Матанализ 1 семестр ПИ,
Лекция, 10/20/21

Собрано 20 октября 2021 г. в 17:48

Содержание

Def. 1.0.1. *Функция называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке D.*
$C(D)$ – множество функций, непрерывных на D. $\langle a, b\rangle$ – промежуток (неважно, включаются концы или нет).

Теорема 1.0.2 (об арифметических действиях над непрерывными функциями)**.** $f, g : D \to \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}$ – непрерывны в точке $x_0 \in D$. Тогда $f+g, f-g, |f|, f \cdot g$ также непрерывны в точке x_0. Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ тоже непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

- x_0 – изолированная точка D – очевидно.
- x_0 – предельная точка. $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$ и $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(x_0)$. Тогда $f(x)+g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)+g(x_0)$. Далее по теореме об арифметических действиях с пределами функций, имеющих предел.

■

Замечание 1.0.3. Если f непрерывна в точке $x_0 \in D$ и $f(x_0) \neq 0$, то найдется $V(x_0)$, что знак f в $V(x_0) \cap D$ совпадает со знаком $f(x_0)$

Теорема 1.0.4 (О непрерывности композиции)**.** $f : D \to \mathbb{R}, g : E \to R, f(D) \subset E$. Пусть f непрерывна в точке $x_0 \in D$ и g непрерывна в точке $f(x_0)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Пусть $x_n \in D, x_n \to x_0$. Обозначим $y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$. Т.к. f непрерывна в точке x_0, то $y_n \to y_0$. Тогда $g(y_n) \to g(y_0)$, т.к. g непрерывна в точке y_0.

$$g(y_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$$

■

Теорема 1.0.5 (Первая теорема Вейерштрасса)**.** Непрерывная на отрезке функция ограничена.

Доказательство. $f \in C[a, b]$. Пусть f не ограничена на $[a, b]$, т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$$

x_n – ограничена $\Rightarrow \exists \{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \to c \in [a, b]$. Т.к. f непрерывна, то $f(x_{n_k}) \to f(c) \Rightarrow \{f(x_{n_k})\}$ ограничена, т.к. сходится.

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geqslant k \ \forall k \in \mathbb{N}$$

■

Замечание 1.0.6. Если возьмем интервал (a, b), то теорема не выполняется.

Теорема 1.0.7 (Вторая теорема Вейерштрасса)**.** Непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

Доказательство. $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x_0)$. По первой теореме Вейерштрасса f ограничена на $[a, b] \Rightarrow M \in \mathbb{R}$. Пусть f не достигает M. Тогда $f(x) < M$ на $[a, b]$. Рассмотрим $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ – непрерывна на $[a, b]$. Значит она ограничена на $[a, b]$. $\exists m : \varphi(x) \leqslant m \ \forall x \in [a, b]$

$$\frac{1}{M - f(x)} \leqslant m \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leqslant M - f(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant M - \frac{1}{m}$$

Значит M – не супремум – противоречие ■

Теорема 1.0.8 (Больцано-Коши о промежуточном значении). f – непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\forall C$, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in (a, b) : f(c) = C$

Доказательство.

- Пусть $f(a)$ и $f(b)$ – разных знаков. Тогда докажем, что $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$. Пусть $f(a) < 0 < f(b)$. Рассмотрим точку $\frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то теорема доказана. Если $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, то будем далее рассматривать отрезок $[a, \frac{a+b}{2}]$, иначе будем рассматривать отрезок $[\frac{a+b}{2}, b]$.
  Получим $[a_1, b_1] : f(a_1) < 0 < f(b_1)$ и т.д. $[a_n, b_n]$ – стягивающиеся отрезки $\Rightarrow \exists! c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n], a_n, b_n \to c$
  $$f(a_n) < 0 < f(b_n) \Leftrightarrow f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c) \Rightarrow f(c) = 0$$
- Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - C, \varphi \in C[a, b]$, $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ разных знаков. Тогда $\exists c \in (a, b) : \varphi(c) = 0 \Rightarrow f(c) = C$

■

Следствие 1.0.9. Если непрерывная на отрезке функция принимает какие-то два значения, то она принимает и все значения между ними.

Теорема 1.0.10 (О сохранении промежутка). Множество значений непрерывной на промежутке функции есть промежуток.

Доказательство. Пусть $f \in C\langle a, b\rangle$
$$m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$
$m, M \in \overline{\mathbb{R}}, E = f(\langle a, b\rangle)$. Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$. f принимает все значения между $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если E не промежуток, то $\exists y \in E : f(x) \neq Y$ $\forall x \in \langle a, b\rangle$, но $\exists y_1 < y < y_2 : \exists x_1 : f(x_1) = y_1, \exists x_2 : f(x_2) = y_2$ ■

Теорема 1.0.11 (О разрывах и непрерывности монотонной функции). $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, монононтонна. Тогда

1. f не может иметь разрывов II рода
2. f – непрерывная $\Leftrightarrow$ её множество значения – промежуток

Доказательство. 1. Пусть f возрастает. $x \in (a, b\rangle, x_1 \in \langle a, x_0)$. Тогда $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$ $\forall x \in (x_1, x_0) \Rightarrow f$ возрастает и ограничена сверху на $(x_1, x_0) \Rightarrow \exists$ конечный $f(x_0-)$. Кроме того, по используя предельный переход:
$$f(x_1) \leqslant f(x_0-) \leqslant x_0$$
Повторим для $f(x_0+) \Rightarrow$ нет разрывов II рода.

2. "$\Rightarrow$". Доказано
"$\Leftarrow$". $f(\langle a, b\rangle)$ – промежуток. Докажем непрерывность слева в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Пусть $f(x_0-) < f(x_0)$. Возьмем $y \in (f(x_0-), f(x_0))$. Тогда если $a < x_1 < x_0$, то $y \in [f(x_1), f(x_0)]$. Значит y – значение функции. С другой стороны $\forall x \in \langle a, x_0) \to f(x) \leqslant f(x_0-) < y, \forall x \in [x_0, b\rangle \to f(x) \geqslant f(x_0) > y \Rightarrow f$ не принимает значение y – противоречие. Аналогично для $f(x_0+)$

■

Теорема 1.0.12 (Существование и непрерывность обратной функции)**.** $f \in C\langle a, b\rangle, f$ строго монотонна

$$m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

Тогда

1. f обратима, $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$ – биекция.
2. f^{-1} строго монотонна (одноименно с f)
3. f^{-1} непрерывна на $\langle m, M\rangle$

Доказательство. Пусть f возрастает.

1. $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle, x_1 < x_2$. Тогда $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ обратима.
   $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$. $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$. Если $y_1 \neq y_2 \in \langle m, M\rangle \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$
2. $y_1 < y_2 \in \langle m, M\rangle \Rightarrow y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$. $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2), x_1 < x_2$ из-за возрастания f
3. f^{-1} строго возрастает на $\langle m, M\rangle$, множество значений функции f^{-1} – промежуток $\Rightarrow f^{-1}$ непрерывна по предыдущей теореме.

■

Замечание 1.0.13. Для обратимости строго монотонной функции непрерывность не нужна.