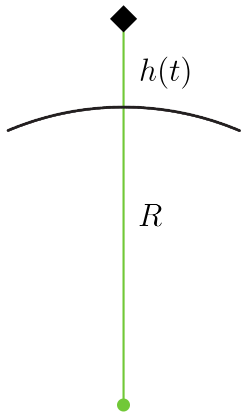
Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 1 – Lista 1 – Solução

1) Nem tudo o que sobe desce. De fato, podemos imaginar que uma pedra seja lançada de um estilingue com uma velocidade tão grande que acabe escapando da atração gravitacional da Terra. Para ver que isso pode ocorrer e para se ter uma idéia dessa velocidade, denote por v_0 a velocidade inicial, por m a massa e por $x(t)$ a distância da pedra até o centro da terra no instante t. Desconsiderando a resistência do ar, o corpo está sujeito apenas à força gravitacional $F = -m\,M\,G/x^2$, em que G é constante, M é a massa da Terra e R seu raio. Pela segunda lei de Newton, temos que

$$(*) \quad mx''(t) = -\frac{mMG}{x(t)^2}.$$

a) Cancelando a massa m e multiplicando a equação $(*)$ por $x'(t)$, obtemos que $x'(t)\,x''(t) = -M\,G\,x'(t)/x(t)^2$. Integre ambos os lados dessa equação e use as condições iniciais $x(0) = R$ e $x'(0) = v_0$ para obter uma equação diferencial de primeira ordem para $x(t)$.



b) Mostre que, se $v_0 \geq v_e = \sqrt{\dfrac{2MG}{R}}$, então a velocidade $x'(t)$ é sempre positiva. A constante v_e é denominada a velocidade de escape da Terra.

c) Quando $v_0 = v_e$, mostre que $x(t)$ satisfaz uma equação diferencial separável. Resolva essa equação e determine $x(t)$ usando que a posição inicial é $x(0) = R$.

Solução

a) Com a substituição $v = x'(t)$ obtemos $dv = x''(t)dt$ e

$$\int x'(t)\,x''(t)\,dt = \int v\,dv = \frac{v^2}{2} + A = \frac{x'(t)^2}{2} + A$$

Com a substituição $x = x(t)$ obtemos $dx = x'(t)dt$ e

$$\int \frac{-M\,G\,x'(t)}{x(t)^2}\,dt = M\,G\int \frac{-1}{x^2}\,dx = \frac{M\,G}{x} + B = \frac{M\,G}{x(t)} + B$$

Assim

$$x'(t)^2 = \frac{2MG}{x(t)} + C$$

onde $C = 2(B-A)$. Usando que $x(0) = R$ e $x'(0) = v_0$, temos que $v_0^2 = 2MG/R + C$, de modo que $C = v_0^2 - 2MG/R$. Segue que $x(t)$ satisfaz a equação diferencial de primeira ordem

$$x'(t)^2 = \frac{2MG}{x(t)} + v_0^2 - \frac{2MG}{R}$$

b) Se $v_0 \geq v_e$, então $v_0^2 - 2MG/R \geq 0$. Usando o item anterior, segue que

$$x'(t)^2 = \frac{2MG}{x(t)} + \left(v_0^2 - \frac{2MG}{R}\right) > 0$$

uma vez que $x(t) > 0$. Como $x'(t)^2$ nunca se anula, segue que $x'(t)$ não se anula e, portanto, não muda de sinal. Uma vez que $x'(0) = v_0 > 0$, segue que $x'(t)$ é sempre positiva.

c) Se $v_0 = v_e$, então $x(t)$ satisfaz a equação

$$x'(t)^2 = \frac{2MG}{x(t)}$$

que é separável, de modo que podemos aplicar os passos:

Equilíbrios: Procurando soluções constantes $x(t) = x_{eq}$, substituindo na EDO obtemos

$$0 = (x_{eq})'^2 = \frac{2MG}{x_{eq}}$$

portanto, não existem soluções de equilíbrio.

Separar: Multiplicando a equação acima por $x(t)$, obtemos que

$$x(t)x'(t)^2 = 2MG$$

Como $x'(t) > 0$ e $x(t) > 0$, podemos extrair a raiz para obter que

$$\sqrt{x(t)}x'(t) = \sqrt{2MG}$$

que é uma equação separada para $x(t)$.

Integrar: Integrando os dois lados da equação separada, fazendo a substituição $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$ no lado esquerdo obtemos

$$\int \sqrt{x(t)}x'(t)\,dt = \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + A = \frac{2}{3}x(t)^{3/2} + A$$

e no lado direito temos

$$\int \sqrt{2MG}\,dt = \sqrt{2MG}\,t + B$$

de modo que

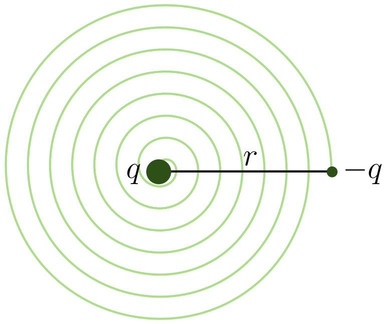
$$x(t)^{3/2} = \frac{3}{2}\sqrt{2MG}\,t + C$$

Fazendo $t = 0$ obtemos que $C = R^{3/2}$.

Isolar: Isolando $x(t)$, obtemos que

$$x(t) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2MG}\,t + R^{3/2}\right)^{2/3}$$

2) Um dos primeiros desafios da física atômica foi explicar a longa vida do átomo mais simples: o átomo de hidrogênio. Segundo experiências iniciais conduzidas por Rutherford entre 1909 e 1911, o átomo de hidrogênio consiste de um életron de carga $-q$ e massa pequena orbitando por atração eletromagnética ao redor de um núcleo de carga q e massa grande. De acordo com o eletromagnetismo clássico, uma carga acelerada irradia energia: esse é o princípio do funcionamento de antenas. Desse modo, se o elétron orbitasse ao redor do núcleo segundo as leis da física clássica, ele perderia energia à cada revolução e, num movimento espiral, eventualmente colidiria com o núcleo.



O átomo de hidrogênio poderia ser compreendido dessa maneira se esse tempo de colisão fosse grande o suficiente para ser compatível com a longa vida do átomo de hidrogênio observada na natureza: a chamada estabilidade do átomo de hidrogênio. O propósito desse exercício é mostrar que esse tempo de colisão seria muito pequeno, mostrando que a física clássica não explica o movimento do elétron ao redor do núcleo do átomo de hidrogênio nem sua estabilidade.

Seja $r(t)$ a distância entre o elétron e o núcleo, onde t é medido em segundos. Em unidades adequadas, a energia mecânica do elétron é

$$E(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{q^2}{r(t)}$$

onde m é a massa do elétron e $-q^2/r(t)$ é o potencial da força de Coulumb entre entre as cargas $-q$ e q. Aproximando cada revolução da órbita espiral do elétron por uma órbita circular de raio $r(t)$, temos que o elétron possui aceleração centrípeta dada por

$$a(t) = \frac{v(t)^2}{r(t)}$$

Igualando a força centrípeta $ma(t)$ com a força de Coulumb entre as cargas $-q$ e q obtemos que

$$(*) \quad ma(t) = m\frac{v(t)^2}{r(t)} = \frac{q^2}{r(t)^2}$$

a) Substitua $(*)$ na energia $E(t)$ e mostre que a energia mecânica do elétron é dada por $E(t) = -\frac{q^2}{2}\frac{1}{r(t)}$. A partir disso, obtenha a taxa $E'(t)$ em que o elétron perde energia.

b) Uma carga q com aceleração $a(t)$ irradia energia à taxa dada pela Lei de Lamour do eletromagnetismo clássico

$$P(t) = -\frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}a(t)^2$$

onde c é a velocidade da luz. Substituindo $(*)$ em $P(t)$ obtenha a taxa com que o elétron perde energia em função do raio $r(t)$ da órbita do elétron. Igualando isso com $E'(t)$ do item anterior obtenha uma EDO para $r(t)$.

c) Mostre que a EDO do item anterior é separável e obtenha a solução $r(t)$ com condição inicial $s(0) = r_0$.

d) Encontre o instante t tal que $r(t) = 0$, que é o tempo de colisão entre o elétron clássico e o núcleo. Usando as ordens de grandeza das constantes nas unidades adotadas

$$m = 10^{-27} \quad c = 10^{10} \quad q = 10^{-10} \quad r_0 = 10^{-9}$$

mostre que a ordem de grandeza de t é de $10^{-11}/4$ segundos.

Solução

a) Multiplicando $(*)$ por $r(t)/2$ obtemos

$$m\frac{v^2(t)}{2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{r(t)}$$

substituindo isso em $E(t)$ obtemos

$$E(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{r(t)} - \frac{q^2}{r(t)} = -\frac{q^2}{2}\frac{1}{r(t)}$$

de modo que

$$E'(t) = -\frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{r(t)}\right)' = -\frac{q^2}{2}\frac{-1}{r(t)^2}r'(t) = \frac{q^2}{2}\frac{r'(t)}{r(t)^2}$$

b) Dividindo (*) por m obtemos

$$(*) \quad a(t) = \frac{1}{m}\frac{q^2}{r(t)^2}$$

substituindo isso em $P(t)$ obtemos

$$P(t) = -\frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\left(\frac{1}{m}\frac{q^2}{r(t)^2}\right)^2 = -\frac{2}{3}\frac{q^6}{c^3m^2}\frac{1}{r(t)^4}$$

Igualando $E'(t)$ do item anterior com isso obtemos

$$\frac{q^2}{2}\frac{r'(t)}{r(t)^2} = -\frac{2}{3}\frac{q^6}{c^3m^2}\frac{1}{r(t)^4}$$

de modo que

$$r'(t) = -\frac{4}{3}\frac{q^4}{c^3m^2}\frac{1}{r(t)^2}$$

que é uma EDO de primeira ordem para $r(t)$.

c) A EDO

$$r'(t) = -\frac{4}{3}\frac{q^4}{c^3m^2}\frac{1}{r(t)^2}$$

é separável, de modo que podemos aplicar os passos:

Equilíbrios: Procurando soluções constantes $r(t) = r_{eq}$, substituindo na EDO obtemos

$$0 = (r_{eq})' = -\frac{4}{3}\frac{q^4}{c^3m^2}\frac{1}{r_{eq}^2}$$

portanto, não existem soluções de equilíbrio.

Separar: Multiplicando a equação acima por $r^2(t)$, obtemos que

$$r^2(t)r'(t) = -\frac{4}{3}\frac{q^4}{c^3m^2}$$

que é uma equação separada para $r(t)$.

Integrar: Integrando os dois lados da equação separada, fazendo a substituição $r = r(t)$, $dr = r'(t)dt$ no lado esquerdo obtemos

$$\int r^2(t)r'(t)\,dt = \int r^2\,dr = \frac{r^3}{3} + A = \frac{r(t)^3}{3} + A$$

e no lado direito temos

$$\int -\frac{4}{3}\frac{q^4}{c^3m^2}\,dt = -\frac{4}{3}\frac{q^4}{c^3m^2}\,t + B$$

de modo que

$$\frac{r^3(t)}{3} = -\frac{4}{3}\frac{q^4}{c^3m^2}t + C$$

Isolar: Isolando $r(t)$, obtemos que

$$r(t) = \sqrt[3]{-4\frac{q^4}{c^3m^2}t + D}$$

é a solução geral. Fazendo $t = 0$ temos que

$$r_0 = \sqrt[3]{D} \quad \Longrightarrow \quad D = r_0^3$$

e então

$$r(t) = \sqrt[3]{r_0^3 - 4\frac{q^4}{c^3m^2}t}$$

é a solução do PVI.

d) Pelo item anterior, temos que $r(t) = 0$ quando

$$r_0^3 - 4\frac{q^4}{c^3m^2}t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{m^2c^3r_0^3}{4q^4}$$

Usando as ordens de grandezas dadas,

$$m = 10^{-27} \quad c = 10^{10} \quad q = 10^{-10} \quad r_0 = 10^{-9}$$

temos que a ordem de grandeza de t é

$$t = \frac{10^{-54} \times 10^{30} \times 10^{-27}}{4 \times 10^{-40}} = \frac{10^{-51}}{4 \times 10^{-40}} = \frac{10^{-11}}{4}$$

segundos.

---

3) Numa reação química do tipo $X + Y \to Z$, a taxa de crescimento da concentração de Z é proporcional ao produto das concentrações de X e Y. Como a massa total do sistema se conserva, essas concentrações são proporcionais às respectivas quantidades, de modo que a taxa de formação de Z é proporcional ao produto das quantidades remanescentes de X e Y. Supondo que 1g de X combina com 3g de Y para formar 4g de Z e denotando por $q(t)$ a quantidade de Z no instante t, temos que $q(t)/4$ corresponde à quantidade consumida de X e $3\,q(t)/4$ corresponde à quantidade consumida de Y. Supondo que existem inicialmente 50 g de X e 33 g de Y, as quantidades remanescentes de X e Y após t segundos são, respectivamente, $50 - q(t)/4$ e $33 - 3\,q(t)/4$. Com essas considerações, temos que a taxa de formação do composto Z é dada por

$$q'(t) = k\left(50 - \frac{q(t)}{4}\right)\left(33 - \frac{3q(t)}{4}\right) = K(200 - q(t))(44 - q(t))$$

onde k e K são constantes positivas.

a) Determine $q(t)$ usando que a quantidade inicial de Z é $q(0) = 0$.

b) Determine o que acontece com a quantidade $q(t)$ após muito tempo decorrido, calculando o limite $\lim_{t\to\infty} q(t)$. Sobrará algum reagente após muito tempo decorrido?

Solução

a) A equação acima é separável, de modo que podemos aplicar os passos:

Equilíbrios: Procurando soluções constantes $q(t) = q_{eq}$, substituindo na EDO obtemos

$$0 = (q_{eq})' = K(200 - q_{eq})(44 - q_{eq})$$

portanto, existem duas soluções de equilíbrio

$$q_1(t) = 200 \qquad q_2(t) = 44$$

Separar: Essa EDO é separável, pois é equivalente à seguinte equação separada

$$\frac{q'(t)}{(200 - q(t))(44 - q(t))} = K$$

Integrar: Integrando os dois lados, obtemos que

$$\left(\int \frac{1}{(200 - q)(44 - q)}\,dq\right)_{q=q(t)} = \int \frac{q'(t)}{(200 - q(t))(44 - q(t))}\,dt = \int K\,dt$$

onde na primeira igualdade usamos a substituição $q = q(t)$, de modo que $dq = q'(t)dt$. Para resolver a integral

$$\int \frac{1}{(200 - q)(44 - q)}\,dq$$

vamos utilizar o método das frações parciais. Para isso, devemos escrever

$$\frac{1}{(200 - q)(44 - q)} = \frac{A}{200 - q} + \frac{B}{44 - q}$$

determinando as constantes A e B. Multiplicando os dois lado por $(200 - q)(44 - q)$, obtemos que

$$1 = A(44 - q) + B(200 - q)$$

que pode ser escrita como uma igualdade dos polinômios

$$0q + 1 = (-A - B)q + 44A + 200B$$

de modo que que $-A - B = 0$ e que $44A + 200B = 1$. Segue então que $A = -1/156$ e $B = 1/156$, de modo que

$$\int \frac{1}{(200-q)(44-q)}\, dq = -\frac{1}{156}\int \frac{1}{200-q}\, dq + \frac{1}{156}\int \frac{1}{44-q}\, dq$$

Integrando cada um dos termos dessa soma e utilizando a propriedades do logaritmo, segue que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(200-q)(44-q)}\, dq &= \frac{1}{156}\log(|200-q|) - \frac{1}{156}\log(|44-q|) + R \\ &= \frac{1}{156}\log\left(\left|\frac{200-q}{44-q}\right|\right) + R\end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na equação

$$\left(\int \frac{1}{(200-q)(44-q)}\, dq\right)_{q=q(t)} = \int K\, dt$$

obtemos que

$$\frac{1}{156}\log\left(\frac{200-q(t)}{44-q(t)}\right) + R = Kt + S.$$

onde usamos que usando que $200 - q(t) > 0$ e $44 - q(t) > 0$.

