

Матанализ 2 семестр ПИ,

Лекции

Собрано 22 марта 2022 г. в 22:12

Содержание

1. Интегральное исчисление	1
1.1. Неопределенный интеграл	1
1.2. Определенный интеграл Римана	6
1.3. Суммы Дарбу	7
1.4. Критерии интегрируемости функции	9
1.5. Свойства интеграла Римана	14
1.6. Интегральные теоремы о средних	16
1.7. Интегральные неравенства	23
1.8. Несобственные интегралы	24
1.8.1. Свойства несобственного интеграла	25
1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов	28
1.9. Интегралы от знакопеременных функций	30
1.10. Длина, площадь и объём	33
1.10.1. Площадь	33

Раздел #1: Интегральное исчисление

1.1. Неопределенный интеграл

Определение 1. $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется первообразной функцией f , если F дифференцируема на $\langle A, B \rangle, F'(x) = f(x) \forall x \in \langle A, B \rangle$.

Теорема 1. Пусть $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$ – первообразная f . Тогда G – первообразная $f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) + c = G(x)$.

Доказательство. \Rightarrow . Пусть $H(x) = F(x) - G(x)$. Тогда

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv \text{const}$$

\Leftarrow . $(F(x) + c)' = (G(x))' \Leftrightarrow f(x) = F'(x) = G'(x) \Rightarrow G$ – первообразная. \square

Определение 2. $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$ – первообразная f . Множество функций $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ называется неопределенным интегралом f .

$$\int f(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Далее, $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Дифференцирование

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), x \in \langle A, B \rangle$$

2. Арифметические действия:

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \{F(x) + G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int f(x) dx + H(x) = \{F(x) + H(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda \int f(x) dx = \{\lambda F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Утверждение 1. Если функция f непрерывна на $\langle A, B \rangle$, то у неё есть первообразная на $\langle A, B \rangle$.

Упражнение. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. Есть ли первообразная у этой функции?

Определение 3. $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Если F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ на E , то F – первообразная f на множестве E .

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int a dx = ax + c, a \in \mathbb{R}$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$
10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, a \neq 0$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c, a > 0$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c, a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + c, a \in \mathbb{R}$

Доказательство. Дифференцирование

□

Пример. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ – неберущийся интеграл. $\operatorname{Si}(x)$ – интегральный синус (одна из первообразных, закреплённая при $x \rightarrow 0+$).

$$(\operatorname{Si}(x))' = \frac{\sin x}{x}$$

Теорема 2 (Линейность неопределённого интеграла). $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, имеют первообразные на $\langle A, B \rangle$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha, \beta \neq 0$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

Доказательство. Пусть F и G – первообразные f и g на $\langle A, B \rangle$. Правая часть равенства: $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$.

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + c)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

□

Теорема 3 (Замена переменной). $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, F – первообразная f на $\langle A, B \rangle$, $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$ – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c$$

Доказательство.

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

□

Замечание. $\varphi'(x) dx = d\varphi(x)$. Пусть $y = \varphi(x)$

$$\int f(y) dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Пример. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$. Пусть $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Следствие. Пусть в условиях теоремы φ имеет обратную функцию $\psi : \langle A, B \rangle \rightarrow \langle C, D \rangle$. Если $G(x)$ – первообразная функции $(f \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, то

$$\int f(x) dx = G(\psi(x)) + c$$

Доказательство. Пусть F – первообразная f на $\langle A, B \rangle$. $F(\varphi(x))$ – первообразная $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ (по теореме). Рассмотрим $G(x) - F(\varphi(x))$ – постоянная (т.к. производная равна нулю). $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$. Тогда

$$G(\psi(y)) - F(y) = \text{const} \Rightarrow \int f(y) dy = G(\psi(y)) + c$$

□

Пример. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Пусть $t = \sqrt{x}, t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = dt^2 = 2t dt$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{1+t} = \int \left(\frac{2t+2}{t+1} - \frac{2}{t+1} \right) dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= 2t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2 \ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+1) + c \end{aligned}$$

Пример. $\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$.

Иначе: $\int \sin x \cos x dx = - \int \cos x d \cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$.

Иначе: $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = \frac{-\cos 2x}{4} + c$.

Мораль сей басни такова: константы разные, а не $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$.

Теорема 4 (Формула интегрирования по частям). $f, g \in C^1 \langle A, B \rangle$. Тогда

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Доказательство. H – первообразная $g \cdot f'$. Тогда

$$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x)$$

□

Замечание. $\int u dv = uv - \int v du$

Пример. $\int xe^x dx$. Пусть $u = x, u' = 1, v' = e^x, v = e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + c$$

Пример. $\int \ln x dx$. Пусть $u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = 1, v = x$.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + c$$

Упражнение. $\int e^x \cdot \sin x dx$ Пусть $f = \sin x, g = e^x$. Тогда

$$\int f dg = fg - \int g df \Leftrightarrow \int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

Пусть теперь $f = \cos x, g = e^x$. Тогда

$$\int f dg = fg - \int g df \Leftrightarrow \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

Отсюда

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Пример. Пусть $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}, n \in \mathbb{N}$. Выразим интеграл I_{n+1} через I_n для произвольного натурального n .

Обозначим $f(x) = \frac{1}{(x^2+a)^n}$ и $g(x) = x$. Тогда

$$df(x) = \left(\frac{1}{(x^2+a)^n} \right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a)^{n+1}} dx, dg(x) = dx$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+a)^n} - 2na \int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1} \end{aligned}$$

Откуда

$$2naI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a)^n}$$

Утверждение 2. Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

Рассмотрим простейшие дроби:

1. $\frac{a}{(x+p)^n}, n \in \mathbb{N}, a, p \in \mathbb{R}$
2. $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Интегралы от простейших дробей первого рода вычисляются по таблице. Для простейших дробей второго рода используется следующий алгоритм:

1. Если $p \neq 0$, то выделим полный квадрат и выполним замену $y = x + \frac{p}{2}$. Если $p = 0$, тогда

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = a \int \frac{x dx}{(x^2+q)^n} + b \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$$

2. Интеграл $\int \frac{x dx}{(x^2+q)^n}$ можно вычислить с помощью замены $y = x^2 + q$, т.к. $dy = 2x dx$.
3. Применяя к интегралу $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$ формулу понижения $n-1$ раз сведем его к интегралу I_1 , который является табличным.

