

# Алгебра 2 семестр ПИ, Лекции

Собрано 6 марта 2022 г. в 16:04

---

## Содержание

<b>1. Системы линейных уравнений</b>	<b>1</b>
1.1. Ранг матрицы . . . . .	1
1.2. Структура решений СЛУ . . . . .	2
1.3. Неоднородные СЛУ . . . . .	3
<b>2. Линейные отображения векторных пространств</b>	<b>5</b>
2.1. Матрица линейного отображения . . . . .	5

## Раздел #1: Системы линейных уравнений

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = (a_{ij}) - \text{матрица коэффициентов}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

**Def 1.0.1.** Решение СЛУ  $(*)$  называется  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  : при  $x_i = \alpha_i$  все уравнения становятся верными.

**Def 1.0.2.** СЛУ  $(*)$  совместна, если  $\exists$  хотя бы одно решение. Иначе - несовместна.

### 1.1. Ранг матрицы

$A - m \times n$ ,  $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ ,  $A_i$  - строки.

$A = (A^1, A^2, \dots, A^n)$ ,  $A^j$  - столбцы.

**Def 1.1.1.** Строчным (столбцовым) рангом матрицы  $A$  называется максимальное число ЛНЗ строк (столбцов).

Иначе, количество элементов в базисе  $\langle A_1, \dots, A_m \rangle (\langle A^1, \dots, A^n \rangle)$ .

**Теорема 1.1.2.** Строчный и столбцовый ранги совпадают.

Обозначение:  $\text{rank } A$ .

**Def 1.1.3.** Минором матрицы  $A - m \times n$   $k$ -го порядка называется определитель, составленный из элементов матрицы  $A$ , стоящих на  $k$  выбранных строках и на  $k$  выбранных столбцах.

**Пример 1.1.4.**  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 5 & 9 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ . Если вы выберем вторую и третью строку, а также первый и последний столбец, то минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

**Теорема 1.1.5.** Ранг матрицы  $A$  равен наибольшему порядку минора, отличного от нуля.

**Теорема 1.1.6** (Связь определителя с рангом матрицы).  $A - n \times n$ . Тогда  $\text{rank } A < n \Leftrightarrow \det A = 0$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ .  $\text{rank } A < n \Rightarrow$  строки  $A_1, \dots, A_n$  ЛЗ, т.е.  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = 0$  ( $\alpha_i$  не все равны нулю). Пусть  $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} A_n$ . Обнулیم первую строку: прибавим к ней  $A_2$ , умноженную на  $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ,  $A_3$ , умноженную на  $-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$  и т.д. Поскольку

теперь первая строка целиком нулевая, то  $\det A = 0$ .

$\Leftarrow$ . Индукция  $n = 1 \Rightarrow a_{11} = 0$ .  $n - 1 \rightarrow n$ .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Можем считать, что  $A^1 \neq 0, a_{11} \neq 0$ . Домножим первую строку на  $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$  и прибавляем ко второй строке. Затем домножаем первую строку на  $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$  и прибавляем ко третьей строке и т.д.

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

По предположению  $A'_2, \dots, A'_n$  – ЛЗ.  $\begin{cases} A'_2 = A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot A_1 \\ \dots \\ A'_n = A_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} \cdot A_1 \end{cases}$ .

$0 = \alpha_2 A'_2 + \dots + \alpha_n A'_n = (\dots) A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \dots + \alpha_n A_n \Rightarrow A_1, \dots, A_n$  – ЛЗ  $\Rightarrow \text{rank } A < n$ . ■

**Def 1.1.7.** Элементарными преобразованиями над строками (столбцами) называется

1. Перестановка строк (столбцов).
2. Умножение строки (столбца) на  $\lambda \neq 0$ .
3. Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на  $\lambda \neq 0$ .

**Теорема 1.1.8.** При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

*Доказательство.* 1, 2 – очевидно.  $(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) \rightarrow (A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n)$  ■

**Def 1.1.9.** Матрица называется трапецевидной, если у неё в  $\forall$  ненулевой строке число нулей слева различно.

*Замечание 1.1.10.*  $\text{rank}$  трапецевидной матрицы равен числу ненулевых строк.

