Матанализ 2 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 15 февраля 2022 г. в 14:37

Содержание

Раздел #1: Интегральное исчисление

1.1. Неопределенный интеграл

Def 1.1.1. *$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ называется первообразной функцией f, если F дифференцируема на $\langle A, B\rangle, F'(x) = f(x)\ \forall x \in \langle A, B\rangle$.*

Теорема 1.1.2. Пусть $f, F, G : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Тогда G – первообразная $f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) + c = G(x)$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $H(x) = F(x) - G(x)$. Тогда

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv \text{const}$$

$\Leftarrow$. $(F(x) + c)' = (G(x))' \Leftrightarrow f(x) = F'(x) = G'(x) \Rightarrow G$ – первообразная. ■

Def 1.1.3. *$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Множество функций $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ называется неопределенным интегралом f.*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Далее, $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$.

1. Дифференцирование

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), x \in \langle A, B\rangle$$

2. Арифметические действия:

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F(x) + G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int f(x)\,dx + H(x) = \{F(x) + H(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda \int f(x)\,dx = \{\lambda F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Утверждение 1.1.4. Если функция f непрерывна на $\langle A, B\rangle$, то у неё есть первообразная на $\langle A, B\rangle$.

Упражнение 1.1.5. $f(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$. Есть ли первообразная у этой функции?

Def 1.1.6. *$E \subset \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}$. Если F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ на E, то F – первообразная f на множестве E.*

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int a\,dx = ax + c, a \in \mathbb{R}$
2. $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x\,dx = e^x + c$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$
10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, a \neq 0$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, a > 0$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c, a \in \mathbb{R}$

Доказательство. Дифференцирование ■

Пример 1.1.7. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ – неберущийся интеграл. $\mathrm{Si}(x)$ – интегральный синус (одна из первообразных, закрепленная при $x \to 0+$).

$$(\mathrm{Si}(x))' = \frac{\sin x}{x}$$

Теорема 1.1.8 (Линейность неопределенного интеграла)**.** $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, имеют первообразные на $\langle A, B\rangle$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha, \beta \neq 0$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Доказательство. Пусть F и G – первообразные f и g на $\langle A, B\rangle$. Правая часть равенства: $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$.

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + c)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

■

Теорема 1.1.9 (Замена переменной)**.** $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f на $\langle A, B\rangle$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c$$

Доказательство.

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

■

Замечание 1.1.10. $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x)$. Пусть $y = \varphi(x)$

$$\int f(y)dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Пример 1.1.11. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$. Пусть $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x}\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Следствие 1.1.12. Пусть в условиях теоремы φ имеет обратную функцию $\psi : \langle A, B\rangle \to \langle C, D\rangle$. Если $G(x)$ – первообразная функции $(f \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = G(\psi(x)) + c$$

Доказательство. Пусть F – первообразная f на $\langle A, B\rangle$. $F(\varphi(x))$ – первообразная $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ (по теореме). Рассмотрим $G(x) - F(\varphi(x))$ – постоянная (т.к. производная равна нулю). $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$. Тогда

$$G(\psi(y)) - F(y) = \mathrm{const} \Rightarrow \int f(y)\,dy = G(\psi(y)) + c$$

∎

Пример 1.1.13. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Пусть $t = \sqrt{x}, t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = dt^2 = 2t\,dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = \int \left(\frac{2t+2}{t+1} - \frac{2}{t+1}\right) dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right) dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c$$

Пример 1.1.14. $\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\,d\sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$.
Иначе: $\int \sin x \cos x\,dx = -\int \cos x\,d\cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$.
Иначе: $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = \frac{-\cos 2x}{4} + c$.
Мораль сей басни такова: константы разные, а не $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$.

Теорема 1.1.15 (Формула интегрирования по частям). $f, g \in C^1\langle A, B\rangle$. Тогда

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Доказательство. H – первообразная $g \cdot f'$. Тогда

$$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x)$$

∎

Замечание 1.1.16. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Пример 1.1.17. $\int xe^x\,dx$. Пусть $u = x, u' = 1, v' = e^x, v = e^x$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

Пример 1.1.18. $\int \ln x\,dx$. Пусть $u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = 1, v = x$.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - x + c$$

Упражнение 1.1.19. $\int e^x \cdot \sin x \, dx$ Пусть $f = \sin x, g = e^x$. Тогда

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \Leftrightarrow \int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

Пусть теперь $f = \cos x, g = e^x$. Тогда

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \Leftrightarrow \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

