Постановка задачи

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \quad T = \mathrm{const}, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(1,t) = \mu_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

где $k(x,t), f(x,t)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям:

$$0 < c_1 \le k(x,t) \le c_2.$$

Используя интегро-интерполяционный метод или метод баланса, получим разностное уравнение:

$$u_{i-1} - \nu_i = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{\nu_{i+1}-\nu_i}{h} - a_i\frac{\nu_i - \nu_{i-1}}{h}\right] - d_i\nu_i = -\phi_i,$$

где $\phi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx$.

Интегралы, определяющие коэффициенты a_i, d_i, ϕ_i построенной разностной схемы, можно заменять приближенными значениями. Например, используя формулу трапеций:

$$a_i = \left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1} \approx \frac{2k(x_{i-1})k(x_i)}{k(x_{i-1}) + k(x_i)}.$$

$$\frac{a(x_{i+1},t) - a(x_i,t)}{2} = \frac{\partial k}{\partial x}(x_i,t) + O(h^2).$$

Коэффициенты (x_i,t), удовлетворяющие указанным условиям, можно выбирать различными способами. Чаще прочих используется одно из следующих выражений:

$$a(x_i,t) = \frac{k(x_{i-1},t) + k(x_i,t)}{2},$$

$$a_i(x_i,t) = k(x_{i-h/2},t),$$

$$a_i(v) = \frac{2k(x_{i-1},t)k(x_i,t)}{k(x_{i-1},t) + k(x_i,t)}.$$

На равномерной сетке по пространству и времени рассмотрим разностную схему с весами, аппроксимирующую рассматриваемую задачу:

$$\begin{cases} \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \Lambda(t)(\sigma y_i^{n+1} + (1-\sigma)y_i^n) + f(x_i,t), \\ \\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ hN = 1, \\ \\ y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \\ \\ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \\ \\ y_i^0 = u_0(x_i). \end{cases}$$

Схема имеет 2-й порядок аппроксимации по τ и h, если $t = t_n + \frac{\tau}{2}$, $\sigma = 0.5$. При прочих значениях σ и t: $O(\tau + h^2)$.

Перейдём к построению схемы для нестационарного уравнения. Исходя из

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

при каждом фиксированном t в точке (x_i, t) разностным отношением

$$\Lambda(t)y_i = (a(x_i,t)y_x)_x, i = \frac{1}{h}[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}].$$

Найдём условия, обеспечивающие второй порядок аппроксимации на любой достаточно гладкой функции $u(x,t)$. Вводя обозначения

$$u = u(x_i,t), \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t), \quad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t), \quad u''' = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t)$$

и используя разложение по формуле Тейлора, получим:

$$\Lambda(t)u = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\left(hu' + \frac{h^2}{2}u'' + \frac{h^3}{6}u'''\right) - a_i\left(-hu' - \frac{h^2}{2}u'' + \frac{h^3}{6}u'''\right)\right] + O(h^2).$$

Отсюда получаем:

$$\Lambda(t)u = \frac{a_{i+1}-a_i}{h}u' + \frac{a_{i+1}+a_i}{2}u'' + \frac{a_{i+1}-a_i}{h}\frac{h^2}{6}u''' + O(h^2).$$

Таким образом, условие второго порядка аппроксимации:

$$\frac{a(x_{i+1},t) + a(x_i,t)}{2} = k(x_i,t) + O(h^2).$$

Построение схемы для нестационарного уравнения

Исходя из $Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, при каждом фиксированном t в точке (x_i,t) разностное отношение принимает вид:

$$\Lambda(t)y_i = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right].$$

Найдем условия, обеспечивающие второй порядок аппроксимации на любой достаточно гладкой функции $u(x,t)$. Используя разложение по формуле Тейлора, получим:

$$\Lambda(t)u = \frac{a_{i+1}+a_i}{2}u'' + \mathcal{O}(h^2).$$

Автомодельное решение

Построим семейство автомодельных решений квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ k(u) = \kappa_0 u^\sigma, \\ \sigma > 0,\ \kappa_0 > 0, \end{cases}$$

