

# Матанализ 2 семестр ПИ,

## Лекции

Собрано 12 апреля 2022 г. в 17:10

---

## Содержание

<b>1. Интегральное исчисление</b>	<b>1</b>
1.1. Неопределенный интеграл	1
1.2. Определенный интеграл Римана	6
1.3. Суммы Дарбу	7
1.4. Критерии интегрируемости функции	9
1.5. Свойства интеграла Римана	14
1.6. Свойства интеграла, интегральные теоремы о средних, формулы Тейлора и Валлиса	16
1.7. Интегральные неравенства	23
1.8. Несобственные интегралы	25
1.8.1. Свойства несобственного интеграла	26
1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов	28
1.9. Интегралы от знакопеременных функций	30
1.10. Длина, площадь и объём	34
1.10.1. Площадь	34
1.10.2. Объём	35
1.10.3. Длина пути	35
1.10.4. Длина кривой	36
1.10.5. Приложения интеграла Римана	38
1.11. Полярные координаты	39
1.11.1. Вычисление площади в полярных координатах	40
1.11.2. Вычисление объемов	41
1.11.3. Длина кривой	43
1.12. Функции ограниченной вариации	46
<b>2. Ряды</b>	<b>51</b>
2.1. Группировка слагаемых	53
2.2. Ряды с неотрицательными слагаемыми	54

# Раздел #1: Интегральное исчисление

## 1.1. Неопределенный интеграл

**Определение 1.**  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  называется первообразной функцией  $f$ , если  $F$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle, F'(x) = f(x) \forall x \in \langle A, B \rangle$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$  – первообразная  $f$ . Тогда  $G$  – первообразная  $f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) + c = G(x)$ .

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Пусть  $H(x) = F(x) - G(x)$ . Тогда

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv \text{const}$$

$\Leftarrow$ .  $(F(x) + c)' = (G(x))' \Leftrightarrow f(x) = F'(x) = G'(x) \Rightarrow G$  – первообразная.  $\square$

**Определение 2.**  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$  – первообразная  $f$ . Множество функций  $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$  называется неопределенным интегралом  $f$ .

$$\int f(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Далее,  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Дифференцирование

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x), x \in \langle A, B \rangle$$

2. Арифметические действия:

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \{F(x) + G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int f(x) dx + H(x) = \{F(x) + H(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda \int f(x) dx = \{\lambda F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

**Утверждение 1.** Если функция  $f$  непрерывна на  $\langle A, B \rangle$ , то у неё есть первообразная на  $\langle A, B \rangle$ .

**Упражнение.**  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ . Есть ли первообразная у этой функции?

**Определение 3.**  $E \subset \mathbb{R}, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $F$  дифференцируема на  $E$  и  $F'(x) = f(x)$  на  $E$ , то  $F$  – первообразная  $f$  на множестве  $E$ .

## Таблица неопределенных интегралов

1.  $\int a dx = ax + c, a \in \mathbb{R}$
2.  $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
3.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
4.  $\int e^x dx = e^x + c$
5.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
6.  $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7.  $\int \cos x dx = \sin x + c$
8.  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
9.  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$
10.  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, a \neq 0$
11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c, a > 0$
12.  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c, a \neq 0$
13.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + c, a \in \mathbb{R}$

**Доказательство.** Дифференцирование

□

**Пример.**  $\int \frac{\sin x}{x} dx$  – неберущийся интеграл.  $\operatorname{Si}(x)$  – интегральный синус (одна из первообразных, закреплённая при  $x \rightarrow 0+$ ).

$$(\operatorname{Si}(x))' = \frac{\sin x}{x}$$

**Теорема 2 (Линейность неопределённого интеграла).**  $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , имеют первообразные на  $\langle A, B \rangle$ . Тогда  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha, \beta \neq 0$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

**Доказательство.** Пусть  $F$  и  $G$  – первообразные  $f$  и  $g$  на  $\langle A, B \rangle$ . Правая часть равенства:  $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ .

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + c)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

□

**Теорема 3 (Замена переменной).**  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  – первообразная  $f$  на  $\langle A, B \rangle$ ,  $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$  – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c$$

**Доказательство.**

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

□

**Замечание.**  $\varphi'(x) dx = d\varphi(x)$ . Пусть  $y = \varphi(x)$

$$\int f(y) dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

**Пример.**  $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$ . Пусть  $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

**Следствие.** Пусть в условиях теоремы  $\varphi$  имеет обратную функцию  $\psi : \langle A, B \rangle \rightarrow \langle C, D \rangle$ . Если  $G(x)$  – первообразная функции  $(f \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ , то

$$\int f(x) dx = G(\psi(x)) + c$$

**Доказательство.** Пусть  $F$  – первообразная  $f$  на  $\langle A, B \rangle$ .  $F(\varphi(x))$  – первообразная  $f(\varphi(y))\varphi'(y)$  (по теореме). Рассмотрим  $G(x) - F(\varphi(x))$  – постоянная (т.к. производная равна нулю).  $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$ . Тогда

$$G(\psi(y)) - F(y) = \text{const} \Rightarrow \int f(y) dy = G(\psi(y)) + c$$

□

**Пример.**  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ . Пусть  $t = \sqrt{x}, t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = dt^2 = 2t dt$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{1+t} = \int \left( \frac{2t+2}{t+1} - \frac{2}{t+1} \right) dt = \int \left( 2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= 2t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2 \ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+1) + c \end{aligned}$$

**Пример.**  $\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$ .

Иначе:  $\int \sin x \cos x dx = - \int \cos x d \cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$ .

Иначе:  $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = \frac{-\cos 2x}{4} + c$ .

Мораль сей басни такова: константы разные, а не  $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$ .

**Теорема 4 (Формула интегрирования по частям).**  $f, g \in C^1 \langle A, B \rangle$ . Тогда

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

**Доказательство.**  $H$  – первообразная  $g \cdot f'$ . Тогда

$$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x)$$

□

**Замечание.**  $\int u dv = uv - \int v du$

**Пример.**  $\int xe^x dx$ . Пусть  $u = x, u' = 1, v' = e^x, v = e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + c$$

**Пример.**  $\int \ln x dx$ . Пусть  $u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = 1, v = x$ .

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + c$$

**Упражнение.**  $\int e^x \cdot \sin x dx$  Пусть  $f = \sin x, g = e^x$ . Тогда

$$\int f dg = fg - \int g df \Leftrightarrow \int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

Пусть теперь  $f = \cos x, g = e^x$ . Тогда

$$\int f dg = fg - \int g df \Leftrightarrow \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

Отсюда

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

**Пример.** Пусть  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}, n \in \mathbb{N}$ . Выразим интеграл  $I_{n+1}$  через  $I_n$  для произвольного натурального  $n$ .

Обозначим  $f(x) = \frac{1}{(x^2+a)^n}$  и  $g(x) = x$ . Тогда

$$df(x) = \left( \frac{1}{(x^2+a)^n} \right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a)^{n+1}} dx, dg(x) = dx$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+a)^n} - 2na \int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1} \end{aligned}$$

Откуда

$$2naI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a)^n}$$

**Утверждение 2.** Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

Рассмотрим простейшие дроби:

1.  $\frac{a}{(x+p)^n}, n \in \mathbb{N}, a, p \in \mathbb{R}$
2.  $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Интегралы от простейших дробей первого рода вычисляются по таблице. Для простейших дробей второго рода используется следующий алгоритм:

1. Если  $p \neq 0$ , то выделим полный квадрат и выполним замену  $y = x + \frac{p}{2}$ . Если  $p = 0$ , тогда

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = a \int \frac{x dx}{(x^2+q)^n} + b \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$$

2. Интеграл  $\int \frac{x dx}{(x^2+q)^n}$  можно вычислить с помощью замены  $y = x^2 + q$ , т.к.  $dy = 2x dx$ .
3. Применяя к интегралу  $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$  формулу понижения  $n-1$  раз сведем его к интегралу  $I_1$ , который является табличным.

**Пример** (12 и 13 из таблицы).

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left( \frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + c$$

**Пример.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ . Пусть  $x = \operatorname{sh} t, dx = \operatorname{ch} t dt$ . Тогда

$$\int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + c$$

**Упражнение.** Найди формулу для  $(\operatorname{sh} t)^{-1}$

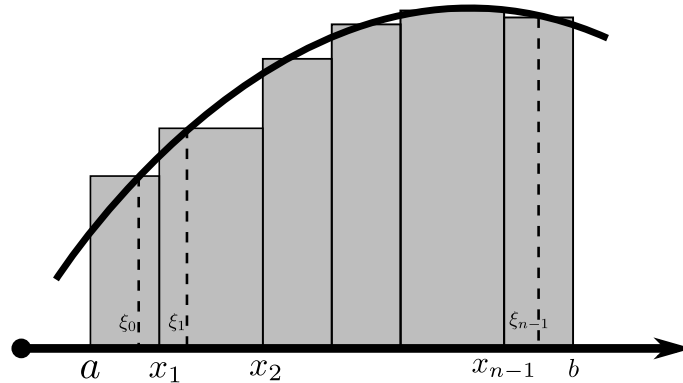
Неберущиеся интегралы:

- $\int \frac{\sin x}{x} dx$
- $\int \frac{\cos x}{x} dx$
- $\int \frac{dx}{\ln x}$
- $\int \frac{e^x}{x} dx$
- $\int \sin x^2 dx$
- $\int \cos x^2 dx$
- $\int e^{-x^2} dx$

## 1.2. Определенный интеграл Римана

**Определение 4.**  $[a, b], a < b$ . Набор точек  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  – разбиение (дробление) отрезка  $[a, b]$ ,  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  – длина отрезка  $[x_k, x_{k+1}]$ .  $\lambda = \lambda_\tau = \max_{k \in [0, n-1]} \Delta x_k$  – ранг дробления (мелкость),  $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$  – оснащение дробления  $\tau$ . Пара  $(\tau, \xi)$  называется оснащённым дроблением.

**Определение 5.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$  – суммы Римана (интегральные суммы).



**Определение 6.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Число  $I \in \mathbb{R}$  называют пределом интегральных сумм при ранге  $\rightarrow 0$ :

$$I = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad (I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma)$$

если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

**Замечание.** Последовательность оснащённых дроблений  $\{(\tau^{(i)}, \xi^{(i)})\}_{i=1}^\infty : \lambda^{(i)} \rightarrow 0$ .  $\forall \{\tau^{(i)}, \xi^{(i)}\} : \lambda^{(i)} \rightarrow 0 \sigma_{\tau^{(i)}}(f, \xi^{(i)}) \rightarrow I$ .

**Определение 7 (Интеграл Римана).**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $\exists \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$ , то  $f$  называется интегрируемой по Риману на  $[a, b]$ , а число  $I$  называется интегралом  $f$  по  $[a, b]$ .

$R[a, b]$  – класс функций, интегрируемых по Риману на  $[a, b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx$$

### 1.3. Суммы Дарбу

**Определение 8.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  – дробление  $[a, b]$ .

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$



## Суммы

$$S = S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, s = s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются верхними и нижними интегральными суммами.

**Замечание.** Если  $f$  – непрерывна на  $[a, b]$ , то это две частные суммы из сумм Римана.

**Замечание.**  $f$  ограничена сверху  $\Leftrightarrow S$  ограничена.

Свойства сумм Дарбу:

$$1. S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi), s_\tau = \inf_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$$

**Доказательство.**  $M_k \geq f(\xi_k), k = 0, \dots, n-1$ . Тогда  $M_k \Delta x_k \geq f(\xi_k) \Delta x_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \Rightarrow S_\tau(f) \geq \sigma_\tau$ , т.е.  $S_\tau$  – верхняя граница. Докажем, что она является точной верхней границей.

Если  $f$  ограничена на  $[a, b]$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . На каждом кусочке разбиения  $\exists \xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}] : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$ . Тогда  $\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = S - \varepsilon$ .

Если  $f$  не ограничена на  $[a, b] \Rightarrow$  не ограничена на каком-то кусочке  $[x_l, x_{l+1}]$ . Фиксируем  $A > 0$  и выберем  $\xi_k^*$  при  $k \neq l$  произвольно, а для  $\xi_l^*$

$$f(\xi_l^*) > \frac{1}{\Delta x_l} \left( A - \sum_{k \neq l} f(\xi_k^*) \Delta x_k \right)$$

Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta x_k > A \Rightarrow \sup_{\xi} \sigma = +\infty = S$$

□

2. При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя не уменьшится.

