_n \to b$. Тогда $\{g(x_n)\}$ строго монотонна. Тогда по теореме Штольца

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})}$$

если предел справа существует.
По теореме Коши:

$$\exists c_n \in (x_{n-1}, x_n) : \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ – существует и равен } l$$

т.к. $x_n \to b \Rightarrow c_n \to b$.

■

Теорема 14.6.15 (правило Лопиталя для бесконечностей)**.** Условия те же, но $\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = +\infty$. Тогда если $\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Замечание 14.6.16. Обратить правило Лопиталя нельзя. $f(x) = x + \sin x, g(x) = x$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

Но

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1+\cos x}{1} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

14.7. Производные высших порядков

f дифференцируема на E. $x \mapsto f'(x)$ область определения E.
Если $f'(x)$ дифференцируема на E_1, то f дифференцируема на E_1 дважды.

Def 14.7.1. *Второй производной функции f в точке a называется $(f')'(a) = f''(a)$, третья производная – $f'''(a) = (f'')'(a)$. n-ая производная – $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$*

Пример 14.7.2. $(x^3)''' = (3x^2)'' = (6x)' = 6$

Пример 14.7.3. $(\sin x)^{(14)} = (\cos x)^{(13)} = (-\sin x)^{(12)} = (-\cos x)^{(11)} = (\sin x)^{(10)} = (\sin x)'' = -\sin x$

Теорема 14.7.4 (Арифметические действия с производными высших порядков)**.** f и g n раз дифференцируемы в точке a. Тогда

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g$ – n раз дифференцируема и
$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(a) = \alpha \cdot f^{(n)}(a) + \beta \cdot g^{(n)}(a)$$
2. $f \cdot g$ – n раз дифференцируема в точке a и
$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

Доказательство. 1. База при $n = 1$ – верно.
Индукционный переход: пусть верно для l. Тогда для $l+1$:
$$(\alpha f + \beta g)^{(l+1)} = \left((\alpha f + \beta g)^{(l)}\right)' = \left(\alpha f^{(l)} + \beta g^{(l)}\right)' = \alpha f^{(l+1)} + \beta g^{(l+1)}$$

2. База при $n = 1$: $(fg)' = fg' + f'g$.
Индукционный переход: пусть верно для l

$$\begin{aligned}
(fg)^{(l+1)} &= ((fg)^{(l)})' = \left(\sum_{k=0}^{l} C_l^k f^{(k)} g^{(l-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{l} C_l^k \left(f^{(k)} g^{(l-k)}\right)' = \\
&= \sum_{k=0}^{l} C_l^k \left(f^{(k+1)} g^{(l-k)} + f^{(k)} g^{(l+1-k)}\right) = \sum_{k=0}^{l} C_l^k f^{(k+1)} g^{(l-k)} + \sum_{k=0}^{l} C_l^k f^{(k)} g^{(l+1-k)} = \\
&= \sum_{j=1}^{l+1} C_l^{j-1} f^{(j)} g^{(l+1-j)} + \sum_{k=0}^{l} C_l^k f^{(k)} g^{(l+1-k)} = \\
&= C_l^l f^{(l+1)} g + \sum_{j=1}^{l} \left(C_l^{j-1} + C_l^j\right) f^{(j)} g^{(l+1-j)} + C_l^0 f g^{(l+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^k f^{(k)} g^{(l+1-k)}
\end{aligned}$$

■

Утверждение 14.7.5. $(f(\alpha x+\beta))^{(n)} = \alpha^n + f^{(n)}(\alpha x+\beta)$

Def 14.7.6. *f дифференцируема на E и f' непрерывна на E. Тогда f называется непрерывно дифференцируемой.*
$f \in C^1(E)$ – непрерывно дифференцируемые функции.
$f \in C^2(E)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции.
$f \in C^n(E)$ – n раз непрерывно дифференцируемые функции.
$f \in C^\infty(E)$ – бесконечно непрерывно дифференцируемые функции.

Пример 14.7.7. $f(x) = |x| \in C(\mathbb{R})$, но $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$

Пример 14.7.8. $f(x) = x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$

Пример 14.7.9. $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ на $\mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ на $\mathbb{R}$.
$f''(x) = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$ на $\mathbb{R}$ разрывна в нуле. Тогда $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$,но $f(x) \notin C^2(\mathbb{R})$

Упражнение 14.7.10. $g(x) = \begin{cases} x^2, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Дифференцируема ли $g(x)$ в нуле?

