Алгебра 2 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 29 марта 2022 г. в 11:32

Содержание

Раздел #1: Системы линейных уравнений

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$A = (a_{ij})$ – матрица коэффициентов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Def 1.0.1. *Решение СЛУ* $(*)$ *называется* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K :$ *при* $x_i = \alpha_i$ *все уравнения становятся верными.*

Def 1.0.2. *СЛУ* $(*)$ *совместна, если* $\exists$ *хотя бы одно решение. Иначе - несовместна.*

1.1. Ранг матрицы

$A - m \times n, A = (A_1, A_2, \ldots, A_m), A_i$ – строки.
$A = (A^1, A^2, \ldots, A^n), A^j$ – столбцы.

Def 1.1.1. *Строчным (столбцовым) рангом матрицы A называется максимальное число ЛНЗ строк (столбцов).*
Иначе, количество элементов в базисе $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle (\langle A^1, \ldots, A^n \rangle)$.

Теорема 1.1.2. Строчный и столбцовый ранги совпадают.

Обозначение: $\operatorname{rank} A$.

Def 1.1.3. *Минором матрицы* $A - m \times n$ k*-го порядка называется определитель, составленный из элементов матрицы* A*, стоящих на* k *выбранных строках и на* k *выбранных столбцов.*

Пример 1.1.4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 5 & 9 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Если вы выберем вторую и третью строку, а также первый и последний столбец, то минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Теорема 1.1.5. Ранг матрицы A равен наибольшему порядку минора, отличного от нуля.

Теорема 1.1.6 (Связь определителя с рангом матрицы)**.** $A - n \times n$. Тогда $\operatorname{rank} A < n \Leftrightarrow \det A = 0$.

Доказательство. $\Rightarrow$. $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow$ строки $A_1, \ldots, A_n$ ЛЗ, т.е. $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K : \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = 0$ (α_i не все равны нулю). Пусть $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} A_n$. Обнулим первую строку: прибавим к ней A_2, умноженную на $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, A_3, умноженную на $-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ и т.д. Поскольку теперь первая строка целиком нулевая, то $\det A = 0$.

$\Leftarrow$. Индукция $n = 1 \Rightarrow a_{11} = 0$. $n - 1 \to n$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Можем считать, что $A^1 \neq 0, a_{11} \neq 0$. Домножим первую строку на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавляем ко второй строке. Затем домножаем первую строку на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и прибавляем ко третьей строке и т.д.

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

По предположению $A'_2, \dots, A'_n$ – ЛЗ. $\begin{cases} A'_2 = A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot A_1 \\ \cdots \\ A'_n = A_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} \cdot A_1 \end{cases}$.

$0 = \alpha_2 A'_2 + \dots + \alpha_n A'_n = (\dots)A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \dots + \alpha_n A_n \Rightarrow A_1, \dots, A_n$ – ЛЗ $\Rightarrow \operatorname{rank} A < n$. ■

Def 1.1.7. *Элементарными преобразованиями над строками (столбцами) называется*

1. *Перестановка строк (столбцов).*
2. *Умножение строки (столбца) на $\lambda \neq 0$.*
3. *Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на $\lambda \neq 0$.*

Теорема 1.1.8. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Доказательство. 1, 2 – очевидно. $(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) \to (A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n)$ ■

Def 1.1.9. *Матрица называется трапецевидной, если у неё в $\forall$ ненулевой строке число нулей слева различно.*

Замечание 1.1.10. rank трапецевидной матрицы равен числу ненулевых строк.

Теорема 1.1.11 (О вычислении ранга)**.** Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к трапецевидной.

1.2. Структура решений СЛУ

Def 1.2.1. *СЛУ (*) называется однородной, если все свободные члены равны нулю.*

Def 1.2.2. *Нулевое решение однородной СЛУ называется тривиальным. Любое другое решение – нетривиальным.*

Lm 1.2.3. Пусть Y, Z – решения $AX = 0 \Rightarrow \alpha Y + \beta Z$ – тоже решение, $\alpha, \beta \in K$.

