Лабораторная работа №6 по курсу "Численные методы"

Тема ЛР - "Начально-краевые задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа"

Студент - Письменский Данила Владимирович

Группа - М8О-406Б-19

Задание

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением *U(x, t)*.

Вариант 3

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3u$
$u(0, t) = sin(2t)$
$u(\pi, t) = -sin(2t)$
$u(x, 0) = 0$
$u_t(x, 0) = 2cos(x)$
Аналитическое решение: $U(x, t) = cos(x)sin(2x)$

In [1]:
```
# импортируем библиотеки
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Зададим начальные условия, а также коэффициенты *a*, *sigma* и *h* - размер сетки для координатной составляющей. Размер сетки для временной составляющей будем искать из формулы $\tau = \sqrt{\sigma h^2}$.

Константы

In [2]:
```
x_start = 0
x_end = np.pi

t_start = 0
t_end = 5

h = 0.01
sigma = 1
```

Начальные условия

```
In [3]: def phi_0(t):
            return np.sin(2 * t)

        def phi_1(t):
            return -np.sin(2 * t)

        def psi_0(x):
            return 0

        def psi_1(x):
            return 2 * np.cos(x)

        def exact_sol(x, t):
            return np.cos(x) * np.sin(2 * t)
```

Аналитическое решение

Найдем аналитическое решение начально-краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа, затем будем сравнивать его с численными методами для того. Это нам пригодится, чтобы визуализировать зависимость максимального модуля ошибки от времени. Для этого реализовал функцию, которая возвращает матрицу *U* со значениями функции для аналитического решения.

```
In [4]: def analytical_solve(x_start, x_end, t_start, t_end, h, sigma):
            tau = np.sqrt(sigma * h**2)
            x = np.arange(x_start, x_end, h)
            t = np.arange(t_start, t_end, tau)

            U = np.zeros((len(t), len(x)))
            for dx in range(len(x)):
                for dt in range(len(t)):
                    U[dt][dx] = exact_sol(x[dx], t[dt])
            return U
```

```
In [5]: anal_solution = analytical_solve(x_start, x_end, t_start, t_end, h, sigma)
```

```
In [6]: anal_solution.shape
```

```
Out[6]: (500, 315)
```

Погрешность

В качестве погрешности буду использовать максимальный модуль ошибки.

```
In [7]: def max_abs_error(U_num, U_anal):
            return abs(U_num - U_anal).max()
```

Реализация функций построения графиков

Для того, чтобы визуализировать решение ДУ численными методами, реализую функцию построения графика функции *U(t)* при заданном времени *t*.

```
In [8]: def build_numerical_results_graphic(solution, method_name, time, x_start, x_end, t_start
            tau = np.sqrt(sigma * h**2)
            x = np.arange(x_start, x_end, h)
            times = np.arange(t_start, t_end, tau)
            cur_t_id = abs(times - time).argmin()
```

```
    plt.figure(figsize=(15, 9))
    plt.plot(x, anal_solution[cur_t_id], label='Аналитическое решение')
    plt.plot(x, solution[cur_t_id], label=method_name, color='r')

    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('U(t)')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

Чтобы проверить, насколько точно решение ДУ численными методами, необходимо реализовать функцию построения графика зависимости погрешности (максимального модуля ошибки) от времени.

In [9]:
```
def build_errors_graphic(solution, method_name, t_start, t_end, h, sigma):
    tau = np.sqrt(sigma * h**2)
    t = np.arange(t_start, t_end, tau)

    plt.figure(figsize=(15, 9))
    max_abs_errors = np.array([max_abs_error(solution[i], anal_solution[i]) for i in ran
    plt.plot(t, max_abs_errors, label=method_name, color='g')

    plt.xlabel('Время')
    plt.ylabel('Максимальный модуль ошибки')

    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

Численные методы

Явная конечно-разностная схема

Преобразуем исходное уравнение с производными в уравнение с их численными приближениями. Производную второго порядка в правой части уравнения будем аппроксимировать по значениям нижнего временного слоя.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3u;$$
$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = \frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2} - 3u_j^k => u_j^{k+1} = \frac{\tau^2}{h^2}(u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k) + (2 - 3\tau^2)u_j^k - u_j^{k-1}$$

Для нижнего временного ряда:
$u_j^0 = \psi_1(x_j)$
$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \tau\psi_2(x_j)$

Получили рекуррентное соотношение. Начальные условия позволяет нам посчитать значения *u* в нижнем временном ряду. Далее в цикле считаем значения в узлах сетки.

Особенностью метода явной конечно-разностной схемы является условие $\sigma = \frac{\tau^2}{h^2} < 1$, при котором данный метод условно устойчив. В противном случае, погрешность вычисления будет очень большой.

Заметим, что повышение порядка аппроксимации для u_j^1 не имеет смысла, т.к. в данном варианте лабораторной работы $\psi_1 = 0$, вторая производная которой равна 0.

In [12]:
```
def explicit_finite_difference_method(x_start, x_end, t_start, t_end, h, sigma, phi_0, p
    tau = np.sqrt(sigma * h**2)
```

