Матанализ 2 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 2 марта 2022 г. в 11:02

Содержание

Раздел #1: Интегральное исчисление

1.1. Неопределенный интеграл

Def 1.1.1. *$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ называется первообразной функцией f, если F дифференцируема на $\langle A, B\rangle, F'(x) = f(x)\ \forall x \in \langle A, B\rangle$.*

Теорема 1.1.2. Пусть $f, F, G : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Тогда G – первообразная $f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) + c = G(x)$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $H(x) = F(x) - G(x)$. Тогда

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv \text{const}$$

$\Leftarrow$. $(F(x) + c)' = (G(x))' \Leftrightarrow f(x) = F'(x) = G'(x) \Rightarrow G$ – первообразная. ∎

Def 1.1.3. *$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Множество функций $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ называется неопределенным интегралом f.*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Далее, $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$.

1. Дифференцирование

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), x \in \langle A, B\rangle$$

2. Арифметические действия:

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F(x) + G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int f(x)\,dx + H(x) = \{F(x) + H(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda \int f(x)\,dx = \{\lambda F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Утверждение 1.1.4. Если функция f непрерывна на $\langle A, B\rangle$, то у неё есть первообразная на $\langle A, B\rangle$.

Упражнение 1.1.5. $f(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$. Есть ли первообразная у этой функции?

Def 1.1.6. *$E \subset \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}$. Если F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ на E, то F – первообразная f на множестве E.*

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int a\,dx = ax + c, a \in \mathbb{R}$
2. $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x\,dx = e^x + c$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$
10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, a \neq 0$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, a > 0$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c, a \in \mathbb{R}$

Доказательство. Дифференцирование ■

Пример 1.1.7. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ – неберущийся интеграл. $\mathrm{Si}(x)$ – интегральный синус (одна из первообразных, закрепленная при $x \to 0+$).

$$(\mathrm{Si}(x))' = \frac{\sin x}{x}$$

Теорема 1.1.8 (Линейность неопределенного интеграла)**.** $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, имеют первообразные на $\langle A, B\rangle$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha, \beta \neq 0$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Доказательство. Пусть F и G – первообразные f и g на $\langle A, B\rangle$. Правая часть равенства: $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$.

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + c)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

■

Теорема 1.1.9 (Замена переменной)**.** $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f на $\langle A, B\rangle$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c$$

Доказательство.

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

■

Замечание 1.1.10. $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x)$. Пусть $y = \varphi(x)$

$$\int f(y)dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Пример 1.1.11. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$. Пусть $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x}\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Следствие 1.1.12. Пусть в условиях теоремы φ имеет обратную функцию $\psi : \langle A, B\rangle \to \langle C, D\rangle$. Если $G(x)$ – первообразная функции $(f \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = G(\psi(x)) + c$$

Доказательство. Пусть F – первообразная f на $\langle A, B\rangle$. $F(\varphi(x))$ – первообразная $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ (по теореме). Рассмотрим $G(x) - F(\varphi(x))$ – постоянная (т.к. производная равна нулю). $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$. Тогда

$$G(\psi(y)) - F(y) = \text{const} \Rightarrow \int f(y)\,dy = G(\psi(y)) + c$$

■

Пример 1.1.13. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Пусть $t = \sqrt{x}, t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = dt^2 = 2t\,dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = \int \left(\frac{2t+2}{t+1} - \frac{2}{t+1}\right) dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right) dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c$$

Пример 1.1.14. $\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\,d\sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$.
Иначе: $\int \sin x \cos x\,dx = -\int \cos x\,d\cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$.
Иначе: $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = \frac{-\cos 2x}{4} + c$.
Мораль сей басни такова: константы разные, а не $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$.