предполагая степенную зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Будем искать решения уравнения типа бегущей волны:

$$u(x,t) = u(z),\ z = Dt - x,\ D = \mathrm{const}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{du}{dz}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{du}{dz}, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = (ku')', \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Du' = (ku')' \Leftrightarrow Du = k(u)u' + C_1 = k(u)u', \\ Du = \kappa_0 u^\sigma u' \Leftrightarrow dz = \frac{\kappa_0}{D}u^{\sigma-1}du + C_2 = \frac{\kappa_0}{D}u^{\sigma-1}du. \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(z) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma D}{\kappa_0}\right)^{1/\sigma} z^{1/\sigma}, & z \geq 0, \\ u(0) = 0, & z < 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma D}{\kappa_0}\right)^{1/\sigma} (Dt - x)^{1/\sigma}, & x \leq Dt, \\ 0, & x > Dt, \end{cases}$$

может рассматриваться в качестве решения следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_0 t^{1/\sigma}, & \\ u(\infty, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0. \end{cases}$$

Здесь $u_0 = \left(\frac{\sigma D^2}{\kappa_0}\right)^{1/\sigma}$. При заданных значениях параметров κ_0, σ, u_0 нахождение решения этой задачи сводится к определению постоянной

$$D = \sqrt{\frac{\kappa_0 u_0^\sigma}{\sigma}}.$$

Это решение представляет собой температурную волну, распространяющуюся с постоянной скоростью D по нулевому начальному фону. Точка $x = Dt$ называется фронтом температурной волны.

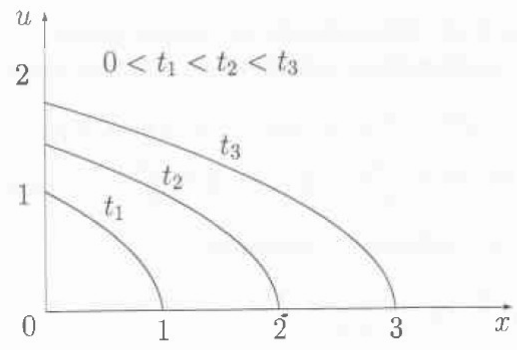

Рис. 5.1. Температурная волна ($\sigma = 2$)

1 Тепловая волна Зельдовича

Тепловая волна Зельдовича — это решение задачи теплопроводности с начальным условием в виде дельта-функции, которое моделирует распространение тепла от мгновенного точечного источника. Такой процесс часто используется для описания физических явлений, где тепло или энергия распределяются с высокой интенсивностью в одной точке и затем начинают распространяться в окружающее пространство.

Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где:

- $T(x, t)$ — температура;
- α — коэффициент теплопроводности.

1.1 Начальные и граничные условия

Начальное условие:

$$T(x, 0) = Q\delta(x - x_0), \tag{3}$$

где $\delta(x - x_0)$ — дельта-функция, сосредоточивающая всё тепло Q в точке x_0 при $t = 0$.

Граничные условия:

$$T(x, t) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty. \tag{4}$$

Аналитическое решение

Для дельта-функции начальное условие означает, что общее количество тепла сохраняется:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x, t)\, dx = Q. \tag{5}$$

Решение уравнения теплопроводности с таким начальным условием:

$$T(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4\alpha t}\right), \tag{6}$$

где:

- Q — общее количество тепла;
- $\sqrt{4\pi\alpha t}$ — масштабный фактор, отвечающий за расширение области распространения тепла.

Численная аппроксимация

Для численного решения уравнения теплопроводности с начальным условием в виде дельта-функции дельта-функция заменяется приближением в виде узкой функции, например, гауссианом:

$$T(x,0) = \frac{Q}{\sqrt{\epsilon\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\epsilon}\right), \tag{7}$$

где $\epsilon \ll 1$.