Пример (12 и 13 из таблицы).

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + c$$

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Пусть $x = \operatorname{sh} t, dx = \operatorname{ch} t dt$. Тогда

$$\int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + c$$

Упражнение. Найди формулу для $(\operatorname{sh} t)^{-1}$

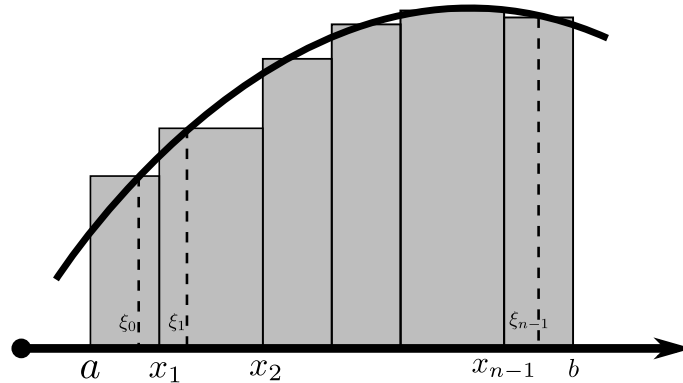
Неберущиеся интегралы:

- $\int \frac{\sin x}{x} dx$
- $\int \frac{\cos x}{x} dx$
- $\int \frac{dx}{\ln x}$
- $\int \frac{e^x}{x} dx$
- $\int \sin x^2 dx$
- $\int \cos x^2 dx$
- $\int e^{-x^2} dx$

1.2. Определенный интеграл Римана

Определение 4. $[a, b], a < b$. Набор точек $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ – разбиение (дробление) отрезка $[a, b]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. $\lambda = \lambda_\tau = \max_{k \in [0, n-1]} \Delta x_k$ – ранг дробления (мелкость), $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ – оснащение дробления τ . Пара (τ, ξ) называется оснащённым дроблением.

Определение 5. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$ – суммы Римана (интегральные суммы).



Определение 6. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Число $I \in \mathbb{R}$ называют пределом интегральных сумм при ранге $\rightarrow 0$:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad (I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma)$$

если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

Замечание. Последовательность оснащённых дроблений $\{(\tau^{(i)}, \xi^{(i)})\}_{i=1}^\infty : \lambda^{(i)} \rightarrow 0$. $\forall \{\tau^{(i)}, \xi^{(i)}\} : \lambda^{(i)} \rightarrow 0 \sigma_{\tau^{(i)}}(f, \xi^{(i)}) \rightarrow I$.

Определение 7 (Интеграл Римана). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\exists \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$, то f называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, а число I называется интегралом f по $[a, b]$.

$R[a, b]$ – класс функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx$$

1.3. Суммы Дарбу

Определение 8. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ – дробление $[a, b]$.

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Суммы

$$S = S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, s = s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются верхними и нижними интегральными суммами.

Замечание. Если f – непрерывна на $[a, b]$, то это две частные суммы из сумм Римана.

Замечание. f ограничена сверху $\Leftrightarrow S$ ограничена.

Свойства сумм Дарбу:

$$1. S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi), s_\tau = \inf_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$$

Доказательство. $M_k \geq f(\xi_k), k = 0, \dots, n-1$. Тогда $M_k \Delta x_k \geq f(\xi_k) \Delta x_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \Rightarrow S_\tau(f) \geq \sigma_\tau$, т.е. S_τ – верхняя граница. Докажем, что она является точной верхней границей.

Если f ограничена на $[a, b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. На каждом кусочке разбиения $\exists \xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}] : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = S - \varepsilon$.

Если f не ограничена на $[a, b] \Rightarrow$ не ограничена на каком-то кусочке $[x_l, x_{l+1}]$. Фиксируем $A > 0$ и выберем ξ_k^* при $k \neq l$ произвольно, а для ξ_l^*

$$f(\xi_l^*) > \frac{1}{\Delta x_l} \left(A - \sum_{k \neq l} f(\xi_k^*) \Delta x_k \right)$$

Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta x_k > A \Rightarrow \sup_{\xi} \sigma = +\infty = S$$

□

2. При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя не уменьшится.

Доказательство. Докажем для верхних сумм при добавлении одной точки. $\tau : \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$. Добавим точку c в $[x_l, x_{l+1}]$ – T – новое дробление.

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + M_l \Delta x_l + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + (c - x_l) \cdot M' + (x_{l+1} - c) M'' + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

где $M' = \sup_{x \in [x_l, c]} f, M'' = \sup_{x \in [c, x_{l+1}]} f$. $M_l \geq M', M_l \geq M''$, т.к. $[x_l, c] \subset [x_l, x_{l+1}], [c, x_{l+1}] \subset [x_l, x_{l+1}]$.

Рассмотрим $S_\tau - S_T = M_l \Delta x_l - (c - x_l) M' - (x_{l+1} - c) M'' \geq M_l (x_{l+1} - x_l - c + x_l - x_{l+1} + c) = 0$.
Добавить больше точек можно по индукции. □

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней.

Доказательство. τ_1, τ_2 – разные дробления $[a, b]$. Докажем, что $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$. Возьмем $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда $s_{\tau_1} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_2}$ (по свойству 2). \square

Утверждение 3. $f \in R[a, b] \Rightarrow f$ ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть f не ограничена на $[a, b]$ сверху. Тогда $\forall \tau \Rightarrow \sup_\xi \sigma_\tau(f, \xi) = +\infty$. Тогда $\forall \tau$ и числа $I \exists$ оснащение $\xi' : \sigma_\tau(\xi') > I + 1 \Rightarrow$ никакое число I не является пределом интегральных сумм. \square

Определение 9. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Возьмем

$$I^* = \inf_{\tau} S_{\tau} \quad I_* = \sup_{\tau} s_{\tau}$$

где I^* – верхний интеграл Дарбу, I_* – нижний интеграл Дарбу.

Замечание. $I^* \geq I_*$.

Замечание. f ограничена сверху $\Leftrightarrow I^*$ ограничена.

