

# Алгебра 1 семестр ПИ,

## Лекции

Собрано 12 ноября 2021 г. в 12:47

---

## Содержание

<b>1. Отношения и перестановки</b>	<b>1</b>
1.1. Отношения . . . . .	1
1.2. Отношение эквивалентности . . . . .	1
1.3. Класс эквивалентности . . . . .	1
1.4. Перестановка . . . . .	2
1.5. Знак перестановки . . . . .	3
1.6. Чётные перестановки . . . . .	4
1.7. Инверсии . . . . .	5
<b>2. Теория чисел</b>	<b>6</b>
2.1. Делимость . . . . .	6
2.2. Наибольший общий делитель . . . . .	7
2.3. Наименьшее общее кратное . . . . .	8
2.4. Математическая индукция . . . . .	9
2.5. Простые числа . . . . .	9
2.6. Основная теорема арифметики . . . . .	10
2.7. Непрерывные дроби (Цепные дроби) . . . . .	11
<b>3. Теория сравнений</b>	<b>12</b>
3.1. Начала теории сравнений . . . . .	12
3.2. Классы вычетов . . . . .	13
3.3. Кольцо классов вычетов . . . . .	14
3.4. Приведенная система вычетов . . . . .	15
3.5. Функция Эйлера . . . . .	15
3.6. Сравнения с одним неизвестным . . . . .	16
3.7. Диофантовы уравнения . . . . .	17
3.8. Системы сравнений . . . . .	17
<b>4. Комплексные числа</b>	<b>19</b>
4.1. Алгебраическая форма записи комплексного числа . . . . .	19
4.2. Геометрическое представление комплексных чисел . . . . .	20
4.3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа . . . . .	20
4.4. Извлечение корней из комплексных чисел . . . . .	21
4.5. Корни из единицы . . . . .	21
4.6. Показательная форма записи комплексного числа . . . . .	22
<b>5. Многочлены</b>	<b>24</b>
5.1. Корни многочлена . . . . .	26
5.2. Наибольший общий делитель . . . . .	27

5.3. Факториальность кольца многочленов . . . . .	27
5.4. Каноническое разложение многочлена над $\mathbb{C}$ . . . . .	28
5.5. Каноническое разложение многочлена над $\mathbb{R}$ . . . . .	29
5.6. Уравнения 3-й степени . . . . .	31
5.7. Уравнения 4-й степени . . . . .	31
5.8. Отделение кратных корней . . . . .	31

## Раздел #1: Отношения и перестановки

### 1.1. Отношения

**Def 1.1.1.** *Отношением  $\omega$  на  $X \times Y$  называется любое подмножество  $X \times Y$ .*

Если  $X = Y$ , то говорят про отношение на  $X$ .

Отношение на  $X$  называется:

1. рефлексивным, если  $\forall x \in X (x, x) \in \omega$
2. антирефлексивным, если  $(x, y) \in \omega \Rightarrow x \neq y$
3. симметричным, если  $(x, y) \in \omega \Rightarrow (y, x) \in \omega$
4. антисимметричным, если  $(x, y), (y, x) \in \omega \Rightarrow y = x$
5. транзитивным, если  $(x, y), (y, z) \in \omega \Rightarrow (x, z) \in \omega$

### 1.2. Отношение эквивалентности

**Def 1.2.1.** *Отношение на  $X$ , которое является рефлексивным, симметричным, транзитивным, называется эквивалентностью и обозначается  $x \sim y$*

**Пример 1.2.2.**  $X = \mathbb{Z} \quad x \omega y \Leftrightarrow x - y : 5$

1.  $x - x : 5$  — рефлексивно
  2.  $x - y : 5 \Rightarrow y - x : 5$  — симметрично
  3.  $x - y : 5, y - z : 5 \Rightarrow x - z : 5$  — транзитивно
- $\Rightarrow \omega$  — отношение эквивалентности

### 1.3. Класс эквивалентности

**Def 1.3.1.** *Классом эквивалентности, содержащим  $a \in X$ , называется  $[a] = \{x : x \in X, x \sim a\}$*

**Def 1.3.2.** *Разбиением множества  $X$  называется  $\pi(X) = \{X_i\}$ :*

1.  $X_1 \cup X_2 \cup \dots = X$
2.  $\forall i, j : i \neq j, X_i \cap X_j = \emptyset$

**Теорема 1.3.3.** *Связь эквивалентности и разбиения множества*

1. Отношения эквивалентности на  $X$  задаёт разбиение множества  $\pi(X)$ ,  $X_i$  — классы эквивалентности
2. Разбиение  $\pi(X)$  задаёт эквивалентность на  $X$

*Доказательство.* 1.  $X_i = [x] = \{y \in X : y \sim x\}$  — перебираем все  $x \in X \Rightarrow X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$

$X_i, X_j : X_i = [x_i], X_j = [x_j]$  предположим, что  $a \in X_i \cap X_j \Rightarrow a \sim x_i, a \sim x_j \Rightarrow x_i \sim x_j \Rightarrow X_i = X_j \Rightarrow [x_i]$  задают разбиения

2.  $\sim : x \sim y \Leftrightarrow x, y \in X_i$ , проверить, что  $\sim$  — эквивалентность:

1.  $x, x \in X_i \Rightarrow x \sim x$

2.  $x, y \in X_i \Rightarrow y, x \in X_i$

3.  $x, y, y, z \in X_i \Rightarrow x, z \in X_i$

$\Rightarrow \sim$  — эквивалентность

■

**Def 1.3.4.**  $\sim$  на  $X$ , тогда фактормножество  $(X / \sim)$  — множество, состоящее из классов эквивалентности

**1.4. Перестановка** — биективное отображение  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  в  $X$

Запись перестановки:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

**Def 1.4.1.** Композиция перестановок.  $(\sigma, \tau)$

$\sigma, \tau \Rightarrow \sigma \circ \tau = \sigma\tau$  — выполняется справа налево.

**Def 1.4.2.**  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$  — тождественная перестановка

Утверждение 1.4.3.  $\forall \sigma \rightarrow \exists \sigma^{-1}$

Множество всех перестановок  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  обозначается  $S_n$

**Def 1.4.4.** Группой называется некоторое множество  $G$ , на котором определена бинарная операция:  $\forall x, y \in G \rightarrow xy \in G$ . При этом выполняются следующие аксиомы

1.  $\forall x, y, z \in G \rightarrow (xy)z = x(yz)$  - ассоциативность.

2.  $\forall x \in G \rightarrow \exists e \in G : xe = ex = x$  - нейтральный элемент

3.  $\forall x \in G \rightarrow \exists x^{-1} \in G : xx^{-1} = x^{-1}x = e$

**Теорема 1.4.5.**  $S_n$  относительно композиции является группой.

**Def 1.4.6.** Порядком группы  $G$  называется количество элементов в  $G$

Обозначается  $|G|$

**Def 1.4.7.**  $\begin{pmatrix} 1 & i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  —  $k$ -цикл

$\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix} = (ij)$  — транспозиция.

**Пример 1.4.8.**  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

**Теорема 1.4.9.**  $\forall \sigma \in S_n$  может быть разложена в произведение независимых циклов.

*Доказательство.*  $1 \leq i, j \leq n. i \sim j \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : \sigma^p(i) = j$

1.  $\sigma^0(i) = i$  - рефлексивность
2.  $\sigma^p(i) = j \Rightarrow \sigma^{-p}(j) = i$  - симметричность
3.  $\sigma^p(i) = j, \sigma^q(j) = k \Rightarrow \sigma^{p+q}(i) = k$  - транзитивность

$\Rightarrow$  по теореме о разбиении множества  $\Rightarrow X = X_1 \cup \dots \cup X_s \Rightarrow \forall X_i$  соответствует цикл, длина которого равна  $|X_i|$

Пусть  $j \in X_i$ , тогда  $\begin{pmatrix} j & \sigma(j) & \sigma^2(j) & \dots & \sigma^p(j) \\ \sigma(j) & \sigma^2(j) & \sigma^3(j) & \dots & j \end{pmatrix} \Rightarrow$  все такие циклы независимы.

*Замечание 1.4.10.* Можно доказать, что это разложение единственно с точностью до порядка. ■

*Следствие 1.4.11.*  $\forall \sigma \in S_n$  раскладывается в произведение транспозиций

*Доказательство.* Рассмотрим какой-то  $k$ -цикл.

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_k \\ i_2 & i_3 & i_4 & \dots & i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_k \\ i_k & i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_{k-1} \\ i_{k-1} & i_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \\ i_3 & i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_2 & i_1 \end{pmatrix}$$

*Замечание 1.4.12.* Разложение перестановки в произведение транспозиций не является единственным.

## 1.5. Знак перестановки

**Def 1.5.1.**  $\sigma = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \tau_i, 1 \leq i \leq k$  - транспозиции.

Знаком перестановки  $\sigma$  называется  $\varepsilon_\sigma = (-1)^k$

*Замечание 1.5.2.* Если  $\tau = (ij) \Rightarrow \tau^2 = (ij)^2 = e$

**Теорема 1.5.3.** О знаке перестановки

1.  $\varepsilon_\sigma$  не зависит от способа разложения  $\sigma$  на произведение транспозиций
2.  $\varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau = \varepsilon_{\sigma\tau}$

*Доказательство.* 1.  $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_s, \tau_i, \tau'_j$  - транспозиции.

$$\Rightarrow \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k \tau'_s = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{s-1} \Rightarrow \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k \tau'_s \tau'_{s-1} = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{s-2} \Rightarrow e = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k \tau'_s \dots \tau'_1.$$

Если  $k, s$  одной четности  $\Rightarrow e$  раскладывается в четное число транспозиций  
 $k, s$  разной четности  $\Rightarrow e$  раскладывается в нечетное число транспозиций.