Isolar: Passando R subtraindo para o lado direito da equação, multiplicando por 156 e aplicando a exponencial, segue que

$$\frac{200-q(t)}{44-q(t)} = e^{156Kt+C} = De^{156Kt}$$

onde $C = 156(S - R)$ e $D = e^C$ são constantes arbitrárias. Calculando a equação acima em $t = 0$ e usando que $q(0) = 0$, obtemos que

$$D = \frac{200}{44},$$

de modo que

$$\frac{200-q(t)}{44-q(t)} = \frac{200}{44}e^{156Kt}$$

Da equação acima, segue que

$$44(200 - q(t)) = 200(44 - q(t))e^{156Kt}$$

de modo que, isolando $q(t)$, obtemos que

$$q(t) = \frac{8800e^{156Kt} - 8800}{200e^{156Kt} - 44}$$

é a solução com quantidade inicial $q(0) = 0$ da substância Z.

b) Como aparece uma indeterminação do tipo ∞/∞, podemos aplicar L'Hospital para calcular o limite

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{8800(156Ke^{156Kt})}{200(156Ke^{156Kt})} = \lim_{t\to\infty} \frac{8800}{200} = 44$$

A quantidade remanescente dos reagentes X e Y após muito tempo decorrido é dada, respectivamente, pelos limites

$$\lim_{t\to\infty} 50 - q(t)/4 = 39, \qquad \lim_{t\to\infty} 33 - 3q(t)/4 = 0$$

mostrando que sobraram 39g de reagente X e 0g de reagente Y.

4) Podemos modelar a produção de iogurte através do modelo logístico, onde uma população $p(t)$ de bactérias cresce transformando uma quantidade $L(t)$ de leite em iogurte. Segundo esse modelo, a taxa de reprodução da população por bactéria $p'(t)/p(t)$ é proporcional à taxa de consumo de leite por bactéria $-L'(t)/p(t)$, que é proporcional à concentração de leite, que por sua vez é proporcional a $L(t)$, uma vez que a massa total do sistema se conserva. Deste modo, existem constantes positivas a e b tais que

$$(*) \qquad \frac{p'(t)}{p(t)} = -a\frac{L'(t)}{p(t)} = bL(t)$$

a) Utilizando a equação $(*)$, verifique que $L'(t) = -\frac{1}{a}p'(t)$. Integrando essa equação e utilizando as condições iniciais $p(0) = p_0$ e $L(0) = L_0$, mostre que $L(t) = \frac{1}{a}(c - p(t))$, onde $c = aL_0 + p_0$.

b) Substituindo a expressão de $L(t)$ obtida no item anterior na equação $(*)$, verifique que $p'(t) = \dfrac{b}{a}p(t)(c - p(t))$, denominada *equação logística*.

c) Determine $p(t)$ usando que a população inicial é $p(0) = p_0$.

d) Determine o que acontece com a população $p(t)$ após muito tempo decorrido, calculando o limite $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$.

Solução

a) Uma vez que, pela equação $(*)$, $\dfrac{p'(t)}{p(t)} = -a\dfrac{L'(t)}{p(t)}$, obtemos a expressão desejada cancelando $p(t)$ e isolando $L'(t)$. Integrando a equação $L'(t) = -\frac{1}{a}p'(t)$, obtemos que

$$L(t) = -\frac{1}{a}p(t) + C$$

Utilizando as condições iniciais $p(0) = p_0$ e $L(0) = L_0$, obtemos que $C = L_0 + p_0/a$, de modo que

$$L(t) = \frac{1}{a}(c - p(t))$$

onde $c = aL_0 + p_0$.

b) Pela equação $(*)$ e pelo item anterior, temos que

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = bL(t) = \frac{b}{a}(c - p(t))$$

de modo que

$$p'(t) = \frac{b}{a}p(t)(c - p(t))$$

c) A equação acima é separável, de modo que podemos aplicar os três passos:

Equilíbrios: Procurando soluções constantes $p(t) = p_{eq}$, substituindo na EDO obtemos

$$0 = (p_{eq})' = \frac{b}{a}p_{eq}(c - p_{eq})$$

portanto, existem duas soluções de equilíbrio

$$p_1(t) = 0 \qquad p_2(t) = c$$

Separar: Essa EDO é equivalente à seguinte equação separada

$$\frac{p'(t)}{p(t)(c - p(t))} = \frac{b}{a}$$

Integrar: Integrando os dois lados, obtemos que

$$\left(\int \frac{1}{p(c-p)}\, dp\right)_{p=p(t)} = \int \frac{p'(t)}{p(t)(c-p(t))}\, dt = \int \frac{b}{a}\, dt$$

onde na primeira igualdade usamos a substituição $p = p(t)$, de modo que $dp = p'(t)dt$. Para resolver a integral

$$\int \frac{1}{p(c-p)}\, dp$$

vamos utilizar o método das frações parciais. Para isso, devemos escrever

$$\frac{1}{p(c-p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{c-p}$$

determinando as constantes A e B. Multiplicando os dois lado por $p(c-p)$, obtemos que

$$1 = A(c-p) + Bp$$

que pode ser escrita como uma igualdade dos polinômios

$$0p + 1 = (B - A)p + Ac$$

de modo que $B - A = 0$ e que $Ac = 1$. Segue então que $A = B = 1/c$, de modo que

$$\int \frac{1}{p(c-p)}\, dp = \frac{1}{c}\int \frac{1}{p}\, dp + \frac{1}{c}\int \frac{1}{c-p}\, dp$$

Integrando cada um dos termos dessa soma e utilizando a propriedades do logaritmo, segue que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{p(c-p)}\, dp &= \frac{1}{c}\log(|p|) - \frac{1}{c}\log(|c-p|) + R \\ &= \frac{1}{c}\log\left(\left|\frac{p}{c-p}\right|\right) + R\end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na equação

$$\left(\int \frac{1}{p(c-p)}\, dp\right)_{p=p(t)} = \int \frac{b}{a}\, dt$$

obtemos que

$$\frac{1}{c}\log\left(\frac{p(t)}{c-p(t)}\right) + R = \frac{b}{a}t + S$$

onde usamos que $p(t) > 0$ e $c - p(t) > 0$.

Isolar: Passando R subtraindo para o lado direito da equação, multiplicando por c e aplicando a exponencial, segue que

$$\frac{p(t)}{c-p(t)} = e^{\frac{cb}{a}t + C} = De^{\frac{cb}{a}t}$$

onde $C = c(S-R)$ e $D = e^C$ são constantes arbitrárias. Calculando a equação acima em $t = 0$ e usando a condição inicial $p(0) = p_0$, obtemos que

$$D = \frac{p_0}{c - p_0}$$

de modo que

$$\frac{p(t)}{c - p(t)} = \frac{p_0}{c - p_0} e^{\frac{cb}{a}t}$$

Da equação acima, segue que

$$p(t)(c - p_0) = (c - p(t)) p_0 e^{\frac{cb}{a}t}$$

de modo que, isolando $p(t)$, obtemos que a solução geral é

$$p(t) = \frac{c p_0 e^{\frac{cb}{a}t}}{c - p_0 + p_0 e^{\frac{cb}{a}t}}$$

Se $p_0 = c$ obtemos a solução de equilíbrio $p(t) = c$ e se $p_0 = 0$ obtemos a solução de equilíbrio $p(t) = 0$.

d) Como aparece uma indeterminação do tipo ∞/∞, podemos aplicar L'Hospital para calcular o limite

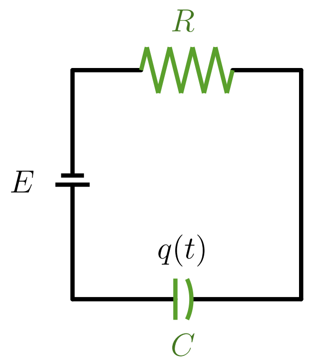
$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{c p_0 \frac{cb}{a} e^{\frac{cb}{a}t}}{p_0 \frac{cb}{a} e^{\frac{cb}{a}t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{c}{1} = c$$

Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 1 – Lista 2 – Solução

1) Considere um circuito RC onde a força eletromotriz é uma constante E, a capacitância é uma constante C e a resistência aumenta linearmente, de modo que $R = R_0 + at$. Temos que as quedas de tensão no capacitor e na resistência são dadas, respectivamente, por $Cq(t)$ e $Rq'(t)$, onde $q(t)$ é a carga no capacitor. A segunda Lei de Kirchoff diz que a soma das quedas de tensão num circuito é igual à força eletromotriz.

a) Mostre que a carga $q(t)$ satisfaz uma equação da forma $q'(t) + p(t)q(t) = g(t)$. Mostre também que a carga constante $q(t) = \frac{E}{C}$ é uma solução, conhecida como *carga estacionária.*



Para os próximos itens considere $E = 12$, $C = 6$, $R_0 = 1$, $a = 2$.

b) Encontre uma primitiva $P(t)$ de $p(t)$ e determine $e^{P(t)}$ e também $e^{-P(t)}$.

c) Obtenha a solução geral $q(t)$ da equação determinada no primeiro item.

d) Determine a solução com carga inicial $q(0) = q_0$. Mostre que, para qualquer carga inicial, após muito tempo decorrido a carga $q(t)$ se aproxima da carga estacionária, isto é, mostre que $\lim_{t\to\infty} q(t) = \frac{E}{C} = 2$.

Solução

a) Pela segunda Lei de Kirchoff temos que

$$(R_0 + at)q'(t) + Cq(t) = E$$

Dividindo essa equação por $R_0 + at$, segue que

$$q'(t) + \frac{C}{R_0 + at} q(t) = \frac{E}{R_0 + at}$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem da forma

$$q'(t) + p(t)q(t) = g(t),$$

onde

$$p(t) = \frac{C}{R_0 + at} \qquad \text{e} \qquad g(t) = \frac{E}{R_0 + at}$$

Se $q(t) = \frac{E}{C}$ então $q'(t) = 0$ e então

$$q'(t) + p(t)q(t) = \frac{C}{R_0 + at}\frac{E}{C} = g(t)$$

mostrando que $q(t) = \frac{E}{C}$ é uma solução.

b) Usando os valores adotados das constantes, temos que

$$p(t) = \frac{6}{1+2t}$$

de modo que

$$\int \frac{6}{1+2t}\,dt = \frac{6}{2}\left(\int \frac{1}{x}\,dx\right)_{x=1+2t} = 3\log(1+2t) + A$$

onde usamos que a resistência $R = 1+2t$ é sempre positiva. Podemos então escolher

$$P(t) = 3\log(1+2t) = \log((1+2t)^3)$$

de modo que

$$e^{P(t)} = e^{\log((1+2t)^3)} = (1+2t)^3$$

e que

$$e^{-P(t)} = (e^{P(t)})^{-1} = (1+2t)^{-3}$$

c) A solução geral é dada por

$$q(t) = c(t)e^{-P(t)}$$

onde

$$c(t) = \int g(t)e^{P(t)}\,dt$$

Temos

$$\begin{aligned}
c(t) &= \int \frac{12}{1+2t}(1+2t)^3\,dt \\
&= 12\int (1+2t)^2\,dt \\
&= \frac{12}{2}\left(\int x^2\,dx\right)_{x=1+2t} \\
&= 6\frac{1}{3}(1+2t)^3 + B \\
&= 2(1+2t)^3 + B
\end{aligned}$$

Segue que a solução geral é dada por

$$q(t) = c(t)(1+2t)^{-3}$$

de modo que

$$q(t) = 2 + B(1+2t)^{-3}$$

d) Em $t = 0$ temos

$$q_0 = q(0) = 2 + B$$

isolando B obtemos que

$$B = q_0 - 2,$$

de modo que

$$q(t) = 2 + (q_0 - 2)(1+2t)^{-3}$$

é a solução com carga inicial $q(0) = q_0$. Uma vez que

$$\lim_{t\to\infty}(1+2t)^{-3} = 0$$

pois é um limite do tipo limitado/infinito, segue que

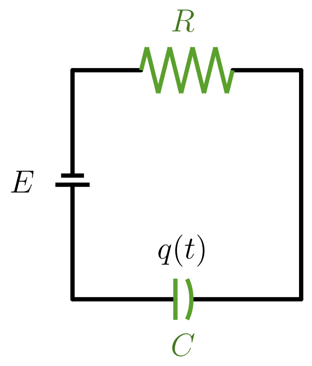
$$\lim_{t\to\infty} q(t) = 2 + (q_0 - 2)\lim_{t\to\infty}(1+2t)^{-3} = 2$$

mostrando que esse limite não depende da carga inicial q_0 e coincide com a carga estacionária 2.

2) Considere um circuito RC onde a força eletromotriz é alternada, de modo que $E = E_0 \cos(t)$, a capacitância é uma constante C e a resistência aumenta linearmente, de modo que $R = R_0 + at$. Temos que as quedas de tensão no capacitor e na resistência são dadas, respectivamente, por $Cq(t)$ e $Rq'(t)$, onde $q(t)$ é a carga no capacitor. A segunda Lei de Kirchoff diz que a soma das quedas de tensão num circuito é igual à força eletromotriz.

a) Mostre que a carga $q(t)$ satisfaz uma equação da forma $q'(t) + p(t)q(t) = g(t)$.

Para os próximos itens considere $E_0 = 220$, $C = 2$, $R_0 = 1$, $a = 2$.



b) Encontre uma primitiva $P(t)$ de $p(t)$ e determine $e^{P(t)}$ e também $e^{-P(t)}$.

c) Obtenha a solução geral $q(t)$ da equação determinada no primeiro item.

d) Determine a solução com carga inicial $q(0) = q_0$. Mostre que $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$, mostrando que esse limite não depende da carga inicial q_0.

Solução

a) Pela segunda Lei de Kirchoff temos que

$$(R_0 + at)q'(t) + Cq(t) = E$$

Dividindo essa equação por $R_0 + at$, segue que

$$q'(t) + \frac{C}{R_0 + at}q(t) = \frac{E_0 \cos(t)}{R_0 + at}$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem da forma

$$q'(t) + p(t)q(t) = g(t)$$

onde

$$p(t) = \frac{C}{R_0 + at} \qquad \text{e} \qquad g(t) = \frac{E_0 \cos(t)}{R_0 + at}$$

b) Usando os valores adotados das constantes, temos que

$$p(t) = \frac{2}{1 + 2t}$$

de modo que

$$\int \frac{2}{1+2t}\,dt = \frac{2}{2}\left(\int \frac{1}{x}\,dx\right)_{x=1+2t} = \log(1+2t) + A,$$

onde usamos que a resistência $R = 1 + 2t$ é sempre positiva. Podemos então escolher

$$P(t) = \log(1 + 2t)$$

de modo que

$$e^{P(t)} = e^{\log(1+2t)} = 1 + 2t$$

e que

$$e^{-P(t)} = \frac{1}{e^{P(t)}} = \frac{1}{1+2t}$$

c) A solução geral é dada por

$$q(t) = c(t)e^{-P(t)},$$

onde

$$c(t) = \int g(t)e^{P(t)}\,dt$$

Temos

$$\begin{aligned} c(t) &= \int \frac{220\cos(t)}{1+2t}(1+2t)\,dt \\ &= 220\int \cos(t)\,dt \\ &= 220\,\mathrm{sen}(t) + B. \end{aligned}$$

Segue que a solução geral é dada por

$$q(t) = c(t)\frac{1}{1+2t}$$

de modo que

$$q(t) = \frac{220\,\mathrm{sen}(t) + B}{1+2t}$$

d) Em $t = 0$ temos

$$q_0 = q(0) = B$$

de modo que

$$q(t) = \frac{220\,\mathrm{sen}(t) + q_0}{1+2t}$$

é a solução com carga inicial $q(0) = q_0$. Segue então que

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{220\,\mathrm{sen}(t) + q_0}{1+2t} = 0$$

pois é um limite do tipo limitado/infinito, mostrando que esse limite não depende da carga inicial q_0.