**Доказательство.** Докажем для верхних сумм при добавлении одной точки.  $\tau : \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ . Добавим точку  $c$  в  $[x_l, x_{l+1}]$  –  $T$  – новое дробление.

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + M_l \Delta x_l + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + (c - x_l) \cdot M' + (x_{l+1} - c) M'' + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

где  $M' = \sup_{x \in [x_l, c]} f, M'' = \sup_{x \in [c, x_{l+1}]} f$ .  $M_l \geq M', M_l \geq M''$ , т.к.  $[x_l, c] \subset [x_l, x_{l+1}], [c, x_{l+1}] \subset [x_l, x_{l+1}]$ .

Рассмотрим  $S_\tau - S_T = M_l \Delta x_l - (c - x_l) M' - (x_{l+1} - c) M'' \geq M_l (x_{l+1} - x_l - c + x_l - x_{l+1} + c) = 0$ .  
Добавить больше точек можно по индукции. □

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней.

**Доказательство.**  $\tau_1, \tau_2$  – разные дробления  $[a, b]$ . Докажем, что  $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$ . Возьмем  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ . Тогда  $s_{\tau_1} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_2}$  (по свойству 2).  $\square$

**Утверждение 3.**  $f \in R[a, b] \Rightarrow f$  ограничена на  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  не ограничена на  $[a, b]$  сверху. Тогда  $\forall \tau \Rightarrow \sup_\xi \sigma_\tau(f, \xi) = +\infty$ . Тогда  $\forall \tau$  и числа  $I \exists$  оснащение  $\xi' : \sigma_\tau(\xi') > I + 1 \Rightarrow$  никакое число  $I$  не является пределом интегральных сумм.  $\square$

**Определение 9.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Возьмем

$$I^* = \inf_{\tau} S_{\tau} \quad I_* = \sup_{\tau} s_{\tau}$$

где  $I^*$  – верхний интеграл Дарбу,  $I_*$  – нижний интеграл Дарбу.

**Замечание.**  $I^* \geq I_*$ .

**Замечание.**  $f$  ограничена сверху  $\Leftrightarrow I^*$  ограничена.

## 1.4. Критерии интегрируемости функции

**Теорема 5 (Критерий интегрируемости функции).** Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f \in R[a, b] \Leftrightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Пусть  $f \in R[a, b]$ . Обозначим  $I = \int_a^b f$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$ , подберем  $\delta > 0$  :

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Переходя к супремуму и инфимуму, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда  $S_\tau - s_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{3} - I + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ .

$\Leftarrow$ . Пусть  $S_\tau - s_\tau \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \Rightarrow$  все суммы Дарбу конечны.

$$s_\tau \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau \Rightarrow 0 \leq I^* - I_* \leq S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow I^* = I_*$  (т.к. это числа). Обозначим  $I = I^* = I_*$ .

$$s_\tau \leq I \leq S_\tau, s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau \Rightarrow |I - \sigma_\tau| \leq S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \Rightarrow |I - \sigma_\tau| < \varepsilon.$

□

**Замечание.** Если  $f \in R[a, b] \Rightarrow s_\tau \leq \int_a^b f \leq S_\tau.$

**Следствие.**  $f \in R[a, b] \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\tau = \int_a^b f$

**Доказательство.**  $0 \leq S_\tau - \int_a^b f \leq S_\tau - s_\tau, 0 \leq \int_a^b f - s_\tau \leq S_\tau - s_\tau.$

□

**Замечание.**  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau = I^*, \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\tau = I_*.$

**Утверждение 4** (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману).  $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$  ограничена на  $[a, b]$  и  $I_* = I^*.$

**Утверждение 5** (Критерий Римана интегрируемости).  $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$

**Определение 10.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}.$  Величина

$$\omega(f)_D = \sup_{x, y \in D} (f(x) - f(y))$$

называется колебанием  $f$  на  $D.$  Из определений граней функции ясно, что

$$\omega(f)_D = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{y \in D} f(y)$$

Если задано  $\tau$  отрезка  $[a, b],$  то

$$\omega_k(f) = M_k - m_k$$

Тогда теорему можно записать:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0$$

**Теорема 6** (Интегрируемость непрерывной функции).  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b].$

**Доказательство.** По теореме Кантора  $f \in C[a, b] \Rightarrow f$  равномерна непрерывна на  $[a, b].$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t', t'' \in [a, b] : |t' - t''| < \delta \Rightarrow |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

По теореме Вейерштрасса  $f$  достигает наибольшего и наименьшего значения на любом отрезке, содержащемся в  $[a, b]$ . Поэтому колебание  $f$  на всяком отрезке, длина которого меньше  $\delta$ , будет меньше  $\frac{\varepsilon}{b-a}$ . Значит,  $\forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k$$

□

**Теорема 7 (Интегрируемость монотонной функции).**  $f$  монотонна на  $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  монотонно возрастает на  $[a, b]$ . Если  $f(a) = f(b) \Rightarrow f$  постоянна  $\Rightarrow f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$ .

Если  $f(a) < f(b)$ .  $\forall \varepsilon > 0$  возьмем  $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ . Возьмем произвольное  $\tau : \lambda_\tau < \delta$  на  $[x_k, x_{k+1}]$ . В силу монотонности  $f$  верно  $\omega_k(f) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ .

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k < \sum_{k=0}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon$$

□

**Замечание.**  $f \in R[a, b]$ . Если изменить значение  $f$  в конечном числе точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

**Доказательство.**  $\tilde{f}$  — отличается от  $f$  в точках  $t_1, t_2, \dots, t_m$ .  $|f|$  ограничена на  $[a, b] \Rightarrow |\tilde{f}|$  ограничена.  $|f| \leq A$ , возьмем  $\tilde{A} = \max\{A, |\tilde{f}(t_1)|, |\tilde{f}(t_2)|, \dots, |\tilde{f}(t_m)|\}$ . В интегральных суммах для  $f$  и  $\tilde{f}$  отличаются не более  $2m$  слагаемых, поэтому

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - \sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)| \leq 2m(A + \tilde{A})\lambda_\tau \xrightarrow{\lambda_\tau} 0$$

Поэтому предел  $\sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)$  существует и равен пределу  $\sigma_\tau(f, \xi)$ .

□

**Теорема 8 (Интегрируемость функции и её сужения).** 1.  $f \in R[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b] \Rightarrow f \in R[\alpha, \beta]$

2. Если  $a < c < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f \in R[a, c], f \in R[c, b]$ , то  $f \in R[a, b]$ .

**Доказательство.** 1. Возьмем  $\varepsilon > 0$ , подберем  $\delta > 0$  из критерия интегрируемости на  $[a, b]$ .  $\tau_0$  — дробление  $[\alpha, \beta], \lambda_{\tau_0} < \delta$ . Добавим точек до дробления  $[a, b]$ . Получим  $\tau(\lambda_\tau < \delta)$ .

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=l}^{m-1} \omega_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \varepsilon$$

2. Пусть  $f$  не постоянна, т.е.  $\omega(f)_{[a,b]} > 0$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$ , подберем  $\delta_1, \delta_2 : \forall \tau_1 : \lambda_{\tau_1} < \delta_1, \forall \tau_2 :$

$$\lambda_{\tau_2} < \delta_2$$

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\}$ . Пусть  $\tau$  – дробление  $[a, b]$ ,  $\lambda_\tau < \delta$ . Точка  $c \in [x_l, x_{l+1})$ . Обозначим  $\tau' = \tau \cup \{c\}$ ,  $\tau_1 = \tau' \cap [a, c]$ ,  $\tau_2 = \tau' \cap [c, b]$

$$S_\tau - s_\tau \leq S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega_l(f)\delta < \varepsilon$$

□

**Определение 11.** Функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  называется кусочно-непрерывной на  $[a, b]$ , если множество её точек разрыв пусто или конечно (и все разрывы первого рода)

**Следствие.**  $f$  – кусочно-непрерывная на  $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$

**Доказательство.** Возьмём точки  $a_1, a_2, \dots, a_m$  (может  $a_1 = a$  и/или  $a_m = b$ ). Рассмотрим отрезки  $[a_k, a_{k+1}]$ .  $f$  непрерывна на  $(a_k, a_{k+1})$  и  $\exists$  конечные  $\lim_{x \rightarrow a_k+} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a_{k+1}-} f(x) \Rightarrow f \in R[a_k, a_{k+1}] \Rightarrow$  по теореме о сужении  $f \in R[a, b]$  □

**Определение 12.** Множество  $X$  называется не более, чем счетным, если оно конечно или счетно.

**Определение 13.**  $E \subset \mathbb{R}$  – имеет нулевую меру, если для  $\forall \varepsilon > 0$  множество  $E$  можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых  $< \varepsilon$ .

$$\left( \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \right)$$

**Пример.** Множество из одной точки.

**Упражнение.** Чему равна мера  $\mathbb{N}$ ?

**Теорема 9 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману).** Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$  ограничена и множество точек разрыва имеет нулевую меру.

**Теорема 10 (Арифметические действия над интегрируемыми функциями).**  $f, g \in R[a, b]$ . Тогда

$$1. f + g \in R[a, b]$$

$$2. f \cdot g \in R[a, b]$$

3.  $\alpha f \in R[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$
4.  $|f| \in R[a, b]$
5. Если  $\inf_{[a, b]} |g| > 0$ , то  $\frac{f}{g} \in R[a, b]$

**Доказательство.** 1.  $D \subset [a, b]$ .  $x, y \in D$

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(y) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \omega_D(f) + \omega_D(g) \\ \omega_D(f+g) &\leq \omega_D(f) + \omega_D(g) \\ \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(f+g) &\leq \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(f) + \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(g) \\ \omega_k(f+g) &\leq \omega_k f + \omega_k g \end{aligned}$$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f+g) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k f \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k g \Delta x_k \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f+g \in R[a, b]$$

2.  $|fg(x) - fg(y)| \leq |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \leq |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leq A|f(x) - f(y)| + B|g(x) - g(y)|$  (т.к.  $R[a, b] \Rightarrow$  ограничена на  $[a, b]$ )
3.  $g(x) = \alpha$
4.  $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$   
 $|\omega_k|f| \leq |\omega_k f|$
5.  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ . Докажем, что  $\frac{1}{g} \in R[a, b]$ .  
 $0 < m = \inf_{[a, b]} |g|$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \left| \frac{g(y) - g(x)}{g(x)g(y)} \right| \leq \frac{|g(x) - g(y)|}{m^2} \Leftrightarrow \omega_k \left( \frac{1}{g} \right) \leq \frac{\omega_k(g)}{m^2}$$

□

**Пример.** 1.  $\int_0^1 x^2 dx$

$$x^2 \in C[a, b] \Rightarrow x^2 \in R[a, b].$$

Рассмотрим какую-нибудь интегральную сумму:  $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

2.  $\int_0^1 e^x dx$  – упражнение

$$3. f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, D \notin R[a, b], a < b$$

**Доказательство.**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(D) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

□

$$4. r(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ дробь несократима} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$r(x)$  непрерывна в каждой точке, разрывна в каждой рациональной.

$$r(x) \in R[0, 1]$$

**Доказательство.** Зафиксируем  $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Рациональные числа из  $[0, 1]$  со знаменателем  $\leq N$ , конечное число  $= C_N$ , множество  $X$ .

