# Алгебра 1 семестр ПИ,
# Лекция, 10/29/21

Собрано 1 ноября 2021 г. в 10:59

---

## Содержание

## 1.1. Корни из единицы

**Def. 1.1.1.** *Корень из 1 $n$-й степени $\varepsilon_k$ называется первообразным, если он принадлежит показателю, т.е.* $\forall m : 0 < m < n \to \varepsilon^m \neq 1$

**Теорема 1.1.2** (О первообразном корне)**.** Корень из 1 $n$-й степени является первообразным $\Leftrightarrow (k,n) = 1$.

*Доказательство.* "$\Rightarrow$". $\varepsilon_k$ – первообразный корень. Предположим, что $(k,n) = d > 1, k = k_1 d, n = n_1 d, n_1 < n$. Тогда

$$\varepsilon_k^{n_1} = \cos\frac{2\pi k n_1}{n} + i\sin\frac{2\pi k n_1}{n} = \cos\frac{2\pi k_1 d n_1}{n} + i\sin\frac{2\pi k_1 d n_1}{n} = 1?! \Rightarrow d = 1$$

"$\Leftarrow$". $(k,n) = 1$. Предположим, что $\varepsilon_k^m = 1 \Rightarrow \cos\frac{2\pi km}{n} = 1, \sin\frac{2\pi km}{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi km}{n} = 2\pi s \Rightarrow \frac{km}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n | m \Rightarrow m \geqslant n$$

■

Свойства:

1. $\alpha$ – корень из 1 степени $n, \beta$ – корень из 1 степени $m \Rightarrow \alpha \cdot \beta$ – тоже корень из 1.

   *Доказательство.* $(\alpha\beta)^{(m,n)} = 1$ ■

2. Если $\alpha$ – корень из 1 степени $n$, то $\alpha^{-1}$ – корень из 1 степени $n$

   *Доказательство.* $(\alpha^{-1})^n = \frac{1}{\alpha^n} = 1$ ■

3. $u_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ – мультипликативная коммутативная группа.
   $u_n = \{\varepsilon_k, \varepsilon_k^2, ..., \varepsilon_k^{n-1}, 1\}, \varepsilon_k$ – первообразный корень.

**Def. 1.1.3.** *Группа $G$ называется циклической, если $G = \{a, a^2, a^3, ...\}$. Пишут $G = \langle a \rangle$ – группа $G$ порождается элементом $a$.*

**Def. 1.1.4.** *$G_1$ – группа с операцией $*_1, G_2$ – группа с операцией $*_2$. Говорят, что группы $G_1$ и $G_2$* ***изоморфны****, если $\exists \varphi : G_1 \to G_2$ :*

- *$\varphi$ – биективно*
- $\forall x, y \in G_1 \to \varphi(x *_1 y) = \varphi(x) *_2 \varphi(y)$

**Теорема 1.1.5.** $u_n \simeq \mathbb{Z}_n$

*Доказательство.* $\varepsilon$ – первообразный корень, т.е. $u_n = \{\varepsilon^k\}, k = 0, ..., n-1$
$\varphi : \mathbb{Z}_n \to u_n, \varphi(k) = \varepsilon^k, \varphi$ – биекция

$$\varphi(k+m) = \varepsilon^k \cdot \varepsilon^m = \varphi(k) \cdot \varphi(m)$$

■

## 1.2. Показательная форма записи комплексного числа

**Def. 1.2.1.** $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – *показательная форма записи комплексного числа.*

**Def. 1.2.2** (Формула Эйлера)**.** $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$. *Тогда*

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$
$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Свойства комплексных чисел:

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
4. $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$
5. $i(z - \overline{z}) \in \mathbb{R}$