1.4. Критерии интегрируемости функции

Теорема 5 (Критерий интегрируемости функции). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a, b] \Leftrightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Доказательство. \Rightarrow . Пусть $f \in R[a, b]$. Обозначим $I = \int_a^b f$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$:

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Переходя к супремуму и инфимуму, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда $S_\tau - s_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{3} - I + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

\Leftarrow . Пусть $S_\tau - s_\tau \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \Rightarrow$ все суммы Дарбу конечны.

$$s_\tau \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau \Rightarrow 0 \leq I^* - I_* \leq S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow I^* = I_*$ (т.к. это числа). Обозначим $I = I^* = I_*$.

$$s_\tau \leq I \leq S_\tau, s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau \Rightarrow |I - \sigma_\tau| \leq S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \Rightarrow |I - \sigma_\tau| < \varepsilon.$

□

Замечание. Если $f \in R[a, b] \Rightarrow s_\tau \leq \int_a^b f \leq S_\tau.$

Следствие. $f \in R[a, b] \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\tau = \int_a^b f$

Доказательство. $0 \leq S_\tau - \int_a^b f \leq S_\tau - s_\tau, 0 \leq \int_a^b f - s_\tau \leq S_\tau - s_\tau.$

□

Замечание. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau = I^*, \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\tau = I_*.$

Утверждение 4 (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману). $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ ограничена на $[a, b]$ и $I_* = I^*.$

Утверждение 5 (Критерий Римана интегрируемости). $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$

Определение 10. $f : D \rightarrow \mathbb{R}.$ Величина

$$\omega(f)_D = \sup_{x, y \in D} (f(x) - f(y))$$

называется колебанием f на $D.$ Из определений граней функции ясно, что

$$\omega(f)_D = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{y \in D} f(y)$$

Если задано τ отрезка $[a, b],$ то

$$\omega_k(f) = M_k - m_k$$

Тогда теорему можно записать:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0$$

Теорема 6 (Интегрируемость непрерывной функции). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b].$

Доказательство. По теореме Кантора $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерна непрерывна на $[a, b].$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t', t'' \in [a, b] : |t' - t''| < \delta \Rightarrow |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

По теореме Вейерштрасса f достигает наибольшего и наименьшего значения на любом отрезке, содержащемся в $[a, b]$. Поэтому колебание f на всяком отрезке, длина которого меньше δ , будет меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, $\forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k$$

□

Теорема 7 (Интегрируемость монотонной функции). f монотонна на $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.

Доказательство. Пусть f монотонно возрастает на $[a, b]$. Если $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ постоянна $\Rightarrow f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.

Если $f(a) < f(b)$. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Возьмем произвольное $\tau : \lambda_\tau < \delta$ на $[x_k, x_{k+1}]$.

В силу монотонности f верно $\omega_k(f) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k < \sum_{k=0}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon$$

□

Замечание. $f \in R[a, b]$. Если изменить значение f в конечном числе точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

Доказательство. \tilde{f} — отличается от f в точках t_1, t_2, \dots, t_m . $|f|$ ограничена на $[a, b] \Rightarrow |\tilde{f}|$ ограничена. $|f| \leq A$, возьмем $\tilde{A} = \max\{A, |\tilde{f}(t_1)|, |\tilde{f}(t_2)|, \dots, |\tilde{f}(t_m)|\}$. В интегральных суммах для f и \tilde{f} отличаются не более $2m$ слагаемых, поэтому

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - \sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)| \leq 2m(A + \tilde{A})\lambda_\tau \xrightarrow{\lambda_\tau} 0$$

Поэтому предел $\sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)$ существует и равен пределу $\sigma_\tau(f, \xi)$.

□

Теорема 8 (Интегрируемость функции и её сужения). 1. $f \in R[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b] \Rightarrow f \in R[\alpha, \beta]$

2. Если $a < c < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in R[a, c], f \in R[c, b]$, то $f \in R[a, b]$.

Доказательство. 1. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$ из критерия интегрируемости на $[a, b]$. τ_0 — дробление $[\alpha, \beta]$, $\lambda_{\tau_0} < \delta$. Добавим точек до дробления $[a, b]$. Получим $\tau(\lambda_\tau < \delta)$.

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=l}^{m-1} \omega_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \varepsilon$$

2. Пусть f не постоянна, т.е. $\omega(f)_{[a,b]} > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta_1, \delta_2 : \forall \tau_1 : \lambda_{\tau_1} < \delta_1, \forall \tau_2 :$

$$\lambda_{\tau_2} < \delta_2$$

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\}$. Пусть τ – дробление $[a, b]$, $\lambda_\tau < \delta$. Точка $c \in [x_l, x_{l+1})$. Обозначим $\tau' = \tau \cup \{c\}$, $\tau_1 = \tau' \cap [a, c]$, $\tau_2 = \tau' \cap [c, b]$

$$S_\tau - s_\tau \leq S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega_l(f)\delta < \varepsilon$$

□

Определение 11. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной на $[a, b]$, если множество её точек разрыв пусто или конечно (и все разрывы первого рода)

Следствие. f – кусочно-непрерывная на $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$

Доказательство. Возьмём точки a_1, a_2, \dots, a_m (может $a_1 = a$ и/или $a_m = b$). Рассмотрим отрезки $[a_k, a_{k+1}]$. f непрерывна на (a_k, a_{k+1}) и \exists конечные $\lim_{x \rightarrow a_k+} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a_{k+1}-} f(x) \Rightarrow f \in R[a_k, a_{k+1}] \Rightarrow$ по теореме о сужении $f \in R[a, b]$ □

Определение 12. Множество X называется не более, чем счетным, если оно конечно или счетно.

Определение 13. $E \subset \mathbb{R}$ – имеет нулевую меру, если для $\forall \varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых $< \varepsilon$.

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \right)$$

Пример. Множество из одной точки.

Упражнение. Чему равна мера \mathbb{N} ?

Теорема 9 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ ограничена и множество точек разрыва имеет нулевую меру.