Докажем, что  $e$  не может быть разложена в нечётное число транспозиций. Найдем транспозицию, содержащую  $i$  и будем двигать её влево

$$e = \tau_1 \tau_2 \dots (ij) \dots$$

Смотрим транспозицию слева от  $(ij)$ :

$$(ij)(ij) = e \Rightarrow$$

число транспозиций уменьшилось на 2

$$(ik)(ij) = (ij)(jk)$$

$$(jk)(ij) = (ik)(jk)$$

$$(kl)(ij) = (ij)(kl)$$

$\Rightarrow$  если не будет пункта 1  $\Rightarrow e = (it)...$

$e(i) = i$ . Однако правая часть  $i \rightarrow t$ , что невозможно.  $\Rightarrow$  обязательно будет 1  $\Rightarrow$  число транспозиций уменьшится на 2

Было  $k + s$  транспозиций.  $k + s - 2, k + s - 4, \dots = 0 \Rightarrow k + s$  - чётное.

$$2. \varepsilon_{\sigma}\varepsilon_{\tau} = \varepsilon_{\sigma\tau}$$

$$\sigma = \tau_1 \dots \tau_k, \tau = \tau'_1 \dots \tau'_s$$

$$\varepsilon_{\sigma}\varepsilon_{\tau} = (-1)^k \cdot (-1)^s = (-1)^{k+s}$$

$$\varepsilon_{\sigma\tau} = (-1)^{k+s}$$

■

**Def 1.5.4.** Если  $\varepsilon = +1$ , то перестановка называется четной

## 1.6. Чётные перестановки

$$A_n = \{\text{чётные перестановки в } S_n\}$$

$$\overline{A_n} = S_n \setminus A_n$$

$$\text{Утверждение 1.6.1. } |A_n| = |\overline{A_n}| = \frac{n!}{2}$$

*Доказательство.* Пусть  $\tau = (ij), \sigma \in A_n, \varphi: A_n \rightarrow \overline{A_n}, \varphi(\sigma) = \tau\sigma \in \overline{A_n}$

Инъективность:  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \in A_n, \varphi(\sigma_1) = \tau\sigma_1, \varphi(\sigma_2) = \tau\sigma_2$

Если  $\tau\sigma_1 = \tau\sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$  - противоречие

Сюръективность: Пусть  $\rho \in \overline{A_n} \Rightarrow \tau\rho \in A_n \Rightarrow \varphi(\tau\rho) = \tau(\tau\rho) = \rho \Rightarrow \varphi$  - биективно  $\Rightarrow |A_n| = |\overline{A_n}|$  ■

*Замечание 1.6.2.*  $e \in A_n, \sigma, \rho \in A_n \Rightarrow \sigma\rho \in A_n$ .

$$\sigma = \tau_1\tau_2\dots\tau_k, \sigma^{-1} = \tau_k\tau_{k-1}\dots\tau_1 \in A_n$$

Значит  $A_n$  - группа относительно композиции.

**Def 1.6.3.**  $G$  - группа. Множество  $H \subseteq G$  называется подгруппой  $G$ , если оно также образует группу. Обозначение:  $H \leq G$

**Теорема 1.6.4.**  $A_n \leq S_n \Rightarrow |A_n| = \frac{n!}{2}$

**Def 1.6.5.**  $A_n$  - знакопеременная группа (alternating)

## 1.7. Инверсии

**Def 1.7.1.**  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & s & \dots & t & \dots & n \\ i & \dots & i_s & \dots & i_t & \dots & i_n \end{pmatrix}$ . Говорят, что  $(s, t)$  образуют инверсию, если  $s < t \wedge i_s > i_t$ . Количество всех инверсий равно  $inv(\sigma)$

**Теорема 1.7.2** (Инверсии и четность и перестановки).  $\sigma$  – четная (нечетная)  $\Leftrightarrow inv(\sigma)$  четно (нечетно)

*Доказательство.* 1. Пусть  $\sigma = \begin{pmatrix} \dots & s & t & \dots \\ \dots & i & j & \dots \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} i & i+1 \\ i+1 & i \end{pmatrix}, j = i+1$  Хотим узнать, как меняется количество инверсий при умножении на  $\tau$ .

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} i & i+1 \\ i+1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & s & \dots & t & \dots \\ \dots & i & \dots & i+1 & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow$$

количество инверсий изменится на 1.

Число инверсий в парах без  $s$  и  $t$  не поменялось.  $(k, s), (m, t)$  - тоже не поменялось.  $(s, t)$  - изменилось на 1.

2.  $\tau = (ij)$  - произвольная транспозиция.  $\sigma$  - произвольная перестановка.

$\tau = \begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+1 & i+2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i+k-1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+k-2 & i+k-1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i+1 & i+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}$   
 $\Rightarrow \tau$  раскладывается в  $2(k-1) + 1$  транспозицию соседних элементов  $\Rightarrow$  число инверсий  $\tau\sigma$  изменится на нечётное число.

3.  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_l e$ , где  $\sigma_i$  – независимые циклы.

Если  $\sigma_l$  раскладывается в чётное число транспозиций, то в  $\sigma_l e$  чётное число инверсий (т.к. каждая транспозиция меняет  $inv(\sigma_l)$  на нечетное число).

Если  $\sigma_l$  раскладывается в нечётное число транспозиций, то в  $\sigma_l e$  нечётное число инверсий. ■

## Раздел #2: Теория чисел

### 2.1. Делимость

**Def 2.1.1.**  $a:b$  или  $b|a \Leftrightarrow \exists q : a = b \cdot q, b \neq 0$

Свойства:

1. Рефлексивность.  $a:a, a \neq 0$
2. Антисимметричность на  $\mathbb{N}$ .  $a:b, b:a \Rightarrow a = b$
3. Транзитивность.  $a:b, b:c \Rightarrow a:c$
4.  $a|b, a|c \Rightarrow a|(b \pm c)$ .

*Доказательство.*  $b = a \cdot q_1, c = aq_2 \Rightarrow b \pm c = aq_1 \pm aq_2 = a(q_1 \pm q_2)$  ■

5.  $a|b \Rightarrow \forall c \rightarrow a|bc$

6. Пусть  $a|b_i, i = 1, \dots, n, a|(b_1 + \dots + b_n + c) \Rightarrow a|c$

*Доказательство.*  $b_1 + \dots + b_n + c = aq, aq_1 + aq_2 + \dots + aq_n + c = aq \Rightarrow c = a(q - q_1 - \dots - q_n) \Rightarrow a|c$  ■

7.  $a|b \Rightarrow \forall k \neq 0 \rightarrow ka|kb$

8.  $ka|kb \Rightarrow a|b$

**Теорема 2.1.2** (О делении с остатком).

$$\forall a \wedge \forall b > 0 \exists! q, r, 0 \leq r < b : a = bq + r$$

**Def 2.1.3.**  $a$  - делимое,  $b$  - делитель,  $q$  - частное (неполное частное),  $r$  - остаток

*Доказательство.*  $\exists$ -ние. Рассмотрим  $a - bq$ . Выберем  $q$  так, чтобы  $a - bq > 0$  было наименьшим. Положим  $r = a - bq \geq 0 \Rightarrow a = bq + r$ . По выбору  $q \rightarrow a - b(q + 1) < 0 \Rightarrow a < b(q + 1) \Rightarrow r = a - bq < b(q + 1) - bq = b$ .

Единственность. Преположим, что  $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2, 0 \leq r_1, r_2 < b$

$$|r_1 - r_2| < b, bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \Rightarrow b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \Rightarrow |b(q_1 - q_2)| \geq b$$

Но  $|r_1 - r_2| < b$  - противоречие. ■



## 2.2. Наибольший общий делитель

**Def 2.2.1.** Общим делителем  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называется  $d : d|a_i, i = 1, \dots, n$ .

**Def 2.2.2.** Наибольший общий делитель  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называется  $d$  такое, что

1.  $d > 0$
2.  $d|a_i, i = 1, \dots, n$
3. если  $d'|a_i, i = 1, \dots, n$ , то  $d'|d$

Обозначается  $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Замечание 2.2.3. По определению  $\gcd(0, 0) = 0$ .  $a \neq 0$ , то  $\gcd(a, 0) = 0$

Свойства:

1.  $b|a \Rightarrow (a, b) = b$

*Доказательство.* Докажем, что множество делителей  $(a, b)$  совпадает с множество делителей  $b$ .

$$d|(a, b) \Rightarrow d|b$$

$$d|b \Rightarrow d|a(\text{по транзитивности}) \Rightarrow d|(a, b)$$

■

2.  $a = bq + c \Rightarrow (a, b) = (b, c)$

- 3.

Алгоритм 2.2.4 (Алгоритм Евклида).

$$a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b$$

$$b = r_1q_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2$$

...