Теорема 1.1.15 (Формула интегрирования по частям). $f, g \in C^1\langle A, B\rangle$. Тогда

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Доказательство. H – первообразная $g \cdot f'$. Тогда

$$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x)$$

■

Замечание 1.1.16. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Пример 1.1.17. $\int xe^x\,dx$. Пусть $u = x, u' = 1, v' = e^x, v = e^x$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

Пример 1.1.18. $\int \ln x\,dx$. Пусть $u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = 1, v = x$.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - x + c$$

Упражнение 1.1.19. $\int e^x \cdot \sin x\, dx$ Пусть $f = \sin x, g = e^x$. Тогда

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \Leftrightarrow \int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

Пусть теперь $f = \cos x, g = e^x$. Тогда

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \Leftrightarrow \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

Отсюда

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Пример 1.1.20. Пусть $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}, n \in \mathbb{N}$. Выразим интеграл I_{n+1} через I_n для произвольного натурального n.
Обозначим $f(x) = \frac{1}{(x^2+a)^n}$ и $g(x) = x$. Тогда

$$df(x) = \left(\frac{1}{(x^2+a)^n}\right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx, dg(x) = dx$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} - 2na\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1} \end{aligned}$$

Откуда

$$2naI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a)^n}$$

Утверждение 1.1.21. Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

Рассмотрим простешие дроби:

1. $\frac{a}{(x+p)^n}, n \in \mathbb{N}, a, p \in \mathbb{R}$
2. $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Интегралы от простейших дробей первого рода вычисляются по таблице. Для простейших дробей второго рода используется следующий алгоритм:

1. Если $p \neq 0$, то выделим полный квадрат и выполним замену $y = x + \frac{p}{2}$. Если $p = 0$, тогда

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = a\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n} + b\int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$$

2. Интеграл $\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n}$ можно вычислить с помощью замены $y = x^2+q$, т.к. $dy = 2x\,dx$.
3. Применяя к интегралу $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$ формулу понижения $n-1$ раз сведем его к интегралу I_1, который является табличным.

Пример 1.1.22 (12 и 13 из таблицы).

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2|\right) + c$$

Пример 1.1.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Пусть $x = \operatorname{sh} t, dx = \operatorname{ch} t dt$. Тогда

$$\int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + c$$

Упражнение 1.1.24. Найди формулу для $(\operatorname{sh} t)^{-1}$

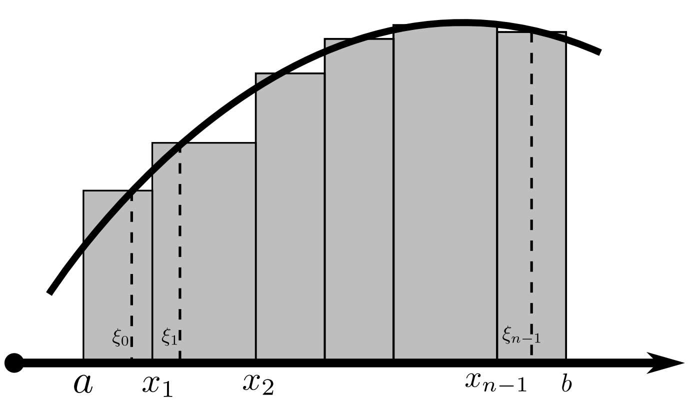
Неберущиеся интегралы:

- $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$
- $\int \frac{\cos x}{x}\, dx$
- $\int \frac{dx}{\ln x}$
- $\int \frac{e^x}{x}\, dx$
- $\int \sin x^2\, dx$
- $\int \cos x^2\, dx$
- $\int e^{-x^2}\, dx$

1.2. Определенный интеграл Римана

Def 1.2.1. $[a,b], a < b$. *Набор точек* $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ *– разбиение (дробление) отрезка* $[a,b]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ *– длина отрезка* $[x_k, x_{k+1}]$. $\lambda = \lambda_\tau = \max_{k\in[0,n-1]} \Delta x_k$ *– ранг дробления (мелкость),* $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ *– оснащение дробления* τ. *Пара* (τ, ξ) *называется оснащенным дроблением.*

Def 1.2.2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ *– суммы Римана (интегральные суммы).*



Def 1.2.3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Число* $I \in \mathbb{R}$ *называют пределом интегральных сумм при ранге* $\to 0$:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad (I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma)$$

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$|\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \varepsilon$$

Замечание 1.2.4. Последовательность оснащенных дроблений $\{(\tau^{(i)}, \xi^{(i)})\}_{i=1}^{\infty} : \lambda^{(i)} \to 0$. $\forall \{\tau^{(i)}, \xi^{(i)}\} : \lambda^{(i)} \to 0 \ \sigma_{\tau^{(i)}}(f, \xi^{(i)}) \to I$.

