Матанализ 1 семестр ПИ,
Лекция, 10/20/21

Собрано 27 октября 2021 г. в 18:11

Содержание

1.1. Постоянная

$f(x) = c, x \mapsto c$, непрерывна на $\mathbb{R}$

1.2. Степенная функция

$e_\alpha(x) = x^\alpha$
При $\alpha = 1$ $e_1(x) = x$ – непрерывна на $\mathbb{R}$
При $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$e_\alpha(x) = x^n$$

Следовательно $e_n(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ как произведение непрерывных.
При $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \mathtt{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как частное непрерывных.
При $\alpha = 0$ полагаем $x^0 = 1$ при всех $x \neq 0$. Можно доопределить до непрерывности ($0^0 = 1$)
Если n нечётно, то e_n строго возрастает на $\mathbb{R}, \sup_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = +\infty, \inf_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = -\infty$. По теореме о сохранении промежутка $e_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Если n четно, то функция e_n строго возрастает на $\mathbb{R}_+, \sup_{x\in\mathbb{R}_+} e_n(x) = +\infty, \min_{x\in\mathbb{R}_+} e_n(x) = 0, e_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует и непрерывна функция

$$e_{\frac{1}{n}} = \begin{cases} e_n^{-1}, n \not\vdots\ 2 \\ (e_n|_{R_+})^{-1}, n \vdots 2 \end{cases}$$

Это $\sqrt[n]{x}$, строго возрастает и непрерывна на $\mathbb{R}_+$
Теперь определим x^α при рациональном $\alpha = r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \frac{p}{q}$ несократима.

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}} (e_r = e_{\frac{1}{q}} \circ e_p)$$

Таким образом, x^r определено следующим образом.

$$\begin{aligned} &x > 0, r \text{ любое}, \\ &x = 0, r \geqslant 0, \\ &x < 0, q \not\vdots\ 2 \end{aligned}$$

e_r непрерывна на своей области определения, строго возрастает на $[0, +\infty)$ при $r > 0$, строго убывает на $(0, +\infty)$ при $r < 0$

1.3. Показательная функция

$0^x = 0 \ \forall x > 0$
Пусть $a > 0$. Пока что a^x определена только для $x \in \mathbb{Q}$. Обозначим эту функцию $a^x|_{\mathbb{Q}}$. Её свойства:

1. $r < s \Rightarrow a^r < a^s, a > 1$ и $a^r > a^s, 0 < a < 1$
2. $a^{r+s} = a^r a^s$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $(ab)^r = a^r b^r$

Def. 1.3.1. *Пусть* $a > 0, x \in \mathbb{R}$ *Положим*

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r|_{\mathbb{Q}}$$

Lm 1.3.2. Пусть $a > 0, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \to 0$. Тогда $a^{r_n} \to 1$.

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидно, т.к. $a^{r_n} = 1 \ \forall n$.
Пусть $a > 1$. Докажем лемму в частном случае $r_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $a^{\frac{1}{n}} > 1$, имеем $a^{\frac{1}{n}} = 1+\alpha_n, \alpha_n > 0$. Тогда по неравенству Бернулии

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geqslant 1 + n\alpha_n$$

Откуда $0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n} \Rightarrow \alpha_n \to 0 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \to 1$.
Далее, по доказанному

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{1} = 1$$

Пусть теперь $\{r_n\}$ – произвольная последовательность из условия леммы. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists N_0 :$

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Поскольку $r_n \to 0$, найдется такой номер N, что $\forall n > N \to -\frac{1}{N_0} < r_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Значит $a^{r_n} \to 1$
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, и по доказанному

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \to 1$$

∎

Lm 1.3.3. Пусть $a > 0, x \in \mathbb{R}, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \to x$. Тогда существует конечный предел последовательности $\{a^{r_n}\}$

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидна.
Пусть $a > 1$. Возьмем какую-либо возрастающую последовательность $\{s_n\}$ рациональных чисел, стремящуюся к x. Например

$$s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

Тогда $x - \frac{1}{10^n} < s_n \leqslant x \Rightarrow s_n \to x$. Докажем, что последовательность $\{s_n\}$ возрастает. Пусть $A = 10^n x$. Тогда $s_n \leqslant s_{n+1} \Leftrightarrow 10[A] \leqslant [10A]$, но $10[A]$ – целое число, не превосходящее $10A$.
$\{a^{s_n}\}$ возрастает и ограничена сверху числом $a^{[x]+1}$. Значит $\{a^{s_n}\}$ сходится к некоторому пределу L. Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \to L$$

Потому что $a^{r_n - s_n} \to 1$ по предыдущей лемме.
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и по доказанному $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \to L, L > 0$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \to \frac{1}{L}$$

■

1.3.1. Свойства показательной функции

1. a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$ при $a > 1$ и строго убывает на $\mathbb{R}$ при $a \in (0, 1)$

   Доказательство. $a > 1$. Пусть $x < y$. Докажем, что $a^x < a^y$. Возьмем два числа $\overline{r}, \overline{\overline{r}} \in \mathbb{Q}$ между x и y. Возьмем $\{\overline{r}_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\overline{\overline{r}}\}_{n=1}^{\infty}$: последовательности из $\mathbb{Q} : \overline{r}_n \to x, \overline{\overline{r}}_n \to y$.
   По доказанному $a^{\overline{r}_n} < a^{\overline{r}} < a^{\overline{\overline{r}}} < a^{\overline{\overline{r}}_n}$

   $$\Rightarrow a^x \leqslant a^{\overline{r}} < a^{\overline{\overline{r}}} \leqslant a^y \Rightarrow a^x < a^y$$

   $a \in (0, 1)$. Рассмотрим $b = \frac{1}{a} > 1$. ■

2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

   Доказательство. $\{\overline{r}_n\}, \{\overline{\overline{r}}_n\}$ как в 1)

   $$a^{\overline{r}_n + \overline{\overline{r}}_n} = a^{\overline{r}_n} \cdot a^{\overline{\overline{r}}_n} \Rightarrow a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

   ■

3. $a^{-x} = a^0 \cdot a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4. a^x непрерывна на $\mathbb{R}$

   Доказательство. $a > 1, \{x_n\} : x_n \to 0$. Докажем непрерывность в нуле.