Дискретизация уравнения

Для численного решения применяем метод конечных разностей:

- Аппроксимация временной производной:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}. \tag{8}$$

- Аппроксимация второй производной по пространству:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \tag{9}$$

Подставляя это в уравнение, получаем:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right). \tag{10}$$

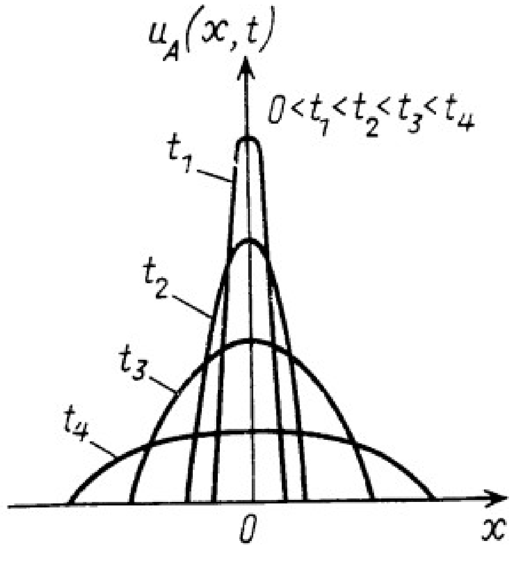

Рис. 1: Тепловая волна Зельдовича

2 Уравнение теплопроводности с режимом обострения (S, HS, LS-режимы)

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности с объёмным источником тепла, имеющим вид

$$u_t \;=\; \big(k(u)\,u_x\big)_x \;+\; f(u), \tag{11}$$

где

$$k(u) \;=\; k_0\,u^2, \quad f(u) \;=\; u^\beta,$$

а функция $u(x,t)$ описывает температуру в точке x в момент времени t. Константа $k_0 > 0$ является коэффициентом «квазилинейной» теплопроводности, а $\beta > 1$ определяет «силу» источника тепла $f(u)$.

В зависимости от значения β, наряду с другими физическими параметрами, в модели наблюдаются разные типы («режимы») обострения решения:

- **HS-режим** (High-Speed), когда $\beta = 2$;
- **S-режим**, когда $\beta = 3$;
- **LS-режим** (Low-Speed), когда $\beta = 4$.

Во всех этих случаях при достаточно большом начальном распределении $u_0(x)$ решение имеет склонность к так называемому *взрывному росту* (или *обострению*) за конечное время T. Более точно, существует некоторое $T > 0$ такое, что

$$\lim_{t \to T^-} \max_x u(x,t) \;=\; +\infty.$$

Это явление интерпретируется как *локализованное возгорание* (горение) в рамках упрощённой модели теплопроводности.

2.1 Постановка граничных и начальных условий

Часто рассматривается задача Коши или краевая задача на конечном интервале:

$$x \in \big[-L,\ L\big],$$

с граничными условиями Дирихле или Неймана. Например, в простейшем случае:

$$u\big(-L,t\big) \;=\; 0, \quad u\big(L,t\big) \;=\; 0. \tag{12}$$

Начальное условие записывается в виде

$$u(x,0) \;=\; u_0(x) \;\geq 0, \tag{13}$$

причём обычно предполагается «локализованный бугор» в центре (например, кусочно-косинусная шапочка), чтобы инициировать рост решения в окрестности $x = 0$.