```
    x = np.arange(x_start, x_end, h)
    t = np.arange(t_start, t_end, tau)

    U = np.zeros((len(t), len(x)))
    # подсчитываем значения, используя начальное условие 0
    for i in range(len(x)):
        U[0][i] = psi_0(x[i])

    # используем аппроксимацию
    for i in range(len(x)):
        U[1][i] = psi_0(x[i]) + tau * psi_1(x[i])

    for dt in range(2, len(t)):
        # подсчитываем значения, используя граничное условие 0
        U[dt][0] = phi_0(t[dt])
        # явная схема
        for dx in range(1, len(x) - 1):
            U[dt][dx] = sigma*(U[dt-1][dx+1] - 2*U[dt-1][dx] + U[dt-1][dx-1]) + (2 - 3*t
        # подсчитываем значения, используя граничное условие 1
        U[dt][-1] = phi_1(t[dt])
    return U
```

In [13]:
```
explicit_solution = explicit_finite_difference_method(x_start, x_end, t_start, t_end, h,
```

In [14]:
```
explicit_solution.shape
```

Out[14]:
```
(500, 315)
```

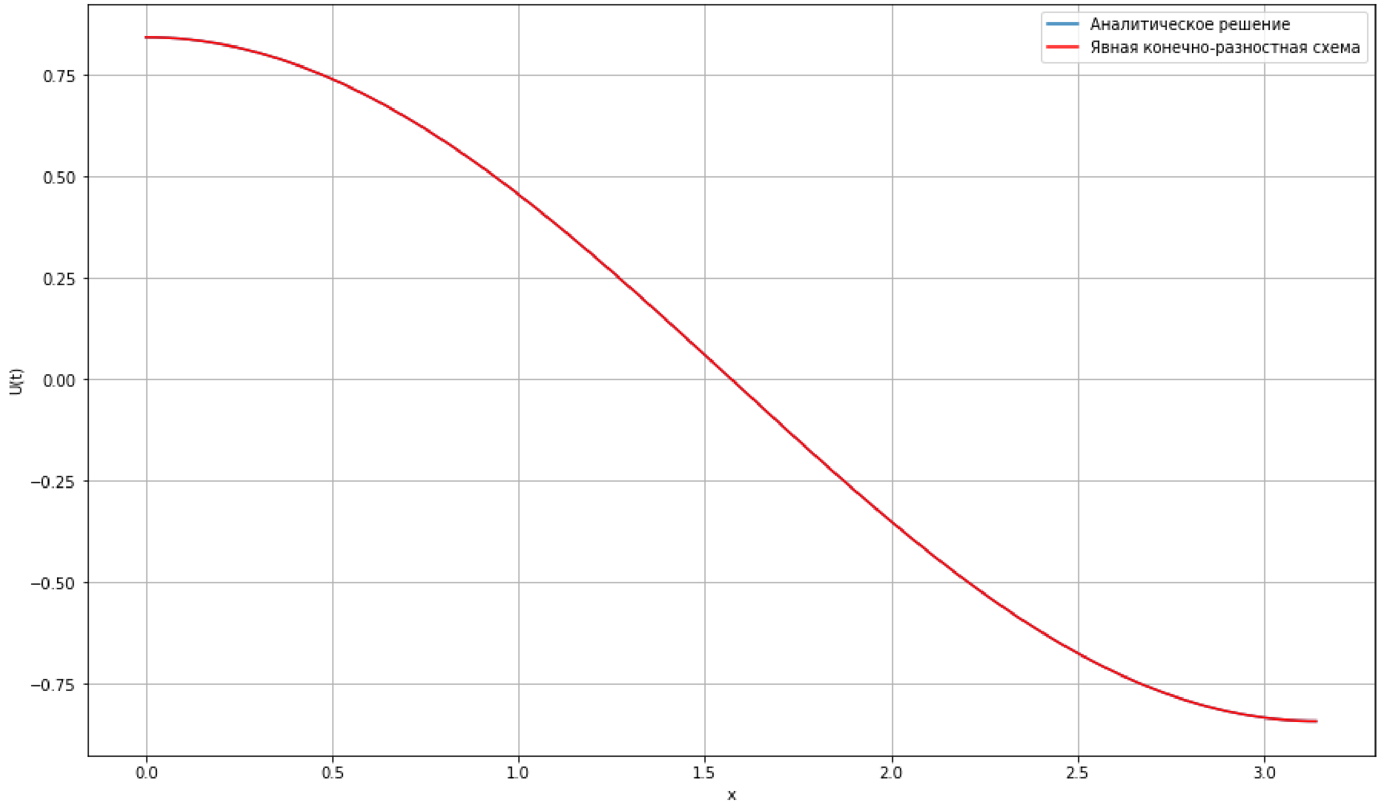
Максимальный модуль ошибки

In [29]:
```
print(f'Максимальный модуль ошибки = {max_abs_error(explicit_solution, anal_solution)}')
```

