

Матанализ 1 семестр ПИ,

Лекции

Собрано 17 ноября 2021 г. в 16:04

Содержание

| | |
|--|-----------|
| 1. Аксиомы вещественных чисел | 1 |
| 1.1. Аксиомы сложения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) | 1 |
| 1.2. Аксиомы умножения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) | 1 |
| 1.3. Дистрибутивность умножения относительно сложения | 1 |
| 1.4. Аксиомы порядка ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leq b$ или $b \leq a$) | 1 |
| 1.5. Ещё несколько определений | 1 |
| 1.6. Аксиома полноты | 1 |
| 1.7. Следствия из аксиом множества действительных чисел | 2 |
| 2. Принцип математической индукции | 4 |
| 3. Супремум и инфимум | 5 |
| 4. Отображения | 6 |
| 5. Последовательности | 7 |
| 5.1. Предел последовательности и его свойства | 7 |
| 5.2. Монотонные последовательности | 8 |
| 5.3. Теорема об арифметических действиях с пределами | 9 |
| 5.4. Арифметические действия с бесконечностями | 10 |
| 5.5. Неравенство Бернулли | 11 |
| 6. Пределы последовательностей | 12 |
| 6.1. Число e | 12 |
| 6.2. Теорема Штольца | 13 |
| 6.3. Подпоследовательности | 14 |
| 7. Ряды | 17 |
| 7.1. Ряды | 17 |
| 7.2. Свойства рядов | 18 |
| 8. Функции | 19 |
| 8.1. Свойства пределов функций | 19 |
| 8.2. Непрерывные функции | 22 |
| 9. Пределы функций | 23 |
| 9.1. ε -окрестности | 23 |
| 9.2. Предел функции | 23 |
| 10. Непрерывность | 25 |

| | |
|---|-----------|
| 11. Элементарные функции | 28 |
| 11.1. Постоянная | 28 |
| 11.2. Степенная функция | 28 |
| 11.3. Показательная функция | 29 |
| 11.3.1. Свойства показательной функции | 30 |
| 11.4. Логарифм | 31 |
| 11.4.1. Свойства логарифма | 31 |
| 11.5. Тригонометрические функции | 32 |
| 11.5.1. Обратные тригонометрические функции | 33 |
| 12. Замечательные пределы | 34 |
| 13. Сравнение функций | 36 |
| 14. Дифференциальное исчисление | 39 |
| 14.1. Связь с физикой | 40 |
| 14.2. Связь с геометрией | 40 |
| 14.3. Бесконечные производные | 40 |
| 14.4. Правила дифференцирования | 41 |
| 14.5. Формулы для вычисления производных | 42 |
| 14.6. Теоремы о средних | 44 |
| 14.7. Производные высших порядков | 47 |

Раздел #1: Аксиомы вещественных чисел

1.1. Аксиомы сложения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a + 0 = a$ (существование нуля)
4. $\forall a \in \mathbb{R} \rightarrow \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ ($(-a)$ — противоположное число для a)

1.2. Аксиомы умножения ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения)
3. $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \cdot x = x$ (существование единицы)
4. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \rightarrow \exists \frac{1}{a} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($\frac{1}{a}$ — обратное число для a)

1.3. Дистрибутивность умножения относительно сложения

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1.4. Аксиомы порядка ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leq b$ или $b \leq a$)

1. $\forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a \leq a$ (рефлексивность)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b, b \leq c \rightarrow a \leq c$ (транзитивность)
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b, b \leq a \rightarrow a = b$ (антисимметричность)
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a \leq b$ или $b \leq a$
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 \leq a, 0 \leq b \rightarrow 0 \leq a \cdot b$

1.5. Ещё несколько определений

- $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$ (определение \geq)
- $a < b \Leftrightarrow a \leq b$ и $a \neq b$ (определение $<$)
- $a > b \Leftrightarrow b < a$ (определение $>$)

1.6. Аксиома полноты

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset, B \neq \emptyset : \forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y \rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$$

1.7. Следствия из аксиом множества действительных чисел

Следствие 1.7.1. Число 0 единственно

Доказательство. Предположим обратное: $\exists 0' \neq 0$, тогда рассмотрим следующее:

$$0' + 0 = 0'$$

$$0 + 0' = 0$$

Теперь заметим, что левые части равны по аксиоме о коммутативности сложения $\Rightarrow 0' = 0$, что противоречит предполагаемому. ■

Следствие 1.7.2. Число 1 единственно

Доказательство аналогично доказательству единственности нуля, только используется умножение вместо сложения.

Следствие 1.7.3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

Доказательство.

$$a = b \Rightarrow a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$a = b \Rightarrow b \leq a \Rightarrow b + c \leq a + c$$

$$a + c \leq b + c, b + c \leq a + c \Rightarrow a + c = b + c$$

В обратную сторону аналогично:

$$a + c = b + c \Rightarrow a + c \leq b + c \Rightarrow a \leq b$$

$$a + c = b + c \Rightarrow b + c \leq a + c \Rightarrow b \leq a$$

$$a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$$

■

Следствие 1.7.4. $\forall a \in \mathbb{R} (-a)$ единственно.

Доказательство. Пусть верно обратное: $\exists a \in \mathbb{R} : \exists (-a)_1, (-a)_2 \in \mathbb{R} : (-a)_1 \neq (-a)_2$

$$a + (-a)_1 = a + (-a)_2 = 0$$

Добавим к обеим частям $(-a)_1$:

$$(-a)_1 = (-a)_2$$

Пришли к противоречию. ■

Следствие 1.7.5. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \rightarrow -b \leq -a$

Доказательство.

$$a + ((-a) + (-b)) \leq b + ((-a) + (-b))$$

$$-b \leq -a$$

■

Следствие 1.7.6. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \cdot x = 0$

Доказательство.

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = x \cdot (0 + 0) + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0$$

■

Следствие 1.7.7. $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow (-x) = (-1) \cdot x$

Доказательство. Предположим обратное: $\exists x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = b, b \neq (-x)$

$$(-1) \cdot x + 1 \cdot x = b + 1 \cdot x$$

$$x \cdot (1 + (-1)) = b + 1 \cdot x$$

$$b + x = 0$$

$$b = -x$$

Противоречие.

■

Следствие 1.7.8. $0 < 1$

Доказательство. Предположим обратное: $0 \geq 1$, вариант $0 = 1$ сразу отпадает из-за аксиомы о существовании единицы, значит $0 > 1 \Leftrightarrow -1 > 0$

Пусть $x \in \mathbb{R}, x > 0$, тогда $(-1) \cdot x \geq 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot x + 1 \cdot x \geq 1 \cdot x \Leftrightarrow 0 \geq x$

Противоречие.

■

Теорема 1.7.9 (Теорема о вложенных отрезка). Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$. Тогда

$$\exists a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Доказательство. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1$

Значит, $\forall k, m \rightarrow a_k \leq b_m$

Пусть $A = \{a_n\}, B = \{b_n\}$. По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : \forall k, m \in \mathbb{N} \rightarrow a_k \leq c \leq b_m \Rightarrow c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

■

Замечания: 1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0; \frac{1}{n}] = \emptyset$. Важно, что именно отрезки, а не интервалы или полуинтервалы.

2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n; +\infty) = ?$

3) Без аксиомы полноты не работает. Например

$$[1.4; 1.5] \supset [1.41; 1.42] \supset \dots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}, \text{ но не в } \mathbb{Q}$$

Раздел #2: Принцип математической индукции

$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ - утверждения. Если

1. P_1 верно - база
2. $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow P_n \Rightarrow P_{n+1}$ - индукционный переход

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow P_n$.

Def 2.0.1. $M \subset \mathbb{R}$ - индуктивное, если $1 \in M \wedge (x \in M \Rightarrow x + 1 \in M)$.

Def 2.0.2. \mathbb{N} - минимальное индуктивное подмножество \mathbb{R}

Def 2.0.3 (Сдвиг индекса суммирования).

$$\sum_{n=m}^k a_n = \sum_{j=m+p}^{k+p} a_{j-p}, p \in \mathbb{Z}$$

Def 2.0.4. $k!!$ - произведение целых чисел до k включительно одной четности с k .

Def 2.0.5 (Биномиальные коэффициенты).

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Теорема 2.0.6 (Формула бинома Ньютона). Пусть $n \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

Доказательство. $n = 0 \rightarrow 1 = 1$, верно

Индукционный переход:

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k+1} = C_n^n x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + C_n^k x^k y^{n+1-k}) + C_n^0 x^0 y^{n+1} = \\ &= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) x^k y^{n+1-k} + C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k} \end{aligned}$$

■

Раздел #3: Супремум и инфимум

Def 3.0.1. $E \subset \mathbb{R}$ - ограниченное сверху, если $\exists A : \forall x \in E \rightarrow x \leq A$

Def 3.0.2. $E \subset \mathbb{R}$ - ограниченное снизу, если $\exists B : \forall x \in E \rightarrow x \geq B$

Def 3.0.3. $E \subset \mathbb{R}$ - ограниченное, если оно ограничено и снизу, и сверху.

Def 3.0.4. $M \in \mathbb{R}$ называется максимумом мн-ва E , если $\forall x \in E \rightarrow x \leq M \wedge M \in E$

Def 3.0.5. $K \in \mathbb{R}$ называется минимумом мн-ва E , если $\forall x \in E \rightarrow x \geq K \wedge K \in E$

Теорема 3.0.6 (Существование минимума и максимума у конечного множества из \mathbb{R}). Во всяком конечном непустом подмножестве \mathbb{R} есть наибольший и наименьший элементу

Доказательство. $n = 1$ - количество элементов (База)

Индукционный переход: $\exists \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = C$

Добавим x_{n+1} : если $x_{n+1} > C \Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = x_{n+1}$

если $x_{n+1} \leq C \Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = C$ ■

Следствие 3.0.7. $\forall E \neq \emptyset \wedge E \subset \mathbb{Z} \wedge E$ - огр. $\rightarrow \exists \max E \wedge \min E$

Следствие 3.0.8. $\forall E \subset \mathbb{N}, E \neq \emptyset \rightarrow \exists \min E$

Далее везде $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$

Def 3.0.9. Пусть E ограничено сверху, тогда $\sup E$ - наименьшая из верхних границ. (точная верхняя граница)

Def 3.0.10. Пусть E ограничено снизу, тогда $\inf E$ - наибольшая из нижних границ. (точная нижняя граница)

Теорема 3.0.11. $E \neq \emptyset$. Если E ограничено снизу, то $\exists! \inf E$

Доказательство. Пусть A - множество всех нижних границ $E (A \neq \emptyset)$

$\forall a \in A, b \in E \rightarrow a \leq b$

Тогда по аксиоме полноты $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \ \forall a \in A, b \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c \leq b \ \forall b \in E - c - \text{нижняя граница,} \\ c \geq a \ \forall a \in A - c - \text{наибольшее} \end{cases}$ ■

Def 3.0.12.

$$l = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \rightarrow x \leq l \\ \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists y \in E : y > l - \varepsilon \end{cases}$$

$$m = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \rightarrow x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists y \in E : y < m + \varepsilon \end{cases}$$

Если E не ограничено сверху, то $\sup E = +\infty$

Если $E = \emptyset$, то чаще всего $\sup E$ и $\inf E$ не определены, но иногда $\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$

Утверждение 3.0.13. $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Тогда если A ограничено снизу, то $\inf A \leq \inf B$

Доказательство. Если C - нижняя граница A , то $\forall x \in A \rightarrow C \leq x \Rightarrow \forall y \in B \rightarrow C \leq y \Rightarrow C$ - нижняя граница $B \Rightarrow \inf A$ - тоже нижняя граница $B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$ ■

Утверждение 3.0.14. $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Тогда если A ограничено сверху, то $\sup A \geq \sup B$

Раздел #4: Отображения

$$f: A \rightarrow B \quad f(x) = y$$

y – образ элемента x

x – прообраз y

$f(A)$ – образ множества A

$f^{-1}(B)$ – прообраз множества B

$$G_f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$$

Def 4.0.1. $f: A \rightarrow B$. Если $f(A) = B$, то f сюръективно.