---

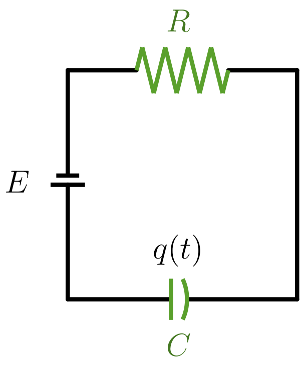
3) Considere um circuito RC onde a força eletromotriz é uma constante $E = 12$, a capacitância é dada por $C = \cos(t) + 2$ e a resistência é dada por $R = \operatorname{sen}(t) + 2t + 1$. Temos que as quedas de tensão no capacitor e na resistência são dadas, respectivamente, por $Cq(t)$ e $Rq'(t)$, onde $q(t)$ é a carga no capacitor. A segunda Lei de Kirchoff diz que a soma das quedas de tensão num circuito é igual à força eletromotriz.

a) Mostre que a carga $q(t)$ satisfaz uma equação da forma $q'(t) + p(t)q(t) = g(t)$.

b) Encontre uma primitiva $P(t)$ de $p(t)$ e determine $e^{P(t)}$ e também $e^{-P(t)}$.

c) Obtenha a solução geral $q(t)$ da equação determinada no primeiro item.

d) Determine a solução com carga inicial $q(0) = q_0$. Mostre que $\lim_{t\to\infty} q(t) = 6$, mostrando que esse limite não depende da carga inicial q_0.



Solução

a) Pela segunda Lei de Kirchoff temos que

$$(\operatorname{sen}(t) + 2t + 1)q'(t) + (\cos(t) + 2)q(t) = 12$$

Dividindo essa equação por $R_0 + at$, segue que

$$q'(t) + \frac{\cos(t) + 2}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}q(t) = \frac{12}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem da forma

$$q'(t) + p(t)q(t) = g(t),$$

onde

$$p(t) = \frac{\cos(t) + 2}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1} \qquad \text{e} \qquad g(t) = \frac{12}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$$

b) Usando os valores adotados das constantes, temos que

$$p(t) = \frac{\cos(t) + 2}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1},$$

de modo que

$$\int \frac{\cos(t) + 2}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}\, dt = \left(\int \frac{1}{x}\, dx\right)_{x = \operatorname{sen}(t)+2t+1} = \log(\operatorname{sen}(t) + 2t + 1) + A$$

onde usamos que a resistência $R = \operatorname{sen}(t) + 2t + 1$ é sempre positiva. Podemos então escolher

$$P(t) = \log(\operatorname{sen}(t) + 2t + 1)$$

de modo que

$$e^{P(t)} = e^{\log(\operatorname{sen}(t)+2t+1)} = \operatorname{sen}(t) + 2t + 1$$

e que

$$e^{-P(t)} = \frac{1}{e^{P(t)}} = \frac{1}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$$

c) A solução geral é dada por

$$q(t) = c(t)e^{-P(t)}$$

onde

$$c(t) = \int g(t)e^{P(t)}\,dt$$

Temos

$$\begin{aligned} c(t) &= \int \frac{12}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}(\operatorname{sen}(t) + 2t + 1)\,dt \\ &= \int 12\,dt \\ &= 12t + B \end{aligned}$$

Segue que a solução geral é dada por

$$q(t) = c(t)\frac{1}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$$

de modo que

$$q(t) = \frac{12t + B}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$$

d) Em $t = 0$ temos

$$q_0 = q(0) = B$$

de modo que

$$q(t) = \frac{12t + q_0}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1}$$

é a solução com carga inicial $q(0) = q_0$. Segue então que

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{12t + q_0}{\operatorname{sen}(t) + 2t + 1} = \lim_{t\to\infty} \frac{12 + q_0/t}{\operatorname{sen}(t)/t + 2 + 1/t} = \frac{12}{2} = 6$$

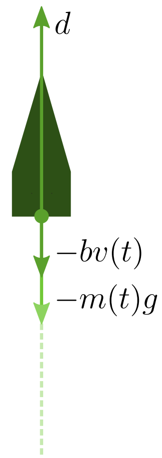
mostrando que esse limite não depende da carga inicial q_0.

---

4) Num foguete, se o empuxo é uma constante d, a taxa de variação de sua massa é constante, de modo que $m(t) = m_0 - at$. Se o foguete não atinge uma altura muito elevada, podemos supor que gravidade é uma constante g e que a força de arraste do ar é dada por $-bv(t)$, proporcional à velocidade $v(t)$ do foguete. Segue que a força que atua no foguete é dada por

$$F = -m(t)g - bv(t) + d.$$

Neste caso, a segunda Lei de Newton é dada por $(m(t)v(t))' = F$.



a) Mostre que $v(t)$ satisfaz uma equação da forma $v'(t)+p(t)v(t) = g(t)$.

Para os próximos itens considere $g = 10$, $b = 1$, $d = 100$, $m_0 = 1$, $a = 2$.

b) Encontre uma primitiva $P(t)$ de $p(t)$ e determine $e^{P(t)}$ e também $e^{-P(t)}$.

c) Obtenha a solução geral $v(t)$ da equação determinada no primeiro item.

d) Determine a solução $v(t)$ com velocidade inicial $v(0) = 0$. Para que valores de $t \geq 0$ a velocidade $v(t)$ está definida?

Solução

a) Temos que

$$(m(t)v(t))' = m'(t)v(t) + m(t)v'(t) = -av(t) + (m_0 - at)v'(t)$$

e que a força resultante é dada por

$$F = -m(t)g - bv(t) + d = -(m_0 - at)g - bv(t) + d.$$

Pela segunda Lei de Newton segue que $v(t)$ satisfaz

$$-av(t) + (m_0 - at)v'(t) = -(m_0 - at)g - bv(t) + d$$

de modo que

$$(m_0 - at)v'(t) + (b - a)v(t) = -(m_0 - at)g + d.$$

Dividindo essa equação por $m_0 - at$, segue que

$$v'(t) + \frac{b-a}{m_0 - at}v(t) = -g + \frac{d}{m_0 - at},$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem da forma

$$v'(t) + p(t)v(t) = g(t),$$

onde

$$p(t) = \frac{b-a}{m_0 - at} \qquad \text{e} \qquad g(t) = -g + \frac{d}{m_0 - at}.$$

b) Usando os valores adotados das constantes, temos que

$$p(t) = -\frac{1}{1-2t},$$

de modo que

$$\int -\frac{1}{1-2t}\,dt = \frac{-1}{-2}\left(\int \frac{1}{x}\,dx\right)_{x=1-2t} = \frac{1}{2}\log(1-2t) + A,$$

onde estamos usando que a massa $1-2t$ é sempre positiva. Podemos então escolher

$$P(t) = \frac{1}{2}\log(1-2t) = \log((1-2t)^{1/2}),$$

de modo que

$$e^{P(t)} = e^{\log((1-2t)^{1/2})} = (1-2t)^{1/2}.$$

e que

$$e^{-P(t)} = (e^{P(t)})^{-1} = (1-2t)^{-1/2}.$$

c) A solução geral é dada por

$$v(t) = c(t)e^{-P(t)},$$

onde

$$c(t) = \int g(t)e^{P(t)}\,dt.$$

Temos

$$\begin{aligned}
c(t) &= \int \left(-10 + \frac{100}{1-2t}\right)(1-2t)^{1/2}\,dt \\
&= -10\int (1-2t)^{1/2}\,dt + 100\int \frac{1}{(1-2t)^{1/2}}\,dt \\
&= \frac{-10}{-2}\left(\int x^{1/2}\,dx\right)_{x=1-2t} + \frac{100}{-2}\left(\int x^{-1/2}\,dx\right)_{x=1-2t} \\
&= \frac{10}{2}\frac{2}{3}(1-2t)^{3/2} - \frac{100}{2}2(1-2t)^{1/2} + B \\
&= \frac{10}{3}(1-2t)^{3/2} - 100(1-2t)^{1/2} + B.
\end{aligned}$$

Segue que a solução geral é dada por

$$v(t) = c(t)(1-2t)^{-1/2},$$

de modo que

$$v(t) = -100 + \frac{10}{3}(1-2t) + B(1-2t)^{-1/2}.$$

d) Em $t = 0$ temos

$$0 = v(0) = -100 + \frac{10}{3} + B,$$

isolando B obtemos que

$$B = 100 - \frac{10}{3} = \frac{290}{3}.$$

Segue que

$$v(t) = -100 + \frac{10}{3}(1-2t) + \frac{290}{3}(1-2t)^{-1/2},$$

é a solução que satisfaz $v(0) = 0$. Pela forma de $v(t)$, para que ela esteja definida, devemos ter $1-2t > 0$. Assim $v(t)$ está definida para t em $[0, 1/2)$, que é precisamente o intervalo onde a massa do foguete é positiva.

5) Vamos investigar a dinâmica, num dado país, da relação entre a renda $Y(t)$ produzida no tempo t e o capital $K(t)$ acumulado até o tempo t através do famoso modelo de Solow-Swan. Temos que a renda é dada por uma função Cobb-Douglas do capital e do trabalho, de modo que

$$Y(t) = AK(t)^a L(t)^{1-a}$$

e que o capital se acumula por uma taxa de poupança contante positiva s e se deprecia a uma taxa constante positiva d, de modo que

$$K'(t) = sY(t) - dK(t)$$

Denotando a renda e o capital per capita, respectivamente, por $y(t) = Y(t)/L(t)$ e por $k(t) = K(t)/L(t)$, a taxa de crescimento do trabalho por $l(t) = L'(t)/L(t)$, a razão riqueza pela renda no tempo t por $\beta(t) = K(t)/Y(t) = k(t)/y(t)$ e o seu limite quando t tende por infinito por β, responda os seguintes itens.

a) Mostre que $k'(t) = K'(t)/L(t) - l(t)k(t)$.

b) Use o item anterior para mostrar que $k'(t) = sy(t) - (l(t) + d)k(t)$.

c) Mostre que $\beta(t) = k(t)^{1-a}/A$ e conclua que $\beta'(t) = (1-a)k'(t)/y(t)$.

d) Use os itens anteriores para mostrar que $\beta'(t)/(1-a) = s - (l(t) + d)\beta(t)$.

e) Supondo que $l(t) = g$ constante e que $\beta(0) = \beta_0$, mostre que

$$\beta(t) = \frac{s}{g+d} + \left(\beta_0 - \frac{s}{g+d}\right) e^{-(1-a)(g+d)t}$$

f) Conclua que $\beta = \dfrac{s}{g+d}$.

Solução

a) Pelas regras da derivada do produto e da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} k'(t) &= \left(K(t)L(t)^{-1}\right)' \\ &= K'(t)L(t)^{-1} - L(t)^{-2}L'(t)K(t) \\ &= \frac{K'(t)}{L(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)}\frac{K(t)}{L(t)} \\ &= \frac{K'(t)}{L(t)} - l(t)k(t) \end{aligned}$$

b) Dividindo a segunda equação do enunciado por $L(t)$, temos que

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = sy(t) - dk(t)$$

Usando o item anterior, segue que

$$k'(t) + l(t)k(t) = sy(t) - dk(t)$$

que é equivalente a

$$k'(t) = sy(t) - (l(t) + d)k(t)$$

c) Temos que

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{AK(t)^a L(t)^{1-a}}{L(t)} = AK(t)^a L(t)^{-a} = Ak(t)^a$$

de modo que

$$\beta(t) = \frac{k(t)}{y(t)} = \frac{k(t)}{Ak(t)^a} = \frac{k(t)^{1-a}}{A}$$

Derivando essa expressão, segue que

$$\beta'(t) = \frac{(1-a)k(t)^{-a}k'(t)}{A} = (1-a)\frac{k'(t)}{Ak(t)^a} = (1-a)\frac{k'(t)}{y(t)}$$

d) Dividindo a equção obtida no segundo item por $y(t)$, obtemos que

$$\frac{k'(t)}{y(t)} = s - (l(t)+d)\beta(t)$$

Usanso o item anterior, segue que

$$\frac{\beta'(t)}{1-a} = s - (l(t)+d)\beta(t)$$

e) A equação do item anterior é equivalente à EDO linear

$$\beta'(t) + (1-a)(l(t)+d)\beta(t) = (1-a)s$$

onde

$$p(t) = (1-a)(l(t)+d) \qquad \text{e} \qquad g(t) = (1-a)s$$

Supondo que $l(t) = g$ constante, temos que

$$P(t) = (1-a)(g+d)t$$

e que

$$c(t) = \int g(t)e^{P(t)}\,dt = \int (1-a)se^{(1-a)(g+d)t}\,dt = \frac{s}{g+d}e^{(1-a)(g+d)t} + c$$

de modo que a solução geral é dada por

$$\beta(t) = c(t)e^{-P(t)} = \frac{s}{g+d} + ce^{-(1-a)(g+d)t}$$

Supondo que $\beta(0) = 0$, obtemos que

$$\beta_0 = \frac{s}{g+d} + c$$

mostrando que

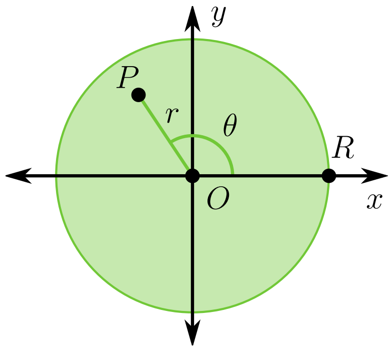
$$\beta(t) = \frac{s}{g+d} + \left(\beta_0 - \frac{s}{g+d}\right)e^{-(1-a)(g+d)t}$$

f) Evidentemente $\beta = \lim_{t\to\infty}\beta(t) = \dfrac{s}{g+d}$.

Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 1 – Lista 3 – Solução

1) A temperatura de equilíbrio $T(P)$ em um ponto P de uma chapa circular feita com um material uniforme pode ser escrita em função das coordenadas polares (r,θ) de P, onde r é a distância entre o ponto P e a origem O e θ é o ângulo formado entre o eixo x e o segmento OP. Temos que θ varia em $[0, 2\pi]$ e que r varia em $[0, R]$, onde R é o raio da chapa. Note que o conjunto dos pontos tais que r é constante formam uma circunferência.



