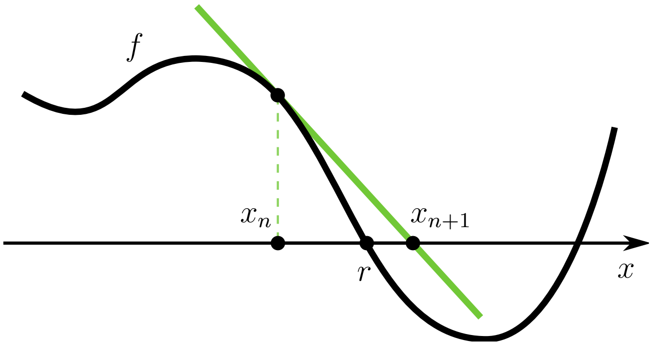
Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 2 – Lista 1

1) Dizemos que um número r é raiz de uma função $f(x)$ quando $f(r) = 0$. Nesse exercício vamos considerar um procedimento para obter uma raiz de uma função f por aproximações sucessivas, conhecido como método de Newton. Ele fornece, a partir de uma dada aproximação x_n da raiz, uma nova aproximação x_{n+1} dada pela interseção do eixo x com a reta tangente à f em x_n.



a) Usando a equação da reta tangente à f em x_n, mostre que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

b) Suponha que $f(x)$ e $f'(x)$ são funções contínuas. Mostre que, se $\lim x_n = r$, então r é uma raiz de f.

c) Aplicando o primeiro item para a função $f(x) = x^2 - 2$, mostre que $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$. Quais raízes que estamos aproximando nesse caso?

d) No item anterior, começando da aproximação inical $x_1 = 2$, obtenha as 4 aproximações seguintes.

2) O objetivo desse exercício é mostrar que $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

a) Verifique que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{3}{n}\frac{2}{n}\frac{1}{n}$$

b) Usando o item anterior, mostre que $0 < \dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{1}{n}$.

c) Usando o item anterior, mostre que $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

3) O objetivo desse exercício é mostrar que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

a) Verifique que $\log\left(\sqrt[n]{n}\right) = \frac{\log(n)}{n}$.

b) Usando o item anterior, verifique que $\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$.

c) Usando o item anterior, mostre que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

4) O objetivo desse exercício é mostrar que $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

a) Verifique que $\log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.

b) Usando o item anterior, verifique que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)$.

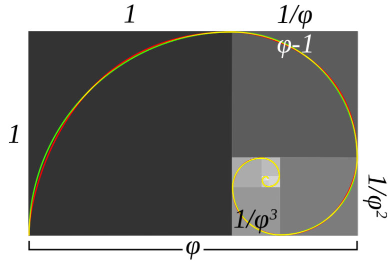
c) Usando o item anterior, mostre que $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

5) **(Desafio)** A sequência r_n da razões dos termos consecutivos da sequência de Fibonacci satisfazem $r_1 = 1$ e a equação de recorrência

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$$

Por outro lado, a razão áurea $\varphi > 1$ satisfaz uma equação parecida

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$



O objetivo desse exercício é mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \varphi$$

a) Subtraindo as equações acima, mostre que

$$r_{n+1} - \varphi = \frac{\varphi - r_n}{r_n \varphi}$$

para todo n.

b) Usando o item anterior e que $r_n \geq 1$, mostre que

$$\frac{|r_{n+1} - \varphi|}{|r_n - \varphi|} \leq \frac{1}{\varphi}$$

para todo n.

c) Usando o item anterior repetidas vezes, mostre que

$$|r_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^n}|r_1 - \varphi|.$$

d) Utilizando o item anterior, conclua que $\lim r_n = \varphi$.

Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 2 – Lista 2

1) Vamos investigar a dinâmica, num dado país, da relação entre a renda Y_n produzida no ano n e o capital K_n acumulado até o ano n através de um modelo bem simples. Temos que a renda anual cresce a uma taxa constante positiva g, de modo que

$$Y_{n+1} = (1+g)Y_n$$

e que o capital se acumula por uma taxa de poupança contante positiva s e se deprecia a uma taxa constante positiva d, de modo que

$$K_{n+1} - K_n = sY_n - dK_n$$

Denotando a razão capital pela renda no ano n por $\beta_n = K_n/Y_n$ e o seu limite quando n tende por infinito por β, responda os seguintes itens.

a) Mostre que $\beta_{n+1} = \dfrac{s}{1+g} + \dfrac{1-d}{1+g}\beta_n$.

b) Use o item anterior para mostrar que

$$\beta_m = \frac{s}{1+g}\left(1 + \frac{1-d}{1+g} + \left(\frac{1-d}{1+g}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1-d}{1+g}\right)^{m-1}\right) + \left(\frac{1-d}{1+g}\right)^m \beta_0$$

c) Conclua que $\beta = \dfrac{s}{g+d}$.

2) Para cada série telescópica abaixo, escreva a série com a notação de somatório, encontre uma fórmula fechada para suas somas parciais e use-a para encontrar o valor da série.

a) $\dfrac{5}{1\cdot 2} + \dfrac{5}{2\cdot 3} + \dfrac{5}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{5}{n(n+1)} + \cdots$

b) $\log\left(\dfrac{k}{k+1}\right) + \log\left(\dfrac{k+1}{k+2}\right) + \log\left(\dfrac{k+2}{k+3}\right) + \cdots + \log\left(\dfrac{n}{n+1}\right) + \cdots$

3) Escreva as expressões abaixo como séries de potências da forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determinando seus coeficientes c_n.

a) A expressão $(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$.

b) A expressão $(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

c) A expressão $(1-x^2)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$.

d) A expressão $(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$.

4) Nos itens abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, demonstre porque. Se for falsa, dê um exemplo que prove sua falsidade.

a) Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim a_n = 0$.

b) Se $\lim a_n = 0$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

c) Se as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergem, então $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

d) Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

5) O objetivo desse exercício é descobrir para que valores de p a série p-harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^p$$

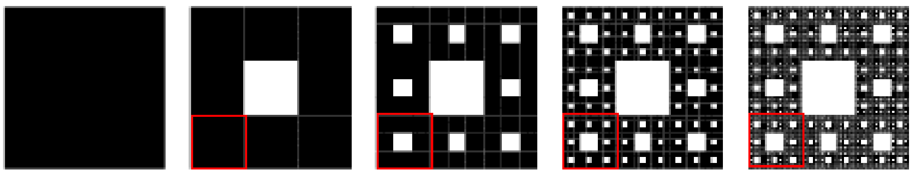
converge ou diverge.

a) Mostre que, para qualquer p, o teste da raiz e o teste da razão são inconclusivos.

b) Para $p > 1$, use o teste da integral para mostrar que a série converge.

c) Para $0 < p \leq 1$, use o teste da integral para mostrar que a série diverge. Essa é uma outra forma de mostrar que a série harmônica ($p = 1$) é divergente.

6) **(Desafio)** O *tapete de Sierpinski* [1] é a figura geométrica S construída a partir de um limite passo-a-passo da seguinte maneira:



S_0 $\quad$ S_1 $\quad$ S_2 $\quad$ S_3 $\quad \cdots$ $\quad$ S

S_0 : Começamos com um quadrado S_0 de lado 1 (preenchido de preto).

S_1 : Do centro do quadrado S_0 retiramos um quadrado menor de lado $1/3$ (preenchido de branco), obtendo assim a figura S_1, formada por 8 quadrados (preenchidos de preto).

S_2 : Do centro de cada um dos 8 quadrados de S_1 retiramos um quadrado menor de lado $(1/3)^2 = 1/9$ (preenchidos de branco), obtendo assim a figura S_2, formada por $8^2 = 64$ quadrados (preenchidos de preto).

S_3 : Do centro de cada um dos 8^2 quadrados de S_2 retiramos um quadrado menor de lado $(1/3)^3$ (preenchidos de branco), obtendo assim a figura S_3, formada por 8^3 quadrados (preenchidos de preto).

[1] Matemático polonês que inventou essa figura em 1915.