Def 4.0.2. $f: A \rightarrow B$. Если $(x_1 \neq x_2 \in A) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$, то f инъективно.

Def 4.0.3. Биекция - f инъективно и сюръективно.

Def 4.0.4 (Композиция). $g(x), f(x)$.

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$f: X \rightarrow Y \quad g: Y_0 \rightarrow Z, f(x) \in Y_0$$

Def 4.0.5. id_x - тождественное отображение: $f(x) = x$

Def 4.0.6. $f: X \rightarrow Y, X_0 \subset X$

$f|_{X_0}$ - сужение отображения f на X_0

Раздел #5: Последовательности

Def 5.0.1. Последовательность — это отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Пример 5.0.2. $x_n = n^2 : x_n = \{1, 4, 9, \dots\}$

5.1. Предел последовательности и его свойства

Def 5.1.1. Предел последовательности — это такое число $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$$

Также говорят, что вне любого интервала, содержащего l , лежит лишь конечно число элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Пример 5.1.2. $x_n = \frac{1}{n}, \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right]$

Замечание 5.1.3. N необязательно наименьшее.

Def 5.1.4. Последовательность называется **сходящейся**, если она имеет конечный предел.

Def 5.1.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow x_n > E$

Def 5.1.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow x_n < E$

Def 5.1.7 (Беззнаковая бесконечность).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall E \in \mathbb{R} \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow |x_n| > E$$

Def 5.1.8. Последовательность называется бесконечно большой, если она стремится к бесконечности

Def 5.1.9. Последовательность называется бесконечно малой, если она стремится к нулю

Свойства пределов последовательности:

1. Последовательность не может иметь двух различных пределов.

Доказательство. Пусть $a \neq b$ — пределы, $a < b$. Возьмем $\varepsilon = \left(\frac{b-a}{3}\right)$. Тогда по определению предела вне ε -окрестности a лежит конечно число членов последовательности, и вне ε -окрестности b лежит конечно число членов последовательности \Rightarrow сама последовательности конечна !? ■

2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim\{x_n\} = a$. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдем номер N такой, что при всех $n \geq N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < 1$. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a|$$

Поэтому при всех $n \geq N$ выполняется неравенство

$$|x_n| < 1 + |a|$$

Положим $M = \max(1 + |a|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|)$. Тогда $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ■

Утверждение 5.1.10. Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство. N_1 - номер из определения $\lim x_n = a$

N_2 - номер из определения $\lim y_n = b$

$N = \max\{N_1; N_2\}$ ■

3. Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b, \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq y_n$. Тогда $a \leq b$ (предельный переход в неравенстве).

Доказательство. Пусть $a > b$. Тогда $\exists N$, начиная с которого в ε -окрестности b лежит бесконечное число членов y_n , а ε -окрестности a лежит бесконечное число членов x_n . Но тогда, если бы возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$, то $\exists y_n \in (b - \varepsilon; b + \varepsilon) : y_n < x_n, x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ ■

Следствие 5.1.11. 1. $\lim x_n = a, \forall n \rightarrow x_n \leq b \Rightarrow a \leq b$

2. $\lim y_n = b, \forall n \rightarrow y_n \geq a \Rightarrow a \leq b$

4.

Теорема 5.1.12 (Теорема о сжатой последовательности, теорема о двух милиционерах).

Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq z_n \leq y_n \wedge \lim x_n = \lim y_n = a$. Тогда $\lim z_n = a$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow x_n, y_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Т.к. $x_n \leq z_n \leq y_n \Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ ■

5.2. Монотонные последовательности

Def 5.2.1. Последовательность называется возрастающей, если $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$

Def 5.2.2. Последовательность называется убывающей, если $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$

Def 5.2.3. Последовательность называется монотонной, если она возрастающая или убывающая.

Теорема 5.2.4 (О монотонной ограниченной последовательности). 1. Возрастающая и ограниченная сверху последовательность сходится

2. Убывающая и ограниченная снизу последовательность сходится

Доказательство. Пусть множество $E = \{x_1, x_2, \dots\}, c = \sup E$

$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq c$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : x_N > c - \varepsilon$$

Т.к. x_n возрастает, то

$$\forall n > N \rightarrow x_n \geq x_N > c - \varepsilon \wedge x_n < c + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - c| < \varepsilon$$

■

Замечание 5.2.5. 1. Возрастающая и неограниченная сверху последовательность стремится к $+\infty$.

2. Убывающая и неограниченная снизу последовательность стремится к $-\infty$

Доказательство. $\forall E \rightarrow \exists N : x_N > E$ и $x_n \geq x_N \forall n \geq N$ ■

5.3. Теорема об арифметических действиях с пределами

Теорема 5.3.1 (Теорема об арифметических действиях с пределами). Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b, a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim |x_n| = |a|$
2. $\lim(x_n + y_n) = a + b$
3. $\lim(x_n - y_n) = a - b$
4. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
5. $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow b \neq 0 \wedge y_n \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Заметим, что

$$||x_n| - |a|| < |x_n - a| < \varepsilon$$

2. $|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$

3. Вместо y_n рассмотрим $-y_n$

4. $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \end{cases}, M : \forall n \rightarrow |y_n| < M$

$$|x_n \cdot y_n - ab| = |x_n y_n - ab - a \cdot y_n + a \cdot y_n| = |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)| \leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| < \varepsilon$$

5. Достаточно доказать, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|} \leq \frac{|y_n - b|}{|\frac{b}{2}||b|} < \frac{\frac{b^2 \varepsilon}{2}}{|\frac{b}{2}||b|} = \varepsilon$$

■

Утверждение 5.3.2. x_n - бесконечно малая, y_n - ограниченная. Тогда $\lim x_n \cdot y_n = 0$

Доказательство. $|x_n y_n| < |x_n| \cdot M < \varepsilon \cdot M, M : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |y_n| < M$

■

Утверждение 5.3.3. $\forall n \rightarrow x_n \neq 0$. Тогда x_n - бесконечно большая $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая

Доказательство. $|x_n| > E \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E}$

■

5.4. Арифметические действия с бесконечностями

1. $\lim x_n = +\infty, y_n$ ограничено снизу. Тогда $\lim(x_n + y_n) = +\infty$
2. $\lim x_n = -\infty, y_n$ ограничено сверху. Тогда $\lim(x_n + y_n) = -\infty$
3. $\lim x_n = +\infty, y_n \geq c > 0$. Тогда $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$
4. $\lim x_n = +\infty, y_n \leq c < 0$. Тогда $\lim(x_n \cdot y_n) = -\infty$
5. $\lim x_n = a \neq 0, \lim y_n = 0$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$
6. $\lim x_n = a \in \mathbb{R}, \lim y_n = \infty$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$
7. $\lim x_n = \infty, \lim y_n = b \in \mathbb{R} \wedge y_n \neq 0$. Тогда $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$

Замечание 5.4.1. $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}, \lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim(x_n * y_n) = a * b$

Запрещенные операции (неопределённости):

1. $\pm\infty + (\mp\infty)$
2. $\pm\infty - (\pm\infty)$
3. $0 \cdot \infty$
4. $\frac{0}{0}$
5. $\frac{\infty}{\infty}$

5.5. Неравенство Бернулли

Теорема 5.5.1 (Неравенство Бернулли). Пусть $x > -1, n \in \mathbb{N}$. Тогда $(1+x)^n \geq 1+nx$

Доказательство. База $n = 1 : (1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x$

Индукционный переход $n \rightarrow n+1$

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+n(x+1)+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

■

Раздел #6: Пределы последовательностей

6.1. Число e

Пусть $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} = \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n^{2n+2}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_{n-1} \geq y_n \Rightarrow y_n \text{ убывающая} \Rightarrow \exists \lim y_n \Rightarrow \exists \lim x_n, \text{ т.к. } x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \lim x_n = \lim y_n \end{aligned}$$

Def 6.1.1. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Теорема 6.1.2. $x_n > 0 \wedge \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $\exists \lim x_n = 0$

Доказательство. Пусть $q = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $q < 1$. $\exists N : \forall n \geq N \rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+q}{2}$. Тогда

$$0 < x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot x_N \leq x_N \cdot \left(\frac{1+q}{2}\right)^{n-N} \rightarrow 0$$

■

Следствие 6.1.3. $a > 1, k \in \mathbb{N}, \lim \frac{n^k}{a^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$$

Следствие 6.1.4. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

Следствие 6.1.5. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

6.2. Теорема Штольца

Теорема 6.2.1 (Теорема Штольца). $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$ $\lim y_n = +\infty \wedge \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. 1. $l = 0$. $\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}$. $\forall \varepsilon > 0 \exists m : \forall k \geq m \rightarrow |\varepsilon_k| < \varepsilon$

$$x_k - x_{k-1} = \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_k - y_{k-1}) \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_n - y_m) \leq \varepsilon \cdot y_n$$

Тогда $|x_n| \leq |x_m| + \varepsilon y_n$

$$0 \leq \left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leq \left| \frac{x_m}{y_n} \right| + \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$$

2. $l \neq 0, l \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\tilde{x}_n = x_n - l \cdot y_n$. Тогда

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - l \cdot y_n - x_{n-1} + l \cdot y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \rightarrow 0$$

Тогда по п. 1 $\frac{\tilde{x}_n}{y_n} \rightarrow 0$. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\tilde{x}_n + l \cdot y_n}{y_n} = \frac{\tilde{x}_n}{y_n} + l \rightarrow l$

3. $l = +\infty$. $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty$. Начиная с некоторого номера > 1

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} \Leftrightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \rightarrow +\infty$$

Тогда x_n возрастает и стремится к $+\infty$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$$

4. $l \rightarrow -\infty$. Следует рассмотреть $\{-x_n\}$

■

Теорема 6.2.2. $y_1 > y_2 > \dots > 0 \wedge \lim y_n = \lim x_n = 0$. Если $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. Докажем для $l = 0$.

$$\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}, \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \rightarrow |\varepsilon_k| < \varepsilon$$

Пусть $n > m \geq N$

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| \cdot |y_{k-1} - y_k| \leq \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon (y_m - y_n) \Leftrightarrow |x_m| \leq \varepsilon \cdot y_m \Rightarrow \frac{|x_m|}{y_m} < \varepsilon$$

Доказали, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m \geq N \rightarrow \left| \frac{x_m}{y_m} \right| < \varepsilon$

Для $l \neq 0$ доказывается аналогично предыдущей теореме.