Escrevendo a temperatura em P como produto de duas funções $T(P) = y(\theta)z(r)$, é possível mostrar que as funções $y(\theta)$ e $z(r)$ satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\frac{y''(\theta)}{-y(\theta)} = \nu = \frac{r^2z''(r) + rz'(r)}{z(r)},$$

onde ν é uma constante positiva. O objetivo dessa questão é resolver essas duas equações diferenciais e estudar suas soluções.

a) Mostre que $y(\theta)$ satisfaz a equação $y''(\theta) + \nu y(\theta) = 0$. Determine os valores de $a > 0$ tais que $y_1(\theta) = \cos(a\theta)$ e $y_2(\theta) = \operatorname{sen}(a\theta)$ são soluções fundamentais dessa equação.

b) Use o fato de que $(r, 0)$ e $(r, 2\pi)$ representam o mesmo ponto P na chapa, para concluir que $y(0) = y(2\pi)$. Use esse fato para concluir que $\nu = \lambda^2$, para algum inteiro $\lambda \geq 0$.

c) Mostre que $z(r)$ satisfaz a equação $r^2z''(r) + rz'(r) - \lambda^2z(r) = 0$, $r > 0$, conhecida como equação de Euler. Determine os valores de b tais que $z(r) = r^b$ é solução da equação de Euler.

d) Use o item anterior para obter a solução geral da equação de Euler. Verifique que qualquer solução que não é proporcional à solução r^λ possui assíntota vertical em $r = 0$.

Solução

a) Temos que $y(\theta)$ satisfaz

$$\frac{y''(\theta)}{-y(\theta)} = \nu$$

logo $y''(\theta) = -\nu y(\theta)$ e, portanto,

$$y''(\theta) + \nu y(\theta) = 0 \tag{1}$$

onde $\nu > 0$.

Considerando primeiro $y_1(\theta) = \cos(a\theta)$, temos

$$\begin{aligned} y_1(\theta) &= \cos(a\theta) \\ y_1'(\theta) &= -a\operatorname{sen}(a\theta) \\ y_1''(\theta) &= -a^2\cos(a\theta) \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} y_1''(\theta) + \nu y_1(\theta) &= -a^2\cos(a\theta) + \nu\cos(a\theta) \\ &= (\nu - a^2)\cos(a\theta) \\ &= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = \nu \end{aligned}$$

logo se e só se $a = \sqrt{\nu}$, uma vez que $a > 0$. Isso mostra que

$$y_1(\theta) = \cos(\sqrt{\nu}\theta)$$

é solução da equação (1).
Considerando agora $y_2(\theta) = \operatorname{sen}(a\theta)$, temos

$$\begin{aligned} y_2(\theta) &= \operatorname{sen}(a\theta) \\ y_2'(\theta) &= a\cos(a\theta) \\ y_2''(\theta) &= -a^2\operatorname{sen}(a\theta) \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} y_2''(\theta) + \nu y_2(\theta) &= -a^2\operatorname{sen}(a\theta) + \nu\operatorname{sen}(a\theta) \\ &= (\nu - a^2)\operatorname{sen}(a\theta) \\ &= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = \nu \end{aligned}$$

logo se e só se $a = \sqrt{\nu}$, uma vez que $a > 0$. Isso mostra que

$$y_2(\theta) = \operatorname{sen}(\sqrt{\nu}\theta)$$

é solução da equação (1).
Elas são soluções fundamentais pois seu Wronskiano é dado por

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \det\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\nu}\theta) & \operatorname{sen}(\sqrt{\nu}\theta) \\ -\sqrt{\nu}\operatorname{sen}(\sqrt{\nu}\theta) & \sqrt{\nu}\cos(\sqrt{\nu}\theta) \end{pmatrix} = \sqrt{\nu} > 0$$

b) Como $(r, 0)$ e $(r, 2\pi)$ representam o mesmo ponto P na chapa, segue que

$$y(0)z(r) = T(P) = y(2\pi)z(r)$$

para todo $r \in [0, R]$, de modo que

$$y(0) = y(2\pi)$$

Usando a solução geral temos que

$$y(0) = c_1\cos(0) + c_2\operatorname{sen}(0) = c_1$$

e que

$$y(2\pi) = c_1\cos(\sqrt{\nu}2\pi) + c_2\operatorname{sen}(\sqrt{\nu}2\pi),$$

de modo que

$$c_1\cos(\sqrt{\nu}2\pi) + c_2\operatorname{sen}(\sqrt{\nu}2\pi) = c_1$$

para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, obtemos que

$$\cos(\sqrt{\nu}2\pi) = 1$$

de modo que $\sqrt{\nu}2\pi$ é um múltiplo inteiro de de 2π, isto é,

$$\sqrt{\nu}2\pi = 2\pi\lambda,$$

onde $\lambda \geq 0$ é um inteiro. Segue que $\sqrt{\nu} = \lambda$ e então que $\nu = \lambda^2$, onde $\lambda \geq 0$ é um inteiro, como queríamos.

c) Temos que $\nu = \lambda^2$ de modo que $z(r)$ satisfaz

$$\frac{r^2 z''(r) + r z'(r)}{z(r)} = \lambda^2$$

logo $r^2 z''(r) + r z'(r) = \lambda^2 z(r)$ e, portanto,

$$r^2 z''(r) + r z'(r) - \lambda^2 z(r) = 0,$$

onde $r > 0$ pois é o raio.
Seja $z(r) = r^b$, então

$$\begin{aligned} z(r) &= r^b \\ z'(r) &= b r^{b-1} \\ z''(r) &= b(b-1) r^{b-2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} r^2 z''(r) + r z'(r) - \lambda^2 z(r) &= r^2(b(b-1)r^{b-2}) + r(br^{b-1}) - \lambda^2(r^b) \\ &= (b(b-1) + b - \lambda^2) r^b = 0 \end{aligned}$$

e portanto $z(r) = r^b$ é solução se e somente se

$$b(b-1) + b - \lambda^2 = b^2 - \lambda^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = \pm\lambda,$$

Isso fornece soluções

$$z_1(r) = r^{\lambda} \quad \text{e} \quad z_2(r) = r^{-\lambda}$$

d) Elas são soluções fundamentais pois seu Wronskiano é dado por

$$W(z_1(r), z_2(r)) = \det \begin{pmatrix} r^{\lambda} & r^{-\lambda} \\ \lambda r^{\lambda-1} & -\lambda r^{-\lambda-1} \end{pmatrix} = -2\lambda r^{-1} \neq 0$$

Portanto a solução geral da equação de Euler é

$$z(r) = c_1 r^{\lambda} + c_2 r^{-\lambda}$$

Se $z(r)$ não é proporcional à r^{λ} então o coeficiente c_2 não-se anula e

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} z(r) &= c_1 \lim_{r\to 0} r^{\lambda} + c_2 \lim_{r\to 0} r^{-\lambda} \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot +\infty \\ &= \pm\infty \end{aligned}$$

que é $\pm\infty$ dependendo do sinal do coeficiente c_2. Isso mostra que qualquer solução não-proporcional a r^{λ} possui assíntota vertical em $r = 0$.

---

2) Considere um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogêneo, ou seja, no orbital s do primeiro nível de energia, onde $\lambda = 0$ e $\nu = 1$. A probabilidade do elétron estar na região de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) com $r \in (r_1, r_2)$, com $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ e com $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$ é proporcional a

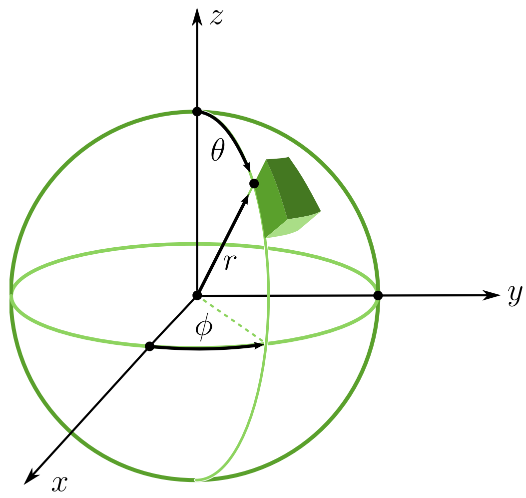
$$\int_{r_1}^{r_2} R(r)^2 \, dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Theta(\theta)^2 \, d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} \Phi(\phi)^2 \, d\phi$$

onde $\Theta(\theta)$ está relacionada com a equação de Legendre

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) = 0$$

e $R(r)$ está relacionada com a equação de Laguerre

$$xy''(x) + (1 - x)y'(x) + y(x) = 0$$



O objetivo desse exercício é mostrar que as equações acima sempre possuem uma solução polinomial e qualquer outra solução não proporcional a ela possui assíntota vertical, de modo que, nesse problema, a única solução que possui significado físico é a solução polinomial.

a) Verifique que, substituindo $z(x) = y'(x)$ na equação de Legendre, obtemos uma equação linear homogênea de primeira ordem. Determine a solução geral dessa equação.

b) Integrando por frações parciais a solução geral obtida no item anterior, determine a solução geral da equação de Legendre. Verifique que qualquer solução não constante possui assíntotas verticais em $x = 1$ e também em $x = -1$.

c) Obtenha o Wronskiano da equação de Laguerre, utilizando a fórmula de Abel e verifique que $y_2(x) = 1 - x$ é solução da equação de Laguerre.

Solução

a) Substituindo $z(x) = y'(x)$ na equação de Legendre, obtemos

$$(1 - x^2)z'(x) - 2xz(x) = 0$$

que é uma equação linear homogênea de primeira ordem. Dividindo por $1 - x^2$, obtemos que

$$z'(x) - \frac{2x}{1 - x^2} z(x) = 0$$

de modo que

$$p(x) = -\frac{2x}{1 - x^2}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\int p(x)dx &= \int -\frac{2x}{1-x^2}dx \\
&= \int \frac{2x}{1-x^2}dx \qquad \text{substituição } y = 1-x^2 \Rightarrow dy = -2xdx \\
&= \int \frac{1}{y}dy \\
&= \log(y) + C \\
&= \log(1-x^2) + C
\end{aligned}
$$

de modo que

$$P(x) = \log(1-x^2)$$

Como a equação é homogênea, sua solução geral é dada

$$
\begin{aligned}
z(x) &= Ae^{-P(x)} \\
&= Ae^{-\log(1-x^2)} \\
&= Ae^{\log(1-x^2)^{-1}} \\
&= A\frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

b) Integrando a solução geral obtida no item anterior, temos que

$$y(x) = A\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

Por frações parciais, temos que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x}$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \int \frac{1/2}{1+x}\,dx + \int \frac{1/2}{1-x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\log|1+x| - \frac{1}{2}\log|1-x| + B \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + B
\end{aligned}
$$

Logo, a solução geral da equação de Legendre é dada por

$$y(x) = c_1 + c_2\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

onde $c_1 = AB$ e $c_2 = A/2$. Segue que qualquer solução não constante é tal que $c_2 \neq 0$ e portanto possui assíntotas verticais em $x = 1$ e também em $x = -1$, pois

$$\lim_{x\to 1}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -1}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = -\infty$$

c) Colocando a equação de Laguerre na forma

$$y''(x) + \frac{1-x}{x}y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$$

temos que

$$q(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

logo

$$\begin{aligned} \int q(x)dx &= \int \frac{1}{x} - 1\, dx \\ &= \log(x) - x + C \end{aligned}$$

e podemos tomar

$$Q(x) = \log(x) - x$$

Pela fórmula de Abel temos que

$$\begin{aligned} W(y_1(x), y_2(x)) &= c_1 e^{-Q(x)} \\ &= c_1 e^{-\log(x)+x} \\ &= c_1 e^{-\log(x)} e^{x} \\ &= c_1 e^{\log(x^{-1})} e^{x} \\ &= c_1 x^{-1} e^{x} \\ &= c_1 \frac{e^{x}}{x} \end{aligned}$$

para quaisquer duas soluções $y_1(x)$, $y_2(x)$ da equação de Laguerre.
Para $y(x) = 1 - x$ temos que

$$y'(x) = -1 \qquad y''(x) = 0$$

de modo que

$$\begin{aligned} xy''(x) + (1-x)y'(x) + y(x) &= x \cdot 0 - (1-x) + (1-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que mostra que $y(x) = 1 - x$ é solução.

---

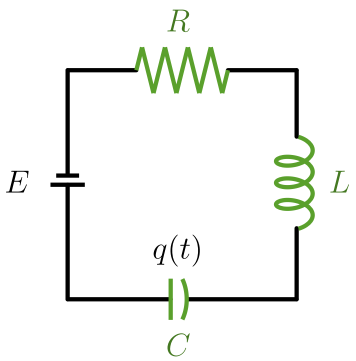
3) Considere um circuito RLC onde a força eletromotriz é $E = 12e^{-2t}$, a resistência é $R = 5$, a indutância é $L = 1$ e a capacitância é $C = 4$. Temos que a queda de tensão no indutor, no capacitor e na resistência é dada, respectivamente, por $Lq''(t)$, $Rq'(t)$ e $Cq(t)$, onde $q(t)$ é a carga no capacitor. A segunda Lei de Kirchoff afirma que a soma das quedas de tensão num circuito é igual à força eletromotriz.

a) Mostre que a carga na capacitor satisfaz uma EDO linear de segunda ordem.

b) Verifique que $q_1(t) = e^{-t}$ e $q_2(t) = e^{-4t}$ são soluções fundamentais da equação homogênea.

c) Obtenha a solução geral da equação não-homogênea. A carga no capacitor tende a zero quando t cresce?

d) Determine a carga $q(t)$ do capacitor se a carga inicial é $q(0) = 0$ e a corrente inicial é $q'(0) = 1$.



Solução

a) Pela segunda Lei de Kirchoff temos que $q(t)$ satisfaz a seguinte equação

$$Lq'' + Rq' + Cq = E$$

Usando que $E = 12e^{-2t}$, $L = 1$, $R = 5$ e $C = 4$, equação acima fica

$$q'' + 5q' + 4q = 12e^{-2t}$$

b) Consideramos primeiro $q_1(t) = e^{-t}$, temos

$$\begin{aligned} q_1(t) &= e^{-t} \\ q_1'(t) &= -e^{-t} \\ q_1''(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} q_1'' + 5q_1' + 4q_1 &= (e^{-t}) + 5(-e^{-t}) + 4(e^{-t}) \\ &= (1 - 5 + 4)e^{-t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Isso mostra que $q_1(t)$ é solução da equação homogênea.
Consideramos agora $q_2(t) = e^{-4t}$, temos

$$\begin{aligned} q_2(t) &= e^{-4t} \\ q_2'(t) &= -4e^{-4t} \\ q_2''(t) &= 16e^{-4t} \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} q_2'' + 5q_2' + 4q_2 &= (16e^{-4t}) + 5(-4e^{-4t}) + 4(e^{-4t}) && (2) \\ &= (16 - 20 + 4)e^{-4t} && (3) \\ &= 0 && (4) \end{aligned}$$

Isso mostra que $q_2(t)$ também é solução da equação homogênea.
Elas são soluções fundamentais pois seu Wronskiano é dado por

$$W(q_1(t), q_2(t)) = \det \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-4t} \\ -e^{-t} & -4e^{-4t} \end{pmatrix} = -3e^{-5t}$$

c) Pelo método da variação dos parâmetros, a solução geral é

$$q(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)e^{-4t},$$

onde

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int -\frac{12e^{-2t}e^{-4t}}{-3e^{-5t}}\,dt \\ &= \int 4e^{-t}\,dt \\ &= -4e^{-t} + c_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \int \frac{12e^{-2t}e^{-t}}{-3e^{-5t}}\,dt \\ &= \int -4e^{2t}\,dt \\ &= -2e^{2t} + c_2 \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} q(t) &= (-4e^{-t} + c_1)e^{-t} + (-2e^{2t} + c_2)e^{-4t} \\ &= (-4e^{-t})e^{-t} + (-2e^{2t})e^{-4t} + c_1e^{-t} + c_2e^{-4t} \\ &= -6e^{-2t} + c_1e^{-t} + c_2e^{-4t} \end{aligned}$$

de modo que a carga no capacitor tende a zero quando t cresce, uma vez que

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty} -6e^{-2t} + c_1 \lim_{t\to\infty} e^{-t} + c_2 \lim_{t\to\infty} e^{-4t} = 0$$

d) Derivando

$$q(t) = -6e^{-2t} + c_1e^{-t} + c_2e^{-4t}$$

temos

$$q'(t) = 12e^{-2t} - c_1e^{-t} - 4c_2e^{-4t}$$

Usando as condições iniciais dadas

$$\begin{aligned} 0 = q(0) &= -6 + c_1 + c_2 \\ 1 = q'(0) &= 12 - c_1 - 4c_2 \end{aligned}$$

concluímos que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 6 \\ -c_1 - 4c_2 &= -11 \end{aligned}$$

cuja única solução é $c_1 = 13/3$ e $c_2 = 5/3$.
Segue que a solução do PVI é

$$q(t) = -6e^{-2t} + \frac{13}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-4t}$$

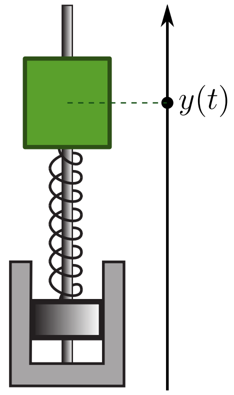
4) Considere um sistema MMA onde a força externa é $F = 5e^{-t}$, a massa é $m = 1$, a constante da mola é $k = 2$ e constante de amortecimento é $b = 2$. Temos que a força da mola e do amortecedor é dada, respectivamente, por $ky(t)$ e $by'(t)$, onde $y(t)$ é a posição da massa em relação ao equilíbrio. A segunda Lei de Newton afirma que o produto da massa pela aceleração é igual ao somatório das forças.

a) Mostre que a posição da massa satisfaz uma EDO linear de segunda ordem.

b) Verifique que $y_1(t) = e^{-t}\cos(t)$ e $y_2(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(t)$ são soluções fundamentais da equação homogênea.

c) Obtenha a solução geral da equação não-homogênea. A posição da massa tende a zero quando t cresce?

d) Determine uma solução que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.



