– Módulo 2 –
Soluções por Aproximações sucessivas

Lucas Seco

16 de outubro de 2023

1 Aproximações sucessivas

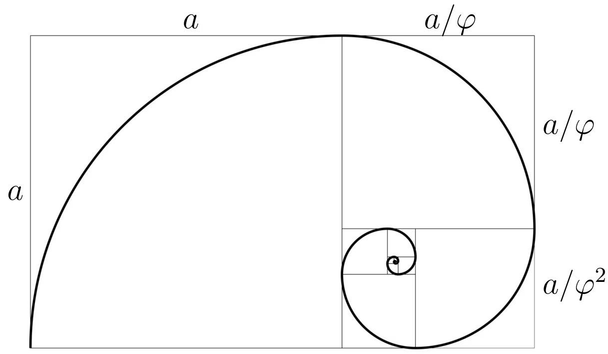
Muito se diz que na Matemática as soluções são exatas quando, na verdade, muitas das melhores soluções são dadas por aproximações sucessivas. Por exemplo, esse costuma ser o tipo de solução que computadores dão para problemas matemáticos como a simulação de turbulência ou a previsão do tempo.

Nesse Módulo veremos um poderoso método para resolver EDOs lineares por aproximações sucessivas: o método das séries de potências.

Para ilustrar a ideia, começamos com um método para achar raízes de equações por aproximações sucessivas. Esses métodos vão nos levar rapidamente a considerar os conceitos de sequências e de somas infinitas.

1.1 Raízes por aproximações sucessivas: Sequências

A *razão áurea* é dada pela razão $\varphi > 1$ que nos permite fazer a seguinte construção geométrica:



isto é, tal que

$$a = \frac{a}{\varphi} + \frac{a}{\varphi^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \tag{1}$$

Multiplicando por φ temos que $\varphi^2 = \varphi + 1$, portanto φ é é a raiz positiva da equação

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{2}$$

dada pelo número irracional $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.618\ldots$ Note que a aplicação repetida dessa proporção irracional nos permite seguir indefinidamente com a construção da figura acima.

A fórmula exata para a razão áurea φ não nos diz como aproximá-la. Para isso, note de que $x = \varphi$ é a única solução positiva da equação

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

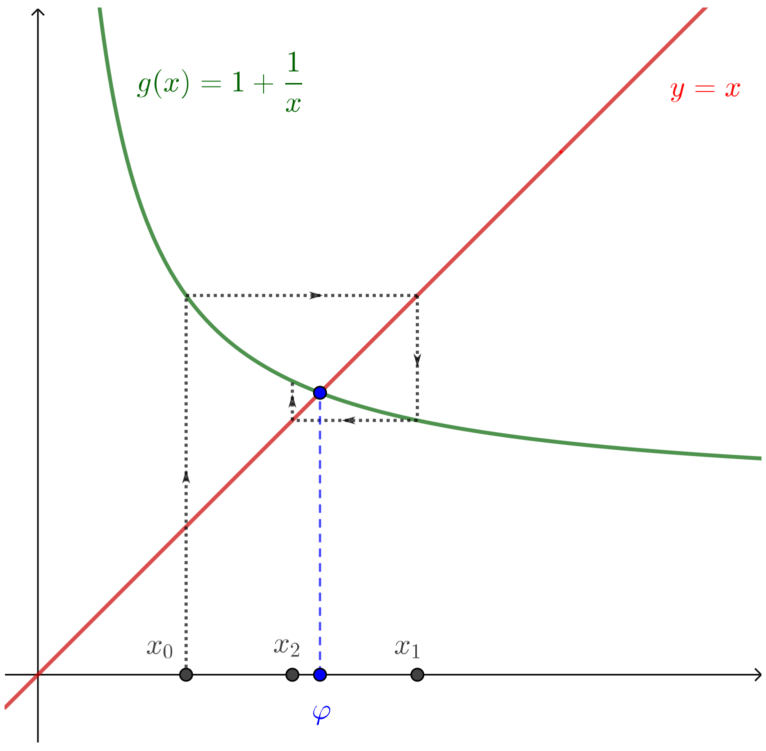
Tomando o lado direito

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x} \tag{3}$$

temos então que $x = \varphi$ é a única solução positiva da equação

$$x = g(x)$$

isto é, é um *ponto fixo* de g. Assim, achar uma solução de (2) equivale a achar um ponto fixo de (3).