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \to |x_n| < \varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{n_0} < x_n < \frac{1}{n_0}, n_0 \in \mathbb{N}$$

   Тогда $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{x_n} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$ $(a^{\frac{1}{n}} \to 1 \Rightarrow \exists n_0 : |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon)$

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N' : \forall n \geqslant N \to |a^{x_n} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow a^{x_n} \to 1$$

   Докажем непрерывность в точке $x_0 \neq 0$.
   Рассмотрим $a^{x_0} - a^{x_n} = a^{x_0}(a^{x_n} - 1) \to 0$ ■

5. $(ab)^x = a^x b^x$

Доказательство. $\{r_n\}$ из $\mathbb{Q}$, $r_n \to x$. Тогда

$$(ab)^{r_n} = a^{r_n} \cdot b^{r_n} \Rightarrow (ab)^x = a^x b^x$$

■

6. $(a^x)^y = a^{xy}$

   Доказательство. $x_n \to x, y_n \to y, \{x_n\}, \{y_n\}$ из $\mathbb{Q}$. Тогда по непрерывности показательной и степенной функций

$$(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n \cdot y_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} (a^x)^{y_m} = a^{x\cdot y_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} (a^x)^y = a^{x\cdot y}$$

■

7. a^x – биекция из $\mathbb{R}$ на $(0, +\infty)$

   Доказательство. $a > 1$. Тогда a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$.

$$a^n = (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \to +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

■

1.4. Логарифм

Def. 1.4.1. *Т.к. $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ – биекция, то $\exists f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.*

$$\log_a x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

Из теоремы об обратной функции $\log_a x$ монотонна и непрерывна.

1.4.1. Свойства логарифма

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy), a \in (0,1) \cup (1, +\infty), x, y > 0$

   Доказательство.

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y = a^{\log_a (xy)}$$

■

2. $\log_a x^b = b \log_a x, a \in (0,1) \cup (1, +\infty), x > 0, b \in \mathbb{R}$

   Доказательство.

$$a^{b \log_a x} = (a^{log_a x})^b = x^b = a^{log_a x^b}$$

■

3. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, a, b \in (0,1) \cup (1, +\infty), x > 0$

Доказательство.

$$b^{log_a x \cdot \log_b a} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x}$$

■

Def. 1.4.2. $\ln x$ – *натуральный логарифм* ($\log_e x$)

Вернемся к степенной функции:

Def. 1.4.3. $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$. $0^\alpha = 0$. *Покажем непрерывность справа в точке* 0.

$$x_n \to 0, x_n > 0$$

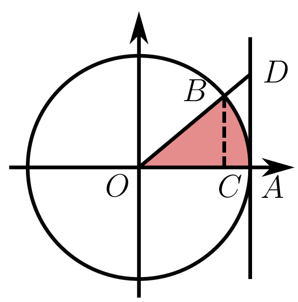
Пусть $y_n = \ln x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. *Значит* $x_n^\alpha = e^{\alpha \ln x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$x^\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \alpha > 0 \text{ – биекция}$$
$$x^\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty), \alpha < 0 \text{ – биекция}$$

1.5. Тригонометрические функции

Утверждение 1.5.1. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Тогда $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Доказательство. Нужно доказать: $BC < \overset{\frown}{AB} < AB$
$\triangle OBA \subset \triangledown OAB \subset \triangle OAD \Leftrightarrow S_{\triangle OBA} < S_{\triangledown OAB} < S_{\triangle OAD}$



$$S_{\triangle OBA} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |BC| = \frac{\sin x}{2}$$
$$S_{\triangledown OAB} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot |OA|^2 = \frac{x}{2}$$
$$S_{\triangle OAD} = |OA| \cdot |AD| \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Отсюда

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

■

Следствие 1.5.2. $|\sin x| \leqslant |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$ (причем равенство достигается только в 0)
При $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ доказано.

$$x \geqslant \frac{\pi}{2} : |\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x$$
$$x \leqslant -\frac{\pi}{2} : |\sin x| = \sin(-x)| < |-x| = x$$

Свойства:

1. $\sin x$ – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция.

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

Доказательство.

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2 \left|\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant |x - x_0| \to 0$$

■

2. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ – непрерывна.
3. $\operatorname{tg} x \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$
4. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ – непрерывны на области определения.

1.5.1. Обратные тригонометрические функции

$\sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не обратимая.
$\sin x|_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ – биекция

Def. 1.5.3. $\arcsin x = \left(\sin x|_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$. *Монотонно возрастает и непрерывна*

Def. 1.5.4. $\arccos x = \left(\cos x|_{x \in [0, \pi]}\right)^{-1}$. *Убывает, непрерывна*

Def. 1.5.5. $\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg} x|_{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$. *Непрерывна, строго возрастает.*

Def. 1.5.6. $\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg} x|_{x \in (0, \pi)}\right)^{-1}$