

# Дискретная математика 1 семестр ПИ,

## Лекции

Собрано 15 января 2022 г. в 10:11

---

## Содержание

<b>1. Основы комбинаторики</b>	<b>1</b>
1.1. Множества . . . . .	1
1.2. Мощность множества . . . . .	1
1.3. Комбинаторика . . . . .	2
<b>2. Перестановки</b>	<b>3</b>
2.1. Лексикографический порядок перестановок . . . . .	3
<b>3. Числа Стирлинга</b>	<b>4</b>
3.1. Числа Стирлинга . . . . .	4
3.2. Числа Белла . . . . .	4
<b>4. Теория вероятности</b>	<b>6</b>
4.1. Основы теории вероятности . . . . .	6
4.2. Условная вероятность . . . . .	9
4.3. Независимость событий . . . . .	9
4.4. Формула полной вероятности . . . . .	10
4.5. Испытания Бернулли . . . . .	11
4.6. Предельные случаи испытаний Бернулли . . . . .	12
4.7. Случайные величины . . . . .	14
4.8. Дисперсия . . . . .	15
4.9. Производящие функции . . . . .	15
4.10. Характеристические функции . . . . .	16
4.11. Нормальное распределение . . . . .	16
<b>5. Ликбез по алгоритмам</b>	<b>18</b>
5.1. Полный перебор . . . . .	18
5.2. Линейные алгоритмы . . . . .	18
5.3. Разделяй и властвуй . . . . .	19
5.4. Жадные алгоритмы . . . . .	20
5.5. Динамическое программирование . . . . .	20
<b>6. Теория графов</b>	<b>21</b>
6.1. Способы задания графов . . . . .	21
6.2. Пути в графе . . . . .	22
6.3. Деревья . . . . .	22
6.4. Обходы графа . . . . .	22
6.4.1. Обход в глубину . . . . .	22
6.4.2. Обход в ширину . . . . .	23

6.5. Эйлеровы и Гамильтоновы графы . . . . .	24
--	----

## Раздел #1: Основы комбинаторики

### 1.1. Множества

**Def. 1.1.1.** Множество - совокупность объектов.

**Def. 1.1.2.** Покрытием множества  $A$  называется множество  $B = \{B_1, B_2, \dots, B_k\} : \bigcup_i B_i \supset A$

**Def. 1.1.3.** Разбиением множества  $A$  называется  $\pi(X) = \{X_i\} :$

$$X_i \neq \emptyset, \bigcup_i X_i = A, \forall i \neq j \rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$$

**Def. 1.1.4.** Пусть  $B, C$  - разбиения  $A$ .  $B$  называется измельчением  $C$ , если  $B$  - разбиение  $A$  и  $\forall i \exists j : B_i \subset C_j$

### 1.2. Мощность множества

1.  $|\emptyset| = 0$
2.  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow |X| = n$
3.  $\mathbb{N}$  - счётное.  $\mathbb{Z}$  - тоже счётное:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 2x, & x > 0 \\ 2|x| + 1, & x < 0 \end{cases}$$

4.  $[0, 1]$ . Пусть существует  $q : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$

1.  $0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$
2.  $0, b_1 b_2 \dots b_k \dots$
3.  $0, c_1 c_2 \dots c_k \dots$

Рассмотрим  $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k \dots, \alpha_1 \neq a_1, \alpha_2 \neq b_2, \alpha_3 \neq c_3$  и т.д. Таким образом, всегда найдётся не пронумерованное число.

$|[0, 1]|$  - континуум

**Def. 1.2.1.** Множество всех подмножеств  $A$  обозначается  $2^A$

Утверждение 1.2.2.  $|2^A| = 2^{|A|}$

Доказательство. База:  $A = \emptyset, |A| = 0, 2^A = \{\emptyset\} \Rightarrow |2^A| = 2^{|A|} = 1$

Индукционное предположение: Пусть  $\forall A : |A| \leq k \rightarrow |2^A| = 2^{|A|}$

Индукционный переход:

Рассмотрим  $A : |A| = k + 1, B_1 \in 2^{A \setminus \{x_{k+1}\}}, B = \{x_{k+1}\} \cup B_1$

$$2^A = 2^{A \setminus \{x_{k+1}\}} \cup \{B\}$$

$$\begin{cases} |2^{A \setminus \{x_{k+1}\}}| = 2^k \\ |\{B\}| = 2^k \end{cases} \Rightarrow 2^A = 2^k + 2^k = 2^{k+1} = 2^{|A|}$$

■

### 1.3. Комбинаторика

1.  $A, B : A \cap B = \emptyset$

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

2.  $A_1, \dots, A_n, \forall i, j \rightarrow (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

3.  $A, B, A \cap B \neq \emptyset$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

4.  $A_1, \dots, A_n$

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i,j=1}^n |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k=1}^n |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |\bigcap_{i=1}^n A_i|$$

5.  $A, B$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

6.  $A_1, \dots, A_n$

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

1. Перестановки:  $\langle a_1 \dots a_n \rangle = \overline{\langle a_1 \dots a_n \rangle, a_n}$ . Тогда

$$|\langle 1 : n \rangle| = |\langle 1 : n-1 \rangle \times \langle 1 : n \rangle| = |\langle 1 : n-1 \rangle| \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

2. Размещения.  $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Сочетания.

$$A_n^k = C_n^k \cdot k! \Leftrightarrow C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. Сочетания с повторениями. Выставим все  $k$  выбранных объектов в ряд и поставим между ними  $n-1$  перегородку: до первой перегородки будут элементы 1-го типа, от первой до второй перегородки – 2-го типа и т.д. Таким образом, всего  $n+k-1$  место. Нам нужно выбрать  $n-1$  перегородку из этих  $n+k-1$  мест