Solução

a) Pela segunda Lei de Newton, temos que $y(t)$ satisfaz a seguinte equação

$$my''(t) = -by'(t) - ky(t) + F,$$

Usando que $F = 5e^{-t}$, $m = 1$, $k = 2$ e $b = 2$, a equação acima é equivalente a

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 5e^{-t}$$

b) Consideramos primeiro $y_1(t) = e^{-t}\cos(t)$. Usando as regras de derivação, obtemos que

$$y_1'(t) = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t) \qquad \text{e} \qquad y_1''(t) = 2e^{-t}\operatorname{sen}(t)$$

Segue então que

$$y_1''(t) + 2y_1'(t) + 2y_1(t) = 0$$

uma vez que

$$(2e^{-t}\operatorname{sen}(t)) + 2(-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t)) + 2(e^{-t}\cos(t)) = 0$$

Consideramos agora $y_2(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(t)$. Usando as regras de derivação, obtemos que

$$y_2'(t) = -e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cos(t) \qquad \text{e} \qquad y_2''(t) = -2e^{-t}\cos(t)$$

Segue então que

$$y_2''(t) + 2y_2'(t) + 2y_2(t) = 0$$

uma vez que

$$(-2e^{-t}\cos(t)) + 2(-e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)) + 2(e^{-t}\operatorname{sen}(t)) = 0$$

Essas duas soluções são fundamentais, pois seu Wronskiano é dado por

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \det\begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) & e^{-t}\operatorname{sen}(t) \\ -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t) & -e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix} = e^{-2t}$$

c) Pelo método da variação dos parâmetros, a solução geral é dada por

$$y(t) = c_1(t)e^{-t}\cos(t) + c_2(t)e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)$$

onde

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int -\frac{5e^{-t}e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)}{e^{-2t}}\,dt \\ &= \int -5\,\mathrm{sen}(t)\,dt \\ &= 5\cos(t) + c_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \int \frac{5e^{-t}e^{-t}\cos(t)}{e^{-2t}}\,dt \\ &= \int 5\cos(t)\,dt \\ &= 5\,\mathrm{sen}(t) + c_2 \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} y(t) &= (5\cos(t) + c_1)e^{-t}\cos(t) + (5\,\mathrm{sen}(t) + c_2)e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) \\ &= 5(\cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t))e^{-t} + c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) \\ &= 5e^{-t} + c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) \end{aligned}$$

de modo que a posição da massa tende a zero quando t cresce, uma vez que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} 5e^{-t} + c_1\lim_{t\to\infty} e^{-t}\cos(t) + c_2\lim_{t\to\infty} e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) = 0$$

d) Uma vez que

$$y(t) = 5e^{-t} + c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)$$

segue que

$$y'(t) = -5e^{-t} + c_1(-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)) + c_2(-e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) + e^{-t}\cos(t))$$

Calculado em $t = 0$ e usando as condições iniciais, obtemos que

$$0 = y(0) = 5 + c_1$$

e que

$$1 = y'(0) = -5 - c_1 + c_2$$

de modo que $c_1 = -5$, $c_2 = 1$ e a solução do PVI é dada por

$$y(t) = 5e^{-t} - 5e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)$$

Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 1 – Lista 4 – Solução

1) Considere um circuito RLC onde a força eletromotriz é $E(t) = \cos(2t)$, a resistência é $R = 5$, a indutância é $L = 1$ e a capacitância é $C = 4$. Pela segunda Lei de Kirchoff, a carga $q(t)$ no capacitor satisfaz

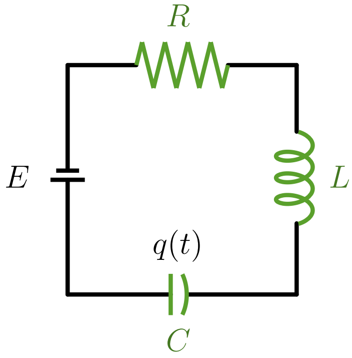
$$q''(t) + 5q'(t) + 4q(t) = \cos(2t)$$

a) Determine a solução geral da homogênea.

b) Determine a solução geral da não-homogênea.

c) A carga no circuito tende a zero quando t cresce?

d) Determine a carga $q(t)$ do capacitor se a carga inicial é $q(0) = 0$ e a corrente inicial é $q'(0) = 1$.



Solução

a) A equação característica da homogênea é

$$r^2 + 5r + 4 = 0,$$

cujas raízes são $r = -1$ e $r = -4$. As duas soluções são fundamentais são dadas por $q_1(t) = e^{-t}$ e $q_2(t) = e^{-4t}$. Segue que a solução geral da homogênea é

$$q(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}$$

b) Pelo método da variação dos parâmetros, a solução geral é dada por

$$q(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)e^{-4t}$$

onde

$$W(q_1(t), q_2(t)) = \det \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-4t} \\ -e^{-t} & -4e^{-4t} \end{pmatrix} = -3e^{-5t}$$

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int -\frac{\cos(2t)e^{-4t}}{-3e^{-5t}}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\int e^t \cos(2t)\,dt \\ &= \frac{1}{15}e^t\cos(2t) + \frac{2}{15}e^t\operatorname{sen}(2t) + c_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \int \frac{\cos(2t)e^{-t}}{-3e^{-5t}}\,dt \\ &= -\frac{1}{3}\int e^{4t}\cos(2t)\,dt \\ &= -\frac{1}{15}e^{4t}\cos(2t) - \frac{1}{30}e^{4t}\operatorname{sen}(2t) + c_2 \end{aligned}$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
q(t) &= \left(\frac{1}{15}e^{t}\cos(2t) + \frac{2}{15}e^{t}\,\mathrm{sen}(2t) + c_1\right)e^{-t} + \left(-\frac{1}{15}e^{4t}\cos(2t) - \frac{1}{30}e^{4t}\,\mathrm{sen}(2t) + c_2\right)e^{-4t} \\
&= \frac{1}{15}\cos(2t) + \frac{2}{15}\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{1}{15}\cos(2t) - \frac{1}{30}\,\mathrm{sen}(2t) + c_1e^{-t} + c_2e^{-4t} \\
&= \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}(2t) + c_1e^{-t} + c_2e^{-4t}
\end{aligned}
$$

c) Como

$$q(t) = \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}(2t) + c_1e^{-t} + c_2e^{-4t}$$

segue que a carga não tende a zero quando t cresce, uma vez que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} e^{-4t} = 0,$$

mas, no entanto, $\lim_{t\to\infty}\mathrm{sen}(2t)$ não existe.

d) Derivando a solução geral da não-homogênea

$$q(t) = \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}(2t) + c_1e^{-t} + c_2e^{-4t}.$$

temos

$$q'(t) = \frac{1}{5}\cos(2t) - c_1e^{-t} - 4c_2e^{-4t}.$$

Usando as condições iniciais

$$0 = q(0) = c_1 + c_2 \qquad 1 = q'(0) = \frac{1}{5} - c_1 - 4c_2$$

concluímos que

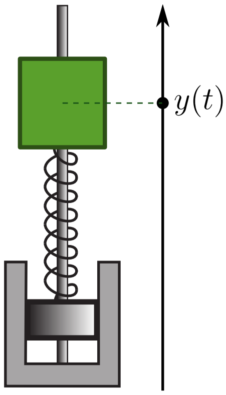
$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= 0 \\
c_1 + 4c_2 &= -\tfrac{4}{5}
\end{aligned}
$$

de onde segue que $c_1 = -c_2$, $3c_2 = -4/5$, logo $c_2 = -4/15$ e $c_1 = 4/15$. Assim

$$q(t) = \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}(2t) + \frac{4}{15}e^{-t} - \frac{4}{15}e^{-4t}.$$

2) Considere um sistema MMA onde a força externa é $F(t) = e^{-t}$, a massa é $m = 1$, a constante de amortecimento é $b = 2$ e a constante da mola é $k = 1$. Pela segunda Lei de Newton, a posição $y(t)$ da massa em relação ao equilíbrio satisfaz

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}.$$



a) Determine a solução geral da homogênea.

b) Determine a solução geral da não-homogênea.

c) A posição da massa tende a zero quando t cresce?

d) Determine a posição $y(t)$ da massa se a posição inicial é $y(0) = 1$ e a velocidade inicial é $y'(0) = 0$.

Solução

a) A equação característica da homogênea é

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cuja raíz é $r = -1$ com multiplicidade 2. As duas soluções fundamentais são portanto

$$y_1(t) = e^{-t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = te^{-t}$$

e a solução geral da homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t}.$$

b) Pelo método da variação dos parâmetros, a solução geral é dada por

$$y(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)te^{-t}$$

onde

$$\begin{aligned} W(e^{-t}, te^{-t}) &= \det \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= (1-t)e^{-2t} + te^{-2t} \\ &= e^{-2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int -\frac{e^{-t}te^{-t}}{e^{-2t}}\,dt \\ &= -\int t\,dt \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + c_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \int \frac{e^{-t}e^{-t}}{e^{-2t}}\,dt \\ &= \int 1\,dt \\ &= t + c_2 \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(-\frac{1}{2}t^2 + c_1\right)e^{-t} + (t + c_2)\,te^{-t} \\ &= \left(-\frac{1}{2}t^2\right)e^{-t} + (t)\,te^{-t} + c_1e^{-t} + c_2te^{-t} \\ &= \frac{1}{2}t^2e^{-t} + c_1e^{-t} + c_2te^{-t} \end{aligned}$$

c) A posição da massa é

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + c_1e^{-t} + c_2te^{-t}.$$

Temos que

$$\lim_{t\to\infty} t^2e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{e^t} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} te^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

onde no primeiro e no último limite usamos a regra de L'Hospital, pois aparece uma indeterminação do tipo ∞/∞. Segue que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} t^2e^{-t} + c_1\lim_{t\to\infty} e^{-t} + c_2\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0,$$

de modo que a posição da massa tende a zero quando t cresce.

d) Derivando

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + c_1e^{-t} + c_2te^{-t}.$$

temos

$$y'(t) = te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - c_1e^{-t} + c_2e^{-t} - c_2te^{-t}.$$

Usando as condições iniciais dadas

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= c_1 \\ 0 = y'(0) &= -c_1 + c_2 \end{aligned}$$

concluímos que

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ -c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

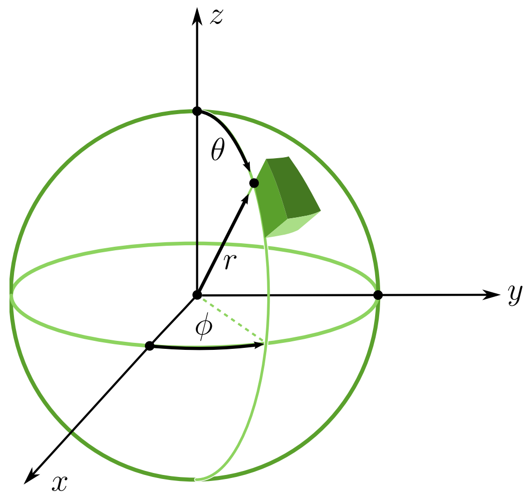
cuja única solução é $c_1 = c_2 = 1$.
Segue que a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + e^{-t} + te^{-t}.$$

---

3) Considere um elétron no orbital p do segundo nível de energia, onde $\lambda = 1$ e $\nu = 2$. A probabilidade do elétron estar na região de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) com $r \in (r_1, r_2)$, com $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ e com $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$ é proporcional a

$$\int_{r_1}^{r_2} R(r)^2\, dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Theta(\theta)^2\, d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} \Phi(\phi)^2\, d\phi$$



onde $\Theta(\theta)$ está relacionada com a equação de Legendre

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

e $R(r)$ está relacionada com a equação de Laguerre

$$xy''(x) + (1 - x)y'(x) + 3y(x) = 0$$

O objetivo desse exercício é mostrar que as equações acima sempre possuem uma solução polinomial e qualquer outra solução não proporcional a ela possui assíntota vertical, de modo que, nesse problema, a única solução que possui significado físico é a solução polinomial.

a) Obtenha o Wronskiano da equação de Legendre, utilizando a fórmula de Abel.

b) Verifique que $y_2(x) = x$ é solução da equação de Legendre e obtenha a solução geral $y(x)$ usando o item anterior. Na integração, use frações parciais.

c) Verifique que qualquer outra solução obtida no item anterior que não é proporcional a $y_2(x)$ possui assíntota vertical em $x = 1$ e também em $x = -1$.

d) Obtenha o Wronskiano da equação de Laguerre, utilizando a fórmula de Abel e verifique que $y(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$ é solução da equação de Laguerre.

