Математический анализ 1 семестр ПИ, Вещественные числа

Собрано 13 сентября 2021 г. в 16:32

Содержание

1.1. Аксиомы сложения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \to a + 0 = a$ (существование нуля)
4. $\forall a \in \mathbb{R} \to \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ ($(-a)$ — противоположное число для a)

1.2. Аксиомы умножения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения)
3. $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R} \to 1 \cdot x = x$ (существование единицы)
4. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \to \exists \frac{1}{a} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($\frac{1}{a}$ — обратное число для a)

1.3. Дистрибутивность умножения относительно сложения

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

1.4. Аксиомы порядка ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leq b$ или $b \leq a$)

1. $\forall a \in \mathbb{R} \to a \leq a$ (рефлексивность)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b, b \leq c \to a \leq c$ (транзитивность)
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b, b \leq a \to a = b$ (антисимметричность)
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a \leq b$ или $b \leq a$
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \to a + c \leq b + c$
6. $\forall a, b \in R : 0 \leq a, 0 \leq b \to 0 \leq a \cdot b$

1.5. Ещё несколько определений

- $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$ (определение $\geq$)
- $a < b \Leftrightarrow a \leq b$ и $a \neq b$ (определение $<$)
- $a > b \Leftrightarrow b < a$ (определение $>$)

1.6. Аксиома полноты

$\forall A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \varnothing, B \neq \varnothing : \forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y \to \exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$

Следствие 2.0.1. Число 0 единственно

Доказательство. Предположим обратное: $\exists 0' \neq 0$, тогда рассмотрим следующее:

$$0' + 0 = 0'$$

$$0 + 0' = 0$$

Теперь заметим, что левые части равны по аксиоме о коммутативности сложения $\Rightarrow 0' = 0$, что противоречит предполагаемому. ■

Следствие 2.0.2. Число 1 единственно
Доказательство аналогично доказательству единственности нуля, только используется умножение вместо сложения.

Следствие 2.0.3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

Доказательство.

$$a = b \Rightarrow a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$a = b \Rightarrow b \leq a \Rightarrow b + c \leq a + c$$

$$a + c \leq b + c,\ b + c \leq a + c \Rightarrow a + c = b + c$$

В обратную сторону аналогично:

$$a + c = b + c \Rightarrow a + c \leq b + c \Rightarrow a \leq b$$

$$a + c = b + c \Rightarrow b + c \leq a + c \Rightarrow b \leq a$$

$$a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$$

■

Следствие 2.0.4. $\forall a \in \mathbb{R}\ (-a)$ единственно.

Доказательство. Пусть верно обратное: $\exists a \in \mathbb{R} : \exists (-a)_1, (-a)_2 \in \mathbb{R} : (-a)_1 \neq (-a)_2$

$$a + (-a)_1 = a + (-a)_2 = 0$$

Добавим к обеим частям $(-a)_1$:

$$(-a)_1 = (-a)_2$$

Пришли к противоречию.

■

Следствие 2.0.5. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \rightarrow -b \leq -a$

Доказательство.

$$a + ((-a) + (-b)) \leq b + ((-a) + (-b))$$

$$-b \leq -a$$

■

Следствие 2.0.6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b, c \neq 0 \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$

Доказательство. TODO. ∎

Следствие 2.0.7. $\forall a \in \mathbb{R} : a \neq 0 \ \exists! \frac{1}{a}$

Доказательство. TODO. ∎

Следствие 2.0.8. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \cdot x = 0$

Доказательство.

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = x \cdot (0 + 0) + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0$$

∎

Следствие 2.0.9. $\forall x \in \mathbb{R} \to (-x) = (-1) \cdot x$

Доказательство. Предположим обратное: $\exists x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = b, b \neq (-x)$

$$(-1) \cdot x + 1 \cdot x = b + 1 \cdot x$$

$$x \cdot (1 + (-1)) = b + 1 \cdot x$$

$$b + x = 0$$

$$b = -x$$

Противоречие. ∎

Следствие 2.0.10. $0 < 1$

Доказательство. Предположим обратное: $0 \geq 1$, вариант $0 = 1$ сразу отпадает из-за аксиомы о существовании единицы, значит $0 > 1 \Leftrightarrow -1 > 0$
Пусть $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, тогда $(-1) \cdot x \geq 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot x + 1 \cdot x \geq 1 \cdot x \Leftrightarrow 0 \geq x$
Противоречие. ∎

Утверждение 3.0.1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, y > 0 \to \exists n \in \mathbb{N} : x < n \cdot y$

Доказательство. ∎