2.2 Аналитические замечания о режиме обострения

Если $k(u) = k_0\, u^2$ и $f(u) = u^\beta$, то уравнение (11) нередко переписывают в виде

$$u_t \;=\; k_0 \frac{\partial}{\partial x}\Big(u^2\, u_x\Big) \;+\; u^\beta.$$

Такой выбор позволяет ввести *автомодельные переменные* (аналогичные $\xi = \frac{|x|}{\sqrt{T_0 - t}}$ и т. д.) и искать специальные решения-«столбики»:

$$u_A(x,t) \;=\; \frac{1}{T_0 - t}\,\theta\Big(\xi\Big), \quad \xi \;=\; \frac{|x|}{\sqrt{T_0 - t}},$$

для которых функция $\theta(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$\big(\theta^2\,\theta'\big)' + \theta^\beta - \cdots = 0.$$

Конкретный вид этого ОДУ и его граничных условий зависит от β и согласуется с (11) (см. формулы (13.9)–(13.12) из приведённого материала).

S-режим (beta=3). В случае $\beta = 3$ возможно классическое *точное* решение вида

$$u_A(x,t) \;=\; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos\Big(\frac{\pi x}{L_s}\Big)}{\sqrt{T_0 - t}} \quad \text{при} \quad |x| < \frac{L_s}{2},$$

если соответствующим образом подобрать $L_s = \pi\sqrt{3}$. На краях $|x| = L_s/2$ решение равняется нулю, что даёт классическую «косинусную шапочку». При $t \to T_0$ в центре $x = 0$ решение возрастает безгранично по закону $\frac{1}{\sqrt{T_0 - t}}$.

HS-режим (beta=2). Здесь $\beta = 2$. Хотя формальная подстановка похожа, закрытая элементарная функция вроде $\cos(\cdot)/\sqrt{T_0 - t}$ уже *не* получается. Вычисление «автомодельного» решения $\theta(\xi)$ сводится к численному решению ОДУ:

$$\big(\theta^2\,\theta'\big)' + \theta^2 = 0,$$

с некоторыми условиями на концах промежутка $\xi \in [-\xi_0,\ \xi_0]$. Тем не менее качественно решение так же «сжимается» к центру $|x| < x_*(t)$, где фронт $x_*(t)$ движется со временем, а сама температура в окрестности $x = 0$ возрастает к ∞ при $t \to T_0$.

LS-режим (beta=4). Для $\beta = 4$ говорят, что источник u^4 является еще более «сильным», чем при $\beta = 3$. Соответственно, «режим обострения» наступает порой даже быстрее. Однако *простая* формула решения в замкнутом виде (как при $\beta = 3$) вновь отсутствует, и локализация фронтов оказывается особой (см. формулу (13.12) из материала). В частности, автомодельный анализ даёт ОДУ:

$$(\theta^2\,\theta')' + \theta^4 \;=\; 0,$$

где для больших $|\xi|$ функция $\theta(\xi)$ убывает как $1/|\xi|^2$.

2.3 Численные методы решения

Чтобы найти численное решение задачи (11)–(13) с условиями (12), часто используют *явную* или *неявную* конечно-разностную аппроксимацию. Например, в явном варианте:

$$u_i^{n+1} \;=\; u_i^n \;+\; \tau\,\frac{\bigl(k(u^n)\,\delta_x u^n\bigr)_i}{h^2} \;+\; \tau\,\bigl(u_i^n\bigr)^\beta,$$

где δ_x обозначает центральную разность по x. При этом для контроля шага по времени τ можно использовать алгоритм типа «дублированного шага» (Runge–Kutt-like): сперва вычисляем решение при шаге τ, затем два шага по $\frac{1}{2}\,\tau$, сравниваем решения и при плохой сходимости уменьшаем τ.

Наблюдается, что к моменту $t \approx 0.99\,T_0$ решение $\{u_i^n\}$ резко возрастает вблизи $x = 0$, что свидетельствует о *взрывном* (обострённом) характере эволюции. Разница между HS-, S- и LS-режимами проявляется в разной скорости роста температуры в центре и в разном характере «фронтов» (точек, где решение переходит к нулю).

2.4 Выводы и физическая интерпретация

Таким образом, уравнение (11) допускает три основных сценария «самонагрева» (горения) в зависимости от β.