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$$

**Def. 1.3.1.** Пусть дан выпуклый  $n$ -угольник. Найти количество способов разбить его на треугольники с непересекающимися сторонами

$$C_0 = 1, C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1} - \text{Числа Каталана}$$

## Раздел #2: Перестановки

---

### 2.1. Лексикографический порядок перестановок

**Def. 2.1.1.** Пусть есть две перестановки  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Тогда

$$X < Y \Leftrightarrow \exists k : x_i = y_i \ \forall i = 1, \dots, k \wedge x_{k+1} < y_{k+1}$$

*Алгоритм 2.1.2* (Поиск следующей перестановки). Найдем наибольший убывающий суффикс. Пусть  $k : a_{k+1} > a_{k+2} > \dots > a_n$ . Тогда выберем из этого суффикса  $a_i : a_i > a_k$  и  $a_i$  минимально. После этого отсортируем получившийся суффикс. Получим перестановку:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_i, \text{sort}[a_k, a_k + 1, \dots, a_n] \rangle$$

Она и будет лексикографический следующей.

## Раздел #3: Числа Стирлинга

### 3.1. Числа Стирлинга

**Def. 3.1.1.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Рассмотрим разбиение этого множества мощности  $k$ , т.е.  $X = \{X_1, \dots, X_k\}$  :

$$\forall i, j \rightarrow X_i \supset A, X_i \cap X_j = \emptyset, \bigcup_i X_i = A$$

Тогда числами Стирлинга – количество таких разбиений.

$$1. k = 2 \Rightarrow S(n, 2) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i}{2} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

2. Общий случай.

- Если  $\{a_n\}$  – элемент разбиения, то таких разбиений  $S(n-1, k-1)$
- $\exists i : a_n \in X_i, |X_i| > 1$ . Тогда нужно найти количество разбиений  $A \setminus \{a_n\}$  на  $k$  множеств, а потом вставить  $a_n$  в одно из этих множеств.

Количество способов:

$$S(n-1, k) \cdot k$$

Тогда рекуррентная формула:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + S(n-1, k) \cdot k$$

Базовые значения:

$$\begin{aligned} S(n, 0) &= 0 & S(0, 0) &= 0 \\ S(k, n) &= 0, k > n & S(n, 2) &= 2^{n-1} - 1 \\ S(n, n-1) &= C_n^2 \end{aligned}$$

### 3.2. Числа Белла

**Def. 3.2.1.** Числа Белла – количество разбиений множества.

$$B(n) = \sum_{i=1}^n S(n, i)$$

**Теорема 3.2.2** (Формула чисел Белла). Рассмотрим произвольное разбиение множества  $A$ .

$\exists i : a_{n+1} \in X_i, |X_i| = j$ .

$|A \setminus X_i| = n+1-j$ . Тогда количество способов выбрать  $X_i$  равно  $C_n^{j-1} = C_n^{n+1-j}$

Количество разбиений  $A \setminus X_i$ , в свою очередь, равно  $B(n+1-j)$ . Тогда

$$B(n+1) = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{n+1-j} \cdot B(n+1-j) = \sum_{k=0}^n C_n^k B(k)$$

**Теорема 3.2.3** (Формула чисел Стирлинга).

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot C_k^j (k-j)^n$$

*Доказательство.* Пусть  $L = \{\rho \subseteq A \times \{1, \dots, k\} \mid \rho - \text{сюръекция}\}$ . Заметим, это множество равномощно множеству упорядоченных разбиений мощности  $k$ .

$\{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Элементы разбиения имеют следующий вид:  $X_i = \{a_k \mid \rho(a_k) = i\}$ . Т.к. отображение сюръективно, то  $X_i$  непусты.

$$S(n, k) = \frac{|L|}{k!}$$

Чтобы посчитать мощность  $L$ , из общего количества отображения вычтем количество несюръективных отображений. Пусть  $P_i = \{\rho \subset A \times \{1, \dots, n\} \mid \forall a \in A \rightarrow \rho(a) \neq i\}$ . Тогда количество несюръективных отображений равно:

$$\left| \bigcup_{i=1}^k P_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_j \leq k} |P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_j}|$$

$|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_j}|$  – количество отображений из  $A$  в  $\{1, \dots, k\} \setminus \{i_1, \dots, i_j\}$

$$|P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_j}| = (k-j)^n$$

$$\sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_j} |P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_j}| = C_k^j (k-j)^n$$

Тогда

$$|L| = k^n - \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} C_k^j (k-j)^n = k^n + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^j (k-j)^n = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (k-j)^n$$

Тогда искомая формула чисел Стирлинга:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (k-j)^n$$

■

## Раздел #4: Теория вероятности

### 4.1. Основы теории вероятности

**Def. 4.1.1.**  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  – множество всех взаимно-исключающих исходов эксперимента (пространство элементарных событий)

$X \subseteq \Omega$  – событие

**Def. 4.1.2.** Дано  $\Omega, \mathcal{A} \subset 2^\Omega$ . Тогда  $\mathcal{A}$  называется алгеброй, если

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
3.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

Утверждение 4.1.3. Если  $\mathcal{A}$  – алгебра, то

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
3.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$
4.  $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}, \bigcap A_i \in \mathcal{A}$

Доказательство. 1.  $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$

2.  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{A}$ . Тогда  $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B \in \mathcal{A}$

3.  $A \setminus B = A \cap \bar{B} \in \mathcal{A}$

4. Доказывается по индукции. ■

**Def. 4.1.4.**  $\mathcal{A}$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
3.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

**Def. 4.1.5.** Пусть есть пространство  $\Omega$ , определенная на нём  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра и  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция над множеством. Тогда вероятностью называется функция из  $\mathcal{A}$  в  $\mathbb{R}$  такая, что

1.  $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $A_1, A_2, \dots : A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Перечисленные выше свойства называются **аксиомами теории вероятности**  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – вероятностное пространство.