■

6.3. Подпоследовательности

Def 6.3.1. Пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Подпоследовательностью этой последовательности называется $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Теорема 6.3.2 (О стягивающихся отрезках). $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots, \lim(b_n - a_n) = 0$. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ состоит из одной точки. Если эта точка c , то $\lim a_n = \lim b_n = c$

Доказательство. $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ (по лемме о вложенных отрезках). Пусть $c < d$ принадлежит этому пересечению.

$$0 < d - c \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \leq c - a_n \leq 0 \Rightarrow \text{точка единственна}$$

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \Rightarrow 0 \leq c - a_n \leq 0 \Rightarrow a_n \rightarrow c$$

$$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \Rightarrow b_n \rightarrow c$$

■

Теорема 6.3.3 (Теорема Больцано-Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Возьмем $a_1 \leq b_1$ так, чтобы вся последовательность лежала между ними. $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Поделим отрезок пополам и возьмем ту половину, в которой лежит бесконечное число членов последовательности. Обозначим её $[a_2, b_2]$. Теперь возьмем $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$. $[a_3, b_3]$ - ту половину $[a_2, b_2]$, в которой бесконечное число членов последовательности и т.д.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \text{ и длина } [a_k, b_k] = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}, \lim a_n = \lim b_n = c$$

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - подпоследовательность $\{x_n\}$ и

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$$

■

Теорема 6.3.4. 1. Если последовательность неограничена сверху, то из неё можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$

2. Если неограничена снизу, то можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$

Доказательство.

$$\exists n_1 : x_{n_1} > 1$$

$$\exists n_2 : x_{n_2} > 2 \wedge n_2 > n_1$$

$$\exists n_k : x_{n_k} > k \wedge n_k > n_{k-1}$$

■

Следствие 6.3.5. Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность имеющую предел (конечный или бесконечный).

Def 6.3.6. Частичные пределы последовательности $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ – пределы её подпоследовательностей.

Замечание 6.3.7. $\lim x_n = a, \{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow a$

Def 6.3.8. Последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Свойства:

1. Фундаментальная последовательность ограничена
2. Сходящаяся последовательность фундаментальна

Доказательство. $a = \lim x_n$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

■

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то эта последовательность сходится.

Доказательство. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a, \forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall k \geq K \rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N \rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$M = \max\{n_K, N\}$. Тогда $\forall n \geq M \rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon$

■

Теорема 6.3.9 (Критерий Коши сходимости последовательности). Последовательность сходится \Leftrightarrow она фундаментальна

Доказательство. " \Rightarrow ". Свойство 2.

" \Leftarrow ". Фундаментальна \Rightarrow ограничена (свойство 1) $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность (теорема Больцано-Вейерштрасса) \Rightarrow сходится

■

Def 6.3.10. $\{x_n\}$ – ограничена сверху.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$ – верхний предел.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$ – нижний предел.

Теорема 6.3.11. Пусть $y_n = \inf_{k \geq n} x_k, z_n = \sup_{k \geq n} x_k$. Тогда

$$\exists \lim x_n, \overline{\lim} x_n \wedge \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

Доказательство. 1. Если неограничена сверху, то $\overline{\lim} x_n = +\infty$

2. Пусть $\{x_n\}$ – ограничена. $\forall n \rightarrow x_n \leq M$

$$z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq \dots \wedge z_n \leq M \Rightarrow \exists \lim z_n$$

3. Аналогично для y_n

4. $\forall n \rightarrow y_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

■

Теорема 6.3.12. 1. $\overline{\lim} x_n$ – наибольший частичный предел $\{x_n\}$

2. $\underline{\lim} x_n$ – наименьший частичный предел $\{x_n\}$

3. $\exists \lim x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, $b = \overline{\lim} x_n$. Построим $\{x_{n_k}\}$:

$$x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \quad z_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\} > b - \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x_{n_1} > b - \frac{1}{2}$$

$$z_{n_1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\} > b - \frac{1}{3} \Rightarrow \exists x_{n_2} > b - \frac{1}{3}, n_2 > n_1$$

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow b$$

Рассмотрим $x_{m_k} \rightarrow c$. Тогда $x_{m_k} \leq z_{m_k} \Rightarrow c \leq b$

Если $\{x_n\}$ неограничена

- сверху: $\exists \overline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \rightarrow +\infty$
- снизу: а) $\exists \overline{\lim} x_n = b \in \mathbb{R}$ – аналогично п.1. б) $\exists \overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$

2. Аналогично

3. " \Rightarrow ". $\exists \lim x_n = l \Rightarrow \forall \{x_{n_k}\} \rightarrow \lim x_{n_k} = l \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$

" \Leftarrow ". $y_n \leq x_n \leq z_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq \lim x_n \leq \overline{\lim} x_n \Rightarrow \exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

■

Теорема 6.3.13 (характеристические свойства $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$).

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$b = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N : x_n > a - \varepsilon \end{cases}$$

Раздел #7: Ряды

7.1. Ряды

Def 7.1.1. Дана $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$

Если $S_n \rightarrow S \in \mathbb{R}$, то S называют суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ряд сходится к S).

Если S_n не имеет предела в \mathbb{R} , то ряд называют расходящимся.

Пример 7.1.2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$, т.е.

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1$$

Пример 7.1.3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = S$$

Тогда, если $S \in \mathbb{R}$, то $\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$ Значит

$$\frac{S}{2} = S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{S}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Данный ряд называется **гармоническим**

Замечание 7.1.4. S_n частичные суммы ряда

Пример 7.1.5. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0 \Rightarrow S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \Rightarrow \text{не существует } \lim S_n$$

Теорема 7.1.6 (Необходимое условие сходимости ряда). Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

Доказательство.

$$\exists \lim S_n = S, a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

■

Пример 7.1.7. Гармонический ряд.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Тогда $H_{2n} \geq \frac{1}{2}(n+1) \rightarrow +\infty \Rightarrow H_n \rightarrow +\infty$ (т.к. H_n возрастает)

Пример 7.1.8. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

7.2. Свойства рядов

1. Ряд не может иметь двух различных сумм.
2. Если ряд сходится к S , то к S сходится и ряд, полученный из данного любой расстановкой скобок.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow (a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6)$$

Пусть $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3, b_3 = a_4 + a_5 + a_6$ и т.д. Заметим, что $\{S_n^b\}$ является подпоследовательностью S_n^a .

Замечание 7.2.1. "раскрывать скобки" вообще говоря нельзя.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 1) = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

Но если раскрыть скобки, то получится пример [7.1.5](#)

3. Добавление или отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость (но может повлиять на сумму)

Раздел #8: Функции

8.1. Свойства пределов функций

Теорема 8.1.1 (Единственность предела функции). Пусть $D \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка D , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Если A и $B \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \Rightarrow A = B$

Доказательство. Возьмем $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$. По Гейне $f(x_n) \rightarrow A \wedge f(x_n) \rightarrow B$. Но $\{x_n\}$ имеет единственный предел $\Rightarrow A = B$. ■

Замечание 8.1.2. Беззнаковая бесконечность: $A = +\infty, B = -\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$

Теорема 8.1.3 (Локальная ограниченность функции, имеющей предел). $D \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка D , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$. Тогда $\exists V(a) : f(x)$ ограничена в $D \cap V(a)$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$. $\exists \dot{V}(a) : |f(x) - A| < 1 \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D$. Тогда $|f(x)| < |A| + 1$. Если $a \in D$, то $|f(x)| < \max\{|A| + 1, f(a)\}$ ■

Теорема 8.1.4 (Стабилизация знака функции, имеющей предел). $D \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка D , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Тогда $\exists V(a)$ такая, что знаки $f(x)$ и B совпадают на $\dot{V}(a) \cap D$

Доказательство. Пусть $B > 0$. Докажем от противного, т.е.

$$\forall n \ \exists x_n \in \dot{V}_{\frac{1}{n}}(a) \cap D \wedge f(x_n) \leq 0$$

Тогда $x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow B$, но $f(x_n) \leq 0 \Rightarrow B \leq 0$. ■

Теорема 8.1.5 (Арифметические действия над функциями, имеющими предел). $D \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка D , $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \xrightarrow{x \rightarrow a} A, g \xrightarrow{x \rightarrow a} B$. Тогда

1. $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$
2. $f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$
3. $f(x) - g(x) \rightarrow A - B$
4. $|f(x)| \rightarrow |A|$
5. Если $B \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\} : x_n \rightarrow a, x_n \neq a, x_n \in D$. Тогда $f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B$. Достаточно применить теорему об арифметических действиях с пределами последовательностей. ■

Замечание 8.1.6. Пункт 5) т.к. $B \neq 0$, то $\exists V(a) : \text{sign}(g(x)) = \text{sign } B$ в $V(a)$. Поэтому излишне требовать $g(x) \neq 0$

Теорема 8.1.7 (Предел композиции функций). $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subset E$

1. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in \overline{\mathbb{R}}$
2. A – предельная точка множества E и $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} B \in \overline{\mathbb{R}}$
3. $\exists V(a) : f(x) \neq A \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D$

Тогда $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$

Доказательство. Возьмем $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n \neq a$.

Обозначим $y_n = f(x_n) \Rightarrow y_n \in E, y_n \rightarrow A$. По 3) начиная с некоторого номера $x_n \in V(a)$, а значит $y_n \neq A$. Тогда $g(y_n) \rightarrow B$, т.е. $g(f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$. Значит $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$ ■

Теорема 8.1.8 (Предельный переход в неравенстве). $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D . $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in \overline{\mathbb{R}}, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \in \overline{\mathbb{R}}, f(x) \leq g(x) \ \forall x \in D \setminus \{a\}$$

Тогда $A \leq B$

Доказательство.

$$\{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B = A \leq B$$

■

Теорема 8.1.9 (о сжатой функции). $D \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка D , $f, h, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ и

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in D \setminus \{a\} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, A \in \mathbb{R}$$

Тогда $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$

Доказательство. $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, h(x_n) \rightarrow A$

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \Rightarrow A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \leq A \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A \Rightarrow g(x) \rightarrow A$$

■

Замечание 8.1.10. $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in D \setminus \{a\}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Rightarrow g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$

Def 8.1.11. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a$ – предельная точка $D_1 \subset D$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f|_{D_1}(x)$ – предел f в точке a по множеству D_1 .