Возьмём  $\delta = \frac{\varepsilon}{4C_N}$  и дробление  $\tau : \lambda_\tau < \delta$

Точки  $X$  попадут в не более, чем  $2C_N$  отрезков дробления. В отрезках, где нет точек из  $X$  наибольшее значение  $< \frac{1}{N}$

$$s_\tau(r) = 0$$

$$S_\tau(r) = \sum_{k: M_k \geq \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k + \sum_{k: M_k < \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k \leq \underbrace{1 \cdot 2C_N \cdot \delta}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{1}{N}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$S_\tau(r) - s_\tau(r) = S_\tau(r) \xrightarrow{\lambda_r \rightarrow 0} 0 \Rightarrow r \in R[0, 1] \text{ и } \int_0^1 r(x) dx = 0$$

□

Если  $f \in R_D, g \in R[a, b]$ , то  $f(g) \in R[a, b]$ ? ( $D$  – множество значений  $g$ )

Ответ: нет. Пример:  $f(y) = \begin{cases} 1, y \in [0, 1] \\ 0, y = 0 \end{cases}$  и  $g(x) = r(x)$  на  $[0, 1]$

$$f(r(x)) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = D(x) \notin R[0, 1]$$

**Теорема 11 (Интегрируемость композиции).**  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b], f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\varphi) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\varphi \in R[\alpha, \beta], f \in C[a, b]$ . Тогда  $f \circ \varphi \in R[\alpha, \beta]$

**Доказательство.** Например, из критерия Лебега.

□

## 1.5. Свойства интеграла Римана

$$1. \int_b^a f = - \int_a^b f$$

$$2. \int_a^a f = 0 \quad (\forall f \text{ на вырожденном отрезке } f \in R[a, a])$$

Свойства:

- Аддитивность интеграла по отрезку:  
 $a, b, c \in \mathbb{R}, f \in R[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

**Доказательство.**  $f \in R[a, b] \Rightarrow f \in R[a, c], f \in R[c, b], \{\bar{\tau}^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  и  $\{\bar{\bar{\tau}}^{(n)}, \bar{\bar{\xi}}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  — последовательности оснащенных дроблений  $[a, c]$  и  $[c, b]$  (равномерных, т.е.  $\bar{\lambda} = \frac{c-a}{n}, \bar{\bar{\lambda}}$ )  
 $\tau^{(n)} = \bar{\tau}^{(n)} \cup \bar{\bar{\tau}}^{(n)}$  — дробление  $[a, b]$   
 $\xi^{(n)} = \bar{\xi}^{(n)} \cup \bar{\bar{\xi}}^{(n)}$  — оснащение  $\tau^{(n)}$   
 $\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\bar{\sigma}}$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\underbrace{\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f}_{\text{по доказанному}} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

Все остальные случаи — аналогично. □

- $f \equiv \alpha$  при  $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f = \alpha(b-a)$

**Доказательство.**

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \alpha(b-a)$$

□

- Линейность интеграла:  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a, b]$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

**Доказательство.**  $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$

$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sigma_\tau(\alpha f) + \sigma_\tau(\beta g)$  и переход к пределу. □

- Монотонность интеграла:  $a < b, f, g \in R[a, b]$  и  $f \leq g$  на  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

**Доказательство.**  $\sigma_\tau(f) \leq \sigma_\tau(g)$  □

**Следствие.**  $a < b, f \in R[a, b]$ , если  $f \leq M \in \mathbb{R}$  на  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f \leq M(b-a)$ ,



если  $f \geq m$  на  $[a, b]$  то  $\int_a^b f \geq m(b-a)$

**Следствие.**  $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

- $a < b, f \in R[a, b]$  и  $\exists c \in [a, b] : f(c) > 0$  и  $f$  непрерывна в точке  $c$ .

Тогда  $\int_a^b f > 0$

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in \underbrace{[c - \delta; c + \delta] \cap [a, b]}_{[\alpha, \beta]} : |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$$f(x) > f(c) - \varepsilon = \frac{f(c)}{2} \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha)$$

$$\int_a^b f = \int_a^{\alpha} f + \int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^b f \geq \int_{\alpha}^{\beta} f \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha) > 0$$

□

**Замечание.** Таким же образом строгий знак в монотонности интеграла.

**Замечание.**  $f \in R[a, b], f > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$

- $a < b, f \in R[a, b]$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

**Доказательство.**  $-|f| \leq f \leq |f|$

□

Если не знаем, что  $a \geq b$  или  $b \geq a$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|$$

## 1.6. Свойства интеграла, интегральные теоремы о средних, формулы Тейлора и Валлиса

**Теорема 12.**  $f, g \in R[a, b], g \geq 0$  на  $[a, b], m \leq f \leq M$ . Тогда  $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$

**Доказательство.**  $mg \leq fg \leq Mg$  на  $[a, b]$

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$$

Если  $\int_a^b g = 0$ , то  $\exists \mu \in [m, M] : 0 = \mu \cdot 0$

Если  $\int_a^b g > 0$ , то  $m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M$

Возьмём  $\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$

□

**Замечание.** Для  $g \leq 0$  тоже верно.

**Следствие.** 1.  $f \in C[a, b], g \in R[a, b], g \geq 0$  (или  $g \leq 0$ ).

Тогда  $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g$

**Доказательство.** По теореме Вейерштрасса:  $\exists m = \min_{[a,b]} f$  и  $M = \max_{[a,b]} f$

Подберём  $\mu \in [m, M]$  по предыдущей теореме. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса  $\exists c \in [a, b] : f(c) = \mu$

□

2.  $f \in R[a, b], m, M \in \mathbb{R} : m \leq f \leq M$  на  $[a, b]$ . Тогда  $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f = \mu(b-a)$

**Доказательство.**  $g \equiv 1$  в теореме.

□

3.  $f \in C[a, b]$ . Тогда  $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b-a)$

**Доказательство.**  $g \equiv 1$  в следствии 1.

□

**Замечание.** Теорему и следствия называют ещё теоремами о средних. Почему?

**Определение 14.**  $f \in R[a, b], a < b$

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$  – интегральное среднее  $f$  на  $[a, b]$

Если возьмём равномерное разбиение  $[a, b]$ , то  $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \frac{b-a}{n}$

То есть  $\frac{\sigma_n}{b-a} \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ , где  $\frac{\sigma_n}{b-a}$  – среднее арифметическое значений функции в точках  $\xi_k$

**Определение 15.**  $E \subset \mathbb{R}$  – невырожденный промежуток (может быть и лучом),  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  – интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в  $E$ .  $a \in E$ .

$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in E$  – интеграл с переменным верхним пределом.

**Теорема 13** (Барроу, об интеграле с переменным верхним пределом).  $E \subset \mathbb{R}$  – невырожденный промежуток,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , интегрируема на каждом отрезке из  $E$ ,  $a \in E$ ,  $\Phi(x) = \int_a^x f, x \in E$ . Тогда

1.  $\Phi(x) \in C(E)$
2. Если  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \in E$ , то  $\Phi$  – дифференцируема в точке  $x_0$ ,  $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

**Доказательство.** 1. Пусть  $x_0 \in E$ , подберем  $\delta > 0$   $[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap E = [A, B]$

$|f|$  на  $[A, B]$  ограничена числом  $M$ .  $\Delta x: x_0 + \Delta x \in [A, B]$

$$|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_a^{x_0 + \Delta x} f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f| \right| \leq |\Delta x| \cdot M \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

2. Проверим, что  $\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0)$

Возьмем  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0: \forall t: |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$  (по непрерывности.)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - f(x_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt \right| < \\ &< \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta x| = \varepsilon, \quad k = \int_a^b k \cdot \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

□

**Пример.**  $\Phi(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt, x > 1$

$$\Phi'(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \text{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

**Упражнение.**  $\int \text{Si}(x) dx = ?$

**Следствие.** Функция, непрерывная на промежутке имеет на нём первообразную. Её является интеграл с переменным верхним пределом.

**Определение 16.**  $\psi(x) = \int_x^a f$  (Условия на  $f$  и  $a$  прежние) – интеграл с переменным нижним пределом.

$\Rightarrow \psi'(x) = -f(x)$  (Если  $f$  непрерывна).

**Теорема 14** (Формула Ньютона-Лейбница).  $f \in R[a, b]$ ,  $F$  – первообразная  $f$  на  $[a, b]$ . Тогда:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

**Доказательство.** Для каждого  $n \in \mathbb{N}$ :

$$F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$$

По теореме Лагранжа  $\exists \xi_{k,n} \in (x_k, x_{k+1})$

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_{k,n})(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_{k,n})\Delta x_k$$

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k,n})\Delta x_k = \lim(F(b) - F(a)) = F(b) - F(a) \quad \square$$

**Замечание.**  $\int_a^b f = F \Big|_a^b$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b \quad \text{— двойная подстановка.}$$

**Замечание.**  $G(x) = F(x) + C$  — тоже первообразная.

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

**Пример.**  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

**Пример.**  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$  — чушь!

1.  $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$  — не везде на  $[-1, 1]$
2.  $\frac{1}{x^2}$  не интегрируема на  $[-1; 1]$ , т.к. не ограничена.

**Замечание.** Обобщение теоремы.

$f \in R[a; b]$ ,  $F \in C[a, b]$ ,  $F$  — первообразная  $f$  на  $[a, b]$  за исключением некоторого конечного числа точек.

Тогда  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

**Доказательство.** Пусть  $\alpha_0 = a, \alpha_m = b, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  — все точки на  $(a, b)$ , в которых  $F' \neq f$

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \sum_{k=0}^{m-1} (F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)) = F(b) - F(a).$$

(Рассмотрим  $\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\alpha_k + \varepsilon}^{\alpha_{k+1} - \varepsilon} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (F(\alpha_{k+1} - \varepsilon) - F(\alpha_k + \varepsilon)) = F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)$ )  $\square$

**Замечание.** Без непрерывности  $F$  не получится: на  $[-1, 1]$

$$F(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}, f(x) = 0$$

$$0 = \int_{-1}^1 f \neq F \Big|_{-1}^1 = 2$$

**Замечание.**  $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$ .  
 $F$  дифференцируема,  $F'$  интегрируема.

**Замечание.**  $F' \in R[a, b]$  – существенно.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$F'$  не ограничена, а значит не интегрируема.

**Замечание.** Интегрируемость  $\stackrel{?}{\Leftrightarrow} \exists$  первообразной.  
 $\nRightarrow \operatorname{sign} x$  интегрируема на  $[-1, 1]$ , но первообразной нет.  
 $\nRightarrow$  Предыдущее замечание.

**Теорема 15** (Интегрирование по частям в определенном интеграле.).  $f, g$  – дифференцируемы на  $[a, b]$ ,  $f', g' \in R[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

**Доказательство.**  $f, g$  – дифференцируемы  $\Rightarrow$  непрерывны  $\Rightarrow$  интегрируемы.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f \in R[a, b]$$

$$\int_a^b (f g)' = f g \Big|_a^b$$

$$\int_a^b (f g)' = \int_a^b (f' g + g' f)$$

□

**Замечание.**  $\int_a^b f dg = f g \Big|_a^b - \int_a^b g df$   
 $dg(x) = g'(x) dx$

**Теорема 16** (Замена переменной в определенном интеграле).  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [A, B]$ , дифференцируема на  $[\alpha, \beta]$ ,  $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$

$f \in C[A; B]$ . Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

**Доказательство.**  $f(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(\varphi) \in R[a, b] \Rightarrow f(\varphi) \cdot \varphi' \in R[a, b]$

Пусть  $F$  - первообразная  $f$  на  $[A, B] \Rightarrow F(\varphi)$  - первообразная  $f(\varphi) \cdot \varphi'$  на  $[\alpha, \beta]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \cdot \varphi' = F(\varphi) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F \Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

□

**Упражнение.** Пусть  $f$  четная функция. Доказать, что  $\int_{-a}^a = 2 \int_0^a f$

Пусть  $f$  нечетная функция. Доказать, что  $\int_{-a}^a f = 0$

**Теорема 17 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме).**  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$f \in C^{n+1}\langle A; B \rangle, a, x \in \langle A; B \rangle$ . Тогда  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$

**Доказательство.** По индукции:

База:  $n = 0 : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$  (Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть верно для  $n-1$ . Докажем для  $n$ .

$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt$ . Проинтегрируем остаток по

частям:  $u = f^{(n)}(t), u' = f^{(n+1)}(t), v' = (x-t)^{n-1}, v = \frac{(x-t)^n}{n}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt = \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \left( -f^{(n)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n} \Big|_{t=a}^x + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t) (x-t)^n}{n} dt \right) = \\ & = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \end{aligned}$$

□

**Замечание.**  $\exists c \in (a, x) \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = f^{(n+1)}(c) \int_a^x (x-t)^n dt = f^{(n+1)}(c) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$   
(Т.е. остаток в форме Лагранжа следует отсюда)

Последовательность  $\{x_n\} : x_i \in \mathbb{Q}, x_n \rightarrow \pi$

**Лемма 1.**  $m \in \mathbb{N}_0$ 

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cdot \sin x dx = -\sin^{m-1} \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$I_m = (m-1) \cdot (I_{m-2} - I_m) \Rightarrow I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_m = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, m - \text{чётно} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot 1, m - \text{нечётно} \end{cases}$$

**Упражнение.**  $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывна.Доказать, что  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ **Теорема 18 (Формула Валлиса).**  $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$ **Доказательство.**  $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2}) \quad \sin x \in (0; 1)$ 

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$< \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!! \cdot (2n)!!}{((2n-1)!!)^2}$$

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \left( \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

$$x_n = \frac{1}{n} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \Rightarrow \pi < x_n < \frac{2n+1}{2n} \pi, \Rightarrow x_n \rightarrow \pi$$

□

**Теорема 19** (Вторая теорема о среднем для интегралов, Бонне).  $f \in C[a, b]$ ,  $g \in C^1[a, b]$ ,  $g$  монотонна на  $[a, b]$ . Тогда  $\exists c \in [a, b]$ :

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f$$

**Доказательство.**  $F(x) = \int_a^x f$ ,  $F' = f$ ,  $F(a) = 0$

$$\begin{aligned} \int_a^b fg &= Fg \Big|_a^b - \int_a^b Fg' = g(b) \int_a^b f - \int_a^b Fg' = \\ &= g(b) \int_a^b f - \int_a^c f \cdot (g(b) - g(a)) = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f \end{aligned}$$

□

**Упражнение.** Оценить  $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

1. По первой теореме о среднем.
2. По второй теореме о среднем.