```
Максимальный модуль ошибки = 0.00010771631560224648
```

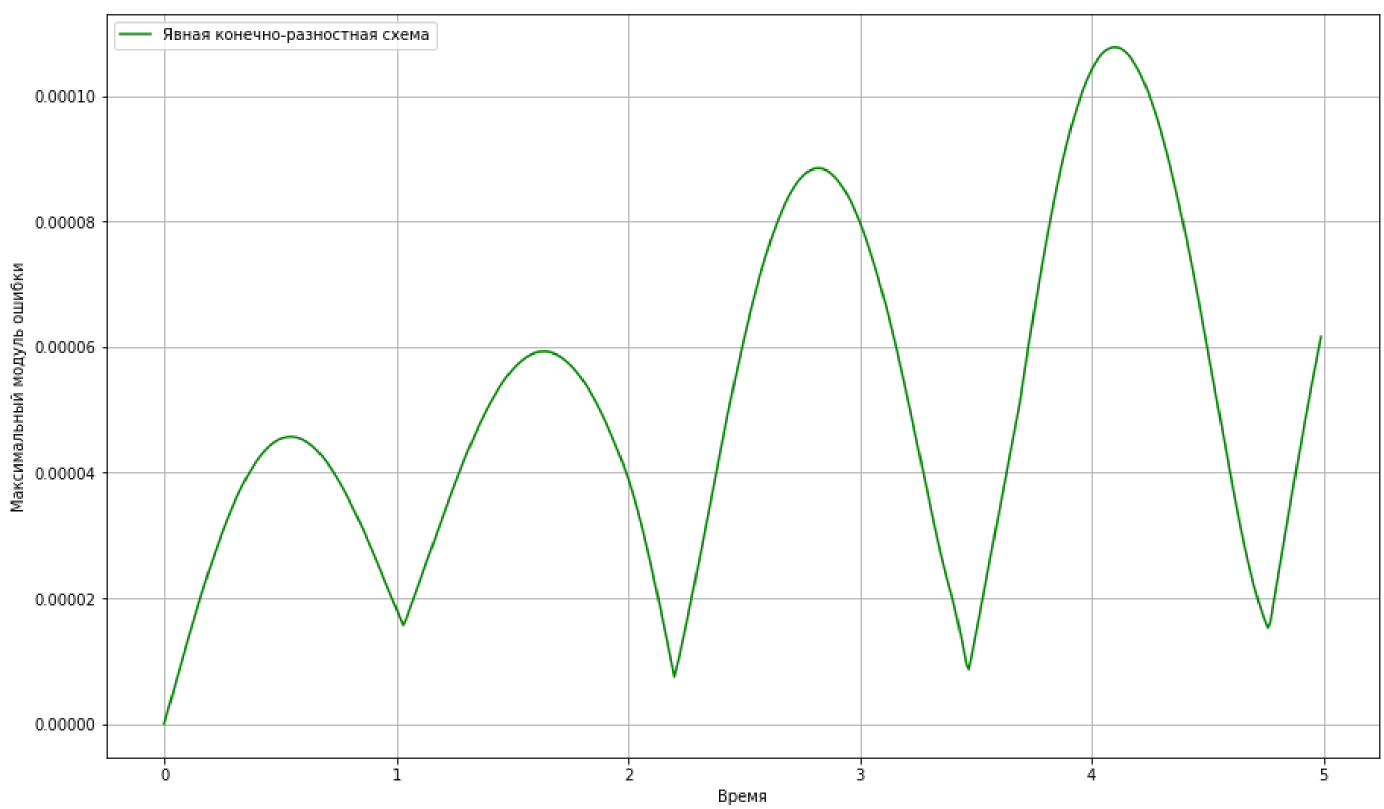
Визуализация решения ДУ с помощью явной конечно-разностной схемы

In [16]:
```
build_numerical_results_graphic(explicit_solution, "Явная конечно-разностная схема", 0.5
```



Визуализация погрешности метода явной конечно-разностной схемы

In [17]:
```
build_errors_graphic(explicit_solution, "Явная конечно-разностная схема", t_start, t_end
```



Неявная конечно-разностная схема

Преобразуем исходное уравнение с производными в уравнение с их численными приближениями. Производную второго порядка в правой части уравнения будем аппроксимировать по значениям нижнего временного слоя.

Необходимо решить систему уравнений для того, чтобы получить значения *u* в одном временном ряду.
Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = d_1, \ j = 1 \\ a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \ j = 2 ... (n-2) \\ a_{n-1} u_{n-2}^{k+1} + b_{n-1} u_{n-1}^{k+1} = d_{n-1}, \ j = n-1 \end{cases}, \text{где}$$

$a_j = c_j = \sigma = \frac{\tau^2}{h^2}$
$b_j = -3\tau^2 - 2\sigma - 1$
$d_j = u_j^{k-1} - 2u_j^k, \ j = 2...(n-2)$
$d_1 = -\sigma\phi_0(t^{k+1}) - u_1^k$
$d_{n-1} = -\sigma\phi_1(t^{k+1}) - u_{n-1}^k$

Данная система уравнений представляет собой трёхдиагональную СЛАУ, которую можно решить, используя метод прогонки.

Метод прогонки

In [18]:
```
def run_through_method(A, b):
    n = len(A)