Def 8.1.12. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D_1 = D \cap (-\infty, a), a$ – предельная точка D_1 . Предел f в точке a по множеству D_1 называется левосторонним пределом в точке a .

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x), \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

Def 8.1.13. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D_1 = D \cap (a, +\infty), a$ – предельная точка D_1 . Правосторонний предел – предел f в точке a по множеству D_1

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

Def 8.1.14. Левосторонний предел на разных "языках".

- $\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
- $\forall V(A) \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \rightarrow f(x) \in V(A)$
- $\forall \{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow a, x_n < a \rightarrow f(x_n) \rightarrow A$

Замечание 8.1.15. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ – предельная точка для $D_1 = D \cap (-\infty, a), D_2 = D \cap (a, +\infty)$
Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \wedge \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

Доказательство. " \Rightarrow ". Очевидно.

" \Leftarrow ". Возьмем δ_1 из определения левостороннего предела, δ_2 из определения правостороннего предела. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in D : |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

■

Теорема 8.1.16 (Предел монотонной функции). $D \in \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in (-\infty, +\infty]$
 $D_1 = D \cap (-\infty, a), a$ – предельная точка D .

1. Если f возрастает и ограничена сверху на D_1 , то $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Если f убывает и ограничена снизу на D_1 , то $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. Пусть $A = \sup_{x \in D_1} f(x)$. Тогда $A \in \mathbb{R}$, т.к. f ограничена сверху. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in D_1 : f(x_0) > A - \varepsilon$$

Тогда $\forall x \in D_1 : x > x_0$

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq A < A + \varepsilon$$

Пусть $\delta = a - x_0$. Тогда $|f(x) - A| < \varepsilon \forall x : 0 < a - x < \delta$

Если $a = +\infty \Rightarrow \Delta = \max\{x_0, 1\}$

■

Замечание 8.1.17. f возрастает и не ограничена сверху $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty$

Теорема 8.1.18 (Критерий Больцано-Коши для функций). $D \subset \mathbb{R}$. Тогда существование конечного $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ равносильно утверждению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V(a) : \forall x_1, x_2 \in \dot{V}(a) \cap D \rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Доказательство. " \Rightarrow ". $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ Тогда $\exists V(a) : |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $x_1, x_2 \in D \cap \dot{V}(a)$, то

$$|f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$$

С другой стороны $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$

" \Leftarrow ". $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$ и докажем, что $\exists \lim f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Пусть $\varepsilon > 0$.

$$\exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n \in \dot{V}(a)$$

$$\forall n, l \geq N \rightarrow |f(x_n) - f(x_l)| < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\} - \text{фундаментальна}$$

Значит $\{f(x_n)\}$ сходится. ■

8.2. Непрерывные функции

Def 8.2.1. $D \subset \mathbb{R}, a \in D$. Функция f называется непрерывной в точке a , если выполнено одно из следующих условий:

1. Предел f в точке a существует и равен $f(a)$ (только если a – предельная точка).
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
3. $\forall V(f(a)) \exists V(a) : f(V(a) \cap D) \subset V(f(a))$
4. $\forall \{x_n\} : x_n \rightarrow a, x_n \in D \rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$
5. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (если a – предельная точка)

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(x) - f(a) \Rightarrow \Delta f \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{} 0$$

Замечание 8.2.2. Если a – изолированная точка D , то

$$f(V(a) \cap D) = \{f(a)\} \subset V(f(a))$$

Т.е. любая f непрерывна в точке a

Def 8.2.3. $D \subset \mathbb{R}, a \in D, f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

a называется точкой разрыва f , если f не непрерывна в точке a

Def 8.2.4. $D_1 = D \cap (-\infty, a], D_2 = D \cap [a, +\infty)$.

Если сужение $f|_{D_1}$ непрерывно в точке a , то f непрерывна в точке a **слева**.

Если сужение $f|_{D_2}$ непрерывно в точке a , то f непрерывна в точке a **справа**

Def 8.2.5. Если $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow a-} f(x), f(a)$ – конечные, но не все равны, то a – точка разрыва I рода.

Def 8.2.6. Если хотя бы один предел не существует или бесконечен – II рода.

Def 8.2.7. Если в точке a разрыв, но мы можем доопределить или переопределить f в точке a до непрерывности, то a – точка устранимого разрыва.

Раздел #9: Пределы функций

9.1. ε -окрестности

Def 9.1.1. ε -окрестность точки $a - V_\varepsilon(a) : (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
 проколота ε -окрестность $a - \dot{V}_\varepsilon : (a - \varepsilon, a) \cup (a + \varepsilon)$

Def 9.1.2. $D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. Точка a называется точкой сгущения D , если в любой окрестности a найдется точка из D , отличная от a

$$\forall \dot{V}(a) \exists x \in D : x \in \dot{V}(a) \wedge x \neq a$$

Пример 9.1.3. $D = [1, 2)$. Точки сгущения: $[1, 2]$

Замечание 9.1.4. Точка сгущения может принадлежать множеству, а может и не принадлежать.

Замечание 9.1.5. Если a – точка сгущения, тогда в $\forall \dot{V}(a)$ бесконечно много точек из D .

Замечание 9.1.6. Точки сгущения называют предельными точками множества.

a – точка сгущения $\Leftrightarrow \exists \{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$

Доказательство. " \Rightarrow ". $\varepsilon = \frac{1}{k} \Rightarrow |x_k - a| < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 \leq \lim |x_k - a| < 0 \Rightarrow \exists \lim x_k = 0$

" \Leftarrow ". В $\forall V(a)$ лежит бесконечно много точек $\{x_n\}, x_n \neq a \Rightarrow a$ – точка сгущения. ■

Def 9.1.7. $a \in D$, но a – не предельная точка. Тогда a называется изолированной точкой множества D

Замечание 9.1.8. $+\infty$ может быть предельной точкой множества

$$\dot{V}(+\infty) = (E, +\infty)$$

9.2. Предел функции

Def 9.2.1. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ – предельная точка D .

Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом f в точке a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ или } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$$

если выполняется одно из следующих условий:

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (Определение по Коши, определение на языке δ, ε)
2. $\forall V(A) \exists \dot{V}(a) : f(\dot{V}(a) \cap D) \subset V(A)$ (Определение на языке окрестностей)
3. $\forall \{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A$ (Определение по Гейне, на языке последовательностей)

Теорема 9.2.2 (Эквивалентность определения по Коши и по Гейне). Определения 1) и 3) эквивалентны.

Доказательство. 1) \Rightarrow 3). Рассмотрим какую-то $\{x_n\} : x_n \neq a, x_n \in D, x_n \rightarrow a$ (она существует по доказанному). Нужно доказать, что $f(x_n) \rightarrow A$.

Пусть $x_n \rightarrow a$, то

$$\forall \delta > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

3) \Rightarrow 1). Пусть это не так, т.е. 1) не выполнено

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in D, x \neq a, |x - a| < \delta : |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$.

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, \text{ но } |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$$

■

Замечание 9.2.3. в $\overline{\mathbb{R}}$

1.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{5\}, |x - 5| < \delta \rightarrow f(x) > E$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \Delta : \forall x \in D, x < \Delta \rightarrow |f(x) - 2| < E$$

Замечание 9.2.4. В определении по Гейне есть " $\forall \{x_n\}$ ". Если x_n и y_n подходят под условия, то $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$

Доказательство. Возьмем $z_n : z_1 = x_1, z_2 = y_1, z_3 = x_2, z_4 = y_2$ и т.д. $\{z_n\}$ подходит под определение $\Rightarrow \exists \lim f(z_n)$ ■

Замечание 9.2.5. В определении предела функции не участвует значения функции в точке a .

Замечание 9.2.6. Последовательность – частный случай функции.

Раздел #10: Непрерывность

Def 10.0.1. Функция называется непрерывной на множестве D , если она непрерывна в каждой точке D .

$C(D)$ – множество функций, непрерывных на D . $\langle a, b \rangle$ – промежуток (неважно, включаются концы или нет).

Теорема 10.0.2 (об арифметических действиях над непрерывными функциями). $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}$ – непрерывны в точке $x_0 \in D$. Тогда $f + g, f - g, |f|, f \cdot g$ также непрерывны в точке x_0 . Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ тоже непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. • x_0 – изолированная точка D – очевидно.

- x_0 – предельная точка. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ и $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g(x_0)$. Тогда $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0) + g(x_0)$. Далее по теореме об арифметических действиях с пределами функций, имеющих предел.

■

Замечание 10.0.3. Если f непрерывна в точке $x_0 \in D$ и $f(x_0) \neq 0$, то найдется $V(x_0)$, что знак f в $V(x_0) \cap D$ совпадает со знаком $f(x_0)$

Теорема 10.0.4 (О непрерывности композиции). $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subset E$. Пусть f непрерывна в точке $x_0 \in D$ и g непрерывна в точке $f(x_0)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Пусть $x_n \in D, x_n \rightarrow x_0$. Обозначим $y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$. Т.к. f непрерывна в точке x_0 , то $y_n \rightarrow y_0$. Тогда $g(y_n) \rightarrow g(y_0)$, т.к. g непрерывна в точке y_0 .

$$g(y_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$$

■

Теорема 10.0.5 (Первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция ограничена.

Доказательство. $f \in C[a, b]$. Пусть f не ограничена на $[a, b]$, т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$$

x_n – ограничена $\Rightarrow \exists \{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$. Т.к. f непрерывна, то $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c) \Rightarrow \{f(x_{n_k})\}$ ограничена, т.к. сходится, но

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Получили противоречие

■

Замечание 10.0.6. Если возьмем интервал (a, b) , то теорема не выполняется.

