Матанализ 1 семестр ПИ,
Лекция, 11/10/21

Собрано 10 ноября 2021 г. в 16:05

Содержание

Замечание 0.0.1. Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a.

Доказательство.

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + o(x-a), x \to a \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$$

∎

Обратное не выполняется. Например, $f(x) = |x|$

0.1. Правила дифференцирования

Теорема 0.1.1 (Производная композиции)**.** $f : \langle A, B\rangle \to \langle C, D\rangle, g : \langle C, D\rangle \to \mathbb{R}, a \in \langle A, B\rangle$. Если f дифференцируема в точке a, g дифференцируема в точке $f(a)$, то $g \circ f$ дифференцируема в точке a и

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Доказательство. $\exists F : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F(a) = f'(a)$ и $f(x) - f(a) = F(x)(x-a), x \in \langle A, B\rangle$, F непрерывна в точке a
$\exists G : \langle C, D\rangle \to \mathbb{R}, G(f(a)) = g'(f(a))$ и $g(y) - g(f(a)) = G(y)(y - f(a)), y \in C, D\rangle$, G непрерывна в точке $f(a)$ Подставим $y = f(x)$

$$g(f(x)) - g(f(a)) = G(f(x))(f(x) - f(a)) = G(f(x))F(x)(x-a) = H(x)(x-a)$$

$H(x)$ – непрерывна в точке $x = a$, $H : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда $(g \circ f)'(a) = H(a) = G(f(a)) \cdot F(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. ∎

Замечание 0.1.2. Это "правило цепочки".

$$(g \circ h \circ f)'(a) = g'(h \circ f(a)) \cdot h'(f(a)) \circ f'(a)$$

Теорема 0.1.3 (Арифметические операции)**.** $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in \langle A, B\rangle, f, g$ – дифференцируемы в точке a. Тогда

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ – дифференцируемая в точке a функция и

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

2. $f \cdot g$ – дифференцируема в точке a и

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

3. если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ – дифференцируема в точке a и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Доказательство. 1. $(\alpha f + \beta g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(a) + \beta g(a))}{x-a} =$

$$= \lim_{x\to a}\left(\alpha \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \beta \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right) = \alpha \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \beta \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

2. Докажем частный случай $g = f$, т.е. докажем $(f^2)'(a) = 2f'(a)f(a)$. Возьмем $h(t) = t^2$, тогда $f^2(x) = (h \circ f)(x)$. Тогда по предыдущей теореме

$$(f^2)'(a) = h'(f(a)) \cdot f'(a) = 2 \cdot f(a) \cdot f'(a)$$

Вернемся к общей формуле:

$$f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2) \Rightarrow (f \cdot g)'(a) = \frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)'(a) = \frac{1}{4}(2 \cdot (f(a)+g(a)) \cdot (f'(a)+g'(a))-2(f(a)-g(a$$

$$= \frac{1}{2}(2f(a) \cdot g'(a) + 2f'(a) \cdot g(a)) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$$

Упражнение 0.1.4. Получить эту формулу непосредственно из определения производной

3. $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$. Возьмем $h(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} = (h \circ g)(x)$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = h'(g(a)) \cdot g'(a) = -\frac{1}{g^2(a)} \cdot g'(a)$$

Теперь $f \cdot \frac{1}{g}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot -\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

■

Следствие 0.1.5.

$$(f \cdot (h \cdot g))'(a) = f'(a) \cdot (h \cdot g)(a) + f(a) \cdot (h \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot h(a) \cdot g(a) + f(a)(h'(a)g(a) + h(a)g'(a)) =$$

$$= f'(a)h(a)g(a) + f(a)h'(a) + g(a) + f(a)h(a)g'(a)$$

Теорема 0.1.6 (Дифференцирование обратной функции)**.** f – строго монотонная непрерывная функция на $\langle A, B \rangle$, $a \in \langle A, B \rangle, f$ – дифференцируема в точке a и $f'(a) \neq 0$. Тогда f^{-1} – дифференцируема в точке $f(a)$ и $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Замечание 0.1.7. Геометрический смысл. Рисунок: **TODO**