    v = [0 for _ in range(n)]
    u = [0 for _ in range(n)]
    v[0] = A[0][1] / -A[0][0]
    u[0] = b[0] / A[0][0]
    for i in range(1, n - 1):
        v[i] = A[i][i + 1] / (-A[i][i] - A[i][i - 1] * v[i - 1])
        u[i] = (A[i][i - 1] * u[i - 1] - b[i]) / (-A[i][i] - A[i][i - 1] * v[i - 1])
    v[n - 1] = 0
    u[n - 1] = (A[n - 1][n - 2] * u[n - 2] - b[n - 1]) / (-A[n - 1][n - 1] - A[n - 1][n

    x = [0 for _ in range(n)]
    x[n - 1] = u[n - 1]
    for i in range(n - 1, 0, -1):
        x[i - 1] = v[i - 1] * x[i] + u[i - 1]
    return np.array(x)
```

In [19]:
```
def implicit_finite_difference_method(x_start, x_end, t_start, t_end, h, sigma, phi_0, p
    tau = np.sqrt(sigma * h**2)
    x = np.arange(x_start, x_end, h)
    t = np.arange(t_start, t_end, tau)
    U = np.zeros((len(t), len(x)))

    # подсчитываем значения, используя начальное условие 0
    for i in range(len(x)):
        U[0][i] = psi_0(x[i])

    # используем аппроксимацию
    for dx in range(len(x)):
        U[1][dx] = psi_0(x[dx]) + tau * psi_1(x[dx])

    for dt in range(2, len(t)):
        A = np.zeros((len(x) - 2, len(x) - 2))
```

```
        A[0][0] = -3 * tau ** 2 - 2 * sigma - 1
        A[0][1] = sigma
        for i in range(1, len(A) - 1):
            A[i][i - 1] = sigma
            A[i][i] = -3 * tau ** 2 - 2 * sigma - 1
            A[i][i + 1] = sigma
        A[-1][-2] = sigma
        A[-1][-1] = -3 * tau ** 2 - 2 * sigma - 1

        b = -2 * U[dt - 1][1:-1] + U[dt - 2][1:-1]
        # подсчитываем значения, используя граничные условия
        b[0] -= sigma * phi_0(t[dt])
        b[-1] -= sigma * phi_1(t[dt])

        U[dt][0] = phi_0(t[dt])
        U[dt][-1] = phi_1(t[dt])
        # метод прогонки
        U[dt][1:-1] = run_through_method(A, b)
    return U
```

In [20]:

```
implicit_solution = implicit_finite_difference_method(x_start, x_end, t_start, t_end, h,
```

In [21]:

```
implicit_solution.shape
```

Out[21]:

```
(500, 315)
```

Максимальный модуль ошибки

In [30]:

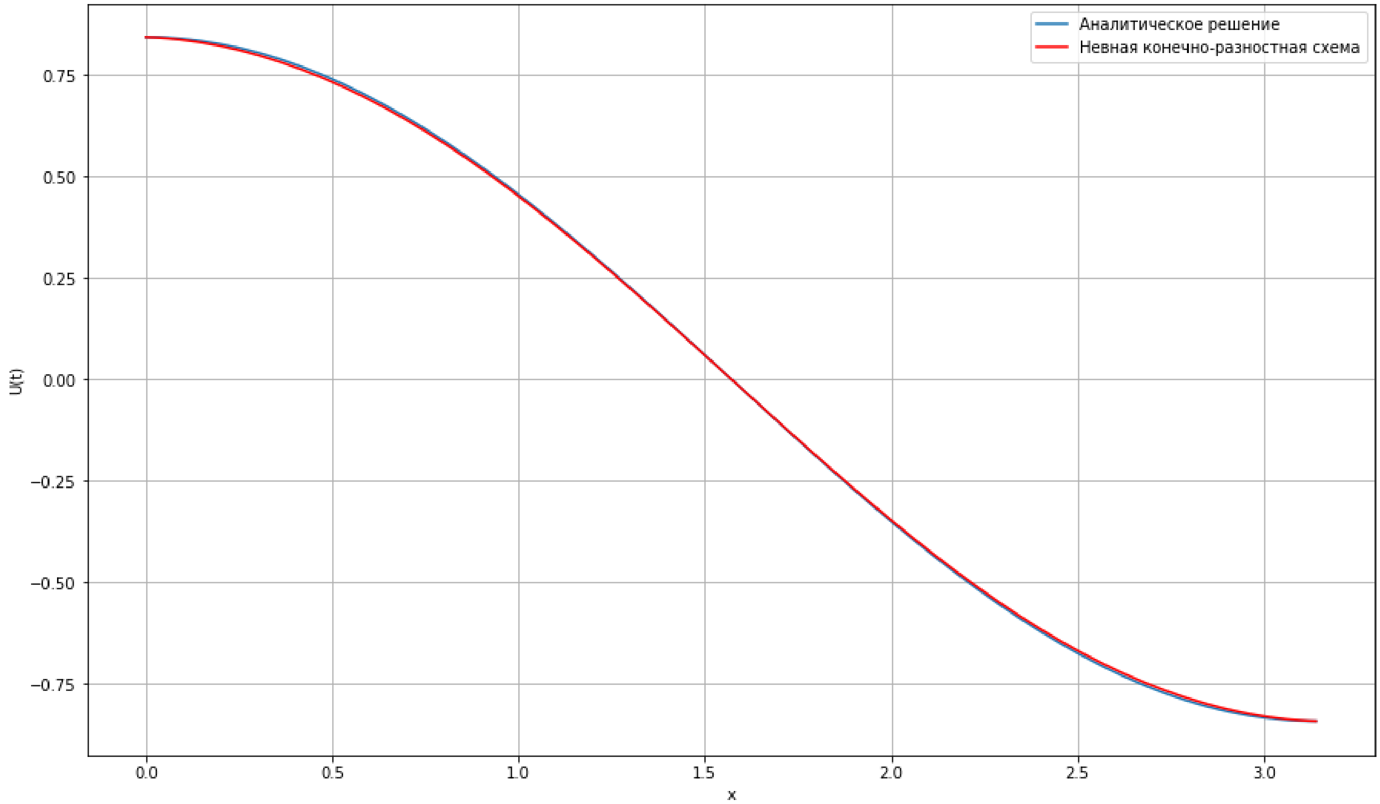
```
print(f'Максимальный модуль ошибки = {max_abs_error(implicit_solution, anal_solution)}')
```