...

O tapete de Sierpinski S é a figura limite obtida ao final desse processo. Vamos mostrar que essa figura tem área 0 e perímetro infinito: é portanto uma região de área zero que precisa de uma cerca de comprimento infinito para cercá-la. Observe que o perímetro de S é o comprimento da fronteira entre a região preenchida de preto e a região preenchida de branca, portanto é o perímetro do quadrado inicial somado aos perímetros de todos os quadrados retirados.

a) Mostre que o perímetro de S é dado pela soma infinita

$$P = 4 + 4(1/3) + 8 \cdot 4(1/3)^2 + 8^2 \cdot 4(1/3)^3 + 8^3 \cdot 4(1/3)^4 + \cdots$$

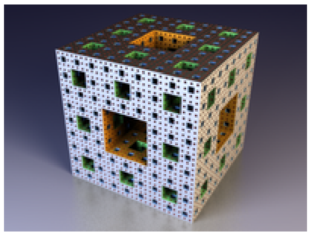
b) Conclua que $P = \infty$.

c) Mostre que a área de S é dada pela soma infinita

$$A = 1 - [(1/3)]^2 - 8[(1/3)^2]^2 - 8^2[(1/3)^3]^2 - 8^3[(1/3)^4]^2 - \cdots$$

d) Conclua que $A = 0$.

Observação: podemos pensar que o tapete de Sierpinski é uma maneira de, ocupando uma área pequena, descrever um perímetro grande. Seu análogo tridimensional, o *cubo de Sierpinski*, é construído à partir de um cubo e possui volume zero e área da superfície infinita. É uma maneira de, ocupando um volume pequeno, descrever uma área de superfície grande. Os galhos de uma árvore e os álvéolos de um pulmão, por exemplo, parecem seguir esse tipo de figura para -ocupando o mínimo de volume no espaço- obter uma grande superfície de absorção de gases (e também de luz, no caso da árvore). Esse tipo de figura é hoje conhecida como *fractal*. Para mais sobre isso, leia o artigo *"Intuições fractais"*, de João Moreira Salles na revista *Piauí*, Edição 50, Novembro de 2010.



Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 2 – Lista 3

1) Para cada série de potências abaixo, expanda os primeiros quatro termos não nulos e descubra para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ a série converge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

2) Nos itens abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, demonstre porque. Se for falsa, dê um exemplo que prove sua falsidade.

a) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^2$ também converge.

b) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^2$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ também converge.

c) Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, então $\lim a_n = 0$.

d) Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos que $\displaystyle\lim \frac{x^n}{n!} = 0$.

e) Se $\displaystyle\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

f) Se $\displaystyle\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

g) Se o limite $\displaystyle\lim_{x \to c} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ existe, então ele é igual a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n c^n$.

3) O objetivo desse exercício é apresentar séries de potências que possuem o mesmo raio de convergência, mas com domínios diferentes. Verifique as seguintes afirmações.

a) O domínio de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ é o intervalo aberto $(-2, 2)$ com raio 2.

b) O domínio de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} x^n$ é o intervalo $[-2, 2)$ com raio 2.

c) O domínio de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} x^n$ é o intervalo $(-2, 2]$ com raio 2.

d) O domínio de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} x^n$ é o intervalo fechado $[-2, 2]$ com raio 2.

e) O domínio de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k 4^k} x^{2k}$ é o intervalo fechado $[-2, 2]$ com raio 2.

4) O objetivo desse exercício é apresentar algumas séries de potências que naturalmente possuem raio de convergência diferente de zero, de um e de infinito.

a) Considere f_n a sequência de Fibonacci. Utilizando o teste da razão, mostre que o raio de convergência de

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

é igual dado por $R = 1/\phi$, onde ϕ é a razão áurea.

b) Utilizando o teste da raiz, mostre que o raio de convergência de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

é dado por $R = 1/e$.

c) Utilizando o teste da razão, mostre que o raio de convergência de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

é dado por $R = 1/e$.