- **S-режим ($\beta = 3$):** есть точное автомодельное решение со «статической» локализацией $|x| \le \frac{L_s}{2}$.
- **HS-режим ($\beta = 2$):** «более слабое» теплообразование (u^2 против u^3), однако взрыв наступает *раньше* (T_0 в большинстве случаев меньше), а эксплицитной элементарной формулы для решения нет.
- **LS-режим ($\beta = 4$):** «более сильное» теплообразование, ведущая к резкому взрывному росту, но с «особым» поведением фронта и убывающей асимптотикой $\theta(\xi) \sim 1/|\xi|^2$.

3 Индивидуальная задача и метод CROS(комплексный метод Розенброка)

Рассмотрим одномерное параболическое уравнение с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; (x+2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;+\; 2\,\frac{\partial u}{\partial x} \;+\; f(x,t),$$

задаваемое для $x \in [0,1]$ и $t \ge 0$. Дополнительно полагаем граничные условия

$$u(0,t) \;=\; 0, \quad u(1,t) \;=\; 0,$$

а также некоторое начальное условие

$$u(x,0) \;=\; \varphi(x).$$

В нашем примере мы выбираем

$$\varphi(x) \;=\; u_{\text{exact}}(x,0),$$

где u_{exact} — функция, которую заранее подбираем так, чтобы подстановка её в уравнение позволяла найти соответствующую силу (или "источник") $f(x,t)$. Именно благодаря этому u_{exact} *точно* удовлетворяет исходной задаче при соответствующем $f(x,t)$.

3.1 Выбор u-exact и вывод f(x)

Чтобы иметь возможность проверить точность численного метода, полезно заранее задать функцию

$$u_{\text{exact}}(x,t) \;=\; e^{-t}\,\sin\bigl(\pi\,x\bigr).$$

Нетрудно проверить, что при таких граничных условиях $u_{\text{exact}}(0,t) = 0$ и $u_{\text{exact}}(1,t) = 0$. Теперь вычислим нужную правую часть $f(x,t)$, подставляя u_{exact} в исходное уравнение:

$$u_t \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\Bigl(e^{-t}\,\sin(\pi x)\Bigr) \;=\; -\,e^{-t}\,\sin(\pi x),$$

$$u_x \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^{-t}\,\sin(\pi x)\Bigr) \;=\; e^{-t}\,\pi\cos(\pi x),$$

$$u_{xx} \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Bigl(e^{-t}\,\sin(\pi x)\Bigr) \;=\; -\,e^{-t}\,\pi^2\,\sin(\pi x).$$

Подставляя их в

$$u_t \;=\; (x+2)\,u_{xx} \;+\; 2\,u_x \;+\; f(x,t),$$

получаем

$$-\,e^{-t}\,\sin(\pi x) \;=\; (x+2)\,\Bigl(-\,e^{-t}\,\pi^2\,\sin(\pi x)\Bigr) \;+\; 2\Bigl(e^{-t}\,\pi\,\cos(\pi x)\Bigr) \;+\; f(x,t).$$

Вынесем e^{-t} за скобки:

$$-\sin(\pi x) \;=\; -\,(x+2)\,\pi^2\,\sin(\pi x) \;+\; 2\,\pi\,\cos(\pi x) \;+\; f(x,t)\,e^{t}.$$

Следовательно,

$$f(x,t) \;=\; e^{-t}\,\Bigl[(\pi^2\,(x+2) \;-\; 1)\,\sin(\pi x) \;-\; 2\,\pi\,\cos(\pi x)\Bigr].$$

Таким образом, если выбрать именно такую функцию f, то $u_{\text{exact}}(x,t) = e^{-t}\,\sin(\pi x)$ будет точным решением исходной задачи (с нулевыми граничными условиями).

