

Матанализ 1 семестр ПИ,

Лекция, 09/29/21

Собрано 8 октября 2021 г. в 20:34

Содержание

1. Пределы последовательностей	1
1.1. Число e	1
1.2. Теорема Штольца	2
1.3. Подпоследовательности	3

1.1. Число e

Пусть $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} = \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n^{2n+2}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_{n-1} \geq y_n \Rightarrow y_n \text{ убывающая} \Rightarrow \exists \lim y_n \Rightarrow \exists \lim x_n, \text{ т.к. } x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \lim x_n = \lim y_n \end{aligned}$$

Def. 1.1.1. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Теорема 1.1.2. $x_n > 0 \wedge \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $\exists \lim x_n = 0$

Доказательство. Пусть $q = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $q < 1$. $\exists N : \forall n \geq N \rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+q}{2}$. Тогда

$$0 < x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot x_N \leq x_N \cdot \left(\frac{1+q}{2}\right)^{n-N} \rightarrow 0$$

■

Следствие 1.1.3. $a > 1, k \in \mathbb{N}, \lim \frac{n^k}{a^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$$

Следствие 1.1.4. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

Следствие 1.1.5. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

1.2. Теорема Штольца

Теорема 1.2.1 (Теорема Штольца). $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$ $\lim y_n = +\infty \wedge \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. 1. $l = 0$. $\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}$. $\forall \varepsilon > 0 \exists m : \forall k \geq m \rightarrow |\varepsilon_k| < \varepsilon$

$$x_k - x_{k-1} = \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_k - y_{k-1}) \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_n - y_m) \leq \varepsilon \cdot y_n$$

Тогда $|x_n| \leq |x_m| + \varepsilon y_n$

$$0 \leq \left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leq \left| \frac{x_m}{y_n} \right| + \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$$

2. $l \neq 0, l \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\tilde{x}_n = x_n - l \cdot y_n$. Тогда

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - l \cdot y_n - x_{n-1} + l \cdot y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \rightarrow 0$$

Тогда по п. 1 $\frac{\tilde{x}_n}{y_n} \rightarrow 0$. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\tilde{x}_n + l \cdot y_n}{y_n} = \frac{\tilde{x}_n}{y_n} + l \rightarrow l$

3. $l = +\infty$. $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty$. Начиная с некоторого номера > 1

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} \Leftrightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \rightarrow +\infty$$

Тогда x_n возрастает и стремится к $+\infty$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$$

4. $l \rightarrow -\infty$. Следует рассмотреть $\{-x_n\}$ ■

Теорема 1.2.2. $y_1 > y_2 > \dots > 0 \wedge \lim y_n = \lim x_n = 0$. Если $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. Докажем для $l = 0$.

$$\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}, \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \rightarrow |\varepsilon_k| < \varepsilon$$

Пусть $n > m \geq N$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| \cdot |y_{k-1} - y_k| \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon (y_m - y_n) \Leftrightarrow |x_m| \leq \varepsilon \cdot y_m \Rightarrow \frac{|x_m|}{y_m} < \varepsilon$$

Доказали, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq N \rightarrow \left| \frac{x_m}{y_m} \right| < \varepsilon$

Для $l \neq 0$ доказывается аналогично предыдущей теореме. ■

1.3. Подпоследовательности

Def. 1.3.1. Пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Подпоследовательностью этой последовательности называется $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Теорема 1.3.2 (О стягивающихся отрезках). $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots, \lim(b_n - a_n) = 0$. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ состоит из одной точки. Если эта точка c , то $\lim a_n = \lim b_n = c$

Доказательство. $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ (по лемме о вложенных отрезках). Пусть $c < d$ принадлежит этому пересечению.

$$0 < d - c \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leq c - a_n \leq 0 \Rightarrow \text{точка единственна}$$

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leq c - a_n \leq 0 \Rightarrow a_n \rightarrow c$$

$$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \Rightarrow b_n \rightarrow c$$

