Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 2

Lista de Fixação - Semana 01 - Módulo 01

Temas abordados: EDO's separáveis e Revisão de Cálculo 1

1) Encontre o limite.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^3}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\mathrm{tg}(x)}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\dfrac{2x}{x+1}}$

2) Determine a integração.

(a) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

(b) $\int -(3x^2+6)\,\mathrm{sen}(x^3+6x)\,dx$

(c) $\int \dfrac{6x^2}{4+x^3}\,dx$

(d) $\int e^{e^x} e^x\,dx$

(e) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

3) Utilizando o método de seperação de variáveis, resolva a equação diferencial prospota.

(a) $y'(t) - by(t) = 0$

(b) $y'(t) = \dfrac{t^2}{y(t)}$

(c) $y'(t) + \mathrm{sen}(t)y(t) = 0$

(d) $y'(t) - t^2y(t) = 0$

(e) $y'(t) - t^2y(t)^2 = 0$

RESPOSTAS

1) (a) ∞

   (b) $\dfrac{1}{2}$

   (c) $-\infty$

   (d) 1

2) (a) $ln|f(x)| + C$

   (b) $\cos(x^3 + 6x) + C$

   (c) $2ln|4 + x^3| + C$

   (d) $e^{e^x} + C$

   (e) $\dfrac{2(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \dfrac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

3) (a) $y(t) = \left\{Ae^{bt}(A \neq 0), 0\right\} = Ce^{bt}$

   (b) $y(t) = \pm\sqrt{\dfrac{2t^3 + C}{3}}$

   (c) $y(t) = \left\{Ae^{\cos(t)}(A \neq 0), 0\right\} = Ce^{\cos(t)}$

   (d) $y(t) = \left\{Ae^{\frac{t^3}{3}}(A \neq 0), 0\right\} = C^{\frac{t^3}{3}}$

   (e) $y(t) = \left\{-\dfrac{3}{t^3 + C}, 0\right\}$

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 2

Lista de Fixação - Semana 02 - Módulo 01

Temas abordados: EDO de 1ª Ordem e Fator Integrante

1) Resolva a equação diferencial pelo método do fator integrante.

(a) $y'(t) + 4y(t) = e^{-3t}$

(b) $y'(t) + y(t) = cos(e^t)$

(c) $2y'(t) + 4y(t) = 1$

(d) $(t^2 + 1)y'(t) + ty(t) = 0$

(e) $t^3y'(t) + 4t^2y(t) = e^{-t}$

2) Resolva o problema de valor inicial.

(a) $y'(t) - 2ty(t) = 2t, y(0) = 3$

(b) $y'(t) = -4ty(t)^2, y(0) = 1$

(c) $y'(t) - y(t) = 2te^{2t}, y(0) = 1$

(d) $ty'(t) + 2y(t) = sen(t), y(\frac{\pi}{2}) = 0$

(e) $cos(t)y'(t) - sen(t)y(t) = 1, y(2\pi) = \pi$

3) Encontre uma curva no plano xy que passe por (0,3) e cuja reta tangente em um ponto (x,y) tenha inclinação $\frac{2x}{y^2}$.

4) Resolva a equação

$$y'(t) = \frac{at + b}{ct + d},$$

onde a, b, c e d são constantes.

RESPOSTAS

1) (a) $y(t) = e^{-3t} + Ce^{-4t}$

(b) $y(t) = e^{-t}sen(e^t) + Ce^{-t}$

(c) $y(t) = Ce^{-2t} + \dfrac{1}{4}$

(d) $y(t) = \dfrac{C}{\sqrt{t^2+1}}$

(e) $y(t) = -\dfrac{e^{-t}}{t^3} - \dfrac{e^{-t}}{t^4} + \dfrac{C}{t^4}$

2) (a) $y(t) = 4e^{t^2} - 1$

(b) $y(t) = \dfrac{1}{2t^2+1}$

(c) $y(t) = 3e^t + 2(t-1)e^{2t}$

(d) $y(t) = -\dfrac{cos(t)}{t} + \dfrac{sen(t)}{t^2} - \dfrac{1}{t^2}$

(e) $y(t) = \dfrac{t-\pi}{cos(t)}$

3) $y(x) = (3x^2 + 27)^{\frac{1}{3}}$

4) $y(t) = at/c - [(ad - bc)/c^2] \ln|ct + d| + k,\ c \neq 0,\ ct + d \neq 0.$

Cálculo 2

Lista de Fixação - Semana 03 - Módulo 01

Temas abordados: EDOs Lineares de 2ª Ordem e PVI Homogêneos

1) Considere a equação

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$$

(a) Verifique que $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^{-3t}$ são soluções fundamentais.

(b) Resolva o PVI com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

2) Considere a equação

$$y''(t) + 16y(t) = 0$$

(a) Verifique que $y_1(t) = \cos(4t)$ e $y_2(t) = \operatorname{sen}(4t)$ são soluções fundamentais.