5) Nos itens abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, demonstre porque. Se for falsa, dê um exemplo que prove sua falsidade.

a) Se a_n é positiva e a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

b) Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

c) Toda série alternada converge.

d) Todo polinômio é uma série de potências com raio de convergência infinito.

e) Se uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tem raio de convergência $R = 1$ então seu domínio é $(-1, 1)$.

Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 2 – Lista 4

1) Considere as funções

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

e

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $y'(x)$.

b) Verifique que $y'(x) + y(x) = 0$.

c) Calcule $z''(x)$.

d) Verifique que $z''(x) + 4z(x) = 0$.

2) Considere $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e escreva as expressões abaixo como séries de potências da forma $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, determinando seus coeficientes d_n.

a) A expressão $-2xy'(x)$.

b) A expressão $xy''(x)$.

c) A expressão $(1-x)y''(x)$.

d) A expressão $(1-x^2)y''(x)$.

3) O objetivo desse exercício é analisar as séries de Taylor das funções seno e cosseno.

a) Mostre que

$$\operatorname{sen}^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \operatorname{sen}(x), & n = 2k \\ (-1)^k \cos(x), & n = 2k+1 \end{cases}$$

e que

$$\cos^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos(x), & n = 2k \\ -(-1)^k \operatorname{sen}(x), & n = 2k+1 \end{cases}$$

b) Determine as séries de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ e de $\cos(x)$.

c) Sabendo que $\operatorname{sen}(x)$ e de $\cos(x)$ coincidem com suas séries de Taylor, determine as séries de Taylor de $\int \operatorname{sen}(x^2)\, dx$ e de $\int \cos(x^2)\, dx$.

4) O objetivo desse exercício é analisar as séries de Taylor das funções seno e cosseno hiperbólicos, dadas por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) Verifique que

$$\operatorname{senh}(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \cosh(0) = 1$$

e que

$$\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x) \qquad \text{e} \qquad \cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$$

b) Mostre que

$$\operatorname{senh}^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{senh}(x), & n = 2k \\ \cosh(x), & n = 2k+1 \end{cases}$$

e que

$$\cosh^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh(x), & n = 2k \\ \operatorname{senh}(x), & n = 2k+1 \end{cases}$$

c) Determine as séries de Taylor de $\operatorname{senh}(x)$ e de $\cosh(x)$.

d) Sabendo que $\operatorname{senh}(x)$ e de $\cosh(x)$ coincidem com suas séries de Taylor, determine as séries de Taylor de $\int \operatorname{senh}(x^2)\, dx$ e de $\int \cosh(x^2)\, dx$.

5) O objetivo deste exercício é mostrar que uma série de potências que que define uma função par ou ímpar só possui, respectivamente, potências pares ou ímpares.

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$.

a) Se $f(x)$ é uma função par, isto é

$$f(-x) = f(x)$$

mostre que a série de potências só possui potências pares.

b) Se $f(x)$ é uma função ímpar, isto é

$$f(-x) = -f(x)$$

mostre que a série de potências só possui potências ímpares.

6) Nos itens abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, demonstre porque. Se for falsa, dê um exemplo que prove sua falsidade.

a) Se o domínio de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é $(-1, 1]$, então o domínio de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{R^n} x^n$ é $(-R, R]$.

b) Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge para $x = 2$, então também converge para $x = -2$.

c) Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge para $x = 2$, então também converge para $x = -1$.

d) Se a derivada de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ em $x = c$ existe, então ela é igual a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n n c^{n-1}$.

Cálculo 2

Lista de Exercícios – Módulo 2 – Lista 5

1) A descrição quântica dos fenômenos subatômicos é probabilística. Considere um oscilador harmônico quântico unidimensional, onde partícula subatômica de massa m se movimenta no eixo x sob a ação de um potencial da forma $V(x) = m\omega^2 x^2/2$, que é o potencial do sistema massa-mola com frequência ω.