## 1.7. Интегральные неравенства

**Теорема 20 (Неравенство Йенсена).**  $f$  – выпукла и непрерывна на  $\langle A, B \rangle$ ,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$  – непрерывна,  $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  – непрерывна,  $\int_a^b \lambda = 1$ . Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda \varphi\right) \leq \int_a^b \lambda \cdot f(\varphi)$$

**Доказательство.** Обозначим  $c = \int_a^b \lambda \varphi$ ,  $E = \{x \in [a, b] : \lambda(x) > 0\}$ ,  $m = \inf_E \varphi$ ,  $M = \sup_E \varphi$  ( $m$  и  $M$  конечны по теореме Вейерштрасса)

Если  $m = M$ , то есть  $\varphi$  постоянна на  $E$ , то  $c = m$  и обе части неравенства равны  $f(m)$ .

Пусть  $m < M$ . Тогда  $c \in (m, M)$  и, следовательно,  $c \in (A, B)$ . Функция  $f$  имеет в точке  $c$  опорную прямую; пусть она задается уравнением  $y = \alpha x + \beta$ . По определению опорной прямой  $f(c) = \alpha c + \beta$  и  $f(t) \geq \alpha t + \beta$  при всех  $t \in \langle A, B \rangle$ . Поэтому

$$f(c) = \alpha c + \beta = \alpha \int_a^b \lambda \varphi + \beta \int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda \cdot (\alpha \varphi + \beta) \leq \int_a^b \lambda \cdot (f \circ \varphi)$$

□

**Замечание.** Строгое неравенство, если  $f$  строго выпукла и  $\varphi \not\equiv \text{const}$ .

**Теорема 21 (Неравенство Гельдера).**  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f, g \in C[a, b]$ . Тогда

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$



**Доказательство.** Пусть  $x_k = \frac{k(b-a)}{n} + a, \xi_k = x_k$ . Обозначим  $a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}, b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow a_k b_k = f(x_k)g(x_k)\Delta x_k$ . Тогда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k \right| \leq \left( \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)g(x_k)\Delta x_k \right| \leq \left( \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)|^p \Delta x_k \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k)|^q \Delta x_k \right)^{\frac{1}{q}}$$

Выполним предельный переход:

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

**Следствие (Неравенство Коши-Буняковского).**  $f, g \in C[a, b] \Rightarrow \left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$

**Теорема 22 (Неравенство Минковского).**  $f, g \in C[a, b], p \geq 1$ .

$$\left( \int_a^b |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Определение 17.** Пусть  $f \in C[a, b]$ .

1. Величина

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

называется интегральным средним арифметическим функции  $f$  на  $[a, b]$ .

2. Если  $f > 0$ , то величина

$$\exp \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f \right)$$

называется интегральным средним геометрическим функции  $f$  на  $[a, b]$ .

**Замечание.** Интегральное среднее геометрическое есть пределы при  $n \rightarrow \infty$  последовательности

$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} f(x_k)} = \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k) \right) = \exp \left( \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k) \Delta x_k \right)$$

при  $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ .

**Теорема 23** (Об интегральных средних).  $f \in C[a, b]$ ,  $f > 0$ . Тогда

$$\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

**Доказательство.** Предельный переход в неравенстве для сумм, либо применить неравенство Йенсена для  $\ln x$ .  $\square$

## 1.8. Несобственные интегралы

**Определение 18.**  $f$  локально интегрируема (по Риману) на промежутке  $E$ , если она интегрируема на каждом отрезке из  $E$ .

**Замечание.** Непрерывность влечет локальную интегрируемость.

**Определение 19.** Пусть  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $f \in R_{loc}[a, b]$ . Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f$  – несобственный интеграл.

$$\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f = \int_a^{\rightarrow b} f$$

если предел существует в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Определение 20.** Несобственный интеграл называется сходящимся, если из  $\mathbb{R}$ .

**Определение 21.** Аналогично, для  $-\infty \leq a < b < +\infty$ ,  $f \in R_{loc}(a, b]$

$$\int_{\rightarrow a}^b f = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f$$

если предел существует в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Теорема 24** (Критерий Больцано-Коши сходимости интегралов). Пусть  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $f \in R_{loc}[a, b)$ . Тогда сходимость интеграла  $\int_a^b f$  равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b) \left| \int_{t_1}^{t_2} f \right| < \varepsilon$$

**Доказательство.**  $\Phi(t) = \int_a^t f$ .  $\int_a^b f$  сходится  $\Leftrightarrow \exists$  конечный  $\lim_{t \rightarrow b-} \Phi(t)$ . Согласно критерию Больцано-Коши существования предела функции

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b) |\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| < \varepsilon$$

и по аддитивности интеграла  $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f$ .  $\square$

**Замечание.** Расходимость  $\int_a^b f \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \Delta \in (a, b) \quad \exists t_1, t_2 \in (\Delta, b) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} f \right| \geq \varepsilon$

**Замечание.** Запись:

$$\int_a^b f = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f = \lim_{t \rightarrow b-} (F(t) - F(a)) = F(b-) - F(a)$$

**Пример.**  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^{+\infty}, \alpha \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^{+\infty}, \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha \leq 1 \end{cases}$$

**Пример.**  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1. \end{cases}$

### 1.8.1. Свойства несобственного интеграла

Будем считать, что  $f$  локально интегрируема на рассматриваемых промежутках.

1. **Аддитивность по промежутку.** Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $\forall c \in (a, b)$  интеграл  $\int_c^b f$  тоже сходится и

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

В обратную сторону, если при  $c \in (a, b)$  интеграл  $\int_c^b f$  сходится, то сходится и интеграл  $\int_a^b f$ .

**Доказательство.**  $\forall t \in (a, b) \quad \int_a^t f = \int_a^c f + \int_c^t f$  – по аддитивности определенного интеграла. Перейдем к пределу при  $t \rightarrow b-$  – предел левой части и правой части существует или не существует одновременно.  $\square$

2. Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $\underbrace{\int_t^b f}_{\text{остаток интеграла}} \xrightarrow[t \rightarrow b-]{} 0$ .

**Доказательство.**

$$\int_t^b f = \int_a^b f - \int_a^t f \xrightarrow[t \rightarrow b-]{} \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

$\square$

3. **Линейность несобственного интеграла.** Если интегралы  $\int_a^b f, \int_a^b g$  сходятся,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то интеграл  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$  сходится и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

**Доказательство.** Для доказательства надо перейти к пределу в равенстве для частичных интегралов

$$\int_a^t (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^t f + \beta \int_a^t g$$

□

**Замечание.** Если интеграл  $\int_a^b f$  расходится, а интеграл  $\int_a^b g$  сходится, то интеграл  $\int_a^b (f+g)$  расходится. Действительно, если  $f+g$  сходится, то сходится и интеграл от  $f = (f+g) - g$  (?!).

4. **Монотонность несобственного интеграла.** Если интегралы  $\int_a^b f, \int_a^b g$  существуют в  $\overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \leq g$  на  $[a, b)$ , то

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

**Доказательство.** Перейдем к пределу в неравенстве для частичных пределов

$$\int_a^t f \leq \int_a^t g$$

□

**Замечание.** Аналогично, с помощью предельного перехода, на несобственные интегралы переносятся неравенства Йенсена, Гельдера, Минковского.

5. **Интегрирование по частям в несобственном интеграле.** Пусть  $f, g$  дифференцируемы на  $[a, b)$ ,  $f', g' \in R_{loc}[a, b)$ . Тогда

$$\int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b f' g$$

Если два из этих трех пределов конечны, то третий предел также существует и конечен.

**Доказательство.** Устремим  $t$  к  $b$  слева в равенстве

$$\int_a^t f g' = f g|_a^t - \int_a^t f' g$$

□

6. **Замена переменной в несобственном интеграле.** Пусть  $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [A, B)$  – дифференцируема на  $[\alpha, \beta)$ ,  $\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta)$ , существует  $\varphi(\beta-) \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \in C[A, B)$ . Тогда

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$$

Опять же, если существует один из интегралов, то существует и другой.

**Доказательство.** Обозначим

$$\Phi(t) = \int_{\alpha}^t (f \circ \varphi) \varphi', \quad \psi(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f$$

По формуле замены переменной в собственном интеграле

$$\Phi(t) = \psi(\varphi(t))$$

1. Пусть  $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = I \in \overline{\mathbb{R}}$ . Докажем, что  $\exists \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \varphi' = I$ , т.е.  $\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \beta-} I$ . Возьмем  $\{t_n\} : t_n \rightarrow \beta, t_n < \beta$ . Тогда  $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(\beta-), \varphi(t_n) \in [A, B)$ . Поэтому  $\Phi(t_n) = \psi(\varphi(t_n)) \rightarrow I$ . В силу произвольности выбора  $\{t_n\}$ ,  $\Phi(t) \rightarrow I$  при  $t \rightarrow \beta-$ .
2. Пусть существует интеграл  $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi' = J \in \overline{\mathbb{R}}$ . Докажем, что интеграл  $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$  существует, и тогда по пункту 1 будет следовать, что он равен  $J$ . Если  $\varphi(\beta-) \in [A, B)$ , то интеграл собственный. Пусть  $\varphi(\beta-) = B$ . Возьмем  $\{y_n\}, y_n \in [A, B), y_n \rightarrow B$ . Не уменьшая общности, можно считать, что  $y_n \in [\varphi(\alpha), B)$ . Тогда  $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = y_n$  (по теореме Больцано-Коши). Докажем, что  $\gamma_n \rightarrow \beta$ . Пусть  $\beta' \in [\alpha, \beta)$ . Т.к.  $\max_{[\alpha, \beta']} \varphi < \beta$ , а  $\varphi(\gamma_n) \rightarrow B$ , то, начиная с некоторого номера,  $\gamma_n \in (\beta', \beta)$ . Поэтому  $\gamma_n \rightarrow \beta$ , откуда  $\psi(y_n) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow J$ .

□

**Пример.**  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}$ . Пусть  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Тогда  $x = 2 \operatorname{arctg} t, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ . Если  $x = 0$ , то  $t = 0$ . Если  $x = \pi$ , то  $t = +\infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2) \cdot 2 + 1 - t^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 3} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

**Замечание.**  $a < b \in \mathbb{R}$ . Пусть  $x = b - \frac{1}{t}$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} dt$$

**Пример.**

$$\int_1^{+\infty} \cos x dx = \sin x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x - \sin 1 - \text{не существует}$$

## 1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов

**Лемма 2.**  $f \in R_{loc}[a, b), f \geq 0$ . Тогда  $\int_a^b f$  сходится  $\Leftrightarrow F(t) = \int_a^t f$  на  $[a, b)$  ограничена сверху.

**Доказательство.**  $F(t)$  возрастает на  $[a, b)$  ( $F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f \geq 0$ ).

$\exists \lim_{t \rightarrow b-} F(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow F$  возрастает и  $F$  ограничена сверху. □

**Замечание.** Если  $f \geq 0$ , то  $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Теорема 25 (Признак сравнения).**  $f, g \in R_{loc}[a, b), f, g \geq 0$

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при } x \rightarrow b-$$

Тогда

1. Если  $\int_a^b g$  сходится, то  $\int_a^b f$  сходится.
2. Если  $\int_a^b f$  расходится, то  $\int_a^b g$  расходится.