Теорема 10 (Арифметические действия над интегрируемыми функциями). $f, g \in R[a, b]$. Тогда

$$1. f + g \in R[a, b]$$

$$2. f \cdot g \in R[a, b]$$

3. $\alpha f \in R[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$
4. $|f| \in R[a, b]$
5. Если $\inf_{[a, b]} |g| > 0$, то $\frac{f}{g} \in R[a, b]$

Доказательство. 1. $D \subset [a, b]$. $x, y \in D$

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(y) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \omega_D(f) + \omega_D(g) \\ \omega_D(f+g) &\leq \omega_D(f) + \omega_D(g) \\ \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(f+g) &\leq \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(f) + \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(g) \\ \omega_k(f+g) &\leq \omega_k f + \omega_k g \end{aligned}$$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f+g) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k f \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k g \Delta x_k \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f+g \in R[a, b]$$

2. $|fg(x) - fg(y)| \leq |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \leq |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leq A|f(x) - f(y)| + B|g(x) - g(y)|$ (т.к. $R[a, b] \Rightarrow$ ограничена на $[a, b]$)
3. $g(x) = \alpha$
4. $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$
 $|\omega_k|f| \leq |\omega_k f|$
5. $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Докажем, что $\frac{1}{g} \in R[a, b]$.
 $0 < m = \inf_{[a, b]} |g|$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \left| \frac{g(y) - g(x)}{g(x)g(y)} \right| \leq \frac{|g(x) - g(y)|}{m^2} \Leftrightarrow \omega_k \left(\frac{1}{g} \right) \leq \frac{\omega_k(g)}{m^2}$$

□

Пример. 1. $\int_0^1 x^2 dx$

$$x^2 \in C[a, b] \Rightarrow x^2 \in R[a, b].$$

Рассмотрим какую-нибудь интегральную сумму: $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

2. $\int_0^1 e^x dx$ – упражнение

$$3. f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, D \notin R[a, b], a < b$$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(D) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

□

$$4. r(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ дробь несократима} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$r(x)$ непрерывна в каждой точке, разрывна в каждой рациональной.

$$r(x) \in R[0, 1]$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Рациональные числа из $[0, 1]$ со знаменателем $\leq N$, конечное число $= C_N$, множество X .

Возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{4C_N}$ и дробление $\tau : \lambda_\tau < \delta$

Точки X попадут в не более, чем $2C_N$ отрезков дробления. В отрезках, где нет точек из X наибольшее значение $< \frac{1}{N}$

$$s_\tau(r) = 0$$

$$S_\tau(r) = \sum_{k: M_k \geq \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k + \sum_{k: M_k < \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k \leq \underbrace{1 \cdot 2C_N \cdot \delta}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{1}{N}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$S_\tau(r) - s_\tau(r) = S_\tau(r) \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} 0 \Rightarrow r \in R[0, 1] \text{ и } \int_0^1 r(x) dx = 0$$

□

Если $f \in R_D, g \in R[a, b]$, то $f(g) \in R[a, b]$? (D – множество значений g)

Ответ: нет. Пример: $f(y) = \begin{cases} 1, y \in [0, 1] \\ 0, y = 0 \end{cases}$ и $g(x) = r(x)$ на $[0, 1]$

$$f(r(x)) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = D(x) \notin R[0, 1]$$

Теорема 11 (Интегрируемость композиции). $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b], f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(\varphi) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\varphi \in R[\alpha, \beta], f \in C[a, b]$. Тогда $f \circ \varphi \in R[\alpha, \beta]$

Доказательство. Например, из критерия Лебега.

□

1.5. Свойства интеграла Римана

$$1. \int_b^a f = - \int_a^b f$$

$$2. \int_a^b f = 0 \quad (\forall f \text{ на вырожденном отрезке } f \in R[a, a])$$

Свойства:

- Аддитивность интеграла по отрезку:
 $a, b, c \in \mathbb{R}, f \in R[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Доказательство. $f \in R[a, b] \Rightarrow f \in R[a, c], f \in R[c, b], \{\bar{\tau}^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ и $\{\bar{\bar{\tau}}^{(n)}, \bar{\bar{\xi}}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ – последовательности оснащенных дроблений $[a, c]$ и $[c, b]$ (равномерных, т.е. $\bar{\lambda} = \frac{c-a}{n}, \bar{\bar{\lambda}}$)
 $\tau^{(n)} = \bar{\tau}^{(n)} \cup \bar{\bar{\tau}}^{(n)}$ – дробление $[a, b]$
 $\xi^{(n)} = \bar{\xi}^{(n)} \cup \bar{\bar{\xi}}^{(n)}$ – оснащение $\tau^{(n)}$
 $\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\bar{\sigma}}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\underbrace{\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f}_{\text{по доказанному}} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

Все остальные случаи – аналогично. □

- $f \equiv \alpha$ при $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f = \alpha(b-a)$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \alpha(b-a)$$

□

- Линейность интеграла: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a, b]$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство. $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$

$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sigma_\tau(\alpha f) + \sigma_\tau(\beta g)$ и переход к пределу. □

- Монотонность интеграла: $a < b, f, g \in R[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Доказательство. $\sigma_\tau(f) \leq \sigma_\tau(g)$ □

Следствие. $a < b, f \in R[a, b]$, если $f \leq M \in \mathbb{R}$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f \leq M(b-a)$,

если $f \geq m$ на $[a, b]$ то $\int_a^b f \geq m(b-a)$

Следствие. $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

- $a < b, f \in R[a, b]$ и $\exists c \in [a, b] : f(c) > 0$ и f непрерывна в точке c .

Тогда $\int_a^b f > 0$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in \underbrace{[c - \delta; c + \delta] \cap [a, b]}_{[\alpha, \beta]} : |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$$f(x) > f(c) - \varepsilon = \frac{f(c)}{2} \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha)$$

$$\int_a^b f = \int_a^{\alpha} f + \int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^b f \geq \int_{\alpha}^{\beta} f \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha) > 0$$

□

Замечание. Таким же образом строгий знак в монотонности интеграла.

Замечание. $f \in R[a, b], f > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$

- $a < b, f \in R[a, b]$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Доказательство. $-|f| \leq f \leq |f|$

□

Если не знаем, что $a \geq b$ или $b \geq a$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|$$

1.6. Интегральные теоремы о средних

Теорема 12. $f, g \in R[a, b], g \geq 0$ на $[a, b], m \leq f \leq M$. Тогда $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$

Доказательство. $mg \leq fg \leq Mg$ на $[a, b]$

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$$

Если $\int_a^b g = 0$, то $\exists \mu \in [m, M] : 0 = \mu \cdot 0$

Если $\int_a^b g > 0$, то $m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M$

Возьмём $\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$

□

Замечание. Для $g \leq 0$ тоже верно.

Следствие. 1. $f \in C[a, b], g \in R[a, b], g \geq 0$ (или $g \leq 0$).

Тогда $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса: $\exists m = \min_{[a,b]} f$ и $M = \max_{[a,b]} f$

Подберём $\mu \in [m, M]$ по предыдущей теореме. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists c \in [a, b] : f(c) = M$

□

2. $f \in R[a, b], m, M \in \mathbb{R} : m \leq f \leq M$ на $[a, b]$. Тогда $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f = \mu(b - a)$

Доказательство. $g \equiv 1$ в теореме.