14.8. Формула Тейлора

$P(x)$ многочлен степени не выше n, $a \in \mathbb{R}$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k, c_i \in \mathbb{R}$$

$c_0 = P(a)$

Теорема 14.8.1 (Формула Тейлора для многочлена)**.** Пусть $n \in \mathbb{Z}_+, P$ – многочлен степени не выше n. Тогда $\forall a, x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Доказательство. Проверим, что $((x-a)^k)^{(m)}\Big|_{x=a} = \begin{cases} 0, k \neq m \\ k!, k = m \end{cases}$.

$k > m$

$$\left((x-a)^k\right)^{(m)} = \left(k(x-a)^{k-1}\right)^{(m-1)} = k\ldots(k-m+1)(x-a)^{k-m} = 0$$

$k < m \Rightarrow ((x-a)^k)^{(m)} = 0$
$k = m$

$$\left((x-a)^k\right)^{(k)} = k!$$

$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k \Rightarrow P^{(m)}(a) = c_m \cdot m! \Rightarrow c_m = \frac{P^{(m)}(a)}{m!}$ ■

Lm 14.8.2. Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E, g : E \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Предположим, что g дифференцируема в точке a n раз и $g(a) = g'(a) = g''(a) = g^{(n)}(a) = 0$. Тогда $g(x) = o((x-a)^n), x \to a$.

Доказательство. База: $k = 1. g(a) = g'(a) = 0$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a), x \to a \Rightarrow g(x) = o(x-a), x \to a$$

Индукционный переход: Пусть при $n = k$ выполняется. При $n = k+1$ g $k+1$ раз дифференцируема в точке a и $g(a) = g'(a) = ... = g^{(k+1)}(a) = 0$

$$g'(a) = (g')'(a) = ... = (g')^{(k)}(a) = 0 \Rightarrow g'(x) = o((x-a)^k), x \to a$$

$|g'(x)| \leqslant \varepsilon |x-a|^k, |x-a| < \delta$. По формуле конечных приращений

$$\exists \Theta : g(x) - g(a) = g'(a + \Theta(x-a)) \cdot (x-a)$$

$|a + \Theta(x-a) - a| = \Theta(x-a) < \delta$. Тогда $|g'(a + \Theta(x-a))| \leqslant \varepsilon \cdot |x-a|^k$

$$|g(x)| = |g'(a + \Theta(x-a)) \cdot (x-a)| \leqslant \varepsilon |x-a|^k \cdot |x-a| = \varepsilon |x-a|^{k+1}$$

$\Rightarrow g(x) = o\left((x-a)^{n+1}\right)$ ∎

Теорема 14.8.3 (Формула Тейлора)**.** $E \subset \mathbb{R}, a \in E, f : E \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Пусть f n раз дифференцируема в точке a. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{остаток в форме Пеано}}, x \to a$$

Доказательство. Положим $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$. По формуле Тейлора для многочлена:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \Rightarrow f^{(k)}(a) = P^{(k)}(a) \;\forall k = 0, ..., n$$

Возьмем $g = f - P$.

$$g(a) = f(a) - P(a) = 0$$
$$g'(a) = f'(a) - P'(a) = 0$$
$$g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) = 0$$

$\Rightarrow$ По лемме $g(x) = o((x-a)^n), x \to a \Rightarrow f(x) = P(x) + o((x-a)^n), x \to a$, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

∎

Теорема 14.8.4 (Формула Тейлора-Лагранжа)**.** $a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$. Обозначим $\Delta_{a,x}$ – отрезок $[a, x]$ или $[x, a]$, $\widetilde{\Delta}_{a,x}$ – интервал с концами a и x. $n \in \mathbb{Z}_+$, f $n+1$ раз дифференцируема в на $\langle A, B \rangle, a, x \in \langle A, B \rangle$. Тогда $\exists c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$, для которой

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{остаток в форме Лагранжа}}$$

Замечание 14.8.5. Точка c зависит от x, поэтому, вообще говоря, не многочлен.
Можно взять $c = a + \Theta(x - a), \Theta(0, 1)$

Доказательство. $t \in \Delta_{a,x}$. Пусть $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}, F(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k$. Тогда $t \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$.

$$\begin{aligned}
F'(t) &= 0 - f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\cdot k\cdot(x-t)^{k-1)}\right) \\
&= -f'(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\
&= -f'(t) + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m+1)}(t)}{m!}(x-t)^m - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\
&= -f'(t) + f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!}(x-t)^n = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n
\end{aligned}$$

По теореме Коши $\exists c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$:

$$\frac{F(a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(a)-F(x)}{\varphi(a)-\varphi(x)} = \frac{F'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{\frac{-f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$\Rightarrow F(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ■