Def 1.2.5 (Интеграл Римана). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Если $\exists \lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$, то f называется интегрируемой по Риману на $[a,b]$, а число I называется интегралом f по $[a,b]$.*
$R[a,b]$ – класс функций, интегрируемых по Риману на $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

1.3. Суммы Дарбу

Def 1.3.1. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ – дробление $[a,b]$.*

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Суммы

$$S = S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, s = s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются верхними и нижними интегральными суммами.

Замечание 1.3.2. Если f – непрерывна на $[a,b]$, то это две частные суммы из сумм Римана.

Замечание 1.3.3. f ограничена сверху $\Leftrightarrow$ S ограничена.

Свойства сумм Дарбу:

1. $S_\tau(f) = \sup_\xi \sigma_\tau(f,\xi), s_\tau = \inf_\xi \sigma_\tau(f,\xi)$

   Доказательство. $M_k \geqslant f(\xi_k), k = 0, \dots, n-1$. Тогда $M_k \Delta x_k \geqslant f(\xi_k)\Delta x_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow S_\tau(f) \geqslant \sigma_\tau$, т.е. S_τ – верхняя граница. Докажем, что она является точной верхней границей.
   Если f ограничена на $[a,b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. На каждом кусочке разбиения $\exists \xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}] :$ $f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = S - \varepsilon$.
   Если f не ограничена на $[a,b] \Rightarrow$ не ограничена на каком-то кусочке $[x_l, x_{l+1}]$. Фиксируем $A > 0$ и выберем ξ_k^* при $k \neq l$ произвольно, а для ξ_l^*

   $$f(\xi_l^*) > \frac{1}{\Delta x_l}\left(A - \sum_{k \neq l} f(\xi_k^*)\Delta x_k\right)$$

   Тогда

   $$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > A \Rightarrow \sup_\xi \sigma = +\infty = S$$

   ∎

2. При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя не уменьшится.

Доказательство. Докажем для верхних сумм при добавлении одной точки. $\tau : \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$. Добавим точку c в $[x_l, x_{l+1}]$ – T – новое дробление.

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + M_l \Delta x_l + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + (c - x_l) \cdot M' + (x_{l+1} - c) M'' + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

где $M' = \sup_{x \in [x_l, c]} f, M'' = \sup_{x \in [c, x_{l+1}]} f$. $M_l \geqslant M', M_l \geqslant M''$, т.к. $[x_l, c] \subset [x_l, x_{l+1}], [c, x_{l+1}] \subset [x_l, x_{l+1}]$.

Рассмотрим $S_\tau - S_T = M_l \Delta x_l - (c - x_l) M' - (x_{l+1} - c) M'' \geqslant M_l (x_{l+1} - x_l - c + x_l - x_{l+1} + c) = 0$.

Добавить больше точек можно по индукции. ∎

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней.

   Доказательство. τ_1, τ_2 – разные дробления $[a, b]$. Докажем, что $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$. Возьмем $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда $s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}$ (по свойству 2). ∎

Утверждение 1.3.4. $f \in R[a, b] \Rightarrow f$ ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть f не ограничена на $[a, b]$ сверху. Тогда $\forall \tau \Rightarrow \sup_\xi \sigma_\tau(f, \xi) = +\infty$. Тогда $\forall \tau$ и числа I $\exists$ оснащение $\xi' : \sigma_\tau(\xi') > I + 1 \Rightarrow$ никакое число I не является пределом интегральных сумм. ∎

Def 1.3.5. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Возьмем*

$$I^* = \inf_\tau S_\tau \qquad I_* = \sup_\tau s_\tau$$

где I^* – верхний интеграл Дарбу, I_* – нижний интеграл Дарбу.

Замечание 1.3.6. $I^* \geqslant I_*$.

Замечание 1.3.7. f ограничена сверху $\Leftrightarrow I^*$ ограничена.