(b) Resolva o PVI com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$

3) Considere a equação

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

(a) Verifique que $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = te^{-t}$ são soluções fundamentais.

(b) Resolva o PVI com $y(0) = 4$ e $y'(0) = 6$

4) Se o Wronskiano de y_1 e y_2 é $W(y_1, y_2) = 3e^{4t}$ e $y_1(t) = e^{2t}$, determine $y_2(t)$.

RESPOSTAS

1) (a) $W(y_1, y_2)(t) = -e^{-5t}$

   (b) $y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$

2) (a) $W(y_1, y_2)(t) = 4$

   (b) $y(t) = \cos(4t) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(4t)$

3) (a) $W(y_1, y_2)(t) = e^{-2t}$

   (b) $y(t) = 4e^{-t} + 10te^{-t}$

4) $y_2(t) = 3te^{2t} + Ce^{2t}$

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 2

Lista de Fixação - Semana 04 - Módulo 01

Temas abordados: Método da Variação dos Parâmetros e Raízes características

1) Encontre a solução geral:

(a) $y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = 0$

(b) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$

(c) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$

(d) $y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 0$

2) Encontre todos os valores de k para os quais a equação diferencial $y''(t)+ky'(t)+ky(t) = 0$ tenha uma solução geral da forma dada:

(a) $y(t) = c_1e^{at} + c_2e^{bt}$

(b) $y(t) = c_1e^{at} + c_2te^{at}$

(c) $y(t) = c_1e^{at}cos(bt) + c_2e^{at}sen(bt)$

3) Resolva os problemas de valores iniciais (PVIs):

(a) $y'' + 2y'(t) - 3y(t) = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 9$

(b) $y'' + 6y'(t) + 9y(t) = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = -5$

(c) $y'' + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \qquad y(0) = -3, y'(0) = 0$

(d) $y'' - 6y'(t) + 13y(t) = 0, \qquad y(0) = -2, y'(0) = 0$

4) Encontre a solução geral pelo método da variação dos parâmetros (MVP):

(a) $y''(t) + y(t) = \tan(t)$

(b) $y''(t) - y(t) = e^{2t}$

(c) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{-2t}$

(d) $y''(t) + 4y(t) = t\cos(2t)$

RESPOSTAS

1) (a) $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-4t}$

   (b) $y(t) = c_1e^t + c_2te^t$

   (c) $y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^2t$

   (d) $y(t) = c_1e^{-2t}cos(3t) + c_2e^{-2t}sen(3t)$

2) (a) $k < 0$ ou $k > 4$

   (b) $k = 0$ ou $k = 4$

   (c) $0 < k < 4$

3) (a) $y(t) = 3e^t - 2e^{-3t}$

   (b) $y(t) = 2e^{-3t} + te^{-3t}$

   (c) $y(t) = -e^{-2t}(3cos(t) + 6sen(t))$

   (d) $y(t) = e^{3t}(-2cos(2t) + 3sen(2t))$

4) (a) $y(t) = c_1cos(t) + c_2sen(t) - cos(t)ln(tg(t) + sen(t))$

   (b) $y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^t + \frac{1}{3}e^{2t}$

   (c) $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^t - \frac{t}{3}e^{-2t}$

   (d) $y(t) = c_1cos(2t) + c_2sen(2t) + \frac{t^2sen(2t)}{8} + \frac{tcos(2t)}{16}$

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 2

Lista de Fixação - Semana 05 - Módulo 01

Temas abordados: Soluções Polinomiais e Equação de Recorrência

Soluções canônicas são as soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ as quais:
(a) Para $y_1(x)$ temos que: $y_1(0) = 0 = c_0$ e $y_1'(0) = 1 = c_1$
(b) Para $y_2(x)$ temos que: $y_2(0) = 1 = c_0$ e $y_2'(0) = 0 = c_1$

1) Seja

$$c_{n+2} = \frac{(n-3)}{(n+1)(n+4)} c_n$$

a equação de recorrência de uma EDO. Verifique se as soluções cânonicas são polinômios.

2) Considere o polinômio $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e determine os coeficientes d_n do polinômio:

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = y''(x) - 2xy'(x) + \tfrac{1}{2}y(x)$$

3) Encontre a equação de recorrência da equação de Hermite

$$y''(x) - 2xy'(x) + \tfrac{1}{2}y(x) = 0$$

e verifique se as soluções canônicas são polinômios.

4) Mostre que a equação de recorrência da equação de Airy:

$$y''(x) = xy(x)$$

é dada por:

$$c_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} c_{n-1}$$

E verifique se as soluções canônicas são polinômios.

RESPOSTAS

1) $y_1(x)$ é um polinômio,$y_2(x)$ não é um polinômio.

2) $d_n = (n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \frac{c_n}{2}$

3) $c_{n+2} = \frac{(2n-\frac{1}{2})}{(n+1)(n+2)}c_n$, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não são polinômios.

4) $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não são polinômios.