Свойства вероятности:

1.  $P(\Omega) = 1$
2.  $P(\emptyset) = 0$
3. Если  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , то

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

4. Если  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j$ , то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

5.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

*Доказательство.*

$$P(\bar{A} \cup A) = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

■

6. Если  $A, B \in \mathcal{A}$ , то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

*Доказательство.*

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) = P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) + P((B \setminus A) \cup (A \cap B)) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

■

7.  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j=1}^n (A_i \cap A_j) + \dots$

8.  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

*Доказательство.*  $A_{k-1} \subset A_k$ . Рассмотрим  $A_k \setminus A_{k-1}$ . Пусть  $A_0 = \emptyset$ .

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) - P(A_{k-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) - P(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

■

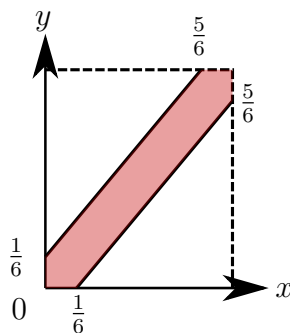
9.  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

**Пример 4.1.6.** Два человека приходят на место в промежуток от 12 до 13ч и ждут 10 минут прежде чем уйти. Найти вероятность того, что они встретятся.

**Решение 1.** Пусть  $t_1$  – время, когда приходит первый,  $t_2$  – время, когда приходит второй.

$$|t_1 - t_2| \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 \geq t_1 - \frac{1}{6} \\ t_2 \leq t_1 + \frac{1}{6} \end{cases}$$



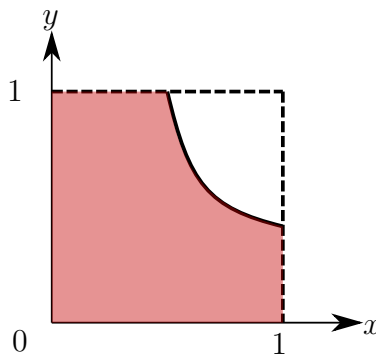
Тогда вероятность – площадь заштрихованной фигуры:

$$S = 1 - 2 \cdot \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}}{2} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

**Пример 4.1.7.** На  $[0, 1]$  выбираются два числа  $x, y$ . Найти вероятность того, что их произведение меньше  $\frac{1}{2}$

**Решение 2.**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2x}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Тогда искомая вероятность:

$$P(x \cdot y < \frac{1}{2}) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}$$

## 4.2. Условная вероятность

**Def. 4.2.1.** Вероятность события  $A$  при условии, что выполняется событие  $B$  равна

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Пример 4.2.2.** Есть урна, в которой лежит  $m$  белых и  $n$  черных шаров. Вытащим из неё два шара. Какова вероятность того, что они оба белые?

**Решение 3.**

$$P(\text{первый} - \text{белый}) = \frac{m}{m+n}, P(\text{второй} - \text{белый} | \text{первый} - \text{белый}) = \frac{m-1}{m+n-1}$$

$$P(\text{оба белые}) = \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m}{m+n}$$

Свойства условной вероятности:

1.  $P(\Omega|B) = 1$
2.  $P(\emptyset|B) = 0$
3.  $0 \leq P(A|B) \leq 1$
4.  $A \subset C \Rightarrow P(A|B) \leq P(C|B)$
5.  $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
6.  $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$
7.  $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

$$P((A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n) = P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Пример 4.2.3.** Бросаем 3 кубика. Найти вероятность того, что хотя бы на одном из них выпадет 1 при условии, что на всех выпали разные значения.

**Решение 4.**

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B) = 1 - \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

## 4.3. Независимость событий

**Def. 4.3.1.**  $A$  независимо от  $B$  ( $P(B) \neq \emptyset$ ), если  $P(A|B) = P(A)$

**Утверждение 4.3.2.** Если  $A$  независимо от  $B \Rightarrow B$  независимо от  $A$ .

*Доказательство.*

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P(B)} = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} = P(B)$$

■

**Def. 4.3.3.**  $A, B$  – независимые, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Def. 4.3.4.**  $A_1, \dots, A_n$  – независимы в совокупности, если

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

**Def. 4.3.5.**  $A_1, \dots, A_n$  – попарно-независимы, если

$$\forall i, j \rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

*Замечание 4.3.6.* Если  $A_1, \dots, A_n$  попарно-независимы, то они необязательно независимы в совокупности.

## 4.4. Формула полной вероятности

**Def. 4.4.1.** Пусть  $H_1, \dots, H_n$  – разбиение  $\Omega$ . Тогда  $H_1 \cup \dots \cup H_n = \Omega$  называется полной группой событий.

**Теорема 4.4.2.**  $H_1, \dots, H_n$  – полная группа событий и  $P(H_i) > 0 \forall i = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\forall A \rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

*Доказательство.*

$$A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup \dots \cup H_n) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$$

$$P((A \cap H_1) \cup \dots \cup (A \cap H_n)) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

■

**Теорема 4.4.3** (Формула Байеса). Пусть  $H_1, H_2, \dots, H_n$  – полная группа событий.  $A$  – событие (считаем произошедшим). Тогда

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

*Доказательство.*

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

■

## 4.5. Испытания Бернулли

**Def. 4.5.1.** Обозначим  $P_n(m)$  – вероятность получить  $m$  успехов за  $n$  испытаний.

**Теорема 4.5.2** (Теорема Бернулли). Рассмотрим упорядоченный набор:  $\underbrace{SSS\dots S}_n \underbrace{FFF\dots F}_{n-m}$ , где  $S$  обозначает успех, а  $F$  – неудачу. В силу независимости испытаний, вероятность получить конкретный упорядоченный набор равна  $p^m(1-p)^{n-m}$ . Таких наборов, очевидно,  $C_n^m$

**Теорема 4.5.3.**  $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq n$ .  $P_n(m_1, m_2)$  – успех наступил от  $m_1$  до  $m_2$  раз.