Замечание 14.8.6. Формула Тейлора-Пеано $\Leftarrow$ формула Тейлора-Лагранжа. f – n раз дифференцируема в точке a, $f^{(n)}$ – непрерывна в точке a.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Рассмотрим:

$$\frac{f^{(n)}\left(c(x)\right) - f^{(n)}(a))}{n!}(x-a)^n, c(x) \in \widetilde{\Delta}_{a,x} \Rightarrow |c(x) - a| < |x - a|$$

Значит, если $x \to a$, то $c(x) \to a$. $f^{(n)}(c(x)) \xrightarrow[x\to a]{} f^{(n)}(a)$ (по непрерывности). Тогда $\frac{f^{(n)}(c(x)) - f^{(n)}(a))}{n!}(x-a)^n = o((x-a)^n), x \to a$

Замечание 14.8.7. Обозначения: $T_{a,n}f$ – многочлен Тейлора фукнции f в точке a порядка n.
Остаток: $R_{a,n}f(x)\,(f(x) - T_{a,n}f)$

14.9. Формулы Тейлора-Маклорена

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Выведем формулы при $x \to 0$.

1. $e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

   Доказательство. $f(x) = e^x, f^{(x)} = e^x \ \forall x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$

$$T_{0,n}f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

■

2. $\sin x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

   Доказательство. $f(x) = \sin x$
   $f^{(m)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi m}{2}\right)\ \forall m \in \mathbb{Z}_+$

   Доказательство. $m = 0$ верно (база).
   $f^{(m+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi m}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi m}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi(m+1)}{2}\right)$ ■

$$f^{(m)}(0) = \sin\frac{\pi m}{2} = \begin{cases}0, m \vdots 2\\(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \text{иначе}\end{cases}$$

$$f(x) = 0 + x + -\frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + (*)$$

   $(*)$: если n – нечетное, то $(*) = (-1)^n\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$. Заметим, что $T_{0,2k+1}f = T_{0,2k+2}f = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Если n – четное, то последнее слагаемое в $T_{0,n}f$ равно 0 ■

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$

   Доказательство. $f(x) = \ln(1+x), f'(x) = \frac{1}{1+x}, f'' = -\frac{1}{(1+x)^2}, f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

$$\Rightarrow f^{(m)}(x) = (-1)^{m+1}\frac{(m-1)!}{(1+x)^m}, x > -1$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = (-1)^{m+1}\cdot(m-1)!$$

   Рассмотрим m-тое слагаемое:

$$\frac{f^{(m)}(0)}{m!}(x-0)^m = \frac{(-1)^{m+1}(m-1)!}{m!}x^m = \frac{(-1)^{m+1}}{m}x^m$$

■

   Гипотеза 14.9.1. У четных функций только четные степени, у нечетных функций – только нечетные. У функций общего вида – и те, и другие.

   Упражнение 14.9.2. Объяснить это.

5. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}C_\alpha^k x^k + o(x^n)$. $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+$. $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)}{k!}$

   Замечание 14.9.3. При $\alpha \in \mathbb{N}$ $f(x) = (1+x)^\alpha = T_{0,\alpha}f(x)$

   Доказательство. $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m}$$
$$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-m+1)$$
$$f(0) = 1$$

   $T_{0,n}f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^k$ ■

Утверждение 14.9.4. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists c \in (0,1):$

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

Следствие 14.9.5. $e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}$

Следствие 14.9.6. e – иррациональное число.

Доказательство. Пусть $e \in \mathbb{Q}, e \in (2,3), e = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{m}{n} = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, c \in (0,1) =$$

$$= \underbrace{m(n-1)!}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \dots + 1}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{e^c}{n+1} \Rightarrow \frac{e^c}{n+1} \in Z$$

но $0 < e^c < e < 3, n + 1 \geqslant 3$!? ■

Утверждение 14.9.7 (Критерий постоянства). Пусть f непрерывна на $\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B). Тогда равносильны следующие утверждения:

1. f постоянна на $\langle A, B\rangle$
2. $f' = 0\ \forall x \in (A, B)$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.
2) $\Rightarrow$ 1). $f'(x) = 0\ \forall x \in (A, B) \Rightarrow f'(x) \geqslant 0, f'(x) \leqslant 0 \Rightarrow f$ нестрого убывает и нестрого возрастает $\Rightarrow f$ – постоянна. ■

Пример 14.9.8. $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0\ \forall x \in (-1, 1) \Rightarrow f$ – постоянна.

$$f(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2}\ \forall x \in [-1, 1]$$

■

Утверждение 14.9.9. f, g непрерывны на $[A, B\rangle$ и дифференцируемы на (A, B). Если $f(A) = g(A), f'(x) > g'(x)\ \forall x \in (A, B)$. Тогда

$$f(x) > g(x)\ \forall x \in (A, B\rangle$$

Доказательство. $h = f - g$ непрерывна на $[A, B\rangle$, дифференцируема на $(A, B), h'(x) > 0\ \forall x \in (A, B), h(A) = 0 \Rightarrow h$ строго возрастает $\Rightarrow h(x) > 0\ \forall x \in (A, B\rangle$ ■

Пример 14.9.10. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}\ \forall x > 0$.