```
Максимальный модуль ошибки = 0.04138708853076888
```

Визуализация решения ДУ с помощью явной конечно-разностной схемы

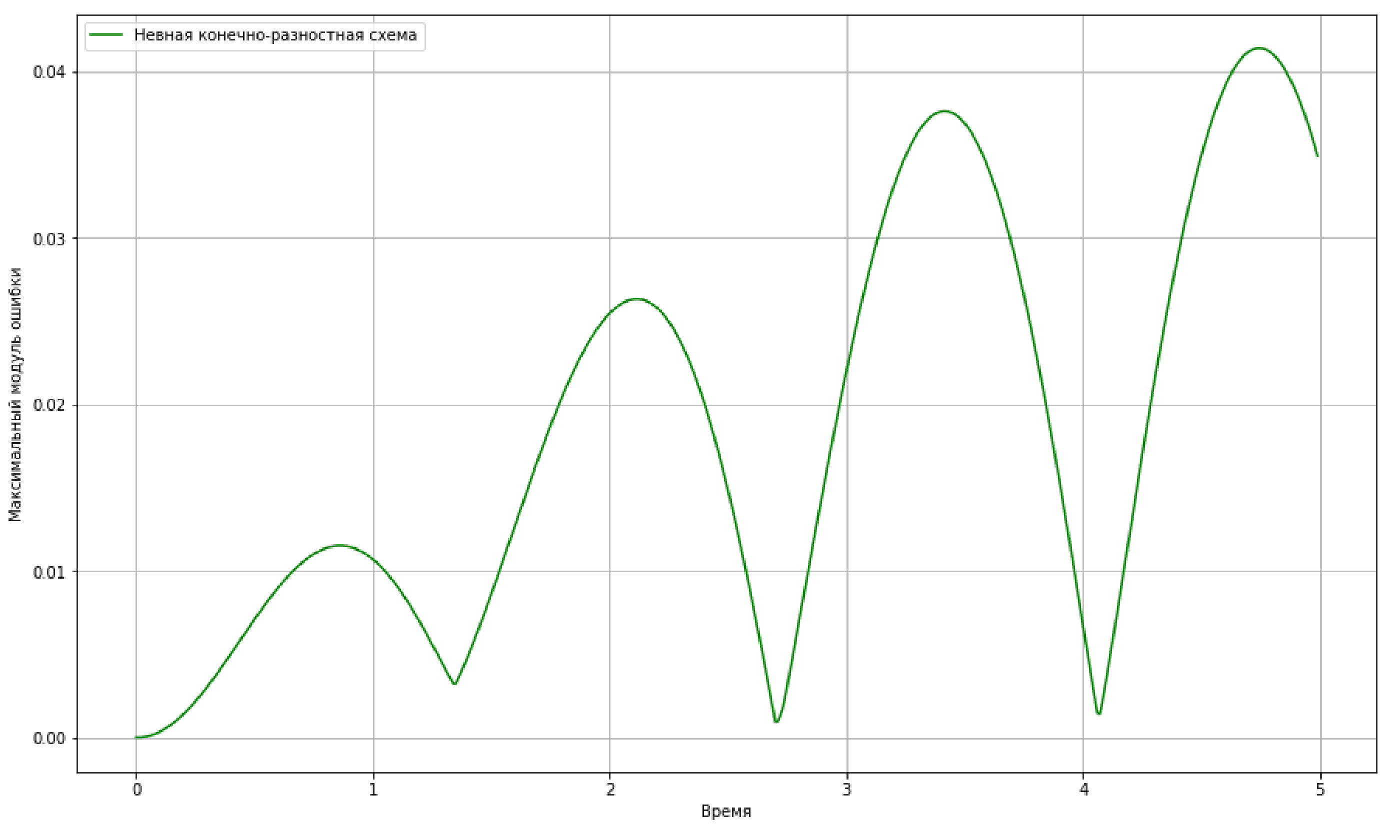
In [23]:

```
build_numerical_results_graphic(implicit_solution, "Невная конечно-разностная схема", 0.
```



Визуализация погрешности метода явной конечно-разностной схемы

In [24]:
```
build_errors_graphic(implicit_solution, "Невная конечно-разностная схема", t_start, t_en
```



Сравнение численных методов с аналитическим решением

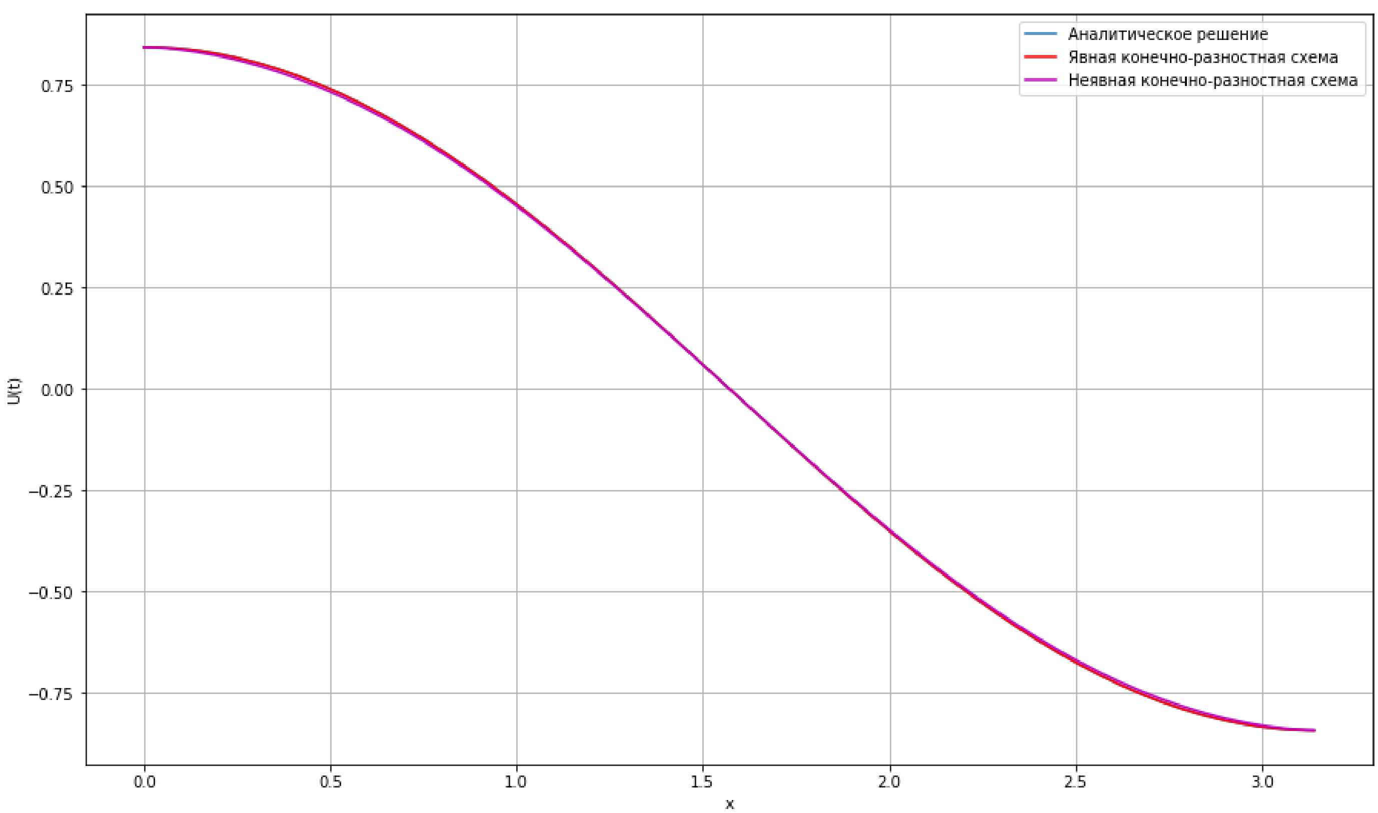
In [25]:
```
def build_all_numerical_results_graphic(sol1, sol2, m_n1, m_n2, time, x_start, x_end, t_
    tau = np.sqrt(sigma * h**2)
```

```
    x = np.arange(x_start, x_end, h)
    times = np.arange(t_start, t_end, tau)
    cur_t_id = abs(times - time).argmin()

    plt.figure(figsize=(15, 9))
    plt.plot(x, anal_solution[cur_t_id], label='Аналитическое решение')
    plt.plot(x, sol1[cur_t_id], label=m_n1, color='r')
    plt.plot(x, sol2[cur_t_id], label=m_n2, color='m')

    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('U(t)')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