3.2 Описание численного метода

3.2.1 Метод линий и аппроксимация по пространству

Для решения данного уравнения мы применяем *метод линий*. Он заключается в том, что мы сначала дискретизуем уравнение по пространству (переводя задачу в систему ОДУ по времени), а уже затем решаем полученную систему ОДУ методом Розенброка.

Дискретизация по x. Разобьём отрезок $[0,1]$ на N равных промежутков шагом $h = 1/N$. Пусть $x_j = j\,h, \quad j = 0, 1, \dots, N$. Обозначим $u_j(t) \approx u(x_j, t)$. Центральная разность для второй производной дает:

$$u_{xx}(x_j, t) \;\approx\; \frac{u_{j+1}(t) \;-\; 2\,u_j(t) \;+\; u_{j-1}(t)}{h^2},$$

а для первой производной (учитывая коэффициент 2 в уравнении) получаем схематично

$$2\,u_x \;\approx\; \frac{2}{2\,h}\Big(u_{j+1}(t) - u_{j-1}(t)\Big) \;=\; \frac{1}{h}\Big(u_{j+1}(t) - u_{j-1}(t)\Big).$$

Учитывая переменный коэффициент $(x_j{+}2)$, собираем операцию в матрицу $\mathbf{A}$. Таким образом, формируется система:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{U}(t) \;+\; \mathbf{F}(t),$$

где $\mathbf{U}(t)$ — вектор значений $\{\,u_1(t),\, u_2(t), \dots, u_{N-1}(t)\}$ (граничные узлы мы исключаем, так как $u_0(t) = u_N(t) = 0$ по условию), а $\mathbf{F}(t)$ учитывает силу $f(x,t)$ и граничные условия.

3.3 Метод Розенброка (упрощённая схема)

Для интегрирования по времени системы ОДУ, полученной после дискретизации по пространству, применим *одношаговый метод Розенброка.* Идея Розенброк-схем — обеспечить A-устойчивость за счёт *явно-неявного* подхода, но с более простым обращением к матрице системы, чем в полностью неявном методе.

В частности, рассмотрим упрощённую одношаговую схему:

$$\mathbf{U}^{n+1} \;=\; \mathbf{U}^n \;+\; \Delta t\,\big(\mathbf{I} - \gamma\,\Delta t\,\mathbf{A}\big)^{-1}\Big[\mathbf{A}\,\mathbf{U}^n + \mathbf{F}\big(t_n\big)\Big],$$

где Δt — шаг по времени, γ — некоторое число (обычно $\gamma = 1$ либо выбирается из условий устойчивости), а $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Заметим, что для линейной системы с постоянной матрицей $\mathbf{A}$ инверсия $\big(\mathbf{I} - \gamma\,\Delta t\,\mathbf{A}\big)$ может быть выполнена единожды на каждом шаге, что делает метод достаточно эффективным для жёстких задач.

Применение к нашей задаче. На каждом шаге по времени $t_n \to t_{n+1}$, мы:

1. Вычисляем $\mathbf{RHS} = \mathbf{A}\,\mathbf{U}^n + \mathbf{F}(t_n)$.
2. Решаем линейную систему
$$\Big(\mathbf{I} - \gamma\,\Delta t\,\mathbf{A}\Big)\,\mathbf{k} \;=\; \mathbf{RHS}.$$
3. Обновляем решение $\mathbf{U}^{\,n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t\,\mathbf{k}$.

Поскольку $\mathbf{A}$ не зависит от времени (оно зависит только от x, а сетка по x фиксирована), матрицу $\mathbf{I} - \gamma\,\Delta t\,\mathbf{A}$ можно при желании факторизовать (например, LU-факторизацией) один раз и многократно использовать при решении.

3.4 Применение метода CROS к модельной задаче №3

Решается заданное модельное уравнение теплопроводности (или диффузии) с заранее известными(вычисленными) аналитическим решением и реализованными явной и неявной РС численные решения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1,\ t > 0),$$

где дополнительно считаем, что $u(0,t) = 0$ и $u(1,t) = 0$. В качестве начального условия выбирается прямоугольная (или "щелевая") функция $u(x,0) = 1$ при $x \in [\,0.5 - \Delta,\ 0.5 + \Delta]$ и 0 в остальных точках.