Доказательство. $\cos 0 = 1 - \frac{0^2}{2}, (\cos x)' = -\sin x, (1 - \frac{x^2}{2})' = -x$. $\sin x < x\ \forall x > 0 \Leftrightarrow -\sin x > -x \Rightarrow \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ ■

Def 14.9.11. $E \subset \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}, a \in E$.

1. *Пусть* $\exists\delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap E \to f(x) \geqslant f(a)$. *Тогда a – точка (локального) минимума f. Если выполнено $f(x) \leqslant f(a)$, то a точка (локального) максимума f.*
2. *Если* $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ *неравенства строгие, то a – точка строгого минимума или максимума.*
3. *Такие точки a называются* ***точками (локального) экстремума***.

Теорема 14.9.12 (Необходимое условие экстремума). $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B), f$ – дифференцируема в точке a. Если a является точкой экстремума f, то $f'(a) = 0$.

Доказательство. Пусть a – точка минимума. $\exists\delta > 0 : [a-\delta, a+\delta] \subset (A, B), f(x) \geqslant f(a)\ \forall x \in [a-\delta, a+\delta]$. Рассмотрим сужение $f|_{[a-\delta,a+\delta]}$. По теореме Ферма $f'(a) = 0$. ■

Def 14.9.13. *Точки, в которых $f' = 0$ называются стационарными.*

Def 14.9.14. *Пусть $a \in (A, B)$. Будем называть a критической точкой (точкой, подозрительной на экстремум), если $f'(a) = 0$ или f не дифференцируема в точке a.*

План исследования на наибольшее и наименьшее значение на отрезке:

1. Найти множество всех критических точек – C.
2. Посчитать значения f в каждой точке из C и на концах отрезка.
3. Выбрать наибольшее и наименьшее.

Теорема 14.9.15 (Достаточное условие экстремума в терминах первой производной). $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B), \delta : (a-\delta, a+\delta) \subset \langle A, B\rangle$. Пусть f непрерывна в точке a и дифференцируема на $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$

1. Если $f'(x) < 0$ при $x \in (a-\delta, a), f'(x) > 0$ при $x \in (a, a+\delta)$, то a – точка строгого минимума.
2. Если $f'(x) > 0$ при $x \in (a-\delta, a), f'(x) < 0$ при $x \in (a, a+\delta)$, то a – точка строгого максимума.

Доказательство. Докажем первое утверждение.
f строго убывает на $(a-\delta, a] \Rightarrow f(x) > f(a)\ \forall x \in (a-\delta, a)$
f строго возрастает на $[a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > f(a)\ \forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow a$ – точка строгого локального минимума. ■

Замечание 14.9.16. Если f' не меняет знак на $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, то f не имеет экстремума в точке a.

Доказательство. f монотонна на $(a-\delta, a+\delta)$ ■

Замечание 14.9.17. Верно ли, что если f дифференцируема на (A, B) и в точке $a \in (A, B)$ f имеет строгий локальный минимум, то $\exists\delta : f'(x) < 0\ \forall x \in (a-\delta, a)$ и $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, a+\delta)$
Спойлер: нет.

Пример 14.9.18.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + 2\right), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

f дифференцируема на $\mathbb{R}$. $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ $\forall x \neq 0 \Rightarrow 0$ точка строгого минимума.

$$f'(x) = 2x\left(\sin\frac{1}{x} + 2\right) + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot -\frac{1}{x^2} = 2x\left(\sin\frac{1}{x} + 2\right) - \cos\frac{1}{x}$$

При $x \to 0+:$ $2x\left(\sin\frac{1}{x} + 2\right) \to 0$. А $\cos\frac{1}{x}$ может принимать все значения он $[-1, 1]$ при $x \in (0, \delta)$ $\forall \delta > 0$

Теорема 14.9.19 (Достаточное условие экстремума в терминах второй производной). $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$. Пусть f дважды дифференцируема в точке a и $f'(a) = 0$.