Доказательство.

$$AY = 0, AZ = 0 \Rightarrow A(\alpha Y + \beta Z) = \alpha AY + \beta AZ = 0$$

■

Теорема 1.2.4 (Структура решений однородной СЛУ)**.** $AX = 0, A{-}m{\times}n, n$ – число неизвестных, $r = \operatorname{rank} A \Rightarrow \exists n - r$ ЛНЗ решений $X_1, ..., X_{n-r} : \forall$ решение $X = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}$.

Доказательство. $A = (A^1, ..., A^n)$, $A^1, ..., A^r$ – ЛНЗ столбцы $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A_{r+1} = \beta_{r+1\ 1} A^1 + ... + \beta_{r+1\ n} A^r \\ ... \\ A^n = \beta_{n\ 1} A^1 + ... + \beta_{n\ r} A^r \end{cases}$$

$AX = 0 \Leftrightarrow x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = 0$.

$$X_1 = \begin{pmatrix} \beta_{r+1\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{r+1\ r} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \beta_{r+2\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{r+2\ r} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., X_{n+r} = \begin{pmatrix} \beta_{n\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{n\ r} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$ – решения.

Пусть $Z = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_r^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ – решение. Рассмотрим $Y = Z + x_{r+1}^* X_1 + x_{r+2}^* X_2 + ... + x_n^* X_{n-r}$. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – решение $\{y_1 A_1 + ... + y_r A_r = 0\}$. Но $A_1, ..., A_r$ – ЛНЗ $\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = Z + x_{r+1}^* X_1 + x_{r+2}^* X_2 + ... + x_n^* X_{n-r}$. ■

Def 1.2.5. *$\forall n - r$ ЛНЗ решений однородной системы линейных уравнений называется* ***фундаментальной системой решений****, решение вида $X = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}$ –* ***общее решение****.*

1.3. Неоднородные СЛУ

$AX = B, A - m \times n, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

$\overline{A} = \left(A \mid B \right)$ – расширенная матрица $m \times (n+1)$.

Теорема 1.3.1 (Кронекера-Капелли)**.** $(*)$ – совместна $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$.

Доказательство. $\Rightarrow$. $AX = B$ – совместна $\Rightarrow \exists$ решение $x_1 A^1 + ... + x_n A^n = B \Rightarrow B$ – линейная комбинация $A^1, ..., A^n \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$.
$\Leftarrow$. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = r \Rightarrow \exists A^1, ..., A^r$ – ЛНЗ $\Rightarrow A^1, ..., A^r, B$ – ЛЗ $\Rightarrow B = \alpha_1 A^1 + ... + \alpha_r A^r$, не все $\alpha_i = 0 \Rightarrow (\alpha_1, ..., \alpha_r, 0, ..., 0)$ – решение системы. ■

Теорема 1.3.2 (О структуре решений неоднородной СЛУ). $AX = B, \operatorname{rank} A = r, n$ – число неизвестных, система совместна. X_* – какое-то решение СЛУ, $X_1, ..., X_{n-r}$ – фундаментальные решения $AX = 0$. Тогда любое решение $(*)$ имеет вид $X = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r} + X_*, \alpha_1, ..., \alpha_{n-r} \in K$.

Доказательство. $AX_* = B \Rightarrow AX = AX_* \Rightarrow A(X - X_*) = 0 \Rightarrow X - X* = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}$. ■

Пример 1.3.3 (Решение СЛУ методом Гаусса).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4-\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6-\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Раздел #2: Линейные отображения векторных пространств

Def 2.0.1. *V, W – векторные пространства над K. Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если:*

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in V$

2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)\ \forall x \in V, \alpha \in K$

Замечание 2.0.2. $1, 2 \sim f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)\ \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in K$.

Def 2.0.3. $\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W$ *– линейные*$\}$

Lm 2.0.4. $\mathrm{Hom}(V, W)$ – векторное пространство над K.