□

3. $f \in C[a, b]$. Тогда $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b - a)$

Доказательство. $g \equiv 1$ в следствии 1.

□

Замечание. Теорему и следствия называют ещё теоремами о средних. Почему?

Определение 14. $f \in R[a, b], a < b$

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ – интегральное среднее f на $[a, b]$

Если возьмём равномерное разбиение $[a, b]$, то $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \frac{b-a}{n}$

То есть $\frac{\sigma_n}{b-a} \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f$, где $\frac{\sigma_n}{b-a}$ – среднее арифметическое значений функции в точках ξ_k

Определение 15. $E \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток (может быть и лучом), $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, f – интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в E . $a \in E$.

$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in E$ – интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 13 (Барроу, об интеграле с переменным верхним пределом). $E \subset \mathbb{R}$ – невырожден-

ный промежуток, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируема на каждом отрезке из E , $a \in E$, $\Phi(x) = \int_a^x f, x \in E$. Тогда

1. $\Phi(x) \in C(E)$
2. Если f непрерывна в точке $x_0 \in E$, то Φ – дифференцируема в точке x_0 , $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство. 1. Пусть $x_0 \in E$, выберем $\delta > 0$ $[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap E = [A, B]$

$|f|$ на $[A, B]$ ограничена числом M . $\Delta x: x_0 + \Delta x \in [A, B]$

$$|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_a^{x_0 + \Delta x} f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f| \right| \leq |\Delta x| \cdot M \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

2. Проверим, что $\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0)$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0: \forall t: |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ (по непрерывности.)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - f(x_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt \right| < \\ &< \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta x| = \varepsilon, \quad k = \int_a^b k \cdot \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

□

Пример. $\Phi(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt, x > 1$

$$\Phi'(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \text{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Упражнение. $\int \text{Si}(x) dx = ?$

Следствие. Функция, непрерывная на промежутке имеет на нём первообразную. Ей является интеграл с переменным верхним пределом.

Определение 16. $\Psi(x) = \int_x^a f$ (Условия на f и a прежние) – интеграл с переменным нижним пределом.

$\Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$ (Если f непрерывна).

Теорема 14 (Формула Ньютона-Лейбница). $f \in R[a, b]$, F – первообразная f на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$:

$$F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) =$$

$$F(b) - F(a)$$

По теореме Лагранжа $\exists \xi_{k,n} \in (x_k, x_{k+1})$

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_{k,n})(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_{k,n})\Delta x_k$$

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k,n})\Delta x_k = \lim(F(b) - F(a)) = F(b) - F(a) \quad \square$$

Замечание. $\int_a^b f = F \Big|_a^b$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b - \text{двойная подстановка.}$$

Замечание. $G(x) = F(x) + C$ – тоже первообразная.

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

Пример. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Пример. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$ - чушь!

1. $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ – не везде на $[-1, 1]$

2. $\frac{1}{x^2}$ не интегрируема на $[-1; 1]$, т.к. не ограничена.

Замечание. Обобщение теоремы.

$f \in R[a; b]$, $F \in C[a, b]$, F – первообразная f на $[a, b]$ за исключением некоторого конечного числа точек.

Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. Пусть $\alpha_0 = a, \alpha_m = b, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ – все точки на (a, b) , в которых $F' \neq f$

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \sum_{k=0}^{m-1} (F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)) = F(b) - F(a).$$

(Рассмотрим $\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\alpha_k + \varepsilon}^{\alpha_{k+1} - \varepsilon} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (F(\alpha_{k+1} - \varepsilon) - F(\alpha_k + \varepsilon)) = F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)$) \square

Замечание. Без непрерывности F не получится: на $[-1, 1]$

$$F(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad f(x) = 0$$

$$0 = \int_{-1}^1 f \neq F \Big|_{-1}^1 = 2$$

Замечание. $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$.

F дифференцируема, F' интегрируема.

Замечание. $F' \in R[a, b]$ – существенно.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

F' не ограничена, а значит не интегрируема.

Замечание. Интегрируемость $\stackrel{?}{\Leftrightarrow} \exists$ первообразной.

$\nRightarrow \text{sign } x$ интегрируема на $[-1, 1]$, но первообразной нет.

\nLeftarrow Предыдущее замечание.

Теорема 15 (Интегрирование по частям в определенном интеграле). f, g – дифференцируемы на $[a, b]$, $f', g' \in R[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

Доказательство. f, g – дифференцируемы \Rightarrow непрерывны \Rightarrow интегрируемы.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f \in R[a, b]$$

$$\int_a^b (f g)' = f g \Big|_a^b$$

$$\int_a^b (f g)' = \int_a^b (f' g + g' f)$$

□

Замечание. $\int_a^b f dg = f g \Big|_a^b - \int_a^b g df$

$$dg(x) = g'(x) dx$$

Теорема 16 (Замена переменной в определенном интеграле). $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [A, B]$, дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$

$f \in C[A; B]$. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

Доказательство. $f(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(\varphi) \in R[a, b] \Rightarrow f(\varphi) \cdot \varphi' \in R[a, b]$

Пусть F – первообразная f на $[A, B] \Rightarrow F(\varphi)$ – первообразная $f(\varphi) \cdot \varphi'$ на $[\alpha, \beta]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \cdot \varphi' = F(\varphi) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F \Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \quad \square$$

Упражнение. Пусть f четная функция. Доказать, что $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$

Пусть f нечетная функция. Доказать, что $\int_{-a}^a f = 0$

Теорема 17 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме). $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f \in C^{n+1}\langle A; B \rangle, a, x \in \langle A; B \rangle. \text{ Тогда } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

Доказательство. По индукции:

База: $n = 0 : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ (Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть верно для $n-1$. Докажем для n .