1.4. Критерии интегрируемости функции

Теорема 1.4.1 (Критерий интегрируемости функции)**.** Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a, b] \Leftrightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $f \in R[a, b]$. Обозначим $I = \int_a^b f$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$:

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Переходя к супремуму и инфимуму, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда $S_\tau - s_\tau \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3} - I + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
$\Leftarrow$. Пусть $S_\tau - s_\tau \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0 \Rightarrow$ все суммы Дарбу конечны.

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau \Rightarrow 0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow I^* = I_*$ (т.к. это числа). Обозначим $I = I^* = I_*$.

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau, s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau \Rightarrow |I - \sigma_\tau| \leqslant S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\tau : \lambda_\tau < \delta\ |I - \sigma_\tau| < \varepsilon$. ■

Замечание 1.4.2. Если $f \in R[a,b] \Rightarrow s_\tau \leqslant \int_a^b f \leqslant S_\tau$.

Следствие 1.4.3. $f \in R[a,b] \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} S_\tau = \lim_{\lambda\to 0} s_\tau = \int_a^b f$

Доказательство. $0 \leqslant S_\tau - \int_a^b f \leqslant S_\tau - s_\tau$, $0 \leqslant \int_a^b f - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau$. ■

Замечание 1.4.4. $\lim_{\lambda\to 0} S_\tau = I^*, \lim_{\lambda\to 0} s_\tau = I_*$.

Утверждение 1.4.5 (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману). *$f \in R[a,b] \Leftrightarrow f$ ограничена на $[a,b]$ и $I_* = I^*$.*

Утверждение 1.4.6 (Критерий Римана интегрируемости). *$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\tau\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.*

Def 1.4.7. *$f : D \to \mathbb{R}$. Величина*

$$\omega(f)_D = \sup_{x,y\in D} (f(x) - f(y))$$

называется колебанием f на D. Из определений граней функции ясно, что

$$\omega(f)_D = \sup_{x\in D} f(x) - \inf_{y\in D} f(y)$$

Если задано τ отрезка $[a,b]$, то

$$\omega_k(f) = M_k - m_k$$

Тогда теорему можно записать:

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k = 0$$

Теорема 1.4.8 (Интегрируемость непрерывной функции). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.*

Доказательство. По теореме Кантора $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равномерна непрерывна на $[a,b]$.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall t', t'' \in [a,b] : |t' - t''| < \delta\ |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

По теореме Вейерштрасса f достигает наибольшего и наименьшего значения на любом отрезке, содержащемся в $[a,b]$. Поэтому колебание f на всяком отрезке, длина которого меньше δ, будет меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, $\forall\tau : \lambda_\tau < \delta$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k$$

■

Теорема 1.4.9 (Интегрируемость монотонной функции)**.** f монотонна на $[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.

Доказательство. Пусть f монотонно возрастает на $[a,b]$. Если $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ постоянна $\Rightarrow f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.
Если $f(a) < f(b)$. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Возьмем произвольное $\tau : \lambda_\tau < \delta$ на $[x_k, x_{k+1}]$. В силу монотонности f верно $\omega_k(f) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k))\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \varepsilon$$

■

Замечание 1.4.10. $f \in R[a,b]$. Если изменить значение f в конечном числе точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

Доказательство. $\widetilde{f}$ – отличается от f в точках $t_1, t_2, ..., t_m$. $|f|$ ограничена на $[a,b] \Rightarrow |\widetilde{f}|$ ограничена. $|f| \leqslant A$, возьмем $\widetilde{A} = \max\{A, |\widetilde{f}(t_1)|, |\widetilde{f}(t_2)|, ..., |\widetilde{f}(t_m)|\}$. В интегральных суммах для f и $\widetilde{f}$ отличаются не более $2m$ слагаемых, поэтому

$$|\sigma_\tau(f,\xi) - \sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)| \leqslant 2m(A + \widetilde{A})\lambda_\tau \underset{\lambda_\tau}{\longrightarrow} 0$$

Поэтому предел $\sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)$ существует и равен пределу $\sigma_\tau(f,\xi)$. ■

Теорема 1.4.11 (Интегрируемость функции и её сужения)**.** 1. $f \in R[a,b], [\alpha,\beta] \subset [a,b] \Rightarrow f \in R[\alpha,\beta]$

2. Если $a < c < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $f \in R[a,c], f \in R[c,b]$, то $f \in R[a,b]$.