Теорема 10.0.7 (Вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

Доказательство. $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. По первой теореме Вейерштрасса f ограничена на $[a, b] \Rightarrow M \in \mathbb{R}$. Пусть f не достигает M . Тогда $f(x) < M$ на $[a, b]$. Рассмотрим $\varphi(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ — непрерывна на $[a, b]$. Значит она ограничена на $[a, b]$. $\exists m : \varphi(x) \leq m \quad \forall x \in [a, b]$

$$\frac{1}{M-f(x)} \leq m \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leq M-f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{m}$$

Значит M — не супремум — противоречие ■

Теорема 10.0.8 (Больцано-Коши о промежуточном значении). f — непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\forall C$, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in (a, b) : f(c) = C$

Доказательство. • Пусть $f(a)$ и $f(b)$ — разных знаков. Тогда докажем, что $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$. Пусть $f(a) < 0 < f(b)$. Рассмотрим точку $\frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то теорема доказана. Если $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, то будем далее рассматривать отрезок $[a, \frac{a+b}{2}]$, иначе будем рассматривать отрезок $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Получим $[a_1, b_1] : f(a_1) < 0 < f(b_1)$ и т.д. $[a_n, b_n]$ — стягивающиеся отрезки $\Rightarrow \exists! c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n], a_n, b_n \rightarrow c$

$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \Leftrightarrow f(c) \leq 0 \leq f(c) \Rightarrow f(c) = 0$$

- Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - C, \varphi \in C[a, b], \varphi(a)$ и $\varphi(b)$ разных знаков. Тогда $\exists c \in (a, b) : \varphi(c) = 0 \Rightarrow f(c) = C$ ■

Следствие 10.0.9. Если непрерывная на отрезке функция принимает какие-то два значения, то она принимает и все значения между ними.

Теорема 10.0.10 (О сохранении промежутка). Множество значений непрерывной на промежутке функции есть промежуток.

Доказательство. Пусть $f \in C\langle a, b \rangle$

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$$

$m, M \in \overline{\mathbb{R}}, E = f(\langle a, b \rangle)$. Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$. f принимает все значения между $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если E не промежуток, то $\exists y \in E : f(x) \neq y \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$, но $\exists y_1 < y < y_2 : \exists x_1 : f(x_1) = y_1, \exists x_2 : f(x_2) = y_2$ ■

Теорема 10.0.11 (О разрывах и непрерывности монотонной функции). $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, монотонна. Тогда

1. f не может иметь разрывов II рода
2. f — непрерывная \Leftrightarrow её множество значения — промежуток

Доказательство. 1. Пусть f возрастает. $x \in (a, b), x_1 \in \langle a, x_0 \rangle$. Тогда $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_1, x_0) \Rightarrow f$ возрастает и ограничена сверху на $(x_1, x_0) \Rightarrow \exists$ конечный $f(x_0-)$. Кроме того, по используя предельный переход:

$$f(x_1) \leq f(x_0-) \leq f(x_0)$$

Повторим для $f(x_0+) \Rightarrow$ нет разрывов II рода.

2. " \Rightarrow ". Доказано

" \Leftarrow ". $f(\langle a, b \rangle)$ – промежуток. Докажем непрерывность слева в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Пусть $f(x_0-) < f(x_0)$. Возьмем $y \in (f(x_0-), f(x_0))$. Тогда если $a < x_1 < x_0$, то $y \in [f(x_1), f(x_0)]$. Значит y – значение функции. С другой стороны $\forall x \in \langle a, x_0 \rangle \rightarrow f(x) \leq f(x_0-) < y, \forall x \in [x_0, b) \rightarrow f(x) \geq f(x_0) > y \Rightarrow f$ не принимает значение y – противоречие. Аналогично для $f(x_0+)$ ■

Теорема 10.0.12 (Существование и непрерывность обратной функции). $f \in C\langle a, b \rangle$, f строго монотонна

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$$

Тогда

1. f обратима, $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ – биекция.
2. f^{-1} строго монотонна (одноименно с f)
3. f^{-1} непрерывна на $\langle m, M \rangle$

Доказательство. Пусть f возрастает.

1. $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle, x_1 < x_2$. Тогда $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ обратима.
 $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$. $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$. Если $y_1 \neq y_2 \in \langle m, M \rangle \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$
2. $y_1 < y_2 \in \langle m, M \rangle \Rightarrow y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$. $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2), x_1 < x_2$ из-за возрастания f
3. f^{-1} строго возрастает на $\langle m, M \rangle$, множество значений функции f^{-1} – промежуток $\Rightarrow f^{-1}$ непрерывна по предыдущей теореме. ■

Раздел #11: Элементарные функции

11.1. Постоянная

$f(x) = c, x \mapsto c$, непрерывна на \mathbb{R}

11.2. Степенная функция

$$e_\alpha(x) = x^\alpha$$

При $\alpha = 1$ $e_1(x) = x$ — непрерывна на \mathbb{R}

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$e_\alpha(x) = x^n$$

Следовательно $e_n(x)$ непрерывна на \mathbb{R} как произведение непрерывных.

При $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как частное непрерывных.

При $\alpha = 0$ полагаем $x^0 = 1$ при всех $x \neq 0$. Можно доопределить до непрерывности ($0^0 = 1$)

Если n нечётно, то e_n строго возрастает на \mathbb{R} , $\sup_{x \in \mathbb{R}} e_n(x) = +\infty$, $\inf_{x \in \mathbb{R}} e_n(x) = -\infty$. По теореме о сохранении промежутка $e_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Если n чётно, то функция e_n строго возрастает на \mathbb{R}_+ , $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} e_n(x) = +\infty$, $\min_{x \in \mathbb{R}_+} e_n(x) = 0$, $e_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует и непрерывна функция

$$e_{\frac{1}{n}} = \begin{cases} e_n^{-1}, n \not\equiv 2 \\ (e_n|_{\mathbb{R}_+})^{-1}, n \equiv 2 \end{cases}$$

Это $\sqrt[n]{x}$, строго возрастает и непрерывна на \mathbb{R}_+

Теперь определим x^α при рациональном $\alpha = r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \frac{p}{q}$ несократима.

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}} (e_r = e_{\frac{1}{q}} \circ e_p)$$

Таким образом, x^r определено следующим образом.

$$\begin{aligned} x &> 0, r \text{ любое,} \\ x &= 0, r \geq 0, \\ x &< 0, q \not\equiv 2 \end{aligned}$$

e_r непрерывна на своей области определения, строго возрастает на $[0, +\infty)$ при $r > 0$, строго убывает на $(0, +\infty)$ при $r < 0$

11.3. Показательная функция

$$0^x = 0 \quad \forall x > 0$$

Пусть $a > 0$. Пока что a^x определена только для $x \in \mathbb{Q}$. Обозначим эту функцию $a^x|_{\mathbb{Q}}$. Её свойства:

1. $r < s \Rightarrow a^r < a^s, a > 1$ и $a^r > a^s, 0 < a < 1$
2. $a^{r+s} = a^r a^s$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $(ab)^r = a^r b^r$

Def 11.3.1. Пусть $a > 0, x \in \mathbb{R}$ Положим

$$a^x = \lim_{r \rightarrow x} a^r|_{\mathbb{Q}}$$

Lm 11.3.2. Пусть $a > 0, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \rightarrow 0$. Тогда $a^{r_n} \rightarrow 1$.

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидно, т.к. $a^{r_n} = 1 \quad \forall n$.

Пусть $a > 1$. Докажем лемму в частном случае $r_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $a^{\frac{1}{n}} > 1$, имеем $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n, \alpha_n > 0$. Тогда по неравенству Бернулли

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$$

Откуда $0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n} \Rightarrow \alpha_n \rightarrow 0 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.

Далее, по доказанному

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

Пусть теперь $\{r_n\}$ – произвольная последовательность из условия леммы. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists N_0$:

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Поскольку $r_n \rightarrow 0$, найдется такой номер N , что $\forall n > N \rightarrow -\frac{1}{N_0} < r_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N_0}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{N_0}} < 1 + \varepsilon$$

Значит $a^{r_n} \rightarrow 1$

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, и по доказанному

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \rightarrow 1$$

■

Lm 11.3.3. Пусть $a > 0, x \in \mathbb{R}, \{r_n\}$ – последовательность рациональных чисел, $r_n \rightarrow x$. Тогда существует конечный предел последовательности $\{a^{r_n}\}$

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидна.

Пусть $a > 1$. Возьмем какую-либо возрастающую последовательность $\{s_n\}$ рациональных чисел, стремящуюся к x . Например

$$s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

Тогда $x - \frac{1}{10^n} < s_n \leq x \Rightarrow s_n \rightarrow x$. Докажем, что последовательность $\{s_n\}$ возрастает. Пусть $A = 10^n x$. Тогда $s_n \leq s_{n+1} \Leftrightarrow 10[A] \leq [10A]$, но $10[A]$ – целое число, не превосходящее $10A$. $\{a^{s_n}\}$ возрастает и ограничена сверху числом $a^{[x]+1}$. Значит $\{a^{s_n}\}$ сходится к некоторому пределу L . Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \rightarrow L$$

Потому что $a^{r_n - s_n} \rightarrow 1$ по предыдущей лемме.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и по доказанному $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \rightarrow L, L > 0$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} \rightarrow \frac{1}{L}$$

■

11.3.1. Свойства показательной функции

1. a^x строго возрастает на \mathbb{R} при $a > 1$ и строго убывает на \mathbb{R} при $a \in (0, 1)$

Доказательство. $a > 1$. Пусть $x < y$. Докажем, что $a^x < a^y$. Возьмем два числа $\bar{r}, \bar{\bar{r}} \in \mathbb{Q}$ между x и y . Возьмем $\{\bar{r}_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{\bar{r}}_n\}_{n=1}^\infty$: последовательности из $\mathbb{Q} : \bar{r}_n \rightarrow x, \bar{\bar{r}}_n \rightarrow y$.

По доказанному $a^{\bar{r}_n} < a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} < a^{\bar{\bar{r}}_n}$

$$\Rightarrow a^x \leq a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} \leq a^y \Rightarrow a^x < a^y$$

$a \in (0, 1)$. Рассмотрим $b = \frac{1}{a} > 1$.

■

2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

Доказательство. $\{\bar{r}_n\}, \{\bar{\bar{r}}_n\}$ как в 1)

$$a^{\bar{r}_n + \bar{\bar{r}}_n} = a^{\bar{r}_n} \cdot a^{\bar{\bar{r}}_n} \Rightarrow a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

■

3. $a^{-x} = a^0 \cdot a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

4. a^x непрерывна на \mathbb{R}

Доказательство. $a > 1, \{x_n\} : x_n \rightarrow 0$. Докажем непрерывность в нуле.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |x_n| < \varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{n_0} < x_n < \frac{1}{n_0}, n_0 \in \mathbb{N}$$

Тогда $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{x_n} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$ ($a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow \exists n_0 : |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N' : \forall n \geq N \rightarrow |a^{x_n} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow a^{x_n} \rightarrow 1$$

Докажем непрерывность в точке $x_0 \neq 0$.