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1}$$

**Теорема 2.2.5.**  $r_n = \gcd(a, b)$

*Доказательство.*  $r_1 > r_2 > r_3 > \dots \geq 0 \Rightarrow \exists r_{n+1} = 0. r_n|r_{n-1}$ .

$$r_n = (r_n, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_{n-2}) = \dots = (r_2, r_1) = (b, r_1) = (a, b)$$

■

4.  $(ma, mb) = m \cdot (a, b)$

5.  $d|a, d|b \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{(a,b)}{d}$

*Доказательство.*  $(a, b) = (d \cdot \frac{a}{d}, d \cdot \frac{b}{d}) = d \cdot \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$  ■

6.  $(a, b) = 1 \Rightarrow (a, bc) = (a, c)$

*Доказательство.* Докажем, что  $(a, bc)|(a, c)$

$$(a, bc)|a, (a, bc)|ac, (a, bc)|bc \Rightarrow (a, bc)|(ac, bc) \Rightarrow (a, bc)|(a, b) \cdot c = c \Rightarrow (a, bc)|(a, c)$$

Теперь докажем, что  $(a, c)|(a, bc)$

$$(a, c)|a, (a, c)|c \Rightarrow (a, c)|bc \Rightarrow (a, c)|(a, bc) \Rightarrow (a, bc) = (a, c)$$
 ■

7.  $(a, b) = 1, b|ac \Rightarrow b|c$

*Доказательство.*

$$b|bc, b|ac \Rightarrow b|(bc, ac) = c$$
 ■

8.  $(a, b) = (a - b, b)$

**Теорема 2.2.6** (Линейное представление НОД).

$$(a, b) = d \Rightarrow \exists u, v : u \cdot a + v \cdot b = d$$

*Доказательство.* Из алгоритма Евклида:

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n \Rightarrow d = r_n = r_{n-2} - r_{n-1} \cdot q_n$$

$$r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-1} + r_{n-1} \Rightarrow d = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2} \cdot q_{n-1})q_n$$

Из следующей строки выражаем  $r_{n-2}$  и т.д.  $\Rightarrow$  останутся  $a$  и  $b \Rightarrow d = u \cdot a + v \cdot b$  ■

## 2.3. Наименьшее общее кратное

**Def 2.3.1.** Общим кратным  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называется число  $M > 0 : a_i|M \forall i = 1, \dots, n$   
Наименьшее из общих кратных – НОК.

**Теорема 2.3.2.**  $\text{lcm}(a, b) = \frac{ab}{\text{gcd}(a, b)}$

*Доказательство.*  $a = a_1d, b = b_1d, (a_1, b_1) = 1$

$$M = at = bs \Rightarrow \frac{M}{b} = \frac{at}{b} = \frac{a_1dt}{b_1d} = \frac{a_1t}{b_1} \Rightarrow M = \frac{b \cdot a_1t}{b_1}$$

$t$  делится на  $b_1$ , т.е.  $t = b_1k$

$$M = \frac{ba_1b_1k}{b_1} = ba_1k - \text{минимально при } k = 1 \Rightarrow M = ba_1 = \frac{ba_1d}{d} = \frac{ab}{\text{gcd}(a, b)}$$
 ■

## 2.4. Математическая индукция

1. Аксои́ма.  $\forall$  подмножество  $\mathbb{N}$  имеет наши элементы  $\Rightarrow$  ММИ.

2. Аксио́ма.  $A_1, A_n \Rightarrow A_{n+1} \Rightarrow \forall A_n$

*Следствие 2.4.1.* Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – попарно взаимно-простые  $\Rightarrow \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

*Доказательство.*  $n = 2$ .  $\text{lcm}(a_1, a_2) = \frac{a_1 a_2}{\gcd(a_1, a_2)} = a_1 \cdot a_2$

Пусть верно для  $n$ . Тогда для  $n + 1$

$$\begin{aligned} (a_i, a_n a_{n+1}) &= (a_i, a_{n+1}) = 1 \Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n a_{n+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{lcm}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \cdot a_{n+1}) &= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \cdot a_{n+1} \end{aligned}$$

■

## 2.5. Простые числа

**Def 2.5.1.** Число  $p > 1$  называется *простым*, если оно делится только на 1 и на  $p$ . Иначе число называется *составным*.

**Теорема 2.5.2** (о наименьшем делителе). Наименьший делитель  $a > 1$  – простое число

*Доказательство.*  $M = \{d | d > 1, d | a\} \neq \emptyset$  Пусть  $p$  - наименьший элемент  $M$ . Предположим, что  $p$  – составное, т.е.  $p = bq, q < p, q | p, p | a \Rightarrow q | a$  – противоречие. ■

**Теорема 2.5.3.**  $p$  - наименьший делитель  $> 1$  числа  $n \Rightarrow p \leq \sqrt{n}$

*Доказательство.*

$$n = mp, p \leq m \Rightarrow np \leq nm \Rightarrow mp \cdot p \leq nm \Rightarrow p^2 \leq n \Rightarrow p \leq \sqrt{n}$$

■

**Теорема 2.5.4** (Теорема Евклида). Простых чисел бесконечно много

*Доказательство.* Пусть  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - все простые числа,  $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ . Если  $a \vdots p_i$ , то  $1 \vdots p_i \Rightarrow a$  - новое простое число. ■

## 2.6. Основная теорема арифметики

**Lm 2.6.1.**  $p$  - простое  $\Rightarrow \forall a > 1 \rightarrow p|a \vee (p, a) = 1$

*Доказательство.*

$$(p, a)|p \Rightarrow (p, a) = 1 \vee (p, a) = p$$

■

**Lm 2.6.2.**  $p$  - простое,  $p|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \Rightarrow \exists i = 1, \dots, n : p|a_i$

*Доказательство.* Если  $(p, a_i) = 1, i = 1, \dots, n \Rightarrow 1 = (p, a_1) = (p, a_1 a_2) = (p, a_1 a_2 a_3) = (p, a_1 \cdot \dots \cdot a_n) = 1 \Rightarrow \exists a_i : p|a_i$  ■

**Теорема 2.6.3** (Основная теорема арифметики). 1.  $\forall a > 1 \rightarrow a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}, p_1, p_2, \dots, p_k$  - различные простые,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 1$

2. с точностью до перестановки множителей это представление единственно

*Доказательство.* 1. из всех делителей  $a$  выбираем наименьший -  $p_1$  - простое  $\Rightarrow a = p_1 \cdot a_1$ . Рассмотрим  $a_1$  - наименьший делитель -  $p_2 \Rightarrow a_1 = p_2 \cdot a_2$  и т.д.

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots \Rightarrow \exists a_n = 1 \Rightarrow a = \text{разложение на простые}$$

2. Предположим, что представление не одно, то есть

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$$

Не умаляя общности, пусть  $n \geq s \Rightarrow p_1|q_1 \dots q_n$ . Тогда, по лемме 2  $p_1|q_i \Rightarrow p_1 = q_i$ . Перенумеруем  $i = 1 \Rightarrow p_2 p_3 \dots p_s = q_2 q_3 \dots q_n \Rightarrow$  все  $p_s$  сократятся, т.е.  $1 = q_{s+1} \dots q_n \Rightarrow s = n$  ■

**Def 2.6.4.**  $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_k^{\alpha_k}$  - каноническое разложение числа  $a$

*Следствие 2.6.5.* Любой делитель  $a = p_a^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$  имеет вид  $b = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

*Доказательство.*  $b|a \Rightarrow b$  содержит в разложении  $p_i$  ■

*Следствие 2.6.6.*  $\gcd(a_1, \dots, a_n)$  имеет вид  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , где

$a_i = \min \{ \text{показатель степени } p_i, \text{ с которым } p_i \text{ входит в разложение } a_1, a_2, \dots, a_n \}$

*Следствие 2.6.7.*  $\text{lcm}(a_1, \dots, a_n)$  имеет вид  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , где

$a_i = \max \{ \text{показатель степени } p_i, \text{ с которым } p_i \text{ входит в разложение } a_1, a_2, \dots, a_n \}$

## 2.7. Непрерывные дроби (Цепные дроби)

**Def 2.7.1.** *Выражение вида*

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

*называется непрерывной дробью. Обозначение:  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$*

**Теорема 2.7.2.** Любое вещественное число может быть представлено в виде непрерывной дроби.

Если число иррационально – в виде бесконечной дроби, если рациональное – в виде конечной.

*Доказательство.*  $a > b$

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_1}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_2}}} \text{ и т.д.}$$

где

$$\begin{aligned} a &= b \cdot a_0 + r_1 \\ b &= r_1 \cdot a_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2 \cdot a_2 + r_3 \end{aligned}$$

■

**Def 2.7.3.** Для  $\frac{a}{b}$   $\delta_0 = \frac{a_0}{1}, \delta_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \delta_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$  и т.д. называются подходящими дробями.

**Теорема 2.7.4** (Формулы подходящих дробей).  $\delta_k = \frac{p_k}{q_k}, p_{-1} = 1, q_{-1} = 0, p_0 = a_0, q_0 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_k = a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}$$

*Доказательство.*  $\delta_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1 \cdot 1 + 0} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}}$

Предположим, что для  $k$  верно. Тогда для  $k+1$

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k + \frac{1}{a_{k+1}}}}} = \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) \cdot q_{k-1} + q_{k-2}} = \\ &= \frac{(a_{k+1} \cdot a_k + 1) \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \cdot a_{k+1}}{(a_{k+1} \cdot a_k + 1) \cdot q_{k-1} + q_{k-2} \cdot a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}(a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}} \end{aligned}$$

■

## Раздел #3: Теория сравнений

### 3.1. Начала теории сравнений

**Def 3.1.1.**  $a$  и  $b$  называются сравнимыми по модулю  $m > 0$ , если они имеют одинаковые остатки при делении на  $m$

$$a \equiv b \pmod{m}, a \equiv b(m), a \stackrel{m}{\equiv} b$$

Утверждение 3.1.2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a - b : m \\ a \equiv b + mt \end{cases}$$

Доказательство. 1)  $\Rightarrow$  2)

$$a = mq_1 + r, b = mq_2 + r \Rightarrow a - b = m(q_1 - q_2) : m$$

2)  $\Rightarrow$  3)

$$a - b : m \Rightarrow a - b = mt \Rightarrow a = b + mt$$

3)  $\Rightarrow$  1). Поделим  $a$  и  $b$  на  $m$ :

$$a = mq_1 + r_1, b = mq_2 + r_2$$

$$\begin{aligned} 3) : a = b + mt &\Rightarrow mq_1 + r_1 = mq_2 + r_2 + mt \Rightarrow \\ &\Rightarrow m(q_1 - q_2 - t) = r_2 - r_1 \Rightarrow m | r_2 - r_1 \Rightarrow r_2 - r_1 = 0 \end{aligned}$$

■

Свойства:

1. Рефлексивность.  $a \equiv a \pmod{m}$
2. Симметричность.  $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
3. Транзитивность.  $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

Доказательство.

$$a - c = a - b + b - c : m$$

■

4.  $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$
5.  $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

Доказательство.