Solução

a) Colocando a equação de Legendre na forma

$$y''(x) - \frac{2x}{1 - x^2}y'(x) + \frac{2}{1 - x^2}y(x) = 0$$

temos que

$$q(x) = -\frac{2x}{1 - x^2}$$

logo

$$\begin{aligned}
\int q(x)dx &= \int -\frac{2x}{1-x^2}dx \\
&= \int \frac{2x}{1-x^2}dx \qquad \text{substituição } y = 1 - x^2 \Rightarrow dy = -2xdx \\
&= \int \frac{1}{y}dy \\
&= \log(y) + C \\
&= \log(1 - x^2) + C
\end{aligned}$$

e podemos tomar

$$Q(x) = \log(1 - x^2)$$

Pela fórmula de Abel temos que

$$\begin{aligned} W(y_1(x), y_2(x)) &= c_1 e^{-Q(x)} \\ &= c_1 e^{-\log(1-x^2)} \\ &= c_1 e^{\log(1-x^2)^{-1}} \\ &= c_1 \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

para quaisquer duas soluções $y_1(x)$, $y_2(x)$ da equação de Legendre.

b) Para $y_2(x) = x$ temos que

$$y_2' = 1 \qquad y_2'' = 0$$

logo

$$\begin{aligned} (1-x^2)y_2'' - 2xy_2' + 2y_2 &= (1-x^2)\cdot 0 - 2x\cdot 1 + 2\cdot x \\ &= -2x + 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que mostra que $y_2(x) = x$ é solução.
Para obter a solução geral $y(x)$, pelo item anterior temos que

$$W(y_2(x), y(x)) = c_1 \frac{1}{1-x^2}$$

por outro lado, considerando $y(x)/y_1(x)$ sabemos que

$$\left(\frac{y(x)}{x}\right)' = \left(\frac{y(x)}{y_2(x)}\right)' = \frac{W(y_2(x), y(x))}{y_1^2(x)} = c_1 \frac{1}{x^2(1-x^2)} \tag{5}$$

Uma vez que

$$x^2(1-x^2) = x^2(1-x)(1+x)$$

por frações parciais temos que

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x} + \frac{D}{1+x}$$

multiplicando pelo denominador obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= Ax(1-x^2) + B(1-x^2) + Cx^2(1+x) + Dx^2(1-x) \\ &= A(x-x^3) + B(1-x^2) + C(x^2+x^3) + D(x^2-x^3) \\ &= (-A+C-D)x^3 + (-B+C+D)x^2 + Ax + B \end{aligned}$$

portanto $A = 0$, $B = 1$, $C = 1/2$, $D = 1/2$.
Integrando ambos lados de (5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{y(x)}{x} = c_1 \int \frac{1}{x^2(1-x^2)} dx &= c_1 \left(\int \frac{1}{x^2} + \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} \right) dx \\ &= c_1 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log|1-x| + \frac{1}{2}\log|1+x| \right) + c_2 \\ &= c_1 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \right) + c_2 D \end{aligned}$$

Isolando $y(x)$, obtemos a solução geral

$$y(x) = c_1 \left(-1 + \frac{1}{2}x \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \right) + c_2 x$$

c) Observe que a solução obtida no item anterior é da forma

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{c_1\left(-1+\frac{1}{2}x\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)}_{y_1(x)} + c_2\underbrace{x}_{y_2(x)} \\ &= c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \end{aligned}$$

Se $y(x)$ não é proporcional a $y_2(x)$, então o coeficiente c_1 de $y_1(x)$ não se anula. Temos que

$$\lim_{x\to 1} y_1(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1} y_2(x) = \lim_{x\to 1} -1+\frac{1}{2}x\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = +\infty$$

pois $\lim_{x\to 1}|(1+x)/(1-x)| = +\infty$ e $\lim_{z\to+\infty}\log(z) = +\infty$.

$$\lim_{x\to -1} y_1(x) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -1} y_2(x) = \lim_{x\to -1} -1+\frac{1}{2}x\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = +\infty$$

pois $\lim_{x\to -1}|(1+x)/(1-x)| = 0$ e $\lim_{z\to 0}\log(z) = -\infty$.
Uma vez que $c_1 \neq 0$, temos

$$\lim_{x\to 1^-} y(x) = c_1\cdot -\infty + c_2\cdot 1 = \pm\infty$$

e

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = c_1\cdot -\infty + c_2\cdot -1 = \pm\infty$$

que é $\pm\infty$ depedendo do sinal do coeficiente c_1. Isso mostra que qualquer solução não-proporcional a $y_1(x)$ possui assíntota vertical em $x=1$ e também em $x=-1$.

d) Colocando a equação de Laguerre na forma

$$y''(x)+\frac{1-x}{x}y'(x)+\frac{1}{x}y(x) = 0$$

temos que

$$q(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}-1$$

logo

$$\begin{aligned} \int q(x)dx &= \int \frac{1}{x}-1\,dx \\ &= \log(x)-x+C \end{aligned}$$

e podemos tomar

$$Q(x) = \log(x)-x$$

Pela fórmula de Abel temos que

$$\begin{aligned} W(y_1(x),y_2(x)) &= c_1e^{-Q(x)} \\ &= c_1e^{-\log(x)+x} \\ &= c_1e^{-\log(x)}e^x \\ &= c_1e^{\log(x^{-1})}e^x \\ &= c_1x^{-1}e^x \\ &= c_1\frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

para quaisquer duas soluções $y_1(x)$, $y_2(x)$ da equação de Laguerre.
Para $y(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$ temos que

$$y'(x) = -18 + 18x - 3x^2 \qquad y''(x) = 18 - 6x$$

de modo que

$$\begin{aligned} & xy''(x) + (1-x)y'(x) + 3y(x) = \\ = \ & x(18-6x) + (1-x)(-18+18x-3x^2) + 3(6-18x+9x^2-x^3) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

o que mostra que $y(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$ é solução.

Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 1 – Lista 5 – Solução

1) A descrição quântica dos fenômenos subatômicos é probabilística. Considere um oscilador harmônico quântico unidimensional, onde partícula subatômica de massa m se movimenta no eixo x sob a ação de um potencial da forma $V(x) = m\omega^2 x^2/2$, que é o potencial do sistema massa-mola com frequência ω.

A probabilidade de encontrarmos a partícula no intervalo (x_1, x_2) é proporcional à integral

$$\int_{x_1}^{x_2} X(x)^2 \, dx$$

onde a função $X(x)$ satisfaz a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} X''(x) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 X(x) = E X(x)$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π e E é a energia do oscilador. Por simplicidade, vamos supor que $m = \hbar = \omega = 1$ de modo que

$$X''(x) + (2E - x^2)X(x) = 0$$

a) Escrevendo $X(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} y(x)$, mostre que $y(x)$ satisfaz $y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0$, conhecida como equação de Hermite, onde $\lambda = E - 1/2$.

b) Escrevendo a solução como o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n do polinômio $-2xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$. Use a equação de Hermite para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

c) Para $\lambda = 6$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

d) Para $\lambda = 7$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

Solução

a) Escrevendo $X(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} y(x)$, temos que

$$\begin{aligned} X'(x) &= -x\mathrm{e}^{-x^2/2} y(x) + \mathrm{e}^{-x^2/2} y'(x) \\ &= \mathrm{e}^{-x^2/2}(y'(x) - xy(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X''(x) &= -x\mathrm{e}^{-x^2/2}(y'(x) - xy(x)) \\ &\quad +\mathrm{e}^{-x^2/2}(y''(x) - y(x) - xy'(x)) \\ &= \mathrm{e}^{-x^2/2}(y''(x) - 2xy'(x) + (x^2 - 1)y(x)) \end{aligned}$$

$$(2E - x^2)X(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2E - x^2)y(x)$$

Somando as duas últimas equações, segue que

$$0 = \mathrm{e}^{-x^2/2}(y''(x) - 2xy'(x) + (2E - 1)y(x))$$

portanto $y(x)$ satisfaz a equação

$$0 = y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x),$$

onde $\lambda = E - 1/2$ é uma constante.

b) Temos que

$$\begin{aligned} -2xy'(x) &= -2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}-2(n+1)c_{n+1}x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}-2nc_nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}-2nc_nx^n \end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade que que $0c_0 = 0$.
Sabemos que

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

Substituindo essas expressões na equação de Hermite, obtemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}-2nc_nx^n + 2\lambda\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n = 0$$

de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} + 2(\lambda - n)c_n]x^n = 0,$$

Segue então que

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + 2(\lambda - n)c_n = 0,$$

de onde obtemos a seguinte equação de recorrência

$$c_{n+2} = \frac{2(n-\lambda)}{(n+2)(n+1)}c_n.$$

c) Para $\lambda = 6$ a recorrência é dada por

$$c_{n+2} = \frac{2(n-6)}{(n+2)(n+1)}c_n$$

Temos que $y_1(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_1(0) = 1 \qquad c_1 = y_1'(0) = 0$$

Os coeficientes pares são então dados por

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 \\
c_2 &= \frac{2(0-6)}{2\cdot 1}c_0 = -6 \\
c_4 &= \frac{2(2-6)}{4\cdot 3}c_2 = 4 \\
c_6 &= \frac{2(4-6)}{6\cdot 5}c_4 = -\frac{8}{15} \\
c_8 &= \frac{2(6-6)}{8\cdot 7}c_6 = 0
\end{aligned}$$

e à partir daí temos $c_{10} = c_{12} = \cdots = 0$. Os coeficientes ímpares são dados por $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$, uma vez que $c_1 = 0$, e cada coeficiente ímpar é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente ímpar anterior. Segue então que a solução $y_1(x)$ é o polinômio de grau 6 dado por

$$y_1(x) = 1 - 6x^2 + 4x^4 - \frac{8}{15}x^6$$

que é uma função par, pois só aparecem potências pares.

Temos que $y_2(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_2(0) = 0 \qquad c_1 = y_2'(0) = 1$$

Os coeficientes pares são dados por $c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$, uma vez que $c_0 = 0$, e cada coeficiente par é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente par anterior. Já os coeficientes ímpares nunca se anulam, uma vez que $c_1 = 1$ e que cada coeficiente ímpar é obtido multiplicando o coeficiente ímpar anterior pelo fator

$$\frac{2(n-6)}{(n+2)(n+1)} \neq 0 \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

Segue então que $y_2(x)$ não é um polinômio.

d) Para $\lambda = 7$ a recorrência é dada por

$$c_{n+2} = \frac{2(n-7)}{(n+2)(n+1)}c_n$$

Temos que $y_1(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_1(0) = 1 \qquad c_1 = y_1'(0) = 0$$

Os coeficientes pares nunca se anulam, uma vez que $c_0 = 1$ e que cada coeficiente par é obtido multiplicando o coeficiente par anterior pelo fator

$$\frac{2(n-7)}{(n+2)(n+1)} \neq 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

Segue então que $y_1(x)$ não é um polinômio. Os coeficientes ímpares são dados por $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$, uma vez que $c_1 = 0$, e cada coeficiente ímpar é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente ímpar anterior.

Temos que $y_2(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_2(0) = 0 \qquad c_1 = y_2'(0) = 1$$

Os coeficientes pares são dados por $c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$, uma vez que $c_0 = 0$, e cada coeficiente par é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente par anterior. Já os coeficientes ímpares são dados por

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \\
c_3 &= \frac{2(1-7)}{3\cdot 2}c_1 = -2 \\
c_5 &= \frac{2(3-7)}{5\cdot 4}c_3 = \frac{4}{5} \\
c_7 &= \frac{2(5-7)}{7\cdot 6}c_5 = -\frac{8}{105} \\
c_9 &= \frac{2(7-7)}{9\cdot 8}c_7 = 0
\end{aligned}$$

e à partir daí temos $c_{11} = c_{13} = \cdots = 0$. Segue então que a solução $y_2(x)$ é o polinômio de grau 7 dado por

$$y_2(x) = x - 2x^3 + x^5 - \frac{8}{105}x^7$$

que é uma função ímpar, pois só aparecem potências ímpares.

2) Pelo Exercício 5, para descrever a posição do elétron no átomo de hidrogênio, precisamos resolver a equação de Laguerre

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + (\nu+\lambda)y(x) = 0$$

O objetivo desse exercício é investigar as soluções dessa equação usando séries de potências.

a) Escrevendo a solução como o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n e q_n dos polinômios $(1-x)y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e também $xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

b) Use o item anterior e a equação de Laguerre para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

c) Verifique que, quando $\nu+\lambda$ é um inteiro, então $y(x)$ é um polinômio de grau $\nu+\lambda$.

d) Supondo $y(0) = 1$ e $\nu+\lambda = 1$, determine $y(x)$.

e) Supondo $y(0) = 6$ e $\nu+\lambda = 3$, determine $y(x)$.

Solução

a) Temos que

$$\begin{aligned}
(1-x)y'(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -c_{n+1}(n+1)x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} -c_n n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -c_n n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_n n)x^n
\end{aligned}$$

onde usamos na penúltima igualdade que que $-c_0 0 x^0 = 0$. Temos também que

$$\begin{aligned}
xy''(x) &= x\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)n x^n
\end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade que que $c_{0+1}(0+1)0x^0 = 0$.

b) Substituindo as expressões do item anterior na equação de Laguerre, obtemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_n n)x^n + (\nu+\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}[c_{n+1}(n+1)n + c_{n+1}(n+1) - c_n n + (\nu+\lambda)c_n]x^n = 0$$

Segue então que

$$c_{n+1}(n+1)n + c_{n+1}(n+1) - c_n n + (\nu+\lambda)c_n = 0$$

que é equivalente a

$$c_{n+1}(n+1)^2 = c_n(n - (\nu+\lambda))$$

Isolando c_{n+1}, obtemos a seguinte equação de recorrência

$$c_{n+1} = \frac{n - (\nu+\lambda)}{(n+1)^2} c_n$$

c) Usando a equação de recorrência, quando $\nu + \lambda$ é inteiro, então

$$c_{\nu+\lambda+1} = c_{\nu+\lambda} \frac{\overbrace{\nu+\lambda-(\nu+\lambda)}^{=0}}{(\nu+\lambda+1)^2} = 0,$$

de modo que

$$\begin{aligned} c_{\nu+\lambda+2} &= \underbrace{c_{\nu+\lambda+1}}^{=0} \frac{\nu+\lambda+1-(\nu+\lambda)}{(\nu+\lambda+2)^2} = 0 \\ c_{\nu+\lambda+3} &= \overbrace{c_{\nu+\lambda+2}}^{=0} \frac{\nu+\lambda+2-(\nu+\lambda)}{(\nu+\lambda+3)^2} = 0 \end{aligned}$$

e assim por diante, de onde segue que

$$y(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_{\nu+\lambda} x^{\nu+\lambda},$$

conhecido como polinômio de Laguerre de grau $\nu + \lambda$.

d) Quando $\nu + \lambda = 1$, supondo que $y(0) = 1$, temos que

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= c_0 \frac{0-1}{(0+1)^2} = -1 \end{aligned}$$

de modo que

$$y(x) = 1 - x$$

e) Quando $\nu + \lambda = 3$, supondo que $y(0) = 6$, temos que

$$\begin{aligned} c_0 &= 6 \\ c_1 &= c_0 \frac{0-3}{(0+1)^2} = -18 \\ c_2 &= c_1 \frac{1-3}{(1+1)^2} = 9 \\ c_3 &= c_2 \frac{2-3}{(2+1)^2} = -1 \end{aligned}$$

de modo que

$$y(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$$

3) Pelo Exercício 6, para descrever a posição do elétron no átomo de hidrogênio, precisamos resolver a equação de Legendre

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda(\lambda + 1)y(x) = 0$$

O objetivo desse exercício é investigar as soluções dessa equação usando séries de potências.

a) Escrevendo a solução como o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n e q_n dos polinômios $-2xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e também $(1 - x^2)y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

b) Use o item anterior e a equação de Legendre para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

c) Para $\lambda = 6$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

d) Para $\lambda = 7$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

Solução

a) Temos que

$$\begin{aligned}
-2xy'(x) &= -2x \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -2c_{n+1}(n+1)x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} -2c_n n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -2c_n n x^n
\end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade que que $-2c_0 0 x^0 = 0$. Temos também que

$$\begin{aligned}
(1 - x^2)y''(x) &= (1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -c_{n+2}(n+2)(n+1)x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} -c_n n(n-1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -c_n n(n-1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1))x^n
\end{aligned}$$

onde usamos na penúltima igualdade que que $-c_0 0(0-1)x^0 = 0 = -c_1 1(1-1)x^1$.