Доказательство. $g(x) = f^{-1}(x), f(a) = b$. $f : \langle A, B \rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle C, D \rangle, g : \langle C, D \rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle A, B \rangle$ – непрерывны. f – дифференцируема, тогда $\exists F(x) : \langle A, B \rangle$ непрерывная в точке a

$$F(a) = f'(a), f(x) - f(a) + F(x)(x - a)$$

f строго монотонна $\Rightarrow \forall x \neq a \ f(x) \neq f(a) \Rightarrow F(x) \neq 0$ если $x \neq a$ и по условию $f'(a) = F(a) \neq 0$, т.е. $F(x) \neq 0 \ \forall x \in \langle A, B \rangle$

$$x = g(y) \ (y = f(x))$$

Тогда $y - b = f(x) - f(a) = F(x)(x - a) = F(g(y))(g(y) - g(b)) \Rightarrow g(y) - g(b) = \frac{1}{F(g(y))}(y - b) = H(y)(y - b)$

H определена на $\langle C, D \rangle$, непрерывна в точке $b = f(a) \Rightarrow g'(b) = H(b) = \frac{1}{F(g(b))} = \frac{1}{F(a)} = \frac{1}{f'(a)}$ ■

0.2. Формулы для вычисления производных

$f'(a), a \in E$ $a \mapsto f'(a)$

1. $f(x) \equiv 1, a \in \mathbb{R}$
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{1-1}{x-a} = 0$$
2. $f(x) = b^x, b > 0, a \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{b^x - b^a}{x-a} = \lim_{x\to a} b^a \cdot \frac{b^{x-a}-1}{x-a} = b^a \cdot \ln a$$
   В частности, $(e^x)' = e^x$
3. $f(x) = \log_b x, b > 0, b \neq 1, a \in (0, +\infty)$
$$\lim_{x\to a} \frac{\log_b x - \log_b a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\log_b \frac{x}{a}}{x-a}$$
$$\frac{x}{a} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \Rightarrow \log_b \frac{x}{a} = \frac{\ln \frac{x}{a}}{\ln b} = \ln \frac{\left(1 + \left(\frac{x}{a} - 1\right)\right)}{\ln b} \sim \frac{\frac{x}{a}-1}{\ln b}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{\log_b \frac{x}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{x}{a}-1}{(x-a)\ln b} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{a(x-a)\ln b} = \frac{1}{a \ln b}$$
   Значит
$$(\log_b x)' = \frac{1}{x \ln b}$$
   В частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = x^\alpha, \alpha \neq 0$
   $\alpha \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
   $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \frac{m}{2n+1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}(\alpha > 0), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}(\alpha < 0)$
   $\alpha = \frac{m}{2n}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \in [0, +\infty)(\alpha > 0), x \in (0, +\infty)(\alpha < 0)$
$$\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x-a} = \lim_{x\to a} a^\alpha \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1}{x-a} = \lim_{x\to a} a^\alpha \frac{\left(1 + \left(\frac{x}{a}-1\right)\right)^\alpha - 1}{x-a} = \lim_{x\to a} a^\alpha \cdot \frac{\alpha \cdot \left(\frac{x}{a}-1\right)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} a^\alpha \cdot \frac{\alpha(x-a)}{a(x-a)} = \alpha \cdot a^{\alpha-1}$$
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, \alpha > 1 \\ 1, \alpha = 1 \\ \infty, \alpha < 1 \end{cases}$$
   Выводы: $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (с точностью до области определения функции).
5. $f(x) = \sin x, a \in \mathbb{R}$
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a} 2 \frac{\frac{x-a}{2} \cdot \cos a}{x-a} = \cos a$$

6. $f(x) = \cos x$

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

7. $f(x) = \operatorname{tg} x, a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

8. $f(x) = \operatorname{ctg} x, a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

9. $f(x) = \arcsin x, x \in [-1, 1]$. Пусть $g(y) = \sin y \Rightarrow b = \arcsin a, g'(b) = \cos b > 0$, т.к. $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \frac{1}{\cos b} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 b}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$$

10. $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$
11. $f(x) = \operatorname{arctg} x, g(y) = \operatorname{tg} y, b \operatorname{arctg} a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \cos^2 b = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 b + 1} = \frac{1}{a^2 + 1}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{x^2 + 1}$

0.3. Теоремы о средних

Теорема 0.3.1 (Теорема Ферма)**.** $a \in (A, B), f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$ – дифференцируема в точке a. Если $f(a) = \max_{a \in \langle A, B \rangle} f$ или $f(a) = \min_{a \in \langle A, B \rangle} f$, то $f'(a) = 0$.
Геометрический смысл: Картинка TODO.

Доказательство. $f(a) = \max_{\langle A, B \rangle} \Rightarrow f(x) - f(a) \leqslant 0 \ \forall x \in \langle A, B \rangle$. Если $x > a$, то $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$

Если $x < a$, то $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$

f дифференцируема в точке $a \Rightarrow f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a) \Rightarrow f'(a) = 0$ ∎