Алгебра 2 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 19 февраля 2022 г. в 12:35

Содержание

Раздел #1: Системы линейных уравнений

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$A = (a_{ij})$ – матрица коэффициентов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Def 1.0.1. *Решение СЛУ* $(*)$ *называется* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$: *при* $x_i = \alpha_i$ *все уравнения становятся верными.*

Def 1.0.2. *СЛУ* $(*)$ *совместна, если* $\exists$ *хотя бы одно решение. Иначе - несовместна.*

1.1. Ранг матрицы

$A - m \times n, A = (A_1, A_2, \ldots, A_m), A_i$ – строки.
$A = (A^1, A^2, \ldots, A^n), A^j$ – столбцы.

Def 1.1.1. *Строчным (столбцовым) рангом матрицы A называется максимальное число ЛНЗ строк (столбцов).*
Иначе, количество элементов в базисе $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle(\langle A^1, \ldots, A^n\rangle)$.

Теорема 1.1.2. Строчный и столбцовый ранги совпадают.

Обозначение: $\operatorname{rank} A$.

Def 1.1.3. *Минором матрицы* $A - m \times n$ k*-го порядка называется определитель, составленный из элементов матрицы A, стоящих на k выбранных строках и на k выбранных столбцов.*

Пример 1.1.4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 5 & 9 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Если вы выберем вторую и третью строку, а также первый и последний столбец, то минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Теорема 1.1.5. Ранг матрицы A равен наибольшему порядку минора, отличного от нуля.

Теорема 1.1.6 (Связь определителя с рангом матрицы)**.** $A - n \times n$. Тогда $\operatorname{rank} A < n \Leftrightarrow \det A = 0$.

Доказательство. $\Rightarrow$. $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow$ строки $A_1, \ldots, A_n$ ЛЗ, т.е. $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K : \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = 0$ (α_i не все равны нулю). Пусть $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}A_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}A_n$. Обнулим первую строку: прибавим к ней A_2, умноженную на $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, A_3, умноженную на $-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ и т.д. Поскольку теперь первая строка целиком нулевая, то $\det A = 0$.

$\Leftarrow$. Индукция $n = 1 \Rightarrow a_{11} = 0$. $n - 1 \to n$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Можем считать, что $A^1 \neq 0, a_{11} \neq 0$. Домножим первую строку на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавляем ко второй строке. Затем домножаем первую строку на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и прибавляем ко третьей строке и т.д.

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

По предположению $A'_2, \ldots, A'_n$ – ЛЗ. $\begin{cases} A'_2 = A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot A_1 \\ \cdots \\ A'_n = A_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} \cdot A_1 \end{cases}$.

$0 = \alpha_2 A'_2 + \ldots + \alpha_n A'_n = (\ldots)A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \ldots + \alpha_n A_n \Rightarrow A_1, \ldots, A_n$ – ЛЗ $\Rightarrow \operatorname{rank} A < n$. ■

Def 1.1.7. *Элементарными преобразованиями над строками (столбцами) называется*

1. *Перестановка строк (столбцов).*
2. *Умножение строки (столбца) на $\lambda \neq 0$.*
3. *Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на $\lambda \neq 0$.*

Теорема 1.1.8. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Доказательство. 1, 2 – очевидно. $(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \to (A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n)$ ■

Def 1.1.9. *Матрица называется трапецевидной, если у неё в $\forall$ ненулевой строке число нулей слева различно.*

Замечание 1.1.10. rank трапецевидной матрицы равен числу ненулевых строк.

Теорема 1.1.11 (О вычислении ранга)**.** Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к трапецевидной.

1.2. Структура решений СЛУ

Def 1.2.1. *СЛУ (*) называется однородной, если все свободные члены равны нулю.*

Def 1.2.2. *Нулевое решение однородной СЛУ называется тривиальным. Любое другое решение – нетривиальным.*

Lm 1.2.3. Пусть Y, Z – решения $AX = 0 \Rightarrow \alpha Y + \beta Z$ – тоже решение, $\alpha, \beta \in K$.

Доказательство.
$$AY = 0, AZ = 0 \Rightarrow A(\alpha Y + \beta Z) = \alpha AY + \beta AZ = 0$$

■

Теорема 1.2.4 (Структура решений однородной СЛУ)**.** $AX = 0, A - m \times n, n$ – число неизвестных, $r = \operatorname{rank} A \Rightarrow \exists n - r$ ЛНЗ решений $X_1, ..., X_{n-r} : \forall$ решение $Y = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}$.

Доказательство. $A = (A^1, ..., A^n)$, $A^1, ..., A^r$ – ЛНЗ столбцы $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A_{r+1} = \beta_{r+1\ 1} A^1 + ... + \beta_{r+1\ n} A^r \\ ... \\ A^n = \beta_{n\ 1} A^1 + ... + \beta_{n\ r} A^r \end{cases}$$

$AX = 0 \Leftrightarrow x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = 0$.

$X_1 = \begin{pmatrix} \beta_{r+1\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{r+1\ r} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \beta_{r+2\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{r+2\ r} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., X_{n+r} = \begin{pmatrix} \beta_{n\ 1} \\ \vdots \\ \beta_{n\ r} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$ – решения.

Пусть $Z = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_r^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ – решение. Рассмотрим $Y = Z + x_{r+1}^* X_1 + x_{r+2}^* X_2 + ... + x_n^* X_{n-r}$. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – решение $\{y_1 A_1 + ... + y_r A_r = 0\}$. Но $A_1, ..., A_r$ – ЛНЗ $\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = Z + x_{r+1}^* X_1 + x_{r+2}^* X_2 + ... + x_n^* X_{n-r}$. ■