b) Substituindo as expressões do item anterior na equação de Legendre, obtemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1))x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -2c_n n x^n + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}[c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1) - 2c_n n + \lambda(\lambda+1)c_n]x^n = 0,$$

Segue então que

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1) - 2c_n n + \lambda(\lambda+1)c_n = 0,$$

que é equivalente a

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) = c_n n(n-1) + 2c_n n - \lambda(\lambda+1)c_n.$$

Colocando c_n em evidência e isolando c_{n+2}, obtemos a seguinte equação de recorrência

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)}c_n$$

c) Para $\lambda = 6$ a recorrência é dada por

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - 6\cdot 7}{(n+2)(n+1)}c_n$$

Temos que $y_1(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_1(0) = 1 \qquad c_1 = y_1'(0) = 0$$

Os coeficientes pares são então dados por

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1\\
c_2 &= \frac{0\cdot 1 - 6\cdot 7}{2\cdot 1}c_0 = -21\\
c_4 &= \frac{2\cdot 3 - 6\cdot 7}{4\cdot 3}c_2 = 63\\
c_6 &= \frac{4\cdot 5 - 6\cdot 7}{6\cdot 5}c_4 = -\frac{231}{5}\\
c_8 &= \frac{6\cdot 7 - 6\cdot 7}{8\cdot 7}c_6 = 0
\end{aligned}$$

e à partir daí temos $c_{10} = c_{12} = \cdots = 0$. Os coeficientes ímpares são dados por $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$, uma vez que $c_1 = 0$, e cada coeficiente ímpar é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente ímpar anterior. Segue então que a solução $y_1(x)$ é o polinômio de grau 6 dado por

$$y_1(x) = 1 - 21x^2 + 63x^4 - \frac{231}{5}x^6$$

que é uma função par, pois só aparecem potências pares.
Temos que $y_2(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_2(0) = 0 \qquad c_1 = y_2'(0) = 1$$

Os coeficientes pares são dados por $c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$, uma vez que $c_0 = 0$, e cada coeficiente par é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente par anterior. Já os coeficientes ímpares nunca se anulam, uma vez que $c_1 = 1$ e que cada coeficiente ímpar é obtido multiplicando o coeficiente ímpar anterior pelo fator

$$\frac{n(n+1) - 6 \cdot 7}{(n+2)(n+1)} \neq 0 \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

uma vez que o numerador pode ser escrito como

$$(n-6)(n+7) \neq 0 \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

Segue então que $y_2(x)$ não é um polinômio.

d) Para $\lambda = 7$ a recorrência é dada por

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - 7 \cdot 8}{(n+2)(n+1)} c_n$$

Temos que $y_1(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_1(0) = 1 \qquad c_1 = y_1'(0) = 0$$

Os coeficientes pares nunca se anulam, uma vez que $c_0 = 1$ e que cada coeficiente par é obtido multiplicando o coeficiente par anterior pelo fator

$$\frac{n(n+1) - 7 \cdot 8}{(n+2)(n+1)} \neq 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

uma vez que o numerador pode ser escrito como

$$(n-7)(n+8) \neq 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

Segue então que $y_1(x)$ não é um polinômio. Os coeficientes ímpares são dados por $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$, uma vez que $c_1 = 0$, e cada coeficiente ímpar é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente ímpar anterior.

Temos que $y_2(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_2(0) = 0 \qquad c_1 = y_2'(0) = 1$$

Os coeficientes pares são dados por $c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$, uma vez que $c_0 = 0$, e cada coeficiente par é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente par anterior. Já os coeficientes ímpares são dados por

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \\
c_3 &= \frac{1 \cdot 2 - 7 \cdot 8}{3 \cdot 2} c_1 = -9 \\
c_5 &= \frac{3 \cdot 4 - 7 \cdot 8}{5 \cdot 4} c_3 = \frac{33}{10} \\
c_7 &= \frac{5 \cdot 6 - 7 \cdot 8}{7 \cdot 6} c_5 = -\frac{143}{8400} \\
c_9 &= \frac{7 \cdot 8 - 7 \cdot 8}{9 \cdot 8} c_7 = 0
\end{aligned}$$

e à partir daí temos $c_{11} = c_{13} = \cdots = 0$. Segue então que a solução $y_2(x)$ é o polinômio de grau 7 dado por

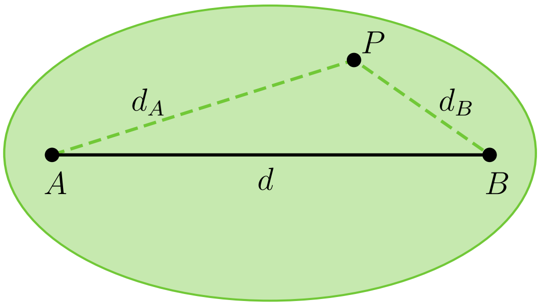
$$y_2(x) = x - 9x^3 + \frac{33}{10}x^5 - \frac{143}{8400}x^7$$

que é uma função ímpar, pois só aparecem potências ímpares.

4) A temperatura de equilíbrio $T(P)$ em um ponto P de uma chapa elíptica feita com um material uniforme pode ser escrita em função das coordenadas elípticas confocais (x, t) de P dadas por

$$x = \frac{d_A - d_B}{d} \qquad t = \frac{d_A + d_B}{d},$$

onde d é a distância entre os focos A e B da elipse, d_A é a distância entre P e A e d_B é a distância entre P e B.



Temos que x varia em $[-1, 1]$ e que t varia em $[1, 2R/d]$, onde R é o raio maior da elipse. Note que o conjunto dos pontos tais que t é constante formam uma elipse. Escrevendo a temperatura em P como produto de duas funções $T(P) = y(x)z(t)$, é possível mostrar que as funções $y(x)$ e $z(t)$ satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\frac{(1-x^2)y''(x) - xy'(x)}{-y(x)} = \lambda^2 = \frac{(1-t^2)z''(t) - rz'(t)}{-z(t)}$$

onde λ é um inteiro positivo. Segue que $y(x)$ satisfaz a equação Tchebychev

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \lambda^2 y(x) = 0$$

a) Escrevendo a solução como o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n e q_n dos polinômios $-xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e também $(1-x^2)y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

b) Use o item anterior e a equação de Tchebychev para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

c) Para $\lambda = 6$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

d) Para $\lambda = 7$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar?

Solução

a) Temos que

$$\begin{aligned}
-xy'(x) &= -x\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -c_{n+1}(n+1)x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} -c_n n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -c_n n x^n
\end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade que que $-c_0 0 x^0 = 0$. Temos também que

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y''(x) &= (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -c_{n+2}(n+2)(n+1)x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} -c_n n(n-1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -c_n n(n-1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1))x^n
\end{aligned}$$

onde usamos na penúltima igualdade que que $-c_0 0(0-1)x^0 = 0 = -c_1 1(1-1)x^1$.

b) Substituindo as expressões do item anterior na equação de Tchebychev, obtemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1))x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -c_n n x^n + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} [c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1) - c_n n + \lambda^2 c_n] x^n = 0,$$

Segue então que

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1) - c_n n + \lambda^2 c_n = 0,$$

que é equivalente a

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) = c_n n(n-1) + c_n n - \lambda^2 c_n.$$

Colocando c_n em evidência e isolando c_{n+2}, obtemos a seguinte equação de recorrência

$$c_{n+2} = \frac{n^2 - \lambda^2}{(n+2)(n+1)} c_n$$

c) Para $\lambda = 6$ a recorrência é dada por

$$c_{n+2} = \frac{n^2 - 6^2}{(n+2)(n+1)} c_n$$

Temos que $y_1(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_1(0) = 1 \qquad c_1 = y_1'(0) = 0$$

Os coeficientes pares são então dados por

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 \\
c_2 &= \frac{0^2 - 6^2}{2 \cdot 1} c_0 = -18 \\
c_4 &= \frac{2^2 - 6^2}{4 \cdot 3} c_2 = 48 \\
c_6 &= \frac{4^2 - 6^2}{6 \cdot 5} c_4 = -32 \\
c_8 &= \frac{6^2 - 6^2}{8 \cdot 7} c_6 = 0
\end{aligned}$$

e à partir daí temos $c_{10} = c_{12} = \cdots = 0$. Os coeficientes ímpares são dados por $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$, uma vez que $c_1 = 0$, e cada coeficiente ímpar é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente ímpar anterior. Segue então que a solução $y_1(x)$ é o polinômio de grau 6 dado por

$$y_1(x) = 1 - 18x^2 + 48x^4 - 32x^6$$

que é uma função par, pois só aparecem potências pares.

Temos que $y_2(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_2(0) = 0 \qquad c_1 = y_2'(0) = 1$$

Os coeficientes pares são dados por $c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$, uma vez que $c_0 = 0$, e cada coeficiente par é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente par anterior. Já os coeficientes ímpares nunca se anulam, uma vez que $c_1 = 1$ e que cada coeficiente ímpar é obtido multiplicando o coeficiente ímpar anterior pelo fator

$$\frac{n^2 - 6^2}{(n+2)(n+1)} \neq 0 \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

uma vez que o numerador pode ser escrito como

$$(n-6)(n+6) \neq 0 \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

Segue então que $y_2(x)$ não é um polinômio.

d) Para $\lambda = 7$ a recorrência é dada por

$$c_{n+2} = \frac{n^2 - 7^2}{(n+2)(n+1)} c_n$$

Temos que $y_1(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_1(0) = 1 \qquad c_1 = y_1'(0) = 0$$

Os coeficientes pares nunca se anulam, uma vez que $c_0 = 1$ e que cada coeficiente par é obtido multiplicando o coeficiente par anterior pelo fator

$$\frac{n^2 - 7^2}{(n+2)(n+1)} \neq 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

uma vez que o numerador pode ser escrito como

$$(n-7)(n+7) \neq 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

Segue então que $y_1(x)$ não é um polinômio. Os coeficientes ímpares são dados por $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$, uma vez que $c_1 = 0$, e cada coeficiente ímpar é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente ímpar anterior.

Temos que $y_2(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_2(0) = 0 \qquad c_1 = y_2'(0) = 1$$

Os coeficientes pares são dados por $c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$, uma vez que $c_0 = 0$, e cada coeficiente par é obtido à partir de uma multiplicação pelo coeficiente par anterior.

Já os coeficientes ímpares são dados por

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_3 &= \frac{1^2 - 7^2}{3 \cdot 2} c_1 = -8 \\ c_5 &= \frac{3^2 - 7^2}{5 \cdot 4} c_3 = 16 \\ c_7 &= \frac{5^2 - 7^2}{7 \cdot 6} c_5 = -\frac{128}{7} \\ c_9 &= \frac{7^2 - 7^2}{9 \cdot 8} c_7 = 0 \end{aligned}$$

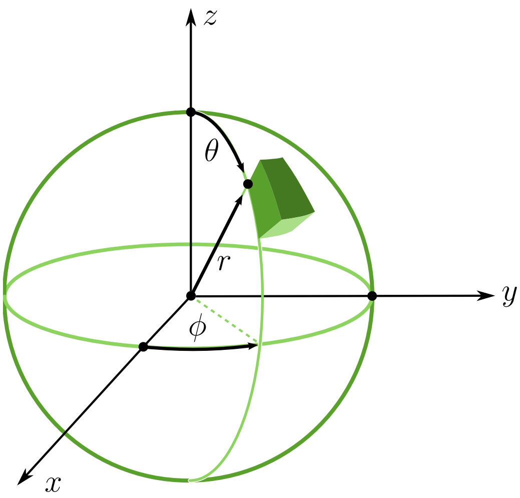
e à partir daí temos $c_{11} = c_{13} = \cdots = 0$. Segue então que a solução $y_2(x)$ é o polinômio de grau 7 dado por

$$y_2(x) = x - 8x^3 + 16x^5 - \frac{128}{7} x^7$$

que é uma função ímpar, pois só aparecem potências ímpares.

5) **(Desafio)** No átomo de hidrogênio, a posição do elétron é dada em coordenadas esféricas por (r, θ, ϕ), onde r é a distância do elétron ao núcleo, θ é o ângulo polar e ϕ é o ângulo azimutal. A probabilidade do elétron estar na região de coordenadas (r, θ, ϕ) com $r \in (r_1, r_2)$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ e $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$ é proporcional a

$$\int_{r_1}^{r_2} R(r)^2\, dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Theta(\theta)^2\, d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} \Phi(\phi)^2\, d\phi$$



onde $R(r)$ satisfaz a equação

$$\frac{1}{R(r)}\left(r^2 R'(r)\right)' - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} - E\right) = \lambda(\lambda+1)$$

onde m é a massa do elétron, $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π, e é a carga elétrica do próton, ϵ_0 é a permissividade no vácuo, $E < 0$ é a energia do elétron e λ é um inteiro denominado número quântico orbital. O objetivo desse exercício é mostrar que $R(r)$ é determinada pela equação de Laguerre, que será resolvida por séries de potências no próximo exercício.

a) Seja $S(x)$ solução da equação

$$x^2 S''(x) + 2xS'(x) + \left(2\nu x - x^2 - \lambda(\lambda+1)\right) S(x) = 0$$

Mostre que $R(r) = S(\kappa r)$ é solução da equação do enunciado, onde

$$\kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \qquad \text{e} \qquad \nu = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}$$

b) Seja $z(x)$ solução da equação de Laguerre associada

$$xz''(x) - 2(\lambda - x + 1)z'(x) + 2(\nu - \lambda - 1)z(x) = 0$$

Mostre que $S(x) = x^\lambda e^{-x} z(x)$ é solução da equação do item anterior.

c) Mostre que

$$\left(xy'' + (1-x)y' + py\right)^{(q)} = xy^{(q+2)} + (1 - x + q)y^{(q+1)} + (p-q)y^{(q)}$$

onde p é uma constante, q é um inteiro positivo e $y^{(q)}$ é a derivada q-ésima de $y(x)$.

d) Seja $y(x)$ solução da equação de Laguerre

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + (\nu + \lambda)y(x) = 0$$

Use o item anterior com $p = \nu + \lambda$ e $q = 2\lambda + 1$, para mostrar que

$$z(x) = y^{(2\lambda+1)}(2x)$$

é solução da equação de Laguerre associada.

