Алгебра 1 семестр ПИ,
Лекция, 10/29/21

Собрано 1 ноября 2021 г. в 11:18

Содержание

1. Многочлены 1

Def. 1.0.1. *R – коммутативное кольцо с 1. Множество* $\{(a_0, a_1, ..., a_n, ...), \exists n : \forall m > n \to a_m = 0\}$

1. $\alpha \in R \to \alpha(a_0, a_1, ..., a_n, ...) = (\alpha a_0, \alpha a_1, ..., \alpha a_n, ...)$
2. $(a_0, a_1, ..., a_n, ...) + (b_0, b_1, ..., b_n) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_n + b_n, ...)$
3. $(a_0, a_1, ..., a_n) \cdot (b_0, b_1, ..., b_n, ...) = (c_0, c_1, ..., c_n, ...)$, *где*

$$c_k = \sum_{s+t=k} a_s b_t$$

4. $\forall a \in R \to a = (a, 0, 0, ...)$

Это множество называется многочленами над R.

Корректность определения:

- все действия 1, 2, 3 не выводят из множества.
- Согласование 1 и 4, 2 и 4, 3 и 4.

Теорема 1.0.2. Множество многочленов над R – коммутативное кольцо с 1

Доказательство. $(0, 0, ...)$ – нулевой элемент, $(1, 0, 0, ...)$ – единица. Ассоциативность несложно доказывается. ■

Def. 1.0.3. *Введём* $x = (0, 1, 0, ...)$. *Тогда* $x^2 = (0, 1, 0, 0, ...) \cdot (0, 1, 0, 0, ...)(0, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1, 0, ...) = (0, 0, 1, 0, ...)$

$$\Rightarrow x^k = (\underset{0}{0}, \underset{1}{0}, ..., \underset{k}{1}, \underset{k+1}{0}, ...)$$

Тогда

$$(a_0, a_1, ..., a_n, ...) = (a_0, 0, ...) + (0, a_1, 0, ...) + ... + (0, ..., a_k, ...) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Обозначение: $R[x] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n\}$ *– кольцо многочленов над R от переменной x.*

Def. 1.0.4. *Коэффициент* $a_n \neq 0 : a_m = 0, m > n$ *называется старшим коэффициентом. Если* $n \geqslant 1$, *то n – степень многочлена.*

$$\deg(f) = n$$

Если a_0 – старший коэффициент. Если $a_0 \neq 0$, то $\deg(f) = 0$. *Если $a_0 = 0$, то* $\deg(f) = -\infty$