Матанализ, Лекция

Собрано 25 сентября 2021 г. в 11:12

Содержание

Def. 1.0.1. Последовательность — это отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Пример 1.0.2. $x_n = n^2 : x_n = \{1, 4, 9, ...\}$

1.1. Предел последовательности и его свойства

Def. 1.1.1. Предел последовательности - это такое число $l = lim_{n\to\infty} x_n$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to |x_n - l| < \varepsilon$$

Также говорят, что вне любого интервала, содержащего l, лежит лишь конечно число элементов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

Пример 1.1.2. $x_n = \frac{1}{n}, \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right]$

Замечание 1.1.3. N необязательно наименьшее.

Def. 1.1.4. Последовательность называется **сходящейся**, если она имеет конечный предел.

Def. 1.1.5. $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to x_n > E$

Def. 1.1.6. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to x_n < E$

Def. 1.1.7 (Беззнаковая бесконечность)**.**

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to |x_n| > E$$

Def. 1.1.8. Последовательность называется бесконечно большой, если она стремится к бесконечности

Def. 1.1.9. Последовательность называется бесконечно малой, если она стремится к нулю

Свойства пределов последовательности:

1. Последовательность не может иметь двух различных пределов.

   Доказательство. Пусть $a \neq b$ - пределы, $a < b$. Возьмем $\varepsilon = \left(\frac{b-a}{3}\right)$. Тогда по определению предела вне ε-окрестности a лежит конечно число членов последовательности, и вне ε-окрестности b лежит конечно число членов последовательности $\Rightarrow$ сама последовательности конечна !? ■

2. Сходящаяся последовательность ограничена.

   Доказательство. Пусть $\lim\{x_n\} = a$. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдем номер N такой, что при всех $n \geqslant N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < 1$. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

   $$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a|$$

   Поэтому при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство

   $$|x_n| < 1 + |a|$$

   Положим $M = \max(1 + |a|, |x_1|, ..., |x_{N-1}|)$. Тогда $|x_n| \leqslant M \ \forall n \in \mathbb{N}$ ■

Утверждение 1.1.10. Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство. N_1 - номер из определения $\lim x_n = a$
N_2 - номер из определения $\lim y_n = b$
$N = \max\{N_1; N_2\}$ ■

3. Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b, \forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leqslant y_n$. Тогда $a \leqslant b$ (предельный переход в неравенстве).

   Доказательство. Пусть $a > b$. Тогда $\exists N$, начиная с которого в ε-окрестности b лежит бесконечное число членов y_n, а ε-окрестности a лежит бесконечное число членов x_n. Но тогда, если бы возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$, то $\exists y_n \in (b - \varepsilon; b + \varepsilon) : y_n < x_n, x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ ■

   Следствие 1.1.11. 1. $\lim x_n = a, \forall n \to x_n \leqslant b \Rightarrow a \leqslant b$

   2. $\lim y_n = b, \forall n \to y_n \geqslant a \Rightarrow a \leqslant b$

4.

   Теорема 1.1.12 (Теорема о сжатой последовательности, теорема о двух милиционерах)**.** Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \land \lim x_n = \lim y_n = a$. Тогда $\lim z_n = a$

   Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \to x_n, y_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Т.к. $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ ■

1.2. Монотонные последовательности

Def. 1.2.1. Последовательность называется возрастающей, если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots$

Def. 1.2.2. Последовательность называется убывающей, если $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots$

Def. 1.2.3. Последовательность называется монотонной, если она возрастающая или убывающая.

Теорема 1.2.4 (О монотонной ограниченной последовательности)**.** 1. Возрастающая и ограниченная сверху последовательность сходится

2. Убывающая и ограниченная снизу последовательность сходится

Доказательство. Пусть множество $E = \{x_1, x_2, \ldots\}, c = \sup E$
$\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leqslant c$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists N \in \mathbb{N} : x_N > c - \varepsilon$$

Т.к. x_n возрастает, то

$$\forall n > N \to x_n \geqslant x_N > c - \varepsilon \land x_n < c + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - c| < \varepsilon$$

■

Замечание 1.2.5. 1. Возрастающая и неограниченная сверху последовательность стремится к $+\infty$.

2. Убывающая и неограниченная снизу последовательность стремится к $-\infty$

Доказательство. $\forall E \to \exists N : x_N > E$ и $x_n \geqslant x_N\ \forall n \geqslant N$ ■

1.3. Теорема об арифметических действиях с пределами

Теорема 1.3.1 (Теорема об арифметических действиях с пределами)**.** Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b, a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim |x_n| = |a|$
2. $\lim(x_n + y_n) = a + b$
3. $\lim(x_n - y_n) = a - b$
4. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
5. $\forall n \in \mathbb{N} \to b \neq 0 \wedge y_n \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists N : \forall n \geqslant N \to |x_n - a| < \varepsilon$. Заметим, что

$$||x_n| - |a|| < |x_n - a| < \varepsilon$$

2. $|(x_n + y_n) - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$
3. Вместо y_n рассмотрим $-y_n$
4. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists N : \forall n \geqslant N \to \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \end{cases}$ $, M : \forall n \to |y_n| < M$

   $|x_n \cdot y_n - ab| = |x_n y_n - ab - a \cdot y_n + a \cdot y_n| = |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)| \leqslant |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| < \varepsilon$
5. Достаточно доказать, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b}{|y_n||b|} \leqslant \frac{|y_n - b|}{|\frac{b}{2}||b|} < \frac{\frac{b^2\varepsilon}{2}}{|\frac{b}{2}||b|} = \varepsilon$$

■

Утверждение 1.3.2. x_n - бесконечно малая, y_n - ограниченная. Тогда $\lim x_n \cdot y_n = 0$

Доказательство. $|x_n y_n| < |x_n| \cdot M < \varepsilon \cdot M, M : \forall n \in \mathbb{N} \to |y_n| < M$ ■

Утверждение 1.3.3. $\forall n \to x_n \neq 0$. Тогда x_n - бесконечно большая $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая

Доказательство. $|x_n| > E \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E}$ ■

1.4. Арифметические действия с бесконечностями

1. $\lim x_n = +\infty, y_n$ ограничено снизу. Тогда $\lim(x_n + y_n) = +\infty$
2. $\lim x_n = -\infty, y_n$ ограничено сверху. Тогда $\lim(x_n + y_n) = -\infty$
3. $\lim x_n = +\infty, y_n \geqslant c > 0$. Тогда $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$
4. $\lim x_n = +\infty, y_n \leqslant c < 0$. Тогда $\lim(x_n \cdot y_n) = -\infty$
5. $\lim x_n = a \neq 0, \lim y_n = 0$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$
6. $\lim x_n = a \in \mathbb{R}, \lim y_n = \infty$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$
7. $\lim x_n = \infty, \lim y_n = b \in \mathbb{R} \wedge y_n \neq 0$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$

Замечание 1.4.1. $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}, \lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim(x_n * y_n) = a * b$

Запрещенные операции (неопределённости):

1. $\pm\infty + (\mp\infty)$
2. $\pm\infty - (\pm\infty)$
3. $0 \cdot \infty$
4. $\frac{0}{0}$
5. $\frac{\infty}{\infty}$

1.5. Неравенство Бернулли

Теорема 1.5.1 (Неравенство Бернулли)**.** Пусть $x > -1, n \in \mathbb{N}$. Тогда $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

Доказательство. База $n = 1 : (1+x)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot x$
Индукционный переход $n \to n+1$

$$(1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) = 1 + n(x+1) + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$$

■