Для решения задачи программно реализовано сразу три схемы:

1. **Явная (Explicit) схема** — по времени используется прямая (явная) конечно-разностная аппроксимация:

   $$u_i^{n+1} = u_i^n + \alpha \left(u_{i+1}^n - 2\,u_i^n + u_{i-1}^n\right),$$

   где $\alpha = \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$. Данная схема проста в реализации, но может требовать очень маленького шага Δt для сохранения устойчивости.

2. **Неявная (Implicit) схема** — по времени применяется обратная (полностью неявная) схема Эйлера:

   $$u_i^{n+1} - \alpha \left(u_{i+1}^{n+1} - 2\,u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) = u_i^n,$$

   которая требует решения СЛАУ на каждом шаге, но обладает лучшей устойчивостью, чем явная.

3. **CROS (Complex Rosenbrock) метод** — это вариант *полужёсткой* (stiffly accurate) схемы Розенброка, где для расчёта промежуточного шага используется комплексный коэффициент $\xi = \dfrac{1+i}{2}$. Схема имеет вид

   $$\big(I - \xi\,\Delta t\,A\big)\,\mathbf{z} = A\,\mathbf{u}^n, \qquad \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t\,\Re(\mathbf{z}),$$

   где A — матрица, полученная из дискретизации оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (с учётом граничных условий). Выбор комплексного параметра повышает свойства устойчивости и точности при решении жёстких задач.

Основные шаги решения и сравнительный анализ

- **Дискретизация по пространству.** Отрезок $[0,1]$ разбивается на `num_nodes` узлов, где $\Delta x = \frac{1}{(\texttt{num\_nodes}-1)}$. На границах $x = 0$ и $x = 1$ температура (или функция u) фиксируется равной нулю.

- **Начальное условие.** В коде задаётся "прямоугольный" профиль: единица вблизи $x = 0.5$ (шириной примерно $2\,\times$`region_half_width`) и ноль в остальных точках.

- **Решение по времени.** Программа делает `time_intervals` шагов по времени до конечного момента `final_time`. Для каждой из трёх схем (явная, неявная, CROS) мы получаем массив `solution_history`, который содержит распределение u_i^n на каждом шаге n.

- **Сравнение результатов.** В последней части кода строится график распределения температуры $u(x, t_{\text{final}})$ для трёх методов, а также вычисляется метрика (L2-норма разности) между ними. Поскольку точного аналитического решения у такой задачи нет (задача с кусочно-постоянным начальным условием), сравнительный анализ идёт по сопоставлению численных решений между собой и оценке "расхождения" в конце расчёта.

Таким образом, в программе демонстрируется:

1. Как каждый из методов (явный, неявный, CROS) аппроксимирует теплопроводность;

2. Отличие по качеству решения, стабилизации и диффузии начального импульса;

3. Насколько велика (или мала) разница между решениями при выбранном шаге по времени.

Предложенный эксперимент позволяют оценить, какие методы лучше всего подходят для данной задачи, какой необходим шаг Δt для устойчивого и точного результата, и как жёсткость задачи влияет на выбор численного алгоритма, а также позволяет удостоверится в корректной и довольно неплохой работе метода CROS.

4 Листинги программ

Реализации программ на GitHub

Список литературы

1. Абакумов М.В., Гулин А.В. Лекции по численным методам математической физики — 2013.

2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. — М.: Научный мир, 2020.

3. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. — 1993.

4. Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. "К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры"

5. Lang, J. (2020). Rosenbrock-Wanner Methods: Construction and Mission

6. Hairer, E., Norsett, S. P., Wanner, G. (1993). Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems (2nd ed.).