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{i=m_1}^{m_2} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$$

**Def. 4.5.4.** Наивероятнейшее число событий – число событий в испытаниях Бернулли с наибольшей вероятностью.

**Теорема 4.5.5.** Наивероятнейшее число успехов в  $n$  испытаниях заключено между числами  $np - (1-p)$  и  $np + p$

*Доказательство.* Рассмотрим следующее соотношение:

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} (1-p)^{n-m+1}} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n!(m-1)!(n-m+1)!}{n!m!(n-m)!} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-m+1}{m}$$

Отсюда очевидно, что

$$P_n(m) > P_n(m-1), m < (n+1)p$$

$$P_n(m) = P_n(m-1), m = (n+1)p$$

$$P_n(m) < P_n(m-1), m > (n+1)p$$

Значит, при  $m < (n+1)p$   $P_n(m)$  возрастает, при  $m > (n+1)p$  – убывает. Тогда несложно найти  $m$  такое, чтобы  $P_n(m)$  было наибольшим:

$$\begin{cases} P_n(m) > P_n(m-1) \\ P_n(m+1) < P_n(m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < (n+1)p \\ m+1 > (n+1)p \end{cases} \Leftrightarrow np + p - 1 < m < np + p$$

■

## 4.6. Предельные случаи испытаний Бернулли

Рассмотрим ситуацию, когда вероятность какого-то события уменьшается пропорционально  $n$ , т.е.  $p \sim \frac{1}{n}$

**Теорема 4.6.1** (Теорема Пуассона). Пусть  $np \rightarrow \lambda$ .

$$\forall m, \forall \lambda \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} P_n(m) &= C_n^m p^m \cdot (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m = \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \end{aligned}$$

■

**Теорема 4.6.2** (Локальная теорема Муавра-Лапласа). Пусть  $x_n = \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ . Предположим, что  $x_n$  ограничена при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\sqrt{np(1-p)} \cdot P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_n^2}{2}}$$

*Доказательство.* Вспомним, что  $k! \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$ .

$n - m = n(1-p) - x_n \sqrt{np(1-p)}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{np(1-p)} P_n(m) &= \sqrt{np(1-p)} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} \\ &\approx \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi m} \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot \sqrt{2\pi(n-m)} \cdot \left(\frac{n-m}{e}\right)^{n-m}} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} \\ &= \frac{\sqrt{np(1-p)} \cdot \sqrt{n} \cdot n^n}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{m} \cdot m^m \cdot (n-m)^{n-m}} \cdot p^m (1-p)^{n-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-m}\right)^{n-m} \sqrt{\frac{np}{m}} \cdot \sqrt{\frac{n(1-p)}{n-m}} \end{aligned}$$

$$m = np + x_n \sqrt{np(1-p)}$$

$$\begin{aligned} \frac{m}{np} &= 1 + \frac{x_n \sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ \frac{n-m}{n(1-p)} &= 1 - \frac{x_n \sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Пусть, для удобства,  $\exp(x) = e^x$ . Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{np(1-p)}P_n(m) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right)^{-m} \left(1 - \frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}\right)^{-(n-m)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-m \cdot \ln\left(1 + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right) - (n-m) \cdot \ln\left(1 - \frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}\right)\right)\end{aligned}$$

Как мы знаем (откуда?)

$$\ln(1+y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} y - \frac{y^2}{2}(1+O(1))$$

Следовательно  $\sqrt{np(1-p)}P_n(m) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-m \left(\frac{x_n\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} - \frac{x_n^2}{2np}\right)(1+O(1)) - (n-m) \left(-\frac{x_n\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} - \frac{x_n^2 p}{2n(1-p)}\right)(1+O(1))\right)$$

$$\begin{aligned}&x_n \left(\frac{(n-m)\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} - \frac{m\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}\right) = \\ &= \frac{x_n}{\sqrt{np(1-p)}} \left(np(1-p) - x_n\sqrt{np(1-p)}p - n(1-p) \cdot p - x_n\sqrt{np(1-p)}(1-p)\right) = \\ &= -x_n^2(p + (1-p)) = -x_n^2\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\sqrt{np(1-p)}P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-x_n^2 + \frac{x_n^2}{2}\right)(1+O(1))} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}$$

■

**Теорема 4.6.3** (Интегральная теорема Муавра-Лапласа).  $a_n = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, b_n = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, q = 1 - p$ . Пусть  $m_1 \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, a_n, b_n$  — ограничены. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| P_n(m_1, m_2) - \frac{1}{2\pi} \int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| = 0$$

**Def. 4.6.4.**  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$  — функция Гаусса.

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  — функция Лапласа.

*Следствие 4.6.5.* По локальной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) \sim \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) \sim \frac{1}{2}(\Phi(b_n) - \Phi(a_n))$$

## 4.7. Случайные величины

Пусть  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots\}$

**Def. 4.7.1.** Функция, заданная на  $\Omega$  – случайная величина.

$$x = X(\Omega)$$

**Def. 4.7.2.** Соответствие, которое каждому  $x_i$  сопоставляет вероятность  $p_i$  – распределение (закон распределения)

*Замечание 4.7.3.* Если  $X$  – дискретная случайная величина, то  $Y = g(X)$  – тоже дискретная случайная величина и

$$y_i = g(x_i), p_i = P(X = x_i)$$

**Def. 4.7.4.** Определим случайную величину в более общем случае. Пусть у нас есть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Тогда случайная величина это

$$X = X(\omega), \omega \in \Omega : \{X < x\} = \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x$$

**Def. 4.7.5.**  $F(x) = P(X < x), x \in (-\infty, +\infty)$  – функция распределения случайной величины.

Свойства:

1.  $F(x_1) \leq F(x_2)$  если  $x_1 < x_2$
2.  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$
3.  $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$

**Def. 4.7.6.** Пусть  $P(y)$  – неотрицательная функция. Если  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$ , то  $P(y)$  – плотность распределения. В частности,  $P(x) = F'(x)$

**Def. 4.7.7.** Есть  $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ , где  $P(A, B)$  – вероятность одновременного наступления событий  $A$  и  $B$ , то  $X, Y$  – независимые случайные величины.