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d) : m$$

■

$$6. d|a, d|b, d|m, a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

*Доказательство.*

$$a - b = a_1d - b_1d = my = m_1dt \Rightarrow a_1 - b_1 = m_1t$$

■

$$7. a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{m}$$

$$8. d|a, d|b, (m, d) = 1, a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$$

*Доказательство.*

$$a = a_1d, b = b_1d, a - b : m \Rightarrow (a_1 - b_1) \cdot d : m \Rightarrow a_1 - b_1 : \frac{m}{d}$$

■

$$9. d|m, a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$$

$$10. a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a, m) = (b, m)$$

*Доказательство.*

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = b + mt \Rightarrow (a, m) = (b, m)$$

■

### 3.2. Классы вычетов

**Def 3.2.1.** Классом вычетов по  $(\text{mod } m)$  называется множество чисел, сравнимых с  $a$  по модулю  $m$

$$m = 7, \bar{1} = \{-6, 8, 1, 15, \dots\}$$

$$\bar{a} = \{x | x \equiv a \pmod{m}\}$$

Элементы классов вычетов – **вычеты**. Обычно рассматривают наименьший неотрицательный вычет.

**Def 3.2.2.** Множество вычетов, взятых по одному из разных классов образуют полную систему вычетов. Например

$$\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$$

**Lm 3.2.3.** Множество из  $m$  чисел, попарно несравнимых по модулю  $m$ , образуют полную систему вычетов.

**Теорема 3.2.4.**  $(a, m) = 1$ . Если  $x$  пробегает полную систему вычетов по  $(\text{mod } m) \Rightarrow \forall b \rightarrow ax + b$  тоже пробегает полную систему вычетов по  $(\text{mod } m)$

*Доказательство.*  $x$  принадлежит  $m$  значений  $\Rightarrow ax + b$  принадлежит  $m$  значений.

Пусть  $x_1 \not\equiv x_2 \pmod{m}$ . Предположим, что  $ax_1 + b \equiv ax_2 + b \pmod{m} \Rightarrow ax_1 \equiv ax_2 \pmod{m} \Rightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$

■

### 3.3. Кольцо классов вычетов

**Def 3.3.1.** Определим сложение и умножение вычетов по фиксированному модулю  $m$ .

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}, \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$$

**Lm 3.3.2.** Сложение и умножение определены корректно

*Доказательство.*  $a \equiv a_1 \pmod{m}, b \equiv b_1 \pmod{m}$

$$\Rightarrow a + b = a_1 + b_1 \pmod{m}, a \cdot b = a_1 \cdot b_1 \pmod{m} \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} = \bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1$$

■

**Def 3.3.3.** Группа  $G$  называется коммутативной (абелевой), Если

$$\forall x, y \in G \rightarrow xy = yx$$

**Теорема 3.3.4.**  $\mathbb{Z}_m$  образует коммутативную группу относительно сложения

*Доказательство.*  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_m$

1.  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b + c} = \overline{a + b + c}$   
 $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \overline{a + b + c} = \overline{a + b + c}$
2.  $\bar{0}. \bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$
3.  $-\bar{a} = \overline{m - a} \Rightarrow \bar{a} - \bar{a} = \overline{a + m - a} = \bar{0}$
4.  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

■

**Def 3.3.5.** (Ассоциативным) кольцом называется множество  $R$ , на котором заданы бинарные операции:

1.  $\forall x, y, z \rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$
2.  $\exists 0 \in R : \forall x \in R \rightarrow x + 0 = x$
3.  $\forall x \in R \exists (-x) \in R : x + (-x) = 0$
4.  $\forall x, y \in R \rightarrow x + y = y + x$
5.  $\forall x, y, z \in R \rightarrow (y + z) = xy + xz, (x + y)z = xz + yz$
6.  $\forall x, y, z \in R \rightarrow (xy)z = x(yz)$

*Замечание 3.3.6.*  $\exists 1 \in R : \forall x \in R \rightarrow x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$  – кольцо с единицей

$\forall x, y \in R \rightarrow xy = yx$  – коммутативное кольцо

**Теорема 3.3.7.**  $\mathbb{Z}_m$  – коммутативное кольцо с единицей.

*Доказательство.*

$$\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \overline{a \cdot (b + c)} = \overline{a(b + c)} = \overline{ab + ac}$$

и т.д.

■

**Def 3.3.8.** Кольца  $R$ , в котором  $\forall a, b \rightarrow (ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$  называется кольцом без делителей нуля.

Если  $ab = 0$  и  $a, b \neq 0$ , то  $a, b$  – делители нуля

**Def 3.3.9.** Коммутативное кольцо без делителей нуля – область целостности.



**Теорема 3.3.10.** 1.  $\mathbb{Z}_m$  имеет делители нуля  $\Leftrightarrow m$  – составное число

2.  $\mathbb{Z}_p, p$  – простое – область целостности.

*Доказательство.* " $\Rightarrow$ ".  $m = n \cdot k, \bar{n} \cdot \bar{k} = \bar{0}$  в  $\mathbb{Z}_m$

" $\Leftarrow$ ".  $\bar{n} \cdot \bar{k} = \bar{0} \Rightarrow n \cdot k \equiv 0 \pmod{m}$

Предположим, что  $m$  – простое  $\Rightarrow m|n \vee m|k \Rightarrow \bar{n} = \bar{0} \vee \bar{k} = \bar{0}$ . Но  $\bar{n}$  и  $\bar{k}$  – делители нуля, т.е.  $\bar{n}, \bar{k} \neq \bar{0} \Rightarrow m$  – составное.

1)  $\Rightarrow$  2) ■

### 3.4. Приведенная система вычетов

**Def 3.4.1.** Вычеты, выбранные из полной системы вычетов и взаимно-простые с модулем  $m$  образуют приведенную систему вычетов

**Def 3.4.2.** Количество вычетов в приведенной системе вычетов обозначается  $\varphi(m)$  – функция Эйлера.

**Lm 3.4.3.** Если  $p$  – простое, то

$$\varphi(p) = p - 1$$

**Теорема 3.4.4.**  $(a, m) = 1, x$  пробегает приведенную систему вычетов  $\Rightarrow ax$  тоже пробегает приведенную систему вычетов по  $\pmod{m}$

*Доказательство.*  $x \rightarrow \varphi(m), ax \rightarrow \varphi(m)$

$(ax, m) = (a, m) = 1 \Rightarrow ax$  набор чисел из  $\varphi(m)$ , взаимно-простых с  $m \Rightarrow \{ax\}$  – приведенная система вычетов. ■

### 3.5. Функция Эйлера

**Lm 3.5.1.**  $p$  – простое,  $\alpha > 0$

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$$

*Доказательство.*  $1, 2, 3, \dots, p, 2p, 3p, \dots, p \cdot p, \dots, p^\alpha - 1$ . Выбросим из этого множества числа, делящиеся на  $p$ . Таких чисел будет ровно количество коэффициентов при  $p$  до  $p^\alpha$ , т.е.  $p^{\alpha-1}$  ■

**Def 3.5.2.** Функция  $\Theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  называется мультипликативной, если

$$(a, b) = 1 \Rightarrow \Theta(ab) = \Theta(a) \cdot \Theta(b)$$

**Теорема 3.5.3** (Мультипликативность функции Эйлера).  $\varphi$  мультипликативна

*Доказательство.*  $(a, b) = 1$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & b \\ b+1 & b+2 & b+3 & \dots & 2b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a-1)b+1 & (a-1)b+2 & (a-1)b+3 & \dots & ab \end{array}$$

Количество чисел, взаимно-простых с  $b : \forall$  строка :  $kb+r, k=0, \dots, a-1, 1 \leq r \leq b$ . Рассмотрим  $k$ -ю строку:  $(kb+r, b) = 1 \Rightarrow (r, b) = 1$ . Количество чисел  $kb+r : (kb+r, b) = 1 = \varphi(b) \Rightarrow$  есть  $\varphi(b)$  столбцов, в которых числа  $(kb+r, b) = 1$ . Найдем в этих столбцах числа, взаимно-простые с  $a$ .  $\forall$  столбец :  $xb+r, x=0, \dots, a-1 \Rightarrow xb+r$  – полная система вычетов по  $\pmod{a} \Rightarrow$  среди  $\{xb+r\}$  чисел, взаимно-простых с  $a = \varphi(a) \Rightarrow$  всего чисел, взаимно-простых с  $ab = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$  ■

*Следствие 3.5.4.*  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$  – каноническое разложение  $\Rightarrow \varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})$

*Замечание 3.5.5.*  $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{p_k})$

**Теорема 3.5.6** (Теорема Эйлера).  $(m, a) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

*Доказательство.*  $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}$  – приведенная система вычетов по  $\pmod{m}$   
 $\Rightarrow ar_1, ar_2, \dots, ar_{\varphi(m)}$  – приведенная система вычетов по  $\pmod{m}$ . Пусть  $ar_i = \rho_i$

$$\Rightarrow ar_1 \cdot ar_2 \cdot \dots \cdot ar_{\varphi(m)} = \rho_1 \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_{\varphi(m)}$$

$$a^{\varphi(m)} r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(m)} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_{\varphi(m)} \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

■

**Теорема 3.5.7** (Теорема Ферма).  $p$  – простое,  $(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

*Доказательство.*  $\varphi(p) = p - 1$

■

**Def 3.5.8.**  $\mathbb{Z}_m^* = \{r : 0 \leq r < m, (r, m) = 1\}$  – приведенная система вычетов по  $\pmod{m}$

**Теорема 3.5.9.**  $\mathbb{Z}_m^*$  – коммутативная группа по умножению

*Доказательство.*  $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_m^*$ .  $(r_1, m) = (r_2, m) = 1 \Rightarrow (r_1 \cdot r_2, m) = 1 \Rightarrow r_1 \cdot r_2 \in \mathbb{Z}_m^*, 1 \in \mathbb{Z}_m^*$   
 $r \in \mathbb{Z}_m^*$ , то  $r^{-1} = r^{\varphi(m)-1} \Rightarrow r^{\varphi(m)-1} \cdot r = r^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

■

## 3.6. Сравнения с одним неизвестным

**Def 3.6.1.**  $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ . Решением этого сравнения называется  $x_0 : f(x_0) \equiv 0 \pmod{m}$ .