**Теорема 1.1.11** (О вычислении ранга). Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к трапецевидной.

## 1.2. Структура решений СЛУ

**Def 1.2.1.** СЛУ (\*) называется однородной, если все свободные члены равны нулю.

**Def 1.2.2.** Нулевое решение однородной СЛУ называется тривиальным. Любое другое решение – нетривиальным.

**Lm 1.2.3.** Пусть  $Y, Z$  – решения  $AX = 0 \Rightarrow \alpha Y + \beta Z$  – тоже решение,  $\alpha, \beta \in K$ .

*Доказательство.*

$$AY = 0, AZ = 0 \Rightarrow A(\alpha Y + \beta Z) = \alpha AY + \beta AZ = 0$$

■

**Теорема 1.2.4** (Структура решений однородной СЛУ).  $AX = 0, A - m \times n, n - \text{число неизвестных}, r = \text{rank } A \Rightarrow \exists n - r \text{ ЛНЗ решений } X_1, \dots, X_{n-r} : \forall \text{ решение } X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_{n-r} X_{n-r}.$

*Доказательство.*  $A = (A^1, \dots, A^n), A^1, \dots, A^r - \text{ЛНЗ столбцы} \Rightarrow$

$$\begin{cases} A_{r+1} = \beta_{r+1 \ 1} A^1 + \dots + \beta_{r+1 \ n} A^n \\ \dots \\ A^n = \beta_{n \ 1} A^1 + \dots + \beta_{n \ r} A^r \end{cases}$$

$$AX = 0 \Leftrightarrow x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = 0.$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \beta_{r+1 \ 1} \\ \vdots \\ \beta_{r+1 \ r} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \beta_{r+2 \ 1} \\ \vdots \\ \beta_{r+2 \ r} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} \beta_{n \ 1} \\ \vdots \\ \beta_{n \ r} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} - \text{решения.}$$

$$\text{Пусть } Z = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_r^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} - \text{решение. Рассмотрим } Y = Z + x_{r+1}^* X_1 + x_{r+2}^* X_2 + \dots + x_n^* X_{n-r}. Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} -$$

решение  $\{y_1 A_1 + \dots + y_r A_r = 0\}$ . Но  $A_1, \dots, A_r - \text{ЛНЗ} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = Z + x_{r+1}^* X_1 + x_{r+2}^* X_2 + \dots + x_n^* X_{n-r}.$

■

**Def 1.2.5.**  $\forall n - r \text{ ЛНЗ решений однородной системы линейных уравнений называется фундаментальной системой решений, решение вида } X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_{n-r} X_{n-r} - \text{общее решение.}$

### 1.3. Неоднородные СЛУ

$$AX = B, A - m \times n, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$\bar{A} = (A \mid B)$  – расширенная матрица  $m \times (n + 1)$ .

**Теорема 1.3.1** (Кронекера-Капелли).  $(*) - \text{совместна} \Leftrightarrow \text{rank } A = \text{rank } \bar{A}.$

*Доказательство.*  $\Rightarrow. AX = B - \text{совместна} \Rightarrow \exists \text{ решение } x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = B \Rightarrow B - \text{линейная комбинация } A^1, \dots, A^n \Rightarrow \text{rank } A = \text{rank } \bar{A}.$

$\Leftarrow. \text{rank } A = \text{rank } \bar{A} = r \Rightarrow \exists A^1, \dots, A^r - \text{ЛНЗ} \Rightarrow A^1, \dots, A^r, B - \text{ЛЗ} \Rightarrow B = \alpha_1 A^1 + \dots + \alpha_r A^r, \text{ не все } \alpha_i = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0) - \text{решение системы.}$

■

**Теорема 1.3.2** (О структуре решений неоднородной СЛУ).  $AX = B, \text{rank } A = r, n$  – число неизвестных, система совместна.  $X_*$  – какое-то решение СЛУ,  $X_1, \dots, X_{n-r}$  – фундаментальные решения  $AX = 0$ . Тогда любое решение  $(*)$  имеет вид  $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_{n-r} X_{n-r} + X_*, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in K$ .