Доказательство. $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W), (f+g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \Rightarrow f + g, \alpha f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. ■

Def 2.0.5. $f \in \mathrm{Hom}(V, W), \ker f = \{x \in V : f(x) = 0\}$ *– ядро отображения* f, $\mathrm{Im}\, f = \{f(x), x \in V\}$ *– образ* f.

Lm 2.0.6. $\ker f \subset V, \mathrm{Im}\, f \subset W$ – подпространства.

Доказательство. $x, y \in \ker f, f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in \ker f$. Аналогично, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0 \Rightarrow \alpha x \in \ker f\ \forall \alpha \in K \Rightarrow \ker f$ – подпространство. ■

Упражнение 2.0.7. $\mathrm{Im}\, f$ – подпространство.

Теорема 2.0.8. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

1. f – инъективно $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.
2. f – сюръективно $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = W$.

Доказательство. $\Leftarrow$. $x_1 \neq x_2$, если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$!?
$\Rightarrow$. Пусть $x \in \ker f, x \neq 0 \Rightarrow f(x) = f(0) = 0$!?. ■

2.1. Матрица линейного отображения

$e_1, \dots, e_n$ – базис $V, e'_1, \dots, e'_m$ – базис $W, f \in \mathrm{Hom}(V, W)$
$x \in V, x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, x_i \in K, f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) \Leftrightarrow$ задать f значит задать $f(e_i),\ i = 1, \dots, n$.

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11} e'_1 + a_{21} e'_2 + \dots + a_{m1} e'_m \\ \dots \\ f(e_n) = a_{1n} e'_1 + a_{2n} e'_2 + \dots + a_{mn} e'_m \end{cases}$$

Def 2.1.1. *Матрицей* $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *в базисе* $e_1, \dots, e_n$ *и* $e'_1, \dots, e'_m$ *назыается*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{pmatrix}$$

Теорема 2.1.2. 1. $\mathrm{Hom}(V,W)$ взаимно-однозначно соответствует $M(m,n,K)$.

2. $e_1,...,e_n$ – базис V, $e'_1,...,e'_m$ – базис W, $x \in V \to X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f(x) \in W \to Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, f \to A$ $\Rightarrow AX = Y$.

Доказательство. 1. $f \to A$ отображение однозначно определяется $f(e_i) \Rightarrow A$ определена однозначно. С другой стороны, взяв произвольную матрицу B, можем построить по ней отображение g.

2. $f \to A = (a_{ij}), 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$.

$$f(x) = f(x_1e_1 + ...x_ne_n) = x_1f(e_1) + ... + x_nf(e_n) =$$
$$= x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{m1}e'_m) + ... + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{mn}e'_m) =$$
$$= \underbrace{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)}_{y_1} e'_1 + ... + \underbrace{(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)}_{y_m} e'_m \Rightarrow Y = AX$$

■

Следствие 2.1.3. 1. $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$

2. $\alpha,\beta \in K, f,g \in \mathrm{Hom}(V,W), f \to A, g \to B$ в фиксированных базисах $\Rightarrow \alpha f + \beta g \to \alpha A + \beta B$.

3. $f : V \to W, g : W \to U \Rightarrow g \circ f : V \to U, g \circ f(x) = g(f(x))$. Фиксируем базисы, $f \to A, g \to B \Rightarrow g \circ f \to BA$

Доказательство. 1. Соответствие матриц.

2. $(\alpha f + \beta g)(e_i) = \alpha f(e_i) + \beta g(e_i) \in \alpha A + \beta B$.