Доказательство. 1. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$ из критерия интегрируемости на $[a,b]$.
τ_0 – дробление $[\alpha,\beta], \lambda_{\tau_0} < \delta$. Добавим точек до дробления $[a,b]$. Получим $\tau(\lambda_\tau < \delta)$.

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=l}^{m-1} \omega_k(f)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon$$

2. Пусть f не постоянна, т.е. $\omega(f)_{[a,b]} > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta_1, \delta_2 : \forall \tau_1 : \lambda_{\tau_1} < \delta_1, \forall tau_2 : \lambda_{\tau_2} < \delta_2$

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\}$. Пусть τ – дробление $[a,b], \lambda_\tau < \delta$. Точка $c \in [x_l, x_{l+1})$. Обозначим $\tau' = \tau \cup \{c\}, \tau_1 = \tau' \cap [a,c], \tau_2 = \tau' \cap [c,b]$

$$S_\tau - s_\tau \leqslant S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_1} + \omega_l(f)\delta < \varepsilon$$

■

Def 1.4.12. *Функция $f : [a,b] \to R$ называется кусочно-непрерывной на $[a,b]$, если множество её точек разрыв пусто или конечно (и все разрывы первого рода)*

Следствие 1.4.13. f – кусочно-непрерывная на $[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$

Доказательство. Возьмём точки $a_1, a_2, ..., a_m$ (может $a_1 = a$ и/или $a_m =$ b). Рассмотрим отрезки $[a_k, a_{k+1}]$. f непрерывна на (a_k, a_{k+1}) и $\exists$ конечные $\lim\limits_{x \to a_k+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a_{k+1}-} f(x) \Rightarrow f \in R[a_k, a_{k+1}] \Rightarrow$ по теореме о сужении $f \in R[a,b]$ ∎

Def 1.4.14. *Множество X называется не более, чем счетным, если оно конечно или счетно.*

Def 1.4.15. $E \subset \mathbb{R}$ *– имеет нулевую меру, если для* $\forall \varepsilon > 0$ *множество E можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых* $< \varepsilon$.

$$\left(\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i)\right)$$

Пример 1.4.16. Множество из одной точки.

Упражнение 1.4.17. Чему равна мера $\mathbb{N}$?

Теорема 1.4.18 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)**.** Пусть $f : [a,b] \to R$.
$f \in R[a,b] \Leftrightarrow f$ ограничена и множество точек разрыва имеет нулевую меру.

Теорема 1.4.19 (Арифметические действия над интегрируемыми функциями)**.** $f, g \in \mathbb{R}[a,b]$. Тогда

1. $f + g \in R[a,b]$
2. $f \cdot g \in R[a,b]$
3. $\alpha f \in R[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$
4. $|f| \in R[a,b]$
5. Если $\inf\limits_{[a,b]} |g| > 0$, то $\dfrac{f}{g} \in R[a,b]$

Доказательство.

1. $D \subset [a,b]$. $x, y \in D$
$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| = |f(x) + g(y) - f(y) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leqslant \omega_D(f) + \omega_D(g)$
$\omega_D(f+g) \leqslant \omega_D(f) + \omega_D(g)$
$\underset{[x_k, x_{k+1}]}{\omega}(f+g) \leqslant \underset{[x_k, x_{k+1}]}{\omega}(f) + \underset{[x_k, x_{k+1}]}{\omega}(g)$
$\omega_k(f+g) \leqslant \omega_k f + \omega_k g$
$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f+g)\delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k f \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k g \Delta x_k (\to 0, \lambda \to 0)$$
$\Rightarrow f + g \in R[a,b]$
2. $|fg(x) - fg(y)| \leqslant |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant |g(x)||f(x) - f(y)| +$
$+ |f(y)||g(x) - g(y)| \leqslant A|f(x) - f(y)| + B|g(x) - g(y)|$ (т.к. $R[a,b] \Rightarrow$ ограничена на $[a,b]$)
3. $g(x) = \alpha$
4. $||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)|$
$|\omega_k |f|| \leqslant |\omega_k f|$