Рассмотрим $a^{x_0 + x_n} - a^{x_n} = a^{x_0}(a^{x_n} - 1) \rightarrow 0$

■

5. $(ab)^x = a^x b^x$

Доказательство. $\{r_n\}$ из \mathbb{Q} , $r_n \rightarrow x$. Тогда

$$(ab)^{r_n} = a^{r_n} \cdot b^{r_n} \Rightarrow (ab)^x = a^x b^x$$

■

6. $(a^x)^y = a^{xy}$

Доказательство. $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, \{x_n\}, \{y_n\}$ из \mathbb{Q} . Тогда по непрерывности показательной и степенной функций

$$(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n \cdot y_m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (a^x)^{y_m} = a^{x \cdot y_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

■

7. a^x – биекция из \mathbb{R} на $(0, +\infty)$

Доказательство. $a > 1$. Тогда a^x строго возрастает на \mathbb{R} .

$$a^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

■

11.4. Логарифм

Def 11.4.1. Т.к. $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ – биекция, то $\exists f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\log_a x : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Из теоремы об обратной функции $\log_a x$ монотонна и непрерывна.

11.4.1. Свойства логарифма

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy), a \in (0, 1) \cup (1, +\infty), x, y > 0$

Доказательство.

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y = a^{\log_a(xy)}$$

■

2. $\log_a x^b = b \log_a x, a \in (0, 1) \cup (1, +\infty), x > 0, b \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$$a^{b \log_a x} = (a^{\log_a x})^b = x^b = a^{\log_a x^b}$$

■

3. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty), x > 0$

Доказательство.

$$b^{\log_a x \cdot \log_b a} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x}$$

■

Def 11.4.2. $\ln x$ – натуральный логарифм ($\log_e x$)

Вернемся к степенной функции:

Def 11.4.3. $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$. $0^\alpha = 0$. Покажем непрерывность справа в точке 0.

$$x_n \rightarrow 0, x_n > 0$$

Пусть $y_n = \ln x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$. Значит $x_n^\alpha = e^{\alpha \ln x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

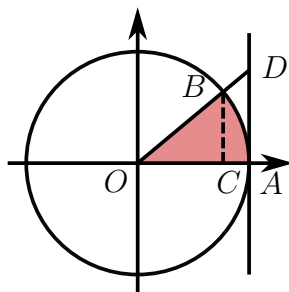
$$x^\alpha : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \alpha > 0 \text{ – биекция}$$

$$x^\alpha : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), \alpha < 0 \text{ – биекция}$$

11.5. Тригонометрические функции

Утверждение 11.5.1. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Тогда $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Доказательство. Нужно доказать: $BC < \widehat{AB} < AD$
 $\triangle OBA \subset \nabla OAB \subset \triangle OAD \Leftrightarrow S_{\triangle OBA} < S_{\nabla OAB} < S_{\triangle OAD}$



$$S_{\triangle OBA} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |BC| = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{\nabla OAB} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot |OA|^2 = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAD} = |OA| \cdot |AD| \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Отсюда

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

■

Следствие 11.5.2. $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (причем равенство достигается только в 0)
 При $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ доказано.

$$x \geq \frac{\pi}{2} : |\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$$

$$x \leq -\frac{\pi}{2} : |\sin x| = |\sin(-x)| < |-x| = x$$

Свойства:

1. $\sin x$ – непрерывная на \mathbb{R} функция.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

Доказательство.

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0| \rightarrow 0$$

■

2. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ – непрерывна.

3. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$

4. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$ – непрерывны на области определения.

11.5.1. Обратные тригонометрические функции

$\sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ не обратимая.

$\sin x|_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ – биекция

Def 11.5.3. $\arcsin x = \left(\sin x|_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}$. Монотонно возрастает и непрерывна

Def 11.5.4. $\arccos x = \left(\cos x|_{x \in [0, \pi]} \right)^{-1}$. Убывает, непрерывна

Def 11.5.5. $\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg} x|_{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$. Непрерывна, строго возрастает.

Def 11.5.6. $\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg} x|_{x \in (0, \pi)} \right)^{-1}$

Замечание 11.5.7. Для обратимости строгой монотонной функции непрерывность не нужна.

Раздел #12: Замечательные пределы

Def 12.0.1. *Первый замечательный предел:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ на $(0, \frac{\pi}{2})$, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$
 $\cos x, \frac{\sin x}{x}, 1$ – четные функции, значит верно и для $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Перейдем к пределу при $x \rightarrow 0$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

■

Следствие 12.0.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Доказательство. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$$\frac{1 - \cos x}{2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$$

■

Следствие 12.0.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

Доказательство.

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

■

Следствие 12.0.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

Доказательство. $\frac{\sin x}{x} = \frac{y}{\arcsin y}$, $y = \sin x$ в окрестности $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow \arcsin y = x$. $\arcsin x$ непрерывна в нуле, в 0 равен 0. $\frac{\sin x}{x}$ непрерывна в $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad - \text{непрерывна на } \mathbb{R}$$

\Rightarrow по теореме о непрерывности композиции $\frac{y}{\arcsin y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$

■

Следствие 12.0.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Доказательство. Аналогично предыдущему следствию.

■

Def 12.0.6. *Второй замечательный предел*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ задана на $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$. Пусть $x_n \rightarrow +\infty$. Нужно доказать, что $f(x_n) \rightarrow e$.

1. Рассмотрим $\{x_n\}$ из \mathbb{N} . $f(x_n) \rightarrow e$ как подпоследовательность.
2. $\{x_n\}$ из \mathbb{R} . Начиная с некоторого номера $x_n \geq 1$.

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n] + 1}$$

Очевидно, $[x_n] \leq x_n \leq [x_n] + 1$. Тогда

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{[x_n] + 1}} \cdot f([x_n] + 1) \leq f(x_n) \leq f([x_n]) \cdot \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)$$

$\{[x_n]\}_{n=1}^\infty$ — последовательность из \mathbb{N} . Выполним предельный переход в неравенстве.

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq e \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = e$$

■

Def 12.0.7. Третий замечательный предел (обычно не нумеруется).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, a > 0, a \neq 1$$

Доказательство. $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

■

Def 12.0.8. Четвертый замечательный предел (обычно не нумеруется)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Доказательство. $\alpha = 0$ тривиально.

$\alpha \neq 0$. $x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0, |x_n| < 1 \forall n$. Обозначим

$$y_n = (1+x_n)^\alpha - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, y_n \neq 0 \Rightarrow \alpha \ln(1+x_n) = \ln(1+y_n)$$

Тогда

$$\frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x_n)}{x_n} \rightarrow \alpha$$

■

Def 12.0.9. Пятый замечательный предел (обычно не нумеруется) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$

Доказательство. $a = 1$ тривиально.

$a \neq 1$. $x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0$

$$y_n = a^{x_n} - 1 \rightarrow 0, y_n \neq 0, \ln(1+y_n) = x_n \cdot \ln a$$

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \cdot \frac{x_n \ln a}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln a$$

■

Раздел #13: Сравнение функций

Def 13.0.1. $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D и $\exists \varphi : D \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$ в $\dot{V}(x_0) \cap D$.

1. Если $\varphi(x)$ ограничена на $\dot{V}(x_0) \cap D$, то говорят, что f ограничена по сравнению с g при $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$$

2. Если $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, то говорят, что f бесконечно малая по сравнению с g при $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$$

3. Если $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$, то говорят, что f и g асимптотически равны.

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$$

Замечание 13.0.2. 1. $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена в $\dot{V} \cap D$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Замечание 13.0.3. Все пункты при $x \rightarrow x_0$

$$1. f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$$

$$2. f \sim f$$

$$3. f \sim g, f = g + o(g), f = g + o(f) \text{ – равносильные утверждения.}$$

$$4. \text{ Если } f = o(g), \text{ то } f = O(g)$$

Следствие 13.0.4. При $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin x &= x + o(x) & \ln(1+x) &= x + o(x) \\ \tan x &= x + o(x) & \arcsin x &= x + o(x) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) & a^x &= 1 + x \ln a + o(x) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x) \end{aligned}$$

Теорема 13.0.5 (О замене на эквивалентные). $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D , $f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \text{ (если } x_0 \text{ – предельная точка области определения } \frac{f}{g} \text{)}$$

Доказательство. $\exists u(x_0) \exists \varphi : \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1. f = \varphi \cdot \tilde{f}$ в $u(x_0) \cap D$

$\exists v(x_0) \exists \psi : \psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1. g = \psi \cdot \tilde{g}$ в $v(x_0) \cap D$

$w(x_0) = u(x_0) \cap v(x_0)$. Тогда $f \cdot g = (\varphi \cdot \psi) \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g}$ в $w(x_0)$. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} g \cdot f = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ т.к. $\varphi \cdot \psi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$,

то $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f} \cdot \tilde{g} = A$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} g \cdot f$ не существует, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f} \tilde{g}$ не существует.

Для частного доказательство аналогично. ■

Замечание 13.0.6. Заменять на эквивалентные можно **только** в произведении и частном.

Def 13.0.7. Пусть $f \sim g, f \sim h, x \rightarrow x_0$. Если $f - h = o(f - g)$, то говорят, что асимптотическое равенство $f \sim h$ точнее, чем $f \sim g$.

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D . Пусть задана система функций $\{g_k\}_{k=0}^N : \forall k \in [0, N-1] \cap \mathbb{Z}_+ \rightarrow g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), x \rightarrow x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^N c_k \cdot g_k(x) + o(g_N(x))$$

Многочлены получаются, если $g_k(x) = (x - x_0)^k$.

Если $f(x) \sim C \cdot (x - x_0)^k (C \neq 0)$, то $C \cdot (x - x_0)^k$ – главная степенная часть.

Теорема 13.0.8 (О единственности асимптотического разложения). $D \in \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка $D, n \in \mathbb{Z}_+; f, g_k : D \rightarrow \mathbb{R}, g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), x \rightarrow x_0 \forall k = 0, \dots, n-1$ и $\forall V(x_0) \exists$ точка в $\dot{V}(x_0)$: в ней g_n не ноль. Тогда если существует асимптотическое разложение f по системе функций $\{g_k\}$, то оно единственно.

Доказательство. Пусть не единственное. Тогда $\exists c_k, d_k, k = 0, \dots, n : \exists i c_i \neq d_i$.

$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot g_k(x) + o(g_n(x))$ и $f(x) = \sum_{k=0}^n d_k \cdot g_k(x) + o(g_n(x))$ при $x \rightarrow x_0$.

Т.к. $g_{k+1}(x) = o(g_k(x))$, то $g_{k+1}(x) = o(g_l(x)) \forall l \leq k$ при $x \rightarrow x_0$.