3. $V \to n, W \to l, U \to m, A \to l \times n, B \to m \times l$
$g \circ f(e_i) = g(\sum_{k=1}^{l} a_{ki}e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}g(e'_k) = \sum_{k=1}^{l} a_{ki}\sum_{j=1}^{m} b_{jk}e''_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} b_{jk}a_{ki}e''_j$, где $b_{jk}a_{ki} \to BA$. ■

Теорема 2.1.4. $f : V \to W,\ \dim V, \dim W < \inf$

$$\Rightarrow \dim\ker f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$$

Доказательство. $\ker f \subset V, e_1,...,e_k$ - базис $\ker f$. Дополним до базиса $V : e_1,...,e_k,e_{k+1},...,e_n$ – базис V.
$x \in V, f(x) \in \mathrm{Im}\, f\ \ f(x) = x_{k+1}f(e_{k+1}) + ... + x_nf(e_n) \in \mathrm{Im}\, f$
$f(e_1) = ... = f(e_k) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, f = \langle f(e_{k+1}),...,f(e_n)\rangle$. Надо доказать, что $f(e_{k+1}),...,f(e_n)$ – ЛНЗ.
Предположим обратное. $\alpha_{k+1}f(e_{k+1}) + ... + \alpha_nf(e_n) = 0 \Rightarrow f(\alpha_{k+1}e_{k+1} + ... + \alpha_ne_n) = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + ... + \alpha_ne_n \in \ker f = \langle e_1,...,e_k\rangle$ – невозможно.
$\dim\ker f = k, \dim V = n, \dim \mathrm{Im}\, f = n - k$. ■

2.2. Линейные операторы

Def 2.2.1. *Линейным оператором называется линейное отображение $a : V \to V$, т.е. $a \in \mathrm{Hom}(V,V)$.*
Обозначается $EndV = \mathrm{Hom}(V,V)$.

Def 2.2.2. *Тождественным отображением называется отображение*

Def 2.2.3.

Пример 2.2.4. 1. Нулевой оператор. $0 \in EndV$. $0(x) = 0$. $0 \to \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$

2. Оператор подобия. $\forall x \in V\ ax = \lambda x \to \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$

3. Оператор поворота в $\mathbb{R}^2$. $z \to ze^{i\varphi}$ – поворот на φ. Зафиксируем базис – $1, i \Rightarrow a(1) = \cos\varphi + i\sin\varphi, a(i) = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -\sin\varphi + i\cos\varphi\ \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

4. Оператор дифференцирования. $V = \mathbb{R}[x]$. $\frac{d}{dx}f \to f'$, зафиксируем базис – $1, x, x^2, x^3$.

   $\frac{d}{dx}(1) = 0, \frac{d}{dx}(x) = 1, \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$. Тогда матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Возьмём другой базис – $1, x+1, x^2+x+1, x^3+x^2+x+1$.
   Посчитаем значения: $\frac{d}{dx}(1) = 0, \frac{d}{dx}(x+1) = 1, \frac{d}{dx}(x^2+x+1) = 2x+1, \frac{d}{dx}(x^3+x^2+x+1) = 3x^2+2x+1$.

   Матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Def 2.2.5. $(e_i), (e_i')$ *– базисы* V*,* $\dim V = n$*. Разложим* $\begin{cases} e_1' = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ \cdots \\ e_n' = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases}$*. Тогда матрица вида* $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ *называется матрицей перехода от базиса* (e_i) *к* (e_i')*.*

Теорема 2.2.6 (Преобразование координат вектора при переходе к другому базису)**.** V – векторное пространство над полем K, $(e_i), (e_i')$ – базисы V, $x \in V$, $x \to X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора в базисе (e_i). $x \to X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ – координаты вектора в базисе $(e_i'), C$ – матрица перехода от (e_i) к (e_i').

1. $X = CX'$
2. C – обратима ($\det C \neq 0$)

Доказательство. 1. $x = x_1'e_1'+\ldots+x_n'e_n' = x_1'(c_{11}e_1+c_{21}e_2+\ldots+c_{n1}e_n)+\ldots+x_n'(c_{1n}e_1+c_{2n}e_2+\ldots+c_{nn}e_n) = \underbrace{(c_{11}x_1'+c_{12}x_2'+\ldots+c_{1n}x_n')}_{x_1}e_1+\ldots+\underbrace{(c_{n1}x_1'+c_{n2}x_2'+\ldots+c_{nn}x_n')}_{x_n}e_n$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

2. $\forall X\ X = CX'$ по доказанному, тогда $X = CX' = CDX \Rightarrow CD = E \Rightarrow \det C \neq 0$.