■

Теорема 1.3.3 (Теорема Больцано-Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Возьмем $a_1 \leq b_1$ так, чтобы вся последовательность лежала между ними. $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Поделим отрезок пополам и возьмем ту половину, в которой лежит бесконечное число членов последовательности. Обозначим её $[a_2, b_2]$. Теперь возьмем $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$. $[a_3, b_3]$ - ту половину $[a_2, b_2]$, в которой бесконечное число членов последовательности и т.д.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \text{ и длина } [a_k, b_k] = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}, \lim a_n = \lim b_n = c$$

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - подпоследовательность $\{x_n\}$ и

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

■

Теорема 1.3.4. 1. Если последовательность неограничена сверху, то из неё можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$

2. Если неограничена снизу, то можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$

Доказательство.

$$\exists n_1 : x_{n_1} > 1$$

$$\exists n_2 : x_{n_2} > 2 \wedge n_2 > n_1$$

$$\exists n_k : x_{n_k} > k \wedge n_k > n_{k-1}$$

■

Следствие 1.3.5. Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность имеющую предел (конечный или бесконечный).

Def. 1.3.6. Частичные пределы последовательности $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ – пределы её подпоследовательностей.

Замечание 1.3.7. $\lim x_n = a, \{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow a$

Def. 1.3.8. Последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Свойства:

1. Фундаментальная последовательность ограничена
2. Сходящаяся последовательность фундаментальна

Доказательство. $a = \lim x_n$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

■

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то эта последовательность сходится.

Доказательство. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a, \forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall k \geq K \rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$M = \max \{n_K, N\}$. Тогда $\forall n \geq M \rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon$

■

Теорема 1.3.9 (Критерий Коши сходимости последовательности). Последовательность сходится \Leftrightarrow она фундаментальна

Доказательство. " \Rightarrow ". Свойство 2.

" \Leftarrow ". Фундаментальна \Rightarrow ограничена (свойство 1) $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность (теорема Больцано-Вейерштрасса) \Rightarrow сходится

■

Def. 1.3.10. $\{x_n\}$ – ограничена сверху.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$ – верхний предел.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$ – нижний предел.

Теорема 1.3.11. Пусть $y_n = \inf_{k \geq n} x_k, z_n = \sup_{k \geq n} x_k$. Тогда

$$\exists \underline{\lim} x_n, \overline{\lim} x_n \wedge \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

Доказательство. 1. Если неограничена сверху, то $\overline{\lim} x_n = +\infty$

2. Пусть $\{x_n\}$ – ограничена. $\forall n \rightarrow x_n \leq M$

$$z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq \dots \wedge z_n \leq M \Rightarrow \exists \lim z_n$$

3. Аналогично для y_n

4. $\forall n \rightarrow y_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

■

Теорема 1.3.12. 1. $\overline{\lim} x_n$ – наибольший частичный предел $\{x_n\}$

2. $\underline{\lim} x_n$ – наименьший частичный предел $\{x_n\}$

3. $\exists \lim x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, $b = \overline{\lim} x_n$. Построим $\{x_{n_k}\}$:

$$x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \quad z_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\} > b - \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x_{n_1} > b - \frac{1}{2}$$

$$z_{n_1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\} > b - \frac{1}{3} \Rightarrow \exists x_{n_2} > b - \frac{1}{3}, n_2 > n_1$$

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow b$$

Рассмотрим $x_{m_k} \rightarrow c$. Тогда $x_{m_k} \leq z_{m_k} \Rightarrow c \leq b$

Если $\{x_n\}$ неограничена

- сверху: $\exists \overline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \rightarrow +\infty$
- снизу: а) $\exists \overline{\lim} x_n = b \in \mathbb{R}$ – аналогично п.1. б) $\exists \overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$

2. Аналогично

3. " \Rightarrow ". $\exists \lim x_n = l \Rightarrow \forall \{x_{n_k}\} \rightarrow \lim x_{n_k} = l \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$

" \Leftarrow ". $y_n \leq x_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \lim x_n \leq \overline{\lim} x_n \Rightarrow \exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

■

Теорема 1.3.13 (характеристические свойства $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$).

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$b = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N : x_n > a - \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство. **TODO**

■