Отсюда

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Пример 1.1.20. Пусть $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}, n \in \mathbb{N}$. Выразим интеграл I_{n+1} через I_n для произвольного натурального n.
Обозначим $f(x) = \frac{1}{(x^2+a)^n}$ и $g(x) = x$. Тогда

$$df(x) = \left(\frac{1}{(x^2+a)^n}\right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx, dg(x) = dx$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} - 2na\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1} \end{aligned}$$

Откуда

$$2naI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a)^n}$$

Утверждение 1.1.21. Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

Рассмотрим простешие дроби:

1. $\frac{a}{(x+p)^n}, n \in \mathbb{N}, a, p \in \mathbb{R}$
2. $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Интегралы от простейших дробей первого рода вычисляются по таблице. Для простейших дробей второго рода используется следующий алгоритм:

1. Если $p \neq 0$, то выделим полный квадрат и выполним замену $y = x + \frac{p}{2}$. Если $p = 0$, тогда

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = a\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n} + b\int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$$

2. Интеграл $\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n}$ можно вычислить с помощью замены $y = x^2 + q$, т.к. $dy = 2x\,dx$.
3. Применяя к интегралу $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$ формулу понижения $n-1$ раз сведем его к интегралу I_1, который является табличным.

Пример 1.1.22 (12 и 13 из таблицы).

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} \left(\ln|x-2| - \ln|x+2| \right) + c$$

Пример 1.1.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Пусть $x = \operatorname{sh} t, dx = \operatorname{ch} t dt$. Тогда

$$\int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + c$$

Упражнение 1.1.24. Найди формулу для $(\operatorname{sh} t)^{-1}$

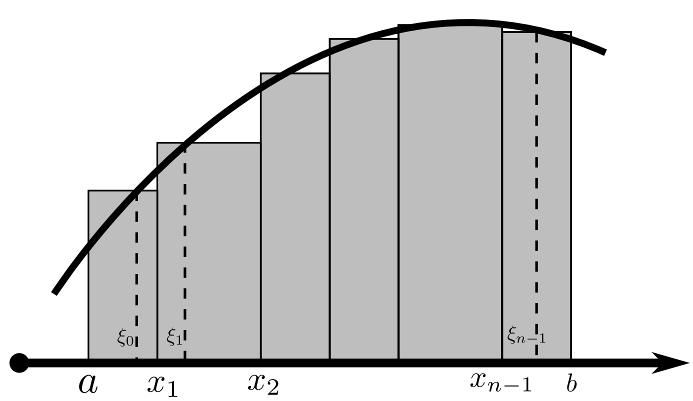
Неберущиеся интегралы:

- $\int \frac{\sin x}{x} dx$
- $\int \frac{\cos x}{x} dx$
- $\int \frac{dx}{\ln x}$
- $\int \frac{e^x}{x} dx$
- $\int \sin x^2 \, dx$
- $\int \cos x^2 \, dx$
- $\int e^{-x^2} dx$

1.2. Определенный интеграл Римана

Def 1.2.1. $[a,b], a < b$. *Набор точек* $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ *– разбиение (дробление) отрезка* $[a,b]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ *– длина отрезка* $[x_k, x_{k+1}]$. $\lambda = \lambda_\tau = \max_{k\in[0,n-1]} \Delta x_k$ *– ранг дробления (мелкость),* $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ *– оснащение дробления* τ. *Пара* (τ, ξ) *называется оснащенным дроблением.*

Def 1.2.2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ *– суммы Римана (интегральные суммы).*



Def 1.2.3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Число* $I \in \mathbb{R}$ *называют пределом интегральных сумм при ранге* $\to 0$:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad (I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma)$$

если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$|\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \varepsilon$$

Замечание 1.2.4. Последовательность оснащенных дроблений $\{(\tau^{(i)}, \xi^{(i)})\}_{i=1}^{\infty} : \lambda^{(i)} \to 0$. $\forall \{\tau^{(i)}, \xi^{(i)}\} : \lambda^{(i)} \to 0 \ \sigma_{\tau^{(i)}}(f, \xi^{(i)}) \to I$.

Def 1.2.5 (Интеграл Римана)**.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Если* $\exists \lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$, *то* f *называется интегрируемой по Риману на* $[a,b]$, *а число* I *называется интегралом* f *по* $[a,b]$.
$R[a,b]$ – *класс функций, интегрируемых по Риману на* $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$