Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

---

**Cálculo 2**

**Lista de Fixação - Semana 1 - Módulo 2**

---

**1)** Calcule os limites das sequências.

**(a)** $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n - 1}$ **(b)** $a_n = \sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}$ **(c)** $a_n = \dfrac{\ln(\text{n})}{n^{\frac{1}{n}}}$ **(d)** $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

**(e)** $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$ **(f)** $a_n = \dfrac{\text{sen(n)}}{n}$ **(g)** $a_n = \left(1 + \dfrac{7}{n}\right)^n$ **(h)** $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

**2)** Prove que:

**(a)** $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$ $(x > 0)$

**(b)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

**(b)** $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

**3)** Encontre os dez primeiros termos da sequência.

**(a)** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2^n}$

**(b)** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$

**(c)** $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1} a_n}{2}$

## GABARITO

**1)**

**(a)** $\lim a_n = \infty$ **(b)** $\lim a_n = \sqrt{2}$ **(c)** $\lim a_n = \infty$ **(d)** $\lim a_n = 0$

**(e)** $\lim a_n = \infty$ **(f)** $\lim a_n = 0$ **(g)** $\lim a_n = e^7$ **(h)** $\lim a_n = 4$

**2)**

**(a)** Use a continuidade da exponencial e a regra de L'Hospital.

**(b)** Use a continuidade da exponencial.

**(c)** Use os itens anteriores.

**3)**

**(a)** $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{2^2}, \frac{3.5}{2^3}, \frac{31}{2^4}, \frac{3^2.7}{2^5}, \frac{127}{2^6}, \frac{3.5.17}{2^7}, \frac{7.73}{2^8}, \frac{11.31}{2^9}.$

**(b)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{2^3.3}, \frac{1}{2^3.3.5}, \frac{1}{2^4.3^2.5}, \frac{1}{2^4.3^2.5.7}, \frac{1}{2^7.3^2.5.7}, \frac{1}{2^7.3^4.5.7}, \frac{1}{2^8.3^4.5^2.7}.$

**(c)** $2, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, -\frac{1}{2^5}, -\frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^7}, \frac{1}{2^8}.$

# Cálculo 2

## Lista de Fixação - Semana 2

*Temas abordados:* Séries geométricas, Séries Telescópicas, Séries de Potências

**1)** (Termos de uma Série) Expanda as séries abaixo até o sétimo termo.

$(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{10}$ $\quad(b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\quad(c)\sum_{n=0}^{\infty}n^2$

$(d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\pi)$ $\quad(e)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}e^n$ $\quad(f)\sum_{n=1}^{\infty}\ln(n)e^n$

**2)** (Séries Geométricas) Calcule a soma da série:

$(a)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\quad(b)\sum_{n=0}^{\infty}7\left(\frac{1}{5}\right)^n$ $\quad(c)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\right)^n$

$(d)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{13}\right)^{n+1}$ $\quad(e)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^n$ $\quad(f)\sum_{n=0}^{\infty}(\cos(1))^n$

**3)** (Séries Telescópicas) Decida se a série converge ou diverge e calcule sua soma.

$(a)\ e\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-n}-e^{-(n+1)})$ $\quad(b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13}{n(n+1)}$

$(c)\sum_{n=0}^{\infty}sin(n)(1-\cos(1))-\cos(n)\sin(1)$

**4)** (Domínio da Função) Determine o dom(f) para as seguintes séries de potência:

(a) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(0,1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(0,1)^{n+1}x^n$

(b) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ , tal que os termos da série são dados pela equação de recorrência $a_{n+2}=\frac{2(n-4)}{(n+2)(n+1)}a_n$ com as condições iniciais

$$a_0=1 \qquad a_1=0$$

## RESPOSTAS

1) **(a)** $\dfrac{1}{10}+\dfrac{e}{10}+\dfrac{e^2}{10}+\dfrac{e^3}{10}+\dfrac{e^4}{10}+\dfrac{e^5}{10}+\dfrac{e^6}{10}+\sum_{n=7}^{\infty}\dfrac{e^n}{10}$

**(b)** $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{49}+\sum_{n=8}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

**(c)** $1+4+9+16+25+36+\sum_{n=7}^{\infty}n^2$

**(d)** $-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{7}+\sum_{n=8}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cos(n\pi)$

**(e)** $1-e+\dfrac{e^2}{2!}-\dfrac{e^3}{3!}+\dfrac{e^4}{4!}-\dfrac{e^5}{5!}+\dfrac{e^6}{6!}+\sum_{n=7}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!}e^n$

**(f)** $\ln(2)e^2+\ln(3)e^3+\ln(4)e^4+\ln(5)e^5+\ln(6)e^6+\ln(7)e^7+\sum_{8}^{\infty}\ln(n)e^n$

2) **(a)** $\dfrac{3}{2}$; **(b)** $\dfrac{35}{4}$; **(c)** $\dfrac{21}{8}$ ; **(d)** $\dfrac{1}{12}$ ; **(e)** $\dfrac{\pi}{\pi-3}$ ; **(f)** $\dfrac{1}{1-\cos(1)}$ ;

3) **(a)** e ; **( b)** 13 ; **( c)** Diverge, pois o limite do n-ésimo +1 termo tendendo ao infinito não existe. (Dica: Use o sin da soma);

4) **(a)** $dom(f)=(-10,10)$
**(b)** Como $f(x)$ é um polinômio, $dom(f)=\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ ;

# Cálculo 2

## Lista de Fixação - Semana 3

*Temas abordados:* Testes da Comparação, Integral, Série Alternada, Convergência Absoluta

**1)** (Teste da Comparação) Decida se as séries convergem ou divergem.

$(a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ $\quad (b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ $\quad (c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$