5. $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$. Докажем, что $\dfrac{1}{g} \in R[a,b]$
$0 < m = \inf\limits_{[a,b]} |g|$
$|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(y)}| = |\dfrac{g(x)-g(y)}{g(x)g(y)}| \leqslant \dfrac{g(x)-g(y)}{m^2}$
$\omega_k(\dfrac{1}{g}) \leqslant \dfrac{\omega_k(g)}{m^2}$

■

Пример 1.4.20. 1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$
$x^2 \in C[a,b] \Rightarrow x^2 \in R[a,b]$.
Рассмотрим какую-нибудь интегральную сумму: $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{k}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \lim \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

2. $\int_0^1 e^x dx$– упражнение

3. $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $D \notin R[a,b], a < b$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(D)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a \underset{\lambda\to 0}{\not\to} 0$$

■

4. $r(x) \begin{cases} \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{дробь несократима} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
$r(x)$ непрерывна в каждой точке, разрывна в каждой рациональной.
$r(x) \in R[0,1]$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ Рациональные числа из [0,1] со знаменателем $\leqslant N$, конечное число = C_N, множество X.
Возьмём $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4C_N}$ и дробление $\tau : \lambda_\tau < \delta$
Точки X попадут в не более, чем $2C_N$ отрезков дробления. В отрезках, где нет точек из X наибольшее значение $< \dfrac{1}{N}$
$s_\tau(r) = 0$

$$S_\tau(r) = \sum_{k:M_k \geqslant \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k \sum_{k:M_k < \frac{1}{N}} M_l \Delta x_k \leqslant \underbrace{1 \cdot 2C_n}_{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \delta + \underbrace{\frac{1}{N}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$S_\tau(r) - s_\tau(r) = S_\tau(r) \underset{\lambda_r\to 0}{\to} 0 \Rightarrow r \in R[0,1]$ и $\displaystyle\int_0^1 r(x)dx = 0$ ■

Если $f \in R_D$ $g \in R[a,b]$, то $f(g) \in R[a,b]$? ($D-$ множество значений g)

Ответ: нет. Пример: $f(y) = \begin{cases} 1, y \in [0,1] \\ 0, y = 0 \end{cases}$ и $g(x) = r(x)$ на $[0,1]$

$f(r(x)) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = D(x) \notin R[0,1]$

Теорема 1.4.21 (Интегрируемость композиции)**.** $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b], f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(\varphi) : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$
$\varphi \in \mathbb{R}[\alpha,\beta], f \in C[a,b]$. Тогда $f \circ \varphi \in R[\alpha,\beta]$

Доказательство. Например, из критерия Лебега. ∎

1.5. Свойства интеграла Римана

1. $\int_b^a f = -\int_a^b f$

2. $\int_a^b f = 0$ ($\forall f$ на вырожденном отрезке $f \in \mathbb{R}[a,a]$)

Свойства:

- Аддитивность интеграла по отрезку:
  $a,b,c \in \mathbb{R},\ f \in \mathbb{R}[\min\{a,b,c\},\max\{a,b,c\}]$

$$\int_a^b f = \int_a^c + \int_c^b f$$

  Доказательство. $f \in \mathbb{R}[a,b] \Rightarrow f \in \mathbb{R}[a,c], f \in R[c,b]\{\overline{\tau}^{(n)},\overline{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\overline{\overline{\tau}}^{(n)},\overline{\overline{\xi}}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательности оснащенных дроблений $[a,c]$ и $[c,b]$ (равномерных, т.е. $\widetilde{\lambda} = \frac{c-a}{n}, \overline{\overline{\lambda}}$)
  $\tau^{(n)} = \overline{\tau}^{(n)} \cup \overline{\overline{\tau}}^{(n)}$– дробление $[a,b]$
  $\xi^{(n)} = \overline{\xi}^{(n)} \cup \overline{\overline{\xi}}^{(n)}$ – оснащение $\tau^{(n)}$
  $\sigma = \overline{\sigma} + \overline{\overline{\sigma}}$ при $n \to \infty$

$$\underbrace{\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f}_{\text{по доказанному}} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