Решения  $x_1$  и  $x_2$  называются эквивалентными, если  $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$

Решить сравнение – найти решений из полной системы вычетов.

**Теорема 3.6.2** (Решение линейного сравнения).  $ax \equiv b \pmod{m}, (a, m) = d$

1.  $d \nmid b \Rightarrow$  решений нет.

2.  $d \mid b \Rightarrow \exists d$  решений :  $x = x_0 + m_1 t, t = 0, 1, \dots, d - 1, m_1 = \frac{m}{d}, x_0$  – какое-то решение

*Доказательство.* 1. Очевидно

2. Если  $(a, m) = 1, x$  пробегает полную систему вычетов по  $\pmod{m} \Rightarrow ax$  – полная система вычетов по  $\pmod{m} \Rightarrow \exists x_0 : ax_0 \equiv b \pmod{m}$

Если  $(a, m) = d, a = a_1 d, m = m_1 d, b = b_1 d, (a_1, m_1) = 1$

$a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1} - \exists$  решение  $x_0 : a_1 x_0 \equiv b_1 \pmod{m_1}$ .  $x = x_0 + m_1 t$  – решение  $ax \equiv b \pmod{m}$

$$a(x_0 + m_1 t) = a_1 d x_0 + a_1 d m_1 t \equiv b_1 d \pmod{m}$$

Посмотрим, какие решения принадлежат полной системе вычетов, т.е.  $0 \leq x_0 + m_1 t < m$ .

Ясно, что такие решения будут при  $t = 0, 1, \dots, d - 1$ .

■

**Теорема 3.6.3** (Методы решения  $ax \equiv b \pmod{m}, (a, m) = 1$ ). 1.  $ax \equiv b \pmod{m} \Rightarrow x \equiv a^{\varphi(m)-1} \cdot b \pmod{m}$

2.  $ax \equiv b \pmod{m} \Rightarrow x \equiv (-1)^n p_{n-1} \cdot b \pmod{m}$   
 $\frac{m}{a}$  – непрерывная дробь,  $p_{n-1}$  – числитель  $(n-1)$ -й подходящей дроби,  $\frac{p_n}{q_n} = \frac{m}{a}$

*Доказательство.*  $p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k = (-1)^{k-1}, k = n$

$$m \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot a = (-1)^{n-1} \Rightarrow -p_{n-1} \cdot a \equiv (-1)^{n-1} \pmod{m}$$

$$ap_{n-1}b = (-1)^n b \pmod{m} \Rightarrow a \cdot (-1)^n p_{n-1} \cdot b \equiv b \pmod{m} \Rightarrow x \equiv (-1)^n p_{n-1} \cdot b \pmod{m}$$

■

### 3.7. Диофантовы уравнения

**Def 3.7.1.** Уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

где  $a_i \in \mathbb{Z}, x_i$  – переменные и  $\exists i : a_i \neq 0$ , называется диофантовым.

**Lm 3.7.2.**  $ax + by = c, a, b \neq 0$ . Если  $x_0 : ax_0 \equiv c \pmod{b} \Rightarrow (x_0, \frac{ax_0 - c}{b})$  – решения уравнения

*Доказательство.*  $by \equiv c - ax$  при  $x = x_0$  и  $c - ax : b \Rightarrow \frac{c - ax_0}{b} \in \mathbb{Z}$

■

**Теорема 3.7.3.**  $ax + by = c, d = (a, b), d|c$ . Пусть  $(x_0, y_0)$  – какое-то решение  $\Rightarrow$  все решения:

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{b}{d}t \\ y = y_0 + \frac{a}{d}t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

### 3.8. Системы сравнений

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv b_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

**Теорема 3.8.1** (Китайская теорема об остатках).  $(m_i, m_j) = 1, i \neq j$ . Тогда

1. Решение системы существует:

$$x \equiv \frac{M}{m_1} \cdot M'_1 b_1 + \frac{M}{m_2} \cdot M'_2 b_2 + \dots + \frac{M}{m_k} \cdot M'_k b_k \pmod{M}$$

$$M = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k, M'_i : M'_i \cdot \frac{M}{m_i} \equiv 1 \pmod{m_i}$$

2. Решение единственно

*Доказательство.* 1. Подставим в  $i$ -е уравнение:

$$x \equiv \frac{M}{m_i} M'_i b_i \pmod{m}_i \Rightarrow x \equiv b_i \pmod{m}_i$$

2. Без доказательства. ■

**Теорема 3.8.2** (Теорема Вильсона).  $p$  – простое  $\Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

*Доказательство.* " $\Rightarrow$ ".  $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$  – группа,  $a \in \mathbb{Z}_p^*$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1, 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \Rightarrow 1 \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

$$a \neq a^{-1} \Rightarrow 2 \cdot \dots \cdot (p-2) = 1$$

" $\Leftarrow$ ". Предположим, что

$$k|p, k > 1, k \neq p \Rightarrow k < p \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \not\equiv k \Rightarrow (p-1)! \equiv 0 \pmod{p}$$
■

*Алгоритм 3.8.3* (Алгоритм RSA). 1. Выбираем  $p, q$  – простые

2.  $n = p \cdot q, \varphi(n) = (p-1)(q-1)$

3. Выбираем  $e : (e, \varphi(n)) = 1$

4. Решаем  $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)} \Rightarrow$  находим  $d$

Шифрование:

1.  $m$  – текст (в виде цифрового кода)

2.  $c \equiv m^e \pmod{n} \Rightarrow c$  – шифр

Ключи:

- $(e, n)$  – открытый ключ
- $(d, n)$  – закрытый ключ

Дешифрование:

$$c^d \equiv m^{ed} \equiv m \pmod{n}$$

Трудность  $n = p \cdot q$ .

## Раздел #4: Комплексные числа

**Def 4.0.1.** Множество  $\{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$  называется множеством комплексных чисел, если:

1.  $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$
2.  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3.  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
4.  $a = (a, 0)$

Проверим корректность:

- 1 и 4:  $a = b \Leftrightarrow (a, 0) = (b, 0)$
- 2 и 4:  $a + b = (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) = a + b$
- 3 и 4:  $a \cdot b = (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0) = ab$

**Теорема 4.0.2.**  $\mathbb{C}$  образует коммутативное кольцо с единицей.

*Доказательство.*  $(0, 0)$  – нейтральный элемент по сложению.  $(a, b) : -(a, b) = (-a, -b)$  – обратный элемент по сложению. Остальные свойства несложно проверяются. ■

**Def 4.0.3.** Множество  $K$  называется полем, если  $K$  является коммутативным кольцом с единицей и

$$\forall x \in K^* = K \setminus \{0\} \exists x^{-1} \in K : x \cdot x^{-1} = 1$$

**Теорема 4.0.4.**  $\mathbb{Z}_p$  ( $p$  – простое),  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  – поля.

*Доказательство.*  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  – поля.

$\mathbb{Z}_p$  – коммутативное кольцо с единицей,  $\mathbb{Z}_p^*$  – мультипликативная группа  $\Rightarrow \mathbb{Z}_p$  – поле.

$$(a, b) \in \mathbb{C}^*, (a, b)^{-1} = \frac{(a, -b)}{a^2 + b^2} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

$$(a, b) \cdot \frac{(a, -b)}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2, 0)}{a^2 + b^2} = (1, 0)$$

■

**Def 4.0.5.**  $(a, b)$  и  $(a, -b)$  – комплексно-сопряженные числа.

$|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$  – модуль комплексного числа. Заметим, что  $|(a, 0)| = \sqrt{a^2 + 0} = \sqrt{a^2} = |a|$

$$(a, b) \cdot (a, -b) = a^2 + b^2 = |(a, b)|^2$$

### 4.1. Алгебраическая форма записи комплексного числа

**Def 4.1.1.** Положим  $i = (0, 1)$ . Тогда

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) \cdot (1, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$

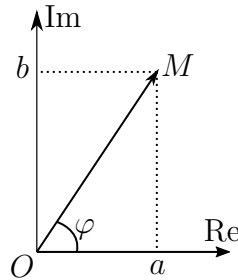
## 4.2. Геометрическое представление комплексных чисел

**Def 4.2.1.**  $z = a + bi$ .  $\operatorname{Re} z = a$  – вещественная часть числа  $z$ ,  $\operatorname{Im} z = b$  – мнимая часть.

$z = a + bi \mapsto$  точка на комплексной плоскости.  $(a, b)$  – радиус-вектор  $OM$ .

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  – длина вектора  $OM$ .  $\varphi = (\operatorname{Re}, OM)$  – аргумент комплексного числа.

$\arg z = \varphi, \varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \varphi_0 \in [0; 2\pi)$  или  $\varphi_0 \in (-\pi; \pi]$ .