In [26]:
```
def build_all_errors_graphic(sol1, sol2, m_n1, m_n2, t_start, t_end, h, sigma):
    tau = np.sqrt(sigma * h**2)
    t = np.arange(t_start, t_end, tau)

    plt.figure(figsize=(15, 9))
    max_abs_errors1 = np.array([max_abs_error(sol1[i], anal_solution[i]) for i in range(
    max_abs_errors2 = np.array([max_abs_error(sol2[i], anal_solution[i]) for i in range(
    plt.plot(t, max_abs_errors1, label=m_n1, color='g')
    plt.plot(t, max_abs_errors2, label=m_n2, color='r')

    plt.xlabel('Время')
    plt.ylabel('Максимальный модуль ошибки')

    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

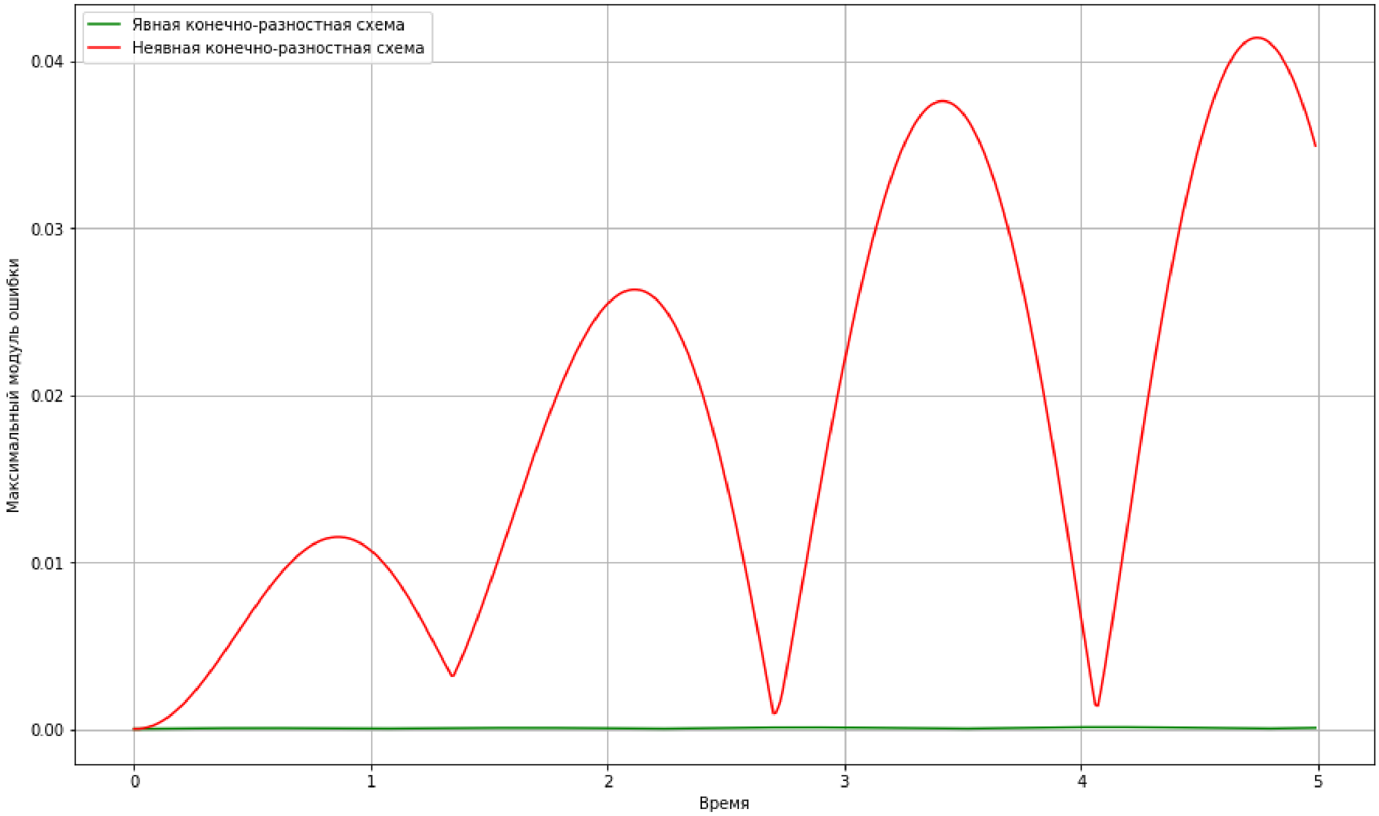
Визуализация результатов работы численных методов

In [27]:
```
build_all_numerical_results_graphic(explicit_solution, implicit_solution, "Явная конечно
```



Визуализация зависимости погрешности от времени для численных методов

```
In [28]: build_all_errors_graphic(explicit_solution, implicit_solution, "Явная конечно-разностная
```



Выводы

В данной лабораторной работе изучил 2 метода для решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа:

- явная конечно-разностная схема;
- неявная конечно-разностная схема.

Полученное решение заданного ДУ данными методами имеет довольно большую точность. Построил графики зависимости погрешности от времени для всех численных методов.

Явная конечно-разностная схема проста в реализации, однако может быть реализована только при условии $\sigma < 1$, т.е данный метод условно устойчив.
Неявная конечно-разностная схема обуславливается сложностью вычислений, так как необходимо решать большое количество СЛАУ, однако в отличие от предыдущего метода данная схема является абсолютно устойчивой, т.е. не зависящей от σ.