**Доказательство.** 1. По определению  $O$ -большого найдутся такие  $\Delta \in (a, b)$  и  $K > 0$ , что  $f(x) \leq K g(x)$  при всех  $x \in [\Delta, b)$ . Следовательно,

$$\int_{\Delta}^b f \leq K \int_{\Delta}^b g < +\infty$$

то есть остаток интеграла  $\int_a^b f$  сходится, а тогда и сам интеграл  $\int_a^b f$  сходится.

2. Если бы интеграл  $\int_a^b g$  сходил, то по пункту 1 сходил бы и интеграл  $\int_a^b f$ . □

**Следствие (Признак сравнения в предельной форме).**  $f, g \in R_{loc}[a; b), f \geq 0, g > 0$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0; +\infty]$ . Тогда

1. Если  $l \in [0, +\infty)$  и  $\int_a^b g$  сходится, то  $\int_a^b f$  сходится
2. Если  $l \in (0, +\infty]$  и  $\int_a^b f$  сходится, то  $\int_a^b g$  сходится
3. Если  $l \in (0, +\infty)$ , то  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  сходятся или расходятся одновременно

**Доказательство.** 1.  $\frac{f}{g}$  ограничено в  $(b-\varepsilon; b) \Rightarrow f(x) = O_b(g(x))$  при  $x \rightarrow b- \Rightarrow$  по теореме

$$\int_a^b f \text{ сходится}$$

2. Т.к.  $l > 0$ , то  $f > 0$  в  $(b - \varepsilon; b)$ . Тогда поменяем  $f$  и  $g$  местами в п.1

3. Следует из пунктов 1 и 2.

□

**Следствие.** Интегралы от неотрицательных эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно.

**Упражнение.**  $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^7 x}$

**Пример.** Докажем, что  $f \geq 0$ ,  $\int_a^{+\infty} f$  сходится  $\nRightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

**Доказательство.**  $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left( k - \frac{1}{k^2(k+1)}; k + \frac{1}{k^2(k+1)} \right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus E \\ k, & x = k \\ \text{линейно и непрерывно соединим точки, } & x \in E \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f \\ \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^N \int_{k - \frac{1}{k^2(k+1)}}^{k + \frac{1}{k^2(k+1)}} f(x) dx = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} k \cdot \frac{2}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

□

**Замечание.** Можно построить пример с  $g > 0$ .  $g(x) = f(x) + \frac{1}{x^2}$

## 1.9. Интегралы от знакопеременных функций

**Определение 22.**  $-\infty < a < b \leq +\infty, f \in R_{loc}[a; b)$

$\int_a^b f$  сходится абсолютно, если сходится  $\int_a^b |f|$

**Замечание.** Если  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  сходится абсолютно, то  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$  сходится абсолютно  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**Доказательство.**  $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| \cdot |f| + |\beta| \cdot |g|$  + признак сравнения для неотрицательных функций. □

**Замечание.** Если  $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

**Лемма 3.** Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

**Доказательство.**  $\int_a^b |f|$  сходится  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a; b) \int_{\Delta}^b |f| < \varepsilon$

Тогда  $\left| \int_{\Delta}^b f \right| < \int_{\Delta}^b |f| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^{\Delta} f + \int_{\Delta}^b f$  сходится по критерию Больцано-Коши.  $\square$

**Определение 23.**

$$x_+ = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad - \text{положительная часть } x$$

$$x_- = \max\{-x, 0\} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \quad - \text{отрицательная часть } x$$

$$x_+ - x_- = x \Rightarrow x_+ = \frac{|x| + x}{2}$$

$$x_+ + x_- = |x| \Rightarrow x_- = \frac{|x| - x}{2}$$

$$0 \leq x_{\pm} \leq |x|, f_+ = \max\{f; 0\}, f_- = \max\{-f; 0\}$$

**Доказательство.**  $\int_a^b |f|$  сходится  $\Rightarrow_{0 \leq f_{\pm} \leq |f|} \int_a^b f_+$  и  $\int_a^b f_-$  — сходятся  $\Rightarrow$

$\Rightarrow_{f=f_+-f_-} \int_a^b f$  сходится  $\square$

**Замечание.** Обратное утверждение к лемме неверно:  $\int_a^b f$  сходится  $\nRightarrow \int_a^b |f|$  сходится.

**Определение 24.** Если  $\int_a^b f$  сходится, а  $\int_a^b |f|$  расходится, то  $\int_a^b f$  называют условно сходящимся.

**Замечание.**  $\int_a^b f$  сходится абсолютно,  $\int_a^b g$  сходится условно  $\Rightarrow \int_a^b (f+g)$  сходится условно, т.к.  $g = (f+g) - f$ .

**Теорема 26** (Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов).  $f \in$



$C[a; b), g \in C^1[a; b], g$  монотонна.

1. **Признак Дирихле.** Если функция  $F(t) = \int_a^t f$  ограничена, а  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-} 0$ , то интеграл  $\int_a^b fg$  сходится.
2. **Признак Абеля.** Если интеграл  $\int_a^b f$  сходится, а  $g$  ограничена, то интеграл  $\int_a^b fg$  сходится.

**Доказательство.** 1. Проинтегрируем по частям:

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg \Big|_a^b - \int_a^b Fg'$$

Двойная подстановка обнуляется, поэтому сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла  $\int_a^b Fg'$ . Докажем, что  $\int_a^b Fg'$  сходится абсолютно.

$$\int_a^b |Fg'| \leqslant \underset{|F| \leqslant K}{K} \int_a^b |g'| = K \left| \int_a^b g' \right| = K \cdot |g \Big|_a^b| = K|g(a)|$$

2.  $g$  ограничена и монотонна  $\Rightarrow \alpha = \lim_{x \rightarrow b-} g(x)$   
 Функция  $g - \alpha$  монотонна,  $\xrightarrow{x \rightarrow b-} 0 \Rightarrow \int_a^b f(g - \alpha)$  сходится по признаку Дирихле. Поэтому интеграл  $\int_a^b f(g - \alpha)$  сходится, а интеграл  $\int_a^b fg$  сходится как сумма двух сходящихся:

$$\int_a^b fg = \int_a^b f(g - \alpha) + \int_a^b f \cdot \alpha$$

□

**Замечание.** Можно ослабить условия:  $f \in R_{loc}[a; b), g$  монотонна на  $[a; b)$

**Определение 25.** в.р.  $\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right)$  – главное значение.

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx &= +\infty \end{aligned}$$

**Пример.** 1.  $\int_1^{+\infty} f(x) \cdot \sin x dx, f(x) \geqslant 0$ .

- Если  $\int_1^{+\infty} f$  сходится, то  $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x dx$  сходится абсолютно.  
 $0 \leq |f(x) \cdot \sin x| \leq |f(x)| = f(x)$

- Если  $\int_1^{+\infty} f$  расходится  
 $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1.  $l = 0$  и  $f$  монотонна, то признак Дирихле и  $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x dx$  – сходится.

Но:  $\int_1^{+\infty} |f(x) \sin x| dx$  не сходится.

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int_1^{\infty} f(x) |\sin x| dx \geq \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} f(x) dx}_{\text{расходится}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} f(x) \cos 2x dx}_{\text{сходится}}$$

2.  $l > 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f \sin x dx$  расходится.

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) \cdot \sin x dx \geq \frac{1}{2} \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \min\{f(a_k), f(b_k)\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} \cdot l = \varepsilon > 0$$

2.  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  сходится условно.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$  сходится абсолютно по признаку сравнения.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  сходится условно

$\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \sin x dx$  расходится

3. Нельзя пользоваться эквивалентностью в случае знакопеременной функции.

$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$  – расходится

$f(x) \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  при  $x \rightarrow \infty$   $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  сходится.

Выделим главную часть:  $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left( 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + r(x) \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} +$   
сх-ся

$$\frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + \frac{\sin^4 x}{x^2} + |q(x)|, \quad |q(x)| \leq \frac{c}{x^2}$$

расходится      сх-ся абс-но      сх-ся абс.

$$\left( \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + r(t), t \rightarrow 0 \right)$$

4.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

При  $x \rightarrow 0$   $\sin x \sim x$  и  $\sin x > 0$  на  $(0; 1)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$$

5.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$  расходится. Но сходится в смысле главного значения.

**Замечание.**  $\int_1^{+\infty} f \cdot g$ ,  $f$  – периодична с периодом  $T > 0$ ,  $g$  – монотонна  $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$   
Тогда

1. Если  $\int_1^{+\infty} g$  сходится  $\Rightarrow \int_1^{+\infty} fg$
2. Если  $\int_1^{+\infty} g$  расходится, то  $\left( \int_1^{+\infty} fg \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_1^{1+T} f = 0 \right)$

**Доказательство.** Упражнение. □

**Следствие.**  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  расходится  
 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$  сходится

## 1.10. Длина, площадь и объём

### 1.10.1. Площадь

**Определение 26.**  $\|x\|$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  – длина вектора.

$$\|A - B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i - B_i)^2}$$

**Определение 27.** Движение – отображение  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , сохраняющее расстояния.

$$\|A - B\| = \|U(A) - U(B)\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^n$$

**Определение 28.** Площадь – функционал  $S : P \rightarrow [0; +\infty)$ , где  $\{P\}$  – множество квадратуемых фигур из  $\mathbb{R}^2$

**Теорема 27 (Свойства площади).** 1. Аддитивность:  $P_1, P_2$  – квадратуемы и  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ . Тогда  $P_1 \cup P_2$  – квадратуемая и  $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

2. Нормированность на прямоугольниках: площадь прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  равна  $ab$

3. Инвариантность относительно движений:  $S(U(P)) = S(P)$

4. Монотонность:  $P, P_2$  – квадратуемые,  $P_1 \subset P$ , тогда  $S(P_1) \leq S(P)$

**Доказательство.**  $P = P_1 \cup (P \setminus P_1)$ ,  $P_1 \cap (P \setminus P_1) = \emptyset$ . Тогда по аддитивности площади:  
 $S(P) = S(P_1) + S(P \setminus P_1) \geq S(P_1)$   $\square$

5. Если  $P$  содержится в некотором отрезке, то  $S(p) = 0$

**Доказательство.**  $P$  можно поместить в прямоугольник сколь угодно малой площади.  $\square$

6. Усиленная аддитивность:  $P_1$  и  $P_2$  пересекаются по множеству нулевой площади. Тогда  $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

**Доказательство.** Возьмем  $P = P_1 \cap P_2 \Rightarrow S(P_1) = S(P) + S(P_1 \setminus P) = S(P_1 \setminus P)$   
 $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1 \setminus P) + S(P_2) = S(P_1) + S(P_2)$   $\square$

### 1.10.2. Объём

**Определение 29.** Объём – функционал  $V : \{T\} \rightarrow [0; +\infty)$ , где  $\{T\}$  – класс кубируемых тел

**Теорема 28 (Свойства объёма).** 1. Аддитивность:  $T_1, T_2$  – кубируемые,  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ , тогда  $T_1 \cup T_2$  – кубируемое,  $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

2. Нормированность на прямоугольных параллелепипедах. Объём параллелепипеда:  
 $a \times b \times c = abc$

3. Инвариантность относительно движения:  $V(U(T)) = V(T)$

4. Монотонность:  $T_1, T$  – кубируемые,  $T_1 \subset T$ , тогда  $V(T_1) \leq V(T)$

5. Если тело  $T$  содержится в некотором прямоугольнике, то его объём равен нулю.

6. Усиленная аддитивность.  $T_1, T_2$  – кубируемые,  $T_1 \cap T_2$  нулевого объёма, тогда  
 $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

**Определение 30.**  $P \subset \mathbb{R}^2, h \geq 0$ . Множество  $Q = P \times [0; h]$  называется прямым цилиндром с основанием  $P$  и высотой  $h$ .

**Определение 31.**  $T \subset \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}$   
 $T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$  – сечение

### 1.10.3. Длина пути

**Определение 32.**  $\gamma : [a; b] \rightarrow R^m, \gamma$  – непрерывное отображение  
 $\gamma_i, i = 1, \dots, m$  –  $i$ -тая координатная функция.  
 Если все  $\gamma_i$  непрерывны, то отображение  $\gamma$  непрерывно.

**Определение 33.** Путь в  $R^m$  –  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) : [a, b] \rightarrow R^m$

$\gamma(a)$  – начало пути

$\gamma(b)$  – конец пути

$\gamma^* = \gamma([a, b])$  – носитель пути. В каком-то смысле можно считать, что это изображение пути.