**Def. 4.7.8.** Пусть  $X$  – дискретная случайная величина. Тогда матожиданием называется

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$a \mathbb{E}(|X|) = \sum_{i=1}^n |x_i| p_i$  – абсолютный момент.

Свойства:

1.  $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(x) + b$
2.  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
3. Если  $X, Y$  – независимые случайные величины, то  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$



## 4.8. Дисперсия

**Def. 4.8.1.**  $\mathbb{D}(X) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X))^2$  – дисперсия.

Замечание 4.8.2.  $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 p_i$

Свойства дисперсии:

1.  $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

*Доказательство.*  $\mathbb{D}(X) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n X_i^2 p_i - \sum_{i=1}^n 2X_i \mathbb{E}(X) p_i + \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}(X))^2 p_i = \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(X))^2 \cdot 1 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$  ■

2.  $\mathbb{D}(aX + b) = a^2 \cdot \mathbb{D}(X)$

3.  $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y)$

*Доказательство.*  $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{E}((X + Y)^2) - (\mathbb{E}(X + Y))^2 = \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X))^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2$ . ■

**Def. 4.8.3.**  $m_k = \mathbb{E}(X^k)$  –  $k$ -й момент.

$\mathbb{E}(|X|^k)$  –  $k$ -й абсолютный момент.

$M_k = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^k$  – центральный момент.

**Def. 4.8.4.**  $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Замечание 4.8.5.  $\text{cov}(X + Z, Y) = \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(Z, Y)$

$$\text{cov}(X, Y + Z) = \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z)$$

**Def. 4.8.6.** Коэффициент корреляции случайных величин  $X$  и  $Y$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}$$

Свойства:

1.  $\rho(aX + b, cY + d) = \text{sign}(ac)\rho(X, Y)$

## 4.9. Производящие функции

**Def. 4.9.1.** Пусть  $X$  – случайная величина, принимающая значения  $Z_+$  с вероятностями  $p_0, p_1, \dots$

Рассмотрим функцию  $\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k = \mathbb{E}(z^X), |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}$ . Заметим, что

1.  $|\psi(z)| = |\sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z^k| p_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

2.  $p_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} \psi(z)|_{z=0}$

3.  $\frac{d^n}{dz^n} \psi(z)|_{z=1} = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-n+1))$

*Доказательство.*  $\frac{d^n}{dz^n} \psi(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1) \cdot z^{k-n} p_k$   
 $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2$ . Заметим, что  $\mathbb{E}(X) = \psi'(z)$ ,  $\mathbb{E}(X(X-1)) = \psi''(z)$  ■

**Пример 4.9.2.**  $\psi = \frac{1}{4}(1+z)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2$

## 4.10. Характеристические функции

**Def. 4.10.1.**  $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ . Для дискретной случайной величины:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itX} p_k$$

Свойства:

1.  $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at)$
2.  $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$
3.  $\mathbb{E}(X^k) = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} \cdot \varphi(t)|_{t=0}$

## 4.11. Нормальное распределение

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X-a)^2}{\sigma^2}\right)$$

**Def. 4.11.1.**  $N(a, \sigma^2)$  – нормальное распределение.  
 $N(0, 1)$  – стандартное нормальное распределение.

$$\varphi(t) = \exp\left(-ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \mathbb{E}(X) = a, \mathbb{D}(X) = \sigma^2$$

*Замечание 4.11.2.*  $P(|X - a| < 3\sigma) = \Phi(3) \sim 0.997$

**Lm 4.11.3.** Пусть  $X$  – неотрицательная случайная величина. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

*Доказательство.*  $1_{[0,\varepsilon)}(X) + 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X) = 1$ , где  $1_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, x \in [a, b) \\ 0, x \notin [a, b) \end{cases}$

$$X \cdot 1_{[\varepsilon,+\infty)} \geq \varepsilon \cdot 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X)$$

$$\mathbb{E}(X \cdot 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X)) \geq \varepsilon \mathbb{E}(1_{[\varepsilon,+\infty)}(X))$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X(1_{[0,\varepsilon)}(X) + 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X))) = \mathbb{E}(X \cdot 1_{[0,\varepsilon)}(X)) + \mathbb{E}(X \cdot 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X)) \geq \\ &\geq \mathbb{E}(X \cdot 1_{[\varepsilon,+\infty)}(X)) \geq \varepsilon \mathbb{E}(1_{[\varepsilon,+\infty)}(X)) = \varepsilon P(X \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

**Теорема 4.11.4** (Неравенство Чебышева).  $\forall Y$  – случайная величина с конечным вторым моментом. Тогда

$$\forall \delta \quad P(|Y - EY| \geq \delta) \leq \frac{DY}{\delta^2}$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $X = |Y - EY|^2, \varepsilon = \delta^2$

$$P(|Y - EY| \geq \delta) = P(|Y - EY|^2 \geq \delta^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y - EY)^2}{\delta^2} = \frac{DY}{\delta^2}$$

■

*Замечание 4.11.5.*  $P(|\sum_{i=0}^n K_i - \sum_{i=0}^n \mathbb{E}X_i| \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^n \mathbb{D}X_i$

**Def. 4.11.6.** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  – последовательность случайных величин. Тогда  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$  если  $\mathbb{E}(X_n - X)^2 \rightarrow 0$  – сходимость среднеквадратичная.