Solução

a) Primeiro note que podemos escrever a equação do encunciado da seguinte forma

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) + \left(2\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} r + \frac{2mE}{\hbar^2} r^2\right) R(r) = \lambda(\lambda+1)R(r)$$

Observando que

$$\nu\kappa = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} \qquad \text{e} \qquad \kappa^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}$$

a equação acima pode ser escrita como

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) + \big(2\nu\kappa r - \kappa^2r^2 - \lambda(\lambda+1)\big)\, R(r) = 0$$

Como $R(r) = S(x)$, com $x = \kappa r$, pela regra da cadeia, segue que

$$R'(r) = S'(x)\kappa \qquad \text{e} \qquad R''(r) = S''(x)\kappa^2$$

Substituindo essas expressões no lado direito da equação acima, obtemos que

$$x^2S''(x) + 2xS'(x) + \big(2\nu x - x^2 - \lambda(\lambda+1)\big)\, S(x)$$

que é igual a zero pela escolha de $S(x)$, mostrando que $R(r) = S(\kappa r)$ é solução da equação do enunciado.

b) Como $S(x) = x^\lambda e^{-x}z(x)$, temos que

$$S' = \lambda x^{\lambda-1}e^{-x}z - x^\lambda e^{-x}z + x^\lambda e^{-x}z'$$

e também que

$$\begin{aligned} S'' &= \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}e^{-x}z - \lambda x^{\lambda-1}e^{-x}z + \lambda x^{\lambda-1}e^{-x}z' - \\ &\quad -\lambda x^{\lambda-1}e^{-x}z + x^\lambda e^{-x}z - x^\lambda e^{-x}z' + \\ &\quad +\lambda x^{\lambda-1}e^{-x}z' - x^\lambda e^{-x}z' + x^\lambda e^{-x}z'' \end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \big(2\nu x - x^2 - \lambda(\lambda+1)\big)\, S &= 2\nu x^{\lambda+1}e^{-x}z - x^{\lambda+2}e^{-x}z - \lambda(\lambda+1)x^\lambda e^{-x}z \\ 2xS' &= 2\lambda x^\lambda e^{-x}z - 2x^{\lambda+1}e^{-x}z + 2x^{\lambda+1}e^{-x}z' \\ x^2S'' &= \lambda(\lambda-1)x^\lambda e^{-x}z - \lambda x^{\lambda+1}e^{-x}z + \lambda x^{\lambda+1}e^{-x}z' - \\ &\quad -\lambda x^{\lambda+1}e^{-x}z + x^{\lambda+2}e^{-x}z - x^{\lambda+2}e^{-x}z' + \\ &\quad +\lambda x^{\lambda+1}e^{-x}z' - x^{\lambda+2}e^{-x}z' + x^{\lambda+2}e^{-x}z'' \end{aligned}$$

Somando as três equações acima, obtemos, após cancelamentos, que

$$x^2S''+2xS'+\big(2\nu x - x^2 - \lambda(\lambda+1)\big)\, S = e^{-x}x^{\lambda+1}\left(xz'' - 2(\lambda - x + 1)z' + 2(\nu - \lambda - 1)z\right)$$

que é igual a zero pela escolha de $z(x)$, mostrando que $S(x) = x^\lambda e^{-x}z(x)$ é solução da equação do item anterior.

c) Vamos provar a fórmula através de indução em q. Quando $q = 0$, temos que $y^{(0)} = y$, de modo que

$$(xy'' + (1-x)y' + py)^{(0)} = xy^{(0+2)} + (1 - x + 0)y^{(0+1)} + (p-0)y^{(0)}$$

Se a fórmula for verdadeira para q, vamos mostrar que ela também é verdadeira para $q+1$. De fato, derivando a equação

$$(xy'' + (1-x)y' + py)^{(q)} = xy^{(q+2)} + (1 - x + q)y^{(q+1)} + (p-q)y^{(q)}$$

obtemos que

$$\begin{aligned} (xy'' + (1-x)y' + py)^{(q+1)} &= \left(xy^{(q+2)} + (1-x+q)y^{(q+1)} + (p-q)y^{(q)}\right)' \\ &= y^{(q+2)} + xy^{(q+3)} - y^{(q+1)} + (1-x+q)y^{(q+2)} + (p-q)y^{(q+1)} \\ &= xy^{(q+3)} + (1-x+q+1)y^{(q+2)} + (p-(q+1))y^{(q+1)} \end{aligned}$$

mostrando que a fórmula também é verdadeira para $q+1$.

d) Derivando a equação de Laguerre

$$0 = xy''(x) + (1-x)y'(x) + (\nu+\lambda)y(x)$$

e usando o item anterior com $p = \nu + \lambda$ e $q = 2\lambda + 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (xy''(x) + (1-x)y'(x) + (\nu+\lambda)y(x))^{(2\lambda+1)} \\ &= xy^{(2\lambda+3)}(x) + (1 - x + (2\lambda+1))y^{(2\lambda+2)}(x) + (\nu + \lambda - (2\lambda+1))y^{(2\lambda+1)}(x) \\ &= xy^{(2\lambda+3)}(x) + (2 - x + 2\lambda)y^{(2\lambda+2)}(x) + (\nu - \lambda + 1)y^{(2\lambda+1)}(x) \end{aligned}$$

Multiplicando essa equação por 2 e susbtituindo x por $2x$, obtemo que

$$x4y^{(2\lambda+3)}(2x) + (2 - 2x + 2\lambda)2y^{(2\lambda+2)}(2x) + 2(\nu - \lambda + 1)y^{(2\lambda+1)}(2x) = 0$$

de modo que

$$xz''(x) + 2(1 - x + \lambda)z'(x) + 2(\nu - \lambda + 1)z(x) = 0$$

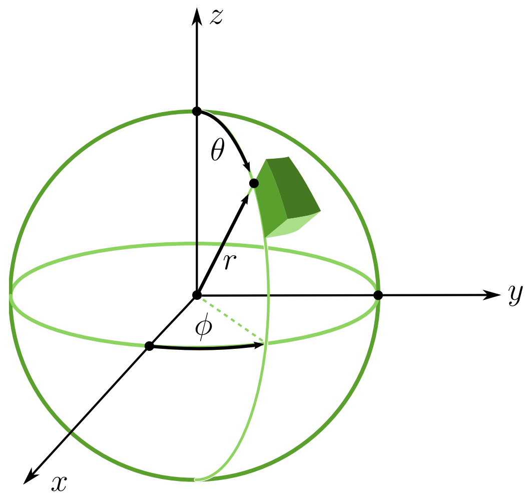
uma vez que, como $z(x) = y^{(2\lambda+1)}(2x)$, temos que

$$z'(x) = 2y^{(2\lambda+2)}(2x) \qquad \text{e} \qquad z''(x) = 4y^{(2\lambda+3)}(2x)$$

---

6) (Desafio) No átomo de hidrogênio, a posição do elétron é dada em coordenadas esféricas por (r, θ, ϕ), onde r é a distância do elétron ao núcleo, θ é o ângulo polar e ϕ é o ângulo azimutal. A probabilidade do elétron estar na região de coordenadas (r, θ, ϕ) com $r \in (r_1, r_2)$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ e $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$ é proporcional a

$$\int_{r_1}^{r_2} R(r)^2\, dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Theta(\theta)^2\, d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} \Phi(\phi)^2\, d\phi$$



Temos que $\Theta(\theta)$ satisfaz a equação

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \left(\operatorname{sen}(\theta) \left(\operatorname{sen}(\theta)\Theta'(\theta) \right)' \right) + \lambda(\lambda+1)\operatorname{sen}^2(\theta) = \mu^2$$

onde λ e μ são inteiros denominados números quânticos, respectivamente, orbital e magnético.
O objetivo desse exercício é mostrar que $\Theta(\theta)$ é determinada pela equação de Legendre, que será resolvida por séries de potências no próximo exercício.

a) Desenvolva a equação do enunciado e obtenha que

$$\Theta''(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}\Theta'(\theta) + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{\operatorname{sen}^2(\theta)} \right) \Theta(\theta) = 0$$

b) Seja $z(x)$ solução da equação de Legendre associada

$$(1-x^2)z''(x) - 2xz'(x) + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right) z(x) = 0$$

Mostre que $\Theta(\theta) = z(x)$, onde $x = \cos(\theta)$, é solução da equação do item anterior.

c) Seja $y(x)$ solução da equação de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$$

Mostre que

$$(1-x^2)y^{(\mu+2)} - 2(\mu+1)xy^{(\mu+1)} + (\lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1))y^{(\mu)} = 0$$

d) Seja $y(x)$ solução da equação de Legendre. Use o item anterior para mostrar que

$$z(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} y^{(\mu)}(x)$$

é solução da equação de Legendre associada.

Solução

a) Desenvolvendo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta)\left(\operatorname{sen}(\theta)\Theta'(\theta) \right)' &= \operatorname{sen}(\theta)\left(\cos(\theta)\Theta'(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\Theta''(\theta) \right) \\ &= \operatorname{sen}^2(\theta)\Theta''(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\Theta'(\theta) \end{aligned}$$

a equação do enunciado fica então

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \left(\operatorname{sen}^2(\theta)\Theta''(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\Theta'(\theta) \right) + \lambda(\lambda+1)\operatorname{sen}^2(\theta) - \mu^2 = 0$$

Mutiplicando por $\Theta(\theta)$ e dividindo por $\operatorname{sen}^2(\theta)$ obtemos

$$\Theta''(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}\Theta'(\theta) + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\right)\Theta(\theta) = 0$$

como queríamos.

b) Se $\Theta(\theta) = z(x)$ e $x = \cos(\theta)$ então pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}
\Theta'(\theta) &= \frac{d}{d\theta}z(x) \\
&= \frac{d}{dx}z(x)\frac{d}{d\theta}x \\
&= z'(x)(-\operatorname{sen}(\theta))
\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}\Theta'(\theta) = \frac{x}{\operatorname{sen}(\theta)}(-\operatorname{sen}(\theta))z'(x) = -xz'(x) \tag{6}$$

e também, novamente pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}
\Theta''(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\left(-z'(x)\operatorname{sen}(\theta)\right) \\
&= -\left(\frac{d}{d\theta}z'(x)\right)\operatorname{sen}(\theta) - z'(x)\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}(\theta) \\
&= -\left(\frac{d}{dx}z'(x)\frac{d}{d\theta}x\right)\operatorname{sen}(\theta) - z'(x)\cos(x) \\
&= (z''(x)\operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}(\theta) - z'(x)x \\
&= (1-x^2)z''(x) - xz'(x)
\end{aligned} \tag{7}$$

onde usamos que

$$\operatorname{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - x^2$$

Substituindo as equações (6) e (7) na equação do item anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
& \Theta''(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}\Theta'(\theta) + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\right)\Theta(\theta) \\
= \;& (1-x^2)z''(x) - 2xz'(x) + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right)z(x) \\
= \;& 0
\end{aligned} \tag{8}$$

como queríamos, uma vez que $z(x)$ é solução da equação de Legendre associada.

c) Derivando μ vezes a equação de Legendre, temos que

$$\begin{aligned}
(\,(1-x^2)y'' - 2xy' &+ \lambda(\lambda+1)y\,)^{(\mu)} = \\
((1-x^2)y'' - 2xy')^{(\mu)} &+ \lambda(\lambda+1)y^{(\mu)} = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned}
((1-x^2)y'' - 2xy')^{(\mu)} &= \\
(1-x^2)y^{(\mu+2)} - 2(\mu+1)xy^{(\mu+1)} - \mu(\mu+1)y^{(\mu)}&
\end{aligned} \tag{10}$$

o que provamos por indução. De fato, temos

$$\begin{aligned}
((1-x^2)y'' - 2xy')^{(0)} &= \\
(1-x^2)y^{(2)} - 2(1)xy^{(1)} - 0(1)y^{(0)} &= \\
(1-x^2)y'' - 2xy'&
\end{aligned}$$

que é a equação (10) para $\mu = 0$. Se a equação (10) vale para $\mu - 1$, temos

$$((1-x^2)y'' - 2xy')^{(\mu-1)} = \\ (1-x^2)y^{(\mu+1)} - 2\mu x y^{(\mu)} - (\mu-1)\mu y^{(\mu-1)}$$

e provamos que a equação (10) também vale para μ derivando a expressão acima

$$\begin{aligned}
&((1-x^2)y'' - 2xy')^{(\mu)} = \\
&(\,(1-x^2)y'' - 2xy')^{(\mu-1)}\,)' = \\
&(1-x^2)y^{(\mu+2)} - 2xy^{(\mu+1)} - 2\mu y^{(\mu)} - 2\mu x y^{(\mu+1)} - (\mu-1)\mu y^{(\mu)} = \\
&(1-x^2)y^{(\mu+2)} - 2(\mu+1)xy^{(\mu+1)} - \mu(\mu+1)y^{(\mu)}
\end{aligned}$$

como queríamos, onde usamos que $2\mu + (\mu-1)\mu = (2+\mu-1)\mu = \mu(\mu+1)$.
Juntando as equações (9) e (10) obtemos que

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y^{(\mu+2)} - 2(\mu+1)xy^{(\mu+1)} - \mu(\mu+1)y^{(\mu)} + \lambda(\lambda+1)y^{(\mu)} = \\
(1-x^2)y^{(\mu+2)} - 2(\mu+1)xy^{(\mu+1)} + (\lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1))y^{(\mu)} = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Isso mostra que toda solução $y(x)$ da equação de Legendre (9) satisfaz (11), como queríamos.

d) Uma vez que

$$((1-x^2)z')' = -2xz' + (1-x^2)z''$$

podemos reescrer a equação de Legendre associada na forma

$$((1-x^2)z')' + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right)z = 0$$

Para substituir

$$z(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} y^{(\mu)}(x) \tag{12}$$

nessa equação, calculamos

$$\begin{aligned}
\left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right)z &= \lambda(\lambda+1)z - \mu^2(1-x^2)^{-1}z \\
&= \lambda(\lambda+1)(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu)} - \mu^2(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1}y^{(\mu)}
\end{aligned} \tag{13}$$

e

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{\mu}{2}(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1}(-2x)y^{(\mu)} + (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu+1)} \\
&= -\mu x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1}y^{(\mu)} + (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu+1)}
\end{aligned}$$

logo

$$(1-x^2)z' = -\mu x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu)} + (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}y^{(\mu+1)}$$

e então

$$
\begin{aligned}
((1-x^2)z')' &= (\,-\mu x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu)}\,)' + (\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}y^{(\mu+1)}\,)' \\
&= -(\,\mu x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}\,)'y^{(\mu)} \\
&\quad -\mu x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu+1)} + (\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}\,)'y^{(\mu+1)} \\
&\quad +(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}y^{(\mu+2)} \\
&= -(\mu(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} + \frac{\mu^2}{2}x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1}(-2x))y^{(\mu)} \\
&\quad -\mu x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu+1)} + ((\frac{\mu}{2}+1)(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}(-2x))y^{(\mu+1)} \\
&\quad +(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}y^{(\mu+2)} \\
&= (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1}(-\mu(1-x^2)+\mu^2x^2)y^{(\mu)} \\
&\quad -2(\mu+1)x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu+1)} \\
&\quad +(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}y^{(\mu+2)} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

onde usamos que $-2(\mu/2+1)-\mu = -2(\mu+1)$.

Assim, podemos substituir (12) na equação de Legendre associada somando as equações (13) e (14), obtendo

$$
\begin{aligned}
& (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}y^{(\mu+2)} \\
& -2(\mu+1)x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu+1)} \\
& +(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1}(\underbrace{-\mu^2-\mu(1-x^2)+\mu^2x^2}_{=-\mu^2(1-x^2)-\mu(1-x^2)})y^{(\mu)} \\
& +\lambda(\lambda+1)(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}y^{(\mu)} \\
= \;& (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}\left(\,(1-x^2)y^{(\mu+2)} - 2(\mu+1)xy^{(\mu+1)}\,\right) \\
& +(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1}(\,\underbrace{-(\mu^2+\mu)}_{=-\mu(\mu+1)}(1-x^2)\,)y^{(\mu)} \\
& +(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}\lambda(\lambda+1)y^{(\mu)} \\
= \;& (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}\underbrace{\left(\,(1-x^2)y^{(\mu+2)} - 2(\mu+1)xy^{(\mu+1)} + (\,\lambda(\lambda+1)-\mu(\mu+1)\,)\,y^{(\mu)}\right)}_{=0,\text{ pelo item anterior}} \\
= \;& 0
\end{aligned}
$$

Isso mostra que (12) é solução da equação de Legendre associada, toda vez que $y(x)$ é solução da equação de Legendre, como queríamos.