■

Теорема 2.2.7 (Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису). V – векторное пространство, $\dim V = n, a \in EndV$, фиксируем базисы $(e_i),(e_i')$, A – матрица оператора в базисе (e_i), A' – в базисе (e_i'), С – матрица перехода от (e_i) к (e_i').

$$\Rightarrow A' = C^{-1}AC$$

Lm 2.2.8. $U \subset V, a \in End\,V$

$U-$ а-инвариантно $\Leftrightarrow \exists$ базис $V : A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, B = \dim U \times \dim U$

Доказательство. U – а-инвариантно. Выберем базис U: $e_1,\ldots,e_k$ и дополним его до базиса V

матрицы a $ae_i = b_{1i}e_1+\cdots+b_{ki}e_k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{1i} & \cdot \\ b_{ki} & \cdot \\ 0 & \cdot \\ 0 & \cdot \end{pmatrix}$ ■

Lm 2.2.9. $U,W \subset V, a \in End\,V$

$V = U \oplus W, U, W$ – а-инвариантны $\Leftrightarrow \exists$ базис $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

$B = \dim U \times \dim U, C = \dim W \times \dim W$

Доказательство. $V = U \oplus V$, выберем $U : e_1,\ldots,e_k, W : e_{k+1},\ldots,e_n$

$a(e_i) \in U, i = 1,\ldots,k, a(e_j) \in W, j = k+1,\ldots,n \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ ■

Пример 2.2.10. 1. $V = M(2,\mathbb{R})$ $a : X \to X^T, X \in M(2,\mathbb{R})$

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a(E_{11}) = E_{11}$, $a(E_{12}) = E_{21}$, $a(E_{21}) = E_{12}$ $a(E_{22}) = E_{22}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad < E_{11} > \oplus < E_{12}, E_{21} > \oplus < E_{22} > = V \text{ инвариантны}$$

2. $V = K[x]_3$ $a : \frac{d}{dx}(f \to f')$ $1, x, x^2, x^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dx} :< 1, x, x^2 > \to < 1, x > \subset < 1, x, x^2 >$$

2.3. Собственные векторы и числа

Def 2.3.1. *Собственным вектором оператора а называется* $\forall$ *ненулевой вектор одномерного инвариантного подпространства.*

Def 2.3.2. x *- собственный вектор,* $ax = \lambda x$*, тогда* λ = *собственное число, ассоциированное вектору* x
$a \to A, x \to X \quad AX = \lambda X \Rightarrow (A - \lambda E)X = 0$

Def 2.3.3. *Характеристическим многочленом оператора а (матрицы А) назыается* $\chi_a(t) = \det(A - tE)$

Теорема 2.3.4 (О собственных числах)**.** Все собственные числа оператора а и только они являются корнями характеристического многочлена.

Доказательство. $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda E)X = 0$ – имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E)X = 0 \Leftrightarrow$ все собственные числа корни $\chi_a(t)$ ∎

Lm 2.3.5 (Независимость собственных чисел от выбора базиса)**.** Характеристические многочлены оператора а в разных базисах совпадают.

Доказательство. $a(e_i) \to A \quad (e_i') \to A' \quad C$ – матрица перехода от (e_i) к (e_i')
$A' = C^{-1}AC \quad \chi_a(t) = \det(A' - tE) = \det(C^{-1}AC) = \det(C^{-1}AC - t \cdot C^{-1}C) = \det(C^{-1}(A - tE)C) = \det C^{-1} \cdot \det(A - tE) \cdot \det C = \det(A - tE) = \chi_a(t)e_i$ ∎

Теорема 2.3.6 (Линейная независимость собственных векторов)**.** Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы.

