

Алгебра 1 семестр ПИ,

Лекция, 10/29/21

Собрано 1 ноября 2021 г. в 17:33

Содержание

1. Комплексные числа	1
1.1. Корни из единицы	1
1.2. Показательная форма записи комплексного числа	2

1.1. Корни из единицы

Def. 1.1.1. Корень из 1 n -й степени ε_k называется первообразным, если он принадлежит показателю, т.е. $\forall m : 0 < m < n \rightarrow \varepsilon^m \neq 1$

Теорема 1.1.2 (О первообразном корне). Корень из 1 n -й степени является первообразным $\Leftrightarrow (k, n) = 1$.

Доказательство. " \Rightarrow ". ε_k – первообразный корень. Предположим, что $(k, n) = d > 1, k = k_1 d, n = n_1 d, n_1 < n$. Тогда

$$\varepsilon_k^{n_1} = \cos \frac{2\pi k n_1}{n} + i \sin \frac{2\pi k n_1}{n} = \cos \frac{2\pi k_1 d n_1}{n} + i \sin \frac{2\pi k_1 d n_1}{n} = 1 \Rightarrow d = 1$$

" \Leftarrow ". $(k, n) = 1$. Предположим, что $\varepsilon_k^m = 1 \Rightarrow \cos \frac{2\pi k m}{n} = 1, \sin \frac{2\pi k m}{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi k m}{n} = 2\pi s \Rightarrow \frac{k m}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n | m \Rightarrow m \geq n$$

■

Свойства:

1. α – корень из 1 степени n, β – корень из 1 степени $m \Rightarrow \alpha \cdot \beta$ – тоже корень из 1.

Доказательство. $(\alpha\beta)^{\text{lcm}(m,n)} = 1$

■

2. Если α – корень из 1 степени n , то α^{-1} – корень из 1 степени n

Доказательство. $(\alpha^{-1})^n = \frac{1}{\alpha^n} = 1$

■

3. $u_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ – мультипликативная коммутативная группа.

$u_n = \{\varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \dots, \varepsilon_k^{n-1}, 1\}, \varepsilon_k$ – первообразный корень.

Def. 1.1.3. Группа G называется циклической, если $G = \{a, a^2, a^3, \dots\}$. Пишут $G = \langle a \rangle$ – группа G порождается элементом a .

Def. 1.1.4. G_1 – группа с операцией $*_1, G_2$ – группа с операцией $*_2$. Говорят, что группы G_1 и G_2 **изоморфны**, если $\exists \varphi : G_1 \rightarrow G_2$:

- φ – биективно
- $\forall x, y \in G_1 \rightarrow \varphi(x *_1 y) = \varphi(x) *_2 \varphi(y)$

Теорема 1.1.5. $u_n \simeq \mathbb{Z}_n$

Доказательство. ε – первообразный корень, т.е. $u_n = \{\varepsilon^k\}, k = 0, \dots, n-1$

$\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow u_n, \varphi(k) = \varepsilon^k, \varphi$ – биекция

$$\varphi(k+m) = \varepsilon^k \cdot \varepsilon^m = \varphi(k) \cdot \varphi(m)$$

■

1.2. Показательная форма записи комплексного числа

Def. 1.2.1. $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ – *показательная форма записи комплексного числа.*

Def. 1.2.2 (Формула Эйлера). $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$
$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Свойства комплексных чисел:

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
4. $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$
5. $i(z - \bar{z}) \in \mathbb{R}$