Temos um método geral para *encontrar um ponto fixo de g por aproximações sucessivas*: ele consiste em começar com uma aproximação inicial x_0, dela obter a próxima aproximação $x_1 = g(x_0)$, e assim em diante:

$$\begin{array}{rcl} x_0 & & \\ x_1 & = & g(x_0) \\ x_2 & = & g(x_1) \\ x_3 & = & g(x_2) \\ \ldots & & \\ x_{n+1} & = & g(x_n) \\ \ldots & & \end{array}$$

Obtemos assim a *sequência* x_n de aproximações sucessivas de um ponto fixo. Se para algum n temos que x_n é ponto fixo, então $x_{n+1} = g(x_n) = x_n$ e todos os passos seguintes ficam parados no ponto fixo x_n: encontramos o ponto fixo! Mas em geral x_n é apenas uma aproximação: para $g(x) = 1 + 1/x$, começando com $x_0 = 1$ temos

$$\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ x_1 & = & g(1) = 2 \\ x_2 & = & g(2) = 3/2 = 1,5 \\ x_3 & = & g(3/2) = 5/3 = 1,66\ldots 7 \\ x_4 & = & g(5/3) = 8/5 = 1,6 \\ x_5 & = & g(8/5) = 13/8 = 1,625 \\ x_6 & = & g(13/8) = 21/13 = 1,615\ldots 4 \\ \ldots & & \end{array}$$

onde vemos que o valor da sequência x_n ora cresce, ora diminui à medida que n cresce, que x_3 já coincide com φ até a primeira casa decimal e que x_6 já coincide com φ até a segunda casa decimal.

Para encontrar um ponto fixo precisamos tomar o limite quando n tende ao infinito, onde escrevemos

$$x_n \to x$$

se essa sequência *converge* para o valor x, isto é, se existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Se o limite dessa aproximação sucessiva $x_{n+1} = g(x_n)$ existe, então ele é um ponto fixo de g uma vez que

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & g(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & = & g(x) \end{array}$$

onde usamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n+1\to\infty} x_{n+1} = x$$

e que

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x_n\to x} g(x_n) = g(x)$$

uma vez $g(x)$ é uma função contínua.

Não é imediato que a sequência de aproximações sucessivas x_n obtida acima de fato converge. O gráfico acima ilustra que a convergência de fato acontece e, com um pouco de trabalho (veja Lista de Aplicação) é possível demonstrar que ela de fato converge para a razão áurea, isto é, que

$$x_n \to \varphi \tag{4}$$

Note que essa solução de (2) por aproximação sucessivas x_n nos permite obter não apenas a solução exata $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ como limite, mas também uma aproximação de φ com a precisão que quisermos, bastando para isso tomar n suficientemente grande.

1.2 EDOs por aproximações sucessivas: Somas

De modo análogo à seção anterior, o problema de encontrar a única solução $y(t) = e^t$ do PVI

$$y'(t) = y(t), \qquad y(0) = 1 \tag{5}$$

pode ser formulado como um problema de ponto fixo que pode ser, assim, encontrado por aproximações sucessivas.

De fato, integrando o PVI de 0 a t obtemos

$$\int_0^t y'(s)\, ds = \int_0^t y(s)\, ds$$

e pelo TFC obtemos que

$$y(t) - y(0) = \int_0^t y(s)\, ds, \quad y(0) = 1 \quad \iff \quad y(t) = 1 + \int_0^t y(s)\, ds \tag{6}$$

portanto o PVI (5) equivale à (6). Tomando o lado direito

$$g(y) = 1 + \int_0^t y(s)\,ds \tag{7}$$

temos que y é solução de (6), logo solução do PVI, se, só se,

$$y = g(y)$$

isto é, se e só se y é ponto fixo de g. Observe que $g(y)$ transforma a função $y(t)$ em uma outra função de t.

Formulando o PVI como um problema de ponto fixo, podemos procurar uma solução $y(t)$ por aproximações sucessivas, começando com a função constante $y_0(t) = 1$:

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= 1 \\
y_1(t) &= g(1) = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t \\
y_2(t) &= g(1+t) = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\
y_3(t) &= g\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\cdot 3} \\
\dots & \\
y_n(t) &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \\
\dots &
\end{aligned}$$

Se essas aproximações sucessivas convergem para um ponto fixo de g, então elas convergem para a solução do PVI

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \quad 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \dots \quad = e^t \tag{8}$$

fornecendo assim uma aproximação sucessiva na forma de uma soma infinita para a solução do PVI e, em particular, para a exponencial!

Não é nada imediato mostrar que somas infinitas como a de acima de fato convergem. Esse vai ser grande parte do nosso trabalho no Módulo 2 para assim resolver diversas EDOs por aproximações sucessivas dadas por somas infinitas: tanto EDOs que já sabíamos resolver quanto EDOs que ainda não tínhamos solução, como as de coeficientes variáveis.

Observação 1 *Com esse método de transformar um PVI num problema de ponto fixo resolvido por aproximações sucessivas, é possível mostrar a existência e unicidade de solução do PVI para uma vasta gama de sistemas de EDOs, mesmo não-lineares: é o chamado Teorema de Picard-Lindelöf.*

2 EDOs de coeficientes variáveis: Soluções polinomiais

3 Limite de Sequências

4 Séries e Sequências das somas parciais

5 Domínio de Série de Potências

6 Testes de convergência

7 Raio de convergência

8 Série de Taylor

9 EDOs de coeficientes variáveis: Soluções por Série de Potências