A probabilidade de encontrarmos a partícula no intervalo (x_1, x_2) é proporcional à integral

$$\int_{x_1}^{x_2} X(x)^2 \, dx$$

onde a função $X(x)$ satisfaz a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} X''(x) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 X(x) = EX(x)$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π e E é a energia do oscilador. Por simplicidade, vamos supor que $m = \hbar = \omega = 1$ de modo que

$$X''(x) + (2E - x^2)X(x) = 0$$

Escrevendo $X(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} y(x)$, vimos que $y(x)$ satisfaz $y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0$, conhecida como equação de Hermite, onde $\lambda = E - 1/2$

a) Escrevendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n da série $-2xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$. Use a equação de Hermite para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

b) Para $\lambda = 6$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é não é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar? Determine seu raio de convergência.

c) Para $\lambda = 7$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas não é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar? Determine seu raio de convergência.

2) Vimos no exercício anterior que, para descrever a posição do elétron no átomo de hidrogênio, precisamos resolver a equação de Laguerre

$$xy''(x) + (1 - x)y'(x) + (\nu + \lambda)y(x) = 0$$

O objetivo desse exercício é investigar as soluções dessa equação usando séries de potências.

a) Escrevendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n e q_n das séries $(1 - x)y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e também $xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

b) Use o item anterior e a equação de Laguerre para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

c) Verifique que, quando $\nu + \lambda$ não é um inteiro e $y(0) = 1$, então $y(x)$ não é um polinômio, mas seu raio de convergência de $y(x)$ é infinito.

3) Vimos no exercício anterior que, para descrever a posição do elétron no átomo de hidrogênio, precisamos resolver a equação de Legendre

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda(\lambda + 1)y(x) = 0$$

O objetivo desse exercício é investigar as soluções dessa equação usando séries de potências.

a) Escrevendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n e q_n das séries $-2xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e também $(1 - x^2)y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

b) Use o item anterior e a equação de Legendre para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

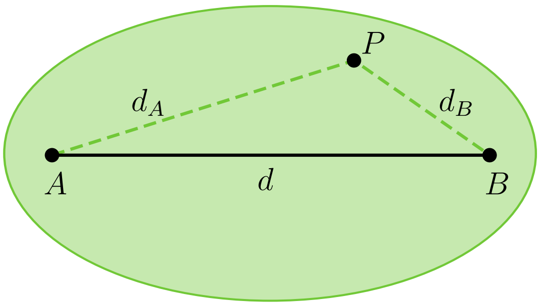
c) Para $\lambda = 6$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é não é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar? Determine seu raio de convergência.

d) Para $\lambda = 7$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas não é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar? Determine seu raio de convergência.

4) A temperatura de equilíbrio $T(P)$ em um ponto P de uma chapa elíptica feita com um material uniforme pode ser escrita em função das coordenadas elípticas confocais (x, t) de P dadas por

$$x = \frac{d_A - d_B}{d} \qquad t = \frac{d_A + d_B}{d},$$

onde d é a distância entre os focos A e B da elipse, d_A é a distância entre P e A e d_B é a distância entre P e B.



Temos que x varia em $[-1, 1]$ e que t varia em $[1, 2R/d]$, onde R é o raio maior da elipse. Note que o conjunto dos pontos tais que t é constante formam uma elipse. Escrevendo a temperatura em P como produto de duas funções $T(P) = y(x)z(t)$, é possível mostrar que as funções $y(x)$ e $z(t)$ satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\frac{(1 - x^2)y''(x) - xy'(x)}{-y(x)} = \lambda^2 = \frac{(1 - t^2)z''(t) - rz'(t)}{-z(t)}$$

onde λ é um inteiro positivo. Segue que $y(x)$ satisfaz a equação Tchebychev

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + \lambda^2 y(x) = 0$$

a) Escrevendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, determine, em função dos coeficientes c_n, os coeficientes p_n e q_n das séries $-xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e também $(1 - x^2)y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

b) Use o item anterior e a equação de Tchebychev para obter a equação de recorrência satisfeita pelos c_n.

c) Para $\lambda = 6$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas é não é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar? Determine seu raio de convergência.

d) Para $\lambda = 7$, determine os coeficientes das soluções canônicas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e decida qual delas não é polinômio. Essa solução é uma função par ou ímpar? Determine seu raio de convergência.