## 4.3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

**Def 4.3.1.**  $a = \rho \cos \varphi, b = \rho \sin \varphi \Rightarrow z = a + bi = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, z \in I \text{ и } II \text{ четверти} \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi, z \in III \text{ и } IV \text{ четверти} \end{cases}$$

**Def 4.3.2** (Неравенство треугольника).  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
2.  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

*Доказательство.* 1.  $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2 + i(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)|^2 = \\ &= \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2\rho_1 \rho_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \rho_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \rho_1^2 \sin^2 \varphi_1 + 2\rho_1 \rho_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \rho_2^2 \sin^2 \varphi_2 = \\ &= \rho_1^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \rho_2^2 \leq \rho_1^2 + 2\rho_1 \rho_2 + \rho_2^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

2.

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \Rightarrow ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

■

*Замечание 4.3.3.*  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_1 \parallel z_2$

**Теорема 4.3.4** (Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме).  $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

*Доказательство.* Достаточно перемножить, заметить формулу косинуса суммы и синуса суммы ■

*Следствие 4.3.5* (Формула Муавра).  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

*Доказательство.* 1.  $n \geq 0$ . По индукции:  $n = 1$  очевидно.

$n - 1 \rightarrow n$  :

$$z^n = z^{n-1} \cdot z = \rho^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi) \cdot \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

2.  $n < 0$ . Пусть  $n = -m, m > 0$ . Тогда

$$z^n = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\rho^m(\cos m\varphi + i \sin m\varphi)} = \rho^{-m} \frac{\cos m\varphi - i \sin m\varphi}{1} = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

## 4.4. Извлечение корней из комплексных чисел

**Def 4.4.1.** Корнем  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$  называется  $w \in \mathbb{C} : w^n = z$

**Теорема 4.4.2.**  $\forall z \in \mathbb{C}^* \exists n$  корней  $n$ -й степени  $z_k, k = 0, 1, \dots, n-1$

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}), z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

*Доказательство.*  $w^n = z, w = R(\cos \Theta + i \sin \Theta)$

$$\Rightarrow (w^n = z) : R^n(\cos(n\Theta) + i \sin(n\Theta)) = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[n]{\rho}, \cos(n\Theta) = \cos \varphi, \sin(n\Theta) = \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\Theta = \varphi + 2\pi k \Rightarrow \Theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \Rightarrow \text{любой корень имеет вид } z_k$$

## 4.5. Корни из единицы

**Def 4.5.1.** Корень из 1  $n$ -й степени  $\varepsilon_k$  называется первообразным, если он принадлежит показателю, т.е.  $\forall m : 0 < m < n \rightarrow \varepsilon^m \neq 1$

**Теорема 4.5.2** (О первообразном корне). Корень из 1  $n$ -й степени является первообразным  $\Leftrightarrow (k, n) = 1$ .

*Доказательство.* " $\Rightarrow$ ".  $\varepsilon_k$  – первообразный корень. Предположим, что  $(k, n) = d > 1, k = k_1 d, n = n_1 d, n_1 < n$ . Тогда

$$\varepsilon_k^{n_1} = \cos \frac{2\pi k n_1}{n} + i \sin \frac{2\pi k n_1}{n} = \cos \frac{2\pi k_1 d n_1}{n} + i \sin \frac{2\pi k_1 d n_1}{n} = 1?! \Rightarrow d = 1$$

" $\Leftarrow$ ".  $(k, n) = 1$ . Предположим, что  $\varepsilon_k^m = 1 \Rightarrow \cos \frac{2\pi k m}{n} = 1, \sin \frac{2\pi k m}{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi k m}{n} = 2\pi s \Rightarrow \frac{k m}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n | m \Rightarrow m \geq n$$

■

Свойства:

1.  $\alpha$  – корень из 1 степени  $n, \beta$  – корень из 1 степени  $m \Rightarrow \alpha \cdot \beta$  – тоже корень из 1.

*Доказательство.*  $(\alpha\beta)^{\text{lcm}(m,n)} = 1$

■

2. Если  $\alpha$  – корень из 1 степени  $n$ , то  $\alpha^{-1}$  – корень из 1 степени  $n$

*Доказательство.*  $(\alpha^{-1})^n = \frac{1}{\alpha^n} = 1$

■

3.  $u_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$  – мультипликативная коммутативная группа.

$u_n = \{\varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \dots, \varepsilon_k^{n-1}, 1\}, \varepsilon_k$  – первообразный корень.

**Def 4.5.3.** Группа  $G$  называется циклической, если  $G = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ . Пишут  $G = \langle a \rangle$  – группа  $G$  порождается элементом  $a$ .

**Def 4.5.4.**  $G_1$  – группа с операцией  $*_1, G_2$  – группа с операцией  $*_2$ . Говорят, что группы  $G_1$  и  $G_2$  **изоморфны**, если  $\exists \varphi : G_1 \rightarrow G_2$  :

- $\varphi$  – биективно
- $\forall x, y \in G_1 \rightarrow \varphi(x *_1 y) = \varphi(x) *_2 \varphi(y)$

**Теорема 4.5.5.**  $u_n \simeq \mathbb{Z}_n$

*Доказательство.*  $\varepsilon$  – первообразный корень, т.е.  $u_n = \{\varepsilon^k\}, k = 0, \dots, n-1$

$\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow u_n, \varphi(k) = \varepsilon^k, \varphi$  – биекция

$$\varphi(k+m) = \varepsilon^k \cdot \varepsilon^m = \varphi(k) \cdot \varphi(m)$$

■

## 4.6. Показательная форма записи комплексного числа

**Def 4.6.1.**  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  – показательная форма записи комплексного числа.

**Def 4.6.2** (Формула Эйлера).  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$



Свойства комплексных чисел:

1.  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

2.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3.  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

4.  $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

5.  $i(z - \bar{z}) \in \mathbb{R}$

## Раздел #5: Многочлены

**Def 5.0.1.**  $R$  – коммутативное кольцо с 1. Множество  $\{(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots), \exists n : \forall m > n \rightarrow a_m = 0\}$

1.  $\alpha \in R \rightarrow \alpha(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots, \alpha a_n, \dots)$
2.  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) + (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots)$
3.  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$ , где

$$c_k = \sum_{s+t=k} a_s b_t$$

4.  $\forall a \in R \rightarrow a = (a, 0, 0, \dots)$

Это множество называется многочленами над  $R$ .

Корректность определения:

- все действия 1, 2, 3 не выводят из множества.
- Согласование 1 и 4, 2 и 4, 3 и 4.

**Теорема 5.0.2.** Множество многочленов над  $R$  – коммутативное кольцо с 1

*Доказательство.*  $(0, 0, \dots)$  – нулевой элемент,  $(1, 0, 0, \dots)$  – единица. Ассоциативность несложно доказывается. ■

**Def 5.0.3.** Введём  $x = (0, 1, 0, \dots)$ . Тогда  $x^2 = (0, 1, 0, 0, \dots) \cdot (0, 1, 0, 0, \dots) = (0, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1, 0, \dots) = (0, 0, 1, 0, \dots)$

$$\Rightarrow x^k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

Тогда

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = (a_0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, a_k, \dots) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Обозначение:  $R[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n\}$  – кольцо многочленов над  $R$  от переменной  $x$ .

**Def 5.0.4.** Коэффициент  $a_n \neq 0 : a_m = 0, m > n$  называется старшим коэффициентом. Если  $n \geq 1$ , то  $n$  – степень многочлена.

$$\deg(f) = n$$

Если  $a_0$  – старший коэффициент. Если  $a_0 \neq 0$ , то  $\deg(f) = 0$ . Если  $a_0 = 0$ , то  $\deg(f) = -\infty$

**Теорема 5.0.5.**  $f, g \in R[x]$

1.  $\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$
2.  $\deg(f \cdot g) \leq \deg f + \deg g$

*Доказательство.*  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ . Тогда если  $n > m$ , то

$$f + g = a_nx^n + \dots \Rightarrow \deg(f + g) \leq \deg n$$

$$f \cdot g = a_n \cdot b_mx^{n+m} + \dots \Rightarrow \deg(f \cdot g) \leq n + m$$

■

**Пример 5.0.6.**  $\mathbb{Z}_6[x]$ .  $f = 2x^2 + 1, g = 3x + 2$

$$f \cdot g = 6x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = 4x^2 + 3x + 2 \Rightarrow \deg(f \cdot g) = 2 < \deg f + \deg g = 3$$

**Def 5.0.7.** Коммутативное кольцо с 1 без делителей нуля называется областью целостности.

**Теорема 5.0.8.**  $R$  – область целостности  $\Rightarrow R[x]$  – область целостности.

*Доказательство.*  $f = a_nx^n + \dots, g = b_mx^m + \dots \Rightarrow f \cdot g = a_nb_mx^{n+m} + \dots, a_n \cdot b_m \neq 0$  т.к.  $R$  – область целостности  $\Rightarrow R[x]$  – область целостности. ■

**Lm 5.0.9** (О сокращении).  $R$  – область целостности,  $a, b, c \in R, a \neq 0$ . Тогда  $ab = ac \Rightarrow b = c$ .

*Доказательство.*  $ab = ac \Rightarrow a(b - c) = 0 \Rightarrow b - c = 0$  ■

**Теорема 5.0.10** (О делении с остатком).  $R$  – область целостности,  $\forall f \in R[x], \forall g \in R[x]$  с обратимым старшим коэффициентом  $\exists! q, r \in R[x] : f = g \cdot q + r, \deg r < \deg g$

*Доказательство.* Существование.  $\deg f = n, \deg g = m, n < m \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$

$n \geq m$ . Индукция по  $n$ .  $n = 0 \Rightarrow a_0 = b_0(b_0^{-1}a_0) + 0$ .