**Def. 4.11.7.**  $X_n \xrightarrow{P} X$ , если  $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$  – сходимость по вероятности.

**Def. 4.11.8.**  $X_n \xrightarrow[\text{почти наверное}]{\text{}} X$ , если  $P(\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)) = 1$  – сходимость "почти наверное".

**Теорема 4.11.9** (Закон Больших Чисел).  $X_1, \dots, X_n, \dots$  – последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин. Пусть  $m = EX_i, DX_i < +\infty$ . Тогда

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$$

*Доказательство.* Среднеквадратичная сходимость:

$$\mathbb{E}\bar{X}_n = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n} \cdot m \cdot n = m$$

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n - m)^2 = \mathbb{D}(\bar{X}_n) = \mathbb{D}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_i = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{D}(X_i) \rightarrow 0$$

Сходимость по вероятности:

$$P(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) = P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n EX_i\right| \geq n\varepsilon\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_i}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}X_i}{n \varepsilon^2} \rightarrow 0$$

■

**Теорема 4.11.10** (Центральная предельная теорема).  $\{X_i\}$  – независимые одинаково распределенные случайные величины,  $EX_i = a, \mathbb{D}X_i = \sigma^2$ . Пусть  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, F_n(x) = P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right), N(X)$  – стандартное нормальное распределение. Тогда

$$\sup |F_n(x) - N(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

т.е.  $S_n \rightarrow N(na, n\sigma^2)$

## Раздел #5: Ликбез по алгоритмам

**Пример 5.0.1.**  $n! = \prod_{i=1}^n i$

```
int res = 1;
for (int i = 1; i <= n; i++, res *= i);
```

Либо же можно избрать другой подход:

```
int f(int t) {
    if (n > 0)
        return f(n - 1) * n;
    return 1;
}
```

Какой из этих алгоритмов лучше? Очевидно, что оба алгоритма работают за  $O(n)$ , однако на второй алгоритм требуется больше памяти, а именно  $O(n)$  памяти, а первый лишь  $O(1)$ .

### 5.1. Полный перебор

**Пример 5.1.1.**  $2x + y = 100, x, y \in \mathbb{N}$ . Заметим, что  $1 \leq x \leq 49, 1 \leq y \leq 99$ . Тогда несложно перебрать все варианты:  $\forall (a, b) \in X \times Y$  проверяем, выполняется ли  $2a + b = 100$ . Перебор можно было урезать, например, заметив, что  $y < 99$ , т.к.  $x \geq 1 \Rightarrow 100 - 2x \leq 98$ . Также,  $y:2$ , т.к.  $2x:2, 100:2$ . В конце концов, можно заметить, что  $y = 100 - 2x$ , значит  $\bar{X} = \{1, \dots, 99\}, \bar{Y} = \{100 - 2x\}, |X| = 49, |Y| = 1$ . Значит достаточно перебирать только  $b \in X$ , что сокращает перебор в 100 раз.

**Def. 5.1.2.** Будем считать перебор *оптимальным*, если множество перебираемых значений по мощности асимптотически равно размеру ответа.

**Пример 5.1.3.** Решето Эратосфена. Хотим найти все простые числа, меньшие  $n$ .

```
bool prime[n] = {1};
prime[0] = prime[1] = 0;
for (int i = 2; i * i < n; i++) {
    if (prime[i]) {
        for (int j = i * i; j < n; j += i)
            prime[j] = 0;
    }
}
```

### 5.2. Линейные алгоритмы

**Пример 5.2.1.** Дана последовательность  $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ . Хотим найти  $i, j : \sum_{k=i}^j a_k$  максимальна.

```
int max_sum = 0;
int cur_sum = 0;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    cur_sum += a[i];
    max_sum = max(max_sum, cur_sum);
    if (cur_sum < 0)
        cur_sum = 0;
}
```

### 5.3. Разделяй и властвуй

Идея заключается в разделении задачи на несколько подзадач того же типа и в дальнейшем слиянии получившихся результатов.

**Пример 5.3.1** (Сортировка слиянием). Имеется массив, который мы хотим отсортировать. Делим массив пополам и рекурсивно выполняем сортировку в левой и правой половинах. Слияние половинок выполняется несложно. Массив длиной 1 считаем отсортированным. Тогда получается  $\log_2 n$  уровней, на каждом из которых выполняется слияние за  $O(n)$ , тогда общая асимптотика  $O(n \log n)$

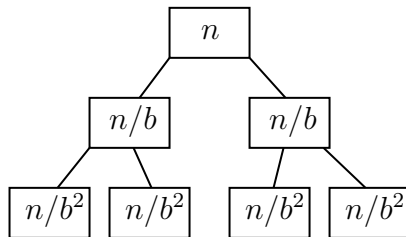
**Теорема 5.3.2** (Мастер теорема). Если есть рекуррентное соотношение:

$$T(n) = \begin{cases} a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^c), & n > 1 \\ O(1), & n = 1 \end{cases}$$

где  $n$  – длина задачи, которая делится на  $a$  подзадач длины  $\frac{n}{b}$  за время  $O(n^c)$  Тогда

1. Если  $c > \log_b a$ , то  $T(n) = O(n^c)$
2. Если  $c = \log_b a$ , то  $T(n) = O(n^c \cdot \log n)$
3. Если  $c < \log_b a$ , то  $T(n) = O(n^{\log_b a})$

*Доказательство.* Рассмотрим дерево рекурсии:



№ слоя	# задач	Размер задач	Накладные расходы
0	1	$n/b$	$O(n^c)$
1	$a$	$n/b^2$	$O(n^c)$
...	$a^i$	$n/b^i$	$O\left(a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^c\right) = O\left(m^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right)$
$\log_b n$	$a^{\log_b n}$	$O(1)$	1

