Матанализ 1 семестр ПИ,
Лекция, 10/06/21

Собрано 9 октября 2021 г. в 18:11

Содержание

1. Пределы функций **1**
1.1. ε-окрестности . . . 1
1.2. Предел функции . . . 1

1.1. ε-окрестности

Def. 1.1.1. *ε-окрестность точки $a - V_\varepsilon(a) : (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$*
проколотая ε-окрестность $a - \dot{V}_\varepsilon : (a-\varepsilon, a) \cup (a+\varepsilon)$

Def. 1.1.2. *$D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. Точка a называется точкой сгущения D, если в любой окрестности a найдется точка из D, отличная от a*

$$\forall \dot{V}(a)\ \exists x \in D : x \in \dot{V}(a) \wedge x \neq a$$

Пример 1.1.3. $D = [1,2)$. Точки сгущения: $[1,2]$

Замечание 1.1.4. Точка сгущения может принадлежать множеству, а может и не принадлежать.

Замечание 1.1.5. Если a – точка сгущения, тогда в $\forall \dot{V}(a)$ бесконечно много точек из D.

Замечание 1.1.6. Точки сгущения называют предельными точками множества.
a – точка сгущения $\Leftrightarrow \exists \{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \to a$

Доказательство. "$\Rightarrow$". $\varepsilon = \frac{1}{k} \Rightarrow |x_k - a| < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 \leqslant \lim |x_k - a| < 0 \Rightarrow \exists \lim x_k = 0$
"$\Leftarrow$". В $\forall V(a)$ лежит бесконечно много точек $\{x_n\}, x_n \neq a \Rightarrow a$ – точка сгущения. ■

Def. 1.1.7. *$a \in D$, но a – не предельная точка. Тогда a называется изолированной точкой множества D*

Замечание 1.1.8. $+\infty$ может быть предельной точкой множества

$$\dot{V}(+\infty) = (E, +\infty)$$

1.2. Предел функции

Def. 1.2.1. *$f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ – предельная точка D.*
Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом f в точке a

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ или } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$$

если выполняется одно из следующих условий:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$ *(Определение по Коши, определение на языке δ, ε)*
2. $\forall V(A)\ \exists V(a) : f(\dot{V}(a) \cap D) \subset V(A)$ *(Определение на языке окрестностей)*
3. $\forall \{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to A$ *(Определение по Гейне, на языке последовательностей)*

Теорема 1.2.2 (Эквивалентность определения по Коши и по Гейне)**.** Определения 1) и 3) эквивалентны.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим какую-то $\{x_n\} : x_n \neq a, x_n \in D, x_n \to a$ (она существует по доказанному). Нужно доказать, что $f(x_n) \to A$.
Пусть $x_n \to a$, то

$$\forall \delta > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N \to |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть это не так, т.е. 1) не выполнено

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in D, x \neq a, |x - a| < \delta : |f(x) - A| \geqslant \varepsilon$$

Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$.

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to A, \text{ но } |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$$

■

Замечание 1.2.3. в $\overline{\mathbb{R}}$

1. $$\lim_{x \to 5} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{5\}, |x - 5| < \delta \to f(x) > E$$
2. $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \forall E > 0\ \exists \Delta : \forall x \in D, x < \Delta \to |f(x) - 2| < E$$

Замечание 1.2.4. В определении по Гейне есть "$\forall \{x_n\}$". Если x_n и y_n подходят под условия, то $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$

Доказательство. Возьмем $z_n : z_1 = x_1, z_2 = y_1, z_3 = x_2, z_4 = y_2$ и т.д. $\{z_n\}$ подходит под определение $\Rightarrow \exists \lim f(z_n)$ ■

Замечание 1.2.5. В определении предела функции не участвует значения функции в точке a.

Замечание 1.2.6. Последовательность – частный случай функции.