$(d)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{(n+2)^3}$ $\quad (e)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$ $\quad (f)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(\sqrt{n})}$

**2)** (Teste da Integral) Determine se as seguintes séries divergem ou convergem.

$(a)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ $\quad (b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[5]{n}}$ $\quad (c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$(d)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ $\quad (e)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ $\quad (f)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}$

**3)** (Teste da Série Alternada) Decida se a série converge ou diverge.

$(a)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+4}$ $\quad (b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ln(n)}{n}$

$(c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n}$ $\quad (d)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n+\sqrt{n}}$

$(e)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{\ln(n)n}$ $\quad (f)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n)+n\sqrt{n}}$

**4)** (Teste da Convergência Absoluta) Determine se as seguintes séries convergem absolutamente, convergem condicionalmente ou divergem

$(a)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+4}$ $\quad (b)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)n}$

$(c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n}$ $\quad (d)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n+\sqrt{n}}$

$(e)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(\ln(n)+n+\sqrt{n})}{n^3}$ $\quad (f)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+2}}$

$(g)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^4}$

**RESPOSTAS**

1) **(a)** Converge; **(b)** Converge; **(c)** Diverge; **(d)** Coverge; **(e)** Coverge; **(f)** Diverge;

2) **(a)** Converge; **(b)** Converge; **(c)** Diverge; **(d)** Diverge ; **(e)** Converge; **(f)** Converge;

3) **(a)** Converge ; **(b)** Converge; ( c) Converge; **(d)** Diverge; **(e)** Diverge; **(f)** Converge;

4) **(a)** Converge Condicionalmente; **(b)**Converge Condicionalmente; **(c)**Diverge; **(d)** Diverge; **(e)** Coverge Absolutamente; **(f)** Diverge; **(g)** Coverge Absolutamente;

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

# Cálculo 2

## Lista de Fixação - Semana 4

*Temas abordados:* Teste da raiz, Teste da Razão e Domínio de convergência

**1)** (Teste da raiz) Determine se as seguintes séries divergem ou convergem.

$$(a)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10^n}{(n+1)^{\frac{n}{2}}4^{2n+1}} \qquad (b)\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n \qquad (c)\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt[n]{2}\sqrt[2]{7})^n$$

$$(d)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{2n}}{e^{n+1}} \qquad (e)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{5^n} \qquad (f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)^n}$$

**2)** (Teste da Razão) Determine se as seguintes séries divergem ou convergem.

$$(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{(6n)!} \qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}10^n}{n!} \qquad (c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n10^n}{n!}$$

$$(d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{n!} \qquad (e)\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n} \qquad (f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

**3)** (Domínio de convergência) Determine o raio e o intervalo de convergência de cada uma das séries abaixo.

$$(a)\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n \qquad (b)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{4^n ln(n)}$$

$$(c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^nx^n}{n^3} \qquad (d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{n}$$

$$(e)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad (f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$$

## RESPOSTAS

1) **(a)** Converge; **(b)** Converge; **(c)** Diverge; **(d)** Diverge; **(e)** Converge; **(f)** Converge;

2) **(a)** Diverge; **(b)** Converge; **(c)** Converge; **(d)** Diverge ; **(e)** Diverge; **(f)** Converge;

3) Vamos usar a seguinte anotação:
R = Raio de convergência
dom = Domínio de convergência

**(a)** R= $\frac{1}{2}$ ; dom= $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**(b)** R= 4 ; dom= $(-4, 4]$

**(c)** R= $\frac{1}{10}$ ; dom= $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$

**(d)** R= $\frac{1}{3}$; dom= $\left[-\frac{1}{3}, 1\right)$

**(e)** R= 1 ; dom= $[0, 2)$

**(f)** R= 3 ; dom= $[-3, 3]$

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

# Cálculo 2

## Lista de Fixação - Semana 5

*Temas abordados:* Série de Potências, Série de Taylor e Polinômio de Taylor

**1)** Considere a função $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ definida para $x \in \mathbb{R}$

(a) Obtenha seu domínio de convergência

(b) Calcule $y'(x)$

(c) Verifique que $y'(x) + y(x) = 0$

**2)** Considere a função $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$ definida para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Obtenha seu domínio de convergência

(b) Calcule $y''(x)$

(c) Verifique que $y''(x) + 4y(x) = 0$

**3)** Encontre a série de Taylor para cada:

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \ln(1 + x)$

(c) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$

(d) $f(x) = \cos(x)$

(e) $f(x) = \frac{1}{1 - x}$

(f) $f(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$, se $x \neq 0$ $ef(0) = 1$

**4)** Obtenha os raios de convergência das soluções canônicas das EDOs:

(a) $y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$

(b) $y''(x) + y(x) = 0$

## RESPOSTAS

1) (a) $dom(y) = (-\infty, \infty)$

   (b) $y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}$

2) (a) $dom(y) = (-\infty, \infty)$

   (b) $y''(x) = 4\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!} = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2x^{2n}}{(2n)!}$

3) (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^k}{k!} + ...$

   (b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + ...$

   (c) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+1)!} + ...$

   (d) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + ...$

   (e) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^k + ...$

   (f) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + ...$

4) (a) Equação de recorrência $c_{n+2} = \dfrac{c_n}{n+2}$

   $y_1(x)$ não é polinômio, $R_1 = \infty$

   $y_2(x)$ não é polinômio, $R_2 = \infty$

   (b) Equação de recorrência $c_{n+2} = \dfrac{-c_n}{(n+2)(n+1)}$

   $y_1(x)$ não é polinômio, $R_1 = \infty$

   $y_2(x)$ não é polinômio, $R_2 = \infty$