Тогда

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} O\left(n^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right) = O\left(n^c \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right)$$

1.  $c > \log_b a$ , т.е.  $\frac{a}{b^c} < 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i$  – сумма убывающей геометрической прогрессии, т.е. константа. Значит  $T(n) = O(n^c)$
2.  $c = \log_b a \Rightarrow T(n) = O\left(n^c \sum_{i=0}^{\log_b n} 1\right) = O(n^c \log n)$
3.  $c < \log_b a \Rightarrow$

$$T(n) = O\left(n^c \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right) = O\left(n^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n}\right) = O\left(n^c \cdot \frac{a^{\log_b n}}{b^{\log_b n \cdot c}}\right) = O(a^{\log_b n}) = O(n^{\log_b a})$$

■

**Алгоритм 5.3.3** (Алгоритм Карацубы). Рассмотрим числа длины  $2n$ .  $A = (A_1 \cdot 10^n + A_2)$ ,  $B = (B_1 \cdot 10^n + B_2)$ . Тогда  $A \cdot B = A_1 B_1 \cdot 10^{2n} + 10^n (A_1 B_2 + A_2 B_1) + A_2 B_2$ . Обратимся к мастер теореме.  $a = 4, b = 2, c = 1$ .  $\log_b a = \log_2 4 = 2$ . Тогда оценка сложности  $T(n) = O(n^2)$ . Рассмотрим следующую величину:  $\underbrace{(A_1 + A_2) \cdot (B_1 + B_2)}_{\delta} = \underbrace{A_1 B_1}_{\alpha} + \underbrace{A_1 B_2 + A_2 B_1}_{\beta} + \underbrace{A_2 B_2}_{\gamma}$ . Тогда  $a = 3, b = 2, c = 1 \Rightarrow T(n) = O(n^{\log_2 3})$

## 5.4. Жадные алгоритмы

**Пример 5.4.1.** Пусть имеются монетки номиналом в 1, 2, 5, 10, 50, 100. Каким наименьшим количеством монет можно разменять данную сумму?

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{x}{100}\right) k_1 + \underbrace{x \% 100}_{y_1} \\ y_1 &= \left(\frac{y_1}{50}\right) k_2 + \underbrace{y_1 \% 50}_{y_2} \\ &\dots \\ y_5 &= \left(\frac{y_5}{1}\right) k_6 + 0 \end{aligned}$$

## 5.5. Динамическое программирование

**Def. 5.5.1.** Динамическое программирование – способ решений рекуррентных задач с помощью запоминания промежуточных результатов.

**Пример 5.5.2.**  $\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}$ ,  $\varphi_0 = \varphi_1 = 1$ . Если решать эту задачу рекурсивно, несколько значений придётся вычислять несколько раз, что неоптимально. Вместо этого можно решать итеративно, запоминая промежуточные результаты:

```
int fib[n];
fib[0] = fib[1] = 1;
for (int i = 2; i < n; i++)
    fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2]
```

## Раздел #6: Теория графов

**Def. 6.0.1.** Пусть  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E \subset V \times V$ .  $(V, E) = G$  – граф.  $V$  – множество вершин,  $E$  – множество рёбер.

**Def. 6.0.2.** Мультиграф – **TODO**.

**Def. 6.0.3.**  $G = (V, E)$ ,  $v_i \in V$ ,  $e_j = (v_k, v_l) \in E$ .  $v_i$  **инцидентно**  $e_j$ , если  $v_k = v_i$  или  $v_l = v_i$ .

**Def. 6.0.4.** Степень вершина – число ребер, ей инцидентных.

Утверждение 6.0.5. Сумма степеней графа – четна.

Доказательство.  $\sum_{i=1}^n \deg v_i = \deg v_1 + \deg v_2 + \dots + \deg v_n = \sum_{e_i \in E} (1 + 1) = |E| \cdot 2$  ■

**Def. 6.0.6.**  $v_i, v_j \in V$ .  $v_i$  смежна с  $v_j$ , если  $\exists e_k = (v_i, v_j)$

### 6.1. Способы задания графов

1. Матрица смежности.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & v_1 & v_2 & \dots & v_n \\
 \hline
 v_1 & & & & \\
 v_2 & & & & \\
 \dots & & & & \\
 v_n & & & & 
 \end{array} = M, M_{i,j} = \begin{cases} 0, (v_i, v_j) \notin E \\ 1, (v_i, v_j) \in E \end{cases}$$

Очевидно, что для её хранения требуется  $O(|V|^2)$  памяти.

2. Список смежности.

$$\begin{array}{l}
 \text{смежные с } v_i \\
 v_1 : \overbrace{v_{11}, v_{12}, \dots} \\
 v_2 : v_{21}, v_{22}, \dots \\
 \vdots \\
 v_n : v_{n1}, v_{n2}, \dots
 \end{array}$$

Поскольку мы храним все ребра, то нужно  $O(|E|)$  памяти.

3. Список ребер.

4. Матрица инцидентности. Матрица размера  $|V| \cdot |E|$ :

$$\begin{array}{c|cccc}
 & e_1 & e_2 & \dots & e_m \\
 \hline
 v_1 & & & & \\
 v_2 & & & & \\
 \dots & & & & \\
 v_n & & & & 
 \end{array} = MI, MI_{i,j} = \begin{cases} 0, v_i \text{ не инцидентно } e_j \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}$$

## 6.2. Пути в графе

**Def. 6.2.1.** Пусть в графе – последовательность вершин  $u_1, u_2, \dots, u_k : \forall 2 \leq i \leq k \rightarrow (u_{i-1}, u_i) \in E$

Простой путь – путь, в котором вершины не повторяются.