$n - 1 \mapsto n$ .  $f = a_nx^n + \dots + a_0, g = b_mx^m + \dots + b_0$ . Рассмотрим

$$\bar{f} = f - a_nb_m^{-1}x^{n-m} \cdot g \Rightarrow \deg \bar{f} < n$$

$$\Rightarrow \text{по предположению индукции } \bar{f} = g \cdot q + r \Rightarrow f - a_nb_m^{-1}x^{n-m}g = g \cdot q + r$$

$$\Rightarrow f = (g + a_nb_m^{-1}x^{n-m})g + r, \deg r \leq \deg g$$

Единственность. Предположим, что

$$f = g \cdot q_1 + r_1, f = g \cdot q_2 + r_2$$

$\Rightarrow g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ . Если  $q_1 \neq q_2, r_1 \neq r_2$ , то  $\deg(g(q_1 - q_2)) \geq m, \deg(r_2 - r_1) < m$  – противоречие. ■

**Def 5.0.11.**  $f = a_nx^n + \dots + a_0, c \in R$ . Тогда  $f(c) = a_nc^n + \dots + a_1c + a_0$  – значение многочлена в точке  $c$ .

Если  $f(c) = 0$ , то  $c$  – корень многочлена.

**Теорема 5.0.12** (Теорема Безу).  $R$  – область целостности,  $a \in R, f \in R[x]$

$$\Rightarrow f = (x - a) \cdot q(x) + f(a)$$

*Доказательство.*  $f = (x - a)q + r, \exists! q, r, \deg r < 1 \Rightarrow r \in R. x = a \Rightarrow f(a) = 0 + r \Rightarrow r = f(a).$  ■

*Следствие 5.0.13.*  $f : x - a \Leftrightarrow f(a) = 0$

**Def 5.0.14.** Многочлен  $f \in R[x]$  со старшим коэффициентом 1 называется нормализованным.

## 5.1. Корни многочлена

**Def 5.1.1.** Если многочлен  $f = (x - c)^k q, q(c) \neq 0$ , то  $c$  – корень кратности  $k$ .  
Иначе, если  $(x - c)^k | f, (x - c)^{k+1} \nmid f$ , то  $c$  – корень кратности  $k$ .

**Теорема 5.1.2** (О количестве корней многочлена). Число корней многочлена  $f$  с учетом их кратности  $\leq \deg f$

*Доказательство.* Индукция по  $\deg f$

$\deg f = 0 \Rightarrow$  всё верно. Если нет корней  $\Rightarrow$  всё верно.

Пусть для  $\deg f < n$  доказано. Докажем для  $\deg f = n$ .

$c_1$  – корень  $f \Rightarrow f = (x - c_1)^k g(x)$ , если  $c_2 \neq c_1$  – другой корень  $\Rightarrow f(c_2) = (c_2 - c_1)^k g(c_1) = 0 \Rightarrow c_2$  – корень  $g$ .  $\deg g = n - k < n \Rightarrow$  корней  $g \leq n - k \Rightarrow$  корней  $f \leq k + n - k = n$ . ■

*Следствие 5.1.3.*  $f, g \in R[x]$ . Пусть  $\max\{\deg f, \deg g\} = n$ . Предположим, что  $\exists c_1, \dots, c_{n+1} \in R : f(c_i) = g(c_i) \Rightarrow f$  совпадает с  $g$

*Доказательство.*  $h = f - g, \deg h \leq n, h(c_i) = 0, i = 1, \dots, n + 1 \Rightarrow h \equiv 0$  ■

Формальное равенство многочленов.

$$f = g = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

Функциональное равенство многочленов.

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in R$$

**Пример 5.1.4.**  $\mathbb{Z}_5. f = x^5 + x^4, g = x^4 + x$ .

$$f - g = x^5 - x, x^5 \equiv x \pmod{5} \Rightarrow x^5 - x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow f(x) = g(x)$$

*Замечание 5.1.5.*  $R$  – бесконечно, то  $\forall x \in R f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g$

**Упражнение 5.1.6.** Доказать утверждение выше

## 5.2. Наибольший общий делитель

Пусть  $R = K$  – поле.

**Def 5.2.1.**  $R$  – область целостности,  $a, b \in R$ .  $d = \gcd(a, b)$ , если

1.  $d|a, d|b$
2.  $c|a, c|b \Rightarrow c|d$

**Теорема 5.2.2** (О НОД для многочленов).  $\forall f, g \in K[x]$

1.  $\exists d = \gcd(f, g)$  определен однозначно с точностью до ассоциированного элемента
2.  $\exists h_1, h_2 \in K[x] : h_1 f + h_2 g = d$

*Доказательство.* Полностью аналогично доказательству о существовании нод над  $\mathbb{Z}$  ■

**Def 5.2.3.**  $R$  – область целостности.  $R^*$  – обратимые элементы. Если  $a, b \in R, a = \varepsilon b, \varepsilon \in R^*$ , то  $a, b$  – ассоциированные.

**Пример 5.2.4.**  $K$  – поле,  $K^* = K \setminus \{0\} \Rightarrow$  все элементы ассоциированы.

**Пример 5.2.5.**  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}, a = -b$

**Пример 5.2.6.**  $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n^* = \{m \in \mathbb{Z} : (m, n) = 1\}$

**Упражнение 5.2.7.** Доказать.

**Пример 5.2.8.**  $K[x], (K[x])^* = K^*$

**Def 5.2.9.**  $f, g \in K[x]$  – взаимно-простые, если  $(f, g) = 1$

## 5.3. Факториальность кольца многочленов

**Def 5.3.1.**  $R$  – область целостности.  $p \in R$  :

1.  $p \notin R^*$
2.  $p = ab \Rightarrow a$  или  $b \in R^*$

Тогда  $p$  – простой (неразложимый) элемент  $R$ .

**Def 5.3.2.** Если в области целостности  $R \forall a \in R \setminus \{0\} \exists a = \varepsilon \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_s, \varepsilon \in R^*, p_1, \dots, p_s$  – простые, определенное с точностью до порядка и умноженное на  $\varepsilon$ , то  $R$  – факториальное кольцо.

**Def 5.3.3.** Простой элемент кольца  $K[x]$  называется неприводимым многочленом.

**Пример 5.3.4.**  $x^2 - 2$  – неприводим над  $\mathbb{Q}$

**Пример 5.3.5.**  $\forall$  многочлен  $x - a$  неприводим.

**Упражнение 5.3.6.** Над бесконечным полем  $K$  существует бесконечно много неприводимых многочленов.

Свойства:

1.  $f \in K[x]$ ,  $\varphi$  – неприводим над  $K \Rightarrow$  либо  $\varphi|f$ , либо  $(f, \varphi) = 1$ .

*Доказательство.*  $d = (f, \varphi)$ . Если  $d \neq 1 \Rightarrow d|f, d|\varphi \Rightarrow d = \varepsilon \cdot \varphi, \varepsilon \in K^* \Rightarrow \varphi|f$  ■

2.  $\varphi_1, \varphi_2 \in K[x]$  – неприводимы. **TODO**

3.  $f, g, \varphi \in K[x]$ ,  $\varphi$  – неприводим,  $\varphi|fg \Rightarrow \varphi|f \vee \varphi|g$

*Доказательство.*  $\varphi \nmid f \Rightarrow (\varphi, f) = 1 \Rightarrow \exists h_1, h_2 \in K[x] : h_1\varphi + h_2f = 1 \Rightarrow h_1\varphi g + h_2fg = g \Rightarrow \varphi|(h_1\varphi g + h_2fg) \Rightarrow \varphi|g$  ■

4.  $\varphi \in K[x]$  – неприводим,  $f_1, \dots, f_s \in K[x]$ ,  $\varphi|f_1 \cdot \dots \cdot f_s \Rightarrow \exists i, 1 \leq i \leq s : \varphi|f_i$

**Lm 5.3.7.**  $\forall f \in K[x] : \deg f \geq 1$  делится хотя бы на один неприводимый многочлен.

*Доказательство.*  $\deg f = n$ .  $n = 1$  – верно. Предположим, что для  $m < n$  тоже всё верно.

$f$  – приводим  $\Rightarrow f = f_1 \cdot g, \deg f_1 < n \Rightarrow \exists$  неприводимый многочлен  $\varphi$ , который делит  $f_1 \Rightarrow \varphi|f$ . ■

**Теорема 5.3.8.**  $K$  – поле.  $K[x]$  – факториальное кольцо.

*Доказательство.* Существование.  $f \in K[x]$ . Если  $f$  – неприводим, то очевидно. Если  $f = \varphi_1 \cdot f_1, \varphi$  – неприводим;  $f_1 = \varphi_2 \cdot f_2$  и т.д.  $\Rightarrow f = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \dots \cdot \varphi_k$

Единственность.  $f = \varepsilon \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k = \eta \psi_1 \psi_2 \dots \psi_s, \varepsilon, \eta \in K^*, \varphi_i, \psi_j$  – неприводимы.  $k \leq s \Rightarrow \varphi_1|\eta \psi_1 \psi_2 \dots \psi_s \Rightarrow \varphi_1|\psi_j \Rightarrow \varphi_1 = \psi_j \Rightarrow \varepsilon^{-1} \eta \psi_{s-k} \dots \psi_s = 1 \Rightarrow \varepsilon = \eta, \psi_{s-k} \dots \psi_s = 1$  ■

**Def 5.3.9.**  $f = \varepsilon \cdot \varphi_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \varphi_s^{k_s}$ , где  $\varepsilon \in K^*, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$  – различные неприводимые многочлены над  $K, k_1, k_2, \dots, k_s \geq 1 \in \mathbb{Z}$  – каноническое разложение многочлена  $f$ .

## 5.4. Каноническое разложение многочлена над $\mathbb{C}$

**Def 5.4.1.** Поле  $K$  называется алгебраически замкнутым, если любой многочлен  $\deg \geq 1$  имеет хотя бы один корень.