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt. \text{ Проинтегрируем остаток по}$$

$$\text{частям: } u = f^{(n)}(t), u' = f^{(n+1)}(t), v' = (x-t)^{n-1}, v = \frac{(x-t)^n}{n}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt = \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \left(-f^{(n)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n} \Big|_{t=a}^x + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t) (x-t)^n}{n} dt \right) = \\ & = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \end{aligned}$$

□

Замечание. $\exists c \in (a, x) \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = f^{(n+1)}(c) \int_a^x (x-t)^n dt = f^{(n+1)}(c) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$
(Т.е. остаток в форме Лагранжа следует отсюда)

Последовательность $\{x_n\} : x_i \in \mathbb{Q}, x_n \rightarrow \pi$

Лемма 1. $m \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cdot \sin x dx = -\sin^{m-1} \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$I_m = (m-1) \cdot (I_{m-2} - I_m) \Rightarrow I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_m = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, m - \text{чётно} \\ I_m = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot 1, m - \text{нечётно} \end{cases}$$

Упражнение. $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывна.

Доказать, что $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \, dx$

Теорема 18 (Формула Валлиса). $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$

Доказательство. $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2}) \quad \sin x \in (0; 1)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$< \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!! \cdot (2n)!!}{((2n-1)!!)^2}$$

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

$$x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \Rightarrow \pi < x_n < \frac{2n+1}{2n} \pi, \Rightarrow x_n \rightarrow \pi \quad \square$$

Теорема 19 (Вторая теорема о среднем для интегралов, Бонне). $f \in C[a, b]$, $g \in C^1[a, b]$, g монотонна на $[a, b]$. Тогда $\exists c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f g = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f$$

Доказательство. $F(x) = \int_a^x f$, $F' = f$, $F(a) = 0$

$$\begin{aligned} \int_a^b f g &= F g \Big|_a^b - \int_a^b F g' = g(b) \int_a^b f - \int_a^b F g' = \\ &= g(b) \int_a^b f - \int_a^c f \cdot (g(b) - g(a)) = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f \end{aligned}$$

□

Упражнение. Оценить $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx$

1. По первой теореме о среднем.

2. По второй теореме о среднем.

1.7. Интегральные неравенства

Теорема 20 (Неравенство Йенсена). f – выпукла и непрерывна на $\langle A, B \rangle$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$ – непрерывна, $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ – непрерывна, $\int_a^b \lambda = 1$. Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda \varphi\right) \leq \int_a^b \lambda \cdot f(\varphi)$$

Упражнение. Доказать.

Замечание. Строгое неравенство, если f строго выпукла и $\varphi \neq \text{const}$.

Теорема 21 (Неравенство Гельдера). $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \in C[a, b]$. Тогда

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Пусть $x_k = \frac{k(b-a)}{n} + a, \xi_k = x_k$. Обозначим $a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}, b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow a_k b_k = f(x_k)g(x_k)\Delta x_k$. Тогда

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)g(x_k)\Delta x_k\right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)|^p \Delta x_k\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k)|^q \Delta x_k\right)^{\frac{1}{q}}$$

Выполним предельный переход:

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Следствие (Неравенство Коши-Буняковского). $f, g \in C[a, b] \Rightarrow \left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$

Теорема 22 (Неравенство Минковского). $f, g \in C[a, b], p \geq 1$.

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение 17. Пусть $f \in C[a, b]$.

1. Величина

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

называется интегральным средним арифметическим функции f на $[a, b]$.

2. Если $f > 0$, то величина

$$\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\right)$$

называется интегральным средним геометрическим функции f на $[a, b]$.

Замечание. Интегральное среднее геометрическое есть пределы при $n \rightarrow \infty$ последовательности

$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} f(x_k)} = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k)\right) = \exp\left(\frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k) \Delta x_k\right)$$

при $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$.

Теорема 23 (Об интегральных средних). $f \in C[a, b]$, $f > 0$. Тогда

$$\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Доказательство. Предельный переход в неравенстве для сумм, либо применить неравенство Йенсена для $\ln x$. \square

1.8. Несобственные интегралы

Определение 18. f локально интегрируема (по Риману) на промежутке E , если она интегрируема на каждом отрезке из E .

Замечание. Непрерывность влечет локальную интегрируемость.

Определение 19. Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in R_{loc}[a, b]$. Тогда $\int_a^{-b} f$ – несобственный интеграл.

$$\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f = \int_a^{-b} f$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение 20. Несобственный интеграл называется сходящимся, если из \mathbb{R} .

Определение 21. Аналогично, для $-\infty \leq a < b < +\infty, f \in R_{loc}(a, b]$

$$\int_{\rightarrow a}^b f = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 24 (Критерий Больцано-Коши сходимости интегралов). Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty, f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b) \left| \int_{t_1}^{t_2} f \right| < \varepsilon$$

Доказательство. $\Phi(t) = \int_a^t f$. $\int_a^b f$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim_{t \rightarrow b-} \Phi(t)$. Согласно критерию Больцано-Коши существования предела функции

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b) |\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| < \varepsilon$$

и по аддитивности интеграла $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f$. □

Замечание. Расходимость $\int_a^b f \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \Delta \in (a, b) \exists t_1, t_2 \in (\Delta, b) \left| \int_{t_1}^{t_2} f \right| \geq \varepsilon$

Замечание. Запись:

$$\int_a^b f = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f = \lim_{t \rightarrow b-} (F(t) - F(a)) = F(b-) - F(a)$$

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^{+\infty}, \alpha \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^{+\infty}, \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Пример. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1. \end{cases}$

1.8.1. Свойства несобственного интеграла

Будем считать, что f локально интегрируема на рассматриваемых промежутках.

- Аддитивность по промежутку.** Если $\int_a^b f$ сходится, то $\forall c \in (a, b)$ интеграл \int_c^b тоже сходится и

$$\int_a^b = \int_a^c f + \int_c^b f$$

В обратную сторону, если при $c \in (a, b)$ интеграл $\int_c^b f$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f$.

Доказательство. $\forall t \in (a, b)$ $\int_a^t f = \int_a^c f + \int_c^t f$ – по аддитивности определенного интеграла. Перейдем к пределу при $t \rightarrow b^-$ – предел левой части и правой части существует или не существует одновременно. \square

2. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\underbrace{\int_t^b f}_{\text{остаток интеграла}} \xrightarrow{t \rightarrow b^-} 0$.

Доказательство.

$$\int_t^b f = \int_a^b f - \int_a^t f \xrightarrow{t \rightarrow b^-} \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

\square

3. **Линейность несобственного интеграла.** Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то интеграл $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство. Для доказательства надо перейти к пределу в равенстве для частичных интегралов

$$\int_a^t (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^t f + \beta \int_a^t g$$

\square

Замечание. Если интеграл $\int_a^b f$ расходится, а интеграл $\int_a^b g$ сходится, то интеграл $\int_a^b (f + g)$ расходится. Действительно, если $f + g$ сходится, то сходится и интеграл от $f = (f + g) - g$ (?!).