*Доказательство.*  $AX_* = B \Rightarrow AX = AX_* \Rightarrow A(X - X_*) = 0 \Rightarrow X - X_* = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_{n-r} X_{n-r}$ . ■

**Пример 1.3.3** (Решение СЛУ методом Гаусса).

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 - \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 - \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Раздел #2: Линейные отображения векторных пространств

**Def 2.0.1.**  $V, W$  – векторные пространства над  $K$ . Отображение  $f : V \rightarrow W$  называется линейным, если:

1.  $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in V$
2.  $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in V, \alpha \in K$

*Замечание 2.0.2.*  $1, 2 \sim f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in K$ .

**Def 2.0.3.**  $\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \text{ – линейные}\}$

**Lm 2.0.4.**  $\text{Hom}(V, W)$  – векторное пространство над  $K$ .

*Доказательство.*  $f, g \in \text{Hom}(V, W), (f + g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \Rightarrow f + g, \alpha f \in \text{Hom}(V, W)$ . ■

**Def 2.0.5.**  $f \in \text{Hom}(V, W), \ker f = \{x \in V : f(x) = 0\}$  – ядро отображения  $f$ ,  $\text{Im } f = \{f(x), x \in V\}$  – образ  $f$ .

**Lm 2.0.6.**  $\ker f \subset V, \text{Im } f \subset W$  – подпространства.

*Доказательство.*  $x, y \in \ker f, f(x + y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in \ker f$ . Аналогично,  $f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0 \Rightarrow \alpha x \in \ker f \quad \forall \alpha \in K \Rightarrow \ker f$  – подпространство. ■

**Упражнение 2.0.7.**  $\text{Im } f$  – подпространство.

**Теорема 2.0.8.**  $f \in \text{Hom}(V, W)$ .

1.  $f$  – инъективно  $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$ .
2.  $f$  – сюръективно  $\Leftrightarrow \text{Im } f = W$ .

*Доказательство.*  $\Leftarrow$ .  $x_1 \neq x_2$ , если  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$ !  $\Rightarrow$ . Пусть  $x \in \ker f, x \neq 0 \Rightarrow f(x) = f(0) = 0$ !?. ■

### 2.1. Матрица линейного отображения

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V, e'_1, \dots, e'_m$  – базис  $W, f \in \text{Hom}(V, W)$

$x \in V, x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, x_i \in K, f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) \Leftrightarrow$  задать  $f$  значит задать  $f(e_i), i = 1, \dots, n$ .

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{m1}e'_m \\ \dots \\ f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{mn}e'_m \end{cases}$$

**Def 2.1.1.** Матрицей  $f \in \text{Hom}(V, W)$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$  и  $e'_1, \dots, e'_m$  называется

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = ( f(e_1) \quad f(e_2) \quad \dots \quad f(e_n) )$$

**Теорема 2.1.2.** 1.  $\text{Hom}(V, W)$  взаимно-однозначно соответствует  $M(m, n, K)$ .

$$2. \ e_1, \dots, e_n - \text{базис } V, \ e'_1, \dots, e'_m - \text{базис } W, \ x \in V \rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f(x) \in W \rightarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, f \rightarrow A \\ \Rightarrow AX = Y.$$

*Доказательство.* 1.  $f \rightarrow A$  отображение однозначно определяется  $f(e_i) \Rightarrow A$  определена однозначно. С другой стороны, взяв произвольную матрицу  $B$ , можем построить по ней отображение  $g$ .

$$2. \ f \rightarrow A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = \\ &= x_1 (a_{11} e'_1 + a_{21} e'_2 + \dots + a_{m1} e'_m) + \dots + x_n (a_{1n} e'_1 + a_{2n} e'_2 + \dots + a_{mn} e'_m) = \\ &= \underbrace{(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n)}_{y_1} e'_1 + \dots + \underbrace{(a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n)}_{y_m} e'_m \Rightarrow Y = AX \end{aligned}$$

■

*Следствие 2.1.3.* 1.  $\dim \text{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$

$$2. \ \alpha, \beta \in K, f, g \in \text{Hom}(V, W), f \rightarrow A, g \rightarrow B \text{ в фиксированных базисах} \Rightarrow \alpha f + \beta g \rightarrow \alpha A + \beta B.$$

$$3. \ f : V \rightarrow W, g : W \rightarrow U \Rightarrow g \circ f : V \rightarrow U, g \circ f(x) = g(f(x)). \text{ Фиксируем базисы, } f \rightarrow A, g \rightarrow B \Rightarrow g \circ f \rightarrow BA$$