  Все остальные случаи – аналогично. ∎

- $f \equiv \alpha$ при $x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f = \alpha(b-a)$

Доказательство.
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \alpha(b-a)$$
■

- Линейность интеграла: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a,b]$
$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b + \beta \int_a^b g$

Доказательство. $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$
$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sigma_\tau(\alpha f) + \sigma_\tau(\beta g)$ и переход к пределу. ■

- Монотонность интеграла: $a < b, \quad f, g \in R[a,b]$ и $f \leqslant g$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

Доказательство. $\sigma_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(g)$ ■

Следствие 1.5.1. $a < b, f \in R[a,b]$, если $f \leqslant M \in \mathbb{R}$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f \leqslant M(b-a)$,
если $f \geqslant m$ на $[a,b]$то $\int_a^b f \geqslant m(b-a)$

Следствие 1.5.2. $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$

- $a < b, \underset{f \geqslant 0 \text{ на } [a,b]}{f \in R[a,b]}$ и $\exists c \in [a,b] : f(c) > 0$ и f непрерывна в точке C.
Тогда $\int_a^b f > 0$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in \underbrace{[c-\delta; c+\delta] \cap [a,b]}_{[\alpha,\beta]} : |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$f(x) > f(c) - \varepsilon = \dfrac{f(c)}{2} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f \geqslant \dfrac{f(c)}{2}(\beta - \alpha)$
$$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^b \geqslant \int_\alpha^\beta f \geqslant \frac{f(c)}{2}(\beta-\alpha) > 0$$
■

Замечание 1.5.3. Таким же образом строгий знак в монотонности интеграла.

Замечание 1.5.4. $f \in R[a,b], f > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$

- $a < b, f \in R[a,b]$
$$\Big|\int_a^b f\Big| \leqslant \int_a^b |f|$$

Доказательство. $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ ■

Если не знаем, что $a \geqslant b$ или $b \geqslant a$

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$$

1.6. Интегральные теоремы о средних

Теорема 1.6.1. $f, g \in R[a,b], g \geqslant 0$ на $[a,b], m \leqslant f \leqslant M$. Тогда $\exists \mu \in [m,M] : \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$

Доказательство. $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ на $[a,b]$

$$m\int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M\int_a^b g$$

Если $\int_a^b g = 0$, то $\exists \mu \in [m,M] : 0 = \mu \cdot 0$

Если $\int_a^b g > 0 m \leqslant \dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leqslant M$

Возьмём $\mu = \dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ ■

Замечание 1.6.2. Для $g \leqslant 0$ тоже верно.

Следствие 1.6.3.

1. $f \in C[a,b], g \in R[a,b], g \geqslant 0($ или $g \leqslant 0)$.
   Тогда $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g$

   Доказательство. По теореме Вейерштрасса: $\exists m = \min\limits_{[a,b]} f$ и $M = \max\limits_{[a,b]} f$
   Подберём $\mu \in [m,M]$ по предыдущей теореме. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists c \in [a,b] : f(c) = M$ ■

2. $f \in R[a,b], m, M \in \mathbb{R} : m \leqslant f \leqslant M$ на $[a,b]$. Тогда $\exists \mu \in [m,M] : \int_a^b f = \mu(b-a)$

   Доказательство. $g \equiv 1$ в теореме. ■

3. $f \in C[a,b]$. Тогда $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f = f(c)(b-a)$

   Доказательство. $g \equiv 1$ в следствии 1. ■

Замечание 1.6.4. Теорему и следствия называют ещё теоремами о средних. Почему?

Def 1.6.5. $f \in R[a,b], a < b$
$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$ *– интегральное среднее* f *на* $[a,b]$
Если возьмём равномерное разбиение $[a,b]$, *то* $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \dfrac{b-a}{n}$
То есть $\dfrac{\sigma_n}{b-a} \to \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$, *где* $\dfrac{\sigma_n}{b-a}$ *– среднее арифметическое значений функции в точках* ξ_k