Доказательство. $n = 1$ – очевидно. Пусть доказали при $n - 1$. Индукционный переход: $n - 1 \to n : V_1, V_2, ..., V_n$ – собственные векторы
$aV_i = \lambda_i V_i, \quad \lambda_1, ..., \lambda_n$ – различны
Пусть $V_1, V_2, ..., V_n$ – линейно зависимы. Тогда $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_n V_n = 0, \alpha_i \in K \Rightarrow$ под действием а: $\alpha_1\lambda_1 V_1 + \alpha_2\lambda_2 V_2 + ... + \alpha_n\lambda_n V_n = 0$
Будем считать, что $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1\lambda_1 V_1 + \alpha_2\lambda_2 V_2 + ... + \alpha_n\lambda_n V_n - \lambda_1(\alpha_1 V_1 + ... + \alpha_n V_n) = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda - 1)V_2 + ... + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)V_n = 0 \Rightarrow$ по предположению индукции $\alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ ∎

Def 2.3.7. *Оператор а называется диагонализируемым, если существует базис такой, что*
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Теорема 2.3.8 (Критерий диагонализируемости)**.** Если $\chi_a(t)$ имеет n различных корней ($n = \dim V$) над рассматриваемым полем, то оператор а – диагонализируем.

Доказательство. В качестве базиса берём собственные векторы. ∎

Пример 2.3.9. Оператор поворота $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ – недиагонализируем над $\mathbb{R}$

Lm 2.3.10. Над полем $\mathbb{C}$ любой оператор имеет одномерное инвариантное подпространство.

Def 2.3.11. *Кратность* λ *как кратность корня* $\chi_a(t) = 0$ *называется алгебраической кратностью собственного числа.*

Def 2.3.12. λ *– собственное число,* $V^\lambda = \{x \in V : ax = \lambda x\}$
$\dim V^\lambda$ *– геометрическая кратность собственного числа* λ

Пример 2.3.13. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\chi_a(t) = \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} = (A - tE) = (\lambda - t)^2 \Rightarrow \lambda$ собственное число алгебраической кратности 2.
$(A - \lambda E)X = 0$
$\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\dim V^\lambda = 2$ – геометрическая кратность

Пример 2.3.14. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
$\chi_a(t) = \begin{vmatrix} \lambda - t & 1 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} = (\lambda - t)^2 \Rightarrow$ алгебраическая кратность $\lambda = 2$
$\left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V^\lambda =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$
$\dim V^\lambda = 1$ – геометрическая кратность

Lm 2.3.15. Геометрическая кратность собственного числа $\lambda \leqslant$ алгебраической кратности

Доказательство. V^λ – инвариантно относительно a, $V^\lambda = \{x : ax = \lambda x\}$
По лемме: $a \to \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ $B - m \times m, \dim V^\lambda = m$
$a\big|_{V^\lambda} = \chi_a\big|_V^\lambda = (t - \lambda)^m$
$\chi_a = \det\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & d \end{pmatrix} - tE\right) = (t - \lambda)^m p(t) \Rightarrow$ алгебраическая кратность $\lambda \geqslant m$ ∎

Теорема 2.3.16 (Критерий диагонализируемости)**.** $a \in End V$ – диагонализируема $\Leftrightarrow$ 1. Все собственные числа $\in K$ 2. $\forall$ собственных чисел λ алгебраическая кратность $=$ геометрическая кратность

2.4. Жорданова нормальная форма

Def 2.4.1. *Жордановой клеткой порядка m соответствующей собственному числу* λ *называется*
$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \lambda \end{pmatrix}$

Пример 2.4.2. 1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Def 2.4.3. *ЖНФ оператора* $a \in EndV$ *называется*

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}()\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}()\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_n}()\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Def 2.4.4. *Базис, в котором оператор а имеет ЖНФ называется жордановом*

Теорема 2.4.5 (ЖНФ)**.** 1. Над алгебраическим замкнутым полем $\forall a \in EndV$ имеет ЖНФ

2. ЖНФ определена с точностью до перестановки клеток

Теорема 2.4.6. $a \in EndV$ имеет ЖНФ над произвольным полем $\Leftrightarrow$ характеристический многочлен раскладывается на линейные множители