Обозначим $E_k = \{x : g_k(x) \neq 0, k = 0, \dots, n\}$. Если $g_k = 0$ на $V(x_0)$, то $g_{k+1} = 0$ на $V(x_0), g_n = 0$ на $V(x_0)$.

$$g_{k+1} = o(g_k) \Leftrightarrow \exists \varphi : g_{k+1} = \varphi \cdot g_k$$

Если x_0 – предельная точка E_{k_0} , то она предельная точка всех E_k . Пусть m – наименьший номер : $c_m \neq d_m$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^m c_k g_k(x) + o(g_m(x)), f(x) = \sum_{k=0}^m d_k g_k(x) + o(g_m(x))$$

Вычтем: $0 = (c_m - d_m)g_m(x) + o(g_m(x))$. Поделим на $g_m(x)$

$$0 = (c_m - d_m) + \frac{o(g_m(x))}{g_m(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c_m - d_m \Rightarrow c_m = d_m$$

■

Def 13.0.9. $x_0 \in \mathbb{R}, f$ задана хотя бы на $\langle a, x_0 \rangle$ или $\langle x_0, b \rangle$ и действует в \mathbb{R} . Тогда прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции f , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \pm\infty$$

Def 13.0.10. $\langle a, +\infty \rangle \subset D \subset \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Прямая $y = \alpha x + \beta$ – наклонная асимптота f при $x \rightarrow +\infty$, если $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Def 13.0.11. При $x \rightarrow -\infty$ аналогично.

Теорема 13.0.12 (Уравнение наклонной асимптоты). $\langle a, +\infty \rangle \subset D \subset \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Прямая $y = \alpha x + \beta$ является асимптотой f при $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x)$

Доказательство. " \Rightarrow ". По определению $f(x) = \alpha x + \beta + \varphi(x)$, $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Тогда $\frac{f(x)}{x} = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$$

$$f(x) - \alpha x = \beta + \varphi(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$$

" \Leftarrow ". Прделаем те же рассуждения "в обратную сторону".

■

Раздел #14: Дифференциальное исчисление

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, a$ – предельная точка $E, n \in \mathbb{Z}_+$. Хотим найти многочлен степени не выше n ($P(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k$)

$$f(a) = P(a), f(x) = P(x) + o((x - a)^n), x \rightarrow a \quad (1)$$

Замечание 14.0.1. Если такой многочлен существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть $\exists P(x), Q(x)$, удовлетворяющие условию (1). Тогда

$$0 = P(x) - Q(x) + o((x - a)^n)$$

Если $P(x) \neq Q(x)$, то $P(x) - Q(x) = \sum_{k=0}^n r_k (x - a)^k = r(x)$

$$\Rightarrow r(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a$$

$$r(x) = r_m (x - a)^m + \dots + r_n (x - a)^n, m \leq n, r_m \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{(x - a)^m} = o((x - a)^{n-m}) \Rightarrow r_m = 0$$

■

Def 14.0.2. Многочлен, удовлетворяющий условию (1) называется многочленом Тейлора функции f в точке a порядка n $T_{a,n}f$

Def 14.0.3. Функция f называется дифференцируемой в точке a ($\langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$), если $\exists k \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + k(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a$$

Def 14.0.4. $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$, если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = K \in \mathbb{R}$, то K называется производной функции f в точке a . (Обозначение $f'(a), \frac{df}{dx}(a), Df(a)$)

$\Delta_a f = f(x) - f(a)$ – приращение функции f в точке a .

$$x - a = \Delta_a x.$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta_a x \rightarrow 0} \frac{\Delta_a f}{\Delta_a x}$$

Теорема 14.0.5. $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$. Тогда равносильны три утверждения:

1. f дифференцируема в точке a
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ существует и равен k
3. $\exists F(x) : F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$ непрерывна в точке $a, F(a) = k$ и $f(x) - f(a) = F(x)(x - a), x \in \langle A, B \rangle$

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). $\exists k : f(x) - f(a) = k(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k + \frac{o(x - a)}{x - a} \rightarrow k$$

2) \Rightarrow 3).

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \neq a \\ k, & x = a \end{cases}$$

из 2) следует непрерывность F в точке a

3) \Rightarrow 1). По 3) $\exists F$:

$$f(x) - f(a) = F(x)(x - a) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + F(x)(x - a) = f(a) + k(x - a) + (F(x) - k) \cdot (x - a)$$

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} F(a) = k \Rightarrow (F(x) - k)(x - a) = o((x - a)) \quad \blacksquare$$

14.1. Связь с физикой

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} - \text{мгновенная скорость}$$

14.2. Связь с геометрией

Рассмотрим функции: $l_k(x) = f(a) + k(x - a)$, графики – прямые, проходящие через точку $(a; f(a))$

$$f(x) - l_k(x) = f(x) - f(a) - k(x - a)$$

Если $f(x)$ дифференцируема в точке a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \Leftrightarrow f(x) - l_k(x) = (x - a) \cdot (f'(a) - k) + o(x - a)$$

При $k = f'(a)$ разность есть $o(x - a)$.

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

касательная в точке a к функции f . $\operatorname{tg} \alpha = f'(a)$.

14.3. Бесконечные производные

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \Rightarrow f'(a) = +\infty$$

В таком случае f не является дифференцируемой в точке a .

Односторонняя производная:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a \pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Замечание 14.3.1. Если f дифференцируема в точке a , то f непрерывна в точке a .

Доказательство.

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) \quad \blacksquare$$

Обратное не выполняется. Например, $f(x) = |x|$

14.4. Правила дифференцирования

Теорема 14.4.1 (Производная композиции). $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \langle C, D \rangle, g : \langle C, D \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$. Если f дифференцируема в точке a , g дифференцируема в точке $f(a)$, то $g \circ f$ дифференцируема в точке a и

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Доказательство. $\exists F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F(a) = f'(a)$ и $f(x) - f(a) = F(x)(x - a), x \in \langle A, B \rangle$, F непрерывна в точке a

$\exists G : \langle C, D \rangle \rightarrow \mathbb{R}, G(f(a)) = g'(f(a))$ и $g(y) - g(f(a)) = G(y)(y - f(a)), y \in \langle C, D \rangle$, G непрерывна в точке $f(a)$ Подставим $y = f(x)$

$$g(f(x)) - g(f(a)) = G(f(x))(f(x) - f(a)) = G(f(x))F(x)(x - a) = H(x)(x - a)$$

$H(x)$ – непрерывна в точке $x = a$, $H : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $(g \circ f)'(a) = H(a) = G(f(a)) \cdot F(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. ■

Замечание 14.4.2. Это "правило цепочки".

$$(g \circ h \circ f)'(a) = g'(h \circ f(a)) \cdot h'(f(a)) \circ f'(a)$$

Теорема 14.4.3 (Арифметические операции). $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle, f, g$ – дифференцируемы в точке a . Тогда

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ – дифференцируемая в точке a функция и

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

2. $f \cdot g$ – дифференцируема в точке a и

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

3. если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ – дифференцируема в точке a и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Доказательство. 1. $(\alpha f + \beta g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(a) + \beta g(a))}{x - a} =$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left(\alpha \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

2. Докажем частный случай $g = f$, т.е. докажем $(f^2)'(a) = 2f'(a)f(a)$. Возьмем $h(t) = t^2$, тогда $f^2(x) = (h \circ f)(x)$. Тогда по предыдущей теореме

$$(f^2)'(a) = h'(f(a)) \cdot f'(a) = 2 \cdot f(a) \cdot f'(a)$$

Вернемся к общей формуле:

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \Rightarrow (f \cdot g)'(a) = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)'(a) = \\ &= \frac{1}{4}(2 \cdot (f(a) + g(a)) \cdot (f'(a) + g'(a)) - 2(f(a) - g(a)) \cdot (f'(a) - g'(a))) = \\ &= \frac{1}{2}(2f(a) \cdot g'(a) + 2f'(a) \cdot g(a)) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a) \end{aligned}$$

Упражнение 14.4.4. Получить эту формулу непосредственно из определения производной

$$3. \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}. \text{ Возьмем } h(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} = (h \circ g)(x)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = h'(g(a)) \cdot g'(a) = -\frac{1}{g^2(a)} \cdot g'(a)$$

Теперь $f \cdot \frac{1}{g}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot -\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

■

Следствие 14.4.5.

$$\begin{aligned} (f \cdot (h \cdot g))'(a) &= f'(a) \cdot (h \cdot g)(a) + f(a) \cdot (h \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot h(a) \cdot g(a) + f(a)(h'(a)g(a) + h(a)g'(a)) = \\ &= f'(a)h(a)g(a) + f(a)h'(a)g(a) + f(a)h(a)g'(a) \end{aligned}$$

Теорема 14.4.6 (Дифференцирование обратной функции). f – строго монотонная непрерывная функция на $\langle A, B \rangle$, $a \in \langle A, B \rangle$, f – дифференцируема в точке a и $f'(a) \neq 0$. Тогда f^{-1} – дифференцируема в точке $f(a)$ и $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Замечание 14.4.7. Геометрический смысл. Рисунок: **TODO**

Доказательство. $g(x) = f^{-1}(x)$, $f(a) = b$. $f: \langle A, B \rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle C, D \rangle$, $g: \langle C, D \rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle A, B \rangle$ – непрерывны. f – дифференцируема, тогда $\exists F(x): \langle A, B \rangle$ непрерывная в точке a

$$F(a) = f'(a), f(x) - f(a) = F(x)(x - a)$$

f строго монотонна $\Rightarrow \forall x \neq a \ f(x) \neq f(a) \Rightarrow F(x) \neq 0$ если $x \neq a$ и по условию $f'(a) = F(a) \neq 0$, т.е. $F(x) \neq 0 \ \forall x \in \langle A, B \rangle$

$$x = g(y) \ (y = f(x))$$

Тогда $y - b = f(x) - f(a) = F(x)(x - a) = F(g(y))(g(y) - g(b)) \Rightarrow g(y) - g(b) = \frac{1}{F(g(y))}(y - b) = H(y)(y - b)$

H определена на $\langle C, D \rangle$, непрерывна в точке $b = f(a) \Rightarrow g'(b) = H(b) = \frac{1}{F(g(b))} = \frac{1}{F(a)} = \frac{1}{f'(a)}$ ■

14.5. Формулы для вычисления производных

$$f'(a), a \in E \ a \mapsto f'(a)$$

$$1. \ f(x) \equiv 1, a \in \mathbb{R}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - 1}{x - a} = 0$$

$$2. \ f(x) = b^x, b > 0, a \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{b^x - b^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} b^a \cdot \frac{b^{x-a} - 1}{x - a} = b^a \cdot \ln b$$

В частности, $(e^x)' = e^x$

3. $f(x) = \log_b x, b > 0, b \neq 1, a \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_b x - \log_b a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_b \frac{x}{a}}{x - a} \\ \frac{x}{a} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 &\Rightarrow \log_b \frac{x}{a} = \frac{\ln \frac{x}{a}}{\ln b} = \ln \frac{\left(1 + \left(\frac{x}{a} - 1\right)\right)}{\ln b} \sim \frac{\frac{x}{a} - 1}{\ln b} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_b \frac{x}{a}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x}{a} - 1}{(x - a) \ln b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{a(x - a) \ln b} = \frac{1}{a \ln b}\end{aligned}$$

Значит

$$(\log_b x)' = \frac{1}{x \ln b}$$

В частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

4. $f(x) = x^\alpha, \alpha \neq 0$

- $\alpha \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
- $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \frac{m}{2n+1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} (\alpha > 0), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} (\alpha < 0)$
- $\alpha = \frac{m}{2n}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \in [0, +\infty) (\alpha > 0), x \in (0, +\infty) (\alpha < 0)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \frac{\left(1 + \left(\frac{x}{a} - 1\right)\right)^\alpha - 1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \cdot \frac{\alpha \cdot \left(\frac{x}{a} - 1\right)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} a^\alpha \cdot \frac{\alpha(x - a)}{a(x - a)} = \alpha \cdot a^{\alpha-1}\end{aligned}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

Выводы: $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (с точностью до области определения функции).