4. **Монотонность несобственного интеграла.** Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, $f \leq g$ на $[a, b)$, то

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство. Перейдем к пределу в неравенстве для частичных пределов

$$\int_a^t f \leq \int_a^t g$$

\square

Замечание. Аналогично, с помощью предельного перехода, на несобственные интегралы переносятся неравенства Йенсена, Гельдера, Минковского.

5. **Интегрирование по частям в несобственном интеграле.** Пусть f, g дифференцируемы на $[a, b)$, $f', g' \in R_{loc}[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b f' g$$

Если два из этих трех пределов конечны, то третий предел также существует и конечен.

Доказательство. Устремим t к b слева в равенстве

$$\int_a^t f g' = f g|_a^t - \int_a^t f' g$$

□

6. **Замена переменной в несобственном интеграле.** Пусть $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [A, B)$ – дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, $\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta)$, существует $\varphi(\beta-) \in \overline{R}$, $f \in C[A, B)$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$$

Опять же, если существует один из интегралов, то существует и другой.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t) = \int_\alpha^t (f \circ \varphi) \varphi', \quad \Psi(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f$$

По формуле замены переменной в собственном интеграле

$$\Phi(t) = \Psi(\varphi(t))$$

1. Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f = I \in \overline{R}$. Докажем, что $\exists \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \varphi' = I$, т.е. $\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \beta-} I$. Возьмем $\{t_n\} : t_n \rightarrow \beta, t_n < \beta$. Тогда $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(\beta-), \varphi(t_n) \in [A, B)$. Поэтому $\Phi(t_n) = \Psi(\varphi(t_n)) \rightarrow I$. В силу произвольности выбора $\{t_n\}$, $\Phi(t) \rightarrow I$ при $t \rightarrow \beta-$.
2. Пусть существует интеграл $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \varphi' = J \in \overline{R}$. Докажем, что интеграл $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$ существует, и тогда по пункту 1 будет следовать, что он равен J . Если $\varphi(\beta-) \in [A, B)$, то интеграл собственный. Пусть $\varphi(\beta-) = B$. Возьмем $\{y_n\}, y_n \in [A, B), y_n \rightarrow B$. Не уменьшая общности, можно считать, что $y_n \in [\varphi(\alpha), B)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = y_n$ (по теореме Больцано-Коши). Докажем, что $\gamma_n \rightarrow \beta$. Пусть $\beta' \in [\alpha, \beta)$. Т.к. $\max_{[\alpha, \beta']} \varphi < \beta$, а $\varphi(\gamma_n) \rightarrow B$, то, начиная с некоторого номера, $\gamma_n \in (\beta', \beta)$. Поэтому $\gamma_n \rightarrow \beta$, откуда $\Psi(y_n) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow J$.

□

Пример. $\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$. Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Если $x = 0$, то

$t = 0$. Если $x = \pi$, то $t = +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2) \cdot 2 + 1 - t^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 3} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Замечание. $a < b \in \mathbb{R}$. Пусть $x = b - \frac{1}{t}$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} dt$$

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \cos x dx = \sin x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x - \sin 1 - \text{не существует}$$

1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов

Лемма 2. $f \in R_{loc}[a, b), f \geq 0$. Тогда $\int_a^b f$ сходится $\Leftrightarrow F(t) = \int_a^t f$ на $[a, b)$ ограничена сверху.

Доказательство. $F(t)$ возрастает на $[a, b)$ ($t_1, t_2: F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f \geq 0$).
 $\exists \lim_{t \rightarrow b-} F(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow F$ возрастает и F ограничена сверху. \square

Замечание. Если $f \geq 0$, то $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 25 (Признак сравнения). $f, g \in R_{loc}[a, b), f, g \geq 0$

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при } x \rightarrow b-$$

Тогда

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится.
2. Если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство. 1. По определению O -большого найдутся такие $\Delta \in (a, b)$ и $K > 0$, что $f(x) \leq K g(x)$ при всех $x \in [\Delta, b)$. Следовательно,

$$\int_\Delta^b f \leq K \int_\Delta^b g < +\infty$$

то есть остаток интеграла $\int_a^b f$ сходится, а тогда и сам интеграл $\int_a^b f$ сходится.

2. Если бы интеграл $\int_a^b g$ сходилась, то по пункту 1 сходилась бы и интеграл $\int_a^b f$.

□

Следствие (Признак сравнения в предельной форме). $f, g \in R_{loc}[a; b), f \geq 0, g > 0$ и $\exists \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0; +\infty]$. Тогда

1. Если $l \in [0, +\infty)$ и $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится
2. Если $l \in (0, +\infty]$ и $\int_a^b f$ сходится, то $\int_a^b g$ сходится
3. Если $l \in (0, +\infty)$, то $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходятся или расходятся одновременно

Доказательство. 1. $\frac{f}{g}$ ограничено в $(b-\varepsilon; b) \Rightarrow f(x) = O_b(g(x))$ при $x \rightarrow b- \Rightarrow$ по теореме

$\int_a^b f$ сходится

2. Т.к. $l > 0$, то $f > 0$ в $(b-\varepsilon; b)$. Тогда поменяем f и g местами в п.1
3. Следует из пунктов 1 и 2.

□

Следствие. Интегралы от неотрицательных эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно.