**Пример 5.4.2.**  $\mathbb{Q}(x^2 - 2), \mathbb{R}(x^2 + 1), \mathbb{Z}_p$  не являются алгебраически замкнутыми.

**Теорема 5.4.3** (Основная теорема высшей алгебры).  $\mathbb{C}$  – алгебраически замкнуто.

*Следствие 5.4.4.* Каноническое разложение многочлена над  $\mathbb{C}$

$$f = a_n(x - z_1)^{k_1}(x - z_2)^{k_2} \dots (x - z_s)^{k_s}$$

$$z_1, \dots, z_s \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$$

## 5.5. Каноническое разложение многочлена над $\mathbb{R}$

**Def 5.5.1.**  $R_1, R_2$  – кольца с 1. Гомоморфизмом колец  $R_1$  и  $R_2$  называется  $\varphi : R_1 \rightarrow R_2$  :

1.  $\forall x, y \in R_1 \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2.  $\forall x, y \in R_1 \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
3.  $\varphi(1) = 1$

**Def 5.5.2.** Биективный гомоморфизм колец – **изоморфизм**, при этом сами кольца называются **изоморфными**.

**Пример 5.5.3.** 1.  $id : R \rightarrow R$  – изоморфизм.

2.  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, \varphi(a) = a \pmod{n}$  – гомоморфизм.

*Доказательство.*

$$\varphi(a + b) = a + b \pmod{n} = \begin{cases} a + b, 0 \leq a + b < n \\ a_0 + b_0 \equiv a + b \pmod{n} \end{cases} = a \pmod{n} + b \pmod{n} = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$ab \equiv a_0 b_0 \pmod{n} \Rightarrow \varphi(ab) = ab \pmod{n} = (a \pmod{n}) \cdot (b \pmod{n}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

$$\varphi(1) = 1$$

$\Rightarrow \varphi$  – гомоморфизм.

$\varphi(kn) = 0 \Rightarrow$  не инъективно  $\Rightarrow$  не изоморфизм. ■

3.  $\varphi : R \rightarrow R[x], \varphi(r) = r$  – вложение – гомоморфизм.

Свойства:

1.  $\varphi(0) = 0$

*Доказательство.*  $\varphi(x) = \varphi(x + 0) = \varphi(x) + \varphi(0) \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$  ■

2.  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

*Доказательство.*  $0 = \varphi(x - x) = \varphi(x) + \varphi(-x) \Rightarrow \varphi(-x) = -\varphi(x)$  ■

*Замечание 5.5.4.* Противоположный элемент в кольце определен однозначно.

*Доказательство.* Пусть  $x$  имеет  $y$  и  $z$  – противоположные элементы. Тогда

$$z = 0 + z = y + x + z = y + 0 = y$$
■

**Def 5.5.5.** Поле  $K_1$  и  $K_2$  называются изоморфными, если они изоморфны как кольца.

*Замечание 5.5.6.* При этом  $\forall x \in K, \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$

$$1 = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) \Rightarrow \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$$

Обратный элемент определен однозначно: если  $y, z$  – обратные к  $x$

$$(yx = zx = 1) \Rightarrow y = yxz = z$$

**Def 5.5.7.** Изоморфизм  $\varphi : K \rightarrow K$  ( $K$  – поле) называется автоморфизмом.

**Пример 5.5.8.** 1. Найдем все автоморфизмы  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ .  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  – произвольный автоморфизм.  $\varphi(1) = 1 \Rightarrow n \in \mathbb{Z}, n > 0$

$$\varphi(n) = \varphi(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n) = \underbrace{\varphi(1) + \dots + \varphi(1)}_n = n$$

$$\Rightarrow \varphi(-n) = -n \Rightarrow \varphi|_{\mathbb{Z}} = id$$

$$q \cdot \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \varphi\left(\frac{1}{q}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \varphi\left(\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}\right) = \varphi(1) = 1 \Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q} \Rightarrow \varphi\left(\frac{p}{q}\right) =$$

$$p \cdot \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} \Rightarrow \text{автоморфизмы } \mathbb{Q} = \{id\}$$

2. автоморфизмы  $\mathbb{R} = \{id\}$

3.  $\mathbb{C}$ , автоморфизмы:  $id, \varphi(z) = \bar{z}$

**Def 5.5.9.**  $K$  – поле, тогда  $k$  – подполе поля  $K$ , если  $k \subset K$  и  $k$  – поле.

**Lm 5.5.10.**  $f \in k[x], c \in K, k \subset K, f(c) = 0, \varphi : K \rightarrow K$  – автоморфизм,  $\varphi|_k = id \Rightarrow \varphi(c)$  – корень  $f$ .

*Доказательство.*  $f = a_n x^n + \dots + a_0, a_i \in k, i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \varphi(a_n x^n + \dots + a_0) = \varphi(a_n) \cdot \varphi(x^n) + \dots + \varphi(a_1) \varphi(x) + \varphi(a_0) = \\ &= a_n \varphi(x)^n + \dots + a_1 \varphi(x) + a_0 = f(\varphi(x)) \end{aligned}$$

$x = c : \varphi(f(c)) = \varphi(0) = 0$ . С другой стороны  $\varphi(f(c)) = f(\varphi(c)) \Rightarrow \varphi(c)$  корень  $f$ . ■

**Теорема 5.5.11** (Неприводимые многочлены над  $\mathbb{R}$ ). Неприводимые многочлены над  $\mathbb{R}$

1.  $x - \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

2.  $ax^2 + bx = c, b^2 - 4ac < 0$

*Доказательство.*  $f$  – неприводимый многочлен над  $\mathbb{R}, \deg f \geq 2$ , корней из  $\mathbb{R}$  нет. Пусть  $\alpha + \beta i$  – комплексный корень  $f$  ( $\beta \neq 0$ ). По лемме  $\alpha - \beta i$  – тоже корень  $\Rightarrow f \div (x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i)$ .

$$(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 \in \mathbb{R}[x] - \text{неприводим}$$

$$\Rightarrow f = a(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2), a \in \mathbb{R}^* \quad \blacksquare$$

*Следствие 5.5.12.* Каноническое разложение над  $\mathbb{R}$ .

$$f = a(x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_s)^{k_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{r_t}$$

где  $p_i^2 - 4q_i < 0, i = 1, \dots, t$ .



## 5.6. Уравнения 3-й степени

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

**Теорема 5.6.1** (Метод Кардано). 1.  $x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$  (поделили на  $a$ )

$$2. x = y - \frac{b'}{3} \Rightarrow y^3 + py + q = 0$$

$$3. y = u + v : (u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q = 0 \Leftrightarrow (u + v)(3uv + p) + u^3 + v^3 + q = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3uv + p = 0 \\ u^3 + v^3 + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{p}{3u} \\ u^3 - \frac{p}{27u^3} + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{p}{3u} \\ 27u^6 + 27qu^3 - p^3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  получим три несимметричных решения  $(u, v)$

4. Находим  $y$  и  $x$ .

## 5.7. Уравнения 4-й степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

**Теорема 5.7.1** (Метод Феррари). 1.  $x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e' = 0$  (поделим на  $a$ )

$$2. x = y - \frac{b'}{4} \Rightarrow y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma$$

$$3. \text{ Введем } u : (y^2 + \alpha + u)^2 - (\alpha y^2 + uy^2 + 2\alpha u - \beta y - \gamma + u^2 + \alpha^2) = 0$$

Выбираем  $u : (\alpha + u)y^2 + \beta y + (u + \alpha)^2 - \gamma - \text{полный квадрат} \Leftrightarrow \beta^2 - u(\alpha + u)((u + \alpha)^2 - \gamma) = 0$   
– уравнение третьей степени. Находим  $u$ .

4. Раскладываем разность квадратов: 2 квадратных уравнения относительно  $y$

5. Находим  $x$ .

## 5.8. Отделение кратных корней

**Def 5.8.1.**  $f \in K[x], f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ . Производной многочлена  $f$  называется  $f' = na_n x^{n-1} + \dots + a_1$

Свойства:

$$1. \deg f = 0 \Rightarrow f' = 0$$

$$2. (f + g)' = f' + g'$$

$$3. (c \cdot f)' = c \cdot f', c \in K$$

$$4. (f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$5. (f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k)' = f_1' f_2 \dots f_k + f_1 f_2' \dots f_k + f_1 f_2 \dots f_k'$$

$$6. (f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'$$

*Доказательство.* 4.  $f = a_n x^n, g = b_m x^m$

$$(a_n x^n \cdot b_m x^m)' = (n + m) a_n b_m x^{n+m-1}$$

$$(a_n x^n)' \cdot b_m x^m + a_n x^n \cdot (b_m x^m)' = a_n b_m (n + m) x^{n+m-1}$$

$$f = a_n x^n, g = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$$

$$(fg)' = \left( \sum \right)' = \sum ( )' = f'g + fg'$$

$$f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, g = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0 \quad a_k x^k \cdot g - \text{верно} \Rightarrow \text{верно и для } f \cdot g$$

5. Индукция

5.  $\Rightarrow$  6. ■

**Def 5.8.2.** *Корни кратности 1 – простые корни, корни кратности  $> 1$  – кратные корни.*

**Теорема 5.8.3** (Критерий кратности корня).  $f \in K[x]$ .  $c$  – кратный корень  $f \Leftrightarrow f(c) = f'(c) = 0$

*Доказательство.* " $\Rightarrow$ ".  $f = (x - c)^2 \cdot g, f(c) = 0. f'(c) = 2(x - c)g + (x - c)^2 \cdot g' \Rightarrow f'(c) = 0.$

" $\Leftarrow$ ".  $\deg f \geq 2, f$  делим на  $(x - c)^2 \Rightarrow f = (x - c)^2 \cdot g + ax + b$

$$\Rightarrow f = (x - c)^2 g + a(x - c) + r$$

$$f(c) = 0 \Rightarrow r = 0$$

$$f' = 2(x - c)g + (x - c)^2 g' + a, f'(c) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f = (x - c)^2 g$$
■