5. $f(x) = \sin x, a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 2 \frac{\frac{x-a}{2} \cdot \cos a}{x - a} = \cos a$$

6. $f(x) = \cos x$

$$(\cos x)' = \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x \right)' = -\sin x$$

7. $f(x) = \operatorname{tg} x, a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

8. $f(x) = \operatorname{ctg} x, a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x \right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

9. $f(x) = \arcsin x, x \in [-1, 1]$. Пусть $g(y) = \sin y \Rightarrow b = \arcsin a, g'(b) = \cos b > 0$, т.к. $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \frac{1}{\cos b} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 b}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$$

10. $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$

11. $f(x) = \operatorname{arctg} x, g(y) = \operatorname{tg} y, b = \operatorname{arctg} a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \cos^2 b = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 b + 1} = \frac{1}{a^2 + 1}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{x^2 + 1}$

14.6. Теоремы о средних

Теорема 14.6.1 (Теорема Ферма). $a \in (A, B), f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируема в точке a . Если $f(a) = \max_{a \in \langle A, B \rangle} f$ или $f(a) = \min_{a \in \langle A, B \rangle} f$, то $f'(a) = 0$.

Геометрический смысл: Картинка **TODO**.

Доказательство. $f(a) = \max_{\langle A, B \rangle} f \Rightarrow f(x) - f(a) \leq 0 \quad \forall x \in \langle A, B \rangle$. Если $x > a$, то $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

Если $x < a$, то $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

f дифференцируема в точке $a \Rightarrow f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a) \Rightarrow f'(a) = 0$ ■

Теорема 14.6.2 (Теорема Ролля). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Если

1. f дифференцируема на (a, b) (т.е. дифференцируема в каждой точке).
2. непрерывна на $[a, b]$
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство. f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ достигает наибольшего и наименьшего значения. Если a, b – те точки, в которых достигается наибольшее и наименьшее значение, то f постоянная на $[a, b] \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Если хотя бы в одной из точек a и b не достигается наибольшего или наименьшего значения, тогда одно из них достигается на (a, b) . Тогда по теореме Ферма в этой точке производная равна нулю. ■

Замечание 14.6.3. Все три условия существенны.

Теорема 14.6.4 (Теорема Лагранжа или формула конечных приращений.). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. f непрерывна на $[a, b]$, f – дифференцируема на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$
Геометрический смысл: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Картинка: **TODO**

Доказательство. $g(x) = f(x) - kx$ – непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) . Хотим подобрать $k : g(a) = g(b)$

$$f(a) - ka = f(b) - kb \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда $g(x) = f(x) - x \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ подходит под условия теоремы Ролля. Тогда $\exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Теорема 14.6.5 (Теорема Коши). $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g – непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) , $\forall x \in (a, b) g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Доказательство. $h(x) = f(x) - kg(x)$ – непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) . Подберем $k : h(a) = h(b)$

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Тогда $h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Rightarrow \exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$

$$f'(c) - g'(c) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0$$

■

Замечание 14.6.6. 1. Точка c может быть не единственной.

2. Теорема Лагранжа – частный случай теоремы Коши, теорема Ролля – частный случай теоремы Лагранжа.

3. Теорему Лагранжа можно записать в следующем виде:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \Theta \cdot (b - a)), \Theta \in (0, 1)$$

Следствие 14.6.7 (Оценка конечных приращений). f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) . Если $\exists M, m \in \mathbb{R} : m \leq f'(x) \leq M \forall x \in (a, b)$, тогда

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

В частности, если $\exists M \in \mathbb{R} : |f'(x)| \leq M \forall x \in (a, b)$, то

$$|f(b) - f(a)| \leq M \cdot (b - a)$$

Доказательство. По теореме Лагранжа $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leq M(b - a)$$

■

Следствие 14.6.8. Если $\forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$, то f нестрого монотонно возрастает.

Доказательство. $x_1 < x_2 \in (a, b)$. $\exists c \in (x_1, x_2) :$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

■

Следствие 14.6.9. Если $\forall x \in (a, b) f'(x) > 0$, то f строго возрастает.

Следствие 14.6.10. Если $\forall x \in (a, b) f'(x) \leq 0$, то f нестрого монотонно убывает.

Следствие 14.6.11. Если $\forall x \in (a, b) f'(x) < 0$, то f строго монотонно убывает.

Замечание 14.6.12. Если f дифференцируема на (a, b) и f строго монотонно убывает $\Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$ – вообще говоря, неверно.

$f(x) = -x^3, f'(x) = -3x^2 \leq 0$ и равенство достигается при $x = 0$. Картинка: **TODO**

Теорема 14.6.13 (Теорема Дарбу). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируема на $[a, b]$. Пусть C лежит строго между $f'(a)$ и $f'(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = C$

Доказательство. 1. $C = 0$. Для определенности $f'(a) < 0 < f'(b)$. f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ достигает наибольшего и наименьшего значения на $[a, b]$. При таких знаках производной наименьшее значение достигается на $(a, b) \Rightarrow$ в такой точке минимума $f'(c) = 0$ (по теореме Ферма).

2. $C \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = f(x) - Cx$.

$$h'(a) = f'(a) - C, h'(b) = f'(b) - C \Rightarrow h'(a) \text{ и } h'(b) \text{ – разных знаков}$$

Тогда по предыдущему пункту $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = C$

■

Теорема 14.6.14 (Правило Лопиталя). Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируемы на (a, b) , $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ и $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$.

Если $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Доказательство. g дифференцируема на $(a, b) \Rightarrow g$ непрерывна на (a, b) . Кроме того, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow g$ строго монотонна на $(a, b) \Rightarrow$ знакопостоянна на (a, b) (и ни в какой точке не равна нулю).

По Гейне: $\forall \{x_n\} : x_n \rightarrow b, x_n \in (a, b) g(x_n) \rightarrow 0$. Возьмем строго возрастающую последовательность $\{x_n\} : x_n \in (a, b), x_n \rightarrow b$. Тогда $\{g(x_n)\}$ строго монотонна. Тогда по теореме Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})}$$

если предел справа существует.

По теореме Коши:

$$\exists c_n \in (x_{n-1}, x_n) : \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} - \text{существует и равен } l$$

т.к. $x_n \rightarrow b \Rightarrow c_n \rightarrow b$. Тогда

■

Теорема 14.6.15 (правило Лопиталя для бесконечностей). Условия те же, но $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = +\infty$. Тогда если $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Замечание 14.6.16. Обратить правило Лопиталя нельзя. $f(x) = x + \sin x, g(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

Но

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 + \cos x}{1} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

14.7. Производные высших порядков

f дифференцируема на E . $x \mapsto f'(x)$ область определения E .

Если $f'(x)$ дифференцируема на E_1 , то f дифференцируема на E_1 дважды.

Def 14.7.1. Второй производной функции f в точке a называется $(f')'(a) = f''(a)$, третья производная – $f'''(a) = (f'')'(a)$. n -ая производная – $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$

Пример 14.7.2. $(x^3)''' = (3x^2)'' = (6x)' = 6$

Пример 14.7.3. $(\sin x)^{(14)} = (\cos x)^{(13)} = (-\sin x)^{(12)} = (-\cos x)^{(11)} = (\sin x)^{(10)} = (\sin x)'' = -\sin x$

Теорема 14.7.4 (Арифметические действия с производными высших порядков). f и g n раз дифференцируемы в точке a . Тогда

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g$ – n раз дифференцируема и

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(a) = \alpha \cdot f^{(n)}(a) + \beta \cdot g^{(n)}(a)$$

2. $f \cdot g$ – n раз дифференцируема в точке a и

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

Доказательство. 1. База при $n = 1$ – верно.

Индукционный переход: пусть верно для l . Тогда для $l + 1$:

$$(\alpha f + \beta g)^{(l+1)} = ((\alpha f + \beta g)^{(l)})' = (\alpha f^{(l)} + \beta g^{(l)})' = \alpha f^{(l+1)} + \beta g^{(l+1)}$$

2. База при $n = 1$: $(fg)' = fg' + f'g$.

Индукционный переход: пусть верно для l

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(l+1)} &= ((fg)^{(l)})' = \left(\sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k)} g^{(l-k)} \right)' = \sum_{k=0}^l C_l^k (f^{(k)} g^{(l-k)})' = \\
 &= \sum_{k=0}^l C_l^k (f^{(k+1)} g^{(l-k)} + f^{(k)} g^{(l+1-k)}) = \sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k+1)} g^{(l-k)} + \sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k)} g^{(l+1-k)} = \\
 &= \sum_{j=1}^{l+1} C_l^{j-1} f^{(j)} g^{(l+1-j)} + \sum_{k=0}^l C_l^k f^{(k)} g^{(l+1-k)} = \\
 &= C_l^l f^{(l+1)} g + \sum_{j=1}^l (C_l^{j-1} + C_l^j) f^{(j)} g^{(l+1-j)} + C_l^0 f g^{(l+1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^k f^{(k)} g^{(l+1-k)}
 \end{aligned}$$

■

Утверждение 14.7.5. $(f(\alpha x + \beta))^{(n)} = \alpha^n + f^{(n)}(\alpha x + \beta)$

Def 14.7.6. f дифференцируема на E и f' непрерывна на E . Тогда f называется непрерывно дифференцируемой.

$f \in C^1(E)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

$f \in C^2(E)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции.

$f \in C^n(E)$ – n раз непрерывно дифференцируемые функции.

$f \in C^\infty(E)$ – бесконечно непрерывно дифференцируемые функции.

Пример 14.7.7. $f(x) = |x| \in C(\mathbb{R})$, но $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$

Пример 14.7.8. $f(x) = x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$

Пример 14.7.9. $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ на \mathbb{R} . $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ на \mathbb{R} .

$f''(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$ на \mathbb{R} разрывна в нуле. Тогда $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, но $f(x) \notin C^2(\mathbb{R})$