Упражнение. $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^7 x}$

Пример. Докажем, что $f \geq 0, \int_a^{+\infty} f$ сходится $\nRightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Доказательство. $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}; k + \frac{1}{k^2(k+1)} \right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus E \\ k, & x = k \\ \text{линейно и непрерывно соединим точки, } & x \in E \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f \\ \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^N \int_{k - \frac{1}{k^2(k+1)}}^{k + \frac{1}{k^2(k+1)}} f(x) dx = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} k \cdot \frac{2}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

□

Замечание. Можно построить пример с $g > 0$. $g(x) = f(x) + \frac{1}{x^2}$

1.9. Интегралы от знакопеременных функций

Определение 22. $-\infty < a < b \leq +\infty, f \in R_{loc}[a; b)$

$\int_a^b f$ сходится абсолютно, если сходится $\int_a^b |f|$

Замечание. Если $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходится абсолютно, то $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится абсолютно $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Доказательство. $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| \cdot |f| + |\beta| \cdot |g|$ + признак сравнения для неотрицательных функций. □

Замечание. Если $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Лемма 3. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. $\int_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a; b) \int_{\Delta}^b |f| < \varepsilon$

Тогда $\left| \int_{\Delta}^b f \right| < \int_{\Delta}^b |f| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^{\Delta} f + \int_{\Delta}^b f$ сходится по критерию Больцано-Коши. □

Определение 23.

$$x_+ = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad - \text{положительная часть } x$$

$$x_- = \max\{-x, 0\} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \quad - \text{отрицательная часть } x$$

$$x_+ - x_- = x \Rightarrow x_+ = \frac{|x| + x}{2}$$

$$x_+ + x_- = |x| \Rightarrow x_- = \frac{|x| - x}{2}$$

$$0 \leq x_{\pm} \leq |x|, f_+ = \max\{f; 0\}, f_- = \max\{-f; 0\}$$

Доказательство. $\int_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \int_a^b f_+$ и $\int_a^b f_-$ — сходятся \Rightarrow
 $\Rightarrow \int_a^b f$ сходится \square

Замечание. Обратное утверждение к лемме неверно: $\int_a^b f$ сходится $\nRightarrow \int_a^b |f|$ сходится.

Определение 24. Если $\int_a^b f$ сходится, а $\int_a^b |f|$ расходится, то $\int_a^b f$ называют условно сходящимся.

Замечание. $\int_a^b f$ сходится абсолютно, $\int_a^b g$ сходится условно $\Rightarrow \int_a^b (f+g)$ сходится условно, т.к. $g = (f+g) - f$.

Теорема 26 (Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов). $f \in C[a; b)$, $g \in C^1[a; b]$, g монотонна.

- Признак Дирихле.** Если функция $F(t) = \int_a^t f$ ограничена, а $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-} 0$, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.
- Признак Абеля.** Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, а g ограничена, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.

Доказательство. 1. Проинтегрируем по частям:

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg \Big|_a^b - \int_a^b Fg'$$

Двойная подстановка обнуляется, поэтому сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла $\int_a^b Fg'$. Докажем, что $\int_a^b Fg'$ сходится абсолютно.

$$\int_a^b |Fg'| \leq \underset{|F| \leq K}{K} \int_a^b |g'| = K \left| \int_a^b g' \right| = K \cdot |g \Big|_a^b| = K|g(a)|$$

- g ограничена и монотонна $\Rightarrow \alpha = \lim_{x \rightarrow b-} g(x)$
 Функция $g - \alpha$ монотонна, $\xrightarrow{x \rightarrow b-} 0 \Rightarrow \int_a^b f(g - \alpha)$ сходится по признаку Дирихле. Поэтому интеграл $\int_a^b f(g - \alpha)$ сходится, а интеграл $\int_a^b fg$ сходится как сумма двух сходящихся:

$$\int_a^b fg = \int_a^b f(g - \alpha) + \int_a^b f \cdot \alpha$$

\square

Замечание. Можно ослабить условия: $f \in R_{loc}[a; b)$, g монотонна на $[a; b)$

Определение 25. в.р. $\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right)$ – главное значение.

Пример.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx &= +\infty\end{aligned}$$

Пример. 1. $\int_1^{+\infty} f(x) \cdot \sin x dx, f(x) \geq 0$.

- Если $\int_1^{+\infty} f$ сходится, то $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x dx$ сходится абсолютно.
 $0 \leq |f(x) \cdot \sin x| \leq |f(x)| = f(x)$

- Если $\int_1^{+\infty} f$ расходится
 $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1. $l = 0$ и f монотонна, то признак Дирихле и $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x dx$ – сходится.

Но: $\int_1^{+\infty} |f(x) \sin x| dx$ не сходится.

$$\begin{aligned}|\sin x| &\geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \int_1^{\infty} f(x) |\sin x| dx &\geq \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} f(x) dx}_{\text{расходится}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} f(x) \cos 2x dx}_{\text{сходится}}\end{aligned}$$

2. $l > 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f \sin x dx$ расходится.

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) \cdot \sin x dx \geq \frac{1}{2} \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \min\{f(a_k), f(b_k)\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} \cdot l = \varepsilon > 0$$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится условно.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ сходится абсолютно по признаку сравнения.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится условно

$\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \sin x dx$ расходится

3. Нельзя пользоваться эквивалентностью в случае знакопеременной функции.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx - \text{расходится}$$

$$f(x) \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \text{ при } x \rightarrow \infty \quad \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \text{ сходится.}$$

$$\text{Выделим главную часть: } \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + r(x) \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} +$$

$$\frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + \frac{\sin^4 x}{x^2} + |q(x)|, \quad |q(x)| \leq \frac{c}{x^2}$$

расходится сх-ся абс-но сх-ся абс.

$$\left(\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + r(t), t \rightarrow 0 \right)$$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$
 При $x \rightarrow 0 \sin x \sim x$ и $\sin x > 0$ на $(0; 1)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$$

5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится. Но сходится в смысле главного значения.

Замечание. $\int_1^{+\infty} f \cdot g, f$ – периодична с периодом $T > 0, g$ – монотонна $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Тогда

1. Если $\int_1^{+\infty} g$ сходится $\Rightarrow \int_1^{+\infty} fg$

2. Если $\int_1^{+\infty} g$ расходится, то $\left(\int_1^{+\infty} fg \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_1^{1+T} f = 0 \right)$

Доказательство. Упражнение. □

Следствие. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx \text{ сходится}$$

1.10. Длина, площадь и объём

1.10.1. Площадь

Определение 26. $\|x\|, x \in \mathbb{R}^n$ – длина вектора.

$$\|A - B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i - B_i)^2}$$

Определение 27. Движение – отображение $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, сохраняющее расстояния.

$$\|A - B\| = \|U(A) - U(B)\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^n$$

Определение 28. Площадь – функционал $S : P \rightarrow [0; +\infty)$, где $\{P\}$ – множество квадратуемых фигур из \mathbb{R}^2

Теорема 27 (Свойства площади). 1. Аддитивность: P_1, P_2 – квадратуемы и $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Тогда $P_1 \cup P_2$ – квадратуемая и $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

2. Нормированность на прямоугольниках: площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab

3. Инвариантность относительно движений: $S(U(P)) = S(P)$