**Def. 6.2.2.** Наличие пути между двумя вершинами – отношение эквивалентности  $\Rightarrow$  вершины разбиваются на классы эквивалентности – **компоненты связности**

**Def. 6.2.3.** Цикл в графе – последовательность вершин  $u_1, \dots, u_k : \begin{cases} \forall i \rightarrow (u_{i-1}, u_i) \in E \\ (u_k, u_1) \in E \end{cases}$

**Def. 6.2.4.** Простой цикл – цикл без повторяющихся ребер.

**Def. 6.2.5.** Если  $V_1 \subset V, E_1 \subset E, H = (V_1, E_1)$  – граф, тогда  $H$  – подграф  $G$ .

**Def. 6.2.6.**  $H$  – остовный подграф  $G$ , если  $V_1 = V$

**Def. 6.2.7.**  $H$  – индуцированный подграф  $G$ , если  $\forall x, y \in V_1 ((x, y) \in E \Rightarrow (x, y) \in E_1)$

## 6.3. Деревья

**Теорема 6.3.1** (Эквивалентные определения дерева). 1. Связный граф без циклов.

2. Граф, в котором  $\forall v_1, v_2 \in V \exists!$  простой путь между ними.

3. Связный граф, в котором  $\forall v_1, v_2 \in V$  не более одного простого пути между ними.

4. Граф без циклов, в котором  $\forall v_1, v_2 \exists$  путь.

5. Связный граф, в котором  $|V| = |E| + 1$ .

6. Граф без циклов, в котором  $|V| = |E| + 1$ .

7. Граф, в котором  $|V| = |E| + 1, \forall v_1, v_2 \in V$  не более одного пути между ними.

*Доказательство.* 1)  $\Rightarrow$  5). Индукция по числу вершин.

База:  $|V_G| = 1$ , циклов нет  $\Rightarrow$  петель нет  $\Rightarrow$  ребер в таком графе нет  $\Rightarrow |E_G| + 1 = 0 + 1 = |V_G|$

Индукционное предположение:  $\forall G : |V_G| \leq i \rightarrow |V_G| = |E_G| + 1$ .

Индукционный переход: рассмотрим произвольный  $G_1$  – связный ациклический,  $|V_{G_1}| = i + 1$ .

Очевидно, что  $E_{G_1} \neq \emptyset$ . Рассмотрим  $\overline{G_1} = G \setminus \{e\}, e \in E_{G_1}$ .  $|V_{\overline{G_1}}| = i + 1$ , но  $\overline{G_1}$  – несвязный,

$\exists H_1, H_2$  – связные подграфы  $\overline{G_1} : H_1 \cup H_2 = \overline{G_1}, |V_{H_1}| \leq i, |V_{H_2}| \leq i$ . Тогда по индукционному предположению.

$$|V_{G_1}| = |V_{\overline{G_1}}| = |V_{H_1}| + |V_{H_2}| = |E_{H_1}| + 1 + |E_{H_2}| + 1 = |E_{\overline{G_1}}| + 2 = |E_{G_1}| + 1$$

■

## 6.4. Обходы графа



### 6.4.1. Обход в глубину

DFS следует концепции «погружайся глубже, головой вперед» («go deep, head first»). Идея заключается в том, что мы двигаемся от начальной вершины (точки, места) в определенном направлении (по определенному пути) до тех пор, пока не достигнем конца пути или пункта назначения (искомой вершины). Если мы достигли конца пути, но он не является пунктом назначения, то мы возвращаемся назад (к точке разветвления или расхождения путей) и идем по другому маршруту.

Если конец пути — это искомая вершина, мы закончили. Если нет, возвращаемся назад и двигаемся по другому пути до тех пор, пока не исследуем все варианты.

Мы следуем этому алгоритму применительно к каждой посещенной вершине.

Необходимость многократного повторения процедуры указывает на необходимость использования рекурсии для реализации алгоритма.

```
void dfs(int v) {
    used[v] = true;

    for (int vertice : graph[v]) {
        if (!used[vertice])
            dfs(vertice);
    }
}
```

### 6.4.2. Обход в ширину

BFS следует концепции «расширяйся, поднимаясь на высоту птичьего полета» («go wide, bird's eye-view»). Вместо того, чтобы двигаться по определенному пути до конца, BFS предполагает движение вперед по одному соседу за раз.

Чем DFS отличается от BFS? Мне нравится думать, что DFS идет напролом, а BFS не торопится, а изучает все в пределах одного шага.

Далее возникает вопрос: как узнать, каких соседей следует посетить первыми?

Для этого мы можем воспользоваться концепцией «первым вошел, первым вышел» (first-in-first-out, FIFO) из очереди (queue). Мы помещаем в очередь сначала ближайшую к нам вершину, затем ее непосещенных соседей, и продолжаем этот процесс, пока очередь не опустеет или пока мы не найдем искомую вершину.

```
queue<int> q;
vector<bool> used(n);
used[start] = true;
q.push(start);
while (!q.empty()) {
    int vertice = q.front();
    q.pop();

    for (int destinationVertice : graph[vertice]) {
        if (!used[destinationVertice]) {
            used[destinationVertice] = true;
            q.push(destinationVertice);
        }
    }
}
```

## 6.5. Эйлеровы и Гамильтоновы графы

**Def. 6.5.1.** *Эйлеров путь в графе – путь, проходящий по всем ребрам графа ровно по одному разу.*

**Def. 6.5.2.** *Эйлеров цикл – цикл, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу.*

**Def. 6.5.3.** *Граф называется **эйлеровым**, если в нем есть эйлеров цикл.*

**Def. 6.5.4.** *Граф называется **полуэйлеровым**, если в нем есть эйлеров путь.*

**Теорема 6.5.5** (Теорема Эйлера). *Связный граф, в котором  $\forall v \deg v : 2$  – эйлеров.*

*Доказательство. Доказательство.* ■