**Пример.** Полуокружность:

$\gamma^1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), t \in [-1, 1]$ , пробегаем дугу слева направо.

$\gamma^2(t) = (-\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$

$\gamma^3(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$

$\gamma^4(t) = (\cos t, |\sin t|), t \in [-\pi, \pi]$ . пробежали дугу туда и обратно.

Все четыре отображения разные, но носитель пути у всех одинаковый.

**Определение 34.**  $\gamma(a) = \gamma(b)$  – замкнутый путь

**Определение 35.** Если  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  только при  $t_1 = t_2$  или  $t_1, t_2 \in \{a, b\}$ , то путь несамопересекающийся (простой)

**Определение 36.** Если  $\gamma_i \in C^r[a, b], i = 1, \dots, m$ , то путь  $\gamma$  гладкости  $r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

**Определение 37.** Если  $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$  – противоположный путь.

**Упражнение.** Посмотреть на кривые Пеано.

**Определение 38.**  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \tilde{\gamma} : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  – эквивалентные, если существует строго возрастающая функция и  $[a; b] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha; \beta] : \gamma = \tilde{\gamma} \circ u$ .

Это отношение эквивалентности:

1.  $\gamma \sim \gamma, \quad u = id[a; b]$
2.  $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \gamma \sim \tilde{\gamma} \quad u^{-1}$  – обратное отображение
3.  $\gamma_1 \sim \gamma_2, \gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3 \quad u_1 \circ u_2$

**Определение 39.** Класс эквивалентных путей – кривая

Каждый представитель класса – параметризация кривой

Кривая называется  $g$ -гладкой, если у неё найдется гладкая параметризация

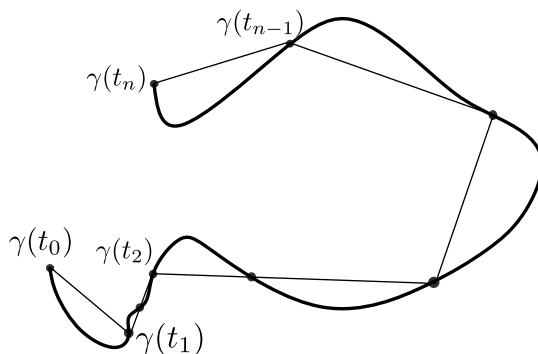
#### 1.10.4. Длина кривой

**Определение 40.**  $\gamma \in C([a; b] \rightarrow \mathbb{R}^m)$  – путь в  $\mathbb{R}^m$

1. Длина кривой, соединяющей точки  $A$  и  $B$  не меньше  $\|AB\|$
2. Нужна аддитивность:  $a < c < b$ ,  $\gamma^1 = \gamma|_{[a;c]}$ ,  $\gamma^2 = \gamma|_{[c;b]} \Rightarrow S_\gamma = S_{\gamma^1} + S_{\gamma^2}$

**Пример.**  $\tau = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$  – дробление  $[a, b]$

$l_\tau$  – вписанная ломаная.



**Определение 41.**  $\gamma$  – путь в  $\mathbb{R}^m$ . Длиной пути  $\gamma$  называется  $S_\gamma = \sup_\tau l_\tau$

**Определение 42.** Путь с  $S_\gamma < +\infty$  – спрямляемый.

**Лемма 4.** Длины эквивалентных путей равны.

**Доказательство.**  $\gamma \sim \tilde{\gamma} \circ u$ ,  $u : [a; b] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha; \beta]$  строго возрастает

$\tau = \{t_k\}_{k=1}^n$  – дробление  $[a; b]$

$\tilde{t}_k = u(t_k)$ ,  $\tilde{\tau} = \{\tilde{t}_k\}$  – дробление  $[\alpha; \beta]$

$$l_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|}_{\text{длина отрезка}} = \sum_{k=0}^{n-1} \|\tilde{\gamma}(\tilde{t}_{k+1}) - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_k)\| = l_{\tilde{\tau}}$$

$$l_\tau = l_{\tilde{\tau}} \leq S_{\tilde{\gamma}} \Rightarrow S_\gamma \leq S_{\tilde{\gamma}}$$

Поменяем:  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  местами  $\Rightarrow S_{\tilde{\gamma}} \leq S_\gamma$

□

**Замечание.** Противоположные пути имеют одинаковую длину.

**Лемма 5 (Аддитивность длины пути).**  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < c < b$

$$\gamma^1 = \gamma|_{[a;c]}, \gamma^2 = \gamma|_{[c;b]}$$

$$S_\gamma = S_{\gamma^1} + S_{\gamma^2}$$

**Доказательство.** Обозначим  $S_1 = S_{\gamma^1}, S_2 = S_{\gamma^2}$ . Возьмём дробления  $\tau_1$  и  $\tau_2$  отрезков  $[a, c]$  и  $[c, b]$ ; тогда  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$  – дробление  $[a, b]$ . Построим по  $\tau_1$  и  $\tau_2$  ломанные, вписанные в  $\gamma^1$  и  $\gamma^2$ , и обозначим через  $l_1$  и  $l_2$  их длины. Тогда  $l_1 + l_2 = l_\tau \leq s_\gamma$ . Последовательно переходя в левой части к супремуму по всевозможным дроблениям  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , получаем

$$s_1 + l_2 \leq s_\gamma,$$

$$s_1 + s_2 \leq s_\gamma.$$

Докажем противоположное неравенство

$$s_\gamma \leq s_1 + s_2.$$

Возьмём дробление  $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$  отрезка  $[a, b]$  и докажем, что  $l_\tau \leq s_1 + s_2$ ; отсюда и будет следовать требуемое. Если  $c \in \tau$ , то  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ , где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – дробления  $[a, c]$  и  $[c, b]$ . Поэтому

$$l_\tau = l_1 + l_2 \leq s_1 + s_2.$$

Если  $c \notin \tau$ , то добавим  $c$  в число точек дробления, то есть положим  $\tau^* = \tau \cup \{c\}$ . Пусть  $c \in (t_\nu, t_{\nu+1})$ . По неравенству треугольника

$$\begin{aligned} l_\tau &= \sum_{k=0}^{\nu-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| + |\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(t_\nu)| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\nu-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| + |\gamma(c) - \gamma(t_\nu)| + |\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(c)| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| = l_{\tau^*} \end{aligned}$$

По доказанному

$$l_\tau \leq l_{\tau^*} \leq s_1 + s_2$$

□

**Определение 43.** Длина кривой – длина какой-то из её параметризаций

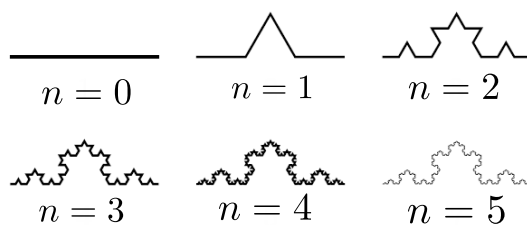
**Пример.** Пример ограниченной, но неспрямляемой кривой: кривая Коха. Длины:

$$1. \ n = 1: \frac{1}{3} \cdot 4$$

$$2. \ n = 2: \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$3. \ n = 3: \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

### 1.10.5. Приложения интеграла Римана



**Определение 44.**  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

$Q_f \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a; b], y \in [0; f(x)]\}$  – подграфик

Если  $f \in C[a; b]$ , то  $Q_f$  называют криволинейной трапецией

**Теорема 29.** Пусть  $f \in R[a; b]$ . Тогда  $Q_f$  квадратуема

**Доказательство.** Без доказательства □

**Замечание.** Суммы Дарбу  $s_\tau, S_\tau$

$$\forall \tau \quad s_\tau \leq S(Q_f) \leq S_\tau$$

Вспомним, что  $\sup_\tau S_\tau = \inf_\tau S_\tau$

$$\Rightarrow S(Q_f) = \int_a^b f dx$$

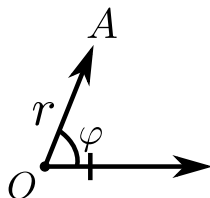
**Замечание.**  $S(Q_f) = - \int_a^b f$

**Пример.** Площадь эллипса:  $E = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, a, b > 0$

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, x \in [0; a]$$

$$S_E = 4 \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^2 t dt = 4ba \cdot \frac{\pi}{4} = \pi ba$$

## 1.11. Полярные координаты



Чтобы была взаимная однозначность, можно считать, что  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Можно обобщать на  $r \in \mathbb{R}$ , а не только  $\mathbb{R}_+$ .



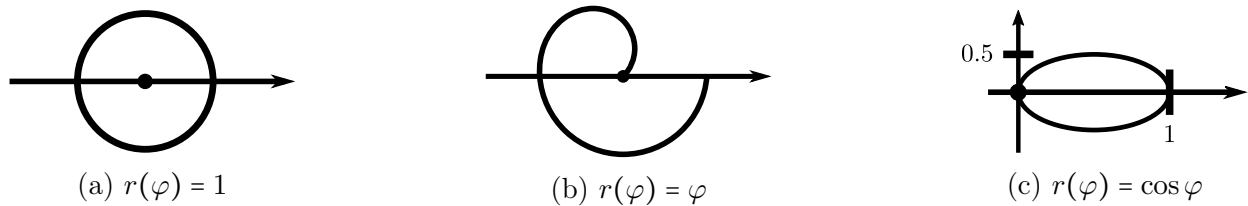
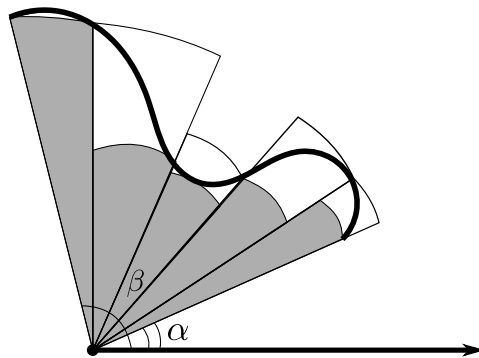


Рис. 1: Примеры функций в полярных координатах

### 1.11.1. Вычисление площади в полярных координатах

$r(\varphi) : [\varphi_1, \varphi_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau = \{\psi_k\}$  – разбиение  $[\varphi_1, \varphi_2]$ .



Площадь сектора равна  $\frac{1}{2}r^2\varphi$ . Обозначим

$$s_\tau = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\psi_k \cdot \min_{\varphi \in [\psi_k, \psi_{k+1}]} r^2(\varphi)$$

$$S_\tau = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\psi_k \cdot \max_{\varphi \in [\psi_k, \psi_{k+1}]} r^2(\varphi)$$

Тогда

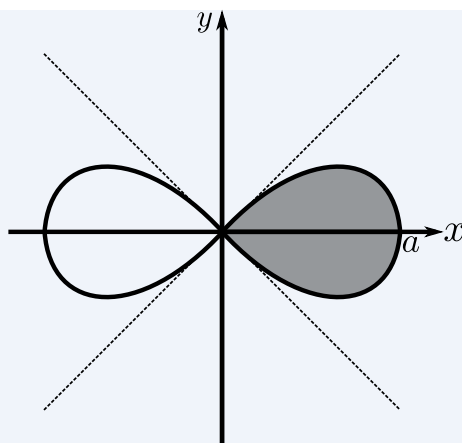
$$s_\tau \leq S(Q) \leq S_\tau$$

Если  $r^2(\varphi) \in R[\varphi_1, \varphi_2]$ , то  $\sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau = S(Q)$ . Значит, искомая площадь равна:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi$$

**Пример.** Найдём площадь  $S$  правого лепестка лемнискаты Бернулли

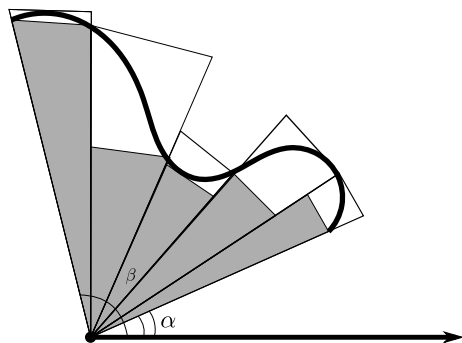
$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad a > 0$$



$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cdot 2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

**Упражнение.** Посчитать площадь правого лепестка лемниската Бернулли.

**Замечание.** Можно было приближать не секторами, а треугольниками.



$$\frac{1}{2} \min_{\varphi \in [\psi_k, \psi_{k+1}]} r^2(\varphi) \sin \Delta\psi_k$$

В данном случае, нельзя перейти к эквивалентным. Тогда

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} \leq \sin \alpha \leq \alpha$$

### 1.11.2. Вычисление объемов

$T$  – кубируемое.