1. Если $f''(a) > 0$, то a – точка строгого минимума.
2. Если $f''(a) < 0$, то a – точка строгого максимума.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Применим к f формулу Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + f''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2} + o((x-a)^2)$$

$$f(x) - f(a) = f''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2} + o((x-a)^2) = (x-a)^2\cdot\frac{f''(a)}{2}(1 + o(1))$$

$$f(x) - f(a) = (x-a)^2\frac{f''(a)}{2}(1 + o(1))$$

т.к. $1 + o(1) \xrightarrow[x\to a]{} 1$, то $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \to (1 + o(1)) > 0$. Тогда $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ $f(x) - f(a) > 0$ ■

Замечание 14.9.20. Если $f''(a) = 0$, то эта теорема не дает ответа на вопрос об экстремуме.

Теорема 14.9.21 (О связи экстремума со старшими производными). $f : \langle A, B\rangle, a \in (A, B), n \in \mathbb{N}$. Пусть f n раз дифференцируема в точке a, причем $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$. Тогда

1. Если n – нечетно, то f не имеет экстремума в точке a.
2. Если n – четно и $f^{(n)}(a) > 0$, то a – точка строгого минимума.
3. Если n – четно и $f^{(n)}(a) < 0$, то a – точка строгого максимума.

14.10. Выпуклость

Def 14.10.1. $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$

1. *Пусть* $\forall a, b \in \langle A, B\rangle$ *и* $\lambda \in (0, 1)$ *справедливо неравенство*

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

   Тогда f *называется выпуклой на* $\langle A, B\rangle$

2. *Если знак в неравенстве строгий, то* f *строго выпукла.*
3. *Если знак "*$\geqslant$*" ,то* f *называется вогнутой на* $\langle A, B\rangle$.
4. *Если знак "*$>$*" ,то* f *называется строго вогнутой на* $\langle A, B\rangle$.

Замечание 14.10.2. Не умаляя общности, $a < b$.

Замечание 14.10.3. Если $a = b$, то знак "="

Замечание 14.10.4. Иногда называются выпуклая вниз и выпуклая вверх.

Замечание 14.10.5. $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. При $\lambda \in (0,1)$ точка x пробегает (a,b).

$$\lambda = \frac{b-x}{b-a}, 1-\lambda = \frac{x-a}{b-a}$$

То есть определение можно переписать так:

$$f(x) \leqslant \underbrace{\frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b)}_{\text{хорда, проходящая через } (a,f(a)),(b,f(b))}$$

т.е. график f лежит не выше, чем любая хорда.

Замечание 14.10.6. Пусть f и g – выпуклые на $\langle A, B\rangle$

1. $f + g$ тоже выпуклая на $\langle A, B\rangle$
2. $\forall \alpha > 0$ $\alpha \cdot f$ выпуклая
3. $\forall \alpha < 0$ $\alpha \cdot f$ вогнутая.

Lm 14.10.7 (Лемма о трех хордах)**.** $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда равносильны следующие утверждения:

1. f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$
2. $\forall a, b, c \in \langle A, B\rangle : a < c < b$ выполняется

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

3. $\forall a, b, c \in \langle A, B\rangle : a < c < b$ выполнены неравенства:

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

Доказательство. 3) $\Rightarrow$ 2) очевидно.
1) $\Rightarrow$ 3). f строго выпукла. Положим $\lambda = \frac{b-c}{b-a} \in (0,1)$. Тогда $\lambda a + (1-\lambda)b$.

$$f(c) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Перепишем это неравенство в двух разных формах:

$$f(c) - f(b) < \lambda(f(a) - f(b)) \Leftrightarrow f(b) - f(c) > \frac{b-c}{b-a}(f(b) - f(a)) \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(c)}{b-c} > \frac{f(b)-f(c)}{b-a}$$

$$f(c) - f(a) < (1-\lambda)(f(b) - f(a)) \Leftrightarrow f(c) - f(a) < \frac{c-a}{b-a}(f(b) - f(a)) \Leftrightarrow \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $a, b \in \langle A, B\rangle$. Обозначим $c = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in (0,1)$. Тогда $\lambda = \frac{b-c}{b-a}$ и $1-\lambda = \frac{c-a}{b-a}$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{1-\lambda} = \frac{b-c}{\lambda}$$

Тогда

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \Leftrightarrow \frac{f(c)-f(a)}{1-\lambda} < \frac{f(b)-f(c)}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda(f(c)-f(a)) < (1-\lambda)(f(b)-f(c))$$

$$\Leftrightarrow \lambda f(c) - \lambda f(a) < f(b) - f(c) - \lambda f(b) + \lambda f(c) \Leftrightarrow f(c) < (1-\lambda)f(b) + \lambda f(a)$$

$\blacksquare$