- Существует отрезок  $[a, b]$  такой, что  $T(x) = \emptyset \quad \forall x \notin [a, b]$
- $\forall x \in [a, b] \quad T(x)$  – квадратируемая фигура.

$\tau = \{x_k\}$  – разбиение  $[a, b]$ . Возьмем цилиндры с  $h = \Delta x_k$ , основаниями  $\min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} S(x)$  и

$\max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} S(x)$ . Тогда

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

**Пример.** Найдем объем  $V$  эллипсоида

$$D = \left\{ (x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b, c > 0$$

Если  $x \notin [-a, a]$ , то  $D(x) = \emptyset$ . Если  $x = \pm a$ , то  $D(x) = \{(0, 0)\}$ . Если  $x \in (-a, a)$ , то

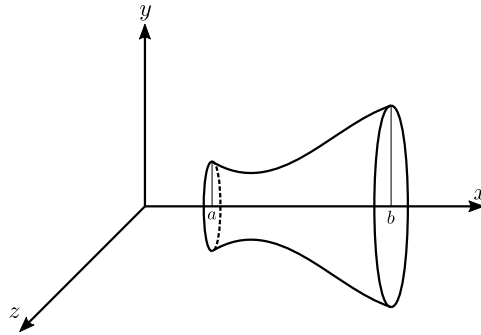
$$D(x) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}$$

есть эллипс с полуосями  $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  и  $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ . Площадь эллипса вычисляется по формуле:  $S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ . Отсюда

$$V = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \left[ x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{x=0}^a = \frac{4}{3} \pi abc$$

**Замечание.** Пусть  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $T_f$  – тело, получающееся вращением подграфика функции  $f$  вокруг оси  $OX$ . Тело  $T_f$  задается равенством

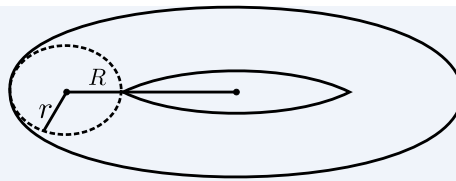
$$T_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f^2(x) \right\}$$



**Замечание.** Пусть  $f \in C[a, b]$ ,  $f \geq 0$ . Для тела вращения  $T_f$  при каждом  $x \in [a, b]$  сечение есть круг радиуса  $f(x)$ , поэтому  $S(x) = \pi f^2(x)$ . Значит

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2$$

**Пример.** Найдем объем  $V_T$  тора – тела, образованного вращением круга  $\{(x, y) : x^2 + (y - R)^2 \leq r^2\}$  ( $0 < r < R$ ) вокруг оси  $OX$ .



Тор представляется в виде разности тел вращения подграфиков функций, графики которых – верхняя и нижняя полуокружности, то есть функции

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r]$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V_T &= \pi \int_{-r}^r f_1^2 - \pi \int_{-r}^r f_2^2 = \\ &= \pi \int_{-r}^r \left( (R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \right) dx = \\ &= 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2\pi^2 R r^2 \end{aligned}$$

**Замечание.** Вокруг  $OY$  вращаем  $y = f(x)$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

### 1.11.3. Длина кривой

Если  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  – путь в  $\mathbb{R}^m$ ,  $\gamma_i \in C^1[a, b]$ ,  $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_m)$ . По определению евклидовой длины

$$\|\gamma'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma_i'^2}$$

**Теорема 30 (Длина гладкого пути).** Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  – гладкий путь. Тогда  $\gamma$  спрямляем и

$$s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$$

**Доказательство.** 1. Пусть  $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ . Пусть дробление  $\eta = \{u_k\}_{k=0}^n$  отрезка  $\Delta$ . Тогда

$$l_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(u_{k+1}) - \gamma(u_k)\| = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k))^2}$$

По формуле Лагранжа при каждом  $i$  и  $k$  найдется такая точка  $c_{ik} \in (u_k, u_{k+1})$ , что

$$\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k) = \gamma'_i(c_{ik}) \Delta u_k$$

Поэтому

$$l_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma_i'^2(c_{ik})} \cdot \Delta u_k$$

Обозначим

$$M_\Delta^{(i)} = \max_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|, \quad m_\Delta^{(i)} = \min_{t \in \Delta} |\gamma_i'^2(t)|$$

$$M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m (M_\Delta^{(i)})^2}, \quad m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m (m_\Delta^{(i)})^2}$$

Тогда

$$m_\Delta(\beta - \alpha) \leq l_\eta \leq M_\Delta(\beta - \alpha)$$

Переходя к супремуму по всем дроблениям, мы получим

$$m_\Delta(\beta - \alpha) \leq s_{\gamma|\Delta} \leq M_\Delta(\beta - \alpha)$$

В частности, при  $\Delta = [a, b]$ , отсюда следует, что путь  $\gamma$  спрямляем.

2. Возьмем дробление  $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$  отрезка  $[a, b]$  и обозначим

$$m_k = m_{[t_k, t_{k+1}]}, \quad M_k = M_{[t_k, t_{k+1}]}$$

По доказанному

$$m_k \Delta t_k \leq s_{\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}} \leq M_k \Delta t_k$$

Кроме того, при всех  $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$m_k \leq \|\gamma'(t)\| \leq M_k$$

и поэтому

$$m_k \Delta t_k \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\gamma'\| \leq M_k \Delta t_k$$

Складывая неравенства и пользуясь аддитивностью длины пути и интеграла, получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k \leq s_\gamma \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k \leq \int_a^b \|\gamma'\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k$$

Докажем, что для всех дроблений между левой и правой суммами лежит лишь одно число. Суммы в левой и правой части не обязаны быть интегральными для  $\|\gamma'\|$ , поэтому

оценим разность между ними непосредственно. Если  $M_\Delta + m_\Delta \neq 0$ , то

$$\begin{aligned} M_\Delta - m_\Delta &= \frac{M_\Delta^2 - m_\Delta^2}{M_\Delta + m_\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^m \left( (M_\Delta^{(i)})^2 - (m_\Delta^{(i)})^2 \right)}{M_\Delta + m_\Delta} = \\ &= \sum_{i=1}^m \left( M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)} \right) \cdot \frac{M_\Delta^{(i)} + m_\Delta^{(i)}}{M_\Delta + m_\Delta} \leq \sum_{i=1}^m \left( M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)} \right) \end{aligned}$$

Если же  $M_\Delta = m_\Delta = 0$ , то доказанное неравенство очевидно.

Возьмем  $\varepsilon > 0$ . По теореме Кантора все функции  $|\gamma'_i|$  равномерно непрерывны на  $[a, b]$ .

Поэтому для каждого  $i = 1, \dots, m$  найдется такое  $\delta_i > 0$ , что

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta_i \Rightarrow \|\gamma'_i(x) - \gamma'_i(y)\| < \frac{\varepsilon}{m(b-a)}$$

Положим  $\delta = \min_{1 \leq i \leq m} \delta_i$ . Для любого разбиения с рангом меньше, чем  $\delta$   $|M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

Поэтому

$$\left| s_\gamma - \int_a^b \|\gamma'\| \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \varepsilon$$

Так как  $\varepsilon$  произвольно, то  $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$ .

□

**Замечание.** По аддитивности эта теорема распространяется на кусочно-гладкие пути.

**Замечание.** Запишем частный случай теоремы 1 при  $m = 2$ . Пусть  $\gamma = (x(t), y(t)) \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2)$

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

**Следствие.**  $y = f(x) \in C^1[a, b]$ . Тогда график спрямляем и

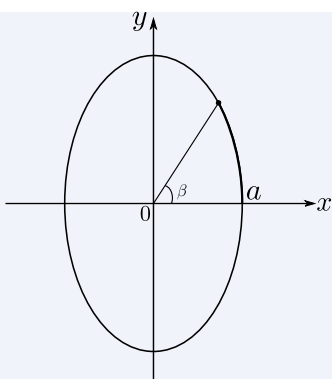
$$S_{\Gamma_f} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

График  $f$  – это путь

$$\Gamma_f(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b]$$

**Пример.** Длина дуги эллипса.

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \beta]$$



$$\begin{aligned} s &= \int_0^\beta \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^\beta \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2) \sin^2 t} dt = b \int_0^\beta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

Величина  $\varepsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$  называется **эксцентриситетом** эллипса. Интеграл

$$E(\varepsilon, \beta) = \int_0^\beta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$$

называется **эллиптическим интегралом второго рода**.

**Замечание.** Эллиптическим интегралом первого рода называется интеграл

$$K(\varepsilon, \beta) \int_0^\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}} dt$$

## 1.12. Функции ограниченной вариации

**Определение 45.** Величина

$$V_a^b f = \sup_\tau \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

называется **полной вариацией**  $f$  на  $[a, b]$ .

Если  $V_a^b f < +\infty$ , то  $f$  называется функцией **ограниченной вариации** на отрезке  $[a, b]$ . Множество всех функций ограниченной вариации на  $[a, b]$  обозначается  $V[a, b]$ .

**Теорема 31 (Свойства).** 1. Вариация аддитивна: если  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < c < b$ , то

$$V_a^b = V_a^c + V_c^b$$

2. Если  $f$  является кусочно-гладкой на  $[a, b]$ , то

$$V_a^b f = \int_a^b |f'|$$

3. Вариация монотонна: если  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , то

$$V_\alpha^\beta = V_a^b f$$

Вариацию можно определить и для функция, заданных на промежутке произвольного типа. Если  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , то

$$V_a^b f = \sup_{[\alpha, \beta] \subset \langle a, b \rangle} V_\alpha^\beta f$$

4. Пусть  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Тогда  $\gamma$  спрямляем в том и только том случае, когда  $\gamma_i \in V[a, b]$  при всех  $i = 1, \dots, m$ .

5. Если  $f$  монотонна на  $[a, b]$ , то  $f \in V[a, b]$

$$V_a^b f = |f(b) - f(a)|$$

6. Если  $f \in V[a, b]$ , то  $f$  ограничена на  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Докажем свойства 3, 4, 5 и 6.

3. По аддитивности

$$V_a^b f = V_a^\alpha + V_\alpha^\beta + V_\beta^b \geq V_a^\beta f$$

4. Доказательство следует из двусторонней оценки

$$|\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)| \leq \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \leq \sum_{j=1}^m |\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k)|$$

5. Для любого дробления

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \right| = |f(b) - f(a)|$$

6. При всех  $x \in [a, b]$

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b f$$

□

**Теорема 32** (Арифметические действия над функциями ограниченной вариации). Пусть  $f, g \in V[a, b]$ . Тогда

1.  $f + g \in V[a, b]$



2.  $fg \in V[a, b]$
3.  $\alpha f \in V[a, b]$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )
4.  $|f| \in V[a, b]$
5. если  $\inf_{x \in [a, b]} |g(x)| > 0$ , то  $\frac{f}{g} \in V[a, b]$

**Доказательство.** Обозначим  $\Delta_k f = f(x_{k+1}) - f(x_k)$

1. Складывая по всем  $k$  неравенства

$$|\Delta_k(f + g)| \leq |\Delta_k f| + |\Delta_k g|$$

получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k(f + g)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k f| + \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k g| \leq V_a^b f + V_a^b g$$

Переходя в левой части к супремуму по всем дроблениям, получаем, что

$$V_a^b(f + g) \leq V_a^b f + V_a^b g$$

2. По свойству 6 функции  $f$  и  $g$  ограничены; пусть  $|f|$  ограничена числом  $K$ , а  $|g|$  – числом  $L$ . Тогда

$$|\Delta_k(fg)| \leq L|\Delta_k f| + K|\Delta_k g|$$

Складывая эти неравенства и переходя к супремуму, получим

$$V_a^b fg \leq L V_a^b f + K V_a^b g$$

3. Утверждение для  $\alpha f$  следует из 2, если взять в качестве  $g$  функцию, тождественно равную  $\alpha$ .
4. Аналогично, из неравенств

$$|\Delta_k |f|| \leq |\Delta_k f|$$

сложив и перейдя к супремуму, вытекает, что

$$V_a^b |f| \leq V_a^b f$$

5. Достаточно доказать, что  $\frac{1}{g} \in V[a, b]$ , а потом воспользоваться утверждением 2. Пусть  $m = \inf_{x \in [a, b]} |g(x)|$ . Тогда

$$\left| \Delta_k \frac{1}{g} \right| = \left| \frac{\Delta_k g}{g(x_k)g(x_{k+1})} \right| \leq \frac{|\Delta_k g|}{m^2}$$

откуда

$$V_a^b \frac{1}{g} \leq \frac{1}{m^2} V_a^b g$$

□

**Теорема 33** (Характеристика функций ограниченной вариации). Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f \in V[a, b]$  в том и только том случае, когда  $f$  представляется в виде разности двух возрастающих на  $[a, b]$  функций.

**Доказательство.** Достаточность очевидна из свойства 5 и предыдущей теоремы. Докажем необходимость. Пусть

$$g(x) = \overset{x}{V}_a f, \quad x \in [a, b]; \quad h = g - f$$

Если  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , то по аддитивности

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= \overset{x_2}{V}_{x_1} f \geq 0, \\ h(x_2) - h(x_1) &= \overset{x_2}{V}_{x_1} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0 \end{aligned}$$

то есть функции  $g$  и  $h$  возрастают. □

**Следствие.**  $V[a, b] \subset R[a, b]$

**Доказательство.** Действительно, монотонная функция интегрируема и разность интегрируемых функций интегрируема. □

**Следствие.** Функция ограниченной вариации не может иметь разрывов второго рода.

**Доказательство.** Это следует из теоремы 33 и из того, что монотонная на отрезке функция не может иметь разрывов второго рода. □

**Следствие.** Ни один из классов  $V[a, b]$  и  $C[a, b]$  не содержится в другом.

**Доказательство.** Так как существуют разрывные монотонные функции, то  $V[a, b] \not\subset C[a, b]$ . Приведем пример непрерывной функции, вариация которой бесконечна. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Тогда  $f \in C[0, 1]$ . Обозначим  $x_k = \frac{1}{k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). При этом

$$f(x_k) = \frac{(-1)^k}{k}, \quad |f(x_k) - f(x_{k+1})| = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

Возьмем  $n \in \mathbb{N}$  и рассмотрим дробление:  $0 < x_n < \dots < x_1 = 1$  (для удобства точки дробления замурованы в порядке убывания). Сумма из определения вариации равна

$$\sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_n) - f(0)| = -1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Докажем, что последовательность **гармонических** сумм

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

не ограничена сверху. При  $m \in \mathbb{N}$  оценим сумму с номером  $2^m$  снизу. Для этого сгруппируем слагаемые, а затем оценим сумму в каждой группе как количество слагаемых, умноженное на самое малое слагаемое:

$$\begin{aligned} H_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right) \geqslant \\ &\geqslant 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2} \end{aligned}$$

Поэтому  $f \notin V[0, 1]$

□

## Раздел #2: Ряды

**Определение 46.** Рядами называется сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

где  $\{a_k\}$  – последовательность из  $\mathbb{R}$  (из  $\mathbb{C}$ )

**Определение 47.** Частичной суммой называется величина

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

**Определение 48.**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится  $\Leftrightarrow \exists$  конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

**Утверждение 6.**  $\forall \{S_n\}$  является последовательностью частичных сумм какого-то ряда.

**Доказательство.**  $a_1 = S_1, a_k = S_k - S_{k-1}$

□

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots = 0$

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots = +\infty$

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots, \quad S_n = \begin{cases} -1, & n \text{ нечетно} \\ 0, & n \text{ четно} \end{cases}$

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = a + a^2 + a^3 + \dots$ , сходится при  $|a| < 1$

**Пример.**  $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, z \in \mathbb{C}$ , сходится при  $|z| < 1$ .

**Упражнение.** Что будет, если  $|z| = 1$ ?

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

**Пример.**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$

**Пример.**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \alpha^{2k} = \cos \alpha$

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$

**Замечание.**  $H_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$  – гармонические суммы.

**Свойство 1.** Если  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, то  $\forall m \in \mathbb{N} \sum_{k=m}^{\infty} a_k$  тоже сходится. Верно и что если  $\exists m \in \mathbb{N} \sum_{k=m}^{\infty} a_k$  сходится, то и  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится.

**Доказательство.**  $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^n a_k$ . Перейдем к пределу по  $n \rightarrow \infty$ . □

**Свойство 2.** Если  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, то  $\sum_{k=m}^{\infty} a_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$

**Доказательство.**  $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  □

**Свойство 3 (Линейность суммирования).** Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$  – сходятся, то  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$  сходится.  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

**Замечание.** Если  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится,  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходится, то  $\sum_{i=0}^{\infty} (a_k + b_k)$  расходится

**Доказательство.**  $a_k = (a_k + b_k) - b_k$  □

**Свойство 4.**  $z_k = x_k + y_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}$ .  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  сходится  $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$  сходятся.

**Свойство 5 (Монотонность).**  $a_k, b_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  из  $\overline{\mathbb{R}}$  и  $a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

**Теорема 34 (Критерий Больцано-Коши).** Пусть есть ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .  
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$

**Доказательство.**  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  сходится, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n > N |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Возьмем  $m = n + p$ . □

**Замечание.** Необходимое условие сходимости ряда следует отсюда.

## 2.1. Группировка слагаемых

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$  – подпоследовательность натуральных чисел,  $n_0 = 0$

$$A_j = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k, \quad j \in \mathbb{N}$$

$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$  – получен из  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  при помощи группировки.

**Теорема 35 (Группировка членов ряда).** 1. Если  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$  ( $S \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$  или  $S \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ). Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j = S$$

2.  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = S$ , и  $a_n \rightarrow 0$  и  $\exists L \in \mathbb{N}$ : в каждом  $A_j$  не более чем  $L$  штук  $a_k$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

3.  $a_k \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} A_j = S \in \overline{\mathbb{R}}$  и все  $a_k$  из одной группы одного знака. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

**Доказательство.** 1.  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k, T_m = \sum_{j=1}^m A_j$ .  $T_m$  – подпоследовательность  $S_n$  ( $T_m = S_{n_{m+1}}$ )

2. По определению сходимости ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > N \quad |S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

А также

$$\exists K : \forall k > K \quad |a_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Возьмем  $M = \max\{K, n_{N+1}\}$  и  $n_m \leq n < n_{m+1}$  Тогда

$$\begin{aligned} |S_n - S| &\leq |S_n - S_{n_m}| + |S_{n_m} - S| = \left| \sum_{k=n_m+1}^n a_k \right| + |S_{n_m} - S| \leq \\ &\leq \sum_{k=n_m+1}^n |a_k| + |S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Возьмем  $\varepsilon > 0 \exists M : \forall m > M \quad |S_{n_m} - S| < \varepsilon$ . Пусть  $N = n_{m+1}$ . Возьмем  $n_m \leq n < n_{m+1}$ . Если  $a_{n_m+1}, a_{n_m+2}, \dots, a_{n_{m+1}} \geq 0$ . Тогда

$$S_{n_m} \leq S_n \leq S_{n_{m+1}}$$

Если  $a_{n_m+1}, a_{n_m+2}, \dots, a_{n_{m+1}} \leq 0$ , то знаки в другую сторону.

$$|S_n - S| \leq \max \{|S_{n_m} - S|, |S_{n_{m+1}} - S|\}$$

□

## 2.2. Ряды с неотрицательными слагаемыми

**Лемма 6.** Если  $a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ , то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится} \Leftrightarrow S_n \text{ ограничена сверху}$$

**Доказательство.**  $S_n$  неубывает, поэтому  $S_n$  сходится  $\Leftrightarrow S_n$  ограничена сверху

□

**Замечание.** Если  $a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ , то

$$\exists \lim S_n = S \in \overline{R} \quad (S = \sup S_n)$$

Достаточно ограниченности сверху подпоследовательности  $S_n$ .

**Теорема 36 (Признак сравнения).**  $a_k, b_k \geq 0, a_k = O(b_k)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда

1. Если  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходится, то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится
2. Если  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится, то  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  расходится.

**Доказательство.**  $\exists N \in \mathbb{N}, A > 0 : a_k \leq A b_k$ . Тогда

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \leq A \sum_{k=N}^{\infty} b_k < +\infty$$

□

**Следствие (Признак сравнения в предельной форме).**  $a_k \geq 0, b_k > 0$  и  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$

1. Если  $l \in [0, +\infty)$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходится, то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится.
2. Если  $l \in (0, +\infty]$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, то  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходится.
3. Если  $l \in (0, +\infty)$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.** 1.  $\left\{ \frac{a_k}{b_k} \right\}$  ограничена + теорема.

2. Если  $l > 0$ , то  $a_k > 0$  с некоторого места, поэтому поменяем ролями  $a_k$  и  $b_k$ .

3. Следует из 1 и 2.

□

**Следствие.**  $a_k \sim b_k, k \rightarrow \infty$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходятся или расходятся одновременно.

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ . При  $\alpha < 1$  расходится, т.к.  $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$ . С другой стороны, при  $\alpha \geq 2$  сходится, т.к.  $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$ .

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{5^k}$  сходится, т.к.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k^5}{5^k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^7}{5^k} = 0$$

**Замечание.**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k$  – плохая запись!!!

**Теорема 37 (Радикальный признак Коши).**  $a_k \geq 0, \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = K$ . Тогда

1. Если  $K > 1$  то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится.
2. Если  $K < 1$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится

**Доказательство.** 1. Т.к.  $K > 1$ , то бесконечно много  $\sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow a_k > 1 \Rightarrow a_k \not\rightarrow 0$ .

2. Возьмем  $\varepsilon = \frac{1-K}{2} > 0$ . Начиная с некоторого номера все  $\sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon = \frac{1+K}{2} \in (0, 1) \Rightarrow a_n \leq \left(\frac{1+K}{2}\right)^n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+K}{2}\right)^n$  сходится (геометрическая прогрессия).

□

**Замечание.** Если  $k = 1$ , то бывает и сходимось, и расходимость. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

С другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

**Теорема 38 (Признак Даламбера).**  $a_k > 0$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ . Тогда

1. Если  $D > 1$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится
2. Если  $D < 1$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится

**Доказательство.** 1. С некоторого номера  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , т.е.  $a_{n+1} > a_n > a_N \forall n > N$ . Тогда  $a_n \not\rightarrow 0$ .

2. Пусть  $\varepsilon = \frac{1-D}{2} > 0$ . Начиная с некоторого номера  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon = \frac{1+D}{2} \in (0, 1) \Rightarrow a_{n+1} < \frac{1+D}{2} \cdot a_n$ .



Для  $m > N$

$$a_m < \frac{1+D}{2} \cdot a_{m-1} < \left(\frac{1+D}{2}\right)^2 a_{m-2} < \dots < \left(\frac{1+D}{2}\right)^{m-N} a_N$$

Т.е. мы оценили  $a_m$  сверху членами геометрической прогрессии.

□

**Замечание.**  $D = 1$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

С другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

**Замечание.** Эти два признака можно сформулировать и без использования пределов.

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ ,  $a > 0$ . Используя признак Даламбера

$$\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{a^k} = \frac{a}{k+1} \rightarrow 0$$

По признаку Коши

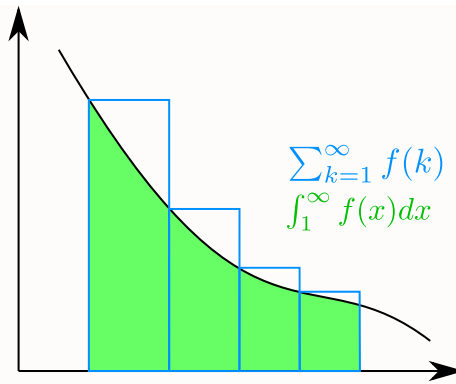
$$\sqrt[k]{\frac{a^k}{k!}} = \frac{a}{\sqrt[k]{k!}} \rightarrow 0$$

**Замечание.**  $a_n > 0$ . Если  $\exists D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = D$ . Обратное неверно!

**Упражнение.** Доказать.

**Теорема 39.**  $f$  монотонна на  $[1, +\infty)$ . Тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  сходится или расходится одновременно с  $\int_1^{\infty} f(x) dx$

**Доказательство.** Пусть  $f$  невозрастает,  $f \geq 0$ .



$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)$$

Просуммируем эти неравенства:

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

и перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$

□

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \alpha \in (1, 2)$ .  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$  сходится, поэтому сходится и ряд.

**Упражнение.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ . При каких  $\alpha$  и  $\beta$  сходится?